



Université Louis Pasteur  
de Strasbourg



École Nationale du Génie  
de l'Eau et de l'Environnement  
de Strasbourg

École Doctorale Sciences Pour l'Ingénieur

---

ULP – ENGEES - SHU

**THESE de DOCTORAT**

Présentée par :

**Maher ABDALLAH**

Pour obtenir le grade de

**Docteur de l'Université Louis Pasteur – Strasbourg I**

**Discipline : Sciences de l'Ingénieur**

Titre :

**Sur les méthodes de discrétisation  
numérique de problèmes hyperboliques non  
linéaires appliquées aux équations de Barré  
de Saint-Venant pour la modélisation de  
l'hydraulique en réseau d'assainissement**

Soutenue publiquement le 3 mai 2005

**Membres du jury**

*Directeur de thèse* : M. Robert MOSÉ (Professeur ENGEES Strasbourg)  
*Rapporteur interne* : M. Gerhard SCHÄFER (Professeur ULP Strasbourg)  
*Rapporteur externe* : M. Bernard CHOCAT (Professeur INSA Lyon)  
*Rapporteur externe* : M. Olivier BLANPAIN (Professeur UST Lille)  
*Examineur* : M. José VAZQUEZ (Maître de conférence ENGEES Strasbourg)  
*Membre invité* : M. Mohammed ZOAETER (Professeur UL Liban)

# RECONNAISSANCE ET REMERCIEMENTS

Tout travail réussi dans la vie nécessite en premier lieu la bénédiction de Dieu, et ensuite l'aide et le support de plusieurs personnes. Je tiens donc à remercier et à adresser ma reconnaissance à toute personne qui m'a aidé de loin ou de près afin de réaliser l'un de mes rêves...

Tout d'abord, je tiens à remercier très vivement mon directeur de thèse, **M. Robert MOSÉ**, pour ses qualités humaines et scientifiques. Je ne pourrai jamais oublier sa gentillesse, sa générosité, son esprit de recherche et ses commentaires efficaces. Un grand merci de m'avoir donné la chance de faire une thèse malgré ma situation contraignante.

Je remercie bien chaleureusement **M. José VAZQUEZ**, qui a co-dirigé ce travail avec une compétence, une clairvoyance et un professionnalisme exemplaires. Ses conseils, ses encouragements et sa sympathie sont fort appréciés.

Je remercie de tout mon cœur **M. Antoine SADOWSKI**, le directeur du laboratoire système hydraulique urbain (SHU), pour son accueil, ses encouragements, ses paroles qui vont droit au cœur et qui effacent toute mélancolie ou stress. Sa modestie et sa générosité sont remarquables.

Je remercie intensément **M. Mohammed ZOAETER**, pour tous les efforts fournis au Liban, pour l'accueil au Laboratoire de Physique des Matériaux (LPM) et pour ses encouragements si précieux.

Je remercie vivement les membres du jury pour le soutien et l'intérêt qu'ils ont portés à ce travail : M. le Professeur de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg, **Gerhard SCHÄFER**, M. le Professeur de l'Institut National des Sciences Appliquées de Lyon, **Bernard CHOCAT** et M. le Professeur de l'Université des Sciences et Technologies de Lille, **Olivier BLANPAIN**, auxquels je dis un grand merci d'avoir accepté de rapporter ma thèse.

Je tiens également à mentionner et à témoigner ma reconnaissance à tous les membres du laboratoire Système Hydraulique Urbain (SHU), pour leurs encouragements et leur gentillesse envers moi : **Marc BUYER, Gislain LIPEME, Adrien WANKO, Jean Bernard BARDIAUX, Christian BECK** et **Martin FISCHER**.

Je voudrais exprimer également ma sincère reconnaissance à l'ensemble du personnel du lycée Verdun, mon lieu de travail, pour l'ambiance sympathique et familiale qui y règne, pour l'amour, la confiance et le respect. Je remercie tout le personnel administratif et académique, tous les élèves, et tout particulièrement, M. le proviseur : **Jean-Eudes DUNANT**, M. le proviseur adjoint : **Philippe SELOUDRE**, et les deux coordinateurs de l'équipe mathématique : **Laurent AUBERT** et **Jérôme PUYBARET**.

I am so grateful to all the people in the engineering library of the American university of Beirut who kindly furnished all the necessary documents for my thesis. I name particularly Mr. **Hussein HARAJLI** and Mr. **Firas ECHTAY**.

Je remercie fortement et de tout mon cœur les deux stagiaires de DEA : **M. Rabih GHOSTINE** et **M. Georges KESSERWANI**, qui, de par leurs travaux, ont apporté leur pierre à l'édifice que constitue ce travail de thèse. **Georges** et **Rabih** sont de vrais amis, ils possèdent de grandes qualités humaines et sont de plus ambitieux et intelligents.

Mes vifs remerciements vont également à tous mes amis pour l'appui moral qu'ils m'ont témoigné, et tout particulièrement à mes amis intimes qui sont comme des frères : **Ahmad FAOUR**, **Iyad ZAAROUR** et **Hussein HOTEIT**. Le support moral et les encouragements qu'ils m'ont offerts ainsi que les moments de travail que nous avons passés ensemble sont inoubliables. J'aimerais aussi remercier **M. Hassan ABBASS** qui m'a aidé au début de cette thèse par ses conseils et son expérience.

Pour terminer, j'adresse mon grand amour à mes parents, mes beaux-parents et ma magnifique famille : mon cœur **Rouba** et mes deux yeux **Tarek** et **Mazen**. C'est grâce à leur amour et leurs sacrifices que cette thèse a été menée à bonne fin. Mon plus grand souhait dans cette vie, c'est de les voir toujours à côté de moi, en bonne santé, heureux et que la paix soit avec eux.

# RÉSUMÉ

Les dysfonctionnements des réseaux d'assainissement et des milieux naturels tels que fleuve et rivière, particulièrement par temps de pluie, sont fréquents dans certaines agglomérations. Les pollutions des milieux récepteurs, conséquences directes des déversements parfois intempestifs, sont mal supportées par les milieux naturels et par la population. Ainsi, l'amélioration de la qualité des milieux naturels récepteurs des pollutions urbaines est une nécessité primordiale et passe par une maîtrise de l'hydraulique et du transport de la charge polluante dans les conduites d'eau. Dans ce contexte, l'unité propre de recherche « Systèmes Hydrauliques Urbains » de l'Ecole Nationale du Génie de l'Eau et de l'Environnement de Strasbourg s'intéresse à la gestion en temps réel de l'écoulement de l'eau à surface libre et du transport solide dans les conduites des réseaux d'assainissement. L'objectif de cette thèse est la connaissance et la maîtrise de l'hydraulique dans les conduites d'eau.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés à la simulation numérique unidimensionnelle de l'hydraulique dans une conduite d'eau ne présentant pas de jonction. Nous avons ainsi considéré le système de Barré de Saint-Venant qui modélise l'écoulement de l'eau à surface libre. Ce système est un système d'équations différentielles aux dérivées partielles unidimensionnelles de types non linéaires et hyperboliques, qui n'admet pas de solution analytique dans le cas général. Il existe dans la littérature différents schémas numériques pouvant trouver des solutions numériques au système de Barré de Saint-Venant afin de calculer la hauteur d'eau et le débit de l'écoulement. Ces schémas appartiennent à des catégories différentes ; trois types de discrétisation spatiales: différences finies, volumes finis et éléments finis ; deux types de discrétisation temporelle : explicite et implicite ; trois types de discrétisation du flux ; classique, Riemann et TVD.

Notre contribution dans cette partie se résume par les points suivants :

- Mettre au point les éléments finis discontinus de Galerkin qui sont initialement développés pour la simulation numérique du système d'Euler qui modélise l'écoulement non visqueux d'un fluide compressible.
- Mettre au point un banc d'essais numériques dans le but de comparer les schémas numériques capables de donner une solution numérique au système de Barré de Saint Venant
- Choisir les schémas robustes pouvant capter les chocs et les discontinuités des écoulements et ceci dans les cas stationnaire et transitoire.
- Comparer les différentes stratégies de discrétisation numérique du terme source afin de déterminer la meilleure. Une nouvelle méthode est considérée dans le cas d'un canal non prismatique.

Nous pouvons noter que toutes les comparaisons ont été faites sur des problèmes hydrauliques admettant des solutions analytiques ou des résultats expérimentaux de divers types : stationnaire et transitoire ; canaux prismatiques et non prismatiques ; section rectangulaire et trapézoïdale ; front sec et mouillé ; pente constante et variable.

Dans un deuxième temps, nous nous sommes intéressés à la simulation numérique de l'hydraulique dans les réseaux en présence des jonctions. Dans ce but, nous avons considéré le système de Barré de Saint-Venant qui modélise l'écoulement de l'eau à l'intérieur des canaux, et divers modèles de jonctions qui sont développés dans la littérature et qui modélise l'écoulement à travers les jonctions.

Notre contribution dans cette partie se résume par les points suivants :

- Coupler les modèles numériques développés dans la première partie avec les modèles de jonctions afin de simuler l'hydraulique dans un réseau comportant plusieurs conduites reliées par des jonctions. On peut rappeler qu'à notre connaissance, les modèles de jonction (dérivés des principes de conservation) n'ont pas été couplés et discrétisés au sein du modèle de Barré de Saint-Venant.
- Comparer les résultats de différents modèles de jonctions et les résultats expérimentaux trouvés dans la littérature, dans le cas d'un écoulement stationnaire et transitoire et ceci pour deux types de jonctions : confluence et défluence et trois types d'écoulements : fluvial, torrentiel et transitionnel. Nous rappelons aussi qu'aucune comparaison n'a été faite précédemment dans le cas transitoire.

Nous démontrons ainsi que le modèle de jonctions le plus simple et le plus utilisé qui est le modèle fondé sur l'égalité des hauteurs d'eau à la jonction, donne des résultats moins satisfaisants que les autres modèles basés sur la conservation de la quantité de mouvement.

# ABSTRACT

The dysfunctions of the sanitation networks and of the natural environments such as river, particularly in rainy weather, are frequent in certain agglomerations and can lead to serious problems for local communities. Pollution of the receiving environment can sustain major damage for the population, thus the improvement of the quality of the receiving natural environments of urban pollution is a paramount need and passes by a control of the flow of pollution discharged from overflows and to control their hydraulic behavior. In this context, the research unit of "urban hydraulic system" of the national school of waters and environment of Strasbourg is interested in management the shallow water and the solid transport in real time for the sanitation networks. In order to be able to determine the hydraulic behavior of this type of structure, it is necessary to take into account the hydraulic discontinuities and the transitory flow regime when formulating equations and creating the associated model. The objective of this thesis is the knowledge and the control of the hydraulic parameters in shallow water.

Initially, we were interested in the one-dimensional numerical simulation of the hydraulic parameters in channels not presenting a junction. To this end, we considered the one dimensional shallow water waves equations known by the Saint Venant equations for modeling free surface flows. This system is a nonlinear and hyperbolic of partial differential system, and consequently it does not admit an analytical solution in the general case. There exist in the literature, various schemes able to find numerical solutions to the Saint Venant system in order to calculate the water height and the water discharge of the flow. These schemes belong to different categories: three types of space discretisation: finite differences, finite volumes, finite elements; two types of temporal discretisation: explicit and implicit; three types of numerical flux discretisation: classical, Riemann and TVD.

Our contribution in this part is summarized by the following points:

- Apply the Runge Kutta Discontinuous Galerkin Finite Elements which are initially developed for the numerical simulation of the Euler system and which models the flow of a non viscous compressible fluid.
- Develop a numerical test bench with an aim of comparing the various numerical schemes able to find a numerical solution of the Saint Venant equations.
- Choose the most robust schemes able to capture the shocks and discontinuities in stationary and transitory flows.
- Compare the different strategies of numerical discretisation of the source term in order to quote the best. A new method is considered in the case of a non prismatic channel.

We can note that all comparisons were made on various hydraulic problems that have analytical solutions or experimental results with various types: steady and transient flow, prismatic and non prismatic channels, rectangular and trapezoidal section, dry and wet channel bed, constant and variable bed slope.

In a second time, we were interested in the numerical simulation of flow in networks containing junctions. To this end, we considered the Saint Venant equations for modeling free surface flows in channels, and various models of junction which have developed in the literature and which simulate the flow through the junctions.

Our contribution in this part is summarized by the following points:

- Couple the numerical schemes developed in the first part with the junction models in order to simulate the hydraulic parameters in a network containing several channels and connected by junctions. We point out that all these models were never be coupled and simulated with the Saint Venant system.
- Compare the various results obtained by the different junction models and the experimental results found in the literature in the case of steady and transient flow for two kinds of junction: combining and dividing junction and for three types of flows: subcritical, supercritical and transitional. We also point out that no comparison was made previously in the transitory case.

We show that the use of the simplest model of the junction “equality of water stages” largely used in the classical hydraulic engineering codes is worrying and should be replaced by a model based on momentum conservation.

# LISTE DES FIGURES

Figure 1 : Evolution du tirant d'eau le long d'un seuil .....	24
Figure 2: Le comportement des ondes selon les régimes d'écoulement .....	25
Figure 3 : Le ressaut hydraulique .....	25
Figure 4: Les différents paramètres d'un écoulement dans une section. ....	27
Figure 5: Le volume de contrôle .....	28
Figure 6 : Schéma de type explicite .....	34
Figure 7: Schéma de type implicite.....	35
Figure 8 : Représentation du problème de Riemann .....	35
Figure 9: Représentation d'un volume de contrôle .....	36
Figure 10: Décomposition du domaine en cellules de calculs et flux aux interfaces.....	37
Figure 11 : Représentation de la valeur d'une variable $u$ dans une cellule de calcul.....	40
Figure 12: Variables discontinues au niveau des interfaces.....	41
Figure 13: Les schémas à capture de choc. ....	42
Figure 14: Les schémas TVD.....	43
Figure 15 : Jonction : (a) confluence; (b) défluence .....	48
Figure 16 : Paramètres d'une confluence .....	55
Figure 17 : Ligne des caractéristiques dans le plan $(x, t)$ . Écoulement fluvial dans les trois canaux renfermant la confluence.....	55
Figure 18 : Ligne des caractéristiques dans le plan $(x, t)$ . Écoulement fluvial dans les canaux $u$ et $L$ et torrentiel dans le canal $d$ . ....	56
Figure 19 : Forme des caractéristiques pour le cas d'un écoulement torrentiel dans l'un des canaux amont.....	56
Figure 20 : Décomposition du domaine en cellules de calculs et flux aux interfaces.....	59
Figure 21: Les caractéristiques à l'amont et à l'aval d'un canal.....	64
Figure 22: Les lignes des caractéristiques (a) Ecoulement fluvial; (b) torrentiel. ....	65
Figure 23: Traitement des conditions aux limites internes en présence d'un seuil.....	66
Figure 24 : Maillage du domaine spatial.....	67
Figure 25: Conditions initiales. ....	74
Figure 26 : Nombre de Froude correspondant à un écoulement fluvial (a) et transcritique (b). ....	74
Figure 27 : Caractéristiques hydrauliques.....	75
Figure 28 : Lit concave d'un canal.....	77
Figure 29: Canal convergent divergent. ....	78
Figure 30 : Le lit et la largeur du canal. ....	81
Figure 31 : Profil en long du canal.....	83
Figure 32 : Schéma de MacCormack classique. (a): régime fluvial. (b): régime transcritique. ....	87
Figure 33 : Schéma de Lax-Wendroff classique. ....	88
Figure 34 : Solveur de Lax-Friedrich.....	89
Figure 35 : Solveur de Roe.....	90
Figure 36: Solveur de Roe avec correction entropique.....	90
Figure 37: Solveur de HLL. ....	91
Figure 38 : Le schéma TVD symétrique.....	92
Figure 39 : Le schéma TVD upwind.....	92
Figure 40 : Schéma TVD de MacCormack.....	93
Figure 41 : Le schéma TVD de Lax-Wendroff.....	93
Figure 42: Le schéma TVD MUSCL.....	94



Figure 43 : Le schéma LCI avec CFL=1.....	95
Figure 44 : Le schéma LCI avec CFL=2.....	95
Figure 45 : Le schéma LCI avec CFL=4.....	96
Figure 46 : Le schéma LCI avec CFL=10.....	96
Figure 47 : Le schéma LCI avec CFL=50 et 100 dans le cas d'un écoulement fluvial. ....	97
Figure 48 : Schéma du second ordre avec solveur de Lax-Friedrich (LLF). ....	99
Figure 49 : Schéma du second ordre avec solveur de HLLE.....	99
Figure 50: Schéma du second ordre avec solveur de Roe.....	100
Figure 51 : Comparaison des résultats simulés à l'aide des différents schémas numériques. ....	102
Figure 52 : Cas test 1, écoulement fluvial.....	103
Figure 53: Schéma de MacCormack classique. ....	104
Figure 54 : Solveur de Lax-Friedrich.....	105
Figure 55 : Solveur de Roe.....	105
Figure 56 : Solveur de Roe avec correction entropique.....	105
Figure 57 : Solveur de HLLE.....	106
Figure 58: Le schéma TVD symétrique.....	106
Figure 59 : Le schéma TVD upwind.....	106
Figure 60 : Le schéma TVD de MacCormack.....	107
Figure 61 : Le Schéma TVD MUSCL.....	107
Figure 62 : Le schéma LCI avec CFL=1.....	107
Figure 63 : Le schéma LCI avec CFL=10.....	108
Figure 64 : Le schéma LCI avec CFL=100.....	108
Figure 65 : Schéma du second ordre avec solveur de LLF.....	109
Figure 66 : Schéma du second ordre avec solveur de HLLE.....	109
Figure 67 : Schéma du second ordre avec solveur de Roe.....	110
Figure 68 : Cas test 1, écoulement transcritique.....	111
Figure 69 : Cas test 2. Ressaut hydraulique dans un canal rectangulaire.....	112
Figure 70 : La hauteur d'eau des ressauts hydrauliques dans un canal trapézoïdal.....	114
Figure 71 : Le débit des ressauts hydrauliques dans un canal trapézoïdal.....	115
Figure 72 : Ecoulement fluvial dans un canal trapézoïdal.....	115
Figure 73 : Forme de l'écoulement fluvial dans un canal trapézoïdal.....	116
Figure 74 : Sortie libre à l'aval.....	116
Figure 75 : Présence d'un seuil à l'aval.....	116
Figure 76 : Présence d'un obstacle à l'aval.....	117
Figure 77 : Comparaison de la simulation numérique du problème de barrage non idéal et des résultats expérimentaux. Sortie libre à l'aval du canal.....	118
Figure 78 : Simulation numérique du problème de barrage non idéal 10s après l'ouverture de la vanne avec les schémas TVD upwind et HLLE. Sortie libre à l'aval du canal.....	118
Figure 79 : Comparaison de la simulation numérique du problème de barrage non idéal et des résultats expérimentaux. Présence d'un seuil à l'aval.....	119
Figure 80 : Simulation numérique de la solution au bout de à 10 secondes.....	119
Figure 81: Comparaison de la simulation numérique du problème de barrage non idéal et des résultats expérimentaux. Présence d'un obstacle à l'aval.....	120
Figure 82 : Simulation numérique du problème de barrage non idéal avec les schémas TVD upwind et HLLE. Présence d'un obstacle à l'aval à 10s.....	120
Figure 83 : Hydrographe des hauteurs d'eau lors de la vidange de l'eau dans un canal à lit concave.....	121
Figure 84 : Hydrographe des débits d'eau lors de la vidange de l'eau dans un canal à lit concave.....	121
Figure 85 : Hauteur d'eau lors du choc dans un canal concave 5 s et 15 s après la propagation du choc.....	122
Figure 86 : Hauteur d'eau lors du choc dans un canal concave 150 s et 600 s après la propagation du choc.....	122

Figure 87 : Ecoulement dans un canal concave. Passage du régime fluvial au régime torrentiel. ....	123
Figure 88 : Ecoulement dans un canal concave. Apparition d'un ressaut hydraulique. ....	124
Figure 89: Nombre de Froude dans tout le canal. ....	124
Figure 90 : Ressaut hydraulique dans un canal prismatique trapézoïdal. ....	125
Figure 91 : Ecoulement dans un canal concave. Passage du régime fluvial au régime torrentiel. ....	125
Figure 92 : Ecoulement dans un canal concave. Apparition d'un ressaut hydraulique. ....	126
Figure 93 : Ecoulement torrentiel dans un canal concave et convergent divergent. ....	127
Figure 94 : Ecoulement dans un canal concave et convergent divergent. Apparition d'un ressaut hydraulique. ....	127
Figure 95: Passage du régime fluvial au régime torrentiel dans un canal non prismatique. ...	128
Figure 96 : Simulation du système de BSV avec les variables A et Q. Discrétisation directionnelle du terme source. ....	129
Figure 97 : Simulation du système de BSV avec les variables h et q. Discrétisation centrée du terme source. ....	129
Figure 98 : Simulation du système de BSV avec les variables h et q. Discrétisation upwind du terme source. ....	129
Figure 99 : Ecoulement de l'eau au dessus des seuils. Traitement des conditions aux limites avec les deux méthodes : caractéristique et extrapolation. ....	130
Figure 100 : Ecoulement de l'eau au dessus des seuils. Traitement du terme source avec les deux méthodes : centrée et directionnelle. ....	131
Figure 101: Confluence. ....	136
Figure 102 : Comparaison des expériences de Taylor et des modèles de confluence fluviale. ....	137
Figure 103 : Comparaison des résultats expérimentaux de Webber et Greated et des modèles de confluence fluviale. ....	138
Figure 104 : Comparaison des résultats expérimentaux de Lin et Soong et des modèles de confluence fluviale. ....	139
Figure 105 : Comparaison entre les expériences de Gurram et les modèles de confluence fluviale. ....	140
Figure 106 : Comparaison des résultats expérimentaux de Hsu et des modèles de confluence fluviale. ....	141
Figure 107 : L'erreur relative entre les hauteurs d'eau simulées par les différents modèles et celle de Shabayek. ....	142
Figure 108 : Comparaison des expériences de Rice et des modèles de confluence torrentielle. ....	143
Figure 109 : Comparaison entre les expériences de Rice et des modèles de confluence torrentielle. ....	144
Figure 110 : Comparaison des résultats expérimentaux de Hager et des modèles de confluence transitionnelle. ....	146
Figure 111 : Défluence fluviale. ....	147
Figure 112 : Comparaison des résultats expérimentaux de Sridharan et des modèles de défluence fluviale. ....	148
Figure 113 : Comparaison des résultats expérimentaux de Ramamurthy et des modèles de défluence fluviale. ....	149
Figure 114 : Comparaison des résultats expérimentaux de Hsu et des modèles de défluence fluviale. ....	150
Figure 115: Jonction : (a) confluence; (b) défluence. ....	152
Figure 116 : Variation de la hauteur d'eau et du débit le long des trois canaux avec les différents modèles. ....	154
Figure 117 : La hauteur d'eau et le débit au milieu de chaque canal en fonction du temps pour l'exemple 1 cas 1. ....	155

Figure 118 : La hauteur d'eau et le débit au milieu de chaque canal en fonction du temps pour l'exemple 1 cas 2.....	156
Figure 119 : La hauteur d'eau et le débit au milieu de chaque canal en fonction du temps pour l'exemple 2.....	157
Figure 120 : Variation de la hauteur d'eau et du débit le long des trois canaux avec les différents modèles de la défluence pour l'exemple 4.....	158
Figure 121 : La hauteur d'eau et le débit au milieu de chaque canal en fonction du temps pour l'exemple 4.....	159
Figure 122 : Défluence torrentielle, cas stationaire.....	160
Figure 123 : La hauteur d'eau et le débit au milieu de chaque canal en fonction du temps pour l'exemple 5.....	161
Figure 124 : Représentation de la valeur d'une variable u dans une cellule de calcul.....	181
Figure 125: Les différents paramètres d'une confluence.....	192

# LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 : Les différents types de schémas numériques .....	33
Tableau 2 : Solution analytique de l'ouverture brutale d'une vanne. ....	75
Tableau 3 : Le lit du canal de l'écoulement stagnant. ....	80
Tableau 4 : La largeur du canal de l'écoulement stagnant. ....	80
Tableau 5 : Différents cas tests .....	84
Tableau 6 : Affectation des cas tests. ....	85
Tableau 7 : Temps CPU et distance euclidienne entre la solution analytique et la solution numérique dans le cas où l'écoulement est partout fluvial dans le canal. ....	101
Tableau 8 : Temps CPU et distance euclidienne entre la solution analytique et la solution numérique dans le cas où l'écoulement est transitionnel dans le canal. ....	102
Tableau 9 : Temps CPU et distance euclidienne entre la solution analytique et la solution numérique du problème de ressaut. ....	111
Tableau 10 : Ensemble des modèles et des résultats expérimentaux pour la confluence. ....	135
Tableau 11 : Ensemble des modèles et des résultats expérimentaux pour la défluence. ....	135
Tableau 12 : Tableau des écarts des expériences de Taylor et des modèles de confluence fluviale pour un angle de 45°. ....	137
Tableau 13 : Tableau des écarts des expériences de Taylor et des modèles de confluence fluviale pour un angle de 135°. ....	137
Tableau 14 : Comparaison des résultats expérimentaux de Lin et Soong et des modèles de confluence fluviale. ....	139
Tableau 15 : Comparaison des résultats expérimentaux de Guram et des modèles de confluence fluviale pour des angles de 60° et 90°. ....	140
Tableau 16 : Comparaison des résultats expérimentaux de Hsu et des modèles de confluence fluviale pour un angle de 60°. ....	141
Tableau 17 : L'erreur relative entre les hauteurs d'eau simulées par les différents modèles et celle de Shabayek. ....	143
Tableau 18 : Les écarts entre les expériences de Rice et les modèles de confluence torrentielle. ....	144
Tableau 19 : Tableau des écarts entre les expériences de Hager et les modèles de confluence transitionnelle. ....	145
Tableau 20 : Ecart entre les résultats expérimentaux de Hager et les modèles de confluence transitionnelle. ....	147
Tableau 21 : Ecart entre les résultats expérimentaux de Sridharan et les modèles de défluence fluviale. ....	148
Tableau 22 : Ecart entre les résultats expérimentaux de Ramamurthy et les modèles de défluence fluviale. ....	149
Tableau 23 : Ecart entre les résultats expérimentaux de Hsu et les modèles de défluence fluviale. ....	150
Tableau 24 : Propriétés des canaux pour l'exemple 1 .....	153
Tableau 25 : L'erreur relative entre le modèle de Shabayek et les autres modèles. ....	154
Tableau 26 : L'erreur relative entre le modèle de Shabayek et les autres modèles. ....	155
Tableau 27 : Propriétés des canaux pour l'exemple 2. ....	157
Tableau 28 : L'erreur relative entre le modèle de Ramamurthy et les autres modèles. ....	159
Tableau 29 : Les différents limiteurs pour les schémas TVD. ....	179

# NOTATIONS

$a^{1,2}$ :	Valeurs propres de la matrice jacobienne
$\tilde{a}^{1,2}$ :	Valeurs propres de la matrice jacobienne approchée
A :	Section mouillée
B :	Largeur du canal au miroir
$B_d$ :	Largeur du canal aval
$B_L$ :	Largeur du canal latérale
$B_u$ :	Largeur du canal amont
BSV :	Barré de Saint Venant
c :	Célérité d'une onde de propagation
Canal d	Canal se trouvant à l'aval de la jonction
Canal L	Canal latéral à la jonction
Canal u	Canal se trouvant à l'amont de la jonction
$C^*$ :	Coefficient de Chézy
$C_{eff}$ :	Nombre de courant
$D_h$ :	Profondeur hydraulique
$e^{1,2}$ :	Vecteurs propres associés à la matrice jacobienne
$\tilde{e}^{1,2}$ :	Vecteurs propres associés à la matrice jacobienne approchée
$F_d$ :	Nombre de Froude aval à la jonction
$F_L$ :	Nombre de Froude latéral à la jonction
$F_u$ :	Nombre de Froude amont à la jonction
F :	Nombre de Froude quelconque
$F(U)$ :	Vecteur flux
$F_{i+1/2}$	Flux calculé à l'interface $i+1/2$
g :	Constante de gravitation ( $\approx 9,81$ N/Kg)
$G(U)$ :	Vecteur source
h :	Hauteur d'eau
H :	Charge dans une section
$h_c$ :	Hauteur critique
$h_d$ :	Hauteur aval à la jonction
$h_L$ :	Hauteur latérale à la jonction
$h_u$ :	Hauteur amont à la jonction
$H_s$ :	Charge spécifique dans une section
I :	Matrice identité
$I_1$ :	Pression hydrostatique
$I_2$ :	Pression due a la variation de la largeur du canal
J :	Matrice jacobienne
$\tilde{J}$ :	Matrice jacobienne approchée
K :	Coefficient de la zone de séparation
$K^*$ :	Coefficient de cisaillement
L :	Longueur du canal
LCI :	Linearised Conservative Implicit
n :	Coefficient de frottement de Manning

$P$ :	Périmètre mouillé
$q$ :	Débit par unité de largeur
$Q$ :	Débit moyen dans une section
$Q_d$ :	Débit aval à la jonction
$Q_L$ :	Débit latéral à la jonction
$Q_u$ :	Débit amont à la jonction
$q_u$ :	Rapport du débit amont par le débit aval
$q_L$ :	Rapport du débit latéral par le débit aval
$R$ :	Matrice des vecteurs propres
$R_h$ :	Rayon hydraulique
$\tilde{R}$ :	Matrice des vecteurs propres de la matrice jacobienne approchée
$S_0$ :	Pente du canal
$S_f$ :	Pente énergétique
$S_L$ :	Pente latérale d'un canal trapézoïdal
$t$ :	Temps
$T$ :	Largeur au miroir d'un canal trapézoïdal
$TVD$ :	Total Variation Diminishing
$u$ :	Vitesse moyenne de l'écoulement dans une section
$U$ :	Vecteur écoulement
$x$ :	Abscisse dans l'espace
$Y_u$ :	Rapport de la hauteur amont par la hauteur aval
$Y_L$ :	Rapport de la hauteur latéral par la hauteur aval
$z$ :	Côte du canal
$\alpha$ :	Angle du fond du canal
$\beta$ :	Matrice de projection du terme source dans la base des vecteurs propres
$\delta$ :	Angle de la jonction
$\lambda$ :	Rapport $\Delta t / \Delta x$ , inverse de la vitesse
$\mu$ :	Coefficient de contraction
$\phi$ :	Limiteur du flux
$\psi$ :	Correction entropique
$\rho$ :	Masse volumique
$\Lambda$ :	Matrice diagonale de la matrice jacobienne
$\tilde{\Lambda}$ :	Matrice diagonale de la matrice jacobienne approchée
$\Delta t$ :	Pas de temps
$\Delta x$ :	Pas d'espace

# SOMMAIRE

## **PARTIE A - INTRODUCTION ET OBJECTIFS DE LA THESE ..... 18**

CHAPITRE 1	: INTRODUCTION GENERALE ET PROBLEMATIQUE.....	19
CHAPITRE 2	: LES OBJECTIFS.....	20
CHAPITRE 3	: PLAN DE LA THESE.....	21

## **PARTIE B - ETAT DE L'ART : LES SCHEMAS NUMERIQUES DE DISCRETISATION DE BARRE DE SAINT-VENANT A CAPTURE DE CHOCS ET COUPLAGE AVEC LES MODELES DE JONCTIONS ..... 22**

CHAPITRE 1	: LES SCHEMAS NUMERIQUES DE DISCRETISATION DES EQUATIONS DE BARRE DE SAINT-VENANT.....	24
1.	<i>Les équations de Barré de Saint-Venant.....</i>	24
1.1.	Les phénomènes hydrauliques.....	24
1.2.	Les équations de Barré de Saint-Venant.....	26
1.3.	Conclusion.....	31
2.	<i>Classification et propriétés des schémas numériques.....</i>	32
2.1.	Classification des schémas numériques.....	32
2.2.	Les schémas à capture de chocs.....	35
2.3.	Les schémas TVD (Total Variation Diminishing).....	38
3.	<i>Synthèse bibliographique des schémas à capture de chocs, du terme source et des conditions aux limites.....</i>	41
3.1.	Les schémas à capture de chocs.....	41
3.2.	Discretisation du terme source.....	44
3.3.	Prise en compte des conditions aux limites.....	46
4.	<i>Conclusion.....</i>	47
CHAPITRE 2	: TRAITEMENT DES MODELES DE JONCTIONS ET COUPLAGE AVEC LES EQUATIONS DE BARRE DE SAINT-VENANT.....	48
1.	<i>Traitement des modèles de jonctions avec les équations de Barré de Saint-Venant ...</i>	48
1.1.	Synthèse bibliographique des modèles de jonctions.....	48
1.2.	Traitement d'une confluence avec les équations de BSV.....	54
1.3.	Conclusion.....	56

## **PARTIE C - ADAPTATION D'UN SCHEMA AUX ELEMENTS FINIS DISCONTINUS AUX EQUATIONS DE BSV, AMELIORATION DU TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES ET DE LA DISCRETISATION DU TERME SOURCE..... 57**

CHAPITRE 1	: LES ELEMENTS FINIS DISCONTINUS APPLIQUES AUX EQUATIONS DE BSV ....	59
1.	<i>Description générale de la discrétisation spatiale.....</i>	59
2.	<i>Discrétisation spatiale et temporelle d'ordre 2.....</i>	60
3.	<i>Limiteur de pente.....</i>	61
CHAPITRE 2	: AMELIORATION DU TRAITEMENT DES CONDITIONS AUX LIMITES.....	63
1.	<i>La méthode des caractéristiques.....</i>	63
2.	<i>Les conditions physiques imposées à l'amont et à l'aval d'un canal.....</i>	65
3.	<i>Traitement des conditions aux limites internes.....</i>	65
CHAPITRE 3	: DISCRETISATION DU TERME SOURCE.....	67

## **PARTIE D - BANC D'ESSAIS NUMERIQUES : COMPARAISON ET VALIDATION DES SCHEMAS NUMERIQUES, DES DIFFERENTS TRAITEMENTS DES CONDITIONS AUX LIMITES ET DU TERME SOURCE ..... 70**

CHAPITRE 1 : CONCEPTION DU BANC D'ESSAIS NUMERIQUES ET CHOIX DES SOLUTIONS ANALYTIQUES DE REFERENCE.....	72
1. <i>Conception du banc d'essais numériques</i> .....	72
2. <i>Conception de la base de données des solutions de référence</i> .....	73
2.1. Ouverture brutale d'une vanne dans un canal à pente nulle et sans frottement ....	73
2.2. Ressaut hydraulique dans un canal prismatique rectangulaire.....	76
2.3. Écoulement stationnaire dans un canal prismatique rectangulaire à lit concave .	76
2.4. Ressaut hydraulique dans un canal prismatique trapézoïdal.....	77
2.5. Ecoulement transcritique dans un canal convergent divergent.....	78
2.6. Ecoulement stationnaire dans un canal convergent divergent et à lit concave .....	79
2.7. Écoulement stationnaire dans un canal non prismatique à section trapézoïdale...	79
2.8. Ecoulement stagnant dans un canal non prismatique à lit fortement irrégulier ...	80
2.9. Écoulement stationnaire au-dessus de plusieurs seuils .....	81
2.10. Ressauts hydrauliques dans un canal trapézoïdal à pente variée .....	81
2.11. Ecoulement fluvial dans un canal non prismatique à section trapézoïdale .....	82
2.12. Ouverture brutale d'une vanne dans un canal à pente nulle avec frottements. ...	82
2.13. Vidange d'un canal à lit concave .....	83
2.14. Propagation d'un choc hydraulique à travers un canal convergent divergent.....	83
3. <i>Utilisation des cas tests de référence dans le banc d'essais numériques</i> .....	85
CHAPITRE 2 : COMPARAISON DES DIFFERENTS SCHEMAS NUMERIQUES.....	86
1. <i>Comparaison de l'ensemble des schémas numériques sur les cas tests 1 et 2</i> .....	86
1.1. Ouverture brutale d'une vanne dans un canal à pente nulle et sans frottement : cas test 1 .....	86
1.2. Ressaut hydraulique dans un canal rectangulaire : cas test 2.....	103
1.3. Conclusion des deux tests précédents .....	112
2. <i>Comparaison de schémas numériques sur les cas tests 10, 11, 12, 13 et 14</i> .....	114
2.1. Ressauts hydrauliques dans un canal trapézoïdal à pente variée : cas test 10.....	114
2.2. Ecoulement fluvial dans un canal non prismatique à section trapézoïdale : cas test 11.....	115
2.3. Ouverture brutale d'une vanne dans un canal à pente nulle et avec frottement : cas test 12 .....	116
2.4. Vidange dans un canal à lit concave : cas test 13.....	120
2.5. Propagation d'un choc hydraulique à travers un canal convergent divergent : cas test 14 .....	121
2.6. Conclusion.....	122
CHAPITRE 3 : COMPARAISON DE DIFFERENTES FORMES DE DISCRETISATION DU TERME SOURCE ET DES CONDITIONS AUX LIMITES.....	123
1. <i>Comparaison de différentes modes de discrétisation du terme source</i> .....	123
1.1. Écoulement stationnaire dans un canal prismatique rectangulaire à lit concave : cas test 3 .....	123
1.2. Ressaut hydraulique dans un canal prismatique trapézoïdal : cas test 4 .....	124
1.3. Ecoulement transcritique dans un canal convergent divergent : cas test 5 .....	125
1.4. Ressaut hydraulique dans un canal convergent divergent et à lit concave : cas test 6.....	126



1.5. Écoulement stationnaire dans un canal non prismatique à section trapézoïdale : cas test 7 .....	127
1.6. Ecoulement stagnant dans un canal non prismatique à lit fortement irrégulier : cas test 8 .....	128
2. <i>Traitement des conditions aux limites internes- Écoulement stationnaire au-dessus des seuils</i> .....	130
3. <i>Conclusion</i> .....	131

**PARTIE E - DOMAINE DE VALIDITE DES DIFFERENTS MODELES DE JONCTIONS ET COUPLAGE DES MODELES DE JONCTIONS AVEC LES EQUATIONS DE BSV..... 133**

CHAPITRE 1 : DOMAINE DE VALIDITE DES DIFFERENTS MODELES DE LA JONCTIONS.....	135
1. <i>Choix des modèles à comparer</i> .....	135
1.1. Données expérimentales et modèles de confluence .....	135
1.2. Données expérimentales et modèles de défluence .....	135
2. <i>Comparaison des modèles de confluence</i> .....	135
2.1. Confluence fluviale .....	136
2.2. Comparaison générale des modèles de la confluence fluviale.....	141
3. <i>Confluence torrentielle</i> .....	143
3.1. Les résultats expérimentaux de Rice .....	143
3.2. Les résultats expérimentaux de Hager .....	144
4. <i>Confluence transitionnelle</i> .....	145
4.1. Les résultats expérimentaux de Hager .....	145
5. <i>Défluence fluviale</i> .....	147
5.1. Les résultats expérimentaux de Sridharan.....	147
5.2. Les résultats expérimentaux de Ramamurthy .....	148
5.3. Les résultats expérimentaux de Hsu.....	149
6. <i>Conclusion</i> .....	150
CHAPITRE 2 : COMPARAISON DU COUPLAGE DES MODELES DE JONCTIONS AVEC LES EQUATIONS DE BSV DANS LE CAS TRANSITOIRE.....	152
1. <i>Simulation numérique à travers une confluence</i> .....	152
1.1. Exemple 1 : confluence fluviale avec trois canaux de même largeur .....	153
1.2. Exemple 2 : confluence fluviale avec largeur aval égale à la somme des largeurs amont et latérale .....	156
2. <i>Simulation numérique à travers une défluence</i> .....	158
2.1. Exemple 4 : défluence fluviale avec trois canaux de même largeur .....	158
2.2. Exemple 5 : défluence torrentielle avec trois canaux de même largeur .....	160
3. <i>Conclusion</i> .....	162

**PARTIE F - CONCLUSION GENERALE ..... 163**

**BIBLIOGRAPHIE ..... 166**

**ANNEXES ..... 173**

**Partie A -  
INTRODUCTION ET  
OBJECTIFS DE LA  
THESE**

---

# Chapitre 1 : Introduction générale et Problématique

Les flux qui transitent dans les collecteurs des réseaux sont de plus en plus importants et sont susceptibles de surcharger le réseau d'assainissement. Les dysfonctionnements sont fréquents particulièrement par temps de pluie dans certaines agglomérations. Les pollutions des milieux récepteurs et les inondations, conséquences directes des déversements, sont mal supportées par les milieux naturels et la population. Ainsi, l'amélioration de la qualité du milieu naturel et la protection du riverain passent par une maîtrise en hydraulique et en charge polluante de plus en plus fine des réseaux d'assainissement.

Pour tenter de résoudre ces dysfonctionnements (par exemple en localisant les zones à renforcer dans le but d'éviter les débordements), il est nécessaire de se doter de modèles capables de simuler les phénomènes hydrauliques associés à l'écoulement de l'eau polluée à travers la forme complexe du réseau.

A l'heure actuelle, les équations de la mécanique des fluides (Navier –Stokes, Reynolds, Barré de Saint-Venant, Euler, etc....) ont donné naissance à de nombreux logiciels qui visent à les résoudre. Ces logiciels et bien sûr les équations qui sont à leur base peuvent être à caractère 1D, 2D ou 3D. L'hydraulique à surface libre traite les écoulements dans les canaux artificiels et naturels ayant une interface eau/air soumise à la pression atmosphérique. Les équations de Barré de Saint-Venant (1871) sont les équations les plus utilisées pour modéliser les écoulements non stationnaires et graduellement varié à surface libre.

Les applications qu'on trouve dans le domaine de l'hydraulique fluviale avec des logiciels tels que RUBAR [Paquier-1995] ou TELEMAR qui pour le premier permettent de modéliser le comportement d'une rivière et pour le second de modéliser le comportement de grandes étendues d'eau soumise par exemple aux effets du vent et des marées. Ces logiciels résolvent les équations de Barré de Saint-Venant 1D ou 2D. Pour l'étude plus précise de phénomènes localisés on trouve des logiciels tels que FLUENT ou CFX qui résolvent les équations de Reynolds. Ce sont des logiciels 3D qui tiennent compte des phénomènes de turbulence et qui sont capables de prendre en charge des écoulements multiphasiques.

Pour l'assainissement, on trouve plusieurs logiciels dont, les plus employés sont SWMM HYDROWORKS, MOUSE et CANOE. Au niveau de l'hydraulique, ils sont tous bâtis sur la résolution des équations de Barré de Saint-Venant 1D par des méthodes numériques classiques du type différences finies. Ces logiciels contiennent des modules supplémentaires qui permettent de représenter certains phénomènes spécifiques (mises en charges, singularités, ouvrages mobiles, déversoirs, etc..). Ces logiciels montrent des limites dans leurs aptitudes à gérer les changements de régimes d'écoulements. Dans ce cas, on peut voir apparaître de fortes discontinuités sur la ligne d'eau (ressaut hydraulique), mais également dans leurs capacités à reproduire de manière correcte le comportement de certains ouvrages tels que les déversoirs d'orage et les jonctions. C'est dans le but de pallier certaines de ces difficultés que M. Buyer (2001) a entrepris ses travaux de recherche au laboratoire systèmes Hydrauliques Urbains à l'ENGEES.

---

## Chapitre 2 : Les objectifs

L'objectif de cette thèse est la suite directe des travaux réalisés par M. Buyer (2001).

Pour un écoulement réel non permanent et non uniforme, le système d'équations de Barré de Saint Venant est constitué de l'équation de continuité et de l'équation de la dynamique. Le système de Barré de Saint-Venant est un système d'équations différentielles aux dérivées partielles non linéaires et hyperboliques. Il est donc impossible de résoudre ce système d'une façon analytique dans le cas général. Par conséquent, une résolution numérique de ce système s'impose. Simuler l'écoulement à surface libre revient à résoudre le système de Barré de Saint Venant à l'aide d'un schéma numérique robuste c'est-à-dire capable de donner une solution numérique proche de la réalité quelles que soient les particularités de l'écoulement. Dans ce but, les objectifs sont de donner des critères sur le choix :

1. des schémas numériques capables de résoudre le système de Barré de Saint Venant d'une façon robuste,
2. de la discrétisation temporelle : explicite ou implicite,
3. des solveurs numériques du terme flux,
4. des méthodes de discrétisation numérique du terme source,
5. des conditions aux limites externes et internes.

L'ensemble de ses objectifs sera réalisé par l'intermédiaire d'un banc d'essais numériques. Les solutions de référence seront analytiques afin de correctement apprécier la diffusion et la stabilité de chaque schéma numérique.

Au voisinage des jonctions, le système de Barré de Saint Venant 1D n'est pas applicable. Afin de simuler l'écoulement dans des réseaux contenant des jonctions, nous devons répondre aux objectifs suivants :

6. Savoir simuler l'écoulement de l'eau au voisinage d'une jonction.
7. Adopter un modèle de jonction selon la nature de l'écoulement.
8. Savoir coupler le système de Barré de Saint Venant avec la jonction.

---

## Chapitre 3 : Plan de la thèse

La première partie de ce travail, a pour objectif, de donner une description générale du travail effectué dans cette thèse, ainsi qu'un état de l'art des travaux qui ont précédé cette thèse. Dans le premier chapitre, nous commençons par décrire les équations de Barré de Saint-Venant 1D sous forme conservative. Dans le second chapitre, nous décrivons les propriétés mathématiques du système de Barré de Saint-Venant et les différentes méthodes de discrétisation. Nous terminons ce chapitre, par un état de l'art des schémas numériques à capture de chocs. Dans le troisième chapitre, nous expliquons la jonction et nous citons brièvement les modèles unidimensionnels permettant de relier les différentes hauteurs d'eau à la jonction.

La deuxième partie est consacrée, dans un premier temps, à l'application la méthode des éléments finis discontinus de type Galerkin d'ordre 2 pour la résolution des équations de BSV. Dans un deuxième temps, on s'intéresse à l'amélioration des traitements des conditions aux limites internes et externes. Dans un troisième temps, on reformule la discrétisation du terme source des équations de Barré de Saint-Venant.

La troisième partie de la thèse a pour objectif, de donner les résultats de simulations numériques du système de Barré de Saint Venant à l'aide d'un banc d'essais numériques. Des solutions analytiques sont utilisées pour comme solutions de référence. Dans cette partie, on compare les schémas numériques, le traitement des conditions aux limites ainsi que la discrétisation du terme source.

La quatrième partie s'intéresse aux jonctions avec les équations de BSV. L'objectif est de comparer les modèles entre eux en régime permanent par rapport aux données expérimentales. L'objectif du deuxième chapitre est de comparer les résultats de simulations numériques des écoulements dans un réseau contenant des canaux et des jonctions.

**Partie B -  
ETAT DE L'ART :  
Les schémas  
numériques de  
discrétisation de  
Barré de Saint-Venant  
à capture de chocs et  
couplage avec les  
modèles de jonctions**

Cette partie a pour objectif de présenter un état de l'art des schémas numériques à capture de chocs appliqués aux équations de Barré de Saint-Venant (BSV) et du traitement des conditions aux limites entre les modèles de jonctions et le modèle de BSV.

L'objectif du premier chapitre est, dans un premier temps, de décrire brièvement les phénomènes physiques se produisant dans un canal à surface libre. On pourra ainsi se fixer un cahier des charges des phénomènes devant être modélisés. On décrit ensuite les équations de Barré de Saint-Venant (BSV) permettant de reproduire l'ensemble des comportements physiques décrit précédemment. Dans un deuxième temps, on s'intéresse aux schémas numériques permettant la résolution des équations de BSV. On s'orientera surtout vers les schémas dits à capture de chocs puisqu'ils permettent de prendre en compte les discontinuités de type ressaut hydraulique et onde de gravité en régime transitoire.

Le deuxième chapitre s'intéresse, dans un premier temps, aux modèles de jonctions caractérisant l'écoulement à travers les confluences et les défluences. Dans un deuxième temps, on présente le traitement des conditions aux limites entre les modèles de jonctions et le modèle de BSV.

# Chapitre 1 : Les schémas numériques de discrétisation des équations de Barré de Saint-Venant

## 1. Les équations de Barré de Saint-Venant

L'hydraulique à surface libre traite les écoulements dans les canaux artificiels et naturels ayant une interface eau/air soumise à la pression atmosphérique. Les équations de Barré de Saint-Venant (1871) sont les plus utilisées pour modéliser les écoulements non stationnaires, graduellement et rapidement variés à surface libre.

### 1.1. Les phénomènes hydrauliques

#### a- La surface libre

Les écoulements à surface libre sont caractérisés par une interface eau-air. Le paramètre hydraulique permettant d'évaluer cette interface est le tirant d'eau c'est-à-dire la variation de la hauteur entre le fond du canal et l'interface. La figure suivante représente l'évolution du tirant d'eau le long d'un seuil.

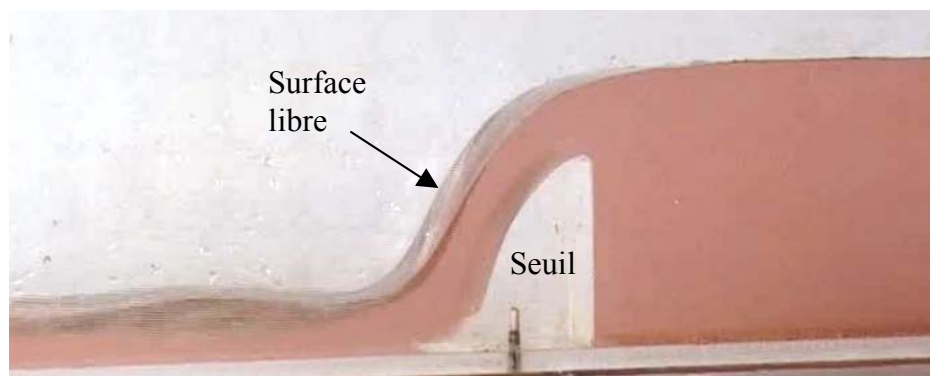


Figure 1 : Evolution du tirant d'eau le long d'un seuil

La courbe de remous représente l'évolution du tirant d'eau le long d'un canal.

#### b- Le régime fluvial-torrentiel

Soit  $u$  la vitesse moyenne de l'écoulement dans une section et  $c$  la célérité de propagation d'une onde. Lors d'une perturbation, deux ondes se propagent, l'une à la vitesse  $u + c$  et l'autre à  $u - c$ . Soit le nombre de Froude défini par :  $Fr = \frac{u}{c}$

Si  $Fr = 1$ , le régime est dit critique. La hauteur correspondant à ce régime s'appelle hauteur critique, notée  $h_c$ , exprimée en mètres (m). Si  $F < 1$ , la hauteur d'eau est supérieure à la hauteur critique ( $h > h_c$ ) ; dans ce cas, le régime est dit fluvial, et l'on observe une onde qui se propage vers l'aval et une autre vers l'amont (Figure 2 a). Si  $F > 1$ , la hauteur d'eau est inférieure à la hauteur critique ( $h < h_c$ ) ; dans ce cas, le régime est dit torrentiel et l'on observe les deux ondes qui se propagent vers l'aval (Figure 2 b).



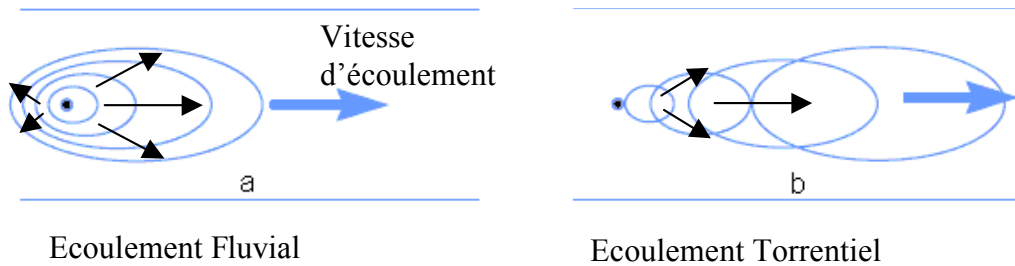


Figure 2: Le comportement des ondes selon les régimes d'écoulement

L'écoulement en réseau d'assainissement est de type transitionnel, c'est à dire que l'on peut observer dans un même tronçon des régimes d'écoulement fluvial et torrentiel. Ces transitions peuvent être dues à des changements de pente entre les collecteurs, à la présence d'ouvrages ou encore être provoquées par un apport d'eau dans le réseau lié à un événement pluvieux. Le passage du régime fluvial au régime torrentiel, ou inversement, peut être détecté par évaluation du nombre de Froude.

La connaissance des régimes d'écoulement influence également la gestion des conditions aux limites à imposer pour pouvoir simuler les écoulements dans les canaux.

### c- Le ressaut hydraulique

Le ressaut hydraulique se caractérise par une variation importante et croissante de la hauteur d'eau de l'amont vers l'aval du phénomène sur une courte distance. Le ressaut se produit lors du passage du régime torrentiel au régime fluvial. Dans la plupart des cas, une agitation importante de la surface libre permet rapidement de localiser le phénomène, comme par exemple dans le cas d'un ressaut fort.

Le ressaut hydraulique est l'un des phénomènes les plus complexes en hydraulique à surface libre. Les connaissances actuelles sur ce phénomène ne sont pas encore suffisamment étendues pour que l'écoulement interne soit parfaitement compris.

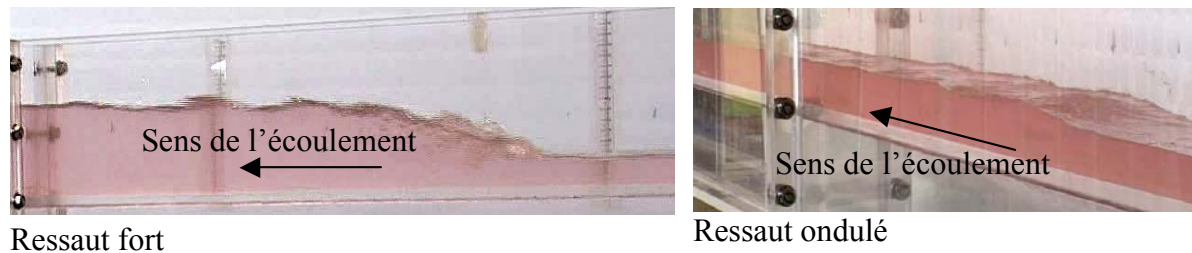


Figure 3 : Le ressaut hydraulique

### d- Les phénomènes transitoires

Dans les réseaux d'assainissement, les phénomènes transitoires sont systématiquement présents du fait de la variabilité intrinsèque des débits par temps de pluie. Ils se traduisent par une variation, qui peut être brutale dans certains cas de la hauteur d'eau due à la propagation d'une onde de gravité ou d'un ressaut hydraulique. En effet, lors du démarrage d'une pompe ou de l'ouverture d'une vanne, une onde peut rapidement se propager dans le réseau.

### e- L'évolution du fond du canal

En réseau d'assainissement comme en rivière, l'eau peut véhiculer un transport solide. La différence fondamentale entre le transport solide en rivière et en réseau c'est que le fond d'un

réseau est fixe et que donc il n'y a plus d'érosion possible une fois qu'on l'a atteint. En fonction des conditions hydrauliques, les particules en suspension peuvent décanter voire se remettre en suspension. Dans ces cas, bien que le fond du canal évolue lentement, celui-ci va engendrer une modification des caractéristiques géométriques essentiellement de la pente et donc influencer l'écoulement.

## 1.2. Les équations de Barré de Saint-Venant

### a- La géométrie des canaux et grandeurs hydrauliques

Dans ce paragraphe, on définit les grandeurs hydrauliques permettant d'établir les équations caractérisant le comportement hydraulique des écoulements à surface libre. Le canal, dont la section transversale ne varie pas et dont la pente longitudinale et la rugosité restent constantes, est dit canal prismatique. Les différentes grandeurs (voir Figure 4) sont les suivantes :

- La surface mouillée  $A$  ( $m^2$ ), dite aussi section, est la portion de la section transversale occupée par le fluide.
- La largeur au miroir est la longueur de la zone de contact entre l'eau et l'air au sein d'une section.
- Le périmètre mouillé  $P$  (m) d'une section est la longueur de la zone de contact entre l'eau et le canal au sein de la section mouillée.
- Le rayon hydraulique  $R_h$  (m) est défini comme étant le rapport de la surface mouillée par le périmètre mouillé.
- La profondeur hydraulique est donnée par le rapport de la surface mouillée par la largeur au miroir.
- Le débit  $Q$  ( $m^3/s$ ) dans une section est défini comme étant le volume du liquide écoulé à travers cette section pendant une unité de temps.
- La vitesse moyenne de l'écoulement dans une section  $u$  (m/s) est le rapport du débit  $Q$  par la section normale de l'écoulement.
- La cote  $z$  est le niveau du lit du canal par rapport à un plan horizontal de référence fixe.
- La charge  $H$  dans une section est donnée par : 
$$H = z + h + \frac{u^2}{2g} \quad 1-1$$
- La charge spécifique dans une section est : 
$$H_s = h + \frac{u^2}{2g} \quad 1-2$$

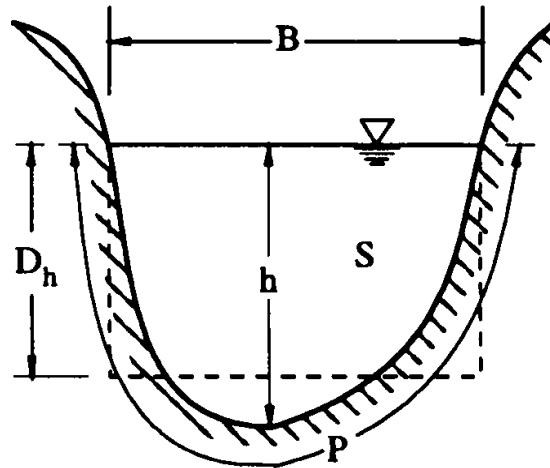


Figure 4: Les différents paramètres d'un écoulement dans une section.

### b- Les équations de Barré de Saint-Venant 1-D (BSV)

Les équations de Barré de Saint-Venant (1871) sont les équations les plus utilisées pour modéliser les écoulements non stationnaires graduellement et rapidement variés à surface libre. Ces équations sont non linéaires et de type hyperbolique. Dans ce paragraphe, nous allons décrire les équations de Barré de Saint-Venant établies dans leur forme 1D.

Les équations de Barré de Saint-Venant sont composées par l'équation de continuité ou l'équation de conservation de la masse et l'équation fondamentale de la dynamique connue en mécanique sous le vocable de seconde loi de Newton.

Les équations de Barré de Saint-Venant unidimensionnelles sont écrites sous certaines hypothèses qui sont les suivantes :

- La distribution des pressions est considérée comme hydrostatique dans une section. Cette hypothèse de pression hydrostatique impose des accélérations verticales faibles devant la pesanteur.
- Le liquide est incompressible, sa masse volumique est donc constante.
- La pente de la surface libre est faible. Soit  $z$ ,  $S_0$  et  $\alpha$ , la cote, la pente et l'angle du fond du canal respectivement. Pour un angle  $\alpha$  petit, on a :  $\sin \alpha \cong \operatorname{tg} \alpha = S_0 = -\frac{dz}{dx}$ .
- La vitesse est supposée constante dans une section.
- En utilisant les mêmes lois empiriques qui régissent l'écoulement uniforme, les forces de frottement et de turbulence peuvent être représentées par un seul paramètre  $S_f$ .

#### b-1. L'équation de continuité

Cette équation exprime le principe de conservation de la masse. Cela revient à dire que la variation de masse de fluide d'un élément de volume  $dv$  pendant un temps  $dt$  est égale à la masse de fluide entrant dans ce volume déduite de la masse de fluide sortante.

Considérons un volume de contrôle  $\Omega$ , Figure 5, situé entre deux sections du canal situées aux abscisses  $x$  et  $x+dx$ . Le taux d'écoulement de la masse est,  $\rho uA$  où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $A$  est la Section mouillée,  $u$  est la vitesse de l'écoulement.

Soit  $q_l$  le débit latéral dans le volume de contrôle  $\Omega$ .

D'après la loi de conservation de la masse dans l'intervalle  $[t; t+dt]$ , l'équation de continuité s'écrit sous la forme suivante :

$$\int_t^{t+dt} \rho [(Q)_{x+dx} - (Q)_x] dt + \int_x^{x+dx} \rho [(A)_{t+dt} - (A)_t] dx = \int_t^{t+dt} \rho [(q_l x)_{x+dx} - (q_l x)_x] dt \quad 1-3$$

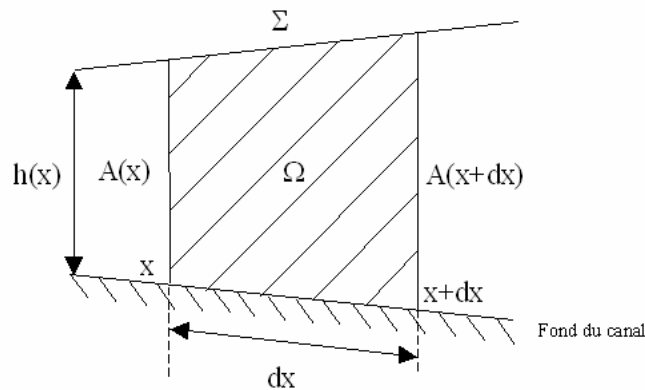


Figure 5: Le volume de contrôle

### b-2. L'équation de la dynamique

Cette équation se déduit de la deuxième loi de Newton : le taux de variation de la quantité de mouvement d'une particule de masse  $m$  est égal à la somme des forces extérieures agissant sur cette particule. Les forces extérieures agissant sur le volume de contrôle sont les forces de pression hydrostatique, celles de pression due au changement de la largeur, et celles de gravité et de frottements.

➤ La force de pression hydrostatique  $F_{ph}$  est définie par :

$$F_{ph} = \rho g \int_0^{h(x,t)} (h - \eta) B(x, \eta) d\eta \quad 1-4$$

Où  $\eta$  est une variable d'intégration qui désigne la profondeur,  $h(x, t)$  représente la hauteur d'eau et  $B(x, \eta)$  est la largeur de la section du canal. Le taux de variation de la force de pression hydrostatique dans le volume de contrôle  $\Omega$  pendant l'intervalle de temps  $[t, t + dt]$  est donné par:

$$\int_t^{t+dt} [F_{ph}]_x^{x+dx} dt = \int_t^{t+dt} ((F_{ph})_{x+dx} - (F_{ph})_x) dt = g \int_t^{t+dt} [(I_1)_{x+dx} - (I_1)_x] dt \quad 1-5$$

Avec  $I_1$  définie par :

$$I_1 = \rho \int_0^{h(x,t)} (h - \eta) B(x, \eta) d\eta \quad 1-6$$

- La force de pression due au changement de la largeur est donnée par :

$$F_{pl} = \rho \int_x^{x+dx} g \int_0^{h(x)} (h - \eta) \frac{\partial B}{\partial x} d\eta dx \quad 1-7$$

Le taux de variation de la force de pression due au changement de la largeur dans le volume de contrôle  $\Omega$  pendant l'intervalle de temps  $[t, t + dt]$  est :

$$\int_t^{t+dt} [F_{ph}]_x^{x+dx} dt = \int_t^{t+dt} ((F_{pl})_{x+dx} - (F_{pl})_x) dt = g \int_t^{t+dt} [(I_2)_{x+dx} - (I_2)_x] dt \quad 1-8$$

Avec  $I_2$  définie par :

$$I_2 = \int_0^{h(x)} (h - \eta) \frac{\partial B}{\partial x} d\eta \quad 1-9$$

- La force engendrée par l'accélération de la pesanteur ( $F_g$ ) agissant sur  $\Omega$  est donnée par :

$$F_g = \int_{\Omega} \rho g \sin(\alpha) d\omega = \rho g A S_0(x) dx \quad 1-10$$

Avec,  $S_0(x) \approx \sin(\alpha)$  pour une pente faible.

Le taux de variation de la force de gravité dans le volume de contrôle  $\Omega$  pendant l'intervalle de temps  $[t, t + dt]$  est donné par :

$$\int_t^{t+dt} [F_g]_x^{x+dx} dt = \int_t^{t+dt} ((gAS_0)_{x+dx} - (gAS_0)_x) dt \quad 1-11$$

- La force de frottement  $F_f$  est due à une contrainte de cisaillement et agit sur le périmètre mouillé. Cette force est exprimée en fonction de la pente de frottement  $S_f$ . La force de cisaillement est définie par  $gAS_f$ . Le taux de variation de la force de frottement dans le volume de contrôle  $\Omega$  pendant l'intervalle de temps  $[t, t + dt]$  est donné par :

$$\int_t^{t+dt} F_f dt = \int_t^{t+dt} ([\rho g A S_f]_{x+dx} - [\rho g A S_f]_x) dt \quad 1-12$$

- La quantité de mouvement est donnée par :

$$m \frac{d}{dt} [u(x, t)] = \rho A dx \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right] \quad 1-13$$

Le taux de variation  $\Delta M$  de la quantité de mouvement dans le volume de contrôle  $\Omega$  pendant l'intervalle de temps  $[t, t + dt]$  est

$$\Delta M = \int_x^{x+dx} [(\rho Au)_{t+dt} - (\rho Au)_t] dx + \int_t^{t+dt} [(\rho Au^2)_{x+dx} - (\rho Au^2)_x] dt \quad 1-14$$

Par conséquent, l'équation de la conservation de la quantité de mouvement sous forme intégrale:

$$\begin{aligned} \int_x^{x+dx} [(Au)_{t+dt} - (Au)_t] dx + \int_t^{t+dt} [(Au^2)_{x+dx} - (Au^2)_x] dt = & -g \int_t^{t+dt} [(I_1)_{x+dx} - (I_1)_x] dt \\ & + g \int_t^{t+dt} [(I_2)_{x+dx} - (I_2)_x] dt + g \int_t^{t+dt} [(gAS_0)_{x+dx} - (gAS_0)_x] dt - \int_t^{t+dt} [(gAS_f)_{x+dx} - (gAS_f)_x] dt \end{aligned}$$

En remplaçant  $Au$  par  $Q$ , nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_x^{x+dx} [(Q)_{t+dt} - (Q)_t] dx + \int_t^{t+dt} \left[ \left( \frac{Q^2}{A} + I_1 \right)_{x+dx} - \left( \frac{Q^2}{A} + I_1 \right)_x \right] dt = \\ + g \int_t^{t+dt} [(I_2)_{x+dx} - (I_2)_x] dt + g \int_t^{t+dt} [(gAS_0 - S_f)_{x+dx} - (gAS_0 - S_f)_x] dt \end{aligned} \quad 1-15$$

### b-3. La forme différentielle et conservative des équations de Barré de Saint-Venant

En supposant que les variables d'écoulement  $A$  et  $Q$  sont continues, différentiables, et que  $dx$  et  $dt$  sont des grandeurs infinitésimales, en écrivant le développement en série de Taylor de  $A$  et  $Q$  au voisinage de  $t$  et de  $x$  à l'ordre 1, et après quelques simplifications algébriques, nous obtenons le système d'équations de Barré de Saint Venant sous forme différentielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) = gA(S_0 - S_f) + gI_2 \end{cases} \quad 1-16$$

Le système de BSV peut s'écrire sous la forme conservative suivante, Vila (1986):

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{G}(\mathbf{U}) \quad 1-17$$

Avec :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ gA(S_0 - S_f) + gI_2 \end{pmatrix} \quad 1-18$$

$\mathbf{U}$  est appelé vecteur écoulement,  $\mathbf{F}(\mathbf{U})$  vecteur flux et  $\mathbf{G}(\mathbf{U})$  vecteur source. Le vecteur flux  $\mathbf{F}$  est relié au vecteur écoulement  $\mathbf{U}$  à travers la jacobienne  $J$  de  $\mathbf{F}$  par rapport à  $\mathbf{U}$ , d'où l'équation 1.17 est équivalente à:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + J \frac{\partial U}{\partial x} = G \quad 1-19$$

Avec

$$J = \frac{\partial F(U)}{\partial U} = \begin{pmatrix} \frac{\partial Q}{\partial A} & \frac{\partial Q}{\partial Q} \\ \frac{\partial}{\partial A} \left( \frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) & \frac{\partial}{\partial Q} \left( \frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g \frac{A}{B} - u^2 & 2u \end{pmatrix} \quad 1-20$$

Où  $u = \frac{Q}{A}$  est la vitesse moyenne de l'écoulement dans une section.

#### b-4. La condition d'entropie

Si une solution discontinue se forme de part et d'autre d'un choc se propageant à la vitesse  $s$  dans le plan  $(x; t)$ , alors la condition d'entropie, Smoller (1984), relie le vecteur flux  $F$  et le vecteur écoulement  $U$  du système BSV par :

$$[F(U, x)] = s[U] \quad 1-21$$

Avec  $U$ , le vecteur écoulement et  $F(U)$  le vecteur flux donnée dans 1-18.  $[U] = U_l - U_r$ , représente le saut à travers le choc.  $U_l$  et  $U_r$ , sont les valeurs constantes à gauche et à droite du choc. Vila (1986) montre que l'équation (1-21) est une solution faible de l'équation de BSV et surtout que cette équation caractérise le ressaut hydraulique mobile dans un canal.

### 1.3. Conclusion

On a montré dans ce chapitre que les différents phénomènes hydrauliques que l'on veut modéliser en réseau d'assainissement comme en rivière sont les suivants :

- L'évolution du tirant d'eau et du débit,
- Les régimes d'écoulement fluvial, torrentiel et critique,
- Le ressaut hydraulique,
- Les phénomènes transitoires (évolution rapide du débit et des tirants d'eau),
- Les variations de section le long du canal.

L'ensemble de ces phénomènes peut être pris en compte en utilisant les équations de Barré de Saint-Venant mises sous forme conservative.

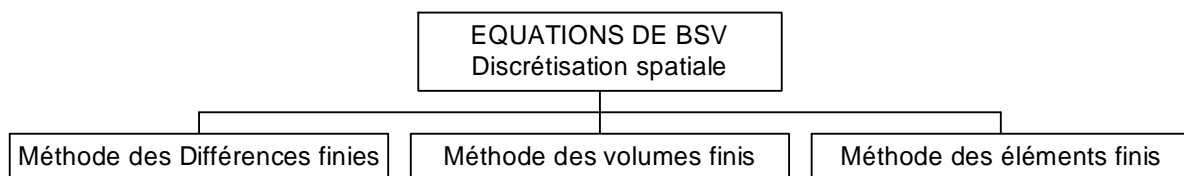
## 2. Classification et propriétés des schémas numériques

### 2.1. Classification des schémas numériques

#### a- La discrétisation spatiale

Les différences finies, les volumes finis et les éléments finis (Hirsch, 1990), sont les différentes classes de méthodes numériques de résolution du système de BSV. Ces méthodes permettent de calculer les hauteurs d'eau, les vitesses et les débits dans les tronçons de façon approchée.

Classification des schémas numériques



#### a-1. La méthode des différences finies

La méthode aux différences finies classiques est une méthode bien connue dans le cadre de l'hydraulique urbaine. Cette méthode consiste à déterminer les valeurs de la fonction recherchée notée  $f$  en quelques points particuliers.

Dans le cas de la résolution des équations de BSV, on commence par quadriller le plan  $(x, t)$  afin d'obtenir des mailles de taille  $(\Delta x, \Delta t)$  où  $\Delta x$  est le pas d'espace et  $\Delta t$  le pas de temps. Les méthodes aux différences finies sont toutes basées sur les développements de Taylor des fonctions continues et dérivables. Lorsque les pas de temps et d'espace sont petits, les développements limités sont proches des valeurs exactes.

Selon l'utilisation des développements limités, on obtient des expressions différentes des dérivées qui engendrent 3 types de schémas (centré, progressif ou régressif).

#### a-2. La méthode des éléments finis

La base de la méthode des éléments finis est de diviser le domaine en éléments par exemple triangulaires ou quadrilatéraux dans le cas 2D et en des segments dans le cas 1D, et de chercher la solution numérique approchée dans un espace fonctionnel choisi a priori. La solution est donc écrite à l'aide d'une base de fonctions connues sous le nom des fonctions d'interpolations. Il faut noter qu'avec cette méthode on peut choisir autant de nœuds qu'on veut par élément, ce qui donne une meilleure précision de la solution. Le choix des fonctions d'interpolations est essentiel pour définir cette méthode.

#### a-3. La méthode des volumes finis

La méthode des volumes finis est, de nos jours, la méthode la plus utilisée pour résoudre numériquement les équations de Barré de Saint-Venant. Cette méthode est basée sur la discrétisation intégrale des équations et nécessite la subdivision du domaine en un nombre de volumes finis. L'intégrale est applicable localement sur chaque volume et conserve la même valeur dans chaque cellule de calcul.



## b- Discrétisation temporelle

La dérivée partielle par rapport au temps s'exprime sous la forme :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = v \frac{[f_i^{n+1} - f_i^n]}{\Delta t} + (1-v) \frac{[f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^n]}{\Delta t} \quad 1-22$$

$v$  étant un paramètre appartenant à l'intervalle  $[0 ; 1]$ . L'expression la plus générale de la dérivée de  $f$  par rapport à  $x$  est donnée par Kovacs (1988) :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha_3 \frac{\alpha_1 [f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1}] + (1-\alpha_1) [f_i^{n+1} - f_{i-1}^{n+1}]}{\Delta x} + (1-\alpha_3) \frac{\alpha_2 [f_{i+1}^n - f_i^n] + (1-\alpha_2) [f_i^n - f_{i-1}^n]}{\Delta x} \quad 1-23$$

Avec les notations précédentes, on a :

Pondération		Schéma
$\alpha_3=0$ $\alpha_3=0.5$ $\alpha_3=1$		explicite
		implicite centré dans le temps
		totalemment implicite
$\alpha_1=1$	$\alpha_2=1$	Progressif
$\alpha_1=0.5$	$\alpha_2=0.5$	Centré
$\alpha_1=0$	$\alpha_2=0$	Régressif
$\alpha_1=1$	$\alpha_2=0$	Mixte décentré

Tableau 1 : Les différents types de schémas numériques

### b-1. Schéma explicite

Pour un schéma explicite, les variables à un nouveau pas de temps sont évaluées à chaque point du maillage par des calculs directs à partir des valeurs déjà connues. L'inconvénient principal des schémas explicites, se situe dans la restriction du pas de temps qui est imposée par la condition de Courant-Friedrich-Lewy (CFL), équation 1.26, qui assure la stabilité de ces schémas.

Seule la dérivée de  $f$  par rapport au temps s'exprime en fonction des valeurs de  $f$  au pas de temps  $n+1$ . La différentielle par rapport à  $x$  s'exprime en fonction des valeurs de  $f$  au pas de temps précédent de calcul (pas  $n$ ). On calcule  $f_i^{n+1}$  connaissant les valeurs de  $f$  calculées au temps  $n\Delta t$  pour, en général, les pas d'espaces  $i-1$ ,  $i$  et  $i+1$ , (Figure 6).

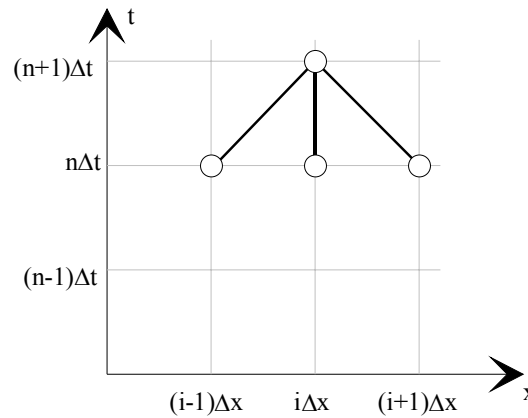


Figure 6 : Schéma de type explicite

L'avantage de la méthode explicite est la simplicité de sa mise en œuvre.

Pour tous les schémas numériques de nature explicite, se pose le problème du choix du pas de temps à utiliser pour la résolution. De ce choix dépend la stabilité du schéma numérique considéré. Pour les problèmes non linéaires, à chaque pas de temps, on a plusieurs vitesses de propagation. Pour qu'un schéma explicite soit stable, il faut que l'onde la plus rapide ne parcoure pas plus que la longueur d'une cellule  $\Delta x$  pendant le temps  $\Delta t$ . En appelant  $V_{\max}^n$  la vitesse de l'onde la plus rapide dans le domaine de calcul au pas de temps  $n$ , on définit le nombre de Courant maximum :

$$C_{\text{cfl}} = \frac{\Delta t V_{\max}^n}{\Delta x} \tag{1-24}$$

où  $\Delta t$  est tel que  $0 < C_{\text{cfl}} \leq 1$ . On appelle souvent  $C_{\text{cfl}}$  le coefficient CFL (Courant-Friedrich-Lévy) ou nombre de Courant. Dans le cas de l'étude du système de Barré de Saint-Venant, le pas de temps sera donné par :

$$\Delta t = \frac{C_{\text{cfl}} \Delta x}{|u| + c} \tag{1-25}$$

**b-2. Schéma implicite**

Pour les méthodes implicites, les variables sont calculées simultanément à un nouveau pas de temps, par la résolution d'un système avec autant d'inconnues que de nœuds du maillage. La stabilité de ces schémas n'est pas conditionnée par la condition CFL, mais par la nature de la solution.

Les schémas sont implicites si la différentielle de  $f$  par rapport à  $x$  se calcule en fonction d'au moins deux valeurs de position d'espace de  $f$  au temps  $n+1$ . Le caractère implicite d'un schéma numérique est lié au fait que l'on ne puisse pas exprimer explicitement chaque valeur inconnue en fonction uniquement de valeurs connues. Chaque équation à résoudre contient au moins deux valeurs inconnues de  $f$  au pas de temps de calcul  $(n+1)\Delta t$ . Dans le cas présenté sur la figure 7, la valeur  $f_i^{n+1}$  est calculée en fonction de  $f_i^n$  et également en fonction de  $f_{i-1}^{n+1}$  et de  $f_{i+1}^{n+1}$ .

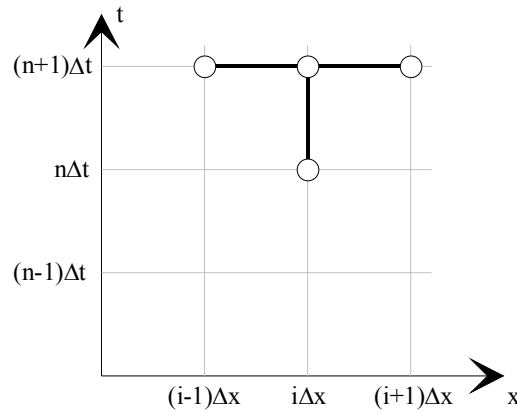


Figure 7: Schéma de type implicite

Le principal avantage du schéma implicite est qu’il est stable quel que soit le pas de temps choisi. Néanmoins, si le domaine est discrétisé en N mailles, alors le schéma implicite mène à un système de N équations à N inconnues.

## 2.2. Les schémas à capture de chocs

### a- Le schéma de Godunov appliqué au problème de Riemann

Le problème de Riemann centré en  $(x_0; t_0)$  est un problème aux valeurs initiales discontinues, composé de deux états constants. La structure de la solution de ce problème appliqué au système de BSV est composé de trois états constants séparés par deux ondes élémentaires : une onde de raréfaction se propageant vers la gauche, et une onde de choc se propageant vers la droite. Godunov (1959) a résolu ces équations de type hyperbolique en supposant que le problème est une série de problèmes de Riemann local.

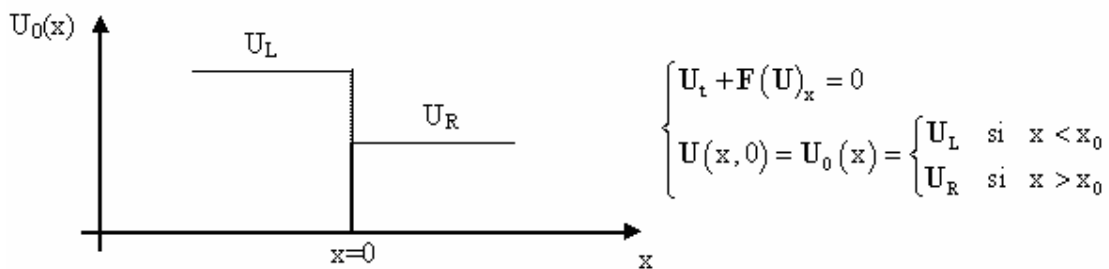


Figure 8 : Représentation du problème de Riemann

Dans ce paragraphe, nous exposons le principe des schémas numériques de type Godunov qui ont permis de résoudre les équations de type hyperboliques, pouvant faire apparaître des solutions discontinues.

L’idée introduite par Godunov est la suivante : une méthode numérique peut être établie en utilisant des méthodes d’intégration des équations dont les exigences sont moins sévères en ce qui concerne le pré-supposé de la dérivabilité des fonctions mis en jeu.

La notion clé est celle du volume de contrôle sur lequel on intègre les équations.

On s’intéresse dans un premier temps à l’équation sans second membre :

$$U_t + F(U)_x = 0$$

En intégrant sur le volume de contrôle, Figure 9, et en appliquant le théorème de Green à ces équations, nous obtenons:

$$\int_{x_L}^{x_R} U(x,t_2)dx = \int_{x_L}^{x_R} U(x,t_1)dx + \int_{t_1}^{t_2} F(U(x_L,t))dt - \int_{t_1}^{t_2} F(U(x_R,t))dt \quad 1-27$$

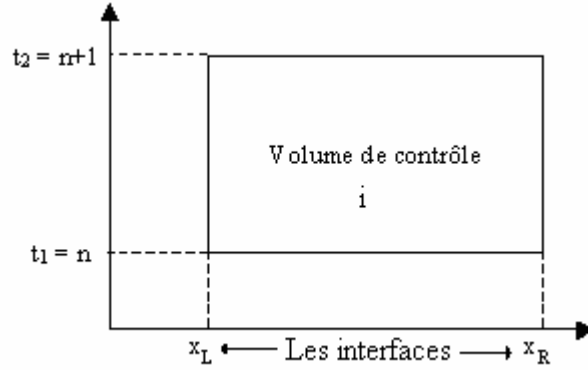


Figure 9: Représentation d'un volume de contrôle

En posant :

$$\begin{cases} U_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x,0)dx & U_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} U(x,\Delta t)dx \\ F_{i-1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} F(U(x_L,t))dt & F_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} F(U(x_R,t))dt \end{cases} \quad 1-28$$

Avec  $\Delta x$  le pas d'espace,  $\Delta t$  le pas de temps,  $i = \frac{x}{\Delta x}$  et  $n = \frac{t}{\Delta t}$  entiers,  $i$  représente le numéro de cellule de calcul. On nomme  $i+1/2$  et  $i-1/2$ , les interfaces des cellules  $i$  et  $i+1$  ;  $i-1$  et  $i$ .  $F_{i+1/2}$ , représente donc le flux entre les cellules  $i$  et  $i+1$ . La forme du schéma discrétisé obtenu est la suivante :

$$\begin{aligned} U_i^{n+1} &= U_i^n - \lambda [F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n] \\ \lambda &= \frac{\Delta t}{\Delta x} \end{aligned} \quad 1-29$$

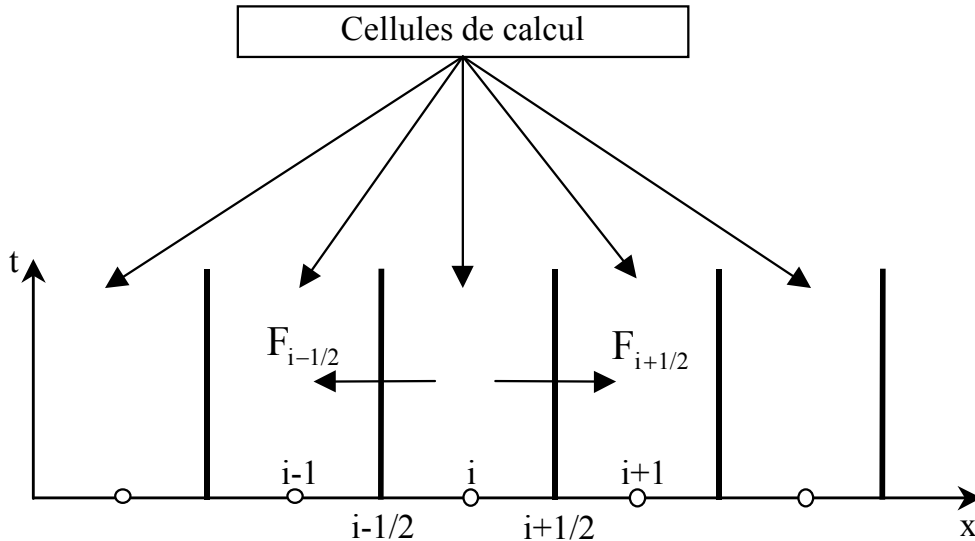


Figure 10: Décomposition du domaine en cellules de calculs et flux aux interfaces.

La Figure 10 représente le maillage du domaine de calcul. Les cellules de calcul notées  $i$ , dans lesquelles les valeurs des variables recherchées sont constantes par morceau, ont pour limites les interfaces  $i-1/2$  et  $i+1/2$ .

### b- Les solveurs

Nous rappelons qu'un schéma explicite de type conservatif s'écrit sous la forme:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n \right) \quad 1-30$$

$\Delta t$  étant le pas de temps et  $\Delta x$  est le pas d'espace. Les flux aux interfaces  $i+1/2$  et  $i-1/2$  sont calculés numériquement selon différents schémas, que nous présentons en annexe.

Un solveur est une méthode numérique permettant de calculer les flux aux interfaces. Ces schémas sont connus sous le nom de solveur de Riemann ou tout simplement schémas de Riemann. Les schémas de Riemann sont attractifs, puisque ces méthodes sont simples à implémenter, de hautes résolutions pouvant capturer les chocs, préservent la monotonie et vérifient la condition d'entropie.

### c- Le terme source

En fait, les schémas décrits précédemment ont été développés sans prendre en considération la discrétisation du terme source. Dans le cas général, le système de BSV contient un terme source qui décrit l'ensemble des frottements, la pente ainsi que la variation de la largeur le long du canal. Le terme source du système BSV intervient et doit être ainsi pris en considération dans la discrétisation du schéma numérique.

Le traitement numérique du terme source qui est généralement constitué de fonctions algébriques des variables inconnues doit être étudié avec précaution. En effet, la présence du second membre ne permet plus d'assurer le caractère robuste d'un schéma numérique, et par conséquent des oscillations numériques peuvent se former au voisinage des discontinuités.

## 2.3. Les schémas TVD (Total Variation Diminishing)

### a- Propriétés des schémas numériques

#### a-1. Consistance

Pour vérifier la consistance des schémas, on vérifie l'identité (à un certain ordre de dérivation près) entre l'équation différentielle de départ et l'équation discrétisée après avoir effectué un développement limité de Taylor des valeurs discrètes de cette dernière équation. Le schéma est dit consistant si lorsque l'on fait tendre  $\Delta x$  et  $\Delta t$  vers zéro, on retrouve les équations aux dérivées partielles de départ :

$$\mathbf{F}_{i+1/2}(\mathbf{v}, \dots, \mathbf{v}) = \mathbf{F}(\mathbf{v}) \quad 1-31$$

Ceci signifie que si tous les arguments de  $\mathbf{F}_{i+1/2}$  sont égaux à  $\mathbf{v}$  alors le flux numérique est le même que le flux physique en  $\mathbf{U} = \mathbf{v}$ .

#### a-2. Ordre d'un schéma

L'exactitude d'un schéma numérique mesure la qualité de l'approximation de la solution exacte du problème. L'erreur totale est obtenue en retranchant la solution exacte du problème de la solution discrétisée. Cette erreur est fonction de  $\Delta t^q$  et  $\Delta x^p$  où  $\Delta x$  et  $\Delta t$  sont respectivement le pas d'espace et de temps de discrétisation. L'ordre du schéma numérique est alors  $q$  dans le temps et  $p$  dans l'espace.

#### a-3. Stabilité

Un schéma est stable si l'erreur entre la solution exacte du problème et la solution discrétisée reste bornée dans le temps et/ou dans l'espace. La plupart des schémas ont une stabilité conditionnée par le choix de  $\Delta x$  et  $\Delta t$ . Nous rappelons que les schémas numériques de type explicite sont stables sous la condition CFL (Courant-Friedrich-Lewy).

### b- Schéma TVD (Total Variation Diminishing)

La principale difficulté rencontrée dans la résolution du système de BSV réside dans le choix de l'ordre de l'approximation du schéma. Etant donné qu'un schéma du premier ordre est dissipatif et qu'un schéma du second ordre crée des oscillations, il est difficile de définir un schéma numérique qui n'oscille pas et qui soit précis. On dispose de classes de schémas qui n'oscillent pas : ce sont les schémas monotones. Malheureusement, ceux-ci sont limités au premier ordre de précision. En conséquence, l'utilisation de schémas numériques de ce type ne peut pas convenir dans le cas de la résolution de systèmes d'équations du type Barré de Saint-Venant pour lesquels l'ordre de précision 1 n'est pas suffisant. Néanmoins, il existe des méthodes numériques qui associent les deux qualités, ce sont les méthodes à variation totale décroissante (TVD).

Une caractéristique essentielle d'un schéma TVD est qu'il définit des solutions sans oscillations, en particulier à la traversée d'une région à forte variation de gradient. Un tel schéma ne crée, ni n'amplifie les extrémaux, puisqu'il préserve la monotonie, c'est une propriété que ne partage pas l'ensemble des schémas numériques. Le critère TVD d'un schéma est lié à l'existence d'une quantité minimale de viscosité numérique nécessaire dans ce schéma. Les fondements théoriques des méthodes TVD ne sont disponibles que pour les

problèmes scalaires unidimensionnels. En pratique, l'expérience accumulée dans de nombreuses applications à des problèmes non linéaires et/ou multidimensionnels, a montré que la théorie unidimensionnelle scalaire sert bien de ligne de conduite pour étendre ces idées. Les schémas TVD sont intimement liés à la notion traditionnelle de viscosité numérique. Les méthodes TVD et à viscosité artificielle tentent de contourner le théorème de Godunov de telle sorte que les oscillations au niveau des zones à forts gradients soient éliminées ou au moins contrôlées. Dans la méthode à viscosité artificielle, la viscosité est ajoutée de manière explicite en ajoutant des termes aux équations aux dérivées partielles. Dans les méthodes TVD, cette viscosité artificielle est inhérente au schéma numérique lui-même et les techniques numériques mises en œuvre pour activer cette viscosité sont complexes. La viscosité numérique au niveau du schéma est contrôlée de manière très précise de telle sorte que les oscillations soient éliminées et qu'une haute précision soit assurée dans les parties lisses.

### b-1. Variation totale

Soit une fonction  $u = u(x)$ , la variation totale de  $u$  est définie par :

$$VT(u) = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x + \delta) - u(x)| dx \quad 1-32$$

Si  $u$  est une fonction régulière alors la relation 1-33 est identique à :

$$VT(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} |u'(x)| dx \quad 1-33$$

Si  $u = u(x, t)$ , on peut généraliser les définitions précédentes. En fait si l'on s'intéresse à la convergence, il suffit de définir la variation totale à un temps  $t$  fixé  $t = t^n$ . On définit la variation totale de  $u(x, t)$  à un temps  $t$  fixé que l'on note  $VT(u(t))$  par :

$$VT(u^n) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} |u_{i+1}^n - u_i^n| \quad 1-34$$

### b-2. Schéma TVD

Un schéma numérique est dit à diminution de variation totale (TVD) si  $\forall n$  :

$$VT(u^{n+1}) \leq VT(u^n) \quad 1-35$$

Une conséquence directe de cette relation est que :

$$VT(u^n) \leq VT(u^{n-1}) \leq \dots \leq VT(u^0) \quad 1-36$$

où  $\{u_i^0\}$  est l'ensemble des conditions initiales du problème.

**b-3. Schéma TVD à limitation de flux**

Une des méthodes permettant de construire des schémas numériques qui présentent le caractère TVD est l'approche à limitation de flux. Elle nécessite un flux numérique,  $f_{i+\frac{1}{2}}^{HI}$ , associé à un schéma numérique d'ordre supérieur à un et un flux numérique,  $f_{i+\frac{1}{2}}^{LO}$ , associé à un schéma monotone c'est à dire d'ordre un. On peut définir un flux d'ordre élevé TVD par :

$$f_{i+\frac{1}{2}}^{TVD} = f_{i+\frac{1}{2}}^{LO} + \phi_{i+\frac{1}{2}} \left[ f_{i+\frac{1}{2}}^{HI} - f_{i+\frac{1}{2}}^{LO} \right] \tag{1-37}$$

Où  $\phi_{i+\frac{1}{2}}$  est une fonction de limitation de flux à déterminer.

Il existe de nombreuses fonctions de type limiteur de flux. On citera ULTRABEE, SUPERBEE, VAN LEER ou encore MINBEE (Toro, 2000).

**b-4. Schéma TVD à limitation de pente**

Ces méthodes numériques sont basées sur une approche géométrique. Les valeurs des variables contenues dans les cellules de calculs ne sont plus considérées comme constantes par morceaux mais comme des fonctions linéaires par morceaux comme représenté sur la figure ci-dessous :

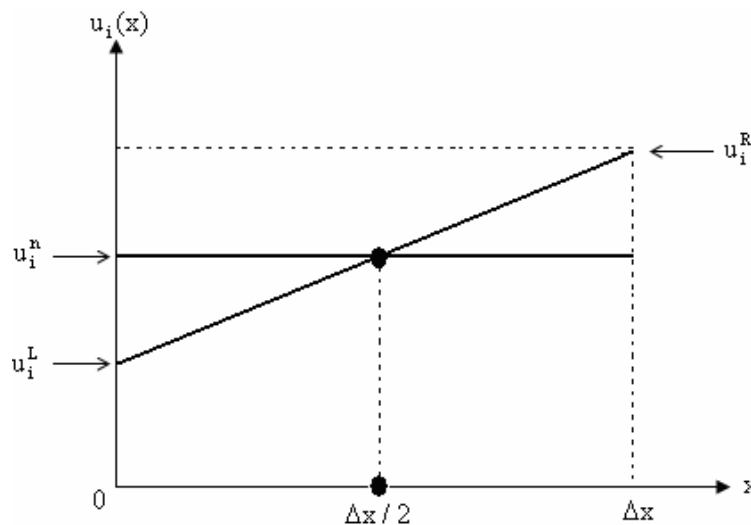


Figure 11 : Représentation de la valeur d'une variable u dans une cellule de calcul

Les valeurs constantes par morceaux  $u_i^n$  sont remplacées par une fonction linéaire  $u_i(x)$  :

$$u_i(x) = u_i^n + \frac{(x - x_i)}{\Delta x} \Delta_i \tag{1-38}$$

Où  $\frac{\Delta_i}{\Delta x}$  est la pente de  $u_i(x)$  dans la cellule de calculs i. Les valeurs de  $u_i(x)$  au niveau des extrémités de la cellule de calculs jouent un rôle important. Elles sont données par :



$$u_i^L = u_i(0) = u_i^n - \frac{1}{2} \Delta_i \quad ; \quad u_i^R = u_i(\Delta x) = u_i^n + \frac{1}{2} \Delta_i \quad 1-39$$

Ces valeurs sont appelées valeurs aux limites extrapolées. On note que l'intégrale de  $u_i(x)$  dans la cellule  $I_i$  est identique à celle de  $u_i^n$  ; en conséquence, la propriété de conservation est préservée. La figure 12 représente la linéarisation par morceaux dans trois cellules de calculs successives.

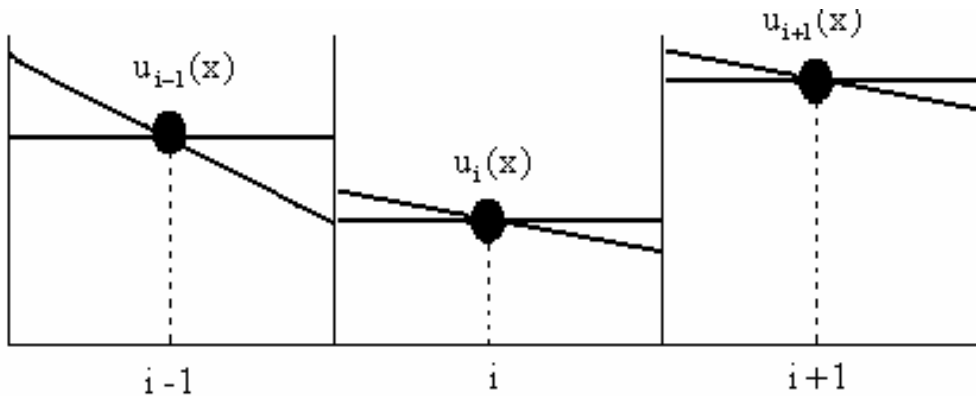


Figure 12: Variables discontinues au niveau des interfaces.

### 3. Synthèse bibliographique des schémas à capture de chocs, du terme source et des conditions aux limites

#### 3.1. Les schémas à capture de chocs

Dans ce paragraphe, nous donnons un bref historique des schémas numériques développés dans la littérature.

##### a- Schéma de type différences et volumes finis

La première méthode numérique capable de prendre en compte des discontinuités est due à Godunov (1959), qui a résolu des équations de type hyperbolique en considérant une série de problèmes de Riemann local. La méthode proposée par Godunov est conservative et respecte la condition d'entropie, mais elle est du premier ordre et nécessite une résolution itérative à chaque pas de temps. Cette méthode a été rendue plus attractive par une extension au second ordre de précision par Van Leer (1979), puis par le développement d'autres solveurs de Riemann approchés comme celui de Lax Friedrich (1973), Lax Wendroff (1960), Roe (1981), HLL (Harten, Lax et van Leer, 1980) et celui de Osher et Salomon (1983) ( dans Toro, 1997). L'organigramme suivant représente les liens entre chaque schéma numérique à capture de choc :

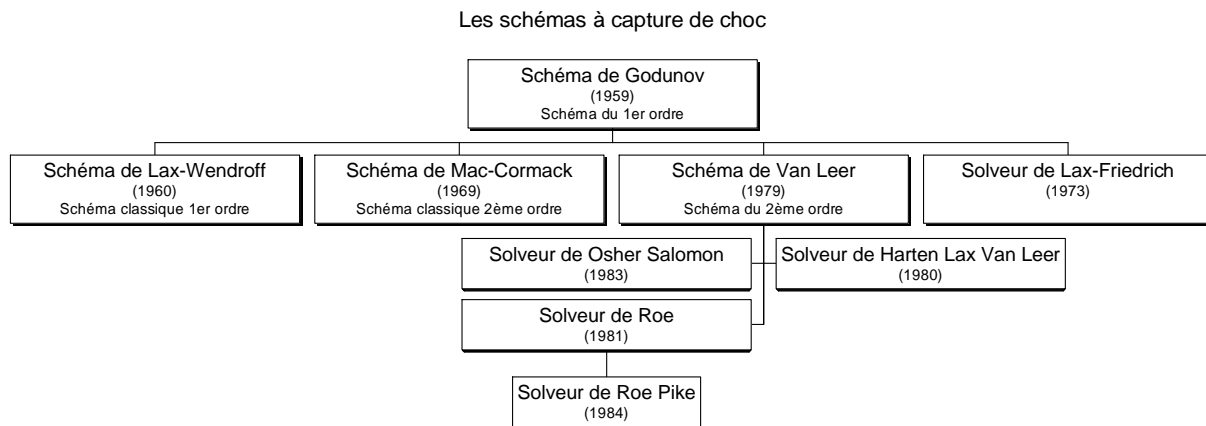


Figure 13: Les schémas à capture de choc.

Le solveur de Riemann le plus connu et le plus utilisé, est celui de Roe. Ce solveur consiste à résoudre le problème de Riemann de manière approchée en remplaçant la matrice jacobienne exacte dans chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ , par une matrice jacobienne constante. Roe et Pike (1984) ont affiné la méthode de Roe, et grâce à cela, il n'était plus nécessaire d'exprimer explicitement la matrice jacobienne approchée de Roe, mais il suffisait de calculer certains paramètres utiles pour la résolution.

Fennema et Chaudhry (1986) ont présenté un article utilisant le schéma implicite de Preissmann et trois autres schémas explicites : les schémas de MacCormack, Lambda et Gabutti. Au voisinage des discontinuités, les schémas explicites présentent des oscillations numériques qui ont été réduites en ajoutant une viscosité artificielle. Les résultats obtenus en comparant les quatre schémas étaient similaires, et ce malgré l'utilisation d'un nombre de CFL plus grand que l'unité pour le schéma de Preissmann. Le temps d'exécution était de quatre à huit fois plus important pour le schéma implicite que pour les schémas explicites. Garcia-Navarro et Savirón (1992) ont appliqué un schéma de type MacCormack à une série de problèmes discontinus dans un canal rectangulaire.

Jusqu'à l'année 1983, les schémas numériques utilisés dans la résolution des systèmes hyperboliques étaient des schémas de type classique. Ces schémas n'étaient pas aptes à capter les chocs et les discontinuités hydrauliques d'une manière fine, puisque ces schémas étaient, soit du premier ordre, donc associé à une solution présentant de la diffusion, soit du second ordre, mais alors associé à une solution présentant des oscillations numériques. Afin de surmonter cet obstacle, Harten (1983) a introduit la notion de méthodes numériques TVD (Total Variation Diminishing). C'est une classe de méthodes, qui est au moins du second ordre de précision, et qui contient des limiteurs non linéaires afin d'éviter les oscillations au voisinage des discontinuités. Harten (1984) a décrit le schéma du flux modifié (modified flux) ; ce schéma consiste à modifier les flux du premier au second ordre en limitant les gradients des fonctions flux pour rendre le schéma TVD. Sweby (1984) a défini et appliqué un limiteur de pente au schéma MUSCL, développé par Van-Leer.

Glaister (1988, 1993) a été le premier à appliquer le solveur de Roe au système de BSV dans un canal rectangulaire lisse. Alcrudo et al. (1991) ont étendu le travail de Glaister à un canal prismatique à section quelconque, et ils ont appliqué les limiteurs de flux introduits par Sweby à un schéma du premier ordre (flux difference splitting) afin de le rendre TVD au second ordre. Garcia-Navarro et al. (1992) ont étendu le schéma de MacCormack pour qu'il

possède la propriété TVD. Priestley et al. (1994) ont décrit un schéma implicite TVD basé sur le principe de linéarisation introduit par Yee (1987). Jha et al. (1995) ont appliqué le schéma de Roe d'ordre 1 et d'autres schémas basés sur le schéma de Roe d'ordre supérieur à 1, au problème de barrage. Ces schémas sont des extensions des schémas : Lax-Wendroff, Muscl et flux modifié. Meselhe et al. (1997) ont présenté un schéma implicite (Mesh scheme) qui comporte deux étapes : la prédiction, la correction. Delis et Skeels (1998) ont comparé quatre schémas étendus du solveur de Roe : le schéma TVD Symétrique proposé par Yee, le schéma TVD Upwind connu aussi sous le nom de flux modifié proposé par Harten (1984) et le schéma MUSCL présenté initialement par Van Leer (1979). Buyer (2001) a comparé quatre schémas de type TVD à partir des données expérimentales pour les canaux et les déversoirs. L'organigramme suivant représente l'ensemble des schémas TVD :

### Les schémas TVD

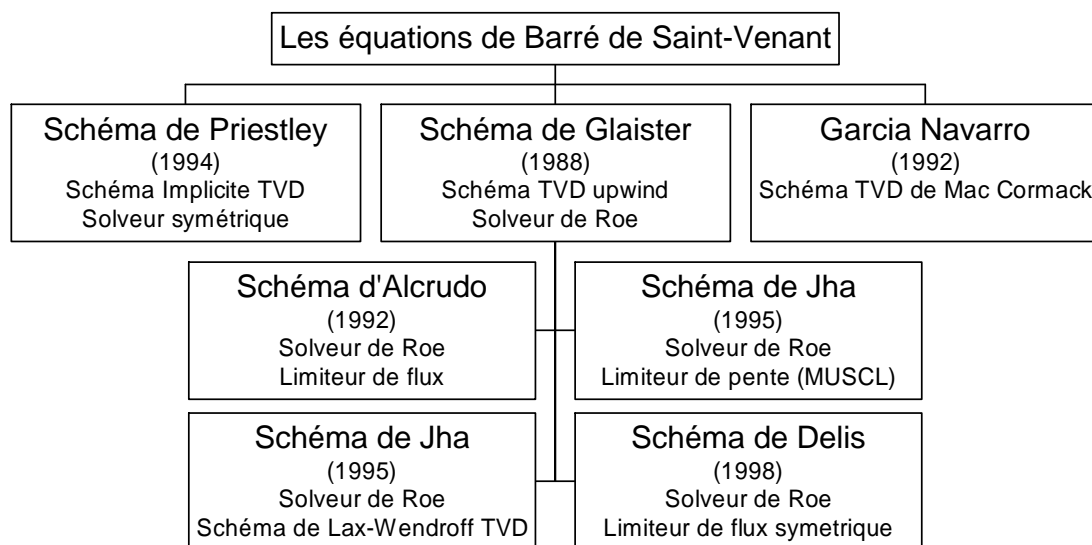


Figure 14: Les schémas TVD.

#### b- Schéma de type éléments finis discontinus de Galerkin

La méthode des éléments finis discontinus de Galerkin est une classe de schémas numériques explicites utilisant l'espace des fonctions polynômes par morceaux pour l'approximation spatiale de la solution et la méthode de Runge Kutta pour la discrétisation temporelle.

La méthode des éléments finis discontinus de Galerkin a été proposée par Reed et Hill (1973) pour la solution de l'équation linéaire de transport de neutrons. Lesaint et Raviart (1974) ont été les premiers à écrire les bases mathématiques de cette méthode. Johnson et Pitkaranta (1986), Richter (1988), et Peterson (1991) ont étudié les propriétés mathématiques de cette méthode comme la convergence et l'ordre de précision. La première analyse de cette méthode appliquée à une équation hyperbolique scalaire non linéaire est due à Chavent et Cockburn (1989). Le schéma était du premier ordre dans le temps, et du second ordre dans l'espace. Afin d'améliorer l'ordre du schéma dans le temps, Cockburn et Shu (1989) ont employé une méthode de Runge Kutta du second ordre. La généralisation de cette méthode à un ordre de précision d'ordre  $k$  arbitraire a été développée par Cockburn et al. (1990) pour le cas scalaire, (1991) pour le cas d'un système hyperbolique unidimensionnel écrit sous forme

conservative, (1999 a) pour le cas scalaire multidimensionnel, (1998 b) pour le cas d'un système hyperbolique multidimensionnel.

### 3.2. Discrétisation du terme source

La technique pour la prise en compte du terme source apparaissant dans les équations de Barré de Saint-Venant consiste à décomposer le problème en un problème sans second membre résolu par un schéma numérique, puis à partir de la solution obtenue, de résoudre une équation différentielle ordinaire faisant intervenir le terme source. On considère le problème non homogène suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{G}(\mathbf{U}) \\ \mathbf{U}(x, t^n) = \mathbf{U}^n \end{cases} \quad 1-40$$

On veut faire évoluer la solution  $\mathbf{U}$  du temps  $t^n$  au temps  $t^{n+1}$  pour le pas de temps  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$ . Le schéma de base que l'on peut utiliser consiste à résoudre le système d'équations précédent sans terme source. Celui-ci fournira la solution  $\mathbf{U}^{(\text{adv})}$  :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_t + \mathbf{F}(\mathbf{U})_x = \mathbf{0} \\ \mathbf{U}(x, t^n) = \mathbf{U}^n \end{cases} \Rightarrow \mathbf{U}^{(\text{adv})} \quad 1-41$$

L'équation différentielle ordinaire est alors :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \mathbf{U} = \mathbf{G}(\mathbf{U}) \\ \mathbf{U}(x, t^n) = \mathbf{U}^{(\text{adv})} \end{cases} \Rightarrow \mathbf{U}^{n+1} \quad 1-42$$

Les conditions initiales pour le problème homogène sont les conditions initiales du problème complet et la solution après un pas de temps  $\Delta t$  est  $\mathbf{U}^{(\text{adv})}$ . Le second système peut ensuite être résolu pour un temps  $\Delta t$  et avec la condition initiale donnée par la résolution du premier système c'est à dire  $\mathbf{U}^{(\text{adv})}$ . La solution ainsi obtenue peut être vue comme la solution approchée du problème complet. Si on note l'opérateur d'advection  $\mathbf{A}(\mathbf{U})$  et l'opérateur source  $\mathbf{S}(\mathbf{U})$ , ils sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}: \quad \mathbf{U}_i^{(\text{adv})} &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}} \right] \\ \mathbf{S}: \quad \mathbf{U}_i^{n+1} &= \mathbf{U}_i^{(\text{adv})} + \Delta t \mathbf{G}(\mathbf{U}_i^{(\text{adv})}) \end{aligned} \quad 1-43$$

Le schéma complet s'écrit finalement :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}} \right] + \Delta t \mathbf{G} \left( \mathbf{U}_i^{(\text{adv})} \right) \quad 1-44$$

Une autre version explicite de l'intégration du terme source dans le schéma numérique consiste à remplacer la solution  $\mathbf{U}_i^{(\text{adv})}$  par  $\mathbf{U}_i^n$ . Dans la suite, nous n'allons pas distinguer les solutions  $\mathbf{U}_i^{(\text{adv})}$  et  $\mathbf{U}_i^n$ .

### a- Discrétisation centrée (pointwise) du terme source

Cette méthode de discrétisation consiste à évaluer le vecteur terme source à chaque nœud de calculs à l'instant actuel n. Le vecteur source numérique prend la forme suivante:

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}_i^n) = \begin{pmatrix} 0 \\ gA_i^n (S_0 - S_{fi}^n) + gI_{2i}^n \end{pmatrix} \quad 1-45$$

### b- Discrétisation moyenne du terme source

La valeur du terme source dans une cellule de calculs est approchée par une moyenne arithmétique (Delis, 1998) des valeurs obtenues en utilisant les solutions des deux problèmes de Riemann ( $i-1, i$ ) et ( $i, i+1$ ) c'est-à-dire  $\tilde{\mathbf{G}}_{i+\frac{1}{2}}^n$  et  $\tilde{\mathbf{G}}_{i-\frac{1}{2}}^n$ . Ces valeurs sont calculées en faisant intervenir les valeurs moyennes de la section mouillée, de la vitesse  $\tilde{u}$  et de la largeur du canal  $\tilde{B}$ .

En évaluant la pente  $S_0$  au nœud  $i$ , et en supposant que le canal soit localement rectangulaire, le terme source est approché par :

$$\tilde{\mathbf{G}}_{i\pm\frac{1}{2}}^n = \begin{pmatrix} 0 \\ g\tilde{I}_2(\tilde{A}_{i\pm\frac{1}{2}}, \tilde{B}_{i\pm\frac{1}{2}}) + g\tilde{A}_{i\pm\frac{1}{2}}(S_0 - \tilde{S}_f(\tilde{A}_{i\pm\frac{1}{2}}, \tilde{B}_{i\pm\frac{1}{2}})) \end{pmatrix} \quad 1-46$$

où :

$$\tilde{A}_{i+\frac{1}{2}} = \sqrt{A_i A_{i+1}} \quad 1-47$$

$$\tilde{B}_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{B_i + B_{i+1}}{2} \quad 1-48$$

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{Q_i/\sqrt{A_i} + Q_{i+1}/\sqrt{A_{i+1}}}{\sqrt{A_{i+1}} + \sqrt{A_i}} \quad 1-49$$

### c- Discrétisation upwind du terme source

Cette méthode de discrétisation consiste à projeter le vecteur terme source dans la base des vecteurs propres [Garcia Navarro et Vazquez-Cendron, 2000]. Cette méthode de discrétisation est plus difficile à implémenter que celle de la discrétisation centrée (pointwise).

Dans ce qui suit, nous décrivons cette méthode, proposée par Garcia Navarro et Vazquez-Cendron (2000).

Soit  $R$ , la matrice formée par les vecteurs propre de  $\tilde{J}$ ,

$$\tilde{J} = \tilde{R}\tilde{\Lambda}\tilde{R}^{-1}, \text{ où } \tilde{\Lambda} = \text{diag}(\tilde{a}^1, \tilde{a}^2).$$

Soit  $\beta$ , la matrice de projection du terme source  $G$  dans la base des vecteurs propres  $R$ .

Le terme source  $G$  s'écrit alors sous la forme :

$$G = R\beta = R(\Lambda\Lambda^{-1})\beta = R(\Lambda^+ + \Lambda^-)\Lambda^{-1}\beta = R(\Lambda^+\Lambda^{-1})\beta + R(\Lambda^-\Lambda^{-1})\beta \quad 1-50$$

Le terme source est évalué au nœud  $i$  à l'instant  $n$  et s'écrit comme suit

$$(G)_i^n = \frac{1}{2}[\psi_{i-1/2}^L + \psi_{i+1/2}^R] \quad 1-51$$

Les fonctions  $\psi^L$  et  $\psi^R$  sont définies par:

$$\begin{cases} \psi_{i-1/2}^L = \beta \begin{pmatrix} \text{sign}(\tilde{a}_1) - \text{sign}(\tilde{a}_2) \\ \tilde{a}_1(1 + \text{sign}(\tilde{a}_1)) - \tilde{a}_2(1 + \text{sign}(\tilde{a}_2)) \end{pmatrix} \\ \psi_{i+1/2}^R = \beta \begin{pmatrix} \text{sign}(\tilde{a}_2) - \text{sign}(\tilde{a}_1) \\ \tilde{a}_1(1 - \text{sign}(\tilde{a}_1)) - \tilde{a}_2(1 - \text{sign}(\tilde{a}_2)) \end{pmatrix} \end{cases} \quad 1-52$$

### 3.3. Prise en compte des conditions aux limites

Dans le but de trouver la solution numérique à l'instant  $n+1$ , le schéma numérique a recours aux valeurs trouvées, à l'instant  $n$ , au nœud courant ainsi qu'aux nœuds voisins. Il est donc impossible d'appliquer un schéma numérique au premier et au dernier nœuds du domaine spatial. Il est nécessaire de faire un traitement spécial pour calculer les valeurs de l'écoulement en ces nœuds. Ce traitement s'appelle les conditions aux limites externes.

Dans cette section, nous décrivons la méthode la plus utilisée pour traiter les conditions aux limites : la méthode de l'extrapolation (Hirsch, (1990)).

Cette méthode consiste à extrapoler les valeurs connues aux nœuds intérieurs à un canal afin de trouver les valeurs aux nœuds limites. Plusieurs types d'extrapolations peuvent être considérés. Les plus utilisés sont ceux des extrapolations constante et linéaire dans l'espace. Soient  $U_{N-1}^{n+1}$ ,  $U_{N-2}^{n+1}$ ,  $U_2^{n+1}$  et  $U_3^{n+1}$ , les valeurs calculées à l'instant  $n+1$  à l'aide d'un schéma numérique, les valeurs  $U_1^{n+1}$  et  $U_N^{n+1}$  aux nœuds 1 et  $N$  sont calculées à l'aide d'une extrapolation constante dans l'espace par :

$$\begin{cases} U_1^{n+1} = U_2^{n+1} \\ U_N^{n+1} = U_{N-1}^{n+1} \end{cases} \quad 1-53$$

Par une extrapolation linéaire, ces variables se calculent de la façon suivante :

$$\begin{cases} U_N^{n+1} = 2U_{N-1}^{n+1} - U_{N-2}^{n+1} \\ U_1^{n+1} = 2U_2^{n+1} - U_3^{n+1} \end{cases} \quad 1-54$$

#### 4. Conclusion

Il existe donc un nombre important de schémas numériques à capture de chocs permettant de résoudre les équations de Barré de Saint-Venant. On remarque qu'il y a peu d'étude comparative de ces schémas à part celles de Buyer (2001) et de Delis et Skeels (1998) pour quatre schémas TVD.

Il semble donc nécessaire de créer un banc d'essais numériques permettant de comparer les différents schémas à capture de chocs dans le but de faire un choix.

Concernant les éléments finis discontinus, il peut être intéressant d'implémenter cette méthode pour résoudre les équations de Barré de Saint-Venant.

Le traitement du terme source dans les équations de BSV peut jouer un rôle considérable au niveau de la stabilité des résultats. Aucune comparaison n'est actuellement disponible entre les différentes approches. Il paraît judicieux de mettre au point un banc d'essai numérique pour montrer la pertinence de ces modèles.

L'implémentation de la discrétisation du terme source dans l'article de Garcia Navarro et Vasquez-Cendon (2000) n'a pas permis de faire converger le calcul. Ceci est soit dû à une incompréhension de notre part, soit à une erreur dans cet article.

Le traitement des conditions aux limites présente l'inconvénient de ne pas prendre en compte physiquement les phénomènes hydrauliques au voisinage des limites amont et aval du canal. Une amélioration du traitement des conditions aux limites peut donc être envisagée.

## Chapitre 2 : Traitement des modèles de jonctions et couplage avec les équations de Barré de Saint-Venant

### 1. Traitement des modèles de jonctions avec les équations de Barré de Saint-Venant

#### 1.1. Synthèse bibliographique des modèles de jonctions

Une jonction est un ouvrage dans les réseaux d'assainissement (ou dans les rivières) caractérisé par une confluence ou une défluence.

Une confluence est composée d'au moins deux canaux se rencontrant pour former un seul canal (Figure 15 a). Une défluence est composée d'un canal se divisant en plusieurs canaux (Figure 15 b).

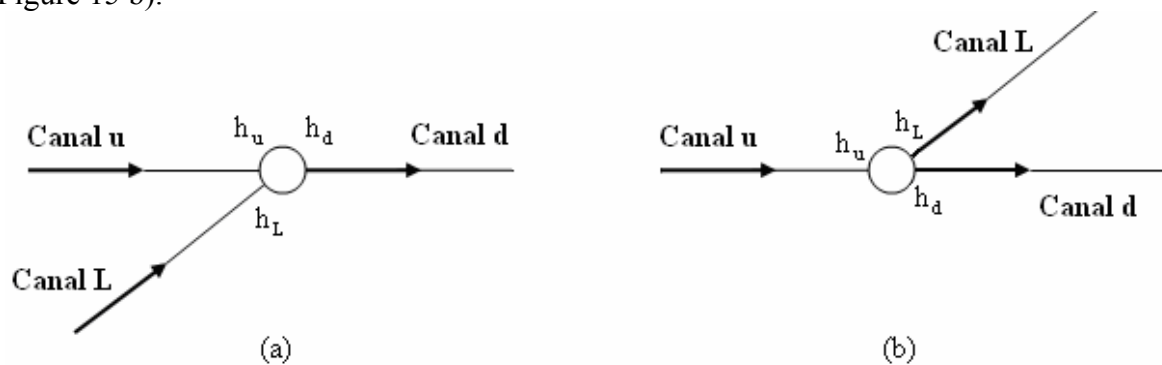


Figure 15 : Jonction : (a) confluence; (b) défluence

Le comportement hydraulique des canaux à jonctions est caractérisé par un grand nombre de paramètres principalement géométriques. On distinguera les formes de sections, les pentes de fond, les arrondis éventuels à la jonction et les largeurs des conduites. Ceci rend la modélisation du comportement hydraulique dans ce système de canalisation difficile à prévoir.

Dans presque toutes les études réalisées pour la confluence et la défluence, c'est le cas d'une jonction simple qui a été considéré, où le canal latéral forme un angle par rapport à l'axe formé par les deux canaux amont et aval.

Les modèles de jonctions sont basés sur le principe de la conservation de la quantité de mouvement et sur la conservation de la masse, ou sur la conservation de l'énergie, mais les différents paramètres complexes et inconnus dans la jonction rendent difficile l'écriture de ces modèles théoriquement.

Dans ce chapitre, nous décrivons la jonction, et nous donnons un bref historique des modèles de jonctions développés dans la littérature.



## a- Les modèles de confluence

### a-1. Confluence fluviale

Une confluence fluviale génère un écoulement fluvial dans les trois canaux renfermant la jonction. Les premières études concernant les confluences ont d'ailleurs été menées pour l'étude de cette configuration. L'une des premières études répertoriées concernant la confluence est due à Taylor (1944) qui supposa les hypothèses suivantes:

- i. Les largeurs des trois branches sont égales.
- ii. La pente du canal est nulle.
- iii. Les frottements sont négligeables.
- iv. La répartition des pressions est hydrostatique et la distribution des vitesses est uniforme.
- v. Des lignes de courants sont parallèles aux parois latérales autour du volume de contrôle.
- vi. Des hauteurs d'eau sont égales dans les conduites amont et latérale.
- vii. Des forces de pression latérales sont négligeables.

Taylor utilisa le principe fondamental de la dynamique selon lequel la variation de la quantité de mouvement d'un élément de fluide est égale à la somme des actions des forces (résultante) qui agissent sur celui-ci. Il développa un modèle permettant de définir le comportement de l'hydraulique à la confluence. Taylor vérifia ce modèle expérimentalement. La corrélation des résultats expérimentaux avec la théorie était correcte pour un angle de confluence de  $45^\circ$  mais s'avérait mauvaise pour un angle de  $135^\circ$ . Il montra que les simplifications iii et vi étaient vérifiées et que l'erreur provenait en premier lieu de la simplification v. Taylor conclut que la généralisation des résultats était impossible et qu'on ne pouvait pas attendre un traitement mathématique applicable à tous les types de jonctions de canaux.

Anwar (1955) a étudié le comportement hydraulique d'une confluence dans un canal trapézoïdal. Les angles de jonction sont  $22.5^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $67.5^\circ$  et  $90^\circ$ . Afin d'améliorer l'écoulement à l'aval de la jonction, il a été recommandé de placer, dans la zone de la jonction, un mur de séparation triangulaire dans le plan de face ainsi que dans les plans latéraux, et dont la largeur et la hauteur diminuent dans la direction de l'écoulement. Ce mur est inutile dans le cas rectangulaire.

Webber et Greated (1966) étudièrent également le comportement d'un écoulement à la jonction de deux canaux rectangulaires en fluvial. Ils étendirent les résultats obtenus par Taylor en considérant trois autres angles de jonction et analysèrent l'effet d'une confluence de forme arrondie. Ils utilisèrent la même relation que celle utilisée par Taylor et observèrent une bonne corrélation entre les résultats expérimentaux et théoriques dans le cas de petits angles de confluence et d'un petit rapport débit amont sur débit aval. En général, le rapport des hauteurs d'eau observé (hauteur amont sur hauteur aval) est inférieur au rapport calculé. Le décalage était attribué à une mauvaise prise en compte de la réaction du mur. Un facteur correctif empirique a été proposé qui procure une meilleure corrélation entre théorie et expérience. Les configurations ont été étudiées pour des nombres de Froude inférieurs à 0,6 et un rapport entre le débit dans le canal amont et celui du canal aval compris entre 0 et 1.

Milano et Sassoli (1977) ont considéré une jonction d'angle  $60^\circ$  avec trois canaux de largeurs différentes. Les résultats obtenus ont montré une différence entre les hauteurs d'eau à la jonction, ainsi que pour les coefficients de l'énergie.

Lin et Soong (1979) ont étudié la perte de l'énergie à travers une confluence d'angle  $90^\circ$ . En utilisant la relation de Manning, ils ont conclu que la perte de l'énergie et la perte due aux frottements sont du même ordre.

Carballada et al. (1981) ont étudié l'écoulement dans les jonctions symétriques de forme Y. En supposant que les hauteurs d'eau aux points de la jonction pour les deux branches soient égales et que le coefficient de correction de la quantité de mouvement dans la branche à l'aval de la jonction soit 1.15, leur approche était en accord avec les observations et l'effet du nombre de Froude s'est avéré important.

D'autres chercheurs comme Best et Reid (1984) au niveau expérimental ou Hager (1989) au niveau théorique menèrent d'autres études et s'orientèrent vers la détermination des caractéristiques géométriques de la zone de séparation des écoulements. Elle constitue une région dans laquelle se forme un remous. Celui-ci provoque une sédimentation et une dissipation d'énergie. En conséquence, la capacité de transport et le débit s'en trouvent diminués. Best et Reid conclurent, que la largeur maximale de la zone de séparation ainsi que sa longueur croissent avec l'angle de jonction et le rapport du débit latéral au débit total. Hager a développé des expressions permettant de calculer le coefficient de contraction de la zone de séparation, dû à la présence de la conduite latérale, en fonction de l'angle de la jonction, du coefficient de pression exercée sur la paroi du canal latéral, et des coefficients de perte de charges pour les branches amont et latérale.

Gurram et al. (1997) ont étudié les caractéristiques de l'écoulement latéral ainsi que la zone de contraction à l'aval de la confluence. Ils ont développé des expressions pour le facteur de correction de la quantité de mouvement, pour la force de pression due au mur latéral et pour la zone de séparation. Un modèle de jonction a été écrit permettant de calculer les hauteurs amont et latérale, qui sont supposées égales, en fonction de la hauteur aval, et ceci en supposant que les largeurs des trois branches soient égales. Ce modèle a été validé en confrontant les résultats simulés aux résultats expérimentaux pour trois valeurs de l'angle à la jonction  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $90^\circ$ .

Hsu et al. (1998), en prenant les mêmes hypothèses que celles de Gurram et al. (1997), ont étudié les coefficients de correction de l'énergie et du mouvement, le coefficient de perte de l'énergie à travers la confluence, et ont développé un modèle de jonction. Ce modèle a été validé expérimentalement pour les angles de jonction de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  et  $90^\circ$  avec un nombre de Froude aval  $F_d$ , approximativement constant compris entre 0.59 et 0.62.

Une étude plus générale menée par Shabayek et al. (2002) ne supposa pas l'égalité des hauteurs d'eau à l'amont de la jonction, ni l'égalité des largeurs des canaux. Shabayek développa un modèle de jonction théorique unidimensionnel en appliquant le principe de la conservation de la quantité de mouvement sur deux volumes de contrôle dans la jonction avec la conservation de la masse. Ce modèle est formé de deux équations en fonction de plusieurs paramètres hydrauliques et géométriques et aussi de deux paramètres empiriques qui sont le coefficient de cisaillement et le coefficient de la zone de séparation. Ce modèle a été validé expérimentalement par comparaison aux résultats expérimentaux existant dans la littérature.

## a-2. Confluence torrentielle

Dans les coursiers à pente importante ou dans les conduites de vidange de fond, on peut rencontrer des jonctions dans lesquelles l'écoulement est torrentiel dans les trois branches. Comparé à un écoulement fluvial dans la conduite d'approche, l'écoulement torrentiel fait apparaître des ondes croisées sur des courbes bien définies. Cette forte variation de la hauteur d'eau peut engendrer de gros problèmes dans les conduites fermées en raison de l'apparition de phénomènes tels que les pulsations, l'entraînement d'air, la transition vers une mise en charge ou l'apparition de ressauts hydrauliques. Les configurations qui font apparaître un ressaut hydraulique dans la confluence sont à éviter en raison du risque d'érosion considérable.

C'est Bowers (1950) qui le premier analysa un écoulement torrentiel dans une jonction de canaux. En fonction de la géométrie de la jonction et de la valeur du nombre de Froude dans le canal amont un ressaut hydraulique apparaissait ou non dans l'un des confluent. Dans le cas où aucun ressaut n'était présent, des ondes croisées similaires à celles présentes dans les rétrécissements apparaissaient. Dans tous les cas, Bowers conseillait pour le dimensionnement d'adopter des hauteurs de canaux bien plus grandes que les hauteurs usuelles pour dimensionner ce genre de confluences.

Une autre étude associée aux écoulements torrentiels est due à Schnitter et al. (1955). Il étudia une configuration dans laquelle l'angle de confluence était pratiquement nul mais pour laquelle le canal latéral avait une pente très forte. Il constata la présence d'ondes croisées très fortes dans la branche aval qui étaient encore amplifiées dans le cas où les deux branches amont avaient des nombres de Froude différents. Néanmoins, l'installation d'un mur de séparation, dont l'une des extrémités se situant au niveau du point de confluence et de la hauteur décroissante dans la branche aval, permettait de faire quasiment disparaître les ondes croisées.

Behlke et Pritchett (1966) menèrent une analyse des écoulements torrentiels dans les jonctions de canaux trapézoïdaux et rectangulaires pour des angles de confluences de  $15^\circ$ ,  $30^\circ$  et  $45^\circ$  et des nombres de Froude compris entre 2 et 7. Ils observèrent deux sauts obliques dont les origines se situaient au point de confluence. La hauteur de ces deux sauts au voisinage du point de confluence est la même. Ils supposèrent que l'effet de la branche latérale sur l'écoulement dans la branche principale était comparable à la perturbation causée par la présence d'un mur oblique. Un effet similaire est attribué à l'écoulement dans la branche latérale. Ainsi, ils déterminèrent les angles que font les sauts par rapport à la direction principale mais ils ne tentèrent pas de déterminer la hauteur maximale de ces sauts.

Gildea et Wong (1967) présentèrent des directives de dimensionnement. Ils préconisaient un différentiel de hauteur d'eau entre les canaux aussi petit que possible et une configuration dans laquelle l'angle d'approche des canaux n'excède pas  $12^\circ$ . En supposant que l'angle soit de  $0^\circ$ , on dimensionne le canal de telle sorte que la largeur au niveau de la confluence soit égale à la somme des largeurs des confluent augmentée de l'épaisseur de la paroi séparatrice.

Un modèle pour la prédiction de l'angle de l'onde principale dans une jonction simple est dû à Greated (1968) qui étudia un écoulement dans une jonction à  $60^\circ$  horizontale pour des nombres de Froude compris entre 6 et 11. En supposant que la vitesse soit uniforme, et une distribution hydrostatique de pression, Greated a trouvé une relation entre les hauteurs d'eau amont et latérale.

Hager (1989) a présenté une étude théorique et expérimentale d'une confluence de deux canaux de largeur égale en écoulements torrentiels. Hager a suggéré un critère pour la formation d'un ressaut hydraulique à la jonction. Ses résultats expérimentaux se sont rapportés à des angles de  $45^\circ$  et  $22.5^\circ$ .

Christodoulou (1993) a présenté quelques résultats expérimentaux pour des angles de jonction égaux à  $90^\circ$  et  $17^\circ$ , d'un écoulement fluvial dans le canal latéral et faiblement torrentiel dans le canal à l'amont de la confluence (avec un nombre de Froude  $F_u$  compris entre 1.5 et 2). Il a décrit un critère général pour la formation des ressauts hydrauliques d'une jonction des canaux rectangulaires quand l'écoulement d'approche amont est torrentiel.

### a-3. Confluence transitionnelle

Une confluence transitionnelle est une confluence où l'écoulement est fluvial dans les canaux situés avant la jonction, suivis d'une transition à un écoulement torrentiel dans le canal situé après la jonction. On trouve très peu d'études concernant le problème de la confluence dans le cas transitionnel.

Ramamurthy et al. (1988) ont étudié les deux types d'écoulement, fluvial et transitionnel, à travers une confluence pour un angle de jonction droit. Le modèle de jonction développé dans ce travail est basé sur le transfert de la quantité de mouvement du canal latéral au canal principal. Ils ont appliqué séparément les équations de la quantité de mouvement pour l'écoulement dans les canaux latéral et amont.

Hager (1989) a montré que l'écoulement transitionnel peut exister si le débit latéral est au moins égal à 15% du débit total. Il a effectué une étude expérimentale détaillée avec une analyse théorique unidimensionnelle de l'écoulement transitionnel avec des angles de jonction égaux à  $90^\circ$ ,  $45^\circ$  et  $22.5^\circ$ . Hager a déterminé une équation pour le coefficient de contraction de la zone de séparation. Il a ainsi développé un modèle pour la jonction définissant le rapport des hauteurs d'eau à la jonction, en fonction des débits et de l'angle de jonction. La validation expérimentale de ce modèle était moins satisfaisante pour un angle de jonction égal à  $90^\circ$  que pour les autres angles.

Gurram (1994) a prouvé que certaines hypothèses considérées par Hager ne sont pas acceptables et il a développé un modèle pour la jonction qui reproduit plus fidèlement les résultats expérimentaux de Hager.

### a-4. Conclusion

Le tableau suivant fait un récapitulatif des différents modèles développés pour la confluence en fonction du régime d'écoulement dans les canaux.

Auteur	Régime d'écoulement	Angle entre les canaux	Résultats expérimentaux	Comparaison de modèles
Taylor (1944)	Fluvial	$45^\circ$ et $135^\circ$	X	
Bowers (1950)	Torrentiel			
Anwar (1955)	Fluvial	$22.5^\circ$ ; $45^\circ$ ; $67.5^\circ$ et $90^\circ$		
Schnitter et al. (1955)	Torrentiel			
Webber et Geated (1966)	Fluvial	$30^\circ$ et $90^\circ$	X	
Behlke et Pritchett (1966)	Torrentiel	$15^\circ$ ; $30^\circ$ et $45^\circ$		

Gildea et Wong (1967)	Torrentiel	12°		
Greated (1968)	Torrentiel	60°		
Milano et Sassoli (1977)	Fluvial	60°		
Lin et Soong (1979)	Fluvial	90°	X	
Caballada et al. (1981)	Fluvial	30°		
Rice (1985)	Torrentiel	30° ; 60° ; et 90°	X	
Best et Ried (1987)	Fluvial			
Hager (1987)	Fluvial			
Ramamurthy (1988)	Transcritique			
Ramamurthy (1988)	Fluvial			
Hager (1989)	Torrentiel	45° et 22.5°		
Hager (1989)	Transcritique	22.5° ; 45° et 90°	X	
Christodoulou (1993)	Torrentiel	90° et 17°		
Gurram (1993)	Trancritique			/ Hager (1989)
Gurram et al. (1997)	Fluvial	30° ; 60° et 90°		
Hsu et al. (1998)	Fluvial	30° ; 45° ; 60° et 90°	X	
Shaybayek (2002)	Fluvial			/ Hsu (1998)

Tous les modèles de jonctions sont de nature empirique et plusieurs paramètres sont estimés expérimentalement.

#### b- Les modèles de défluence

La première étude expérimentale détaillée des écoulements à travers une défluence dans un canal à surface libre a été faite par Taylor (1944). Dans son étude, le canal principal et le canal latéral étaient de même largeur et l'angle de la jonction était droit. Taylor a conclu que l'écoulement à travers une défluence ne peut pas être résolu analytiquement à partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement, et il a présenté ses résultats expérimentaux sous forme graphique avec quatre paramètres sans dimension.

Milne-Thomson (1949), Tanaka (1957) et Murota (1958) ont résolu le problème de la défluence analytiquement et ils ont trouvé que l'hypothèse de la hauteur d'eau constante dans des tous les canaux rend l'usage de leur modèle peu réaliste dans la pratique.

Grace et Priest (1958) ont observé l'écoulement à travers une défluence pour différents angles de jonction et différents rapports des largeurs du canal et ont présenté leurs résultats sous forme graphique en utilisant des paramètres sans dimensions. Le rapport des hauteurs aval et amont et le rapport des hauteurs latéral et amont sont presque égaux à l'unité. Ils ont aussi remarqué que les rapports des hauteurs diminuent modérément, tandis que les rapports des débits augmentent.

Law et Reynolds (1966) ont conclu que l'équation de la conservation de la quantité de mouvement, avec une supposition appropriée sur la force de pression hydrostatique, décrit les caractéristiques unidimensionnelles de l'écoulement.

Pemaiah (1977) a présenté un traitement mathématique pour le comportement de l'écoulement à travers une défluence. Négligeant l'effet de la distribution non uniforme des vitesses, il ramène le problème au cas unidimensionnel. En outre, il suppose que la distribution de

pression soit hydrostatique et il obtient un modèle permettant de relier les hauteurs au niveau de la défluece.

Ramamurthy et Satish (1988) ont étudié le problème de la défluece dans des canaux à surface libre avec des branches courtes, où le nombre de Froude dans le canal latéral est plus grand que 0,35. Ramamurthy (1990) a développé un modèle de défluece, pour une jonction à angle droit. Ce modèle est fonction du rapport des débits aval amont  $Q_d/Q_u$ , du nombre de Froude dans le canal amont  $F_u$ , et du rapport des hauteurs amont/aval.

Récemment, Hsu (2002) a proposé une relation hauteur débit et un coefficient de perte d'énergie pour un écoulement fluvial dans les canaux de même largeur pour un angle de jonction droit. Avec des débits amont et latéral et une hauteur aval connus, la hauteur amont est déterminée à partir de considérations énergétiques. Le coefficient de perte d'énergie dû à la division de l'écoulement est exprimé en fonction du nombre de Froude  $F_u$ , du rapport des débits  $\overline{Q_d} = Q_d/Q_u$  et du rapport des hauteurs d'eau  $Y = h_u/h_d$ . Le coefficient de contraction  $C_c$ , est déterminé en utilisant des mesures de vitesse.

Le tableau suivant récapitule l'ensemble des résultats et données expérimentales disponibles

Auteurs	Résultats expérimentaux
Taylor (1944)	
Milne-Thomson (1949)	
Tanaka (1957)	
Murota (1958)	
Grace et Priest (1958)	
Sridharan (1966)	<b>X</b>
Law et Reynolds (1966)	
Pemaiah (1977)	
Ramamurthy et Satish (1988)	
Ramamurthy (1990)	<b>X</b>
Hsu (2002)	<b>X</b>

Il n'existe pas de comparaison entre modèles.

## 1.2. Traitement d'une confluence avec les équations de BSV

Le couplage d'une confluence avec les équations de Barré de Saint-Venant a été traité par Garcia-Navarro et Saviron (1992).

Nous considérons trois canaux liés par une jonction, et nous notons par le canal u, le canal L et le canal d, les canaux amont, latéral et aval à la jonction. Ainsi à la jonction, nous devons avoir des modèles capables de calculer les six inconnues, les trois débits  $Q_u, Q_L$ , et  $Q_d$  et les trois hauteurs d'eau  $h_u, h_L$  et  $h_d$ , avec  $Q_u$  et  $h_u$ ;  $Q_L$  et  $h_L$ ;  $Q_d$  et  $h_d$  sont respectivement les débits et les hauteurs d'eau des points amont, latéral et aval renfermant la jonction.

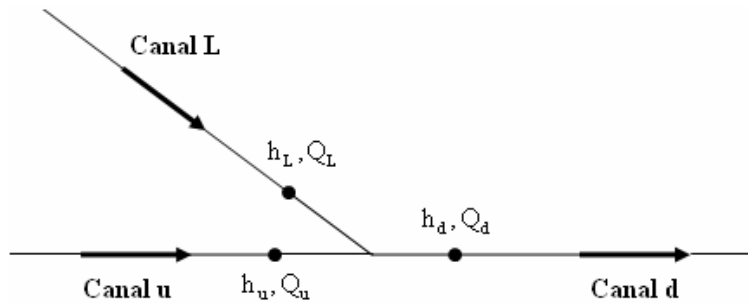


Figure 16 : Paramètres d'une confluence

Dans la simulation de l'écoulement à travers une confluence, divers types d'écoulement peuvent exister à la jonction et ces types sont caractérisés par les trois nombres de Froude calculés aux points de jonction dans les trois canaux. Les six cas possibles selon les conditions de l'écoulement sont le type d'écoulement dans les canaux, amont, latéral et aval respectivement :

1. L'écoulement est entièrement fluvial dans les tronçons respectivement amont, latéral et aval (FLUV-FLUV-FLUV).
2. L'écoulement est fluvial dans les branches amont et latérale et devient torrentiel à l'aval (FLUV-FLUV-TOR).
3. L'écoulement est torrentiel dans l'une des branches amont ou latérale, et est fluvial dans le tronçon aval (FLUV-TOR-FLUV).
4. L'écoulement est fluvial dans l'une des branches amont ou latérale mais devient torrentiel à l'aval (FLUV-TOR-TOR).
5. L'écoulement est torrentiel dans les branches amont et latérales et devient fluvial dans la branche aval (TOR-TOR-FLUV).
6. L'écoulement est torrentiel dans les trois branches (TOR-TOR-TOR).

**a- Description dans le cas d'une confluence FLUV - FLUV - FLUV**

Nous disposons, dans le cas où l'écoulement est fluvial dans les trois canaux de la confluence, de trois relations provenant des caractéristiques. Ces trois relations sont :  $C_u^+$  dans le canal u,  $C_L^+$  dans le canal L et  $C_d^-$  dans le canal d.

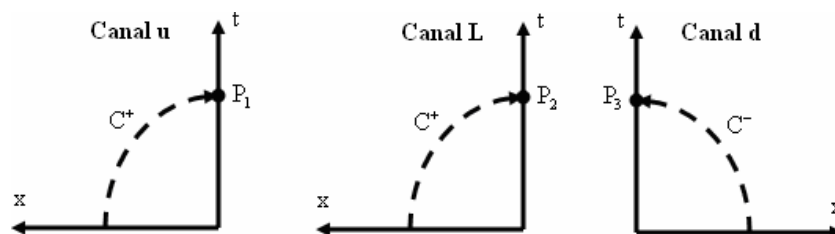


Figure 17 : Ligne des caractéristiques dans le plan (x, t). Écoulement fluvial dans les trois canaux renfermant la confluence.

### b- Description dans le cas d'une confluence FLUV - FLUV - TOR

Nous disposons, dans le cas où l'écoulement dans les canaux u et L est fluvial, mais devient torrentiel dans le canal d, de deux relations provenant des caractéristiques. Ces deux relations sont :  $C_u^+$  dans le canal u et  $C_L^+$  dans le canal L.

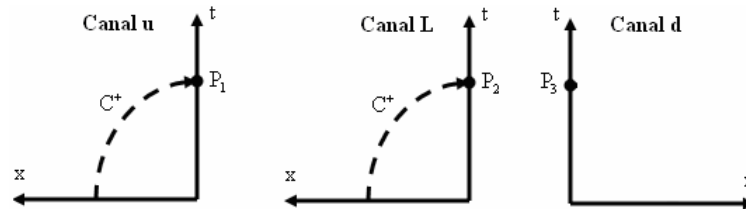


Figure 18 : Ligne des caractéristiques dans le plan (x, t). Écoulement fluvial dans les canaux u et L et torrentiel dans le canal d.

### c- Description dans le cas d'une confluence TOR - TOR - TOR

Nous disposons, dans le cas où l'écoulement est torrentiel dans les trois canaux de la confluence, de quatre relations provenant des caractéristiques. Ces quatre relations sont :  $C_u^+$  et  $C_u^-$  dans le canal u,  $C_L^+$  et  $C_L^-$  dans le canal L. Ainsi, en utilisant l'équation de la conservation de la masse et le modèle de l'égalité des hauteurs d'eau, nous obtenons le système suivant:

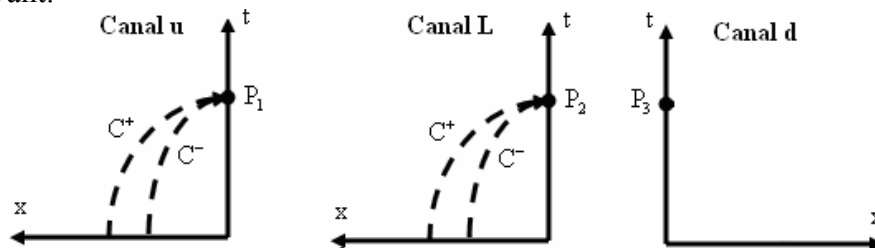


Figure 19 : Forme des caractéristiques pour le cas d'un écoulement torrentiel dans l'un des canaux amont.

## 1.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exposé la plupart des modèles disponibles pour simuler la jonction en tant que confluence et déflueuse. On remarque qu'il existe beaucoup de modèles et de données expérimentales en fonction des régimes d'écoulement dans les branches. Compte tenu du peu de comparaisons entre ces différentes approches, il serait pertinent de comparer les modèles entre eux en régime permanent par rapport aux données expérimentales. On désire ainsi avoir leur domaine de validité et surtout pouvoir faire un choix en fonction de leur simplicité à implémenter.

Concernant le couplage entre les modèles de jonction et les équations de Barré de Saint-Venant, l'approche de Garcia-Navarro et Saviron (1992) semble prometteuse puisqu'elle prend en compte, au niveau des conditions hydrauliques, la physique des ouvrages. Par contre, le seul modèle mis en jeu pour la jonction est celui des hauteurs identiques. Compte tenu de ces remarques, il semble intéressant de faire un banc d'essais numériques de comparaisons des différents modèles de jonctions avec un couplage avec les équations de BSV.



**Partie C -  
Adaptation d'un  
schéma aux éléments  
finis discontinus aux  
équations de BSV,  
amélioration du  
traitement des  
conditions aux limites  
et de la discrétisation  
du terme source**

L'état de l'art réalisé dans la partie B a permis de montrer que l'application des éléments finis discontinus aux équations hyperboliques avec prise en compte des chocs a donné d'excellents résultats dans des domaines très variés.

Il semble donc judicieux d'appliquer cette méthode aux équations de Barré de Saint-Venant. Le premier chapitre est ainsi consacré à la mise en œuvre de la méthode des éléments finis discontinus de type Galerkin d'ordre 2 pour la résolution des équations de BSV.

Le second chapitre s'intéresse aux traitements des conditions aux limites internes et externes. L'objectif est de généraliser l'approche de Garcia-Navarro dans le cas où l'on dispose d'un ouvrage quelconque influençant les canalisations amont et/ou aval.

Le troisième chapitre est une reformulation de la discrétisation upwind du terme source.

# Chapitre 1 : Les éléments finis discontinus appliqués aux équations de BSV

La méthode des éléments finis discontinus de Galerkin est une classe des schémas numériques explicites. Dans le but d'obtenir un schéma d'ordre  $k$  dans le temps et dans l'espace, les éléments finis discontinus de Galerkin consistent à approcher la solution dans l'espace par des fonctions discontinues polynômiales par morceau de degrés  $k-1$ , et à utiliser une discrétisation explicite de Runge Kutta d'ordre  $k$  dans le temps. Cette méthode s'applique à un système hyperbolique écrit sous forme conservative. La discontinuité est localisée au niveau des interfaces.

## 1. Description générale de la discrétisation spatiale

Le système de BSV s'écrit sous forme conservative :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = G \quad 1-1$$

Pour chaque partition  $\{x_{i+1/2}\}_{i=0}^N$  de l'intervalle,  $I = [0 ; L]$  nous posons  $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$  et l'on a :  $I = \bigcup_{i=1}^N I_i$ . Nous cherchons alors, pour chaque valeur  $t \in [0 ; T]$ , une approximation  $U_h$  de  $U$  dans l'espace  $V_k = \{p; p| I_i \text{ est un polynôme de degré } \leq k\}$ .

En multipliant (1-1) par une fonction test  $v_h$  appartenant à  $V_k$  et en intégrant sur  $I_i$ , nous obtenons en faisant une intégration par partie la formulation faible suivante :

$$\int_{I_i} \partial_t U_h v_h dx - \int_{I_i} F(U_h) \partial_x v_h dx + [F(U_h) v_h]_{i+1/2} - [F(U_h) v_h]_{i-1/2} = \int_{I_i} G(U_h) v_h dx \quad 1-2$$

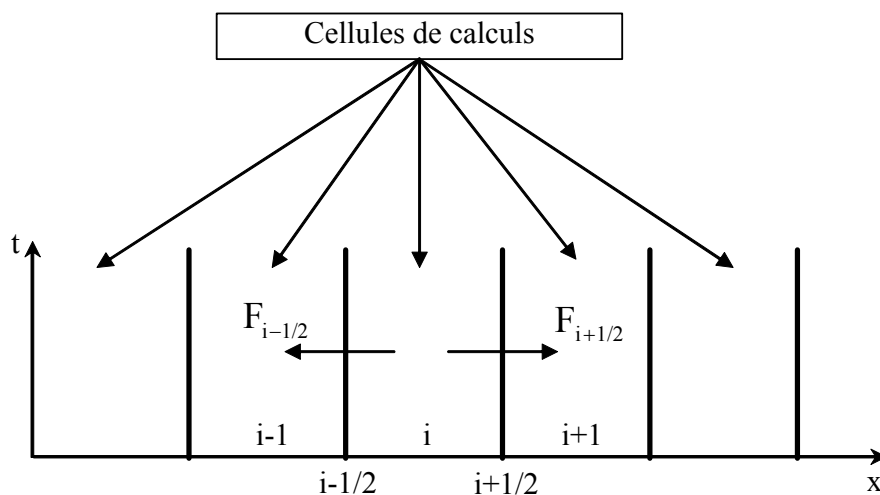


Figure 20 : Décomposition du domaine en cellules de calculs et flux aux interfaces.

Comme base de l'espace  $V_k$ , nous choisissons les polynômes de Legendre définis par :

$$\varphi_m(x) = P_m\left(\frac{2(x-x_i)}{\Delta_i}\right) \quad 1-3$$

Les quatre premiers polynômes de Legendre sont :

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \text{ et } P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad 1-4$$

Ces polynômes vérifient les deux propriétés suivantes :

$$P_m(1) = 1; P_m(-1) = (-1)^m; \int_{-1}^1 P_m(s)P_n(s)ds = \frac{2}{2m+1}\delta_{mn} \quad 1-5$$

$\delta_{mn}$ , étant le symbole de Kroneker.

La fonction  $U_h$  s'écrit alors dans la base des polynômes de Legendre sous la forme :

$$U_h(x; t) = \sum_{m=0}^k U_i^m(t) \varphi_m(x) \quad 1-6$$

où les variables  $U_i^m$  sont les degrés de liberté du problème.

Puisque la fonction  $U_h$  est discontinue aux points  $x_{i+1/2}$ , nous remplaçons le flux  $F(U_h)$  par un flux numérique  $H(U_l; U_r)$ .  $U_l$  et  $U_r$  sont les valeurs de  $U_h$  à gauche et à droite de  $x_{i+1/2}$ . Parmi les choix de ce flux, nous citons celui de Roe, de Lax-Friedrich et HLL de Harten.

En prenant la fonction test  $v_h$  parmi les polynômes de Legendre, l'équation (1-2) devient pour chaque degré  $m$  allant de 0 à  $k-1$ :

$$\frac{1}{2m+1} \partial_t U_i^m - \frac{1}{\Delta_i} \int_{I_i} F(U_h) \partial_x \varphi_m dx + \frac{1}{\Delta_i} \left\{ H_{i+\frac{1}{2}} - (-1)^m H_{i-\frac{1}{2}} \right\} = \frac{1}{\Delta_i} \int_{I_i} G(U_h) \varphi_m dx \quad 1-7$$

## 2. Discrétisation spatiale et temporelle d'ordre 2

Dans ce cas, le degré du polynôme est 1, et la solution  $U_h$  est linéaire par morceau, donc pour tout  $x$  dans  $I_i$ , nous avons  $U^h(x, t) = U_i^0(t) + U_i^1(t) \frac{2(x-x_i)}{\Delta_i}$ . Le système (1-2) s'écrit dans ce cas sous la forme:

$$\begin{cases} \partial_t U_i^0(t) = -\frac{1}{\Delta_i} \left\{ H_{i+\frac{1}{2}} - H_{i-\frac{1}{2}} \right\} + \frac{1}{\Delta_i} \int_{I_i} G(U^h) dx \\ \partial_t U_i^1(t) = \frac{6}{\Delta_i^2} \int_{I_i} F(U^h) dx - \frac{3}{\Delta_i} \left\{ H_{i+\frac{1}{2}} + H_{i-\frac{1}{2}} \right\} + \frac{6}{\Delta_i} \int_{I_i} G(U^h)(x - x_i) dx \end{cases} \quad 1-8$$

Avec :

$$\begin{cases} H_{i+\frac{1}{2}} = H \left( U_h \left( x_{i+\frac{1}{2}}^-, t \right), \left( U_h \left( x_{i+\frac{1}{2}}^+, t \right) \right) \right) = H \left( U_i^0(t) + U_i^1(t), U_{i+1}^0(t) - U_{i+1}^1(t) \right) \\ H_{i-\frac{1}{2}} = H \left( U_h \left( x_{i-\frac{1}{2}}^-, t \right), \left( U_h \left( x_{i-\frac{1}{2}}^+, t \right) \right) \right) = H \left( U_{i-1}^0(t) + U_{i-1}^1(t), U_i^0(t) - U_i^1(t) \right) \end{cases} \quad 1-9$$

Ainsi, nous obtenons suivant cette discrétisation spatiale, le système d'équations différentielles ordinaires de la forme

$$\left\{ \partial_t U_i^0(t) = L^0(U_i^0(t), U_i^1(t)); \quad \partial_t U_i^1(t) = L^1(U_i^0(t), U_i^1(t)) \right. \quad 1-10$$

Où

$$\begin{cases} L^0(U_i^0(t), U_i^1(t)) = -\frac{1}{\Delta_i} \left\{ H_{i+\frac{1}{2}} - H_{i-\frac{1}{2}} \right\} + \frac{1}{\Delta_i} \int_{I_i} G(U^h) dx \\ L^1(U_i^0(t), U_i^1(t)) = \frac{6}{\Delta_i^2} \int_{I_i} F(U^h) dx - \frac{3}{\Delta_i} \left\{ H_{i+\frac{1}{2}} + H_{i-\frac{1}{2}} \right\} + \frac{6}{\Delta_i} \int_{I_i} G(U^h)(x - x_i) dx \end{cases} \quad 1-11$$

Puisque la discrétisation spatiale est d'ordre 2, nous devons aussi choisir une discrétisation temporelle d'ordre 2. Le choix du schéma de Runge Kutta d'ordre 2 est donc bien convenable.

Soit  $U^n$  la solution à l'instant  $n$ , et  $U^{n+1}$  la solution à l'instant  $n+1$ , le schéma de Runge Kutta d'ordre 2 pour un système d'équations différentielles ordinaires de la forme  $\frac{dU}{dt} = L(U)$  est de la forme :

$$\left\{ U^n \rightarrow U^{n+1}; \quad U^1 = U^n + \Delta t L(U^n); \quad U^2 = U^1 + \Delta t L(U^1); \quad U^{n+1} = \frac{1}{2}(U^n + U^2) \right. \quad 1-12$$

### 3. Limiteur de pente

Afin d'éviter les oscillations numériques pour les schémas d'ordre supérieur ou égal à deux, nous utilisons un limiteur de pente dans le but de rendre le schéma TVD. Nous remplaçons donc  $U^1$  par  $U^{1\text{mod}}$  de la façon suivante :

$$U_1^{i,\text{mod}} = \min \text{mod}(U_1^i, U_0^{i+1} - U_0^i, U_0^i - U_0^{i-1}) \quad 1-13$$

Le limiteur minmod est défini par :

$$m(b_1, b_2, b_3) = \begin{cases} s \min(b_1, b_2, b_3) & \text{si } s = \text{signe}(b_1) = \text{signe}(b_2) = \text{signe}(b_3) \\ 0 & \text{sin on} \end{cases} \quad 1-14$$

Nous avons montré dans ce chapitre la mise en œuvre d'un schéma numérique aux éléments finis discontinus appliquée aux équations de Barré de Saint-Venant. L'étape suivante est la comparaison de cette approche par rapport aux autres schémas numériques existants.

## Chapitre 2 : Amélioration du traitement des conditions aux limites

Dans le but de trouver la solution numérique à l'instant  $n+1$ , le schéma numérique a recours aux valeurs trouvées, à l'instant  $n$ , au nœud courant ainsi qu'aux nœuds voisins. Il est donc impossible d'appliquer un schéma numérique au premier et au dernier nœuds du domaine spatial. Il est donc nécessaire d'avoir un traitement spécial pour calculer les valeurs de l'écoulement en ces nœuds. Ce traitement s'appelle les conditions aux limites externes. Dans le but de définir la présence d'un ouvrage spécial dans un canal, une relation débit hauteur est définie aux nœuds voisins de l'ouvrage, et un traitement spécifique est nécessaire pour calculer les variables de l'écoulement en ces nœuds, ce traitement s'appelle les conditions aux limites internes.

### 1. La méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques utilise les lignes caractéristiques dans le plan  $(x, t)$  avec les ondes de propagation pour calculer les conditions aux limites. Les équations de BSV pour un canal prismatique sont écrites sous la forme suivante :

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial Q}{\partial x} + (-u \pm c) \left[ \frac{\partial A}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial A}{\partial x} \right] = gA(S_0 - S_f) \quad 2-1$$

Désignons par  $C^+$  et  $C^-$  les équations des ondes voyageant vers l'aval et vers l'amont respectivement, ces équations sont définies par :

$$\begin{cases} C^+ : \frac{dx}{dt} = \frac{Q}{A} + \sqrt{\frac{gA}{B}} = u + c \\ C^- : \frac{dx}{dt} = \frac{Q}{A} - \sqrt{\frac{gA}{B}} = u - c \end{cases} \quad 2-2$$

Notons par  $A_1^n$ ,  $Q_1^n$ ,  $A_N^n$  et  $Q_N^n$ , la section mouillée et le débit aux nœuds 1 et N à l'instant  $n$ , et par  $A_1^{n+1}$ ,  $Q_1^{n+1}$ ,  $A_N^{n+1}$  et  $Q_N^{n+1}$ , à l'instant  $n+1$ . La Figure 21 montre les caractéristiques dans le cas d'un écoulement fluvial, où les variables des nœuds 1 et N sont influencées par celles des points R et L dans le canal. Les équations 2-3 nous permettent de calculer une estimation des positions  $x_R$  et  $x_L$  à l'instant  $n$  :

$$\begin{cases} x_R = x_M - (u - c)_1^n \Delta t \\ x_L = x_P - (u - c)_N^n \Delta t \end{cases} \quad 2-3$$

Les valeurs de A et Q sont obtenues par interpolation linéaire de celles des nœuds encadrant R et L. Supposons que  $x_1 < x_R < x_2$  et  $x_{N-1} < x_L < x_N$ , les valeurs de A et Q interpolées aux nœuds R et L à l'instant n sont:

$$\begin{cases} A_R = A_2^n - (A_2^n - A_1^n) \cdot \frac{(x_2 - x_R)}{\Delta x} & Q_R = Q_2^n - (Q_2^n - Q_1^n) \cdot \frac{(x_2 - x_R)}{\Delta x} \\ A_L = A_N^n - (A_N^n - A_{N-1}^n) \cdot (x_N - x_L) & Q_L = Q_N^n - (Q_N^n - Q_{N-1}^n) \cdot (x_N - x_L) \end{cases} \quad 2-4$$

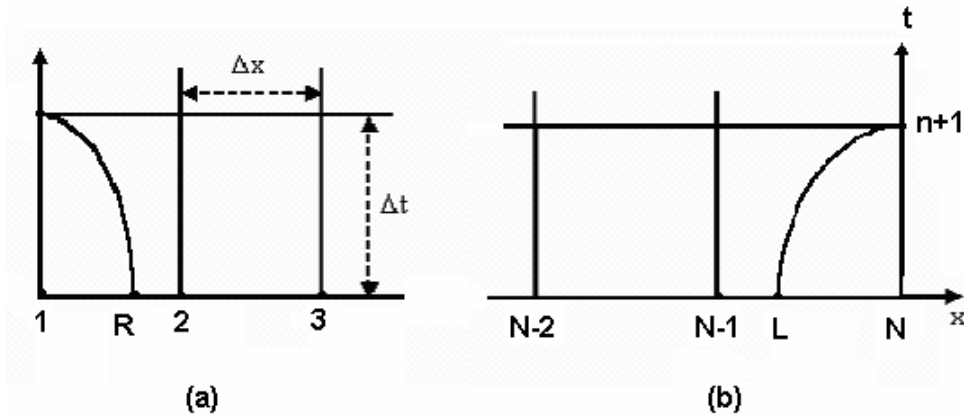


Figure 21: Les caractéristiques à l'amont et à l'aval d'un canal.

En utilisant les équations des caractéristiques (2-4), les variables aux points 1 et N à l'instant  $n+1$  s'obtiennent à partir de celles de R et L à l'instant n :

$$\begin{cases} Q_1^{n+1} - Q_R^n + (-u - c)_R^n (A_1^{n+1} - A_R^n) = \Delta t [gA(S_0 - S_f)]_R^n \\ Q_N^{n+1} - Q_L^n + (-u + c)_L^n (A_N^{n+1} - A_L^n) = \Delta t [gA(S_0 - S_f)]_L^n \end{cases} \quad 2-5$$

Par conséquent, à l'amont et à l'aval d'un canal, les caractéristiques permettant de trouver les variables inconnues prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} Q_1^{n+1} = K_1 A_1^{n+1} + C_1 \\ Q_N^{n+1} = K_N A_N^{n+1} + C_N \end{cases} \quad 2-6$$

Avec

$$\begin{cases} K_1 = (u + c)_R^n & C_1 = Q_R^n - (u + c)_R^n A_R^n + \Delta t [gA(S_0 - S_f)]_R^n \\ K_N = (u - c)_L^n & C_N = Q_L^n - (u - c)_L^n A_L^n + \Delta t [gA(S_0 - S_f)]_L^n \end{cases} \quad 2-7$$

Pour un écoulement torrentiel, les mêmes équations (équations 2-6) sont utilisées avec une différence dans la Figure 21 est que les deux ondes se propagent vers l'aval et aucune vers l'amont.



## 2. Les conditions physiques imposées à l'amont et à l'aval d'un canal

Selon la nature de l'écoulement, des conditions doivent être imposées à l'amont ou/et à l'aval. Le système de BSV est de type hyperbolique, donc sa matrice jacobienne possède deux valeurs propres distinctes qui sont les deux caractéristiques :  $a_1 = u + c$  et  $a_2 = u - c$ , et qui désignent les vitesses de propagation des ondes. Donc les variables de l'écoulement en chaque nœud du canal sont influencées par les variables des points voisins. Dans un écoulement fluvial, les deux caractéristiques sont de signes contraires puisque  $c > |u|$ , donc en chaque point du canal, il y a une onde qui voyage vers l'aval et une autre vers l'amont (Figure 23 a). Dans un écoulement torrentiel, les deux caractéristiques sont de même signe puisque  $c < |u|$ , donc en chaque point du canal, les deux ondes se propagent vers l'aval (Figure 23 b). Ainsi, les conditions imposées aux limites externes sont influencées par le type de l'écoulement. À l'amont d'un canal, et dans le cas où l'écoulement est fluvial, une seule variable est imposée, et dans le cas où l'écoulement est torrentiel, les deux variables sont imposées. À l'aval d'un canal, et dans le cas où l'écoulement est fluvial, une seule variable est imposée, et dans le cas où l'écoulement est torrentiel, aucune variable n'est imposée. Par exemple, dans le cas d'un écoulement fluvial dans tout le canal, on peut imposer le débit à l'amont et une hauteur d'eau à l'aval ou une relation de type hauteur débit.

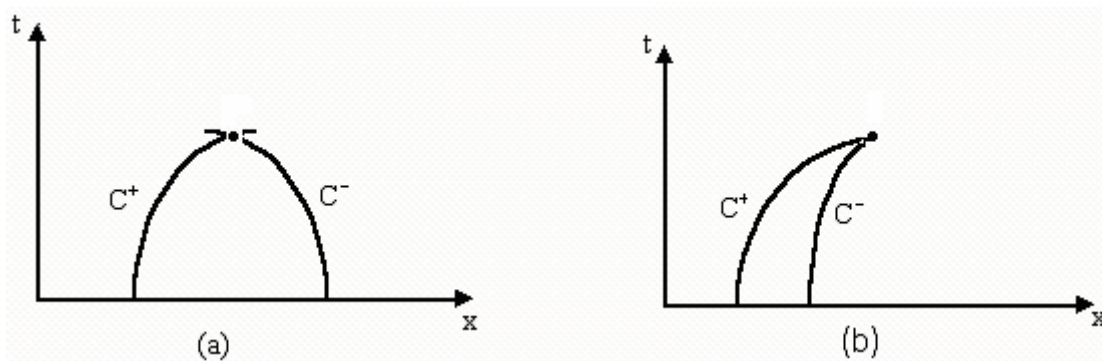


Figure 22: Les lignes des caractéristiques (a) Ecoulement fluvial; (b) torrentiel.

Dans le cas de l'application d'une hauteur imposée, celle-ci peut être de plusieurs types. Elle peut être constante et représentera une hauteur d'eau invariable comme dans le cas d'un bassin ou d'un plan d'eau. Elle peut également représenter une hauteur de seuil ou la hauteur d'ouverture d'une vanne. Dans le cas de l'application d'un débit imposé, celui-ci peut être de plusieurs types. Il peut être constant et représentera un débit d'eau invariable, et peut être variable en donnant une relation du débit en fonction du temps. Dans le cas de l'application d'une relation débit hauteur, cette relation peut être la relation d'un seuil placé à l'aval d'un canal.

## 3. Traitement des conditions aux limites internes

En présence des ouvrages spéciaux tels que seuil, vanne et jonction dans un canal ou dans un réseau, le système de BSV n'est pas applicable aux points voisins de cet ouvrage, et une relation décrivant la présence de l'ouvrage doit être imposée. Un traitement spécial est nécessaire pour coupler la solution trouvée dans le canal en simulant le système BSV avec l'équation de l'ouvrage. Les variables de l'écoulement aux nœuds voisins aux ouvrages sont appelés les conditions aux limites internes. Afin de donner une explication du traitement des conditions aux limites internes, nous considérons l'écoulement au dessus d'un seuil dans un

canal. Soit  $A_1^n$ ,  $Q_1^n$ ,  $A_2^n$  et  $Q_2^n$ , la section mouillée et le débit aux nœuds 1 et 2 voisins au seuil qui viennent avant et après le seuil, à l'instant  $n$ , et par  $A_1^{n+1}$ ,  $Q_1^{n+1}$ ,  $A_2^{n+1}$  et  $Q_2^{n+1}$ , celles à l'instant  $n+1$ , Figure 23. La conservation de la masse aux nœuds 1 et 2 nous donne :

$$Q_1^{n+1} = Q_2^{n+1} \quad 2-8$$

Une relation débit hauteur définissant la présence du seuil est utilisée au nœud 1 par :

$$Q = f(h) \quad 2-9$$

Les deux autres relations nécessaires viennent des caractéristiques déjà définies.

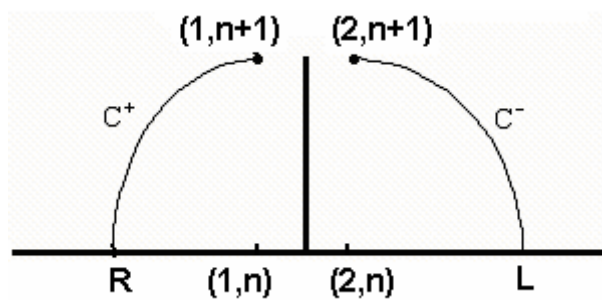


Figure 23: Traitement des conditions aux limites internes en présence d'un seuil.

Le système de quatre équations obtenu avec les caractéristiques, en supposant que l'écoulement soit fluvial avant et après le seuil, est donné par :

$$\begin{cases} Q_1^{n+1} = K_1 A_1^{n+1} + C_1 & \text{Caractéristique } C^+ \\ Q_2^{n+1} = K_2 A_2^{n+1} + C_2 & \text{Caractéristique } C^- \\ Q_1^{n+1} = Q_2^{n+1} & \text{Conservation de la masse} \\ Q_1^{n+1} = f(h_R^n) & \text{Relation définissant l'ouvrage} \end{cases} \quad 2-10$$

## Chapitre 3 : Discrétisation du terme source

On rappelle que l'implémentation de la discrétisation du terme source de l'article de Garcia Navarro et Vasquez-Cendon (2000) n'a pas permis de faire converger le calcul.

L'objectif de ce chapitre est donc de reformuler cette approche et de donner les détails de calcul de la discrétisation upwind du terme source.

Dans ce qui suit, nous décrivons cette méthode dans le cas général. En effet, supposons que le domaine spatial soit discrétisé par un maillage  $C_{\Delta x}$  (Figure 24), et soient  $\{x_i, i \in \mathbb{Z}\}$ , les nœuds de  $C_{\Delta x}$ . La cellule  $C_i$  est définie par  $C_i = ]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$ . Soit  $L_i$  la longueur de  $C_i$ .

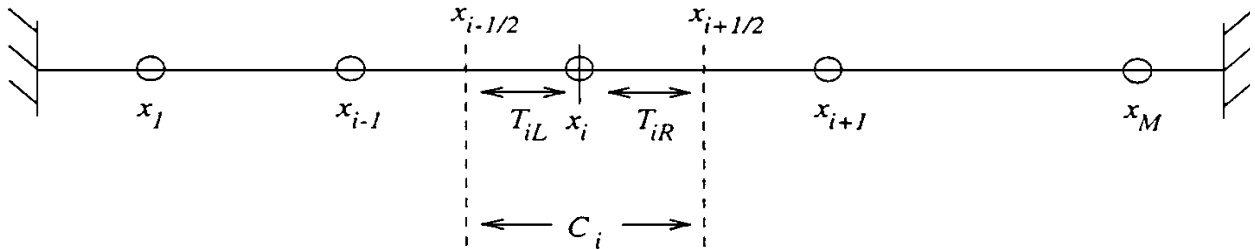


Figure 24 : Maillage du domaine spatial

L'intégrale de  $G(x, U)$  sur la cellule  $C_i$  (à l'instant  $n$ ) est divisée en deux sous intégrales sur les sous cellules  $T_{iL} = (x_{i-1/2}, x_i)$  et  $T_{iR} = (x_i, x_{i+1/2})$ , donc :

$$\frac{1}{L_i} \int_{C_i} G(x, U^n) dx = \frac{1}{L_i} \left[ \int_{T_{iL}} G(x, U^n) dx + \int_{T_{iR}} G(x, U^n) dx \right] \quad 3-1$$

Afin de trouver les valeurs de ces intégrales, nous projetons le terme source  $G$  dans la base des vecteurs propres de la matrice jacobienne approchée  $\tilde{J}$ . Soit  $R$ , la matrice formée par les vecteurs propres de  $\tilde{J}$ , donc  $\tilde{J} = \tilde{R} \tilde{\Lambda} \tilde{R}^{-1}$ , où  $\tilde{\Lambda} = \text{diag}(\tilde{a}^1, \tilde{a}^2)$ . Soit  $\beta$ , la matrice de projection du terme source  $G$  dans la base des vecteurs propres  $R$ , le terme source  $G$  s'écrit alors sous la forme :

$$G = R\beta = R(\Lambda\Lambda^{-1})\beta = R(\Lambda^+ + \Lambda^-)\Lambda^{-1}\beta = R(\Lambda^+\Lambda^{-1})\beta + R(\Lambda^-\Lambda^{-1})\beta \quad 3-2$$

Puisque, selon un calcul matriciel, nous avons :

$$\Lambda^+ = \frac{1}{2}(\Lambda + |\Lambda|) \text{ et } \Lambda^- = \frac{1}{2}(\Lambda - |\Lambda|), \text{ et que } |\tilde{J}| = \tilde{R} |\tilde{\Lambda}| \tilde{R}^{-1} \quad 3-3$$

Nous pouvons donc conclure

$$\begin{cases} \mathbf{R}(\Lambda^+ \Lambda^{-1})\beta = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\Lambda \Lambda^{-1} + |\Lambda| \Lambda^{-1})\beta = \frac{1}{2} (\mathbf{R} \Lambda \Lambda^{-1} \beta + \mathbf{R} |\Lambda| \Lambda^{-1} \beta) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} + |\mathbf{J}| \mathbf{J}^{-1}) \mathbf{G} \\ \mathbf{R}(\Lambda^- \Lambda^{-1})\beta = \frac{1}{2} \mathbf{R}(\Lambda \Lambda^{-1} + |\Lambda| \Lambda^{-1})\beta = \frac{1}{2} (\mathbf{R} \Lambda \Lambda^{-1} \beta + \mathbf{R} |\Lambda| \Lambda^{-1} \beta) = \frac{1}{2} (\mathbf{I} - |\mathbf{J}| \mathbf{J}^{-1}) \mathbf{G} \end{cases} \quad 3-4$$

D'où, le terme source est évalué au nœud  $i$  à l'instant  $n$  et s'écrit comme suit

$$(\mathbf{G})_i^n = \frac{1}{2} [\psi_{i-1/2}^L + \psi_{i+1/2}^R] \quad 3-5$$

Les fonctions  $\psi^L$  et  $\psi^R$  sont définies par:

$$\begin{cases} \psi_{i-1/2}^L = \psi^L(x_{i-1}, x_i, U_{i-1}^n, U_i^n) = [\mathbf{I} + |\tilde{\mathbf{J}}_{i-1/2}| \tilde{\mathbf{J}}_{i-1/2}^{-1}] \tilde{\mathbf{G}}_{i-1/2} \\ \psi_{i+1/2}^R = \psi^R(x_i, x_{i+1}, U_i^n, U_{i+1}^n) = [\mathbf{I} - |\tilde{\mathbf{J}}_{i+1/2}| \tilde{\mathbf{J}}_{i+1/2}^{-1}] \tilde{\mathbf{G}}_{i+1/2} \end{cases} \quad 3-6$$

Les deux matrices  $\mathbf{I} \pm |\tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2}| \tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2}^{-1}$  sont données par (pour plus de détail, voir annexe B):

$$\begin{cases} \mathbf{I} + |\tilde{\mathbf{J}}_{i-1/2}| \tilde{\mathbf{J}}_{i-1/2}^{-1} = \frac{1}{-2\tilde{c}_{i-1/2}} \times \mathbf{S}_{i-1/2}^L \\ \mathbf{I} - |\tilde{\mathbf{J}}_{i+1/2}| \tilde{\mathbf{J}}_{i+1/2}^{-1} = \frac{1}{-2\tilde{c}_{i+1/2}} \times \mathbf{S}_{i+1/2}^R \end{cases} \quad 3-7$$

Avec

$$\mathbf{S}_{i-1/2}^L = \begin{pmatrix} (1 + \text{sgn}(\tilde{a}_{i-1/2}^1)) \tilde{a}_{i-1/2}^2 - (1 + \text{sgn}(\tilde{a}_{i-1/2}^2)) \tilde{a}_{i-1/2}^1 & \text{sgn}(\tilde{a}_{i-1/2}^2) - \text{sgn}(\tilde{a}_{i-1/2}^1) \\ \tilde{a}_{i-1/2}^2 |\tilde{a}_{i-1/2}^1| - \tilde{a}_{i-1/2}^1 |\tilde{a}_{i-1/2}^2| & (1 + \text{sgn}(\tilde{a}_{i-1/2}^2)) \tilde{a}_{i-1/2}^2 - (1 + \text{sgn}(\tilde{a}_{i-1/2}^1)) \tilde{a}_{i-1/2}^1 \end{pmatrix} \quad 3-8$$

Et

$$\mathbf{S}_{i+1/2}^R = \begin{pmatrix} (1 - \text{sgn}(\tilde{a}_{i+1/2}^1)) \tilde{a}_{i+1/2}^2 - (1 - \text{sgn}(\tilde{a}_{i+1/2}^2)) \tilde{a}_{i+1/2}^1 & \text{sgn}(\tilde{a}_{i+1/2}^1) - \text{sgn}(\tilde{a}_{i+1/2}^2) \\ \tilde{a}_{i+1/2}^1 |\tilde{a}_{i+1/2}^2| - \tilde{a}_{i+1/2}^2 |\tilde{a}_{i+1/2}^1| & (1 - \text{sgn}(\tilde{a}_{i+1/2}^2)) \tilde{a}_{i+1/2}^2 - (1 - \text{sgn}(\tilde{a}_{i+1/2}^1)) \tilde{a}_{i+1/2}^1 \end{pmatrix} \quad 3-9$$

Les approximations de  $(\tilde{\mathbf{G}})_{i\pm 1/2}$  sont définies par

$$\left(\tilde{G}\right)_{i\pm 1/2}^n = \tilde{G}\left(x_i, x_{i\pm 1}, U_{i\pm 1}^n, U_i^n\right) = G\left(\frac{x_{i\pm 1} + x_i}{2}, \frac{U_{i\pm 1}^n + U_i^n}{2}\right) \quad 3-10$$

Les notations suivantes sont adoptées :

$$\begin{cases} \Delta_{i+1/2}(\cdot) = (\cdot)_{i+1} - (\cdot)_i & (\cdot)_{i+1/2} = \frac{(\cdot)_{i+1} + (\cdot)_i}{2} \\ \Delta_{i-1/2}(\cdot) = (\cdot)_i - (\cdot)_{i-1} & (\cdot)_{i-1/2} = \frac{(\cdot)_i + (\cdot)_{i-1}}{2} \end{cases}$$

En conclusion, la méthode de discrétisation directionnelle (upwind) du terme source, consiste à calculer  $G(U_i^n)$  de la façon suivante :

$$G(U_i^n) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{-2\tilde{c}_{i-1/2}} S_{i-1/2}^L(\tilde{G})_{i-1/2} + \frac{1}{-2\tilde{c}_{i+1/2}} S_{i+1/2}^R(\tilde{G})_{i+1/2} \right] \quad 3-11$$

$\tilde{c}_{i-1/2}$  et  $\tilde{c}_{i+1/2}$  sont les célérités moyennes aux interfaces  $i-1/2$  et  $i+1/2$ .

La comparaison de ces résultats (partie D) avec ceux de Garcia-Navarro et Vasquez-Cendon (2000) montre une nette différence dans l'approche de la discrétisation upwind du terme source. L'étape suivante est la comparaison numérique avec les autres principes de discrétisation.

**Partie D -  
BANC D'ESSAIS  
NUMERIQUES :  
Comparaison et  
validation des  
schémas numériques,  
des différents  
traitements des  
conditions aux limites  
et du terme source**

Les diverses méthodes de discrétisation numérique à capture de chocs (voir partie C) capables de résoudre le système de Barré de Saint-Venant sont nombreuses. Cette partie tente d'apporter des réponses aux questions suivantes :

1. Quel schéma numérique doit-on choisir pour la simulation numérique d'un problème d'hydraulique à surface libre en régime transitoire et/ou avec des discontinuités ?
2. Quel solveur numérique du terme flux est le plus convenable ?
3. Quelle discrétisation numérique du terme source satisfait la géométrie du canal ?
4. Quelle classe de discrétisation temporelle est la plus adéquate ?
5. Quel est le domaine de validité des schémas numériques classiques ?
6. Quel traitement des conditions aux limites externes et internes est le plus pertinent ?
7. Avec quelles variables, simule-t-on le système de Barré de Saint-Venant ?

Cette quatrième partie de la thèse a pour objectif :

- a. de mettre au point un banc d'essais numériques,
- b. de donner les résultats de simulation numérique du système de Barré de Saint-Venant à l'aide de diverses méthodes de discrétisation numérique.
- c. de répondre efficacement à chacune des questions posées ci-dessus.

Cette partie est composée de trois chapitres :

- i. Conception d'un banc d'essais numériques et choix des solutions analytiques de référence,
- ii. Comparaison de différents schémas numériques,
- iii. Comparaison de différentes formes de discrétisation du terme source et des conditions aux limites.

# Chapitre 1 : Conception du banc d'essais numériques et choix des solutions analytiques de référence

La constitution d'un banc d'essais numériques a pour objectif de comparer :

- les schémas numériques à capture de chocs sans terme source,
- le traitement des conditions aux limites,
- la discrétisation du terme source.

Le cahier des charges que l'on s'est fixé dans la partie B donne les différents phénomènes hydrauliques que l'on veut modéliser en réseau d'assainissement comme en rivière. Ces critères sont les suivants :

- L'évolution du tirant d'eau et du débit en régime permanent comme en transitoire,
- Les régimes d'écoulement fluvial, torrentiel et critique,
- Le ressaut hydraulique,
- Les variations de section le long du canal.

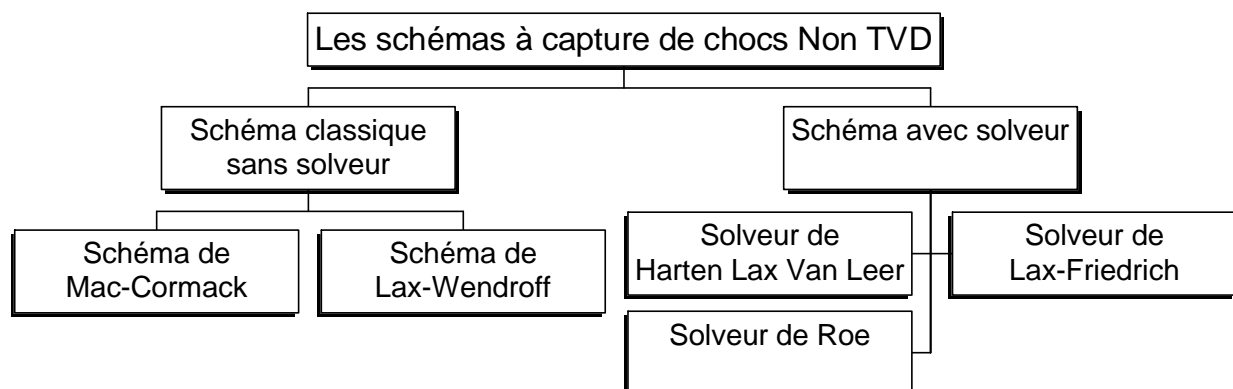
Dans ce chapitre, nous décrivons les différents problèmes hydrauliques qui forment la base du banc d'essais numériques pour la comparaison et la validation des différents schémas numériques, des différents traitements des conditions aux limites et des différentes formes de discrétisation du terme source. Les critères du choix ainsi que la conception de la base de données des solutions analytiques seront ainsi détaillés.

## 1. Conception du banc d'essais numériques

L'étude bibliographique a permis de montrer que parmi les schémas numériques à capture de chocs, on pouvait distinguer les schémas TVD et Non TVD.

Pour le cas des schémas non TVD, l'exploitation de l'organigramme suivant permet de différencier les schémas classiques sans solveur des schémas avec solveur.

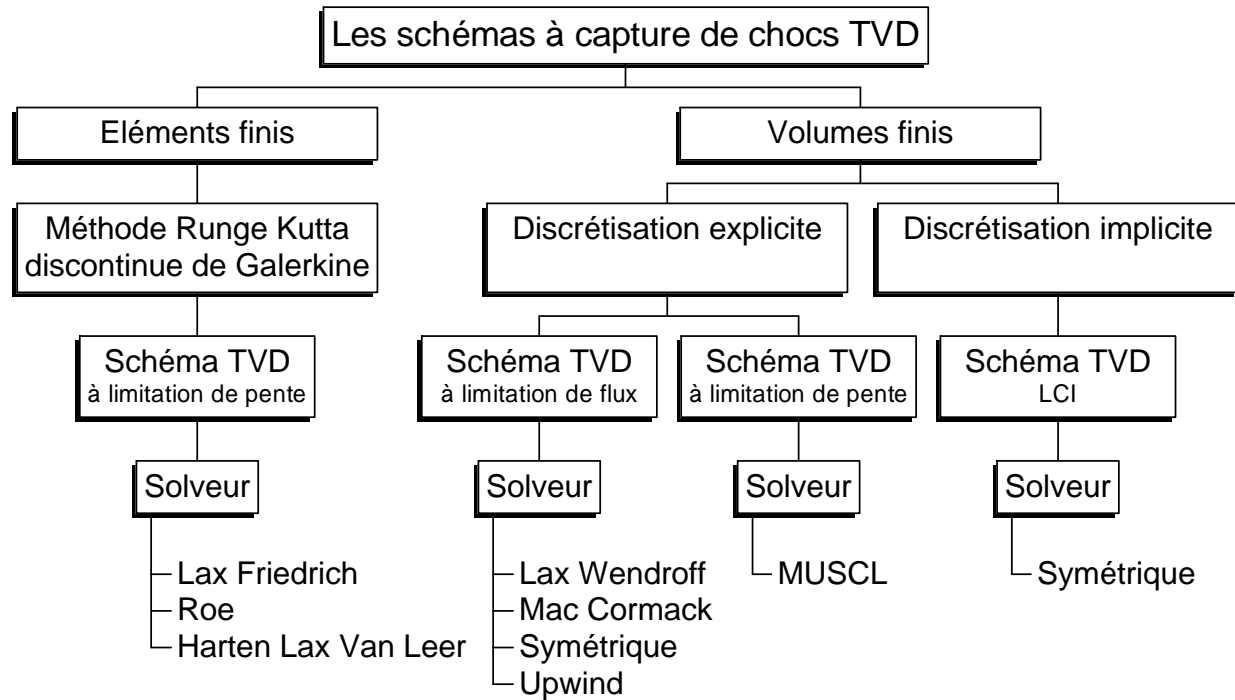
On en déduit ainsi les schémas à comparer :



Le solveur de Osher Salomon est très comparable au solveur de Harten Lax Van Leer. Il n'a donc pas été choisi.



Dans le cas des schémas TVD, on distingue les schémas explicites et implicites ainsi que les schémas éléments finis et volumes finis.



L'ensemble de tous les schémas numériques est détaillé dans l'annexe A.

Les conditions aux limites qui seront comparées sont :

- La méthode de l'extrapolation,
- La méthode des caractéristiques.

Les discrétisations du terme source qui seront comparées sont :

- Discrétisation pointwise,
- Discrétisation upwind.

## 2. Conception de la base de données des solutions de référence

### 2.1. Ouverture brutale d'une vanne dans un canal à pente nulle et sans frottement

Cette solution analytique de Stocker (1957) concerne l'écoulement transitoire dans un canal prismatique à section rectangulaire. Nous considérons un canal horizontal de largeur,  $B = 10\text{m}$  et de longueur  $L = 2\text{ Km}$ . Le lit du canal est lisse, donc il n'y a pas d'effet de frottement sur l'écoulement. La vanne se trouve au milieu du canal et à l'instant  $t=0$ , la vanne est totalement enlevée et l'eau se relâche sous forme de deux vagues, l'une se dirige vers l'amont et l'autre vers l'aval (Figure 25).

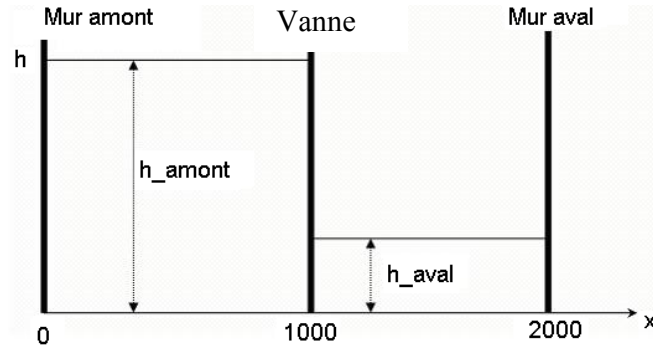


Figure 25: Conditions initiales.

Les conditions initiales de l'écoulement sont formées d'un débit partout nul dans le canal, et d'une hauteur d'eau discontinue au niveau de la vanne. La hauteur à l'amont du seuil est fixée à  $h_{\text{amont}} = 20\text{m}$ , et la hauteur à l'aval varie pour changer la nature de l'écoulement (fluvial/torrentiel). Deux cas sont considérés afin de montrer la robustesse des schémas numériques : dans le premier cas, l'écoulement est partout fluvial. Le nombre de Froude est ainsi inférieur à 1 (Figure 26 a) et dans ce cas, la hauteur aval doit être choisie de sorte que le rapport  $h_{\text{aval}}/h_{\text{amont}}$  soit supérieur ou égal à 0,5 m. La hauteur aval a été choisie égale à  $h_{\text{aval}} = 10\text{m}$ . Dans le deuxième cas, l'écoulement est transcritique puisqu'il passe du régime fluvial au torrentiel, (Figure 26 b) et dans ce cas, la hauteur aval doit être choisie de sorte que le rapport  $h_{\text{aval}}/h_{\text{amont}}$  soit inférieur à 0,5 m. La hauteur aval a été choisie égale à  $h_{\text{aval}} = 0.5\text{m}$ .

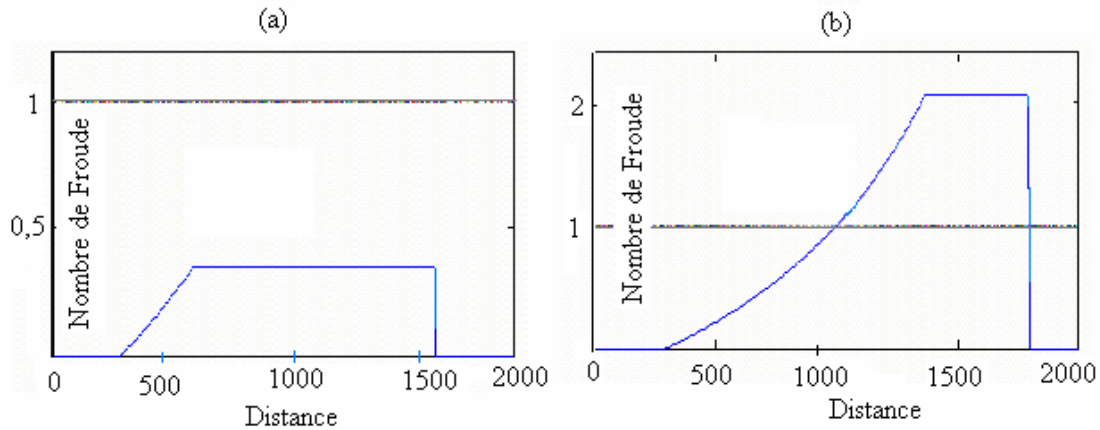


Figure 26 : Nombre de Froude correspondant à un écoulement fluvial (a) et transcritique (b).

Lors de l'ouverture brutale de la vanne, nous observons une onde de raréfaction se propageant vers l'amont de la vanne et une onde de chocs de vitesse  $S$  se propageant vers l'aval. La vitesse  $S$  est solution de l'équation non linéaire suivante :

$$S - \frac{c_{\text{aval}}^2}{4S} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8S^2}{c_{\text{aval}}^2}} \right) + 4S \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8S^2}{c_{\text{aval}}^2}} \right)^{1/2} - 2c_{\text{amont}} = 0 \tag{1-1}$$

où  $c_{\text{aval}} = \sqrt{gh_{\text{aval}}}$  est la célérité de l'onde se trouvant à l'aval de la vanne, et  $c_{\text{amont}} = \sqrt{gh_{\text{amont}}}$  est celle se trouvant à l'amont.

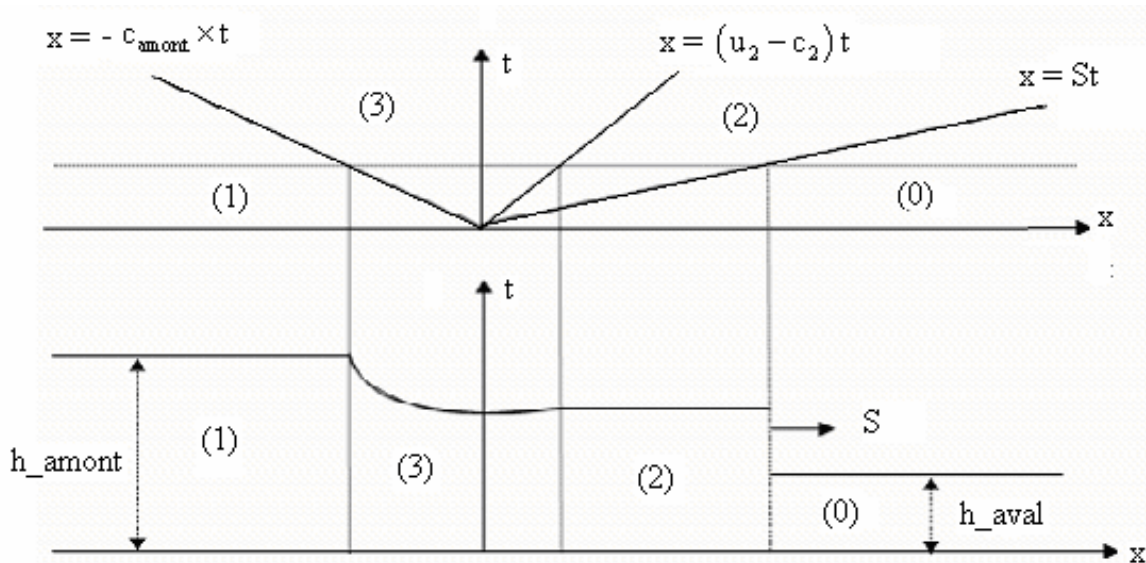


Figure 27 : Caractéristiques hydrauliques.

Soit  $u$  la vitesse moyenne de l'écoulement dans une section du canal et  $h$  la hauteur d'eau correspondante. La solution de ce problème est divisée en 4 parties (Figure 27). Les zones (0) et (1) sont les zones d'eau morte. Dans la zone (3), une vague relie les parties stationnaires (1) et (2). Dans la zone (2), l'eau qui était en mouvement devient de nouveau stagnant et la vitesse moyenne de l'écoulement et la hauteur de l'écoulement sont constantes. Les variables  $u$  et  $h$  de l'écoulement dans chaque zone sont données dans le tableau suivant.

Numéro de la zone/ Abscisse	La hauteur d'eau $h$	La vitesse $u$
(0) : $\frac{L}{2} + St < x < L$	$h = h_{aval}$	$u = 0$
(1) : $0 < x < \frac{L}{2} - c_{amont} t$	$h = h_{amont}$	$u = 0$
(2) : $\frac{L}{2} + (u_2 - c_2)t < x < \frac{L}{2} + St$	$h = \frac{c_2}{g}$ $c_2 = 2S \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8S^2}{c_{aval}^2}} \right)^{-1/2}$	$u = u_2 = S - \frac{c_{aval}^2}{4S} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8S^2}{c_{aval}^2}} \right)$ $u_2 = S - \frac{c_{aval}^2}{4S} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{8S^2}{c_{aval}^2}} \right)$
(3) : $\frac{L}{2} - c_{amont} t < x < \frac{L}{2} + (u_2 - c_2)t$	$h = \frac{1}{9g} \left( 2c_{amont} - \frac{x - \frac{L}{2}}{t} \right)^2$	$u = \frac{2}{3} \left( c_{amont} + \frac{x}{t} \right)$

Tableau 2 : Solution analytique de l'ouverture brutale d'une vanne.

L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- d'une solution analytique exacte,
- de la vitesse et de la hauteur dans un canal en régime transitoire,
- des ondes de chocs et de raréfaction,
- de l'affranchissement des termes sources.

## 2.2. Ressaut hydraulique dans un canal prismatique rectangulaire

Dans cet exemple de MacDonald (1997), l'écoulement est stationnaire dans un canal prismatique à section rectangulaire non horizontal en présence des frottements. Le régime de l'écoulement dans le canal est transcritique puisqu'il passe du torrentiel au fluvial à travers un ressaut hydraulique.

Le canal a une longueur de 1000 m et une largeur de 10 m. Le coefficient de rugosité de Manning est de 0,02 et le débit est constant et égal à  $20 \text{ m}^3/\text{s}$ . La pente du canal est une fonction de la hauteur d'eau  $\hat{y}(x)$  et de sa dérivée  $\hat{y}'(x)$ . La pente est donnée par:

$$S_0(x) = \left( 1 - \frac{4}{g[\hat{y}(x)]^3} \right) \hat{y}'(x) + 0.16 \frac{[2\hat{y}(x) + 10]^{4/3}}{[10\hat{y}(x)]^{10/3}} \quad 1-2$$

La hauteur d'eau  $\hat{y}(x)$  est donnée par:

$$\hat{y}(x) = \begin{cases} \left( \frac{4}{g} \right)^{1/3} \left( \frac{9}{10} - \frac{1}{6} \exp\left( \frac{-x}{250} \right) \right) & 0 \leq x \leq 500 \\ \left( \frac{4}{g} \right)^{1/3} \left\{ 1 + \sum_{k=1}^3 a_k \exp\left( -20k \left( \frac{x}{1000} - \frac{1}{2} \right) \right) + \frac{4}{5} \exp\left( \frac{x}{1000} - 1 \right) \right\} & 500 \leq x \leq 1000 \end{cases} \quad 1-3$$

Avec  $a_1 = -0,348427$ ,  $a_2 = 0,552264$  et  $a_3 = -0,555580$ . Pour les conditions aux limites, et puisque l'écoulement est torrentiel à l'amont du canal, nous imposons une hauteur égale à  $\hat{y}(0)$  et un débit égal à  $20 \text{ m}^3/\text{s}$ . À l'aval du canal, et puisque l'écoulement est fluvial nous imposons donc une seule variable qui est la hauteur d'eau égale à  $\hat{y}(1000)$ .

Pour plus de détails de la solution analytique voir annexe C (paragraphe 1).

L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- d'une solution analytique exacte,
- de la hauteur dans un canal en régime permanent,
- d'un ressaut hydraulique,
- d'un canal à lit variable.

## 2.3. Écoulement stationnaire dans un canal prismatique rectangulaire à lit concave

La solution analytique de Garcia-Navarro (1992) considère un écoulement dans un canal prismatique rectangulaire où le lit possède une forme géométrique non régulière. Le lit du canal est concave, il a la forme d'une bosse comme l'indique la Figure 28.

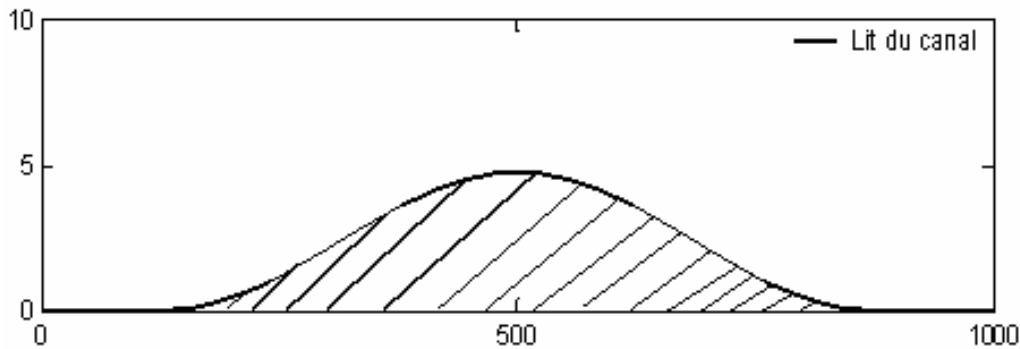


Figure 28 : Lit concave d'un canal

La longueur du canal est de 1km, et sa largeur est de 1 m. Dans cet exemple, il n'y a pas d'effets de frottements. La bosse du lit commence en  $x = 125$  m et se termine en  $x = 875$  m. L'expression algébrique du lit est donnée par :

$$z(x) = 4.75 \sin^2\left(\frac{x-125}{750} \pi\right) \quad 1-4$$

où  $z$  représente le niveau du lit par rapport à une altitude constante fixe, et  $x$  la distance longitudinale.

Dans cet exemple, nous considérons deux cas :

- Dans le premier cas, l'écoulement varie graduellement du régime fluvial au régime torrentiel en passant par un régime critique au sommet de la bosse.
- Dans le second cas, l'écoulement commence en fluvial, atteint son régime critique au sommet de la bosse, passe au régime torrentiel et se termine en fluvial au travers d'un ressaut hydraulique juste avant la fin de la bosse.

La solution de cet exemple n'est pas une solution analytique explicite. Elle est fournie en annexe C (paragraphe 2).

L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- d'une solution analytique exacte,
- de la hauteur dans un canal en régime permanent,
- d'un ressaut hydraulique et d'un régime transcritique,
- d'un canal à lit variable.

#### 2.4. Ressaut hydraulique dans un canal prismatique trapézoïdal

La solution analytique de MacDonald (1997) considère un écoulement dans un canal prismatique trapézoïdal de longueur 1km, de largeur  $B = 10$  m, de coefficient de Manning  $n$  est égal à 0,02 et de pente latérale  $S_L = 1$ . L'écoulement est stationnaire avec un débit d'eau constant de  $20 \text{ m}^3/\text{s}$ . Cet écoulement fluvial à l'amont du canal passe au régime torrentiel puis redevient fluvial à travers un ressaut hydraulique. La pente du lit est donnée par :

$$S_0(x) = \left(1 - \frac{Q^2 T}{g A^3}\right) h'(x) + \frac{Q^2 n^2 P^{4/3}}{A^{10/3}} \quad 1-5$$

où,  $T = B + 2hS_L$  est la largeur du canal à la surface,  $P = B + 2h\sqrt{1+S_L^2}$  est le périmètre de la section mouillée,  $A = (B + S_L h)h$  est la section mouillée,  $n$  est le coefficient de frottement de Manning. La hauteur analytique de ce problème est donnée par:

$$\hat{h}(x) = \begin{cases} 0.723449 \left( 1 - \tanh \left( \frac{x}{1000} - \frac{3}{10} \right) \right) & 0 \leq x \leq 300 \\ 0.723449 \left( 1 - \frac{1}{6} \tanh \left( 6 \left( \frac{x}{1000} - \frac{3}{10} \right) \right) \right) & 300 < x \leq 600 \\ \frac{3}{4} + \left[ \sum_{k=1}^3 a_k \exp \left( -20k \left( \frac{x}{1000} - \frac{3}{5} \right) \right) \right] + \frac{3}{5} \exp \left( \frac{x}{1000} - 1 \right) & 600 < x \leq 1000 \end{cases} \quad 1-6$$

L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- d'une solution analytique exacte,
- de la hauteur dans un canal en régime permanent,
- d'un ressaut hydraulique,
- d'une variation de la largeur en fonction de la hauteur,
- d'un canal à lit variable.

### 2.5. Ecoulement transcritique dans un canal convergent divergent

La solution analytique de Garcia-Navarro (1992) considère l'écoulement dans un canal non prismatique convergent divergent de longueur 500m. Le lit du canal est horizontal et ne présente pas de frottement. La section convergente divergente commence à  $x = 100$  m et se termine à  $x = 400$  m et la largeur (voir Figure 29) est décrite par :

$$b(x) = 5 - 1.413 \sin^2 \left( \frac{x-100}{300} \pi \right) \quad 1-7$$

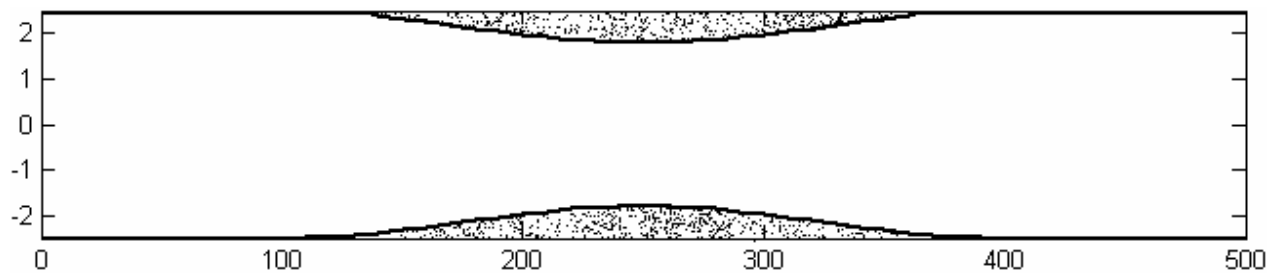


Figure 29: Canal convergent divergent.

Dans cet exemple, nous considérons aussi deux cas :

- Dans le premier cas, l'écoulement varie graduellement du régime fluvial au régime torrentiel en passant par un régime critique au milieu du canal convergent divergent.
- Dans le second cas, l'écoulement commence en régime fluvial, atteint son régime critique au milieu du canal, passe au régime torrentiel et se termine en fluvial au travers d'un ressaut hydraulique juste avant la fin de la contraction du canal.

La solution de cet exemple n'est pas une solution analytique explicite. Elle est fournie en annexe C (paragraphe 2).

L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- d'une solution analytique exacte,
- de la hauteur dans un canal en régime permanent,
- d'un ressaut hydraulique et d'un régime transcritique,
- d'une largeur variable en fonction de la longueur du canal.

## 2.6. Écoulement stationnaire dans un canal convergent divergent et à lit concave

Dans cet exemple de Garcia-Navarro (1992), on considère un canal convergent divergent de longueur 3 m. Le lit du canal ayant la forme d'une bosse a pour équation :

$$z(x) = \begin{cases} 0.1 \cos^2(\pi(x-1.5)) & \text{si } |x-1.5| \leq 0.5 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad 1-8$$

La largeur du canal est donnée par :

$$b(x) = \begin{cases} 1 - 0.1 \cos^2(\pi(x-1.5)) & \text{si } |x-1.5| \leq 0.5 \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad 1-9$$

Deux cas sont aussi considérés :

- Dans le premier cas, l'écoulement est torrentiel dans tout le canal.
- Dans le second cas, l'écoulement commence fluvial, atteint son régime critique au sommet de la bosse et, au milieu du canal, passe en régime torrentiel et se termine en fluvial au travers d'un ressaut hydraulique juste avant la fin de la bosse.

La solution de cet exemple n'est pas une solution analytique explicite. Elle est fournie en annexe C (paragraphe 2).

L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- d'une solution analytique exacte,
- de la hauteur dans un canal en régime permanent,
- d'un ressaut hydraulique et d'un régime transcritique,
- d'une largeur et d'un lit variables en fonction de la longueur du canal.

## 2.7. Écoulement stationnaire dans un canal non prismatique à section trapézoïdale

La solution analytique de MacDonald (1997) considère l'écoulement dans un canal non prismatique à section trapézoïdale de longueur 200m et de pente latérale  $S_L = 1$ . La variation de la largeur du canal est décrite par

$$B(x) = 10 - 5 \exp\left(-10 \left(\frac{x}{200} - \frac{1}{2}\right)^2\right) \quad 1-10$$

L'écoulement est stationnaire avec un débit d'eau constant de  $20 \text{ m}^3/\text{s}$ , et commence par un régime fluvial puis passe en régime torrentiel. La pente du lit est donnée par :

$$S_0(x) = \left(1 - \frac{Q^2 T}{gA^3}\right) h'(x) + \frac{Q^2 n^2 P^{4/3}}{A^{10/3}} - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{h=\text{cte}} \quad 1-11$$

où  $T = B + 2hS_L$  est la largeur du canal à la surface,  $P = B + 2h\sqrt{1 + S_L^2}$  est le périmètre de la section mouillée,  $A = (B + S_L h)h$  est la section mouillée,  $n$  est le coefficient de frottements de Manning. Dans cet exemple, le coefficient  $n$  est égal à 0,03. La hauteur analytique  $h$  est donnée par:

$$\hat{h}(x) = 1 - 0.3 \tanh\left(4\left(\frac{x}{200} - \frac{1}{3}\right)\right) \quad 1-12$$

L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- d'une solution analytique exacte,
- de la hauteur dans un canal en régime permanent,
- d'un ressaut hydraulique,
- d'un lit variable en fonction de la longueur du canal,
- d'une largeur variable en fonction de la hauteur.

### 2.8. Ecoulement stagnant dans un canal non prismatique à lit fortement irrégulier

La solution analytique de Garcia-Navarro (2000) suppose l'écoulement dans un canal non prismatique à section rectangulaire dont le lit et la largeur du canal sont fortement irréguliers. La longueur du canal est égale à 1500 m. Le lit et la largeur sont donnés dans les tableaux suivants et sont montrés dans la Figure 30.

x	0	50	100	150	200	250	300	350	400	425	435	450	470	475	500
z(x)	0	0	2.5	5	5	3	5	5	7.5	8	9	9	9	9.1	9
x	505	530	550	565	575	600	650	700	750	800	820	900	950	1000	1500
z(x)	9	6	5.5	5.5	5	4	3	3	2.3	2	1.2	0.4	0	0	0

Tableau 3 : Le lit du canal de l'écoulement stagnant.

x	0	50	100	150	200	250	300	350	400	425	435	450	470	475	500
B(x)	40	40	30	30	20	30	30	25	25	30	35	35	40	40	40
x	505	530	550	565	575	600	650	700	750	800	820	900	950	1000	1500
B(x)	45	45	50	45	40	40	30	40	40	5	40	35	25	40	40

Tableau 4 : La largeur du canal de l'écoulement stagnant.



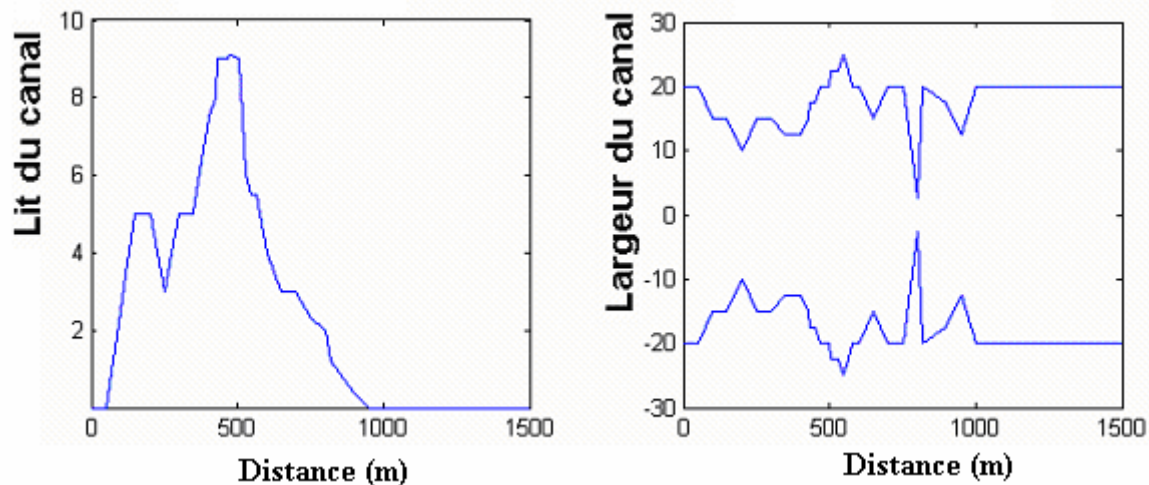


Figure 30 : Le lit et la largeur du canal.

L'écoulement dans ce problème est stagnant donc sa vitesse est nulle et sa hauteur d'eau est égale à une constante.

L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- d'un lit et d'une largeur variable en fonction de la longueur du canal,
- d'un résultat à débit nul.

## 2.9. Écoulement stationnaire au-dessus de plusieurs seuils

La solution analytique de Garcia-Navarro (1992) considère un canal rectangulaire de longueur 500 m, et de largeur 6 m. Le canal contient trois seuils de hauteur 0,25 m, et également repartis dans le canal. La pente du canal est de 0,008 et le coefficient de frottements de Manning est 0,015. L'écoulement dans le canal est stationnaire avec un débit constant égal à  $20\text{m}^3/\text{s}$ .

L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- de plusieurs ressauts hydrauliques,
- d'un cas avec des conditions aux limites internes.

## 2.10. Ressauts hydrauliques dans un canal trapézoïdal à pente variée

L'exemple de Garcia-Navarro (1992) étudie l'écoulement dans un canal trapézoïdal de longueur 168 m, et dont le lit est composé de quatre régions. La pente de fond des quatre régions sont respectivement  $S_{01} = 0.03$ ,  $S_{02} = 0.005$ ,  $S_{03} = 0.03$  et  $S_{04} = 0.011$ . La largeur du canal à la surface est 3 m, sa pente latérale est 2 sur 1 et le coefficient de frottement de Manning est 0,033.

Dans cet exemple, l'écoulement est graduellement varié, avec des ressauts hydrauliques, il commence torrentiel et devient fluvial en effectuant un premier ressaut hydraulique, il redevient torrentiel et se termine en régime fluvial en effectuant un second ressaut hydraulique.

L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- de plusieurs ressauts hydrauliques,
- d'une largeur variable en fonction de la hauteur.

### 2.11. Écoulement fluvial dans un canal non prismatique à section trapézoïdale

La solution analytique de MacDonald (1997) suppose un écoulement fluvial dans un canal non prismatique à section trapézoïdale. La longueur du canal est 400 m, le coefficient  $n$  est égal à 0,03 et la pente latérale est  $S_L = 2$ . La largeur du canal est décrite par :

$$B(x) = 10 - 5 \exp\left(-50\left(\frac{x}{400} - \frac{1}{3}\right)^2\right) - 5 \exp\left(-50\left(\frac{x}{400} - \frac{2}{3}\right)^2\right) \quad 1-13$$

La pente du lit est donnée par :

$$S_0(x) = \left(1 - \frac{Q^2 T}{gA^3}\right) h'(x) + \frac{Q^2 n^2 P^{4/3}}{A^{10/3}} - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{h=\text{cte}} \quad 1-14$$

où  $T = B + 2hS_L$  est la largeur du canal à la surface,  $P = B + 2h\sqrt{1 + S_L^2}$  est le périmètre de la section mouillée,  $A = (B + S_L h)h$  est la section mouillée,  $n$  est le coefficient de frottements de Manning. La hauteur analytique  $h$  est donnée par:

$$\hat{h}(x) = 0.9 + 0.3 \exp\left(-40\left(\frac{x}{400} - \frac{1}{3}\right)^2\right) + 0.2 \exp\left(-35\left(\frac{x}{400} - \frac{2}{3}\right)^2\right) \quad 1-15$$

L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- d'une solution analytique exacte,
- de la hauteur dans un canal en régime permanent,
- d'un régime fluvial,
- d'un lit variable en fonction de la longueur du canal,
- d'une largeur variable en fonction de la hauteur.

### 2.12. Ouverture brutale d'une vanne dans un canal à pente nulle avec frottements.

Les résultats expérimentaux de Burguete (2001) considèrent un réservoir d'eau de longueur 15,5 m rempli à une hauteur de 0,75 m. Une vanne sépare le réservoir d'un canal droit de 22,5 m de longueur contenant un obstacle triangulaire de taille maximale 0,4 m et de longueur de 6 m. La largeur du canal est égale à 1,75 m (Figure 31).

Cet exemple a été étudié expérimentalement par Burguete (2000), et ceci selon trois types de conditions aux limites aval :

- le premier cas est une sortie libre à l'aval (Figure 74),
- le second cas consiste en un écoulement au-dessus d'un seuil à l'aval (Figure 75)
- le troisième cas consiste en un écoulement de l'eau dans le canal avec un obstacle à l'aval empêchant l'eau de s'écouler à l'aval du canal (Figure 76).

L'expression du terme source pour ce problème est donnée par :

$$G(x, A, Q) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \frac{Q}{B} \frac{Q}{A} \left( \frac{M_b^{3/2}}{h} + \frac{2M_w^{3/2}}{B} \right)^{4/3} \end{pmatrix} \quad 1-16$$

$M_b = 0.0125$  et  $M_w = 0.011$  sont respectivement les coefficients de Manning pour le mur inférieur et latéral. Les données expérimentales disponibles sont celles de la hauteur d'eau aux points G2, G4, ... et G20, comme l'indique la Figure 31.

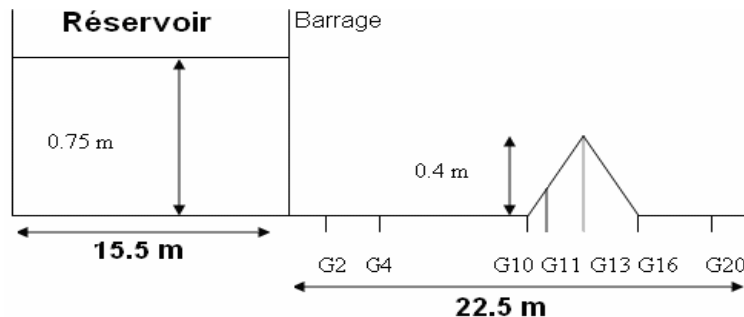


Figure 31 : Profil en long du canal.

L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- d'un résultat expérimental,
- de plusieurs conditions aux limites externes,
- d'une condition aux limites internes,
- d'un débit négatif en transitoire.

### 2.13. Vidange d'un canal à lit concave

L'exemple de Delis (2003) est la vidange d'un canal prismatique rectangulaire où le lit possède une forme géométrique non régulière. Le lit du canal est concave et a pour équation :

$$z(x) = \begin{cases} 0.2 - 0.05(x - 10) & \text{si } 8 < x < 12 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad 1-17$$

La longueur du canal est de 25 m, et sa largeur est 1 m.

L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- d'un front sec.

### 2.14. Propagation d'un choc hydraulique à travers un canal convergent divergent

L'exemple de Prassada (1998) considère un écoulement dans un canal non prismatique convergent divergent de longueur 500 m. Le lit du canal est horizontal et ne présente pas de frottement. La section convergente divergente commence en  $x = 100$  m et se termine en  $x = 400$  m, et la largeur est décrite par :

$$b(x) = 5 - 1.413 \sin^2 \left( \frac{x - 100}{300} \pi \right) \quad 1-18$$

L'intérêt de cet exemple est de disposer :

- de la vitesse et de la hauteur dans un canal en régime transitoire,
- des ondes de chocs.

Solutions analytiques		Types d'écoulement		Pentes			Frottements	Sections		Types de section		Régimes fluvial-torrentiel-ressaut				Commentaires
N°	Tests	Stat.	Trans.	Nulle	Cte	Var.		Rect.	Trap.	Prism.	Non prism.	F	T	F→T	RH	
1	1		X	X				X		X		X				
	2													X		
2	1	X				X	X	X		X					X	
3	1	X				X		X		X				X		
	2														X	
4	1	X				X	X		X	X					X	
5	1	X		X				X			X			X		
	2														X	
6	1	X				X		X			X		X			
	2														X	
7	1	X				X	X		X		X			X		
8	1	X				X		X			X					Débit nul
9	1	X			X		X	X		X					X	Seuil interne
10	1	X			X		X		X	X					X	
11	1	X				X	X		X		X	X				
12	1		X		X		X	X		X					X	
13	1	X	X			X		X		X						Débit +hauteur nuls
14	1		X	X				X			X				X	

Tableau 5 : Différents cas tests

### 3. Utilisation des cas tests de référence dans le banc d'essais numériques

La constitution du banc d'essais numériques a pour objectif de comparer :

- les schémas numériques à capture de chocs sans terme source,
- le traitement des conditions aux limites,
- la discrétisation du terme source.

Le tableau suivant affecte les cas tests précédents au banc d'essais numériques.

N° du cas test	Particularités	Types de comparaison
1	Pas de terme source Pas d'effet des conditions aux limites	Comparaison de <i>l'ensemble des schémas numériques</i> .
2	Terme source	Comparaison de <i>l'ensemble des schémas numériques</i> avec le même terme source.
10, 11 et 14	Terme source	Comparaison de <i>plusieurs schémas</i> avec un même terme source.
12	Terme source, débit négatif	Comparaison avec des données expérimentales de <i>plusieurs schémas numériques</i> .
13	Débit et hauteur nuls	Stabilité d'un schéma soumis à un <i>front sec</i> .
3, 4, 5, 6 et 7	Terme source	Pour les schémas choisis précédemment, comparaison des discrétisations des <i>termes sources</i> .
8	Terme source avec débit nul	Pour les schémas choisis précédemment, comparaison des discrétisations des <i>termes sources</i> .
9	Terme source avec seuils	Comparaison des <i>conditions aux limites</i> internes et des termes sources.

Tableau 6 : Affectation des cas tests.

Le chapitre suivant concerne la comparaison des schémas numériques. Il regroupe l'ensemble des cas tests : 1, 2, 10, 11, 12, 13 et 14.

---

## Chapitre 2 : Comparaison des différents schémas numériques

### 1. Comparaison de l'ensemble des schémas numériques sur les cas tests 1 et 2

#### 1.1. Ouverture brutale d'une vanne dans un canal à pente nulle et sans frottement : cas test 1

La discrétisation numérique se fait en partageant le canal en 200 nœuds de calcul, ce qui correspond à un pas d'espace de 10 m et le temps de simulation correspond à 50 secondes après l'ouverture de la vanne.

Dans toutes les figures simulées dans cette section, la partie (a) correspond au problème d'un écoulement partout fluvial dans le canal, où les conditions initiales sont  $h_{\text{amont}} = 20\text{m}$  et  $h_{\text{aval}} = 10\text{m}$ , ce qui fait que  $h_{\text{aval}} / h_{\text{amont}} = 0.5$ , et la partie (b) correspond au problème d'un écoulement transitionnel où les conditions initiales sont  $h_{\text{amont}} = 20\text{m}$  et, ce qui fait que  $h_{\text{aval}} / h_{\text{amont}} = 0.025$ .

#### a- Résultats des différents schémas numériques

##### a-1. Les schémas classiques : MacCormack - Lax-Wendroff

Les Figure 32 et Figure 33 montrent, respectivement, les résultats de simulation numérique avec les schémas classiques de MacCormack et de Lax-Wendroff. On peut noter que ces schémas donnent des résultats assez satisfaisants dans le cas où l'écoulement est partout fluvial, puisque la solution simulée suit la solution analytique. En fait, le schéma de MacCormack montre une oscillation dans la région de raréfaction et une petite diffusion dans la région du choc, et le schéma de Lax-Wendroff montre de petites oscillations et des diffusions dans les deux régions. Dans le cas transitionnel, le schéma de MacCormack échoue complètement à cause de sérieuses oscillations qui apparaissent au voisinage des discontinuités, et le schéma de Lax-Wendroff ne simule pas la solution d'une façon satisfaisante.

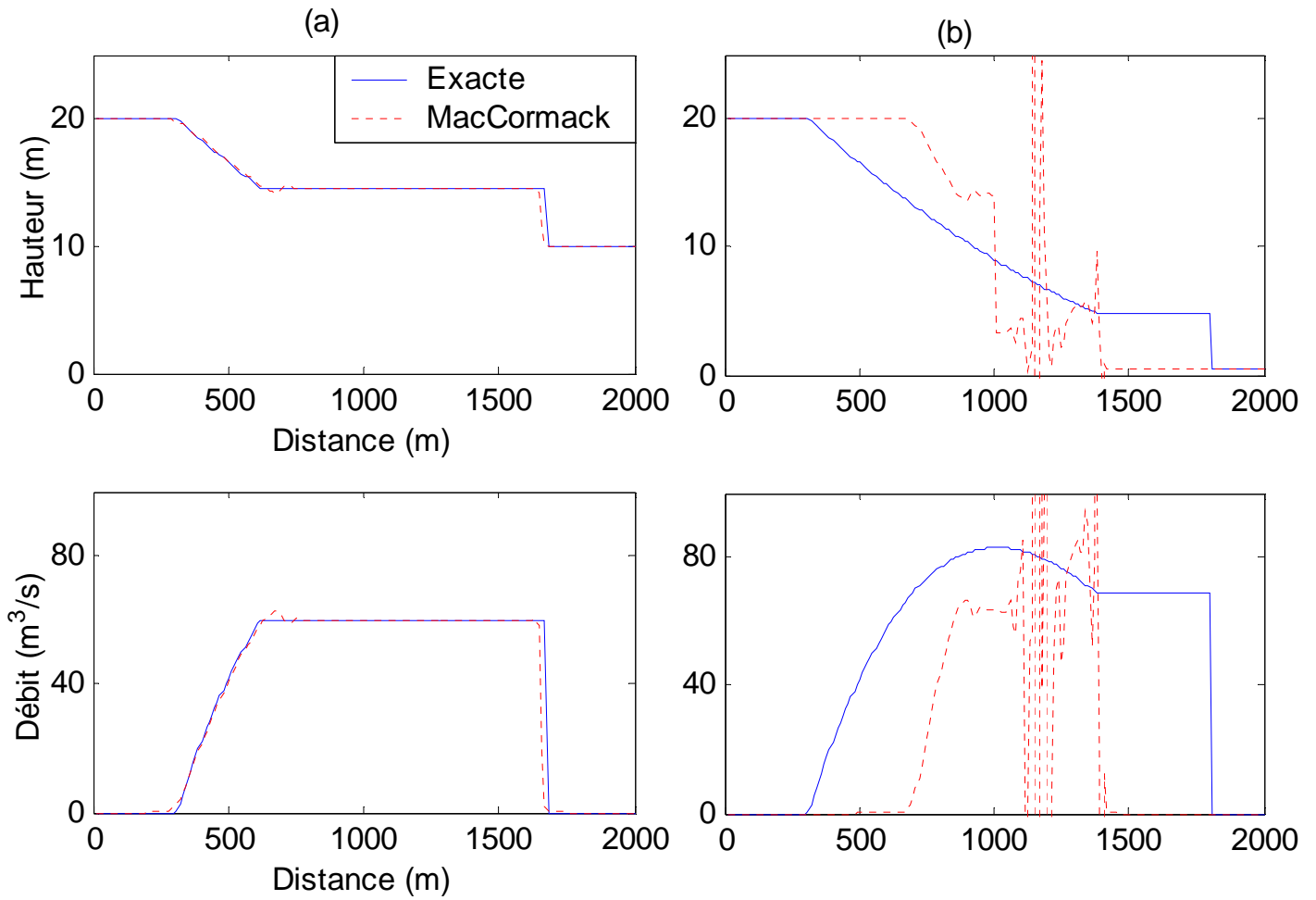


Figure 32 : Schéma de MacCormack classique. (a): régime fluvial. (b): régime transcritique.  
 La solution est simulée 50 secondes après l'ouverture de la vanne.

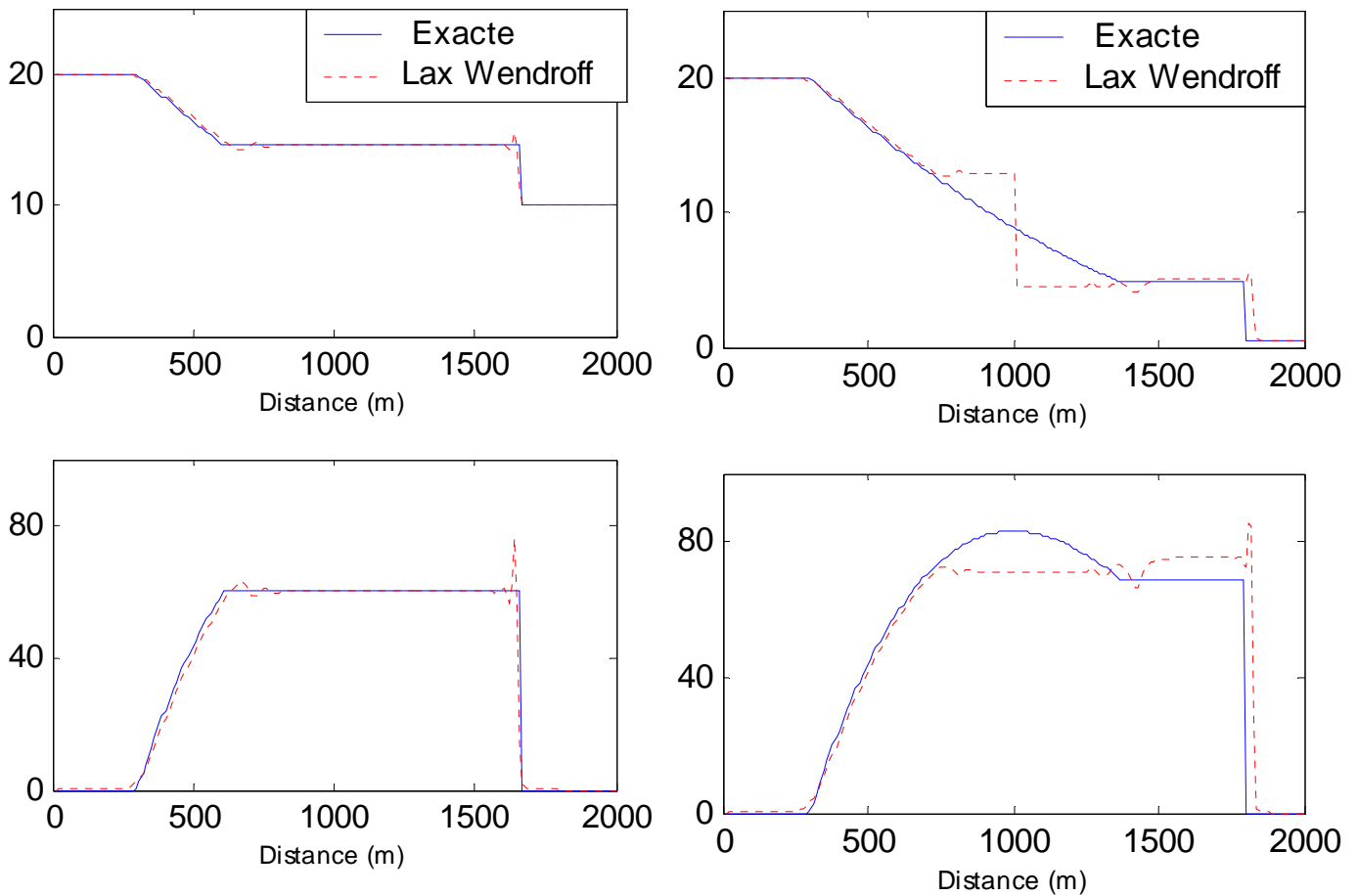


Figure 33 : Schéma de Lax-Wendroff classique.

**a-2. Les solveurs de Riemann : Lax-Friedrich - Roe - Roe avec correction entropique – Harten Lax Van Leer (HLL)**

Les Figure 34, Figure 35, Figure 36 et Figure 37 montrent respectivement, les résultats de simulations numériques avec les solveurs de : Lax-Friedrich - Roe - Roe avec correction entropique et HLL. Le solveur de Lax-Friedrich ne montre aucune oscillation, mais certaines diffusions se trouvent dans les régions à forte discontinuité. Le solveur de Roe donne de meilleurs résultats dans les deux cas de l'écoulement, et celui de Roe avec correction entropique améliore la solution numérique au voisinage des discontinuités. Le solveur de HLL donne des résultats aussi satisfaisants que ceux obtenus par le solveur de Roe avec correction entropique.



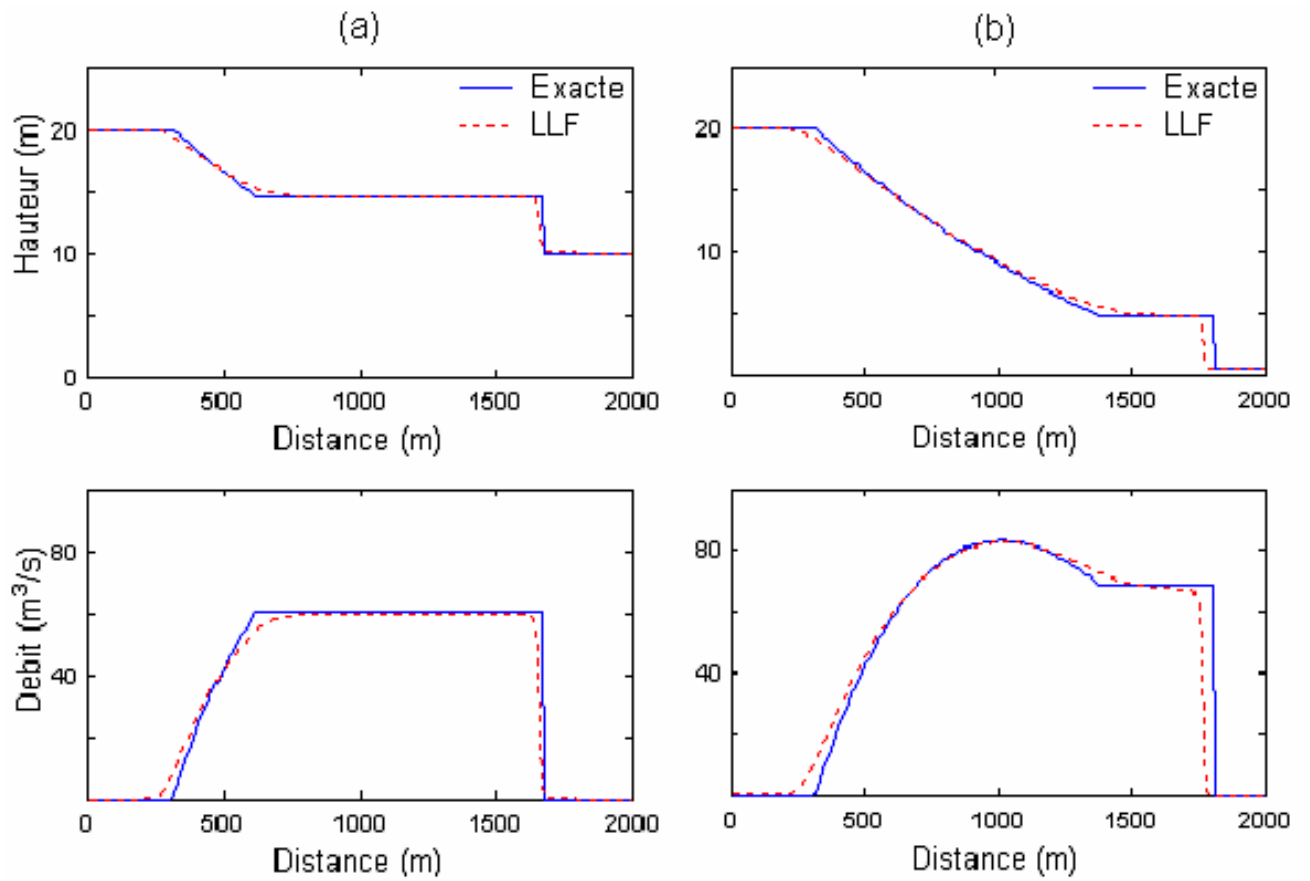


Figure 34 : Solveur de Lax-Friedrich.

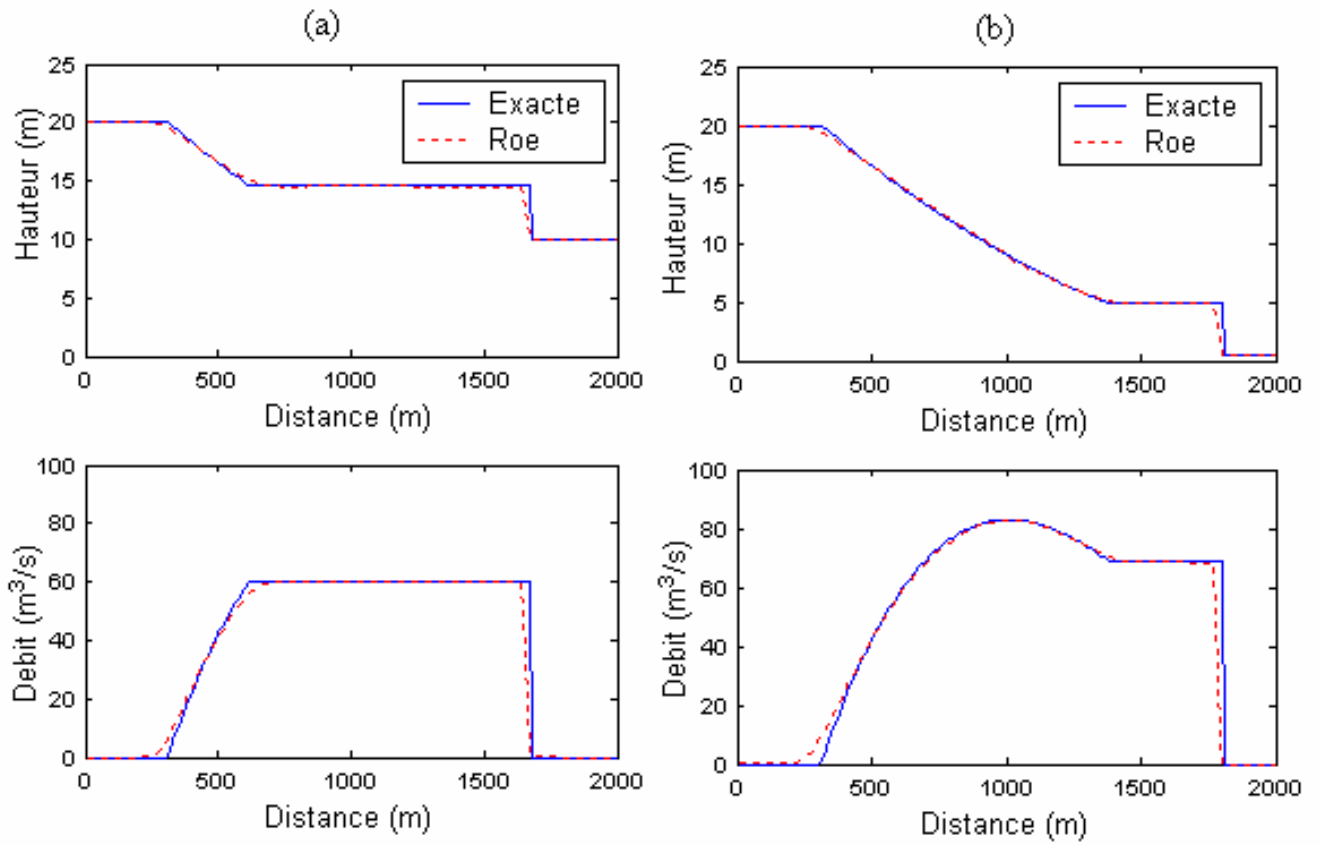


Figure 35 : Solvateur de Roe.

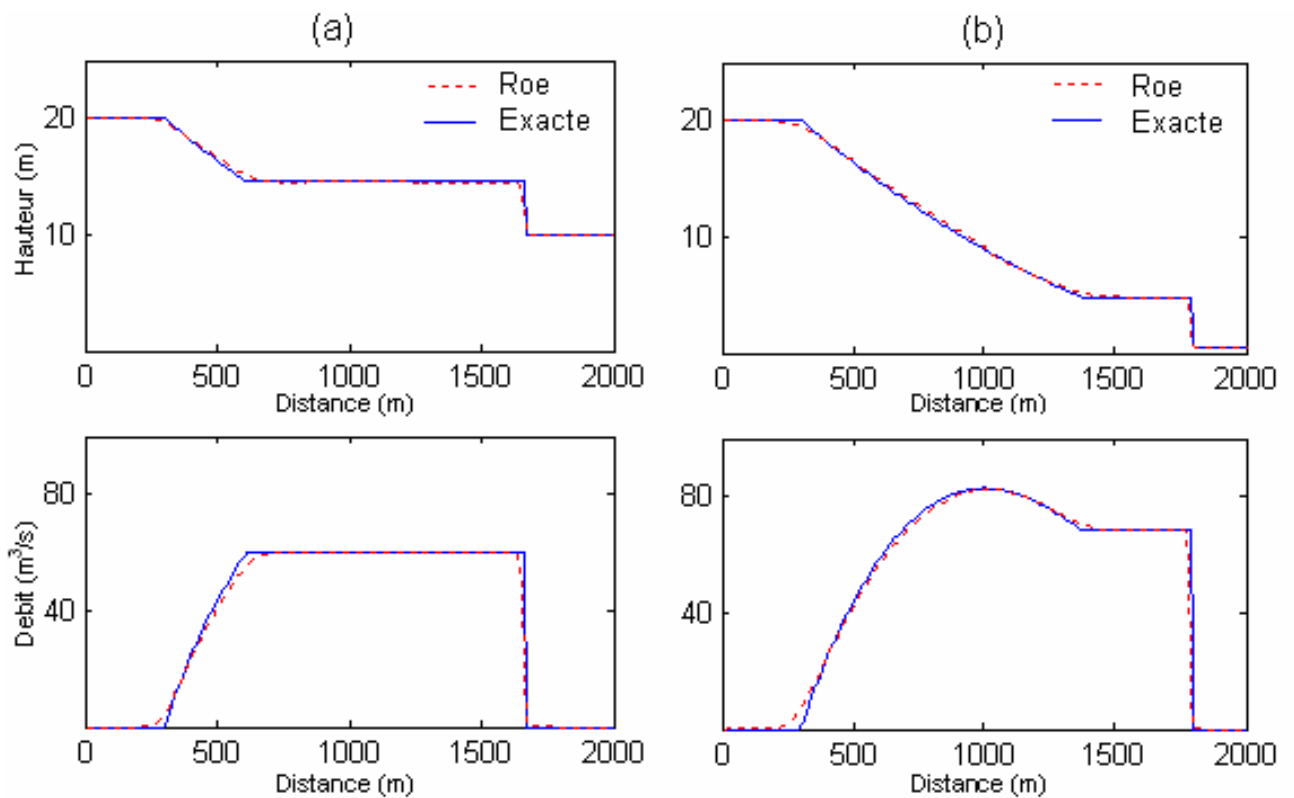


Figure 36: Solvateur de Roe avec correction entropique.

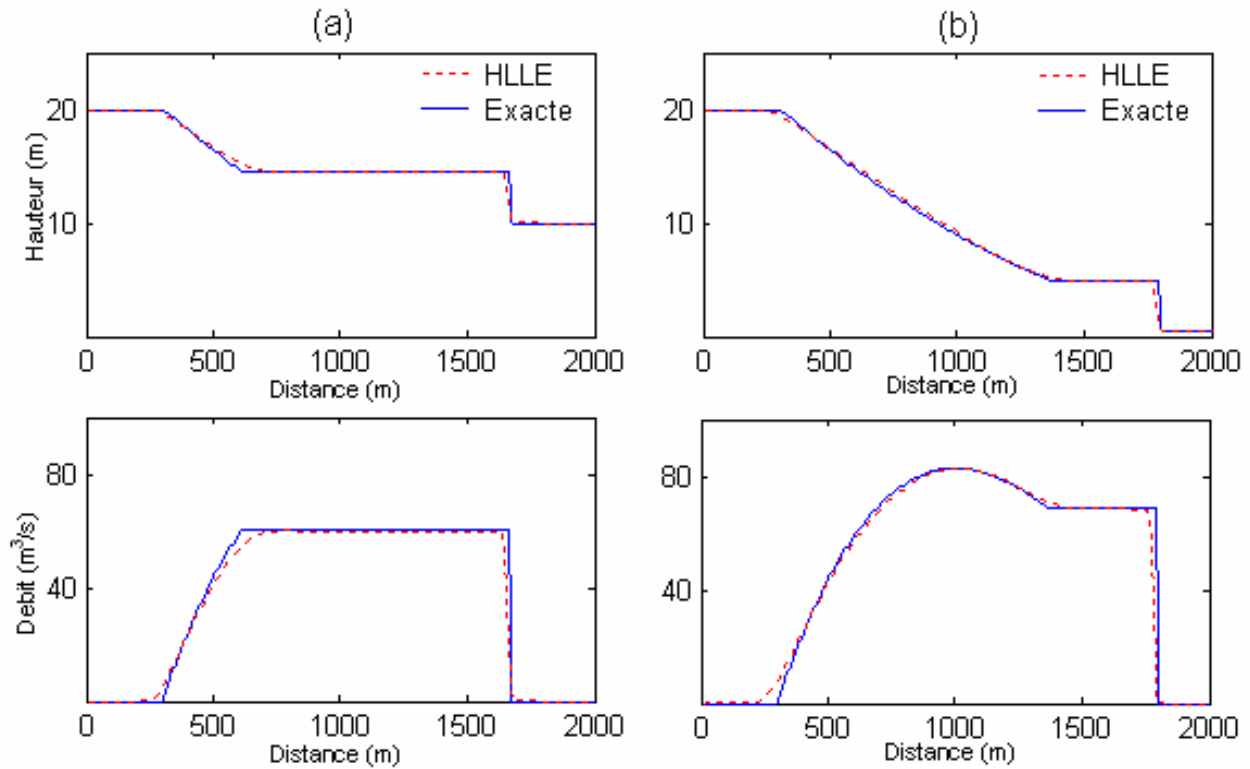


Figure 37: Solvateur de HLL.

**a-3. Les schémas TVD à limitation de flux : Le schéma symétrique - Le schéma du flux modifié ou schéma upwind - Schéma de MacCormack - Le schéma TVD de Lax-Wendroff.**

Les Figure 38, Figure 39, Figure 40 et Figure 41 montrent, respectivement, les résultats de simulations numériques avec les schémas TVD à limitation de flux : le schéma TVD symétrique - le schéma TVD du flux modifié ou schéma upwind – le schéma TVD de MacCormack - le schéma TVD de Lax-Wendroff. Les résultats de simulations, obtenus à l’aide de ces schémas, montrent une nette amélioration de la solution numérique par rapport à la solution simulée par les schémas non TVD surtout dans les régions à forte discontinuité. Parmi ces schémas, c’est le schéma upwind qui donne les meilleurs résultats. La solution simulée par le schéma TVD symétrique est très satisfaisante, malgré les petites diffusions dans les régions à fortes discontinuités. Le schéma TVD de MacCormack donne une solution numérique proche de la solution analytique dans la région de raréfaction, mais une petite diffusion apparaît dans la région du choc. Le schéma TVD de Lax-Wendroff montre une petite oscillation dans la région du passage du régime fluvial au régime torrentiel et aussi une diffusion dans les régions à fortes discontinuités.

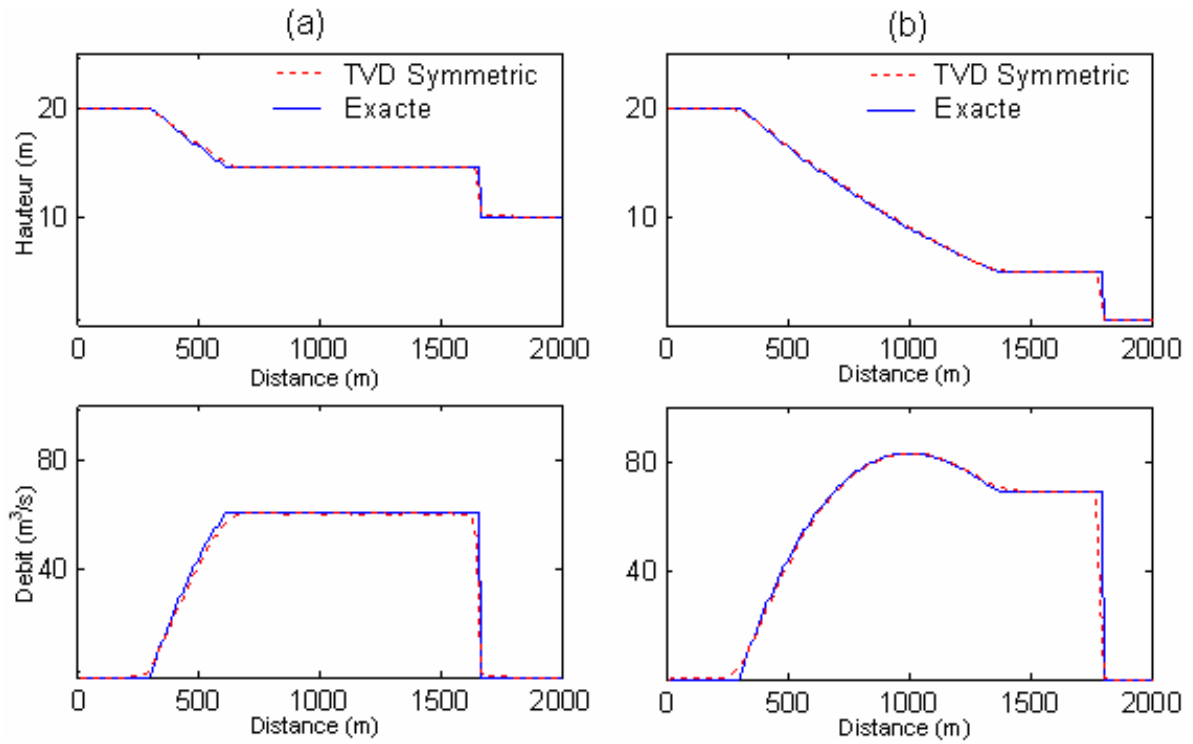


Figure 38 : Le schéma TVD symétrique.

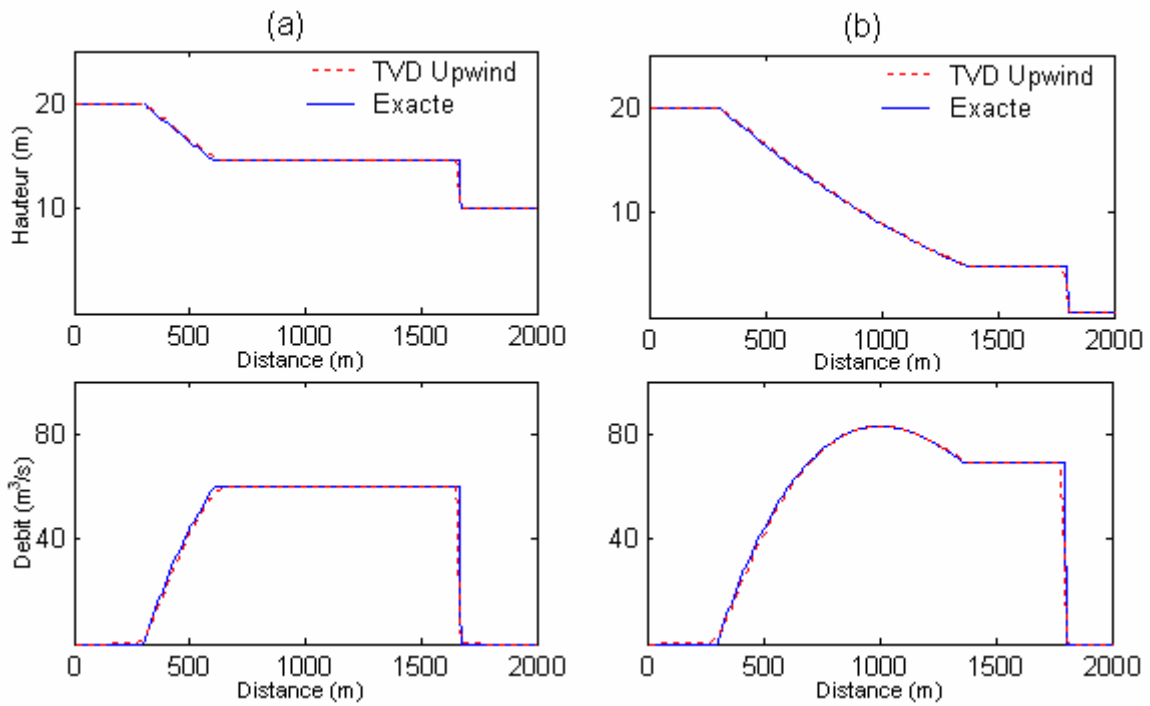


Figure 39 : Le schéma TVD upwind.

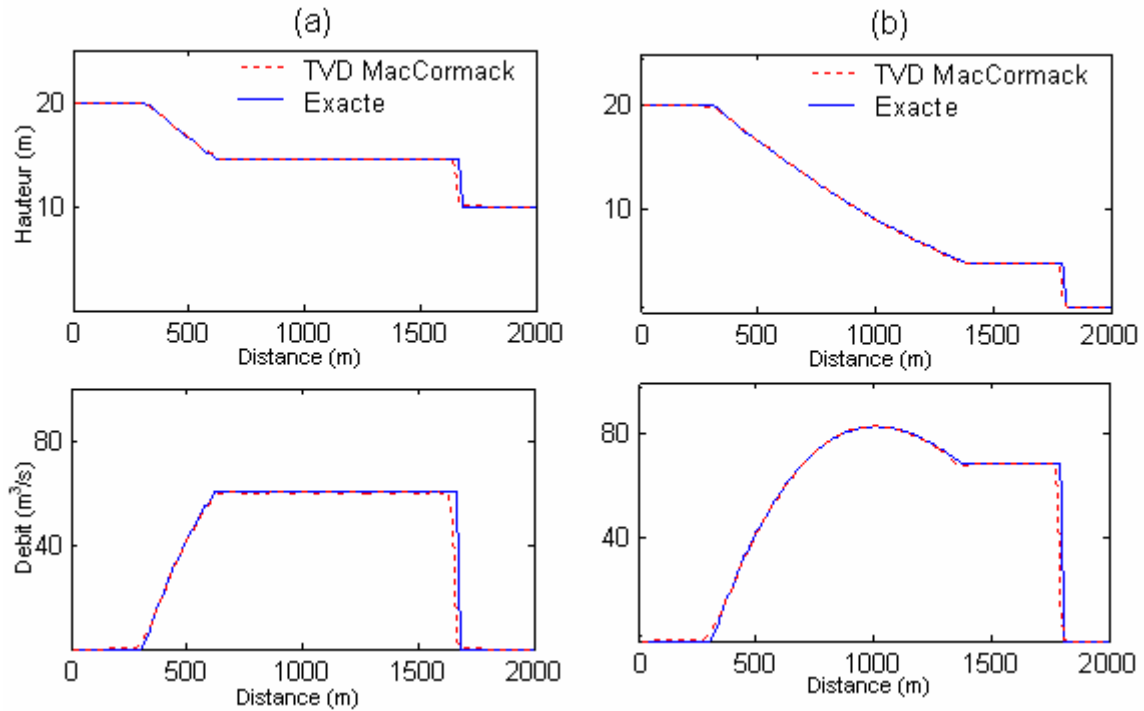


Figure 40 : Schéma TVD de MacCormack.

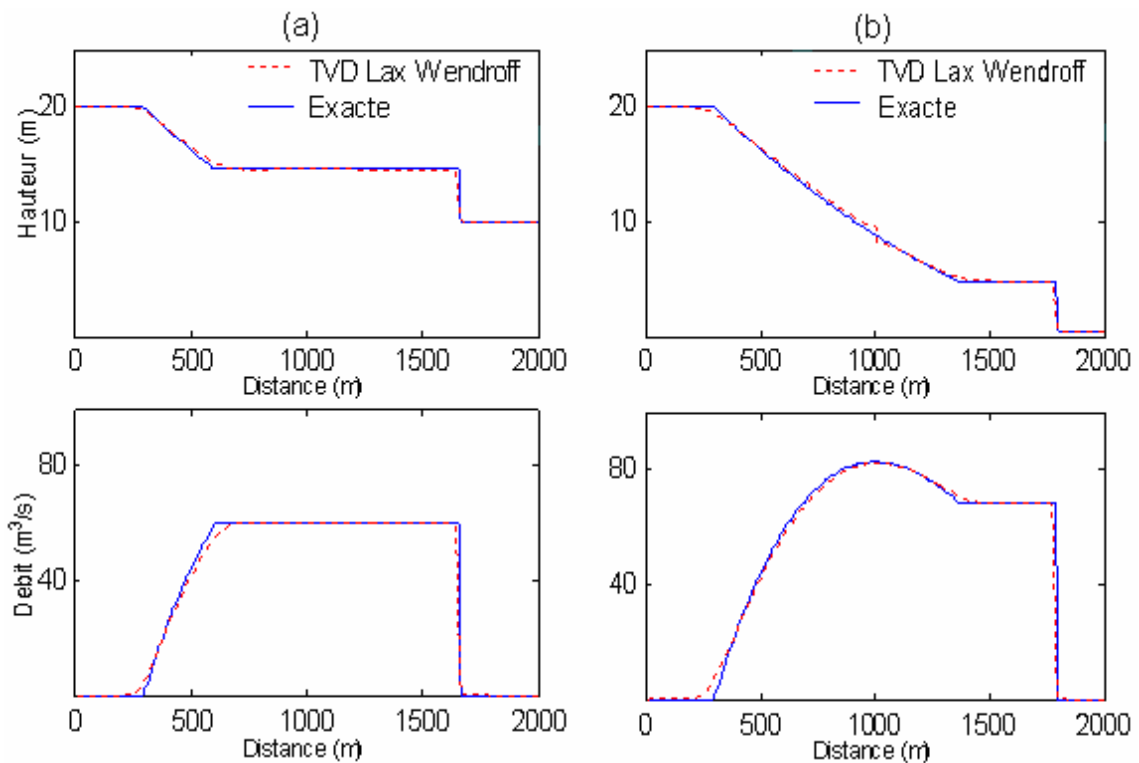


Figure 41 : Le schéma TVD de Lax-Wendroff.

**a-4. Les schémas TVD à limitation de pente : Le Schéma MUSCL**

La Figure 42 montre les résultats de simulations numériques avec le schéma TVD à limitation de pente : le schéma MUSCL (Monotone Upstream centered Schemes for Conservation Laws). Ce schéma qui est un schéma étendu du schéma de Roe, donne des

résultats remarquables dans le cas transitionnel. Ce schéma capte bien la solution dans la région du choc dans le cas fluvial mais une petite diffusion apparaît dans la région de raréfaction.

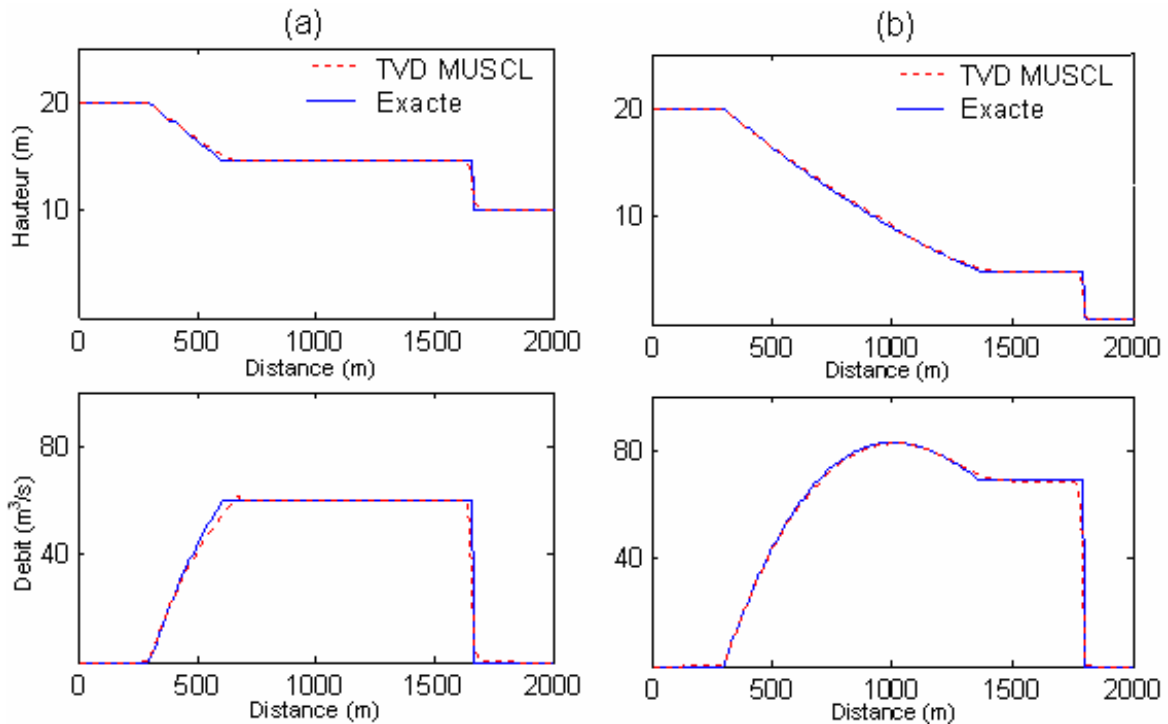


Figure 42: Le schéma TVD MUSCL.

**a-5. Le schéma implicite LCI (Linearised Conservative Implicit Scheme)**

Le schéma implicite est plus difficile à implémenter qu'un schéma explicite, mais son avantage est qu'il est stable indépendamment de la condition de stabilité CFL ; sa stabilité est toutefois conditionnée par la solution du problème. Pour qu'un schéma explicite soit stable il faut que le nombre CFL soit inférieur à 1, ce qui limite le pas de temps de l'évolution de la solution de l'instant  $n$  à l'instant  $n+1$ . Dans cette section, nous montrons les différents résultats obtenus par le schéma LCI, qui est un schéma implicite et TVD. La Figure 43 montre la solution simulée avec le schéma LCI et ceci avec un nombre CFL égal à 1. La solution est exempte d'oscillations mais montre une diffusion plus importante que celle obtenue avec les autres schémas de type explicite. Les Figure 44 et Figure 45 montrent la solution numérique pour un nombre CFL égal respectivement à 2 et 4. La simulation avec le schéma implicite et avec un nombre CFL égal à 10 est réussie pour l'écoulement fluvial, mais échoue pour l'écoulement transitionnel (Figure 46). On note, que cette simulation peut réussir pour un nombre CFL très grand à condition que l'écoulement soit toujours fluvial. La Figure 47 montre la solution numérique pour ce cas avec un CFL égal à 50 et 100 respectivement.

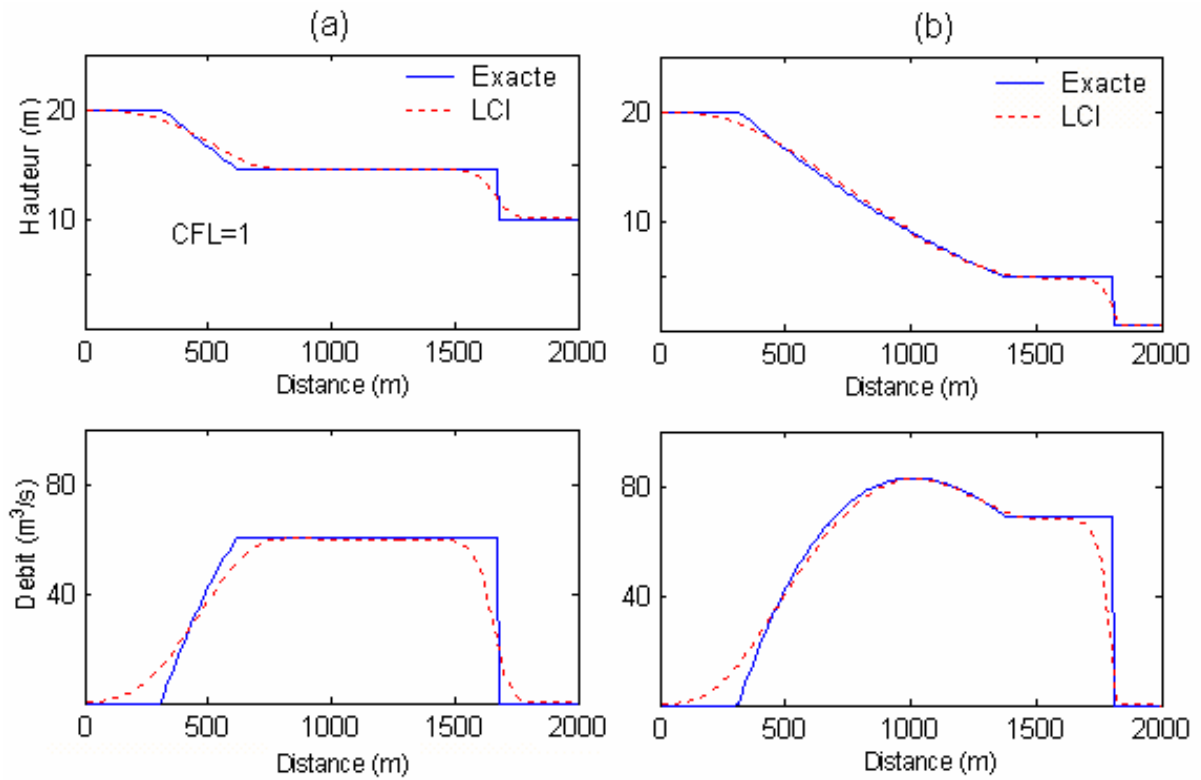


Figure 43 : Le schéma LCI avec CFL=1.

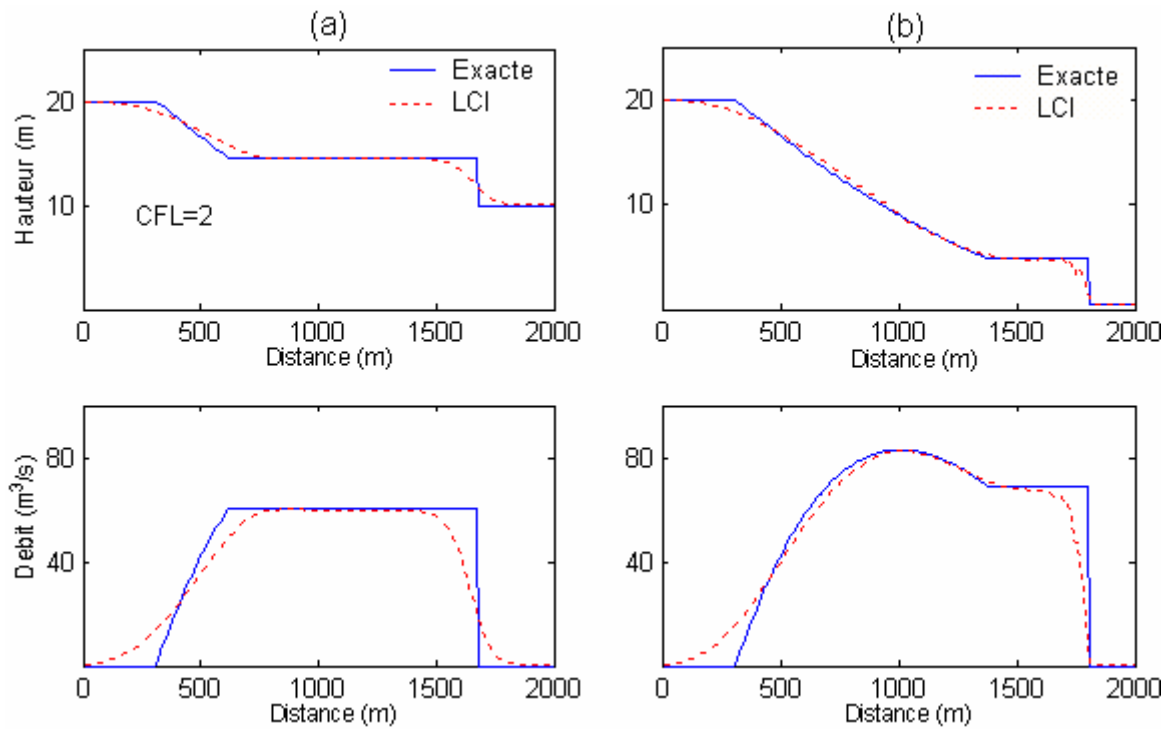


Figure 44 : Le schéma LCI avec CFL=2.

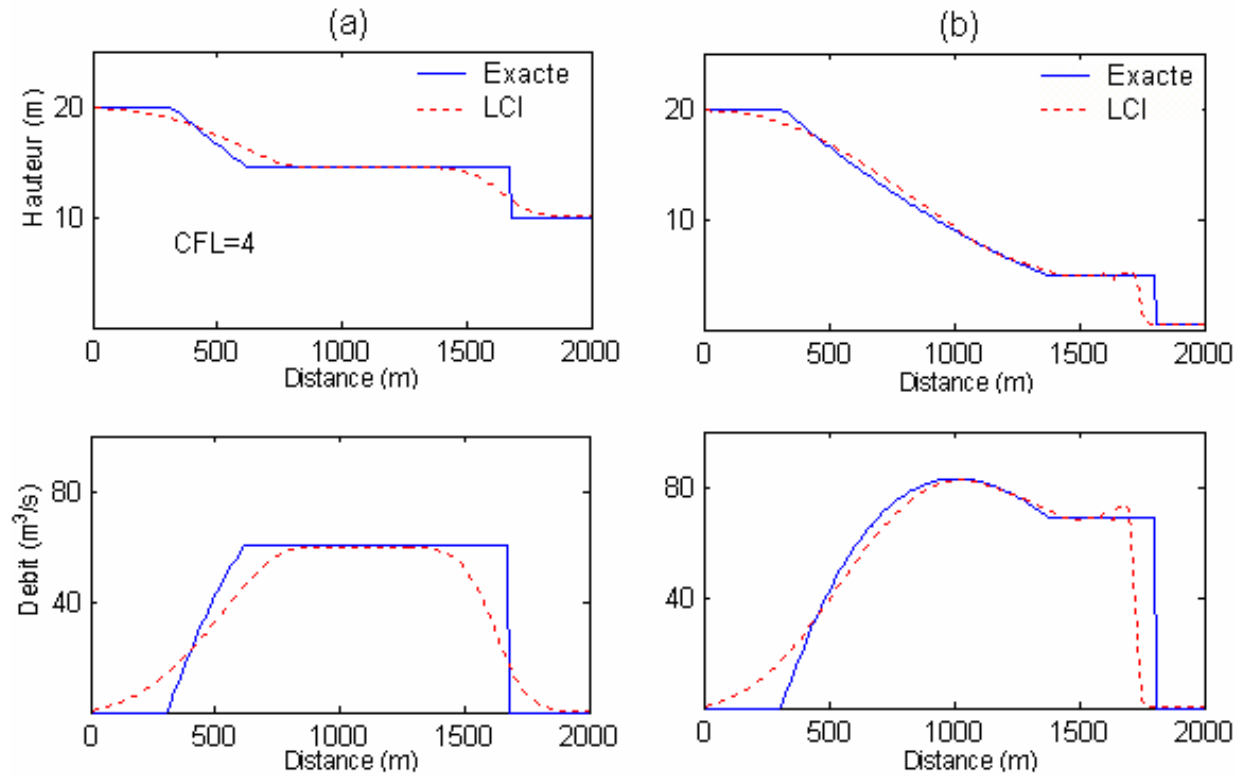


Figure 45 : Le schéma LCI avec CFL=4.

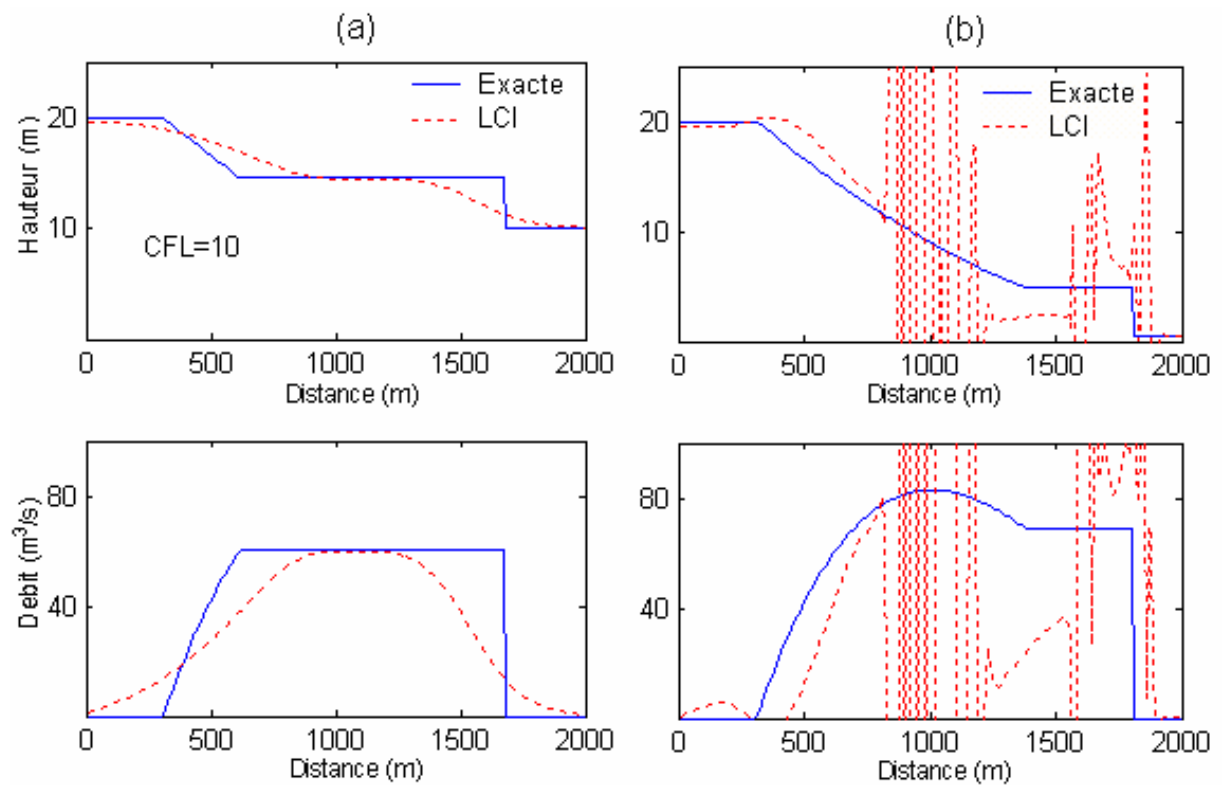


Figure 46 : Le schéma LCI avec CFL=10.



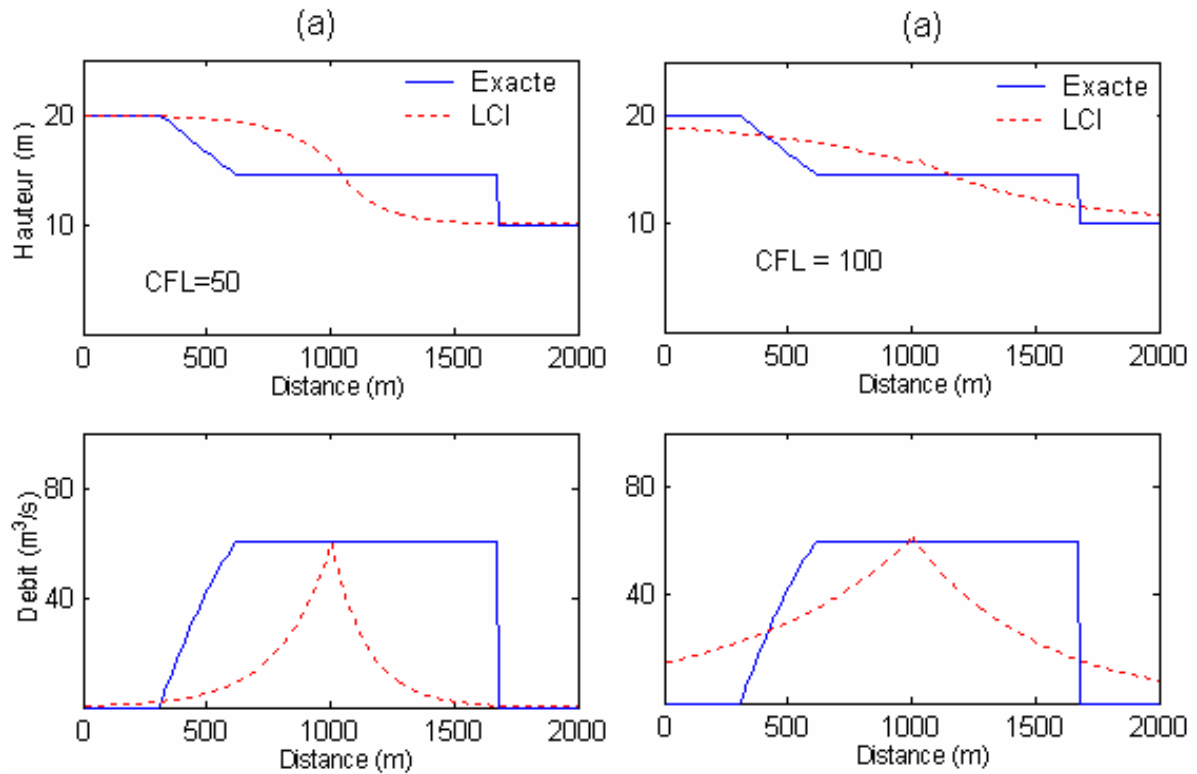


Figure 47 : Le schéma LCI avec CFL=50 et 100 dans le cas d'un écoulement fluvial.

**a-6. Les éléments finis discontinus de Galerkin. Schéma du second ordre avec solveur de : LLF – HLL et Roe**

Les résultats de simulations numériques avec la méthode des éléments finis discontinus de Galerkin sont donnés dans les figures suivantes. Cette méthode, qui utilise l'algorithme de Runge Kutta du second ordre pour la discrétisation temporelle, utilise aussi un solveur de type Riemann pour calculer le flux numérique aux interfaces  $i \pm 1/2$ . Trois types de solveurs sont utilisés dans ce paragraphe : le solveur de Lax-Friedrich, le solveur de Roe avec correction entropique et le solveur de HLLE.

La Figure 48 montre la solution numérique avec le solveur de Lax-Friedrich. La

(a)

(b)

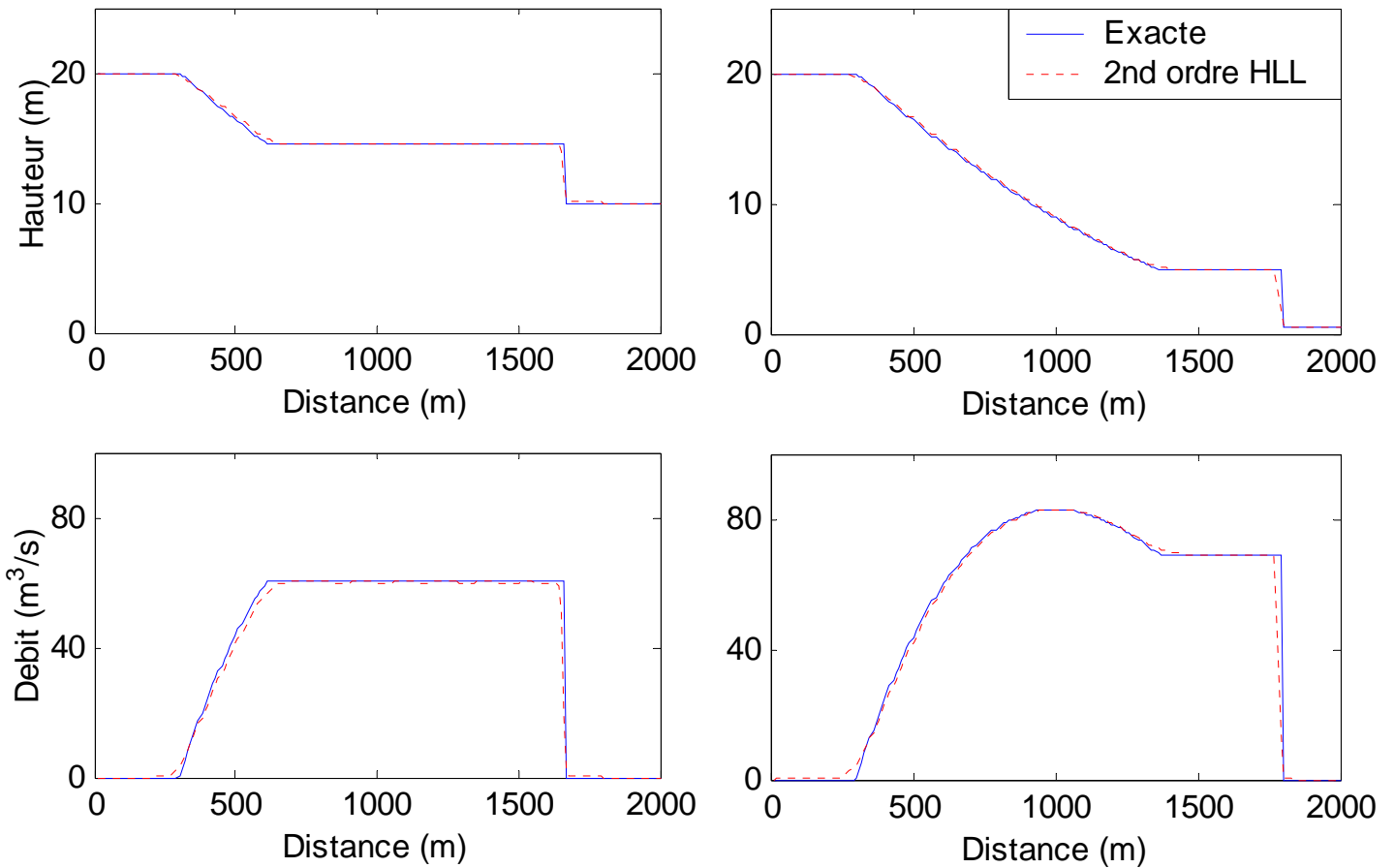


Figure 49 montre la solution numérique avec le solveur de HLLE, la Figure 50 avec le solveur de Roe. On peut noter que cette méthode utilisée avec le solveur de Lax-Friedrich présente des diffusions au voisinage des discontinuités, tandis que l'application des autres solveurs comme celui de Roe et de HLLE dans cette méthode donne une solution numérique très proche de la solution analytique.

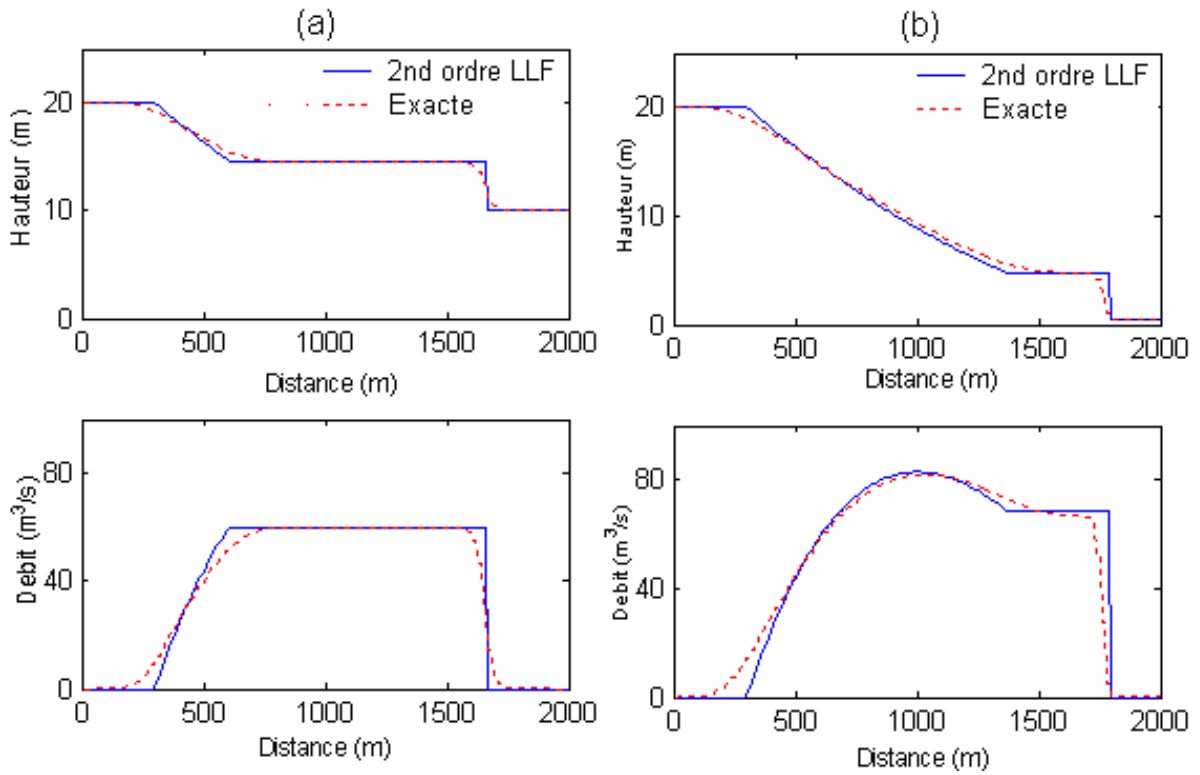


Figure 48 : Schéma du second ordre avec solveur de Lax-Friedrich (LLF).

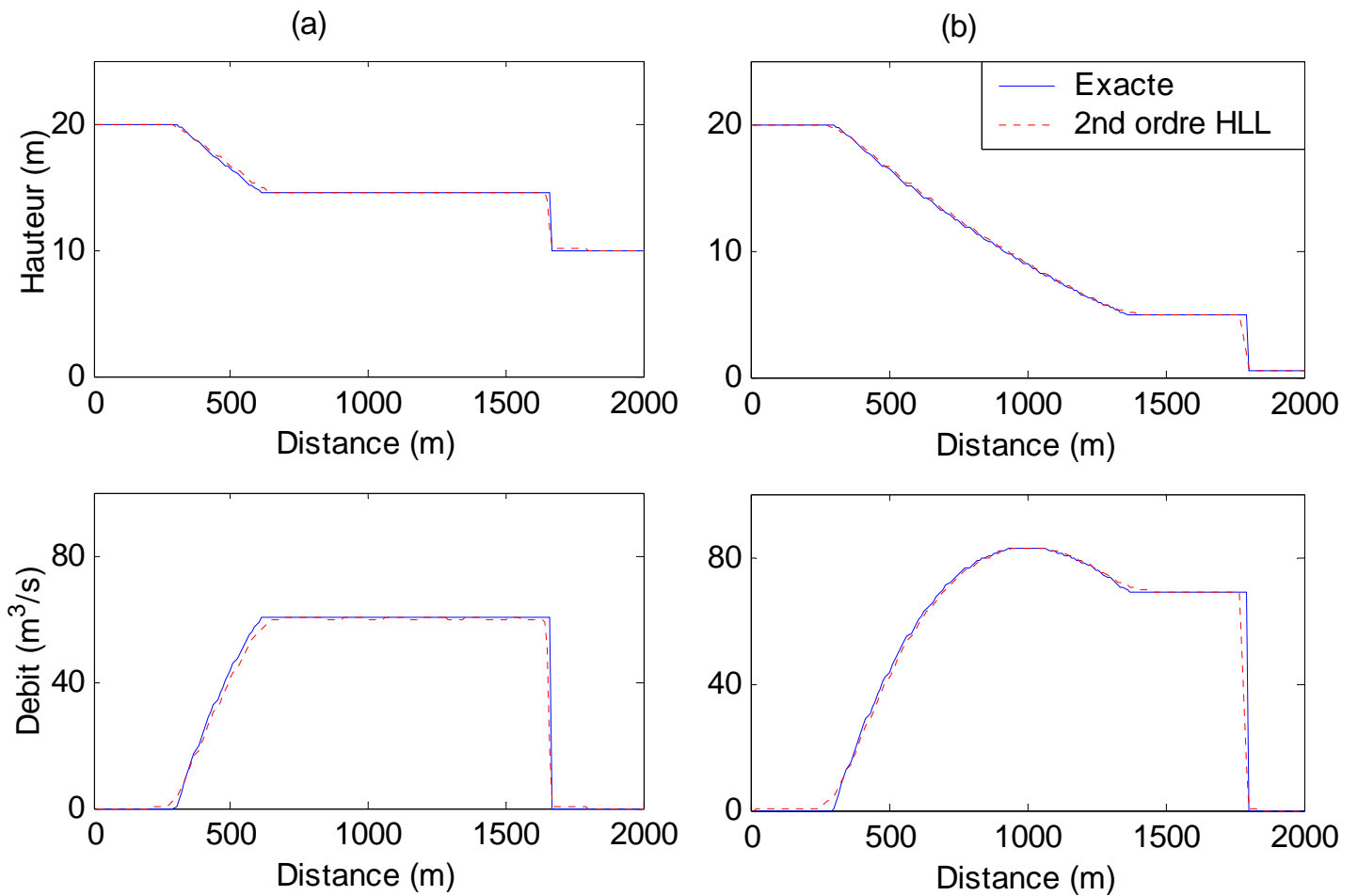


Figure 49 : Schéma du second ordre avec solveur de HLL.

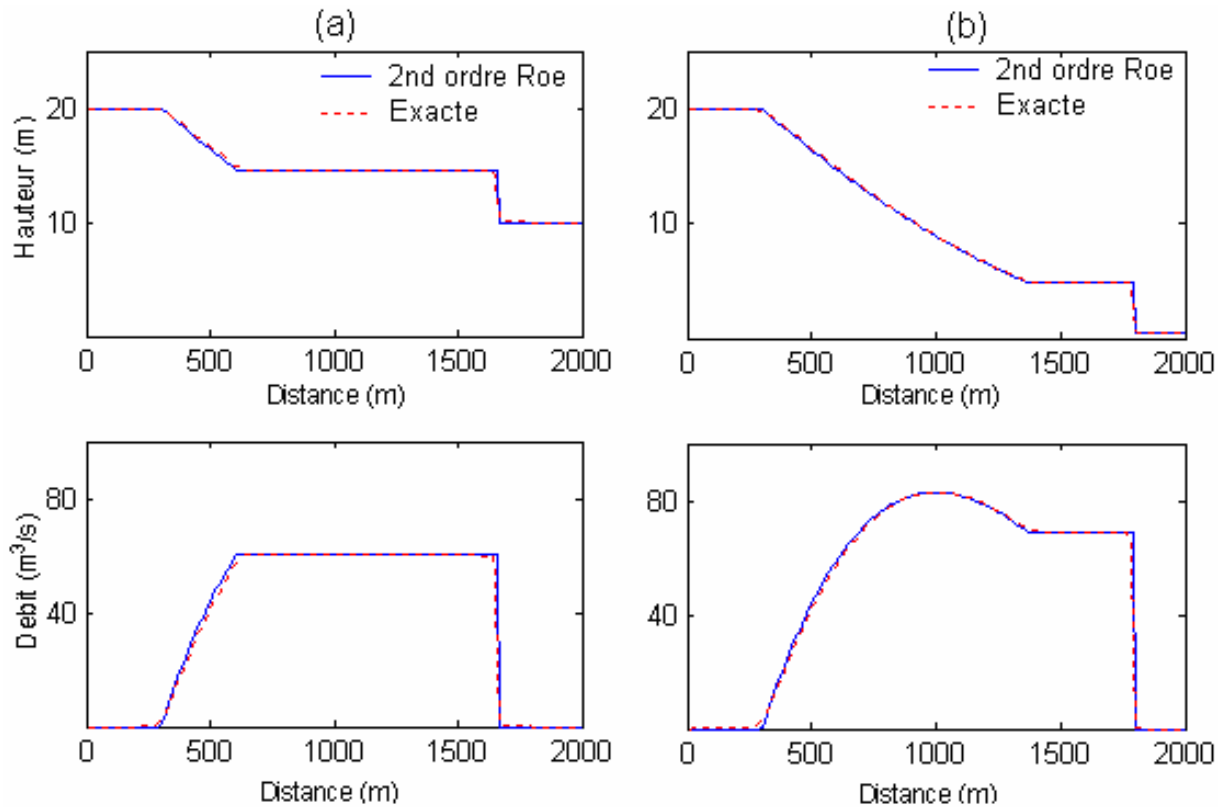


Figure 50: Schéma du second ordre avec solveur de Roe.

**b- Comparaison des résultats numériques**

La vérification des schémas numériques se fait en comparant la solution simulée numériquement et la solution analytique. Dans ce but, nous calculons la distance euclidienne entre la solution analytique et la solution numérique. Cette distance est calculée de la façon suivante :

Si  $f_0 = (f_0^1; f_0^2; \dots; f_0^N)$  représente la solution analytique dans le canal aux différents nœuds  $(1; 2; \dots; N)$ , et  $f = (f^1; f^2; \dots; f^N)$  la solution simulée, alors la distance euclidienne entre  $f$  et  $f_0$  est égale à :

$$\|f - f_0\|_2 = \left( (f_0^1 - f^1)^2 + (f_0^2 - f^2)^2 + \dots + (f_0^N - f^N)^2 \right)^{1/2} \tag{2-1}$$

Un autre paramètre intéressant à étudier afin de comparer des schémas numériques est le temps pris par le microprocesseur (CPU) pour l'exécution de ces schémas. Le Tableau 7 donne, pour le premier cas, où l'écoulement est partout fluvial dans le canal, la distance euclidienne entre la hauteur exacte et la hauteur simulée, le débit unitaire exact et le débit unitaire simulé, ainsi que le temps pris par le microprocesseur (CPU) pour la simulation sur un ordinateur de vitesse 1,6 Gigahertz et de mémoire active 256 Mbits. Il faut noter que pour un écoulement fluvial, tous les schémas ont réussi à simuler l'écoulement dans le canal malgré une certaine oscillation et diffusion dans les régions à forte discontinuité du canal pour quelques schémas. Le Tableau 8 donne des résultats similaires à ceux du Tableau 7 mais pour le second cas, où l'écoulement est transitionnel. À noter que dans ce cas, certains schémas ont

échoué à simuler l'écoulement de l'eau, et seuls les schémas qui ont réussi sont considérés dans ce tableau.

Le temps moyen de simulation dans le cas fluvial par les schémas de type explicite est 20,8 secondes, le temps minimum est de 9,7 secondes, ce qui correspond au schéma explicite avec le solveur de Lax-Friedrich, et le temps maximum est de 41,3 secondes, ce qui correspond au schéma TVD Muscl. L'erreur moyenne simulée par les schémas de type explicite (distance euclidienne) entre la hauteur numérique et la hauteur exacte est de 4,1 m, l'erreur minimale est de 2,8 m, ce qui correspond au schéma TVD Muscl et celle maximale est 5,6 m pour le schéma explicite avec Solveur de Lax-Friedrich. L'erreur moyenne simulée par les schémas de type explicite (distance euclidienne) entre le débit numérique et le débit exact est de  $53,7 \text{ m}^3/\text{s}/\text{ml}$ , l'erreur minimale est de  $38,9 \text{ m}^3/\text{s}/\text{ml}$ , ce qui correspond au schéma TVD Muscl, et maximale est  $74,6 \text{ m}^3/\text{s}/\text{ml}$  pour le schéma explicite avec Solveur de Lax-Friedrich. Le schéma implicite LCI avec un CFL égal à 1 nécessite un temps de simulation qui dépasse la moyenne de temps simulé par les schémas explicites, environ 40 secondes, et donne des erreurs importantes sur la hauteur et sur le débit simulés. Afin de réduire le temps de simulation par le schéma LCI, le nombre CFL doit être augmenté, mais l'inconvénient d'augmenter le CFL est que la diffusion numérique augmente ; en effet, en utilisant un CFL égal à 2, le temps de simulation est de 17,5 secondes, mais l'erreur sur la hauteur passe à 8,3 m et celle sur le débit à  $107,4 \text{ m}^3/\text{s}/\text{ml}$ . Avec un CFL égal à 4, le temps de simulation est de 8,3 secondes, mais l'erreur sur la hauteur passe à 10,5 m et celle sur le débit à  $133,7 \text{ m}^3/\text{s}/\text{ml}$ .

Schémas numériques	Erreurs hauteur (m) $\ h - h_0\ _2$	Erreurs débit ( $\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$ ) $\ q - q_0\ _2$	Temps CPU en secondes
MacCormack classique	5,2768	70,545	12,718
Lax Wendroff classique	3,8104	51,327	20,439
Solveur de Lax-Friedrich	5,6239	74,556	9,704
Solveur de Roe	5,4191	72,939	16,3940
Roe avec correction entropique	3,5152	45,973	18,417
Solveur de HLLE	3,6332	47,133	16,894
TVD Symmetric	3,3719	44,925	23,143
TVD Upwind	3,1195	41,909	24,8850
TVD MacCormack	4,9087	65,892	20,75
TVD Lax wendroff	3,5152	45,973	17,676
TVD MUSCL	2,8046	38,878	41,26
LCI avec CFL=1	6,9834	90,893	36,9830
LCI avec CFL=2	8,3135	107,37	17,5050
LCI avec CFL=4	10,471	133,65	8,332
LCI avec CFL=10	15,33	192,69	3,595
RKDG LLF	5,0676	62,904	18,7670
RKDG Roe	3,3804	45,182	25,817
RKDG HLL	3,3136	44,596	24,5550

Tableau 7 : Temps CPU et distance euclidienne entre la solution analytique et la solution numérique dans le cas où l'écoulement est partout fluvial dans le canal.

Schémas numériques	Erreurs hauteur $\ h - h_0\ _2$	Erreurs débit $\ q - q_0\ _2$	Temps CPU en secondes
Solveur de Lax-Friedrich	9,0645	136,75	12,128
Solveur de Roe	5,9547	95,223	21,18
Roe avec correction entropique	4,3349	65,337	23,604
solveur de HLLE	5,1733	78,747	21,551
TVD Symmetric	3,5017	57,104	28,7010
TVD Upwind	2,4643	38,798	32,5870
TVD MacCormack	3,6517	59,815	27,1890
TVD Lax wendroff	4,4889	64,305	22,722
TVD MUSCL	2,5894	38,822	50,7020
LCI avec CFL=1	5,7529	90,043	41,97
LCI avec CFL=2	7,0054	115,29	19,9690
RKDG_LLF	8,2525	118,65	25,266
RKDG_Roe	3,5497	58,513	33,398
RKDG_HLL	2,7592	45,152	31,656

Tableau 8 : Temps CPU et distance euclidienne entre la solution analytique et la solution numérique dans le cas où l'écoulement est transitionnel dans le canal.

**Ecart quadratique suivant la hauteur**

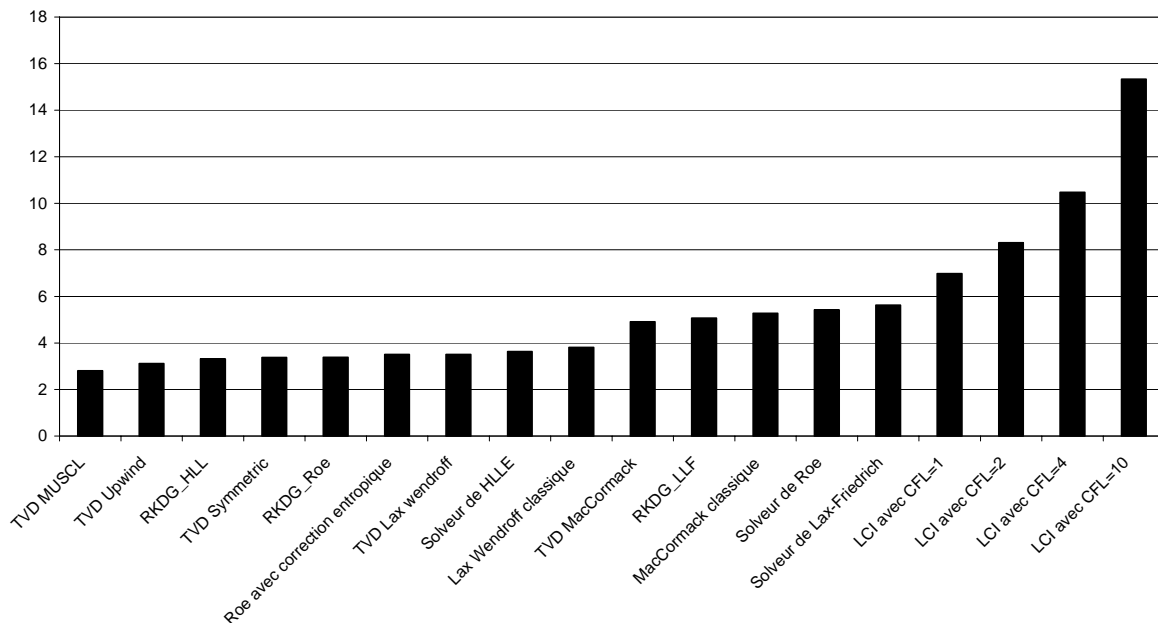


Figure 51 : Comparaison des résultats simulés à l'aide des différents schémas numériques.

Cas test 1, écoulement fluvial.

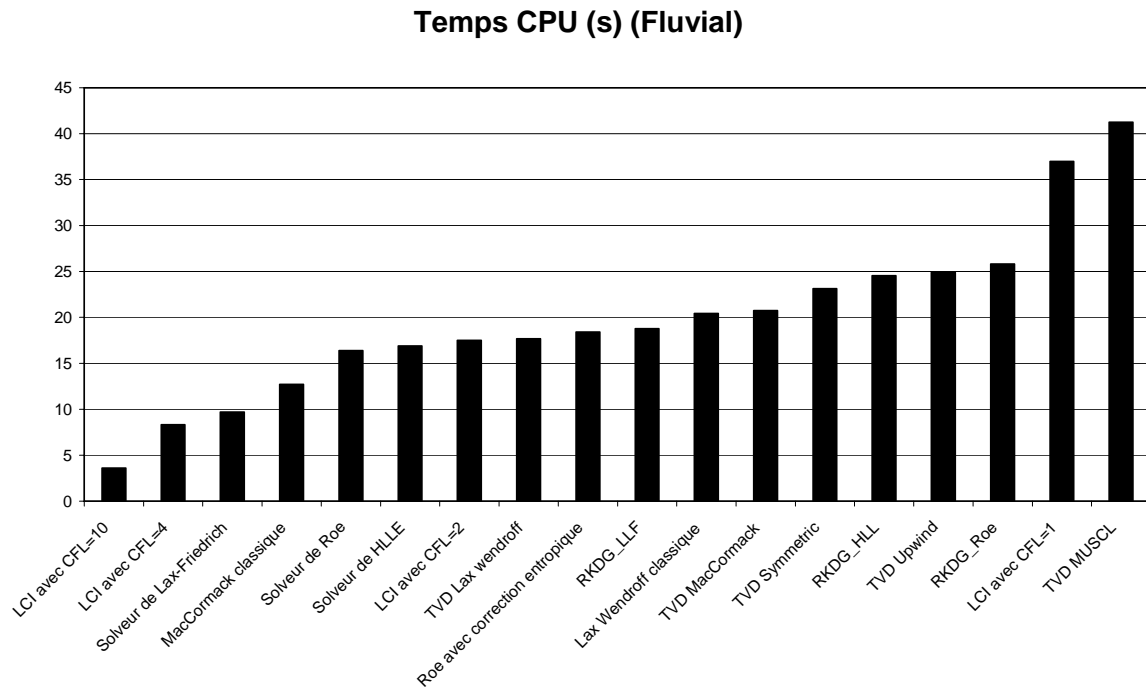


Figure 52 : Cas test 1, écoulement fluvial.

Le temps moyen de simulation dans le cas transitionnel par les schémas de type explicite est de 26,6 secondes, le temps minimum est de 12,1 secondes pour le schéma explicite avec le solveur de Lax-Friedrich, et le temps maximum est de 50,7 secondes pour le schéma TVD Muscl. L'erreur moyenne simulée par les schémas de type explicite (distance euclidienne) entre la hauteur numérique et la hauteur exacte est de 4,6 m, l'erreur minimale est de 2,46 m pour le schéma TVD upwind et celle maximale est de 9,1 m pour le schéma explicite avec Solveur de Lax-Friedrich. L'erreur moyenne simulée par les schémas de type explicite (distance euclidienne) entre le débit numérique et le débit exact est de  $71,4 \text{ m}^3/\text{s}/\text{ml}$ , l'erreur minimale est de  $38,8 \text{ m}^3/\text{s}/\text{ml}$  pour le schéma TVD upwind, et maximale est de  $136,75 \text{ m}^3/\text{s}/\text{ml}$  pour le schéma explicite avec Solveur de Lax-Friedrich. Le schéma implicite LCI avec un CFL égal à 1, nécessite un temps de simulation qui dépasse la moyenne de temps simulé par les schémas explicites, environ 42 secondes, et donne des erreurs importantes sur la hauteur et sur le débit simulés. En utilisant un CFL égal à 2, le temps de simulation sera de 20 secondes, mais l'erreur sur la hauteur passe à 7 m et sur le débit à  $115,3 \text{ m}^3/\text{s}/\text{ml}$ .

### 1.2. Ressaut hydraulique dans un canal rectangulaire : cas test 2

La discrétisation se fait en partageant le canal en 100 nœuds de calcul, ce qui correspond à un pas d'espace de 10 m. Nous illustrons dans cette simulation la hauteur d'eau et le débit qui correspondent à la solution stationnaire du ressaut, et par conséquent, la solution du problème est la solution à laquelle la simulation numérique converge. Dans cet exemple, nous considérons une tolérance d'erreur égale à  $10^{-8}$ , et la simulation s'arrête lorsque l'erreur entre deux itérations successives devient plus petite que cette tolérance. Les conditions initiales de

ce problème sont un débit égal à  $20 \text{ m}^3/\text{s}$  dans le canal et une hauteur d'eau constante égale à la hauteur normale de l'écoulement.

Nous avons choisi la discrétisation centrée (pointwise) du terme source.

**a- Résultats de simulation numérique et interprétation**

**a-1. Le schéma classique de MacCormack**

La Figure 54 montre les résultats de simulation numérique avec le schéma classique de MacCormack. On peut noter que la hauteur simulée suit bien la solution analytique malgré une petite diffusion au voisinage de la discontinuité, mais le débit simulé présente des oscillations numériques au voisinage du ressaut hydraulique.

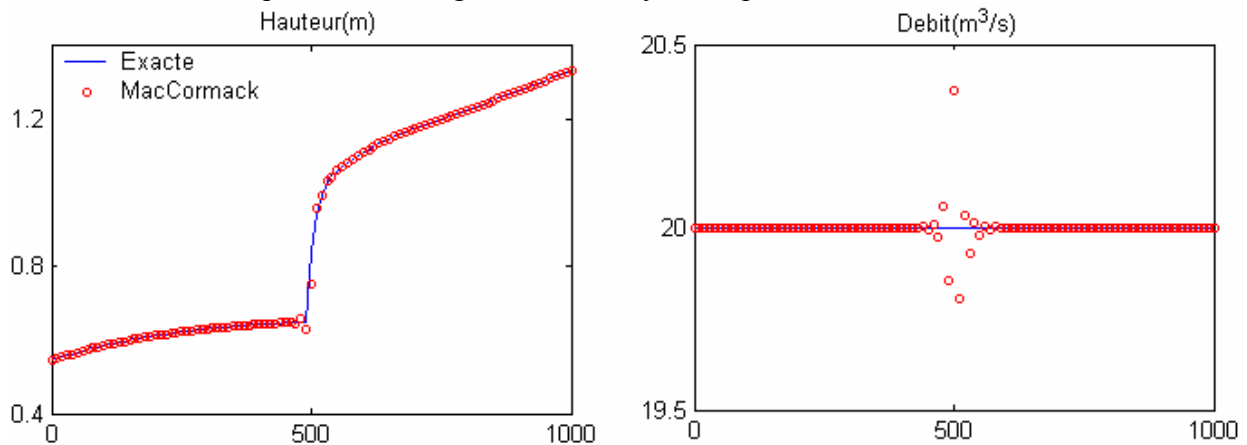


Figure 53: Schéma de MacCormack classique.

**a-2. Les solveurs de Riemann : Lax-Friedrich - Roe - Roe avec correction entropique – HLLE**

Les Figure 54, Figure 55, Figure 56 et Figure 57 montrent, respectivement, les résultats de simulations numériques avec les solveurs de : Lax-Friedrich - Roe - Roe avec correction entropique et HLLE. La solution numérique du solveur Lax-Friedrich diffuse beaucoup au voisinage du ressaut. Le solveur Roe capte bien la hauteur d'eau mais le débit n'est pas correctement simulé. Les solutions numériques obtenues à l'aide des solveurs de Roe avec correction entropique et le solveur HLLE sont très satisfaisantes puisque la hauteur d'eau simulée et le débit sont en accord avec la solution analytique dans tout le canal, sauf dans le nœud où se localise le ressaut hydraulique.



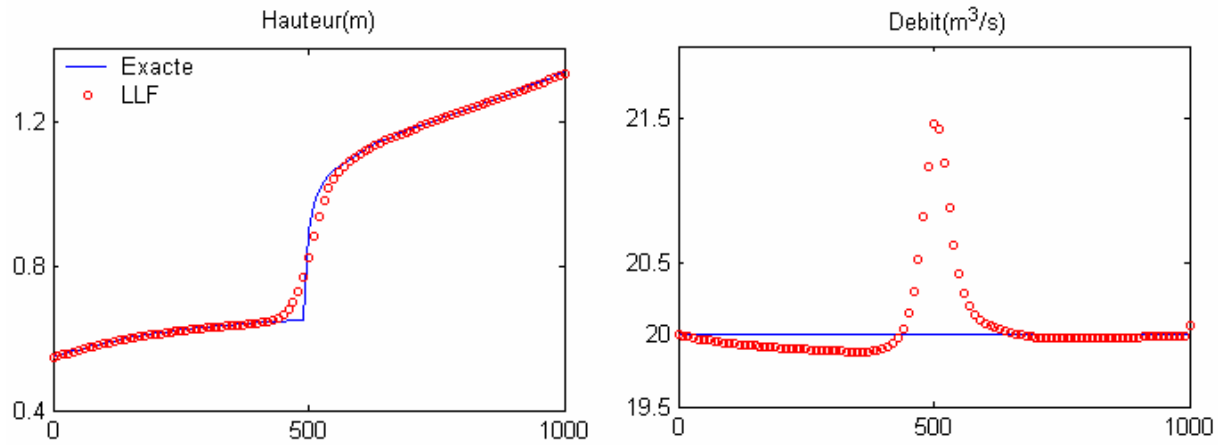


Figure 54 : Solvateur de Lax-Friedrich.

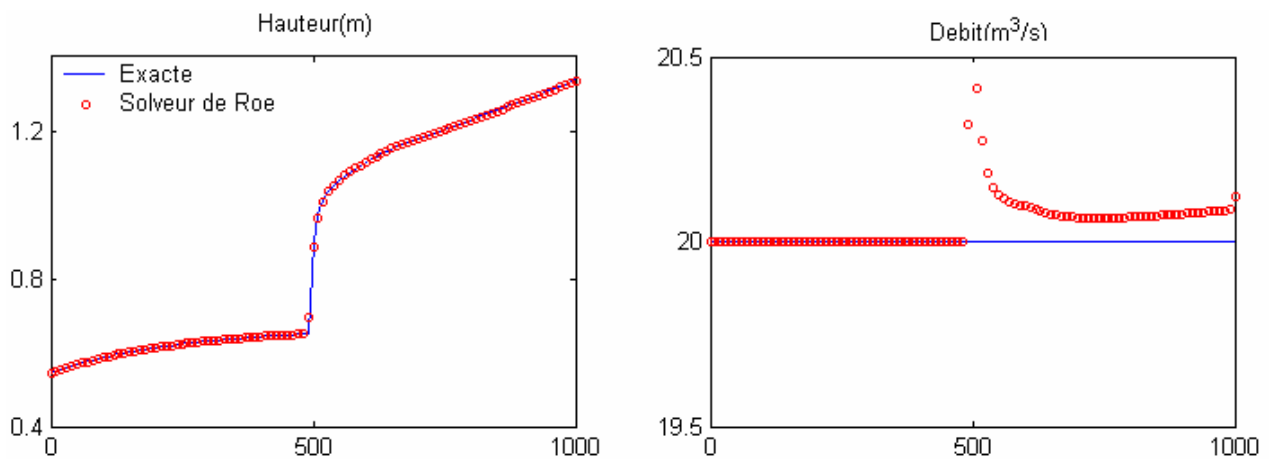


Figure 55 : Solvateur de Roe.

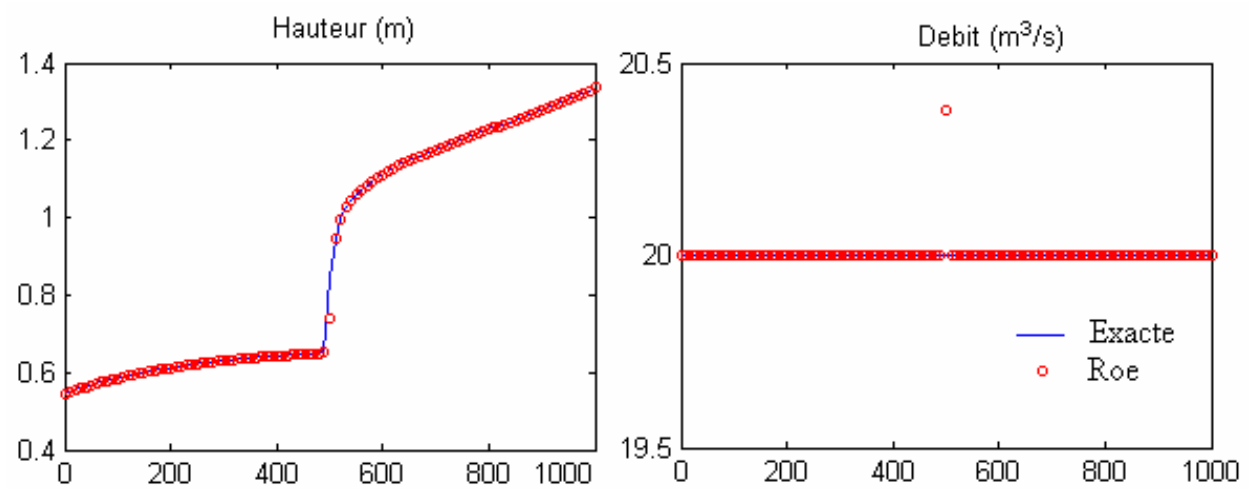


Figure 56 : Solvateur de Roe avec correction entropique.

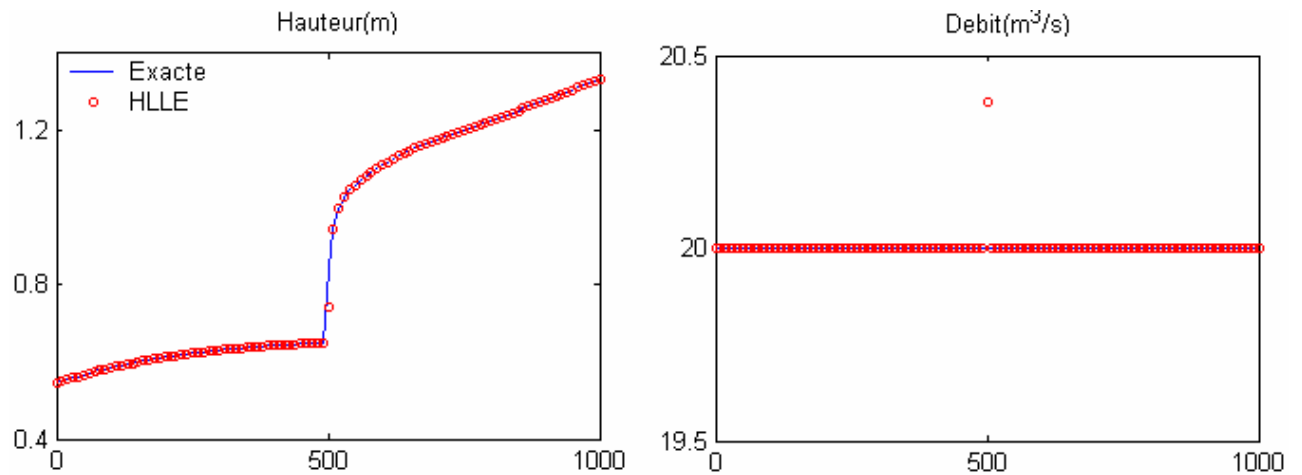


Figure 57 : Solvateur de HLLE.

**a-3. Les schémas TVD : symétrique - upwind - MacCormack - Muscl.**

Les Figure 58, Figure 59, Figure 60 et Figure 61 montrent, respectivement, les résultats de simulations numériques avec les schémas : TVD symétrique, TVD upwind, TVD MacCormack et TVD Muscl. Dans tous ces résultats, la hauteur d'eau est bien captée et suit bien la solution analytique, mais le débit diffuse au voisinage du ressaut.

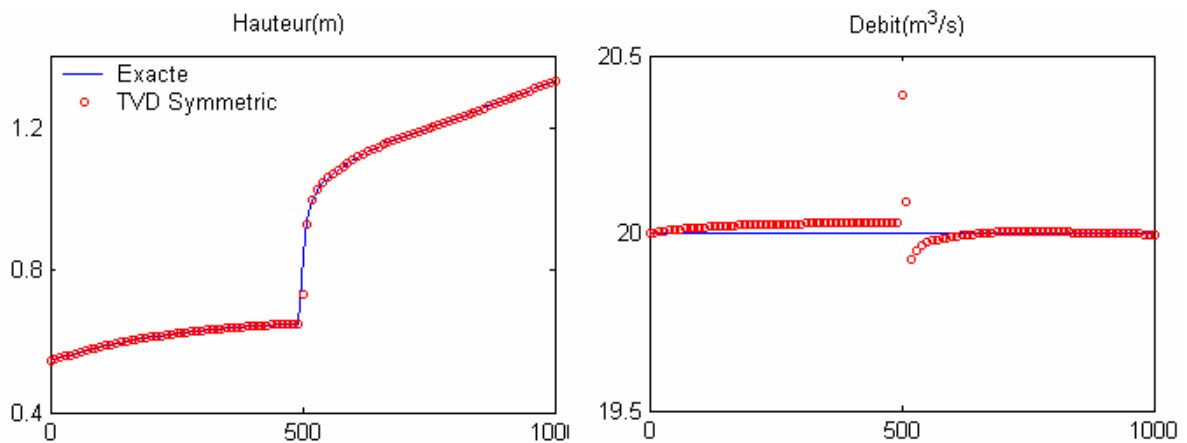


Figure 58: Le schéma TVD symétrique.

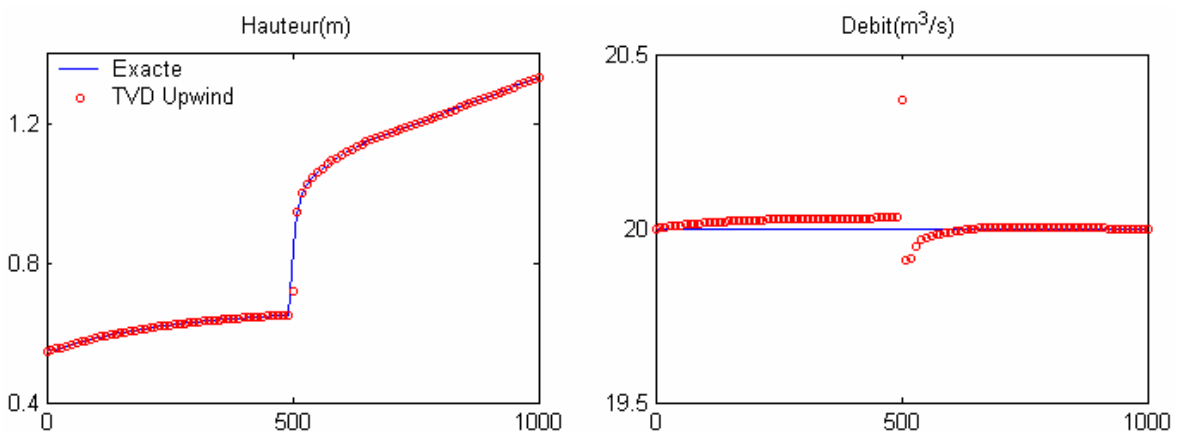


Figure 59 : Le schéma TVD upwind.

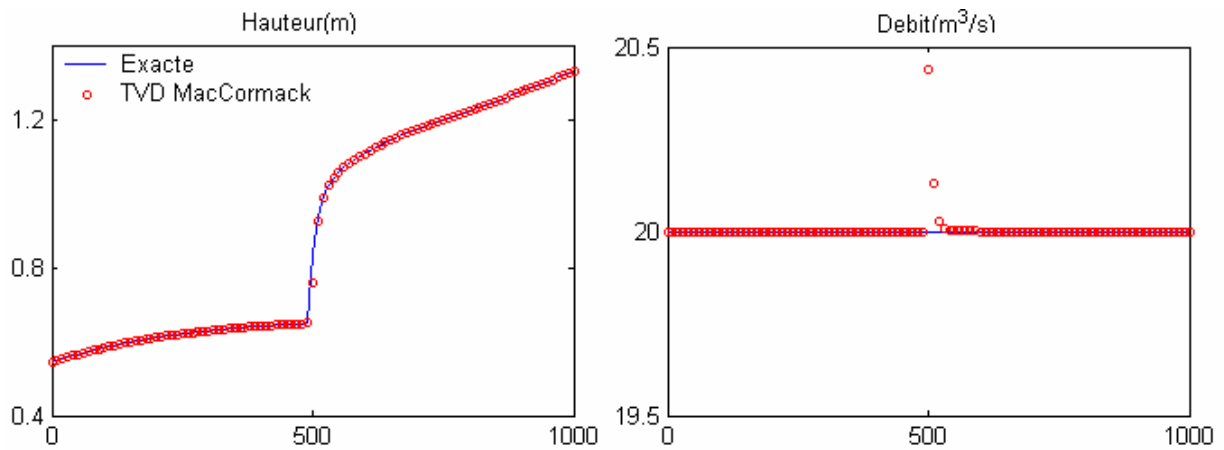


Figure 60 : Le schéma TVD de MacCormack.

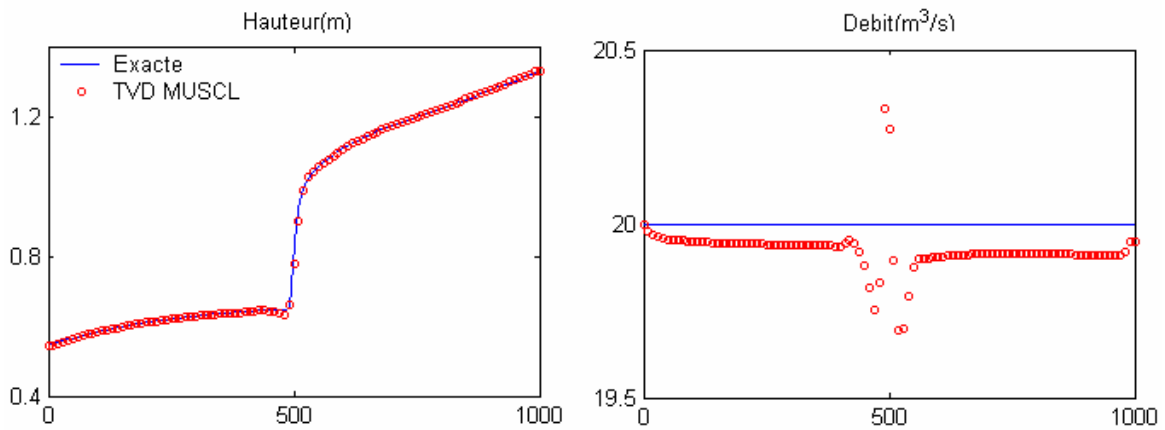


Figure 61 : Le Schéma TVD MUSCL.

**a-4. Le schéma implicite LCI (Linearised Conservative Implicit Scheme)**

Les Figure 62, Figure 63 et Figure 64 montrent les résultats de simulations numériques avec le schéma implicite LCI, et ceci pour trois nombres de CFL 1, 10 et 100. On peut noter que la solution simulée est indépendante du nombre CFL. Dans tous ces résultats, la hauteur d'eau et le débit sont bien simulés dans tout le canal sauf au nœud où se localise le ressaut.

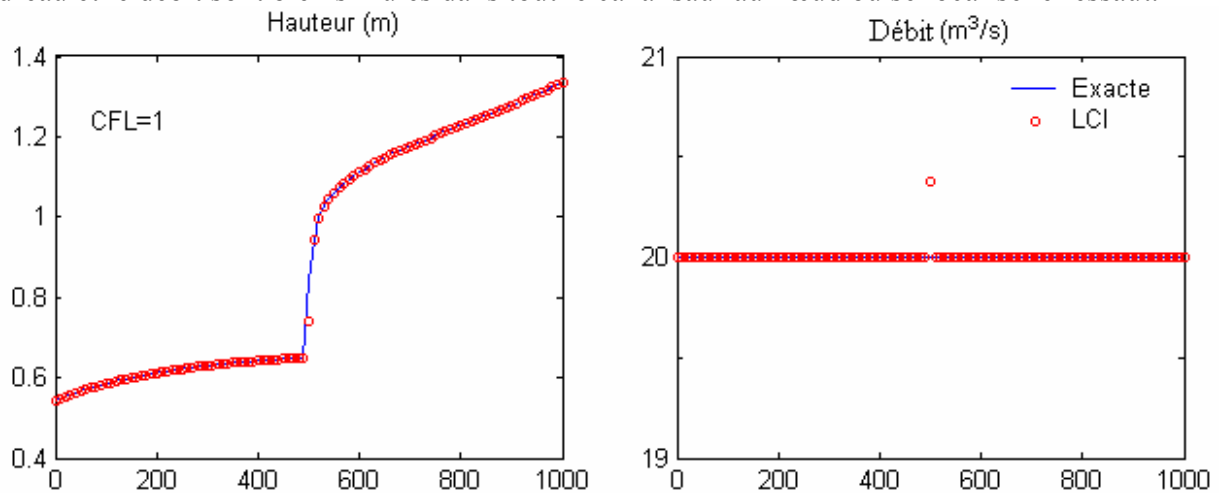


Figure 62 : Le schéma LCI avec CFL=1.

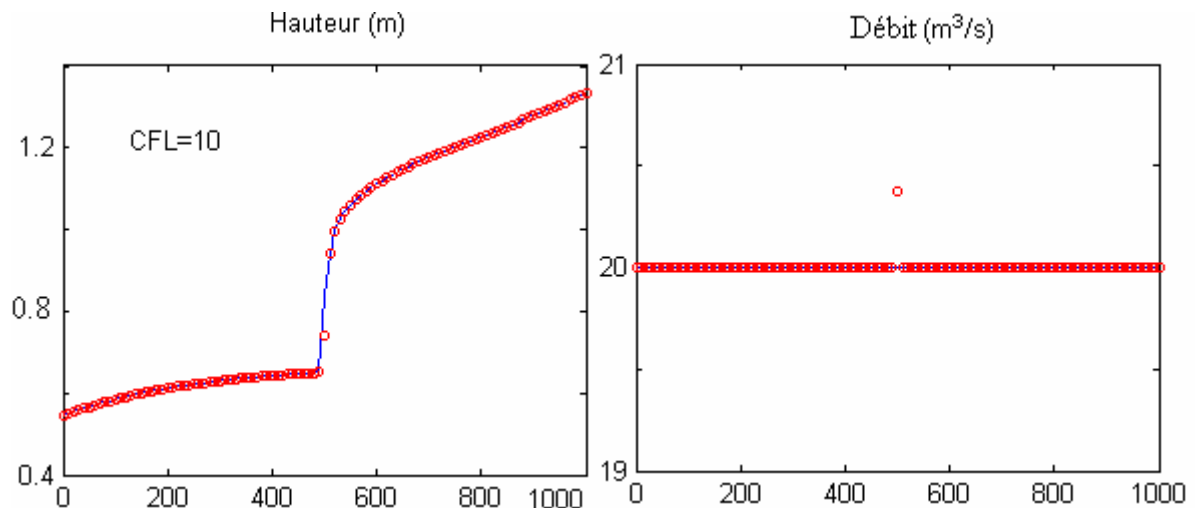


Figure 63 : Le schéma LCI avec CFL=10.

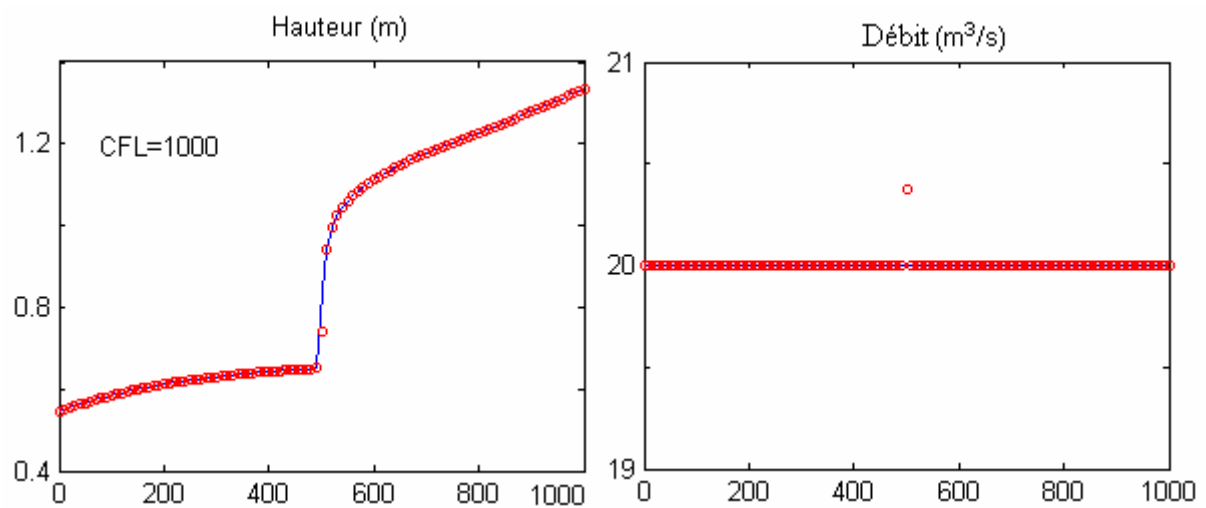


Figure 64 : Le schéma LCI avec CFL=100.

**a-5. Les éléments finis discontinus de Galerkin, schéma du second ordre avec solveur de : LLF – HLLÉ et Roe**

Les Figure 65, Figure 66 et Figure 67 montrent les résultats de simulations numériques avec les éléments finis discontinus de Galerkin. On peut noter que la hauteur d'eau simulée suit bien la solution analytique et ceci quel que soit le solveur du flux, mais pour le débit, une diffusion se trouve au voisinage du ressaut.

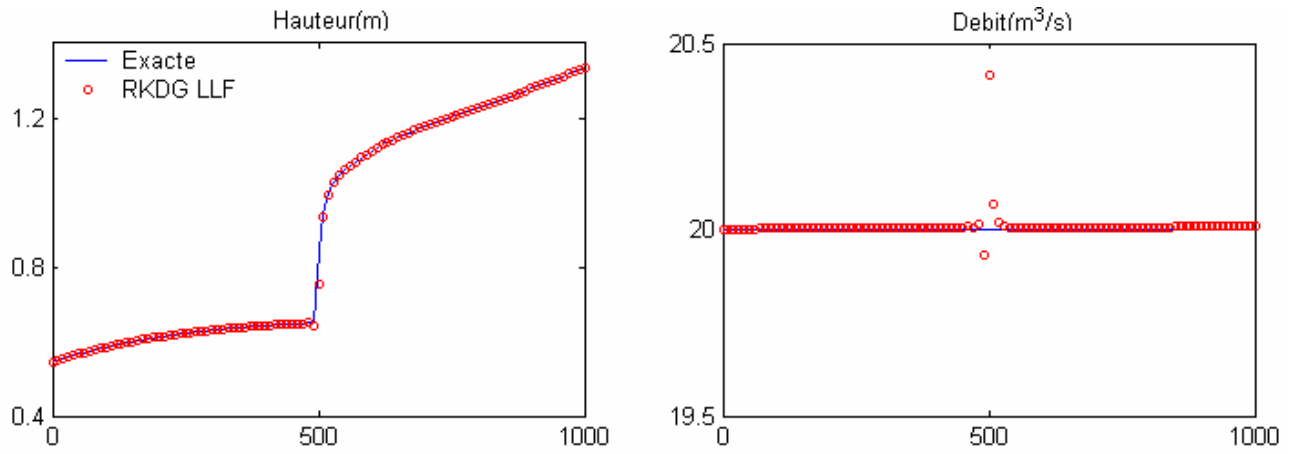


Figure 65 : Schéma du second ordre avec solveur de LLF.

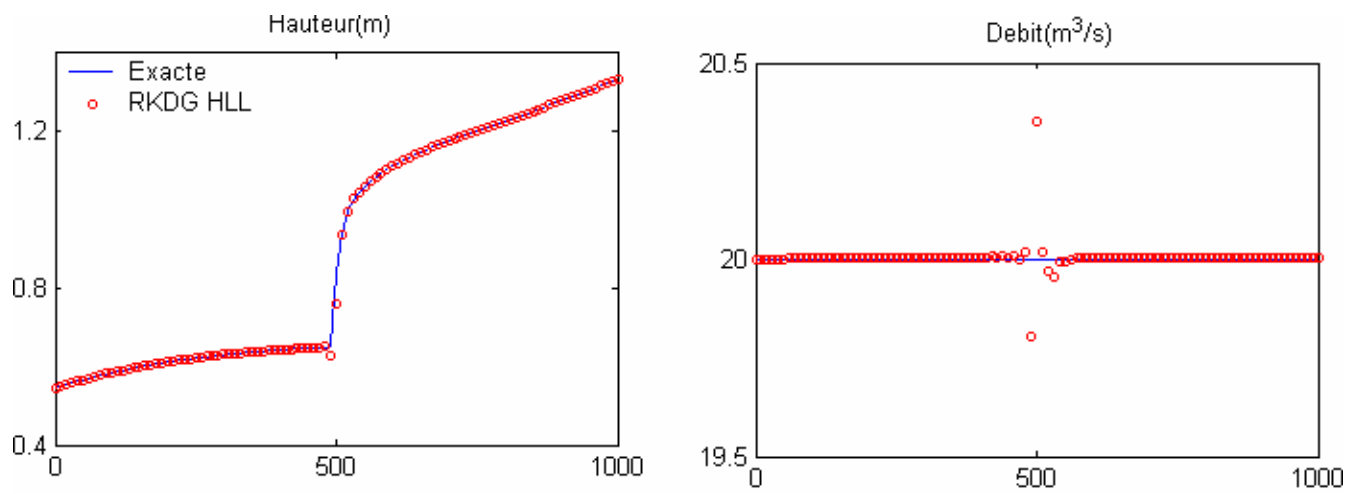


Figure 66 : Schéma du second ordre avec solveur de HLL.

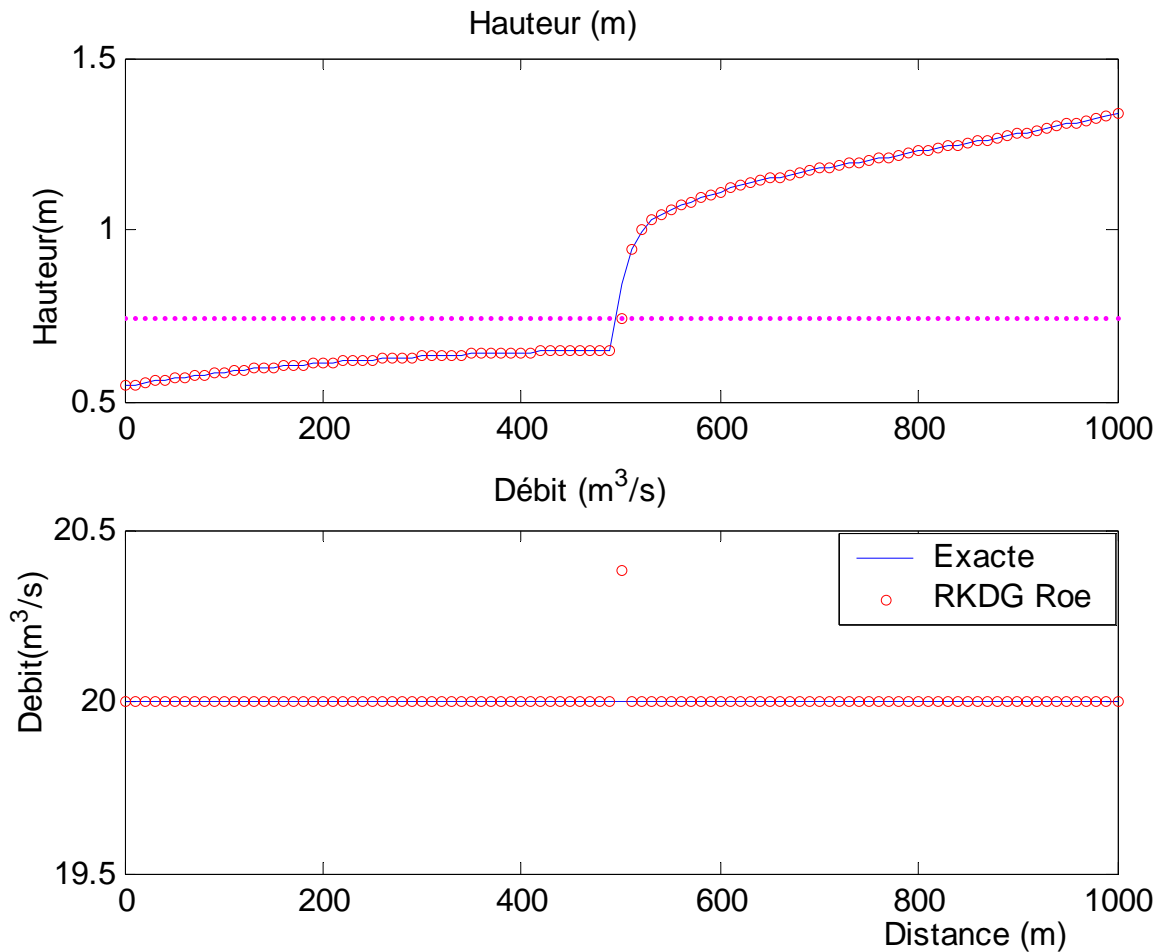


Figure 67 : Schéma du second ordre avec solveur de Roe.

**b- Comparaison des résultats numériques**

La validation des schémas numériques se fait en comparant la solution simulée numériquement et la solution analytique. Dans ce but, nous calculons la distance euclidienne entre la solution analytique et la solution numérique. Le temps pris par le microprocesseur (CPU) pour résoudre les équations est aussi étudié dans ce paragraphe. Le Tableau 9 donne la distance euclidienne entre la hauteur exacte et la hauteur simulée, le débit exact et le débit simulé, ainsi que le temps pris par le microprocesseur (CPU). On peut noter, que le schéma implicite est très convenable pour ce type de problème hydraulique dû au temps de convergence optimal, et on relève une solution numérique excellente par comparaison à la solution analytique.

Schémas numériques	Erreurs hauteur $\ h - h_0\ _2$	Erreurs débit $\ q - q_0\ _2$	Temps CPU en secondes
MacCormack classique	0,094583	0,45986	139,5300
Solveur de Lax-Friedrich	0,2247	3,1346	202,8510
Solveur de Roe	0,04952	1,0106	170,9750
Roe avec correction entropique	0,10028	0,3792	193,8190
Solveur de HLLE	0,10028	0,3792	261,4760
TVD Symmetric	0,10774	0,44631	209,6410
TVD Upwind	0,11954	0,429	207,3840
TVD MacCormack	0,080892	0,45639	187,4700
TVD MUSCL	0,078247	1,031	533,5670
LCI avec CFL = 1	0,12369	0,41187	270,4280
LCI avec CFL = 10	0,12369	0,41186	30,4840
LCI avec CFL = 100	0,12369	0,41187	7,4700
RKDG_LLF	0,090049	0,43162	185,6770
RKDG_Roe	0,10028	0,3792	193,8190
RKDG_HLL	0,086049	0,41165	221,3280

Tableau 9 : Temps CPU et distance euclidienne entre la solution analytique et la solution numérique du problème de ressaut.

**Ecart quadrique sur la hauteur (transcritique)**

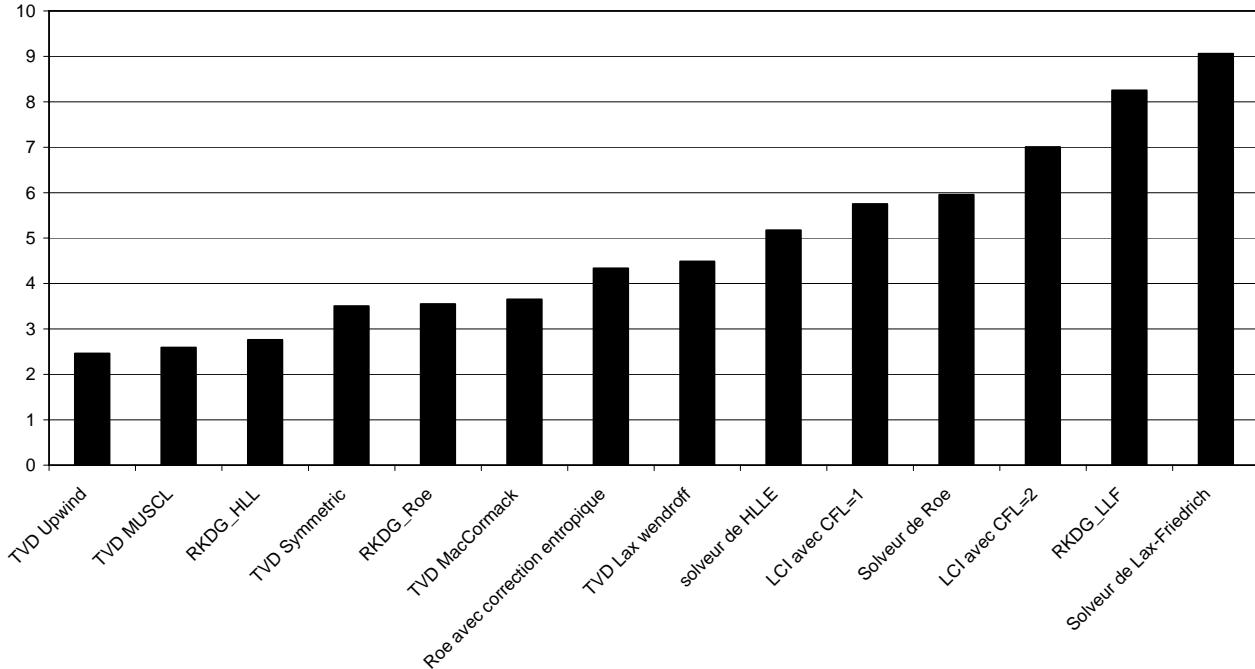


Figure 68 : Cas test 1, écoulement transcritique.

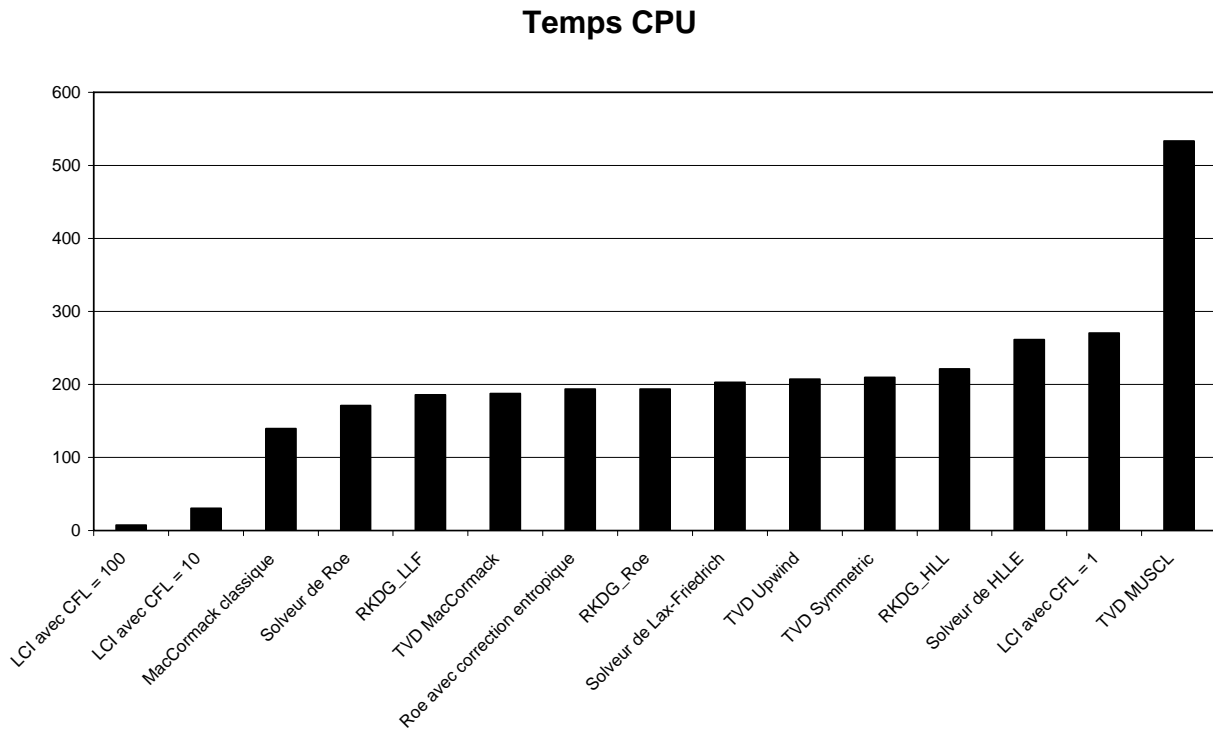


Figure 69 : Cas test 2. Ressaut hydraulique dans un canal rectangulaire.

Le temps moyen de simulation du problème de ressaut par les schémas de type explicite est de 225 secondes, le temps minimum est de 139,5 secondes, ce qui correspond au schéma classique de MacCormack, et le temps maximum est de 533,6 secondes, ce qui correspond au schéma TVD Muscl.

### 1.3. Conclusion des deux tests précédents

La confrontation des résultats simulés avec les différents schémas numériques sur deux problèmes hydrauliques de type stationnaire et transitoire a donné les conclusions suivantes :

1. Les schémas classiques qui ne possèdent pas le caractère TVD peuvent simuler des écoulements stationnaires et transitoires dans le cas où l'écoulement possède un seul régime : fluvial ou torrentiel. Mais dans le cas où l'écoulement est transitionnel dans le canal, c'est-à-dire, lorsqu'il y a passage du régime torrentiel au régime fluvial ou inversement, ces schémas échouent complètement et ne peuvent pas être utilisés. En effet, dans la simulation du premier cas où l'écoulement est partout fluvial dans le canal, les schémas ont donné des résultats satisfaisants et ceci pour la hauteur et le débit simulés. Dans le second cas, où l'écoulement est transitionnel dans le canal, ces schémas ne captent ni la hauteur d'eau ni le débit. Dans la simulation du problème stationnaire du ressaut hydraulique, le schéma de Lax-Wendroff échoue, car c'est un schéma classique de premier ordre, mais le schéma de MacCormack réussit à simuler la hauteur d'eau mais quelques oscillations apparaissent pour débit. On peut noter que le schéma de MacCormack est un schéma de second ordre mais ne possède pas le caractère TVD.
2. Le schéma numérique de type implicite est un bon schéma pour la simulation des problèmes hydrauliques de type stationnaire, mais n'est pas convenable pour les



problèmes transitoires. En fait, l'avantage d'un schéma implicite est qu'il est stable indépendamment de la condition CFL, ce qui n'est pas le cas pour un schéma explicite. Par conséquent, le pas de temps est choisi arbitrairement, mais ne peut pas dépasser une certaine limite qui est déterminée d'après les simulations. Nous remarquons que la solution numérique simulée s'éloigne de la solution analytique lorsque le pas de temps augmente. Si le pas de temps choisi est le même que pour un schéma explicite, la solution simulée présente toujours des écarts importants par rapport à la solution analytique et un temps de simulation plus grand que celui obtenu avec un schéma explicite. Dans la simulation du problème stationnaire du ressaut hydraulique avec le schéma implicite LCI, nous obtenons une solution numérique qui suit parfaitement la solution analytique, et ceci quel que soit le pas de temps choisi. Le temps de simulation avec ce schéma est très remarquable puisqu'il passe d'un temps moyen de simulation de 225 secondes pour un schéma explicite à 7,5 secondes pour le schéma LCI. Ainsi l'erreur sur la hauteur d'eau et le débit simulés par ce schéma est excellente en comparaison avec les schémas explicites.

3. Les schémas explicites de type TVD, Lax-Wendroff, MacCormack, symétrique, upwind et Muscl donnent des résultats remarquables dans la simulation de la hauteur d'eau du problème de ressaut, mais des diffusions apparaissent dans la simulation du débit. Nous remarquons que le débit simulé avec ces schémas n'est pas bien capté au voisinage du ressaut, et ceci est dû aux limiteurs utilisés pour les flux et négligés pour le terme source. Les résultats obtenus par ces schémas sont très satisfaisants et sont meilleurs dans le cas transitionnel que dans le cas fluvial, puisque les limiteurs utilisés dans ces schémas servent à capter les chocs et les discontinuités qui se trouvent dans le cas transitionnel. Dans le cas fluvial, ces discontinuités sont faibles et les limiteurs sont donc inutiles et rendent le schéma moins performant. Les deux schémas TVD upwind et TVD Muscl sont les meilleurs parmi les schémas TVD, mais le schéma TVD MacCormack est le meilleur pour la simulation du problème de ressaut.
4. Les éléments finis discontinus de Galerkin donnent des résultats très remarquables dans la simulation de la hauteur d'eau du problème de ressaut, mais de petites diffusions apparaissent dans la simulation du débit avec les solveurs de LLF et de HLLC, tandis que le débit est bien capté avec le solveur de Roe. Les résultats obtenus par ces schémas pour l'ouverture rapide de la vanne sont excellents avec les solveurs de Roe et de HLLC mais médiocres avec le solveur LLF.

En conclusion finale, nous proposons les recommandations suivantes :

- a. Utiliser une discrétisation temporelle implicite pour simuler un problème stationnaire.
- b. Utiliser une discrétisation temporelle explicite pour simuler un problème transitoire.
- c. Éviter l'utilisation des schémas classiques, en général, sauf si l'écoulement à simuler ne présente pas de discontinuités.
- d. Utiliser le solveur de Roe pour calculer les flux.
- e. Utiliser les schémas TVD pour simuler des écoulements à fortes discontinuités, ces schémas ne sont pas pertinents pour les écoulements ne présentant pas de discontinuités.
- f. Les éléments finis discontinus de Galerkin donnent des résultats similaires au schéma de Roe dans le cas d'un écoulement à un seul régime, et aux schémas TVD pour les écoulements transitionnels, mais leur temps de simulation est plus important que les autres schémas, donc ils peuvent être remplacés par les schémas de type TVD pour les écoulements transitionnels et le schéma de Roe pour les écoulements à un seul régime.

Les schémas qui seront comparés dans la suite des tests sont :

- le schéma TVD upwind, TVD Muscl, TVD Mac Cormack,
- le solveur de Roe,
- le schéma aux éléments finis discontinus avec solveur HLLE.

## 2. Comparaison de schémas numériques sur les cas tests 10, 11, 12, 13 et 14

### 2.1. Ressauts hydrauliques dans un canal trapézoïdal à pente variée : cas test 10

Pour les conditions aux limites, nous imposons un débit de  $10\text{ m}^3/\text{s}$  à l'amont, la hauteur amont et les variables de l'écoulement à l'aval se calculent par la méthode de l'extrapolation. Dans la simulation numérique de ce problème avec les schémas de Roe, HLLE, TVD MacCormack et TVD Muscl, nous avons décomposé le canal en 169 nœuds de calcul, ce qui correspond à un pas d'espace de 1 m. Le calcul du pas de temps a été considéré en respectant la condition CFL, avec un nombre de CFL égal à 0,95 à l'exception du schéma de Muscl où le CFL est égal à 0,6 pour garantir la convergence.

Les Figure 70 et Figure 71 montrent les résultats de simulations numériques respectivement de la hauteur d'eau et du débit dans le canal. Il est remarquable que les hauteurs simulées par les différents schémas soient toutes similaires et captent bien les deux ressauts hydrauliques. Par contre, pour le débit, c'est le schéma de MacCormack qui donne le meilleur débit simulé par rapport au débit constant. Pour les autres schémas, des diffusions numériques apparaissent au voisinage des ressauts hydrauliques.

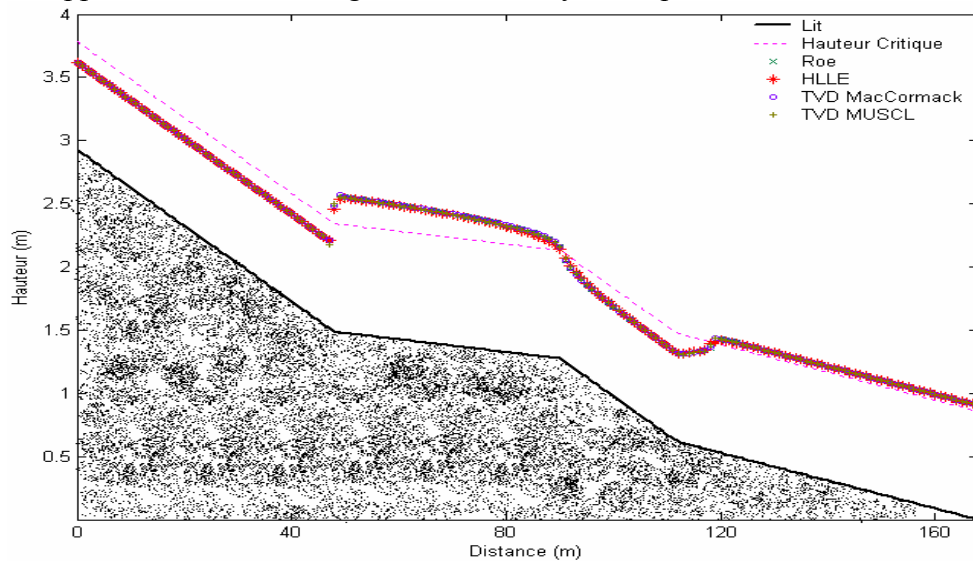


Figure 70 : La hauteur d'eau des ressauts hydrauliques dans un canal trapézoïdal.

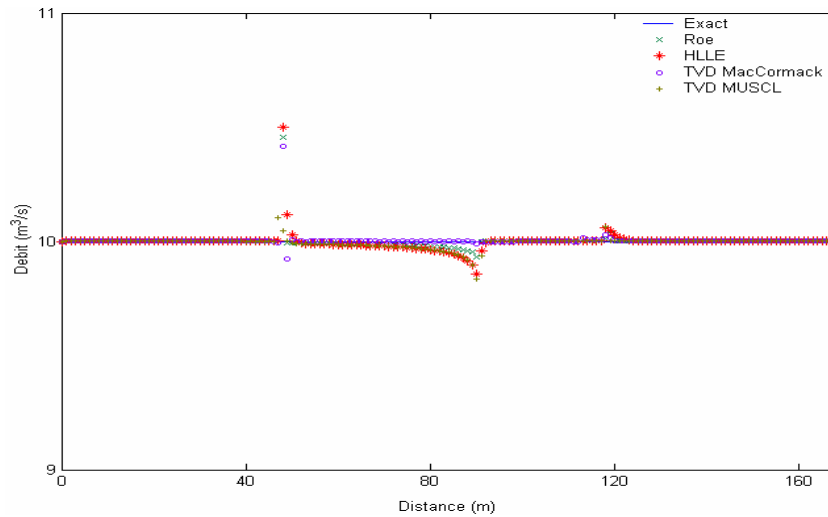


Figure 71 : Le débit des ressauts hydrauliques dans un canal trapézoïdal.

**2.2. Ecoulement fluvial dans un canal non prismatique à section trapézoïdale : cas test 11**

Dans la simulation numérique de ce problème avec les schémas de Roe et de HLLE, nous avons décomposé le canal en 401 nœuds de calcul, ce qui correspond à un pas d'espace de 4 m. Le calcul du pas de temps a été considéré en respectant la condition CFL, avec un nombre de CFL égal à 1.

La Figure 72 montre les résultats de simulations numériques de la hauteur d'eau et du débit. La hauteur simulée par les deux schémas s'accorde bien avec la solution analytique. Une légère déviation dans le débit numérique simulé est due à la condition d'entropie qui n'est pas vérifiée lorsque le système de Barré de Saint-Venant est écrit avec les variables A et Q.

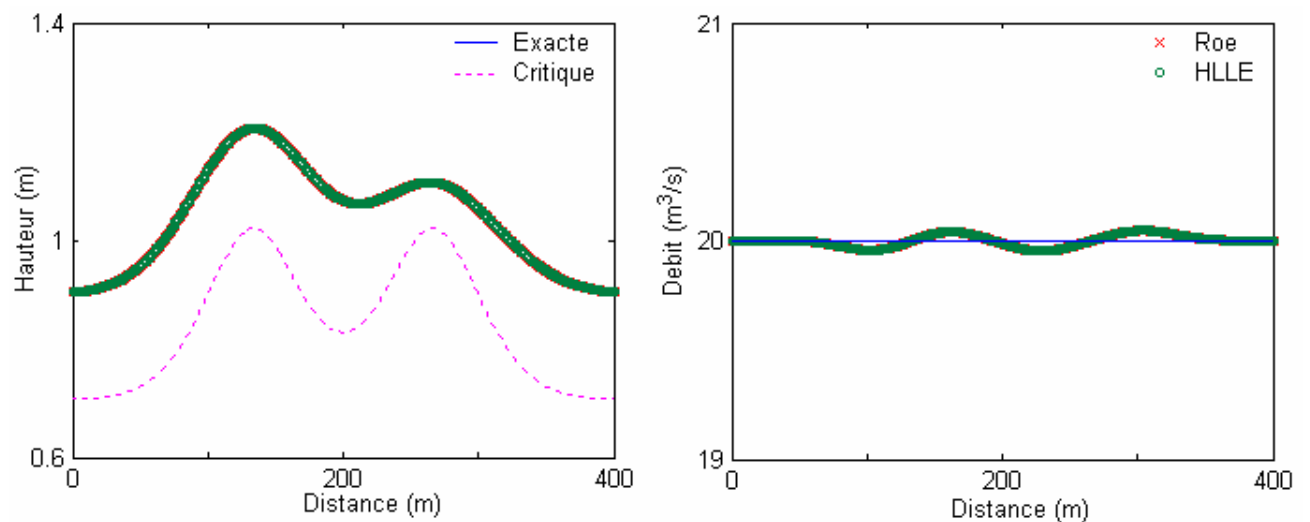


Figure 72 : Ecoulement fluvial dans un canal trapézoïdal.

La Figure 73 montre l'écoulement dans tout le canal avec son lit.

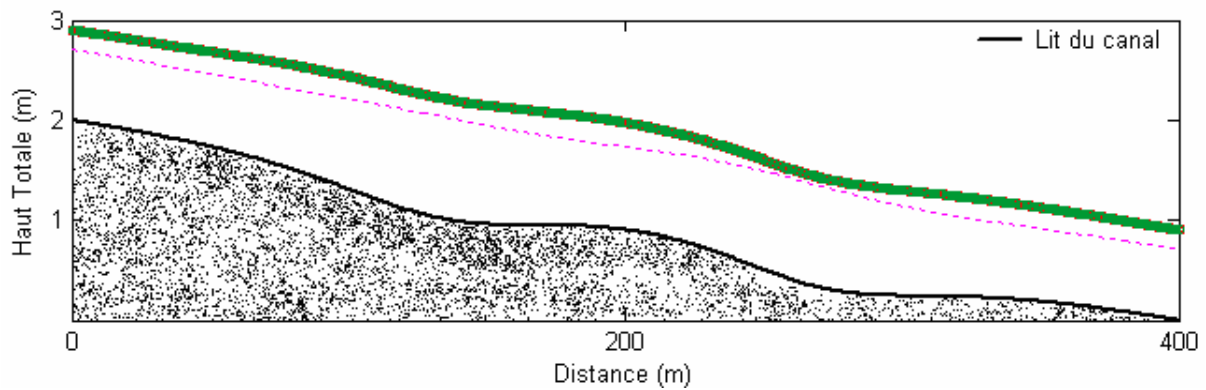


Figure 73 : Forme de l'écoulement fluvial dans un canal trapézoïdal

### 2.3. Ouverture brutale d'une vanne dans un canal à pente nulle et avec frottement : cas test 12

Dans la simulation numérique de ce problème avec le schéma de Roe, nous avons décomposé le canal en 152 nœuds de calcul, ce qui correspond à un pas  $\Delta x = 25$  cm. Le calcul du pas de temps a été considéré en respectant la condition CFL, avec un nombre de CFL égal à 0,8. Dans toutes les simulations, nous présentons l'évolution temporelle de la hauteur d'eau aux points G10, G11, G13 et G20.

Trois types de conditions aux limites aval :

- le premier cas est une sortie libre à l'aval (Figure 74),

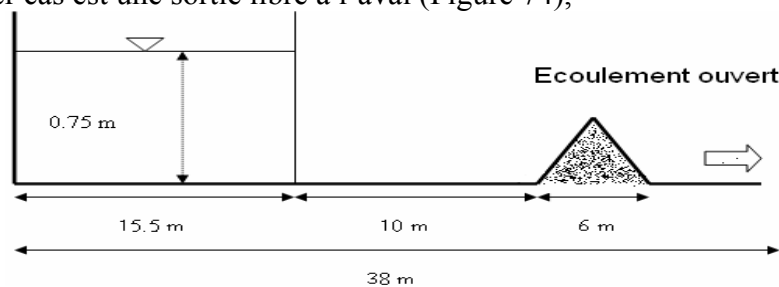


Figure 74 : Sortie libre à l'aval.

Dans ce cas, le lit est initialement sec à l'aval, et puisque la sortie est libre à l'aval, nous imposons donc à l'aval du canal la hauteur critique.

- le second cas consiste en un écoulement au-dessus d'un seuil à l'aval (Figure 75)

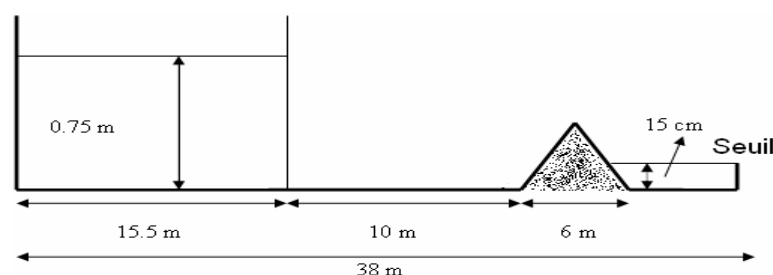


Figure 75 : Présence d'un seuil à l'aval.

Dans ce cas, un seuil se trouve à l'aval du canal, la partie du canal situé après la vanne est supposée initialement remplie d'eau d'une hauteur de 0,15 m, et dans ce cas nous décrivons

l'équation du seuil définissant la présence du seuil à l'aval du canal. Cette équation est donnée par :

$$q = C_d (h - h_v)^{2/3} \quad 2-2$$

où  $q$  est le débit unitaire,  $h_v = 15 \text{ cm}$  est la longueur du seuil et  $C_d$  est une constante empirique ( $C_d = 1.7$ ).

- le troisième cas consiste en un écoulement de l'eau dans le canal avec un obstacle à l'aval empêchant l'eau de s'écouler à l'aval du canal (Figure 76)

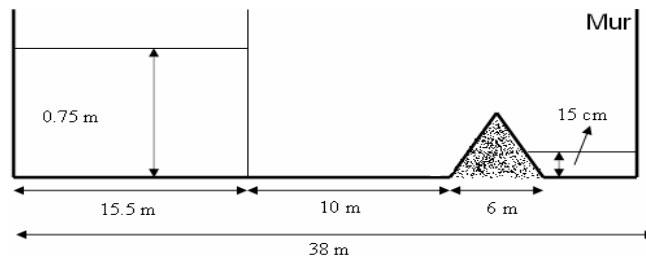


Figure 76 : Présence d'un obstacle à l'aval.

Dans ce cas, un obstacle se trouve à l'aval du canal, et donc un débit nul sera imposé à l'aval du canal afin d'imposer une réflexion à travers l'obstacle.

La Figure 77 montre les résultats de simulations numériques pour le cas où la sortie est libre à l'aval. On constate une reproduction correcte de l'évolution de la hauteur dans le temps par rapport aux résultats expérimentaux.

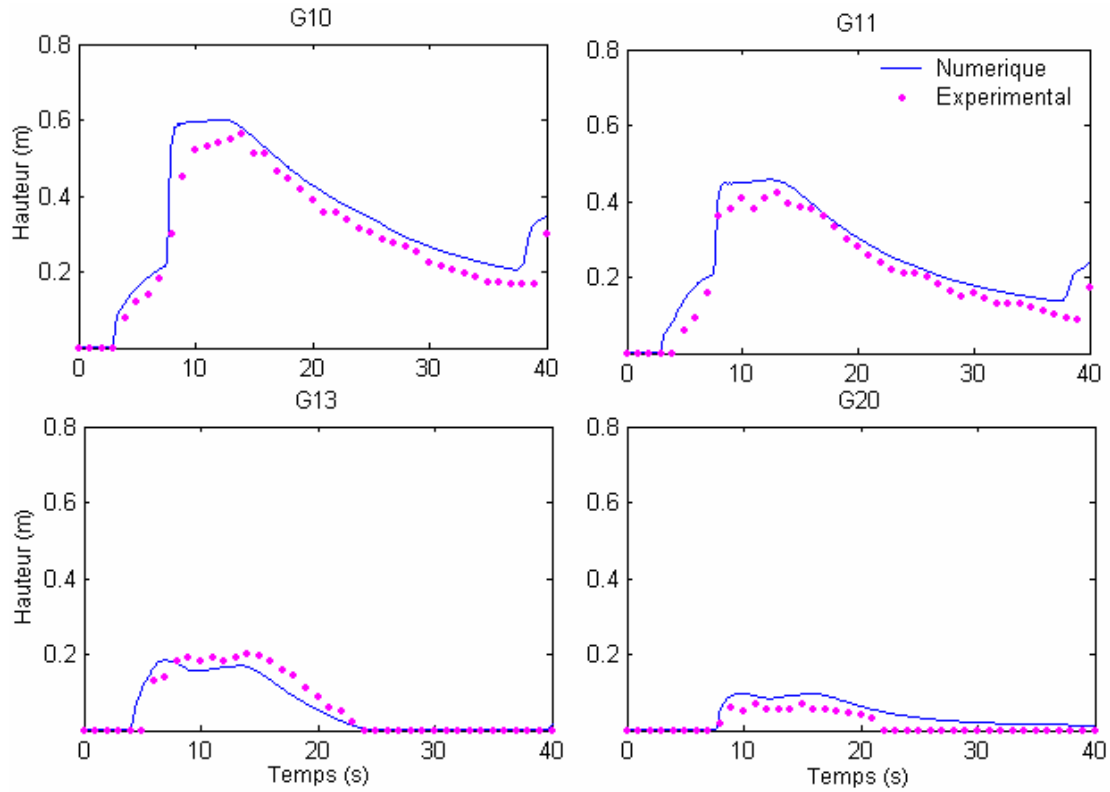


Figure 77 : Comparaison de la simulation numérique du problème de barrage non idéal et des résultats expérimentaux. Sortie libre à l’aval du canal.

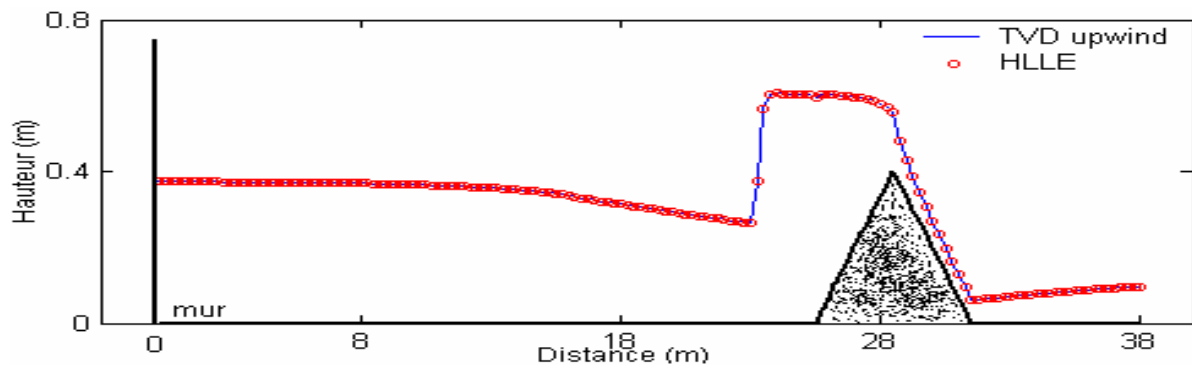


Figure 78 : Simulation numérique du problème de barrage non idéal 10s après l’ouverture de la vanne avec les schémas TVD upwind et HLLC. Sortie libre à l’aval du canal

La Figure 79 montre les résultats de simulations numériques dans le cas où un seuil se trouve à l’aval du canal.

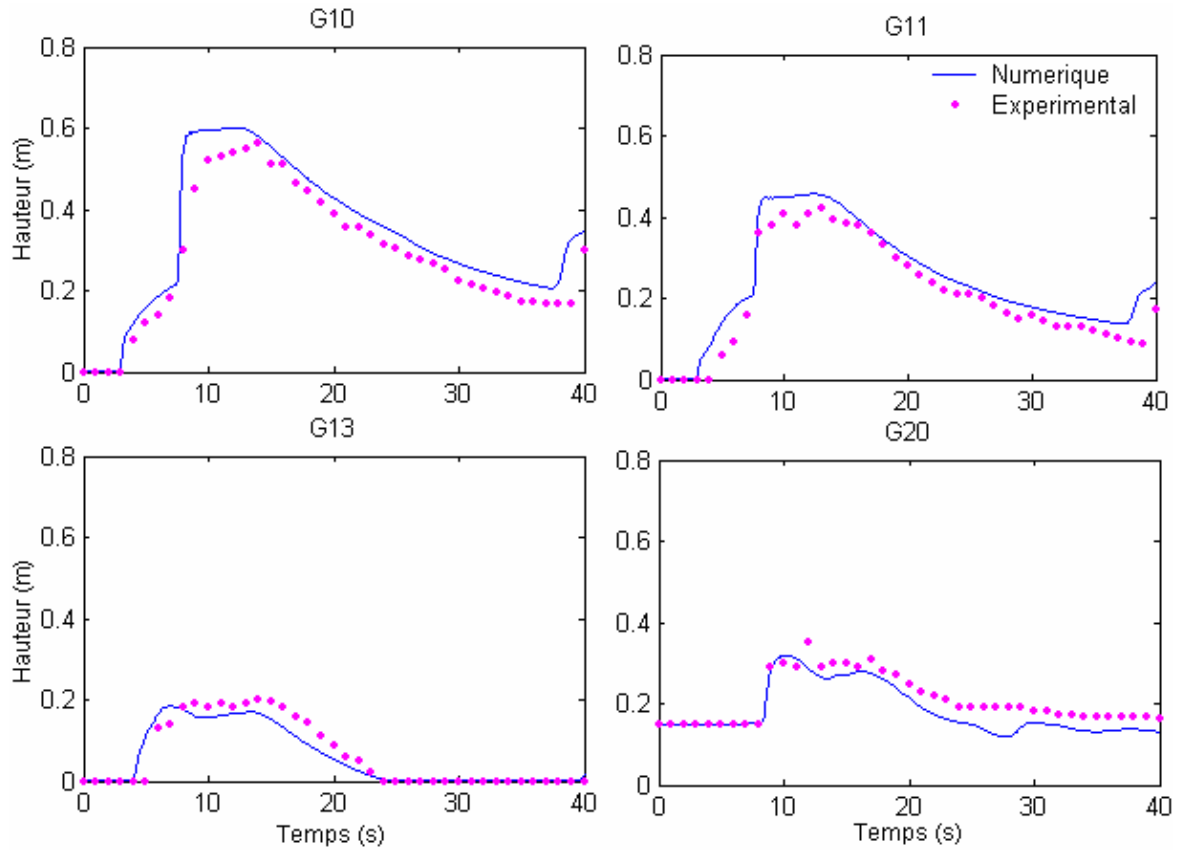


Figure 79 : Comparaison de la simulation numérique du problème de barrage non idéal et des résultats expérimentaux. Présence d'un seuil à l'aval.

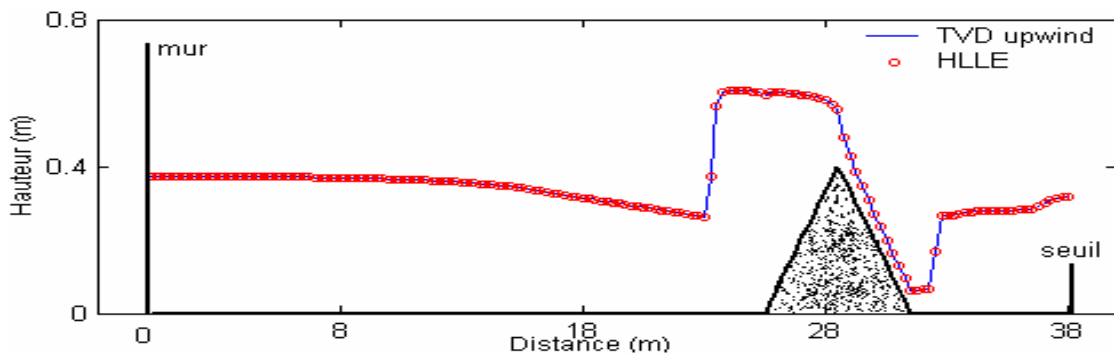


Figure 80 : Simulation numérique de la solution au bout de 10 secondes.

Problème de barrage non idéal avec les schémas TVD upwind et HLLE. Présence d'un seuil à l'aval.

La Figure 80 montre les résultats de simulations numériques dans le cas où un obstacle se trouve à l'aval du canal.

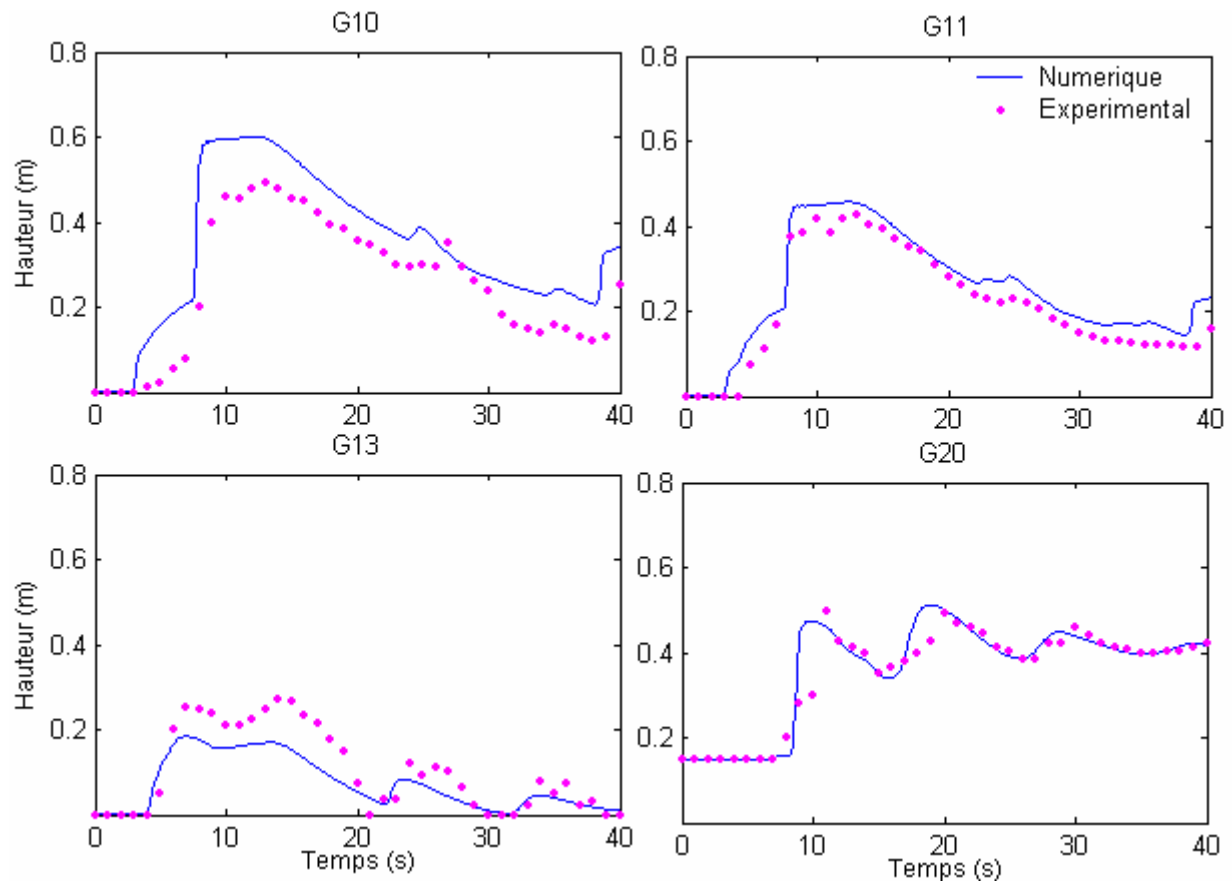


Figure 81: Comparaison de la simulation numérique du problème de barrage non idéal et des résultats expérimentaux. Présence d'un obstacle à l'aval.

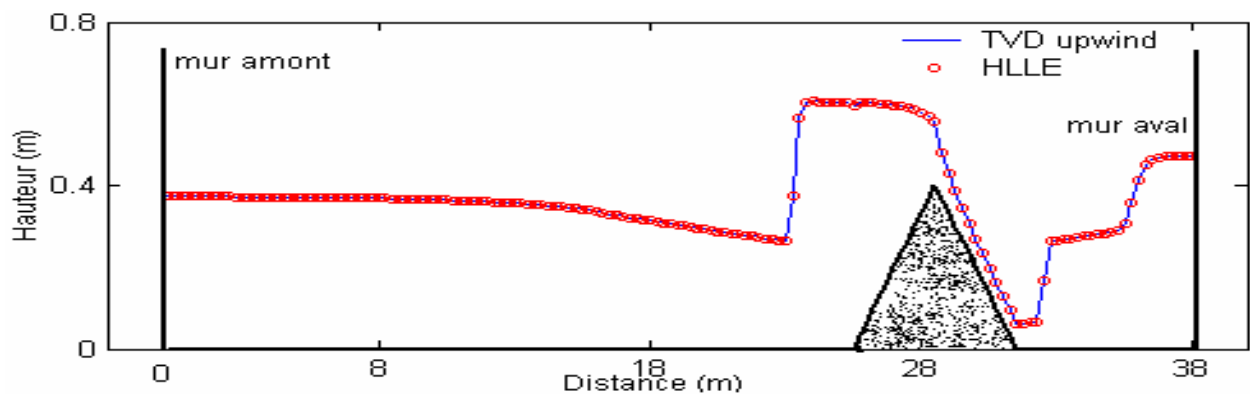


Figure 82 : Simulation numérique du problème de barrage non idéal avec les schémas TVD upwind et HLLE. Présence d'un obstacle à l'aval à 10s.

#### 2.4. Vidange dans un canal à lit concave : cas test 13

Dans la simulation numérique de ce problème avec le schéma de Roe, nous avons décomposé le canal en 250 nœuds de calcul, et le nombre CFL est égal à 0,95. Pour les conditions aux limites, et puisque l'amont du canal est fermé, un écoulement réfléchissant sera imposé à l'amont. Dans ce cas, la hauteur d'eau est extrapolée du nœud voisin et le débit est égal à



l'opposé du débit du nœud voisin. À l'aval du canal, la hauteur critique est imposée puisque l'écoulement est libre et en fluvial à la sortie du canal.

Les Figure 83 et Figure 84 montrent les résultats de simulations numériques de la hauteur d'eau et du débit dans le canal aux instants 0, 10, 20, 100 et 350 secondes après l'ouverture de la vanne à l'aval du canal. On peut noter que la solution vers laquelle converge la simulation numérique est une hauteur de  $h + z = 0.2$  m et un débit  $Q(x, 0) = 0$  m<sup>3</sup>/s. Le front sec ne génère pas d'instabilité numérique.

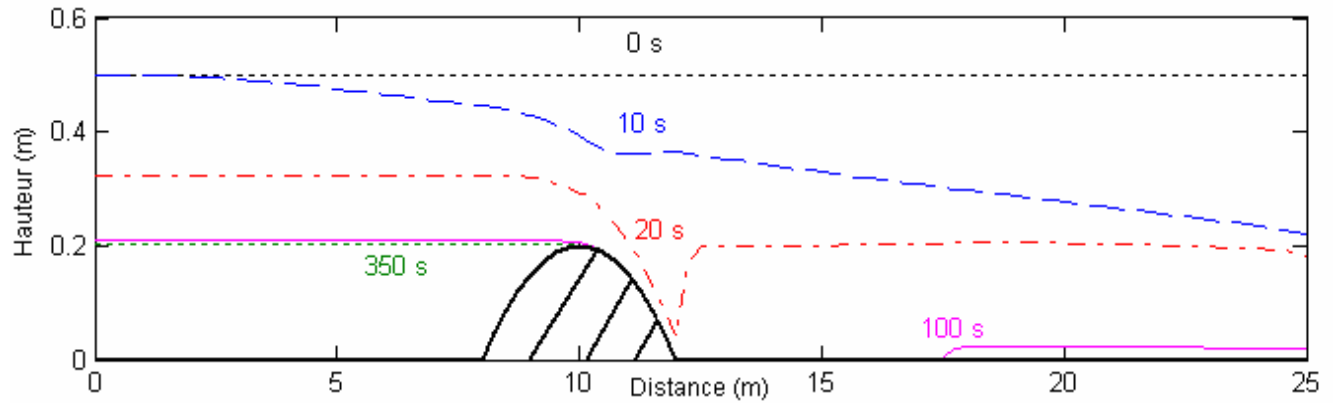


Figure 83 : Hydrographe des hauteurs d'eau lors de la vidange de l'eau dans un canal à lit concave.

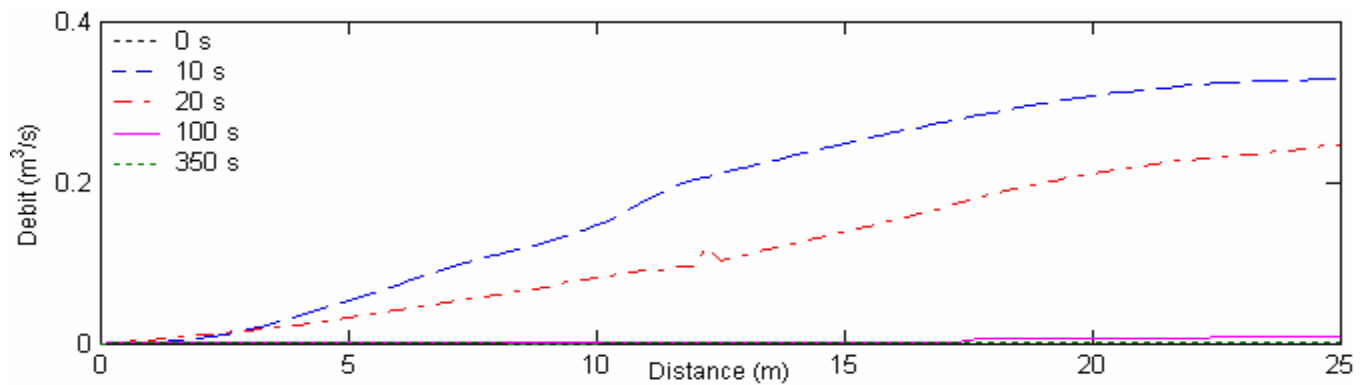


Figure 84 : Hydrographe des débits d'eau lors de la vidange de l'eau dans un canal à lit concave.

### 2.5. Propagation d'un choc hydraulique à travers un canal convergent divergent : cas test 14

Les conditions initiales de ce problème sont une hauteur d'eau de 1m et un débit nul dans tout le canal. Un seuil de hauteur 2m est placé à l'aval du canal, permettant de fermer au début l'extrémité du canal. À l'instant  $t=0^+$ , une hauteur d'eau de 9,79 m et un débit de 1000 m<sup>3</sup>/s seront imposés à l'amont du canal, et par conséquent une vague d'eau se propage vers l'aval. Dans la simulation numérique de ce problème avec les schémas HLLE et TVD

MacCormack, nous avons décomposé le canal en 101 nœuds de calcul, et le nombre CFL est égal à 0,6.

Les Figure 85 et Figure 86 montrent les résultats de simulations numériques de la hauteur d'eau aux instants  $t=5\text{ s}$ ,  $t=15\text{ s}$ ,  $t=150\text{ s}$  et  $t=600\text{ s}$ , après le début de la propagation du choc. On remarque qu'aux instants 5 s et 15 s, la partie aval n'est pas encore atteinte mais de petites réflexions sont partiellement transmises par le seuil. À l'instant 150 s, nous remarquons qu'il y a formation d'un ressaut hydraulique qui se reflète lentement vers l'amont, et finalement, à l'instant 600 s, l'état stationnaire apparaît, et un ressaut hydraulique stationnaire se trouve au voisinage de la région contractante.

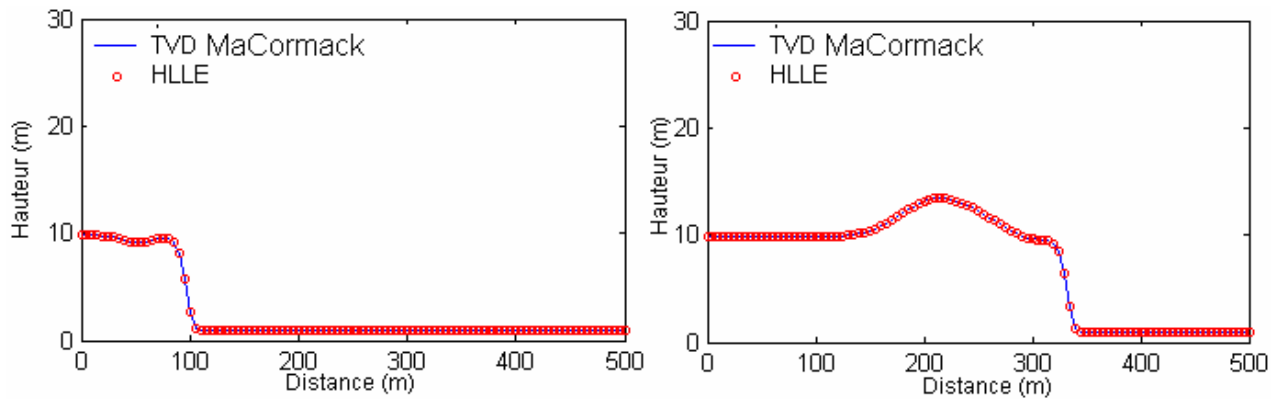


Figure 85 : Hauteur d'eau lors du choc dans un canal concave 5 s et 15 s après la propagation du choc.

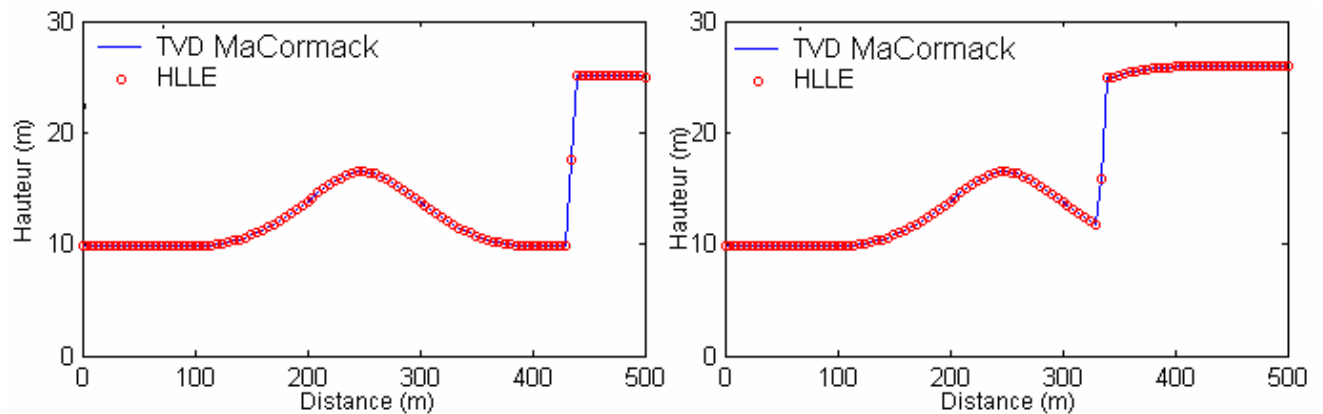


Figure 86 : Hauteur d'eau lors du choc dans un canal concave 150 s et 600 s après la propagation du choc.

## 2.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons simulé divers problèmes hydrauliques de types stationnaire et transitoire. Les résultats de simulations ont montré que tous les problèmes simulés ont donné des résultats très satisfaisants, et surtout dans le cas transitoire. Mais dans le cas stationnaire, des études dans le cas trapézoïdal, afin de pouvoir écrire le système de Barré de Saint-Venant de façon à satisfaire la condition d'entropie, sont encore exigées.

# Chapitre 3 : Comparaison de différentes formes de discrétisation du terme source et des conditions aux limites

Dans ce chapitre, nous montrons les résultats de simulations numériques de divers problèmes hydrauliques avec les différentes façons de discrétisation du terme source et des conditions aux limites.

## 1. Comparaison de différentes modes de discrétisation du terme source

### 1.1. Écoulement stationnaire dans un canal prismatique rectangulaire à lit concave : cas test 3

Pour les conditions aux limites, nous imposons, dans le premier cas, un débit égal à  $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$  à l'amont du canal et toutes les autres variables de l'écoulement se calculent par la méthode de l'extrapolation ou par la méthode des caractéristiques.

Dans le second cas, nous imposons un débit égal à  $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$  à l'amont du canal et une hauteur aval égale à 7 m.

Dans la simulation numérique de ce problème avec le schéma de Roe, nous avons décomposé le canal en 101 nœuds de calcul, ce qui correspond à un pas d'espace de 10 m. Le calcul du pas de temps a été considéré en respectant la condition CFL, avec un nombre de CFL égal à 0,95.

La Figure 87 montre les résultats de simulations numériques pour le premier cas, et la Figure 88 pour le second cas. Il est remarquable que la hauteur simulée par les deux façons de discrétisation (pointwise et upwind) s'accorde bien avec la hauteur exacte. Pour le débit, une diffusion numérique apparaît dans la discrétisation pointwise, et ceci dans les deux cas. On peut aussi noter que, pour toutes les discrétisations, le débit montre un saut numérique artificiel, et ceci du fait de la présence du ressaut hydraulique. La Figure 89 montre les nombres de Froude dans tout le canal. Ce nombre permet de caractériser les régimes de l'écoulement.

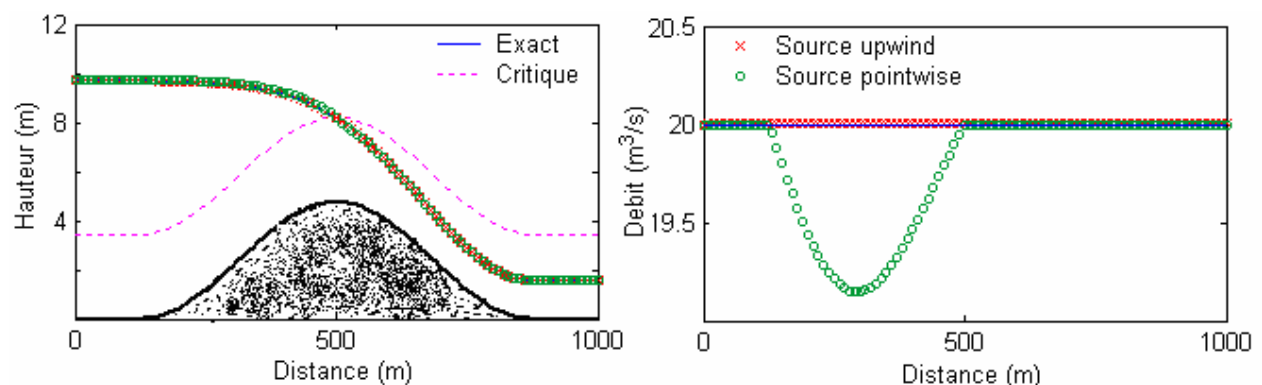


Figure 87 : Ecoulement dans un canal concave. Passage du régime fluvial au régime torrentiel.

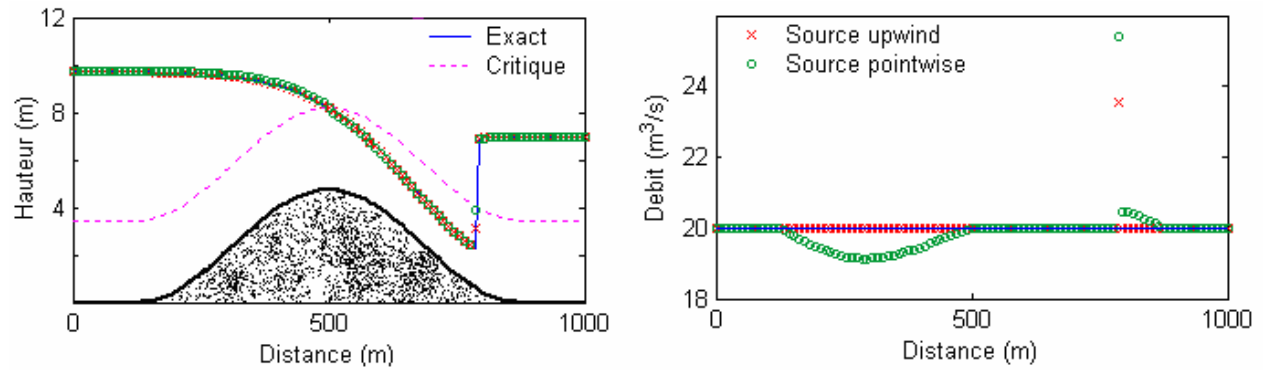


Figure 88 : Ecoulement dans un canal concave. Apparition d'un ressaut hydraulique.

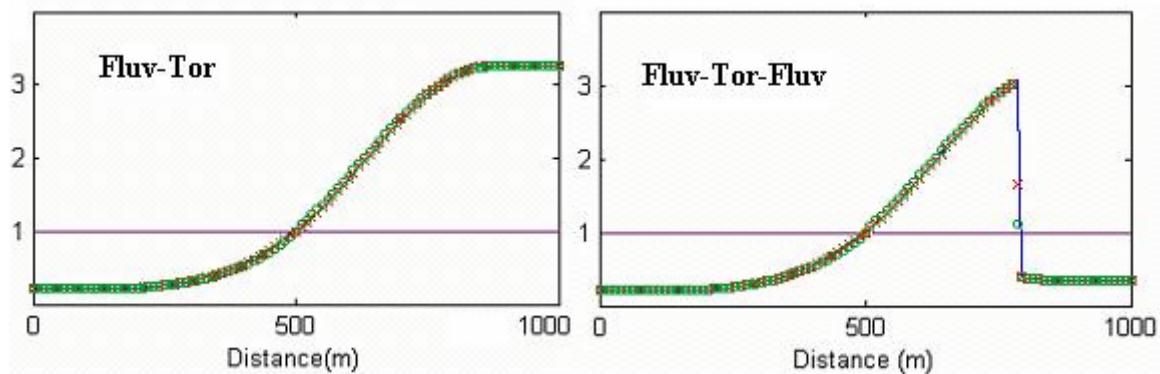


Figure 89: Nombre de Froude dans tout le canal.

### 1.2. Ressaut hydraulique dans un canal prismatique trapézoïdal : cas test 4

Dans la simulation numérique de ce problème avec le schéma de Roe, nous avons décomposé le canal en 101 nœuds de calcul, ce qui correspond à un pas d'espace de 10m. Le calcul du pas de temps a été considéré en respectant la condition CFL, avec un nombre de CFL égal à 1. Pour les conditions aux limites, nous imposons le débit à l'amont du canal, et une hauteur de 1,35 m à l'aval.

La Figure 90 montre les résultats de simulations numériques du problème du ressaut dans un canal prismatique trapézoïdal. Il est remarquable que la hauteur simulée par les deux méthodes de discrétisation (pointwise et upwind) s'accorde bien avec la hauteur exacte. Pour le débit, une diffusion numérique apparaît dans la discrétisation pointwise, et ceci dans les deux cas. Comme précédemment, on peut remarquer que le débit montre un saut numérique artificiel, et ceci à cause du ressaut hydraulique.

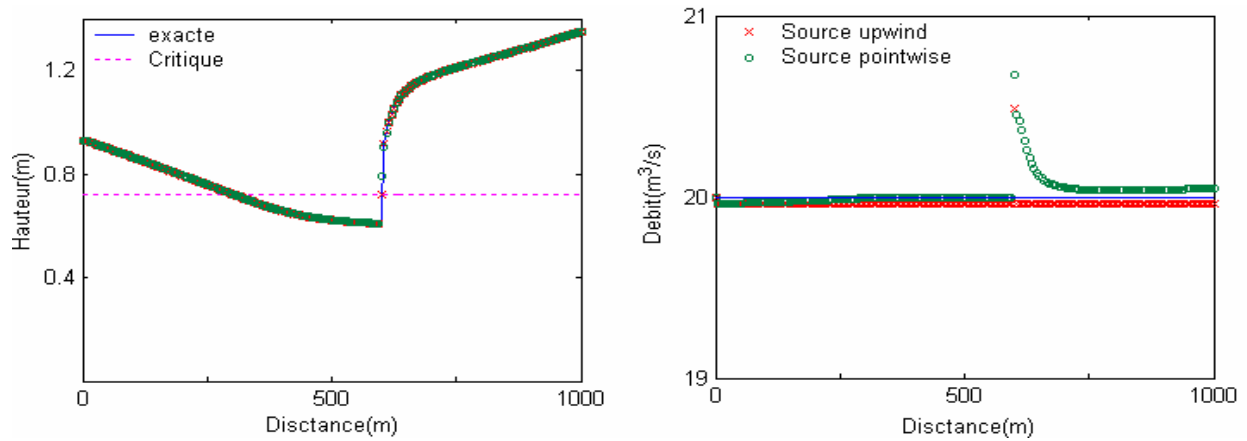


Figure 90 : Ressaut hydraulique dans un canal prismatique trapézoïdal.

### 1.3. Ecoulement transcritique dans un canal convergent divergent : cas test 5

Dans la simulation numérique avec le schéma de Roe, nous avons décomposé le canal en 51 nœuds de calcul, ce qui correspond à un pas d'espace de 10 m. Le calcul du pas de temps a été considéré en respectant la condition CFL, avec un nombre de CFL égal à 0,95.

#### *Passage fluvial torrentiel dans un canal convergent divergent*

Pour les conditions aux limites, nous imposons, dans le premier cas, un écoulement transcritique qui passe du fluvial au torrentiel, un débit égal à  $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$  à l'amont du canal.

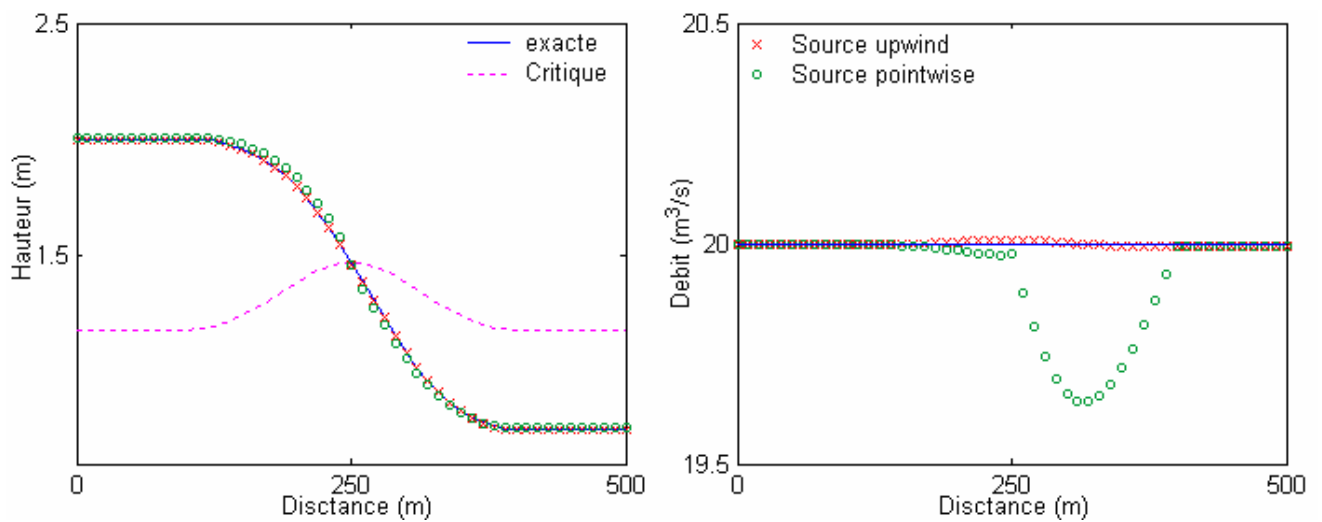


Figure 91 : Ecoulement dans un canal concave. Passage du régime fluvial au régime torrentiel.

*Ressaut hydraulique dans un canal convergent divergent*

Dans ce cas, l'écoulement passe du fluvial au torrentiel puis au fluvial à travers un ressaut hydraulique. Nous imposons un débit égal à  $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$  à l'amont du canal et une hauteur aval égale à 1,8 m.

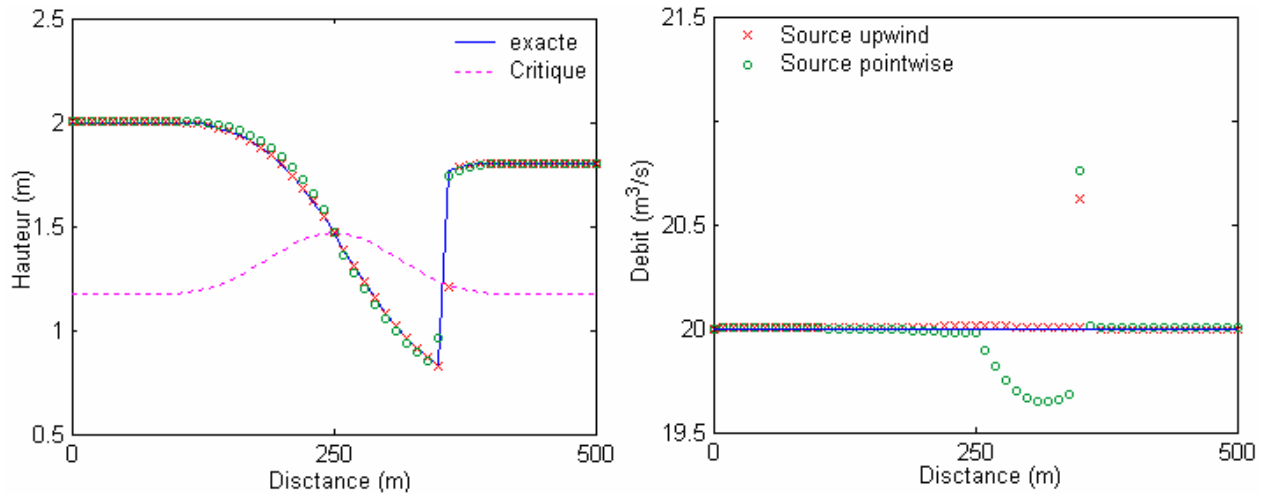


Figure 92 : Ecoulement dans un canal concave. Apparition d'un ressaut hydraulique.

La Figure 91 montre les résultats de la simulation numérique pour le premier cas et la Figure 92 pour le second cas. Il est remarquable que la hauteur simulée par les deux méthodes de discrétisation (pointwise et upwind) s'accorde bien avec la hauteur exacte. Pour le débit, une diffusion numérique apparaît dans la discrétisation pointwise, et ceci dans les deux cas.

**1.4. Ressaut hydraulique dans un canal convergent divergent et à lit concave : cas test 6**

Dans la simulation numérique de ce problème avec le schéma de Roe, nous avons décomposé le canal en 61 nœuds de calcul. Le calcul du pas de temps a été considéré en respectant la condition CFL, avec un nombre de CFL égal à 0,95.

Pour les conditions aux limites, nous imposons, dans le premier cas, un écoulement partout torrentiel, un débit égal à  $Q = 5.3257 \text{ m}^3/\text{s}$ , et ceci à l'amont du canal et toutes les autres variables de l'écoulement se calculent par la méthode de l'extrapolation ou par la méthode des caractéristiques.

Dans le second cas, l'écoulement transcritique passe du fluvial au torrentiel puis au fluvial à travers un ressaut hydraulique. Nous imposons un débit égal à  $Q = 1.8796 \text{ m}^3/\text{s}$  à l'amont du canal et une hauteur aval égale à 1 m. La hauteur à l'amont et le débit à l'aval se calculent par la méthode de l'extrapolation ou par la méthode des caractéristiques.

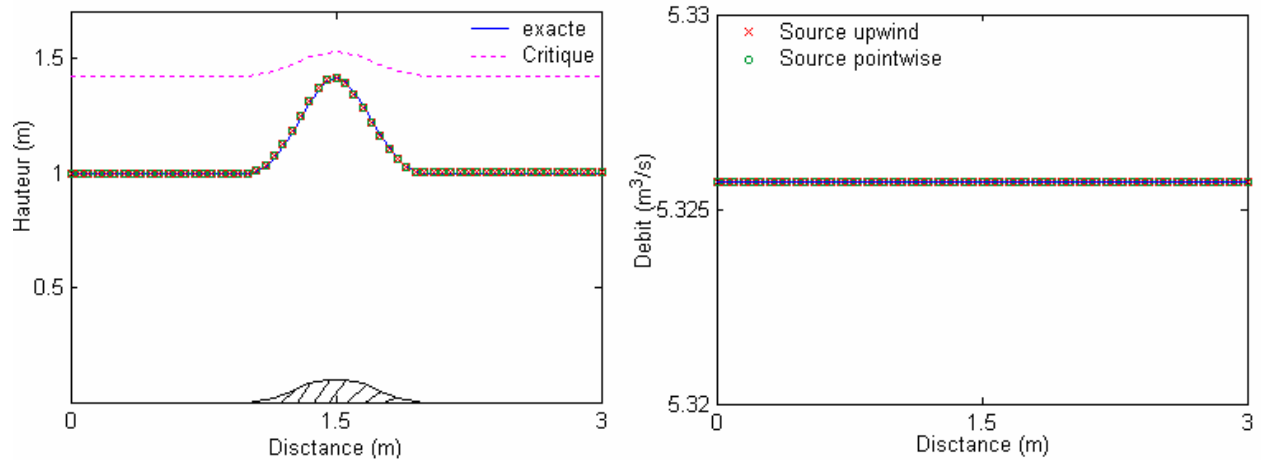


Figure 93 : Ecoulement torrentiel dans un canal concave et convergent divergent.

La Figure 93 montre les résultats de simulations numériques pour le premier cas. Il est remarquable que la hauteur simulée et le débit obtenus par les deux méthodes de discrétisation (pointwise et upwind) s'accordent bien avec la hauteur exacte. La Figure 94 montre les résultats de simulation numérique pour le second cas. La discrétisation upwind donne un débit numérique très proche du débit exact malgré le saut numérique dû au ressaut hydraulique.

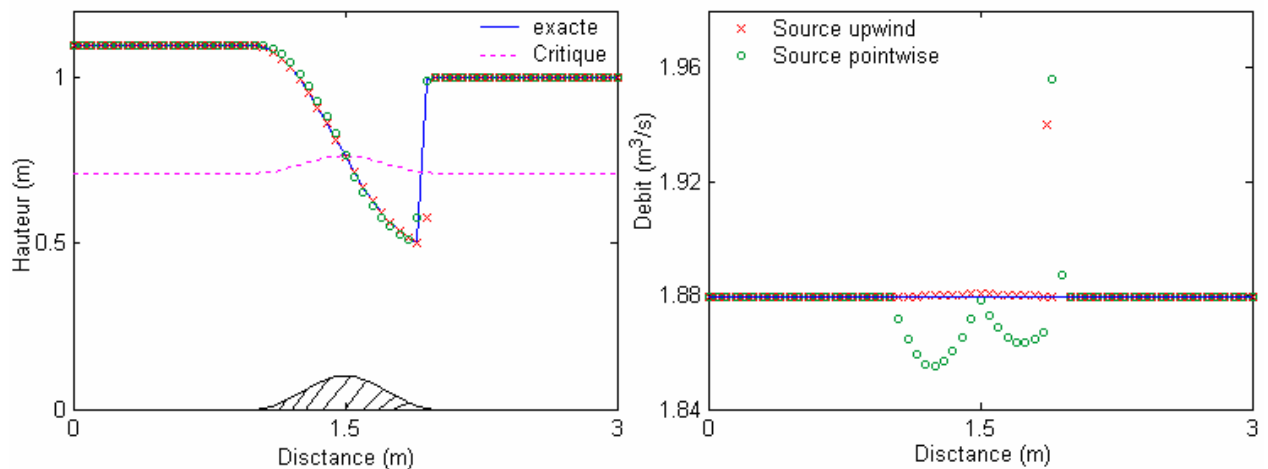


Figure 94 : Ecoulement dans un canal concave et convergent divergent. Apparition d'un ressaut hydraulique.

### 1.5. Écoulement stationnaire dans un canal non prismatique à section trapézoïdale : cas test 7

Dans la simulation numérique de ce problème avec le schéma de Roe, nous avons décomposé le canal en 101 nœuds de calcul, ce qui correspond à un pas d'espace de 2 m. Le calcul du pas de temps a été considéré en respectant la condition CFL, avec un nombre de CFL égal à 1. Pour les conditions aux limites, nous imposons un débit à l'amont du canal, et une hauteur de 1,35m à l'aval.

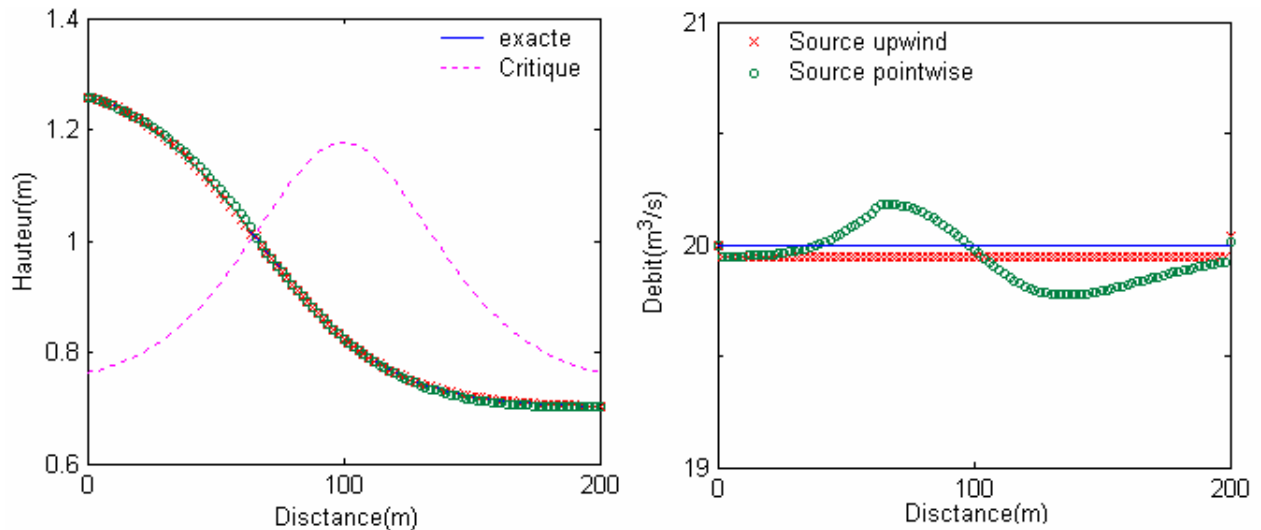


Figure 95: Passage du régime fluvial au régime torrentiel dans un canal non prismatique.

La Figure 95 montre les résultats de simulations numériques. La hauteur simulée par les deux méthodes de discrétisation (pointwise et upwind) s'accorde bien avec la hauteur exacte, mais pour le débit, une diffusion numérique à nouveau apparaît avec la discrétisation pointwise.

### 1.6. Ecoulement stagnant dans un canal non prismatique à lit fortement irrégulier : cas test 8

Dans la simulation numérique, nous avons décomposé le canal en 301 nœuds, et le coefficient de stabilité CFL est choisi égal à 0,95. Pour les conditions initiales, nous imposons une hauteur  $h$ , telle que  $h + z = 12$  m, où  $z$  est l'altitude du lit, et un débit égal à  $Q(x, 0) = 0$  m<sup>3</sup>/s. Les conditions aux limites sont constantes. La solution exacte de ce problème est un débit nul et une hauteur d'eau constante.

Le schéma de Roe est utilisé selon trois discrétisations du terme source.

Dans le premier cas, nous simulons le système de Barré de Saint Venant avec les variables  $A$  et  $Q$  : la section mouillée et le débit, et le terme source est discrétisé avec la méthode directionnelle (upwind). Ce cas est illustré dans la Figure 96.

Dans le second cas, nous simulons le système de Barré de Saint Venant avec les variables  $h$  et  $q$  : la hauteur d'eau et le débit par unité de largeur, et le terme source est discrétisé avec la méthode centrée. Ce cas est illustré dans la Figure 97.

Dans le troisième cas, nous simulons le système de Barré de Saint Venant avec les variables  $h$  et  $q$ , et le terme source est discrétisé avec la méthode directionnelle (upwind). Ce cas est illustré dans la Figure 98.



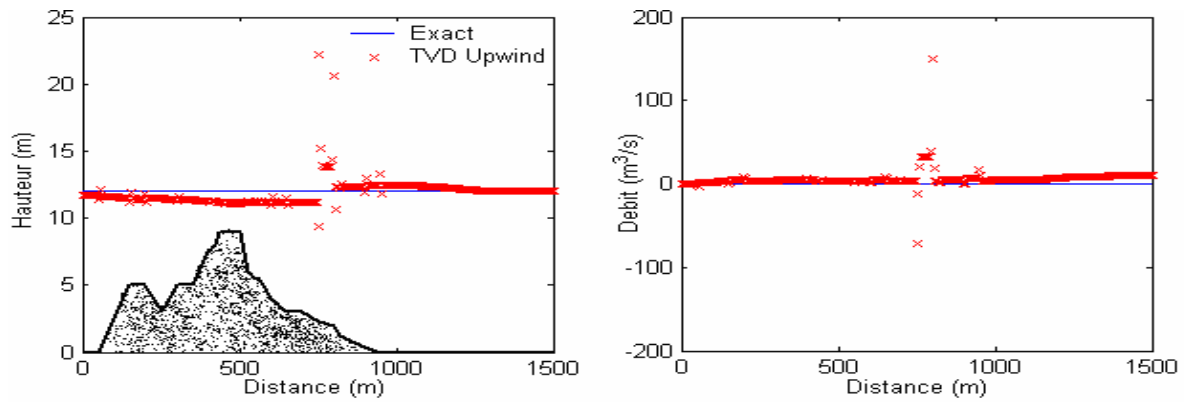


Figure 96 : Simulation du système de BSV avec les variables A et Q. Discrétisation directionnelle du terme source.

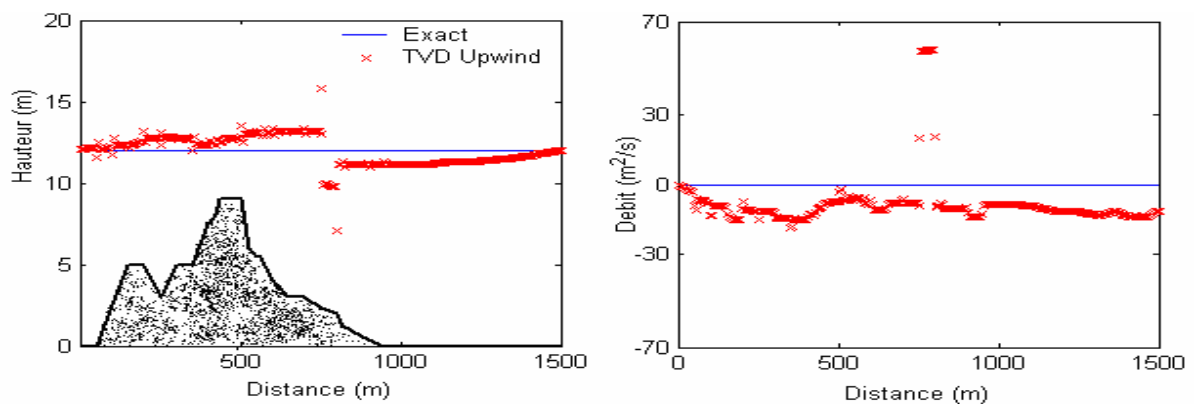


Figure 97 : Simulation du système de BSV avec les variables h et q. Discrétisation centrée du terme source.

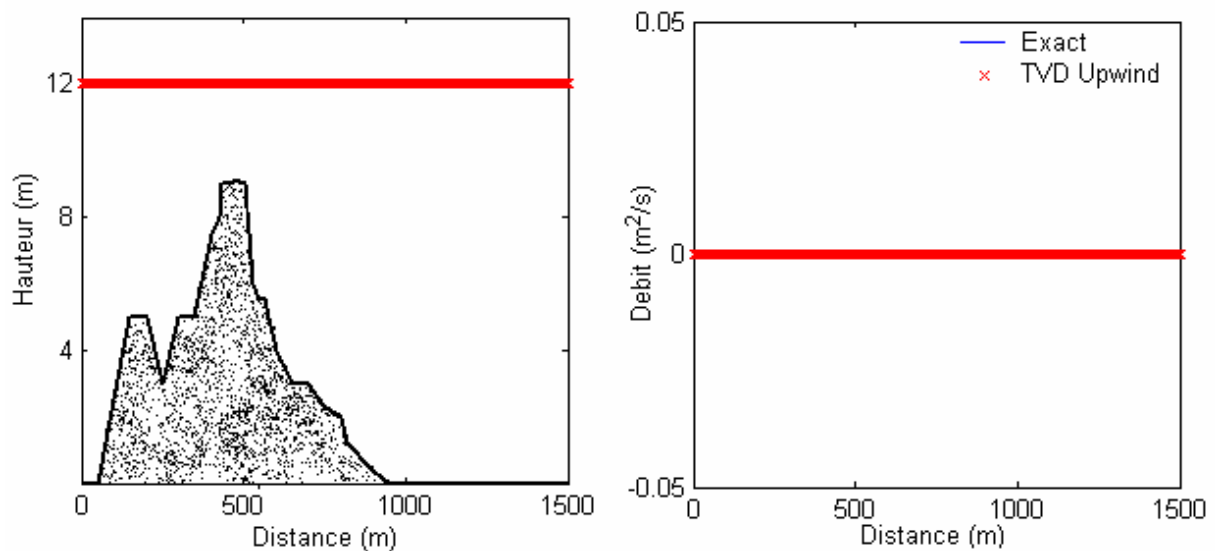


Figure 98 : Simulation du système de BSV avec les variables h et q. Discrétisation upwind du terme source.

On constate qu'il est nécessaire de vérifier la condition d'entropie avec une projection du terme source dans la base propre.

## 2. Traitement des conditions aux limites internes- Écoulement stationnaire au-dessus des seuils

Dans les exemples traités précédemment, nous n'avons pas distingué une différence notable entre la méthode de l'extrapolation et la méthode des caractéristiques en ce qui concerne les conditions aux limites externes.

Dans cette section, nous souhaitons étudier la différence entre ces deux méthodes dans le cas d'un traitement des conditions aux limites internes.

Dans ce but, nous considérons l'écoulement dans un canal contenant trois seuils. Au voisinage du seuil, le système de BSV n'est pas applicable, et une relation de type hauteur débit doit définir la présence du seuil.

Cette relation peut être couplée avec le système de BSV dans le canal à l'aide des deux méthodes citées précédemment.

Cet exemple particulier n'admet pas de solution analytique pour la hauteur. Par contre, puisque l'écoulement est stationnaire, le débit doit être fixe et égal à  $20\text{m}^3/\text{s}$  dans tout le canal. Par conséquent une validation de ces deux méthodes peut se faire en comparant la simulation numérique du débit avec le débit constant.

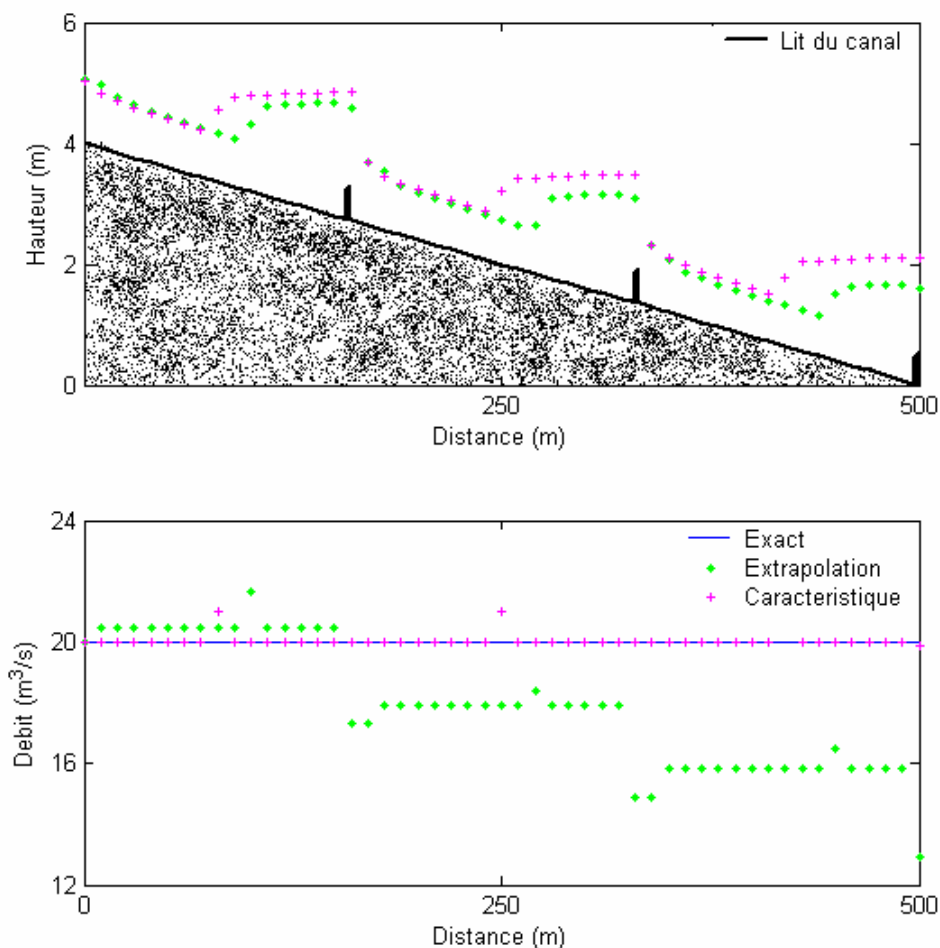


Figure 99 : Ecoulement de l'eau au dessus des seuils. Traitement des conditions aux limites avec les deux méthodes : caractéristique et extrapolation.

La Figure 99 montre les résultats de la simulation numérique avec les deux méthodes du traitement des conditions aux limites internes pour le même traitement du terme source. Les

hauteurs simulées avec ces deux traitements sont semblables dans l'allure avec une petite diffusion de l'une par rapport à l'autre.

Concernant le débit, la méthode des caractéristiques contrôle parfaitement le débit au droit des seuils. Par contre la méthode de l'extrapolation ne conserve pas le débit.

La Figure 100 montre les résultats de la simulation numérique avec les deux méthodes de discrétisation du terme source (pointwise et upwind) pour le même traitement des conditions aux limites internes (méthode des caractéristiques).

Les hauteurs simulées avec ces deux méthodes sont bien similaires.

Concernant le débit, la discrétisation du terme source upwind contrôle parfaitement le débit au droit des seuils. Par contre la méthode de l'extrapolation ne conserve pas le débit.

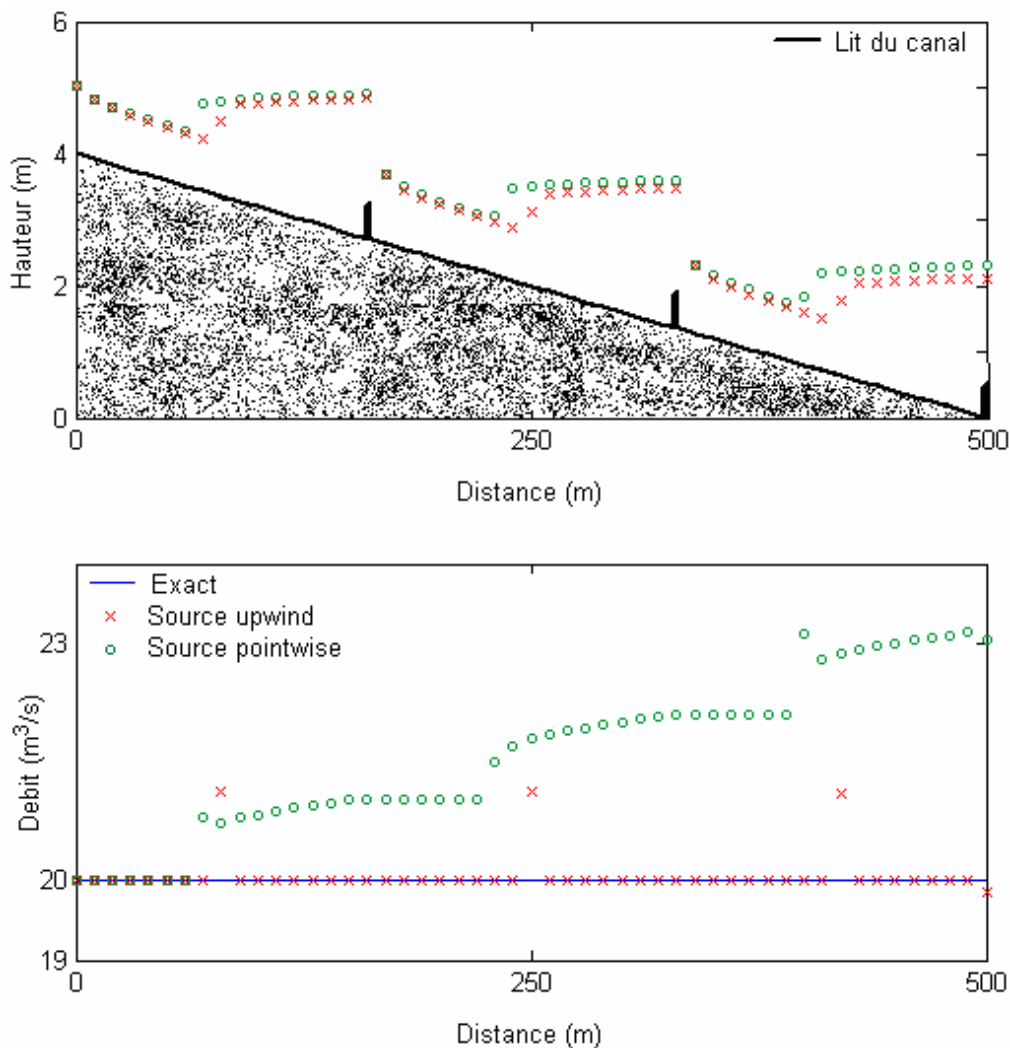


Figure 100 : Ecoulement de l'eau au dessus des seuils. Traitement du terme source avec les deux méthodes : centrée et directionnelle.

### 3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons simulé les deux méthodes de discrétisation du terme source : la discrétisation directionnelle (upwind) et la discrétisation centrée (pointwise), ainsi que le

---

traitement de ce terme dans le cas d'un canal non prismatique. Les résultats des simulations ont montré les conclusions suivantes :

1. La discrétisation centrée du terme source simule d'une manière excellente la hauteur d'eau et le débit dans le cas où l'écoulement est un écoulement à un seul régime (fluvial ou torrentiel).
2. La discrétisation centrée (pointwise) du terme source simule d'une manière excellente la hauteur d'eau mais le débit présente des diffusions par rapport au débit analytique dans le cas où l'écoulement est un écoulement transitionnel (avec donc un passage du régime fluvial au torrentiel et inversement).
3. La discrétisation directionnelle (upwind) du terme source simule d'une manière excellente la hauteur d'eau et le débit dans tous les cas de l'écoulement.
4. Dans le cas d'un canal non prismatique, c'est-à-dire lorsque la largeur du canal est variable, le système de Barré de Saint-Venant, écrit avec les variables  $A$  (section mouillée) et  $Q$  (débit), ne vérifie pas la condition d'entropie. Nous remarquons que dans ce cas, les résultats de simulation avec les deux méthodes de discrétisation, directionnelles et centrées, sont très mauvais et sont dus à la grande diffusion et aux oscillations qui apparaissent. Afin de palier cette difficulté, nous avons proposé d'écrire le système de Barré de Saint Venant avec les variables  $h$  (hauteur d'eau) et  $q$  (débit unitaire). Le terme contenant la largeur du canal est placé avec le terme source. Cette écriture de Barré de Saint Venant permet d'obtenir un système qui vérifie la condition d'entropie. Les résultats de simulation montrent une excellente adéquation avec les résultats analytiques.

Nous avons étudié également dans ce chapitre les méthodes du traitement des conditions aux limites : la méthode des caractéristiques et la méthode de l'extrapolation. Les résultats des simulations ont montré les conclusions suivantes :

5. Les deux méthodes ne présentent aucune différence dans le traitement des conditions aux limites externes, et les résultats simulés avec ces deux méthodes sont très convenables.
6. Pour le traitement des conditions aux limites internes, les résultats obtenus, par ces deux méthodes sont similaires pour la hauteur d'eau. Par contre, une grande diffusion apparaît dans le débit d'eau par rapport au débit analytique constant. Le débit simulé avec la méthode des caractéristiques est très satisfaisant en comparaison au débit constant.

En conclusion finale, nous proposons les recommandations suivantes :

7. Utiliser une discrétisation directionnelle pour la discrétisation du terme source.
8. Prendre le système de Barré de Saint-Venant avec les variables  $h$  et  $q$  plutôt qu'avec les variables  $A$  et  $Q$ , afin d'assurer la condition d'entropie.
9. Utiliser la méthode des caractéristiques plutôt que celle de l'extrapolation pour le traitement des conditions aux limites internes. Ces deux méthodes peuvent être utilisées indifféremment pour le traitement des conditions aux limites externes.

**Partie E -  
Domaine de validité  
des différents modèles  
de jonctions et  
couplage des modèles  
de jonctions avec les  
équations de BSV**

Nous avons exposé la plupart des modèles disponibles pour simuler la jonction en tant que confluence et défluence. On remarque qu'il existe beaucoup de modèles et de données expérimentales en fonction des régimes d'écoulement dans les branches. Compte tenu du peu de comparaisons entre ces différentes approches, l'objectif du premier chapitre est de comparer les modèles entre eux en régime permanent par rapport aux données expérimentales. On désire ainsi avoir leur domaine de validité et surtout pouvoir faire un choix en fonction de leur simplicité à implémenter.

L'objectif du deuxième chapitre est de comparer les résultats de simulations numériques des écoulements dans un réseau contenant des canaux et des jonctions. Le schéma numérique de Roe avec correction entropique est utilisé pour résoudre numériquement le système de Barré de Saint-Venant afin de trouver une solution de l'écoulement dans les canaux. Différents modèles de la jonction sont utilisés et comparés.

# Chapitre 1 : Domaine de validité des différents modèles de la jonctions

## 1. Choix des modèles à comparer

### 1.1. Données expérimentales et modèles de confluence

Le tableau suivant regroupe l'ensemble des études concernant la confluence. Nous disposons ainsi d'études expérimentales et de modèles afin de mettre au point un banc d'essais numériques de comparaison.

On ajoutera à ces modèles celui de l'égalité des hauteurs puisqu'il est communément utilisé dans la plupart des codes de calculs.

Auteurs	Régimes d'écoulement	Angles entre les canaux	Résultats expérimentaux	Modèles
Taylor (1944)	Fluvial	45° et 135°	X	X
Webber et Geated (1966)	Fluvial	30° et 90°	X	
Lin et Soong (1979)	Fluvial	90°	X	
Gurram et al. (1997)	Fluvial	30° ; 60° et 90°	X	X
Hsu et al. (1998)	Fluvial	30° ; 45° ; 60° et 90°	X	X
Shaybayek (2002)	Fluvial			X
Ramamurthy (1988)	Fluvial	90°		X
Rice (1985)	Torrentiel	30° ; 60° ; et 90°	X	X
Hager (1989)	Torrentiel	45° et 22.5°	X	
Hager (1989)	Transcritique	22.5° ; 45° et 90°	X	X
Gurram (1993)	Trancritique			X

Tableau 10 : Ensemble des modèles et des résultats expérimentaux pour la confluence.

### 1.2. Données expérimentales et modèles de défluence

Il existe peu de modèles de défluence en comparaison avec les modèles de confluence. Le tableau suivant détaille des modèles et des résultats expérimentaux disponibles uniquement en fluvial.

Auteurs	Résultats expérimentaux	Modèles
Sridharan (1966)	X	
Pemaiah (1977)		X
Ramamurthy (1990)	X	X
Hsu (2002)	X	X

Tableau 11 : Ensemble des modèles et des résultats expérimentaux pour la défluence.

## 2. Comparaison des modèles de confluence

Dans ce chapitre, nous recherchons le domaine de validité des modèles de confluence. Nous comparons les résultats de simulation de ces modèles avec les résultats expérimentaux trouvés

dans la littérature. Les cas étudiés dans ce chapitre sont : la confluence fluviale, la confluence transitionnelle et la confluence torrentielle.

### 2.1. Confluence fluviale

Dans cette section, les résultats de simulation des modèles de confluence fluviale seront confrontés aux résultats expérimentaux de Taylor (1944), Webber et Greated (1966), Lin et Soong (1979), et Hsu (1998). Ainsi, une comparaison entre les résultats obtenus par les différents modèles sera exposée en donnant les erreurs entre les hauteurs simulées par ces modèles et les résultats expérimentaux.

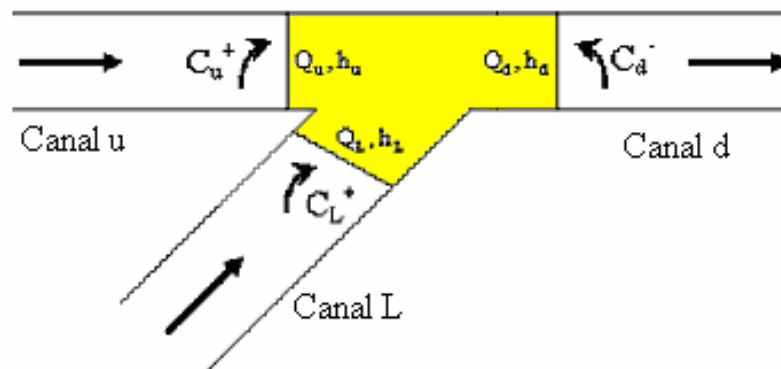


Figure 101: Confluence

#### a- Les résultats expérimentaux de Taylor

Les résultats expérimentaux obtenus par Taylor (1944) sont confrontés aux résultats de simulation des modèles de la confluence fluviale. Deux angles de la jonction sont considérés :  $45^\circ$  et  $135^\circ$ .

La Figure 102 montre les résultats expérimentaux obtenus par Taylor, et les résultats simulés par les modèles de la confluence fluviale. Dans cette comparaison, c'est le modèle de l'égalité des hauteurs qui donne la plus grande erreur comparée aux résultats expérimentaux (Tableau 12 et Tableau 13). Le modèle de Shabayek donne le meilleur accord avec ces résultats. On peut noter que pour un petit nombre de Froude, tous les modèles donnent des résultats similaires, et lorsque ce nombre s'approche de l'unité, l'écart entre les résultats expérimentaux et les résultats simulés à l'aide du modèle de l'égalité des hauteurs d'eau devient de plus en plus grand.



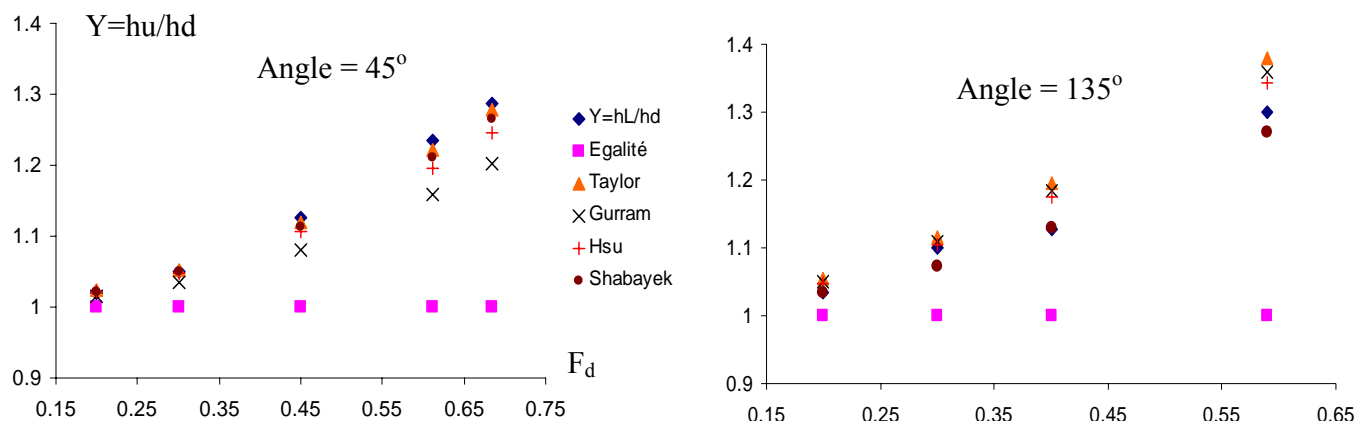


Figure 102 : Comparaison des expériences de Taylor et des modèles de confluence fluviale.

Le tableau suivant donne les différences entre les résultats expérimentaux et les résultats simulés pour chaque modèle pour un angle de 45°.

Taylor  
(1944) Angle = 45°

Erreurs Égalité	Erreurs Taylor	Erreurs Gurram	Erreurs Hsu	Erreurs Shabayek
-2.0%	0.4%	-0.5%	0.1%	0.2%
-4.8%	0.3%	-1.5%	-0.3%	-0.1%
-11.1%	-0.5%	-3.9%	-1.8%	-1.1%
-19.0%	-1.2%	-6.3%	-3.3%	-2.0%
-22.3%	-0.9%	-6.7%	-3.5%	-1.8%

Tableau 12 : Tableau des écarts des expériences de Taylor et des modèles de confluence fluviale pour un angle de 45°.

Taylor  
(1944) Angle = 135°

Erreurs Égalité	Erreurs Taylor	Erreurs Gurram	Erreurs Hsu	Erreurs Shabayek
-3.2%	2.1%	1.6%	1.4%	0.0%
-9.1%	1.7%	0.7%	0.3%	-2.4%
-11.2%	6.9%	4.7%	4.1%	0.2%
-23.1%	8.0%	4.3%	3.1%	-2.2%

Tableau 13 : Tableau des écarts des expériences de Taylor et des modèles de confluence fluviale pour un angle de 135°.

**b- Les résultats expérimentaux de Webber et Greated**

Les résultats expérimentaux obtenus par Webber et Greated (1966) sont confrontés aux résultats de simulation des modèles de la confluence fluviale. Deux angles de la jonction sont considérés : 30° et 90° et deux rapports des débits aval-amont : 0.2 et 0.6 .

La Figure 103 montre les résultats expérimentaux obtenus par Webber et Greated, et les résultats simulés par les modèles de la confluence fluviale. Tous les modèles basés sur la conservation de la quantité de mouvement donnent des résultats satisfaisants par comparaison aux résultats expérimentaux. Le modèle de l'égalité des hauteurs d'eau donne des résultats très loin des résultats expérimentaux. On peut aussi noter que le modèle de Shabayek est le modèle qui donne le meilleur accord avec ces résultats.

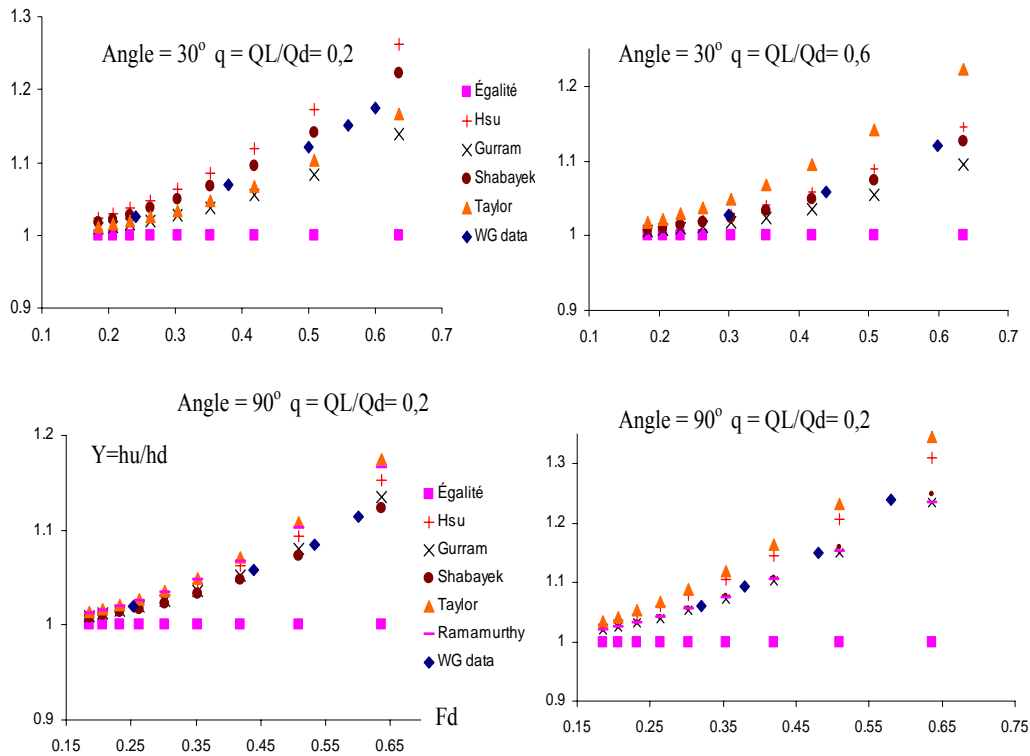


Figure 103 : Comparaison des résultats expérimentaux de Webber et Greated et des modèles de confluence fluviale.

**c- Les résultats expérimentaux de Lin et Soong**

Les résultats expérimentaux obtenus par Lin et Soong (1979), sont confrontés aux résultats de simulation des modèles de la confluence fluviale. Les expériences ont été réalisées pour un angle de jonction égal à 90° et un nombre de Froude aval proche de 1.

La Figure 104 montre les résultats expérimentaux obtenus par Lin et Soong, et les résultats simulés par les modèles de Shabayek, Hsu, Gurram, Ramamurthy, Taylor et l'égalité des hauteurs d'eau. Dans cette comparaison, l'écart entre les résultats expérimentaux et les résultats simulés à l'aide du modèle de l'égalité des hauteurs d'eau est très grand puisque le nombre de Froude est grand. Les modèles de Shabayek et de Ramamurthy donnent la meilleure adéquation avec les résultats expérimentaux.

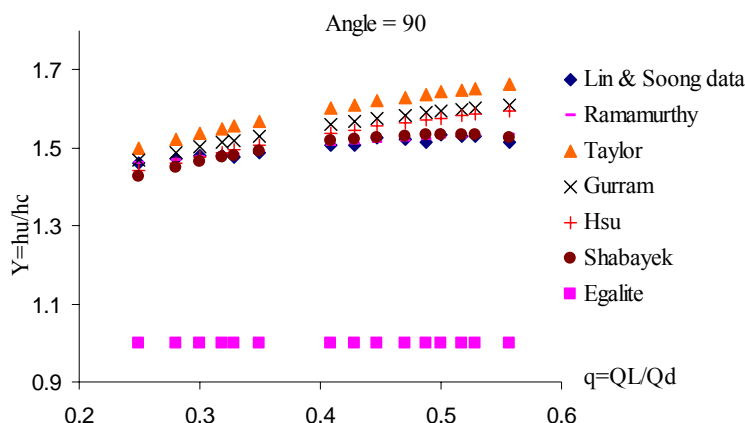


Figure 104 : Comparaison des résultats expérimentaux de Lin et Soong et des modèles de confluence fluviale.

Le tableau suivant donne les écarts entre chaque modèle pour un angle de 90°.

Lin et Soong Angle = 90°					
Erreurs Ramamurthy	Erreurs Taylor	Erreurs Gurram	Erreurs Hsu	Erreurs Shabayek	Erreurs Egalite
-0.1%	2.6%	0.4%	-1.5%	-2.4%	-32.4%
-0.1%	3.5%	1.1%	-0.6%	-1.4%	-32.5%
-0.3%	3.8%	1.3%	-0.3%	-1.2%	-32.9%
0.2%	4.8%	2.2%	0.6%	-0.2%	-32.4%
0.5%	5.4%	2.7%	1.2%	0.3%	-32.1%
0.2%	5.5%	2.7%	1.3%	0.3%	-32.6%
-0.2%	6.3%	3.2%	1.9%	0.6%	-33.4%
0.3%	7.0%	3.8%	2.6%	1.1%	-33.2%
-0.7%	6.3%	3.1%	1.9%	0.1%	-34.3%
-0.3%	7.0%	3.7%	2.6%	0.4%	-34.2%
0.4%	8.0%	4.6%	3.6%	1.1%	-33.6%
-0.5%	7.2%	3.8%	2.8%	0.1%	-34.7%
-0.2%	7.7%	4.1%	3.2%	0.1%	-34.7%
0.0%	8.0%	4.4%	3.5%	0.1%	-34.6%
1.3%	9.6%	5.8%	5.0%	0.7%	-33.7%

Tableau 14 : Comparaison des résultats expérimentaux de Lin et Soong et des modèles de confluence fluviale.

**d- Les résultats expérimentaux de Gurram**

Les résultats expérimentaux obtenus par Gurram (1994) sont confrontés aux résultats de simulation des modèles de la confluence fluviale. Deux angles de la jonction sont considérés : 60° et 90°, et deux rapports des débits aval-amont : 0.5 et 0.25.

La Figure 105 montre les résultats expérimentaux obtenus par Gurram, et les résultats simulés par les modèles de Shabayek, Hsu, Gurram, Ramamurthy, Taylor et l'égalité des hauteurs d'eau. Dans cette comparaison, l'écart entre les résultats expérimentaux et les résultats simulés à l'aide du modèle de l'égalité des hauteurs d'eau est très grand pour un nombre de Froude qui dépasse 0.5.

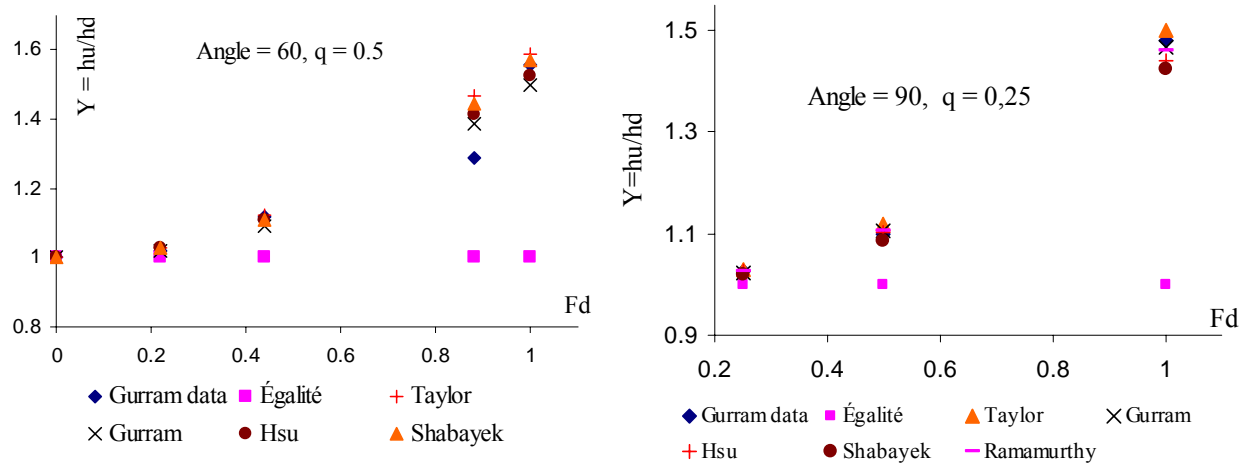


Figure 105 : Comparaison entre les expériences de Gurram et les modèles de confluence fluviale

Le tableau suivant donne les écarts entre chaque modèle pour un angle de 90°.

Gurram Angle = 60°					
Erreurs E	Erreurs T	Erreurs G	Erreurs H	Erreurs S	
0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	
-2.0%	1.0%	0.1%	0.7%	0.6%	
-10.7%	0.1%	-2.7%	-1.2%	-1.0%	
-22.5%	17.7%	6.4%	9.1%	10.8%	
-35.7%	3.5%	-3.5%	-1.9%	0.9%	

Gurram Angle =90°					
Erreurs E	Erreurs T	Erreurs G	Erreurs H	Erreurs S	Erreurs R
-2.4%	0.3%	-0.1%	0.0%	-0.5%	0.0%
-9.1%	1.7%	0.4%	0.2%	-1.2%	0.6%
-32.4%	2.0%	-0.8%	-2.7%	-3.8%	-1.4%

Tableau 15 : Comparaison des résultats expérimentaux de Gurram et des modèles de confluence fluviale pour des angles de 60° et 90°.

**e- Les résultats expérimentaux de Hsu**

Les résultats expérimentaux obtenus par Hsu (1998) sont confrontés aux résultats de simulation des modèles de la confluence fluviale. Les expériences ont été réalisées dans un canal rectangulaire avec un lit horizontal, et les longueurs des canaux u et L sont respectivement de 12 et de 4 m. La largeur de tous les canaux est de 0.155 m et différents angles de la jonction sont considérés : 30°, 45°, 60° et 90°.

La Figure 106 montre les résultats expérimentaux obtenus par Hsu, et les résultats simulés par les modèles de Shabayek, Hsu, Gurram et Taylor. Dans cette comparaison, le modèle de Shabayek donne aussi les meilleurs résultats de simulation par rapport aux résultats expérimentaux donnés.

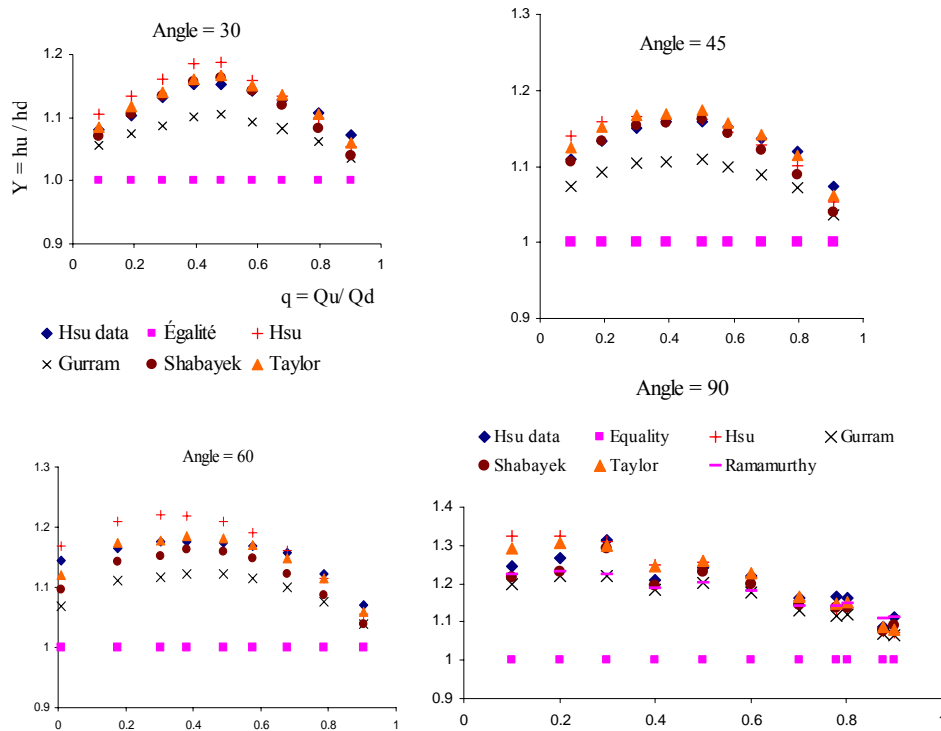


Figure 106 : Comparaison des résultats expérimentaux de Hsu et des modèles de confluence fluviale.

Angle = 60° Hsu data

Erreurs Égalité	Erreurs Hsu	Erreurs Gurram	Erreurs Shabayek	Erreurs Taylor
-12.6%	2.5%	-6.5%	-4.5%	-2.2%
-14.2%	4.5%	-4.5%	-2.0%	0.8%
-15.0%	4.5%	-4.9%	-2.1%	0.2%
-15.0%	4.2%	-4.4%	-1.3%	0.7%
-14.8%	3.5%	-4.4%	-1.3%	0.6%
-14.4%	2.1%	-4.6%	-1.9%	0.1%
-13.6%	0.4%	-5.0%	-3.1%	-0.8%
-10.9%	-0.7%	-4.1%	-3.3%	-0.7%
-6.6%	-1.6%	-3.1%	-3.2%	-1.1%

Tableau 16 : Comparaison des résultats expérimentaux de Hsu et des modèles de confluence fluviale pour un angle de 60°.

### 2.2. Comparaison générale des modèles de la confluence fluviale

Une comparaison plus générale entre les résultats obtenus par les différents modèles pour la confluence est considérée. Puisque les résultats obtenus par le modèle de Shabayek sont les plus proches des résultats expérimentaux, ce modèle est considéré comme étant la référence pour la comparaison avec les autres modèles. L'erreur relative entre les résultats obtenus par le modèle de Shabayek et les trois autres modèles est calculée.

L'erreur relative est définie comme:

$$\text{Erreur (\%)} = \frac{h_{\text{modèle}} - h_{\text{Shabayek}}}{h_{\text{Shabayek}}} \times 100 \tag{11.1}$$

$h_{\text{modèle}}$  est la hauteur d'eau calculée par l'un des modèles : le modèle de l'égalité des hauteurs d'eau, le modèle de Gurram ou le modèle de Hsu, et  $h_{\text{Shabayek}}$  est la hauteur d'eau calculée par le modèle de Shabayek.

Afin de faire une comparaison générale entre ces modèles, le nombre de Froude et le rapport des débits sont variés de 0,1 à 0,9. L'angle de la confluence est fixé à  $45^\circ$ , la pente du canal est 1‰, et le coefficient de rugosité de Manning est 0,0125. Les longueurs externes de la jonction et la largeur des canaux sont prises égales à l'unité. La Figure 107 montre l'erreur relative en fonction du nombre de Froude et du rapport des débits.

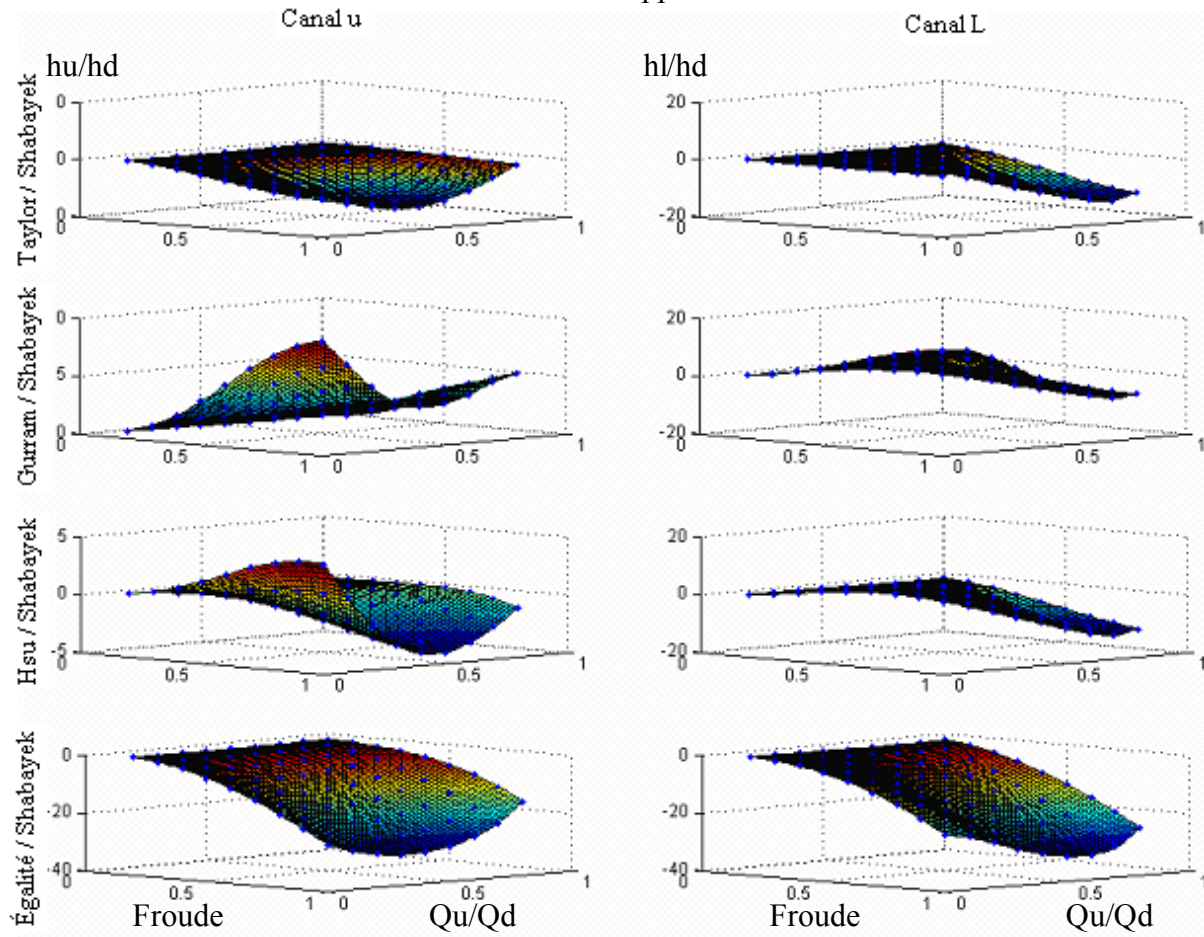


Figure 107 : L'erreur relative entre les hauteurs d'eau simulées par les différents modèles et celle de Shabayek.

Le Tableau 17 montre les valeurs minimale, moyenne et maximale de cette erreur. Nous notons que l'erreur dans le modèle de l'égalité des hauteurs augmente en augmentant le nombre de Froude, et ceci indépendamment du rapport des débits. Cette erreur dépasse 10% quand le nombre de Froude s'approche de 0,45 dans le canal u et 0,42 dans le canal L. De façon générale, le modèle de l'égalité des hauteurs tend à sous évaluer les hauteurs d'eau. Le modèle de Gurram tend à augmenter l'erreur comparée au modèle de Shabayek quand le nombre de Froude dans le canal u augmente et quand le rapport du débit dans le canal L est petit. L'erreur relative du modèle de Hsu par rapport au modèle de Shabayek est centrée à l'origine.

Erreurs (%), des modèles comparés au modèle de Shabayek		Canal u	Canal L
Égalité des hauteurs d'eau	Minimum	-30,7	-32,9
	Moyenne	-11,0	-12
	Maximum	-0,1	-0,2
Modèle de Taylor	Minimum	0,08	-6,9
	Moyenne	2,7	1,7
	Maximum	9,6	14,8
Modèle de Gurram	Minimum	-6,7	-13,6
	Moyenne	-2,5	-3,5
	Maximum	+0,0	1,3
Modèle de Hsu	Minimum	-4,4	-13,3
	Moyenne	-0,6	-1,6
	Maximum	4,2	9,1

Tableau 17 : L'erreur relative entre les hauteurs d'eau simulées par les différents modèles et celle de Shabayek.

### 3. Confluence torrentielle

#### 3.1. Les résultats expérimentaux de Rice

Les résultats expérimentaux obtenus par Rice (1985) sont confrontés aux résultats de simulation des modèles de la confluence torrentielle. Les expériences ont été réalisées pour différents angles de la jonction: 30°, 60° et 90°.

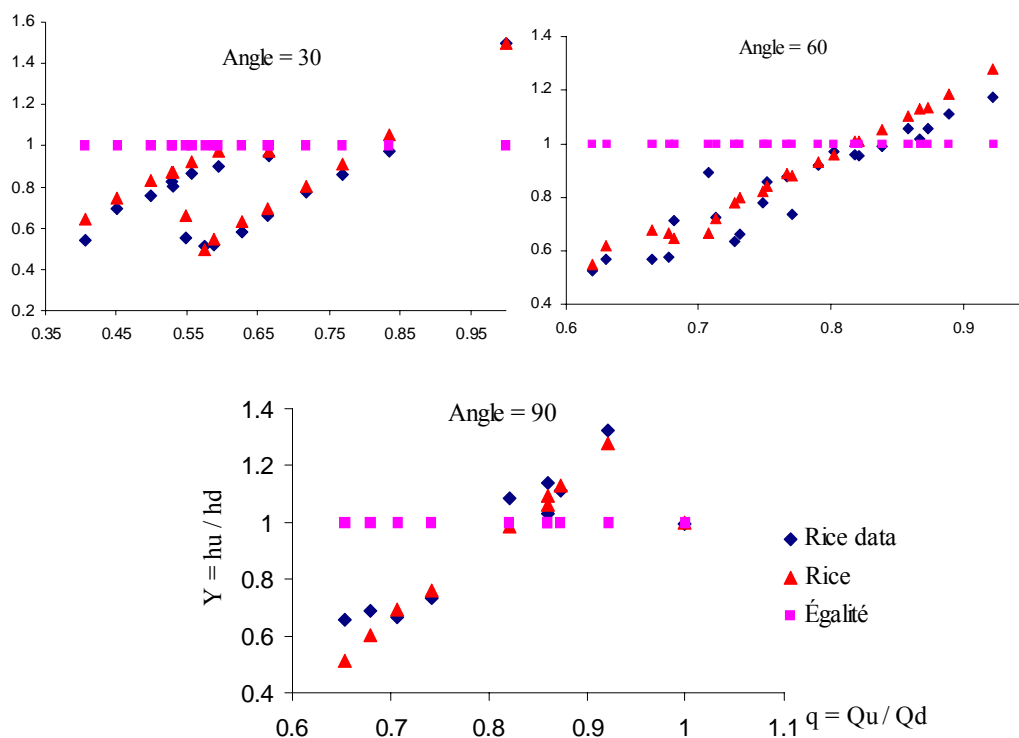


Figure 108 : Comparaison des expériences de Rice et des modèles de confluence torrentielle.

Rice (1985) Angle = 30		Rice (1985) Angle = 60		Rice (1985) Angle =90	
Erreurs Égalité	Erreurs Rice	Erreurs Égalité	Erreurs Rice	Erreurs Égalité	Erreurs Rice
2.0%	0.6%	89.3%	4.7%	53.0%	-21.1%
85.8%	20.9%	74.9%	8.7%	44.7%	-12.3%
43.7%	7.5%	74.6%	18.8%	49.8%	3.9%
31.2%	9.0%	73.7%	16.1%	36.4%	3.8%
21.3%	6.2%	40.7%	-8.4%	-7.6%	-8.6%
24.8%	9.6%	12.2%	-25.0%	-3.3%	5.7%
79.3%	18.1%	38.0%	-0.1%	-12.2%	-7.0%
15.5%	6.5%	57.7%	22.8%	-10.1%	1.7%
96.0%	-1.8%	51.2%	20.9%	-24.7%	-3.6%
92.7%	6.1%	28.0%	5.4%	0.4%	0.4%
11.0%	8.1%	16.5%	-1.9%		
72.2%	9.4%	14.1%	1.4%		
50.4%	4.7%	35.9%	20.0%		
5.0%	2.5%	8.2%	0.8%		
29.5%	4.6%	3.1%	-0.8%		
16.5%	6.4%	4.2%	5.1%		
2.9%	8.3%	4.4%	5.6%		
-33.3%	0.3%	0.9%	6.4%		
		-5.5%	4.3%		
		-1.7%	11.0%		
		-5.4%	7.7%		
		-10.3%	6.5%		
		-15.0%	8.5%		

Tableau 18 : Les écarts entre les expériences de Rice et les modèles de confluence torrentielle.

### 3.2. Les résultats expérimentaux de Hager

Les résultats expérimentaux obtenus par Hager (1989) sont confrontés aux résultats de simulation des modèles de la confluence torrentielle. Les expériences ont été réalisées pour différents angles de la jonction: 22.5° et 45° .

montre les résultats expérimentaux obtenus par Hager, et les résultats simulés par les modèles de la confluence torrentielle qui sont le modèle de l'égalité des hauteurs d'eau et le modèle de Rice. Dans cette comparaison, les résultats simulés à l'aide du modèle de Rice sont proches des résultats expérimentaux.

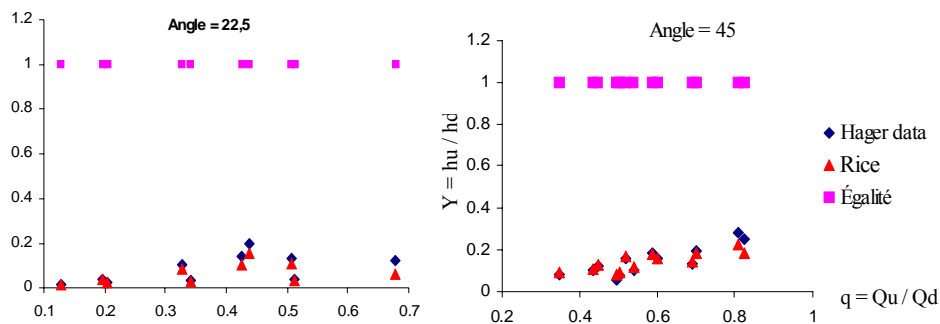


Figure 109 : Comparaison entre les expériences de Rice et des modèles de confluence torrentielle.



Hager Angle = 22,5°		Hager Angle = 45°	
Erreur Égalité	Erreur Rice	Erreur Égalité	Erreur Rice
440%	-23.1%	1104.9%	5.5%
497%	-22.5%	860.9%	3.2%
642%	-19.7%	725.1%	3.4%
397%	-21.6%	1566.7%	40.5%
500%	-20.7%	1219.1%	20.5%
606%	-24.2%	533.1%	5.7%
862%	-14.2%	878.3%	13.5%
1014%	-22.0%	430.9%	-2.9%
1319%	-5.8%	534.1%	0.1%
1554%	-11.4%	628.7%	0.6%
2288%	-6.3%	413.9%	-3.8%
2562%	-9.5%	251.0%	-21.7%
2635%	-14.2%	303.2%	-24.3%
4957%	12.5%		
5112%	-0.3%		
1963%	-29.1%		
3592%	-4.1%		
4253%	-2.6%		
1567%	-33.2%		
2733%	-16.6%		
741%	-47.0%		
2182%	-18.9%		
727%	-44.4%		
667%	-40.8%		
1317%	-20.9%		

Tableau 19 : Tableau des écarts entre les expériences de Hager et les modèles de confluence transitionnelle

#### 4. Confluence transitionnelle

Dans cette section, les résultats de simulation des modèles de confluence transitionnelle sont confrontés aux résultats expérimentaux de Hager (1989). Les modèles de la confluence sont ceux de Hager et de Gurram.

##### 4.1. Les résultats expérimentaux de Hager

Hager (1989) a effectué une étude expérimentale détaillée dans le cas d'un écoulement transitionnel avec trois angles de confluence :  $\delta = 22.5^\circ$ ,  $\delta = 45^\circ$  et  $\delta = 90^\circ$ . Les expériences ont été réalisées dans trois canaux rectangulaires avec un lit horizontal et de même largeur  $B = 0,096$  m.

La

Figure 110 montre les résultats expérimentaux obtenus par Hager, et les résultats simulés par les modèles de la confluence transitionnelle. Dans cette comparaison, c'est le modèle de l'égalité des hauteurs qui donne toujours la plus grande erreur comparée aux résultats expérimentaux. Les résultats obtenus par les deux modèles de Hager et de Gurram sont proches des résultats expérimentaux. Nous pouvons noter que les résultats du modèle de

l'égalité des hauteurs d'eau se trouvent tous sur l'axe des abscisses, puisque par ce modèle le rapport des hauteurs est toujours égal à 1.

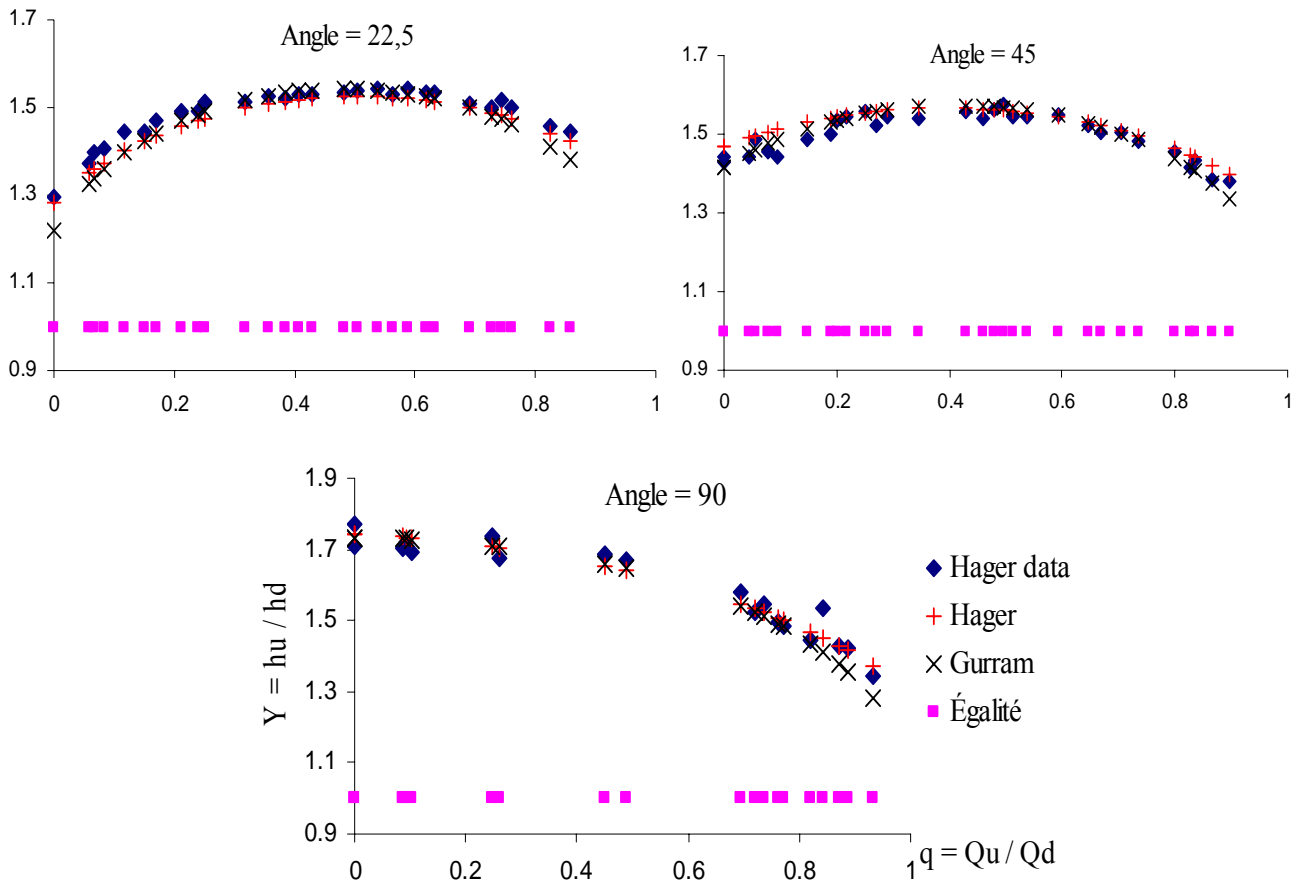


Figure 110 : Comparaison des résultats expérimentaux de Hager et des modèles de confluence transitionnelle.

Angle = 22,5			Angle = 45			Angle = 90		
Erreurs Égalité	Erreurs Hager	Erreurs Gurram	Erreurs Égalité	Erreurs Hager	Erreurs Gurram	Erreurs Égalité	Erreurs Hager	Erreurs Gurram
-22.9%	-1.0%	-6.1%	-30.0%	2.9%	-1.0%	-41.4%	2.2%	1.5%
-27.1%	-1.5%	-3.3%	-30.7%	1.8%	-2.0%	-43.6%	-1.6%	-2.3%
-28.5%	-3.0%	-4.5%	-30.7%	3.4%	0.6%	-41.2%	1.9%	1.6%
-28.9%	-2.3%	-3.4%	-32.7%	0.8%	-1.7%	-41.9%	0.8%	0.5%
-30.9%	-3.1%	-3.4%	-31.4%	3.4%	1.3%	-40.9%	2.4%	2.1%
-30.9%	-1.6%	-1.5%	-30.7%	4.9%	3.0%	-42.4%	-1.5%	-1.4%
-32.0%	-2.5%	-2.1%	-32.8%	2.8%	1.7%	-40.4%	1.6%	1.8%
-33.0%	-2.3%	-1.6%	-33.4%	2.7%	2.0%	-40.7%	-2.0%	-1.6%
-33.0%	-1.4%	-0.6%	-34.9%	0.6%	0.0%	-40.1%	-1.8%	-1.4%
-34.0%	-2.5%	-1.6%	-35.2%	0.4%	-0.1%	-36.7%	-2.0%	-2.5%
-34.0%	-1.0%	0.1%	-35.8%	-0.2%	-0.4%	-34.3%	0.8%	0.1%
-34.4%	-1.0%	0.1%	-34.4%	2.2%	2.1%	-35.3%	-1.3%	-2.2%
-34.3%	-0.4%	0.8%	-35.2%	1.1%	1.1%	-33.0%	1.1%	-0.1%
-34.6%	-0.7%	0.5%	-35.0%	1.7%	1.9%	-32.5%	1.4%	0.0%
-34.6%	-0.5%	0.7%	-35.8%	0.5%	0.9%	-30.7%	1.7%	-0.6%

-34.9%	-0.7%	0.4%	-35.1%	1.5%	1.9%	-34.7%	-5.3%	-7.9%
-35.0%	-0.9%	0.2%	-36.1%	-0.1%	0.3%	-30.0%	-0.1%	-3.7%
-35.1%	-1.1%	-0.2%	-36.5%	-0.8%	-0.4%	-29.6%	-0.4%	-4.5%
-34.6%	-0.4%	0.5%	-35.2%	1.0%	1.4%	-25.7%	1.8%	-4.9%
-35.2%	-1.5%	-0.8%	-35.3%	0.5%	0.9%			
-34.9%	-1.3%	-0.7%	-35.5%	-0.4%	-0.2%			
-34.9%	-1.5%	-1.0%	-34.4%	0.4%	0.3%			
-33.6%	-0.6%	-0.6%	-33.5%	1.2%	1.0%			
-33.3%	-0.9%	-1.3%	-33.5%	0.3%	-0.2%			
-34.1%	-2.4%	-2.9%	-32.5%	1.1%	0.3%			
-33.3%	-1.6%	-2.4%	-31.4%	0.5%	-1.2%			
-31.5%	-1.2%	-3.2%	-29.4%	2.2%	-0.1%			
-30.8%	-1.5%	-4.3%	-30.3%	0.5%	-1.9%			
			-27.8%	2.6%	-0.7%			
			-27.5%	1.4%	-3.1%			

Tableau 20 : Ecart entre les résultats expérimentaux de Hager et les modèles de confluence transitionnelle.

### 5. Défluence fluviale

Dans cette section, les résultats de simulation des modèles de défluence fluviale seront confrontés aux résultats expérimentaux de Sridharan (1966), de Ramamurthy (1990) et de Hsu (1998).

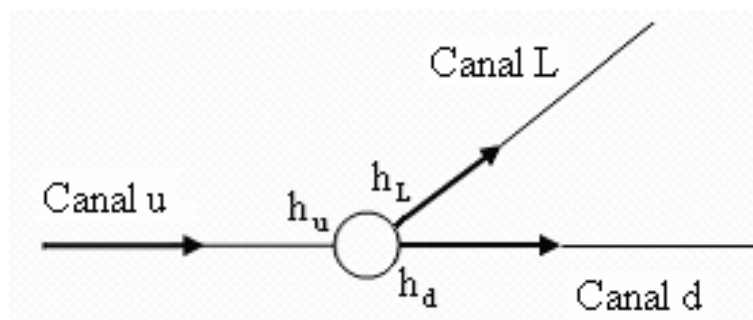


Figure 111 : Défluence fluviale

#### 5.1. Les résultats expérimentaux de Sridharan

Les résultats expérimentaux obtenus par Sridharan (1966), sont confrontés aux résultats de simulation des modèles de la défluence fluviale. Les expériences ont été réalisées pour un angle de jonction de 90°.

La Figure 112 montre les résultats expérimentaux obtenus par Sridharan, et les résultats simulés par les modèles de la défluence fluviale.

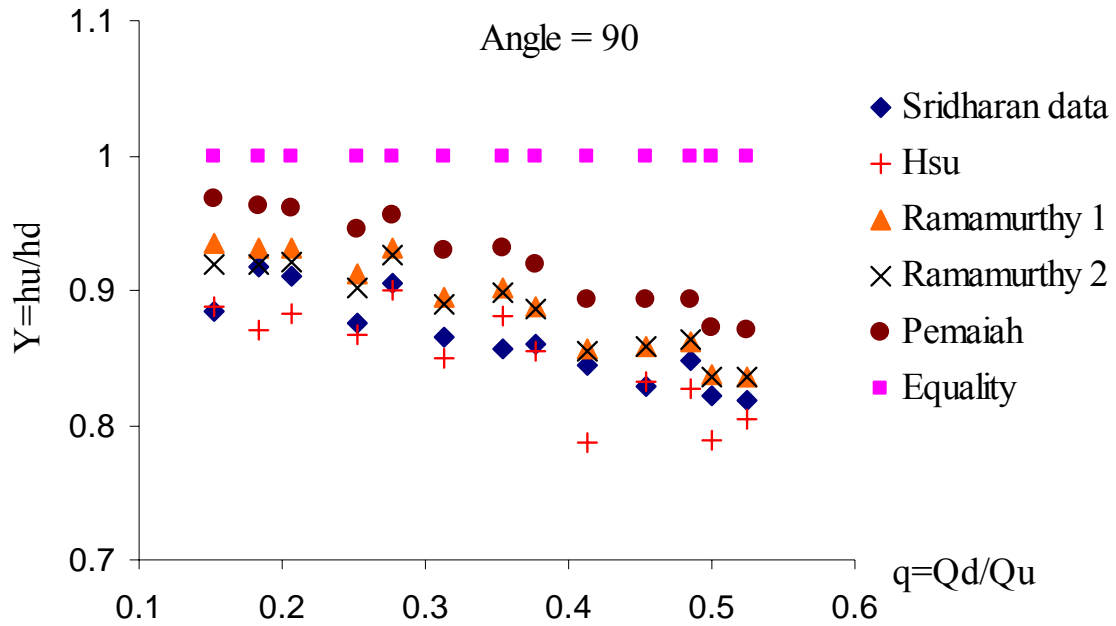


Figure 112 : Comparaison des résultats expérimentaux de Sridharan et des modèles de défluvence fluviale.

Erreurs Hsu	Erreurs Ramamurthy 1	Erreurs Ramamurthy 2	Erreurs Pemaiah	Erreurs Egalite
0.3%	5.6%	3.6%	9.0%	11.9%
-5.0%	1.7%	0.3%	5.0%	8.7%
-3.0%	2.4%	1.0%	5.5%	9.3%
-1.0%	4.2%	3.0%	7.7%	13.2%
-0.6%	2.9%	2.3%	5.5%	9.9%
-1.7%	3.6%	2.8%	7.2%	14.5%
2.8%	5.0%	4.6%	8.2%	15.3%
-0.8%	3.2%	2.8%	6.6%	15.2%
-6.9%	1.5%	1.2%	5.6%	17.4%
0.4%	3.5%	3.4%	7.4%	19.2%
-2.5%	1.6%	1.7%	5.2%	17.0%
-3.9%	2.1%	1.8%	6.1%	20.5%
-1.6%	2.3%	2.2%	6.2%	20.9%

Tableau 21 : Ecart entre les résultats expérimentaux de Sridharan et les modèles de défluvence fluviale.

### 5.2. Les résultats expérimentaux de Ramamurthy

Les résultats expérimentaux obtenus par Ramamurthy (1990) sont confrontés aux résultats de simulation des modèles de la défluvence fluviale. Les expériences ont été réalisées pour un angle de jonction égal à 90°.

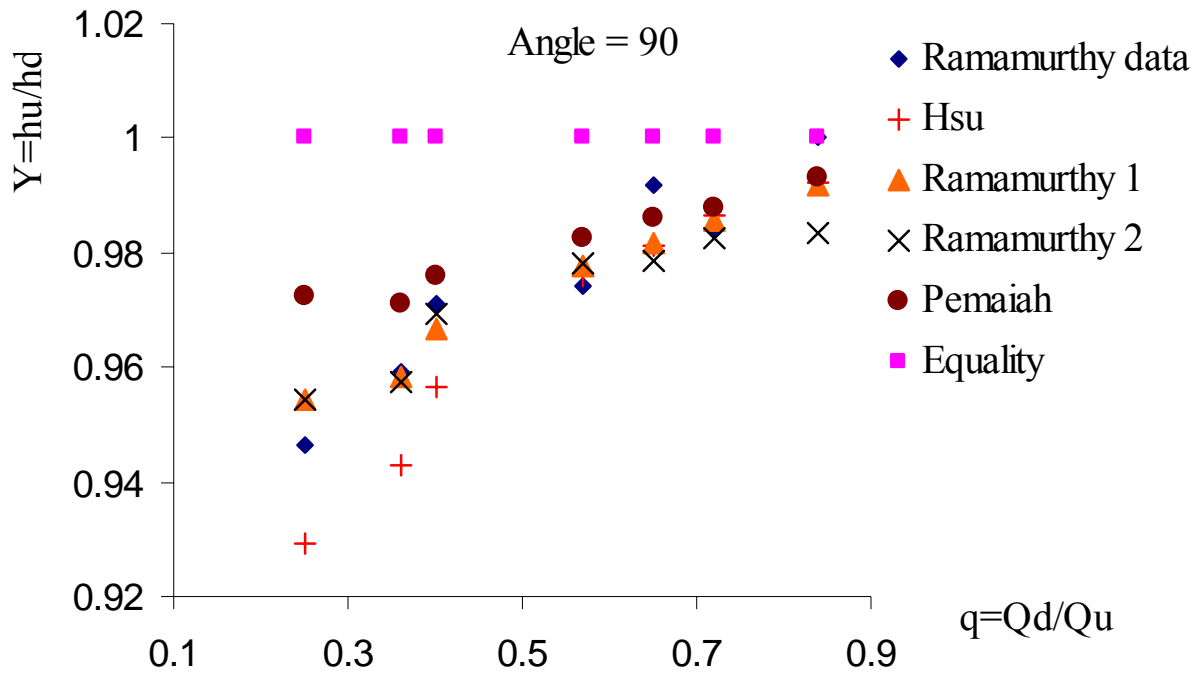


Figure 113 : Comparaison des résultats expérimentaux de Ramamurthy et des modèles de défluence fluviale.

La Figure 113 montre les résultats expérimentaux obtenus par Ramamurthy, et les résultats simulés par les modèles de la défluence fluviale.

Erreurs Hsu	Erreurs Ramamurthy 1	Erreurs Ramamurthy 2	Erreurs Pemaiah	Erreurs Egalite
-1.8%	0.9%	0.9%	2.7%	5.5%
-1.7%	-0.1%	-0.2%	1.2%	4.2%
-1.5%	-0.5%	-0.2%	0.5%	3.0%
0.2%	0.3%	0.4%	0.9%	2.6%
-1.1%	-1.0%	-1.3%	-0.6%	0.8%
0.2%	0.2%	-0.2%	0.4%	1.6%
-0.8%	-0.8%	-1.7%	-0.7%	0.0%

Tableau 22 : Ecart entre les résultats expérimentaux de Ramamurthy et les modèles de défluence fluviale.

### 5.3. Les résultats expérimentaux de Hsu

Les résultats expérimentaux obtenus par Hsu (2002) sont confrontés aux résultats de simulation des modèles de la défluence fluviale. Les expériences ont été réalisées pour un angle de jonction de 90°.

La Figure 114 montre les résultats expérimentaux obtenus par Hsu, et les résultats simulés par les modèles de Ramamurthy, Hsu, Pemaiah et l'égalité des hauteurs.

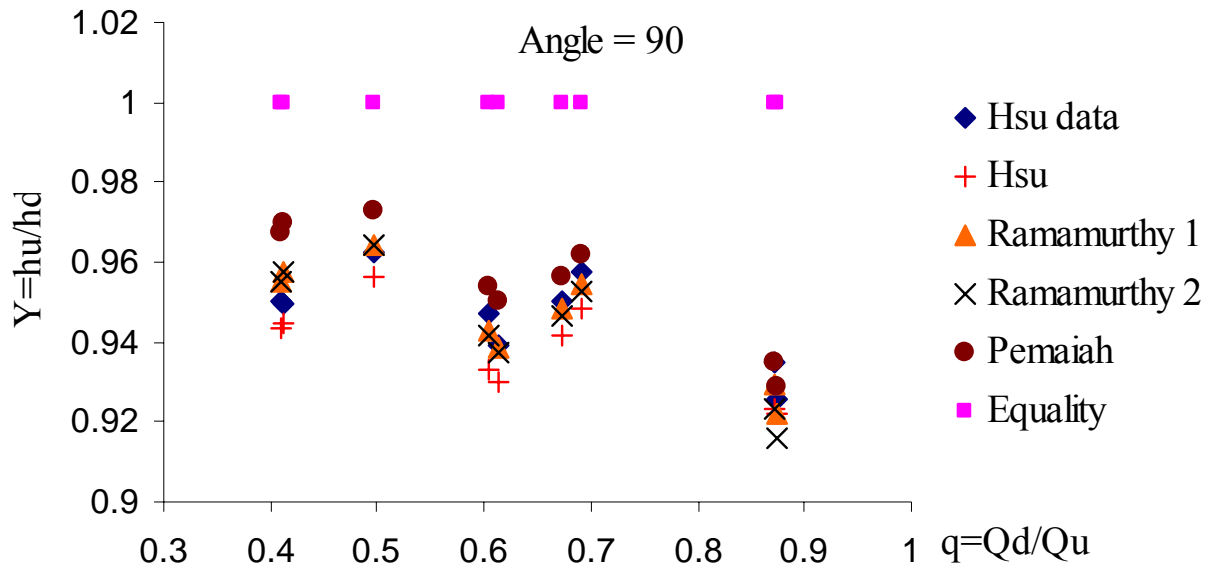


Figure 114 : Comparaison des résultats expérimentaux de Hsu et des modèles de défluvence fluviale.

Erreurs Hsu	Erreurs Ramamurthy 1	Erreurs Ramamurthy 2	Erreurs Pemaiah	Erreurs Egalite
-0.3%	-0.3%	-1.0%	0.4%	8.0%
-1.2%	-0.6%	-1.2%	0.0%	7.0%
-1.0%	-0.3%	-0.5%	0.4%	4.4%
-0.9%	-0.2%	-0.4%	0.6%	5.2%
-1.0%	-0.1%	-0.2%	1.1%	6.4%
-1.5%	-0.5%	-0.6%	0.7%	5.5%
-0.7%	0.2%	0.2%	1.1%	3.8%
-0.5%	0.8%	0.8%	2.1%	5.2%
-0.7%	0.5%	0.5%	1.8%	5.2%

Tableau 23 : Ecart entre les résultats expérimentaux de Hsu et les modèles de défluvence fluviale.

## 6. Conclusion

La confrontation entre les résultats simulés et les résultats expérimentaux, dans le cas d'une confluence fluviale, d'une confluence torrentielle et d'une confluence transitionnelle, ainsi que dans le cas d'une défluvence fluviale a donné les conclusions suivantes :

- Les résultats obtenus à l'aide du modèle « Égalité des hauteurs d'eau » le plus utilisé dans les logiciels hydrauliques sont très loin des résultats expérimentaux et ceci dans tous les cas étudiés.
- Les résultats obtenus à l'aide de différents modèles basés sur la conservation de la quantité de mouvement sont satisfaisants par comparaison aux résultats expérimentaux, avec un écart faible entre les résultats simulés et les résultats expérimentaux.

- 
7. Pour le cas d'une confluence fluviale, le modèle de Shabayek est le modèle le plus correct, suivi des modèles de Hsu et de Gurram.
  8. Le modèle de Ramamurthy a été développé pour une confluence fluviale et pour un angle de jonction de  $90^\circ$ , et les résultats obtenus à l'aide de ce modèle sont très satisfaisants par comparaison aux résultats expérimentaux pour un angle de jonction de  $90^\circ$ . Pour les autres angles de jonction, ce modèle n'est cependant pas valide.
  9. Pour le cas d'une confluence torrentielle, les modèles de Greated et de Hager trouvent une relation entre les deux hauteurs amont à la jonction. Les résultats expérimentaux se trouvent entre les deux hauteurs aval et amont.
  10. Les résultats simulés à l'aide du modèle de Rice dans le cas de la confluence torrentielle sont très satisfaisants par comparaison aux résultats expérimentaux de Rice. Les résultats simulés à l'aide du modèle de l'égalité des hauteurs d'eau sont loin de ces résultats expérimentaux.
  11. Pour le cas de la défluence, les trois modèles de Pemaiah, de Ramamurthy et de Hsu donnent des résultats satisfaisants par comparaison aux résultats expérimentaux étudiés. Parmi ces trois modèles, le modèle de Hsu est le plus correct. Dans tous les cas étudiés, le modèle « Égalité des hauteurs d'eau » tend à surestimer les hauteurs d'eau, et ces hauteurs sont très différentes des résultats expérimentaux.

En conclusion finale, nous proposons les recommandations suivantes :

- g. Ne pas utiliser le modèle « Égalité des hauteurs d'eau » et ceci dans les deux cas de la jonction : confluence et défluence.
- h. Pour la confluence fluviale, il est souhaitable d'utiliser le modèle de Shabayek, puisqu'il est le plus exact par comparaison aux résultats expérimentaux, malgré la difficulté de son implémentation.
- i. Pour la défluence fluviale, les trois modèles de Pemaiah, de Ramamurthy et de Hsu sont semblables.
- j. Pour le cas d'une confluence torrentielle et d'une défluence torrentielle, le modèle développé par Rice a été validé expérimentalement et a donné des résultats satisfaisants.

## Chapitre 2 : Comparaison du couplage des modèles de jonctions avec les équations de BSV dans le cas transitoire

Dans ce chapitre, nous donnons les résultats de simulations numériques de l'écoulement à travers une jonction. On utilise le schéma numérique de Roe avec correction entropique pour résoudre le système de Barré de Saint-Venant.

Le modèle de jonctions utilisé est celui de Garcia-Navarro (1992).

Deux cas de la jonction sont considérés : la jonction est une confluence ou une défluence.

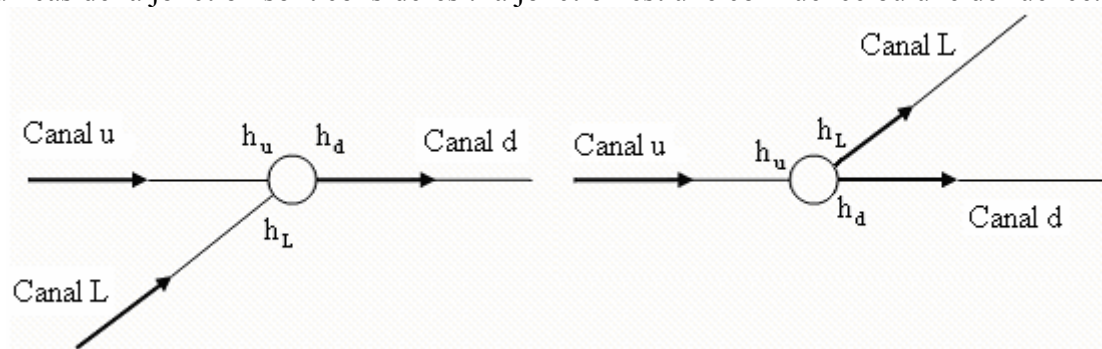


Figure 115: Jonction : (a) confluence; (b) défluence.

Dans les deux cas de la jonction, nous notons le canal u, le canal principal situé avant la jonction, le canal L, le canal branché au canal principal, ce canal est situé avant la jonction dans le cas d'une confluence et après dans le cas d'une défluence. Le canal d désigne le canal principal situé après la jonction.

### 1. Simulation numérique à travers une confluence

Afin de comparer les différents résultats obtenus à partir de différents modèles de la confluence, nous considérons le type de confluence fluviale.

Dans le cas d'une confluence fluviale, nous traitons deux exemples :

- le premier exemple se compose de trois canaux rectangulaires ayant la même largeur,
- le second cas se compose de trois canaux dont la largeur du canal d est égale à la somme des largeurs des canaux u et L.

Ces deux exemples sont intéressants à traiter pour distinguer l'influence de la largeur du canal d dans la simulation de l'écoulement avec les différents modèles. Dans les deux exemples, les modèles de la confluence fluviale : le modèle de l'égalité des hauteurs d'eau, le modèle de Gurrarn, de Hsu, et de Shabayek sont considérés à la jonction.

Les deux types de l'écoulement sont considérés : écoulements stationnaire et transitoire.

Le cas transitoire est assuré en variant les débits d'eau dans les canaux u et L, ou en variant la hauteur imposée à l'aval du canal d.

Dans la simulation de l'écoulement stationnaire, les conditions initiales : hauteur d'eau et débit, sont supposées uniformes dans les canaux.



Dans la simulation de l'écoulement transitoire, les conditions initiales sont les solutions numériques trouvées dans le cas stationnaire.

Dans tous les exemples de la confluence :

- le pas de temps du schéma de Roe est calculé selon le critère de stabilité du CFL,
- l'angle de la confluence est égal à  $45^\circ$ ,
- le pas d'espace constant est  $\Delta x = 10$  m.

### 1.1. Exemple 1 : confluence fluviale avec trois canaux de même largeur

Les propriétés des canaux sont énumérées dans le Tableau 24. Le cas stationnaire pour ce problème est obtenu en fixant les débits à l'amont des canaux u et L, et la hauteur à l'aval du canal d. Les débits amont sont  $Q = 30 \text{ m}^3/\text{s}$  dans le canal u,  $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$  dans le canal L, alors que la hauteur aval dans le canal d, est supposée uniforme et égale à 1.69 m (la hauteur normale). L'état initial du cas stationnaire est un écoulement uniforme avec une hauteur h, correspondant à la hauteur normale dans tous les canaux, un débit  $Q = 30 \text{ m}^3/\text{s}$  dans le canal u,  $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$  dans le canal L et  $Q = 50 \text{ m}^3/\text{s}$  dans le canal d.

Canal	Longueur (meters)	Pente	Largeur (mètres)	Manning
Canal u	600	0.001	10	0.0141
Canal L	600	0.001	10	0.0138
Canal d	600	0.001	10	0.0125

Tableau 24 : Propriétés des canaux pour l'exemple 1

La

Figure 116 montre que les résultats obtenus par le modèle de l'égalité des hauteurs, ne sont pas similaires à ceux obtenus par les différents modèles de la confluence fluviale. Les débits d'eau sont les mêmes pour tous les modèles, mais les hauteurs d'eau sont différentes, et l'erreur de la hauteur simulée par le modèle de l'égalité des hauteurs est au moins égal à 30% par rapport aux hauteurs simulées par les autres modèles. Les hauteurs simulées par les modèles de Shabayek et Hsu sont bien similaires (erreur inférieure à 2%), et la hauteur simulée par le modèle de Gurram ne dépasse pas de 5% celle obtenue par Shabayek.

Ces modèles sont aussi comparés dans le cas où l'écoulement est transitoire.

Différents cas sont considérés :

- le premier cas consiste à faire varier les débits à l'amont des canaux u et L et à garder la hauteur aval constante dans le canal d,
- le deuxième cas, les débits à l'amont des canaux u et L sont gardés constants et la hauteur aval constante dans le canal d sera variée.

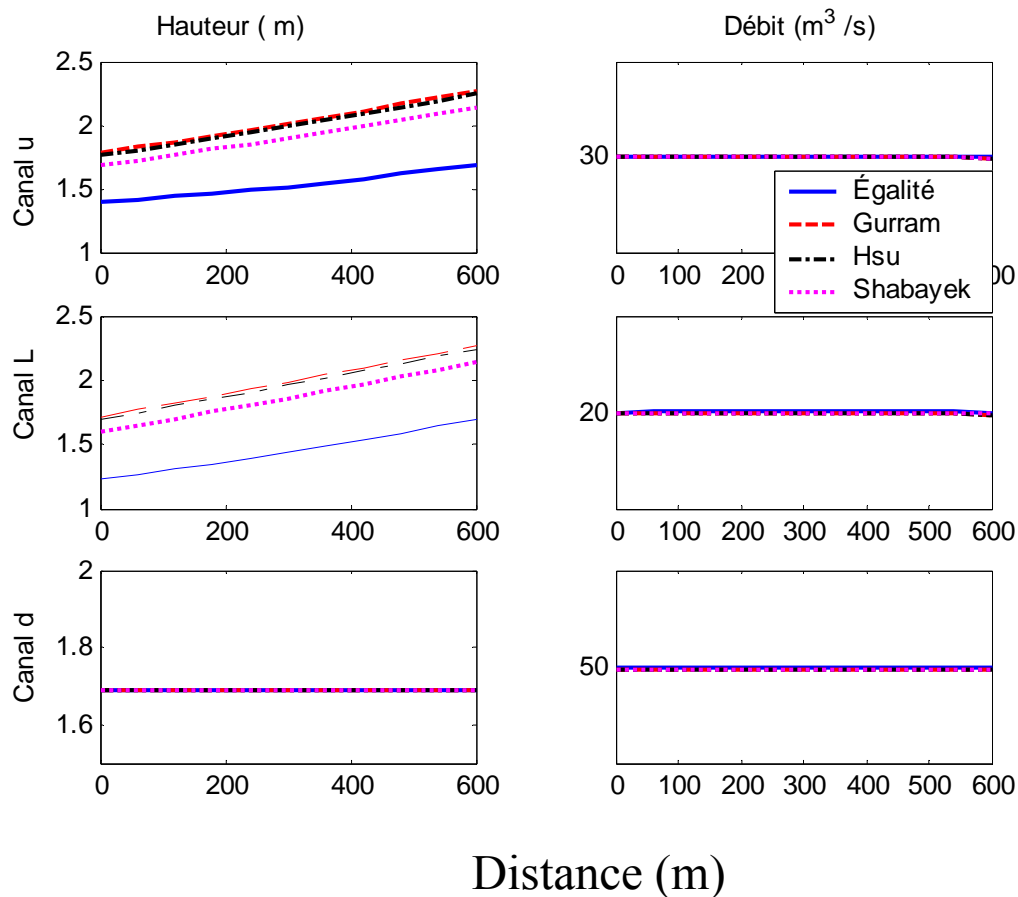


Figure 116 : Variation de la hauteur d'eau et du débit le long des trois canaux avec les différents modèles.

**a- Variation du débit en fonction du temps : Cas 1**

Les débits à l’amont des canaux u et L sont augmentés respectivement de la valeur 30 à 60 (m<sup>3</sup>/s) et de 20 à 40 (m<sup>3</sup>/s). La hauteur d’eau à la sortie du canal d est maintenue constante. La Figure 117 montre la variation temporelle de la hauteur et du débit de la simulation numérique au milieu de chaque canal. Il est remarquable que les résultats obtenus par les trois modèles : Shabayek, Hsu et Gurram, pour la hauteur d’eau et le débit ne montrent pas de différence notable. En effet, l’erreur entre ces trois modèles ne dépasse pas 7.6%. Cependant, les résultats obtenus par le modèle de l’égalité des hauteurs d’eau sont très différents par rapport aux autres résultats, et l’erreur atteint 29.4 % pour le débit, et dépasse de 21% pour la hauteur.

Erreurs (%) comparé à Modèle de Shabayek	Hauteurs d’eau			Débits		
	Canal u	Canal L	Canal d	Canal u	Canal L	Canal d
Egalité	20	21	13,9	9,9	29,4	28,8
Gurram	4,9	5,3	3,3	2,3	7,6	6,6
Hsu	3,3	3,7	1,8	1,8	3,1	4

Tableau 25 : L'erreur relative entre le modèle de Shabayek et les autres modèles.

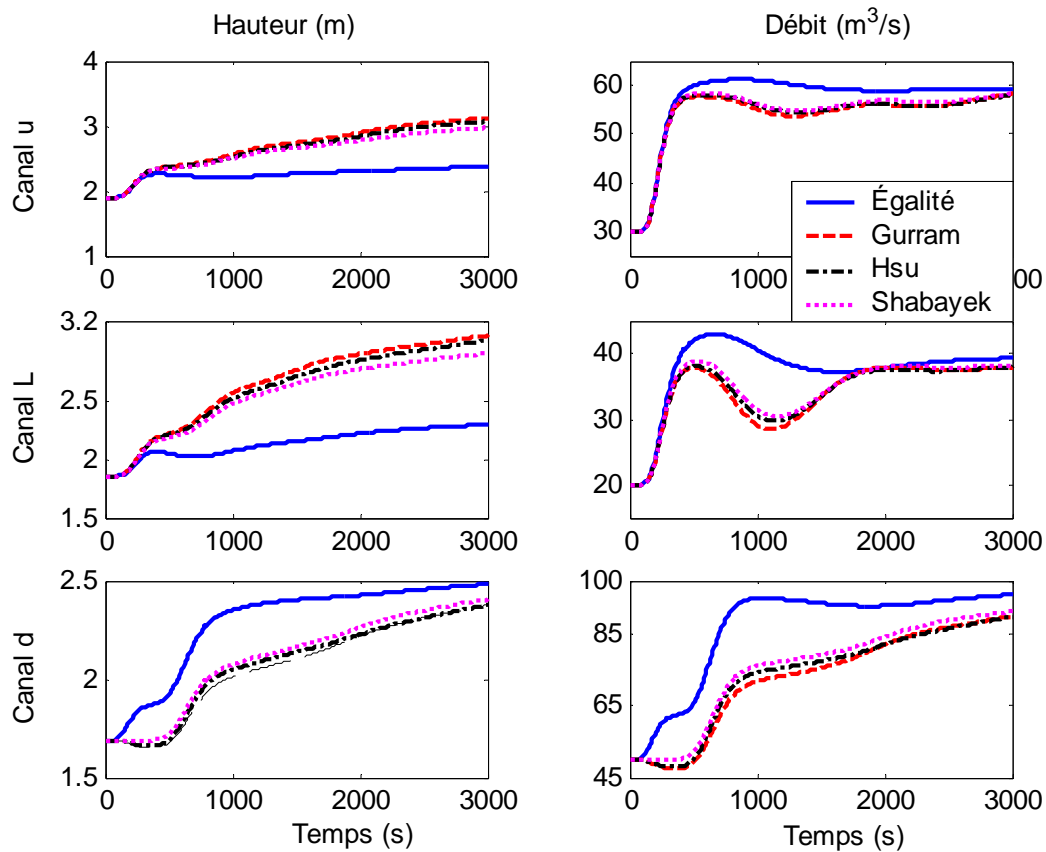


Figure 117 : La hauteur d’eau et le débit au milieu de chaque canal en fonction du temps pour l’exemple 1 cas 1.

**b- Variation de la hauteur en fonction du temps : Cas 2**

Dans cet exemple, nous augmentons abruptement la hauteur aval du canal d de la hauteur normale à la valeur 3 m, et nous gardons constants les débits à l’amont des canaux d’apport u et L. Les résultats de la simulation numérique au milieu de chaque canal sont montrés dans la Figure 118. En effet, cette figure montre la variation temporelle dans l’intervalle de temps en secondes [0 ; 3000], de la hauteur et du débit de la simulation numérique au milieu de chaque canal. Il est remarquable que les résultats obtenus par les trois modèles : Shabayek, Hsu et Gurram, pour la hauteur d’eau ne montrent pas de différence notable (erreur inférieure à 4%). Par contre pour les débits, on atteint 18.8%. Cependant, les résultats obtenus par le modèle de l’égalité des hauteurs d’eau sont très différents par rapport aux autres résultats, et l’erreur atteint 78 % pour le débit, et dépasse de 15% pour la hauteur.

Erreurs (%) comparé à Modèle de Shabayek	Hauteurs d’eau			Débits		
	Canal u	Canal L	Canal d	Canal u	Canal L	Canal d
Égalité	13.6	15.3	9	14.9	27	78.1
Gurram	3.6	3.9	1.9	3.9	8.1	18.8
Hsu	2.6	3	1.5	2.5	5.3	14.6

Tableau 26 : L'erreur relative entre le modèle de Shabayek et les autres modèles.

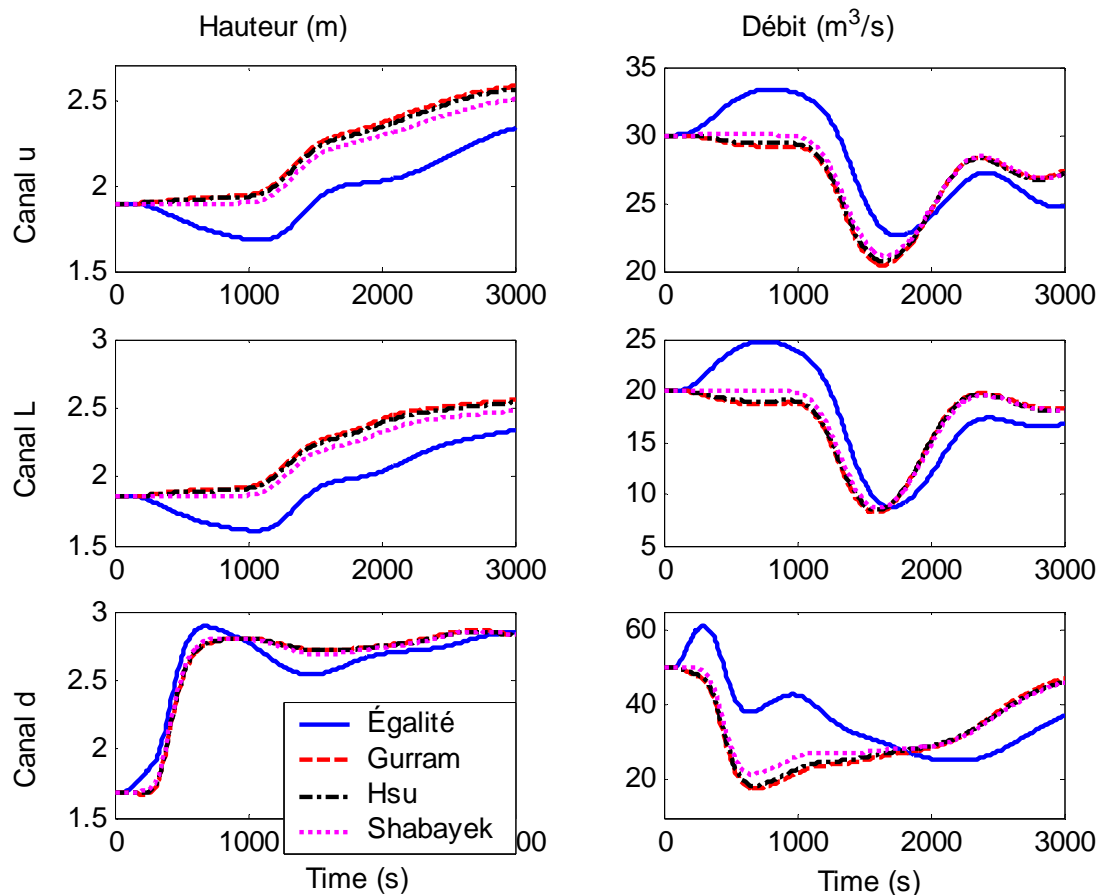


Figure 118 : La hauteur d'eau et le débit au milieu de chaque canal en fonction du temps pour l'exemple 1 cas 2.

**1.2. Exemple 2 : confluence fluviale avec largeur aval égale à la somme des largeurs amont et latérale**

Les propriétés des canaux pour cet exemple sont énumérées dans le Tableau 27. La largeur du canal aval (d) est égale à la somme des largeurs des canaux situés avant à la jonction (u et L). Dans cet exemple, nous partons des conditions initiales pour un écoulement uniforme dans les trois canaux : une hauteur  $h = 1,42$  m dans les trois canaux et un débit  $Q = 50 \text{ m}^3 / \text{s}$  dans les canaux u et L et  $Q = 100 \text{ m}^3 / \text{s}$  dans le canal d. Ces conditions nous conduisent à chercher l'état stationnaire de l'écoulement ; puis, nous varions les débits à l'amont des canaux u et L pour simuler le cas transitoire de l'écoulement.

Dans la simulation numérique avec le schéma de Roe, un pas d'espace constant  $\Delta x = 200$  m est adopté, et le nombre CFL est égal à l'unité. La Figure 119 montre la variation temporelle de la hauteur et du débit de la simulation numérique au milieu de chaque canal. Il est remarquable que les résultats numériques calculés par les différents modèles de la confluence soient tous semblables. En effet quand la largeur du canal aval est égale à la somme des largeurs des canaux amonts à la jonction, toute la quantité d'eau provenant des deux canaux amont peut continuer son chemin sans changement de la hauteur d'eau.

Canaux	Longueurs (mètres)	Pentes	Largeurs (mètres)	Manning	Conditions aux limites extérieures pour le cas transitoire
u	5000	0.0002	50	0.025	$Q_{m^3/s} = \begin{cases} \frac{1}{20}t + 50 & t \leq 2000 \\ -\frac{1}{20}t + 250 & 2000 < t \leq 4000 \\ 50 & t > 4000 \end{cases}$
L	5000	0.0002	50	0.025	$Q_{m^3/s} = \begin{cases} \frac{1}{20}t + 50 & t \leq 2000 \\ -\frac{1}{20}t + 250 & 2000 < t \leq 4000 \\ 50 & t > 4000 \end{cases}$
d	5000	0.0002	100	0.025	

Tableau 27 : Propriétés des canaux pour l'exemple 2.

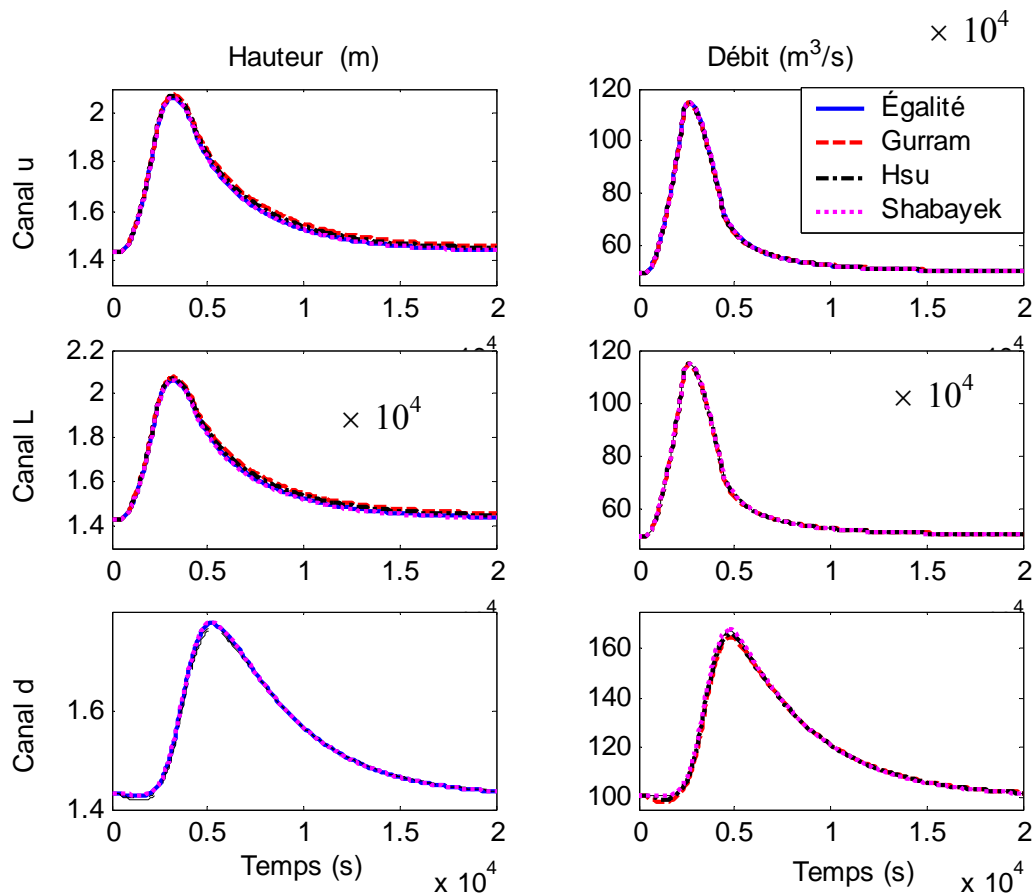


Figure 119 : La hauteur d'eau et le débit au milieu de chaque canal en fonction du temps pour l'exemple 2.

## 2. Simulation numérique à travers une déflueuse

Nous rappelons que dans le cas de la déflueuse, nous désignons par canal u, le canal principal situé avant la jonction, le canal L, le canal branché au canal principal situé après la jonction, et le canal d, le canal principal situé après la jonction.

Afin de comparer les différents résultats obtenus à partir de différents modèles de la déflueuse, nous considérons deux exemples de déflueuse.

Dans le premier cas, l'écoulement est fluvial à la jonction dans les trois canaux, et dans le second cas, l'écoulement est torrentiel dans les trois canaux.

Dans les deux cas d'écoulement, le cas stationnaire est assuré en fixant un débit constant à l'amont du canal u, et une hauteur constante à l'aval des canaux L et d.

Le cas transitoire est assuré en variant le débit d'eau avec le temps.

Dans les deux cas stationnaire et transitoire, les conditions initiales sont uniformes dans les trois canaux.

Le pas de temps est calculé selon le critère de stabilité CFL, et l'angle de la jonction est considéré égal à  $45^\circ$ , et un pas d'espace constant  $\Delta x = 10$  m est adopté.

### 2.1. Exemple 4 : déflueuse fluviale avec trois canaux de même largeur

Dans cet exemple, nous considérons trois canaux de même longueur 400 m, et de même largeur 10 m. Les pentes sont égales à 1‰ et le coefficient de Manning est 0,009. La hauteur d'eau initiale est supposée uniforme et égale à 2 m. Dans le canal u, le débit est égal à  $Q_u = 50 \text{ m}^3/\text{s}$ , dans le canal L, le débit est égal à  $Q_L = 25 \text{ m}^3/\text{s}$ , et dans le canal d, le débit est égal à  $Q_d = 25 \text{ m}^3/\text{s}$ .

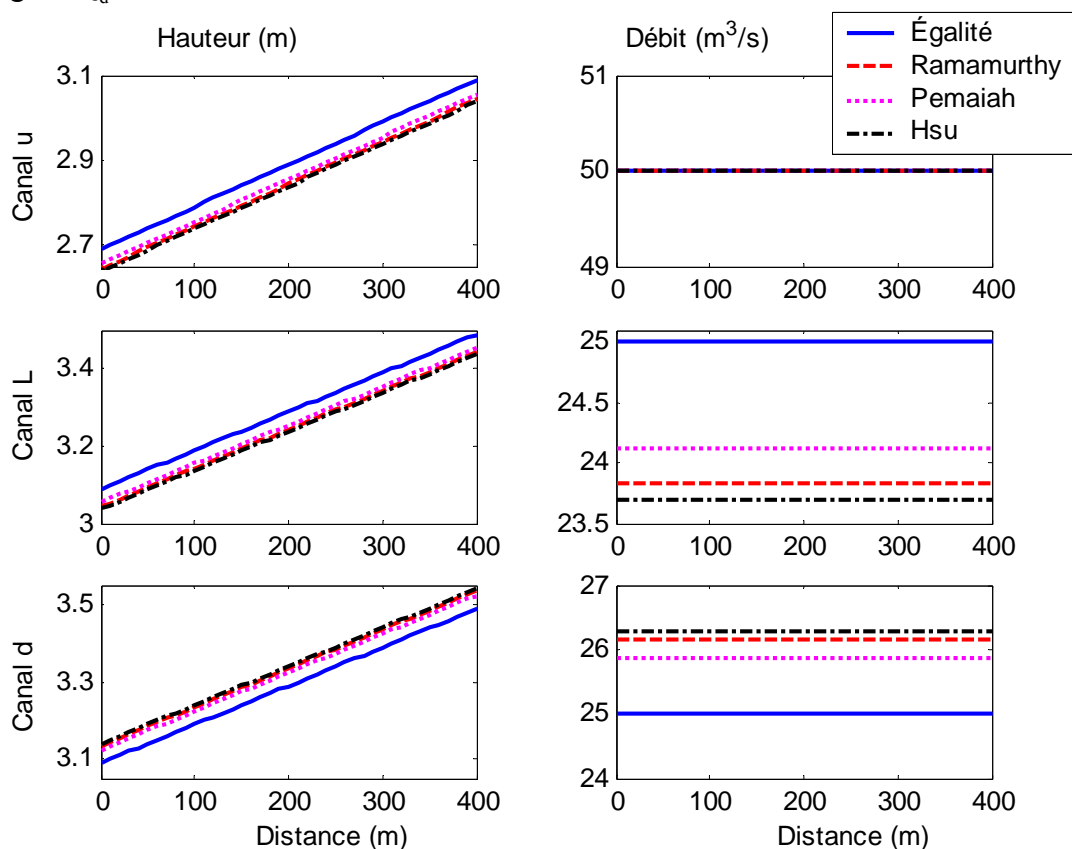


Figure 120 : Variation de la hauteur d'eau et du débit le long des trois canaux avec les différents modèles de la déflueuse pour l'exemple 4.

La Figure 120 montre les résultats obtenus par les modèles de la déflueuse : Hsu, Ramamurthy, Pemaiah et le modèle de l'égalité des hauteurs. On peut noter que, dans ce cas, le débit partant dans le canal d doit être plus important que celui partant dans le canal L, et ceci est dû à l'angle de la déflueuse. Or, en utilisant le modèle de l'égalité des hauteurs, nous ignorons l'effet de cet angle, et nous remarquons que c'est le même débit qui se dirige dans les deux canaux d et L. Les autres modèles de la déflueuse respectent cette propriété, et donnent tous des résultats presque similaires.

Le cas transitoire est assuré en augmentant le débit dans le canal u de  $Q_u = 50 \text{ m}^3/\text{s}$  à  $Q_u = 100 \text{ m}^3/\text{s}$ . La Figure 121 montre la variation temporelle de la hauteur et du débit de la simulation numérique au milieu de chaque canal. Il est remarquable que les résultats obtenus par les trois modèles : Ramamurthy, Hsu et Pemaiah, pour la hauteur d'eau et le débit ne montrent pas de différence notable. En effet, l'erreur entre ces trois modèles ne dépasse pas 6.2%, tandis que les résultats numériques simulés à l'aide du modèle de l'égalité des hauteurs à la jonction montrent une erreur de 28% pour le débit.

Erreurs (%) comparé à Modèle de Ramamurthy	Hauteurs d'eau			Débits		
	Canal u	Canal L	Canal d	Canal u	Canal L	Canal d
Egalité	7.3	6.4	1.3	0.86	28.1	27.6
Pemaiah	1.9	1.5	0.7	0.7	6.2	5.4
Hsu	0.2	0.2	0.3	0.1	0.6	0.5

Tableau 28 : L'erreur relative entre le modèle de Ramamurthy et les autres modèles.

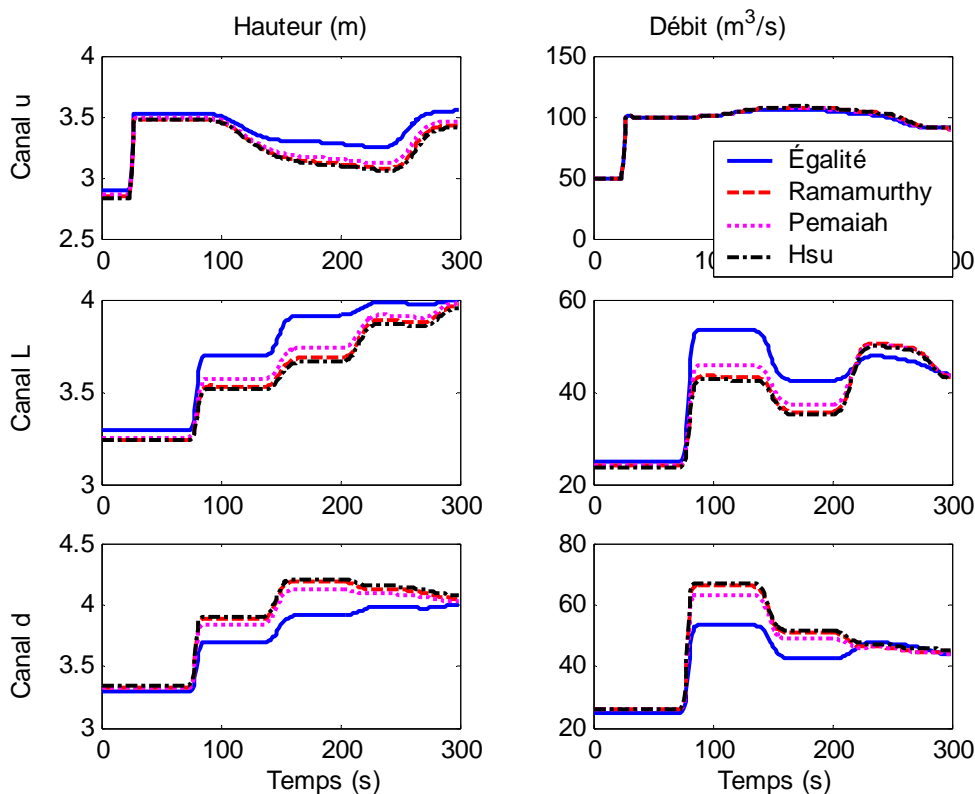


Figure 121 : La hauteur d'eau et le débit au milieu de chaque canal en fonction du temps pour l'exemple 4.

**2.2. Exemple 5 : défluece torrentielle avec trois canaux de même largeur**

Dans cet exemple, les paramètres des canaux sont ceux de l'exemple précédent. La hauteur d'eau initiale est supposée uniforme et égale à 2 m. Dans le canal u, le débit est égal à  $Q_u = 3 \text{ m}^3/\text{s}$ , dans le canal L, le débit est égal à  $Q_L = 1.5 \text{ m}^3/\text{s}$ , et dans le canal d, le débit est égal à  $Q_d = 1.5 \text{ m}^3/\text{s}$ . Le cas stationnaire est simulé en fixant le débit d'eau dans le canal u et les deux hauteurs normales dans le canal L et d. La Figure 1232 montre la solution obtenue pour le cas stationnaire pour la hauteur d'eau et le débit. Dans cette simulation, nous remarquons que le débit d'eau n'est pas conservé avec le modèle de l'égalité des hauteurs d'eau, du fait que la hauteur imposée à l'aval de la jonction n'est pas la hauteur qui doit transférée et le débit calculé avec la méthode des caractéristiques dépasse le débit réel.

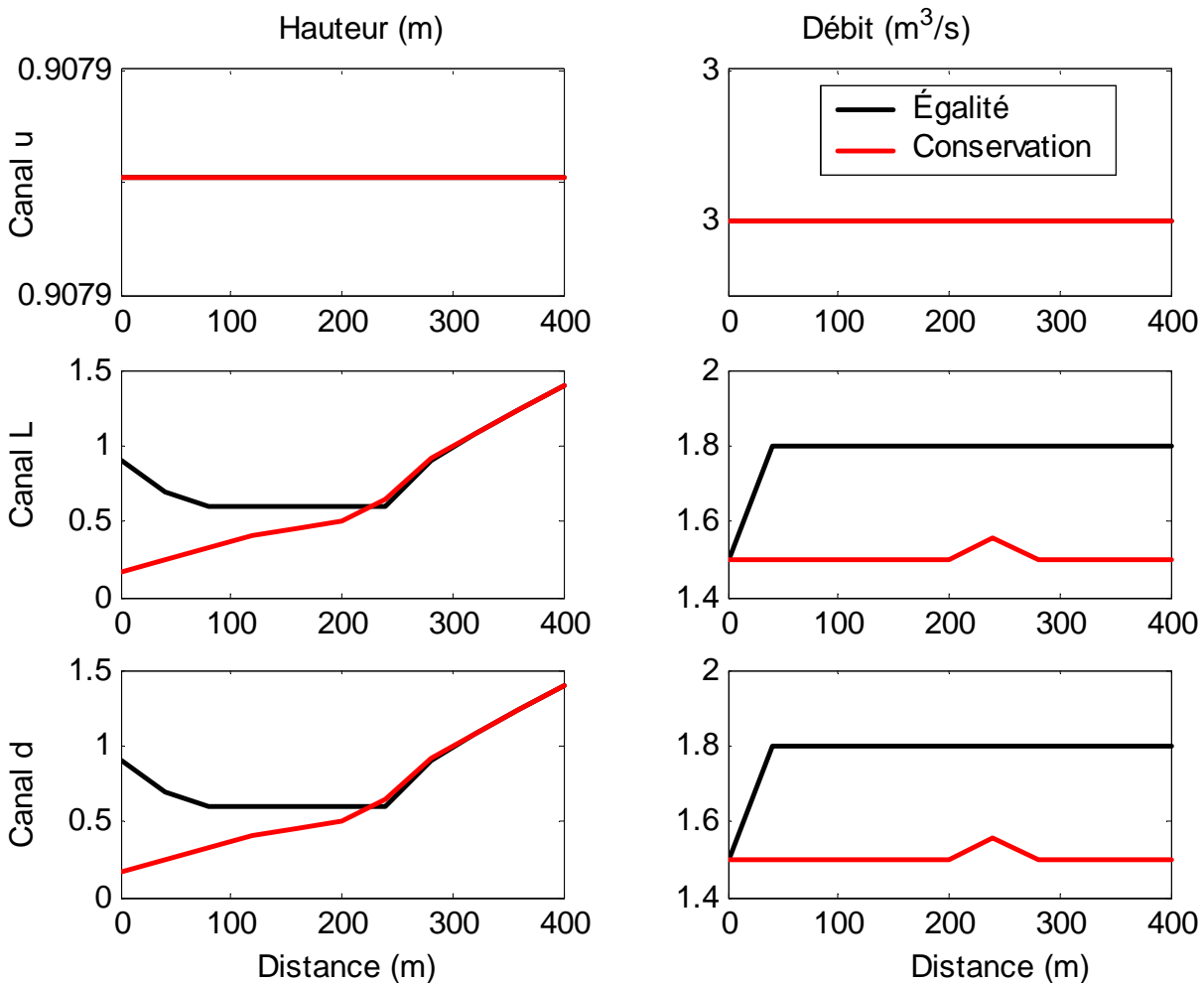


Figure 122 : Défluece torrentielle, cas stationnaire

La Figure 123 montre la variation temporelle de la hauteur et du débit de la simulation numérique au milieu de chaque canal.



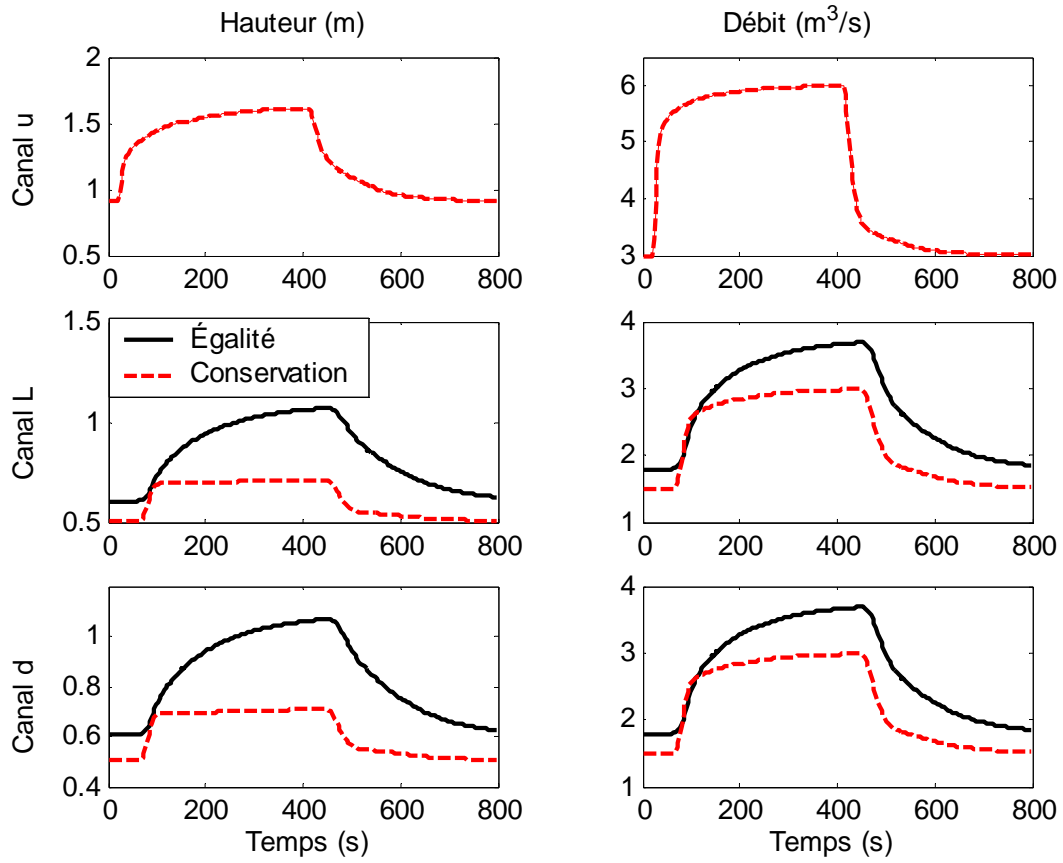


Figure 123 : La hauteur d'eau et le débit au milieu de chaque canal en fonction du temps pour l'exemple 5.

### 3. Conclusion

La simulation numérique de l'écoulement dans des réseaux contenant des jonctions : confluence et défluence, et ceci pour plusieurs types de l'écoulement : fluvial et torrentiel, à l'aide du schéma numérique de Roe a donné les conclusions suivantes :

- Les résultats obtenus à l'aide du modèle « Égalité des hauteurs d'eau » le plus utilisé dans les logiciels hydrauliques, et dans les récentes publications, sont très différents de ceux obtenus par les modèles basés sur la conservation de la quantité de mouvement.
- Les résultats obtenus à l'aide de différents modèles basés sur la conservation de la quantité de mouvement, sont très proches et ne présentent pas de différence remarquable.
- Pour le cas de la confluence, le modèle de Shabayek est très compliqué à implémenter et présente des difficultés dans la résolution non linéaire de ce système. De plus, les résultats obtenus par ce modèle sont similaires à ceux obtenus par les autres modèles.

En conclusion finale, nous proposons les recommandations suivantes :

- Ne pas utiliser le modèle « Égalité des hauteurs d'eau », et ceci dans les deux cas de la jonction : confluence et défluence.
- Pour la confluence, vu la complexité du modèle de Shabayek, les résultats obtenus par les modèles de Gurram et de Hsu sont proches de ceux obtenus par Shabayek. Il n'est donc pas indispensable d'utiliser ce modèle. Il peut être remplacé par les modèles de Gurram et de Hsu.
- Le modèle de Rice peut être utilisé dans le cas où :
  - dans le cas de la confluence, les deux canaux amont forment un angle quelconque avec la canalisation aval,
  - dans le cas de la défluence, les deux canaux aval forment un angle quelconque avec la canalisation amont.

# Partie F - Conclusion générale

L'étude bibliographique que nous avons menée, dans un premier temps, a montré qu'il existe un grand nombre de schémas numériques à capture de chocs pour la résolution du système de Barré de Saint-Venant. Dans un deuxième temps, la mise au point de ces schémas passe obligatoirement par le traitement des conditions aux limites et par le traitement du terme source.

À notre connaissance, il existe peu de comparaisons pouvant donner des critères de validité des schémas numériques, des différentes méthodes de discrétisation du terme source et du traitement des conditions aux limites. Dans ce but, nous avons mis au point un banc d'essais numériques couvrant la majorité des types d'écoulements à surface libre. Les comparaisons se font par rapport à des solutions analytiques de référence. La confrontation des différents résultats simulés a donné lieu aux conclusions suivantes :

- Les schémas classiques qui ne possèdent pas le caractère TVD peuvent simuler de l'écoulement stationnaire et transitoire dans le cas où l'écoulement possède un seul régime, fluvial ou torrentiel. Toutefois dans le cas où l'écoulement est transcritique dans le canal, c'est-à-dire, lorsqu'il y a passage du régime torrentiel au régime fluvial ou inversement, ces schémas échouent complètement et ne peuvent pas être utilisés. La discrétisation temporelle de type implicite est un bon choix pour la simulation des problèmes hydrauliques de type stationnaire. Mais elle n'est pas convenable pour les problèmes transitoires. Les éléments finis discontinus de Galerkin que nous avons appliqués au système de Barré de Saint-Venant, donnent des résultats aussi pertinents avec le solveur de Roe que les schémas de type TVD explicite que ce soit dans le cas stationnaire et transitoire.
- Les discrétisations centrée (pointwise) et directionnelle (upwind) du terme source sont similaires pour la simulation de la hauteur d'eau. Le débit obtenu par ces deux méthodes ne diffère pas lorsque l'écoulement a un seul régime (fluvial ou torrentiel) et lorsque le lit du canal ne présente pas d'irrégularité. Dans le cas où l'écoulement est transcritique ou que le lit du canal est irrégulier, le débit simulé avec la méthode centrée diffuse. Celui simulé avec la méthode directionnelle est toujours stable mais il présente un saut numérique au voisinage du ressaut hydraulique. Dans le cas d'un canal non prismatique, c'est-à-dire lorsque la largeur du canal est variable, le système de Barré de Saint-Venant écrit avec les variables  $A$  (section mouillée) et  $Q$  (débit), ne vérifie pas la condition d'entropie. Nous remarquons que dans ce cas, les résultats de simulations avec les deux méthodes de discrétisation, directionnelle et centrée, sont très mauvais, caractérisés par une forte diffusion et des oscillations. Afin de s'affranchir de ce problème, nous avons proposé d'écrire le système de Barré de Saint-Venant avec les variables  $h$  (hauteur d'eau) et  $q$  (débit unitaire). Par ailleurs, le terme contenant la largeur du canal est placé avec le

terme source. Cette écriture permet d'obtenir un système de Barré de Saint-Venant qui vérifie la condition d'entropie. Les résultats de simulation montrent une excellente adéquation avec les résultats analytiques. Cette méthode n'a pas été pertinente dans le cas d'un canal non prismatique à section trapézoïdale.

- En ce qui concerne le traitement des conditions aux limites, nous avons montré que la méthode de l'extrapolation utilisée dans le code de calcul est un bon choix pour les conditions aux limites externes. Par contre, elle échoue dans le cas des conditions aux limites internes. Pour cela, nous avons appliqué la méthode des caractéristiques et nous avons remarqué une nette amélioration dans la simulation au niveau du débit.

L'étude bibliographique que nous avons menée, dans un second temps, a montré que les modèles de jonctions trouvés dans la littérature sont de nature empirique et n'ont pas été couplés avec le système de Barré de Saint-Venant. La plupart des codes de calculs qui permettent la simulation de l'écoulement au voisinage des jonctions utilisent le modèle le plus simple, basé sur l'égalité des hauteurs d'eau à la jonction. Nous avons mis au point un banc d'essais numériques des modèles afin de les comparer aux résultats expérimentaux. La confrontation entre les résultats simulés et les résultats expérimentaux pour un écoulement stationnaire dans le cas d'une confluence fluviale, confluence torrentielle et confluence transitionnelle, ainsi que dans le cas d'une défluence fluviale a permis de conclure que :

- Les résultats obtenus à l'aide du modèle « Égalité des hauteurs d'eau », qui est le plus utilisé dans les codes de calculs, sont très loin des résultats expérimentaux et ceci dans la grande majorité des cas étudiés.
- Les résultats obtenus à l'aide de différents modèles basés sur la conservation de la quantité de mouvement sont satisfaisants par comparaison aux résultats expérimentaux.
- Pour le cas d'une confluence fluviale, le modèle de Shabayek est le plus correct, suivi des modèles de Hsu et de Gurram.
- Le modèle de Ramamurthy a été développé pour une confluence fluviale et pour un angle de jonction de  $90^\circ$ . Les résultats obtenus à l'aide de ce modèle ne sont satisfaisants que pour un angle de jonction de  $90^\circ$ .
- Les résultats simulés à l'aide du modèle de Rice sont très satisfaisants par comparaison aux résultats expérimentaux de Rice. En revanche, les résultats simulés à l'aide du modèle basé sur l'égalité des hauteurs d'eau présentent trop d'erreurs.
- Pour le cas de la défluence, les trois modèles de Pemaiah, de Ramamurthy et de Hsu donnent des résultats satisfaisants par comparaison aux résultats expérimentaux étudiés. Parmi ces trois modèles, c'est le modèle de Hsu, qui est le plus correct. Dans tous les cas étudiés, le modèle « Égalité des hauteurs d'eau », tend à surestimer les hauteurs d'eau, et ces hauteurs sont très différentes des résultats expérimentaux.

## Conclusion Générale

---

En conclusion finale, nous proposons les recommandations suivantes :

- Ne pas utiliser le modèle « Égalité des hauteurs d'eau », et ceci dans les deux cas de la jonction : confluence et défluence.
- Pour la confluence fluviale, il est souhaitable d'utiliser le modèle de Shabayek, puisqu'il est le plus exact par comparaison aux résultats expérimentaux, malgré la difficulté de son implémentation. Toutefois, les modèles de Hsu et de Gurram sont pertinents.
- Pour la défluence fluviale, les trois modèles de Pemaiah, de Ramamurthy et de Hsu sont comparables.
- Pour le cas d'une confluence et défluence torrentielles, le modèle de Rice a été validé expérimentalement et a donné des résultats satisfaisants.

Concernant les perspectives, l'objectif à court terme est d'étudier d'autres types de sections de canal, comme par exemple les sections circulaire, ovoïde, fer à cheval...

La mise en charge des canalisations sera également étudiée et la convergence des schémas numériques vérifiée.

De plus, certains résultats ont montré un saut irréal du débit au droit des ressauts hydrauliques. Il est certainement possible de modifier les schémas numériques pour ne plus faire apparaître cette discontinuité.

L'objectif à long terme va consister à modéliser en 2D l'écoulement dans les jonctions par des éléments finis discontinus de Galerkin. Cette approche va permettre de mieux comprendre l'hydrodynamique à travers ces ouvrages et surtout de pouvoir mieux adapter les modèles de confluences et défluences en fonction du régime d'écoulement dans les canalisations amont et aval de l'ouvrage.

De plus, l'assemblage de tout un réseau d'assainissement ayant les principaux ouvrages tels que les canalisations, les bassins, les déversoirs ainsi que les stations de pompage sera réalisé. L'objectif final est de pouvoir entièrement simuler en 1D un réseau d'assainissement en temps de pluie ayant des discontinuités hydrauliques de type ressaut ou onde de gravité.

# Bibliographie

**Alcrudo F, García-Navarro P and Saviron JM. (1991)**

Flux difference splitting for 1D open channel flow equations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 13: 85–95.

**Anwar, H. (1955)**

trömungsverhältnisse bei Flussvereinigungen. PhD thesis, Technical Univ. of Karlsruhe, Karlsruhe, Germany (in German).

**Behlke, C. E., and Pritch, H. D. (1966)**

The design of supercritical channel junctions. *Highway Res. Record*, Nr. 123, Publication 1365, 17-35. Highway Research Board, National Research Council, Washington, D.C.

**Best, J. L. and Reid, I. (1984)**

Separation zone at open-channel junctions. *J. Hydr. Engrg. ASCE*, Vol. 110, No. 11, 1588-1594.

**Bowers, C. E. (1950)**

Hydraulic model studies for Whiting Field naval air station. Part V; Studies of Open-Channel junctions. Saint Anthony Falls Hydraulic Laboratory Project Report No. 24.

**Burguete J, Garcia Navarro P. (2001)**

Efficient construction of high-resolution TVD conservative schemes for equations with source terms: application to shallow water flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 37, 209–248.

**Buyer M. (2001)**

Transport de flux en réseau d'assainissement : modèle 1D pour l'hydraulique des collecteurs et déversoirs avec prise en compte des discontinuités. Thèse de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg.

**Carballada, L., Quach T. T., Marche, C. and Ramamurthy, A. S. (1981)**

Modèle de jonction des rivières. *Proc., 19th IAHR Congr.*, 2(A7), 273-280

**Chavent G. and Cockburn B. (1989)**

The local projection,  $P^0P^1$  discontinuous Galerkin finite element method for scalar conservation laws. *RAIRO, Model. Math. Anal. Numer.* 23, 565.

**Christodoulou G. C. (1993)**

Incipient hydraulic jump at channel junctions. *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, 119(3), 409–421.

**Cockburn B. and Shu C. W. (1989)**

TVB Runge–Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. II. General framework, *Math. Comput.* 52, 411.

**Cockburn B. and Shu C.-W. (1991)**

The Runge Kutta local projection  $P^1$  discontinuous Galerkin method, for scalar conservation laws. *Math. Anal. Numer.* 25, 337.

**Cockburn B. and Shu C.-W. (1998)**

The Runge–Kutta discontinuous Galerkin finite-element method for conservation laws. V. Multidimensional systems, *J. Comput. Phys.* 141, 199.

**Cockburn B., Hou S., and Shu C.-W. (1990)**

TVB Runge–Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. The multidimensional case, *Math. Comput.* 54, 545.

**Cockburn B., Lin S. Y. and Shu C. W. (1989)**

TVB Runge–Kutta local projection discontinuous Galerkin finite element method for conservation laws. One dimensional system, *J. Comput. Phys.* 84, 90.

**Cunge J. A., Holly F. M. and Verway A. (1980)**

*Practical Aspects of Computational River Hydraulics*, Pitman London

**De Saint Venant B. (1871)**

Théorie du mouvement non permanent des eaux avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *Acad. Sci. Comptes Rendus*, Paris, 73, 99, 148–154, 240–273.

**Delis A. I. (2003)**

Improved application of the HLLC Riemann solver for the shallow water equations with source terms. *Commun. Numer. Meth. Engng* 2003; 19:59–83

**Delis A. I., Skeels C.P. (1998)**

TVD schemes for open channel flow. *International Journal of Numerical Methods in Fluids*; 26:791–809.

**Fennema R. J., Chaudhry M. H. (1986)**

Explicit numerical schemes for unsteady free surface flows with shocks. *Water Resources Research*; 22(13): 1923–1930.

**Garcia-Navarro P. and Saviron J. M. (1992)**

Numerical simulation of unsteady flow at open channel junctions. *Journal of Hydraulic Research*, Vol. 30 (5), pp. 595-609.

**Garcia-Navarro P., Alcrudo F. and Saviron J. M. (1992)**

1-D open channel flow simulation using TVD-MacCormack scheme. *Journal of Hydraulic Engineering*; 118:1359 –1372.

**Garcia-Navarro, P., and Vazquez-Cendon, M. E. (2000)**

On the numerical treatment of the source terms in the shallow water equations. *Computer Fluids*, 29 (8), 951–979.

**Glaister P. (1988)**

Approximate Riemann solutions of the shallow water equations. *J. Hydr. Res.*, 26(3), 293-306

**Glaister P. (1993)**

Flux difference splitting for open-channel flows, *Int. j. Numer. Methods in fluids*, 16, 629–654

**Godunov S. K. (1959)**

A difference method for the numerical computation of continuous solutions of hydrodynamic equations, *Mat. Sbornik*, 47, 271–306

**Grace, J. L., and Priest, M. S. (1958)**

Division of flow in open channel junctions. Bulletin No. 31, Engineering Experiment Station, Alabama Polytechnic Institute.

**Greated, C. A. (1968)**

Supercritical flow through junctions. *La Houille Blanche*, Grenoble, France, Vol. 23, No. 8, 693–695.

**Gurram S. K., (1994)**

A study of subcritical and transitional combining flow in open channel junctions. PhD thesis, Banaras Hindu University, Varanasi, India.

**Gurram S. K., Karki K. S. and Hager W. H. (1997)**

Subcritical Junction Flow. *J. hydraul. Engrg.* Vol. 123, No. 5, 447-455.

**Hager W. H. (1989)**

Supercritical flow in channel junctions. *J. Hydraul. Eng.*, Vol. 115, No. 5, 595–615.

**Hager W. H. (1989)**

Transitional flow in channel junctions. *J. Hydraul. Eng.*, Vol. 115, No. 2, 242–259.

**Harten A. (1983)**

High resolution schemes for hyperbolic conservation laws, *J. Comput. Phys.*, 49, 357–393

**Harten A. (1984)**

On a class of high-resolution total variation stable finite difference schemes. *SIAM Journal Numerical Analysis*, Vol. 21, 1-23

**Harten, A., Lax, P., and van Leer, A. (1980)**

On upstream differencing and Godunov-type scheme for hyperbolic conservation laws. *Society for Industrial and Applied Mathematics, Review*, 25(1), 35-61.

**Hirsch C. (1990)**

Numerical computation of internal and external flows, in Vol. 2, *Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*, Wiley, Chichester

**Holly F. H. and Rahuel J. L. (1990)**

New numerical/physical framework for mobile-bed modelling, part 1: Numerical and physical principles. *J. Hydraul. Res.*, 28 (4), 401–416.



## Bibliographie

---

**Hsu C. C., Lee W. J. and Chang C. H. (1998)**

Subcritical open channel junction flow. *J. Hydraul. Eng.*, Vol. 124, No. 8, 847–855.

**Hsu C. C., Lee W. J., Shieh M. Y and Tang C. J. and (2002)**

Subcritical 90° Equal-Width Open-Channel Dividing Flow. *J. Hydraul. Eng.*, Vol. 128, No. 7, 716–720

**Jha A. K., Akiyama J. and Ura M. (1995)**

First and second order flux difference splitting schemes for dam-break problem, *J. Hydraulic Eng.*, 121, 877–884

**Johnson C. and Pitkaranta J. (1986)**

An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation, *Math. Comput.* 46, 1.

**Kovacs Y. 1988**

Modèles de simulation d'écoulement transitoire en réseau d'assainissement. Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 328 p., Thèse de doctorat, Sciences et Techniques de l'Environnement.

**Law, S. W., and Reynolds, A. J. (1966)**

Dividing flow in an open channel. *J. Hydr. Div., ASCE*, 92(HY2), 207-231.

**Lax P. and Wendroff B. (1960)**

Systems of conservation laws. *Com. on Pure and Appl. Math.*, 13, 217–237.

**Lax P. D. (1973)**

Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves, SIAM, Philadelphia

**Lesaint P. and Raviart P. A. (1974)**

On a finite element method for solving the neutron transport equation, in *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations* (Academic Press, San Diego, , p. 89.)

**Lin J. D. and Soong H. K. (1979)**

Junction losses in open channel flows. *Water Resour. Res.*, Vol. 15, No. 2, 414–418

**Lyn D. A. (1987)**

Unsteady sediment-transport modelling. *J. Hydraul. Eng.*, 113 (1), 1–15.

**MacCormack R. W. (1969)**

The effect of viscosity in hypervelocity impact catering.'’ *AIAA J.*, 69–354.

**MacDonald I., Baines, M. J., Nichols, N. K., and Samuels, P. G. (1997)**

Analytic benchmark solutions for open-channel flows. *J. Hydraul. Eng.*, 123 (11), 1041–1045.

## Bibliographie

---

**Meselhe E. A., Sotiropoulos F. and Holly F. M. (1997)**

Numerical simulation of transcritical flow in open channels. *J. Hydr. Engrg.*, ASCE, 123(9), 774–783.

**Milano, V. and Sassoli, F. (1977)**

Ricerca sperimentale sulle confluenze fluviali in regime permanente. *L'Energia Elettrica*, Milan, Italy, Vol. 54, No. 11, 497-508 (in Italian)

**Milne-Thomson, M. (1949)**

Theoretical hydrodynamics. Macmillan and Co. Ltd., London, U.K.

**Murota, A. (1958)**

On the flow characteristics of a channel with a distributory. Technology Reports of the Osaka University, Osaka, Japan, 6(198)

**Osher, S., and Solomon, F. (1983)**

Upwind difference schemes for hyperbolic conservation laws. *Math. Comput.*, 38 (158), 339–374.

**Pemaiah V. (1977)**

Divided flow in channels with bottom openings. *J. Hyd. Div.*, Vol. 103, No. HY2, 190–193.

**Peterson T. (1991)**

A note on the convergence of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation, *SIAM J. Numer. Anal.* 28, 133.

**Priestley A., Alcrudo F. and Garcia-Navarro P. (1994)**

An implicit method for water flow modelling in channels and pipes. *J. Hydraulic Res.*, 32:721.

**Ramamurthy A., Carballada L., and Tran D (1988)**

Combining open channel flow at right angled junctions. *J. Hydraul. Eng.*, Vol. 114, No. 12, 1448–1459.

**Reed W. H. and Hill T. R. (1973)**

Triangular Mesh Methods for the Neutron Transport Equation, Los Alamos, Scientific Laboratory Report LA-UR-73-479.

**Rice, C. E. (1985)**

Open channel junctions with supercritical flow. Agricultural Research Service. ARS- 14

**Richter G. R. (1988)**

An optimal-order error estimate for the discontinuous Galerkin method, *Math. Comput.* 50, 75.

**Roe P. L. (1981)**

Approximate Riemann solvers, parameter vectors, difference schemes, *J. Comput. Phys.*, 43, 357–372

## Bibliographie

---

**Roe, P. L. and Pike, J. (1984)**

Efficient construction and utilization of approximate Riemann solutions. Computing methods in applied science and engineering, R. Glowinski and J. L. Lions, eds., North-Holland, Amsterdam.

**Schnitter, G., Müller, R., Crprez, V. and Bisaz, E. (1955)**

Modellversuche fuer Kraftwerkbauten im Wallis, ausgefuehrt an der Hydraulischen Abteilung der Versuchsanstalt fuer Wasserbau und Erdbau an der ETH. Wasser-und Energie-wirtschaft, Vol. 47 (5-7) (in German).

**Shabayek S., Steffler P. and Hicks F (2002)**

Dynamic Model for Subcritical Combining Flows in Channel Junctions. J. Hydraul. Eng., Vol. 128, No. 9, 821–828.

**Smoller J. (1984)**

Shock waves and reaction-diffusion equations. Second edition. Ed.: Springer-Verlag-632.

**Sridharan L. (1966)**

Division of flow in open channels, thesis presented to the Indian Institute of Science, at Bangalore, India, in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science.

**Stoker J. J (1957)**

Water Waves. Interscience Publishers, Inc.

**Sweby P. K. (1984)**

High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws, SIAM J. Numer. Anal., 21, 995–1011

**Tanaka, K. (1957)**

The improvement of the inlet of the power canal. Trans. Seventh General Meeting of I.A.H.R., Lisbon, Portugal, Vol. 1, C: 20.1-20.16.

**Taylor E. H. (1944)**

Flow characteristics at rectangular open-channel junctions. Transactions, ASCE, Vol. 109, 893-912.

**Toro E. F. (1997)**

Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. Springer: Berlin.

**Toro E. F. (2000)**

Shock-capturing methods for free surface flows. Ed. John Wiley & Sons,

**Van Leer B. (1979)**

Towards the ultimate conservation difference scheme, a second order sequel to Godunov's method, J. Comput. Phys., 32, 101–136.

**Vazquez-Cendon, M. E. (1999)**

Improved treatment of source terms in upwind schemes for the shallow water equations in channels with irregular geometry. J. Comput. Phys., 148 (2), 497–526.

## Bibliographie

---

**Vila J. P. (1986)**

Sur la théorie et l'approximation numérique de problèmes hyperbolique non linéaires. Application aux équations de Saint Venant et à la modélisation des avalanches de neige dense. Université de Paris VI, thèse de doctorat, Spécialité Sciences Mathématiques.

**Webber N.B. and Greated, C. A. (1966)**

An investigation of flow behaviour at the junction of rectangular channels. Proc., Inst. Civ. Engrs., London, England, Vol. 34, 321–334.

**Yee H. C. (1987)**

Construction of explicit and implicit symmetric TVD schemes and their applications. *J. Comput. Phys.*, 68 (1), 151–179.

# **Annexes**

## Chapitre 1 : Annexe A

# Les schémas numériques

Nous décrivons, dans ce chapitre, les différents schémas numériques qui sont mis en oeuvre et comparés dans ce travail. La majorité des schémas sont décrits pour la forme conservative du système de BSV écrit sous forme homogène, c'est à dire, sans prendre en considération le terme source. Le système de BSV ne contient donc pas de second membre.

### 1. Les schémas classiques

Ces schémas sont des applications directes de la méthode des différences finies. En général, ils ne sont pas robustes à cause du caractère dissipatif dû au premier ordre de précision, ou du caractère oscillatoire dans la région à fort gradient. Les schémas classiques étudiés et simulés dans ce travail sont les schémas de MacCormack et le schéma de Lax-Wendroff.

#### 1.1. Schéma de MacCormack

Ce schéma contient deux niveaux de résolution, prédiction et correction:

$$\text{Niveau prédiction : } U^p = U_i^n - \lambda (F_{i+1}^n - F_i^n)$$

$$\text{Niveau correction: } U_i^c = U^p - \lambda (F_i^p - F_{i-1}^p)$$

$$\text{Nouvelle solution : } U_i^{n+1} = \frac{1}{2} (U_i^n + U_i^c)$$

#### 1.2. Schéma de Lax-Wendroff

Ce schéma prend la forme suivante :

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\lambda}{2} (F(U_{i+1}^n) - F(U_{i-1}^n)) + \frac{\lambda^2}{2} [J_{i+1/2} (F(U_{i+1}^n) - F(U_i^n)) - J_{i-1/2} (F(U_i^n) - F(U_{i-1}^n))]$$

Avec

$$J_{i\pm 1/2} = J((U_i^n + U_{i\pm 1}^n)/2)$$

## 2. Les schémas de Riemann

Nous rappelons qu'un schéma explicite de type conservatif s'écrit sous la forme:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \lambda \left( F_{i+1/2}^n - F_{i-1/2}^n \right)$$

Les flux aux interfaces  $i+1/2$  et  $i-1/2$  sont calculés numériquement selon chaque schéma. Il existe plusieurs solveurs permettant de calculer les flux aux interfaces. Ces schémas sont connus sous le nom de solveur de Riemann ou tout simplement schéma de Riemann. Les schémas de Riemann sont attractifs pour les ingénieurs hydrauliciens, puisque ces méthodes sont simples à implémenter, de hautes résolutions pouvant capturer les chocs, préservent la monotonie et vérifient la condition d'entropie. Dans ce paragraphe, nous citons les solveurs de Riemann simulés dans ce travail.

### 2.1. Le solveur de Lax-Friedrich

C'est le solveur de Riemann le plus simple. La forme de la fonction flux numérique est la suivante :

$$\tilde{F}_{i+1/2}^{LF} = \frac{1}{2} \left[ F_R + F_L - \frac{1}{\lambda} (U_R - U_L) \right]$$

Le solveur de Riemann de Lax-Friedrich satisfait la propriété d'entropie désirée et est en même temps simple à mettre en œuvre. Ce solveur a été amélioré pour devenir le solveur local de Lax Friedrich (LLF). Cette forme dépend uniquement de la célérité de l'onde locale la plus rapide et sa forme est donnée par :

$$\tilde{F}_{i+1/2}^{LLF} = \frac{1}{2} \left[ F_R + F_L - a_{\max} (U_R - U_L) \right]$$

Où  $a_{\max} = \max(|a_i^1|, |a_i^2|, |a_{i+1}^1|, |a_{i+1}^2|)$ , et les  $a^k$  sont les valeurs propres de la matrice jacobienne. Cette forme est moins diffusive que la forme classique et a toujours l'avantage de satisfaire la condition d'entropie.

### 2.2. Le solveur de Roe

Roe (1981) a résolu le problème de Riemann de manière approchée en remplaçant la matrice jacobienne exacte dans chaque intervalle  $[x_i, x_{i+1}]$ , par une matrice jacobienne constante. Le problème consiste donc à construire un jacobien approché  $\tilde{J}$  en terme de  $U_L = U_i$  et  $U_R = U_{i+1}$  à l'interface  $U_{i+1/2}$  :

$$\tilde{J} = \tilde{J}(U_L, U_R)$$

La matrice jacobienne de Roe doit satisfaire les propriétés suivantes :

- Caractère hyperbolique du système. La matrice constante  $\tilde{\mathbf{J}}$ , doit posséder des valeurs propres réelles  $\tilde{\mathbf{a}}^{(k)} = \tilde{\mathbf{a}}^{(k)}(U_L, U_R)$
- $\tilde{\mathbf{J}}$  doit être consistante avec la matrice jacobéenne exacte :  $\tilde{\mathbf{J}}(U, U) = \mathbf{J}(U)$
- Caractère conservatif à travers les discontinuités vérifié :  $F(U_R) - F(U_L) = \tilde{\mathbf{J}}(U_R - U_L)$

Roe et Pike (1984) ont construit une méthode qui rend inutile la construction explicite de cette matrice jacobéenne approchée. Leur méthode consiste à projeter dans la base des vecteurs propres le vecteur  $\Delta U = U_R - U_L$ , et ceci de la façon suivante :

$$\Delta U = U_{i+1} - U_i = \sum_{k=1}^m \alpha^{(k)} \tilde{\mathbf{e}}^{(k)}$$

D'autre part, le flux à l'interface des cellules de calcul  $i$  et  $i+1$  est exprimé sous la forme :

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_R + F_L) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \alpha^{(k)} \tilde{\mathbf{a}}^{(k)} \tilde{\mathbf{e}}^{(k)}$$

Le caractère conservatif à travers les discontinuités, nous permet d'écrire

$$\Delta F = F_R - F_L = \sum_{k=1}^m \alpha_{i+1/2}^{(k)} \tilde{\mathbf{a}}^{(k)} \tilde{\mathbf{e}}^{(k)}$$

Pour mettre en œuvre le solveur de Roe il faut calculer les valeurs  $\tilde{\mathbf{e}}^{(k)}$ ,  $\tilde{\mathbf{a}}^{(k)}$  et  $\tilde{\alpha}^{(k)}$ . Pour le système de BSV, les valeurs et vecteurs propres de la matrice jacobéenne approchée sont exprimés sous la forme:

$$\tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^{1,2} = \tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2}^{1,2} \pm \tilde{\mathbf{c}}_{i+1/2}^{1,2} \quad \tilde{\mathbf{e}}_{i+1/2}^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^{1,2} \end{pmatrix}$$

Les valeurs des coefficients de pondération introduits par la projection du vecteur écoulement

$U = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}$  dans la base des vecteurs propres sont donnés par :

$$\alpha_{i+1/2}^{1,2} = \frac{\Delta_{i+1/2} Q + \left( -\tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2} \pm \tilde{\mathbf{c}}_{i+1/2} \right) \Delta_{i+1/2} A}{\pm 2 \tilde{\mathbf{c}}_{i+1/2}}$$

La vitesse moyenne  $\tilde{\mathbf{u}}$  et la célérité moyenne  $\tilde{\mathbf{c}}$  introduits par Roe sont donnés par :

$$\tilde{\mathbf{u}}_{i+1/2} = \frac{Q_i / \sqrt{A_i} + Q_{i+1} / \sqrt{A_{i+1}}}{\sqrt{A_{i+1}} + \sqrt{A_i}} \quad \tilde{\mathbf{c}}_{i+1/2} = \begin{cases} g \frac{I_{i+1} - I_i}{A_{i+1} - A_i} & \text{si } A_{i+1} - A_i \neq 0 \\ \tilde{\mathbf{c}}_i^2 = \tilde{\mathbf{c}}_{i+1}^2 & \text{si } A_{i+1} - A_i = 0 \end{cases}$$



Ces valeurs permettent de calculer la fonction flux aux interfaces  $\mathbf{F}_{i+1/2}$  pour la mise en œuvre du schéma numérique. Une version plus performante du solveur de Roe, consiste à corriger les valeurs propres dans le vecteur flux, cette version s'appelle solveur de Roe avec correction entropique, et le vecteur flux est calculé de la façon suivante :

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_R + F_L) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \alpha^{(k)} \psi(\tilde{a}^{(k)}) \tilde{\mathbf{e}}^{(k)}$$

La fonction  $\psi$  est la correction d'entropie pour les valeurs propres  $|a_{i+1/2}^k|$ . Elle est de la forme :

$$\psi(a) = \begin{cases} |a| & \text{si } |a| \geq \delta \\ (a^2 + \delta^2)/2\delta & \text{si } |a| < \delta \end{cases}$$

Où  $\delta$  est un petit nombre positif que l'on prend ainsi (Harten et Hyman-1983) :

$$\delta_{i+1/2} = \max[0, \tilde{a}_{i+1/2} - a_i, a_{i+1} - \tilde{a}_{i+1/2}] \text{ et } \delta_{i-1/2} = \max[0, \tilde{a}_{i-1/2} - a_{i-1}, a_i - \tilde{a}_{i-1/2}].$$

### 2.3. Les solveurs HLL et HLLE

Harten, Lax et Van Leer (1983) ont proposé le solveur HLL afin de calculer le flux numérique aux interfaces. Ce solveur suppose l'existence de deux ondes de célérité  $S_R$  et  $S_L$ . Le flux calculé à l'interface  $i+1/2$ , s'écrit de la façon suivante :

$$F_{i+1/2}^{\text{HLL}}(U_L, U_R) = \begin{cases} F(U_L) & \text{si } 0 \leq S_L \\ F^* & \text{si } S_L \leq 0 \leq S_R \\ F(U_R) & \text{si } 0 \geq S_R \end{cases}$$

Où

$$F^* = \frac{S_R F_L - S_L F_R + S_R S_L (U_R - U_L)}{S_R - S_L}$$

Les célérités des ondes  $S_R$  et  $S_L$  sont données par :

$$S_L = \min(u_L - \sqrt{gh_L}, u^* - \sqrt{gh^*}) \text{ et } S_R = \min(u_R - \sqrt{gh_R}, u^* - \sqrt{gh^*})$$

Avec :

$$\sqrt{gh^*} = \frac{1}{2}(\sqrt{gh_L} + \sqrt{gh_R}) - \frac{1}{4}(u_R - u_L) \text{ et } u^* = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \sqrt{gh_L} - \sqrt{gh_R}$$

Einfeld (1988) a modifié le solveur HLL. Il consiste à approcher la solution du problème de Riemann par l'utilisation des trois états constants suivants :

$$U(x_{i+1/2}, t) = \begin{cases} U_i & \text{pour } \bar{x} < b_{i+1/2}^l t \\ U_{i+1/2} & \text{pour } b_{i+1/2}^l t < \bar{x} < b_{i+1/2}^r t \\ U_{i+1} & \text{pour } b_{i+1/2}^r t < \bar{x} \end{cases}$$

Où  $\bar{x} = x - x_{i+1/2}$  et les expressions des coefficients  $b$  sont données par :

$$b_{i+1/2}^r = \max\left(u_{i+1} + c_{i+1}, \tilde{a}_{i+1/2}^1\right) \text{ et } b_{i+1/2}^l = \min\left(u_i - c_i, \tilde{a}_{i+1/2}^2\right)$$

L'état moyen  $U_{i+1/2}^n$  est défini de telle sorte que le solveur de Riemann soit consistant avec la forme intégrale des lois de conservation, c'est à dire :

$$U_{i+1/2} = \frac{b_{i+1/2}^r U_{i+1} - b_{i+1/2}^l U_i}{b_{i+1/2}^r - b_{i+1/2}^l} - \frac{F_{i+1} - F_i}{b_{i+1/2}^r - b_{i+1/2}^l}$$

Dans les équations précédentes,  $\tilde{a}_{i+1/2}^{1,2}$  sont les valeurs propres calculées par la méthode de Roe et  $\tilde{b}_{i+1/2}^{r,l}$  sont les approximations numériques pour les vitesses des caractéristiques maximum et minimum en leurs positions respectives. Le flux numérique à l'interface de la cellule peut être écrit sous la forme :

$$\tilde{F}_{i+1/2}^{\text{HLLLE}} = \frac{b_{i+1/2}^+ F_i - b_{i+1/2}^- F_{i+1}}{b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^-} + \frac{b_{i+1/2}^+ b_{i+1/2}^-}{b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^-} (U_{i+1} - U_i)$$

Avec :

$$b_{i+1/2}^+ = \max\left(b_{i+1/2}^r, 0\right) \text{ et } b_{i+1/2}^- = \max\left(b_{i+1/2}^l, 0\right)$$

Le flux numérique HLLLE peut être réécrit sous la forme :

$$\tilde{F}_{i+1/2}^{\text{HLLLE}} = 0.5 \left[ F_{i+1} + F_i - \sum_{k=1}^2 q_{i+1/2}^k \tilde{a}_{i+1/2}^k \tilde{\epsilon}_{i+1/2}^k \right]$$

Avec :

$$q_{i+1/2}^{1,2} = \frac{(b_{i+1/2}^+ + b_{i+1/2}^-) \tilde{a}_{i+1/2}^{1,2} - 2b_{i+1/2}^+ b_{i+1/2}^-}{b_{i+1/2}^+ - b_{i+1/2}^-}$$

### 3. Schémas TVD à limitation de flux

Les flux aux interfaces obtenus par application du solveur de Roe (1981) sont modifiés par l'ajout d'un terme correctif introduit dans le vecteur D. L'expression du flux s'écrit alors :

$$\tilde{F}_{i\pm 1/2} = \frac{1}{2} [F_i + F_{i\pm 1} + R_{i\pm 1/2} D_{i\pm 1/2}]$$

Où R représente la matrice des vecteurs propres et D le vecteur correctif qui dépend de la méthode numérique. Les limiteurs les plus utilisés pour les schémas TVD sont les limiteurs de type OPL (One Parameter limiter) qui sont fonctions d'un seul paramètre r, et les limiteurs de type TPL (Two Parameter limiter) qui sont fonctions de deux paramètres  $r^-$  et  $r^+$ . Ces paramètres sont donnés par :

$$\begin{cases} r_{i+1/2}^k = \frac{\alpha_{i+1/2-s}^k}{\alpha_{i+1/2}^k} \text{ avec } s = \text{sign}(\tilde{a}_{i+1/2}^k) \\ r_{i+1/2}^k - = \frac{\Delta_{i-1/2} U}{\Delta_{i+1/2} U}; \quad r_{i+1/2}^k + = \frac{\Delta_{i+3/2} U}{\Delta_{i+1/2} U} \end{cases}$$

Les limiteurs OPL et TPL les plus utilisés sont donnés dans le Tableau 29 :

Limiteur	Type OPL	Type TPL
Roe minmod	$\phi(r) = \max(0, \min(r, 1))$	$\phi(r^+, r^-) = \min \text{mod}(1, r^+) + \min \text{mod}(1, r^-) - 1$
Van Leer MUSCL	$\phi(r) = \max(0, \min(2r, 2), 0.5(1+r))$	$\phi(r^+, r^-) = \max(0, \min[2, 2r^+, 2r^-, 0.5(r^+ + r^-)])$
Roe Superbee	$\phi(r) = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2))$	
Van Leer Monotonique	$\phi(r) = \frac{r +  r }{1 +  r }$	

Tableau 29 : Les différents limiteurs pour les schémas TVD.

#### a- Le schéma TVD symétrique (symmetric)

Les éléments du vecteur  $D_{i\pm 1/2}$  sont :

$$d_{i\pm 1/2}^k = -\lambda(\tilde{a}_{i\pm 1/2}^k)^2 L_{i\pm 1/2}^k - \psi(\tilde{a}_{i\pm 1/2}^k) [\alpha_{i\pm 1/2}^k - L_{i\pm 1/2}^k] \quad \text{Pour } k = \{1, 2\}$$

La fonction limiteur de flux  $L_{i\pm 1/2}^k$  contrôle les termes de second ordre de façon à ce qu'un résultat lisse et non oscillant soit garanti même en présence de discontinuités :

$$L_{i\pm 1/2}^k = \min \text{mod}(\alpha_{i-1/2}^k, \alpha_{i+1/2}^k) + \min \text{mod}(\alpha_{i+1/2}^k, \alpha_{i+3/2}^k) - \alpha_{i\pm 1/2}^k$$

Où :

$$\min \text{mod}(x, y) = \text{sgn}(x) \max[0, \min(|x|, y \cdot \text{sgn}(x))]$$

### b- Le schéma TVD du flux modifié (upwind scheme)

Cette méthode a initialement été développée par Harten (1984). Les éléments de  $D_{i+1/2}$  sont :

$$d_{i+1/2}^k = \sigma(\tilde{a}_{i+1/2}^k)(L_{i+1}^k + L_i^k) - \psi(\tilde{a}_{i+1/2}^k + \gamma_{i+1/2}^k)\alpha_{i+1/2}^k \quad \text{pour } k=\{1, 2\}$$

Avec :

$$\sigma(a) = 1/2(\psi(a) - \lambda a^2)$$

**Et :**

$$\gamma_{i+1/2}^k = \begin{cases} \sigma(\tilde{a}_{i+1/2}^k)(L_{i+1}^k - L_i^k) / \alpha_{i+1/2}^k & \text{si } \alpha_{i+1/2}^k \neq 0 \\ 0 & \text{si } \alpha_{i+1/2}^k = 0 \end{cases}$$

**La fonction limiteur de flux peut être exprimée de la façon suivante :**

$$L_i^k = \min \text{mod}(\alpha_{i+1/2}^k, \alpha_{i-1/2}^k)$$

### c- Schéma TVD de MacCormack

Ce schéma, qui est une modification du schéma classique de MacCormack, a été proposé par Garcia-Navarro et al. (1992)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Niveau prédiction :} \\ \text{Niveau correction:} \\ \text{Nouvelle solution:} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} U_i^p = U_i^n - \lambda(F_{i+1}^n - F_i^n) \\ U_i^c = U_i^n - \lambda(F_i^p - F_{i-1}^p) \\ U_i^{n+1} = \frac{1}{2}(U_i^p + U_i^c) + \frac{\lambda}{2}[R_{i+1/2}D_{i+1/2} - R_{i-1/2}D_{i-1/2}] \end{array}$$

Les éléments de  $D_{i+1/2}$  sont définis par :

$$(d_{i+1/2}^k)^{PC} = \psi(\tilde{a}_{i+1/2}^k)[1 - \lambda|\tilde{a}_{i+1/2}^k|][1 - L_{i+1/2}^k]\alpha_{i+1/2}^k \quad \text{pour } k=\{1, 2\}$$

Le limiteur L est donné par:

$$L_{i+1/2}^k = \max(0, \min(1, r_{i+1/2}^k))$$

Où :

$$r_{i+1/2}^k = \frac{\alpha_{i+1/2-s}^k}{\alpha_{i+1/2}^k} \quad \text{et} \quad s = \text{sgn}(\tilde{a}_{i+1/2}^k)$$

$R_{i+1/2}$ , et  $D_{i+1/2}$  peuvent être évalués en  $U^n$  ou en  $U^{(2)}$ .

**d- Le schéma TVD de Lax-Wendroff**

L'expression du flux est donnée par :

$$F_{i+1/2} = \frac{1}{2}(F_i + F_{i+1}) - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 |\tilde{a}_{i+1/2}^k| \tilde{\alpha}_{i+1/2}^k \tilde{e}_{i+1/2}^k + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \phi(r_{i+1/2}^k) |\tilde{a}_{i+1/2}^k| \left[ 1 - (\lambda |\tilde{a}_{i+1/2}^k|)^s \right] \tilde{\alpha}_{i+1/2}^k \tilde{e}_{i+1/2}^k$$

Le limiteur est celui de Van Leer Monotonique, voir Tableau 29.

**4. Les schémas TVD à limitation de pente**

Ces méthodes numériques sont basées sur une approche géométrique. Les valeurs des variables contenues dans les cellules de calcul ne sont plus considérées comme constantes par morceaux mais comme des fonctions linéaires par morceaux comme représenté sur la figure ci-dessous :

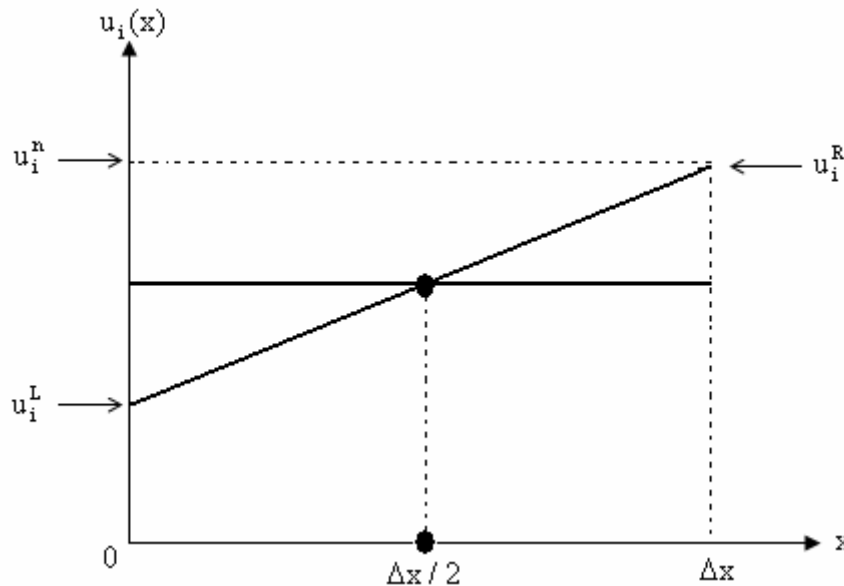


Figure 124 : Représentation de la valeur d'une variable u dans une cellule de calcul

**a- Schéma MUSCL (Monotone Upstream centered schemes for conservation laws)**

La formule d'interpolation MUSCL, présentée par Van Leer ( ), fournit une famille de schémas paramétrés du second ordre et un schéma du troisième ordre. Plutôt qu'un limiteur de flux, l'approche géométrique suggère un limiteur de pente qui limite les fluctuations des variables dépendantes. Dans les cellules de calcul, les valeurs ne sont plus constantes. On introduit une pente sur la valeur du vecteur écoulement. On remplace les arguments  $U_{i+1}$  et  $U_i$  du flux numérique par  $U_{i+1}^R$  et  $U_{i+1}^L$  où les arguments  $U^R$  et  $U^L$  sont calculés ainsi :

$$\begin{cases} U_{i+1/2}^L = U_i + \frac{1}{4}[(1-m)\Delta_{i-1/2}^+ + (1+m)\Delta_{i+1/2}^-] \\ U_{i+1/2}^R = U_{i+1} - \frac{1}{4}[(1-m)\Delta_{i+3/2}^- + (1+m)\Delta_{i+1/2}^+] \end{cases}$$

Où :

$$\begin{cases} \Delta_{i+1/2}^- = \phi(\Delta_{i+1/2} U, \beta \Delta_{i-1/2} U) \\ \Delta_{i+1/2}^+ = \phi(\Delta_{i+1/2} U, \beta \Delta_{i+3/2} U) \end{cases}$$

$\phi$  est le limiteur TPL MUSCL de Van Leer (Tableau 29).  $\beta$  est le paramètre de compression dont la valeur est en général dans l'intervalle :

$$1 \leq \beta \leq \frac{3-m}{1-m}; \quad m \neq 1$$

La précision en espace est déterminée par la valeur de  $m$ , ici on pose  $m = \frac{1}{3}$  et on obtient une précision du troisième ordre. Le flux numérique du second ordre peut être exprimé par :

$$\tilde{F}_{i+1/2} = \frac{1}{2}[F(U_{i+1/2}^R) + F(U_{i+1/2}^L) + \hat{R}_{i+1/2} \hat{D}_{i+1/2}]$$

Les éléments de  $\hat{D}_{i+1/2}$  sont définis par :

$$\hat{D}_{i+1/2} = -\psi(\hat{a}_{i+1}^k) \hat{\alpha}_{i+1/2}^k \quad k = \{1, 2\}$$

$\hat{a}_{i+1}^k$ ,  $\hat{R}_{i+1/2}$  et  $\hat{\alpha}_{i+1/2}^k$  sont évalués comme avant, mais les arguments  $U_{i+1}$  et  $U_i$  ont été remplacés respectivement par  $U_{i+1/2}^R$  et  $U_{i+1/2}^L$ .

## 5. Schémas implicite de type conservatif

Une discrétisation spatiale implicite de BSV écrite sous forme conservative est donnée par :

$$\frac{U_i^{n+1} - U_i^n}{\Delta t} + \theta \left( \frac{\tilde{F}_{i+1/2}^{n+1} - \tilde{F}_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} \right) + (1-\theta) \left( \frac{\tilde{F}_{i+1/2}^n - \tilde{F}_{i-1/2}^n}{\Delta x} \right) = \theta G_i^{n+1} + (1-\theta) G_i^n$$

Après quelques manipulations algébriques, nous obtenons la forme générale d'un schéma implicite à un paramètre  $\theta$  :

$$U_i^{n+1} + \lambda \theta (\tilde{F}_{i+1/2}^{n+1} - \tilde{F}_{i-1/2}^{n+1}) - \theta \Delta t G_i^{n+1} = U_i^n - \lambda (1-\theta) (\tilde{F}_{i+1/2}^n - \tilde{F}_{i-1/2}^n) + (1-\theta) \Delta t G_i^n$$

Où  $\lambda = \Delta t / \Delta x$  et  $0 \leq \theta \leq 1$ . Pour  $\theta = 1$ , le schéma est totalement implicite et pour  $\theta = 0$ , le schéma est explicite. Résoudre le système (5.48) revient à résoudre un système algébrique non linéaire d'une façon itérative. Afin d'éviter cette procédure très coûteuse, nous utilisons la méthode linéaire conservative implicite (LCI) décrite dans (Priestly et Al - 1994). Le vecteur flux numérique aux interfaces s'écrit sous la forme:

$$\tilde{F}_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ F_i + F_{i\pm 1} + \tilde{R}_{i\pm\frac{1}{2}} \Phi_{i\pm\frac{1}{2}} \right]$$

$\tilde{R}_{i\pm\frac{1}{2}}$ , est la matrice des vecteurs propres et  $\Phi_{i\pm\frac{1}{2}}$  est le vecteur de correction afin que le schéma soit TVD. La méthode LCI repose sur l'existence d'une matrice  $B_{i\pm\frac{1}{2}}$  :

$$B_{i\pm\frac{1}{2}} = \tilde{R}_{i\pm\frac{1}{2}} \text{diag} \left( -\phi_{i\pm\frac{1}{2}}^k \right) \tilde{R}_{i\pm\frac{1}{2}}^{-1}$$

Où  $\phi_{i\pm\frac{1}{2}}^k$  sont les éléments de  $\Phi_{i\pm\frac{1}{2}}$ . La matrice B se calcule de la façon suivante:

$$B = \frac{1}{\tilde{a}^2 - \tilde{a}^{-1}} \begin{bmatrix} \phi^1 \tilde{a}^2 - \phi^2 \tilde{a}^1 & \phi^2 - \phi^1 \\ \tilde{a}^1 \tilde{a}^2 (\phi^2 - \phi^1) & \phi^2 \tilde{a}^2 - \phi^1 \tilde{a}^1 \end{bmatrix}$$

Le flux numérique s'écrit alors:

$$\tilde{F}_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ F_i + F_{i\pm 1} + B_{i\pm\frac{1}{2}} \Delta_{i\pm\frac{1}{2}} U \right]$$

Dans la linéarisation utilisée, les termes  $F^{n+1}$  et  $G^{n+1}$  sont développés suivant le développement de Taylor comme suit:

$$\begin{aligned} F_i^{n+1} &= F_i^n + J_i^n \delta U_i + O(\Delta t^2) \\ G_i^{n+1} &= G_i^n + J_{G_i}^n \delta U_i + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

Où,  $\delta U_i = U_i^{n+1} - U_i^n$  et  $J_G$  est le jacobien du terme source G par rapport au vecteur écoulement U.  $J_G$  est exprimé par :

$$J_G = \frac{\partial G}{\partial U} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g \left( S_0 + \frac{7}{3} S_f + \frac{\partial B}{\partial x} \frac{A}{B^2} \right) & -\frac{2gA}{Q} S_f \end{bmatrix}$$

En supposant que les matrices B sont constantes dans le temps, c'est à dire que  $B_{i\pm\frac{1}{2}}^{n+1} = B_{i\pm\frac{1}{2}}^n$ , et après une certaine manipulation algébrique, nous obtenons le système diagonal suivant :

$$A_1 \delta U_{i-1} + A_2 \delta U_i + A_3 \delta U_{i+1} = -\lambda \left( \tilde{F}_{i+1/2}^n + \tilde{F}_{i-1/2}^n \right) + \Delta t G_i^n \quad i = 2, \dots, N-1$$

Les coefficients  $A_i$ , sont des matrices 2 x 2, et sont donnés comme suit :

$$\begin{aligned} A_1 &= -\frac{\lambda \theta}{2} [J_{i-1} + B_{i-1/2}]^n \\ A_2 &= I + \frac{\lambda \theta}{2} [B_{i-1/2} + B_{i+1/2}]^n - \theta \Delta t J_G \\ A_3 &= \frac{\lambda \theta}{2} [J_{i+1} - B_{i+1/2}]^n \end{aligned}$$

$I$ , étant la matrice identité et  $J_{i\pm 1}$  la matrice jacobienne du flux  $F$  (voir 1.2.1) évalué à  $i \pm 1$ . Comme décrit précédemment, un traitement spécial du flux est nécessaire aux interfaces. Le solveur TVD symétrique décrit dans la section suivante est utilisé afin d'évaluer ce flux aux interfaces.

### 5.1. Le solveur TVD symétrique

Le vecteur flux est donné par :

$$\tilde{F}_{i\pm 1/2} = \frac{1}{2} [F_i + F_{i\pm 1} + \sum_{k=1}^2 \phi_{i\pm 1/2}^k \tilde{e}_{i\pm 1/2}^k]$$

Avec

$$(\phi_{i+1/2}^k)^s = -\psi \left( \tilde{a}_{i+1/2}^k \right) \left[ 1 - (L_{i+1/2}^k) / \alpha_{i+1/2}^k \right] \quad k = 1, 2.$$

$L_{i+1/2}^k$ , est exprimé par :  $L_{i+1/2}^k = m(\alpha_{i-1/2}^k, \alpha_{i+1/2}^k, \alpha_{i+3/2}^k)$  et  $m$  est la fonction minmod définie par :

$$m(a, b, c) = \begin{cases} \text{sgn}(a) \times \min[a, b, c] & \text{si } \text{sgn}(a) = \text{sgn}(b) = \text{sgn}(c) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



## Chapitre 2 : Annexe B

### Discrétisation directionnelle du terme source

Dans cette annexe, nous montrons le calcul de  $I_{\pm} \left| \tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2} \right| \tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2}^{-1}$ .

La matrice des vecteurs propres  $\mathbf{R}_{i\pm 1/2}$  et son inverse sont données par :

$$\mathbf{R}_{i\pm 1/2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 & \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_{i\pm 1/2}^{-1} = \frac{1}{\tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 - \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 & -1 \\ -\tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice  $\tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2}$  est donnée par  $\tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2} = \mathbf{R}_{i\pm 1/2} \text{diag}(\tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1, \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2) \mathbf{R}_{i\pm 1/2}^{-1}$ . Sa valeur absolue est :

$$\begin{aligned} \left| \tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2} \right| &= \mathbf{R}_{i\pm 1/2} \text{diag} \left( \left| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 \right|, \left| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 \right| \right) \mathbf{R}_{i\pm 1/2}^{-1} \\ &= \frac{1}{\tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 - \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 & \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 \right| & 0 \\ 0 & \left| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 \right| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 & -1 \\ -\tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 - \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1} \begin{pmatrix} \left| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 \right| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 - \left| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 \right| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 & \left| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 \right| - \left| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 \right| \\ \left| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 \right| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 - \left| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 \right| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 & \left| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 \right| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 - \left| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 \right| \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'inverse de  $\tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2}$ ,  $\tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2}^{-1}$  est :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2}^{-1} &= \mathbf{R}_{i\pm 1/2} \left[ \text{diag}(\tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1, \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2) \right]^{-1} \mathbf{R}_{i\pm 1/2}^{-1} \\ &= \frac{1}{\tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 - \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 & \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 & -1 \\ -\tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2 + \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1}{\tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^1 \tilde{\mathbf{a}}_{i\pm 1/2}^2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le produit des deux matrices  $\left| \tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2} \right|$  et  $\tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2}^{-1}$  est :

$$\left| \tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2} \right| \tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2}^{-1} = \frac{1}{\tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 - \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1} \times \mathbf{B}$$

Avec :

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

Où :

$$\begin{cases} b_{11} = \frac{\tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 + \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1}{\tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2} \left[ \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \right| - \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \right| \right] + \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \right| - \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \right| \\ b_{12} = \frac{-1}{\tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2} \left[ \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \right| - \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \right| \right] \\ b_{21} = \frac{\tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 + \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1}{\tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2} \left[ \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \right| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 - \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \right| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \right] + \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \right| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 - \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \right| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \\ b_{22} = \frac{-1}{\tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2} \left[ \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \right| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 - \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \right| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \right] \end{cases}$$

En utilisant  $|x| = x \times \text{sgn}(x)$ , les éléments de la matrice B deviennent :

$$\begin{cases} b_{11} = \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \text{sgn}(\tilde{a}_{i\pm 1/2}^1) - \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \text{sgn}(\tilde{a}_{i\pm 1/2}^2) \\ b_{12} = \text{sgn}(\tilde{a}_{i\pm 1/2}^2) - \text{sgn}(\tilde{a}_{i\pm 1/2}^1) \\ b_{21} = \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \right| - \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \right| \\ b_{22} = \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \right| - \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \right| \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\left| \tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2} \right| \tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2}^{-1} = \frac{1}{\tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 - \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \text{sgn}(\tilde{a}_{i\pm 1/2}^1) - \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \text{sgn}(\tilde{a}_{i\pm 1/2}^2) & \text{sgn}(\tilde{a}_{i\pm 1/2}^2) - \text{sgn}(\tilde{a}_{i\pm 1/2}^1) \\ \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \right| - \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \right| & \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \right| - \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \right| \end{pmatrix}$$

La matrice  $\mathbf{I} + \left| \tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2} \right| \tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2}^{-1}$  est donnée par :

$$\mathbf{I} + \left| \tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2} \right| \tilde{\mathbf{J}}_{i\pm 1/2}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{\tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \text{sgn}(\tilde{a}_{i\pm 1/2}^1) - \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \text{sgn}(\tilde{a}_{i\pm 1/2}^2)}{\tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 - \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1} & \frac{\text{sgn}(\tilde{a}_{i\pm 1/2}^2) - \text{sgn}(\tilde{a}_{i\pm 1/2}^1)}{\tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 - \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1} \\ \frac{\tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \right| - \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \right|}{\tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 - \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1} & 1 + \frac{\left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 \right| - \left| \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1 \right|}{\tilde{a}_{i\pm 1/2}^2 - \tilde{a}_{i\pm 1/2}^1} \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\mathbf{I} + \left| \tilde{\mathbf{J}}_{i-1/2} \right| \tilde{\mathbf{J}}_{i-1/2}^{-1} = \frac{1}{\tilde{c}_{i-1/2}} \times \mathbf{S}_{i-1/2}^L \quad \text{et} \quad \mathbf{I} - \left| \tilde{\mathbf{J}}_{i+1/2} \right| \tilde{\mathbf{J}}_{i+1/2}^{-1} = \frac{1}{-2\tilde{c}_{i+1/2}} \times \mathbf{S}_{i+1/2}^R$$

Avec :

$$\mathbf{S}_{i-1/2}^L = \begin{pmatrix} (1 + \operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{a}}_{i-1/2}^1)) \tilde{\mathbf{a}}_{i-1/2}^2 - (1 + \operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{a}}_{i-1/2}^2)) \tilde{\mathbf{a}}_{i-1/2}^1 & \operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{a}}_{i-1/2}^2) - \operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{a}}_{i-1/2}^1) \\ \tilde{\mathbf{a}}_{i-1/2}^2 |\tilde{\mathbf{a}}_{i-1/2}^1| - \tilde{\mathbf{a}}_{i-1/2}^1 |\tilde{\mathbf{a}}_{i-1/2}^2| & (1 + \operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{a}}_{i-1/2}^2)) \tilde{\mathbf{a}}_{i-1/2}^2 - (1 + \operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{a}}_{i-1/2}^1)) \tilde{\mathbf{a}}_{i-1/2}^1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}_{i+1/2}^R = \begin{pmatrix} (1 - \operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^1)) \tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^2 - (1 - \operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^2)) \tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^1 & \operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^1) - \operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^2) \\ \tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^1 |\tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^2| - \tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^2 |\tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^1| & (1 - \operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^2)) \tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^2 - (1 - \operatorname{sgn}(\tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^1)) \tilde{\mathbf{a}}_{i+1/2}^1 \end{pmatrix}$$

## Chapitre 3 : Annexe C

# Solutions analytiques des problèmes hydrauliques

### 1. Solution analytique des problèmes stationnaires de MacDonald

Dans cette annexe, nous donnons la solution analytique des problèmes stationnaires proposés par MacDonald et al. (1995). Le système de BSV écrit pour un écoulement stationnaire est :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} - gA(S_0 - S_f) = 0 \end{cases}$$

$h = h(x)$ , est la profondeur hydraulique ;  $Q = Q(x)$  est le débit ;  $A(x, h)$  est la section mouillée,  $S_0(x)$  est la pente du lit,  $g$  l'accélération et  $S_f(x, h, Q)$  est la pente énergétique des frottements et est donnée par :

$$S_f = \frac{Q|Q|}{K^2} \text{ avec } K = \frac{A^{5/3}}{nP^{2/3}}$$

Où  $P(x, h)$  représentent le périmètre mouillé, et  $n$  le coefficient de Manning. Pour un canal trapézoïdal non prismatique à pente latérale  $S_L$  constante, nous avons :  $T(x) = B(x) + 2S_L h(x)$ , est la largeur à la surface,  $A(x) = (B(x) + S_L h(x))h(x)$  et  $P(x) = B(x) + 2h(x)\sqrt{1 + S_L^2}$ . En divisant l'équation D1 par  $gA$  et en dérivant, nous obtenons :

$$\left( 1 - \frac{Q^2 T}{gA^3} \right) h'(x) - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{h=\text{cte}} - S_0 + S_f = 0$$

MacDonald (1995), a trouvé l'expression de la pente  $S_0(x)$  en fonction de la hauteur analytique imposée  $h(x)$  et sa dérivée de la façon :

$$S_0(x) = \left( 1 - \frac{Q^2 T}{gA^3} \right) h'(x) + \frac{Q^2 n^2 P^{4/3}}{A^{10/3}} - \frac{Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{h=\text{cte}}$$

En remplaçant  $T$ ,  $A$  et  $P$  par leur valeur, l'expression de  $S_0(x)$  devient :

$$S_0(x) = \left( 1 - \frac{Q^2 (B(x) + 2S_L h(x))}{gh(x)^3 (B(x) + S_L h(x))^3} \right) h'(x) + \frac{Q^2 n^2 (B(x) + 2h(x)\sqrt{1+S_L^2})^{4/3}}{h(x)^{10/3} (B(x) + S_L h(x))^{10/3}} - B'(x) \frac{Q^2}{gh(x)^2 (B(x) + S_L h(x))^3}$$

En conclusion, MacDonald a étudié le problème d'une façon inverse, il impose une hauteur analytique, un débit constant et un coefficient de Manning, et il a calculé alors l'expression de la pente du lit correspondante selon la relation précédente. Dans la simulation numérique, la pente du canal et le coefficient de Manning sont connus, et le schéma numérique doit simuler la hauteur d'eau et le débit qui sont connus a priori. On peut noter que la relation précédente est valide dans le cas où le canal est trapézoïdal et non prismatique. Lorsque le canal est rectangulaire prismatique, nous avons  $B(x) = B = \text{cte}$   $S_L = 0$ . Si le canal est rectangulaire et non prismatique alors  $S_L = 0$ , et s'il est trapézoïdal et prismatique alors  $B(x) = B = \text{cte}$ .

## 2. Solution analytique des problèmes hydrauliques stationnaires

Nous donnons la solution analytique des problèmes hydrauliques stationnaires suivants : écoulement dans un canal à lit concave, écoulement dans un canal convergent divergent et écoulement dans un canal convergent divergent à lit concave. Ces problèmes admettent des solutions analytiques puisque l'écoulement est stationnaire et le lit du canal ne présente pas de frottements. La solution est basée sur la conservation de l'énergie. Pour une section rectangulaire, l'énergie est donnée par :

$$H = h + \frac{Q^2}{2gh^2b^2} + z$$

Considérons deux points  $x_1$  et  $x_2$  du canal, et notons  $H_1$  et  $H_2$  les énergies respectives en  $x_1$  et  $x_2$ . Puisqu'il n'y a pas de frottement dans le canal, l'énergie entre  $x_1$  et  $x_2$  est alors conservée c'est-à-dire  $H_2 = H_1$ . Cette égalité mène à l'équation suivante :

$$h_2^3 + (z_2 - H_1)h_2^2 + \frac{Q^2}{2gb_2^2} = 0$$

Avec  $H_1 = h_1 + \frac{Q^2}{2gh_1^2b_1^2} + z_1$ . Connaissant ainsi les variables de l'écoulement au nœud 1, cette

équation permet de trouver ces variables au nœud 2, mais à condition qu'il n'y a pas de ressaut hydraulique entre  $x_1$  et  $x_2$ . Par un passage brusque du régime torrentiel au régime fluvial à travers un ressaut hydraulique, nous devons trouver la position de ce ressaut, et ceci en utilisant la notion des forces spécifiques. Soit,  $h_{r1}$  et  $h_{r2}$  les hauteurs conjuguées à l'amont et l'aval du ressaut hydraulique. Le théorème d'Euler permet d'établir une relation entre  $h_{r1}$  et  $h_{r2}$ , pour une section rectangulaire, l'équation est :

$$h_{r2} = \frac{h_{r1}}{2} \left( \sqrt{1 + 8Fr_1^2} - 1 \right)$$

$$\text{Avec } Fr_1 = \sqrt{\frac{Q^2}{gb^2h_{r1}^3}}$$

Ainsi, pour calculer la hauteur exacte des problèmes stationnaires, il faut procéder selon le régime de l'écoulement surtout lorsqu'il y a un ressaut hydraulique.

### 2.1. Ecoulement stationnaire sans ressaut hydraulique

Dans ce cas, l'équation C2 est valable en tout point du canal. Connaissant une hauteur d'eau à un point donné, conditions aux limites amont ou aval, l'équation C2 procède de proche en proche pour calculer la hauteur d'eau en chaque point du canal.

Dans le cas, où nous ne connaissons pas une hauteur d'eau à un point donné, nous imposons la hauteur critique au milieu du canal, puisque l'écoulement passe au régime critique en ce point, et ainsi on procède de proche en proche dans les deux sens : le calcul vers l'amont et celui vers l'aval.

### 2.2. Ecoulement stationnaire avec ressaut hydraulique

Dans ce cas, l'équation C2 n'est pas valable au point où se localise le ressaut hydraulique. Deux cas se présentent : l'écoulement commence torrentiel et se termine fluvial à travers un ressaut hydraulique, l'écoulement commence fluvial, devient torrentiel et se termine fluvial à travers un ressaut hydraulique.

Dans le premier cas, et d'après le traitement des conditions aux limites, la hauteur amont et la hauteur aval doivent être connues. La solution analytique se calcule ainsi :

- Appliquons de proche en proche l'équation C2 de l'amont jusqu'à l'aval.
- Appliquons l'équation C3 pour chaque hauteur calculée afin de localiser l'endroit du ressaut.
- Appliquons de proche en proche l'équation C2 de l'aval vers l'amont. Une des hauteurs obtenue sera évidemment la hauteur conjuguée aval du ressaut.
- Les hauteurs réelles sont celles calculées de l'amont jusqu'à l'aval pour les endroits situés avant le ressaut et de l'aval vers l'amont pour les endroits situés après

Dans le second cas, et d'après le traitement des conditions aux limites, la hauteur aval doit être connue seulement. La solution analytique se calcule ainsi comme précédemment avec une petite différence est de commencer le calcul par la hauteur critique imposée au milieu du canal, et de procéder de proche en proche vers l'amont.

## Chapitre 4 : Annexe D

### Les modèles de jonctions

Les modèles de jonctions qui sont dérivés dans la littérature sont basés sur le principe de la conservation de la quantité de mouvement et sur la conservation de la masse, ou sur la conservation de l'énergie, mais, les différents paramètres complexes et inconnus de la jonction, rendent difficile à dériver ces modèles d'une façon théorique. Tous les modèles de jonctions sont donc de nature empirique et plusieurs paramètres sont estimés expérimentalement.

Dans cette annexe, nous décrivons le principe de la conservation de la quantité de mouvement qui s'applique au voisinage de la jonction, les différents paramètres inconnus qui interviennent, et les différents modèles dérivés dans la littérature pour la confluence et la défluence.

#### 1. Description et notation de la jonction dans le cas d'une confluence

Dans cette section, nous définissons les différents paramètres utiles pour la compréhension de différents modèles dérivés pour la confluence, et ceci dans le cas de trois canaux rectangulaires. Nous désignons par le canal u, le canal principal situé à l'amont de la jonction, le canal L, le canal latéral à la jonction et le canal d, le canal principal situé à l'aval de la jonction. Nous notons par  $h_u$ ,  $h_L$  et  $h_d$ ;  $Q_u$ ,  $Q_L$  et  $Q_d$ ;  $B_u$ ,  $B_L$  et  $B_d$ ;  $V_u$ ,  $V_L$  et  $V_d$ ;  $P_u$ ,  $P_L$  et  $P_d$ ;  $\beta_u$ ,  $\beta_L$  et  $\beta_d$ ;  $\alpha_u$ ,  $\alpha_L$  et  $\alpha_d$ ;  $F_u$ ,  $F_L$  et  $F_d$  les hauteurs d'eau, les débits, les largeurs, les vitesses de l'écoulement, les forces de pression hydrostatique agissant sur le volume de contrôle; les coefficients de correction de la quantité du mouvement, les facteurs de correction de l'énergie, les nombres de Froude respectivement dans les sections voisines à la jonction des trois canaux u, L et d. Soit  $\theta_u$ ;  $\theta_L$  et  $\alpha$ , les angles que font respectivement les canaux amont et latéral avec la direction de l'écoulement et l'angle du canal principal avec l'horizontale. W, U et  $P_f$  désignent respectivement, le poids de l'eau dans le volume de contrôle, la réaction exercée par le mur du canal latéral dans la direction amont et la résultante de toutes les forces de frottement dans la jonction.

##### 1.1. Principe de conservation de la quantité de mouvement à la jonction

Le principe de conservation de la quantité de mouvement, connu sous le nom de la deuxième loi de Newton, s'énonce pour les mouvements de la façon suivante : La variation, dans un volume de contrôle, de la quantité de mouvement pendant un intervalle de temps unitaire, est égale à la somme des forces extérieures agissant sur ce volume de contrôle. La Figure 125, montre les forces agissant sur le volume de contrôle à la jonction. La résultante de toutes les forces agissant dans la direction horizontale est donnée par :

$$\sum F_{\text{ext}} = P_u \cos \theta_u + P_L \cos \theta_L + W \sin \alpha - P_f - P_d - U$$

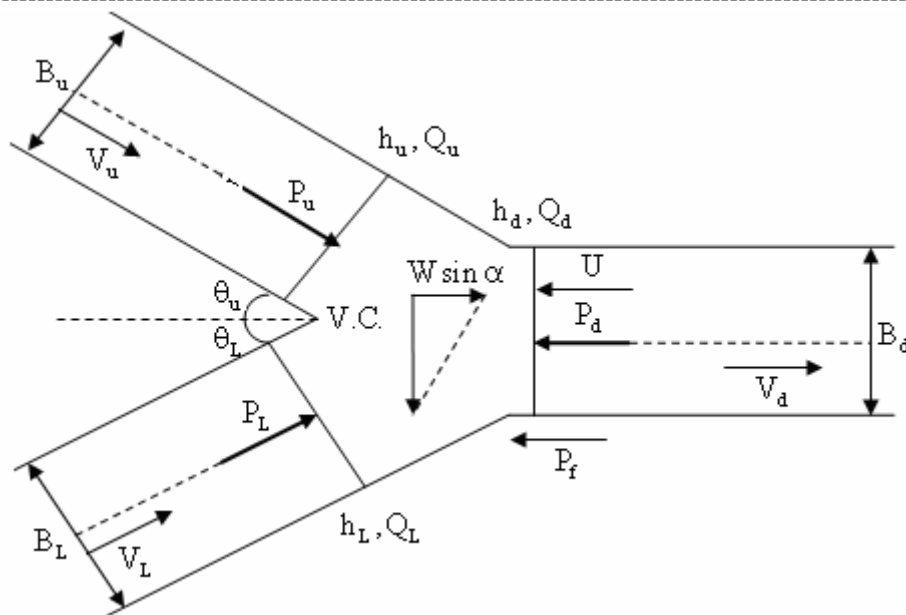


Figure 125: Les différents paramètres d'une confluence.

La variation de la quantité du mouvement dans la direction horizontale est donnée par :

$$\text{Variation}_{\text{QM}} = \beta_d Q_d V_d - \beta_u Q_u V_u \cos \theta_u - \beta_L Q_L V_L \cos \theta_L$$

En égalisant les équations 10.1 et 10.2, nous obtenons le modèle de la jonction basé sur le principe de la conservation de la quantité de mouvement :

$$(P_u + \beta_u Q_u V_u) \cos \theta_u + (P_L + \beta_L Q_L V_L) \cos \theta_L + W \sin \alpha - P_f - U = P_d + \beta_d Q_d V_d$$

L'équation 10.3 est le modèle théorique qui peut décrire une confluence, mais l'impossibilité de définir théoriquement les différents paramètres de ce modèle le rend un modèle inutilisable dans le domaine de l'hydraulique fluvial. Tous les modèles développés dans la littérature, et basés sur le principe de la conservation de la quantité de mouvement, sont développés avec des suppositions de simplification.

## 2. Les modèles de confluence

Un modèle de confluence est un système d'équations permettant de coupler les hauteurs d'eau  $h_u$ ,  $h_L$  et  $h_d$ . Dans la suite, nous allons citer les différents modèles basés sur ce principe. Ces modèles sont de nature empirique due à certains paramètres donnés à partir des résultats expérimentaux.

### 2.1. Le modèle de l'égalité des hauteurs d'eau

Le modèle le plus facile pour simuler la confluence, est le modèle de l'égalité des hauteurs d'eau à la jonction. Ce modèle est employé par plusieurs applications dans la technologie hydraulique. Dans ce modèle, les hauteurs amont, latérale et aval sont supposées égales comme suit :



$$\text{Egalité des hauteurs d'eau à la jonction : } \begin{cases} h_u = h_L \\ h_L = h_d \end{cases}$$

Le modèle de l'égalité des hauteurs d'eau est utilisé quelque que soit la nature de l'écoulement à la jonction.

## 2.2. Modèles de confluence fluviale

Une confluence fluviale est une confluence où l'écoulement est partout fluvial dans les trois canaux renfermant la jonction. Les modèles développés pour la confluence fluviale et utilisés dans ce travail sont : Taylor (1944), Ramamurthy (1988), Gurram (1997), et Hsu (1998). Les notations suivantes sont utilisées dans ces modèles.  $Y_u = \frac{h_u}{h_d}$ , désigne le rapport

des hauteurs amont et aval ;  $Y_L = \frac{h_L}{h_d}$ , le rapport des hauteurs latérale et aval ;

$Y = Y_u = Y_L = \frac{h_u}{h_d} = \frac{h_L}{h_d}$  quand  $h_u = h_L$  ;  $q_u = \frac{Q_u}{Q_d}$ , le rapport des débits amont et aval ;

$q_L = \frac{Q_L}{Q_d}$ , le rapport des débits latéral et aval ;  $\delta$  est l'angle de la confluence, et  $\gamma$  est l'angle

aérodynamique tel que  $\gamma = \frac{8}{9}\delta$ . Pour chaque hauteur aval  $h_d$ , les hauteurs latérale et amont

sont solutions d'un polynôme de troisième degré. Les modèles de Taylor, de Gurram, de Hsu, et de Ramamurthy sont :

$$\text{Modèle de Taylor: } \begin{cases} h_u = h_L \\ Y^3 - Y(1 + 2F_d^2) + F_d^2 [q_u^2 + q_L \cos \delta] = 0 \end{cases}$$

$$\text{Modèle de Ramamurthy: } \begin{cases} h_u = h_L \\ Y^3 - Y \left( 1 + 2 \frac{\beta_d}{\alpha_d} F_d^2 \right) + 2 \frac{F_d^2}{\alpha_d} q_u = 0 \end{cases}$$

$$\text{Modèle de Gurram: } \begin{cases} h_u = h_L \\ Y^3 - Y(1 + 2F_d^2) + F_d^2 [q_u^2 + q_L \cos \gamma] = 0 \end{cases}$$

$$\text{Modèle de Hsu: } \begin{cases} h_u = h_L \\ Y^3 - \left( 1 + 2 \frac{\beta}{\alpha} F_d^2 \right) Y + 2 \frac{\beta}{\alpha} F_d^2 [q_u^2 + \cos \delta (1 - q_u^2)] = 0 \end{cases}$$

$F_d$ , étant le nombre de Froude calculé au premier nœud du canal d au voisinage de la jonction. Une valeur moyenne de  $\alpha$  et  $\beta$  pour le modèle de Hsu est  $\alpha = 1.27$  et  $\beta = 1.12$ . Les valeurs de  $\alpha_d$  et  $\beta_d$  dépendent de plusieurs facteurs, tels que l'angle de jonction, le rapport de débit. Les relations approximatives suivantes sont employées :

$$\alpha_d = 1.25 + 0.5q_L \text{ et } \beta_d = (1 - 0.24q_L)\alpha_d.$$

Un modèle plus général conduit par Shabayek et al. (2002) ne suppose pas l'égalité des hauteurs d'eau des canaux amont à la jonction, ni l'égalité des largeurs. Shabayek a développé un modèle théorique unidimensionnel pour des écoulements fluviaux en appliquant le principe de la conservation de la quantité de mouvement à deux volumes de contrôle dans la jonction comme montre la Figure 125. Les notations suivantes sont utilisées dans ce modèle :  $w_1 = \frac{B_u}{B_d}$

le rapport des largeurs amont et aval ;  $w_2 = \frac{B_L}{B_d}$  le rapport des largeurs latérale et aval ;  $S_0$  est

la pente longitudinale de la jonction ;  $C_*$  est le coefficient adimensionnel de Chézy ;  $L_1$  et  $L_2$  sont les longueurs externes des deux volumes de contrôle.  $K^*$ , est le coefficient de cisaillement ;  $K$  est le coefficient de la zone de séparation. En utilisant aussi la conservation de la masse, Shabayek a dérivé deux équations, qui sont fonctions de plusieurs paramètres définis précédemment. Ce modèle est donné par :

$$\text{Shabayek : } \begin{cases} q_u - \frac{q_u^2}{w_1 Y_u} - \frac{1}{8F_d^2} \left[ w_1 (3Y_u^2 - 2Y_u Y_L - Y_L^2) + q_u (Y_u^2 + 2Y_u Y_L + Y_L^2 - 4) \right] \\ - \frac{1}{2F_d^2} \left( \frac{L_1 S_0}{h_d} \right) (w_1 Y_u + q_u) + K^* \left( \left[ \frac{q_u}{w_1 Y_u} \right]^2 - \left[ \frac{q_L}{w_2 Y_L} \right]^2 \right) (Y_u + Y_L) [2q_L q_u] \\ + \frac{L_1}{b_d C_*^2} \left( 1 + \frac{b_d}{h_d} q_u \right) = 0 \\ q_L - \frac{q_L^2}{w_2 Y_L} - \frac{1}{8F_d^2} \left[ w_2 (3Y_L^2 - 2Y_u Y_L - Y_u^2) + q_L (Y_L^2 + 2Y_u Y_L + Y_u^2 - 4) \right] \\ - \frac{1}{2F_d^2} \left( \frac{L_2 S_0}{h_d} \right) (w_2 Y_L + q_L) - K^* \left( \left[ \frac{q_u}{w_1 Y_u} \right]^2 - \left[ \frac{q_L}{w_2 Y_L} \right]^2 \right) (Y_u + Y_L) [2q_L q_u] \\ + \frac{L_2}{b_d C_*^2} \left( 1 + \frac{b_d}{h_d} q_L \right) + K \frac{q_L^3}{w_2^2 Y_L} = 0 \end{cases}$$

Les valeurs de  $K^*$  et  $K$  sont données par :

$$K^* = -0.0015\delta + 0.3 \quad \text{et} \quad K = 0.0092\delta - 0.1855$$

### 2.3. Modèles de confluence transitionnelle

Une confluence transitionnelle est une confluence où l'écoulement est fluvial dans les deux canaux situés avant la jonction, mais devient torrentiel dans le canal situé après. Les modèles développés pour la confluence transitionnelle et utilisés dans ce travail sont le modèle de Hager (1989) et de Gurram (1994). Ces modèles assument l'égalité des hauteurs d'eau dans les canaux situés avant la jonction, et l'égalité des largeurs des canaux. Hager a dérivé deux équations à deux inconnus : le coefficient de contraction  $\mu$ , et le rapport des hauteurs d'eau  $Y$ , en termes du débit  $q_u$  et l'angle de jonction  $\delta$ . Le modèle de Hager est :

$$\text{Modèle de Hager: } \begin{cases} h_u = h_L \\ (1 - \cos \delta)Y^3 + 3(\cos \delta - \mu)Y + 2\mu^2 q_u^2 \\ + 2 \cos \delta [\mu^2 (1 - q_u)^2 - (1 - 2q_u + 2q_u^2)] = 0 \\ \mu = [Y(2Y^2 - 3) + 2(1 - 2q_u + 2q_u^2)]Y^{-3} \\ h_d = h_c \end{cases}$$

Le modèle de Gurram est:

$$\text{Modèle de Gurram: } \begin{cases} h_u = h_L \\ Y^3 - 3Y + 2[q_u^2 + q_L \cos \delta] = 0 \\ h_d = h_c \end{cases}$$

## 2.4. Modèles de confluence torrentielle

Une confluence torrentielle est une confluence où l'écoulement est partout torrentielle dans les trois canaux renfermant la jonction.

## 2.5. Le modèle de Rice (1985)

Le modèle de Rice prend la forme suivante :

$$\left( \frac{B_u h_u^2}{2} + \frac{Q_u^2}{g B_u h_u} \right) \cos \theta_u + \frac{Q_L^2}{g B_L h_L} \cos \theta_L - \frac{B_d h_d^2}{2} - \frac{Q_d^2}{g B_d h_d} = 0$$

## 3. Les modèles de déflueance

Les notations utilisées dans cette section sont similaires à celles de la section précédente. Les modèles développés pour la déflueance sont consacrés à la déflueance fluviale, c'est-à-dire, lorsque l'écoulement qui arrive à la jonction est fluvial, et se divise après en deux écoulements de type fluvial. Les modèles développés et utilisés dans ce travail sont : le modèle de Pemaiah (1977), de Ramamurthy (1988), Ramamurthy (1990), et de Hsu (2002).

### a- Modèles de déflueance fluviale

Ces modèles sont :

$$\text{Pemaiah : } \begin{cases} h_u = h_L \\ \left[ 1/Y^3 + [2F_u^2 Q_L / Q_u - 2F_u^2] / Y + 2F_u^2 [1 - Q_L / Q_u] \right] = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ramamurthy 1988: } \begin{cases} h_u = h_L \\ Y^3 - \frac{1}{4q_u} (1+Y)^2 Y - (2F_u^2 + 1) \left(1 - \frac{1}{q_u}\right) Y + 2F_u^2 \left(1 - \frac{1}{q_u}\right)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ramamurthy 1990 : } \begin{cases} h_u = h_L \\ Y^3 + 2Y^2 F_u^2 (1 - kQ_L / Q_u) - 1 - 2F_u^2 = 0 \\ \text{avec } k = 5/6 - F_u^2 / 40. \end{cases}$$

$$\text{Modèle de Hsu : } \begin{cases} h_u = h_L \\ Y^3 - \left[1 + \frac{1}{2} F_d^2\right] Y^2 + \frac{q_u^2}{2} F_d^2 = 0 \end{cases}$$