

Filtrations à temps discret négatif.

par Stéphane LAURENT

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR, STRASBOURG I
SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

Soutenue le Mercredi 30 Juin 2004 à 9h00 devant la Commission d'Examen :

<i>Michel ÉMERY</i>	<i>Directeur de thèse,</i>
<i>Jacques FRANCHI</i>	<i>Rapporteur Interne,</i>
<i>Christophe LEURIDAN</i>	<i>Membre du jury,</i>
<i>Pierre VALLOIS</i>	<i>Rapporteur Externe,</i>
<i>Marc YOR</i>	<i>Rapporteur Externe</i>

IRMA - UMR 7501 CNRS/ULP
7 RUE RENÉ DESCARTES - 67084 STRASBOURG CEDEX, FRANCE

REMERCIEMENTS

Je remercie spécialement Michel Émery sans qui je n'aurais pu réaliser cette thèse. Sans son aide, ses conseils, son influence, son exigence, sans ses *soins*, je n'aurais pas toujours su me débarrasser de la *quincaillerie* avec laquelle mes mathématiques étaient écrites parfois.

Je pense que celui de mes professeurs qui aura eu l'influence la plus manifeste sur moi lorsque j'ai choisi de m'orienter vers la théorie des probabilités est Pierre Vallois ; je le remercie donc particulièrement pour cela et aussi parce qu'il a accepté de participer au jury de ma thèse. J'ai beaucoup d'estime pour Jacques Franchi, Christophe Leuridan et Marc Yor, que je remercie aussi d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie Michel Coornaert que j'ai beaucoup côtoyé durant ma thèse ; il sera toujours indissociable de mes souvenirs de ces années et le travail que nous avons partagé m'aura donné de hautes leçons en matière d'enseignement des mathématiques.

Il y a beaucoup de *présences* avec lesquelles on vit. Pour leur présence durant ces années, je remercie Anthony Phan, David Kurtz, Céline, Ève, L. Bagot, Myriam Ounaies, Corine, le Séb. Et enfin, je remercie mes parents.

TABLE DES MATIÈRES

partie I Introduction.	7
1. Introduction I et préliminaires.	8
1.1 Introduction.	8
1.2 Préliminaires.	10
2. Introduction II et définitions.	16
2.1 Vocabulaire sur les σ -algèbres et les filtrations.	16
2.1.1 Vocabulaire sur les σ -algèbres.	16
2.1.2 Filtrations de type produit et de type produit local.	16
2.1.3 Filtrations conditionnellement homogènes : définitions.	17
2.2 Questions. L'exemple de Vinokurov.	18
2.3 Le cas conditionnellement non-atomique : l'erreur de Wiener.	19
2.4 Contenu des parties II, III, IV.	20
2.4.1 Partie II : Critère de Vershik de premier niveau et exemples.	20
2.4.2 Partie III : Critère de I-jonction en arbre et contre-exemples.	20
2.4.3 Partie IV : Critères de second niveau.	20
partie II Filtrations de type produit local. Critère de Vershik de premier niveau. Exemples des mots gommés et des mots découpés.	21
3. Critère de Vershik de premier niveau.	23
3.1 Innovations et critère de Vershik de premier niveau.	23
3.2 Ensembles substantiels de σ -algèbres et $\mathfrak{C}_{\text{loc}}(\mathcal{F})$.	24
3.3 Critère de Vershik de premier niveau : équivalences	27
3.4 Preuve de la proposition 3.1.5.	29
3.5 Remarques sur le critère de Vershik de premier niveau.	31
3.6 Cas d'une chaîne de Markov constructive.	32
3.7 Cas d'une filtration de type produit local générale.	32
4. Changement d'innovation.	34
4.1 σ -algèbres isomorphes.	34
4.2 Mesures boréliennes.	35
4.3 Innovations de σ -algèbres : existence et description.	38
4.4 Changement d'innovations de filtration et automorphismes d'arbre.	42

5. L'exemple des mots gommés.	48
5.1 Préliminaire : notations sur les mots.	48
5.2 Le processus des mots gommés.	48
5.3 Cas uniforme sur un alphabet fini	51
5.3.1 Lemme de construction.	51
5.3.2 Notations.	53
5.3.3 Construction de $(\tilde{\eta}_n)_{n \leq 0}$.	54
5.4 Cas d'autres alphabets	57
5.4.1 Cas de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.	58
5.4.2 Cas d'un alphabet essentiellement séparable.	58
5.4.3 Cas d'un alphabet non séparable.	59
6. L'exemple des mots découpés.	61
6.1 Découpage r_n -adique. Notations.	61
6.2 Le processus des mots découpés r_n -adique.	62
6.3 Construction de $(\tilde{\eta}_n)_{n \leq 0}$.	64
6.4 Les mots découpés dans [Ver].	66
7. Conclusion de cette partie.	68
partie III Couplage des filtrations de type produit local : couplage de Doeblin et I-jonction en arbre. Le contre-exemple des mots découpés et des mots rongés.	69
8. Préliminaires : filtrations isomorphes et immersions des filtrations.	71
8.1 Filtrations isomorphes.	71
8.1.1 Copie d'une v.a. dans un espace métrique standard.	71
8.1.2 Filtrations isomorphes	72
8.2 Immersion, immersibilité, coïmmersion.	76
8.2.1 Définition et caractérisations.	76
8.2.2 Lemmes utiles.	77
8.2.3 Coïmmersion de deux filtrations : caractérisations.	77
8.2.4 Critère de Vershik de premier niveau pour une martingale.	78
9. Couplage de Doeblin.	80
9.1 Notre premier couplage.	80
9.2 Cas des chaînes de Markov constructives.	82
9.3 Une condition suffisante.	82
10. I-jonction en arbre.	85
10.1 Coïmmersions en arbre.	85
10.2 I-jonction en arbre.	87
11. Le contre-exemple des mots découpés.	91
11.1 Coïmmersions en arbre de deux processus de mots découpés.	91
11.2 Le mécanisme de découpage.	92
11.3 Mots découpés non standard : lemme.	97
11.4 Mots découpés non standard : preuve.	98

11.5 Quelques remarques.	101
12.Le contre-exemple des mots rongés.	102
12.1 Préliminaire : endomorphisme d'un espace de Lebesgue.	102
12.2 Contenu de ce chapitre.	103
12.3 La transformation $[T, T^{-1}]$ et la chaîne de Markov $[T, T^{-1}]$	104
12.4 Les processus des mots décalés et des mots rongés.	106
13.Conclusion de cette partie.	108
partie IV Critères de Vershik de second niveau.	109
14.I-confort.	111
14.1 Définition.	111
14.2 Choix des variables aléatoires "test".	112
14.3 Propriétés.	113
14.4 Exemple : couplage classique des chaînes de Markov.	116
15.Filtrations I-confortables et filtrations standard.	119
15.1 Cas r_n -adique.	119
15.2 Cas conditionnellement homogène.	122
15.3 Filtrations standard.	125
15.4 Cas des filtrations conditionnellement séparables.	126
15.5 À propos de la séparabilité conditionnelle.	127
16.Paramétrisations I.	130
16.1 Généralités sur les paramétrisations.	130
16.1.1 Définition.	130
16.1.2 Paramétrisations et séparabilité conditionnelle.	131
16.1.3 Grossissement paramétrique.	131
16.1.4 Paramétrisations des chaînes de Markov.	132
16.2 Conditions de Doeblin et paramétrisation génératrice.	133
16.2.1 Préliminaires : familles de mesures.	133
16.2.2 Conditions de Doeblin	135
16.2.3 Un exemple de Hanson et Rosenblatt.	135
16.2.4 Cas markovien homogène.	137
16.3 Application au I-confort des chaînes de Markov.	138
16.3.1 I-confort des chaînes de Markov.	138
16.3.2 Couplage à partir d'un temps d'arrêt.	139
17.Paramétrisations II.	144
17.1 Préliminaire : concaténation des paramétrisations.	144
17.1.1 Paramétrisations isomorphes.	145
17.1.2 Concaténation : cas local.	145
17.1.3 Concaténation : cas global.	147
17.2 Critère de Vershik paramétrique de premier niveau.	149
17.2.1 Définition.	149

17.2.2	Propriétés.	150
17.2.3	Lemmes et preuve de la proposition 17.2.2.	152
17.2.4	Cas d'une chaîne de Markov.	153
17.3	I-confort paramétrique	154
17.4	Preuve de la proposition 17.3.5.	154
17.5	I-jonction paramétrique en arbre	157
17.5.1	Cas d'une filtration.	157
17.5.2	Cas d'une chaîne de Markov.	159
17.6	Confort et paramétrisations.	159
17.7	I-confort des chaînes de Markov.	160
 partie V Deux courts chapitres.		161
 18.Le I^∞-confort et une application du lemme de Slutsky.		163
18.1	Le I^∞ -confort	163
18.2	Plus que le I^∞ -confort.	164
 19.Le théorème d'isomorphisme lacunaire.		166
19.1	Critère de standardité de Vershik	166
19.2	Le théorème d'isomorphisme lacunaire.	167

PREMIÈRE PARTIE

INTRODUCTION.

1. INTRODUCTION I ET PRÉLIMINAIRES.

1.1 Introduction.

La classification des suites décroissantes de partitions mesurables d'un espace de Lebesgue mise au point dans les travaux de thèse de Vershik est une continuation des travaux de Rokhlin. Elle se traduit en théorie des probabilités par la classification des filtrations à temps discret négatif. On considère une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si pour tout n on a une variable aléatoire V_n indépendante de \mathcal{F}_{n-1} et telle que $\mathcal{F}_{n-1} \vee \sigma(V_n) = \mathcal{F}_n$, nous dirons¹ que \mathcal{F} est *de type produit local*, que V_n est une *innovation* de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n et que $(V_n)_{n \leq 0}$ est un *processus d'innovations* de \mathcal{F} . Sous ces conditions et même dans le cas où la tribu $\mathcal{F}_{-\infty} := \cap \mathcal{F}_n$ est dégénérée, auquel cas nous dirons que \mathcal{F} est *kolmogorovienne*, il est facile de remarquer que \mathcal{F} n'est pas nécessairement la filtration engendrée par la suite de variables aléatoires indépendantes $(V_n)_{n \leq 0}$ (voir l'exemple en-dessous de la définition 2.1.4 page 18). Aussi, nous verrons facilement que la filtration de type produit local $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ de *l'exemple de Vinokurov* (page 18), est kolmogorovienne mais que \mathcal{F} n'est pas *de type produit*, c'est-à-dire qu'elle n'est engendrée par *aucune* suite de variables aléatoires indépendantes. Notons qu'une condition nécessaire pour qu'une filtration de type produit local soit de type produit est qu'elle soit *essentiellement séparable*, c'est-à-dire que la tribu finale \mathcal{F}_0 est engendrée par une classe dénombrable d'événements. L'existence d'une filtration de type produit local kolmogorovienne et essentiellement séparable mais qui n'est pas de type produit, devient un problème compliqué dans le cas des filtrations *conditionnellement homogènes* définies comme suit. Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ de type produit local pour laquelle il y a un processus d'innovations $(V_n)_{n \leq 0}$ tel que pour tout n ,

- V_n est uniformément distribuée sur un nombre fini r_n de valeurs, sera dite *r_n -adique*, et *dyadique* dans le cas où $r_n \equiv 2$;
- V_n est uniformément distribuée sur le segment $[0, 1]$, sera dite *conditionnellement non-atomique*;
- V_n est uniformément distribuée sur un nombre fini r_n de valeurs ou alors uniformément distribuée sur le segment $[0, 1]$, sera dite *conditionnellement homogène*.

Le premier exemple d'une filtration kolmogorovienne et conditionnellement homogène mais qui n'est pas de type produit a été donné par Vershik. Il s'agit d'une filtration dyadique.

Vershik donne un critère, non trivial mais élémentaire, caractérisant les filtrations qui sont de type produit parmi les filtrations r_n -adiques. Nous donnerons son analogue probabiliste sous le nom de *critère de Vershik de premier niveau*, énoncé plus généralement pour toutes les filtrations de type produit local.

Nous donnerons un exemple non trivial d'une filtration r_n -adique de type produit dans le chapitre 5, la filtration du *processus des mots gommés*. Dans le chapitre 6, c'est la filtration

¹ Pour cette introduction seulement ; plus tard nous dirons qu'elle est de type produit local et *conditionnellement séparable*.

du *processus des mots découpés* qui sera étudiée. Le processus des mots découpés r_n -adique est défini lorsque sont donnés une suite $(r_n)_{n \leq 0}$ et un alphabet probabilisé (A, \mathfrak{A}, μ) , et sa filtration est r_n -adique. Dans le cas dyadique ($r_n \equiv 2$), A fini, et μ uniforme sur A , il est démontré dans [Smo] et [ES] que cette filtration n'est pas de type produit. Nous reprendrons et généraliserons cet exemple dans le chapitre 11. Nous expliquerons comment on peut savoir a priori, en utilisant la théorie de Vershik, qu'il existe des suites $(r_n)_{n \leq 0}$ et des alphabets (A, \mathfrak{A}, μ) pour lesquels la filtration du processus des mots découpés r_n -adique correspondant est de type produit, et nous donnerons alors des conditions suffisantes pour que ce soit le cas (conditions (∇_κ) et (∇) , propositions 6.3.3 et 6.3.4).

Pour la clarté de l'introduction, nous énumérons ci-dessous les notions sur les filtrations auxquelles nous nous intéresserons :

- Le critère de Vershik de premier niveau (définition 3.1.3).
- Le critère de I-jonction en arbre (définition 10.2.1).
- Le critère de standardité r_n -adique de Vershik (que nous n'énoncerons pas).
- Le critère de standardité de Vershik (définition 19.1.1).
- Le critère de I-confort (définition 14.1.1).
- La notion de filtration standard (définition 15.3.2).

Le *critère de standardité de Vershik* donné dans [Ver] définit un invariant des filtrations à temps discret négatif générales. Il a été donné sous forme probabiliste dans [ES] sous le même nom. Pour l'énoncer, dans [Ver] comme dans [ES], il faut au préalable définir des *tours de mesures*. Mais Vershik donne aussi des constructions combinatoires adaptées aux filtrations r_n -adiques correspondantes à celles des tours de mesures, sur les orbites d'actions des groupes des automorphismes d'arbre, dans un cadre très ergodicien, et il est (sous-)entendu que son critère s'écrit aussi en termes de ces constructions, en les substituant aux tours de mesures, lorsqu'il concerne les filtrations r_n -adiques. Dans ce cas nous l'appellerons le *critère de standardité r_n -adique de Vershik*. C'est ce critère que Vershik, ainsi que d'autres ergodiciens comme Feldman, Hecklen, Hoffmann, Rudolph, et plus récemment Karen Ball, utilisent pour étudier des exemples de filtrations r_n -adiques. Nous donnerons un analogue probabiliste du critère de standardité r_n -adique de Vershik sous le nom de *critère de I-jonction en arbre*, homologue en termes de couplages de deux filtrations, du critère de Vershik de premier niveau. Les auteurs de [ES] distinguent *deux niveaux de la théorie de Vershik* ; le critère de Vershik de premier niveau est du premier niveau, le critère de I-confort et le critère de standardité de Vershik sont du second niveau. À tout oser, nous dirions que le critère de I-jonction en arbre est de niveau 3/2.

Le critère de I-jonction en arbre nous permettra dans le chapitre 11 de donner une condition suffisante sur la suite (r_n) et l'alphabet pour que la filtration du processus de mots découpés r_n -adique correspondant ne soit pas de type produit (condition (Δ) , proposition 11.4.2). La filtration du *processus des mots rongés* que nous verrons dans le chapitre 12 est un autre exemple de filtration dyadique et kolmogorovienne qui n'est pas de type produit. Nous expliquerons comment ramener la preuve à un problème de nature combinatoire, mais nous renverrons le lecteur à [HH] pour sa résolution car nous verrons que la non-standardité de la *transformation* $[T, T^{-1}]$ établie dans [HH] avec le critère de standardité r_n -adique de Vershik, se traduit aussi par ce problème. Avec les résultats de second niveau de la théorie de Vershik, l'exemple de la filtration du processus des mots rongés fournira toute une classe de filtrations de *chaîne de Markov* $[T, T^{-1}]$ qui engendrent des filtrations dyadiques et kolmogoroviennes qui ne sont pas de type produit.

Le critère de I-confort est introduit dans le chapitre 14. Dans le chapitre suivant, par un argument d'extrémalité dans le cas r_n -adique, puis au moyen moyen d'approximations, nous montrerons que dans le cas des filtrations *conditionnellement homogènes*, le critère de I-jonction en arbre permet de passer d'un niveau à l'autre de la théorie de Vershik : dans ce cas les critères de I-jonction en arbre et de I-confort sont équivalents. Nous obtiendrons donc assez élémentairement le théorème suivant.

Théorème 1.1.1. *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration essentiellement séparable et conditionnellement homogène. Alors \mathcal{F} est de type produit si et seulement si \mathcal{F} est I-confortable.*

Ce théorème peut se déduire des résultats de [ES] dans le cas des filtrations conditionnellement non-atomiques, en passant par le critère de standardité de Vershik, et il est affirmé sans être explicitement démontré dans le cas r_n -adique. Avec ce théorème, l'équivalence due à [ES] entre filtration I-confortable et filtration *standard* s'obtient facilement (corollaire 15.3.4), et nous la généraliserons au cas des filtrations *conditionnellement séparables* (définition 2.1.6, corollaire 15.4.1).

Après avoir introduit la notion de *paramétrisations* dans le chapitre 16, nous l'appliquerons pour donner des exemples de filtrations standard, en nous aidant parfois de certains résultats dans la littérature qui ne concernent pas les filtrations tels qu'ils sont écrits. Dans le chapitre 17, nous montrerons qu'il est équivalent pour une filtration essentiellement séparable d'être I-confortable ou d'admettre une *paramétrisation génératrice*. Ce résultat avait causé quelque confusion dans la littérature ([Sch2], [FS02]). Nous étudierons aussi la généralisation au cas conditionnellement séparable.

Enfin nous finirons par deux courts chapitres. Nous ferons une remarque sur le I-confort dans le chapitre 18. Le critère de I-confort tel qu'il a été défini dans [ES] est une variante d'un critère introduit par B. Tsirelson dans [Tsi], et une modification faite dans [ES] en vue de simplifier sa présentation du I-confort semble l'affaiblir. Nous montrerons qu'en fait cette modification n'affecte pas la définition du I-confort. Ainsi on obtient une définition équivalente, qui est plus commode pour établir certains énoncés.

Le chapitre 19 est indépendant. Nous espérons que ses trois pages rendront hommage au critère de standardité de Vershik, lequel n'aura pas fait apparition précédemment ; nous y énoncerons le critère de standardité de Vershik et en admettant son équivalence avec le I-confort, établie dans [ES], nous donnerons une preuve rapide du *théorème d'isomorphisme lacunaire*, dont le point clef est inspiré du *lemme de Slutsky*, utilisé dans le chapitre précédent.

1.2 Préliminaires.

Espace de Borel. Soient (S, \mathcal{S}) et (T, \mathcal{T}) des espaces mesurables. Une injection *bimesurable* de S dans T est une application mesurable injective $\iota: S \rightarrow T$ et telle que la bijection $\iota^{-1}: \iota(S) \rightarrow S$ est aussi mesurable.

La *tribu borélienne* sur un espace métrique séparable E est notée \mathfrak{B}_E , ou alors elle n'est pas notée puisque tout espace métrique séparable sera tacitement muni de sa tribu borélienne. De même lorsque (S, \mathcal{S}) et (T, \mathcal{T}) sont des espaces mesurables, le produit $S \times T$ est tacitement muni de la tribu produit $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$.

On dira qu'un espace mesurable (S, \mathcal{S}) est un *espace de Borel* s'il existe un espace métrique séparable E et une bijection bimesurable $f: (S, \mathcal{S}) \rightarrow (E, \mathfrak{B}_E)$ telle que f et f^{-1} soient

mesurables. Ceci équivaut encore (voir [DM], [Ke]) à ce qu'il existe une famille $\{C_n\}$ dénombrable d'éléments de \mathcal{S} qui engendrent \mathcal{S} (on dit que (S, \mathcal{S}) est *séparable*), et que \mathcal{S} *sépare les points*, (c'est-à-dire que $\forall x, y \in S, \exists C \in \mathcal{S}, x \in C, y \notin C$). Un espace mesurable (S, \mathcal{S}) est un *espace de Borel standard* s'il existe une bijection bimesurable de (S, \mathcal{S}) sur un borélien de $[0, 1]$ muni de la sous-tribu de $\mathfrak{B}_{[0,1]}$ induite par ce borélien, ou en d'autres termes s'il existe une injection bimesurable de (S, \mathcal{S}) sur $([0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1]})$. Tout borélien d'un espace polonais muni de la sous-tribu qu'il induit est un espace de Borel standard (voir [Ke]). Nous appellerons *espace métrique standard* tout espace métrique qui est un espace de Borel standard lorsqu'il est muni de sa tribu borélienne. Un espace métrique standard est nécessairement séparable. Rappelons la représentation fonctionnelle des applications mesurables dans un espace de Borel standard.

Théorème (Doob). *Soient (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable, (S, \mathcal{S}) un espace de Borel standard et $X: \Omega \rightarrow S$ une application mesurable. Soient (T, \mathcal{T}) un espace mesurable et $\xi: \Omega \rightarrow T$ une application mesurable. Alors X est mesurable dans $\sigma(\xi)$ si et seulement si il existe une application mesurable $f: T \rightarrow S$ telle que $X = f(\xi)$.*

Sur le sup de deux tribus. Comme conséquence du théorème de Doob, notons la proposition suivante qui sera utilisée très fréquemment.

Proposition 1.2.1. *Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable et soient \mathcal{C} et \mathcal{B} deux sous- σ -algèbres de \mathcal{A} . Soient E un espace métrique standard (ou un espace de Borel standard) et $X: \Omega \rightarrow E$ est une fonction mesurable pour $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$.*

- a) *Il existe une fonction $B: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable pour \mathcal{B} , une fonction $C: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable pour \mathcal{C} , et une fonction borélienne $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow E$ telles que $X = f(B, C)$.*
- b) *Si \mathcal{C} est séparable et si V est une application mesurable dans un espace métrique séparable (ou un espace de Borel) telle que $\sigma(V) = \mathcal{C}$, alors il existe une fonction $B: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable pour \mathcal{B} et une fonction borélienne g telles que $X = g(B, V)$.*

Démonstration. La σ -algèbre $\sigma(X)$ est engendrée par une famille dénombrable $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$. Chaque A_n s'écrit avec des opérations ensemblistes booléennes combinant un nombre dénombrable d'événements $B_n^j \in \mathcal{B}$, $j \in \mathbb{N}$ et un nombre dénombrable d'événements $C_n^j \in \mathcal{C}$, $j \in \mathbb{N}$. Par conséquent si B et C sont des variables aléatoires qui engendrent les σ -algèbres respectivement engendrées par les B_n^j et les C_n^j , $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$, alors X est mesurable pour la σ -algèbre engendrée par l'application mesurable $(B, C): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, et enfin le théorème de représentation fonctionnelle de Doob nous donne f . Le *b)* se déduit facilement du *a)* avec le théorème de représentation fonctionnelle de Doob : si $X = f(B, C)$ et si $\mathcal{C} = \sigma(V)$, alors C est une fonction borélienne de V , donc X est une fonction borélienne de (B, V) . \square

Espace probabilisé complet. Soit $(\Omega, \dot{\mathcal{A}})$ un espace mesurable, et $\dot{\mathbb{P}}$ une probabilité sur $(\Omega, \dot{\mathcal{A}})$. La $(\dot{\mathcal{A}}, \dot{\mathbb{P}})$ -complétée d'une σ -algèbre $\dot{\mathcal{B}} \subset \dot{\mathcal{A}}$ est la σ -algèbre $\mathcal{B} = \sigma(\dot{\mathcal{B}}, \mathcal{N}(\dot{\mathcal{A}}, \dot{\mathbb{P}}))$ engendrée par $\dot{\mathcal{B}}$ et l'ensemble $\mathcal{N}(\dot{\mathcal{A}}, \dot{\mathbb{P}})$ des parties de Ω négligeables pour $\dot{\mathbb{P}}$, c'est-à-dire contenues dans un événement $A \in \dot{\mathcal{A}}$ tel que $\dot{\mathbb{P}}[A] = 0$. Elle est plus explicitement décrite de la manière suivante. Soit (S, \mathcal{S}) un espace de Borel. Alors une application $X: (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow (S, \mathcal{S})$ est mesurable si et seulement si il existe une application mesurable $\dot{X}: (\Omega, \dot{\mathcal{B}}) \rightarrow (S, \mathcal{S})$ telle que $X = \dot{X}$ en-dehors d'une partie $N \in \mathcal{N}(\dot{\mathcal{A}}, \dot{\mathbb{P}})$, et \dot{X} est appelée une *version* de X . Si on note \mathcal{A} la $(\dot{\mathcal{A}}, \dot{\mathbb{P}})$ -complétée de $\dot{\mathcal{A}}$, la probabilité $\dot{\mathbb{P}}$ s'étend de manière unique à une probabilité sur \mathcal{A} . On obtient ainsi une σ -algèbre $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ $(\dot{\mathcal{A}}, \dot{\mathbb{P}})$ -complète, ou aussi $(\mathcal{A}, \mathbb{P})$ -complète, c'est-à-dire telle que $\mathcal{N}(\mathcal{A}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{B}$, et un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ *complet*, c'est-à-dire tel que

$\mathcal{N}(\mathcal{A}, \mathbb{P}) \subset \mathcal{A}$. On dit que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un *espace de Lebesgue* s'il existe un espace de Borel $(\Omega, \dot{\mathcal{A}})$ et une probabilité $\dot{\mathbb{P}}$ sur $\dot{\mathcal{A}}$ tel que $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est la $(\mathcal{A}, \mathbb{P})$ -complétée de $(\Omega, \dot{\mathcal{A}})$.

Tout au long de cette thèse, les espaces probabilisés considérés seront toujours supposés complets, et toute σ -algèbre \mathcal{B} d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ donné sera toujours supposée $(\mathcal{A}, \mathbb{P})$ -complète.

Mesure image. Soient $(\Omega, \dot{\mathcal{A}})$ et (S, \mathcal{S}) des espaces mesurables. Lorsque μ est une mesure sur $(\Omega, \dot{\mathcal{A}})$, et que l'on a une application mesurable $\eta: (\Omega, \dot{\mathcal{A}}) \rightarrow (S, \mathcal{S})$, on note $\eta(\mu)$ ou $\mu \circ \eta^{-1}$ la mesure image de μ par η . Lorsque \mathbb{P} est une mesure de probabilité ambiante sur $(\Omega, \dot{\mathcal{A}})$, la mesure image de \mathbb{P} par η est appelée la *loi* de η et nous la noterons \mathbb{P}_η .

Variables aléatoires dans un espace métrique séparable. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ une σ -algèbre et (E, ρ) un espace métrique séparable. Puisque E est séparable, la tribu borélienne sur $E \times E$ est la tribu produit $\mathfrak{B}_E \otimes \mathfrak{B}_E$, et la distance ρ sur E est alors une fonction borélienne (car continue) sur $E \times E$. On appellera *variable aléatoire dans E mesurable pour \mathcal{B}* une classe d'équivalence d'une fonction mesurable de (Ω, \mathcal{B}) dans E pour la relation d'égalité presque sûre, et on note alors $L^0(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}; (E, \rho))$ ou $L^0(\mathcal{B}; (E, \rho))$, ou $L^0(\mathcal{B}; E)$, l'ensemble des variables aléatoires dans E mesurables pour \mathcal{B} muni de la topologie de la convergence en probabilité. Cette topologie est définie par la distance

$$(X, Y) \longmapsto \inf \{ \delta > 0 \mid \mathbb{P}[\rho(X, Y) > \delta] < \delta \},$$

ou

$$(X, Y) \longmapsto \mathbb{E} \left[\frac{\rho(X, Y)}{1 + \rho(X, Y)} \right], \text{ ou encore } (X, Y) \longmapsto \mathbb{E}[\rho(X, Y) \wedge 1].$$

La loi d'une variable aléatoire $X \in L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}; E)$ est désignée par \mathbb{P}_X . Le terme « variable aléatoire » sans autre précision signifiera « variable aléatoire réelle ». On note aussi $L^1(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}; (E, \rho))$, ou $L^1(\mathcal{B}; E)$, l'ensemble $\{X \in L^0(\mathcal{B}; E) \mid \mathbb{E}[\rho(X, x_0)] < \infty\}$, où $x_0 \in E$ est un point quelconque fixé, muni de la métrique $(X, Y) \mapsto \mathbb{E}[\rho(X, Y)]$. Comme dans le cas de \mathbb{R} , la topologie sur $L^1(\mathcal{B}; E)$ issue de cette métrique est plus fine que la topologie de la convergence en probabilité et $L^1(\mathcal{B}; E)$ est un sous-ensemble dense de $L^0(\mathcal{B}; E)$. Aussi, l'ensemble $L^{\text{simple}}(\mathcal{B}; E)$ des variables aléatoires mesurables pour \mathcal{B} ne prenant qu'un nombre fini de valeurs est dense dans $L^1(\mathcal{B}; E)$ (voir [DM]). Dans le cas le plus fréquent où $E = \mathbb{R}$ et $\rho(x, y) = |x - y|$ est la distance usuelle sur \mathbb{R} , on notera seulement $L^0(\mathcal{B})$, $L^1(\mathcal{B})$, $L^{\text{simple}}(\mathcal{B})$. Nous notons aussi $L^{\text{simple}}(\mathcal{B}; F)$ l'ensemble des variables aléatoires prenant presque sûrement leurs valeurs dans un ensemble fini F .

Éléments aléatoires. Lorsque $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé complet, et que l'on a un espace mesurable (S, \mathcal{S}) , nous dirons que ξ est un *élément aléatoire* dans S si c'est la classe d'équivalence pour la relation d'égalité presque sûre d'une application mesurable $\dot{\xi}: \Omega \rightarrow S$. La tribu engendrée par ξ est alors la complétée de la tribu engendrée par $\dot{\xi}$.

Espace probabilisé essentiellement séparable. Lorsque $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est une σ -algèbre, on dit que l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$, ou seulement que la σ -algèbre \mathcal{B} , est *essentiellement séparable* lorsqu'il existe une fonction mesurable $\dot{X}: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que \mathcal{B} est la tribu $(\mathcal{A}, \mathbb{P})$ -complétée de $\sigma(\dot{X})$, autrement dit si \mathcal{B} est engendrée par une variable aléatoire. Ceci revient à dire que $L^1(\mathcal{B})$ est un espace topologique séparable (voir [DM], [HL]). Toute σ -algèbre $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$

engendrée par une variable aléatoire dans un espace métrique séparable est essentiellement séparable. Toute sous- σ -algèbre d'une σ -algèbre essentiellement séparable est elle-même essentiellement séparable, toute σ -algèbre engendrée par une infinité dénombrable de σ -algèbres essentiellement séparables est essentiellement séparable.

Processus et chaînes de Markov. Un *processus* $(X_n)_{n \leq 0}$ à valeurs dans des espaces métriques séparables, resp. standard, est une suite de variables aléatoires X_n dans des espaces métriques séparables, resp. standard, E_n . Nous dirons que c'est un processus *réel* si les X_n sont réelles. Un processus *généralisé* est une suite d'éléments aléatoires à valeurs dans des espaces mesurables quelconques. De même pour les chaînes de Markov $(X_n)_{n \leq 0}$.

Espérance conditionnelle. Lorsque $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé, $X \in L^1(\mathcal{A})$, et $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est une σ -algèbre, nous noterons $\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]$ l'espérance de X conditionnellement à \mathcal{B} , ou $\mathbb{E}_{\mathcal{B}}[X]$ auquel cas nous noterons $\mathbb{E}_{\mathcal{B}(\omega)}[X]$ son évaluation au point ω . Si Y est une variable aléatoire, $\mathbb{E}[X | Y]$ désigne $\mathbb{E}[X | \sigma(Y)]$.

Loi conditionnelle. Soit (S, \mathcal{S}) un espace mesurable. On note $\mathfrak{P}(S)$ l'ensemble des probabilités sur (S, \mathcal{S}) , qui devient un espace mesurable lorsqu'on le munit de la σ -algèbre engendrée par les applications $\pi_C: \mu \mapsto \mu(C)$, $C \in \mathcal{S}$. Lorsque $f: (S, \mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable bornée, l'application $\mu \mapsto \int f d\mu$ est alors mesurable de $\mathfrak{P}(S) \rightarrow \mathbb{R}$.

Lorsque S est un espace de Borel, $\mathfrak{P}(S)$ l'est aussi, standard si S l'est ; lorsque S est un espace métrique séparable, la topologie de la convergence étroite sur $\mathfrak{P}(S)$ est métrisable et séparable, et pour cette topologie $\mathcal{S} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{P}(S)}$ est alors la tribu borélienne de $\mathfrak{P}(S)$ (voir [Ke]).

Maintenant soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable, \mathbb{P} une probabilité sur \mathcal{A} et $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ une σ -algèbre. On note $\dot{\mathcal{A}}$ et $\dot{\mathcal{B}}$ les tribus $(\dot{\mathcal{A}}, \dot{\mathbb{P}})$ -complétées de \mathcal{A} et \mathcal{B} respectivement, et $\dot{\mathbb{P}}$ le prolongement de \mathbb{P} à $\dot{\mathcal{A}}$. La *probabilité conditionnelle* d'un événement $A \in \dot{\mathcal{A}}$ sachant \mathcal{B} , est la variable aléatoire $\mathbb{P}[A | \mathcal{B}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A | \mathcal{B}] \in L^1(\mathcal{B})$. Soient (T, \mathcal{T}) un espace mesurable, $\xi: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (S, \mathcal{S})$ un élément aléatoire dans S et $\eta: (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (T, \mathcal{T})$ un élément aléatoire dans T . Une *version régulière de la loi de ξ conditionnellement aux valeurs de η* est un *noyau de désintégration* de (S, \mathcal{S}) par rapport à (T, \mathcal{T}) , c'est-à-dire une application $\nu: T \times \mathcal{S} \rightarrow [0, 1]$ telle que pour tout événement $A \in \mathcal{T}$ fixé, l'application $s \mapsto \nu(s, A)$ est mesurable, telle qu'on ait, presque sûrement, $\nu(\eta(\omega), C) = \mathbb{P}[\xi \in C | \eta](\omega)$ pour tout $C \in \mathcal{S}$, et telle que pour presque tout ω , $C \mapsto \nu(\eta(\omega), C)$ est une probabilité sur (S, \mathcal{S}) . L'application $t \mapsto \nu(t, \cdot)$ est mesurable de (T, \mathcal{T}) dans $\mathfrak{P}(S)$ (voir [Kall]). On note aussi $\nu = (\nu_t)_{t \in T}$, $\nu_t(C) = \mathbb{P}[\xi \in C | \eta = t]$ et $\nu_t = \mathcal{L}[\xi | C = t]$. Une version régulière existe toujours quand (S, \mathcal{S}) est un espace de Borel standard (voir [Kall]), sans hypothèse sur (T, \mathcal{T}) ni η , et deux versions régulières ne diffèrent que sur un événement négligeable pour la loi de η . On appelle alors dans ce cas la *loi conditionnelle de ξ sachant les valeurs de η* et on note $(\mathcal{L}[\xi | \eta = t])_{t \in T}$ la variable aléatoire dans $\mathfrak{P}(S)$ égale à la classe d'équivalence de $t \mapsto \nu_t$. Dans le cas particulier où $(T, \mathcal{T}) = (\Omega, \mathcal{B})$ où $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est une σ -algèbre, et $\eta(\omega) = \omega$, nous dirons que c'est la *loi conditionnelle de ξ sachant \mathcal{B}* et dans ce cas $\mathcal{L}[\xi | \eta = \omega]$ sera notée $\mathcal{L}[\xi | \mathcal{B}](\omega)$ ou $\mathcal{L}_{\mathcal{B}(\omega)}[\xi]$.

Désintégration. Nous rappelons l'énoncé suivant du théorème de désintégration et nous renvoyons à [Kall] pour une preuve.

Théorème 1.2.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On se donne deux espaces mesurables (S, \mathcal{S}) et (T, \mathcal{T}) , une σ -algèbre $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, et un élément aléatoire ξ dans S . Si $(\nu_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est*

une décomposition régulière de la loi de ξ conditionnellement à \mathcal{B} , si η est un élément aléatoire dans T mesurable pour \mathcal{B} , et si $f: S \times T \rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable et bornée, alors

$$\mathbb{E}[f(\xi, \eta) | \mathcal{B}] = \int f(s, \eta) \nu(ds) \quad \text{presque sûrement.}$$

Notations sur les σ -algèbres et les filtrations. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soit $(\mathcal{B}_m)_{m \geq 0}$ une suite croissante de sous- σ -algèbres de \mathcal{A} . Nous noterons $\mathcal{B}_m \nearrow \mathcal{B}$ (quand $m \rightarrow +\infty$) si $\mathcal{B} = \bigvee_m \mathcal{B}_m$.

Lorsque \mathcal{B} et \mathcal{C} sont deux sous- σ -algèbres de \mathcal{A} indépendantes, on désignera parfois par $\mathcal{B} \dot{\vee} \mathcal{C}$ la σ -algèbre engendrée par \mathcal{B} et \mathcal{C} au lieu de $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$ pour ne pas perdre de vue que \mathcal{B} et \mathcal{C} sont indépendantes.

Lorsqu'on parlera d'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ sans autre précision, il sera entendu que \mathbb{T} est un ensemble totalement ordonné. Les propriétés que l'on regardera sur une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dépendront souvent de \mathbb{P} , et le terme « la filtration \mathcal{F} » sera donc entendu comme une abréviation de « l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ».

On note

$$\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{F}_t \quad \text{et} \quad \mathcal{F}_{-\infty} = \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathcal{F}_t.$$

On dira qu'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est *essentiellement séparable* si la σ -algèbre \mathcal{F}_∞ (et donc aussi chaque \mathcal{F}_t) l'est. On dira qu'une variable aléatoire est mesurable pour \mathcal{F} si elle est mesurable pour \mathcal{F}_∞ . Une variable aléatoire est dite indépendante de \mathcal{F} si elle est indépendante de la σ -algèbre \mathcal{F}_∞ ; il suffit pour cela qu'elle soit indépendante de chaque \mathcal{F}_t . On dit que deux filtrations $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ et $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ définies sur le même espace sont indépendantes si les σ -algèbres \mathcal{F}_∞ et \mathcal{G}_∞ sont indépendantes. On dit que \mathcal{F} est contenue dans \mathcal{G} , ce que l'on note $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ si $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t$ pour tout $t \in \mathbb{T}$.

Suites croissantes de σ -algèbres. Le lemme suivant et la proposition qui s'ensuit sont élémentaires.

Lemme 1.2.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de sous- σ -algèbres de \mathcal{A} . On pose $\mathcal{B}_\infty = \bigvee_{n \geq 0} \mathcal{B}_n$. Soient F un ensemble fini et $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{A}; F)$. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) X est mesurable pour \mathcal{B}_∞ .

(ii) Pour tout $\delta > 0$, il existe $n \geq 0$ et $X_n \in L^{\text{simple}}(\mathcal{B}_n; F)$ telle que $\mathbb{P}[X \neq X_n] < \delta$.

Démonstration. Bien sûr, (ii) \implies (i). Supposons qu'on ait (i). Il n'est pas difficile de vérifier que l'ensemble constitué des événements $B \in \mathcal{B}_\infty$ pour lesquels il existe des événements $B_n \in \mathcal{B}_n$ tels que $\mathbb{P}[B \Delta B_n] \rightarrow 0$ est une classe monotone. Comme elle contient l'algèbre $\bigcup_{n \geq 0} \mathcal{B}_n$, finalement cet ensemble est la σ -algèbre \mathcal{B}_∞ toute entière d'après le théorème de la classe monotone. En remarquant que $\mathbb{P}[B \Delta B_n] = \mathbb{P}[\mathbb{1}_B \neq \mathbb{1}_{B_n}]$, cela donne (ii) lorsque $\#F = 2$. Supposons que (i) \implies (ii) est vrai lorsque $\#F = p$, $p \geq 2$. Soient F un ensemble fini de cardinal $2p$, et $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{B}_\infty; F)$. Avec une application bijective $f: \{0, 1\} \times \{1, 2, \dots, p\} \rightarrow F$, on peut écrire $X = f(X_1, X_2)$ où $X_1 \in L^{\text{simple}}(\mathcal{B}_\infty; \{0, 1\})$ et $X_2 \in L^{\text{simple}}(\mathcal{B}_\infty; \{1, 2, \dots, p\})$. Donnons-nous $\delta > 0$. L'hypothèse de récurrence appliquée à X_1 et X_2 donne un entier n et un couple $(X'_1, X'_2) \in L^{\text{simple}}(\mathcal{B}_n; \{0, 1\} \times \{1, 2, \dots, p\})$ tel que $\mathbb{P}[X_1 \neq X'_1] < \delta/2$ et $\mathbb{P}[X_2 \neq X'_2] < \delta/2$, et cela donne $\mathbb{P}[X \neq X_n] < \delta$ avec $X_n = f(X'_1, X'_2)$. Ainsi (i) \implies (ii) est vrai pour $\#F = 2p$, et donc aussi pour $\#F = p + 1 \leq 2p$. \square

Proposition 1.2.4. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(\mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$ une suite croissante de sous- σ -algèbres de \mathcal{A} . On pose $\mathcal{B}_\infty = \bigvee_{n \geq 0} \mathcal{B}_n$. Alors pour tout espace métrique séparable (E, ρ) , l'ensemble $\bigcup_{n \geq 0} L^1(\mathcal{B}_n; E)$ est dense dans $L^1(\mathcal{B}_\infty; E)$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la densité de $L^{\text{simple}}(\mathcal{B}_\infty; E)$ dans $L^1(\mathcal{B}_\infty; E)$ et du lemme précédent. \square

Fonctions boréliennes sur un espace métrique. On peut trouver une preuve du lemme suivant dans [HL].

Lemme 1.2.5. *Soit E un ensemble non vide. Soit L un sous-espace vectoriel réticulé (ce qui équivaut à $\forall f \in L, |f| \in L$) de l'espace des fonctions de E dans \mathbb{R} et tel qu'il existe une suite (f_n) de L telle que $f_n \uparrow 1$. Alors l'ensemble des fonctions mesurables dans la tribu $\sigma(L)$ engendrée par L , c'est-à-dire la plus petite tribu de E rendant mesurables les éléments de L , est le plus petit sous-ensemble de fonctions de E dans \mathbb{R} contenant L et stable par limite simple de suites.*

Dans [HL], ce lemme est utilisé pour donner une preuve de la proposition suivante où les fonctions lipschitziennes sont remplacées par des fonctions continues ; nous n'avons fait que remarquer que la même preuve donne le cas des fonctions lipschitziennes.

Proposition 1.2.6. *Si (E, ρ) est un espace métrique, l'ensemble des fonctions boréliennes de E dans \mathbb{R} est le plus petit sous-ensemble de fonctions de E dans \mathbb{R} contenant les fonctions lipschitziennes et stable par limites simples de suites.*

Démonstration. L'ensemble L des fonctions lipschitziennes de E dans \mathbb{R} satisfait aux hypothèses du lemme 1.2.5. Notons \mathfrak{B}_E la tribu borélienne de E . Toute fonction lipschitzienne est borélienne, donc $\sigma(L) \subset \mathfrak{B}_E$. Inversement, tout ouvert U de E est contenu dans $\sigma(L)$, puisqu'il est l'image réciproque de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par la fonction 1-lipschitzienne $x \mapsto \rho(x, U^c)$. Finalement $\mathfrak{B}_E = \sigma(L)$, et il suffit d'appliquer le lemme 1.2.5. \square

Cette proposition et le théorème de représentation fonctionnelle de Doob donnent immédiatement :

Corollaire 1.2.7. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, E un espace métrique séparable, et X une variable aléatoire dans E . L'ensemble des variables aléatoires de la forme $f(X)$ où $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne, est dense dans $L^0(\sigma(X); \mathbb{R})$.*

2. INTRODUCTION II ET DÉFINITIONS.

2.1 Vocabulaire sur les σ -algèbres et les filtrations.

Les définitions de cette section seront utilisées tout au long de cette thèse, sans relâche.

2.1.1 Vocabulaire sur les σ -algèbres.

Définitions 2.1.1. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient \mathcal{B} et \mathcal{C} deux sous- σ -algèbres de \mathcal{A} avec $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$.

- On dit qu'une sous- σ -algèbre \mathcal{D} de \mathcal{B} indépendante de \mathcal{C} telle que $\mathcal{C} \dot{\vee} \mathcal{D} = \mathcal{B}$ est un *complément de \mathcal{C} dans \mathcal{B}* , ou une σ -algèbre *complémentaire* de \mathcal{C} dans \mathcal{B} .
- Si V est une variable aléatoire indépendante de \mathcal{C} telle que $\mathcal{B} = \mathcal{C} \dot{\vee} \sigma(V)$, on dit que V est une *innovation de \mathcal{C} dans \mathcal{B}* .

Définition 2.1.2. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et \mathcal{C}, \mathcal{B} des sous- σ -algèbres de \mathcal{A} avec $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. On dit que \mathcal{B} est *séparable conditionnellement à \mathcal{C}* s'il existe une variable aléatoire V telle que $\mathcal{B} = \mathcal{C} \vee \sigma(V)$. On dit qu'une telle variable aléatoire V est une *novation* de \mathcal{C} dans \mathcal{B} .

Lemme 2.1.3. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient \mathcal{B} et \mathcal{C} deux sous- σ -algèbres de \mathcal{A} avec $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. S'il existe une novation de \mathcal{C} dans \mathcal{B} , alors tout complément de \mathcal{C} dans \mathcal{B} est une σ -algèbre essentiellement séparable.

Démonstration. Soient V une novation de \mathcal{C} dans \mathcal{B} et \mathcal{D} un complément de \mathcal{C} dans \mathcal{B} . On écrit $V = f(C, D)$ où f est borélienne, $C \in L^0(\mathcal{C})$ et $D \in L^0(\mathcal{D})$, et donc on a $\mathcal{B} = \mathcal{C} \dot{\vee} \sigma(D)$. Montrons maintenant que $\sigma(D) = \mathcal{D}$. Soit $X \in L^1(\mathcal{D})$, qu'on écrit $X = h(C', D)$ où $C' \in L^0(\mathcal{C})$ et h est borélienne. Rappelons que l'on note $\mathbb{P}_{C'}$ la loi de C' . Alors

$$\int \mathbb{E}[|X - h(c, D)|] d\mathbb{P}_{C'}(c) = \mathbb{E}[|X - h(C', D)|] = 0,$$

il doit exister c tel que $\mathbb{E}[|X - h(c, D)|] = 0$ et par conséquent X est mesurable pour $\sigma(D)$. \square

La proposition 15.5.8 généralisera ce lemme.

2.1.2 Filtrations de type produit et de type produit local.

Les définitions suivantes, données pour les filtrations à temps discret négatif, s'étendent sans mal pour des filtrations indexées par \mathbb{Z} , ou seulement une partie de \mathbb{Z} , finie ou pas, mais en ce qui nous concerne, cela n'aura d'intérêt que lorsque c'est une partie non minorée.

Définition 2.1.4. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Soit $(\mathcal{C}_n)_{n \leq 0}$ une suite de sous- σ -algèbres de \mathcal{A} . On dit que \mathcal{F} est *engendrée* par $(\mathcal{C}_n)_{n \leq 0}$ si $\mathcal{F}_n = \sigma(\mathcal{C}_m, m \leq n)$ pour tout $n \leq 0$.
- S'il existe une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \leq 0}$ telles que $\mathcal{F}_n = \sigma(X_m, m \leq n)$, on dit que \mathcal{F} est *engendrée par le processus* $(X_n)_{n \leq 0}$, ou que c'est *la filtration du processus* $(X_n)_{n \leq 0}$.
- On dit que \mathcal{F} est une filtration *de type produit* si elle est engendrée par une suite $(\mathcal{C}_n)_{n \leq 0}$ de sous- σ -algèbres de \mathcal{A} indépendantes.
- On dit que \mathcal{F} est *de type produit local* si pour tout $n \leq 0$, il existe un complément de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n , c'est-à-dire une σ -algèbre \mathcal{C}_n indépendante de \mathcal{F}_{n-1} telle que $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} \dot{\vee} \mathcal{C}_n$.
- On dit que \mathcal{F} est *de type produit local conditionnellement séparable* si pour tout $n \leq 0$, il existe une σ -algèbre complémentaire de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n qui est essentiellement séparable. En d'autres termes, \mathcal{F} est de type produit local conditionnellement séparable si pour tout $n \leq 0$, il existe innovation de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n , c'est-à-dire une variable aléatoire V_n indépendante de \mathcal{F}_{n-1} telle que $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} \dot{\vee} \sigma(V_n)$.

Bien sûr une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ de type produit local essentiellement séparable est une filtration de type produit local conditionnellement séparable puisqu'un complément de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n est une sous- σ -algèbre de \mathcal{F}_0 . Il est bon de signaler le lemme suivant, selon lequel il n'y a pas d'ambiguïté de dire d'une filtration de type produit local que ses compléments sont essentiellement séparables.

Lemme 2.1.5. *Avec les notations de la définition précédente, si \mathcal{C}_n est une σ -algèbre complémentaire de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n et qu'elle est essentiellement séparable, alors toute σ -algèbre complémentaire de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n est essentiellement séparable.*

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 2.1.3. □

Définition 2.1.6. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que \mathcal{F} est *conditionnellement séparable* si pour tout $n \leq 0$, il existe une innovation de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n , c'est-à-dire une variable aléatoire V_n telle que $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} \vee \sigma(V_n)$.

Le lemme 2.1.3 assure la compatibilité des notions : selon lui, une filtration de type produit local conditionnellement séparable est une filtration à la fois de type produit local et conditionnellement séparable.

2.1.3 Filtrations conditionnellement homogènes : définitions.

Parmi les filtrations de type produit local, les filtrations *conditionnellement homogènes* auront une place d'importance dans cette thèse.

Définition 2.1.7. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et soit $(r_n)_{n \leq 0}$ une suite d'entiers strictement positifs. On dit que \mathcal{F} est *r_n -adique* si pour tout n il existe une innovation de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n qui est uniformément distribuée sur r_n valeurs. En d'autres termes, \mathcal{F} est *r_n -adique* s'il existe une suite de variables aléatoires $(\eta_n)_{n \leq 0}$ indépendantes, avec η_n uniformément distribuée sur r_n valeurs, indépendante de \mathcal{F}_{n-1} et vérifiant $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} \dot{\vee} \sigma(\eta_n)$ pour tout n . Quand $r_n \equiv 2$, on dit aussi que \mathcal{F} est *dyadique*.

Définition 2.1.8. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et soit $(r_n)_{n \leq 0}$ une suite d'entiers strictement positifs. On dit que \mathcal{F} est *standard r_n -adique* s'il existe une suite de variables aléatoires $(\eta_n)_{n \leq 0}$ indépendantes, avec η_n uniformément distribuée sur r_n valeurs, telles que l'on a $\mathcal{F}_n = \sigma(\eta_m, m \leq n)$ pour tout n . Quand $r_n \equiv 2$, on dit aussi que \mathcal{F} est *standard dyadique*.

Définition 2.1.9. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que \mathcal{F} est *conditionnellement non-atomique* si pour tout n il existe une innovation de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n qui est uniformément distribuée sur $[0, 1]$. Bien entendu il suffit pour cela qu'il existe pour tout n une innovation de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n qui est de loi diffuse.

Définition 2.1.10. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que \mathcal{F} est *conditionnellement homogène* si pour tout n il existe une innovation de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n qui est uniformément distribuée sur un nombre fini de valeurs, ou alors qui est de loi diffuse.

2.2 Questions. L'exemple de Vinokurov.

Définition 2.2.1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On dit qu'une σ -algèbre $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ est *dégénérée* si c'est la complétée de la σ -algèbre triviale $\{\emptyset, \Omega\}$. Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ ou $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est dite *kolmogorovienne* si la σ -algèbre $\mathcal{F}_{-\infty} := \bigcap_n \mathcal{F}_n$ est dégénérée.

On sait par la loi du 0–1 de Kolmogorov qu'une filtration \mathcal{F} de type produit est kolmogorovienne. La question suivante se pose naturellement :

Question 2.2.2. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local. On note $(\mathcal{C}_n)_{n \leq 0}$ une suite de compléments de \mathcal{F} . Pour tout $n \leq 0$, on a alors

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{n-1} \dot{\vee} \sigma(\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_{n+1}, \dots, \mathcal{C}_0).$$

Si \mathcal{F} est kolmogorovienne, a-t-on $\mathcal{F}_0 = \sigma(\mathcal{C}_n, n \leq 0)$?

La réponse à cette question est négative ; nous allons le voir ici sur un contre-exemple simple. Nous donnerons d'autres exemples beaucoup moins triviaux dans les chapitres 5 et 6. Prenons la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ engendrée par une suite de variables aléatoires $(U_n)_{n \leq 0}$ i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$, et posons $V_n = U_{n-1} \dot{+} U_n$ pour tout n , où $\dot{+}$ désigne l'addition modulo 1 sur $[0, 1]$. Ainsi pour tout $n \leq 0$, on a $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} \dot{\vee} \sigma(U_n) = \mathcal{F}_{n-1} \dot{\vee} \sigma(V_n)$: les σ -algèbres $\sigma(U_n)$, $n \leq 0$, comme les σ -algèbres $\sigma(V_n)$, $n \leq 0$, forment une suite de compléments de \mathcal{F} ; la première engendre \mathcal{F} , mais pas la seconde, car la variable aléatoire U_0 est mesurable dans \mathcal{F}_0 , indépendante du processus $(V_n)_{n \leq 0}$, n'est pas constante, et ne peut donc être une fonctionnelle des V_n . Ainsi \mathcal{F} est kolmogorovienne, on a $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_n \dot{\vee} \sigma(V_{n+1}, \dots, V_0)$ pour tout n , et $\sigma(V_{n+1}, \dots, V_0) \not\supset \sigma(V_m, m \leq 0)$ mais $\mathcal{F}_0 \neq \sigma(V_m, m \leq 0)$.

Citons quelques références relatives à la question 2.2.2. Le résultat de Von Weizsäcker [Weiz] donne (en particulier) une condition nécessaire et suffisante sur la filtration \mathcal{F} de la question 2.2.2 sous laquelle on a $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{-\infty} \vee \sigma(\mathcal{C}_n, n \leq 0)$. On peut trouver des exercices concernant ce genre de phénomènes dans [Wi] (exercice 4.12 p. 48) et [CY] (exercice 2.5 p. 29). Dans [N-R-BR] est étudié le cas de σ -algèbres définies sur un espace mesuré seulement, sans probabilité.

L'exemple de Vinokurov. — Bien qu'elle ne soit pas engendrée par ses compléments $\sigma(V_n)$, la filtration \mathcal{F} ci-dessus est de type produit puisqu'elle est engendrée par ses compléments $\sigma(U_n)$.

Question 2.2.3. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si elle est kolmogorovienne, est-elle de type produit ? En d'autres termes, existe-t-il une suite de compléments de \mathcal{F} qui engendre \mathcal{F} ?

La réponse à cette question est négative elle aussi. Le contre-exemple que nous donnons maintenant a été attribué à Vinokurov par Vershik ([Ver] page 756) et Feldman ([Fe98]). Il s'agit de la filtration engendrée par la chaîne de Markov stationnaire $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sur $\{0, 1\}$ dont la matrice de transition est $\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$, avec $p \neq 1/2$. On suppose que $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la filtration qu'engendre $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Si on pose

$$\varepsilon_n = \mathbb{1}_{\{M_n = M_{n-1}\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } M_n = M_{n-1} \\ 0 & \text{si } M_n = 1 - M_{n-1}, \end{cases}$$

alors $\sigma(\varepsilon_n)$ est un complément de niveau n de \mathcal{F} . Le corollaire 4.3.9 montre que $\sigma(\varepsilon_n)$ est aussi le seul complément de niveau n de \mathcal{F} . Alors si \mathcal{F} était de type produit, elle serait engendrée par le processus $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mais ce n'est pas le cas puisque M_0 est indépendante de tout ce processus.

2.3 Le cas conditionnellement non-atomique : l'erreur de Wiener.

C'est l'unicité des compléments de la filtration de l'exemple de Vinokurov qui nous a permis d'établir qu'elle n'est pas de type produit. Dans le cas conditionnellement homogène, l'existence d'une filtration de type produit local essentiellement séparable qui n'est pas de type produit est un problème difficile qui a suscité l'intérêt de Rosenblatt quand celui-ci a remarqué une erreur commise par Wiener.

Dans [KW]¹, Kallianpur et Wiener considèrent un processus stationnaire $(X_n)_{n \leq 0}$ défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et notent $\mathcal{F}_n = \sigma(X_m, m \leq n)$. En supposant que les valeurs de la loi conditionnelle $\mathcal{L}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ sont, presque sûrement, des probabilités diffuses, ils montrent que \mathcal{F} est de type produit local en construisant un processus d'innovations $(U_n)_{n \leq 0}$ formée de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Selon la définition 2.1.9, \mathcal{F} est conditionnellement non-atomique. On a alors $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{m-1} \dot{\vee} \sigma(U_m, U_{m+1}, \dots, U_n)$ pour tout $m \leq n$, et l'erreur commise par Kallianpur et Wiener, remarquée par M. Rosenblatt dans [Ros1], a été d'en déduire que sous l'hypothèse supplémentaire où \mathcal{F} est kolmogorovienne, on aurait $\mathcal{F}_n = \sigma(U_m, m \leq n)$, pour tout n . Comme nous l'avons vu, ceci n'est pas automatique. Cependant nous ne savons pas si les auteurs de [KW] affirmaient que cette conclusion était valable non pas en général mais pour ce cas particulier de filtrations et pour ce choix particulier des innovations U_n issues de leur construction ; mais un exemple de filtration donnée dans [Ros1] montre que ce n'est pas le cas. Cependant, M. Rosenblatt établit que la filtration de cet exemple est quand même de type produit, en construisant une autre suite $(U'_n)_{n \leq 0}$ d'innovations de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Ainsi aucune filtration kolmogorovienne, essentiellement séparable et conditionnellement non-atomique mais non de type produit n'avait été donnée avant Vershik, même dans la poursuite des travaux de Rosenblatt ([Ros2, Han]). Dans [Mah] est donné un exemple d'une telle filtration mais à la différence que l'espace mesurable sur lequel elle est définie est équipé non pas d'une probabilité, mais d'une mesure de masse totale infinie ; l'auteur ajoute : « I should be very interested in an example in a *probability* space with the same additional feature ».

¹ [KW] n'est pas publié mais on peut trouver une discussion sur son contenu dans [Mas].

2.4 Contenu des parties II, III, IV.

Remarquons qu'une filtration de type produit local conditionnellement séparable est nécessairement essentiellement séparable si elle est de type produit : en effet, le lemme 2.1.5 montre que dans ce cas, \mathcal{F}_0 est engendrée par une suite de variables aléatoires.

Question 2.4.1. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local et essentiellement séparable. Quand est-ce que \mathcal{F} est de type produit ? En d'autres termes, à quelles conditions existe-t-il une suite de variables aléatoires $(V_n)_{n \leq 0}$ indépendantes telles que $\mathcal{F}_n = \sigma(V_m, m \leq n)$ pour tout $n \leq 0$?

2.4.1 Partie II : Critère de Vershik de premier niveau et exemples.

Sous les conditions de la question 2.4.1, nous verrons dans le chapitre suivant que \mathcal{F} est de type produit si et seulement si elle satisfait le *critère de Vershik de premier niveau* (définition 3.1.3). Ce critère ne concerne que les filtrations de type produit local conditionnellement séparable. Dans les chapitres 5 et 6, nous verrons des exemples non-triviaux de filtrations de type produit. D'abord nous contruirons un processus d'innovations générateur de ces filtrations dans des cas particuliers, desquelles nous déduirons des cas plus généraux grâce au critère de Vershik. Pour en déduire les cas les plus généraux, nous utiliserons des résultats de second niveau de la partie de Vershik, qui feront l'objet de la partie IV.

2.4.2 Partie III : Critère de I-jonction en arbre et contre-exemples.

Pour établir que l'exemple de la filtration de l'exemple de Vinokurov n'est pas de type produit, nous avons utilisé l'unicité des compléments de cette filtration. Le critère de *I-jonction en arbre* que nous verrons dans la partie III nous permettra de donner des exemples non-triviaux de filtrations qui ne sont pas de type produit. Le besoin de disposer des critères de second niveau de la théorie de Vershik se fera encore ressentir : grâce à eux nous obtiendrons de nouveaux exemples à partir des précédents.

2.4.3 Partie IV : Critères de second niveau.

Les critères de second niveau de la théorie de Vershik, comme le critère de *I-confort* ou le *critère de standardité de Vershik*, concernent toutes les filtrations conditionnellement séparables. Dans le cas des filtrations de type produit local qui sont *conditionnellement homogènes*, ils permettent de répondre à la question 2.4.1.

Nous les utiliserons parfois dans les parties précédentes : dans les chapitres 5, 6, 11 et 12 où nous verrons des exemples de filtrations de type produit ou non de type produit, ils nous serviront à passer du particulier au général. Ailleurs ils ne seront jamais utilisés.

DEUXIÈME PARTIE

FILTRATIONS DE TYPE PRODUIT LOCAL.
CRITÈRE DE VERSHIK DE PREMIER NIVEAU.
EXEMPLES DES MOTS GOMMÉS ET DES MOTS
DÉCOUPÉS.

Cette partie commence par énoncer le critère de Vershik de premier niveau pour une filtration de type produit local conditionnellement séparable. Nous verrons qu'une telle filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ satisfait ce critère si et seulement si toute variable aléatoire X mesurable pour \mathcal{F} est mesurable dans un processus d'innovations de \mathcal{F} (dépendant de X). Il en sera déduit le fait déjà connu ([Ver], [FS00]) que le critère de Vershik de premier niveau caractérise les filtrations de type produit parmi les filtrations de type produit local essentiellement séparables.

Le critère de Vershik de premier niveau nous motivera à rechercher comment décrire toutes les innovations d'une filtration de type produit local conditionnellement séparables. Ceci fera l'objet du chapitre 4 qui ne contient rien de nouveau depuis Rokhlin.

Dans les chapitres 5 et 6 nous verrons deux exemples de filtrations de type produit local essentiellement séparables : la filtration du processus des mots gommés, et la filtration du processus des mots découpés. Ces processus sont des suites de mots sur un alphabet. Dans les cas des alphabets les plus simples, nous construirons des processus d'innovations générateur de la filtration ; des cas plus généraux seront déduits à l'aide du critère de Vershik de premier niveau, et les cas les plus généraux seront déduits à l'aide de résultats du second niveau de la théorie de Vershik, objet de la partie IV.

3. CRITÈRE DE VERSHIK DE PREMIER NIVEAU.

Le *critère de Vershik de premier niveau* caractérise les filtrations qui sont de type produit parmi les filtrations de type produit local essentiellement séparables. Le seul résultat nouveau de ce chapitre est la proposition 3.4.4 qui donne une autre caractérisation des filtrations de type produit local satisfaisant au critère de Vershik de premier niveau, valable dans le cas conditionnellement séparable.

Notations. — Dans les définitions de ce chapitre et partout ailleurs, la notation $\llbracket n, m \rrbracket$ où $n, m \in \mathbb{Z}$ sont tels que $n < m$, désigne l'ensemble $\{n + 1, n + 2, \dots, m\}$, mais ne sera utilisée seulement lorsque n et m représentent des instants¹.

3.1 Innovations et critère de Vershik de premier niveau.

Définitions 3.1.1. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Soient $n_0 < n_1 \leq 0$. Une suite finie de σ -algèbres $(\mathcal{C}_{n_0+1}, \dots, \mathcal{C}_{n_1})$ telles que \mathcal{C}_n est un complément de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n pour tout $n \in \llbracket n_0, n_1 \rrbracket$, est appelée une *suite de compléments de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, n_1 \rrbracket$* . On dit qu'une suite $(\mathcal{C}_n)_{n \leq 0}$ de σ -algèbres est une *suite de compléments de \mathcal{F}* si \mathcal{C}_n est un complément de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n pour tout $n \leq 0$. L'existence d'une suite de compléments de \mathcal{F} équivaut donc au fait que \mathcal{F} est de type produit local.
- Soient $n_0 < n_1 \leq 0$. Une suite finie de variables aléatoires $(V_{n_0+1}, \dots, V_{n_1})$ telles que V_n est une innovation (définition 2.1.1) de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n pour tout $n \in \llbracket n_0, n_1 \rrbracket$, est appelée une *innovation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, n_1 \rrbracket$* . On dit qu'un processus $(V_n)_{n \leq 0}$ est un *processus d'innovations de \mathcal{F}* si V_n est une innovation de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n pour tout $n \leq 0$. Si $(V_n)_{n \leq 0}$ est un processus d'innovations de \mathcal{F} tel que $\mathcal{F}_n = \sigma(V_n, n \leq 0)$, on dit que c'est un processus d'innovations *générateur* de \mathcal{F} ; \mathcal{F} est alors de type produit (mais il existe des filtrations de type produit qui ne sont pas engendrées par un processus d'innovations).

Nous nous restreindrons aux filtrations de type produit local conditionnellement séparables, mais dirons néanmoins un mot dans la sous-section 3.7 sur le cas général, que nous n'utiliserons jamais par la suite.

Abréviation 3.1.2. Nous écrirons parfois « filtration *tples* » et « filtration *tplcs* » pour abrégé respectivement les termes « filtration de type produit local essentiellement séparable » et « filtration de type produit local conditionnellement séparable ».

¹ L'auteur s'excuse auprès de ceux des lecteurs pour qui cette notation désigne habituellement un intervalle stochastique.

Définition 3.1.3. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable. On dit que \mathcal{F} satisfait le *critère de Vershik de premier niveau* si pour tout ensemble fini F , pour toute variable aléatoire $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$ et tout réel $\delta > 0$, il existe un entier $n_0 < 0$, une innovation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ et une variable aléatoire $Z \in L^{\text{simple}}(\sigma(V_{n_0+1}, \dots, V_0); F)$ telle que $\mathbb{P}[X \neq Z] < \delta$.

Lemme 3.1.4. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit engendrée par un processus d'innovations $(V_n)_{n \leq 0}$. Alors \mathcal{F} vérifie le critère de Vershik de premier niveau.

Démonstration. Ce lemme s'obtient en appliquant le lemme élémentaire 1.2.3 avec $\mathcal{B}_\infty = \mathcal{F}_0$ et $\mathcal{B}_n = \sigma(V_{-n}, \dots, V_0)$. \square

La suite de ce chapitre nous mènera aux démonstrations des deux propositions suivantes.

Proposition 3.1.5. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local essentiellement séparable. Alors \mathcal{F} est de type produit si et seulement si elle satisfait le critère de Vershik de premier niveau.

Cette proposition est une généralisation aux filtrations de type produit local essentiellement séparables du même résultat de Vershik ([Ver], l'équivalence entre **1.** et **2.** dans **Theorem 3.2**) pour les filtrations r_n -adiques essentiellement séparables. La preuve donnée dans [Ver] a déjà été généralisée dans [FS00] aux filtrations *tples*. Avec une approche différente, la nôtre nous permettra en outre de donner proprement et rapidement des variantes de la définition du critère de Vershik de premier niveau :

Proposition 3.1.6. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik de premier niveau.
- (ii) Pour toute variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0)$ et tout nombre réel $\delta > 0$, il existe un entier $n_0 < 0$, une innovation $(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, ainsi qu'une variable aléatoire $Z \in L^1(\sigma(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0))$ telle que $\mathbb{E}[|X - Z|] < \delta$.
- (iii) Pour toute variable aléatoire $X \in L^0(\mathcal{F}_0)$ et tout nombre réel $\delta > 0$, il existe un entier $n_0 < 0$, une innovation $(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, ainsi qu'une variable aléatoire $Z \in L^0(\sigma(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0))$ telle que $\mathbb{P}[|X - Z| > \delta] < \delta$.

Pour nous, la proposition 3.1.5 sera une conséquence de la proposition 3.4.4 qui concerne le cas conditionnellement séparable.

3.2 Ensembles substantiels de σ -algèbres et $\mathfrak{C}_{\text{loc}}(\mathcal{F})$.

C'est avec la notion d'ensembles de σ -algèbres *substantiels* introduite maintenant que nous allons donner une preuve de la proposition 3.1.5 plus simple que celle de [FS00], et les variantes de la définition du critère de Vershik de premier niveau de la proposition 3.1.6.

Définition 3.2.1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et \mathfrak{C} un ensemble de sous- σ -algèbres de \mathcal{A} . Soit \mathcal{B} une sous- σ -algèbre de \mathcal{A} . On dit que \mathfrak{C} est *substantiel* dans \mathcal{B} si pour tout ensemble fini F , toute variable aléatoire $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{B}; F)$, et tout $\delta > 0$, il existe une σ -algèbre $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ et une variable aléatoire $Z \in L^{\text{simple}}(\mathcal{C}; F)$ telle que $\mathbb{P}[X \neq Z] < \delta$.

Le lemme 1.2.3 se traduit donc en disant que la famille des σ -algèbres \mathcal{B}_n , $n \geq 0$ est substantielle dans \mathcal{B}_∞ . De ce point de vue, le passage de ce lemme à la proposition 1.2.4 va apparaître comme une conséquence de la 3.2.3 plus bas. Cette proposition va aussi nous donner les variantes de la définition du critère de Vershik de premier niveau. Pour traduire le critère de Vershik de premier niveau en termes d'ensemble substantiel de σ -algèbres, nous introduisons une notation.

Notation 3.2.2. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local avec un processus d'innovations $(V_n)_{n \leq 0}$. On note

$$\mathfrak{L}_{\text{loc}}(\mathcal{F}) = \left\{ \bigvee_{k=n+1}^0 \sigma(\tilde{V}_k) \mid n < 0, (\tilde{V}_{n+1}, \dots, \tilde{V}_0) \text{ est une innovation de } \mathcal{F} \text{ sur } \llbracket n, 0 \rrbracket \right\}$$

l'ensemble des σ -algèbres engendrées par toutes les innovations de \mathcal{F} sur tous les intervalles $\llbracket n, 0 \rrbracket$, $n < 0$.

Ainsi avec la définition 3.2.1, \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik de premier niveau si et seulement si $\mathfrak{L}_{\text{loc}}(\mathcal{F})$ est substantiel dans \mathcal{F}_0 . La proposition 3.1.6 va alors résulter de la proposition suivante.

Proposition 3.2.3. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, \mathcal{B} une sous- σ -algèbre de \mathcal{A} , et \mathfrak{L} un ensemble de sous- σ -algèbres de \mathcal{A} .

- (a) Si \mathfrak{L} est substantiel dans \mathcal{B} , alors pour tout espace métrique séparable (E, ρ) , l'ensemble $L^1(\mathcal{B}; E)$ est contenu dans l'adhérence de $\cup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{L}} L^1(\mathcal{C}; E)$ dans $L^1(\mathcal{A}; E)$.
- (b) Si (E, ρ) est un espace métrique séparable infini tel que $L^1(\mathcal{B}; E)$ est contenu dans l'adhérence de $\cup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{L}} L^1(\mathcal{C}; E)$ dans $L^1(\mathcal{A}; E)$, alors \mathfrak{L} est substantiel dans \mathcal{B} .

Démonstration. (a) — Supposons que \mathfrak{L} est substantiel dans \mathcal{B} et donnons-nous un espace métrique séparable (E, ρ) . Soient $Y \in L^1(\mathcal{B}; E)$ et $\delta > 0$. On se donne $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{B}; E)$ telle que $\mathbb{E}[\rho(Y, X)] < \delta/2$. Notons $F \neq \emptyset$ un ensemble fini dans lequel X prend presque sûrement toutes ses valeurs, et notons $M = \max \{ \rho(e, f) \mid e, f \in F \}$. Par hypothèse on peut trouver une σ -algèbre $\mathcal{C} \in \mathfrak{L}$ et une variable aléatoire $Z \in L^{\text{simple}}(\mathcal{C}; F)$ telle que $\mathbb{P}[X \neq Z] < \delta/(2M)$, d'où $\mathbb{E}[\rho(X, Z)] < \delta/2$. En somme on a $\mathbb{E}[\rho(Y, Z)] < \delta$.

(b) — On suppose que pour un espace métrique séparable (E, ρ) infini, l'adhérence de $\cup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{L}} L^1(\mathcal{C}; E)$ dans $L^1(\mathcal{A}; E)$ contient $L^1(\mathcal{B}; E)$. On se donne un ensemble fini $F \neq \emptyset$, une v.a. $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{B}; F)$, un réel $\delta > 0$, et on cherche une σ -algèbre $\mathcal{C} \in \mathfrak{L}$ et une variable aléatoire $S \in L^{\text{simple}}(\mathcal{C}; F)$ telle que $\mathbb{P}[S \neq X] < \delta$. L'hypothèse implique que \mathcal{C} n'est pas vide, et il n'y a pas de difficulté lorsque F n'a qu'un élément. Supposons maintenant que $\#F \geq 2$. Comme E est infini, on peut supposer que $F \subset E$. On note alors $m = \min \{ \rho(e, f) \mid e, f \in F, e \neq f \} > 0$. Par hypothèse, il y a une σ -algèbre $\mathcal{C} \in \mathfrak{L}$ et une variable aléatoire $Z \in L^1(\mathcal{C}; E)$ telle que $\mathbb{E}[\rho(Z, X)] < m\delta/2$, et donc $\mathbb{P}[\rho(Z, X) \geq m/2] < \delta$. On ordonne F et à tout $x \in E$, on associe le plus petit des points de F parmi les points f de F qui vérifient $\rho(x, f) = \rho(x, F)$, ce qui donne une application mesurable $\psi: E \rightarrow F$ telle que $\psi \circ Z = X$ sur l'événement $\{ \rho(Z, X) < m/2 \}$. On a donc

$$\mathbb{P}[\psi \circ Z \neq X] \leq \mathbb{P}[\rho(Z, X) \geq m/2] < \delta,$$

et on obtient alors $\mathbb{P}[S \neq X] < \delta$ avec $S = \psi \circ Z \in L^{\text{simple}}(\mathcal{C}; F)$. \square

Corollaire 3.2.4. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, \mathcal{B} une sous- σ -algèbre de \mathcal{A} , et \mathfrak{C} un ensemble de sous- σ -algèbres de \mathcal{A} .

- (a) Si \mathfrak{C} est substantiel dans \mathcal{B} , alors pour tout espace métrique séparable (E, ρ) , l'ensemble $L^0(\mathcal{B}; E)$ est contenu dans l'adhérence de $\cup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}} L^0(\mathcal{C}; E)$ dans $L^0(\mathcal{A}; E)$.
- (b) Si (E, ρ) est un espace métrique séparable infini tel que $L^0(\mathcal{B}; E)$ est contenu dans l'adhérence de $\cup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}} L^0(\mathcal{C}; E)$ dans $L^0(\mathcal{A}; E)$, alors \mathfrak{C} est substantiel dans \mathcal{B} .

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 3.2.3 avec $\rho \wedge 1$ au lieu de ρ . \square

★ Preuve de la proposition 3.1.6. La proposition 3.2.3 et le corollaire 3.2.4 montrent respectivement que (ii) et (iii) sont équivalents à ce que $\mathfrak{C}_{\text{loc}}$ soit substantiel dans \mathcal{F}_0 . \square

Le corollaire suivant caractérise plus simplement la substantialité d'un ensemble de σ -algèbres dans la tribu engendrée par une variable aléatoire.

Corollaire 3.2.5. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, E un espace métrique séparable et $X \in L^1(\mathcal{A}; E)$. Pour qu'un ensemble \mathfrak{C} de sous- σ -algèbres de \mathcal{A} soit substantiel dans $\sigma(X)$, il faut et il suffit que pour tout réel $\delta > 0$, il existe une σ -algèbre $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ et une v.a. $Z \in L^1(\mathcal{C}; E)$ telle que $\mathbb{E}[\rho(X, Z)] < \delta$.

Démonstration. La condition est nécessaire par la proposition 3.2.3. Montrons qu'elle est suffisante. Supposons qu'elle est satisfaite et montrons que l'adhérence de $\cup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_{\text{loc}}} L^0(\mathcal{C})$ dans $L^0(\mathcal{F}_0)$ contient $L^0(\sigma(X))$; le corollaire 3.2.4 donnera la conclusion. Or l'ensemble des variables aléatoires de la forme $f(X)$ où $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne, est dense dans $L^0(\sigma(X))$ d'après le corollaire 1.2.7, et il suffit donc de montrer que cet ensemble est contenu dans l'adhérence de $\cup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}} L^0(\mathcal{C})$.

Donnons-nous alors une fonction c -lipschitzienne f . Soit $\delta > 0$. On a une σ -algèbre $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ et une v.a. $Z \in L^1(\mathcal{C}; E)$ telle que $\mathbb{E}[\rho(X, Z)] < \delta^2/c$. En utilisant l'inégalité de Chebyshev, on a alors $\mathbb{P}[|f(X) - f(Z)| > \delta] \leq \mathbb{P}[\rho(X, Z) > \delta/c] < \delta$, ce qui achève la preuve. \square

Les lemmes suivants seront utilisés pour démontrer la proposition 3.1.5.

Lemme 3.2.6. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et \mathfrak{C} un ensemble de sous- σ -algèbres de \mathcal{A} . Soient \mathcal{B} et \mathcal{D} des sous- σ -algèbres de \mathcal{A} . Si \mathfrak{C} est substantiel dans \mathcal{B} , alors l'ensemble de σ -algèbres $\{\mathcal{C} \vee \mathcal{D} \mid \mathcal{C} \in \mathfrak{C}\}$ est substantiel dans $\mathcal{B} \vee \mathcal{D}$.

Démonstration. On suppose que \mathfrak{C} est substantiel dans \mathcal{B} . Soient $F \neq \emptyset$ un ensemble fini, $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{B} \vee \mathcal{D}; F)$ et $\delta > 0$. Supposant sans restreindre la généralité que $F \subset \mathbb{R}$, on peut trouver une variable aléatoire $R \in L^{\text{simple}}(\mathcal{B} \vee \mathcal{D})$ de la forme $R = \sum_i \alpha_i \mathbb{1}_{B_i} \mathbb{1}_{D_i}$ où la somme est finie et $B_i \in \mathcal{B}$, $D_i \in \mathcal{D}$, telle que $\mathbb{P}[X \neq R] < \delta/2$. Dans ce cas, R est de la forme $R = f(B, D)$ où f est borélienne, $B \in L^{\text{simple}}(\mathcal{B})$ et $D \in L^{\text{simple}}(\mathcal{D})$, et quitte à la modifier on peut supposer que f prend ses valeurs dans F . Notons G un ensemble fini dans lequel B prend presque sûrement ses valeurs. Par hypothèse, il existe une σ -algèbre $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ et une variable aléatoire $Z \in L^{\text{simple}}(\mathcal{C}; G)$ telle que $\mathbb{P}[B \neq Z] < \delta/2$. Finalement on a $\mathbb{P}[X \neq Z'] < \delta$. avec $Z' = f(Z, D) \in L^{\text{simple}}(\mathcal{B} \vee \mathcal{D}; F)$. \square

Lemme 3.2.7. Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$ une σ -algèbre et \mathfrak{C} un ensemble de sous- σ -algèbres de \mathcal{A} une à une indépendantes de \mathcal{E} . Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{E}$ une σ -algèbre, et soit \mathfrak{D} un ensemble de sous- σ -algèbres de \mathcal{E} . Si $\{\mathcal{D} \vee \mathcal{C} \mid \mathcal{D} \in \mathfrak{D}, \mathcal{C} \in \mathfrak{C}\}$ est substantiel dans $\{\mathcal{B} \vee \mathcal{C} \mid \mathcal{C} \in \mathfrak{C}\}$, alors \mathfrak{D} est substantiel dans \mathcal{B} .

Démonstration. Donnons-nous une variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{B})$, et $\delta > 0$. Par hypothèse, il existe une variable aléatoire de la forme $f(D, C)$ où D est mesurable pour $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, C est mesurable pour $\mathcal{C} \in \mathfrak{C}$ et f est borélienne, telle que $\mathbb{E}[|X - f(D, C)|] < \delta$. Par la contractivité de l'espérance conditionnelle on a aussi $\mathbb{E}[|\mathbb{E}[X | \mathcal{E}] - \mathbb{E}[f(D, C) | \mathcal{E}]|] < \delta$, ce qui permet de conclure puisque $\mathbb{E}[X | \mathcal{E}] = X$ et $\mathbb{E}[f(D, C) | \mathcal{E}] = \int f(D, c) d\mathbb{P}_C(c)$ est mesurable pour \mathcal{D} . \square

Dans le cas où \mathfrak{C} ne contient qu'un seul élément, l'énoncé devient :

Lemme 3.2.8. *Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, \mathcal{B} et \mathcal{C} des sous- σ -algèbres de \mathcal{A} indépendantes, et \mathfrak{D} un ensemble de sous- σ -algèbres de \mathcal{A} toutes indépendantes de \mathcal{C} . Si $\{\mathcal{D} \vee \mathcal{C} \mid \mathcal{D} \in \mathfrak{D}\}$ est substantiel dans $\mathcal{B} \vee \mathcal{C}$, alors \mathfrak{D} est substantiel dans \mathcal{B} .*

3.3 Critère de Vershik de premier niveau : équivalences

À l'aide des résultats déjà obtenus, nous allons formuler différemment le critère de Vershik de premier niveau, en introduisant la notion de *variable aléatoire* qui satisfait le critère de Vershik de premier niveau.

Définition 3.3.1. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ de type produit local conditionnellement séparable.

- Soit F un ensemble fini. On dit qu'une variable aléatoire $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau (sous-entendu : dans L^{simple}) si pour tout réel $\delta > 0$, il existe un entier $n_0 \leq 0$, une innovation $(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et une variable aléatoire $Z \in L^{\text{simple}}(\sigma(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0); F)$ telle que $\mathbb{P}[X \neq Z] < \delta$. On note $V^{\text{simple}}(\mathcal{F}; F)$ l'ensemble des variables aléatoires $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$ qui satisfont le critère de Vershik de premier niveau.
- Soit (E, ρ) un espace métrique séparable. On dit qu'une variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau (sous-entendu : dans L^1) si pour tout réel $\delta > 0$, il existe un entier $n_0 \leq 0$, une innovation $(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et une variable aléatoire $Z \in L^1(\sigma(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0); E)$ telle que $\mathbb{E}[\rho(X, Z)] < \delta$. On note $V^1(\mathcal{F}; E)$ l'ensemble des variables aléatoires $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ qui satisfont le critère de Vershik de premier niveau.
- Soit (E, ρ) un espace métrique séparable. On dit qu'une variable aléatoire $X \in L^0(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau (sous-entendu : dans L^0) si pour tout réel $\delta > 0$, il existe un entier $n_0 \leq 0$, une innovation $(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et une variable aléatoire $Z \in L^0(\sigma(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0); E)$ telle que $\mathbb{P}[|X - Z| > \delta] < \delta$. On note $V^0(\mathcal{F}; E)$ l'ensemble des variables aléatoires $X \in L^0(\mathcal{F}_0; E)$ qui satisfont le critère de Vershik de premier niveau.
- On dit qu'une σ -algèbre $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{F}_0$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau si $L^1(\mathcal{E}_0, \mathbb{R}) \subset V^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$.

Selon cette définition, \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik de premier niveau si et seulement si pour tout ensemble fini F , toute variable aléatoire $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau, ou en d'autres termes, $L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F) \subset V^{\text{simple}}(\mathcal{F}; F)$.

Remarques 3.3.2. 1) Soit $p \in \{0, 1\}$. Il est clair que $X \in V^p(\mathcal{F}; E)$ si et seulement si $X \in L^p(\mathcal{F}_0; E)$ et si pour tout voisinage \mathcal{V} de X dans $L^p(\mathcal{F}_0; E)$, il existe une innovation $(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et une variable aléatoire $Z \in \mathcal{V}$ mesurable pour

$\sigma(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$. Ceci est aussi vrai pour $p = \text{simple}$ lorsque $E = F$ est fini.

- 2) De l'inclusion topologique $L^1 \subset L^0$ résulte alors clairement $V^1(\mathcal{F}; E) \subset V^0(\mathcal{F}; E)$, et si $F \subset E$, de l'inclusion topologique $L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F) \subset L^1(\mathcal{F}_0; E)$ résulte alors clairement $V^{\text{simple}}(\mathcal{F}; E) \subset V^1(\mathcal{F}; E)$.
- 3) L'inclusion topologique $L^1(\mathcal{F}_0; E) \subset L^0(\mathcal{F}_0; E)$ implique $V^1(\mathcal{F}; E) \subset V^0(\mathcal{F}; E) \cap L^1(\mathcal{F}_0; E)$. Nous verrons qu'il y a égalité dans le corollaire 3.3.4. Donc il n'y a pas d'ambiguïté à dire d'une variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ qu'elle satisfait le critère de Vershik de premier niveau sans préciser le sous-entendu : dans L^1 , ou dans L^0 .
- 4) Si $F \subset E$, les inclusions topologiques $L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F) \subset L^1(\mathcal{F}_0; E) \subset L^0(\mathcal{F}_0; E)$ impliquent $V^{\text{simple}}(\mathcal{F}; F) \subset V^1(\mathcal{F}; E) \cap L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F) \subset V^0(\mathcal{F}; E) \cap L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$. Nous verrons qu'il y a égalité dans le corollaire 3.3.4. Donc il n'y a pas d'ambiguïté à dire d'une v.a. $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$ qu'elle satisfait le critère de Vershik de premier niveau sans préciser le sous-entendu : dans L^{simple} , ou dans L^1 , ou dans L^0 .

La proposition 3.1.6 (déjà prouvée sous le corollaire 3.2.4) est une écriture équivalente de la partie 2) de la proposition suivante.

Proposition 3.3.3. *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable.*

- 1) Soit $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{F}_0$ une σ -algèbre. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :
 - a) $\mathfrak{G}_{\text{loc}}(\mathcal{F})$ est substantiel dans \mathcal{E}_0 .
 - b) \mathcal{E}_0 satisfait le critère de Vershik de premier niveau.
 - c) Pour tout ensemble fini F , toute variable aléatoire $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{E}_0; F)$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau. En d'autres termes, $L^{\text{simple}}(\mathcal{E}_0; F) \subset V^{\text{simple}}(\mathcal{F}; F)$.
 - d) Toute variable aléatoire $X \in L^0(\mathcal{E}_0)$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau. En d'autres termes, $L^0(\mathcal{E}_0) \subset V^0(\mathcal{F})$.
- 2) Les conditions suivantes sont équivalentes :
 - a) La filtration \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik de premier niveau
 - b) La σ -algèbre \mathcal{F}_0 satisfait le critère de Vershik de premier niveau.
 - c) Toute variable aléatoire $X \in L^0(\mathcal{F}_0)$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau. En d'autres termes, $L^0(\mathcal{F}_0) \subset V^1(\mathcal{F})$.
- 3) Soit E un espace métrique séparable et $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$. Alors X satisfait le critère de Vershik de premier niveau si et seulement si $\sigma(X)$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau.

Démonstration. La partie 1) est une conséquence de la proposition 3.2.3. On déduit la partie 2) de la partie 1) en prenant $\mathcal{E}_0 = \mathcal{F}_0$, et on déduit la partie 3) de la partie 1) en prenant $\mathcal{E}_0 = \sigma(X)$ et en utilisant le corollaire 3.2.5. \square

Corollaire 3.3.4. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable. Soit (E, ρ) un espace métrique séparable. Alors $V^1(\mathcal{F}; E) = V^0(\mathcal{F}; E) \cap L^1(\mathcal{F}_0; E)$. Aussi, lorsque $F \subset E$ une partie finie de E , on a $V^{\text{simple}}(\mathcal{F}; F) = V^1(\mathcal{F}; E) \cap L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F) = V^0(\mathcal{F}; E) \cap L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$.*

Démonstration. Nous avons signalé les inclusions évidentes dans les remarques 3.3.2. Les inclusions réciproques s'obtiennent comme conséquence évidente des parties 1) et 2) de la proposition 3.3.3. \square

Corollaire 3.3.5. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local essentiellement séparable. Si (E, ρ) est un espace métrique séparable et $Y_0 \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ est telle que $\sigma(Y_0) = \mathcal{F}_0$, alors \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik de premier niveau si et seulement si Y_0 satisfait le critère de Vershik de premier niveau.*

Démonstration. Cela résulte des parties 2) et 3) de la proposition 3.3.3. \square

3.4 Preuve de la proposition 3.1.5.

Nous établissons ici qu'il est équivalent pour une filtration de type produit local essentiellement séparable s'être de type produit ou de satisfaire le critère de Vershik de premier niveau. Nous le déduisons d'un énoncé plus général concernant les filtrations de type produit local conditionnellement séparables : la proposition 3.4.4. Avec les notations 3.4.1 que nous allons introduire, cela va résulter rapidement des lemmes 3.2.7 et 3.2.6.

Notations 3.4.1. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable. On se donne un entier $n_0 < 0$.

- On note

$$\mathfrak{C}_{\text{loc}}^{n_0}(\mathcal{F}) := \left\{ \bigvee_{k=n+1}^{n_0} \sigma(V_k) \mid n < 0, (V_{n+1}, \dots, V_{n_0}) \text{ est une innovation de } \mathcal{F} \text{ sur } \llbracket n, n_0 \rrbracket \right\}$$

l'ensemble constitué des σ -algèbres engendrées par toutes les innovations de \mathcal{F} sur $\llbracket n, n_0 \rrbracket$, pour tous les entiers $n < n_0$.

- Soit (V_{n_0+1}, \dots, V_0) une innovation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. On note $\mathfrak{C}_{\text{loc}}^{n_0}(\mathcal{F})_{(V_{n_0+1}, \dots, V_0)}$ l'ensemble constitué des σ -algèbres engendrées par toutes les innovations de \mathcal{F} sur $\llbracket n, 0 \rrbracket$ de la forme $(V'_{n+1}, \dots, V'_{n_0}, V_{n_0+1}, \dots, V_0)$ pour tous les entiers $n < n_0$ et toutes les innovations $(V'_{n+1}, \dots, V'_{n_0})$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n, n_0 \rrbracket$. En d'autres termes,

$$\mathfrak{C}_{\text{loc}}^{n_0}(\mathcal{F})_{(V_{n_0+1}, \dots, V_0)} = \left\{ \mathcal{C} \dot{\vee} \sigma(V_{n_0+1}, \dots, V_0) \mid \mathcal{C} \in \mathfrak{C}_{\text{loc}}^{n_0}(\mathcal{F}) \right\}.$$

Lemme 3.4.2. *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable. Soient $n_0 < 0$ un entier, et $\mathcal{E}_{n_0} \subset \mathcal{F}_{n_0}$ une σ -algèbre. Si \mathcal{E}_{n_0} satisfait le critère de Vershik de premier niveau, alors $\mathfrak{C}_{\text{loc}}^{n_0}(\mathcal{F})$ est substantiel dans \mathcal{E}_{n_0} .*

Démonstration. On applique le lemme 3.2.7 avec $\mathcal{E} = \mathcal{F}_{n_0}$,

$$\mathfrak{C} = \left\{ \bigvee_{k=n_0+1}^0 \sigma(V_k) \mid n < 0, (V_{n_0+1}, \dots, V_0) \text{ est une innovation de } \mathcal{F} \text{ sur } \llbracket n_0, 0 \rrbracket \right\},$$

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{C}_{\text{loc}}^{n_0}(\mathcal{F}) \text{ et } \mathcal{B} = \mathcal{E}_{n_0}. \quad \square$$

Lemme 3.4.3. *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable. Soient $n_0 < 0$ un entier, et $\mathcal{E}_{n_0} \subset \mathcal{F}_{n_0}$ une σ -algèbre. On se fixe une innovation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$.*

Si \mathcal{E}_{n_0} satisfait le critère de Vershik de premier niveau, alors $\mathfrak{C}_{\text{loc}}^{n_0}(\mathcal{F})_{(V_{n_0+1}, \dots, V_0)}$ est substantiel dans $\mathcal{E}_{n_0} \dot{\vee} \sigma(V_{n_0+1}, \dots, V_0)$. Par conséquent $\mathcal{E}_{n_0} \dot{\vee} \sigma(V_{n_0+1}, \dots, V_0)$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 3.4.2 et du lemme 3.2.6. La dernière assertion résulte de l'inclusion $\mathfrak{G}_{\text{loc}}^{n_0}(\mathcal{F})_{(V_{n_0+1}, \dots, V_0)} \subset \mathfrak{G}_{\text{loc}}(\mathcal{F})$. \square

Proposition 3.4.4. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable. Alors \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik de premier niveau si et seulement si pour toute variable aléatoire $Y \in L^0(\mathcal{F}_0)$, il existe un processus d'innovations $(V_n)_{n \leq 0}$ de \mathcal{F} tel que Y est mesurable dans $\sigma(V_n, n \leq 0)$.*

Démonstration. Si cette condition est satisfaite, \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik de premier niveau en vertu du lemme 1.2.3. Montrons la réciproque. On suppose que \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik de premier niveau, c'est-à-dire que $\mathfrak{G}_{\text{loc}}(\mathcal{F})$ est substantiel dans \mathcal{F}_0 (notation 3.2.2). Il suffit de montrer la proposition pour $Y \in L^1(\mathcal{F}_0)$. On se fixe une suite $(\delta_k)_{k \leq 0}$ de réels strictement positifs telle que $\delta_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow -\infty$. Nous allons construire un processus d'innovations $(V_n)_{n \leq 0}$ et des v.a. $X_k \in L^1(\sigma(V_n, n \leq 0))$, $k \geq 0$, vérifiant $\mathbb{E}[|Y - X_k|] < \delta_k$. Ainsi X_k convergera vers Y dans L^1 , ce qui achèvera la preuve.

Par hypothèse on peut trouver un entier $n_0 < 0$, une innovation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ et une v.a. $X_0 \in L^1(\sigma(V_{n_0+1}, \dots, V_0))$ telle que $\mathbb{E}[|Y - X_0|] < \delta_0$. Maintenant supposons qu'on ait construit un entier $n_k < 0$, une innovation (V_{n_k+1}, \dots, V_0) de \mathcal{F} sur $\llbracket n_k, 0 \rrbracket$ et une v.a. $X_k \in L^1(\sigma(V_n, n_k + 1 \leq n \leq 0))$ qui vérifie $\mathbb{E}[|Y - X_k|] < \delta_k$. Le lemme 3.4.3 appliqué avec n_k au lieu de n_0 et \mathcal{F}_{n_k} au lieu de \mathcal{E}_{n_0} donne un entier $n_{k-1} < n_k$, une innovation $(V_{n_{k-1}+1}, \dots, V_{n_k})$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n_{k-1}, n_k \rrbracket$, et une variable aléatoire $X_{k-1} \in L^1(\sigma(V_n, n_{k-1} + 1 \leq n \leq 0))$ telle que $\mathbb{E}[|Y - X_{k-1}|] < \delta_{k-1}$, et la proposition s'obtient donc par récurrence. \square

Nous donnons un dernier lemme avant de démontrer la proposition 3.1.5.

Lemme 3.4.5. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local, et \mathcal{C}_n un complément de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n pour tout n . On définit une filtration $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n \leq 0}$ en posant $\mathcal{E}_n = \sigma(\mathcal{C}_m, m \leq n)$ pour tout n . Alors pour tout n , on a $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{F}_n = \mathcal{E}_n$.*

Démonstration. On a toujours $\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{F}_n \supset \mathcal{E}_n$. Pour montrer l'inclusion réciproque, donnons-nous $Z_0 \in L^1(\mathcal{E}_0 \cap \mathcal{F}_n)$. On peut écrire $Z_0 = f(\dots, V_{-2}, V_{-1}, V_0)$ où f est borélienne et où V_n est mesurable dans \mathcal{C}_n . Comme de plus Z_0 est mesurable dans \mathcal{F}_n , on a $Z_0 = \mathbb{E}[Z_0 | \mathcal{F}_n]$, et comme \mathcal{F}_n est indépendante de $\sigma(V_{n+1}, \dots, V_0)$, on a $\mathbb{E}[Z_0 | \mathcal{F}_n] = g(\dots, V_{n-1}, V_n)$, avec $g(\dots, v_{n-1}, v_n) = \mathbb{E}[f(\dots, v_{n-1}, v_n, V_{n+1}, \dots, V_0)]$. \square

★ *Preuve de la proposition 3.1.5.* Si \mathcal{F}_0 est essentiellement séparable, on a une variable aléatoire Y_0 telle que $\mathcal{F}_0 = \sigma(Y_0)$. Par la proposition 3.4.4, on a un processus d'innovations $(V_n)_{n \leq 0}$ de \mathcal{F} tel que Y_0 est mesurable dans $\sigma(V_n, n \leq 0)$. C'est bien un processus d'innovations générateur de \mathcal{F} par le lemme 3.4.5. \square

Corollaire 3.4.6. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable. Alors si \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik de premier niveau, elle est kolmogorovienne.*

Démonstration. Si X est mesurable dans $\mathcal{F}_{-\infty}$, on a un processus d'innovations $(V_n)_{n \leq 0}$ de \mathcal{F} tel que X est mesurable dans $\sigma(V_n, n \leq 0)$ par la proposition 3.4.4. On en déduit que X est constante parce que d'après le lemme 3.4.5, X est mesurable dans la σ -algèbre dégénérée $\bigcap_n \sigma(V_m, m \leq n)$. \square

Remarque 3.4.7. Nous donnerons dans le chapitre 5 un exemple d'une filtration conditionnellement séparable qui satisfait le critère de Vershik de premier niveau mais qui n'est pas essentiellement séparable.

3.5 Remarques sur le critère de Vershik de premier niveau.

Corollaire 3.5.1. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local essentiellement séparable. Si (E, ρ) est un espace métrique séparable et $Y_0 \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ est telle que $\sigma(Y_0) = \mathcal{F}_0$, alors \mathcal{F} est de type produit si et seulement si Y_0 satisfait le critère de Vershik de premier niveau.

Démonstration. C'est une conséquence du corollaire 3.3.5 et de la proposition 3.1.5. \square

Nous verrons plus tard que lorsque $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ est une filtration *tplcs* engendrée par une martingale $(M_n)_{n \leq 0}$, il suffit que M_0 satisfasse le critère de Vershik de premier niveau pour que \mathcal{F} satisfasse le critère de Vershik de premier niveau (proposition 8.2.12).

Lemme 3.5.2. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable. Soit (E, ρ) un espace métrique séparable. Alors l'ensemble $V^1(\mathcal{F}; E)$ est fermé dans $L^1(\mathcal{F}_0; E)$.

Démonstration. Par définition, c'est l'adhérence de $\cup_{\mathcal{C} \in \mathfrak{C}_{\text{loc}}(\mathcal{F})} L^1(\mathcal{C}; E)$ dans $L^1(\mathcal{F}_0; E)$. \square

Corollaire 3.5.3. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable. Pour $p \in \{0, 1\}$, soit $\Theta^p(\mathcal{F}_0) \subset L^p(\mathcal{B})$ un sous-ensemble dense de $L^p(\mathcal{B})$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

- (i) \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik de premier niveau.
- (ii) Toute variable aléatoire $X \in \Theta^1(\mathcal{F}_0)$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau. En d'autres termes $\Theta^1(\mathcal{F}_0) \subset V^1(\mathcal{F}; R)$.
- (iii) Toute variable aléatoire $X \in \Theta^0(\mathcal{F}_0)$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau. En d'autres termes $\Theta^0(\mathcal{F}_0) \subset V^0(\mathcal{F}; R)$.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 3.5.2 et de la proposition 3.1.6. \square

Corollaire 3.5.4. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local avec un processus d'innovations $(V_n)_{n \leq 0}$. Soit $(\mathcal{B}_m)_{m \geq 0}$ une suite croissante de sous- σ -algèbres de \mathcal{F}_0 telle que $\mathcal{B}_m \nearrow \mathcal{F}_0$ quand $m \rightarrow +\infty$. Si toutes les σ -algèbres \mathcal{B}_m satisfont le critère de Vershik de premier niveau, alors \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik de premier niveau.

Démonstration. La proposition 1.2.4 montre que $\Theta^1(\mathcal{B}) := \cup L^1(\mathcal{B}_m)$ est dense dans $L^1(\mathcal{F}_0)$, et on applique alors le corollaire 3.5.3. \square

3.6 Cas d'une chaîne de Markov constructive.

Nous rencontrerons souvent le cas de figure du corollaire suivant.

Corollaire 3.6.1. *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local avec un processus d'innovations $(V_n)_{n \leq 0}$. Soit $(Y_n)_{n \leq 0}$ un processus généralisé tel que $\sigma(Y_{n+1}) \subset \sigma(Y_n, V_{n+1})$ et tel que le processus généralisé $(Y_n, V_n)_{n \leq 0}$ engendre \mathcal{F} . Alors pour que \mathcal{F} satisfasse le critère de Vershik de premier niveau, il faut et il suffit que pour tout n , la σ -algèbre $\sigma(Y_n)$ satisfasse le critère de Vershik de premier niveau.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Montrons sa suffisance. Si la σ -algèbre $\sigma(Y_n)$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau, alors le lemme 3.4.3 entraîne que la σ -algèbre $\sigma(Y_n, V_{n+1}, V_{n+2}, \dots, V_0)$ satisfait aussi le critère de Vershik de premier niveau. Puisque les hypothèses impliquent $\sigma(Y_n, V_{n+1}, V_{n+2}, \dots, V_0) \uparrow \mathcal{F}_0$ quand $n \rightarrow -\infty$, le résultat est alors une conséquence du corollaire 3.5.4 \square

Remarquons que le processus $(Y_n)_{n \leq 0}$ ainsi que le processus $(Y_n, V_n)_{n \leq 0}$ du corollaire précédent sont markoviens. Lorsque les Y_n prennent leurs valeurs dans des espaces métriques standard, nous parlerons de *chaîne de Markov constructive* :

Définition 3.6.2. • Pour tout entier $n \leq 0$, soit E_n un espace métrique standard. On appelle *chaîne de Markov constructive* une chaîne de Markov $(X_n, V_n)_{n \leq 0}$ où X_n prend ses valeurs dans E_n et V_n dans \mathbb{R} , et telles que V_{n+1} est indépendante de la tribu du passé $\sigma(X_m, V_m, m \leq n)$ et que l'on a $\sigma(X_{n+1}) \subset \sigma(X_n, V_{n+1})$ pour tout n . On dit alors que $(X_n)_{n \leq 0}$ est la *chaîne d'entrée*.

• Par le biais du théorème de représentation fonctionnelle de Doob, il existe alors, pour tout $n < 0$, une fonction borélienne $f_n: E_{n-1} \times \mathbb{R} \rightarrow E_n$ telle que l'on a $X_{n+1} = f_{n+1}(X_n, V_{n+1})$. Lorsqu'on veut préciser de telles fonctions f_n , on notera $((X_n, V_n), f_n; E_n)_{n \leq 0}$ la chaîne de Markov constructive. On dit alors qu'elle est *homogène* si $E_n \equiv E$, $f_n \equiv f$, et si les V_n sont i.i.d.

Le corollaire précédent et la partie 3) de la proposition 3.3.3 donnent alors :

Proposition 3.6.3. *Pour tout $n \leq 0$, soit E_n un espace métrique standard. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne une chaîne de Markov constructive $((X_n, V_n), f_n; E_n)_{n \leq 0}$ telle que $X_n \in L^1(\mathcal{A}; E_n)$ pour tout n et on note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ la filtration engendrée par la chaîne de Markov $(X_n)_{n \leq 0}$. Alors pour que \mathcal{F} satisfasse le critère de Vershik de premier niveau, il faut et il suffit que pour tout n , la variable aléatoire X_n satisfasse le critère de Vershik de premier niveau.*

3.7 Cas d'une filtration de type produit local générale.

Il est possible d'énoncer le critère de Vershik de premier niveau pour une filtration de type produit local générale en vertu du lemme 2.1.5. Cela donne une extension de la définition 3.1.3 que nous avons énoncée en nous restreignant aux filtrations de type produit local conditionnellement séparables :

Définition 3.7.1. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local. On dit que \mathcal{F} satisfait le *critère de Vershik de premier niveau* si pour tout ensemble fini F , pour toute variable aléatoire $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$ et tout réel $\delta > 0$, il existe

un entier $n_0 \leq 0$, une suite de compléments $(\mathcal{C}_{n_0+1}, \dots, \mathcal{C}_0)$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ et une variable aléatoire $Z \in L^{\text{simple}}(\sigma(\mathcal{C}_{n_0+1}, \dots, \mathcal{C}_0); F)$ telle que $\mathbb{P}[X \neq Z] < \delta$.

Le lemme 3.1.4, la proposition 3.4.4, le corollaire 3.4.6, la définition 3.3.1, le corollaire 3.5.4, s'adaptent alors à ce cas plus général. Il aurait peut-être été plus agréable d'énoncer et de démontrer ces assertions dans le cas général, mais dans les chapitres suivants où nous ne nous intéresserons seulement qu'au cas conditionnellement séparable, et où nous renverrons parfois le lecteur au chapitre présent, ce sera le langage des innovations qui sera le mieux adapté.

4. CHANGEMENT D'INNOVATION.

Il est intéressant, au vu du critère de Vershik de premier niveau, de se demander comment décrire toutes les innovations d'une filtration de type produit local. Comme nous nous restreignons aux filtrations de type produit local conditionnellement séparables, il s'agit d'après le lemme 2.1.5, de répondre à la question suivante :

Question 4.0.1. *Étant données sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, une σ -algèbre $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$, une σ -algèbre $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ et V une innovation de \mathcal{C} dans \mathcal{B} , quelles sont les autres innovations de \mathcal{C} dans \mathcal{B} ?*

La section 4.3 répond à la question 4.0.1 avec la proposition 4.3.7. C'est un résultat bien connu des ergodiciens depuis Rokhlin ([Rok]), et naturellement utilisé dans [Ver], [Fe98], [FS00]). Sa forme probabiliste se trouve dans l'article de Rosenblatt [Ros1] auquel nous l'empruntons.

Avec cette proposition nous verrons comment s'obtiennent toutes les innovations d'une filtration de type produit local conditionnellement séparable dans la section 4.4, au moyen de transformations qui sont des *automorphismes d'arbre* dans le cas r_n -adique.

Les deux premières sections sont des rappels de la théorie de la mesure sur la structure des espaces probabilisés.

4.1 σ -algèbres isomorphes.

Nous définissons d'abord la notion d'espaces probabilisés isomorphes qui est une notion classique en théorie de la mesure ([Rok], [Pa]) mais que nous utilisons sous une forme légèrement différente, comme dans [ES] et [BEKSY], en manipulant des variables aléatoires plutôt que des événements.

Définitions 4.1.1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ deux espaces de probabilité.

- Un *plongement* de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ est une application Φ de $L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans $L^0(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, notée simplement $\Phi: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, qui satisfait aux deux conditions suivantes :

- (i) Pour tout entier $n \geq 1$, pour toute fonction borélienne f définie sur \mathbb{R}^n , et pour toutes variables aléatoires $X_1, \dots, X_n \in L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on a

$$\Phi(f \circ (X_1, \dots, X_n)) = f \circ (\Phi(X_1), \dots, \Phi(X_n));$$

- (ii) pour toute variable aléatoire $X \in L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, les variables aléatoires X et $\Phi(X)$ ont même loi.

On dit aussi que $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ est un *grossissement* de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Un *isomorphisme* entre deux espaces de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ est un plongement entre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ bijectif.

- Soient Φ un plongement de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ dans $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ et \mathcal{B} une sous- σ -algèbre de \mathcal{A} . Pour $B \in \mathcal{B}$, il est facile de voir que $\Phi(\mathbb{1}_B)$ est une indicatrice d'un événement de \mathcal{A}' . Si on le note $\Phi(B)$, on vérifie facilement que $\Phi(\mathcal{B}) := \{\Phi(B), B \in \mathcal{B}\}$ est une sous- σ -algèbre de \mathcal{A}' , et que les espaces probabilisés $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \Phi(\mathcal{B}), \mathbb{P}')$ sont isomorphes. Nous dirons par abus de langage que \mathcal{B} et $\Phi(\mathcal{B})$ sont isomorphes.

On montre immédiatement qu'un isomorphisme d'espaces probabilisés est linéaire, injectif, continu pour la topologie de la convergence en probabilité, et que pour toute fonction borélienne $f: \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*} \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\Phi(f \circ (X_1, \dots, X_n, \dots)) = f \circ (\Phi(X_1), \dots, \Phi(X_n), \dots);$$

pour toutes variables aléatoires $X_1, \dots, X_n, \dots \in L^0(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Le lemme suivant est facile à vérifier avec le théorème de Doob rappelé dans la section 1.2.

Lemme 4.1.2. *Soit (S, \mathcal{S}) un espace mesurable. Si X est un élément aléatoire dans S sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X' un élément aléatoire dans S sur un espace de probabilité $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ de même loi que X , alors on définit un isomorphisme $\Psi: (\Omega, \sigma(X), \mathbb{P}) \rightarrow (\Omega', \sigma(X'), \mathbb{P}')$ en posant $\Psi(f(X))(\omega') = f(X'(\omega'))$ pour toute fonction $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable.*

Nous ne trouvons pas exactement cette définition d'un isomorphisme dans la littérature classique sur la théorie de la mesure ([Pa], [Rok]). Dire que c'est une notion connue se justifie par le lemme suivant dont on peut trouver une preuve dans [BEKSY] (le lemme 1).

Lemme 4.1.3. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ des espaces probabilisés. Si $\Phi^\circ: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$ est une application qui commute avec les opérations booléennes finies et qui vérifie $\mathbb{P}'[\Phi^\circ(A)] = \mathbb{P}[A]$, alors elle induit un unique plongement $\Phi: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ tel que $\Phi(\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_{\Phi^\circ(A)}$.*

Ainsi la classification des espaces probabilisés rappelée dans la proposition suivante est bien connue depuis les origines des tribus. C'est la proposition 3 de [BEKSY].

Proposition 4.1.4. (a) *À isomorphisme près, un espace de probabilité essentiellement séparable est caractérisé par la liste des probabilités de ses atomes de masse non nulle, rangées par ordre décroissant (avec des répétitions pour les atomes de même masse; la liste peut être vide, finie ou infinie). En particulier, tous les espaces probabilisés essentiellement séparables sans partie atomique sont isomorphes.*

(b) *Deux espaces probabilisés essentiellement séparables plongeables chacun dans l'autre sont isomorphes.*

4.2 Mesures boréliennes.

Comme la précédente, cette section ne contient que des choses bien connues en théorie de la mesure. Nous donnons cependant des démonstrations parce que seule la preuve du lemme 4.2.4 demande plus de quelques lignes d'écriture et qu'elle nous aidera dans la section 4.3 pour répondre à la question 4.0.1.

Lorsque μ est une mesure de probabilité sur un espace métrique séparable E , les atomes de masse non nulle de l'espace probabilisé (E, \mathfrak{B}_E, μ) sont aussi appelés les atomes de μ .

Définitions 4.2.1. Soient μ et μ' deux mesures de probabilités sur les tribus boréliennes complétées respectives de deux espaces métriques séparables E et E' .

- On dit qu'une application $\phi: E \rightarrow E'$ est une *transformation inversible (de E sur E') qui transporte μ sur μ'* , ou une *transformation inversible de μ sur μ'* , s'il existe un ensemble μ -négligeable $A \subset S$, un ensemble ν -négligeable $A' \subset S'$ tels que la restriction de ϕ à $S \setminus A$ est une bijection bimesurable de $S \setminus A$ sur $S' \setminus A'$ qui envoie μ sur ν . On dit aussi que ϕ est une *transformation inversible (de E) préservant μ* lorsque $E = E'$ et $\mu = \mu'$.
- On dit que μ et μ' ont *même atomicité* si elles ont la même liste de probabilités de leurs atomes, rangées par ordre décroissant (avec des répétitions pour les atomes de même masse ; la liste peut être vide, finie ou infinie).

Pour le lemme suivant, rappelons que si X est une variable aléatoire dans un espace métrique séparable définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on dit que $(\Omega, \sigma(X), \mathbb{P})$ est *l'espace probabilisé engendré par X* .

Lemme 4.2.2. *Deux variables aléatoires à valeurs dans des espaces métriques séparables engendrent des espaces probabilisés isomorphes si et seulement si elles ont des lois de même atomicité.*

Démonstration. Quand $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (\Omega, \sigma(Y), \mathbb{P})$ où Y est à valeurs dans un espace métrique séparable E , les atomes de masse non nulle $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sont des éléments de \mathcal{A} , ce sont les ensembles $Y^{-1}(x)$, où $x \in E$ est tel que $\mathbb{P}[Y = x] > 0$, et ce lemme traduit donc la proposition 4.1.4 (a). \square

Lemme 4.2.3. *Soit E un espace métrique standard et soit μ une mesure sur la tribu borélienne de E . Alors il existe une mesure m sur \mathbb{R} et une transformation inversible ψ qui transporte μ sur m .*

Démonstration. On sait qu'il existe une injection bimesurable ψ de (E, \mathfrak{B}_E) dans $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$. Cela donne une transformation inversible ψ de μ sur $m := \psi(\mu)$. \square

Lemme 4.2.4. *Soit μ une probabilité sur \mathbb{R} . On note x_1, x_2, \dots une liste des atomes de μ rangés par ordre décroissant de probabilités et $q_j = \mu(x_j)$. On pose $m = 1 - \sum q_j$ et on note λ la probabilité sur \mathbb{R} égale à la somme de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1 - m]$ et de la mesure discrète $q_1\delta_1 + q_2\delta_2 + \dots$, où δ_i désigne la masse de Dirac en i . On note F_{diff} la fonction de répartition de la partie diffuse de μ , définie par*

$$F_{\text{diff}}(x) = \mu(] - \infty, x]) - \sum_{j, x_j \leq x} q_j.$$

La fonction $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \begin{cases} j & \text{si } x = x_j \\ F_{\text{diff}}(x) & \text{si } x \notin \{x_1, x_2, \dots\}, \end{cases}$$

est alors une transformation inversible qui transporte μ sur λ , d'inverse

$$\varphi^{-1}(y) = \begin{cases} x_j & \text{si } y = j \\ F_{\text{diff}}^{-1}(y) & \text{si } y \in [0, m], \end{cases}$$

où F_{diff}^{-1} désigne l'inverse continue à droite de F_{diff} .

Démonstration. Notons μ_{diff} la partie diffuse de μ . Il est facile de vérifier que $F_{\text{diff}}(\mu_{\text{diff}})$ est la mesure uniforme sur $[0, m]$ et que $F_{\text{diff}}: \mathbb{R} \setminus J \rightarrow [0, m] \setminus D$ et $F_{\text{diff}}^{-1}: [0, m] \setminus D \rightarrow \mathbb{R} \setminus J$ sont bijectives, inverses l'une de l'autre, où J est l'ensemble μ_{diff} -négligeable et μ -négligeable des points où F_{diff} est localement constante, et où $D = F_{\text{diff}}(J)$ est l'ensemble λ -négligeable des points où F_{diff}^{-1} saute. Ceci étant remarqué, le lecteur vérifiera facilement le lemme. \square

Remarque 4.2.5. Avec les notations de ce lemme et si F désigne la fonction de répartition de μ , on a

$$F_{\text{diff}}^{-1}(y) = F^{-1}\left(y + \sum_{j, x_j \leq F^{-1}(y)} q_j\right),$$

où F^{-1} désigne l'inverse continue à droite de F .

Proposition 4.2.6. Deux mesures de probabilités μ et μ' sur des espaces métriques standard ont même atomicité si et seulement si il existe une transformation inversible de μ sur μ' .

Démonstration. Il est clair que μ et μ' ont même atomicité s'il existe une transformation inversible de μ sur μ' . La réciproque est une conséquence du lemme 4.2.3 et du lemme 4.2.4. Cette proposition peut aussi se déduire du *théorème de Sikorski* (voir [Ke]) en utilisant la partie a) de la proposition 4.1.4 et le lemme 4.2.2 \square

Corollaire 4.2.7. Deux espaces probabilisés respectivement engendrés par une variable aléatoire X dans un espace métrique standard E et une variable aléatoire X' dans un espace métrique standard E' sont isomorphes si et seulement si il existe une transformation inversible $\varphi: E \rightarrow E'$ qui transporte la loi de X sur celle de X' .

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 4.2.6 et du lemme 4.2.2. \square

Nous aurons besoin du lemme suivant dans la section 4.3.

Lemme 4.2.8. Soient μ, μ' deux probabilités sur des espaces métriques standard E et E' respectivement. Alors μ et μ' ont même atomicité si et seulement si il existe deux fonctions mesurables $\varphi: E \rightarrow E'$ et $\psi: E' \rightarrow E$ telles que $\nu = \varphi(\mu)$ et $\mu = \psi(\nu)$.

Démonstration. Si les lois μ et μ' de X et X' ont même atomicité, c'est une conséquence de la proposition 4.2.6. Réciproquement, si on suppose qu'il existe deux telles fonctions φ et ψ , on construit un plongement $\Phi: (E, \mathfrak{B}_E, \mu) \rightarrow (E', \mathfrak{B}_{E'}, \mu')$ et un plongement $\Psi: (E', \mathfrak{B}_{E'}, \mu') \rightarrow (E, \mathfrak{B}_E, \mu)$ en posant $\Phi(X)(e') = X(\psi(e'))$ et $\Psi(X')(e) = X'(\varphi(e))$, et on applique la proposition 4.1.4 (b) et le lemme 4.2.2. \square

Lemme 4.2.9. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soient X, Y des variables aléatoires dans des espaces métriques séparables et f, g , des applications boréliennes telles que $X = f(Y)$ et $Y = g(X)$. Alors f et g sont des transformations inversibles réciproques l'une de l'autre.

Démonstration. Par le lemme 4.1.2, il existe un isomorphisme Φ de $(\Omega, \sigma(X), \mathbb{P})$ sur l'espace probabilisé $(E, \mathfrak{B}_E, \mathbb{P}_X)$ tel que $\Phi(X) = \hat{X}$ où \hat{X} est définie par $\hat{X}(x) = x$. Comme $X = f \circ g(X)$, on a $\hat{X} = f \circ g(\hat{X})$ par isomorphisme, c'est-à-dire que $x = f \circ g(x)$ pour \mathbb{P}_X -presque tout x . On montre de même que $y = g \circ f(y)$ pour \mathbb{P}_Y -presque tout y , et cela permet de conclure. \square

Notons un corollaire immédiat de ce lemme et du théorème de représentation fonctionnelle de Doob :

Corollaire 4.2.10. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soient X, Y des variables aléatoires dans des espaces métriques standard. Alors $\sigma(X) = \sigma(Y)$ si et seulement si il existe une transformation inversible φ qui transporte la loi de X sur celle de Y et telle que $Y = \varphi(X)$.*

Ce corollaire sera généralisé par la proposition 4.3.7.

4.3 Innovations de σ -algèbres : existence et description.

Cette section est principalement consacrée aux preuves des propositions 4.3.3 et 4.3.7 qui répondent aux deux questions suivantes :

* Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, \mathcal{C} et \mathcal{B} des sous- σ -algèbres de \mathcal{A} avec $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Quand est-ce qu'il existe une innovation de \mathcal{C} dans \mathcal{B} ?

* S'il en existe, comment décrire toutes ces variables aléatoires ?

Ces propositions nous permettront de répondre aux questions analogues sur les innovations des filtrations dans la section suivante. Vershik et les autres ergodiciens qui se sont penchés sur les filtrations ([HH], [Fe98], [FS00]) utilisent ces résultats mais ils sont considérés comme connus dans leurs publications car ils sont naturels dans leur langage (mais autant dans la nôtre) et solidement établis depuis Rokhlin.

Existence d'une innovation.

Lemme 4.3.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient X_1 une variable aléatoire et \mathcal{F}_0 une sous- σ -algèbre de \mathcal{A} . On se donne un élément aléatoire η mesurable pour \mathcal{F}_0 à valeurs dans un espace mesurable (T, \mathcal{T}) . On note $(\mu_t)_{t \in T} = (\mathcal{L}[X_1 | \eta = t])_{t \in T}$ une version régulière de la loi de X_1 conditionnellement aux valeurs de η et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_t(x) = \mu_t([-\infty, x])$. L'espace (T, \mathcal{T}) est muni de la loi de η . Alors pour presque tout t , la fonction $x \mapsto F_t(x)$ est une fonction de répartition, et on note $u \mapsto G_t(u)$ son inverse continue à droite.*

(i) *Les fonctions*

$$(t, x) \in (T, \mathcal{T}) \otimes (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}) \mapsto F_t(x) \quad \text{et} \quad (t, u) \in (T, \mathcal{T}) \otimes ([0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1]}) \mapsto G_t(u)$$

sont mesurables.

(ii) *On note $\mathbf{q}_t = (q_t(1), q_t(2), \dots)$ une liste des probabilités des atomes de μ_t rangées par ordre décroissant, et on note λ_t la probabilité définie dans le lemme 4.2.4 pour cette liste. Alors il existe une variable aléatoire V_1 telle que $\mathcal{F}_0 \vee \sigma(V_1) = \mathcal{F}_0 \vee \sigma(X_1)$ et $\mathcal{L}[V_1 | \eta = t] = \lambda_t$ pour presque tout t .*

(iii) *Si U est une variable aléatoire indépendante de \mathcal{F}_0 de loi uniforme sur $[0, 1]$, la loi de la variable aléatoire $\mathcal{L}[G_\eta(U) | \eta = t] = \mu_t$. Par conséquent $\mathcal{L}[G_\eta(U) | \sigma(\eta)] = \mu_\eta$.*

Démonstration. Presque sûrement, μ_t est une probabilité, et donc F_t est une fonction de répartition.

(i). On rappelle que pour tout $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ fixé, l'application $t \mapsto \mu_t(A)$ est mesurable par définition de la loi conditionnelle. En particulier $t \mapsto F_t(x)$ est mesurable pour x fixé. Par définition de l'inverse continue à droite, on a

$$G_t(u) \leq x \iff F_t(x) \geq u, \tag{4.3.1}$$

ce qui montre la mesurabilité de $t \mapsto G_t(u)$ lorsque u est fixé. Quand u est fixé, l'application $(t, x) \mapsto (G_t(u), x)$ est donc mesurable aussi. Par (4.3.1), l'ensemble $\{(t, x) \mid F_t(x) \geq u\}$ est l'image réciproque de $\{(a, b) \mid a \leq b\}$ par cette application, ceci montre la mesurabilité de $(t, x) \mapsto F_t(x)$.

Montrons maintenant la mesurabilité de $(t, u) \mapsto G_t(u)$. Quand x est fixé, l'application $(t, u) \mapsto (F_t(x), u)$ est mesurable, et par (4.3.1) l'ensemble $\{(t, u) \mid G_t(u) \leq x\}$ est l'image réciproque de $\{(a, b) \mid 0 \leq a \leq b \leq 1\}$ par cette application, ceci montre la mesurabilité voulue.

(ii). On note $A_1(t), A_2(t), \dots \in \mathbb{R}$ une liste mesurable d'atomes de ν_t rangés par ordre décroissant de probabilités, avec des répétitions pour ceux de même masse, et ainsi $q_t(j) = \mu_t(A_j(t)) > 0$ presque sûrement. D'après (i), l'application $(t, x) \in (T, \mathcal{T}) \times (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}) \mapsto F_t(x)$ est mesurable, et c'est donc aussi le cas pour l'application

$$(t, x) \mapsto \varphi_t(x) = \begin{cases} j & \text{si } x = A_j(t) \\ F_t(x) - \sum_{j, A_j(t) \leq x} q_t(j) & \text{si } x \notin \{A_1(t), A_2(t), \dots\}. \end{cases}$$

La variable aléatoire $V_1 = \varphi_{\eta}(X_1)$ est alors bien définie. Le théorème 1.2.2 appliqué avec $\mathcal{B} = \mathcal{F}_0$, $S = \mathbb{R}$, $\xi = X_1$, $\nu = \mu$ donne, pour toute fonction h borélienne et bornée,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[h(V_1) \mid \eta = t] &= \int h(\varphi_t(x)) \mu_t(dx) \\ &= \int h(y) (\mu_t \circ \varphi_t^{-1})(dy) \end{aligned}$$

Par le lemme 4.2.4, on a $\mu_t \circ \varphi_t^{-1} = \lambda_t$, et cela montre que $\mathcal{L}[V_1 \mid \eta = t] = \lambda_t$. On sait aussi par ce lemme que φ_t est une transformation inversible qui transporte μ_t sur λ_t , et on a alors $X_1 = \varphi_{\eta}^{-1}(V_1)$ presque sûrement, d'où $\mathcal{F}_0 \vee \sigma(V_1) = \mathcal{F}_0 \vee \sigma(X_1)$.

(iii). Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\mathbb{P}[G_{\eta}(U) \leq x \mid \eta = t] = \int \mathbb{1}_{\{G_t(u) \leq x\}} du = \int \mathbb{1}_{\{u \leq F_t(x)\}} du = F_t(x),$$

ce qui suffit pour conclure. \square

Remarque 4.3.2. La partie (i) de ce lemme peut aussi se démontrer en utilisant le fait qu'une application de $T \times \mathbb{R}$ mesurable par rapport à la première variable et continue à droite par rapport à la seconde, est mesurable.

Proposition 4.3.3. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit X_1 une variable aléatoire telle que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 \vee \sigma(X_1)$. Il existe une variable aléatoire V_1 indépendante de \mathcal{F}_0 telle que $\mathcal{F}_0 \vee \sigma(V_1) = \mathcal{F}_1$ si et seulement si les valeurs de la loi conditionnelle $\mathcal{L}[X_1 \mid \mathcal{F}_0]$ sont presque toutes des probabilités de même atomicité (que la loi de V_1).

Démonstration. \circ Supposons qu'il existe V_1 indépendante de \mathcal{F}_0 telle que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 \vee \sigma(V_1)$. On a alors des fonctions boréliennes f_0 et g_0 et des variables aléatoires S_0 et T_0 mesurables dans \mathcal{F}_0 telles que $X_1 = f_0(S_0, V_1)$ et $V_1 = g_0(T_0, X_1)$. On introduit une variable aléatoire Y_0 telle que $\sigma(Y_0) \supset \sigma(S_0, T_0)$ et on a alors des fonctions boréliennes f et g telles que $X_1 = f(Y_0, V_1) =: f_{Y_0}(V_1)$ et $V_1 = g(Y_0, X_1) =: g_{Y_0}(X_1)$.

Comme V_1 est indépendante de \mathcal{F}_0 , on a, pour toute fonction h borélienne et bornée,

$$\mathbb{E}[h(V_1) | \mathcal{F}_0] = \int h(v) d\mathbb{P}_{V_1}(v)$$

presque sûrement. D'autre part, on a, presque sûrement,

$$\mathbb{E}\left[h((g_{Y_0}(X_1)) | \mathcal{F}_0\right] = \int h((g_{Y_0}(x)) \mathcal{L}[X_1 | \mathcal{F}_0](dx).$$

On a donc, pour toute fonction h borélienne et bornée,

$$\int h((g_{Y_0}(x)) \mathcal{L}[X_1 | \mathcal{F}_0](dx) = \int h(v) d\mathbb{P}_{V_1}(v) \quad \text{presque sûrement.}$$

Par un raisonnement analogue, on a

$$\int h((f_{Y_0}(v)) d\mathbb{P}_{V_1}(v) = \int h(x) \mathcal{L}[X_1 | \mathcal{F}_0](dx) \quad \text{presque sûrement.}$$

Le lemme 4.2.8 appliqué avec $\varphi_y = g_y$ et $\psi_y = f_y$ où $y = Y_0(\omega)$ pour tout ω où ces égalités ont lieu, montre alors que les valeurs de $\mathcal{L}[X_1 | \mathcal{F}_0]$ sont presque toutes des probabilités de même atomicité que la loi de V_1 .

◦ Réciproquement, supposant que presque sûrement, les valeurs de $\mathcal{L}[X_1 | \mathcal{F}_0]$ sont presque sûrement des probabilités de même atomicité, la variable aléatoire V_1 donnée par le (ii) du lemme 4.3.1 a une loi constante conditionnellement à \mathcal{F}_0 , c'est-à-dire que V_1 est indépendante de \mathcal{F}_0 . \square

Le corollaire suivant est alors immédiat.

Corollaire 4.3.4. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit \mathcal{C} une sous- σ -algèbre de \mathcal{A} . Soient V et V' deux variables aléatoires indépendantes de \mathcal{C} telles que $\mathcal{C}\dot{\vee}\sigma(V) = \mathcal{C}\dot{\vee}\sigma(V')$. Alors la loi de V' a la même atomicité que la loi de V . Réciproquement, si V est une variable aléatoire indépendante de \mathcal{C} et si μ est une probabilité sur \mathbb{R} de même atomicité que la loi de V , il existe une variable aléatoire V' de loi μ telle que $\mathcal{C}\dot{\vee}\sigma(V) = \mathcal{C}\dot{\vee}\sigma(V')$.*

Description des innovations.

Maintenant nous allons voir comment les innovations d'une σ -algèbre dans une autre sont liées entre elles.

Définition 4.3.5. Soient E, F et T des espaces mesurables. On dit qu'une famille $\{f_t\}_{t \in T}$ d'applications mesurables $f_t: E \rightarrow F$ est une *famille mesurable* si l'application $(t, x) \mapsto f_t(x)$ est mesurable. On dit qu'elle *dépend mesurablement de t* si l'application $t \mapsto f_t(x)$ est mesurable quand x est fixé.

Lemme 4.3.6. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, et soient Y, V, V' des variables aléatoires dans des espaces métriques standard telles que chacune des deux variables aléatoires V et V' est indépendante de Y et telles que $\sigma(Y)\dot{\vee}\sigma(V) = \sigma(Y)\dot{\vee}\sigma(V')$. Alors il existe une famille mesurable $\{\varphi_y\}_{y \in \mathbb{R}}$ de transformations inversibles de \mathbb{P}_V sur $\mathbb{P}_{V'}$ telles que $V' = \varphi_Y(V)$ presque sûrement.*

Démonstration. On a des fonctions boréliennes f et g telles que les égalités $V' = f(Y, V) =: f_Y(V)$ et $V = g(Y, V') =: g_Y(V')$ aient lieu presque sûrement. Alors

$$1 = \mathbb{P}\left[V = g_Y(f_Y(V))\right] = \int \mathbb{P}\left[V = g_y(f_y(V))\right] d\mathbb{P}_Y(y)$$

d'où $\mathbb{P}\left[V = g_y(f_y(V))\right] = 1$ pour \mathbb{P}_Y -presque tout y . En d'autres termes, pour \mathbb{P}_Y -presque tout y , on a $V = f_y(g_y(V))$ presque sûrement. On montre de même que pour \mathbb{P}_Y -presque tout y , on a $V' = g_y(f_y(V'))$ presque sûrement, et on conclut avec le lemme 4.2.9 que $f_y: (\mathbb{R}, \mathbb{P}_V) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{P}_{V'})$ et $g_y: (\mathbb{R}, \mathbb{P}_{V'}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathbb{P}_V)$ sont, pour \mathbb{P}_Y -presque tout y , des transformations inversibles réciproques l'une de l'autre. On prend alors $\varphi_y = f_y$ si cela a lieu pour y , et on prend pour φ_y une transformation inversible quelconque de \mathbb{P}_V sur $\mathbb{P}_{V'}$ quand y est dans l'événement \mathbb{P}_Y -négligeable où cela n'a pas lieu. \square

Le changement général d'innovation est décrit dans la proposition suivante.

Proposition 4.3.7. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient \mathcal{C} une sous- σ -algèbre de \mathcal{A} et V une variable aléatoire indépendante de \mathcal{C} . On pose $\mathcal{B} = \mathcal{C} \dot{\vee} \sigma(V)$. Une variable aléatoire V' est indépendante de \mathcal{C} et avec \mathcal{C} engendre \mathcal{B} si et seulement si il existe une variable aléatoire Y mesurable dans \mathcal{C} et une famille mesurable $\{\varphi_y\}_{y \in \mathbb{R}}$ de transformations inversibles de \mathbb{P}_V sur $\mathbb{P}_{V'}$ telles que $V' = \varphi_Y(V)$ presque sûrement. Ceci est encore vrai lorsque V et V' sont à valeurs dans des espaces métriques standard.*

Démonstration. \circ Si on a $V' = \varphi_Y(V)$ où la v.a. Y et les transformations inversibles φ_y sont données, l'indépendance de V' avec \mathcal{C} et l'égalité $\mathcal{C} \dot{\vee} \sigma(V') = \mathcal{C} \dot{\vee} \sigma(V)$ aux négligeables près se vérifient facilement.

\circ Réciproquement, supposons que $\mathcal{B} = \mathcal{C} \dot{\vee} \sigma(V) = \mathcal{C} \dot{\vee} \sigma(V')$. Par la proposition 1.2.1, on a des variables aléatoire Z et Z' mesurables dans \mathcal{C} et f_0 et g_0 des fonctions boréliennes telles que les égalités $V' = f_0(Z', V)$ et $V = g_0(Z, V')$ aient lieu presque sûrement. En choisissant une variable aléatoire Y mesurable dans \mathcal{C} telle que $\sigma(Y) \supset \sigma(Z, Z')$, on a aussi des fonctions boréliennes f et g telles que les égalités $V' = f(Y, V) =: f_Y(V)$ et $V = g(Y, V') =: g_Y(V')$ aient lieu presque sûrement, et on applique alors le lemme 4.3.6. \square

Observons le cas des espaces probabilisés sans partie diffuse. Comme une transformation inversible entre deux espaces mesurés atomiques n'est qu'une bijection des atomes de l'une sur les atomes de l'autre préservant la masse de ces atomes, la proposition précédente s'écrit ainsi dans le cas où V est discrète :

Proposition 4.3.8. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient \mathcal{C} une sous- σ -algèbre de \mathcal{A} et V une variable aléatoire discrète indépendante de \mathcal{C} . On pose $\mathcal{B} = \mathcal{C} \dot{\vee} \sigma(V)$. Une variable aléatoire V' est indépendante de \mathcal{C} et avec \mathcal{C} engendre \mathcal{B} si et seulement si il existe une variable aléatoire C mesurable dans \mathcal{C} et une famille $\{\varphi_y\}_{y \in \mathbb{R}}$ de bijections dépendant mesurablement de y , telles que $V' \stackrel{\text{loi}}{=} \varphi_y(V)$ pour tout y , et qu'on a $V' = \varphi_C(V)$.*

Signalons le cas où il y a unicité d'un complément dans le corollaire suivant.

Corollaire 4.3.9. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient \mathcal{C} une sous- σ -algèbre de \mathcal{A} et V une variable aléatoire indépendante de \mathcal{C} , discrète et prenant ses valeurs avec des probabilités deux à deux distinctes. On pose $\mathcal{B} = \mathcal{C} \dot{\vee} \sigma(V)$. Alors $\sigma(V)$ est le seul complément de \mathcal{C} dans \mathcal{B} .*

4.4 Changement d'innovations de filtration et automorphismes d'arbre.

Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration avec, pour un entier $n_0 < 0$, une innovation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. Nous sommes maintenant en mesure de décrire toutes les suites de compléments $(\mathcal{C}_{n_0+1}, \dots, \mathcal{C}_0)$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$.

Lemme 4.4.1. *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ avec, pour un entier $n_0 < 0$, une innovation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. On note μ_n la loi de V_n et $\nu_{n_0+1} = \mu_{n_0+1} \otimes \dots \otimes \mu_0$ la loi de (V_{n_0+1}, \dots, V_0) . Une suite de σ -algèbres $(\mathcal{C}_{n_0+1}, \dots, \mathcal{C}_0)$ est une suite de compléments de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ si et seulement si il existe une innovation $(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ de loi ν_{n_0+1} telle que $\mathcal{C}_n = \sigma(V_n)$ pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$.*

Démonstration. Comme on a supposé que \mathcal{F} admet une innovation sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, tout complément \mathcal{C}_n de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n , $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$ est engendré par une innovation \tilde{V}_n de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n d'après le lemme 2.1.3, et on peut toujours la choisir de loi μ_n par le corollaire 4.3.4. \square

Le problème se ramène donc à déterminer toutes les innovations de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ d'une loi donnée. C'est le contenu de la proposition 4.4.8. On note $H(\nu)$ le groupe des transformations inversibles préservant la probabilité ν sur un espace métrique séparable (ici ce seront des espaces \mathbb{R}^p). La proposition 4.3.7 est valable pour des variables aléatoires dans des espaces métriques standard par le lemme 4.2.3, en particulier pour des vecteurs aléatoires et nous savons alors déjà qu'on peut écrire

$$(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0) = \tilde{\varphi}_{Y_{n_0}}(V_{n_0+1}, \dots, V_0),$$

où $\{\tilde{\varphi}_y\}_y$ est une famille mesurable de $H(\nu_{n_0+1})$. Cela n'est pas suffisant, une transformation $\tilde{\varphi} \in H(\nu_{n_0+1})$ en général détruit l'ordre de l'innovation. Il faudra observer ce que donne la proposition 4.3.7 lorsqu'on l'applique *pas à pas*. La description des transformations que nous verrons apparaître fera appel à la définition suivante.

Définition 4.4.2. Soient $p \geq 1$ un entier, ν_p une probabilité sur \mathbb{R}^p et μ_{p+1} une probabilité sur \mathbb{R} . On se donne une transformation inversible $\tau^{(1 \rightsquigarrow p)}$ de \mathbb{R}^p préservant ν_p et une famille mesurable $\varphi_{(\bullet_1, \dots, \bullet_p)}^{(p+1)} = \{\varphi_{(v_1, \dots, v_p)}^{(p+1)}\}_{(v_1, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^p}$ de transformations inversibles \mathbb{R} préservant μ_{p+1} .

– On construit une transformation inversible de \mathbb{R}^{p+1} préservant $\nu_p \otimes \mu_{p+1}$, notée

$$\tau^{(1 \rightsquigarrow p+1)} =: \tau^{(1 \rightsquigarrow p)} \times \varphi_{(\bullet_1, \dots, \bullet_p)}^{(p+1)},$$

en posant

$$\tau^{(1 \rightsquigarrow p+1)} = \left(\tau^{(1 \rightsquigarrow p)}(v_1, \dots, v_p), \varphi_{\tau^{(1 \rightsquigarrow p)}(v_1, \dots, v_p)}^{(p+1)}(v_{p+1}) \right),$$

et on l'appelle *produit en arbre* de $\tau^{(1 \rightsquigarrow p)}$ avec $\varphi_{(\bullet_1, \dots, \bullet_p)}^{(p+1)}$.

– Si $H_p < H(\nu_p)$ est un sous-groupe de $H(\nu_p)$ et $H_{p+1} < H(\mu_{p+1})$ un sous-groupe de $H(\mu_{p+1})$, l'ensemble $H_p \overset{mes}{\times} H_{p+1}$ constitué de tous les produits en arbre $\tau^{(1 \rightsquigarrow p)} \times \varphi_{(\bullet_1, \dots, \bullet_p)}^{(p+1)}$ avec $\tau^{(1 \rightsquigarrow p)} \in H_p$ et $\varphi_{(v_1, \dots, v_p)}^{(p+1)} \in H_{p+1}$ est un sous-groupe de $H(\nu_p \otimes \mu_{p+1})$, et on l'appelle le *produit en arbre mesurable* de H_p avec H_{p+1} .

Lorsque ν_p et μ_{p+1} sont des probabilités discrètes, on n'a pas à se soucier dans la définition précédente de la mesurabilité de la famille d'automorphismes. On peut définir le produit en

arbre pour des bijections quelconques au lieu d'isomorphismes borélien, et dans ce cas le produit en arbre mesurable $H_p \overset{mes}{\times} H_{p+1}$ est le produit en arbre noté $H_p \times H_{p+1}$ selon la définition suivante.

Définition 4.4.3. Soient E_1, E_2 deux ensembles. On note $\mathfrak{S}_1 = \mathfrak{S}_{E_1}$, respectivement $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S}_{E_2}$ le groupe formé de toutes les bijections de E_1 , respectivement de E_2 , sur lui-même. Soient $H_1 < \mathfrak{S}_1$ un sous-groupe de \mathfrak{S}_1 et $H_2 < \mathfrak{S}_2$ un sous-groupe de \mathfrak{S}_2 . Soit $\pi \in H_1$ et pour tout $e_1 \in E_1$, soit φ_{e_1} un élément de H_2 . On construit une bijection τ de $E_1 \times E_2$ sur lui-même en posant

$$\tau(e_1, e_2) = (\pi(e_1), \varphi_{\pi(e_1)}(e_2)).$$

L'ensemble de ces bijections est un sous-groupe $\mathfrak{S}_{E_1 \times E_2}$ qu'on note $H_1 \times H_2$ et qu'on appelle le *produit en arbre*¹ de H_1 avec H_2 .

Notation 4.4.4. Soient E_1, E_2 deux ensembles. Soit $\pi \in \mathfrak{S}_{E_1}$ une bijection de E_1 sur lui-même et pour tout $e_1 \in E_1$, soit $\tilde{\varphi}_{e_1} \in \mathfrak{S}_{E_2}$, une bijection de E_2 sur lui-même. On note $\tilde{\varphi}_\bullet = \{\tilde{\varphi}_{e_1}\}_{e_1 \in E_1}$ et on pose

$$(\pi \times^{-1} \varphi_\bullet)(e_1, e_2) = (\pi(e_1), \tilde{\varphi}_{e_1}(e_2)).$$

Alors si $\varphi_\bullet = \{\varphi_{e_1}\}_{e_1 \in E_1}$ est une famille de bijections de E_2 sur lui-même, on a

$$\pi \times \varphi = \pi \times^{-1} \tilde{\varphi} \quad \text{avec} \quad \tilde{\varphi}_{e_1} = \varphi_{\pi(e_1)}.$$

Définitions 4.4.5. • Soit $p \geq 1$ un entier et soient $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p$ des mesures de probabilité sur des espaces métriques standard E_1, E_2, \dots, E_p respectivement. Pour $n \in \{1, 2, \dots, p\}$, on définit récursivement le *groupe des transformations inversibles en arbre* de la mesure produit $\theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \dots \otimes \theta_n$ par $K_1(\theta_1) = H(\theta_1)$ et

$$\begin{aligned} K_{n+1}(\theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \dots \otimes \theta_{n+1}) &= K_n(\theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \dots \otimes \theta_n) \overset{mes}{\times} H(\theta_{n+1}) \\ &= H(\theta_1) \overset{mes}{\times} K_n(\theta_2 \otimes \theta_3 \otimes \dots \otimes \theta_{n+1}) \end{aligned}$$

• Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration. Soient $n_0 < n_1 \leq 0$ et soit $(V_{n_0+1}, \dots, V_{n_1})$ une innovation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, n_1 \rrbracket$. On note ν_{n_0, n_1} la loi du vecteur aléatoire $(V_{n_0+1}, \dots, V_{n_1})$. On définit le *groupe des changements d'innovations de \mathcal{F} sur $\llbracket n, 0 \rrbracket$ de même loi que $(V_{n_0+1}, \dots, V_{n_1})$* par $G_{n_0 \rightsquigarrow n_1}(V_{n_0+1}, \dots, V_{n_1}) = K(\nu_{n_0, n_1})$. Lorsque $n_1 = 0$ on le note $G_{n_0}(V_{n_0+1}, \dots, V_0)$.

Remarquons que si $n_0 < n_1 < n_2$ alors

$$G_{n_0 \rightsquigarrow n_2}(V_{n_0+1}, \dots, V_{n_2}) = G_{n_0 \rightsquigarrow n_1}(V_{n_0+1}, \dots, V_{n_1}) \overset{mes}{\times} G_{n_1 \rightsquigarrow n_2}(V_{n_1+1}, \dots, V_{n_2}).$$

Dans ce chapitre, la définition suivante sera utilisée seulement pour le lemme qui lui succède.

Définition 4.4.6. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $n_0 < 0$ un entier. Une suite finie de variables aléatoires (V_{n_0+1}, \dots, V_0) telles que V_n est une novation (définition 2.1.2) de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, est appelée une *novation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$* .

¹ Le produit en arbre $H_1 \times H_2$ de H_1 et H_2 de cette définition est un cas particulier du *produit en couronne* de deux groupes G et H , traditionnellement noté $G \wr H$ (voir [Ev] et les références données).

Lemme 4.4.7. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration avec, pour un entier $n_0 \leq 0$, une novation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, soit S_n une variable aléatoire mesurable pour \mathcal{F}_n . Alors il existe une variable aléatoire $Y_{n_0} \in L^0(\mathcal{F}_{n_0})$ telle que pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, on a*

$$\sigma(Y_{n_0}, V_{n_0+1}, V_{n_0+2}, \dots, V_n) \supset \sigma(S_{n_0}, S_{n_0+1}, \dots, S_n).$$

Démonstration. Comme conséquence de la partie b) de la proposition 1.2.1 avec $\mathcal{B} = \mathcal{F}_{n_0}$, $V = (V_{n_0+1}, \dots, V_n)$, $X = (S_{n_0}, S_{n_0+1}, \dots, S_n)$, on a, pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, une variable aléatoire $T_{n_0}(n)$ telle que

$$\sigma(T_{n_0}(n), V_{n_0+1}, V_{n_0+2}, \dots, V_n) \supset \sigma(S_{n_0}, S_{n_0+1}, \dots, S_n).$$

Il suffit ensuite de prendre pour Y_{n_0} une v.a. telle que $\sigma(Y_{n_0}) \supset \sigma(T_{n_0}(n), n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket)$. \square

Proposition 4.4.8. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration avec, pour un entier $n_0 \leq 0$, une innovation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. On note μ_n la loi de V_n , et $\nu_{n_0+1} = \mu_{n_0+1} \otimes \dots \otimes \mu_0$ la loi de (V_{n_0+1}, \dots, V_0) .*

Soit $(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$ un vecteur aléatoire de loi ν_{n_0+1} . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$ est une innovation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ de loi ν_{n_0+1} .
- (ii) pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, il existe une variable aléatoire $S_{n-1} \in L^0(\mathcal{F}_{n-1})$ et une famille mesurable $\{\psi_y\}_{y \in \mathbb{R}}$ d'éléments de $H(\mu_n)$ telles que $\tilde{V}_n = \psi_{S_{n-1}}^{(n)}(V_n)$.
- (iii) il existe une variable aléatoire $Y_{n_0} \in L^0(\mathcal{F}_{n_0})$ et une famille mesurable $\{\tau_y\}_{y \in \mathbb{R}}$ d'éléments de $G_{n_0}(V_{n_0+1}, \dots, V_0)$ et telle que

$$(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0) = \tau_{Y_{n_0}}(V_{n_0+1}, \dots, V_0).$$

Démonstration. (i) \iff (ii) provient de la proposition 4.3.7. Vérifions que (ii) \iff (iii). Pour montrer que (iii) \implies (ii), il suffit d'écrire

$$\tau_y = \left(\left(\dots (\varphi_y^{(n_0+1)} \times \varphi_{y, \bullet_{n_0+1}}^{(n_0+2)}) \times \dots \right) \times \varphi_{y, (\bullet_{n_0+1}, \bullet_{n_0+2}, \dots, \bullet_{-2})}^{(-1)} \right) \times \varphi_{y, (\bullet_{n_0+1}, \bullet_{n_0+2}, \dots, \bullet_{-2}, \bullet_{-1})}^{(0)},$$

et de poser $Y_n = h_n(Y_{n_0}, V_{n_0+1}, \dots, V_n)$ où $h_n: \mathbb{R}^{n-n_0+1} \rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection bimesurable. Pour établir (ii) \implies (iii), il faut construire les $\varphi^{(m)}$. Supposons qu'on ait (ii). Puisqu'on a alors (i), on a $\mathcal{F}_{m+1} = \mathcal{F}_{n_0} \vee \sigma(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_{m+1})$ et par le lemme 4.4.7 on peut alors introduire une variable aléatoire $Y_{n_0} \in L^0(\mathcal{F}_{n_0})$ telle que $\sigma(Y_{n_0}, \tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_m) \supset \sigma(S_{n_0}, S_{n_0+1}, \dots, S_m)$ pour tout $m \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$. On peut alors écrire $S_m = g_m(Y_{n_0}, \tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_m)$ où g_m est borélienne, et avec cela en posant

$$\varphi_{y, v_{n_0+1}, \dots, v_m}^{(m+1)} = \psi_{g_m(y, v_{n_0+1}, \dots, v_m)}^{(m+1)},$$

on a alors

$$\tilde{V}_{m+1} = \varphi_{Y_{n_0}, \tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_m}^{(m+1)}(V_{m+1}).$$

Ceci donne

$$(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0) = \tau_{Y_{n_0}}(V_{n_0+1}, \dots, V_0).$$

avec

$$\tau_y = \left(\left(\dots (\varphi_y^{(n_0+1)} \times \varphi_{y, \bullet_{n_0+1}}^{(n_0+2)}) \times \dots \right) \times \varphi_{y, (\bullet_{n_0+1}, \bullet_{n_0+2}, \dots, \bullet_{-2})}^{(-1)} \right) \times \varphi_{y, (\bullet_{n_0+1}, \bullet_{n_0+2}, \dots, \bullet_{-2}, \bullet_{-1})}^{(0)}.$$

\square

Remarque 4.4.9. Soit $k \in \{0, 1, 2, \dots, |n_0| - 1\}$. On note $\pi_k: \mathbb{R}^{|n_0|} \rightarrow \mathbb{R}$ la projection sur le k -ième facteur. Avec les notations de la proposition 4.4.8, on se donne une variable aléatoire $Y_{n_0} \in L^0(\mathcal{F}_{n_0})$ et une famille mesurable $\{\tau_y\}_{y \in \mathbb{R}}$ d'éléments de $G_{n_0}(v_{n_0+1})$ et on définit une nouvelle innovation $(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ en posant

$$(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0) = \tau_{Y_{n_0}}(V_{n_0+1}, \dots, V_0).$$

Alors on a

$$\tilde{V}_{n+1} = \tilde{\varphi}_{Y_{n_0}, V_{n_0+1}, V_{n_0+2}, \dots, V_n}^{(n+1)}(V_{n+1})$$

pour tout $n \in \llbracket n_0, 1 \rrbracket$ où $Y_{n_0} \in L^0(\mathcal{F}_{n_0})$ et $\tilde{\varphi}_{y, v_{n_0+1}, v_{n_0+2}, \dots, v_n}^{(n+1)}$ est une famille mesurable d'éléments de $H(\mu_{n+1})$. Posons

$$\tau_y^{[k]}(v_{n_0+1}, \dots, v_{n_0+k}) = (\pi_k \circ \tau_y)(v_{n_0+1}, \dots, v_{n_0+k}, \times_{n_0+k+1}, \dots, \times_0)$$

On a alors

$$\begin{aligned} \tau_y &= \left(\left(\dots (\tilde{\varphi}_y^{(n_0+1)} \times^{-1} \tilde{\varphi}_{y, \bullet_{n_0+1}}^{(n_0+2)}) \times^{-1} \dots \right) \times^{-1} \tilde{\varphi}_{y, (\bullet_{n_0+1}, \bullet_{n_0+2}, \dots, \bullet_{-2})}^{(-1)} \right) \times^{-1} \tilde{\varphi}_{y, (\bullet_{n_0+1}, \bullet_{n_0+2}, \dots, \bullet_{-2}, \bullet_{-1})}^{(0)} \\ &= \left(\left(\dots (\varphi_y^{(n_0+1)} \times \varphi_{y, \bullet_{n_0+1}}^{(n_0+2)}) \times \dots \right) \times \varphi_{y, (\bullet_{n_0+1}, \bullet_{n_0+2}, \dots, \bullet_{-2})}^{(-1)} \right) \times \varphi_{y, (\bullet_{n_0+1}, \bullet_{n_0+2}, \dots, \bullet_{-2}, \bullet_{-1})}^{(0)} \end{aligned}$$

où

$$\varphi_{y, v_{n_0+1}, \dots, v_{n_0+k}}^{(n_0+k+1)} = \tilde{\varphi}_{y, \tau_y^{[k]}(v_{n_0+1}, \dots, v_{n_0+k})}^{(n_0+k+1)}$$

et

$$\tilde{V}_{n+1} = \varphi_{Y_{n_0}, \tilde{V}_{n_0+1}, \tilde{V}_{n_0+2}, \dots, \tilde{V}_n}^{(n+1)}(V_{n+1}).$$

Corollaire 4.4.10. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ des filtrations sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ et qu'il existe un entier $n_0 < 0$ et un vecteur aléatoire (V_{n_0+1}, \dots, V_0) qui est à la fois une innovation de \mathcal{F} et de \mathcal{G} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. Alors toute innovation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ est aussi une innovation de \mathcal{G} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$

Démonstration. Cela se déduit visiblement de la proposition 4.4.8. \square

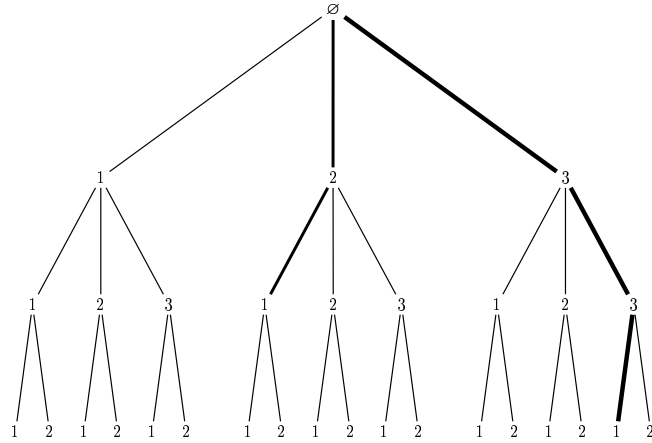
Cas r_n -adique : automorphismes d'arbres. — Dans le cas r_n -adique, les changements d'innovations sont des *automorphismes d'arbre*, comme nous allons l'expliquer ici d'abord en donnant des notations qui seront encore utilisées par la suite.

• La suite $r = (r_n)_{n \leq 0}$ est donnée et on se fixe un entier $m < 0$. On note $\mathcal{T}_{m \rightsquigarrow m} = \{\emptyset\}$ et pour $n \in \llbracket m, 0 \rrbracket$, on note $\mathcal{T}_{m \rightsquigarrow n}$ l'ensemble des suites finies (e_{m+1}, \dots, e_n) où $e_j \in \{1, \dots, r_j\}$ pour tout $j \in \llbracket m, n \rrbracket$. Pour tout $m \leq 0$, l'ensemble $\mathcal{T}_m := \cup_{m \leq n \leq 0} \mathcal{T}_{m \rightsquigarrow n}$ est appelé l'*arbre r_n -aire de hauteur $|m|$* . On définit aussi l'*arbre r_n -aire* par $\mathcal{T} = \cup_m \mathcal{T}_m$. L'élément \emptyset de tous les \mathcal{T}_m est appelé la *racine de \mathcal{T}_m* . Sur la figure 4.1, les éléments de \mathcal{T}_m correspondent aux branches de l'arbre qui vont de la racine jusqu'à un niveau $k \leq |m|$. Une *branche de niveau $k \geq 1$* est un élément $(e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_{m+k})$ de $\mathcal{T}_{m \rightsquigarrow m+k} \subset \mathcal{T}_m$. Une branche de niveau $|m|$ est dite *maximale* et on note $\mathcal{T}_m^{\max} = \mathcal{T}_m$ l'ensemble des branches maximales.

Si $g_m = (e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_0) \in \mathcal{T}_m^{\max}$ est une branche maximale, on note $\pi^{[k]}(g_m) = (e_{m+1}, e_{m+2}, \dots, e_{m+k})$ pour $k \geq 1$ et $k \leq -m$. On dit que deux branches maximales g_m et g'_m coïncident jusqu'au k -ième niveau de l'arbre si $\pi^{[k]}(g_m) = \pi^{[k]}(g'_m)$. Un *automorphisme d'arbre* τ de \mathcal{T}_m est une permutation τ des branches maximales de \mathcal{T}_m telle que les images de deux branches qui coïncident jusqu'à un niveau coïncident aussi jusqu'à ce même niveau. En d'autres termes, τ est un automorphisme d'arbre si c'est une permutation de \mathcal{T}_m^{\max} telle que pour toutes branches maximales g_m et g'_m ,

$$\forall k = 1, 2, \dots, |m|, \quad \pi^{[k]}(g_m) = \pi^{[k]}(g'_m) \implies \pi^{[k]}(\tau(g_m)) = \pi^{[k]}(\tau(g'_m)).$$

Fig. 4.1: L'arbre r_n -aire de hauteur 3 avec $r_n = (\dots, 3, 3, 2)$. En gras, nous avons représenté la branche (2, 1) et en plus gras, la branche maximale (3, 3, 1)



Les automorphismes d'arbres forment un sous-groupe du groupe des permutations de \mathcal{T}_m^{\max} , on le note G_m .

• Maintenant mettons en évidence l'égalité $H(\mu_n) \times \dots \times H(\mu_0) = K_n(\mu_n \otimes \dots \otimes \mu_0)$. Les figures 4.2 et 4.3 sont notre support visuel avec $n = -3$, $r_{-2} = r_{-1} = r_0 = 2$. On associe une

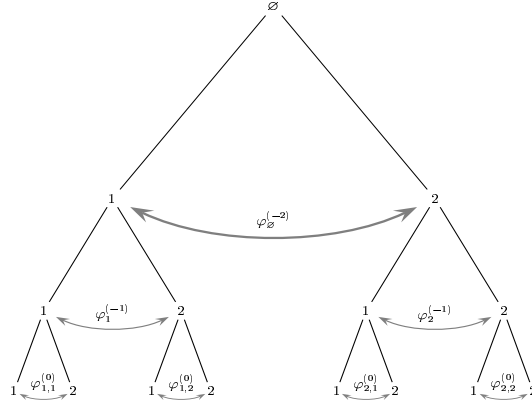


Fig. 4.2: Les permutations sont placées.

permutation $\varphi_{\emptyset}^{(n+1)}$ à la racine de l'arbre, et à chacune des branches $(e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{n+k})$ de niveau k de l'arbre, $1 \leq k \leq |n| - 1$, on associe une permutation $\varphi_{e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{n+k}}^{(n+k+1)}$ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, r_{n+k+1}\}$. Ceci est représenté sur la figure 4.2. Notons

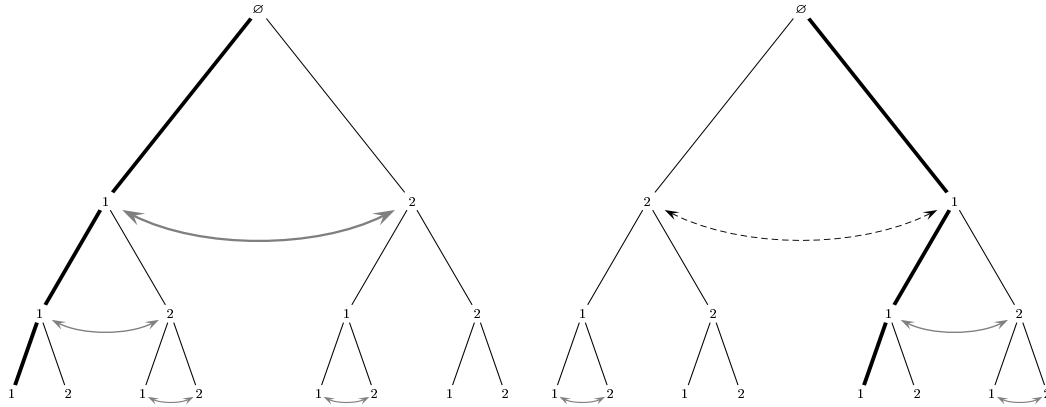
$$\varphi_{\bullet_{n+1}, \bullet_{n+2}, \dots, \bullet_{n+k}}^{(n+k+1)} = \{ \varphi_{e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{n+k}}^{(n+k+1)} \}_{(e_{n+1}, e_{n+2}, \dots, e_{n+k}) \in \mathcal{T}_{n+k}}$$

On construit alors l'automorphisme d'arbre

$$\tau = \left(\left(\dots (\varphi_{\emptyset}^{(n+1)} \times \varphi_{\bullet_{n+1}}^{(n+1)}) \times \dots \right) \times \varphi_{(\bullet_{n+1}, \bullet_{n+2}, \dots, \bullet_{-2})}^{(-1)} \right) \times \varphi_{(\bullet_{n+1}, \bullet_{n+2}, \dots, \bullet_{-2}, \bullet_{-1})}^{(0)}$$

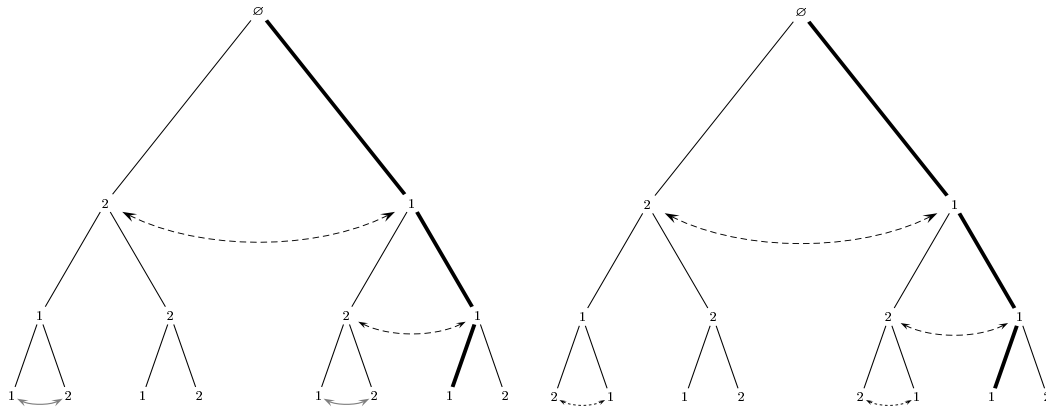
en appliquant successivement les transformations suivantes sur l'arbre. Ceci est représenté sur la figure 4.3 où nous avons choisi $\varphi_{\emptyset}^{(-2)} = (12)$, $\varphi_0^{(-1)} = (12)$, $\varphi_1^{(-1)} = \text{Id}$, $\varphi_{0,0}^{(0)} = \text{Id}$, $\varphi_{0,1}^{(0)} = (12)$, $\varphi_{1,0}^{(0)} = (12)$, $\varphi_{1,1}^{(0)} = \text{Id}$. On envoie d'abord, pour tout $j_{n+1} \in \{1, \dots, r_{n+1}\}$, chaque branche $(j_{n+1}, e_{n+2}, e_{n+3}, \dots, e_0)$ sur la branche $(j'_{n+1}, e_{n+2}, e_{n+3}, \dots, e_0)$ où $j'_{n+1} = \varphi_{\emptyset}^{(n+1)}(j_{n+1})$. À

l'étape suivante, pour $j_{n+1} \in \{1, \dots, r_{n+1}\}$ et $j_{n+2} \in \{1, \dots, r_{n+2}\}$, chacune des branches $(j'_{n+1}, j_{n+2}, e_{n+3}, \dots, e_0)$ est envoyée sur $(j'_{n+1}, j'_{n+2}, e_{n+3}, \dots, e_0)$ avec $j'_{n+2} = \varphi_{j'_{n+1}}^{(n+2)}(j_{n+2})$. Et ainsi de suite, on construit τ .



(a) On place les permutations.

(b) On applique celle à la racine.



(c) On applique celles au niveau 1.

(d) On applique celles au niveau 2.

Fig. 4.3: Un automorphisme d'arbre.

5. L'EXEMPLE DES MOTS GOMMÉS.

Ce chapitre définit le *processus des mots gommés* qui est un processus formé de *mots* sur un espace probabilisé donné (A, \mathfrak{A}, μ) , dit *l'alphabet*. La filtration du processus des mots gommés sur l'alphabet (A, \mathfrak{A}, μ) est de type produit local et kolmogorovienne. Nous montrerons qu'elle est de type produit d'abord dans le cas où A est fini et que μ est la mesure de probabilité uniforme, ceci en construisant des innovations qui l'engendrent. De là nous déduirons par approximation le cas où A est l'intervalle unité $[0, 1]$ et μ la mesure de Lebesgue, puis le cas d'un alphabet essentiellement séparable sera obtenu *en utilisant des résultats de second niveau de la théorie de Vershik*, qui seront établis dans les chapitres ultérieurs. Nous verrons aussi que lorsque (A, \mathfrak{A}, μ) n'est pas essentiellement séparable, la filtration du processus des mots gommés n'est pas essentiellement séparable, pas de type produit, mais elle satisfait le critère de Vershik de premier niveau.

5.1 Préliminaire : notations sur les mots.

- Soit A un ensemble non vide, qu'on appelle *l'alphabet*. Les éléments de A sont appelés des *lettres*. Une suite ordonnée de m lettres est appelée *un mot sur A* , ou aussi un m -mot sur A , et m est sa *longueur* ; l'ensemble des m -mots est A^m . La i -ème composante d'un mot w est appelée la *i -ième lettre de w* ; elle est notée w_i ou $w(i)$, et w est alors notée $w = w_1 w_2 \cdots w_m$ ou $w = w(1)w(2) \cdots w(m)$.
- Lorsque v et w sont des mots sur A de longueur ℓ et p respectivement, la *concaténation* de v et de w est le mot noté vw de longueur $\ell + p$ formé de gauche à droite des lettres de v puis des lettres de w .
- Lorsque B est un autre alphabet et que l'on a une application $f: A \rightarrow B$, pour tout $m \geq 1$ et tout mot w sur A de longueur m , on note $f(w)$ le mot de longueur m sur B dont la i -ième lettre est $f(w_i)$. En d'autres termes, $f(w) := f(w_1)f(w_2) \cdots f(w_m)$.
- Si w est un p -mot et si $J \subset \{1, \dots, p\}$ est une partie à q éléments, on note $v = w|_J$ le q -mot obtenu en ne conservant que les lettres de w dont l'indice est dans J sans changer leur ordre. On dit que v est un *sous-mot* de w ou un *mot extrait* de w .

5.2 Le processus des mots gommés.

Soit (A, \mathfrak{A}, μ) un espace probabilisé, qu'on appelle *l'alphabet probabilisé*. Le *processus (généralisé) des mots gommés* sur (A, \mathfrak{A}, μ) est la chaîne de Markov généralisée $(W_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ dont la loi est définie par les deux conditions compatibles suivantes :

- ◇ pour tout $n \leq 0$, W_n est un mot de longueur $|n|+1$ sur A , formés de lettres indépendantes et chacune de loi μ , et η_n est uniforme sur $\{1, \dots, |n|+2\}$ et indépendante de W_n ;
- ◇ la transition de $n-1$ à n s'obtient en prenant η_n indépendante de (W_{n-1}, η_{n-1}) et en prenant pour W_n le $(|n|+1)$ -mot obtenu à partir de W_{n-1} en lui retirant sa η_n -ième lettre.

Ces deux conditions permettent de déterminer pour tout entier $n \leq 0$ la loi du "vecteur" aléatoire $((W_0, \varepsilon_0), (W_{-2}, \varepsilon_{-1}), \dots, (W_n, \varepsilon_n))$, ainsi que la loi conditionnelle

$$\mathcal{L}[(W_n, \varepsilon_n) \mid \sigma(W_0, \varepsilon_0, W_{-1}, \varepsilon_{-1}, \dots, W_{n-1}, \varepsilon_{n-1})],$$

et le théorème de Ionescu-Tulcea assure alors l'existence du processus des mots gommés pour tout alphabet (A, \mathfrak{A}, μ) .

$$\dots \quad W_{-3} = baca \xrightarrow{\eta_{-2}=2} W_{-2} = bca \xrightarrow{\eta_{-1}=3} W_{-1} = bc \xrightarrow{\eta_0=1} W_0 = c.$$

Fig. 5.1: Le processus des mots gommés.

On suppose que $(W_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ est défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on note \mathcal{F} la filtration qu'il engendre.

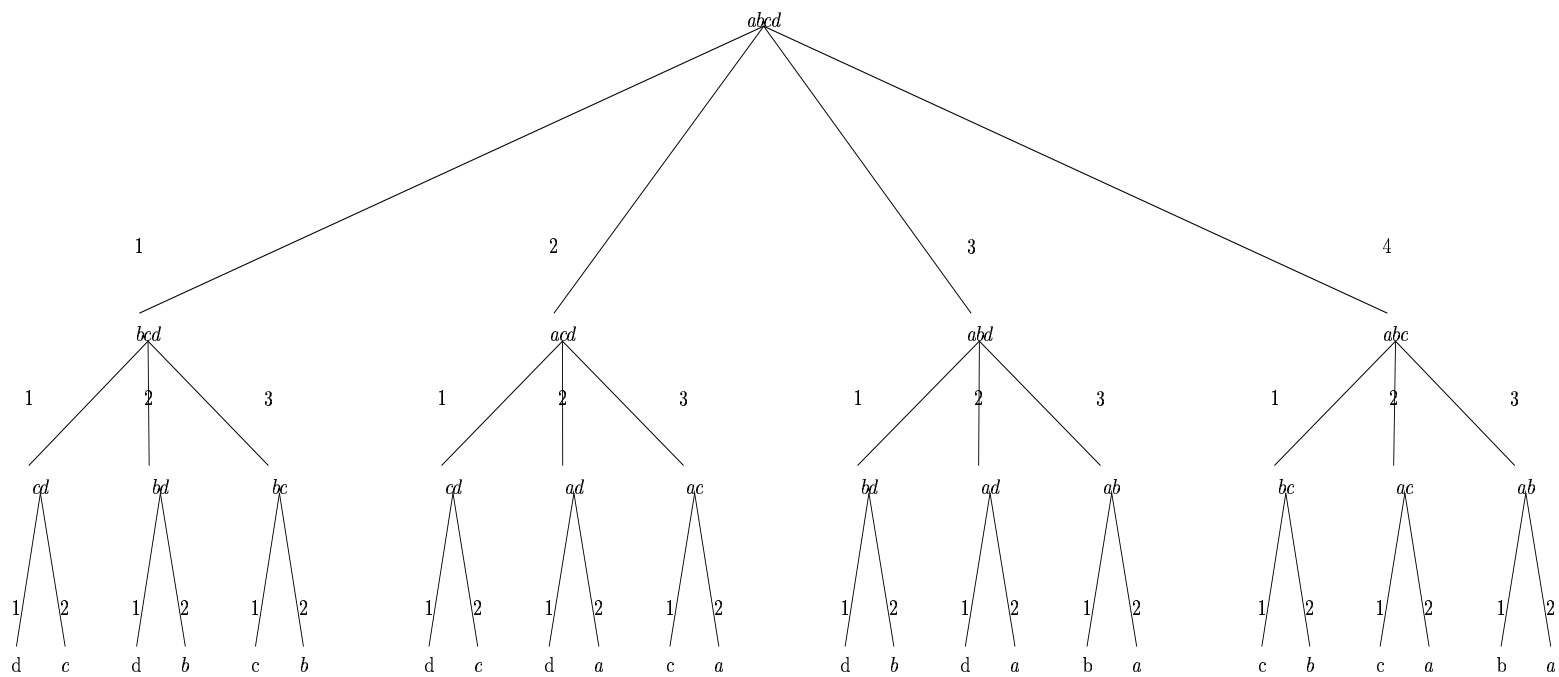
Lorsque (A, \mathfrak{A}) est un espace probabilisé essentiellement séparable, nous allons établir que \mathcal{F} est une filtration de type produit. Nous traiterons d'abord le cas où A est fini et μ est la probabilité uniforme, puis le cas où A est le segment unité $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue, pour lesquels nous construirons un processus d'innovations $(\tilde{\eta}_n)_{n \leq 0}$ qui engendre \mathcal{F} . Le cas de $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue donne immédiatement le cas de tout espace de Lebesgue sans partie atomique, et nous en déduisons qu'il donne le cas essentiellement séparable *en utilisant des résultats de la théorie de Vershik* (sous forme de nos résultats ultérieurs sur le I-confort).

Plus généralement, nous montrerons que pour un alphabet quelconque, \mathcal{F} satisfait toujours le critère de Vershik de premier niveau.

Notations. Pour $n \leq 0$, on pose $\ell_n = |n|+1$; c'est la longueur du mot W_n . Les notations qui suivent concernent le procédé de transition du processus des mots gommés. Soit A un alphabet. Pour tout $m < 0$, on note \mathcal{T}_m l'arbre $(|n|+2)$ -aire de hauteur $|m|$, et \mathcal{T}_m^{\max} l'ensemble de ses branches maximales. Soit \dagger un symbole non élément de A . Fixons un entier $M < 0$. Pour tout entier $k \in \{0, 1, \dots, |M|\}$, nous notons $A_k^{\dagger M}$ l'ensemble des mots de longueur $\ell_M - k$ sur l'alphabet $A \cup \{\dagger\}$ qui contiennent exactement k fois la lettre \dagger . Les lettres \dagger d'un mot sur $A \cup \{\dagger\}$ sont dites *mortes*, et les lettres qui sont dans A sont dites *vivantes*. Les $\ell_M - k$ lettres vivantes d'un mot appartenant à $A_k^{\dagger M}$ sont ordonnées de gauche à droite, et forment le *sous-mot vivant* de w . On définit pour tout entier $m < 0$ et tout $k \in \{1, \dots, |M|\}$, une application $g_k^{\dagger M} : A_{k-1}^{\dagger M} \times \{1, \dots, \ell_M - k\} \longrightarrow A_k^{\dagger M}$, qui à tout ℓ_M -mot w contenant k lettres \dagger , et à tout indice $x \in \{1, \dots, \ell_M - k\}$, associe le mot $g_k^{\dagger M}(w, x)$ obtenu en remplaçant dans w la x -ième lettre vivante de w par un \dagger . On définit alors pour $n \in \llbracket M, 0 \rrbracket$, la fonction $g_{M \rightsquigarrow n}^{\dagger}$ par $g_{M \rightsquigarrow M+1}^{\dagger} = g_1^{\dagger M}$ et

$$g_{M \rightsquigarrow n+1}^{\dagger}(w, e_{m+1}, \dots, e_{n-1}, e_n) = g_{n \rightsquigarrow n+1}^{\dagger}(g_{M \rightsquigarrow n}^{\dagger}(w, e_{m+1}, \dots, e_{n-1}), e_n)$$

Sur la figure 5.2, on lit par exemple $g_{3 \rightsquigarrow -1}^{\dagger}(abcd, 3, 2) = a \dagger \dagger d$ au bout de la branche $(3, 2)$ de l'arbre. Nous notons maintenant c la fonction qui à un mot w sur $A \cup \{\dagger\}$ associe son sous-

Fig. 5.2: Gommage de $w = abcd$.

mot vivant. On pose alors

$$g_{M \rightsquigarrow n+1} = c \circ g_{M \rightsquigarrow n+1}^\dagger.$$

Sur la figure 5.2, on lit par exemple $g_{-3 \rightsquigarrow -1}(abcd, 3, 2) = ad$ au bout de la branche $(3, 2)$ de l'arbre.

Ces notations seront utilisées pour le processus des mots gommés. Pour $M < n \leq 0$, on a

$$W_n = g_{M \rightsquigarrow n}(W_M, \eta_{M+1}, \dots, \eta_n).$$

Lorsque $M < 0$ est fixé, il sera plus commode d'étudier le comportement du processus après

$$\dots \quad W_{-3} = baca \quad \xrightarrow{\eta_{-2}=2} \quad W_{-2}^{\dagger-3} = b \dagger ca \quad \xrightarrow{\eta_{-1}=3} \quad W_{-1}^{\dagger-3} = b \dagger c \dagger \quad \xrightarrow{\eta_0=1} \quad W_0^{\dagger-3} = \dagger \dagger c \dagger$$

Fig. 5.3: Le processus avec les lettres mortes à partir de l'instant -3 .

l'instant M en considérant $W_M, W_{M+1}^{\dagger M}, W_{M+2}^{\dagger M}, \dots, W_0^{\dagger M}$, où pour $n \in \llbracket M, 0 \rrbracket$, on pose

$$W_n^{\dagger M} = g_{M \rightsquigarrow n}^\dagger(W_M, \eta_{M+1}, \dots, \eta_n)$$

Le mot W_n est alors le sous-mot vivant de $W_n^{\dagger M}$.

Lemme 5.2.1. *Si μ n'est pas dégénérée, \mathcal{F} n'est pas engendrée par $(\eta_n)_{n \leq 0}$.*

Démonstration. Donnons-nous $M < 0$ et montrons que W_0 est indépendante de la σ -algèbre $\sigma(\eta_n; M < n \leq 0)$. On note I_M l'indice de la lettre de W_M qui n'est pas effacée à l'instant 0, défini par :

$$W_0^{\dagger M} = \dagger \quad \dots \quad \dagger \quad W_0 \quad \dagger \quad \dots \quad \dagger \quad .$$

1 \dots $I_M - 1$ I_M $I_M + 1$ \dots ℓ_M

Clairement, I_M est une variable aléatoire uniforme sur $\{1, 2, \dots, \ell_M\}$. Comme W_0 est la I_M -ième lettre de W_M , on a, pour toute fonction f mesurable et bornée,

$$\mathbb{E}[f(W_0) | \sigma(\eta_{M+1}, \dots, \eta_0)] = \int_{w \in A^{\ell_M}} f(w(I_M)) d\mathbb{P}_{W_M}(w) = h(I_M),$$

avec $h(i) = \mathbb{E}[f(W_M(i))] = \mathbb{E}[f(W_0)]$ qui ne dépend pas de i . □

5.3 Cas uniforme sur un alphabet fini

Soit A un ensemble fini muni de la mesure de probabilité uniforme μ . Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $(W_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ le processus des mots gommés sur (A, μ) . On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ la filtration qu'il engendre. Cette section donne la construction d'un processus d'innovations générateur de \mathcal{F} en s'aidant du lemme de construction 5.3.2 qui sera encore utilisé dans le chapitre suivant. Dans la section suivante nous en déduisons que la filtration du processus des mots gommés sur l'alphabet $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue est aussi de type produit.

5.3.1 Lemme de construction.

Comme le processus des mots découpés que nous verrons dans le chapitre suivant, le processus des mots gommés est une chaîne de Markov constructive (définition 3.6.2). Le lemme que nous donnons ici sera utilisé pour ces deux processus. La définition suivante sera commode.

Définition 5.3.1. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local. Soient $n_0 < n_1 \leq 0$ et soient $(V_{n_0+1}, \dots, V_{n_1})$ et $(V'_{n_0+1}, \dots, V'_{n_1})$ deux innovations de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, n_1 \rrbracket$ de même loi. Soit X_{n_0} un élément aléatoire mesurable pour \mathcal{F}_{n_0} . On dit que $(V'_{n_0+1}, \dots, V'_{n_1})$ est l'image de $(V_{n_0+1}, \dots, V_{n_1})$ par un changement d'innovation indexé par X_{n_0} s'il existe une famille mesurable $\{\tau_x\}_x$ d'éléments de $G(V_{n_0+1}, \dots, V_{n_1})$ telle que

$$(V'_{n_0+1}, \dots, V'_{n_1}) = \tau_{X_{n_0}}(V_{n_0+1}, \dots, V_{n_1}).$$

Lemme 5.3.2. Pour tout entier $n \leq 0$, soit E_n un espace métrique séparable. On se donne une chaîne de Markov constructive $((X_n, V_n), f_n; E_n)_{n \leq 0}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ sa filtration. On suppose qu'il existe un processus $(\tilde{V}_n)_{n \leq 0}$ d'innovations de \mathcal{F} et une suite d'entiers négatifs $(N_k)_{k \leq 0}$ strictement croissante satisfaisant aux conditions suivantes pour tout $k \leq 0$.

- (a) $(\tilde{V}_{N_{k-1}+1}, \dots, \tilde{V}_{N_k})$ est l'image de $(V_{N_{k-1}+1}, \dots, V_{N_k})$ par un changement d'innovation indexé par $X_{N_{k-1}}$;
- (b) Il existe une variable aléatoire \tilde{X}_{N_k} qui est mesurable pour $\sigma(\tilde{V}_{N_{k-1}+1}, \dots, \tilde{V}_{N_k})$ et telle que $\mathbb{P}[X_{N_k} \neq \tilde{X}_{N_k}] \rightarrow 0$ quand $k \searrow -\infty$.

Alors $(\tilde{V}_n)_{n \leq 0}$ est un processus d'innovations générateur de \mathcal{F} .

Démonstration. Soit $n \leq 0$. Pour montrer que (X_n, V_n) est mesurable pour $\sigma(\tilde{V}_n, n \leq 0)$, il suffit de pouvoir construire pour tout réel $\delta > 0$ donné une variable aléatoire $\overset{\circ}{X}_n$ à valeurs dans E_n et une innovation $\overset{\circ}{V}_n$ de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n , tels que $\overset{\circ}{X}_n$ et $\overset{\circ}{V}_n$ soient mesurables pour $\sigma(\dots, \tilde{V}_{n-1}, \tilde{V}_n)$ et que l'on ait

$$\mathbb{P}[(X_n, V_n) \neq (\overset{\circ}{X}_n, \overset{\circ}{V}_n)] < \delta. \quad (5.3.1)$$

On choisit $p \leq 0$ suffisamment petit pour que $\delta_{p+1} \leq \delta/2$ et pour que $N_{p+1} < n$. Soit $q = \min\{q' \mid n \leq N_{q'}\}$ le plus petit entier tel que $n \leq N_q$. Pour tout $k \leq q-1$, on a

$$(\tilde{V}_{N_k+1}, \dots, \tilde{V}_{N_{k+1}}) = \tau_{X_{N_k}}^{(N_k+1 \rightsquigarrow N_{k+1})}(V_{N_k+1}, \dots, V_{N_{k+1}})$$

où $\{\tau_x^{(N_k+1 \rightsquigarrow N_{k+1})}\}_{x \in E_{N_k}}$ est une famille d'automorphismes d'arbre. Comme $p+1 < q$, on a donc en particulier

$$(\tilde{V}_{N_p+1}, \tilde{V}_{N_p+2}, \dots, \tilde{V}_{N_{p+1}}) = \tau_{X_{N_p}}^{(N_p+1 \rightsquigarrow N_{p+1})}(V_{N_p+1}, V_{N_p+2}, \dots, V_{N_{p+1}}),$$

où $\{\tau_x^{(N_p+1 \rightsquigarrow N_{p+1})}\}_{x \in E_{N_p}}$ est une famille d'automorphismes d'arbre. On a aussi

$$(\tilde{V}_{N_{p+1}+1}, \dots, \tilde{V}_{N_q}) = \tau_{X_{N_{p+1}}}^{(N_{p+1}+1 \rightsquigarrow N_q)}(V_{N_{p+1}+1}, \dots, V_{N_q})$$

où $\{\tau_x^{(N_{p+1}+1 \rightsquigarrow N_q)}\}_{x \in E_{N_{p+1}}}$ est une famille d'automorphismes d'arbre.

Posons $\tau_w = \tau_w^{(N_{p+1}+1 \rightsquigarrow N_q)}$, puis

$$(\overset{\circ}{V}_{N_{p+1}+1}, \dots, \overset{\circ}{V}_{N_q}) = \tau_{\tilde{X}_{N_{p+1}}}^{-1}(\tilde{V}_{N_{p+1}+1}, \dots, \tilde{V}_{N_q}),$$

si bien que sur $\{X_{N_{p+1}} = \tilde{X}_{N_{p+1}}\}$, on a $(\overset{\circ}{V}_{N_{p+1}+1}, \dots, \overset{\circ}{V}_{N_q}) = (V_{N_{p+1}+1}, \dots, V_{N_q})$ et pour tout $m \in \llbracket N_{p+1} + 1, N_q \rrbracket$, la variable aléatoire $\overset{\circ}{V}_m$ est une innovation de \mathcal{F}_{m-1} dans \mathcal{F}_m mesurable pour $\sigma(\tilde{V}_{N_{p+1}}, \tilde{V}_{N_{p+2}}, \dots, \tilde{V}_{N_{p+1}}, \tilde{V}_{N_{p+1}+1}, \dots, \tilde{V}_m)$. En particulier, $\overset{\circ}{V}_n$ est une innovation de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n mesurable dans $\sigma(\tilde{V}_{N_{p+1}}, \dots, \tilde{V}_n)$ et on a

$$\mathbb{P}[V_n \neq \overset{\circ}{V}_n] \leq \mathbb{P}[\tilde{X}_{N_{p+1}} \neq X_{N_{p+1}}] < \delta_{p+1} \leq \frac{\delta}{2}.$$

On construit maintenant $\overset{\circ}{X}_{N_{p+1}+1} = f_{N_{p+1}+1}(\tilde{X}_{N_{p+1}}, \overset{\circ}{V}_{N_{p+1}+1})$, $\overset{\circ}{X}_{N_{p+1}+2} = f_{N_{p+1}+2}(\overset{\circ}{X}_{N_{p+1}+1}, \overset{\circ}{V}_{N_{p+1}+2})$, \dots , $\overset{\circ}{X}_n = f_n(\overset{\circ}{X}_{n-1}, \overset{\circ}{V}_n)$. Alors $\overset{\circ}{X}_n$ est une variable aléatoire dans E_n mesurable pour $\sigma(\tilde{V}_{N_{p+1}}, \tilde{V}_{N_{p+2}}, \dots, \tilde{V}_{N_{p+1}}, \tilde{V}_{N_{p+1}+1}, \dots, \tilde{V}_n)$, et on a

$$\mathbb{P}[X_n \neq \overset{\circ}{X}_n] \leq \mathbb{P}[\tilde{X}_{N_{p+1}} \neq X_{N_{p+1}}] < \delta_{p+1} \leq \frac{\delta}{2},$$

et finalement on a obtenu l'inégalité (5.3.1) désirée. \square

5.3.2 Notations.

- Soit A un alphabet fini totalement ordonné. Notons $\kappa = \#A$. Le *mot canonique* de longueur ℓ sur A est le mot $\tilde{w} \in A^\ell$ dans lequel les lettres de l'alphabet apparaissent dans l'ordre puis se répètent périodiquement : la i -ième lettre du mot \tilde{w} est la r -ième lettre a_r de l'alphabet A si $i \equiv r \pmod{\kappa}$. Par exemple si $A = \{a, b, c\}$, le 14-mot canonique sur A est $abcabcabcabcab$.
- Soient $\ell \geq 1$ un entier, w et w' deux mots de longueur ℓ sur $A \cup \{\dagger\}$. Un *couplage lettre à lettre* de w et w' est une permutation φ de $\{1, \dots, \ell\}$; on dit alors que les lettres w_i et $w'_{\varphi(i)}$ sont *couplées*, ou qu'elles *correspondent*, par φ .
- Pour un p -mot w et pour un indice $i \in \{1, \dots, p\}$ de w , on appelle et on note $N(w, i) = \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{1}_{\{w(k)=w(i)\}}$ le nombre d'occurrences de la i -ième lettre $w(i)$ de w à gauche du rang i . Remarquons que pour le p -mot canonique \tilde{w} , $N(\tilde{w}, j)$ est le nombre d'occurrences de la r -ième a_r lettre de l'alphabet à gauche du rang i dans le p -mot canonique \tilde{w} si $j \equiv r \pmod{\kappa}$, et si $j = q\kappa + r$, on a alors $N(\tilde{w}, j) = q$.
- Le *couplage canonique* d'un p -mot v est la permutation Σ_v de $\{1, \dots, p\}$ représentée sur la figure 5.4 et définie comme suit. Soient $r \in \{1, \dots, \kappa\}$ et $i \in \{1, \dots, p\}$ un indice du mot v tels que la i -ième lettre $\ell := v(i)$ de v soit la r -ième lettre a_r de l'alphabet A . Si la lettre ℓ ne figure pas plus de fois dans le mot v à gauche strictement du rang i que dans le p -mot canonique \tilde{w} , alors on pose $\Sigma_v(i) = r + s\kappa$, où $s = N(v, i)$ est le nombre d'occurrences de la lettre ℓ dans le mot v à gauche strictement du rang i . Ainsi la $\Sigma_v(i)$ -ième lettre du p -mot canonique \tilde{w} est la s -ième occurrence de la i -ième lettre de v . Maintenant pour $r \in \{1, \dots, \kappa\}$, on considère les indices i du mot v pour lesquels la i -ième lettre $v(i)$ de v est la r -ième lettre a_r de A , et figure strictement plus de fois à gauche strictement du rang i dans v que dans le p -mot canonique \tilde{w} tout entier. On met ces indices en correspondance avec les indices j du p -mot canonique \tilde{w} non encore affectés, qui sont ceux correspondant aux lettres

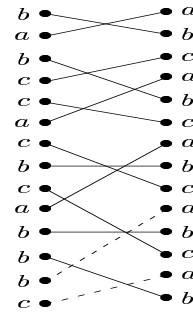


Fig. 5.4

Couplage canonique.

qui figurent plus de fois strictement dans le mot \tilde{w} que dans le mot v , et ceci se fait “de gauche à droite” : le plus petit tel i est envoyé sur le plus petit tel j , etc.

• Soient $M < 0$ un entier, w et w' deux mots de longueur M sur A . Soit $\varphi_{\emptyset}^{(M+1)}$ une permutation de $\{1, \dots, \ell_M\}$. Les mots w et w' étant couplés lettre à lettre par φ , chaque fois que l'on remplace l'une après l'autre la e_{M+1} -ième lettre de w par la lettre \dagger , puis qu'on remplace la e_{M+2} -ième lettre du mot vivant restant par la lettre \dagger , \dots , puis qu'on remplace la e_n -ième lettre du mot vivant restant par la lettre \dagger , si nous remplaçons simultanément par \dagger la lettre de w' correspondante par $\varphi_{\emptyset}^{(M+1)}$, nous voyons qu'il apparaît (figure 5.5), pour

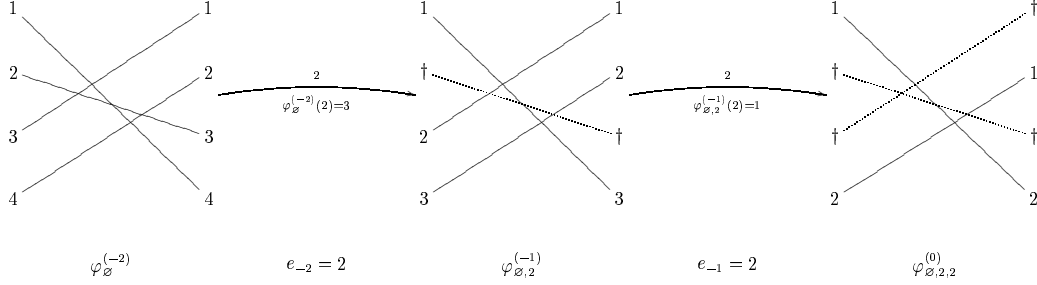


Fig. 5.5: Les permutations induites par $\varphi_{\emptyset}^{(-2)}$ sur les sous-mots vivants résiduels.

tout $n \in \llbracket M, 0 \rrbracket$, $k \in \{1, \dots, |n| - M\}$, et toute branche $(e_{M+1}, \dots, e_{n-1})$, des permutations $\varphi_{\emptyset, e_{M+1}, \dots, e_{M+k-1}}^{(M+k)}$ de $\{1, \dots, \ell_M - k\}$ telles que le mot $g_{M \rightsquigarrow n}^{\dagger}(w, e_{M+1}, \dots, e_n)$ et le mot

$$g_{M \rightsquigarrow M+1}^{\dagger}(w', \varphi_{\emptyset}^{(M+1)}(e_{M+1}), \varphi_{\emptyset, e_{M+1}}^{(M+2)}(e_{M+2}), \varphi_{\emptyset, e_{M+1}, e_{M+2}}^{(M+3)}(e_{M+3}), \varphi_{\emptyset, e_{M+1}, \dots, e_{n-1}}^{(n)}(e_n))$$

sont couplés lettre à lettre par $\varphi_{\emptyset}^{(M+1)}$, les lettres \dagger étant couplées aux lettres \dagger , et leurs sous-mots vivants sont couplés lettre-à-lettre par $\varphi_{\emptyset, e_{M+1}, \dots, e_{n-1}}^{(n)}$. Nous dirons que ce sont *les permutations induites par $\varphi_{\emptyset}^{(M+1)}$ sur les sous-mots vivants résiduels lors du gommage avec $(e_{M+1}, e_{M+2}, \dots, e_n)$* .

5.3.3 Construction de $(\tilde{\eta}_n)_{n \leq 0}$.

Soit A un ensemble fini totalement ordonné muni de la mesure de probabilité uniforme μ . Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $(W_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ le processus des mots gommés sur (A, μ) . Soient $M < N \leq 0$ des entiers. On note \tilde{w} le mot canonique sur A^{ℓ_M} et Σ_{W_M} le couplage canonique de W_M (avec \tilde{w}). Chaque fois que sont remplacées les unes après les autres la η_{M+1} -ième lettre de w par la lettre \dagger , puis la η_{M+2} -ième lettre du mot vivant restant par la lettre \dagger , \dots , puis la η_N -ième lettre du mot vivant restant par la lettre \dagger , nous remplaçons simultanément par \dagger la lettre de \tilde{w} correspondante par Σ_{W_M} . Pour tout $k \in \{1, \dots, |M| - |N|\}$, on note alors $\varphi_{W_M, \eta_{M+1}, \dots, \eta_{M+k-1}}^{(M+k)}$ la permutation du couplage induit sur les mots vivants à l'instant $M+k-1$ (voir figure 5.6).

On note alors $\tilde{W}_{M+1}, \tilde{W}_{M+2}, \dots, \tilde{W}_N$ les sous-mots vivants résiduels du mot canonique obtenus lors du gommage avec $(\eta_{M+1}, \eta_{M+2}, \dots, \eta_N)$. Si on pose

$$\eta'_{M+k} = \varphi_{W_M, \eta_{M+1}, \eta_{M+2}, \dots, \eta_{M+k-1}}^{(M+k)}(\eta_{M+k}),$$

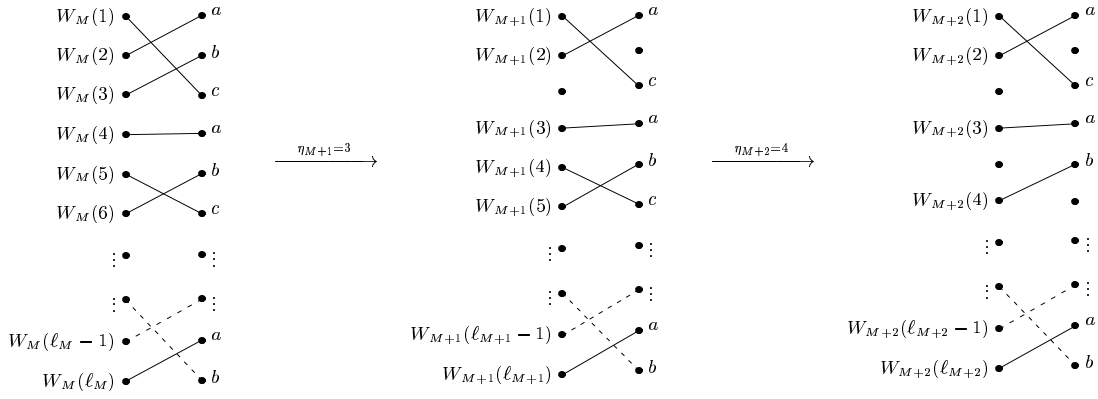


Fig. 5.6: Σ_{W_M} , $\varphi_{W_M, \eta_{M+1}}^{(M+2)}$, $\varphi_{W_M, \eta_{M+1}, \eta_{M+2}}^{(M+3)}$.

à l'instant $M + k$, le sous-mot vivant du mot canonique \tilde{w} est

$$\begin{aligned} \tilde{W}_{M+k} &= g_{M \rightsquigarrow n+1}(\tilde{w}, \eta'_{M+1}, \eta'_{M+2}, \dots, \eta'_{M+k-1}, \eta'_{M+k}) \\ &= c \circ g_k^{\dagger M}(\tilde{W}_{M+k-1}, \eta'_{M+k}) \end{aligned}$$

En d'autres termes, le mot \tilde{W}_{M+1} est obtenu en supprimant la η'_{M+1} -ième lettre du mot canonique \tilde{w}_M et en conservant l'ordre des lettres restantes, et pour $n \in \llbracket M, N-1 \rrbracket$, le mot \tilde{W}_n est obtenu en supprimant la η'_n -ième lettre de \tilde{W}_{n-1} et en conservant l'ordre des lettres restantes. Pour tout $n \in \llbracket M, N \rrbracket$, le mot \tilde{W}_n est donc mesurable dans $\sigma(\eta'_{M+1}, \dots, \eta'_n)$.

Remarque 5.3.3. On peut écrire

$$(\eta'_{M+1}, \dots, \eta'_N) = \tau_{W_M}^{(M \rightsquigarrow N)}(\eta_{M+1}, \dots, \eta_N)$$

où pour $w \in A^{\ell_M}$, $\tau_w^{(M \rightsquigarrow N)}$ est l'automorphisme d'arbre

$$\tau_{W_M}^{(M \rightsquigarrow N)} = \varphi_{W_M}^{(M)} \ltimes^{-1} \varphi_{W_M, \bullet_{M+1}}^{(M+1)} \ltimes^{-1} \varphi_{W_M, \bullet_{M+1}, \bullet_{M+2}}^{(M+2)} \ltimes^{-1} \dots \ltimes^{-1} \varphi_{W_M, \bullet_{M+1}, \dots, \bullet_{N-1}}^{(N-1)}.$$

Proposition 5.3.4. Avec les notations ci-dessus, $(\eta'_{M+1}, \dots, \eta'_N)$ est une innovation de \mathcal{F} sur $\llbracket M, N \rrbracket$ qui est l'image de $(\eta_{M+1}, \dots, \eta_N)$ par un changement d'innovation indexé par X_M , le ℓ_N -mot aléatoire \tilde{W}_N est mesurable dans $\sigma(\eta'_{M+1}, \dots, \eta'_N)$, et on a $\mathbb{P}[W_N \neq \tilde{W}_N] \rightarrow 0$ quand $M \rightarrow -\infty$. Avec le lemme 5.3.2, ceci permet de construire un processus $(\tilde{\eta}_n)_{n \leq 0}$ d'innovations de \mathcal{F} qui engendre \mathcal{F} .

Le fait que $\mathbb{P}[W_N \neq \tilde{W}_N] \rightarrow 0$ sera prouvé dans le lemme 5.3.5 ci-dessous. On construit à l'aide du lemme 5.3.2 un processus $(\tilde{\eta}_n)_{n \leq 0}$ d'innovations de \mathcal{F} qui engendre \mathcal{F} de la manière suivante. On se donne une suite $(\delta_k)_{k \leq 0}$ de réels strictement positifs qui décroît vers 0 quand k décroît vers $-\infty$, et on construit récursivement une suite d'entiers négatifs $(N_k)_{k \leq 0}$ strictement croissante avec $N_0 = 0$ et $(\tilde{\eta}_{N_{k-1}+1}, \dots, \tilde{\eta}_{N_k})$ satisfaisant aux conditions suivantes pour tout $k \leq 0$:

- $(\tilde{\eta}_{N_{k-1}+1}, \dots, \tilde{\eta}_{N_k})$ est l'image de $(\eta_{N_{k-1}+1}, \dots, \eta_{N_k})$ par un changement d'innovation indexé par $W_{N_{k-1}}$
- Il existe un mot aléatoire \tilde{W}_{N_k} de longueur ℓ_{N_k} qui est mesurable pour $\sigma(\tilde{\eta}_{N_{k-1}+1}, \dots, \tilde{\eta}_{N_k})$ et tel que $\mathbb{P}[W_{N_k} \neq \tilde{W}_{N_k}] < \delta_k$.

Montrons maintenant que $\mathbb{P}[W_N \neq \widetilde{W}_N] \rightarrow 0$. Avec les notations de la proposition 5.3.4, posons $p = |M| + 1 = \ell_M$ et $q = |N| + 1 = \ell_N$ et notons \tilde{w} le p -mot canonique et Σ_w le couplage canonique d'un p -mot w . Après les $\ell_M - \ell_N$ tirages au sort $\eta_{M+1}, \dots, \eta_N$, W_N est un q -mot extrait de W_M sans dépendance et uniformément; l'ensemble qu'on note $Q_M^N \subset \{1, \dots, p\}$ des indices des lettres de W_M qui n'ont pas été effacées jusqu'à l'instant N est une partie à q éléments de $\{1, \dots, p\}$ aléatoire, uniformément distribuée et indépendante de W_M . Le mot \widetilde{W}_N est alors le q -mot $\tilde{w}|_{\Sigma_{W_M}(Q_M^N)}$ extrait du mot canonique \tilde{w} en ne conservant que ses lettres dont l'indice est dans $\Sigma_{W_M}(Q_M^N)$.

Désignant par W une variable aléatoire uniforme sur les p -mots, par Q une variable aléatoire indépendante de W uniforme sur les parties à q éléments de $\{1, \dots, p\}$, la loi de (W_N, \widetilde{W}_N) est alors celle de $(W|_Q, \tilde{w}|_{\Sigma_W(Q)})$. La proposition 5.3.4 est alors une application directe du lemme 5.3.5 ci-dessous.

Lemme 5.3.5. *Soient $p > q > 0$ des entiers. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient W une variable aléatoire uniforme sur les p -mots sur A et Q une variable aléatoire indépendante de W uniforme sur les parties à q éléments de $\{1, \dots, p\}$. On note $\pi(p, q)$ la probabilité*

$$\pi(p, q) = \mathbb{P}[W|_Q = \tilde{w}|_{\Sigma_W(Q)}],$$

où \tilde{w} est le p -mot canonique sur A . Alors, pour q fixé, $\pi(p, q) \rightarrow 1$ quand $p \rightarrow +\infty$.

Démonstration. Rappelons qu'on a noté $\kappa = \#A$. Pour montrer que $\pi(p, q) \rightarrow 1$ quand $p \rightarrow \infty$, introduisons trois événements :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\forall i \in Q, i \leq p - p^{3/4} - \kappa\}; \\ E_2 &= \{\forall i, j \in Q, i = j \text{ ou } |i - j| \geq 3p^{3/4}\}; \\ E_3 &= \{\forall i \in Q, \frac{1}{\kappa}(i - p^{3/4}) \leq N(W, i) \leq \frac{1}{\kappa}(i + p^{3/4})\}, \end{aligned}$$

où $N(W, i) = \sum_{k=1}^{i-1} \mathbb{1}_{W(k)=W(i)}$ est le nombre d'occurrences de la i -ième lettre $W(i)$ de W à gauche du rang i .

Sur $E_1 \cap E_3$, si $i \in Q$ et si $W(i)$ est la r -ième lettre de l'alphabet, on a

$$r + \kappa N(W, i) \leq \kappa + \kappa N(W, i) \leq \kappa + i + p^{3/4} \leq p,$$

d'où $\Sigma_W(i) = r + \kappa N(W, i)$ par définition de Σ_W et $W(i) = \tilde{w}(\Sigma_W(i))$: la i -ième lettre de W et la $\Sigma_W(i)$ -ième lettre de \tilde{w} sont toutes deux égales à la r -ième lettre de l'alphabet. Les mots $W|_Q$ et $\tilde{w}|_{\Sigma_W(Q)}$ sont donc formés des mêmes lettres.

On a de plus

$$r + i - p^{3/4} \leq r + \kappa N(W, i) = \Sigma_W(i) \leq r + i + p^{3/4},$$

d'où $i - p^{3/4} \leq \Sigma_W(i) \leq \kappa + i + p^{3/4}$ et donc

$$|i - \Sigma_W(i)| \leq \kappa + p^{3/4}. \quad (5.3.2)$$

Sur $E_1 \cap E_2 \cap E_3$, si p est assez grand pour que $3p^{3/4} > 2(\kappa + p^{3/4})$, l'inégalité (5.3.2) et la définition de E_2 entraînent que la restriction de Σ_W à Q est croissante. Comme on a vu

que les mots $W|_Q$ et $\tilde{w}_{|\Sigma_W(Q)}$ sont formés des mêmes lettres sur $E_1 \cap E_3$, ceci montre de plus qu'ici ils sont égaux. Ainsi,

$$E_1 \cap E_2 \cap E_3 \subset \{W|_Q = \tilde{w}_{|\Sigma_W(Q)}\},$$

et il ne reste qu'à vérifier que $\mathbb{P}[E_1^c \cup E_2^c \cup E_3^c] \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$.

L'estimation de $\mathbb{P}[E_1^c \cup E_2^c]$ se fait facilement par tirages un à un, sans remise, des éléments de Q :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[E_1^c \cup E_2^c] &\leq \frac{p^{3/4} + \kappa + 1}{p} + \frac{p^{3/4} + \kappa + 1 + 6p^{3/4} + 2}{p-1} \\ &+ \frac{p^{3/4} + \kappa + 1 + 12p^{3/4} + 4}{p-2} + \dots + \frac{p^{3/4} + \kappa + 1 + (q-1)(6p^{3/4} + 2)}{p-q+1} \\ &\leq q \frac{p^{3/4} + \kappa + 1 + q(6p^{3/4} + 2)}{p-q} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Pour estimer $\mathbb{P}[E_3^c]$, considérons $k \in \{1, \dots, q\}$ et appelons I la v.a. égale au k -ième élément de Q . Conditionnellement à $I = i$, la loi du nombre d'occurrences $N(W, I)$ de la lettre $W(I)$ dans W à gauche du rang I est la loi binomiale $\text{Bin}(i-1, \frac{1}{\kappa})$, par indépendance de W et de Q . Or

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\left|\text{Bin}\left(i-1, \frac{1}{\kappa}\right) - \frac{i}{\kappa}\right| > \frac{p^{3/4}}{\kappa}\right] &\leq \mathbb{P}\left[\left|\text{Bin}\left(i-1, \frac{1}{\kappa}\right) - \frac{i-1}{\kappa}\right| > \frac{p^{3/4}-1}{\kappa}\right] \\ &\leq \left(\frac{\kappa}{p^{3/4}-1}\right)^2 (i-1) \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \\ &< \frac{p\kappa}{(p^{3/4}-1)^2}. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathbb{P}\left[\left|N(W, I) - \frac{I}{\kappa}\right| > \frac{p^{3/4}}{\kappa} \mid I = i\right] < \frac{p\kappa}{(p^{3/4}-1)^2},$$

et ceci ayant lieu pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, on a aussi

$$\mathbb{P}\left[\left|N(W, I) - \frac{I}{\kappa}\right| > \frac{p^{3/4}}{\kappa}\right] < \frac{p\kappa}{(p^{3/4}-1)^2}.$$

En sommant cette dernière inégalité sur $k \in \{1, \dots, q\}$, il vient

$$\mathbb{P}[E_3^c] < \frac{qp\kappa}{(p^{3/4}-1)^2} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0.$$

□

5.4 Cas d'autres alphabets

Nous allons démontrer dans cette section que la filtration du processus des mots gommés sur un alphabet (A, \mathfrak{A}, μ) est toujours de type produit dès que (A, \mathfrak{A}, μ) est un espace probabilisé

essentiellement séparable. En un premier temps nous établirons ceci dans la sous-section 5.4.1 dans le cas où A est le segment unité $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue notée λ , en utilisant le cas que nous avons établi des alphabets finis munis de la mesure de probabilité uniforme et le critère de Vershik de premier niveau.

Une fois le cas de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ établi, le cas de tout alphabet (A, \mathfrak{A}, μ) qui est un espace probabilisé essentiellement séparable sans partie atomique se déduit par isomorphisme.

Le cas plus général où (A, \mathfrak{A}, μ) est un espace probabilisé essentiellement séparable quelconque sera déduit du cas de $([0, 1], \lambda)$ et des résultats de la théorie de Vershik, sous forme de nos résultats ultérieurs sur la théorie du I-confort.

5.4.1 Cas de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$.

Quand un processus des mots gommés sur (A, \mathfrak{A}, μ) est donné sur un espace probabilisé, nous noterons parfois $\mathcal{F}^\mu = (\mathcal{F}_n^\mu)_{n \leq 0}$ la filtration qu'il engendre. On note λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. On suppose que le processus des mots gommés $(W^\lambda, \eta) = (W_n^\lambda, \eta_n)_{n \leq 0}$ sur $([0, 1], \lambda)$ est défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Cet espace de probabilité filtré permet de construire \mathcal{F}^μ pour toute probabilité μ sur \mathbb{R} . On introduit la fonction de répartition $F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de μ , définie par $F_\mu(x) = \mu(-\infty, x]$. Soit $f = F_\mu^{-1}$ l'inverse continue à droite de F_μ . Alors si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ (comme les lettres des mots W_n^λ), la loi de $f(U)$ est μ . En posant $W_n^\mu = f(W_n^\lambda)$, le processus $(W_n^\mu, \eta_n)_{n \leq 0}$ est alors le processus des mots gommés sur l'alphabet (\mathbb{R}, μ) .

Proposition 5.4.1. *On note λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. La filtration \mathcal{F}^λ du processus des mots gommés sur l'alphabet $([0, 1], \lambda)$ est de type produit.*

Nous allons déduire rapidement la proposition 5.4.1 de la proposition 5.4.2 suivante et de nos résultats sur le critère de Vershik de premier niveau.

Proposition 5.4.2. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local avec un processus d'innovations $(V_n)_{n \leq 0}$, et soient $\mathcal{F}^{(j)} = (\mathcal{F}_n^{(j)})_{n \leq 0}$, $j \in \mathbb{N}$, des filtrations telles que $\mathcal{F}^{(j)} \subset \mathcal{F}$ et pour lesquelles $(V_n)_{n \leq 0}$ est un processus d'innovations. On suppose que $\mathcal{F}_0^{(j)} \uparrow \mathcal{F}_0$ quand $j \rightarrow +\infty$ et que chaque filtration $\mathcal{F}^{(j)}$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau. Alors \mathcal{F} satisfait au critère de Vershik de premier niveau.*

Démonstration. Sous ces hypothèses, le corollaire 4.4.10 montre que toute innovation d'une filtration $\mathcal{F}^{(j)}$ est une innovation de \mathcal{F} , et il suffit d'appliquer le corollaire 3.5.4. \square

★ Preuve de la proposition 5.4.1. On sait que $\mathcal{F}^{(j)}$ est de type produit, donc qu'elle satisfait au critère de Vershik de premier niveau par le lemme 3.1.4, et les hypothèses de la proposition 5.4.2 sont vérifiées avec $\mathcal{F} = \mathcal{F}^\lambda$ et $(V_n)_{n \leq 0} = (\eta_n)_{n \leq 0}$. On conclut avec la proposition 3.1.5. \square

5.4.2 Cas d'un alphabet essentiellement séparable.

Lorsque μ est une mesure de probabilité distribuée de manière quelconque sur un ensemble fini A , il semble difficile de construire pour la filtration du processus des mots gommés sur (A, μ) un processus d'innovations générateur par une méthode analogue à celle que nous avons utilisée lorsque μ est uniforme, dans la section 5.3. Le corollaire suivant s'en déduirait avec la proposition 5.4.2 avec des approximations, comme nous avons déduit le cas de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ à partir des cas d'un ensemble fini muni de la probabilité uniforme.

Corollaire 5.4.3. *Pour toute espace probabilisé (A, \mathfrak{A}, μ) essentiellement séparable, la filtration \mathcal{F}^μ du processus des mots gommés sur (A, μ) est de type produit.*

Nous allons déduire ce corollaire du cas maintenant établi de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ et de résultats sur le I-confort que nous établirons plus tard.

Démonstration. Il suffit de montrer que c'est le cas pour tout alphabet $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}, \mu)$. Considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel est défini le processus des mots gommés (W_n^λ, η_n) sur l'alphabet $([0, 1], \lambda)$, où λ est la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. On introduit la fonction de répartition $F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ de μ , définie par $F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x])$. Soit $f = F_\mu^{-1}$ l'inverse continue à droite de F_μ . On pose alors $W_n^\mu = f(W_n^\lambda)$. Alors le processus $(W_n^\mu, \eta_n)_{n \leq 0}$ est le processus des mots gommés sur (\mathbb{R}, μ) . Notons \mathcal{F}^μ sa filtration. Elle est immergée (définition 8.2.1) dans \mathcal{F}^λ par le lemme 8.2.8. La filtration \mathcal{F}^λ est de type produit par le corollaire 5.4.1, donc I-confortable par la proposition 14.3.4. Comme \mathcal{F}^μ est dyadique et qu'elle est immergée dans \mathcal{F}^λ , elle satisfait le critère de Vershik de premier niveau d'après le corollaire 15.2.6, donc elle est de type produit par la proposition 3.1.5. \square

5.4.3 Cas d'un alphabet non séparable.

Nous allons ici établir que la filtration du processus des mots gommés sur un alphabet (A, \mathfrak{A}, μ) satisfait toujours le critère de Vershik de premier niveau, sans hypothèse de séparabilité sur (A, \mathfrak{A}, μ) .

Lemme 5.4.4. *Soient (A, \mathfrak{A}, μ) un espace probabilisé et $\ell \geq 1$ un entier. On se donne une application mesurable $f: A^\ell \rightarrow \mathbb{R}$. Alors pour tout réel $\delta > 0$, il existe une σ -algèbre $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ (essentiellement) finie, et une application $H: A^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable pour la tribu produit $\mathfrak{B}^{\otimes \ell}$ telle que $\mu^{\otimes \ell} [|f - H| > \delta] < \delta$. En d'autres termes, l'ensemble des sous- σ -algèbres de \mathfrak{A}^ℓ de la forme $\mathfrak{B}^{\otimes \ell}$ où $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ est (essentiellement) finie est substantiel dans \mathfrak{A}^ℓ .*

Démonstration. Soit $\delta > 0$. On a un entier $p \geq 1$, des réels α_k et des événements $B_k(i) \in \mathfrak{A}$ tels que

$$\mu \left[\left| f - \sum_{k=1}^p \alpha_k \mathbb{1}_{\{B_k(1)\}} \mathbb{1}_{\{B_k(2)\}} \cdots \mathbb{1}_{\{B_k(\ell)\}} \right| > \delta \right] < \delta.$$

Il suffit de prendre pour \mathfrak{B} la (complétée de la) σ -algèbre engendrée par tous les événements $B_k(i)$. \square

Proposition 5.4.5. *Pour tout alphabet probabilisé (A, \mathfrak{A}, μ) , la filtration du processus des mots gommés sur cet alphabet satisfait le critère de Vershik de premier niveau.*

Démonstration. Notons $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé sur lequel est défini le processus des mots gommés $(W_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ sur (A, \mathfrak{A}, μ) , et notons $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ sa filtration. Par le corollaire 3.6.1, il suffit de montrer que chaque σ -algèbre $\sigma(W_n)$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau. Fixons n et considérons une variable aléatoire X_n mesurable pour $\sigma(W_n)$ qu'on écrit $X_n = f(W_n)$ où $f: A^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne. Soit $\delta > 0$. On note \mathfrak{B} et H la σ -algèbre et la fonction données par le lemme précédent. On a alors $\mathbb{P} [|X_n - S_n| > \delta] < \delta$ avec $S_n = H(W_n)$. Soit F une application qui engendre la σ -algèbre \mathfrak{B} . La fonction H est de la forme $H = G \circ (F, F, \dots, F)$ avec $G: A^\ell \rightarrow \mathbb{R}$. Pour tout entier $\ell \geq 1$ et tout mot $w = w(1)w(2) \cdots w(\ell)$ sur A , notons $F(w) = F(w(1))F(w(2)) \cdots F(w(\ell))$. Le processus $(F(W_m), \eta_m)_{m \leq 0}$ est le processus des mots gommés sur un alphabet fini, et par le corollaire

5.4.3, sa filtration, qu'on note $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n \leq 0}$, est de type produit. On a donc un entier $n_0 < 0$, une innovation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) de \mathcal{E} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et une variable aléatoire simple Z_n mesurable dans $\sigma(V_{n_0+1}, \dots, V_0)$ telle que $\mathbb{P}[F(W_n) \neq Z_n] < \delta$. On a alors $\mathbb{P}[S_n \neq T_n] < \delta$ avec $T_n = G(Z_n)$, donc $\mathbb{P}[|S_n - T_n| > \delta] < \delta$, et

$$\mathbb{P}[|X_n - T_n| > 2\delta] < \mathbb{P}[|X_n - S_n| > \delta] + \mathbb{P}[|S_n - T_n| > \delta] < 2\delta.$$

Comme (V_{n_0+1}, \dots, V_0) est aussi une innovation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ (corollaire 4.4.10), ceci montre que $X_n \in V^0(\mathcal{F}; \mathbb{R})$. \square

Corollaire 5.4.6. *Il existe une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ conditionnellement séparable qui satisfait le critère de Vershik de premier niveau mais qui n'est pas essentiellement séparable et pas de type produit.*

Démonstration. Prenons l'alphabet $A = [0, 1]^{\mathbb{R}}$ muni de la tribu produit $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_{[0,1]}^{\otimes \mathbb{R}}$ et de la mesure produit $\mu = \lambda^{\otimes \mathbb{R}}$ de la mesure de Lebesgue λ sur $[0, 1]$. La filtration du processus des mots gommés sur (A, \mathfrak{A}, μ) est conditionnellement séparable et n'est pas essentiellement séparable. Elle satisfait le critère de Vershik de premier niveau par le corollaire précédent. Si elle était de type produit, elle serait engendrée par un processus d'innovations d'après le lemme 2.1.5, et serait essentiellement séparable. \square

Remarquons que \mathcal{F} est kolmogorovienne d'après le corollaire 3.4.6. Cette filtration est l'exemple dont nous parlions dans la remarque 3.4.7.

6. L'EXEMPLE DES MOTS DÉCOUPÉS.

Ce chapitre s'intéresse à la filtration r_n -adique engendrée par le *processus des mots découpés* r_n -adique sur l'alphabet (A, \mathfrak{A}, μ) . Nous allons établir une condition suffisante sur la suite $(r_n)_{n \leq 0}$ pour que cette filtration soit de type produit. La même démarche que pour les mots gommés sera empruntée : sous cette condition, le lemme de construction 5.3.2 sera utilisé dans le cas où A est fini et muni de la mesure de probabilité uniforme ; à l'aide du critère de Vershik de premier niveau, on obtient alors le cas où A est l'intervalle $[0, 1]$ muni de la mesure de Lebesgue, et à l'aide des critères de Vershik de second niveau, objets de la partie IV, on obtient le cas de tout alphabet essentiellement séparable.

Nous verrons brièvement dans la dernière section que cet exemple est aussi étudié dans [Ver] mais sous une forme différente.

6.1 Découpage r_n -adique. Notations.

La transition markovienne des processus de mots découpés est un procédé de *découpage* r_n -adique que nous décrivons d'abord ici. Les notations de cette section seront encore utilisées dans le chapitre 11. Nous utilisons les notations de la section 5.1 du chapitre 5.

Une suite $r = (r_n)_{n \leq 0}$ d'entiers positifs est donnée. Pour tout $n \leq 0$, on pose $\ell_n = \prod_{k=n+1}^0 r_k$. Ainsi $\ell_0 = 1$ et $\ell_{n-1} = r_n \ell_n$ pour tout $n \leq 0$. On note $I_n^{(r_n)}$ "l'intervalle"

$$I_n^{(r_n)} = \{1, 2, \dots, \ell_n\},$$

qu'on découpe en r_{n+1} intervalles consécutifs $I_{n,j}^{(r_n)} = \{p_j, p_j + 1, \dots, q_j\}$ avec $p_j = j\ell_{n-1} + 1$ et $q_j = (j+1)\ell_{n-1}$: Maintenant, soient A un alphabet et w un ℓ_n -mot de A . Les r_{n+1} sous-mots

$$\begin{aligned} I_n^{(r_n)} &= \{1, \dots, \ell_{n-1}\} \cup \{\ell_{n-1} + 1, \dots, 2\ell_{n-1}\} \cup \dots \cup \{p_j, \dots, q_j\} \cup \dots \cup \{p_{r_{n+1}}, \dots, \ell_n\} \\ &= I_{n,1}^{(r_n)} \cup I_{n,2}^{(r_n)} \cup \dots \cup I_{n,j}^{(r_n)} \cup \dots \cup I_{n,r_{n+1}}^{(r_n)}. \end{aligned}$$

$w_{|I_{n,j}^{(r_n)}}$ de w , concaténés de gauche à droite, donnent le mot w :

$$w = w_{|I_{n,1}^{(r_n)}} w_{|I_{n,2}^{(r_n)}} \cdots w_{|I_{n,j}^{(r_n)}} \cdots w_{|I_{n,r_{n+1}}^{(r_n)}},$$

qui apparaît sous cette écriture comme un mot de longueur r_{n+1} sur l'alphabet $A^{\ell_{n+1}}$; sa j -ième lettre est $w_{|I_{n,j}^{(r_n)}}$.

Définition et notation 6.1.1. Pour tout alphabet A , on note $s_n^{(n+1)} : A^{\ell_n} \times \{1, 2, \dots, r_{n+1}\}$ l'application qui à un couple (w, j) associe le j -ième sous-mot $w_{|I_{n,j}^{(r_n)}}$. La suite des applications $(s_n^{(n+1)})_{n < 0}$ est appelée *le mécanisme de découpage des mots r_n -adique*.

sur A^{ℓ_m} ; la loi conditionnelle de X_m sachant \mathcal{F}_n est la mesure empirique associée à cet échantillon et par la loi des grands nombres, elle converge presque sûrement vers la mesure produit $\mu^{\otimes \ell_m}$. \square

Lemme 6.2.2. *Si μ n'est pas dégénérée, le processus d'innovations $(\eta_n)_{n \leq 0}$ n'engendre pas \mathcal{F} .*

Démonstration. On montre pour cela que X_0 est indépendante de $\sigma(\eta_m, m \leq 0)$. Indépendamment de X_n , à chaque tirage au sort $(\eta'_{n+1}, \dots, \eta'_0)$ correspond un unique indice $I_n \in \{1, \dots, \ell_n\}$ tel que $X_0 = X_n(I_n)$ soit la I_n -ième lettre de X_n . Soit $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée. Puisque I_n est indépendante de X_n , on a

$$\mathbb{E}[g(X_0) | \sigma(\eta_{m+1}, \eta_{m+2}, \dots, \eta_0)] = \int_{w \in A^{\ell_n}} g(w(I_n)) d\mathbb{P}_{X_n}(w) = h(I_n),$$

avec $h(i) = \mathbb{E}[g(X_n(i))] = \int g d\mu$ qui ne dépend pas de i , ce qui montre qu'il y a indépendance de X_0 avec la σ -algèbre $\sigma(\eta_{n+1}, \eta_{n+2}, \dots, \eta_0)$. \square

Dans ce chapitre nous allons établir des conditions suffisantes sur la suite de découpage et l'alphabet pour que \mathcal{F} soit de type produit.

Discussion.— Lorsque $r_n \equiv 2$, nous dirons que le processus $(X_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ est le *processus des mots découpés dyadique* sur (A, \mathfrak{A}, μ) . Lorsque A est fini, et μ est la mesure de probabilité uniforme sur A , il est déjà démontré dans la littérature ([Smo], [ES], [Em1]) que la filtration du processus des mots découpés dyadique n'est pas de type produit. D'abord dans [Smo], l'auteur montre que la filtration n'admet pas de *paramétrisation génératrice*, puis dans [ES], les auteurs, avec essentiellement les mêmes mathématiques, montrent qu'elle ne satisfait pas au critère de *I-confort* (chapitre 14). En fait, comme nous le verrons dans la section 6.4, cet exemple de filtration dyadique et kolmogorovienne qui n'est pas de type produit, est le premier exemple donné par Vershik (**Exemple 1** de [Ver]) d'une telle filtration. Il établit que la suite décroissante de partitions mesurables correspondante ne satisfait pas au *critère de standardité dyadique*, qui sera pour nous l'analogue du critère de *I-jonction en arbre* que nous définirons dans le chapitre 10. La preuve se ramène alors à un problème purement combinatoire, ce que nous expliquerons dans le chapitre 11.

Nous verrons plus tard qu'avec le théorème 1.1.1 et le *théorème d'isomorphisme lacunaire*, nous pouvons affirmer qu'il est possible d'*extraire* une filtration de type produit de toute filtration r_n -adique kolmogorovienne essentiellement séparable (voir chapitre 19). Or, une filtration extraite de la filtration d'un processus de mots découpés est encore la filtration d'un processus de mots découpés. C'est ce qui motive la recherche de conditions sur la suite de découpage $(r_n)_{n \leq 0}$ et l'alphabet (A, \mathfrak{A}, μ) d'un processus de mots découpés sous lesquelles sa filtration est de type produit. Celles que nous allons donner se trouvent déjà dans [Ver], mais elles sont établies avec des mathématiques propres aux suites décroissantes de partitions mesurables plutôt qu'aux filtrations, qui ne semblent pas être les mêmes que les nôtres. Nous donnerons dans le chapitre 11 une condition sur la suite de découpage et sur l'alphabet pour que la filtration du processus des mots sélectionnés ne soit pas de type produit (voir la discussion en-dessous du lemme 11.2.2).

6.3 Construction de $(\tilde{\eta}_n)_{n \leq 0}$.

La suite $(r_n)_{n \leq 0}$ est donnée, et le processus des mots découpés r_n -adique $(X_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ sur un alphabet (A, \mathfrak{A}, μ) est défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ sa filtration. En un premier temps, nous allons déterminer une condition suffisante sur la suite de découpage $(r_n)_{n \leq 0}$ pour que \mathcal{F} soit de type produit dans le cas où A est fini et muni de la mesure de probabilité uniforme. Nous utiliserons le lemme suivant, valable pour tout alphabet.

Lemme 6.3.1. *Pour tout $n \leq 0$, soit \tilde{w}_n un mot de longueur ℓ_n . Pour tout $n < 0$, soit $\{\varphi_{w_n}^{(n+1)}\}_{w_n \in A^{\ell_n}}$ une famille mesurable de permutations de $\{1, \dots, r_{n+1}\}$. On pose $\tilde{\eta}_{n+1} = \varphi_{X_n}^{(n+1)}(\eta_{n+1})$. On sait que $(\tilde{\eta}_n)_{n \leq 0}$ est un processus d'innovations de \mathcal{F} (proposition 4.3.7). On définit le mot $\tilde{X}_{n+1} = s_n^{(n+1)}(\tilde{w}_n, \tilde{\eta}_{n+1})$ comme étant le $\tilde{\eta}_{n+1}$ -ième sous-mot de \tilde{w}_n de longueur ℓ_{n+1} . On suppose que*

$$\mathbb{P}[X_{n+1} \neq \tilde{X}_{n+1}] \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow -\infty. \quad (6.3.1)$$

Alors \mathcal{F} est de type produit, engendrée par le processus d'innovations $(\tilde{\eta}_n)_{n \leq 0}$.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 5.3.2 avec $N_k = k$. □

Il s'agit donc de construire ces permutations $\varphi_{w_n}^{(n+1)}$. Nous traitons le cas où A est fini et μ est la mesure de probabilité uniforme sur A . Chaque fois que nous utiliserons les notions de *mot canonique* et de *couplage canonique* (page 53), il sera implicitement supposé que l'alphabet est totalement ordonné. La construction est donnée dans la preuve de la proposition 6.3.3 qui utilisera pas à pas le lemme suivant pour sélectionner r_0 , puis r_{-1} , puis r_{-2} , \dots , r_n , \dots en sorte que la condition (6.3.1) du lemme 6.3.1 soit satisfaite.

Lemme 6.3.2. *Soit \bar{A} un ensemble fini de cardinal $\#\bar{A} = \kappa$ et $r \geq 2$ un entier. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on considère une variable aléatoire X uniforme sur les r -mots sur \bar{A} , et une variable aléatoire I indépendante de X uniforme sur $\{1, 2, \dots, r\}$. On note \tilde{w} le r -mot canonique sur \bar{A} et Σ_v le couplage canonique d'un mot $v \in \bar{A}^r$. On note*

$$\pi(r, \kappa) = \mathbb{P}\left[X(I) \neq \tilde{w}(\Sigma_X(I))\right]$$

la probabilité que la I -ième lettre de X soit différente de la $\Sigma_X(I)$ -ième lettre de \tilde{w} . Alors pour tout $\zeta \in]0, 1[$,

$$\pi(r, \kappa) \leq \frac{r^\zeta + \kappa + 1}{r} + \frac{r\kappa}{(r^\zeta - 1)^2}.$$

Démonstration. Rappelons que l'on note $N(X, I)$ le nombre d'occurrences de la lettre $X(I)$ dans le mot X à gauche du rang I . Introduisons deux événements :

$$E_1 = \{I \leq r - r^\zeta - \kappa\} \quad \text{et} \quad E_2 = \left\{N(X, I) \leq \frac{1}{\kappa}(I + r^\zeta)\right\}.$$

Sur $E_1 \cap E_2$, si $X(I)$ est la j -ième lettre de l'alphabet, on a

$$j + \kappa N(X, I) \leq \kappa + \kappa N(X, I) \leq \kappa + I + r^\zeta \leq r,$$

d'où $\Sigma_X(I) = j + \kappa N(X, I)$ par définition de Σ_X et $X(I) = \tilde{w}(\Sigma_X(I))$: la I -ième lettre de X et la $\Sigma_X(I)$ -ième lettre de \tilde{w} sont toutes deux égales à la j -ième lettre de l'alphabet, donc $\pi(r, \kappa) \leq \mathbb{P}[E_1^c \cap E_2^c]$. On a d'une part

$$\mathbb{P}[E_1^c] \leq \frac{r^\zeta + \kappa + 1}{r}.$$

D'autre part, $\mathbb{P}[E_2^c] \leq \mathbb{P}\left[|N(X, I) - I/\kappa| > r^\zeta/\kappa\right]$, et conditionnellement à $I = i$, la loi de $N(X, I)$ est la loi binomiale $\text{Bin}(i-1, \frac{1}{\kappa})$. Or

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left[\left|\text{Bin}\left(i-1, \frac{1}{\kappa}\right) - \frac{i}{\kappa}\right| > \frac{r^\zeta}{\kappa}\right] &\leq \mathbb{P}\left[\left|\text{Bin}\left(i-1, \frac{1}{\kappa}\right) - \frac{i-1}{\kappa}\right| > \frac{r^\zeta - 1}{\kappa}\right] \\ &\leq \left(\frac{\kappa}{r^\zeta - 1}\right)^2 (i-1) \frac{1}{\kappa} \left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \\ &< \frac{r\kappa}{(r^\zeta - 1)^2}. \end{aligned}$$

Cette majoration ne dépendant pas de i , on a

$$\mathbb{P}[E_2^c] \leq \frac{r\kappa}{(r^\zeta - 1)^2},$$

et on obtient la majoration désirée. \square

Proposition 6.3.3. *Soient A un ensemble fini de cardinal $\kappa \geq 1$ et μ la mesure de probabilité uniforme sur A . S'il existe $h' > \log \kappa$ tel que*

$$\log r_n - h' \ell_n \longrightarrow +\infty \quad \text{quand } n \rightarrow -\infty, \quad (\nabla_\kappa),$$

alors la filtration du processus r_n -adique des mots découpés sur (A, μ) est de type produit.

Démonstration. La condition (∇_κ) est équivalente à l'existence de $\zeta \in]0, 1[$ tel que

$$\frac{\kappa^{\ell_n}}{r_n^\zeta} \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow -\infty. \quad (\nabla_\kappa)$$

On construit $\tilde{\eta}_{-1}$ et \tilde{X}_0 comme indiqué dans le lemme 6.3.1 en prenant pour $\varphi_w^{(0)}$ le couplage canonique de $w \in A^{\ell_{-1}}$ avec le ℓ_{-1} -mot canonique sur A noté \tilde{w}_{-1} : on pose $\tilde{\eta}_0 = \varphi_{X_{-1}}^{(0)}(\eta_0)$ et $\tilde{X}_0 = s_{-1}^{(0)}(\tilde{w}_{-1}, \tilde{\eta}_0)$ est la $\tilde{\eta}_0$ -ième lettre du ℓ_{-1} -mot canonique \tilde{w}_{-1} . Un mot de longueur ℓ_{n-1} sur A est aussi un mot de longueur r_n sur l'alphabet A^{ℓ_n} . Alors ainsi de suite, on construit $\tilde{\eta}_n$ et \tilde{X}_n comme indiqué dans le lemme 6.3.1 en prenant pour $\varphi_w^{(n)}$, $w \in A^{\ell_{n-1}}$ le couplage canonique de w avec le r_n -mot canonique sur l'alphabet $A^{\ell_{n-1}}$ noté \tilde{w}_{n-1} : on pose $\tilde{\eta}_n = \varphi_{X_{n-1}}^{(n)}(\eta_n)$ et $\tilde{X}_n = s_{n-1}^{(n)}(\tilde{w}_{n-1}, \tilde{\eta}_n)$ est la $\tilde{\eta}_n$ -ième lettre du r_n -mot canonique \tilde{w}_{n-1} sur l'alphabet A^{ℓ_n} . En considérant que X_{n-1} est un r_n -mot sur A^{ℓ_n} , le lemme 6.3.2 donne alors

$$\mathbb{P}[X_n \neq \tilde{X}_n] \leq \frac{r_n^{\zeta'} + \kappa^{\ell_n} + 1}{r_n} + \frac{r_n \kappa^{\ell_n}}{(r_n^{\zeta'} - 1)^2} \quad (6.3.2)$$

pour tout $\zeta' \in]0, 1[$. Si la condition (∇_κ) est vérifiée pour un réel $\zeta \in]0, 1[$, elle l'est pour tout $\zeta' \geq \zeta$, et l'inégalité (6.3.2) appliquée avec $\zeta' \in]0, 1[$ tel que $2\zeta' > 1 + \zeta$ donne $\mathbb{P}[X_n \neq \tilde{X}_n] \longrightarrow 0$ quand $n \rightarrow -\infty$, puis le lemme 6.3.1 donne la conclusion. \square

Cas d'un alphabet essentiellement séparable. — La condition (∇_κ) est vérifiée pour tout $\kappa \geq 2$ si et seulement si

$$\frac{\log r_n}{\ell_n} \longrightarrow +\infty \quad \text{quand } n \rightarrow -\infty \quad (\nabla).$$

De manière analogue au processus des mots gommés du chapitre précédent, lorsqu'on se donne un espace probabilisé (A, \mathfrak{A}, μ) , on obtient alors le résultat suivant :

Proposition 6.3.4. *Sous la condition (∇) , pour tout alphabet (A, \mathfrak{A}, μ) qui est un espace de probabilité essentiellement séparable, la filtration du processus des mots découpés r_n -adique est standard r_n -adique.*

6.4 Les mots découpés dans [Ver].

La filtration des mots découpés est étudiée par Vershik sous forme de sa suite correspondante de partitions mesurables, c'est l'exemple 1 de Vershik ([Ver]), que nous allons brièvement exposer ici. Le lecteur est renvoyé à [Cou] pour un exposé agréable sur les partitions mesurables et la correspondance de Rokhlin entre σ -algèbres complètes et partitions mesurables.

Nous appelons une *transformation inversible* d'un espace de Lebesgue $(\mathcal{X}, \mathfrak{X}, \nu)$, une application bijective $T: \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ mesurable qui préserve μ et telle que T^{-1} est mesurable. Nous notons $\mathbf{Aut}(\mathcal{X}, \mathfrak{X}, \mu)$ le groupe des transformations inversibles de $(\mathcal{X}, \mathfrak{X}, \mu)$.

Soit Γ un groupe. Une *action de Γ sur $(\mathcal{X}, \mathfrak{X}, \nu)$* est un morphisme de groupe $T: \Gamma \rightarrow \mathbf{Aut}(\mathcal{X}, \mathfrak{X}, \mu)$ aussi notée $\{T^g\}_{g \in \Gamma}$.

Pour $x \in \mathcal{X}$, on note $\mathcal{O}(\Gamma)(x) = \{T^g(x), g \in \Gamma\}$ la Γ -orbite du point x et $\mathcal{O}(\Gamma)$ est la partition de \mathcal{X} selon les Γ -orbites. Il est affirmé dans [Ver] (§1, 2°, p.715) que si Γ est fini ou compact, la partition $\mathcal{O}(\Gamma)$ est mesurable.

On peut vérifier que la σ -algèbre correspondant à cette partition mesurable par la correspondance de Rokhlin est la (complétion de la) σ -algèbre des événements invariants

$$\mathcal{I} = \{A \in \mathfrak{X} \mid \forall g \in \Gamma, \mu(T^g(A) \Delta A) = 0\},$$

Maintenant soit $(r_n)_{n \geq 1}$ une suite d'entiers positifs. On note \mathbb{Z}_{r_n} le groupe cyclique à r_n éléments. On pose

$$\Gamma_n = \prod_{i=1}^n \mathbb{Z}_{r_i} = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_{r_i} \quad \text{et} \quad \Gamma = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \Gamma_n.$$

Donnons-nous une action T de Γ sur un espace de Lebesgue $(\mathcal{X}, \mathfrak{X}, \mu)$. Pour $x \in \mathcal{X}$, la Γ_n -orbite de x est $\mathcal{O}(\Gamma_n)(x) = \{T^g(x), g \in \Gamma_n\}$, et on note $\mathcal{O}(\Gamma_n)$ la partition de \mathcal{X} selon les Γ_n -orbites. Alors il vient la suite décroissante de σ -algèbres $(\mathcal{I}_n)_{n \geq 0}$ où

$$\mathcal{I}_n = \{A \in \mathfrak{X} \mid \forall g \in \Gamma_n, \mu(T^g(A) \Delta A) = 0\},$$

qui donne une filtration en renversant le temps. La σ -algèbre $\mathcal{I}_{+\infty} := \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{I}_n$ est dégénérée si l'action est ergodique, c'est-à-dire si

$$\forall A \in \mathcal{I}, \quad (\forall g \in \Gamma, \mu(T_g^{-1}(A)) = \mu(A)) \implies \mu(A) = 0 \text{ ou } 1,$$

et la filtration est r_n -adique si l'action est libre, c'est-à-dire si

$$\forall g \in \Gamma, \quad \mu\{x \in \mathcal{X} \mid T_g(x) = x\} = 0.$$

On munit \mathbb{Z}_{r_n} de la mesure de probabilité uniforme et Γ_n et Γ de la mesure de probabilité produit, et on définit la transformation $T_n^g: \Gamma_n \rightarrow \Gamma_n$ pour $g \in \Gamma_n$ par $T_n^g(x) = x + g$ et pour $g \in \Gamma$, on définit la transformation $T^g: \Gamma \rightarrow \Gamma$ par $T^g = T_n^g$ si $g \in \Gamma_n$. Maintenant soit (A, \mathfrak{A}, μ) un espace probabilisé. On définit alors une action T de Γ sur l'ensemble $F(\Gamma; A) = A^\Gamma$ des applications de Γ dans A muni de la mesure produit de μ en posant $T^g(f) = f \circ T^g$.

Cela ne semble pas évident, mais la filtration $(\mathcal{I}_{-n})_{n \leq 0}$ est la filtration du processus des mots découpés r_n -adique sur (A, \mathfrak{A}, μ) .

Ce type de filtrations a de l'intérêt pour les ergodiciens ([Fe99, F-H]) mais nous ne savons pas si les résultats de leurs travaux auraient des homologues probabilistes intéressants ; le cas des mots découpés semble particulier.

Vershik a alors établi le résultat suivant dont notre proposition 6.3.3 est un cas particulier :

Proposition 6.4.1 (Vershik [Ver]). *Lorsque A est un alphabet fini muni d'une mesure de probabilité μ , alors sous la condition*

$$\log r_n - h \ell_n \rightarrow +\infty \quad (\nabla_h),$$

où h est l'entropie de μ , la filtration du processus des mots découpés r_n -adique sur (A, μ) est standard r_n -adique.

7. CONCLUSION DE CETTE PARTIE.

Après avoir étudié les filtrations des mots gommés et des mots découpés, l'utilité des critères de second niveau de la théorie de Vershik est déjà manifeste : pour établir que ces filtrations sont de type produit, nous avons d'abord construit un processus d'innovations générateur dans le cas d'un alphabet fini muni de la mesure de probabilité uniforme (sections 5.3 et 6.3) ; à l'aide du critère de Vershik de premier niveau, nous en avons déduit le cas d'un alphabet essentiellement séparable sans partie atomique (proposition 5.4.1) ; mais nous ne savons pas nous passer des critères de second niveau pour établir le cas de tout alphabet essentiellement séparable (corollaire 5.4.3). Le critère de *I-jonction en arbre* que nous allons voir dans la partie suivante sera utilisé comme une étape intermédiaire entre le premier et le second niveau. D'autre part, le critère de Vershik de premier niveau ne nous permet pas de montrer que la filtration des mots découpés dyadique n'est pas de type produit. Le critère de *I-jonction en arbre*, qui est homologue, en termes de couplage, du critère de Vershik de premier niveau, nous le permettra. Une filtration de type produit local conditionnellement séparable satisfait le critère de I-jonction en arbre si, par définition, il est possible de "coupler" toute variable aléatoire mesurable pour cette filtration, et il sera facile d'établir que ceci est équivalent au critère de Vershik de premier niveau. Pour montrer alors qu'une filtration ne satisfait pas au critère de Vershik de premier niveau, il suffira de montrer que pour une variable aléatoire, le "couplage" en question n'est pas possible.

TROISIÈME PARTIE

COUPLAGE DES FILTRATIONS DE TYPE PRODUIT
LOCAL : COUPLAGE DE DOEBLIN ET I-JONCTION
EN ARBRE. LE CONTRE-EXEMPLE DES MOTS
DÉCOUPÉS ET DES MOTS RONGÉS.

Cette partie commence par un chapitre préliminaire sur la notion d'isomorphisme de filtrations et la notion d'immersion, dont nous ne pourrions nous passer par la suite, notamment pour manipuler des *couplages* de filtrations. Dans le chapitre 9, nous donnerons un premier critère en termes de couplage, que nous appellerons *critère de Doeblin*. Il caractérise la mesurabilité d'une variable aléatoire dans une filtration de type produit local dans un processus d'innovations donné de cette filtration. Nous définirons ensuite l'homologue du critère de Vershik de premier niveau en termes de couplages : le *critère de I-jonction en arbre*. Bien qu'étant original, il est comparable au *critère de standardité r_n -adique* de Vershik dont nous avons parlé dans l'introduction (9). Il sera un outil intermédiaire pour la partie suivante consacrée aux critères de second niveau de la théorie de Vershik. Dans la partie présente, il nous permettra d'établir des conditions sur les processus des mots découpés pour que leur filtration ne soit pas de type produit. Nous l'utiliserons aussi pour donner un autre exemple non-trivial d'une filtration qui n'est pas de type produit : la filtration du *processus des mots rongés*. Nous utiliserons encore les critères de Vershik de second niveau pour passer du particulier au général dans ces exemples.

8. PRÉLIMINAIRES : FILTRATIONS ISOMORPHES ET IMMERSIONS DES FILTRATIONS.

Nous introduisons dans ce chapitre deux notions indispensables pour toute la suite. D'abord la notion de *filtrations isomorphes*, et nous étudierons alors le cas d'une filtration à un pas $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$. En second lieu nous introduisons la notion d'*immersion* et d'*immersibilité* d'une filtration dans une autre, et de *coïmmersion* de deux filtrations.

8.1 Filtrations isomorphes.

8.1.1 Copie d'une v.a. dans un espace métrique standard.

Les isomorphismes d'espaces probabilisés tels que nous les avons défini dans la section 4.1 agissent sur les variables aléatoires réelles. Nous expliquons ici comment nous les faisons agir sur des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique standard. Cela nous sera nécessaire pour étudier les isomorphismes de filtrations, pour lesquelles nous parlerons de la copie d'une loi conditionnelle par un isomorphisme d'espaces probabilisés.

Lemme 8.1.1. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ deux espaces probabilisés, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ une σ -algèbre, et $\Psi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}'$ un plongement. On pose $\mathcal{B}' = \Psi(\mathcal{B})$. Soient E un espace métrique standard et $X \in L^0(\mathcal{B}; E)$. Alors il existe une unique variable aléatoire $X' \in L^0(\mathcal{B}'; E)$ telle que $\Psi(f(X)) = f(X')$ pour toute fonction borélienne $f: E \rightarrow \mathbb{R}$.*

Démonstration. Soit $h: E \rightarrow \mathbb{R}$ une injection bimesurable. Nécessairement, on doit avoir $X' = h^{-1} \circ \Psi(h(X))$. Vérifions que X' convient. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Puisque $f = f \circ h^{-1} \circ h$ et puisque Ψ est un isomorphisme, on a $\Psi(f(X)) = f \circ h^{-1} \circ \Psi(h(X)) = f(X')$. □

Notation 8.1.2. Nous noterons $X' = \Psi_E(X)$, ou parfois seulement $X' = \Psi(X)$.

Lemme 8.1.3. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ deux espaces probabilisés, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ une σ -algèbre, et $\Psi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}'$ un plongement. Soient E_1 et E_2 deux espaces métriques standard, $X_1 \in L^0(\mathcal{B}, E_1)$, et $g: E_1 \rightarrow E_2$ borélienne. On pose $X_2 = g(X_1)$, $X'_1 = \Psi_{E_1}(X_1)$ et $X'_2 = \Psi_{E_2}(X_2)$. Alors $X'_2 = g(X'_1)$.*

Démonstration. Cela se déduit du lemme 8.1.1. □

Lemme 8.1.4. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ deux espaces probabilisés, $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ une σ -algèbre, et $\Psi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}'$ un plongement. Soit μ un noyau de probabilités de \mathcal{B} vers un espace métrique standard E , c'est-à-dire, après passage au quotient, une variable aléatoire mesurable pour \mathcal{B} dans l'espace métrique standard $\mathfrak{P}(E)$ des probabilités sur E . Alors un noyau de probabilités*

μ' de \mathcal{A}' vers E est égal à $\Psi_{\mathfrak{P}(E)}(\mu)$ presque sûrement si et seulement si pour toute fonction borélienne bornée $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, on a $\Psi(\mu(f)) = \mu'(f)$.

Démonstration. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée. L'application $j_f: \mathfrak{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $j_f(\nu) = \nu(f)$ est borélienne. D'après le lemme 8.1.1, on a alors

$$\Psi(j_f(\mu)) = j_f(\Psi_{\mathfrak{P}(E)}(\mu)),$$

ce qui permet de conclure. \square

8.1.2 Filtrations isomorphes

Définition 8.1.5. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ deux espaces de probabilités, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}'_t)_{t \in \mathbb{T}}$ une filtration sur $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$. On dit (par abus de langage) que \mathcal{F} et \mathcal{F}' sont *isomorphes*, ou que \mathcal{F}' est une *copie* de \mathcal{F} , s'il existe un isomorphisme $\Psi: (\Omega, \mathcal{F}_\infty, \mathbb{P}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{F}'_\infty, \mathbb{P}')$ tel que $\Psi(\mathcal{F}_t) = \mathcal{F}'_t$ pour tout $t \in \mathbb{T}$. On dit aussi que $\Psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ est un isomorphisme.

Si $(X_n)_{n \leq 0}$ et $(X'_n)_{n \leq 0}$ sont deux processus sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ respectivement, nous dirons aussi que l'un est une copie de l'autre s'ils ont même loi. Dans ce cas ils engendrent des filtrations isomorphes d'après le lemme 4.1.2.

Cas des filtrations à un pas. — Les résultats que nous donnons maintenant concernent les isomorphismes de filtrations à un pas $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$. Le lemme suivant est trivial. Il exprime qu'un isomorphisme d'une filtration à un pas $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ doit préserver le comportement conditionnel de \mathcal{F}_1 par rapport à \mathcal{F}_0 .

Lemme 8.1.6. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ des espaces probabilisés, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ une filtration à un pas sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}'_0, \mathcal{F}'_1)$ une filtration à un pas sur $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$. Si on a un isomorphisme $\Psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$, alors

- Pour tout événement $A \in \mathcal{F}_1$, on a $\Psi(\mathbb{P}[A | \mathcal{F}_0]) = \mathbb{P}'[A' | \mathcal{F}'_0]$ avec $A' = \Psi(A)$ (où on note $\mathbb{P}[A | \mathcal{B}] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A | \mathcal{B}]$ la probabilité conditionnelle de A sachant \mathcal{B}).
- En d'autres termes, soit $X \in L^1(\mathcal{F}_1)$ une variable aléatoire intégrable. Alors $X' := \Psi(X)$ est intégrable et $\Psi(\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_0]) = \mathbb{E}'[X' | \mathcal{F}'_0]$.

Ce lemme peut se présenter ainsi :

Lemme 8.1.7. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ des espaces probabilisés, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ une filtration à un pas sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}'_0, \mathcal{F}'_1)$ une filtration à un pas sur $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, et soit $\Psi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ un isomorphisme. On se donne un espace métrique standard E et une variable aléatoire $X \in L^0(\mathcal{F}_1; E)$. On note $X' = \Psi_E(X)$. Alors $\mathcal{L}'[X' | \mathcal{F}'_0] = \Psi_{\mathfrak{P}(E)}(\mathcal{L}[X | \mathcal{F}_0])$.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 8.1.4 et du b) du lemme 8.1.6. \square

Le lemme 8.1.7 admet comme réciproque la proposition ci-dessous de laquelle nous déduisons de nombreux corollaires.

Proposition 8.1.8. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$ des espaces de probabilité. Soient \mathcal{F}_0 et \mathcal{C}_1 deux sous- σ -algèbres de \mathcal{A} , $\Psi_0: (\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}) \rightarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$ et $\Psi_1: (\Omega, \mathcal{C}_1, \mathbb{P}) \rightarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$ des plongements. On pose $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \Psi_0(\mathcal{F}_0)$ et $\tilde{\mathcal{C}}_1 = \Psi_1(\mathcal{C}_1)$, puis on pose $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 \vee \mathcal{C}_1$ et $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \tilde{\mathcal{F}}_0 \vee \tilde{\mathcal{C}}_1$.

Si pour toute variable aléatoire $C_1 \in L^1(\Omega, \mathcal{C}_1, \mathbb{P})$, on a

$$\Psi_0(\mathcal{L}[C_1 | \mathcal{F}_0]) = \tilde{\mathcal{L}}[\Psi_1(C_1) | \tilde{\mathcal{F}}_0], \quad (8.1.1)$$

alors les filtrations à un pas $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ et $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_0, \tilde{\mathcal{F}}_1)$ sont isomorphes et il existe un unique isomorphisme de \mathcal{F} sur $\tilde{\mathcal{F}}$ qui prolonge Ψ_0 et Ψ_1 .

Démonstration. Notons encore $\Psi: \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ un tel prolongement de Ψ_0 et Ψ_1 s'il en existe un. Toute v.a. mesurable dans \mathcal{F}_1 est de la forme $f(F_0, C_1)$ où F_0 et C_0 sont respectivement mesurable dans \mathcal{F}_0 et \mathcal{C}_1 , et f est borélienne, et on doit avoir $\Psi(f(F_0, C_1)) = f(\Psi_0(F_0), \Psi_1(C_1))$, ce qui établit l'unicité.

Pour l'existence, remarquons que si X_0 est mesurable dans \mathcal{F}_0 et si V_1 est mesurable dans \mathcal{C}_1 , alors l'hypothèse (8.1.1) implique que le couple (X_0, V_1) a même loi que $(\Psi_0(X_0), \Psi_1(V_1))$. En effet, soient f et g boréliennes bornées. On a $\mathbb{E}[f(X_0)g(V_1) | \mathcal{F}_0] = f(X_0)\mathbb{E}[g(V_1) | \mathcal{F}_0]$, d'où

$$\mathbb{E}[f(X_0)g(V_1)] = \mathbb{E}\left[f(X_0)\mathbb{E}[g(V_1) | \mathcal{F}_0]\right].$$

Comme Ψ_0 est un plongement, on a donc aussi

$$\mathbb{E}[f(X_0)g(V_1)] = \tilde{\mathbb{E}}\left[f(\Psi_0(X_0))\Psi_0\left(\mathbb{E}[g(V_1) | \mathcal{F}_0]\right)\right],$$

or l'hypothèse (8.1.1) donne

$$\begin{aligned} f(\Psi_0(X_0))\Psi_0\left(\mathbb{E}[g(V_1) | \mathcal{F}_0]\right) &= f(\Psi_0(X_0))\tilde{\mathbb{E}}\left[g(\Psi_1(V_1)) | \tilde{\mathcal{F}}_0\right] \\ &= \tilde{\mathbb{E}}\left[f(\Psi_0(X_0))g(\Psi_1(V_1)) | \tilde{\mathcal{F}}_0\right]. \end{aligned}$$

On a donc finalement $\mathbb{E}[f(X_0)g(V_1)] = \tilde{\mathbb{E}}\left[f(\Psi_0(X_0))g(\Psi_1(V_1))\right]$, ce qui montre que le couple (X_0, V_1) a même loi que $(\Psi_0(X_0), \Psi_1(V_1))$. Donc si F_0 et G_0 sont mesurables pour \mathcal{F}_0 , si C_1 et D_1 sont mesurables pour \mathcal{C}_1 , et si f et g sont boréliennes, alors $f(F_0, C_1) - g(G_0, D_1)$ a même loi que $f(\Psi_0(F_0), \Psi_1(C_1)) - g(\Psi_0(G_0), \Psi_1(D_1))$, et si la première différence est nulle presque sûrement, la seconde l'est aussi. On prolonge alors Ψ_0 et Ψ_1 sans ambiguïté en posant $\Psi(f(F_0, C_1)) = f(\Psi_0(F_0), \Psi_1(C_1))$, ce qui donne bien un plongement. Puisque toute v.a. dans $\tilde{\mathcal{F}}_1$ s'écrit $f(\tilde{F}_0, \tilde{C}_0)$, on voit que aussi que c'est un isomorphisme. \square

Corollaire 8.1.9. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$ des espaces de probabilité. Soient $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{A}$ une σ -algèbre, $\Psi_0: (\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}) \rightarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$ un plongement et $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \Psi_0(\mathcal{F}_0)$. Soit E un espace métrique séparable, et soient $C \in L^0(\mathcal{A}; E)$ et $\tilde{C} \in L^0(\tilde{\mathcal{A}}; E)$ des variables aléatoires admettant des lois conditionnelles $\mathcal{L}[C | \mathcal{F}_0]$ et $\tilde{\mathcal{L}}[\tilde{C} | \tilde{\mathcal{F}}_0]$ telles que

$$\Psi_0(\mathcal{L}[C | \mathcal{F}_0]) = \tilde{\mathcal{L}}[\tilde{C} | \tilde{\mathcal{F}}_0]. \quad (8.1.2)$$

On pose $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 \vee \sigma(C)$ et $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \tilde{\mathcal{F}}_0 \vee \sigma(\tilde{C})$. Alors les filtrations $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ et $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_0, \tilde{\mathcal{F}}_1)$ sont isomorphes et il existe un unique isomorphisme Ψ de \mathcal{F} sur $\tilde{\mathcal{F}}$ qui prolonge Ψ_0 et qui envoie C sur \tilde{C} .

Démonstration. L'hypothèse (8.1.2) entraîne que C a même loi que \tilde{C} . Par le lemme 4.1.2, il existe alors un unique isomorphisme $\Psi_1: (\Omega, \sigma(C), \mathbb{P}) \rightarrow (\tilde{\Omega}, \sigma(\tilde{C}), \tilde{\mathbb{P}})$ qui envoie C sur \tilde{C} , défini par $\Psi_1(f(C)) = f(\tilde{C})$ pour toute f borélienne. L'hypothèse (8.1.2) vérifiée pour toute f borélienne bornée se traduit par l'hypothèse (8.1.1) de la proposition 8.1.8 et on applique cette proposition. \square

Corollaire 8.1.10. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne des variables aléatoires X_1 et \tilde{X}_1 à valeurs dans un espace métrique séparable E et une σ -algèbre $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{A}$. On pose $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 \vee \sigma(X_1)$ et $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \mathcal{F}_0 \vee \sigma(\tilde{X}_1)$. Si les lois de X_1 et \tilde{X}_1 conditionnellement à \mathcal{F}_0 existent et sont égales presque sûrement, alors il existe un unique isomorphisme de $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ sur $(\mathcal{F}_0, \tilde{\mathcal{F}}_1)$ qui soit l'identité sur \mathcal{F}_0 et qui envoie X_1 sur \tilde{X}_1 .*

Démonstration. Il suffit d'appliquer le corollaire 8.1.9 en prenant pour Ψ_0 le plongement identité. \square

On note un cas particulier dans le corollaire suivant.

Corollaire 8.1.11. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient \mathcal{C} une sous- σ -algèbre de \mathcal{A} , D et D' des v.a. à valeurs dans un même espace métrique séparable, de même loi et indépendantes de \mathcal{C} . Il existe un unique isomorphisme de $L^0(\Omega, \mathcal{C} \vee \sigma(D), \mathbb{P})$ sur $L^0(\Omega, \mathcal{C} \vee \sigma(D'), \mathbb{P})$ qui soit l'identité sur $L^0(\Omega, \mathcal{C}, \mathbb{P})$ et qui change D en D' .*

Plus généralement :

Corollaire 8.1.12. *Soient $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ et $(\Omega'', \mathcal{A}'', \mathbb{P}'')$ deux espaces de probabilité. Soient \mathcal{C}' une sous- σ -algèbre de \mathcal{A}' et \mathcal{C}'' une sous- σ -algèbre de \mathcal{A}'' et $\bar{\Psi}$ un isomorphisme de $(\Omega', \mathcal{C}', \mathbb{P}')$ sur $(\Omega'', \mathcal{C}'', \mathbb{P}'')$. Soient D' une variable aléatoire définie sur $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ dans un espace métrique séparable, indépendante de \mathcal{C}' et D'' une variable aléatoire sur $(\Omega'', \mathcal{A}'', \mathbb{P}'')$ indépendante de \mathcal{C}'' ayant la même loi que D' . Il existe un unique isomorphisme de $(\Omega', \mathcal{C}' \vee \sigma(D'), \mathbb{P}')$ sur $(\Omega'', \mathcal{C}'' \vee \sigma(D''), \mathbb{P}'')$ qui coïncide avec $\bar{\Psi}$ sur $(\Omega', \mathcal{C}', \mathbb{P}')$ et qui change D' en D'' .*

Démonstration. On applique le corollaire 8.1.9 en prenant pour $\Psi_0 = \bar{\Psi}$ et pour $\Psi_1: \sigma(D') \rightarrow \sigma(D'')$ le plongement donné par le lemme 4.1.2. \square

Corollaire 8.1.13. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soient \mathcal{B} et \mathcal{C} deux sous- σ -algèbres de \mathcal{A} indépendantes. Il existe un unique plongement Ψ de $(\Omega, \mathcal{B} \vee \mathcal{C}, \mathbb{P})$ dans $(\Omega \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \mathbb{P} \otimes \mathbb{P})$ tel que, si B (respectivement C) est une variable aléatoire mesurable dans \mathcal{B} (respectivement dans \mathcal{C}), on ait $\Psi(BC)(\omega_1, \omega_2) = B(\omega_1)C(\omega_2)$. C' est un isomorphisme.*

Démonstration. Si X est une v.a. sur Ω , on définit des v.a. X' et X'' sur $\Omega \times \Omega$ par $X'(\omega_1, \omega_2) = X(\omega_1)$ et $X''(\omega_1, \omega_2) = X(\omega_2)$. Notons $\Psi_0: (\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P}) \rightarrow (\Omega \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \mathbb{P} \otimes \mathbb{P})$ le plongement défini par $\Psi_0(X) = X'$ et $\Psi_1: (\Omega, \mathcal{C}, \mathbb{P}) \rightarrow (\Omega \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \mathbb{P} \otimes \mathbb{P})$ le plongement défini par $\Psi_1(X) = X''$. Notons que $\tilde{\mathcal{B}} := \Psi_0(\mathcal{B}) = \mathcal{B} \otimes \{\emptyset, \Omega\}$ et $\tilde{\mathcal{C}} := \Psi_1(\mathcal{C}) = \{\emptyset, \Omega\} \otimes \mathcal{C}$ (ce sont des égalités essentielles).

On pose $\mathcal{F}_0 = \mathcal{B}$, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$, $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \tilde{\mathcal{B}}$, $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \tilde{\mathcal{B}} \vee \tilde{\mathcal{C}}$. Notons \mathbb{E}^\otimes l'espérance sur l'espace $(\Omega \times \Omega, \mathcal{B} \otimes \mathcal{C}, \mathbb{P} \otimes \mathbb{P})$. L'hypothèse (8.1.1) de la proposition 8.1.8 est vérifiée : pour toute v.a. $C \in L^0(\mathcal{C})$ bornée, on a

$$\Psi_0(\mathbb{E}[C | \mathcal{C}]) = \mathbb{E}^\otimes[\Psi_1(C) | \tilde{\mathcal{C}}] = \mathbb{E}[C] = \mathbb{E}^\otimes[C''],$$

et donc cette proposition s'applique. \square

Filtrations à un pas conditionnellement séparables. — Le lemme suivant se vérifie facilement. Il nous sera bien utile dans la section 15.5 et le chapitre 17.

Lemme et définition 8.1.14. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ une σ -algèbre. Soient (S, \mathcal{S}) un espace mesurable et (μ_ω) un noyau de probabilités de (Ω, \mathcal{C}) vers S , ou un élément aléatoire mesurable pour \mathcal{C} à valeurs dans $\mathfrak{P}(S)$. On note $\mathbb{P} \otimes \mu$ la probabilité sur $(\Omega \times S, \mathcal{C} \otimes \mathcal{S})$ définie par

$$\mathbb{P} \otimes \mu[C \times D] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_C \mu(D)] \quad \text{lorsque } C \in \mathcal{C} \text{ et } D \in \mathcal{S}.$$

Elle est définie pour tout événement $\hat{B} \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{S}$ par

$$\mathbb{P} \otimes \mu[\hat{B}] = \mathbb{E} \left[\int \mathbb{1}_{\hat{B}}(t) d\mu.(t) \right]$$

où $\hat{B}_\omega = \{v \mid (\omega, v) \in \hat{B}\}$ est la section de \hat{B} au-dessus de ω . L'élément aléatoire \hat{V} défini sur $(\Omega \times S, \mathcal{C} \otimes \mathcal{S}, \mathbb{P})$ par $\hat{V}(\omega, t) = t$ admet alors μ comme loi conditionnelle par rapport à la σ -algèbre $\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \otimes \{\emptyset, S\}$.

Notation 8.1.15. Nous noterons parfois $\mathcal{C} \otimes_\mu \mathcal{S}$ la tribu complétée de la tribu produit $\mathcal{C} \otimes \mathcal{S}$ lorsqu'elle est équipée de la probabilité $\mathbb{P} \otimes \mu$.

Proposition 8.1.16. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ une filtration à un pas conditionnellement séparable. On note V une novation de \mathcal{F}_0 dans \mathcal{F}_1 à valeurs dans un espace métrique standard E , et $\mu = \mathcal{L}[V \mid \mathcal{F}_0]$ la loi conditionnelle de V par rapport à \mathcal{F}_0 . On définit la probabilité $\hat{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \otimes \mu$ sur $(\Omega \times E, \mathcal{F}_0 \otimes \mathfrak{B}_E)$. Alors $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ est isomorphe à la filtration $(\hat{\mathcal{F}}_0, \hat{\mathcal{F}}_1)$ de l'espace probabilisé $(\Omega \times E, \mathcal{F}_0 \otimes_\mu \mathfrak{B}_E, \hat{\mathbb{P}})$ que l'on définit par $\hat{\mathcal{F}}_0 = \mathcal{F}_0 \otimes_\mu \{\emptyset, E\}$ et $\hat{\mathcal{F}}_1 = \mathcal{F}_0 \otimes_\mu \mathfrak{B}_E$, avec un unique isomorphisme qui envoie V sur la variable aléatoire \hat{V} définie par $\hat{V}(\omega, t) = t$.

Démonstration. Notons $\Psi_0: (\Omega, \mathcal{F}_0) \rightarrow (\Omega \times E, \mathcal{F}_0 \otimes \mathfrak{B}_E)$ le plongement canonique. Par le lemme 8.1.14, on a $\Psi_0(\mu) = \mathcal{L}[\hat{V} \mid \hat{\mathcal{F}}_0]$. On a aussi un isomorphisme $\Psi_1: (\Omega, \sigma(V), \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathfrak{B}_E, \mu)$ qui envoie V sur \hat{V} par le lemme 8.1.1. Il suffit alors d'appliquer le corollaire 8.1.9. \square

Cas des filtrations avec une innovation sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. — Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du corollaire 8.1.12.

Corollaire 8.1.17. Soient $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}'_n)_{n \leq 0}$ et $\mathcal{F}'' = (\mathcal{F}''_n)_{n \leq 0}$ deux filtrations définies sur $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ et $(\Omega'', \mathcal{A}'', \mathbb{P}'')$ respectivement. On suppose que \mathcal{F}' admet une innovation $(V'_{n_0+1}, \dots, V'_0)$ sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, que \mathcal{F}'' admet une innovation $(V''_{n_0+1}, \dots, V''_0)$ sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et que les vecteurs aléatoires $(V'_{n_0+1}, \dots, V'_0)$ et $(V''_{n_0+1}, \dots, V''_0)$ sont de même loi. Soit $n_0 \leq 0$. On suppose qu'on a un isomorphisme $\Psi: \mathcal{F}'_{n_0} \rightarrow \mathcal{F}''_{n_0}$ tel que $\Psi(\mathcal{F}'_n) = \mathcal{F}''_n$ pour tout $n \leq n_0$. Alors il existe un unique isomorphisme de \mathcal{F}' dans \mathcal{F}'' qui prolonge Ψ et qui envoie V'_n sur V''_n pour $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$.

Maintenant lorsqu'on considérera une copie notée \mathcal{F}' d'une filtration \mathcal{F} , on désignera par X' la copie de $X \in L^0(\mathcal{F}_0)$ dans \mathcal{F}' . Nous noterons aussi \mathcal{B}' la copie d'une σ -algèbre $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}_0$. De même si la copie est \mathcal{F}'' , la copie de X sera notée X'' , ... Par conséquent lorsque $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ admet une innovation sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ et qu'on en spécifie une, (V_{n_0+1}, \dots, V_0) , si on note \mathcal{F}' une copie de \mathcal{F} et qu'on considère une innovation notée $(V'_{n_0+1}, \dots, V'_0)$ de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, il sera toujours supposé que l'isomorphisme en question de \mathcal{F} sur \mathcal{F}' envoie V_n sur V'_n pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$. Si l'isomorphisme est connu sur \mathcal{F}_{n_0} , il est donc connu sur \mathcal{F}_0 d'après le corollaire précédent.

8.2 Immersion, immersibilité, coïmmersion.

8.2.1 Définition et caractérisations.

Définitions 8.2.1. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ deux filtrations définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- On dit que \mathcal{F} est *immergée* dans \mathcal{G} si toute martingale dans \mathcal{F} est aussi une martingale dans \mathcal{G} .
- On dit que les deux filtrations \mathcal{F} et \mathcal{G} sont *coïmmergées* si chacune d'elles est immergée dans $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$.

Intuitivement, \mathcal{F} est immergée dans \mathcal{G} quand $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ mais que le passé de \mathcal{G} ne contient pas plus d'information que le passé de \mathcal{F} sur le futur de \mathcal{F} . Ceci se voit mieux avec les caractérisations de la proposition suivante.

Proposition 8.2.2. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ deux filtrations définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- \mathcal{F} est immergée dans \mathcal{G} .
- Pour toute variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_\infty)$, on a, pour tout $t \in \mathbb{T}$, $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}_t] = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t]$.
- $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ et pour tout $t \in \mathbb{T}$, les σ -algèbres \mathcal{F}_∞ et \mathcal{G}_t sont conditionnellement indépendantes sachant \mathcal{F}_t (on dit aussi que \mathcal{F}_∞ ne dépend de \mathcal{G}_t qu'à travers \mathcal{F}_t).

Ces équivalences de la propriété d'immersion ne sont pas difficiles. Une fois que (i) \iff (ii) est établie, (ii) \iff (iii) sont des caractérisations connues de l'indépendance conditionnelle (voir [Kall]). Le lemme suivant n'est pas difficile non plus, on peut renvoyer [ES] pour une preuve.

Lemme 8.2.3. Soient \mathcal{F} , \mathcal{G} et \mathcal{H} trois filtrations sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- 1) Si \mathcal{F} est incluse dans \mathcal{G} et \mathcal{G} dans \mathcal{H} , et si \mathcal{F} est immergée dans \mathcal{H} , alors \mathcal{F} est immergée dans \mathcal{G} .
- 2) Si \mathcal{F} et \mathcal{G} sont immergées dans \mathcal{H} , alors elles sont coïmmergées.

Citons un exemple trivial de coïmmersion :

Lemme 8.2.4. Une filtration est immergée dans son produit indépendant avec une autre filtration. Par conséquent deux filtrations indépendantes, définies sur un même espace de probabilité, sont toujours coïmmergées.

Ce lemme est démontré dans [ES]. Nous le généralisons par le lemme suivant.

Lemme 8.2.5. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ deux filtrations définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que \mathcal{F} est immergée dans \mathcal{G} . Soit $\mathcal{K} = (\mathcal{K}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ une filtration indépendante de \mathcal{G} . Alors $\mathcal{F} \dot{\vee} \mathcal{K}$ est immergée dans $\mathcal{G} \dot{\vee} \mathcal{K}$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{T}$. Montrons que si $X \in L^1(\mathcal{F}_\infty \dot{\vee} \mathcal{K}_\infty)$ est de la forme $X = FK$ où $F \in L^2(\mathcal{F}_\infty)$ et $K \in L^2(\mathcal{K}_\infty)$, alors $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t \dot{\vee} \mathcal{K}_t] = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_t \dot{\vee} \mathcal{K}_t]$. Cela suffit à en déduire que c'est aussi le cas pour toute $X \in L^1(\mathcal{F}_\infty \dot{\vee} \mathcal{K}_\infty)$. On vérifie d'abord facilement que $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}_t \dot{\vee} \mathcal{K}_t] = \mathbb{E}[F | \mathcal{G}_t] \mathbb{E}[K | \mathcal{K}_t]$ et $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t \dot{\vee} \mathcal{K}_t] = \mathbb{E}[F | \mathcal{F}_t] \mathbb{E}[K | \mathcal{K}_t]$. Puisque \mathcal{F} est immergée dans \mathcal{G} , on a $\mathbb{E}[F | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[F | \mathcal{G}_t]$, ce qui donne le résultat. \square

8.2.2 Lemmes utiles.

On utilisera très souvent les trois lemmes suivants.

Lemme 8.2.6. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ deux filtrations définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors \mathcal{F} est immergée dans \mathcal{G} si et seulement si pour tout $n < 0$ et toute variable aléatoire $Z_{n+1} \in L^1(\mathcal{F}_{n+1})$, on a $\mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{G}_n] = \mathbb{E}[Z_{n+1} | \mathcal{F}_n]$.

Démonstration. Par projections successives on montre facilement que ceci implique la condition (ii) de la proposition 8.2.2. \square

Lemme 8.2.7. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $(X_n)_{n \leq 0}$ une chaîne de Markov, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ la filtration qu'elle engendre et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ une filtration. Alors \mathcal{F} est immergée dans \mathcal{G} si et seulement si $(X_n)_{n \leq 0}$ est une chaîne de Markov dans \mathcal{G} .

Démonstration. Il est facile de montrer que $(X_n)_{n \leq 0}$ est une chaîne de Markov dans \mathcal{G} si \mathcal{F} est immergée dans \mathcal{G} . Réciproquement, supposons que $(X_n)_{n \leq 0}$ est une chaîne de Markov dans \mathcal{G} . Pour tout $n \leq 0$, on note $(\pi_x^{(n)})_x$ une version régulière de la loi de X_n conditionnellement aux valeurs de X_{n-1} . Soient $n \leq 0$ et $Z_n \in L^1(\mathcal{F}_n)$. On a une fonction f borélienne telle que $Z_n = f(\dots, X_{n-1}, X_n)$, et ceci donne

$$\mathbb{E}[Z_n | \mathcal{G}_{n-1}] = \mathbb{E}[Z_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \int f(\dots, X_{n-2}, X_{n-1}, x) d\pi_{X_{n-1}}^{(n)}(x),$$

puisque $\pi_{X_{n-1}}^{(n)} = \mathcal{L}[X_n | \mathcal{F}_{n-1}] = \mathcal{L}[X_n | \mathcal{G}_{n-1}]$. On conclut avec le lemme 8.2.6 que \mathcal{F} est immergée dans \mathcal{G} . \square

Lemme 8.2.8. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ deux filtrations définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. On note $(\mathcal{C}_n)_{n \leq 0}$ une suite de σ -algèbres tels que de $\mathcal{G}_{n+1} = \mathcal{G}_n \vee \mathcal{C}_{n+1}$ et $\mathcal{F}_{n+1} \subset \mathcal{F}_n \vee \mathcal{C}_{n+1}$. Si $\mathbb{P}[\mathcal{C}_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{P}[\mathcal{C}_{n+1} | \mathcal{G}_n]$ pour tout n , alors \mathcal{F} est immergée dans \mathcal{G} . En particulier, \mathcal{F} est immergée dans \mathcal{G} si \mathcal{C}_{n+1} est indépendante de \mathcal{G}_n pour tout n .

Démonstration. Soit $X_{n+1} \in L^1(\mathcal{F}_{n+1})$, qu'on écrit $X_{n+1} = f(Y_n, V_{n+1})$ où f est borélienne, Y_n est mesurable dans \mathcal{F}_n et V_{n+1} est mesurable dans \mathcal{C}_{n+1} . Par l'hypothèse, on a $\mathcal{L}[V_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathcal{L}[V_{n+1} | \mathcal{G}_n]$, et on en déduit que

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{G}_n] = \int f(Y_n, v) d\mathcal{L}[V_{n+1} | \mathcal{F}_n](v),$$

ce qui achève la preuve en vertu du lemme 8.2.6. \square

8.2.3 Coïmmersion de deux filtrations : caractérisations.

La proposition qui suit caractérise la coïmmersion de deux filtrations de type produit local.

Proposition 8.2.9. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ deux filtrations de type produit local définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soient $(\mathcal{C}_n)_{n \leq 0}$ une suite de compléments de \mathcal{F} et $(\mathcal{D}_n)_{n \leq 0}$ une suite de compléments de \mathcal{G} . Alors \mathcal{F} et \mathcal{G} sont coïmmérées si et seulement si les σ -algèbres $\mathcal{C}_{n+1} \vee \dots \vee \mathcal{C}_0$ et $\mathcal{D}_{n+1} \vee \dots \vee \mathcal{D}_0$ sont indépendantes de la σ -algèbre $\mathcal{F}_n \vee \mathcal{G}_n$ pour tout $n < 0$.

Démonstration. Nous allons montrer que \mathcal{F} est immergée dans $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ si et seulement si la σ -algèbre $\mathcal{C}_{n+1} \vee \cdots \vee \mathcal{C}_0$ est indépendante de $\mathcal{F}_n \vee \mathcal{G}_n$ pour tout $n < 0$. On en déduit l'énoncé analogue pour \mathcal{G} par symétrie et le lemme s'ensuit.

Il est facile de vérifier que c'est bien une condition nécessaire pour que \mathcal{F} soit immergée dans $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$. Montrons la suffisance. Soit $X \in L^1(\mathcal{F}_0)$. Il s'agit de montrer que

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n \vee \mathcal{G}_n] = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n]. \quad (8.2.1)$$

On écrit $X = f(F_n, C_{n+1})$ où f est une fonction borélienne, $F_n \in L^1(\mathcal{F}_n)$ et $C_{n+1} \in L^1(\mathcal{C}_{n+1} \vee \cdots \vee \mathcal{C}_0)$. On a alors $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] = g(F_n)$ où $g(y) = \mathbb{E}[f(y, C_{n+1})]$. Pour les mêmes raisons, on a aussi $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n \vee \mathcal{G}_n] = g(F_n)$ sous notre hypothèse, et on a donc établi (8.2.1). \square

Corollaire 8.2.10. *Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ deux filtrations de type produit local définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, avec un processus d'innovations $(V_n)_{n \leq 0}$ de \mathcal{F} et un processus d'innovations $(W_n)_{n \leq 0}$ de \mathcal{G} . Alors \mathcal{F} et \mathcal{G} sont coïmmergées si et seulement si les σ -algèbres $\sigma(V_{n+1}, \dots, V_0)$ et $\sigma(W_{n+1}, \dots, W_0)$ sont indépendantes de $\mathcal{F}_n \vee \mathcal{G}_n$ pour tout $n < 0$.*

La lemme qui suit caractérise la coïmmersion de deux filtrations conditionnellement séparable.

Lemme 8.2.11. *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration conditionnellement séparable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \leq 0$, on note V_n une novation de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n , c'est-à-dire une variable aléatoire telle que $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} \vee \sigma(V_n)$. Soient \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' deux copies de \mathcal{F} sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$. On note $\overline{\mathcal{L}}_n = \overline{\mathcal{L}}[(V'_n, V''_n) | \mathcal{F}'_{n-1} \vee \mathcal{F}''_{n-1}]$ la loi conditionnelle du couple (V'_n, V''_n) sachant $\mathcal{F}'_{n-1} \vee \mathcal{F}''_{n-1}$. Alors \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' sont coïmmergées si et seulement si pour tout $n \leq 0$, la première marge $\overline{\mathcal{L}}[V'_n | \mathcal{F}'_{n-1} \vee \mathcal{F}''_{n-1}]$ de $\overline{\mathcal{L}}_n$ est égale à la loi conditionnelle $\overline{\mathcal{L}}[V'_n | \mathcal{F}'_{n-1}]$ et si la seconde marge $\overline{\mathcal{L}}[V''_n | \mathcal{F}'_{n-1} \vee \mathcal{F}''_{n-1}]$ de $\overline{\mathcal{L}}_n$ est égale à la loi conditionnelle $\overline{\mathcal{L}}[V''_n | \mathcal{F}''_{n-1}]$.*

Démonstration. Si \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' sont coïmmergées, on a ces propriétés facilement. Réciproquement, supposons qu'elles aient lieu. Soit $n \leq 0$ et $X_n \in L^1(\overline{\mathcal{F}}_n)$, qu'on écrit $X_n = \overline{f}(F_{n-1}, V_n)$ avec \overline{f} borélienne et F_{n-1} mesurable dans $\overline{\mathcal{F}}_{n-1}$. L'égalité $\overline{\mathcal{L}}[V'_n | \mathcal{F}'_{n-1} \vee \mathcal{F}''_{n-1}] = \overline{\mathcal{L}}[V'_n | \mathcal{F}'_{n-1}]$ donne facilement $\mathbb{E}[X'_n | \mathcal{F}'_{n-1} \vee \mathcal{F}''_{n-1}] = \mathbb{E}[X'_n | \mathcal{F}'_{n-1}]$, ce qui avec le lemme 8.2.6 donne l'immersion de \mathcal{F}' dans $\mathcal{F}' \vee \mathcal{F}''$. L'immersion de \mathcal{F}'' dans $\mathcal{F}' \vee \mathcal{F}''$ s'obtient par symétrie. \square

8.2.4 Critère de Vershik de premier niveau pour une martingale.

Comme application de la notion d'immersion, nous allons voir :

Proposition 8.2.12. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable, engendrée par une martingale $(M_n)_{n \leq 0}$. Alors \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik de premier niveau si et seulement si M_0 satisfait le critère de Vershik de premier niveau.*

Lemme 8.2.13. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration avec une innovation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. La filtration $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n \leq 0}$ définie par*

$$\mathcal{E}_n = \begin{cases} \{\emptyset, \Omega\} & \text{si } n \leq n_0 \\ \sigma(V_{n_0+1}, \dots, V_n) & \text{si } n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket \end{cases}$$

est immergée dans \mathcal{F} .

Démonstration. C'est une conséquence facile du lemme 8.2.8. \square

Proposition 8.2.14. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable. Si $X_0 \in V^1(\mathcal{F}_0)$ alors $X_n := \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] \in V^1(\mathcal{F}_0)$. Plus précisément, pour tout $n \leq 0$, toute variable aléatoire $Y \in L^1(\sigma(X_n, \dots, X_0))$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau.*

Démonstration. Donnons-nous $n \leq 0$ et posons $X_m = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_m]$ pour $m \in \llbracket n, 0 \rrbracket$ et $p = |n| + 1$. Par le corollaire 3.5.3, la dernière assertion de la proposition équivaut à ce que $\mathfrak{L}_{\text{loc}}(\mathcal{F})$ soit substantiel dans $\sigma(X_n, \dots, X_0)$, et par le corollaire 3.3.3 à ce que $\vec{X} := (X_n, \dots, X_0) \in V^1(\mathcal{F}; \mathbb{R}^p)$, où on munit \mathbb{R}^p de la norme ℓ_1 définie par $\|(x_1, \dots, x_p)\|_1 = \sum |x_i|$.

Soit $\delta > 0$. Par hypothèse, on a un entier $n_0 < 0$, une innovation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et une variable aléatoire $Z_0 \in L^1(\sigma(V_{n_0+1}, \dots, V_0))$ telle que $\mathbb{E}[|X_0 - Z_0|] < \delta/p$. Posons $Z_m = \mathbb{E}[Z_0 | \mathcal{F}_m]$ pour $m \in \llbracket n, 0 \rrbracket$. Par la propriété de contraction des espérances conditionnelles, on a $\mathbb{E}[|X_m - Z_m|] < \delta/p$. Par le lemme 8.2.13, on a aussi $Z_m = \mathbb{E}[Z_0 | \mathcal{E}_m]$, où \mathcal{E} est la filtration définie dans ce lemme, et en particulier Z_m est intégrable et mesurable dans $\sigma(V_{n_0+1}, \dots, V_0)$, ainsi que le vecteur aléatoire (Z_n, \dots, Z_0) , qui vérifie $\mathbb{E}\left[\|(X_n, \dots, X_0) - (Z_n, \dots, Z_0)\|_1\right] < \delta$. \square

★ Preuve de la proposition 8.2.12. La proposition 8.2.12 résulte de la proposition 8.2.14 et du corollaire 3.5.4. \square

9. COUPLAGE DE DOEBLIN.

Nous donnons maintenant une première caractérisation en termes de couplages de la mesurabilité d'une variable aléatoire pour un processus d'innovations donné d'une filtration de type produit local. Nous appellerons cette condition le *critère de Doeblin*. C'est un cas particulier du critère de I-jonction en arbre qui sera l'objet du chapitre suivant. Ce type de couplage était déjà utilisé par Rosenblatt [Ros1] pour les mêmes fins. Nous donnerons ensuite une application simple de ce critère sur les *chaînes de Markov constructives*. Tout cela est fortement inspiré de Rosenblatt [Ros1].

9.1 Notre premier couplage.

Nous fixons ici les notations nécessaires à la proposition 9.1.3. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec un processus d'innovations $(V_n)_{n \leq 0}$.

On se donne deux copies indépendantes $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}'_n)_{n \leq 0}$ et $\mathcal{F}^* = (\mathcal{F}^*_n)_{n \leq 0}$ de \mathcal{F} sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$. Pour tout entier $n_0 < 0$, on note $\mathcal{F}''_{n_0} = (\mathcal{F}''_{n_0})_{n \leq 0}$ la filtration définie par

$$\mathcal{F}''_{n_0} = \begin{cases} \mathcal{F}'_n & \text{si } n \leq n_0 \\ \mathcal{F}^*_{n_0} \dot{\vee} \sigma(V'_{n_0+1}, \dots, V'_n) & \text{si } n_0 < n < 0. \end{cases}$$

Ainsi $(V'_{n_0+1}, \dots, V'_0)$ est une innovation de \mathcal{F}''_{n_0} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, les filtrations \mathcal{F}' et \mathcal{F}''_{n_0} sont isomorphes par le corollaire 8.1.17, et on peut voir qu'elles sont coïmmérgées avec le corollaire 8.2.10.

Remarque 9.1.1. Notons $\Psi': \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$, $\Psi^*: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}^*$, et $\Psi''_n: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}''_n$ les isomorphismes. Soient (E, ρ) un espace métrique standard et $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$. Pour tout $n \leq 0$, on suppose qu'on a une variable aléatoire X_n dans un espace métrique standard E_n , et une fonction borélienne f_n telles que

$$X = f_n(X_n, V_{n+1}, V_{n+2}, \dots, V_0).$$

On note $X' = \Psi'_E(X)$, $X_n^* = \Psi_{E_n}^*(X_n)$, $V'_n = \Psi(V_n)$, $X''_n = \Psi''_{E_n}(X_n)$. Alors d'après le lemme 8.1.3,

$$\begin{aligned} X' &= f_n(X'_n, V'_{n+1}, V'_{n+2}, \dots, V'_0) \\ X''_n &= f_n(X_n^*, V'_{n+1}, V'_{n+2}, \dots, V'_0). \end{aligned}$$

Définition 9.1.2. On utilise les notations précédentes.

- Soient (E, ρ) un espace métrique séparable et $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$. Nous dirons que X satisfait le *critère de Doeblin avec* $(V_n)_{n \leq 0}$ si pour tout ensemble fini F et toute variable aléatoire simple S à valeurs dans F mesurable pour $\sigma(X)$, on a $\overline{\mathbb{P}}[S' \neq S''_{n_0}] \rightarrow 0$ quand $n_0 \rightarrow -\infty$.

• On dit qu'une variable aléatoire $Y \in L^0(\mathcal{F}_0)$ réelle satisfait le *critère de Doeblin fort* avec $(V_n)_{n \leq 0}$ si $\overline{\mathbb{P}}[Y' \neq Y''_{n_0}] \rightarrow 0$ quand $n_0 \rightarrow -\infty$.

Proposition 9.1.3. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec un processus d'innovations $(V_n)_{n \leq 0}$. Soient (E, ρ) un espace métrique standard et $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$. Avec les notations en cours, on note

$$d_n = \overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X''_n)] \quad \text{et} \quad D_n = \overline{\mathbb{P}}[X' \neq X''_n].$$

• Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $d_n \rightarrow 0$.

(ii) La variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ est mesurable dans $\sigma(V_n)_{n \leq 0}$.

(iii) La variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de Doeblin avec $(V_n)_{n \leq 0}$.

• Et les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $D_n \rightarrow 0$.

(ii) Toute variable aléatoire Y réelle mesurable pour $\sigma(X)$ satisfait le critère de Doeblin fort avec $(V_n)_{n \leq 0}$.

Démonstration. (i) \implies (ii) et (iii) \implies (ii). Si on a (i) ou (iii), alors — d'après le corollaire 3.2.5 dans le cas où on a (i) — la famille formée des σ -algèbres $\sigma(\mathcal{F}_0^*, V'_{n+1}, \dots, V'_0)$ quand n décrit $-\mathbb{N}^*$, est substantielle dans $\sigma(X')$. Par le lemme 3.2.6, elle est aussi substantielle dans $\sigma(X') \dot{\vee} \mathcal{F}_0^*$, mais comme \mathcal{F}_0^* est indépendante de $\mathcal{F}_0 \supset \sigma(X', V'_{n+1}, \dots, V'_0)$ le lemme 3.2.8 montre que la famille formée des σ -algèbres $\sigma(V'_{n+1}, \dots, V'_0)$ est substantielle dans $\sigma(X')$, c'est-à-dire que X' est mesurable dans $\sigma(V'_n, n \leq 0)$, et il en est de même en ce qui concerne X et $\sigma(V_n, n \leq 0)$ par isomorphisme.

(ii) \implies (iii). Supposons que X est mesurable dans $\sigma(V_n, n \leq 0)$. Soient F un ensemble fini, $S \in L^{\text{simple}}(\sigma(X); F)$ et $\delta > 0$. Par le lemme 1.2.3, pour n_0 assez petit, on a une variable aléatoire simple T dans F mesurable dans $\sigma(V_{n_0+1}, \dots, V_0)$ telle que $\mathbb{P}[S \neq T] < \delta/2$. On se donne $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$, $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}'_n)_{n \leq 0}$, $\mathcal{F}^* = (\mathcal{F}^*_n)_{n \leq 0}$, et on construit la filtration $\mathcal{F}''_{n_0} = (\mathcal{F}''_{n_0})_{n \leq 0}$ comme dans la définition 9.1.2. On a alors $T' = T''_{n_0}$ et

$$\overline{\mathbb{P}}[S' \neq T'] = \overline{\mathbb{P}}[S''_{n_0} \neq T''_{n_0}] = \mathbb{P}[S \neq T] < \frac{\delta}{2},$$

et donc $\overline{\mathbb{P}}[S' \neq S''_{n_0}] < \delta$ par l'inégalité triangulaire.

(ii) \implies (i). Supposons que X est mesurable dans $\sigma(V_n, n \leq 0)$. Soit $\delta > 0$. On a un entier $n_0 < 0$ et une variable aléatoire $Z' \in L^1(\sigma(V'_{n_0+1}, \dots, V'_0); E)$ telle que $\overline{\mathbb{E}}[\rho(X', Z')] < \delta/2$ (proposition 1.2.4). On a alors $Z''_{n_0} = Z'$ et

$$\overline{\mathbb{E}}[\rho(X''_{n_0}, Z''_{n_0})] = \overline{\mathbb{E}}[\rho(X', Z')] < \delta/2,$$

et l'inégalité triangulaire donne

$$\overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X''_{n_0})] < \delta,$$

c'est-à-dire $d_{n_0} < \delta$.

(i)' \iff (ii)'. Il est facile de voir que (ii)' \implies (i)' et il est évident que si X satisfait le critère de Doeblin fort alors toute fonction de X le satisfait, ce dont on déduit la réciproque avec le théorème de représentation fonctionnelle de Doob. \square

9.2 Cas des chaînes de Markov constructives.

Le critère de Doeblin est un outil adapté à l'étude de la filtration d'une chaîne de Markov constructive donnée (définition 3.6.2).

Proposition 9.2.1. *Pour tout $n \leq 0$, soit E_n un espace métrique standard. On se donne une chaîne de Markov constructive $((X_n, V_n), f_n; E_n)_{n \leq 0}$. Alors la variable aléatoire X_0 est mesurable pour $\sigma(\dots, V_{-1}, V_0)$ si et seulement si elle satisfait le critère de Doeblin avec $(V_n)_{n \leq 0}$.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 9.1.3 appliquée avec la filtration du processus $(X_n, V_n)_{n \leq 0}$. \square

Corollaire 9.2.2. *Soit E un espace métrique standard et soit $((X_n, V_n), f; E)_{n \leq 0}$ une chaîne de Markov constructive homogène. Alors sa filtration est engendrée par le processus $(V_n)_{n \leq 0}$ si et seulement si X_0 satisfait le critère de Doeblin avec $(V_n)_{n \leq 0}$.*

Démonstration. En effet, si X_0 satisfait le critère de Doeblin avec $(V_n)_{n \leq 0}$, elle est mesurable pour la tribu engendrée par $(V_n)_{n \leq 0}$, et par homogénéité X_n est alors mesurable pour la tribu engendrée par $(V_m)_{m \leq n}$. \square

9.3 Une condition suffisante.

Proposition 9.3.1. *Soient E_n , $n \leq 0$, des espaces métriques standard. On se donne une chaîne de Markov constructive $((X_n, V_n), f_n; E_n)_{n \leq 0}$. On note $T_u^{(n)}(x) = f_n(x, u)$ et pour $s < t \leq 0$, on note $H_{(u_{s+1}, \dots, u_t)}^{(s \rightsquigarrow t)}$ la fonction*

$$H_{(u_{s+1}, \dots, u_t)}^{(s \rightsquigarrow t)}(x) = T_{u_t}^{(t-1)} \circ T_{u_{t-1}}^{(t-2)} \circ \dots \circ T_{u_{s+1}}^{(s)}(x),$$

puis on pose

$$\mathbf{Z}^{(s \rightsquigarrow t)}(x) = H_{(V_{s+1}, \dots, V_t)}^{(s \rightsquigarrow t)}(x), \quad \text{si bien que } X_t = \mathbf{Z}^{(s \rightsquigarrow t)}(X_s).$$

S'il existe une suite d'entiers strictement croissante $\dots < s_n < s_{n+1} < \dots < s_0$ qui est telle que la série $\sum_{n \leq 0} \mathbb{P}[\mathbf{Z}^{(s_n \rightsquigarrow s_{n+1})} \text{ est constante}]$ diverge, alors X_0 satisfait le critère de Doeblin fort avec $(V_n)_{n \leq 0}$.

Remarques 9.3.2. • La mesurabilité des ensembles $\{\mathbf{Z}^{(s \rightsquigarrow t)} \text{ est constante}\}$ est assurée par la séparabilité des E_n .

• Notons $(\mathbb{P}[X_{s+1} \in \cdot | X_s = x])_{x \in E_s}$ une décomposition régulière de la loi de X_{s+1} par rapport aux valeurs de X_s . Si $p := \mathbb{P}[\mathbf{Z}^{(s \rightsquigarrow s+1)} \text{ est constante}] > 0$, alors pour tout $A \in \mathfrak{B}_{E_{s+1}}$, on a $\mathbb{P}[X_{s+1} \in A | X_s = x] \geq \nu(A)$ pour tout x , où ν est la mesure sur E_{s+1} de masse totale p définie par

$$\nu(A) = \mathbb{P}[\mathbf{Z}^{(s \rightsquigarrow s+1)} \text{ est constante et } X_{s+1} \in A].$$

Nous verrons dans le chapitre 16 que réciproquement, si pour une chaîne de Markov $(X_n)_{n \leq 0}$, les probabilités $\mathbb{P}[X_{s+1} \in \cdot | X_s = x]$ sont minorées par une mesure de masse totale non nulle qui ne dépend pas de x , alors nous pouvons construire une chaîne constructive telle que $\mathbb{P}[\mathbf{Z}^{(s \rightsquigarrow s+1)} \text{ est constante}] > 0$.

Preuve de la proposition 9.3.1. Supposons la condition réalisée. Notons \mathcal{G} la filtration engendrée par $(X_n, V_n)_{n \leq 0}$, et considérons un espace probabilisé $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$ avec deux copies de \mathcal{G} indépendantes \mathcal{G}' et \mathcal{G}^* . Pour tout $n < 0$ on note

$$\mathbf{Z}'_n(x) = H_{(V'_{n+1}, \dots, V'_0)}^{(n \rightsquigarrow 0)}(x) \quad \text{si bien que } X'_0 = \mathbf{Z}'_n(X'_n).$$

et on pose $D_n = \bar{\mathbb{P}}[\mathbf{Z}'_n(X'_n) \neq \mathbf{Z}'_n(X_n^*)]$. Alors X_0 satisfait le critère de Doeblin fort si et seulement si $D_n \rightarrow 0$ d'après la proposition 9.1.3.

On définit les événements

$$A_m = \{\mathbf{Z}^{(s_m \rightsquigarrow s_{m+1})} \text{ est constante}\}.$$

pour tout $m < 0$. Ce sont des événements indépendants et sous notre hypothèse, le lemme de Borel-Cantelli affirme qu'une infinité d'entre eux sont réalisés presque sûrement. Or

$$\bar{\mathbb{P}}[\mathbf{Z}'_n(X'_n) = \mathbf{Z}'_n(X_n^*)] \geq \mathbb{P}\left[\bigcup_{m, s_m \geq n} A_m\right],$$

d'où $D_n \rightarrow 0$. □

La proposition suivante est une généralisation d'un résultat de Rosenblatt [Ros1].

Proposition 9.3.3. *Soit E un espace métrique standard et soit $((X_n, V_n), f; E_n)_{n \leq 0}$ une chaîne de Markov constructive homogène. On note \mathcal{G} sa filtration. On pose $T_u(x) = f(x, u)$.*

- 1) *S'il existe $s \leq 0$ tel que l'application $x \mapsto T_{V_0} \circ T_{V_{-1}} \circ \dots \circ T_{V_s}(x)$ est constante avec une probabilité non nulle, alors X_0 satisfait le critère de Doeblin fort avec $(V_n)_{n \leq 0}$. Par conséquent, \mathcal{G} est engendrée par le processus d'innovations $(V_n)_{n \leq 0}$.*
- 2) *Lorsque E est fini et qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que $\mathbb{P}[X_n = i] > \epsilon$ pour tout $i \in E$ et tout entier $n \leq 0$ (donc en particulier lorsque (X_n) est stationnaire), alors la réciproque est vraie : dans ce cas si \mathcal{G} est engendrée par $(V_n)_{n \leq 0}$, il existe $s \leq 0$ tel que l'application $x \mapsto T_{V_0} \circ T_{V_{-1}} \circ \dots \circ T_{V_s}(x)$ est constante avec une probabilité non nulle.*

Démonstration. 1) Par homogénéité, \mathcal{G} est engendrée par $(V_n)_{n \leq 0}$ si et seulement si X_0 est mesurable dans la tribu engendrée par $(V_n)_{n \leq 0}$. Or si l'application $T_{V_0} \circ T_{V_{-1}} \circ \dots \circ T_{V_s}$ est constante avec une probabilité non nulle, la proposition 9.3.1 appliquée avec $s_n = |n|(s-1)$ montre que X_0 satisfait le critère de Doeblin fort avec $(V_n)_{n \leq 0}$.

2) Supposons que (X_n) est standard, que E est fini, et que presque sûrement l'application $T_{V_0} \circ T_{V_{-1}} \circ \dots \circ T_{V_s}$ n'est pas constante, pour tout $s \leq 0$. Soit $n \leq 0$ fixé. On utilise les notations du début de cette section et on se place dans l'espace probabilisé $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$ de la définition 9.1.2. Posons $\mathcal{C}'_n = \sigma(V'_{n+1}, \dots, V'_0)$. On choisit deux éléments $S' \in E$, $T' \in E$, mesurables pour \mathcal{C}'_n tels que

$$T_{V'_0} \circ \dots \circ T_{V'_{n+1}}(S') \neq T_{V'_0} \circ \dots \circ T_{V'_{n+1}}(T')$$

presque sûrement. Constatons que

$$\bar{\mathbb{P}}[X'_n = S', X_n^* = T' | \mathcal{C}'_n] = \bar{\mathbb{P}}[X'_n = S' | \mathcal{C}'_n] \bar{\mathbb{P}}[X_n^* = T' | \mathcal{C}'_n] > \epsilon^2,$$

d'où $\bar{\mathbb{P}}[X'_n = S', X_n^* = T'] > \epsilon^2$ et par conséquent $\bar{\mathbb{P}}[X'_0 \neq X_n^*] > \epsilon^2$. Ceci montre que X_0 ne satisfait pas le critère de Doeblin avec $(V_n)_{n \leq 0}$, donc qu'elle n'est pas mesurable pour la tribu engendrée par $(V_n)_{n \leq 0}$ par la proposition 9.1.3. □

Comme application du 2) de cette proposition, on retrouve que la filtration de l'exemple de Vinokurov vu dans la section 2.2 n'est pas engendrée par ses innovations ε_n .

10. I-JONCTION EN ARBRE.

Avant Vershik, aucun exemple n'avait été donné d'une filtration conditionnellement homogène, kolmogorovienne et essentiellement séparable mais qui n'est pas de type produit. Son premier exemple est une filtration dyadique (**Example 1**, [Ver] p. 739, et [Ver68]). Pour le démontrer, Vershik n'a pas utilisé son critère de standardité sous sa forme générale, mais celui qu'il a énoncé pour les filtrations r_n -adiques seulement, où interviennent les *automorphismes d'arbre*. En effet dans [Ver] le critère de standardité est défini dans deux cas : le premier concerne seulement les filtrations essentiellement séparables r_n -adiques, nous l'appelons critère de standardité r_n -adique (9) ; le deuxième concerne les filtrations essentiellement séparables générales et généralise le premier. Nous ne savons pas traduire le critère de standardité r_n -adique en termes probabilistes, mais le critère de *I-jonction en arbre* que nous allons définir maintenant lui ressemble fortement. Le critère de Doebelin en est un cas particulier. Énoncé pour toutes les filtrations de type produit local conditionnellement séparables, nous verrons très facilement que le critère de I-jonction en arbre est équivalent au critère de Vershik de premier niveau. Dans les chapitres suivants nous l'utiliserons pour démontrer que des filtrations ne sont pas de type produit.

10.1 Coïmmersions en arbre.

Ici nous définissons les *coïmmersions en arbre*. Elles sont au cœur de la démonstration du théorème 1.1.1, et aussi nous les utiliserons pour étudier des exemples intéressants de filtrations (chapitres 11 et 12).

Lemme 10.1.1. *Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ des filtrations sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et $n_0 \leq 0$. On définit les filtrations $\mathcal{F}^{n_0} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq n_0}$, $\mathcal{F}^{\llbracket n_0 \rrbracket} = (\mathcal{F}_{n_0}, \mathcal{F}_{n_0+1}, \dots, \mathcal{F}_0)$, $\mathcal{G}^{n_0} = (\mathcal{G}_n)_{n \leq n_0}$, et $\mathcal{G}^{\llbracket n_0 \rrbracket} = (\mathcal{G}_{n_0}, \mathcal{G}_{n_0+1}, \dots, \mathcal{G}_0)$. Alors \mathcal{F} est immergée dans \mathcal{G} si et seulement si \mathcal{F}^{n_0} est immergée dans \mathcal{G}^{n_0} et $\mathcal{F}^{\llbracket n_0 \rrbracket}$ est immergée dans $\mathcal{G}^{\llbracket n_0 \rrbracket}$.*

Démonstration. C'est une conséquence facile du lemme 8.2.6. □

Définition 10.1.2. Soit $n_0 < 0$ un entier. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration et soient \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' deux filtrations isomorphes à \mathcal{F} . On dit que $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ est une *coïmmersion de \mathcal{F} en arbre sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$* si les filtrations \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' sont coïmmergées et pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, on a $\mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}''_n = \mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}''_{n_0} = \mathcal{F}'_{n_0} \vee \mathcal{F}''_n$.

Lemme 10.1.3. *Soit $n_0 < 0$ un entier et soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. On note (V_{n_0+1}, \dots, V_0) une innovation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. Soient \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' deux filtrations isomorphes à \mathcal{F} . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ est une coïmmersion de \mathcal{F} en arbre sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$.
- (b) Les filtrations $(\mathcal{F}'_n)_{n \leq n_0}$ et $(\mathcal{F}''_n)_{n \leq n_0}$ sont coïmmergées et chacun des deux vecteurs aléatoires $(V'_{n_0+1}, \dots, V'_0)$ et $(V''_{n_0+1}, \dots, V''_0)$ est une innovation de la filtration $\mathcal{F}' \vee \mathcal{F}''$.

(c) Les filtrations $(\mathcal{F}'_n)_{n \leq n_0}$ et $(\mathcal{F}''_n)_{n \leq n_0}$ sont coïmmergées, chacun des deux vecteurs aléatoires $(V'_{n_0+1}, \dots, V'_0)$ et $(V''_{n_0+1}, \dots, V''_0)$ est indépendant de la σ -algèbre $\mathcal{F}'_{n_0} \vee \mathcal{F}''_{n_0}$, et pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}''_n &= (\mathcal{F}'_{n_0} \vee \mathcal{F}''_{n_0}) \dot{\vee} \sigma(V'_{n_0+1}, \dots, V'_n) \\ &= (\mathcal{F}'_{n_0} \vee \mathcal{F}''_{n_0}) \dot{\vee} \sigma(V''_{n_0+1}, \dots, V''_n). \end{aligned}$$

Démonstration. (a) \implies (c) se déduit immédiatement de la définition, (c) \implies (b) est évident. Le seul point non trivial de (b) \implies (a) est la coïmmersion qui se vérifie de la manière suivante. Par symétrie et par le lemme 10.1.1, il suffit de montrer que la filtration $(\mathcal{F}'_{n_0}, \mathcal{F}'_{n_0+1}, \dots, \mathcal{F}'_0)$ est immergée dans la filtration $(\mathcal{F}'_{n_0} \vee \mathcal{F}''_{n_0}, \mathcal{F}'_{n_0+1} \vee \mathcal{F}''_{n_0+1}, \dots, \mathcal{F}'_0 \vee \mathcal{F}''_0)$, et cela se déduit du lemme 8.2.8. \square

La notation suivante sera utilisée plusieurs fois :

Notation 10.1.4. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration avec une innovation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. On se donne, sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$, deux copies indépendantes \mathcal{F}' et \mathcal{F}^* de la filtration \mathcal{F} . Si $(V''_{n_0+1}, \dots, V''_0)$ est un vecteur aléatoire indépendant de $\mathcal{F}'_{n_0} \dot{\vee} \mathcal{F}^*_{n_0}$ et de même loi que (V_{n_0+1}, \dots, V_0) , on note $\mathcal{F}^{*n_0, V''_{n_0+1}, \dots, V''_0}$ la filtration définie par

$$\mathcal{F}^{*n_0, V''_{n_0+1}, \dots, V''_0} = \begin{cases} \mathcal{F}^*_n & \text{si } n \leq n_0 \\ \mathcal{F}^*_{n_0} \dot{\vee} \sigma(V''_{n_0+1}, \dots, V''_n) & \text{si } n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket. \end{cases}$$

D'après le lemme précédent, le couple $(\mathcal{F}', \mathcal{F}^{*n_0, V''_{n_0+1}, \dots, V''_0})$ est une coïmmersion de \mathcal{F} en arbre sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. Avec la définition suivante, nous dirons que c'est une $I(n_0)$ -coïmmersion en arbre de \mathcal{F} .

Définition 10.1.5. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $n_0 \leq 0$. On dit que deux filtrations $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}'_n)_{n \leq 0}$ et $\mathcal{F}'' = (\mathcal{F}''_n)_{n \leq 0}$ définies sur un même espace de probabilité $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ isomorphes à \mathcal{F} , coïmmergées et telles que les σ -algèbres \mathcal{F}'_{n_0} et \mathcal{F}''_{n_0} sont indépendantes forment une, ou que $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ est une, $I(n_0)$ -coïmmersion de \mathcal{F} , ou seulement une I -coïmmersion de \mathcal{F} si on ne veut pas préciser n_0 . Lorsque $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ est de plus une coïmmersion de \mathcal{F} en arbre sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, nous dirons une I -coïmmersion en arbre de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, ou une $I(n_0)$ -coïmmersion en arbre de \mathcal{F} , ou une $IT(n_0)$ -coïmmersion de \mathcal{F} . On dira aussi I -coïmmersion en arbre de \mathcal{F} , ou IT -coïmmersion de \mathcal{F} quand on ne précise pas n_0 .

Lemme 10.1.6. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ deux filtrations coïmmergées définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $t_0 \in \mathbb{T}$. Si les σ -algèbres \mathcal{F}_{t_0} et \mathcal{G}_{t_0} sont indépendantes, alors il y a aussi indépendance entre les σ -algèbres \mathcal{F}_{t_0} et \mathcal{G}_∞ et entre les σ -algèbres \mathcal{F}_∞ et \mathcal{G}_{t_0} .

Démonstration. Sous ces hypothèses, montrons que les σ -algèbres \mathcal{F}_{t_0} et \mathcal{G}_∞ sont indépendantes, l'autre indépendance s'en déduit par symétrie. Soient F_{t_0} une variable aléatoire bornée mesurable dans \mathcal{F}_{t_0} et G_∞ une variable aléatoire bornée mesurable dans \mathcal{G}_∞ . On a $\mathbb{E}[F_{t_0} G_\infty | \mathcal{F}_{t_0} \dot{\vee} \mathcal{G}_{t_0}] = F_{t_0} \mathbb{E}[G_\infty | \mathcal{F}_{t_0} \dot{\vee} \mathcal{G}_{t_0}]$ et $\mathbb{E}[G_\infty | \mathcal{F}_{t_0} \dot{\vee} \mathcal{G}_{t_0}] = \mathbb{E}[G_\infty | \mathcal{G}_{t_0}]$ par immersion de \mathcal{G} dans $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$. On a donc $\mathbb{E}[F_{t_0} G_\infty] = \mathbb{E}[F_{t_0} \mathbb{E}[G_\infty | \mathcal{G}_{t_0}]] = \mathbb{E}[F_{t_0}] \mathbb{E}[G_\infty]$ par l'indépendance entre \mathcal{F}_{t_0} et \mathcal{G}_{t_0} . \square

Lemme 10.1.7. Soit \mathcal{B} une σ -algèbre, et sur un même espace probabilisé, soient \mathcal{B}' , \mathcal{B}'' deux σ -algèbres isomorphes à \mathcal{B} . Si W est une variable aléatoire mesurable pour $\mathcal{B}' \vee \mathcal{B}''$, il existe une variable aléatoire Y mesurable pour \mathcal{B} telle que $\sigma(Y', Y'') \supset \sigma(W)$.

Démonstration. On peut écrire $W = f(S', T'')$ où f est borélienne, $S \in L^0(\mathcal{B}')$ et $T \in L^0(\mathcal{B}'')$. Il suffit de prendre une variable aléatoire Y telle que $\sigma(Y) \supset \sigma(S, T)$. \square

Proposition 10.1.8. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration avec, pour un entier $n_0 \leq 0$, une innovation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. On note μ_n la loi de V_n . Soit $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ une coïmmersion de \mathcal{F} sur $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ est une coïmmersion de \mathcal{F} en arbre sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$
- (b) Pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, il existe une variable aléatoire $Y_{n-1} \in L^0(\mathcal{F}_{n-1})$ et une famille mesurable $\{\psi_{y', y''}\}_{y', y'' \in \mathbb{R}}$ de transformations inversibles de μ_n telles que $V_n'' = \psi_{Y_{n-1}', Y_{n-1}''}^{(n)}(V_n')$.
- (c) Il existe une variable aléatoire $Y_{n_0} \in L^0(\mathcal{F}_{n_0})$ et une famille mesurable $\{\tau_{y', y''}\}_{y', y'' \in \mathbb{R}}$ d'éléments de $G_{n_0}(V_{n_0+1}, \dots, V_0)$ et telle que

$$(V_{n_0+1}'', \dots, V_0'') = \tau_{Y_{n_0}', Y_{n_0}''}(V_{n_0+1}', \dots, V_0'),$$

où $G_{n_0}(V_{n_0+1}, \dots, V_0)$ est le groupe des changements d'innovations de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ de même loi que (V_{n_0+1}, \dots, V_0) .

Démonstration. Cela se déduit de la proposition 4.4.8 et du lemme 10.1.7. \square

10.2 I-jonction en arbre.

Définition 10.2.1. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration localement de type produit conditionnellement séparable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que \mathcal{F} est *I-joignable en arbre* ou qu'elle satisfait le *critère de IT-jonction* si pour toute variable aléatoire $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0)$, il existe $n_0 \leq 0$ et un espace de probabilité $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$ avec une $I(n_0)$ -coïmmersion en arbre $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} telle que les copies X', X'' de X dans \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' respectivement, vérifient $\bar{\mathbb{P}}[X' \neq X''] < \delta$.

La proposition suivante va être démontrée dans cette section :

Proposition 10.2.2. *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local essentiellement séparable. Alors \mathcal{F} est de type produit si et seulement si \mathcal{F} est I-joignable en arbre.*

Le lemme suivant sera utilisé ainsi que dans de futurs chapitres.

Lemme 10.2.3. *On se donne un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, deux σ -algèbres $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ indépendantes, et deux espaces mesurables (S, \mathcal{S}) et (T, \mathcal{T}) . Pour $s \in S$, soient \mathbf{X}_s des éléments aléatoires dans T tous mesurables pour \mathcal{B} et tels que l'application $(s, \omega) \mapsto \mathbf{X}_s(\omega)$ est mesurable. On se donne une fonction mesurable positive $\theta: T \times T \rightarrow [0, +\infty[$, et pour deux éléments aléatoires X et Y dans T , on pose $\mathbb{D}[X, Y] = \mathbb{E}[\theta(X, Y)] \in [0, +\infty]$. Si X est mesurable pour \mathcal{B} et si C est un élément aléatoire dans S mesurable pour \mathcal{C} , alors il existe $s \in S$ tel que $\mathbb{D}[X, \mathbf{X}_s] \leq \mathbb{D}[X, \mathbf{X}_C]$.*

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{D}[X, \mathbf{X}_C] &= \mathbb{E}[\theta(X, \mathbf{X}_C)] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\theta(X, \mathbf{X}_C) \mid \mathcal{C}]\right] \\ &= \int \mathbb{E}[\theta(X, \mathbf{X}_s)] d\mathbb{P}_C(s) = \int \mathbb{D}[X, \mathbf{X}_s] d\mathbb{P}_C(s). \end{aligned}$$

Il doit donc exister s tel que $\mathbb{D}[X, \mathbf{X}_s] \leq \mathbb{D}[X, \mathbf{X}_C]$. \square

Pour le lemme qui suit, on se donne une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ localement de type produit sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, avec un processus d'innovation $(V_n)_{n \leq 0}$, et on se donne une $I(n_0)$ -coïmmersion en arbre $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note Y_{n_0} une variable aléatoire mesurable dans \mathcal{F}_{n_0} et $\{\tau_{y', y''}\}_{y', y'' \in \mathbb{R}}$ une famille d'éléments de $G_{n_0}(V_{n_0+1}, \dots, V_0)$ qui dépend mesurablement de (y', y'') , tels que

$$(V''_{n_0+1}, \dots, V''_0) = \tau_{Y'_{n_0}, Y''_{n_0}}(V'_{n_0+1}, \dots, V'_0),$$

ces objets existant grâce à la proposition 10.1.8.

Lemme 10.2.4. *Soient E un espace métrique standard et $\theta: E \times E \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction borélienne positive. Avec les notations ci-dessus, soient $X \in L^0(\mathcal{F}_0; E)$ et X' et X'' les copies de X dans \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' . Alors pour un certain $y'' \in \mathbb{R}$, le vecteur*

$$(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0) = \tau_{Y'_{n_0}, y''}(V'_{n_0+1}, \dots, V'_0)$$

est une innovation de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ et il existe une variable \tilde{Z} mesurable dans $\sigma(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$ telle que $\mathbb{E}[\theta(X', \tilde{Z})] \leq \mathbb{E}[\theta(X', X'')]$.

Démonstration. On écrit $X = f(Z_{n_0}, V_{n_0+1}, \dots, V_0)$ pour une variable aléatoire $Z_{n_0} \in L^0(\mathcal{F}_{n_0})$ et une fonction borélienne f . Par isomorphisme, on a $X'' = f(Z''_{n_0}, \tau_{Y'_{n_0}, Y''_{n_0}}(V'_{n_0+1}, \dots, V'_0))$. Prenons une variable aléatoire W_{n_0} telle que $\sigma(W_{n_0}) \supset \sigma(Z_{n_0}, Y_{n_0})$ et écrivons $Z_{n_0} = g(W_{n_0})$ et $Y_{n_0} = h(W_{n_0})$ où g et h sont boréliennes.

Il y a indépendance entre \mathcal{F}''_{n_0} et X' d'après le lemme 10.1.6, et on obtient alors $(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$ en appliquant le lemme 10.2.3 avec $C = W''_{n_0}$ et $\mathbf{X}_s = f(g(s), \tau_{Y'_{n_0}, h(s)}(V'_{n_0+1}, \dots, V'_0))$, et $(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$ est bien une innovation de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ par la proposition 4.4.8. \square

Définition 10.2.5. Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable.

- Soit F un ensemble fini. On dit qu'une variable aléatoire $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$ *satisfait le critère de I-jonction en arbre* (sous-entendu : dans L^1) si pour $\delta > 0$, il existe un entier $n_0 \leq 0$ et une $I(n_0)$ -coïmmersion en arbre $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} sur un espace de probabilité $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$ telle que $\bar{\mathbb{P}}[X' \neq X''] < \delta$. On note $IT^{\text{simple}}(\mathcal{F}; F)$ l'ensemble des variables aléatoires $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$ qui satisfont le critère de I-jonction en arbre
- Soient (E, ρ) un espace métrique standard et $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$. On dit que X *satisfait le critère de I-jonction en arbre* (sous-entendu : dans L^1) si pour $\delta > 0$, il existe un entier $n_0 \leq 0$ et une $I(n_0)$ -coïmmersion en arbre $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} sur un espace de probabilité $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$ telle que $\bar{\mathbb{E}}[\rho(X', X'')] < \delta$. On note $IT^1(\mathcal{F}; E)$ l'ensemble des variables aléatoires $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ qui satisfont le critère de I-jonction en arbre.
- Soit (E, ρ) un espace métrique standard. On dit qu'une variable aléatoire $X \in L^0(\mathcal{F}_0; E)$ *satisfait le critère de I-jonction en arbre* (sous-entendu : dans L^0) si pour $\delta > 0$, il existe un entier $n_0 \leq 0$ et une $I(n_0)$ -coïmmersion en arbre $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} sur un espace de probabilité $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$ telle que $\bar{\mathbb{P}}[\rho(X', X'') > \delta] < \delta$. On note $IT^0(\mathcal{F}; E)$ l'ensemble des variables aléatoires $X \in L^0(\mathcal{F}_0; E)$ qui satisfont le critère de I-jonction en arbre.
- On dit qu'une σ -algèbre $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{F}_0$ *satisfait le critère de I-jonction en arbre* si $L^1(\mathcal{E}_0, \mathbb{R}) \subset IT^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$.

Le lemme suivant se vérifie aisément :

Lemme 10.2.6. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration localement de type produit conditionnellement séparable. Soit (E, ρ) un espace métrique standard. Alors $IT^1(\mathcal{F}; E)$ est fermé dans $L^1(\mathcal{F}_0; E)$.*

Corollaire 10.2.7. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable. Soient \mathcal{B} une sous- σ -algèbre de \mathcal{F}_0 et $(\mathcal{B}_m)_{m \geq 0}$ une suite croissante de sous- σ -algèbres de \mathcal{B} telle que $\mathcal{B}_m \uparrow \mathcal{B}$ quand $m \rightarrow +\infty$. Soit (E, ρ) un espace métrique standard. On suppose que pour tout $m \leq 0$, toute variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{B}_m; E)$ satisfait le critère de I-jonction en arbre. Alors c'est aussi le cas de toute variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{B}; E)$.*

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 10.2.6. \square

Proposition 10.2.8. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration localement de type produit conditionnellement séparable. Soient (E, ρ) un espace métrique standard. Une variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de I-jonction en arbre si et seulement si elle satisfait le critère de Vershik de premier niveau, ou en d'autres termes, on a $V^1(\mathcal{F}; E) = IT^1(\mathcal{F}; E)$. Par conséquent, une σ -algèbre $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{F}_0$ satisfait le critère de I-jonction en arbre si et seulement si elle satisfait le critère de Vershik de premier niveau.*

Démonstration. Si $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de I-jonction en arbre, une application directe du lemme 10.2.4 avec $\theta = \rho$ montre qu'elle satisfait le critère de Vershik de premier niveau. Réciproquement, supposons que $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau. On se donne $\delta > 0$. On a alors un entier $n_0 \leq 0$, une innovation $(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et une variable aléatoire Z dans E mesurable dans $\sigma(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$ telle que $\mathbb{E}[\rho(X, Z)] < \delta/2$. On se donne, sur un espace probabilisé $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$, deux copies indépendantes \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' de la filtration \mathcal{F} et en utilisant les notations de la notation 10.1.4, on note \mathcal{F}'' la filtration $\mathcal{F}^{*n_0, \tilde{V}'_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}'_0}$. Alors $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ est une $I(n_0)$ -coïmmersion en arbre de \mathcal{F} , et on a

$$\overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X'')] \leq \overline{\mathbb{E}}[\rho(X', Z')] + \overline{\mathbb{E}}[\rho(Z', Z'')] + \overline{\mathbb{E}}[\rho(X'', Z'')]$$

par l'inégalité triangulaire. Or $Z' = Z''$ puisque Z est mesurable dans $\sigma(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_0)$, et on obtient alors $\overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X'')] \leq 2\mathbb{E}[\rho(X, Z)] < \delta$. \square

Corollaire 10.2.9. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration localement de type produit avec un processus d'innovations. Alors \mathcal{F} est I-joignable en arbre si et seulement si \mathcal{F} vérifie le critère de Vershik de premier niveau.*

Démonstration. C'est une conséquence facile des définitions et de la proposition 10.2.8 appliquée avec la distance discrète sur tout ensemble fini F . \square

La proposition 10.2.2 se déduit alors de ce corollaire et de la proposition 3.1.5. Donnons encore quelques conséquences de la proposition 10.2.8 et des résultats de la section 3.

Corollaire 10.2.10. *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable.*

1) *Soit $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{F}_0$ une σ -algèbre. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) \mathcal{E}_0 satisfait le critère de I-jonction en arbre.
- b) *Pour tout ensemble fini F , toute variable aléatoire $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{E}_0; F)$ satisfait le critère de I-jonction en arbre. En d'autres termes, $L^{\text{simple}}(\mathcal{E}_0; F) \subset IT^{\text{simple}}(\mathcal{F}; F)$.*
- c) *Toute variable aléatoire réelle $X \in L^0(\mathcal{E}_0)$ satisfait le critère de I-jonction en arbre. En d'autres termes, $L^0(\mathcal{E}_0) \subset IT^0(\mathcal{F})$.*

2) Soit E un espace métrique standard et $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$. Alors X satisfait le critère de I-jonction en arbre si et seulement si $\sigma(X)$ satisfait le critère de I-jonction en arbre.

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 10.2.8 et des parties 1) et 3) de la proposition 3.3.3. \square

Les deux corollaires suivants s'en déduisent immédiatement :

Corollaire 10.2.11. *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- a) *La filtration \mathcal{F} satisfait le critère de I-jonction en arbre.*
- b) *La σ -algèbre \mathcal{F}_0 satisfait le critère de I-jonction en arbre.*
- c) *Toute variable aléatoire $X \in L^0(\mathcal{F}_0)$ satisfait le critère de I-jonction en arbre. En d'autres termes, $L^0(\mathcal{F}_0) \subset IT^0(\mathcal{F})$.*

Corollaire 10.2.12. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement séparable. Soient (E, ρ) un espace métrique standard et $F \subset E$ une partie finie de E . Alors $IT^{\text{simple}}(\mathcal{F}; F) = IT^1(\mathcal{F}; E) \cap L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F) = IT^0(\mathcal{F}; E) \cap L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$ et $IT^1(\mathcal{F}; E) = IT^0(\mathcal{F}; E) \cap L^1(\mathcal{F}_0; E)$.*

Remarque. — On trouve plusieurs notions de confort dans la littérature ([ES]), et toutes ont la propriété d'être stables par immersion : une filtration immergée dans une filtration confortable est confortable. D'abord, cela ne peut s'énoncer pour le critère de I-jonction en arbre puisqu'il ne concerne que les filtrations *tplcs*, et nous verrons même qu'une filtration *tplcs* ne satisfait pas nécessairement le critère de I-jonction en arbre si elle est immergée dans une filtration *tplcs* qui satisfait le critère de I-jonction en arbre (nous le verrons sur la filtration de l'exemple de Vinokurov).

11. LE CONTRE-EXEMPLE DES MOTS DÉCOUPÉS.

Nous allons utiliser le critère de I-jonction en arbre pour établir des conditions suffisantes sur un processus de mots découpés pour qu'il n'engendre pas une filtration de type produit. Dans le cas où l'alphabet est fini, vérifier que le critère de I-jonction en arbre n'est pas satisfait sera ramené à un problème de nature combinatoire. Nous en déduirons le cas des alphabets généraux à l'aide des résultats de second niveau de la théorie de Vershik. Comme nous l'avons déjà signalé dans le chapitre 6 (section 6.4), les filtrations des processus des mots découpés r_n -adiques sont étudiées dans [Ver], mais sous une autre forme ; la condition que nous allons obtenir sur la suite de découpage (condition (Δ) , proposition 11.4.2), sous laquelle la filtration du processus des mots découpés r_n -adique n'est pas de type produit, est aussi établie dans [Ver].

11.1 Coïmmersions en arbre de deux processus de mots découpés.

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, nous considérons le processus r_n -adique des mots découpés $(X_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ sur l'alphabet (A, \mathfrak{A}, μ) , tel qu'il est défini dans le chapitre 6. La filtration qu'il engendre est notée $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$. Pour un entier $n_0 < 0$, nous considérons une $I(n_0)$ -coïmmersion en arbre $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} . Comme à notre habitude, les copies d'une variable aléatoire $X \in L^0(\mathcal{F}_0)$ dans \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' sont notées X' et X'' respectivement. Nous utilisons les notations de la section 6.1 concernant les processus de mots découpés et les notations de la section 4.4 sur les changements d'innovation et les automorphismes d'arbre. La suite $(r_n)_{n \leq 0}$ est fixée et nous notons \mathcal{T}_{n_0} l'arbre r_n -adique de hauteur $|n_0|$ et $\mathcal{T}_{n_0}^{\max}$ l'ensemble de ses branches maximales. De par la proposition 10.1.8, il existe une variable aléatoire $Y_{n_0} \in L^0(\mathcal{F}_{n_0})$ et une famille $\tau_{y', y''}$ d'automorphismes de l'arbre r_n -adique \mathcal{T}_{n_0} de hauteur $|n_0|$ tels que

$$(\eta''_{m_0+1}, \dots, \eta''_0) = \tau_{Y'_{n_0}, Y''_{n_0}}(\eta'_{m_0+1}, \dots, \eta'_0).$$

Pour tout $m \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, $X''_{m+1} = s_m^{(m+1)}(X''_m, \eta''_{m+1})$ est le η''_{m+1} -ème mot des r_{m+1} sous-mots de X''_m de longueur ℓ_{m+1} qui forment X''_m par concaténation de la gauche vers la droite. Nous voulons étudier le critère de I-jonction en arbre pour X_0 , c'est-à-dire étudier la quantité $\mathbb{P}[X'_0 \neq X''_0]$. Dans la section suivante, nous donnons les outils nécessaires pour étudier l'évolution de l'instant n_0 à l'instant 0 des deux processus couplés sur l'événement $\{X'_{n_0} = w'_{n_0}, X''_{n_0} = w''_{n_0}\}$.

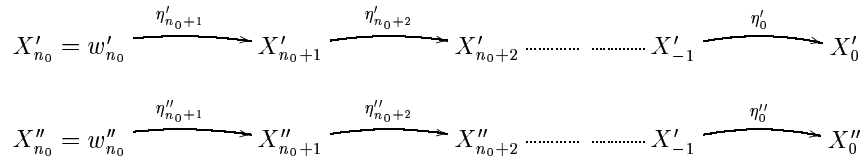


Fig. 11.1: Les deux processus couplés.

11.2 Le mécanisme de découpage.

Soit A un alphabet. Une suite $r = (r_n)_{n \leq 0}$ d'entiers positifs est donnée. Pour tout $n \leq 0$, on pose $\ell_n = \prod_{k=n+1}^0 r_k$. Ainsi $\ell_0 = 1$ et $\ell_{n-1} = r_n \ell_n$ pour tout $n \leq 0$. Pour $n \leq 0$, on pose $\ell_n = 2^{|n|}$. Nous avons défini le mécanisme de découpage r_n -adique $(s_n^{(n+1)})_{n < 0}$ dans le chapitre 6. Pour $n < 0$ fixé, on définit maintenant par récurrence des applications

$$s_n^{(m)} : A^{\ell_n} \times \{1, \dots, r_{n+1}\} \times \dots \times \{1, \dots, r_m\} \longrightarrow A^{\ell_m}, \quad \text{pour } m \in \llbracket n, 0 \rrbracket, \text{ par}$$

$$s_n^{(n+k+1)}(w_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+k}, e_{n+k+1}) = s_{n+k}^{(n+k+1)}(s_n^{(n+k)}(w_n, e_{n+1}, \dots, e_{n+k}), e_{n+k+1}).$$

Avec ces notations, si (X_n, η_n) est le processus des mots découpés r_n -adique sur A , alors

$$X_{n+k} = s_n^{(n+k)}(X_n, \eta_{n+1}, \dots, \eta_{n+k}).$$

Nous posons $s_n = s_n^{(0)}$ pour alléger la notation. Cette application se lit commodément sur un arbre r_n -adique \mathcal{T}_n de hauteur $|n|$ étiqueté, comme cela est présenté sur la figure 11.2(a) où $n = -3$ et $w = abcdefgh$; on y lit par exemple $s_{-3}^{-(1)}(w, 2, 1) = w_5 w_6$ au bout de la branche $(2, 1)$ de l'arbre. La lettre que l'on lit au bout d'une branche maximale $(e_{n+1}, \dots, e_0) \in \mathcal{T}_n^{\max}$ est $s_n(w, e_{n+1}, \dots, e_0)$.

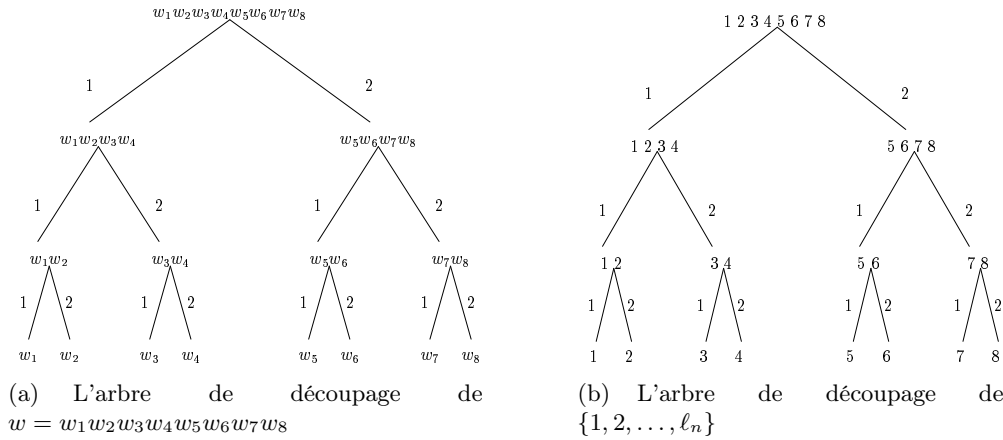


Fig. 11.2: Deux arbres étiquetés.

Définition 11.2.1. Nous utilisons les notations précédentes.

- Soit w un mot de longueur ℓ_n , et $(e_{n+1}, \dots, e_0) \in \mathcal{T}_n^{\max}$ une branche maximale de l'arbre r_n -adique de hauteur $|n|$. La lettre $s_n(w, e_{n+1}, \dots, e_0)$ est appelée *la lettre extraite de w par découpages successifs avec (e_{n+1}, \dots, e_0)* .

- Soit $(e_{n+1}, \dots, e_0) \in \mathcal{T}_n^{\max}$. On note $j_n(e_{n+1}, \dots, e_0)$ l'indice de la lettre qui n'est pas effacée dans un mot de longueur ℓ_n lorsque l'on découpe avec (e_{n+1}, \dots, e_0) . C'est l'entier que l'on lit au bout de la branche (e_{n+1}, \dots, e_0) sur l'arbre étiqueté de la figure 11.2(b) (où $n = -3$).

Action d'un automorphisme d'arbre sur le découpage. — Nous notons G_n le groupe des automorphismes de l'arbre r_n -adique de hauteur $|n|$. Il agit naturellement sur les mots de longueur ℓ_n de la manière suivante. En lisant de gauche à droite les lettres en bas de l'arbre étiqueté de la figure 11.2(a), on retrouve le mot w placé à la racine de l'arbre. Si un automorphisme d'arbre $\tau \in G_n$ est appliqué à l'arbre étiqueté, le mot qu'on lit de gauche à droite les lettres en bas de l'arbre transformé est transformé en un mot qu'on note $\tau.w$. Ceci est représenté sur la figure 11.3. Plus sérieusement (indépendamment de l'alphabet), τ

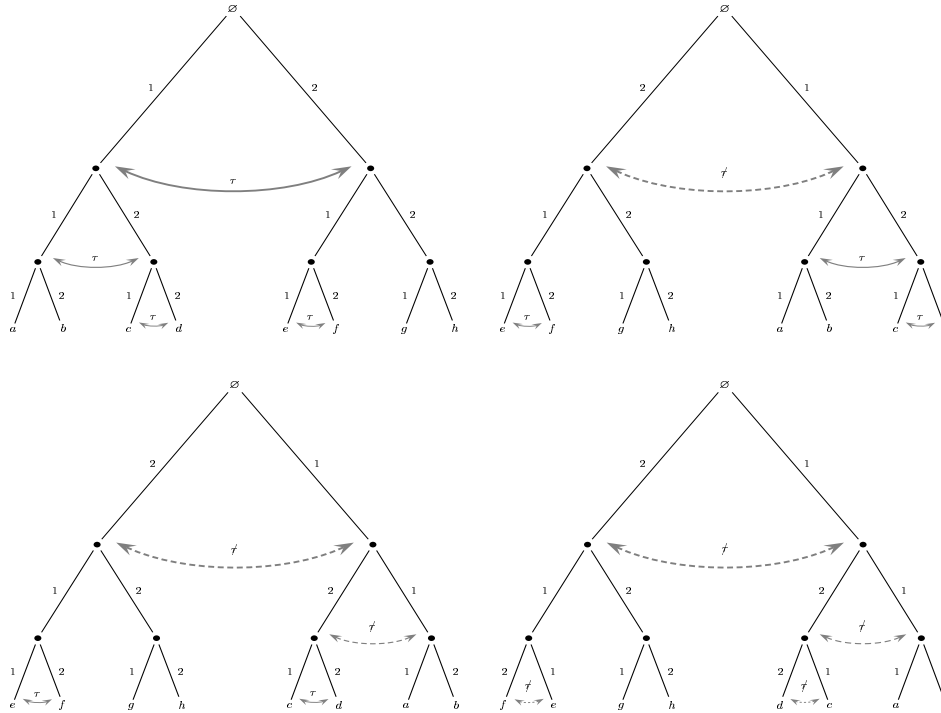


Fig. 11.3: $\tau.abcdefgh = feghdcab$.

s'identifie à une permutation de $\{1, 2, \dots, \ell_n\}$ qu'on note encore τ , et agit alors sur tout mot $w = w_1 w_2 \dots w_{\ell_n}$ de longueur ℓ_n par la formule $\tau.w = w_{\tau(1)} w_{\tau(2)} \dots w_{\tau(\ell_n)}$. On fait apparaître cette permutation en lisant de gauche à droite $\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(\ell_n)$ en bas de l'arbre étiqueté de la figure 11.3 avec le mot $w = 1 2 \dots \ell_n$ à la racine de l'arbre. Ainsi, nous avons aussi une action de G_n sur l'ensemble $\{1, 2, \dots, \ell_n\}$. C'est une action fidèle, c'est-à-dire que l'identification de $\tau \in G_n$ avec la permutation $i \mapsto \tau(i)$ de $\{1, 2, \dots, \ell_n\}$ est un morphisme de groupe injectif.

Nous écrivons dans le lemme suivant la définition de G_n en tant que sous-groupe du groupe des permutations de $\{1, 2, \dots, \ell_n\}$ que donne cette identification, où nous utilisons les notations de la section 6.1 :

Lemma 11.2.2. *La suite de groupes $(G_n^{(r_n)})_{n \leq 0}$ est définie par :*

1. Pour tout $n \leq 0$, $G_n^{(r_n)}$ est un sous-groupe du groupe des permutations de l'ensemble $I_n^{(r_n)} = \{1, 2, \dots, \ell_n\}$;
2. Pour $n \leq -1$, toute permutation de $I_n^{(r_n)}$ qui permute seulement les intervalles $I_{n,j}^{(r_n)}$'s sans changer l'ordre à l'intérieur d'eux est un élément $G_n^{(r_n)}$.
3. Pour tout $n \leq -1$, si $g_1, \dots, g_{r_{n+1}}$ sont dans $G_{n+1}^{(r_n)}$, alors la permutation g de I_ℓ_n agissant comme g_1 sur $I_{n,1}^{(r_n)}$, comme g_2 sur $I_{n,2}^{(r_n)}$, ..., et comme $g_{r_{n+1}}$ sur $I_{n,r_{n+1}}^{(r_n)}$, est dans $G_n^{(r_n)}$.

Remarque 11.2.3 (Cardinal de G_n^r). On a

$$\#G_n^r = (r_{n+1}!)(r_{n+2}!)^{r_{n+1}}(r_{n+3}!)^{r_{n+1}r_{n+2}} \dots (r_0!)^{r_{n+1}r_{n+2}\dots r_{-1}},$$

et en passant cette égalité au logarithme ceci donne

$$\begin{aligned} \log \#G_n^r &= \sum_{k=n+1}^0 \prod_{i=n+1}^{k-1} r_i \log(r_k!) \\ &= \prod_{i=n+1}^0 r_i \sum_{k=n+1}^0 \frac{\log(r_k!)}{\prod_{j=k}^0 r_j} = \ell_n \sum_{k=n+1}^0 \frac{\log(r_k!)}{\ell_{k-1}}. \end{aligned}$$

Remarque 11.2.4. Soit $(e_{n+1}, \dots, e_0) \in \mathcal{T}_n^{\max}$, et $i = j_n(e_{n+1}, \dots, e_0)$ (définition 11.2.1).

Alors la lettre $s_n(w, \tau(e_{n+1}, \dots, e_0))$ au bout de la branche $\tau(e_{n+1}, \dots, e_0)$ de l'arbre de découpage pour w (figure 11.2(a)) est la $\tau(i)$ -ème lettre $w_{\tau(i)}$ de w , et aussi la i -ème lettre $\tau.w_i$ de $\tau.w$: on a

$$\boxed{\tau(i) = j_n(\tau(e_{n+1}, \dots, e_0))}$$

et

$$\boxed{s_n(w, \tau(e_{n+1}, \dots, e_0)) = s_n(\tau.w, e_{n+1}, \dots, e_0)}. \quad (11.2.1)$$

Croissance des G_n -orbites. — On définit la G_n -orbite d'un mot $w \in A^{\ell_n}$ par $\mathcal{O}_n(w) = \{\tau.w \mid \tau \in G_n\}$. À moins que A ne soit réduit à un point ou que $n \in \{-1, 0\}$, il n'y a aucune G_n -orbite qui égale A^{ℓ_n} tout entier. On note δ_n la métrique de Hamming entre deux mots dans A^{ℓ_n} . Un réel $\alpha \in]0, 1]$ étant donné, on définit la (G_n, α) -orbite de w par

$$\mathcal{O}_{n,\alpha}(w) = \{w' \in A^{\ell_n} \mid \exists w' \in \mathcal{O}_n(w), \delta_n(w, w') < \alpha\}.$$

Alors

$$w' \in \mathcal{O}_{n,\alpha}(w) \iff d_n(w, w') < \alpha,$$

où

$$d_n(w, w') = \inf_{\tau \in G_n} \delta_n(w, \tau.w').$$

Nous posons la question suivante :

Question 11.2.5. Étant donné $\alpha > 0$, peut-on trouver un entier n_0 et un mot $w_{n_0} \in A^{\ell_{n_0}}$ tels que

$$\frac{\#\mathcal{O}_{n_0,\alpha}(w_{n_0})}{\#A^{\ell_{n_0}}} > 1 - \alpha \quad ?$$

En termes équivalents, est-ce que

$$\inf_{w_n} \frac{\#\mathcal{O}_{n,\alpha}(w_n)}{\#A^{\ell_n}} \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 1 \text{ pour tout } \alpha \quad ?$$

Cette question admet la formulation probabiliste suivante. On introduit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec deux mots aléatoires X_n et X'_n de longueur ℓ_n , chacun d'eux de loi uniforme sur A^{ℓ_n} . Alors on a

$$\frac{\#\mathcal{O}_{n,\alpha}(w_n)}{\#A^{\ell_n}} = \mathbb{P}[X'_n \in \mathcal{O}_{n,\alpha}(w_n)] = \mathbb{P}[d_n(w_n, X'_n) \leq \alpha].$$

Remarquons que

$$\sup_{w_n} \mathbb{P}[d_n(w_n, X'_n) \leq \alpha] \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 1 \text{ pour tout } \alpha \iff \inf_{w_n} \mathbb{E}[d_n(w_n, X'_n)] \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0,$$

et notons que

$$\inf_{w_n} \mathbb{E}[d_n(w_n, X'_n)] \leq \mathbb{E}[d_n(X_n, X'_n)] \leq 2 \inf_{w_n} \mathbb{E}[d_n(w_n, X'_n)],$$

et ainsi la question 11.2.5 devient :

Question 11.2.6. *Est-ce que*

$$\mathbb{E}[d_n(X_n, X'_n)] \xrightarrow{n \rightarrow -\infty} 0 \quad ?$$

Le jeu des mots découpés. — Soit $n \leq 0$. On note $(X_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ un processus des mots découpés r_n -adique sur un alphabet A . Pour étudier le critère de I-jonction en arbre pour X_0 , nous ferons appel à la construction suivante de deux suites $((X'_{n+1}, \eta'_{n+1}), \dots, (X'_0, \eta'_0))$ et $((X''_{n+1}, \eta''_{n+1}), \dots, (X''_0, \eta''_0))$ de même loi que $(X_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ sur $\llbracket n, 0 \rrbracket$, que nous donnons sous forme de la modélisation de l'évolution d'un jeu avec des lettres et des dés. Ce jeu consiste à réaliser la prouesse suivante. Deux mots X'_n et X''_n de longueur ℓ_n sont indépendamment tirés au hasard. Le joueur a le mot X''_n en main. Il choisit en fonction de X'_n et X''_n une permutation de $\{1, 2, \dots, r_{n+1}\}$ qu'on note $\varphi_{X'_n, X''_n}^{(n+1)}$. Un dé équilibré η'_{n+1} de r_{n+1} faces est lancé indépendamment du présent et le mot X'_n subit le découpage avec η'_{n+1} : on note $X'_{n+1} = s_n^{(n+1)}(X'_n, \eta'_{n+1})$ le η'_{n+1} sous-mot de longueur ℓ_{n+1} de X'_n . Le joueur découpe son mot avec $\eta''_{n+1} := \varphi_{X'_n, X''_n}^{(n+1)}(\eta'_{n+1})$: il garde en main $X''_{n+1} = s_n^{(n+1)}(X'_n, \eta''_{n+1})$. Il choisit maintenant en fonction de ce qui s'est passé une permutation $\varphi_{X'_n, X''_n, \eta'_{n+1}}^{(n+1)}$ de $\{1, 2, \dots, r_{n+2}\}$. Indépendamment de ce qui s'est passé, un dé η''_{n+1} de r_{n+2} faces est lancé, et ainsi de suite, le joueur continue à découper son mot et à choisir une permutation pour le tirage suivant, jusqu'à ce qu'il ne lui reste plus qu'une lettre X''_0 en main, qu'il compare à la lettre X'_0 finalement extraite de X'_n ; il gagne si ces lettres sont identiques.

Sa *stratégie* est donnée par les permutations $\varphi_{w'_n, w''_n}^{(n+1)}, \varphi_{w'_n, w''_n, e'_{n+1}}^{(n+2)}, \dots, \varphi_{w'_n, w''_n, e'_{n+1}, \dots, e'_{n+k}}^{(n+k)}, \dots, \varphi_{w'_n, w''_n, e'_{n+1}, \dots, e'_0}^{(0)}$, qu'il peut se fixer avant le début du jeu pour chaque issue possible $(w'_n, w''_n, e'_{n+1}, \dots, e'_0)$ de $(X'_n, X''_n, \eta'_{n+1}, \dots, \eta'_0)$. Le jeu est décrit par la construction récurrente suivante : à l'instant $n+k+1$, le dé η'_{n+k+1} est indépendant de ce qui s'est passé et le joueur construit

$$\eta''_{n+k+1} = \varphi_{X'_n, X''_n, \eta'_{n+1}, \dots, \eta'_{n+k}}^{(n+k+1)}(\eta'_{n+k+1})$$

et

$$X''_{n+k+1} = s_{n+k}^{(n+k)}(X''_{n+k}, \eta''_{n+k+1}).$$

On a alors

$$(\eta''_{n+1}, \eta''_{n+2}, \dots, \eta''_0) = \tau_{X'_n, X''_n}(\eta'_{n+1}, \eta'_{n+2}, \dots, \eta'_0)$$

où $\tau_{w', w''}$ est l'automorphisme d'arbre

$$\tau_{w', w''} = \left(\left(\dots \left(\varphi_{w', w''}^{(n+1)} \times \varphi_{w', w''}^{(n+2)} \times \dots \right) \times \varphi_{w', w''}^{(-1)} \right) \times \varphi_{w', w''}^{(-0)} \right),$$

et la *stratégie* du joueur correspond à la donnée de la famille d'automorphismes d'arbre $\{\tau_{w', w''}\}_{w', w''}$.

Question 11.2.7. *On dit que le joueur a une stratégie gagnante si pour tout n , il sait comment jouer à partir de l'instant n (c'est-à-dire comment choisir la famille $\{\tau_{w', w''}\}_{w', w''}$) en sorte que*

$$\mathbb{P}[X'_0 \neq X''_0] \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow -\infty.$$

Est-ce que le joueur a une stratégie gagnante ?

La meilleure stratégie et les G_n -orbites. — Maintenant nous allons établir que la question 11.2.7 est la même que la question 11.2.6 (et donc que la question 11.2.5).

Notation 11.2.8. Soit (A, \mathfrak{A}) un espace mesuré et $\theta: A \times A \rightarrow [0, +\infty[$ une distance mesurable sur A . On appelle la *θ -métrique de Hamming* $\delta_n^\theta(w', w'')$ entre deux mots w' et w'' de longueur ℓ_n définie par

$$\delta_n^\theta(w', w'') = \frac{1}{\ell_n} \sum_{i=1}^{\ell_n} \theta(w'(i), w''(i)),$$

et on définit la pseudo-distance $d_n^\theta(w', w'')$ entre w' et w'' par

$$d_n^\theta(w', w'') = \inf_{\tau \in G_n} \delta_n^\theta(w', \tau.w''),$$

où G_n est le groupe des automorphismes de l'arbre r_n -adique \mathcal{T}_n de hauteur $|n|$. Quand $\theta(a, b) = \mathbb{1}_{\{a \neq b\}}$ est la distance discrète, on utilise les notations $\delta_n(w', w'')$ et $d_n(w', w'')$, et on appelle aussi δ_n la *métrique de Hamming simple*.

Lemma 11.2.9. *Avec les notations du jeu des mots découpés, soient (A, θ) un espace métrique séparable et \mathfrak{A} la tribu borélienne de A . Alors on a*

$$\mathbb{E}[\theta(X'_0, X''_0) \mid X'_n, X''_n] = \delta_n^\theta(w'_n, \tau_{w'_n, w''_n}.w''_n) \quad \text{sur } \{X'_n = w'_n, X''_n = w''_n\}.$$

Démonstration. L'indépendance entre $(\eta'_{n+1}, \dots, \eta'_0)$ et (X'_n, X''_n) donne, sur l'événement $\{X'_n = w'_n, X''_n = w''_n\}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\theta(X'_0, X''_0) \mid X'_n, X''_n] &= \mathbb{E}\left[\theta(s_n(w'_n, \eta'_{n+1}, \dots, \eta'_0), s_n(\tau_{w'_n, w''_n}.w''_n, \eta'_{n+1}, \dots, \eta'_0))\right] \\ &= \frac{1}{\ell_n} \sum_{(e_{n+1}, \dots, e_0) \in \mathcal{T}_n^{\max}} \theta(s_n(w'_n, e_{n+1}, \dots, e_0), s_n(\tau_{w'_n, w''_n}.w''_n, e_{n+1}, \dots, e_0)) \\ &= \frac{1}{\ell_n} \sum_{i \in \{1, \dots, \ell_n\}} \theta(w'_n(i), \tau_{w'_n, w''_n}.w''_n(i)) \\ &= \delta_n^\theta(w'_n, \tau_{w'_n, w''_n}.w''_n). \end{aligned}$$

□

Par conséquent, la meilleure stratégie du joueur consiste à prendre pour τ_{w_n, w'_n} un automorphisme d'arbre qui atteint le minimum dans la définition de $d_n(w_n, w'_n)$, c'est-à-dire tel que

$$\delta_n(w'_n, \tau_{w'_n, w''_n} \cdot w''_n) = \inf_{\tau \in G_n} \delta_n(w'_n, \tau \cdot w''_n),$$

et avec ces choix,

$$\mathbb{P}[X'_0 \neq X''_0] = \mathbb{E}[d_n(X'_n, X''_n)].$$

11.3 Mots découpés non standard : lemme.

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, nous considérons le processus r_n -adique des mots découpés $(X_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ sur l'alphabet (A, \mathfrak{A}, μ) , tel qu'il est défini dans le chapitre 6. La filtration qu'il engendre est notée $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$. Pour un entier $n < 0$, nous considérons une $I(n)$ -coimmersion en arbre $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} . Par la proposition 10.1.8, on a

$$(V''_{n+1}, \dots, V''_0) = \tau_{Y'_n, Y''_n}(V'_{n+1}, \dots, V'_0),$$

où Y'_n et Y''_n sont les copies d'une variable aléatoire $Y_n \in L^0(\mathcal{F}_n)$ et $\{\tau_{y', y''}\}_{y', y'' \in \mathbb{R}}$ est une famille mesurable d'automorphismes d'arbre. On démontre alors le lemme suivant comme le lemme 11.2.9 :

Lemme 11.3.1.

$$\overline{\mathbb{E}}[\theta(X'_0, X''_0) | \mathcal{F}'_n \dot{\vee} \mathcal{F}''_n] = \delta_n^\theta(X'_n, \tau_{Y'_n, Y''_n} \cdot X''_n).$$

On en déduit alors :

Lemme 11.3.2. *La $I(n)$ -coimmersion en arbre $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} qui minimise au mieux $\mathbb{E}[\theta(X'_0, X''_0)]$ est donnée par un automorphisme d'arbre aléatoire $\tau_{X'_n, X''_n}$ où on choisit τ_{w_n, w'_n} qui atteint le minimum dans la définition de $d_n^\theta(w_n, w'_n)$, c'est-à-dire tel que*

$$\delta_n^\theta(w'_n, \tau_{w'_n, w''_n} \cdot w''_n) = \inf_{\tau \in G_n} \delta_n^\theta(w'_n, \tau \cdot w''_n),$$

et avec un tel choix, on a

$$\overline{\mathbb{E}}[\theta(X'_0, X''_0)] = \overline{\mathbb{E}}[d_n^\theta(X'_n, X''_n)].$$

Par conséquent, lorsque θ munit A d'une structure d'espace métrique séparable, X_0 satisfait le critère de I -jonction en arbre si et seulement si

$$\overline{\mathbb{E}}[d_n^\theta(X'_n, X''_n)] \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow -\infty,$$

dès que $(X'_n, \eta'_n)_{n \leq 0}$ et $(X''_n, \eta''_n)_{n \leq 0}$ sont deux copies indépendantes du processus $(X_n, \eta_n)_{n \leq 0}$.

Remarque 11.3.3. *Les lemmes 11.3.1 et 11.3.2 sont encore valables lorsque X'_n et X''_n ont des lois quelconques sur A^{ℓ_n} , du moment qu'ils sont indépendants. Donc ils s'appliquent à toute chaîne de Markov $(W_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ dont le mécanisme de transition est le même que celui des mots découpés, et (donc) dont les lois γ_n de W_n vérifient $s_n^{(n+1)}(\gamma_n \otimes \mu_{n+1}) = \gamma_{n+1}$, où μ_n est la probabilité uniforme sur $\{1, 2, \dots, r_{n+1}\}$.*

Question 11.3.4. *Comment peut-on caractériser les suites de lois $(\gamma_n)_{n \leq 0}$ pour laquelle la filtration de $(W_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ n'est pas de type produit ?*

Nous allons rencontrer un tel processus dans le chapitre 12 pour lequel γ_n n'est pas une mesure produit (pas le processus des mots rongés, mais son processus auxiliaire $(\widehat{W}_n, \varepsilon_n)_{n \leq 0}$ qui engendre la même filtration que le processus des mots rongés), et le lemme 11.3.2 sera utilisé pour étudier le critère de I-jonction en arbre sur sa filtration.

Discussion.— Nous avons vu dans le chapitre 6 que pour tout alphabet (A, \mathfrak{A}, μ) qui est essentiellement séparable, le processus des mots découpés r_n -adique engendre une filtration de type produit sous la condition (∇) . Il est connu ([Smo], [ES]) que lorsque $r_n \equiv 2$ (le cas dyadique), et que μ est la mesure de probabilité uniforme sur A , la filtration n'est pas de type produit si $\#A \geq 2$. Nous allons généraliser ce résultat en donnant une condition sur la suite de découpage $(r_n)_{n \leq 0}$, appelée condition (Δ) (proposition 11.4.2), sous laquelle la filtration du processus des mots découpés r_n -adique n'est pas de type produit pour tout alphabet (A, \mathfrak{A}, μ) dès que μ n'est pas dégénérée. Nous utiliserons le lemme 11.3.2. Cette même condition sur la suite de découpage a déjà été obtenue par Vershik [Ver] dans le cadre de son exemple 1 (voir section 6.4) par des méthodes d'entropie.

Dans [Smo], le langage des paramétrisations (chapitres 16 et 17) est utilisé, alors que dans [ES], c'est le langage du I-confort. Rien ne justifiait apparemment la présence des automorphismes d'arbre dans les preuves de [Smo] et [ES], et elles ne semblent pas s'adapter directement au cas r_n -adique. Comme [ES] les qualifie, ces outils sont du "second niveau" de la théorie de Vershik, appropriés aux filtrations générales; l'outil que nous utilisons est le critère de I-jonction en arbre, notre analogue du critère de standardité r_n -adique de Vershik.

11.4 Mots découpés non standard : preuve.

Dans cette section, nous allons donner une condition suffisante sur la suite de découpage $(r_n)_{n \leq 0}$ du processus des mots découpés, appelée condition (Δ) dans la proposition 11.4.2, pour que la filtration qu'il engendre ne soit pas de type produit, quel que soit l'alphabet, à moins qu'il ne soit dégénéré. Sous cette condition, nous allons d'abord établir que le critère de I-jonction en arbre n'est pas satisfait lorsque l'alphabet est fini, à l'aide du lemme 11.3.2. Le cas d'un alphabet général sera obtenu à l'aide du second niveau de la théorie de Vershik.

Lemme pour le cas A fini. — Lorsque $(X_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ est le processus des mots r_n -adique sur un alphabet fini, nous n'allons pas montrer que le critère de I-jonction en arbre échoue pour X_0 sous la condition (Δ) , mais que l'on peut toujours trouver un entier $N \leq 0$ tel que le critère de I-jonction en arbre échoue pour X_N . Nous allons alors d'abord adapter le lemme 11.3.2 pour X_n au lieu de X_0 .

Dans le lemme suivant, la suite de découpage $(r_n)_{n \leq 0}$ est fixée, A est un alphabet fini, μ une mesure de probabilité quelconque sur A , et le processus des mots découpés r_n -adique $(X_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ est défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. La filtration qu'il engendre est notée $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$. Soit $N \leq 0$ un entier. Pour $n \leq N$, un mot de longueur ℓ_n sur A est la concaténation de ℓ_n/ℓ_N mots de longueur ℓ_N , et peut ainsi être vu comme un mot de longueur ℓ_n/ℓ_N sur l'alphabet A^{ℓ_N} . Le mot aléatoire X_N sur A est de longueur ℓ_N , et de cette manière le processus $(X_{N+n}, \eta_{N+n})_{n \leq 0}$ est le processus des mots découpés sur l'alphabet A^{ℓ_N} (de lettre finale X_N) muni de la mesure de probabilité produit $\mu^{\otimes \ell_N}$, et avec comme suite de découpage $(r_{N+n})_{n \leq 0}$. Si nous munissons A^{ℓ_N} de la métrique de Hamming simple notée θ pour un moment, alors pour $n \leq N$ la θ -métrique de Hamming sur $(A^{\ell_N})^{\ell_n/\ell_N}$ est la métrique de Hamming simple sur A^{ℓ_n} . On note $G_n^{N\llbracket}$ pour $n \leq N$ le groupe des automorphismes de l'arbre $(r_{N+n})_{n \leq 0}$ -adique de hauteur $|n|$;

ainsi $G_n^{N\llbracket}$ est le groupe des changements d'innovation sur $\llbracket n, N \rrbracket$ de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \leq N}$. On définit l'action $\tau.w$ de $\tau \in G_n^{N\llbracket}$ sur le mot w de longueur ℓ_n sur A comme pour $N = 0$ mais en considérant que w est un mot de longueur ℓ_n/ℓ_N sur A^{ℓ_N} . Puisque A est fini, la métrique de Hamming simple sur A^{ℓ_N} induit la topologie discrète et de manière analogue au lemme 11.3.2 appliqué avec la métrique de Hamming simple sur A^{ℓ_N} pour θ , on a :

Lemme 11.4.1. *Pour $n \leq N$, on pose*

$$d_n^{N\llbracket}(w', w'') = \inf_{\tau \in G_n^{N\llbracket}} \delta_n(w', \tau.w''),$$

où $G_n^{N\llbracket}$ agit sur les mots de longueur ℓ_n/ℓ_N sur A^{ℓ_N} comme il est décrit ci-dessus. Alors X_N satisfait le critère de I-jonction en arbre si et seulement si pour deux copies indépendantes \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' de \mathcal{F} , on a

$$\overline{\mathbb{E}}[d_n^{N\llbracket}(X'_n, X''_n)] \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow -\infty. \quad (11.4.1)$$

Nous commençons maintenant à montrer qu'il est toujours possible de trouver $N \leq 0$ tel que (11.4.1) n'est pas vrai sous la condition (Δ) donnée dans la proposition suivante :

Proposition 11.4.2. *Si la suite de découpage $(r_n)_{n \leq 0}$ satisfait*

$$\sum_{k=-\infty}^0 \frac{\log_2(r_k!)}{\ell_{k-1}} < \infty, \quad (\Delta)$$

alors pour tout espace probabilisé (A, \mathfrak{A}, μ) , la filtration du processus des mots découpés r_n -adique n'est pas de type produit.

Nous utiliserons l'inégalité de grandes déviations suivantes, connue sous le nom d'inégalité de Hoeffding :

Lemme 11.4.3. *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient ξ_1, \dots, ξ_n des variables aléatoires indépendantes chacune de loi sur $\{0, 1\}$ donnée par $\mathbb{P}[\xi_i = 1] = q$, où $0 < q < 1$. En posant $Z_n = \sum_{i=1}^n \xi_i$, on a, pour tout nombre réel $\alpha > 0$,*

$$\mathbb{P} \left[\frac{Z_n}{n} \leq q - \alpha \right] \leq e^{-2n\alpha^2}.$$

Nous renvoyons à [Shi], pp. 68–69, pour une preuve.

Dans le lemme 11.4.4 ci-dessous, A est fini et nous utilisons les notations du lemme 11.4.1. Par l'indépendance entre les mots X'_{n_0} and X''_{n_0} , on a ℓ_{n_0} variables aléatoires i.i.d. $\mathbb{1}_{\{X'_{n_0}(1) \neq X''_{n_0}(1)\}}, \mathbb{1}_{\{X'_{n_0}(2) \neq X''_{n_0}(2)\}}, \dots, \mathbb{1}_{\{X'_{n_0}(\ell_{n_0}) \neq X''_{n_0}(\ell_{n_0})\}}$. Leur loi sur $\{0, 1\}$ est donnée par

$$q(\mu) := \overline{\mathbb{P}}[X'_{n_0}(1) \neq X''_{n_0}(1)] = 1 - \sum_{i=1}^{\#A} \mu(i)^2 \quad \text{et on pose } p(\mu) = 1 - q(\mu), \quad (11.4.2)$$

et on suppose que μ n'est pas dégénérée, c'est-à-dire que $q(\mu) > 0$.

Lemme 11.4.4. *Pour $n < N \leq 0$, on pose $S_n^{N\llbracket} = \sum_{k=n+1}^N \frac{\ln(r_k!)}{\ell_{k-1}}$ (on a alors $\#G_n^{N\llbracket} = e^{\ell_n \cdot S_n^{N\llbracket}}$).*

Sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$, soient $(X'_n, \eta'_n)_{n \leq 0}$ et $(X''_n, \eta''_n)_{n \leq 0}$ deux copies indépendantes du processus $(X_n, \eta_n)_{n \leq 0}$. Soit $N \leq 0$. Alors pour tout $\alpha > 0$ et tout $n_0 < N$, on a

$$\overline{\mathbb{P}}[d_{n_0}^N(X'_{n_0}, X''_{n_0}) \leq q(\mu) - \alpha] \leq \left(e^{1 - \frac{2\alpha^2}{S_{n_0}^N}} \right)^{\ell_{n_0} S_{n_0}^N}.$$

Démonstration. Pour $\alpha > 0$, une application du lemme 11.4.3 aux ℓ_{n_0} variables aléatoires i.i.d. $\mathbb{1}\{X'_{n_0}(1) \neq X''_{n_0}(1)\}, \mathbb{1}\{X'_{n_0}(2) \neq X''_{n_0}(2)\}, \dots, \mathbb{1}\{X'_{n_0}(\ell_{n_0}) \neq X''_{n_0}(\ell_{n_0})\}$ donne

$$\overline{\mathbb{P}}[\delta_{n_0}(X'_{n_0}, X''_{n_0}) \leq q - \alpha] \leq e^{-2\ell_{n_0}\alpha^2}.$$

Maintenant, pour tout automorphisme d'arbre τ , le mot $\tau.X''_{n_0}$ a la même loi que X''_{n_0} et il est indépendant de X'_{n_0} , donc on a

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{P}}[d_{n_0}^N(X'_{n_0}, X''_{n_0}) \leq q(\mu) - \alpha] &= \overline{\mathbb{P}}[\exists \tau \in G_{n_0}^N, \delta_{n_0}(X'_{n_0}, \tau.X''_{n_0}) \leq q(\mu) - \alpha] \\ &\leq \sum_{\tau \in G_{n_0}^N} \overline{\mathbb{P}}[\delta_{n_0}(X'_{n_0}, \tau.X''_{n_0}) \leq q(\mu) - \alpha] \\ &= e^{\ell_{n_0} S_{n_0}^N} \overline{\mathbb{P}}[\delta_{n_0}(X'_{n_0}, X''_{n_0}) \leq q(\mu) - \alpha] \\ &\leq (e^{S_{n_0}^N - 2\alpha^2})^{\ell_{n_0}}, \end{aligned}$$

et ceci achève la preuve. \square

★ Preuve de la proposition 11.4.2. ◦ *Premier cas : A est fini.* Supposons A fini et μ non dégénérée. Posons $S_{-\infty}^N = \sum_{k=-\infty}^N \frac{\ln(r_k!)}{\ell_{k-1}}$. Sous la condition (Δ) , on a $S_{-\infty}^N \searrow 0$ quand $N \rightarrow -\infty$. Soit $N \leq 0$ un entier suffisamment petit pour que

$$\sqrt{\frac{S_{-\infty}^N}{2}} < q(\mu). \quad (11.4.3)$$

et $\alpha > 0$ un réel tel que $\sqrt{S_{-\infty}^N}/2 < \alpha < q(\mu)$. Pour $n_0 \leq N$, on a

$$1 - \frac{2\alpha^2}{S_{n_0}^N} \leq 1 - \frac{2\alpha^2}{S_{-\infty}^N} < 0,$$

et par le lemme 11.4.4,

$$\overline{\mathbb{P}}[d_{n_0}^N(X'_{n_0}, X''_{n_0}) \leq q(\mu) - \alpha] \leq e^{1 - \frac{2\alpha^2}{S_{-\infty}^N}} =: \beta < 1.$$

Puisque β ne dépend pas de n_0 , on a, pour tout $n_0 \leq N$,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}[d_{n_0}^N(X'_{n_0}, X''_{n_0})] &\geq (q(\mu) - \alpha) \overline{\mathbb{P}}[d_{n_0}^N(X'_{n_0}, X''_{n_0}) \geq q(\mu) - \alpha] \\ &\geq (1 - \beta)(q(\mu) - \alpha) > 0, \end{aligned}$$

ce qui montre d'après le lemme 11.4.1 que X_N ne satisfait pas le critère de I-jonction en arbre.

◦ *Cas général.* Maintenant soit (A, \mathfrak{A}, μ) un espace probabilisé quelconque avec μ non dégénérée. À l'aide du cas précédent et du second niveau de la théorie de Vershik, nous allons établir

la proposition 11.4.2. On considère une application f de A dans un ensemble $\{a, b\}$ à deux éléments telle que $f(\mu)$ n'est pas dégénérée. Si $(X_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ est le processus des mots découpés r_n -adique sur (A, \mathfrak{A}, μ) , alors $(f(X_n), \eta_n)_{n \leq 0}$ est le processus des mots découpés sur l'alphabet fini $(\{a, b\}, f(\mu))$. Notons \mathcal{F} la filtration de $(X_n, \eta_n)_{n \leq 0}$ et \mathcal{E} celle de $(f(X_n), \eta_n)_{n \leq 0}$. Sous la condition (Δ) , nous savons par le cas précédent que \mathcal{E} n'est pas de type produit. Puisqu'elle est r_n -adique, ceci signifie qu'elle n'est pas I-confortable d'après le théorème 15.2.4. Le lemme 8.2.8 montre que \mathcal{E} est immergée dans \mathcal{F} . On en déduit que \mathcal{F} n'est pas I-confortable avec le lemme 14.3.2, donc pas de type produit par le théorème 15.2.4 (ou la proposition 14.3.4). \square

11.5 Quelques remarques.

Croissance des G_n -orbites dans le cas uniforme et dyadique. — Dans la preuve de la proposition 11.4.2, lorsque $r_n \equiv 2$, on a $S_n^{0\mathbb{I}} \rightarrow S_{-\infty}^{0\mathbb{I}} = 1$ puisque $S_n^{0\mathbb{I}} = 1 - 1/2^{|n|}$. De plus, lorsque A est fini et contient au moins deux points, on a toujours $q(\mu) > 1/4$ où μ est la mesure de probabilité uniforme sur A , et ainsi l'inégalité (11.4.3) de la preuve de la proposition 11.4.2 est valable pour $N = 0$. Alors d'après la discussion de la section 11.2, ceci montre que la réponse à la question 11.2.5 est négative.

Mots découpés avec des lettres échangeables. — L'inégalité du lemme 11.4.3 est valable pour des variables aléatoires échangeables, et le lemme 11.4.4 aussi, donc la proposition 11.4.2 l'est elle aussi.

Entre (Δ) et (∇) . — Les propriétés (Δ) et (∇) sur la suite de découpage $(r_n)_{n \leq 0}$ sont des propriétés antipodales. Il serait intéressant d'avoir des conditions meilleures, et de savoir s'il existe une suite de découpage telle que \mathcal{F} est de type produit ou non selon le choix de l'alphabet.

12. LE CONTRE-EXEMPLE DES MOTS RONGÉS.

Lorsque T est un automorphisme d'un espace de Lebesgue, il a été établi par Hecklen et Hoffmann que la filtration dyadique associée à la *transformation* $[T, T^{-1}]$ n'est pas standard dyadique si l'entropie de T n'est pas nulle, ce qu'avait conjecturé Vershik. Utilisant le critère de standardité r_n -adique de Vershik, la preuve de [HH] est ramenée à un lemme combinatoire. Dans ce chapitre nous verrons que ce lemme démontre, via le critère de I-jonction en arbre, que la filtration dyadique du *processus des mots rongés* n'est pas de type produit. Nous expliquerons d'abord comment nous avons "émergé" la filtration du processus des mots rongés de la filtration associée à la transformation $[T, T^{-1}]$; en admettant alors seulement le lemme combinatoire de [HH], *et en utilisant les résultats de second niveau de la théorie de Vershik*, nous retrouverons le résultat de Hecklen et Hoffmann qui sera énoncé de manière probabiliste de la façon suivante : si l'entropie de T n'est pas nulle, la filtration dyadique de la *chaîne de Markov* $[T, T^{-1}]$ n'est pas standard dyadique.

12.1 Préliminaire : endomorphisme d'un espace de Lebesgue.

En concordance avec les ergodiciens, nous appelons un *endomorphisme* d'un espace de Lebesgue une application mesurable de cet espace dans lui-même. Nous disons que c'est un *automorphisme* si elle est bijective et si T^{-1} est mesurable. Un endomorphisme T de l'espace de Lebesgue $(\mathcal{X}, \mathfrak{X}, \nu)$ produit la filtration $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_n)_{n \leq 0} = (\dots, T^{-2}(\mathfrak{X}), T^{-1}(\mathfrak{X}), \mathfrak{X})$ sur $(\mathcal{X}, \mathfrak{X}, \nu)$. C'est la filtration engendrée par le processus stationnaire et markovien $(\dots, T^2, T^1, \text{Id}_{\mathcal{X}})$ défini sur l'espace probabilisé $(\mathcal{X}, \mathfrak{X}, \nu)$ et à valeurs dans l'espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathfrak{X})$. On peut définir la loi de ce processus de façon probabiliste de la manière suivante :

Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, un processus $(Z_n)_{n \leq 0}$ a la loi du processus stationnaire markovien $(\dots, T^2, T^1, \text{Id}_{\mathcal{X}})$ si et seulement si, pour tout $B \in \mathfrak{X}$ tel que $\nu[B] > 0$, on a

$$\mathbb{P}[Z_{n+1} \in A \mid Z_n \in B] = \nu[A \mid T^{-1}(B)],$$

ou alors, si et seulement si $\mathcal{L}[Z_{n+1} \mid Z_n = x]$ est une version régulière de la désintégration de $\text{Id}_{\mathcal{X}}$ conditionnellement aux valeurs de T . Ceci équivaut aussi à ce que Z_n ait pour loi ν et que $Z_{n-1} = T(Z_n)$ pour tout n . La loi de ce processus est appelée la loi du processus stationnaire markovien canonique associé à T .

Les ergodiciens s'intéressent à ce type de filtration. Le cas d'un endomorphisme *uniformément* p dans 1, c'est-à-dire telle que presque tout point admet p antécédents et telle que les probabilités conditionnelles des antécédents valent toutes $1/p$, est particulièrement intéressant puisque dans ce cas la filtration est p -adique. Il y a un progrès fascinant de l'étude de ces filtrations dû à Feldman, Hecklen, Hoffmann et Rudolph ([FR, HH, Ho, HR]).

Exemple : décalage de Bernoulli. — Soit (A, \mathfrak{A}, μ) un espace de Lebesgue. Le *décalage de Bernoulli* sur (A, \mathfrak{A}, μ) est l'endomorphisme T de l'espace produit $(A^{\mathbb{N}}, \mathfrak{A}^{\otimes \mathbb{N}}, \mu^{\otimes \mathbb{N}})$ définie par $T(v) = v_1 v_2 \cdots$ pour tout $v = v_0 v_1 v_2 \cdots \in A^{\mathbb{N}}$. Lorsque A est fini et que μ est la mesure de probabilité uniforme sur A , on dit aussi que c'est le *décalage de Bernoulli uniforme* sur A . La loi du processus markovien stationnaire canonique associé au décalage de Bernoulli sur (A, \mathfrak{A}, μ) est celle du processus $(Z_n)_{n \leq 0}$ défini par $Z_n = (\dots, \varepsilon_{n-2}, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$ où $(\varepsilon_n)_{n \leq 0}$ est une suite de variables aléatoires i. i. d. de loi μ sur A . La filtration que ce processus engendre est aussi celle engendrée par $(\varepsilon_n)_{n \leq 0}$. Lorsque le décalage de Bernoulli est uniforme sur un alphabet fini de cardinal p , c'est la filtration standard p -adique.

12.2 Contenu de ce chapitre.

Il a été conjecturé par Vershik que la *transformation* $[T, T^{-1}]$, qui est un endomorphisme uniformément 2 dans 1, n'est pas standard dès que l'entropie de T est strictement positive; et cela a été démontré par Heicklen et Hoffmann [HH]. Cela donne une autre preuve que cet endomorphisme n'est pas conjugué à un décalage de Bernoulli, un fait qui a illustré la transformation $[T, T^{-1}]$ quand il a été établi par Kalikow [Kal].

Dans ce chapitre nous allons d'abord définir la transformation $[T, T^{-1}]$ et la loi du processus stationnaire markovien associé; la *chaîne de Markov* $[T, T^{-1}]$ que nous définirons sera une légère variante de ce processus qui engendre la même filtration. Nous donnerons une méthode probabiliste pour étudier le critère de I-jonction en arbre pour la filtration de ce processus, dite *filtration* $[T, T^{-1}]$. Suivant la terminologie de [HH], nous dirons que la transformation $[T, T^{-1}]$ est standard si cette filtration est de type produit, c'est-à-dire standard dyadique. Dans [HH], il est affirmé, sans explication pour un probabiliste standard, qu'il suffit de montrer que la transformation $[T, T^{-1}]$ n'est pas standard lorsque T est un décalage de Bernoulli, pour en déduire que c'est encore le cas lorsque l'entropie de T est strictement positive. Nous le justifierons dans le langage des filtrations en utilisant un beau théorème de Sinai, par lequel nous verrons que dès que l'entropie de T est strictement positive, il y a toujours un décalage de Bernoulli S tel que la filtration $[S, S^{-1}]$ est immersible dans la filtration $[T, T^{-1}]$. C'est ensuite *avec des résultats de la théorie de Vershik* — sous forme de nos résultats ultérieurs sur le I-confort — que l'on pourra dire qu'il suffit de traiter le cas des décalages de Bernoulli. La chaîne de Markov $[T, T^{-1}]$ lorsque T est un décalage de Bernoulli sera appelée le *processus des mots décalés*. Nous exhiberons une filtration plus petite immergée dans celle du processus des mots décalés, encore dyadique, la filtration du *processus des mots rongés*. En utilisant une seconde fois la théorie de Vershik, nous verrons que la filtration des mots décalés n'est pas de type produit si celle des mots rongés ne l'est pas. Nous donnerons alors une méthode pour vérifier que le critère de I-jonction en arbre n'est pas satisfait dans la filtration des mots rongés pour une certaine variable aléatoire, en nous ramenant à celle utilisée pour le processus des mots découpés. Le lecteur sera ensuite renvoyé à [HH] pour la démonstration du lemme combinatoire auquel nous aboutirons. Nous espérons que la lecture de ce chapitre sera utile à un probabiliste désireux de découvrir d'autres travaux des ergodiciens sur les filtrations ([Ba], [FR], [Ho], [HR]).

12.3 La transformation $[T, T^{-1}]$ et la chaîne de Markov $[T, T^{-1}]$.

Décalage de Bernoulli inversible. — Soit (A, \mathfrak{A}, μ) un espace de Lebesgue. Le *décalage de Bernoulli inversible* sur A est l'automorphisme T de $(A^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{A}^{\otimes \mathbb{Z}}, \mu^{\otimes \mathbb{Z}})$ définie par $T(v)_i = v_{i+1}$ pour tout $v = \cdots v_{-1}v_0v_1 \cdots \in A^{\mathbb{Z}}$.

Produit transversal. — Deux espaces de Lebesgue $(\mathcal{Z}, \mathfrak{Z}, \gamma)$ et $(\mathcal{V}, \mathfrak{V}, \nu)$ sont donnés, ainsi qu'une transformation S de $(\mathcal{V}, \mathfrak{V}, \nu)$, et un *flot mesurable* $v \in \mathcal{V} \mapsto T_v$ de transformations T_v de $(\mathcal{Z}, \mathfrak{Z}, \gamma)$, avec mesurabilité de l'application $(v, z) \mapsto T_v(z)$. Cela donne une transformation E de l'espace produit $(\mathcal{Z} \times \mathcal{V}, \mathfrak{Z} \otimes \mathfrak{V}, \gamma \otimes \mu)$, appelée un *produit transversal* définie par

$$E(z, v) = (T_v(z), S(v)).$$

Alors :

Un processus $(Z_n, V_n)_{n \leq 0}$ a la loi du processus stationnaire markovien canonique associé à E si et seulement si

- ◇ pour tout n , Z_n est distribuée sur \mathcal{Z} selon γ , et V_n est indépendante de Z_n ;
- ◇ la loi du processus $(V_n)_{n \leq 0}$ est celle du processus stationnaire markovien canonique associé à S ;
- ◇ le passage de n à $n + 1$ est donné par la formule $Z_{n+1} = T_{V_{n+1}}^{-1}(Z_n)$.

Remarquons que la filtration du processus $(V_n)_{n \leq 0}$ est immergée dans celle du processus $(Z_n, V_n)_{n \leq 0}$.

La transformation $[T, T^{-1}]$. — Lorsque T est une transformation inversible d'un espace de Lebesgue $(\mathcal{Z}, \mathfrak{Z}, \gamma)$, la *transformation $[T, T^{-1}]$* est le produit transversal du décalage de Bernoulli uniforme sur $\{-1, 1\}$ avec le flot mesurable $(T_v)_{v \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}} = (T, T^{-1})$ où T_v est définie par $T_v = T^{v_0}$, pour $v = v_0v_1v_2 \cdots \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$. Dans ce cas :

Un processus $(Z_n, V_n)_{n \leq 0}$ a la loi du processus stationnaire markovien canonique associé à la transformation $[T, T^{-1}]$ si et seulement si

- ◇ pour tout n , $V_n = (\dots, \varepsilon_{n-1}, \varepsilon_n)$, où $(\varepsilon_n)_{n \leq 0}$ est un jeu de pile ou face sur $\{-1, 1\}$;
- ◇ pour tout n , Z_n est distribué sur \mathcal{Z} selon γ et indépendante de V_n ;
- ◇ le passage de n à $n + 1$ s'obtient en prenant ε_{n+1} indépendante de la tribu du passé $\sigma((Z_m, V_m), m \leq n)$ et en posant

$$Z_{n+1} = \begin{cases} T^{-1}(Z_n) & \text{si } \varepsilon_{n+1} = -1 \\ T(Z_n) & \text{si } \varepsilon_{n+1} = 1. \end{cases}$$

En bref, $Z_{n+1} = T^{\varepsilon_{n+1}}(Z_n)$.

La chaîne de Markov $[T, T^{-1}]$. — La filtration du processus $(Z_n, V_n)_{n \leq 0}$ ci-dessus est aussi la filtration engendrée par le processus $(Z_n, \varepsilon_n)_{n \leq 0}$; nous dirons que $(Z_n, \varepsilon_n)_{n \leq 0}$ est la *chaîne de Markov $[T, T^{-1}]$* . Le résultat de Heicklen et Hoffman est :

Théorème 12.3.1. *Si l'entropie $h(T)$ de T est strictement positive, alors la filtration $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_n)_{n \leq 0}$ engendrée par la chaîne de Markov $[T, T^{-1}]$ n'est pas de type produit.*

Un exemple de C. Hoffman ([Ho]) montre que cette hypothèse sur $h(T)$ n'est pas une condition nécessaire. Dans le cas $h(T) = 0$, on connaît des cas de chaînes de Markov $[T, T^{-1}]$ dont la filtration est de type produit. Citons un exemple. L'entropie d'une rotation est toujours nulle. Si T est une rotation du cercle, $(Z_n, \varepsilon_n)_{n \leq 0}$ est une marche aléatoire sur le cercle. Sa filtration est kolmogorovienne si la rotation est irrationnelle (voir proposition 12.3.2 ou [Leu]).

Il a été démontré par Vershik qu'elle est standard à l'aide du critère de standardité r_n -adique. Nous donnerons une preuve de sa standardité dans le chapitre 16 dans le cadre des chaînes de Markov constructives. Un processus d'innovations qui engendre cette filtration a été construit par C. Leuridan [Leu].

Revenons au cas général, nous notons $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_n)_{n \leq 0}$ la filtration engendrée par la chaîne de Markov $[T, T^{-1}]$ notée $(Z_n, \varepsilon_n)_{n \leq 0}$. Si T n'est pas ergodique (comme par exemple une rotation rationnelle), la σ -algèbre $\mathcal{H}_{-\infty}$ n'est pas dégénérée. Remarquons que \mathcal{H} est engendrée par le processus $(Z_n)_{n \leq 0}$ lorsque T est ergodique. Même dans le cas où T est ergodique, il peut arriver que $\mathcal{H}_{-\infty}$ ne soit pas dégénérée ; c'est par exemple le cas lorsque T est la transformation qui échange les deux éléments a et b d'un ensemble $\{a, b\}$ muni de la mesure de probabilité uniforme.

Proposition 12.3.2 (Meijlson [Mei]). *Si T^2 est ergodique, alors $\mathcal{H}_{-\infty}$ est dégénérée.*

Bien que plusieurs auteurs renvoient à [Mei] pour cette proposition, elle ne s'y trouve pas exactement sous cette forme. Sa preuve peut s'obtenir à partir du théorème de [Mei] de la même façon que le corollaire de ce théorème y est obtenu ; on peut aussi l'obtenir plus facilement en suivant l'indication de J. Feldman dans [Fe76] puis avec la même technique que Meijlson.

Réductibilité de la preuve au cas où T est un décalage. — Heicklen et Hoffman affirment que la preuve de la non standardité de la transformation $[T, T^{-1}]$ peut être réduite au cas où T est un décalage de Bernoulli inversible. Leur argument est le suivant : « *every ergodic measure-preserving system with strictly positive entropy has an independent partition.* ». Notant $h(T)$ l'entropie d'un endomorphisme T , cet argument équivaut au théorème de Sinai suivant :

Théorème 12.3.3 (Sinai). *Soit $n \geq 2$ un entier, soient p_1, \dots, p_n des nombres réels strictement positifs tels que $\sum_{j=1}^n p_j = 1$. On se donne un ensemble fini A de cardinal n équipé d'une mesure μ dont les masses de probabilités sont les p_j , et on note S est le décalage inversible sur $(A^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{A}, \mu^{\otimes \mathbb{Z}})$. Si T est un endomorphisme ergodique d'un espace de Lebesgue $(\mathfrak{X}, \mathfrak{J}, m)$ telle que*

$$h(T) \geq - \sum_{j=1}^n p_j \log p_j,$$

alors il existe une application mesurable $\pi : (\mathfrak{X}, \mathfrak{J}, m) \rightarrow (A^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{A}, \mu^{\otimes \mathbb{Z}})$ transportant m sur μ telle que $S \circ \pi = \pi \circ T$.

Nous avons énoncé ce théorème comme dans [We] où sont données des références à son propos. Rappelons que si A est un ensemble fini de cardinal n équipé d'une mesure μ , alors l'entropie du décalage de Bernoulli S sur $(A^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{A}, \mu^{\otimes \mathbb{Z}})$ (où \mathfrak{A} est la σ -algèbre engendrée par les projections) est égale à l'entropie $-\sum_{a \in A} \mu(a) \log \mu(a)$ de la mesure μ .

Nous en déduisons l'affirmation de [HH] de la manière suivante, en utilisant des résultats de second niveau de la théorie de Vershik. Soit T une transformation inversible ergodique d'un espace de Lebesgue telle que $h(T) > 0$. Il est toujours possible de trouver n et des p_j comme dans le théorème de Sinai et en appliquant ce théorème on obtient S et π . Remarquons que $\pi = S \circ \pi \circ T^{-1}$ si T est inversible et qu'alors $S^{-1} \circ \pi = \pi \circ T^{-1}$. Ainsi, si $(Z_n, \varepsilon_n)_{n \leq 0}$ est la chaîne de Markov $[T, T^{-1}]$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on a

$$\pi(Z_{n+1}) = S^{\varepsilon_{n+1}}(\pi(Z_n)),$$

et le processus $(\pi(Z_n), \varepsilon_n)_{n \leq 0}$ est alors la chaîne de Markov $[S, S^{-1}]$, ou en d'autres mots, le processus des mots décalés sur $(A^{\mathbb{Z}}, \mathfrak{A}, \mu^{\otimes \mathbb{Z}})$. Comme la filtration $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ engendrée par ce processus est immergée dans la filtration $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_n)_{n \leq 0}$ de la chaîne de Markov $[T, T^{-1}]$, on en déduit avec le corollaire 15.2.6 \mathcal{H} ne satisfait pas le critère de I-jonction en arbre si'il n'est pas satisfait pour \mathcal{G} .

12.4 Les processus des mots décalés et des mots rongés.

Nous utilisons les notations de la section 5.1 du chapitre 5 concernant les mots. Soit S le décalage de Bernoulli inversible sur un espace de Lebesgue (A, \mathfrak{A}, μ) . Nous appellerons aussi la chaîne de Markov $[S, S^{-1}]$ le *processus des mots décalés* ; c'est la chaîne de Markov $(Z_n, \varepsilon_n)_{n \leq 0}$ définie par

- ◇ pour tout n , $Z_n = \dots Z_n(-2)Z_n(-1)Z_n(0)Z_n(1)Z_n(2)\dots$ est un mot sur $A^{\mathbb{Z}}$, formé de lettres indépendantes $Z_n(i)$, $i \in \mathbb{Z}$, distribuées sur A selon μ , et ε_n est uniforme sur $\{-1, 1\}$ et indépendante de Z_n ;
- ◇ le passage de n à $n + 1$ s'obtient en prenant ε_{n+1} indépendante de la tribu du passé $\sigma(\dots, (Z_{n-1}, \varepsilon_{n-1}), (Z_n, \varepsilon_n))$ et en prenant pour Z_{n+1} le mot Z_n décalé d'un indice vers la droite si $\varepsilon_{n+1} = 1$, ou vers la gauche si $\varepsilon_{n+1} = -1$.

On suppose qu'un tel processus $(Z_n, \varepsilon_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et on note $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ sa filtration. Remarquons que l'égalité $\mathcal{G}_n = \sigma(Z_m, m \leq n)$ est une conséquence de l'ergodicité du décalage de Bernoulli.

Traduites dans notre langage, les mathématiques de [HH] montrent que le critère de I-jonction en arbre échoue pour la variable aléatoire $W_0 := Z_0(0)$ (la lettre centrale de Z_0). Mais étant ergodiciens, ils utilisent non pas le critère de I-jonction en arbre mais le critère de standardité dyadique de Vershik, et pour eux il semble immédiat que le problème se traduit par le lemme 12.4.1 ci-dessous, alors que nous avons besoin des résultats de second niveau de la théorie de Vershik pour nous ramener à ce lemme, de la manière suivante. Nous allons exhiber une filtration dyadique \mathcal{F} immergée dans \mathcal{G} pour laquelle W_0 est mesurable et plus commodément montrer que W_0 ne satisfait pas le critère de I-jonction en arbre dans \mathcal{F} . Cela montre aussi que \mathcal{G} ne satisfait pas le critère de I-jonction en arbre d'après le corollaire 15.2.6 que nous verrons plus tard.

$$\begin{array}{cccccccc}
 Z_0 = & \dots & Z_0(-2) & Z_0(-1) & \boxed{Z_0(0)} & Z_0(1) & Z_0(2) & \dots \\
 Z_{-1} = & \dots & Z_{-1}(-2) & \boxed{Z_{-1}(-1)} & Z_{-1}(0) & \boxed{Z_{-1}(1)} & Z_{-1}(2) & \dots \\
 Z_{-2} = & \dots & \boxed{Z_{-2}(-2)} & Z_{-2}(-1) & \boxed{Z_{-2}(0)} & Z_{-2}(1) & \boxed{Z_{-2}(2)} & \dots \\
 Z_{-3} = & \dots & & & & & & \dots
 \end{array}$$

Fig. 12.1: Où l'on exhibe les mots rongés.

Pour tout $n \leq 0$, on définit le mot $W_n = Z_n(n)Z_n(n + 2)\dots Z_n(-n - 2)Z_n(-n)$ de longueur $|n| + 1$. Le processus $(W_n, \varepsilon_n)_{n \leq 0}$ est alors une chaîne de Markov dont la loi est donnée par les deux conditions suivantes :

- ◇ pour tout n , W_n est un mot de longueur $|n| + 1$ formé de lettres indépendantes chacune de loi μ sur A , et ε_n est uniforme sur $\{-1, 1\}$ et indépendante de W_n ;
- ◇ le mécanisme de transition consiste à prendre à l'instant $n + 1$ le signe aléatoire ε_{n+1} indépendant de la tribu du passé $\sigma(\dots, (W_{n-1}, \varepsilon_{n-1}), (W_n, \varepsilon_n))$ et de définir W_{n+1} comme

étant le mot de longueur $|n|$ obtenu en effaçant la première lettre de W_n si $\varepsilon_{n+1} = 1$ ou sa dernière lettre si $\varepsilon_{n+1} = -1$.

Nous notons $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ la filtration du processus $(W_n, \varepsilon_n)_{n \leq 0}$, qu'on appelle le *processus des mots rongés* sur (A, \mathfrak{A}, μ) .

Pour appliquer le critère de I-jonction en arbre à W_0 , nous introduisons une chaîne de Markov auxiliaire $(\widehat{W}_n, \varepsilon_n)_{n \leq 0}$ qui engendre aussi \mathcal{F} , et dont le mécanisme de transition est le même que celui le processus des mots découpés dyadique défini dans le chapitre 6. Ainsi nous pourrons utiliser le lemme 11.3.2 du chapitre précédent (remarque 11.3.3). Pour cela, on définit une application

$$\begin{aligned} \widehat{\cdot} : \cup_{n \leq 0} A^{|n|+1} &\longrightarrow \cup_{n \leq 0} A^{2^{|n|}} \\ w \in A^{|n|+1} &\mapsto \widehat{w} \in A^{2^{|n|}}, \end{aligned}$$

qui envoie le mot w de longueur $|n| + 1$ sur le mot \widehat{w} de longueur $2^{|n|}$ clairement décrit sur un exemple par la figure suivante :

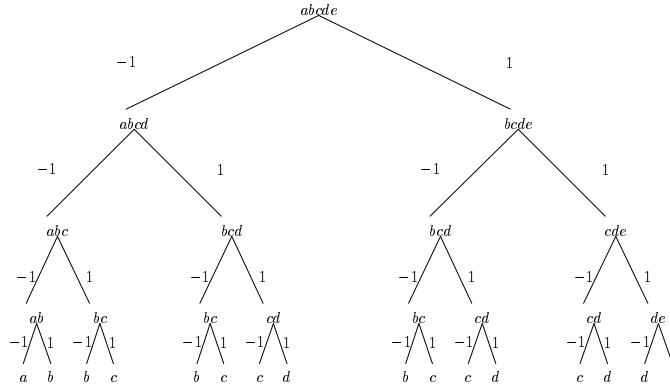


Fig. 12.2: $w = abcde$, $\widehat{w} = abbcbdbccdcde$

Comme \widehat{W}_n et W_n peuvent se construire l'un avec l'autre, la filtration de $(\widehat{W}_n, \varepsilon_n)_{n \leq 0}$ est aussi la filtration \mathcal{F} du processus des mots rongés. Le processus $(\widehat{W}_n, \varepsilon_n)_{n \leq 0}$ est markovien, son mécanisme de transition est le mécanisme de découpage dyadique défini dans le chapitre 6 et regardé plus en détail dans le chapitre 11. Le 11.3.2 s'applique donc (remarque 11.3.3), nous l'énonçons ci-dessous lorsque A est fini :

Lemme 12.4.1. *Soit $(W_n, \varepsilon_n)_{n \leq 0}$ le processus des mots rongés sur un alphabet fini (A, μ) , et $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ sa filtration. On introduit le processus $(\widehat{W}_n, \varepsilon_n)_{n \leq 0}$ comme ci-dessus. Alors la variable aléatoire W_0 satisfait le critère de I-jonction en arbre dans \mathcal{F} si et seulement si dans deux copies indépendantes \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' définies sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$, on a*

$$\mathbb{E}[d_n(\widehat{W}'_n, \widehat{W}''_n)] \longrightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow -\infty,$$

où la définition de d_n est donnée dans la notation 11.2.8, pour $r_n \equiv 2$.

La preuve que $\mathbb{E}[d_n(\widehat{W}'_n, \widehat{W}''_n)] \rightarrow 0$ se trouve dans [HH]. Le théorème 12.3.1 a été généralisé par Karen Ball [Ba] à des produits transversaux plus généraux que la transformation $[T, T^{-1}]$.

13. CONCLUSION DE CETTE PARTIE.

Le critère de I-jonction en arbre permet d'établir que la filtration du processus des mots rongés n'est pas de type produit. Nous avons eu recours ensuite aux critères de second niveau pour établir que c'est encore le cas de la filtration de toute chaîne de Markov $[T, T^{-1}]$ lorsque T est un endomorphisme d'entropie strictement positive. Les critères de second niveau de la théorie de Vershik, objets de la partie suivante, concernent toutes les filtrations conditionnellement séparables. Comme nous allons le voir, le pont entre le premier et le second niveau de la théorie de Vershik est bâti sur le théorème 1.1.1 donné dans l'introduction : pour les filtrations conditionnellement homogènes, les critères de second niveau sont équivalents au critère de Vershik de premier niveau.

QUATRIÈME PARTIE

CRITÈRES DE VERSHIK DE SECOND NIVEAU.

Le critère de *I-confort* est un invariant des filtrations défini dans [ES], comptant parmi les critères de second niveau de la théorie de Vershik. Nous le définissons et étudions ses premières propriétés dans le chapitre 14. Sa définition diffère de celle du critère de I-jonction en arbre en ceci qu'elle impose seulement aux deux copies de la filtration d'être coïmmergées, sans demander que la coïmmersion soit en arbre. Comme nous le verrons par un argument d'extrémalité, ces deux critères sont équivalents dans le cas d'une filtration conditionnellement homogène, ce qui nous ouvre la porte du second niveau de la théorie de Vershik. Ceci donne une nouvelle preuve de ce résultat, déjà connu dans le cas essentiellement séparable, et en outre il sera généralisé au cas conditionnellement séparable. Nous le démontrerons dans le chapitre 15 où nous verrons alors comment s'en déduit facilement l'équivalence entre filtration *standard* et filtration I-confortable.

Dans le chapitre suivant, nous introduirons la notion de *paramétrisation* que nous utiliserons pour donner des exemples de filtration standard et que nous appliquerons au I-confort des filtrations des chaînes de Markov. Il sera clair qu'une filtration qui admet une *paramétrisation génératrice* est standard ; la réciproque est un résultat non-trivial qui sera l'objet du chapitre 19. Le cas conditionnellement séparable sera étudié.

14. I-COMFORT.

Le critère de I-jonction en arbre ne s'énonce que pour les filtrations de type produit local conditionnellement séparables. Se présentant comme une légère variante de celui-ci, le *critère de I-confort* qui est l'objet de ce chapitre s'énonce pour toute filtration et il définit un invariant des filtrations. On trouve ce critère dans [ES] ; dans ce chapitre nous étudions plus en détail sa définition et certaines de ses propriétés. Dans le cas d'une filtration de type produit local conditionnellement séparable, il est plus faible que le critère de I-jonction en arbre. Nous verrons dans le chapitre suivant que ces deux critères coïncident dans le cas des filtrations conditionnellement homogènes.

14.1 Définition.

Les notions nécessaires à l'énoncé du critère du I-confort ont déjà été données dans les chapitres précédents.

Définition 14.1.1. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que \mathcal{F} est *I-confortable* si pour toute variable aléatoire $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0)$ et pour tout réel $\delta > 0$, il existe un espace de probabilité $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$ muni de deux filtrations \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' telles que :

- (i) \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' sont toutes deux isomorphes à \mathcal{F} ;
- (ii) \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' sont coïmmergées ;
- (iii) Il existe un entier $n_0 < 0$ tel que les σ -algèbres \mathcal{F}'_{n_0} et \mathcal{F}''_{n_0} sont indépendantes ;
- (iv) X' et X'' , les copies respectives de X par les isomorphismes de la première condition, vérifient $\bar{\mathbb{P}}[X' \neq X''] < \delta$.

On voit facilement que deux filtrations isomorphes sont I-confortables si et seulement si l'une d'entre elles l'est. Rappelons que la définition 10.1.5 résume les propriétés (i), (ii), (iii) en disant que $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ est une $I(n_0)$ -coïmmersion de \mathcal{F} . Ainsi il est évident qu'une filtration *tplcs* qui vérifie le critère de I-jonction en arbre est I-confortable.

Le I-confort a été défini ainsi dans [ES], où il est présenté comme une variante d'un critère de Tsirelson dans [Tsi] pour des filtrations à temps continu. Cependant le critère de [Tsi] ne fait pas intervenir deux copies de la filtration, mais toute une suite de copies. Si nous voulions conserver ce point, nous énoncerions le *I^∞ -confort* au lieu du I-confort pour une filtration à temps discret négatif, comme nous le ferons dans le chapitre 18 (définition 18.0.1). Cela semble plus fort que le I-confort, mais nous verrons que ces deux critères sont équivalents dans le cas des filtrations conditionnellement séparables.

14.2 Choix des variables aléatoires “test”.

Ici nous montrons que, comme pour le critère de Vershik de premier niveau et le critère de I-jonction en arbre, il est possible, en adaptant la condition (iv) de la définition 14.1.1, de considérer d'autres variables aléatoires “test” dans le critère de I-confort que les variables aléatoires simples.

Définition 14.2.1. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

- Soit (E, ρ) un espace métrique standard. On dit qu'une variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de I-confort (sous-entendu : dans L^1) si X pour tout réel $\delta > 0$, il existe un entier $n_0 \leq 0$ et une I(n_0)-coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ telle que $\overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X'')] < \delta$. On note $I^1(\mathcal{F}; E)$ l'ensemble des variables aléatoires $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ qui satisfont le critère de I-confort.
- Soit (E, ρ) un espace métrique standard. On dit qu'une variable aléatoire $X \in L^0(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de I-confort (sous-entendu : dans L^0) si pour tout réel $\delta > 0$, il existe un entier $n_0 \leq 0$ et une I(n_0)-coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ telle que $\overline{\mathbb{P}}[\rho(X', X'') > \delta] < \delta$. On note $I^0(\mathcal{F}; E)$ l'ensemble des variables aléatoires $X \in L^0(\mathcal{F}_0; E)$ qui satisfont le critère de I-confort.
- Soit F un ensemble fini. On dit qu'une variable aléatoire $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$ satisfait le critère de I-confort (sous-entendu : dans L^{simple}) si pour tout réel $\delta > 0$, il existe un entier $n_0 \leq 0$ et une I(n_0)-coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ telle que $\overline{\mathbb{P}}[X' \neq X''] < \delta$. On note $I^{\text{simple}}(\mathcal{F}; F)$ l'ensemble des variables aléatoires $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$ qui satisfont le critère de I-confort.
- On dit qu'une σ -algèbre $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{F}_0$ satisfait le critère de I-confort si $L^1(\mathcal{E}_0; \mathbb{R}) \subset I^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$.

Proposition 14.2.2. On reprend le cadre et les notations de la définition 14.2.1. Les ensembles $I^1(\mathcal{F}; E)$ et $I^0(\mathcal{F}; E)$ sont fermés dans $L^1(\mathcal{F}_0; E)$ et dans $L^0(\mathcal{F}_0; E)$ respectivement.

Démonstration. En effet, donnons-nous $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ dans l'adhérence de $I^1(\mathcal{F}; E)$. On note $\mathbb{D}[X, Y] = \mathbb{E}[\rho(X, Y)]$. Pour tout $\delta > 0$, on a $Z \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ qui satisfait I(\mathcal{F}) telle que $\mathbb{D}[X, Z] < \delta/3$. Par hypothèse, on a une I(n_0)-coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} sur un espace $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ telle que $\overline{\mathbb{D}}[Z', Z''] < \delta/3$. Par isomorphismes, on a $\overline{\mathbb{D}}[X', Z'] = \overline{\mathbb{D}}[X'', Z''] = \overline{\mathbb{D}}[X, Z]$ et l'inégalité triangulaire donne $\overline{\mathbb{D}}[X', X''] < \delta$, donc $X \in I^1(\mathcal{F}; E)$.

Le même raisonnement avec $\mathbb{D}[X, Y] = \inf \{ \delta' > 0 \mid \mathbb{P}[\rho(X, Y) > \delta'] < \delta' \}$ donne la preuve de la proposition pour $L^0(\mathcal{F}_0; E)$. \square

Corollaire 14.2.3. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si $(\mathcal{B}_m)_{m \geq 0}$ est une suite croissante de sous- σ -algèbres de \mathcal{F}_0 qui satisfont le critère de I-confort, alors la σ -algèbre $\mathcal{B}_\infty := \lim \uparrow \mathcal{B}_m$ le satisfait aussi.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 1.2.3 et de la proposition 14.2.2. \square

Remarquons qu'il n'est pas très évident que les définitions de $I^0(\mathcal{F})$ ou de $I^1(\mathcal{F})$ ne dépendent que de la topologie de $L^0(\mathcal{F}_0; E)$ ou de $L^1(\mathcal{F}_0; E)$ respectivement. Si ρ et ρ' sont des distances topologiquement équivalentes sur E , peut-on substituer ρ à ρ' dans ces définitions? Est-ce que $X \in L^0(\mathcal{F}_0; (E, \rho))$ appartient à $I^0(\mathcal{F}; E)$ si et seulement si $X \in L^1(\mathcal{F}_0; (E, \rho' \wedge 1))$ appartient à $I^1(\mathcal{F}_0; (E, \rho' \wedge 1))$? La proposition suivante montre que oui. Par contre il sera clair que les notions analogues définies pour le critère de I $^\infty$ -confort dans le chapitre 18 sont topologiques.

Proposition 14.2.4. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soient (E, ρ) un espace métrique standard et $X \in L^0(\mathcal{F}_0; E)$. Les conditions suivantes sont équivalentes, la condition (i) étant à ne pas prendre en compte si $X \notin L^1(\mathcal{F}_0; E)$:

- (i) $X \in I^1(\mathcal{F}; E)$.
- (ii) $X \in I^0(\mathcal{F}_0; E)$.
- (iii) Toute variable aléatoire $Z \in L^0(\sigma(X))$ appartient à $I^0(\mathcal{F}; \mathbb{R})$.
- (iv) Pour tout ensemble fini F , toute variable aléatoire $Z \in L^{\text{simple}}(\sigma(X); F)$ appartient à $I^{\text{simple}}(\mathcal{F}; F)$.
- (v) Pour tout espace métrique standard (E^*, ρ^*) , toute variable aléatoire $Z \in L^1(\sigma(X); E^*)$ appartient à $I^1(\mathcal{F}; E^*)$.
- (vi) Pour tout espace métrique standard (E^*, ρ^*) , toute variable aléatoire $Z \in L^0(\sigma(X); E^*)$ appartient à $I^0(\mathcal{F}; E^*)$.

Démonstration. \circ (i) \implies (ii). Soit $\delta > 0$. On a une $I(n_0)$ -coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ telle que $\overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X'')] < \delta^2$, ce qui donne $\overline{\mathbb{P}}[\rho(X', X'') > \delta] < \delta$.

\circ (ii) \implies (iii) Notons $\Theta(X)$ l'ensemble des variables aléatoires $Z \in L^0(\sigma(X))$ de la forme $Z = f(X)$ où $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne. On se donne $Z = f(X) \in \Theta(X)$, on note c le rapport de Lipschitz de f . Soit $\delta > 0$. Par hypothèse on a une $I(n_0)$ -coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ telle que $\overline{\mathbb{P}}[\rho(X', X'') > \delta/c] < \delta$, et on en déduit $\overline{\mathbb{P}}[|Z' - Z''| > \delta] < \delta$. Ainsi $\Theta(X) \subset I^0(\mathcal{F}; \mathbb{R})$ et on conclut avec le corollaire 1.2.7 et la proposition 14.2.2.

\circ (iii) \implies (iv). Soit $F = \{x_1, x_2, \dots, x_r\} \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini et $Z \in L^{\text{simple}}(\sigma(X); F)$. On se donne $\delta > 0$ et on pose $\delta' = \delta \wedge \min_{i \neq j} \{\rho(x_i, x_j)\}$. Par hypothèse, on a une $I(n_0)$ -coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ telle que $\overline{\mathbb{P}}[\rho(Z', Z'') > \delta'] < \delta'$. Par conséquent, $\overline{\mathbb{P}}[Z' \neq Z''] \leq \overline{\mathbb{P}}[\rho(Z', Z'') > \delta'] < \delta$.

\circ (iv) \implies (v). Soient $Z \in L^1(\sigma(X); E^*)$ et $\delta > 0$. Soit $R \in L^{\text{simple}}(\sigma(X); E^*)$ telle que $\mathbb{E}[\rho(Z, R)] < \delta/3$. Notons $\{x_1, x_2, \dots, x_r\}$ un ensemble fini de valeurs prises par R presque sûrement. On note $M = \max \{\rho(x_i, x_j)\}$ et $\delta' = \delta/M$. On a une $I(n_0)$ -coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ telle que $\overline{\mathbb{P}}[R' \neq R''] < \delta'/3$, ce qui donne $\overline{\mathbb{E}}[\rho(R', R'')] < M\delta'/3 = \delta/3$. Alors par l'inégalité triangulaire et par transferts isomorphes, on a $\overline{\mathbb{E}}[\rho(Z', Z'')] < \delta$.

\circ (v) \implies (vi). Si $Z \in I^1(\sigma(X); E^*)$, en appliquant (i) \implies (ii) avec E^* au lieu de E et $X = Z$, on sait que $Z \in I^0(\mathcal{F}; E^*)$. On évoque alors la densité de $L^1(\sigma(X); E^*)$ dans $L^0(\sigma(X); E^*)$ et on applique la proposition 14.2.2 pour conclure.

\circ Pour finir, on a immédiatement (v) \implies (i) et (vi) \implies (ii). \square

Le corollaire suivant est immédiat :

Corollaire 14.2.5. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration et \mathcal{B} une sous- σ -algèbre de \mathcal{F}_0 . Alors \mathcal{B} satisfait le critère de I-confort si et seulement si $L^{\text{simple}}(\mathcal{B}_0) \subset I^{\text{simple}}(\mathcal{F})$, ou encore si et seulement si $L^0(\mathcal{B}_0) \subset I^0(\mathcal{F})$,

Remarque 14.2.6. Nous ne savons pas si pour être I-confortable, il suffit à une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ que toutes les indicatrice $\mathbb{1}_A$, $A \in \mathcal{F}_0$, satisfassent le critère de I-confort. Nous en reparlerons dans le chapitre 18.

14.3 Propriétés.

Proposition 14.3.1. Une filtration isomorphe à une filtration I-confortable est I-confortable.

Cette proposition est immédiate d'après la définition, nous l'avons déjà signalée.

Lemme 14.3.2. *Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n \leq 0}$ une filtration immergée dans \mathcal{F} . Pour un entier $n_0 \leq 0$, soit $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ une $I(n_0)$ -coïmmersion de \mathcal{F} sur un espace de probabilité $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$. Alors :*

- (i) *La filtration \mathcal{E}' , resp. \mathcal{E}'' , image de \mathcal{E} par l'isomorphisme en question de \mathcal{F} sur \mathcal{F}' , resp. de \mathcal{F} sur \mathcal{F}'' , est immergée dans \mathcal{F}' , resp. dans \mathcal{F}'' .*
- (ii) *$(\mathcal{E}', \mathcal{E}'')$ est une $I(n_0)$ -coïmmersion de \mathcal{E} .*

Par conséquent une variable aléatoire mesurable pour \mathcal{E} qui satisfait le critère de I-confort dans \mathcal{F} le satisfait aussi dans \mathcal{E} .

Démonstration. Le fait qu'un isomorphisme de filtrations préserve la propriété d'immersion donne (i) et, sans difficulté, on en déduit (ii) par transitivité de la propriété d'immersion. \square

Corollaire 14.3.3. *Une filtration immersible dans une filtration I-confortable est I-confortable.*

Démonstration. Cela se déduit aisément de la proposition 14.3.1 et du lemme 14.3.2. \square

Proposition 14.3.4. *Une filtration de type produit local qui satisfait au critère de Vershik de premier niveau est I-confortable.*

Démonstration. Dans le cas où \mathcal{F} est *tplcs*, cela peut se déduire du corollaire 10.2.9. La preuve est similaire pour le cas général, et nous démontrerons dans le chapitre 18 qu'une filtration de type produit local qui satisfait au critère de Vershik de premier niveau est I^∞ -confortable (proposition 18.1.2), ce qui est a priori plus fort que le I-confort. La preuve de la proposition en cours s'obtient comme celle de la proposition 18.1.2 en considérant seulement un réel $\delta_0 > 0$ au lieu de la suite $(\delta_k)_{k \leq 0}$, puis en recopiant la suite de la preuve seulement pour $k = 0$. \square

Dans le cas des filtrations conditionnellement séparables, le fait suivant apparaîtra comme une conséquence immédiate de l'équivalence entre filtration standard et filtration I-confortable que nous établirons dans le chapitre suivant (voir définition 15.3.2 et corollaire 15.3.4)

Proposition 14.3.5. *Une filtration I-confortable est kolmogorovienne.*

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration I-confortable sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $X \in L^1(\mathcal{F}_0)$. Nous allons montrer que $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_{-\infty}] = \mathbb{E}[X]$. Soit $(\delta_k)_{k \geq 0}$ une suite décroissante de réels strictement positifs telle que $\delta_k \searrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$. Pour tout $k \geq 0$, le critère de I-confort nous fournit une $I(n_k)$ -coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} définie sur un espace de probabilité $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ telle que l'on a $\overline{\mathbb{E}}[|X' - X''|] < \delta_k$. On a $\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{F}'_{n_k}}[X'] = \overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{F}'_{n_k} \vee \mathcal{F}''_{n_k}}[X']$ et $\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{F}''_{n_k}}[X''] = \overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{F}'_{n_k} \vee \mathcal{F}''_{n_k}}[X'']$ par la propriété d'immersion, donc $\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{F}'_{n_k}}[X'] - \overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{F}''_{n_k}}[X''] = \overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{F}'_{n_k} \vee \mathcal{F}''_{n_k}}[X' - X'']$. De la contractivité de l'espérance conditionnelle il vient alors

$$\overline{\mathbb{E}}\left[\left|\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{F}'_{n_k}}[X'] - \overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{F}''_{n_k}}[X'']\right|\right] < \delta_k.$$

L'espace $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ et la I-coïmmersion dépendent de k , mais ceci montre que sur tout espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$ muni de deux copies indépendantes \mathcal{F}^* , \mathcal{F}^{**} de \mathcal{F} , on a l'inégalité

$$\tilde{\mathbb{E}}\left[\left|\tilde{\mathbb{E}}_{\mathcal{F}^*_{n_k}}[X^*] - \tilde{\mathbb{E}}_{\mathcal{F}^{**}_{n_k}}[X^{**}]\right|\right] < \delta_k$$

pour tout $k \geq 0$, où X^* et X^{**} désignent les copies (indépendantes) de X .

On obtient alors $\tilde{\mathbb{E}}[X^* | \mathcal{F}_{-\infty}^*] = \tilde{\mathbb{E}}[X^{**} | \mathcal{F}_{-\infty}^{**}]$ en appliquant le théorème de convergence des martingales renversées. C'est une égalité de deux variables aléatoires indépendantes, d'où $\tilde{\mathbb{E}}[X^* | \mathcal{F}_{-\infty}^*] = \tilde{\mathbb{E}}[X^*]$, et on conclut par isomorphisme. \square

Rappelons pour la proposition suivante que le *produit indépendant* de deux espaces de probabilités filtrés $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{A}', (\mathcal{F}'_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P}')$ est l'espace de probabilité filtré $(\Omega \times \Omega', \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}', (\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{F}'_t)_{t \in \mathbb{T}}, \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}')$.

Proposition 14.3.6. *Le produit indépendant de deux filtrations I-confortables est une filtration I-confortable.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que si $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ sont deux filtrations définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ indépendantes et I-confortables, alors la filtration $\mathcal{F} \dot{\vee} \mathcal{G} = (\mathcal{F}_n \dot{\vee} \mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ est I-confortable.

Par la proposition 14.2.2, il suffit pour cela de montrer que le critère de I-confort est satisfait dans L^{simple} pour toute variable aléatoire $Z \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0 \dot{\vee} \mathcal{G}_0)$ de la forme $Z = f(F, G)$ où f est borélienne, $F \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0)$ et $G \in L^{\text{simple}}(\mathcal{G}_0)$. Donnons-nous alors $Z = f(F, G)$ de cette forme un réel $\delta > 0$. Par hypothèse, il existe deux entiers négatifs p_0 et q_0 , une $I(p_0)$ -coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} sur un espace de probabilité $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$ telle que $\bar{\mathbb{P}}[F' \neq F''] < \delta$, et une $I(q_0)$ -coïmmersion $(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$ de \mathcal{G} sur un espace de probabilité $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$ telle que $\tilde{\mathbb{P}}[G' \neq G''] < \delta$. Posant $n_0 = \min\{p_0, q_0\}$, on peut supposer que $p_0 = q_0 = n_0$.

La filtration $\mathcal{F} \dot{\vee} \mathcal{G}$ est isomorphe à la filtration $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_n)_{n \leq 0}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \otimes (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ par $\mathcal{H}_n = \mathcal{F}_n \otimes \mathcal{G}_n$, et sur le produit indépendant $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}}) = (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}}) \otimes (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$, les filtrations \mathcal{H}' et \mathcal{H}'' forment une $I(n_0)$ -coïmmersion de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ dans laquelle on a

$$\tilde{\mathbb{P}}[f(F', G') \neq f(F'', G'')] \leq \tilde{\mathbb{P}}[F' \neq F''] + \tilde{\mathbb{P}}[G' \neq G''] < 2\delta,$$

ce qui achève la preuve. \square

Proposition 14.3.7. *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si $X_0 \in L^1(\mathcal{F}_0)$ satisfait le critère de I-confort, alors $X_n := \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n]$ satisfait le critère de I-confort pour tout n . Plus précisément, pour tout $n \leq 0$, toute variable aléatoire $Y \in L^1(\sigma(X_n, \dots, X_0))$ satisfait le critère de I-confort.*

Démonstration. Donnons-nous $n \leq 0$ et posons $X_m = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_m]$ pour $m \in \llbracket n, 0 \rrbracket$ et $p = |n| + 1$. Par la proposition 14.2.4, il s'agit de montrer que $\vec{X} := (X_n, \dots, X_0) \in I^1(\mathcal{F}_0; \mathbb{R}^p)$, où on a muni \mathbb{R}^p de la norme $\|(x_1, \dots, x_p)\|_1 := \sum |x_i|$.

Soit $\delta > 0$. Par hypothèse, on a pour un entier $n_0 < 0$, une $I(n_0)$ -coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} sur un espace probabilisé $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$ telle que $\bar{\mathbb{E}}[|X' - X''|] < \delta/p$. Par l'immersion conjointe et par la contractivité des espérances conditionnelles, on en déduit que l'on a $\bar{\mathbb{E}}[|X'_m - X''_m|] < \delta/p$ et $\bar{\mathbb{E}}[\|(X'_n, \dots, X'_0) - (X''_n, \dots, X''_0)\|_1] < \delta$. \square

Corollaire 14.3.8. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration engendrée par une martingale $(M_n)_{n \leq 0}$. Alors \mathcal{F} est I-confortable si et seulement si la variable aléatoire $M_0 \in L^1(\mathcal{F}_0)$ satisfait le critère de I-confort.*

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 14.3.7 et de la proposition 14.2.4. \square

14.4 Exemple : couplage classique des chaînes de Markov.

Dans cette section nous allons utiliser un lemme de couplage de chaînes de Markov (théorème 14.4.1), appelé *couplage classique* dans la littérature ([Lin], [Th]), pour établir le I-confort de la filtration de certaines chaînes de Markov.

Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne une chaîne de Markov homogène $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans un espace d'états E fini ou dénombrable. On définit un temps d'arrêt $T_i = \min\{n \geq 1 \mid M_n = i\}$ appelé le *temps de retour* en i . Notant \mathbb{P}_i la probabilité \mathbb{P} conditionnée à l'événement $\{M_0 = i\}$, rappelons qu'on dit qu'un état i est *récurrent* si $\mathbb{P}_i[T_i < \infty] = 1$, et qu'on dit qu'un état récurrent i est *positif* si de plus $\mathbb{E}_i[T_i] < \infty$. Une chaîne est alors dite *récurrente positive* si tous ses états sont récurrents positifs.

Soient $M' = (M'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $M^* = (M^*_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux copies indépendantes de $M = (M_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définies sur un espace de probabilité $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$. On note

$$\bar{T} = \inf\{n \geq 0 \mid M'_n = M^*_n\}.$$

Le lecteur est référé à [Lin] ou [Th] pour une preuve des résultats du théorème suivant.

Théorème 14.4.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une chaîne de Markov homogène irréductible et apériodique d'espace d'états fini ou dénombrable E . Alors, avec les notations ci-dessus, on a $\bar{\mathbb{P}}[\bar{T} < \infty] = 1$ quand E est fini, et aussi quand E est dénombrable lorsque la chaîne de Markov est récurrente positive.*

Nous allons en déduire que la filtration d'une telle chaîne de Markov est I-confortable. Ceci s'applique par exemple à la filtration de l'exemple de Vinokurov (section 2.2). Pour mener les calculs dans le lemme 14.4.3, nous aurons besoin de la propriété locale de l'espérance conditionnelle, rappelée dans le lemme suivant.

Lemme 14.4.2. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Soient $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{A}$ des σ -algèbres, et $X_1, X_2 \in L^1$ des variables aléatoires telles que $X_1 = X_2$ sur un événement $A \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$ tel que $A \cap \mathcal{B}_1 = A \cap \mathcal{B}_2$. Alors $\mathbb{E}[X_1 \mid \mathcal{B}_1] = \mathbb{E}[X_2 \mid \mathcal{B}_2]$ sur A presque sûrement.*

Le lecteur est renvoyé à [Kall] pour une preuve de ce lemme.

Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Un *temps d'arrêt* T dans \mathcal{F} est à valeurs dans $\{-\infty\} \cup -\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Nous dirons qu'il est *fini à gauche* si $\mathbb{P}[T \neq -\infty] = 1$, *fini à droite* si $\mathbb{P}[T \neq +\infty] = 1$, et *fini* s'il est fini à gauche et à droite.

Lemme 14.4.3. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une chaîne de Markov à valeurs dans \mathbb{R} . On note \mathcal{F} la filtration de M . Soient $M' = (M'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $M^* = (M^*_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ deux copies de $M = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, définies sur un espace de probabilité $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$, qui engendrent des filtrations \mathcal{F}' et \mathcal{F}^* coïmmergées (c'est-à-dire que M' et M^* sont des $\mathcal{F}' \vee \mathcal{F}^*$ -chaînes de Markov). Soient $n_0 \in \mathbb{Z}$ et \bar{T} un temps d'arrêt dans $\mathcal{F}' \vee \mathcal{F}^*$ tel que $M'_{\bar{T}} = M^*_{\bar{T}}$. On pose*

$$M''_n = \begin{cases} M^*_n & \text{si } n \leq \bar{T} \\ M'_n & \text{si } n \geq \bar{T} \end{cases}$$

Alors le processus $M'' = (M''_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une copie de $M = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et les filtrations \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' engendrées par M' et M'' respectivement sont coïmmergées.

Démonstration. Notons $(P_{n+1}(x, \cdot))_{x \in \mathbb{R}}$ une version régulière de la loi conditionnelle de M_{n+1} sachant M_n . Pour montrer que les filtrations \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' sont coïmmergées, il suffit de vérifier que \mathcal{F}'' est immergée dans $\mathcal{F}' \vee \mathcal{F}^*$, et cela revient à dire que M'' est une chaîne de Markov dans

$\mathcal{F}' \vee \mathcal{F}^*$ (lemme 8.2.7). Nous allons vérifier à la fois ceci et que M'' est une copie de M . Notons que $M''_{n+1} = M'_{n+1}$ sur $\{\bar{T} \leq n\}$ et que $M''_{n+1} = M^*_{n+1}$ sur $\{\bar{T} > n\}$. La propriété locale de l'espérance conditionnelle (lemme 14.4.2) et l'immersion conjointe de \mathcal{F}' et \mathcal{F}^* donnent, d'une part,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}[f(M''_{n+1}) | \mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}^*_n] \mathbb{1}_{\{\bar{T} > n\}} &= \overline{\mathbb{E}}[f(M^*_{n+1}) | M^*_n] \mathbb{1}_{\{\bar{T} > n\}} \\ &= \int f(x) P_{n+1}(M^*_n, dx) \mathbb{1}_{\{\bar{T} > n\}} \\ &= \int f(x) P_{n+1}(M''_n, dx) \mathbb{1}_{\{\bar{T} > n\}}, \end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}[f(M''_{n+1}) | \mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}^*_n] \mathbb{1}_{\{\bar{T} \leq n\}} &= \overline{\mathbb{E}}[f(M'_{n+1}) | \mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}^*_n] \mathbb{1}_{\{\bar{T} \leq n\}} \\ &= \overline{\mathbb{E}}[f(M'_{n+1}) | M'_n] \mathbb{1}_{\{\bar{T} \leq n\}} \\ &= \int f(x) P_{n+1}(M'_n, dx) \mathbb{1}_{\{\bar{T} \leq n\}} \\ &= \int f(x) P_{n+1}(M''_n, dx) \mathbb{1}_{\{\bar{T} \leq n\}}. \end{aligned}$$

En somme, ceci montre que l'on a $\overline{\mathbb{E}}[f(M''_{n+1}) | \mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}^*_n] = \overline{\mathbb{E}}[f(M''_{n+1}) | M''_n]$, ainsi que $\overline{\mathbb{E}}[f(M''_{n+1}) | M''_n] = \int f(x) P_{n+1}(M''_n, dx)$, et M'' est nen conséquent une chaîne de Markov dans $\mathcal{F}' \vee \mathcal{F}^*$ de même loi que M . \square

Théorème 14.4.4. *Soit $M = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une chaîne de Markov homogène stationnaire, irréductible et apériodique avec un espace d'états fini ou dénombrable $E \subset \mathbb{R}$. On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la filtration de M . Alors quand E est fini ou quand E est dénombrable si la chaîne de Markov est récurrente positive, \mathcal{F} est I-confortable.*

Démonstration. On pose $\mathcal{B}_m = \sigma(M_n, n \geq m)$. Nous allons montrer que les \mathcal{B}_m satisfont $I(\mathcal{F})$, et le corollaire 14.2.3 donnera le I-confort de \mathcal{F} . Commençons par \mathcal{B}_0 . Soient $M' = (M'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $M^* = (M^*_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ deux copies indépendantes de $M = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$. On note \mathcal{F}' et \mathcal{F}^* les filtrations respectives de M' et M^* . Posons $\bar{T} = \inf\{n \geq 0 \mid M'_n = M^*_n\}$. Par le théorème 14.4.1, on a $\overline{\mathbb{P}}[\bar{T} < +\infty] = 1$. Soit $\delta \in]0, 1]$ et $N_0 \geq 0$ suffisamment grand pour que $\overline{\mathbb{P}}[\bar{T} < N_0] > 1 - \delta$. On pose $n_0 = -N_0$ et $\bar{T}_{n_0} = \inf\{n \geq n_0 \mid M'_n = M^*_n\}$, puis

$$M''_n = \begin{cases} M^*_n & \text{si } n \leq \bar{T}_{n_0} \\ M'_n & \text{si } n \geq \bar{T}_{n_0}. \end{cases}$$

Par le lemme 14.4.3, les processus $M' = (M'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $M'' = (M''_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sont des copies de $M = (M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, et les filtrations \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' engendrées par M' et M'' respectivement, forment une $I(n_0)$ -coïmmersion de \mathcal{F} . Par stationnarité, on a $\overline{\mathbb{P}}[\bar{T}_{n_0} < 0] > 1 - \delta$, et donc

$$\overline{\mathbb{P}}[M'_0 = M''_0, M'_1 = M''_1, M'_2 = M''_2, \dots] > 1 - \delta,$$

ce dont on déduit que $L^{\text{simple}}(\mathcal{B}_0) \subset I^{\text{simple}}(\mathcal{F})$, puis que la σ -algèbre \mathcal{B}_0 satisfait le critère de I-confort avec le corollaire 14.2.5.

Par stationnarité, chacune des \mathcal{B}_m satisfait alors aussi le critère de I-confort, et comme $\mathcal{B}_m \nearrow \mathcal{F}_0$, le I-confort de \mathcal{F} est une conséquence du corollaire 14.2.3. \square

Dans le cas où E n'est pas dénombrable, on ne peut pas s'attendre à établir le I-confort de \mathcal{F} par de tels couplages. Lorsque $(M_n)_{n \geq 0}$ est une chaîne de Markov stationnaire avec M_n de loi diffuse dans \mathbb{R} , le temps d'arrêt $\bar{T} = \inf\{n \geq 0 \mid M'_n = M_n^*\}$ de la preuve précédente est infini presque sûrement. Il serait plus approprié de regarder pour de telles chaînes de Markov si les temps d'arrêt

$$\bar{T}_\epsilon = \inf\{n \geq 0 \mid |M'_n - M_n^*| < \epsilon\}, \quad \epsilon > 0$$

sont atteints presque sûrement, puis de coupler les deux chaînes après \bar{T}_ϵ en sorte qu'elles restent proches. Cela peut se faire commodément avec la définition *constructive* des chaînes de Markov (définition 3.6.2). Dans le chapitre 16, nous verrons des conditions suffisantes bien plus générales que celles du théorème 14.4.4 sur une chaîne de Markov pour que celle-ci engendre une filtration I-confortable.

15. FILTRATIONS I-COMFORTABLES ET FILTRATIONS STANDARD.

Le théorème 15.2.3 est l'objet des deux premières sections de ce chapitre. Il généralise le théorème 1.1.1 de l'introduction au cas des filtrations conditionnellement séparables. Notre démarche est différente de celle de [ES] qui ont utilisé le critère de standardité de Vershik (chapitre 19) pour établir ce théorème (dans le cas conditionnellement non-atomique) alors que nous utilisons le critère de I-jonction en arbre. Une fois ce théorème établi, nous définirons la notion de filtration *standard* et démontrerons son équivalence avec le I-confort en suivant exactement [ES], puis nous généraliserons ce résultat au cas conditionnellement séparable.

Nous donnons d'abord les nouvelles terminologies suivantes sur les filtrations.

Définitions 15.0.1. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $n_0 \leq 0$ un entier.

- S'il existe une innovation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ telle que V_n soit une variable aléatoire uniformément distribuée sur un nombre fini r_n de valeurs, on dit que \mathcal{F} est *r_n -adique sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$* .
- S'il existe une innovation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ telle que V_n soit de loi diffuse, on dit que \mathcal{F} est *conditionnellement non-atomique sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$* .
- S'il existe une innovation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ telle que V_n soit une variable aléatoire diffuse ou simple et uniforme, on dit que \mathcal{F} est *conditionnellement homogène sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$* .

Ces terminologies ne créent pas d'ambiguïté d'après le corollaire 4.3.4. L'étape-clef pour établir le théorème 15.2.3 sera la proposition 15.1.3. Le cas r_n -adique en découle avec la proposition 10.2.2, et le cas conditionnellement homogène sera déduit par approximation.

15.1 Cas r_n -adique.

Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration r_n -adique. On veut montrer qu'elle satisfait le critère de Vershik de premier niveau si elle est I-confortable. Regardons la définition 14.1.1 du I-confort. Si on montre que parmi les $I(n_0)$ -co-immersions $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} , celles qui sont en arbre sont les meilleures pour parvenir à la condition (iv), il n'y aura plus qu'à appliquer le corollaire 10.2.9. Ceci va provenir du lemme suivant, comme nous allons le voir.

Lemme 15.1.1. *Soit $r \geq 2$ un entier. L'ensemble des probabilités sur $\{1, 2, \dots, r\} \times \{1, 2, \dots, r\}$ de marges uniformes est un sous-ensemble convexe et compact de l'espace des mesures sur $\{1, 2, \dots, r\} \times \{1, 2, \dots, r\}$. Ses points extrémaux sont les probabilités portées par le graphe d'une permutation de $\{1, 2, \dots, r\}$, et il est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.*

Démonstration. La convexité et la compacité sont immédiates. En ce qui concerne les points extrémaux, c'est un théorème dû à G. D. Birkhoff (voir [MO]). □

Cette section s'achève par la proposition 15.1.3. Nous avons besoin de généraliser le lemme 4.4.7 pour la partie *b*) de cette proposition, qui servira ensuite uniquement à démontrer la partie *b*) du corollaire 15.2.1, qui elle sera utilisée dans le chapitre 17.

Lemme 15.1.2. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration avec, pour un entier $n_0 \leq 0$, une novation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et soit $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n \leq 0}$ est une filtration contenue dans \mathcal{F} et telle que $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_{n-1} \vee \sigma(V_n)$. Pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, soit S_n une variable aléatoire mesurable pour \mathcal{E}_n . Alors il existe une variable aléatoire $Y_{n_0} \in L^0(\mathcal{E}_{n_0})$ telle que pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, on a*

$$\sigma(Y_{n_0}, V_{n_0+1}, V_{n_0+2}, \dots, V_n) \supset \sigma(S_{n_0}, S_{n_0+1}, \dots, S_n).$$

Démonstration. La preuve se fait comme celle du lemme 4.4.7. \square

Proposition 15.1.3. *Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration r_n -adique sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. Soit E un espace métrique standard et $\theta: E \times E \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction mesurable positive. Soit $X \in L^0(\mathcal{F}_0; E)$ une variable aléatoire dans E . On se donne une coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}^*)$ de \mathcal{F} sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ et un entier $n_0 \leq 0$.*

- a) Alors il existe sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ une filtration $\tilde{\mathcal{F}} = (\tilde{\mathcal{F}}_n)_{n \leq 0}$ telle que $\tilde{\mathcal{F}}_n = \mathcal{F}_n^*$ pour $n \leq n_0$, $(\mathcal{F}', \tilde{\mathcal{F}})$ est une coïmmersion de \mathcal{F} en arbre sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ et $\mathbb{E}[\theta(X', \tilde{X})] \leq \mathbb{E}[\theta(X', X^*)]$.*
- b) On note (V_{n_0+1}, \dots, V_0) une innovation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. Si $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n \leq 0}$ est une filtration contenue dans \mathcal{F} et telle que $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_{n-1} \vee \sigma(V_n)$ pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et si X est mesurable pour \mathcal{E}_0 , alors on peut préciser la forme de la coïmmersion en arbre $(\mathcal{F}', \tilde{\mathcal{F}})$ ainsi : pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, on a*

$$\tilde{V}_n = \psi_{S'_{n-1}, \tilde{S}_{n-1}}^{(n)}(V'_n),$$

où $S_{n-1} \in L^0(\mathcal{E}_{n-1})$ et $\{\psi_{y', y''}^{(n)}\}_{y', y'' \in \mathbb{R}}$ est une famille mesurable de permutations.

Démonstration. Montrons l'assertion *b*), de laquelle *a*) se déduit en prenant $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. La preuve va être faite par récurrence descendante sur n_0 . Il n'y a rien à faire pour $n_0 = 0$. Supposons la proposition vraie pour $n_0 + 1$, et donnons-nous une coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}^*)$ de \mathcal{F} sur un espace de probabilité $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ et $X \in L^0(\mathcal{E}_0; E)$. Par l'hypothèse de récurrence, on a sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ une coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0 + 1, 0 \rrbracket$, qui coïncide avec $(\mathcal{F}', \mathcal{F}^*)$ jusque $n_0 + 1$ et telle que $\mathbb{E}[\theta(X', X'')] \leq \mathbb{E}[\theta(X', X^*)]$, et de plus telle que

$$\tilde{V}_n = \psi_{S'_{n-1}, S''_{n-1}}^{(n)}(V'_n),$$

pour tout $n \in \llbracket n_0 + 1, 0 \rrbracket$, où $S_{n-1} \in L^0(\mathcal{E}_{n-1})$ et $\{\psi_{y', y''}^{(n)}\}_{y', y'' \in \mathbb{R}}$ est une famille mesurable de permutations.

Par hypothèse, $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_{n_0} \vee \sigma(V_{n_0+1}, \dots, V_0)$, donc on peut écrire $X = \dot{f}(T_{n_0}, V_{n_0+1}, \dots, V_0)$ avec \dot{f} borélienne et $T_{n_0} \in L^0(\mathcal{E}_{n_0})$. Par le lemme 15.1.2, on peut introduire une variable aléatoire $S_{n_0} \in L^0(\mathcal{E}_{n_0})$ telle que

$$\sigma(S_{n_0}, V_{n_0+1}, V_{n_0+2}, \dots, V_0) \supset \sigma(T_{n_0}, S_{n_0+1}, \dots, S_0).$$

ce qui nous permet d'écrire

$$X = f(S_{n_0}, V_{n_0+1}, \dots, V_0)$$

où f est borélienne, et d'écrire

$$(V''_{n_0+2}, \dots, V''_0) = \tau_{S'_{n_0}, V'_{n_0+1}, S''_{n_0}, V''_{n_0+1}}^{(n_0+1)} (V'_{n_0+2}, \dots, V'_0),$$

où $\{\tau_{y', v', y'', v''}^{(n_0+1)}\}$ est une famille mesurable d'automorphismes d'arbre.

Notons ν_{n_0+2} la loi du vecteur $(V'_{n_0+2}, \dots, V'_0)$. On a alors

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}[\theta(X', X'') | \mathcal{F}'_{n_0+1} \vee \mathcal{F}''_{n_0+1}] &= \\ &= \int \theta(f(S'_{n_0}, V'_{n_0+1}, \vec{v}), f(S''_{n_0}, V''_{n_0+1}, \tau_{S'_{n_0}, V'_{n_0+1}, S''_{n_0}, V''_{n_0+1}}^{(n_0+1)}(\vec{v}))) d\nu_{n_0+2}(\vec{v}). \end{aligned}$$

En projetant cette quantité, on obtient

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}[\theta(X', X'') | \mathcal{F}'_{n_0} \vee \mathcal{F}''_{n_0}] &= \\ &= \int \left(\int \theta(f(S'_{n_0}, v', \vec{v}), f(S''_{n_0}, v'', \tau_{S'_{n_0}, v', S''_{n_0}, v''}^{(n_0+1)}(\vec{v}))) d\nu_{n_0+2}(\vec{v}) \right) d\bar{\mathcal{L}}_{n_0}(v', v''), \end{aligned}$$

où

$$\bar{\mathcal{L}}_{n_0} = \bar{\mathcal{L}}[(V'_{n_0+1}, V''_{n_0+1}) | \mathcal{F}'_{n_0} \vee \mathcal{F}''_{n_0}]$$

est la loi du couple $(V'_{n_0+1}, V''_{n_0+1})$ conditionnellement à $\mathcal{F}'_{n_0} \vee \mathcal{F}''_{n_0}$; nous venons d'écrire

$$\bar{\mathbb{E}}[\theta(X', X'') | \mathcal{F}'_{n_0} \vee \mathcal{F}''_{n_0}] = \mathbf{L}_{S'_{n_0}, S''_{n_0}}(\bar{\mathcal{L}}_{n_0}) \quad (15.1.1)$$

où, étant donnée une mesure μ sur $\{1, 2, \dots, r_{n_0+1}\} \times \{1, 2, \dots, r_{n_0+1}\}$, on a posé

$$\mathbf{L}_{y', y''}(\mu) = \int \left(\int \theta(f(y', v', \vec{v}), f(y'', v'', \tau_{y', v', y'', v''}^{(n_0+1)}(\vec{v}))) d\nu_{n_0+2}(\vec{v}) \right) d\mu(v', v'').$$

La fonction $\mathbf{L}_{y', y''}$ est une forme linéaire continue sur l'espace des mesures sur $\{1, 2, \dots, r_{n_0+1}\} \times \{1, 2, \dots, r_{n_0+1}\}$ qui dépend mesurablement de y' et y'' . Par l'immersion conjointe, les marges de $\bar{\mathcal{L}}_{n_0}$ sont toutes deux égales à la loi de V_{n_0} presque sûrement. Notons \mathcal{J}_{n_0+1} le sous-espace affine des probabilités sur $\{1, 2, \dots, r_{n_0+1}\} \times \{1, 2, \dots, r_{n_0+1}\}$ de marges uniformes. D'après le lemme 15.1.1, c'est un ensemble convexe et compact qui est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux, et on a alors

$$\inf_{\mu \in \mathcal{J}_{n_0+1}} \mathbf{L}_{y', y''}(\mu) = \inf_{\mu \in \mathbf{Extr}(\mathcal{J}_{n_0+1})} \mathbf{L}_{y', y''}(\mu), \quad (15.1.2)$$

où $\mathbf{Extr}(K)$ désigne l'ensemble des points extrémaux d'un convexe K . Le lemme 15.1.1 dit aussi que $\mathbf{Extr}(\mathcal{J}_{n_0+1})$ est constitué de toutes les permutations de $\{1, 2, \dots, r_{n_0+1}\}$. Pour $y', y'' \in \mathbb{R}$, on choisit de façon mesurable une permutation $\psi_{y', y''}^{(n_0)}$ de $\{1, 2, \dots, r_{n_0+1}\}$ telle que la probabilité $\mu_{y', y''}$ sur $\{1, 2, \dots, r_{n_0+1}\}^2$ de marges uniformes qui est portée par le graphe de $\psi_{y', y''}^{(n_0+1)}$ atteigne la borne inférieure dans (15.1.2). Ainsi

$$\mathbf{L}_{S'_{n_0}, S''_{n_0}}(\mu_{S'_{n_0}, S''_{n_0}}) \leq \mathbf{L}_{S'_{n_0}, S''_{n_0}}(\bar{\mathcal{L}}_{n_0}). \quad (15.1.3)$$

Toutes les mesurabilités requises sont là pour bien définir une variable aléatoire \tilde{V}_{n_0+1} en posant $\tilde{V}_{n_0+1} = \psi_{S'_{n_0}, S''_{n_0}}^{(n_0+1)}(V'_{n_0+1})$. Puis on pose

$$(\tilde{V}_{n_0+2}, \dots, \tilde{V}_0) = \tau_{S'_{n_0+1}, V'_{n_0+1}, S''_{n_0+1}, \tilde{V}_{n_0+1}}^{(n_0+1)} (V'_{n_0+2}, \dots, V'_0).$$

On construit alors la filtration cherchée $\tilde{\mathcal{F}}$ en posant

$$\tilde{\mathcal{F}}_n = \begin{cases} \mathcal{F}_n'' & \text{si } n \leq n_0 \\ \mathcal{F}_{n_0}'' \dot{\vee} \sigma(\tilde{V}_{n_0+1}, \dots, \tilde{V}_n) & \text{si } n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket. \end{cases}$$

On a alors, pour tout $n \in \llbracket n_0 + 1, 0 \rrbracket$,

$$\tilde{V}_n = \psi_{S'_{n-1}, \tilde{S}_{n-1}}^{(n)}(V'_n)$$

et on a

$$\mathbf{L}_{S'_{n_0}, S''_{n_0}}(\mu_{S'_{n_0}, S''_{n_0}}) = \overline{\mathbb{E}}[\theta(X', \tilde{X}) | \mathcal{F}'_{n_0} \vee \tilde{\mathcal{F}}_{n_0}] \quad (15.1.4)$$

avec $\tilde{X} = f(S''_{n_0}, \tilde{V}_{n_0+1}, \tilde{V}_{n_0+2}, \dots, \tilde{V}_0)$. L'inégalité $\overline{\mathbb{E}}[\theta(X', \tilde{X})] \leq \overline{\mathbb{E}}[\theta(X', X'')]$ désirée découle de (15.1.1), (15.1.3) et (15.1.4). \square

15.2 Cas conditionnellement homogène.

Comme nous l'avons déjà dit, la proposition 15.1.3 et le corollaire 10.2.9 donnent le théorème 15.2.3 dans le cas r_n -adique. Par approximations, la proposition 15.1.3 donne le corollaire suivant qui permettra d'établir le cas conditionnellement homogène. La partie *b*) est inutile pour les résultats de ce chapitre, elle sera utilisée dans le chapitre 17.

Corollaire 15.2.1. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration conditionnellement homogène sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, pour un certain entier $n_0 \leq 0$. Soient (E, ρ) un espace métrique standard et $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$. On se donne une coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}^*)$ de \mathcal{F} sur un espace de probabilité $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$.*

- a) Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe une filtration \mathcal{F}'' sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ telle que $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ est une coïmmersion de \mathcal{F} en arbre sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ et $\overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X'')] \leq \overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X^*)] + \epsilon$.*
- b) On note (V_{n_0+1}, \dots, V_0) une innovation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. Si $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_n)_{n \leq 0}$ est une filtration contenue dans \mathcal{F} et telle que $\mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}_{n-1} \dot{\vee} \sigma(V_n)$ pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et si X est mesurable pour \mathcal{E}_0 , alors on peut préciser la forme de la coïmmersion en arbre $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ ainsi : pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, on a*

$$\tilde{V}_n = \psi_{Y'_{n-1}, Y''_{n-1}}^{(n)}(V'_n),$$

où $Y_{n-1} \in L^0(\mathcal{E}_{n-1})$ et $\{\psi_{y', y''}^{(n)}\}_{y', y'' \in \mathbb{R}}$ est une famille mesurable de permutations.

Démonstration. Nous montrons *b*), l'assertion *a*) s'en déduit en prenant $\mathcal{E} = \mathcal{F}$. On désigne par $D(\mathcal{F}) \subset \llbracket n_0, 0 \rrbracket$ l'ensemble des $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$ tels que V_n est diffuse et par $S(\mathcal{F})$ son complémentaire dans $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, l'ensemble des $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$ tels que V_n est uniforme sur un nombre fini de valeurs. Pour $n \in S(\mathcal{F})$, on note η_n une innovation de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n de loi uniforme sur $\{1, \dots, r_n\}$ et pour $n \in D(\mathcal{F})$, on choisit à l'aide du corollaire 4.3.4 une innovation U_n de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n de loi uniforme sur $[0, 1]$. La σ -algèbre

$$\mathcal{C}_{n_0}^{(\infty)} := \sigma(V_{n_0+1}, \dots, V_0) = \sigma(\eta_n, n \in S(\mathcal{F})) \vee \sigma(U_n, n \in D(\mathcal{F}))$$

est alors un complément de \mathcal{F}_{n_0} dans \mathcal{F}_0 .

Pour tout $n \in D(\mathcal{F})$ et pour tout entier $\ell \geq 0$, on définit une variable aléatoire $\eta_n^{(\ell)}$ uniforme sur $\{0, 1/2^\ell, \dots, k/2^\ell, \dots, 1 - 1/2^\ell\}$ en posant

$$\eta_n^{(\ell)} = \sum_{k=0}^{2^\ell-1} \frac{k}{2^\ell} \mathbb{1}_{\left\{\frac{k}{2^\ell} < U_n \leq \frac{k+1}{2^\ell}\right\}}.$$

Alors les σ -algèbres $\mathcal{C}_{n_0}^{(\ell)} := \sigma(\eta_m, m \in S(\mathcal{F})) \vee \sigma(\eta_n^{(\ell)}, n \in D(\mathcal{F}))$, $\ell \geq 0$, forment une suite croissante qui tend vers $\mathcal{C}_{n_0}^{(\infty)}$ quand $\ell \rightarrow \infty$.

On pose $\delta = \epsilon/4$. Puisque $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_{n_0} \dot{\vee} \mathcal{C}_{n_0}^{(\infty)}$, et que $\mathcal{E}_{n_0} \dot{\vee} \mathcal{C}_{n_0}^{(\ell)} \nearrow \mathcal{E}_{n_0} \dot{\vee} \mathcal{C}_{n_0}^{(\infty)}$ quand $\ell \rightarrow \infty$, pour ℓ suffisamment grand, il existe une variable aléatoire Z mesurable pour $\mathcal{E}_{n_0} \dot{\vee} \mathcal{C}_{n_0}^{(\ell)}$ telle que $\mathbb{E}[\rho(X, Z)] < \delta$ (proposition 1.2.4). On choisit un tel entier ℓ et pour qu'il n'alourdisse pas l'écriture, on pose maintenant $\eta_n = \eta_n^{(\ell)}$ pour $n \in D(\mathcal{F})$. Notons que par l'inégalité triangulaire et par isomorphismes, on a

$$\overline{\mathbb{E}}[\rho(Z', Z^*)] < \overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X^*)] + 2\delta.$$

Remarquons que Z est mesurable pour $\mathcal{D}_0 := \mathcal{F}_{n_0} \dot{\vee} \sigma(\eta_{n_0+1}, \dots, \eta_n)$ qui est la tribu finale de la filtration $\mathcal{D} = (\mathcal{D}_n)_{n \leq 0}$ définie par

$$\mathcal{D}_n = \begin{cases} \mathcal{F}_n & \text{si } n \leq n_0 \\ \mathcal{F}_{n_0} \dot{\vee} \sigma(\eta_{n_0+1}, \dots, \eta_n) & \text{si } n \geq n_0, \end{cases}$$

qui est r_n -adique sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, admettant $(\eta_{n_0+1}, \dots, \eta_0)$ comme innovation sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. La filtration \mathcal{D} est immergée dans \mathcal{F} (lemme 8.2.8), $(\mathcal{D}', \mathcal{D}^*)$ est une coïmmersion de \mathcal{D} et La variable aléatoire Z est mesurable pour \mathcal{D} , et Z', Z^* , sont aussi les copies respectives de Z dans \mathcal{D}' et \mathcal{D}^* . Notons aussi que Z est mesurable pour $\mathcal{D}_0^- := \mathcal{E}_{n_0} \dot{\vee} \sigma(\eta_{n_0+1}, \dots, \eta_n)$ qui est la tribu finale de la filtration $\mathcal{D}^- \subset \mathcal{D}$ définie par

$$\mathcal{D}_n^- = \begin{cases} \mathcal{E}_n & \text{si } n \leq n_0 \\ \mathcal{E}_{n_0} \dot{\vee} \sigma(\eta_{n_0+1}, \dots, \eta_n) & \text{si } n \geq n_0. \end{cases}$$

La proposition 15.1.3 appliquée à Z donne alors une filtration \mathcal{D}'' sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ telle que $(\mathcal{D}', \mathcal{D}'')$ est une $I(n_0)$ -coïmmersion de \mathcal{D} en arbre sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ avec $\mathcal{D}_n'' = \mathcal{D}_n^*$ pour $n \leq n_0$ et telle que l'on a $\overline{\mathbb{E}}[\rho(Z', Z'')] < \overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X^*)] + 2\delta$, et de plus on a, pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$,

$$\eta_n'' = \psi_{Y_{n-1}', Y_{n-1}''}^{(n)}(\eta_n'),$$

où $Y_{n-1} \in L^0(\mathcal{D}_{n-1}^-) \subset L^0(\mathcal{E}_{n-1})$ et $\{\psi_{y', y''}^{(n)}\}_{y', y'' \in \mathbb{R}}$ est une famille mesurable de permutations. On redéfinit ici l'innovation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) de \mathcal{F} en renommant les V_n en posant $V_n = \eta_n$ si $n \in S(\mathcal{F})$ et $V_n = U_n$ si $n \in D(\mathcal{F})$. On note μ_n la loi de V_n et G_{n_0} le groupe des changements d'innovations de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ de même loi que (V_{n_0+1}, \dots, V_0) (définition 4.4.5).

Toute permutation φ de $\{0, 1/2^\ell, \dots, k/2^\ell, \dots, 1 - 1/2^\ell\}$ se prolonge naturellement en une permutation de $[0, 1]$, ceci en échangeant chaque segment $]k/2^\ell, (k+1)/2^\ell[$ avec le segment $] \varphi(k/2^\ell), \varphi(k/2^\ell) + 1/2^\ell[$. On prolonge de cette manière les permutations $\psi_{y', y''}^{(n)}$ et en posant ensuite

$$V_n'' = \psi_{Y_{n-1}', Y_{n-1}''}^{(n)}(V_n'),$$

pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, on prolonge alors l'isomorphisme de \mathcal{D} sur \mathcal{D}'' à toute la filtration \mathcal{F} en l'envoyant sur la filtration \mathcal{F}'' définie par

$$\mathcal{F}''_n = \begin{cases} \mathcal{F}^*_n & \text{si } n \leq n_0 \\ \mathcal{F}^*_{n_0} \dot{\vee} \sigma(V''_{n_0+1}, \dots, V''_n) & \text{si } n \geq n_0, \end{cases}$$

ceci en envoyant chaque V_n sur V''_n . On a ainsi construit une $I(n_0)$ -coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} en arbre sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ avec les propriétés requises et on a $\overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X'')] \leq \overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X^*)] + \epsilon$ par l'inégalité triangulaire. \square

Le corollaire suivant est alors immédiat :

Corollaire 15.2.2. *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local et conditionnellement homogène. Soit E un espace métrique standard. Alors une variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de I-confort si et seulement elle satisfait le critère de I-jonction en arbre.*

De ce corollaire on déduit immédiatement le théorème suivant à l'aide du corollaire 15.2.1 et du corollaire 10.2.9 :

Théorème 15.2.3. *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration localement de type produit, conditionnellement homogène. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) \mathcal{F} est I-confortable.
- (ii) \mathcal{F} est I-joignable en arbre.
- (iii) \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik de premier niveau.

Le théorème 1.1.1 de l'introduction s'en déduit avec la proposition 3.1.5 :

Théorème 15.2.4. *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration localement de type produit, conditionnellement homogène, et essentiellement séparable. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) \mathcal{F} est I-confortable.
- (ii) \mathcal{F} est I-joignable en arbre.
- (iii) \mathcal{F} est de type produit.

Notons que l'hypothèse d'homogénéité conditionnelle est essentielle : nous avons vu que la filtration de l'exemple de Vinokurov n'est pas de type produit (section 2.2) mais qu'elle est I-confortable comme conséquence du théorème 14.4.4.

Quelques corollaires de second niveau. — Du corollaire 15.2.2 résultent aussi les résultats suivants auxquels nous avons parfois renvoyé le lecteur dans les chapitres précédents :

Corollaire 15.2.5. *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ une filtration. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local conditionnellement homogène et immergée dans \mathcal{G} . Soit E un espace métrique standard. Alors une variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ qui satisfait le critère de I-confort dans \mathcal{G} satisfait le critère de I-jonction en arbre dans \mathcal{F} .*

Démonstration. C'est une conséquence facile du lemme 14.3.2 et du corollaire 15.2.2. \square

Corollaire 15.2.6. *Une filtration conditionnellement homogène immersible dans une filtration I-confortable satisfait le critère de Vershik de premier niveau. Une filtration conditionnellement homogène immersible dans une filtration de type produit local qui satisfait le critère de I-jonction en arbre satisfait elle-même le critère de I-jonction en arbre.*

Démonstration. Ce sont des conséquences immédiates du corollaire précédent et du corollaire 10.2.9. \square

15.3 Filtrations standard.

Avec le théorème 15.2.3 que nous venons d'établir, nous allons maintenant établir l'équivalence entre filtration I-confortable et filtration standard pour les filtrations essentiellement séparables, en suivant [ES]. Le cas conditionnellement séparable sera traité dans la section suivante.

Lemme 15.3.1. *Le produit indépendant d'une filtration conditionnellement séparable par une filtration conditionnellement non-atomique est une filtration conditionnellement non-atomique. En particulier le produit indépendant d'une filtration essentiellement séparable par une filtration conditionnellement non-atomique est une filtration conditionnellement non-atomique.*

Démonstration. Il suffit de montrer ceci pour des filtrations à un pas. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ et $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$ deux filtrations indépendantes sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, avec \mathcal{F} conditionnellement séparable et \mathcal{G} conditionnellement non-atomique. On a une novation V_1 de \mathcal{F}_0 dans \mathcal{F}_1 et une variable aléatoire V de loi diffuse, indépendante de \mathcal{G}_0 et telle que $\mathcal{G}_1 = \mathcal{G}_0 \dot{\vee} \sigma(V)$. On a alors

$$\mathcal{F}_1 \dot{\vee} \mathcal{G}_1 = (\mathcal{F}_0 \dot{\vee} \mathcal{G}_0) \vee \sigma(V_1, V).$$

Pour montrer le lemme, il s'agit d'après la proposition 4.3.3 de vérifier que les valeurs de la loi conditionnelle $\mathcal{L}[(V_1, V) | \mathcal{F}_0 \dot{\vee} \mathcal{G}_0]$ sont des probabilités diffuses. Soient f et g boréliennes bornées. On note μ la loi de V . On a alors, presque sûrement,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(V_1)g(V) | \mathcal{F}_0 \dot{\vee} \mathcal{G}_0] &= \int \mathbb{E}[f(V_1)g(v) | \mathcal{F}_0 \dot{\vee} \mathcal{G}_0] d\mu(v) \\ &= \mathbb{E}[f(V_1) | \mathcal{F}_0] \int g(v) d\mu(v) = \mathbb{E}[f(V_1) | \mathcal{F}_0] \mathbb{E}[g(V)], \end{aligned}$$

ce qui montre que presque sûrement, la loi conditionnelle $\mathcal{L}[(V_1, V) | \mathcal{F}_0 \dot{\vee} \mathcal{G}_0]$ est la probabilité produit $\mathcal{L}[V_1 | \mathcal{F}_0] \otimes \mu$ de la loi conditionnelle de V_1 sachant \mathcal{F}_0 avec μ . C'est une loi diffuse. \square

Remarquons que ce lemme et le lemme 8.2.4 entraînent que toute filtration essentiellement séparable est immersible dans une filtration conditionnellement non-atomique.

Définition 15.3.2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On dit qu'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est *standard non-atomique* si elle est engendrée par une suite $(U_n)_{n \leq 0}$ de variables aléatoires U_n indépendantes et toutes de loi uniforme sur $[0, 1]$. On dit qu'une filtration est *standard* si elle est immersible dans une filtration standard non-atomique.

Une filtration est donc standard non-atomique si et seulement si elle est de type produit avec des innovations qui sont chacune de loi diffuse d'après le corollaire 4.3.4.

Le théorème 15.2.3 et les propriétés élémentaires du I-confort donnent les deux corollaires suivant. Le corollaire 15.3.4 est montré dans [ES] en utilisant comme étape intermédiaire le critère de standardité de Vershik (définition 19.1.1).

Corollaire 15.3.3. *Les filtrations standard non-atomiques sont exactement les filtrations standard et non-atomiques. Les filtrations standard r_n -adiques sont exactement les filtrations standard et r_n -adiques.*

Démonstration. Dans les deux cas, la preuve résulte du théorème 15.2.3. Écrivons-la pour le cas non-atomique. Si une filtration est standard non-atomique, elle est évidemment standard et non-atomique. Réciproquement, si \mathcal{F} est standard, elle est par définition immergée dans une filtration de type produit essentiellement séparable, donc elle est I-confortable par le lemme 3.1.4, la proposition 14.3.4 et le corollaire 14.3.3. On conclut alors avec le théorème 15.2.3. \square

Corollaire 15.3.4. *Soit \mathcal{F} une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Il est équivalent de dire :*

- (i) \mathcal{F} est immersible dans une filtration de type produit essentiellement séparable.
- (ii) \mathcal{F} est standard.
- (iii) \mathcal{F} est immersible dans une filtration standard.
- (iv) Si $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}}, \overline{\mathcal{F}} = (\overline{\mathcal{F}}_n)_{n \leq 0})$ est un espace de probabilité filtré standard non-atomique, le produit indépendant de \mathcal{F} et de $\overline{\mathcal{F}}$ est standard non-atomique aussi.
- (v) \mathcal{F} est essentiellement séparable et \mathcal{F} est I-confortable.

Démonstration. (ii) \Rightarrow (iii) est trivial et (iii) \Rightarrow (ii) par transitivité de l'immersibilité.

(ii) \Rightarrow (i). C'est une trivialité.

(i) \Rightarrow (v). Une filtration de type produit est I-confortable par la proposition 14.3.4, et on conclut avec le corollaire 14.3.3.

(v) \Rightarrow (iv). Puisque $\overline{\mathcal{F}}$ est standard non-atomique, elle est I-confortable par la proposition 14.3.4. Son produit indépendant avec \mathcal{F} est encore I-confortable par la proposition 14.3.6. Mais ce produit est conditionnellement non-atomique (lemme 15.3.1); en conséquence, par le théorème 15.2.4, il est standard non-atomique.

(iv) \Rightarrow (ii). Une filtration est immersible dans son produit indépendant avec une autre filtration d'après le lemme 8.2.4. \square

15.4 Cas des filtrations conditionnellement séparables.

Le corollaire suivant se démontre comme le corollaire 15.3.4 mais en utilisant le théorème 15.2.3 au lieu du théorème 15.2.4. Nous verrons dans la section 15.5 qu'une filtration immersible dans une filtration conditionnellement séparable est elle-même conditionnellement séparable. C'est pourquoi nous avons mis l'hypothèse de séparabilité conditionnelle entre parenthèses dans l'énoncé du corollaire.

Corollaire 15.4.1. *Soit \mathcal{F} une filtration (conditionnellement séparable). Il est équivalent de dire :*

- (i) \mathcal{F} est immersible dans une filtration conditionnellement séparable qui satisfait le critère de Vershik de premier niveau.
- (ii) \mathcal{F} est immersible dans une filtration conditionnellement non-atomique qui satisfait le critère de Vershik de premier niveau.
- (iii) \mathcal{F} est immersible dans une filtration immersible dans une filtration conditionnellement non-atomique qui satisfait le critère de Vershik de premier niveau.
- (iv) Si $\overline{\mathcal{F}} = (\overline{\mathcal{F}}_n)_{n \leq 0}$ est une filtration conditionnellement non-atomique qui satisfait le critère de Vershik de premier niveau, alors le produit indépendant de \mathcal{F} et de $\overline{\mathcal{F}}$ est aussi une filtration conditionnellement non-atomique qui satisfait le critère de Vershik de premier niveau.

(v) \mathcal{F} est I-confortable.

Démonstration. (ii) \Rightarrow (iii) est trivial et (iii) \Rightarrow (ii) par transitivité de l'immersibilité.

(ii) \Rightarrow (i) est une trivialité.

(i) \Rightarrow (v). Une filtration conditionnellement séparable qui satisfait le critère de Vershik de premier niveau est I-joignable en arbre par le corollaire 10.2.9, et donc I-confortable

(v) \Rightarrow (iv). Une filtration conditionnellement non-atomique qui satisfait le critère de Vershik de premier niveau est I-confortable. Son produit indépendant avec \mathcal{F} est encore I-confortable par la proposition 14.3.6. Ce produit est conditionnellement non-atomique par le lemme 15.3.1; en conséquence, par le théorème 15.2.3, il satisfait le critère de Vershik de premier niveau.

(iv) \Rightarrow (ii). Une filtration est immergée dans son produit indépendant avec une autre filtration d'après le lemme 8.2.4. \square

15.5 À propos de la séparabilité conditionnelle.

Nous allons maintenant justifier qu'une filtration immergée (ou immersible) dans une filtration conditionnellement séparable est elle-même conditionnellement séparable.

Lemme et définition 15.5.1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ une σ -algèbre. Soient (S, \mathcal{S}) un espace mesurable et (μ_ω) un noyau de probabilités de (Ω, \mathcal{C}) vers \mathcal{S} , ou un élément aléatoire mesurable pour \mathcal{C} à valeurs dans $\mathfrak{P}(S)$. On note $\mathbb{P} \otimes \mu$ la probabilité sur $(\Omega \times S, \mathcal{C} \otimes \mathcal{S})$ définie dans le lemme 8.1.14.

On définit un noyau $\beta(\mu)$ de (Ω, \mathcal{C}) vers $(\Omega \times S, \mathcal{C} \otimes \mathcal{S})$ par

$$\beta(\mu)[C \times D] = \mathbb{1}_C \mu(D) \quad \text{lorsque } C \in \mathcal{C} \text{ et } D \in \mathcal{S},$$

qui se prolonge à $\mathcal{C} \otimes \mathcal{S}$ de manière unique. Elle est définie pour tout événement $\hat{B} \in \mathcal{C} \otimes \mathcal{S}$ par

$$\beta(\mu)_\omega[\hat{B}] = \mu_\omega(\hat{B}_\omega)$$

où $\hat{B}_\omega = \{v \mid (\omega, v) \in \hat{B}\}$ est la section de \hat{B} au-dessus de ω .

Si $(\Omega \times S, \mathcal{C} \otimes \mathcal{S})$ est muni de la probabilité $\hat{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \otimes \mu$, alors $\beta(\mu)$ est une version régulière de la probabilité conditionnelle de $\hat{\mathbb{B}} := \mathcal{C} \otimes_\mu \mathcal{S}$ sachant $\hat{\mathcal{C}} : \text{pour tout événement } \hat{B} \in \mathcal{C} \otimes_\mu \mathcal{S}, \text{ on a } \hat{\mathbb{P}}[\hat{B} \mid \hat{\mathcal{C}}] = \beta(\mu)[B].$

Notation 15.5.2. Rappelons les notations de la proposition 8.1.8. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$ des espaces de probabilité. Soient \mathcal{F}_0 et \mathcal{C}_1 deux sous- σ -algèbres de \mathcal{A} , $\Psi_0: (\Omega, \mathcal{F}_0, \mathbb{P}) \longrightarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$ et $\Psi_1: (\Omega, \mathcal{C}_1, \mathbb{P}) \longrightarrow (\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathbb{P}})$ des plongements. On pose $\tilde{\mathcal{F}}_0 = \Psi_0(\mathcal{F}_0)$ et $\tilde{\mathcal{C}}_1 = \Psi_1(\mathcal{C}_1)$, puis on pose $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_0 \vee \mathcal{C}_1$ et $\tilde{\mathcal{F}}_1 = \tilde{\mathcal{F}}_0 \vee \tilde{\mathcal{C}}_1$. Si pour toute variable aléatoire $C_1 \in L^1(\Omega, \mathcal{C}_1, \mathbb{P})$, on a

$$\Psi_0\left(\mathcal{L}[C_1 \mid \mathcal{F}_0]\right) = \tilde{\mathcal{L}}[\Psi_1(C_1) \mid \tilde{\mathcal{F}}_0],$$

on résume ceci en notant

$$\tilde{\mathbb{P}}[\tilde{\mathcal{C}}_1 \mid \tilde{\mathcal{F}}_0] = \Psi_0 \circ \mathbb{P}[\mathcal{C}_1 \mid \mathcal{F}_0] \circ \Psi_1^{-1}.$$

Définition 15.5.3. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et \mathcal{C}, \mathcal{B} des sous- σ -algèbres de \mathcal{A} telles que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. On note $\mathbb{P} \otimes \mu$ la probabilité sur $(\Omega \times S, \mathcal{C} \otimes \mathcal{S})$ définie dans le lemme 8.1.14. On dit que la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}[\mathcal{B} \mid \mathcal{C}]$ se plonge dans un noyau vers (S, \mathcal{S}) s'il existe

un noyau de probabilités $\mu: (\Omega, \mathcal{C}) \rightarrow \mathfrak{P}(S)$ et un plongement $\Phi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \otimes_{\mu} \mathcal{S}$ qui envoie \mathcal{C} sur $\hat{\mathcal{C}} := \mathcal{C} \otimes_{\mu} \{\emptyset, S\}$ et tel que

$$\mathbb{P}[\mathcal{B} | \mathcal{C}] = \underbrace{\Phi^{-1}}_{\text{“Id}_e\text{”}} \circ \beta(\mu) \circ \Phi$$

où le noyau $\beta(\mu)$ est défini dans le lemme 15.5.1.

Lemme 15.5.4. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, \mathcal{C} et \mathcal{B} des sous- σ -algèbres de \mathcal{A} telles que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ et V une variable aléatoire. Si X est une variable aléatoire mesurable pour $\mathcal{C} \vee \sigma(V)$, alors la variable aléatoire $\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]$ est mesurable pour $\mathcal{C} \vee \sigma(\mathcal{L}[V | \mathcal{B}])$.*

Démonstration. Posons $\mu = \mathcal{L}[V | \mathcal{B}]$. Si $X = \mathbb{1}_C \mathbb{1}_{\{V \in A\}}$ où $C \in \mathcal{C}$ et $A \in \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, alors $\mathbb{E}[X | \mathcal{B}] = \mathbb{1}_C \mu[A]$ est mesurable pour $\mathcal{C} \vee \sigma(\mathcal{L}[V | \mathcal{B}])$, et le cas général s'en déduit par approximation. \square

Le lemme suivant qui résulte du précédent sera utilisé plusieurs fois par la suite.

Lemme 15.5.5. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ une σ -algèbre et V une variable aléatoire. Soit \mathcal{B} une sous- σ -algèbre de \mathcal{A} telle que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{C} \vee \sigma(V)$. Alors \mathcal{B} est séparable conditionnellement à \mathcal{C} , et $\mathcal{L}[V | \mathcal{B}]$ est une novation (définition 2.1.2) de \mathcal{C} dans \mathcal{B} .*

Démonstration. Montrons que $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \vee \sigma(\mathcal{L}[V | \mathcal{B}])$. Soit $X \in L^0(\mathcal{B})$. On a alors $X = \mathbb{E}[X | \mathcal{B}]$ qui est mesurable pour $\mathcal{C} \vee \sigma(\mathcal{L}[V | \mathcal{B}])$ d'après le lemme 15.5.4. \square

Proposition 15.5.6. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, \mathcal{C} et \mathcal{B} des sous- σ -algèbres de \mathcal{A} telles que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Alors la σ -algèbre \mathcal{B} est conditionnellement séparable par rapport à \mathcal{C} si et seulement si la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}[\mathcal{B} | \mathcal{C}]$ se plonge dans un noyau μ vers $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$.*

Démonstration. Si \mathcal{B} est conditionnellement séparable par rapport à \mathcal{C} , c'est la proposition 8.1.16 en prenant pour V une novation de \mathcal{C} dans \mathcal{B} à valeurs réelles. Réciproquement si $\mathbb{P}[\mathcal{B} | \mathcal{C}]$ se plonge presque sûrement dans un noyau μ sur \mathbb{R} , alors sur l'espace $(\Omega, \mathcal{C}, \mathbb{P}) \otimes_{\mu} (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ défini dans le lemme 8.1.14, la variable aléatoire $(\omega, t) \mapsto t$ est une novation de $\hat{\mathcal{C}} := \mathcal{C} \otimes \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ dans $\mathcal{C} \otimes_{\mu} \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. En notant $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}} = \{\emptyset, \Omega\} \otimes \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, on a $\mathcal{C} \otimes_{\mu} \mathfrak{B}_{\mathbb{R}} = \hat{\mathcal{C}} \vee \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. Comme $\hat{\mathcal{C}} \subset \mathcal{B} \subset \hat{\mathcal{C}} \vee \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, on conclut alors avec le lemme 15.5.5 et par isomorphisme. \square

Lemme 15.5.7. *Avec les notations de la définition 15.5.3, si $\mathbb{P}[\mathcal{B} | \mathcal{C}]$ se plonge dans μ et si $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}$ est une σ -algèbre telle que $\mathbb{P}[\mathcal{B} | \mathcal{C}] = \mathbb{P}[\mathcal{B} | \mathcal{D}]$, alors μ est mesurable pour \mathcal{D} et $\mathbb{P}[\mathcal{B} | \mathcal{D}]$ se plonge dans μ .*

Démonstration. La preuve est immédiate à partir de la définition. \square

La proposition à laquelle nous voulons aboutir est la suivante ; elle généralise le lemme 2.1.3.

Proposition 15.5.8. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ une filtration à un pas immergée dans une filtration à un pas $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$ (c'est-à-dire que \mathcal{F}_1 est indépendante de \mathcal{G}_0 conditionnellement à \mathcal{F}_0). Si \mathcal{G}_1 est séparable conditionnellement à \mathcal{G}_0 , alors \mathcal{F}_1 est séparable conditionnellement à \mathcal{F}_0 .*

Démonstration. Comme \mathcal{G}_1 est séparable conditionnellement à \mathcal{G}_0 , la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}[\mathcal{G}_1 | \mathcal{G}_0]$ se plonge dans un noyau μ sur un espace métrique séparable. Puisque $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{G}_1$, il est clair que $\mathbb{P}[\mathcal{F}_1 | \mathcal{G}_0]$ se plonge aussi dans μ . Or l'indépendance conditionnelle entraîne que $\mathbb{P}[\mathcal{F}_1 | \mathcal{G}_0] = \mathbb{P}[\mathcal{F}_1 | \mathcal{F}_0]$, donc $\mathbb{P}[\mathcal{F}_1 | \mathcal{F}_0]$ se plonge aussi dans μ par le lemme 15.5.7, et on conclut avec la proposition 15.5.6. \square

On déduit immédiatement de cette proposition :

Corollaire 15.5.9. *Une filtration à temps discret négatif immergée dans une filtration conditionnellement séparable est conditionnellement séparable.*

16. PARAMÉTRISATIONS I.

Dans ce chapitre nous introduisons d'abord la notion de *paramétrisation* d'une filtration. Une filtration qui admet une *paramétrisation génératrice* est standard : la définition donne une filtration standard non-atomique dans laquelle elle est immersible. Nous présenterons alors dans la section 16.2 des méthodes pour construire une paramétrisation génératrice de la filtration d'une chaîne de Markov. Rosenblatt utilisait souvent ces méthodes dans ses travaux sur le codage stationnaire. Beaucoup de ses résultats sont généralisés par un théorème de Hanson dont nous donnerons l'énoncé et dirons un mot sur la preuve qui fera une belle illustration. Ces méthodes sont aussi utilisées dans la littérature concernant l'étude de la stabilité des systèmes dynamiques aléatoires rétrogrades, la perte de mémoire de chaînes de Markov, ou aussi l'échantillonnage parfait de Propp et Wilson ([Kif], [Mat], [FG], [AS]). Les mathématiques que nous utiliserons pour montrer que la filtration d'une chaîne de Markov est standard si elle satisfait la *condition de Doeblin*, sont classiques dans cette littérature. Nous verrons comment utiliser tel résultat de cette littérature pour en déduire rapidement que telle filtration est standard. Dans la section 16.3, nous donnerons des applications des paramétrisations au critère de I-confort pour la filtration d'une chaîne de Markov, qui elles aussi fournissent des exemples.

16.1 Généralités sur les paramétrisations.

16.1.1 Définition.

Définition 16.1.1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité avec une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$. Une suite (\dots, U_{-1}, U_0) de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$ est dite une *paramétrisation (globale) de \mathcal{F}* , ou *paramétrisation de \mathcal{F} sur $]-\infty, 0]$* si U_n est indépendante de \mathcal{F}_{n-1} et qu'on a $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n-1} \vee \sigma(U_n)$ pour tout $n \leq 0$. On dit que la paramétrisation est *génératrice* si de plus $\mathcal{F}_n \subset \sigma(\dots, U_{n-1}, U_n)$ pour tout $n \leq 0$. On dit que \mathcal{F} *admet une paramétrisation globale, resp. génératrice*, s'il existe sur un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ une filtration \mathcal{F}' isomorphe à \mathcal{F} et une paramétrisation globale, resp. génératrice de \mathcal{F}' .

Notons immédiatement :

Lemme 16.1.2. *Une filtration à temps discret négatif qui admet une paramétrisation génératrice est standard.*

Démonstration. Dans ce cas, le lemme 8.2.8 montre que la filtration est immergée dans la filtration standard non-atomique engendrée par la paramétrisation génératrice. \square

Il est affirmé par erreur dans la littérature que la réciproque de ce lemme est triviale. Une discussion à ce sujet se trouve dans [Sch2]. Comme l'affirment les auteurs de [FS00], ce résultat est cependant vrai, et peut, par le biais du critère de standardité de Vershik, s'obtenir

à partir de leurs résultats et d'autres de la littérature, suivant la démarche qu'ils indiquent dans [FS02]. Nous reviendrons sur cette discussion dans le chapitre suivant.

16.1.2 Paramétrisations et séparabilité conditionnelle.

Définition 16.1.3. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, \mathcal{C} et \mathcal{B} des sous- σ -algèbres de \mathcal{A} telles que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0, 1]$ et indépendante de \mathcal{C} telle que $\mathcal{B} \subset \mathcal{C} \dot{\vee} \sigma(U)$ est appelée un *pas de paramétrisation de \mathcal{C} dans \mathcal{B}* . On dit que le couple de σ -algèbres $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ *admet un pas de paramétrisation* s'il existe un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, un plongement $\Psi: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}'$, et un pas de paramétrisation U' de $\Psi(\mathcal{C})$ dans $\Psi(\mathcal{B})$.

Lemme 16.1.4. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, \mathcal{C} et \mathcal{B} des sous- σ -algèbres de \mathcal{A} telles que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$. Alors \mathcal{B} est séparable conditionnellement à \mathcal{C} si et seulement si $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ admet un pas de paramétrisation.

Démonstration. Si $(\mathcal{C}, \mathcal{B})$ admet un pas de paramétrisation, le lemme 15.5.5 montre qu'il existe une novation de \mathcal{C} dans \mathcal{B} (via isomorphisme). Réciproquement, supposons que \mathcal{B} est séparable conditionnellement à \mathcal{C} , notons V une novation de \mathcal{C} dans \mathcal{B} , et notons $G_{\mathcal{C}} l'inverse continue à droite de la fonction de répartition de $\mathcal{L}[V | \mathcal{C}]$. On sait par le lemme 4.3.1 que $G_{\mathcal{C}(\omega)}(u)$ est une fonction mesurable de (ω, u) . Notons $(\Omega^*, \mathcal{A}^*, \mathbb{P}^*)$ un espace probabilisé sur lequel on a une variable aléatoire U^* de loi uniforme sur $[0, 1]$. On définit alors une variable aléatoire V' sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}}) := (\Omega, \mathcal{C}, \mathbb{P}) \otimes (\Omega^*, \sigma(U^*), \mathbb{P}^*)$ par $V' = G_{\mathcal{C}}(U^*)$, et on a $\mathcal{L}[V' | \mathcal{C}] = \mathcal{L}[V | \mathcal{C}]$ par le lemme 4.3.1, où cette dernière égalité est considérée sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ après identifications. Alors par le corollaire 8.1.10, $\mathcal{C} \vee \sigma(V)$ est isomorphe à $\mathcal{C} \vee \sigma(V') \subset \mathcal{C} \dot{\vee} \sigma(U^*)$, avec un isomorphisme Ψ qui préserve \mathcal{C} et tel que $\Psi(V) = V'$. $\square$$

Définition 16.1.5. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité avec une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$. On se donne deux entiers m_0 et n_0 tels que $m_0 < n_0 < 0$. Une suite $(U_{m_0+1}, \dots, U_{n_0})$ de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$ est dite une *paramétrisation (locale) de \mathcal{F} sur $\llbracket m_0, n_0 \rrbracket$* si U_n est un pas de paramétrisation de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n pour tout $n \in \llbracket m_0, n_0 \rrbracket$, en d'autres termes, U_n est indépendante de \mathcal{F}_{n-1} et qu'on a $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n-1} \dot{\vee} \sigma(U_n)$ pour tout $n \in \llbracket m_0, n_0 \rrbracket$. On dit que \mathcal{F} *admet une paramétrisation sur $\llbracket m_0, n_0 \rrbracket$* s'il existe sur un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ une filtration \mathcal{F}' isomorphe à \mathcal{F} et une paramétrisation de \mathcal{F}' sur $\llbracket m_0, n_0 \rrbracket$.

En réitérant le lemme 16.1.4, on obtient :

Corollaire 16.1.6. Une filtration admet une paramétrisation locale sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ si et seulement si elle est conditionnellement séparable sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$.

Nous verrons plus tard le cas $n_0 = -\infty$.

16.1.3 Grossissement paramétrique.

Lemme 16.1.7. Soit $n_0 \leq 0$ un entier ou $n_0 = -\infty$. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration et (U_{n_0+1}, \dots, U_0) une paramétrisation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. On pose $\mathcal{U}_n = \sigma(U_{n_0+1}, \dots, U_n)$ pour tout $n \leq 0$ (par convention $\mathcal{U}_n = \{\emptyset, \Omega\}$ si $n \leq n_0$). Alors les filtrations \mathcal{F} et \mathcal{U} sont immergées dans la filtration $\mathcal{F} \vee \mathcal{U}$. Par conséquent, pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, la variable aléatoire U_n est indépendante de $\mathcal{F}_{n-1} \vee \sigma(U_{n_0+1}, \dots, U_{n-1})$.

Démonstration. Cela se déduit aisément du lemme 8.2.8. \square

Il sera commode par la suite de dénommer cette filtration $\mathcal{F} \vee \mathcal{U}$:

Définition 16.1.8. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration

- Soit (U_{n_0+1}, \dots, U_0) une paramétrisation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. La filtration $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ définie par

$$\mathcal{G}_n = \begin{cases} \mathcal{F}_n & \text{si } n \leq n_0 \\ \mathcal{F}_{n_0} \dot{\vee} \sigma(U_{n_0+1}, \dots, U_n) & \text{si } n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket, \end{cases}$$

est appelée le *grossissement paramétrique (local)* de \mathcal{F} avec (U_{n_0+1}, \dots, U_0) .

- Soit $(U_n)_{n \leq 0}$ une paramétrisation globale de \mathcal{F} . La filtration $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ définie par

$$\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_n \vee \sigma(\dots, U_{n-1}, U_n)$$

pour tout $n \leq 0$, est appelée le *grossissement paramétrique (global)* de \mathcal{F} avec $(U_n)_{n \leq 0}$.

Ainsi si \mathcal{G} est un grossissement paramétrique local ou global de \mathcal{F} , alors \mathcal{F} est immergée dans \mathcal{G} d'après le lemme 16.1.7.

16.1.4 Paramétrisations des chaînes de Markov.

Définition 16.1.9. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $(X_n)_{n \leq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace métrique standard. On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ sa filtration.

- On se donne deux entiers m_0 et n_0 tels que $m_0 < n_0 < 0$. Une suite $(U_{m_0+1}, \dots, U_{n_0})$ de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$ est dite une *paramétrisation (locale)* de $(X_n)_{n \leq 0}$ sur $\llbracket m_0, n_0 \rrbracket$ si pour tout $n \in \llbracket m_0, n_0 \rrbracket$, U_n est indépendante de \mathcal{F}_{n-1} et qu'on a $\sigma(X_n) \subset \sigma(X_{n-1}) \dot{\vee} \sigma(U_n)$ pour tout $n \in \llbracket m_0, n_0 \rrbracket$. On dit que $(X_n)_{n \leq 0}$ *admet une paramétrisation sur $\llbracket m_0, n_0 \rrbracket$* s'il existe sur un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ une filtration \mathcal{F}' isomorphe à \mathcal{F} et une paramétrisation de \mathcal{F}' sur $\llbracket m_0, n_0 \rrbracket$.
- Un *pas de paramétrisation* de $(X_n)_{n \leq 0}$ de niveau n est une paramétrisation U_n de $(X_n)_{n \leq 0}$ sur $\llbracket n-1, n \rrbracket$.
- Une suite (\dots, U_{-1}, U_0) de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$ est dite une *paramétrisation (globale)* de $(X_n)_{n \leq 0}$, ou *paramétrisation de $(X_n)_{n \leq 0}$ sur $\llbracket -\infty, 0 \rrbracket$* si U_n est indépendante de \mathcal{F}_{n-1} et qu'on a $\sigma(X_n) \subset \sigma(X_{n-1}) \dot{\vee} \sigma(U_n)$ pour tout $n \leq 0$. On dit que la paramétrisation est *génératrice* si de plus $\mathcal{F}_n \subset \sigma(\dots, U_{n-1}, U_n)$ pour tout $n \leq 0$. On dit que $(X_n)_{n \leq 0}$ *admet une paramétrisation globale, resp. génératrice*, s'il existe sur un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ une copie $(X'_n)_{n \leq 0}$ de $(X_n)_{n \leq 0}$ et une paramétrisation globale, resp. génératrice, de $(X'_n)_{n \leq 0}$.

Bien sûr une paramétrisation d'une chaîne de Markov est aussi une paramétrisation de sa filtration. Comme on le voit, une paramétrisation globale $(U_n)_{n \leq 0}$ d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n \leq 0}$ donne une chaîne de Markov constructive $(X_n, U_n)_{n \leq 0}$ (définition 3.6.2)

Proposition 16.1.10. *Pour tout entier $n \leq 0$, soit E_n un espace métrique standard. On se donne une chaîne de Markov $(X_n)_{n \leq 0}$ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors il existe sur un espace probabilisé $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$ une chaîne de Markov constructive $((X'_n, U'_n), f_n; E_n)_{n \leq 0}$ dont la chaîne d'entrée $(X'_n)_{n \leq 0}$ est une copie de $(X_n)_{n \leq 0}$ et telle que $(U'_n)_{n \leq 0}$ est une suite de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Si de plus $(X_n)_{n \leq 0}$ est une chaîne de Markov homogène homogène, il existe une telle chaîne de Markov constructive homogène.*

Par conséquent toute chaîne de Markov à valeurs dans des espaces métriques standard admet une paramétrisation globale.

Démonstration. Notons E le produit des E_n et $h: E \rightarrow \mathbb{R}$ une injection bimesurable, et posons $\hat{X}_n = h(X_n)$. Soit $G_x^{(n)}$ l'inverse continue à droite de la fonction de répartition de $\mathcal{L}[\hat{X}_n | X_{n-1} = x]$. On sait par le lemme 4.3.1 que $G_x^{(n)}(u)$ est une fonction mesurable de (x, u) . On considère l'espace produit $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}}) = (\Omega, \sigma(X_n), \mathbb{P}) \otimes (\Omega^*, \sigma(U_{n+1}^*), \mathbb{P}^*)$ et on identifie $(\Omega, \sigma(X_n), \mathbb{P})$ au premier facteur. On définit alors une variable aléatoire \hat{X}'_n sur $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$ par $\hat{X}'_n = G_{X_{n-1}}^{(n)}(U^*)$, et on a $\bar{\mathcal{L}}[\hat{X}'_n | X_{n-1}] = \bar{\mathcal{L}}[\hat{X}_n | X_{n-1}]$ par le lemme 4.3.1. Posons $X'_n = h^{-1}(\hat{X}'_n)$. Alors $\bar{\mathcal{L}}[X'_n | X_{n-1}] = \bar{\mathcal{L}}[X_n | X_{n-1}]$. On a alors $X'_n = f_n(X_{n-1}, U^*)$ avec $f_n(x, u) = G_x^{(n)}(u)$, et $f_n \equiv f$ dans le cas où la chaîne est homogène. Notons ϑ_n la loi du couple (X'_n, U^*) . Si Leb désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, on peut donc affirmer par le théorème de Kolmogorov l'existence d'une chaîne de Markov $(X''_n, U''_n)_{n \leq 0}$ sur un espace probabilisé $(\Omega'', \mathcal{A}'', \mathbb{P}'')$ définie par les deux conditions suivantes :

- ◇ pour tout $n \leq 0$, la loi du couple (X''_n, U''_n) est ϑ_n ;
- ◇ la transition de n à $n+1$ consiste à prendre U''_{n+1} indépendante de la tribu du passé du processus $\sigma(X''_m, U''_m, m \leq n)$ et à poser $X''_{n+1} = f_{n+1}(X''_n, U''_{n+1})$.

□

Nous verrons dans le chapitre suivant que toute filtration conditionnellement séparable admet une paramétrisation globale.

16.2 Conditions de Doeblin et paramétrisation génératrice.

Dans cette section, nous allons définir une condition suffisante sur une chaîne de Markov, appelée *condition de Doeblin*, sous laquelle nous allons construire une paramétrisation génératrice de cette chaîne de Markov, en utilisant les résultats sur le critère de Doeblin vus dans le chapitre 9.

16.2.1 Préliminaires : familles de mesures.

Théorème 16.2.1. *Soit \mathbb{I} un ensemble d'indices quelconque. Toute collection de mesures ν_i , $i \in \mathbb{I}$, sur un espace mesuré (X, \mathcal{T}) admet une unique borne inférieure si elle est minorée, notée $\bigwedge_{i \in \mathbb{I}} \nu_i$, et une unique borne supérieure si elle est majorée, notée $\bigvee_{i \in \mathbb{I}} \nu_i$.*

Démonstration. Pour une preuve, voir [Th], **Theorem 7.1.** p. 104, et voir [Do2], APPENDIX III & IV pour plus de détails. □

La mesure $\bigwedge_{i \in \mathbb{I}} \nu_i$ est caractérisée par le fait que $\bigwedge_{i \in \mathbb{I}} \nu_i \leq \nu_i$ pour tout i et que pour toute mesure ν qui vérifie $\nu \leq \nu_i$ pour tout i , on a $\nu \leq \bigwedge_{i \in \mathbb{I}} \nu_i$.

Corollaire et définition 16.2.2. *Soient (S, \mathcal{S}, μ) un espace mesuré et $\{\nu_s\}_{s \in S}$, une collection de mesures. Alors il existe une unique borne inférieure essentielle des ν_s , $s \in S$, notée $\text{ess inf}_{s \in S} \nu_s$, caractérisée par le fait que $\text{ess inf}_{s \in S} \nu_s \leq \nu_s$ pour μ -presque tout $s \in S$, et telle que toute mesure ν qui satisfait aussi cela vérifie $\nu \leq \text{ess inf}_{s \in S} \nu_s$.*

Démonstration. Il suffit de poser

$$\text{ess inf}_{s \in S} \nu_s = \bigvee_{A \in \mathcal{N}(\mu)} \bigwedge_{s \in S \setminus A} \nu_s$$

où $\mathcal{N}(\mu)$ désigne l'ensemble des parties de S qui sont μ -négligeables. □

Définition 16.2.3. Soient (S, \mathcal{S}, μ) un espace mesuré, (T, \mathcal{T}) un espace mesurable et $\beta = (\beta_s)_{s \in S}$ un noyau de désintégration de S dans T . On appelle le *coefficient d'ergodicité* $m(\beta)$ de β la masse totale de la borne inférieure essentielle de la collection de mesures β_s , $s \in S$:

$$m(\beta) = \left(\text{ess inf}_{s \in S} \beta_s \right) (T).$$

Ainsi $m(\beta) = 0$ si et seulement si la mesure $\text{ess inf}_{s \in S} \beta_s$ est nulle.

Lorsque E est un ensemble dénombrable, un noyau de désintégration $(\beta_e)_{e \in E}$ de E dans E s'identifie à une matrice de transition sur E . Dans ce cas, pour $B \subset E$,

$$\left(\bigwedge_{e \in E} \beta_e \right) (B) = \sum_{x \in B} \inf_{a \in E} \beta_a(x),$$

et notre définition du coefficient d'ergodicité coïncide avec celle donnée pour une matrice de transition par P.A. Ferrai et A. Galves dans [FG].

Le lemme suivant nous permettra d'utiliser les résultats du chapitre 9.

Lemme 16.2.4. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et X_0, X_1 des variables aléatoires dans des espaces métriques standard E_0 et E_1 respectivement. On note $\beta = (\beta_x)_{x \in E_0}$ une décomposition régulière de la loi de X_1 conditionnellement aux valeurs de X_0 . On suppose que $m(\beta) > 0$. Soient $(\Omega^*, \mathcal{A}^*, \mathbb{P}^*)$ un espace probabilisé et U^* une variable aléatoire définie sur celui-ci, de loi uniforme sur $[0, 1]$. Alors il existe une variable aléatoire X'_1 sur le produit indépendant $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \otimes (\Omega^*, \mathcal{A}^*, \mathbb{P}^*)$ telle que $\overline{\mathcal{L}}[X'_1 | X_0] = \overline{\mathcal{L}}[X'_1 | \mathcal{A}] = \overline{\mathcal{L}}[X_1 | X_0]$, et une application mesurable $g: E_0 \times [0, 1] \rightarrow E_1$ telle que $X'_1 = g(X_0, U^*)$ et $g(x, u)$ ne dépend pas de x lorsque $0 \leq u \leq m(\beta)$.

Démonstration. Notons $\beta^{\min} = \text{ess inf}_{x \in E_0} \beta_x$ et Leb la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. L'application

$$\begin{aligned} c: [0, m(\beta)[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \inf \{ t \in \mathbb{R} \mid \beta^{\min}([-\infty, t]) \geq u \} \end{aligned}$$

est telle que $c(\text{Leb}|_{[0, m(\beta)[}) = \beta^{\min}$. Puis on pose

$$\begin{cases} g(x, u) = c(u) & \text{pour } u < m(\beta) \\ g(x, u) = \inf \left\{ t \in \mathbb{R} \mid (\beta_x - \beta^{\min})([-\infty, t]) \geq u \right\} & \text{pour } u \in [m(\beta), 1[\end{cases}$$

ainsi

$$g(x, \text{Leb}|_{[m(\beta), 1[}) = \beta_x - \beta^{\min} \quad \text{et} \quad g(x, \text{Leb}) = \beta_x.$$

□

Remarque 16.2.5. Avec les notations de la preuve précédente, supposons que l'on ait sur $(\Omega^*, \mathcal{A}^*, \mathbb{P}^*)$ un triplet (U^*, U', U'') de variables aléatoires de marges indépendantes et uniformes sur $[0, 1]$, plutôt que seulement U^* . Posons $T'_1 = c\left(\frac{U'}{m(\beta)}\right)$ et $T''_1 = g\left(X_0, 1 - \frac{U''}{1 - m(\beta)}\right)$. Alors $X'_1 = T'_1 \mathbb{1}_{\{0 \leq U^* \leq m(\beta)\}} + T''_1 \mathbb{1}_{\{m(\beta) < U^* \leq 1\}}$ ne dépend pas de X_0 sur $\{0 \leq U^* \leq m(\beta)\}$ et les variables aléatoires T'_1 et T''_1 sont indépendantes. C'est une construction que l'on trouve dans la littérature ([Th], [AS]).

16.2.2 Conditions de Doeblin

Définition 16.2.6. Soit $(X_n)_{n \leq 0}$ une chaîne de Markov où X_n est à valeurs dans un espace métrique standard E_n . On note $(P_{n+1}(x, \cdot))_{x \in \mathbb{R}}$ une version régulière de la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant X_n et m_n le coefficient d'ergodicité de P_n . On dit que $(X_n)_{n \leq 0}$ satisfait la condition de Doeblin si $\sum_{n \leq 0} m_n = +\infty$.

Le théorème suivant est démontré dans [Ts0]. Il était déjà connu dans le cas stationnaire par Rosenblatt. C'est une conséquence de 9.3.1 et du lemme 16.2.4.

Théorème 16.2.7. Si une chaîne de Markov $(X_n)_{n \leq 0}$ où X_n est à valeurs dans un espace métrique standard E_n satisfait la condition de Doeblin, alors il existe une version paramétrisée $((X'_n, U'_n), g_n; E_n)_{n \leq 0}$ telle que la filtration de $(X'_n)_{n \leq 0}$ satisfait le critère de Doeblin fort avec $(U'_n)_{n \leq 0}$. En particulier, $(U'_n)_{n \leq 0}$ est une paramétrisation génératrice de $(X'_n)_{n \leq 0}$ et la filtration de $(X_n)_{n \leq 0}$ est standard.

Démonstration. Pour tout $n \leq 0$, notons g_n la fonction g donnée par le lemme 16.2.4 appliqué avec $X_0 = X_n$, $X_1 = X_{n+1}$ et $m(\beta) = m_n$. Considérons une chaîne de Markov constructive $((X'_n, U'_n), g_n; E_n)_{n \leq 0}$ que nous donne le théorème de Kolmogorov dont la chaîne d'entrée $(X'_n)_{n \leq 0}$ est une copie de $(X_n)_{n \leq 0}$. Alors la proposition 9.3.1 s'applique avec $s_n = n$, et montre que X'_0 satisfait le critère de Doeblin fort avec $(U'_n)_{n \leq 0}$. Il en est de même de chaque X'_t puisque la condition de Doeblin sur une chaîne de Markov $(X_n)_{n \leq 0}$ est réalisée si et seulement si elle l'est sur la chaîne de Markov $(X_{n+t})_{n \leq 0}$. Par conséquent la filtration de $(X'_n)_{n \leq 0}$ satisfait le critère de Doeblin fort avec $(U'_n)_{n \leq 0}$. Ainsi la filtration de $(X'_n, U'_n)_{n \leq 0}$ est engendrée par $(U'_n)_{n \leq 0}$, ce qui montre que $(U'_n)_{n \leq 0}$ est une paramétrisation génératrice de $(X'_n)_{n \leq 0}$, donc de la filtration de $(X'_n)_{n \leq 0}$, et la filtration de $(X_n)_{n \leq 0}$ est alors standard par le lemme 16.1.2. \square

L'exemple de Vinokurov. — Le processus $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est la chaîne de Markov stationnaire d'états $\{-1, 1\}$ et de matrice de transition $\begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$. Il n'est pas difficile de voir que la condition de Doeblin est satisfaite, donc que la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ de $(M_n, n \leq 0)$ est standard. Cependant \mathcal{F} est de type produit local mais n'est pas de type produit lorsque $p \neq 1/2$ (voir page 18 ou utiliser la proposition 9.3.3.)

16.2.3 Un exemple de Hanson et Rosenblatt.

Nous présentons ici un théorème de Hanson ([Han]), aussi reproduit dans le livre [Ros], qui généralise certains des résultats précédents de Rosenblatt ([Ros1], [Ros2]). Il généralise aussi le théorème 16.2.7 dans le cas stationnaire et homogène.

On se donne un espace métrique standard E et sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, un processus $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ stationnaire et markovien à valeurs dans E . On note

$$\mu(A) = \mathbb{P}[X_n \in A], P_x(A) = \mathbb{P}[X_{n+1} \in A \mid X_n = x] \text{ et } P_x^{(n)}(A) = \mathbb{P}[X_{k+n} \in A \mid X_k = x].$$

On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ la filtration du processus $(X_n)_{n \leq 0}$. Le résultat établi dans [Han] est le suivant.

Théorème 16.2.8. On suppose que

- (i) \mathcal{F} est kolmogorovienne ;
- (ii) Il existe deux boréliens A et B et une mesure borélienne β telle que $\mu(B) > 0$, $\beta(A) > 0$, et pour tout $x \in B$ et $A' \subset A$, on a $P_x(A') > \beta(A')$ (c'est-à-dire $\text{ess inf}_{x \in B} P_x \neq 0$).

Alors $(X_n)_{n \leq 0}$ admet une version paramétrisée qui satisfait le critère de Doeblin fort avec ses innovations

En particulier, la condition (ii) a lieu lorsque μ a un atome.

La conjecture de Hanson. — Dans [Han], il était conjecturé que le théorème 16.2.8 est vrai sous la condition (i) seulement. On sait maintenant que cela est faux : l'exemple 3 de Vershik ([Ver], **Example 3** p. 744; [ES], p. 300) est un processus $(X_n)_{n \leq 0}$ stationnaire et markovien qui engendre une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ kolmogorovienne, dyadique, mais pas standard.

Preuve du théorème 16.2.8. — Une succession de lemmes dans [Han] aboutit au résultat suivant :

Sous les deux conditions du théorème 16.2.8, il existe une fonction $h: E \times [0, 1] \rightarrow E$, une suite $(C_i)_{i \geq 0}$ de réels strictement positifs et une suite $(A_i)_{i \geq 0}$ de boréliens de E telles que

$$(i) \quad h(x, \text{Leb}) = P_x \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

$$(ii) \quad 0 = C_0 < C_1 < \dots < 1.$$

$$(iii) \quad A_0 = A \text{ et } A_1 = B \text{ avec } A \text{ et } B \text{ du théorème 16.2.8.}$$

$$(iv) \quad \mu(A_0) > 0 < \mu(A_1) \leq \mu(A_2) \leq \dots \rightarrow 1.$$

$$(v) \quad C_{i-1} \leq u < C_i \text{ et } X_{n-1} \in A_i \implies h(X_{n-1}, u) \in A_{i-1}.$$

$$(vi) \quad 0 \leq u \leq C_i \text{ et } x, y \in A_1 \implies h(x, u) = h(y, u).$$

Achevons la preuve du théorème 16.2.8. Sur un espace probabilisé sur $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, on considère une version paramétrisée $((X'_n, U'_n), h)_{n \leq 0}$ de $(X_n)_{n \leq 0}$. Montrons que X_0 satisfait le critère de Doeblin fort avec $(U'_n)_{n \leq 0}$. On plonge $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ dans un espace probabilisé $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$ en sorte d'avoir une copie (X_n^*, U_n^*) de $(X'_n, U'_n)_{n \leq 0}$ indépendante de \mathcal{A}' et on pose alors

$$\begin{cases} X'_0 &= f_n(X'_n, U'_{n+1}, U'_{n+2}, \dots, U'_0) \\ X''_0 &= f_n(X_n^*, U'_{n+1}, U'_{n+2}, \dots, U'_0) \end{cases}$$

puis

$$D_n = \bar{\mathbb{P}}[X'_0 \neq X''_0] \quad \text{et} \quad S_n = \{X'_0 = X''_0\}.$$

Soient $n < 0$ et $k \in \{1, 2, \dots, |n|\}$. On a $\bar{\mathbb{P}}[X'_{n+k} = X''_{n+k}] = 1 - D_{-k}$ par stationnarité, et ceci montre que D_n est une suite qui décroît quand n décroît. On pose $p = |n| - k$. Par les propriétés de h , on a

$$S_n \supset \{X'_{n+k} = X''_{n+k}\} \cup \{X'_{n+k} \neq X''_{n+k}\} \cap \{X'_{n+k}, X''_{n+k} \in A_p\} \cap \bigcap_{j=1}^p \{C_{p-j} \leq U'_{n+k+j} < C_{p-j+1}\}. \quad (16.2.1)$$

Posons $u_p = \bar{\mathbb{P}}[X'_{n+k}, X''_{n+k} \in A_p] = \mu(A_p)^2$ et

$$\alpha_p = \mathbb{P}\left[\bigcap_{j=1}^p \{C_{p-j} \leq U'_{n+k+j} < C_{p-j+1}\}\right] = \prod_{i=1}^p (C_i - C_{i-1}).$$

On a

$$\bar{\mathbb{P}}[X'_{n+k} \neq X''_{n+k}, X'_{n+k} \in A_p, X''_{n+k} \in A_p] \geq D_{-k} - (1 - u_p) = u_p + D_{-k} - 1.$$

En passant l'inclusion (16.2.1) à \mathbb{P} , on obtient

$$1 - D_n \geq (1 - D_{-k}) + \alpha_p(u_p + D_{-k} - 1).$$

Supposons que $D_n \rightarrow \gamma > 0$ quand $n \rightarrow -\infty$. On a alors

$$1 - \gamma \geq (1 - D_{-k}) + \alpha_p(u_p + \gamma - 1).$$

pour tout $p \geq 1$ et tout $k \geq 1$. Choisissons p tel que $u_p \geq 1 - \gamma/2$. On a alors

$$1 - \gamma \geq (1 - D_{-k}) + \alpha_p \gamma/2,$$

pour tout $k \geq 1$, ce qui entraîne l'absurdité $1 - \gamma > 1 - \gamma$ en passant à la limite sur k .

16.2.4 Cas markovien homogène.

Soit $(X_n)_{n \leq 0}$ une chaîne de Markov homogène. On définit un noyau de transition $P^k = (P_x^k)_x$ par $P_x^k(A) = \mathbb{P}[X_0 \in A | X_{-k} = x]$ pour tout entier $k \geq 1$. Notons $m(\beta)$ le coefficient d'ergodicité d'un noyau de transition β . Par le même raisonnement que dans le théorème 16.2.7, nous pouvons déduire de la partie 1) de la proposition 9.3.3 et du lemme 16.2.4 que s'il existe $k \geq 1$ tel que $m(P^k) > 0$, alors $(X_n)_{n \leq 0}$ admet une version paramétrisée $(X'_n, U'_n)_{n \leq 0}$ telle que les X'_n satisfont le critère de Doeblin fort avec $(U'_n)_{n \leq 0}$, et en particulier $(U'_n)_{n \leq 0}$ est une paramétrisation génératrice de $(X_n)_{n \leq 0}$. Un résultat que nous empruntons à [AS] montre que la condition $m(P^k) > 0$ entraîne plus que cela. Afin de l'exposer ici en s'approchant du contexte de [AS], nous donnons la définition d'un *système dynamique aléatoire*, qui correspond à la transition d'une chaîne de Markov constructive homogène.

Définition 16.2.9. Soient E un espace métrique séparable et $(T_v)_{v \in \mathbb{R}}$ une famille d'applications mesurables de E dans E telles que l'application $(x, v) \mapsto T_v(x)$ est aussi mesurable. Soit μ une loi de probabilité sur \mathbb{R} . Nous dirons que le couple $((T_v)_{v \in \mathbb{R}}, \mu)$ est un *système dynamique aléatoire* sur E . Une mesure de probabilité π sur E telle que $\pi(A) = \int_A \int_{\mathbb{R}} T_v(x) d\mu(v) d\pi(x)$ est dite une mesure de probabilité *invariante* pour ce système dynamique aléatoire.

Lorsqu'il existe une mesure invariante π , on peut définir au moins une chaîne de Markov constructive $((X_n, V_n), f; E)_{n \leq 0}$ homogène en attribuant la loi π à X_n , la loi μ à V_n , et avec $f(x, u) = T_x(u)$; la chaîne est alors stationnaire.

Définition 16.2.10. Nous disons qu'un système dynamique aléatoire $((T_v)_{v \in \mathbb{R}}, \mu)$ satisfait la *condition de Doeblin* si $m(\beta) > 0$ où $\beta = (\beta_x)_{x \in \mathbb{R}}$ est le noyau de désintégration défini par $\beta_x = T_x(\mu)$ et $m(\beta) > 0$ désigne le coefficient d'ergodicité de β .

S'il existe une chaîne de Markov constructive homogène $((X_n, V_n), f; E)$ avec $f(x, u) = T_x(u)$, il revient au même de dire que la chaîne de Markov $(X_n)_{n \leq 0}$ satisfait la condition de Doeblin.

Lemme 16.2.11. Soient (E, ρ) un espace métrique séparable, et $((T_v)_{v \in \mathbb{R}}, \mu)$ un système dynamique aléatoire sur E . On se donne une suite $(V_n)_{n \leq 0}$ variables aléatoires i.i.d. de loi μ sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $H_{(u_{n+1}, \dots, u_0)}^{(n)}$ la fonction

$$H_{(u_{n+1}, \dots, u_0)}^{(n)}(x) = T_{u_0} \circ T_{u_1} \circ \dots \circ T_{u_{n+1}}(x),$$

et on pose

$$\mathbf{Z}_n(x) = H_{(V_{n+1}, \dots, V_0)}^{(n)}(x)$$

Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une variable aléatoire \hat{X}_0 (mesurable pour $\sigma(V_n, n \leq 0)$) telle que

$$\mathbb{P}[\exists x, \mathbf{Z}_n(x) \neq \hat{X}_0] \longrightarrow 0$$

(ii) $\mathbb{P}[\mathbf{Z}_n \text{ est constante}] \nearrow 1$ quand $n \rightarrow -\infty$.

(iii) Il existe un entier n_0 tel que $\mathbb{P}[\mathbf{Z}_{n_0} \text{ est constante}] > 0$.

Sous ces conditions, il existe une mesure de probabilité π invariante (la loi de la variable aléatoire \hat{X}_0 convient).

Démonstration. Voir [AS]. □

Ainsi pour une chaîne de Markov constructive homogène $((X_n, V_n), f; E)_{n \leq 0}$, la condition de la proposition 9.3.3 donne quelque chose de plus fort sur X_0 que le critère de Doeblin fort (c'est équivalent lorsque E est fini).

Proposition 16.2.12. Soient (E, ρ) un espace métrique séparable, et $((T_v^0)_{v \in \mathbb{R}}, \mu^0)$ un système dynamique aléatoire sur E . On note $P_x = T_x^0(\mu)$ ce qui donne un noyau markovien $P = (P_x)_{x \in E}$. On note $m(\beta)$ le coefficient d'ergodicité d'un noyau de probabilités β (définition 16.2.3).

Alors il existe un entier $k \geq 1$ tel que $m(P^k) > 0$ si et seulement si il existe une suite de $(V_n)_{n \leq 0}$ de v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[0, 1]$ et un système dynamique aléatoire $((T_x)_{x \in \mathbb{R}}, \text{Leb})$ tel que $T_x(\text{Leb}) = P_x$ et satisfaisant aux conditions du lemme précédent.

Démonstration. Voir [AS]. Notons que P_x^n est la loi de $\mathbf{Z}_n(x)$ du lemme précédent. □

Ainsi sous la condition de Doeblin pour une chaîne de Markov homogène $(X_n)_{n \leq 0}$, il existe une version constructive $((X'_n, U'_n), f; E)_{n \leq 0}$ telle que la variable aléatoire X'_0 satisfait quelque chose de plus fort que le critère de Doeblin Fort.

16.3 Application au I-confort des chaînes de Markov.

Dans cette section nous allons d'abord démontrer à l'aide des paramétrisations locales que la filtration d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n \leq 0}$ est I-confortable si chaque variable aléatoire X_n satisfait le critère de I-confort. Nous utiliserons ensuite ce résultat et une méthode de couplage pour donner un exemple de filtration I-confortable.

16.3.1 I-confort des chaînes de Markov.

Lemme 16.3.1. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration, $n_0 \leq 0$ un entier, $\mathcal{B}_{n_0} \subset \mathcal{F}_{n_0}$ une σ -algèbre. Alors la σ -algèbre \mathcal{B}_{n_0} satisfait le critère de I-confort dans \mathcal{F} si et seulement si elle le satisfait dans la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \leq n_0}$.

Démonstration. Immédiate. □

Lemme 16.3.2. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration avec une innovation (V_{n_0+1}, \dots, V_0) sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. Alors une σ -algèbre $\mathcal{B}_{n_0} \subset \mathcal{F}_{n_0}$ satisfait le critère de I-confort si et seulement si la σ -algèbre $\mathcal{B}_{n_0} \dot{\vee} \sigma(V_{n_0+1}, \dots, V_0)$ satisfait le critère de I-confort.

Démonstration. Soit X une variable aléatoire simple mesurable pour $\mathcal{B}_{n_0} \dot{\vee} \sigma(V_{n_0+1}, \dots, V_0)$. Elle est de la forme $X = f(X_{n_0}, V_{n_0+1}, \dots, V_0)$ où $X_{n_0} \in L^{\text{simple}}(\mathcal{B}_{n_0})$ et f est borélienne. Soit $\delta > 0$. Par le lemme 16.3.1, on a deux copies coïmmergées $(\mathcal{F}'_n)_{n \leq n_0}$ et $(\mathcal{F}''_n)_{n \leq n_0}$ de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \leq n_0}$ telles que $\mathbb{P}[X'_{n_0} \neq X''_{n_0}] < \delta$. On pose $\mathcal{F}'_n = \mathcal{F}'_{n_0} \dot{\vee} \sigma(V'_{n_0+1}, \dots, V'_n)$ et $\mathcal{F}''_n = \mathcal{F}''_{n_0} \dot{\vee} \sigma(V''_{n_0+1}, \dots, V''_n)$, et on obtient ainsi une $I(n_0)$ -coïmmersion $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} et on a alors $\mathbb{P}[X' \neq X''] < \delta$. \square

Comme application des paramétrisations locales, nous pouvons citer le corollaire suivant bien qu'il serait plus raisonnable de le démontrer en utilisant la standardité plutôt que le I-confort ; cela est fait plus généralement (n_0 est remplacé par un temps d'arrêt) dans [E] dans le cas essentiellement séparable, mais la preuve serait identique en utilisant la notion de filtration standard conditionnellement séparable.

Corollaire 16.3.3. *Soit $n_0 \leq 0$ un entier. Une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ conditionnellement séparable est I-confortable si et seulement si la filtration "tronquée" $(\mathcal{F}_n)_{n \leq n_0}$ est I-confortable.*

Démonstration. Par le corollaire 16.1.6 et l'invariance du I-confort, on peut supposer que l'on a une paramétrisation (U_{n_0+1}, \dots, U_0) de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. Notons \mathcal{G} le grossissement paramétrique de \mathcal{F} avec (U_{n_0+1}, \dots, U_0) . Si la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \leq n_0}$ est I-confortable, alors la σ -algèbre $\mathcal{F}_{n_0} = \mathcal{G}_{n_0}$ satisfait le critère de I-confort dans \mathcal{G} par le lemme 16.3.1. Le lemme 16.3.2 montre alors que la σ -algèbre \mathcal{G}_0 satisfait le critère de I-confort dans \mathcal{G} , donc que \mathcal{G} est I-confortable, donc que \mathcal{F} l'est aussi par l'immersion de \mathcal{F} dans \mathcal{G} (lemme 16.1.7 et corollaire 14.3.3). \square

Revenons aux filtrations des chaînes de Markov.

Corollaire 16.3.4. *Soit $(X_n)_{n \leq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans des espaces métriques standard. On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ sa filtration. Si la σ -algèbre $\sigma(X_{n_0})$ satisfait le critère de I-confort dans \mathcal{F} , alors la σ -algèbre $\sigma(X_{n_0+1}, \dots, X_0)$ le satisfait aussi.*

Démonstration. On procède comme dans la preuve du corollaire précédent avec le grossissement paramétrique de \mathcal{F} avec une paramétrisation de $(X_n)_{n \leq 0}$ sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. \square

Corollaire 16.3.5. *Une chaîne de Markov $(X_n)_{n \leq 0}$ à valeurs dans des espaces métriques standard engendre une filtration I-confortable si et seulement si pour tout $n \leq 0$, la variable aléatoire X_n satisfait le critère de I-confort.*

Démonstration. Notons $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ la filtration de $(X_n)_{n \leq 0}$. Puisque $\sigma(X_{n_0+1}, \dots, X_0) \uparrow \mathcal{F}_0$, la preuve résulte du corollaire précédent et du corollaire 14.2.3. \square

16.3.2 Couplage à partir d'un temps d'arrêt.

Nous donnons ici un exemple de filtrations de chaînes de Markov stationnaire dont on montre la standardité en nous aidant encore d'une version constructive, mais ici nous utilisons le critère de I-confort. Le corollaire 16.3.5 sera utilisé.

Définition 16.3.6. Soient (E, ρ) un espace métrique séparable, et $((T_v)_{v \in \mathbb{R}}, \mu)$ un système dynamique aléatoire sur E où chaque application T_v est continue. On note

$$\Lambda_v = \sup_{x, y \in E} \frac{\rho(T_v(x), T_v(y))}{\rho(x, y)} \quad \text{et} \quad \Lambda_T = \int \Lambda_v \, d\mu(v).$$

On dit que le système dynamique aléatoire $((T_v)_{v \in \mathbb{R}}, \mu)$ est *contractif en moyenne* si $\Lambda_T \leq 1$.

Nous nous proposons de démontrer la proposition suivante. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Rappelons qu'un *temps d'arrêt* N dans \mathcal{F} est à valeurs dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Nous dirons qu'il est *fini à gauche* si $\mathbb{P}[N \neq -\infty] = 1$, *fini à droite* si $\mathbb{P}[N \neq +\infty] = 1$, et *fini* s'il est fini à gauche et à droite.

Proposition 16.3.7. *Soient (E, ρ) un espace métrique standard, et $((T_v)_{v \in \mathbb{R}}, \mu)$ un système dynamique aléatoire sur E avec une mesure invariante π . On note $((X_n, V_n), T)_{n \in \mathbb{Z}}$ la chaîne de Markov constructive stationnaire associée. On considère deux copies indépendantes $(X'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et $(X''_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$. Si T est contractif et si les temps d'arrêt*

$$\bar{N}_\epsilon = \inf \{n \geq 0 \mid |X'_n - X''_n| < \epsilon\}, \quad \epsilon > 0$$

sont atteints presque sûrement, alors la filtration de $(X_n, V_n)_{n \leq 0}$ est I-confortable.

Nous donnons d'abord un lemme que nous utiliserons pour construire les bonnes coïmmersions qui donneront le I-confort d'une telle filtration.

Lemme 16.3.8. *Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient $\mathcal{G}^* = (\mathcal{G}_n^*)_{n \leq 0}$ la filtration d'une chaîne de Markov constructive $((X_n^*, V_n^*), f_n)_{n \leq 0}$. Soient $\mathcal{H}^* = (\mathcal{H}_n^*)_{n \leq 0}$ une filtration dans laquelle \mathcal{G} est immergée, et $(V'_n)_{n \leq 0}$ un processus de même loi que $(V_n^*)_{n \leq 0}$ adapté à \mathcal{H}^* , indépendant de \mathcal{G}^* , et tel que V'_n est indépendante de \mathcal{H}_{n-1}^* pour tout n (c'est-à-dire que la filtration de $(V'_n)_{n \leq 0}$ est immergée dans \mathcal{H}^*). On se donne un temps d'arrêt \bar{N} de la filtration \mathcal{H}^* fini à gauche et on construit le processus $(X''_n, V''_n)_{n \leq 0}$ défini par*

$$\begin{cases} X''_n = X_n^* \text{ et } V''_n = V_n^* & \text{si } n \leq \bar{N} \\ V''_{n+1} = V'_{n+1} \text{ et } X''_{n+1} = f_{n+1}(X''_n, V''_{n+1}) & \text{pour } n \text{ allant pas à pas de } \bar{N} \text{ à } -1. \end{cases}$$

Alors le processus $(X''_n, V''_n)_{n \leq 0}$ est une copie de $(X_n^, V_n^*)_{n \leq 0}$ et la filtration \mathcal{G}'' qu'il engendre est immergée dans \mathcal{H}^* (donc coïmmérée avec \mathcal{G}^*).*

Démonstration. D'après le lemme 8.2.7, il suffit de vérifier que $(X''_n, V''_n)_{n \leq 0}$ est une chaîne de Markov dans \mathcal{H}^* de même loi que $(X_n^*, V_n^*)_{n \leq 0}$.

Notons μ_{n+1} la loi de V_{n+1}^* et $P_{n+1} = (P_{n+1}(x, \cdot))_{x \in \mathbb{R}}$ une version régulière de la loi conditionnelle de X_{n+1}^* par rapport aux valeurs X_n^* . On note γ_n la loi de X_n^* . À un ensemble γ_n -négligeable près, P_{n+1} est uniquement définie par les égalités

$$\int F(x_{n+1}) P_{n+1}(x_n, dx_{n+1}) = \int F \circ f_{n+1}(x_n, v_{n+1}) d\mu_{n+1}(v_{n+1}),$$

pour toute F borélienne bornée. On a alors, pour toutes fonctions g_1 et g_2 boréliennes et bornées,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[g_1(X_{n+1}^*) g_2(V_{n+1}^*) \mid \mathcal{G}_n^*] &= \int \int g_1(x_{n+1}) g_2(v_{n+1}) P_{n+1}(X_n^*, dx_{n+1}) d\mu_{n+1}(v_{n+1}) \\ &= \int g_1 \circ f_{n+1}(X_n^*, v_{n+1}) g_2(v_{n+1}) d\mu_{n+1}(v_{n+1}), \end{aligned}$$

ce qui caractérise la loi de la chaîne de Markov $(X_n^*, V_n^*)_{n \leq 0}$.

Soient g_1 et g_2 des fonctions boréliennes bornées. La propriété locale de l'espérance conditionnelle (lemme 14.4.2) et l'immersion de \mathcal{G}^* dans \mathcal{H}^* donnent

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}[g_1(X''_{n+1})g_2(V''_{n+1}) | \mathcal{H}_n^*] \mathbb{1}_{\{\overline{N} > n\}} &= \overline{\mathbb{E}}[g_1(X^*_{n+1})g_2(V^*_{n+1}) | \mathcal{H}_n^*] \mathbb{1}_{\{\overline{N} > n\}} \\ &= \overline{\mathbb{E}}[g_1(X^*_{n+1})g_2(V^*_{n+1}) | \mathcal{G}_n^*] \mathbb{1}_{\{\overline{N} > n\}} \\ &= \int \int g_1(x)g_2(v)P_{n+1}(X_n^*, dx) d\mu_{n+1}(v) \mathbb{1}_{\{\overline{N} > n\}} \\ &= \int \int g_1(x)g_2(v)P_{n+1}(X_n'', dx) d\mu_{n+1}(v) \mathbb{1}_{\{\overline{N} > n\}}. \end{aligned}$$

Pour calculer $\overline{\mathbb{E}}[f(X''_{n+1}, V''_{n+1}) | \mathcal{H}_n^*] \mathbb{1}_{\{\overline{N} \leq n\}}$, on pose, pour m fixé $h_{m+1}(x, v) = f_{m+1}(x, v)$ et on définit par récurrence sur $k \leq 0$,

$$h_{m+k+1}(x, v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{m+k+1}) = f_{m+k+1}((h_{m+k}(x, v_{m+1}, v_{m+2}, \dots, v_{m+k}), v_{m+k+1})),$$

en sorte que sur $\{\overline{N} = m \leq n\}$, on a

$$X''_{m+k+1} = h_{m+k+1}(X_m^*, V'_{m+1}, V'_{m+2}, \dots, V'_{m+k+1})$$

et en particulier

$$X''_{n+1} = h_{n+1}(X_m^*, V'_{m+1}, V'_{m+2}, \dots, V'_{n+1})$$

et

$$h_{n+1}(X_m^*, V'_{m+1}, V'_{m+2}, \dots, V'_n, v) = f_{n+1}(X_n'', v).$$

On a alors, pour $m \leq n$

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{H}_n^*}[g_1(X''_{n+1})g_2(V''_{n+1})] \mathbb{1}_{\{\overline{N}=m\}} &= \overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{H}_n^*}[g_1 \circ h_m(X_m^*, V'_{m+1}, \dots, V'_{n+1})g_2(V'_{n+1})] \mathbb{1}_{\{\overline{N}=m\}} \\ &= \int g_1 \circ h_m(X_m^*, V'_{m+1}, \dots, V'_n, v)g_2(v) d\mu_{n+1}(v) \mathbb{1}_{\{\overline{N}=m\}} \\ &= \int g_1 \circ f_{n+1}(X_n'', v)g_2(v) d\mu_{n+1}(v) \mathbb{1}_{\{\overline{N}=m\}} \\ &= \int \int g_1(x)g_2(v)P_{n+1}(X_n'', dx) d\mu_{n+1}(v) \mathbb{1}_{\{\overline{N}=m\}} \end{aligned}$$

d'où

$$\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{H}_n^*}[g_1(X''_{n+1})g_2(V''_{n+1})] \mathbb{1}_{\{\overline{N} \leq n\}} = \int \int g_1(x)g_2(v)P_{n+1}(X_n'', dx) d\mu_{n+1}(v) \mathbb{1}_{\{\overline{N} \leq n\}}.$$

En somme,

$$\overline{\mathbb{E}}_{\mathcal{H}_n^*}[g_1(X''_{n+1})g_2(V''_{n+1})] = \int \int g_1(x)g_2(v)P_{n+1}(X_n'', dx) d\mu_{n+1}(v),$$

ce qui montre à la fois que $(X''_n, V''_n)_{n \leq 0}$ est une chaîne de Markov dans \mathcal{H}^* et que c'est une copie de $(X_n^*, V_n^*)_{n \leq 0}$. \square

Lemme 16.3.9. Soient E_n , $n \leq 0$, des espaces métriques standard et soit $((X_n, U_n), f_n; E_n)_{n \leq 0}$ une chaîne de Markov constructive. Soient $(X'_n, U'_n)_{n \leq 0}$ et $(X''_n, U''_n)_{n \leq 0}$ deux copies de $(X_n, U_n)_{n \leq 0}$ sur un espace probabilisé $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$ qui engendrent des filtrations \mathcal{G}' et \mathcal{G}^* coïmmergées. On se donne un temps d'arrêt \bar{N} de la filtration $\mathcal{G}' \vee \mathcal{G}^*$, fini à gauche, et on construit le processus $(X''_n, U''_n)_{n \leq 0}$ en posant

$$\begin{cases} X''_n = X'_n \text{ et } U''_n = U'_n & \text{si } n \leq \bar{N} \\ X''_{n+1} = f_{n+1}(X''_n, U''_{n+1}) \text{ et } U''_n = U'_n & \text{pour } n \text{ allant pas à pas de } \bar{N} \text{ à } -1. \end{cases}$$

Alors $(X''_n, U''_n)_{n \leq 0}$ est une copie de $(X_n, U_n)_{n \leq 0}$ et la filtration \mathcal{G}'' qu'il engendre est coïmmergée avec \mathcal{G}' .

Démonstration. C'est une application directe du lemme précédent avec $\mathcal{H}^* = \mathcal{G}' \vee \mathcal{G}^*$. \square

★ *Preuve de la proposition 16.3.7.* Notons $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_n)_{n \leq 0}$ la filtration de $(X_n, V_n)_{n \leq 0}$. Montrons que X_0 satisfait le critère de I-confort sous les hypothèses de la proposition 16.3.7. Soit $\delta > 0$. Soit $K_0 \geq 0$ un entier suffisamment grand pour que $\mathbb{P}[\bar{N}_\delta \geq K_0] < \delta$. Posons $n_0 = -K_0$. On se donne deux copies indépendantes \mathcal{G}' et \mathcal{G}^* et on construit \mathcal{G}'' comme dans le lemme 16.3.9 avec le temps d'arrêt

$$\bar{N} = \inf \{n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket \mid \rho(X'_n, X''_n) < \delta\} \quad \text{si cet ensemble n'est pas vide, } \bar{N} = +\infty \quad \text{sinon.}$$

Évidemment $\bar{N} \neq -\infty$ presque sûrement, et par stationnarité on a $\bar{\mathbb{P}}[\bar{N} \neq +\infty] > 1 - \delta$. Par construction et par la définition de Λ_T ,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbb{E}}[\rho(X'_{n+1}, X''_{n+1}) \mid X'_n = x', X''_n = x''] \mathbb{1}_{\{\bar{N} \leq n < 0\}} &= \bar{\mathbb{E}}[\rho(T_{V'_{n+1}}(x'), T_{V''_{n+1}}(x''))] \mathbb{1}_{\{\bar{N} \leq n < 0\}} \\ &\leq \Lambda_T \rho(x', x'') \mathbb{1}_{\{\bar{N} \leq n < 0\}}, \end{aligned}$$

d'où

$$\bar{\mathbb{E}}[\rho(X'_{n+1}, X''_{n+1}) \mid \mathcal{G}'_n \vee \mathcal{G}^*_n] \mathbb{1}_{\{\bar{N} \leq n < 0\}} \leq \rho(X'_n, X''_n) \mathbb{1}_{\{\bar{N} \leq n < 0\}}$$

et

$$\bar{\mathbb{E}}[\rho(X'_0, X''_0) \mid \mathcal{G}'_n \vee \mathcal{G}^*_n] \mathbb{1}_{\{\bar{N} \leq n < 0\}} \leq \rho(X'_n, X''_n) \mathbb{1}_{\{\bar{N} \leq n < 0\}},$$

ce dont on obtient

$$\bar{\mathbb{E}}[\rho(X'_0, X''_0)] \bar{\mathbb{P}}[\bar{N} \neq +\infty] \leq \bar{\mathbb{E}}[\rho(X'_{\bar{N}}, X''_{\bar{N}})] \bar{\mathbb{P}}[\bar{N} \neq +\infty]$$

et finalement

$$\mathbb{E}[\rho(X'_0, X''_0)] \leq \bar{\mathbb{E}}[\rho(X'_{\bar{N}}, X''_{\bar{N}})] < \delta,$$

ce qui montre que X_0 satisfait le critère de I-confort. Les mêmes constructions se font pour chaque X_n par stationnarité et cela montre que la filtration de $(X_n)_{n \leq 0}$ est I-confortable d'après le corollaire 16.3.5. \square

Exemple : marche aléatoire sur le cercle. — Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On note $(X_n, U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ la chaîne de Markov définie de la manière suivante. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, X_n est de loi uniforme sur $[0, 1] = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, U_{n+1} est indépendante de la tribu du passé $\sigma(X_m, U_m; m \leq n)$ et sa loi est donnée par $\mathbb{P}[U_{n+1} = \pm\alpha \pmod{1}] = 1/2$ et $X_{n+1} = X_n + U_{n+1} \pmod{1}$. On dit que le chaîne de Markov stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est *la marche aléatoire réversible sur le cercle*. On suppose que $(X_n, U_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et on note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ la filtration dyadique engendrée par $(X_n)_{n \leq 0}$ (c'est aussi la filtration $(X_n, U_n)_{n \leq 0}$). Les hypothèses de la proposition 16.3.7 se vérifient facilement et \mathcal{F} est alors I-confortable, donc de type produit par le théorème 15.2.3. Un processus d'innovations qui engendre cette filtration a été construit par C. Leuridan [Leu], qui a aussi traité le cas d'autres processus stationnaires sur le cercle.

17. PARAMÉTRISATIONS II.

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu’une filtration à temps discret négatif est standard si elle admet une paramétrisation génératrice. Il est affirmé par erreur dans la littérature que la réciproque de ce lemme est triviale. Une discussion à ce sujet se trouve dans [Sch2]. Comme l’affirment les auteurs de [FS00], ce résultat est cependant vrai, et peut, par le biais du critère de standardité de Vershik, s’obtenir à partir de leurs résultats et d’autres de la littérature, suivant la démarche qu’ils indiquent dans [FS02]. Néanmoins la preuve reste incomplète. Avec notre terminologie, les auteurs ont seulement montré qu’une filtration qui satisfait le critère de standardité de Vershik satisfait le *critère de Vershik paramétrique de premier niveau* (définition 17.1.1). Nous montrerons d’abord qu’une filtration essentiellement séparable admet une paramétrisation génératrice si elle satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau. Ensuite nous établirons que :

Théorème 17.0.1. *Une filtration conditionnellement séparable est I-confortable si et seulement si elle satisfait le critère de Vershik de premier niveau paramétrique.*

Enfin, sans utiliser le critère de standardité de Vershik, nous aurons établi indépendamment :

Théorème 17.0.2. *Une filtration essentiellement séparable est I-confortable si et seulement si elle admet une paramétrisation génératrice.*

Nous obtiendrons le théorème 17.0.1 d’une manière similaire à celle employée pour établir le théorème 15.2.3. Au préalable nous introduirons le *critère de I-confort paramétrique*, et le *critère de I-jonction paramétrique en arbre*.

17.1 Préliminaire : concaténation des paramétrisations.

Pour motiver cette section, citons d’abord le critère de Vershik paramétrique de premier niveau qui fera l’objet de la section suivante :

Définition 17.1.1. On dit qu’une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ satisfait le *critère paramétrique de Vershik de premier niveau* si pour tout ensemble fini F , toute variable aléatoire $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$, pour tout réel $\delta > 0$, il existe un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, un entier $n_0 \leq 0$, une filtration \mathcal{F}' sur $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, isomorphe à \mathcal{F} une paramétrisation $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et une variable aléatoire $Z' \in L^{\text{simple}}(\sigma(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0); F)$ telle que $\mathbb{P}'[X' \neq Z'] < \delta$.

Pour montrer que \mathcal{F} admet une paramétrisation génératrice lorsqu’elle est essentiellement séparable et qu’elle satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau, nous aurons besoin de mettre des paramétrisations locales “bout à bout”, comme avec les innovations dans le cas non paramétrique. Cette section fournit les outils nécessaires à cela, adaptés au cas conditionnellement séparable en vue de généralisation.

17.1.1 Paramétrisations isomorphes.

Définition 17.1.2. Soient n_1 et n_0 des entiers tels que $-\infty \leq n_1 < n_0 < 0$. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration et (U_{n_0+1}, \dots, U_0) une paramétrisation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$.

- Une paramétrisation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_1, 0 \rrbracket$ de la forme (U_{n_1+1}, \dots, U_0) est appelée un *prolongement* de la paramétrisation (U_{n_0+1}, \dots, U_0) sur $\llbracket n_1, 0 \rrbracket$.
- On pose $\mathcal{B}_0 = \mathcal{F}_{n_0} \dot{\vee} \sigma(U_{n_0+1}, \dots, U_0)$. Un *rallongement* de (U_{n_0+1}, \dots, U_0) sur $\llbracket n_1, 0 \rrbracket$ est une paramétrisation $(U'_{n_1+1}, \dots, U'_0)$ sur $\llbracket n_1, 0 \rrbracket$ d'une filtration \mathcal{F}' isomorphe à \mathcal{F} telle qu'il existe un isomorphisme $\Psi: \mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}'_0$ tel que $\Psi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ et $\Psi(U_n) = U'_n$ pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$.
- Si $(U'_{n_1+1}, \dots, U'_0)$ est une paramétrisation sur $\llbracket n_1, 0 \rrbracket$ d'une filtration \mathcal{F}' isomorphe à \mathcal{F} , on dit que les paramétrisations (U_{n_1+1}, \dots, U_0) et $(U'_{n_1+1}, \dots, U'_0)$ sont *isomorphes* si chacune d'elle rallonge l'autre.

Lorsque les paramétrisations sont des pas de paramétrisations, la définition est donc :

Définition 17.1.3. Soit $n \leq 0$ un entier. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration et U_n un pas de paramétrisation de \mathcal{F}_{n-1} dans \mathcal{F}_n . Sur un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, soient $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}'_n)_{n \leq 0}$ une filtration et U'_n un pas de paramétrisation de \mathcal{F}'_{n-1} dans \mathcal{F}'_n . On dit que les pas de paramétrisations U_n et U'_n sont isomorphes s'il existe un isomorphisme d'espaces probabilisés $\Psi: \mathcal{F}_0 \vee \sigma(U_n) \rightarrow \mathcal{F}'_0 \vee \sigma(U'_n)$ tel que $\Psi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ et $\Psi(U_n) = \Psi(U'_n)$.

Lemme 17.1.4. Soit n_0 un entier ou $n_0 = -\infty$. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ et $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}'_n)_{n \leq 0}$ deux filtrations isomorphes, (U_{n_0+1}, \dots, U_0) une paramétrisation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ une paramétrisation de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et soient \mathcal{G} le grossissement paramétrique de \mathcal{F} avec (U_{n_0+1}, \dots, U_0) et \mathcal{G}' le grossissement paramétrique de \mathcal{F}' avec $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$. Alors les paramétrisations (U_{n_0+1}, \dots, U_0) et $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ sont isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme $\Psi: \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}'$ tel que $\Psi(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ et $\Psi(U_n) = U'_n$ pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$.

Démonstration. C'est immédiat avec la définition. \square

Lemme 17.1.5. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ et $\mathcal{F}^* = (\mathcal{F}^*_0, \mathcal{F}^*_1)$ deux filtrations à un pas isomorphes, et soient U un pas de paramétrisation de \mathcal{F}_0 dans \mathcal{F}_1 et U^* un pas de paramétrisation de \mathcal{F}^*_0 dans \mathcal{F}^*_1 . Alors ce sont des pas de paramétrisation isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme Ψ de \mathcal{F} dans \mathcal{F}^* qui envoie $\mathcal{L}[U \mid \mathcal{F}_1]$ sur $\mathcal{L}[U^* \mid \mathcal{F}^*_1]$.

Démonstration. Puisque l'on a un isomorphisme $\sigma(U)$ sur $\sigma(U^*)$ qui envoie U sur U^* (lemme 4.1.2), le corollaire 8.1.9 entraîne que l'on a un isomorphisme de $\mathcal{F}_1 \vee \sigma(U)$ sur $\mathcal{F}^*_1 \vee \sigma(U^*)$ qui coïncide avec Ψ sur \mathcal{F}_1 et qui envoie U sur U^* . \square

17.1.2 Concaténation : cas local.

Proposition 17.1.6. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration. Soit $n_0 < 0$ un entier et pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, soit $\mathcal{F}^{(n)}$ une filtration isomorphe à \mathcal{F} et $U^{(n)}$ un pas de paramétrisation de $\mathcal{F}^{(n-1)}$ dans $\mathcal{F}^{(n)}$. Alors il existe une filtration $\widehat{\mathcal{F}}$ isomorphe à \mathcal{F} avec une paramétrisation $(\widehat{U}_{n_0+1}, \dots, \widehat{U}_0)$ telle que pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$ les pas de paramétrisations $U^{(n)}$ et \widehat{U}_n sont un à un isomorphes.

Démonstration. Pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, on a un isomorphisme $\Psi^{(n)}: \mathcal{F}_0^{(n)} \rightarrow \mathcal{F}_0$. Par récurrence sur $m \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, nous allons construire un espace probabilisé $(\widehat{\Omega}^{(m)}, \widehat{\mathcal{A}}^{(m)}, \widehat{\mathbb{P}}^{(m)})$ et sur celui-ci

une copie $(\widehat{\mathcal{F}}_n^{(m)})_{n \leq m}$ de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \leq m}$ et une paramétrisation $(\widehat{U}_{n_0+1}^{(m)}, \dots, \widehat{U}_m^{(m)})$ de $(\widehat{\mathcal{F}}_n^{(m)})_{n \leq m}$ sur $\llbracket n_0, m \rrbracket$, pas-à-pas isomorphe à $(U_{n_0+1}^{(m)}, \dots, U_m^{(m)})$.

Pour $m = n_0$ il n'y a qu'à considérer une copie $(\widehat{\mathcal{F}}_n^{(n_0)})_{n \leq n_0}$ de \mathcal{F} sur un espace probabilisé $(\widehat{\Omega}^{(n_0)}, \widehat{\mathcal{A}}^{(n_0)}, \widehat{\mathbb{P}}^{(n_0)})$. Ces constructions au rang m se prolongent au rang $m + 1$ de la manière suivante. On note $\Phi^{(m)}$ l'isomorphisme de $(\mathcal{F}_n)_{n \leq m}$ sur $(\widehat{\mathcal{F}}_n^{(m)})_{n \leq m}$ provenant du rang m . Nous munissons l'espace

$$(\widehat{\Omega}^{(m+1)}, \widehat{\mathcal{A}}^{(m+1)}) = (\widehat{\Omega}^{(m)}, \widehat{\mathcal{A}}^{(m)}) \otimes ([0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1]})$$

de la probabilité produit $\widehat{\mathbb{P}}^{(m+1)} = \mathbb{P}^{(m+1)} \otimes \lambda$, où λ désigne la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. On définit sur $(\widehat{\Omega}^{(m+1)}, \widehat{\mathcal{A}}^{(m+1)}, \widehat{\mathbb{P}}^{(m+1)})$ les variables aléatoires $\widehat{U}_n^{(m+1)}(\omega^{(m)}, t) = \widehat{U}_n^{(m)}(\omega^{(m)})$ pour $n \in \llbracket n_0, m \rrbracket$ et $\widehat{U}_{m+1}^{(m+1)}(\omega^{(m)}, t) = t$. On pose $\widehat{\mathcal{F}}_n^{(m+1)} = \widehat{\mathcal{F}}_n^{(m)} \otimes \{\emptyset, [0, 1]\}$ pour tout $n \leq m + 1$. Notons $\Theta: \widehat{\mathcal{A}}^{(m)} \rightarrow \widehat{\mathcal{A}}^{(m+1)}$ le plongement "identificateur", avec qui $\widehat{U}_n^{(m+1)} = \Theta(\widehat{U}_n^{(m)})$ et $\widehat{\mathcal{F}}_n^{(m+1)} = \Theta(\widehat{\mathcal{F}}_n^{(m)})$ pour $n \in \llbracket n_0, m \rrbracket$.

Comme $\widehat{U}_{m+1}^{(m+1)}$ est une variable aléatoire uniforme sur $[0, 1]$ et indépendante de $\widehat{\mathcal{F}}_m^{(m+1)}$, on a alors par le corollaire 8.1.12 un isomorphisme

$$\widehat{\Psi}^{(m+1)}: \mathcal{F}_m^{(m+1)} \dot{\vee} \sigma(U_{m+1}^{(m+1)}) \rightarrow \widehat{\mathcal{F}}_m^{(m+1)} \dot{\vee} \sigma(\widehat{U}_{m+1}^{(m+1)})$$

qui coïncide avec $\Theta \circ \Phi^{(m)} \circ \Psi^{(m+1)}$ sur $\mathcal{F}_m^{(m+1)}$ et qui envoie $U_{m+1}^{(m+1)}$ sur $\widehat{U}_{m+1}^{(m+1)}$. On pose alors

$$\widehat{\mathcal{F}}_{m+1}^{(m+1)} = \widehat{\Psi}^{(m+1)}(\mathcal{F}_{m+1}^{(m+1)}) \subset \widehat{\mathcal{F}}_m^{(m+1)} \dot{\vee} \sigma(\widehat{U}_{m+1}^{(m+1)}).$$

Il est alors facile de voir que $(\widehat{U}_{n_0+1}^{(m+1)}, \dots, \widehat{U}_{m+1}^{(m+1)})$ est une paramétrisation de $(\widehat{\mathcal{F}}_n^{(m+1)})_{n \leq m+1}$ qui rallonge $(\widehat{U}_{n_0+1}^{(m)}, \dots, \widehat{U}_m^{(m)})$ sur $\llbracket n_0, m + 1 \rrbracket$ et qui rallonge aussi le pas de paramétrisation $U_{m+1}^{(m+1)}$. \square

Les deux corollaires qui suivent sont alors immédiats.

Corollaire 17.1.7. *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration. Alors :*

- 1) *Deux paramétrisations locales de \mathcal{F} sont isomorphes si et seulement si elles sont pas à pas isomorphes.*
- 2) *Soient n_1, n_0 des entiers tels que $n_1 < n_0 < 0$. Soit \mathcal{F}' une filtration isomorphe à \mathcal{F} et $(U'_{n_1+1}, \dots, U'_{n_0})$ une paramétrisation de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_1, n_0 \rrbracket$, et soit \mathcal{F}'' une filtration isomorphe à \mathcal{F} et $(U''_{n_0+1}, \dots, U''_0)$ une paramétrisation de \mathcal{F}'' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. Alors il existe une filtration \mathcal{F}''' isomorphe à \mathcal{F} et une paramétrisation $(U'''_{n_1+1}, \dots, U'''_0)$ de \mathcal{F}''' sur $\llbracket n_1, 0 \rrbracket$ qui rallonge $(U'_{n_1+1}, \dots, U'_{n_0})$ et $(U''_{n_0+1}, \dots, U''_0)$. On dit que $(U'''_{n_1+1}, \dots, U'''_0)$ est une concaténation de $(U'_{n_1+1}, \dots, U'_{n_0})$ et $(U''_{n_0+1}, \dots, U''_0)$.*

On peut aussi concaténer les paramétrisations des chaînes de Markov :

Corollaire 17.1.8. *Soit $(X_n)_{n \leq 0}$ une chaîne de Markov à valeurs dans un espace métrique standard. Soient n_1, n_0 des entiers tels que $n_1 < n_0 < 0$. Soit $(X'_n)_{n \leq 0}$ une copie de $(X_n)_{n \leq 0}$ et $(U'_{n_1+1}, \dots, U'_{n_0})$ une paramétrisation de $(X'_n)_{n \leq 0}$ sur $\llbracket n_1, n_0 \rrbracket$, et soit $(X''_n)_{n \leq 0}$ une copie de $(X_n)_{n \leq 0}$ et $(U''_{n_0+1}, \dots, U''_0)$ une paramétrisation de $(X''_n)_{n \leq 0}$ sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. Alors il existe une copie $(X'''_n)_{n \leq 0}$ de $(X_n)_{n \leq 0}$ et une paramétrisation $(U'''_{n_1+1}, \dots, U'''_0)$ de $(X'''_n)_{n \leq 0}$ sur $\llbracket n_1, 0 \rrbracket$ qui rallonge $(U'_{n_1+1}, \dots, U'_{n_0})$ et $(U''_{n_0+1}, \dots, U''_0)$.*

17.1.3 Concaténation : cas global.

Ici nous allons généraliser la proposition 17.1.6 au cas des paramétrisations globales (proposition 17.1.11). Dans le cas d'une filtration essentiellement séparable, nous pourrions faire ceci à l'aide du théorème de Kolmogorov comme la proposition 16.1.10. Nous allons donner une preuve dans le cas conditionnellement séparable en appliquant le théorème de Ionescu-Tulcea "à l'envers".

Lemme 17.1.9. *Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable de la forme $\bigotimes_{j \in J} (\Omega_j, \mathcal{A}_j)$, soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ une σ -algèbre de la forme $\mathcal{C} = \bigotimes_{j \in J} \mathcal{C}_j$. Soit $i \in J$ et soit $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{C}_i$ une σ -algèbre. Soient (S, \mathcal{S}) un espace mesurable et $\nu: (\Omega, \mathcal{D}) \rightarrow \mathfrak{P}(S)$ un noyau de probabilités.*

On définit un noyau

$$\gamma(\nu): (\Omega, \mathcal{C}) \rightarrow \mathfrak{P}((\Omega, \mathcal{D}_i) \otimes (S, \mathcal{S}))$$

par

$$\gamma(\nu)_\omega[\hat{B}] = \nu_\omega[\hat{B}_{\omega_i}],$$

où $\omega = (\omega_j)_{j \in J}$ et $\hat{B}_\omega = \{v \mid (\omega, v) \in \hat{B}\}$ est la section de \hat{B} au-dessus de ω . Lorsque (Ω, \mathcal{A}) est muni d'une probabilité \mathbb{P} , on munit l'espace

$$(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{B}}) := (\Omega, \mathcal{C}) \otimes ((\Omega, \mathcal{D}_i) \otimes (S, \mathcal{S}))$$

de la probabilité $\hat{\mathbb{P}} := \mathbb{P} \otimes \gamma(\nu)$. Désignant par " $*$ " la tribu triviale sur chacun des espaces (Ω, \mathcal{C}) , (Ω, \mathcal{D}_i) et (S, \mathcal{S}) , on définit sur $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{B}}, \hat{\mathbb{P}})$ les σ -algèbres

$$\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C} \otimes (* \otimes *), \quad \hat{\mathcal{D}}_i = * \otimes (\mathcal{D}_i \otimes *),$$

et l'élément aléatoire

$$\hat{V}(\omega, \omega_i, t) = t.$$

Alors $\gamma(\nu)_\omega = \hat{\mathbb{P}}[\hat{\mathcal{D}}_i \vee \sigma(\hat{V}) \mid \hat{\mathcal{C}}](\omega, \omega_i, t)$ et $\mathcal{L}[\hat{V} \mid \hat{\mathcal{C}}](\omega, \omega_i, t) = \nu_\omega$. Sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, si V est un élément aléatoire dans S tel que $\nu = \mathcal{L}[V \mid \mathcal{C}]$, on pose $\mathcal{B} = \mathcal{C} \vee \sigma(V)$. On identifie \mathcal{D}_i à la σ -algèbre de \mathcal{C} de i -ième projection égale à \mathcal{D}_i et de j -ième projection égale à la tribu triviale pour $j \neq i$.

Alors il existe un isomorphisme $\Psi: \mathcal{B} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$ tel que $\Psi(\mathcal{C}) = \hat{\mathcal{C}}$, $\Psi(\mathcal{D}_i) = \hat{\mathcal{D}}_i$, $\Psi(V) = \hat{V}$.

Démonstration. Les égalités $\gamma(\nu) = \hat{\mathbb{P}}[\hat{\mathcal{D}}_i \vee \sigma(\hat{V}) \mid \hat{\mathcal{C}}]$ et $\mathcal{L}[\hat{V} \mid \hat{\mathcal{C}}] = \nu$ se vérifient aisément.

Si $\Psi_0: \mathcal{C} \rightarrow \hat{\mathcal{C}}$ désigne l'isomorphisme "identificateur", et $\Psi_1: \mathcal{D}_i \rightarrow \hat{\mathcal{D}}$ désigne l'isomorphisme "identificateur", on a alors $\hat{\mathbb{P}}[\hat{\mathcal{D}}_i \mid \hat{\mathcal{C}}] = \Psi_1 \circ \mathbb{P}[\mathcal{D} \mid \mathcal{C}] \circ \Psi_0$, donc la proposition 8.1.8 donne un isomorphisme $\Psi_2: \mathcal{C} \vee \mathcal{D}_i \rightarrow \hat{\mathcal{C}} \vee \hat{\mathcal{D}}_i$ qui prolonge Ψ_0 et Ψ_1 . Comme $\mathcal{D}_i \subset \mathcal{C}$, on en déduit que sous $\hat{\mathbb{P}}$, on a $\hat{\mathcal{D}}_i = \mathcal{D}_i \otimes (* \otimes *)$.

On a alors $\mathcal{L}[\hat{V} \mid \hat{\mathcal{C}} \vee \hat{\mathcal{D}}_i] = \mathcal{L}[\hat{V} \mid \hat{\mathcal{C}}] = \Psi_0(\nu) = \Psi_2(\nu)$ et il existe alors par le corollaire 8.1.9 un isomorphisme $\Psi: \mathcal{B} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}$ qui prolonge Ψ_2 et qui envoie V sur \hat{V} . \square

Lemme 17.1.10. *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration. Pour tout $n \leq 0$ soient $\mathcal{F}^{(n)}$ une filtration isomorphe à \mathcal{F} et $(U_n^{(n)}, \dots, U_0^{(n)})$ une paramétrisation de $\mathcal{F}^{(n)}$ sur $\llbracket n, 0 \rrbracket$. On suppose que pour tout $m \leq n$, la paramétrisation $(U_m^{(m)}, \dots, U_0^{(m)})$ rallonge $(U_n^{(n)}, \dots, U_0^{(n)})$ sur $\llbracket m, 0 \rrbracket$.*

Pour tout $n_0 < 0$, on note

$$(\hat{\Omega}^{(n_0)}, \hat{\mathcal{A}}^{(n_0)}) = \bigotimes_{m=0}^{m=n_0} (\Omega, \mathcal{F}_m) \otimes ([0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1]})$$

et désignant par “ \ast ” la tribu triviale de chacun des espaces (Ω, \mathcal{F}_n) et $([0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1]})$, on pose, pour $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$,

$$\widehat{\mathcal{F}}_n^{(n_0)} = \left(\bigotimes_{m=0}^{m=n-1} (\ast \otimes \ast) \right) \otimes (\mathcal{F}_n \otimes \ast) \otimes \left(\bigotimes_{m=n+1}^{m=n_0} (\ast \otimes \ast) \right)$$

et

$$\widehat{U}_n^{(n_0)}(\omega_0, t_0, \omega_{-1}, t_{-1}, \dots, \omega_{n_0}, t_{n_0}) = t_n.$$

a) Alors il existe une probabilité $\widehat{\mathbb{P}}_0$ sur $(\widehat{\Omega}^{(0)}, \widehat{\mathcal{A}}^{(0)}) = (\Omega, \mathcal{F}_0) \otimes ([0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1]})$ et pour tout $n \leq 0$, il existe un noyau $\beta^{(n-1)}$ de $(\widehat{\Omega}^{(n)}, \widehat{\mathcal{A}}^{(n)})$ vers $(\Omega, \mathcal{F}_{n-1}) \otimes ([0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1]})$ tels que, pour tout $n_0 < 0$, si $(\widehat{\Omega}^{(n_0)}, \widehat{\mathcal{A}}^{(n_0)})$ est muni de la probabilité $\widehat{\mathbb{P}}_{n_0} := \widehat{\mathbb{P}}_0 \otimes \beta^{(-1)} \otimes \beta^{(-2)} \otimes \dots \otimes \beta^{(n_0)}$, alors la filtration $(\widehat{\mathcal{F}}_{n_0}^{(n_0)}, \widehat{\mathcal{F}}_{n_0+1}^{(n_0)}, \dots, \widehat{\mathcal{F}}_0^{(n_0)})$ est isomorphe à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket}$ et $(\widehat{U}_{n_0}^{(n_0)}, \dots, \widehat{U}_0^{(n_0)})$ est une paramétrisation de $(\widehat{\mathcal{F}}^{(n_0)})_{n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket}$ sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ isomorphe à $(U_{n_0}^{(n_0)}, \dots, U_0^{(n_0)})$.

b) Par conséquent, si pour tout $n < n_0$, on pose

$$\widehat{\mathcal{F}}_n^{(n_0)} = \left(\bigotimes_{m=0}^{m=n_0-1} (\ast \otimes \ast) \right) \otimes (\mathcal{F}_n \otimes \ast),$$

alors la filtration $\widehat{\mathcal{F}}^{(n_0)} = (\widehat{\mathcal{F}}_n^{(n_0)})_{n \leq 0}$ est isomorphe à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ et $(\widehat{U}_{n_0}^{(n_0)}, \dots, \widehat{U}_0^{(n_0)})$ est une paramétrisation de $\widehat{\mathcal{F}}^{(n_0)}$ sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ isomorphe à $(U_{n_0}^{(n_0)}, \dots, U_0^{(n_0)})$.

Démonstration. On donne d’abord $\widehat{\mathbb{P}}_0$. Il suffit de poser $\mathbb{P}_0 = \mathbb{P} \otimes \mu$, où μ est la copie dans \mathcal{F}_0 de $\mathcal{L}[U_0^{(0)} | \mathcal{F}_0^{(0)}]$, et d’appliquer la proposition 8.1.16. Maintenant on procède par récurrence. On suppose $\beta^{(0)}, \beta^{(-1)}, \dots, \beta^{(n_0+1)}$ construits.

On applique alors le lemme 17.1.9 avec $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) = (\widehat{\Omega}^{(n_0+1)}, \widehat{\mathcal{A}}^{(n_0+1)}, \widehat{\mathbb{P}}^{(n_0+1)})$, $\mathcal{C} = \widehat{\mathcal{A}}^{(n_0+1)}$, $\mathcal{D}_i = \mathcal{F}_{n_0}$, et ν est la copie sur l’espace probabilisé $(\widehat{\Omega}^{(n_0+1)}, \widehat{\mathcal{A}}^{(n_0+1)}, \widehat{\mathbb{P}}^{(n_0+1)})$ de la loi conditionnelle $\mathcal{L}[U_{n_0}^{(n_0)} | \mathcal{F}_0^{(n_0)} \vee \sigma(U_{n_0+1}^{(n_0)}, \dots, U_0^{(n_0)})]$, et prend le noyau $\beta^{(n_0+1)} = \gamma(\nu)$ donné par ce lemme. \square

Proposition 17.1.11. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration. Soit $n_0 < 0$ un entier et pour tout $n \leq 0$ soient $\dot{\mathcal{F}}^{(n)}$ une filtration isomorphe à \mathcal{F} et $\dot{U}_n^{(n)}$ un pas de paramétrisation de $\dot{\mathcal{F}}_{n-1}^{(n)}$ dans $\dot{\mathcal{F}}_n^{(n)}$. Alors il existe une paramétrisation globale de \mathcal{F} dont le pas de niveau n est isomorphe au pas $\dot{U}_n^{(n)}$ pour tout n .

Démonstration. Puisqu’on sait concaténer les paramétrisations locales, on a pour tout $n \leq 0$, une filtration $\mathcal{F}^{(n)}$ isomorphe à \mathcal{F} et $(U_n^{(n)}, \dots, U_0^{(n)})$ une paramétrisation de $\mathcal{F}^{(n)}$ sur $\llbracket n, 0 \rrbracket$ qui est une concaténation des pas de paramétrisations $\dot{U}_n^{(n)}, \dots, \dot{U}_0^{(n)}$. Les hypothèses du lemme 17.1.10 sont vérifiées : pour tout $m \leq n$, la paramétrisation $(U_m^{(m)}, \dots, U_0^{(m)})$ rallonge $(U_n^{(n)}, \dots, U_0^{(n)})$ sur $\llbracket m, 0 \rrbracket$. Ce lemme et le théorème de Ionescu-Tulcea donnent sur l’espace mesurable

$$(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{A}}) := \bigotimes_{n=0}^{-\infty} \left((\Omega, \mathcal{F}_n) \otimes ([0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1]}) \right)$$

une probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$ dont la restriction à $(\widehat{\Omega}^{(n_0)}, \widehat{\mathcal{A}}^{(n_0)})$ est $\widehat{\mathbb{P}}_{n_0}$. Désignons par “ \ast ” la tribu triviale de chacun des espaces (Ω, \mathcal{F}_n) et $([0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1]})$. Alors sur $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathbb{P}})$, on définit une suites de σ -algèbres $\widehat{\mathcal{F}} = (\widehat{\mathcal{F}}_n)_{n \leq 0}$ par

$$\widehat{\mathcal{F}}_n = \left(\bigotimes_{m=0}^{m=n-1} (\ast \otimes \ast) \right) \otimes (\mathcal{F}_n \otimes \ast) \otimes \left(\bigotimes_{m=n+1}^{m=-\infty} (\ast \otimes \ast) \right)$$

et une suite de variables aléatoires $(\widehat{U}_n)_{n \leq 0}$ par

$$\widehat{U}_n(\omega_0, t_0, \omega_{-1}, t_{-1}, \dots) = t_n$$

Convaincons-nous que :

1) $\widehat{\mathcal{F}}$ est une filtration isomorphe à \mathcal{F} . Après complétion des σ -algèbres pour la probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$, on a

$$\widehat{\mathcal{F}}_n = (\mathcal{F}_n \otimes \ast) \otimes \left(\bigotimes_{m=-1}^{-\infty} (\ast \otimes \ast) \right).$$

2) $(\widehat{U}_n)_{n \leq 0}$ est une paramétrisation globale de $\widehat{\mathcal{F}}$ qui rallonge $(U_{n_0}^{(n_0)}, \dots, U_0^{(n_0)})$. Nous utilisons les notations du lemme 17.1.10. Les filtrations $(\widehat{\mathcal{F}}_{n_0}^{(n_0)}, \widehat{\mathcal{F}}_{n_0+1}^{(n_0)}, \dots, \widehat{\mathcal{F}}_0^{(n_0)})$ et $(\widehat{\mathcal{F}}_n)_{n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket}$ s'identifient, ainsi que les vecteurs aléatoires $(\widehat{U}_{n_0}^{(n_0)}, \dots, \widehat{U}_0^{(n_0)})$ et $(\widehat{U}_{n_0}, \dots, \widehat{U}_0)$. De plus, après complétion des σ -algèbres pour la probabilité $\widehat{\mathbb{P}}$, on a, pour tout $n < n_0$,

$$\widehat{\mathcal{F}}_n = \left(\bigotimes_{m=-1}^{n_0-1} (\ast \otimes \ast) \right) \otimes (\mathcal{F}_n \otimes \ast) \otimes \left(\bigotimes_{m=n_0+1}^{-\infty} (\ast \otimes \ast) \right),$$

donc les filtrations $(\widehat{\mathcal{F}}_n^{(n_0)})_{n \leq 0}$ et $(\widehat{\mathcal{F}}_n)_{n \leq 0}$ s'identifient, et on conclut avec le b) du lemme 17.1.10. \square

Les corollaires suivants sont immédiats :

Corollaire 17.1.12. *Soit \mathcal{F} une filtration. Si $(n_k)_{k \geq 0}$ est une suite d'entiers négatifs strictement décroissante, et si pour tout $k \geq 1$, \mathcal{F} admet une paramétrisation $(U_{n_k}^{\prime\prime}, \dots, U_{n_{k-1}}^{\prime\prime})$ sur $\llbracket n_k, n_{k-1} \rrbracket$, alors \mathcal{F} admet une paramétrisation globale qui rallonge les $(U_{n_k}^{\prime\prime}, \dots, U_{n_{k-1}}^{\prime\prime})$. Ceci est encore vrai pour des paramétrisations d'une chaîne de Markov à valeurs dans des espaces métriques standard.*

Corollaire 17.1.13. *Toute filtration conditionnellement séparable admet une paramétrisation globale.*

Démonstration. Cela résulte de la proposition 17.1.11 et du corollaire 16.1.6. \square

17.2 Critère de Vershik paramétrique de premier niveau.

17.2.1 Définition.

Définition 17.2.1. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, on se donne une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$.

- Soit F un ensemble fini. On dit qu'une variable aléatoire $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$ satisfait le critère paramétrique de Vershik de premier niveau (sous-entendu : dans L^{simple}) si pour tout réel $\delta > 0$, il existe un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, un entier $n_0 \leq 0$, une filtration \mathcal{F}' sur $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, isomorphe à \mathcal{F} , une paramétrisation $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et une variable aléatoire $Z' \in L^{\text{simple}}(\sigma(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0); F)$ telle que $\mathbb{P}'[X' \neq Z'] < \delta$. On note $P^{\text{simple}}(\mathcal{F}; F)$ l'ensemble des variables aléatoires $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$ qui satisfont le critère de Vershik paramétrique de premier niveau.
- On dit qu'une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ satisfait le critère paramétrique de Vershik de premier niveau si pour tout ensemble fini F , toute variable aléatoire $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$ satisfait le critère paramétrique de Vershik de premier niveau.
- Soit (E, ρ) un espace métrique standard. On dit qu'une variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère paramétrique de Vershik de premier niveau (sous-entendu : dans L^1) si pour tout réel $\delta > 0$, il existe un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, un entier $n_0 \leq 0$, une filtration \mathcal{F}' sur $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, isomorphe à \mathcal{F} une paramétrisation $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et une variable aléatoire $Z' \in L^1(\sigma(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0); E)$ telle que $\mathbb{E}'[\rho(X', Z')] < \delta$. On note $P^1(\mathcal{F}; E)$ l'ensemble des variables aléatoires $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ qui satisfont le critère de Vershik paramétrique de premier niveau.
- Soit (E, ρ) un espace métrique standard. On dit qu'une variable aléatoire $X \in L^0(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère paramétrique de Vershik de premier niveau (sous-entendu : dans L^0) si pour tout réel $\delta > 0$, il existe un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, un entier $n_0 \leq 0$, une filtration \mathcal{F}' sur $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, isomorphe à \mathcal{F} une paramétrisation $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et une variable aléatoire $Z' \in L^0(\sigma(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0); E)$ telle que $\mathbb{P}'[|X' - Z'| > \delta] < \delta$. On note $P^0(\mathcal{F}; E)$ l'ensemble des variables aléatoires $X \in L^0(\mathcal{F}_0; E)$ qui satisfont le critère de Vershik paramétrique de premier niveau.
- On dit qu'une σ -algèbre $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{F}_0$ satisfait le critère paramétrique de Vershik de premier niveau si $L^1(\mathcal{E}_0, \mathbb{R}) \subset P^1(\mathcal{F}; \mathbb{R})$.

Dans cette section, nous allons établir la proposition suivante :

Proposition 17.2.2. *Une filtration essentiellement séparable satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau si et seulement si elle admet une paramétrisation génératrice.*

Cette proposition sera une conséquence du corollaire 17.2.11. La démarche suivie est analogue au cas non paramétrique.

17.2.2 Propriétés.

Lemme 17.2.3. *Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration, F un ensemble fini et E un espace métrique standard. Alors $P^{\text{simple}}(\mathcal{F}; F)$ est fermé dans $L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0; F)$, $P^1(\mathcal{F}; E)$ est fermé dans $L^1(\mathcal{F}; E)$, $P^0(\mathcal{F}; E)$ est fermé dans $L^0(\mathcal{F}; E)$.*

Démonstration. Facile. □

Proposition 17.2.4. *Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration conditionnellement séparable, et \mathcal{D} une sous- σ -algèbre de \mathcal{F}_0 . Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) \mathcal{D} satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau.
- (ii) Il existe un espace métrique standard (E, ρ) infini tel que toute variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{D}; E)$ satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau.

- (iii) Pour tout ensemble fini F , toute variable aléatoire $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{D}; F)$ satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau.
- (iv) Pour tout espace métrique standard (E, ρ) , toute variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{D}; (E, \rho))$ satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau.

Démonstration. \circ (iv) \implies (i) est évident.

\circ (i) \implies (ii) : on prend $E = \mathbb{R}$.

\circ (ii) \implies (iii). Soient F un ensemble fini et $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{D}; F)$. Puisque E est infini, on peut supposer que $F \subset E$. On pose $m = \min \{\rho(e, f) \mid e, f \in F\}$. Soit $\delta > 0$. Appliquant l'hypothèse (i), on obtient un entier $n_0 \leq 0$, un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$ avec une filtration \mathcal{F}' isomorphe à \mathcal{F} , une paramétrisation locale $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et une variable aléatoire $Z' \in L^1(\sigma(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0); E)$ telle que $\mathbb{E}'[\rho(X', Z')] < m\delta/2$, et on a alors $\mathbb{P}[\rho(X', Z') \geq m/2] < \delta$. On ordonne F et on définit une application $\psi: E \rightarrow F$ en prenant pour $\psi(x)$ le point de F le plus proche x , ou le premier de ces points s'il y en a plusieurs. Sur l'événement $\{\rho(X', Z') \geq m/2\}$, on a $\psi(X') = Z'$, et en posant $S' = \psi(X') \in L^{\text{simple}}(\sigma(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0); F)$, on a alors $\mathbb{P}'[X' \neq S'] \leq \mathbb{P}[\rho(X', Z') \geq m/2] < \delta$.

\circ (iii) \implies (iv). Soient $X \in L^1(\mathcal{D}; (E, \rho))$ et $\delta > 0$. Par densité de $L^{\text{simple}}(\mathcal{D}; E)$ dans $L^1(\mathcal{D}; (E, \rho))$, il existe un ensemble fini F de E et une variable aléatoire $T \in L^{\text{simple}}(\mathcal{D}; F)$ telle que $\mathbb{E}[\rho(X, T)] < \delta/2$. Appelons M le diamètre de F . Appliquant l'hypothèse (ii), on obtient un entier $n_0 \leq 0$, une paramétrisation locale $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ d'une filtration \mathcal{F}' isomorphe à \mathcal{F} , et une variable aléatoire $Z' \in L^{\text{simple}}(\sigma(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0); F)$ telle que $\mathbb{P}'[T' \neq Z'] < \delta/2M$. Par conséquent, $\mathbb{E}'[\rho(T', Z')] < \delta/2$, puis $\mathbb{E}'[\rho(X', Z')] < \delta$. \square

Corollaire 17.2.5. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration, \mathcal{D} une sous- σ -algèbre de \mathcal{F}_0 et E un espace métrique standard.

- (i) Si \mathcal{D} satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau, alors pour tout espace métrique standard E , toute variable aléatoire $X \in L^0(\mathcal{D}; E)$ satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau.
- (ii) S'il existe un espace métrique standard E infini tel que toute variable aléatoire $X \in L^0(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau, alors \mathcal{D} satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente avec $\rho \wedge 1$ au lieu de ρ . \square

Proposition 17.2.6. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration et E un espace métrique standard. Une variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau si et seulement si la σ -algèbre $\sigma(X)$ satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau.

Démonstration. Si la σ -algèbre $\sigma(X)$ satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau, alors X satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau par la proposition 17.2.4. Inversement supposons que X satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau. Pour montrer que $\sigma(X)$ satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau, nous choisissons, par le biais du corollaire 17.2.5, de montrer que $L^0(\sigma(X); \mathbb{R}) \subset P^0(\mathcal{F}_0; \mathbb{R})$. Notons Θ l'ensemble des variables aléatoires $S \in L^0(\sigma(X); \mathbb{R})$ de la forme $S = f(X)$ où $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est lipschitzienne. Par le corollaire 1.2.7 et le lemme 17.2.3, il suffit de montrer que toute variable aléatoire $S \in \Theta$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau. Considérons alors une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, notons c un rapport de Lipschitz de f , posons $S = f(X)$, et

donnons-nous un réel $\delta > 0$. Par hypothèse, on a un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, un entier $n_0 \leq 0$, une filtration \mathcal{F}' sur $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, isomorphe à \mathcal{F} une paramétrisation $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et une variable aléatoire $Z' \in L^1(\sigma(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0); E)$ telle que $\mathbb{E}'[\rho(X', Z')] < \delta^2/c$. Posons $T' = f(Z')$; on a alors

$$\mathbb{P}'[|S' - T'| > \delta] \leq \mathbb{P}'[\rho(X', Z') > \delta/c] \leq \frac{c}{\delta} \mathbb{E}'[\rho(X', Z')] < \delta,$$

ce qui achève la preuve. \square

17.2.3 Lemmes et preuve de la proposition 17.2.2.

Lemme 17.2.7. *Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration conditionnellement séparable, (E, ρ) un espace métrique standard, $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ une variable aléatoire, et $\delta > 0$ un réel. S'il existe un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, un entier $n_0 \leq 0$, une filtration \mathcal{F}' sur $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, isomorphe à \mathcal{F} , une paramétrisation $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et une variable aléatoire $Z' \in L^1(\sigma(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0); E)$ telle que $\mathbb{E}'[\rho(X', Z')] < \delta$, alors pour tout entier $n_1 < n_0$, il existe un espace probabilisé $(\Omega'', \mathcal{A}'', \mathbb{P}'')$, une filtration \mathcal{F}'' sur $(\Omega'', \mathcal{A}'', \mathbb{P}'')$, isomorphe à \mathcal{F} une paramétrisation $(U''_{n_1+1}, \dots, U''_0)$ de \mathcal{F}'' sur $\llbracket n_1, 0 \rrbracket$, et une variable aléatoire $Z'' \in L^1(\sigma(U''_{n_1+1}, \dots, U''_0); E)$ telle que $\mathbb{E}''[\rho(X'', Z'')] < \delta$.*

Démonstration. Puisque \mathcal{F} est conditionnellement séparable, il existe une paramétrisation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_1, n_0 \rrbracket$; il suffit d'en prendre une puis le lemme se déduit facilement de la partie 1) du corollaire 17.1.7. \square

Lemme 17.2.8. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ des sous- σ -algèbres de \mathcal{A} telles que \mathcal{B} et \mathcal{C} sont indépendantes et $\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$. Soient E un espace métrique séparable et $\theta: E \times E \rightarrow [0, +\infty[$ une fonction borélienne positive. Pour $X, Y \in L^0(\mathcal{A}; E)$, on pose $\mathbb{D}[X, Y] = \mathbb{E}[\theta(X, Y)] \in [0, +\infty]$. Si $X \in L^0(\mathcal{B}; E)$ et $Y \in L^0(\mathcal{D} \vee \mathcal{C}; E)$, alors il existe une variable aléatoire $Z \in L^0(\mathcal{D}; E)$ telle que $\mathbb{D}[X, Z] \leq \mathbb{D}[X, Y]$.*

Démonstration. On peut écrire $Y = f(D, C)$ où $D \in L^0(\mathcal{D})$, $C \in L^0(\mathcal{C})$ et $f: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow E$ est borélienne. On applique alors le lemme 10.2.3 avec $\mathbf{X}_s = f(D, s)$. \square

Lemme 17.2.9. *Soit n_0 un entier négatif non nul. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration conditionnellement séparable. On se donne un espace métrique standard E et une variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_{n_0}; E)$. Si X satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau, alors pour tout réel $\delta > 0$, il existe un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, un entier $n_1 < n_0$, une filtration \mathcal{F}' sur $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, isomorphe à \mathcal{F} , une paramétrisation $(U'_{n_1+1}, \dots, U'_{n_0})$ de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_1, n_0 \rrbracket$, et une variable aléatoire $Z' \in L^1(\sigma(U'_{n_1+1}, \dots, U'_{n_0}); E)$ telle que $\mathbb{E}'[\rho(X', Z')] < \delta$.*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la définition, le lemme 17.2.7 (pour s'assurer que $n_1 < n_0$) puis le lemme 17.2.8. \square

Lemme 17.2.10. *Soit n_0 un entier négatif non nul. Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration conditionnellement séparable et (U_{n_0+1}, \dots, U_0) une paramétrisation de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. On se donne une variable aléatoire $X \in L^0(\mathcal{F}_0)$. Si \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau, alors pour tout réel $\delta > 0$, il existe un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, un entier $n_1 < n_0$, une filtration \mathcal{F}' sur $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, isomorphe à \mathcal{F} , une*

paramétrisation $(U'_{n_1+1}, \dots, U'_0)$ de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_1, 0 \rrbracket$ qui rallonge (U_{n_0+1}, \dots, U_0) , et une variable aléatoire Z' mesurable pour $\sigma(U'_{n_1+1}, \dots, U'_0)$ telle que $\mathbb{P}'[|X' - Z'| > \delta] < \delta$.

Démonstration. On peut écrire $X = f(Y_{n_0}, U_{n_0+1}, \dots, U_0)$ où $Y_{n_0} \in L^0(\mathcal{F}_{n_0})$ et f est borélienne. On munit $\mathbb{R}^{|n_0|+1}$ de la norme $\|x\| = \sum |x_i|$. Posons $\delta' = \delta/2$. Par le corollaire 1.2.7, il existe une fonction lipschitzienne $g: \mathbb{R}^{|n_0|+1}$ telle que si l'on pose $W = g(Y_{n_0}, U_{n_0+1}, \dots, U_0)$, alors $\mathbb{P}[|X - W| > \delta'] < \delta'$. Soit $c > 0$ un rapport de Lipschitz de g . Posons $\delta'' = c\delta'$. Puisque \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau, le lemme 17.2.9 fournit (en utilisant l'inégalité de Chebyshev et $\rho(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$) un espace probabilisé $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, un entier $n_1 < n_0$, une filtration \mathcal{F}' sur $(\Omega', \mathcal{A}', \mathbb{P}')$, isomorphe à \mathcal{F} , une paramétrisation $(U'_{n_1+1}, \dots, U'_{n_0})$ de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_1, n_0 \rrbracket$, et une variable aléatoire $Z'_{n_0} \in L^0(\sigma(U'_{n_1+1}, \dots, U'_{n_0}))$ telle que $\mathbb{P}'[|Y'_{n_0} - Z'_{n_0}| > \delta''] < \delta'$. En utilisant le corollaire 17.1.7, introduisons un espace probabilisé $(\Omega'', \mathcal{A}'', \mathbb{P}'')$ avec une filtration \mathcal{F}'' isomorphe à \mathcal{F} , une paramétrisation $(U''_{n_1+1}, \dots, U''_0)$ de \mathcal{F}'' sur $\llbracket n_1, 0 \rrbracket$ qui rallonge $(U'_{n_1+1}, \dots, U'_{n_0})$ et (U_{n_0+1}, \dots, U_0) . Par isomorphisme, on a $\mathbb{P}''[|Z''_{n_0} - Y''_{n_0}| > \delta''] < \delta'$. En posant $S'' = g(Z''_{n_0}, U''_{n_0+1}, \dots, U''_0)$ et $Z'' = f(Z''_{n_0}, U''_{n_0+1}, \dots, U''_0)$, on a

$$\mathbb{P}''[|S'' - W''| > \delta'] \leq \mathbb{P}''[|Z''_{n_0} - Y''_{n_0}| > \delta''] < \delta'.$$

Par ailleurs, on a $\mathbb{P}''[|X'' - W''| > \delta'] < \delta'$ par isomorphisme, et finalement on obtient $\mathbb{P}''[|X'' - Z''| > \delta] < \delta$. \square

Corollaire 17.2.11. *Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration et E un espace métrique standard, Si \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau, alors pour toute variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$, il existe une paramétrisation globale $(U'_n)_{n \leq 0}$ d'une filtration \mathcal{F}' isomorphe à \mathcal{F} telle que la copie de X est mesurable pour $\sigma(U'_n)_{n \leq 0}$.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau. Soit $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$. On note Y une variable aléatoire réelle telle que $\sigma(Y) = \sigma(X)$. Donnons-nous une suite $(\delta_k)_{k \geq 0}$ de réels qui décroît vers 0 quand $k \uparrow +\infty$. En utilisant le lemme 17.2.10, on sait construire une suites d'entiers négatifs $(n_k)_{k \geq 0}$ strictement croissante, et pour tout $k \geq 1$, une paramétrisation (U''_k, \dots, U''_0) pour \mathcal{F} sur $\llbracket n_k, 0 \rrbracket$ qui rallonge $(U''_{n_{k-1}}, \dots, U''_0)$, une variable aléatoire Z''_k mesurable pour $\sigma(U''_k, \dots, U''_0)$, telle que $\mathbb{P}''_k[|Y''_k - Z''_k| > \delta_k] < \delta_k$. On conclut alors avec le corollaire 17.1.12. \square

★ *Preuve de la proposition 17.2.2.* Supposons que $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ est essentiellement séparable et qu'elle satisfait le critère de Vershik paramétrique de premier niveau. On note Y_0 une variable aléatoire telle que $\sigma(Y_0) = \mathcal{F}_0$ et on lui applique le corollaire 17.2.11. \square

17.2.4 Cas d'une chaîne de Markov.

Proposition 17.2.12. *Soient (E_n, ρ_n) , $n \leq 0$, des espaces métriques standard et soit $(X_n)_{n \leq 0}$ une chaîne de Markov où X_n est à valeurs dans E_n . Alors pour tout $N \leq 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Il existe une filtration \mathcal{F}' isomorphe à \mathcal{F} , et une paramétrisation globale $(U'_n)_{n \leq 0}$ de la chaîne de Markov $(X'_n)_{n \leq 0}$ telle que la copie de X est mesurable pour $\sigma(U'_n)_{n \leq 0}$.*
- (ii) *Pour tout réel $\delta > 0$, il existe une filtration \mathcal{F}' isomorphe à \mathcal{F} , un entier $n_0 < 0$ et une paramétrisation $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ de la chaîne de Markov $(X_N)_{n \leq 0}$ tels que $\mathbb{P}'[\rho_N(X'_N, X''_N) > \delta] < \delta$.*

Démonstration. Il est clair que (i) \implies (ii). Pour montrer que (ii) \implies (i), on procède comme dans la preuve du corollaire 17.2.11. \square

17.3 I-confort paramétrique

Définition 17.3.1. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration. Sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$, soient \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' deux copies de \mathcal{F} coïmmérgées, $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ une paramétrisation de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et $(U''_{n_0+1}, \dots, U''_0)$ une paramétrisation de \mathcal{F}'' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. On note \mathcal{G}' et \mathcal{G}'' respectivement, les grossissements paramétriques de \mathcal{F}' et de \mathcal{F}'' avec $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ et $(U''_{n_0+1}, \dots, U''_0)$. On dit que $(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$ est une *coïmmersion paramétrique* de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, si \mathcal{G}' et \mathcal{G}'' sont coïmmérgées et si pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$.

$$\overline{\mathcal{L}}[(U'_n, U''_n) | \mathcal{G}'_{n-1} \vee \mathcal{G}''_{n-1}] = \overline{\mathcal{L}}[(U'_n, U''_n) | \mathcal{F}'_{n-1} \vee \mathcal{F}''_{n-1}],$$

On dit de plus que c'est une *I(n₀)-coïmmersion paramétrique* de \mathcal{F} si $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ est une I(n₀)-coïmmersion de \mathcal{F} .

Bien sûr si $(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$ est une I(n₀)-coïmmersion paramétrique de \mathcal{F} , les σ -algèbres \mathcal{G}'_{n_0} et \mathcal{G}''_{n_0} sont indépendantes puisque $\mathcal{G}'_{n_0} = \mathcal{F}'_{n_0}$ et $\mathcal{G}''_{n_0} = \mathcal{F}''_{n_0}$.

Lemme 17.3.2. Avec les notations de la définition précédente, si $(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$ est une coïmmersion paramétrique de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, alors la filtration $\mathcal{F}' \vee \mathcal{F}''$ est immergée dans $\mathcal{G}' \vee \mathcal{G}''$.

Démonstration. Cela se déduit du lemme 8.2.8. \square

Définition 17.3.3. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration et (E, ρ) un espace métrique séparable. On dit qu'une variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de I-confort paramétrique si pour tout $\delta > 0$, il existe sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$, une I(n₀)-coïmmersion paramétrique $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ telle que les copies de X vérifient $\overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X'')] < \delta$.

Lemme 17.3.4. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration et (E, ρ) un espace métrique standard. Si une variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de I-confort paramétrique, alors elle satisfait le critère de I-confort.

Démonstration. Une filtration est immergée dans son grossissement paramétrique avec une paramétrisation (lemme 16.1.7), et on achève la preuve avec le lemme 14.3.2. \square

Proposition 17.3.5. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration conditionnellement séparable. Alors une variable aléatoire mesurable pour \mathcal{F} satisfait le critère de I-confort si et seulement si elle satisfait le critère de I-confort paramétrique.

La preuve de cette proposition est présentée dans la section suivante.

17.4 Preuve de la proposition 17.3.5.

On démontre dans cette section que le critère de I-confort entraîne le critère de I-confort paramétrique pour une filtration conditionnellement séparable. Il s'agira de montrer que toute I(n₀)-coïmmersion d'une telle filtration peut se transférer par un isomorphisme dans une I(n₀)-coïmmersion paramétrique. Cela résultera de la partie 1) de la proposition 17.4.4 qui se démontre en réitérant le lemme 17.4.2.

Proposition 17.4.1. Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ une filtration à un pas séparable. On note V une novation de \mathcal{F}_0 dans \mathcal{F}_1 à valeurs dans un espace métrique séparable E qui admet une loi conditionnelle $\mu = \mathcal{L}[V | \mathcal{F}_0]$ par rapport à \mathcal{F}_0 . Soit $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{A}$ une σ -algèbre contenant \mathcal{F}_0 et de laquelle V est indépendante conditionnellement à \mathcal{F}_0 (ce qui équivaut à ce que \mathcal{F}_1 soit indépendante de \mathcal{H}_0 conditionnellement à \mathcal{F}_0). On définit la probabilité $\hat{\mathbb{P}} = \mathbb{P} \otimes \mu$ sur le produit $(\Omega, \mathcal{H}_0) \otimes (E, \mathfrak{B}_E)$, on pose $\hat{\mathcal{F}}_0 = \mathcal{F}_0 \otimes_\mu \{\emptyset, E\}$, $\hat{\mathcal{H}}_0 = \mathcal{H}_0 \otimes_\mu \{\emptyset, E\}$, et $\hat{V}(\omega, t) = t$. Alors il existe un unique plongement

$$\Psi: (\Omega, \mathcal{F}_1, \mathbb{P}) \longrightarrow (\Omega \otimes E, \mathcal{H}_0 \otimes \mathfrak{B}_E, \hat{\mathbb{P}})$$

tel que $\Psi(\mathcal{F}_0) = \hat{\mathcal{F}}_0$, et que $\Psi(V) = \hat{V}$ et $\hat{\mathcal{L}}[\hat{V} | \hat{\mathcal{H}}_0](\omega, t) = \hat{\mathcal{L}}[\hat{V} | \hat{\mathcal{F}}_0](\omega, t) = \mu_\omega$.

Démonstration. Cela résulte de la proposition 8.1.16. \square

Lemme 17.4.2. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ une filtration conditionnellement séparable à un pas. Sur un espace probabilisé $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$, soient $\mathcal{F}' = (\mathcal{F}'_0, \mathcal{F}'_1)$ et $\mathcal{F}'' = (\mathcal{F}''_0, \mathcal{F}''_1)$ deux copies coïmmergées de \mathcal{F} . On note $\bar{\mathcal{H}}_0 \subset \bar{\mathcal{A}}$ une σ -algèbre dans laquelle \mathcal{F}'_0 et \mathcal{F}''_0 sont contenues et de laquelle $\mathcal{F}'_1 \vee \mathcal{F}''_1$ est indépendante conditionnellement à $\mathcal{F}'_0 \vee \mathcal{F}''_0$. Alors il existe un espace probabilisé $(\hat{\Omega}, \hat{\mathcal{A}}, \hat{\mathbb{P}})$, un plongement $\Psi: \bar{\mathcal{H}}_0 \vee (\mathcal{F}'_1 \vee \mathcal{F}''_1) \rightarrow \hat{\mathcal{A}}$, deux variables aléatoires \hat{U}' et \hat{U}'' chacune de loi uniforme sur $[0, 1]$, chacune indépendantes de $\bar{\mathcal{H}}_0$, et telles que, en posant $\hat{\mathcal{F}}'_0 = \Psi(\mathcal{F}'_0)$, $\hat{\mathcal{F}}''_0 = \Psi(\mathcal{F}''_0)$, $\hat{\mathcal{H}}'_0 = \Psi(\bar{\mathcal{H}}_0)$, $\hat{\mathcal{F}}'_1 = \Psi(\mathcal{F}'_1)$, $\hat{\mathcal{F}}''_1 = \Psi(\mathcal{F}''_1)$, on a

$$\hat{\mathcal{L}}[(\hat{U}', \hat{U}'') | \hat{\mathcal{H}}'_0] = \hat{\mathcal{L}}[(\hat{U}', \hat{U}'') | \hat{\mathcal{F}}'_0 \vee \hat{\mathcal{F}}''_0],$$

$\hat{\mathcal{F}}'_1 \subset \hat{\mathcal{F}}'_0 \dot{\vee} \sigma(\hat{U}')$, $\hat{\mathcal{F}}''_1 \subset \hat{\mathcal{F}}''_0 \dot{\vee} \sigma(\hat{U}'')$, les filtrations $(\hat{\mathcal{F}}'_0, \hat{\mathcal{F}}'_1)$ et $(\hat{\mathcal{F}}''_0, \hat{\mathcal{F}}''_1)$ sont coïmmergées (et de plus les variables aléatoires \hat{U}' et \hat{U}'' sont indépendantes conditionnellement à $\hat{\mathcal{F}}'_1 \vee \hat{\mathcal{F}}''_1$).

Démonstration. Soit V une novation de \mathcal{F}_0 dans \mathcal{F}_1 . Notons $\mu = \mathcal{L}[(V', V'') | \mathcal{F}'_0 \vee \mathcal{F}''_0]$. On munit l'espace mesurable

$$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}}) = (\Omega, \bar{\mathcal{H}}_0) \otimes (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}})$$

de la probabilité $\tilde{\mathbb{P}} = \bar{\mathbb{P}} \otimes \mu$. Par la proposition 17.4.1, $\mu_{\bar{\omega}, v', v''} = \mu_{\bar{\omega}}$ est la loi conditionnelle du vecteur aléatoire $(\bar{\omega}, v', v'') \mapsto (v', v'')$ par rapport à $\bar{\mathcal{H}}_0 \otimes \{\emptyset, \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ et aussi par rapport à $(\mathcal{F}'_0 \vee \mathcal{F}''_0) \otimes \{\emptyset, \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$, et il existe un plongement de la σ -algèbre $\mathcal{F}'_1 \vee \mathcal{F}''_1 = (\mathcal{F}'_0 \vee \mathcal{F}''_0) \vee \sigma(V'_1, V''_1)$ dans $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ qui envoie la σ -algèbre $\mathcal{F}'_0 \vee \mathcal{F}''_0$ sur $(\mathcal{F}'_0 \vee \mathcal{F}''_0) \otimes_\mu \{\emptyset, \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}$ et le couple (V'_1, V''_1) sur $(\bar{\omega}, v', v'') \mapsto (v', v'')$.

Maintenant nous allons plonger $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ dans le produit de $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ par $([0, 1] \times [0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1] \times [0,1]})$ en construisant un noyau Γ de ce premier espace vers ce second, puis en considérant la probabilité $\tilde{\mathbb{P}} \otimes \Gamma$. Sur un espace probabilisé $(\Omega^*, \mathcal{A}^*, \mathbb{P}^*)$, soit $(\mathcal{F}_0^*, \mathcal{F}_1^*)$ une filtration isomorphe à $(\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1)$ et U^* un pas de paramétrisation de \mathcal{F}_0^* dans \mathcal{F}_1^* . On note $(\gamma_{\bar{\omega}, v})$ la copie de $\mathcal{L}[U^* | \mathcal{F}_1^*]$ sur l'espace $(\Omega, \bar{\mathcal{H}}_0) \otimes (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ par l'isomorphisme de $\mathcal{F}_0^* \dot{\vee} \sigma(U^*)$ sur $\mathcal{F}'_0 \otimes [0, 1]$ qui envoie \mathcal{F}_0^* sur \mathcal{F}'_0 et U^* sur $(\bar{\omega}, t) \mapsto t$, où $\mathcal{F}'_0 \otimes [0, 1]$ est muni de la probabilité produit de $\bar{\mathbb{P}}$ par la mesure de probabilité uniforme sur $[0, 1]$. De même, on note $(\beta_{\bar{\omega}, v})$ la copie de $\mathcal{L}[U^* | \mathcal{F}_1^*]$ sur l'espace $(\Omega, \bar{\mathcal{H}}_0) \otimes (\mathbb{R}, \mathfrak{B}_{\mathbb{R}})$ par l'isomorphisme de $\mathcal{F}_0^* \dot{\vee} \sigma(U^*)$ sur $\mathcal{F}''_0 \otimes [0, 1]$ qui envoie \mathcal{F}_0^* sur \mathcal{F}''_0 et U^* sur $(\bar{\omega}, t) \mapsto t$, où $\mathcal{F}''_0 \otimes [0, 1]$ est muni de la probabilité produit de $\bar{\mathbb{P}}$ par la mesure de probabilité uniforme sur $[0, 1]$. On définit alors le noyau $(\Gamma_{\bar{\omega}, v', v''})$ de $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{A}})$ vers $([0, 1] \times [0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1] \times [0,1]})$ par

$$\Gamma_{\bar{\omega}, v', v''} = \gamma_{\bar{\omega}, v'} \otimes \beta_{\bar{\omega}, v''}.$$

On définit alors sur l'espace mesurable

$$(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{A}}) = (\widetilde{\Omega}, \widetilde{\mathcal{A}}) \otimes ([0, 1] \times [0, 1], \mathfrak{B}_{[0,1] \times [0,1]})$$

la probabilité $\widehat{\mathbb{P}} = \widetilde{\mathbb{P}} \otimes \Gamma$. Sur $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathbb{P}})$, on pose alors $\widehat{\mathcal{F}}'_0 = (\mathcal{F}'_0 \otimes \{\emptyset, \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}) \otimes \{\emptyset, [0, 1] \times [0, 1]\}$, $\widehat{\mathcal{F}}''_0 = (\mathcal{F}''_0 \otimes \{\emptyset, \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}) \otimes \{\emptyset, [0, 1] \times [0, 1]\}$, $\widehat{\mathcal{H}}'_0 = (\overline{\mathcal{H}}_0 \otimes \{\emptyset, \mathbb{R} \times \mathbb{R}\}) \otimes \{\emptyset, [0, 1] \times [0, 1]\}$, on définit les variables aléatoires $\widehat{V}'(\overline{\omega}, v', v'', t', t'') = v'$, $\widehat{V}''(\overline{\omega}, v', v'', t', t'') = v''$, $\widehat{U}'(\overline{\omega}, v', v'', t', t'') = t'$, $\widehat{U}''(\overline{\omega}, v', v'', t', t'') = t''$, on pose $\widehat{\mathcal{F}}'_1 = \widehat{\mathcal{F}}'_0 \vee \sigma(\widehat{V}')$, $\widehat{\mathcal{F}}''_1 = \widehat{\mathcal{F}}''_0 \vee \sigma(\widehat{V}'')$.

Du fait que

$$\Psi(\mathcal{L}[(V', V'') | \overline{\mathcal{H}}_0]) = \mathcal{L}[(\widehat{V}', \widehat{V}'') | \widehat{\mathcal{H}}_0] = \mathcal{L}[(\widehat{V}', \widehat{V}'') | \widehat{\mathcal{F}}'_0 \vee \widehat{\mathcal{F}}''_0],$$

on déduit que les filtrations $(\widehat{\mathcal{F}}'_0, \widehat{\mathcal{F}}'_1)$ et $(\widehat{\mathcal{F}}''_0, \widehat{\mathcal{F}}''_1)$ sont, comme $(\mathcal{F}'_0, \mathcal{F}'_1)$ et $(\mathcal{F}''_0, \mathcal{F}''_1)$, deux copies coïmmérgées de \mathcal{F} .

Par ailleurs, comme on a un isomorphisme de $(\mathcal{F}_0^*, \mathcal{F}_1^*)$ sur $(\widehat{\mathcal{F}}'_0, \widehat{\mathcal{F}}'_1)$ qui envoie $\mathcal{L}[U^* | \mathcal{F}_1^*]$ sur $\mathcal{L}[\widehat{U}' | \widehat{\mathcal{F}}'_1] (= \gamma)$, alors \widehat{U}' est un pas de paramétrisation de $\widehat{\mathcal{F}}'_0$ dans $\widehat{\mathcal{F}}'_1$ par le lemme 17.1.5. De même, \widehat{U}'' est un pas de paramétrisation de $\widehat{\mathcal{F}}''_0$ dans $\widehat{\mathcal{F}}''_1$.

Le dernier point (entre parenthèses) résulte de l'égalité

$$\mathcal{L}[(\widehat{U}', \widehat{U}'') | \widehat{\mathcal{A}}] = \mathcal{L}[(\widehat{U}', \widehat{U}'') | \widehat{\mathcal{F}}'_1 \vee \widehat{\mathcal{F}}''_1] = \mathcal{L}[\widehat{U}' | \widehat{\mathcal{F}}'_1] \otimes \mathcal{L}[\widehat{U}'' | \widehat{\mathcal{F}}''_1]$$

résultant de la définition de Γ . □

Définition 17.4.3. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration. Sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$, soient \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' deux copies de \mathcal{F} coïmmérgées, (U'_n) une paramétrisation globale de \mathcal{F}' , (U''_n) une paramétrisation globale de \mathcal{F}'' . On note \mathcal{G}' et \mathcal{G}'' respectivement, les grossissements paramétriques de \mathcal{F}' et de \mathcal{F}'' avec $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ et $(U''_{n_0+1}, \dots, U''_0)$, et on note \mathcal{H}' et \mathcal{H}'' respectivement, les grossissements paramétriques de \mathcal{F}' et de \mathcal{F}'' avec (U'_n) et (U''_n) . On dit que $(\mathcal{H}', \mathcal{H}'')$ est une *coïmmersion paramétrique globale* de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, si \mathcal{H}' et \mathcal{H}'' sont coïmmérgées et si $(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$ est une coïmmersion paramétrique de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$.

La partie 2) de la proposition suivante ne sera utilisée que dans la section 17.7.

Proposition 17.4.4. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration conditionnellement séparable et $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ une coïmmersion de \mathcal{F} sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$.

- 1) Pour tout $n_0 < 0$, il existe, sur un espace probabilisé $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathbb{P}})$, une coïmmersion paramétrique $(\widehat{\mathcal{G}}', \widehat{\mathcal{G}}'')$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et un isomorphisme $\widehat{\Psi}$ de la filtration $(\mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}''_n)_{n \leq 0}$ sur la filtration $(\widehat{\mathcal{F}}'_n \vee \widehat{\mathcal{F}}''_n)_{n \leq 0}$ qui envoie \mathcal{F}' sur $\widehat{\mathcal{F}}'$ et \mathcal{F}'' sur $\widehat{\mathcal{F}}''$.
- 2) Soient $\widetilde{\mathcal{F}}$ une filtration isomorphe à \mathcal{F} et $(\widetilde{U}_n)_{n \leq 0}$ une paramétrisation globale de $\widetilde{\mathcal{F}}$. On note $\widetilde{\mathcal{H}}$ le grossissement paramétrique de $\widetilde{\mathcal{F}}$ avec $(\widetilde{U}_n)_{n \leq 0}$. Si $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ est une $I(n_0)$ -coïmmersion paramétrique de \mathcal{F} , il existe, sur un espace probabilisé $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathbb{P}})$, une $I(n_0)$ -coïmmersion $(\widehat{\mathcal{H}}', \widehat{\mathcal{H}}'')$ de $\widetilde{\mathcal{H}}$ qui est une $I(n_0)$ -coïmmersion paramétrique globale de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et un isomorphisme $\widehat{\Psi}$ de la filtration $(\mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}''_n)_{n \leq 0}$ sur la filtration $(\widehat{\mathcal{F}}'_n \vee \widehat{\mathcal{F}}''_n)_{n \leq 0}$ qui envoie \mathcal{F}' sur $\widehat{\mathcal{F}}'$ et \mathcal{F}'' sur $\widehat{\mathcal{F}}''$.

Démonstration. ◦ Montrons 1). Supposons que pour $m \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, nous avons construit

- un espace probabilisé $(\widehat{\Omega}_m, \widehat{\mathcal{A}}_m, \widehat{\mathbb{P}}_m)$, et sur celui-ci deux copies coïmmérgées $(\widehat{\mathcal{F}}'_n)_{n \leq m}$ et $(\widehat{\mathcal{F}}''_n)_{n \leq m}$ de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \leq m}$ et un isomorphisme $\widehat{\Psi}^m$ de la filtration $(\mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}''_n)_{n \leq m}$ sur la filtration $(\widehat{\mathcal{F}}'_n \vee \widehat{\mathcal{F}}''_n)_{n \leq m}$ qui envoie \mathcal{F}' sur $(\widehat{\mathcal{F}}'_n)_{n \leq m}$ et \mathcal{F}'' sur $(\widehat{\mathcal{F}}''_n)_{n \leq m}$;

- une paramétrisation $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_m)$ de la filtration $(\widehat{\mathcal{F}}'_n)_{n \leq m}$ sur $\llbracket n_0, m \rrbracket$, une paramétrisation $(U''_{n_0+1}, \dots, U''_m)$ de la filtration $(\widehat{\mathcal{F}}''_n)_{n \leq m}$ sur $\llbracket n_0, m \rrbracket$, telles que les grossissements paramétriques $(\widehat{\mathcal{G}}'_n)_{n \leq m}$ et $(\widehat{\mathcal{G}}''_n)_{n \leq m}$ associés à $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ et $(U''_{n_0+1}, \dots, U''_0)$ respectivement forment une coïmmersion paramétrique de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$.

Pour $m = n_0$ il n'y a rien à faire. Si on a ces constructions au rang m , on les prolonge au rang $m + 1$ grâce au lemme 17.4.2 sur l'espace probabilisé $(\widehat{\Omega}_{m+1}, \widehat{\mathcal{A}}_{m+1}, \widehat{\mathbb{P}}_{m+1})$ donné par ce lemme.

- Montrons 2). Supposons que pour $m \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, nous avons construit
 - un espace probabilisé $(\widehat{\Omega}_m, \widehat{\mathcal{A}}_m, \widehat{\mathbb{P}}_m)$, et sur celui-ci deux copies coïmmergées $(\widehat{\mathcal{F}}'_n)_{n \leq m}$ et $(\widehat{\mathcal{F}}''_n)_{n \leq m}$ de la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n \leq m}$ et un isomorphisme $\widehat{\Psi}^m$ de la filtration $(\mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}''_n)_{n \leq m}$ sur la filtration $(\widehat{\mathcal{F}}'_n \vee \widehat{\mathcal{F}}''_n)_{n \leq m}$ qui envoie \mathcal{F}' sur $(\widehat{\mathcal{F}}'_n)_{n \leq m}$ et \mathcal{F}'' sur $(\widehat{\mathcal{F}}''_n)_{n \leq m}$;
 - une paramétrisation globale $(\widehat{U}'_n)_{n \leq m}$ de $(\widehat{\mathcal{F}}'_n)_{n \leq m}$, une paramétrisation globale $(\widehat{U}''_n)_{n \leq m}$ de $(\widehat{\mathcal{F}}''_n)_{n \leq m}$, telles que les grossissements paramétriques globaux $(\widehat{\mathcal{H}}'_n)_{n \leq m}$ et $(\widehat{\mathcal{H}}''_n)_{n \leq m}$ associées à $(\widehat{U}'_n)_{n \leq m}$ et $(\widehat{U}''_n)_{n \leq m}$ forment une $I(n_0)$ -coïmmersion et telles que les grossissements paramétriques locaux $(\widehat{\mathcal{G}}'_n)_{n \leq m}$ et $(\widehat{\mathcal{G}}''_n)_{n \leq m}$ associés à $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ et $(U''_{n_0+1}, \dots, U''_0)$ respectivement forment une coïmmersion paramétrique de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$.

Pour $m = n_0$, il suffit de considérer deux copies indépendantes de $(\widehat{\mathcal{H}}_n)_{n \leq n_0}$. Si on a ces constructions au rang m , on les prolonge au rang $m + 1$ grâce au lemme 17.4.2 sur l'espace probabilisé $(\widehat{\Omega}_{m+1}, \widehat{\mathcal{A}}_{m+1}, \widehat{\mathbb{P}}_{m+1})$ donnée par ce lemme. \square

★ *Preuve de la proposition 17.3.5.* Soient (E, ρ) un espace métrique standard, $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$, et $(\mathcal{F}', \mathcal{F}'')$ une I-coïmmersion de \mathcal{F} sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$. Par la proposition 17.4.4, on a sur un grossissement $(\widehat{\Omega}, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{\mathbb{P}})$ de $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ une I-coïmmersion $(\widehat{\mathcal{G}}', \widehat{\mathcal{G}}'')$ paramétrique de \mathcal{F} telle que $\widehat{\mathbb{E}}[\rho(\widehat{X}', \widehat{X}'')] = \overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X'')]$. Ainsi si X satisfait le critère de I-confort, elle satisfait le critère de I-confort paramétrique. \square

17.5 I-jonction paramétrique en arbre

Pour obtenir l'équivalence du critère de Vershik de premier niveau paramétrique et du critère de I-confort paramétrique, de manière analogue au cas non paramétrique, nous introduisons le critère de I-jonction paramétrique en arbre, puis suivons la même démarche.

17.5.1 Cas d'une filtration.

Définition 17.5.1. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration. Sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$, soient \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' deux copies de \mathcal{F} coïmmergées, $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ une paramétrisation de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et $(U''_{n_0+1}, \dots, U''_0)$ une paramétrisation de \mathcal{F}'' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, telles que les grossissements paramétriques respectivement associés \mathcal{G}' et \mathcal{G}'' forment une coïmmersion paramétrique de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. On dit que c'est une *coïmmersion paramétrique de \mathcal{F} en arbre sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$* si $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ et $(U''_{n_0+1}, \dots, U''_0)$ sont toutes deux des paramétrisations de la filtration $\mathcal{F}' \vee \mathcal{F}''$ sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$,

Lemme 17.5.2. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration. Sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$, soient \mathcal{F}' et \mathcal{F}'' deux copies de \mathcal{F} coïmmergées, $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ une paramétrisation de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et $(U''_{n_0+1}, \dots, U''_0)$ une paramétrisation de \mathcal{F}'' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, telles que les grossissements paramétriques respectivement associés \mathcal{G}' et \mathcal{G}'' forment une coïmmersion paramétrique de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. Alors c'est une *coïmmersion paramétrique de \mathcal{F} en arbre sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$* si et seulement si

pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, il existe une variable aléatoire $S_{n-1} \in L^0(\mathcal{F}_{n-1})$ et une famille mesurable $\{\psi_{y', y''}^{(n)}\}_{y', y'' \in \mathbb{R}}$ de transformations inversibles de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ telles que $U_n'' = \psi_{S_{n-1}', S_{n-1}''}^{(n)}(U_n')$.

Démonstration. Cela résulte de la proposition 4.3.7 et du lemme 10.1.7. \square

Le lemme suivant est essentiel dans la preuve de la proposition 17.5.6.

Lemme 17.5.3. *Avec les notations de la définition précédente, il existe un vecteur aléatoire $(V'_{n_0+1}, \dots, V'_0)$ qui est à la fois une novation de \mathcal{F}' et de $\mathcal{F}' \vee \mathcal{F}''$ sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$.*

Démonstration. Pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, on note V'_n une variable aléatoire réelle telle que $\sigma(V'_n) = \sigma(\mathcal{L}[U'_n | \mathcal{F}'_n])$. Par le lemme 15.5.5, V'_n est une novation de \mathcal{F}'_{n-1} dans \mathcal{F}'_n , et aussi une novation de $\mathcal{F}'_{n-1} \vee \mathcal{F}''_{n-1}$ dans $\mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}''_n$ puisque $\mathcal{L}[U'_n | \mathcal{F}'_n] = \mathcal{L}[U'_n | \mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}''_n]$ par immersion et que l'on a $\mathcal{F}'_n \vee \mathcal{F}''_n \subset \mathcal{F}'_{n-1} \vee \mathcal{F}''_{n-1} \vee \sigma(U'_n)$ parce que la coïmmersion paramétrique est en arbre. \square

Lemme 17.5.4. *Toujours avec les notations de la définition précédente, il existe une novation $(V'_{n_0+1}, \dots, V'_0)$ de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ telle que pour toute variable aléatoire X mesurable pour \mathcal{F}_0 , il existe une variable aléatoire $Y_{n_0}'' \in L^0(\mathcal{F}_{n_0})$ telle que $\sigma(Y_{n_0}'', U''_{n_0+1}, U''_{n_0+2}, \dots, U''_0) \supset \sigma(X'')$ et pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, on peut écrire*

$$U_n'' = \varphi_{Y_{n_0}'', Y_{n_0}'', V'_{n_0+1}, V'_{n_0+2}, \dots, V'_{n-1}}^{(n)}(U_n')$$

où $\{\varphi_{y', y'', v'_{n_0+1}, v'_{n_0+2}, \dots, v'_{n-1}}^{(n)}\}$ est une famille mesurable de transformations inversibles de $[0, 1]$ préservant la mesure de Lebesgue.

Démonstration. On prend la novation $(V'_{n_0+1}, \dots, V'_0)$ du lemme 17.5.3 et on conclut en utilisant les lemmes 15.1.2 et 10.1.7. \square

Définition 17.5.5. Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration et (E, ρ) un espace métrique standard. On dit qu'une variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de I-jonction paramétrique en arbre si pour tout réel $\delta > 0$, il existe une $I(n_0)$ -coïmmersion paramétrique $(\mathcal{G}', \mathcal{G}'')$ de \mathcal{F} en arbre sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$, dans laquelle les copies de X vérifient $\overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X'')] < \delta$.

Proposition 17.5.6. *Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration et (E, ρ) un espace métrique standard. Une variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de I-jonction paramétrique en arbre si et seulement si elle satisfait le critère de I-confort paramétrique.*

Démonstration. Il est évident que $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de I-confort paramétrique si elle satisfait le critère de I-jonction paramétrique en arbre. Supposons maintenant que $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de I-confort paramétrique. Pour tout $\delta > 0$, il existe donc un entier $n_0 < 0$ et une $I(n_0)$ -coïmmersion paramétrique de \mathcal{F} sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$, dans laquelle les copies X' et X^* de X vérifient $\overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X^*)] < \delta$. La partie b) du corollaire 15.2.1 appliqué avec $\epsilon = \delta$ donne sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ une $I(n_0)$ -coïmmersion paramétrique de \mathcal{F} en arbre sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ dans laquelle les copies X' et X'' de X vérifient $\overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X'')] < 2\delta$. \square

Proposition 17.5.7. *Soient $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration et (E, ρ) un espace métrique standard. Une variable aléatoire $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau paramétrique si et seulement si elle satisfait le critère de I-jonction paramétrique en arbre.*

Démonstration. Si $X \in L^1(\mathcal{F}_0; E)$ satisfait le critère de Vershik de premier niveau paramétrique, il n'est pas difficile de montrer qu'elle satisfait le critère de I-jonction en arbre paramétrique en utilisant la proposition 9.1.3. Traitons maintenant la réciproque. On se donne $\delta > 0$. On a une I(n_0)-coïmmersion paramétrique de \mathcal{F} en arbre sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$ telle que $\mathbb{E}[\rho(X', X'')] < \delta$. Notons $(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ la paramétrisation de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et $(U''_{n_0+1}, \dots, U''_0)$ la paramétrisation de \mathcal{F}'' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. Par le lemme 17.5.4, on a une variable aléatoire $Y_{n_0} \in L^0(\mathcal{F}_{n_0})$ et pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$ une famille mesurable $\{\varphi_{y', y'', v'_{n_0+1}, v'_{n_0+2}, \dots, v'_{n-1}}^{(n)}\}$ de transformations inversibles de $[0, 1]$ préservant la mesure de Lebesgue tels que pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$,

$$U''_n = \varphi_{Y_{n_0}, Y''_{n_0+1}, V'_{n_0+1}, V'_{n_0+2}, \dots, V'_{n-1}}^{(n)}(U'_n),$$

et on peut écrire $X'' = f(Y''_{n_0}, U''_{n_0+1}, U''_{n_0+2}, \dots, U''_0)$. Pour tout $n \in \llbracket n_0, 0 \rrbracket$, et tout $y'' \in \mathbb{R}$, notons $\tilde{U}''_n(y'') = \varphi_{Y'_{n_0}, y'', V'_{n_0+1}, V'_{n_0+2}, \dots, V'_{n-1}}^{(n)}(U'_n)$. Le lemme 10.2.3 appliqué avec $\mathbf{X}_s = f((s, \tilde{U}''_{n_0+1}(s), \tilde{U}''_{n_0+2}(s), \dots, \tilde{U}''_0(s)))$, avec $\mathcal{C} = \mathcal{F}'_{n_0}$ et $\mathcal{B} = \mathcal{F}'_{n_0} \dot{\vee} \sigma(U'_{n_0+1}, \dots, U'_0)$ donne un y'' tel que si

$$\tilde{U}_n = \varphi_{Y'_{n_0}, y'', V'_{n_0+1}, V'_{n_0+2}, \dots, V'_{n-1}}^{(n)}(U'_n),$$

alors $\tilde{X} := f(y'', \tilde{U}_{n_0+1}, \dots, \tilde{U}_0)$ est telle que $\mathbb{E}[\rho(X', \tilde{X})] \leq \mathbb{E}[\rho(X', X'')] < \delta$. Or il est facile de vérifier que $(\tilde{U}_{n_0+1}, \dots, \tilde{U}_0)$ est une paramétrisation de \mathcal{F}' sur $\llbracket n_0, 0 \rrbracket$. \square

17.5.2 Cas d'une chaîne de Markov.

Nous ne savons pas répondre aux questions suivantes :

Question 17.5.8. *Est-ce que*

- *La filtration d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n \leq 0}$ est standard si et seulement si il existe une paramétrisation génératrice de la chaîne de Markov $(X_n)_{n \leq 0}$?*
- *(cf proposition 17.2.12) La filtration d'une chaîne de Markov $(X_n)_{n \leq 0}$ est standard si et seulement si pour tout $N \leq 0$, il existe une filtration \mathcal{F}' isomorphe à \mathcal{F} , et une paramétrisation globale $(U'_n)_{n \leq 0}$ de la chaîne de Markov $(X'_n)_{n \leq 0}$ pour laquelle X'_N est mesurable ?*

17.6 Confort et paramétrisations.

Théorème 17.6.1. *Une filtration conditionnellement séparable est I-confortable si et seulement si elle satisfait le critère de Vershik de premier niveau paramétrique.*

Démonstration. Par (la partie facile de) la proposition 17.5.7, si \mathcal{F} satisfait le critère de Vershik de premier niveau paramétrique, alors elle satisfait le critère de I-jonction paramétrique en arbre, donc le critère de I-confort paramétrique, et donc le critère de I-confort par le lemme 17.3.4. Inversément, supposons que \mathcal{F} est I-confortable. Par la proposition 17.3.5, elle satisfait le critère de I-confort paramétrique, et par la proposition 17.5.6, elle satisfait le critère de I-jonction paramétrique en arbre, et par la proposition 17.5.7, elle satisfait le critère de Vershik de premier niveau paramétrique. \square

Théorème 17.6.2. *Une filtration essentiellement séparable est I-confortable si et seulement si elle admet une paramétrisation génératrice.*

Démonstration. C'est une conséquence du théorème précédent et de la proposition 17.2.2. \square

17.7 I-confort des chaînes de Markov.

C'est pour établir la proposition suivante que la partie 2) de la proposition 17.4.4 a été faite.

Proposition 17.7.1. *Soit $(X_n)_{n \leq 0}$ une chaîne de Markov dans des espaces métriques standard et $(X'_n, U'_n)_{n \leq 0}$ une version constructive de $(X_n)_{n \leq 0}$. Alors la filtration de $(X_n)_{n \leq 0}$ est I-confortable si et seulement si la filtration de $(X'_n, U'_n)_{n \leq 0}$ est I-confortable.*

Démonstration. Notons \mathcal{F} la filtration de $(X_n)_{n \leq 0}$ et \mathcal{H}' la filtration de $(X'_n, U'_n)_{n \leq 0}$. Comme \mathcal{F} est immersible dans \mathcal{H}' , elle est I-confortable si \mathcal{H}' l'est (lemme 14.3.2). Montrons la réciproque : nous supposons que \mathcal{F}' est I-confortable. Pour montrer que \mathcal{H}' est I-confortable, il suffit d'après le lemme 16.3.2 et le corollaire 14.2.3 de montrer que pour tout $n \leq 0$ la variable aléatoire X'_n satisfait le critère de I-confort dans \mathcal{H}' . Cela résulte du fait que X_n satisfait le critère de I-confort dans \mathcal{F} et de la partie 2) de la proposition 17.4.4. \square

Il serait possible de démontrer cette proposition en utilisant le critère de standardité de Vershik (définition 19.1.1) au lieu du I-confort.

Si $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ est une filtration, et $\sigma : -\mathbb{N} \rightarrow -\mathbb{N}$ une application strictement croissante, la filtration extraite de \mathcal{F} par σ est la filtration notée $\mathcal{F}^\sigma = (\mathcal{F}_n^\sigma)_{n \leq 0}$ définie par $\mathcal{F}_n^\sigma = \mathcal{F}_{\sigma(n)}$. Le théorème d'isomorphisme lacunaire que nous verrons dans le chapitre 19 affirme que l'on peut toujours extraire une filtration standard d'une filtration essentiellement séparable.

Corollaire 17.7.2. *Soit $(X_n)_{n \leq 0}$ une chaîne de Markov dans des espaces métriques standard et soit $\sigma : -\mathbb{N} \rightarrow -\mathbb{N}$ une application strictement croissante. On note $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ la filtration de $(X_n)_{n \leq 0}$. Alors la filtration \mathcal{F}^σ est I-confortable si et seulement si la filtration de la chaîne de Markov $(X_{\sigma(n)})_{n \leq 0}$ est I-confortable.*

Démonstration. La filtration de la chaîne de Markov $(X_{\sigma(n)})_{n \leq 0}$ est immergée dans $(\mathcal{F}_{\sigma(n)})_{n \leq 0}$, donc elle est I-confortable si \mathcal{F}^σ l'est (lemme 14.3.2). Nous montrons la réciproque. Supposons que la filtration de la chaîne de Markov $(X_{\sigma(n)})_{n \leq 0}$ est I-confortable. Soit $(X'_n, U'_n)_{n \leq 0}$ une version constructive de $(X_n)_{n \leq 0}$, et \mathcal{G}' sa filtration. Notons V'_n une variable aléatoire telle que $\sigma(V'_n) = \sigma(U'_{\sigma(n-1)+1}, \dots, U'_{\sigma(n)})$. Alors $(X'_{\sigma(n)}, V'_n)_{n \leq 0}$ est une version constructive de $(X_{\sigma(n)})_{n \leq 0}$ et sa filtration est $(\mathcal{G}'_{\sigma(n)})_{n \leq 0}$, dans laquelle $\mathcal{F}^\sigma = (\mathcal{F}_{\sigma(n)})_{n \leq 0}$ est immersible. Or la filtration $(\mathcal{G}'_{\sigma(n)})_{n \leq 0}$ est I-confortable d'après la proposition 17.7.1, et le lemme 14.3.2 donne la conclusion désirée. \square

B. Tsirelson a construit ([Ts0]) une chaîne de Markov $(X_n)_{n \leq 0}$ engendrant une filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ qui n'est pas standard, mais la chaîne de Markov $(X_{2n})_{n \leq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes, et ainsi la filtration $(\mathcal{F}_{2n})_{n \leq 0}$ est standard.

CINQUIÈME PARTIE

DEUX COURTS CHAPITRES.

Nous terminons par deux courts chapitres indépendants l'un de l'autre. Le premier donne une définition équivalente du I-confort qui semble a priori plus forte; en outre, une application immédiate du lemme de Slutsky sur cette définition donnera encore une définition équivalente remarquable. Le second énonce le *critère de standardité de Vershik* à l'aide duquel nous donnerons une preuve rapide du *théorème d'isomorphisme lacunaire*.

18. LE I^∞ -CONFORT ET UNE APPLICATION DU LEMME DE SLUTSKY.

Dans la définition suivante et dans tout ce chapitre, on note $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Définition 18.0.1. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que \mathcal{F} est I^∞ -confortable si il existe un espace probabilisé $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$ et, pour toute variable aléatoire $X \in L^0(\mathcal{F}_0)$, il existe une suite de plongements $\Psi^{(k)}: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$, où $k \in \bar{\mathbb{N}}$, tels que pour tout $k, k' \in \bar{\mathbb{N}}$ les filtrations $\Psi^{(k)}(\mathcal{F})$ et $\Psi^{(k')}(\mathcal{F})$ forment une I-coïmmersion de \mathcal{F} , et $\Psi^{(k)}(X) \longrightarrow \Psi^{(\infty)}(X)$ en probabilité quand $k \rightarrow +\infty$.

La différence par rapport à la définition du I-confort est apparente, et il est clair qu'une filtration I^∞ -confortable est I-confortable. Ce chapitre se consacre d'abord à la démonstration du théorème suivant dans la première section.

Théorème 18.0.2. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration conditionnellement séparable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors \mathcal{F} est I-confortable si et seulement si elle est I^∞ -confortable.

Dans la section 18.2, nous verrons en utilisant le lemme de Slutsky qu'on a aussi le résultat plus fort suivant.

Théorème 18.0.3. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration conditionnellement séparable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Alors \mathcal{F} est I-confortable si et seulement si il existe un espace de probabilité $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$, une suite de plongements $\Psi^{(k)}: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$, où $k \in \bar{\mathbb{N}}$ tels que pour tout $k, k' \in \bar{\mathbb{N}}$ les filtrations $\Psi^{(k)}(\mathcal{F})$ et $\Psi^{(k')}(\mathcal{F})$ forment une I-coïmmersion de \mathcal{F} , et pour tout événement $A \in \mathcal{F}_0$, on a $\Psi^{(k)}(\mathbb{1}_A) \longrightarrow \Psi^{(\infty)}(\mathbb{1}_A)$ en probabilité quand $k \rightarrow +\infty$.

Cela ne montre pas la question suivante non résolue : pour que la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ soit I-confortable, suffit-il que toutes les variables aléatoires indicatrices $\mathbb{1}_A$, $A \in \mathcal{F}_0$, satisfassent le critère de I-confort ?

18.1 Le I^∞ -confort

Proposition 18.1.1. Une filtration immersible dans une filtration I^∞ -confortable est elle-même I^∞ -confortable.

Démonstration. C'est une conséquence facile du lemme 14.3.2. □

Proposition 18.1.2. Une filtration de type produit local qui satisfait le critère de Vershik de premier niveau est I^∞ -confortable.

Démonstration. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration de type produit local sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ qui satisfait le critère de Vershik de premier niveau (définition 3.7.1, pas définition 3.1.3). On considère deux copies indépendantes \mathcal{F}' , \mathcal{F}^* de \mathcal{F} sur un espace de probabilité $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$. Soit $X \in L^0(\mathcal{F}_0)$. On se donne une suite $(\delta_k)_{k \leq 0}$ de réels > 0 telle que $\delta_k \longrightarrow 0$. Puisque \mathcal{F} satisfait le critère de

Vershik de premier niveau, on a, pour tout $k \leq 0$, un entier n_k suffisamment petit, une suite de compléments $(\mathcal{C}_{n_k+1}^{(k)}, \mathcal{C}_{n_k+2}^{(k)}, \dots, \mathcal{C}_0^{(k)})$ de \mathcal{F} sur $\llbracket n_k, 0 \rrbracket$ et une variable aléatoire $Z_{(k)}$ mesurable pour $\sigma(\mathcal{C}_{n_k+1}^{(k)}, \mathcal{C}_{n_k+2}^{(k)}, \dots, \mathcal{C}_0^{(k)})$ telle que $\mathbb{P}[|X - Z_{(k)}| > \delta_k/2] < \delta_k/2$. Pour tout $k \geq 0$, on définit la filtration $\mathcal{F}^{(k)}$ sur $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$ par

$$\mathcal{F}_n^{(k)} = \begin{cases} \mathcal{F}_n^* & \text{si } n \leq n_k, \\ \mathcal{F}_{n_k}^* \vee \sigma(\mathcal{C}_{n_k+1}^{(k)}, \mathcal{C}_{n_k+2}^{(k)}, \dots, \mathcal{C}_n^{(k)}) & \text{si } n_k < n \leq 0. \end{cases}$$

Alors $(\mathcal{F}', \mathcal{F}^{(k)})$ est une I-coïmmersion de \mathcal{F} en arbre sur $\llbracket n_k, 0 \rrbracket$, les copies dans \mathcal{F}' et $\mathcal{F}^{(k)}$ de la variable aléatoire $Z_{(k)}$ sont identiques et l'inégalité triangulaire donne

$$\overline{\mathbb{P}}[|X' - X^{(k)}| > \delta_k] < \delta_k.$$

Pour $k \geq 0$, on prend alors pour $\Psi^{(k)}$ l'isomorphisme considéré qui envoie \mathcal{F} sur $\mathcal{F}^{(k)}$ et pour $\Psi^{(\infty)}$, on prend l'isomorphisme considéré qui envoie \mathcal{F} sur \mathcal{F}' . \square

★ *Preuve du théorème 18.0.2.* Supposons que la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est conditionnellement séparable et I-confortable. Par le corollaire 15.4.1, \mathcal{F} est immergée dans une filtration conditionnellement non-atomique qui satisfait le critère de Vershik de premier niveau, et donc \mathcal{F} est I^∞ -confortable par les propositions 18.1.2 et 18.1.1. \square

18.2 Plus que le I^∞ -confort.

Lemme 18.2.1 (Lemme de Slutsky). *Sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit $(X^{(k)})_{k \geq 0}$ une suite de variables aléatoires identiquement distribuées dans un espace métrique séparable. On suppose que $X^{(k)} \rightarrow X$ en probabilité. Alors si h est borélienne, $h \circ X^{(k)} \rightarrow h(X)$ en probabilité.*

Démonstration. L'ensemble des fonctions h qui vérifient ceci contient évidemment les fonctions continues. En vertu de la proposition 1.2.6, il suffit alors de vérifier qu'il est stable par limites simples. La preuve est écrite dans [BEKSY]. \square

Proposition 18.2.2. *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration essentiellement séparable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note Y_0 une variable aléatoire qui engendre la σ -algèbre \mathcal{F}_0 . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) \mathcal{F} est I-confortable.
- (ii) Il existe un espace de probabilité $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$, une suite de plongements $\Psi^{(k)}: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$, où $k \in \overline{\mathbb{N}}$ tels que pour tout $k, k' \in \overline{\mathbb{N}}$ les filtrations $\Psi^{(k)}(\mathcal{F})$ et $\Psi^{(k')}(\mathcal{F})$ forment une I-coïmmersion de \mathcal{F} , et on a $\Psi^{(k)}(Y_0) \rightarrow \Psi^{(\infty)}(Y_0)$ en probabilité quand $n \rightarrow \infty$.
- (iii) Il existe un espace de probabilité $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$, une suite de plongements $\Psi^{(k)}: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$, où $k \in \overline{\mathbb{N}}$ tels que pour tout $k, k' \in \overline{\mathbb{N}}$ les filtrations $\Psi^{(k)}(\mathcal{F})$ et $\Psi^{(k')}(\mathcal{F})$ forment une I-coïmmersion de \mathcal{F} , et pour toute $X \in L^0(\mathcal{F}_0)$, on a $\Psi^{(k)}(X) \rightarrow \Psi^{(\infty)}(X)$ en probabilité quand $k \rightarrow \infty$.

Démonstration. On a (i) \implies (ii) par le théorème 18.0.2, (ii) \implies (iii) en appliquant le lemme de Slutsky à Y_0 , et (iii) \implies (i) est une évidence. \square

Théorème 18.2.3. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration conditionnellement séparable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour que \mathcal{F} soit I-confortable, il faut et il suffit qu'il existe un espace de probabilité $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$, une suite de plongements $\Psi^{(k)}: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mathbb{P}})$, où $k \in \bar{\mathbb{N}}$ tels que pour tout $k, k' \in \bar{\mathbb{N}}$ les filtrations $\Psi^{(k)}(\mathcal{F})$ et $\Psi^{(k')}(\mathcal{F})$ forment une I-coïmmersion de \mathcal{F} , et pour toute événement $A \in \mathcal{F}_0$, on ait $\bar{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_{\Psi^{(k)}}(A) \neq \mathbb{1}_{\Psi^{(\infty)}}(A)] \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow +\infty$.

Démonstration. Si \mathcal{F} est I-confortable, ces conditions sont satisfaites par la proposition 18.2.2, car si $\Psi^{(k)}(\mathbb{1}_A) \rightarrow \Psi^{(\infty)}(\mathbb{1}_A)$ en probabilité quand $k \rightarrow \infty$, alors $\bar{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_{\Psi^{(k)}}(A) \neq \mathbb{1}_{\Psi^{(\infty)}}(A)] \rightarrow 0$. Réciproquement, si les conditions du théorème sont satisfaites, la linéarité des isomorphismes entre espaces probabilisés entraîne que pour toute $X \in L^{\text{simple}}(\mathcal{F}_0)$, on a $\bar{\mathbb{P}}[\Psi^{(k)}(X) \neq \Psi^{(\infty)}(X)] \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$, donc X satisfait le critère de I-confort. \square

19. LE THÉORÈME D'ISOMORPHISME LACUNAIRE.

L'idée de ce chapitre est de regarder le phénomène analogue au lemme de Slutsky sur le critère de standardité de Vershik et d'en tirer une preuve du *théorème d'isomorphisme lacunaire* (théorème 19.2.4). Ce théorème a été établi par Vershik mais pas de la même manière.

19.1 Critère de standardité de Vershik

Nous utilisons les notations de [ES]. Lorsque (K, ρ) est un espace métrique compact, on note K' l'ensemble des probabilités sur K et ρ' la *distance de Kantorovich-Rubinstein* sur K' , définie par

$$\rho'(\mu, \nu) = \inf \int \rho(x, y) d\Lambda(x, y),$$

où la borne inférieure est prise sur les probabilités Λ sur $K \times K$ de première et seconde marges μ et ν respectivement. Muni de ρ' , K' est un espace métrique compact, sa topologie est celle de la convergence étroite. On définit alors par récurrence (K_n, ρ_n) pour tout $n \leq 0$ par $(K_0, \rho_0) = (K, \rho)$ et $(K_{n-1}, \rho_{n-1}) = (K'_n, \rho'_n)$.

Nous utiliserons la notion de *dispersion* d'une variable aléatoire pour définir le critère de standardité de Vershik, suivant [E]. Soit (E, ρ) un espace métrique séparable et, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, soit X une variable aléatoire dans E . Nous appelons *dispersion* de X le réel

$$\text{disp } X = \iint \rho(x_1, x_2)(\mu \otimes \mu)(dx_1, dx_2) = \overline{\mathbb{E}}[\rho(X', X'')],$$

μ désigne la loi de X , et X', X'' désignent deux copies indépendantes de X sur un espace probabilisé $(\overline{\Omega}, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mathbb{P}})$. On peut aussi définir la dispersion de X par $\text{disp } X = \mathbb{E}[\phi(X)]$ où $\phi(x) = \mathbb{E}[\rho(X, x)]$.

Maintenant soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Pour une variable aléatoire X dans un espace métrique compact (K, ρ) , on définit par récurrence $\pi_n^{\mathcal{F}} X \in L^0(\mathcal{F}_n; (K_n, \rho_n))$ par $\pi_0^{\mathcal{F}} X = X$ et $\pi_{n-1}^{\mathcal{F}} X = \mathcal{L}[\pi_n^{\mathcal{F}} X | \mathcal{F}_{n-1}]$.

Définition 19.1.1. Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que \mathcal{F} *satisfait le critère de standardité de Vershik* si toute variable aléatoire $X \in L^0(\mathcal{F}_0; [0, 1])$ vérifie $\text{disp}(\pi_n^{\mathcal{F}} X) \rightarrow 0$.

Le théorème suivant est bien entendu dû à Vershik.

Théorème 19.1.2. *Une filtration à temps discret négatif est standard si et seulement si elle satisfait le critère de standardité de Vershik.*

Ce théorème est démontré dans [ES]. La partie difficile de la preuve de [ES] est de montrer que le critère de standardité de Vershik donne le I-confort, l'implication réciproque se vérifie sans trop de difficultés.

19.2 Le théorème d'isomorphisme lacunaire.

Du lemme et de la proposition qui suivent résultera le corollaire 19.2.3 duquel nous déduirons le théorème d'isomorphisme lacunaire (théorème 19.2.4). Le premier lemme est un point de la démonstration du LEMMA 19 de [ES], dont la vérification se fait facilement.

Lemme 19.2.1. *Soient $(\hat{K}, \hat{\rho})$ et $(\tilde{K}, \tilde{\rho})$ deux espace métriques compacts et $f: \hat{K} \rightarrow \tilde{K}$ une application. Pour $n \leq 0$, on définit $f^{(n)}: (\hat{K}_n, \hat{\rho}_n) \rightarrow (\tilde{K}_n, \tilde{\rho}_n)$ récursivement par $f^{(0)} = f$ et $f^{(n)}(\mu) = \mu \circ f^{(n+1)}$ pour $n < 0$. Alors si f est c -lipschitzienne, toutes les f_n le sont aussi, et si X est une variable aléatoire dans \hat{K} définie sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors $\pi_n^{\mathcal{F}}(f \circ X) = f^{(n)}(\pi_n^{\mathcal{F}}X)$.*

La preuve de la proposition suivante est du même ordre que celle du lemme de Slutsky.

Proposition 19.2.2. *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Soit $X \in L^0(\mathcal{F}_0; [0, 1])$. Si $\text{disp}(\pi_n^{\mathcal{F}}X) \rightarrow 0$, alors pour tout espace métrique compact (K, ρ) et toute variable aléatoire $S \in L^0(\sigma(X); (K, \rho))$, on a $\text{disp}(\pi_n^{\mathcal{F}}S) \rightarrow 0$.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que pour toute fonction borélienne $h: [0, 1] \rightarrow K$, on a $\mathbb{E}[\text{disp}(\pi_n^{\mathcal{F}}S)] \rightarrow 0$ avec $S = h(X)$. Par le lemme 19.2.1, les fonctions lipschitziennes ont cette propriété, et il suffit par la proposition 1.2.6 de montrer que c'est une propriété stable par limites simples. Soit $(h_\ell)_{\ell \geq 1}$ une suite de fonctions boréliennes de $[0, 1]$ dans K avec cette propriété, qui converge simplement vers h . Posons $S_\ell = h_\ell(X)$ et $S = h(X)$. On a

$$\begin{aligned} \text{disp}(\pi_n^{\mathcal{F}}S) &\leq 2\mathbb{E}[\rho_n(\pi_n^{\mathcal{F}}S, \pi_n^{\mathcal{F}}S_\ell)] + \text{disp}(\pi_n^{\mathcal{F}}S_\ell) \\ &\leq 2\mathbb{E}[\rho(S, S_\ell)] + \text{disp}(\pi_n^{\mathcal{F}}S_\ell), \end{aligned}$$

et en se donnant $\delta > 0$, on peut alors choisir ℓ suffisamment grand, puis n suffisamment petit, pour que $\text{disp}(\pi_n^{\mathcal{F}}S) < \delta$. \square

Corollaire 19.2.3. *Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ une filtration essentiellement séparable sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Si Y_0 est une variable aléatoire qui engendre \mathcal{F}_0 , alors \mathcal{F} satisfait le critère de standardité de Vershik si et seulement si $\text{disp}(\pi_n^{\mathcal{F}}Y_0) \rightarrow 0$.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente. \square

Si $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ est une filtration, et $\sigma: -\mathbb{N} \rightarrow -\mathbb{N}$ une application strictement croissante, la filtration extraite de \mathcal{F} par σ est la filtration notée $\mathcal{F}^\sigma = (\mathcal{F}_n^\sigma)_{n \leq 0}$ définie par $\mathcal{F}_n^\sigma = \mathcal{F}_{\sigma(n)}$.

Théorème 19.2.4. *De toute filtration à temps discret négatif qui est essentiellement séparable et kolmogorovienne, on peut extraire une filtration qui satisfait le critère de standardité de Vershik.*

Démonstration. Donnons-nous $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_n)_{n \leq 0}$ essentiellement séparable et kolmogorovienne sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On choisit une variable aléatoire $Y_0 \in L^0(\mathcal{F}_0)$ à valeurs dans $[0, 1]$ qui engendre \mathcal{F}_0 . Donnons-nous une suite $(\delta_k)_{k \geq 0}$ de réels telle que $\delta_k \rightarrow 0$. Par le corollaire 19.2.3, il suffit de trouver une suite $\dots < n_k < n_{k-1} < \dots < n_1 < n_0 < 0$ telle que $\text{disp}(\pi_n^\sigma Y_0) \leq \delta_k$ où

on note $\sigma(k) = n_k$ et $\pi_n^\sigma X = \pi_n^{\mathcal{F}^\sigma} X$. Nous allons déterminer inductivement une telle suite $\cdots < n_k < n_{k-1} < \cdots < n_1 < n_0 < 0$. Puisque \mathcal{F} est kolmogorovienne, on a n_0 tel que $\text{disp}(\mathcal{L}[Y_0 | \mathcal{F}_{n_0}]) \leq \delta_0$. Supposons maintenant que $n_k < \cdots < n_1 < n_0 < 0$ sont construits. On définit récursivement $\pi_{n_j}^\sigma Y_0$ par

$$\pi_{n_0}^\sigma Y_0 = \mathcal{L}[Y_0 | \mathcal{F}_{n_0}] \quad \text{et} \quad \pi_{n_{j+1}}^\sigma Y_0 = \mathcal{L}[\pi_{n_j}^\sigma Y_0 | \mathcal{F}_{n_{j+1}}];$$

notre hypothèse de récurrence est alors

$$\text{disp}(\pi_{n_k}^\sigma Y_0) \leq \delta_k.$$

On utilise à nouveau le fait que \mathcal{F} est kolmogorovienne pour trouver $n_{k+1} < n_k$ telle que

$$\text{disp}(\mathcal{L}[\pi_{n_k}^\sigma Y_0 | \mathcal{F}_{n_{k+1}}]) \leq \delta_{k+1},$$

et cela achève la récurrence. □

Corollaire 19.2.5. *De toute filtration à temps discret négatif qui est kolmogorovienne, essentiellement séparable et conditionnellement homogène, on peut extraire une filtration de type produit.*

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'une filtration extraite d'une filtration conditionnellement homogène est encore conditionnellement homogène, puis d'appliquer le théorème d'isomorphisme lacunaire, le théorème 19.1.2, et le théorème 15.2.4. □

C'est en montrant d'abord ce corollaire dans le cas r_n -adique, resp. dans le cas conditionnellement non atomique, que le théorème d'isomorphisme lacunaire est déduit dans [Ver], resp. dans [ES].

BIBLIOGRAPHIE

- [AS] K. B. Athreya, O. Stenflo, *Perfect sampling of Doeblin chains*, Sankhya **65**, no. 4, 763–777, 2003.
- [BEKSY] M. Barlow, M. Émery, F. Knight, S. Song, M. Yor, *Autour d'un théorème de Tsirelson sur des filtrations browniennes et non-browniennes*, Séminaire de probabilités XXXII, Springer Lectures Notes in Math. 1686, 264–305, 1998.
- [Ba] K. Ball, *Superpolynomial growth in the number of v_n names for random walk on random sceneries*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **22**, 1641–1652, 2002.
- [CY] L. Chaumont, M. Yor, *Exercises in probability. A guided tour from measure theory to random processes, via conditioning*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [CFS] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin, Ya. G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer-Verlag, 1980.
- [Cou] Y. Coudène, *Une version mesurable du théorème de Stone-Weierstrass*, Gazette des mathématiciens **91**, SMF, janvier 2002.
- [DM] C. Dellacherie, P-A. Meyer, *Probabilités et potentiel*, Chapitres I à IV, Hermann 1975.
- [Do1] J. L. Doob, *Measure Theory*, Springer-Verlag, New-York, 1994.
- [Do2] J. L. Doob, *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*, Springer-Verlag, New-York, 1984.
- [Em1] M. Émery, *De la théorie de Vershik au mouvement brownien, via des idées de Tsirelson*, Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001. Astérisque **282** (2002), Exp. No. 882, vii, 63–83.
- [E] M. Émery, *Old and new tools in the theory of filtrations*, Dynamics and Randomness, A. Maass, S. Martinez, J. San Martin editors, Kluwer 2002.
- [ES] M. Émery, W. Schachermayer, *On Vershik's standardness criterion and Tsirelson's notion of cosiness*, Séminaire de probabilités XXXV, Springer Lectures Notes in Math. 1755, 265–305, 2001.
- [Ev] S.N. Evans, *Eigenvalues of random wreath products*, Electronic journal of Probability **7**, Paper No. 9, 1–15, 2002.
- [Fe76] J. Feldman, *New K -automorphisms and a problem of Kakutani*, Israel J. Math. **24**, No. 1, 16–38, 1976.
- [Fe98] J. Feldman, *Decreasing sequences of σ -fields : product type, standard, and prestandard*, unpublished preprint, 1998.
- [Fe99] J. Feldman, *Standard orbit factors and entropy-free Vershik equivalence*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **19**, 383–389, 1999.
- [FR] J. Feldman, D. Rudolph, *Standardness of sequences of σ -fields given by certain endomorphisms*, Fund. Math. **157**, 175–189, 1998.

-
- [FG] P.A. Ferrari, A. Galves, *Construction of Stochastic Processes, Coupling and Regeneration*, www.ime.usp.br/~pablo/book/abstract.html
- [F-H] A. Fieldsteel, J.R. Hasfura-Buenaga, *Dyadic equivalence to completely positive entropy*, Trans. of the AMS **350**, no. 3, 1143–1166, 1998.
- [FS00] J. Feldman, M. Smorodinsky, *Decreasing sequences of measurable partitions : product type, standard and prestandard*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **20**, 1079–1090, 2000.
- [FS02] J. Feldman, M. Smorodinsky, *Addendum to our paper “Decreasing sequences of measurable partitions : product type, standard and prestandard”*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **22**, 1079–1090, 2002.
- [Ha] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974. Reprint of the ed. published by Van Nostrand, New York, in series : The University series in higher mathematics.
- [Han] D. L. Hanson, *On the Representation Problem for Stationary Stochastic Processes with Trivial Tail Field*, Journal of Mathematics and Mechanics, Vol.**12**, No.**2**, pp 294–301, 1963.
- [HH] D. Heicklen, C. Hoffmann, *$[T, T^{-1}]$ is not standard*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **18**, 875–878, 1998.
- [HL] F. Hirsch, G. Lacombe, *Éléments d’analyse fonctionnelle. Cours et exercices*, Masson 1997.
- [Ho] C. Hoffman, *A zero entropy T such that the $[T, \text{Id}]$ endomorphism is nonstandard*, Proc. A.M.S. **128**, no. 1, 183–188, 1999.
- [HR] C. Hoffman, D. Rudolph, *If the $[T, \text{Id}]$ automorphism is Bernoulli then the $[T, \text{Id}]$ endomorphism is standard*, Proc. A.M.S. **128**, no. 1, 183–188, 1999.
- [Kal] S.A. Kalikow, *T, T^{-1} transformation is not loosely Bernoulli*, Ann. Math. **115**, 393–409, 1982.
- [Kall] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Springer, 2nd Edition, 2001.
- [Ka] G. Kallianpur, *Some Ramifications of Wiener’s Ideas on Nonlinear Prediction*, réimprimé dans *Norbert Wiener : Collected Works*, Volume III, edited by P. Masani, 1981.
- [KW] G. Kallianpur, N. Wiener, *Non-linear prediction*, Technical Report 1, 1956, Office of Naval Research, Cu-2-56-Nonr-266, (39) — CIRMIP Project NR-047-015 (unpublished manuscript).
- [Ke] A. S. Kechris, *Classical Descriptive Set Theory*, Springer-Verlag, New-York, 1995.
- [Kif] Y. Kifer, *Ergodic theory of random transformations*, Progress in Probability and Statistics, 10. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1986.
- [Leu] C. Leuridan, *Filtration d’une marche aléatoire stationnaire sur le cercle*, Séminaire de probabilités XXXVI, Springer Lectures Notes in Math. Vol. **1801**, 2003, 335–347, 2003.
- [Lin] T. Lindvall, *Lectures on the Coupling Method*, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, John Wiley & Sons, 1992.
- [Mah] D. Maharam, *An example of tail fields*, Lecture Notes in Math. 695, Springer, p. 215, 1978.

- [MO] A. W. Marshall, I. Olkin, *Inequalities : Theory of Majorization and Its Applications*, Mathematics in science and engineering Vol. 143, Academic Press, 1979.
- [Mas] P. Masani, *Wiener's contribution to generalized harmonic analysis*, Part II, *Prediction theory and filter theory*, Bull. AMS **72**, 73–125, 1966.
- [Mat] Mattingly, *Contractivity and ergodicity of the random map $x \mapsto |x - \theta|$* , Teor. Veroyatnost. i Primenen. **47**, no. 2, 388–397, 2002.
- [Mei] I. Meilijson, *Mixing properties and a class of skew products*, Israel J. Math. **19**, 266–270, 1974.
- [N-R-BR] , M. G. Nadkarni, D. Ramachandran, K. P. S. Bhaskara Rao, *On sequences of σ -algebras*, Colloquium Mathematicum, vol. XXXII, 219–226, 1975.
- [Pa] K.R. Parthasarathy, *Probability on metric spaces*, New York : Academic press 1967.
- [RS] S. T. Rachev, R. M. Shortt, *Classification Problem for Probability Metrics*, Contemporary Mathematics **94**, 221–262, 1989.
- [Rok] V. A. Rokhlin, *On the fundamental ideas of measure theory*, Amer. Math. Soc. Translation, **71**, 1–53, 1952.
- [Ros] M. Rosenblatt, *Markov processes. Structure and asymptotic behavior*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 184. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1971.
- [Ros1] M. Rosenblatt, *Stationary processes as shifts of functions of independent random variables*, Journal of Mathematics and Mechanics, Vol. 8, No.5, 1959.
- [Ros2] M. Rosenblatt, *Stationary Markov Chains and Independent Random Variables*, Journal of Mathematics and Mechanics, Vol.9, No.6, 945–949, 1960.
- [Sch1] W. Schachermayer, *On Certain Probabilities Equivalent to Wiener Measure d'après Dubins, Feldman, Smorodinsky and Tsirelson*, Séminaire de Probabilités **XXXIII**, Springer Lectures Notes in Mathematics, Vol. **1709**, 221–239, 1999.
- [Sch2] W. Schachermayer, *Addendum to the paper "On Certain Probabilities Equivalent to Wiener Measure d'après Dubins, Feldman, Smorodinsky and Tsirelson"*, Séminaire de Probabilités **XXXVI**, Springer Lectures Notes in Mathematics, Vol. **1801**, 493–497, 2003.
- [Shi] A. N. Shiryaev, *Probability*, second edition, Springer-Verlag New-York, 1996.
- [Smo] M. Smorodinsky, *Processes with no standard extension*, Israel J. Math. **107**, 327–331, 1998.
- [Th] H. Thorisson, *Coupling, stationarity, and regeneration*, Probability and its Applications (New York). Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Ts0] B. Tsirelson, *About Yor's problem*, preprint.
- [Tsi] B. Tsirelson, *Triple points : from non-Brownian filtrations to harmonic measures*, Geom. Funct. Anal. (GAFA) **7**, 1096–1142, 1997.
- [Ts99] B. Tsirelson, *Within and beyond the reach of brownian innovation*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Berlin, 1998). Doc. Math. 1998, Extra Vol. III, 311–320 (electronic).
- [Ver68] A.M.Vershik, *On lacunary isomorphism of monotone sequences of partitions*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **2**, no. 3, 17–21, 1968 ; English transl. in Functional Anal. Appl. **2**, no. 3, 1968.

-
- [Ver] A. M. Vershik, *The theory of decreasing sequences of measurable partitions*, St. Petersburg Math. J. **6**, 705–761, 1995.
- [Ver01] A. M. Vershik, *V. A. Rokhlin and the modern theory of measurable partitions*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. **202**, 11–20, 2001.
- [We] B. Weiss, *The isomorphism problem in ergodic theory*, Bull. AMS **78**, 668–684, 1972.
- [Weiz] H. V. Weizsäcker, *Exchanging the order of taking suprema and countable intersections of σ -algebras*, Ann. Inst. Henri Poincaré, Vol **XIX**, no. 1, 91–100, 1983.
- [Wi] D. Williams, *Probability with martingales*, Cambridge Mathematical Textbooks. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.