THESE PRESENTEE POUR OBTENIR LE GRADE

DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE LOUIS PASTEUR

STRASBOURG I

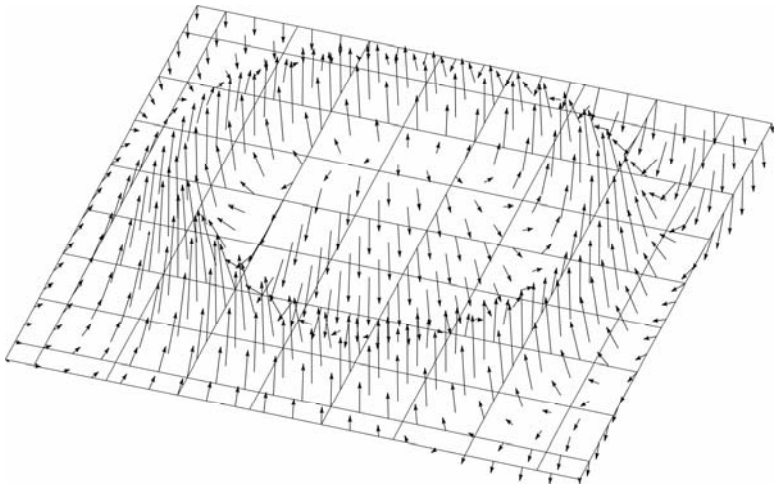
(GEOPHYSIQUE MARINE)

Discipline : Sciences de la Terre et de l'Univers

Etude quantitative des anomalies magnétiques par le signal analytique : application à des données océaniques

Par

Mohamad BAALA



Soutenue publiquement le 6 mai 2005, devant la commission d'Examen

MM. Rapporteur Externe : Jérôme Dyment, Chargé de Recherche CNRS, IPGP

Rapporteur Interne : Jean Bernard Edel, Maître de Conférence, EOST

Rapporteur externe : Armand Galdeano, Directeur de Recherche CNRS, IPGP

Examinateur : Guy Marquis, Professeur, EOST

Directeur de thèse : Marc Munschy, Physicien des Observatoires, EOST

Invité : Jean Jacques Schott, Physicien adjoint, EOST

THESE PRESENTEE POUR OBTENIR LE GRADE DE
DOCTEUR DE L'UNIVERSITE LOUIS PASTEUR
STRASBOURG I

(GEOPHYSIQUE MARINE)

Par
Mohamad BAALA

Etude quantitative des anomalies magnétiques par le signal analytique : application à des données océaniques

Soutenue publiquement le 6 mai 2005, devant la commission d'Examen

MM. Rapporteur Externe : Jérôme Dyment, Chargé de Recherche CNRS, IPGP
Rapporteur Interne : Jean Bernard Edel, Maître de Conférence, EOST
Rapporteur externe : Armand Galdeano, Directeur de Recherche CNRS, IPGP
Examinateur : Guy Marquis, Professeur, EOST
Directeur de thèse : Marc Munschy, Physicien des Observatoires, EOST
Invité : Jean Jacques Schott, Physicien adjoint, EOST

AVANT-PROPOS

Alors que ce travail s'achève, il m'est agréable de remercier toutes les personnes qui, de près ou de loin, ont contribué à sa réalisation. En premier lieu je tiens à remercier Marc Munschy, qui m'a accordé sa confiance en étant le directeur de mon travail. Nous n'avons pas pu nous retrouver régulièrement au cours de cette thèse, mais les moments passés ensemble ont été précieux et d'une efficacité redoutable. Je le remercie également pour la correction finale du texte et la mise en forme de la thèse.

J'exprime ma sincère gratitude à Jean-Jacques Schott, qui, malgré son emploi du temps très chargé, a accepté de lire la première version du manuscrit et a apporté des corrections fondamentales sur les développements analytiques de cette thèse. Je lui en suis d'autant plus reconnaissant qu'il a eu confiance en mon travail. Ceci m'a encouragé à mettre fin à cette très longue expérience, riche en souffrance. Je te remercie infiniment Jean-Jacques pour ton aide inoubliable.

Je remercie également Daniel Sauter, qui m'a encouragé tout au long de ce périple, et qui m'a permis de participer à la campagne géophysique MD 135 SWIR dans l'océan Indien. Je te remercie chaleureusement pour ton soutien matériel et moral et pour tes gestes d'amitié.

J'adresse également mes remerciements aux géophysiciens qui ont bien voulu s'intéresser à ce mémoire et ont accepté d'être le jury de cette thèse: Jean Bernard Edel (EOST), Jérôme Dyment, (CNRS, IPGP), Armand Galdeano (CNRS, IPGP) et Guy Marquis (EOST).

Je remercie toute personne qui m'a tendu une main secourable lors de la dernière période pénible de ce travail, pendant laquelle j'ai souffert d'une grave crise financière. Je remercie tout particulièrement Marc Munschy, Daniel Sauter, Marc Schaming, Erwan Thebault, Caustav Ossami et Sonia Almasody.

Je ne saurais oublier toutes les personnes de ce laboratoire : Armelle Bernard, Hubert Whitechurch, Robert Thuizat, Raymond Montigny, Mustapha Bouiflane, et je remercie tout particulièrement Daniel et Marie-Odile Boulanger et Véronique Mendel pour leur aide.

Enfin, à ma famille, tout particulièrement à ma mère, qui connaissent le prix de ce travail, j'adresse toute ma reconnaissance.

SOMMAIRE

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I 3
1.1 Anomalies magnétiques océaniques et premières modélisations 4
1.1.1 Méthodes d'acquisition et d'analyse des données magnétiques 4
1.1.2 Modèle standard de la source magnétique océanique 8
1.1.3 Propriétés de l'anomalie magnétique du modèle standard 9
1.1.4 Propriétés de l'anomalie magnétique observée 14
1.2 Facteurs de distorsion 16
1.2.1 Facteurs liés au comportement du champ magnétique régional 16
1.2.1.1 Echelle chronologique et sa résolution 17
1.2.1.2 Variation relative de paléointensité 21
1.2.2 Facteurs liés à la structure magnétique de la lithosphère océanique 24
1.2.2.1 Aimantation de la couche basaltique extrusive 26
1.2.2.2 Aimantation du complexe filonien 32
1.2.2.3 Aimantation de la couche gabbroïque 35
1.2.2.4 Aimantation du manteau supérieur 37
1.2.3 Modèles litho-magnétiques océanique 40
1.3 Modèles d'aimantation de la lithosphère 41
1.3.1 Les modèles à plusieurs couches 42
1.3.2 Modèle chimique et rémanence chimique 44
1.3.3 Modèle tectonique 46

CHAPITRE II 51
2.1 Transformation de Hilbert 53
2.2 Fonctions holomorphes 54
2.2.1 Potentiel newtonien complexe 56
2.2.2 Potentiel magnétique complexe 58
2.2.3 Champ magnétique complexe 62
2.3 Construction du signal analytique et ses propriétés 64
2.3.1 Signal analytique de l'anomalie d'un contraste 72
2.3.2 Signal analytique de l'anomalie d'une lame 82
2.3.3 Caractérisation de la source magnétique 86
2.3.4 Calcul de phase par corrélation 94
2.4 Transformation en ondelettes continue 98
2.4.1 Théorie et principe de l'analyse en ondelettes 98
2.4.2 La transformée en ondelettes en analyse du champ de potentiel 100
2.4.2.1 Analyse par l'ondelettes de Poisson 100
2.4.2.2 Analyse par ondelettes complexes 103
2.4.3 Analyse du champ d'une source multiple 110
2.4.3.1 Source étendue 111
2.4.3.2 Présence de bruit dans les données 112
2.4.3.3 Interférence de sources voisines 113

CHAPITRE III 119
3.1 Détermination de la distorsion des anomalies magnétiques 120
3.2 Nouvelle méthode d'estimation de la phase 122
3.3 Application sur des données réelles 125

CHAPITRE IV 137
4.1 Transformée de Riesz et fonction monogénique 141
4.2 Signal analytique à deux dimensions 145
4.3 Signal analytique 2D de l'anomalie magnétique 148
4.3.1 Signal magnétique à structure 1i-D 150
4.3.2 Signal magnétique à structure 2i-D 154
4.4 Correspondance entre les propriétés des signaux analytiques 1D et 2D 159
4.4.1 Transformée de Radon continue à deux dimensions 159
4.4.2 Relation directe 162
4.4.2.1 Signal radial d'un signal réel i1-D 164
4.4.2.2 Signal radial d'un signal i2-D 168
4.4.3 Relation inverse 173
4.4.3.1 Relation entre les propriétés du signal analytique radial et de signal 2D .. 178
4.4.3.2 Construction d'une nouvelle amplitude à deux dimensions 183
4.5 Discrétisation de la transformée de Radon 189

CONCLUSION 195

BIBLIOGRAPHIE 197

ANNEXES 209

INTRODUCTION

Depuis l'article de Vine et Matthews de 1963, les anomalies magnétiques océaniques sont interprétées de manière à identifier les inversions du champ magnétique terrestre fossilisées dans la croûte océanique depuis environ 160 Ma. Ce type d'interprétation est appelé « qualitatif » car d'une part le modèle correspondant est très simple : on considère une couche uniformément aimantée dont l'aimantation change de signe à chaque inversion du champ magnétique. D'autre part, on considère que l'interprétation est satisfaisante en fonction de critères visuels de correspondance. Depuis 1963, plusieurs études régionales ont permis des interprétations plus fines et quantitatives de l'aimantation de la croûte océanique. Elles ont le plus souvent conduit à proposer des modèles beaucoup plus sophistiqués et réalistes. Un autre type d'étude porte sur la forme des anomalies magnétiques permettant de reconstituer en partie la direction de l'aimantation. Ce type d'étude est important car il permet, à priori, de reconstituer la paléolatitude de la croûte océanique lors de sa formation. Ainsi on pourrait disposer d'une méthode indépendante des autres pour reconstituer, au moins partiellement, la position des continents ; le principal avantage de cette méthode étant par ailleurs de disposer d'un référentiel absolu pour la position des continents en latitude permettant de mieux contraindre les questions de la fixité des points chauds. Malheureusement, les résultats obtenus ont débouché sur la mise en évidence d'un biais dans la direction d'aimantation calculée, appelé « anomalous skewness » ou distorsion anormale des anomalies magnétiques qui n'est pas clairement expliquée. La reconstitution de la paléolatitude des océans à partir des anomalies magnétiques a donc été généralement abandonnée.

L'objet initial de ce travail était l'étude quantitative des anomalies magnétiques océaniques. Il s'agissait d'utiliser tous les algorithmes généralement employés en méthodes potentielles pour interpréter de manière la plus objective possible ce type d'anomalies magnétiques. Rapidement, et en utilisant des données magnétiques acquises sur différentes dorsales, nous nous sommes rendus compte d'un certains nombre de problèmes liés à l'utilisation de ces algorithmes. Il nous a fallu alors nous interroger sur les hypothèses et les méthodologies utilisées. La technique du signal analytique, apparue en 1972 pour les anomalies magnétiques à deux dimensions est un progrès important pour ce type d'interprétations. Cependant, elle ne s'applique pas à tous les types de structures aimantées et elle pose un certains nombre de problèmes théoriques. Enfin elle a été le prélude à l'utilisation des nombres complexes pour l'écriture des équations mais cette nouvelle approche n'a pas été explorée de façon complète.

L'objet de ce travail a donc été pour l'essentiel de reprendre de façon théorique les équations du signal analytique et de les appliquer au sujet qui nous concerne, à savoir les anomalies magnétiques océaniques.

Le chapitre un constitue une synthèse des connaissances acquises depuis les années 1960 concernant l'aimantation de la croûte et de la lithosphère océanique. Il a pour but de mieux définir les caractéristiques des porteurs de l'aimantation.

Le chapitre deux présente la théorie du signal analytique à une dimension en utilisant des bases théoriques plus complètes que ce qui était proposé précédemment, en particulier l'utilisation des fonctions holomorphes. Cela permet de mieux accéder aux paramètres de la source en séparant le signal magnétique en deux composantes orthogonales et donc indépendantes : l'amplitude et la phase locales. Cette approche utilise aussi la notion de transformée en ondelettes. Enfin chacune des nouvelles équations est étudiée dans le cas synthétique.

Le chapitre trois constitue l'application à des données magnétiques de la théorie du chapitre deux. Ces données sont des profils magnétiques de la dorsale est-indienne. Leur interprétation conduit à proposer une explication de la distorsion anormale des anomalies magnétiques.

Le chapitre quatre est l'extension à trois dimensions de l'étude théorique du signal analytique. Le problème est de trouver une extension à deux dimensions de la transformée de Hilbert. Nous proposons une généralisation à deux dimensions des conditions de Newmann. Cela nous conduit à l'utilisation de la transformée de Riesz comme généralisation de la transformée de Hilbert. L'application au cas synthétique montre que les propriétés du signal analytique à deux dimensions, construit à partir de la transformée de Riesz, est fortement en relation avec le type de symétrie du signal magnétique analysé. Ainsi, l'amplitude et le vecteur local de la phase associés à un signal magnétique à symétrie à une dimension sont indépendants et permettent de caractériser les paramètres de la source causative. Par contre, pour un signal magnétique à symétrie bi dimensionnelle, le concept du signal analytique proposé est insuffisant pour représenter correctement le signal. Dans ce cas, l'indépendance entre les deux composantes, amplitude et vecteur local de la phase, n'est pas vérifiée et l'analyse ne permet donc pas de caractériser correctement les paramètres de la source magnétique. La transformée de Radon est un bon outil pour la connexion entre les propriétés du signal analytique à une et deux dimensions. Elle permet de décomposer la symétrie 2D en une série infinie des symétries 1D. Ainsi cette transformation permet de construire une amplitude locale à deux dimensions indépendante du vecteur local de la phase.

CHAPITRE I

PROPRIETES DE L'AIMANTATION DU FOND OCEANIQUE ET LEUR EFFET SUR LES CARACTERISTIQUES DE L'ANOMALIE OCEANIQUE

A la fin des années 50, les premières cartographies magnétiques à la surface des océans ont montré des linéations magnétiques surprenantes, de forte amplitude. Ces linéations correspondant à des maxima positifs et négatifs d'anomalies magnétiques sont réparties en bandes parallèles à l'axe de la dorsale. Elles sont dues à la présence de roches océaniques aimantées par le champ paléomagnétique lors de leur mise en place à l'axe d'accrétion océanique [Vine et Matthews, 1963]. Ces roches océaniques représentent un enregistrement stable et continu du champ paléomagnétique. L'estimation des paramètres magnétiques de l'aimantation des roches océaniques à partir de l'anomalie magnétique observée à la surface fournit une information très importante sur les caractéristiques du champ magnétique ancien. L'idée fondamentale du présent travail de recherche et l'analyse de la phase de l'anomalie magnétique océanique et l'extraction de l'inclinaison apparente de l'aimantation à partir de cette analyse. La connaissance de l'inclinaison apparente de l'aimantation en un lieu donné et pour une époque donnée permet de fixer la position du pôle paléomagnétique de la plaque. En pratique, l'estimation de l'inclinaison apparente en partant de l'anomalie observée est basée sur une relation analytique simple établie à partir d'un modèle théorique standard de la structure magnétique du fond océanique. Les propriétés des anomalies magnétiques observées et l'analyse magnétique directe des roches océaniques indiquent que l'aimantation réelle de la lithosphère océanique est beaucoup plus complexe et qu'elle est difficilement modélisable. Cette complexité affecte la phase de l'anomalie observée et rend très discutable l'extraction de l'inclinaison apparente par la relation basée sur un modèle standard.

Dans ce chapitre, essentiellement bibliographique, nous nous intéressons à explorer la structure magnétique du fond océanique et à décrire les différents facteurs affectant la phase de l'anomalie magnétique observée sur la surface de la mer. Dans cette optique, nous allons étudier en détail la différence entre les propriétés des anomalies magnétiques générées par le modèle standard et celles observées. Nous étudions ensuite les différentes sources qui peuvent être à l'origine de cette différence, nous présentons finalement quelques modèles magnétiques du fond océanique proposés comme alternatifs du modèle standard. La structure du chapitre est organisée de la manière suivante. Dans un premier temps, à la section (1.1), nous donnons la définition et quelques propriétés du modèle standard, nous concentrons dans cette section à démontrer la distorsion existante entre les propriétés des anomalies observées et les anomalies générées par ce modèle. A la section (1.2), nous abordons les différentes aspects qui peuvent être à l'origine de cette distorsion ; tout en traitant les comportements des champs

géomagnétique (présent) et paléomagnétique (passé) et en synthétisant les résultats obtenus concernant les propriétés magnétiques des différents niveaux lithologiques de la lithosphère océanique. La section (1.3) est consacrée à un rappel des modèles magnétiques plus représentatifs de la structure magnétique du fond océanique et qui répondent mieux que le modèle standard à certaines questions qui se posent sur l'interprétation des données magnétiques.

1.1 Anomalies magnétiques océaniques et premières modélisations

Comme toute fonction réelle l'anomalie magnétique océanique se caractérise dans le domaine spatial par son amplitude et son allure. L'analyse de ces deux composantes de l'anomalie a beaucoup contribué à la résolution de plusieurs questions de la théorie de tectonique des plaques

- Compréhension des caractéristiques fondamentales de la structure et de l'évolution de la lithosphère océanique.
- Modélisation de l'échelle chronologique des inversions du champ magnétique grâce à la continuité et à la stabilité de l'enregistrement dans la croûte océanique de ses caractéristiques depuis le Jurassique.
- Contribution à l'établissement de la théorie de la tectonique des plaques en permettant de dater la lithosphère océanique et ainsi de calculer des mouvements relatifs de plaques.

1.1.1 Méthodes d'acquisition et d'analyse des données magnétiques

Les avantages cités précédemment de l'analyse des anomalies océaniques sont certainement renforcés par l'existence de différents types de données magnétiques prises à des altitudes très variables. Ainsi nous disposons actuellement de trois types de mesures.

Les *mesures magnétiques marines* acquises au voisinage de la surface des océans soit par bateau, soit par avion à faible altitude. Ces données sont très nombreuses et se caractérisent par des petites longueurs d'ondes dont les amplitudes les plus fortes, sont associées aux inversions du champ magnétique terrestre enregistrées dans la croûte océanique.

Les *données de satellites* comme les données de MAGSAT ou de POGO. Ces satellites sont en rotation à des orbites d'altitude moyenne de l'ordre de 400 km. Ils mesurent essentiellement les grandes longueurs d'ondes donnant ainsi des informations sur l'aimantation de la lithosphère océanique profonde.

Les l*evés magnétiques profonds* effectués à l'aide de magnétomètres remorqués à quelques centaines de mètres au-dessus du fond océanique. Ce type de mesures met en évidence les anomalies de très courtes longueurs d'onde. Ils permettent également de caractériser beaucoup mieux l'aimantation de la croûte océanique superficielle.

L'analyse de ces différents types de données magnétiques océaniques s'effectuent par les mêmes méthodes classiques utilisées dans l'analyse des données magnétiques à terre. Ces méthodes peuvent se diviser en deux catégories : *Des méthodes directes* et *des méthodes inverses*. Les méthodes directes correspondent à la comparaison entre l'anomalie magnétique observée et une anomalie magnétique synthétique calculée à partir d'un modèle de distribution d'aimantation théorique. Le modèle doit être ajusté en modifiant les principaux paramètres (la répartition des intensités et des directions d'aimantation en particulier) jusqu'à obtenir une bonne correspondance entre l'anomalie mesurée et l'anomalie calculée. Cette méthode, utilisée avec des répartitions simples d'aimantation (blocs d'intensité d'aimantation constante et de direction directe ou inverse) a été à l'origine de la construction de l'échelle chronologique des inversions du champ magnétique terrestre.

Les méthodes inverses représentent la catégorie la plus fiable pour quantifier les sources des anomalies car elle met en œuvre moins d'à priori dans les calculs. Elle correspond à l'estimation des paramètres de la structure magnétiques océanique en utilisant directement les informations contenues implicitement dans les données réelles. Selon les paramètres à estimer, l'inversion peut se formuler par une *régression linéaire* ou une *régression non-linéaire*. Ainsi de l'expression générale du champ magnétique $T(x,z)$ d'une distribution d'aimantation $M(x_0,z_0)$ à deux dimensions

$$T(x,z) = \int\int dx_0 dz_0 m(x_0,z_0)\zeta(x - x_0, z - z_0) \qquad (1.1.1)$$

avec $\zeta(x,z) = \dfrac{4(m_x f_z + m_z f_x)(x - x_0)(z_0 - z) + (m_x f_x - m_z f_z)[(x - x_0) - (z_0 - z)]}{[(x - x_0)^2 + (z_0 - z)^2]^2}$

On constate que le champ $T(x,z)$ représente un produit de convolution entre l'intensité d'aimantation $m(x_0,z_0)$ et la fonction de Green[1] $\zeta(x,z)$. Par conséquent la détermination de l'intensité de l'aimantation $m(x_0,z_0)$ peut s'obtenir par une régression linéaire. Par contre les autres paramètres comme la direction de l'aimantation, définie dans l'équation 1.1.1 par les deux composantes m_x et m_z, ou la forme et la profondeur de la source magnétique représentées par les coordonnées x_0 et z_0 ne correspondent pas à un problème linéaire et leur estimation demande l'utilisation d'autres méthodes d'inversion optimales non linéaires.

[1] La fonction de Green dans ce cas est le champ magnétique d'une ligne infinie de dipôles de direction d'aimantation identique à celle de la distribution $M(x_0,z_0)$.

Concernant l'estimation de l'intensité d'aimantation m, le problème à résoudre est de trouver à partir des observations magnétiques une distribution d'aimantation équivalente en intensité à la distribution réelle $M(x_0, z_0)$. La forme de la distribution cherchée est en générale attribuée à priori à une couche théorique d'épaisseur constante et de profondeur constante ou drapée sur la topographie du fond océanique $h(x)$, si des données bathymétriques sont disponibles. L'estimation de $m(x_0, z_0)$ de la couche est formulée dans la littérature par deux méthodes : soit par un calcul matriciel soit par un calcul itératif dans le domaine de Fourier. Le calcul matriciel consiste à diviser la couche théorique en N cellules rectangulaires identiques en forme et d'intensité d'aimantation m_j (j=1,N) variable d'une cellule à l'autre. Par la discrétisation de l'équation 1.1.1, l'anomalie magnétique observée en chaque point du domaine des mesures peut alors être exprimée par la somme de la contribution des N cellules; soit

$$T_i = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} m_j \psi_{ij} \quad (i = 1, \mathrm{K}) \tag{1.1.2}$$

K est le nombre d'observations et ψ_{ij} est le champ magnétique produit au point i par le rectangle j dont l'intensité d'aimantation est égale à l'unité (voir annexe A1).

En écrivant (1.1.2) sous forme matricielle [Bott et Hutton, 1970; Bott et Ingles, 1972], il vient

$$\mathrm{T} = \mathrm{GM} \tag{1.1.3}$$

T étant le vecteur de données, M le vecteur de l'intensité d'aimantation à estimer et G étant une matrice rectangulaire $\mathrm{K} \times \mathrm{N}$ dont les éléments sont les fonctions ψ_{ij}. A ce stade nous pouvons distinguer entre trois cas :

Dans le cas où le vecteur de données et le vecteur de paramètres à estimer seraient égaux (K=N), il s'agit d'un système de K équations linéaires à N inconnues qui est facile à résoudre à condition que les K équations soient compatibles, c'est-à-dire que le déterminant de la matrice soit non nul.

Si (K>N) alors le système d'équations est surdéterminé. Il peut se résoudre par la méthode des moindres carrés qui consiste à trouver les aimantations minimisant l'erreur suivante

$$E = \mathrm{e}^{\mathrm{T}}\mathrm{e} = (\mathrm{T} - \mathrm{GM})^{\mathrm{T}}(\mathrm{T} - \mathrm{GM}) \tag{1.1.4}$$

La solution qui minimise E est

$$\mathrm{M}^{\mathrm{est}} = \left[\mathrm{G}^{\mathrm{T}}\mathrm{G}\right]^{-1}\mathrm{G}^{\mathrm{T}}\mathrm{T} \tag{1.1.5}$$

Dans le cas sous déterminé où (K<N) la solution est du même type que le cas surdéterminé avec comme condition supplémentaire que sa norme soit minimale.

A la place de la méthode matricielle, décrite ci-dessus pour estimer l'intensité de l'aimantation M, qui requiert un espace de mémoire informatique considérable (notamment dans les calculs à 3-D), une autre méthode alternative plus économique et plus rapide a été proposée par Parker (1973) et Parker et Huestis (1974). Selon cette méthode, la calcul de M est basée sur un *concept itératif* dans l'espace de Fourier en appliquant l'opérateur suivant

$$\mathsf{F}\{\mathrm{M}\} = \frac{\mathsf{F}\{T\}\exp(|k|z_0)}{(1/2\mu_0)[1-\exp(|k|h_0)]V(k)} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|k|^n}{n!}\mathsf{F}\{\mathrm{M}h^n(x)\} \qquad (1.1.6)$$

$$\text{avec } V(k) = (m_z + im_x k/|k|)(f_z + if_x k/|k|)$$

k est la pulsation associée à la variable x et h_0 l'épaisseur de la couche magnétique proposée à priori. La fonction (1.1.6) peut être vue comme un opérateur itératif sur le vecteur aimantation M : Au lancement du calcul, on suppose M=0 dans le terme à droite de l'équation (1.1.6), suite à la première itération ce terme sera remplacé par les valeurs de M obtenue par l'itération précédente. Si le calcul n'est pas divergent, il se poursuit jusqu'à ce qu'on obtienne des valeurs de M non variantes pour plus d'itération. Ces valeurs de M correspondront aux valeurs d'intensité d'aimantation cherchées.

une puis des nouvelles valeurs de M sont calculées itérativement en utilisant la formule $\mathsf{F}\{\mathrm{M}\}$. Ces nouvelles valeurs de M seront substituées au terme de droite de (1.1.6) et cette opération se répète (si l'inversion n'est pas divergente) jusqu'à ce qu'on obtienne des valeurs de M non variantes pour qui correspondront aux valeurs d'aimantation cherchées.

Quant au calcul des autres paramètres de la distribution magnétique non linéaires : la profondeur, l'épaisseur ou la direction de l'aimantation. Plusieurs approches d'inversion optimales ont été développées pour les estimer, comme par exemple :

- la déconvolution eulérienne pour calculer la profondeur de la source [Thompson, 1982] ;
- l'analyse statistique fréquentielle de l'énergie contenue dans l'anomalie [Blakely, 1983] qui permet d'avoir une idée de la profondeur et de l'épaisseur de la source ;
- la transformation de la phase qui sert à la définition de la direction d'aimantation [Schouten et al., 1972; 1976] ;
- ou encore la technique du signal analytique qui permet de localiser la position horizontale des limitées entre les polarités opposées ; et d'accès automatiquement à la valeur de la phase de l'anomalie [Roest et al. 1992].

1.1.2 Modèle standard de la source magnétique océanique

Après avoir donné une brève idée de l'acquisition des anomalies magnétiques océaniques et les techniques de leur analyse, regardons maintenant le premier modèle de la structure magnétique océanique proposé à partir de l'analyse des anomalies. La première tentative pour modéliser la source de l'anomalie magnétique marine remonte à l'année 1963 quand Vine et Matthews ont conclu de différentes observations que la répartition des anomalies en bandes symétriques représente l'enregistrement par les roches lithosphériques des variations temporelles du champ paléomagnétique terrestre. Chaque bande d'anomalie magnétique océanique est due à une aimantation rémanente thermique (ART) acquise par le basalte au moment de son refroidissement dans la zone axiale de la dorsale. L'aimantation rémanente thermique acquise se caractérise par une très grande stabilité et elle fossilise donc les caractéristiques du champ magnétique de l'époque. Cette interprétation du mécanisme d'aimantation du fond océanique a conduit les auteurs à modéliser la source basaltique de l'anomalie magnétique par une couche magnétique horizontale à deux dimensions d'intensité d'aimantation uniforme et de polarité alternative entre des zones normales, c'est à dire de même polarité qu'aujourd'hui, et des zones inverses pour lesquelles la direction de l'aimantation est opposée à celle actuelle. L'épaisseur proposée de la couche était de 20 km, correspondant à la profondeur de l'isotherme du point du Curie des minéraux magnétiques de la lithosphère. La susceptibilité magnétique choisie était de ± 0.0025 sur toute la couche à l'exception de la bande axiale pour laquelle la valeur choisie était double (0.005). Quant aux limites entre les bandes d'aimantations opposées, elles étaient considérées verticales et instantanées sans aucune zone de transition.

Tout en gardant l'idée du modèle de Vine et Matthews (1963) d'une source magnétique basaltique, des modifications simples ont été ensuite apportées à ce modèle afin d'obtenir un meilleur compromis avec l'anomalie observée et les propriétés magnétiques des échantillons de roches océaniques. Ainsi, Vine et Wilson (1965) ont proposé qu'un meilleur ajustement de l'anomalie observée s'obtienne si la couche aimantée, était placée entre 3.3 et 5 km sous la surface de la mer avec une susceptibilité de 0.02 pour l'aimantation axiale et ± 0.01 pour les autres aimantations. Ces valeurs de susceptibilité relativement élevées étaient plus compatibles avec les propriétés magnétiques des échantillons basaltiques analysés par Ade-Hall (1964).

Dans une étude de la dorsale de Reykjanes, au lieu d'utiliser la susceptibilité Talwani *et al.* (1971) ont utilisé l'intensité de l'aimantation. Ils ont attribué à la couche basaltique une intensité d'aimantation de 12 A/m pour les aimantations plus anciennes que 1 Ma et presque le double de cette valeur pour les aimantations les plus jeunes. L'épaisseur de la couche aimantée était réduite à 0.4 km.

En raison de leur simplicité et de la qualité des anomalies magnétiques obtenues, ce genre de modèle qui attribue la source de l'anomalie magnétique océanique à une couche basaltique 2D d'aimantation constante en intensité et alternative en polarité, est devenu le *modèle standard*

couramment utilisé dans l'analyse qualitative et parfois quantitative de l'anomalie magnétique océanique.

1.1.3 Propriétés de l'anomalie magnétique du modèle standard

Afin d'explorer les propriétés de l'amplitude et de la phase de l'anomalie magnétique associée au modèle standard, Schouten (1971) et Schouten *et al*. (1972; 1976) ont donné l'expression analytique de cette anomalie dans l'espace de Fourier sous la forme suivante

$$\widetilde{T}(k) = 2\pi C\widetilde{M}(k)E(k).e^{-i\,\mathrm{sgn}(k)\theta}\,. \qquad (1.1.7)$$

$C = (\sin I_0 \sin I_r)/(\sin I'_0 \sin I'_r)$ est appelé le *coefficient d'amplitude*. (1.1.8)

$\widetilde{M}(k)$, le spectre de l'intensité d'aimantation considérée constante dans le modèle standard.

$e^{-i.\mathrm{sgn}(k)\theta}$, le *filtre de la phase*. (1.1.9)

$\theta = -I'_m - I'_f + \pi$, le *paramètre de phase*. (1.1.10)

$E(k) = e^{-a|k|} - e^{-b|k|}$, le *filtre de la terre*. (1.1.11)

$I'_m = \tan^{-1}\left(\tan(I_m)/\cos(D_m - \alpha)\right)$ et $I'_f = \tan^{-1}\left(\tan(I_f)/\cos(D_f - \alpha)\right)$ (1.1.12)

Les deux dernières équations sont respectivement *l'inclinaison apparente de l'aimantation et l'inclinaison apparente du champ géomagnétique*.

a et b sont respectivement les profondeurs par rapport à la surface de la mer, le lieu de mesure, du toit et de la base de la couche aimantée, I_m et D_m sont respectivement l'inclinaison et la déclinaison de l'aimantation, I_f et D_f sont respectivement l'inclinaison et la déclinaison du champ géomagnétique régional et enfin α l'azimut du plan normal sur l'axe infini de la couche.

Pour faciliter l'analyse des propriétés de l'amplitude et de la phase de l'anomalie synthétique du modèle standard, nous considérons que l'aimantation de la couche source est purement induite par le champ magnétique régional et que ce champ est entièrement axial, dû à un doublet placé au centre de la terre. Dans ces conditions, nous considérons dans un premier temps la variation de l'amplitude de l'anomalie, l'équation1.1.7 indique que cette composante dépend proportionnellement de deux termes indépendants : Le *coefficient d'amplitude* C et le *filtre de la terre* $E(k)$.

Concernant la dépendance du coefficient d'amplitude C, les définitions 1.1.8 et 1.1.12 indiquent que la valeur de C ne dépend que des paramètres magnétiques directionnels suivants : I_f, D_f et α, c'est-à-dire de la position géographique de la dorsale et de son orientation (voir figure 1.1).

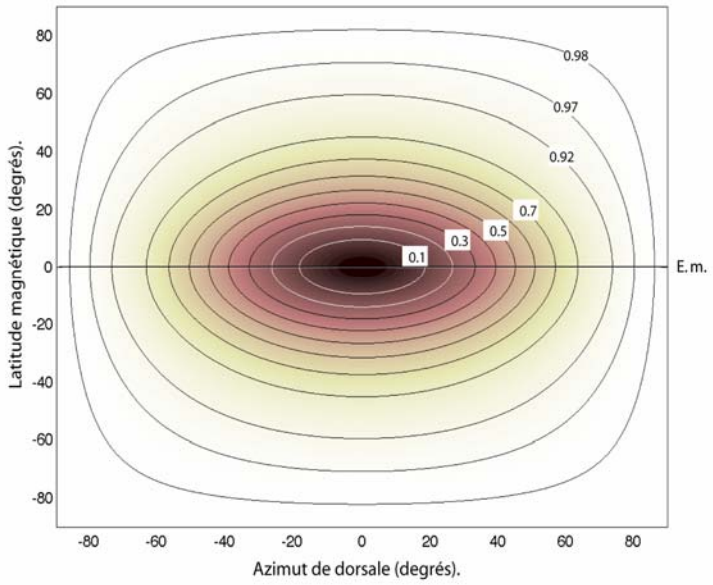


Figure 1.1. Variation de l'amplitude de l'anomalie magnétique du modèle standard en fonction de la latitude magnétique et de l'azimut de la dorsale.

Ainsi, pour une dorsale d'orientation perpendiculaire au méridien magnétique soit $\alpha = 0$, l'inclinaison effective I_f du champ magnétique, quelque soit sa valeur, se retrouvera dans le plan normal à la dorsale et nous avons $I_f = I'_f$. Le coefficient d'amplitude C devient alors indépendant de I_f et reste constant et égal à l'unité. Par conséquent l'amplitude de l'anomalie magnétique devient aussi indépendante de I_f et quelque soit la latitude magnétique de la dorsale l'amplitude de l'anomalie générée reste constante.

- Pour une dorsale orientée parallèlement au méridien magnétique, soit $\alpha \approx \pm \pi/2$, l'inclinaison apparente du champ géomagnétique sera toujours constante $I'_f = \pi/2$. Par contre la valeur de l'inclinaison effective I_f diminue des pôles magnétiques vers l'équateur magnétique où le vecteur d'aimantation devient horizontal et parallèle à la direction de la dorsale. Ainsi la valeur du coefficient C diminue progressivement et devient nulle à l'équateur magnétique. Ce comportement de C explique l'amplitude très faible voire nulle dans l'Atlantique équatorial et le Pacifique équatorial comme conséquence de l'orientation nord-sud de la dorsale dans ces deux régions.

- Pour une dorsale d'orientation variable α entre 0 et 90°, la variation de C en fonction de l'orientation α dépend fortement de la latitude magnétique de la dorsale.

- Pour une dorsale située au voisinage des pôles magnétiques, la variation de C devient presque nulle quelque soit l'orientation de la dorsale par contre à l'équateur magnétique le facteur C devient très sensible à l'orientation de la dorsale α.

Le filtre de la terre, $E(k)$, est le deuxième terme affectant l'amplitude de l'anomalie magnétique. C'est un filtre passe bande dont la réponse dépend exponentiellement des paramètres a et b, soit de la profondeur moyenne et de l'épaisseur de la couche (voir équation 1.1.11). Sous l'effet du filtre de la terre, l'anomalie magnétique représente une version atténuée de la distribution d'aimantation. Pour mieux comprendre l'effet de ce filtre sur l'amplitude de l'anomalie nous considérons le modèle numérique suivant. Pour une couche standard d'épaisseur constante $\{t = (b - a)/2 = 0.5\,\text{km}\}$ et de profondeur moyenne $z_m = (a + b)/2$ variable, nous présentons à la figure 1.2 les valeurs de $E(k)$ en fonction des longueurs d'ondes $\eta = 1/k$ (les nombres indiqués sur les courbes sont les valeurs de z_m). Sur cette figure nous pouvons faire les observations suivantes

- En considérant une seule courbe, par exemple la courbe en ligne continue pour laquelle la profondeur moyenne de la couche standard est $z_m = 2.5\,\text{km}$, on constate que l'amplitude du filtre défini une valeur maximale pour $\eta_{\max} \approx 17\,km$. La position de cette valeur maximale est reliée à la profondeur moyenne z_m par la relation $\eta_{\max} \approx 2\pi z_m$. En considérant la position de $\eta_{\max}$ comme une référence sur la courbe de $E(k)$, on remarque que les valeurs de $E(k)$ diminuent progressivement avec η pour les longueurs d'ondes supérieures à $\eta_{\max}$ et s'approchent d'une tendance de diminution exponentielle pour les très grandes longueurs d'ondes. Quant aux longueurs d'onde inférieures à $\eta_{\max}$, les valeurs de $E(k)$ diminuent très rapidement inversement à η et s'approchent des valeurs nulles pour les longueurs d'ondes inférieures à $\eta_t \approx 2\pi z_m/6 \approx 3$ km. A partir de cette tendance de la variation de $E(k)$, on conclut que les zones de polarités enregistrées dans la croûte océanique et caractérisées par une largeur de l'ordre de $\eta_{\max}$ seront les plus visibles dans l'anomalie magnétique observée à la surface de la mer et leur visibilité se dégrade rapidement en diminuant la largeur des zones de polarité. Les zones inférieures à $\eta_t \approx 2\pi z_m/6$ seront pratiquement invisibles dans l'anomalie magnétique observée sur la surface de la mer.

- Par l'augmentation de la profondeur moyenne de la couche z_m, les positions de $\eta_{\max}$ et de η_t se propagent vers les grandes longueurs d'ondes. Cette tendance est évidente sur les courbes pointées. Par conséquent l'intervalle de polarité le plus visible sur l'anomalie devient de plus en plus large et la résolution de la polarité dans l'anomalie magnétique se dégradent progressivement dans le même sens.

Considérons ensuite les effets de la variation de l'épaisseur de la couche magnétique standard sur l'atténuation et la résolution des polarités dans l'anomalie. A la figure 1.3 on présente le spectre de $E(k)$ pour une couche magnétique standard dont la profondeur de la surface supérieure est constante $a =$ 2.5 km et l'épaisseur $t = (b - a)/2$ est variable (nombres notés sur les courbes). De cette figure on fait deux constatations.

- La valeur $\eta_{\max}$ se déplace vers des longueurs d'ondes de plus en plus grandes en augmentant l'épaisseur de la couche magnétique. Ainsi la résolution de la polarité dans l'anomalie observée à la surface de la mer diminue en augmentant l'épaisseur de la croûte océanique magnétique.
- L'augmentation de l'épaisseur de la couche (et/ou la diminution de sa profondeur moyenne voir figure 1.2) implique une augmentation de l'amplitude de $E(k)$ et par conséquent une augmentation de l'amplitude absolue de l'anomalie observée.

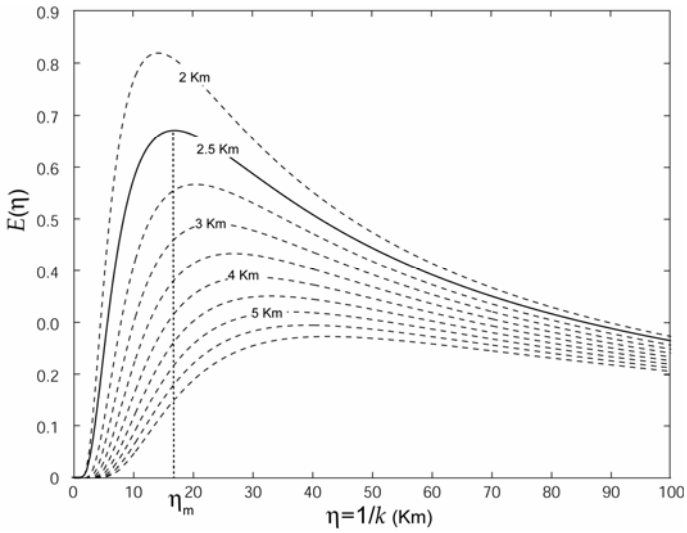


Figure 1.2. Variation de l'amplitude du filtre de la terre $E(k)$ en fonction de profondeur moyenne de la couche standard.

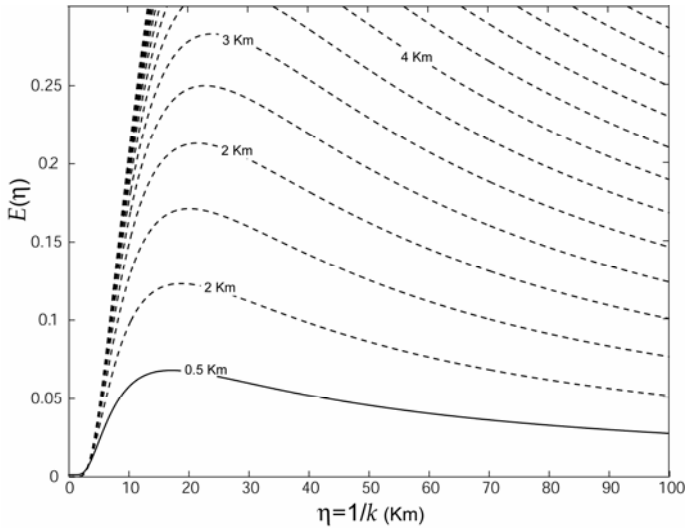


Figure 1.3. Variation de l'amplitude du filtre de la terre $E(k)$ en fonction de l'épaisseur de la couche standard.

Concernant les propriétés de la phase de l'anomalie magnétique standard. Selon les éqs.1.1.7, 1.1.10 et 1.1.12 la phase est liée uniquement à la valeur du paramètre θ, soit des paramètres magnétiques directionnels du champ géomagnétique inductif I_f, et D_f et de l'azimut α (voir figure 1.4). La phase de l'anomalie standard est donc déterminée uniquement par la position géographique de la dorsale et de son orientation.

- Pour une dorsale orientée parallèlement au méridien magnétique, soit $\alpha \approx \pm \pi/2$, l'inclinaison apparente du champ est toujours constante $I'_f = \pi/2$. Par conséquent la forme de l'anomalie magnétique est à distorsion minimale quelque soit la position géographique de la dorsale.

- Pour une dorsale d'orientée perpendiculairement au méridien magnétique, soit $\alpha = 0$, l'inclinaison apparente et l'inclinaison effective du champ géomagnétique deviennent identiques, $I_f = I'_f$. La forme de l'anomalie magnétique évolue en fonction de la latitude magnétique de la dorsale de telle sorte que le degré de la distorsion de l'anomalie augmente progressivement d'une valeur minimale aux pôles magnétiques à une valeur maximale à proximité de l'équateur.

- Pour une dorsale d'orientation variable entre 0° et 90° l'anomalie magnétique sera toujours distordue avec un degré dépendant de la latitude de la dorsale.
- Pour une dorsale située au voisinage des pôles magnétiques, la forme de l'anomalie est invariante par le changement de l'orientation de la dorsale, par contre à l'équateur magnétique la variation de la forme de l'anomalie en fonction de l'orientation est maximale.

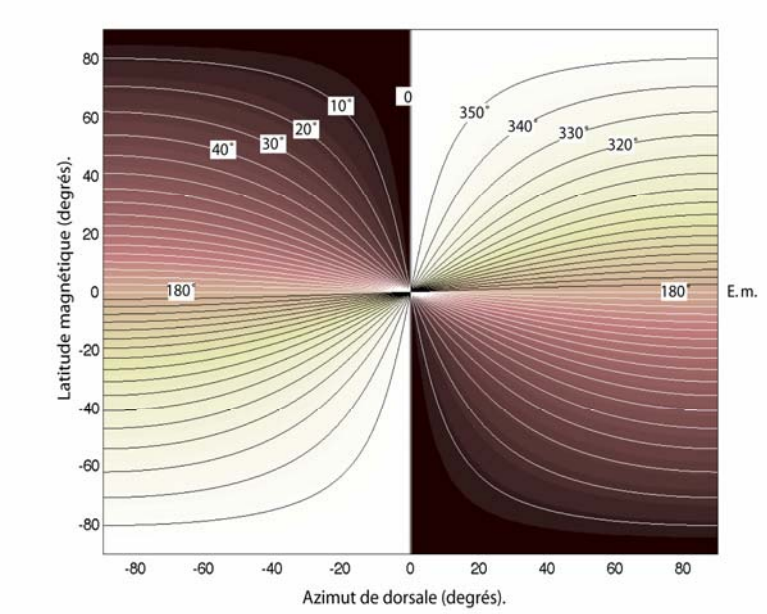


Figure 1.4. Variation de la phase de l'anomalie magnétique du modèle standard en fonction de la latitude magnétique et de l'azimut du profil.

1.1.4 Propriétés de l'anomalie magnétique observée

En générale, en fonction de la position géographique, de l'orientation et de la profondeur du fond océanique, les anomalies océaniques observées expriment un comportement corrélé au comportement de l'anomalie magnétique générée par le modèle standard décrit ci-dessus. Par contre, les anomalies observées montrent d'autres propriétés caractéristiques systématiquement documentées dans plusieurs bassins océaniques pour lesquelles le modèle standard apparaît insuffisant pour représenter l'aimantation de la croûte océanique magnétique ; par exemple :

Le lissage des bords de l'anomalie. Lorsque le modèle standard produit une anomalie magnétique caractérisée en général par des bords de faible pendage, l'anomalie observée montre des limites d'autant plus progressives que l'âge de la croûte océanique augmente. Pour interpréter cette observation, Atwater et Mudie (1973) ont proposé que l'inversion de la polarité du champ géomagnétique ne se produit pas instantanément, comme le fait le modèle standard, mais durant une brève période de temps pendant laquelle la direction du champ géomagnétique s'inverse progressivement d'une polarité à l'autre. Pour produire l'allure de l'anomalie observée, les autours modélisent les limites entre les blocs de polarités opposées dans le modèle standard par une zone de transition d'intensité d'aimantation variable progressivement. De leur coté Larson *et al.* (1975) et Blakely (1983) ont proposé un mécanisme différent pour expliquer ce lissage. Ils ont attribué ce comportement à l'augmentation, progressive dans la source de l'anomalie océanique, de la contribution d'une couche magnétique profonde dont les limites entre les polarités opposées sont pentées.

Variations d'amplitude à grande échelle. Alors que le modèle standard produit une série d'anomalies à amplitude moyennement constante à travers les temps géologiques, les anomalies magnétiques observées montrent des variations d'amplitude à grande échelle documentées systématiquement par les données marines et les données de satellite. Ainsi sur les profils d'anomalie marine Vogt (1986) a conclu que, à l'intervalle de 0 à 20 Ma, l'enveloppe de l'amplitude des parties positives et négatives des anomalies s'atténue progressivement avec l'âge de la croûte. Wittpenn *et al.* (1989), par l'inversion itérative des profils acquis dans l'Atlantique sud, ont trouvé une réduction rapide de l'intensité d'aimantation dans l'intervalle de 0 à 4.5 Ma. Ensuite la réduction évolue plus lentement pour atteindre une valeur minimale (~ 50% de l'intensité à l'axe) à environ 18 Ma. Après cette période de diminution, l'intensité de l'aimantation augmente progressivement pour avoir une valeur maximale (de l'ordre de l'intensité à l'axe) à environ 60 Ma. Johnson et Pariso (1993) ont divisé la variation de l'amplitude pendant les derniers 160 Ma en trois phases: La première phase correspond à une dégradation de l'énergie de l'enveloppe de l'anomalie d'une valeur maximale à l'axe de la dorsale à une valeur minimale sur une croûte d'âge ~20 Ma, puis l'énergie augmente à nouveau dans la période de 40 à 80 Ma et pendant la dernière phase, de 80 Ma jusqu'au Jurassique, l'amplitude se stabilise à une valeur relativement élevée. Cette variation à grande échelle de l'énergie est bien constatée sur les données de

satellite [LaBrecque et Raymond, 1985; Dyment et Arkani-Hamed, 1998].. Sur cette altitude toutes les détailles de petites longueurs d'ondes sont éliminée et les seules ondulations d'origine rémanente observées sont : l'enveloppe du superchron normal du Crétacé et la séquence (M0-M4) et l'enveloppe de la séquence d'anomalies les plus récentes.

Anomalie de la distorsion : La présence de la distorsion, due à la non verticalité des vecteurs magnétiques, dans l'anomalie magnétique océanique est une complication qui pourrait affecter le résultat de certains types d'interprétations comme par exemple les reconstructions paléogéographiques. Pour éviter cette complexité, on réduit l'anomalie au pôle magnétique en utilisant le filtre de la phase inverse définie par l'équation 1.1.9 ou en utilisant d'autres opérateurs comme la couche équivalente. En effet, si la distorsion de l'anomalie magnétique est liée seulement aux paramètres magnétiques directionnels comme c'est le cas dans le modèle standard, la réduction au pôle de l'anomalie devrait alors la transformer en forme symétrique ou à une forme similaire à l'anomalie magnétique générée par le modèle standard. Mais en pratique et pour certains intervalles de polarités le profil magnétique réduit au pôle tend à conserver une composante asymétrique résiduelle que l'on appelle *anomalie de la distorsion (ou anomalie de skewness)*. L'anomalie de la distorsion a été documentée sur des intervalles de polarité de différents âges et dans plusieurs bassins océaniques. Par exemple: la distorsion observée sur la séquence d'anomalies 27-32 dans le nord et le sud de l'océan pacifique [Cande, 1976] ; celle de la séquence 33 et 34 dans le sud et le nord de l'océan Atlantique [Cande, 1978], celle de la séquence 33 et 34 dans le bassin des Aiguilles dans l'océan sud-ouest indien [LaBrecque et Hayes, 1979]. Ce phénomène est aussi constaté sur les anomalies magnétiques des données de satellite,ar exemple, sur les données de Magsat. Labrecque et Raymond (1985) ont constaté une anomalie de distorsion associée au superchron du Crétacé dans l'océan nord-Atlantique.

Les études des anomalies de distorsion ont montré certaines propriétés de ce phénomène:

- Sa magnitude varie d'une polarité magnétique à l'autre. Par exemple dans le pacifique une distorsion anomaluse de 35° est observée sur l'anomalie magnétique 34 tandis que la valeur ne dépasse pas quelques 10° pour l'anomalie M0 au même site.

- Sa magnitude apparaît être inversement proportionnelle au taux d'expansion océanique [Roest *et al*, 1992]. Dyment *et al*. (1994), dans une analyse détaillée de la phase de la séquence d'anomalies magnétiques formées entre 40 et 85 Ma dans l'océan Indien constatent aussi la même corrélation négative entre le taux d'expansion et la magnitude de la distorsion anomaluse. Ils remarquent aussi que la distorsion anomaluse n'apparaît plus lorsque le taux d'expansion devient supérieur à 50 mm/an. Une des implications les plus importantes de cette remarque est que le paléopôle magnétique obtenu à partir de l'analyse des anomalies océaniques est plus sûr si l'expansion océanique est à taux rapide.

- Nous rajoutons enfin que la magnitude de la distorsion anomaluse est fortement dépendante de l'altitude à laquelle l'anomalie est observée[2].

Les trois observations citées ci-dessus, *le changement à grande échelle des amplitudes, le caractère plus lisse des anomalies observées et l'anomalie de distorsion*, indiquent que le modèle standard est trop simpliste pour modéliser la source de l'anomalie magnétique océanique. L'équation 1.1.7 attribuant une valeur constante au spectre d'aimantation $\widetilde{M}(k)$ est sans doute la source des différences. Le spectre $\widetilde{M}(k)$ devrait être une fonction variant par rapport à k de telle sorte qu'il devient un contributeur non négligeable au spectre d'amplitude et au spectre de phase de l'anomalie magnétique. Cette idée est renforcée par les résultats des interprétations des profils magnétiques proches du fond océanique et par l'étude des caractéristiques des roches océaniques. Afin de mieux comprendre la nature réelle de l'aimantation de la lithosphère océanique produisant l'anomalie observée, la partie suivante de ce chapitre sera consacrée essentiellement à la synthèse des différents résultats obtenus dans la littérature par l'analyse des roches océaniques.

1.2 Facteurs de distorsion

Plusieurs hypothèses ont été proposées pour expliquer la divergence entre la configuration de l'aimantation de la source réelle de l'anomalie océanique et celle du modèle standard. Selon la source responsable de cette divergence nous pouvons classer les hypothèses proposées en deux catégories. La première catégorie correspond à des hypothèses attribuant la différence au comportement du champ paléomagnétique ; la deuxième catégorie s'intéresse à des modèles plus complexes d'aimantation et repose sur la prise en compte des processus de formation de la lithosphère océanique.

1.2.1 Facteurs liés au comportement du champ magnétique régional

Deux phénomènes liés au champ paléomagnétique peuvent modifier la configuration réelle de l'aimantation et par conséquent la configuration des anomalies observées par rapport à celle du modèle standard. Le premier est la possibilité de l'existence de très courtes inversions du champ paléomagnétique enregistrées dans la lithosphère océanique et indétectable par l'échelle chronologique utilisée dans la construction du modèle standard [Cande, 1976]. Le deuxième phénomène est la possibilité que le champ paléomagnétique puisse beaucoup varier en intensité au cours du temps, au maximum du simple au double entre deux inversions [Cande, 1978; Valet et Meynadier, 1993]

[2] Comme conséquence naturelle de la variabilité latérale et verticale de la distribution d'aimantation ; qui conduit à une variation de la phase et de l'amplitude du spectre d'anomalie en fonction des longueurs d'ondes.

1.2.1.1 Echelle chronologique et sa résolution

Regardons dans un premier temps les conséquences de l'absence de la prise en compte de courtes inversions du champ magnétique. La première échelle des inversions pour les derniers ~4.5 Ma a été établie en rassemblant les différents résultats des mesures magnétiques et des mesures de datation K-Ar effectuées dans plusieurs laboratoires à travers le monde sur des roches volcaniques (Voir les synthèses de Cox *et al.* 1968 ou Cox 1969). Ensuite, les efforts ont été portés sur la modélisation des anomalies magnétiques marines pour compléter l'échelle d'inversion des périodes anciennes. L'échelle a été prolongée dans un premier temps jusqu'à 11 Ma par Vine (1966) et ensuite jusqu'à 76 Ma par Heirtzler *et al*. (1968), qui ont établi la base de l'échelle chronologique que l'on utilise aujourd'hui (on désigne ce modèle par le symbole HDHPL68). L'échelle HDHPL68 est construite à partir d'un long profil magnétique traversant l'océan l'Atlantique sud, sans point d'étalonnage absolu. Les valeurs des âges ont été obtenues en supposant que le taux d'expansion est resté constant et égal à ~2 cm/an. Depuis 1968, plusieurs modifications ont été apportées à l'échelle HDHPL68

- Complément pour les périodes plus anciennes (> 74 Ma).
- Vérification et ajustement de la largeur relative de ses intervalles de polarité.
- Amélioration de la précision de l'âge des séquences de polarité par l'utilisation de points de calibration absolus.
- Identification de séquences de courtes durées.

Blakely et Cox (1972) ont tenté d'obtenir une version plus détaillée de l'échelle HDHPL68 en sommant algébriquement plusieurs profils magnétiques réduits au pôle et normalisés à une même échelle. L'idée de la sommation a permis de réduire les bruits incohérents présents dans les anomalies et de révéler six nouvelles polarités de plus courte durée. D'autres tentatives ont été faites pour améliorer l'échelle HDHPL68 (LaBrecque *et al*. 1977); La révision la plus récente de cette échelle a été proposée par Cande et Kent (1992, 1995). Cette version a été construite à partir de très nombreux profils d'anomalies magnétiques marines acquis dans différents bassins océaniques. Neuf points de calibration ont été utilisés ce qui conduit à une détermination plus précise de l'âge des intervalles de polarités et environ 54 nouvelles polarités de très courte durée ont été ajoutées.

- Sur l'échelle d'inversion de Cande et Kent (1995) et par convention, les intervalles de polarités peuvent se diviser selon leurs durées temporelles en trois catégories.
- Les *chrons* qui représentent les polarités principales de l'échelle avec des durées supérieures à 0.1 Ma.
- Les *superchrons* sont des polarités de très longue durée (> 20 Ma) comme le superchron normal du Crétacé (KQZ) formé entre ~85 et ~120 Ma.
- Les *sous-chrons* sont les polarités ayant une durée inférieure à 0.1 Ma.

En plus de ces trois types de polarités, Cande et Kent (1992) ont rajouté dans leur échelle une nouvelle classe de polarités de très courte durée d'environ 30 ka appelée *« Tiny wiggles* ou encore *cryptochrons*». Ce nom résulte de l'incertitude de leur origine qui pourrait correspondre à une inversion ou à une excursion du champ magnétique[3].

Certains auteurs [e.g. Cande, 1976] attribuent la différence entre les propriétés des anomalies magnétiques observées et les anomalies générées par le modèle standard à l'absence de *cryptochrons* dans l'échelle d'inversion. Les évidences de la présence de tels événements enregistrés dans la croûte océanique sont rares.

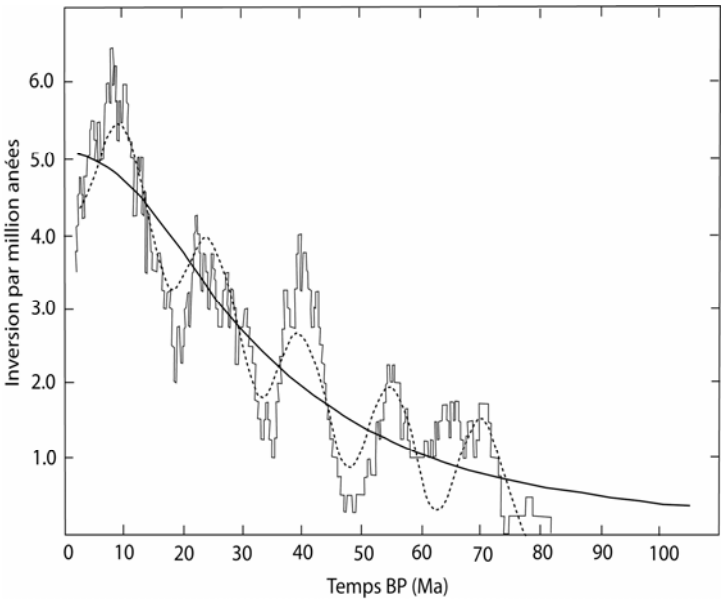


Figure 1.5. Fréquences des inversions du champ paléomagnétique calculées par l'ajustement au sens des moindres carrés de l'échelle des inversions [LaBrecque *et al.*, 1977] en utilisant une fonction de Lorentzian. D'après Mazaud *et al.* (1983).

L'analyse statistique des inversions du champ magnétique pendant le Cénozoïque a conduit Cox (1968, 1969) à proposer que l'inversion de la dynamo dans le noyau de la terre soit un processus aléatoire décrit par le modèle de probabilité de Poisson. La distribution de l'inversion de la polarité du champ géomagnétique due à la dynamo correspond alors à une distribution théorique exponentielle (figure 1.5). Ainsi, la probabilité $P(\tau)$ d'observer dans

[3] Une excursion de la polarité résulte de la déviation de brève durée de la configuration dipolaire axiale habituelle du champ géomagnétique. Elle se produit par un déplacement important et soudain du pôle magnétique par rapport au pôle géographique mais sans réaliser une inversion complète de la polarité.

l'intervalle de temps $[\tau, \tau + d\tau]$ une polarité avec une durée τ est donnée approximativement par la formule

$$P(\tau) \approx \lambda \exp(-2\lambda\tau) \tag{1.2.1}$$

avec; λ la moyenne du nombre d'inversions par million années.

D'autres auteurs, par exemple Naidu (1971) et Marzocchi et Mulargia (1990) ont trouvé par l'analyse statistique des différentes échelles d'inversion que la distribution des inversions observée pendant la même période (Cénozoïque Crétacé-supérieur) analysée par Cox (1969) est mieux ajustée si les processus de l'inversion de la dynamo étaient modélisés par la distribution théorique de la fonction gamma, soit

$$P(\tau)d\tau = \frac{1}{\Gamma(\mu)} \lambda^{\mu} \tau^{(\mu-1)} \exp(-\lambda\tau) d\tau \tag{1.2.2}$$

avec $\Gamma(\mu)$, la fonction gamma et μ une mesure d'approximation de la distribution assimilée à une distribution exponentielle. En effet, ce type de distribution n'est pas en contradiction avec la distribution exponentielle proposée par Cox (1968 ; 1969) car la distribution de gamma est le résultat naturel de la combinaison, entre des processus de Poisson de la dynamo et des certaines processus de filtrage, conduisant à une sorte d'enchaînement de plusieurs intervalles de polarités dans l'observation. Ainsi si les durées de n intervalles de polarités indépendantes sont sommées, alors, la probabilité $P(t)dt$ d'observer la somme dans la période $[t, t + dt]$ selon le processus de Poisson et la distribution exponentielle de la polarité sera donné par

$$P(t)dt = \frac{1}{(n-1)!} \lambda^{n} t^{(n-1)} \exp(-\lambda t) dt = \frac{1}{\Gamma(n)} \lambda^{n} t^{(n-1)} \exp(-\lambda t) dt, \; t = \sum_{i=1}^{N} \tau_i \tag{1.2.3}$$

qui revient à la même formule que 1.2.2 en écrivant τ pour t et μ pour n [McFadden, 1984]. La modélisation de la distribution des inversions par la fonction de gamma implique donc la possibilité de l'existence des intervalles de polarité de courte durée (de l'ordre du cryptochron ou plus petite) indétectables sur l'échelle chronologique. La détection de tels petits intervalles sur les données magnétiques marines est limitée par la résolution des polarités due au filtre de la terre (voir paragraphe 1.1.3). Pour d'autres types de données magnétiques, il est aussi très difficile de résoudre des inversions de polarité plus courtes que 20 ka [Jacobs, 1994]. Ainsi pour les levées magnétiques de haute résolution acquis à proximité du fond, la résolution peut être améliorée mais elle ne pourrait pas être inférieure à 20 ka car de telles durées de polarité peuvent être perturbées par la présence de bruit ou atténuées par l'altération consécutive à la formation de la croûte océanique. Par ailleurs la cyclicité des processus tectoniques et magmatiques peut perturber la documentation complète de telles inversions dans la croûte. Sur les séries sédimentaires sous-marines les tentatives pour identifier les polarités inférieures

à 20 ka se sont aussi affrontées à des difficultés, comme la bioturbation, les processus de diagenèse et la possibilité de la présence de lacunes de sédimentation dans les séquences analysées. De même l'utilisation des séquences volcaniques continentales est limitée par la précision des méthodes K-Ar qui peuvent introduire une erreur de l'ordre de 21 ka, supérieure à la durée recherchée. Quant aux basaltes océaniques la datation K-Ar n'a pas une précision suffisante à cause de l'altération hydrothermale et des processus d'érosion.

Si la lithosphère océanique préserve des événements (inversion ou incursion) de courtes durées indétectables sur l'échelle chronologique. Alors leurs effets sur la forme et l'amplitude de l'anomalie seront contrôlés par le comportement de l'inversion de la dynamo à cette petite échelle. Ainsi, si le comportement réel du champ magnétique est caractérisé par des processus aléatoires, l'existence d'une distribution de polarités fines indétectables superposées sur la séquence d'inversion de longue durée n'introduira pas de modification significative sur la forme de l'anomalie magnétique observée mais l'amplitude de l'anomalie diminue comme résultat de la superposition des anomalies de polarités opposées. Par contre si les processus de l'inversion du champ à cette échelle est asymétrique, par exemple si l'inversion de courte durée est fréquente dans une partie seulement d'une polarité longue (figure 1.6), l'ignorance de ces événements peut affecter significativement la forme de l'anomalie et pourrait contribuer à l'anomalie de la distorsion observée [Cande et LaBrecque, 1974 ; Cande, 1976].

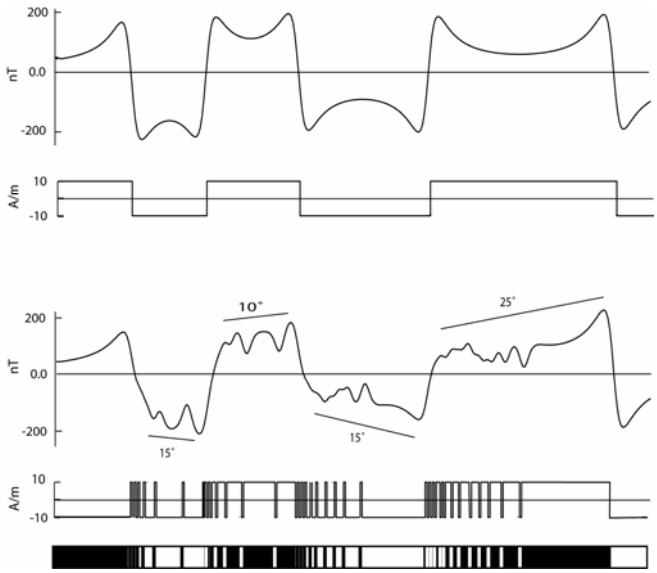


Figure 1.6. Modification de la configuration des anomalies magnétiques due à la présence des intervalles de polarité de courte durée indétectables sur l'échelle chronologique.

1.2.1.2 Variation relative de paléointensité

L'influence du comportement du champ magnétique sur la configuration de l'aimantation océanique et les propriétés de l'anomalie magnétique marine peuvent se représenter sous un autre aspect que la possible occurrence d'inversions de courte durée indétectables. Il s'agit de la variation possible de la paléointensité du champ entre deux inversions consécutives. Dans le modèle standard nous introduisons la variation du champ magnétique par une composition de fonctions d'Heaviside. Cela correspond à définir une intensité d'aimantation constante en valeur absolue et oscillant en signe entre des valeurs positives et des valeurs négatives (selon la direction de polarité). Les évidences issues de l'analyse du champ magnétique actuel et du champ paléomagnétique indiquent que la variation de l'intensité du champ est plus complexe. Ainsi, la modélisation en harmoniques sphériques successives du champ magnétique pour les 400 dernières années a montré une diminution progressive presque linéaire avec le temps de l'intensité de la composante dipolaire du champ magnétique actuel avec un taux de 5 % pour 10 an (figure 1.7). Il est évident que cette courte période d'observation n'est pas nécessairement représentative de la variation d'intensité du champ entre deux inversions.

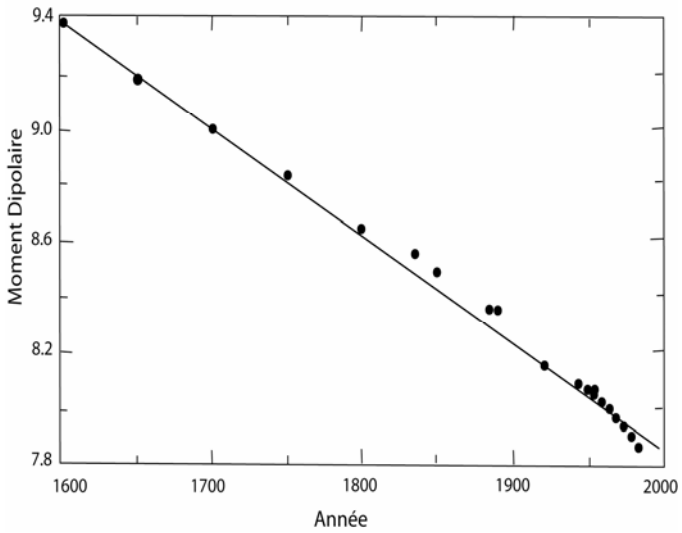


Figure 1.7. Variations de l'intensité de la composante dipolaire du champ géomagnétique déduite de l'analyse successive en harmoniques sphériques lors les dernières 400 années, D'après Fraser-smith (1987).

Cependant d'autres résultats obtenus de l'analyse du champ paléomagnétique ont suggéré que la diminution de l'intensité soit une tendance prédominante pendant une même polarité du champ : Valet et Meynadier (1993) et Meynadier *et al*. (1994) ont trouvé, par l'analyse d'une série sédimentaire sous-marine, que la variation relative de la paléointensité pendant les derniers 4 Ma exprime une tendance caractéristique. Durant d'une polarité donnée cette

intensité diminue progressivement pour atteindre une valeur minimale juste avant l'inversion suivante du champ. Après l'inversion une phase de régénération majeure de l'intensité en forme de saut se produit sur un intervalle de temps très court (quelques milliers d'années). Ce phénomène se répète presque systématiquement à travers la séquence des inversions enregistrée dans la série sédimentaire analysée ; de telle sorte que la configuration générale de la variation relative de l'intensité s'exprime par une courbe en forme de dents de scies (figure 1.8).

La configuration en dents de scie a été également constatée par d'autres études effectuées sur des séquences sédimentaires ou sur des basaltes océaniques de différents âges. Par exemple, l'étude comparative de la variation relative de la paléointensité effectuée par Valet *et al.* (1994) sur des séquences sédimentaires déposées pendant l'inversion Brunhes-Matuyama et issues de différents basins océaniques (Pacifique, Indien et Atlantique) a montré l'existence d'une cohérence entre les différentes courbes de variation d'intensité obtenues avec la même configuration en dents de scies. Tauxe et Hartl (1997) ont aussi observé ce comportement sur des séquences sédimentaires pélagiques du forage DSDP 522 déposées pendant l'Oligocène (25-35 Ma) dans l'océan sud Atlantique. Pick et Tauxe (1993), par l'analyse expérimentale sur des échantillons de basaltes récents et des basaltes d'âge Crétacé issus de l'océan sud-est Pacifique, ont conclu que l'intensité absolue du champ paléomagnétique du début et de la fin du superchron normal du Crétacé sont respectivement 45% et 25% de l'intensité de champ magnétique correspondant à la formation des basaltes récents. Les auteurs ont interprété ce résultat comme une conséquence de la diminution de l'intensité du champ paléomagnétique pendant cette polarité de grande durée.

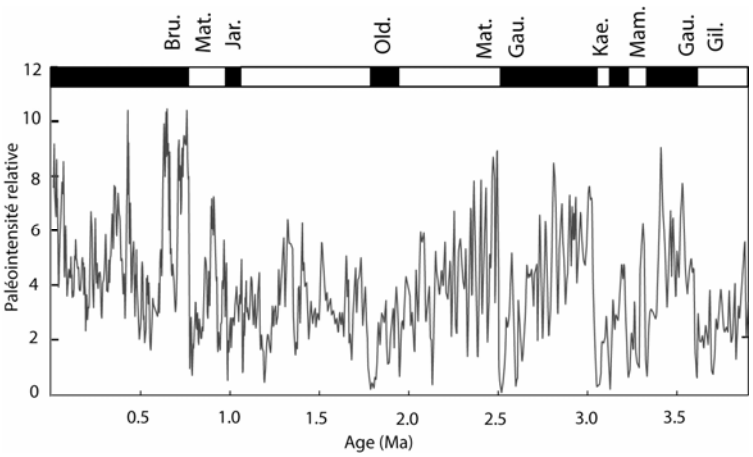


Figure 1.8. Variation relative de la paléointensité lors des dernières 4 Ma de l'âge de la terre. D'après Valet et Meynadier [1993].

La présence d'une telle variation de l'intensité du champ paléomagnétique introduit une modification importante dans la structure magnétique des fonds océaniques et une

composante significative de la distorsion anomaluse serait à attribuer à ce comportement du champ. La figure 1.9 montre l'influence imposée par la variation de l'intensité du champ magnétique sur la configuration de l'anomalie océanique : l'anomalie magnétique d'une couche standard caractérisée par une fonction d'aimantation type Heaviside (graphes a et b) est d'abord calculée, puis l'anomalie magnétique d'une couche magnétique horizontale de mêmes dimensions mais avec une variation d'intensité d'aimantation identique à la variation de l'intensité du champ proposée par Valet et Meynadier (1993) (graphes c et d). La figure montre les grandes différences de allure entre les deux séquences d'anomalies, il faudrait introduire une rotation dans la phase de l'anomalie de 25° sur la partie ancienne de Matuyama et de 20° sur la partie récente de Gauss pour ramener ces anomalies à une forme corrélée avec leurs correspondantes du modèle standard.

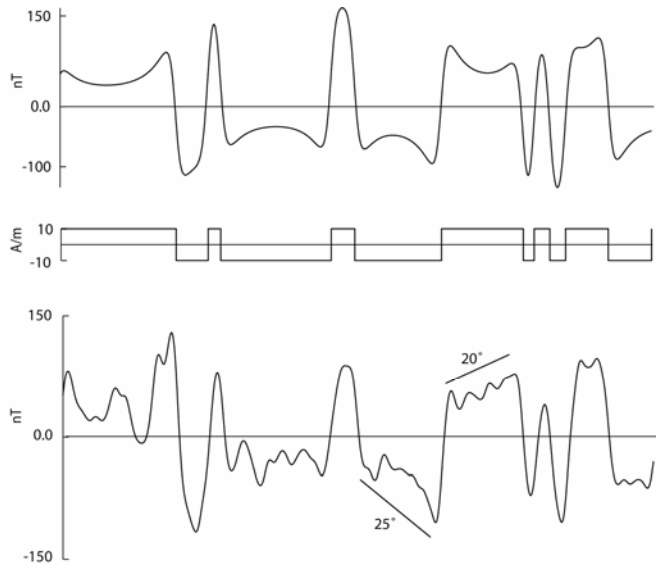


Figure 1.9. Influence de la variation de la paléointensité sur la configuration de l'anomalie magnétique du modèle standard.

Finalement il est intéressant de noter que la variation de l'intensité du champ paléomagnétique est obtenue sur les dépôts sédimentaires par le calcul du rapport (ARN/ARA)[4]. La valeur de ce rapport pourrait être affectée par d'autres processus que le comportement du champ magnétique: Par exemple Koko et Tauxe (1996) ont régénéré expérimentalement la même configuration en dents de scies du rapport ARN/ARA en présence d'un champ magnétique externe d'intensité moyenne constante, Dans leur modèle les auteurs attribuent cette configuration à l'acquisition par les dépôts d'une rémanence secondaire cumulative d'origine visqueuse (VRM) acquise dans la direction du champ

[4] ARA est l'aimantation rémanente anhystérétique.

magnétique ambiant. De même dans le cas de basaltes océaniques comme nous allons le voir plus loin; la variation de l'ARN, attribuée par Pick et Taux (1993) au comportement du champ magnétique, pourrait se produire par des processus d'altération ou d'acquisition d'une aimantation secondaire d'origine chimique (CRM) ou d'origine visco-chimique (NCRM).

1.2.2 Facteurs liés à la structure magnétique de la lithosphère océanique

La deuxième catégorie d'hypothèses attribue la différence entre l'aimantation réelle du fond océanique et l'aimantation proposée par le modèle standard à une origine interne liée à la mise en place de la lithosphère océanique. Cela repose sur les caractéristiques des échantillons des roches issus des différents niveaux de la lithosphère océanique. L'acquisition des échantillons peut se faire par trois méthodes différentes.

- Les forages profonds dans la croûte comme par exemple les programmes DSDP (Deep Sea Drilling Program) et ODP.(Ocean Drilling Program). Le forage le plus profond dans la croûte n'a pénétré que les premiers ~2000 m soit la couche extrusive basaltique et le complexe filonien. Par contre les niveaux les plus profonds de la croûte ne sont accessibles au forage qu'à travers des fenêtres tectoniques comme par exemple les zones de fracture.
- L'échantillonnage des roches exposées directement sur le plancher océanique. Les roches échantillonnées par cette technique font l'objet de divers degrés d'altération par l'eau de mer qui peuvent significativement affecter leurs propriétés magnétiques initiales. Pour récupérer des échantillons moins altérés et d'orientation bien connue dans l'espace, ce qui est un facteur important pour les études paléomagnétiques, deux nouveaux systèmes d'échantillonnage ont été récemment mis au point. Ils correspondent à des forages superficiels dans la croûte. Le premier système (BR drill) pénètre à 1 m et permet de récupérer des échantillons orientés. Le deuxième (BGS drill) peut pénétrer jusqu'à 5 m mais l'échantillon n'est pas orienté [Allerton et Tivey, 2001].
- L'analyse directe des complexes ophiolitiques qui représentent des fragments d'une lithosphère océanique ancienne chevauchée sur la marge continentale dans des circonstances tectoniques particulières. Ces affleurements offrent la possibilité d'analyse détaillée des propriétés magnétiques sur des sections profondes de la lithosphère océanique. Cependant la représentativité des ophiolites en tant que croûte océanique normale est sujette à caution. En particulier, la plupart des ophiolites sont d'âge supérieur ou égal au Mésozoïque pour lesquels les conditions de l'accrétion océanique pourraient avoir été différentes des conditions actuelles [Shaul *et al.*, 1978]. Enfin, la mise en place des ophiolites par obduction s'accompagne d'un métamorphisme qui modifie considérablement les propriétés initiales de l'aimantation des roches.

En général, les résultats des études des propriétés magnétiques des échantillons lithosphériques prélevés par ces trois techniques se montrent compatibles et mettent en évidence les propriétés générales suivantes de l'aimantation du fond océanique.

1- A part l'inhomogénéité latérale de l'aimantation lithosphérique une inhomogénéité verticale apparaît à grande échelle et elle est corrélée avec la stratification pétrographique et sismique de la lithosphère. Ainsi on retrouve dans les variations verticales d'aimantations le litage proposé par la géologie et la sismologie composée de:

- la couche sismique 2A composée essentiellement de pillow-lavas,
- la couche 2B composée du complexe filonien,
- la couche 3A composée de méta-gabbros,
- et la couche 3B composée de gabbro et cumulats reposant directement sur les péridotites du manteau supérieur.

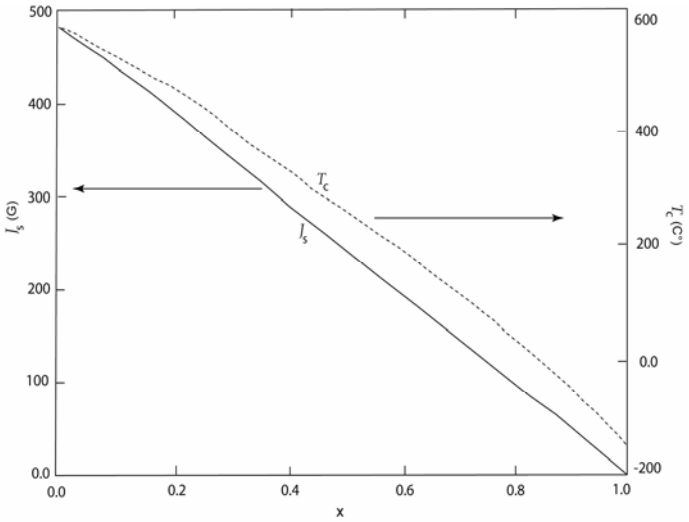


Figure 1.10. Variation de la saturation d'aimantation J_s et de la température de Curie T_c en fonction de la composition chimique x de la titanomagnétite. D'après Butler (1992b).

2- La phase magnétique principale initialement acquise pendant le refroidissement de la lithosphère océanique est d'origine thermique (aimantation thermique rémanente, ART). Cette phase est portée par la série de la titanomagnétite dont la composition chimique générale s'écrit sous la forme $Fe_{3-x}Ti_xO_4$, avec x paramètre de composition indiquant une teneur en Ti qui varie entre 0.0 et 1.0. Selon la valeur de x, la composition de la série s'organise entre la magnétite «Fe_3O_4 (x=0)» appauvrie en Ti et l'ulvöspinele pure,

$Fe_2Ti_1O_4$ (x=1), caractérisée par une teneur maximale en Ti. Certaines propriétés magnétiques des roches montrent une forte dépendance de cette composition. Par exemple, la figure 1.10 illustre la variation de la température de Curie et la saturation d'aimantation en fonction de la valeur de x . On note qu'à la place de x, on utilise souvent le pourcentage d'ulvöspinelle contenue dans la titanomagnétite pour indiquer sa composition.

3- Au cours du temps, d'autres composantes d'aimantations secondaires, comme l'aimantation rémanente d'origine visqueuse (ARVs) ou l'aimantation rémanente d'origine chimique (ARCs), remplacent partiellement l'ART. Parfois ces composantes secondaires deviennent la phase magnétique la plus dominante dans les roches océaniques changeant ainsi la configuration initiale de l'aimantation de la lithosphère.

4- Le taux de refroidissement a une influence majeure sur la taille des grains de titanomagnétite et par conséquent sur les propriétés magnétiques des roches. Ainsi, vu son refroidissement rapide, la couche 2A composée de pillow-lavas contient souvent des titanomagnétites avec une portion significative des grains mono-domaines[5] (SD) et superparamagnétiques (SP). Les grains (SD) se caractérisent par leur petite taille, une large coercitivité et une rémanence thermique intense de grande stabilité. Les grains (SP) sont des grains (SD) caractérisés par une aimantation rémanente intense, mais cette rémanence est instable avec le temps et elle se dégrade très rapidement dès que le champ externe appliqué sur les grains s'élimine. Par contre les roches intrusives et les nivaux inférieurs de la lithosphère océanique, qui se refroidissent lentement, possèdent plutôt des grains multi-domaines (MD) et des grains pseudo-mono-domaines (PSD) : les grains MD se caractérisent par une grosse taille, une coercitivité faible et une rémanence thermique peu intense et de faible stabilité. Quant aux grains PSD, se sont des grains MD ayant des propriétés de mono-domaine.

Afin d'avoir une idée plus claire sur la contribution effective des différentes unités lithologiques dans la source magnétique de la lithosphère responsable des anomalies observées, nous allons dans la suite aborder séparément et en détail les différentes évidences apportées par l'analyse des échantillons des roches océaniques sur l'aimantation de chacune des unités litho-magnétiques.

1.2.2.1 Aimantation de la couche basaltique extrusive

Nous commençons par la couche basaltique extrusive, le niveau le plus superficiel de la lithosphère océanique. L'épaisseur moyenne de cette couche est de l'ordre de 0.5 à 1 km. Elle

[5] Les domaines sont des espaces de dimensions de l'ordre de 10 μm dans lesquels les moments magnétiques atomiques des minéraux ferromagnétiques s'alignent spontanément dans une même direction par interactions entre atomes.

se forme à l'axe de la dorsale par un refroidissement rapide de la lave mise à l'affleurement sur le plancher océanique. Elle acquiert une ATR dans la direction du champ magnétique ambiant lors de son passage dans la gamme de consolidation de ses minéraux magnétiques. L'aimantation thermorémanente acquise initialement par le basalte se caractérise en général par une grande stabilité ; elle résiste à l'influence de la démagnétisation naturelle et à la réaimantation visqueuse et persiste sans changement important durant des millions d'années. Dans les études paléomagnétiques, on s'intéresse plutôt à l'aimantation de cette couche de la lithosphère océanique car elle représente la fossilisation la plus fidèle des caractéristiques du champ paléomagnétique. Le porteur principal de l'ART dans la couche basaltique est la titanomagnétite de composition intermédiaire (TM50-70). Mais d'autres composantes de titanomagnétite moins stables peuvent contribuer à cette rémanence. La distribution de ces différentes composantes à l'échelle de l'unité de pillow-lava apparaît être contrôlée par le taux de refroidissement. Ainsi le résultat de l'analyse microscopique détaillée effectuée par Zhou *et al*. (1997 ; 2000 ;2001), sur du basalte frais échantillonné à l'axe de la dorsale Juan de Fuca dans l'océan Pacifique, indique qu'il est possible de distinguer dans un pillow entre trois zones de titanomagnétites différentes par leur composition chimique et leur taille de grains :

- Des titanomagnétites à grands grains de l'ordre de micromètre (MD) concentrées à l'intérieur de pillow-lava, leur composition est relativement constante de ulvöspinele (~TM60) et leur aimantation est relativement de faible stabilité où l'ATR initiale se couvert avec le temps par une rémanence visqueuse secondaire (AVRs) ;
- Des titanomagnétites à grains de taille inférieure au micromètre à propriétés (SD) et (PSD), associées à la matrice glaciale résiduelle, avec une composition variable en ulvöspinele (~TM25-TM66). Ce type de grains est considéré comme la source essentielle de l'ATR stable dans les pillow-lavas [Irving, 1970 ; Pick et Tauxe 1993 ; 1994] ;
- Des oxydes magnétiques cristallisés à partir du liquide immiscible. La taille de ce type de grains est inférieure à 0.4 µm (SD et SP) et le contenu en ulvöspinele est très variable de TM0 (ulvöspinele pure) à TM79 (magnétite). Les grains (SD) peuvent contribuer efficacement à l'ATR stable du basalte.

Cette structure granulaire stratifiée du pillow lava s'accompagne également d'une inhomogénéité des propriétés magnétiques à l'échelle du centimètre. Ainsi, par exemple, l'intensité de l'ATR et la température de Curie diminuent en général de la glace marginale vers l'intérieur du pillow-lava [Gee et Kent, 1997].

A l'échelle de la croûte océanique les propriétés de l'ART du basalte et surtout son intensité montrent une variabilité dans l'espace et dans le temps. Cette variabilité est contrôlée par plusieurs paramètres comme, la composition chimique du magma et son enrichissement en FeO [Johnson et Tivey, 1995], la concentration de titanomagnétite dans le basalte ou encore la variation de l'intensité du champ géomagnétique dominant l'acquisition de ATR.

Comme conséquence de la circulation hydrothermale intense dans la couche basaltique, les propriétés magnétiques initiales des basaltes extrusifs subissent au cours du temps des modifications importantes à toutes échelles à cause de la réaction entre l'eau de mer et le basalte. Cette réaction conduit à l'oxydation à faible température (0°-4°C) de la titanomagnétite primaire en titanomaghémite [Irving, 1970 ; Raymond et LaBrecque, 1987 ; Johnson et Pariso, 1993 ; Bleil et Petersen, 1983 ; Smith et al., 1986]. D'après O'Reilly et Banerjee (1967), les processus de l'oxydation peuvent se définir par l'expression

$$Fe^{2+} + \frac{z}{2}O \rightarrow zFe^{3+} + (1-z)Fe^{2+} + \frac{z}{2}O^{2-}$$

Avec z, variant entre 0 et 1, le paramètre de l'oxydation qui représente la fraction de Fe^{2+} oxydée en Fe^{3+}. Les processus de maghémitisation conduisent à une modification drastique de l'ensemble des propriétés magnétiques primitives du basalte sauf peut être la direction de l'aimantation primitive. Ainsi l'augmentation du degré d'oxydation s'accompagne d'une dégradation de l'intensité de son ARN (aimantation rémanente naturelle), de sa susceptibilité magnétique, de son aimantation à saturation, du rapport de Koenigsberger Q (le rapport entre l'aimantation rémanente et l'aimantation induite) et d'une augmentation de sa température de Curie et de son champ coercitif [Hall et Ryall, 1977 ; Beske-Diehl, 1989].

L'intensité des processus de la maghémitisation est très variable à toute échelle. Ainsi à l'échelle de l'unité du pillow-lava, les grains fins distribués à la périphérie d'un pillow lava sont en général plus accessibles à l'eau de mer et deviennent très rapidement altérés. Par contre les gros grains protégés à l'intérieur de pillow lava requièrent un temps plus long pour s'altérer [Raymond et LaBrecque, 1987]. Par conséquent la magnitude des modifications des propriétés magnétiques dues à la maghémitisation décroît de la bordure vers le centre du pillow-lava. Cette tendance a été documentée par plusieurs résultats. Par exemple, Monte et Cox (1972) ont trouvé, sur des fragments de basalte pris sur la dorsale Juan de Fuca, que la valeur de l'aimantation à saturation dans le verre altéré est de 40% inférieure à celle de l'intérieur du pillow-lava non altéré et que la température de Curie diminue dans la même sens de 235°C (la température de la titanomaghémite) à 170°C (la température de Curie typique de la titanomagnétite (MT60)).

A l'échelle de la croûte océanique, les processus de maghémitisation montrent aussi une hétérogénéité latérale en fonction de différents facteurs comme l'âge de la lithosphère océanique, la température ambiante, la teneur en oxygène de l'eau circulant dans le pillow-lava ou encore la concentration de titanomagnétite non altérée. Mais le facteur le plus significatif sur les processus de maghémitisation est la perméabilité du basalte, qu'elle soit cette perméabilité initiale (porosité primitive) ou secondaire (fracturation tectonique). La perméabilité contrôle à la fois l'intensité de la circulation hydrothermale dans le basalte et la surface de contact entre l'eau de mer et les grains des roches.

Les observations sur les complexes ophiolitiques ou les mesures géophysiques comme la simulation de flux de chaleur et les mesures de la vitesse sismique indiquent que la couche basaltique extrusive d'âge récent est affectée par une intense circulation hydrothermale en

raison de sa forte perméabilité initiale et de la présence de fissures d'origine tectonique qui favorisent fortement la circulation de l'eau. Au cours du temps, la circulation dans la croûte se réduit considérablement [Anderson *et al*., 1977 ; Stein et Stein, 1995] pour différentes raisons comme, la diminution de la température de la croûte avec le temps, la fermeture des failles sous les hautes pressions, l'accumulation de sédiments de relativement faible perméabilité sur le fond océanique ou encore la diminution de la perméabilité des roches due à l'altération elle-même. Ficher *et al*. (1990) et Ficher et Becker (2000) ont conclu que la réduction latérale de la circulation est rapide et exponentielle dans les premiers 8 à 10 Ma de l'âge de la croûte pendant cette intervalle de temps la phase principale de l'altération hydrothermale s'achève. Après cette phase majeure d'altération la circulation pourrait continuer dans la croûte plus ancienne, même d'âge Crétacé, mais avec des effets très subtils sur les propriétés chimiques et physiques des roches [Noel et Hounslow, 1988].

Les différents résultats de l'analyse des propriétés magnétiques des roches océaniques et des ophiolites indiquent que cette variabilité de l'activité hydrothermale à grande échelle est fortement corrélée avec la variation du taux de la maghémitisation dans le basalte. Ainsi Irving *et al* (1970) ont conclu que la phase principale de l'oxydation de la titanomagnétite du basalte s'achève dans le premier million d'années de l'âge de la croûte océanique. Pendant cette période, l'intensité de l'aimantation rémanente naturelle du basalte se dégrade d'une valeur initiale de l'ordre de 100 à 50 A/m à une valeur de l'ordre de 10 A/m. Le diagramme des valeurs moyennes du paramètre d'oxydation z en fonction de l'âge des échantillons DSDP issus de différents bassins océaniques [Banerjee; 1984] a montré une croissance linéaire rapide de z dans les premiers 2.5 Ma de l'âge de la croûte océanique. Ensuite la croissance devient beaucoup plus monotone et linéaire jusqu'à la fin du diagramme à ~18 Ma. Xu *et al* (1997) ont conclu par l'analyse microscopique du basalte océanique que les processus de la maghémitisation apparaissent être continus à l'échelle de 10 Ma, le temps requis pour que les gros grains (MD) de titanomagnétite s'oxydent. Des études plus générales comme la compilation des données de forages DSDP et ODP ont montré aussi une tendance générale caractéristique des propriétés magnétiques du basalte extrusif avec le temps. Par exemple la compilation des données magnétiques d'âge variant entre 0 et 160 Ma par Johnson et Pariso (1993) a montré que la variation de l'intensité de l'ARN du basalte océanique peut se diviser en trois phases distinctes : une rapide dégradation d'une valeur moyenne de 10 A/m à une valeur minimale de l'ordre de 1-2 A/m lors de l'intervalle de 0 à 20-30 Ma, suivie par une phase de croissance de 40 à 85 Ma où l'intensité atteint une valeur maximale de ~ 5 A/m et enfin l'intensité se stabilise pendant la troisième phase de 85 à 160 Ma. Les auteurs ont attribué la première phase de dégradation au processus de la maghémitisation en s'appuyant

sur la variation de la température moyenne de Curie observée sur les mêmes échantillons qui ne dépasse pas 360°, soit la température de Curie de la titanomaghémite (figure 1.11).

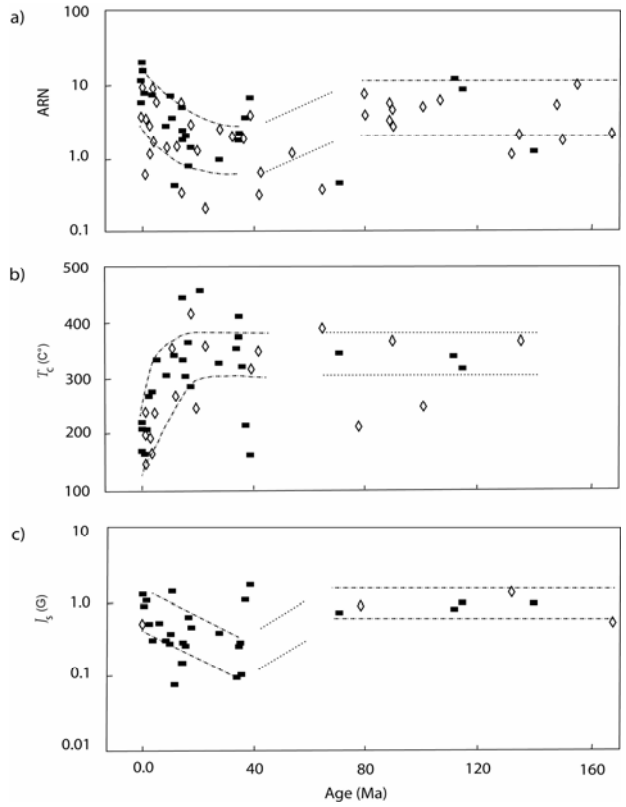


Figure 1.11. Diagrammes extraits de l'analyse magnétique des échantillons DSDP et ODP, de la variation de l'aimantation rémanente naturelle ARN, de la température de Curie T_c et de la saturation d'aimantation J_s pendant 160 Ma. D'après Johnson et Pariso (1993).

Quant à l'augmentation de l'amplitude de l'anomalie associée au superchron normal du Crétacé, elle pose plusieurs questions et plusieurs mécanismes ont été proposés pour expliquer ce phénomène.

- Acquisition d'une aimantation secondaire dans la même orientation que la (TRM) initiale par des processus d'oxydation du basalte [Raymond et LaBreque, 1987 ; Klitgord, 1976] ou par des processus viscochimiques [Beske-Diehl, 1989].
- La contribution à l'anomalie magnétique de niveaux magnétiques plus profonds que la croûte océanique et probablement du manteau supérieur avec la même polarité [Arkani-Hamed, 1988 ; 1989a,b].

- Un accroissement de l'intensité du champ magnétique au Mésozoïque [Pal, 1990].
- Un changement systématique de la composition chimique des minéraux magnétiques : des minéraux d'aimantation forte dans la croûte ancienne et des minéraux d'aimantation relativement faible dans la croûte jeune [Pecherskiy et Tikhonov, 1983].
- Une variation de la morphologie du flux d'extrusion de la croûte océanique avec le temps [Marshall, 1978].
- Une forte concentration de titanomagnétite dans la couche basaltique ancienne due : soit à une composition chimique du magma différente avec une forte teneur en Ti et Fe, soit à une composition chimique similaire mais une répartition différente de Fe et de Ti entre les phases d'oxydes et de silicates [Johnson et Pariso, 1993].

Il est important de noter que la dégradation de l'intensité de l'ARN initiale du basalte lors de la phase d'oxydation à faible température ne correspond pas seulement à une transformation simple de titanomagnétite en titanomaghémite, qui apparaît être insuffisante pour expliquer la dégradation rapide de l'intensité, mais d'autres transformations peuvent intervenir. Par exemple Xu *et al* (1997) ont constaté que l'oxydation, des grains magnétiques fins et des grains sous-micrométriques de titanomagnétite de basalte, ne conduit pas seulement à la formation de titanomaghémite mais une partie congédiable de ces grains s'altère en éléments non-magnétiques. Ils ont conclu que la majeure partie de la réduction de l'intensité de l'ARN dans le basalte est due à cette disparition totale des petits grains qui forment la composante principale de l'aimantation initiale du basalte.

Regardons maintenant l'influence de la maghémitisation sur la direction d'aimantation rémanente du basalte. Les résultats d'analyses expérimentales sur des échantillons naturels et synthétiques de basaltes sont assez contradictoires à ce propos. Ainsi lorsque Ozdemir et Dunlop (1985), Marshall et Cox (1971) et Beske-Diehl (1989; 1990) ont conclu que la direction de la rémanence thermique initiale n'est pas remplacée par les processus de la maghémitisation. D'autres auteurs [Hall, 1976; Johnson et Hall, 1976; Gromme et Mankinen, 1976] constatent une certaine relation proportionnelle entre le degré de l'oxydation et le degré de la distorsion de la direction de l'ARN du basalte. Le paradoxe de ces résultats pourrait être lié aux conditions expérimentales et aux propriétés des échantillons basaltiques analysés. Certaines études indiquent que la distorsion de la direction d'aimantation rémanente naturelle par la maghémitisation est contrôlée par plusieurs paramètres comme, la température ambiante, la durée de la réaction entre les roches et l'eau, l'intensité du champ ambiant ou encore la taille des grains de titanomagnétite oxydés. Par exemple, le résultat d'une étude expérimentale effectuée par Bailey et Hale (1981) sur des échantillons de basalte prélevés au site DSDP 332B (Leg 37), indique que l'altération à haute température produit une rémanence magnétique secondaire d'origine chimique dans la direction du champ magnétique ambiant si ce dernier est d'intensité suffisante (> 50 μT) et dans une direction aléatoire, comprise entre la direction de l'aimantation thermorémanente initiale et la direction du champ ambiant, si

l'intensité du champ externe est faible (<20 µT). Quant à l'effet de la taille des grains sur la direction, Ozdemir et Dunlop (1985) ont trouvé par un travail expérimental que la titanomaghémite due à l'altération tend à mémoriser la direction de la thermorémanence initiale si la titanomagnétite est composée de petits grains (SD). Par contre pour les grands grains (PSD) et (MD), la titanomaghémite acquiert une rémanence chimique (CRMs) orientée dans la direction du champ géomagnétique dominant lors de l'oxydation [Johnson et Merrill, 1978;; Ozdemir et Dunlop, 1985].

1.2.2.2 Aimantation du complexe filonien

La couche sismique (2B) est composée de dykes et de diabases ayant environ 1.5 km d'épaisseur et une vitesse sismique de l'ordre de $6\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. La transition entre cette couche et la couche basaltique se fait par une zone de ~200 m d'épaisseur composée d'un mélange de pillow-lavas et de dykes. L'ARN du complexe filonien est portée principalement par la magnétite et sa contribution dans la source des anomalies magnétiques marines est controversée. Les propriétés magnétiques de cette couche sont établies principalement par l'analyse des échantillons ophiolitiques ou sur des échantillons prélevés dans des zones particulières qui ne sont pas nécessairement représentatives.

Le forage 504B [Dick *et al.* 2000] des programmes DSDP et ODP dans l'océan est Pacifique (bassin du Costa Rica) est le seul site de forage ayant pénétré continûment 2100 m dans une croûte océanique d'âge 5.9 Ma. Il traverse la couche basaltique, la zone de transition entre la couche 2A et 2B et environ 1050 m du complexe filonien. Ce forage été le cible de plusieurs autours pour tenter de comprendre la nature réelle de l'aimantation du complexe filonien et l'importance de sa contribution dans la source des anomalies magnétiques marines. Ainsi, par l'utilisation de la méthode STEM (Scanning Transmission Electron Microscopy) sur des échantillons issus de ce site, Shau et al. (1993; 2000) ont distingué entre deux types de magnétite selon leur origine.

- La Ti-bearing magnétite (TM~10-20) d'origine primaire, elle est produite lors de la mise en place du complexe et se caractérise par une structure typique de l'oxydation deutérique.
- La end-nember magnétite (TM0) d'origine secondaire, elle est produite ultérieurement pendant la phase d'altération hydrothermale qui affecte le complexe filonien près de l'axe de la dorsale.

La présence de magnétite (TM~10-20) comme porteur magnétique initial dans le complexe filonien peut être expliquée par le fait que le complexe filonien et le gabbro, contrairement à la couche basaltique dont le refroidissement rapide conduit à la formation d'une distribution homogène dominé par la titanomagnétite (TM60-70), se refroidissent lentement à une température supérieure à 170°C. A de telles températures, la titanomagnétite intermédiaire

(TM60-70) présente dans les roches magmatiques en refroidissement ne peut pas acquérir une aimantation rémanente thermique sous l'effet du champ magnétique ambiant. Au lieu de cela, la magnétite à faible teneur en titanium (Ti-bearing magnétite TM~10-20), chimiquement plus stable que la titanomagnétite dans les conditions thermiques dominantes, se forme par oxydation deutérique et/ou exsolution de la titanomagnétite (TM60-70) primaire et acquière une aimantation rémanente thermochimique (ARTC) sur l'intervalle de température de 600° à 400°C [Shau et al., 1993; 2000]. L'oxydation deutérique et l'exsolution sont deux processus en général similaires dans leur action sur la titanomagnétite et se produisent à une température relativement élevée (supérieure à 400°). Ces processus correspondent à la transformation des gros grains originaux de titanomagnétite en deux phases de grains fins : Une phase magnétique riche en fer qui est la magnétite et une phase non magnétique pauvre en fer. La différence entre les deux processus réside dans la température exacte de leur action et dans la composition de magnétite et de phase non magnétique qu'elles produisent [Butler, 1992a].

En raison de la sub-division des gros grains (MD) de titanomagnétite (TM60) originale lors des processus de l'oxydation deutérique et de l'exsolution, la magnétite porteur principal de l'ARTC est en général dominée par des grains de petite taille (PSD). Elle montre une stabilité considérable avec le temps sans être influencée par les processus de relaxation et d'acquisition d'une aimantation rémanente visqueuse [Luyendyk et al., 1982 ; Pariso et al., 1995].

Associé à la ARTC dans le complexe filonien, il est possible de développer une rémanence magnétique thermique ART portée par la titanomagnétite (TM60). La présence de cette rémanence apparaît être contrôlée par la profondeur, ou plus précisément par le taux de refroidissement des roches, de telle sorte que les niveaux les plus superficiels du complexe, où le refroidissement est plus rapide, sont riches en titanomagnétite (TM60) par rapport aux niveaux inférieurs refroidis lentement [Pariso et al., 1995].

Parfois l'altération hydrothermale agit sur la partie consolidée du complexe à une température élevée mais toujours inférieure à la température de Curie de la magnétite (TM~10-20). Cette altération conduit à l'acquisition d'une aimantation rémanente secondaire d'origine chimique (ARCs) en recristallisant le Ti-bearing (TM~10-20) initial en magnétite (TM0). L'ARCs formée est dans la direction du champ magnétique dominant lors de l'altération. Selon la durée de l'altération hydrothermale et la rapidité de l'alternance de l'inversion du champ magnétique, l'acquisition de l'ARCs peut se dérouler sur plusieurs intervalles de polarité du champ magnétique. Il est possible alors que l'aimantation secondaire ARCs soit acquise dans une direction opposée à la direction de l'ARTC initiale [Hall et Muzzatti, 1999].

La contribution de complexe filonien dans la source de l'anomalie magnétique océanique, elle dépend de plusieurs farceurs comme :

- l'intensité de son ARN=ARTC + ARCs par rapport à l'intensité de l'ARN du basalte extrusif ;
- la cohérence de direction de son ARN avec la direction de celle du basalte ;

- la stabilité avec le temps de son aimantation par rapport aux processus de relaxation et d'acquisition d'une rémanence secondaire d'origine visqueuse.

Le résultat des différentes études paléomagnétiques réalisées sur la couche 2B sont, comme nous l'avons souligné précédemment, contradictoires en ce qui concerne le degré de la contribution dans l'anomalie observée: Kent et al. (1978) ont conclu, par l'analyse d'échantillons du complexe filonien provenant de différents sites de l'océan Atlantique nord, que cette couche ne peut pas être un contributeur important dans la source des anomalies à cause de la faible intensité et stabilité de sa rémanence naturelle et le faible rapport Q qui ne dépasse pas l'unité. La même conclusion est obtenue par l'analyse d'échantillons issus de différents complexes ophiolitiques à travers le monde effectuée par Banerjee (1980). L'auteur a trouvé une valeur moyenne de l'intensité de l'ARN très faible de l'ordre de 10^{-2} A/m. Luyendyk et al. (1982) par l'analyse de l'ophiolite de Samail en Oman d'âge Crétacé, trouvent que l'intensité de l'ARN est de ~1 A/m et que le facteur Q est aussi de l'ordre de 1. Ils constatent également une dispersion de la direction de l'ARN entre des polarités normales et inverses comme résultat du métamorphisme hydrothermal. Swift et Johnson (1984) par l'analyse des échantillons du massif de la Baie de Biscaye, ont trouvé que les grains de magnétite ont été complètement remplacés par des phases minéralogiques de faible aimantation lors de l'altération hydrothermale. De ce résultat, les autours ont conclu que le complexe filonien ne peut pas former une partie significative de la source des anomalies.

Par contre, d'autres résultats ont suggéré une contribution significative du complexe filonien dans la source de l'anomalie magnétique océanique : Smith et Banerjee (1986) ont trouvé, par l'analyse d'échantillons issus du forage 504B, une faible aimantation de la zone de transition (~0.74 A/m) à cause du remplacement de la magnétite primaire par des silicates lors de la phase d'altération hydrothermale. Par contre le complexe filonien lui-même se caractérisait par une ARN plus grande (~1.4 A/m) et pourrait être un contributeur substantiel à l'anomalie. Pariso et al. (1995) par l'analyse d'échantillons des legs 137 et 140 du forage 504B, trouvent que l'intensité moyenne de l'ARN est de 2.1 A/m, environ 50% de l'aimantation du basalte extrusif. Johnson et Salem (1994), par l'analyse d'échantillons de la zone de transition supérieure de la zone de fracture Blanco de la dorsale Juan de Fuca, ont conclu que l'intensité de l'ARN des dykes intrusifs dans cette zone est de l'ordre de 2.7 A/m, avec une stabilité relativement élevée. Ils proposent que la contribution des dykes comme source de l'anomalie magnétique est une temps-dépendante ; cette contribution s'augment avec le temps grâce à la résistance des dykes à l'oxydation à faible température qui affaibli progressivement l'ARN du basalte extrusif sur-jacente. Par conséquent, cette différence de résistance contre l'oxydation conduit à une croissance progressive de la contribution de la couche 2B dans la source de l'anomalie magnétique marine.

1.2.2.3 Aimantation de la couche gabbroïque

La couche sismique 3 ou encore la croûte inférieure, est composée essentiellement de roches gabbroïque de 5 km d'épaisseur. Elle est séparée du complexe filonien, sur-jacent, par une zone de transition de quelques centaines de mètres. Cette couche se forme dans la chambre magmatique par des processus de différentiation chimique et minéralogique qui lui donne une sorte de stratification minéralogique, lithologique, physique ou encore métamorphique. Le modèle stratigraphique le plus simple de la croûte inférieure est constitué de deux unités principales : une unité supérieure, la couche sismique 3A et une unité inférieure, la couche sismique 3B. La couche 3A d'épaisseur ~3.5 km est composée essentiellement de meta-gabbro, isotrope fortement métamorphisés, avec des roches ultramafiques serpentinisées. Sa vitesse sismique est de l'ordre de $6.5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$. La couche inférieure 3B, elle est composée de cumulats moins affectés par les processus métamorphiques avec aussi un possible existence de roches ultramafiques serpentinisées. Elle fait ~2 km d'épaisseur et sa vitesse sismique est environ $7.5\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

Similairement au cas du complexe filonien, les propriétés magnétiques de la couche 3 sont établies à partir de sections ophiolitiques [Banerjee, 1980 ; Luyendyk et Day, 1982] ou d'échantillonnages et de forages effectuées dans les roches gabbroïques exposées dans les fenêtres tectoniques [Dick *et al.,* 2000]. Les mesures des propriétés magnétiques issues de ces différents types de données indiquent généralement que le porteur magnétique principal dans le gabbro est la magnétite (TM0). Cette magnétite pourrait être primaire, d'origine thermochimique (ARTC), formée lors du refroidissement du gabbro par oxydation deutérique et/ou exsolution de titanomagnétite (TM60-70) [Dunlop et Prévot, 1982]. Elle peut aussi être d'origine chimique secondaire (ARCs) formée, dans les zones de la réaction entre l'olivine et le plagioclase à une température élevée, pendant l'épisode de métamorphisme qui affecte les roches gabbroïques consolidées. Dans la plupart des études, la polarité préservée par la rémanence secondaire ARCs apparaît être la même polarité préservée par la magnétite primaire portant la rémanence initiale ARTC [Stern *et al*., 1976; Kent *et al*., 1978; Dunlop et Prévot; 1982; Kikawa et Pariso, 1991]. Cette cohérence de la polarité s'explique par le fait que l'épisode de métamorphisme, responsable de la formation de la magnétite secondaire, se produit simultanément ou juste après le dépôt du gabbro dans la chambre magmatique et s'achève dans un intervalle de temps de courte durée [Kikawa et Ozawa, 1992]. La magnétite porteur de la rémanence magnétique naturelle (ARN=ARTC+ARCs) dans le gabbro se caractérise principalement par des petits grains (SD) et (PSD) [Luyendyk et Day, 1982]. Cependant dans quelques gabbros doléritiques, la magnétite a des grains de grosse taille de propriétés (MD). Dans ce dernier cas la magnétite se caractérise par une faible stabilité et peut acquérir une aimantation d'origine visqueuse [Dunlop et prévot, 1982 ; Worm, 2001].

Similairement au cas du complexe filonien, la contribution de la croûte inférieure dans la source des anomalies magnétiques marines est conditionnée par : la cohérence entre la polarité préservée par les gabbros et celle préservée par le basalte extrusif, le rapport entre

l'intensité de l'ARN du gabbro par rapport à l'intensité de l'ARN du basalte et la géométrie des zones de transition entre les zones des polarités opposées dans le gabbro intervient également.

La plupart des études suggèrent la forte possibilité que la magnétite des gabbros soit un porteur capable d'enregistrer et de préserver la même inversion de polarité du champ magnétique préservée dans le basalte extrusif [Butler et al., 1975]. Cette possibilité est fondée sur l'analyse magnétique des roches gabbroïques et sur des observations, dans des endroits de lithosphère océanique réduite à la croûte inférieure reposant directement sur le manteau, des linéations magnétiques cohérentes avec l'échelle chronologique d'inversion. Ces observations suggèrent que la croûte inférieure et probablement le manteau sont capables à préserver les mêmes polarités préservées dans la couche extrusive [Tivey et Tucholke, 1998].

La contribution du gabbro comme une source significative dans les anomalies magnétiques marines dépend fondamentalement aussi de l'intensité de son ARN. Cette intensité apparaît être dépendante de deux quantités : elle dépend d'une part de l'intensité de l'ARTC initiale et d'autre part du degré de métamorphisme affectant le gabbro et qui contrôle l'intensité de l'ARCs. L'intensité de l'ARTC est fonction de plusieurs variables comme la composition chimique du magma, le degré de l'oxydation deutérique, la concentration de magnétite initiale dans les chambres magmatiques et l'intensité du champ magnétique. Quant au degré de métamorphisme, par la fabrication de magnétite secondaire qui à une aimantation cohérente à l'aimantation acquise par l'ARTC initiale, le métamorphisme à un degré modérer (20-40% de minéraux métamorphiques) renforce l'intensité de l'ARN du gabbro. La progression des processus métamorphiques aux degrés plus élevés rendent l'ARN moins stable ; et une disparition de magnétite primaire (ARTC) et secondaire (ARCs) se produit en se transformant en une phase non magnétique [Kikawa et Ozawa, 1992]. En général l'intensité des processus de métamorphisme semble se dégrader avec la profondeur ce qui implique, dans le cas d'un métamorphisme modéré, une dégradation de l'intensité de l'ARCs fabriquée dans le sens de dégradation. Par conséquent la couche supérieure 3A métamorphisée montre une intensité d'aimantation rémanente relativement forte par rapport à l'intensité de l'aimantation de la couche inférieure composée de gabbros primitifs.

La nature de la contribution de couche gabbroïque dans la source de l'anomalie dépend aussi de la géométrie des limites séparant les zones des polarités opposées dans cette couche. En effet, à l'inverse des limites pseudo verticales entre les polarités opposées dans la couche extrusive, ces limites dans les couches magnétiques profondes semblent être contrôlées par le taux de refroidissement conductif de la lithosphère océanique. Cande et Kent (1976) et Arkani-Hamed (1988), dans leurs modélisations de la source des anomalies océaniques, ont supposé que les limites entre les zones de polarités opposées dans le gabbro suivent l'isotherme du point de Curie de la magnétite. Cette isotherme s'approfondit progressivement en s'éloignant de l'axe de la dorsale, par conséquent, la limite a été modélisée comme une zone de transition pentée, dans la direction de l'expansion océanique, par un angle dépendant

de taux de refroidissement. Récemment, par l'analyse d'échantillons orientés de gabbros, forés sur le banc de l'Atlantis dans l'océan sud-ouest Indien, Allerton et Tivey (2001) ont renforcé cette idée. Pour expliquer le décalage systématique observé entre la limite d'inversion, documentée sur des échantillons de gabbro, et l'anomalie magnétique, lui est associée et prise sur deux échelles différentes, les autours ont proposant un pendage de 25° dans la direction de l'expansion océanique de la limite entre les polarités opposées. Ce phénomène, s'il est général, aura une conséquence très importante sur la forme et même l'amplitude des anomalies magnétiques comme nous le verrons plus loin.

Quant à la contribution effective de la croûte inférieure dans la source des anomalies magnétiques océaniques, la plupart des études suggèrent d'une telle contribution (notamment la couche 2A composée de méta-gabbro). Swift et Johnson (1984) trouvent que l'unité inférieure de cumulats altérée du massif de Bay du complexe ophiolitique d'Islande ne peut pas contribuer à la source de l'anomalie magnétique à cause de sa faible intensité d'aimantation (de l'ordre de $10^{-5}\ emu/c^3$). Par contre le meta-gabbro se caractérise par une intensité de l'ordre de $10^{-3}\ emu/c^3$ avec une valeur de Q entre 1 et 2. Les auteurs proposent alors que cette unité puisse être une source significative de l'anomalie si elle est uniformément aimantée. Le même résultat est obtenu par Kent et al. (1978) en analysant des échantillons de gabbro de plusieurs sites de l'océan Atlantique nord. [Banerjee, 1980; Luyendyk et Day, 1982; Kikawa et pariso., 1991] ont trouvé des valeurs d'intensité d'aimantation de gabbro plus faibles que celles des basaltes extrusifs. Ils ont proposé que l'épaisseur importante de la couche 3 puisse compenser cette faiblesse et rendre les gabbros une source magnétique significative. Finalement, on note que les roches ultramafiques serpentinisées, présentes dans les gabbros ou les cumulats serpentinisés, peuvent posséder une aimantation stable d'intensité très importante. Ces roches peuvent alors contribuer significativement aux composantes de longueur d'onde intermédiaire de l'anomalie magnétique [Dunlop et Prévot, 1982].

1.2.2.4 Aimantation du manteau supérieur

Le manteau supérieur est composé essentiellement de péridotites et de pyroxénites. Les deux principaux types de péridotites sont les lherzolites et les harzburgites. Ce dernier type constitue l'essentiel de la partie mantellique comme le montre la majorité des complexes ophiolitiques. Similairement au cas de la croûte inférieure la situation magnétique du manteau supérieur est très mal connue : magnétique ou non-magnétique ? Si elle est magnétique, deux hypothèses pour la nature de son aimantation sont possibles : la première correspond à une aimantation rémanente thermique primaire (ART) et thermovisqueuse secondaire (ARTVs) ; la deuxième hypothèse correspond à un manteau d'aimantation rémanente chimique secondaire (ARCs) associée aux processus de serpentinisation des péridotites.

La première hypothèse suppose que, au cours de passage dans l'intervalle de températures de consolidation magnétique de leurs minéraux, les roches mantelliques s'acquièrent une ART et

probablement une ARVs comme conséquence de la relaxation et la réaimantation.. Cette idée est fondée principalement sur : les modèles de l'évolution thermique de la lithosphère océanique, et sur l'idée que l'isotherme de Curie de la magnétite est la base potentielle de la couche magnétique dans la lithosphère océanique [Kristjansson et Watkins, 1977; Arkani-Hamed, 1989a,b, Yanez et LaBrecque, 1997]. Dans la section 1.3.1 nous reviendrons sur cette hypothèse et sur la configuration de la distribution de l'aimantation qu'elle produit dans le manteau.

La deuxième hypothèse est fondée sur l'ensemble des observations directes sur des échantillons mantelliques, prélevés sur le plancher océanique, ou sur des niveaux profonds tectonisés des complexes ophiolitiques. Elle suppose que à l'ensemble des minéraux mantelliques sont à l'origine des minéraux non magnétiques. L'altération hydrothermale à une température relativement faible (200°-400°C) transforme l'olivine, présente dans les péridotites du manteau supérieur et les gabbros de la croûte inférieure, en serpentinites. Ce dernier acquière une aimantation rémanente secondaire (ARK) par la cristallisation de magnétite. L'aimantation acquise se caractérise par une intensité et une stabilité comparables à celles de la couche extrusive [Dunlop et Prévot, 1982 ; Bina et Henry, 1990].

Le taux de la serpentinisation est principalement contrôlé par deux facteurs, la température et la quantité d'eau disponible [Macdonald et Fyfe, 1985]. La serpentinisation observée sur le plancher océanique est soit associée aux zones de fractures, soit correspond à des emplacements où la croûte océanique est mince et discontinue comme par exemple la croûte de l'océan Atlantique. En revanche, dans le cas des observations sur des ophiolites, la serpentinisation dans les niveaux plus profonds est généralement concentrée le long des failles profondes et dans les zones tectonisées. Dans les deux cas, il est difficile de connaître la période exacte des processus hydrothermaux qui ont conduit à l'altération de l'olivine en serpentinite dans ces roches. *Est-ce qu'il s'agit de processus profonds qui se produisent systématiquement dans le manteau ? Ou s'agit-il de processus ultérieurs pendant la remonté des péridotites aux niveaux plus superficiels dans le premier cas et à l'obduction de l'ophiolite dans le deuxième cas ?* Si la serpentinisation se maintient systématiquement dans la mise en place des péridotites, alors deux conditions doivent être vérifiées - L'existence de failles d'extension profondes, jusqu'au manteau supérieur à travers lesquelles une quantité suffisante d'eau atteint les péridotites mantelliques,, et l'existence d'un système de circulation hydrothermale vigoureux et suffisamment continu dans le manteau [Francis, 1978 ; 1981].

Concernant la première condition, des évidences déduites des études de géophysique marine et des observations directes sur les complexes ophiolitiques indiquent que la formation des failles profondes est souvent associée à un système d'expansion océanique lent. Par contre le long d'une zone d'accrétion rapide, la présence d'une chambre magmatique large et continue restreint la profondeur de la pénétration des failles. Huang et Solomon (1988) par l'inversion d'ondes sismiques P et SH produites dans la période 1962-1983, dans une zone d'accrétion lente, ont trouvé que ces événements sont caractérisés par des failles normales parallèles à

l'axe d'accrétion et que ces failles peuvent exister jusqu'à 2-12 km de profondeur. Francis (1978 ; 1981) a observé dans la zone axiale de la dorsale Atlantique centrale des microséismes à 8 km de profondeur associés aux failles normales parallèles à l'axe de la dorsale. Il a conclu que ces failles peuvent pénétrer jusqu'au manteau supérieur et contrôler les processus de la serpentinisation. Nehlig et Juteau (1988) constatent que la circulation hydrothermale dans le complexe filonien et la séquence plutonique de l'ophiolite de Samail, en Oman, s'est déroulée à travers des canaux co-verticaux prolongés en profondeur au moins jusqu'au Moho.

Pour que le modèle du manteau serpentinisé soit une source magnétique significative des anomalies magnétiques, la circulation hydrothermale doit avoir une certaine continuité latérale au niveau du manteau supérieur. Une telle continuité conduit à la formation d'une distribution de serpentinite suffisamment dense, en forme de couche horizontale cohérente, capable d'enregistrer continuellement les variations du champ magnétique [Cann, 1974; Nazarova, 1991]. La satisfaction de cette condition dépend fondamentalement de l'existence d'une perméabilité effective suffisante dans les roches mantelliques. Différentes études géophysiques estiment que la perméabilité des roches lithosphériques diminue significativement avec la profondeur : Vera *et al*. (1990) trouvent, dans une étude sismique sur l'axe de la dorsale est Pacifique, une dégradation significative de la perméabilité et de la porosité à la base de la couche basaltique extrusive. Barclay *et al*. (1998) constatent, dans une étude de tomographie sismique sur la croûte océanique de la dorsale Atlantique centrale, que la vitesse des ondes P présente une anisotropie dans la vallée axiale de la dorsale avec une magnitude diminuant avec la profondeur ; 4% dans le premier kilomètre de la croûte, 2% entre 1 et 1.5 km et une anisotropie nulle au-delà de cette profondeur. Les auteurs attribuent l'anisotropie à une forte perméabilité dans les niveaux supérieurs de la lithosphère comme conséquence de l'existence d'une abondance de cracks tectoniques verticaux alignés parallèlement à l'axe de la dorsale. Cette abondance diminue avec la profondeur et devient presque nulle dans la croûte inférieure et le manteau supérieur. Dunn et Toomey (2001) par tomographie sismique de la croûte océanique superficielle à travers la dorsale est Pacifique, ont obtenu un résultat comparable à celui de Barclay *et al*. (1998). Nehlig et Juteau (1988) ont constaté, sur l'ophiolite de Somalie, une diminution drastique de la porosité et de la perméabilité fossile dans la séquence plutonique et le complexe filonien et que la serpentinisation dans les niveaux profonds de la croûte océanique reste concentrée autour des failles et dans les zones tectoniques.

Malgré la confirmation par la plupart des études de l'insatisfaction d'une perméabilité suffisante à la formation d'une couche magnétique mantellique continue, plusieurs auteurs ont suggéré que la serpentinisation puisse exister dans le manteau avec une certaine continuité. Hopson *et al*. (1981) trouvent, sur la section Ibra de l'ophiolite de Samail, que le manteau supérieur composé de péridotite à la base de la section a 62-81% de ses minéraux principaux (harzburgite et dunite) serpentinisés. Dans la même région, l'analyse de l'isotope de

l'oxygène a montré que les processus du refroidissement par l'eau de mer, demandant une circulation suffisante, devraient pénétrer au moins à 7 km de profondeur [Gregory et Taylor, 1981]. Kempner et Gettrust (1983) suggèrent par des études sur l'épaississement de la croûte océanique avec le temps, qu'il y a une évidence pour une zone de péridotite serpentinisée d'environ 1 km d'épaisseur. Macdonald et Fyfe (1985) ont envisagé expérimentalement que la perméabilité de la péridotite serpentinisée est significative et représente 2-3% du volume des roches, comparable à celle du basalte extrusif, où la microstructure de la péridotite serpentinisée montre des microfractures produites à toutes les échelles. Ces fractures peuvent être responsables d'une porosité significative de la serpentinite. Les autours expliquent ces observations par le fait que la serpentinisation conduit à une réduction intense de la porosité initiale de la péridotite. Ces processus génèrent des tensions volumiques importantes, si ces contraintes sont suffisantes, l'olivine et le pyroxène se déforment par fluage cataclastique et de nouvelles fractures se produisent ouvrant ainsi des chemins importants pour la circulation de l'eau.

On peut conclure des résultats cités ci-dessus que, si la partie la plus superficielle du manteau supérieur constitue une couche magnétique continue, la configuration de la distribution de son aimantation sera presque la même quelque soit l'origine de l'aimantation thermique (ART et ARVs) ou par serpentinisation (ARCs). Cette configuration sera contrôlée fondamentalement par l'isotherme de la magnétite, qui s'approfondit progressivement en s'éloignant de l'axe de la dorsale, conduisant à la formation d'une distribution d'aimantation très lisse caractérisée par des zones des transition épaisses et pentées entre les polarités opposées. La contribution du manteau supérieur aux anomalies magnétiques sera réduite alors aux composantes de grandes longueurs d'ondes ou intermédiaires observées notamment à l'altitude des satellites [Arkani-Hamed, 1988 ; Kikawa et Ozawa, 1992 ; Dyment *et al.*, 1997 , Nazarova *et al.*, 2000].

1.2.3 Modèles litho-magnétiques océanique

La disparité des résultats d'analyse des propriétés magnétiques des différents niveaux de la lithosphère océanique, synthétisée ci-dessus, met en évidence une inhomogénéité verticale de l'aimantation de la lithosphère océanique donnant une sorte de stratification magnétique calquée sur la stratification pétrographique de la croûte océanique. La composante principale de l'aimantation lithosphérique réside dans le basalte extrusif mais les niveaux les plus profonds de la croûte océanique (dykes et gabbro) et probablement le manteau supérieur pourraient être des contributeurs significatifs à cette composante. Leur contribution dépend de l'intensité et la polarité de leur propre ARN par rapport à l'ARN des basaltes extrusifs, de leurs épaisseurs et de l'âge de la lithosphère océanique. En s'appuyant sur les données d'analyse magnétique, plusieurs auteurs ont tenté d'établir des modèles litho-magnétiques en assignant aux différentes couches lithologiques de la lithosphère océanique des valeurs

d'intensités compatibles avec les résultats d'analyses magnétiques des échantillons venant de ces couches. A la figure (1.12) nous rassemblons les principaux modèles disponibles dans la littérature. Sur cette figure, la première colonne à gauche représente la stratification des couches sismiques de la croûte et leur épaisseur en kilomètre. La deuxième colonne représente la composition géologique de la croûte où la lithologie des couches est basée sur l'analyse des échantillons de forages, de dragages et des ophiolites. Sur la troisième colonne l'intensité de l'aimantation est représentée à partir de quatre modèles : Kent *et al*. (1978), Dunlop et Prévot (1982), Banerjee (1984) et Harrison (1987).

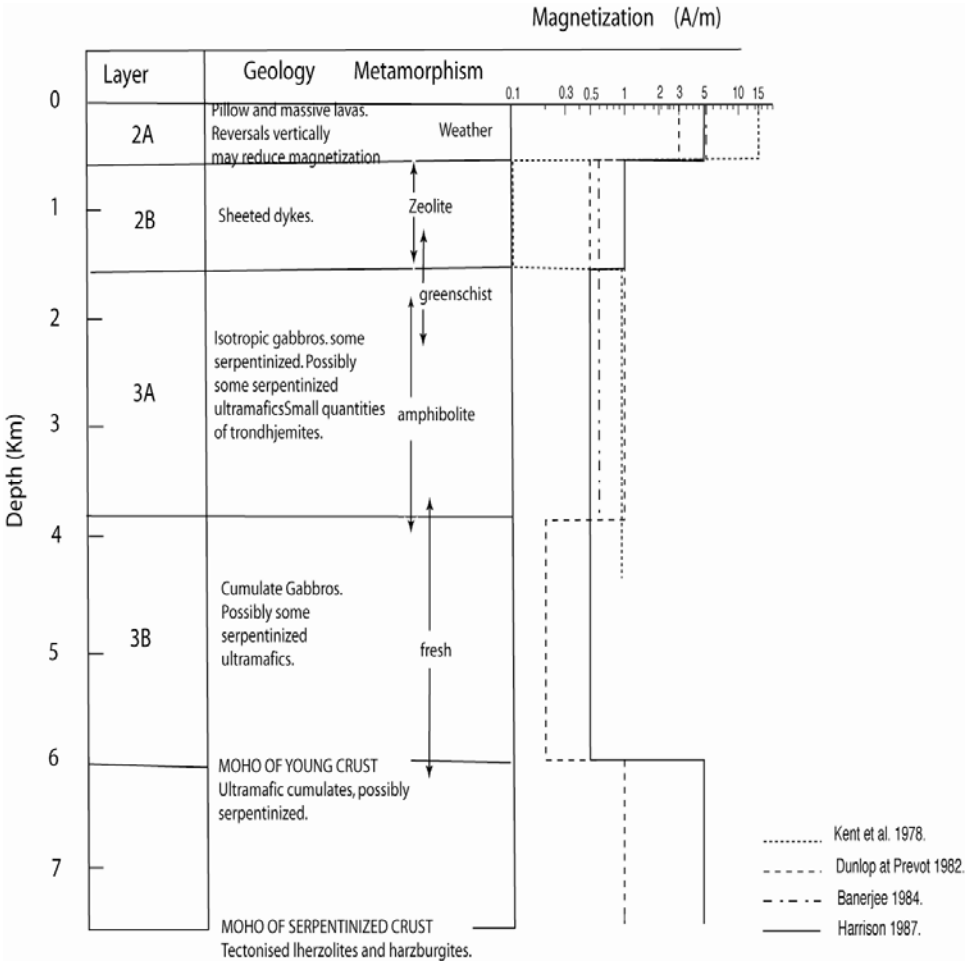


Figure 1.12. Quatre modèles de la composition magnétique de la lithosphère océanique proposés respectivement par : Kent *et al.* (1978), Dunlop et Prévot (1982), Banerjee (1984) et Harrison (1987).

1.3 Modèles d'aimantation de la lithosphère

Il est évident que la source des anomalies magnétiques marines est plus complexe que ce qui est décrit dans le modèle standard, correspondant à une couche basaltique extrusive

d'aimantation uniforme avec des contrastes verticaux entre les zones à polarités opposées. Dans la littérature plusieurs modèles de l'aimantation du fonde océanique, plus représentatifs que le modèle standard, ont été proposés. Ces modèles tentent de satisfaire à la fois les propriétés magnétiques des roches océaniques, déterminées directement sur les échantillons, et les propriétés des anomalies magnétiques en particulier les variations d'amplitude et la distorsion. Dans la suite nous décrivons les trois modèles principaux suivants : le *modèle à plusieurs couches*, le *modèle chimique*, et un *modèle tectonique* proposé uniquement pour interpréter la distorsion anomaluse de la forme d'anomalies magnétiques observées.

1.3.1 Les modèles à plusieurs couches

Afin d'expliquer les anomalies de la distorsion observée sur les chrons 27-32, Cande et Kent (1976) ont proposé que la structure magnétique de la croûte océanique est composée de deux couches : une couche supérieure (500 m) constituée de basaltes extrusifs refroidis rapidement caractérisée par une aimantation intense qui domine la source des anomalies magnétiques océaniques, et une couche inférieure (4-5 km) composée de roches intrusives de faible aimantation acquise lors d'une phase de refroidissement relativement lente. Les zones de transition entre les polarités opposées dans la couche supérieure, supposées étroites et verticales, n'introduisent aucune composante de distorsion anomaluse sur la phase de l'anomalie. Par contre la couche inférieure se caractérise par des zones de transition pentées dans le sens de l'expansion océanique. Ce pendage est contrôlé par la structure thermique de la lithosphère ; il pourrait introduire une rotation de la phase de l'anomalie magnétique synthétique comparable à l'anomalie de la distorsion observée sur le profil de mesures.

Pour interpréter l'augmentation, en fonction de l'âge de la croûte océanique, de la durée des intervalles de polarités observée dans l'océan Pacifique Nord : Blakely (1976) a proposé la même idée d'une source magnétique océanique à deux couches. Une couche supérieure correspondant aux basaltes extrusifs, préservant une information à petite longueur d'onde du champ magnétique, et une couche inférieure composée des dykes intrusifs avec une résolution de polarité relativement faible. Selon son modèle la contribution de ces deux couches dans la source des anomalies magnétiques est temps- dépendante. A cause des processus de l'oxydation à faible température de ses minéraux magnétiques, la domination du basalte dans la source diminue progressivement avec le temps, par contre la couche inférieure de dykes, caractérisée par une aimantation de faible intensité, préserve son aimantation inchangée et devient avec le temps le contributeur principal dans la source de l'anomalie.

Plus récemment; A partir d'un modèle typique de l'évaluation thermique de la lithosphère océanique Arkani-Hamed (1988 ; 1991) a calculé un modèle 2D de la distribution de l'ART initiale dans la croûte et le manteau supérieur de la lithosphère océanique. Son modèle était composé de quatre couches, correspondant aux trois couches pétro-sismiques typiques de la croûte océanique, 2A, 2B et la couche 3, plus la partie supérieure du manteau dont la

température instantanée est inférieure à l'isotherme de Curie de la magnétite (580° C). Selon ce modèle ; les minéraux magnétiques de la couche 2A passent rapidement dans leur intervalle de consolidation magnétique donnant une distribution d'aimantation thermique, caractérisé par des zones de transitions verticales et très étroites entre les polarités magnétiques opposées, similaire à celle du modèle standard. Par contre la distribution de l'aimantation dans les couches les plus profondes, la croûte inférieure et le manteau qui se refroidissent lentement, génèrent des zones des transitions diffuses entre les polarités opposées avec une pendage, dans le sens de l'expansion, définie par la migration de point Curie de la magnétite.

Tenir compte des effets de processus de relaxation et de reaimantation visqueuse, consécutifs à l'acquisition de l'aimantation thermique, Arkani-Hamed (1989) a généralisé son modèle-ART. Dans son nouveau modèle, appelé le modèle-ARTV, le temps de relaxation des minéraux magnétiques n'était considéré qu'en fonction de la température ambiante. Dans ces conditions thermiques faibles par rapport au temps de relaxation caractéristique de la couche basaltique extrusive, les processus de la relaxation et la réalimentation visqueuse n'introduisent aucune modification significative sur l'aimantation de cette couche. Par contre, le modèle assigne une aimantation visqueuse de plus en plus significative avec la profondeur ; conduisant à la diminution de la résolution des polarités et à l'élargissement de la diffusitivité des zones de transition dans la croûte inférieure et le manteau supérieur.

La variation horizontale de l'intensité effective de l'aimantation produite par le modèle ARTV apparaît être fortement dépendante, d'une part, de l'alternance des inversions de polarité du champ magnétique et, d'autre part, de l'intervalle de température de consolidation magnétique des matériaux magnétiques utilisés dans le modèle. Pour un type donné de matériaux, une alternance d'inversions rapides du champ réduit l'intensité effective, l'anomalie générée par le modèle se caractérise alors par une faible amplitude sans aucune composante de distorsion anomaluse. Par contre, durant un intervalle suffisamment long de polarité stable comme le superchron normal du Crétacé, à cause de la superposition verticale des polarités opposées, l'intensité effective est réduite dans la partie la plus jeune de l'intervalle (voir colonne P1 de la figure 1.13). Tandis que cette réduction est absente dans la partie la plus ancienne(voir colonne P2 figure 1.13). Alors, l'anomalie magnétique associée à cette longue intervalle montre de fortes amplitudes avec un pendage vers l'axe de la dorsale. Cette configuration d'aimantation a fourni une explication satisfaisante de la distorsion anomaluse et de la variation de l'amplitude de certaines anomalies observées sur la surface de la mer ou sur les données de satellite. A la figure (1.14) l'anomalie magnétique de la couche-2A (première ligne) et de la lithosphère magnétique (deuxième ligne) sont calculées à partir du modèle ARTV sur la surface de la mer (colonne de gauche) et à l'altitude 400 km (colonne de droite).

Pour tenir compte de la dépendance entre la magnitude de la distorsion anomaluse de l'anomalie magnétique et le taux d'expansion océanique, des modifications, concernant le

pourcentage de la contribution des différentes couches du modèle- ARTV dans la source de l'anomalie marine, ont été reportées sur le modèle ARTV original. Dyment et Arkani-Hamed (1995) ont estimé dans cette modification que la contribution de la croûte océanique inférieure et probablement du manteau supérieur, dans la source effective de l'anomalie magnétique océanique, diminue progressivement de 40 % pour un taux d'expansion de ~10 km/Ma à un pourcentage nul pour un taux d'expansion de l'ordre de ~50 km/Ma.

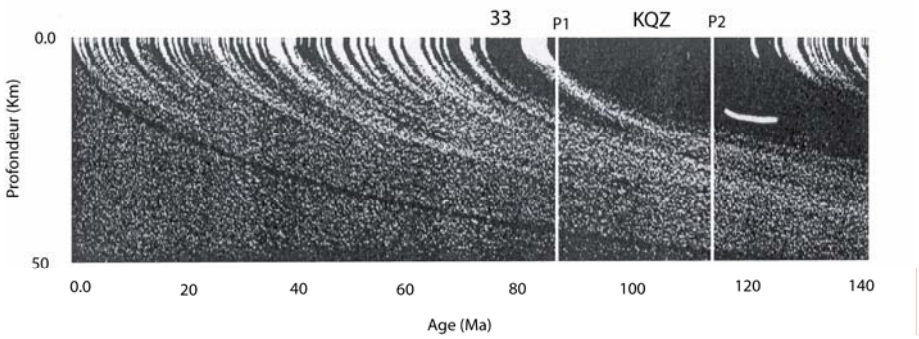


Figure 1.13. Configuration de la structure magnétique océanique selon le modèle ARTV, KQZ est polarité normale de longue durée du Crétacé. D'après Arkani-Hamed (1991).

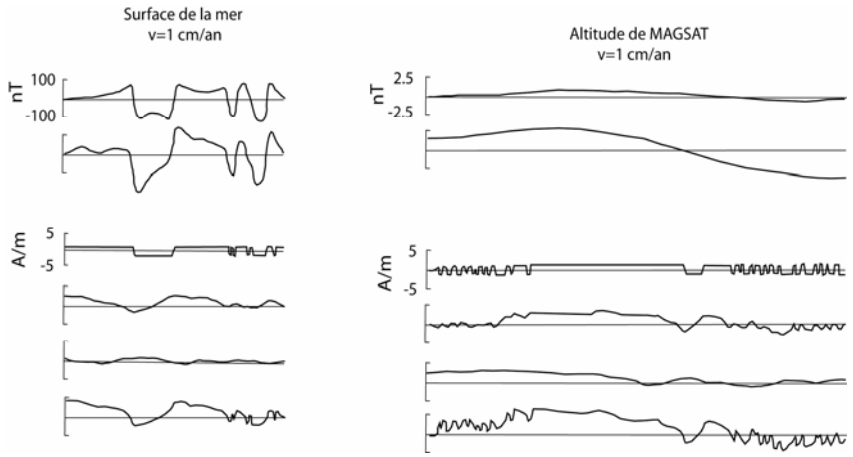


Figure 1.14. Configuration de l'intensité d'aimantation du modèle ARTV (quatre courbes du bas) et de l'anomalie magnétique qui lui est associée (deux courbes du haut). D'après Arkani-Hamed (1991).

1.3.2 Modèle chimique et rémanence chimique

Raymond et LaBrecque (1987) ont proposé un mécanisme différent pour expliquer la distorsion anomaluse et de la variation d'amplitude observées sur l'anomalie magnétique océanique. Sur un modèle théorique les auteurs ont proposé que les propriétés, de l'énergie et

de la forme de l'anomalie magnétique océanique, puissent être attribuées à une composante d'aimantation secondaire d'origine chimique (ARCs). Cette composante s'acquiert, par les processus de la maghémitisation de la titanomagnétite (TM60) dans le basalte extrusif, lors des premières 20 Ma de la mise en place de la lithosphère. Le mécanisme de l'acquisition de l'ARCs dans le modèle propose que la rémanence thermique initiale se dégrade exponentiellement en fonction de l'âge de la croûte océanique et, comme un complément de la diminution de l'ART, une rémanence chimique s'acquièrent. Le taux de la maghémitisation dans le modèle est quantifié par une constante dont la valeur dépend de la température ambiante, de la taille des grains de basalte, de la profondeur et de l'âge de la croûte. Mais le facteur influençant le plus la configuration de l'anomalie est l'histoire des inversions du champ magnétique terrestre. Ainsi si l'alternance d'inversions est une distribution aléatoire rapide, l'effet de l'acquisition de l'ARCs sera réduit à la diminution de l'ARN du basalte en raison de l'acquisition de plusieurs composantes de CRMs avec des polarités opposées. C'est le cas des anomalies les plus récentes sur les flancs des dorsales.

Par contre si l'altération est acquise durant une polarité de longue durée (par exemple le superchron normal du Crétacé), l'ARCs acquise pendant la partie la plus ancienne d'un tel intervalle sera de même sens que la polarité de l'ART initiale. Par conséquent l'intensité de l'ARN du basalte reste presque inchangée. Quant à la partie la plus récente de l'intervalle, elle acquière une ARCs dans la direction de la polarité opposée suivante et réduit une partie de l'ART restant après l'altération. L'anomalie associé sera finalement de grande amplitude par rapport aux anomalies voisines avec un pendage vers le centre d'accrétion océanique.

Malgré son succès dans l'explication de la distorsion anomaluse et de la variation de l'amplitude de l'anomalie observée, ce modèle a fait l'objet de certaines critiques. Par exemple Verhoef et Arkani-Hamed (1990) ont montré que, même si l'altération se prolonge sur la croûte océanique entière, l'ARCs acquise est négligeable et ne peut expliquer ni la distorsion anomaluse ni la variation de l'amplitude observée sur l'anomalie magnétique.

De son coté Beske-Diehl (1989; 1990) a trouvé, par oxydation en laboratoire d'échantillons de basalte océanique, que l'acquisition d'une ARCs dans la direction du champ magnétique ambiant était inobservable. Au lieu du modèle chimique, l'auteur a proposé un autre mécanisme d'acquisition d'une aimantation secondaire par le basalte. Ce mécanisme correspond à l'acquisition par les gros grains (PSD) et (MD) de titanomagnétite présents dans le basalte d'une aimantation visqueuse secondaire dans la direction du champ magnétique ambiant. La stabilité de la rémanence visqueuse sera renforcée par l'altération à faible température en raison de l'augmentation de la coercitivité des minéraux acquérant cette rémanence. Cette rémanence d'origine visco-chimique (ARVCs) a produit une configuration de l'aimantation de basalte similaire à celle produit par l'ARCs proposée dans le modèle de Raymond et LaBrecque (1987).

1.3.3 Modèle tectonique

Finalement nous citons le principe du modèle tectonique pour l'interprétation de la distorsion anoamluse des anomalies magnétiques marines. Le régime extensif dans la zone d'expansion océanique conduit au développement de failles listriques (failles normales à géométrie courbe). Le déplacement des blocs aimantés par rapport à ces failles s'exprime par un basculement autour d'un axe de rotation parallèle à l'axe de la dorsale. Les effets de tels mouvements sur les études paléomagnétiques se représentent par la rotation du vecteur primitif d'aimantation vers une nouvelle direction. La direction finale de l'aimantation dans les blocs basculés sera alors dépendante d'une part des paramètres directionnels initiaux de l'aimantation du bloc et d'autre part de la magnitude du basculement produit. A la figure 1.16, une illustration simple du processus de rotation tectonique du vecteur d'aimantation [Verosub et Moores, 1981] est donnée. Soit un repère cartésien orthonormé direct avec une orientation traditionnelle de ses axes y et x sont respectivement d'orientation parallèle et perpendiculaire à l'axe de la dorsale et l'axe z vers le bas, et $\vec{m}_3(m_x, m_y, m_z)$ est le vecteur d'aimantation (figure 1.15 a). Si $\vec{m}_3$ subit une rotation d'angle $\{R\}$ autour de l'axe-y (figure 1.15 a,c), les composantes de la nouvelle direction $\vec{m}r_3(mr_x, mr_y, mr_z)$ due à la rotation seront données par :

$$\begin{aligned} mr_x &= m_x \cos(R) + m_z \sin(R) = \cos(I)\cos(D-\alpha)\cos(R) + \sin(I)\sin(R), \\ mr_y &= m_y = \cos(I)\sin(D-\alpha)., \\ mr_z &= -m_x \sin(R) + m_z \cos(R) = \cos(I)\cos(D-\alpha)\sin(R) + \sin(I)\cos(R). \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

Où I et D sont respectivement l'inclinaison et la déclinaison du vecteur original $\vec{m}_3$ et α l'azimut du plan normal à la dorsale. Pour déterminer l'inclinaison I_r et la déclinaison D_r du vecteur d'aimantation retourné $\vec{m}r_3$, nous écrivons les composantes de $\vec{m}r_3$ dans le repère cartésien X', Y' et Z' dont les axes sont orientés respectivement vers le nord géographique, l'Est géographique et vers le bas (figure 1.15 d) :

$$\begin{aligned} mr'_x &= mr_x \cos(\alpha) + mr_y \sin(\alpha), \\ mr'_y &= mr_x \sin(\alpha) + mr_y \cos(\alpha), \\ mr'_z &= mr_z. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} I_r &= \arcsin(mr'_z) \\ D_r &= \arctan\left(mr'_y / mr'_x\right) \end{aligned} \tag{1.3.2}$$

Si on réduit l'analyse précédente à une analyse 2-D effectuée dans le plan normal à la direction de la dorsale, on ne considère que la projection $\vec{m}r_2(mr_x, mr_z)$ du vecteur $\vec{m}r_3$. En fonction de l'inclinaison apparente de vecteur original $\vec{m}_3$ nous écrivons les deux composantes de $\vec{m}r_2$

$$\begin{aligned} mr_x &= m_x \cos(R) + m_z \sin(R) = \cos(R - I')\sin(I)/\sin(I'), \\ mr_z &= -m_x \sin(R) + m_z \cos(R) = -\sin(R - I')\sin(I)/\sin(I'). \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

Les deux relations (1.3.3) se réduisent en faisant le remplacement suivant

$$m_x = \sin I / \tan I'$$

où I' est l'inclinaison apparente de la composante du vecteur original d'aimantation $\vec{m}_3$, soit l'angle entre l'horizontale et la projection $\vec{m}_2(m_x, m_z)$ du vecteur d'aimantation original $\vec{m}_3$ sur le plan normal à l'axe de la dorsale. donné par

$$I' = \tan^{-1}(m_z / m_x).$$

Les deux relations (1.3.3) montrent que l'inclinaison apparente après la rotation du bloc est

$$I'_r = \tan^{-1}(mr_z / mr_x) = I' - R \qquad (1.3.4)$$

L'égalité (1.3.4) indique que la rotation du bloc aimanté par l'angle $\{R\}$ autour d'un axe parallèle à l'orientation de la dorsale correspond à un changement de l'inclinaison apparente de l'inclinaison apparente du même angle. Cet angle supplémentaire ajouté à l'inclinaison apparente originale peut être une cause très importante de la distorsion de l'anomalie magnétique océanique réduite au pôle.

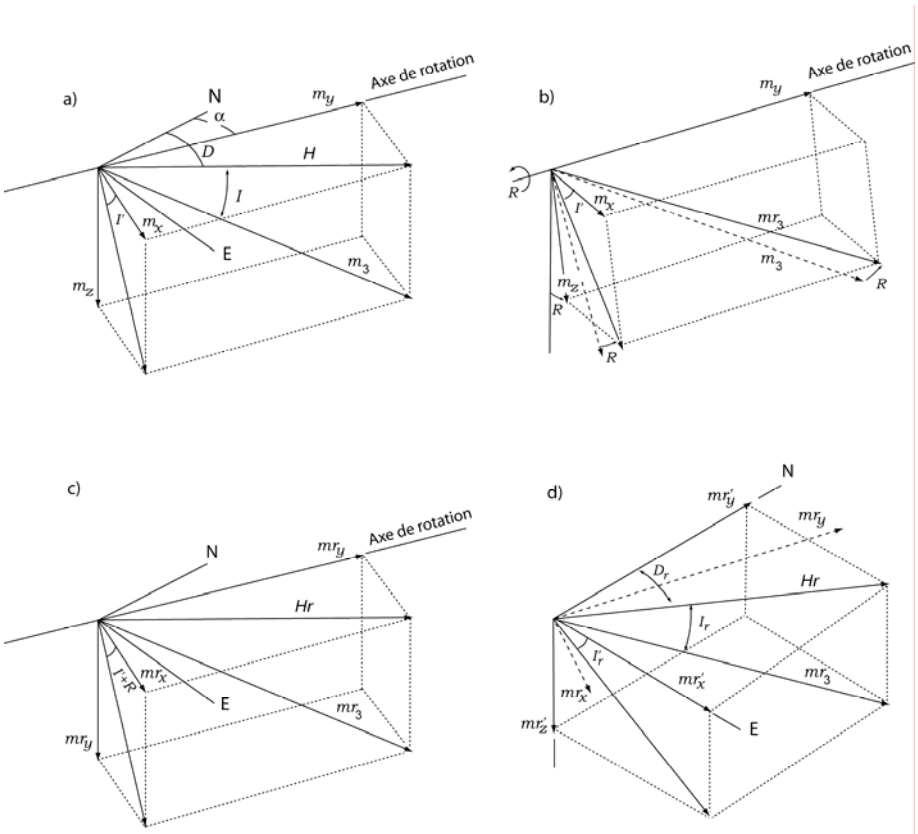


Figure 1.15. Détermination de l'effet de la rotation tectonique autour d'un axe parallèle à l'axe de la dorsale.

Résumé

La source de l'anomalie magnétique océanique est souvent modélisée par le modèle standard constitué d'une couche magnétique horizontale ou drapée sur la topographie du fond océanique avec une épaisseur et une intensité d'aimantation constantes et une polarité alternative. Ce modèle peut expliquer certaines propriétés des anomalies magnétiques observées comme la relation de son amplitude et de sa forme avec la position géographique et l'orientation de la dorsale. Par contre, il est incapable d'expliquer d'autres propriétés documentées systématiquement sur les données magnétiques comme la variation de l'amplitude à grande échelle, le lissage des bords d'anomalies anciennes ou encore l'anomalie de distorsion. Ces observations sur les données magnétiques mettent en question la validité de la représentation de la source magnétique océanique par le modèle standard et impliquent la possibilité d'une aimantation lithosphérique plus complexe et variable dans l'espace.

Les propriétés magnétiques des roches océaniques mettent en évidence une hétérogénéité verticale des propriétés magnétiques de la lithosphère océanique fortement comparable avec son litage sismo-pétrographique. Ainsi les grandes unités lithologiques (couche basaltique, complexe filonien, couche gabbroïque et manteau) se présentent comme des unités magnétiques bien distinctes. Les propriétés magnétiques et la configuration géométrique de ce litage magnétique se montrent variables en fonction de l'âge de la lithosphère. Pour une croûte océanique jeune, la source magnétique effective de la lithosphère se réduit à l'unité basaltique qui fossilise le champ magnétique dans des zones de polarités opposées bien distinctes selon des limites verticales et très étroites. Avec le temps, la contribution de l'unité basaltique dans la source diminue, par contre la contribution des unités plus profondes augmente. Cette tendance est la conséquence d'une part de la vigueur de l'activité hydrothermale dans l'unité basaltique qui détruit sa phase magnétique initiale et d'autre part de la migration du point de Curie en profondeur dans la lithosphère ce qui implique un épaississement de l'aimantation des unités profondes. Cette migration implique pour les unités magnétiques concernées une géométrie particulière composée de zones de polarité opposées séparées par des zones de transition épaisses et obliques. La variation de l'intensité du champ magnétique fossilisé dans les roches implique aussi une variation latérale et verticale dans la configuration de l'aimantation de la lithosphère. Cette variation dépend de la précision de l'enregistrement du champ dans les roches et de la vitesse d'expansion.

Evidemment, la modélisation de la structure magnétique océanique par une telle configuration dépendant du temps n'est qu'un modèle idéal et ne peut pas être une représentation réelle et générale de la lithosphère. En réalité la configuration de la structure magnétique océanique n'est pas seulement une fonction du temps mais elle se montre aussi variable dans l'espace. Plusieurs facteurs peuvent être à l'origine de cette variabilité spatiale comme la variabilité locale de la concentration des minéraux magnétiques dans les laves et leur composition chimique, la variation locale de l'intensité de l'activité hydrothermale dans la croûte, la variation séculaire du champ paléomagnétique. Mais la variable spatiale la plus importante

pour la structure magnétique est le taux de l'expansion océanique et les processus tectono-magmatique qui varient à toutes échelles à travers les dorsales. Ces processus affectent la continuité horizontale de la stratification pétrographique. Par conséquence la stratification magnétique de la croûte océanique varie d'un lieu à l'autre. Ainsi, lorsque les dorsales à taux d'expansion rapide montrent un tissu crustal continu avec une stratification pétro-magnétique typique de la croûte océanique à cause de la vigueur de l'activité magmatique, les dorsales à taux d'accrétion lent (< 6 cm/an) ont un tissu crustal discontinu. Une activité magmatique intermittente, jointe à une activité tectonique intense, entraînent souvent la remontée du manteau supérieur serpentinisé jusqu'au niveau du plancher océanique, même en dehors des zones de fracture. Les péridotites serpentinisées sont alors des contributeurs considérables à la source effective des anomalies magnétiques même pour une lithosphère d'âge récent. La nature de leur contribution dépend d'une part de l'intensité de l'ARN de la serpentinite qui est en général comparable à celle des basaltes extrusifs et d'autre part de la cohérence des polarités entre la serpentinite et les roches ambiantes. On note à ce propos que plusieurs types de rémanences magnétiques peuvent se superposer dans les péridotites serpentinisées lors de leur remontée. A part la rémanence chimique principale la péridotite serpentinisée peut acquérir une aimantation visqueuse dans la croûte inférieure. A une température faible, des processus d'oxydation peuvent affecter la magnétite conduisant à la formation de maghémite et à l'acquisition d'une autre rémanence chimique. Une rémanence thermovisqueuse partielle de haute stabilité peut aussi se former lors de l'emplacement des péridotites serpentinisées dans la croûte océanique supérieure. Cette composition complexe de l'ARN de la péridotite serpentinisée peut s'acquérir sur un long intervalle de temps et des orientations d'aimantation différentes peuvent exister (si la fréquence d'inversion du champ est suffisamment rapide). La contribution des roches serpentinisées aux anomalies magnétiques marines devient alors difficile à établir. Elle constitue une source de perturbation ou une source d'enrichissement de la polarité du champ magnétique enregistré dans les roches ambiantes. Ainsi pour de telles zones d'expansion lentes, il n'est pas possible de spécifier un modèle général de la source magnétique de la lithosphère océanique et à chaque place les propriétés magnétiques de la lithosphère océanique dépendent de son histoire magmatique et hydrothermale.

CHAPITRE II

CONCEPT DU SIGNAL ANALYTIQUE A UNE DIMENSION ET SON APPLICATION DANS L'INTERPRETATION DES DONNEES MAGNETIQUES

Les anomalies magnétiques observées sont souvent difficiles à interpréter même dans le cas de sources à géométrie simple, notamment à cause de leur forme très différente et variable par rapport à celle de la source. Ce phénomène est dû au fait que la source magnétique est une source vectorielle, ce qui entraîne que l'anomalie qu'elle produit montre une dépendance fondamentale vis à vis de la direction des vecteurs aimantation et régional. Ainsi, et contrairement à l'anomalie gravimétrique pour laquelle des structures de forme homothétiques produisent une anomalie gravimétrique de configuration identique dont les valeurs maximales se situent à l'aplomb de la source, les distributions magnétiques identiques en forme mais différentes en directions magnétiques peuvent produire des anomalies de configurations différentes et les valeurs maximales de l'anomalie magnétique peuvent se trouver à l'extérieur de la projection horizontale de la distribution. Ce phénomène engendre une difficulté dans la recherche d'une corrélation entre l'anomalie magnétique observée et les structures géologiques causatives.

Pour contourner cet obstacle fondamental et ramener l'anomalie magnétique à l'aplomb de sa source, un procédé de changement de phase du signal magnétique est souvent utilisé. L'intervention est réalisé au moyen d'un filtre de phase (voir section 1.1) qui est un filtre passe bande déphaseur, dont l'application au signal conduit à une modification de sa structure sans modifier l'énergie qu'il contient. L'idée du changement de phase a été formulée par l'intermédiaire de deux principales techniques : la réduction au pôle et le calcul de l'anomalie pseudo-gravimétrique [Baranov, 1957 ; Baranov et Naudy 1964]. L'inconvénient de l'approche du changement de phase est la nécessité d'une connaissance à priori de la direction du vecteur aimantation de la source qui est souvent un paramètre difficile à connaître. C'est pourquoi on suppose communément que l'aimantation de la source est induite, c'est à dire qu'elle possède une direction identique à la direction du champ géomagnétique supposé connu, par exemple grâce aux modèles géomagnétiques globaux (e.g. IGRF). Mais, si l'hypothèse d'une aimantation induite dominante est valable dans certaines situations, dans d'autres cas, lorsqu'une composante d'aimantation rémanente contribue de manière prédominante à la source du signal magnétique, cette hypothèse conduit à une erreur considérable dans le résultat de l'analyse.

Une autre approche de la localisation horizontale de la source s'obtient par la séparation de caractéristiques du signal magnétique. Cette approche consiste en la transformation du signal magnétique réel en une fonction holomorphe appelée signal analytique. Cette transformation est un concept de grande importance dans la théorie du signal magnétique 1-D. Dans un

système de coordonnées polaires, ce concept conduit à une séparation du signal magnétique original en deux représentations indépendantes : amplitude locale et phase locale. L'amplitude locale est une représentation spatiale continue de l'énergie contenue dans le signal original au voisinage d'une position donnée et la phase locale peut être considérée comme un indicateur de la structure du signal magnétique analysé. Les deux termes peuvent être vus comme les homologues spatiaux de l'amplitude et de la phase de la transformée de Fourier du signal magnétique traité. La fonction de l'amplitude se caractérise par une forme indépendante de la direction des vecteurs magnétiques, ce qui implique une corrélation entre la position horizontale de ses valeurs maximales et de la projection horizontale de la source. La fonction de l'amplitude pourrait être donc un moyen de localisation de la source avantageux par rapport à la réduction au pôle où l'analyse de l'anomalie par cette fonction ne requière pas la connaissance des directions magnétiques

L'importance de la transformation du signal magnétique en signal analytique dans l'interprétation des données magnétique 1D ne se limite pas à la localisation des sources causatives, mais elle forme aussi un outil puissant dans la caractérisation de certains paramètres de la source. En fait, la séparation d'identité simplifie énormément l'analyse magnétique en permettant de travailler sur une version du signal original composée au moins de quatre fonctions particulières qui sont l'amplitude locale, la phase locale, l'atténuation locale et la fréquence locale. Les propriétés spéciales de ces fonctions rendent possible l'accès à plusieurs paramètres de la source causative qui sont autrement difficiles ou impossible à résoudre dans la représentation réelle du signal magnétique. Cependant, à cause de la non-linéarité de l'amplitude et de la phase locales par rapport aux paramètres cherchés, la source causative du signal magnétique devrait être une source singulière ou localisée comme une condition fondamentale pour une application correcte de l'analyse. Cette condition contraint le degré de liberté de notre traitement et nous entraîne à associer à la transformation en signal analytique une opération de filtrage. Dans ce chapitre, je tente également d'explorer les propriétés du signal analytique 1D associé à un signal magnétique[6] et les paramètres de la source causative que l'on peut extraire. La structure du chapitre est la suivante : Dans les sections (2.1) et (2.2) je donne la définition de la transformée de Hilbert et de la fonction holomorphe et les propriétés principales de ces deux définitions. La section (2.3) donne la construction de signal analytique d'un champ magnétique 1D et des exemples synthétiques représentant les différentes singularités magnétiques que l'on peut rencontrer dans l'espace à deux dimension. A la dernière section (2.4), l'analyse du champ magnétique par l'ondelette de Cauchy est présenté comme une analyse par le signal analytique prise à différentes altitudes ,et des exemples synthétiques des sources multi-

[6] L'expression « signal magnétique » dans ce chapitre se réfère au champ magnétique ou à une de ses dérivées horizontales.

singulières sont donnés pour montrer la variation des propriétés du signal analytique en fonction de la distance entre le point d'observation et la source

.

2.1 Transformation de Hilbert

Pour une fonction réelle $\mathrm{f}(x) \in \mathrm{L}^2(\mathrm{R})$ à moyenne nulle, nous définissons sa transformation de Hilbert directe H_1 et sa transformée de Hilbert inverse H_1^{-1} respectivement par les deux produits de convolution suivants

$$\begin{aligned} &\mathsf{H}_1\{\mathrm{f}(x)\} = \mathrm{f}_{\mathsf{H}}(x) = \mathrm{f}(x) *_x \mathrm{h}(x), \qquad \text{avec } \mathrm{h}(x) = \text{-v.p.}\frac{1}{\pi x}. \\ &\mathsf{H}_1^{-1}\{\mathrm{f}_{\mathsf{H}}(x)\} = \mathrm{f}(x) = \mathrm{f}_{\mathsf{H}}(x) *_x \mathrm{g}(x), \quad \text{avec } \mathrm{g}(x) = \text{v.p.}\frac{1}{\pi x}. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

La notation $*_x$ indique le produit de convolution par rapport à la variable x. Il est évident que le noyau $1/\pi x$ contient une singularité à l'origine, ce qui implique le calcul de ces deux intégrales par l'évaluation de la valeur principale de Cauchy {v.p} pour assurer leur convergence.

En se plaçant dans le domaine fréquentiel, nous définissons respectivement la transformée de Fourier directe et inverse de la fonction $\mathrm{f}(x)$ par

$$\begin{aligned} &\mathsf{F}_x\{\mathrm{f}(x)\}(k) = \tilde{\mathrm{f}}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \mathrm{f}(x) \exp\{-ikx\} \\ &\mathsf{F}_x^{-1}\{\tilde{\mathrm{f}}(k)\}(x) = \mathrm{f}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dk\, \tilde{\mathrm{f}}(k) \exp\{ikx\} \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

k étant la pulsation associée à la variable x.

Les fonctions de transfert de $\mathrm{h}(x)$ et $\mathrm{g}(x)$ peuvent s'écrire respectivement par les deux formules suivantes

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathrm{h}}(k) = i\,\mathrm{sgn}(k), \\ &\tilde{\mathrm{g}}(k) = -i\,\mathrm{sgn}(k). \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Alors, la représentation de Fourier de la transformée de Hilbert et de son inverse (équation 2.1.1) s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} &\mathrm{f}_{\mathsf{H}} = \tilde{\mathsf{H}}_1\{\mathrm{f}(x)\}(k) = \tilde{\mathrm{h}}(k) \cdot \tilde{\mathrm{f}}(k) = i\,\mathrm{sgn}(k)\tilde{\mathrm{f}}(k), \\ &\tilde{\mathsf{H}}_1^{-1}\{\mathrm{f}_{\mathsf{H}}(x)\}(k) = \tilde{\mathrm{g}}(k) \cdot \tilde{\mathrm{f}}_{\mathsf{H}}(k) = -i\,\mathrm{sgn}(k)\tilde{\mathrm{f}}_{\mathsf{H}}(k). \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

Les équations 2.1.4 montrent que la transformation de Hilbert correspond à une opération de filtrage linéaire de la fonction $\mathrm{f}(x)$ et se caractérise par les propriétés suivantes.

- C'est une transformation linéaire : $\mathsf{H}_1\{a\mathrm{f}(x)+b\mathrm{g}(x)\}=a\mathsf{H}_1\{\mathrm{f}(x)\}+b\mathsf{H}_1\{\mathrm{g}(x)\}$.
- Elle est anti-symétrique car : $\widetilde{\mathrm{h}}(-k)=-\widetilde{\mathrm{h}}(k)$.
- Elle supprime la fréquence nulle $(k=0)$ de la fonction $\mathrm{f}(x)$ car : $\widetilde{\mathrm{h}}(0)=0$.
- La transformée de Hilbert d'une fonction réelle est une fonction réelle.
- C'est un filtre « all-pass », permettant de passer toutes les composantes fréquentielles $k\neq 0$ sans modification de leur énergie puisque la réponse de l'amplitude de $\mathrm{h}(x)$ est égale à 1 : $\left|\widetilde{\mathrm{h}}(k)\right|=1 \quad \forall k\neq 0$.
- Elle correspond à un filtre déphaseur : son effet réside dans la modification de la phase d'un angle égal à $\pi/2$. Donc le spectre du signal original $\widetilde{\mathrm{f}}(k)$ et le spectre de sa transformée de Hilbert $\widetilde{\mathrm{f}}_{\mathrm{H}}(k)$ sont deux fonctions à valeur complexe représentées par deux vecteurs orthogonaux.

2.2 Fonctions holomorphes

Rappelons qu'une fonction à valeurs complexes $\mathrm{f}_c(\zeta)=\mathrm{g}(x,z)+i\mathrm{f}(x,z)$ de la variable complexe $\zeta=x+iz$ est dite holomorphe (ou analytique) dans un domaine Ω si elle est différentiable en tout point de ce domaine et si elle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann

$$\partial_x\mathrm{g}(x,z)=\partial_z\mathrm{f}(x,z) \text{ et } \partial_z\mathrm{g}(x,z)=-\partial_x\mathrm{f}(x,z) \tag{2.2.1}$$

Les notations ∂_x et ∂_z symbolisent les opérateurs de dérivation par rapport aux variables x et z respectivement.

Le domaine Ω qui m'intéresse est de la forme $]-\infty\ +\infty[\times]-\infty\ a[$. Considérons le champ de vecteurs F de Ω dans R^2 défini par $\vec{\mathrm{F}}(x,z)=\mathrm{f}(x,z)\vec{e}_x+\mathrm{g}(x,z)\vec{e}_z$, où $\{\vec{e}_x,\vec{e}_z\}$ est une base orthogonale de R^2.

Les conditions de Cauchy-Riemann impliquent que $\mathrm{div}(\vec{\mathrm{F}})=0$; $\mathrm{rot}(\vec{\mathrm{F}})=0$. L'opérateur rot est ici un opérateur scalaire défini par $\mathrm{rot}(\vec{\mathrm{F}})=\partial_z\mathrm{F}_x-\partial_x\mathrm{F}_z$. Donc, Ω étant simplement connexe, F est le gradient (ou l'opposé du gradient) d'une fonction scalaire φ, harmonique sur Ω.

φ est la solution, unique à une constante près dépendant des conditions à l'infini, du problème de Neumann suivant

$$i)\ \Delta_2\varphi(x,z)=0 \quad \forall x,z\in\Omega$$
$$ii)\ \partial_z\varphi(x,z=a)=g(x,a)$$

en choisissant $\vec{F} = \nabla_2 \varphi(x,z)$, où $\vec{\nabla}_2 = \partial_x \vec{e}_x + \partial_z \vec{e}_z$ est le gradient à deux dimensions.

Sachant que la fonction de Green du problème est $G(\vec{r},\vec{r}_0) = \frac{1}{2\pi}\log|\vec{r}-\vec{r}_0| + \frac{1}{2\pi}\log|\vec{r}-\vec{r}_0'|$

avec $\vec{r} = (x,z)$, $\vec{r}_0 = (x_0,z_0)$ et $\vec{r}_0' = (x_0',z_0')$; $\vec{r}_0'$ est le point symétrique de $\vec{r}_0$ par rapport à la frontière a du domaine Ω. on obtient la solution sous la forme

$$\varphi(x,z) = C - \frac{1}{\pi} g(x,a) *_x \log\left[x^2 + (z-a)^2\right]^{1/2}$$

On en déduit les expressions de f et g sur Ω

$$f = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x',a)\frac{x-x'}{(x-x')^2+(z-a)^2}dx' = -\frac{1}{\pi} g(x,a) * \frac{x}{x^2+(z-a)^2} \qquad (2.2.2)$$

$$g = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x',a)\frac{z-a}{(x-x')^2+(z-a)^2}dx' = -\frac{1}{\pi} g(x,a) * \frac{z-a}{x^2+(z-a)^2} \qquad (2.2.3)$$

Lorsque z tend vers a, et sachant que $\lim_{z\to a}\frac{1}{\pi}\frac{a-z}{x^2+(z-a)^2} = \delta(x)$ l'expression 2.2.2 tend vers

$$f(x,a) = -\frac{1}{\pi} g(x,a) * \text{v.p.}\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (2.2.4)$$

où v.p. est la distribution valeur principale de Cauchy.

Par conséquent, *sur la frontière* $z = a$ du domaine Ω, f *est la transformée de Hilbert 1D de* g, ce que nous notons : $\mathrm{f}(x,a) = \mathrm{H}_1\{\mathrm{g}(x,a)\}$.

La partie réelle g et la partie imaginaire f de la fonction holomorphe sont appelées fonctions conjuguées, elles se caractérisent par deux propriétés fondamentales.

1. Harmonicité : les conditions de Cauchy-Riemann, associées au fait que g et f sont indéfiniment différentiables, donc deux fois continûment différentiables, impliquent que *les fonctions* g *et* f *sont harmoniques* sur Ω. La démonstration explicite de l'harmonicité de ces deux parties découle de la dérivation de première relation de 2.2.1 par rapport à x et la deuxième par rapport à z. Il vient

$$\partial_x^2 \mathrm{g}(x,z) = \partial_x \partial_z \mathrm{f} = -\partial_z^2 \mathrm{g}(x,z) \text{ d'où } \Delta_2 \mathrm{g}(x,z) = \partial_x^2 \mathrm{g}(x,z) + \partial_z^2 \mathrm{g}(x,z) = 0.$$

La démonstration est analogue pour la fonction f.

2. Orthogonalité : une valeur constante de f_c définit deux courbes dans le plan-ζ, $\mathrm{g}(x,z) = \text{constante}$ et $\mathrm{f}(x,z) = \text{constante}$. La fonction f_c peut prendre un nombre infini de

valeurs et ces deux composantes définissent alors deux familles de courbes. Soit $g = g_0$ et $f = f_0$ deux courbes de chaque famille. Considérons l'intersection de ces deux courbes au point $\zeta = \zeta_0$ Pour chacune des deux la pente est dz/dx. Puisque g reste constante quelles que soient les valeurs de x et z, nous avons

$$\frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial z}dz = 0 \text{, et en } \zeta_0 \text{,} \left(\frac{dz}{dx}\right)_{\zeta_0} = \left(\frac{-\partial g/\partial x}{\partial g/\partial z}\right)_{\zeta_0} \tag{2.2.5}$$

D'une manière similaire, la pente de la courbe $f = f_0$ en ζ_0 est donnée par

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_{\zeta_0} = \left(\frac{-\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z}\right)_{\zeta_0} \tag{2.2.6}$$

Des équations 2.2.5 et 2.2.6 et des conditions de Cauchy-Riemann 2.2.1, on déduit que le produit des pentes est

$$\left(\frac{-\partial g/\partial x}{\partial g/\partial z}\right)_{\zeta_0}\left(\frac{-\partial f/\partial x}{\partial f/\partial z}\right)_{\zeta_0} = -1 \tag{2.2.7}$$

La dernière formule 2.2.7 indique que les deux courbes $g = g_0$ et $f = f_0$ s'intersectent avec un angle droit en ζ_0. Cela démontre que *les familles des courbes correspondantes aux valeurs constantes des fonctions conjuguées sont orthogonales*.

2.2.1 Potentiel newtonien complexe

Après avoir défini le concept et les propriétés de la transformée de Hilbert 1D et de la fonction holomorphe, je rappelle dans la présente section la relation entre les potentiels gravimétrique et magnétique et les fonctions holomorphes. Ce rappel a pour objectif d'établir l'expression générale du signal analytique 1D associé à un signal magnétique d'ordre $L \geq 0$. En général, les champs des potentiels vectoriels (gravimétrique, magnétique ou encore électrique) se caractérisent par deux fonctions fondamentales qui sont respectivement la fonction du potentiel $\psi(x,z)$ et la fonction du flux $\vartheta(x,z)$. Pour définir ces deux fonctions et clarifier leurs propriétés dans un espace à deux dimensions, nous considérons l'exemple d'une distribution de masses réparties uniformément le long d'une ligne infinie (x_0, z_0) parallèle à la direction y d'un repère cartésien à trois dimensions. Dans cette exemple, l'attraction gravitationnelle exercée par la distribution se représente par des lignes des forces convergentes vers la ligne source (figure 1). En tout point de l'espace occupé par la force, la direction et la concentration des lignes de force représentent une mesure directe de la densité de flux de l'accélération gravimétrique à ce point. Dû à la symétrie circulaire du champ des lignes de force, le flux dans un secteur angulaire est proportionnel à l'angle μ de l'ouverture

du secteur délimité par l'axe x, l'origine du repère et le point d'observation (x,z). Le flux $\vartheta(x,z)$ varie donc linéairement en fonction de μ et peut être calculé par la formule suivante :

$$\begin{aligned}\vartheta(x,z) &= 2\pi\iint_s (G\rho/r)\, d\mu dz \\ &= 2\pi G\rho \int_{\mu_1=0}^{\mu_2=\mu} d\mu \int^{z_0+1} dz \approx 2\pi G\rho\mu = 2\pi G\rho \tan^{-1}\left[(z_0 - z)/(x - x_0)\right]\end{aligned} \tag{2.2.8}$$

avec ; $r = \left[(x - x_0)^2 + (z_0 - z)^2\right]^{1/2}$, G la constante d'attraction universelle et ρ la densité.

La fonction $\psi(x,z)$, est une quantité scalaire qu'on appelle le *potentiel newtonien*. C'est la solution fondamentale la plus connue de l'équation de Poisson. En électrostatique, magnétisme et gravimétrie le potentiel donné par une ligne représente indéfini et l'exemple le plus simple de potentiel logarithmique :

$$\psi(x,z) = 2\pi G\rho \log(1/|r|) = -2\pi G\rho \log(|r|) \tag{2.2.9}$$

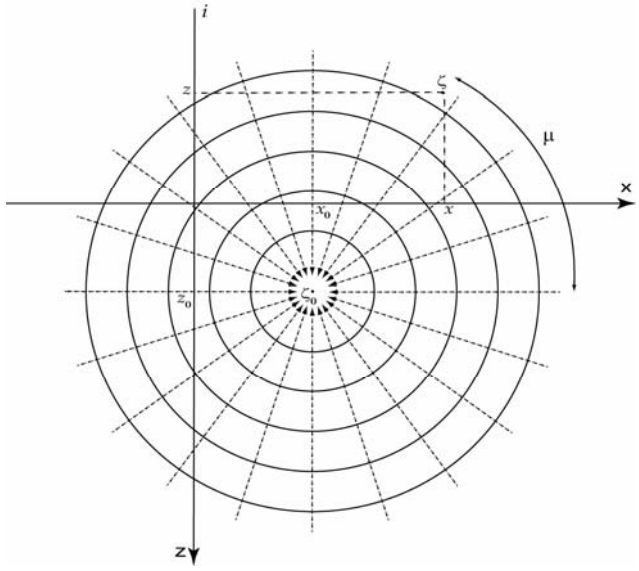


Figure 1. La relation entre les surfaces du potentiel newtonien (lignes circulaires) et les lignes de flux (lignes radiales) dans l'espace 2-D.

Il est évident que cette fonction se définit, dans le plan normal à la direction de la ligne des masses, par des courbes équipotentielles circulaires centrées sur la position de la source et perpendiculaire à tout point de l'espace aux lignes du flux du champ $\vartheta(x,z)$ gravimétrique.

Les fonctions conjuguées sont à la fois harmoniques et orthogonales (voir section 2.2). Elles peuvent alors être utilisées pour représenter les fonctions de flux ϑ et de potentiel ψ, vérifiant ces deux conditions, par une seule fonction à variable complexe $\psi_c(\zeta)$

$$\psi_c(\zeta) = \psi(x,z) + i\vartheta(x,z) = -2\pi G\rho\left[2\log(r) - i\tan^{-1}\left[(z_0 - z)/(x_0 - x)\right]\right]$$

$$= -2\pi G\rho\log(r\exp(-i\theta)) = -2\pi G\rho\log(\zeta - \zeta_0) \qquad (2.2.10)$$

où, $\zeta = x + iz$ et $\zeta_0 = x_0 + iz_0$ sont respectivement les coordonnées complexes de la position du point de mesure et de la position de la ligne de masses (figure 1). La fonction $\psi_c(\zeta)$ est appelée *le potentiel complexe newtonien*. Elle est l'équivalent holomorphe du potentiel newtonien ψ au sens ordinaire. Notons que ψ est ϑ sont interchangeables dans la formule 2.2.10.

En dérivant ψ_c successivement N fois par rapport à la variable complexe ζ nous générons une suite des fonctions holomorphes dont l'expression générale est de la forme

$$\mathrm{f}_c^{\mathrm{N}}(\zeta) = OP^N(\zeta, q_1, \ldots, q_{\mathrm{N}}) \bullet \psi_c(\zeta) \qquad (2.2.11)$$

où $OP^N(\zeta, q_1, \ldots, q_{\mathrm{N}}) = OP(\zeta, q_1) \bullet \cdots \bullet OP(\zeta, q_{\mathrm{N}})$ et $OP(\zeta, q_n) = q_n \cdot \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}$

Avec $(\alpha_n, \beta_n)^{1/2} = 1$, $q_n = \alpha_n + i\beta_n$ est un nombre complexe définissant une direction dans le plan-ζ, équivalent à un vecteur unitaire dans un espace vectoriel à deux dimensions.

2.2.2 Potentiel magnétique complexe

Par l'application de l'opérateur 2.2.11 pour des directions q particulières, nous pouvons établir l'extension holomorphe des signaux gravimétrique et magnétique de la ligne. Ainsi, considérons dans un premier temps la dérivée de premier ordre $\mathrm{N} = \mathrm{I}$ du potentiel complexe ψ_c prise dans la direction $q = 1$, par l'application de l'opérateur 2.2.11 et les conditions de Cauchy-Riemann 2.2.1, nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{f}_c^1(\zeta) &= OP(1 + i0)\psi_c(\zeta) = g_c(\zeta) \\ &= \partial_x\psi(x,z) - i\partial_z\psi(x,z) = 2\pi G\rho\mathrm{P}(x,z) - i2\pi G\rho\mathrm{P}_{co}(x,z) \end{aligned} \qquad (2.2.12)$$

Cette fonction complexe représente l'extension holomorphe de la composante verticale du champ gravimétrique de la ligne de masses (le noyau de Poisson P multiplié par la constante $2\pi G\rho$). Sa partie réelle est la composante verticale elle-même et sa partie imaginaire est l'opposée de la composante horizontale du champ gravimétrique (le noyau de Poisson conjugué P_{co} multiplié par la constante $2\pi G\rho$). Le noyau de Poisson et son conjugué se définissent dans le domaine spatial [Stein, 1993] et dans l'espace de Fourier (voir annexe A3) respectivement par

$$\mathrm{P}(x,z)=\frac{z_0-z}{\pi[x^2+(z_0-z)^2]}\overset{\text{F.T.}}{\Leftrightarrow}\widetilde{\mathrm{P}}(k)=\exp\{-(z_0-z)|k|\} \tag{2.2.13}$$

$$\mathrm{P}_{co}(x,z)=\frac{x}{\pi[x^2+(z_0-z)^2]}\overset{\text{F.T.}}{\Leftrightarrow}\widetilde{\mathrm{P}}_{co}(k)=i\,\mathrm{sgn}(k)\exp\{-(z_0-z)|k|\}.$$

Dans le quatrième chapitre la relation 2.2.12 établie entre le noyau de Poisson et les composantes du champ gravimétrique complexe sera la base fondamentale pour évaluer l'expression analytique de l'opérateur de la transformée de Riesz (qui forme la généralisation de la transformée de Hilbert à deux dimensions).

Si on remplace maintenant la distribution des masses le long de la ligne infinie par une distribution de dipôles magnétiques, la ligne produit un champ caractérisé par son potentiel magnétique. Par opposition au potentiel gravimétrique dans lequel la source est quantifiée par la quantité scalaire qu'est la densité de masse, dans le cas du potentiel magnétique l'aimantation intervient comme une quantité vectorielle caractérisée par une intensité m et une direction $\vec{m}_3(m_x,m_y,m_z)$. Les composantes de la direction $\vec{m}_3$ sont déterminées dans le repère $0xyz$, défini au paragraphe 2.2.1, par

$$\begin{aligned} m_x &= \cos I_m \cos(D_m) \\ m_y &= \cos I_m \sin(D_m) \\ m_z &= \sin I_m \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

Les angles I_m et D_m sont respectivement l'inclinaison et la déclinaison de l'aimantation. De manière à donner du potentiel magnétique complexe une forme simple à manipuler dans la suite, j'introduis les deux concepts suivants :

I- Relation de Poisson : Pour une structure magnétique à 2-D caractérisée par une distribution d'aimantation uniforme, on peut considérer le potentiel magnétique complexe dû à cette structure comme la dérivée du potentiel gravimétrique complexe prise dans la direction de la projection $\vec{m}_2(m_x,m_z)$ du vecteur d'aimantation, soit

$$U_c(\zeta)=U(x,z)+iU_{co}(x,z)=-\frac{C_m}{\rho G}(m_x+im_z)\cdot\frac{\mathrm{d}\psi_c(\zeta)}{\mathrm{d}(\zeta)} \tag{2.2.15}$$

où $U_c(\zeta)$ est le potentiel magnétique complexe. Le facteur C_m est une constante de proportionnalité analogue à la constante gravitationnelle G du champ de potentiel gravimétrique.

En effet une structure magnétique 2D d'aimantation uniforme peut se représenter par deux corps de masses C_+ et C_- décalés dans le plan $0xz$ par une translation $\vec{m}$. Le potentiel

gravimétrique Ψ_+ produit en P par le corps C_- est égal au potentiel gravimétrique ψ_- produit en P' par le même corps placé en C_+ (figure 2). Le potentiel totale au point P sera

$$U(x,z) = \psi_+(\vec{r}) - \psi_-(\vec{r}+\vec{m}) = 2\pi Q \int_{R^2} \rho(x_0, z_0)[\log|\vec{r} - \vec{r}_0| + \log|\vec{r} + \vec{m} - \vec{r}_0|]dx_0 dz_0 \qquad (2.2.16)$$

Par un développement limité de Taylor sur l'équation 2.2.16, en remplaçant $C_m/\rho G$ par Q, on aura

$$\begin{aligned} U(x,z) &= -2\pi Q \int_{R^2} \rho(x_0, z_0)\left[m_x \partial_x \log|\vec{r} - \vec{r}_0| + m_z \partial_z \log|\vec{r} - \vec{r}_0|\right]dx_0 dz_0 \\ &= -2\pi Q\left\{ m_x \partial_x \int_{R^2} \rho \log|\vec{r} - \vec{r}_0| dx_0 dz_0 + m_z \partial_z \int_{R^2} \rho \log|\vec{r} - \vec{r}_0| dx_0 dz_0 \right\} \\ &= -m_x \partial_x \psi(x,z) - m_z \partial_z \psi(x,z) = -\vec{m}_2 \nabla_2 \psi(x,z). \end{aligned}$$

De même on peut trouver $U_{co}(x,z) = -m_x \partial_x \vartheta(x,z) - m_z \partial_z \vartheta(x,z)$.

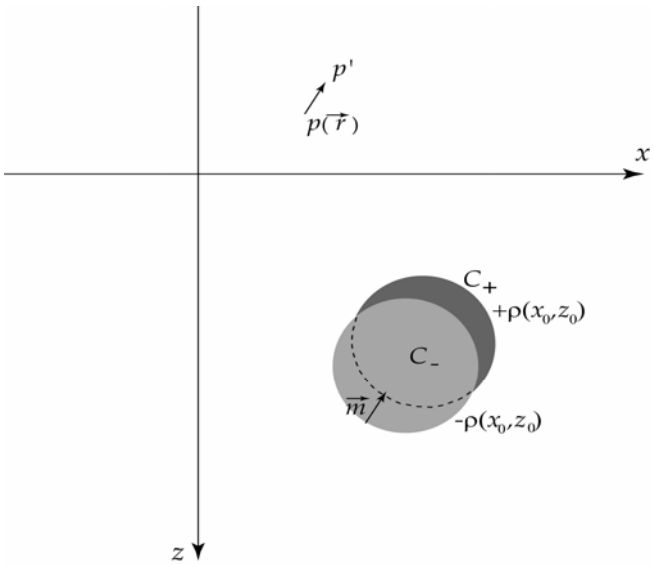


Figure 2. Relation de Poisson entre le champ gravimétrique complexe et le potentiel magnétique complexe.

II- Concept d'inclinaison apparente : Pour une source magnétique 2-D dont le potentiel magnétique est entièrement décrit dans un plan d'observation normal à l'orientation de la source, seule la projection $\vec{m}_2(m_x, m_z)$ de la direction d'aimantation $\vec{m}_3$ sur le plan d'observation-2D intervient dans l'expression du potentiel magnétique. La définition de la

composante horizontale m_x de cette projection diffère de sa définition dans 2.2.14 par l'intervention de l'azimut α du plan normal d'observation par rapport au Nord géographique

$$m_x = \cos I_m \cos(D_m - \alpha) .$$

En identifiant le plan complexe au plan d'observation $0xz$, nous écrivons la projection $\vec{m}_2(m_x, m_z)$ sous forme du nombre complexe

$$\begin{aligned} m_2 &= m_x + im_z = \left(m_x^2 + m_z^2\right)^{1/2} \exp\left\{i \tan^{-1}\left(m_z / m_x\right)\right\} \\ &= \frac{\left|\sin I_m\right|}{\left|\sin I'_m\right|} \exp\left(iI'_m\right). \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

L'angle I'_m est appelé l'inclinaison apparente de l'aimantation [Schouten, 1971], et se définit dans le plan d'observation par l'angle formé entre l'horizontale et la projection $\vec{m}_2(m_x, m_z)$ du vecteur d'aimantation (figure 3), soit donc analytiquement par l'expression

$$I'_m = \tan^{-1}\left\{\tan\left(I_m\right) / \cos\left(D_m - \alpha\right)\right\} \tag{2.2.18}$$

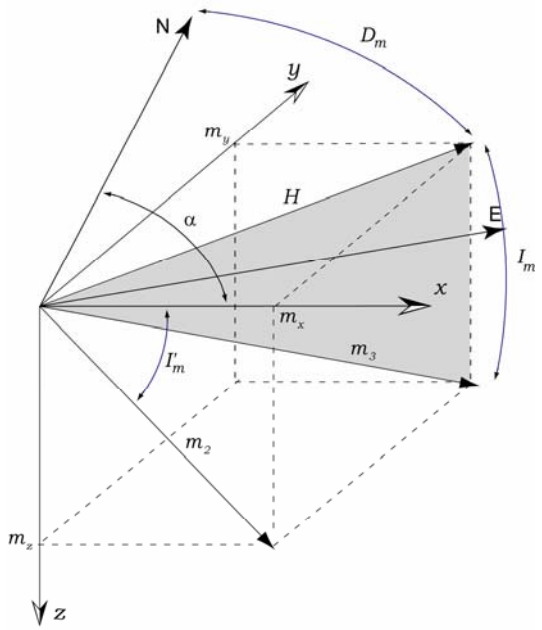


Figure 3. Illustration du vecteur magnétique d'aimantation et de son inclinaison apparente dans un repère cartisien-3D.

Après avoir donné la définition de la relation de Poisson dans le plan complexe et rappelé le concept d'inclinaison apparente d'aimantation, nous revenons de nouveau sur l'évaluation du

potentiel magnétique complexe de la ligne source. En effet, par l'application de 2.2.15 et 2.2.17 au potentiel newtonien complexe 2.2.10 de la ligne massique on aura l'expression suivante du potentiel magnétique complexe associé à une ligne de dipôles de densité proportionnelle à $G\vec{m}_2$:

$$U_c(\zeta) = OP(\zeta, m_2)\psi_c(\zeta) = U(x,z) + iU_{co}(x,z)$$

$$\begin{aligned} U(x,z) &= -2\pi C_m \frac{|\sin I_m|}{|\sin I'_m|}\left(P_{co}(x,z)\cos I'_m + P(x,z)\sin I'_m\right) \\ U_{co}(x,z) &= -2\pi C_m \frac{|\sin I_m|}{|\sin I'_m|}\left(P_{co}(x,z)\sin I'_m - P(x,z)\cos I'_m\right) \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Il est constitué du potentiel magnétique ordinaire U comme partie réelle et de la quadrature de phase U_{co} de ce dernier comme partie imaginaire.

2.2.3 Champ magnétique complexe

Regardons maintenant l'extension holomorphe du champ magnétique total de la ligne de dipôles. En effet, dans un levé magnétique on mesure le plus souvent l'intensité du champ magnétique total. Le champ total $T(x,z)$ produit par la structure magnétique 2D est assimilé à la projection du vecteur champ produit par la structure sur la direction du champ magnétique régional, supposé uniforme dans C. Cela suppose que l'intensité de l'anomalie est petite par rapport à l'intensité du champ magnétique régional. Le champ d'anomalie peut se définir comme la dérivée directionnelle du potentiel magnétique complexe $U_c(\zeta)$ calculée dans la direction $\vec{f}_2(f_x, f_z)$ ou $f_2 = f_x + if_z$. $\vec{f}_2$ est la projection du vecteur directeur du champ magnétique régional $\vec{f}_3(f_x, f_y, f_z)$ sur le plan d'observation. Les composantes des vecteurs $\vec{f}_3$ et $\vec{f}_2$ ont mêmes définitions que les composantes du vecteur d'aimantation $\vec{m}_3$, et se déduisent de l'ensemble des égalités 2.2.14 en remplaçant l'inclinaison I_m et la déclinaison D_m de l'aimantation par l'inclinaison I_f et la déclinaison D_f du champ magnétique. Dans le plan complexe nous écrivons la projection $\vec{f}_2(f_x, f_z)$ sous la forme :

$$\begin{aligned} f_2 = f_x + if_z &= \left(f_x^2 + f_z^2\right)^{1/2}\exp\left\{i\tan^{-1}(f_z/f_x)\right\} = \frac{|\sin I_f|}{|\sin I'_f|}\exp\left(iI'_f\right) \\ I'_f &= \tan^{-1}\left\{\tan(I_f)/\cos(D_f - \alpha)\right\} \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

De manière similaire au cas du vecteur aimantation, nous définissons l'angle I'_f comme *l'inclinaison apparente du champ magnétique régional*. Par la dérivation du potentiel magnétique complexe dans la direction f_2 *le champ magnétique complexe* $T_c(\zeta)$ de la ligne s'écrit

$$T_c(\zeta) = \text{-}OP(\zeta, f_2) \bullet OP(\zeta, m_2)\psi_c(\zeta) = T(x,z) + iT_{co}(x,z) \qquad (2.2.21)$$

Les parties réelle et imaginaire sont respectivement le signal magnétique de la ligne au sens ordinaire et sa quadrature de phase ; soit

$$T(x,z) = 2\pi C_m \frac{\left|\sin I_m \sin I_f\right|}{\left|\sin I'_m \sin I'_f\right|}\Big\{\left(\cos I'_m \cos I'_f \partial_x - \sin I'_m \sin I'_f \partial_z\right)\mathrm{P}_{co}(x,z) + \cdots \qquad (2.2.22)$$
$$\cdots\left(\sin I'_m \cos I'_f \partial_x + \cos I'_m \sin I'_f \partial_z\right)\mathrm{P}(x,z)\Big\}$$

$$T_{co}(x,z) = 2\pi C_m \frac{\left|\sin I_m \sin I_f\right|}{\left|\sin I'_m \sin I'_f\right|}\Big\{\left(\cos I'_m \sin I'_f \partial_x - \sin I'_m \cos I'_f \partial_z\right)\mathrm{P}_{co}(x,z) + \cdots \qquad (2.2.23)$$
$$\cdots\left(\sin I'_m \sin I'_f \partial_x - \cos I'_m \cos I'_f \partial_z\right)\mathrm{P}(x,z)\Big\}$$

Dans l'interprétation des prospections magnétiques, pour faciliter l'estimation des paramètres de la source magnétique, nous préférons souvent procéder à l'analyse magnétique sur une dérivée d'ordre L de l'anomalie $T(x,z)$. L'extension holomorphe $T_c^{\mathrm{L}}(\zeta)$ de cette dérivée s'obtient en dérivant L fois la fonction holomorphe $T_c(\zeta)$ par rapport à la variable ζ

$$T_c^{\mathrm{L}}(\zeta) = \text{-}OP^{\mathrm{L}}(\zeta, q_l, \ldots, q_{\mathrm{L}}) \bullet OP(\zeta, f_2) \bullet OP(\zeta, m_2)\psi_c(\zeta) = OP(\zeta, q_l, \ldots, q_{\mathrm{L}})T_c(\zeta) \quad (2.2.24)$$

ou $q_l = \alpha_l + i\beta_l$ est la direction de dérivation. La partie réelle de $T_c^{\mathrm{L}}(\zeta)$ est la dérivée directionnelle ordinaire d'ordre L du signal $T(x,z)$ et la partie imaginaire est la quadrature en phase de cette dérivée. En pratique et pour des raisons de simplicité, la dérivation du signal magnétique T s'effectue dans une des directions parallèles aux axes du système cartésien de référence. Ainsi si la dérivation est parallèle à l'axe $0x$ (dérivée horizontale d'ordre L), nous aurions toujours $q_l = 1$ et par l'application des conditions de Cauchy-Riemann l'expression 2.2.24 se réduit à la forme

$$T_c^{\mathrm{L}}(\zeta) = OP^{\mathrm{L}}(1+0i)T_c(\zeta) = \partial_x^{\mathrm{L-1}}\{\partial_x T(x,z) - \mathrm{i}\partial_z T(x,z)\} \qquad (2.2.25)$$

La fonction complexe 2.2.25 représente l'extension holomorphe de la dérivée horizontale d'ordre L de l'anomalie T de la ligne.

De même, si la dérivation est parallèle à l'axe $0z$ (dérivée verticale), nous aurions toujours $q_l = i$ et l'expression 2.2.24 devient de la forme

$$T_c^{\mathrm{L}}(\zeta) = OP^{\mathrm{L}}(0+1i)T_c(\zeta) = \partial_z^{\mathrm{L-1}}\{\partial_z T(x,z) + i\partial_x T(x,z)\} \qquad (2.2.26)$$

La fonction complexe 2.2.26 représente l'extension holomorphe de la dérivée verticale d'ordre L de l'anomalie T.

2.3 Construction du signal analytique et ses propriétés

Par définition, le signal analytique $f_A(x)$ associé à un signal réel $f(x) \in L(R)$ s'obtient en ajoutant à $f(x)$ une partie imaginaire égale à l'opposé de la transformée de Hilbert de $f(x)$ [Lavrentiev et al. 1972, Roddier, 1978]. Le signal analytique peut être présenté par deux méthodes : soit comme une fonction vectorielle $f_A = f\bar{e}_x - H_1(f)\bar{e}_z$, soit , le plus souvent, comme une fonction à valeur complexe $f_A = f - iH_1(f)$ (figure 4).

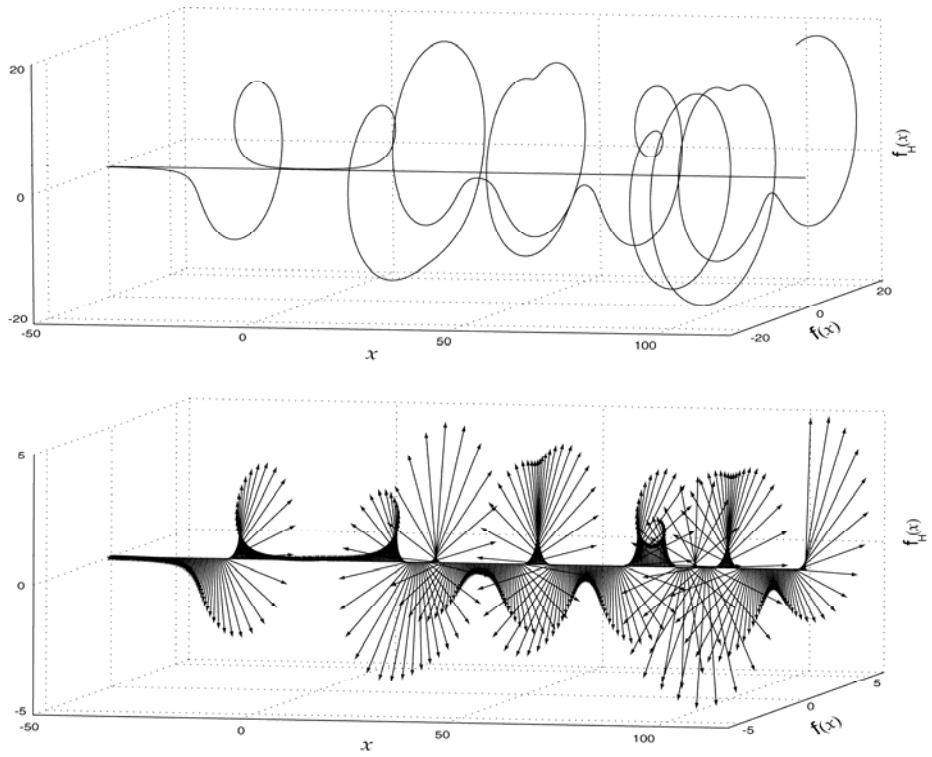


Figure 4. Représentation du signal analytique par une fonction à valeur complexe (en haut) ou par une fonction à valeur vectorielle (en bas).

A la section 2.2 nous avons déduit que, sur la frontière $z = a$ du domaine Ω, la partie imaginaire d'une fonction holomorphe $f_c(\zeta)$ est la transformée de Hilbert de sa partie réelle. Concernant la suite des fonctions holomorphes définies par la formule 2.2.11, cette relation est simple à démontrer. Par l'application des conditions de Cauchy-Riemann, on peut réécrire l'action de l'opérateur $OP(\zeta, q)$ sur une fonction holomorphe $f_c(\zeta)$ sous la forme

$$OP(q)\mathrm{f}_c(\zeta) = (\alpha + i\beta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}\mathrm{f}_c(\zeta) = \left(\alpha\partial_x \mathrm{g} - \beta\partial_x \mathrm{f}\right) + i\left(\alpha\partial_x \mathrm{f} + \beta\partial_x \mathrm{g}\right)$$
$$= \left(\alpha\partial_x \mathrm{g} + \beta\partial_z \mathrm{g}\right) + i\left(\beta\partial_x \mathrm{g} - \alpha\partial_z \mathrm{g}\right) \qquad (2.3.1)$$

Plaçons-nous ensuite dans l'espace fréquentiel et considérons la transformée de Fourier à 1D de la relation 2.3.1 sur la frontière $z = constante$ du domaine Ω

$$\mathsf{F}_x\{OP(\zeta,q)\mathrm{f}_c(\zeta)\}(k) = \left(i\alpha k + \beta|k|\right)\tilde{\mathrm{g}}(k) + i\left(i\beta k - \alpha|k|\right)\tilde{\mathrm{g}}(k)$$
$$= \left(i\alpha k + \beta|k|\right)\tilde{\mathrm{g}}(k) + i\left(i\alpha k + \beta|k|\right)\tilde{\mathrm{g}}(k)\tilde{\mathrm{h}}(k) \qquad (2.3.2)$$
$$= -\left(i\beta k - \alpha|k|\right)\tilde{\mathrm{g}}(k)\tilde{\mathrm{h}}(k) + i\left(i\beta k - \alpha|k|\right)\tilde{\mathrm{g}}(k)$$

où $\tilde{\mathrm{h}}(k)$ est la fonction de transfert du noyau de Hilbert (voir section 2.1).

Cette dernière égalité 2.3.2 confirme le résultat 2.2.4. Plus précisément, elle indique que, dans la condition limite $z = constante$, l'application de l'opérateur de dérivation $OP(\zeta,q)$ engendre des fonctions holomorphes dont les parties réelle et imaginaire forment un paire de transformées de Hilbert. La partie imaginaire est la transformée de Hilbert de la partie réelle et la partie réelle est l'opposée de la transformée de Hilbert de la partie imaginaire

$$\Im\left[OP(\zeta,q)\mathrm{f}_c(\zeta)\right] = \mathsf{H}_1\{\Re\left[OP(\zeta,q)\mathrm{f}_c(\zeta)\right]\}$$
$$\Re\left[OP(\zeta,q)\mathrm{f}_c(\zeta)\right] = -\mathsf{H}_1\{\Im\left[OP(\zeta,q)\mathrm{f}_c(\zeta)\right]\}$$

où $\Re$ et $\Im$ indiquent respectivement la partie réelle et la partie imaginaire.

Pour la suite 2.2.11, le signal analytique $\mathrm{f}_\mathrm{A}^\mathrm{N}$ est donc la transposée de la limite, quand z tend vers a, de la fonction holomorphe f_c^N. Inversement, f_c^N est le prolongement analytique, dans le domaine Ω, de la transposée de $\mathrm{f}_\mathrm{A}^\mathrm{N}$. Dans la section 2.2, nous avons évalué l'extension holomorphe de plusieurs fonctions en magnétisme et en gravimétrie. La construction des signaux analytiques associés respectivement à ces fonctions peut s'effectuer par l'application de la relation décrite ci-dessus entre la fonction holomorphe et le signal analytique.

Dans l'interprétation des prospections magnétiques, on s'intéresse souvent aux signaux analytique $S^\mathrm{L}(x)$ associés à une dérivée horizontale (ou verticale) d'ordre L de l'anomalie T mesurée. L'importance de ce choix a deux avantages : le premier est l'amélioration de la résolution de paramètres de la source ; le deuxième est la facilité de la construction des signaux analytiques comme combinaison entre les dérivées horizontale et verticale du signal magnétique $T^{\mathrm{L}-1}$. Concernant ce dernier avantage, la fonction holomorphe 2.3.2 montre que la dérivée horizontale et la dérivée verticale d'un signal magnétique $T^{\mathrm{L}-1}$ (la dérivée horizontale d'ordre L-1 de l'anomalie T) forment, à la limite $z = constante$, une paire de la transformée de Hilbert, soit

$$\partial_z T^{L-1}(x) = \mathsf{H}_1\{\partial_x T^{L-1}(x)\} \text{ et } \partial_x T^{L-1}(x) = -\mathsf{H}_1\{\partial_z T^{L-1}(x)\} \tag{2.3.3}$$

Le signal analytique associé à un signal magnétique se construit donc directement par une combinaison linéaire dans le plan complexe entre la dérivée horizontale première de T^{L-1} comme partie réelle et la dérivée verticale première de la même fonction comme partie imaginaire.

Pour identifier les propriétés générales du signal analytique, nous-nous plaçons dans l'espace fréquentiel. En tenant compte de la définition du noyau de Poisson et de son conjugué donnée par 2.2.13 ; la transformée de Fourier de l'anomalie magnétique donnée par l'équation 2.2.22 peut s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} &\mathsf{F}_x\{T(x)\}(k) = A(k)|k|\exp\{-ikx_0 - (z_0 - z)|k|\}.\exp\{i\pi\} \\ &\text{où } A(k) = 2\pi\, C_m \frac{|\sin I_m \sin I_f|}{|\sin I'_m \sin I'_f|}\exp\{-i(I'_m + I'_f)\,\mathrm{sgn}(k)\} \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

De la relation 2.3.3 entre les dérivées horizontale et verticale, on déduit que la transformée de Fourier du signal analytique S^L, associé au signal T^L, peut s'écrire sous la forme

$$\begin{aligned} \mathsf{F}_x\{S^L(x)\}(k) &= \mathsf{F}_x\{\partial_x^L T(x)\}(k) + \mathsf{F}_x\{\partial_z \partial_x^{L-1} T(x)\}(k) = \{ik + i|k|\}(ik)^{L-1} \cdot \widetilde{T}(k) \\ &= \begin{cases} 2A\exp[i\pi(2+L)/2].\{(k)^{L+1}\exp[-k(z_0 - z)]\}, & \text{si } k > 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

où $A = 2\pi C_m \dfrac{|\sin I_m \sin I_f|}{|\sin I'_m \sin I'_f|}\exp\{-i(I'_m + I'_f)\}$.

Cette dernière formule indique que la transformée de Fourier du signal analytique 1D $\widetilde{S}^L(k)$ dérive de la transformée de Fourier de sa partie réelle $\widetilde{T}^L(k)$ par la suppression des fréquences négatives et la multiplication par deux de la transformée pour les composantes positives. Deux conséquences se déduisent de cette relation : la première est que le signal analytique est une fonction progressive (supportée seulement par les fréquences positives $\mathrm{supp}\,\widetilde{g}_A \subseteq \mathrm{R}_+$) et la deuxième est que le signal analytique est une version complexe avec la même information que sa partie réelle $T^L(x)$. En effet, la suppression des fréquences négatives du signal réel ne provoquent aucune perte d'information car toute fonction réelle $\mathrm{f}(x)$ a une transformée de Fourier $\widetilde{\mathrm{f}}(k)$ hermitienne, dont la partie réelle est paire et la partie imaginaire impaire. $\widetilde{\mathrm{f}}(k)$ est donc entièrement déterminé par sa connaissance pour les fréquences positives. Les formules 2.2.4 et 2.3.5 sont deux manières d'exprimer, l'une dans le domaine spatiale, l'autre dans le domaine fréquentiel, que le signal analytique est entièrement

déterminé par sa partie réelle qui représente le signal physique (la dérivée horizontale L de l'anomalie magnétique dans le cas présent).

On gagne cependant une information dont nous montrons par la suite toute la pertinence pour l'interprétation des anomalies. En effet, dans le domaine spatial, $S^{\mathrm{L}}(x)$ est une fonction complexe caractérisée par deux éléments, son amplitude (dite locale car fonction de x) et sa phase (dite locale pour la même raison), conformément à la représentation d'Euler des nombres complexes :

$$S^{\mathrm{L}}(x) = |S^{\mathrm{L}}(x)| \exp(i\varphi^{\mathrm{L}}(x))$$

La construction du signal analytique en termes d'amplitude locale $|S^{\mathrm{L}}|$ et de phase locale φ^{L} correspond à une dissociation de l'information contenue dans le signal original T^{L} et se révèle être un outil extrêmement utile, permettant d'accéder à un grand nombre de paramètres de la source magnétique causative, comme nous l'illustrerons dans les sections suivantes.

A ce stade, nous précisons qu'en vertu du principe de superposition et de la linéarité de la transformée de Hilbert (voir section 2.1), tout le développement effectué précédemment dans le cas d'une ligne source peut être généralisé à toute anomalie magnétique (ou gravimétrique).

Pour explorer les propriétés et les paramètres de la source que l'on peut identifier de à partir $|S^{\mathrm{L}}|$ et de φ^{L}, il est impératif de formuler explicitement les expressions spatiales générales de ces deux termes. Dans le cas de la ligne source, les expressions spatiales de $|S^{\mathrm{L}}|$ et φ^{L} associées à la dérivée d'ordre L de l'anomalie magnétique de la ligne se calculent soit par la dérivation directe de l'anomalie complexe $T_c^{\mathrm{L}}(\zeta)$ soit par l'application de la transformation de Fourier inverse à 1D du spectre 2.3.5. Pour cette dernière méthode de calcul, nous avons effectué l'inversion en utilisant la relation de récurrence A2.7 de l'annexe A2. L'amplitude et la phase locales sont respectivement

$$|S^{\mathrm{L}}(x)| = 4mC_m \frac{|\sin I_m \sin I_f|}{|\sin I'_m \sin I'_f|} \frac{(\mathrm{L}+1)!}{[(z_0 - z)^2 + (x - x_0)^2]^{(\mathrm{L}+2)/2}} \tag{2.3.6}$$

$$\varphi^{\mathrm{L}}(x) = -I_0 - I_r + \pi(2+\mathrm{L})/2 + 3\tan^{-1}[(x - x_0)/(z_0 - z)] \tag{2.3.7}$$

Comme nous l'avons souligné plus haut, le signal analytique S^{L} associé au signal magnétique T^{L} est une représentation différente de la même information contenue dans T^{L} original. La représentation eulérienne de S^{L} en terme d'amplitude locale et de phase locale correspondent en tout point du domaine de définition de T^{L} à une décomposition orthogonale de l'information contenue dans T^{L}. L'orthogonalité vient du fait que le système de coordonnées polaires sous jacente à la représentation eulérienne de S^{L} est un système orthogonal. Les deux composantes $|S^{\mathrm{L}}|$ et φ^{L} représentent alors deux informations indépendantes sur le signal

original et peuvent être analysées individuellement sans diminuer la qualité de l'information extraite.

Considérons dans un premier temps l'amplitude locale du signal (équation 2.3.6), et les informations que nous pouvons extraire de cette fonction sur la ligne de dipôles source de l'anomalie magnétique. La carré de l'amplitude locale peut être interprété comme la densité de l'énergie contenue dans le signal T^{L}. La forme de cette fonction varie alors avec la variation d'énergie du signal « la dynamique locale du signal » mais elle reste invariante par rapport au changement de son allure « la structure du signal » imposée par la variation de la direction des vecteurs magnétiques. La formule 2.3.6 montre que l'amplitude est représentée par une fonction positive et symétrique autour d'une valeur d'énergie maximale localisée à la plombe de la position x_0 de la ligne source ; la détection de la position de cette valeur est donc une détermination de la position horizontale de la source. Le maximum est d'autant plus marqué que l'ordre de dérivation est élevé.

Une fois qu'on a localisé la valeur maximale de l'énergie et sa position, on peut étudier la variation de l'amplitude locale par rapport à la valeur maximale de l'énergie sous la forme analytique :

$$\mathrm{g}(x) = \mathrm{sgn}(x - x_0)\left\{ \left[|S_l^{\mathrm{L}}(x = x_0)| / |S_l^{\mathrm{L}}(x)| \right]^{2/(\mathrm{L}+2)} - 1 \right\}^{1/2} \qquad (2.3.8)$$

Dans le cas simple de l'anomalie d'une ligne de dipôles identiques, $\mathrm{g}(x)$ est égale à $(x - x_0)/|z - z_0|$. Donc la représentation de $\mathrm{g}(x)$ en fonction de $(x - x_0)$ est une droite de pente $1/|z - z_0|$ d'où l'on peut déterminer la profondeur de la source z_0 sachant que z est donné.

Concernant la phase du signal analytique, cette fonction est égale à l'argument du signal analytique $\varphi^{\mathrm{L}}(x) = \arg\{S^{\mathrm{L}}(x)\}$ et son expression est donnée par l'équation 2.3.7. La phase locale représente en général une description spatiale, dans le voisinage d'une position donnée, de la forme du signal original. La relation entre φ^1 et l'allure du signal magnétique est illustrée par la figure 5 pour un signal magnétique de premier ordre T^1 associé à la ligne source. L'angle φ indique la valeur de la phase locale prise à la position de la ligne. L'allure du signal T^1 est indiquée pour les valeurs 0, $\pi/2$, π et $-\pi/2$ de $\varphi^1(x = x_0)$, ainsi

- Si $\varphi(x = x_0) = 2\pi k$, le signal est symétrique et caractérisé par une maxima positif ;
- Si $\varphi(x = x_0) = \pi + 2\pi k$, le signal est symétrique et caractérisé par une maxima négatif ;
- Si $\varphi(x = x_0) = \pi/2 + 2\pi k$, le signal est anti-symétrique avec une transition des valeurs élevées aux valeurs en basses ;
- Si $\varphi(x = x_0) = -\pi/2 + 2\pi k$, le signal est anti-symétrique avec une transition des valeurs en basses aux valeurs élevées ;
- Si $\varphi(x = x_0)$ est différente des valeurs particulières précédentes, le signal est asymétrique, avec un degré dépendant de la valeur de $\varphi(x = x_0)$.

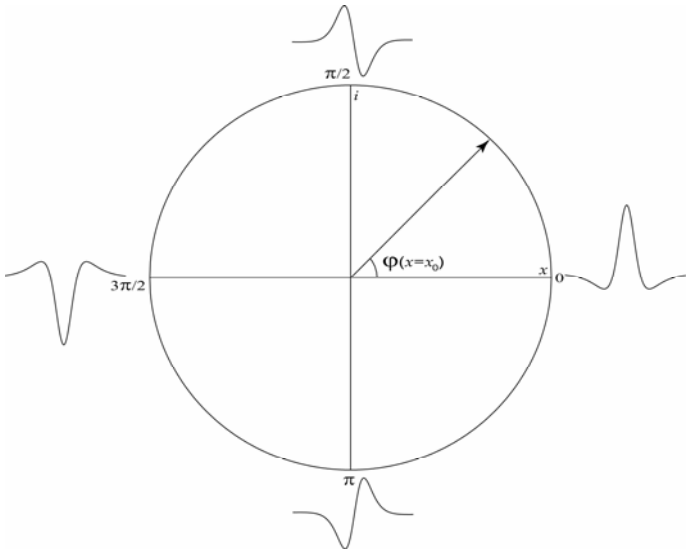


Figure 5. La relation entre la phase locale et la structure du signal magnétique-L d'une source singulière.

Contrairement à la fonction symétrique de l'amplitude locale, la phase locale du signal présente une fonction anti-symétrique de la variable de position x et son centre d'anti-symétrie est localisé à l'aplomb de la source et représente un autre moyen pour déterminer sa position horizontale. Pour détecter le centre de l'anti-symétrie de $\varphi(x)$, on peut calculer la fréquence locale du signal magnétique T^{L} originale ; cette fréquence correspond à la dérivée première de $\varphi^{\mathrm{L}}(x)$ par rapport à la variable x (figure 6). Nous obtenons ainsi une fonction symétrique positive dont la valeur maximale correspond au centre de l'anti-symétrie de la phase. Un autre paramètre peut être extrait de la fonction de phase locale ; il s'agit de l'inclinaison apparente de l'aimantation I'_m de la ligne. En fait, à l'abscisse du centre d'anti-symétrie, la phase locale est indépendante des paramètres géométriques et est donnée par

$$\varphi_l^{\mathrm{L}}(x = x_0) = -I_m - I_f + \pi(2 + \mathrm{L})/2 \,. \qquad (2.3.9)$$

La valeur de l'inclinaison apparente du champ magnétique I'_f est facile à calculer à partir d'un modèle régional du champ magnétique. Ainsi la formule 2.3.9 permet alors d'évaluer l'inclinaison apparente I'_m de l'aimantation.

Une fois que l'on a déterminé le centre de l'anti-symétrie et la valeur de la phase dans cette position, on peut calculer la fonction $\mathrm{h}(x)$ définie par :

$$\mathrm{h}(x) = \tan^{-1}\left\{\left(\varphi_x^{\mathrm{L}}(x) - \varphi_x^{\mathrm{L}}(x = x_0)\right)/3L\right\} \qquad (2.3.10)$$

Dans le cas simple de l'anomalie d'une ligne de dipôles, h est égal à $(x_0 - x)/(z - z_0)$. Donc la représentation de $\mathrm{h}(x)$ en fonction de $(x_0 - x)$ est une droite de pente $1/|z - z_0|$ d'où l'on détermine z_0 , sachant que z est donnée.

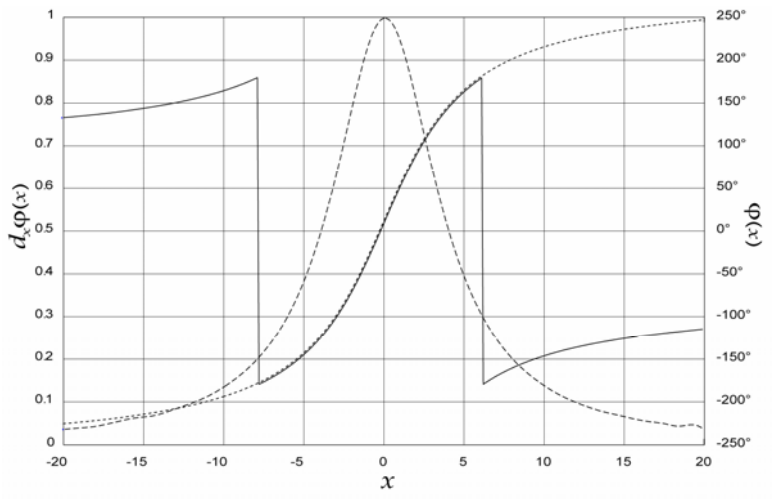


Figure 6. Représentation de la phase locale d'une source magnétique singulière. La phase locale calculée par (ligne solide). La phase locale corrigée (ligne pointée) et la fréquence locale (ligne hachurée).

Numériquement la phase locale du signal analytique est calculée dans l'intervalle $]-\pi\ +\pi[$. Or la phase de la dérivée T^{L} d'ordre L du signal magnétique sort de cet intervalle, ce qui provoque des discontinuités dans sa détermination. On supprime les discontinuités en définissant la phase par continuité dans un intervalle non borné (figure 6).

L'exemple synthétique illustré par la figure 7 représente le signal analytique de premier ordre L=1 (colonne à gauche) et de deuxième ordre (colonne à droite) du champ magnétique d'une ligne de dipôle infinie. La ligne est placée à l'origine de du repère de référence à 3 km de profondeur, avec une inclinaison apparente d'aimantation $I'_m = -43°$ et une inclinaison apparente du champ magnétique ambiant $I'_f = -56°$. La première rangée de la figure montre l'allure des deux signaux magnétiques (la dérivée horizontale de premier et de second ordre respectivement) ; la deuxième rangée montre les variations des amplitudes locales et des phases locales. Les abscisses des valeurs maximales de l'amplitude et du centre d'anti-symétrie de la phase se superposent pour les deux ordres L=1 et L=2, et (un mot n'est pas compris) avec x_0. L'inclinaison apparente de l'aimantation est calculée par la formule 2.3.9 et indiquée au-dessus des graphes. Elle coïncide avec la valeur théorique. La troisième rangée est une représentation de $g(x)$ en fonction de $x_0 - x$ (équation 2.3.8) (mot n'est pas compris) la pente de cette droite donne l'estimation de la profondeur de la ligne indiquée au-dessus des graphes. Là encore elle coïncide avec la valeur théorique. La dernière rangée est la représentation de la fonction $h(x)$ en fonction de $x_0 - x$ (équation 2.3.10). L'estimation de la profondeur de la ligne est indiquée au-dessus des graphes.

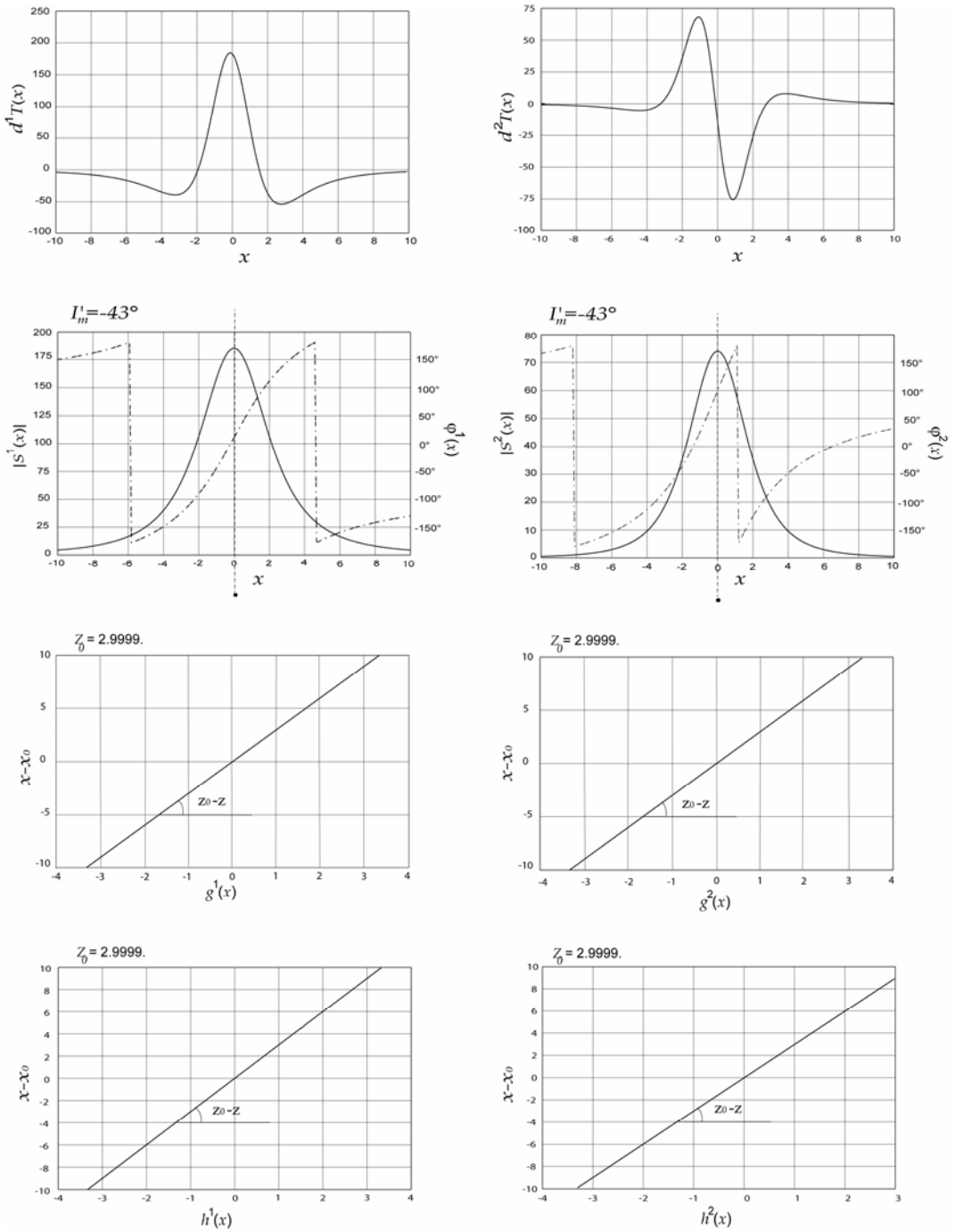


Figure 7. Signal analytique de première ordre (colonne gauche) et de seconde ordre (colonne droite). Les lignes représentent respectivement : la dérivée horizontale du champ de la ligne infinie, l'amplitude et la phase du signal analytique, l'extraction de la profondeur par l'amplitude et l'extraction de la profondeur par la phase.

2.3.1 Signal analytique de l'anomalie d'un contraste

Dans le paragraphe précédent nous avons analysé le signal analytique 1D associé au signal magnétique T^{L} d'une ligne infinie de dipôles. Cette source singulière est décrite par la distribution magnétique de Dirac dans un espace à deux dimensions. Considérons maintenant la transformation du signal magnétique d'ordre L en signal analytique pour une structure magnétique plus compliquée. La figure 8 représente une couche magnétique 2D horizontale ayant un contraste d'aimantation. La surface de discontinuité magnétique est défini dans le plan d'observation $x0z$ par les coins supérieur $Q_1(x_1, z_1)$ et inférieur $Q_2(x_2, z_2)$. Il est formé par deux milieux magnétiques dont l'intensité d'aimantation $m/2$ est identique et la polarité $\bar{m}_2(m_x, m_z)$ opposée.

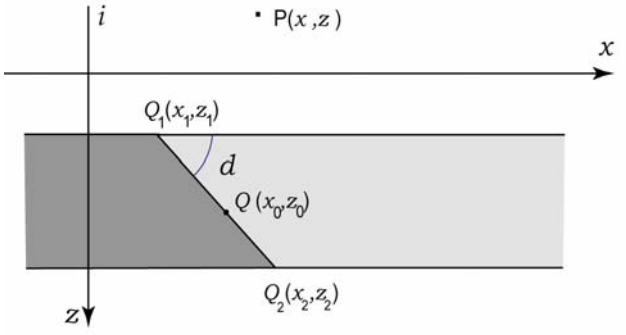


Figure 8. Définition d'un contraste magnétique.

Soit $Q(x_0, y_0)$ un point de la surface de discontinuité. Le champ magnétique total T_{co} en point $P(x, z)$ dû à la couche peut s'exprimer analytiquement par

$$T_{co}(x,z) = \int_{z_1}^{z_2} dz_0 m H(x - x_0) *_x \zeta(x) \tag{2.3.11}$$

Le terme $\zeta(x)$ représente la fonction de Green 2D. Elle est équivalente au champ magnétique total d'une ligne infinie de dipôles d'intensité égale à l'unité et de direction $\bar{m}_2$. Le terme $H(x)$ est la distribution de Heaviside définie par

$$H(x - x_0) = \begin{cases} m & \text{pour } x \geq x_0. \\ 0 & \text{pour } x < x_0 \end{cases}$$

La dérivée horizontale d'ordre L du champ T_{co} de la couche s'écrit

$$\partial_x^{\mathrm{L}} T_{co}(x,z) = T_{co}^{\mathrm{L}} = \partial_x^{\mathrm{L}} \left\{ \int_{z_1}^{z_2} dz_0 m H(x - x_0) *_x \zeta(x) \right\} \tag{2.3.12}$$

En utilisant la relation $\partial_x H(x) = \delta_2(x)$, δ_2 étant la distribution de Dirac à deux dimensions, nous pouvons écrire l'équation 2.3.12 sous la forme

$$T_{co}^{\mathrm{L}}(x,z) = \partial_x^{\mathrm{L}-1}\left\{\int_{z_1}^{z_2} dz_0 m[\partial_x H(x - x_0)] *_x \zeta(x)\right\} = \partial_x^{\mathrm{L}-1}\left\{\int_{z_1}^{z_2} dz_0 m[\delta(x - x_0) *_x \zeta(x)]\right\},$$
$$= \partial_x^{\mathrm{L}-1}\left\{\int_{z_2}^{z_2} dz_0 m\zeta(x - x_0)\right\} \qquad (2.3.13)$$

La formule 2.3.12 est la représentation spatiale simple de la dérivée horizontale d'ordre L du champ magnétique de la couche. Cette formule révèle explicitement une remarque très utile, soulignée par plusieurs auteurs [Nabighian, 1972 , 1974; Moreau, 1995], sur laquelle nous allons revenir plus tard : la dérivée horizontale d'ordre L du champ magnétique total T_{co} d'une couche avec un contraste d'aimantation est équivalente à la dérivée horizontale d'ordre L-1 du champ magnétique total T_{lm} d'une lame magnétique 2D de géométrie définie par la géométrie du contraste magnétique de la couche, c'est-à-dire du segment $[Q_1, Q_2]$ (figure 8), soit $T_{co}^{\mathrm{L}}(x) = T_{lm}^{\mathrm{L}-1}(x)$.

Revenons pour l'instant à notre couche avec contraste. En considérant la représentation de Fourier de la ligne infinie de dipôles, exprimée par l'équation 2.3.4, le spectre du signal magnétique T_{co}^{L} de la couche s'écrit

$$\mathsf{F}\{T_{co}^{\mathrm{L}}\}(k) = A_{\mathrm{sgn}(k)}(ik)^{\mathrm{L}-1}|k| \cdot \exp\{i\pi\}\int_{z_1}^{z_2} dz_0 \exp\{-ix_0 k - (z_0 - z)|k|\} \qquad (2.3.14)$$

Par intégration suivie par de simples arrangements algébriques (voir annexe A1), il vient

$$\mathsf{F}_x\{T_{co}^{\mathrm{L}}(x)\}(k) = \widetilde{T}_2^{\mathrm{L}}(k) + \widetilde{T}_1^{\mathrm{L}}(k). \qquad (2.3.15)$$
$$\widetilde{T}_1^{\mathrm{L}}(k) = A_{\mathrm{sgn}(k)} k^{\mathrm{L}-1}\,\mathrm{sgn}(k)\sin(d)\exp\{-ikx_1 - (z_1 - z)|k|\}\exp\{i(d - \pi/2)\mathrm{sgn}(k) + i(\mathrm{L}+1)\pi/2\}.$$
$$\widetilde{T}_2^{\mathrm{L}}(k) = A_{\mathrm{sgn}(k)} k^{\mathrm{L}-1}\,\mathrm{sgn}(k)\sin(d)\exp\{-ikx_2 - (z_2 - z)|k|\}\exp\{i(d - \pi/2)\mathrm{sgn}(k) + i(\mathrm{L}+3)\pi/2\}.$$

Le spectre du signal magnétique-L de la couche est donc une superposition de deux informations élémentaires distinctes. La première $\widetilde{T}_1^{\mathrm{L}}(k)$ dépend de la position du coin supérieur Q_1 du contraste et la deuxième $\widetilde{T}_2^{\mathrm{L}}(k)$ dépend de la position de son coin inférieur Q_2. La contribution de ces deux informations élémentaires dans le signal magnétique T_{co}^{L} est contrôlée par le rapport énergétique

$$\kappa = \left|\widetilde{T}_2^{\mathrm{L}}(k)\right| \Big/ \left|\widetilde{T}_1^{\mathrm{L}}(k)\right| = \exp(|z_2 - z_1|k)$$

Pour une couche d'épaisseur $z_2 - z_1$ variable entre 1 et 10 km, nous présentons à la figure 9 la variation de l'énergie $\left|\widetilde{T}^{\mathrm{L}}\right|$ de son anomalie magnétique (ligne continue) et la variation de rapport κ (ligne pointillée) en fonction de k. On peut constater sur cette figure que :

le rapport κ, variable sur l'intervalle [0 1], diminue en général exponentiellement avec la fréquence k ;

En augmentant l'épaisseur $z_2 - z_1$ de la couche la diminution de κ en fonction de k devient plus rapide pour toutes les fréquence k à l'exception de la fréquence continue $\{k = 0\}$ où la rapport reste constante égal à 1. Ainsi, la contribution du coin supérieur est toujours dominante dans le signal magnétique-L par contre la contribution du coin inférieur varie en fonction de l'épaisseur de la couche de telle sorte qu'elle est plus importante quand l'épaisseur diminue.

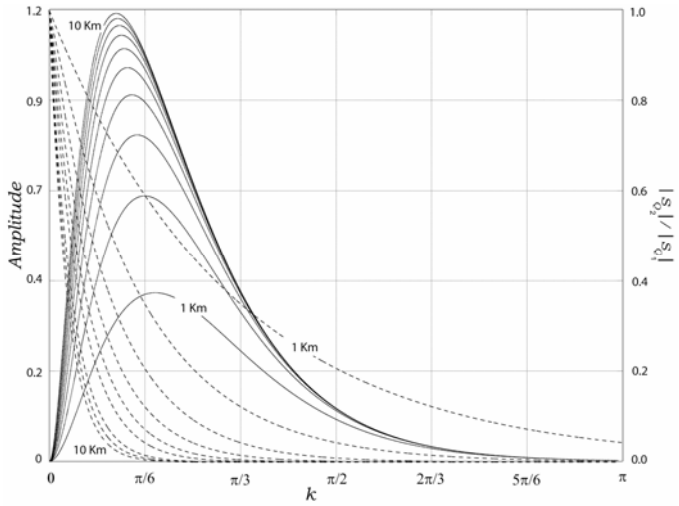


Figure 9. Interférence de l'énergie produite par les bords d'un contraste magnétique d'épaisseur variable.

Par la transformation de Fourier inverse du spectre 2.3.15, effectuée uniquement sur les fréquences positives, nous écrivons le signal analytique S_{co}^{L} dans le domaine spatial en fonction de la variable x par

$$S_{co}^{\mathrm{L}}(x) = 2A\cos(d)\exp\{-(d+\pi)\}(i)^{\mathrm{L}-1}(-1)^{L}(\mathrm{L}-1)!\left\{\frac{1}{[i(x-x_2)-(z_2-z)]^{\mathrm{L}}} - \cdots \cdots \frac{1}{[i(x-x_1)-(z_1-z)]^{\mathrm{L}}}\right\} \tag{2.3.16}$$

L'évaluation directe de l'équation 2.3.16 en représentation eulerienne, amplitude et phase locales d'ordre L, semble difficile voir impossible. Nous devons alors procéder

individuellement sur chaque ordre L, sachant que le calcul devient très lourd dés que L devient supérieur à 1 (voir équations 2.3.32 et 2.3.33). Ainsi nous écrivons le signal analytique de premier ordre (L=1) associé au champ magnétique total de la couche en terme d'amplitude et de phase respectivement par

$$|S_{co}^{1}(x)| = 2mC_m[|\sin I_r \sin I_0|/|\sin I_r' \sin I_0'|]\times\cdots \\ \cdots\left[(z_2 - z_1)/\sqrt{[(x - x_1)^2 + (z_1 - z)^2][(x - x_2)^2 + (z_2 - z)^2]}\right]. \quad (2.3.17)$$

$$\varphi_{co}^{1}(x) = -I_r' - I_0' + \pi + \tan^{-1}[(x - x_1)/(z_1 - z)] + \tan^{-1}[(x - x_2)/(z_2 - z)]. \quad (2.3.18)$$

Les deux formules 2.3.17 et 2.3.18 indiquent que la résolution des paramètres du contraste magnétique au moyen de l'amplitude et la phase locales associées à son signal magnétique n'est pas en général une opération simple. Comme le montre le spectre 2.3.15 le signal magnétique dans une telle situation correspond à la superposition de plusieurs signaux élémentaires de différentes fonctions de transfert. Dans ce cas la dissociation de l'information du signal magnétique en deux représentations amplitude locale et phase locale est toujours légitime mais la non linéarité de ces deux fonctions ne permet pas d'établir des lois exploitables pour caractériser la source causative. Plus précisément, les deux fonctions 2.3.17 et 2.3.18 montrent qu'il n'est pas possible de formuler des lois, pour l'estimation de la profondeur et l'inclinaison apparente de l'aimantation, comme le cas de la ligne infinie. La forme symétrique et anti-symétrique de l'amplitude locale et de la phase locale respectivement ne reste plus vérifiable et la position de la valeur maximale d'énergie peut se trouver à n'importe qu'elle position entre la projection horizontale x_1 et x_2 des coins du contraste.

Sauf pour un contraste vertical $x_1 = x_2$, les deux spectres élémentaires $\widetilde{T}_1^{L}$ et $\widetilde{T}_2^{L}$ interviennent dans le spectre 2.3.15 par une phase identique, l'amplitude locale $|S_{co}^{1}|$ devient dans ce cas symétrique par rapport à une valeur maximale localisée sur la position horizontale du contraste. La phase φ_{co}^{1} aussi désigne une fonction anti-symétrique centrée sur la position horizontale du contraste ; la valeur de φ_{co}^{1} à la position de son anti-symétrie permet d'extraire l'inclinaison apparente de l'aimantation.

L'exemple de la couche magnétique avec contraste indique que la résolution des paramètres de la source par signal analytique est une opération réservée à des signaux simples, produits par une source singulière et caractérisés par des spectres fréquentiels bien défini. Par la suite, nous allons décrire les singularités qui peuvent être attribuées au modèle de la couche avec contraste et tenter de les caractériser par la méthode du signal analytique associé à leurs signaux magnétiques.

En effet, dans certaines conditions géométriques limites, le modèle de la couche avec contraste peut se comporter comme une source singulière. Il s'agit en particulier de deux cas

limites correspondant respectivement à *une couche à contraste vertical infiniment épaisse* et *une couche à contraste infiniment mince*.

Considérant dans un premier temps le cas limite d'une couche d'extension verticale infinie, elle correspond à une couche dont la profondeur z_2 de la surface inférieure est très grande par rapport à la profondeur z_1 de sa surface supérieure $z_2 >> z_1$ (figure 8). L'influence de la composante spectrale $\widetilde{T}_2^{\mathrm{L}}$, présentée dans l'équation 2.3.15, tend alors à s'annuler et nous pouvons faire l'approximation suivante

$$\widetilde{T}_{co}^{\mathrm{L}}(k) \approx \widetilde{T}_1^{\mathrm{L}}(k) = A_{\mathrm{sgn}(k)}\mathrm{sgn}(k)\,k^{\mathrm{L}-1}\sin(d)\exp\{-ikx_1 - (z_1 - z)|k|\}\times\cdots \\ \cdots\exp\{i(\mathrm{L}+1)\pi/2 + i(d - \pi/2)\mathrm{sgn}(k)\} \tag{2.3.19}$$

L'équation 2.3.19 décrit alors presque uniquement l'information du coin le plus superficiel du contraste ; avec l'intervention de la pente d et d'une grandeur constante indépendante de la fréquence k.

Par le calcul de la transformée de Fourier inverse de l'équation 2.3.19 dans le domaine spatial, on peut écrire le signal analytique en représentation Eulérienne (amplitude et phase locales respectivement) par

$$\left|S_{co}^{\mathrm{L}}(x)\right| = 4mC_m\sin(d)\frac{\left|\sin I_m \sin I_f\right|}{\left|\sin I'_m \sin I'_f\right|}\frac{(\mathrm{L}-1)!}{\left[(z_1 - z)^2 + (x_1 - x)^2\right]^{\mathrm{L}/2}} \tag{2.3.20}$$

$$\varphi_{co}^{\mathrm{L}}(x) = -I'_m - I'_f + d + \frac{\mathrm{L}\pi}{2} + \mathrm{L}\tan^{-1}\frac{x - x_1}{z_1 - z} \tag{2.3.21}$$

L'amplitude locale $|S_{co}^{\mathrm{L}}|$, similairement au cas d'une ligne infinie, présente une fonction positive et symétrique par rapport à une valeur maximale d'énergie localisée sur le coin supérieur $Q_1(x_1, z_1)$ du contraste. Cette propriété reste valide même si le contraste est oblique à la verticale. La variation relative de l'énergie du signal magnétique par rapport à la valeur maximale d'énergie peut se formuler à partir de l'équation 2.3.20 sous la forme

$$\mathrm{g}(x)(\mathrm{z}_1 - z) = (x_1 - x)\text{, où } \mathrm{g}(x) = \left\{\left[\left|S_{co}^{\mathrm{L}}(x = x_1)\right| / \left|S_{co}^{\mathrm{L}}(x)\right|\right]^{2/\mathrm{L}} - 1\right\}^{1/2} \tag{2.3.22}$$

La position verticale du coin supérieur du contraste peut être estimée, analogiquement au cas d'une ligne infinie, par la mesure de la pente de la ligne droite (2.3.22).

Quant à la phase locale (2.3.21), elle présente une fonction antisymétrique autour la position horizontale x_1 du coin supérieur du contraste. La valeur caractéristique de la phase prise dans cette position est égale à

$$\varphi_{co}^{\mathrm{L}}(x = x_1) = -I'_m - I'_f + d + (1 + \mathrm{L})\pi/2 \tag{2.3.23}$$

La valeur 2.3.23 dépend donc de la pente d du contraste, qui y intervient comme une valeur constante : en cas d'absence de connaissance de d, il est difficile d'avoir une idée sur l'inclinaison apparente d'aimantation I'_m. L'intervention de d comme une quantité constante additive n'affecte pas la variation relative de la phase en fonction de la distance $x - x_0$. Nous pouvons formuler la différence entre la fonction de la phase locale et la valeur de la phase dans le centre d'anti-symétrie sous la forme d'une ligne droite. Cette ligne nous permet de détecter la profondeur z_1 du coin supérieur du contraste par le calcul de sa pente.

$$\mathrm{h}(x)\,(\mathrm{z}_1 - z) = (x - x_1)\text{, où } \mathrm{h}(x) = \tan^{-1}\left\{\left(\varphi_{co}^{\mathrm{L}}(x = x_1) - \varphi_{co}^{\mathrm{L}}(x)\right)/\mathrm{L}\right\} \qquad (2.3.24)$$

L'exemple synthétique illustré par la figure 10 représente le signal analytique de premier ordre L=1 (colonne à gauche) et deuxième ordre (colonne à droite) du champ magnétique d'un contraste infini d'inclinaison 45°. Ces coins supérieur et inférieur sont respectivement $Q_1(0,3)$ et $Q_3(-90,90)$, l'inclinaison apparente d'aimantation est $I'_m = -43°$ et l'inclinaison apparente du champ magnétique ambiant est $I'_f = -56°$. La première rangée de la figure montre l'allure des deux signaux magnétiques (la dérivée horizontale de premier et second ordre respectivement). La deuxième rangée montre les variations des amplitudes locales et des phases locales. Les abscisses des valeurs maximales de l'énergie et du centre d'anti-symétrie de la phase se superposent pour les deux ordres L=1 et L=2, et coïncident avec $x_1 = 0$. L'inclinaison apparente I'_m calculée par la formule 2.3.23 est indiquée au-dessus des graphes. La troisième rangée est une représentation de g en fonction de $x - x_0$ (équation 2.3.22). la pente de cette droite donne une estimation de la profondeur z_1 du coin supérieur du contraste indiquée au dessus des graphes. La dernière rangée est une représentation de la fonction h en fonction de $x - x_0$ (équation 2.3.24).

Pour le signal analytique du second ordre, les valeur estimées des paramètres de la source coïncident avec les valeurs théoriques. Par contre pour le signal analytique de premier ordre, on constate une distorsion de la linéarité des équations 2.3.22 et 2.3.24 qui augmente progressivement en fonction de $x - x_1$. En fait la distorsion est la conséquence de l'imperfection du concept de l'infinité du contraste ; qui devient plus claire pour les composantes fréquentielles de grande longueur d'onde dominant sur les flancs du signal magnétique. A cause de la nature du calcul de la phase locale, une opération de division entre la partie imaginaire et la partie réelle du signal analytique, les opérations en dérivées pour caractériser la source causative sont moins stables par rapport à leurs correspondantes dérivées de l'amplitude locale. Cette différence de stabilité est bien illustrée sur la figure 10 (colonne à gauche) où la distorsion de la linéarité de l'équation 2.3.24, pour la même imperfection de l'infinité du contraste, est plus important que celle de l'équation 2.3.22.

Considérons maintenant le deuxième cas limite correspondant à une couche caractérisée par une épaisseur $z_2 - z_1$ très petite par rapport à sa profondeur moyenne $(z_2 + z_1)/2$. Le spectre du signal magnétique 2.3.15 est, dans ce cas, dominé par des composantes fréquentielles de relativement grandes longueurs d'ondes par rapport aux dimensions du contraste. Les deux

spectres $\widetilde{T}_1^{\mathrm{L}}$ et $\widetilde{T}_2^{\mathrm{L}}$ se fondent simultanément dans le point d'observation $P(x,z)$ et tous les détails liés à la géométrie de la source sont ignorés du signal magnétique observé. Le contraste sera vu comme une source singulière, correspondante à la singularité de Heaviside, placée au centre $Q_c(x_c, z_c)$ magnétique du contraste. La formule générale du signal magnétique du contraste donnée par l'équation 2.3.13 se réduit alors à la forme

$$T_{co}^{\mathrm{L}}(x) = m\partial_x^{\mathrm{L}-1}\zeta(x - x_c) \tag{2.3.25}$$

Dans l'espace de Fourier , le spectre de $\widetilde{T}_{co}^{\mathrm{L}}$ s'exprime explicitement sous la forme :

$$\widetilde{T}_{co}^{\mathrm{L}}(k) = A_{\mathrm{sgn}}\,\mathrm{sgn}(k)\,k^{\mathrm{L}}\exp\{-ikx_c - (z_c - z)|k|\}\cdot\exp\{i(\mathrm{L}+1)/2\} \tag{2.3.26}$$

Plus précisément cette dernière formule correspond à la dérivée horizontale d'ordre L du champ magnétique total d'un demi-plan de dipôles. Elle montre aussi que cette dérivée est équivalente à la dérivée-(L-1) du champ magnétique total d'une ligne infinie de dipôles placée au centre magnétique[7] du contraste. Ainsi tout calcul algébrique sur le signal magnétique $T_{co}^{\mathrm{L}}(x)$ d'un contraste mince peut être obtenu directement de son correspondant sur le signal magnétique de la ligne de dipôles en décrémentant ce dernier

signal de 1. Nous pouvons donc exprimer le signal analytique S_{co}^{L} du contraste en terme d'amplitude locale et de phase locale respectivement par

$$\left|S_{co}^{\mathrm{L}}(x)\right| = \left|S^{\mathrm{L}-1}(x)\right| = 4mC_m\frac{\left|\sin I_m \sin I_f\right|}{\left|\sin I'_m \sin I'_f\right|}\frac{\mathrm{L}!}{\left[(z_c - z)^2 + (x_c - x)^2\right]^{(\mathrm{L}+1)/2}} \tag{2.3.27}$$

$$\varphi_{co}^{\mathrm{L}}(x) = \varphi^{\mathrm{L}-1}(x) = -I'_m - I'_f + \frac{\pi(1+\mathrm{L})}{2} + (1+\mathrm{L})\tan^{-1}\frac{x - x_c}{z_c - z} \tag{2.3.28}$$

L'expression 2.3.27 montre que la valeur maximale d'énergie est centrée dans le cas du contact fin sur la position horizontale de son centre magnétique $Q_c(x_c, z_c)$. La formule de la variation relative de l'amplitude locale par rapport à l'énergie maximale en fonction de la distance s'exprime par

$$\mathrm{g}(x)(z_c - z) = (x_c - x)\text{ , où }\mathrm{g}(x) = \left\{\left[\left|S_{co}^{\mathrm{L}}(x = x_c)\right| / \left|S_{co}^{\mathrm{L}}(x)\right|\right]^{2/(\mathrm{L}+1)} - 1\right\}^{1/2} \tag{2.3.29}$$

La pente de cette ligne droite est une mesure de la profondeur z_c du centre magnétique du contraste.

---

[7] Le centre magnétique d'une structure aimantée, de densité et d'aimantation uniformes, coïncide avec son centre de gravité.

En ce qui concerne la fonction de la phase donnée par l'équation 2.3.28, le centre de l'antisymétrie de cette fonction est localisé sur $Q_c(x_c, z_c)$ et la valeur caractéristique de la phase locale dans cette position permet d'estimer l'inclinaison apparente de l'aimantation I'_m à partir de la relation

$$\varphi_{co}^{L}(x = x_c) = -I'_m - I'_f + (L+1)/2 \qquad (2.3.30)$$

La différence entre la fonction de la phase locale 2.3.28 et sa caractéristique donnée par 2.3.30 peut s'écrit sous la forme d'une ligne droite

$$\mathrm{h}(x)\,(\mathrm{z_c} - z) = (x - x_c)\text{, où } \mathrm{h}(x) = \tan^{-1}\left\{\left(\varphi_{co}^{L}(x = x_c) - \varphi_{co}^{L}(x)\right)/(\mathrm{L}+1)\right\}. \qquad (2.3.31)$$

L'exemple synthétique illustré par la figure 11 représente le signal analytique de premier ordre L=1 (colonne à gauche) et deuxième ordre (colonne à droite) du champ magnétique d'une singularité de Heaviside. La singularité est placée à l'origine du repère de référence à 3 km de profondeur, avec une inclinaison apparente d'aimantation $I'_m = -43°$ et une inclinaison apparente du champ magnétique ambiant $I'_f = -56°$. La première rangée de la figure montre l'allure des deux signaux magnétiques (la dérivée horizontale de premier et second ordre respectivement). La deuxième rangée montre les variations des amplitudes locales et des phases locales. Les abscisses des valeurs maximales de l'énergie et du centre d'anti-symétrie de la phase se superposent pour les deux ordres L=1 et L=2, et coïncident avec x_c la position horizontale de la singularité. L'inclinaison apparente I'_m est calculée par la formule 2.3.30 est indiquée au-dessus des graphes. Elle coïncide avec la valeur théorique. La troisième rangée est une représentation de g en fonction de $x - x_0$ (équation 2.3.29). La pente de cette droite donne une estimation de la profondeur z_c de la singularité indiquée au dessus des graphes. Là encore elle coïncide avec la valeur théorique. La dernière rangée est une représentation de la fonction h en fonction de $x - x_0$ (équation 2.3.31). L'estimation de la profondeur de la ligne est indiquée au-dessus des graphes.

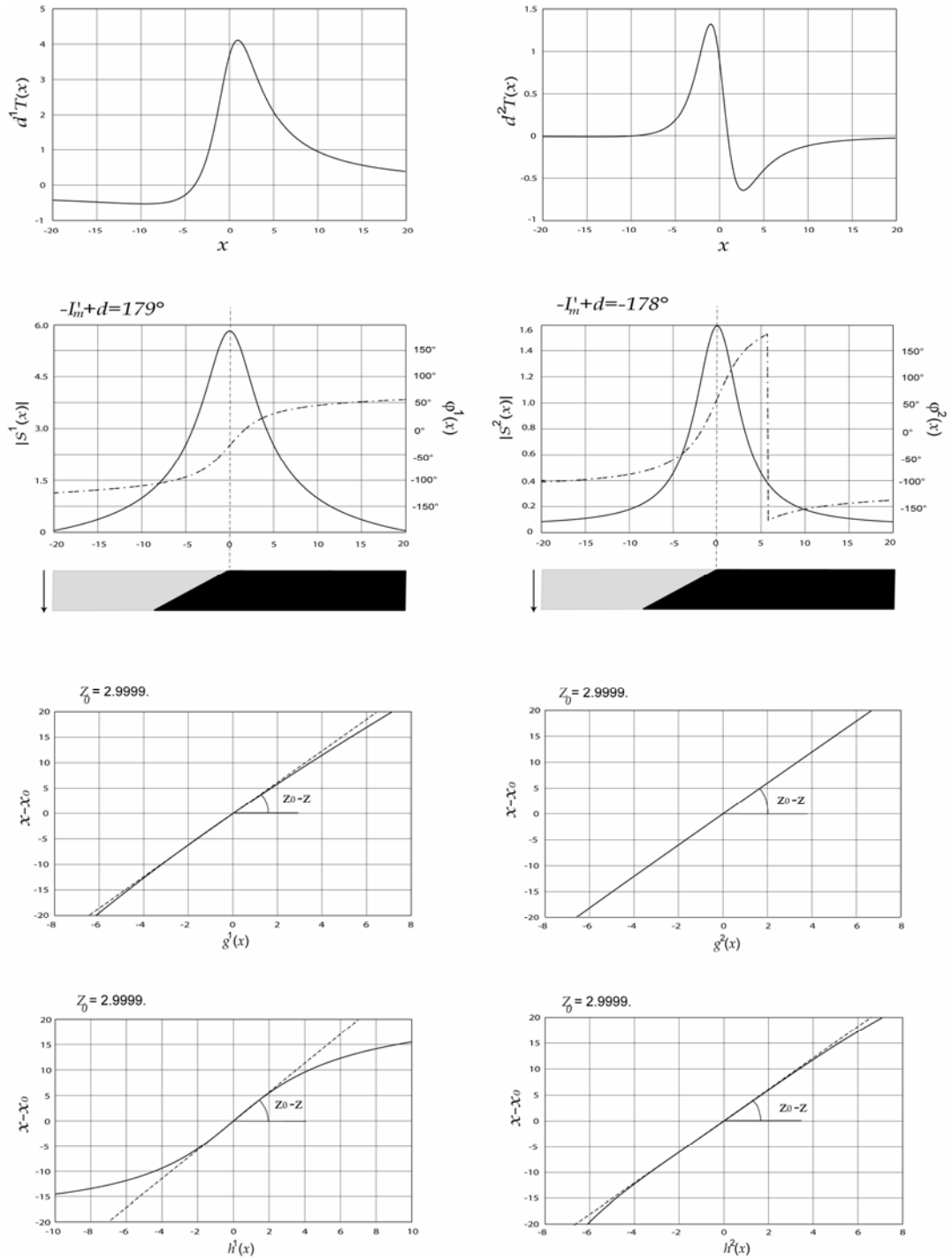


Figure 10. Le signal analytique de premier ordre (colonne gauche) et de second ordre (colonne droite) du champ magnétique d'une discontinuité d'extension verticale infinie. Les lignes représentent respectivement : la dérivée horizontale du champ, l'amplitude et la phase du signal analytique, l'estimation de la profondeur du toit de discontinuité par l'amplitude et l'estimation de la profondeur par la phase.

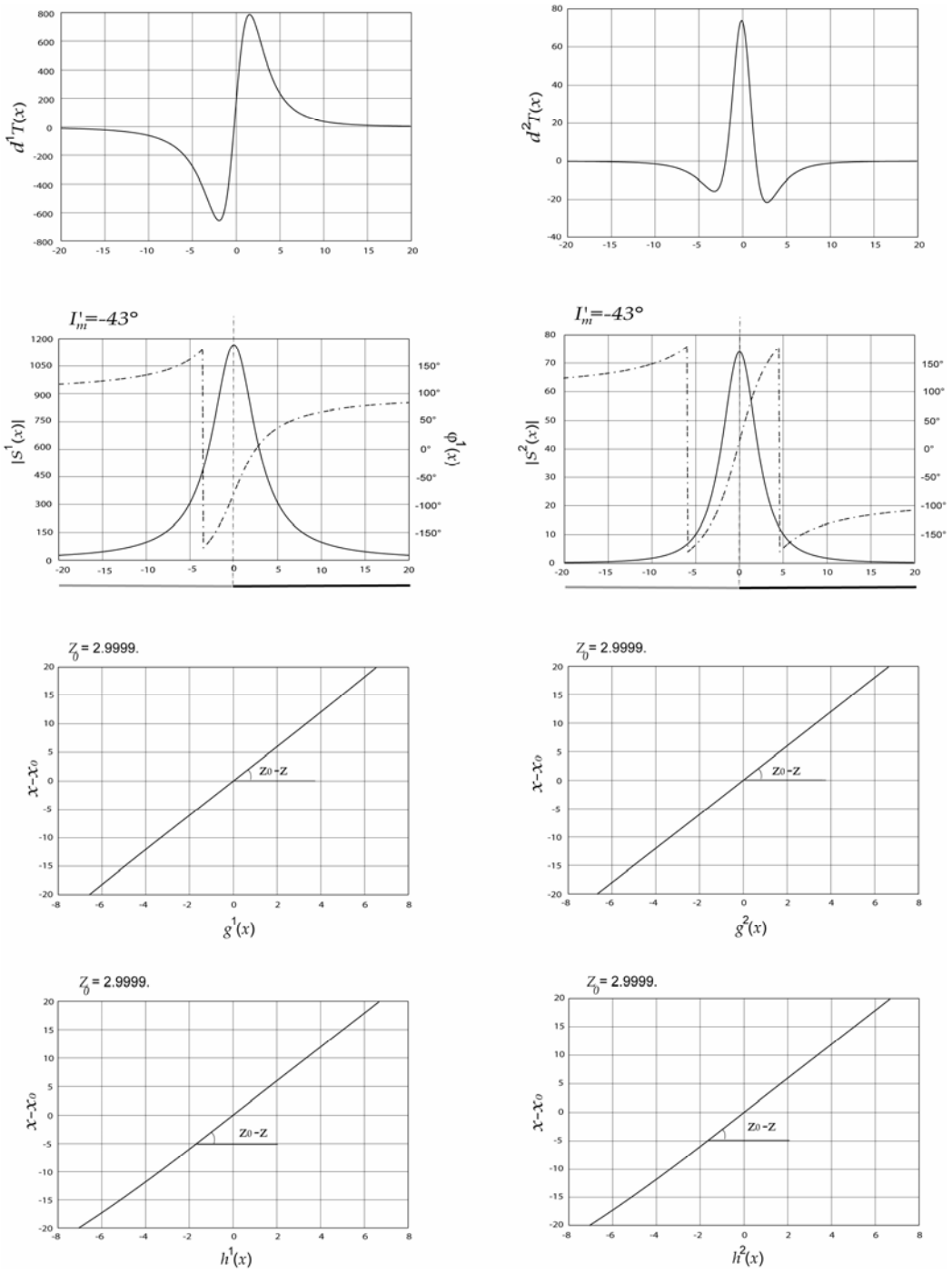


Figure 11. Le signal analytique de premier ordre (colonne gauche) et de second ordre (colonne droite) du champ magnétique d'une singularité de Heaviside. Les lignes représentent respectivement : la dérivée horizontale du champ, l'amplitude et la phase du signal analytique, l'estimation de la profondeur de la singularité par l'amplitude et l'estimation de la profondeur par la phase.

2.3.2 Signal analytique de l'anomalie d'une lame

Le dernier modèle magnétique à 2-D que je présente est une lame aimantée. Comme dans le cas du contraste magnétique je m'attache à définir les types de singularité qui peuvent être produites par la lame et quelles sont les propriétés du signal analytique associé à ces singularités. Dans la section précédente 2.3.4 nous avons démontré que la dérivée horizontale d'ordre L du champ magnétique total d'une couche à contraste d'aimantation est équivalente à la dérivée horizontale d'ordre-(L-1) du champ magnétique total d'une lame magnétique dont la géométrie est définit par la discontinuité de la couche. Il s'ensuit alors que la représentation spectrale de la dérivée horizontale-L et la représentation spatiale du signal analytique-L analysées précédemment dans le cas du modèle de la couche se transmet au modèle actuel en décrémentant l'ordre L de un. Ainsi par exemple le signal analytique de premier ordre $\mathrm{L}=1$ associé au champ d'une lame verticale s'exprime en terme d'amplitude et de phase dans un système de coordonnées polaires par les formules suivantes:

$$\left|S_{lm}^{1}\right| = \left|S_{co}^{2}\right| = \frac{2A(z_2 - z_1)^2 \left\{\left[(Z_2^2 - X^2)R_1^2 - (Z_1^2 - X^2)R_2^2\right]^2 + \left[XZ_2R_1^2 - XZ_1R_2^2\right]^2\right\}^{1/2}}{R_2^2 R_1^2 (z_2 - z_1)^2} \tag{2.3.32}$$

$$\varphi_{lm}^{1}(x) = -I_r' - I_0' + 3\pi/2 + 3\tan^{-1}\left\{X_2Z_2R_2^2 \Big/ \left[(Z_2^2 - X_2^2)R_1^2 - (Z_1^2 - X_1^2)R_2^2\right]\right\} \tag{2.3.33}$$

Avec : $X = x - x_l$, $Z_1 = z_1 - z$, $Z_2 = z_2 - z$, $R_1 = \left(X^2 + Z_1^2\right)^{1/2}$ et $R_2 = \left(X^2 + Z_2^2\right)^{1/2}$.

Les équations 2.3.32 et de 2.3.33 montrent que l'amplitude locale et la phase locale définissent respectivement une fonction symétrique et une fonction anti-symétrique par rapport à la position horizontale de la lame. De plus la valeur de la phase au centre d'anti-symétrie est donnée par

$$\varphi_{lm}^{1}(x = x_1) = -I_r' - I_0' + \pi/3.$$

ce qui permet d'extraire facilement l'inclinaison apparente de l'aimantation de la lame. Mais, comme dans le cas du contraste vertical nous ne pouvons pas établir une loi exploitable sur la profondeur car la source est multi-singulière. La situation devient plus complexe si la lame est inclinée à la verticale, où une distorsion se produit sur l'amplitude et la phase et aucun paramètre qualitatif ou quantitatif de la source peut être extrait correctement.

Identiquement au cas de la couche à contraste, la lame peut se modéliser comme une source singulière dans deux situations géométriques limites. La première situation correspond à une lame d'extension verticale infinie et la deuxième situation correspond à une lame localisée dans l'espace. Pour une lame d'extension verticale infinie le spectre de la dérivée horizontale d'ordre-L découle de l'équation 2.3.19, soit

$$\begin{aligned}\mathrm{F}\{\partial_x^{\mathrm{L}} T_{lf}(x)\}(k) = \mathrm{F}\{\partial_x^{\mathrm{L}+1} T_{cf}(x)\}(k) = A_{\mathrm{sgn}(k)}\,\mathrm{sgn}(k)\,k^{\mathrm{L}}\sin(d)\times\cdots \\ \cdots\exp\{-ikx_1 - (z_0 - z)|k|\}\cdot\exp\{i(\mathrm{L}+2)\pi/2 + i(d-\pi/2)\mathrm{sgn}(k)\}\end{aligned} \tag{2.3.34}$$

et l'amplitude et la phase locales de son signal analytique d'ordre-L s'écrivent respectivement par les deux formules suivantes :

$$\left|S_{lf}^{L}(x)\right|_{z_2>>z_1} = 4AC_m \frac{\left|\sin I_m \sin I_f\right|}{\left|\sin I'_m \sin I'_f\right|} \frac{\mathrm{L}!}{\left[(z_1 - z)^2 + (x_1 - x)^2\right]^{(\mathrm{L}+1)/2}} \tag{2.3.35}$$

$$\varphi_{lf}^{\mathrm{L}}(x)_{z_2>>z_1} = -I'_m - I'_f + d + \frac{(\mathrm{L}+1)\pi}{2} + (L+1)\tan^{-1}\frac{x - x_1}{z_1 - z} \tag{2.3.36}$$

La lame représente donc une source singulière localisée à son bord supérieur, la position de cette singularité s'obtient de la position de l'énergie maximale sur la courbe de l'amplitude locale équation 2.3.35 et de la position du centre de l'anti-symétrie sur la courbe de la phase locale équation 2.3.36. La valeur de la phase dans son centre d'anti-symétrie x_1 est donnée par la formule simple :

$$\varphi_{lm}^{\mathrm{L}}(x = x_1) = -I'_0 - I'_r + d + \pi(L+1)/2$$

Ainsi en l'absence d'information à priori sur la pente de la lame d nous ne pouvons pas estimer l'inclinaison apparente I'_m de son aimantation. Pour la localisation verticale de cette singularité nous pouvons établir de l'amplitude locale équation 2.3.35 et de la phase locale équation 2.3.36 respectivement les deux équations en forme de ligne droite suivantes

$$\mathrm{g}(x)(\mathrm{z}_1 - z) = (x - x_1)\text{ , où ; } \mathrm{g}(x) = \left\{\left[\left|S_{lf}^{\mathrm{L}}(x = x_1)\right| / \left|S_{lf}^{\mathrm{L}}(x)\right|\right]^{2/(\mathrm{L}+1)} - 1\right\}^{1/2} \tag{2.3.37}$$

$$\mathrm{h}(x)(\mathrm{z}_1 - z) = (x - x_1)\text{ , où ; } \mathrm{h}(x) = \tan\left\{\left(\varphi_{lf}^{\mathrm{L}}(x = x_1) - \varphi_{lf}^{\mathrm{L}}(x)\right) / (\mathrm{L}+1)\right\} \tag{2.3.38}$$

où la profondeur s'obtient de la pente ($z_0 - z$) d'une de ces deux dernières formules.

L'exemple synthétique donné à la figure 12 représente le signal analytique de premier ordre L=1 (colonne à gauche) et deuxième ordre (colonne à droite) du champ magnétique d'une lame infinie dont la position des bords supérieur et inférieur sont respectivement $Q_1(0,3)$ et $Q_2(-90,90)$ et la pente $d = 135°$. L'inclinaison apparente d'aimantation est $I'_m = -43°$ et l'inclinaison du champ magnétique ambiant est $I'_f = -56°$. La première ligne illustre les deux signaux originaux soit respectivement la dérivée horizontale de premier et de second ordre ; sur la deuxième ligne les deux signaux analytiques en terme d'amplitude locale et de phase locale sont représentés. Les valeurs maximales de l'amplitude et le centre de l'anti-symétrie de la phase se superposent pour les deux ordres L=1 et L=2 sur la position horizontale du coin

supérieur de la lame Q_1. La troisième ligne est une représentation de la ligne droite donnée par l'équation 2.3.37 et la pente de cette ligne équivalente à la profondeur de la ligne est donnée au-dessus des graphes. Sur la dernière ligne la formule de ligne droite donnée par l'équation 2.3.38 est illustrée et la pente de cette ligne équivalente à la profondeur de la ligne source est notée au-dessus des graphes.

En ce qui concerne le deuxième type de singularité produit par ce modèle correspondant à une lame localisée dans l'espace. La fonction du champ magnétique de la lame devient, comme le montre l'incrémentation de l'équation 2.3.25 par un, identique au champ magnétique d'une ligne de dipôle infinie. La lame se localise donc comme une singularité de Dirac. La dérivation du signal analytique d'un tel champ se ramène à la dérivation du signal analytique du champ de la ligne traité dans la section 2.3.3. On note finalement que toute source compacte à 2-D localisée dans l'espace se comporte comme une ligne de dipôle quelque soit la forme de sa section transverse.

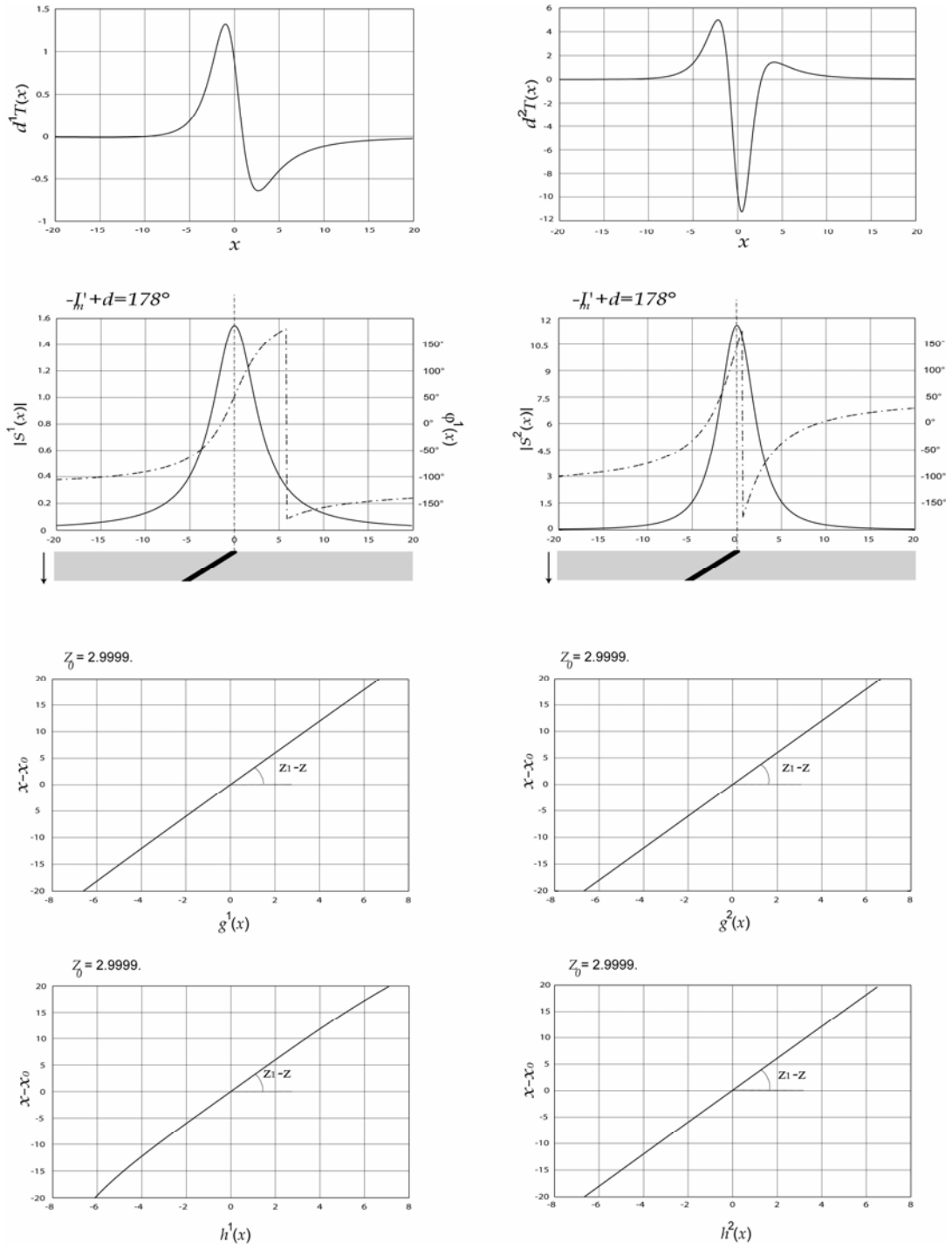


Figure 12. Le signal analytique de premier ordre (colonne de gauche) et de second ordre (colonne de droite) du champ magnétique d'une lame infinie. Les lignes représentent respectivement : la dérivée horizontale du champ, l'amplitude et la phase du signal analytique, l'estimation de la profondeur du toit de la lame par l'amplitude et l'estimation de la profondeur par la phase.

2.3.3 Caractérisation de la source magnétique

La déconvolution Eulérienne [Thompson, 1982; Reid et al, 1990] qui est devenu un outil fréquemment utilisé ces dernières années pour l'interprétation des données magnétiques 2D et 3D, fournit une estimation automatique de la position horizontale et verticale de la source. Dans un espace à 3D la localisation de la position de la source par cette méthode s'effectue par la résolution d'une équation aux dérivées partielles appelée l'équation d'Euler dont l'expression est la suivante [Thompson, 1982]

$$(x - x_0)\partial_x T + (y - y_0)\partial_y T + (z - z_0)\partial_z T = N(B - T) \qquad (2.3.39)$$

où $Q(x_0, y_0, z_0)$ représente la position de la source magnétique singulière et $P(x, y, z)$ le point d'observation, T l'intensité du champ magnétique total, B l'intensité du camp régional par rapport auquel l'anomalie $\Delta T = B - T$ est calculée, $N = -\alpha$ est appelé l'indice structural de la source ; il indique qu'au signe près le degré d'homogénéité α de la source. Pour une structure magnétique 2D l'équation 2.3.39 se réduit à

$$(x - x_0)\partial_x + (z - z_0)\partial_z = N(B - T) \qquad (2.3.40)$$

L'indice structural ou le degré d'homogénéité est un concept valable uniquement pour une source magnétique singulière pour laquelle l'information contenue implicitement dans le signal magnétique est indépendante de sa composition fréquentielle qui dépend par exemple de l'altitude d'observation ou de l'ordre de dérivation du signal magnétique. D'un point de vue théorique, nous pouvons définir cinq types de singularités magnétiques caractérisées par cinq degrés d'homogénéité comme le montre le tableau 1. Toute source magnétique multiple peut se ramener à une de ces singularités par l'application d'un filtre à son signal magnétique (figure 20). Par l'application du filtre, nous modifions la composition fréquentielle du signal magnétique original et l'analyse sera effectuée sur une version dans laquelle la source se comporte de manière équivalente à une des singularités citées dans le tableau 1.

Tableau I. Indice structural N de déconvolution Eulérienne.

Type de source	N
Sphère ou une source compacte (singularité de Dirac à 3D).	3
Ligne horizontale infinie de dipôles (singularité de Dirac à 2D).	2
Contraste très mince (singularité de Heaviside à 2D).	1
Contraste d'extension verticale infinie à 2D.	0
Lame d'extension verticale infinie à 2D.	1

L'insertion de la valeur correcte de N dans les formules 2.3.39 et 2.3.40 est une condition fondamentale pour la résolution correcte des paramètres de position de la source par la déconvolution eulérienne. Récemment, Moreau (1995) et Moreau *et al.* (1997), par l'analyse du champ du potentiel magnétique en utilisant les ondelettes de Poisson réelles ont calculé le degré de l'homogénéité de certaines structures magnétiques (ligne infinie, contraste magnétique fini). Sailhac et al. (2000) ont déterminé le degré de l'homogénéité des même structures en utilisant les ondelettes complexes de Cauchy (voir la partie 3 de ce chapitre sur la transformée en ondelettes). Dans cette section je propose une autre méthode pour estimer le degré de l'homogénéité d'une des quatre singularités 2D citées dans le tableau 1. Cette méthode est basée sur la transformation du signal magnétique en signal analytique où le degré de l'homogénéité peut se calculer au moyen d'un des éléments : l'atténuation locale et la phase locale.

D'après ce que nous avons vu jusqu'à ce point sur l'analyse complexe du champ magnétique total des différents types de structures 2D nous pouvons exprimer en général la représentation spectrale du signal magnétique d'ordre L d'une source singulière quelconque par la formule suivante

$$\begin{aligned}\mathsf{F}_x\left\{\partial_x^{\mathrm{L}} T_s(x)\right\}(k) = A\,\mathrm{sgn}(k)\,k^{\mathrm{L}-\alpha-1}\exp\left\{-ikx_s - (z_0 - z)|k|\right\}\cdots \\ \cdots\exp\left\{i(\mathrm{L}-\alpha)\pi/2\right\}\cdot E(k,d).\end{aligned} \tag{2.3.41}$$

Le terme $E(k,d)$ à valeur complexe est lié à la pente des structures magnétiques infinies et s'exprime comme suit

$$E(k,d) = \begin{cases} 1, & \text{(singularité de Dirac ou de Heaviside)}, \\ \sin(d)\exp\left\{i(d-\pi/2)\mathrm{sgn}(k) + i\pi/2\right\}, & \text{(contact ou lame infinie)}. \end{cases}$$

Par la conversion de l'équation 2.3.41 dans le domaine spatial en intégrant seulement sur les fréquences positives, nous écrivons le signal analytique associé à la dérivée horizontale d'ordre L du champ magnétique d'une singularité par les deux expressions suivantes de l'amplitude locale et de la phase locale

$$|S_\alpha^{\mathrm{L}}(x)| = 4mC_m|E(d)|\cdot\frac{|\sin I_m \sin I_f|}{|\sin I'_m \sin I'_f|}\frac{(\mathrm{L}-\alpha-1)!}{\left[(z_0-z)^2+(x-x_0)^2\right]^{(\mathrm{L}-\alpha)/2}} \tag{2.3.42}$$

$$\varphi_\alpha^{\mathrm{L}}(x) = -I'_f - I'_m + \pi(\mathrm{L}-\alpha)/2 + (\mathrm{L}-\alpha)\tan^{-1}\left[(x-x_0)/(z_0-z)\right] + \arg\left(E(d)\right) \tag{2.3.43}$$

où $E(d) = \begin{cases} 1, & \text{(singularité de Dirac ou de Heaviside)}, \\ \sin(d)e^{id}, & \text{(contact ou lame infinie)}. \end{cases}$.

L'amplitude et la phase locales du signal analytique d'une source magnétique singulière ou localisée présentent donc une forme mathématique générale identique qui ne diffère que par le degré de l'homogénéité α de la source.

L'atténuation locale $\mathrm{a}(x)$ du signal magnétique se définit comme le logarithme de l'amplitude locale du signal analytique associé

$$\mathrm{a}_{\alpha}^{\mathrm{L}}(x) = \log\left\{\left|S_{\alpha}^{\mathrm{L}}(x)\right|\right\} = C_1 - \beta\log(r) \tag{2.3.44}$$

où $C_1 = \log\left[4C_m|E(d)|\dfrac{|\sin I_m \sin I_f|}{|\sin I'_m \sin I'_f|}(L-\alpha-1)!\right]$, $\beta = L-\alpha$ et $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (z_0-z)^2}$

Comme le montre l'équation 2.3.44, l'atténuation locale est linéaire par rapport au logarithme de la distance r. La position horizontale de la source x_0 se déduit de la position de la valeur maximale de l'amplitude locale, et si la profondeur z_0 de la source est connue à priori ; le degré de l'homogénéité se déduit de la pente β de la fonction affine $\mathrm{a}_{\alpha}^{\mathrm{L}}(x)$. Si la profondeur est inconnue, on peut ajuster la linéarité de l'équation 2.3.44 par une méthode de régression linéaire (comme la méthode des moindres carrées) en utilisant une suite de valeurs d'essai z_t. La valeur de z_t qui minimise l'erreur quadratique d² est l'estimation de la profondeur z_0 et α se calcule de la pente β correspondant à cette estimation de profondeur.

Sur la figure 14 la profondeur z_0 (colonne à gauche) et le degré de l'homogénéité α (colonne à droite) sont calculés par la méthode décrite ci-dessus pour les quatre types de singularité définis dans le tableau I : la première rangée correspond à la singularité de Dirac, la seconde à la singularité de Heaviside, la 3ème à un contact infini et la 4ème à une lame infinie. Dans les quatre exemples la source singulière est placée à 3 km de profondeur. L'inclinaison apparente de l'aimantation est -43° et du champ magnétique ambiant -56° ; la pente des structures infinies (contact et lame) est 135°. La série des valeurs théoriques de la profondeur est prise entre 0 et 10 km avec une intervalle de 0.1 km. Les valeurs des profondeurs qui donnent le meilleur ajustement de l'équation 2.3.44, et le degré d'homogénéité déduit de la pente correspondante à cette profondeur sont notées sur les graphes.

Comme le montre la formule 2.3.43, il est possible de calculer également le degré d'homogénéité de la source à partir de la phase locale du signal magnétique. La forme générale de l'atténuation locale et celle de la phase locale d'une source magnétique singulière montrent qu'elles sont en lien étroit avec, respectivement, le potentiel newtonien à 2D $\psi(x)$ et la fonction de flux $\vartheta(x)$ qui forment une paire de la transformée de Hilbert ! (voir section 3.2.1). Dans un système à phase minimale $I'_f + I'_m = (\mathrm{L}-\alpha)\pi/2$ on déduit de cette relation que l'atténuation locale $\mathrm{a}^{\mathrm{L}}(x)$ et la phase locale $\varphi^{\mathrm{L}}(x)$ sont la transformée de Hilbert l'une de l'autre. Cette relation entre les deux composantes reste valable à une constante près même

si la phase du signal magnétique n'est pas minimale. On peut alors écrire les deux expressions suivantes

$$\mathrm{H}\left\{\varphi^{\mathrm{L}}(x)\right\} = -\mathrm{a}^{\mathrm{L}}(x) + C_3 \text{ et } \mathrm{H}\left\{\mathrm{a}^{\mathrm{L}}(x)\right\} = \varphi^{\mathrm{L}}(x) + C_4 \qquad (2.3.45)$$

Les deux termes constants C_3 et C_4 dépendent des paramètres magnétiques directionnelles I'_m, I_m, I'_f et I_f et des paramètres du signal magnétique L et α. La figure 13 est une illustration des relations 2.3.45 pour le signal magnétique d'une source singulière.

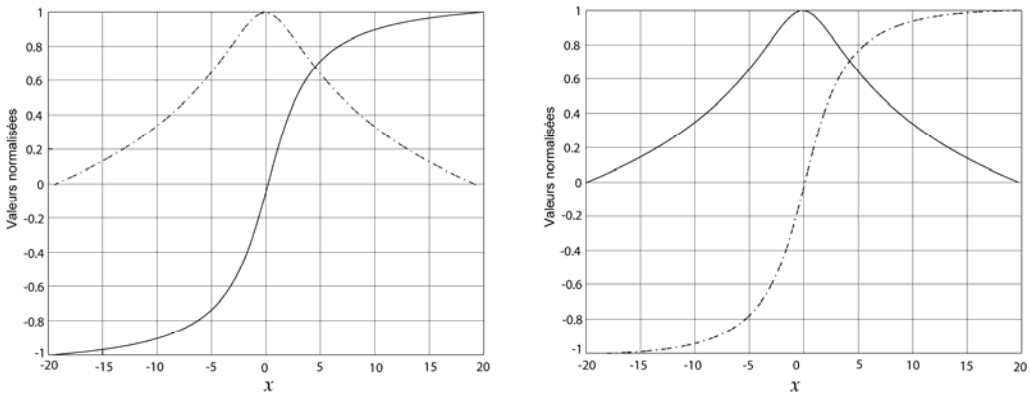


Figure 13. A gauche, représentation de la phase locale du signal magnétique de la source singulière (ligne continue) et de sa transformée de Hilbert en signe négatif (tirets). A droite, représentation de l'atténuation locale du même signal et de sa transformée de Hilbert.

La phase locale contient donc la même information que l'atténuation locale et par conséquent, comme nous l'avons montré au cours de ce chapitre, on peut utiliser la phase non seulement pour extraire l'inclinaison apparente de l'aimantation mais également pour accéder aux même paramètres de la source magnétique singulière habituellement donnés par l'amplitude locale, soit la position et le degré d'homogénéité de la source.

La phase locale (équation 2.3.43) d'une singularité est une fonction affine de la phase φ du potentiel newtonien complexe

$$\varphi_{\alpha}^{\mathrm{L}}(x) = C_2 + \beta \cdot \varphi(x) \text{ . où } \varphi(x) = \left\{\tan^{-1}\left[(x - x_0)/(z_0 - z)\right]\right\} \qquad (2.3.46)$$

La pente et l'intercepte sont donnés par

$$\beta = L - \alpha \text{ , et } C_2 = -I'_f - I'_m + \pi(\mathrm{L} - \alpha)/2 + \arg\left(E(d)\right).$$

La position horizontale de la source x_0, peut être estimer du centre d'anti-symétrie de la phase ou de la position du maxima de l'amplitude locale. Ensuite le degré d'homogénéité peut être estimé de la même manière que pour l'atténuation, soit de la pente β de la ligne droite

(équation 2.3.46) si la profondeur z_0 est connue, soit par une régression linéaire appliquée sur l'équation 2.3.46 pour une série de valeurs d'essai z_t de la profondeur si z_0 est inconnu. Une fois que nous avons déterminé z_0 et α, nous pouvons extraire l'inclinaison apparente de l'aimantation I'_m au moyen de l'intercepte C_2. Notons que pour un contact infini ou une lame infinie, l'extraction de I'_m requière la connaissance à priori de la pente de ces structures.

La figure 15 représente l'analyse par la méthode de la phase des mêmes quatre exemples synthétiques déjà traités par la fonction d'atténuation (figure 14). La profondeur z_0 (colonne gauche), le degré d'homogénéité et l'inclinaison apparente de l'aimantation (colonne droite) sont calculés par la résolution de l'équation 2.3.46 au sens des moindres carrées. La résolution s'est faite pour un intervalle de valeurs théoriques de la profondeur comprises entre 0 et 20 km avec un pas de 0.1 km. Les valeurs des trois paramètres sont notées sur les graphes.

Dans les modèles synthétiques, nous avions utilisé la fonction $g(x)$ basée sur la variation de la fonction d'amplitude locale par rapport à sa valeur maximale pour estimer la profondeur de la source. En fait, cette relation peut s'écrire sous la forme générale suivante pour une source singulière quelconque

$$\beta/2\log\{\mathrm{Ra}(x)\} = \log\{\mathrm{Pa}(x)\} \tag{2.3.47}$$

où $\mathrm{Ra}(x) = \left|S_\alpha^{\mathrm{L}}(x)\right| / \left|S_\alpha^{\mathrm{L}}(x = x_\alpha)\right|$, $\mathrm{Pa}(x) = (x - x_\alpha)^2 / (z_\alpha - z)^2 + 1$.

Il s'agit de l'atténuation de l'énergie du signal magnétique normalisé par rapport à son énergie maximale qui est également linéaire par rapport à l'abscisse. Comme dans l'analyse de la singularité par l'atténuation locale, nous pouvons déduire de l'équation 2.3.47 une régression linéaire pour extraire les paramètres de la source. La figure 16 montre les résultats obtenus avec les mêmes modèles que dans les figures 14 et 15 et les paramètres de chaque type de singularité sont indiqués sur les graphes.

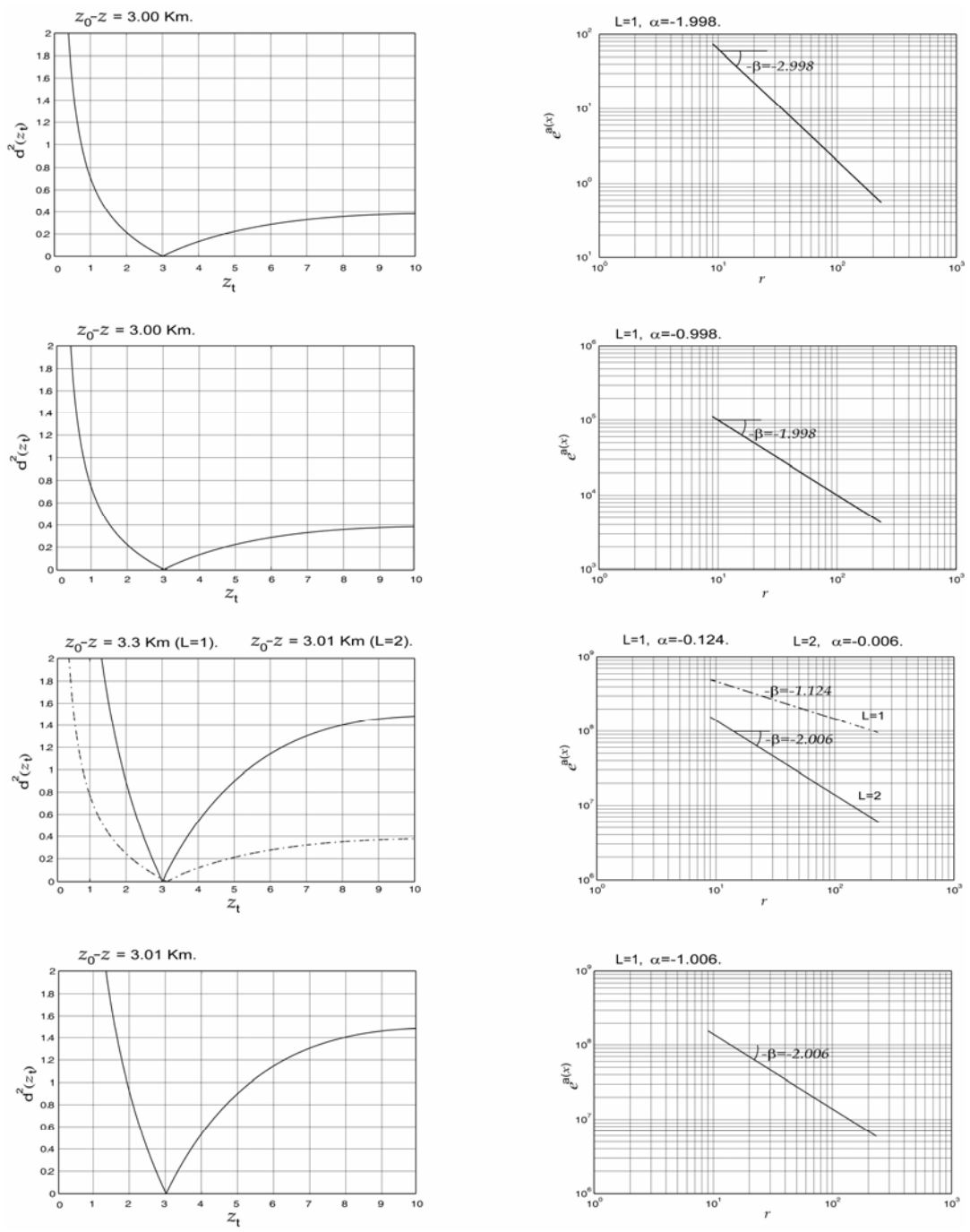


Figure 14. Calcul de la profondeur (colonne gauche) et du degré d'homogénéité (colonne droite) par régression linéaire de la fonction d'atténuation de quatre singularités, de haut en bas : singularité de Dirac, singularité de Heaviside, contact infini, lame infinie.

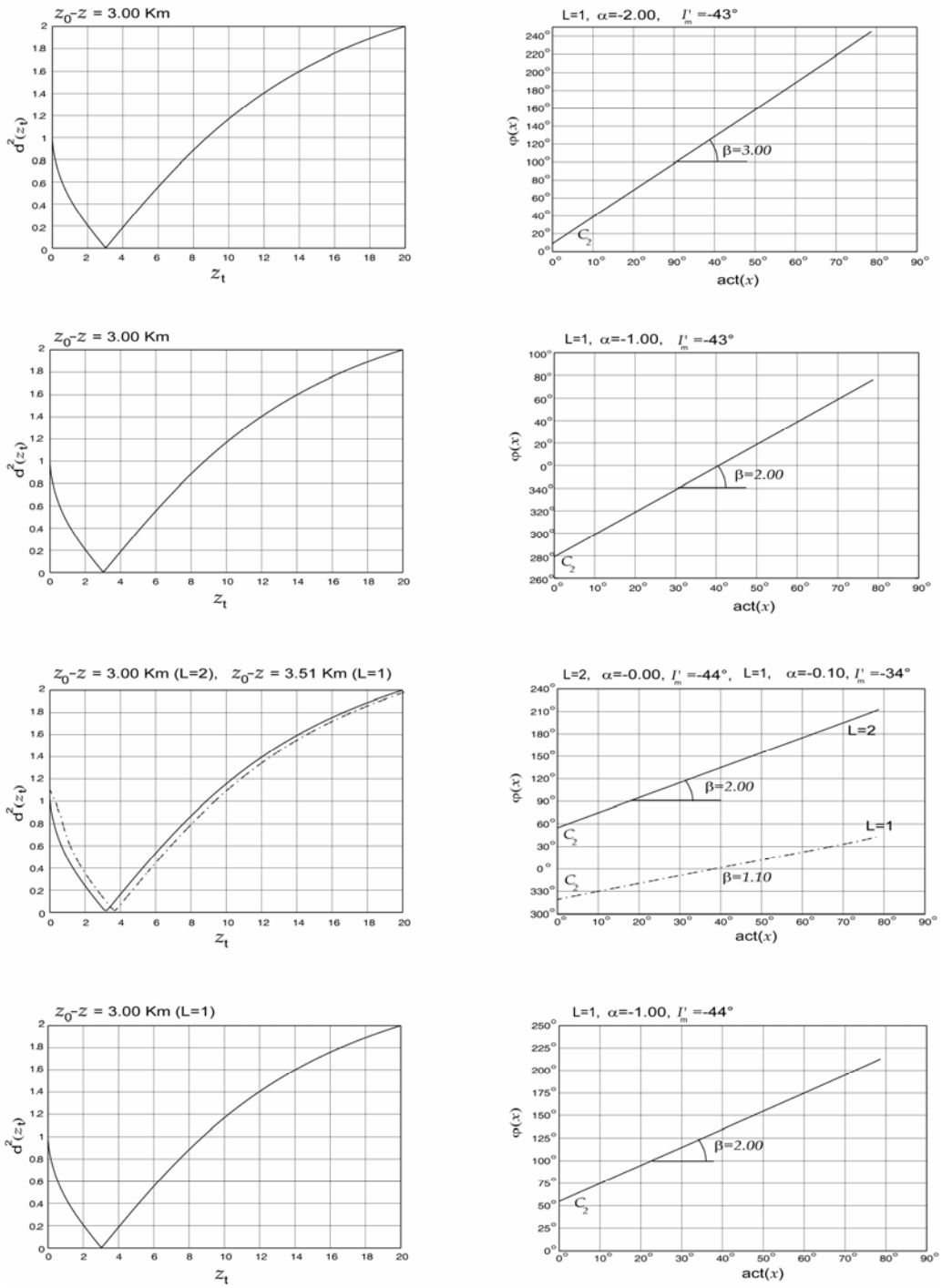


Figure 15. Calcul de la profondeur (colonne gauche) et du degré d'homogénéité (colonne droite) par régression linéaire de la fonction de la phase locale de quatre singularités de haut en bas : singularité de Dirac, singularité de Heaviside, contact infini, lame infinie.

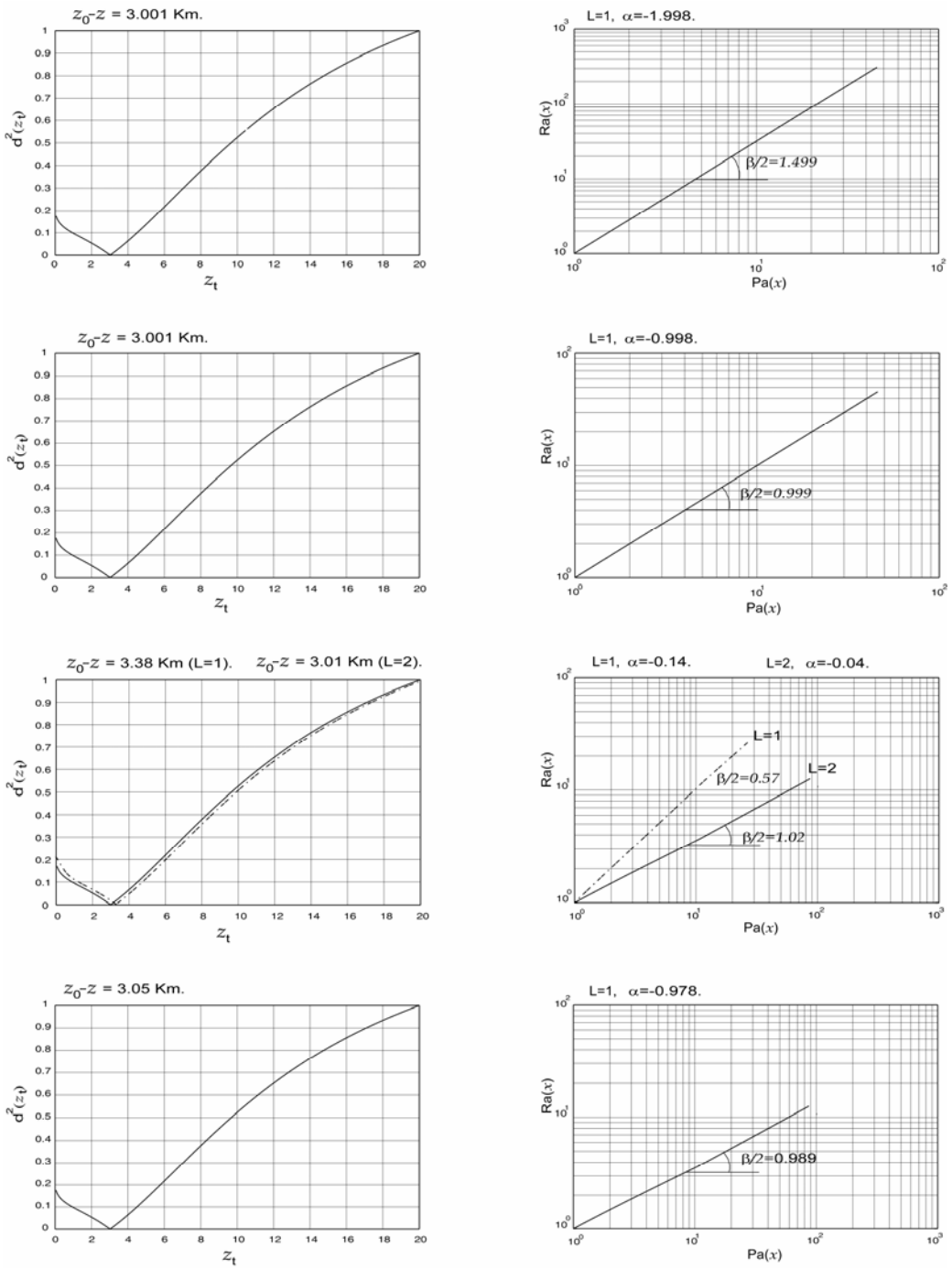


Figure 16. Calcul de la profondeur (colonne gauche) et du degré d'homogénéité (colonne droite) par régression linéaire de la fonction de l'atténuation locale normalisée de quatre singularités de haut en bas : singularité de Dirac, singularité de Heaviside, contact infini, lame infinie.

2.3.4 Calcul de phase par corrélation

Dans l'analyse de la phase locale, nous avons montré que l'inclinaison apparente de l'aimantation d'une source singulière (ou d'une source localisée dans l'espace 2D) peut être estimée à partir de la valeur de cette fonction prise à son centre d'anti-symétrie. Dans cette section nous allons voir que l'amplitude locale peut aussi fournir une méthode simple de l'estimation de cette grandeur. Dans cette optique, reconsidérons la définition du signal analytique d'une source singulière magnétique donné respectivement en terme d'amplitude locale et phase locale par les équations 2.3.42 et 2.3.43. L'expression de ce signal sous forme complexe (partie réelle et partie imaginaire) s'écrit

$$S_\alpha^{\mathrm{L}}(x) = \left|S_\alpha^{\mathrm{L}}(x)\right| \cos\left\{\varphi_\alpha^{\mathrm{L}}(x)\right\} + i\left|S_\alpha^{\mathrm{L}}(x)\right| \sin\left\{\varphi_\alpha^{\mathrm{L}}(x)\right\} \tag{2.3.48}$$

La partie réelle de l'équation 2.3.48 est le signal magnétique-L original de la singularité. Elle s'exprime explicitement dans le domaine spatial par

$$\begin{aligned} T_\alpha^{\mathrm{L}}(x) = 4mC_m\left|E(d)\right| \cdot \frac{\left|\sin I_m \sin I_f\right|}{\left|\sin I'_m \sin I'_f\right|} \frac{(\mathrm{L}-\alpha-1)!}{\left[(z_0-z)^2+(x-x_0)^2\right]^{(\mathrm{L}-\alpha)/2}} \times \cdots \\ \cdots \cos\{-I'_m - I'_f + \arg(E(d)) + \pi(\mathrm{L}-\alpha)/2 + (\alpha-\mathrm{L})\tan^{-1}[(x-x_0)/(z_0-z)]\} \end{aligned} \tag{2.3.49}$$

et la partie imaginaire est l'opposée de la transformée de Hilbert de signal $T_\alpha^{\mathrm{L}}(x)$. Admettons que les conditions suivantes soient remplies

$$\begin{aligned} -I'_f - I'_m + \arg\left(E(d)\right) = -\pi/2. \\ \mathrm{L}-\alpha = 2. \end{aligned} \tag{2.3.50}$$

Alors par une simple manipulation trigonométrique (voir annexe A4) on obtient la propriété suivante

$$\Re\left\{S_\alpha^{\mathrm{L}}(x)\right\} = T_\alpha^{\mathrm{L}}(x) = \frac{1}{(z_0-z)} \partial_x \left|S_\alpha^{\mathrm{L}}(x)\right| \tag{2.3.50}$$

Cette dernière relation indique qu'un signal magnétique d'ordre L vérifiant la relation 2.3.50 est égal à une constante près à la dérivée horizontale première de son amplitude locale. Ainsi si la source est :

- Une singularité de Dirac, l'équivalence est vérifiée pour L=0 c'est à dire pour le champ lui même.
- Une singularité de Heaviside ou une lame infinie, l'équivalence est vérifiée pour L=1, c'est à dire pour la dérivé horizontale première.
- Un contact infini, l'équivalence est vérifiée pour L=2, c'est à dire pour la dérivée seconde horizontale.

Si nous avons une idée du degré d'homogénéité de la localité magnétique, la méthode par corrélation consiste alors à sélectionner l'ordre L de dérivation du signal magnétique de la source qui vérifie la condition $\mathrm{L} - \alpha = 2$ et à translater progressivement la phase de ce signal magnétique d'un pas constant sur l'intervalle [0,360°[. Plus précisément : on considère que l'inclinaison apparente I'_m est inconnue. On l'écrit sous la forme $I'_m = \widetilde{I}'_m + \theta_m$, où $\widetilde{I}'_m$ est l'inclinaison vraie et θ_m la translation appliquée. La translation de la phase affecte uniquement la forme du signal magnétique, la forme de son amplitude locale restant inchangée. Ainsi en calculant à chaque translation le degré de similarité entre le signal magnétique et la dérive horizontale de son amplitude locale, I'_m peut être déduite de la valeur de translation θ_m qui vérifie la relation 2.3.50. Cette valeur, pour une singularité de Dirac ou de Heaviside, sera donnée par : $\theta_m = 3\pi/2 - \widetilde{I}'_m - I'_f$, d'où nous pouvons extraire facilement l'inclinaison apparente de l'aimantation $\widetilde{I}'_m$. Par contre si la source est un contact infini ou une lame infinie la valeur vérifiant la relation 2.3.50 sera donnée par $\theta_m = 3\pi/2 - \widetilde{I}'_m - I'_f + d$, dans ce cas la pente de la source d doit être connue à priori.

Dans le cas où l'ordre de dérivation du signal magnétique ne vérifie pas la condition $\mathrm{L} - \alpha = 2$, la méthode de corrélation reste valable pour extraire l'inclinaison apparente. En fait, dans ce cas, la relation 2.3.50 entre le signal magnétique d'ordre L et la dérivée horizontale de son amplitude locale ne sera pas vérifiable exactement. La plus petite distance entre les deux fonction sera cependant obtenue avec $\theta_m = (\mathrm{L} - \alpha)\pi/2 - I'_m - I'_f - d$. De la détermination de cette valeur nous pouvons extraire l'inclinaison apparente de l'aimantation (figure 17).

Si la source magnétique est multiple, la méthode est applicable directement seulement pour les deux types de source correspondant à un contact vertical ou une lame verticale. Dans les deux cas, les spectres des singularités élémentaires (voir section 2.3.4) interviennent dans le signal magnétique par une phase identique. L'extraction de l'inclinaison apparente de l'aimantation pour ces deux structures magnétiques sera un processus identique à celui d'une singularité de Heaviside (pour le contact) et d'une singularité de Dirac (pour la lame). A part ces deux types de sources multiples, l'application directe de la méthode de corrélation sur le signal magnétique d'une source multiple n'est plus généralement exploitable et un filtre doit être appliqué sur le signal magnétique pour éliminer les composantes fréquentielles liées aux détails géométriques de la source.

La figure 17 illustre l'application de la méthode de corrélation aux quatre types de singularité décrites précédemment. Le coefficient de corrélation ρ quantifie la similarité entre deux fonctions (signal magnétique et son amplitude), Dans la colonne de droite nous avons tracé le degré de similarité en fonction de θ_m, où θ_m varie avec un pas de 1° dans l'intervalle [0°,360°). Les coefficients de corrélation représentés en trait plein sont calculés pour un signal magnétique d'ordre L vérifiant la relation $\mathrm{L} - \alpha = 2$. Dans ce cas le coefficient de corrélation prend une valeur égale à 1 quand la valeur de translation de la phase introduit dans le signal est $\theta_m = 3\pi/2 - \widetilde{I}'_m - I'_f + d$. Pour cette valeur de la translation, le signal

magnétique et la dérivée de son amplitude sont présentés dans la colonne gauche de la figure par des traits pleins exactement superposés. La même opération de corrélation est répétée (en lignes pointillées ou tiretés) pour des signaux magnétiques d'ordre L ne satisfaisant pas la relation $\mathrm{L} - \alpha = 2$. Dans ce cas, les coefficients de corrélation passent par une maximum inférieur à 1. La valeur de translation de la phase correspondant à ce maximum est donnée par la relation $\theta_m = (\mathrm{L} - \alpha)/\pi - I'_m - I'_f - d$ qui permet de calculer l'inclinaison apparente de l'aimantation à condition que α soit connu.

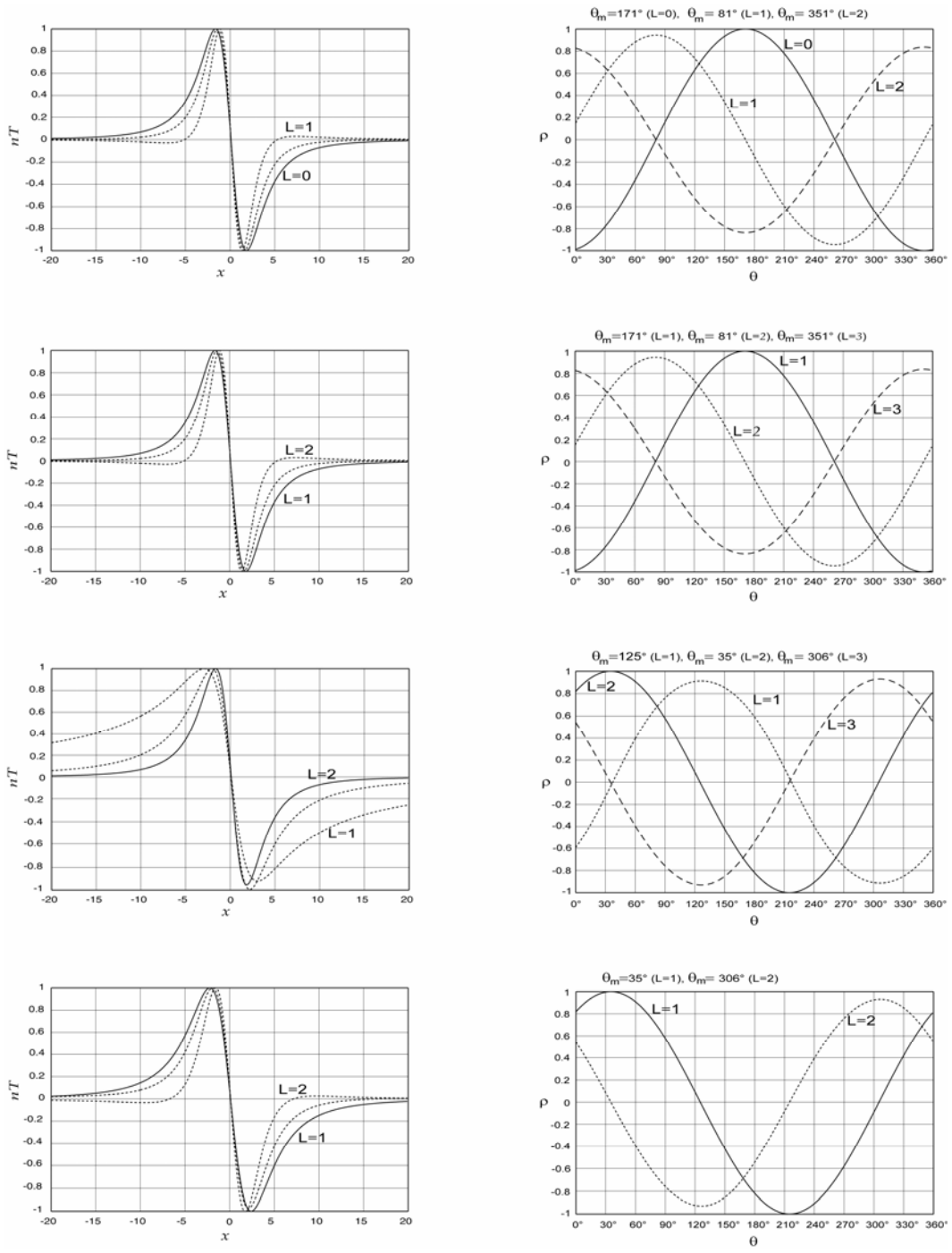


Figure 17. Estimation de l'inclinaison apparente de l'aimantation par le calcul du coefficient de corrélation entre le signal magnétique-L et la dérivée horizontale de son amplitude:

2.4 Transformation en ondelettes continue

2.4.1 Théorie et principe de l'analyse en ondelettes

La transformation en ondelettes continue d'un signal réel $\{\mathrm{f}(x), x \in \mathrm{R}\}$ revient à décrire ce signal, dans un espace à deux dimensions, par un ensemble des coefficients $\{W(b,a);\ \mathrm{a}, b \in \mathrm{R}\}$ où b et a sont deux paramètres réels continus, a étant positif. Les $W(b,a)$ sont générés par la projection de $\mathrm{f}(x)$ sur une famille de fonctions ondelettes particulières $\psi_{a,b}(x)$. Cette opération correspond analytiquement au produit scalaire suivant

$$W_{\psi_{b,a}|\mathrm{f}}(b,a) = \left\langle \psi_{b,a} \middle| \mathrm{f} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi}_{b,a}(x)\mathrm{f}(x)\, dx \tag{2.4.1}$$

La barre indiquant le complexe conjugué.
La famille d'ondelettes $\psi_{a,b}(x)$ est générée à partir d'une seule fonction $\psi(x)$, appelée l'ondelette *mère* ou l'ondelette analysante, à laquelle on applique deux opérateurs : un opérateur de translation T_b caractérisé par le paramètre de translation b et un opérateur de changement d'échelle D_a caractérisé par le paramètre de dilatation a, soit

$$\psi_{b,a}(x) = T_b D_a \psi(x) = \frac{1}{a}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right) \text{avec} \quad \begin{array}{c} T_b : \psi(x) \to \psi(x-b) \\ D_a : \psi(x) \to (1/a)\psi(x/a) \end{array} \tag{2.4.2}$$

Pour que la fonction $\psi(x)$ puisse représenter parfaitement l'information contenue dans $f(x)$, une condition d'admissibilité est imposée sur l'ondelette mère $\psi(x)$. Cette condition s'exprime dans le domaine spectral par la formule suivante

$$0 < C_{\pm} = \int_{0}^{+\infty} \frac{|\tilde{\psi}(\pm k)|}{k} dk < +\infty \tag{2.4.3}$$

La condition 2.4.3 implique que la transformée de Fourier $\tilde{\psi}(k)$ de l'ondelette mère à la fréquence continue, $k = 0$, doit être nulle, soit, $\psi(0) = 0$. Ceci implique en particulier deux conséquences importantes sur la nature de l'ondelette: La première est que les ondelettes d'analyse doivent posséder un spectre de type passe-bande. La seconde que $\psi(x)$ doit être à moyenne nulle, $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)dx = 0$.

L'ondelette d'analyse est donc une fonction d'énergie finie (une fenêtre spatiale) possédant un caractère oscillatoire. Ces propriétés font de la transformée en ondelette une représentation complète, stable et redondante du signal original $\mathrm{f}(x)$; en particulier la transformée en

ondelettes est inversible et nous pouvons reconstruire le signal original à partir de ses coefficients en ondelettes sans perte d'information.

L'ondelette d'analyse pourrait être une fonction réelle comme l'*ondelette de Poisson* ou l'*ondelette de Haar* ou une fonction complexe progressive (ne contenant que des fréquences positives) ou régressive (ne contenant que des fréquences négatives) comme l'*ondelette de Cauchy* ou l'*ondelette de Morlet*.

La transformée en ondelettes satisfait les conditions de covariance suivante par rapport à la translation et à la dilatation

$$W_{\psi_{b,a}|T_{b'}\mathrm{f}}(b,a) = W_{\psi_{b,a}|\mathrm{f}}(b-b',a)$$

$$W_{\psi_{b,a}|D_\lambda \mathrm{f}}(b,a) = \frac{1}{\lambda} W_{\psi_{b,a}|\mathrm{f}}\left(\frac{b}{\lambda},\frac{a}{\lambda}\right) \tag{2.4.4}$$

D'après l'égalité 2.4.2 , la deuxième égalité, 2.4.4 découle de la nécessité que $\mathrm{f}(x)$ doit être homogène satisfaisant la relation : $\mathrm{f}(\lambda x) = \lambda^\alpha \mathrm{f}(x),\ \ \alpha, \lambda \in \mathrm{R}$ et $\lambda > 0$.

Prenant en compte des conditions de covariance, 2.4.4, la transformée en ondelettes de la fonction homogène $\mathrm{f}(x)$ s'écrit

$$W_{\psi_{b,a}|\mathrm{f}}(\lambda b, \lambda a) = \lambda^\alpha W_{\psi_{b,a}|\mathrm{f}}(b,a) \ \Rightarrow\ W_{\psi_{b,a}|\mathrm{f}}(b,a) = a^\alpha W_{\psi_{b,a}|\mathrm{f}}(b/a,1) \tag{2.4.5}$$

La relation 2.4.5 montre que les coefficients en ondelettes d'une fonction homogène, le long d'une droite passant par l'origine, se déduisent de leurs valeurs en un point de cette droite par la loi de puissance λ^α.

La reconstruction du signal original $\mathrm{f}(x)$ à partir de sa transformée en ondelettes se déroule par une opération inverse à 2.4.1 qui s'applique sur le site entier des coefficients $W(b,a)$ assurant de cette façon une stabilité de l'inversion. En général, nous écrivons la formule de la reconstruction par l'expression suivante

$$\mathrm{f}(x) = \int_0^{+\infty} da \int_{-\infty}^{+\infty} a^{-2} \psi^{at}\big((x-b)/a\big) W_{\psi_{b,a}|\mathrm{f}}(b,a)\, db \tag{2.4.6}$$

où l'ondelette de reconstruction $\psi^{at}(x)$ est souvent dérivée de l'ondelette mère analysante $\psi(x)$, en s'appuyant sur la condition d'admissibilité donnée par l'équation 2.4.3

$$\psi^{at}(x) = C_-^{-1} \int_{-\infty}^{0} e^{2\pi i k x} \tilde{\psi}(k) dk + C_+^{-1} \int_0^{+\infty} e^{2\pi i k x} \tilde{\psi}(k) dk \tag{2.4.7}$$

Dans le cas où on utilise des ondelettes réelles pour l'analyse du signal et en raison de la symétrie hermitienne de leur spectre $\tilde{\psi}(+k) = \tilde{\psi}(-k)$, la formule 2.4.7 se réduit à la forme

$$\psi^{at}(x) = 2C_{+}^{-1}\int_{0}^{+\infty} e^{2\pi ikx}\psi(k)dk \qquad (2.4.8)$$

Dans le cas où l'ondelette d'analyse est progressive ou régressive, l'intégration sur les valeurs positives de l'échelle a dans la formule de la reconstruction 2.4.6 ne permet pas de retrouver le signal original. On doit donc nécessairement intégrer à la fois sur les valeurs positives et négatives de a.

La condition d'admissibilité devient dans ce cas

$$0 < C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\tilde{\psi}(\pm k)|^2}{k} dk = C_{-} + C_{+} < +\infty$$

et la formule de la reconstruction devient

$$\mathrm{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} da \int_{-\infty}^{+\infty} |a|^{-2} \psi^{at}\big((x-b)/a\big) W_{\psi_{b,a}|\mathrm{f}} db$$

2.4.2 La transformée en ondelettes en analyse du champ de potentiel

Dans l'interprétation des prospections magnétiques, deux ondelettes mères particulières sont principalement utilisées pour analyser le champ magnétique : le *noyau de Poisson* et sa version analytique le *noyau de Cauchy*. Leur particularité vient de leur relation très étroite avec les propriétés des champs de potentiels. Ainsi, l'analyse du champ magnétique par ces deux ondelettes permet d'accéder analytiquement à l'information contenue implicitement dans le signal magnétique et d'estimer certains paramètres de la source. Leur application comme ondelette d'analyse du champ magnétique correspond à un prolongement respectivement harmonique réel et analytique dans le demi-plan supérieur $H = \{(x,a) \mid a, x \in \mathrm{R}, a > -z_0\}$ où z_0 est la profondeur de la source magnétique. Nous donnons ici une idée sommaire du principe de l'analyse du champ magnétique par ces deux ondelettes afin de relier l'analyse du champ magnétique par la méthode du signal analytique avec la présente méthode.

Remarque : dans la section 2.4.2, pour nous conformer aux habitudes de signes utilisées dans la transformée en ondelettes, nous prenons l'axe $0\vec{e}_z$ orienté vers le haut.

2.4.2.1 Analyse par l'ondelettes de Poisson

Les ondelettes de Poisson ou les ondelettes multipolaires d'ordre L sont définies respectivement comme la dérivée horizontale ou la dérivée verticale de premier ordre de la

dérivée horizontale d'ordre L-1 du noyau de Poisson. Cette opération génère deux classes d'ondelettes réelles qui sont les *ondelettes de Poisson horizontales* et les *ondelettes de Poisson verticales* dont la définition analytique est respectivement

$$\psi^{\mathrm{L}}(x) = \partial_x^{\mathrm{L}} P(x)\,,\ \vartheta^{\mathrm{L}}(x) = \partial_z \partial_x^{\mathrm{L-1}} P(x).$$

où $\mathrm{P}(x)$ est le noyau de Poisson (voir la définition de noyau de Poisson dans le paragraphe 2.2.2).

L'application respective de ces deux types d'ondelettes à un champ dérivant d'un potentiel, comme le champ magnétique $T(x, z = \text{constante})$, nous conduit à écrire les coefficients d'analyse en ondelettes par les deux formules suivantes [Moreau *et al.* 1997]

$$W_{\psi^{\mathrm{L}}_{x,a}|T}(x,a) = a^{\mathrm{L}} \partial_x^{\mathrm{L}} T(x, z+a)$$

$$W_{\vartheta^{\mathrm{L}}_{x,a}|T}(x,a) = a^{\mathrm{L}} \partial_z \partial_x^{\mathrm{L-1}} T(x, z+a)$$

Dans le cas où la fonction analysée est un signal magnétique (ou gravimétrique), le paramètre de dilatation a est équivalent à l'altitude à laquelle le champ est prolongé. De ce point de vu, nous pouvons regarder les coefficients d'analyse par l'ondelettes réelle de Poisson comme une dérivée du signal magnétique original prise à différentes altitudes.

En utilisant ce type d'ondelette dans l'analyse du champ d'une singularité gravimétrique, Moreau et al. (1997) ont établi une relation fondamentale entre les coefficients en ondelette calculés pour deux échelles différentes a' et a'' permettant d'exprimer explicitement les paramètres de position et le degré d'homogénéité de la singularité sous la forme

$$W_{\psi^{\mathrm{L}}_{x,a'}|T(x,z=0)}(x,a') = \left(\frac{a'}{a''}\right)^{\mathrm{L}} \left(\frac{a''+z_0}{a'+z_0}\right)^{\mathrm{L}-\alpha} \times W_{\psi^{\mathrm{L}}_{x,a''}|T(x,z=0)}\left(x\frac{a''+z_0}{a'+z_0}, a''\right) \qquad (2.4.9)$$

avec $\mathrm{L} > 0$ pour que la condition de l'admissibilité soit satisfaite.
La relation 2.4.9 est définie dans le demi-plan supérieur de R^2, soit $H = \{(x,a) \mid a, x \in \mathrm{R}, a > -z_0\}$, elle montre que l'on peut calculer les coefficients en ondelettes au point (x, a') connaissant les coefficients au point $\left(x(a''+z_0)/(a'+z_0), a''\right)$. L'évolution des coordonnées avec l'échelle montre que le signal du potentiel analysé par l'ondelette de Poisson se répercute sur des lignes droites passant par la source. En fait, $x'(a'+z_0) = x(a''+z_0)$ est l'équation d'une demi-droite qui passe par la source $(0,-z_0)$. Sur cette demi-droite, les coefficients en ondelettes varient d'un facteur $\left(a'/a''\right)^{\mathrm{L}} \left((a''+z_0)/(a'+z_0)\right)^{\mathrm{L}-\alpha}$. Sur l'image des coefficients en ondelettes du champ, nous pouvons distinguer des lignes caractéristiques qui sont particulièrement utilisées dans l'analyse du signal magnétique. Il s'agit des lignes de maxima (ou les arêtes de maxima) de la

transformation. Suivant ces lignes les coefficients $W(a,x)$ définissent des valeurs locales maximales ou des valeurs locales minimales (figure 18). L'avantage de l'utilisation de telles lignes dans l'analyse provient :

- de la facilité de leur détection sur l'image des coefficients de la transformation ;
- du bon rapport signal/bruit maximal dans le cas de données réelles bruitées.

En utilisant les arêtes de maxima de la transformation, nous pouvons déterminer la position horizontale et verticale de la source singulière ou locale par deux méthodes :

Une méthode géométrique basée sur la propriété fondamentale de la transformée en ondelettes à savoir l'évolution en structure conique (lignes droites passant par la source) de ces coefficients. Avec cette méthode la position de la source correspond au point de convergence des arêtes, situées dans le demi-espace des dilatations négatives (figure 18). Il est évident que cette méthode requiert l'existence d'au moins deux lignes de maxima. Cette condition peut être assurée facilement en choisissant un ordre approprié de l'ondelette d'analyse, caractérisée par un nombre suffisantes de moments nuls, pour produire plusieurs arêtes.

Une méthode analytique, avec laquelle nous pouvons localiser la source verticalement à partir de l'expression analytique des arêtes de la transformation pour des sources particulières, en effectuant un ajustement par moindres carrées des lignes de maxima déterminées numériquement, par rapport à leurs expressions théoriques [Moreau 1995].

Une fois que nous avons déterminé la profondeur de la source z_0, son degré d'homogénéité α peut être estimé à partir des logarithmes des coefficients en ondelettes pris le long d'une des lignes de maxima

$$\log\left\{\left|W(b,a)\right| / a^{\mathrm{L}}\right\} = -\beta \log\left(z_0 + a\right) \qquad (2.4.10)$$

Cette dernière relation est linéaire par rapport à a avec une seule inconnue la pente $\beta = \mathrm{L} - \alpha$, Sa résolution par rapport à β pour un ordre L donné de l'ondelette nous permet d'extraire le degré d'homogénéité.

La figure 18 représente l'analyse en ondelettes du champ magnétique de la ligne infinie de dipôles traitée dans l'exemple au paragraphe 2.3. L'ondelette utilisée dans cette analyse est l'ondelette de Poisson horizontale de second ordre L=2 : (a) Les coefficients en ondelettes du champ magnétique (b) où les lignes de maxima des coefficients (en lignes continues) convergent dans le demi-plan inférieur vers la position de la source. (c) illustration de l'évolution des coefficients en ondelettes le long de la deuxième arête à gauche en fonction de l'échelle a. (d) illustration de la relation 2.4.10 sur une échelle log-log pour la même arête présentée sur le graphe (c), la pente $\beta = \alpha + \mathrm{L}$ de cette ligne permet d'extraire le degré de l'homogénéité α de la source (notée au-dessus du graphe).

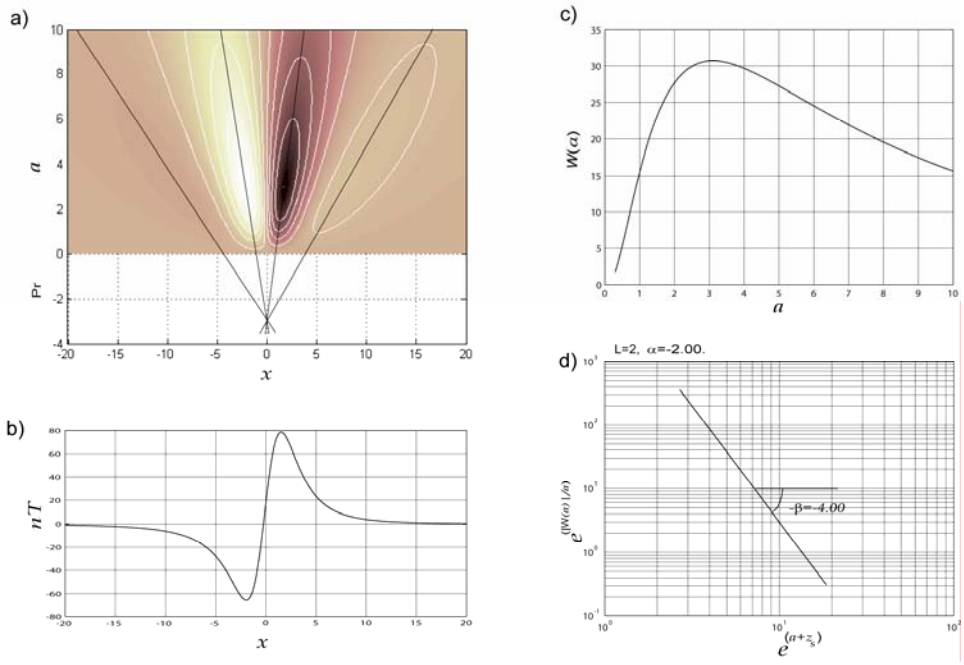


Figure 18. Analyse du champ magnétique d'une singularité de Dirac par l'ondelette horizontale de Poison de second ordre. a) les coefficient en ondelettes et les ligne de maxima (lignes continues), b) le champ de la singularité, c) les coefficients de la deuxième ligne de maxima à droite utilisée pour le calcul de degré d'homogénéité de la source sur le graphe d).

Pour une source magnétique non singulière, les ondelettes de Poisson, grâce à leurs propriétés, se comportent comme un filtre harmonique du signal champ et à partir d'une certaine échelle la source se comporte comme une source localisée. A partir de cette échelle les coefficients de la transformation pourront fournir des informations significatives faciles à interpréter, sur la position et l'homogénéité de la source.

2.4.2.2 Analyse par ondelettes complexes

Les ondelettes complexes sont des fonctions progressives proportionnelles aux ondelettes de Cauchy [Holschneider, 1995]. Leur expression spatiale générale est

$$g(x) = \frac{e^{i\pi(\mathrm{L}+1)}}{\pi} \frac{i\Gamma(\mathrm{L}+1)}{(x+i)^{\mathrm{L}+1}} \qquad \mathrm{L} > 0 \tag{2.4.11}$$

La fonction gamma Γ se définit en fonction de la variable complexe ζ par

$$\Gamma(\zeta) = \int_0^\infty dx\, x^{\zeta-1} e^{-x}\ ,\ \Re\{\zeta\} > 0$$

Le scalaire L est l'ordre de l'ondelette, c'est à dire l'ordre de la dérivation du noyau de Cauchy. Comme conséquence de la relation de Parseval $\langle \psi | \mathrm{f} \rangle = 1/2\pi \langle \tilde{\psi} | \tilde{\mathrm{f}} \rangle$, indiquant la conservation du produit scalaire par la transformée de Fourier, il est possible d'écrire les coefficients d'analyse par l'ondelette complexe dans le domaine de fréquence.

En effet, la transformée de Fourier de cette classe d'ondelettes est donnée par

$$\tilde{g}(k) = \begin{cases} (ik)^{\mathrm{L}} e^{-k} & k > 0 \\ 0 & k \le 0 \end{cases} \tag{2.4.12}$$

L'application du opérateur de translation et de dilatation 2.4.2 sur l'ondelette peut s'écrire dans l'espace de Fourier

$$T_{x_0} : \psi(x) \to \psi(x_0 - x) \overset{\text{T.F.}}{\Leftrightarrow} \mathsf{F}_x\{T_{x_0}\psi(x)\} = (ik)^{\mathrm{L}} \exp\{-k(ix_0 + 1)\},$$

$$D_a : \psi(x) \to \frac{1}{|a|}\psi(x/a) \overset{\text{T.F.}}{\Leftrightarrow} \mathsf{F}_x\{D_a\psi(\mathrm{x})\} = a^{\mathrm{L}}(ik)^{\mathrm{L}} \exp\{-ak\}, \qquad k > 0 \tag{2.4.13}$$

Nous avons donc $\tilde{\psi}_{b,a}(k) = \tilde{\psi}(ak)e^{-ibk}$.

Une transformation élémentaire permet de considérer les coefficients de la transformée par ondelettes d'une fonction comme le résultat d'un produit de convolution entre $\mathrm{f}(x)$ et une version dilatée de la symétrisée de l'ondlette mère ; soit :

$$W_{\psi_a|\mathrm{f}}(.,a) = \langle \psi_a | \mathrm{f}(.) \rangle = \overline{\psi}_a(-x) * \mathrm{f}(.)$$

Du théorème du produit de convolution et des propriétés de transposition et de conjugaison dans l'espace de Fourier [Roddier 1978], il vient

$$\mathsf{F}_x\{W_{\psi_a|\mathrm{f}}\}(k,a) = \overline{\psi}(ak) \cdot \tilde{\mathrm{f}}(k) \tag{2.4.14}$$

De l'expression générale 2.3.41, nous déduisons l'expression générale dans l'espace de Fourier de l'anomalie magnétique, (L=0), d'une source singulière par :

$$\mathsf{F}_x\{T(x)\}(k) = A\,\mathrm{sgn}(k)\,k^{\alpha-1} \exp\{-ikx_0 - (z_0 - z)|k|\} \exp\{-i\alpha\pi/2\} \cdot E(k,d) \tag{2.4.15}$$

Des équations 2.4.12 et 2.4.14, on déduit les coefficients de l'analyse par ondelettes de Cauchy de l'anomalie magnétique d'une source singulière (ou localisée) peuvent être exprimés dans l'espace de Fourier par

$$\mathsf{F}_x\{W_{g_a|T(\cdot,z=0)}\}(k,a) = \begin{cases} a^{\mathrm{L}} A k^{\mathrm{L}-\alpha-1} e^{i(\mathrm{L}-\alpha)\pi/2} e^{\{-ikx_0 - k(a+z_0-z)\}} E(d) & k > 0 \\ 0 & k \le 0 \end{cases} \tag{2.4.16}$$

où $\{A = A(k), E(d) = E(k,d), \quad \text{pour } k > 0\}$.

L'application de la transformée de Fourier inverse à l'équation 2.4.16 nous conduit à écrire les coefficients de la transformation de l'anomalie par l'ondelette complexe en termes d'amplitude et de phase respectivement par les deux formules

$$|W_{g_a|T}|(x,a) = C_m a^{\mathrm{L}} \frac{|\sin I_m \sin I_f|}{|\sin I'_m \sin I'_f|} \frac{(\mathrm{L}-\alpha-1)!}{[(a+z_0-z)^2 + (x-x_0)^2]^{(\mathrm{L}-\alpha)/2}} \cdot |E(d)| \tag{2.4.17}$$

$$\arg\left(W_{g_a|T}\right)(x,a) = -I'_m - I'_f + (\mathrm{L}-\alpha)\tan^{-1}\frac{x-x_0}{a+z_0-z} + (\mathrm{L}-\alpha)\frac{\pi}{2} + \arg\left(E(d)\right) \tag{2.4.18}$$

Cette représentation indique que l'analyse du champ magnétique par l'ondelette de Cauchy n'est autre que la transformation du champ en signal analytique pris sur différentes altitudes et multipliée par le facteur de *conservation de l'énergie* a^{L}. Par conséquent, les coefficients de cette transformation peuvent être exprimés en termes complexes par la combinaison suivante entre les coefficients en ondelettes réelles, horizontale et verticale de Poisson [Moreau, 1995]:

$$W_{g_a|T}(x,a) = W_{\psi_a|T}(x,a) - iW_{\vartheta_a|T}(x,a) \tag{2.4.19}$$

Il est évident, d'après l'équation 2.4.17 que les coefficients en amplitude constituent, dans le demi-plan supérieur $H = \{(x,a) \mid a, x \in \mathrm{R}, a > z_0\}$, une fonction symétrique par rapport à une ligne d'énergie maximale localisée sur la source magnétique singulière (figure 19). L'abscisse de cette ligne de maxima permet alors de localiser de façon unique l'abscisse de la source (une propriété fondamentale de l'amplitude du signal analytique). Les coefficients en amplitude le long de la ligne de maxima sont exprimés par

$$|W_{g_a|T}|(x = x_0, a) = C_m a^{\mathrm{L}} \frac{|\sin I_m \sin I_f|}{|\sin I'_m \sin I'_f|} \frac{(\mathrm{L}-\alpha-1)!}{(a+z_0-z)^{\mathrm{L}-\alpha}} \cdot |E(d)|$$

et la fonction de l'atténuation locale, le logarithme d'amplitude, en fonction de l'altitude sur cette ligne sera donnée par :

$$\mathrm{at}(x = x_0, a) = \log\left\{\frac{|W_{g_a|T}|(x = x_0, a)}{a^{\mathrm{L}}}\right\} = \log\{C\} - \beta\log(a+z_0-z) \tag{2.4.20}$$

L'atténuation 2.4.20 est une fonction linéaire du logarithme de la distance entre la source et le point d'analyse. La pente et l'intercepte sont respectivement

$$\beta = \mathrm{L} - \alpha$$

$$\log\{C\} = \log\{C_m(\mathrm{L} - \alpha - 1)![\,|\sin I_m \sin I_f|/|\sin I'_m \sin I'_f|\,]\cdot|E(d)|\}$$

De la même manière que dans le cas du signal analytique, nous pouvons extraire la profondeur z_0 de la source et son degré d'homogénéité α par la résolution de l'équation 2.4.20 au sens des moindres carrés pour une valeur fixée de la profondeur z_0 (figure 19).

Quant aux coefficient de phase 2.4.18, ils constituent, dans le demi-plan supérieur $\{H\}$, des lignes droites d'égale phase convergentes à la position de la source (figure 18). Cette propriété de la phase pourrait être un moyen facile pour déterminer géométriquement la position de la source. Pour un type de singularité donné, l'inclinaison apparente de l'aimantation de la source peut être obtenue à l'aide de la ligne d'égale phase centrale dont l'expression est

$$\arg(W_{g_a|T})(x = x_0, z) = -I'_m - I'_f + (\alpha + \mathrm{L})\frac{\pi}{2} + \arg(E(d))$$

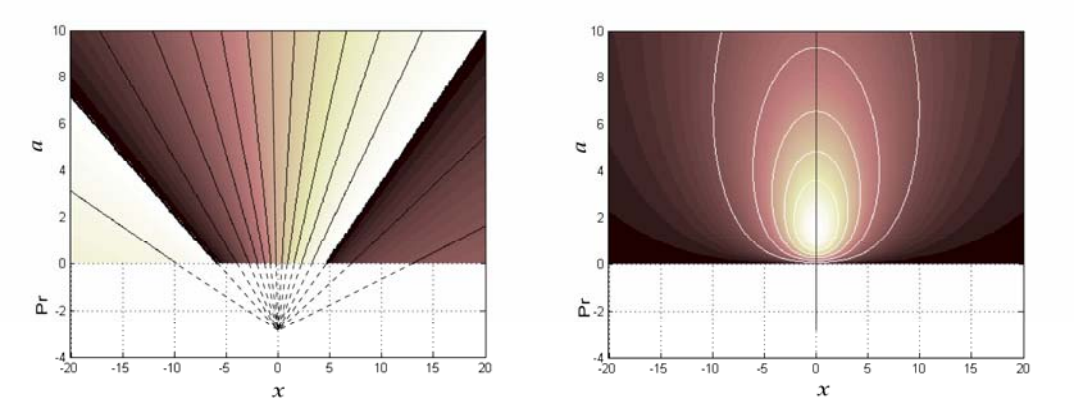


Figure 19. Analyse du champ magnétique d'une singularité de Dirac par l'ondelette de Cauchy de premier ordre : à gauche les coefficients en phase ; à droite les coefficients en l'amplitude.

Pour des sources non localisées leur caractérisation, à partir des lignes de maximum des coefficients en ondelettes complexes, peut être obtenue pour des facteurs d'échelle a suffisamment grands pour que la source apparaisse localisée dans l'espace [Sailhac, 1999 ; Sailhac et al. 2000]. En général, toute structure magnétique 2D non localisée dans l'espace tend, pour a assez grand par rapport à ses dimensions géométriques, à se comporter selon deux types de singularité : une singularité de Dirac pour une source compact ou une singularité de Heaviside pour un milieu magnétique avec contraste. Mais dans l'analyse des

données réelles notre choix de l'échelle d'analyse est contrôlé par l'interférence de l'anomalie des sources magnétiques voisines. Cette interférence devient en général d'autant plus importante que l'échelle est plus grande. Dans de telles situations, l'analyse par ondelettes devrait être limitée à une échelle au-delà de laquelle la perturbation introduite par les sources voisines devient importante.

Si le signal magnétique est très influencé par les sources voisines ou si nous cherchons à caractériser une singularité infinie (contact ou lame infinie), il est préférable de procéder à l'analyse par ondelettes sur des petites échelles pour lesquelles le signal sera dominé par des composantes fréquentielles relativement propres à la source cherchée. Dans de telles situations nous pouvons donner au paramètre de dilatation a des valeurs négatives mais toujours au-dessus de la source ou encore nous pouvons augmenter l'ordre de l'ondelette d'analyse (figure 20). Cependant, dans ces deux opérations nous devons faire attention au rapport signal/bruit car le prolongement vers le bas ou l'augmentation de l'ordre de l'ondelette (ordre de dérivation) conduisent à l'amplification des bruits composés essentiellement de hautes fréquences.

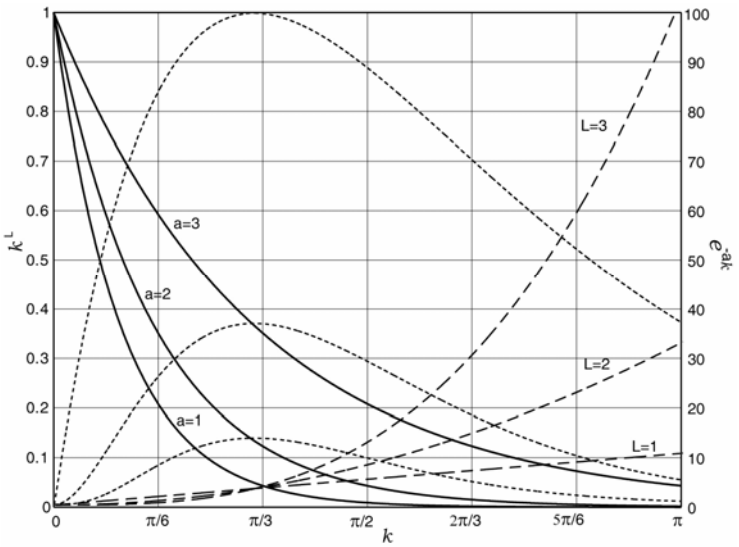


Figure 20. La fonction de transfert du noyau de Poisson pour différentes altitude a (lignes continues) et la fonction de transfert de la dérivée horizontale de différent degrés L (lignes en tiretés) et le produit des deux fonction (lignes en pointillés).

La figure 21 illustre des exemples synthétiques du calcul du degré d'homogénéité et de la profondeur par la solution de l'équation d'atténuation 2.4.20 au sens des moindres carrées. Les exemples correspondent aux quatre singularités abordées à travers ce chapitre.

L'ondelette de Cauchy utilisée dans l'analyse est de premier ordre L=1 pour la singularité de Dirac (première rangée) et la singularité d'Heaviside (2ème rangée), et de deuxième ordre L=2 pour le contact infini (3ème rangée) et la lame infinie (4ème rangée). Les résultats de l'analyse sont notés sur les graphes respectifs.

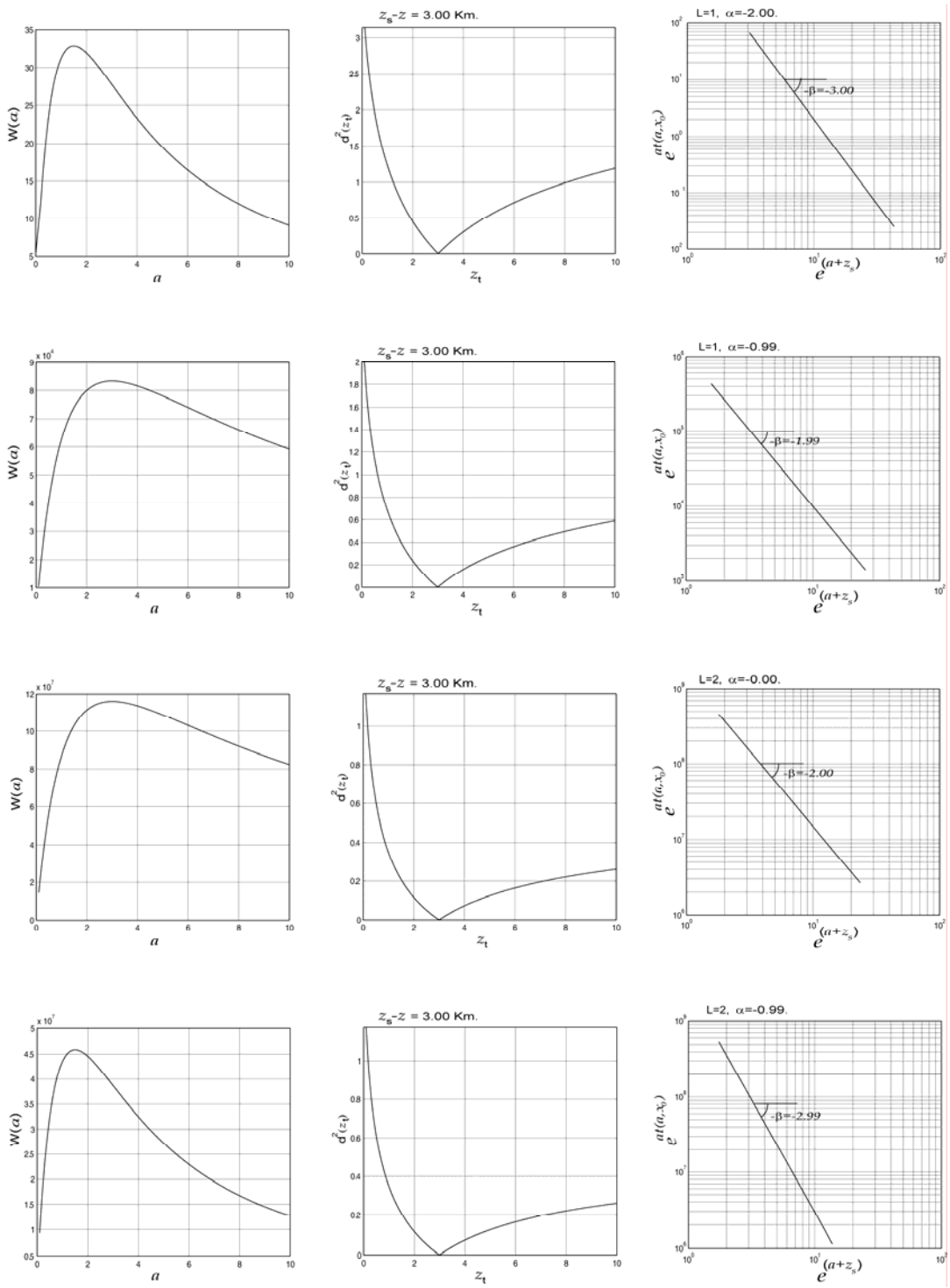


Figure 21. Calcul de la profondeur (2ème colonne) et du degré d'homogénéité (3ème colonne) par la résolution de la fonction d'atténuation le long des lignes de maxima des coefficients d'amplitude (1ère colonne) pour la singularité de Dirac (1ère ligne), la singularité de Heaviside (2ème ligne) , une contact infini (3ème ligne) et une lame infinie (4ème ligne).

2.4.3 Analyse du champ d'une source multiple

En termes d'analyse du champ magnétique par l'ondelette de Cauchy, la caractérisation de la source par la méthode du signal analytique correspond à l'application des lois dérivées de cette méthode sur les voies[8] individuelles des coefficients en amplitude et des coefficients en phase. Ainsi, les paramètres de la source pourront être estimés à partir des coefficients de la transformée en ondelettes par deux méthodes simples : soit à partir des lignes des maxima, soit à partir des voies. L'estimation des paramètres à partir des lignes de maxima est contrôlée uniquement par l'information contenue dans le voisinage des ces lignes. Dans le cas d'une source magnétique multiple, il est évident que cette information n'est pas représentative de tout le signal magnétique. Par contre, l'analyse des voies permet de couvrir toute l'information contenue dans le signal magnétique en appliquant les lois du signal analytique sur des fenêtres de l'amplitude et/ou de la phase. Cette possibilité est avantageuse dans certaines applications : par exemple pour la méthode de la déconvolution eulérienne, nous effectuons l'inversion sur des fenêtres de l'anomalie. Par l'analyse des voies des coefficients en ondelettes il est possible d'avoir une estimation plus réaliste de l'indice structurale correspondant à la fenêtre analysée par la déconvolution.

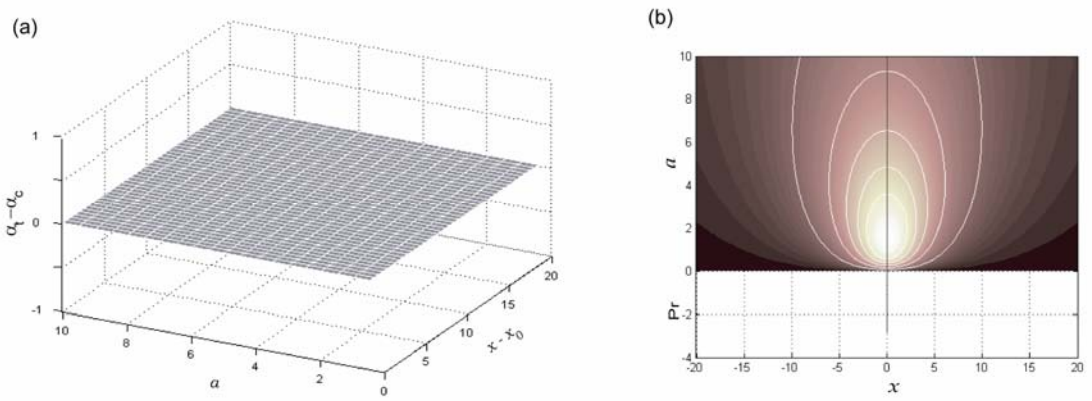


Figure 22. Estimation du degré d'homogénéité (a) d'une singularité de Dirac à partir de la fonction d'atténuation d'énergie des voies des coefficients en amplitude (b).

Pour un signal magnétique simple, d'une ligne infinie de dipôles, nous avons tracé sur les voies des coefficients en amplitude et en phase dans le domaine $\{0 \le x \le 20 \quad 0 \le a \le 10\}$, la variation de l'estimation par les équations.2.3.44 et 2.3.46 des paramètres de la source.

[8] Une voie correspond aux coefficients en ondelettes considérés à une échelle constante [Goupillaud et al, 1984] soit : $\{W[\psi, \mathrm{f}](b, a = \text{constant})\}$.

Une analyse par le signal analytique est effectuée sur les coefficients en amplitude situés dans le domaine $\{0 \le x \le 20 \quad 0 \le a \le 10\}$ de la singularité de Dirac (figure 18). Les voies ont été découpées en bandes, de telle sorte que chaque bande soit composée de 5 valeurs consécutives des coefficients. Sur chaque bande, l'équation de l'atténuation (2.4.6) à été résolue pour la profondeur z_0 et le degré de l'homogénéité α_c. Les estimations du degré de l'homogénéité et de la profondeur ont montré une homogénéité sur tout le domaine analysé. Cette homogénéité de l'estimation est évidente à la figure 22 où nous présentons la différence entre la valeur de l'homogénéité calculé α_c et la valeur théorique $\alpha_t = -2$.

Cependant, dans l'interprétation des prospections magnétiques il est préférable en général de procéder sur les lignes de maxima dans la caractérisation de la source. En effet, à cette position nous pouvons minimiser l'influence de plusieurs sources de biais qui peuvent perturber des estimations sensibles comme par exemple l'estimation de l'inclinaison apparente. Pour éclairer ce point, nous analysons dans la suite le signal analytique affecté par trois types de contamination : une source étendue, la présence de bruit dans les données et l'interférence de sources magnétiques voisines.

2.4.3.1 Source étendue

Dans le cas d'une source étendue, comme un contraste ou une lame d'extension verticale limitée, la formule 2.4.15 montre que le spectre du signal magnétique est une combinaison de deux spectres élémentaires simples, $\widetilde{T}_1^{\mathrm{L}}(k)$ et $\widetilde{T}_2^{\mathrm{L}}(k)$, liés aux coins de la source. L'interférence entre $\widetilde{T}_1^{\mathrm{L}}(k)$ et $\widetilde{T}_2^{\mathrm{L}}(k)$ dépend de l'échelle de l'ondelette et de la position horizontale à laquelle l'analyse est effectuée. Ainsi, sur une échelle relativement petite par rapport à l'extension verticale de la source et au voisinage de la zone principale de la concentration de l'énergie du signal magnétique, le spectre total de l'anomalie magnétique observé sera dominé par des composantes fréquentielles de petites longueurs d'ondes. Ainsi, les deux spectres $\widetilde{T}_1^{\mathrm{L}}(k)$ et $\widetilde{T}_2^{\mathrm{L}}(k)$ se combinent avec deux phases et deux amplitudes différentes produisant un spectre total mal défini. La résolution des équations. 2.3.44 et 2.3.46 dans cette région conduit à une estimation de la profondeur située entre z_1 et z_2 et un degré d'homogénéité entre 0 (caractéristique d'un contact infini) et 1 (caractéristique de la singularité d'Heaviside).

Loin de la zone principale de la concentration de l'énergie le signal magnétique est de plus en plus dominé par des composantes fréquentielles de grandes longueurs d'ondes et les deux spectres $\widetilde{T}_1^{\mathrm{L}}(k)$ et $\widetilde{T}_2^{\mathrm{L}}(k)$ tendent progressivement à fusionner. La source étendue réagit alors dans ces régions comme une singularité de Heaviside localisée au centre magnétique du contact.

A la figure 23a la différence $(\alpha_t - \alpha_c)$ est calculée par la solution de l'équation d'atténuation 2.3.44 appliqué sur le domaine $\{x_m \le x \le 10 \;\; 0 \le a \le 11.5\}$ des coefficients de l'amplitude d'un contraste (figure 23b) où x_m est la position du maxima des coefficients. L'illustration montre

que, à grande longueur d'onde du signal, l'information sur la source contenue dans le signal magnétique tend à exprimer des paramètres cohérents avec les paramètres de la singularité d'Heaviside.

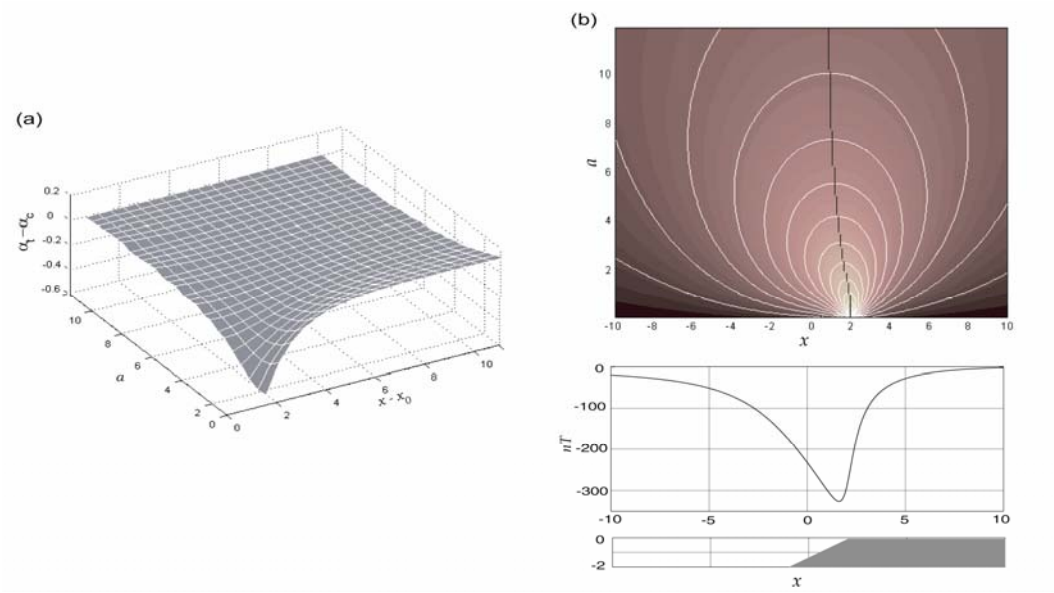


Figure 23 : Estimation du degré d'homogénéité (a) d'un contraste oblique par la fonction d'atténuation d'énergie des voies des coefficients en amplitude (b).

2.4.3.2 Présence de bruit dans les données

Supposons que le signal magnétique analysé est contaminé par un bruit blanc $n(x)$ gaussien de moyenne nulle et de variance σ_n^2. Moreau (1995) a montré que la variance de ce bruit dans les coefficients d'analyse en ondelettes σ_W^2 est donnée par l'expression suivante :

$$\sigma_{W_n}^2 = C\frac{\sigma_n^2}{a} \text{. ou } C \text{ est une constante} \qquad (2.4.21)$$

Cette relation montre que la variance du bruit associé aux coefficients de la transformée varie en $1/a$. Les coefficients les moins affectés par la présence du bruit seront donc ceux qui correspondent à de grandes dilatations. D'autre part, à dilatation fixée, les coefficients en ondelettes les moins affectés par le bruit se situent dans la zone de concentration de l'énergie du signal magnétique. Par conséquent, les coefficients considérés sur une échelle suffisamment grande dans la zone de concentration d'énergie du signal magnétique sont les plus convenables pour l'estimation des paramètres de la source. Ce comportement par rapport au bruit est bien clair sur la figure 25. Sur cette figure, nous avons tracé la variation de la différence α_c - α_t, par l'application de l'équation 2.3.44 aux coefficients en amplitude situés dans le domaine $\{x_m \le x \le 20 \quad 0 \le a \le 10;\ x_m\}$ d'une singularité de Dirac (figure 25b). Au

signal magnétique analysé, nous avons ajouté une bruit blanc gaussien de moyenne nulle et d'écart type $\sigma = 0.005$. La figure 25 indique que le paramètre α_t calculé dans la zone principale de la concentration d'énergie considérée sur une grande échelle est plus représentative d'un degré d'homogénéité de Dirac $\alpha_t = -2$.

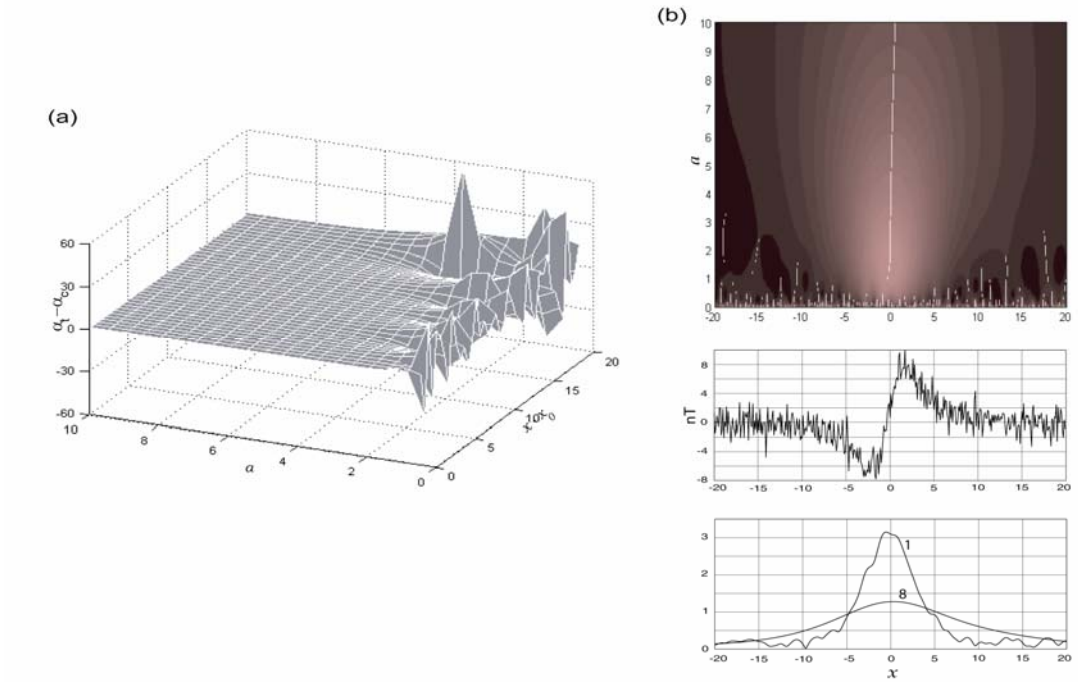


Figure 25. Effet de la présence de bruit dans les données (b) sur l'estimation du degré d'homogénéité (a) par la fonction d'atténuation d'énergie des voies des coefficients en amplitude.

2.4.3.3 Interférence de sources voisines

Un des problèmes fondamentaux dans l'interprétation des anomalies magnétiques, notamment les anomalies océaniques, est l'interférence entre les signaux magnétiques produits par des sources voisines. Ce phénomène contracte le degré de liberté de la dilatation par l'analyse en ondelettes. Le degré de l'interférence dépend d'une part de la position relative des sources et d'autre part de l'énergie relative contenue dans leurs signaux magnétiques.

En général l'interférence entre les signaux est d'autant plus importante que les fréquences basses contiennent plus d'énergie. Ainsi sur une petite échelle où le signal analytique d'une singularité est dominé par des composantes fréquentielles de longueur d'ondes relativement petites par rapport à la distance entre la source et ses voisines, le signal magnétique observé décrit, dans la zone de concentration d'énergie, presque uniquement l'information de la singularité cherchée. Par l'augmentation de l'échelle, l'interférence avec les signaux voisins devient importante et progresse vers la zone principale de la concentration d'énergie. Si

l'interférence est très importante dans le signal magnétique original, nous pouvons appliquer une dilatation négative (dans le demi-plan inférieur de l'espace) ou augmenter l'ordre de l'ondelette (figure 20). Mais pour des données réelles bruitées, les deux méthodes présentent un risque d'amplifier le bruit dans les coefficients d'analyse et par conséquent d'introduire une grande erreur dans la caractérisation de la source.

Sur la figure 27a nous avons représenté la différence $\alpha_c - \alpha_t$ à partir des coefficients d'amplitude (figure 27b) définis dans le domaine $\{x_m \le x \le 20 \;\; 0 \le a \le 10;\; x_m\}$. En augmentant l'échelle de l'analyse, la distorsion des estimations des paramètres de la source progresse des zones marginales des coefficients vers la zone centrale.

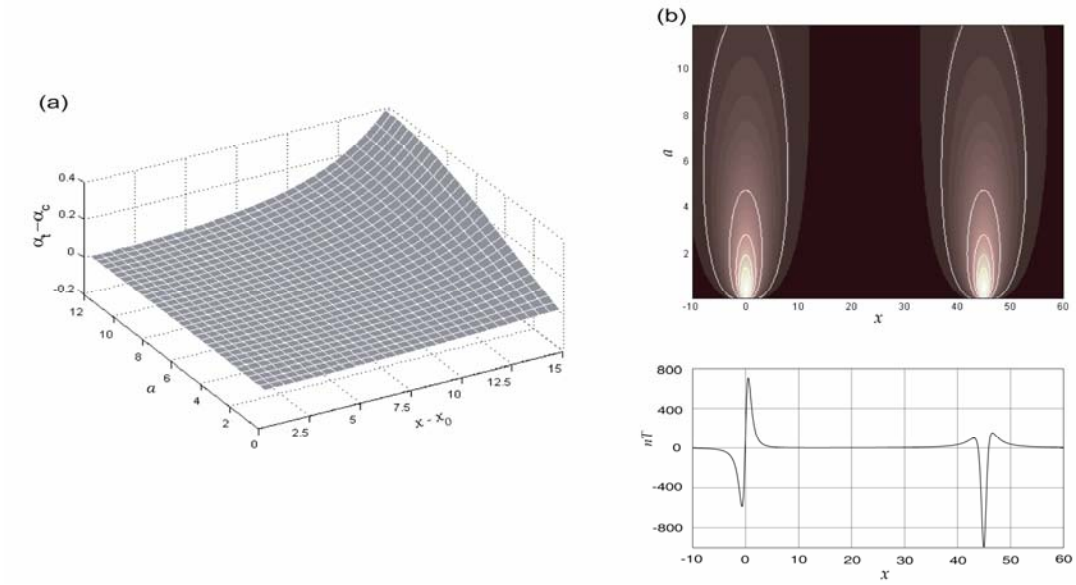


Figure 27. Effet de l'interférence de sources voisines sur l'estimation du degré d'homogénéité (a) par la fonction d'atténuation d'énergie des voies des coefficients en amplitude (b).

Dans les exemples précédents, nous avons visualisé seulement le degré d'homogénéité de la source calculé par la résolution de l'équation d'atténuation 2.3.44. La profondeur, qui est le deuxième paramètre de l'équation présente un comportement identique à celui du degré d'homogénéité. De même, la caractérisation de la source à partir des coefficients de phase, en utilisant l'équation 2.3.46, a les mêmes propriétés que le degré d'homogénéité et la profondeur. Mais dans les zones de contamination la phase devient très difficile à traiter à cause de la nature de son calcul qui fait intervenir une opération de division.

On peut conclure de l'analyse précédent que lorsque le signal magnétique est contaminé par le bruit ou des sources voisines, la caractérisation de la source par les arêtes des maxima des coefficients est plus performante que la caractérisation par la méthode du signal analytique appliquée sur les voies. Ce résultat est dû au fait que ces lignes correspondent aux ensembles

de coefficients les moins affectés par la contamination. Par contre si la source de l'anomalie est une structure étendue, l'analyse par la méthode du signal analytique dans des endroits loin de la zone de concentration d'énergie donne une caractérisation plus performante que l'analyse le long des lignes de maxima.

Cependant, si on limite l'analyse par la méthode du signal analytique au voisinage des lignes de maxima des coefficients, on obtient un résultat bien corrélé avec le résultat obtenu par l'analyse des lignes de maxima elles-mêmes. Sur la figure 28 nous avons calculé par les deux méthodes le degré de l'homogénéité α et la profondeur z_0 en analysant le signal magnétique du contraste oblique présenté à la figure 23: en ligne continue par la résolution de l'équation de l'atténuation d'énergie 2.4.20 selon la ligne de maxima des coefficients en amplitude, et en pointillée, par la résolution de l'équation de l'atténuation 2.3.44 des voies des coefficients en amplitude. Pour la dernière méthode, le calcul est restreint à la zone principale de la concentration de l'énergie (entre la valeur maximale et la valeur d'énergie correspondant à 30% de la valeur maximale). On constate que les deux méthodes conduisent à une évolution des estimations presque identique. Les paramètres calculés z_0 et α convergent respectivement vers les paramètres caractéristiques d'un contact infini (aux petites échelles) et vers les paramètres caractéristiques d'une singularité de Heaviside (aux grandes échelles).

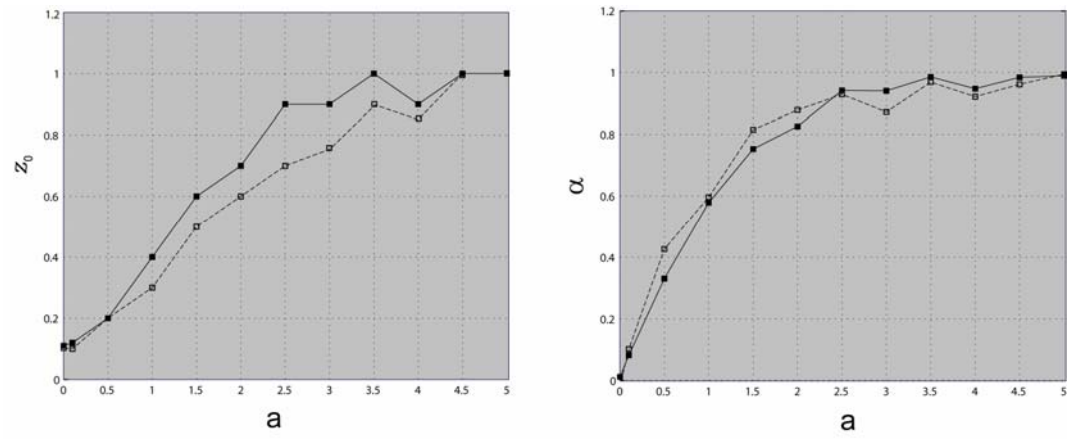


Figure 28. Estimation, en fonction de l'altitude a, de la profondeur (gauche) et du degré d'homogénéité (droite) pour un contacte oblique par la fonction d'atténuation de ligne de maxima (ligne solide) et la fonction d'atténuation des voies (ligne pointillée).

Résumé

Dans l'espace à deux dimensions, le signal analytique d'ordre L associé au champ magnétique possède des propriétés très importantes pour l'interprétation des prospections magnétiques. Une de ces propriétés est la capacité du signal analytique de dissocier l'information contenue dans le signal magnétique original en deux termes complémentaires indépendantes: amplitude locale et phase locale. Les deux termes conduisent à des problèmes non linéaires par rapport aux paramètres de la source et le principe de la superposition n'est pas donc applicable à ces deux fonctions. De ce fait, ces deux fonctions ne sont exploitables correctement que dans le cas d'un signal magnétique caractérisé par un spectre bien défini en amplitude et en phase. De tels spectres sont associés à une source magnétique singulière (ou localisée) dans l'espace.

En réalité, toute source magnétique à caractère bidimensionnel peut se localiser dans l'espace selon un des quatre types de singularité qui sont : la singularité de Dirac, la singularité de Heaviside, un contact infini et une lame infinie. Dans le présent chapitre nous avons développé les expressions fréquentielles du signal magnétique d'ordre L généré par ces quatre types de singularité, et par l'application de la propriété de causalité du signal analytique dans l'espace de Fourier-1D, nous avons développé pour chacune de ces singularités l'expression du signal analytique en terme d'amplitude locale et de phase locale dans le domaine spatial. L'atténuation locale et la phase locale constituent une paire de transformées de Hilbert. Les deux fonctions, l'amplitude et la phase, contiennent la même information, et les deux fonctions permettent de caractériser la singularité magnétique générant le signal magnétique. Les principaux paramètres de la singularité magnétique que nous pouvons extraire par ces deux fonctions sans la nécessité d'aucune hypothèse ou information à priori sont : sa position horizontale et verticale et son degré d'homogénéité. La phase fournie aussi un paramètre supplémentaire de grande importance dans l'interprétation des données magnétiques, à savoir l'inclinaison apparente de l'aimantation. Cette phase présente aussi un moyen précis de décrire continuellement la forme du signal analysé à chaque position du levé magnétique-1D, cette dernière propriété de la phase pourrait être un outil précis dans l'étude de la distorsion des anomalies magnétiques marines.

L'inclinaison apparente de l'aimantation peut aussi être estimée à l'aide de l'amplitude locale du signal magnétique par une méthode de corrélation. Pour une source de type connu, la méthode consiste à ajuster la similarité entre le signal magnétique translaté en phase dans le domaine de Fourier et la dérivée horizontale première de son amplitude locale. Les deux fonctions présentent une similarité totale ou optimale, selon l'ordre L di signal magnétique, dans le cas où la phase de la dérivée est nulle. Dans une telle situation l'inclinaison apparente de l'aimantation peut être extraite à partir une relation analytique simple et bien définie.

Dans le cas d'une source multiple, la technique du signal analytique devient insuffisante pour caractériser la source magnétique. Nous devons dans ce cas associer au signal analytique une opération de filtrage et analyser le signal aux composantes fréquentielles pour lesquelles la source se comporte comme une singularité. Grâce à la relation étroite entre le noyau de

Poisson et les champs de potentiel, le filtrage peut se faire par la convolution des quadrants du signal analytique par le noyau de Poisson à différentes altitudes (opération de prolongement vers le bas ou vers le haut). Nous pouvons également effectuer la convolution directement sur le signal magnétique. En termes de transformée en ondelettes. La combinaison entre le signal analytique et le noyau de Poisson correspond à la projection du champ magnétique sur la famille des ondelettes générées par le noyau de Cauchy. Cette transformation nous conduit à représenter le signal magnétique en deux termes complémentaires : les coefficients en ondelettes de l'amplitude et les coefficients en ondelettes de la phase. Deux méthodes sont possibles pour caractériser la source magnétique à l'aide des coefficients en ondelettes :

Soit nous procédons séparément sur les voies des coefficients en amplitude, en atténuation et en phase. Cela revient à une analyse par le signal analytique pris à différentes altitudes.

Soit nous utilisons la ligne de crête des coefficients de l'amplitude (ligne d'énergie maximale). Dans cette méthode, la fonction appropriée est la fonction de l'atténuation locale calculée suivant la crête, et les paramètres que nous pouvons en extraire sont la profondeur de la source et son degré d'homogénéité. A partir des coefficients de la phase on peut déterminer des lignes d'égale phase convergentes dans le demi-plan inférieur vers la position de la source, et l'inclinaison apparente de l'aimantation peut être estimée à partir de la ligne centrale.

On note finalement que les coefficients de la transformée en ondelettes le long des lignes de maxima permettent d'extraire l'épaisseur si la source est en forme de couche [Sailhac et al., 2000]. La possibilité de l'estimation de ce paramètre par la méthode du signal analytique, appliquée sur les voies en amplitude et en phase des coefficients, a été abordée mais cette méthode (non présentée dans ce travail) demande plus d'élaboration.

CHAPITRE III

ETUDE DE L'INCLINAISON APPARENTE DE LA DORSALE EST INDIENNE DURANT LES DIX DERNIERS MILLIONS D'ANNEES

Grâce aux mesures paléomagnétiques sur de multiples échantillons orientées et à la possibilité de combiner par des techniques analytiques simples les résultats issus de différents sites, il est possible de déterminer complètement des pôles paléomagnétiques à des âges précis sur les domaines continentaux des plaques avec des zones de confiance satisfaisantes. Par contre, et malgré l'existence de différents types de données sur les domaines océaniques des plaques, les mesures paléomagnétiques permettent rarement de déterminer un pôle paleomagnétique d'une manière complète.

En effet, en domaine océanique, nous disposons de différents types de données et interprétations paleomagnétiques.

1. Les données issues des échantillons de forages profonds et des échantillons de séquences sédimentaires océaniques. A cause de la méconnaissance de l'orientation des échantillons, ces deux types de données ne peuvent contraindre que l'inclinaison paleomagnétique.
2. L'inclinaison et la déclinaison paléomagnétiques calculées par l'inversion des anomalies magnétiques d'édifices volcaniques sous marins. Cette technique permet, similairement aux études continentales, de déterminer complètement le pôle paleomagnétique mais avec des zones de confiance acceptables.
3. L'analyse de la phase des anomalies magnétiques océaniques. Ces anomalies étant considérées comme étant à deux dimensions, le pôle paléomagnétique ne peut être complètement déterminée par l'étude d'un profil (notion d'inclinaison apparente). On détermine en fait un grand cercle sur lequel se situe le pôle.

Le présente chapitre est consacré à ce troisième cas et plus particulièrement sur une nouvelle méthode de détermination de la phase des anomalies magnétiques d'un profil, cette détermination constituant l'étape cruciale du calcul du pôle paléomagnétique.

La structure du chapitre est la suivante. A la section (3.1) nous donnons les principes des différentes méthodes de détermination du pôle paleomagnétique à partir de la phase des anomalies magnétiques. A la section (3.2) nous proposons une nouvelle méthode pour calculer la phase. La section (3.3) est consacrée à l'application de cette méthode sur des données réelles issues de la dorsale est-indiennes.

3.1 Détermination de la distorsion des anomalies magnétiques

L'estimation du pôle paleomagnétique à partir des anomalies magnétiques océaniques est fondée sur la détermination de l'inclinaison apparente I'_m de l'aimantation de la croûte océanique inclue dans la phase φ de l'anomalie observée (voir section ?? chapitre ??). A partir d'une détermination unique de I'_m, nous pouvons définir une relation entre les combinaisons possibles de déclinaison D_m et d'inclinaison I_m de l'aimantation qui correspond à un demi grand cercle. Une seconde détermination de I'_m en un autre site et pour un même âge et une même plaque, donne un autre demi grand cercle de pôles possibles.

L'intersection entre les deux demis grands cercles donne la position du pôle paleomagnétique de la plaque pour l'âge correspondant. Ce pôle est une description du déplacement de la plaque depuis l'âge correspondant par rapport au pôle magnétique actuel.

L'étape fondamentale dans cette méthode est l'estimation quantitative correcte de la phase φ de l'anomalie magnétique océanique. Cette opération est assez délicate et plusieurs méthodes ont été proposées.

1. Larson et Chase (1972)++ et Larson et Pitman (1972)++, ont calculé la phase par la méthode d'essais-erreurs. Leur méthode correspond au calcul de la distribution d'aimantation qui ajuste le mieux l'anomalie magnétique observée. A partir de cette distribution plusieurs profils synthétiques sont calculés avec des directions d'aimantation différentes. Par la comparaison visuelle entre le profil observé et les différents modèles synthétiques, φ est estimé.
2. La méthode de Schouten et Cande (1976) ou la méthode de φ. Cette méthode est la plus utilisée en raison de sa simplicité. Son principe est basé sur la corrélation visuelle entre l'anomalie magnétique observée, progressivement déphasée par le filtre de phase inverse avec un pas d'incrémentation constant, et une anomalie synthétique correspondante créée par le modèle standard de la croûte magnétique océanique. La valeur de φ correspondra à la valeur de shift de la phase qui satisfait une similarité maximale entre l'anomalie observée et le modèle synthétique figure (2.1).

3. Yoshida (1985) ; a proposé une méthode plus automatique pour calculer la valeur de φ en utilisant la méthode statistique de l'écart moyen. L'écart moyenne d'une site de données $\{m\}$ se définit par $\{m_i - \overline{m}\}$ avec $\overline{m}$ la valeur moyenne de l'ensemble de données. Il suppose dans sa méthode que la distribution de l'aimantation produisant l'anomalie magnétique est une fonction d'Heaviside non périodiques. L'anomalie magnétique due à cette distribution vérifie un écart moyen maximum si les directions des vecteurs magnétiques sont verticales. Par l'application successive du filtre de phase sur le profil de données réelles avec un pas d'incrémentation constant, la valeur de la rotation introduite dans l'anomalie qui correspond à une écart moyen maximum de l'anomalie sera considérée égale à φ.

4. Arkani-Hamed (1990,1991) utilise une méthode plus quantitative pour déterminer la distorsion de l'anomalie magnétique. La méthode consiste à calculer les coefficients de

corrélation entre l'anomalie magnétique observée, graduellement déphasée par une incrémentation constante sur l'intervalle [0°,360°] et l'anomalie magnétique synthétique correspondante générée par le modèle standard calculé au pôle magnétique. La distorsion de l'anomalie est supprimée pour la valeur de la phase correspondant à la valeur maximale du coefficient de corrélation.

5. Roest et al (1992) ont constaté que le module de la dérivée horizontale de l'anomalie magnétique d'un contact vertical et le module du signal analytique associé à cette dérivée sont très similaires si l'anomalie originale correspond à une inclinaison apparente verticale. Leur méthode consiste alors à calculer les coefficients de corrélation entre le module de la dérivée horizontale et le module du signal analytique en déphasantgraduellement l'anomalie magnétique. φ est obtenu pour la valeur maximale du coefficient de corrélation. La méthode est assez robuste car elle n'est pas trop influencée par le bruit.

Pour ce type de données océaniques deux sources principales d'erreurs peuvent affecter l'estimation du pôle paleomagnétique. La première est l'extraction qualitative de la phase de l'anomalie et la deuxième est l'extraction de l'inclinaison apparente de l'aimantation à partir de cette phase.

Concernant la première source d'erreur, les différentes approches de la détermination de φ, citées ci dessus, tentent d'estimer φ par une procédure de corrélation visuelle ou automatique indirecte. Certains désavantages peuvent plus ou moins émerger selon la méthode pour l'application à des données réelles. Par exemple, pour les deux premières méthodes la quantification de φ s'obtient par comparaison visuelle entre l'anomalie observée et l'anomalie synthétique. Ainsi un à priori non quantifiable existe et différents auteurs peuvent choisir des valeurs de φ différentes pour le même site de données. Pour la méthode 4, l'application correcte de cette méthode sur des données réelles demande une détermination précise du modèle, de chaque anomalie sur le profil, et un ajustement de qualité demande une grande précision et donc beaucoup de temps pour une zone d étude relativement grande [Dyment 1994]. La méthode 5 pourrait être la méthode la plus efficace du point de vue de sa rapidité et de sa précision de l'estimation de φ. Mais l'application de cette méthode, comme nous l'avons vu dans le deuxième chapitre, n'est raisonnable que pour une source magnétique singulière ou de géométrie particulière comme un contraste ou un contact vertical.

La deuxième source d'erreur est liée à la présence, dans la valeur de la phase estimée, d'une composante non liée aux paramètres magnétiques directionnels. Ce qui cause une erreur systématique de l'estimation de l'inclinaison apparente. La comparaison entre les anomalies conjuguées sur les deux flancs d'un axe d'accrétion océanique peut éliminer cette source d'erreur (Cande 1976). Cependant cette façon de faire n'est pas possible lorsque l'on ne dispose que d'un flanc d'une dorsale comme c'est généralement le cas dans l'océan pacifique.

3.2 Nouvelle méthode d'estimation de la phase

Dans cette section, nous proposons une nouvelle méthode de la détermination de l'inclinaison apparente de l'aimantation de la croûte océanique. Dans le cadre de l'analyse du champ d'une singularité magnétique par l'ondelette complexe (chapitre 2, section 2.4), nous avons vu que les coefficients de la phase d'égales valeurs définissent des lignes droites passant par la singularité magnétique. Les coefficients pris sur la verticale de la singularité ont une expression analytique particulière indépendante des paramètres magnétiques géométriques. La prise en compte de ces valeurs permet d'extraire correctement l'inclinaison apparente de l'aimantation par un calcul simple. Sur les coefficients de l'amplitude de la transformée en ondelettes, la verticale sur la source singulière correspond aux endroits où l'énergie contenue dans le signal magnétique est maximale. En ce sens, nous pouvons extraire les valeurs particulières de la phase le long de la ligne de maxima du module de transformation. L'importance de ce dernier procédé s'apparaît lors que l'analyse de la phase est effectuée sur le signal magnétique d'une source multiple. Pour de telle signal, il est difficile à manipulée directement les coefficients de la phase, alors, nous traçons les valeurs de la phase le long de la ligne de maxima et à partir d'une certaine altitude, sur la quelle la source multiple se localise dans l'espace, l'inclinaisons apparente de l'aimantation de la source peut s'obtenir par l'application de loi de la phase correspondante au type de localisation de cette source.

Pour un premier test de cette méthode, nous avons considéré à la figure 3.1 les coefficients de l'amplitude de l'anomalie magnétique générée par une couche magnétique standard. Les profondeurs du toit et de la base de la couche sont respectivement 3.5 km et 4.5 km et son inclinaison apparente d'aimantation est -80°. La couche est une modélisation de la séquence de polarité C1n à C4An correspondant à l'intervalle de temps 0 - ~9 Ma. Sur l'image des coefficients d'amplitude associés à l'anomalie générée par ce modèle, nous avons tracé les valeurs de la phase le long des lignes de maxima associées aux chrons : C1n, C2An.1n, C2An.3n, C3n.4n, C3An.1n, C3An.2n, C4n.2n et C4An. Les lignes analysées sont indiquées par des lettres sur les coefficients d'amplitude à la figure 3.1.

A cause de l'interférence entre les anomalies magnétiques générées par les sources magnétiques voisines, l'inclinaison apparente extraite montre des biais, de degré variable avec l'altitude, par rapport à la valeur théorique du modèle, voire figure 3.2 (a).

En effet l'inclinaison apparente de l'aimantation ne peut être extrait correctement, au moyen de la transformée en ondelettes ou du signal analytique, que dans le cas d'une source magnétique localisée dans l'espace. Cette condition dans le cas du fonde océanique est invérifiée. La localisation d'une structure magnétique donnée du fond océanique, dans son propre signal magnétique, est toujours perturbée par l'interférence avec les anomalies magnétique générées par les structures voisines. Les paramètres extraits de cette structure sont alors influencés par une composante d'erreur dû à l'interférence et ne correspondront pas aux paramètres réels. Cependant, par rapport au reste du signal analysé, l'interférence par les

anomalies voisines est en générale de faible degré dans l'endroit caractérisé par une énergie maximale. Dans cet endroit, il est probable que l'interférence devient négligeable à un certain intervalle d'altitude. La question qui se pose alors : sur l'image de l'amplitude, comment déterminer cet intervalle caractérisé par un degré d'interférence négligeable au voisinage du maxima ? En fait les structures magnétiques océanique peuvent se comporter, dans le cas de localisation, comme un de deux types de singularité magnétique : soit comme une singularité de Dirac, correspondante à la localisation d'un bloc aimanté, avec un degré d'homogénéité $\alpha = -2$ Soit comme une singularité de Heaviside, correspondante à la localisation d'un contraste magnétique, avec un degré d'homogénéité $\alpha = -1$. Si on considère que le degré d'homogénéité $\alpha = -2$ ou $\alpha = -1$ du signal magnétique est un indice de la localisation de structure magnétique générant ce signal, donc, il suffit de définir la courbe de la variation de degré d'homogénéité le long de la ligne de maxima. Sur cette courbe nous déterminons les altitudes caractérisées par les estimations $\alpha = -1$ et $\alpha = -2$, comme altitudes de localisation, et nous extrairons les estimations de la phase et de la profondeur correspondant à ces altitudes.

La courbe, de la variation de degré d'homogénéité de ligne de maxima, peut s'obtenir par l'application successive de l'équation 2.4.20 (deuxième chapitre) sur des segments de la ligne de maxima analysée. Par l'application de cette inversion, nous traçons aussi la variation de l'estimation de la profondeur z_0 du centre de localisation magnétique de la structure. Ainsi, si nous avons une idée de la profondeur réelle de la structure, la courbe de la variation de z_0 nous permet d'apprécier la fidélité des valeurs $\alpha = -1$ et $\alpha = -2$ comme indication de la localisation de la source.

En revenant sur le modèle synthétique ; pour toute ligne de maxima analysée, nous avons inversé l'équation 2.4.20 par la méthode des moindres carrées sur des segments successifs dont chaque segment est composé de 10 valeurs et nous avons représenté les résultats sur les figures 3.2 (b) et (c). Ainsi, nous avons obtenu pour chaque ligne de maxima une courbe de la variation de l'estimation α et une courbe de la variation de l'estimation de z_0. Nous avons également moyenné les valeurs de la phase, extraites le long de la ligne de maxima, sur des segments successifs dont chaque segment est composé des 10 valeurs (figure 3.2 a).

Pour toutes les lignes de maxima analysées sur le modèle, les estimations prises sur l'altitude correspondante à $\alpha = -1$ sont beaucoup plus similaires aux paramètres réels de la source que les estimations prises à l'altitude caractérisée par $\alpha = -2$ (comparer les valeurs indiquées par des cercles noirs sur (a), (b) et (c) de la figure 3.2 avec les paramètres de la couche standard).

Nous avons vu dans le deuxième chapitre qu'à chaque type de singularité correspond un signal magnétique de degré d'homogénéité caractéristique mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai. C'est à dire les valeurs $\alpha = -1$ et $\alpha = -2$ ne sont pas toujours une indication de la localisation de source dans son signal magnétique. Ainsi le degré $\alpha = -2$ de l'homogénéité, estimée sur certaines altitudes, n'apparaît pas lié à une source singulière. Il peut se produire par une certaine superposition des anomalies magnétiques voisines et

l'information contenue sur la ligne de maxima au voisinage de cette altitude ne décrit pas dans ce cas la source. Par contre, et à partir de la corrélation optimale entre les paramètres estimés et les paramètres réels de la source, nous pensons que le degré $\alpha = -1$ est plutôt lié à un comportement d'une source localisée.

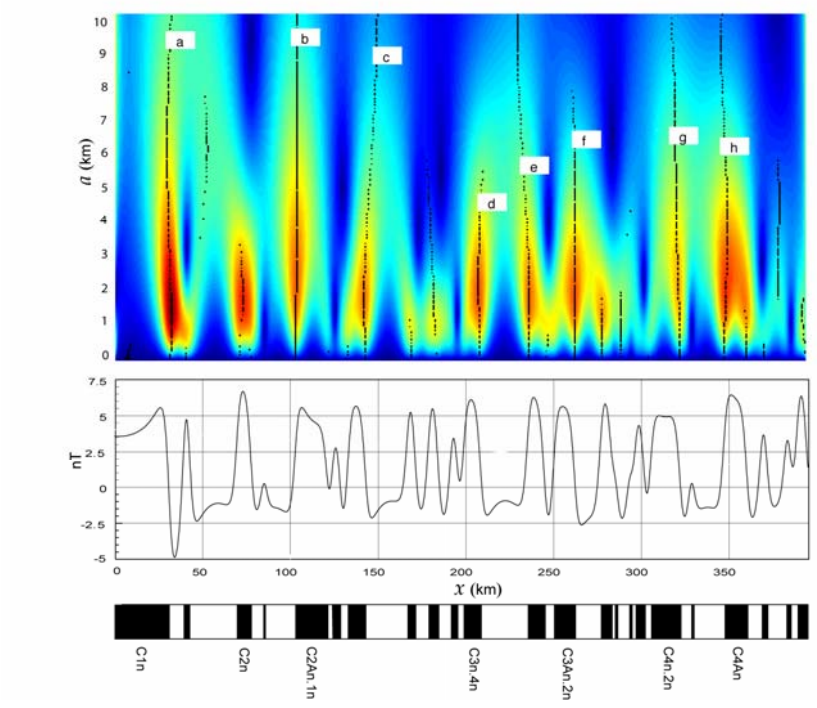


Figure 3.1. Module des coefficients en ondelettes complexes du signal magnétique d'un modèle standard.

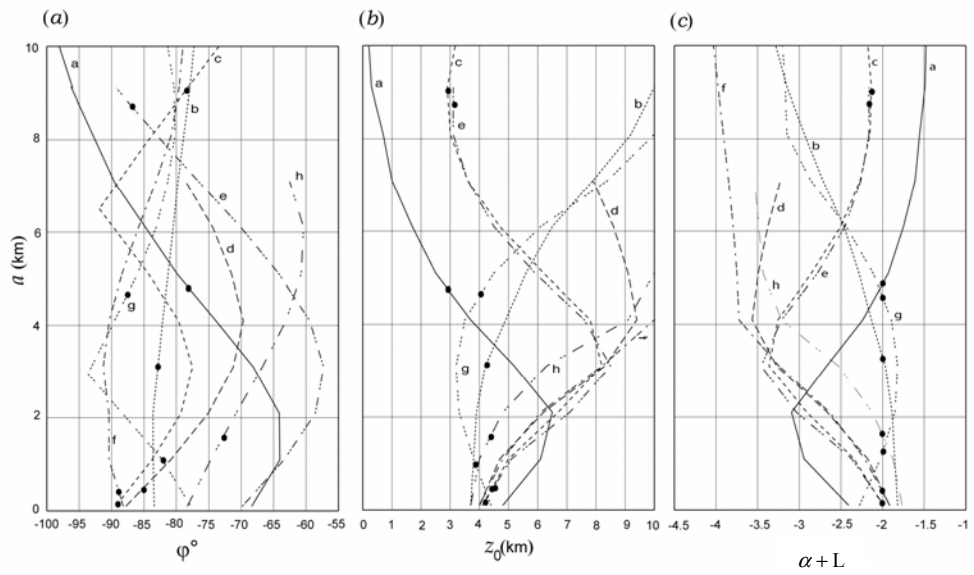


Figure 3.2. Variation des valeurs des paramètres magnétiques avec l'échelle (modèle standard).

3.3 Application sur des données réelles

Afin de déterminer le degré de cohérence entre le pôle magnétique actuel et pôle paléomagnétique responsable de l'aimantation de la croûte océanique d'âge récent, nous avons analysé la phase de 42 profils magnétiques portant les chrons C1n à C4An correspondant à l'intervalle de temps 0 - ~9 Ma selon l'échelle chronologique de Cande et Kent (1992). Les profils ont été acquis lors de plusieurs campagnes géophysiques sur la dorsale est indienne séparant la plaque antarctique de la plaque indo-australienne (figure 3.3). Les profils ont été sélectionnés soigneusement de manière à éviter les zones de fracture et de correspondre à des séquences d'anomalies bien indentifiables. En utilisant le pôle de rotation eulérien proposé par Royer (1985), les profils ont été projettés perpendiculairement à la direction locale de la dorsale. Lla zone étudiée est divisée en quatre zones selon l'azimut moyen de la dorsale : la zone GI située entre 120°E et 140°E pour laquelle l'azimut moyen de la dorsale est de 0 ; la zone GII située entre 120°E et 105°E avec un azimut moyen de 12°, la zone GIII de 105°E à 90°E avec un azimut moyen de 24° et la zone GIV entre 90°E et 70°E avec un azimut moyen de 47°. Les profils magnétiques de chaque zone sont représentés sur la figure 3.4.

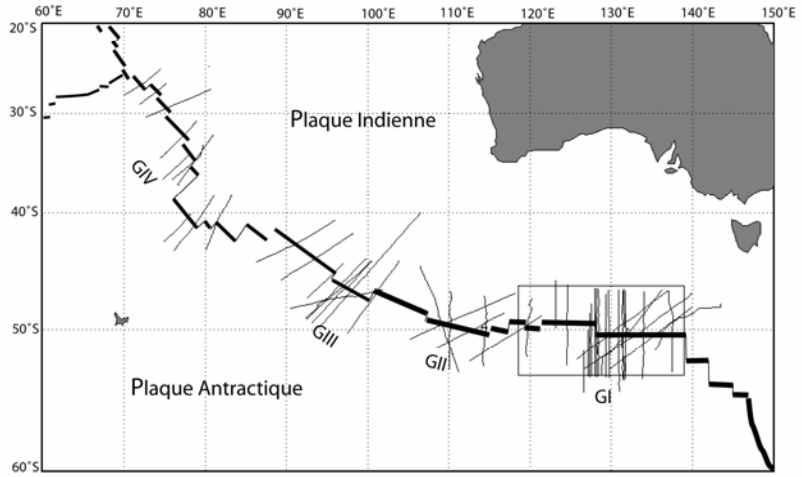


Figure 3.3. Localisation des profils magnétiques analysés.

Sur la représentation en amplitude de la transformée en ondelettes de première ordre de chaque profil, nous avons considéré les lignes de maxima associées aux chrons : C1n, C2An.1n, C2An.3n, C3n.4n, C3An.1n, C3An.2n, C4n.2n et C4An. Chaque ligne de maxima est analysée individuellement sur tous les profils disponibles des quatre zones. Dans un premier temps, nous avons tracé les valeurs de la phase le long des lignes des maxima.

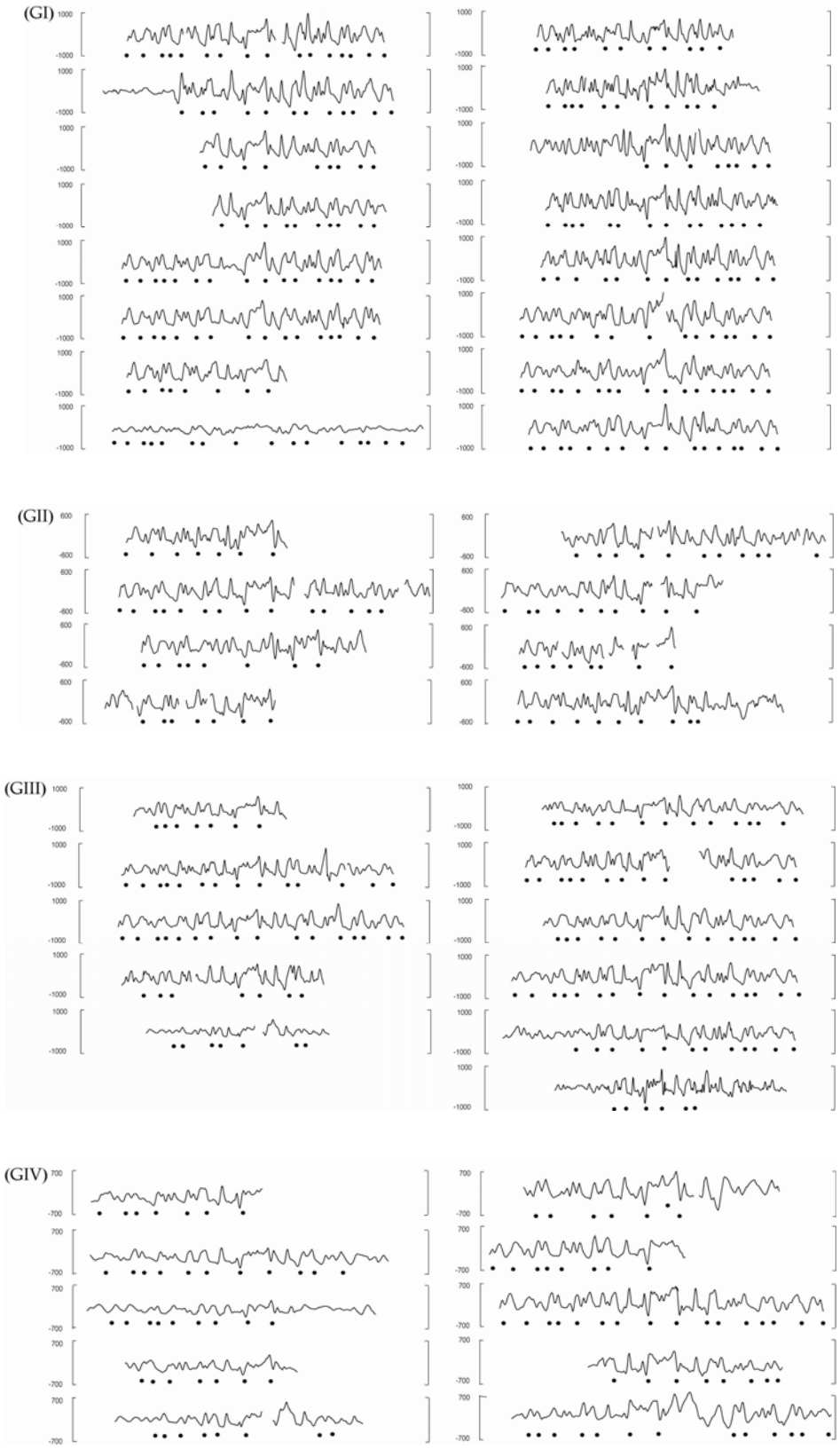


Figure 3.4. Localisation des profils d'anomalies analysés sur chaque zone.

En utilisant la méthode de noyau de [Silvermann, 1982++], la distribution de probabilité des valeurs de phase extraites en fonction de l'échelle d'analyse est calculée de l'ensemble des anomalies analysées des différentes zones (figure 3.5). Sur cette figure, on constate que l'intervalle de la distribution significative des valeurs de phase extraites varie considérablement avec l'échelle : ainsi sur les petites échelles de 0 à ~1 km, à cause du bruit présent dans les données, les valeurs de la phase sont distribuées sur un large intervalle. En augmentant l'échelle, l'intervalle de la distribution devient plus focalisée en deux endroits bien distincts centrés respectivement sur les valeurs ~-35° et ~145°. Sur les très grandes échelles (> 10 km), à cause de l'interférence forte entre les composantes fréquentielles de grandes longueurs d'ondes, la focalisation de l'intervalle disparaît et les valeurs de la phase se répartissent aléatoirement sans aucune zone de concentration distincte. Ces observations indiquent que l'analyse de la phase, par la transformée en ondelettes de la séquence d'anomalies étudiée, est en générale plus représentative sur les échelles comprises entre 1 et 10 Km. Tenir compte que la direction de l'aimantation de la croûte océanique récente est similaire à la direction du champ géomagnétique actuel à l'axe de la dorsale, lieu de sa formation, la distribution des valeurs de la phase dans l'intervalle d'échelle 1-10 km indique que les sources magnétiques des chrons analysés se comportent souvent comme des contrastes magnétiques. Le retard de $\sim\pi$ entre les centres de deux zones est lié à la nature de la variation de l'aimantation, croissante ou décroissante, à travers le contraste.

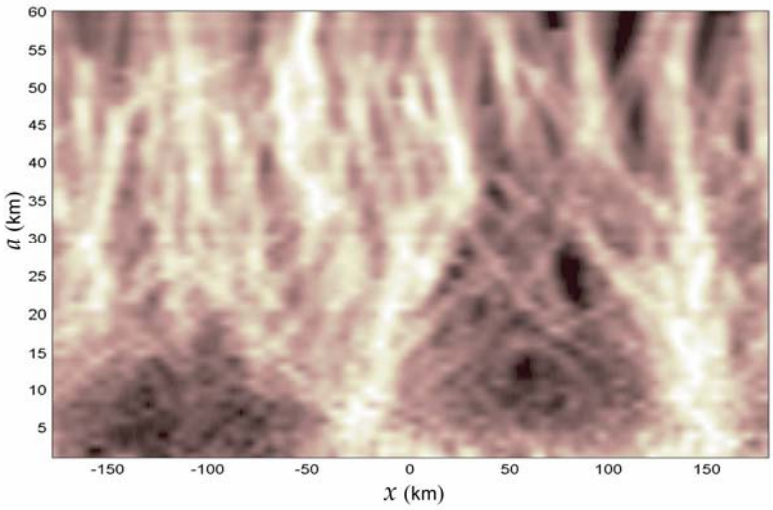


Figure 3.5. Représentation de la densité de probabilité de la distribution de la phase observée en fonction de l'échelle.

En accord avec la méthode décrite plus haut de l'analyse de la phase du modèle synthétique standard, nous avons tenté dans une deuxième étape de préciser notre analyse de la phase des chrons sélectionnées. Ainsi et parallèlement à l'extraction de la phase le long des lignes de

maxima, nous avons tracé, en fonction de l'échelle, la variation de l'estimation du degré de l'homogénéité et de la profondeur de la source associée à chaque ligne de maxima. Sur les courbes de l'estimation des paramètres de la source de chaque maxima, nous avons considéré uniquement les estimations faites aux altitudes correspondantes à $\alpha = -1$ et $\alpha = -2$. Sur l'ensemble des profils de chaque zone analysée les estimations, profondeur et de inclinaison apparente, prises à l'altitude caractérisée par $\alpha = -2$ montrent des intervalles de dispersion importante par rapport aux intervalles de dispersion des estimations correspondantes prises à l'altitude caractérisée par $\alpha = -1$. Cette différence de l'intervalle de dispersion pourrait être une confirmation que la singularité de Heaviside est plus représentative de type de localisation des structures magnétiques analysées. C'est-à-dire à l'altitude caractérisée par $\alpha = -1$ les paramètres calculés à partir de la ligne de maxima et la valeur de la phase sont les plus représentatifs des paramètres réels de la source.

Pour un profil de données réelles situé dans la zone GII, nous présentons à la figure 3.6 les coefficients en amplitude avec les lignes de maxima analysées (distinguées par des lettres).

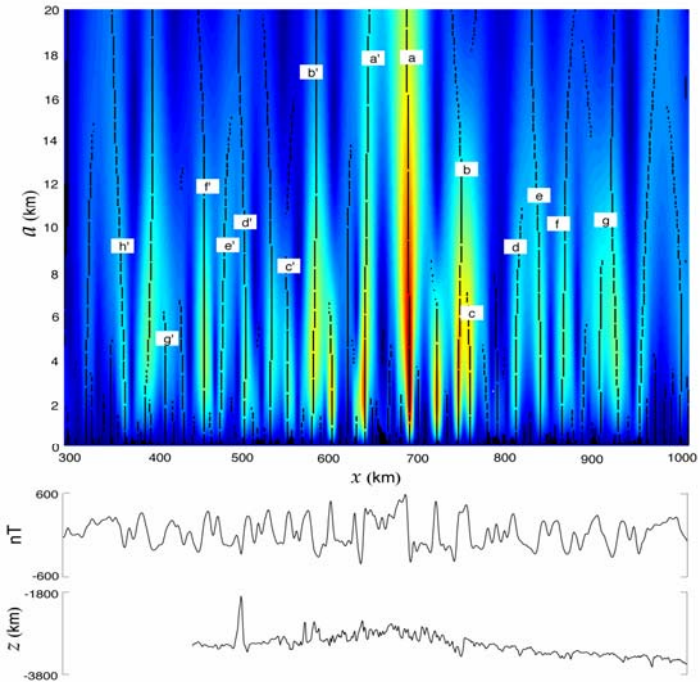


Figure 3.6. Module des coefficients en ondelettes complexes du signal magnétique observé sur la dorsale est-indienne.

En générale la variabilité de l'estimation des paramètres de la source à partir de ces maxima est plus importante que le modèle synthétique (figure 3.7 et 3.8). Les estimations considérées sur l'altitude de localisation, caractérisées par $\alpha = -1$, sont marquées par des petits cercles sur les courbes de la variation des estimation (figure 3.7 et 3.8) ; et leurs valeurs sont établies

dans les tableaux 1 et 2. Les valeurs de la profondeur estimées à cette altitude sont en majorité entre 3 et 6 km soit plus profonde de la bathymétrie dans les positions respectives de l'analyse, voir derniers colonnes des tableaux. Les valeurs de l'estimation de profondeur indiquent que les centres de localisation magnétique des structures des anomalies analysées se situent dans la couche basaltique ou peut plus profond.

Quant aux valeurs de l'inclinaison apparente, elles varient dans la majorité des positions entre -80° et –95 alors que l'inclinaison apparente du champ magnétique régional à l'axe de la dorsale, dans la position de profil analysé, est de –80°.

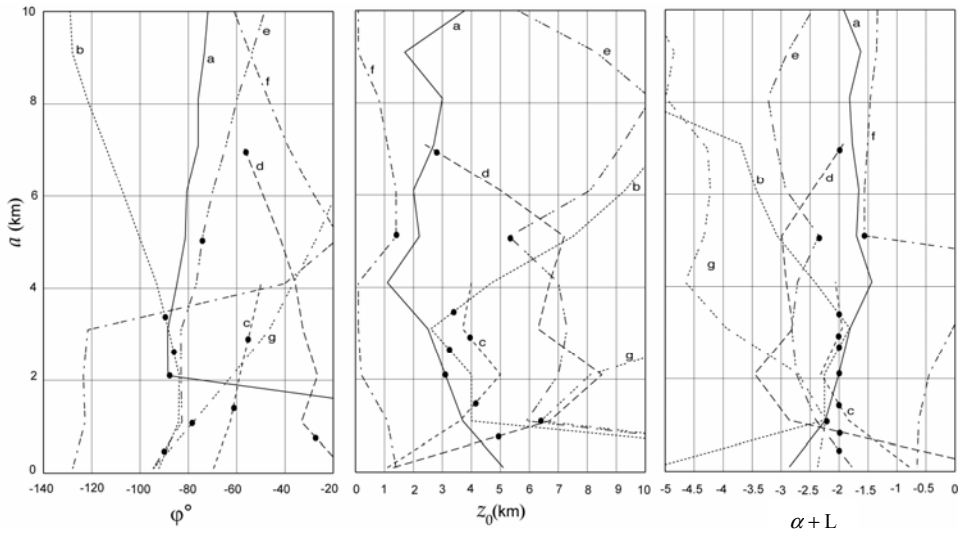


Figure 3.7. Variation des valeurs des paramètres magnétiques avec l'échelle (plaque indo-australienne).

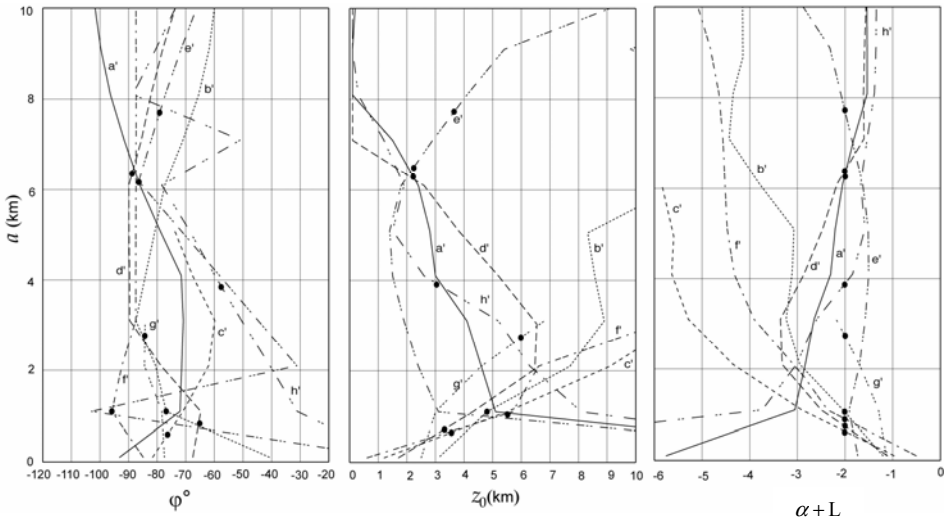


Figure 3.8. Variation des valeurs des paramètres magnétiques avec l'échelle (plaque Antarctique).

Tab 1: Paramètres de la plaque antarctique.

Max.	α	z km	φ	Bat. km
a	-1	3	-88°	2.8 ,3
b	-1	3.4	-87°	2.9 ,3.4
c	-1	4	-59°	2.9 ,3.4
d	-1	5	-20°	3.1
e	-1	>10	-91°	3.2 , 3.4
f	-0.5	1.2	-10°	3.2 ,3.4
g	-1.2	6.2	-80°	3.2, 3.3
h	-	-	-	-

Tab 2: Paramètres de la plaque indo-australienne.

Max.	α	z km	φ	Bat. km
a′	-1	2.2	-87°	2.6 ,3
b′	-1	4.85	-78°	2.8 ,3
c′	-1	5.5	-77°	2.9 ,3
d′	-1	3.35	-88°	3 , 3.2
e’	-1	3.75	-80°	3.1 , 3.2
f′	-1	3.2	-97°	3.1 ,3.2
g′	-1	6.0	-84°	-
h′	-1	3.0	-95°	-

Les valeurs estimées et notamment la phase montrent une grande variabilité d’une anomalie à l’autre sur le même profil et pour la même anomalie sur les différents profils. Cette variabilité est bien illustrée sur les figures 3.8 et 3.9 : sur les deux figures respectives les valeurs estimées da la profondeur et de l’inclinaison apparente de la zone GI, caractérisée par une densité relativement élevée de points de calcul, sont interpolées et représentées en courbes de niveaux. Pour réduire la variabilité et donner une signification statistique à l’analyse de la phase et de la détermination de l’inclinaison apparente, nous avons moyenné ces deux estimations de chaque anomalie analysée disponible sur tous les profils de chaque zone.

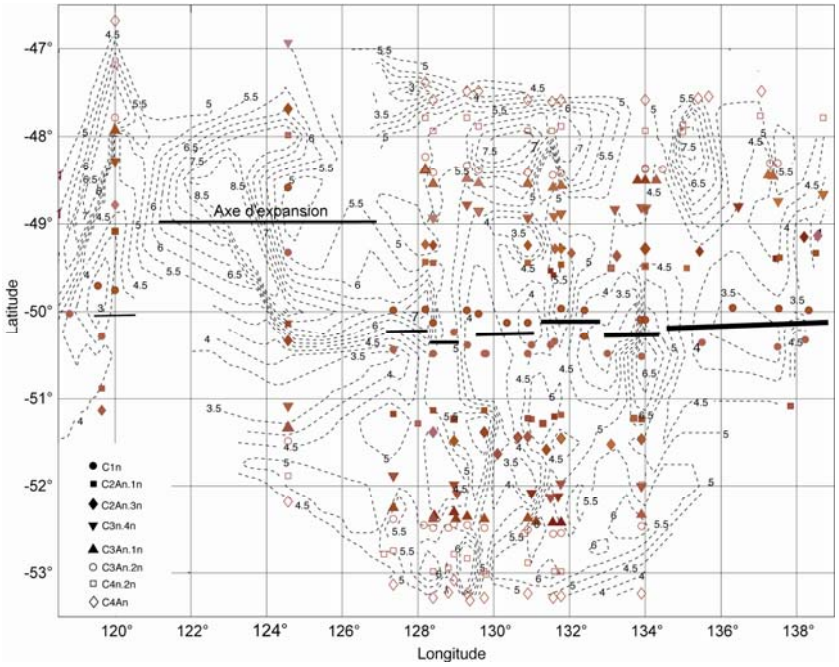


Figure 3.8. Lignes de contour de l’estimation de profondeur de la zone GI.

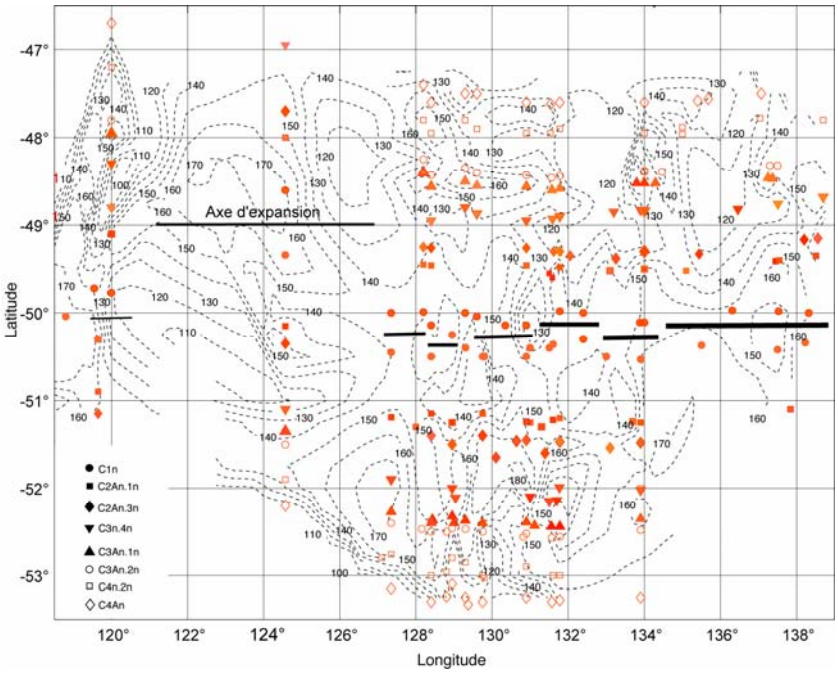


Figure 3.9. Lignes de contour de l'estimation de l'inclinaison apparente d'aimantation de la zone GI.

Sur les quatre zones analysées (figure 3.10), la profondeur moyenne du centre de localisation de la source apparaît avoir une tendance générale croissante en fonction de l'âge de la croûte océanique. Les valeurs de son estimation augmente progressivement dans les zones GII, GIII et GIV de ~3 km, pour une croûte d'âge 0 Ma, à 5-6 km pour une croûte d'âge ~8 Ma. Dans la zone GI le gradient de l'augmentation de profondeur est un peut plus doux, il varie de 4-5 km pour la croûte d'âge inférieure à 6 Ma et 5-6 km pour la croûte la plus ancienne. On constate sur les courbes de la variation de profondeur une anomalie remarquable observée sur les deux flancs de la dorsale dans toutes les zones analysées. Elle correspond au chron C2An.1n d'âge ~3 Ma, où la profondeur du centre de localisation magnétique montre un pic positif par rapport aux valeurs voisines.

Quant à l'estimation de l'inclinaison apparente, on se rappelle d'abord que les sources des anomalies magnétiques conjuguées se sont formée temporairement dans la même position. Elles possèderont initialement alors la même inclinaison apparente. Sur la courbe de variation de l'inclinaison apparente avec l'âge de la croûte, les valeurs conjuguées sont en générale différentes par un degré variable d'une anomalie à l'autre (figure 3.10 seconde ligne). Nous considérons que la moyenne de deux inclinaisons apparentes conjuguées de la courbe I'_m est l'inclinaison apparente initiale formée à l'axe de la dorsale, la demi différence entre ces deux valeurs est donc une mesure de la distorsion du vecteur magnétique d'aimantation de l'anomalie (ou l'anomalie de skewness) par rapport à la direction initiale.

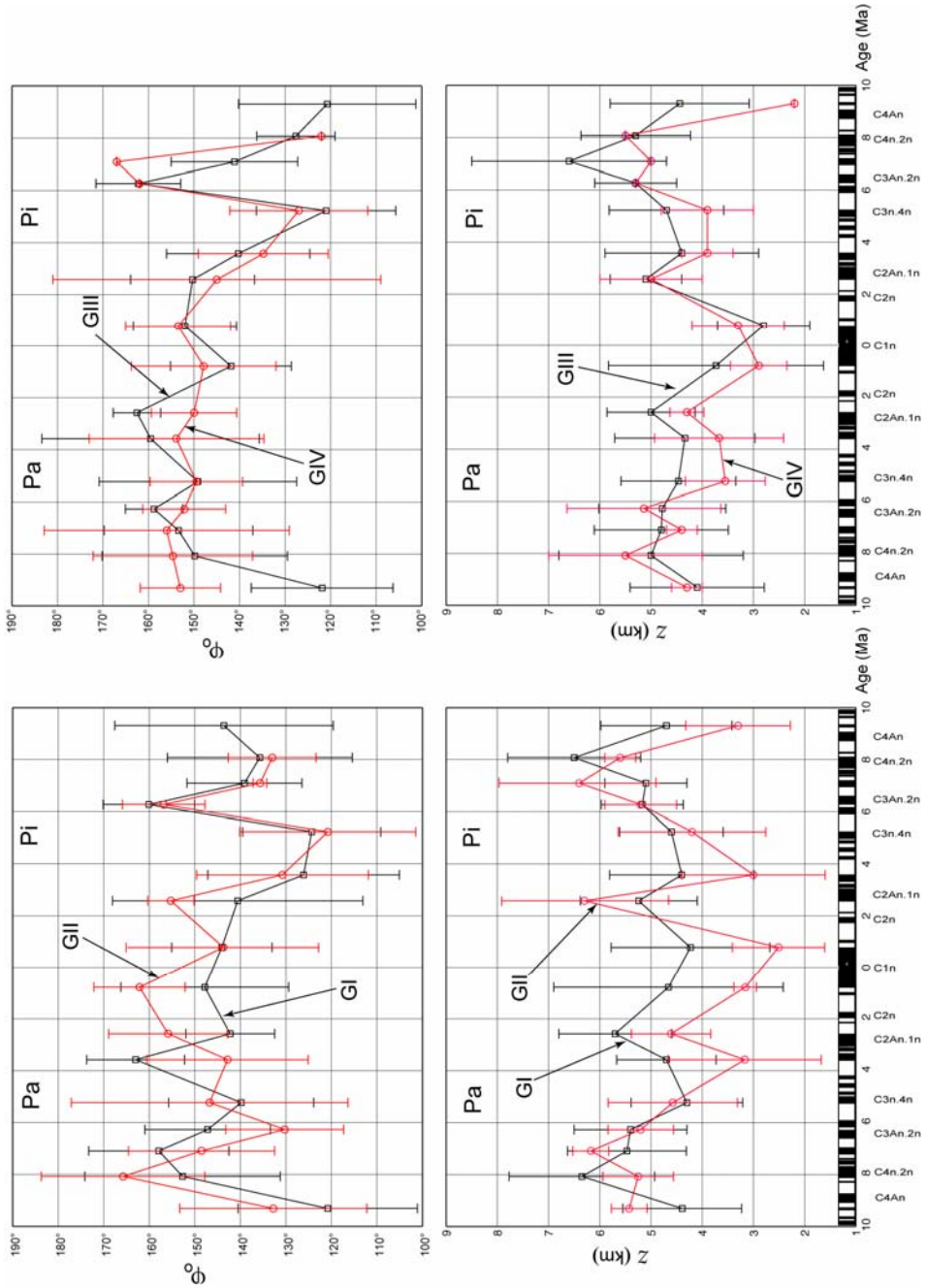


Figure 3.10. Pour chaque zone, la première ligne correspond aux valeurs moyennes de l'estimation de la phase et la seconde ligne à l'estimation moyenne de la profondeur.

A la figure 3.11 nous avons calculé la distorsion moyenne de l'inclinaison du vecteur d'aimantation pour les 8 anomalies analysées individuellement à chaque zone. Les courbes de distorsion moyenne expriment une allure similaire pour les quatre zones analysées. Sur ces courbes on constate que la distorsion du vecteur d'aimantation de la croûte océanique récente <3 Ma est très petite voir négligeable (de 0° à 5°). La distorsion prend ensuite une tendance croissante en fonction de l'âge de la croûte océanique. On remarque à l'intervalle de ~6 à ~7Ma une anomalie de cette tendance où la distorsion devient plus petite.

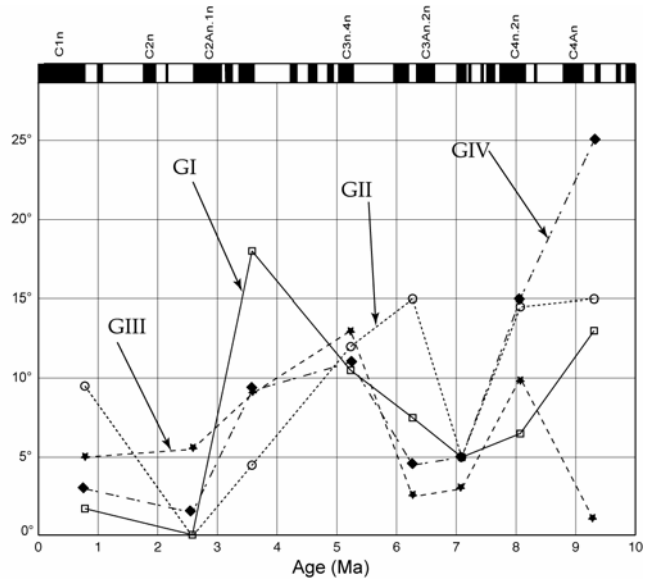


Figure 3.11. Pour les quatre zones d'analyse, la distorsion moyenne de l'estimation de inclinaison apparente.

Certains modèles de la structure magnétique du fond océanique ont été proposés pour expliquer la source de la distorsion de l'inclinaison apparente d'aimantation (voir chapitre 1). La plupart de ces modèles sont adaptés avec les méthodes classiques, citées à la section 3.1, de la détermination de la phase de l'anomalie océanique. Pour ces méthodes, la phase de l'anomalie est constituée de deux composantes : une composante liée aux inclinaisons apparentes de l'aimantation et du champ magnétique régional et une composante liée à la variation latérale de l'intensité effective d'aimantation. Tous les modèles proposés pour expliquer la distorsion de l'estimation de l'inclinaison apparente, à l'exception peut être du modèle tectonique [Verosub et Moores, 1981], attribuent la distorsion à une variation latérale de l'intensité effective de l'aimantation. Quant au modèle tectonique, il explique la distorsion par une rotation du vecteur magnétique d'aimantation consécutive à la rotation de blocs de croûte océanique.

Par la méthode d'analyse introduite dans ce chapitre, nous estimons la phase du signal magnétique dans l'endroit caractérisé par un comportement singulier de la source magnétique.

Ainsi nous éliminons, de la phase estimée, la composante liée à la variation de l'intensité effective de l'aimantation. La phase estimée par cette méthode ne dépendra que des paramètres magnétiques directionnels et la distorsion observée sur les valeurs de l'inclinaison apparente estimée est donc liée à une distorsion de la direction du vecteur d'aimantation. Les modèles proposés pour expliquer la distorsion constatée par les méthodes classiques de la détermination de la phase ne sont pas applicables pour expliquer notre résultat.

Nous proposons dans la discussion ci-dessous des explications à nos résultats en fonction des modèles magnétiques proposés pour la lithosphère océanique.

Ainsi, en considérant dans un premier temps le modèle chimique, la réaimantation du basalte dans la direction du champ géomagnétique régional ne peut pas produire les valeurs de distorsion observées au niveau des chrons C2An.1n ou C3n.4n car la différence de la direction du vecteur du champ entre la position géographique de l'axe de la dorsale, la position de la formation des chrons et leur position actuelle ne produit qu'une distorsion d'inclinaison apparente de l'ordre de 5°. Certaines études expérimentales [Hall, 1976; Johnson et Hall, 1976; Gromme et Mankinen, 1976] ont décrit une distorsion du vecteur de l'aimantation dans les basaltes altérés. Cette distorsion correspond à une direction du vecteur d'aimantation intermédiaire entre la direction initiale de la rémanence thermique et la direction du champ externe dominant lors de l'acquisition de l'aimantation rémanente chimique. En terme de modèle chimique, il est donc possible d'interpréter la distorsion observée par une réaimantation partielle du basalte dans une direction intermédiaire entre les directions des polarités directe et inverse du champ magnétique. Cependant, en tenant compte de la tendance croissante avec l'âge de l'estimation de la profondeur du centre de localisation de la source magnétique des anomalies analysées, l'hypothèse faite par le modèle chimique sur la concentration de la source d'anomalie dans la couche basaltique apparaît incorrecte. Ce comportement de l'évolution de la profondeur du centre de localisation rend l'interprétation de la distorsion observée de l'inclinaison apparente plutôt en faveur d'une source composée de plusieurs couches magnétiques [Cande et Kent, 1976 ; Blakely, 1976 ; Arkani-Hamed, 1988 ; 1991]. Selon ce genre de modèles, l'anomalie magnétique d'âge récent est liée principalement à la couche basaltique extrusive. A cause de la stabilité de l'aimantation dans cette couche, le vecteur aimantation garde sa direction initiale formée au niveau de l'axe de la dorsale et aucune distorsion significative ne peut être observée. Avec le temps, une aimantation des couches lithosphériques plus profondes (complexe filonien, couche gabbroïque) est progressivement acquise. C'est ce que nous observons avec l'approfondissement du centre de localisation de la source d'anomalie avec l'âge de la croûte. L'aimantation progressivement acquise a une direction généralement différente de celle du basalte.

Résumé

Pour une détermination plus réaliste de l'inclinaison apparente d'aimantation nous avons proposé une méthode basée sur la technique de la transformée en ondelettes. L'analyse de la phase de l'anomalie magnétique et la détermination de l'inclinaison apparente d'aimantation par le signal analytique ou par son application particulière la transformée en ondelettes est avantageuse par rapport aux méthodes classiques pour différentes raisons :

- L'observation visuelle ou automatique indirecte, suivie par les méthodes classiques, manque d'objectivité et peut introduire une erreur importante dans la détermination de la phase. L'utilisation du signal analytique et de la transformée en ondelettes complexes offre un moyen numérique précis pour accéder directement à la phase du signal magnétique.
- La détermination de l'inclinaison apparente de l'aimantation à partir d'une anomalie magnétique donnée, par les méthodes classiques, requiert la considération de la totalité de l'information contenue dans cette anomalie pour déterminer la phase. Ainsi l'information de la géométrie et de la variation d'aimantation de distribution magnétique, contenues implicitement dans l'anomalie, interviennent dans la valeur de la phase déterminée et provoquent le plus souvent une erreur sur l'inclinaison apparente. Notre méthode élimine cette erreur en utilisant les valeurs de la phase sur les lignes des maxima de la transformée en ondelettes, car la phase qu'on tente d'extraire par cette méthode est une mesure locale attribuée au centre de localisation magnétique de la distribution. Ainsi la valeur de la phase extraite ne dépend que de la direction de vecteur magnétique dominant dans la distribution.
- L'interférence entre les anomalies des zones de polarités voisines est une source d'erreur de grande importance dans la détermination de la phase d'une anomalie. Le degré de la distorsion introduit par cette artéfact dépend de l'amplitude et de la phase des fréquences intervenant dans l'anomalie analysée, qui dépendent elles-mêmes de différents paramètres comme les variations de l'aimantation, la vitesse d'expansion océanique ou la géométrie des zones des polarités opposées. L'extraction de la phase le long des lignes de maxima de la transformée en ondelettes minimise cette source d'erreur, car de telles lignes se positionnent aux endroits caractérisés par le rapport signal/bruit le plus grand de l'anomalie, c'est-à-dire aux endroits caractérisés par des effets minimaux du bruit et de l'action des anomalies voisines.
- Les méthodes classiques ne sont applicables qu'à partir d'un certain seuil de la largeur des anomalies, de telle sorte qu'elles sont difficiles à appliquer ou imprécises pour des anomalies étroites. L'extraction de la phase le long des maxima est applicable sur toutes les anomalies à priori sans influence notable de leur largueur.
- D'autre part, au lieu de la quantification visuelle ou indirecte, suivie par les méthodes classiques, de la symétrie de l'anomalie nous pouvons mesurer le degré de symétrie quantitativement en travaillant sur : la fonction de la phase locale du signal analytique, qui présente une description locale et continue de la forme du signal magnétique, ou sur la

fonction d'atténuation locale, qui présente une version $-\pi/2$ phase-translaté de la phase locale.

L'application de la méthode proposée, sur des données réelles acquises sur une croûte océanique récente de l'océan sud-est indien, a montré que l'inclinaison apparente de l'aimantation, responsable des anomalies analysées, est en général de faible distorsion avec une tendance légèrement croissante par rapport à l'âge de la croûte. La profondeur de la localisation magnétique des sources montre la même tendance. Ces résultats s'explique alors par l'acquisition en profondeur d'une aimantation qui a une direction égale à celle du champ magnétique régional du lieu et qui est différente de celle de la couche basaltique portant l'aimantation initiale.

CHAPITRE IV

CONCEPT DU SIGNAL ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS ET SON APPLICATION DANS L'INTERPRETATION DES DONNEES MAGNETIQUES

Dans le deuxième chapitre, nous avons analysé les propriétés du signal analytique associé à un signal magnétique à une dimension correspondant à un profil magnétique acquis sur des structures à deux dimensions. Ce signal à valeurs complexes a permis de séparer l'information contenue dans le signal magnétique en deux composantes indépendantes, l'amplitude locale et la phase locale. Cela rend beaucoup plus simple la caractérisation de la source magnétique causative. Une telle démarche serait évidemment aussi très intéressante pour des signaux magnétiques à deux dimensions correspondant à des cartes magnétiques acquises sur des structures à priori quelconques. L'application du signal analytique requiert donc la généralisation de son expression à deux dimensions. Certains propriétés dérivées du signal analytique à une dimension doivent être prises en compte dans cette généralisation comme la causalité du spectre fréquentiel, la reconstructibilité du signal original à partir du signal analytique et la compatibilité avec la transformée de Fourier du signal original. La difficulté principale de la définition d'une expression à deux dimensions satisfaisant ces propriétés réside dans la nécessité d'un filtre, comparable au noyau de Hilbert 1D, capable de générer la quadrature exacte d'une fonction réelle à deux dimensions. Malheureusement, cette généralisation de la transformée de Hilbert n'est pas possible ; car les concepts des fréquences positives et négatives sont réservés uniquement aux signaux à une dimension. Alors, face à l'absence d'un tel filtre de quadrature, plusieurs tentatives ont été faites pour trouver une définition optimale du signal analytique 2D qui réponde au mieux au problème posé. Ainsi nous disposons dans la littérature de plusieurs définitions du signal analytique 2D avec des avantages et des inconvénients. Nous rappelons ci-dessous les principales de ces définitions.

Signal analytique total. La transformée de Hilbert totale est définie par

$$\mathrm{f}_{Hi}(\vec{\mathrm{x}}) = \mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}}) *_{x,y} \frac{1}{\pi^2 xy}$$

La notation $*_{\vec{\mathrm{x}}}$ symbolise le produit du convolution à deux dimensions, $\vec{\mathrm{x}} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y \in \mathrm{R}^2$. Le signal analytique total est alors défini dans le domaine spatial et le domaine de Fourier par

$$\mathrm{f}_{\mathrm{A}}(\vec{\mathrm{x}}) = \mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}}) + i\mathrm{f}_{Hi}(\vec{\mathrm{x}}) \xrightarrow{\text{F.T.}} \widetilde{\mathrm{f}}_{\mathrm{A}}(\vec{\mathrm{k}}) = \widetilde{\mathrm{f}}(\vec{\mathrm{k}}) \cdot \left(1 - i\,\mathrm{sgn}(k_x)\,\mathrm{sgn}(k_y)\right)$$

Il est évident que ce signal n'annule aucune partie du domaine fréquentiel de $\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})$.

Signal analytique partiel. La transformée de Hilbert partielle dans la direction de x et y est donnée respectivement par

$$\begin{aligned} \mathrm{f}_{Hi1}(\vec{\mathrm{x}}) &= \mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}}) *_{x,y} \frac{\delta(y)}{\pi x} \xrightarrow{\text{F.T.}} \widetilde{\mathrm{f}}_{Hi1}(\vec{\mathrm{k}}) = -i\widetilde{\mathrm{f}}(\vec{\mathrm{k}})\,\mathrm{sgn}(k_x) \\ \mathrm{f}_{Hi2}(\vec{\mathrm{x}}) &= \mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}}) *_{x,y} \frac{\delta(x)}{\pi y} \xrightarrow{\text{F.T}} \widetilde{\mathrm{f}}_{Hi2}(\vec{\mathrm{k}}) = -i\widetilde{\mathrm{f}}(\vec{\mathrm{k}})\,\mathrm{sgn}(k_y) \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Le signal analytique partiel est la somme du signal original comme partie réelle et la transformée de Hilbert partielle comme partie imaginaire

$$\mathrm{f}_{\mathrm{A}}(\vec{\mathrm{x}}) = \mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}}) *_{x,y} \left(\delta(\vec{\mathrm{x}},\vec{e}) + \frac{i}{\pi\vec{\mathrm{x}}\cdot\vec{e}} \right) \cdot \delta(\vec{\mathrm{x}}.\vec{e}^{\perp}) \text{ , où } \vec{e}\cdot\vec{e}^{\perp} = 0 \qquad \text{(II)}$$

Il ressort des définitions (I) et (II) que le signal analytique partiel est un concept intrinsèquement 1D. Il peut s'obtenir par l'évolution du signal analytique à une dimension le long de lignes parallèles à une certaine orientation. Le signal n'est donc pas un vrai signal analytique à deux dimensions et son application est seulement raisonnable dans le cas d'une fonction 2D orientée dans une direction à priori.

Signal analytique de Hahn. Il se définit comme une combinaison de la transformée de Hilbert totale et des transformées de Hilbert partielles

$$\mathrm{f}_{\mathrm{A}}(\vec{\mathrm{x}}) = \mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}}) *_{x,y} \left(\delta(x) + \frac{i}{\pi x} \right)\left(\delta(y) + \frac{i}{\pi y} \right) = \mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}}) - \mathrm{f}_{Hi}(\vec{\mathrm{x}}) + i\left(\mathrm{f}_{Hi1}(\vec{\mathrm{x}}) + \mathrm{f}_{Hi2}(\vec{\mathrm{x}})\right)$$

$$\widetilde{\mathrm{f}}_{\mathrm{A}}(\vec{\mathrm{k}}) = (1+\mathrm{sgn}(k_x))(1+\mathrm{sgn}(k_y))\widetilde{\mathrm{f}}(\vec{\mathrm{k}}) \qquad \text{(III)}$$

Selon la définition (III) le signal analytique de Hahn consiste en deux signaux complexes, deux parties réelles et deux parties imaginaires, soit en coordonnées polaires en deux amplitudes et de deux phases ce qui rend l'interprétation de ce signal assez compliquée.

Signal analytique quaternionique. Ce signal analytique a, dans le domaine fréquentiel, la même définition que le signal de Hahn mais dans cette définition nous utilisons le domaine fréquentiel quaternionique (TFQ, Transformée de Fourier quaternionique) au lieu du domaine fréquentiel complexe

$$\mathrm{f}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{q}}(\vec{\mathrm{x}}) = \mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}}) + \vec{\mathrm{n}}\vec{\mathrm{f}}_{Hi}(\vec{\mathrm{x}}),\ \mathrm{n} = (i, j, k)^{\perp} \qquad \vec{\mathrm{f}}_{Hi}(\vec{\mathrm{x}}) = \begin{pmatrix} \mathrm{f}_{Hi1}(\vec{\mathrm{x}}) \\ \mathrm{f}_{Hi2}(\vec{\mathrm{x}}) \\ \mathrm{f}_{Hi}(\vec{\mathrm{x}}) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{F}_{\mathrm{A}}^{\mathrm{q}}(\vec{\mathrm{k}}) = (1 + \mathrm{sgn}(k_x))(1 + \mathrm{sgn}(k_y))\mathrm{F}^{\mathrm{q}}(\vec{\mathrm{k}})$$

où F^{q} est la transformée de Fourier quaternionique de la fonction $\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})$. Pour une introduction approfondie aux les propriétés de quaternion de Hamilton, voir, par exemple, Kantor *et al.* (1989).

Il est évident que toutes ces définitions pour un signal analytique à deux dimensions présentent certains liens entre elles du point de vue de leurs définitions. Elles sont des combinaisons entre le signal original $\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})$ et sa transformée de Hilbert totale et/ou partiale. Cependant, chacune des constructions précédentes conduit à une définition différente, avec des propriétés différentes de l'amplitude locale et des composantes de la phase locale du signal original.

Concernant la définition du signal analytique 2D dans le domaine de l'interprétation des prospections magnétiques, la première tentative pour introduire ce concept comme un outil d'interprétation remonte à l'année 1984. Nabighian a proposé une définition de la transformée de Hilbert 2D déduite de la relation entre le gradient horizontal et le gradient vertical de l'anomalie magnétique. Cependant l'auteur n'a pas donné de construction à partir de ce filtre d'un signal analytique à deux dimensions. A la suite de la définition de Nabigian les tentatives se sont plutôt focalisées sur les dérivées de l'anomalie magnétique elles-mêmes : trouver une combinaison caractérisée par des propriétés qualitatives, indépendantes des paramètres magnétiques directionnels, permettant comme le cas à une dimension de localiser la position horizontale de la source. Ainsi, Ofoegbu et al., (1990) ont donné une formule peu orthodoxe, $\sqrt{(\partial_x T + \partial_y T)^2 + \partial_z T}$, comme définition de l'amplitude du signal analytique 2D. L'allure de cette amplitude a montré une sensibilité importante à la rotation du système de coordonnées : la forme des pics permettant d'identifier la source magnétique dépend de l'orientation de la grille par rapport à cette source. Roest et al., (1992) ont utilisé la même définition que Ofoegbu et al. (1990), mais au lieu de l'addition scalaire des dérivées horizontales une addition vectorielle est utilisée. Ainsi l'amplitude a été définie comme le module du gradient total de l'anomalie. C'est cette dernière définition de l'amplitude qui est utilisée aujourd'hui et que l'on appelle par convention le signal analytique à deux dimensions. Cette fonction est supposée prendre une forme indépendante des paramètres magnétiques directionnels avec des valeurs maximales dans les positions où l'aimantation de la source présente des variations importantes (limites latérales d'objets aimantés). Plus récemment, pour augmenter la résolution de la méthode, cette définition du signal analytique a été généralisée à des ordres de dérivation plus élevés [Hsu et al. 1996 ; 1998]. Ces auteurs ont proposé le calcul du signal analytique à partir de la dérivée verticale seconde de la dérivée première selon les directions

x, y et z de l'anomalie magnétique. Ils ont également donné certaines formules pour estimer la profondeur de la source à partir du rapport entre des signaux analytiques associés aux différents ordres de dérivation de l'anomalie.

Cependant, des études ont indiqué que l'indépendance entre la forme de ce signal analytique et les paramètres magnétiques directionnels, n'est pas satisfaite pour certains types d'anomalies. Ainsi pour une anomalie localisée dans le plan, l'allure du signal analytique et les positions de ses valeurs maximales changent lorsque la direction du vecteur d'aimantation change [Shuang, 1994 ; Salem, 2002].

A travers le présent chapitre, nous analysons avec un peu de détail les propriétés du signal analytique 2D dans le perspective de l'interprétation des prospections magnétiques. La construction du signal que nous analysons est basée sur la définition de la transformée de Riesz comme généralisation 2D de la transformée de Hilbert. Nous définissons également un signal analytique radial 1D qui permettra d'établir le lien entre les propriétés de l'action de la transformée de Hilbert 1D et la transformée de Riesz sur le signal. Finalement nous proposons une nouvelle méthode pour construire l'amplitude locale d'un signal magnétique à deux dimensions. Le chapitre est structuré de la façon suivante.

Dans les deux premières sections (4.1) et (4.2), les définitions de la transformée de Riesz et de la fonction monogénique à trois dimensions sont introduites et les propriétés de chacune de ces définitions sont énoncées. Dans la section (4.3) nous donnons la définition du signal analytique à deux dimensions construit au moyen de la transformée de Riesz. Dans cette section nous explorons également les propriétés de l'amplitude et du vecteur local de la phase de ce signal pour des signaux magnétiques de différentes dimensionnalités intrinsèques. Dans la section (4.4) nous associons à un signal magnétique 2D un signal analytique radial à une dimension. Ce signal est introduit au moyen de la décomposition du signal magnétique 2D en site de signal 1D, il permettra d'expliquer la dépendance entre les propriétés des composantes sphériques, amplitude locale et du vecteur local de la phase, du signal analytique 2D et la dimensionnalité intrinsèque d'un signal magnétique. Pour assurer une représentation optimale de la variation d'énergie d'un signal magnétique 2D, nous proposons à la fin de la section une nouvelle méthode, basée sur une superposition linéaire de l'amplitude du signal analytique radial, pour construire une amplitude locale 2D. La nouvelle amplitude montre des propriétés améliorées par rapport à l'amplitude ordinaire du point du vu de son indépendance des paramètres magnétiques directionnels.

Pour améliorer la correspondance numérique entre le signal analytique radial et le signal analytique 2D, nous présentons à la section (4.5) une méthode plus convenable pour la construction de la transformée de Radon qui établit la décomposition du signal 2D en signal 1D.

4.1 Transformée de Riesz et fonction monogénique

Le problème de la généralisation du signal analytique à deux dimensions se réduit fondamentalement à la généralisation de la transformée de Hilbert. Dans cette section, nous retrouvons une définition optimale à deux dimensions de la transformée de Hilbert dérivée par la généralisation du problème de Neumann à un espace à trois dimensions (voir section 2.2).

Considérons le champ de vecteurs $\vec{F}_3$ de Ω_3 dans $R^2 \times R$ défini par

$$\vec{F}_3(\bar{x}, z) = f_x(\bar{x}, z)\vec{e}_x + f_y(\bar{x}, z)\vec{e}_y + f_z(\bar{x}, z)\vec{e}_z$$

où $\{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\}$ est une base orthogonale sur $\Omega_3 = R^2 \times R_a$. Dans le cas présent, le domaine $\Omega_3 = R^2 \times R_a$ est de la forme $]-\infty\,\infty[\times]-\infty\,\infty[\times]-\infty\, a[$.

Le champ $\vec{F}$ est irrotationnel et à flux conservatif ; soit

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F}(\bar{x}, z)) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{F}(\bar{x}, z)) &= 0 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Donc, Ω_3 étant simplement connexe, $\vec{F}_3$ est le gradient (ou l'opposé du gradient) d'une fonction scalaire φ_3, harmonique sur Ω_3.

φ_3 est la solution, unique à une constante près dépendant des conditions à l'infini, du problème de Neumann suivant

$$\begin{aligned} \Delta_3\varphi_3 &= 0 \quad \text{sur } \Omega_3 \\ \partial_z\varphi_3 &= f_z \quad \text{sur } \partial\Omega_3 = \{(\bar{x}, a)\} \end{aligned}$$

où $\Delta_3\varphi = \partial_x^2\varphi + \partial_y^2\varphi + \partial_z^2\varphi = 0$ est l'opérateur de Laplace dans un espace à trois dimensions.

Sachant que la fonction de Green du problème est

$$G(\vec{r}_3, \vec{r}_3') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_3'|} + \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_3^{\,*}|}$$

où $\vec{r}_3 = (x, y, z), \vec{r}_3' = (x', y', z')$ et $\vec{r}_3^{\,*} = (x', y', 2a - z') \in R^2 \times R$. $\vec{r}_3^{\,*}$ est le point symétrique de $\vec{r}_3'$ par rapport à la frontière a du domaine de définition Ω_3.

On obtient la solution sous la forme

$$\varphi_3(\bar{x}, z) = C - \int_{R^2} f_z(\bar{x}', a)\frac{d\bar{x}'}{2\pi\left[|\bar{x} - \bar{x}'|^2 + (z - a)^2\right]^{1/2}}$$

$$= C - f_z(\bar{x}, a) *_x \frac{1}{2\pi\left[|\bar{x}|^2 + (z - a)^2\right]^{1/2}} \tag{4.1.2}$$

De la solution 4.1.2, on déduit les expressions de f_x, f_y et f_z sur Ω

$$
\begin{aligned}
f_z(\vec{x},z) = -\partial_z\varphi_3 &= \int_{R^2} f_z(\vec{x}',a)\frac{-(a-z)\,d\vec{x}'}{2\pi\left[\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|^2+(z-a)^2\right]^{3/2}} \\
&= f_z(\vec{x},a) *_{\vec{x}} \frac{a-z}{2\pi\left[\left|\vec{x}\right|^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}, \quad a-z>0 \\
f_x(\vec{x},z) = -\partial_x\varphi_3 &= \int_{R^2} f_z(\vec{x}',a)\frac{-(x-x')\,d\vec{x}'}{2\pi\left[\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|^2+(z-a)^2\right]^{3/2}} \qquad (4.1.3) \\
&= f_z(\vec{x},a) *_{\vec{x}} \frac{-x}{2\pi\left[\left|\vec{x}\right|^2+(z-a)^2\right]^{3/2}} \\
f_y(\vec{x},z) = -\partial_y\varphi_3 &= \int_{R^2} f_z(\vec{x}',a)\frac{-(y-y')\,d\vec{x}'}{2\pi\left[\left|\vec{x}-\vec{x}'\right|^2+(z-a)^2\right]^{3/2}} \qquad (4.1.4) \\
&= f_z(\vec{x},a) *_{\vec{x}} \frac{-y}{2\pi\left[\left|\vec{x}\right|^2+(z-a)^2\right]^{3/2}}
\end{aligned}
$$

D'une manière analogue au formalisme développé dans l'espace $R\times R$, où le champ harmonique $\vec{F}_2(x,z)$ est isomorphe à une fonction holomorphe, le champ $\vec{F}_3(\vec{x},z)$ est le champ harmonique isomorphe à la généralisation de la fonction holomorphe dans l'espace $R^2\times R$. La généralisation 3D de la fonction holomorphe, appelée la fonction monogénique, satisfait une généralisation 3D des conditions de Cauchy-Riemann équivalentes au système d'équations (4.1.1).

$$
\begin{aligned}
\partial_x f_x(\vec{x},z)+\partial_x f_y(\vec{x},z)-\partial_z f_z(\vec{x},z) &= 0 \\
\partial_y f_z(\vec{x},z)-\partial_z f_y(\vec{x},z) &= 0 \\
\partial_z f_x(\vec{x},z)-\partial_x f_z(\vec{x},z) &= 0 \\
\partial_x f_y(\vec{x},z)-\partial_y f_x(\vec{x},z) &= 0
\end{aligned}
$$

Ce qui est en accord avec l'établissement de la transformée de Hilbert à partir de la relation existante, sur la frontière du domaine de définition de $\vec{F}_2(x,z)$, entre la composante verticale et la composante horizontale du champ $\vec{F}_2(x,z)$ grâce à une convolution impliquant le noyau de poisson à 1D. Dans le cas présent, sur la frontière du domaine Ω, nous pouvons établir la relation entre les composantes horizontales et la composante verticale (noyau de Poisson à 2D) du champ $\vec{F}_3(\vec{x},z)$ de la manière suivante : lorsque z tend vers a les deux expressions 4.1.3 et 4.1.4 tendent vers

$$
f_x(\vec{x},a) = f_z(\vec{x},a) *_{\vec{x}} \frac{-x}{2\pi\left|\vec{x}\right|^3} = f_z(\vec{x}) *_{\vec{x}} h_x(\vec{x})
$$

$$\mathrm{f}_y(\vec{\mathrm{x}},a) = \mathrm{f}_z(\vec{\mathrm{x}},a) *_{\vec{\mathrm{x}}} \frac{-y}{2\pi|\vec{\mathrm{x}}|^3} = \mathrm{f}_z(\vec{\mathrm{x}}) *_{\vec{\mathrm{x}}} \mathrm{h}_y(\vec{\mathrm{x}})$$

$$\vec{\mathrm{f}}_h(\vec{\mathrm{x}}) = \mathrm{f}_x(\vec{\mathrm{x}})\vec{e}_x + \mathrm{f}_y(\vec{\mathrm{x}})\vec{e}_y = \mathrm{f}_z(\vec{\mathrm{x}}) *_{\vec{\mathrm{x}}} \vec{\mathrm{h}}_2(\vec{\mathrm{x}}) \text{, où } \vec{\mathrm{h}}_2(\vec{\mathrm{x}}) = \mathrm{h}_x(\vec{\mathrm{x}})\vec{e}_x + \mathrm{h}_y(\vec{\mathrm{x}})\vec{e}_y \qquad (4.1.5)$$

La fonction à valeur vectorielle $\vec{\mathrm{h}}_2(\vec{\mathrm{x}})$ est le noyau de la transformée de Riesz qui pourrait être considérée comme une généralisation de la transformée de Hilbert à deux dimensions.

En appliquant la transformée de Fourier à cette fonction, nous écrivons la réponse fréquentielle (à valeur vectorielle) de la transformée de Riesz par

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{-x}{2\pi|\vec{\mathrm{x}}|^3} \xrightarrow{\text{F.T.}} \dfrac{ik_x}{|\vec{\mathrm{k}}|} \\ \dfrac{-y}{2\pi|\vec{\mathrm{x}}|^3} \xrightarrow{\text{F.T.}} \dfrac{ik_y}{|\vec{\mathrm{k}}|} \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{\vec{\mathrm{h}}}_2(\vec{\mathrm{k}}) = \tilde{\mathrm{h}}_x(\vec{\mathrm{k}})\vec{e}_x + \tilde{\mathrm{h}}_y(\vec{\mathrm{k}})\vec{e}_y = i\frac{\vec{\mathrm{k}}}{|\vec{\mathrm{k}}|}\ , \quad \text{où } \vec{\mathrm{k}} = k_x\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y \in \mathrm{C} \qquad (4.1.6)$$

Il faut noter que la formulation 4.4.6 est celle d'un vecteur appartenant à l'espace vectoriel C^3 sur le corp C.

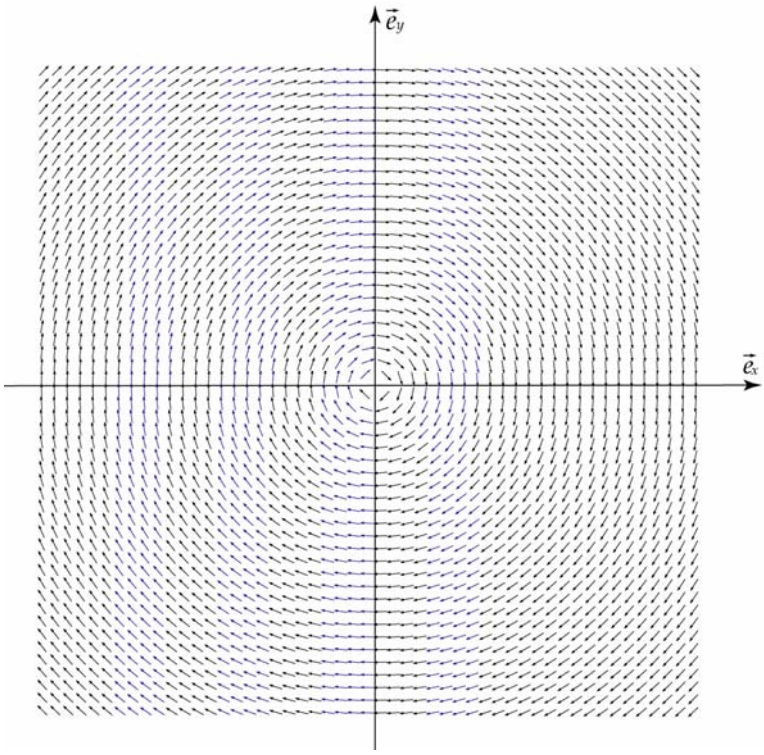


Figure 1. Représentation bivectorielle de la fonction de transfert de la transformée de Riesz.

De la définition de la fonction de transfert de la transformée du noyau de Riesz, on déduit les propriétés suivantes illustrées par la figure 1

- La transformée de Riesz est un opérateur vectoriel.
- C'est un filtre impair car la réflexion par rapport l'origine conduit à : $\widetilde{\mathrm{H}}_2(-\vec{\mathrm{k}}) = -\widetilde{\mathrm{H}}_2(\vec{\mathrm{k}})$.
- Elle supprime la fréquence nulle et une singularité existe à $\vec{\mathrm{k}} = 0$.
- La réponse en amplitude est égale à l'unité pour toutes les fréquences spatiales non nulles : $\left|\widetilde{\mathrm{H}}_2(\vec{\mathrm{k}})\right| = 1 \ \forall \vec{\mathrm{k}} \neq 0$.
- A une dimension, on retrouve la fonction de transfert de la transformée de Hilbert : $\widetilde{\mathrm{H}}_2(k) = i\,k/|k| = i\,\mathrm{sgn}(k)$.
- La transformée de Riesz de la dérivée verticale d'un signal harmonique est le gradient horizontal de ce signal : $\mathrm{H}_2\{\partial_z \mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\} = [e_1\partial_x + e_2\partial_y]\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})$.

En accord avec la formulation du signal monogénique et de la transformée de Riesz dans l'espace à trois dimensions, la solution du problème de Neumann dans un espace à $(n+1)$ dimensions conduit à définir les composantes du signal monogénique $\vec{\mathrm{F}}_{\mathrm{n}}(\vec{\mathrm{x}}_n, x_{n+1})$ à $(n+1)$ dimensions par

$$\mathrm{f}_{n+1}(\vec{\mathrm{x}}_n, x_{n+1}) = \mathrm{f}_{n+1}(\vec{\mathrm{x}}_n, x_{n+1}) *_{\vec{\mathrm{x}}_n} \frac{a - x_{n+1}}{2\pi\left[\left|\vec{\mathrm{x}}_n - \vec{\mathrm{x}}'_n\right|^2 + (x_{n+1} - a)\right]^{(n+1)/2}}, \qquad a - x_{n+1} > 0$$

$$\mathrm{f}_j(\vec{\mathrm{x}}_n, x_{n+1}) = \mathrm{f}_{n+1}(\vec{\mathrm{x}}_n, x_{n+1}) *_{\vec{\mathrm{x}}_n} \frac{-x_j}{2\pi\left[\left|\vec{\mathrm{x}}_n - \vec{\mathrm{x}}'_n\right|^2 + (x_{n+1} - a)\right]^{(n+1)/2}} \qquad 1 \leq j \leq n$$

où $\vec{\mathrm{x}}_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $\vec{\mathrm{x}}'_n(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) \in \mathrm{R}^n$. Le signal $\vec{\mathrm{F}}$ peut s'écrire comme la combinaison vectorielle dans l'espace $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}$

$\vec{\mathrm{F}}(\vec{\mathrm{x}}_n, x_{n+1}) = \mathrm{f}_{n+1}(\vec{\mathrm{x}}_n, x_{n+1})\vec{e}_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \mathrm{f}_j(\vec{\mathrm{x}}_n, x_{n+1})\vec{e}_j$ où $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{n+1}\}$ est une base orthogonale sur $\mathrm{R}^n \times \mathrm{R}$.

La généralisation des conditions Cauchy- Riemann à $(n+1)$ dimensions sera donnée par les deux formules suivantes

$$\sum_{j=1}^{n+1} \frac{\partial \mathrm{f}_i(\vec{\mathrm{x}}_n, x_{n+1})}{\partial x_j} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{f}_j(\vec{\mathrm{x}}_n, x_{n+1})}{\partial x_k} = \frac{\partial \mathrm{f}_k(\vec{\mathrm{x}}_n, x_{n+1})}{\partial x_j}, \qquad 1 \leq j, k \leq n+1$$

Sur la frontière de domaine $\Omega = \mathrm{R}^n \times \mathrm{R}_a$ de la définition de $\vec{\mathrm{F}}_n(\vec{\mathrm{x}}_n, x_{n+1})\ \Omega$, lorsque x_{n+1} tend vers a, nous pouvons déduire l'expression spatiale $\vec{\mathrm{h}}_n$ du noyau de la transformée de Riesz à n dimensions ; soit

$$\vec{\mathrm{h}}_n(\vec{\mathrm{x}}_n) = \frac{-\vec{\mathrm{x}}_n}{\left|\vec{\mathrm{x}}_n\right|^{n+1}} \tag{4.1.7}$$

En appliquant la transformée de Fourier sur l'équation 4.1.7, nous écrivons la réponse fréquentielle à n-dimensions de la transformée de Riesz nD [Stein et Weiss 1971] par

$$\widetilde{\vec{\mathrm{h}}}_n(\vec{\mathrm{k}}_n) = i\frac{\vec{\mathrm{k}}_n}{\left|\vec{\mathrm{k}}_n\right|}, \quad \vec{\mathrm{k}}_n(k_1, k_2, \ldots, k_n) \in \mathrm{R}^n$$

4.2 Signal analytique à deux dimensions

Une fois que nous avons défini la transformée de Riesz en tant que généralisation de la transformée de Hilbert 2D, nous sommes sur le point d'introduire la généralisation du signal analytique à un espace à deux dimensions. Rappelons que pour les signaux 1D, on utilise l'isomorphe entre les champs de vecteurs de R^2 et les fonctions holomorphes pour bénificier à la fois de l'algèbre sur C et de la représentation d'Euler des fonctions holomorphes en amplitude et phase locales. Pour effectuer les même développements sur les signaux 2D, il faudrait introduire le formalisme de l'algèbre géométrique, encore appelé algèbre de Clifford [Felsberg, 2002 ; Hestenes et al., 1984], ou celui de l'algèbre des quaternions. Nous choisissons, pour éviter la complexité de l'analyse, de maintenir la notation vectorielle et de définir le signal analytique à deux dimensions comme un champ vectoriel $\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{A}}(\vec{\mathrm{x}}) : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$. Ce formalisme nous apparaît suffisant pour donner une définition complète de deux éléments essentiels du signal, l'amplitude locale et le vecteur local de la phase, que nous allons définir plus loin. Ainsi, le vecteur signal analytique $\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{A}}(\vec{\mathrm{x}})$ associé à un signal réel $\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})$ (figure 2) s'obtient directement par le produit de convolution suivante

$$\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{A}}(\vec{\mathrm{x}}) = \int_{\mathrm{R}^2} \left(\delta_0(\vec{\mathrm{x}}')\,\vec{e}_z + \vec{\mathrm{x}}'/2\pi\left|\vec{\mathrm{x}}'\right|^3\right)\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}} - \vec{\mathrm{x}}')\,d\vec{\mathrm{x}}', \qquad \vec{\mathrm{x}} \text{ et } \vec{\mathrm{x}}' \in \mathrm{R}^2 \tag{4.2.1}$$

$$= \mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\,\vec{e}_z - \mathsf{H}_x\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}\vec{e}_x - \mathsf{H}_y\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}\vec{e}_y$$

H_x et H_y sont respectivement les composantes de l'opérateur de transformée de Riesz selon les axes $0\vec{e}_x$ et $0\vec{e}_y$, et leur action sur la fonction $\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})$ est

$$\mathsf{H}_x\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\} = \mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}}) * \frac{x}{2\pi\left|\vec{\mathrm{x}}\right|^3} \text{ et } \mathsf{H}_y\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\} = \mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}}) * \frac{y}{2\pi\left|\vec{\mathrm{x}}\right|^3}$$

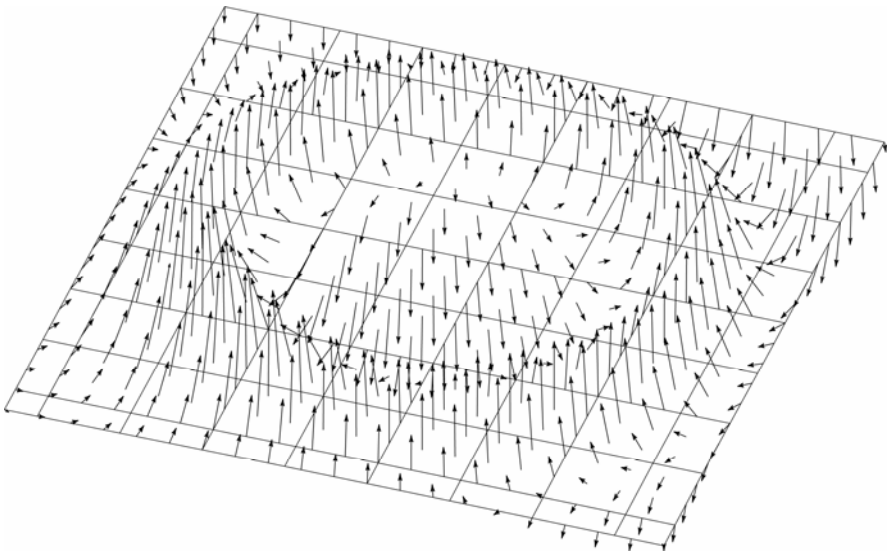


Figure 2. Représentation du signal analytique 2D sous forme d'un champ vectoriel.

En coordonnées sphériques (figure 3), le vecteur de signal analytique 2D équation 4.2.1 satisfait la propriété de la séparation en amplitude locale à valeur scalaire, donnée par l'équation 4.2.2, et en vecteur local de la phase $\vec{r}(\vec{x})$ donné par l'équation 4.2.3. L'amplitude locale contient une information énergétique contenue dans le domaine spatial

$$\left|\vec{f}_A(\vec{x})\right| = \sqrt{f(\vec{x})^2 + \left|H_2\{f(\vec{x})\}\right|} = \sqrt{f(\vec{x})^2 + \left(H_x\{f(\vec{x})\}\right)^2 + \left(H_x\{f(\vec{x})\}\right)^2} \tag{4.2.2}$$

Quant au vecteur locale de la phase : en fait, le vecteur du signal analytique affecte une rotation d'angle $\varphi(\vec{x})$ autour de l'axe $0\vec{e}_y$. En suite ce vecteur affecte une deuxième rotation d'angle θ autour de l'axe de rotation $0\vec{e}_z$ [Granlund et al., 1995]. Ansi, cette multiple rotation définit un vecteur de rotation $\vec{\Omega}(\vec{x})$ donné par

$$\vec{\Omega}(\vec{x}) = [\cos(\theta)\,\vec{e}_x + \sin(\theta)\,\vec{e}_y] \cdot \varphi(\vec{x})$$

$$= \frac{H_2\{f(\vec{x})\}}{\left\|H_2\{f(\vec{x})\}\right\|} \tan^{-1}\left(\frac{\left\|H_2\{f(\vec{x})\}\right\|}{f(\vec{x})}\right)$$

L'orientation du vecteur locale de la phase et la phase $\vec{r}(\vec{x})$ se situe dans le plan normal à l'axe de rotation $0\vec{e}_z$ [Felsberg, 2002]. Il est perpendiculaire au plan défini par les supports des $f(\vec{x})$ et $\vec{f}_A(\vec{x})$, soit parallèle à l'orientation locale du signal magnétique, et son amplitude correspond à l'angle $\varphi(\vec{x})$

$$\vec{r}(\vec{x}) = \vec{e}_z \wedge \vec{\Omega}(\vec{x}) \tag{4.2.3}$$

Le vecteur local de la phase èq. 4.2.3 inclue à la fois donc deux informations sur le signal $f(\vec{x})$: la phase locale $\varphi(\vec{x})$ qui représente, comme le cas à 1D, une mesure structurale locale de $f(\vec{x})$ dont la valeur est comprise dans l'intervalle $[-\pi/2, \pi/2)$ ou l'intervalle $[0, \pi]$. Mais à la différence du cas 1D où la phase locale est à valeur scalaire et mesure la rotation du signal $\{f(x), x \in R\}$ dans le plan complexe, dans le cas 2D cette phase locale est associée à une information géométrique additionnelle s'agissant d'une orientation locale θ donnée.

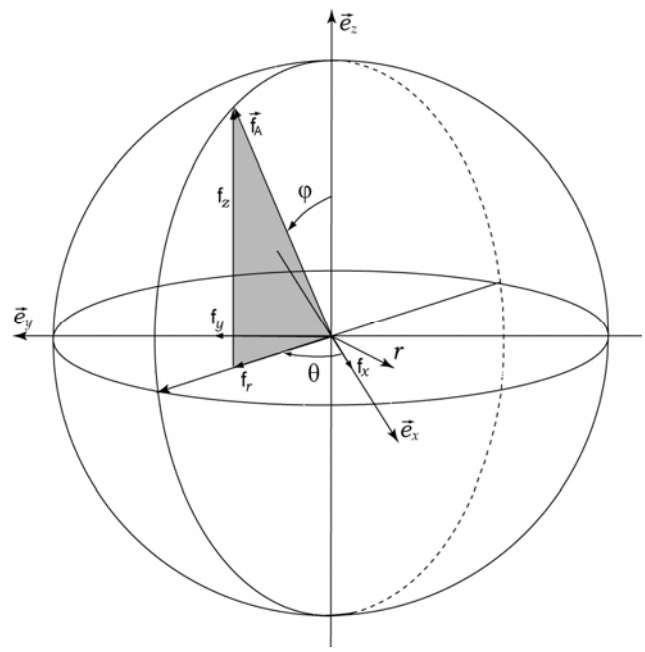


Figure 3. Représentation du vecteur local de la phase du signal analytique 2D en coordonnées sphériques.

En accord avec les propriétés de la transformée de Riesz, et en comparaison avec le signal analytique 1D, le signal analytique 2D possède les propriétés suivantes :

- Il possède 2 fois énergie du signal original

$$\int_{R^2} \left| (\vec{e}_z - \cos(\theta)\vec{e}_x - \sin(\theta)\vec{e}_y)\tilde{f}(\vec{k}) \right|^2 d\vec{k} = 2\int_{R^2} \left| \tilde{f}(\vec{k}) \right|^2 d\vec{k}$$

- Il ne supprime aucune partie du domaine fréquentiel du signal original $f(\vec{x})$. Il contient alors une information redondante par rapport au signal analytique-1D.
- Il est reconstructible : il est constitué de la combinaison du signal original avec une version filtrée par la transformée de Reisz.

- En coordonnées sphériques, le signal analytique 2D dissocie l'information portée par le signal 2D original en deux composantes qui sont : l'amplitude locale (à valeurs scalaires) et la phase locale (à valeurs vectorielles).
- Le développement précédent de la définition du signal analytique à 2D est fondé principalement sur la réalité que le gradient horizontal et le gradient vertical d'une fonction harmonique $\mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})$, forment une paire de transformée de Riesz..

4.3 Signal analytique 2D de l'anomalie magnétique

D'une manière analogue à la construction du signal analytique à une dimension, l'approche la plus simple pour construire le signal analytique d'une fonction 2D de potentiel harmonique $\mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})$ est de se servir de la relation existant entre la dérivée verticale $\partial_z \mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}}, z)$ et le gradient horizontal $\vec{\nabla}_{\mathrm{h}} \mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}}, z) = \partial_x \mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}}, z)\vec{e}_x + \partial_y \mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}}, z)\vec{e}_y$ de $\mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})$ en tant que paire de transformées de Riesz (voir les propriétés de la transformée de Riesz à la section 4.2). Le signal analytique 2D construit sera attribué à la dérivée verticale $\partial_z \mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}}, z)$ où les deux fonctions décrivent la même information mais avec deux représentations différentes. Ainsi, lorsque la fonction harmonique est l'anomalie magnétique $T(\bar{\mathrm{x}})$ mesurée sur un plan, nous définissons son signal analytique par

$$\begin{aligned}\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{A}}(\bar{\mathrm{x}}) &= \partial_x T(\bar{\mathrm{x}})\vec{e}_x + \partial_y T(\bar{\mathrm{x}})\vec{e}_y + \partial_z T(\bar{\mathrm{x}})\vec{e}_z \\ &= \mathsf{H}_2\{\partial_z T(\bar{\mathrm{x}})\}\vec{e}_h + \partial_z T(\bar{\mathrm{x}})\vec{e}_z \\ &= \mathsf{H}_x\{\partial_x T(\bar{\mathrm{x}})\}\vec{e}_x + \mathsf{H}_y\{\partial_y T(\bar{\mathrm{x}})\}\vec{e}_y + \partial_z T(\bar{\mathrm{x}})\vec{e}_z \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

En cordonnée sphériques, l'équation 4.3.1 s'écrit en terme d'amplitude locale et de vecteur de rotation respectivement par les deux formules suivantes

$$\left|\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{A}}\right|(\bar{\mathrm{x}}) = \left|\vec{\nabla}_3 T(\bar{\mathrm{x}})\right| = \sqrt{(\partial_x T(\bar{\mathrm{x}}))^2 + (\partial_y T(\bar{\mathrm{x}}))^2 + (\partial_z T(\bar{\mathrm{x}}))^2} \tag{4.3.2}$$

$$\vec{r}(\bar{\mathrm{x}}) = \vec{e}_z \wedge \frac{\partial_x T(\bar{\mathrm{x}})\vec{e}_x + \partial_y T(\bar{\mathrm{x}})\vec{e}_y}{\left|\partial_x T(\bar{\mathrm{x}})\vec{e}_x + \partial_y T(\bar{\mathrm{x}})\vec{e}_y\right|} \tan^{-1}\left(\frac{\left|\partial_x T(\bar{\mathrm{x}})\vec{e}_x + \partial_y T(\bar{\mathrm{x}})\vec{e}_y\right|}{\partial_z T(\bar{\mathrm{x}})}\right) \tag{4.3.3}$$

Dans l'interprétation des prospections magnétiques à deux dimensions, la seule partie de $\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{A}}(\bar{\mathrm{x}})$ connue est son amplitude locale (équation 4.3.2). L'amplitude est couramment utilisée pour localiser la position horizontale des contrastes magnétiques. Cette application est fondée sur l'hypothèse que $\left|\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{A}}(\bar{\mathrm{x}})\right|$ préserve la principale propriété de l'amplitude du signal analytique 1D, concernant l'indépendance de sa forme et de la position de sa valeur maximale par rapport aux directions du champ magnétique et de l'aimantation de la source de l'anomalie. De telles caractéristiques invariantes sont avantageuses dans l'interprétation

magnétique à deux dimensions, notamment lorsque la contribution de l'aimantation induite et rémanente sont inconnues. Ainsi, pour des sources magnétiques suffisamment isolées la détermination de la position des maxima de $\left|\vec{f}_A(\vec{x})\right|$ est une mesure de la position horizontale de la source. La position des maxima peut être déterminée automatiquement par la méthode de Blakely et Simpson (1986) ou directement observée sur la carte d'amplitude. La généralisation du signal analytique à des ordres de dérivation plus élevés, parallèles ou obliques aux axes horizontaux du repère cartésien, de l'anomalie magnétique $T(\vec{x})$ dans l'équation 4.3.1 augmente la résolution de la détection : la carte obtenue sera moins affectée par l'effet des interférences entre les anomalies générées par des sources voisines [Hsu et al., 1996, 1998]. Par ailleurs, la considération du rapport entre les amplitudes locales des signaux analytiques associés à deux dérivées d'ordre différent de l'anomalie $T(\vec{x})$ permet d'établir des applications pratiques pour estimer certains paramètres de la source comme la profondeur.

En fait, l'hypothèse de l'indépendance entre l'allure de $\left|\vec{f}_A(\vec{x})\right|$ (notamment la position de ses maxima) et les paramètres magnétiques directionnels n'est vraie que pour des signaux magnétiques à structure intrinsèque particulière. Pour explorer ce type de structures, nous introduisons la définition suivante de la dimensionnalité intrinsèque d'un signal réel à n dimensions : pour un signal $\left\{f(\vec{x}), \vec{x} \in R^n\right\}$, nous dirons que ce signal est intrinsèquement de dimension m, que l'on note mi-D, s'il est constant par rapport à $n-m$ orientations orthogonales dans son domaine de définition.

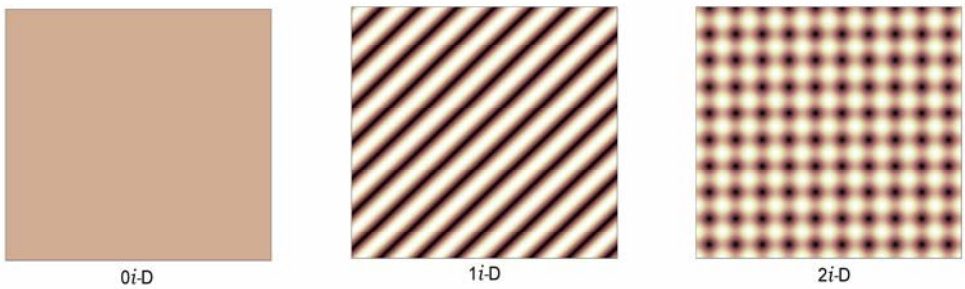


Figure 4. Illustration de la dimensionnalité intrinsèque d'un signal 2D.

Pour mieux éclairer le concept de dimensionnalité intrinsèque, nous donnons à la figure 4 trois dimensions intrinsèques différentes pour une fonction 2D. Ainsi, si la fonction est constante partout, sa dimension intrinsèque est zéro. Si la fonction est constante dans une seul direction (comme le signal magnétique d'un contact ou une lame), sa dimension intrinsèque est un. Dans le dernier cas, la dimensionnalité de la fonction est deux. Notons que dans une prospection réelle à deux dimensions, l'anomalie magnétique est en générale une combinaison de ces trois cas.

Pour mieux comprendre les propriétés de l'amplitude locale et du vecteur de rotation en fonction de la dimension intrinsèque du signal magnétique, nous construisons par la suite le

signal analytique 2D de quatre types de signaux magnétiques différents par leurs structure intrinsèque. Il s'agit

- de la dérivée verticale du champ magnétique d'un prisme comme exemple d'un signal à structure intrinsèque mixte 1i-D et 2i-D,
- de la dérivée verticale du champ d'un disque à axe vertical comme exemple d'un signal à structure globale 1i-D,
- de la dérivée verticale du champ magnétique d'un dipôle verticale comme exemple d'un signal à structure 2i-D caractérisée par une symétrie circulaire,
- et de la dérivée verticale du champ magnétique d'un dipôle oblique comme exemple d'un signal à structure 2i-D absent de tout type de symétrie.

4.3.1 Signal magnétique à structure 1i-D

Le signal magnétique T_z^1 représenté à la figure 5 (a), est la dérivée verticale première de l'anomalie magnétique générée par un prisme rectangulaire vertical, ayant des bords parallèles aux axes horizontaux du repère cartésien et d'extension verticale finie [Bhattacharyya, 1966]. L'aimantation du prisme est purement induite par un champ magnétique externe d'inclinaison de 60° et de déclinaison de 60°. Les figures 5 (b) et (c) représentent respectivement les dérivées horizontales par rapport à x et à y de l'anomalie $T(\bar{x})$ du prisme qui représentent les deux composantes de la transformée de Riesz de T_z^1.

L'énergie significative du signal T_z^1 est concentrée dans une bande étroite parallèle aux bords du prisme. Nous pouvons distinguer dans cette bande deux types de structures intrinsèques : une structure 1i-D d'orientation locale parallèle à l'orientation locale des bords et une structure 2i-D associée aux coins du prisme.

Sur les figures 6 et 7 sont représentés respectivement l'amplitude locale $\left|\vec{f}_A(\bar{x})\right|$ calculée par l'équation 4.3.2 et le champ du vecteur local de phase $\vec{r}(\bar{x})$ calculés par l'équation 4.3.3. Aux endroits où le signal T_z^1 est à structure 1i-D, l'amplitude locale $\left|\vec{f}_A(\bar{x})\right|$ est une fonction symétrique positive. La position horizontale des valeurs maximales de $\left|\vec{f}_A(\bar{x})\right|$ montre une bonne correspondance avec la vraie position de la source de $T_z^1(\bar{x})$. La forme et la position des valeurs maximales de $\left|\vec{f}_A(\bar{x})\right|$ sont indépendantes des paramètres magnétiques directionnels et de l'orientation locale de $T_z^1(\bar{x})$. Le vecteur local de la phase dans les mêmes endroits, 1i-D, s'oriente parallèlement à l'orientation locale de $T_z^1(\bar{x})$ (soit parallèlement à l'orientation des bords du prisme). Les valeurs de la phase locale $\varphi(\bar{x})$ correspondant au module de $\vec{r}(\bar{x})$, sont constantes dans la direction parallèle à l'orientation locale du signal et variables dans la direction perpendiculaire.

Au voisinage des arêtes T_z^1, une déviation se produit entre la position horizontale de la source estimée par les valeurs maximales de $\left|\vec{f}_A(\bar{x})\right|$ et la vraie position. Cette déviation augmente

dans les positions où le signal devient presque purement 2i-D. Ainsi la position horizontale estimée de $\left|\vec{f}_A(\vec{x})\right|$ des coins du prisme est systématiquement déplacée par rapport à la vraie position. Pour une altitude constante du plan de calcul de T_z^1, la valeur du déplacement augmente en diminuant l'inclinaison des vecteurs de direction du champ magnétique et de l'aimantation. Un autre facteur affecte la valeur du déplacement. Il s'agit de la longueur d'onde selon laquelle le signal magnétique est calculé. En général, le déplacement est plus petit quand les composantes dominantes dans le signal sont de petite longueur d'onde. Cela est lié à la profondeur du prisme mais à aussi à l'ordre de dérivation. Quant au vecteur local de la phase $\vec{r}(\vec{x})$ dans les zones 2i-D, il évolue dans des orientations différentes avec une variation de sa magnitude $\varphi(\vec{x})$ (figure 7).

Le deuxième modèle synthétique, que nous abordons, est l'application du signal analytique 2D sur dérivée première verticale T_z^1 du champ magnétique d'un disque à axe vertical (figure 8a). L'aimantation du disque est purement induite par un champ magnétique externe d'inclinaison 60° et de déclinaison 60°. Les composantes de la transformée de Riesz de T_z^1, soit les dérivées par rapport à x et y, sont données respectivement aux figures 8b et 8c. Comme le montre la figure 8a, les valeurs significatives de l'énergie du signal magnétique T_z^1 sont concentrées dans une bande circulaire parallèle au bord du disque. Lorsque le diamètre de la bande est suffisamment grand, la variation du signal T_z^1 le long de la bande circulaire est lente. Alors, dans le voisinage d'une certaine position, on peut considérer T_z^1 constant dans l'orientation perpendiculaire à une droite passant par le centre du disque. La structure de T_z^1 présente donc un exemple typique d'une structure globale 1i-D avec une orientation variable sur l'intervalle $[0,\pi]$.

L'amplitude locale associée à T_z^1 présente une allure symétrique dans le plan normal à l'orientation locale de T_z^1. Les valeurs maximales de $\left|\vec{f}_A(\vec{x})\right|$, pour un point donné, se situent à l'aplomb du bord du disque (figure 9). La forme et la position des maxima de $\left|\vec{f}_A(\vec{x})\right|$ sont indépendantes des paramètres magnétiques directionnels et de l'orientation locale de T_z^1.

Le vecteur local de la phase $\vec{r}(\vec{x})$ est d'orientation parallèle à l'orientation locale du signal magnétique soit également parallèle à l'orientation locale du bord du disque. Comme conséquence de la variation lente du signal T_z^1, la phase locale $\varphi(\vec{x})$ dans certaines positions est approximativement de valeur constante dans la direction parallèle à l'orientation du signal dans cette position et variable dans la direction perpendiculaire (figure 10).

De manière analogue à la phase locale en 1D, on constate un retournement du vecteur local de la phase 2D. La direction évolue brutalement d'une valeur de $\pm\pi$ (figure 10). On note que ce comportement du champ du vecteur de la phase est général. Il est observé sur tous les modèles analysés.

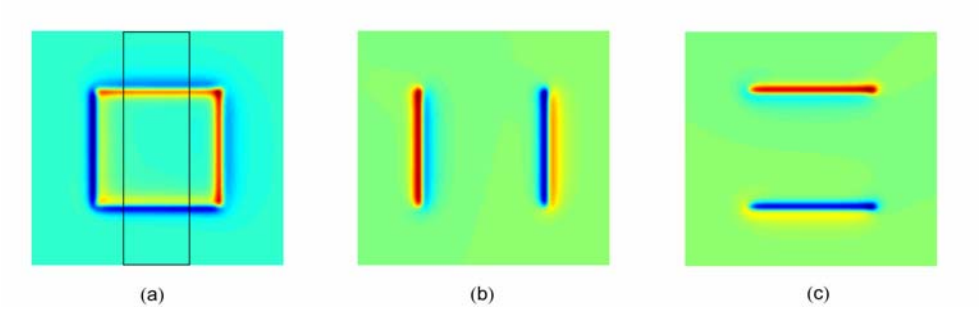


Figure 5. Composantes cartésiennes du signal analytique 2D associé à la dérivée verticale première du champ du prisme.

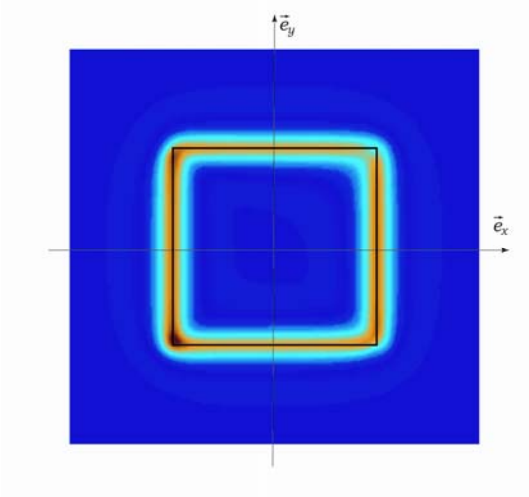


Figure 6. Amplitude locale de la dérivée verticale première du champ du prisme.

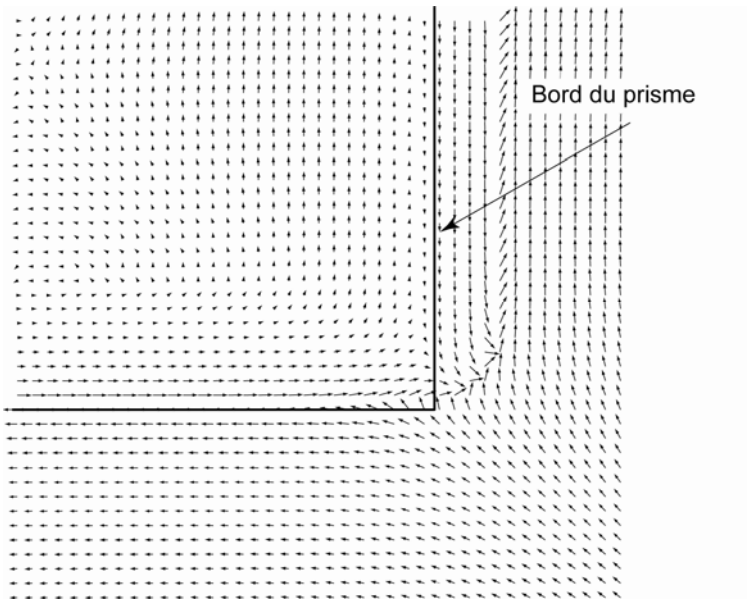


Figure 7. Vecteur local de la phase de la dérivée verticale première du champ du prisme.

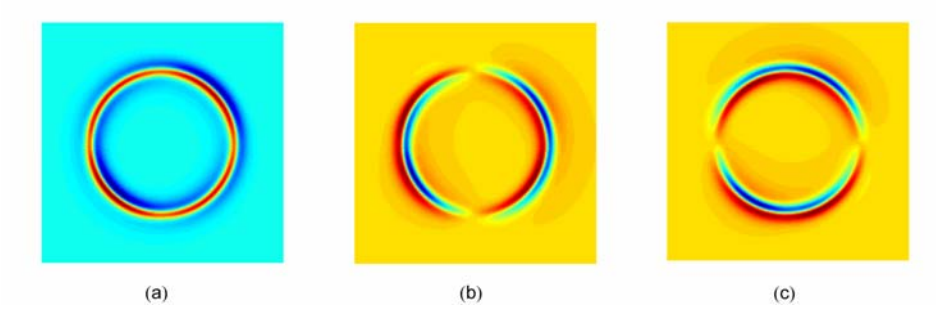


Figure 8. Composantes cartésiennes du signal analytique 2D associé à la dérivée verticale première de champ du disque.

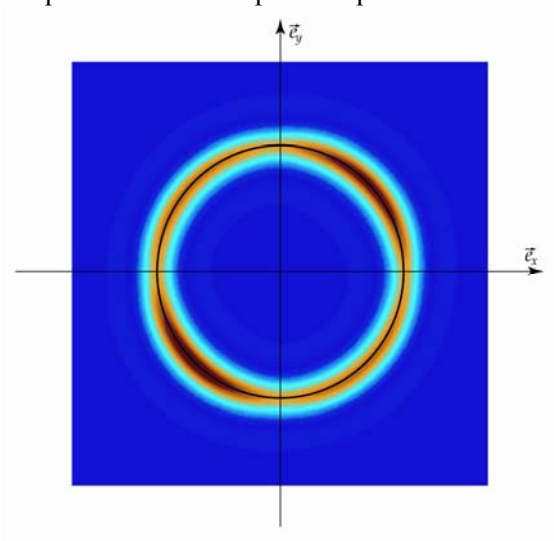


Figure 9. Amplitude locale de la dérivée verticale première du champ du disque.

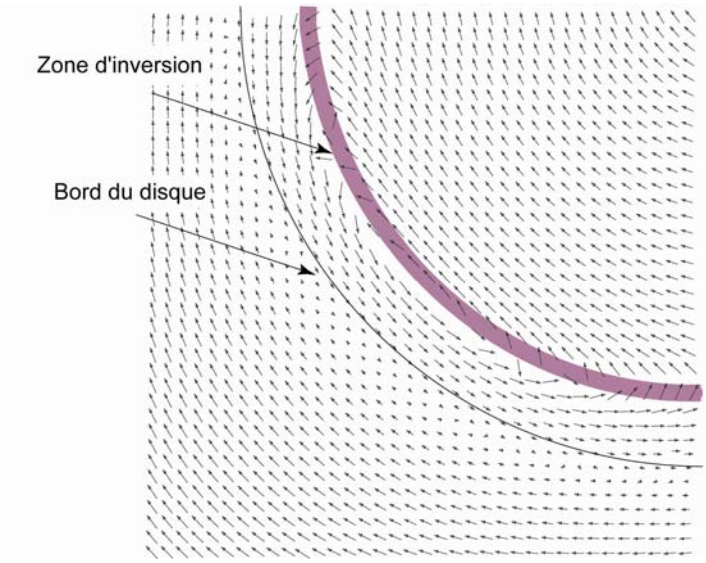


Figure 10. Vecteur local de la phase de la dérivée verticale première du champ du disque.

4.3.2 Signal magnétique à structure 2i-D

Comme signal magnétique à structure 2i-D, nous avons choisi deux signaux simples correspondant à la dérivée verticale première $T_z^1(\vec{x})$ du champ généré par un dipôle induit dans deux directions différentes. Le dipôle se situe sur l'axe $0e_z$ du repère cartésien et ses deux directions correspondent à une direction verticale et une direction définie par l'inclinaison 60° et la déclinaison 60°.

Le signal magnétique T_z^1 dû au dipôle vertical a une symétrie circulaire par rapport à la verticale passant par le dipôle(figure 11a). Les composantes de la transformée de Riesz de T_z^1 constituées des dérivées du champ par rapport à x et à y sont des fonctions anti-symétriques respectivement par rapport aux axes $0\vec{e}_x$ et $0\vec{e}_y$ (figures 11b et 11c).

L'amplitude locale du signal analytique associé à T_z^1 est une fonction positive à symétrie circulaire avec une valeur maximale placée à l'aplomb de la position du dipôle (figure 12). Le champ des vecteurs locaux de la phase $\vec{r}(\mathrm{x})$ a une anti-symétrie d'un point $\vec{r}(\mathrm{x}) = -\vec{r}(\vec{\mathrm{x}})$. En prenant en compte que la direction de $\vec{r}(\mathrm{x})$ définit le signe de la phase locale, on constate alors que la phase locale $\varphi(\vec{\mathrm{x}})$ se caractérise par une antisymétrie d'un point $\varphi(\vec{\mathrm{x}}) = -\varphi(\vec{\mathrm{x}})$; où le centre de l'antisymétrie correspond à la verticale du dipôle.

Dans la deuxième application pour un dipôle incliné, le signal magnétique T_z^1 (figure 14a), et les composantes de sa transformée de Riesz (figures 14b c), présentent des fonctions asymétriques.

L'amplitude locale associée à T_z^1 présente une fonction asymétrique avec une valeur maximale déplacée horizontalement par rapport à la vraie position du dipôle (figure 15). La localisation de la valeur maximale de l'amplitude locale associée à T_z^1, calculée pour différentes directions du vecteur magnétique inducteur du dipôle, indique que la direction du déplacement correspond à la direction de la projection horizontale du vecteur magnétique inducteur et que son amplitude est dans une certaine mesure proportionnelle avec l'inverse de l'inclinaison du vecteur inducteur. Ainsi pour des valeurs faibles d'inclinaison, le déplacement peut atteindre des valeurs considérables par rapport à la profondeur du dipôle. On note que ces observations ont été documentées dans la littérature par plusieurs auteurs [Shuang, 1994 ; Salem, 2002]. Pour le présent exemple, le déplacement est dans une direction à 60° de celle de l'axe $0e_y$ et l'amplitude du déplacement est de 20% de la profondeur du dipôle.

Quant au vecteur local de la phase $\vec{r}(\mathrm{x})$, il évolue dans différentes direction mais aucun type de symétrie n'est observé (figure 16). Le comportement du champ de $\vec{r}(\mathrm{x})$ indique que l'anti-symétrie par rapport à un point de la phase locale $\varphi(\vec{\mathrm{x}})$ observée dans le cas d'un dipôle vertical n'existe plus.

Afin de pouvoir comprendre le comportement observé de l'amplitude locale et du vecteur local de la phase des modèles synthétiques précédemment cités, rappelons que le succès de

l'approche du signal analytique 2D dans l'interprétation des données magnétiques est dû à la capacité du signal analytique à séparer l'information originale en amplitude locale et en phase locale parfaitement indépendantes. Dans l'application, notre critère de l'indépendance de ces deux composantes du signal analytique est le degré de robustesse de la position horizontale des valeurs maximales par rapport à la variation de l'allure du signal magnétique original dû aux paramètres magnétiques directionnels. Ainsi, si l'indépendance est vérifiée, la position des valeurs maximales de l'amplitude doit être invariante dans le changement de l'allure du signal magnétique. Dans ce cas quelle que soit la direction des vecteurs magnétiques, les maxima de l'énergie se placeront toujours à l'aplomb de la source magnétique. A trois dimensions, les applications synthétiques précédentes indiquent l'existence d'une relation étroite entre la dimensionnalité intrinsèque du signal magnétique et l'indépendance des composantes du signal analytique. Elle indique que l'amplitude locale et la phase locale ne sont indépendantes que pour un signal magnétique à structure i1D. Par contre, les signaux magnétiques à structure i2D représentent une limitation majeure de cette méthode car la forme et la position des maxima de leur amplitude locale apparaissent fortement dépendantes de la direction des vecteurs magnétiques. En général, pour de tels signaux, il n'y a pas de coïncidence entre la position horizontale des maxima d'énergie du signal magnétique et la projection horizontale de la position de la source. C'est seulement dans le cas particulier où le signal magnétique i2D est symétrique que la coïncidence est vérifiée en raison de la symétrie du signal original.

La compréhension de la relation entre la dimensionnalité intrinsèque du signal magnétique et les propriétés de l'amplitude locale et du vecteur local de la phase réside dans la définition de ce dernier vecteur (voir équation 4.2.3). En effet, il est défini par deux angles : l'orientation locale θ et la phase locale φ. Dans les zones où le signal magnétique a un comportement i1D, ces deux degrés de liberté de $\vec{r}(\vec{x})$ sont suffisants pour décrire parfaitement la géométrie et la structure du signal magnétique. Ainsi, $\vec{r}(\vec{x})$ s'oriente parallèlement à l'orientation constante du signal magnétique et φ décrit sa symétrie 1D associée à cette orientation. Le signal analytique 2D est alors une représentation parfaite du signal magnétique et la condition de l'indépendance entre l'amplitude locale et la phase locale est vérifiée. Dans ce cas, l'angle θ est une mesure de l'orientation locale du signal magnétique, et $\left|\vec{f}_A(\vec{x})\right|$ et φ seront deux composantes accessibles indépendamment à l'analyse quantitative pour caractériser les paramètres de la source magnétique.

Alors qu'un signal magnétique i1D à un comportement 1D dans une orientation locale appropriée et unique, il n'y a pas d'orientation préférentielle confinant à un signal i2D un comportement. Ce signal peut être décomposé en un nombre infini de projections i1D associées à un paramètre d'orientation contenu dans l'intervalle $[0,\pi]$. Il est impossible de décrire la géométrie et la structure de ces signaux par les deux degrés de liberté θ et φ du vecteur local de la phase. Plus précisément, dans ce cas, la transformée de Riesz ne permet pas de calculer un signal analytique ayant les propriétés d'un signal analytique 1D. Le signal

analytique 2D est dans ce cas une représentation inappropriée car l'amplitude locale et la phase dépendent toutes deux des vecteurs magnétiques (champ et aimantation). Donc en particulier, l'amplitude locale ne permet pas de caractériser la source magnétique (positon, profondeur, …). Dans la section suivante nous allons essayer de remédier à cette inconvénient.

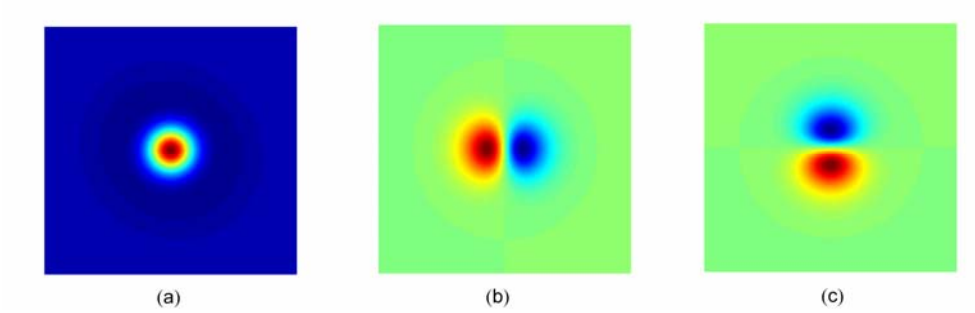


Figure 11. Composantes cartésiennes du signal analytique 2D associé à la dérivée verticale première du champ du dipôle vertical.

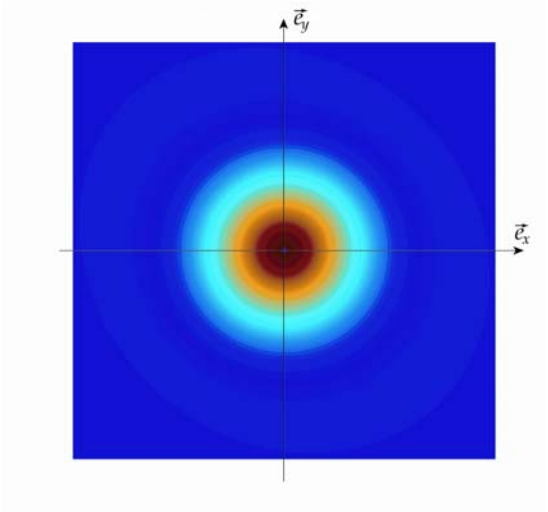


Figure 12. Amplitude locale de la dérivée verticale première du champ du dipôle vertical.

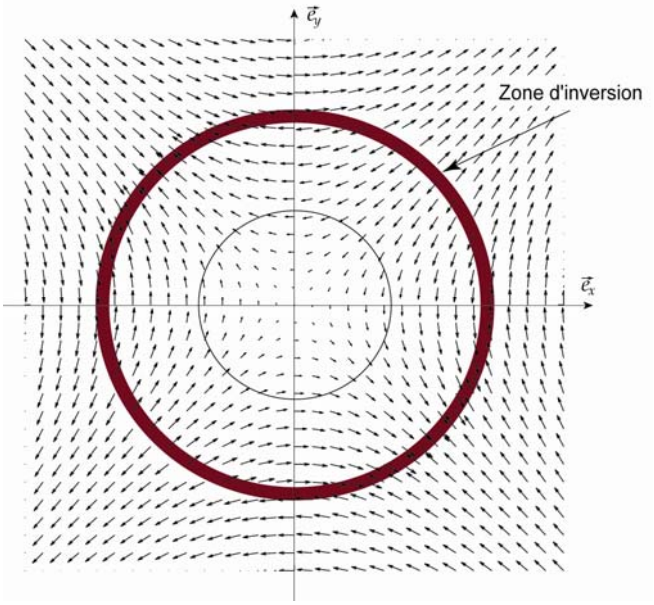


Figure 13. Vecteur local de la phase de la dérivée verticale première du champ du dipôle vertical.

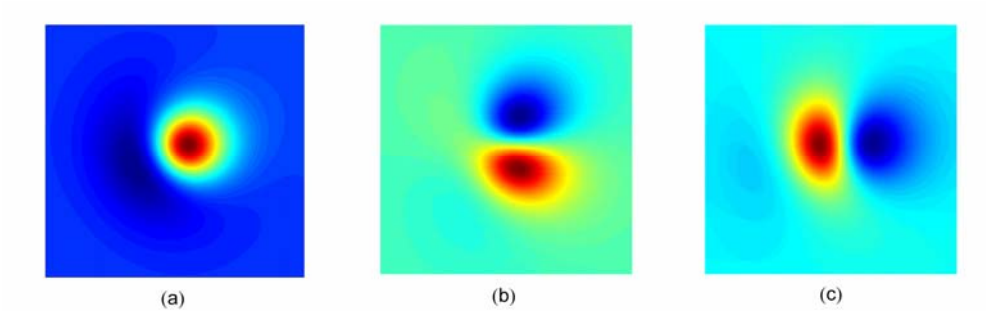


Figure 14. Composantes cartésiennes du signal analytique 2D associé à la dérivée verticale première du champ du dipôle de direction (60°,60°).

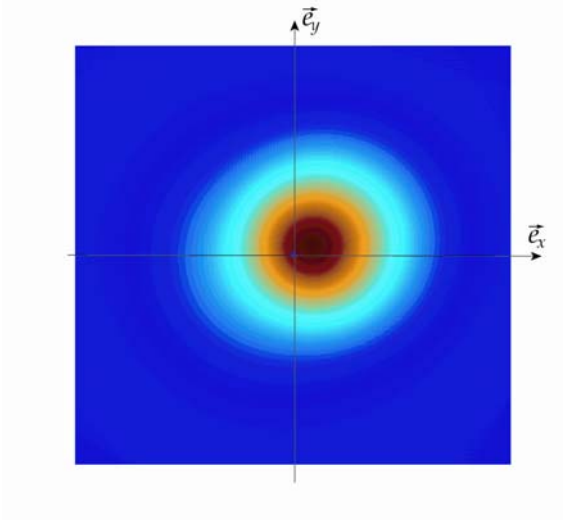


Figure 15. Amplitude locale de la dérivée verticale première du champ du dipôle incliné.

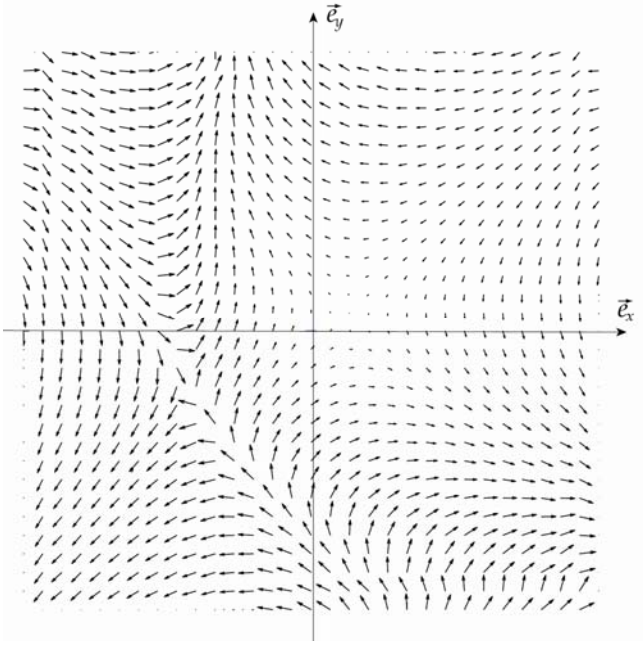


Figure 16. Vecteur local de la phase de la dérivée verticale première du champ du dipôle incliné.

4.4 Correspondance entre les propriétés des signaux analytiques 1D et 2D

Dans cette section, nous établissons des relations entre le signal analytique 2D associé à une fonction $\{f(\bar{x}),\ \bar{x} \in R^2\}$ et le signal analytique 1D associé aux projections intrinsèquement 1D de $f(\bar{x})$. Nous tentons, à partir de telles relations, de comprendre la nature de la dépendance entre les propriétés du signal analytique 2D et la dimensionnalité intrinsèque du signal magnétique. La décomposition de signal $f(\bar{x})$ en ses projections i1D peut s'effectuer en s'appuyant sur le théorème de section central « slice central » qui établit une relation entre la transformée de Fourier à deux dimensions et la transformée de Fourier à une dimension, et sur l'introduction de la transformée continue de Radon à deux dimensions qui présente l'application pratique du théorème de slice. Nous commençons dans un premier temps par la définition de la transformée de Radon et l'énoncé de quelques-unes de ses propriétés qui seront utiles dans l'établissement de la relation entre les signaux analytiques 1D et 2D.

4.4.1 Transformée de Radon continue à deux dimensions

La transformée de Radon [Radon, 1986 ; Helgason, 1984], bien connue dans certains domaines scientifiques comme la tomographie des rayons X dans le domaine médical, est une transformation du signal $\{f(\bar{x}),\ \bar{x} \in R^2\}$ en une formulle de fonctions $\{g(\rho,\theta),\ \rho \in R, \theta \in [0,\pi)\}$ intrinsèquement à une dimension.

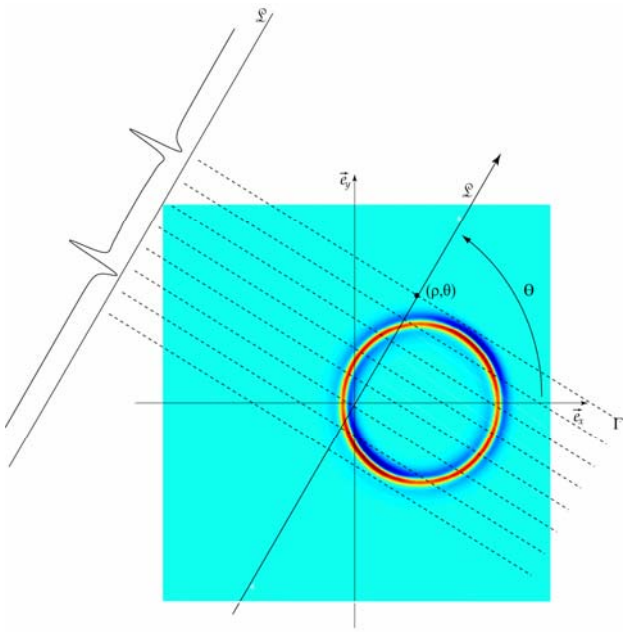


Figure 17. Le principe de la décomposition d'un signal 2D par la transformée de Radon.

Elle se définit analytiquement de la manière suivante : Soit Γ une droite définie par $x\cos\theta + y\sin\theta = \rho$ de paramétrage $x = -t\sin\theta + \rho\cos\theta$; $y = t\cos\theta + \rho\sin\theta$. On appelle transformée de Radon l'expression

$$\mathrm{R}\{\mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})\}(\rho,\theta) = \mathrm{R}(\rho,\theta) = \int_{+\infty}^{-\infty} \mathrm{f}(x(t), y(t))\, dt \qquad (4.4.1)$$

La transformée de Radon est la projection de l'intégrale, en un point (ρ,τ) d'une droite L passant par l'origine du signal $\mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})$, le long d'une ligne Γ orthogonale à L et passant par le point (ρ,τ) (figure 17).

La transformée de Radon possède quelques propriétés de grande importance en traitement du signal. Nous en citons quelques-unes ci-dessous.

- Linéarité ; $\mathrm{R}\{\mathrm{f}_1(\bar{\mathrm{x}}) + \mathrm{f}_2(\bar{\mathrm{x}})\}(\rho,\theta) = \mathrm{R}_1(\rho,\theta) + \mathrm{R}_2(\rho,\theta)$, $\bar{\mathrm{x}}(x,y) \in \mathrm{R}^2$

  ; $\mathrm{R}\{a\mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})\}(\rho,\theta) = a\mathrm{R}(\rho,\theta)$, a étant un scalaire.

- Composition avec une rotation R_ϕ d'angle ϕ

$$\mathrm{R}\{R_\phi \mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})\}(\rho,\theta) = \frac{1}{|\cos\phi + \rho\sin\phi|}\mathrm{R}\left(\frac{\rho - \tan\phi}{1+\rho\tan\phi}, \frac{\theta}{\cos\phi + \rho\sin\phi}\right)$$

- Composition avec une transformation affine T [Durrani et al.,1984];

$$\mathrm{R}\{\mathrm{T}(\mathrm{f})\} = \mathrm{R}\{\mathrm{f}(ax+by, cx+dy)\}(\rho,\theta) = \frac{1}{|a+b\rho|}\mathrm{R}\left(\frac{c+d\rho}{a+b\rho}, \theta\frac{d - b(c+bd)}{a+b\rho}\right)$$

- Changement d'échelle ; $\mathrm{R}\{\mathrm{f}(x/a, y/b)\}(\rho,\theta) = |a|\mathrm{R}(\rho\, a/b, \theta/b)$

- Analogue du théorème de convolution ; $\mathrm{R}\{\mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}}) * \mathrm{g}(y)\}(\rho,\theta) = \mathrm{R}(\rho,\theta) * g(\theta)$

- Analogue du théorème de Parseval ; $\int_{\mathrm{R}} d\theta\, \mathrm{R}\{\mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})\}^2(\rho,\theta) = \int_{\mathrm{R}^2} d\bar{\mathrm{x}}\, \mathrm{f}^2(\bar{\mathrm{x}})$

- La transformée de Radon vérifie la relation suivante dans le domaine spatial : $\mathrm{g}(\rho,\theta) = \mathrm{g}(-\rho,\theta+\pi)$. Cette relation peut s'écrire dans l'espace de Fourier par $\tilde{\mathrm{g}}(\mathrm{k},\theta+\pi) = \tilde{\mathrm{g}}(-\mathrm{k},\theta)$. Ces deux relations ont une grande importance dans la construction de $\mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})$ à partir de sa transformée de Radon.

- Elle représente l'application spatiale du théorème de section central de l'espace de Fourier :

En effet, le théorème de section centrale (TSC) établit une relation importante entre la transformée de Fourier à 2D du signal $f(\vec{x})$ et la transformée du Fourier à 1D de sa projection 1i-D.

La transformée de Fourier 2D respectivement directe et inverse de la fonction $\{f(\vec{x}),\ \vec{x}(x,y)\in R^2\}$ est

$$\tilde{f}(k_x,k_y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)e^{-i(xk_x+yk_y)}dxdy \tag{4.4.2}$$

$$f(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(k_x,k_y)e^{i(xk_x+yk_y)}dk_xdk_y$$

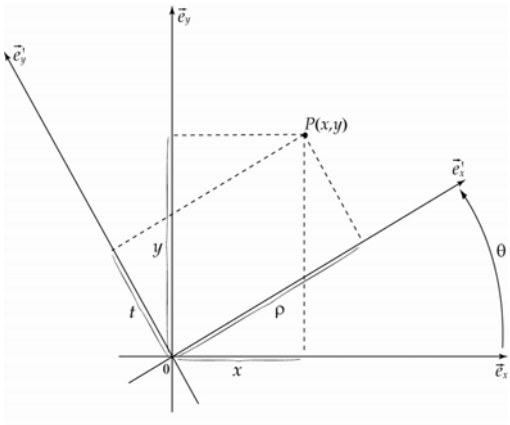


Figure 18. Représentation de l'opération de rotation du plan horizontal du repère cartésien.

Par l'application d'une rotation du repère cartésien 2D dans le plan horizontal $\vec{e}_x\vec{e}_y 0$, d'un angle θ (figure 18), nous écrivons les nouvelles orientations des axes et les relations entre les coordonnées respectivement sous la forme

$$(\vec{e}'_x,\vec{e}'_y)=(\vec{e}_x,\vec{e}_y)\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\rho\\ t\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}x=\rho\cos\theta-t\sin\theta\\ y=\rho\sin\theta+t\cos\theta\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}\rho\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\theta & \cos\theta\\ \cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\rho=-x\sin\theta+y\cos\theta\\ t=x\cos\theta+y\sin\theta\end{matrix}$$

La transformée de Fourier 4.4.1 de $f(\vec{x})$ s'écrit dans le nouveau système

$$\widetilde{\mathrm{f}}(k_x,k_y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{f}(x(\rho,t),y(\rho,t))\cdot e^{-it(-k_x\sin\theta+k_y\cos\theta)-i\rho(k_x\cos\theta+k_y\sin\theta)}d\rho dt \qquad (4.4.3)$$

soit $\begin{array}{l} k_\rho = -k_x\sin\theta + k_y\cos\theta \\ k_t = k_x\cos\theta + k_y\sin\theta \end{array}$ donc $\begin{array}{l} k_x = k_\rho\cos\theta + k_t\sin\theta \\ k_y = k_\rho\sin\theta + k_t\cos\theta \end{array}$ (4.4.4)

L'équation 4.4.3 devient

$$\widetilde{\mathrm{f}}(k_\rho,k_\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{f}(x(\rho,t),y(\rho,t))\cdot e^{-i(tk_t+\rho k_\rho)}d\rho dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\rho k_\rho}d\rho\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{f}(x(\rho,t),y(\rho,t))e^{-itk_t}dt$$

$$\widetilde{\mathrm{f}}(k_\rho,0)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\rho k_\rho}d\rho\cdot\mathrm{R}\{\mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})\}(\rho,\theta)=\widetilde{\mathrm{R}}\{\mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})\}(k_\rho,\theta)$$

D'où $\mathrm{R}\{\mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})\}(\rho,\theta)=\mathrm{F}_{\mathrm{xy}}^{-1}\{\widetilde{\mathrm{f}}(k_\rho,0)\}$ ou $\widetilde{\mathrm{f}}(|k_\rho|\cos\theta,|k_\rho|\sin\theta)=\widetilde{\mathrm{R}}\{\mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})\}(k_\rho,\theta)$ (4.4.5)

L'équation 4.4.5 indique que la transformée de Fourier à 2D de la fonction $\mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})$, le long d'une ligne orientée suivant l'angle θ, est égale à la transformée de Fourier 1D de la projection i1D de $\mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})$ prise sur la même ligne.

Ce théorème nous permet d'établir deux relations entre le signal analytique 2D et le signal analytique 1D : il s'agit d'une relation directe correspondant à une décomposition du signal analytique 2D en signaux analytiques 1D (que nous appellerons le signal analytique radial), et la relation inverse correspondant à une reconstitution du signal analytique 2D à partir de l'ensemble des signaux analytiques radiaux.

4.4.2 Relation directe

En reconsidérant la réponse spectrale du noyau de Riesz (équation 4.1.6), nous représentons le signal analytique 2D associé à un signal réel $\mathrm{f}(\bar{\mathrm{x}})$ dans le domaine de Fourier sous la forme

$$\widetilde{\mathrm{f}}_{\mathrm{A}}(\bar{\mathrm{k}})=\bar{e}_z\widetilde{\mathrm{f}}(\bar{\mathrm{k}})-\left\{i\frac{\bar{e}_1k_x+\bar{e}_2k_y}{|\bar{\mathrm{k}}|}\right\}\widetilde{\mathrm{f}}(\bar{\mathrm{k}}) \qquad (4.4.6)$$

Soit $(\bar{e}'_x,\bar{e}'_y)=(\bar{e}_x,\bar{e}_y)\cdot\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}k_x\\ k_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k'_x\\ k'_y\end{pmatrix}$

alors $k_x\bar{e}_x+k_y\bar{e}_y=k'_x\bar{e}'_x+k'_y\bar{e}'_y$, $|\bar{\mathrm{k}}|=(k_x^2+k_y^2)^{1/2}=(k_x'^2+k_y'^2)^{1/2}$,

$$\tilde{\tilde{\mathrm{f}}}_{\mathrm{A}}(k'_x\cos\theta - k'_y\sin\theta, k'_x\sin\theta + k'_y\cos\theta) = \left\{\vec{e}_z - i\frac{\left(k'_x\vec{e}'_x + k'_y\vec{e}'_y\right)}{\left|\vec{\mathrm{k}}\right|}\right\}\times\cdots$$

$$\cdots\tilde{\mathrm{f}}(k'_x\cos\theta - k'_y\sin\theta, k'_x\sin\theta + k'_y\cos\theta)$$

$$\tilde{\tilde{\mathrm{f}}}_{\mathrm{A}}(k'_x\cos\theta, k'_x\sin\theta) = \left\{\vec{e}_z - i\frac{k'_x}{\left|k'_x\right|}\vec{e}'_x\right\}\cdot\tilde{\mathrm{f}}(k'_x\cos\theta, k'_x\sin\theta) \text{ pour } k'_y = 0.$$

$$= \left\{\vec{e}_z - i\frac{k'_x}{\left|k'_x\right|}(\vec{e}_x\cos\theta + \vec{e}_y\sin\theta)\right\}\cdot\tilde{\mathrm{f}}(k'_x\cos\theta, k'_x\sin\theta) \qquad (4.4.8)$$

Prenant en compte la relation établie par le théorème de section central entre la transformée de Fourier 1D et la transformée de Fourier 2D, nous écrivons l'équation 4.4.8 en terme de transformée de Radon par

$$\tilde{\tilde{\mathrm{f}}}_{\mathrm{A}}(k'_x\cos\theta, k'_x\sin\theta) = \{\vec{e}_z - i\,\mathrm{sgn}(k'_x)(\vec{e}_x\cos\theta + \vec{e}_y\sin\theta)\}\cdot\tilde{R}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}(k'_x,\theta),\quad k'_x \in \mathrm{R} \qquad (4.4.9)$$

$$= \tilde{\mathrm{f}}_{\mathrm{A}}(k'_x,\theta)$$

L'équation 4.4.9 indique que dans le domaine de Fourier à deux dimensions l'action de la transformée de Riesz sur $\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})$ est équivalente à l'action de la transformée de Hilbert 1D sur les transformées de Radon de $\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})$. Par l'application de la transformée de Fourier inverse 1D sur le membre de droite de la relation 4.4.9, le signal analytique 2D sera décomposé en une série de signaux analytiques 1D associés à ses projections radiales i1D. Chaque signal analytique de cette série sera décrit par un vecteur dans la base $\{\vec{e}_z, \vec{e}_h\}$; avec $\vec{e}_h = \vec{e}_x\cos\theta + \vec{e}_y\sin\theta$. Cette représentation dans le plan $\{\vec{e}_z, \vec{e}_h\}$ est équivalente à une représentation dans le plan complexe où l'axe $\vec{e}_h$ sera remplacé par l'axe imaginaire du plan complexe et l'axe $\vec{e}_z$ par l'axe réel. Ainsi, nous décomposerons l'espace vectorielle 3D, portant le champ du signal analytique 2D, en un ensemble de plans complexes verticaux d'axe réel commun porté sur $\vec{e}_z$. Dans chaque plan, nous définissons le signal analytique radial $\vec{S}_\theta(\rho)$ à partir de la définition conventionnelle du signal analytique 1D donnée à la section 2.3 du chapitre 2. Soit par une combinaison linéaire de la projection i1D et de sa transformée de Hilbert. Le signal $\vec{S}_\theta(\rho)$ vérifie les propriétés suivantes :

- Une projection 1i-D radiale du signal original $\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})$ est reconstructible à partir de son propre signal analytique radial, où la partie réelle du signal analytique radiale est égale à la transformée de Radon du signal original.
- Contrairement au signal analytique 2D qui ne supprime aucune partie des fréquences du spectre de $\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})$, le signal analytique radial supprime une moitié des fréquences. Ainsi cette représentation supprime l'information redondante contenue dans le signal analytique 2D.

- Il vérifie la propriété de la dissociation d'identité de la projection i1D originale en amplitude locale et en phase locale.
- Le vecteur local de la phase du signal analytique 2D est remplacé dans $\vec{S}_\theta(\rho)$ par la phase locale complexe ordinaire (à valeur scalaire).

En pratique, le signal analytique radial peut s'obtenir par deux méthodes : la première méthode consiste à effectuer la transformation de Fourier inverse 1D, considérée uniquement sur les fréquences positives, des sections radiaux individuels de la transformée de Fourier 2D du signal original $f(\vec{x})$. La deuxième méthode consiste en l'application directe de la transformée de Hilbert aux transformées de Radon du signal $f(\vec{x})$ original. En utilisant la deuxième méthode, nous avons calculé le signal analytique radial pour les modèles considérés précédemment dans l 'analyse du signal analytique 2D.

4.4.2.1 Signal radial d'un signal réel i1-D

Les signaux magnétiques synthétiques à structure i1D analysés précédemment sont le signal magnétique généré par les bords du prisme et celui généré par le disque vertical. En terme de distribution, la source causative d'un signal magnétique i1D peut être modélisée par une couche magnétique d'extension horizontale infinie selon les axes $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ avec une épaisseur constante t. L'aimantation de la couche est de direction constante et son intensité présente une fonction de contraste égale à une valeur constante m dans la région interne (délimitée par les bords des modèles) et de valeur nulle dans la région externe.

Le champ magnétique total généré par la couche peut être donné par l'expression

$$\vec{T}(\vec{x},z) = -C_m\left(\vec{f}_3.\vec{\nabla}_3\right)\left(\vec{m}_3.\vec{\nabla}_3\right)\int_t dz_0 \int_{R^2} d\vec{x}_0 \frac{m(\vec{x}_0,z_0)}{\left[\left|\vec{x}-\vec{x}_0\right|^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}} \tag{4.4.10}$$

où $\vec{x}(x,y), \vec{x}_0(x_0,y_0) \in R^2$, $\vec{f}_3$ et $\vec{m}_3$ sont respectivement la direction du champ externe et la direction de l'aimantation.

Si le signal magnétique dans un domaine du plan d'observation est i1D, n'est variable que dans l'orientation $\left\{\vec{n}(\cos\theta,\sin\theta)\in R^2\right\}$, la source détectée par l'anomalie correspond alors à un contact de direction $\vec{n}^\perp$ perpendiculaire à l'orientation $\vec{n}$. En écrivant le champ magnétique (équation 4.4.10) de la couche dans la base vectorielle $\left\{\vec{n},\vec{n}^\perp,\vec{e}_z\right\}$ et par l'intégration le long de $\vec{n}^\perp$, en approximant les bornes d'intégration à des valeurs infinies, on obtient

$$\vec{T}(\vec{n}\cdot\vec{x}',z) = -C_m\left\{\vec{f}_3.\left(\partial_{x'}\vec{n}+\partial_{y'}\vec{n}^\perp+\partial_z\vec{e}_z\right)\right\}^2\int_t dz_0'\int_R m(x',z_0)\int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{1}{\left[\left|\vec{x}'-\vec{x}_0'\right|^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

$$= C_m \left\{ \vec{f}_3 . \left(\partial_{x'} \vec{\mathrm{n}} + \partial_z \vec{e}_z \right) \right\} \int_t dz_0 \int_{\mathrm{R}} dx' m(x', z_0) \log\left((x' - x'_0)^2 + (z - z_0)^2 \right) \qquad (4.4.11)$$

La transformée de Fourier d'un tel signal ne varie que dans la direction $\vec{\mathrm{n}}$ perpendiculaire à la direction de l'allongement de la source. Il s'ensuit du théorème de section centrale que la projection du noyau de Riesz est identique au noyau de Hilbert considéré suivant l'orientation du vecteur $\vec{\mathrm{n}}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x'\vec{\mathrm{n}} + y'\vec{\mathrm{n}}^{\perp}}{2\pi \left| x'\vec{\mathrm{n}} + y'\vec{\mathrm{n}}^{\perp} \right|^3} dy' = \frac{\vec{\mathrm{n}}}{\pi x'} = \vec{\mathrm{n}} \cdot \mathrm{h}(x') \qquad (4.4.12)$$

Alors, le produit de convolution de $\vec{T}(\vec{\mathrm{n}} \cdot \vec{\mathrm{x}}, z)$ par le noyau de Riesz peut être remplacé par le produit de convolution 1D du noyau de Hilbert $\vec{\mathrm{n}} \cdot \mathrm{h}(x')$. C'est à dire, la décomposition du signal analytique 2D en signal analytique radial ne se développera que dans l'orientation $\vec{\mathrm{n}}$.

Afin d'explorer les propriétés du signal analytique radial $\vec{S}_\theta(\rho)$ associé à un signal magnétique i1D, nous considérons dans un premier temps le signal magnétique élémentaire T_z^1 généré par un contraste d'aimantation (voir la zone encadrée par le rectangle à la figure 5a). L'énergie significative de ce signal est concentrée dans deux bandes d'orientation locale $\vec{\mathrm{n}}_0(\cos 0, \sin 0)$ constante et parallèle à l'axe $0\vec{e}_x$ du repère cartésien. Le résultat de l'analyse par la transformée de Radon et la dérivation du signal analytique radial $\vec{S}_\theta(\rho)$ associé à T_z^1 sont présentés à la figure 19 : (a) représente la décomposition par la transformée de Radon de T_z^1 à ses projections i1D, (b) et (c) sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire de $\vec{S}_\theta(\rho)$ et (d) et (e) sont respectivement la représentation eulérienne de $\vec{S}_\theta(\rho)$ en terme d'amplitude et de phase.

En effet, comme conséquence de la structure i1D globale du signal T_z^1 et de l'invariance de son orientation locale dans le plan de définition, la projection i1D de signa l magnétique n'évolue que dans la direction $\vec{\mathrm{n}}_0^{\perp}(\cos \pi/2, \sin \pi/2)$ perpendiculaire à $\vec{\mathrm{n}}_0$ et correspondant à la direction de l'évolution de la transformée de Fourier. Le signal analytique 2D de T_z^1 est alors décrit par une seule projection du signal analytique radial porté sur le plan vertical $\{\vec{\mathrm{n}}_0^{\perp}, \vec{e}_z\}$ normal à l'orientation locale de T_z^1.

L'orientation $\vec{\mathrm{n}}_0$ de l'évolution de la projection i1D et l'amplitude et la phase du signal radial $\vec{S}_\theta(\rho)$ développées selon $\vec{\mathrm{n}}_0^{\perp}$, présentent une description compacte parfaite de T_z^1. A partir de ces trois éléments nous pouvons, comme nous allons le voir plus loin, construire le signal T_z^1 original.

L'amplitude et la phase du signal analytique radial, associé au plan $\{\vec{\mathrm{n}}_0^{\perp}, \vec{e}_z\}$ du présent modèle, possèdent les mêmes propriétés qu'un signal analytique 1D ordinaire associé à une coupe transverse dans le plan normal à l'orientation $\vec{\mathrm{n}}_0$. Ainsi nous pouvons suivre les mêmes applications, décrites dans le deuxième chapitre sur ces deux composantes, pour caractériser qualitativement et quantitativement les paramètres des contrastes magnétiques sources responsables du signal T_z^1.

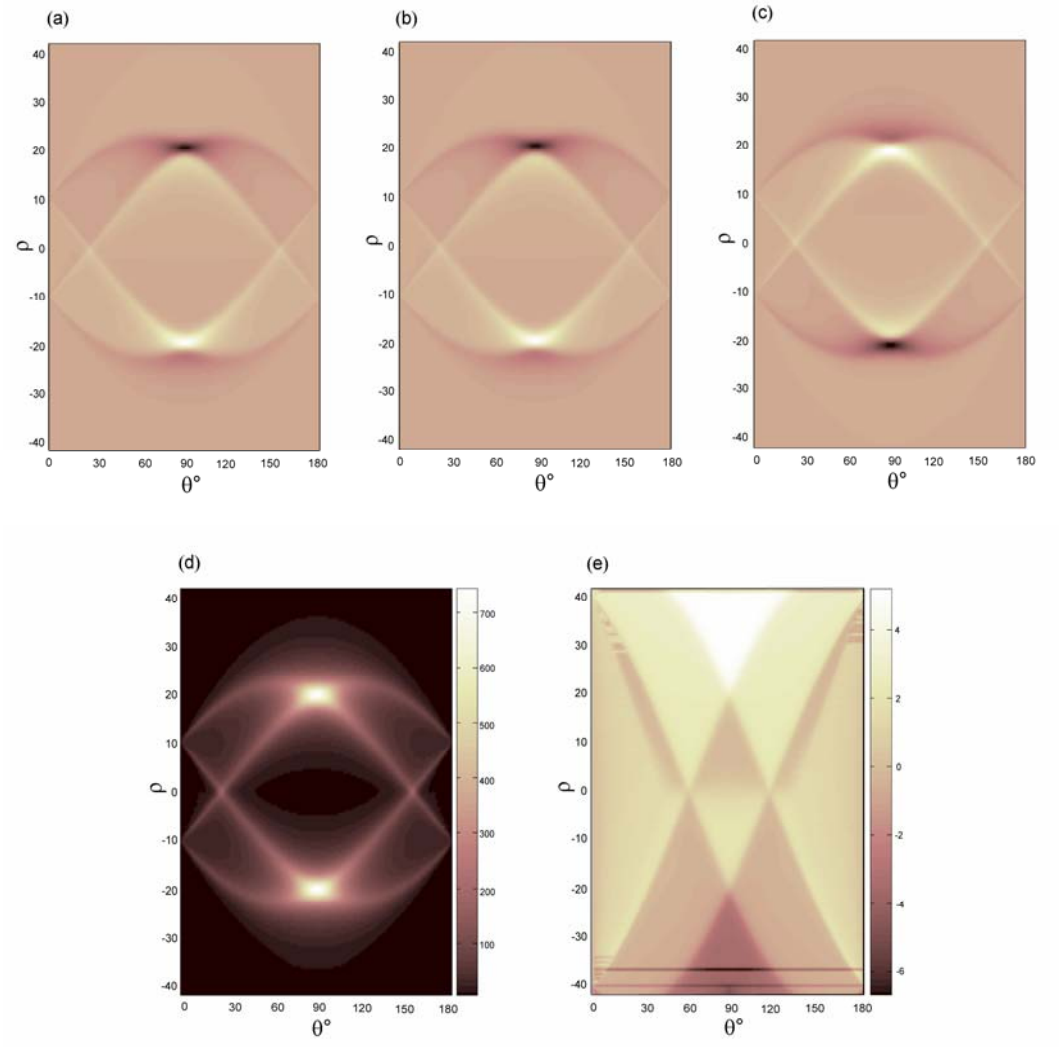


Figure 19. Le signal analytique 1D radial du champ magnétique généré par deux contrastes magnétiques.

Dans la deuxième application sur un signal magnétique i1D, nous considérons la dérivée verticale première T_z^1 du signal magnétique généré par un disque d'axe vertical, (figure 8a). Au voisinage d'une position donnée de la bande de concentration d'énergie du signal magnétique le signal magnétique peut être considéré à valeur constante dans l'orientation $\{\vec{n}_\theta(\cos\theta, \sin\theta), \theta \in [0, \pi)\}$ perpendiculaire à une droite passante par l'axe du disque. La transformée de Fourier et la projection i1D de T_z^1 ne varient alors que dans l'orientation $\vec{n}_\theta^\perp$ perpendiculaire à $\vec{n}_\theta$; soit sur des orientations radiales convergentes à l'axe du disque (figure 21a). Ainsi, dans une zone i1D et d'orientation locale $\vec{n}_\theta$ constante, le signal T_z^1 sera décrit par une seule projection du signal analytique radial portée sur le plan vertical $\{\vec{n}_\theta^\perp, \vec{e}_z\}$ normal à l'orientation locale $\vec{n}_\theta$. L'orientation de l'évolution de $\vec{S}_\theta(\rho)$ et son amplitude et sa phase décrivent parfaitement le signal magnétique dans cette zone. L'amplitude et la phase

présentent deux propriétés orthogonales et par les applications 1D nous pouvons caractériser les paramètres du bord du disque dans la position correspondante.

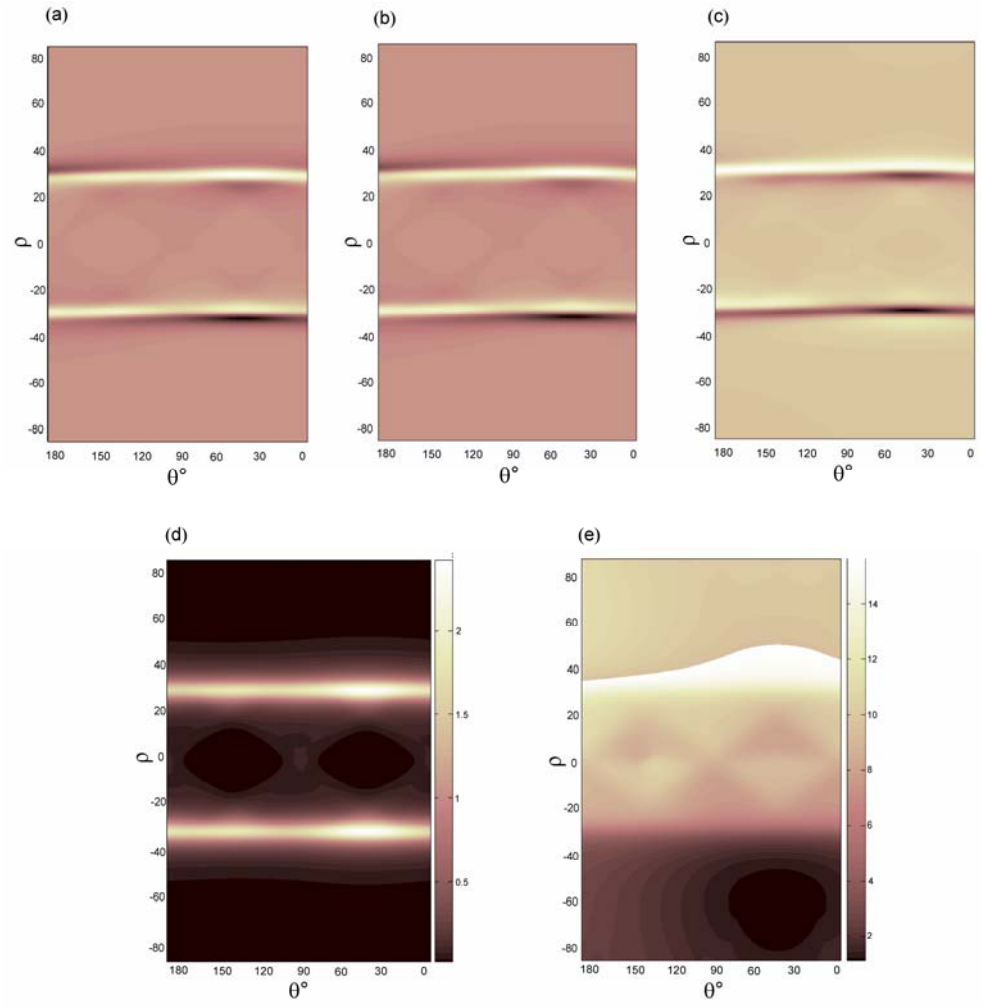


Figure 21. Le signal analytique radial de la dérivée verticale première du champ généré par le disque d'axe vertical.

La représentation eulérienne de l'ensemble des projections de l'évolution de $\vec{S}_\theta(\rho)$, en fonction du paramètre angulaire θ de l'orientation locale et de la distance ρ sur la projection 1i-D montre que l'énergie du signal (figure 21d), est localisée dans deux bandes parallèles à l'axe θ avec une allure symétrique par rapport à deux lignes de maximum ($\rho = \pm 30$) de position polaire coïncidente avec la position cartésienne du bord du disque. Les valeurs de la phase correspondantes à ces deux bandes d'énergie (figure 21e), sont d'allure antisymétrique par rapport à deux lignes de mêmes positions $\rho = \pm 30$.

4.4.2.2 Signal radial d'un signal i2-D

Pour analyser le comportement du signal analytique radial d'un signal magnétique i2D, nous avons appliqué son concept à la dérivée verticale T_z^1 du champ magnétique d'un dipôle à deux directions induites différentes : un dipôle vertical (figure 11-(a)) et un dipôle d'inclinaison 60° et de déclinaison 60° (figure 14-(a)). En effet à partir de l'équation 4.4.10, du champ magnétique d'une source magnétique à trois dimensions, nous écrivons l'expression analytique de la dérivée verticale première du champ magnétique d'un dipôle induit sous la forme

$$T_z^1(\vec{x}, z) = C_m \partial_z (\vec{f}_3 \cdot \vec{\nabla}_3)^2 \frac{m}{\left[\left|\vec{x} - \vec{x}_0\right|^2 + (z_0 - z)^2\right]^{1/2}} \tag{4.4.13}$$

D'après le tableau de la transformée de Hankel (Bracewell 1965, p. 249) nous avons

$$\mathsf{F}_{x,y}\left\{1\Big/\left[\left|x\right|^2 + z^2\right]^{1/2}\right\} = 2\pi \frac{e^{|\vec{k}|z}}{|\vec{k}|}, \quad |\vec{k}| \neq 0 \tag{4.4.14}$$

La transformée de Fourier du signal 4.4.13 peut s'écrire

$$\tilde{T}_z^1(\vec{k}) = 2\pi C_m m \left\{|\vec{k}| f_z + ik_x f_x + ik_y f_y\right\}^2 e^{-|\vec{k}|(z_0 - z)} \tag{4.4.15}$$

De l'équation 4.4.15, nous écrivons les slices radiaux de la transformée de Fourier de T_z^1 s'écrivent

$$\tilde{R}(k_\rho, \theta) = G \cdot e^{-|k_\rho|(z_0 - z)} \left\{f_z |k_\rho| + if_x k_\rho \cos\theta + if_y k_\rho \sin\theta\right\}^2 \quad \text{où } G = 2C_m \pi m \tag{4.4.16}$$

La transformée de Fourier du signal analytique radial correspond à la transformée de Fourier de la projection radiale $\tilde{R}$ multipliée par 2 et considérée pour les fréquence positives ; soit

$$\tilde{\tilde{S}}_\theta(k_\rho) = 2\tilde{R}(k_\rho, \theta) = 2G \cdot k_\rho e^{-k_\rho(z_0 - z)} \left\{f_z + if_x \cos\theta + if_y \sin\theta\right\}^2 \qquad k_\rho > 0 \tag{4.4.17}$$

En écrivant les composantes du champ magnétique inducteur (f_x, f_y, f_z) en terme d'inclinaison I_f et de déclinaison D_f l'équation 4.4.17 devient

$$\tilde{\tilde{S}}_\theta(k_\rho) = 2G \cdot k_\rho e^{-k_\rho(z_0 - z)} \left\{\sin I_f + i \cos I_f \cos(D_f - \theta)\right\}^2 \quad k_\rho > 0 \tag{4.4.18}$$

$$= 2G \cdot k_\rho e^{-k_\rho(z_0 - z)} (\cos^2 I_f \cos^2(D - \theta) + \sin^2 I_f) \cdot e^{i\left[\pi - \tan^{-1}(\tan I_f / \cos(D_f - \theta))\right]} \tag{4.4.19}$$

L'expression spatiale du signal analytique radial de T_z^1 s'obtient de la relation de récurrence A2.7 de l'annexe A2 appliquée sur l'égalité

$$\vec{S}_\theta(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty} \tilde{\vec{S}}_\theta(k_\rho)\cdot e^{ik_\rho\rho}dk_\rho \qquad (4.4.20)$$

En terme d'amplitude $\left|\vec{S}_\theta\right|$ et de phase ϕ_θ le signal analytique radial (4.4.20) s'écrit respectivement par

$$\left|\tilde{S}_\theta\right|(\rho) = \frac{4C_m m\cdot\phi(\theta)}{\left[\rho^2 + (z_0 - z)^2\right]^{3/2}} \qquad (4.4.21)$$

où $\phi(\theta) = \cos I_f \cos^2(D_f - \theta) + \sin^2 I_f$ (4.4.22)

$$\varphi_\theta(\rho) = \vartheta(\theta) + 3\tan^{-1}\frac{\rho}{(z_0 - z)} \qquad (4.4.23)$$

où $\vartheta(\theta) = -2\tan^{-1}\left(\frac{\tan(I_f)}{\cos(D_f - \theta)}\right) + \pi$ (4.4.24)

L'équation 4.4.16 indique que la projection i1D du signal magnétique T_z^1 peut s'évaluer sur un site infini d'orientations $\vec{n}_\theta(\cos\theta, \sin\theta), \theta \in [0, \pi)$ passant par l'origine du plan de définition du signal magnétique i2D. Pour explorer les propriétés du signal analytique radial associé aux projections i1D, nous reconsidérons dans un premier temps la dérivée verticale première de l'anomalie magnétique d'un dipôle verticale. Avec la même disposition qu'à la figure 19, nous représentons à la figure 24 les composantes du signal analytique radial associé à ce signal magnétique. On constate sur la figure 24d que l'amplitude locale $\left|\vec{S}_\theta\right|$ est une fonction positive et symétrique par rapport à une ligne des maxima de position $\rho = 0$. La position de la ligne de symétrie coïncide avec la position cartésienne du dipôle. Sur cette figure on constate également que les valeurs de l'énergie du signal radial sont invariantes par rapport à l'orientation de la projection de Radon.

La phase φ_θ du signal analytique radial du même signal magnétique (figure 24e) est une fonction antisymétrique par rapport à la ligne $\rho = 0$. La translation verticale de cette composante du signal analytique radial apparaît invariante par rapport à l'orientation de la projection de Radon.

Dans la deuxième application du signal analytique radial sur un signal magnétique à structure i2D, nous reconsidérons la dérivée verticale première de l'anomalie magnétique du dipôle incliné (60° d'inclinaison et 60° d'inclinaison). Dans le plan $\theta 0 \rho$, l'amplitude $\left|\vec{S}_\theta\right|$ est toujours une fonction positive et symétrique par rapport à la ligne $\rho = 0$ (figure 25 d). Cette composante eulérienne du signal analytique radial exprime une variabilité en valeur par rapport au paramètre θ de l'orientation de la projection de Radon. Cette variabilité peut être interprétée comme la conséquence de l'intervention du facteur $\phi(\theta)$ dans $\left|\vec{S}_\theta\right|$ (équation 4.4.21). L'équation. 4.4.22 et la figure 22 indiquent que la valeur de l'amplitude $\left|\vec{S}_\theta\right|$, sur les projections de Radon, est contrôlé par la différence entre θ et la déclinaison D_f du dipôle.

Ainsi, l'énergie est maximale sur la projection d'orientation $(\theta = D_f)$ et minimale sur la projection d'orientation $(\theta = D_f + \pi/2)$.

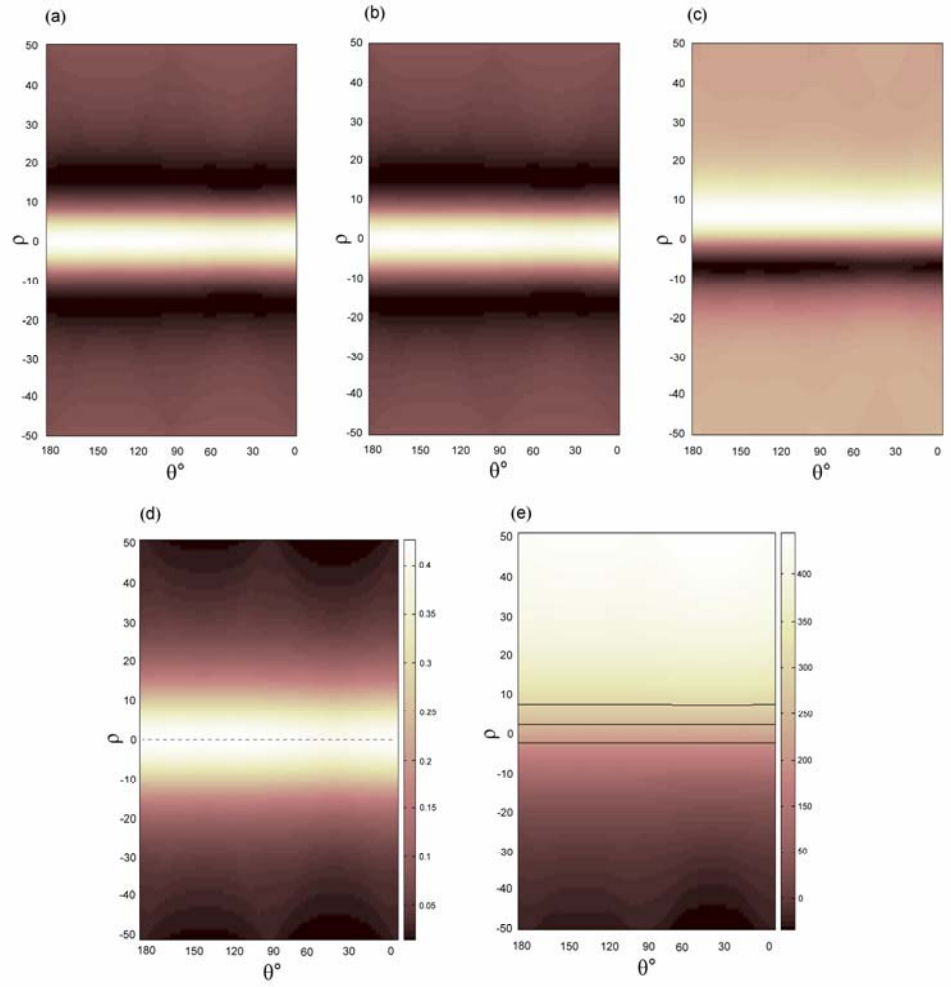


Figure 24. Représentation des composantes du signal analytique radial du champ généré par un dipôle vertical.

Pour le même modèle, la phase φ_θ du signal analytique radial est une fonction antisymétrique par rapport à la ligne $\rho = 0$ (figure 25e). Comme conséquence de l'intervention du terme de déformation $\vartheta(\theta)$ dans l'équation 4.4.23, la translation verticale de cette composante du signal analytique radial est une fonction de la différence $(\theta - D_f)$. Ainsi, l'équation 4.4.24 et la figure 23 indiquent que la déformation est maximale pour la projection $(\theta = D_f)$ et minimale sur la projection $(\theta = D_f + \pi/2)$.

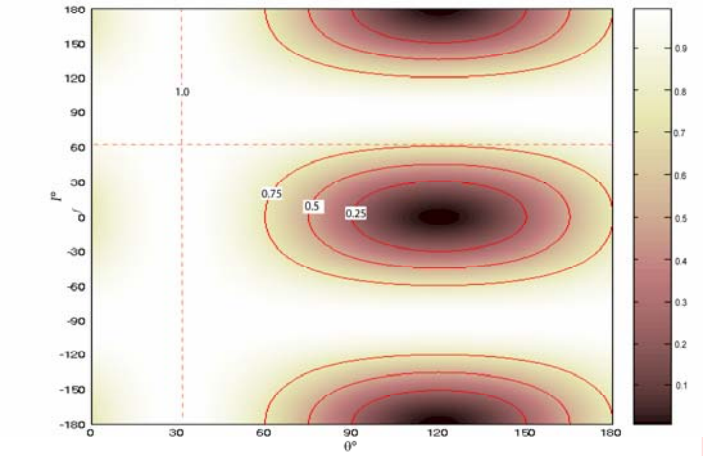


Figure 22. Variation du facteur multiplicatif $\phi(\theta)$ en fonction de l'inclinaison magnétique $I_f \in [-\pi, \pi]$ et de l'orientation $\vec{n}_\theta$ de la projection de Radon pour une déclinaison constante $D_f = \pi/3$

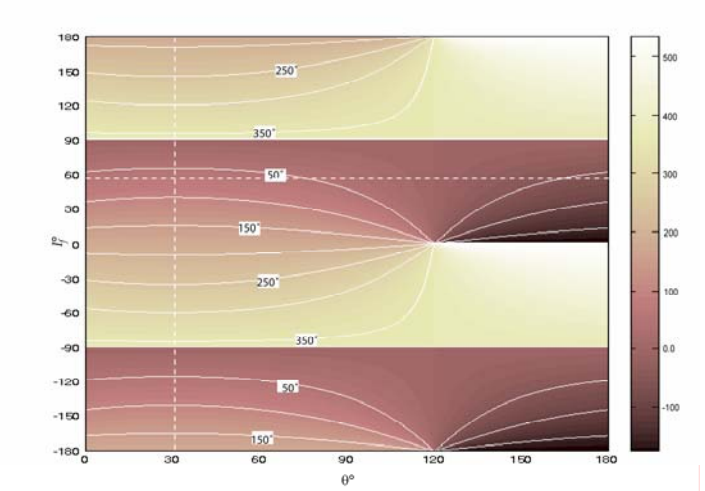


Figure 23. Variation du terme de diformation $\phi(\theta)$ en fonction de l'inclinaison magnétique $I_f \in [-\pi, \pi]$ et de l'orientation $\vec{n}_\theta$ de la projection de Radon pour une déclinaison constante $D_f = \pi/3$

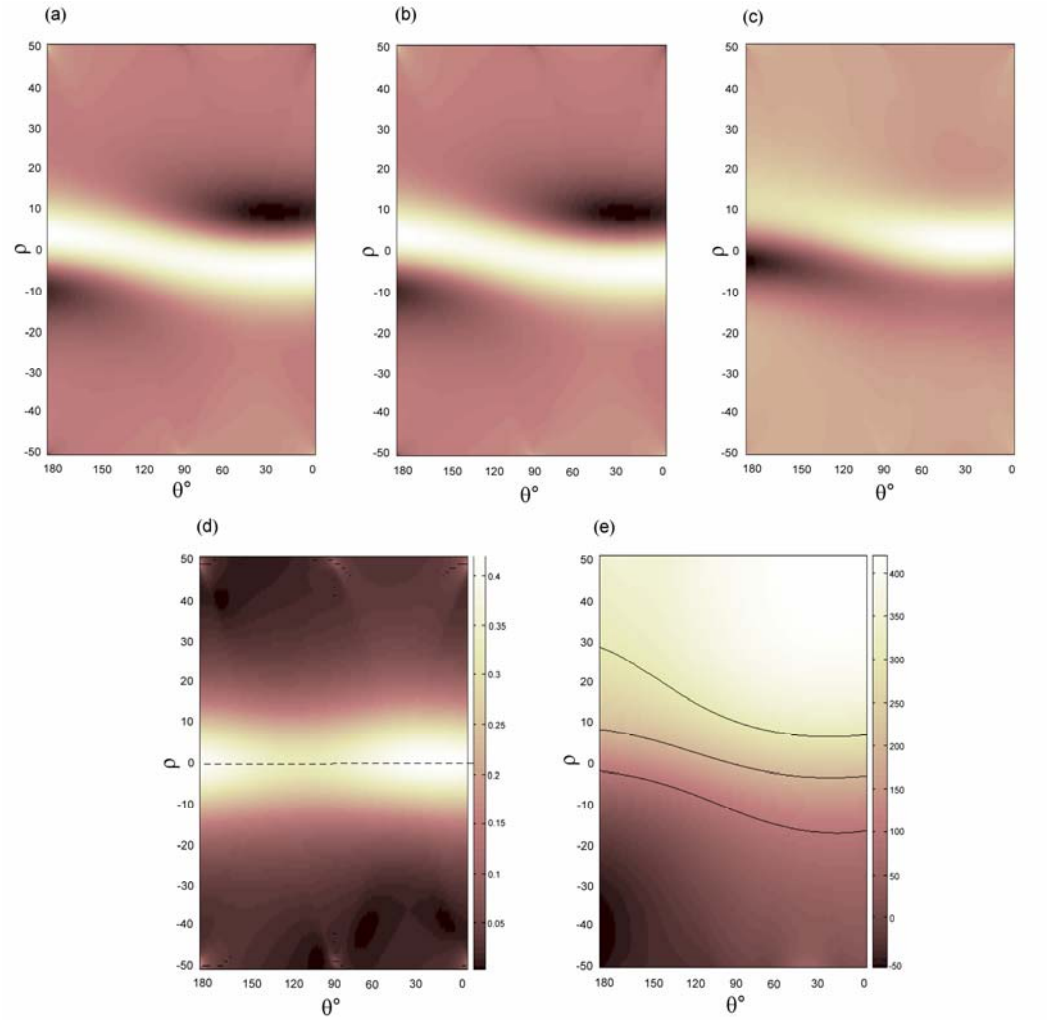


Figure 25. Représentation des composantes du signal analytique radial du champ magnétique généré par un dipôle de direction (60°,60°).

Des différents exemples synthétiques cités précédemment sur la construction du signal analytique radial, nous pouvons établir la conclusion suivante :

Si le signal magnétique $\vec{T}_z^1$ dans le voisinage d'une certaine position, a un comportement 1D, alors sa projection i1D ne peut s'évaluer que dans une seule direction orthogonale à l'orientation locale du signal dans cette position. Les propriétés de $\vec{T}_z^1$ dans la position donnée seront parfaitement décrites par cette unique projection. Dans ce cas et comme le montre l'équation 4.4.12, l'amplitude et la phase du signal analytique radial forment deux composantes indépendantes et posséderont des propriétés qualitatives et quantitatives typiques d'un signal analytique 1D tel que décrit dans le deuxième chapitre de cette thèse. Ainsi, la forme symétrique et anti-symétrique respectivement de l'amplitude et de la phase sont indépendantes des paramètres magnétiques directionnels et, en utilisant les mêmes applications que celles décrites dans le chapitre 2 sur ces deux composantes, nous pouvons caractériser la source responsable de la structure 1i-D du signal magnétique.

Par contre si le signal magnétique $\vec{T}_z^1$ est à structure i2D, soit un signal généré par une source magnétique compacte. Le concept de la décomposition de sa symétrie 2D en nombre infini de symétries 1D, découle directement de l'application de la transformée de Radon. Par la transformée de Radon, l'espace 2D devient paramétrisé par un nombre infini de fonctions i1D orientées et chacune de ces fonctions peut avoir sa propre symétrie 1D et sa propre énergie. L'application de la transformée de Hilbert 1D, sur chaque projection, est une transformation isotrope : l'énergie de la transformée de Hilbert est invariante par rapport à l'orientation de projection. Cela implique que l'indépendance entre l'amplitude et la phase du signal analytique radial est toujours vérifiée sur les projections i1D du signal. L'indépendance se traduit par l'invariance des propriétés de l'amplitude par rapport à la modification de la symétrie de projection introduites par les paramètres magnétiques directionnels et l'invariance de la fonction de la phase par rapport au changement de l'énergie émise par la source.
L'amplitude du signal radial, en tant que mesure spatiale continue de l'énergie dans les différentes orientations, présente alors les propriétés typiques de l'amplitude d'un signal analytique 1D. C'est une fonction positive d'allure symétrique centrée sur la source avec une composante hétérogène d'énergie, liée aux paramètres magnétiques directionnels, traduisant une variation des valeurs de l'amplitude en fonction de l'orientation de la projection. La phase radiale présente une fonction d'allure antisymétrique centrée sur le dipôle. La variation du degré de symétrie des projections s'exprime par une variation de la translation verticale de cette phase.

4.4.3 Relation inverse

Considérons de nouveau la définition du signal analytique 2D associé à une fonction $\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})$ en terme de la transformée de Fourier inverse

$$\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{A}}(\vec{\mathrm{x}}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\mathrm{R}^2} d\vec{\mathrm{k}} \left\{ \vec{\mathrm{e}}_z + i\frac{\vec{e}_x k_x + \vec{e}_z k_y}{\left|\vec{\mathrm{k}}\right|} \right\} \tilde{\mathrm{f}}(\vec{\mathrm{k}}) \cdot e^{i\vec{\mathrm{x}}\cdot\vec{\mathrm{k}}} \tag{4.4.25}$$

Par conversion du système de coordonnées cartésiennes en système de coordonnées polaires, nous avons

$$\left.\begin{aligned} k_x &= \mathrm{k}\cos\theta \\ k_y &= \mathrm{k}\sin\theta \end{aligned}\right| \quad \text{avec} \quad \mathrm{k} = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2} > 0$$

Dans le nouveau système de coordonnées l'équation 4.4.25 devient

$$\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{A}}(\vec{\mathrm{x}}) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{k}\, d\mathrm{k} d\theta \{\vec{e}_z + i\vec{e}_{\mathrm{k}}\} \tilde{\mathrm{f}}(\mathrm{k}\cos\theta, \mathrm{k}\sin\theta) \cdot e^{i\mathrm{k}(x\cos\theta + y\sin\theta)}, \vec{e}_{\mathrm{k}} = \vec{e}_x\cos\theta + \vec{e}_y\sin\theta$$

$$\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{A}}(\rho\cos\tau, \rho\sin\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{k}\, d\mathrm{k} d\theta \{\vec{e}_z + i\vec{e}_{\mathrm{k}}\} \tilde{\mathrm{R}}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}(\mathrm{k}, \theta) \cdot e^{i\mathrm{k}\rho\cos(\theta-\tau)}, \; x = \rho\cos\tau\,; y = \rho\sin\tau$$

$$= \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{k}\, d\mathrm{k} d\theta \{\vec{e}_z + i\vec{e}_{\mathrm{k}}\}\widetilde{\mathrm{R}}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}(\mathrm{k},\theta)\cdot e^{i\mathrm{k}\rho\cos(\theta-\tau)} + \cdots$$

$$\cdots \frac{1}{4\pi^2}\int_{\pi}^{2\pi}\int_0^{\infty} \mathrm{k}\, d\mathrm{k} d\theta \{\vec{e}_z + i\vec{e}_{\mathrm{k}}\}\widetilde{\mathrm{R}}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}(\mathrm{k},\theta)\cdot e^{i\mathrm{k}\rho\cos(\theta-\tau)} \tag{4.4.27}$$

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_{\pi}^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} \mathrm{k}\, d\mathrm{k}\{\vec{e}_z + i\vec{e}_{\mathrm{k}}\}\widetilde{\mathrm{R}}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}(\mathrm{k},\theta)\cdot e^{i\mathrm{k}\rho\cos(\theta-\tau)}$$

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\pi} d\theta' \int_0^{\infty} \mathrm{k}\, d\mathrm{k}\{\vec{e}_z - i\cos\theta'\vec{e}_x - \sin\theta'\vec{e}_y\}\widetilde{\mathrm{R}}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}(\mathrm{k},\theta+\pi)\cdot e^{i\mathrm{k}\rho\cos(\theta'-\tau)}, \text{ avec } \theta' = \theta - \pi \tag{4.4.28}$$

Prenant en compte la propriété $\widetilde{\mathrm{R}}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}(\mathrm{k},\theta+\pi) = \widetilde{\mathrm{R}}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}(-\mathrm{k})$ de la transformée de Radon (section 4.4.1), l'équation 4.4.28 peut s'écrire sous la forme

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\pi} d\theta' \int_{-\infty}^{0} (-\mathrm{k}')\, d\mathrm{k}\{\vec{e}_z - i\vec{e}_{\mathrm{k}'}\}\widetilde{\mathrm{R}}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}(\mathrm{k}',\theta')\cdot e^{i\mathrm{k}'\rho\cos(\theta'-\tau)}, \text{ avec } \vec{e}_{\mathrm{k}'} = \vec{e}_x\cos\theta' + \vec{e}_y\sin\theta' \tag{4.4.29}$$

Par le remplacement de l'équation 4.4.29 dans l'équation 4.4.27 on obtient

$$\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{A}}(\rho\cos\tau,\rho\sin\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{k}|\, d\mathrm{k}\{\vec{e}_z + i\,\mathrm{sgn}(\mathrm{k})\vec{e}_{\mathrm{k}}\}\widetilde{\mathrm{R}}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}(\mathrm{k},\theta)\cdot e^{i\mathrm{k}\rho\cos(\theta-\tau)} \tag{4.4.30}$$

$$\vec{S}_\theta(\rho) = \vec{e}_z\mathrm{R}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}(\rho,\theta) + \vec{e}_{\mathrm{k}}\mathrm{H}_1\{\mathrm{R}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}\}(\rho,\theta) \xrightarrow{\mathrm{TF}_{\mathrm{k}}}$$

Soit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\rho\, \{\vec{e}_z\mathrm{R}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}(\rho,\theta) + \vec{e}_{\mathrm{k}}\mathrm{H}_1\{\mathrm{R}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}\}(\rho,\theta)\}\cdot e^{-i\mathrm{k}\rho} = \widetilde{\mathrm{R}}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}(\mathrm{k},\theta) + i\,\mathrm{sgn}(\mathrm{k})\widetilde{R}_\theta\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}(\mathrm{k})$$

Soit $$\vec{S}_\theta(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\mathrm{k}\, \{\vec{e}_z + \vec{e}_{\mathrm{k}} i\,\mathrm{sgn}(\mathrm{k})\}\widetilde{\mathrm{R}}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}(\mathrm{k},\theta)\cdot e^{|\mathrm{k}|(z-a)}\cdot e^{i\mathrm{k}\rho}, \qquad z - a < 0$$

$$\left(\partial_z\vec{S}_\theta\right)(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\mathrm{k}\, |\mathrm{k}|\{\vec{e}_z + \vec{e}_{\mathrm{k}} i\,\mathrm{sgn}(\mathrm{k})\}\widetilde{\mathrm{R}}\{\mathrm{f}(\vec{\mathrm{x}})\}(\mathrm{k},\theta)\cdot e^{i\mathrm{k}t}, \quad \text{avec } t = \rho\cos(\theta-\tau) \tag{4.4.31}$$

Donc l'équation 4.4.27 peut être formulée sous la forme

$$\vec{\mathrm{f}}_{\mathrm{A}}(\rho,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\theta \left(\partial_z\vec{S}_\theta\right)(\rho\cos(\theta-\tau)) \tag{4.4.32}$$

Comme le montre la figure 26, la courbe $f(x) = \rho\cos(\theta-\tau)$ est un cercle L de diamètre ρ décrit entièrement quand θ décrit l'intervalle $[0,\pi]$. L est l'inverse de Γ, la ligne d'intégration de la transformée de radon, dans l'inversion de centre 0 de puissance ρ^2.

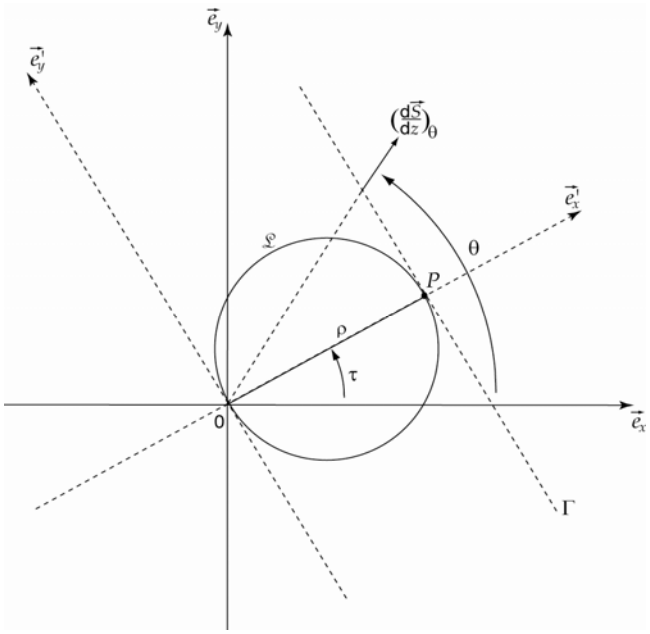


Figure 26. Principe de la construction du signal analytique 2D à partir du signal analytique radial.

Nous pouvons conclure de l'équation 4.4.32 le résultat suivant exprimé sous forme d'un théorème.

Théorème 1 : le signal analytique à deux dimensions en un point (ρ, τ) est la demi-moyenne de la dérivée verticale du signal analytique radial (signal analytique associé à la projection radiale à structure 1i-D du signal original) sur le cercle de diamètre $0P$, où P est le point de coordonnées polaires (ρ, τ).

Du point de vue théorique et d'après les propriétés énoncées à la section 4.4.1, la transformée de Radon, peut effectuer une transformation inverse affine du signal analytique radial en signal analytique 2D. La validité du théorème 1 peut être vérifier en comparant les propriétés de l'amplitude locale et de la phase locale du signal analytique 2D ordinaire avec leurs correspondantes du signal analytique reconstruit par le théorème. Tout en soulignant que le calcul des signaux analytiques en comparaison devrait être effectuer sur un signal magnétique à structure i1D, car sauf pour d'un tel signal le vecteur local de la phase du signal analytique ordinaire est représentatif.

L'application de l'inversion, sur les projections du signal T_z^1 d'un contraste magnétique, montre que la version du signal analytique 2D résultante de l'inversion n'est pas exactement identique au signal analytique 2D ordinaire. Ainsi lors que les deux versions présentent la même amplitude locale (figure 27), elles différent par leur phase locale (figure 28). En effet dans la relation directe établie à la section 4.4.2 entre le signal analytique 2D $\vec{f}_A$ et le signal

analytique radial $\vec{S}_\theta$, nous avons exprimé la transformée de Riesz d'une fonction $\{f(\vec{x}), \vec{x} \in R^2\}$ par un vecteur unité $\vec{e}_\rho(\cos\theta, \sin\theta)$ multiplié par la transformée de Hilbert de sa projection $R_\theta(\rho)$ intrinsèquement unidimensionnelle ; soit

$$\vec{f}_r(\vec{x}) = H_2\{f(\vec{x})\} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \cdot H_1\{R_\theta(\rho)\} \tag{4.4.33}$$

Ainsi $\vec{f}_r(\vec{x})$ contient à la fois deux composantes, l'orientation de l'axe de symétrie de la projection 1i-D de $f(\vec{x})$ et la transformée de Hilbert de cette projection. La séparation entre ces deux composantes n'est pas aussi simple que ce que l'on peut imaginer dans un premier temps. Si on factorise $\vec{f}_r(\vec{x})$ de la manière suivante

$$\vec{f}_r(\vec{x}) = \vec{n}_\theta \left|\vec{f}_r(\vec{x})\right| \tag{4.4.34}$$

L'application directe de l'équation 4.4.34 nous conduit à définir le vecteur d'orientation $\vec{n}_\theta$ et la transformée Hilbert en valeur absolu au lieu de la transformée de Hilbert elle-même. Par conséquent, nous ne pouvons pas utiliser cette factorisation pour l'estimation de la phase locale $\varphi(\vec{x})$ du signal analysé $f(\vec{x})$. Par contre la version du signal analytique 2D reconstruit au moyen de l'équation 4.4.32 est constituée en tous points de deux composantes qui sont la valeur du signal original $f(\vec{x})$ à ce point et sa transformée de Hilbert elle même. La fonction de la phase de cette version n'est donc plus un champ vectoriel mais c'est une fonction à valeur scalaire correspondant à la phase locale ordinaire du signal analytique 1D. Evidemment les propriétés de la phase locale de la version reconstruite de signal analytique 2D d'un signal magnétique i1D sont avantageuses, par rapport au signal analytique 2D ordinaire, dans l'interprétation de la phase locale des prospections magnétiques à deux dimensions.

En utilisant la transformée de Radon inverse, nous avons construit le signal analytique 2D à partir du signal analytique radial (figure 19) associé au signal magnétique d'un contraste magnétique. Afin de comparer le résultat avec le signal analytique 2D ordinaire, nous présentons à la figure 27 l'amplitude locale du signal analytique 2D ordinaire (a) et celle du signal reconstruit (b). Les deux amplitudes montrent des formes et des propriétés identiques. A la figure 28 nous présentons la phase locale des deux versions, ordinaire (a) et reconstruite (b). On remarque que lorsque la phase locale du signal reconstruit montre les propriétés de la phase locale du signal analytique 1D avec deux lignes d'inflexions localisées sur les bords du prisme, la surface de la phase locale du signal analytique ordinaire (a) exprime plusieurs lignes d'inflexions ce qui rend cette phase difficile à l'utiliser dans la caractérisation des paramètres de la source.

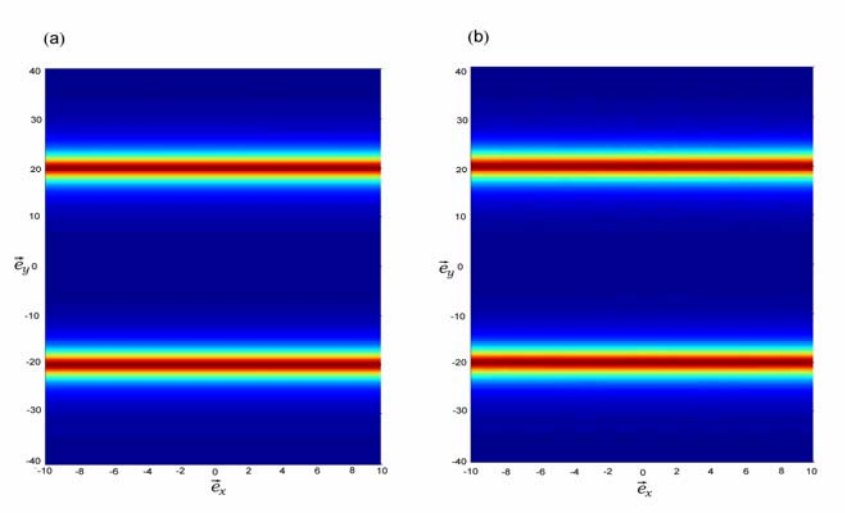


Figure 27. Pour un signal magnétique 1i-D : (a) est l'amplitude du signal analytique 2D ordinaire et (b) l'amplitude du signal analytique 2D construite à partir du signal analytique radial.

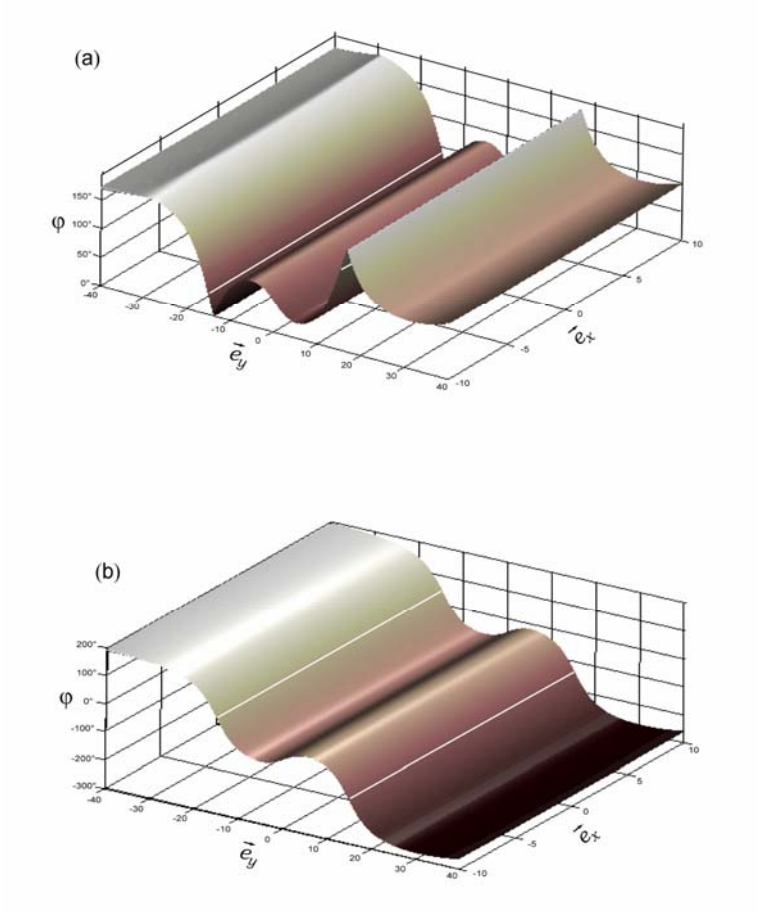


Figure 28 : Pour un signal magnétique 1i-D : (a) est la phase locale du signal analytique 2D ordinaire et (b) la phase locale du signal analytique 2D reconstruite à partir du signal analytique radial.

Cette différence, entre la phase locale du signal analytique ordinaire et la phase du signal reconstitué, n'est pas liée à une erreur du théorème 2. Mais pour une application correcte de ce théorème, nous devons avant l'application de la transformée de Radon inverse décomposer la composante horizontale du signal analytique radial $\vec{S}_\theta$ en deux composantes cartésiennes selon l'axe $\vec{e}_x$ et l'axe $\vec{e}_y$. Dans l'exemple cité ci-dessus, l'application de l'équation 4.4.32 sur cette écriture de $\vec{S}_\theta$ conduit à un signal analytique 2D exactement identique, en amplitude (à valeur scalaire) et en phase (à valeur vectorielle), au signal analytique 2D ordinaire.

4.4.3.1 Relation entre les propriétés du signal analytique radial et de signal 2D

La discrétisation de l'équation 4.4.32 nous conduit à écrire le signal analytique 2D associé à la fonction réelle $f(\vec{x})$ par la sommation

$$\vec{f}_A(\vec{x}) = \sum_{\theta=0}^{\pi} \left(\partial_z \vec{S}_\theta\right)(\rho\cos(\theta - \tau)) \tag{4.4.35}$$

$$\left|\vec{f}_A\right|(\vec{x}) = \left|\sum_{\theta=0}^{\pi} \partial_z \vec{S}_\theta(\rho\cos(\theta - \tau))\right| \neq \sum_{\theta=0}^{\pi} \left|\partial_z \vec{S}_\theta(\rho\cos(\theta - \tau))\right| \tag{4.4.36}$$

$$\varphi_A(\vec{x}) = \arg\left(\vec{f}_A\right)(\vec{x}) = \arg\left(\sum_{\theta=0}^{\pi} \partial_z \vec{S}_\theta(\rho\cos(\theta - \tau))\right) \neq \sum_{\theta=0}^{\pi} \arg\left(\partial_z \vec{S}_\theta(\rho\cos(\theta - \tau))\right) \tag{4.4.37}$$

L'équation 4.4.35 indique que la valeur du signal analytique 2D à certain point, du plan de définition de $f(\vec{x})$, est une opération de superposition linéaire entre les valeurs complexes du signal analytique radial situées sur le cercle d'intégration associé au point. Mais, ni l'amplitude locale (équation 4.4.36) ni la phase locale (équation 4.4.37) à ce point représentent une opération linéaire avec leurs correspondantes respectives du signal analytique radial. Sur le cercle d'intégration, la phase locale du signal analytique 2D est déterminée fondamentalement par la phase des valeurs du signal analytique radial caractérisées par l'amplitude la plus significative. Par contre, l'amplitude locale du signal est déterminée par le rapport des amplitudes du signal analytique radial sur le cercle.

Il est évident des éqs 4.4.36 et 4.4.37 que la cohérence entre les propriétés de $\vec{f}_A$ et $\vec{S}_\theta$, dépend de la structure intrinsèque du signal magnétique analysé. Dans les positions où le signal magnétique T_z^1 est à structure locale i1D, le signal analytique 2D est entièrement déterminé à partir d'une seule projection du signal analytique radial. Dans ce cas les valeurs de l'amplitude du signal analytique radial sur le cercle d'intégration, associé à un point donné (ρ', τ'), ne sont d'amplitude significative que dans la position de l'intersection entre le cercle et la projection i1D orthogonale à l'orientation locale de T_z^1 (figures 29 et 30). Les équations 4.4.36 et 4.4.37 deviennent des relations linéaires. Par conséquent, les composantes du signal

analytique 2D préservent les mêmes propriétés qualitatives et quantitatives de leurs correspondants du signal analytique radial.

Dans le cas d'un signal magnétique $\vec{T}_z^1$ à structure 2i-D, à cause de la non représentativité du vecteur local de la phase du signal analytique 2D, nous nous limitons à décrire la connexions entre l'amplitude de ce signal et l'amplitude du signal analytique radial.

En général, en raison de l'évolution de la transformée de Radon dans toutes les orientations possibles du domaine de définition d'un signal magnétique i2D, le signal analytique 2D dans point donné se calcule à partir d'une suite complète des valeurs du signal analytique radial situées sur le cercle d'intégration de ce point. Les signaux analytiques radiaux, recoupés par le cercle, sont caractérisés en général par des amplitudes et des phases différentes. Alors, les relations de la non linéarité 4.4.36 et 4.4.37 sont dans ce cas vérifiées. Lorsque le signal magnétique est généré par un dipôle induit dans une direction non verticale, Les composantes polaires, amplitude et phase, du signal analytique radial ont des propriétés qualitatives isotropes mais les valeurs et la translation verticale de ces deux composantes respectives sont variables par rapport au paramètre θ (figure 34). L'intégrale 4.4.35 conduit alors à des valeurs complexes différentes dans les positions à égale distance de la position de dipôle (figures 33 et 34). D'autre part, à cause de la satisfaction des inégalités 4.4.36 et 4.4.37 une perte de l'isotropie des propriétés qualitatives de l'amplitude du signal analytique radial se produit par l'intégration. Ce fait s'exprime par une distorsion de la forme de l'amplitude locale du signal analytique 2D et l'instabilité de la position de ses valeurs maximales par rapport à la variation de la phase.

Dans le cas particulier d'un signal magnétique symétrique généré par un dipôle induit verticalement, les inégalités 4.4.36 et 4.4.37 restent vérifiées. Mais l'intégration 4.4.35 effectuée dans des positions à égale distance du centre de la position de dipôle conduit à des valeurs complexes égales de $\vec{f}_A$ (figures 31 et 32). Puisque les valeurs de l'intégration se croissent progressivement vers le centre de symétrie du signal magnétique, l'amplitude de signal $\vec{f}_A$ correspondra alors à un pic symétrique positif localisé à l'aplomb du dipôle.

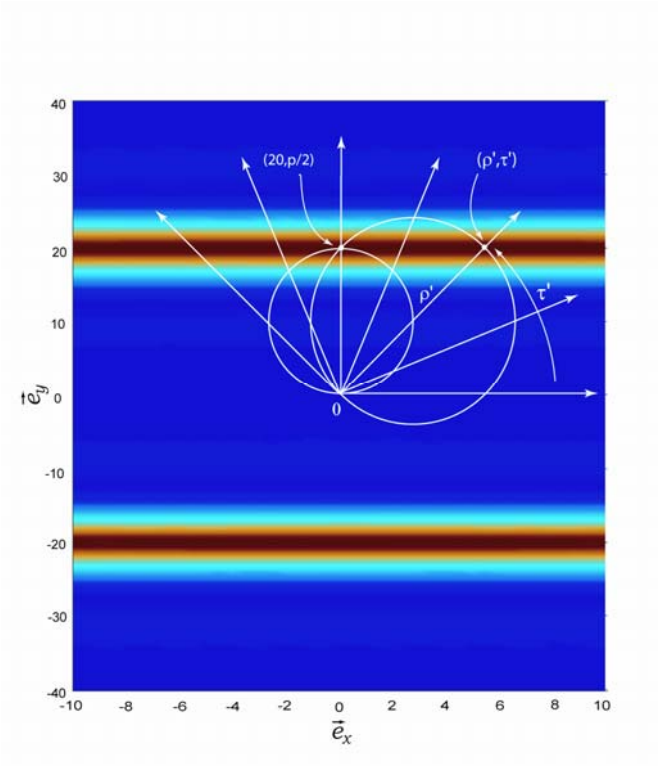


Figure 29. Signal magnétique 1i-D : principe de construction du signal analytique 2D à partir du signal analytique radial.

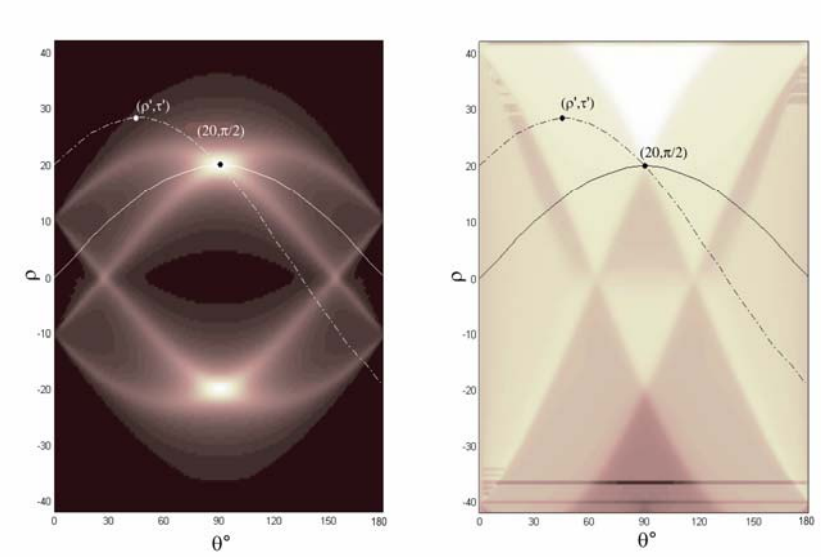


Figure 30. Signal magnétique 1i-D : les valeurs de l'amplitude et de la phase sur le cercle d'intégration d'un point donné.

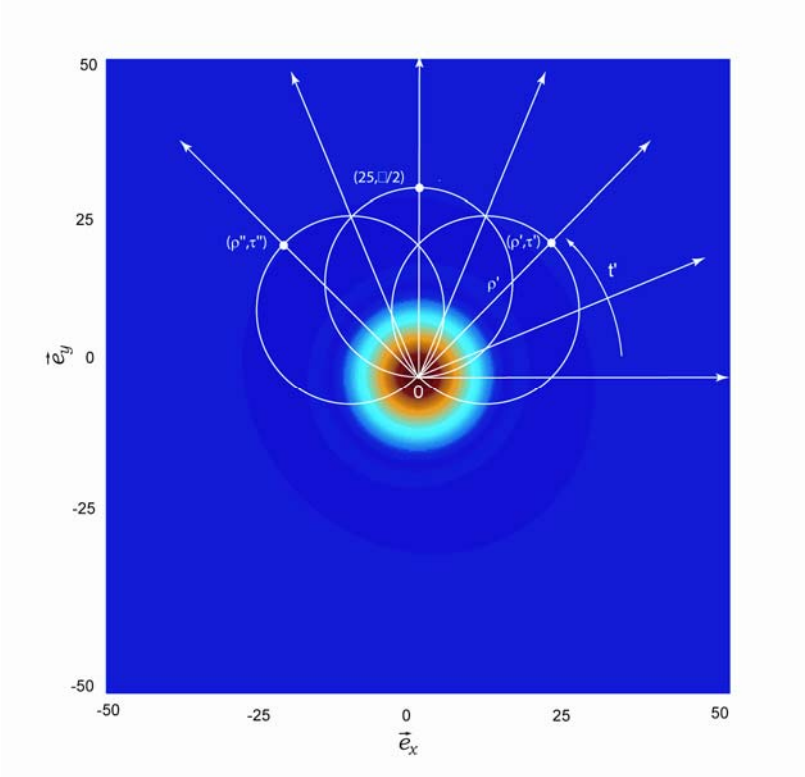


Figure 31. Signal magnétique 2i-D de symétrie circulaire : principe de construction du signal analytique 2D à partir du signal radial.

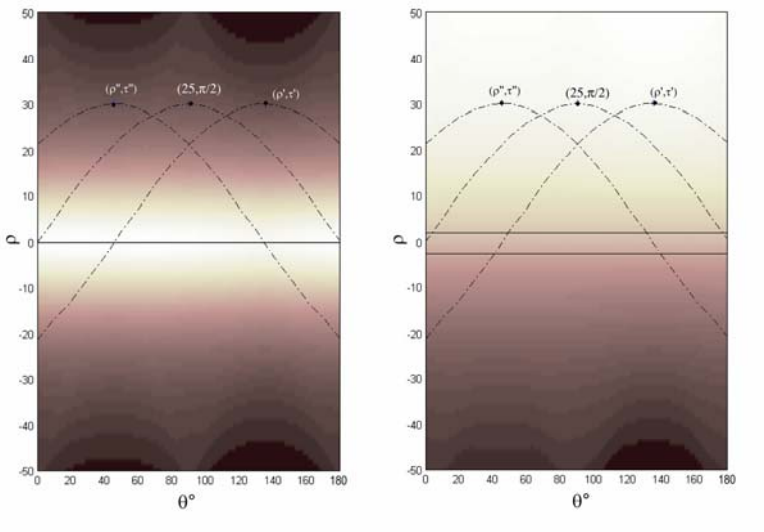


Figure 32. Signal magnétique 2i-D de symétrie circulaire : les valeurs de l'amplitude et de la phase sur le cercle d'intégration d'un point donné.

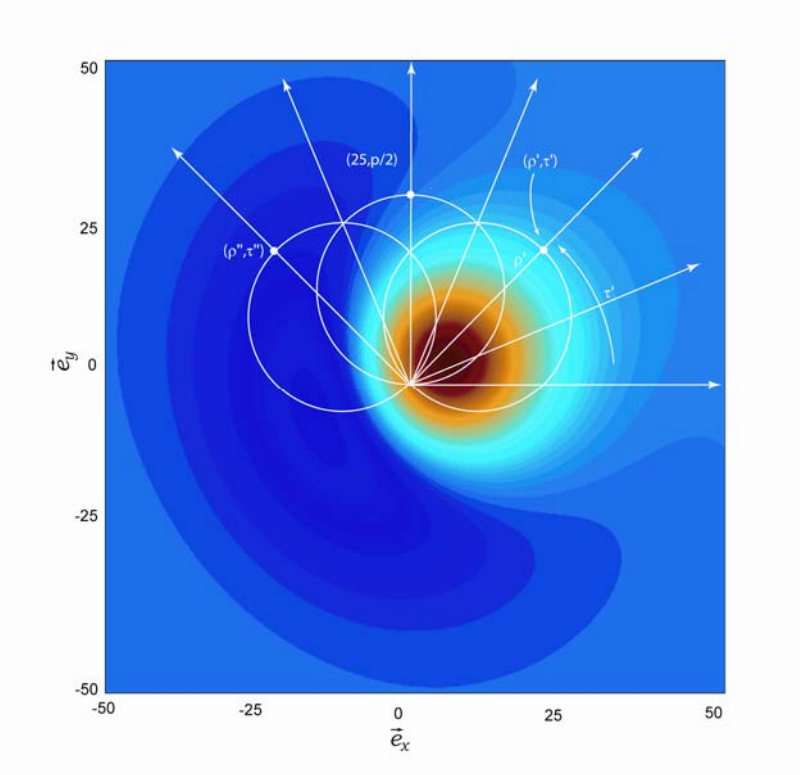


Figure 33. Signal magnétique 2i-D asymétrique: principe de construction du signal analytique 2D à partir du signal radial.

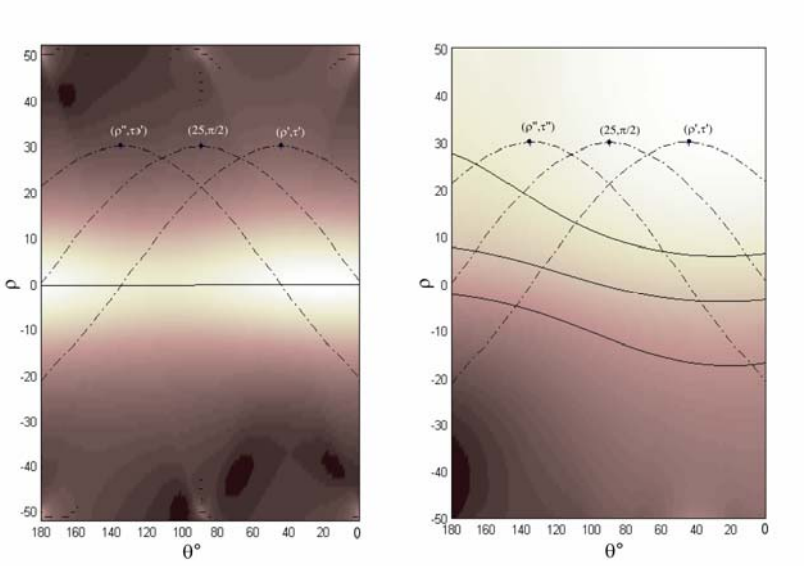


Figure 34. Signal magnétique 2i-D asymétrique : les valeurs de l'amplitude et de la phase sur le cercle d'intégration d'un point donné.

4.4.3.2 Construction d'une nouvelle amplitude à deux dimensions

Pour obtenir une amplitude du signal magnétique $\vec{T}_z^1(\vec{x})$ de mêmes caractéristiques qualitatives que l'amplitude de son signal analytique radial basique, on peut penser à faire l'inversion 4.4.32 uniquement sur amplitude de $\vec{S}_\theta(\rho)$. En effet, en écrivant la formule 4.4.32 dans un base de coordonnées complexes, en remplaçant l'axe $\vec{e}_z$ par l'axe réel l'axe $\vec{e}_k$ par l'axe imaginaire, on aura

$$f_A(\rho,\tau) = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{\infty} dk\, 2k\tilde{R}\{f(\vec{x})\}(k,\theta)\cdot e^{ik\rho\cos(\theta-\tau)} \tag{4.4.38}$$

D'où, nous écrivons l'expression spatiale du signal analytique 2D en représentation eulérienne par

$$f_A(\rho,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} d\theta\, E(\rho) * |S_\theta|(\rho\cos(\theta-\tau))\cdot e^{i\varphi_\theta(\rho\cos(\theta-\tau))} \tag{4.4.39}$$

En réduisant la phase du signal radial $\vec{S}_\theta(\rho)$ dans l'équation 4.4.39 à une valeur nulle ($\varphi_\theta = 0$), nous ramenons le calcul de $\vec{f}_A$ dans un point donné, de plan de définition de $f(\vec{x})$, à une opération de superposition linéaire des valeurs de l'amplitude de $\vec{S}_\theta(\rho)$ situées sur le cercle d'intégration. Nous envisageons que par l'application de ce procédé il est possible de construire une amplitude $|f|$ à deux dimensions de forme et de position des maximums indépendantes à la fois des paramètres magnétiques directionnels et de types de structure intrinsèque du signal magnétique. Ainsi, cette amplitude aura les mêmes propriétés qualitatives que l'amplitude 2D ordinaire, si le signal magnétique est 1i-D, et les propriétés qualitatives de l'amplitude du signal analytique radiale, si le signal magnétique est 2i-D.

Pour démontrer les propriétés qualitatives de l'amplitude $|f|$, nous avons examiné divers signaux magnétiques (i1D et i2D) et nous avons comparé les propriétés de l'amplitude reconstruite $|f|$ avec celles de l'amplitude ordinaire $|\vec{f}_A|$ du signal analytique 2D. L'inversion 4.4.39 est effectuée au moyen de la transformée de Radon inverse appliquée uniquement sur l'amplitude du signal analytique radial, toute en précisant que l'inversion doit contenir une opération de filtrage l'amplitude, du signal radial, par le filtre $E(\rho)$ dont la fonction de transfert est k.

Dans le premier test, nous avons considéré le signal magnétique généré par la disque, dont les paramètres sont donnés à la section 4.3.1. Nous précisons que le diamètre du disque est 30 km et les coordonnées horizontales de son axe sont (-25, -25) par rapport à l'origine du plan cartésien. L'inversion est appliquée sur une grille dont $x \in [-100\,100]$ et $y \in [-100\,100]$ mais sur les figure nous avons seulement zoomé le signal significatifs de cette grille. L'allure de l'amplitude construite $|f|$ apparaît en bonne corrélation avec l'allure de l'amplitude $|\vec{f}_A|$ ordinaire. La position horizontale du maximum des deux amplitudes est un argument satisfaisant avec la vraie position du bord du disque (figures 35 et 36).

Le deuxième test est effectué sur un signal magnétique 2iD généré par une sphère dont la position horizontale de son centre est (20,20) dans le repère cartésien. Dans le cas où le vecteur du champ magnétique inducteur de l'aimantation est vertical : les deux amplitudes, ordinaire $|\vec{f}_A|$ et celle construite $|f|$, présentent deux pics positifs et symétriques d'allure très similaire et un maximum placée directement sur la position horizontale du centre de sphère (figure 38). Par contre, lorsque le champ magnétique inducteur est différent de la verticale, soit par exemple d'inclinaison 60° et de déclinaison 60°, les deux amplitudes ont une allure différentes: L'amplitude $|\vec{f}_A|$ présente un pic positif allongé dans la direction de la projection horizontale du vecteur d'aimantation avec une maximum déplacé dans la même direction par rapport à la position réelle du centre de sphère. Quant à $|f|$, il est représenté par un pic positif allongé dans la direction perpendiculaire à la projection horizontale du vecteur magnétique. La position de son maximum donne un estimation très corrélée avec la vraie position horizontale du centre de la sphère (figure 37).

Dans le dernier exemple, nous testons la performance des deux amplitudes sur un signal magnétique plus complexe produit par un prisme de direction d'aimantation induite de 60° en inclinaison et 60° en déclinaison. Comme nous l'avons souligné dans la section 4.3.1, la structure intrinsèque de ce signal est composite d'une structure i1D associée aux bords du prisme et une structure i2D associée à ses arêtes. La forme des deux amplitudes dans les positions i1D apparaît similaire et fournit une résolution de la position horizontale du bord du prisme corrélée avec la position réelle. Dans les positions à structure i2D du signal magnétique, la position horizontale du bord du prisme estimée par $|\vec{f}_A|$ exprime un déplacement par rapport à la position réelle. Par contre, les valeurs maximales de $|f|$ dans les mêmes positions i2D se superposent directement sur la position horizontale du bord (figures 39 et 40).

Les applications synthétiques précédentes indiquent donc que la forme de l'amplitude construite $|f|$ et celle de l'amplitude ordinaire $|\vec{f}_A|$, pour un signal magnétique i1D, sont indépendantes des paramètres magnétiques directionnels. La position des valeurs maximales des deux amplitudes sont en bon accord avec la position horizontale de la source magnétique responsable du signal. Par contre, dans le cas d'un signal magnétique i2D, la forme de l'amplitude construite $|f|$ et la position de ses maxima, placés à l'aplomb de la source magnétique, apparaissent beaucoup plus stable que leurs correspondantes de l'amplitude ordinaire $|\vec{f}_A|$ face à la variation des paramètres magnétiques directionnels. Cependant, plusieurs remarques peuvent être faites sur le comportement de l'amplitude construite. La nature du calcul de cette fonction, comme une moyenne de l'amplitude du signal radial sur un cercle, admet que la direction de l'allongement de $|f|$ pour le test d'un sphère d'aimantation non verticale doit être dans la même orientation que la projection horizontale du vecteur magnétique. Sur la figure 37b, ce comportement n'est pas observé où l'allongement se fait dans une orientation perpendiculaire.

D'autre part, dans le cas du signal magnétique du prisme, l'évolution des valeurs de $|f|$ n'est pas homogène. L'amplitude dans les positions i2D du signal magnétique a des valeurs plus importantes que les valeurs dans les positions i1D. Sur le même modèle, on peut observer des distorsions de la forme de $|f|$ près des arêtes du prisme (figures 39b et 40b) et cette distorsion devient plus importante sur les composantes fréquentielles de grandes longueurs d'ondes.

La détermination de la source exacte de ces observations requise une analyse plus complète de la méthode proposée. Notamment l'application numérique de la transformée de radon (voir section 4.5) et de la formule d'inversion du signal analytique radial en signal analytique 2D.

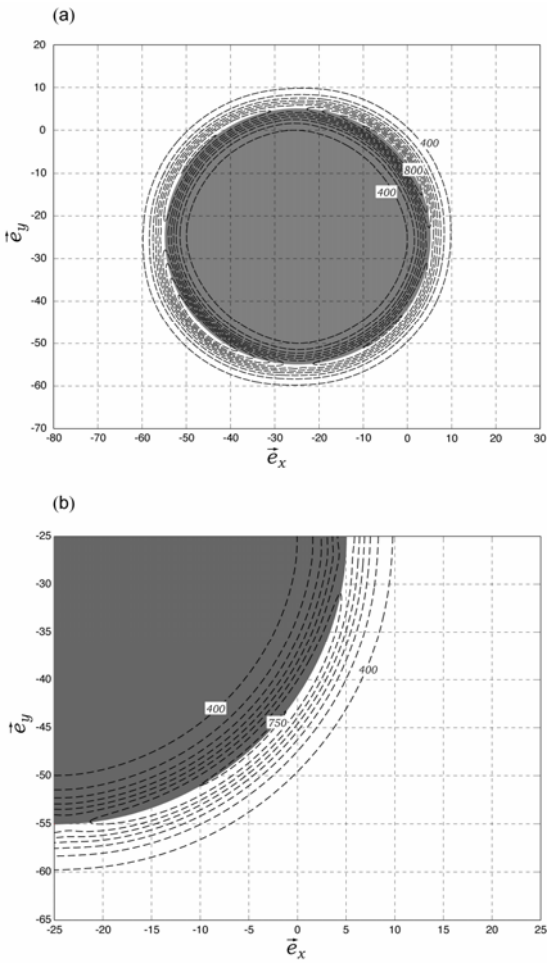


Figure 35. Pour un signal magnétique 1i-D : (a) amplitude du signal analytique 2D ordinaire, (b) zoom d'une partie de l'amplitude.

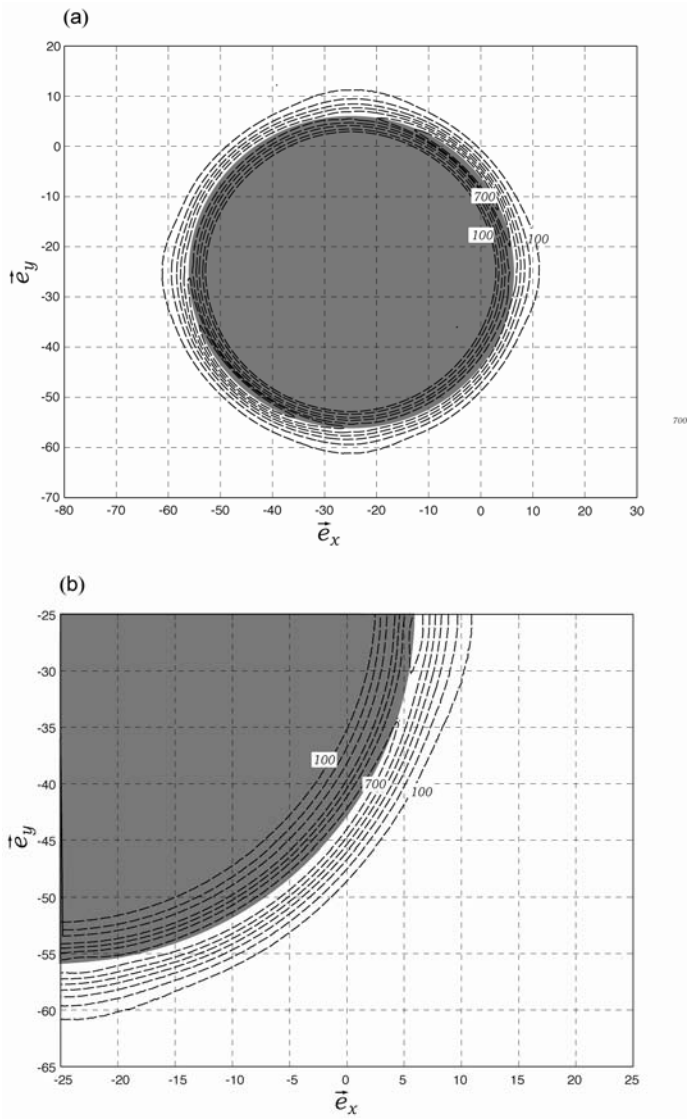


Figure 36. Pour un signal magnétique 1i-D : (a) amplitude du signal analytique 2D construit de l'amplitude du signal analytique radial, (b) zoom d'une partie de l'amplitude.

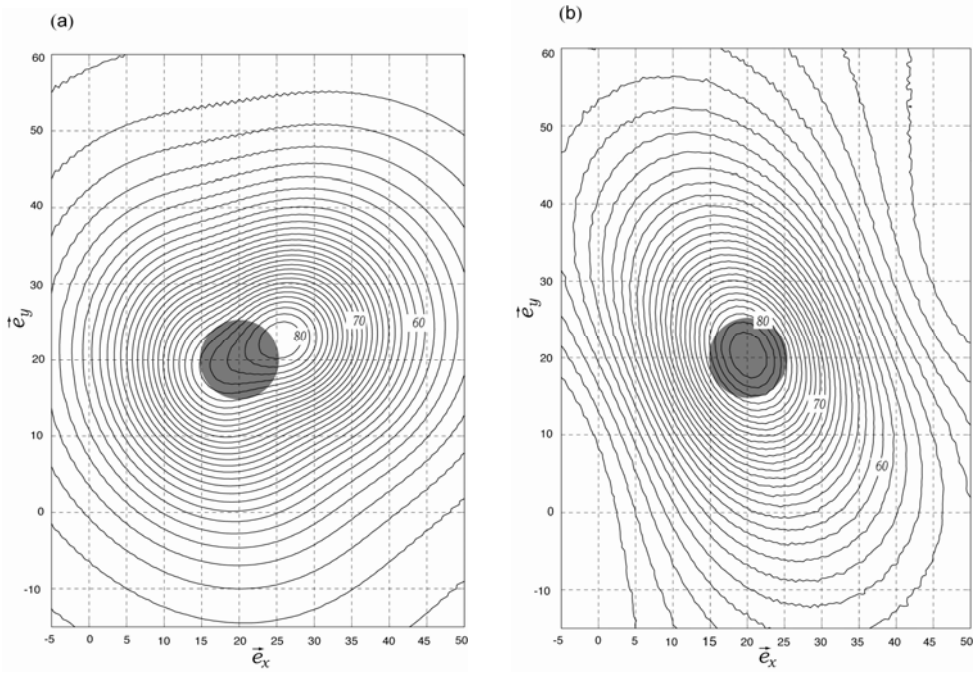


Figure 37. Pour un signal magnétique 2i-D asymétrique : (a) amplitude du signal analytique 2D ordinaire, (b) amplitude du signal analytique 2D construit par intégration sur l'amplitude du signal analytique radial.

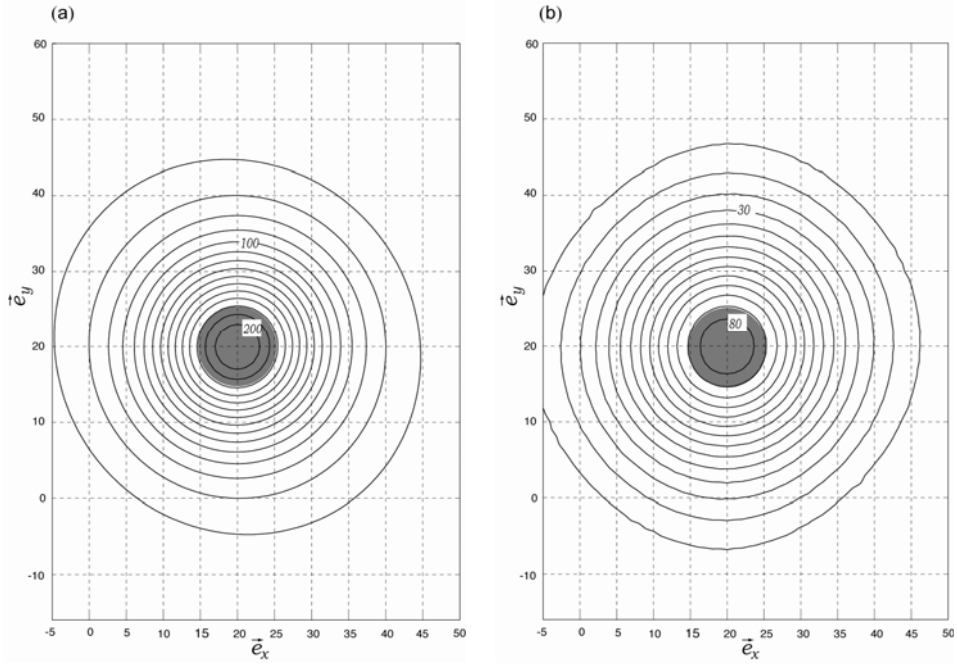


Figure 38. Pour un signal magnétique 2i-D de symétrie circulaire (a) amplitude du signal analytique 2D ordinaire, (b) amplitude du signal analytique 2D construit par intégration sur l'amplitude du signal analytique radial.

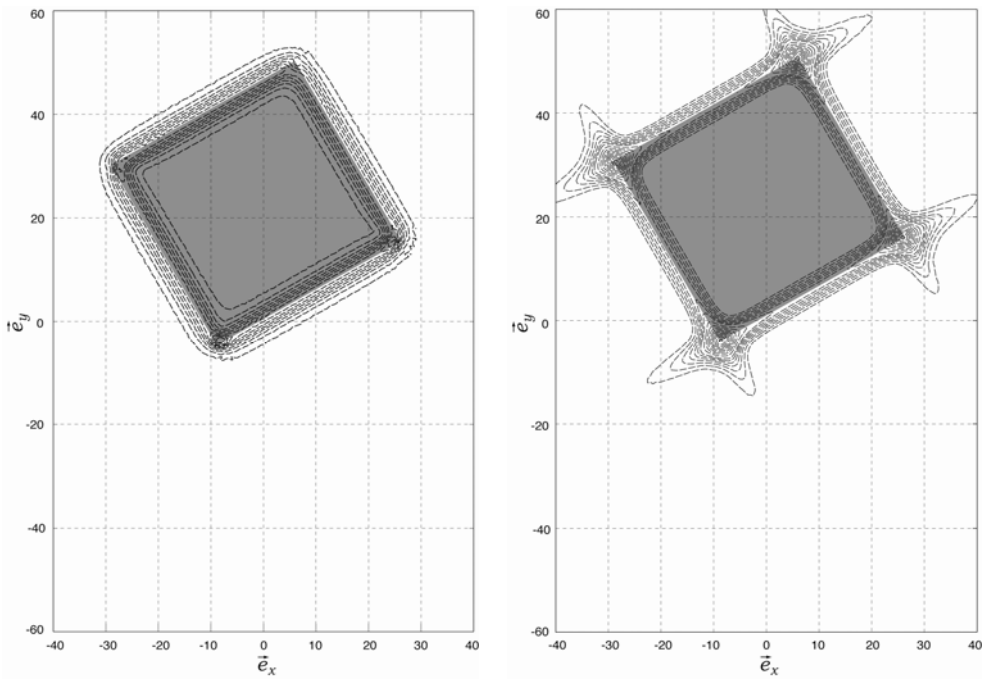


Figure 39. Pour un signal magnétique d'un prisme : (a) amplitude du signal analytique 2D ordinaire, (b) amplitude du signal analytique 2D construit par intégration sur l'amplitude du signal analytique radial.

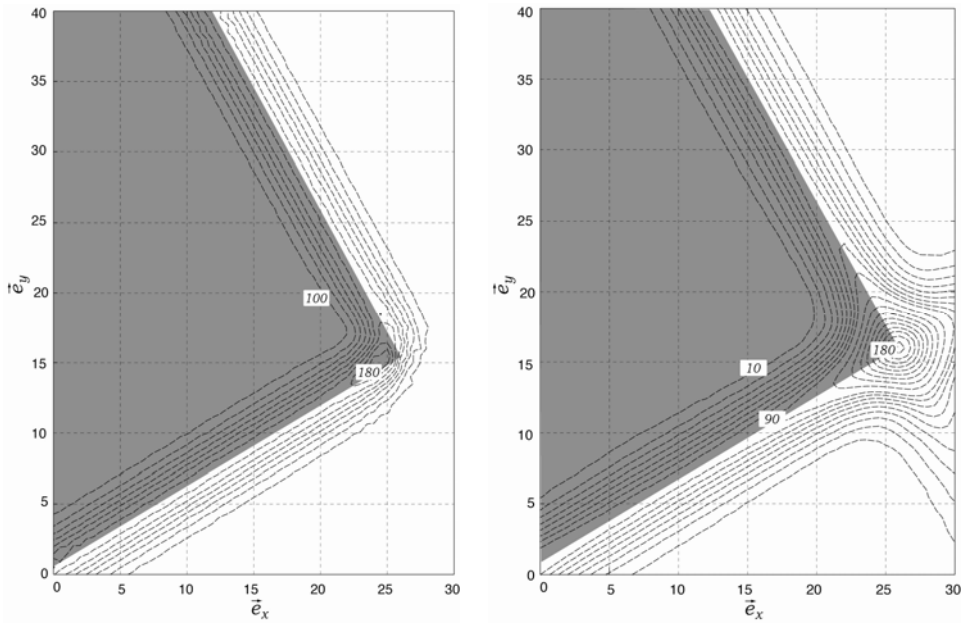


Figure 40. Pour un signal magnétique d'un prisme : (a) zoom d'une partie de l'amplitude du signal analytique 2D ordinaire, (b) zoom d'une partie de l'amplitude du signal analytique 2D construit par intégration sur l'amplitude du signal analytique radial.

4.5 Discrétisation de la transformée de Radon

Dans les analyses effectuées à travers ce chapitre, nos outils fondamentaux pour la réalisation pratique de la connections entre le signal analytique 2D et le signal analytique radial 1D sont des versions discrétisées de la transformée de Radon directe et inverse. En effet la transformée de Radon discrétisée doit être clairement identifiée pour avoir une transformation des propriétés analogues à celles de la transformée de Radon en terme de fonctions continues. La transformée de Radon est ici réalisée par l'approximation de l'intégrale 4.4.1 à une opération de sommation en projetant la grille cartésienne originale sur une série des orientations discrètes [Jae, 1990]. Cette formulation est imprécise pour construire une définition parfaite de la transformée de Radon discrète pour différentes causes. En fait les positions d'une orientation donnée ne s'intersectent pas avec les points de la grille cartésienne originale. Une sorte d'interpolation est requise dans cette opération. D'autre part, l'intégrale sur des lignes droites orthogonales à l'orientation donnée est approximée par une projection globale arbitraire des points de la grille sur cette orientation. Ces deux approximations rendent la transformée de Radon discrète utilisée inexacte.

La transformée de Radon peut s'obtenir, dans l'espace de Fourier, par une autre méthode basée sur le théorème du slice [Kelley, 1993]. Selon cette méthode la transformée de Fourier 2D cartésienne de $\left\{f(\vec{x}), \vec{x} = (x, y) \in R^2\right\}$ sera convertie en coordonnées polaires. Ensuite sa transformée de Radon s'obtient par la transformée de Fourier 1D inverse le long des slices radiaux. L'application de cette technique sur des données discrètes présente aussi une approche inexacte à cause de la nécessité d'une interpolation pour réaliser les slices à partir de la grille cartésienne.

Grille pseudo-polaire

L'approche le plus idéal pour réaliser la transformée de Radon discrète est la création d'une grille radiale dans l'espace de Fourier (figure 41).

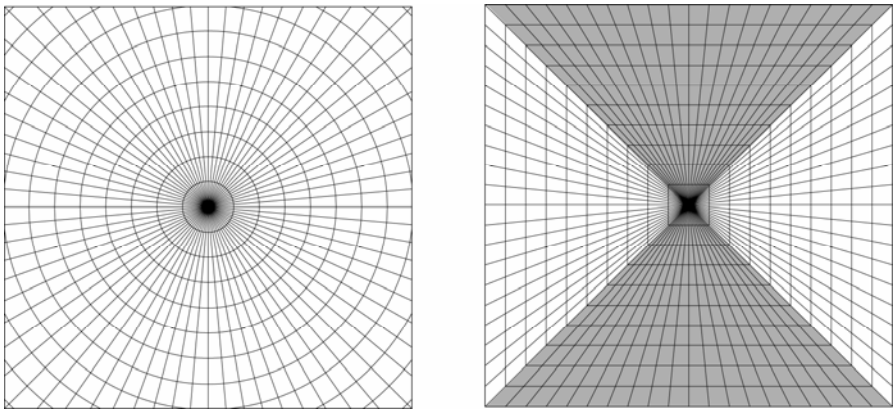


Figure 41. une grille polaire (à gauche), une grille pseudo-polaire pour n=10 (à droite).

Les positions sur cette grille correspondent aux points d'intersection entre des orientations radiales, passant par l'origine du plan de définition de $f(\bar{x})$, et les circonférences des cercles centrées sur l'origine du plan. La formulation de la transformée de Radon d'une telle grille est assez difficile. Dans la littérature, ce problème a été résolu par l'approximation de la grille polaire à une grille pseudo-polaire [Keller et al., 2002 ; Averbuch et al. sous presse].

Selon la méthode de la grille pseudo-polaire, la formulation de la transformée de Radon d'une grille cartésienne $\{I(u,v), n\times n\}$ est basée sur une opération de sommation le long d'une série de familles de lignes. Chaque famille se caractérise par une pente absolue constante $|s| \le 1$ (différente d'une autre famille) et un intercepte variable entre $-\mathrm{n} \le t < \mathrm{n}$, cette intervalle de l'intercepte assure que l'opération de la sommation couvre toutes les lignes en intersection avec la grille originale. La sommation sur chaque famille des lignes conduit à la définition d'une seule projection de Radon. Pour produire une transformation de Radon complète, la sommation se déroule sur deux groupes de familles des lignes :

Une sommation le long des familles de la forme $\{y = sx + t,\ |s| \le 1\}$ ou les lignes à base horizontale. La pente s de ce groupe de familles varie sur le site : $\{\Theta^1 = [-\pi/4, \pi/4]\}$. La sommation sur une ligne donnée se déroule en traversant la ligne par l'unité horizontale de la grille originale et à chaque position $(x, sx+t)$ de la ligne nous interpolons la grille le long de ces colonnes pour avoir la valeur de I à cette position (figure 42). Ainsi, l'opération de sommation sur une seule ligne de forme $\{y = sx + t\}$ peut s'écrire

$$radon(\{y = sx + t\}, I) = \sum_{u=-\mathrm{n}/2}^{\mathrm{n}/2-1} \hat{I}^1(u, su + t) \tag{4.5.1}$$

Une sommation le long des familles de la forme $\{x = s'y + t,\ |s'| \le 1\}$ ou les lignes à base verticale. La pente s' des familles varie sur le site $\{\Theta^2 = [\pi/4, 3\pi/4]\}$. La sommation se déroule en traversant la ligne par l'unité verticale de la grille originale et à chaque $(s'y + t, y)$ nous interpolons la grille le long de ces lignes pour avoir la valeur de I à cette position. Ainsi, l'opération de sommation sur une seule ligne de la forme $\{x = s'y + t\}$ peut s'écrire

$$radon(\{x = s'y + t\}, I) = \sum_{u=-\mathrm{n}/2}^{\mathrm{n}/2-1} \hat{I}^1(s'y + t, u) \tag{4.5.2}$$

Dans les deux équations 4.5.1 et 4.5.2 le terme en sommation est définie par

$$\hat{I}^1(u, y) = \sum_{u=-\mathrm{n}/2}^{\mathrm{n}/2-1} I(u,v) D_m(y - u). \qquad u \in \{-\mathrm{n}/2, \cdots, \mathrm{n}/2 - 1\}, \quad y \in \mathrm{R}$$

où D_m est le noyau de Dirichlet $\quad D_m(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{m \sin(\pi t/m)}, \qquad m = 2\mathrm{n} + 1$.

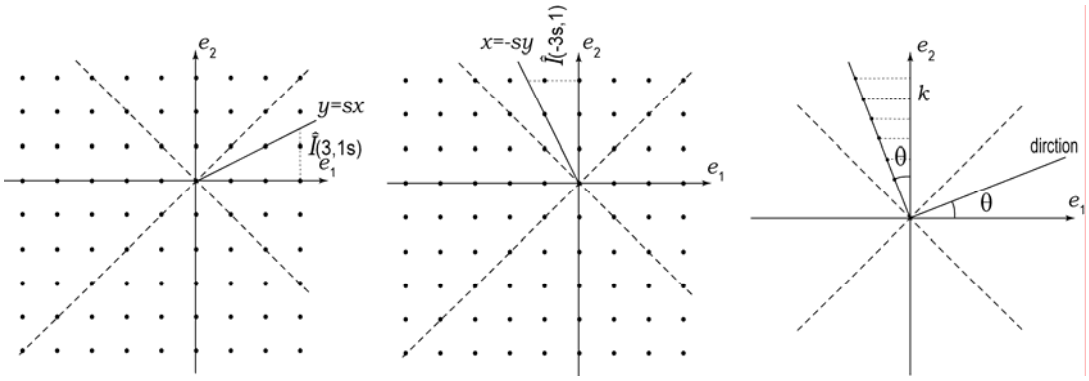


Figure 42. de gauche à droite ; la transformée de Radon pour les lignes à base horizontale, la transformée de Radon pour les lignes à base verticale, intériorisation géométrique du théorème du slice de la transformée de Fourier-2D.

Afin de produire une transformation de Radon réellement discrétisée, les angles de deux sites Θ^1 et Θ^2 doivent être d'espace égal. Cette condition peut se réaliser en écrivant l'angle en fonction de la position sur la grille cartésienne ; soit

$$\Theta^1 = \left\{\tan^{-1}(2l/\mathrm{n}) \;\middle|\; l \in Z,\ -\mathrm{n}/2 \le l \le \mathrm{n}/2\right\} \tag{4.5.3}$$

$$\Theta^2 = \left\{\pi/2 - \tan^{-1}(2l/\mathrm{n}) \;\middle|\; l \in Z,\ -\mathrm{n}/2 \le l \le \mathrm{n}/2\right\} \tag{4.5.4}$$

Et par l'application des expressions de somation 4.5.1 et 4.5.2 sur les deux groupes des familles de lignes, nous définissons la transformée de Radon discrète par l'expression

$$R\{I\}(t,\theta) \overset{\Delta}{=} \begin{cases} radon(\{y = (\tan\theta)x + t\}, I), & \theta \in \Theta_2 \\ radon(\{x = (\cot\theta)y + t\}, I), & \theta \in \Theta_1 \end{cases} \tag{4.5.5}$$

Où ; $t \in Z,\ -\mathrm{n} \le t \le \mathrm{n}$.

Le théorème du slice de Fourier

Le théorème du slice de Fourier pour la transformée de Radon 4.5.5 se définit par

$$\widetilde{R}\{I\}(k,\theta) = \begin{cases} \widetilde{I}(\tan(\theta)k, k) & \theta \in [-\pi/4, \pi/4] \\ \widetilde{I}(k, -\cot(\theta)k) & \theta \in [\pi/4, 3\pi/4] \end{cases}. \tag{4.5.6}$$

où $\widetilde{I}(\zeta_1, \zeta_2) = \sum_{u=-\mathrm{n}/2}^{\mathrm{n}/2-1} \sum_{v=-\mathrm{n}/2}^{\mathrm{n}/2-1} I(u,v) \exp\{-2\pi i/m(\zeta_1 u + \zeta_2 v)\}$

Pour éclairer le sens géométrique du théorème du slice, nous considérons par exemple l'identité : $\widetilde{R}\{I\}(k,\theta) = \widetilde{I}(-\tan(\theta)k, k)$. Le théorème du slice indique que pour une direction, définie par l'angle $\{\theta,\ \theta \le \pi/4\}$ formée avec l'axe $\vec{e}_x$, la transformée de Fourier 1D sur la famille des lignes, dont la pente égale à θ et d'intercepte variable sur l'intervalle $\{-\mathrm{n} \le t < \mathrm{n}\}$, est équivalente à l'échantillonnage de la transformée de Fourier à 2D de la grille originale $\widetilde{I}$ prise aux points $(-\tan(\theta)k, k)$ le long de la ligne $\{x = -\tan(\theta)y + t,\ |s'| \le 1\}$. Ainsi, la transformée de Fourier de la transformée de Radon discrétisée 4.5.5 est équivalente à l'échantillonnage de $\widetilde{I}$ sur le site spécial des points

$$P = P^1 \cup P^2$$

Où ;

$$P^1 \overset{\Delta}{=} \{(-2lk/\mathrm{n}, k) \mid -\mathrm{n}/2 \le l \le \mathrm{n}/2,\ -\mathrm{n} \le k \le \mathrm{n}\}$$

$$P^2 \overset{\Delta}{=} \{(k, -2lk/\mathrm{n}) \mid -\mathrm{n}/2 \le l \le \mathrm{n}/2,\ -\mathrm{n} \le k \le \mathrm{n}\}$$

Le site des points P est appelé la grille pseudo-polaire (figure 41), dans lequel k sert comme un pseudo-rayon et l comme un pseudo-angle.

Ainsi, pour calculer la transformée de Radon dans le domaine spatial dans la direction θ, nous appliquons la transformée de Fourier inverse-1D sur les orientations radiales du spectre $\widetilde{I}$ échantillonnées selon la grille pseudo-polaire :

$$RI(t,\theta) = \mathsf{F}^{-1}\{\widetilde{I}(\cdot, l)\}, \qquad \theta \in \Theta^1,\ \ \theta = \tan^{-1}\{2l/\mathrm{n}\}.$$

$$RI(t,\theta) = \mathsf{F}^{-1}\{\widetilde{I}(\cdot, l)\}, \qquad \theta \in \Theta^2,\ \ \theta = \pi/2 - \tan^{-1}\{2l/\mathrm{n}\}.$$

Résumé

Le signal analytique d'un signal réel à 1D est un concept standard dans l'analyse du signal. Il est bien défini grâce à la définition unique de la transformée de Hilbert-1D. En revanche pour un signal réel à 2D, il n'existe pas une définition unique du signal analytique et plusieurs définitions dans la littérature ont été développées. Au cours de ce chapitre nous avons traité le concept du signal analytique 2D basé principalement sur la généralisation de la transformée de Hilbert 1D à 2D par la solution de l'équation de Laplace. Dans une base vectorielle 3D, la transformée de Hilbert à 2D, ou encore la transformée de Reisz, est un vecteur dans le plan horizontal et le signal analytique 2D est un vecteur à trois dimensions composé de la fonction original et de sa transformée de Reisz.

Dans un système de coordonnées sphériques, le signal analytique 2D peut être dissocié en deux composantes : l'amplitude locale à valeurs scalaires et le vecteur local de la phase. L'amplitude locale étant une représentation spatiale continue de l'énergie contenue dans le signal analysé dans le voisinage d'une position donnée. Quant au vecteur local de la phase, il contient deux informations sont : la phase locale, une description continue de la structure du signal, et l'orientation locale qui est une description géométrique continue du signal.

En magnétisme, l'amplitude locale est la seule composante connue du signal analytique 2D. Elle s'obtient comme le gradient total de l'anomalie magnétique mesurée. L'exploitation de cette composante dans l'interprétation des prospections magnétiques se limite à la détermination de la position horizontale et verticale des contrastes d'aimantation. Dans cette application, on suppose que l'amplitude locale, identiquement à l'amplitude locale du signal analytique 1D, est indépendante des paramètres magnétiques directionnels. Cela implique que la position horizontale des valeurs maximales de l'énergie du signal est en coïncidence avec la position horizontale de la variation importante de l'aimantation de source.

L'indépendance entre l'amplitude locale et les paramètres magnétiques directionnels est conditionnée par la satisfaction de l'orthogonalité entre cette amplitude locale et la phase locale du signal analytique. Ainsi, si le signal magnétique est de structure intrinsèque à une dimension le vecteur local de la phase, caractérisé par deux degrés de liberté, est suffisant pour décrire la symétrie 1D du signal et l'orientation de l'axe de cette symétrie. Dans ce cas l'orthogonalité entre la phase locale et l'amplitude locale est vérifiée, et les deux fonctions contiennent deux informations indépendantes. Par contre, pour un signal magnétique de structure intrinsèque à deux dimensions, les deux degrés de liberté du vecteur local de la phase sont insuffisants pour décrire la symétrie 2D du signal. La condition de l'orthogonalité entre l'amplitude locale et la phase pour d'un tel signal n'est donc pas vérifiée et les deux informations contenues deviennent dépendantes. Par conséquent, l'utilisation des composantes sphériques du signal analytique 2D comme outil dans l'interprétation magnétique est réservé au signal magnétique i1D généré par une source allongée. Par contre, pour un signal magnétique i2D généré par un source compacte, cette approche devient

incorrecte car l'amplitude est influencée par les paramètres magnétiques directionnels de la phase.

Dans une autre étape et au moyen de la transformée de Radon à deux dimensions, nous avons décomposé la symétrie 2D d'un signal magnétique i2D en un site de symétries 1D portées sur les projections radiales du signal. L'application de la transformée de Hilbert sur les projections a montré une meilleure stabilité, par rapport à l'orientation, de l'orthogonalité entre l'amplitude locale et la phase locale des projections du signal analytique radiale 1D (le signal analytique associée aux projections radiales). Par ce formalisme d'une connexion inverse du signal analytique 1D en signal analytique 2D, nous avons déduit que le signal analytique 2D est une superposition linéaire particulière du signal analytique radial. A partir de cette connexion, nous avons interprété le perte de l'indépendance entre l'amplitude locale et la phase locale d'un signal analytique radial, par l'opération de la superposition, comme conséquence de la relation non linéaire entre ces deux composantes et leurs correspondantes respectives du signal analytique 2D. Ce résultat nous a donnée l'idée de réaliser la superposition uniquement sur l'amplitude du signal analytique radial. Nous envisagions que par l'application de cette procédure nous pouvions ramener la relation entre les amplitudes locales de deux signaux analytiques à une opération linéaire ce qui aurait permit de préserver les propriétés de l'amplitude du signal analytique radial dans l'amplitude du signal analytique 2D, notamment l'indépendance entre ses propriétés et l'orientation de la projection (équivalent à l'orientation d'une symétrie 1D du signal 2D).

L'application de l'inversion proposée sur des signaux magnétiques de différentes dimensions intrinsèques a montré que l'amplitude obtenue est indépendante des paramètres magnétiques directionnels. Elle a bien localisé la position horizontale des sources compactes et des sources allongées. Cependant, l'analyse effectuée dans ce chapitre est insuffisante de donner un jugement définitif sur cette méthode de la construction de l'amplitude 2D. Ainsi, une poursuite plus fondamentale doit être faite pour explorer la cause de la distorsion observée sur l'amplitude construite. Nous pensons qu'il faut, dans un premier temps, vérifier les applications numériques des relations théoriques établies dans ce chapitre. Une fois que nous avons réussi à corriger la source de ces artéfacts nous estimons que, cette amplitude représentative de la variation d'énergie du signal magnétique i2D et i1D, permet d'accéder à d'autres paramètres de la source comme la profondeur.

CONCLUSION

La contribution principale du signal analytique pour l'interprétation des données magnétiques à une dimension est la possibilité de définir les notions d'amplitude locale et de phase locale. L'amplitude locale est une description spatiale continue de l'énergie du signal magnétique et la phase locale est une description spatiale continue de sa structure. Pour un signal magnétique généré par une source magnétique localisée (ou une singularité magnétique), certaines paramètres de la source peuvent être estimés par l'analyse du comportement de l'atténuation d'énergie (logarithme de l'amplitude locale) du signal.

Compte tenu que l'atténuation d'énergie et la phase locale du signal magnétique, d'une source magnétique localisée forment une paire de la transformée de Hilbert, il est possible d'établir des lois propres pour la phase locale permettant d'estimer la même information qu'à partir de l'atténuation d'énergie.

Dans le cas d'une source magnétique multiple, la définition de l'amplitude locale et de la phase locale, par l'application directe de la technique du signal analytique, n'est pas une approche utile pour l'interprétation des données magnétiques. Dans ce cas nous devons associer à l'application du signal analytique une opération de filtrage permettant d'analyser les composantes du signal magnétique caractéristiques d'une source localisée. L'opération de filtrage peut être effectuée en convoluant le signal analytique par le noyau de Poisson. Cette opération est équivalente à l'analyse du signal magnétique par l'ondelette complexe. En termes de transformée en ondelettes, l'estimation des paramètres de la source multiple s'effectue sur les voies des coefficients en amplitude sur lesquelles la source multiple se comporte comme une singularité. Les coefficients en amplitude de la transformée en ondelettes offrent aussi une possibilité d'estimer les paramètres de la source localisée à partir de l'atténuation d'énergie considérée le longue des lignes de maxima.

L'estimation de la phase locale le long des lignes de maxima des coefficients en amplitude permet d'extraire l'inclinaison apparente d'aimantation de la source localisée. Dans les études paléomagnétiques en domaine océanique, cette méthode d'estimation de l'inclinaison est avantageuse par rapport aux méthodes classiques et permet d'éliminer plusieurs biais.

L'estimation de l'inclinaison apparente sur des données de profils magnétiques de l'océan sud-est indien indique que la direction de l'aimantation de la croûte océanique jeune (0-10 Ma) est similaire avec la direction du champ magnétique régional. La distorsion de l'inclinaison apparente est en générale de faible amplitude, inférieure à 12°. Cette distorsion s'accroît avec l'âge de la croûte océanique et la profondeur des sources magnétiques sous le fond augmente également. L'augmentation de la distorsion de l'inclinaison apparente s'explique alors par l'acquisition en profondeur d'une aimantation qui a une direction égale à celle du champ magnétique régional du lieu et qui est différente de celle de la couche basaltique portant l'aimantation initiale.

Cette application à la détermination de l'inclinaison apparente de la croûte océanique de la dorsale est indienne est prometteuse car elle permet d'expliquer la distorsion généralement observée. Il faudrait l'utiliser pour d'autres dorsales, en particulier à taux d'expansion plus lent et pour des âges plus anciens pour confirmer la validité du modèle d'aimantation proposé.

Le signal magnétique à deux dimensions, c'est-à-dire sur un plan horizontal, peut être décomposé par la technique du signal analytique en amplitude locale (à valeurs scalaires) et en vecteur local de phase. L'amplitude locale est une description spatiale continue à deux dimensions de l'énergie du signal. Le vecteur local de la phase est une description spatiale continue de deux paramètres à la fois : la phase locale correspond à une description de la structure du signal, et l'orientation locale correspond à une description de sa géométrie.

Les propriétés généralement admises pour le signal analytique 2D ne sont vraies que pour des signaux magnétiques caractérisés par une symétrie 1D. Pour de tels signaux, les deux degrés de liberté, phase locale et orientation locale, du vecteur local de la phase décrivent parfaitement la structure et la géométrie du signal. L'amplitude locale et la phase locale satisfont la condition d'orthogonalité et portent alors deux informations indépendantes

Pour un signal magnétique à deux dimensions caractérisé par une symétrie 2D, les deux degrés de liberté du vecteur local de la phase du signal analytique sont insuffisants pour décrire la structure et la géométrie du signal magnétique. L'orthogonalité entre l'amplitude locale et la phase locale n'est pas vérifiée. Ainsi, l'information contenue dans l'amplitude locale varie selon le changement de la phase locale et l'information contenue dans la phase locale varie selon le changement de l'amplitude locale. La technique du signal analytique 2D est donc inexploitable pour caractériser des sources compactes responsables d'un tel signal magnétique.

Par l'application du théorème de slice centrale (ou de son application dans le domaine spatial la transformée de radon), le signal magnétique à symétrie 2D peut être décomposé en une série infinie de projections à symétrie 1D. Les informations contenues dans l'amplitude locale et la phase locale du signal analytique 1D des projections, apparaissent indépendantes. La reconstruction des amplitudes locale des projections conduit à une amplitude locale à deux dimensions des propriétés plus appropriée à la caractérisation de la source causative, que l'amplitude du signal analytique 2D. Cette partie de mon travail devrait être développée dans le futur car elle permettrait sans doute de résoudre le problème de l'utilisation du signal analytique pour des structures compacte.

BIBLIOGRAPHIE

Allerton, S. and M. A. Tivey, Magnetic polarity structure of the lower oceanic crust, *Geophys. Res. Lett*., 423-426, 2001.

Anderson, R. N., M. G. Langseth and J. G. Sclater, The mechanisms of heat transfer through the floor of the Indian Ocean, *J. Geophys. Res*., 82, 3391-3409, 1977.

Arkani-Hamed J., Remanent magnetization of the oceanic upper mantle, *Geophys. Res. Letters*, 15, 48-51, 1988.

Arkani-Hamed, J., Thermoremanent magnetization of the oceanic lithosphere inferred from a thermal evolution model: Implication for the source of marine magnetic anomalies, *Tectonophysics, in press*, 1989a.

Arkani-Hamed, J., Thermoviscous remanent magnetization of the oceanic lithosphere inferred from its thermal evolution, *J. Geophys. Res*., 94, 17,421-17,436, 1989b.

Arkani-Hamed, J., Magnetization of the oceanic crust beneath the Labrador Sea. *J. geophys. Res*., 95, 7101-7110, 1990.

Arkani-Hamed, J., Thermoremanent magnetization of the oceanic lithosphere inferred from a thermal evolution model: Implication for the source of marine magnetic anomalies, *Tectonophysics*, 192, 81-96, 1991.

Atwater. T., and J. D. Mudie, Detailed near-bottom geophysical study of the Gorda rise, *J. Geophys. Res.*, 78, 8665-8686, 1973.

Averbuch, A. et al., Fast slant stack: A notion of Radon transform for data in cartesian grid which is rapidly computable, algebrically exact, geometrically faithful and invertible. *en presse en SIAM Scientic Computing. Déssponible en ligne*.

Bailey, M. E., and C. J. Hale. Anomalous magnetic directions recorded by laboratory-induced chemical remanent magnetization, *Nature*. 294. 739-741. 1981.

Banerjee, S. K., Magnetism of the oceanic crust: Evidence from ophiolite complexes, *J. Geophys. Res*., 85, 3557-3566, 1980.

Banerjee, S. K., The magnetic layer of the oceanic crust- How thick is it?, Tectonophysic, 105, 15-27, 1984.

Baranov, V., and Naudy, H., Numerical calculation of the formula of reduction to the magnetic pole. *Geophysics*, 29, 67-79, 1964.

Baranov, V., A new method for interpretation of aeromagnetic maps: Pseudogravimetric anomalies. *Geophysics*, 22, 359-383, 1957.

Barclay, A. H., D.R. Toomey, S.C. Solomon, Seismic structure and crustal magmatism at the Mid-Atlantic Ridge, 35°N, *J. Geophys. Res*., 103, 17827-17844,1998.

Beske-Diehl, S. J., comment on' Magnetization of the oceanic crust: thermoremanent magnetization or chemical magnetization' by C. A. Raymond and J. L. LaBrecque, *J. Geophys. Res*., 94, 3046-3050, 1989.

Beske-Diehl. S. J., Magnetization during low-temperature oxidation of seafloor basalts: no large scale chemical remagnetization. *J. Geophys. Res*., 95, 21413-21432, 1990.

Bhattacharyya, B. K., Continuous spectrum of the total magnetic field anomaly due to a rectangular prismatic body. *Geophysics*, v. 31, p. 97-121, 1966.

Bina, M. M. and Henry B., Magnetic properties. Opaque mineralogy and magnetic anisotropies of serpentinized peridotites from ODP Hole 670A near the Mid-Atlantic Ridge, *Phys. Earth Plan. Int*., 65, 88-103, 1990.

Blakely, R. J. and A. Cox, Evidence for short geomagnetic polarity intervals in the early Cenozoic, *J. Geophys. Res.*, 77, 7065-7072, 1972.

Blakely, R. J. and R. W. Simpson, Approximating edges of source bodies from magnetic or gravity anomalies, *Geophysics*, 51, 1494-1498, 1986.

Blakely, R. J., An age-dependent, tow-layer model for marine magnetic anomalies, in The Geophysics of the Pacific Ocean Basin and its Margin, *Geophys. Monogr. Ser*., 19, 227-234, *AGU, Washington, D. C*., 1976.

Blakely. R. J., Statistical averaging of marine magnetic anomalies and the aging of oceanic crust, *J. Geophys. Res*., 88, 2289-2296, 1983.

Bleil, U. and N. Petersen, Variation in magnetization intensity and low-temperature titanomagnetite oxidation of ocean floor basalts, *Nature*, 301, 384-388, 1983.

Bott, M. H. P., and M. A. Hutton, A matrix method for interpreting oceanic magnetic anomalies, *Geophys. J. R. Astron. Soc*., 20, 149-157, 1970.

Bott, M. H. P. and A. Ingles, Matrix methods for joint interpretation of two-dimensional gravity and magnetic anomalies with application to the Icland-Faeroe Ridge, *Geophys. J. astr. Soc*., 30, 55-67, 1972.

Bracewell, Ron, The Fourier transform and its applications, *McGraw_Hill*, 1965.

Butler, R. F., S. K. Banerjee and J. H. Stout, Magnetic properties of oceanic pillow basalts from Maquarie Island, *Nature*, 257, 302-303, 1975.

Butler, R. F., Baleomagnetism, Lbrary of Congress Cataloging in Publication Data, USA, 1992a.

Butler, R. F., Palaeomagnetism: Magnetic domains to geologic terranes, *Oxford: Blackwell scientific*, 1992b.

Cande, S. C., and D. V. Kent, Constraints imposed by the shape of marine magnetic anomalies on the magnetic source, *J. Geophys. Res*., 81, 4157-4162, 1976.

Cande, S. C. and D. V. Kent, A new geomagnetic polarity time scale for the late Cretaceous and Cenozoic, *J. Geophys. Res*., 97, 13917-13951, 1992.

Cande, S. C. and D. V. Kent, Revised calibration of geomagnetic polarity time scale for the Late Cretaceous and Cenozoic, *J. Geophys. Res*., 100, 6093-6095, 1995.

Cande, S. C. and J. L. LaBreque, Behaviour of the Earth's palaeomagnetic field from small scale marine magnetic anomalies, *Nature*, 274, 26-28, 1974.

Cande, S. C., A paleomagnetic pole from late Cretaceous marine magnetic anomalies in the Pacific, *Geophys. J. R. Astron. Soc*., 44, 547-566, 1976.

Cande, S. C., Anomalous behavior of the paleomagnetic field inferred from the skewness of anomalies 33 and 34, *Eart Planet. Sci. Lett*., 40, 275-286, 1978.

Cann, J. R., A model for oceanic crustal structure developed, *Geophys. J. astr*. Soc., 39, 169-187, 1974.

Cox, A., Lengths of geomagnetic polarity intervals, *J. Geophy. Res*., 73, 3247-3260, 1968.

Cox, A., Geomagnetic reversals. *Science*, 163, 237-245, 1969.

Dick, H. J. B., J. H. Natland, J. C. Alt, W. Bach, D. Bideau, J. S. Gee, S. Haggas, J. G. H. Hertogen, G. Hirth, P. M. Holm, B. Ildefonse, G. J. Iturrino, B. E. John, D. S. Kelley, E. Kikawa, A. Kingdon, P. J. LeRoux, J. Maeda, P. S. Meyer, D. J. Miller, H. R. Naslund, Y.-L. Niu, P. T. Robinson, J. Snow, R. A. Stephen, P. W. Trimby, H.-U. Worm and A. Yoshinobu, A long in situ section of the lower ocean crust: results of ODP Leg 179 drilling at the Southwest Indian Ridge, *Earth. Planet. Sci. Lett., 179, 31-51, 2000*.

Dunlop, D.J., and M. Prévôt, Magnetic properties and opaque mineralogy of drilled submarine intrusive rocks, *Geophys. J. R. Astron. Soc*., 69, 763-802, 1982.

Dunn R. A. and D. R. Toomey, Crack-induced seismic anisotropy in the oceanic crust across the East Paci¢c Rise (9³30PN), *Earth and Planetary Science Letters*, 189, 9-17, 2001.

Durrani, T. S. and Bisset, D., The radon transform and its properties, *Geophys*. 49, 1180, 1984.

Dyment, J. and J. Arkani-Hamed, Spreading rate dependent magnetization of the oceanic lithosphere inferred from the anomalous skewness of marine magnetic anomalies, *Geophys. J. Int*., 121, 789-804, 1995.

Dyment, J. and J. Arkani-Hamed, Contribution of lithospheric remanent magnetization to satellite magnetic anomalies over the world's oceans, *J. Geophys. Res*., 103, 15,423-15,441, 1998.

Dyment, J., J. Arkani-Hamed, and A. Ghods, Contribution of serpentinized ultramafics to marine magnetic anomalies at slow and intermediate spreading centers: Insights from the shape of the anomalies, *Geophys. J. Int*., 129, 691-701, 1997.

Dyment, J., S. C. Cande, and J. Arkani-Hamed, Skewness of marine magnetic anomalies created between 85 and 40 Ma in the Indian Ocean, *J. Geophys. Res*., 99, 24,121-24,134, 1994.

Felsberg, M., Low-level image processing with the structure multivector. *Ph.D. thesis, Institut of Computer Science and Applied Mathematics, Christian-Albrechts-University of Kiel*, 2002. TR no. 0203.

Fisher, A., K. Becker, T. N. Narasimhan, M. Langseth and M. Mottl, Passive, off-axis convection on the southern flank of the Costa Rica Rift, *J. Geophys. Res*., 95, 9343-9370, 1990.

Fisher, A. T., and K. Becker, Channelized fluid flow in oceanic crust reconciles heat-flow and permeability data, *Nature*, 403, 71-74, 2000.

Francis, T. J. G., I. T. Porter, and R. C. Lilwall, Microearthquakes near the eastern end of the St. Paul's fracture zone, *Geophys. J. R. astr*. Soc., 53, 201-217, 1978.

Francis, T. J. G., Serpentinisation faults and their role in the tectonics of slow spreading ridges, *J. Geophys. Res*., 86, 11616-11622, 1981.

Fraser-Smith, A. C., Centered and eccentric geomagnetic dipoles and their poles, 1600-1985. *Rev. Geophys.*, 25, 1-16, 1987.

Gee, J. and D. V. Kent, Magnetization of axial lavas from the southern East Pacific Rise (14°-23°S): Geochemical controls on magnetic properties, *J. Geophys. Res*., 102, 24873-24886, 1997.

Goupillaud, P. Grossmann A. and Morlet J., Cycle-octave and related transforms in seismic signal analysis. *Geoexploration*, 23, 85-102, 1984

Granlund, G. H., and Knutsson, H., Signal processing for computer vision. *Kluwer Ac. Publ., Dordrecht*, 1995.

Gregory, R. T. and H. P. Taylor Jr., An oxygen isotope profile in a section of Cretaceous ocean crust, Samail Ophiolite, Oman: evidence for ^{18}O buffering of the oceans by deep (>5 Km) seawater-hydrothermal circulation of mid-ocean ridges, *J. Geophys. Res*., 86, 2737-2755, 1981.

Grommé, S., and E. A. Mankinen, Natural remanent magnetization, magnetic properties and oxidation of titanomagnetites in basaltic rocks from DSDP leg 34, *Initial Rep. Deep Sea Drill. Proj*., 34, 485-494, 1976.

Hall, J. M. and A. Muzzatti, Delayed magnetization of the deeper kilometer of oceanic crust at Ocean Drilling Project Site 504, *J. Geophys. Res*., 104, 12,843-12,851, 1999.

Hall, J. M. and P.J.C. Ryall, paleomagnetism of basement rocks, leg 37. *Init. Rep. DSDP*, 37: 425-448, 1977.

Hall, J. M., Major problems regarding the magnetization of oceanic layer 2A, *J. Geophys. Res*., 81, 4223-4230, 1976.

Harrison, C.G.A., Marine magnetic anomalies- The origin of the stripes, *Annu. Rev. Earth Planet. Sci.,* 15, 505-543, 1987.

Heirtzler, J. R., G. O. Dickson, E. M. Herron, W. C. Pitman, III and X. LePichon, Marine magnetic anomalies, geomagnetic field reversals, and motions of the ocean floor and continents, *J. Geophys. Res*., 73, 2119-2136, 1968.

Helgason, S., Groups and geometric analysis. *Academic Press, New York*, 1984.

Hestenes, D., and sobczyk, G. Clifford algebra to geometric calculus, a unified language for mathematics and physics. reidel, *Dordrecht*, 1984.

Holschneider, M., Wavelets: an analysis tool. Oxford: *Oxford University Press*, 1995.

Hopson, C. A., R. G. Coleman, R. T. Gregory, J. S. Pallister and E. H. Bailey, Geologic section through Samail Ophiolite and associated rocks along a Muscat-Ibra transect, Southeastern Oman mountains, *J. Geophys. Res*., 86, 2527-2544, 1981.

Hsu S., Sibuet J.C. and C. Shyu, High-resolution detection of geologic boundaries from potential field anomalies: an enhanced analytic signal technique. *Geophysics* 61, 373-386, 1996.

Hsu S., Coppens D. and C. Shyu, Depth to magnetic source using the generalized analytic signal. *Geophysics* 63, 1947-1957, 1998.

Huang, P. Y. and S. C. Solomon, Centroid depths of Mid-Ocean Ridge earthquakes: Dependence on spreading rate, *J. Geophys. Res*., 93, 13445-13477, 1988.

Irving, E., The Mid-Atlantic Ridge at 45°N, XIV. Oxidation and magnetic properties of basalts: review and discussion. *Can. J. Earth Sci.* 7, 1528-1538, 1970.

Jacobs, J. A., Reversals of the earth's magnetic field, 1994, Cambridge *University press.*

Jae S., Two-Dimensional Signal and Image Processing. *Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall*, 42-45, 1990.

Johnson, H. P. and J. M. Hall, Magnetic properties of the oceanic crust: considerations from the results of DSDP, leg 34, *J. Geophys. Res*., 81, 5281-5293, 1976.

Johnson, H. P., and R. T. Merrill, A direct test of the Vine-Matthews Hypothesis, *Earth Planet. Sci. Lett.*, 40, 263-269, 1978.

Johnson, H. P. and J. E. Pariso, Variation in oceanic crustal magnetization: systematic changes in the last 160 million years, *J. Geophys. Res*., 98, 435-445, 1993.

Johnson, H. P. and B. L. Salem, Magnetic properties of dikes from the oceanic upper crustal section, *J. Geophys. Res*., 99, 21733-21740, 1994.

Johnson, H. P. and M. A. Tivey, Magnetic properties of zero-age oceanic crust: a new submarine lava flow on the Juan de Fuca ridge, *Geophys. Res. Lett*., 22, 175-178, 1995.

Kantor, I. L. and Solodovnikov, A. S., Hypercomplex numbers. Berlin, *Germany: Springer-Verlag*, 1989.

Keller, Y. et al., Pseudo-polar based estimation of large translations rotations and scalings in images. *en presse en IEEE Transactions on Image Processing*, 2002. *Déssponible en ligne*.

Kelley, B. T. and Madisetti V. K., The discrete radon rransform: Part I – Theory. *IEEE Trans. on Image Processing*, 2, 382-400, 1993.

Kempner, W. C. and J. F. Gettrust, Ophiolites, synthetic seismograms and ocean crustal structure. 3. An aging model for ocean crust. Geodynamics Symposium on the Ocean Lithoshere. *Geodynamics Program, Texas A&M University*, 1983.

Kent, D. V., B. M. Honnorez, N. D. Opdyke and P. J. Fox, Magnetic properties of dredged oceanic gabbros and the source of marine magnetic anomalies, *Geophys. J.R. astr. Soc*., 55, 513-537, 1978.

Kikawa, E. and K. Ozawa, Contribution of oceanic gabbros to sea-floor spreading magnetic anomalies, *Science*, 258, 796-799, 1992.

Kikawa, E. and J. E. Pariso, Magnetic properties of gabbros from Ocean Drilling Program Hole 753B at the Southwest Indian Ridge, *Proceeding of the Ocean Drilling Program Sci. Results* 148, *College Station,* TX, 285-307, 1991.

Klitgord, K. D., Sea-floor spreading: The central anomaly magnetization high, *Earth planet. Sci. Lett*. 29, 201-209, 1976.

Koko, Y. S. and L. Tauxe, Saw-toothed pattern of relative paleointensity records and cumulative viscous remanence, *Eart Planet. Sci. Lett*., 137, 95-99, 1996.

Kristjansson, L., and N. D. Watkins, Magnetic study of basalt fragments recovered by deep drilling in Iceland and the magnetic layer concept, *Earth Planet. Sci. Lett*., 34, 365-374, 1977.

LaBrecque, J.L., and D.E. Hayes, Seafloor spreading history of the Agulhas basin, *Earth and Planet. Sci. Letters, 45, 411-428, 1979*.

LaBrecque, J. L., D. V. Kent and S. C. Cande, Revised magnetic polarity time scale for Late Cretaceous and Cenozoic time, *Geology*, 5, 330-335, 1977.

LaBrecque, J.L., and C. A. Raymond, Seafloor spreading anomalies in the Magsat field of the North Atlantic, *J. Geophys. Res*., 90, 2565-2575, 1985.

Larson, R.L., and W. Lowrie, Paleomagnetic evidence for motion of the Pacific plate from Leg 32 basalts and magnetic anomalies. *In* Larson, R.L., and Moberly, R., et al., *Init. Repts. DSDP,* 32: Washington (U.S. Govt. Printing Office), 571-577, 1975.

Larson, R. L., and C. G. Chase, Late Mesozoic evolution of the western Pacific Ocean, *Geol. Soc. Am. Bull*., 83, 3627-3644, 1972.

Larson, R. L., and W. C. Pitman III, World-wide correlation of Mesozoic magnetic anomalies, and its implications, *Geol. Soc. Am. Bull*., 83, 3645-3662, 1972.

Lavrentiev, M., et Chabat B., Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe, *U.R.S.S*, 1972. *Traduit en Français par Damadian Henri.*

Luyendyk, B. P., and R. Day, Paleomagnetism of the Samail Ophiolite, Oman. 2. The Wadi Kadir gabbro section, *J. Geophys. Res*., 87, 10,903-10,917, 1982.

Luyendyk, B. P., B. R. Laws, R. Day, and T. B. Collinson, Paleomagnetism of the Samail Ophiolite, Oman. 1. The sheeted dike complex at Ibra, *J. Geophys. Res*., 87, 10,883-10,902, 1982.

Macdonald, A. H and Fyfe, W. S., Rate of serpentinization in seafloor environments, Tectonophysics, 116, 123-135, 1985.

Marshall, M., and A. Cox, Effect of oxidation on the natural remanent magnetization of titanomagnetite in suboceanic basalt, *Nature*, 230, 28-31, 1971.

Marshall, M., The magnetic properties of some DSDP basalts from the North Pacific and inferences for Pacific plate tectonics, *J. Geophys. Res*., 83, 289-308, 1978.

Marzocchi, W. and Mulargia F., Statistical analysis of the geomagnetic reversal sequences, *Phys. Earth Planet. Int*., 61, 149-164, 1990.

Mazaud, A., Laj, C., de Seze, L. and Verosub, K. L., Evidence for periodicity in the reversal frequency during the last 100 Ma. *Nature*, 304, 328, 1983.

McFadden, P. L. and Merrill R. T., Lower mantle convection and geomagnetism, *J. Geophys. Res*., 89, 3354-3362, 1984.

Meynadier, L., J.-P. Valet, F. C. Bassinot, N. J. Shackleton and Y. Guyodo, Asymmetrical saw-tooth pattern of the geomagnetic field intensity from equatorial sediments in the Pacific and Indian Oceans, *Earth Planet. Sci. Lett*., 126, 109-127, 1994.

Monte, M. and Cox, A., Magnetic changes in pillow basalt due to sea floor weathering, *J. Geophys. Res*., 77, 6459-6469, 1972.

Moreau, F., D. Gilbert, M. Holschneider, and G. Saracco, Wavelet analysis of potential fields. *Inverse Problems,* 13, 165-178, 1997.

Moreau, F., Méthodes de traitement de données géophysiques par transformée en ondelettes. *Thèse de doctorat, Univ. De Rennes I., Mémoire de Géosciences-Rennes* n°69, 1995.

Nabighian, M. N., The analytic signal of two-dimensional magnetic bodies with polygonal cross-section: Its properties and use for automated anomaly interpretation, *Geophysics*, 37, 507-517, 1972.

Nabighian, M. N., Additional comments on the analytic signal of tow-dimensional magnetic bodies with polygonal cross-section, *Geophysics*, 39, 85-92, 1974.

Nabighian, M. N., Toward a three-dimensional automatic interpretation of potential field data via generalized Hilbert transforms: Fondamental relations. *Geophysics*, 49, 780-786, 1984.

Naidu, P. S., Statistical structure of geomagnetic field reversals, *J. Goephys. Res*., 76, 2649-2662, 1971.

Nazarova, E. A. Petromagnetic model of the oceanic lithosphere, *EOS,Trans. AGU*, Apr.23, p.100, 1991.

Nazarova, K. A., P. J. Wasilewski and H. J. B. Dick, Magnetic study of serpentinized harzburgites from the Islas Orcadas Fracture Zone, 21, 475-488, 2000.

Nehlig, P., and T. Juteau, Flow porosities, permeabilities, and preliminary data on fluid inclusions and fossil thermal gradient in the crustal sequence of the Sumail Ophiolite (Oman), *Tectonophysocs*, 151, 199-221, 1988.

Nelson, J. B., An alternate derivation of the three-dimensional Hilbert transform relations from first principles. *Geophysics*, 51, 1014-1015, 1986.

Noel, M., and M. W. Hounslow, Heat flow evidence for hydrothermal convection in Cretaceous crust of the Madiera Abyssal Plain, *Earth Planet. Sci. Lett*. 90, 77-86, 1988.

Ofoegbu, C. O., and Mohan, N. L., Interpretation of aeromagnetic anomalies over part of southeastern Nigeria using three dimensional Hilbert Transformrmation. *Pageoph*., 134, 13-29, 1990.

O'Reilly, W. and Banerjee, S. K., The mechanism off oxidation in titanomagnetites: A magnetic study. *Mieralogical Magazine*, 36, 29-37, 1967.

Ozdemir, O., and D. J. Dunlop, An experimental study of chemical remanent magnetization of synthetic monodomain titanomaghemtits with initial thermoremanent magnetization, *J. Geophys. Res*., 90, 11,513-11,523, 1985.

Pal, P. C., The Indian Ocean MAGSAT anomalies and strong geomagnetic field during the Cretaceous 'quiet' zone, *Phys. Earth Planet. Inter*., 64, 279-289, 1990.

Pariso, J. E., L. Stokking, and S. Allerton, Rock magnetism and magnetic mineralogy of a 1-km section of structural dikes, Hole 504B, *Proc. Ocean Drill. Program Sci. Results*, 137/140, 253-262, 1995.

Pecherskiy, D. M. and L. V. Tikhonov, Rock magnetic features of basalts of the Atlantic and Pacific oceans, *Izv. Earth Phys*., 19, 305-311, 1983.

Parker, R. L. and S. P. Huestis, The inversion of magnetic anomalies in the presence of topography, *J. Geophys. Res.*, 79, 1587-1593, 1974.

Parker, R. L., The rapid calculation of potential anomalies, *Geophys. J. Roy. astr. Soc*., 31, 447-455, 1973.

Pedersen, L. B., Relations between horizontal and vertical gradients of potential fields. *Geophysics*, 54, 662-663, 1989.

Pick, T. and L. Tauxe, Geomagnetic paleointensities during the Cretaceous normal superchron measured using submarine basaltic glass, *Nature*, 366, 238-242, 1993.

Radon, J., On the determination of fonctions from their integral values along certain manifolds. *IEEE Trans. Med. Imaging*, 5, 170-176, 1986.

Raymond, C. A., and J. L. LaBrecque, Magnetization of oceanic crust: Thermoremanent Magnetization of chemical Magnetization*?, J. Geophys. Res*., 92, 8077-8088, 1987.

Reid, A. B., Allsop, J. M., Granser, H., Millet, A. J., and Somerton, I. W., Magnetic interpretation in 3-D using Euler deconvolution. *Geophysics*, 55, 80-91, 1990.

Richardson, S. H., S. R. Hart, and H. Staudigal, Vein mineral ages of old oceanic crust, *J. Geophys. Res*., 85, 7195-7200, 1980.

Roddier, F., Distributions et transformation de Fourier, *Université de Nice presse*, 1978

Roest, W. R., J. Arkani-Hamed, and J.Verhoef, The seafloor spreading rate dependence of the anomalous skewness of marine magnetic anomalies, *Geophys. J. Int*., 109, 653-669, 1992.

Roest W. R., Verhoef J. and Pilkington M., Magnetic interpretation using the 3-D analytic signal. *Geophysics*, 57, 116-125, 1992.

Royer, J.Y., Evolution cinématique détaillée de la dorsale est-indienne entre le point triple de Rodriguez et les îles Saint-Paul et Amsterdam, *Thèse de doctorat, Univ. Louis Pasteur de Strasbourg, Institut de physique du globe,* 1985.

Sailhac P., A. Galdeano , D. Gilbert, F. Moreau and C. Delor, Identification of sources of potential fields with the continuous wavelet transform: Complex wavelets and application to aeromagnetic profiles in French Guiana. *J. Geophys. Res.,* 105, 19,455-19,475, 2000.

Sailhac, Pascal, Analyse multiéchelle et inversion de données géophysiques en Guyane française. *Thèse de doctorat, Inst. Phys. Globe de Paris*, 1999.

Salem A., Dhananjay R., Gamey T.J. and Ushijima K., Analytic signal approach and its applicability in environmental magnetic investigations*, J. appl. Geophs*., 49, 231-244, 2002.

Schouten, H., and S.C. Cande, Paleomagnetic poles from marine magnetic anomalies. *Geophys. J.R. Astron. Soc*., 44: 567-575, 1976.

Schouten, H., and K., McCamy, Filtering marine magnetic anomalies*, J. Geophys. Res*., 77, 7089-7099, 1972.

Schouten, J. A., A fundamental analysis of magnetic anomalies over oceanic ridges, *Mar. Geophys. Res.*, 1, 111-144, 1971.

Shau, Y.-H., D. R. Peacor and E. J. Essene, Formation of magnetic single-domain magnetite in ocean ridge basalts with implications for sea-floor magnetism, *Science*, 261, 343-345, 1993.

Shau, Y.-H., M. Torii, C.-S. Horng and D. R. Peacor, Subsolidus evolution and alteration of titanomagnetite in ocean ridge basalts from Deep Sea Drilling Project/Ocean Drilling Program Hole 504B, Leg 83: Implications for the timing of magnetization, *J. Geophys. Res.*, 105, 23635-23649, 2000.

Shaul, L., S. K. Banergee, S. Beske-Diehl and B. Moskowitz, Limitations of ophiolite complexes as models for the magnetic layer of the oceanic lithosphere, *Geophys. Res. Lett.*, 5, 473-476, 1978.

Shuang Qin, An analytic signal approach to the interpretation of total field magnetic anomalies. *Geophys. Prospect.*, 42, 665-675, 1994.

Silvermann, B. W., Kernel density estimation using the fast Fourier transfom, *Appl. Statist.*, 31, 93-99, 1982.

Smith, G.M., and S.K. Banerjee, Magnetic structure of the upper kilometre of the marine crust at deep sea drilling project hole 504B, Eastern Pacific Ocean, *J. Geophys. Res.*, 91, 10337-10354, 1986.

Sommer G. T., and Bulow, D. P., Riesz transforms for the isotropic estimation of the local phase of moire interferograms. *In Ch. Perwass G. Sommer, N. Kruger, editor*, 22. *Symposium fur Mustererkennung, DAGM* 2000, pp 333–340. *Springer-Verlag, Kiel*, 2000.

Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclideant Spaces. *Prenceton University Press: New Jersey*, 1971.

Stein, E. M. Harmonic analysis. *princeton university press, New Jersey*, 1993.

Stein, C. A. and S. Stein, Constraints on hydrothermal heat flux through the oceanic lithosphere from global heat flow, *J. Geophys. Res.*, 99, 3081-3095, 1995.

Stern, C., M. J. de Wit, and J. R. Lawrence, Igneous and metamorphic processes associated with the formation of Chilean ophiolites and their implications for ocean floor metamorphism, seismic layering and magnetism, *J. Geophys. Res.*, 81, 4370-4380, 1976.

Swift, B. A., and H. P. Johnson, Magnetic properties of the Bay of Islands ophiolite suite and implications for the magnetization of oceanic crust, *J. Geophys. Res.*, 89, 3291-3308, 1984.

Talwani, M., C. C. Windisch, and M. G. Langseth, Reyk-janes ridge crest: A detail geophysical study, *J. Geophys. Res.*, 76, 473-517, 1971.

Tauxe, L and P. Hartl, 11 million years of Oligocene geomagnetic field behaviour, *Geophys. J. Int.* 128, 217-229, 1997.

Thompson, D.T., EULDPH - a new technique for making computer-assisted depth estimates from magnetic data. *Geophysics*, 47, 31-37, 1982.

Tivey, M. A., and B. E. Tucholke, Magnetization of 0-29 Ma ocean crust on the Mid-Atlantic Ridge, 25°30' to 27°10'N, *J. Geophys. Res*., 103, 17807-17826, 1998.

Valet, J.-P. and L. Meynadier, Geomagnetic field intensity and reversals during the past four million years, *Nature*, 366, 234-238, 1993.

Valet, J.-P., L. Meynadier, F. C. Bassino and F. Garnier, Relative paleointensity across the last geomagnetic reversal from sediments of the Atlantic , Indian and Pacific oceans, *Geophys. Res. Lett*., 21, 485-488, 1994.

Vera, E. E., J. C. Mutter et al., The Structure of 0- to 0.2-m.y.-old oceanic crust at 9°N on the East Pacific Rise from expanded spread profiles, *J. Geophys. Res*., 95, 15529-15556, 1990]. [Barclay and Toomey, 1998.

Verhoef, J., and J. Arkani-Hamed, Chemical remanent magnetization of oceanic crust, *Geophys. Res. Lett*., 17, 1945-1948, 1990.

Verosub, K., and E. M. Moores, Tectonic rotations in extensional regimes and their paleomagnetic consequences for oceanic basalts, *J. geophys. Res*., 86, 6335-6349, 1981.

Vine, F. J.and D. H. Matthews, Magnetic anomalies over oceanic ridges, *Nature*, 199, 947-949, 1963.

Vine, F. j. and J. T. Wilson, Magnetic anomalies over a young ocean ridge off Vancouver Island, *Science*, 150, 485-489, 1965.

Vine, F. J., Spreading of the ocean floor: new evidence. *Science*, 154, 1405, 1966.

Wittpenn, N. A., C. G. A. Harrison and D. W. Handschumacher, Crustal magnetization in the South Atlantic from inversion of magnetic anomalies, *J. Geophys. Res*., 94, 15463-15480, 1989.

Vogt, P. R., Magnetic anomalies and crustal magnetization, in The Geology of North America, vol. M, The Western North Atlantic, edited by P. R. Vogt and B. E. Tucholke, 229-256, *Geological Society of America, Boulder, Colo*., 1986.

Worm, H.-U., Magnetic Stability of oceanic gabbros from ODP Hole 735B, Earth and Planet. *Sci. Letters*, 193, 287-302, 2001.

Xu, W., R. V. der Voo, D. R. Peacor and R. T. Beaubouef, Alteration and dissolution of fine-grained magnetite and its effects on magnetization of the ocean floor, *Earth Planet. Sci. Lett*., 151, 279-288, 1997.

Zhou, W., R. V. Voo and D. R. Peacor, Single-domain and superparamagnetic titanomagnetite with variable Ti content in young ocean-floor basalts: No evidence for rapid alteration, *Earth Planet. Sci. Lett*, 150, 353-362, 1997.

Zhou, W., R. V. Voo and D. R. Peacor, Low-temperature oxidation in MORB of titanomagnetite to titanomaghemite: A gradual process with implications for marine magnetic anomaly amplitudes, *J. Geophys. Res.*, 106, 6409-6421, 2001.

Zhou, W., R. V. D. Voo, D. R. Peacor and Y. Zhang, Variable Ti-content and grain size of titanomagnetite as a function of cooling rate in very young MORB, *Earth Planet. Sci. Lett*, 179, 9-20, 2000.

Yanez, G. A. and J. L. LaBrecque, Age-dependent three dimensional magnetic modeling of the North Pacific and North Atlantic oceanic crust at intermediate wavelengths, *J. Geophys. Res*., 102, 7947-7961, 1997.

Yoshida, K. K., Analyseis of the parameter θ using mean deviation of anomaly patterns of marine magnetic lineations, *J. Geophys. Res*., 37, 443-454, 1985.

http://people.uncw.edu/abramsl/Jarrard-et-al-2003-JGR.pdf

ANNEXES

Annexe AI:

Le champ magnétique total T_{ij}, en un point $P_j(x_j, z_j)$, dû à une structure polygonal composée de L cotées se calcul comme la suite:

$$T_{ij} = \sum_{l=1}^{L} - f.\nabla U_{(ij,l)} = \sum_{l=1}^{L} \left\{ - f_x Ux_{(ij,lx)} - f_z Uz_{(ij,l)} \right\}.$$

$$Ux_{(ij,l)} = 2C_m \Theta_m \left(Sx_{(ij,l)} FLOG_{(ij,l)} - Sz_{(ij,l)} ANGL_{(ij,l)} \right).$$

$$Uz_{(ij,l)} = 2C_m \Theta_m \left(Sz_{(ij,l)} FLOG_{(ij,l)} + Sx_{(ij,l)} ANGL_{(ij,l)} \right).$$

$$\Theta_m = m_x (z_{(i,l+1)} - z_{(i,l)}) - m_z (x_{(i,l+1)} - x_{(i,l)}).$$

$$Sx_{(ij,l)} = (x_{(i,l+1)} - x_{(i,l)}) \Big/ \sqrt{(x_{(i,l+1)} - x_{(i,l)})^2 + (z_{(i,l+1)} - z_{(i,l)})^2}.$$

$$Sz_{(ij,l)} = (z_{(i,l+1)} - z_{(i,l)}) \Big/ \sqrt{(x_{(i,l+1)} - x_{(i,l)})^2 + (z_{(i,l+1)} - z_{(i,l)})^2}.$$

$$ANGL_{(ij,l)} = \tan^{-1}\left[(z_{(i,l)} - z_j) / (x_{(i,l)} - x_j) \right] - \tan^{-1}\left[(z_{(i,l+1)} - z_j) / (x_{(i,l+1)} - x_j) \right].$$

$$FLOG_{(ij,l)} = \left\{ \log\left[\sqrt{(x_{(i,l+1)} - x_j)^2 + (z_{(i,l+1)} - z_j)^2} \right] - \log\left[\sqrt{(x_{(i,l)} - x_j)^2 + (z_{(i,l)} - z_j)^2} \right] \right\}.$$

Annexe A2 :

Pour pouvoir résoudre l'intégrale présente dans la formule 2.3.4.5, nous devons exprimer la variable x_0 en fonction de z_0. Les paramètres de la ligne droite définie par le contraste est un moyen simple pour réaliser le lien entre les deux variables, ainsi nous avons :

$$z_0 = x_0 \alpha + \beta \Rightarrow x_0 = (z_0 - \beta)/\alpha \qquad \text{(I)}$$

$$\alpha = (z_2 - z_1)/(x_2 - x_1) = \tan(d) \qquad \text{(II)}$$

$$\beta = z_1 - x_1 \alpha \qquad \text{(III)}$$

En remplaçant (I) dans (2.3.4.5), il vient

$$\mathrm{F}\{\partial_x^{\mathrm{L}} T_{co}\}(k) = mA_{\mathrm{sgn}(k)}(ik)^{\mathrm{L}-1}|k|\exp\{i\pi\}\int_{z_1}^{z_2} dz_0 \exp\{-ik((z_0-\beta)/\alpha)\}.\exp\{-|k|(z_0-z)\} \quad \text{(A2.1)}$$

Par la séparation des termes contenant la variable z_0 dans la formule (A1.1) nous avons

$$\mathrm{F}\{\partial_x^{\mathrm{L}} T_{co}\}(k) = mA_{\mathrm{sgn}(k)}(ik)^{\mathrm{L}-1}|k|\exp\{i\pi\}\exp\{ik\beta/\alpha+|k|z\}\int_{z_1}^{z_2} dz_0 \exp\{-z_0(|k|+ik/\alpha)\} \quad \text{(A2.2)}$$

L'intégration par rapport à z_0 nous amène à écrire (A1.2) selon la forme

$$F\left[\partial_x^{\mathrm{L}} T_{co}\right] = mA_{\mathrm{sgn}(k)}(ik)^{\mathrm{L}-1}|k|\exp\{i\pi\}\exp(ik\beta/\alpha+|k|z)\times\cdots$$
$$\cdots\left[\frac{\exp[-z_2(|k|+ik/\alpha)]}{-(|k|+ik/\alpha)} - \frac{\exp[-z_1(|k|+ik/\alpha)]}{-(|k|+ik/\alpha)}\right]$$

$$\mathrm{F}\{\partial_x^{L} T_{co}\}(k) = mA_{\mathrm{sgn}(k)}(ik)^{\mathrm{L}-1}|k|\exp\{i\pi\}\exp\{ik\beta/\alpha+|k|z\}\times\cdots$$
$$\cdots\left[\frac{\exp\{-z_2(|k|+ik/\alpha)\}}{-(|k|+ik/\alpha)} - \frac{\exp\{-z_1(|k|+ik/\alpha)\}}{-(|k|+ik/\alpha)}\right]$$

$$= mA_{\mathrm{sgn}(k)}(ik)^{\mathrm{L}-1}|k|\exp\{i\pi\}\left[\frac{\exp\{ik\beta/\alpha+|k|z\}}{-(|k|+ik/\alpha)}\right]\times\cdots \quad \text{(A2.3)}$$
$$\cdots\left[\exp\{-z_2(|k|+ik/\alpha)\} - \exp\{-z_1(|k|+ik/\alpha)\}\right]$$

Dans la suite, nous allons développer le dénominateur du terme entre accolades en forme Eulérienne et le numérateur de ce terme sera multiplié par les deux termes entre crochets. Pour que le développement soit évident, nous procédons séparément sur chaque opération :

1) $-(|k|+ik/\alpha) = -k(\mathrm{sgn}(k)+i/\alpha) = -k\left[1+(1/\alpha)^2\right]^{1/2}\exp\{i\tan^{-1}(\mathrm{sgn}(k)/\alpha)\}.$

$$= -k\frac{\exp\{i(\pi/2-d)\mathrm{sgn}(k)\}}{\sin(d)}.$$

2) $\exp(ik\beta/\alpha+|k|z)\exp[-z_2(|k|+ik/\alpha)] = \exp[ik\beta/\alpha+|k|z-z_2|k|-iz_2k/\alpha].$

En remplaçant β de l'équation ci-dessus par la relation (III), on obtient :

$$\exp(ik\beta/\alpha+|k|z)\exp[-z_2(|k|+ik/\alpha)] = \exp[ik(z_2-x_2\alpha)/\alpha+|k|z-z_2|k|-iz_2k/\alpha].$$

$$= \exp[ikz_2/\alpha - ikx_2 + |k|z - |k|z_2 - ikz_2/\alpha].$$

$$= \exp\left[-ikx_2 - |k|(z_2 - z)\right].$$

3) En procédant de la même manière, on trouve :
$\exp\left(ik\beta/\alpha + |k|z\right)\exp\left[-z_1\left(|k| + i\,k/\alpha\right)\right] = \exp\left[-ikx_1 - |k|(z_1 - z)\right]$.
Par le remplacement de 1), 2), 3) et la relation $i^{L-1} = \exp\left[i\,(L-1)\pi/2\right]$ dans la formule (A1.3), nous avons

$$\begin{aligned} \mathrm{F}\left\{\partial_x^{\mathrm{L}} T_{co}\right\}(k) = mA_{\mathrm{sgn}(k)}(k)^{\mathrm{L}-1}\,\mathrm{sgn}(k)\sin(d)\exp\{i(\mathrm{L}+1)\pi/2\}\exp\{i(d-\pi/2)\mathrm{sgn}(k)\}\cdots \\ \cdots\left[\exp\{-ikx_2 - |k|(z_2 - z)\} - \exp\{ikx_1 - |k|(z_1 - z)\}\right] \end{aligned} \quad \text{(A2.4)}$$

$$\mathrm{F}_x\left\{\partial_x^{\mathrm{L}} T_{co}(x)\right\}(k) = \mathrm{V}_2^{\mathrm{L}}(k) + \mathrm{V}_1^{\mathrm{L}}(k).$$

La formule (A1.4) représente le spectre de la dérivée horizontale d'ordre-L du champ magnétique total d'un contraste incliné de l'angle d, le spectre du champ magnétique lui même s'obtient de (A1.4) pour $\mathrm{L} = 0$.

Considérons maintenant le cas particulier du spectre du champ magnétique $F\left[\partial_x^L T_{if}\right]$ d'un contact infini. Dans ce cas nous ne considérons que le spectre lié au point $Q_1(x_1, z_1)$, soit

$$\begin{aligned} \mathrm{F}\left\{\partial_x^{\mathrm{L}} T_{cf}\right\}(k) = mA_{\mathrm{sgn}(k)}(k)^{\mathrm{L}-1}\,\mathrm{sgn}(k)\sin(d)\exp\{i(\mathrm{L}-1)\pi/2\}\times\cdots \\ \cdots\exp\{i(d-\pi/2)\mathrm{sgn}(k)\}\exp\{-kx_1 - |k|(z_1 - z)\} \end{aligned} \quad \text{(A2.5)}$$

Le spectre du champ magnétique du contact infini correspond à la formule (A1.5) pour $\mathrm{L} = 0$. Le spectre général d'ordre $-\mathrm{L}$ du signal analytique $F\left[S_{if}^L(x)\right]$ associé au champ magnétique total du contraste infini correspond à la formule (A1.5) considérée seulement pour les fréquence spatiales positives ; soit :

$$\mathrm{F}\left\{S_{cf}^{\mathrm{L}}(x)\right\}(k) = \mathrm{F}\left\{\partial_x^{\mathrm{L}} T_{cf}(x)\right\}(k) \qquad \text{pour } k > 0$$

$$= mA(k)^{\mathrm{L}-1}\sin(d)\exp\{i\pi\}\exp\{i(d + (\mathrm{L}-2)\pi/2)\}\exp\{-kx_1 - k(z_1 - z)\} \qquad k > 0.$$

Par l'application de la transformé de Fourier inverse sur $\mathrm{F}\left\{S_{cf}^{\mathrm{L}}(x)\right\}$, nous trouvons l'expression du signal analytique dans le domaine spatial ; soit :

$$\mathrm{F}^{-1}\left\{\widetilde{S}_{cf}^{\mathrm{L}}(k)\right\} = S_{cf}^{\mathrm{L}}(x) = 1/2\pi\int_0^\infty \mathrm{F}\left\{S_{cf}^{\mathrm{L}}(x)\right\}(k)\exp\{ikx\}dk.$$

$$S_{cf}^{\mathrm{L}}(x) = (mA/2\pi)\sin(d)\exp\{i(d + \pi\mathrm{L}/2)\}\int_0^\infty dk(k)^{\mathrm{L}-1}\exp\{-kx_1 - k(z_1 - z)\}\exp\{ikx\}.$$

$$= (mA/2\pi)\sin(d)\exp\{i(d+\pi L/2)\}\int_0^\infty dk(k)^{L-1}\exp\{ik(x-x_1)-(z_1-z)\} \qquad \text{(A2.6)}$$

Nous avons la primitive suivante [Bronstein et al., 1971, pp. 572] :

$$\int x^n \exp(ax)dx = \frac{1}{a}x^n \exp(ax) - \frac{n}{a}\int x^{x-1}\exp(ax)dx, \qquad n \in N \qquad \text{(A2.7)}$$

Nous pouvons mettre cette intégrale sous une forme mieux adaptée avec les bornes de notre intégration

$$\int x^n \exp(ax)dx = \left[\frac{1}{a}x^n - \frac{n}{a^2}x^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{a^3}x^{(n-2)} + \ldots + (-1)^{(n-1)}\frac{n!}{a^n}x + (-1)^n\frac{n!}{a^{(n+1)}}\right]\exp(ax).$$

et,

$$\int_0^\infty (x)^n \exp(ax)dx = -\left[(-1)^n\frac{(n)!}{a^{(n+1)}}\right] = (-1)^{(n+1)}\frac{(n)!}{a^{(n+1)}} \qquad \text{(A2.7)}$$

Par l'intégration de (A1.6) selon la définition (A1.7), nous trouvons :

$$S_{cf}^{L}(x) = (mA/2\pi)\sin(d)\exp\{i(d+\pi L/2)\}\frac{(-1)^L(L-1)!}{[i(x-x_1)-(z_1-z)]^L}$$

$$S_{cf}^{L}(x) = (mA/2\pi)\sin(d)\exp\{i(d+\pi L/2)\}\frac{(-1)^L(L-1)!}{(-1)^L[(z_1-z)-i(x-x_1)]^L} \qquad \text{(A2.8)}$$

En exprimant le terme complexe dans le dénominateur de (A1.8) en coordonnées polaires, il vient :

$$S_{cf}^{L}(x) = (mA/2\pi)\sin(d)\exp\{id+\pi L/2\}(L-1)!\frac{\exp\{iL\tan^{-1}((x-x_1)/(z_1-z))\}}{[(x-x_1)^2+(z_1-z)^2]^{L/2}} \qquad \text{(A2.9)}$$

Prenant en compte l'expression de A, nous pouvons écrire séparément l'amplitude et la phase de (A1.9) respectivement par les deux fonctions suivantes :

$$\left|S_{cf}^{L}(x)\right| = C_m m\sin(d)\frac{\left|\sin I_m \sin I_f\right|}{\left|\sin I'_m \sin I'_f\right|}\frac{(L-1)!}{[(x-x_1)^2+(z_1-z)^2]^{L/2}} \qquad \text{(A2.10)}$$

$$\varphi_{cf}^{L}(x) = -I'_m - I'_f + d + \pi L/2 + L\tan^{-1}((x-x_1)/(z_1-z)) \qquad \text{(A2.11)}$$

Annexe A3 :

Transformée de Fourier du Noyau de Poisson-1D :

Le noyau de Poison $\mathrm{P}(x)$ à 1D étant une fonction paire, sa transformé de Fourier se réduit à la forme :

$$\mathrm{F}\{\mathrm{P}(x)\}(k) = 2\int_0^\infty \mathrm{P}(x).\cos(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{z}{x^2+z^2}.\cos(kx)\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1/z)}{(x/z)^2+1}.\cos(kx)\,dx \qquad \text{(A3.1)}$$

En remplaçant $x = x'z$ dans la formule (A2.1), on obtient :

$$\mathrm{F}\{\mathrm{P}(x)\}(k) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{(1/z)}{x'^2+1}.\cos(kzx')\,zdx' = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{x'^2+1}.\cos(kzx')\,dx' \qquad \text{(A3.2)}$$

L'intégrale de la formule (A2.2) est bien défini, soit :

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ax)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\exp(-|a|).$$

Prenant en compte que $z < 0$, alors la transformée de Fourier du noyau de Poison, (équation 2), s'écrit

$$\mathrm{F}\{\mathrm{P}(x)\}(k) = \exp(|k|z)$$

Transformée de Fourier du Complément de Noyau de Poisson-1D :

Le complément du noyau de Poison $\mathrm{P}_{co}(x)$ est une fonction impaire et sa transformée de Fourier se réduit alors à la forme suivante

$$\mathrm{F}\{\mathrm{P}_{co}(x)\}(k) = \text{-}2i\int_0^\infty \mathrm{P}_{co}(x).\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x}{x^2+z^2}.\sin(kx)\,dx \qquad \text{(A3.3)}$$

Pour cette fonction nous avons l'intégrale définie suivante :

$$\int_0^\infty \frac{x\sin(bx)}{a^2+x^2}\,dx = \pm\frac{\pi}{2}\exp(-|ab|). \qquad \text{(A3.4)}$$

Prenant en compte que $z < 0$, la transformée de Fourier du complément du noyau de Poison s'écrit alors

$$\mathrm{F}\{\mathrm{P}_{co}(x)\}(k) = \text{-}i\,\mathrm{sgn}(k)\exp(|k|z).$$

Annexe A4 :

Relation entre le signal magnétique et son amplitude locale :

$$\left|S_\alpha^{\mathrm{L}}\right| = 4mC_m\left|E(d)\right| \cdot \frac{\left|\sin I_m \sin I_f\right|}{\left|\sin I'_m \sin I'_f\right|} \frac{(\mathrm{L}+\alpha-1)!}{\left[(z_s - z)^2 + (x - x_s)^2\right]^{(\mathrm{L}+\alpha)/2}} .$$

$$T_\alpha^{\mathrm{L}}(x) = \left|S_\alpha^{\mathrm{L}}\right| \cos\left\{- I'_m - I'_f + \arg\left(E(d)\right) + \pi(\mathrm{L}+\alpha)/2 + (\alpha+\mathrm{L})\tan^{-1}\left[(x - x_0)/(z_0 - z)\right]\right\} \qquad \text{(A4.1)}$$

Pour $- I'_m - I'_f + \arg\{E(d)\} = -\pi/2$, et $\mathrm{L}+\alpha = 2$. La relation (A3.1) devient

$$T_\alpha^{\mathrm{L}}(x) = \left|S_\alpha^{\mathrm{L}}\right| \cos\left\{\pi/2 + 2\tan^{-1}\left[(x - x_0)/(z_0 - z)\right]\right\}$$

$$= -\left|S_\alpha^{\mathrm{L}}\right| \sin\left\{2\tan^{-1}\left[(x - x_0)/(z_0 - z)\right]\right\}$$

$$= -2\left|S_\alpha^{\mathrm{L}}\right| \sin\left\{\arcsin\left\{(x - x_2)\Big/\sqrt{(x - x_0)^2 + (z_0 - z)^2}\right\}\right\} \times \cdots$$
$$\cdots \cos\left\{\arccos\left\{(z_0 - z)\Big/\sqrt{(x - x_0)^2 + (z_0 - z)^2}\right\}\right\}$$

$$= -2\left|S_\alpha^{\mathrm{L}}\right| \frac{(x - x_0)(z_0 - z)}{(x - x_0)^2 + (z_0 - z)^2}$$

$$= \partial_{\mathrm{x}}\left|S_\alpha^{\mathrm{L}}\right| \Big/ (z_0 - z)$$

Résumé:

Etude quantitative des anomalies magnétiques par le signal analytique : application à des données océaniques

L'objectif de cette thèse est l'exploration de la théorie du signal analytique et sa validité dans l'interprétation des anomalies océaniques. L'application du signal analytique 1D à l'analyse des profils magnétiques rend possible l'accès à la géométrie et aux paramètres magnétiques des structures magnétiques 2D.
L'estimation de l'inclinaison apparente et de la profondeur des sources magnétiques, par l'application du signal analytique à des profils magnétiques acquis sur la dorsale Est Indien, montre des propriétés d'aimantation de couches lithosphériques de plus en plus profondes à mesure que l'on s'éloigne de l'axe de dorsale.
La construction de signal analytique à 1D implique l'évaluation de la transformée de Hilbert, La transformée de Riesz, connue comme la généralisation appropriée à 2D de la transformée de Hilbert, permet d'introduire la définition du signal analytique à deux dimensions. Cette approche conduit à la caractérisation de la source d'un signal magnétique i1D. Mais, pour une anomalie magnétique i2D, l'estimation des paramètres de la source est perturbée par la direction des vecteurs magnétiques. Nous avons tenté de remédier ce problème avec la transformée de Radon continue. Une nouvelle amplitude du signal analytique pour l'interprétation des données magnétique est proposée, fondée sur la décomposition de l'anomalie magnétique i2D en ses projections i1D. L'amplitude introduite montre des propriétés appropriées dans l'interprétation des signaux magnétiques i2D.

Mots clés :

Signal analytique 1D, signal analytique 2D, fonction holomorphe, fonction monogénique, transformée en ondelettes, transformée de Riesz, transformée de Radon, anomalie magnétique océanique, inclinaison apparente, degré d'homogénéité, localisation de source magnétique.

Abstract:

Quantitative study of magnetic anomalies by the analytic signal : application to oceanic data

The aim of this thesis is to explore the analytic signal theory and its applicability to the interpretation of oceanic anomalies. The application of analytic signal to the analysis of magnetic profiles makes possible the quantitive determination of geometric and magnetic parameters of magnetic structures.
The apparent inclination and magnetic localization depth estimates, by the application of 1D analytic signal on profiles acquired on the Est.-Indian Ridge, shows progressive acquisition of magnetization by the lithosphere deep layers, with respect to the distance to the ridge.
The construction of 1D analytic signal includes the evaluation of the Hilbert transformation of the signal. By the evaluation of Riesz transform, which is known as an appropriate 2D generalization of the Hilbert transform, the definition of the 2D analytic signal has be introduced. This approach allows the resolution of the i1D magnetic anomaly source. But, for the i2D magnetic anomaly, the estimation of the source parameters is affected by the magnetic vectors direction. From the consideration of continue Radon transform, we attempt to solve this problem. A new signal analytic amplitude for magnetic interpretation has been proposed based on the decomposition of an i2D magnetic anomaly into its i1D projections. This amplitude shows appropriate properies for the interpretation of i2D magnetic signals.