

Sébastien Racanière

**COHOMOLOGIE
ÉQUIVARIANTE DES ESPACES
 $SU(n)^{2g}$ ET DE LEURS
RÉDUCTIONS
QUASI-HAMILTONIENNES**

Sébastien Racanière

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et
CNRS, Bureau 113, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.

E-mail : `racanier@irma.u-strasbg.fr`

Url : `www-irma.u-strasbg.fr/~racanier`

**COHOMOLOGIE ÉQUIVARIANTE DES
ESPACES $SU(n)^{2g}$ ET DE LEURS
RÉDUCTIONS QUASI-HAMILTONIENNES**

Sébastien Racanière

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	7
Résumé des notations	8
Introduction	11
1. Les espaces quasi-hamiltoniens	17
1.1. Action d'un groupe abélien sur une variété symplectique	17
1.2. Origines de la définition d'un espace quasi-hamiltonien	19
1.3. Exemples concrets	20
1.4. Propriétés de base	23
1.5. Liens avec les espaces hamiltoniens	27
1.6. Réduction et produit de fusion	32
2. Motivations	35
2.1. L'application de restriction de Kirwan	35
2.2. Les espaces de modules de fibrés semi-stables	41
3. L'espace de modules des fibrés semi-stables (cas lisse)	47
3.1. Construction d'un fibré universel	48
3.2. Un fibré sur $(\mathbf{SU}(n)^{2g})_{\mathbf{SU}(n)} \times X'$	50
3.3. Des générateurs de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))/\langle\omega\rangle$ et de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g})$	55
3.4. Un calcul de classes de Chern	60
3.5. La description de l'application de restriction	65
4. L'espace de modules des fibrés semi-stables (cas singulier)	67
4.1. Une fonction de Morse-Bott équivariante sur $\mathbf{SU}(n)$	68
4.2. Étude d'une fonction définie sur $\mathbf{SU}(n)^{2g}$	74

4.3. Une fonction de Morse-Bott généralisée sur $\mathbf{SU}(2)^{2g}$	78
4.4. Et sur $\mathbf{SU}(3)^{2g}$	80
4.5. Appendice : Fonctions de Morse-Bott généralisées	92
Et maintenant ?	97
Bibliographie	99

Remerciements

En premier lieu je tiens à remercier mes deux directrices de thèse Michèle Audin et Frances Kirwan. Je connais Michèle Audin depuis que j'ai écrit mon mémoire de DEA avec elle. En plus des nombreuses heures qu'elle a passées à m'enseigner les mathématiques, je tiens à la remercier pour m'avoir appris ce que je sais de l'écriture d'un texte mathématique. Je remercie Frances Kirwan pour avoir rendu possible mon année au Balliol College d'Oxford et pour s'être montrée disponible tout au long de cette année ainsi que chaque fois que j'étais de passage en Angleterre.

Je remercie Anton Alekseev, Benjamin Enriquez et Lisa Jeffrey, pour avoir accepté de participer à mon jury de thèse. Ma gratitude va tout particulièrement à Benjamin Enriquez pour le fantastique travail de relecture et de correction qu'il a effectué.

Enfin je remercie

- Eckhard Meinrenken pour m'avoir indiqué l'intérêt de l'étude de l'application de Kirwan dans les espaces quasi-hamiltoniens ainsi que pour m'avoir invité à Toronto en juin 2001,
- Lisa Jeffrey pour ses remarques et suggestions chaque fois que je l'ai rencontrée,
- Etienne Mann pour son aide dans la démonstration de la proposition 2.2.1,
- Carlos Tejero et David Martinez pour m'avoir aidé à résoudre un problème lié au calcul de la proposition 3.4.1 (problème dont la solution finale a été trouvée par Michèle Audin),
- Nitin Nitsure pour m'avoir accueilli au Tata Institute of Fundamental Research (un endroit fantastique pour étudier les mathématiques, en particulier les espaces de modules),
- Indranil Biswas pour m'avoir expliqué des passages de [8],
- Tomas Gomez pour avoir répondu à une question concernant le théorème 2.2.5.

Résumé des notations

Toutes les variétés et les applications entre variétés sont supposées lisses. Les applications entre espaces topologiques sont supposées continues. Toutes les sous-variétés sont localement fermées et de dimension constante.

Pour G un groupe de Lie (que l'on supposera toujours compact et connexe), notons \mathfrak{g} son algèbre de Lie. Le groupe G agit sur son algèbre de Lie par l'action adjointe notée Ad . On suppose \mathfrak{g} munie d'un produit scalaire G -invariant. Un tel produit scalaire identifie \mathfrak{g} à \mathfrak{g}^* et permet d'utiliser la notation suivante : si φ est un vecteur de \mathfrak{g}^* et ξ est un vecteur de \mathfrak{g} alors $\langle \varphi, \xi \rangle = \varphi(\xi)$. Si g appartient à G , les différentielles de la multiplication à gauche et à droite par g fournissent deux actions à gauche et à droite de G sur son fibré tangent TG . Si $v \in TG$ on note $g \cdot v$ et $v \cdot g$ ces actions. Les deux 1-formes de Maurer-Cartan, c'est-à-dire $dg \cdot g^{-1}$ et $g^{-1} \cdot dg$, invariantes respectivement à droite et à gauche sont notées $\bar{\theta}$ et θ . La forme angulaire du cercle S^1 est notée $d\theta$.

L'espace classifiant de G est BG et son fibré universel est $EG \rightarrow BG$. Si G agit sur un espace topologique Y , nous écrivons $(Y)_G$ au lieu de $Y \times_G EG$, ainsi $H_G^*(Y) = H^*((Y)_G)$. L'ensemble des points de Y invariants par l'action de G est Y^G . Le stabilisateur dans G d'un point y de Y est $\text{Stab}_G(y)$ ou $\text{Stab}(y)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur le groupe, l'algèbre de Lie de ce stabilisateur est $\mathfrak{stab}(y)$. Si g, h sont deux éléments de G alors $\text{Ad}_g h = ghg^{-1}$.

Si de plus Y est une variété et y est un point de Y , notons $T_y Y$ l'espace tangent à Y en y . Le produit intérieur par un champ de vecteurs v d'une forme σ s'écrit $\iota_v(\sigma)$. Pour ξ un vecteur de \mathfrak{g} et y un point de Y , notons $v_\xi(y)$ la valeur au point y du champ de vecteurs fondamental engendré sur Y par ξ . Pour y dans Y , le sous-espace $\{\xi \in \mathfrak{g} \mid v_\xi(y) = 0\}$ de \mathfrak{g} est \mathfrak{g}_y .

Après avoir choisi une métrique riemannienne $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur Y , si $X \subseteq Y$ est une sous-variété et x est un point de X , nous noterons $\nu_x(X) = (T_x X)^\perp$ la fibre en x du fibré normal $\nu(X)$ sur X . L'application exponentielle induite par la métrique est $\text{Exp} : TY \rightarrow Y$ (elle est définie sur TY si Y est compacte, ici ce sera toujours le cas). Une fonction $f : Y \rightarrow \mathbf{R}$ étant fixée, pour y un point de Y , notons $y(t)$ le chemin de plus grande descente de f d'origine y , c'est à dire le chemin vérifiant $y(0) = y$ et $y'(t) = -\text{grad} f$ pour tout t . Nous appellerons $\omega(y)$ l'ensemble des points limites de y en $+\infty$, en d'autres termes $\omega(y)$ est l'ensemble des x tels qu'il existe une suite u_n de \mathbf{R} tendant vers $+\infty$ telle que $y(u_n)$ tende vers x en $+\infty$. Pour tout $y \in Y$, l'ensemble $\omega(y)$ est contenu dans l'ensemble des points critiques de f .

L'anneau des entiers est noté \mathbf{Z} , le corps des rationnels \mathbf{Q} , celui des réels \mathbf{R} et celui des complexes \mathbf{C} . Le nombre i est une des racines de -1 . La partie réelle d'un nombre complexe z est $\operatorname{Re} z$, son conjugué complexe \bar{z} .

Le groupe unitaire de \mathbf{C}^n est $\mathbf{U}(n)$, le groupe spécial unitaire est $\mathbf{SU}(n)$, leurs algèbres de Lie sont respectivement $\mathfrak{u}(n)$ et $\mathfrak{su}(n)$. La trace et le déterminant d'une matrice A sont notées respectivement $\operatorname{tr} A$ et $\det A$. La matrice identité d'un groupe de matrices est toujours \mathbf{I} .

La r -ième classe de Chern d'un fibré vectoriel H est $c_r(H)$. Le projectif de H est $\mathbf{P}(H)$ (même notation si H est simplement un espace vectoriel).

Sauf indication contraire, toutes les cohomologies seront à coefficients dans \mathbf{Q} .

INTRODUCTION

Le but de cette thèse est de contribuer à l'étude d'un des outils de la théorie des espaces hamiltoniens dans le cas quasi-hamiltonien, l'application de restriction de la réduction de Marsden-Weinstein, et d'apporter ainsi un éclairage nouveau sur la construction de certains générateurs de la cohomologie équivariante des espaces de modules de fibrés semi-stables de déterminant fixé sur une surface compacte de genre donné.

La théorie des espaces quasi-hamiltoniens est encore toute jeune. On peut retrouver ses prémices dans deux articles écrits indépendamment par J. Huebschmann [18] et L. Jeffrey [20]. Leurs résultats sont résumés dans l'article [19]. À la lecture de ces articles, on se rend compte que la motivation première de la théorie des espaces quasi-hamiltoniens est bien l'étude des espaces de modules. Le but est de pouvoir travailler sur ces espaces en n'utilisant que des outils de dimension finie, alors que depuis Atiyah et Bott [1] il était fait fortement usage de la théorie de jauge qui se passe dans des variétés banachiques. L'idée de ne travailler qu'en dimension finie est en fait encore plus vieille puisque qu'on la retrouve déjà dans les travaux de Y. Karshon [23] et A. Weinstein [46]. L'histoire des espaces quasi-hamiltoniens en tant que théorie bien structurée commence en 1997 lorsque A. Alekseev, A. Malkin et E. Meinrenken publient leur article [2] *Lie group valued moment maps*. Comme son nom l'indique, le sujet de ce papier est l'étude d'espaces hamiltoniens dont l'application moment est à valeurs dans le groupe de Lie lui-même et non dans le dual de son algèbre de Lie. De tels espaces sont dits quasi-hamiltoniens. Leur description fait l'objet de la première partie de cette thèse. Si le groupe est abélien, cette théorie se réduit à celle, déjà connue, des actions hamiltoniennes de tores avec application moment à valeurs dans le tore (voir D. McDuff [31] et J. Weitsman [47] à ce sujet). Dans l'article

[2], de nombreux outils propres aux espaces hamiltoniens sont étendus aux espaces quasi-hamiltoniens (en particulier : la réduction de Marsden Weinstein, le théorème de la section symplectique, des propriétés de convexité de l'application moment). D'autres outils ont été étendus depuis (par exemple la distribution de Duistermaat-Heckman dans [3] ou la formule de localisation dans [4]). L'originalité de cette démarche permet d'aborder l'étude de toute une famille d'espaces de modules (dont les espaces de modules de fibrés stables, qui sont l'autre thème central de cette thèse, font partie) en n'ayant à travailler qu'avec des espaces de dimension finie. On peut par exemple grâce à cette théorie prouver que ces espaces sont symplectiques (voir [2]) et calculer certaines de leurs formes d'intersection (voir [4]).

L'histoire de l'étude des espaces de modules de fibrés vectoriels sur des courbes algébriques, qui est liée à des problèmes de gravitation quantique en dimension 2, est bien plus longue. Elle commence avec la théorie des diviseurs d'Abel et Jacobi. En 1909, Birkhoff [7] a démontré que tout fibré vectoriel holomorphe sur la sphère de Riemann est somme de fibrés en droites. Il fallut attendre 1965, avec l'article [36] de M. S. Narasimhan et C. S. Seshadri, pour voir une première avancée spectaculaire dans cette théorie : Narasimhan et Seshadri identifiaient les fibrés vectoriels stables sur une surface de genre donné avec certaines représentations unitaires du groupe fondamental de cette surface privée d'un point.

Si en 1972, Newstead [38] a proposé une famille d'éléments engendrant la cohomologie des espaces de modules de fibrés stables de rang 2 de déterminant fixé (de degré 1), sur une surface compacte, c'est seulement en 1982 que M. F. Atiyah et R. Bott [1] ont proposé des générateurs multiplicatifs de la cohomologie de l'espace de modules dans le cas où le rang et le degré sont premiers entre eux (dans ce cas, l'espace de module est lisse et compact). Ils ont aussi proposé une formule permettant de calculer par récurrence les nombres de Betti de ces espaces. Les années qui ont suivi ont été en partie consacrées à l'étude des relations entre ces générateurs. En particulier, Mumford a conjecturé un ensemble complet de telles relations pour le rang 2, conjecture qui a été démontrée en 1992 par F. Kirwan dans [25]. Dans le cas d'un rang quelconque mais premier au degré, Witten a conjecturé une formule pour les nombres d'intersection des générateurs, elle a été démontrée entre 96 et 98 par Liu [30] et L. Jeffrey, F. Kirwan [22]. Plus récemment, Y. H. Kiem [26] a décrit la cohomologie d'intersection de l'espace de modules (singulier) des fibrés vectoriels semi-stables de rang 2 de degré pair.

Venons-en aux détails propres à cette thèse. Soient n, g deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Soit X une surface de Riemann compacte de genre g .

Soit

$$\mu : \begin{array}{ccc} \mathbf{SU}(n)^{2g} & \longrightarrow & \mathbf{SU}(n) \\ (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) & \longmapsto & \prod_{p=1}^g [A_p, B_p]. \end{array}$$

L'espace produit $\mathbf{SU}(n)^{2g}$ muni de l'action diagonale par conjugaison de $\mathbf{SU}(n)$ est un espace quasi-hamiltonien dont μ est l'application moment (voir le chapitre 1). Soit ζ une racine n -ième de l'unité. On note \mathbf{I} la matrice identité de $\mathbf{SU}(n)$. L'espace quotient $\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I})/\mathbf{SU}(n)$ s'identifie à l'espace de modules \mathfrak{m} des fibrés holomorphes semi-stables de rang n et de déterminant fixé sur X . Considérons la cohomologie $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))$. Si ζ est une racine primitive n -ième de l'unité, cette cohomologie est isomorphe à la cohomologie usuelle de \mathfrak{m} . Si $\zeta = 1$, l'espace de modules est singulier et on s'intéresse alors plutôt à la cohomologie d'intersection de \mathfrak{m} . Young-Hoon Kiem a démontré dans [27] l'existence d'un endomorphisme injectif de la cohomologie d'intersection de \mathfrak{m} dans la cohomologie équivariante de $\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I})$ et aussi d'un endomorphisme surjectif compatible dans l'autre sens. En d'autres termes, la cohomologie équivariante de $\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I})$ est somme directe de la cohomologie d'intersection de \mathfrak{m} et d'un autre espace.

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier l'application de restriction de Kirwan, ou plus simplement application de restriction :

$$r : H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g}) \longrightarrow H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I})).$$

Il est bien connu [24] que, dans le cas hamiltonien, cette application est surjective. Nous verrons qu'ici les choses sont bien différentes. Nous nous intéresserons pour cela à deux cas extrêmes. Le premier est le cas régulier, celui où ζ est une racine primitive de l'unité. L'espace de modules est alors muni d'une forme symplectique qui définit une classe ω dans $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))$. Notons $\langle \omega \rangle$ l'idéal engendré par ω . Dans le théorème 3.3.2 nous verrons une famille $\{a_p, b_{p,j}, d_p\}_{p=2,\dots,n; j=1,\dots,2g}$ de générateurs multiplicatifs de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))/\langle \omega \rangle$ puis dans la proposition 3.3.10 une famille $\{c_p, \sigma_{2p-1,j}\}_{p=2,\dots,n; j=1,\dots,2g}$ de générateurs multiplicatifs de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g})$. Nous démontrons le théorème suivant

Théorème 3.5.1. — *L'application*

$$r' : H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g}) \longrightarrow H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I})) \longrightarrow H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))/\langle \omega \rangle$$

est décrite par

$$\begin{aligned} r'(c_p) &= a_p \quad \text{pour } p = 2, \dots, n \\ r'(\sigma_{2p-1,j}) &= b_{p,j} \quad \text{pour } p = 2, \dots, n, j = 1, \dots, 2g. \end{aligned}$$

En particulier $\text{Im}(r')$ est multiplicativement engendrée par

$$\text{Im}(r') = \langle a_p, b_{p,j}, p = 2, \dots, n, j = 1, \dots, 2g \rangle.$$

Notons que pour n égal à 2, on obtient que l'application r' est surjective (ce résultat a été annoncé dans [40]). En particulier, puisque $H^*(\mathfrak{m})$ est isomorphe à $H_{\text{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))$, ce théorème permet de déduire une construction nouvelle de certains des générateurs classiques (c'est à dire ceux obtenus à partir des classes de Chern d'un fibré universel) de $H^*(\mathfrak{m})$.

Il est aussi très intéressant de comparer ce résultat avec un théorème de L. Jeffrey [21, théorème 7.1] dans lequel elle propose une autre construction originale de générateurs multiplicatifs de $H^*(\mathfrak{m})$.

Le deuxième cas est le plus dégénéré, celui où $\zeta = 1$. Un rapporteur (anonyme) m'a fait remarquer qu'il était facile de voir que si G est un groupe compact, si μ est l'application moment de G^{2g} (voir prop. 1.6.4) et si e est l'élément neutre de G alors l'application de restriction

$$H_G^*(G^{2g}) \longrightarrow H_G^*(\mu^{-1}(e))$$

n'est pas en générale surjective, par opposition au cas hamiltonien, mais est toujours injective. Le dernier travail de cette thèse apporte un éclairage géométrique sur l'injectivité de cette application dans les cas de $\text{SU}(2)$ et $\text{SU}(3)$. Pour cela nous utilisons certaines applications de Morse-Bott dont l'étude a un intérêt en soi. Nous démontrons le théorème :

Théorème 4.3.3 — *Pour tout degré, il existe une suite exacte courte*

$$\{0\} \rightarrow H_{\text{SU}(2)}^*(\text{SU}(2)^{2g}) \rightarrow H_{\text{SU}(2)}^*(\mu^{-1}(\mathbf{I})) \rightarrow H_{\text{SU}(2)}^*(\mu^{-1}(-\mathbf{I})) \rightarrow \{0\}.$$

En particulier, on a

$$H_{\text{SU}(2)}^*(\mu^{-1}(\mathbf{I})) = H_{\text{SU}(2)}^*(\text{SU}(2)^{2g}) \oplus H_{\text{SU}(2)}^*(\mu^{-1}(-\mathbf{I})).$$

Nous démontrons aussi un théorème similaire (théorème 4.4.7) dans le cas de $\text{SU}(3)$.

Cette thèse est organisée de la manière suivante :

Le chapitre 1 sert d'introduction à la théorie des espaces quasi-hamiltoniens. L'exemple donné dans le théorème 1.6.4 est crucial pour le reste de cette thèse. Le chapitre 2 donne des explications sur deux points centraux : l'application de restriction de Kirwan et les espaces de modules de fibrés semi-stables. On y voit en particulier le corollaire 2.1.4, qui montre que l'application de restriction de Kirwan n'est pas forcément surjective dans le cas quasi-hamiltonien. Le chapitre 3 est consacré à l'étude du cas où l'espace réduit est lisse. Dans le paragraphe 3.1, on construit un fibré universel U sur $\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I})/\text{SU}(n) \times X$.

On y démontre aussi la proposition 3.2.3 qui lie U à un certain fibré sur $(\mathbf{SU}(n)^{2g})_{\mathbf{SU}(n)} \times X'$, où X' est X privé d'un point. Dans 3.3 on explique comment obtenir des générateurs de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))$ à partir des classes de Chern de U , on se donne des générateurs de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))/\langle\omega\rangle$ et enfin on décrit, dans le théorème 3.5.1, l'application $r' : H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g}) \longrightarrow H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))/\langle\omega\rangle$ en fonction de ces générateurs. Une première version de ces résultats, dans le cas $n = 2$, a été annoncée dans [40].

Le chapitre 4 est consacré à l'étude du cas singulier, dans ce chapitre ζ est pris égal à 1. Dans le paragraphe 4.1 on prouve le théorème 4.1.9 qui dit que, pour n non divisible par 4, la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbf{SU}(n) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ A &\longmapsto -\operatorname{Re} \operatorname{tr}(A) \end{aligned}$$

est une fonction de Morse-Bott et qui donne les sous-ensembles critiques de cette fonction ainsi que leurs indices. Dans le paragraphe 4.2 on donne les sous-ensembles critiques de $f \circ \mu : \mathbf{SU}(n)^{2g} \longrightarrow \mathbf{R}$. Dans 4.3 on prouve que la fonction $f \circ \mu : \mathbf{SU}(2)^{2g} \longrightarrow \mathbf{R}$ est de Morse-Bott généralisée. Enfin on montre que les suites exactes longues que l'on peut déduire de ce résultat se scindent. Ceci nous donne le théorème 4.3.3. Le paragraphe suivant est consacré à une étude similaire dans le cas de $\mathbf{SU}(3)$, le résultat principal y est le théorème 4.4.7.

CHAPITRE 1

LES ESPACES QUASI-HAMILTONIENS

1.1. Action d'un groupe abélien sur une variété symplectique

On considère le tore $\mathbf{T} = (S^1)^n$ de dimension n et une variété M munie d'une action de \mathbf{T} et d'une 2-forme symplectique ω invariante sous cette action. Soit \mathfrak{t} l'algèbre de Lie de \mathbf{T} . Si $\xi \in \mathfrak{t}$ on a

$$d\iota(v_\xi)\omega = \iota(v_\xi)d\omega - L_{v_\xi}\omega = 0.$$

On peut donc définir une application

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(M) & \xrightarrow{H} & \mathfrak{t}^* \\ \gamma & \longmapsto & (\xi \mapsto \int_\gamma \iota(v_\xi)\omega) \end{array}$$

qui est un homomorphisme de groupes.

1.1.1. Cas où H est l'application nulle. — Nous allons voir que ce cas est exactement celui où l'action est hamiltonienne (pour plus de détails sur les actions hamiltoniennes voir [44]). En effet si l'action est hamiltonienne alors $\iota(v_\xi)\omega$ est exacte et donc H est l'application nulle. Inversement supposons que H soit l'application nulle et fixons x dans M . On a une application naturelle

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{t}^* \\ x & \longmapsto & (\xi \mapsto \int_{x_0}^x \iota(v_\xi)\omega) \end{array}$$

qui vérifie $\iota(v_\xi)\omega = d\langle\mu, \xi\rangle$. De plus μ est équivariante (ce qui est équivalent ici à dire qu'elle est invariante) car :

$$\langle\mu(g \cdot x), \xi\rangle = \int_{x_0}^{g \cdot x_0} \iota(v_\xi)\omega + \int_{g \cdot x_0}^{g \cdot x} \iota(v_\xi)\omega.$$

Or par un changement de variable et par l'invariance de ω sous l'action de \mathbf{T} on voit que

$$\int_{g \cdot x_0}^{g \cdot x} \iota(v_\xi)\omega = \int_{x_0}^x \iota(v_\xi)\omega = \langle \mu(x), \xi \rangle.$$

Il suffit donc de montrer que $\int_x^{g \cdot x} \iota(v_\xi)\omega = 0$ pour x et g quelconques. Il existe ζ dans \mathfrak{t} tel que $g = \exp \zeta$ et on a

$$\begin{aligned} \int_x^{g \cdot x} \iota(v_\xi)\omega &= \int_0^1 \omega_{\exp(t\zeta) \cdot x} \left(v_\xi, \frac{d}{dt} \exp(t\zeta) \cdot x \right) dt \\ &= \int_0^1 \omega_{\exp(t\zeta) \cdot x} (\exp(t\zeta) \cdot v_\xi(x), \exp(t\zeta) \cdot v_\zeta(x)) dt = \omega_x(v_\xi, v_\zeta). \end{aligned}$$

Le groupe \mathbf{T} étant un tore, les orbites sont isotropes, d'où le résultat.

1.1.2. Cas où l'image de H est contenue dans le noyau de l'exponentielle.—

Ce cas va correspondre à ce qu'on appellera plus tard une action quasi-hamiltonienne.

On considère S^1 comme le cercle unité de \mathbf{C} et on identifie le fibré tangent $T\mathbf{T}$ à $\mathbf{T} \times \mathbf{R}^n$. Dans ces conditions la forme de Maurer-Cartan θ est simplement la projection sur \mathbf{R}^n . Le produit scalaire canonique de \mathbf{R}^n définit un produit scalaire \mathbf{T} -invariant sur \mathfrak{t} . L'application moment définie comme précédemment n'est bien définie qu'au noyau de l'exponentielle près, par contre on peut poser :

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{T} \\ x & \longmapsto & \exp(\xi \mapsto \int_{x_0}^x \iota(v_\xi)\omega). \end{array}$$

L'application μ ainsi définie dépend du choix de x_0 , un changement de x_0 entraînant une multiplication par une constante. Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de \mathbf{R}^n . Alors

$$\mu(x) = \left(\exp(i \int_{x_0}^x \iota(v_{e_1})\omega), \dots, \exp(i \int_{x_0}^x \iota(v_{e_n})\omega) \right)$$

et donc on a pour x un point de M , v un vecteur de $T_x M$ et ξ dans \mathfrak{t}

$$\langle \mu^* \theta_x(v), \xi \rangle = \langle \mu(x)^{-1} d_x \mu(v), \xi \rangle = \sum_k \xi_k \omega(v_{e_k}, v) = \omega(v_\xi, v),$$

c'est-à-dire

$$\iota(v_\xi)\omega = \mu^* \langle \theta, \xi \rangle.$$

De la même façon que dans le cas hamiltonien, on vérifie que cette application μ est équivariante.

Supposons inversement que l'on ait une application $\mu : M \longrightarrow \mathbf{T}$ équivariante qui vérifie $\langle \mu^* \theta_x(v), \xi \rangle = \omega(v_\xi, v)$. En notant (μ_1, \dots, μ_n) les composantes de μ , si $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ est un chemin fermé de M , posons $\alpha_k = \mu_k \circ \gamma$ (c'est un chemin fermé dans S^1), alors

$$H(\gamma) = \left(-i \int_0^1 \frac{\alpha_1'(t)}{\alpha_1(t)} dt, \dots, -i \int_0^1 \frac{\alpha_n'(t)}{\alpha_n(t)} dt \right)$$

et donc $H(\gamma)$ est dans le noyau de l'exponentielle $2\pi\mathbf{Z}^n$.

1.2. Origines de la définition d'un espace quasi-hamiltonien

Soit (M, G, ω, μ) une variété M munie d'une action d'un groupe G , d'une 2-forme invariante $\omega \in \Omega^2(M)^G$ et d'une application équivariante $\mu : M \longrightarrow G$. Rappelons que θ et $\bar{\theta}$ sont les 1-formes de Maurer-Cartan invariantes respectivement à gauche et à droite. On a vu que dans le cas où G est abélien le bon lien entre μ et ω est la relation $\iota(v_\xi)\omega = \mu^* \langle \theta, \xi \rangle$. Malheureusement si G n'est pas abélien cela est incompatible avec l'antisymétrie de ω puisque pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$ on a

$$0 = \iota(v_\xi)(\iota(v_\xi)\omega) = \iota(v_\xi)\mu^* \langle \theta, \xi \rangle = \langle \mu^* \theta(v_\xi), \xi \rangle = \langle \text{Ad}_{\mu^{-1}} \xi - \xi, \xi \rangle$$

ce qui signifie $\langle \text{Ad}_\mu \xi, \xi \rangle = \langle \xi, \xi \rangle$ et ainsi on trouve que $\text{Ad}_\mu = \text{id}$. La bonne propriété est $\iota(v_\xi)\omega = \frac{1}{2}\mu^* \langle \theta + \bar{\theta}, \xi \rangle$ qui est alors la même que précédemment dans le cas abélien. Nous la noterons propriété (B2).

Remarquons qu'on ne peut plus demander à ω d'être fermée puisque

$$0 = L_{v_\xi}\omega = (d\iota(v_\xi) + \iota(v_\xi)d)\omega = \frac{1}{2}\mu^* d\langle \theta + \bar{\theta}, \xi \rangle + \iota(v_\xi)d\omega.$$

Posons $\chi = \frac{1}{12}\langle \theta, [\theta, \theta] \rangle$. On obtient $0 = \iota(v_\xi)(d\omega + \mu^*\chi)$. Nous sommes donc amenés à demander que $d\omega = -\mu^*\chi$, ce que nous noterons comme étant la propriété (B1).

La propriété (B2) nous montre aussi que l'on ne peut plus demander à ω d'être non dégénérée puisque v_ξ doit être dans le noyau de ω_x dès que ξ vérifie $\text{Ad}_{\mu(x)}\xi + \xi = 0$, la propriété de non dégénérescence minimale est alors $\ker \omega_x = \{v_\xi(x) \mid \xi \in \ker \text{Ad}_{\mu(x)} + 1\}$. Nous la noterons propriété (B3). Résumons nous :

Définition 1.2.1 ([2]). — Soit un quadruple (M, G, ω, μ) où M est une variété sur laquelle opère un groupe G . Supposons que ω soit une 2-forme invariante sur M et que μ soit une application équivariante de M dans G . On dira que (M, G, ω, μ) est un espace quasi-hamiltonien si :

$$(B1) \quad d\omega = -\mu^* \chi$$

$$(B2) \quad \iota(v_\xi)\omega = \frac{1}{2}\mu^* \langle \theta + \bar{\theta}, \xi \rangle$$

$$(B3) \quad \ker \omega_x = \{v_\xi(x) \mid \xi \in \ker \text{Ad}_{\mu(x)} + 1\}$$

L'application μ est appelée application moment.

1.3. Exemples concrets

1.3.1. Classes de conjugaison d'un groupe. — Nous allons étudier notre tout premier exemple d'espace quasi-hamiltonien à savoir les classes de conjugaison d'un groupe de Lie. On a plus précisément :

Proposition 1.3.1. — Si C est une classe de conjugaison d'un groupe de Lie G et si μ est l'injection de C dans G , il existe une unique 2-forme invariante $\omega \in \Omega^2(C)^G$ telle que (C, G, ω, μ) soit un espace quasi-hamiltonien. Une telle forme est donnée par la formule

$$\omega_f(v_\xi, v_\eta) = \frac{1}{2}(\langle \eta, \text{Ad}_f \xi \rangle - \langle \xi, \text{Ad}_f \eta \rangle)$$

Pour la démonstration, voir [2].

Le cas de $\mathbf{SO}(3)$. Voyons en utilisant cette proposition comment la sphère S^2 munie de l'action du groupe des rotations $\mathbf{SO}(3)$ est un espace quasi-hamiltonien. Soit $\mathfrak{so}(3)$ l'algèbre de Lie de $\mathbf{SO}(3)$. Pour v dans \mathbf{R}^3 et φ un réel nous noterons $R_v(\varphi)$ la rotation d'angle φ et d'axe dirigé par v . On a la formule explicite dans le cas où v est un vecteur unitaire :

$$R_v(\varphi)(u) = (\cos \varphi)u + (\sin \varphi)v \wedge u + (1 - \cos \varphi)\langle v, u \rangle v.$$

On a un isomorphisme

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}^3, \wedge) &\xrightarrow{\Psi} (\mathfrak{so}(3), [,]) \\ (x, y, z) &\longmapsto \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

et pour $P \in \mathbf{SO}(3)$ on a $\Psi \circ P = \text{Ad}_P \Psi$.

Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbf{R}^3 . Soit $\varphi \in [0, \pi]$. La classe de conjugaison de $R_{e_3}(\varphi)$ est $C(R_{e_3}(\varphi)) = \{R_v(\varphi) \mid v \in S^2\}$. Pour φ non nul, l'application

$$\begin{aligned} S^2 &\xrightarrow{R(\varphi)} C(R_{e_3}(\varphi)) \\ v &\longmapsto R_v(\varphi) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme équivariant car c 'est une bijection différentiable et S^2 étant compacte, c 'est un homéomorphisme. De plus, c 'est aussi une submersion car $\mathbf{SO}(3)$ agit transitivement sur les deux espaces et cette application est équivariante. Dans la suite nous supposons que φ est un élément fixé de $]0, \pi]$.

Soit ω_0 la 2-forme donnée par la proposition 1.3.1, à savoir

$$\omega_{0,f}(v_\xi, v_\eta) = \frac{1}{2}(\langle \eta, \text{Ad}_f \xi \rangle - \langle \xi, \text{Ad}_f \eta \rangle).$$

La formule $\omega = R(\varphi)^* \omega_0$ définit une forme sur la sphère telle que l'application

$$\begin{array}{ccc} S^2 & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{SO}(3) \\ v & \longmapsto & R_v(\varphi) \end{array}$$

soit une application moment pour cette 2-forme. En fait on peut calculer explicitement ω . En effet, sur S^2 on a une forme volume α donnée par $\alpha_x(\xi_1, \xi_2) = \det(x, \xi_1, \xi_2)$, donc il existe une application $a : S^2 \rightarrow \mathbf{R}$ telle que $\omega = a\alpha$. Or ω est $\mathbf{SO}(3)$ -invariante et $\mathbf{SO}(3)$ agit transitivement sur S^2 donc a est une constante. Par équivariance de $R(\varphi)$ on a

$$\begin{aligned} \omega_v(v_\xi, v_\eta) &= \frac{1}{2}(\langle \eta, \text{Ad}_{R_v(\varphi)} \xi \rangle - \langle \xi, \text{Ad}_{R_v(\varphi)} \eta \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle \eta, R_v(\varphi)(\xi) \rangle - \langle \xi, R_v(\varphi)(\eta) \rangle). \end{aligned}$$

Pour calculer v_ξ et v_η il nous faut pouvoir calculer $\exp(u)$ pour u dans $\mathfrak{so}(3)$,

$$\text{or } e_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et } \exp t e_3 = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_{e_3}(t). \text{ De plus}$$

pour P une matrice de $\mathbf{SO}(3)$ on a

$$\exp t P e_3 = P \exp(t e_3) P^{-1} = P R_{e_3}(t) P^{-1} = R_{P(e_3)}(t)$$

donc pour un point u de S^2 on a $\exp t u = R_u(t)$ ce qui nous donne que pour tout $u \in \mathfrak{so}(3)$ on a $\exp u = R_u(\|u\|)$. Ainsi

$$v_\xi(v) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp t \xi(v) = \Psi(\xi)(v)$$

et donc $\text{adét}(v, \Psi(\xi)(v), \Psi(\eta)(v)) = \frac{1}{2}(\langle \eta, R_v(\varphi)(\xi), \xi \rangle - \langle \xi, R_v(\varphi)(\eta) \rangle)$. Prenons $v = e_3, \xi = e_1$ et $\eta = e_2$. Ainsi

$$R_v(\varphi)(\xi) = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2, \quad R_v(\varphi)(\eta) = -\sin \varphi e_1 + \cos \varphi e_2,$$

et

$$\Psi(\xi)(v) = -e_2, \quad \Psi(\eta)(v) = e_1$$

d'où $\text{adét}(e_3, -e_2, e_1) = \sin \varphi$. On en déduit que $\omega = \sin \varphi \cdot \alpha$. En résumé on a démontré :

Proposition 1.3.2. — Si $\varphi \in]0, \pi]$, l'application μ est donnée par

$$\begin{aligned} S^2 &\longrightarrow \mathbf{SO}(3) \\ v &\longmapsto R_v(\varphi) \end{aligned}$$

et la forme ω par $\omega = \sin \varphi \cdot \alpha$. Alors $(S^2, \mathbf{SO}(3), \omega, \mu)$ est un espace quasi-hamiltonien.

Remarque 1.3.3. — Si $\varphi = \pi$ alors la 2-forme ω est nulle. En fait on le savait déjà puisque la condition (B3) implique ici que

$$\begin{aligned} \ker \omega_f &= \{v_\xi(f), \xi \in \ker \text{Ad}_{\mu(f)} + 1\} \\ &= \{v_\xi(f), \xi \in \mathfrak{g}\} = T_f C. \end{aligned}$$

1.3.2. Le double $D(G)$. — Pour l'exemple suivant d'espace quasi-hamiltonien nous aurons besoin de quelques notations : $D(G)$ désigne la variété $G \times G$, le groupe G^2 agit par

$$\begin{aligned} G^2 \times D(G) &\longrightarrow D(G) \\ (g_1, g_2), (u, v) &\longmapsto (g_1 u g_2^{-1}, \text{Ad}_{g_2} v). \end{aligned}$$

Notons aussi

$$\begin{aligned} \mu_1 : D(G) &\longrightarrow G \\ (u, v) &\longmapsto \text{Ad}_u v, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu_2 : D(G) &\longrightarrow G \\ (u, v) &\longmapsto v^{-1} \end{aligned}$$

et enfin $\omega_D = \frac{1}{2} \langle \text{Ad}_v u^* \theta, u^* \theta \rangle + \frac{1}{2} \langle u^* \theta, v^* \theta + v^* \bar{\theta} \rangle$. Nous pouvons maintenant énoncer le résultat :

Proposition 1.3.4. — Le quadruple $(D(G), G^2, \omega_D, (\mu_1, \mu_2))$ est un espace quasi-hamiltonien.

Pour la démonstration voir [2, Remark 3.2].

1.4. Propriétés de base

1.4.1. Quelques outils de travail. — Nous donnons ici plusieurs propriétés utiles pour l'étude des espaces quasi-hamiltoniens.

Si E est un espace vectoriel muni d'une 2-forme ω et si V est un sous-ensemble de E on appelle V^ω l'orthogonal de V pour ω , à savoir $V^\omega = \{v \in E \mid \omega(v, w) = 0, \forall w \in V\}$.

Proposition 1.4.1. — Soit (M, G, ω, μ) un espace quasi-hamiltonien et soit $x \in M$.

1. L'application

$$\begin{array}{ccc} \ker(\text{Ad}_{\mu(x)} + 1) & \longrightarrow & \ker \omega_x \\ \xi & \longmapsto & v_\xi(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

2. $\ker(d_x \mu) \cap \ker(\omega_x) = \{0\}$.
3. $\text{Im}(\mu^* \theta)_x = \mathfrak{g}_x^\perp$.
4. $\text{Im}(\mu^* \bar{\theta})_x = \mathfrak{g}_x^\perp$.
5. $(\ker(d_x \mu))^\omega = \{v_\xi(x), \xi \in \mathfrak{g}\}$.

Démonstration. — Nous ne démontrons que les propriétés (3) et (4) car on peut trouver les autres preuves dans [2, §4].

Soient u dans $T_x M$ et ξ dans \mathfrak{g}_x . On a $\xi \in \mathfrak{g}_{\mu(x)}$ et donc $\langle \mu^* \theta(u), \xi \rangle = \langle \mu^* \bar{\theta}(u), \xi \rangle$ d'où

$$\langle \mu^* \theta(u), \xi \rangle = \frac{1}{2} \mu^* \langle \theta + \bar{\theta}, \xi \rangle(u) = \omega(v_\xi, u) = 0.$$

On a ainsi une inclusion. On prouve l'autre inclusion de la façon suivante : soit a dans \mathfrak{g}_x^\perp . Posons $V = \{v_\xi^M(x), \xi \in \mathfrak{g}\}$ et définissons un élément β du dual de V par

$$\beta(v_\xi) = \frac{1}{2} \langle (1 + \text{Ad}_{\mu(x)})a, \xi \rangle,$$

L'application β est bien définie car si $v_\xi(x) = 0$ alors $v_\xi(\mu(x)) = 0$ et $\text{Ad}_{\mu(x)^{-1}} \xi \in \mathfrak{g}_x$ d'où $\langle (1 + \text{Ad}_{\mu(x)})a, \xi \rangle = 0$. De plus si $v_\xi \in \ker \omega_x$ alors on peut supposer que ξ est dans $\ker \text{Ad}_{\mu(x)} + 1 = \ker \text{Ad}_{\mu(x)^{-1}} + 1$ et donc la restriction de β à $\ker \omega_x$ est nulle. On peut prolonger β à $T_x M^*$ avec β nul sur $\ker \omega_x$ d'où l'existence de u dans $T_x M$ tel que $\beta = \omega(\cdot, u)$, c'est-à-dire tel que

$$\langle (\text{Ad}_{\mu(x)} + 1)(\mu^* \theta)_x u, \xi \rangle = \langle (\text{Ad}_{\mu(x)} + 1)a, \xi \rangle, \forall \xi \in \mathfrak{g}.$$

Donc $(\mu^*\theta)u - a$ appartient à $\ker(\text{Ad}_{\mu(x)} + 1)$ qui est lui même inclus dans $\text{Im}(\mu^*\theta)_x$. En effet si $\xi \in \ker(\text{Ad}_{\mu(x)} + 1)$ alors $(\mu^*\theta)(v_{-1/2\xi}^M(x)) = \xi$. Donc il existe v tel que $a = (\mu^*\theta)_x(u + v)$ d'où l'inclusion inverse.

La propriété (4) se déduit de la (3) en remarquant que $\text{Im}(\mu^*\bar{\theta})_x = \text{Ad}_{\mu(x)}\text{Im}(\mu^*\theta)_x$ et que $\text{Ad}_{\mu(x)}$ est un isomorphisme orthogonal laissant \mathfrak{g}_x invariant et donc aussi \mathfrak{g}_x^\perp . \square

Corollaire 1.4.2. — *La dimension d'un espace quasi-hamiltonien est paire.*

Démonstration. — Soit (M, G, ω, μ) un espace quasi-hamiltonien. Comme on a fixé une métrique sur \mathfrak{g} , il existe une application déterminant bien définie sur $\text{End}(\mathfrak{g})$. L'application

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow \mathbf{R} \\ g &\longmapsto \det(\text{Ad}_g) \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes de Lie. Ici G est compact et connexe donc l'image du morphisme précédent est réduite à 1. On en déduit que pour tout $g \in G$, l'endomorphisme Ad_g est orthogonal direct, en particulier -1 en est une valeur propre de multiplicité paire. Le résultat découle alors de la propriété (1) de la proposition 1.4.1. \square

Remarque 1.4.3. — *Contrairement à ce qui se passe pour les espaces hamiltoniens, si M est un espace quasi-hamiltonien sur lequel le groupe G agit et si H est un sous-groupe de G , alors en restreignant l'action de G à celle de H on n'obtient pas un espace quasi-hamiltonien. Ceci car il n'existe pas de projection naturelle d'un groupe sur un de ses sous-groupes.*

1.4.2. Structure quasi-hamiltonienne canonique. — Nous allons voir deux cas particuliers dans lesquels un espace hérite naturellement d'une structure d'espace quasi-hamiltonien.

Hamiltonien contre quasi-hamiltonien. Une question naturelle est de se demander si un espace hamiltonien est un espace quasi-hamiltonien et vice versa. Nous avons déjà vu dans la première partie le cas où le groupe de Lie est abélien : un espace hamiltonien est toujours quasi-hamiltonien mais un espace quasi-hamiltonien n'a aucune raison d'être hamiltonien. Étudions maintenant le cas général.

Partons donc d'un espace hamiltonien (M, G, σ, Φ) . Comme dans [2], définissons la 2-forme $\varpi \in \Omega^2(\mathfrak{g})^G$ en posant pour $s \in \mathbf{R}$, $\exp_s(\eta) = \exp(s\eta)$ et

$$\varpi = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \exp_s^* \bar{\theta}, \frac{\partial}{\partial s} \exp_s^* \bar{\theta} \rangle ds.$$

Nous avons les deux théorèmes suivants (voir [2]) :

Théorème 1.4.4. — *Le quadruple $(M, G, \omega = \sigma + \Phi^*\varpi, \mu = \exp \circ \Phi)$ vérifie les axiomes (B1) et (B2) des espaces quasi-hamiltoniens. La condition (B3) est satisfaite si on suppose de plus que pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, $d_\xi \exp$ est bijective.*

Inversement on a :

Théorème 1.4.5. — *Supposons que (M, G, ω, μ) soit un espace quasi-hamiltonien et supposons de plus qu'il existe un ouvert U de \mathfrak{g} tel que \exp soit un difféomorphisme de U sur un $V \subset G$ contenant $\mu(M)$. Notons $\log : V \rightarrow U$ l'application réciproque. Dans ces conditions $(M, G, \omega - \mu^* \log^* \varpi, \log \circ \mu)$ est un espace hamiltonien.*

Pour plus de renseignements sur la 2-forme ϖ et pour les démonstrations de ces théorèmes cf. [2].

Comme corollaire du théorème 1.4.4, on a

Corollaire 1.4.6. — *Tout espace hamiltonien compact est quasi-hamiltonien.*

Démonstration. — En effet, quitte à multiplier la forme symplectique et l'application moment par une constante ε suffisamment petite on peut supposer que l'application moment prend ses valeurs près de $0 \in \mathfrak{g}$ où l'exponentielle est inversible. \square

Pull-back d'une structure quasi-hamiltonienne.

Théorème 1.4.7. — *Soient (M, G, ω, μ) un espace quasi-hamiltonien, (N, G) une variété N munie d'une action de G et $\rho : N \rightarrow M$ une application équivariante. Posons $\Phi = \mu \circ \rho$ et $\sigma = \rho^* \omega$.*

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\Phi} & G \\ & \searrow \rho & \nearrow \mu \\ & M & \end{array}$$

Alors (N, G, σ, Φ) satisfait à toutes les propriétés d'un espace quasi-hamiltonien sauf éventuellement à la condition de non-dégénérescence minimale (B3). Si on suppose que ρ est un difféomorphisme local on a aussi (B3).

Démonstration. — La démonstration se fait en plusieurs étapes :

- σ est invariante car ρ est équivariante et ω est invariante.
- Φ est équivariante comme composée d'applications équivariantes.

- $d\sigma = \rho^*d\omega = -\rho^*\mu^*\chi = -\Phi^*\chi$, donc (B1) est vérifiée.
- Soit $\xi \in \mathfrak{g}$, on a

$$\begin{aligned}
\iota(v_x i)\sigma &= \iota(v_\xi)\rho^*\omega \\
&= \rho^*(\iota(v_\xi)\omega) \\
&= \rho^*\left(\frac{1}{2}\mu^*\langle\theta + \bar{\theta}, \xi\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\Phi^*\langle\theta + \bar{\theta}, \xi\rangle,
\end{aligned}$$

donc la condition (B2) est vérifiée.

- On suppose maintenant que ρ est un difféomorphisme local. Si n est un entier, on a

$$\begin{aligned}
\ker \sigma_n &= \ker(\rho^*\omega)_n \\
&= \{\bar{X} \in T_n N \mid \omega_{\rho(n)}(d_n \rho \bar{X}, d_n \rho \bar{Y}) = 0, \forall \bar{Y} \in T_n N\} \\
&= \{\bar{X} \in T_n N \mid d_n \rho \bar{X} \in \ker \omega_{\rho(n)}\} \text{ car } d_n \rho \text{ est bijectif} \\
&= \{\bar{X} \in T_n N \mid \exists \xi \in \ker(\text{Ad}_{\mu \circ \rho(n)} + 1), d_n \rho \bar{X} = v_\xi(\rho(n)) = d_n \rho(v_\xi)\} \\
&\quad \text{car } d_n \rho \text{ est injectif} \\
&= \{v_\xi(n) \mid \xi \in \ker(\text{Ad}_{\mu \circ \rho(n)} + 1)\},
\end{aligned}$$

donc (B3) est satisfaite.

□

On peut citer deux exemples d'applications immédiates de ce théorème :

- Un ouvert globalement invariant d'un espace quasi-hamiltonien est naturellement un espace quasi-hamiltonien.
- Si M et \widetilde{M} sont deux G -espaces, M étant quasi-hamiltonien et si $\rho : \widetilde{M} \rightarrow M$ est un revêtement équivariant, alors \widetilde{M} peut être munie d'une structure d'espace quasi-hamiltonien.

1.5. Liens avec les espaces hamiltoniens

1.5.1. Classes de conjugaison et orbites coadjointes. — Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser au rapport existant entre la structure hamiltonienne des orbites coadjointes O^* d'une part et la structure quasi-hamiltonienne des classes de conjugaison d'un groupe de Lie de l'autre. Pour cela, commençons par faire quelques rappels et fixons les notations. Pour une orbite coadjointe O^* et pour une classe de conjugaison C nous noterons de la même façon l'inclusion μ respectivement dans \mathfrak{g}^* et G .

Fixons une orbite coadjointe O^* . Pour $\xi \in \mathfrak{g}$ le champ fondamental correspondant sur O^* vaut $v_\xi(\varphi) = -\varphi \circ \text{ad}_\xi$. On définit une 2-forme symplectique G -invariante σ sur O^* par $\sigma_\varphi(v_\xi, v_\zeta) = \varphi([\xi, \zeta]) = v_\zeta(\xi)$. Alors (O^*, G, σ, μ) est un espace hamiltonien.

On a identifié \mathfrak{g} et \mathfrak{g}^* par le choix d'un produit scalaire G -invariant sur \mathfrak{g} (rappelons que G est supposé compact). L'application \exp est équivariante donc $\exp O^*$ est une classe de conjugaison C . On a le diagramme commutatif et équivariant suivant :

$$\begin{array}{ccc} O^* & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{g}^* \\ \exp \downarrow & & \downarrow \exp \\ C & \xrightarrow{\mu} & G \end{array}$$

Rappelons aussi que la 2-forme ω sur C , définie par $\omega_f(v_\xi, v_\zeta) = \frac{1}{2}(\langle \zeta, \text{Ad}_f \xi \rangle - \langle \xi, \text{Ad}_f \zeta \rangle)$ est telle que (C, G, ω, μ) soit un espace quasi-hamiltonien.

Supposons que \exp soit un difféomorphisme local sur O^* . D'après le théorème 1.4.7, nous savons que $(O^*, G, \exp^* \omega, \mu \circ \exp)$ est un espace quasi-hamiltonien. Le cas où \exp est un difféomorphisme local correspond exactement au cas du théorème 1.4.4. Si on pose

$$\varpi = \frac{1}{2} \int_0^1 \langle \exp_s^* \bar{\theta}, \frac{\partial}{\partial s} \exp_s^* \bar{\theta} \rangle ds,$$

le quadruple $(O^*, G, \sigma + \mu^* \varpi, \exp \circ \mu)$ est un espace quasi-hamiltonien. Or $\exp \circ \mu = \mu \circ \exp$ donc on doit avoir $\exp^* \omega = \sigma + \mu^* \varpi$. On peut calculer

explicitement $\mu^* \varpi$. En effet, pour ξ et ζ dans \mathfrak{g} on a :

$$\begin{aligned}
(\exp^* \omega)_\varphi(v_\xi, v_\zeta) &= \omega_{\exp \varphi}(v_\xi, v_\zeta) \\
&= \frac{1}{2}(\langle \text{Ad}_{\exp(\varphi)^{-1}} \zeta, \xi \rangle - \langle \text{Ad}_{\exp(\varphi)} \zeta, \xi \rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle e^{-\text{ad}_\varphi} \zeta, \xi \rangle - \langle e^{\text{ad}_\varphi} \zeta, \xi \rangle) \\
&= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{(2k+1)!} (\text{ad}_\varphi)^{2k+1} \zeta, \xi \right\rangle \\
&= \langle -\text{ad}_\varphi \zeta, \xi \rangle + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{(2k+1)!} \langle (\text{ad}_\varphi)^{2k+1} \zeta, \xi \rangle \\
&= \varphi([\xi, \zeta]) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{(2k+1)!} \langle (\text{ad}_\varphi)^{2k+1} \zeta, \xi \rangle
\end{aligned}$$

d'où on peut conclure que

$$\mu^* \varpi_\varphi(v_\xi, v_\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{(2k+1)!} \langle (\text{ad}_\varphi)^{2k+1} \zeta, \xi \rangle.$$

Remarque 1.5.1. — Essayons de comprendre le §1.3.1 dans l'optique de ce qui précède. Notons $S^2(\varphi)$ la sphère de rayon φ dans \mathbf{R}^3 et h_φ l'homothétie de rapport $\frac{1}{\varphi}$. Réécrivons le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
S^2(\varphi) & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{R}^3 \\
\downarrow h_\varphi & & \downarrow \exp \\
S^2 & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{SO}(3).
\end{array}$$

Ici on a

$$\text{ad}_v(\xi) = v \wedge \xi$$

et donc par récurrence

$$(\text{ad}_v)^{2k+1} \xi = (-1)^k \|v\|^{2k} v \wedge \xi.$$

On a ainsi

$$\begin{aligned}\mu^* \varpi_v(\xi, \zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{(2k+1)!} (-1)^k \|v\|^{2k} \langle (v \wedge \zeta), \xi \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \|v\|^{2k} \langle v, \xi \wedge \zeta \rangle.\end{aligned}$$

Nous retrouvons ici que $\omega = \sin \varphi \cdot \alpha$.

1.5.2. Double et fibré cotangent. — Nous allons nous intéresser au lien existant entre l'espace hamiltonien T^*G et le double $D(G)$. Tout d'abord rappelons quelle est la structure hamiltonienne de T^*G .

Notons $\pi : T^*G \rightarrow G$ la projection. On identifie T^*G et $G \times \mathfrak{g}^*$ par

$$\begin{aligned}T^*G &\longrightarrow G \times \mathfrak{g}^* \\ (\tau : T_g G \rightarrow \mathbf{R}) &\longmapsto \left(\begin{array}{ccc} \pi(\tau) & \mathfrak{g} & \rightarrow \mathbf{R} \\ \xi & \mapsto & \tau(\pi(\tau) \cdot \xi) \end{array} \right)\end{aligned}$$

C'est-à-dire que τ est identifié à $(\pi(\tau), \tau \circ \pi(\tau))$. L'application réciproque est

$$\begin{aligned}G \times \mathfrak{g}^* &\longrightarrow T^*G \\ (g, \varphi) &\longmapsto \left(\begin{array}{ccc} T_g G & \rightarrow & \mathbf{R} \\ X & \mapsto & \varphi(g^{-1} \cdot X) \end{array} \right)\end{aligned}$$

On définit l'action de G^2 sur T^*G par

$$\begin{aligned}G^2 \times T^*G &\longrightarrow T^*G \\ ((g_1, g_2), \tau) &\longmapsto \left(\begin{array}{ccc} T_{g_1 \pi(\tau) g_2^{-1}} G & \rightarrow & \mathbf{R} \\ X & \mapsto & \tau(g_1^{-1} \cdot X \cdot g_2) \end{array} \right)\end{aligned}$$

ou encore $(g_1, g_2) \cdot (g, \varphi) = (g_1 g g_2^{-1}, g_2 \cdot \varphi)$. La forme de Liouville α sur T^*G est définie par

$$\alpha_\tau(X, \psi) = \tau(X) \text{ c'est-à-dire } \alpha_{(g, \varphi)}(X, \psi) = \varphi(g^{-1} \cdot X)$$

si τ dans T^*G est représenté par (g, φ) et (X, ψ) est dans $T_g G \times \mathfrak{g}^* = T_\tau(T^*G)$. Alors α est G^2 -invariante :

$$\begin{aligned}((g_1, g_2)^* \alpha)_{(g, \varphi)}(X, \psi) &= \alpha_{(g_1 g g_2^{-1}, g_2 \cdot \varphi)}(g_1 \cdot X \cdot g_2^{-1}, g_2 \cdot \psi) \\ &= \varphi(g_2^{-1} g_2 g^{-1} g_1^{-1} g_1 \cdot X \cdot g_2^{-1} g_2) \\ &= \varphi(g^{-1} \cdot X) \\ &= \alpha_{(g, \varphi)}(X, \psi).\end{aligned}$$

En posant $\sigma = d\alpha$ on obtient que la forme symplectique canonique de T^*G est G^2 -invariante. Si \overline{X} est un champ de vecteurs sur T^*G on a $\iota(\overline{X})\sigma = \iota(\overline{X})d\alpha = L_{\overline{X}}\alpha - d\iota(\overline{X})\alpha$ et si \overline{X} est un champ fondamental alors $\iota(\overline{X})\sigma = d(-\iota(\overline{X})\alpha)$. Comme

$$\begin{aligned}\overline{X} &= v_{(\xi_1, \xi_2)}(g, \varphi) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp t\xi_1, \exp t\xi_2) \cdot (g, \varphi) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp(t\xi_1)g \exp(-t\xi_2), \varphi \circ \text{Ad}_{\exp -t\xi_2}) \\ &= (\xi_1 \cdot g - g \cdot \xi_2, -\varphi \circ \text{ad}_{\xi_2}),\end{aligned}$$

on a $\iota(\overline{X})\alpha_{(g, \varphi)} = \varphi(\text{Ad}_{g^{-1}}\xi_1 - \xi_2)$. Ainsi en posant

$$\begin{aligned}\Phi : T^*G &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* = (\mathfrak{g} \times \mathfrak{g})^* \\ (g, \varphi) &\longmapsto ((\xi_1, \xi_2) \mapsto -\varphi(\text{Ad}_{g^{-1}}\xi_1 - \xi_2)) = (-g \cdot \varphi, \varphi)\end{aligned}$$

on a $\iota(v_{\xi_1, \xi_2})\sigma = d\langle \Phi, (\xi_1, \xi_2) \rangle$. De plus Φ est équivariante car

$$\begin{aligned}\Phi((g_1, g_2) \cdot (g, \varphi)) &= \Phi(g_1 g g_2^{-1}) \\ &= ((\xi_1, \xi_2) \mapsto -\varphi(\text{Ad}_{g_2^{-1}}(\text{Ad}_{g_2 g^{-1} g_1^{-1}}\xi_1 - \xi_2))) \\ &= (\xi_1 \mapsto -\varphi(\text{Ad}_{g^{-1} g_1^{-1}}\xi_1), \xi_2 \mapsto -\varphi(\text{Ad}_{g_2^{-1}}\xi_2)) \\ &= (g_1, g_2) \cdot \Phi(g, \varphi)\end{aligned}$$

On a donc démontré :

Proposition 1.5.2. — *Le quadruple $(T^*G, G^2, \sigma, \Phi)$ est un espace hamiltonien.*

Rappelons (prop. 1.3.4) que si on définit μ par

$$\begin{aligned}D(G) &\xrightarrow{\mu} G^2 \\ (u, v) &\longmapsto (\text{Ad}_u v^{-1}, v)\end{aligned}$$

et ω par

$$\omega = -\frac{1}{2}\langle \text{Ad}_v u^* \theta, u^* \theta \rangle - \frac{1}{2}\langle u^* \theta, v^* \theta + v^* \bar{\theta} \rangle,$$

le quadruple $(D(G), G^2, -\omega, \mu^{-1})$ est lui aussi un espace quasi-hamiltonien. Mais alors d'après [2, Proposition 4.4], le quadruple $(D(G), G^2, \omega, \mu)$ est un espace quasi-hamiltonien.

Posons

$$\begin{aligned} T^*G &\xrightarrow{\kappa} D(G) \\ \tau &\longmapsto (\pi(\tau), \exp(\tau \circ \pi(\tau))). \end{aligned}$$

L'application κ est équivariante, en effet :

$$\begin{aligned} (g_1, g_2) \cdot \kappa(\tau) &= (g_1\pi(\tau)g_2^{-1}, \text{Ad}_{g_2} \exp(\tau \circ \pi(\tau))) \\ &= (g_1\pi(\tau)g_2^{-1}, \exp(g_2 \cdot (\tau \circ \pi(\tau)))) \\ &= \kappa((g_1, g_2) \cdot \tau) \end{aligned}$$

On a le diagramme commutatif et équivariant suivant :

$$\begin{array}{ccc} T^*G & \xrightarrow{\Phi} & \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g}^* \\ \downarrow \kappa & & \downarrow \text{exp} \times \text{exp} \\ D(G) & \xrightarrow{\mu} & G^2 \end{array}$$

En effet si $(g, \varphi) \in G \times \mathfrak{g}^* = T_g^*G$, alors

$$\begin{aligned} \mu \circ \kappa(g, \varphi) &= \mu(g, \exp \varphi) \\ &= (\text{Ad}_g \exp -\varphi, \exp \varphi) \\ &= (\text{Ad}_g (\exp \varphi)^{-1}, \exp \varphi) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\text{exp} \times \text{exp}) \circ \Phi(g, \varphi) &= (\text{exp} \times \text{exp})(-g \cdot \varphi, \varphi) \\ &= (\text{Ad}_g \exp -\varphi, \exp \varphi) \\ &= (\text{Ad}_g (\exp \varphi)^{-1}, \exp \varphi). \end{aligned}$$

L'application κ est un difféomorphisme local si et seulement si exp est un difféomorphisme local en tout point de \mathfrak{g}^* . Si c'est le cas, $(T^*G, G^2, \mu \circ \kappa, \kappa^*\omega)$ est un espace quasi-hamiltonien. On a aussi, grâce au théorème 1.4.4, que $(T^*G, G^2, (\text{exp} \times \text{exp}) \circ \Phi, \sigma + \Phi^*\varpi)$ est un espace quasi-hamiltonien. Or $\mu \circ \kappa = (\text{exp} \times \text{exp}) \circ \Phi$ donc $\iota(\overline{X})\kappa^*\omega = \iota(\overline{X})(\sigma + \Phi^*\varpi)$ coïncident dès que \overline{X} est un champ de vecteurs fondamental.

1.6. Réduction et produit de fusion

1.6.1. Réduction. — Soient (M, G, ω, μ) un espace quasi-hamiltonien et f un élément de G .

Définition 1.6.1. — On note Z_f le stabilisateur de f dans G . L'espace réduit M_f est

$$M_f := \mu^{-1}(f)/Z_f = \mu^{-1}(G \cdot f)/G.$$

Proposition 1.6.2. — Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. f est une valeur régulière de μ
2. l'action de G sur $\mu^{-1}(f)$ est localement libre.

Dans ce cas M_f est une « orbifold » sur laquelle la 2-forme ω définit une forme symplectique.

1.6.2. Produit de fusion. — Rappelons que nous nous sommes donnés un groupe de Lie compact et connexe G . Sur ce groupe, les formes θ et $\bar{\theta}$ sont les 1-formes de Maurer-Cartan invariable respectivement à gauche et à droite. Nous avons choisi un produit scalaire sur le dual de l'algèbre de Lie de G invariant par l'action adjointe.

Théorème 1.6.3 ([2], Théorème 6.1). — Soit $(M, G \times G, (\mu_1, \mu_2), \omega)$ un espace quasi-hamiltonien. On fait agir G sur M par l'action diagonale. On munit M de la 2-forme

$$\tilde{\omega} = \omega + \frac{1}{2}(\mu_1^* \theta, \mu_2^* \theta)$$

et de l'application moment

$$\mu = (\mu_1 \cdot \mu_2).$$

Alors (M, G, ω, μ) est un espace quasi-hamiltonien, appelé produit de fusion de $(M, G \times G, (\mu_1, \mu_2), \omega)$.

Ce dernier théorème sert à construire une famille d'exemples très intéressants (c'est l'étude de cette famille d'espaces qui a motivé en partie l'article [2]).

Théorème 1.6.4. — Soit G un groupe de Lie compact et $g \geq 1$ un entier. Il existe une 2-forme ω sur G^{2g} telle que l'application

$$\begin{aligned} \mu : \quad G^{2g} &\longrightarrow G \\ (g_1, \dots, g_{2g}) &\longmapsto \prod_{p=1}^g [g_{2p-1}, g_{2p}] \end{aligned}$$

et l'action de G par conjugaison diagonale sur G^{2g} fassent du quadruplet (G^{2g}, G, ω, μ) un espace quasi-hamiltonien.

Démonstration. — On part d'une copie du double $D(G)$, l'exemple de la proposition 1.3.4, auquel on applique le produit de fusion du théorème 1.6.3, on obtient un G -espace quasi-hamiltonien que l'on note $\mathbf{D}(G)$. En faisant le produit de g copies de $\mathbf{D}(G)$, puis en appliquant de nouveau $g - 1$ fois le produit de fusion du théorème 1.6.3 on se retrouve avec l'espace du théorème 1.6.4. \square

CHAPITRE 2

MOTIVATIONS

Ce chapitre commence, après un bref rappel sur la cohomologie équivariante (paragraphe 2.1.1), par définir ce qu'est l'application de restriction de Kirwan (paragraphe 2.1.2). On y trouve aussi (proposition 2.1.2) un exemple montrant que pour un espace quasi-hamiltonien, contrairement au cas hamiltonien, cette application n'est pas en général surjective. Enfin, la partie 2.2 sert d'introduction aux espaces de modules de fibrés holomorphes et explique pourquoi ces espaces peuvent être vus comme réduction d'espaces quasi-hamiltoniens (théorème 2.2.7).

2.1. L'application de restriction de Kirwan

2.1.1. Une rapide introduction à la cohomologie équivariante. — L'idée de la cohomologie équivariante (pour une introduction complète voir [15]) est d'associer, à un espace topologique X muni d'une action d'un groupe de Lie G , une cohomologie qui dépende à la fois de X et de l'action de G . En d'autres termes, on souhaite avoir un foncteur contravariant de la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques X (disons compacts) munis d'une action du groupe G et dont les morphismes sont les applications continues et équivariantes, vers la catégorie des algèbres graduées avec comme corps de base \mathbf{Q} , \mathbf{R} ou \mathbf{C} suivant les préférences de chacun. On veut en plus que, quand le groupe G agit librement sur X , la cohomologie équivariante de X , notée $H_G^*(X)$, soit la cohomologie ordinaire du quotient.

Pour arriver à cela considérons d'abord un certain nombre d'objets liés au groupe G . Le premier est un espace, noté EG , contractile sur lequel G agit librement. Dans [33], Milnor a démontré qu'un tel espace existe pour tout groupe topologique. Ici, G est un groupe de Lie compact donc il peut être

plongé dans un $\mathbf{U}(n)$. Pour prouver l'existence d'un tel EG il suffit de le faire pour $G = \mathbf{U}(n)$. Dans ce cas particulier, on peut prendre pour $EU(n)$ l'espace des familles de n vecteurs orthogonaux d'un espace de Hilbert à base dénombrable avec l'action évidente de $\mathbf{U}(n)$. Notons que :

1. un tel espace EG n'est pas en général une variété de dimension finie, au mieux c'est une variété de Banach,
2. si un tel espace existe il n'est pas unique, en effet si EG convient, $EG \times EG$ (par exemple) convient aussi. Cette propriété de non-unicité s'avère en pratique très utile dès qu'il s'agit de calculer effectivement la cohomologie équivariante d'un espace.

Le deuxième objet c'est « l'espace classifiant » $BG = EG/G$, c'est-à-dire la base du fibré G -principal

$$EG \longrightarrow BG,$$

appelé le fibré universel de G . Tout comme EG , l'espace BG n'est pas unique, par contre il est bien défini à homotopie près. Dans le cas de $G = \mathbf{U}(n)$, l'espace BG est la grassmannienne des sous-espaces de dimension n d'un espace de Hilbert à base dénombrable (voir [10, §23, chap. IV]).

Nous pouvons maintenant définir la cohomologie équivariante de X : soit $(X)_G = X \times_G EG$ le quotient de $X \times EG$ par l'action diagonale de G , on pose

$$H_G^*(X) = H^*(X \times_G EG).$$

Ce qui fait que notre définition est cohérente c'est que même si $X \times_G EG$ dépend du choix d'un EG , son type d'homotopie, tout comme pour BG , est indépendant du choix de EG et sa cohomologie est bien définie à isomorphisme près. La projection

$$X \times_G EG \longrightarrow BG$$

est une fibration de fibre X . Elle induit un morphisme d'anneaux

$$H^*(BG) \longrightarrow H_G^*(X)$$

qui fait de $H_G^*(X)$ un module sur $H^*(BG)$. L'espace BG s'appelle espace classifiant parce que pour tout G -fibré principal $P \rightarrow X$ il existe une application continue, unique à homotopie près, $f : X \rightarrow BG$ telle que $P \simeq f^*(EG)$. Ainsi les fibrés G -principaux sur X sont classifiés (à isomorphismes près) par les classes d'homotopie des applications de X dans BG .

Voyons maintenant quelques exemples.

- Soit \mathbf{H} un espace de Hilbert à base dénombrable. Sa sphère de rayon 1, c'est-à-dire S^∞ , est un espace contractile sur lequel le tore S^1 agit librement par

$$\begin{aligned} S^1 \times \mathbf{H} &\longrightarrow \mathbf{H} \\ (e^{i\theta}, (z_0, z_1, \dots)) &\longmapsto (e^{i\theta} z_0, e^{i\theta} z_1, \dots). \end{aligned}$$

On peut donc prendre $ES^1 = S^\infty$ et $BS^1 = \mathbf{CP}^\infty$ dont la cohomologie est celle d'un anneau de polynômes à une variable de degré 2.

- Si X est réduit à un point alors $(X)_G = BG$ et

$$H_G^*(\{\text{point}\}) = H^*(BG).$$

- Si G agit librement sur X , l'application

$$X \times_G EG \longrightarrow X/G$$

est une fibration de fibre EG contractile, donc le morphisme associé en cohomologie est un isomorphisme

$$H^*(X/G) \xrightarrow{\sim} H_G^*(X).$$

- Soit $E \rightarrow X$ un fibré vectoriel complexe sur X . Par le choix d'une métrique hermitienne on réduit le groupe de structure à $\mathbf{U}(n)$. On obtient un $\mathbf{U}(n)$ -fibré principal associé sur X et donc une application

$$f : X \rightarrow \mathbf{BU}(n).$$

La cohomologie de $H^*(\mathbf{BU}(n))$ est une algèbre de polynômes en n variables c_1, \dots, c_n telles que le degré de c_k soit $2k$, ce pour tout k . La k -ième classe de Chern de E est $f^*(c_k)$ (voir [10]).

Tout comme avec la cohomologie ordinaire d'une variété pour laquelle il existe un complexe, celui de de Rham, dont la cohomologie est la cohomologie de la variété, il existe aussi un complexe, le complexe de de Rham équivariant (dans le sens de Cartan), dont la cohomologie est la cohomologie équivariante. Plus précisément soit X une variété sur laquelle agit un groupe de Lie G . On note $\Omega(X)$ l'algèbre des formes différentielles sur X et $S(\mathfrak{g}^*)$ l'algèbre des fonctions polynomiales sur \mathfrak{g} à valeurs réelles. On définit une graduation sur $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega(X)$ par

$$\deg(P \otimes \alpha) = 2\deg(P) + \deg(\alpha)$$

pour $P \in S(\mathfrak{g}^*)$ et $\alpha \in \Omega(X)$. L'algèbre $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega(X)$ peut être vue comme l'algèbre des fonctions polynomiales sur \mathfrak{g} à valeurs dans $\Omega(X)$. On définit

deux opérateurs $\iota_{\mathfrak{g}}$ et d par :

pour $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \Omega(X)$ dans $S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega(X)$

$$\iota_{\mathfrak{g}}(\sigma) : \xi \longrightarrow \iota_{v_{\xi}}(\sigma(\xi)),$$

et

$$d(\sigma) : \xi \longrightarrow d(\sigma(\xi)).$$

Théorème 2.1.1. — *L'opérateur $d_{\mathfrak{g}} = d - \iota_{\mathfrak{g}}$ fait de $(S(\mathfrak{g}^*) \otimes \Omega(X), d_{\mathfrak{g}})$ un complexe différentiel dont la cohomologie est isomorphe à $H_G^*(X)$.*

Pour en savoir plus sur la cohomologie du complexe de de Rham équivariant, vous pouvez consulter [13].

2.1.2. L'application de restriction et les espaces quasi-hamiltoniens. —

Soit M une variété symplectique munie d'une action d'un groupe G connexe et compact et d'une application équivariante μ de M dans \mathfrak{g}^* , le dual de l'algèbre de Lie de G , qui fassent de M un espace hamiltonien. Soit h un élément de \mathfrak{g}^* . Supposons que μ soit une submersion le long de $\mu^{-1}(h)$. L'espace $M_h = \mu^{-1}(h)/\text{Stab}_G(h)$ est la réduction hamiltonienne de M en h . Ce type de réduction apparaît dans bien des occasions en mathématiques, notamment lors de l'étude des quotients en géométrie algébrique (voir [24]). Par un moyen astucieux, le “shifting trick”, il est possible de réduire l'étude de ces réductions au cas où $h = 0$ et donc $\text{Stab}_G(h) = G$. Nous supposons donc désormais que $h = 0$. Pour étudier M_0 il est utile de connaître sa cohomologie qui est en fait isomorphe à la cohomologie équivariante de $\mu^{-1}(0)$. F. Kirwan a montré dans [24] que cette dernière est fortement liée à la cohomologie équivariante de la variété M . Plus précisément elle a démontré que l'application de restriction (qu'il est aussi d'usage depuis d'appeler application de Kirwan)

$$H_G^*(M) \longrightarrow H_G^*(\mu^{-1}(0))$$

est surjective. Sa démonstration fait grandement usage d'une généralisation de la théorie de Morse à un type de fonctions, appelées fonctions de Morse-Bott généralisées (voir Appendice 4.5).

En 1998, A. Alekseev, A. Malkin et E. Meinrenken publièrent l'article [2], dans lequel ils jetaient les bases d'une nouvelle théorie : celles des espaces quasi-hamiltoniens (auxquelles nous avons consacré le chapitre 1). Soit (M, G, ω, μ) un tel espace. Soit h un élément de G . Tout comme avec un espace hamiltonien on peut définir ici

$$M_h = \mu^{-1}(h)/\text{Stab}_G(h)$$

et se demander si l'application de restriction

$$H_G^*(M) \longrightarrow H_G^*(\mu^{-1}(h))$$

est surjective. Nous allons voir que la réponse est négative en général. En effet, soit G un groupe de Lie compact, connexe, simplement connexe, de centre fini. On a vu (théorème 1.6.4) qu'il existe une 2-forme $\omega \in \Omega^2(G^{2g})$ et une application $\mu : G^{2g} \longrightarrow G$ telles que (G^{2g}, G, ω, μ) soit un espace quasi-hamiltonien. Supposons que h soit un élément du centre de G tel que le stabilisateur de tout point de $\mu^{-1}(h)$ soit réduit au centre de G . D'après la proposition 1.6.2 on sait alors que μ est submersive le long de $\mu^{-1}(h)$.

Proposition 2.1.2. — *On a*

$$H_G^2(G^{2g}) = \{0\}, \quad H_G^2(\mu^{-1}(h)) \neq \{0\}.$$

Démonstration. — Considérons la fibration

$$G^{2g} \times EG \longrightarrow (G^{2g})_G.$$

La fibre G est connexe et l'espace total simplement connexe, la base est donc aussi simplement connexe. Le terme E_2 de la suite spectrale de cette fibration est donc $H^*((G^{2g})_G) \otimes H^*(G)$. Comme on a supposé G simplement connexe, on a $\pi_2(G) = \{1\}$ et donc $H^1(G) = H^2(G) = \{0\}$. La suite spectrale de cette fibration converge vers $H^*(G^{2g} \times EG) = H^*(G^{2g})$, ainsi ses premiers termes s'écrivent

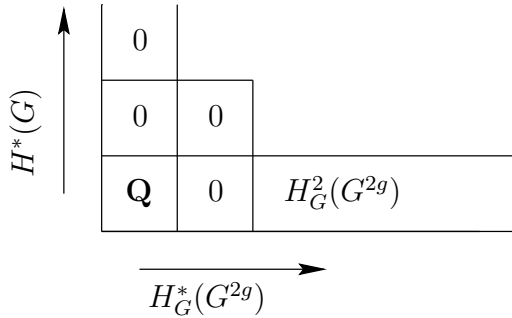


FIGURE 1. Suite spectrale

et la suite spectrale converge vers

0			
0	0		
\mathbf{Q}	0	0	...

Or le terme $H_G^2(G^{2g})$ dans la figure 1 ne peut disparaître que si il est nul, donc $H_G^2(G^{2g}) = \{0\}$. Pour démontrer la deuxième partie de la proposition, nous avons besoin de la proposition suivante (que nous réutiliserons par la suite) :

Proposition 2.1.3. — *Si M est une variété munie d'une action de $PG = G/Z(G)$, alors elle est naturellement munie d'une action de G et :*

$$H_G^*(M, \mathbf{Q}) = H_{PG}^*(M, \mathbf{Q}).$$

Démonstration. — Pour démontrer cette proposition il suffit de le faire en remplaçant la cohomologie à coefficients dans \mathbf{Q} par celle à coefficients dans \mathbf{R} . La projection $G \rightarrow PG$ a pour noyau $Z(G)$ le centre de G que l'on suppose fini, elle induit donc un isomorphisme des algèbres de Lie de G et PG . Ainsi les complexes différentiels qui ont pour cohomologies $H_G^*(M, \mathbf{R})$ et $H_{PG}^*(M, \mathbf{R})$ sont isomorphes.

Une autre démonstration m'a été proposée par F. Kirwan. On peut remplacer EG par $EG \times EPG$ et donc M_G a même type d'homotopie que $M \times_G (EG \times EPG)$. Ce dernier espace est un fibré au dessus de M_{PG} de fibre le groupe fini $Z(G)$. La suite spectrale de cette fibration dégénère donc au deuxième terme et $H_G^*(M, \mathbf{Q}) = H_{PG}^*(M, \mathbf{Q})$. \square

Comme le stabilisateur de chaque point de $\mu^{-1}(h)$ est réduit au centre de G , l'action de G induit une action libre de PG sur $\mu^{-1}(h)$. Ainsi

$$H_{PG}^2(\mu^{-1}(h)) = H^2(\mu^{-1}(h)/G).$$

On applique la proposition 2.1.3 avec $M = \mu^{-1}(\zeta\mathbf{I})$ et on voit que

$$H_G^2(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I})) = H^2(\mu^{-1}(h)/G),$$

ce dernier espace n'étant pas réduit à zéro puisque $\mu^{-1}(h)/G$ est une variété symplectique compacte (proposition 1.6.2). \square

Un corollaire direct de la proposition 2.1.2 est

Corollaire 2.1.4. — *L'application de restriction $H_G^2(G^{2g}) \longrightarrow H_G^2(\mu^{-1}(h))$ n'est pas surjective.*

2.2. Les espaces de modules de fibrés semi-stables

Comme nous l'avons déjà dit, une des motivations de l'article [2] était d'étudier la famille d'exemples d'espaces quasi-hamiltoniens du théorème 1.6.4. En effet certaines réductions de ces espaces sont des espaces de modules et les techniques développées pour les espaces quasi-hamiltoniens permettent entre autres de montrer que ces espaces de modules sont symplectiques. Dans ce paragraphe nous verrons que lorsque le groupe G du théorème 1.6.4 est $\mathbf{SU}(n)$ et que la réduction se fait en un élément du centre de $\mathbf{SU}(n)$, l'espace réduit s'identifie à un espace de modules de fibrés holomorphes semi-stables de déterminant fixé et de rang n (théorème 2.2.9). Les constructions qui suivent sont dues à Narasimhan et Seshadri [36]. A l'exception de la démonstration de la proposition 2.2.1, ce qui suit provient de ce très bel article. Soit X une surface de Riemann de genre g (figure 2), $g \geq 2$. Fixons un point

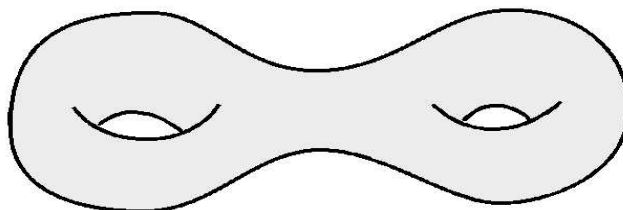


FIGURE 2. Surface de genre g (où $g = 2$)

x_0 de X . Soit d un entier compris entre 0 et $n - 1$, alors $\zeta = e^{2\pi i \frac{n-d}{n}}$ est une racine n -ième de l'unité. Les constructions de [36] utilisent un revêtement ramifié $Y \longrightarrow X$ dont nous commençons par donner une construction.

Proposition 2.2.1. — *Il existe un revêtement connexe et simplement connexe*

$$p : Y \longrightarrow X$$

ayant un seul point de ramification x_0 qui est d'ordre n . En dehors de ce point, l'application

$$Y - \{p^{-1}(x_0)\} \longrightarrow X - \{x_0\}$$

est un revêtement de groupe

$$\pi = \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c; c = \prod_{p=1}^g [a_p, b_p], c^n = 1\}.$$

Démonstration. — On commence par construire Y , puis on démontre que c est un espace simplement connexe. Soit D un voisinage ouvert de x_0 biholomorphe à un disque ouvert de \mathbf{C} centré en zéro et soit $D' = D - \{x_0\}$. Soit $X' = X - \{x_0\}$. Considérons le sous-groupe distingué H de $\pi_1(X')$ engendré par c^n , où $c = \prod_{p=1}^g [a_p, b_p]$ est la classe d'homotopie d'un petit cercle γ inclus dans D' autour de x_0 . Soit π le groupe quotient

$$\pi = \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c; c = \prod_{p=1}^g [a_p, b_p], c^n = 1\}.$$

Il existe un (unique) revêtement galoisien

$$p : Y' \longrightarrow X'$$

de groupe π . Le groupe fondamental de Y' est naturellement isomorphe à H .

Fixons un point x_1 de D' que l'on prend comme base des groupes fondamentaux de X, X' et D' . Décomposons $p^{-1}(D')$ en ses différentes composantes connexes

$$p^{-1}(D') = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha.$$

Chaque

$$V_\alpha \xrightarrow{p} D'$$

est un revêtement connexe. Son groupe est constitué des éléments de π qui laissent fixe tout point de $p^{-1}(y)$. Comme D' est un disque épointé, son groupe fondamental est engendré par la classe du lacet γ . Les revêtements connexes du disque épointé sont soit le demi-plan des nombres complexes de partie réelle strictement négative avec comme projection l'exponentielle, soit des disques épointés eux-mêmes avec comme projection une application du type $z \mapsto z^m$, où m est un entier strictement positif. Ici, la classe de γ agit comme c , donc V_α est un disque épointé et

$$V_\alpha \xrightarrow{p} D'$$

est l'application $z \mapsto z^n$, ceci pour tout α . Soit

$$Y = (Y' \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (D, \alpha)) / \sim$$

où pour $y \in Y'$ et $(x, \alpha) \in (D, \alpha)$

$$y \sim (x, \alpha) \text{ si et seulement si } p(x) = y.$$

La projection naturelle

$$Y \longrightarrow X$$

est un revêtement ayant une seule ramification en x_0 qui est d'ordre n . Il ne reste plus qu'à vérifier que Y est simplement connexe. L'espace Y' s'obtient à partir de Y en enlevant un ensemble discret de points donc l'application

$$\pi_1(Y') \longrightarrow \pi_1(Y)$$

est surjective. Soit $a \in \pi_1(X')$ de représentant $\eta : [0, 1] \longrightarrow X'$. Le lacet γ^n est un représentant de c^n . On relève $\eta \cdot \gamma^n \cdot \eta^{-1}$ dans Y' , pour ce faire il faut prendre un relevé $\tilde{\eta}$ de η dans Y' puis prendre un relevé $\tilde{\gamma}^n$ de γ vérifiant $\tilde{\gamma}^n(0) = \tilde{\eta}(1)$. Le relevé recherché est $\tilde{\eta} \cdot \tilde{\gamma}^n \cdot \tilde{\eta}^{-1}$. Il existe alors α tel que

$$\tilde{\gamma}^n \subset V_\alpha$$

et donc $\tilde{\gamma}^n$ est homotope au lacet constant. Ainsi l'image de $a \cdot c^n \cdot a^{-1}$ par $\pi_1(Y') \longrightarrow \pi_1(Y)$ est 1, d'où $\pi_1(Y') \longrightarrow \pi_1(Y)$ est d'image réduite à 1 et

$$\pi_1(Y) = \{1\}.$$

□

Fixons un y_0 de $p^{-1}(x_0)$. Dans la présentation

$$\pi = \{a_1, b_1, \dots, a_g, b_g, c; \prod_{i=1}^g [a_i, b_i] = c, c^n = 1\}$$

du groupe π , on peut choisir c de sorte que ce soit le générateur du groupe d'isotropie π_{y_0} de y_0 .

Si $\rho : \pi \rightarrow \mathbf{GL}(n)$ est une représentation de π , on note $E_\pi(\rho)$ le fibré vectoriel

$$Y \times \mathbf{C}^n \longrightarrow Y$$

muni de l'action de π suivante :

$$\begin{aligned} \pi \times (Y \times \mathbf{C}^n) &\longrightarrow Y \\ (\gamma, (y, v)) &\longmapsto (\gamma \cdot y, \rho(\gamma)v). \end{aligned}$$

Soit \mathbf{E} le faisceau des germes de sections holomorphes de $E_\pi(\rho)$. Le groupe π opère sur le faisceau image $p_*(\mathbf{E})$. Notons $p_*^\pi(\mathbf{E})$ le sous-faisceau des éléments π -invariants de $p_*(\mathbf{E})$. C'est un faisceau de \mathbf{O}_X -modules localement libres de rang n . Il définit un fibré holomorphe, noté $p_*^\pi(E_\rho)$, de rang n sur X dont on peut donner un ensemble de fonctions de transition de la manière suivante. Soit $\{U_i\}_{i=0}^m$ un recouvrement ouvert fini de X vérifiant :

1. toute intersection non vide d'ensembles U_i est contractile,
2. $x_0 \in U_0$ et $\bigcup_{i=1}^m U_i = X - \{x_0\}$,

3. il existe des disques $\{D_i\}_{i=0}^m$ dans Y tels que $y_0 \in D_0$ et U_0 soit le quotient de D_0 par π_{y_0} , la restriction $p|_{D_i}$ est un homéomorphisme de D_i sur U_i pour tout i non nul.

Pour chaque triplet i, j, k choisissons une composante connexe $W_{ij,k}$ de $p^{-1}(U_i \cap U_j) \cap D_k$. Si $U_i \cap U_j$ est non vide, on note $\gamma_{i,j}$ l'élément de π vérifiant $\gamma_{i,j}W_{ij,j} = W_{ji,i}$. D'après [36, p. 550] :

Proposition 2.2.2. — *Le recouvrement $\{U_i\}_{i=0}^m$ trivialise le fibré $p_*^\pi(E_\rho)$ et des fonctions de transition sont données par :*

$$\begin{cases} g_{i,j} = \rho(\gamma_{i,j}) & \text{dans } U_i \cap U_j, \text{ pour } i, j \neq 0 \\ g_{0,i} = f_{0,i}\rho(\gamma_{0,i}) & \text{dans } U_0 \cap U_i, \text{ pour } i \neq 0 \end{cases}$$

où $f_{0,i} : U_0 \cap U_i \rightarrow \mathbf{C}^*$ ne dépend que de τ .

Définition 2.2.3. — *Soit W un fibré vectoriel complexe sur X de degré $d(W)$ et de rang $r(W)$. On dit que W est stable (resp. semi-stable) si pour tout sous-fibré propre V , on a $r(W)d(V) < r(V)d(W)$ (resp. $r(W)d(V) \leq r(V)d(W)$).*

Remarque 2.2.4. — *Si $d(W)$ et $r(W)$ sont premiers entre eux alors la semi-stabilité et la stabilité sont des notions équivalentes.*

Rappelons que d est un entier compris entre 0 et $n - 1$ et $\zeta = e^{2\pi i \frac{n-d}{n}}$ est une racine n -ième de l'unité. Soit z une coordonnée locale au voisinage de y_0 tel que π_{y_0} soit le groupe des multiplications par ζ^k . Quitte à changer le générateur c de π_{y_0} on peut supposer que c agisse par multiplication par $e^{\frac{2i\pi}{n}}$. Soit τ le caractère de π_{y_0} défini par $\tau(c) = \zeta$. Une représentation $\rho : \pi \rightarrow \mathbf{U}(n)$ est dite de type τ si pour tout $\gamma \in \pi_{y_0}$, on a $\rho(\gamma) = \tau(\gamma)\mathbf{I}$. Pour toute représentation ρ de type τ on a :

$$d(p_*^\pi(E_\rho)) = d - n \quad (\text{voir [14, p. 13]}).$$

Toujours d'après [36] :

Théorème 2.2.5. — *Un fibré vectoriel de rang n et de degré $d - n$ sur X est semi-stable si et seulement si il est isomorphe à un $p_*^\pi(E_\rho)$, où $\rho : \pi \rightarrow \mathbf{U}(n)$ est une représentation unitaire de type τ . Ce même fibré est stable si et seulement si la représentation ρ est irréductible. De plus, deux tels fibrés sont isomorphes si et seulement si les représentations unitaires correspondantes sont équivalentes.*

Remarque 2.2.6. — Si on prend d premier à n , alors d'après [36, prop. 9.3], toute représentation $\rho : \pi \rightarrow \mathbf{U}(n)$ de type τ est automatiquement irréductible.

On note \mathfrak{n} l'espace de modules des fibrés vectoriels holomorphes sur X , stables de rang n et de degré $d - n$. L'application qui à la classe d'isomorphisme d'un tel fibré associe son déterminant est une fibration sur l'espace de modules des fibrés holomorphes en droites de degré $d - n$. Sa fibre est appelée l'espace de modules des fibrés vectoriels holomorphes de rang n et de déterminant fixé (de degré $d - n$).

On obtient tous ces fibrés en ne prenant que les représentations $\rho : \pi \rightarrow \mathbf{SU}(n)$ de type τ . Appelons S l'ensemble de telles représentations. On l'identifie à $\{(A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) \in \mathbf{SU}(n)^{2g} \mid \prod_{i=1}^g [A_i, B_i] = \zeta \mathbf{I}\}$ par :

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow \{(A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) \in \mathbf{SU}(n)^{2g} \mid \prod_{i=1}^g [A_i, B_i] = \zeta \mathbf{I}\} \\ \rho &\longmapsto (\rho(a_1), \rho(b_1), \dots, \rho(a_g), \rho(b_g)). \end{aligned}$$

L'action de $\mathbf{SU}(n)$ sur les représentations s'identifie alors à la restriction de l'action diagonale de $\mathbf{SU}(n)$ sur $\mathbf{SU}(n)^{2g}$ par conjugaison. D'après le théorème 1.6.4 que l'on applique avec $G = \mathbf{SU}(n)$, il existe une 2-forme ω sur $\mathbf{SU}(n)^{2g}$ telle que si μ est l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{SU}(n)^{2g} &\longrightarrow \mathbf{SU}(n) \\ (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) &\longmapsto \prod_{j=1}^g [A_j, B_j] \end{aligned}$$

alors $(\mathbf{SU}(n)^{2g}, \mathbf{SU}(n), \omega, \mu)$ est un espace quasi-hamiltonien. On peut réécrire le théorème 2.2.5 en

Théorème 2.2.7. — Soit \mathfrak{m} l'espace de modules des fibrés vectoriels holomorphes sur X , semi-stables de rang n et de déterminant fixé (de degré $d - n$), \mathfrak{m} est isomorphe à la réduction quasi-hamiltonienne de $(\mathbf{SU}(n)^{2g}, \mathbf{SU}(n), \omega, \mu)$ en $\zeta \mathbf{I}$.

Remarque 2.2.8. — Soit M un fibré en droites holomorphe de degré 1 sur X (il en existe toujours). L'espace de modules des fibrés vectoriels holomorphes semi-stables sur X de rang n et de déterminant fixé, de degré $d - n$, est naturellement isomorphe à l'espace de modules des fibrés vectoriels holomorphes semi-stables sur X de rang n et de déterminant fixé, de degré $hn + d - n$, pour tout $h \in \mathbf{Z}$. L'isomorphisme est induit par l'application qui à un fibré $E \rightarrow X$, associe $E \otimes M^h$.

Théorème 2.2.9. — *Si on suppose que d est un entier compris entre 0 et $n-1$, premier à n alors \mathfrak{m} est l'espace de modules des fibrés vectoriels holomorphes sur X , stables de rang n et de déterminant fixé (de degré $d - n$). C'est une variété symplectique compacte et*

$$\begin{array}{ccc} S & \longrightarrow & \mathfrak{m} \\ \rho & \longmapsto & p_*^\pi(E_\rho) \end{array}$$

est un $\mathrm{PSU}(n)$ -fibré principal.

Démonstration. — Comme d est premier à n , les notions de stabilité et de semi-stabilité sont les mêmes pour les fibrés holomorphes de degré $d - n$ sur X , donc \mathfrak{m} est l'espace de modules des fibrés vectoriels holomorphes sur X , stables de rang n et de déterminant fixé (de degré $d - n$).

Si $\rho = (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) \in S$ (rappelons que nous avons identifié S avec $\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I})$), son stabilisateur $\mathrm{Stab}(\rho)$ est l'ensemble des matrices du type $\zeta^k\mathbf{I}$, c'est-à-dire $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. En effet, soit C une telle matrice. Soit λ une valeur propre de C et soit E_λ le sous-espace propre associé. Comme C commute avec chacun des A_i, B_i , le sous-espace E_λ est stable par la représentation unitaire ρ , mais celle-ci est irréductible donc on a $E_\lambda = \mathbf{C}^n$. Réciproquement les matrices du type $\zeta^k\mathbf{I}$ sont bien dans $\mathrm{Stab}(\rho)$. On a ainsi une action libre de $\mathrm{PSU}(n)$ sur S .

Il ne nous reste plus qu'à prouver que \mathfrak{m} est symplectique. Or \mathfrak{m} est le résultat de la réduction d'un espace quasi-hamiltonien d'après le théorème 2.2.7 et est donc symplectique d'après la proposition 1.6.2. \square

CHAPITRE 3

L'ESPACE DE MODULES DES FIBRÉS SEMI-STABLES (CAS LISSE)

Plaçons-nous dans les conditions du théorème 2.2.7 avec d premier à n . Nous garderons les notations de ce théorème tout au long du chapitre 3. Nous utiliserons le symbole ω pour désigner la 2-forme sur $\mathbf{SU}(n)^{2g}$, la forme symplectique qu'elle induit sur $\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I})/\mathbf{SU}(n)$ par réduction, ainsi que sa classe de cohomologie dans $H^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I})/\mathbf{SU}(n)) \cong H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))$. Rappelons que l'application de restriction est

$$r : H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g}) \longrightarrow H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I})).$$

Nous nous consacrerons dans ce chapitre à l'étude de r , plus précisément si $\langle\omega\rangle$ est l'idéal de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(S)$ engendré par la classe de ω , nous nous intéresserons à l'application composée :

$$r' : H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g}) \xrightarrow{r} H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I})) \longrightarrow H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))/\langle\omega\rangle.$$

Dans le théorème 3.3.2 nous verrons une famille $\{a_p, b_{p,j}, d_p\}_{p=2,\dots,n; j=1,\dots,2g}$ de générateurs multiplicatifs de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))/\langle\omega\rangle$ puis dans la proposition 3.3.10 une famille $\{c_p, \sigma_{2p-1,j}\}_{p=2,\dots,n; j=1,\dots,2g}$ de générateurs multiplicatifs de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g})$. Notons que Alekseev, Meinrenken et Woodward [4] ont proposé un calcul de $H_G^*(G)$ pour un quelconque G compact, leur calcul utilise une certaine formule de Künneth (théorème 61 dans Kumar-Vergne [29]). Nous démontrons le théorème suivant

Théorème 3.5.1. — *L'application r' est décrite par*

$$\begin{aligned} r'(c_p) &= a_p \quad \text{pour } p = 2, \dots, n \\ r'(\sigma_{2p-1,j}) &= b_{p,j} \quad \text{pour } p = 2, \dots, n, j = 1, \dots, 2g. \end{aligned}$$

En particulier $\text{Im}(r')$ est multiplicativement engendrée par

$$\text{Im}(r') = \langle a_p, b_{p,j}, p = 2, \dots, n, j = 1, \dots, 2g \rangle.$$

Notons que pour n égal à 2, on obtient que l'application r' est surjective (ce résultat avait déjà été annoncé dans [40]). En particulier, puisque $H^*(\mathfrak{m})$ est isomorphe à $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))$, ce théorème permet de déduire une construction nouvelle de certains des générateurs classiques (c'est à dire ceux obtenus à partir des classes de Chern d'un fibré universel) de $H^*(\mathfrak{m})$. Avant de passer au résumé linéaire de ce chapitre, expliquons pourquoi il nous paraît suffisant d'étudier r' plutôt que r . Remarquons tout d'abord que ω n'est de toute façon pas dans l'image de r d'après la proposition 2.1.2. Une autre raison, plus sérieuse, est que les générateurs de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))$ que l'on trouve dans la littérature (voir par exemple [45]) dépendent du choix d'un fibré universel et ne sont bien définis que modulo ω .

Dans le paragraphe 3.1 nous proposons une construction d'un fibré, dit universel, sur $\mathfrak{m} \times X$. Dans le §3.2 nous établissons un lien entre ce fibré et un certain fibré D_n sur $(\mathbf{SU}(n)^{2g})_{\mathbf{SU}(n)} \times X'$. Dans 3.3 nous donnons des générateurs multiplicatifs de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))/\langle\omega\rangle$ et de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g})$. Dans 3.4 nous calculons les classes de Chern du fibré D_n . Enfin dans 3.5 nous utilisons le résultat de ce calcul pour décrire l'application r' en fonction des générateurs donnés dans 3.3.

3.1. Construction d'un fibré universel

Rappelons que page 43 nous avons défini un recouvrement de X par des ouverts $\{U_i\}_{i=0,\dots,m}$. Définissons un fibré vectoriel complexe T sur $S \times X$ (où S est identifié à $\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I})$) tel que les ouverts de trivialisations soient les $S \times U_i$ avec comme fonctions de transition :

$$\begin{aligned} (S \times U_i) \cap (S \times U_j) &\longrightarrow \mathbf{U}(n) \\ (\rho, x) &\longmapsto \begin{cases} \rho(\gamma_{i,j}) & x \in U_i \cap U_j, i, j \neq 0 \\ f_{0,i}(x)\rho(\gamma_{0,i}) & x \in U_0 \cap U_i, i \neq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.2.2 :

Proposition 3.1.1. — *Le fibré T vérifie : pour tout ρ de S*

$$T|_{\{\rho\} \times X} \cong p_*^\pi(E_\rho).$$

Construisons une action de $\mathbf{SU}(n)$ sur T en posant sur chaque $T|_{S \times U_i}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{SU}(n) \times (S \times U_i \times \mathbf{C}^n) &\longrightarrow S \times U_i \times \mathbf{C}^n \\ (g, (\rho, x, u)) &\longmapsto (g \cdot \rho, x, g(u)). \end{aligned}$$

Ceci définit bien une action car si $x \in U_j \cap U_i$ et si $t = (\rho, x, u)$ est dans $S \times U_i \times \mathbf{C}^n$, alors dans la trivialisatation $S \times U_j \times \mathbf{C}^n$, t s'écrit $t = (\rho, x, v(x)\rho(\gamma_{i,j})(u))$ où $v(x)$ est un scalaire et

$$\begin{aligned} g \cdot (\rho, x, v(x)\rho(\gamma_{i,j})(u)) &= (g \cdot \rho, x, g(v(x)\rho(\gamma_{i,j})(u))) \\ &= (g \cdot \rho, x, v(x)g\rho(\gamma_{i,j})g^{-1}g(u)). \end{aligned}$$

Ce dernier terme est $(g \cdot \rho, x, g(u))$ écrit dans $S \times U_j \times \mathbf{C}^n$. Cette action relève celle de $\mathbf{SU}(n)$ sur $S \times X$ mais malheureusement elle ne provient pas d'une action de $\mathbf{PSU}(n)$ et le fibré T ne descend pas en un fibré sur $\mathfrak{m} \times X$, en effet le centre $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ de $\mathbf{SU}(n)$ agit trivialement sur S mais le générateur $\zeta \mathbf{I}$ de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ agit par multiplication par ζ dans les fibres. Pour résoudre ce problème il suffit de construire un fibré en droites L sur S muni d'une action relevant celle de $\mathbf{SU}(n)$ sur S et telle que $\zeta \mathbf{I}$ agisse aussi par multiplication par ζ dans les fibres. En notant encore L le fibré induit sur $S \times X$, le fibré $T \otimes L^*$ a la propriété de la proposition 3.1.1 mais l'action de $\mathbf{SU}(n)$ se réduit à une action de $\mathbf{PSU}(n)$. On passe au quotient et on obtient alors :

Proposition 3.1.2. — *Le fibré*

$$U = (T \otimes L^*)/\mathbf{PSU}(n) \longrightarrow \mathfrak{m} \times X$$

est un fibré universel au sens où : si $[E] \in \mathfrak{m}$ est la classe d'un fibré $E \rightarrow X$ alors $U|_{[E] \times X}$ est isomorphe à E .

La proposition précédente utilise un certain fibré en droites L dont nous n'avons pas encore prouvé l'existence. Ceci est l'objet du lemme suivant :

Lemme 3.1.3. — *Il existe sur S un fibré en droites L muni d'une action relevant celle de $\mathbf{SU}(n)$ et tel que $\zeta \mathbf{I}$ agisse par multiplication par ζ dans les fibres.*

Démonstration. — Elle s'inspire de [35].

Le fibré T construit précédemment est une famille (paramétrée par S) de fibrés holomorphes stables sur X de rang n et de degré $d - n$, donc en tensorisant par un fibré en droite de degré 1 au dessus de X on obtient une famille (paramétrée par S) de fibrés holomorphes stables sur X de rang n et de degré d . Si E est un tel fibré et si k est un entier naturel non nul, par dualité de Serre

$$H^1(E \otimes (\Omega_X^1)^k)^\vee = H^0(E^\vee \otimes \Omega_X^{1-k})$$

et cet espace vectoriel est réduit à zéro. Sinon il existerait un homomorphisme non nul $(\Omega_X^1)^{1-k} \rightarrow E^\vee$, et donc un sous-fibré de E^\vee de degré plus grand ou égal à $2(g-1)(k-1) \geq 0$, ce qui contredirait la stabilité de E .

D'après [28], les $H^0(E \otimes (\Omega_X^1)^k)$ forment alors un fibré holomorphe A_k sur S de rang u_k la dimension de l'espace vectoriel $H^0(E \otimes (\Omega_X^1)^k)$. En utilisant Riemann-Roch, on a

$$\begin{aligned} u_k &= d(E \otimes (\Omega_X^1)^k) + n(1 - g) \\ &= d(E) + 2nk(g - 1) + n(1 - g) \\ &= d + n(g - 1)(2k - 1) \\ &= 2hk + d - h \quad (\text{en posant } h = n(g - 1)). \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} (u_2, u_1) = 1 &\Leftrightarrow (d + 3h, d + h) = 1 \Leftrightarrow (2h, d + h) = 1 \\ &\Leftrightarrow d + h \text{ est impair et } (d, h) = 1. \end{aligned}$$

Comme d et n sont premiers entre eux, d et h sont premiers entre eux si et seulement si d et $g - 1$ sont premiers entre eux. Si on suppose de plus que $g - 1$ est impair alors $d + n(g - 1)$ est impair (d et n sont de parités différentes). Dans ces conditions, il existe des entiers a et b tels que $au_1 + bu_2 = 1$ et on peut prendre pour L le fibré

$$(\wedge^{u_1} A_1)^a \otimes (\wedge^{u_2} A_2)^b.$$

Si ces conditions ne sont pas satisfaites, il existe $g' \geq g$ tel que $g' - 1$ soit impair et $(d, g' - 1) = 1$. L'injection

$$\begin{aligned} \mathbf{SU}(n)^{2g} &\longrightarrow \mathbf{SU}(n)^{2g'} \\ (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) &\longmapsto (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g, 1, 1, \dots, 1, 1) \end{aligned}$$

se restreint en une injection équivariante

$$S \rightarrow S'$$

où S' est $\{(A_1, B_1, \dots, A_{g'}, B_{g'}), \prod_{i=1}^{g'+1} [A_i, B_i] = \zeta\}$. D'après ce qui précède, on peut construire sur S' un fibré en droites avec les propriétés requises. Par restriction à S on obtient le fibré L voulu. \square

3.2. Un fibré sur $(\mathbf{SU}(n)^{2g})_{\mathbf{SU}(n)} \times X'$

Désormais, si $g \in \mathbf{SU}(n)$, on note \bar{g} sa classe dans $\mathbf{PSU}(n)$. Les ouverts $T \otimes L^*|_{S \times U_i}$, $i = 0, \dots, m$, forment un recouvrement ouvert de $T \otimes L^*$. Dans chacun de ces ouverts, l'action de $\mathbf{PSU}(n)$ sur $T \otimes L^*$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{PSU}(n) \times (S \times U_i \times \mathbf{C}^n) \otimes L^* &\longrightarrow (S \times U_i \times \mathbf{C}^n) \otimes L^* \\ (\bar{g}, (\rho, x, u) \otimes l) &\longmapsto (g \cdot \rho, x, g(u)) \otimes (g \cdot l). \end{aligned}$$

Lemme 3.2.1. — *On a*

$$P(U) = P((T \otimes L^*)/\mathbf{PSU}(n)) \cong P(T)/\mathbf{PSU}(n).$$

Démonstration. — Cette fois-ci $\mathbf{PSU}(n)$ agit sur $P(T)$ par :

$$\begin{aligned} \mathbf{PSU}(n) \times (S \times U_i \times \mathbf{CP}^n) &\longrightarrow (S \times U_i \times \mathbf{CP}^n) \\ (\bar{g}, (\rho, x, \bar{u})) &\longmapsto (g \cdot \rho, x, \overline{g(u)}) \end{aligned}$$

et l'isomorphisme annoncé est :

$$\begin{aligned} P(U) &\xrightarrow{\cong} P(T)/\mathbf{PSU}(n) \\ \text{classe de } (\rho, x, u) \otimes l &\longmapsto \text{classe de } (\rho, x, u). \end{aligned}$$

□

Lemme 3.2.2. — *Il existe une action de $\pi \times \mathbf{PSU}(n)$ sur $S \times Y' \times \mathbf{CP}^{n-1}$ telle que le quotient*

$$(S \times Y' \times \mathbf{CP}^{n-1})/(\pi \times \mathbf{PSU}(n))$$

soit isomorphe à

$$P(U)|_{\mathfrak{m} \times X'}.$$

Démonstration. — Le fibré T restreint à $S \times X'$ a pour ouverts de trivialisations les $S \times U_i$, $i \neq 0$ et pour fonctions de transition :

$$\begin{aligned} (S \times U_i) \cap (S \times U_j) &\longrightarrow \mathbf{SU}(n) \\ (\rho, x) &\longmapsto \rho(\gamma_{i,j}). \end{aligned}$$

Le groupe π agit librement sur Y' et $T|_{S \times X'}$ n'est rien d'autre que $(S \times Y' \times \mathbf{C}^n)/\pi$, l'action de π étant :

$$\begin{aligned} \pi \times (S \times Y' \times \mathbf{C}^n) &\longrightarrow S \times Y' \times \mathbf{C}^n \\ (\gamma, (\rho, y, u)) &\longmapsto (\rho, \gamma \cdot y, \rho(\gamma)u). \end{aligned}$$

Si on passe au projectifié, $P(T)|_{S \times X'}$ est isomorphe à $(S \times Y' \times \mathbf{CP}^{n-1})/\pi$. Le sous-espace $P(T)|_{S \times X'}$ est stable par $\mathbf{PSU}(n)$ et l'action provient d'une action de $\mathbf{PSU}(n)$ sur $S \times Y' \times \mathbf{CP}^{n-1}$ qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{PSU}(n) \times (S \times Y' \times \mathbf{CP}^{n-1}) &\longrightarrow S \times Y' \times \mathbf{CP}^{n-1} \\ (\bar{g}, (\rho, y, \bar{u})) &\longmapsto (g \cdot \rho, y, \overline{g(u)}). \end{aligned}$$

Cette action commute bien avec celle de π , d'où le résultat. □

Si on tire en arrière le fibré $U \rightarrow (S/\mathbf{PSU}(n)) \times X'$ sur $(S)_{\mathbf{SU}(n)} \times X'$ par l'application naturelle

$$f : (S)_{\mathbf{SU}(n)} \times X' \longrightarrow (S/\mathbf{PSU}(n)) \times X',$$

on obtient un fibré vectoriel, noté F , dont le projectifié est

$$P(F) = (P(T))_{\mathbf{SU}(n)} \longrightarrow (S)_{\mathbf{SU}(n)} \times X'.$$

Venons-en à la proposition suivante qui sera un outil essentiel dans l'étude de l'application r' :

Proposition 3.2.3. — *Il existe un fibré $P(D)$ défini sur $(\mathbf{SU}(n)^{2g})_{\mathbf{SU}(n)} \times X'$ dont la restriction à $(S)_{\mathbf{SU}(n)} \times X'$ est $P(F)$.*

Première démonstration. La projection $p : Y' \rightarrow X'$ est un revêtement de groupe π . Soit $q : \tilde{Y}' \rightarrow Y'$ le revêtement universel de Y' . Le composé $\tilde{p} = p \circ q : \tilde{Y}' \rightarrow X'$ est le revêtement universel de X' , son groupe est $\pi_1(X') = \langle a_1, \dots, a_g, b_1, \dots, b_g \rangle$ et on a une projection $\pi_1(X') \xrightarrow{\theta} \pi$ dont le noyau est le groupe du revêtement $\tilde{Y}' \rightarrow Y'$.

Le recouvrement de X' par les $\{U_i\}_{i=1}^m$ est tel que toute intersection d'ouverts de type U_i est contractile. En particulier, pour tout i , il existe un disque \tilde{D}_i de \tilde{Y}' tel que $\tilde{p} : \tilde{D}_i \rightarrow U_i$ soit un difféomorphisme. On choisit, pour tous i, j, k , une composante connexe $W_{ij,k}$ de $\tilde{p}^{-1}(U_i \cap U_j) \cap \tilde{D}_k$. Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, soit $\tilde{\gamma}_{i,j}$ l'élément de $\pi_1(X')$ qui vérifie $\tilde{\gamma}_{i,j} \tilde{W}_{ij,j} = \tilde{W}_{ji,i}$. Dans la proposition 2.2.2, on peut alors choisir les $W_{ij,k}$ et $\gamma_{i,j}$ de la façon suivante :

$$W_{ij,k} = \tilde{p}(\tilde{W}_{ij,k}) \text{ et } \gamma_{i,j} = \theta(\tilde{\gamma}_{i,j}).$$

L'ensemble des représentations $\rho : \pi_1(X') \rightarrow \mathbf{SU}(n)$ s'identifie à $\mathbf{SU}(n)^{2g}$ par

$$\rho \mapsto (\rho(a_1), \rho(b_1), \dots, \rho(a_g), \rho(b_g)).$$

Soit

$$T' \rightarrow \mathbf{SU}(n)^{2g} \times X'$$

le fibré vectoriel complexe de rang n défini par les deux propriétés suivantes :

1. $T'|_{\mathbf{SU}(n)^{2g} \times U_i}$ est trivial,

2. les fonctions de transition sont :

$$g_{i,j} = \rho(\tilde{\gamma}_{i,j}) \text{ sur } \mathbf{SU}(n)^{2g} \times (U_i \cap U_j).$$

La restriction de ce fibré à $S \times X'$ est justement $T|_{S \times X'}$. L'action de $\mathbf{SU}(n)$ sur $T|_{S \times X'}$ est alors la restriction de l'action de $\mathbf{SU}(n)$ sur T' que l'on définit sur chaque $T'|_{\mathbf{SU}(n)^{2g} \times U_i}$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{SU}(n) \times (\mathbf{SU}(n)^{2g} \times U_i \times \mathbf{C}^n) &\longrightarrow \mathbf{SU}(n)^{2g} \times U_i \times \mathbf{C}^n \\ (g, (\rho, x, u)) &\longmapsto (g \cdot \rho, x, g(u)). \end{aligned}$$

Notons que cette action relève l'action de $\mathbf{SU}(n)$ sur $\mathbf{SU}(n)^{2g} \times X'$. Ainsi le fibré

$$P(F) = (P(T))_{\mathbf{SU}(n)} \rightarrow (S)_{\mathbf{SU}(n)} \times X'$$

est la restriction du fibré

$$(P(T'))_{\mathbf{SU}(n)} \rightarrow (\mathbf{SU}(n)^{2g})_{\mathbf{SU}(n)} \times X'.$$

Deuxième démonstration. Nous avons vu que

$$P(U)|_{\mathfrak{m} \times X'} \cong (S \times Y' \times \mathbf{CP}^{n-1})/(\pi \times \mathbf{PSU}(n))$$

et donc

$$P(F) \cong (S \times E\mathbf{U}(n) \times Y' \times \mathbf{CP}^{n-1})/(\pi \times \mathbf{SU}(n)).$$

Définissons comme précédemment une action de $\pi_1(X')$ sur $\mathbf{SU}(n)^{2g} \times E\mathbf{U}(n) \times \widetilde{Y}' \times \mathbf{C}^n$ et notons D le fibré obtenu en quotientant par $\pi_1(X') \times \mathbf{SU}(n)$. La projection $S \times E\mathbf{U}(n) \times \widetilde{Y}' \times \mathbf{C}^n \rightarrow S \times E\mathbf{U}(n) \times Y' \times \mathbf{C}^n$ est équivariante pour les actions respectives de $\pi_1(X')$ et π . Elle passe donc au quotient pour définir un isomorphisme entre

$$(S \times E\mathbf{U}(n) \times \widetilde{Y}' \times \mathbf{C}^n)/(\pi_1(X') \times \mathbf{SU}(n))$$

et

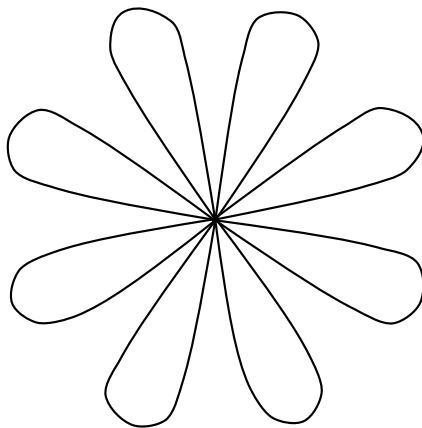
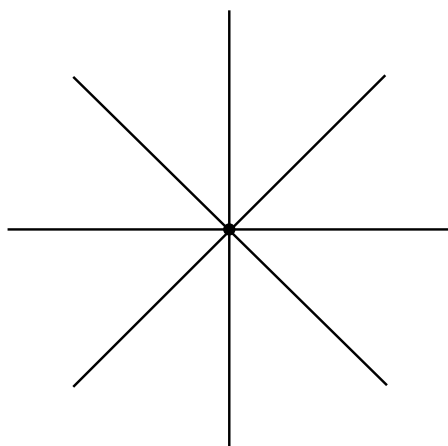
$$(S \times E\mathbf{U}(n) \times Y' \times \mathbf{C}^n)/(\pi \times \mathbf{SU}(n)).$$

On en déduit que $P(F)$ est isomorphe à $P(D)|_{(S)_{\mathbf{SU}(n)} \times X'}$.

□

Remarque 3.2.4. — *Le fibré $D \rightarrow (\mathbf{SU}(n)^{2g})_{\mathbf{SU}(n)} \times X'$ est isomorphe à $(T' \times E\mathbf{U}(n))/\mathbf{SU}(n)$.*

Soit B un bouquet de $2g$ cercles (figure 1) plongé dans X' de façon que X' se rétracte sur B . La théorie des fibrés vectoriels et de leurs classes de Chern est la même sur B et sur X' . Nous allons construire un fibré vectoriel complexe sur $(\mathbf{SU}(n)^{2g})_{\mathbf{SU}(n)} \times B$. Notons B' l'étoile à $2g$ branches (voir la figure

FIGURE 1. Bouquet de $2g$ cercles (avec $g = 4$)FIGURE 2. Une étoile à $2g$ branches (encore avec $g = 4$)

2), c'est-à-dire $B' = (\cup_{i=1}^{2g} [0, 1]_i) / \sim$, où \sim est la relation d'équivalence qui identifie tous les 0 en un point. On a une application naturelle

$$\eta : B' \longrightarrow B$$

définie à l'aide de $\exp : [0, 1] \rightarrow S^1$. Notons

$$D_n = (\mathbf{SU}(n)^{2g} \times E\mathbf{U}(n) \times B' \times \mathbf{C}^n) / \sim$$

où \sim est la relation :

$$\begin{aligned} ((\rho_1, \dots, \rho_{2g}), e, 0, v) &\sim ((\text{Ad}_A \rho_1, \dots, \text{Ad}_A \rho_{2g}), A \cdot e, 1_i, A \circ \rho_i(v)), \\ &\forall i \in [1, 2g], \forall A \in \mathbf{SU}(n). \end{aligned}$$

La projection

$$D_n \longrightarrow (\mathbf{SU}(n)^{2g})_{\mathbf{SU}(n)} \times B$$

fait de D_n un fibré vectoriel complexe de rang n sur $(\mathbf{SU}(n)^{2g})_{\mathbf{SU}(n)} \times B$. Ce fibré est en fait isomorphe à $D|_{(\mathbf{SU}(n)^{2g})_{\mathbf{SU}(n)} \times B}$ mais comme dans le paragraphe 3.4 il nous sera nécessaire de distinguer les différents D_n , nous préférons mettre le n en indice dès maintenant. On notera encore D_n la restriction de ce fibré à $(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))_{\mathbf{SU}(n)} \times B$.

3.3. Des générateurs de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))/\langle\omega\rangle$ et de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g})$

Commençons par les générateurs de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))/\langle\omega\rangle$. Nous avons vu qu'il existe un isomorphisme entre $\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I})/\mathbf{SU}(n)$ et l'espace de modules \mathfrak{m} . A l'aide de cet isomorphisme, identifions $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mu^{-1}(\zeta\mathbf{I}))$ et $H^*(\mathfrak{m})$. Rappelons que M est un fibré en droites holomorphe de degré 1 sur X (voir remarque 2.2.8, par abus de notation la même lettre M est utilisée pour désigner le fibré induit sur $\mathfrak{m} \times X$) et que U est un fibré universel (proposition 3.1.2). Posons $V = U \otimes M$. Le fibré V est alors un fibré universel si nous interprétons \mathfrak{m} comme l'espace de modules des fibrés holomorphes sur X , stables de rang n et de déterminant fixé (de degré d). Définissons des classes de cohomologie a_p, b_p^j, d_p dans $H^*(\mathfrak{m})$ en décomposant $c_p(V)$ par la formule de Künneth :

$$c_p(V) = a_p \otimes \mathbf{1} + \sum_{j=1}^{2g} b_p^j \otimes \alpha_j + d_p \otimes \kappa, \quad 1 \leq p \leq n,$$

où les α_j forment une base de $H^1(X)$ et κ est la forme volume sur X de volume 1. Remarquons que l'on a tout simplement

$$a_p = c_p(V|_{\mathfrak{m}}).$$

Un théorème de [5] (ce théorème est une amélioration de [1, Théorème 9.11], il est aussi très bien raconté dans [45]) nous dit :

Théorème 3.3.1. — *La famille*

$$\{a_p, 2 \leq p \leq n, b_p^j, 2 \leq p \leq n, 1 \leq j \leq 2g, d_p, 2 \leq p \leq n\}$$

forme un système de générateurs multiplicatifs de $H^(\mathfrak{m})$.*

Notons encore a_p, b_p^j, d_p les images de ces éléments dans $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(S)$. Dans la suite nous ne nous intéresserons qu'à ces classes. Réécrivons donc le théorème précédent en :

Théorème 3.3.2. — *Les classes a_p, b_p^j, d_p sont des générateurs multiplicatifs de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(S)$.*

Remarque 3.3.3. — *Il existe plusieurs fibrés universels non isomorphes et pour chacun d'eux on peut définir des classes a_p, b_p^j, d_p qui sont des générateurs multiplicatifs de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(S)$. Ces classes ne sont donc pas naturelles, par contre elles le deviennent quand on les regarde modulo l'idéal engendré par ω .*

Nous en déduisons le corollaire suivant, qui est ici plus utile puisque l'application r' prend ses valeurs dans $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(S)/\langle\omega\rangle$ et non dans $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(S)$.

Corollaire 3.3.4. — *L'espace vectoriel $H_{\mathbf{SU}(n)}^2(S)$ est engendré par ω , donc $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(S)/\langle\omega\rangle$ admet*

$$\{a_p, b_p^j, d_p, 2 \leq p \leq n, 1 \leq j \leq 2g\}$$

comme système de générateurs multiplicatifs.

Démonstration. — Comme ω est une forme symplectique sur une variété compacte, sa classe de cohomologie est non nulle. Il nous suffit donc de prouver que $\dim H_{\mathbf{SU}(n)}^2(S) = 1$ ou encore que le deuxième nombre de Betti b_2 de \mathfrak{m} vaut 1. D'après [12, Théorème 3, page 243], b_2 est égal au coefficient de t^2 dans

$$\frac{((1+t^3) \dots (1+t^{2n-1}))^{2g}}{(1-t^2)(1-t^4)^2 \dots (1-t^{2n})},$$

(attention, cette série et le polynôme de Poincaré de \mathfrak{m} n'ont en commun que leurs premiers termes). Ce coefficient vaut 1 donc $b_2 = 1$. \square

Avant de passer à $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g})$, étudions $H^*(\mathbf{SU}(n)^{2g})$.

Lemme 3.3.5. — *L'algèbre $H^*(\mathbf{SU}(n)^{2g})$ est une algèbre extérieure de générateurs les $\{\sigma_{2p-1,j}, 2 \leq p \leq n, 1 \leq j \leq 2g, \deg \sigma_{2p-1,j} = 2p-1\}$.*

Démonstration. — Pour tout n la fibration

$$\mathbf{SU}(n-1) \longrightarrow \mathbf{SU}(n) \longrightarrow S^{2n-1}$$

est cohomologiquement triviale (voir [16, chapitre 4]), c'est-à-dire qu'on a

$$H^*(\mathbf{SU}(n)) = H^*(\mathbf{SU}(n-1)) \otimes H^*(S^{2n-1})$$

et par récurrence

$$H^*(\mathbf{SU}(n)) = H^*(S^3) \otimes H^*(S^5) \otimes \dots \otimes H^*(S^{2n-1}).$$

Notons σ_{2p-1} l'image par l'injection $H^{2p-1}(S^{2p-1}) \longrightarrow H^{2p-1}(\mathbf{SU}(n))$ du générateur de $H^{2p-1}(S^{2p-1}) \cong \mathbf{Q}$ correspondant à 1. L'espace $H^*(\mathbf{SU}(n))$ est l'algèbre symétrique graduée des classes σ_{2p-1} , $2 \leq p \leq n$, avec $\deg \sigma_{2p-1} = 2p-1$. Notons $\sigma_{2p-1,j}$ l'image de $\sigma_{2p-1} \in H^{2p-1}(\mathbf{SU}(n))$ par l'homomorphisme $H^*(\mathbf{SU}(n)) \rightarrow H^*(\mathbf{SU}(n)^{2g})$ induit par la projection sur le j -ième facteur $\mathbf{SU}(n)^{2g} \rightarrow \mathbf{SU}(n)$. Le lemme découle alors de la formule de Künneth. \square

Remarque 3.3.6. — L'injection $\iota : \mathbf{SU}(n) \longrightarrow \mathbf{SU}(n+1)$ et l'application $B\mathbf{SU}(n) \rightarrow B\mathbf{SU}(n+1)$ induisent des isomorphismes

$$(3.3.1) \quad H^p(\mathbf{SU}(n+1)) \xrightarrow{\sim} H^p(\mathbf{SU}(n)) \text{ pour } p \leq 2n \text{ et } p = 2n+2$$

et

$$(3.3.2) \quad H^p(B\mathbf{SU}(n+1)) \xrightarrow{\sim} H^p(B\mathbf{SU}(n)) \text{ pour } p \leq 2n.$$

Nous allons à présent décrire $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g})$. Soit G un groupe compact. On le fait agir sur lui-même par conjugaison et sur G^k par conjugaison diagonale. Il existe un entier n tel que G s'injecte dans $\mathbf{U}(n)$. Supposons que n soit tel que l'application de restriction de $H^*(\mathbf{U}(n))$ dans $H^*(G)$ soit surjective. Supposons aussi qu'il existe des classes (ξ_1, \dots, ξ_r) engendrant librement $H^*(G)$ en tant qu'algèbre extérieure. Nous dirons que la famille (ξ_1, \dots, ξ_r) est une base de l'algèbre $H^*(G)$.

Proposition 3.3.7. — La cohomologie équivariante de G^k est égale à la cohomologie usuelle de G^k tensorisée par la cohomologie usuelle de BG .

Démonstration. — D'après [15, chap. 11.9], il suffit de montrer que l'application de restriction de $H_G^*(G^k)$ dans $H^*(G^k)$ est surjective. Pour cela nous aurons besoin de :

Lemme 3.3.8. — L'application $H_G^*(G) \longrightarrow H^*(G)$ est surjective.

Démonstration. — Comme G est supposé être un sous-groupe de $\mathbf{U}(n)$, on a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H_{\mathbf{U}(n)}^*(\mathbf{U}(n)) & \xrightarrow{(1)} & H^*(\mathbf{U}(n)) \\ \downarrow & \nearrow (2) & \downarrow (3) \\ H_G^*(\mathbf{U}(n)) & \longrightarrow & H_G^*(G) \xrightarrow{(4)} H^*(G). \end{array}$$

La flèche (1) est surjective d'après [15, chap. 11.9], donc (2) est surjective. Nous avons supposé que (3) est surjective et ainsi (4) l'est aussi. \square

Nous allons en déduire que

Lemme 3.3.9. — *L'application de restriction de $H_G^*(G^k)$ dans $H^*(G^k)$ est surjective.*

Démonstration. — Pour i un entier compris entre 1 et k , soit α_i le monomorphisme

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G^k \\ h & \longmapsto & \underbrace{(1, \dots, h, \dots, 1)}_{h \text{ à la } i\text{-ième position}} \end{array}$$

et soit p_i la projection de G^k sur son i -ième facteur G . On a $p_i \circ \alpha_i = \text{id}_G$ donc en passant aux applications induites en cohomologie équivariante : $\alpha_i^* \circ p_i^* = \text{id}_{H_G^*(G)}$ et α_i^* est surjective. Fixons e_0 dans EG . Soient τ et τ^k les injections

$$\begin{array}{ccc} \tau : G & \longrightarrow & G \times_G EG \\ h & \longmapsto & [h, e_0] \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \tau^k : G^k & \longrightarrow & G^k \times_G EG \\ (h_1, \dots, h_k) & \longmapsto & [(h_1, \dots, h_k), e_0]. \end{array}$$

Par définition, le diagramme suivant est commutatif pour tout i

$$\begin{array}{ccc} & G \times_G EG & \\ \tau \nearrow & & \searrow \alpha_i \times_G \text{id}_{EG} \\ G & & G^k \times_G EG \\ \alpha_i \searrow & & \nearrow \tau^k \\ & G^k & \end{array}$$

On en déduit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 & H_G^*(G) & \\
 \alpha_i^* \nearrow & & \searrow \tau^* \\
 H_G^*(G^k) & & H^*(G) \\
 \tau^{k*} \searrow & & \nearrow \alpha_i^* \\
 & H^*(G^k) &
 \end{array}$$

Comme α_i^* et τ^* sont surjectives, les $\alpha_i^* \circ \tau^{k*}$ sont surjectives pour tout i . Rappelons que (ξ_1, \dots, ξ_r) est une base de l'algèbre $H^*(G)$. Comme $H^*(G^k) = \otimes_{i=1}^k H^*(G)$, les $\xi_{i,j} = 1 \otimes \dots \otimes \xi_i \otimes 1 \dots \otimes 1$, où ξ_i est en j -ième position, forment une base de l'algèbre $H^*(G^k)$. Si $\{P_{i,j}\}_{i=1,\dots,k, j=1,\dots,r}$ est une famille de polynômes à coefficients rationnels dont chaque terme homogène est de degré, en tant que polynôme, supérieur ou égal à 2 alors les $\xi'_{i,j} = \xi_{i,j} + P_{i,j}(\xi_{1,1}, \dots, \xi_{r,k})$ forment encore une base de l'algèbre $H^*(G^k)$. Fixons i, j . Il existe $\zeta_{i,j}$ dans $H_G^*(G^k)$ tel que $\alpha_i^* \circ \tau^{k*}(\zeta_{i,j}) = \xi_j$. Alors $\tau^{k*}(\zeta_{i,j})$ est de la forme $\sum_{k,h} \lambda_{k,h} \xi_{k,h} + P_{i,j}(\xi_{1,1}, \dots, \xi_{r,k})$ où $P_{i,j}$ est un polynôme à coefficients rationnels dont chaque terme homogène est de degré supérieur ou égal à 2. L'image d'un tel élément par α_i^* est $\sum_k \lambda_{k,i} \xi_k$, donc $\tau^{k*}(\zeta_{i,j}) = \xi_{i,j} + P_{i,j}(\xi_{1,1}, \dots, \xi_{r,k})$. Ceci étant vrai pour tout i, j , on en déduit que la famille $\{\tau^{k*}(\zeta_{i,j})\}_{i=1,\dots,k, j=1,\dots,r}$ forme une base de l'algèbre $H_G^*(G^k)$ et donc τ^{k*} est surjective. \square

Ce dernier lemme conclut la démonstration de la proposition 3.3.7 \square

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la proposition suivante

Proposition 3.3.10. — Soit p la projection de $\mathbf{SU}(n)_{\mathbf{SU}(n)}^{2g} \rightarrow \mathbf{BSU}(n)$. Pour tout β dans $H^*(\mathbf{BSU}(n)) - \{0\}$, le produit extérieur par $p^*(\beta)$ est un endomorphisme injectif de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g})$.

Démonstration. — La projection p est cohomologiquement triviale (proposition 3.3.7). Cela signifie qu'il existe des classes

$$e_1, \dots, e_r \text{ dans } H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g})$$

dont la restriction à une fibre forme une base (vectorielle) de la cohomologie de cette fibre. Identifions ces éléments avec leur image dans la cohomologie

de la fibre. Un isomorphisme (d'espaces vectoriels) entre $H^*(\mathbf{SU}(n)^{2g}) \otimes H^*(\mathbf{BSU}(n))$ et $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g})$ est donné par

$$\begin{aligned} H^*(\mathbf{SU}(n)^{2g}) \otimes H^*(\mathbf{BSU}(n)) &\rightarrow H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g}) \\ (\sum_i \lambda_i e_i) \otimes \beta &\mapsto (\sum_i \lambda_i e_i) \wedge p^* \beta. \end{aligned}$$

L'algèbre $H^*(\mathbf{BSU}(n))$ est isomorphe à une algèbre de polynômes en $n - 1$ variables $Q[c_2, \dots, c_n]$ où c_p est de degré 4. Soit β dans $H^*(\mathbf{BSU}(n)) - \{0\}$ et α un élément de $H_{\mathbf{SU}(n)}^*(\mathbf{SU}(n)^{2g})$, il s'écrit de façon unique sous la forme

$$\alpha = \sum_i e_i \otimes p^*(\beta_i)$$

où les β_i sont dans $H^*(\mathbf{BSU}(n))$. Ce α est nul si et seulement si tous les β_i sont nuls. On a $p^*(\beta) \wedge \alpha = \sum_i e_i \otimes p^*(\beta \wedge \beta_i)$ et comme β n'est pas un diviseur de zéro dans $H^*(\mathbf{BSU}(n))$ et p^* est injectif, si α est non nul son produit extérieur avec $p^*(\beta)$ est non nul. \square

3.4. Un calcul de classes de Chern

Nous allons calculer dans ce paragraphe les classes de Chern du fibré D_n . Annonçons tout de suite le résultat :

Proposition 3.4.1. — *Les classes de Chern du fibré D_n sont :*

$$\begin{aligned} c_0(D_n) &= 1, \\ c_1(D_n) &= 0, \\ c_p(D_n) &= (1 \otimes c_p) \otimes 1 + \sum_{j=1}^{2g} (\sigma_{2p-1,j} \otimes 1) \otimes \alpha_j \text{ pour } p \geq 2. \end{aligned}$$

Démonstration. — Les classes $c_0(D_n)$ et $c_1(D_n)$ ont bien sûr la forme annoncée (le groupe de structure est $\mathbf{SU}(n)$). Dans la suite, nous supposons que $p \geq 2$. Écrivons les classes de Chern du fibré D_n dans $H^*((\mathbf{SU}(n)^{2g})_{\mathbf{SU}(n)} \times B)$

$$c_p(D_n) = \gamma_p^{(n)} \otimes 1 + \sum_{j=1}^{2g} \beta_{p,j}^{(n)} \otimes \alpha_j.$$

Prouvons la proposition par récurrence sur n . Pour $n = 1$, $\mathbf{SU}(1)$ est réduit à un point, le fibré D_1 est trivial et il n'y a rien à démontrer. Supposons la proposition vraie au rang n , $n \geq 1$ et démontrons-la au rang $n + 1$. Il s'agit de prouver que

$$\gamma_p^{(n+1)} = 1 \otimes c_p \text{ et } \beta_{p,j}^{(n+1)} = \sigma_{2p-1,j} \otimes 1.$$

Soit

$$m : (\mathbf{SU}(n)^{2g})_{\mathbf{SU}(n)} \longrightarrow (\mathbf{SU}(n+1)^{2g})_{\mathbf{SU}(n+1)},$$

l'application induite par l'inclusion $\mathbf{SU}(n) \longrightarrow \mathbf{SU}(n+1)$ et soit

$$\ell = m \times \text{id}_B : (\mathbf{SU}(n)^{2g})_{\mathbf{SU}(n)} \times B \longrightarrow (\mathbf{SU}(n+1)^{2g})_{\mathbf{SU}(n+1)} \times B.$$

Le fibré $\ell^* D_{n+1}$ est isomorphe à $D_n \oplus \mathbf{C}$ et donc pour tout p, n on a $c_p(\ell^* D_{n+1}) = c_p(D_n)$. Ainsi

$$(m^* \gamma_p^{(n+1)}) \otimes 1 + \sum_{j=1}^{2g} (m^* \beta_{p,j}^{(n+1)}) \otimes \alpha_j = \gamma_p^{(n)} \otimes 1 + \sum_{j=1}^{2g} \beta_{p,j}^{(n)} \otimes \alpha_j$$

d'où l'on déduit que

$$m^* \gamma_p^{(n+1)} = \gamma_p^{(n)} \text{ et } m^* \beta_{p,j}^{(n+1)} = \beta_{p,j}^{(n)}.$$

D'après les isomorphismes (3.3.1), (3.3.2) et l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\begin{aligned} \gamma_p^{(n+1)} &= 1 \otimes c_p \text{ pour } p \leq n, \\ \beta_{p,j}^{(n+1)} &= \sigma_{2p-1,j} \otimes 1 \text{ pour } p \leq n. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à calculer $\gamma_{n+1}^{(n+1)}$ et les $\beta_{n+1,j}^{(n+1)}$. La classe $\gamma_{n+1}^{(n+1)}$ appartient à

$$H_{\mathbf{SU}(n+1)}^{2n+2}(\mathbf{SU}(n+1)^{2g}) = \bigoplus_{p+q=2n+2} H^p(\mathbf{SU}(n+1)^{2g}) \otimes H^q(B\mathbf{SU}(n+1)).$$

Décomposons-la en

$$\gamma_{n+1}^{(n+1)} = \sum_{p=0}^{n+1} \varepsilon_p^{(n+1)} \otimes c_p$$

où $\varepsilon_p^{(n+1)}$ est dans $H^{2n+2-2p}(\mathbf{SU}(n+1)^{2g})$ et où on a posé $c_0 = 1 \in H^0(B\mathbf{SU}(n))$, $c_1 = 0$. Les classes $\beta_{n+1,j}^{(n+1)}$ appartiennent à

$$H_{\mathbf{SU}(n+1)}^{2n+1}(\mathbf{SU}(n+1)^{2g}) = \bigoplus_{p+q=2n+1} H^p(\mathbf{SU}(n+1)^{2g}) \otimes H^q(B\mathbf{SU}(n+1)),$$

on les décompose en

$$\beta_{n+1,j}^{(n+1)} = \sum_{p=0}^n \delta_{p,j}^{(n+1)} \otimes c_p$$

où $\delta_{p,j}^{(n+1)} \in H^{2n+1-2p}(\mathbf{SU}(n+1)^{2g})$. Le fibré $\ell^* D_{n+1} = D_n \oplus \mathbf{C}$ admet une section, donc sa classe d'Euler $\ell^* c_{n+1}(D_{n+1})$ est nulle. De nouveau d'après les isomorphismes (3.3.1) et (3.3.2), on déduit que les $\{\varepsilon_p^{(n+1)}, p \leq n\}$ et les $\{\delta_{p,j}^{(n+1)}, 1 \leq p \leq n, j = 1, \dots, 2g\}$ sont nuls. Remarquons de plus que les

$\{\delta_{n+1,j}^{(n+1)}, j = 1, \dots, 2g\}$ sont des combinaisons linéaires des $\sigma_{2n+1,j}$, $j = 1, \dots, 2g$. Il existe une section

$$\begin{aligned} s : BSU(n+1) &\longrightarrow (\mathbf{SU}(n+1)^{2g})_{\mathbf{SU}(n+1)} \times B \\ [e] &\longmapsto ([(\mathbf{I}, \dots, \mathbf{I}), e], 1) \end{aligned}$$

où $[e]$ est la classe dans $BSU(n+1)$ d'un élément $e \in EU(n+1)$. La classe d'Euler du fibré s^*D_{n+1} vaut εX_{n+1} , mais comme $s^*D_{n+1} = EU(n+1) \times_{\mathbf{SU}(n+1)} \mathbf{C}^{n+1}$ on a $\varepsilon = 1$. Nous pouvons maintenant conclure que

$$\gamma_{n+1}^{(n+1)} = 1 \otimes X_{n+1}.$$

Soit

$$h : \mathbf{SU}(n+1)^{2g} \longrightarrow (\mathbf{SU}(n+1)^{2g})_{\mathbf{SU}(n+1)}$$

l'inclusion d'une fibre (on notera toujours h une telle application, indépendamment de n). Le fibré

$$F_{n+1}^{2g} := (h \times \text{id}_B)^* D_{n+1}$$

est isomorphe à

$$F_{n+1}^{2g} \cong (\mathbf{SU}(n+1)^{2g} \times B' \times \mathbf{C}^{n+1}) / \sim,$$

où \sim est la relation d'équivalence :

$$((\rho_1, \dots, \rho_{2g}), 1_j, v) \sim ((\rho_1, \dots, \rho_{2g}), 0, \rho_j^{-1}(v)), \forall j \in [1, 2g].$$

La classe d'Euler de F_{n+1}^{2g} vaut

$$c_{n+1}(F_{n+1}^{2g}) = \sum_{j=1}^{2g} \beta_{n+1,j}^{(n+1)} \otimes \alpha_j.$$

Soit $f_j : S^1 \rightarrow B$ (resp. $g_j : \mathbf{SU}(n+1) \rightarrow \mathbf{SU}(n+1)^{2g}$) l'inclusion du j -ème cercle (resp. $\mathbf{SU}(n+1)$) dans B (resp. $\mathbf{SU}(n+1)^{2g}$). Les $\beta_{n+1,j}^{(n+1)}$ peuvent être caractérisées par :

$$c_{n+1}((\text{id}_{\mathbf{SU}(n+1)^{2g}} \times f_j)^* F_{2g}^{(n+1)}) = \beta_{n+1,j}^{(n+1)} \otimes f_j^* \alpha_j$$

ou plus précisément

$$(3.4.1) \quad c_{n+1}((\text{id}_{\mathbf{SU}(n+1)^{2g}} \times f_j)^* F_{2g}^{(n+1)}) = \beta_{n+1,j}^{(n+1)} \otimes \frac{d\theta}{2\pi}.$$

On définit un fibré vectoriel $E \rightarrow \mathbf{SU}(n+1) \times S^1$ par

$$E = (\mathbf{SU}(n+1) \times [0, 1] \times \mathbf{C}) / \sim,$$

où \sim est la relation d'équivalence

$$(\rho, 1, v) \sim (\rho, 0, \rho^{-1}(v)).$$

Le fibré $(\text{id}_{\mathbf{SU}(n+1)^{2g}} \times f_j)^* F_{2g}^{(n+1)}$ est isomorphe à $(g_j \times \text{id}_{S^1})^* E$, donc il existe un réel λ tel que

$$c_{n+1}(E) = \lambda \sigma_{2n+1} \otimes \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Si (ρ, t, v) appartient à $\mathbf{SU}(n+1) \times [0, 1] \times \mathbf{C}^{n+1}$, écrivons $[\rho, t, v]$ pour sa classe dans E . Soit (e_1, \dots, e_{n+1}) la base canonique sur \mathbf{C} de \mathbf{C}^{n+1} , par conséquent $(e_1, ie_1, \dots, e_{n+1}, ie_{n+1})$ est une base de \mathbf{C}^{n+1} sur \mathbf{R} . Une section de E est donnée par :

$$\begin{aligned} s : \mathbf{SU}(n+1) \times S^1 &\longrightarrow E \\ (A, e^{2i\pi\theta}) &\longmapsto [A, \theta, (\theta A + (1-\theta)\text{id})e_1]. \end{aligned}$$

L'ensemble de ses zéros est caractérisé par : $(\theta A + (1-\theta)\text{id})e_1$ est nul si $\theta = \frac{1}{2}$ et $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{bmatrix}$, $\tilde{A} \in \mathbf{U}(n)$, $\det \tilde{A} = -1$. Fixons ξ une racine n -ième de -1 . L'ensemble Z des zéros de s est

$$Z = \left\{ \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \xi \tilde{A} \end{bmatrix}, \frac{1}{2} \right), \tilde{A} \in \mathbf{SU}(n) \right\}.$$

Lemme 3.4.2. — *La section s intersecte la section nulle s_0 transversalement.*

Démonstration. — On veut montrer que pour tout x de Z

$$T_{s(x)} \text{Im} s + T_{s(x)} \text{Im} s_0 = T_{(x,0)} E.$$

On a

$$T_{(x,0)} E \simeq T_x(\mathbf{SU}(n+1) \times S^1) \oplus \mathbf{C}^{n+1} \simeq \mathfrak{su}(n+1) \oplus \mathbf{R} \oplus \mathbf{C}^{n+1}$$

et

$$T_{s(x)} \text{Im} s_0 = \mathfrak{su}(n+1) \oplus \mathbf{R} \oplus \{0\},$$

$$T_{s(x)} \text{Im} s = T_x s(T_x(\mathbf{SU}(n+1) \times S^1)).$$

Soit x l'élément $(A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \xi \tilde{A} \end{bmatrix}, \frac{1}{2})$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} s(A, \frac{1}{2} + \varepsilon) &= [A, \frac{1}{2} + \varepsilon, ((\frac{1}{2} + \varepsilon)A + (\frac{1}{2} - \varepsilon)\text{id})e_1] \\ &= [A, \frac{1}{2} + \varepsilon, -2\varepsilon e_1] \\ &= (0, 1, -2e_1). \end{aligned}$$

Soit J dans $\mathfrak{su}(n+1)$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} s(\exp(\varepsilon J)A, \frac{1}{2}) &= \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} [\exp(\varepsilon J)A, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(\exp(\varepsilon J)A + \text{id})e_1] \\ &= \frac{d}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0} [\exp(\varepsilon J)A, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}(\exp(\varepsilon J)(-e_1) + e_1)] \\ &= (J \cdot A, 0, \frac{1}{2}(-Je_1 + e_1)). \end{aligned}$$

On finit la démonstration du lemme 3.4.2 en remarquant qu'il est possible de trouver J dans $\mathfrak{su}(n+1)$ tel que Je_1 soit égal à e_p ou ie_p quel que soit p . \square

Lemme 3.4.3. — *La classe d'Euler du fibré vectoriel E vaut*

$$c_{n+1}(E) = \sigma_{2n+1} \otimes \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Démonstration. — D'après le lemme précédent, la classe d'Euler du fibré E est le dual de Z pour la dualité de Poincaré, c'est-à-dire qu'elle est caractérisée par

$$\forall \nu \in H^{n^2-1}(\mathbf{SU}(n+1) \times S^1), \int_Z \nu = \int_{\mathbf{SU}(n+1) \times S^1} \nu \wedge c_{n+1}(E)$$

où $n^2 - 1 = \dim(\mathbf{SU}(n+1) \times S^1) - 2(n+1)$. Cette classe d'Euler est du type

$$c_{n+1}(E) = \lambda \sigma_{2n+1} \otimes \frac{d\theta}{2\pi}$$

où λ est un réel que nous allons déterminer. L'injection

$$\begin{aligned} \mathbf{SU}(n) &\longrightarrow \mathbf{SU}(n+1) \\ A &\longmapsto \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \xi A \end{bmatrix} \end{aligned}$$

identifie $\mathbf{SU}(n)$ à la fibre au dessus de $(-1, 0, \dots, 0)$ de la projection $\mathbf{SU}(n+1) \rightarrow S^{2n+1}$, à savoir Z . Soit γ la classe de cohomologie d'une forme volume de volume 1 sur $\mathbf{SU}(n)$. Utilisons la décomposition

$$H^*(\mathbf{SU}(n+1)) = H^*(\mathbf{SU}(n)) \otimes H^*(S^{2n+1})$$

pour définir une classe

$$\nu = \gamma \otimes 1.$$

Comme l'intégrale de ν sur Z vaut 1, on a

$$\int_{\mathbf{SU}(n+1) \times S^1} \nu \wedge c_{n+1}(E) = 1$$

ou encore

$$\lambda \int_{\mathbf{SU}(n+1) \times S^1} (\gamma \otimes 1) \wedge (\sigma_{2n+1} \otimes \frac{d\theta}{2\pi}) = 1.$$

Concluons en remarquant que le membre de gauche de cette équation vaut $\lambda!$ □

Ce lemme clot la démonstration de la proposition 3.4.1. □

3.5. La description de l'application de restriction

Venons-en au théorème que nous cherchons à démontrer depuis le début du chapitre 3 :

Théorème 3.5.1. — *L'application r' est décrite par*

$$\begin{aligned} r'(c_p) &= a_p \quad \text{pour } p = 2, \dots, n \\ r'(\sigma_{2p-1,j}) &= b_{p,j} \quad \text{pour } p = 2, \dots, n, j = 1, \dots, 2g. \end{aligned}$$

En particulier $\text{Im}(r')$ est multiplicativement engendrée par

$$\text{Im}(r') = \langle a_p, b_{p,j}, p = 2, \dots, n, j = 1, \dots, 2g \rangle.$$

Notons que pour n égal à 2, on obtient que l'application r' est surjective (ce résultat avait déjà été annoncé dans [40]).

Il est aussi très intéressant de comparer ce résultat avec le théorème 7.1 de L. Jeffrey [21] dans lequel elle propose une autre construction originale de générateurs multiplicatifs de $H^*(\mathfrak{m})$.

Démonstration. — L'outil principal dans la démonstration de ce théorème est la proposition 3.4.1. Notons w l'injection de $(S)_{\mathrm{SU}(n)} \times X'$ dans $(\mathrm{SU}(n)^{2g})_{\mathrm{SU}(n)} \times X'$, l'application w^* induite en cohomologie est en fait $r \times \mathrm{id}_{H^*(X')}$. La restriction w^*D_n de D_n à $(S)_{\mathrm{SU}(n)} \times X'$ a même projectifié que F , par conséquent il existe un fibré en droites $K \rightarrow (S)_{\mathrm{SU}(n)} \times X'$ tel que

$$w^*D_n = F \otimes K.$$

Il existe ν dans $H_{\mathrm{SU}(n)}^2(S)$ tel que

$$c_1(K) = \nu \otimes 1.$$

Alors, pour tout p , on a

$$\begin{aligned} c_p(F \otimes K) &= c_p(F) + (\nu \otimes 1) \wedge (\dots) \\ (3.5.1) \quad &= a_p \otimes 1 + \sum_{j=1}^{2g} b_p^j \otimes \alpha_j \text{ modulo } \omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= c_p(w^*D_n) \text{ modulo } \omega \\ &= w^*c_p(D_n) \text{ modulo } \omega \\ (3.5.2) \quad &= r(1 \otimes c_p) \otimes 1 + \sum_{j=1}^{2g} r(\sigma_{2p-1,j} \otimes 1) \otimes \alpha_j \text{ modulo } \omega. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à comparer les lignes 3.5.1 et 3.5.2 pour clore la démonstration du théorème 3.5.1. \square

CHAPITRE 4

L'ESPACE DE MODULES DES FIBRÉS SEMI-STABLES (CAS SINGULIER)

Dans cette partie nous nous intéressons à l'application de restriction de la réduction quasi-hamiltonienne de $\mathrm{SU}(2)^{2g}$ et $\mathrm{SU}(3)^{2g}$ en \mathbf{I} , l'espace réduit est alors singulier et s'identifie à un espace de modules d'après le théorème 2.2.7. Je remercie ici le rapporteur d'une version préliminaire d'un article annonçant ces résultats, qui m'a fait remarquer la chose suivante : si G est un groupe compact, si μ est l'application moment de G^{2g} (voir prop. 1.6.4) et si e est l'élément neutre de G alors l'application de restriction

$$H_G^*(G^{2g}) \longrightarrow H_G^*(\mu^{-1}(e))$$

n'est pas en générale surjective mais est toujours injective. En effet, soit T un tore maximal de G . L'ensemble des points fixes de G^{2g} est T^{2g} . Par le théorème de localisation abélienne (voir [6, chap. 7]), nous savons que l'application de restriction

$$H_T^*(G^{2g}) \longrightarrow H_T^*(T^{2g})$$

est injective. Or $\mu^{-1}(e)$ contient T^{2g} , donc

$$H_T^*(G^{2g}) \longrightarrow H_T^*(\mu^{-1}(e))$$

est injective et en prenant la partie invariante sous l'action du groupe de Weyl (voir [17, chap. 3, sect. 1, prop. 1]) nous obtenons le résultat annoncé. Celui-ci souligne bien la différence entre les propriétés des espaces hamiltoniens et celles des espaces quasi-hamiltoniens.

Dans ce chapitre nous donnons un éclairage géométrique sur l'injectivité de cette application dans les cas de $\mathrm{SU}(2)$ et $\mathrm{SU}(3)$. Pour cela nous utilisons certaines applications de Morse-Bott dont l'étude a un intérêt en soi. Dans le paragraphe 4.1, nous étudions une famille de fonctions de Morse-Bott sur $\mathrm{SU}(n)$. Nous utilisons ensuite ces fonctions dans le §4.2 pour construire et

étudier une fonction sur les espaces $\mathbf{SU}(n)^{2g}$ dont le minimum est réalisé exactement en $\mu^{-1}(\mathbf{I})$. Enfin, nous voyons dans le §4.3 que cette fonction est de Morse-Bott généralisée pour $n = 2$ et grâce aux suites exactes longues que l'on peut déduire de l'existence d'une telle fonction, nous prouvons le théorème

Théorème 4.3.3 — *Pour tout degré, il existe une suite exacte courte*

$$\{0\} \rightarrow H_{\mathbf{SU}(2)}^*(\mathbf{SU}(2)^{2g}) \rightarrow H_{\mathbf{SU}(2)}^*(\mu^{-1}(\mathbf{I})) \rightarrow H_{\mathbf{SU}(2)}^*(\mu^{-1}(-\mathbf{I})) \rightarrow \{0\}.$$

En particulier, on a

$$H_{\mathbf{SU}(2)}^*(\mu^{-1}(\mathbf{I})) = H_{\mathbf{SU}(2)}^*(\mathbf{SU}(2)^{2g}) \oplus H_{\mathbf{SU}(2)}^*(\mu^{-1}(-\mathbf{I})).$$

Pour finir, dans le §4.4, nous prouvons un résultat similaire dans le cas $n = 3$ (théorème 4.4.7).

4.1. Une fonction de Morse-Bott équivariante sur $\mathbf{SU}(n)$

On considère $\mathbf{SU}(n)$ muni de la métrique riemannienne bi-invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie par

$$\begin{aligned} \mathfrak{su}(n) \times \mathfrak{su}(n) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (H, G) &\longmapsto \operatorname{tr}(H^t \bar{G}) = -\operatorname{tr}(HG). \end{aligned}$$

Pour une matrice H de $\mathfrak{su}(n)$, nous écrivons toujours $h_{j,k}$ pour ses coefficients. Soit φ un réel. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbf{SU}(n) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ A &\longmapsto -\operatorname{Re}(e^{i\varphi} \operatorname{tr} A). \end{aligned}$$

C'est une fonction invariante par conjugaison. Trivialisons $T\mathbf{SU}(n)$ par la forme de Maurer-Cartan

$$\begin{aligned} T\mathbf{SU}(n) &\longrightarrow \mathbf{SU}(n) \times \mathfrak{su}(n) \\ (A, AH) &\longmapsto (A, H). \end{aligned}$$

Nous utiliserons toujours cette trivialisation.

Proposition 4.1.1. — *Les points critiques de f sont les classes de conjugaison des matrices diagonales du type*

$$L = \left[\begin{array}{ccc} \overbrace{\begin{matrix} e^{i\theta} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta} \end{matrix}}^{n_1 \text{ colonnes}} & & 0 \\ & & \underbrace{\begin{matrix} -e^{-i(\theta+2\varphi)} & & \\ & \ddots & \\ & & -e^{-i(\theta+2\varphi)} \end{matrix}}_{n_2 \text{ colonnes}} \end{array} \right] \in \mathbf{SU}(n).$$

Démonstration. Soit L un élément de $\mathbf{SU}(n)$. Quitte à conjuguer L par un élément de $\mathbf{SU}(n)$ on peut supposer que L est diagonale :

$$L = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

avec $\lambda_k = e^{i\theta_k}$. Soit H une matrice de $\mathfrak{su}(n)$,

$$d_L f(H) = -\operatorname{Re}(e^{i\varphi} \operatorname{tr}(LH)).$$

Si on écrit $H = (h_{k,l})_{k,l=1,\dots,n}$ alors LH a pour coefficients les $(\lambda_l h_{k,l})_{k,l=1,\dots,n}$ et sa trace vaut $\sum_k \lambda_k h_{k,k}$. Comme les $h_{k,k}$ sont des imaginaires purs on a

$$\operatorname{Re}(e^{i\varphi} \operatorname{tr}(LH)) = i \sum_k h_{k,k} \operatorname{Im}(e^{i\varphi} \lambda_k)$$

et donc

$$\ker d_L f = \left\{ H \in \mathfrak{su}(n) \mid \sum_{k=1}^n h_{k,k} \sin(\theta_k + \varphi) = 0 \right\}.$$

Ainsi $\ker d_L f$ est $\mathfrak{su}(n)$ tout entier si et seulement si $\sin(\theta_k + \varphi)$ est indépendant de k , c'est-à-dire si et seulement si L est du type annoncé dans la proposition. □

Notons $L(n_1, n_2, \theta)$ une matrice du type de la proposition 4.1.1. Intéressons-nous au nombre de sous-ensembles critiques de f .

Lemme 4.1.2. — *Si φ est générique, alors quel que soit n il n'existe qu'un nombre fini de matrices du type $L(n_1, n_2, \theta)$ dans $\mathbf{SU}(n)$.*

Démonstration. — Pour prouver ce lemme, il suffit de démontrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de valeurs de θ possibles. Comme le déterminant de $L = L(n_1, n_2, \theta)$ vaut 1 on doit avoir $e^{in_1\theta}(-1)^{n_2}e^{-in_2(\theta+2\varphi)} = 1$, c'est-à-dire

$$(4.1.1) \quad (n_1 - n_2)\theta - 2n_2\varphi \equiv n_2\pi \quad [2\pi].$$

On aura un nombre fini de valeurs de θ si et seulement si le cas $n_1 = n_2$ est impossible. Mais ce cas n'est possible que si et seulement si, d'après 4.1.1,

$$(4.1.2) \quad \varphi \equiv -\frac{\pi}{2} \quad \left[\frac{2\pi}{n} \right].$$

□

En particulier, des problèmes peuvent apparaître pour certaines valeurs de n si φ est nul. Par contre :

Lemme 4.1.3. — *Si φ est nul et si n n'est pas divisible par 4 alors il n'existe qu'un nombre fini de matrices du type $L(n_1, n_2, \theta)$ dans $\mathbf{SU}(n)$.*

Démonstration. — En effet, si φ est nul, l'égalité 4.1.2 n'est vraie que si n est divisible par 4. □

On a prouvé

Proposition 4.1.4. — *Si φ est nul et si n n'est pas divisible par 4, l'ensemble des points critiques de f est la réunion disjointe d'un nombre fini d'orbites.*

Proposition 4.1.5. — *Pour φ générique et n quelconque ainsi que pour φ nul et n non divisible par 4, la fonction f est de Morse-Bott. Ses sous-ensembles critiques sont les orbites des $L(n_1, n_2, \theta)$, où on peut supposer $\cos(\theta + \varphi) > 0$. L'indice d'une telle orbite est*

$$\begin{array}{ll} n_2^2 - 1 & \text{si } n_1 \leq \frac{n}{2}, \\ n_2^2 & \text{si } n_1 \geq \frac{n}{2}, \end{array}$$

la dimension de ν^+ est

$$\begin{array}{ll} n_1^2 & \text{si } n_1 \leq \frac{n}{2}, \\ n_1^2 - 1 & \text{si } n_1 \geq \frac{n}{2}. \end{array}$$

Démonstration. — Il ne nous reste plus qu'à prouver que f est transversalement non-dégénérée. Soient G et H des matrices de $\mathfrak{su}(n)$, on note encore G, H les champs de vecteurs invariants à gauche qu'ils définissent sur $\mathbf{SU}(n)$. Soit

$$L = L(n_1, n_2, \theta).$$

Nous supposons toujours implicitement que $e^{i\theta} \neq -e^{-i(\theta+2\varphi)}$. Si φ est nul, sans perte de généralité nous pouvons aussi supposer que $\cos \theta > 0$. Notons H_f le hessien de f , par définition :

$$H_f(G, H) = G \cdot (H \cdot f)$$

où

$$\begin{aligned} H \cdot f : \mathrm{SU}(n) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ B &\longmapsto d_B f(H) = -\mathrm{Re}(e^{i\varphi} \mathrm{tr}(BH)), \end{aligned}$$

donc

$$(4.1.3) \quad H_f(G, H)(L) = -\mathrm{Re}(e^{i\varphi} \mathrm{tr}(LGH)).$$

En général, si Y est une variété riemannienne, $X \subseteq Y$ une sous-variété et x un point de X , nous noterons

$$\nu_x(X)$$

la fibre au point x du fibré normal à X dans Y . Ici, pour simplifier les notations, nous poserons :

$$\nu_L = \nu_L(\mathrm{Orb}(L)) = (T_L \mathrm{Orb}(L))^\perp.$$

Lemme 4.1.6. — On a

$$\nu_L = \left\{ G = \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{su}(n), G_k \in \mathfrak{u}(n_k), k = 1, 2 \right\}.$$

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned} T_L \mathrm{Orb}(L) &= \{H - L^{-1}HL \mid H \in \mathfrak{su}(n)\} \\ &= \left\{ H - L^{-1}HL \mid H = \begin{bmatrix} 0 & -{}^t \bar{H}_1 \\ H_1 & 0 \end{bmatrix}, H_1 \in \mathbf{M}_{n_2, n_1}(\mathbf{C}) \right\} \\ &= \left\{ H \mid H = \begin{bmatrix} 0 & -{}^t \bar{H}_1 \\ H_1 & 0 \end{bmatrix}, H_1 \in \mathbf{M}_{n_2, n_1}(\mathbf{C}) \right\}, \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Soit

$$f_{**} : \nu_L \longrightarrow \nu_L$$

l'endomorphisme défini par

$$\langle f_{**}(H), G \rangle = H_f(H, G), \text{ pour tout } G \text{ dans } \nu_L$$

c'est-à-dire

$$-\mathrm{tr}(f_{**}(H)G) = H_f(H, G), \text{ pour tout } G \text{ dans } \nu_L.$$

Notons ν^+ et ν^- les sommes des sous-espaces propres de f_{**} associés à des valeurs propres respectivement strictement positives et strictement négatives.

Sur ν_L^+ et ν_L^- , le hessien H_f est respectivement défini positif et défini négatif. Pour montrer que f est de Morse-Bott, il suffit de montrer que $\nu_L = \nu^+ + \nu^-$. Posons

$$\delta_1 = \left\{ \left[\begin{array}{cc} G_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right] \in \mathfrak{su}(n), G_1 \in \mathfrak{su}(n_1) \right\}$$

et

$$\delta_2 = \left\{ \left[\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & G_2 \end{array} \right] \in \mathfrak{su}(n), G_2 \in \mathfrak{su}(n_2) \right\}.$$

Lemme 4.1.7. — *Les espaces ν^+ et ν^- vérifient*

- si $\cos(\theta + \varphi) > 0$ alors $\nu^+ \supseteq \delta_1$ et $\nu^- \supseteq \delta_2$,
- si $\cos(\theta + \varphi) < 0$ alors $\nu^+ \supseteq \delta_2$ et $\nu^- \supseteq \delta_1$.

Démonstration. — Pour φ générique comme pour φ nul, $\cos(\theta + \varphi)$ est non nul. Soient $G = \left[\begin{array}{cc} G_1 & 0 \\ 0 & G_2 \end{array} \right]$ et $H = \left[\begin{array}{cc} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{array} \right]$ deux matrices de $\mathfrak{su}(n)$. Le lemme est une conséquence du calcul suivant :

$$\begin{aligned} -\operatorname{Re}(e^{i\varphi} \operatorname{tr}(LGH)) &= -\operatorname{Re}(e^{i\varphi} \operatorname{tr}(e^{i\theta} G_1 H_1)) + \operatorname{Re}(e^{i\varphi} \operatorname{tr}(e^{-i(\theta+2\varphi)} G_2 H_2)) \\ &= -\cos(\theta + \varphi) \operatorname{tr}(G_1 H_1) + \cos(\theta + \varphi) \operatorname{tr}(G_2 H_2). \end{aligned}$$

En effet, d'après ce calcul, $f_{**} |_{\delta_1}$ est la multiplication par $\cos(\theta + \varphi)$ alors que $f_{**} |_{\delta_2}$ est la multiplication par $-\cos(\theta + \varphi)$. \square

Comme $\dim \delta_1 + \dim \delta_2 = \dim \mathbf{SU}(n) - \dim \operatorname{Orb}(L) - 1$, pour vérifier que f est transversalement non-dégénérée en L il suffit de prouver que la dernière valeur propre de f_{**} est non nulle. Un supplémentaire de $\delta_1 \oplus \delta_2$ dans ν_L est engendré par

$$R = \left[\begin{array}{cc} in_2 \mathbf{I}_{n_1} & 0 \\ 0 & -in_1 \mathbf{I}_{n_2} \end{array} \right].$$

Lemme 4.1.8. — *La matrice R est un vecteur propre de f_{**} de valeur propre $\frac{n_2 - n_1}{n} \cos(\theta + \varphi)$.*

Démonstration. — En effet, $f_{**}(R)$ est caractérisée par

$$\langle f_{**}(R), G \rangle = H_f(R, G), \text{ pour tout } G \text{ dans } \nu_L$$

c'est-à-dire

$$-\operatorname{tr}(f_{**}(R)G) = -\operatorname{Re}(e^{i\varphi} \operatorname{tr}(LGR)), \text{ pour tout } G \text{ dans } \nu_L.$$

Calculons le second membre :

$$\begin{aligned} -\mathrm{Re}(e^{i\varphi}\mathrm{tr}(LGR)) &= -\cos(\theta + \varphi)\mathrm{tr}(in_2G_1) - \cos(\theta + \varphi)\mathrm{tr}(in_1G_2) \\ &= -in_2\cos(\theta + \varphi)\mathrm{tr}(G_1) - in_1\cos(\theta + \varphi)\mathrm{tr}(G_2) \\ &= i(n_1 - n_2)\cos(\theta + \varphi)\mathrm{tr}(G_1). \end{aligned}$$

Or, si on pose $H = \frac{n_2 - n_1}{n}\cos(\theta + \varphi)R$, on a

$$\begin{aligned} -\mathrm{tr}(HG) &= -\frac{n_2 - n_1}{n}\cos(\theta + \varphi)(in_2\mathrm{tr}(G_1) - in_1\mathrm{tr}(G_2)) \\ &= i(n_1 - n_2)\cos(\theta + \varphi)\mathrm{tr}(G_1), \end{aligned}$$

donc

$$f_{**}(R) = \frac{n_2 - n_1}{n}\cos(\theta + \varphi)R.$$

□

La dernière valeur propre de f_{**} est $\frac{n_2 - n_1}{n}\cos(\theta + \varphi)$ qui est non nulle pour φ générique ou pour φ nul et n non divisible par 4. Ceci finit la preuve de la proposition 4.1.5. □

Réécrivons la proposition 4.1.5 pour le cas $\varphi = 0$.

Théorème 4.1.9. — *Si n n'est pas divisible par 4 alors l'application*

$$\begin{aligned} f : \mathrm{SU}(n) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ A &\longmapsto -\mathrm{Re}\mathrm{tr}A \end{aligned}$$

est une fonction de Morse-Bott dont les sous-variétés critiques sont les orbites des

$$L = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \overbrace{e^{i\theta}}^{n_1 \text{ colonnes}} & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 \\ & & e^{i\theta} & & & \\ & & & -e^{-i\theta} & & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & \underbrace{-e^{-i\theta}}_{n_2 \text{ colonnes}} \end{array} \right] \in \mathrm{SU}(n),$$

où on peut supposer $\cos\theta > 0$. L'indice d'une telle orbite est

$$\begin{aligned} n_2^2 - 1 &\text{ si } n_1 \leq \frac{n}{2}, \\ n_2^2 &\text{ si } n_1 \geq \frac{n}{2}, \end{aligned}$$

la dimension de ν^+ est

$$\begin{aligned} n_1^2 &\text{ si } n_1 \leq \frac{n}{2}, \\ n_1^2 - 1 &\text{ si } n_1 \geq \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

soit une matrice spéciale unitaire du type que nous avons rencontré dans la proposition 4.1.5.

Démonstration. — Nous écrivons désormais AB pour un $2g$ -tuple de matrices $(A_1, B_1, \dots, A_g, B_g)$. L'application μ est une application moment pour $\mathrm{SU}(n)^{2g}$ sur lequel $\mathrm{SU}(n)$ agit par conjugaison diagonale (théorème 1.6.4) donc si \mathfrak{g}_{AB} est l'algèbre de Lie du stabilisateur de AB , d'après la proposition 1.4.1,

$$\mathrm{Im} \, d_{AB}\mu = \mathfrak{g}_{AB}^\perp$$

et AB est un point critique de $f \circ \mu$ si et seulement si

$$(4.2.1) \quad \mathfrak{g}_{AB}^\perp \subseteq \ker d_{\mu(AB)}f.$$

Comme μ est équivariante et f est invariante par $\mathrm{SU}(n)$, pour connaître les points critiques de $f \circ \mu$ il suffit de connaître les points critiques AB tels que $\mu(AB)$ est diagonale. Supposons que AB soit un point critique de $f \circ \mu$ et que $L := \mu(AB)$ soit diagonale. Notons $(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ ses coefficients diagonaux.

Lemme 4.2.2. — *Pour tout k , posons $a_k = i(\sin(\theta_k + \varphi) - \frac{1}{n}\mathrm{Im}(e^{i\varphi}\mathrm{tr}L))$. On a*

$$\ker d_L f = \left[\begin{array}{ccc} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{array} \right]^\perp.$$

Démonstration. — Pour un tel AB , la condition 4.2.1 s'écrit

$$\mathfrak{g}_{AB}^\perp \subseteq \left\{ H = (h_{k,l}) \in \mathfrak{su}(n) \mid \sum_{k=1}^n h_{k,k} \sin(\theta_k + \varphi) = 0 \right\}$$

ce qui équivaut à

$$\mathfrak{g}_{AB} \supseteq \left\{ H = (h_{k,l}) \in \mathfrak{su}(n) \mid \sum_{k=1}^n h_{k,k} \sin(\theta_k + \varphi) = 0 \right\}^\perp.$$

Le second membre de l'inclusion précédente est de dimension 0 ou 1, cherchons-en un générateur D . Un tel D est diagonal ($\ker d_L f$ contient toutes les matrices n'ayant que des zéros sur la diagonale). Posons

$$D = \left[\begin{array}{ccc} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{array} \right].$$

Les a_1, \dots, a_n sont des imaginaires purs dont la somme vaut 0. Il existe des réels α, β tels que $(a_1, \dots, a_n) = \alpha i(1, \dots, 1) + \beta i(\sin(\theta_1 + \varphi), \dots, \sin(\theta_n + \varphi))$. On peut supposer que β est non nul. Fixons le égal à 1. En remplaçant les a_k par leur valeur en fonction de α dans l'égalité $\sum_{k=1}^n a_k = 0$, nous trouvons

$$\alpha = -\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin(\theta_k + \varphi) = -\frac{1}{n} \operatorname{Im}(e^{i\varphi} \operatorname{tr} L).$$

□

Remarque 4.2.3. — Notons que

- les a_i sont tous nuls si et seulement si L est un point critique de f ,
- il y a équivalence entre $a_k = a_l$ et $\sin(\theta_k + \varphi) = \sin(\theta_l + \varphi)$.

Quitte à permuter l'ordre des θ_k on peut supposer qu'il existe un entier r , des réels η_1, \dots, η_r et des entiers n_1, \dots, n_r tels que

$$L = \begin{bmatrix} L_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & L_r \end{bmatrix}$$

où les L_k sont des matrices diagonales de $U(n_k)$ du type

$$L_k = \begin{bmatrix} e^{i\eta_k} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & e^{i\eta_k} & & \\ & & & -e^{-i(\eta_k+2\varphi)} & \\ 0 & & & & \ddots & \\ & & & & & -e^{-i(\eta_k+2\varphi)} \end{bmatrix}$$

avec $\sin(\eta_k + \varphi) \neq \sin(\eta_l + \varphi)$ pour $k \neq l$. Définissons aussi

$$a'_k = i(\sin(\eta_k + \varphi) - \frac{1}{n} \operatorname{Im}(e^{i\varphi} \operatorname{tr} L)).$$

Ces notations étant fixées, notre matrice D devient

$$D = \begin{bmatrix} a'_1 \mathbf{I}_{n_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a'_r \mathbf{I}_{n_r} \end{bmatrix}$$

et pour tout t réel

$$\begin{bmatrix} e^{ta'_1 \mathbf{I}_{n_1}} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{ta'_r \mathbf{I}_{n_r}} \end{bmatrix} \in \mathrm{Stab}(AB).$$

Les a'_k sont deux à deux distincts et donc les A_k, B_k s'écrivent sous la forme

$$A_k = \begin{bmatrix} A_{1,k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{r,k} \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(n), B_k = \begin{bmatrix} B_{1,k} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_{r,k} \end{bmatrix} \in \mathrm{SU}(n)$$

avec chaque $A_{p,k}$ et $B_{p,k}$ dans $\mathrm{U}(n_k)$. Par conséquent, pour tout k

$$L_k = \prod_{p=1}^g [A_{p,k}, B_{p,k}] \in \mathrm{SU}(n_k).$$

Inversement, si AB est de la forme donnée dans la proposition 4.2.1, il est clair que c'est un point critique de $f \circ \mu$.

Il ne nous reste plus qu'à prouver que les ensembles critiques que nous avons décrits sont non vides. Ce sera certainement le cas si pour tout k , il existe des matrices $A_{p,k}$ et $B_{p,k}$, où $1 \leq p \leq 2g$, de $\mathrm{SU}(n_k)$ telles que $\prod_{p=1}^g [A_{p,k}, B_{p,k}] = L_k$. Ceci est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 4.2.4. — *Soit L dans $\mathrm{SU}(n)$. Il existe des matrices A, B dans $\mathrm{SU}(n)$ dont le commutateur $ABA^{-1}B^{-1}$ vaut L .*

Démonstration. — Nous pouvons supposer que L est diagonale. Soit $(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n})$ sa diagonale. Il nous suffit en fait de trouver A, B dans $\mathrm{U}(n)$ dont le commutateur vaut L . Soit u_1, \dots, u_n la base canonique de \mathbb{C}^n . Cherchons A et B tels que il existe deux permutations τ et σ et des nombres complexes $a_1, b_1, \dots, a_n, b_n$ de module 1 vérifiant

$$Au_k = a_k u_{\tau(k)}, \quad \forall k,$$

$$Bu_k = b_k u_{\sigma(k)}, \quad \forall k.$$

De tels A, B transforment une base orthonormée en une base orthonormée, ce sont donc des matrices unitaires. Nous considérerons les entiers en indice modulo n . Par exemple a_{n+1} vaut a_1 . Pour tout k on a

$$\begin{aligned} ABA^{-1}u_k &= a_{\tau^{-1}(k)}^{-1} ABu_{\tau^{-1}(k)} \\ &= a_{\tau^{-1}(k)}^{-1} b_{\tau^{-1}(k)} Au_{\sigma\tau^{-1}(k)} \\ &= a_{\tau^{-1}(k)}^{-1} b_{\tau^{-1}(k)} a_{\sigma\tau^{-1}(k)} u_{\tau\sigma\tau^{-1}(k)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} LBu_k &= b_k Lu_{\sigma(k)} \\ &= b_k e^{i\theta_{\sigma(k)}} u_{\sigma(k)}. \end{aligned}$$

Nous devons résoudre les équations

$$\begin{cases} \tau\sigma\tau^{-1} &= \sigma \\ b_{\tau^{-1}(k)} a_{\sigma\tau^{-1}(k)} &= b_k e^{i\theta_{\sigma(k)}} a_{\tau^{-1}(k)}. \end{cases}$$

Prenons τ et σ définis par $\tau(k) = k + 1$ et $\sigma(k) = k + 2$. C'est à dire $\tau = (1\ 2 \dots n)$ et pour n pair $\sigma = (1\ 3 \dots n-1)(2\ 4 \dots n)$, pour n impair $\sigma = (1\ 3 \dots n, 2\ 4 \dots n-1)$. Les permutations τ et σ commutent puisque pour tout k on a $\tau\sigma(k) = \sigma\tau(k) = k + 3$. Il nous reste à résoudre, dans S^1 , les équations

$$b_{k-1} a_{k+1} = b_k e^{i\theta_{k+2}} a_{k-1} \quad \forall k.$$

Pour a_1, \dots, a_n fixés, ces équations admettent des solutions si et seulement si

$$\prod_k e^{i\theta_{k+2}} = 1.$$

Or ce produit est le déterminant de L qui vaut justement 1 par hypothèse. \square

Ce lemme achève la démonstration de la proposition 4.2.1. \square

4.3. Une fonction de Morse-Bott généralisée sur $\mathrm{SU}(2)^{2g}$

Plaçons nous dans le cas $n = 2$ et $\varphi = 0$. Comme annoncé nous allons démontrer la

Proposition 4.3.1. — *La fonction $f \circ \mu$ est équivariante et de Morse-Bott généralisée. Ses sous-ensembles critiques sont $\mu^{-1}(\mathbf{I})$ et $\mu^{-1}(-\mathbf{I})$, d'indices respectifs 0 et 3.*

Démonstration. — D'après la proposition 4.2.1 appliquée au cas $n = 2$, il n'y a que deux sous-ensembles critiques : $\mu^{-1}(\mathbf{I})$ et $\mu^{-1}(-\mathbf{I})$.

Le lieu des minima est $\mu^{-1}(\mathbf{I})$, pour en trouver une sous-variété minimisante il suffit donc de prendre un voisinage ouvert.

Le lieu des maxima est $\mu^{-1}(-\mathbf{I})$, c'est une sous-variété de $\mathrm{SU}(2)^{2g}$, donc $f \circ \mu$ est de Morse-Bott généralisée si et seulement si $f \circ \mu$ est transversalement non-dégénérée et alors $\mu^{-1}(-\mathbf{I})$ est sa propre variété minimisante. Or $H_{f \circ \mu} = H_f \circ d_\mu$ (voir le lemme 4.5.6), H_f est non dégénéré et μ est une submersion le long de $\mu^{-1}(-\mathbf{I})$.

L'indice de $\mu^{-1}(-\mathbf{I})$ est le même que celui de $-\mathbf{I}$ pour f , c'est-à-dire 3. \square

Remarque 4.3.2. — La trace de toute matrice de $\mathrm{SU}(2)$ est réelle, donc f est en fait l'opposée de la trace.

Une application de la proposition 4.3.1 est le

Théorème 4.3.3. — Pour tout degré, il existe une suite exacte courte

$$\{0\} \rightarrow H_{\mathrm{SU}(2)}^*(\mathrm{SU}(2)^{2g}) \rightarrow H_{\mathrm{SU}(2)}^*(\mu^{-1}(\mathbf{I})) \rightarrow H_{\mathrm{SU}(2)}^*(\mu^{-1}(-\mathbf{I})) \rightarrow \{0\}.$$

En particulier, on a

$$H_{\mathrm{SU}(2)}^*(\mu^{-1}(\mathbf{I})) = H_{\mathrm{SU}(2)}^*(\mathrm{SU}(2)^{2g}) \oplus H_{\mathrm{SU}(2)}^*(\mu^{-1}(-\mathbf{I})).$$

Démonstration. — D'après la proposition 4.3.1 et le théorème 4.5.5, il existe une suite exacte longue

$$\begin{aligned} & \cdots \rightarrow H_{\mathrm{SU}(2)}^{p-1}(\mu^{-1}(\mathbf{I})) \rightarrow \\ \rightarrow & H_{\mathrm{SU}(2)}^p(\mathrm{SU}(2)^{2g}, \mu^{-1}(\mathbf{I})) \xrightarrow{\ell} H_{\mathrm{SU}(2)}^p(\mathrm{SU}(2)^{2g}) \xrightarrow{r} H_{\mathrm{SU}(2)}^p(\mu^{-1}(\mathbf{I})) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

L'indice du point critique $-I$ de f est 3 (théorème 4.1.9), et μ est une submersion le long de $\mu^{-1}(-\mathbf{I})$, donc d'après la proposition 4.5.1 l'indice de $\mu^{-1}(-\mathbf{I})$ comme sous-variété critique est 3. En utilisant le théorème d'excision et l'isomorphisme de Thom, on peut réécrire la dernière suite exacte :

$$\begin{aligned} & \cdots \rightarrow H_{\mathrm{SU}(2)}^{p-1}(\mu^{-1}(\mathbf{I})) \rightarrow \\ \rightarrow & H_{\mathrm{SU}(2)}^{p-3}(\mu^{-1}(-\mathbf{I})) \xrightarrow{\ell} H_{\mathrm{SU}(2)}^p(\mathrm{SU}(2)^{2g}) \xrightarrow{r} H_{\mathrm{SU}(2)}^p(\mu^{-1}(\mathbf{I})) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Le morphisme r est injectif si et seulement si ℓ est nul pour tout p . L'algèbre $H_{\mathrm{SU}(2)}^*(\mu^{-1}(-\mathbf{I}))$ est de dimension finie (c'est la cohomologie de la variété compacte $\mu^{-1}(-\mathbf{I})/\mathrm{SU}(2)$). Donc pour $*$ grand, ℓ est l'application nulle et r est injective. Nous pourrions conclure grâce au lemme

Lemme 4.3.4. — Soit A^* et B^* deux algèbres graduées. Supposons qu'il existe un élément v de degré strictement positif dans A^* qui ne soit pas un diviseur de zéro. Soit $q : A^* \rightarrow B^*$ un morphisme d'algèbres graduées. Si q est injectif pour $*$ grand alors q est injectif pour tout $*$.

Démonstration. — Si u est dans le noyau de q , son produit par v^p est aussi dans le noyau de q pour tout p . Ceci implique que $u \wedge v^p$ est nul pour p grand. Donc u est nul et q est injectif (pour tout degré). \square

Soit v le pull-back de $c_2 \in H^*(\mathrm{BSU}(2))$ par la projection $\mathrm{SU}(2)_{\mathrm{SU}(2)}^{2g} \rightarrow \mathrm{BSU}(2)$. D'après la proposition 3.3.10, v est un élément de degré 4 qui n'est pas un diviseur de zéro. Le théorème 4.3.3 se déduit donc du lemme précédent. \square

4.4. Et sur $\mathrm{SU}(3)^{2g}$

Nous allons maintenant démontrer que l'application

$$f \circ \mu : \begin{array}{ccc} \mathrm{SU}(3)^{2g} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) & \longmapsto & -\mathrm{Re} \, \mathrm{tr} \prod_{k=1}^g [A_k, B_k] \end{array}$$

est aussi de Morse-Bott généralisée et en déduire un résultat analogue au théorème 4.3.3. C'est un peu plus délicat que pour $\mathrm{SU}(2)$. Soit

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

et $CL = \mathrm{Orb}L$ sa classe de conjugaison.

Proposition 4.4.1. — *L'application $f \circ \mu : \mathrm{SU}(3)^{2g} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction de Morse-Bott généralisée. Ses sous-ensembles critiques sont $\mu^{-1}(\mathbf{I})$, $\mu^{-1}(j\mathbf{I})$, $\mu^{-1}(j^2\mathbf{I})$ et $\mu^{-1}(CL)$ d'indices respectifs 0, 8, 8, 3.*

Avant de passer à la démonstration de cette proposition, remarquons que les ensembles $\mu^{-1}(\mathbf{I})$ et $\mu^{-1}(CL)$ sont singuliers alors que les ensembles $\mu^{-1}(j\mathbf{I})$ et $\mu^{-1}(j^2\mathbf{I})$ sont des sous-variétés de $\mathrm{SU}(3)^{2g}$ de dimension $16g - 8$.

Démonstration. — Les ensembles cités sont bien les sous-ensembles critiques d'après la proposition 4.2.1.

Le lieu des minima de $f \circ \mu$ est $\mu^{-1}(\mathbf{I})$. Donc $f \circ \mu$ est minimalement dégénérée le long de $\mu^{-1}(\mathbf{I})$ et une sous-variété minimisante est obtenue en prenant un voisinage ouvert de $\mu^{-1}(\mathbf{I})$. En tant que lieu des minima son indice est 0.

L'application μ est une submersion en tout point de $\mu^{-1}(j\mathbf{I})$ (resp. $\mu^{-1}(j^2\mathbf{I})$) et $j\mathbf{I}$ (resp. $j^2\mathbf{I}$) est un maximum local de f , son indice est $\dim \mathrm{SU}(3) = 8$. Donc $f \circ \mu$ est minimalement dégénérée le long de $\mu^{-1}(j\mathbf{I})$ (resp. $\mu^{-1}(j^2\mathbf{I})$) et elle est sa propre sous-variété minimisante.

Le sous-ensemble critique le plus compliqué à étudier est $\mu^{-1}(CL)$. Il est la réunion de deux « strates » :

- La première, S_1 , est un fermé de $\mathrm{SU}(3)^{2g}$. Elle est constituée des points AB de $\mu^{-1}(CL)$ en lesquels le stabilisateur est non trivial, c'est-à-dire qu'il existe P dans $\mathrm{Stab}(AB)$ ayant un sous-espace propre de dimension 1. On peut alors trouver une matrice Q de $\mathrm{SU}(3)$ telle que QPQ^{-1} soit

de la forme

$$QPQ^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & & P' \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

où λ n'est pas une valeur propre de P' . Soit

$$\begin{aligned} \Delta : \mathbf{U}(2) &\longrightarrow \mathbf{SU}(3) \\ M &\longmapsto \begin{bmatrix} \overline{\det M} & 0 & 0 \\ 0 & & M \\ 0 & & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Il existe des matrices $A'_1, B'_1, \dots, A'_g, B'_g$ telles que pour tout k

$$QA_kQ^{-1} = \Delta(A'_k) \text{ et } QB_kQ^{-1} = \Delta(B'_k).$$

La classe de conjugaison de l'opposé de la matrice identité dans $\mathbf{U}(2)$ est réduite à un point, ainsi on a forcément

$$\mu(\Delta(A'_1), \Delta(B'_1), \dots, \Delta(A'_g), \Delta(B'_g)) = L$$

et

$$\mu(AB) = Q^{-1}LQ.$$

Soit R dans $\text{Stab}(\Delta(A'_1), \Delta(B'_1), \dots, \Delta(A'_g), \Delta(B'_g))$. Elle est aussi dans le stabilisateur de L et donc dans l'image de Δ . Il existe R' telle que $R = \Delta(R')$ où R' appartient à $\text{Stab}(A'_1, B'_1, \dots, A'_g, B'_g)$, c'est-à-dire que R' est dans le centre $Z(\mathbf{U}(2))$ de $\mathbf{U}(2)$. Inversement tout point AB ayant un tel stabilisateur est de la forme précédente. En conclusion : la strate S_1 est constituée des points en lesquels le stabilisateur est conjugué à $\Delta(Z(\mathbf{U}(2)))$.

- La deuxième strate S_2 c'est tout le reste : l'ensemble des points dont le stabilisateur est le centre $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$ de $\mathbf{SU}(3)$. En chacun de ces points, μ est une submersion et donc S_2 est une sous-variété localement fermée de $\mathbf{SU}(3)^{2g}$.

Remarque 4.4.2. — Les strates S_1 et S_2 sont non vides, en effet si

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, A_2 = B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

alors

$$\begin{aligned} [A_1, B_1] &= L \text{ et } \text{Stab}(A_1, B_1) = \Delta(Z(\mathbf{U}(2))), \\ [A_1, B_1][A_2, B_2] &= L \text{ et } \text{Stab}(A_1, B_1, A_2, B_2) = \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}. \end{aligned}$$

Ainsi $(A_1, B_1, 1, \dots, 1)$ est dans S_1 et $(A_1, B_1, A_2, B_2, 1, \dots, 1)$ est dans S_2 .

La sous-variété critique CL de f est d'indice 3, la dimension de $\nu^+(CL)$ est 1. Si AB est dans S_2 , μ est une submersion en AB et $\dim \nu^-(CL) = 3$, $\dim \nu^+(CL) = 1$. Si AB est dans S_1 , à conjugaison près on peut supposer que

$$AB = (\Delta(A'_1), \Delta(B'_1), \dots, \Delta(A'_g), \Delta(B'_g))$$

et

$$\mu(AB) = L.$$

Dans ces conditions

$$\begin{aligned} \text{Stab}(AB) &= \Delta(Z(\mathbf{U}(2))) \\ \mathfrak{stab}(AB) &= \left\{ \begin{bmatrix} -2i\theta & 0 & 0 \\ 0 & i\theta & 0 \\ 0 & 0 & i\theta \end{bmatrix}, \theta \in \mathbf{R} \right\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{Im } d_{AB}\mu &= (\mathfrak{stab}(AB))^\perp \\ &= \begin{bmatrix} -2i & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}^\perp. \end{aligned}$$

Nous pouvons obtenir une sous-variété minimisante de f en CL de la manière suivante : identifions

$$CL \simeq \mathbf{SU}(3)/\text{Stab}(L)$$

et

$$\nu_L^-(CL) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & G \\ 0 & & \end{bmatrix}, G \in \mathfrak{su}(2) \right\} \simeq \mathbf{R}^3,$$

$$\nu_L^+(CL) = \left\{ \begin{bmatrix} -2i\theta & 0 & 0 \\ 0 & i\theta & 0 \\ 0 & 0 & i\theta \end{bmatrix}, \theta \in \mathbf{R} \right\} \simeq \mathbf{R},$$

$$\nu^+(CL) \simeq CL \times \mathbf{R}.$$

Le fibré $\nu^+(CL)$ est triviale car c'est un fibré en droites réelles orientable. Nous pouvons prendre pour sous-variété minimisante l'image Σ par l'exponentielle de $CL \times]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \nu^+CL$ pour ε petit (voir [24]). En fait on identifie, à l'aide de l'exponentielle, Σ et $CL \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. Soit $\{U_i\}_{i=1, \dots, p}$ un recouvrement de CL tel que pour tout i il existe une trivialisation $\nu^-(CL)|_{U_i} \simeq$

$U_i \times \mathbf{R}^3$, que l'on suppose fixée. Toujours pour ε petit, la réunion, pour i compris entre 1 et p , des images de $V_i = U_i \times]-\varepsilon, \varepsilon[\times]-\varepsilon, \varepsilon[\subset \nu(CL)|_{U_i}$ par l'exponentielle est un voisinage de Σ dans $\mathbf{SU}(3)$. Identifions V_i à $\text{Exp}(V_i)$ et posons

$$W_i = \mu^{-1}(V_i),$$

de sorte que $\mu^{-1}(CL)$ est un sous-ensemble de la réunion W des W_i . En tout point AB de $\mu^{-1}(CL)$:

$$\nu_{\mu(AB)}(\Sigma) = \nu_{\mu(AB)}^-(CL)$$

et $\text{Im } d_{AB}\mu$ contient $\nu_{\mu(AB)}(\Sigma)$. Ainsi, pour tout i , l'application composée h_i

$$h : W_i \longrightarrow V_i \longrightarrow]-\varepsilon, \varepsilon[^3$$

est une submersion en tout point de $\mu^{-1}(U_i)$. C'est alors aussi le cas sur un voisinage de $\mu^{-1}(U_i)$ donc sur un ouvert W'_i inclus dans W_i et contenant $\mu^{-1}(U_i)$. Or

$$W'_i \cap \mu^{-1}(V_i) = (h|_{W'_i})^{-1}(0),$$

ainsi, si W' est la réunion des W'_i alors $W' \cap \mu^{-1}(\Sigma)$ est une sous-variété de $\mathbf{SU}(3)^{2g}$. Elle est naturellement co-orientée, donc orientée, par

$$d\mu : \nu_{AB}(W' \cap \mu^{-1}(\Sigma)) \xrightarrow{\sim} \nu_{\mu(AB)}\Sigma.$$

Le minimum de $f \circ \mu|_{W' \cap \mu^{-1}(\Sigma)}$ est réalisé sur $\mu^{-1}(CL)$. Enfin, pour tout AB dans $\mu^{-1}(CL)$, l'espace vectoriel $T_{AB}(W' \cap \mu^{-1}(\Sigma))$ est maximal parmi l'ensemble des sous-espaces vectoriels de $T_{AB}\mathbf{SU}(3)^{2g}$ sur lesquels le hessien $H_{f \circ \mu}$ est positif. L'ensemble $W' \cap \mu^{-1}(\Sigma)$ est une sous-variété minimisante de f pour $\mu^{-1}(\Sigma)$ et la proposition 4.4.1 est démontrée. \square

Rappelons que si AB est un point critique de $f \circ \mu$, l'ensemble $\omega(AB)$ est l'ensemble des points limites, pour $-\text{grad}f$, de AB en $+\infty$, en d'autres termes $\omega(AB)$ est l'ensemble des points x tels que si $t \mapsto x(t)$ est une trajectoire de $-\text{grad}f$ passant par x alors il existe une suite u_n de \mathbf{R} tendant vers $+\infty$ vérifiant : $x(u_n)$ tend vers x en $+\infty$. Pour tout AB , l'ensemble $\omega(AB)$ est contenu dans l'ensemble des points critiques de $f \circ \mu$. Identifions $U(1)$ au

centre de $\mathbf{U}(2)$ et posons

$$X = \mu^{-1}(CL)$$

$$\begin{aligned} X_1 &= \{(P\Delta(A_k)P^{-1}, P\Delta(B_k)P^{-1})_{k=1,\dots,g}, A_k, B_k \in \mathbf{U}(2), \\ &\quad \mu((A_k, B_k)_{k=1,\dots,g}) = -\mathbf{I}, P \in \mathbf{SU}(3)\} \\ &= \{\text{points de } \mu^{-1}(CL) \text{ ayant un stabilisateur non trivial,} \\ &\quad \text{c'est-à-dire conjugué à } \Delta(U(1))\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2 &= X - X_1 \\ &= \{\text{points de } \mu^{-1}(CL) \text{ ayant un stabilisateur trivial,} \\ &\quad \text{c'est-à-dire réduit au centre } \mathbf{Z}/3\mathbf{Z} \text{ de } \mathbf{SU}(3)\}, \end{aligned}$$

$$Y = \{AB \in \mathbf{SU}(3)^{2g} / \omega(AB) \subset X\}.$$

Lemme 4.4.3. — *Le sous-ensemble X_1 de Y est constitué des points de Y ayant un stabilisateur non trivial (plus gros que $\mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$). Le stabilisateur de tout point de X_1 est conjugué à $\Delta(U(1))$.*

Démonstration. — Soit AB un point de Y dont le stabilisateur est non trivial. Comme pour tout autre point de Y , $f(AB)$ est inférieur ou égal à 1. Il existe dans le stabilisateur de AB une matrice ayant une valeur propre d'ordre 1. Donc AB est conjugué à un point du type $(\Delta(A_k), \Delta(B_k))_{k=1,\dots,g}$ et

$$f(AB) = -1 - \operatorname{Re} \operatorname{tr} \mu((A_k, B_k)_{k=1,\dots,g}).$$

Ce dernier nombre est inférieur ou égal à 1 avec égalité si et seulement si $\mu((A_k, B_k)_{k=1,\dots,g}) = -\mathbf{I}$. \square

Corollaire 4.4.4. — *Le sous-ensemble X_1 est une sous-variété de Y .*

Démonstration. — Si G , un groupe de Lie compact, agit sur une variété et si H est un sous-groupe de G , les points de la variété dont le stabilisateur est conjugué à H forment une sous-variété (voir [11]). Le corollaire est donc une conséquence directe du lemme précédent : $\mathbf{SU}(3)$ agit sur Y et X_1 est l'ensemble des points dont le stabilisateur est conjugué à $\Delta(U(1))$. \square

Soit c la codimension de X_1 dans Y , c'est aussi la dimension du fibré normal à X_1 dans Y .

Corollaire 4.4.5. — *Pour $*$ suffisamment grand, on a un isomorphisme*

$$H_{\mathbf{SU}(3)}^{*-c}(X_1) \cong H_{\mathbf{SU}(3)}^*(Y).$$

Démonstration. — L'inclusion $X_1 \subset Y$ définit une stratification lisse de Y , donc il existe une suite exacte longue :

$$\begin{aligned} & \cdots \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^{*-1}(Y - X_1) \rightarrow \\ \rightarrow & H_{\mathbf{SU}(3)}^*(Y, Y - X_1) \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^*(Y) \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^*(Y - X_1) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

que l'on peut remplacer, d'après le théorème d'excision et l'isomorphisme de Thom, par la suite exacte longue :

$$\begin{aligned} & \cdots \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^{*-1}(Y - X_1) \rightarrow \\ \rightarrow & H_{\mathbf{SU}(3)}^{*-c}(X_1) \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^*(Y) \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^*(Y - X_1) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

L'action de $\mathbf{SU}(3)$ est localement libre sur $Y - X_1$, donc pour $*$ grand $H_{\mathbf{SU}(3)}^*(Y - X_1)$ est réduit à $\{0\}$ et $H_{\mathbf{SU}(3)}^{*-c}(X_1)$ est isomorphe à $H_{\mathbf{SU}(3)}^*(Y)$. \square

Soit $\mu_{\mathbf{U}(2)}$ l'application

$$\begin{aligned} \mu_{\mathbf{U}(2)} : & \quad \mathbf{U}(2)^{2g} & \longrightarrow & \quad \mathbf{SU}(2) \\ & (A_1, B_1, \dots, A_g, B_g) & \longmapsto & \quad \Pi_{k=1}^g [A_k, B_k] \end{aligned}$$

et X'_1 l'ensemble $\Delta(\mu_{\mathbf{U}(2)}^{-1}(-\mathbf{I}))$.

Lemme 4.4.6. — *Il existe un isomorphisme entre $H_{\mathbf{U}(2)}^*(X'_1)$ et $H_{\mathbf{SU}(3)}^*(X_1)$.*

Démonstration. — Soit q l'application surjective :

$$\begin{aligned} X'_1 \times \mathbf{SU}(3) & \longrightarrow X_1 \\ (AB, U) & \longmapsto U \cdot AB \cdot U^{-1}. \end{aligned}$$

On fait agir $\mathbf{U}(2)$ sur $X'_1 \times \mathbf{SU}(3)$ par

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(2) \times X'_1 \times \mathbf{SU}(3) & \longrightarrow X'_1 \times \mathbf{SU}(3) \\ (K, AB, U) & \longmapsto (\Delta(K) \cdot AB \cdot \Delta(K^{-1}), U \Delta(K^{-1})). \end{aligned}$$

Cette action est libre et elle induit un difféomorphisme entre $X'_1 \times_{\mathbf{U}(2)} \mathbf{SU}(3)$ et X_1 . En effet, si

$$q(AB, U) = q(AB', U')$$

alors $U'^{-1}U \cdot AB \cdot U^{-1}U' = AB'$ et il existe M dans $\Delta(\mathbf{U}(2))$ tel que $U'^{-1}U = \Delta(M)$, ou encore $U' = U \Delta(M^{-1})$ et

$$(AB', U') = \Delta(M) \cdot (AB, U).$$

Sous cet isomorphisme, l'action de $\mathbf{SU}(3)$ sur X_1 devient

$$\begin{aligned} \mathbf{SU}(3) \times X'_1 \times_{\mathbf{U}(2)} \mathbf{SU}(3) & \longrightarrow X'_1 \times_{\mathbf{U}(2)} \mathbf{SU}(3) \\ (K, [AB, U]) & \longmapsto [AB, KU]. \end{aligned}$$

On conclut en notant que $X'_1 \times_{\mathbf{U}(2)} \mathbf{SU}(3)$ a même type d'homotopie que $(X'_1 \times \mathbf{SU}(3)) \times_{\mathbf{U}(2)} \mathbf{EU}(2)$ et à homotopie près

$$\begin{aligned} X_1 \times_{\mathbf{SU}(3)} \mathbf{EU}(3) &\simeq ((X'_1 \times \mathbf{SU}(3)) \times_{\mathbf{U}(2)} \mathbf{EU}(2)) \times_{\mathbf{SU}(3)} \mathbf{EU}(3) \\ &\simeq (X'_1 \times \mathbf{SU}(3) \times \mathbf{EU}(2) \times \mathbf{EU}(3)) / (\mathbf{U}(2) \times \mathbf{SU}(3)) \\ &\simeq (X'_1 \times \mathbf{EU}(2) \times (\mathbf{SU}(3) \times_{\mathbf{SU}(3)} \mathbf{EU}(3))) / \mathbf{U}(2). \end{aligned}$$

Attention, dans cette dernière ligne, $\mathbf{SU}(3)$ agit sur lui-même par multiplication par l'inverse à droite. Nous en déduisons que $X_1 \times_{\mathbf{SU}(3)} \mathbf{EU}(3) \simeq X'_1 \times_{\mathbf{U}(2)} \mathbf{EU}(2)$. \square

Soit

$$Z = \{AB \in \mathbf{SU}(3)^{2g} / \omega(AB) \subset \mu^{-1}(\mathbf{I}) \cup \mu^{-1}(CL)\}.$$

Théorème 4.4.7. — *Pour tout degré, il existe deux suites exactes courtes*

$$\{0\} \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^*(\mathbf{SU}(3)^{2g}) \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^*(Z) \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^{*-7}(\mu^{-1}(j\mathbf{I}) \cup \mu^{-1}(j^2\mathbf{I})) \rightarrow \{0\}$$

et

$$\{0\} \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^*(Z) \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^*(\mu^{-1}(\mathbf{I})) \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^{*-2}(\mu^{-1}(CL)) \rightarrow \{0\}.$$

En particulier, le groupe $H_{\mathbf{SU}(3)}^*(\mu^{-1}(\mathbf{I}))$ est isomorphe à la somme directe

$$H_{\mathbf{SU}(3)}^*(\mathbf{SU}(3)^{2g}) \oplus H_{\mathbf{SU}(3)}^{*-7}(\mu^{-1}(j\mathbf{I}) \cup \mu^{-1}(j^2\mathbf{I})) \oplus H_{\mathbf{SU}(3)}^{*-2}(\mu^{-1}(CL)).$$

Démonstration. — Rappelons que

$$Y = \{AB \in \mathbf{SU}(3)^{2g} / \omega(AB) \subset \mu^{-1}(CL)\}.$$

D'après la proposition 4.3.1, f est de Morse-Bott généralisée donc il existe deux suites exactes longues

$$(4.4.1) \quad \begin{aligned} &\dots \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^{*-1}(Z) \rightarrow \\ &H_{\mathbf{SU}(3)}^{*-8}(\mu^{-1}(j\mathbf{I}) \cup \mu^{-1}(j^2\mathbf{I})) \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^*(\mathbf{SU}(3)^{2g}) \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^*(Z) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

et

$$(4.4.2) \quad \begin{aligned} &\dots \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^{*-1}(\mu^{-1}(\mathbf{I})) \rightarrow \\ &\rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^{*-3}(Y) \rightarrow H_{\mathbf{SU}(3)}^*(Z) \xrightarrow{\delta_*} H_{\mathbf{SU}(3)}^*(\mu^{-1}(\mathbf{I})) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Dans cette dernière suite

$$H_{\mathbf{SU}(3)}^*(Y) \simeq H_{\mathbf{SU}(3)}^*(\mu^{-1}(CL)).$$

Pour $*$ grand $H_{\mathbf{SU}(3)}^*(\mu^{-1}(j\mathbf{I}) \cup \mu^{-1}(j^2\mathbf{I}))$ est réduit à $\{0\}$ (cette algèbre est isomorphe à la somme directe des cohomologies des variétés compactes

$\mu^{-1}(j\mathbf{I})/\mathrm{SU}(3)$ et $\mu^{-1}(j^2\mathbf{I})/\mathrm{SU}(3)$) ainsi d'après la suite exacte longue 4.4.1, pour $*$ grand

$$(4.4.3) \quad H_{\mathrm{SU}(3)}^*(Z) \cong H_{\mathrm{SU}(3)}^*(\mathrm{SU}(3)^{2g}).$$

Comme $H_{\mathrm{SU}(3)}^*(\mathrm{SU}(3)^{2g})$ contient un élément de degré strictement positif qui n'est pas un diviseur de zéro (prop. 3.3.10), nous en déduisons (lemme 4.3.4) que pour tout $*$ il existe une suite exacte courte

$$\{0\} \rightarrow H_{\mathrm{SU}(3)}^*(\mathrm{SU}(3)^{2g}) \rightarrow H_{\mathrm{SU}(3)}^*(Z) \rightarrow H_{\mathrm{SU}(3)}^{*-7}(\mu^{-1}(j\mathbf{I}) \cup \mu^{-1}(j^2\mathbf{I})) \rightarrow \{0\}$$

En particulier nous en déduisons aussi que $H_{\mathrm{SU}(3)}^*(Z)$ contient un élément de degré strictement positif qui n'est pas un diviseur de zéro. Soit $P(Z)$ la série de Poincaré de $H_{\mathrm{SU}(3)}^*(Z)$, on définit de même $P(\mu^{-1}(\mathbf{I}))$ et $P(\mathrm{SU}(3)^{2g})$. Soit P_1 la série de Poincaré de $H_{\mathrm{U}(2)}^*(\mu_{\mathrm{U}(2)}^{-1}(-\mathbf{I}))$. Nous venons de voir que

$$P(Z) = P(\mathrm{SU}(3)^{2g}) + \text{un polynôme.}$$

Que δ_* , dans la suite exacte longue 4.4.2, soit injectif pour $*$ grand est équivalent à ce que

$$P(\mu^{-1}(\mathbf{I})) = P(Z) + t^2 P(Y) + \text{un polynôme.}$$

Ce qui à son tour d'après 4.4.3, le corollaire 4.4.5 et le lemme 4.4.6 est équivalent à

$$P(\mu^{-1}(\mathbf{I})) = P(\mathrm{SU}(3)^{2g}) + t^{2+c} P_1 + \text{un polynôme.}$$

Remarque 4.4.8. — *Nous pouvons simplifier un cran plus loin en remarquant que ceci est équivalent à ce que*

$$P(\mu^{-1}(\mathbf{I})) = P(\mathrm{SU}(3)^{2g}) + t^2 P_1 + \text{un polynôme.}$$

En effet, rappelons que c est la codimension de X_1 dans Y . Comme $-\mathbf{I}$ est une valeur régulière de $\mu_{\mathrm{U}(2)}$, la dimension de X_1 est $8g - 3$. En tout point régulier de X , la dimension de l'espace tangent est $16g - 4$. Comme de plus l'index de X est 3 et que Y est la strate correspondant à X , la dimension de Y est $16g - 3$. Donc c vaut $8g$ et est pair. Or $(1 - t^2)P_1$ est un polynôme (c 'est la série de Poincaré de l'espace de modules des fibrés de rang 2 et de degré 1), donc $(1 - t^c)P_1$ est un polynôme.

Nous savons déjà que

$$P(\mathrm{SU}(3)^{2g}) = \frac{(1 + t^3)^{2g} (1 + t^5)^{2g}}{(1 - t^4)(1 - t^6)},$$

quant à P_1 elle est connue depuis longtemps (on peut la trouver par exemple dans [1, chapitre 11])

$$P_1 = \frac{(1+t)^{2g} ((1+t^3)^{2g} - t^{2g} (1+t)^{2g})}{(1-t^2)^2 (1-t^4)}.$$

Pour calculer $P(\mu^{-1}(\mathbf{I}))$, on applique la recette donnée dans [1, théorème 7.14].

Lemme 4.4.9. — *La série $P(\mu^{-1}(\mathbf{I}))$ vaut*

$$\begin{aligned} P(\mu^{-1}(\mathbf{I})) &= ((1-t^2) \left(\frac{(1+t)^{2g} (1+t^3)^{2g} (1+t^5)^{2g}}{(1-t^2)^2 (1-t^4)^2 (1-t^6)} \right. \\ &\quad + 2 \frac{t^{(2+4g)} (1+t)^{(4g)} ((1+t^3)^{2g} - t^{2g} (1+t)^{2g})}{(1-t^2)^3 (1-t^4) (t^{12}-1)} \\ &\quad + 2 \frac{t^{(8+4g)} (1+t)^{(4g)} ((1+t^3)^{2g} - t^{(2g+2)} (1+t)^{2g})}{(1-t^2)^3 (1-t^4) (t^{12}-1)} \\ &\quad - \frac{t^{(2+6g)} (1+t)^{6g}}{(1-t^2)^3 (t^8-1) (t^{12}-1)} \\ &\quad \left. - \frac{t^{(14+6g)} (1+t)^{6g}}{(1-t^2)^3 (t^8-1) (t^{12}-1)} \right) \Big/ (1+t)^{(2g)}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Le fastidieux calcul qui va suivre est nécessaire mais n'apporte rien à la compréhension de la démonstration du théorème 4.4.7. Il est donc recommandé d'admettre le résultat et d'aller lire plus loin (page 90) la fin de la démonstration de ce théorème.

Pour tout entier naturel non nul n et tout entier relatif k , on choisit un fibré $E(n, k)$ de rang n et de degré k sur X . Soient $C(n, k)$ l'espace des structures holomorphes sur $E(n, k)$, $C^{ss}(n, k)$ l'espace des structures holomorphes semi-stables sur $E(n, k)$ et $\mathfrak{G}(n, k)$ le groupe des automorphismes de $E(n, k)$ (le groupe de jauge). Le groupe $\mathfrak{G}(n, k)$ agit sur $C(n, k)$ et sur $C^{ss}(n, k)$, les séries de Poincaré des cohomologies équivariantes respectives de $C(n, k)$ et $C^{ss}(n, k)$ sont notées $P(n, k)$ et $P^{ss}(n, k)$. D'après [1, §1 et §6], on a

$$P(3, 0) = \frac{(1+t)^{2g} (1+t^3)^{2g} (1+t^5)^{2g}}{(1-t^2)^2 (1-t^4)^2 (1-t^6)}$$

et

$$P^{ss}(3, 0) = \frac{1 - t^2}{(1 + t)^{2g}} P(\mu^{-1}(\mathbf{I})).$$

Soit $\{(n_1, k_1), (n_2, k_2), \dots, (n_q, k_q)\}$ une famille de q paires d'entiers. Tout comme dans [1, 7.16], notons

$$d_{(n_1, k_1), (n_2, k_2), \dots, (n_q, k_q)} = \sum_{i > j} (n_i k_j - n_j k_i + n_i n_j (g - 1)).$$

D'après [1, théorème 7.14] :

$$\begin{aligned} P(3, 0) &= P^{ss}(3, 0) + \sum_{k_1, k_2} t^{d_{(1, k_1), (2, k_2)}} P^{ss}(1, k_1) P^{ss}(2, k_2) + \\ &\quad \sum_{k_1, k_2 \in \mathbf{Z}} t^{d_{(2, k_1), (1, k_2)}} P^{ss}(2, k_1) P^{ss}(1, k_2) + \\ &\quad \sum_{k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{Z}} t^{d_{(1, k_1), (1, k_2), (3, k_3)}} P^{ss}(1, k_1) P^{ss}(1, k_2) P^{ss}(1, k_3). \end{aligned}$$

Dans cette formule :

- la première somme se fait sur les entiers k_1, k_2 dont la somme $k_1 + k_2$ est nulle et qui vérifient $k_1 > \frac{k_2}{2}$,
- la deuxième somme se fait sur les entiers k_1, k_2 dont la somme $k_1 + k_2$ est nulle et qui vérifient $\frac{k_1}{2} > k_2$,
- la troisième somme se fait sur les entiers k_1, k_2, k_3 dont la somme $k_1 + k_2 + k_3$ est nulle et qui vérifient $k_1 > k_2 > k_3$.

Pour pouvoir déduire $P^{ss}(3, 0)$ de cette égalité il ne nous manque que

$$P^{ss}(1, k) = \frac{(1 + t)^{2g}}{1 - t^2}, \quad \forall k$$

et

$$P^{ss}(2, 0) = \frac{(1 + t)^{2g} ((1 + t^3)^{2g} - t^{(2g+2)} (1 + t)^{2g})}{(1 - t^2)^2 (1 - t^4)}.$$

Calculons les différents termes qui apparaissent dans l'égalité précédente. Commençons par

$$\begin{aligned}
& \sum_{k_1, k_2 \in \mathbf{Z}} t^{d(1, k_1), (2, k_2)} P^{ss}(1, k_1) P^{ss}(2, k_2) \\
= & \sum_{k_1, k_2 \in \mathbf{Z}} t^{d(2, k_1), (1, k_2)} P^{ss}(2, k_1) P^{ss}(1, k_2) \\
= & \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^{(12r+2+4g)} ((1+t)^{2g})^2 ((1+t^3)^{2g} - t^{2g} (1+t)^{2g})}{(1-t^2)^3 (1-t^4)} \right) \\
& + \left(\sum_{r=1}^{\infty} \frac{t^{(12r+4g-4)} ((1+t)^{2g})^2 ((1+t^3)^{2g} - t^{(2g+2)} (1+t)^{2g})}{(1-t^2)^3 (1-t^4)} \right) \\
= & \frac{t^{(2+4g)} (1+t)^{(4g)} ((1+t^3)^{2g} - t^{2g} (1+t)^{2g})}{(1-t^2)^3 (1-t^4) (1-t^{12})} \\
& + \frac{t^{(8+4g)} (1+t)^{(4g)} ((1+t^3)^{2g} - t^{(2g+2)} (1+t)^{2g})}{(1-t^2)^3 (1-t^4) (1-t^{12})},
\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}
& \sum_{k_1, k_2, k_3 \in \mathbf{Z}} t^{d(1, k_1), (1, k_2), (3, k_3)} P^{ss}(1, k_1) P^{ss}(1, k_2) P^{ss}(1, k_3) \\
= & \left(\sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{r=s+1}^{\infty} \frac{t^{(8r+4s+6g-6)} ((1+t)^{(2g)})^3}{(1-t^2)^3} \right) \right) \\
& + \left(\sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{r=2s+1}^{\infty} \frac{t^{(8r-4s+6g-6)} ((1+t)^{(2g)})^3}{(1-t^2)^3} \right) \right) \\
= & \frac{t^{(2+6g)} (1+t)^{6g}}{(1-t^2)^3 (t^8-1) (t^{12}-1)} + \frac{t^{(14+6g)} (1+t)^{6g}}{(1-t^2)^3 (t^8-1) (t^{12}-1)}.
\end{aligned}$$

De ces calculs nous déduisons le résultat annoncé dans le lemme 4.4.9. \square

Soit R la série $P(\mu^{-1}(\mathbf{I})) - P(\mathrm{SU}(3)^{2g}) - t^2 P_1$. D'après la remarque 4.4.8, pour montrer que δ_* est injectif pour $*$ grand, il nous suffit de montrer que R

est un polynôme. Or on a

$$\begin{aligned}
R = & \left((1-t^2) \left(\frac{(1+t)^{2g} (1+t^3)^{2g} (1+t^5)^{2g}}{(1-t^2)^2 (1-t^4)^2 (1-t^6)} \right. \right. \\
& - 2 \frac{t^{2+4g} (1+t)^{4g} ((1+t^3)^{2g} - t^{2g} (1+t)^{2g})}{(1-t^2)^3 (1-t^4) (1-t^{12})} \\
& - 2 \frac{t^{8+4g} (1+t)^{4g} ((1+t^3)^{2g} - t^{2g+2} (1+t)^{2g})}{(1-t^2)^3 (1-t^4) (1-t^{12})} \\
& \left. \left. - \frac{t^{2+6g} (1+t)^{6g}}{(1-t^2)^3 (1-t^8) (1-t^{12})} - \frac{t^{14+6g} (1+t)^{6g}}{(1-t^2)^3 (t^8-1) (t^{12}-1)} \right) \right) / (1+t)^{2g} \\
& - \frac{(1+t^3)^{2g} (1+t^5)^{2g}}{(1-t^4) (1-t^6)} - \frac{t^2 (1+t)^{2g} ((1+t^3)^{2g} - t^{2g} (1+t)^{2g})}{(1-t^2)^2 (1-t^4)}.
\end{aligned}$$

Après réduction au même dénominateur, un calcul long mais facile permet de simplifier R de telle sorte que le numérateur vaille

$$\begin{aligned}
N = & (1+t^3)^{2g-1} (1+t^5)^{2g} t^2 (1+t^2-t^4) \\
& - (1+t)^{2g} (1+t^3)^{2g-1} t^2 (1+t^2) (1-t^6+2t^{4g}) \\
& + (1+t)^{4g} t^{2g+2} (1+t^2) (1-t^3) + t^{2+6g} (1+t)^{4g-1} (1+t+t^2)
\end{aligned}$$

et le dénominateur

$$D = (1-t^2) (1-t^4)^2 (1-t^3)$$

que l'on factorise en

$$(1-t)^4 (1+t)^3 (1+t^2)^2 (1+t+t^2).$$

On vérifie que le numérateur ainsi que ses trois dérivées successives s'annulent en 1, ce qui signifie que le numérateur N est divisible par $(1-t)^4$. Il s'annule en $e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et est donc divisible par $1+t+t^2$. Le numérateur et sa dérivée première s'annulent en i donc N est divisible par $(1+t^2)^2$. Il est aussi clairement divisible par $(1+t)^3$. Donc R est un polynôme et δ_* est injectif pour $*$ grand. Nous avons vu que $H_{SU(3)}^*(Z)$ contient un élément de degré strictement positif qui n'est pas un diviseur de zéro. Donc d'après le lemme 4.3.4, le morphisme δ_* est injectif pour tout $*$. \square

4.5. Appendice : Fonctions de Morse-Bott généralisées

Cet appendice est consacré à la théorie des fonctions de Morse-Bott généralisées. Cette extension de la théorie de Morse (voir [34]) et de Morse-Bott (voir [9]) a été développée par Frances Kirwan (voir [24]) dans le but d'étudier les quotients symplectiques.

Soient Y une variété orientée, compacte et connexe et $f : Y \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Un point y de Y est dit critique si la différentielle $T_y f$ de f en y est nulle. Soient y un tel point. Nous appellerons $\omega(y)$ l'ensemble des points limites de y en $+\infty$, en d'autres termes $\omega(y)$ est l'ensemble des x tels qu'il existe une suite u_n de \mathbf{R} tendant vers $+\infty$ telle que $y(u_n)$ tende vers x en $+\infty$. Pour tout $y \in Y$, l'ensemble $\omega(y)$ est contenu dans l'ensemble des points critiques de f . Soient u, v des vecteurs de $T_y Y$. Choisissons des champs de vecteurs U, V sur Y tels que

$$U_y = u \text{ et } V_y = v.$$

Lemme 4.5.1. — *Les nombres*

$$u \cdot (V \cdot f) \text{ et } v \cdot (U \cdot f)$$

sont égaux et ne dépendent que de u et de v .

Démonstration. — En effet, d'une part

$$u \cdot (V \cdot f) - v \cdot (U \cdot f) = T_y f([U, V]) = 0.$$

D'autre part $u \cdot (V \cdot f)$ ne dépend que du choix de V alors que $v \cdot (U \cdot f)$ ne dépend que du choix de U . \square

Définition 4.5.2. — *En un point critique y de Y , le hessien $H_{f,y}$ est la forme bilinéaire symétrique*

$$\begin{array}{ccc} T_y Y \times T_y Y & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (u, v) & \longmapsto & u \cdot (V \cdot f). \end{array}$$

L'indice $\lambda(y)$ de f en y est la dimension maximale d'un sous-espace de $T_y Y$ sur lequel le hessien est défini négatif.

Si $X \subseteq Y$ est une sous-variété orientée dont tous les points sont critiques, on dit que X est transversalement non-dégénérée si pour tout x de X

$$\ker H_{f,x} = T_x X.$$

Une sous-variété Z de Y est une sous-variété minimisante d'un fermé X de Y dont tous les points sont critiques pour f si

1. X est inclus dans Z et pour tout x de X , l'espace $T_x Z$ est maximal parmi l'ensemble des sous-espaces de $T_x Y$ sur lesquels le hessien $H_{f,x}$ est positif semi-défini,
2. Z est orientable,
3. $f|_Z$ atteint son minimum sur X .

Un X pour lequel il existe une sous-variété minimisante et tel que $f(X)$ est un singleton (cette propriété ne découle pas de la définition de X car nous n'avons pas supposé X connexe), est dit *minimalement dégénéré*. L'indice est le même pour tous les points de X , on peut donc parler d'indice $\lambda(X)$ de f le long de X , il est égal à la codimension d'une sous-variété minimisante de X .

Définition 4.5.3 (voir [9] et [24]). — Soit $f : Y \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction. Elle est dite

- de Morse-Bott si il existe une famille X_1, \dots, X_r de sous-variétés orientées de Y deux à deux disjointes telles que

$$\bigcup_{p=1}^r X_p = \{\text{ensemble des points critiques de } f\}$$

et si les X_p sont transversalement non-dégénérées ;

- de Morse-Bott généralisée si il existe une famille X_1, \dots, X_r de fermés de Y deux à deux disjointes tels que

$$\bigcup_{p=1}^r X_p = \{\text{ensemble des points critiques de } f\}$$

et si les X_p sont minimalement dégénérés. Une telle famille de fermés est dite *acceptable* pour f .

Lemme 4.5.4. — Une fonction de Morse-Bott est de Morse-Bott généralisée.

Démonstration. — Soient $f : Y \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de Morse-Bott et X_1, \dots, X_r les sous-variétés critiques. Fixons une métrique riemannienne sur Y , le hessien définit un endomorphisme auto-adjoint J_p sur chaque fibré normal ν_{X_p} . Comme X_p est transversalement non-dégénérée, ν_{X_p} se scinde en $\nu_{X_p} = \nu_p^+ \oplus \nu_p^-$, où ν_p^+ (resp. ν_p^-) est la somme des sous-espaces propres de J_p attachés à des valeurs propres strictement positives (resp. strictement négatives). L'image d'un voisinage suffisamment petit de la section nulle de ν_p^+ par l'exponentielle est une sous-variété minimisante de X_p . \square

Soit $f : Y \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction de Morse-Bott généralisée sur une variété Y compacte, orientée et connexe. Soit X_1, \dots, X_r une famille acceptable de fermés pour f et Z_1, \dots, Z_r des sous-variétés minimisantes pour les X_p correspondants. On pose aussi $X_0 = \emptyset$. Pour tout j , soit $Y_p = \{y \in Y, \omega(y) \subset X_p\}$. On définit une relation d'ordre sur les X_p par :

$$(X_p < X_q) \iff (f(X_p) < f(X_q)).$$

Théorème 4.5.5 ([24]). — *Supposons les $f(X_p)$ deux à deux distincts. Soit q un entier compris entre 1 et r . Soient*

$$V = \bigcup_{p, X_p < X_q} Y_p$$

et

$$U = \bigcup_{p, X_p \leq X_q} Y_p.$$

Il existe une métrique sur Y telle que les Y_p forment une stratification lisse de Y et on a une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow H^{*-1}(V) \longrightarrow H^{*- \lambda(X_q)}(X_q) \longrightarrow H^*(U) \longrightarrow H^*(V) \longrightarrow \dots$$

Si de plus G est un groupe de Lie compact agissant sur Y et si f est G -invariante alors il existe une métrique G -invariante sur Y telle que les Y_p forment une stratification lisse G -invariante de Y et on a une suite exacte longue

$$\dots \longrightarrow H_G^{*-1}(V) \longrightarrow H_G^{*- \lambda(X_q)}(X_q) \longrightarrow H_G^*(U) \longrightarrow H_G^*(V) \longrightarrow \dots$$

Nous allons conclure ce paragraphe par une remarque concernant le hessien. Soit $f : Y \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction et y un point critique de f . Si X est une variété, $h : X \rightarrow Y$ une application différentiable et x un point de $h^{-1}(y)$ alors x est un point critique de $f \circ h : X \rightarrow \mathbf{R}$.

Lemme 4.5.6. — *On a la formule suivante :*

$$H_{f \circ h, x} = H_{f, y} \circ T_x h.$$

En particulier, si h est une submersion, l'indice de $f \circ h$ en x est égal à l'indice de f en y .

Démonstration. — Soit (x_1, \dots, x_m) (resp. (y_1, \dots, y_n)) un système de coordonnées au voisinage de x (resp. y) tel que x (resp. y) ait pour coordonnées

$(0, \dots, 0)$. Soient u, v deux vecteurs de $T_x X$ que l'on décompose en

$$u = \sum_{p=1}^m u_p \frac{\partial}{\partial x_p}, \quad v = \sum_{p=1}^m v_p \frac{\partial}{\partial x_p}.$$

Un calcul direct donne

$$(4.5.1) \quad H_{f \circ h, x}(u, v) = \sum_{p, q=1}^m \frac{\partial^2 f \circ h}{\partial x_p \partial x_q} u_p v_q.$$

Dans les coordonnées (y_1, \dots, y_n) , l'application h se décompose en

$$h = (h_1, \dots, h_n).$$

Avec ces notations, en x ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f \circ h}{\partial x_p \partial x_q} &= \frac{\partial}{\partial x_p} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_k} \frac{\partial h_k}{\partial x_q} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_k} \frac{\partial^2 h_k}{\partial x_p \partial x_q} + \sum_{k, l=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial h_l}{\partial x_p} \frac{\partial h_k}{\partial x_q} \\ &= \sum_{k, l=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial h_l}{\partial x_p} \frac{\partial h_k}{\partial x_q} \quad \text{car } d_x f = 0. \end{aligned}$$

On injecte ce résultat dans 4.5.1 pour obtenir

$$\begin{aligned}
H_{f \circ h, x}(u, v) &= \sum_{p, q=1}^m \sum_{k, l=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_l} \frac{\partial h_l}{\partial x_p} \frac{\partial h_k}{\partial x_q} u_p v_q \\
&= \sum_{k, l=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_l} \left(\sum_{p=1}^m \frac{\partial h_l}{\partial x_p} u_p \right) \left(\sum_{q=1}^m \frac{\partial h_k}{\partial x_q} v_q \right) \\
&= \sum_{k, l=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_l} dh_l(u) dh_k(v) \\
&= H_{f, y}(dh(u), dh(v)).
\end{aligned}$$

□

ET MAINTENANT ?

Malheureusement une généralisation directe de la méthode employée pour les rangs 2 et 3 aux rangs supérieurs est impossible puisque il est facile de vérifier que la fonction $f \circ \mu$ n'est pas de Morse-Bott généralisée pour $n \geq 4$. En effet, on peut par exemple vérifier que l'indice des points critiques n'est pas constants le long de certains sous-ensembles critiques connexes. En particulier il est alors impossible de construire une sous-variété minimisante pour ces ensembles. Pour contourner ce problème, une première solution consiste peut-être à faire de la théorie de Morse avec les fonctions

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{SU}(n)^{2g} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ AB & \longmapsto & -\operatorname{Re}(e^{i\varphi} \operatorname{tr} \mu(AB)) \end{array}$$

qui sont de Morse-Bott généralisées pour n fixé et φ générique, puis à étudier ce qui se passe à la « limite » quand φ tend vers zéro. Une autre idée du même genre, mais sans doute meilleure, est d'essayer de faire de la théorie de Morse-Bott avec la fonction

$$\begin{array}{ccc} g : S^1 \times \mathbf{SU}(n)^{2g} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (e^{i\varphi}, AB) & \longmapsto & -\operatorname{Re}(e^{i\varphi} \operatorname{tr} \mu(AB)). \end{array}$$

Le paramètre φ sert de paramètre de contrôle et il est facile d'étudier les sous-ensembles critiques de g . Ces sous-ensembles sont bien plus jolies que ceux de $f \circ \mu$ et même si g n'est pas non plus de Morse-Bott généralisée (on peut voir par exemple que le lieu des maxima n'est pas une sous-variété de $S^1 \times \mathbf{SU}(n)^{2g}$), il me semble probable que son étude puisse amener quelques résultats.

Les résultats de cette thèse concernent la réduction de $\mathbf{SU}(n)^{2g}$ en des matrices du type $\zeta \mathbf{I}$ où ζ vaut soit 1 soit est une racine primitive de l'unité. Que peut-on dire pour d'autres types de matrices ? Avant de proposer des idées

pour répondre à cette question, disons quelques mots de l'interprétation géométrique de la réduction en une matrice quelconque. Une telle interprétation existe en effet. L'espace obtenu après réduction en une matrice quelconque est un espace de modules de fibrés vectoriels paraboliques sur X (voir Seshadri [41] et [42] et Mehta et Seshadri [32]). Les espaces de modules de fibrés de rang et degré fixés sont bien évidemment un cas particulier de ces espaces de modules de fibrés paraboliques. Des résultats similaires à ceux de Atiyah et Bott pour ces espaces existent. Notamment, quand l'espace de modules est régulier, N. Nitsure [39] a calculé ses nombres de Betti et I. Biswas [8] et N. Raghavendra ont proposé des générateurs canoniques de sa cohomologie. Certains de ces générateurs proviennent de la décomposition par la formule de Künneth des classes de Chern d'un fibré universel. Un tel fibré universel se construit de manière similaire au cas classique et il devrait être aisé de généraliser les méthodes développées dans le chapitre 3 de cette thèse au cas parabolique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. F. ATIYAH and R. BOTT – *The Yang-Mills Equations Over Riemann Surfaces*, Phil. Trans. Royal Soc. Lond. **A308** (1982), 523–615.
- [2] A. ALEKSEEV, A. MALKIN and E. MEINRENKEN – *Lie group valued moment maps*, J. Differential Geom. 48 (1998), 445–495.
- [3] A. ALEKSEEV, E. MEINRENKEN and C. WOODWARD – *Duistermaat-Heckman distributions for group valued moment maps*, Preprint, 1999.
- [4] A. ALEKSEEV, E. MEINRENKEN and C. WOODWARD – *Group-Valued Equivariant Localization*, Invent. Math. 140, no. 2 (2000), 327–350.
- [5] A. BEAUVILLE – *Sur la cohomologie de certains espaces de modules de fibrés vectoriels*, Geometry and analysis (Bombay, 1992), 37–40.
- [6] N. BERLINE, E. GETZLER and M. VERGNE – *Heat kernels and Dirac operators*, Wissenschaft 298, Springer-Verlag, 1991.
- [7] G. D. BIRKHOFF – *Singular points of ordinary differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 10 (1909), 436–470.
- [8] I. BISWAS and N. Raghavendra – *Canonical generators of the cohomology of moduli of parabolic bundles on curve*, Math. Ann. 306 (1996), 1–14.
- [9] R. BOTT – *Nondegenerate critical manifolds*, Annals of Math. 60 (1954), 248–261.

- [10] R. BOTT, L. W. TU – *Differential forms in algebraic topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag New York, Inc., 1982.
- [11] G. BREDON – *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, New-York, 1972.
- [12] U. V. DESALE and S. RAMANAN – *Poincaré Polynomials of the Variety of Stable Bundles*, Math. Ann. 216 (1975), 233–244.
- [13] M. DUFLO, S. KUMAR, M. VERGNE – *Sur la cohomologie des variétés différentielles*, Astérisque 215, 1993.
- [14] A. GROTHENDIECK – *Sur la mémoire de Weil “Généralisation des fonctions abéliennes”*, Séminaire Bourbaki, Exposé 141, (1956-57).
- [15] V. W. GUILLEMIN and S. STERNBERG – *Supersymmetry and Equivariant de Rham Theory*, Mathematics Past and Present, Springer-Verlag, 1999.
- [16] A. HATCHER – *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, à paraître.
- [17] W. Y. HSIANG – *Cohomology theory of topological transformation groups*, Springer-Verlag, 1975.
- [18] J. HUEBSCHMANN – *Symplectic and Poisson structures of certain moduli spaces*, Duke Mat. J., 80 (1995), 737–756.
- [19] J. HUEBSCHMANN and L. JEFFREY – *Group cohomology construction of symplectic forms on certain moduli spaces*, Internat. Math. Res. Notices 6 (1994), 245–249.
- [20] L. JEFFREY – *Symplectic forms on moduli spaces of flat connections on 2-manifolds*, Proceeding of the Georgian International Topology Conference (Athen, GA, 1993), ed. par W. Kazez. AMS/IP Studies in Advanced Mathematics 2 (1997), 268–281.
- [21] L. JEFFREY – *Group cohomology construction of the cohomology of moduli spaces of flat connections on 2 manifolds*, Duke Math. J. 77 (1995), 407–429.

- [22] L. JEFFREY and F. C. KIRWAN – *Intersection theory on moduli spaces of holomorphic bundles of arbitrary rank on a Riemann surface*, Ann. Math. 148 (1998), 109–196.
- [23] Y. KARSHON – *An algebraic proof for the symplectic structure of moduli space*, Proc. Amer. Math. Soc., 116 (1992), 591–605.
- [24] F. C. KIRWAN – *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1984.
- [25] F. C. KIRWAN – *The cohomology rings of moduli spaces of bundles over Riemann surfaces*, Jour. A.M.S. 5 (1992), 853–906.
- [26] Y. H. KIEM – *The equivariant cohomology ring of the moduli space of vector bundles over a Riemann surface*, Geometry and Topology : Aarhus (1998), 249–261, Contemp. Math., 258, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.
- [27] Y. H. KIEM – *Intersection cohomology of representation spaces of surface groups*, preprint arXiv :math.AG/0101256 v1, 31 January 2001.
- [28] K. KODAIRA and D. C. SPENCER – *On deformations of complex analytic structures, I & II*, Ann. Of Math., Vol. 67, No. 2 (1958), 328–466.
- [29] S. KUMAR and M. VERGNE – *Equivariant cohomology with generalised coefficients*, Astérisque 215 (1993), 109–204.
- [30] K. LIU – *Heat Kernel and moduli spaces*, Math. Res. Letters 3 (1996), 743–762.
- [31] D. MCDUFF – *The moment map for circle actions on symplectic manifolds*, J. Geom. Phys. 5 (1988), 149–160.
- [32] V. B. MEHTA and C. S. SESHADRI, – *Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures*, Math. Ann. 248 (1980), 205–239.
- [33] J. MILNOR – *Construction of universal bundles, II*, Annals of Math., vol. 63, No. 3 (1956), 430–436.
- [34] J. MILNOR – *Morse Theory*, Annals of Math. Studies, Princeton University Press, 1969.

- [35] D. MUMFORD and P. NEWSTEAD – *Periods of moduli space of bundles on curves*, Amer. J. Math. 90 (1968), 1200–1208.
- [36] M. S. NARASIMHAN and C. S. SESHADRI – *Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface*, Ann. Math. 82 (1965), 540–567.
- [37] P. E. NEWSTEAD – *Topological properties of some spaces of stable bundles*, Topology 6 (1967), 241–262.
- [38] P. E. NEWSTEAD – *Characteristic classes of stable bundles of rank 2 over an algebraic curve*, Trans. of the Am. Math. Soc. 169 (1972), 337–345.
- [39] N. NITSURE – *Cohomology of the moduli of parabolic vector bundles*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.) 95 (1986), 61–77.
- [40] S. RACANIÈRE – *Cohomologie équivariante de $\mathrm{SU}(n)^{2g}$ et application de Kirwan*, Comptes Rendus Acad. Sc. 333 (2001), 103–108.
- [41] C. S. SESHADRI – *Moduli of vector bundles with parabolic structures*, Bull. Am. Math. Soc. 83 (1977).
- [42] C. S. SESHADRI – *Fibrés vectoriels sur les courbes algébriques*, Astérisque 96 (1982).
- [43] R. SJAMAAR and E. LERMAN, – *Stratified symplectic spaces and reduction*, Ann. Math. 134 (1991), 375–422.
- [44] J.-M. SOURIAU – *Structure des systèmes dynamiques*, Dunod, Paris, 1969.
- [45] M. THADDEUS – *An introduction to the topology of the moduli spaces of stable bundles on a Riemann surface*, Geometry and physics (Aarhus, 1995), 71–99.
- [46] A. WEINSTEIN – *The symplectic structure on moduli space*, The A. Floer Memorial Volume, Progr. Math. 133, Birkhäuser Verlag (1995), 627–635.
- [47] J. WEITSMAN – *A Duistermaat-Heckman formula for symplectic circle actions*, Math. Res. Notices 12 (1993), 309–312.