Groupes kählériens, bouts et espaces CAT(0)

Pierre Py

Table des matières

Liste des travaux

Les cinq articles présentés dans ce mémoire ont tous été écrits après ma thèse. Ils sont présentés ci-dessous dans l'ordre dans lequel ils ont été écrits, qui diffère de l'ordre dans lequel ils ont été publiés.

Articles présentés

(A1) Kähler groups, real hyperbolic spaces and the Cremona group, avec Thomas Delzant, Compositio Math. **148**, No. 1 (2012), 153–184.

(A2) An exotic deformation of the hyperbolic space, avec Nicolas Monod, Amer. J. Math. **136**, No. 5 (2014), 1249–1299.

(A3) Coxeter groups and Kähler groups, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **155**, No. 3 (2013), 557-566.

(A4) Some noncoherent, nonpositively curved Kähler groups, Enseign. Math. **62**, No. 1-2 (2016), 171–187.

(A5) Cubulable Kähler groups, avec Thomas Delzant, prépublication 2016, arXiv :1609.08474.

Articles postérieurs au doctorat et non présentés

(B1) On continuity of quasi-morphisms for symplectic maps, avec Michael Entov et Leonid Polterovich, Progr. Math. **296**, Perspectives in analysis, geometry, and topology, Birkhaüser/Springer, New York (2012), 169–197.

(B2) A remark about weak fillings, Kyoto J. Math. **57**, No. 2 (2017), 435–444.

Articles issus de mon doctorat ou le précédant

(C1) On representation theory of symmetric groups, Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI) **301** (2003), 229–242.

(C2) Indice de Maslov et théorème de Novikov-Wall, Bol. Soc. Mat. Mexicana (3) **11**, No. 2 (2005), 303–331.

(C3) Quasi-morphismes et invariant de Calabi, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **39**, No. 1 (2006), 177–195, une partie des résultats de ce texte a été annoncée dans une note : *Quasi-morphisme de Calabi sur les surfaces de genre supérieur*, C.R. Math. Acad. Sci. Paris **341**, No. 1 (2005), 29–34.

(C4) Quasi-morphismes de Calabi et graphe de Reeb sur le tore, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **343**, No. 5 (2006), 323–328.

(C5) Quelques plats pour la métrique de Hofer, J. Reine Angew. Math. **620** (2008), 185–193.

(C6) Some remarks on area-preserving actions of lattices, Chicago Lectures in Math., Geometry, Rigidity and group actions, Univ. Chicago Press, Chicago, IL (2011), 208–228.

1 Introduction

Une grande partie de ce mémoire traite de l'étude des groupes fondamentaux des variétés kählériennes compactes. J'ai commencé à m'intéresser à ce sujet après ma thèse, soutenue en 2008. Ce mémoire se conclut néanmoins par une incursion dans le monde des espaces métriques à courbure négative ou nulle et de la théorie des représentations des groupes de Lie.

Dans la suite, nous appellerons *groupe kählérien* un groupe qu'on peut réaliser comme groupe fondamental d'une variété kählérienne compacte. Cette classe de groupes contient bien sûr les groupes fondamentaux des variétés projectives lisses. C'est d'ailleurs un problème ouvert de savoir si ces deux classes coïncident [1].

On peut au moins faire remonter l'étude de cette classe de groupes à 1958, avec l'article de Serre [98] où il démontre que tout groupe fini est le groupe fondamental d'une variété projective lisse. Dans les années 80, Johnson et Rees [55] puis Gromov [48] ont établi certaines des premières obstructions pour qu'un groupe infini de présentation finie soit kählérien. Nous ne ferons pas ici un panorama complet du sujet mais renvoyons au livre de référence [2] ou au séminaire Bourbaki plus récent [13] pour cela. Par ailleurs mentionnons que ce sujet entretient des liens étroits avec notamment l'étude des réseaux des groupes de Lie, via les réseaux du groupe $\mathrm{PU}(n, 1)$, et avec l'analyse complexe, via le problème de Shafarevich. Nous renvoyons à [27, 36, 68] pour quelques habilitations récentes qui traitent de ces sujets reliés.

L'étude des groupes kählériens peut être approchée avec des techniques variées. On y trouve des outils analytiques par exemple à travers l'usage de la cohomologie L^2, initié par Gromov, mais aussi à travers la correspondance de Donaldson-Corlette-Hitchin-Simpson, qui repose sur l'existence d'applications harmoniques d'une part et sur la construction de métriques de "Yangs-Mills" d'autre part. Ces techniques ont été utilisées notamment par Simpson, et Carlson et Toledo pour obtenir des restrictions sur les représentations linéaires des groupes kählériens. Par ailleurs des outils issus de la géométrie algébrique sont utilisés pour la construction d'exemples intéressants de groupes kählériens. Citons par exemple diverses variantes plus ou moins sophistiquées du théorème de Lefschetz [15, 103] ou bien certains critères de projectivité pour des espaces obtenus par contractions de diviseurs négatifs [103]. Plus récemment, l'apport d'idées issues de la théorie géométrique des groupes a permis de nouvelles avancées dans le monde des groupes kählériens, grâce aux travaux de Delzant et Gromov. On peut par exemple comparer la classes des groupes kählériens à des classes spécifiques de groupes apparaissant en théorie géométrique des groupes (groupes à petite simplification, groupes agissant sur les complexes cubiques CAT(0)... voir [35]) ou encore importer directement des outils issus de cette théorie, par exemple l'invariant de Bieri-Neumann-Strebel [34]. La plupart de mes travaux concernant les groupes kählériens se situent dans cette dernière veine. Citons quelques idées issues de la théorie géométrique des groupes que j'ai utilisées : l'existence d'actions des groupes de Coxeter sur les arbres dans l'article (A3), les travaux de Caprace et Sageev [22] dans l'article (A5), ou bien des résultats concernant les groupes CAT(0) dans l'article (A4). Les outils analytiques ne sont cependant pas exclus de mes travaux. Par exemple, j'utilise fréquemment des théorèmes d'existence d'applications harmoniques ou plus simplement de fonctions harmoniques.

Nous décrivons maintenant plus en détail le contenu des différentes parties de ce mémoire.

La partie 2 expose les résultats de l'article (A1). Le résultat technique principal est un nouveau théorème de factorisation au niveau du revêtement universel. Nous rappelons d'abord le contexte et quelques théorèmes de factorisation déjà connus, puis expliquons notre nouvel énoncé. Nous appliquons ensuite ce théorème à la description complète des actions de groupes kählériens sur

1. Le cas linéaire a été résolu récemment, voir [16, 28].

les espaces hyperboliques réels, de dimension finie ou infinie, généralisant un théorème classique de Carlson et Toledo [24]. Une application est donnée à l'étude des représentations de groupes kählériens dans le groupe des transformations birationnelles du plan projectif complexe, le groupe de Cremona.

La partie 3 étudie les actions de groupes kählériens sur les complexes cubiques CAT(0) et explique les résultats de l'article (A5). Ces complexes polyhédraux ont récemment joué un rôle fondamental en théorie géométrique des groupes et en topologie de dimension 3, à travers les travaux de Agol, Haglund et Wise. Il est naturel de comparer les groupes kählériens aux groupes agissant sur ces espaces. Le résultat principal est une description de tous les groupes kählériens qui sont *cubulables*, à indice fini près. Ici un groupe est dit cubulable s'il agit proprement discontinûment et cocompactement sur un complexe cubique CAT(0). Le point le plus original dans notre classification des groupes kählériens cubulables est qu'elle ne repose pas sur les applications harmoniques, contrairement à la plupart des théorèmes de factorisation dans le monde des groupes kählériens. Elle utilise une construction classique de fonctions (pluri-)harmoniques sur une variété ouverte à partir de l'existence de bouts et une seconde construction, de fonctions plurisousharmoniques, plus originale et introduite dans l'article (A5). Ces constructions sont ensuite combinées avec un nouveau critère de fibration sur une surface de Riemann, le théorème 17. Parmi tous les travaux présentés ici c'est peut-être ce critère qui aura le plus d'applications. Au début de la partie 3, on présente brièvement les résultats de l'article (A3), antérieurs aux précédents, qui permettent de décrire les morphismes de groupes kählériens vers les groupes d'Artin à angles droits et vers les groupes de Coxeter. Ces deux familles fournissent des exemples très importants de groupes agissant sur des complexes cubiques CAT(0) et il était naturel d'étudier les représentations de groupes kählériens dans ceux-ci avant d'étudier les actions plus générales sur les complexes cubiques CAT(0).

Notons qu'il existe peu d'outils *nonlinéaires* pour obtenir des restrictions sur les groupes kählériens. Par là nous voulons dire des résultats qui ne supposent pas dès le départ l'existence d'une représentation linéaire de dimension finie du groupe en question. Dans le livre [2], deux méthodes "non-linéaires" sont ainsi recensées : la cohomologie L^2, avec les idées introduites par Gromov [48] (voir aussi [3]) et les applications harmoniques à valeurs dans les arbres, les immeubles ou les espaces CAT(0) plus généraux, comme développé par Gromov et Schoen [51] puis Korevaar et Schoen [65, 66]. Depuis la publication du livre [2], il y a un peu plus d'une vingtaine d'années, sont apparus quelques autres outils non-linéaires pour étudier les groupes kählériens. On peut citer les résultats concernant l'existence de sous-groupes $H < G$ dans un groupe kählérien G tels que le nombre de bouts relatifs ou de bouts filtrés de la paire (G, H) soit supérieur ou égal à trois, pour lesquels nous renvoyons à la section 3.1 pour une brève présentation, ou encore les résultats concernant les quotients résolubles des groupes kählériens [34]. Les résultats de notre article (A5) fournissent une autre technique nonlinéaire. En effet les groupes agissant sur les complexes cubiques CAT(0) ne sont pas à priori linéaires.

Finalement la partie 4 ne traite pas de groupes kählériens. Il s'agit d'un mélange de théorie des représentations en dimension infinie, de théorie des groupes localement compacts et d'espaces CAT(0). Elle décrit des travaux commencés dans l'article (A1) puis poursuivis dans l'article (A2). On considère la série principale sphérique du groupe $\mathrm{PO}(n, 1)$. C'est une famille de représentations linéaires du groupe $\mathrm{PO}(n, 1)$ sur un espace de Hilbert, paramétrée par un nombre complexe. Pour certaines valeurs du paramètre, les représentations préservent une forme sesquilinéaire d'indice fini. Ce fait, connu en théorie des représentations depuis une quarantaine d'années, est abordé ici d'un point de vue géométrique, en utilisant les espaces symétriques de dimension infinie associés aux groupes $\mathrm{O}(p, \infty)$. Nous obtenons ainsi aussi bien des résultats de théorie des représentations (par exemple la classification des représentations irréductibles de $\mathrm{PO}(n, 1)$ dans $\mathrm{PO}(1, \infty)$) que des résultats qui s'énoncent purement en termes "CAT(0)". Par exemples nous construisons une famille à un paramètre d'espaces CAT(−1) deux-à-deux non homothétiques, dont les groupes d'isométries agissent de manière minimale et cocompacte et sont tous isomorphes au groupe $\mathrm{PO}(n,1)$. C'est le théorème 24 de ce texte.

La partie 5 contient quelques perspectives et problèmes ouverts. Nous y avons aussi inclus une brève description des résultats de l'article (A4). En effet celui-ci étudie certaines compactifications toroïdales de variétés hyperboliques complexes de volume fini à cusps et établit la non-cohérence de leur groupe fondamental, suivant des idées de Kapovich. C'est un résultat modeste. Mais l'étude des groupes fondamentaux de ces variétés est pleine de questions et me semble particulièrement intéressante. La conjecture de Shafarevich est également ouverte pour ces exemples. C'est pourquoi nous avons fait apparaître les résultats de l'article (A4) au même endroit que les questions concernant ces variétés. C'est le contenu de la section 5.1. Dans la section 5.2, nous discutons d'une classe de surfaces algébriques construites par C. Schoen [97]. Du point de vue C^∞, ces surfaces peuvent être décrites comme recollement de deux variétés à bord (explicites !). Outre le fait que de tels exemples de variétés algébriques sont probablement assez rares, ceci devrait permettre d'étudier plus en détail le groupe fondamental de ces surfaces. Tout ceci est issu de discussions en cours avec C. Llosa Isenrich et X. Roulleau. Finalement, la section 5.3 présente une question concernant l'espace des représentations d'un groupe kählérien dans un groupe de Lie simple ou semisimple.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, nous faisons la liste de quelques notions que nous utiliserons dans la suite du texte.

Une *orbisurface hyperbolique* est le quotient du disque unité Δ de $\mathbb{C}$ par un sous-groupe discret cocompact Λ de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. On note $\Sigma = \Delta/\Lambda$. Un point p de Σ est dit *exceptionnel* si le stabilisateur d'un relevé quelconque de p à Δ est non-réduit à l'identité. Ce stabilisateur est alors un sous-groupe fini cyclique de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, on note $n(p)$ son cardinal, appelé multiplicité de p. On note Σ^{ex} l'ensemble fini des points exceptionnels. Si X est une variété complexe, une application $f : X \to \Sigma$ est dite holomorphe si elle est holomorphe au sens usuel sur $f^{-1}(\Sigma - \Sigma^{ex})$et si au voisinage de chaque point de $f^{-1}(\Sigma^{ex})$, f se relève localement en une application holomorphe à valeurs dans Δ.

Nous dirons qu'une variété kählérienne compacte *fibre* si elle admet une application holomorphe surjective à fibres connexes vers une orbisurface hyperbolique.

Le terme *espace métrique à courbure négative* désignera toujours pour nous un espace métrique $\mathrm{CAT}(0)$; voir [9] pour la définition. Tous les espaces $\mathrm{CAT}(0)$ considérés seront complets. La section 3 étudie certaines actions de groupes sur les complexes cubiques $\mathrm{CAT}(0)$. Nous renvoyons par exemple à [9] ou [94] pour la définition de ces espaces. Tous les complexes cubiques considérés dans ce texte seront de dimension finie.

Un autre espace $\mathrm{CAT}(0)$ emblématique qui apparaît dans le texte est *l'espace hyperbolique de dimension infinie*[2], noté $\mathbb{H}^\infty$. On le définit comme ceci. On considère un espace de Hilbert $\mathscr{H}$ et une droite L de $\mathscr{H}$. On note B l'unique forme bilinéaire sur $\mathscr{H}$ qui vérifie :

$$B(v, v) = |v_L|^2 - |v_{L^\perp}|^2$$

pour tout v de $\mathscr{H}$. Ici, v_L et $v_{L^\perp}$ sont les projections de v sur L et $L^\perp$. On note $\mathrm{O}(1, \infty)$ le groupe de toutes les applications linéaires bijectives $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ qui préservent B. L'espace $\mathbb{H}^\infty$ est défini comme étant l'une des composantes connexes de l'hyperboloïde $\{v \in \mathscr{H}, B(v, v) = 1\}$. Il est muni de la distance d définie par $\mathrm{ch}(d(u, v)) = B(u, v)$. Son groupe d'isométries s'identifie au groupe $\mathrm{PO}(1, \infty) = \mathrm{O}(1, \infty)/\{\pm \mathrm{Id}\}$. Nous renvoyons à [14] pour une présentation plus détaillée.

On notera souvent $\mathrm{Isom}(Z)$ le groupe d'isométries d'un espace métrique Z.

2. En fait, il y a un espace hyperbolique de dimension infinie pour chaque cardinal infini.

2 Applications harmoniques de petit rang et applications

2.1 Théorèmes de factorisation

Dans de nombreuses situations, on étudie les groupes kählériens en appliquant la philosophie suivante. Soit G un groupe, auquel on pense comme le groupe "but". On souhaite étudier les représentations des groupes kählériens dans G. Pour cela, on cherche à associer à G un espace complexe B (en général une variété projective ou kählérienne) ou une famille de tels espaces, ayant la propriété suivante.

Si X est une variété kählérienne compacte et si $\phi : \pi_1(X) \to G$ est un morphisme, alors il existe une application holomorphe $f : X \to B$ de X vers l'espace modèle B, ou vers l'un des espaces modèles, ayant la propriété que ϕ se décompose comme

$$\phi = \theta \circ f_*$$

où θ est un morphisme du groupe fondamental de B vers G.

Dans la situation précédente, on dit que la représentation $\phi : \pi_1(X) \to G$ se *factorise* par l'application holomorphe $f : X \to B$. On cherche donc à identifier des variétés kählériennes modèles dont le groupe fondamental se représente dans G et telles que toute représentation d'un groupe kählérien dans G se factorise par une application holomorphe vers l'un de ces modèles. Lorsque B est une orbisurface hyperbolique, on garde la même définition en remplaçant le groupe fondamental usuel par le groupe fondamental orbifold.

Cette philosophie n'est pas nouvelle : elle est apparue dès la fin des années 80 et a déjà été expliquée dans le livre [2], voir le début du chapitre 2. Elle a également été popularisée par Gromov dans l'article de survol récent [50, §4], dont nous suivons la présentation. Le théorème de Corlette et Simpson que nous mentionnons dans l'exemple 2 est emblématique de ces idées. Bien que publié en 2008, il a été obtenu beaucoup plus tôt ; une partie de l'énoncé apparaît déjà dans l'article [99].

Donnons donc quelques exemples de cette situation.

Exemple 1 *Si G est un groupe abélien sans torsion, on peut prendre pour famille d'espaces B tous les tores complexes ; l'application holomorphe f sera alors l'application d'Albanese de X.*

Exemple 2 *Si $G = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$ et si l'on se limite aux représentations d'image non virtuellement résoluble, on peut prendre comme famille d'espaces modèles B l'union de l'ensemble des orbisurfaces hyperboliques et de l'ensemble des orbifolds localement symétriques de volume fini recouverts par Δ^n pour un $n > 1$. Il s'agit d'un théorème de Corlette et Simpson [30].*

Notons que dans de nombreuses situations, on peut prendre pour famille d'espaces B simplement l'ensemble des surfaces (ou orbisurfaces) de Riemann hyperboliques. Cela traduit bien sûr la rigidité des groupes kählériens : il est impossible de les représenter dans certains groupes, sauf si la représentation se factorise par une fibration sur une surface de Riemann hyperbolique. Les groupes fondamentaux de surfaces hyperboliques se surjectant sur des groupes libres, on peut les représenter où bon nous semble. Quant aux groupes fondamentaux d'orbisurfaces hyperboliques, ils se surjectent virtuellement sur des groupes libres.

Un exemple de cette situation est le théorème suivant, dû à Carlson et Toledo [24], sur lequel nous reviendrons un peu plus loin.

Exemple 3 *Si G est le groupe fondamental d'une variété hyperbolique réelle complète et de volume fini, de dimension ≥ 3, et si l'on s'intéresse uniquement aux représentations d'image non virtuellement abélienne, on peut prendre pour famille d'espaces B l'ensemble des surfaces de Riemann hyperboliques.*

Lorsque l'on étudie des morphismes d'un groupe kählérien dans le groupe d'isométries d'un espace à courbure négative ou nulle la philosophie précédente s'implémente grâce aux *applications harmoniques*. Nous rappelons quelques définitions concernant ces applications, tout d'abord dans le cadre purement riemannien.

Définition 1 *Une application lisse $f : M \to N$ entre deux variétés riemanniennes (M, g) et (N, h) est harmonique si elle satisfait l'équation*

$$tr(\nabla df) = 0. \tag{1}$$

Rappelons le sens de l'équation (1) : la différentielle df de l'application f est une section du fibré $T^*M \otimes f^*TN \to M$. Ce fibré porte naturellement une connexion, notée ∇, construite à partir des connexions de Levi-Civita de M et N. On peut donc considérer la dérivée covariante ∇df de df. Le tenseur $tr(\nabla df)$ est la trace de ∇df. Il peut être vu comme un champ de vecteurs le long de f, c'est-à-dire qu'à chaque point x de M on associe un vecteur de $T_{f(x)}N$. Dans ce cas il est parfois appelé champ de tension de f, noté $\tau(f)$. Remarquons que lorsque M est compacte, si l'on définit l'énergie de f comme

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_M ||df_x||^2 dx$$

alors le tenseur $\tau(f) = tr(\nabla df)$ est, au signe près, le gradient de la fonctionnelle $f \mapsto E(f)$. Ainsi une application est harmonique si et seulement si c'est un point critique de la fonctionnelle d'énergie. Pour une introduction élémentaire à toutes ces notions, on peut consulter par exemple le livre [87]. Mentionnons simplement les exemples suivants.

Exemple 4 *Si M est le cercle S^1, une application est harmonique si et seulement si c'est une géodésique.*

Exemple 5 *Si $N = \mathbb{R}^k$ une application est harmonique si et seulement si chaque coordonnée est une fonction harmonique au sens usuel.*

Il existe une théorie des applications harmoniques d'une variété riemannienne à valeurs dans un espace CAT(0) [51, 65, 66] (et même des théories plus générales). Nous y ferons parfois allusion mais ne donnerons pas de définition ici.

En fait depuis la fin des années 80, au moins depuis l'article [40], et en vue d'étudier les actions de groupes, on considère une classe légèrement plus générale d'applications harmoniques. On appelle toujours N la variété riemannienne but, et l'on note Isom(N) son groupe d'isométries. On se donne une autre variété riemannienne M, supposée compacte, de revêtement universel $\widetilde{M}$. Si $\varrho : \pi_1(M) \to \mathrm{Isom}(N)$ est une représentation, on peut considérer des applications $f : \widetilde{M} \to N$ qui sont ϱ-équivariantes, c'est-à-dire satisfont :

$$f(\gamma \cdot x) = \varrho(\gamma) \cdot f(x)$$

pour tout point x de $\widetilde{X}$ et tout élément γ de $\pi_1(M)$. De telles applications existent si N est contractile, ce qui est le cas par exemple si N est une variété de Hadamard. On peut définir le champ de tension de l'application f, comme précédemment, ainsi que son énergie, cette fois en intégrant la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}||df_x||^2$, vue comme une fonction sur M. On dit que f est harmonique si son champ de tension s'annule.

Discutons maintenant de l'existence d'applications harmoniques, tout du moins dans le cadre qui nous intéresse : lorsque le but est à courbure négative ou nulle. Lorsque M et N sont des variétés fermées et que l'on considère des applications de M dans N la réponse est connue depuis les années 60 : Eells et Sampson [43] ont démontré que dans ce cas toute application continue $f : M \to N$ est homotope à une application harmonique si N est à courbure sectionnelle négative ou nulle. Dans le cadre équivariant, on a également des résultats d'existence. On suppose N de Hadamard. Une condition sur la représentation ϱ est nécessaire pour garantir l'existence d'une application harmonique. En effet l'espace but étant non-compact, on peut avoir des phénomènes de "fuite à l'infini" : si (f_n) est une suite d'applications qui minimise l'énergie et x_0 un point fixé à la source, la suite $(f_n(x_0))$ peut sortir de tout compact de N. Cette difficulté est comprise depuis bien longtemps. Avant d'énoncer un résultat d'existence, rappelons la définition suivante due à Labourie [71] :

Définition 2 *Si N est une variété de Hadamard, un groupe G d'isométries de N est dit réductif s'il existe un convexe fermé G-invariant $C \subset N$ tel que :*

1. *C est isométrique à un produit $C_1 \times \mathbb{R}^m$, où $\mathbb{R}^m$ est muni de sa distance euclidienne standard,*
2. *G est isomorphe à un produit $G_1 \times G_2$ où G_2 agit trivialement sur C_1 et G_1 agit trivialement sur $\mathbb{R}^m$,*
3. *G_1 ne fixe pas de point dans le bord à l'infini de C_1.*

Lorsque N est un espace symétrique de type noncompact, on peut montrer que cette définition est équivalente au fait que la clôture de Zariski de G est réductive. On a alors le théorème suivant, dans lequel M est toujours supposée compacte et N est supposée être une variété de Hadamard :

Théorème 1 *Supposons $\varrho(\pi_1(M))$ réductif. Alors il existe une application ϱ-équivariante et harmonique $f : \widetilde{M} \to N$.*

Sous cette forme, ce théorème est dû à Labourie [71]. Le cas où N est un espace symétrique de type non-compact avait été établi antérieurement par Corlette [29]. Donaldson avait traité auparavant un cas plus particulier dans [40]. Faisons deux remarques : d'une part la définition 2 a un sens lorsque N est un espace CAT(0). D'autre part, en utilisant la notion d'application harmonique à valeurs dans de tels espaces, due à Gromov-Korevaar-Schoen, on peut énoncer des versions du théorème 1 où la variété N est remplacée par un espace CAT(0) très général. Nous renvoyons à [66, 67] pour ces résultats [3].

Nous décrivons maintenant le cas des applications harmoniques dont la source est supposée kählérienne. Les résultats que nous décrivons s'inscrivent dans le cadre de la *théorie de Hodge non-abélienne* développée par Simpson, mais nous nous contentons du minimum nécessaire à notre propos concernant cette théorie.

Nous noterons désormais toujours X la variété source. Une fois acquise l'existence d'une application harmonique, associée à une classe d'homotopie ou une représentation, on souhaite construire des objets qui ne dépendent que de la structure complexe de X. Rappelons alors la :

Définition 3 *Soit X une variété complexe munie d'une métrique hermitienne g et (N, h) une variété riemannienne. Une application $f : X \to N$ est dite pluriharmonique si sa restriction à chaque sous-variété complexe de X est harmonique.*

En général une application harmonique d'une variété hermitienne vers une variété riemannienne n'est pas pluriharmonique. Le miracle est que l'on peut, lorsque la source est kählérienne et le but vérifie une condition de courbure adéquate, démontrer que les applications harmoniques sont pluriharmoniques. Pour énoncer cette condition de courbure, nous avons besoin de quelques définitions [4].

3. Certains des résultats du texte non-publié [67] ont été redémontrés indépendamment et dans certains cas améliorés dans l'article [19].

4. Cette condition n'est pas nouvelle mais remonte aux travaux de Sampson et Siu dans les années 80.

Soit N une variété riemannienne de tenseur de courbure R. Même sans supposer que N est une variété complexe, on peut considérer son fibré tangent complexifié $TN \otimes \mathbb{C}$. On peut alors étendre R par $\mathbb{C}$-linéarité pour obtenir une application $\mathbb{C}$-linéaire

$$TN \otimes \mathbb{C} \times TN \otimes \mathbb{C} \times TN \otimes \mathbb{C} \times TN \otimes \mathbb{C} \to \mathbb{C}.$$

On dit que la variété riemannienne N est à courbure hermitienne négative ou nulle si le tenseur $R_{\mathbb{C}}$ vérifie

$$R_{\mathbb{C}}(u, v, \overline{u}, \overline{v}) \leq 0$$

pour tous vecteurs u, v dans $TN \otimes \mathbb{C}$. Pour abréger, nous dirons que N vérifie la condition $K_{\mathbb{C}} \leq 0$ dans ce cas. En prenant pour u et v des vecteurs réels, on voit que la condition $K_{\mathbb{C}} \leq 0$ implique que la courbure sectionnelle usuelle est négative ou nulle.

Exemple 6 *Si N est un espace symétrique de type non-compact, alors N vérifie la condition $K_{\mathbb{C}} \leq 0$. En effet écrivons $N = G/K$, fixons une décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ de l'algèbre de Lie de G, où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie de K et identifions l'espace tangent à N en eK avec $\mathfrak{p}$. Notons B l'extension $\mathbb{C}$-linéaire de la forme de Killing à $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$. On a alors pour u, v dans $\mathfrak{p} \otimes \mathbb{C}$:*

$$R_{\mathbb{C}}(u, v, \overline{u}, \overline{v}) = B([u, v], \overline{[u, v]}).$$

Ce terme est bien négatif ou nul car B est définie négative sur $\mathfrak{k}$ et $[u, v] \in \mathfrak{k} \otimes \mathbb{C}$. Ainsi N vérifie la condition $K_{\mathbb{C}} \leq 0$.

Outre les espaces symétriques de type non-compacts, très peu d'exemples de variétés riemanniennes ayant la propriété $K_{\mathbb{C}} \leq 0$ sont connus. Les variétés kählériennes compactes à courbure strictement négative mais non localement symétriques construites par Mostow-Siu et Deraux ont cette propriété, voir [78]. Les variétés riemanniennes à courbure $\frac{1}{4}$-pincée également [52]. Nous renvoyons à [50, §4.4] pour une discussion de quelques autres exemples et mentionnons une autre famille de variétés pour lesquelles l'existence de telles métriques est ouverte. Nous commençons par une petite digression pour décrire ces espaces.

On considère un réseau non-uniforme et sans torsion Γ dans le groupe $\mathrm{PU}(n, 1)$ des isométries holomorphes de l'espace hyperbolique complexe $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$. On suppose que chacun des sous-groupes paraboliques de Γ est "purement unipotent". Ceci est toujours vrai quitte à remplacer Γ par un sous-groupe d'indice fini. On sait alors que les bouts de la variété

$$X_\Gamma := \mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}/\Gamma$$

ont la structure suivante. On peut trouver un compact K à bord lisse dans X_Γ tel que $X_\Gamma - K$ ait un nombre fini de composantes connexes notées $O_1, \ldots O_r$, et tel que chacune de ces composantes soit obtenue comme suit. Pour chaque i, il existe une variété abélienne A_i de dimension complexe $n - 1$, un fibré en droites holomorphe $L_i \to A_i$ et une métrique hermitienne h_i sur L_i, telle que O_i soit biholomorphe à l'ensemble :

$$\{v \in L_i, 0 < h_i(v, v) < 1\}.$$

Cet isomorphisme peut être choisi de telle sorte que les ensembles $O_c = \{v \in L_i, 0 < h_i(v, v) < c\}$ pour $c < 1$ soient les projections dans X_Γ des horoboules assez petites centrées au point ξ du bord visuel de $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ fixé par le groupe parabolique

$$\pi_1(O_i) < \pi_1(X_\Gamma) \simeq \Gamma.$$

On peut alors compactifier X_Γ en ajoutant à chaque O_i la section nulle de L_i. On note $\overline{X_\Gamma}$ la variété ainsi obtenue. Cette nouvelle variété est kählérienne, en fait projective. De plus, Hummel et Schroeder [53] ont montré le résultat suivant :

Théorème 2 *Pour tout réseau non-uniforme $\Gamma < \mathrm{PU}(n,1)$, il existe un ensemble fini d'éléments paraboliques $\mathscr{F} \subset \Gamma$ tel que si Γ_1 est un sous-groupe normal d'indice fini de Γ qui ne rencontre pas $\mathscr{F}$, alors la variété $\overline{X_{\Gamma_1}}$ possède une métrique riemannienne à courbure négative ou nulle.*

L'énoncé est en fait un peu plus précis : les tores ajoutés pour compactifier la variété $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}/\Gamma_1$ sont plats et totalement géodésiques pour la métrique de Hummel et Schroeder. On peut alors poser la :

Question 3 *Les variétés $\overline{X_\Gamma}$ (tout du moins celles qui possèdent des métriques riemanniennes à courbure négative ou nulle) possèdent-elles des métriques riemanniennes satisfaisant la propriété $K_{\mathbb{C}} \leq 0$?*

Un examen détaillé de la preuve de Hummel et Schroeder montre que les métriques à courbure négative ou nulle construites dans [53] n'ont pas la propriété $K_{\mathbb{C}} \leq 0$, et ne répondent donc pas à notre question. Une difficulté provient du fait que la condition $K_{\mathbb{C}} \leq 0$ n'est pas ouverte. De plus, un espace symétrique hermitien autre que le plan hyperbolique contient toujours des plans sur lesquels $K_{\mathbb{C}} = 0$.

Avant de donner une motivation pour cette question, rappelons l'énoncé du théorème de rigidité de Siu [102] : *toute variété kählérienne compacte Y ayant le même type d'homotopie qu'une variété hermitienne localement symétrique de courbure négative ou nulle lui est biholomorphe (ou "anti-biholomorphe").*

Supposons que l'une des variétés $\overline{X_\Gamma}$ possède une métrique riemannienne vérifiant la condition $K_{\mathbb{C}} \leq 0$, et qui coïncide avec une métrique hyperbolique complexe sur un ouvert (comme par exemple les métriques de Hummel et Schroeder obtenues en modifiant la métrique hyperbolique complexe à l'infini du cusp pour qu'elles s'étendent à la compactification). Alors une telle variété $\overline{X_\Gamma}$ vérifierait la conclusion du théorème de rigidité de Siu : toute variété kählérienne compacte Y ayant le même type d'homotopie que $\overline{X_\Gamma}$ lui serait biholomorphe (ou "anti-biholomorphe"). C'est une motivation pour la question précédente. La preuve serait (presque) la même que celle du théorème original de Siu : on construit une application harmonique $f : Y \to X_\Gamma$ qui est une équivalence d'homotopie ; la condition $K_{\mathbb{C}} \leq 0$ au but permet de montrer qu'elle est pluriharmonique ; puis on montre qu'elle est holomorphe ou anti-holomorphe en adapatant un argument de Carlson et Toledo ; finalement on montre que le lieu critique de f est vide, là encore comme dans [101, 102].

Pour d'autres questions et un autre résultat concernant ces variétés, on pourra consulter la section 5.1.

Nous reprenons notre discussion concernant la condition $K_{\mathbb{C}} \leq 0$. Dans ce qui suit, X sera toujours une variété kählérienne compacte, de revêtement universel $\widetilde{X}$, N désignera une variété riemannienne. La condition $K_{\mathbb{C}} \leq 0$ est la condition au but qui permet de montrer que les applications harmoniques de source kählérienne sont pluriharmoniques, comme le montre le résultat suivant dû à Sampson [96], qui fait suite à un résultat antérieur de Siu ayant des hypothèses plus fortes.

Théorème 4 *Soit $f : \widetilde{X} \to N$ une application harmonique, équivariante par rapport à une représentation $\varrho : \pi_1(X) \to \mathrm{Isom}(N)$. Si N vérifie $K_{\mathbb{C}} \leq 0$ alors f est pluriharmonique.*

La preuve de ce théorème consiste à établir une formule de Bochner (parfois appelée la formule de Bochner-Siu-Sampson). Nous renvoyons aux ouvrages [2] ou [23] pour un exposé de cette preuve. Mentionnons seulement une conséquence de celle-ci. Pour cela, introduisons quelques notations. Si $f : \widetilde{X} \to N$ est une application lisse et équivariante par rapport à une représentation ϱ, on peut considérer le fibré $f^*TN \to \widetilde{X}$. Par équivariance, il descend en un fibré vectoriel sur X. Pour ne pas alourdir les notations, nous travaillerons sur $\widetilde{X}$ quitte à faire quelques abus de notations. Nous noterons $E \to \widetilde{X}$ ce fibré. La différentielle df de f définit une 1-forme à valeurs dans E. On note d_∇ l'opérateur sur les formes différentielles induit par la connexion de Levi-Civita de N. On décompose l'opérateur d_∇ en parties de type $(1,0)$ et $(0,1)$:

$$d_\nabla = d_\nabla^{1,0} + d_\nabla^{0,1}.$$

Ces deux opérateurs agissent sur les sections et les formes différentielles à valeurs dans le fibré

$$E_\mathbb{C} = f^*TN \otimes \mathbb{C} \to X.$$

Si f est harmonique, la formule de Bochner-Siu-Sampson montre qu'elle est en fait pluriharmonique, mais elle fournit aussi l'annulation d'une autre quantité géométrique, à savoir : *$K_\mathbb{C}$ s'annule sur l'image de $df^{1,0}$*. Cette annulation est équivalente au fait que l'opérateur $d_\nabla^{1,0}$ satisfait

$$\left(d_\nabla^{1,0}\right)^2 = 0.$$

Par un théorème de Koszul et Malgrange, ceci implique que le fibré E a une structure de fibré holomorphe pour laquelle $\overline{\partial} = d_\nabla^{1,0}$.

Maintenant, la condition de pluriharmonicité est équivalente au fait que la forme $df \circ J$ est fermée pour d_∇, où J est la structure presque complexe de X. Comme df est aussi fermée, la 1-forme

$$df^{1,0} = df - i df \circ J$$

est d_∇-fermée. Étant de type $(1,0)$, elle doit être annulée par $d_\nabla^{1,0}$ et $d_\nabla^{0,1}$. Nous obtenons donc : *la 1-forme $df^{1,0}$ est une section holomorphe de E*. Son noyau est intégrable (sur un ouvert de Zariski de X) et $df^{1,0}$ définit donc un feuilletage holomorphe singulier sur X. On note q la dimension de son noyau au point générique. Que peut-on dire de ce feuilletage en général ? C'est l'objet de *théorèmes de factorisation*. Dans ce contexte, démontrer un théorème de factorisation veut dire prouver qu'il existe une application holomorphe surjective de X vers une variété algébrique ou kählérienne Y, dont les fibres sont tangentes au feuilletage défini par $df^{1,0}$ et telle que la représentation originale ϱ se factorise par l'application $X \to Y$. Pour éviter le cas trivial $X = Y$ on demande en général ou bien que Y soit de dimension pls petite que X (par exemple $dim X - dim Y = q$) ou bien que Y ait des propriétés additionnelles, par exemple que Y soit projective de type général. Les exemples 2 et 3 mentionnés au début de cette section rentrent dans ce cadre. Mentionnons quelques autres références : les représentations d'adhérence de Zariski semi-simple de groupes kählériens se factorisent virtuellement par des applications holomorphes vers des variétés de type général [16] (voir aussi [77]), pour un énoncé concernant les représentations non-rigides voir [106], les actions non-élémentaires sur des arbres simpliciaux se factorisent par des applications holomorphes vers des orbisurfaces de Riemann [51]. Bien sûr, pour ce dernier théorème Gromov et Schoen appliquent la démarche précédente en prenant pour N un arbre et non pas un espace symétrique, et appliquent la théorie des applications harmoniques à valeurs dans les espaces CAT(0). Ce résultat de Gromov et Schoen peut cependant être maintenant démontré de plusieurs autres manières, voir la remarque 5 dans la section 3.3.

Notons que certains des résultats mentionnés ci-dessus font l'hypothèse que la représentation considérée est discrète dans le groupe d'isométries de N. Dans la section suivante, nous décrivons un nouveau théorème de factorisation pour les applications harmoniques de tout petit rang, dont l'originalité est qu'il s'applique sans hypothèse de discrétude. Ce résultat a été obtenu dans l'article (A1).

2.2 Un nouveau théorème de factorisation au niveau du revêtement universel

Nous supposons ici que Z est un espace symétrique de type noncompact. On considère une représentation Zariski dense

$$\varrho : \pi_1(X) \to \mathrm{Isom}(Z)$$

et une application $f : \widetilde{X} \to Z$ ϱ-équivariante et harmonique. Elle est alors automatiquement pluriharmonique. Le théorème suivant est démontré dans l'article (A1). On y note toujours Δ le disque unité de $\mathbb{C}$.

Théorème 5 *Si $df^{1,0}$ est de rang complexe 1, il existe une application holomorphe $\pi : \widetilde{X} \to \Delta$ et une application harmonique $u : \Delta \to Z$ telles que $f = u \circ \pi$. De plus, Il existe une représentation $\theta : \pi_1(X) \to \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ et une représentation $\varrho_0 : \Lambda := \theta(\pi_1(X)) \to \mathrm{Isom}(Z)$ telles que π est θ-équivariante, u est ϱ_0-équivariante et $\varrho = \varrho_0 \circ \theta$.*

Remarque 1 *Le théorème ne dit pas que l'application π est à fibres connexes. Cependant on peut se ramener à ce cas lorsque $\Lambda = Im(\theta)$ est discret, en appliquant le théorème de factorisation de Stein à l'application induite $X \to \Delta/\Lambda$. En fait, nous verrons au paragraphe suivant que Λ est nécessairement discret lorsque Z n'est pas le plan hyperbolique.*

Remarque 2 *Par un théorème de Sampson [96], l'hypothèse sur le rang de $df^{1,0}$ est toujours satisfaite lorsque Z est l'espace hyperbolique réel.*

Une difficulté dans la preuve de ce théorème vient du fait que le feuilletage holomorphe que l'on étudie est défini par le noyau d'une forme à valeurs dans un fibré et non à valeurs dans $\mathbb{C}$. On ne dispose donc pas de primitives locales.

Nous décrivons maintenant les principales étapes de la démonstration du théorème 5. Cette démonstration s'inspire d'une idée de Mok [76]. Notons qu'il existe de nombreux théorèmes qui donnent des conditions suffisantes pour que le quotient d'une variété complexe Y (ou d'un espace complexe plus général) par une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ soit un espace complexe. On identifie $\mathscr{R}$ à son graphe contenu dans $Y \times Y$. Une condition nécessaire est bien sûr que $\mathscr{R}$ soit un ensemble analytique. Nous suivons cette approche pour démontrer le théorème 5. Nous décrivons ici seulement quelques étapes de la preuve.

On commence par définir une relation d'équivalence non pas sur $\widetilde{X}$ tout entier mais sur un ouvert $O \subset \widetilde{X}$ un peu plus petit. On sait que le feuilletage holomorphe défini par le noyau de $df^{1,0}$ s'étend en un feuilletage non-singulier sur $\widetilde{X} - F$ où F est un ensemble analytique de codimension au moins 2. On considère donc l'ouvert $O = \widetilde{X} - F$ et on note $\mathscr{F}$ le feuilletage non-singulier défini par $df^{1,0}$ sur O.

Une propriété que nous utiliserons ici est que l'application pluriharmonique $f : \widetilde{X} \to Z$ est analytique réelle. C'est une propriété générale des solutions d'équations aux dérivées partielles elliptiques, à coefficients elliptiques [5]. L'ensemble

$$\mathscr{R}_0 := \{(x, y) \in O \times O, f(x) = f(y)\}$$

est donc un ensemble analytique réel. On va définir une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur O en déclarant que (x, y) est dans $\mathscr{R}$ s'il existe un germe d'ensemble analytique complexe contenu dans $\mathscr{R}_0$, passant par (x, y) et dont les projections sur chacun des deux facteurs ne sont pas contenues dans une feuille de $\mathscr{F}$. Plus concrètement, $(x, y) \in \mathscr{R}$ s'il existe une application holomorphe

$$\varphi : \Delta \to O \times O$$

5. L'équation en question ne dépend que de la métrique sur Z, puisque f est pluriharmonique.

telle que $\varphi(0) = (x, y)$, telle que les projections de $\varphi(\Delta)$ sur chacun des deux facteurs ne soient pas contenues dans une feuille de $\mathscr{F}$, et telle que l'image de φ soit contenue dans $\mathscr{R}_0$. Étudions plus précisément cette définition. Fixons des points (x, y) dans O et des coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_n)$ centrées en x et y respectivement et telles que le feuilletage $\mathscr{F}$ soit défini localement par $dx_n = 0$ (près de x) et $dy_n = 0$ (près de y). Puisque f est constante le long des feuilles de $\mathscr{F}$, on peut écrire localement près de x, $f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_n)$ et $f = f(y_n)$ près de y. L'intersection de l'ensemble $\mathscr{R}$ précédemment défini avec les ouverts de coordonnées est en fait le "pull-back" d'un ensemble $\mathscr{R}'$ défini au voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^2$ via la projection

$$(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \mapsto (x_n, y_n).$$

En effet, déplacer localement un point dans sa feuille ne change pas sa classe d'équivalence. Cette description locale permet d'une part de se convaincre que la relation précédente est bien une relation d'équivalence. D'autre part elle permet de voir que localement, dans $\mathbb{C}^2$, le graphe de la relation est exactement formé des points (x_n, y_n) par lesquels passe un germe non trivial d'ensemble analytique complexe contenu dans l'ensemble $\{((x_n, y_n), f(x_n) = f(y_n)\}$. On utilise alors le résultat suivant, dû à Diederich et Mazilli [39] :

Théorème 6 *Soit W un ensemble analytique réel défini dans un ouvert de $\mathbb{C}^n$. Soit W_0 le sous-ensemble de W des points par lesquels passe un germe d'ensemble analytique complexe non trivial et contenu dans W. Alors W_0 est fermé.*

Ce théorème implique que le graphe $\mathscr{R}$ de notre relation d'équivalence est fermé. Les projections de $\mathscr{R}$ sur les deux facteurs étant ouvertes, on peut alors appliquer le lemme de topologie générale suivant pour assurer que le quotient de O par $\mathscr{R}$ est séparé.

Lemme 7 *Soit O une variété et $R \subset O \times O$ le graphe d'une relation d'équivalence. On suppose que R est fermé et que les deux projections $p_1, p_2 : R \to O$ sont ouvertes (R étant muni de la topologie induite par $O \times O$). Alors l'espace quotient O_R est Hausdorff et l'application $O \to O_R$ est ouverte.*

La preuve du théorème de factorisation 5 n'est alors pas terminée. Nous en décrivons brièvement les dernières étapes. On montre d'abord que

$$\mathscr{R} \subset O \times O$$

est analytique complexe. Ce point est non trivial, voir le paragraphe 4.1 de l'article (A1). De ceci on déduit aisément que le quotient $\Sigma := O/\mathscr{R}$ a une structure de surface de Riemann pour laquelle l'application quotient est holomorphe. Puisque O est simplement connexe, on peut relever l'application quotient en une application de O vers le revêtement universel de Σ, qui est nécessairement le disque unité de $\mathbb{C}$. Puisque $\widetilde{X} - O = F$ est un ensemble analytique de codimension au moins 2, cette application s'étend en une application holomorphe $\pi : \widetilde{X} \to \Delta$. Notons que par construction, l'application f se factorise par π. On écrit $f = u \circ \pi$. Il reste alors à vérifer que u est harmonique. C'est évident au voisinage d'un point qui n'est pas une valeur critique de π, le cas des valeurs critiques nécessitant un argument indépendant. Finalement, on vérifie que u et π vérifient les conditions d'équivariance requises.

2.3 Extension des actions pour les sous-groupes denses de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$

Nous supposons maintenant l'espace symétrique Z distinct du plan hyperbolique, et expliquons comment utiliser le théorème 5 pour obtenir un résultat de factorisation au niveau de la variété X.

Le groupe $\Lambda < \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ n'étant pas résoluble, il est ou bien discret ou bien dense dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Nous allons voir qu'il est nécessairement discret, ce qui fournit une application de X vers l'orbifold Δ/Λ.

Proposition 8 *Si Λ est dense dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, son action sur Z s'étend en une action continue de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$.*

La preuve de cette proposition est élémentaire et repose sur le fait que si (g_n) est une suite d'isométries de Z, l'ensemble des point $z \in Z$ tels que $(g_n(z))$ converge est une sous-variété totalement géodésique de Z. Le caractère Zariski dense de ϱ implique que la seule sous-variété totalement géodésique de Z qui contient l'image de f est Z tout entier. Ainsi pour montrer qu'une suite d'isométries de Z converge, il suffit de montrer qu'elle converge sur l'image de f. Ceci permet facilement d'étendre la représentation $\Lambda \to \mathrm{Isom}(Z)$ en une représentation $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Isom}(Z)$. En effet une suite d'éléments de Λ qui converge dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ doit converger ponctuellement sur l'image de u, qui coïncide avec l'image de f. Cet argument n'a strictement rien de kählérien et pourrait être réutilisé dans d'autres situations.

Une fois obtenue une action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur Z on peut alors utiliser un résultat classique dû à Mostow et Karpelevic indépendamment : étant donné un morphisme lisse $\varrho_0 : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Isom}(Z)$, il existe un plongement totalement géodésique ϱ_0-équivariant du plan hyperbolique dans Z. Dans la situation du théorème 5 puisque l'on a

$$\varrho = \varrho_0 \circ \theta,$$

l'image de ce plongement $\mathbb{H}^2 \to Z$ doit donc être invariante par la représentation ϱ. Mais ceci contredit le fait que ϱ soit Zariski dense. Ainsi l'hypothèse de densité de Λ amène une contradiction. Ceci prouve l'énoncé suivant : *si une représentation ϱ d'un groupe kählérien dans le groupe d'isométries $\mathrm{Isom}(Z)$ est Zariski dense et a la propriété que l'application harmonique f associée vérifie $\mathrm{rang}_{\mathbb{C}}\, df^{1,0} = 1$, ϱ se factorise par une fibration sur une orbisurface de Riemann.*

L'absence d'hypothèse concernant la discrétude de ϱ est le point original de cet énoncé. Dans cette généralité, cet énoncé n'apparaît en fait que sous forme de remarque dans l'article (A1) qui était centré sur les actions sur les espaces hyperboliques réels. Dans le cas où $Z = \mathbb{H}^n$ et comme nous l'avons déjà dit, l'hypothèse de rang sur f est toujours satisfaite par un théorème de Sampson [96]. Nous obtenons donc le résultat suivant :

Théorème 9 *Soit $\varrho : \pi_1(X) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ un morphisme d'image Zariski dense. Alors ϱ se factorise par une fibration sur une orbisurface de Riemann.*

Remarque 3 *On aurait pu formuler le théorème de manière légèrement différente, en supposant seulement que $\varrho(\pi_1(X))$ est d'adhérence de Zariski réductive. On aurait alors un résultat de factorisation analogue mais seulement sur un sous-espace totalement géodédique $\mathbb{H}^k \simeq U \subset \mathbb{H}^n$. Ce sous-espace U est l'unique sous-espace $\varrho(\pi_1(X))$-invariant et minimal. Il coïncide avec $\mathbb{H}^n$ lorsque ϱ est Zariski dense.*

Remarque 4 *Lorsque ϱ est d'image discrète, le résultat était déjà connu et dû à Carlson et Toledo [24].*

Nous expliquons dans ce qui suit comment adapter cet énoncé pour décrire les actions de groupes kählériens sur l'espace hyperbolique réel de dimension infinie.

2.4 Actions sur l'espace hyperbolique réel de dimension infinie, représentations dans le groupe de Cremona

Dans toute cette section, X désigne toujours une variété kählérienne compacte ; on note désormais Γ son groupe fondamental.

Une grande partie de l'article (A1) est consacrée à étendre la discussion précédente au cas où l'espace hyperbolique est de dimension infinie. Nous expliquons comment adapter chaque étape de la preuve. D'abord la notion de Zariski densité pour un groupe $\Lambda < \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^\infty)$ est dictée par les résultats utilisés dans le cas de dimension finie. Nous dirons qu'un sous-groupe Λ est Zariski dense s'il ne préserve aucun point du bord de $\mathbb{H}^\infty$ et ne préserve aucune sous-variété totalement géodésique fermée non-triviale. On isole souvent la propriété plus faible que Λ soit non-élémentaire. Ceci veut dire que Λ ne préserve pas de point du bord de $\mathbb{H}^\infty$, ni de géodésique ni de point de $\mathbb{H}^\infty$. On peut montrer que si Λ est non-élémentaire, il préserve un unique sous-espace totalement géodésique minimal, voir par exemple [14]. Ainsi si Λ est non-élémentaire, il est Zariski dense dans le groupe d'isométries d'un sous-espace totalement géodésique plus petit.

Ensuite, nous aurons besoin d'applications harmoniques à valeurs dans l'espace $\mathbb{H}^\infty$. Pour cela on utilise d'abord la théorie des applications harmoniques de Korevaar et Schoen à valeurs dans les espaces CAT(0). Un théorème d'existence adéquat se trouve dans l'article [66]. En fait, il y a même un énoncé encore plus général dans l'article [67], non-publié, mais nous n'en aurons pas besoin. Une fois acquise l'existence d'une application harmonique au sens de Korevaar et Schoen, il n'est pas difficile de montrer qu'en fait cette application est lisse et harmonique au sens usuel. La machinerie utilisée pour l'étape

$$\text{harmonique} \Rightarrow \text{pluriharmonique}$$

s'adapte alors sans difficulté majeure. Le point clé est que la source de notre application harmonique reste une variété de dimension finie. Toutes les formes différentielles nécessaires pour faire fonctionner la formule de Bochner-Siu-Sampson sont définies à la source. Pour les besoin de la cause nous prouvons également dans l'article (A1) une généralisation hilbertienne du théorème d'intégrabilité de Koszul et Malgrange.

En utilisant tout ce qui précède, nous établissons finalement le résultat suivant.

Théorème 10 *Soit $\varrho : \Gamma \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^\infty)$ un morphisme d'image Zariski dense. Alors deux cas sont possibles :*

1. *La représentation ϱ se factorise par une fibration sur une orbisurface de Riemann hyperbolique.*
2. *La représentation ϱ se décompose comme $\varrho = \Psi \circ \theta$ où θ est un morphisme de Γ dans $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ d'image dense et où $\Psi : \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \to \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^\infty)$ est un morphisme continu.*

À ce stade il est naturel de se demander si la seconde possibilité dans ce théorème existe bel et bien. La réponse est oui ! Contrairement à la dimension finie, il existe des actions Zariski denses continues de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur l'espace hyperbolique réel de dimension infinie. Nous reviendrons sur ce point dans la section 4.

Nous passons maintenant aux applications concernant le *groupe de Cremona*. Ce groupe, noté $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ est le groupe de toutes les transformations birationnelles du plan projectif complexe $\mathbb{P}^2$. Si l'on note $[x : y : z]$ des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}^2$, un élément du groupe de Cremona est une "transformation" de la forme

$$[x : y : z] \mapsto [P(x, y, z) : Q(x, y, z) : R(x, y, z)]$$

où P, Q, R sont des polynômes homogènes de même degré, et telle que f admet un inverse de la même forme. L'étude du groupe de Cremona est un sujet classique. Dans les années 2000, Cantat, Déserti et Lamy ont importé des idées issues de la théorie géométrique des groupes pour étudier les sous-groupes infinis du groupe de Cremona [17, 18, 37]. En utilisant des idées de Manin, Cantat a démontré que le groupe de Cremona agissait fidèlement sur un espace hyperbolique de dimension infinie que nous noterons $\mathbb{H}_{\mathbb{P}^2}$ [17]. Cet espace est obtenu à partir de la limite des groupes de cohomologie $H^2(X, \mathbb{R})$ de toutes les surfaces rationnelles X munies d'un morphisme birationnel $p : X \to \mathbb{P}^2$. L'espace

$$\lim_{\to} H^2(X, \mathbb{R})$$

peut être complété, la complétion est naturellement munie d'une forme bilinéaire de type $(1, \infty)$ construite à partir des formes d'intersection sur les groupes $H^2(X, \mathbb{R})$. Finalement l'espace $\mathbb{H}_{\mathbb{P}^2}$ est obtenu en prenant l'espace des droites positives dans cette complétion. En utilisant cette construction, Cantat a pu notamment décrire les morphimes de la plupart des réseaux de groupes de Lie simples vers le groupe de Cremona. Tous les morphismes de réseaux ayant la propriété T de Kazdhan sont en quelques sortes "compris". Les deux familles de groupes de Lie simples n'ayant pas la propriété T sont les groupes $\mathrm{PO}(n, 1)$ et $\mathrm{PU}(n, 1)$. Dans le cas hyperbolique réel, il est connu qu'il existe des réseaux de $\mathrm{PO}(n, 1)$ qui se plongent dans le groupe de Cremona (pour certaines valeurs de n). L'étude des représentations de réseaux hyperboliques complexes dans le groupe de Cremona était complètement ouverte et apparaissait comme question dans [45]. Nous avons étudié ce problème dans l'article (A1).

Dans ce qui suit, une représentation d'un groupe dans le groupe de Cremona sera dite *non-élémentaire*, si l'action associée sur l'espace $\mathbb{H}_{\mathbb{P}^2}$ l'est. Un sous-groupe du groupe de Cremona est dit *elliptique* s'il fixe un point dans cet espace. De même le mot *hyperbolique* fait référence au type de l'action d'un élément de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ sur $\mathbb{H}_{\mathbb{P}^2}$.

Le premier théorème tiré de l'article (A1) nécessite très peu de connaissances sur le groupe de Cremona. Pour le prouver nous utilisons le fait que le groupe $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ se plonge dans le groupe d'isométries d'un espace hyperbolique réel et quelques propriétés élémentaires de cette action. Les résultats qui suivent utilisent plus de propriétés du groupe $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$.

Théorème 11 *Soit $\varrho : \Gamma \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ un morphisme non-élémentaire. Alors il existe une fibration $X \to \Sigma$ sur un orbifold hyperbolique telle que le noyau H du morphisme $\Gamma \to \pi_1^{orb}(\Sigma)$ a la propriété suivante. Le groupe $\varrho(H)$ fixe ponctuellement un sous-espace totalement géodésique fermé de $\mathbb{H}_{\mathbb{P}^2}$ de dimension au moins* 2.

Faisons une remarque sur les hypothèses : le fait qu'une représentation $\varrho : \Gamma \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ soit élémentaire peut s'interpréter en termes de géométrie algébrique, voir [17]. Par exemple ϱ est elliptique si et seulement si on peut trouver un modèle birationnel $\alpha : Y \to \mathbb{P}^2$ tel que le groupe $\alpha^{-1}\varrho(\Gamma)\alpha$ soit virtuellement contenu dans la composante neutre du groupe d'automorphismes de Y. De même l'existence d'un point fixe dans le bord visuel pour un groupe $\Lambda < \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ peut s'interpréter en termes de fibration invariante. Ainsi les morphismes élémentaires peuvent être étudiés avec d'autres outils.

Dans le cadre du théorème précédent, on obtient que $G = \varrho(\Gamma)$ est un sous-groupe du groupe de Cremona qui contient un sous-groupe distingué elliptique (en l'occurrence $\varrho(H)$) et qui contient une isométrie hyperbolique. Cette dernière affirmation suit du fait que ϱ est non-élémentaire. Autrement dit, on obtient un sous-groupe elliptique du groupe de Cremona, avec un normalisateur "compliqué". Existe-t-il de tels sous-groupes qui soient infinis ? Peut-on les classer ? Donnons tout d'abord un exemple d'une telle situation.

Exemple 7 *On travaille toujours dans $\mathbb{P}^2$ avec les coordonnées homogènes $[x : y : z]$. On considère l'ouvert $U \subset \mathbb{P}^2$ qui est le complément des trois droites $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ et $\{z = 0\}$. Il est* *isomorphe à $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. En pensant à $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ comme à un groupe, on obtient une action de $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ sur U. Les transformations obtenues sont des automorphismes de $\mathbb{P}^2$. Par ailleurs le groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ agit sur $U \simeq \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$. La matrice*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

agit par la transformation monomiale $(u, v) \mapsto (u^a v^b, u^c v^d)$. On obtient de cette manière un plongement du produit semi-direct

$$(\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*) \rtimes \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$$

dans le groupe de Cremona. On note G_{toric} l'image de ce plongement. Le sous-groupe normal $A = \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ de G_{toric} fixe une sous-variété totalement géodésique de dimension infinie dans $\mathbb{H}_{\mathbb{P}^2}$. En effet ce sous-groupe s'identifie au sous-groupe des matrices diagonales dans $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{C})$. Il agit sur $\mathbb{P}^2$ par automorphismes et fixe chacun des trois points $[1:0:0]$, $[0:1:0]$ et $[0:0:1]$. Notons que puisque ces automorphismes agissent trivialement sur $H^2(\mathbb{P}^2, \mathbb{Z})$, le groupe A fixe un point de $\mathbb{H}_{\mathbb{P}^2}$. Pour voir que A fixe en fait une sous-variété de dimension infinie, on fait l'observation suivante. L'action de A sur $\mathbb{P}^2$ se relève en une action sur la surface X_1 obtenue à partir de $\mathbb{P}^2$ en éclatant les trois points $[1:0:0]$, $[0:1:0]$ et $[0:0:1]$. L'action de A sur X_1 a six points fixes, deux sur chaque diviseur exceptionnel. On peut à nouveau éclater ces six points fixes pour obtenir une surface X_2 sur laquelle A agit à nouveau. À nouveau A fixe deux points sur chacun des diviseurs exceptionnels. On peut donc éclater ces points pour obtenir une surface X_3 sur laquelle A agira. En itérant cette procédure on obtient une suite de surfaces rationnelles X_n. Le groupe A agit trivialement sur tous les groupes $H^2(X_n, \mathbb{R})$, ce qui permet de voir que l'espace des points fixes de A dans $\mathbb{H}_{\mathbb{P}^2}$ est de dimension infinie.

Cet exemple est essentiellement le seul, comme le montre le théorème suivant dû à Cantat, démontré dans l'appendice de l'article (A1).

Théorème 12 *Soit N un sous-groupe de $\mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$. On suppose qu'il existe une suite exacte courte*

$$\{0\} \to A \to N \to B \to \{0\}$$

telle que le groupe N contienne au moins un élément hyperbolique et telle que A soit elliptique infini. Alors N est conjugué à un sous-groupe du groupe G_{toric}.

En utilisant le théorème 12, on obtient facilement le résultat suivant.

Corollaire 1 *Soit $\varrho : \Gamma \to \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2)$ un morphisme non-élémentaire. Alors ϱ satisfait l'une des deux propriétés suivantes :*

1. *Le morphisme ϱ est conjugué à un morphisme à valeurs dans le groupe G_{toric}.*
2. *Quitte à passer à un sous-groupe d'indice fini, ϱ se factorise par une fibration sur un orbifold hyperbolique.*

Nous renvoyons à l'article (A1) pour des énoncés plus précis lorsque le groupe représenté est un réseau cocompact de $\mathrm{PU}(n, 1)$. Mentionnons quelques questions ouvertes. Il serait intéressant d'adapter les résultats précédents aux groupes fondamentaux de variétés quasi-projectives ou tout du moins aux réseaux non-uniformes de $\mathrm{PU}(n, 1)$. On peut aussi s'intéresser aux représentations élémentaires de groupes kählériens dans le groupe de Cremona. Par exemple le groupe

$$J = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C}[y]) \rtimes \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$$

se plonge dans le groupe de Cremona. C'est le groupe des transformations qui préservent une fibration rationnelle, il préserve un point du bord de l'espace $\mathbb{H}_{\mathbb{P}^2}$. Peut-on classer les représentations de groupes kählériens dans le groupe J ?

Concluons cette section avec quelques commentaires plus heuristiques. On peut remarquer que les espaces à courbure négative sur lesquels agissent d'une part les groupes d'automorphismes ou de transformations birationnelles de variétés algébriques et d'autre part les groupes kählériens sont en quelque sorte orthogonaux. Les premiers groupes agissent sur des espaces hyperboliques réels, des arbres, des complexes cubiques CAT(0) [17, 72, 73]. Or les actions de groupes kählériens sur tous ces espaces sont très contraintes. Nous venons de l'expliquer pour le cas des espaces hyperboliques réels ; le cas des arbres est un résultat classique de Gromov et Schoen, et le cas des complexes cubiques est discuté dans la section suivante. Cette orthogonalité est en quelque sorte "attendue" puisque dans le cas contraire, s'il existait par exemple de nombreuses représentations de groupes kählériens dans des groupes d'automorphismes de variétés algébriques, il serait facile de construire des familles de variétés au-dessus de bases kählériennes compactes ou projectives par suspension. Or, on sait bien que de telles familles sont rares. Voir cependant [75, 100] pour quelques exemples.

Il serait tout de même intéressant de donner des applications à la géométrie algébrique de notre théorème sur les représentations de groupes kählériens dans le groupe de Cremona.

3 Actions de groupes kählériens sur les complexes cubiques $\mathrm{CAT}(0)$: un théorème de factorisation sans applications harmoniques

Le but de cette section est de décrire les actions de groupes kählériens sur les complexes cubiques CAT(0). Ces complexes polyhédraux, considérés par Gromov et Davis dans les années 80 puis par Sageev dans les années 90, ont récemment reçu une attention considérable grâce aux travaux de Agol, Haglund et Wise. Leur importance vient d'une part du fait que les exemples de groupes agissant sur de tels espaces sont devenus de plus en plus nombreux ces dernières années et d'autre part du fait que l'introduction de ces complexes a permis des avancées majeures en topologie de dimension 3. Faute de compétence, nous n'en dirons pas plus à ce sujet mais renvoyons par exemple à [4]. Dans ce qui suit nous dirons qu'un groupe est *cubulable* s'il agit de manière proprement discontinue et cocompacte sur un complexe cubique CAT(0).

Les groupes kählériens sont quant à eux essentiellement orthogonaux aux complexes cubiques CAT(0). L'article (A5) décrit complètement les groupes kählériens cubulables ; son résultat principal est décrit dans le théorème 20 de ce texte. Avant ce travail, il existait des résultats partiels concernant les actions de groupes kählériens sur les complexes cubiques CAT(0), voir notamment [35]. Par ailleurs, l'article (A3) décrit les morphismes de groupes kählériens vers les groupes d'Artin à angles droits et vers les groupes de Coxeter. Les groupes d'Artin à angles droits forment une famille emblématique de groupes agissant sur des complexes cubiques CAT(0). Si l'on souhaite comprendre les actions de groupes kählériens sur les complexes cubiques CAT(0), il est donc naturel d'essayer de comprendre ce cas particulier en premier. En fait celui-ci se ramène à celui des arbres, compris depuis longtemps. C'est ce que nous avons observé dans l'article (A3).

La preuve utilise que tout groupe d'Artin à angles droits se plonge comme sous-groupe d'indice fini dans un groupe de Coxeter à angles droits, c'est un résultat de Davis et Januszkiewicz [33]. On est donc ramené à étudier les morphismes dans les groupes de Coxeter. Pour ceux-ci, il existe une construction classique d'arbres à partir de certaines familles de murs du complexe de Davis [54]. Cette construction permet de montrer la proposition suivante.

Proposition 13 *Tout groupe de Coxeter possède un sous-groupe d'indice fini qui agit proprement sur un produit fini d'arbres simpliciaux.*

Notons que les arbres apparaissant dans cette proposition ne sont pas nécessairement localement finis. En utilisant la description des actions de groupes kählériens sur les arbres, on obtient ainsi aisément le théorème suivant :

Théorème 14 *Soit X une variété kählérienne compacte, W un groupe de Coxeter et $\varphi : \pi_1(X) \to W$ un morphisme. Alors il existe un revêtement fini $X_1 \to X$, et des fibrations sur des surfaces de Riemann hyperboliques $p_i : X_1 \to \Sigma_i$ tels que φ se factorise par le morphisme*

$$\pi_1(X_1) \to (\pi_1(X_1))_{\mathrm{ab}} \times \pi_1(\Sigma_1) \times \cdots \times \pi_1(\Sigma_r).$$

On a noté ci-dessus G_{ab} l'abélianisation d'un groupe G.

On peut déduire plusieurs corollaires de ce théorème, voir l'article (A3). Mentionnons-en simplement un : *un réseau cocompact du groupe* $\mathrm{PU}(n, 1)$ *($n \geq 2$) ne se plonge jamais dans un groupe d'Artin à angles droits ou dans un groupe de Coxeter*. Rappelons que dans le cas hyperbolique réel, de nombreux réseaux se plongent dans des groupes d'Artin à angles droits, voir [1, 4, 5].

Les actions de groupes sur les complexes cubiques CAT(0) sont intimement reliées à la notion de *bouts* pour une paire de groupes $H < G$. C'est pourquoi nous rappelons dans la section suivante les résultats connus concernant cette notion dans le cadre kählérien.

3.1 Bouts et groupes kählériens

Nous discutons ici trois notions différentes de *bouts*. Les deux premières sont classiques, la troisième est moins connue. Dans tout ce qui suit, X est une variété compacte.

Le nombre de bout $e(\widetilde{X})$ du revêtement universel $\widetilde{X}$ de X est égal au nombre de bouts de son groupe fondamental. D'après un théorème de Hopf, il ne peut prendre que les valeurs 0, 1, 2, ∞. Si X est kählérienne et si l'on suppose le groupe $\pi_1(X)$ infini, alors ce nombre ne peut prendre que la valeur 1. La valeur 2 est exclue, en effet l'égalité $e(\widetilde{X}) = 2$ impliquerait l'existence d'un revêtement fini de X ayant un premier nombre de Betti égal à 1, ce qui est proscrit par la théorie de Hodge. La valeur ∞ est exclue par un résultat de Arapura, Bressler et Ramachandran [3], qui repose sur des idées de Gromov [48].

Si $Y \to X$ est un revêtement quelconque, on peut considérer le nombre de bouts de Y, noté $e(Y)$. Il peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et ∞. Il ne dépend que de la paire

$$H = \pi_1(Y) < G = \pi_1(X).$$

On note alors parfois $e(Y) = e(G, H)$. Si X est Kähler compacte, Napier et Ramachandran [83] ont démontré que l'inégalité $e(Y) \geq 3$ implique que Y fibre proprement sur une surface de Riemann. Faisons deux remarques concernant ce résultat : d'abord il est connu que si $\pi : Y \to \Sigma$ est une fibration propre de Y vers une surface de Riemann, alors il est automatique que π descend en une fibration vers une surface de Riemann définie sur un revêtement fini de X. En particulier ceci a des conséquences concernant un sous-groupe d'indice fini du groupe fondamental de X. Ensuite concernant la preuve : le cas général est assez compliqué. Si l'on fait l'hypothèse que Y vérifie une inégalité isopérimétrique linéaire, la preuve se simplifie énormément, car on peut alors facilement construire des fonctions pluriharmoniques sur Y dont le comportement est prescrit le long des bouts (voir le théorème 19), et conclure avec une version adéquate du théorème de Castelnuovo-de Franchis.

Nous mentionnons maintenant une troisième notion de bouts. On considère une variété ouverte Y. On définit l'ensemble des *bouts filtrés* de Y comme la limite :

$$\lim_{\leftarrow} \pi_0(\widetilde{Y} - \pi^{-1}(K))$$

où $\pi : \widetilde{Y} \to Y$ est le revêtement universel de Y et K décrit l'ensemble des compacts de Y à bord lisse. On note $\widetilde{e}(Y)$ le nombre de bouts filtrés de Y. Cette notion a été introduite par Kropholler et Roller [69], en termes de théorie des groupes. Une approche topologique a ensuite été donnée par Geoghegan [47]. Dans le cadre kählérien, les bouts filtrés ont été étudiés par Delzant et Gromov [35], sous le nom de *cut*. Dans [35], le mot *cut*, appliqué à une variété compacte X, fait en fait référence à l'existence d'un revêtement infini $Y \to X$ tel que $\widetilde{e}(Y) \geq 2$. Cette notion a ensuite été étudiée par Napier et Ramachandran [85, 86]. Le théorème suivant a été prouvé sous des hypothèses additionnelles par Delzant et Gromov, et en toute généralité par Napier et Ramachandran.

Théorème 15 *Soit X une variété kählérienne compacte et $X_1 \to X$ un revêtement infini. Si X_1 a au moins trois bouts filtrés, alors il existe une fibration holomorphe propre de X_1 vers une surface de Riemann.*

Pour revenir aux complexes cubiques CAT(0), mentionnons simplement le résultat suivant, dû à Sageev [93], établi dans sa thèse : un groupe de type fini G agit de manière *essentielle* sur un complexe cubique CAT(0) si et seulement s'il possède un sous-groupe H tel que le nombre de bout relatif $e(G, H)$ soit strictement supérieur à 1. Nous renvoyons à [93] pour la définition d'une action essentielle dans cet énoncé [6]. Si G est kählérien, la présence d'un sous-groupe $H < G$ tel que $e(G, H)$ soit strictement plus grand que 2 force G à fibrer virtuellement, comme nous venons de le rappeler. C'est le théorème de Napier et Ramachandran.

Au vu de ces deux résultats, on peut donc penser que les actions de groupes kählériens sur les complexes cubiques CAT(0) seront très contraintes. Mais deux difficultés se présentent : tout d'abord, pour un groupe agissant sur un complexe cubique CAT(0), il n'est pas évident de pouvoir trouver un sous-groupe avec un nombre de bouts relatifs supérieur ou égal à trois. Autrement dit, améliorer le théorème de Sageev et passer de deux à trois. C'est possible sous des hypothèses adéquates d'hyperbolicité, et c'est ce qu'exploitent Delzant et Gromov dans [35]. D'autre part, même en admettant la présence d'un sous-groupe ayant un nombre de bouts relatifs grand, il faudrait ensuite relier la fibration produite à la dynamique de l'action sur le complexe.

En fait la preuve des résultats de l'article (A5) ne va pas procéder de cette manière (en produisant un sous-groupe ayant un grand nombre de bouts relatifs ou de bouts filtrés). Mais la notion de bout y joue tout de même un rôle important.

Dans la section suivante nous décrivons un nouveau critère de fibration pour obtenir une fibration d'une variété kählérienne ouverte sur une surface de Riemann. Il a été obtenu dans l'article (A5). Nos résultats concernant les groupes kählériens cubulables sont ensuite décrits dans les sections 3.3 et 3.4.

3.2 Un nouveau critère de fibration

Dans le monde kählérien, il existe de nombreux critères de fibrations sur des surfaces de Riemann. On entend par là des conditions suffisantes qui impliquent qu'une variété kählérienne compacte X, ou un de ses revêtements, admet une application holomorphe propre vers une surface de Riemann. Outre les critères basés sur la notion de bouts et déjà rappelés, on peut mentionner le résultat plus classique suivant dû à Castelnuovo-de Franchis :

Théorème 16 *Si α_1 et α_2 sont deux 1-formes holomorphes linéairement indépendantes sur une variété kählérienne compacte X et telles que $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0$, alors X fibre sur une surface de Riemann Σ de genre $g \geq 2$ et les formes α_i sont obtenues par "pull-back" de formes sur Σ.*

Nous renvoyons le lecteur à l'article [86] pour d'autres versions de ce théorème, notamment des versions L^2, où l'on produit des fibrations d'une variété ouverte. Nous prouvons dans (A5) un nouveau critère de fibration qui s'énonce comme suit :

Théorème 17 *Soit $\pi : Y \to X$ un revêtement infini d'une variété kählérienne compacte X. On suppose qu'il existe une fonction $u : Y \to I$ pluriharmonique et propre où $I = \mathbb{R}$ ou $I = (-1, 1)$. Supposons en outre qu'il existe une fonction $v : Y \to \mathbb{R}$ continue, plurisousharmonique, et qui n'est pas une fonction de u. Alors Y admet une fibration propre sur une surface de Riemann.*

Comme de nombreux autres critères de fibration, ce théorème repose sur l'existence de deux objets (fonctions ou 1-formes selon les versions). L'originalité vient ici du fait que l'une de ces deux fonctions est seulement supposée être continue et plurisousharmonique, ce qui donne plus de flexibilité. L'autre en revanche doit être propre, ce qui est plus contraignant.

6. Cette notion d'action essentielle est différente de celle qui apparaît dans [22]. Nous utiliserons la définition de [22] plus loin dans ce texte, notamment dans le théorème 18.

Donnons quelques éléments concernant la preuve du théorème 17. On peut distinguer deux cas : si u possède un niveau $u^{-1}(t_0)$ non connexe, le fait que Y fibre sur une surface de Riemann ne nécessite pas l'existence de la seconde fonction v. C'est un fait bien connu des spécialistes. On peut par exemple le déduire du théorème 15. En effet il n'est pas difficile de voir que Y possède au moins trois bouts filtrés dans ce cas. Nous renvoyons pour cela à la démonstration de la proposition 11 dans l'article (A5). En fait on a $\widetilde{e}(Y) \geq 3$ même sous l'hypothèse plus faible que le relevé de u au revêtement universel de Y a un niveau non connexe.

Nous supposons donc que u a tous ses niveaux connexes. C'est réellement la partie nouvelle dans le théorème 17. On considère le feuilletage singulier $\mathscr{F}$ associé à la 1-forme holomorphe $du^{1,0}$. Il est connu que pour produire une fibration de Y sur une surface de Riemann, il suffit de construire une feuille compacte de $\mathscr{F}$, voir [35] ou [84]. Pour cela on considère la restriction de $\mathscr{F}$ à un niveau régulier $u^{-1}(t_0)$. Par hypothèse, on peut choisir t_0 tel que v ne soit pas constante sur $u^{-1}(t_0)$. Puisque $u^{-1}(t_0)$ est invariant par le feuilletage $\mathscr{F}$, il suffit de trouver une feuille compacte pour la restriction de $\mathscr{F}$ à $u^{-1}(t_0)$. On note donc $\mathscr{G}$ ce feuilletage de $u^{-1}(t_0)$. C'est un feuilletage de codimension réelle 1. Mais le feuilletage $\mathscr{G}$ est défini par une 1-forme fermé non singulière, à savoir la forme $d^{\mathbb{C}}u = du \circ J$. En effet tous les vecteurs tangents à la variété $u^{-1}(t_0)$ sont par définition dans le noyau de du. Ils sont donc dans le noyau de la forme

$$du^{1,0} = du - idu \circ J$$

si et seulement s'ils sont dans le noyau de $d^{\mathbb{C}}u$. Par ailleurs la restriction de la forme $d^{\mathbb{C}}u$ à $u^{-1}(t_0)$ est bien non-singulière comme le montre un petit raisonnement d'algèbre linéaire.

Sur une variété compacte et connexe, un feuilletage de codimension réelle 1 défini par une 1-forme fermée non-singulière a ou bien toutes ses feuilles compactes ou bien toutes ses feuilles denses. Pour trouver une feuille compacte de $\mathscr{G}$, il suffit donc de montrer que l'une au moins de ses feuilles n'est pas dense. Pour cela on choisit un point $p \in u^{-1}(t_0)$ tel que

$$v(p) = \max_{u^{-1}(t_0)} v.$$

On considère la feuille L du feuilletage $\mathscr{G}$ passant par p. Puisque la fonction continue et pluri-sousharmonique v atteint son maximum au point p de L, elle doit être constante sur L. La feuille L est donc contenue dans le niveau

$$\{v = v(p)\}.$$

Mais puisque v n'est pas constante sur $u^{-1}(t_0)$, L ne peut être dense dans $u^{-1}(t_0)$. Ceci termine la preuve du théorème 17.

Il est possible que le théorème 17 trouve d'autres applications à l'étude des groupes kählériens, hors du contexte des complexes cubiques.

3.3 Un théorème de factorisation sans applications harmoniques

Dans tout ce qui suit, nous noterons $Aut(Z)$ le groupe d'automorphismes d'un complexe cubique CAT(0) Z. C'est le groupe de toutes les bijections $Z \to Z$ qui envoient isométriquement un cube de Z sur un autre cube de Z.

Théorème 18 *Soit Z un complexe cubique* CAT(0) *localement fini et irréductible. Soit X une variété kählérienne compacte et $\varrho : \pi_1(X) \to Aut(Z)$ une action de son groupe fondamental sur Z. On suppose que :*

1. *l'action est essentielle,*

2. $\pi_1(X)$ ne fixe pas de point dans le bord visuel de Z,

3. $\pi_1(X)$ ne préserve pas de plat dans Z.

Alors un revêtement fini X_1 de X fibre : il existe une application holomorphe à fibres connexes vers une surface de Riemann $X_1 \to \Sigma$. De plus le noyau du morphisme p_* agit de manière elliptique sur Z.

Nous ne décrirons pas la preuve de ce théorème. Voici seulement quelques indications. L'idée est d'appliquer le théorème 17 à un revêtement adéquat de X. Ce revêtement sera de la forme

$$Y = \widetilde{X}/\Gamma_{\widehat{\mathfrak{h}}}$$

où $\Gamma_{\widehat{\mathfrak{h}}}$ est le sous-groupe des éléments de $\pi_1(X)$ qui stabilisent un hyperplan $\widehat{\mathfrak{h}}$ de Z et qui préservent les deux composantes connexes de son complémentaire. On cherche à construire sur Y des fonctions u et v comme dans le théorème 17. Il est aisé de voir que ce revêtement a au moins deux bouts. En fait la partition de $Z - \widehat{\mathfrak{h}}$ en deux composantes connexes donne naturellement une partition de l'ensemble des bouts de Y en deux ouverts O_1 et O_2. Si l'on choisit $\widehat{\mathfrak{h}}$ de manière adéquate, la variété Y vérifie une inégalité isopérimétrique linéaire, ce qui permet d'appliquer l'élégant résultat suivant :

Théorème 19 *Soit M une variété riemannienne complète, à géométrie bornée, et vérifiant une inégalité isopérimétrique linéaire. Soit $\chi : Bouts(M) \to \{-1, 1\}$ une fonction continue. Alors il existe une unique fonction continue $h_\chi : M \cup Bouts(M) \to [-1, 1]$, qui étend χ, est harmonique sur M, et est d'énergie finie :*

$$\int_M |\nabla h_\chi|^2 < \infty.$$

Nous avons noté ici $Bouts(M)$ l'espace des bouts d'une variété ouverte M, muni de sa topologie naturelle.

Ce théorème est dû indépendamment à Kaimanovich et Woess [57] et Li et Tam [74]. On pourra consulter également [60] pour une preuve simplifiée due à Ramachandran. En appliquant ce théorème à la variété Y et la fonction χ qui vaut 1 sur O_1 et -1 sur O_2, on obtient une fonction propre $u : Y \to (-1, 1)$. Par un argument classique utilisant que la fonction est d'énergie finie, on montre que u est pluriharmonique. Quant à la construction de la seconde fonction v, c'est le point le plus délicat dans l'article (A5). Nous n'en donnerons pas les détails. Mentionnons simplement qu'elle utilise fortement les résultats de Caprace et Sageev [22]. Une fois obtenue la fonction v, on obtient une fibration d'un revêtement fini de X sur une surface de Riemann, et il reste encore à montrer que le noyau du morphisme induit agit de manière elliptique.

Il serait intéressant d'étendre le théorème 18 aux complexes cubiques non nécessairement localement finis. La section 5 de l'article (A5) explique à quelles étapes précises de la preuve l'hypothèse de finitude locale est utilisée.

Remarque 5 *Les résultats que nous avons présentés jusqu'ici permettent de donner deux preuves alternatives du théorème de Gromov et Schoen concernant les actions de groupes kählériens sur les arbres. D'une part on peut utiliser les plongements équivariants d'arbres dans l'espace hyperbolique de dimension infinie [14], combinés avec notre classification des actions de groupes kählériens sur l'espace $\mathbb{H}^\infty$, pour obtenir une nouvelle preuve du résultat de factorisation de Gromov et Schoen. On peut également appliquer le théorème 18 dans le cas où le complexe cubique est un arbre (et vérifier qu'il n'est pas nécessaire de prendre un revêtement fini). Dans les deux cas, on obtient une preuve qui ne nécessite pas d'utiliser la théorie des applications harmoniques à valeurs dans les espaces singuliers. Dans le second cas, on n'utilise même pas d'applications harmoniques, simplement des fonctions harmoniques.*

En utilisant le théorème 18, on peut alors prouver le théorème suivant. C'est la caractérisation promise des groupes kählériens cubulables.

Théorème 20 *Soit Γ un groupe kählérien qui agit proprement discontinûment et cocompactement sur un complexe cubique* $\mathrm{CAT}(0)$*. Alors Γ a un sous-groupe d'indice fini isomorphe à un produit direct de groupes de surfaces, éventuellement avec un facteur abélien libre.*

Outre le théorème 18 ainsi que les travaux de Caprace et Sageev, la preuve de ce théorème utilise un nouvel ingrédient : les travaux de Bridson, Howie, Miller et Short [10]. Dans cet article, les auteurs étudient les sous-groupes des produits directs de la forme

$$G_1 \times \cdots \times G_n$$

où chacun des G_i est ou bien un groupe libre de type fini ou bien le groupe fondamental d'une surface fermée orientée. Ils montrent qu'un sous-groupe d'un tel produit direct qui satisfait certaines propriétés de finitude homologique doit lui-même être isomorphe à un produit direct de groupes libres et de groupes de surfaces. Plus précisément :

Théorème 21 *Soit $\Lambda < G_1 \times \cdots \times G_n$ un sous-groupe. On suppose les groupes $H_i(\Lambda, \mathbb{Z})$ finiment engendrés pour $1 \leq i \leq n$. Alors Λ possède un sous-groupe d'indice fini Λ_1 qui est isomorphe à un produit direct*

$$H_1 \times \cdots \times H_r$$

où $r \leq n$ et où chacun des H_i est un groupe libre de type fini ou un groupe de surface.

L'énoncé de [10] est un peu plus précis mais nous nous contenterons de cette version. Remarquons que ce théorème généralise un résultat classique de Baumslag et Roseblade qui étudiaient les sous-groupes de présentation finie d'un produit direct de deux groupes libres. Pour des généralisations beaucoup plus poussées du théorème ci-dessus, voir par exemple [11].

La condition de finitude homologique du théorème est par exemple impliquée par la condition de finitude FP_n, que nous ne définirons pas ici. Un point important est que si un groupe G possède un espace $K(G, 1)$ qui est un complexe simplicial fini, alors tous ses groupes d'homologie sont de type fini, et G vérifie donc la condition du théorème. C'est le cas par exemple si G agit librement cocompactement et proprement discontinûment sur un complexe cubique $\mathrm{CAT}(0)$ Z. En effet dans ce cas, Z/G peut être muni d'une structure de complexe simplicial fini, par un procédé de subdivision barycentrique.

Pour démontrer le théorème 20, on considère un groupe kählérien Γ agissant sur un complexe cubique $\mathrm{CAT}(0)$ Z, de manière proprement discontinue et cocompacte. Le complexe Z se décompose en un produit de complexes irréductibles :

$$Z = Z_1 \times \cdots \times Z_r.$$

On suppose cette décomposition préservée par Γ, quitte à le remplacer par un sous-groupe d'indice fini. On démontre ensuite que pour chaque facteur Z_i, ou bien l'action de Γ sur Z_i vérifie les conditions du théorème 18, ou bien elle préserve une géodésique de Z_i sur laquelle l'action se factorise par un morphisme vers $\mathbb{Z}$. Ceci permet donc de définir un morphisme

$$\Psi : \Gamma_1 \to \mathbb{Z}^k \times \pi_1(\Sigma_1) \times \cdots \times \pi_1(\Sigma_{r-k})$$

défini sur un sous-groupe d'indice fini $\Gamma_1 < \Gamma$. Le noyau de Ψ est fini. On montre alors en utilisant le théorème 21, ou plutôt sa preuve, que Γ_1 contient un sous-groupe d'indice fini Γ_2 qui n'intersecte pas le noyau de Ψ et dont l'image par Ψ est le produit direct de sous-groupes d'indice fini dans chacun des r facteurs.

3.4 Variétés algébriques asphériques et cubulables

Dans la suite nous dirons qu'une variété fermée est *cubulable* si elle a le même type d'homotopie que le quotient d'un complexe cubique CAT(0) de dimension finie par une action libre, cocompacte et proprement discontinue. Le théorème 20 décrit déjà (virtuellement) le groupe fondamental d'une variété cubulable. Il est naturel de se demander si on peut décrire les variétés kählériennes cubulables à biholomorphisme et revêtement fini près. En effet ces variétés sont asphériques par hypothèse, donc déterminées par leur groupe fondamental. Nous avons également répondu à cette question dans l'article (A5) en obtenant le résultat suivant.

Théorème 22 *Soit X une variété kählérienne compacte. Supposons que X est cubulable. Alors, il existe un revêtement fini $X_1 \to X$ qui est biholomorphe à un fibré principal en tores au-dessus d'un produit de surfaces de Riemann. De plus ce fibré est différentiablement trivial.*

Lorsque X est projective, ce théorème peut être amélioré :

Théorème 23 *Soit X une variété projective lisse. Supposons que X est cubulable. Alors, il existe un revêtement fini $X_1 \to X$ qui est biholomorphe à un produit de surfaces de Riemann et de variétés abéliennes.*

Pour démontrer ces deux théorèmes, on utilise comme annoncé que le groupe fondamental d'une variété X comme dans les théorèmes précédents doit être virtuellement isomorphe à un produit direct de groupes de surface avec éventuellement un facteur abélien libre, grâce au théorème 20. La suite de la preuve ne fait alors plus référence aux complexes cubiques CAT(0). Outre le fait que X est asphérique, elle utilise deux résultats de géométrie kählérienne :

— un morphisme d'un groupe kählérien vers un groupe de surface à noyau de type fini peut être réalisé par une application holomorphe vers une surface de Riemann [25].

— si Y_1 et Y_2 sont kählériennes compactes et si $f : Y_1 \to Y_2$ est une application holomorphe qui réalise une équivalence d'homotopie alors f est un biholomorphisme [101].

Dans le cas projectif on utilise en outre le théorème de réductibilité de Poincaré concernant les sous-variétés des variétés abéliennes.

4 Théorie des représentations et espaces $\mathrm{CAT}(-1)$ exotiques

Comme expliqué dans la section 2.4, dans l'étude des actions de groupes kählériens sur l'espace hyperbolique réel de dimension infinie nous sommes arrivés à la dichotomie suivante : ou bien les actions proviennent d'une fibration sur une orbisurface de Riemann, ou bien elles proviennent d'une action de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ sur l'espace hyperbolique de dimension infinie. Durant la préparation de l'article (A1), se posait donc la question de l'existence de telles actions de $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Nous avons finalement découvert que ces actions existaient et apparaissaient au milieu de la littérature de théorie des représentations. Une description succincte de ces actions et de quelque-unes de leurs propriétés géométriques était donnée dans l'article (A1).

Dans l'article (A2), en collaboration avec Nicolas Monod, nous avons repris cette étude plus en détails et obtenu des résultats plus poussés. Il se trouve que les actions considérées pour $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ existent en fait et partagent des propriétés similaires pour tous les groupes $\mathrm{PO}(n,1)$. C'est donc dans ce cadre plus général que se place l'article (A2).

Énonçons immédiatement un résultat de l'article (A2). Nous l'avons obtenu comme corollaire de notre étude des représentations du groupe $\mathrm{PO}(n,1)$ dans le groupe $\mathrm{O}(1,\infty)$. Mais il se formule uniquement en termes d'espaces métriques à courbure négative, sans faire appel à la théorie des représentations.

Théorème 24 *Il existe une famille $(C_t)_{0<t\leq 1}$ d'espaces métriques $\mathrm{CAT}(-1)$ propres, munis d'une famille d'actions isométriques continues cocompactes et minimales du groupe $\mathrm{PO}(n,1)$. L'espace C_1 est isométrique à l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$. Les espaces $(C_t)_{0<t\leq 1}$ sont deux-à-deux non isométriques (même à homothétie près) et ont tous le même groupe d'isométries : $\mathrm{Isom}(C_t) \simeq \mathrm{PO}(n,1)$.*

Rappelons quelques définitions : l'action d'un groupe sur un espace à courbure négative est *minimale* si elle ne préserve aucun convexe fermé non-trivial. Un espace métrique est propre si ses boules fermées sont compactes. Il est géodésiquement complet si tout segment géodésique peut être étendu en une droite géodésique.

Le théorème précédent répond à une question posée par Caprace et Monod dans [20]. En effet, ces auteurs avaient démontré dans [21] le résultat suivant.

Si un groupe de Lie simple G agit continûment isométriquement et cocompactement sur un espace métrique $\mathrm{CAT}(0)$ X et si X est non-compact et géodésiquement complet, alors X est homothétique à l'espace symétrique de G.

Il y a un résultat analogue lorsque G est remplacé par un groupe p-adique et l'espace symétrique de G par l'immeuble de Bruhat-Tits correspondant. Lorsque $G = \mathrm{PO}(n,1)$, les espaces C_t du théorème 24 vérifient toutes les hypothèses de l'énoncé ci-dessus à l'exception de la complétude géodésique. Autrement dit, on ne peut enlever l'hypothèse de complétude géodésique dans le théorème de Caprace et Monod.

Dans la section suivante, nous introduisons les notions de théorie des représentations nécessaires pour décrire les actions de $\mathrm{PO}(n,1)$ sur l'espace hyperbolique de dimension infinie et construire les espaces $(C_t)_{0<t<1}$.

4.1 Actions de $\mathrm{PO}(n,1)$ sur l'espace hyperbolique de dimension infinie

On commence par rappeler la définition de la *série principale sphérique* pour le groupe $\mathrm{PO}(n,1)$. On fixe un point base o dans l'espace hyperbolique $\mathbb{H}^n$ et l'on note K son stabilisateur dans

$\mathrm{PO}(n,1)$. On note μ l'unique forme volume K-invariante de masse totale 1 sur le bord visuel $\partial\mathbb{H}^n$ de $\mathbb{H}^n$, que l'on peut identifier à la sphère unité dans l'espace tangent en o. La série principale sphérique est une famille de représentations linéaires de $\mathrm{PO}(n,1)$ sur l'espace

$$L^2(\partial\mathbb{H}^n,\mu)$$

des classes de fonctions L^2 à valeurs complexes, qui dépend d'un paramètre complexe $s\in\mathbb{C}$. Elle est définie comme suit. Si $g\in\mathrm{PO}(n,1)$ et $f\in L^2(\partial\mathbb{H}^n,\mu)$ on définit :

$$\pi_s(g)(f)=|Jac(g^{-1})|^{\frac{1}{2}+s}\cdot f\circ g^{-1}.$$

On note $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire hermitien standard de $L^2(\partial\mathbb{H}^n,\mu)$. Rappelons quelques observations classiques :

1. On a pour tous g, f_1, f_2 : $\langle\pi_s(g)(f_1),\pi_{-\overline{s}}(g)(f_2)\rangle=\langle f_1,f_2\rangle$. Autrement dit les représentations π_s et $\pi_{-\overline{s}}$ sont contragrédientes.
2. Lorsque s est imaginaire pur, l'on a $s=-\overline{s}$ et π_s est donc unitaire. On obtient ainsi la série principale de représentations unitaires de $\mathrm{PO}(n,1)$.
3. La représentation π_s est irréductible si et seulement si s n'est pas de la forme $\frac{1}{2}+\frac{k}{n-1}$ pour un entier relatif k [105].

On peut alors se demander quelles sont les propriétés de la représentation π_s en fonction du paramètre s. C'est un sujet classique. Mentionnons par exemple le résulat suivant, tiré de [70].

Théorème 25 *Si $n=2$, la représentation π_s est uniformément bornée lorsque la partie réelle de s satisfait $|Re(s)|<\frac{1}{2}$.*

En général on peut également se demander s'il existe sur l'espace $L^2(\partial\mathbb{H}^n,\mu)$ une forme sesquilinéaire invariante sous la représentation π_s. Pour construire une telle forme, il suffit de construire un opérateur

$$A_s : L^2(\partial\mathbb{H}^n,\mu)\to L^2(\partial\mathbb{H}^n,\mu)$$

qui entrelace les représentations π_s et $\pi_{-\overline{s}}$ c'est-à-dire satisfait $A_s\circ\pi_s(g)=\pi_{-\overline{s}}(g)\circ A_s$ pour tout g dans $\mathrm{PO}(n,1)$. On lui associe la forme π_s-invariante

$$B_s(f_1,f_2)=\langle f_1,A_s(f_2)\rangle. \tag{2}$$

L'étude de tels opérateurs d'entrelacement est un sujet classique en théorie des représentations, voir par exemple [56, 63, 64]. Pour le cas qui nous concerne, à savoir celui du groupe $\mathrm{PO}(n,1)$, on a le résultat suivant, dont on pourra trouver une preuve dans [104] par exemple.

Théorème 26 *Supposons le paramètre s réel et strictement positif. Alors il existe un opérateur linéaire borné qui entrelace π_s et π_{-s}.*

Remarque 6 *En fait il est connu que ces opérateurs d'entrelacement existent sous une condition un peu plus générale, à savoir $Re(s)>0$. Mais nous nous concentrerons sur le cas où s est réel.*

À partir de maintenant, on suppose toujours le paramètre s réel et strictement positif et on considère le sous-espace $L^2_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{H}^n,\mu)\subset L^2(\partial\mathbb{H}^n,\mu)$ des fonctions à valeurs réelles. Une fois connu l'existence de l'opérateur A_s, on fait les remarques suivantes. Pour un élément $k\in K$, l'opérateur $\pi_s(k)$ ne dépend pas de s. De plus l'action de K sur $L^2_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{H}^n,\mu)$ est sans multiplicité (les composantes isotypiques sont irréductibles). On note

$$L^2_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{H}^n,\mu)=\bigoplus_{k\geq 0}H^k \tag{3}$$

la décomposition en composantes irréductibles ; dans le modèle adéquat H^k s'identifie aux restrictions à la sphère des polynômes harmoniques homogènes de degré k. Ces deux remarques impliquent que l'opérateur A_s doit préserver la décomposition (3), et doit être scalaire sur chaque facteur. On note donc $A_s = \lambda_k(s) Id$ en restriction à l'espace H^k. On normalise toujours l'opérateur A_s en supposant que $\lambda_0(s) = 1$. On a alors :

Proposition 27 *Pour $k \geq 1$, les coefficients $\lambda_k(s)$ sont donnés par la formule :*

$$\lambda_k(s) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{j + \frac{n-1}{2} - (n-1)s}{j + \frac{n-1}{2} + (n-1)s}.$$

Le lecteur pourra trouver une démonstration de cette formule dans l'article [56] pour $n \geq 3$. Lorsque $n = 2$, le calcul est plus simple et reproduit dans notre article (A1), mais il est beaucoup plus ancien et apparaît par exemples dans les travaux de Sally [95]. Tous ces résultats sont classiques en théorie des représentations. Cependant, le fait que ces formules définissent des représentations du groupe $\mathrm{PO}(n,1)$ dans certains groupes $\mathrm{O}(p,\infty)$ et donc, suivant Gromov, des actions de $\mathrm{PO}(n,1)$ sur des espaces CAT(0) de dimension infinie, avait été largement ignoré jusque là. Précisons cette remarque.

Soit $\mathscr{H}$ un espace de Hilbert, disons séparable, et $(e_i)_{i\geq 1}$ une base hilbertienne de $\mathscr{H}$. Fixons un entier $p \geq 1$. On note S_p la forme bilinéaire définie sur $\mathscr{H}$ par :

$$S_p(x,y) = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i - \sum_{i\geq p+1} x_i y_i$$

où $x = \sum_{i\geq 1} x_i e_i$ et $y = \sum_{i\geq 1} y_i e_i$. On note aussi $\mathrm{O}(p,\infty)$ le groupe des opérateurs linéaires inversibles de $\mathscr{H}$ dans lui-même qui préservent S_p. Ces opérateurs sont automatiquement bornés. Pour une définition plus intrinsèque de ce groupe ou de la forme S_p, voir [14] : la forme S_p peut être caractérisée à isomorphisme près comme l'unique forme bilinéaire d'indice fini p sur un espace de Hilbert séparable, qui est *fortement non-dégénérée*. Dans [49], Gromov suggère d'étudier le groupe $\mathrm{O}(p,\infty)$ ainsi que les groupes discrets ou localement compacts qui s'y représentent, notamment via leur action sur l'espace symétrique $X(p,\infty)$ de $\mathrm{O}(p,\infty)$. Celui-ci est l'ensemble des sous-espaces de dimension p de $\mathscr{H}$ sur lesquels la forme B_p est définie positive. Il peut naturellement être muni d'une distance qui en fait un espace CAT(0). Une étude détaillée de $X(p,\infty)$ et quelques résultats de rigidité pour les représentations à valeurs dans $\mathrm{O}(p,\infty)$ se trouvent dans les travaux de Duchesne [41, 42]. On connaît cependant peu d'exemples explicites de groupes admettant des représentations irréductibles dans $\mathrm{O}(p,\infty)$. On sait que les groupes d'automorphismes d'arbres se représentent dans $\mathrm{O}(1,\infty)$. Ceci a été suggéré par Gromov et étudié en détails dans [14].

La discussion précédente montre que la série principale fournit de nombreux exemples de représentations du groupe $\mathrm{PO}(n,1)$ dans les groupes $\mathrm{O}(p,\infty)$. En effet, la forme $B_s = \langle \cdot, A_s(\cdot)\rangle$ rend la décomposition (3) orthogonale et est égale à $\langle \cdot,\cdot\rangle$ multiplié par la constante $\lambda_k(s)$ sur H^k. Lorsque s n'est pas égal à l'une des valeurs $\frac{1}{2} + \frac{k}{n-1}$, on obtient donc une forme bilinéaire non-dégénérée d'indice fini sur l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{H}^n, \mu)$.

Exemple 8 *Lorsque s est dans l'intervalle $(0, \frac{1}{2})$, tous les $\lambda_k(s)$ sont positifs, et π_s préserve donc un produit scalaire. On obtient la série complémentaire de représentations unitaires de* $\mathrm{PO}(n,1)$*.*

Exemple 9 *Lorsque s est dans l'intervalle $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1})$, tous les $\lambda_i(s)$ pour $i \geq 1$ sont négatifs, et l'on obtient une forme d'indice* 1 *et de signature* $(1,\infty)$*.*

En général en utilisant la dimension des espaces de polynômes harmoniques H^k, on peut voir que lorsque π_s est irréductible et $s > \frac{1}{2}$, les indices des formes B_s sont exactement les nombres

$$\binom{n-1+j}{n-1} \tag{4}$$

pour $j \geq 0$. On prendra garde au fait que tous ces formes bilinéaires ne sont pas fortement non-dégénérées. C'est une conséquence aisée du fait que les coefficients $\lambda_k(s)$ convergent vers 0 lorsque k tend vers l'infini. Cependant on peut naturellement compléter l'espace $(L^2_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{H}^n, \mu), B_s)$ de sorte que la complétion soit un espace de Hilbert muni d'une forme fortement non-dégénérée de même signature et que l'action de $\mathrm{PO}(n,1)$ s'étende à la complétion.

Remarque 7 *On définit de manière similaire la série principale* $(\pi_s)_{s\in\mathbb{C}}$ *des groupes* $\mathrm{SU}(n,1)$ *ou* $\mathrm{Sp}(n,1)$*. Il est encore vrai que les représentations* π_s *préservent une forme sesquilinéaire non-dégénérée lorsque* s *est réel positif et* π_s *irréductible. Cependant, pour les groupes* $\mathrm{SU}(n,1)$ *et* $\mathrm{Sp}(n,1)$*, les formes bilinéaires obtenues sont d'indice infini dès qu'elles ne sont plus définies. On n'obtient donc pas de représentations dans les groupes* $\mathrm{O}(p,\infty)$ *(voir les formules page 156 dans [56]).*

En résumé, la série principale fournit de nombreux exemples de représentations de $\mathrm{PO}(n,1)$ dans certains groupes $\mathrm{O}(p,\infty)$. On peut alors étudier de nombreuses questions reliées à ces représentations. Par exemple : les représentations irréductibles de $\mathrm{PO}(n,1)$ dans les groupes $\mathrm{O}(p,\infty)$ ou $\mathrm{PO}(p,\infty)$ sont-elles toutes conjuguées à l'une de celles qui viennent de la série principale ? Peut-on étudier géométriquement les actions de $\mathrm{PO}(n,1)$ sur les espaces symétriques $X(p,\infty)$ associées à ces représentations ?

Dans cet esprit nous avons démontré avec Monod que les représentations irréductibles du groupe $\mathrm{PO}(n,1)$ dans le groupe $\mathrm{PO}(1,\infty)$ sont toutes conjuguées à l'une des représentations qui apparaît dans la série principale. Plus précisément, nous démontrons :

Théorème 28
1. *Soit* $\varrho : \mathrm{PO}(n,1) \to \mathrm{PO}(1,\infty)$ *une représentation non-élémentaire continue. Il existe* $t \in (0,1]$ *tel que* $\ell_\varrho(g) = t\ell_{\mathbb{H}^n}(g)$ *pour tout* g *dans* $\mathrm{PO}(n,1)$*. Le nombre* t *est égal à* 1 *si et seulement si* ϱ *préserve un sous-espace totalement géodésique de dimension* n *dans* $\mathbb{H}^\infty$*.*
2. *Pour tout* t *dans* $(0,1)$*, il existe, à conjugaison près dans* $\mathrm{PO}(1,\infty)$*, exactement une représentation irréductible continue* ϱ_t *telle que* $\ell_{\varrho_t} = t\ell_{\mathbb{H}^n}$*.*

On a noté ici $\ell_{\mathbb{H}^n} : \mathrm{PO}(n,1) \to \mathbb{R}_+$ (resp. ℓ_ϱ) la fonction qui associe à un élément de $\mathrm{PO}(n,1)$ sa longueur de translation pour son action sur $\mathbb{H}^n$ (resp. sur $\mathbb{H}^\infty$ via ϱ).

La preuve de ce résultat s'inspire de [14] où un résultat similaire est établi lorsque le groupe $\mathrm{PO}(n,1)$ est remplacé par le groupe d'automorphismes d'un arbre régulier. La représentation ϱ_t est en fait la représentation associée à π_s pour $s = \frac{1}{2} + \frac{t}{n-1}$. La preuve combine des arguments géométriques avec des arguments d'analyse harmonique et de théorie des représentations.

Dans la section 4.2, nous expliquons quelques éléments de preuve du théorème 24, et notamment comment construire l'espace C_t à partir de la représentation ϱ_t.

4.2 Espaces $\mathrm{CAT}(-1)$ ayant le même groupe d'isométries que l'espace hyperbolique

On considère l'action de $\mathrm{PO}(n,1)$ sur $\mathbb{H}^\infty$ associée à la représentation π_s avec $s = \frac{1}{2} + \frac{t}{n-1}$ où $t \in (0,1)$. Autrement dit, on considère l'espace $L^2_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{H}^n, \mu)$ muni de la forme B_s, que l'on complète de manière adéquate, et l'on étudie l'action de $\mathrm{PO}(n,1)$ sur l'hyperboloïde des vecteurs de norme 1 dans cette complétion. Il existe un unique point K-fixe dans cet espace hyperbolique. Cela vient du fait que l'espace des vecteurs K-invariants dans $L^2_{\mathbb{R}}(\partial\mathbb{H}^n,\mu)$ est de dimension 1. Il existe donc une unique application $\mathrm{PO}(n,1)$-équivariante de $\mathbb{H}^n$ dans $\mathbb{H}^\infty$. On la note f_t. Nous montrons alors :

Théorème 29 *L'application f_t a les propriétés suivantes :*

1. *f_t est harmonique,*
2. *f_t est presque isométrique, modulo une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe une constante $D \geq 0$ telle que*
$$|d_{\mathbb{H}^\infty}(f_t(x),f_t(y)) - t d_{\mathbb{H}^n}(x,y)| \leq D$$
pour tous points x,y de $\mathbb{H}^n$.
3. *L'image de f_t est une sous-variété minimale de courbure $\frac{-n}{t(t+n-1)}$, et l'on a $f_t^* g_{hyp} = \frac{t(t+n-1)}{n} g_{hyp}$.*
4. *L'application f_t s'étend continûment en une application $\overline{\mathbb{H}^n} \to \overline{\mathbb{H}^\infty}$ (où $\overline{\mathbb{H}^i}$ est l'union de $\mathbb{H}^i$ et de son bord visuel).*

Expliquons maintenant comment définir l'espace C_t :

— L'espace C_t est le plus petit convexe fermé de $\mathbb{H}^\infty$ qui contient l'image de f_t.

— L'espace C_t est l'enveloppe convexe de $f_t(\partial\mathbb{H}^n)$, c'est-à-dire le plus petit convexe fermé dont le bord contient $f_t(\partial\mathbb{H}^n)$.

Il n'est pas difficile de voir que ces deux définitions coïncident. Une troisième définition, là encore équivalente, serait de dire que C_t est l'unique convexe fermé minimal invariant par ϱ_t. On a alors le résultat suivant, qui reprend une partie de l'énoncé du théorème 24.

Théorème 30 *Pour tout t dans $(0,1)$, l'espace C_t est localement compact. L'action de $\mathrm{PO}(n,1)$ sur C_t est cocompacte. En outre, les espaces métriques C_t et $C_{t'}$ ne sont pas homothétiques si $t \neq t'$.*

Remarquons que dans la dernière affirmation du théorème, on ne fait pas d'hypothèse d'équivariance. Autrement dit : s'il existe une application $h : C_t \to C_{t'}$ bijective et une constante $\alpha > 0$ telles que $d(h(x),h(y)) = \alpha d(x,y)$ pour tous x,y dans C_t, alors $t = t'$.

Le point le plus remarquable de ce théorème est le fait que C_t soit localement compact. On peut expliquer rapidement la preuve de ce fait. Tout d'abord l'ensemble $f_t(\partial\mathbb{H}^n)$ est une K-orbite, c'est donc un compact de $\partial\mathbb{H}^\infty$. On utilise ensuite le modèle de Klein. Dans ce modèle, $\overline{\mathbb{H}^\infty}$ s'identifie à la boule unité fermée d'un espace de Hilbert et les géodésiques hyperboliques coïncident avec les segments euclidiens. Vu dans le modèle de Klein, l'union de C_t et de son bord est égale à l'enveloppe convexe (usuelle ou euclidienne) de $f_t(\partial\mathbb{H}^n)$. Puisque $f_t(\partial\mathbb{H}^n)$ est compact, pour la topologie de la norme, un théorème de Mazur assure que $C_t \cup \partial C_t$ est compact (pour la topologie de la norme de l'espace de Hilbert ambiant). L'intersection de C_t avec n'importe quelle boule fermée B_α de rayon $\alpha < 1$ centrée en 0 est donc compacte pour la topologie de la norme. On utilise alors le fait que sur les parties bornées de $\mathbb{H}^\infty$, ou encore sur n'importe quelle boule fermée de rayon < 1 les distances hyperboliques et euclidiennes sont équivalentes. Ceci démontre que C_t est un espace propre, donc localement compact.

Pour le fait que l'action du groupe $\mathrm{PO}(n,1)$ est cocompacte et le fait que les différents C_t sont non-homothétiques, nous renvoyons le lecteur à l'article (A2).

Finalement, la partie cruciale qui manque alors pour compléter l'énoncé 24 est le résultat suivant :

Théorème 31 *Le groupe d'isométries de l'espace métrique C_t est isomorphe au groupe d'isométries de $\mathbb{H}^n$:*
$$\mathrm{Isom}(C_t) \simeq \mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) \simeq \mathrm{PO}(n,1).$$

Expliquons les grande lignes de la preuve de ce résultat : une fois connu le fait que C_t est localement compact, son groupe d'isométries hérite de la topologie compact-ouverte, qui en fait un groupe topologique localement compact. On utilise alors des résultats sur la structure des groupes localement compacts et notamment le théorème suivant dû à Yamabe :

Théorème 32 *Soit H un groupe topologique localement compact dont la composante neutre est cocompacte. Il existe alors un sous-groupe normal compact $U \lhd H$ tel que H/U soit un groupe de Lie.*

Notons qu'un sous-groupe fermé $H < \mathrm{Isom}(C_t)$ qui agit de manière cocompacte sur C_t est cocompact dans $\mathrm{Isom}(C_t)$. Cela suit de la définition de la topologie du groupe. Puisque $\mathrm{Isom}(C_t)$ contient le groupe connexe $\mathrm{PO}(n,1)^\circ$, qui agit de manière cocompacte sur C_t, la composante neutre
$$\mathrm{Isom}(C_t)^\circ$$
est cocompacte dans $\mathrm{Isom}(C_t)$. Le théorème 32 s'applique donc et fournit un sous-groupe compact $U \lhd \mathrm{Isom}(C_t)$ tel que $\mathrm{Isom}(C_t)/U$ soit un groupe de Lie. Cependant il est aisé de voir que U est nécessairement trivial : l'ensemble des points fixes de U dans C_t est nécessairement non-vide, mais il est invariant par le groupe $\mathrm{Isom}(C_t)$ puisque U est distingué. On a donc
$$C_t^U = C_t$$
par minimalité de C_t, et U est trivial. À ce stade on sait donc que $\mathrm{Isom}(C_t)$, muni de sa structure de groupe topologique, est en fait un groupe de Lie. À partir de là, en utilisant des résultats classiques sur la structure des groupes de Lie ainsi que quelques résultats concernant les actions de groupes sur les espaces $\mathrm{CAT}(0)$, on montre que $\mathrm{Isom}(C_t)$ est semisimple puis que $\mathrm{Isom}(C_t)$ est en fait égal à $\mathrm{PO}(n,1)$. Ce dernier point est aisé puisque l'on sait que $\mathrm{PO}(n,1)$ se plonge de manière cocompacte dans $\mathrm{Isom}(C_t)$.

Notons que nous ne savons pas démontrer "directement" le théorème 31, sans avoir recours au théorème de Yamabe.

Nous mentionnons finalement un dernier résultat concernant la famille d'espaces (C_t). Il est naturel d'attendre que les espaces C_t, munis de l'action de $\mathrm{PO}(n,1)$, dépendent continûment de t. Pour cela nous devons d'abord préciser la topologie considérée. Outre le fait qu'ils sont munis d'une action de $\mathrm{PO}(n,1)$, on considère aussi les C_t comme des espaces pointés. Pour cela on considère toujours comme point base l'unique point K-fixe dans C_t (où K est un sous-groupe compact maximal fixé dans $\mathrm{PO}(n,1)$).

Étant donné un groupe localement compact G, nous introduisons une topologie, appelée *topologie forte*, sur la classe de tous les espaces métriques pointés munis d'une action continue et isométrique de G. Nous renvoyons au pragraphe 4.B de l'article (A2) pour sa définition. La convergence au sens de cette topologie implique la converge au sens de Gromov-Hausdorff pour les espaces métriques pointés. Cette topologie est distincte d'autres topologies préexistantes sur l'ensemble des espaces métriques munis d'une action d'un groupe localement compact fixé [6, 89]. Nous obtenons alors le résultat suivant.

Théorème 33 *L'application $t \in (0,1] \mapsto C_t$ est continue pour la topologie forte.*

La subtilité dans la preuve vient du fait suivant. Si la famille de représentations π_s peut être vue comme une famille agissant sur un espace de Hilbert fixe et préservant une forme bilinéaire dépendant de s, nous avons vu que l'hyperboloïde associé n'est pas complet. Il faut donc le compléter, mais ce processus dépend de s. On doit donc montrer qu'on peut réaliser à conjugaison près toutes les représentations complétées des π_s sur un même espace de Hilbert, de sorte qu'elles vérifient des hypothèse de continuité naturelle et de sorte que les espaces C_t puissent être vus comme des convexes variant avec t mais évoluant dans un espace hyperbolique "fixe".

4.3 Représentations dans les groupes $\mathrm{O}(p,\infty)$

Dans ce paragraphe nous évoquons brièvement les représentations du groupe $\mathrm{PO}(n,1)$ qui préservent une forme de type (p,∞) avec $p>1$. Lorsque $n=2$, la formule (4) montre qu'il existe pour chaque entier p une famille à un paramètre de représentations irréductibles de $\mathrm{PO}(2,1)$ dans le groupe $\mathrm{O}(p,\infty)$. Cependant, lorsque $n\geq 3$ on n'obtient des représentations de $\mathrm{PO}(n,1)$ dans $\mathrm{O}(p,\infty)$ que pour *certaines* valeurs de p. Par exemple on obtient toujours la valeur 1, mais le second indice le plus petit obtenu est n. Et lorsque $n=3$ les nombres obtenus sont les nombres triangulaires :

$$\frac{(j+1)(j+2)}{2}, j\geq 0.$$

On peut donc se demander si toute représentation irréductible du groupe $\mathrm{PO}(n,1)$ dans l'un des groupes $\mathrm{O}(p,\infty)$ provient de la série principale et en particulier si les indices qui n'apparaissent pas dans la série principale sont bel et bien proscrits. Nous avons démontré un résultat partiel dans ce sens :

Théorème 34 *Supposons que $n\geq 5$ et $1<p<n$. Alors il n'existe pas de représentation irréductible*

$$\mathrm{PO}(n,1)^\circ \to \mathrm{O}(p,\infty).$$

La preuve de ce théorème nous a amené à découvrir que les formes bilinéaires d'indice fini apparaissaient déjà dans certains travaux de Naimark des années 60 [79, 80, 81, 82] et même dans un article de Pontryagin de 1944 [90]. On utilise notamment un résultat de Naimark pour établir la proposition suivante, classique dans le cas unitaire.

Proposition 35 *Soit (G,K) une paire de Gelfand et $k=\mathbb{R}$ ou $k=\mathbb{C}$. Soit π une représentation k-linéaire continue de G sur un k-espace de Hilbert $\mathscr{H}$ préservant une forme sesquilinéaire continue, fortement non-dégénérée et d'indice fini. Si π est irréductible la dimension de l'espace $\mathscr{H}^K$ est au plus 1 si $k=\mathbb{C}$ et au plus 2 si $k=\mathbb{R}$.*

Cette proposition est elle-même utilisée pour établir le théorème 34. L'article (A2) contient également quelques résultats concernant les convexes invariants par les actions affines de groupes de Lie. Ces considérations étaient motivées d'une part par une question de l'article [31] mais également par le problème d'étudier les représentations ϱ_t lorsque t tend vers 0 et de les relier à la représentation affine naturelle "contenue" dans $\pi_{\frac{1}{2}}$. Expliquons cette remarque : la représentation $\pi_{\frac{1}{2}}$ est simplement l'action sur l'espace $L^2(\partial\mathbb{H}^n,\mu)$ via la formule

$$f\mapsto Jac(g^{-1})f\circ g^{-1}.$$

Elle préserve le sous-espace V_0 des fonctions d'intégrale nulle et on dispose du cocycle naturel à valeurs dans V_0 :

$$g\mapsto \pi_{\frac{1}{2}}(g)(1)-1.$$

Peut-on relier les espaces C_t lorsque t tend vers 0 à cette action affine ?

5 Perspectives

5.1 Compactifications toroïdales de variétés hyperboliques complexes à cusps

Nous revenons ici sur les compactifications toroïdales de variétés hyperboliques complexes à cusps, déjà évoquées dans la section 2.1. Dans l'article (A4) on étudie la notion de *cohérence* pour les groupes fondamentaux de surfaces complexes, en suivant une idée de Kapovich. Rappelons qu'un groupe est dit cohérent si tous ses sous-groupes de type fini sont de présentation finie. Kapovich a donné en 1998 [58] un critère pour montrer que le groupe fondamental d'une surface kählérienne asphérique était non-cohérent. Ce critère s'énonce ainsi.

Théorème 36 *Soit X une surface kählérienne compacte et asphérique. Supposons qu'il existe une fibration $\pi : X \to \Sigma$ vers une surface de Riemann hyperbolique, sans fibre multiple et qui ne soit pas une submersion holomorphe. Alors l'image du groupe fondamental d'une fibre générique de π dans le groupe $\pi_1(X)$ est de type fini mais pas de présentation finie.*

Kapovich a utilisé ce théorème pour donner les premiers exemples de réseaux cocompacts de $\mathrm{PU}(2,1)$ qui sont non-cohérents. Notons qu'à cette époque on connaissait déjà un certain nombres d'exemples non-cohérents de groupes discrets d'isométries de l'espace hyperbolique réel [7, 61, 91]. En 2013, dans l'article [59], il conjecture que tous les réseaux irréductibles dans les groupes de Lie semisimple non localement isomorphes à $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ sont non-cohérents. Il démontre cette conjecture dans de nombreux cas, notamment pour certains réseaux hyperboliques complexes. Pour cela, il prouve le résultat suivant.

Théorème 37 *Soit X une surface kählérienne compacte et asphérique dont le premier nombre de Betti est positif. On suppose que $\pi_1(X)$ ne possède pas de sous-groupe abélien dont le normalisateur soit d'indice fini dans $\pi_1(X)$. Alors l'un au moins des trois cas suivant a lieu :*

1. *Le groupe $\pi_1(X)$ n'est pas cohérent.*
2. *La surface X a un revêtement fini qui est une surface de Kodaira.*
3. *Pour tout morphisme surjectif ϕ de $\pi_1(X)$ vers $\mathbb{Z}^2$, le noyau de ϕ est isomorphe à un groupe de surface.*

Ici on utilise la convention suivante : une surface de Kodaira est une surface complexe admettant une submersion holomorphe vers une surface de Riemann hyperbolique, à fibres hyperboliques.

Notons que ce résultat n'est pas énoncé tel quel dans [59], mais sa preuve s'y trouve ! On pourra consulter l'article (A4) pour une preuve détaillée de l'énoncé ci-dessus. Dans ce même article nous observons que si $\Gamma < \mathrm{PU}(2,1)$ est un réseau non-uniforme à premier nombre de Betti positif, alors pour tout sous-groupe d'indice fini $\Gamma_1 < \Gamma$ suffisamment profond, la compactification toroïdale $\overline{X_{\Gamma_1}}$ de $\mathbb{H}^2_{\mathbb{C}}/\Gamma_1$ a un groupe fondamental non-cohérent. La preuve consiste à vérifier que la surface $\overline{X_{\Gamma_1}}$ ne peut satisfaire les deux derniers cas dans le théorème précédent.

Remarquons qu'on peut désormais améliorer le théorème 37, grâce à l'article récent [12]. Sur le même sujet, on peut consulter également [46].

Ce résultat concernant le groupe fondamental de ces compactifications toroïdales est modeste. Mais ces compactifications, que l'on peut considérer en toutes dimensions, me semblent être des exemples très intéressants à considérer dans le monde des groupes kählériens. Une première question qui m'intéresse à leur sujet est la conjecture de Shafarevich. On sait que pour un réseau Γ non-uniforme et suffisamment profond, la variété $\overline{X_\Gamma}$ est asphérique. En effet Hummel et Schroeder on démontré qu'elle possède une métrique riemannienne à courbure négative ou nulle. La conjecture de Shafarevich prédit alors que le revêtement universel de $\overline{X_\Gamma}$ devrait être une variété de Stein. Notons que le résultat le plus général en direction de la conjecture de Shafarevich concerne les variétés à groupe fondamental linéaire [44]. Mais l'éventuelle linéarité du groupe fondamental des variétés $\overline{X_\Gamma}$ n'est pas connue. Le résultat de [44] ne s'applique donc pas. Il serait intéressant d'essayer de montrer que le revêtement universel de $\overline{X_\Gamma}$ est Stein en recollant plusieurs fonctions plurisousharmonique. En effet le revêtement universel de $\overline{X_\Gamma}$ contient des copies de $\mathbb{C}^{n-1}$ (qui relèvent les tores ajoutés pour compactifier $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}/\Gamma$). Ces sous-variétés possèdent des voisinages Stein. Leur complémentaire possède lui une métrique hyperbolique complexe.

Une autre série de questions concerne bien sûr les groupes fondamentaux des variétés $\overline{X_\Gamma}$. Ils fournissent des exemples intéressants de groupes kählériens pour lesquels de nombreuses questions sont ouvertes : sont-ils linéaires ? Admettent-ils des homomorphismes surjectifs vers des groupes libres non-abéliens ? Ont-ils la propriété de Haagerup ?

5.2 Surfaces de Schoen

Nous décrivons ici une famille de surfaces de type général construite par C. Schoen [97] et étudiées ensuite par différents auteurs [26, 92]. Nous suivons ici la méthode de Schoen pour décrire la topologie de ces surfaces. On considère une surface de Riemann compacte de genre 2, notée S. On note $J(S)$ sa jacobienne et $i : S \to J(S)$ le plongement associé, bien défini à translation près. On considère alors le sous-ensemble $X \subset J(S) \times J(S)$ défini par :

$$X := \{(i(x), i(y)), x, y \in S\} \cup \{(x, x), x \in J(S)\}.$$

La surface X est réductible, obtenue en recollant $S \times S$ à la jacobienne de S. Schoen démontre dans [97] le remarquable théorème suivant :

Théorème 38 *Il existe une variété complexe $\mathscr{X}$ de dimension 3 et une application holomorphe propre vers le disque $\pi : \mathscr{X} \to \Delta$ telle que $0 \in \Delta$ est la seule valeur critique de π, $\pi^{-1}(0)$ est isomorphe à la surface réductible X, ses deux composantes sont transverses, et le lieu critique de π est réduit à l'intersection des deux composantes irréductibles de $\pi^{-1}(0) \simeq X$.*

Autrement dit, on peut lisser la surface réductible X. Les surfaces $\pi^{-1}(t)$ fournissent donc des exemples intéressants de surfaces algébriques de type général. Décrire leur topologie, et notamment leur groupe fondamental est un problème qui me semble captivant. On peut remarquer que le groupe fondamental de $\pi^{-1}(t)$ $(t \neq 0)$ se surjecte sur celui de la fibre $\pi^{-1}(0)$. Ce dernier groupe est nilpotent de longueur 2, comme observé dans [97]. Ceci assure déjà que le groupe fondamental des surfaces $\pi^{-1}(t)$ $(t \neq 0)$ est non-abélien.

En fait on peut décrire les surfaces $\pi^{-1}(t)$ comme recollement de deux variétés à bord de la manière suivante. Cette observation est bien connue des spécialistes et s'applique plus généralement dans la situation suivante. Supposons que $p : \mathscr{Y} \to \Delta$ soit une application holomorphe propre entre deux variété complexes, telle que 0 soit la seule valeur critique, telle que $\pi^{-1}(0)$ soit l'union de deux sous-variétés lisses transverses X_1 et X_2 d'intersection lisse, et telle que le lieu critique de p soit $X_1 \cap X_2$.

Sous ces hypothèse, les fibrés normaux de $X_1 \cap X_2$ dans X_1 et X_2 sont inverses l'un de l'autre. Dans l'exemple des surfaces de Schoen, ceci peut être vu directement, mais cela suit des hypothèses générales que nous venons de décrire. Si l'on note $X_{i,\varepsilon}$ le complémentaire dans X_i d'un petit voisinage tubulaire lisse de $X_1 \cap X_2$, alors il n'est pas difficile de voir que les bords de $X_{1,\varepsilon}$ et $X_{2,\varepsilon}$

sont difféomorphes et l'on peut montrer qu'une fibre générique de p est difféomorphe à la variété obtenue en recollant $X_{1,\varepsilon}$ et $X_{2,\varepsilon}$.

Dans le cas qui nous intéresse, les deux "pièces" sont simplement $S \times S$ privé d'un voisinage de la diagonale, et le complémentaire de $i(S)$ dans la jacobienne de S. Le groupe fondamental de $J(S)-i(S)$ est nilpotent par un théorème de Nori [88]. J'espère que ces idées permettront de décrire quelques propriétés supplémentaires des groupes fondamentaux des surfaces de Schoen. Ceci fait l'objet de discussions en cours avec C. Llosa Isenrich et X. Roulleau.

5.3 Fonctions "longueur de translation"

Fixons d'une part un groupe kählérien Γ et d'autre part un groupe de Lie simple G. Notons $\mathscr{X}(\Gamma, G)$ l'espace des représentations de Γ dans G de clôture de Zariski réductive, modulo conjugaison. Si $\varrho : \Gamma \to G$ est une représentation, on note $[\varrho]$ sa classe de conjugaison. Fixons un élément $\gamma \in \Gamma$. Notons $\ell_\varrho(\gamma)$ la longueur de translation de $\varrho(\gamma) \in G$ vu comme isométrie de l'espace symétrique de G. Ce nombre ne dépend que de la classe de conjugaison de ϱ et définit donc une fonction

$$L_\gamma : \mathscr{X}(\Gamma, G) \to \mathbb{R}_+.$$

L'idée est de considérer cette longueur de translation non plus comme une fonction de γ mais comme une fonction de la classe de conjugaison de ϱ. Observons maintenant que l'espace $\mathscr{X}(\Gamma, G)$, ou tout du moins sa partie lisse, porte naturellement une structure complexe. Lorsque Γ est le groupe fondamental d'une surface de Riemann, cette structure est utilisée fréquemment, notamment dans [8]. Lorsque G est un groupe complexe, c'est l'une des trois structures complexes qui font de l'espace des représentations [7] de G une variété hyperkählérienne. Remarquons que l'étude de cette structure complexe, pour G réel et pour un groupe kählérien général est encore balbutiante.

Une question qui m'intéresse est de savoir si les fonction L_γ sont plurisousharmoniques pour la structure complexe précédente. Il me semble que ce problème est ouvert, même pour le cas des groupes de surface. Ceci aurait des applications à l'étude de l'espace $\mathscr{X}(\Gamma, G)$ et pourrait peut-être permettre de prouver des résultats de rigidité. Notons que les fonctions $(L_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ séparent les points, tout du moins pour les représentations Zariski denses [32, 62].

Références

[1] I. Agol, *The virtual Haken conjecture*, with an appendix by I. Agol, D. Groves and J. Manning, Doc. Math. **18** (2013), 1045–1087. – cited on p. 20

[2] J. Amoros, M. Burger, K. Corlette, D. Kotschick et D. Toledo, *Fundamental groups of compact Kähler manifolds*, Mathematical Surveys and Monographs **44**, American Mathematical Scoiety, Providence, RI, 1996. – cited on p. 3, 4, 7, 11

[3] D. Arapura, P. Bressler et M. Ramachandran, *On the fundamental group of a compact Kähler manifold*, Duke Math. J. **68**, No. 3 (1992), 477-488. – cited on p. 4, 21

[4] N. Bergeron, *Toute variété de dimension* 3 *compacte et asphérique est virtuellement de Haken (d'après Ian Agol et Daniel T. Wise)*, Séminaire Bourbaki, Exp. No. 1078, Astérisque No. 367-368 (2015), 115–150. – cited on p. 20

[5] N. Bergeron, F. Haglund et D. T. Wise, *Hyperplane sections in arithmetic hyperbolic manifolds*, J. Lond. Math. Soc. (2) **83**, No. 2 (2011), 431–448. – cited on p. 20

7. Du moins, de sa partie lisse.

[6] M. Bestvina, *Degenerations of the hyperbolic space*, Duke Math. J. **56**, No. 1 (1988), 143–161. – cited on p. 32

[7] B. H. Bowditch et G. Mess, *A 4-dimensional Kleinian group*, Trans. Amer. Math. Soc. **344**, No. 1 (1994), 391–405. – cited on p. 34

[8] S. Bradlow, O. García-Prada et P. Gothen, *Surface group representations and $U(p,q)$-Higgs bundles*, J. Differential Geom. **64**, No. 1 (2003), 111–170. – cited on p. 36

[9] M. Bridson et A. Haefliger, *Metric spaces of nonpositive curvature*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **319**, Springer-Verlag, Berlin (1999). – cited on p. 6

[10] M. Bridson, J. Howie, C. F. Miller III et H. Short, *The subgroups of direct products of surface groups*, Dedicated to John Stallings on the occasion of his 65th birthday, Geom. Dedicata **92** (2002), 95–103. – cited on p. 25

[11] M. Bridson, J. Howie, C. F. Miller III et H. Short, *Subgroups of direct products of limit groups*, Ann. of Math. (2) **170**, No. 3 (2009), 1447–1467. – cited on p. 25

[12] C. Bregman et L. Zhang, *On Kähler extensions of Abelian groups*, prépublication 2016, arXiv :1611.09343. – cited on p. 34

[13] M. Burger, *Fundamental groups of Kähler manifolds and geometric group theory*, Bourbaki Seminar No. 1022, (2010). – cited on p. 3

[14] M. Burger, A. Iozzi et N. Monod, *Equivariant embeddings of trees into hyperbolic spaces*, Int. Math. Res. Not. No. 22 (2005), 1331–1369. – cited on p. 6, 16, 24, 29, 30

[15] F. Campana, *Remarques sur les groupes de Kähler nilpotents*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **28**, No. 3 (1995), 307–316. – cited on p. 3

[16] F. Campana, B. Claudon et P. Eyssidieux, *Représentations linéaires des groupes kählériens et de leurs analogues projectifs*, J. Éc. Polytech. Math. **1** (2014), 331–342. – cited on p. 3, 12

[17] S. Cantat, *Sur les groupes de transformations birationnelles des surfaces*, Ann. of Math. (2) **174**, No. 1 (2011), 299–340. – cited on p. 17, 19

[18] S. Cantat et S. Lamy, *Normal subgroups in the Cremona group*, Acta Math. **210**, No. 1 (2013), 31–94. – cited on p. 17

[19] P.-E. Caprace et A. Lytchak, *At infinity of finite-dimensional CAT(0) spaces*, Math. Ann. **346**, No. 1 (2010), 1–21. – cited on p. 9

[20] P. E. Caprace et N. Monod, *Isometry groups of nonpositively curved spaces : structure theory*, J. Topol. **2**, No. 4 (2009), 661–700. – cited on p. 27

[21] P. E. Caprace et N. Monod, *Isometry groups of nonpositively curved spaces : discrete subgroups*, J. Topol. **2**, No. 4 (2009), 700–746. – cited on p. 27

[22] P. E. Caprace et M. Sageev, *Rank rigidity for* CAT(0) *cube complexes*, Geom. Funct. Anal. **21**, No. 4 (2011), 851–891. – cited on p. 3, 22, 24

[23] J. Carlson, S. Müller-Stach et C. Peters, *Period mappings and period domains*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **85**, Cambridge University Press (2003). – cited on p. 11

[24] J. A. Carlson et D. Toledo, *Harmonic mappings of Kähler manifolds to locally symmetric spaces*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., No. 69 (1989), 173–201. – cited on p. 4, 7, 15

[25] F. Catanese, *Differentiable and deformation type of algebraic surfaces, real and symplectic structures*, Symplectic 4-manifolds and algebraic surfaces, Lecture Notes in Math. **1938**, Springer, Berlin (2008), 55–167. – cited on p. 26

[26] C. Ciliberto, M. Mendes Lopes et X. Roulleau, *On Schoen surfaces*, Comment. Math. Helv. **90**, No. 1 (2015), 59–74. – cited on p. 35

[27] B. Claudon, *Géométrie du revêtement universel et groupe fondamental en géométrie kählérienne*, Habilitation à diriger des recherches, Université de Lorraine (2016). – cited on p. 3

[28] B. Claudon, *Smooth families of tori and linear Kähler groups*, à paraître aux Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. – cited on p. 3

[29] K. Corlette, *Flat G-bundles with canonical metrics*, J. Differential Geom. **28**, No. 3 (1988), 361–382. – cited on p. 9

[30] K. Corlette et C. Simpson, *On the classification of rank-two representations of quasiprojective fundamental groups*, Compos. Math. **144**, No. 5 (2008), 1271–1331. – cited on p. 7

[31] Y. de Cornulier, R. Tessera et A. Valette, *Isometric group actions on Hilbert spaces : structure of orbits*, Canad. J. Math. **60**, No. 5 (2008), 1001–1009. – cited on p. 33

[32] F. Dal'bo et I. Kim,*Marked length rigidity for symmetric spaces*, Comment. Math. Helv. **77**, No. 2 (2002), 399–407. – cited on p. 36

[33] M. Davis et T. Januszkiewicz, *Right-angled Artin groups are commensurable with right-angled Coxeter groups*, J. Pure Appl. Algebra **153**, No. 3 (2000), 229–235. – cited on p. 20

[34] T. Delzant, *L'invariant de Bieri-Neumann-Strebel des groupes fondamentaux des variétés kählériennes*, Math. Ann. **348**, No. 1 (2010), 119–125. – cited on p. 3, 4

[35] T. Delzant, et M. Gromov, *Cuts in Kähler groups*, Infinite groups : geometric, combinatorial and dynamical aspects, Progr. Math. **248**, Birkhaüser, Basel (2005), 31–55. – cited on p. 3, 20, 21, 22, 23

[36] M. Deraux, *Géométrie complexe et courbure négative*, Habilitation à diriger des recherches, Université de Grenoble (2010), disponible sur `https://www-fourier.ujf-grenoble.fr/∼deraux/recherche/hdr.pdf`. – cited on p. 3

[37] J. Déserti, *Groupe de Cremona et dynamique complexe : une approche de la conjecture de Zimmer*, Int. Math. Res. Not. (2006). – cited on p. 17

[38] L. F. Di Cerbo, *Finite-volume complex-hyperbolic surfaces, their toroidal compactifications, and geometric applications*, Pacific J. Math. **255**, No. 2 (2012), 305–315. – cited on p.

[39] K. Diederich et E. Mazzilli, *Real and complex analytic sets. The relevance of Segre varieties*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5) **7**, No. 3 (2008), 447–454. – cited on p. 14

[40] S. K. Donaldson, *Twisted harmonic maps and the self-duality equation*, Proc. London Math. Soc. (3) **55**, No. 1 (1987), 127–131. – cited on p. 8, 9

[41] B. Duchesne, *Des espaces de Hadamard symétriques de dimension infinie et de rang fini*, Ph. D. thesis, University of Geneva, July 2011. – cited on p. 29

[42] B. Duchesne, *Infinite dimensional non-positively curved symmetric spaces of finite rank*, Int. Math. Res. Not. No. 7 (2013), 1578–1627. – cited on p. 29

[43] J. Eells et J. H. Sampson, *Harmonic mappings of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160. – cited on p. 9

[44] P. Eyssidieux, L. Katzarkov, T. Pantev et M. Ramachandran, *Linear Shafarevich conjecture*, Ann. of Math. (2) **176**, No. 3 (2012), 1545–1581. – cited on p. 35

[45] C. Favre, *Le groupe de Cremona et ses sous-groupes de type fini*, Séminaire Bourbaki, vol. 2008/2009, Exp. No. 998, Astérisque **332** (2010), 11–43. – cited on p. 17

[46] S. Friedl et S. Vidussi, *On virtual properties of Kähler groups*, prépublication 2017, arXiv :1704.07041. – cited on p. 34

[47] R. Geoghegan, *Topological methods in group theory*, Graduate Texts in Mathematics **243**, Springer, New York (2008). – cited on p. 21

[48] M. Gromov, *Sur le groupe fondamental d'une variété kählérienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **308**, No. 3 (1989), 67–70. – cited on p. 3, 4, 21

[49] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric Group Theory, Vol. 2 London Math. Soc. Lecture Note Ser. **182**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1993). – cited on p. 29

[50] M. Gromov, *Super stable kählerian horseshoe ?*, Essays in mathematics and its applications, Springer, Heidelberg (2012), 151–229. – cited on p. 7, 10

[51] M. Gromov et R. Schoen, *Harmonic maps into singular spaces and* p*-adic superrigidity for lattices in groups of rank one*, Inst. hautes Études Sci. Publ. Math. **76** (1992), 165–246. – cited on p. 4, 8, 12

[52] L. Hernandez, *Kähler manifolds and* $\frac{1}{4}$*-pinching*, Duke Math. J. **62**, No. 3 (1991), 601–611. – cited on p. 10

[53] C. Hummel et V. Schroeder, *Cusp closing in rank one symmetric spaces*, Invent. Math. **123**, No. 2 (1996), 283–307. – cited on p. 10, 11

[54] T. Januszkiewicz, *For Coxeter groups* $z^{|g|}$ *is a coefficient of a uniformly bounded representation*, Fund. Math. **174**, No. 1 (2002), 79–86. – cited on p. 20

[55] F. E. A. Johnson et E. G. Rees, *On the fundamental group of a complex algebraic manifold*, Bull. London Math. Soc. **19**, No. 5 (1987), 463–466. – cited on p. 3

[56] K. D. Johnson et N. R. Wallach, *Composition series and intertwining operators for the spherical principal series. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **229** (1977), 137–173. – cited on p. 28, 29, 30

[57] V. Kaimanovich and W. Woess, *The Dirichlet problem at infinity for random walks on graphs with a strong isoperimetric inequality*, Probab. Theory Related Fields **91**, No. 3-4 (1992), 445–466. – cited on p. 24

[58] M. Kapovich, *On normal subgroups in the fundamental groups of complex surfaces*, preprint arXiv :9808085 (1998). – cited on p. 34

[59] M. Kapovich, *Noncoherence of arithmetic hyperbolic lattices*, Geom. Topol. **17**, No. 1 (2013), 39–71. – cited on p. 34

[60] M. Kapovich, *Energy of harmonic functions and Gromov's proof of Stallings' theorem*, Georgian Math. J. **21**, No. 3 (2014), 281–296. – cited on p. 24

[61] M. Kapovich et L. Potyagailo, *On the absence of Ahlfors' finiteness theorem for Kleinian groups in dimension three*, Topology Appl. **40**, No. 1 (1991), 83–91. – cited on p. 34

[62] I. Kim, *Rigidity on symmetric spaces*, Topology **43**, No. 2 (2004), 393–405. – cited on p. 36

[63] A. W. Knapp, *Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples*, Reprint of the 1986 original. Princeton Landmarks in Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ (2001). – cited on p. 28

[64] A. W. Knapp et E. M. Stein, *Intertwining operators for semisimple groups*, Annals of Mathematics (2) **93**, No. 3 (1971), 489–578. – cited on p. 28

[65] N. Korevaar et R. Schoen, *Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets*, Comm. Anal. Geom. **1**, No. 3-4 (1993), 561-659. – cited on p. 4, 8

[66] N. Korevaar et R. Schoen, *Global existence theorems for harmonic maps to non-locally compact spaces*, Comm. Anal. Geom. **5**, No. 2 (1997), 333–387. – cited on p. 4, 8, 9, 16

[67] N. Korevaar et R. Schoen, *Global existence theorems for harmonic maps : finite rank spaces and an approach to rigidity for smooth actions*, preprint non publié (1999). – cited on p. 9, 16

[68] V. Koziarz, *Sur deux problèmes de géométrie kählérienne : représentations linéaires des groupes fondamentaux et extension de classes de cohomologie*, habilitation à diriger des recherches, Université de Lorraine, (2010). – cited on p. 3

[69] P. H. Kropholler et M. A. Roller, *Relative ends and duality groups*, J. Pure Appl. Algebra **61**, No. 2 (1989), 197–210. – cited on p. 21

[70] R. A. Kunze et E. M. Stein, *Uniformly bounded representations and harmonic analysis on the* 2×2 *real unimodular group*, Amer. J. Math. **82** (1960), 1–62. – cited on p. 28

[71] F. Labourie, *Existence d'applications harmoniques tordues à valeurs dans les variétés à courbure négative*, Proc. Amer. Math. Soc. **111**, No. 3 (1991), 877–882. – cited on p. 9

[72] S. Lamy, *L'alternative de Tits pour* $\mathrm{Aut}[\mathbb{C}^2]$, J. Algebra **239**, No. 2 (2001), 413–437. – cited on p. 19

[73] C. Bisi, J.-P. Furter et S. Lamy, *The tame automorphism group of an affine quadric threefold acting on a square complex*, J. Éc. Polytech. Math. **1** (2014), 161–223. – cited on p. 19

[74] P. Li et L.-F. Tam *Harmonic functions and the structure of complete manifolds*, J. Differential Geom. **35**, No. 2 (1992), 359–383. – cited on p. 24

[75] D. Mégy, *Sections hyperplanes à singularités simples et exemples de variations de structure de Hodge*, Math. Ann. **353**, No. 2 (2012), 633-661. – cited on p. 19

[76] N. Mok, *Strong rigidity of irreducible quotients of polydiscs of finite volume*, Math. Ann. **282**, No. 4 (1988), 555–577. – cited on p. 13

[77] N. Mok, *Factorization of semisimple discrete representations of Kähler groups*, Invent. Math. **110**, No. 3 (1992), 557–614. – cited on p. 12

[78] G. D. Mostow et Y. T. Siu, *A compact Kähler surface of negative curvature not covered by the ball*, Ann. of Math. (2) **112**, No. 2 (1980), 321–360. – cited on p. 10

[79] L. S. Naimark, *On commuting unitary operators in spaces with indefinite metric*, Acta Sci. Math. (Szeged) **24** (1963), 177–189. – cited on p. 33

[80] L. S. Naimark, *Unitary representations of the Lorentz group in spaces with indefinite metric*, Mat. Sb. (N.S.) **65**, No. 107 (1964), 198–211. – cited on p. 33

[81] L. S. Naimark, *On unitary group representations in spaces with indefinite metric*, Acta Sci. Math. (Szeged) **26** (1965), 201–209. – cited on p. 33

[82] L. S. Naimark, *On commutative algebras of operators in the space* Π_k, Dokl. Akad. Nauk SSSR **161** (1965), 767–770. – cited on p. 33

[83] T. Napier et M. Ramachandran, *Structure theorems for complete Kähler manifolds and applications to Lefschetz type theorems*, Geom. Funct. Anal. **5**, No. 5 (1995), 809–851. – cited on p. 21

[84] T. Napier et M. Ramachandran, *Hyperbolic Kähler manifolds and proper holomorphic mappings to Riemann surfaces*, Geom. Funct. Anal. **11**, No. 2 (2001), 382–406. – cited on p. 23

[85] T. Napier et M. Ramachandran, *Filtered ends, proper holomorphic mappings of Kähler manifolds to Riemann surfaces, and Kähler groups*, Geom. Funct. Anal. **17**, No. 5 (2008), 1621–1654. – cited on p. 21

[86] T. Napier et M. Ramachandran, *L^2 Castelnuovo-de Franchis, the cup product lemma, and filtered ends of Kähler manifolds*, J. Topol. Anal. **1**, No. 1 (2009), 29–64. – cited on p. 21, 22

[87] S. Nishikawa, *Variational problems in geometry*, Translations of Mathematical Monographs **205**, Iwanami series in modern mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, (2002). – cited on p. 8

[88] M. V. Nori, *Zariski's conjecture and related problems*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **16**, No. 2 (1983), 305–344. – cited on p. 36

[89] F. Paulin, *Topologie de Gromov équivariante, structures hyperboliques et arbres réels*, Invent. Math. **94**, No. 1 (1988), 53–80. – cited on p. 32

[90] L. S. Pontrjagin, *Hermitian operators in spaces with indefinite metric*, Bull. Acad. Sci. URSS. Sér. Math. **8**, (1944), 243–280. – cited on p. 33

[91] L. Potyagailo, *Finitely generated Kleinian groups in* 3*-space and* 3*-manifolds of infinite homotopy type*, Trans. Amer. Math. Soc. **344**, No. 1 (1994), 57–77. – cited on p. 34

[92] C. Rito, X. Roulleau et A. Sarti, *Explicit Schoen surfaces*, prépublication 2016, arXiv :1609.02235. – cited on p. 35

[93] M. Sageev, *Ends of group pairs and non-positively curved complexes*, Proc. London Math. Soc. (3) **71**, No. 3 (1995), 585–617. – cited on p. 21, 22

[94] M. Sageev, CAT(0) *cube complexes and groups*, Geometric group theory, IAS/Park City Math. Ser. **21**, Amer. Math. Soc. Providence, RI (2014), 7–54. – cited on p. 6

[95] P. J. Sally, *Intertwining operators and the representations of* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, J. Functional Analysis **6** (1970), 441–453. – cited on p. 29

[96] J. H. Sampson, *Applications of harmonic maps to Kähler geometry*, Complex differential geometry and nonlinear differential equations (Brunswick, Maine, 1984), Contemp. Math. **49**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1986), 125–134. – cited on p. 11, 13, 15

[97] C. Schoen, *A family of surfaces constructed from genus* 2 *curves*, Internat. J. Math. **18**, No. 5 (2007), 585–612. – cited on p. 5, 35

[98] J.-P. Serre, *Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristiques* p, International symposium on algebraic topology, Universidad Nacional Autónoma de México and UNESCO, Mexico City (1958), 24–53. – cited on p. 3

[99] C. Simpson, *The ubiquity of variations of Hodge structures*, Complex geometry and Lie theory (Sundance, UT, 1989) Proc. Sympos. Pure Math. **53**, Mer. Math. Providence, RI (1991), 329–348. – cited on p. 7

[100] C. Simpson, *Some families of local systems over smooth projective varieties*, Ann. of Math. (2) **138**, No. 2 (1993), 337–425. – cited on p. 19

[101] Y.-T. Siu, *The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds*, Ann. of Math. (2) **112**, No. 1 (1980), 73–111. – cited on p. 11, 26

[102] Y.-T. Siu, *Complex-analyticity of harmonic maps, vanishing and Lefschetz theorems*, J. Differental Geom. **17**, No. 1 (1982), 55-138. – cited on p. 11

[103] D. Toledo, *Projective varieties with non-residually finite fundamental group*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 77 (1993), 103–119. – cited on p. 3

[104] M. Vergne, *Sur les intégrales d'entrelacement de R. A. Kunze et E. M. Stein*, Séminaire Bourbaki **12**, Exposé No. 369 (1969-1970). – cited on p. 28

[105] N. R. Wallach, *Application of the higher osculating spaces to the spherical principal series*, J. Differential Geometry **5** (1971), 405–413. – cited on p. 28

[106] K. Zuo, *Factorizations of nonrigid Zariski dense representations of* π_1 *of projective algebraic manifolds*, Invent. Math. **118**, No. 1 (1994), 37–46. – cited on p. 12