

UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR - STRASBOURG I
Faculté des Sciences Économiques et de Gestion

INFÉRENCE BAYÉSIENNE DES MODÈLES
À SAUTS DANS LA VOLATILITÉ
DU SOUS-JACENT DES OPTIONS NÉGOCIABLES

THÈSE

pour l'obtention du grade de
Docteur en Sciences Économiques
présentée et soutenue publiquement par
Mathieu BREZOVSKI
le 29 novembre 2005

JURY

Directeur de thèse	François LAISNEY Professeur à l'Université Louis Pasteur, Strasbourg I
Co-directeur de thèse	Michel LUBRANO Directeur de Recherche au GREQAM, Marseille
Rapporteur interne	Patrick ROGER Professeur à l'Université Louis Pasteur, Strasbourg I
Rapporteurs externes	Olivier SCAILLET Professeur à l'École des Hautes Études Commerciales de Genève Jean-Michel ZAKOÏAN Professeur à l'Université Charles de Gaulle, Lille III
Suffragant	Christian ROBERT Professeur à l'Université de Paris Dauphine, Paris IX

La Faculté n'entend donner aucune approbation ou improbation aux opinions émises dans les thèses. Ces opinions doivent être considérées comme propres à leurs auteurs.

À mes parents
Za moji roditelji

Remerciements

L'écriture des remerciements est un exercice délicat où il existe des figures imposées et où la difficulté est d'exprimer de façon sincère ce qui peut sembler convenu. Pourtant, je suis particulièrement ravi de pouvoir témoigner ma gratitude aux personnes qui ont contribué à ma thèse. J'espère que les quelques mots que je m'appête à écrire reflèteront fidèlement mes sentiments à leur égard.

Mes premiers remerciements s'adressent à Monsieur le Professeur François Laisney qui a dirigé ma thèse. Il m'a tout simplement permis de découvrir l'économétrie. J'ai eu le privilège de bénéficier de ses compétences dès mon entrée en licence. Depuis, il n'a cessé de m'offrir sa disponibilité et de me prodiguer de précieux conseils. Il a accepté de s'investir et de m'accompagner dans mon périple en économétrie de la finance. Ses encouragements et la confiance qu'il m'a accordée vont au-delà de l'intérêt qu'il a pu porter à mes travaux et témoignent de ses grandes qualités humaines. Qu'il trouve ici l'expression de ma plus profonde gratitude.

Je remercie Monsieur le Directeur de Recherche Michel Lubrano d'avoir accepté de co-diriger ma thèse. Malgré ma lenteur à rédiger, mon entêtement et ma capacité naturelle à m'éparpiller, il m'a constamment renouvelé son soutien. Il a toujours su respecter mes choix de thèmes de recherche tout en veillant à ce que je ne m'écarte jamais de la littérature existante. En d'autres mots, il m'a guidé avec patience et bienveillance. Ses nombreux commentaires et sa maîtrise de l'économétrie de la finance ont grandement contribué à améliorer le contenu de ma thèse. Je le remercie également pour l'accueil chaleureux qu'il me réservait toutes les fois où je suis allé le rencontrer à Marseille.

Je suis extrêmement reconnaissant envers Monsieur le Professeur Patrick Roger d'avoir accepté, en dépit de son emploi du temps particulièrement chargé, d'être l'un des rapporteurs de ma thèse. Je suis très honoré de l'intérêt qu'il a porté à mes travaux tout au long de mon cursus, et heureux de profiter une fois encore de sa vivacité d'esprit.

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Olivier Scaillet d'avoir accepté de juger ma thèse. Les commentaires qu'il avait formulés lors de ma présentation au Colloque des Jeunes Économètres 2002 ont fortement influencé la direction de mes travaux.

Je remercie Monsieur le Professeur Jean-Michel Zakoïan de me faire l'honneur d'avoir accepté, sans me connaître, la lourde tâche d'être un rapporteur de ma thèse.

Toute ma gratitude revient également à Monsieur le Professeur Christian Robert. Il est un animateur majeur de la communauté Bayésienne. L'importance de ses études dans l'élaboration de ma thèse fait que je suis particulièrement touché qu'il ait accepté de se pencher sur mon travail.

Je souhaiterais aussi exprimer ma reconnaissance à tous ceux qui m'ont entouré avant et pendant le doctorat. Je pense en premier lieu à mes parents qui ont consenti à de nombreux et lourds sacrifices et m'ont apporté soutien et affection. Je pense également à mes frères et soeurs qui ont suscité en moi l'envie d'apprendre et de découvrir.

Dans un autre registre, je tiens à remercier Ali, Thomas, Antoine, Frédéric (D), Félix, Nihad, et Stéphane, mes précieux amis qui m'ont tant apporté chacun dans un domaine particulier. Il faudra désormais trouver un autre sujet de discussion et de plaisanterie, je sais que ce sera chose facile. Dragana, Kim, Phu, Alexandre, Laurent, Julien, Frédéric (B), Agénor, Ismaël et tous ceux qui partagent ma joie d'être arrivé au bout, je ne vous oublie pas.

Enfin, durant le temps de la rédaction de cette thèse, j'ai eu l'immense bonheur de rencontrer celle qui est devenue ma femme. Elle m'a évidemment donné beaucoup de temps et d'espace pour que je puisse mener à bien mon projet. Elle est surtout une source intarissable de joie. Pour cela et pour tous les moments que nous partagerons ensemble je la remercie.

Table des matières

Introduction générale	15
1 Les modèles d'évaluation	19
1.1 Généralités	19
1.1.1 Caractéristiques d'une option	21
1.1.1.1 Prime	21
1.1.1.2 Sens	21
1.1.1.3 Sous-jacent	22
1.1.1.4 Prix d'exercice	22
1.1.1.5 Maturité	23
1.1.1.6 Type	23
1.1.2 Profil des gains et des pertes d'une option	24
1.1.2.1 Achat d'une option	25
1.1.2.2 Vente d'une option	27
1.1.3 Déterminants du prix d'une option	29
1.1.3.1 Paramètres	29
1.1.3.2 Relation de parité call/put	30
1.2 Dérivations de la formule de Black et Scholes	31
1.2.1 Approche de Black, Scholes et Merton	31
1.2.2 Approche risque neutre	34
1.2.3 Sensibilité d'une option	39
1.2.3.1 <i>delta</i> de l'option	39
1.2.3.2 <i>gamma</i> de l'option	41
1.2.3.3 <i>vega</i> de l'option	41
1.2.3.4 <i>rhô</i> de l'option	42
1.2.3.5 <i>thêta</i> de l'option	43
1.3 Limites de la formule de Black et Scholes	43
1.3.1 Sous-jacent	44
1.3.2 Options de type non-européen	45
1.3.3 Temps continu	45
1.3.4 Dividendes	46

TABLE DES MATIÈRES

1.3.5	Taux d'intérêt constant	46
1.3.6	Frais de transaction	46
1.3.7	Processus Brownien	47
1.3.8	Volatilité constante	48
1.3.8.1	Faits stylisés sur la volatilité	49
1.3.8.2	Faits stylisés sur la volatilité implicite	50
1.3.9	Alternatives	51
1.4	Modèles à volatilité stochastique	52
1.4.1	Différents modèles	52
1.4.2	Évaluation d'un call européen	54
1.4.3	Impact sur la surface de volatilité	60
1.5	Modèles à sauts	62
1.5.1	Motivations	62
1.5.2	Évaluation du prix d'un call européen	67
1.5.3	Impact sur la surface de volatilité	72
1.5.4	Lien entre les modèles à sauts et les mélanges de lois	73
1.5.5	Extensions	73
2	Les méthodes d'estimation	77
2.1	Estimation de σ dans Black et Scholes	78
2.2	Estimation des modèles à volatilité stochastique	80
2.2.1	Estimation à partir des rendements	80
2.2.1.1	Les modèles à volatilité stochastique autoré- gressive	81
2.2.1.2	Les modèles ARCH	88
2.2.2	Estimation utilisant le prix des options	90
2.2.3	Estimation à partir de la volatilité implicite	93
2.3	Estimation des modèles à sauts	97
2.3.1	La discrétisation	97
2.3.1.1	À partir de la solution	98
2.3.1.2	À partir de l'équation différentielle stochastique	100
2.3.2	Méthode d'estimation	101
3	Sauts dans la volatilité	109
3.1	Introduction	109
3.2	Modèles de volatilité	111
3.2.1	Le modèle log-OU	114
3.2.2	Le modèle log-OUS	115
3.3	Évaluation d'option	124
3.3.1	Le modèle risque-neutre	125
3.3.2	Méthodes de Monte-Carlo	130

TABLE DES MATIÈRES

3.4	Illustrations	134
3.4.1	Simulations de trajectoires	134
3.4.2	Impacts sur la surface de volatilité	139
3.5	Conclusion et extensions	142
4	Estimation de modèles à sauts dans la volatilité	145
4.1	Introduction	145
4.2	L'indice de volatilité implicite	147
4.2.1	Construction	148
4.2.2	Propriétés statistiques	150
4.2.3	Contenu informationnel	152
4.2.4	Lien entre volatilité implicite et volatilité instantanée .	160
4.3	Méthodologie	164
4.3.1	Modèles en temps discret	164
4.3.2	Méthode d'estimation	166
4.3.2.1	À partir de l'indice	167
4.3.2.2	Correction du biais de maturité	169
4.4	Résultats	171
4.4.1	Estimations	171
4.4.2	Surfaces de volatilité	178
4.5	La compatibilité entre les sources de données	180
4.5.1	Comparaison	180
4.5.2	Incorporation des rendements	185
4.5.3	Conformité des résultats	189
4.6	Conclusion et extensions	191
5	Sauts dans les rendements et dans la volatilité	195
5.1	Introduction	195
5.2	Le modèle	196
5.2.1	Présentation	197
5.2.2	La risque-neutralisation	202
5.2.3	Évaluation du prix d'une option	207
5.2.4	Surface de volatilité	210
5.3	Estimation	213
5.3.1	Méthodes existantes	213
5.3.2	Alternative	217
5.3.2.1	Lien entre volatilité implicite et volatilité ins- tananée	217
5.3.2.2	Méthodologie	219
5.4	Application	222
5.4.1	Génération des données	222

TABLE DES MATIÈRES

5.4.2	Performances de l'algorithme	224
5.5	Conclusion et extensions	231
Conclusion générale		235
Bibliographie		253
Annexes		i
A.1	Formule d'Itô	i
A.1.1	Le cas uni-dimensionnel	i
A.1.2	Le cas bi-dimensionnel	i
A.1.3	Le cas des modèles à sauts	ii
A.1.4	Règles de calcul	ii
A.2	Théorème de Girsanov	iii
A.2.1	Pour un mouvement Brownien	iii
A.2.2	Pour un processus bivarié	iv
A.2.3	Pour un modèle à sauts	v
A.3	Dérivation de la sensibilité d'un call par rapport au sous-jacent.	vi
A.4	Lois de probabilité	vii
A.4.1	Loi normale, \mathcal{N}	vii
A.4.2	Loi log-normale, $\ln \mathcal{N}$	vii
A.4.3	Loi inverse-gamma, \mathcal{IG}	viii
A.4.4	Loi binomiale, \mathcal{B}	viii
A.4.5	Loi bêta, \mathcal{Be}	viii
A.4.6	Loi de Poisson, \mathcal{P}	ix
A.5	Solutions et distributions des solutions des modèles de diffu- sion standard	ix
A.5.1	Processus Brownien géométrique standard	ix
A.5.2	Processus Ornstein-Uhlenbeck simple	xi
A.5.3	Processus Ornstein-Uhlenbeck dans sa version loga- rithmique	xii
A.5.4	Processus Cox-Ingersoll-Ross	xiii
A.5.5	Modèle linéaire	xiv
A.6	Algorithme de Newton-Raphson	xiv
A.7	Évaluation pratique des options	xv
A.7.1	Black et Scholes	xv
A.7.1.1	La solution analytique	xv
A.7.1.2	Méthode de Monte-Carlo	xvi
A.7.2	Hull et White	xvi
A.7.2.1	Développements limités	xvi
A.7.2.2	Méthode de Monte Carlo	xvii

TABLE DES MATIÈRES

A.7.3	Heston	xviii
A.7.4	Merton	xix
A.7.5	Ritchey	xx
A.8	Moments de \bar{V}	xxiii
A.9	Détails de l'algorithme décrit dans le chapitre 5.	xxvi

Introduction générale

L'économétrie de la finance est un champ d'étude qui a connu un essor considérable et enregistré de nombreux développements ces deux dernières décennies. Ce domaine vise deux objectifs majeurs ; mettre en évidence des régularités empiriques apparaissant sur les marchés financiers et proposer des méthodes d'estimation pour les modèles financiers. L'économétrie de la finance se situe donc en amont et en aval de la modélisation financière. D'une part, l'étude des propriétés statistiques des variables financières conduit la modélisation financière à prendre en compte certains phénomènes empiriques. L'adéquation d'un modèle à la réalité du marché est en effet cruciale pour parvenir à évaluer le prix de produits financiers de plus en plus complexes. D'autre part, l'évaluation pratique du prix de ces produits nécessite l'estimation des paramètres intervenant dans le modèle financier.

L'un des principaux phénomènes observés dans le processus des rendements boursiers est la présence de fortes et brutales variations, souvent concentrées dans le temps, qui forment les périodes de turbulence des marchés financiers. Les crashes boursiers constituent un bon exemple de ce type de perturbation. Statistiquement, l'existence de ces mouvements extraordinaires se traduit par des queues épaisses dans la fonction de distribution des variations, remettant très fortement en cause l'hypothèse de rendements distribués selon une loi Gaussienne. Cette évidence empirique a entraîné l'invalidation de la célèbre formule de Black et Scholes (1973) permettant d'évaluer le prix d'une option, et qui suppose que les rendements sont générés à partir d'une loi normale dont l'espérance et la variance sont constantes dans le temps.

De nombreux efforts ont alors été entrepris pour construire des modèles financiers parvenant à prendre en compte les propriétés statistiques des fluctuations boursières. La littérature financière s'est principalement concentrée autour de deux approches : les modèles à volatilité stochastique introduits par Hull et White (1987) puis améliorés par Heston (1993) et les modèles à sauts initialement proposés par Merton (1976). La première approche permet d'obtenir une certaine leptokurticité dans la distribution des rendements mais demeure insuffisante pour être en adéquation avec les données. À l'opposé, les

modèles à sauts peuvent générer facilement des variations de forte amplitude mais celles-ci ne sont pas concentrées dans le temps. L'idée de Bates (1996) est donc de combiner les sauts dans le processus des rendements et une volatilité stochastique mais les performances de ce modèle n'aboutissent qu'à une amélioration marginale par rapport aux modèles précédents. Les travaux de Bates (1996) et Pan (2002) concluent sur la nécessité d'incorporer des sauts directement dans le processus de volatilité. Duffie *et al.* (2000) et plus récemment Eraker *et al.* (2003) et Eraker (2004) confirment que la prise en compte de sauts dans la volatilité contribue à augmenter de manière sensible l'adéquation entre les prix théoriques des options issus de tels modèles et les prix observés sur le marché.

D'un point de vue économétrique, l'estimation de ces modèles constitue un véritable défi. En effet, les modèles financiers sont exprimés en temps continu tandis que les observations ne peuvent être collectées que sur une échelle de temps discrète. D'autre part, les modèles étudiés sont soit des modèles latents où la volatilité est une quantité inobservable (dans le cas d'une volatilité stochastique), soit des modèles de mélange (dans le cas des modèles à sauts), soit les deux. Dans tous les cas, l'estimation des paramètres requiert l'emploi des méthodes économétriques les plus récentes.

Notre travail s'inscrit dans ce courant de littérature qui cherche à décrire et mesurer les phénomènes régissant le processus des rendements. Plus particulièrement, nous nous intéressons à l'étude de sauts dans la volatilité. Les objectifs de notre étude sont au nombre de trois : 1) mettre en évidence l'existence de sauts dans le processus de volatilité, 2) estimer les paramètres régissant la volatilité, 3) fournir une méthode d'estimation des paramètres d'un modèle financier comportant des sauts dans les processus des rendements et de la volatilité.

Les deux premiers chapitres sont consacrés à une revue des principaux modèles financiers et de leur estimation. Dans le premier chapitre, nous situons d'abord les options au sein de la famille des produits dérivés. Nous y décrivons en détail les fonctions et les caractéristiques d'une option. Nous exposons ensuite les modèles financiers les plus connus, ceux de Black et Scholes (1973), Hull et White (1987), Heston (1993) et Merton (1976). Dans chaque cas, nous reprenons les arguments menant à l'obtention du prix d'une option. Nous introduisons ainsi l'approche *risque-neutre* développée par Cox et Ross (1976). Nous décrivons également la notion de volatilité implicite. La discussion des performances de ces différents modèles se fait à travers leur capacité à générer des surfaces de volatilité en adéquation avec ce qui est observé sur les marchés. Nous terminons ce chapitre par une brève description des modèles les plus récents. Il s'agit du modèle de Bates (1996) qui résulte d'une combinaison d'un modèle à volatilité stochastique avec un modèle à

sauts et du modèle de Duffie *et al.* (2000) qui permet de prendre en compte l'existence de sauts à la fois dans les rendements et la volatilité. Ce dernier modèle constitue, pour l'heure, le modèle le plus général disponible et englobe l'ensemble des spécifications déjà existantes. Le second chapitre est consacré à l'estimation des modèles standard c'est à dire ceux de Black et Scholes (1973), Hull et White (1987), Heston (1993) et Merton (1976). Nous discutons d'abord de la nécessaire discrétisation des modèles financiers exprimés en temps continu pour permettre l'utilisation des outils économétriques standard. Nous décrivons ensuite plusieurs procédures permettant d'estimer les paramètres des différentes spécifications des modèles à volatilité stochastique. En temps discret, ces modèles présentent une structure latente qui constitue une source de difficulté pour l'économètre. Nous abordons également le problème de l'estimation des paramètres sous la mesure risque-neutre. Enfin, dans ce deuxième chapitre nous abordons l'estimation des modèles à sauts. Après avoir décrit la méthode de discrétisation de Ball et Torous (1983), nous montrons que ces types de modèle ont pour équivalents en temps discret les modèles de mélanges de loi. Tout au long de ce chapitre nous privilégions la description des outils économétriques fondés sur l'approche Bayésienne, celle-ci étant systématiquement adoptée dans la suite de notre travail.

À partir du troisième chapitre nous entamons une série de trois études visant à établir *in fine* l'existence et l'importance, en termes d'évaluation d'options, des sauts dans la volatilité. Nous commençons dans le troisième chapitre par décrire un modèle comportant des sauts uniquement dans la volatilité. Nous le différencions du modèle de Bates (1996) qui lui comporte des sauts uniquement dans le processus du sous-jacent. Nous illustrons d'abord les performances d'un tel modèle à travers des simulations de trajectoires. Nous mettons en particulier en avant sa capacité à reproduire des épisodes où les rendements fluctuent de façon importante. Après avoir mis en place une procédure d'évaluation d'options, nous étudions ensuite l'impact des sauts sur la surface de volatilité. Les résultats plaident en faveur de l'existence de sauts dans la volatilité.

Le quatrième chapitre est dévolu à l'estimation de ce type de modèle. Nous proposons une méthode originale pour estimer directement les paramètres du processus risque-neutre à partir des données portant sur l'indice de volatilité du marché français. Pour cela nous avons au préalable justifié l'emploi d'une volatilité implicite puis mis en évidence un lien entre la volatilité instantanée et la volatilité implicite. Nous discutons également des différences des résultats d'estimation obtenues selon les sources de données utilisées (rendements ou indice de volatilité).

Enfin, dans le cinquième et dernier chapitre, nous proposons un modèle similaire à ceux étudiés par Duffie *et al.* (2000), Eraker *et al.* (2003) et Eraker

(2004) comprenant des sauts dans les processus des rendements et de la volatilité. Il constitue une extension au modèle étudié dans le chapitre précédent et apparaît comme l'un des plus complets dans la littérature financière. En effet, la plupart des modèles existants peuvent être interprétés comme des cas particuliers de ce modèle général. Nous détaillons la procédure de risque-neutralisation nécessaire pour évaluer le prix des options et nous parvenons à fournir une méthode d'estimation originale de l'ensemble des paramètres du modèle risque-neutre.

Chapitre 1

Les modèles d'évaluation

La première section décrit les notions de base concernant les options. Nous revenons en particulier sur les principaux avantages de l'utilisation des options pour un investisseur et nous détaillons les caractéristiques des options les plus utilisées. La seconde section est consacrée à l'étude du modèle de Black et Scholes (1973), qui est sans aucun doute à l'origine du succès des options négociables. La troisième section met en évidence les limites de ce modèle. Nous mettons notamment l'accent sur une hypothèse contestable du modèle, l'hypothèse de volatilité constante. Enfin, la dernière section étudie des modèles alternatifs d'évaluation du prix des options, il s'agit des modèles à volatilité stochastique et des modèles à sauts.

1.1 Généralités

Encore peu développés il y a trente ans, les marchés de produits dérivés se sont répandus dans le monde entier dans les années 80. Ces marchés comprennent les marchés à terme ou marchés de "futures" et les marchés d'options. Si l'idée d'instruments de couverture est ancienne, ce n'est que grâce aux développements des techniques d'évaluation des prix d'options que ces marchés ont pu connaître un tel succès.

Les contrats à termes ou contrats "futures" ont été initialement développés pour les marchandises (café, sucre, blé...). En France, le MATIF, marché à terme international de France a été créé en 1986. L'acheteur d'un contrat à terme s'engage à acheter une certaine quantité de marchandise à un prix et à une date déterminés d'avance. Contrairement aux options, il s'agit d'un engagement non conditionnel. Bien que le dénouement consiste en une livraison réelle à l'échéance, il est d'usage de profiter de la négociabilité des contrats qui consiste à les revendre avant terme. Depuis la création des marchés à

1.1. Généralités

terme, la gamme de produits n'a cessé d'évoluer (contrats à terme sur taux d'intérêt, indice boursier, etc.).

À l'inverse du contrat à terme, l'option n'est pas un engagement ferme mais un engagement conditionnel. En effet, une option est un contrat qui confère à l'acheteur le droit, mais non l'obligation, d'acheter ou de vendre une quantité d'actif à un prix déterminé à l'avance et ce jusqu'à une date fixée. Le caractère conditionnel d'une option réside dans le fait que le détenteur a toute liberté d'exercer ou non son droit. Les options portent sur tous types d'actifs (actions, indices, devises ...). En France, les options se traitent sur le MONEP (marché des options négociables de Paris), créé en 1987.

Les options, comme certains contrats à terme, se traitent sur des marchés organisés, garants d'une sécurité financière totale du contrat. En effet, le marché est doté d'une *Chambre de Compensation* qui assure chaque contrepartie et garantit la bonne fin de l'opération. Ces marchés s'opposent aux marchés de gré à gré, où seuls l'acheteur et le vendeur effectuent un contrat, et où l'acheteur et le vendeur encourent un risque de contrepartie puisque la réalisation finale de l'opération dépend de la fiabilité du co-contractant. Sur un marché organisé, ce risque n'existe pas. Une autre différence majeure entre ces marchés est qu'une opération de gré à gré permet d'obtenir un contrat sur mesure où les paramètres correspondent exactement aux besoins des co-contractants. À l'inverse, sur un marché organisé, le contrat est standardisé en termes de prix et de date. Par contre, le principal avantage des marchés organisés est que le contrat est négociable, d'où le nom d'option négociable. En effet, par définition le marché est organisé pour assurer la négociabilité permanente des contrats. Pour clôturer une position, il suffit d'effectuer l'opération inverse de l'opération initiale.

Au vu des avantages que représentent les marchés organisés, on comprend mieux l'essor des volumes échangés sur le MONEP, comme l'illustre le graphique 1.1. Les options majoritairement traitées de gré à gré sont les options de change. On notera d'autre part le cas particulier des warrants, produits de gré à gré émis par les établissements de crédit, qui s'apparentent à des options de par leurs caractéristiques et leur valorisation.

Les options négociables permettent aux investisseurs d'adopter, avec peu de liquidités, différentes stratégies : 1) protéger un portefeuille contre les variations de cours de l'actif, ou au contraire 2) spéculer sur de fortes variations de cours, 3) et enfin optimiser les liquidités en cristallisant les plus-values tout en gardant une exposition sur l'actif.

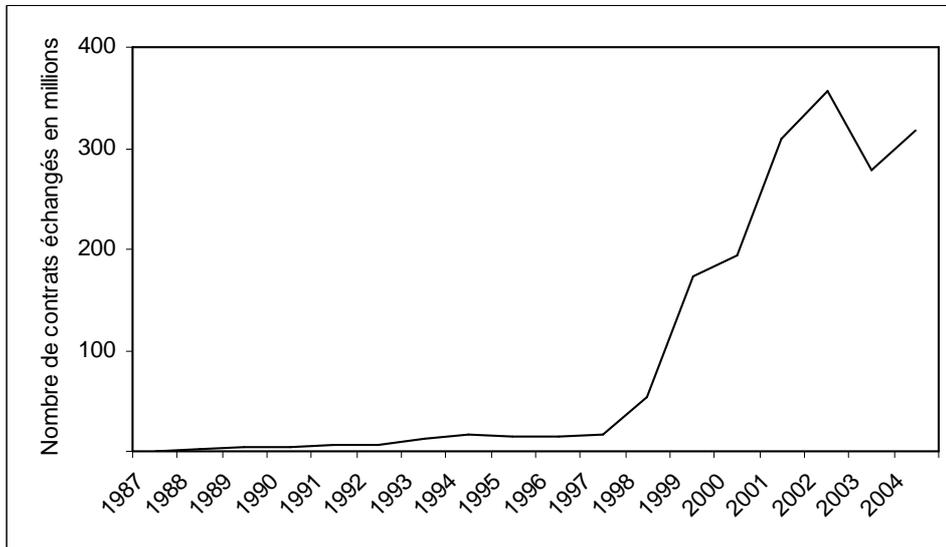


FIG. 1.1 – Volume échangé sur le MONEP 1987-2004

1.1.1 Caractéristiques d'une option

Le mot option vient du latin *optio* qui signifie *droit*. Nous détaillons ici les droits qu'offre une option.

1.1.1.1 Prime

Le prix d'une option est également appelé *prime* ou *premium*. C'est le montant dont l'acheteur doit s'acquitter pour pouvoir bénéficier des droits stipulés dans le contrat d'option.

1.1.1.2 Sens

Une option a un *sens*, il n'en existe que deux : l'option d'achat, également appelée *call*, et l'option de vente, également appelée *put*.

L'option d'achat (call) L'option d'achat est un contrat qui confère à son détenteur le droit, et non l'obligation, d'acheter une quantité spécifique d'une valeur sous-jacente donnée, à un prix stipulé à l'avance (le prix d'exercice), et ce, jusqu'à une date donnée (la date d'échéance). Pour obtenir ce droit, le détenteur doit payer une prime au vendeur. Le signataire (celui qui vend le call) est dans l'obligation de vendre au détenteur une quantité spécifiée d'une valeur sous-jacente donnée au prix d'exercice indiqué si le détenteur exerce

1.1. Généralités

son droit. Contre cette obligation, le signataire encaisse la prime payée par le détenteur.

L'option de vente (put) A l'opposé du call, l'option de vente confère à son détenteur le droit de vendre une quantité spécifique d'une valeur sous-jacente donnée, à un prix stipulé à l'avance (le prix d'exercice), et ce, jusqu'à une date donnée (la date d'échéance). Pour obtenir ce droit, le détenteur doit payer une prime au vendeur. Le signataire (celui qui vend le put) est dans l'obligation d'acheter au détenteur une quantité spécifiée d'une valeur sous-jacente donnée au prix d'exercice indiqué, si le détenteur exerce son droit. Contre cette obligation, le signataire encaisse la prime payée par le détenteur.

1.1.1.3 Sous-jacent

Le *sous-jacent*, également appelé *support*, désigne l'actif sur lequel porte le contrat d'option. Les supports sont très variés, par exemple, des matières premières, des taux de change, des taux d'intérêts, des actions, ou encore des indices boursiers. Dans nos études empiriques, nous prendrons comme support l'indice boursier français : le CAC 40. Nous désignerons systématiquement cette variable par S .

1.1.1.4 Prix d'exercice

Pour l'acheteur, exercer son droit d'option signifie qu'il déclare son intention de faire valoir son droit d'achat (pour un call) ou de vente (pour un put). Pour le vendeur d'une option, deux cas se présentent, soit le support est physiquement livrable (par exemple des actions), soit il ne l'est pas (comme des indices, ou des taux d'intérêt). Dans le premier cas, le vendeur doit livrer le support, dans le second cas, le règlement se fait en espèces.

Le *prix d'exercice* ou encore *prix de levée* ou *strike* d'une option est le prix auquel on peut acheter (pour un call) ou vendre (pour un put) le produit sous-jacent au moment de son exercice. Il est déterminé par le contrat d'option au moment de l'émission. Sur les marchés organisés, ces prix d'exercices sont fixés par les autorités de marché, alors que pour une opération de gré à gré ils peuvent être négociés.

Une option peut avoir différents qualificatifs en fonction de la position du cours de son support par rapport à son prix d'exercice.

En dehors de la monnaie Un call est *en dehors de la monnaie*, lorsque le cours du support est inférieur au prix d'exercice. À l'opposé, un put est

en dehors de la monnaie lorsque le prix du support est supérieur au prix d'exercice.

À la monnaie Une option, d'achat ou de vente, est *à la monnaie* lorsque son prix d'exercice est égal au cours du support. Lorsque ce dernier est très proche du prix d'exercice on dit que l'option est *à parité*.

Dans la monnaie Un call est *dans la monnaie* ou *en dedans* lorsque le cours du sous-jacent est supérieur au prix d'exercice. Un put est dans la monnaie lorsque le cours du support est inférieur au prix d'exercice.

Ces trois termes permettent de définir la *moneyness* d'une option. Nous noterons systématiquement le prix d'exercice par K .

1.1.1.5 Maturité

Toute option a une durée de vie limitée. Cette période de temps est appelée *maturité* de l'option. Au terme de cette période, c'est à dire à l'*échéance*, l'option *expire*. Après cette date, les droits de l'acheteur et les obligations du vendeur deviennent caducs.

1.1.1.6 Type

On retrouve sur le marché des dérivés deux principaux types d'options, les options de type européen et les options de type américain, également appelées options *vanilla*. Leurs caractéristiques sont suffisamment simples pour qu'elles puissent être traitées sur des marchés organisés. Parallèlement, il existe une multitude d'options *exotiques* échangées de gré à gré et offrant des droits très variés. Cette variété permet de mieux saisir l'intérêt que peuvent avoir les options pour un investisseur. Nous donnons ci-après un bref aperçu des différents types d'options.

Européen Les options de style européen limitent le détenteur à exercer son droit de levée seulement à la date d'échéance de l'option. Ces options sont les plus échangées sur les marchés organisés, aussi notre étude portera uniquement sur ce type d'option.

Américain Les options de style américain procurent au détenteur la possibilité d'exercer son droit de levée à tout moment jusqu'à l'échéance de l'option.¹

¹De cette souplesse découlent trois avantages décrits par Diz et Finucane (1993) : 1) les coûts de transaction peuvent être évités en exerçant l'option, 2) des horaires de clôture

Exotique Les options exotiques sont des options dont la valeur à l'exercice dépend, en général, des valeurs intermédiaires atteintes par le sous-jacent et pas uniquement de sa valeur finale. Ces options ne bénéficient pas d'un marché organisé mais sont assez populaires dans les milieux financiers car elles s'adaptent davantage aux anticipations des investisseurs en leur donnant des droits *sur mesure*, ce qui permet parfois une réduction des coûts. La liste qui suit est évidemment non-exhaustive.

Les options *asiatiques* ont un profil de gain qui dépend de la moyenne du support sur une certaine période avant l'échéance. La moyenne peut être effectuée, par exemple, sur les cours de clôture du support de tous les vendredis durant sa durée de vie.

Les options *lookback* offrent la possibilité d'engranger un gain qui dépend directement du cours maximum et/ou du cours minimum atteint par le support. Une option lookback peut donner, par exemple, le droit de toucher l'écart entre le cours le plus haut et le cours le plus bas du support.

Les options *barrières* doivent toucher un certain seuil pendant leur durée de vie pour pouvoir être exercées à l'échéance. On distingue deux variétés d'options barrières, les options *knock-in* offrant un droit si le sous-jacent a franchi un seuil avant l'échéance, et a contrario les options *knock-out* qui ne peuvent avoir de valeur que si le cours du support n'a pas atteint un seuil. On peut également imaginer des combinaisons de barrières et un ordre chronologique dans le déclenchement des seuils.

Les options *shout* permettent au détenteur de changer le prix d'exercice en la valeur actuelle du support.

Enfin, les options *quantos* combinent une option sur un indice étranger et une garantie de change. Elles autorisent donc les investisseurs à se placer et à se couvrir sur des marchés étrangers sans encourir de risques sur l'évolution des taux de change.

1.1.2 Profil des gains et des pertes d'une option

L'attrait des options provient de leurs profils de gains et de pertes à l'échéance, différents de ceux de la détention directe du sous-jacent.² Nous allons illustrer ceci par l'étude de quatre stratégies élémentaires : l'achat d'un

différents entre le marché des actions et celui des options peuvent procurer un avantage (*wild card*) aux détenteurs de ce type d'options si des informations importantes affectent le prix du support après la fermeture du marchés des actions, enfin, 3) l'exercice peut être avantageux s'il y a distribution de dividendes.

²Ce profil, à l'échéance, est le même que le style de l'option soit américain ou européen.

call, l'achat d'un put, la vente d'un call et la vente d'un put.³ Supposons que le sous-jacent soit une action et que son cours soit égal à $S = 95$ €. Nous disposons également des prix de deux options dont la maturité et le prix d'exercice $K = 100$ € sont les mêmes, mais dont le sens diffère. Le prix du call est $C_t = 2.9$ € et le prix du put est $P_t = 7.3$ €.

1.1.2.1 Achat d'une option

L'achat sec d'une option, c'est à dire sans la détention en quantités négatives ou positives du sous-jacent, correspond à une position spéculative. En revanche, la détention simultanée (en quantités positives ou négatives) du support et d'une option peut se révéler être une opération de couverture.

Achat d'un call Le profil de gains et de pertes à l'échéance est présenté dans le graphique 1.2. Trois scenarii sont possibles. Dans le cas où le prix du sous-jacent est inférieur au prix d'exercice, la perte est maximale mais reste toutefois limitée au montant de la prime versée pour l'acquisition du call. L'investisseur n'a alors aucun intérêt à exercer son droit. Dans le cas, plus favorable, où le cours du sous-jacent dépasse le prix d'exercice mais reste inférieur au *point mort* (prime versée + prix d'exercice), le détenteur du call exerce son droit. Il engrange des pertes mais récupère une partie de sa prime. Enfin, si le cours du sous-jacent est supérieur au point mort, l'investisseur peut acheter l'action sous-jacente au prix d'exercice alors qu'elle s'échange à un prix plus élevé sur le marché. Par conséquent son gain potentiel est illimité. L'achat d'un call est donc essentiellement une position d'investissement spéculative, l'investisseur pouvant perdre la totalité de sa mise si le cours du sous-jacent baisse d'un montant supérieur à la prime versée. En contrepartie, si la hausse du sous-jacent est forte, l'achat d'un call permet de bénéficier d'un effet de levier important. Dans l'exemple donné, si le support à l'échéance vaut 105 €, soit une augmentation de $(S_T - S_t)/S_t \approx 10.5\%$, le call à l'échéance vaut $C_T = 5$ €, et la rentabilité de cette stratégie sera de $(C_T - C_t)/C_t \approx 72.5\%$. L'achat d'un call est donc opportun lorsque l'investisseur anticipe une forte hausse du sous-jacent.

L'achat d'un call peut également s'accompagner de la vente à découvert simultanée du support. Dans ce cas, il s'agit d'un achat d'option couvert. La position de l'investissement devient une opération de couverture contre une hausse du sous-jacent. En effet, si une forte hausse se produit, l'investisseur comblera une partie des pertes engrangées par sa vente à découvert avec

³Nous négligerons les frais de transactions. La quotité, c'est à dire le nombre minimal d'options à acheter ou à vendre, est de 1.

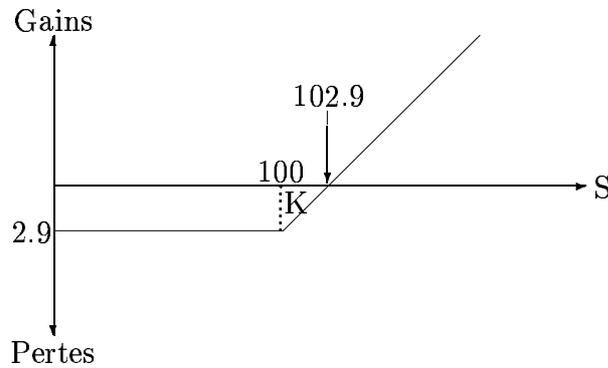


FIG. 1.2 – Profil de gains et de pertes pour l'achat d'un call

les revenus provenant de l'achat du call. Ainsi, si le support vaut 105 € à l'échéance, l'investisseur engrange 5 € provenant de la détention du call et perd 10 € suite à sa vente à découvert. Il perd au total 5 € alors qu'il aurait perdu 10 € s'il n'avait pas acheté le call. À l'opposé, si une baisse du cours du sous-jacent est constatée, l'investisseur perd tout ou partie de sa prime mais il engrange des revenus dégagés par sa vente à découvert. Par exemple, supposons que le cours du sous-jacent à l'échéance soit égal à 90 €, l'investisseur perd la totalité du montant placé en call mais perçoit 5 € provenant de la vente de l'actif. Sa position finale est donc $5 - 2.9 = 2.1$ €.

Achat d'un put Le profil de gains et de pertes, à l'échéance, associé à l'achat d'un put est illustré dans le graphique 1.3. Il a une allure symétrique par rapport au profil correspondant à l'achat d'un call. En effet, l'investisseur sera gagnant dès que le cours du sous jacent franchira à la baisse le point mort. L'achat d'un put non couvert doit s'accompagner d'une anticipation à la baisse du cours du sous-jacent. Cette position est évidemment spéculative, puisque si la baisse escomptée ne se produit pas, le détenteur du put risque de perdre un montant maximal égal à la prime versée. En revanche si l'investisseur possède simultanément le support, alors la détention du put va lui permettre de protéger son portefeuille. Dans ce cas, l'achat d'un put correspond à une opération de couverture permettant une réduction substantielle du risque.

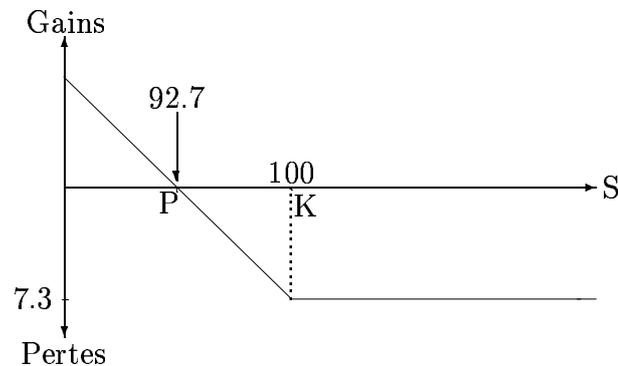


FIG. 1.3 – Profil de gains et de pertes pour l'achat d'un put

1.1.2.2 Vente d'une option

Sur le marché des options, l'achat d'une option n'est possible que s'il existe une contrepartie vendeuse.⁴ En d'autres termes, ce que l'acheteur gagne, le vendeur le perd et réciproquement. La situation du vendeur d'option est donc radicalement opposée de celle d'un acheteur. Alors que la détention d'une option confère un droit, la vente d'une option comporte l'obligation de livrer les titres au prix d'exercice déterminé dans le contrat. Pour garantir la solvabilité du vendeur et la sécurité des transactions, la Chambre de Compensation procède à des appels de marges (ou de couverture) c'est à dire à une immobilisation de capitaux.

Vente d'un call Le vendeur d'un call s'engage à vendre le support au prix d'exercice. Pour rémunérer ce risque, il perçoit la prime payée par l'acheteur. Le profil de gain est donné dans le graphique 1.4. Le gain maximal est limité au montant de la prime, par contre les pertes potentielles sont illimitées. En effet, en cas d'exercice du call par l'acheteur, le vendeur doit livrer le support au prix d'exercice. Il se retrouve dans l'obligation d'acheter le support à un cours plus élevé que le prix d'exercice. Sa position reste toutefois bénéficiaire tant que le support n'a pas franchi à la hausse le point mort.

En dehors de cette position spéculative fondée sur l'anticipation d'une stagnation ou d'une baisse du sous-jacent, la vente d'un call peut s'accompagner de l'achat du support. Dans ce cas, l'investisseur procède à une opération de couverture pour une baisse limitée (équivalente à la prime) du cours du support tout en plafonnant le rendement de son portefeuille s'il y a une

⁴On dit que le marché des options est à somme nulle.

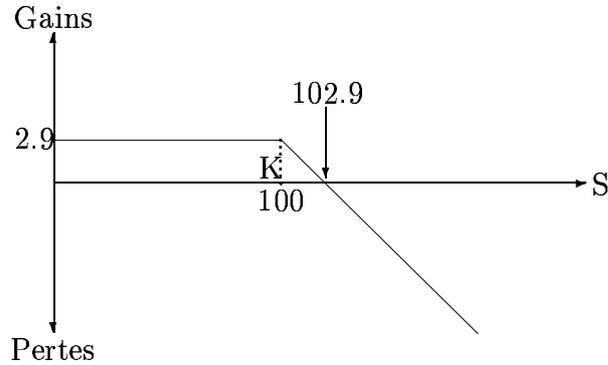


FIG. 1.4 – Profil de gains et de pertes pour la vente d'un call

hausse. Par exemple, supposons que l'investisseur achète une action au prix de 95 € et vend simultanément un call à 2.9 €. Si à l'échéance, le titre se négocie à 90 €, il perd 5 € à cause de son mauvais placement sur le support mais il comble une partie de ses pertes grâce à la prime perçue par la vente du call. Au total, il aura perdu 2.1 € ($2.9 - 5$), au lieu de 5 €. À l'opposé, si le cours à l'échéance est de, par exemple, 105 €, l'investisseur sera assigné sur l'option et devra livrer l'action au prix d'exercice de 100 € qu'il s'était procuré à 95 €. Il touche par conséquent un montant limité à 5 € provenant de son placement sur le support. Par ailleurs, en recevant la prime qui provient de la vente de son call l'investisseur gagnera 7.9 € au total. On peut remarquer que cette somme sera invariable quel que soit la hausse du sous-jacent. La vente du call aura donc limité son potentiel de gain en cas de hausse du sous-jacent.

Vente d'un put La vente sèche d'un put reflète une anticipation similaire à celle d'un vendeur de call : l'investisseur ne prévoit pas de variations fortes du cours de l'action. La différence réside dans l'engagement pris face à l'acheteur du put. Ainsi, il s'engage à racheter le support au prix d'exercice quel que soit le cours du support à l'échéance. En particulier, le vendeur de put s'expose à une perte maximale inconnue à l'avance et dépendant de la baisse du cours de l'action. Le profil des gains et des pertes est représenté dans le graphique 1.5. Si le vendeur de put vend simultanément le support, alors son investissement total s'apparente à une opération de couverture contre une hausse modérée des cours. Il reste bénéficiaire tant que la hausse reste modérée et inférieure au montant de la prime et il ampute ses pertes du montant de la prime dans le cas d'une hausse plus prononcée. En contrepartie, dans le cas d'une baisse

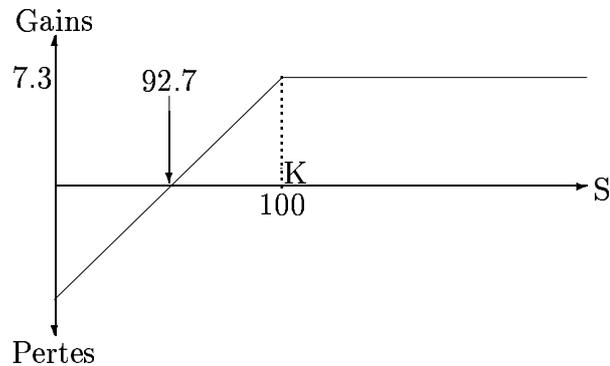


FIG. 1.5 – Profil de gains pour la vente d'un put

des cours, l'investisseur limite son potentiel de gain.

Supposons que l'investisseur vende simultanément un put et le support. Si à l'échéance le cours du support cote à 105 €, le vendeur perd 10 € suite à sa vente à découvert. Il limite toutefois sa perte car il aura perçu la prime du put soit 7.3 €. Au total, l'investisseur perd donc 2.7 € alors qu'il aurait dû perdre 10 € s'il n'avait pas vendu le put. En revanche, si le cours du sous-jacent passe à 90 €, l'investisseur gagne 5 € par action provenant de sa vente à découvert. Toutefois, en vendant un put, il s'est engagé à acheter l'actif à 100 € contre l'encaissement d'une prime de 7.3 €. La vente de son put a donc pour conséquence une perte de 2.7 €. Au total, l'investisseur reste donc bénéficiaire de 2.3 €.

On peut constater que si l'investisseur avait pu vendre un put très largement en dehors de la monnaie, par exemple $K = 70$ €, il aurait perçu la prime sans avoir à livrer le support. Par ailleurs il aurait bénéficié de la baisse du support. Dans ce cas, la vente d'un put en dehors de la monnaie peut améliorer le rendement du portefeuille.

1.1.3 Déterminants du prix d'une option

Il nous faut, avant d'établir une formule du prix d'une option, d'abord identifier les paramètres qui semblent entrer en jeu.

1.1.3.1 Paramètres

La prime d'une option peut être considérée comme la somme de deux valeurs : la *valeur intrinsèque* et la *valeur temps*. La valeur intrinsèque (*VI*)

1.1. Généralités

d'une option est la différence, si elle est positive, entre son prix d'exercice K et le cours du support S_t , on a :

$$\begin{aligned} VI_{call} &= \max(S_t - K, 0), \\ VI_{put} &= \max(K - S_t, 0). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Concrètement, la valeur intrinsèque représente le profit brut qui serait dégagé d'un exercice immédiat. Une option n'a donc de valeur intrinsèque que si elle est dans la monnaie.

Même lorsque la valeur intrinsèque est nulle, le prix de l'option n'est pas nul. Le prix de l'option est alors égal à sa valeur temps. Celle-ci est plus complexe à évaluer et nous donnons ici quelques éléments qui semblent la déterminer.

La valeur temps cristallise toutes les incertitudes liées à l'exercice de l'option. Ces incertitudes sont formées par différentes composantes. D'abord, la date d'échéance de l'option, on conçoit aisément que plus l'échéance de l'option est éloignée et plus l'investisseur a de chances de voir évoluer favorablement le cours du support. Par conséquent, la maturité de l'option doit influencer positivement le prix d'une option. Ensuite, les variations du sous-jacent doivent également jouer un rôle important. En effet, une hausse du sous-jacent, toutes choses égales par ailleurs, va augmenter les chances de voir un call expirer dans la monnaie. Cette hausse influence donc de manière positive (respectivement négative) le prix d'un call (put). Enfin, un investisseur peut toujours décider de ne rien placer dans un actif risqué et d'investir l'ensemble de ses liquidités au taux sans risque. Par conséquent, l'opportunité de placement dans des options dépendra également du taux sans risque.

1.1.3.2 Relation de parité call/put

La relation de parité call/put a été identifiée par Stoll (1969). Il s'agit d'une égalité uniquement valable pour des options européennes. Elle repose sur l'hypothèse d'*absence d'opportunités d'arbitrage*. En d'autres termes, deux portefeuilles générant les mêmes revenus doivent avoir la même valeur. La relation se déduit très simplement de l'analyse de la position d'arbitrage suivante. À la date t , un premier portefeuille est constitué par l'achat d'un call et par le placement au taux sans risque d'un montant de liquidités égal au prix d'exercice. À la même date t , un second portefeuille est composé par l'achat d'un put, dont le prix d'exercice est identique à celui du call, et du titre. On peut remarquer qu'à l'échéance T , les deux portefeuilles ont la même valeur et ce, quelle que soit l'évolution du sous-jacent. De l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, il découle que ces deux portefeuilles

doivent aussi avoir la même valeur en t , lors de l'initiation des positions. On a donc :

$$K \exp[-r(T - t)] + C_t = S_t + P_t, \quad (1.2)$$

où r désigne le taux d'intérêt sans risque continu, et $\exp(-r(T-t))$ représente le facteur d'actualisation.⁵

1.2 Dérivations de la formule de Black et Scholes

En terminant la section précédente, nous avons fourni quelques éléments qualitatifs entrant dans la détermination du prix d'une option. Cette section porte sur la célèbre formule de Black et Scholes (1973) qui fut la première réponse donnée sur le plan quantitatif. La solution donnée, de manière indépendante, dans les articles de Black et Scholes (1973) et Merton (1973), ainsi que les arguments utilisés, ont durablement marqué la finance. Une deuxième approche, tout aussi fondamentale, exposée par Cox et Ross (1976) et appelée *risque-neutre*, permet d'aboutir au même prix de l'option. L'expression du prix est suffisamment simple pour permettre de calculer analytiquement la sensibilité de l'option par rapport aux différents déterminants qui le composent. Ces sensibilités sont parfois appelées les *grecs* et sont des indicateurs précieux pour un investisseur désireux d'effectuer des opérations comprenant des options.

1.2.1 Approche de Black, Scholes et Merton

La solution apportée par Black, Scholes et Merton part de l'idée qu'il est possible de créer un portefeuille sans risque comprenant à la fois le support et des options d'achat de type européen. Combinant ce résultat au calcul stochastique et en particulier à la formule d'Itô (voir l'annexe A.1), ils parviennent à donner le prix d'un call européen en fonction de cinq paramètres seulement ; la volatilité du support, le prix d'exercice, la maturité, le cours du support et le taux d'intérêt sans risque. Les quatre derniers paramètres sont directement observables sur le marché.

L'argumentation est la suivante. On construit, à la date t , un portefeuille dont la valeur est Π_t , composé du support S_t et d'une certaine quantité de calls C_t . Évidemment, la valeur de ce portefeuille change lorsque les prix du support et du call varient. Si le prix du call est fonction du prix du support et de la maturité, alors les variations du prix du call dC_t peuvent également

⁵Si i est un taux d'intérêt observé sur le marché, le taux continu r est donné par $r = \ln(1 + i)$.

être exprimées comme fonction des changements du prix du support et de la maturité. L'expression exacte est fournie par la formule d'Itô. Black et Scholes (1973) remarquent qu'il est possible de construire un portefeuille basé sur la détention d'une certaine quantité du support et de la vente à découvert d'options qui, à chaque instant, est sans risque. Ainsi, l'augmentation de la valeur du portefeuille suite à une augmentation du prix du support sera exactement compensée par la baisse de la valeur du call et vice versa. Si les quantités du support et de l'option sont ajustées continuellement lorsque le prix du support varie, le portefeuille est sans risque sur toute la durée de vie de l'option. Par conséquent, s'il y a absence d'opportunités d'arbitrage, le portefeuille ainsi constitué doit avoir un rendement égal au taux sans risque. La compilation de tous ces résultats aboutit à une équation différentielle dont la solution est le prix d'un call européen.

Reprenons formellement cette argumentation et admettons les hypothèses suivantes :⁶

- Le cours du sous-jacent S_t est régi par un processus Brownien géométrique standard, avec α_c et σ constants. S_t satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dS_t = \alpha_c S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad (1.3)$$

où B_t désigne un mouvement Brownien standard.⁷

- La vente à découvert est permise.
- Il n'y a pas de coûts de transactions.
- La liquidité est parfaite.
- Il y a absence d'opportunités d'arbitrage.
- Il n'y a pas de dividendes versés durant la durée de vie de l'option.
- Les actifs sont traités de manière continue.
- Le taux d'intérêt sans risque, r , est constant quelles que soient les maturités.

La valeur du portefeuille Π_t est égale au prix du support S_t multiplié par la quantité de support détenue θ_S plus le prix du call C_t multiplié par le nombre d'options vendues à découvert θ_C :

$$\Pi_t = S_t \theta_S + C_t \theta_C. \quad (1.4)$$

La variation de la valeur du portefeuille, $d\Pi_t$, est la somme des variations du

⁶Nous reviendrons sur les hypothèses dans la section 1.3.

⁷Pour éviter toute confusion, nous appellerons désormais mouvement Brownien standard le terme B_t , et processus Brownien une fonction dépendante d'un mouvement Brownien. Un mouvement Brownien B vérifie les deux points suivants : 1) $B_0 = 0$ et 2) pour $0 \leq t \leq T$, $B_T - B_t$ suit une normale centrée de variance $T - t$.

prix du support et du prix du call :

$$d\Pi_t = \theta_S dS_t + \theta_C dC_t. \quad (1.5)$$

L'expression de dS_t est connue et donnée dans les hypothèses par l'équation (1.3). Il nous manque l'expression de dC_t . Comme, le prix du call, C_t , peut être considéré comme fonction du temps et du support, dC_t peut être trouvée grâce à la formule d'Itô. Nous avons :

$$dC_t = \frac{\partial C_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial C_t}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt. \quad (1.6)$$

Notons que le seul terme stochastique dans cette équation est dS_t , le reste est de nature déterministe. En remplaçant dC_t dans (1.5) par l'expression obtenue en (1.6), la variation de la valeur du portefeuille est égale à :

$$d\Pi = \theta_S dS_t + \theta_C \left(\frac{\partial C_t}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial C_t}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt \right). \quad (1.7)$$

Pour des quantités arbitraires θ_S et θ_C , la variation de la valeur du portefeuille, $d\Pi$, est stochastique. Par contre, si les quantités θ_S et θ_C sont choisies de sorte que la partie stochastique de la variation du portefeuille soit nulle, c'est à dire :

$$\theta_S dS_t + \theta_C \left(\frac{\partial C_t}{\partial S_t} \right) dS_t = 0, \quad (1.8)$$

alors la valeur du portefeuille est déterminée dans le temps et ne comporte donc aucun risque.⁸ En posant $\theta_S = 1$ et $\theta_C = -1/(\partial C_t/\partial S_t)$ dans (1.7) on a bien :

$$d\Pi = - \left(\frac{1}{\partial C_t/\partial S_t} \right) \left(\frac{\partial C_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt, \quad (1.9)$$

c'est à dire que l'évolution du portefeuille est déterministe. Comme deux substituts parfaits doivent avoir le même rendement, le rendement de ce portefeuille sans risque doit être égal au taux sans risque r :

$$d\Pi = r\Pi dt. \quad (1.10)$$

⁸L'équation (1.8) se ramène à

$$\theta_S/\theta_C = -\partial C_t/\partial S_t$$

d'où on déduit que seul le rapport des quantités est important. Par conséquent, il n'y pas de différence si c'est le support qui est vendu à découvert et l'option qui est détenue.

1.2. Dérivations de la formule de Black et Scholes

En introduisant (1.4) et (1.9) dans (1.10) on aboutit finalement à l'équation différentielle de Black et Scholes (1973) :

$$\frac{\partial C_t}{\partial t} = rC_t - rS_t \frac{\partial C_t}{\partial S_t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_t}{\partial S_t^2} \sigma^2 S_t^2. \quad (1.11)$$

Il y a plusieurs solutions à cette équation différentielle. Le prix du call européen est la solution de cette équation différentielle associée à des conditions aux bornes :

$$\begin{aligned} C_T &= \max(0, S_T - K), \\ t &= T. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Black et Scholes obtiennent finalement l'expression suivante pour le prix d'un call :

$$C_{BS}(S_t, K, r, \sigma, T - t) = S_t \Phi(d_1) - K \exp[-r(T - t)] \Phi(d_2), \quad (1.13)$$

où,

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + (r + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma \sqrt{T - t}}, \quad (1.14)$$

et,

$$d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{T - t}, \quad (1.15)$$

et Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale.⁹

Connaissant l'ensemble des paramètres S_t , r , σ , T et K , le calcul effectif du prix ne pose aucune difficulté (voir l'annexe A.7). Notons que le prix d'un put peut être déduit à partir de la relation de parité call/put.

Ici, le prix du call est vu comme solution d'une équation différentielle. Il existe une autre façon de le déterminer, c'est l'objet de la section suivante.

1.2.2 Approche risque neutre

Une autre technique, peut être plus intuitive, a été initialement proposée par Cox et Ross (1976). Il s'agit de l'évaluation d'une option dans un monde neutre face au risque.

Cette approche découle d'une constatation concernant l'équation différentielle (1.11). On remarque en effet que α_c , le rendement espéré du support, n'y apparaît pas. Or, α_c représente les préférences des agents.¹⁰ Cox et Ross en déduisent que, comme les préférences n'interviennent pas dans l'équation

⁹L'équation différentielle (1.11) est connue et caractérise la loi normale.

¹⁰Plus l'aversion au risque des agents est forte, plus α_c est grand.

différentielle, elles ne peuvent affecter la solution. Par conséquent, quelles que soient les préférences des agents, c'est à dire quelles que soient les valeurs de α_c , on aboutira toujours à la même solution. On peut donc supposer que le rendement espéré de tous les actifs est égal au taux sans risque ($\alpha_c = r$), c'est à dire supposer que tous les investisseurs sont neutres face au risque. Les agents n'ont pas besoin d'une prime pour le risque qu'ils encourent. Le processus régissant les variations du support donné par l'équation (1.3) peut donc se réécrire :

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t. \quad (1.16)$$

Le choix de se placer dans un monde neutre au risque a une autre conséquence. En effet, la valeur d'un call européen à l'échéance est égale à :

$$C_T = E_Q[\max(S_T - K, 0)], \quad (1.17)$$

où E_Q signifie que l'espérance est prise par rapport à la probabilité risque neutre. La valeur du call à la date t est simplement obtenue par une actualisation de C_T au taux sans risque. Nous avons :

$$C_t = \exp[-r(T - t)]E_Q[\max(S_T - K, 0)], \quad (1.18)$$

ou encore :

$$C_t = \exp[-r(T - t)] \int_K^\infty (S_T - K) f(S_T | \theta_Q) dS_T, \quad (1.19)$$

où $f(S_T | \theta_Q)$ désigne la fonction de densité du support à l'échéance, et les paramètres θ_Q sont définis dans un monde neutre au risque.

Autrement dit, l'équation (1.19) stipule que si nous disposons de la fonction de densité de S_T , alors le calcul du prix d'un call se réduit à un calcul d'intégrale. Dans ce qui suit nous fournissons d'abord la loi de S_T , puis nous procédons au calcul de l'intégrale. Nous suivons la démarche exposée dans l'ouvrage de Hull (2003).

Il faut d'abord noter que le choix d'un processus Brownien géométrique standard pour décrire S_t s'avère particulièrement pratique pour déterminer la loi de S_T . En effet, l'application de la formule d'Itô permet de réécrire (1.16) sous la forme :

$$d \ln(S_t) = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t, \quad (1.20)$$

ce qui nous conduit à :

$$\ln(S_T) = \ln(S_t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma B_{T-t}, \quad (1.21)$$

ou de manière équivalente :

$$S_T = S_t \exp \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma B_{T-t} \right]. \quad (1.22)$$

Cette dernière équation est la solution de l'équation différentielle stochastique (1.16). Les équations (1.21) et (1.22) permettent également de déduire la distribution du support à l'échéance. En effet, (1.21) nous indique que la loi de $\ln(S_T)$ est une loi normale d'espérance :

$$E[\ln(S_T)] = m = \ln(S_t) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \quad (1.23)$$

et de variance :

$$V[\ln(S_T)] = s^2 = \sigma^2(T - t). \quad (1.24)$$

Cela revient à dire que S_T est distribué selon une loi log-normale de paramètres m et s^2 et dont les moments peuvent être calculés facilement.¹¹ En particulier, l'espérance de S_T , qui va s'avérer être une quantité utile par la suite, s'écrit :

$$E(S_T) = \exp(m + s^2/2). \quad (1.25)$$

Cette relation entre $E(S_T)$ et $E[\ln(S_T)] = m$ peut également se réécrire sous la forme suivante :

$$m = \ln[E(S_T)] - s^2/2. \quad (1.26)$$

Nous disposons donc de la loi de S_T et le prix d'un call européen donné par (1.19) peut s'écrire de manière plus précise :

$$C_t = \exp[-r(T - t)] \int_K^\infty (S_T - K) f_{\ln \mathcal{N}}(S_T) dS_T, \quad (1.27)$$

où $f_{\ln \mathcal{N}}$ désigne la fonction de densité de la loi log-normale. Nous passons à présent au calcul de l'intégrale de (1.27). Nous définissons tout d'abord la variable X par :

$$X = \frac{\ln(S_T) - m}{s}. \quad (1.28)$$

Comme $\ln(S_T)$ est une variable Gaussienne d'espérance m et de variance s^2 , X est donc une variable aléatoire Gaussienne centrée et réduite. Nous

¹¹Voir l'annexe A.4 pour le lien entre la loi log-normale et la loi normale.

effectuons ensuite un changement de variable dans (1.27) en y remplaçant S_T par X , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 C_t &= \exp[-r(T-t)] \int_{\frac{\ln(K)-m}{s}}^{\infty} [\exp(Xs+m) - K] f_{\mathcal{N}}(X) dX, \\
 &= \exp[-r(T-t)] \int_{\frac{\ln(K)-m}{s}}^{\infty} \exp(Xs+m) f_{\mathcal{N}}(X) dX \\
 &\quad - K \int_{\frac{\ln(K)-m}{s}}^{\infty} f_{\mathcal{N}}(X) dX,
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

où $f_{\mathcal{N}}$ désigne la loi normale centrée réduite. Notons que la deuxième intégrale représente simplement la fonction de répartition de la loi normale :

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\ln(K)-m}{s}}^{\infty} f_{\mathcal{N}}(X) dX &= 1 - \Phi\left(\frac{\ln(K)-m}{s}\right), \\
 &= \Phi\left(\frac{m - \ln(K)}{s}\right), \\
 &= \Phi\left(\frac{\ln[E(S_T)/K] - s^2/2}{s}\right),
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

où m a été substitué par son expression donnée en (1.26). On parvient à un résultat similaire pour la première intégrale, il suffit pour cela de remarquer que l'expression de l'intégrande se réécrit :

$$\begin{aligned}
 \exp(Xs+m) f_{\mathcal{N}}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{(-X^2 + 2Xs + 2m)^2}{2}\right], \\
 &= \exp(m + s^2/2) f_{\mathcal{N}}(X - s), \\
 &= E(S_T) f_{\mathcal{N}}(X - s),
 \end{aligned} \tag{1.31}$$

et que par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \int_{\frac{\ln(K)-m}{s}}^{\infty} \exp(Xs+m) f_{\mathcal{N}}(X) dX &= \int_{\frac{\ln(K)-m}{s}}^{\infty} E(S_T) f_{\mathcal{N}}(X - s) dX, \\
 &= E(S_T) \left[1 - \Phi\left(\frac{\ln(K)-m}{s} + s\right)\right], \\
 &= E(S_T) \Phi\left(\frac{\ln[E(S_T)/K] + s^2/2}{s}\right).
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

1.2. Dérivations de la formule de Black et Scholes

Finalement nous trouvons que le prix d'un call européen, lorsque son sous-jacent est décrit par un processus Brownien géométrique, est égal à :

$$C_t = \exp[-r(T - t)][E(S_T)\Phi(d_1) - K\Phi(d_2)], \quad (1.33)$$

où :

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln[E(S_T)/K] + s^2/2}{s}, \\ d_2 &= \frac{\ln[E(S_T)/K] - s^2/2}{s}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Le lien avec la formule de Black et Scholes (1973) est effectué en remplaçant s par son expression (1.24) et en remarquant que $E(S_T) = \exp[r(T - t)]S_t$ d'après (1.23) et (1.25). La formule (1.33) est plus générale que celle de Black et Scholes (1973) obtenue dans la section précédente car elle reste vraie pour d'autres formes de m et s .

L'évaluation des actifs dans un monde neutre au risque est sans doute l'outil le plus puissant pour l'analyse des produits dérivés. Pour résumer, elle consiste à passer du processus générateur des données à un processus qui tient compte de l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage. Son application concrète nécessite donc d'avoir la possibilité de pouvoir passer du processus générateur des données au processus risque-neutre, et, d'autre part de pouvoir en déduire la fonction de densité de la loi du support à l'échéance. Nous venons de voir que dans le cas où le support suit un processus Brownien géométrique, le résultat est obtenu rapidement. Il ne s'agit plus de trouver la solution d'une équation différentielle mais simplement de calculer une espérance. Nous verrons que cette procédure s'adapte également à des processus alternatifs. Par ailleurs, lorsque le calcul de cette espérance n'aboutit pas à une expression analytique, cette approche se prête particulièrement bien à des simulations numériques pour des options de type non-européen. Le fait de disposer de la loi de S_T permet d'effectuer des tirages dans cette loi et d'approcher toutes sortes de quantités définies par le profil de gains d'une option. Il faut bien comprendre qu'avec cette méthode, il suffit de spécifier une forme pour la fonction de densité de S_T et de disposer de la valeur des paramètres θ_Q pour parvenir à évaluer une option. Évidemment, il est préférable que cette forme possède un certain contenu économique.

Dans ce qui précède nous avons mené une argumentation économique pour passer du processus générateur de données à un processus tenant compte de l'absence d'opportunités d'arbitrage. Ce passage peut également s'effectuer en utilisant un procédé reposant uniquement sur des propriétés du calcul stochastique. La méthode employée est connue sous le nom de théorème de

Girsanov dont nous donnons l'énoncé dans l'annexe (A.2). Pour donner une intuition à ce résultat, nous pouvons constater que :

$$dS_t = \alpha_c S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad (1.35)$$

peut se réécrire :

$$\begin{aligned} dS_t &= (\alpha_c + r - r)S_t dt + \sigma S_t dB_t, \\ &= \frac{(\alpha_c - r)\sigma}{\sigma} S_t dt + r S_t dt + \sigma S_t dB_t, \\ &= r S_t dt + \sigma S_t dB_t^Q, \end{aligned} \quad (1.36)$$

où $dB_t^Q = dB_t - \eta dt$ et $\eta = (r - \alpha_c)/\sigma$. Évidemment, dB_t et dB_t^Q , ne partagent plus les mêmes propriétés statistiques. En effet, dB_t suit une loi normale d'espérance 0 et de variance $\sigma^2 t$ et est donc une martingale, tandis que dB_t^Q suit une loi normale d'espérance $-\eta t$ et de variance $\sigma^2 t$ et n'est donc pas une martingale.¹² L'idée sous-jacente au théorème de Girsanov est de fournir un référentiel dans lequel dB_t^Q suit une loi normale d'espérance nulle et est une martingale. On parle d'un *changement de mesure* qui laisse inchangée la structure du modèle. On dira que (1.35) est le processus générateur des données sous la mesure P et que (1.36) est un processus équivalent à P sous la mesure Q .

1.2.3 Sensibilité d'une option

L'un des avantages de la formulation analytique de la valeur d'une option obtenue par Black et Scholes (1973) est de permettre de mesurer la sensibilité du prix d'une option par rapport aux paramètres qui le déterminent. Nous supposons dans ce qui suit que le cours du sous-jacent est $S_t = 100$ €.

1.2.3.1 *delta* de l'option

Il s'agit de la sensibilité d'une option face aux variations du cours du sous-jacent. Plus précisément, le *delta* indique la variation, en unités, du prix de l'option pour une variation d'une unité du sous-jacent. Cette quantité permet également d'obtenir l'*élasticité* de l'option, c'est à dire la variation en pourcentage du prix de l'option suite à une variation de 1 % du prix du sous-jacent. Le *delta* est un indicateur précieux puisqu'il permet de déterminer le nombre d'options nécessaires pour couvrir une position en sous-jacent.

¹²Rappelons qu'un processus X_t est une martingale si $E(X_t|X_s) = X_s$ pour $s < t$.

1.2. Dérivations de la formule de Black et Scholes

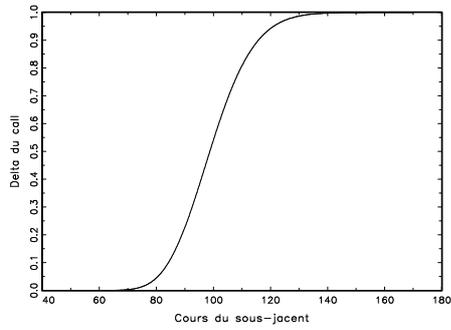


FIG. 1.6 – Le *delta* d'un call.

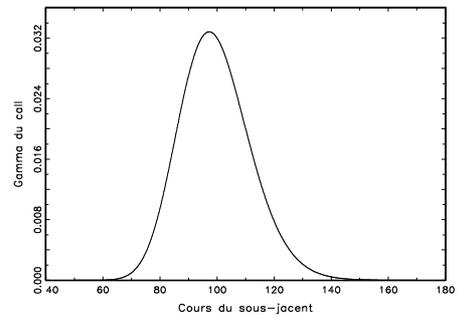


FIG. 1.7 – Le *gamma* d'un call.

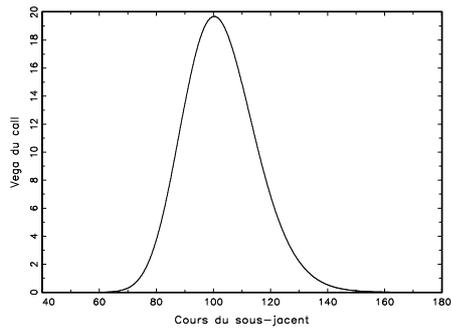


FIG. 1.8 – Le *vega* d'un call.

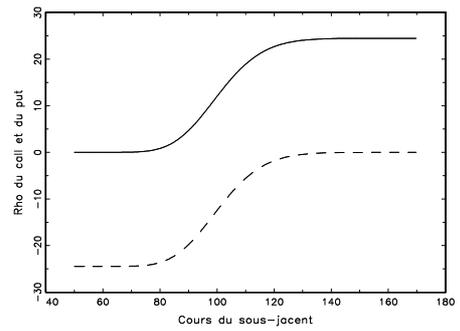


FIG. 1.9 – Le *rho* d'une option.

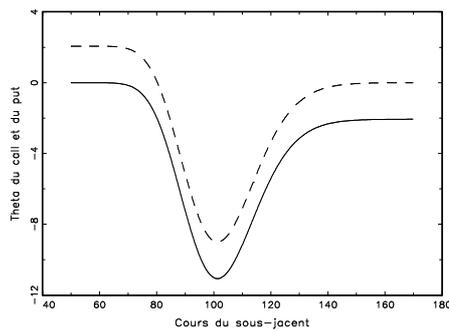


FIG. 1.10 – Le *thêta* d'une option.

On voit clairement dans le graphique 1.6 que le *delta* est une fonction non-constante du support. On conçoit alors aisément la difficulté de construire un portefeuille *delta*-neutre, insensible aux variations du support. Un tel portefeuille nécessitera une gestion dynamique. Mathématiquement, le *delta* est défini par la dérivée première de la formule de Black et Scholes (1973) par rapport au support.¹³ On a :

$$\delta_{call} = \frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(d_1) = \delta_{put} + 1, \quad (1.37)$$

où d_1 est défini dans l'équation (1.14), page 34. Dans le graphique 1.6, on peut observer que la sensibilité est maximale lorsque l'option est à la monnaie, c'est à dire lorsque l'exercice de l'option est le plus incertain. Notons que le *delta* d'un put est forcément négatif, de même que le *delta* d'un portefeuille constitué par la vente d'un call.

1.2.3.2 *gamma* de l'option

Le *gamma* d'une option représente la sensibilité du *delta* de l'option par rapport aux variations du support. Le *gamma* est défini comme la dérivée seconde de la formule de Black et Scholes (1973) par rapport au cours du sous-jacent. On a :

$$\gamma_{call} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\exp(-d_1^2)}{S\sigma\sqrt{2\pi T}} = \gamma_{put}. \quad (1.38)$$

Le *gamma* est maximal lorsque le prix du support avoisine le prix d'exercice. Il est très faible lorsque l'option est très en dehors ou dans la monnaie. En d'autres termes, il est plus rapide de passer d'un *delta* de 45 % à un delta de 50 % plutôt que de passer de 5 % à 10 %. Comme pour le *delta*, le *gamma* est exprimé en euros. Le *gamma* est représenté dans le graphique 1.7.

1.2.3.3 *vega* de l'option

Le *vega* mesure la sensibilité de la prime de l'option par rapport aux variations de la volatilité. Il est exprimé en euros. Dans le cadre de Black et Scholes (1973), il est défini comme étant la dérivée de la formule par rapport à la volatilité. On a :

$$vega_{call} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S^2 \sigma T \gamma_{call} = vega_{put}. \quad (1.39)$$

¹³Nous donnons dans l'annexe A.3 les détails de ce calcul.

Cette relation entre *vega* et *gamma* d'une option explique la similitude entre les deux courbes. Par ailleurs le graphique 1.8 montre également, toutes choses égales par ailleurs, qu'une option en dehors ou dans la monnaie est moins sensible aux variations de volatilité qu'une option à parité.

Le *vega* d'une option est une notion intéressante pour comprendre qu'un investisseur peut non-seulement jouer sur les variations du sous-jacent mais également sur les variations de la volatilité. Ainsi, supposons qu'un investisseur détienne une position dont le *vega* est positif, par exemple un portefeuille constitué d'un nombre égal de calls et de puts, tous deux à parité. Notons que cette position est localement *delta*-neutre, c'est à dire qu'elle est quasiment insensible aux petites variations du sous-jacent à cette date donnée, le *delta* provenant des calls étant annulé par le *delta* provenant des puts. On dira alors que l'investisseur est *long* en volatilité c'est à dire qu'il détient de la volatilité dans un sens analogue où il est long sur le sous-jacent avec un *delta* positif. En effet, avec un *delta* positif, l'investisseur va bénéficier de toute hausse sur le sous-jacent (toutes choses égales par ailleurs) comme s'il était détenteur du sous-jacent. De même avec un *vega* positif, l'investisseur va profiter de toute hausse de volatilité comme s'il était détenteur de la volatilité du sous-jacent. À présent, s'il effectue une opération qui fait décroître le *vega* de son portefeuille, par exemple en vendant une même quantité de calls et de puts, il aura diminué son exposition face aux variations de volatilité. En d'autres termes, il aura vendu de la volatilité. La difficulté dans ce genre d'opérations provient de la neutralisation du *delta*. Il est en effet très difficile de maintenir un portefeuille dont le *delta* est nul, et ce même pour des laps de temps courts, car en dehors des variations du sous-jacent, le temps joue également dans la modification du *delta*. Toutefois, on peut voir que même si la volatilité n'est pas un actif directement négociable, on peut effectuer des opérations à travers les options qui permettent de prendre en compte des anticipations la concernant.

1.2.3.4 *rhô* de l'option

L'influence du taux d'intérêt sur le prix de l'option est exprimée par le *rhô* de l'option. Dans le cas d'un call, plus le taux d'intérêt est élevé plus le prix de l'option l'est, et inversement, moins le put est cher.

Ce résultat s'explique intuitivement. Lorsqu'on achète une valeur mobilière, il faut emprunter, à un certain niveau de taux d'intérêt, les liquidités pour l'acquérir. Inversement, lorsqu'on vend à découvert un titre, on place les liquidités résultant de la vente à ce même niveau d'intérêt. Par conséquent, dans le cas d'un call qui est par définition un titre donnant le droit d'acheter le support, une hausse des taux d'intérêt fera monter le prix du call, car le

crédit auquel on va emprunter les liquidités sera plus cher. Le put donne le droit de vendre le sous-jacent, il ne permet pas, contrairement à la vente à découvert, d'encaisser immédiatement les liquidités pour les placer au taux sans risque. Cette perte d'opportunité se traduit donc par une diminution du prix du put.

Formellement, le $rhô$ est égal à :

$$\rho_{call} = \frac{\partial C}{\partial r} = KT \exp[-rT] \Phi(d_2) = KT \exp[-rT] - \rho_{put}, \quad (1.40)$$

où d_2 est défini dans l'équation (1.15), page 34. La figure 1.9 représente l'évolution du $rhô$ d'une option en fonction du cours (la courbe en pointillé est associée au put).

1.2.3.5 *thêta* de l'option

Le *thêta* désigne la sensibilité du prix de l'option par rapport au temps. Nous avons déjà remarqué que la valeur des options est d'autant plus élevée que la maturité est éloignée. Le *thêta* mesure la perte en euros due au passage du temps. Cette érosion de la prime est croissante et s'accélère à mesure que l'échéance se rapproche. On a :

$$\begin{aligned} \theta_{call} &= \frac{\partial C}{\partial T}, \\ &= -\frac{S\sigma \exp[-d_1^2/2]}{2\sqrt{2\pi T}} - rK \exp[-rT] \Phi(d_2), \\ &= \theta_{put} + rK \exp[-rT]. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Le graphique 1.10, illustre le fait qu'une option à la monnaie est particulièrement sensible au temps qui passe (dans cette zone, le *thêta* est fortement négatif). Au contraire, quand le cours du sous-jacent est éloigné du prix d'exercice, l'option est beaucoup moins pénalisée par le temps. On remarquera même que pour un put, la négativité du *thêta* n'est pas toujours vérifiée (courbe en pointillé).

1.3 Limites de la formule de Black et Scholes

Les hypothèses qui accompagnent le modèle de Black et Scholes (1973) peuvent apparaître contraignantes, voire irréalistes. D'autre part, la solution donnée ne concerne que les options de type européen. Il se trouve que

certaines restrictions peuvent être relâchées sans amener de changements majeurs dans la formule. C'est par exemple le cas lorsqu'on incorpore des dividendes, un taux d'intérêt ou une volatilité qui est fonction déterministe du temps. Lorsqu'on cherche à évaluer des options exotiques, une formule analytique n'est plus disponible, mais des simulations numériques permettent de déterminer le prix très facilement à partir des méthodes de Monte Carlo.

L'absence de frais de transaction est une condition cruciale pour pouvoir dupliquer un portefeuille sans risque, elle est également abusive, puisqu'aucun investisseur ne peut se placer sans subir de coûts même faibles. La prise en compte de ces frictions s'avère être délicate mais reste envisageable (voir Leland, 1985).

L'application de la formule de Black et Scholes (1973) se heurte toutefois à un écueil majeur. On constate empiriquement que la distribution des rendements n'est pas Gaussienne. Le modèle Brownien géométrique standard semble donc être inadéquat. Des processus alternatifs qui se prêtent encore à l'analyse menée par Black et Scholes, comme les modèles *CEV* (*Constant Elasticity Variance*) introduits par Beckers (1980), ont donc été proposés. Ils s'avèrent toutefois insuffisants pour expliquer l'écart systématique qu'on observe entre le prix du marché d'une option et son prix théorique.

On constate ainsi que pour avoir des prix théoriques conformes aux prix observés il faudrait, pour chaque option, injecter dans la formule de Black et Scholes (1973) une volatilité différente : la *volatilité implicite*. Cette notion a pris une place prépondérante dans la littérature et certaines régularités ont été mises en évidence. Elles remettent clairement en cause le modèle de Black et Scholes (1973) et en dessinent les limites.

1.3.1 Sous-jacent

Notre étude se focalisera sur des options de type européen dont le sous-jacent est un indice boursier, le CAC 40. Évidemment, la nature des sous-jacents peut être très diverse, par exemple des actions, des matières premières ou des devises. Dans ces cas, la formule de Black et Scholes (1973) peut s'adapter parfaitement, voir Black (1976b). Pour d'autres sous-jacents, et en particulier pour les options portant sur les taux d'intérêts, la formule semble inappropriée. Il nous est impossible de traiter dans cette sous-section l'ensemble de la littérature concernant ce sujet. Celui-ci est au moins aussi vaste que la littérature englobant les produits dérivés sur les actions. Nous donnons toutefois quelques éléments qui permettent de saisir les différences entre options sur actions et options portant sur des taux d'intérêts. Des exposés plus détaillés peuvent être trouvés dans les ouvrages de Wilmott (1998) ou Hull (2003), tandis que les articles de références sont : Vasiček (1977), Cox *et al.*

(1985), Ho et Lee (1986), Longstaff et Schwartz (1992), Heath *et al.* (1992) ou encore Brace *et al.* (1997). Deux obstacles majeurs se dressent à l'encontre de l'application de la formule de Black et Scholes (1973). Tout d'abord, en étudiant les propriétés statistiques des taux d'intérêts, on remarque immédiatement que ces séries sont stationnaires. Par conséquent, supposer un processus Brownien géométrique standard s'avère être une hypothèse peu judicieuse. D'autres spécifications permettant de prendre en compte cette stationnarité doivent donc être envisagées. Ces spécifications sont similaires à celles adoptées pour les *modèles à volatilité stochastique* que nous aborderons dans la prochaine section. Ensuite, les taux d'intérêts obéissent à une structure par terme. Pour être concis, le taux d'intérêt d'un emprunt à 10 ans ne va pas être égal au produit des taux d'intérêts au jour le jour. Il faut donc pouvoir prendre en compte cette caractéristique.

1.3.2 Options de type non-européen

Concernant les options de type américain, Merton (1973) montre qu'en l'absence de versement de dividendes, l'exercice prématuré d'un call américain n'a pas lieu d'être. Par conséquent le prix d'un call américain est égal au prix d'un call européen. Pour le cas où il y a versement de dividendes, Black (1975) a fourni une approximation du prix d'un call américain. Roll (1977), Geske (1979) et Whaley (1982) fournissent une solution dont la forme ressemble à la solution de Black et Scholes (1973).

Pour les options exotiques, la formule de Black et Scholes (1973) perd sa validité. En effet, les conditions aux bornes de l'équation différentielle que doit résoudre une option sont différentes pour une option exotique de celles d'un call européen. Toutefois l'approche risque-neutre permet l'évaluation de toutes sortes d'options exotiques. Dans la plupart des cas, il n'y a plus de solution analytique mais le recours à la méthode de Monte Carlo, développée dans l'annexe A.7, permet de déterminer un prix.

1.3.3 Temps continu

Merton (1990) offre une synthèse du courant de littérature concernant la possibilité de considérer les marchés financiers comme étant des lieux où les transactions s'effectuent de manière continue. Ainsi, Merton (1990) évalue le prix d'une option en tenant compte du caractère discret des échanges sur les marchés. Il montre la présence d'opportunités d'arbitrage qui dépendent de l'intervalle de temps entre les échanges. En supposant que le marché est assez liquide, il conclue que la formule de Black et Scholes (1973) est une

1.3. Limites de la formule de Black et Scholes

approximation valide. Le caractère discret des marchés ne peut donc pas être considéré comme un argument fatal à la formule de Black et Scholes (1973).

Par ailleurs, Cox *et al.* (1979) ont construit une procédure en temps discret connue sous le nom d'*arbre binomial*. Ils montrent qu'en faisant tendre l'intervalle de temps vers 0, on retrouve la formule de Black et Scholes (1973).

1.3.4 Dividendes

L'incorporation des dividendes dans la formule de Black et Scholes (1973) ne pose aucune difficulté. C'est même la généralisation la plus simple de la formule si on peut considérer que les dividendes sont versés de manière continue et à un taux D . Les options sur indices sont un exemple où cette hypothèse est vérifiée. Dans ce cas, le support évolue selon :

$$dS_t = (\alpha_c - D)S_t dt + \sigma S_t dB_t. \quad (1.42)$$

Il suffit alors de reprendre la discussion menée précédemment pour aboutir à la formule de Black et Scholes (1973) avec la correction suivante :

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - D + \sigma^2/2)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}}. \quad (1.43)$$

Pour des actions, on ne peut évidemment pas considérer cette hypothèse comme réaliste puisque dans les faits, le montant du dividende n'est pas connu jusqu'à une date proche du versement. Il est payé de manière discrète et son montant n'est pas proportionnel au cours du support. Dans ce cas, on peut se référer à Geske (1978) pour une prise en compte des dividendes stochastiques.

1.3.5 Taux d'intérêt constant

Black et Scholes (1973) considèrent que le taux d'intérêt sans risque est constant. Si cette hypothèse est peu réaliste, il est toutefois communément admis que la prise en compte d'un taux d'intérêt sans risque stochastique n'influe que marginalement le prix d'une option, voir par exemple Rubinstein (1985).

1.3.6 Frais de transaction

L'analyse de Black et Scholes (1973) requiert l'absence de frictions pour pouvoir construire à chaque instant un portefeuille sans risque. Pourtant les

coûts de transactions sont une réalité incontournable des marchés financiers. Même si le portefeuille ne peut être neutralisé en son delta que de manière discrète et avec des intervalles de temps tendant vers zéro, le nombre de transactions à effectuer tend vers l'infini. De ce fait, les coûts associés à ces opérations peuvent tendre vers l'infini. D'autre part, chaque investisseur est confronté à différents niveaux de coûts, ce qui implique que chaque investisseur évaluera le prix d'une même option différemment. Le premier modèle tentant de prendre en compte les coûts de transaction a été proposé par Leland (1985). Il parvient à retrouver la formule de Black et Scholes (1973) en apportant une modification à la volatilité. La nouvelle volatilité à injecter dans la formule de Black et Scholes (1973) est :

$$\hat{\sigma} = \sigma \sqrt{1 + \sqrt{\frac{2}{\pi} \frac{k}{\sigma \sqrt{\Delta t}}}}, \quad (1.44)$$

où k est le taux des coûts de transactions, et Δt est l'inverse du nombre de transactions effectuées. Zhao et Ziemba (2003) fournissent une revue de littérature récente à ce sujet.

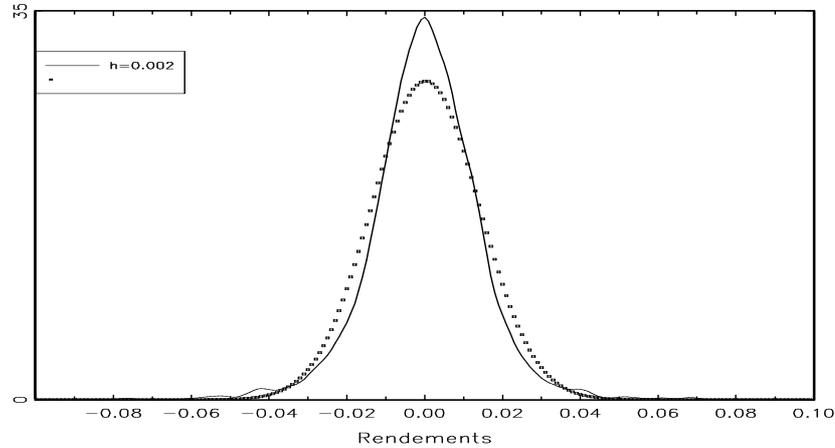
1.3.7 Processus Brownien

Si le processus Brownien géométrique standard apporte des facilités de calcul attrayantes, il demeure toutefois une approximation contestable de la réalité. Le graphique 1.11 témoigne de cet écart. Il est communément admis, depuis les travaux de référence de Mandelbrot (1963), Fama (1963, 1965), Blatteberg et Gonedes (1974) et Kon (1984) que la distribution des rendements est leptokurtique, c'est à dire que les événements extraordinaires se produisent plus fréquemment que la loi normale ne le permet.

Les modèles *CEV* (*Constant Elasticity Variance*) introduits par Beckers (1980) sont une extension au processus Brownien supportant l'argumentation à la Black-Sholes-Merton. Ils s'écrivent sous la forme générique suivante :

$$dX_t = \alpha_c X_t dt + \sigma X_t^\nu dB_t. \quad (1.45)$$

Suivants les valeurs de ν , la distribution de X_t possède des queues plus épaisses que la loi normale, sur la gauche (pour $\nu < 1$) ou sur la droite (pour $\nu > 1$). Ces modèles s'avèrent en pratique incapables de se rapprocher de manière sensible de la vraie loi des rendements.



La courbe en pointillé désigne la loi normale ajustée à la distribution des rendements observée sur la période du 3 janvier 1990 au 5 mars 2004.

FIG. 1.11 – Comparaison entre la loi normale et la loi des rendements

1.3.8 Volatilité constante

L'hypothèse de la volatilité constante est certainement la plus controversée.¹⁴ D'après Black et Scholes (1973), toutes les options ayant le même sous-jacent devraient avoir la même volatilité. Empiriquement ce n'est pas le cas et il est très facile de le montrer à travers la notion de *volatilité implicite*. Latané et Rendleman (1976) ont, les premiers, introduit ce concept. Partant du prix observé d'une option, la volatilité implicite de cette option est obtenue en inversant la formule de Black et Scholes (1973). La relation entre le prix de l'option et la volatilité étant bijective, à chaque prix correspond une seule volatilité.¹⁵ Cette relation n'est pas linéaire mais un algorithme simple, tel que l'algorithme de Newton-Raphson fourni en annexe A.6, permet de trouver la volatilité implicite. En exprimant la volatilité implicite comme fonction de la moneyness et du temps, nous observons des surfaces de volatilité ayant des allures semblables à celle fournie dans le graphique 1.12.

¹⁴Black (1976) a une remarque lapidaire : "if the volatility of a stock changes over time, the option formulas that assume a constant volatility are wrong."

¹⁵Ceci explique que sur les marchés une option est souvent caractérisée par sa volatilité implicite plutôt que par son prix.

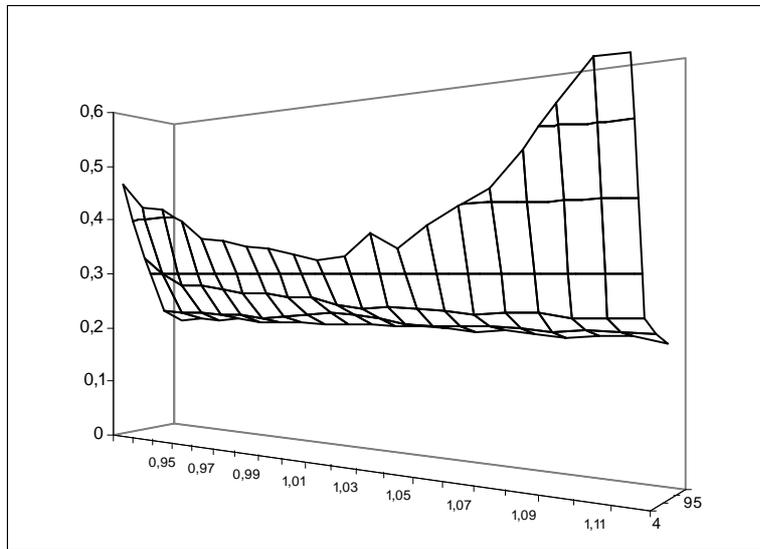


FIG. 1.12 – Surface de volatilité obtenue à partir des options traitées sur l'indice CAC 40 le 26 mars 2001 (en abscisse, la moneyness S/K , en ordonnée, le nombre de jours jusqu'à expiration, en côte, la volatilité implicite).

1.3.8.1 Faits stylisés sur la volatilité

Concernant la volatilité, de nombreuses régularités empiriques ont été trouvées. Les ouvrages traitant de l'économétrie de la finance offrent traditionnellement un catalogue de ces faits stylisés, on peut citer Campbell *et al.* (1997) ou Gouriéroux et Jasiak (2001). Un article complet sur ce sujet a été écrit par Pagan (1996). Nous présentons ici quelques unes de ces régularités empiriques.

La stationnarité de la volatilité : ce résultat se déduit par exemple par le caractère non-explosif du processus d'évolution du sous-jacent.

Le retour à une tendance de long terme ou *Mean reversion* est un caractère de la volatilité montré, entre autres par Scott (1987), French *et al.* (1987), Poterba et Summers (1986), Merville et Piepkea (1989), Stein (1989), Harvey et Whaley (1992) et Sheikh (1993). La volatilité oscille autour d'une valeur constante.

Le leverage effect traduit la corrélation négative entre les mouvements du support et le niveau de volatilité. Black (1976a) et Christie (1982) avancent

une explication économique : lorsque le cours d'une action baisse, l'endettement de la firme s'accroît, le risque de ne pas pouvoir rembourser ses dettes augmente ainsi que le niveau de la volatilité. Nelson (1991), Gallant *et al.* (1992, 1993) ou encore Engle et Ng (1993) ont étudié ce phénomène. Le leverage effect peut expliquer, mais en partie seulement, l'asymétrie constatée dans la distribution des rendements comme le montrent Schwert (1989), Beekaert et Wu (2000) ou Chen *et al.* (2001).

Différents régimes de volatilité peuvent être observés sur toute série de rendements. Pour le constater, il suffit de représenter les variations du support en fonction du temps. On observe très nettement des périodes où les rendements fluctuent de manière ample et d'autres où les variations sont minimes. Mandelbrot (1963) a le premier mis ce *clustering effect* en évidence. Des périodes de haute (basse) volatilité succèdent à des périodes de basse (haute) volatilité. Ce phénomène peut expliquer le caractère leptokurtique de la distribution des rendements.

1.3.8.2 Faits stylisés sur la volatilité implicite

L'effet *smile* a été mis en évidence par Rubinstein (1985) et les nombreuses études empiriques qui ont suivi, par exemple Dumas *et al.* (1998). Deux phénomènes apparaissent de manière systématique : 1) la volatilité des options en dedans et en dehors de la monnaie est supérieure à la volatilité des options à parité, 2) cette différence s'estompe avec une augmentation de la maturité. La première constatation est communément appelée effet *sourire* ou *smile*.¹⁶ L'interprétation d'un *smile* est simple : du fait de la relation monotone croissante entre le prix d'une option et sa volatilité, le *smile* traduit le fait que les options qui ne sont pas à la monnaie ont un prix sur le marché plus élevé que celui prédit par la formule de Black et Scholes (1973). Cela indique que le marché accorde une probabilité plus forte à des valeurs éloignées de la tendance centrale que celle d'une distribution log-normale. Le *smile* désigne traditionnellement une courbe symétrique dont le minimum est atteint pour les options à la monnaie. Empiriquement on constate que les options en dedans ont une volatilité supérieure aux options en dehors. On appelle cet effet *smirk* ou *skew*, il traduit une asymétrie de la distribution du prix du sous-jacent.

La seconde remarque concerne la *structure par terme* de la volatilité. Elle s'explique en vertu du *théorème central limite*. Si on suppose que les rendements sont distribués selon une loi inconnue mais dont les deux premiers

¹⁶Suivant la forme de la courbe, on parle également de *smirk*, *skew* ou encore *sneer*.

moments sont finis, alors la somme des rendements a une loi qui tend vers une loi normale d'espérance et de variance déterminées. Par conséquent, lorsque la date d'expiration d'une option est lointaine, l'hypothèse Gaussienne paraît correcte.

Contenu informatif de la volatilité implicite. Nous venons de voir que la volatilité implicite mettait en évidence une certaine insuffisance de la formule de Black et Scholes (1973) à évaluer correctement les options. Une autre caractéristique de la volatilité implicite est qu'elle peut être utilisée comme estimateur de la volatilité future. Latané et Rendleman (1976), Chiras et Manaster (1978), Beckers (1981), Day et Lewis (1992, 1993), Lamoureux et Lastrapes (1993), Jorion (1995) ou encore Christensen et Prabhala (1998), ont ainsi montré les capacités de la volatilité implicite à prédire la volatilité future. D'autres études ont des résultats plus contrastés voir par exemple Canina et Figlewski (1993) et Noh *et al.* (1994). Enfin, Giot (2002), Poon et Granger (2003) ou Szakmary *et al.* (2003) fournissent une revue de littérature récente sur ce sujet. Des études comme celles de Poterba et Summers (1986), Diz et Finucane (1993) ou Taylor et Xu (1994) ont, quant à elles, mis en évidence la stationnarité de la volatilité implicite et son auto-corrélation d'ordre 1.

1.3.9 Alternatives

Une première solution pour obtenir une volatilité non-constante consiste à exprimer la volatilité comme fonction du temps $\sigma(t)$. Dans ce cas, la formule de Black et Scholes (1973) reste applicable et il suffit de remplacer σ par :

$$\frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma(s) ds.$$

Cette approche reste toutefois insuffisante car elle ne prend pas en compte la dépendance par rapport à la moneyness. On peut alors envisager de faire dépendre σ de la date d'échéance et de la moneyness $k = S/K$ par une relation de la forme :

$$\sigma(T, k) = a_0 + a_1 T + a_2 k + a_3 T^2 + a_4 T k + a_5 k^2.$$

Ce sont les modèles à *fonctions de volatilité déterministe*, voir Dumas *et al.* (1998). Le problème qui se pose alors est de pouvoir donner une justification économique à cette technique et de fournir des outils permettant de déterminer les valeurs des paramètres $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$.

Dans les sections qui suivent, nous détaillons d'autres modèles ayant davantage de contenu économique et parvenant à produire des surfaces de volatilité plus compatibles avec les observations.

1.4 Modèles à volatilité stochastique

La recherche et la sélection d'un modèle sont toujours guidées par sa capacité à incorporer ou à expliquer les régularités empiriques décrites précédemment. Nous présentons ici les modèles à volatilité stochastique qui sont aptes à prendre en considération une partie de ces faits stylisés. Les modèles à volatilité stochastique prennent en compte le caractère aléatoire de la volatilité. Cette approche est économiquement plus satisfaisante que le dernier modèle décrit dans la section qui précède. Différentes spécifications ont été proposées, nous étudierons ici les plus répandues. Concernant l'évaluation du prix d'un call européen, nous baserons notre étude sur le modèle de Heston (1993). L'introduction d'une volatilité stochastique se traduit par l'existence d'une nouvelle source d'incertitude. Cette fois, contrairement à l'analyse de Black-Scholes-Merton, nous ne pouvons pas fournir un prix unique à un call sans formuler d'hypothèse sur les préférences des agents. Nous achèverons cette revue des modèles à volatilité stochastique en étudiant leurs impacts sur la surface de volatilité.

1.4.1 Différents modèles

Les modèles à volatilité stochastique sont des processus bivariés. Il en existe différentes spécifications. Le processus régissant les variations du support est identique pour toutes les spécifications et, il s'agit d'un processus Brownien géométrique :

$$dS_t = \alpha_c S_t dt + \sigma_t S_t dB_t. \quad (1.46)$$

Contrairement au modèle de Black et Sholes (1973), σ_t est maintenant aléatoire et est défini de manière générique par :

$$\begin{aligned} V_t &= g(\sigma_t), \\ dV_t &= m(V_t)dt + h(V_t)dW_t. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Les mouvements Browniens dB_t et dW_t sont éventuellement corrélés, on a $E(dB_t dW_t) = \rho dt$. Le coefficient ρ a un fort contenu économique car il représente le *leverage effect*.¹⁷ Pour faciliter les calculs, on retrouve parfois une

¹⁷Pour éviter toute confusion, nous précisons que ce ρ n'a aucun rapport avec le ρ de la section 1.2.3.4.

réécriture de ce modèle sous la forme :

$$\begin{aligned} dS_t &= \alpha_c S_t dt + \sigma_t S_t dB_t, \\ V_t &= g(\sigma_t), \\ dV_t &= m(V_t)dt + h(V_t)(\rho dB_t + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t), \end{aligned} \quad (1.48)$$

où cette fois dW_t et dB_t sont indépendants.

Les différents modèles envisageables sont issus de la spécification des fonctions g , m et h . Celles-ci doivent prendre en compte des considérations économiques mais également permettre une certaine commodité dans les calculs. Cinq modèles émergent de la littérature, et font tous partie de la classe des modèles *CEV* :

$$\begin{cases} m(V_t) = \kappa, h(V_t) = \gamma, V_t = \sigma_t, \\ d\sigma_t = \kappa\sigma_t dt + \gamma\sigma_t dW_t, \end{cases} \quad (1.49)$$

$$\begin{cases} m(V_t) = \kappa(\vartheta - V_t), h(V_t) = \gamma, V_t = \ln(\sigma_t^2), \\ d\ln(\sigma_t^2) = \kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^2)]dt + \gamma dW_t, \end{cases} \quad (1.50)$$

$$\begin{cases} m(V_t) = \kappa(\vartheta - V_t), h(V_t) = \gamma, V_t = \sigma_t, \\ d\sigma_t = \kappa(\vartheta - \sigma_t)dt + \gamma dW_t, \end{cases} \quad (1.51)$$

$$\begin{cases} m(V_t) = \kappa(\vartheta - V_t), h(V_t) = \gamma\sqrt{V_t}, V_t = \sigma_t^2, \\ d\sigma_t^2 = \kappa(\vartheta - \sigma_t^2)dt + \gamma\sigma_t dW_t, \end{cases} \quad (1.52)$$

$$\begin{cases} m(V_t) = \kappa(\vartheta - V_t), h(V_t) = \gamma V_t, V_t = \sigma_t^2, \\ d\sigma_t^2 = \kappa(\vartheta - \sigma_t^2)dt + \gamma\sigma_t^2 dW_t. \end{cases} \quad (1.53)$$

Le premier a été proposé par Hull et White (1987) et Wiggins (1987). Il s'agit d'un processus Brownien géométrique standard similaire à celui imposé pour le support. Il présente l'inconvénient majeur de ne pas être stationnaire. Ce type de spécification a été rapidement délaissé au profit des modèles générant un processus de volatilité stationnaire, du type retour à la moyenne, également appelés *mean-reverting*. Ceux-ci traduisent la présence d'une force de retour vers une tendance de long terme du processus de volatilité. La volatilité évolue autour d'un niveau de référence, noté ϑ dans les équations (1.50) à (1.53), le coefficient κ désigne la vitesse de rappel. Les spécifications (1.50) et (1.51) sont deux versions d'un même processus appelé *Ornstein-Uhlenbeck*. Nous verrons dans la section consacrée à l'estimation des modèles à volatilité stochastique qu'ils présentent de nombreux avantages d'un point de vue économétrique. Les papiers de référence traitant ce type de modèle sont Scott (1987) et Stein et Stein (1991) pour sa version simple, et Scott (1987), Chesney et Scott (1989) et Melino et Turnbull (1990) pour sa version logarithmique. L'équation (1.51) a été d'abord proposée par Cox *et al.* (1985)

pour modéliser les variations des taux d'intérêts, Heston (1993) l'a repris pour modéliser la volatilité. Il s'agit d'un modèle CEV dans sa version *racine carrée*. Cette écriture est la plus courante dans la littérature financière.¹⁸ Enfin, le *modèle linéaire* est donné par l'équation (1.53). Elle est issue de la littérature économétrique. Nelson (1990) montre que cette diffusion est la limite du modèle EGARCH qui, lui, est exprimé en temps discret.

Ce qui différencie ces modèles à volatilité stochastique est essentiellement d'ordre calculatoire. Pour certaines de ces équations différentielles stochastiques, plus précisément pour les formes (1.49), (1.50) et (1.51) nous disposons de la solution, obtenue par application de la formule d'Itô. Par ailleurs, la fonction de densité de la solution est connue pour chacun de ces modèles, ce qui peut constituer un avantage décisif pour l'évaluation d'options et l'estimation des paramètres.¹⁹ Pour chacun de ces modèles, nous fournissons dans l'annexe A.5 les solutions, lorsqu'elles sont disponibles, les lois de transition, ainsi que les conditions de stationnarité.

1.4.2 Évaluation d'un call européen

Supposer la volatilité comme étant stochastique équivaut à admettre l'existence d'une autre source d'incertitude. Pour construire un portefeuille sans risque, l'opérateur doit se prémunir des variations du sous-jacent et des variations de la volatilité. Malheureusement, la volatilité n'est pas un actif et il n'existe pas d'actif qui lui soit parfaitement corrélé. Par conséquent, nous ne pouvons pas dupliquer de manière unique un portefeuille générant le taux sans risque à partir du support et de calls. La seule façon de parvenir à déterminer un unique prix d'option est d'ajouter une hypothèse sur les préférences des agents. Le prix ainsi obtenu dépendra évidemment de l'hypothèse retenue. Il semble toutefois qu'un consensus se soit établi sur l'hypothèse à formuler.

L'obtention du prix d'une option du type européen s'effectue par la méthode de Cox et Ross (1976). Cela suppose que nous disposions d'une version neutre au risque du processus générateur des données. Nous allons présenter deux façons d'effectuer la neutralisation du risque. Ce sont les deux procédés les plus populaires. La première approche consiste à mener une argumentation économique et à effectuer des calculs similaires à ceux présents dans la démarche de Black et Scholes (1973). On utilise alors intensivement la for-

¹⁸Notons que le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck dans sa version simple mène au modèle de Cox-Ross-Ingersoll par une simple application de la formule d'Itô.

¹⁹Il est important de noter que ce sont les équations différentielles stochastiques associées à la volatilité qui ont des solutions. Le processus bivarié dans sa globalité n'a pas de solution analytique.

mule d'Itô pour parvenir à une équation différentielle stochastique que doit résoudre le prix d'un call. La seconde approche repose sur le théorème de Girsanov. Quelle que soit la démarche adoptée, prendre en compte l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage ne suffit plus à déterminer un prix unique pour l'option. Le marché est incomplet et une hypothèse supplémentaire est à formuler concernant les préférences des agents pour parvenir à un prix unique.

Nous développons à présent la première approche qui a été proposée par Heston (1993). On part du modèle suivant :

$$\begin{aligned} dS_t &= \alpha_c S_t dt + \sigma_t S_t dB_t, \\ d\sigma_t^2 &= \kappa(\vartheta - \sigma_t^2)dt + \gamma\sigma_t dW_t, \end{aligned} \quad (1.54)$$

avec $E(dB_t dW_t) = \rho dt$. On peut déterminer les variations du prix d'une option grâce à la formule d'Itô (voir l'annexe A.1.2). On obtient :

$$\begin{aligned} dC_t &= \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (dS_t)^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial \sigma^2} dS_t d\sigma_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial (\sigma^2)^2} (d\sigma_t^2)^2 + \frac{\partial C}{\partial t} \right) dt + \\ &\quad \frac{\partial C}{\partial S} dS_t + \frac{\partial C}{\partial \sigma^2} d\sigma_t^2. \end{aligned} \quad (1.55)$$

Comme $(dS_t)^2 = \sigma_t^2 S_t^2 dt$, $(d\sigma_t^2)^2 = \gamma^2 \sigma_t^2 dt$ et $dS_t d\sigma_t^2 = \rho \gamma \sigma_t^2 S_t dt$ (voir l'annexe A.1.4), l'équation (1.55) se réécrit :

$$\begin{aligned} dC_t &= \frac{\partial C}{\partial S} dS_t + \frac{\partial C}{\partial \sigma^2} d\sigma_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma_t^2 S_t^2 dt + \\ &\quad \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial \sigma^2} \sigma_t^2 S_t \gamma \rho dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial (\sigma^2)^2} \gamma^2 \sigma_t^2 dt + \frac{\partial C}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (1.56)$$

D'après l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, la variation du portefeuille est égale au montant investi dans le portefeuille multiplié par le taux sans risque. Nous devons donc avoir :

$$dC_t - \frac{\partial C}{\partial S} dS_t = r \left(C_t - \frac{\partial C}{\partial S} S_t \right) dt. \quad (1.57)$$

Cette égalité permet de parvenir à l'équation différentielle que doit vérifier

le prix de l'option :

$$r \left(C_t - \frac{\partial C}{\partial S} S_t \right) dt = \frac{\partial C}{\partial \sigma^2} d\sigma_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma_t^2 S_t^2 dt + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial \sigma^2} \sigma_t^2 S_t \gamma \rho dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial (\sigma^2)^2} \gamma^2 \sigma_t^2 dt + \frac{\partial C}{\partial t} dt. \quad (1.58)$$

Contrairement au résultat obtenu par Black et Scholes (1973), cette équation différentielle demeure stochastique par la présence d'un terme aléatoire dans $d\sigma_t^2$:

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma_t^2} d\sigma_t^2 = \frac{\partial C}{\partial \sigma_t^2} \kappa (\vartheta - \sigma_t^2) dt + \frac{\partial C}{\partial \sigma_t^2} \gamma \sigma_t dW_t.$$

Sa résolution amènerait donc à une infinité de solutions. C'est de cette façon que s'exprime l'incomplétude du marché. Pour obtenir une solution unique, Heston (1993) doit émettre une hypothèse supplémentaire qui concerne les préférences des agents. Il utilise un résultat issu d'une théorie d'équilibre général de Cox *et al.* (1985) pour remplacer :

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma_t^2} \gamma \sigma_t dW_t,$$

par un terme déterministe :

$$\eta_V(\sigma) \frac{\partial C}{\partial \sigma_t^2} dt.$$

La fonction $\eta_V(\sigma)$ est la prime accordée par le marché pour rémunérer le risque associé à la volatilité stochastique. Cox *et al.* (1985) ont montré que pour des fonctions de préférences quadratiques, $\eta_V(\sigma) = \eta_V \sigma^2$.²⁰ Dès lors, nous pouvons réécrire (1.58) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial \sigma_t^2} (\kappa (\vartheta - \sigma_t^2) - \eta_V \sigma_t^2) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma_t^2 S_t^2 dt + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial \sigma^2} \sigma_t^2 S_t \gamma \rho dt + \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial (\sigma_t^2)^2} \gamma^2 \sigma_t^2 dt - \frac{\partial C}{\partial t} dt - rC + r \frac{\partial C}{\partial S} S_t dt = 0. \end{aligned} \quad (1.59)$$

²⁰Il est important de noter que des formes plus souples peuvent être adoptées pour exprimer $\eta_V(\sigma)$. Par exemple, Broadie *et al.* (2000) et Chernov et Ghysels (2000) proposent de remplacer $\eta_V(\sigma) = \eta_V \sigma^2$ par $\eta_V(\sigma) = \eta_{V,1} + \eta_{V,2} \sigma^2$. Pan (2002) suggère même, sans toutefois l'appliquer à son étude, de considérer des formes du type : $\eta_{V,1} + \eta_{V,2} \sigma^2 + \eta_{V,3} \sigma^4 + \dots$. Ces auteurs ne précisent toutefois pas à quelles hypothèses sur les préférences correspondent de telles formes de prime de risque.

Cette expression est l'équation différentielle, associée à des préférences quadratiques et tenant compte de l'absence d'opportunités d'arbitrage, que doit vérifier le prix d'une option d'achat de type européen.²¹ En d'autres termes, c'est une version neutre au risque du processus générateur de données. Dès lors, nous pouvons appliquer la méthode d'évaluation du prix d'une option fournie par Cox et Ross (1976). Nous avons :

$$\begin{aligned}
 C_t &= \exp[-r(T-t)] \int_K^\infty (S_T - K) f(S_T) dS_T, \\
 &= \exp[-r(T-t)] \int_K^\infty f(S_T) dS_T - K \int_K^\infty f(S_T) dS_T, \\
 &= S_t P_1 - K \exp[-r(T-t)] P_2,
 \end{aligned} \tag{1.60}$$

où :

$$\begin{aligned}
 P_1 &= \int_K^\infty \frac{\exp[-r(T-t)] S_T}{S_t} f(S_T) dS_T, \\
 P_2 &= \int_K^\infty f(S_T) dS_T,
 \end{aligned}$$

et $f(S_T)$ désigne la loi du support à l'échéance. Nous pouvons remarquer que la dernière expression de (1.60) est analogue à la formule de Black et Scholes (1973). Le problème ici réside dans le fait que les expressions de P_1 et P_2 ne sont pas connues puisque la loi marginale de S_T n'est pas disponible. Pour obtenir l'expression de P_1 et P_2 , Heston (1993) montre que les fonctions caractéristiques des quantités P_1 et P_2 doivent satisfaire la même équation différentielle (1.59). Cette astuce permet à Heston (1993) de fournir l'expression de P_1 et P_2 sous une forme quasi-analytique. Leurs valeurs sont fournies en annexe A.7.3. Le calcul du prix d'une option revient alors à calculer des transformées de Fourier, ce qui peut être effectué sans difficultés majeures. De plus, l'avantage de l'écriture (1.60) est qu'elle permet de déterminer très facilement la sensibilité du prix d'une option par rapport à ses déterminants. Pour un modèle dont le processus de volatilité est un Ornstein-Uhlenbeck dans sa version simple, Schoebel et Zhu (1999) fournissent une

²¹Pour d'autres modèles à volatilité stochastique le raisonnement à mener est le même, seule l'hypothèse sur les préférences des agents va différer. Par exemple, pour le modèle Ornstein-Uhlenbeck dans sa version logarithmique, on va imposer des préférences logarithmiques (voir chapitre 3). Il est important de noter que le choix des préférences selon les modèles est essentiellement guidé par des raisons d'ordre calculatoire. Ainsi, imposer des préférences logarithmiques dans un modèle à la Cox-Ingersoll-Ross reviendrait à supprimer toute manipulabilité mathématique du modèle.

approche analogue à celle de Heston (1993) pour déterminer les quantités P_1 et P_2 dans ce cadre. Malheureusement, il n'est pas toujours possible de déterminer ces quantités. C'est par exemple le cas lorsque le processus de la volatilité est régie par un Ornstein-Uhlenbeck dans sa version logarithmique (voir Chourdakis, 2004). D'autres techniques pour l'évaluation concrète sont alors envisageables comme nous le verrons par la suite.

Un autre point important consiste à remarquer que l'équation différentielle (1.59) aurait pû être retrouvée à partir du processus bivarié suivant :

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma_t S_t dB_t, \\ d\sigma_t^2 &= \kappa^Q(\vartheta^Q - \sigma_t^2)dt + \gamma\sigma_t dW_t, \end{aligned} \quad (1.61)$$

avec $\kappa^Q = \kappa + \eta_V$ et $\vartheta^Q = \kappa\vartheta/(\kappa + \eta_V)$.²² Ce processus est la version risque-neutralisée du processus générateur de données, puisqu'il tient compte de l'absence d'opportunités d'arbitrage et des préférences des agents. On remarquera que la risque-neutralisation a aboutit à un changement de la valeur des paramètres sans altérer la structure du processus. Le système d'équations (1.61) peut être obtenu bien plus rapidement en appliquant le théorème de Girsanov (voir l'annexe A.2.2). La première étape consiste à remarquer que pour toute translation des Browniens :

$$\begin{aligned} dB_t^Q &= dB_t - \eta dt, \\ dW_t^Q &= dW_t - \eta_V dt, \end{aligned} \quad (1.62)$$

les processus :

$$\begin{aligned} dS_t &= (\alpha_c + \eta\sigma_t)S_t dt + \sigma_t S_t dB_t^Q \\ d\sigma_t^2 &= \kappa(\vartheta - \sigma_t^2)dt + \eta_V\gamma\sigma_t dt + \gamma\sigma_t dW_t^Q, \end{aligned} \quad (1.63)$$

sont équivalents au processus générateur de données formulé en (1.54). La seconde étape consiste à prendre en compte l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage. Nous avons alors $r = \alpha_c + \eta\sigma_t$, donc $\eta = (r - \alpha_c)/\sigma_t$. L'équation (1.63) s'écrit donc :

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma_t S_t dB_t^Q, \\ d\sigma_t^2 &= \kappa(\vartheta - \sigma_t^2)dt + \eta_V\gamma\sigma_t dt + \gamma\sigma_t dW_t^Q. \end{aligned} \quad (1.64)$$

Ici, on peut noter qu'il existe encore une infinité de mesures Q qui sont équivalentes suivant les formes que prend η_V . Pour obtenir une mesure unique,

²²Ici, il est facile de constater qu'il y a suridentifiabilité du terme η_V . Avec d'autres formes de spécification de la prime de risque, ce problème disparaît. Par exemple avec la spécification de Chernov et Ghysels (2000) évoqué juste au-dessus, on trouve que d'une part, la version risque-neutralisée est également de la même forme que la version sous la mesure objective et que d'autre part, $\kappa^Q = \kappa - \eta_{V,2}$ et $\vartheta^Q = \vartheta - \eta_{V,1}$.

il nous faut spécifier la forme de η_V . C'est l'hypothèse des préférences quadratiques déjà évoquée précédemment qui entre alors en jeu. Sous cette hypothèse, on a $\eta_V \gamma \sigma_t = \eta_V \sigma_t^2$. Dès lors l'équation (1.64) se réécrit :

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma_t S_t dB_t^Q \\ d\sigma_t^2 &= \kappa^Q(\vartheta^Q - \sigma_t^2)dt + \gamma \sigma_t dW_t^Q, \end{aligned} \quad (1.65)$$

où κ^Q et ϑ^Q ont déjà été définis. Finalement, le théorème de Girsanov nous garantit l'existence d'une mesure sous laquelle (1.65) est équivalente à (1.53) et où sous cette mesure, dB_t^Q et dW_t^Q sont des martingales. De plus, sous cette mesure, le processus (1.65) est cette fois le seul à être équivalent à (1.53). L'obtention de ce processus risque neutre permet d'envisager l'évaluation du prix d'une option avec la méthode de Cox et Ross (1976) comme précédemment.

Enfin, il faut souligner l'existence d'un cas particulier. Il s'agit du premier modèle à volatilité stochastique proposé par Hull et White (1987) et qui a joué un rôle déterminant dans le succès de ces modèles. Hull et White (1987) ont supposé que la prime de risque associée à une volatilité stochastique était nulle ($\eta_V = 0$), ce qui équivaut à dire que le risque associé à la volatilité est diversifiable par la détention des autres actifs échangés sur le marché. Dans ce cas, la risque-neutralisation amène à considérer le processus :

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma_t S_t dB_t, \\ d\sigma_t^2 &= \kappa(\vartheta - \sigma_t^2)dt + \gamma \sigma_t^2 dW_t. \end{aligned} \quad (1.66)$$

Le changement de mesure n'a pas entraîné de changements dans la valeur des paramètres décrivant le processus de volatilité. Comme nous disposons du processus risque neutre, nous savons, d'après Cox et Ross (1976), que le prix du call est donné par l'équation (1.19) que nous redonnons ici :

$$C_t = \exp[-r(T-t)] \int_K^\infty (S_T - K) f(S_T) dS_T. \quad (1.67)$$

Une simple manipulation inspirée des outils statistiques, la loi jointe est égale au produit de la loi conditionnelle par la loi marginale ($f(x, y) = f(x|y)f(y)$), permet de déduire que :

$$\begin{aligned} C_t &= \exp[-r(T-t)] \int_K^\infty (S_T - K) \int (f(S_T|\bar{V}_{t,T})f(\bar{V}_{t,T})d\bar{V}_{t,T}) dS_T, \\ &= \int \left[\exp(-r(T-t)) \int_K^\infty (S_T - K) (f(S_T|\bar{V}_{t,T})dS_T) \right] f(\bar{V}_{t,T})d\bar{V}_{t,T}, \end{aligned} \quad (1.68)$$

où

$$\bar{V}_{t,T} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(s) ds$$

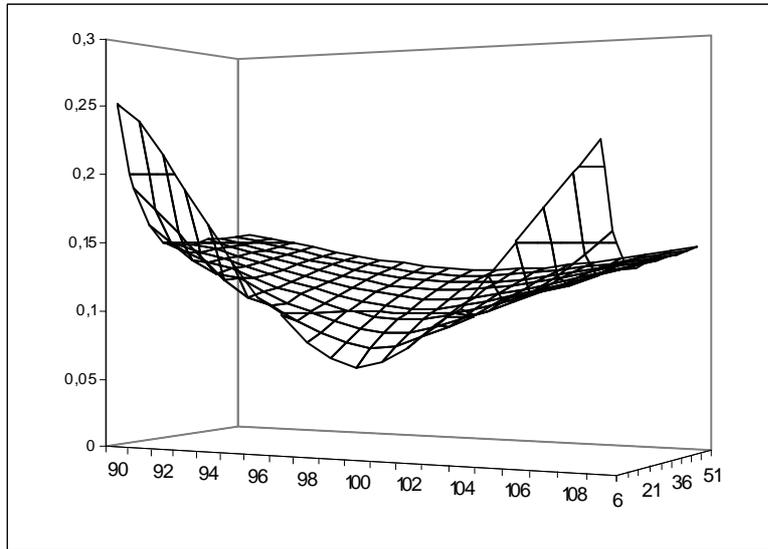
est la valeur moyenne de la variance σ^2 et $f(\bar{V}_{t,T})$ est la fonction de densité de $\bar{V}_{t,T}$. Les crochets servent à mettre en évidence que le prix d'une option d'achat de type européen est égal à la formule de Black et Scholes (1973) intégrée par rapport à la distribution de la moyenne de la variance sur la durée de vie restante de l'option. On a :

$$C_{HW} = \int C_{BS}(S_t, K, r, \bar{V}_{t,T}, T-t) f(\bar{V}_{t,T}) d\bar{V}_{t,T}. \quad (1.69)$$

L'évaluation de cette intégrale peut se faire par la méthode de Monte Carlo (voir l'annexe A.7.2.2). Notons également que la connaissance de la distribution de la volatilité est suffisante pour procéder à l'évaluation. Hull et White (1987) fournissent également une approximation analytique basée sur un développement limité et donnée dans l'annexe A.7.2.1.

1.4.3 Impact sur la surface de volatilité

Les modèles à volatilité stochastique ont tous pour point commun la capacité de générer des fonctions de distributions des rendements aux queues plus épaisses que la loi normale. Ils permettent donc de prendre en compte l'existence des variations de forte amplitude observées sur les marchés. D'un point de vue financier, ceci se traduit par la capacité à produire l'effet *smile*. Ainsi, Hull et White (1987) montrent que la formule de Black et Scholes (1973) surestime les options proches de la parité et sous-estime les options qui sont fortement en dehors ou dans la monnaie. Renault et Touzi (1996) montrent que le *smile* généré lorsque $\rho = 0$ est forcément symétrique. Lorsque $\rho \neq 0$, la distribution peut être asymétrique, et les modèles conduisent à une structure de la volatilité qui peut présenter l'effet *Skew*. Les graphiques (1.13) et (1.14) illustrent ces phénomènes. Le modèle et la formule utilisés pour produire ces graphiques est celui de Heston (1993). Suivant les valeurs de κ , ϑ et γ , nous pouvons modifier l'allure de la surface de volatilité. Ainsi, augmenter la variance du processus en augmentant γ va accentuer l'effet smile sur l'ensemble des échéances. Le coefficient κ , qui représente la vitesse d'ajustement du processus de volatilité à sa tendance à long-terme va jouer sur la persistance du smile selon les maturités. Plus κ est grand et plus vite l'effet smile sera estompé. Enfin, changer la valeur de ϑ revient à effectuer une translation verticale de la surface de volatilité.

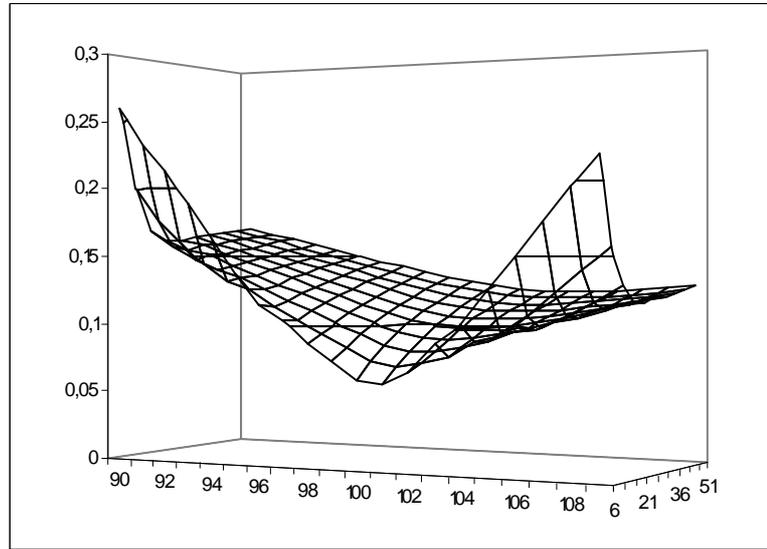


Les paramètres sont : $S_0 = 100$, $\rho = 0$, $\kappa = 5$, $\vartheta = 0.05$, $\gamma = 0.85$, $r = 0.03$

FIG. 1.13 – Surface de volatilité obtenue par un modèle du type Hull et White définie par l'équation (1.66). Les maturités vont de 6 à 51 jours.

Malgré la souplesse de ces modèles à volatilité stochastique, Das et Sundaram (1999) et Jiang (1999) ont mis en évidence un certain nombre de limitations. Par exemple, les smiles empiriques ont une profondeur importante pour des options proches de l'échéance. Il faut souvent imposer une valeur pour γ très élevée, voire irréaliste pour obtenir un smile issu du modèle théorique compatible avec le smile observé.²³ D'autre part, pour de telles valeurs de γ , le smile va s'étendre jusqu'aux échéances les plus lointaines. Or, on constate empiriquement que le smile est moins prononcé pour les options de grande maturité. Il faut donc avoir une valeur de κ suffisamment forte pour atténuer rapidement la profondeur du smile. Là encore, la valeur que doit prendre κ peut paraître peu plausible. Enfin, ayant épuisé tous les degrés de liberté à notre disposition pour calibrer la surface de volatilité théorique à celle observée, il ne nous reste plus d'instruments pour prendre en compte d'autres phénomènes éventuels.

²³Le terme profondeur doit être compris comme étant la différence entre la volatilité implicite la plus élevée et la moins élevée.



Les paramètres sont : $S_0 = 100$, $\rho = -0.35$, $\kappa^Q = 5$, $\vartheta^Q = 0.05$, $\gamma = 0.85$, $r = 0.03$

FIG. 1.14 – Surface de volatilité obtenue par un modèle du type Heston définie par l'équation (1.65). Les maturités vont de 6 à 51 jours

1.5 Modèles à sauts

Une alternative aux modèles à volatilité stochastique est constituée par les modèles à sauts. Ceux-ci parviennent à générer très facilement des fonctions de densité proches de celles issues d'une série de rendement (asymétrie et queues épaisses). Ils parviennent également à produire des surfaces de volatilité très souples pour les options dont l'échéance est rapprochée. On peut se référer à Bakshi *et al.* (1997), Das et Sundaram (1999) ou Jiang (1999) pour une étude sur les smiles générés par ce type de modèle et une comparaison avec ceux issus des modèles à volatilité stochastique.

1.5.1 Motivations

L'analyse de Black-Scholes-Merton repose sur le caractère continu des variations du support. Cela signifie que pour un court intervalle de temps, le support ne peut varier que d'un faible montant. Cette hypothèse implique que des fortes variations du cours, comme les crashes boursiers, n'existent pas. Il y a là une forte contradiction avec la réalité. Pour prendre en compte l'existence de ces phénomènes, Merton (1976) propose d'étendre le modèle de Black et Scholes (1973) en considérant que le support est généré par un

mélange d'une diffusion et d'un processus générant des valeurs non nulles seulement à certains instants. Ce sont les modèles à sauts, ou *Jump Models*.

Merton (1976) suppose ainsi que la variation totale du sous-jacent est composée de deux types de variations. Le premier type cause des changements marginaux de la valeur du sous-jacent, ce sont des variations provenant des "vibrations" normales du marché. L'impact de telles informations par unité de temps sur la valeur du support est faible. Cette composante du mélange est représentée par un processus Brownien géométrique standard avec une variance constante. La seconde composante reflète la présence sur le marché de "vibrations" anormales dues aux effets d'annonce spécifiques à une entreprise ou son secteur. Par sa nature, l'événement extraordinaire se produit seulement à des moments précis du temps. L'arrivée de cet événement extraordinaire est modélisée par un processus de Poisson, tandis que l'amplitude du choc est une variable aléatoire dont la loi est à déterminer. Le processus de Poisson est défini comme suit.

Nous supposons que l'arrivée d'une information exceptionnelle est modélisée selon une loi de Poisson d'intensité λt . On note N_t le nombre d'arrivées observées jusqu'à la date t . Ces arrivées sont supposées être indépendantes et identiquement distribuées. Nous avons $E[N_t] = \lambda t$ et la probabilité qu'un événement se produise dans un intervalle de durée très court h est :

$$p = \lambda h + o(h). \quad (1.70)$$

On peut signaler que, contrairement à un mouvement Brownien géométrique dB_t , le processus de Poisson tel qu'il est défini ici n'est pas une martingale. En effet, pour $s < t$, on a :

$$E[N_t | N_s] = E[N_t - N_s + N_s | N_s] = \lambda(t - s) + N_s \neq N_s.$$

Pour obtenir une martingale, il faut introduire la notion de processus de Poisson compensé. On pose $M_t = N_t - \lambda t$, où M_t est un processus de Poisson compensé, ou en d'autres termes, un processus de Poisson corrigé par son espérance. Dans ce cas :

$$E[M_t | M_s] = E[M_t - M_s + M_s | M_s] = E[N_t - N_s | N_s] - \lambda(t - s) + M_s = M_s.$$

Lorsque cette information importante arrive, il y a un tirage dans la distribution des chocs, c'est à dire dans la loi de la variable aléatoire J qui détermine l'amplitude relative de la nouvelle. L'impact sur la valeur du support est modélisé ainsi : si l'événement se produit entre t et $t + h$, la valeur du support en $t + h$ sera $S_{t+h} = S_t + S_t J$. Comme, pour h petit, on a :

$$\frac{dS_t}{S_t} \approx \frac{S_{t+h} - S_t}{S_t} = J,$$

on en déduit que J représente la variation relative du sous-jacent suite à un saut. La loi de $1 + J$ est donc définie sur l'ensemble des réels positifs. Ainsi, si $1 + J > 1$, le saut implique une hausse instantanée du prix du sous-jacent, tandis que $0 < 1 + J < 1$ signifie un décrochage du cours du support pouvant aller jusqu'à annuler le prix de l'actif.

Le modèle à sauts étudié par Merton (1976), est obtenu par l'ajout d'un processus de Poisson compensé au processus Brownien géométrique standard. L'équation différentielle stochastique que vérifie le support est :

$$dS_t = (\alpha_c - \lambda E[J])S_t dt + \sigma S_t dB_t + JS_t dN_t, \quad (1.71)$$

avec dN_t un processus de Poisson décrit par l'équation (1.70), dN_t vaut 1 si le saut a eut lieu et 0 sinon. On a aussi, dN_t et dB_t indépendants, λ est le nombre moyen d'arrivées par unité de temps et $E[J]$ est l'espérance de la variation relative J . Si $\lambda = 0$ et donc $dN_t = 0$, on retrouve bien le processus Brownien géométrique standard utilisé dans le modèle de Black et Scholes (1973).

Il existe une théorie similaire à celle des équations différentielles stochastiques pour les processus à sauts (voir Merton, 1990, Runggaldier, 2002, ou Cont et Tankov, 2003). Elle permet d'écrire la solution S_t de l'équation (1.71) :

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 \exp \left[\left(\alpha_c - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E[J] \right) t + \sigma B_t \right] \prod_{i=0}^{N_t} (1 + J_i), \\ &= S_0 \exp \left[\left(\alpha_c - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E[J] \right) t + \sigma B_t + \sum_{i=0}^{N_t} \ln(1 + J_i) \right]. \end{aligned} \quad (1.72)$$

ou encore :

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \left(\alpha_c - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E[J] \right) t + \sigma B_t + \sum_{i=0}^{N_t} \ln(1 + J_i). \quad (1.73)$$

Pour comprendre d'où vient cette solution, notons (t_j) pour $j = 1, \dots, n$ les dates auxquelles se produisent les sauts et (t_j^-) avec $j = 1, \dots, n$, les instants qui précèdent immédiatement les sauts. Sur l'intervalle de temps $[0; t_1[$, il n'y a pas de saut et les rendements évoluent selon le processus Brownien géométrique standard. Sur ce laps de temps, la solution du processus est identique à celle obtenue dans Black et Scholes (1973). On a :

$$S_{t_1^-} = S_0 \exp \left[\left(\alpha_c - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E[J] \right) t_1^- + \sigma B_{t_1^-} \right]. \quad (1.74)$$

Pour $t \in [t_1; t_2[$, le même raisonnement est applicable et nous avons :

$$S_{t_2^-} = S_{t_1} \exp \left[\left(\alpha_c - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E[J] \right) (t_2^- - t_1) + \sigma B_{t_2^- - t_1} \right]. \quad (1.75)$$

Sachant que $S_{t_1} = S_{t_1^-} (1 + J_1)$, l'équation (1.75) se réécrit :

$$S_{t_2^-} = S_{t_1^-} (1 + J_1) \exp \left[\left(\alpha_c - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E[J] \right) (t_2^- - t_1) + \sigma B_{t_2^- - t_1} \right]. \quad (1.76)$$

En remplaçant $S_{t_1^-}$ dans (1.76) par son expression donnée dans (1.74), on en déduit que pour $t \in [0; t_2[$ le processus du support est régi par :

$$S_{t_2^-} = S_0 \exp \left[\left(\alpha_c - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E[J] \right) t_2^- + \sigma B_{t_2^-} \right] (1 + J_1). \quad (1.77)$$

Finalement, ce raisonnement répété sur l'ensemble des instants où il y a eu un saut conduit à la solution (1.72).

Le fait de disposer de la solution permet également de déterminer la distribution du support à la date t . Nous partons de (1.73), la loi marginale de $\ln(S_t)$ s'écrit :

$$f[\ln(S_t)] = \int_0^{\infty} f_{\mathcal{N}}[\ln(S_t) | N_t = n] f(N_t) dN_t. \quad (1.78)$$

La loi de N_t est connue et est une loi de Poisson qui a un support discret, on a donc :

$$f[\ln(S_t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda t] (\lambda t)^n}{n!} f_{\mathcal{N}}[\ln(S_t) | N_t = n]. \quad (1.79)$$

La loi conditionnelle de $\ln(S_t)$ sachant le nombre de sauts dépend de manière cruciale de la loi dont est munie l'amplitude des sauts. Nous pouvons constater que supposer des sauts de taille log-normale contribue à simplifier grandement son expression. En effet, en admettant que $\ln(1+J) \sim \mathcal{N}(\alpha_J, \sigma_J^2)$, alors d'après la propriété d'additivité de la loi Gaussienne, nous avons :

$$\sum_{i=0}^n \ln(1 + J_i) \sim \mathcal{N}(n\alpha_J, n\sigma_J^2). \quad (1.80)$$

Dès lors, $\ln(S_t)$ sachant $N_t = n$ apparaît comme étant la somme de deux processus (la diffusion et la composante des sauts) Gaussiens. Sa loi est donc également une loi normale dont l'espérance est :

$$\begin{aligned} m_n &= E[\ln(S_t)|N_t = n] \\ &= \ln(S_0) + \left(\alpha_c - \lambda E(J) - \frac{\sigma^2}{2} \right) + n\alpha_J, \end{aligned} \quad (1.81)$$

et de variance :

$$\begin{aligned} s_n^2 &= V[\ln(S_t)|N_t = n] \\ &= \sigma^2 t + n\sigma_J^2. \end{aligned} \quad (1.82)$$

Notons que d'autres spécifications pour la loi des sauts vont considérablement compliquer l'expression de cette loi conditionnelle mais restent envisageables, voir par exemple Kou (2002) pour une amplitude des sauts distribuée selon une loi double-exponentielle, Hanson et Westman (2002) lorsque cette loi est une loi uniforme ou encore Chacko et Viceira (2003) pour une distinction entre sauts négatifs et positifs.²⁴ Finalement, nous déduisons de ces résultats que la loi marginale de $\ln(S_t)$ est un mélange infini de lois normales :

$$f[\ln(S_t)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^n}{n!} f_{\mathcal{N}}(\ln(S_t); m_n, s_n^2). \quad (1.83)$$

Deux remarques supplémentaires doivent être formulées. La première consiste à faire le parallèle entre la loi de $\ln(S_t)$ et la loi du support S_t proprement dite, nous avons :

$$f(S_t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda t)(\lambda t)^n}{n!} f_{\ln \mathcal{N}}(S_t; m_n, s_n^2). \quad (1.84)$$

Ce résultat découle de (1.83) et du lien entre la loi log-normale et la loi normale. Il peut également être obtenu à partir de la première ligne de l'équation (1.72) et en notant que les variables aléatoires log-normales sont stables par multiplication. Le second point concerne la quantité $E(J)$. Comme nous avons spécifié une loi log-normale pour $\ln(1 + J)$ cette espérance peut être calculée directement :

$$\begin{aligned} E(J) &= E(1 + J) - 1, \\ &= \exp(\alpha_J + \sigma_J^2/2) - 1. \end{aligned} \quad (1.85)$$

²⁴Voir également Das et Foresi (1996) pour une spécification similaire des sauts à celle de Chacko et Viceira (2003) mais avec une diffusion qui n'est plus un processus Brownien géométrique mais un Ornstein-Uhlenbeck, plus orienté vers la modélisation des taux d'intérêts.

1.5.2 Évaluation du prix d'un call européen

L'argumentation permettant de déterminer le prix d'une option dans le cadre des modèles à sauts est comparable à celle menée dans le cadre des modèles à volatilité stochastique. La prise en compte des sauts introduit une nouvelle source de risque. Ce risque va nous empêcher de déterminer un unique prix d'option. À nouveau il faut imposer une hypothèse sur les préférences des agents.

Merton (1976) fait une hypothèse similaire à celle de Hull et White (1987), à savoir que le risque est diversifiable.²⁵ Dans ce cas, Merton (1976) montre que le changement de mesure qui en découle n'affecte que la valeur de α_c qui doit être égale au taux sans risque r . Plus explicitement, cette risque-neutralisation nous conduit à considérer le processus suivant :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \lambda E[J])dt + \sigma dB_t + JdN_t. \quad (1.86)$$

En supposant, comme précédemment, que la distribution de l'importance des sauts est une loi log-normale, $\ln(1 + J) \sim \mathcal{N}(\alpha_J, \sigma_J^2)$, nous disposons de tous les éléments pour déterminer le prix d'un call européen. En effet, dans un monde neutre au risque, nous savons que :

$$C_t = \exp[-r(T - t)] \int_K^\infty (S_T - K) f(S_T) dS_T. \quad (1.87)$$

En utilisant les résultats exposés dans la section précédente et qui concernent la loi du support à l'échéance, le prix du call se réécrit :

$$C_t = \exp[-r(T - t)] \int_K^\infty (S_T - K) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda(T - t)][\lambda(T - t)]^n}{n!} \times f_{\ln \mathcal{N}}(S_T; m_n, s_n^2) dS_T, \quad (1.88)$$

où m_n s'écrit maintenant :

$$m_n = \ln(S_t) + \left(r - \lambda E(J) - \frac{\sigma^2}{2} \right) + n\alpha_J, \quad (1.89)$$

et s_n^2 est défini par (1.82). Nous pouvons immédiatement remarquer une certaine similitude entre cette expression et celle donnée par l'équation (1.27)

²⁵On parlera également de risque non-systématique ou de risque idiosyncratique. Cela signifie que les sauts ne se produisent pas en même temps sur l'ensemble des actifs.

1.5. Modèles à sauts

dans la section 1.2.2. Ici, le prix du call semble être égal à la somme de prix issus de la formule de Black et Scholes (1973) pour différentes valeurs de m_n et s_n^2 . Nous allons montrer que cette intuition est vérifiée. À cette fin, nous réarrangeons les termes de (1.88) de la façon suivante :

$$C_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda(T-t)][\lambda(T-t)]^n}{n!} \times \exp[-r(T-t)] \int_K^{\infty} (S_T - K) f_{\ln \mathcal{N}}(S_T; m_n, s_n^2) dS_T. \quad (1.90)$$

D'après (1.27), (1.33) et (1.34), nous pouvons remplacer la seconde ligne de l'équation (1.90) par :

$$\exp[-r(T-t)][E(S_T)\Phi(d_{1,n}) - K\Phi(d_{2,n})], \quad (1.91)$$

où :

$$\begin{aligned} d_{1,n} &= \frac{\ln[E(S_T)/K] + s_n^2/2}{s_n}, \\ d_{2,n} &= \frac{\ln[E(S_T)/K] - s_n^2/2}{s_n}, \\ E(S_T) &= \exp(m_n + s_n^2/2). \end{aligned} \quad (1.92)$$

Le prix du call est donc donné par :

$$C_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda(T-t)][\lambda(T-t)]^n}{n!} \times \exp[-r(T-t)][E(S_T)\Phi(d_{1,n}) - K\Phi(d_{2,n})]. \quad (1.93)$$

En remplaçant $E(S_T)$ par son expression dans les deux premières lignes de (1.92) et dans (1.93), on obtient, après quelques calculs simples, le résultat suivant :

$$C_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda(T-t)][\lambda(T-t)]^n}{n!} \exp[-\lambda E(J)(T-t)] \times \exp[n(\alpha_J + \sigma_J^2/2)] \underbrace{[S_t \Phi(d_{1,n}) - K \exp(-r_n) \Phi(d_{2,n})]}_{}, \quad (1.94)$$

où :

$$\begin{aligned} r_n &= (r - \lambda E(J))(T-t) + n(\alpha_J + \sigma_J^2/2), \\ d_{1,n} &= \frac{\ln(S/K) + (r_n + s_n^2/2)}{s_n}, \\ d_{2,n} &= \frac{\ln(S/K) + (r_n - s_n^2/2)}{s_n}. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Finalement, il suffit de remarquer que le dernier terme de l'équation (1.94) n'est autre que la formule de Black et Scholes (1973), et que par ailleurs :

$$\begin{aligned} \exp[n(\alpha_J + \sigma_J^2/2)] &= \exp(n \ln[1 + E(J)]), \\ &= [1 + E(J)]^n, \end{aligned} \quad (1.96)$$

pour aboutir à la formule de Merton (1976) :

$$C_{Merton} = \sum_{n \geq 0} \frac{\exp[-\lambda'(T-t)][\lambda'(T-t)]^n}{n!} C_{BS}(S_t, K, r_n, s_n, 1), \quad (1.97)$$

où :

$$\lambda' = \lambda[1 + E(J)]. \quad (1.98)$$

Le prix d'un call européen dans le cadre d'un modèle à sauts est donc égal à une somme pondérée de prix de Black et Scholes.

Considérons à présent le cas plus général où le risque associé aux sauts n'est pas diversifiable. Runggaldier (2002) fournit les outils d'une procédure permettant de passer de la mesure objective aux mesures risque-neutres. Partant du processus générateur du sous-jacent donné par (1.71) :

$$dS_t = (\alpha_c - \lambda E[J])S_t dt + \sigma S_t dB_t + JS_t dN_t, \quad (1.99)$$

on peut passer à une mesure équivalente Q qui comporte une translation du terme aléatoire de la diffusion et un changement de l'intensité du processus de Poisson de λt en $\psi \lambda t$ ($\psi \geq 0$). En effet, si l'on procède à un simple jeu de réécriture dans (1.99) qui consiste à rajouter et soustraire les mêmes termes, on a :

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= (\alpha_c - \lambda E[J])dt + \sigma dB_t + (\eta_S \sigma - \eta_S \sigma)dt \\ &\quad + (\lambda \psi E[J] - \lambda \psi E[J])dt + J dN_t. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Si, à présent nous réorganisons les termes de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= (\alpha_c + \eta_S \sigma - \lambda \psi E[J])dt + \sigma (dB_t - \eta_S dt) \\ &\quad + (\lambda \psi E[J] - \lambda E[J])dt + J dN_t, \end{aligned} \quad (1.101)$$

et que nous définissons les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} dB_t^Q &= dB_t - \eta_S dt, \\ dN_t^Q &= dN_t - \lambda E[J]dt + \lambda \psi E[J]dt, \end{aligned} \quad (1.102)$$

alors, la dynamique du sous-jacent sous ces nouvelles mesures \mathbb{Q} devient :

$$dS_t = (\alpha_c + \eta_S \sigma - \lambda \psi E[J])dt + \sigma dB_t^{\mathbb{Q}} + JdN_t^{\mathbb{Q}}. \quad (1.103)$$

On peut remarquer que le changement de mesure laisse la structure du modèle inchangée. En effet $dB_t^{\mathbb{Q}}$ reste un mouvement Brownien et $dN_t^{\mathbb{Q}}$ demeure un processus de Poisson. Par ailleurs, le théorème de Girsanov appliqué aux modèles à sauts assure l'existence d'une telle mesure (voir annexe A.2.3). On s'aperçoit également qu'avec ce procédé de neutralisation du risque, les processus équivalents à celui défini sous la mesure objective ne peuvent avoir que l'intensité des sauts qui change. À présent, prendre en compte l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage revient à poser :

$$r = \alpha_c + \eta_S \sigma. \quad (1.104)$$

Nous constatons alors qu'aucune contrainte sur ψ n'est formulée et donc qu'il existe une infinité de couples (η_S, ψ) qui vérifient cette condition. Par conséquent il existe encore une infinité de mesures équivalentes à P . Contrairement à ce qui se produit pour le modèle de Black et Scholes (1973), la prise en compte de l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage ne suffit donc pas à déterminer une unique mesure risque-neutre. Nous sommes donc confrontés à un problème similaire à celui rencontré dans les modèles à volatilité stochastique.

Plusieurs études ont été consacrées à déterminer les paramètres à partir d'arguments économiques. Hélas et contrairement aux modèles à volatilité stochastique, le changement de mesure à adopter est un débat ouvert et il n'y a pas encore de consensus sur le procédé de risque-neutralisation à adopter. Les études portant sur ce sujet sont, entre autres, Bates (1988, 1991, 1996, 2000), Naïk et Lee (1990), Ahn (1992), Amin (1993) ou Beinert et Trautmann (1995). Une revue de littérature plus récente est fournie par Runggaldier (2002) et par l'ouvrage de Cont et Tankov (2003). Le point de départ de la procédure pour trouver une unique mesure risque-neutre est, comme dans le cas des modèles à volatilité stochastique, d'utiliser une approche d'équilibre général. Sous certaines hypothèses il est possible de déterminer une seule mesure risque-neutre. Ainsi, si l'on se réfère à Bates (1988) ou Beinert et Trautmann (1995), en imposant : 1) une fonction de préférence logarithmique et 2) en supposant qu'un indice boursier est un bon proxy de la valeur d'un portefeuille constitué sur le marché, on peut déterminer une expression explicite des paramètres η_S , et ψ dans (1.103). On a :

$$\begin{aligned} \eta_S &= \frac{r - \alpha_c}{\sigma}, \text{ et} \\ \psi &= \exp(-\alpha_J + \sigma_J^2/2). \end{aligned} \quad (1.105)$$

Il est intéressant de remarquer que ces paramètres ne dépendent pas d'un nouveau coefficient comme c'était le cas dans la volatilité stochastique avec η_V . En revanche, ces hypothèses conduisent à ne considérer que l'existence d'une prime de risque associée à la fréquence des sauts et ôtent la possibilité de l'existence d'une prime de risque associée directement à l'amplitude des sauts.

Bates (1988, 2000) fournit alors un cadre plus général dans lequel la version risque-neutre du modèle de Merton (1973) s'écrit :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - \lambda^Q E[J^Q])dt + \sigma dB_t^Q + J^Q dN_t^Q, \quad (1.106)$$

où :

$$\begin{aligned} dB_t^Q &= dB_t - \eta_S dt, \\ dN_t^Q &= dN_t - \lambda E[J] + \lambda^Q E[J^Q], \end{aligned} \quad (1.107)$$

et,

$$\begin{aligned} \eta_S &= \frac{r - \alpha_c}{\sigma}, \\ \lambda^Q &= \lambda\psi = \lambda \exp(-\alpha_J + \sigma_J^2/2), \\ E[J^Q] &= E[J] + \eta_J = E[J] - \sigma^2/2. \end{aligned} \quad (1.108)$$

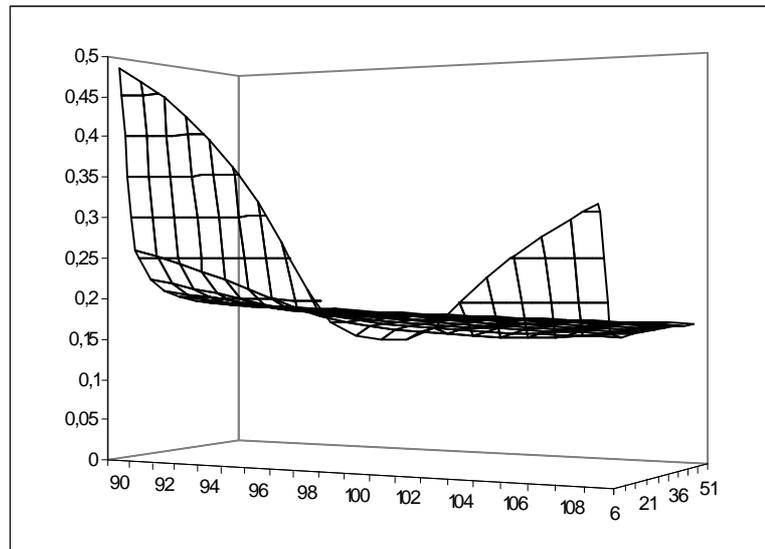
D'autre part, la loi de $\ln(1 + J^Q)$ demeure une loi normale où seule le paramètre d'espérance change. Les hypothèses nécessaires à l'obtention de ce processus risque-neutre sont : 1) les agents ont des préférences logarithmiques, et 2) la totalité de la richesse des agents est investie dans le sous-jacent.²⁶ Là encore, la totalité des paramètres risque-neutres peut être déduit à partir des seuls paramètres issus de la mesure objective. Cette remarque prendra toute son importance lorsqu'on cherchera à estimer les paramètres risque-neutre d'un modèle à sauts dans les rendements au chapitre 5. Bates (2000) souligne d'autre part, qu'étant données les valeurs pour ψ et η_J , nous avons forcément $\lambda^Q = \psi\lambda > \lambda$ et $E[Z^Q] < E[Z]$, c'est à dire que sous la version risque-neutre, la fréquence et l'amplitude des sauts sont plus fortes que sous la mesure objective.

À présent, ayant établi la forme du processus risque-neutre, nous pouvons étudier l'impact des sauts sur la surface de volatilité.

²⁶Le fait que la risque-neutralisation menée par Bates (1988), change l'intensité du processus de Poisson et la taille moyenne des sauts mais laisse en l'état les paramètres de variance, peut également être obtenue par un autre procédé de risque-neutralisation. Il s'agit de la *transformée d'Esscher*, voir par exemple Cont et Tankov (2003). Néanmoins cette technique ne donne pas de liens explicites entre les paramètres des deux mesures.

1.5.3 Impact sur la surface de volatilité

Les modèles à sauts permettent de générer des surfaces de volatilité souples comme en témoigne le graphique 1.15. Ainsi, le signe et l'amplitude des sauts vont déplacer l'asymétrie du smile. Si l'amplitude du saut à une espérance nulle, la surface de volatilité va être symétrique, dans les autres cas elle va être asymétrique et va donc présenter un effet skew. D'autre part, la variance du saut va jouer sur la profondeur du creux. En comparaison



Les paramètres sont : $S_0 = 100$, $\lambda = 5$, $\alpha_J = -0.03$, $\sigma_J = 0.03$, $\sigma = 0.15$, $r = 0.03$

FIG. 1.15 – Surface de volatilité obtenue par un modèle du type Merton avec des sauts log-normaux

avec les modèles à volatilité stochastique, les sauts ont ici un rôle similaire au coefficient de corrélation, ces deux quantités permettant de "jouer" sur l'asymétrie de la surface de volatilité. En fait, il existe deux différences notables entre l'impact des sauts et le coefficient de corrélation. Tout d'abord, pour des options d'échéance courte, les modèles à sauts semblent particulièrement adaptés pour reproduire des smiles en adéquation avec la réalité. Ils permettent en effet d'avoir des creux prononcés et une asymétrie importante tout en préservant des valeurs de paramètres plausibles. En revanche, Das et Sundaram (1999) et Jiang (1999) soulignent une certaine incapacité à refléter les caractéristiques de la surface de volatilité pour des échéances lointaines. Contrairement aux modèles à volatilité stochastique, les modèles à sauts produisent des surfaces de volatilité dont l'effet smile ou skew s'estompe très

rapidement avec l'augmentation de la maturité de l'option. Enfin, une dernière critique envers les modèles à sauts concerne l'évolution de la volatilité implicite des options à parité selon la maturité. Celle-ci est mathématiquement croissante avec la maturité (voir Das et Sundaram, 1999) ce qui va à l'encontre des constatations empiriques.

1.5.4 Lien entre les modèles à sauts et les mélanges de lois

La solution donnée dans (1.97) est une somme infinie de lois. C'est aussi une série, dont la valeur des termes décroît exponentiellement. Dans la pratique on peut donc sommer sur un nombre n fini de lois pour obtenir un prix d'option très proche de la valeur exacte. Par ailleurs, la loi de Poisson intervient clairement dans la solution (1.97), or celle-ci peut être approchée par la loi binomiale. Cette constatation conduit à envisager un mélange de lois log-normales à n composantes et de pondérations p_n comme approximation de la loi du support à l'échéance. La question qui se pose alors est, que faut-il supposer comme densité pour S_t ? Un élément de réponse est donné par la remarque suivante : supposer un mélange de lois normales à deux composantes seulement pour les variations du support à chaque instant t , conduit à obtenir un mélange à 2^{T-t} composantes pour la loi du support à l'échéance. C'est à dire que la loi du support à l'échéance est certainement suffisamment souple pour que l'on puisse considérer qu'elle peut être une bonne approximation d'un mélange infini de lois normales. Ritchey (1990) sans avoir, étonnamment, fait le lien avec les modèles à sauts, a donné une méthode simple pour évaluer des options dans le cas où les variations successives du support suivent un mélange de lois normales. Nous donnons sa procédure dans l'annexe A.7.5.

Nous signalons également les récents travaux de Leisen (2004) qui constituent sans doute une référence pour approfondir ce sujet concernant le lien entre modèles à sauts et modèles de mélange. Il montre, en particulier, ce qu'on peut constater aisément en effectuant une simple application, que le biais introduit par l'utilisation d'un modèle de mélange pour évaluer le prix des options est négligeable par rapport à l'utilisation de la formule donnée par Merton (1976).

1.5.5 Extensions

Cette dernière décennie a vu le développement de nouveaux modèles de plus en plus complexes pour décrire le processus du sous-jacent. Ainsi, Bates

(1996) a introduit une volatilité stochastique dans un modèle à sauts. Le processus du sous-jacent s'écrit alors :

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= \alpha_c dt + \sigma_t dB_t + J dN_t, \\ d\sigma_t^2 &= \kappa(\vartheta - \sigma_t^2)dt + \gamma\sigma_t dW_t,\end{aligned}\tag{1.109}$$

où dB_t et dW_t sont deux mouvements Browniens corrélés, $dB_t dW_t = \rho dt$, et où les sauts ont les mêmes caractéristiques que dans le modèle de Merton (1976). La motivation de ce type de modèle est de non seulement prendre en compte deux phénomènes empiriques établis mais également de pouvoir générer des surfaces de volatilité plus souples. Bates (1996) décrit la procédure de risque-neutralisation et parvient à déduire une forme quasi-analytique du prix d'un call européen. Plus précisément, il étend la méthode de Heston (1993) en passant par les fonctions caractéristiques et le calcul de transformées de Fourier. Un exposé clair de la dérivation de la formule du prix d'une option dans ce modèle peut être trouvé dans Bakshi *et al.* (1997), Scott (1997) ou encore dans l'ouvrage de Cont et Tankov (2003, p477-480). Ce modèle a connu un certain succès et des variantes ont été déclinées par la suite. Par exemple, Andersen *et al.* (2002) ont envisagé une autre spécification pour la volatilité, en l'occurrence un modèle Ornstein-Uhlenbeck dans sa version logarithmique. Ils ont également proposé, à l'instar de Bates (2000) et Pan (2002) une intensité $\lambda(t)$ du processus de Poisson dN_t non-constante et dépendante du niveau de volatilité. Les travaux de Pan (2002) constituent surtout une étude de référence davantage orientée vers les primes de risque associées aux sauts et à une volatilité stochastique. On peut consulter Chernov *et al.* (1999) pour d'autres spécifications de l'intensité du processus de Poisson. Chacko et Viceira (2003) se sont eux focalisés sur une autre spécification de l'amplitude des sauts. Plutôt que de considérer J comme étant une variable aléatoire distribuée selon une loi log-normale, ils ont proposé de dissocier les sauts négatifs $-J_d$ des sauts positifs J_u , chacune de ces deux variables étant distribuée selon une loi exponentielle.

Le modèle de Bates (1996) semble très attrayant puisqu'il englobe les modèles standard ce qui devrait permettre une meilleure adéquation entre une surface de volatilité théorique et une surface de volatilité empirique. En particulier, en combinant un modèle à sauts à un modèle à volatilité stochastique, on pourrait espérer associer les avantages des deux modèles en termes de surface de volatilité. Ainsi, la présence des sauts devrait compenser les lacunes d'un modèle à volatilité stochastique pour les options d'échéance courte, et inversement une volatilité stochastique devrait pallier les insuffisances d'un modèle à sauts pour les options de maturité longue. Dans les faits, les ré-

sultats sont plus mitigés. Bakshi *et al.* (1997), dans une étude empirique d'envergure qui vise à comparer les modèles à sauts, les modèles à volatilité stochastique et le modèle de Bates (1996), concluent que ce dernier modèle ne conduit pas réellement à une meilleure adéquation en termes de surface de volatilité. Les études de Bates (2000) et Pan (2002) corroborent ce résultat. Une mise en cause de la modélisation par une diffusion de la volatilité émerge clairement dans ces travaux. Aussi, Bakshi *et al.* (1997), Bates (2000), Pan (2002), mais aussi Duffie *et al.* (2000), Bakshi et Cao (2002), Eraker *et al.* (2003), Chen et Scott (2004), Eraker (2004), Broadie *et al.* (2004) et Raggi (2005) plaident en faveur de l'introduction de sauts dans la volatilité.²⁷

Duffie *et al.* (2000) parviennent à fournir une formule quasi-analytique du prix d'une option et montrent que la prise en compte des sauts dans la volatilité a un impact sensible sur la surface de volatilité. Plus particulièrement, les sauts dans la volatilité peuvent générer un effet skew prononcé pour les options d'échéance lointaine et produire une volatilité implicite décroissante en fonction de la maturité des option à parité. De même, Bakshi et Cao (2002), Eraker *et al.* (2003), Broadie *et al.* (2004) et Eraker (2004) montrent qu'il y a une réelle amélioration. Il s'agit là des modèles les plus souples disponibles à l'heure actuelle. Ils s'écrivent sous la forme :

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= \alpha_c dt + \sigma_t dB_t + Z dM_t, \\ d\sigma_t^2 &= \kappa(\vartheta - \sigma_t^2)dt + \gamma\sigma_t dW_t + J dN_t,\end{aligned}\tag{1.110}$$

où $E(dB_t dW_t) = \rho dt$, dM_t et dN_t sont deux processus de Poisson d'intensités λ_Z et λ_J . L'intensité λ_Z est éventuellement non-constante et dépendante du niveau de volatilité (voir Bates, 2000, Duffie *et al.*, 2000, Pan, 2002 ou encore Andersen *et al.*, 2002). La taille des sauts, J , dans le processus de volatilité est distribuée selon une loi exponentielle de paramètre μ_J . Cette hypothèse est nécessaire pour 1) éviter une volatilité négative et 2) obtenir une formule quasi-analytique du prix d'une option. Enfin, la taille des sauts dans le processus du sous-jacent, Z , peut être modélisée de deux façons différentes. La première consiste à supposer dM_t et dN_t indépendants ; les sauts dans la volatilité sont indépendants des sauts dans le processus du sous-jacent.²⁸ Dans

²⁷Bates (2000) et Chernov *et al.* (2003) avancent une autre modélisation possible, il s'agit des modèles à multi-facteurs. L'idée de ces modèles est d'injecter dans le processus du sous-jacent un second terme Brownien à la place d'un processus de Poisson. Bates (2000) tranche en faveur de sauts dans la volatilité.

²⁸Précisons que des sauts dans la volatilité peuvent produire une forte variation dans l'évolution des rendements. Nous devrions donc plutôt dire que les sauts dans le sous-jacent provenant des sauts dans la volatilité sont indépendants des sauts provenant du processus de Poisson dM_t .

ce cas, Z est distribuée selon une loi normale $Z \sim \mathcal{N}(\alpha_Z, \sigma_Z^2)$. Une autre spécification possible de Z consiste à dire que les sauts dans la volatilité et les sauts dans les rendements se produisent simultanément : $dM_t = dN_t$ et que l'amplitude Z dépend de la taille des sauts dans la volatilité J . Autrement dit, les tailles des sauts sont corrélées. Dans ce cas, la loi conditionnelle de Z est :

$$Z|J \sim \mathcal{N}(\alpha_Z + \rho_Z J, \sigma_Z^2). \quad (1.111)$$

Nous traiterons de l'impact des sauts (exclusivement) dans la volatilité dans le chapitre 3. Dans le chapitre 5 nous développerons un modèle similaire à celui donné dans (1.110).

Chapitre 2

Les méthodes d'estimation

Dans le chapitre précédent, nous avons exposé différents modèles d'évaluation des options. Chacun d'eux dépendait des paramètres de la loi supposée du support. Le problème traité dans ce chapitre consiste à fournir des outils permettant d'estimer ces paramètres.

Une première difficulté qui se présente est le caractère discret des observations disponibles alors que les modèles financiers sont exprimés en temps continu. Lorsque la solution du processus est connue, une discrétisation exacte est envisageable, c'est le cas par exemple du modèle de Black et Scholes (1973). Disposer de la solution n'est cependant pas une condition suffisante pour permettre l'utilisation de méthodes d'estimation simples. Ainsi, la discrétisation exacte du modèle à sauts de Merton (1976) conduirait à l'estimation de mélanges de lois normales dont le nombre de composantes est infini. Dans ce cas, le schéma de discrétisation suggéré par Ball et Torous (1983) peut être employé. Enfin, dans le cas des modèles comportant une volatilité stochastique, où la solution du processus bivarié n'est pas disponible, c'est le procédé de discrétisation d'Euler qui s'est imposé. L'étude et la réduction du biais induit par la discrétisation ont été traités par, entre autres, Gouriéroux *et al.* (1993) à travers la méthode d'*Inférence Indirecte*, ou Eraker (2001) dans une optique Bayésienne. L'existence d'un biais de discrétisation a également favorisé l'utilisation de données à haute fréquence. Toutefois, il est communément admis que pour estimer des paramètres annualisés, l'utilisation de données quotidiennes ne génère qu'un biais négligeable.

Un second problème, plus délicat à résoudre, concerne les modèles à volatilité stochastique. Nous avons déjà signalé l'absence de solution analytique pour ces processus bivariés. Il découle de ce résultat que la distribution de la solution est, elle aussi, inconnue. D'un point de vue économétrique, cela se traduit par l'impossibilité d'écrire la vraisemblance de manière explicite. Dès lors, l'estimation des paramètres est sérieusement compromise. La résolution

de ce problème a généré un vaste courant de littérature.

Enfin, une troisième difficulté apparaît lorsqu'on cherche à estimer les paramètres des différents modèles financiers sous leur forme risque-neutralisée. Dans cette version, les modèles financiers peuvent contenir des termes représentant la prime de risque associée à une volatilité stochastique ou à la présence de sauts.

La première section traite de l'estimation de σ dans le cadre de Black et Scholes (1973), et plus généralement de l'estimation des paramètres d'un processus Brownien géométrique. La deuxième section décrit les méthodes d'estimation pour les modèles à volatilité stochastique. La troisième section est consacrée aux méthodes d'estimation des modèles à sauts.

2.1 Estimation de σ dans Black et Scholes

Dans la formule de Black et Scholes (1973), le seul paramètre inconnu est la volatilité future σ du sous-jacent. L'estimateur naturel, proposé par Black et Scholes (1973), est l'écart-type des rendements sur une période passée. Cet estimateur est appelé la volatilité *historique* $\hat{\sigma}$. Son calcul est simple et il suffit pour cela de disposer de n prix du support sur une période allant de la date t_1 à la date t_n . La définition exacte de la volatilité historique est :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{t=t_1}^{t_n} (y_t - \bar{y})^2},$$

où $y_t = \ln(S_t/S_{t-1})$ est le rendement observé du sous-jacent à la date t , et \bar{y} est la moyenne des rendements observés sur la période. Plusieurs choix sont possibles pour la longueur de la période, l'espacement entre deux dates, et le moment auquel on observe le cours du support. On choisit, en général, de prendre des données quotidiennes basées sur le cours de clôture s'étalant sur une année ($n = 252$).

D'une manière plus générale, le problème qui se pose est l'estimation des paramètres d'une équation différentielle stochastique. Rappelons que le caractère continu des modèles financiers permet l'utilisation des techniques du calcul stochastique sans lesquelles l'évaluation du prix d'une option est compromise. Dans les faits, et même sur les marchés organisés les plus modernes, la cotation s'effectue en temps discret. Le défi lancé à l'économètre est donc de pouvoir estimer les paramètres d'un processus en temps continu avec des observations discrètes. Le point-clef qui permet d'appliquer une méthode d'estimation usuelle tel que le maximum de vraisemblance réside dans la capacité à écrire la solution de l'équation différentielle stochastique et à

déduire sa distribution. Ainsi, dans le cas du processus Brownien géométrique standard, l'estimation par maximum de vraisemblance ne pose pas de difficultés. En effet, partant de :

$$dS_t = \alpha_c S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad (2.1)$$

on peut déduire le processus de $\ln(S_t)$ en appliquant la formule d'Itô :

$$d\ln(S_t) = \left(\alpha_c - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t. \quad (2.2)$$

On obtient ainsi la solution S_t de l'équation différentielle stochastique (2.1) sachant que la valeur initiale est S_0 :

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\alpha_c - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right], \quad (2.3)$$

ce qui signifie que S_t est distribuée selon une loi-lognormale. Les rendements sur une période quelconque Δ s'écrivent $y_t(\Delta) = \ln(S_t/S_{t-\Delta})$ et sont distribués selon une loi normale d'espérance $\alpha_c - \sigma^2/2\Delta$ et de variance $\sigma^2\Delta$ puisque :

$$\begin{aligned} y_t &= \ln \left(\frac{S_t}{S_{t-\Delta}} \right), \\ &= \left(\alpha_c - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta + \sigma W_\Delta, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Si, à présent, nous supposons que Δ est le laps de temps entre deux observations, alors (2.4) est une discrétisation exacte de (2.1). En effet, (2.4) s'écrit plus simplement sous les formes :

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \sigma\sqrt{\Delta}\varepsilon_t, \\ f(y_t) &= f_{\mathcal{N}}(y_t; \alpha, \sigma^2\Delta), \end{aligned} \quad (2.5)$$

où $\alpha = (\alpha_c - \sigma^2/2)\Delta$. Pour estimer des paramètres annualisés avec T observations journalières, on pose $\Delta = 1/252$ où 252 représente le nombre de jours de cotations dans une année. La vraisemblance s'écrit simplement :

$$\mathcal{L}(y_t) = \prod_{t=1}^T f_{\mathcal{N}}(y_t; \alpha, \sigma^2\Delta). \quad (2.6)$$

La méthode du maximum de vraisemblance s'applique alors facilement et on obtient les estimateurs suivants :

$$\begin{aligned}\hat{\alpha} &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \Delta(y_t - \hat{\alpha})^2 \\ \hat{\alpha}_c &= \hat{\alpha} \Delta + \frac{\hat{\sigma}^2}{2}\end{aligned}\tag{2.7}$$

2.2 Estimation des modèles à volatilité stochastique

Dans le cas d'un processus univarié où seules les variations du support sont modélisées par un processus Brownien géométrique, nous avons vu que l'économètre devait faire face à un problème de discrétisation. Celui-ci se résout de manière assez simple, car une discrétisation exacte est disponible. Dans le cas d'un processus bivarié, où la volatilité évolue elle aussi de manière stochastique, il n'existe plus de solution analytique. Il découle de ce constat que la loi marginale de transition des rendements est inconnue ou n'est pas manipulable facilement puisqu'elle s'exprime sous forme d'intégrale. De plus, l'économètre est confronté à une difficulté supplémentaire : il s'agit du caractère inobservable de la volatilité. On parlera de modèles *latents*. Nous proposons ici une revue sommaire des principales solutions économétriques apportées à ces problèmes. Celles-ci peuvent être regroupées en trois catégories. La première catégorie rassemble les études parvenant à estimer l'ensemble des paramètres du processus bivarié à partir des seuls rendements. La seconde catégorie est composée de méthodes économétriques s'appuyant sur le fait suivant : puisqu'il s'agit d'estimer des paramètres de modèles permettant l'évaluation d'options, les prix observés des options semblent adaptés pour servir de données. Enfin, la troisième catégorie d'articles exploite la volatilité implicite, quantité observable, pour obtenir des inférences sur les paramètres de la volatilité instantanée.

2.2.1 Estimation à partir des rendements

Dans cette section, notre objectif est de fournir des méthodes d'estimation de l'ensemble des paramètres d'un processus bivarié, exprimé en temps continu, donné par les équations (1.46) et (1.47). Les seules données ob-

jectives utilisées par l'économètre sont les variations du cours du support. Celles-ci sont de nature discrète. Le premier constat à effectuer est qu'il n'existe pas de solution analytique à ce processus bivarié. Par conséquent, on ne peut pas envisager de discrétisation exacte à partir de laquelle on pourrait déduire une vraisemblance. La seule voie empruntable repose sur une discrétisation approchée. Plusieurs schémas de discrétisation sont envisageables, les plus populaires étant la méthode d'Euler et la discrétisation ARCH. Dans un premier temps nous développerons les méthodes d'estimation fondées sur la première méthode de discrétisation, puis, nous discuterons la discrétisation ARCH.

2.2.1.1 Les modèles à volatilité stochastique autorégressive

Ces modèles sont obtenus en effectuant une discrétisation d'Euler du processus bivarié donné par les équations (1.46) et (1.47). Parmi toutes les spécifications du processus de la volatilité, la version log-OU s'est très largement imposée dans les études empiriques. Nous allons donc poursuivre avec cette formulation. Rappelons qu'en temps continu nous avons :

$$\begin{aligned} dS_t &= \alpha_c S_t dt + \sigma_t S_t dB_t, \\ d \ln \sigma_t^2 &= \kappa(\vartheta - \ln \sigma_t^2) dt + \gamma dW_t. \end{aligned} \quad (2.8)$$

La première étape de la discrétisation donne :

$$\begin{aligned} S_{t+\Delta} - S_t &= \alpha_c S_t \Delta + \sigma_t \sqrt{\Delta} S_t u_t, \\ \ln \sigma_{t+\Delta}^2 - \ln \sigma_t^2 &= \kappa(\vartheta - \ln \sigma_t^2) \Delta + \gamma \sqrt{\Delta} v_t, \end{aligned} \quad (2.9)$$

où Δ désigne le pas de la discrétisation, par exemple, pour des données quotidiennes, on a $\Delta = 1/252$, et les paramètres à estimer sont annualisés. Enfin, u_t et v_t sont deux termes d'erreurs Gaussiens d'espérance nulle et de variance 1.¹ Cette expression peut se réécrire sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_c \Delta + \exp[h_t] \sqrt{\Delta} u_t, \\ h_t &= \ln \sigma_t^2, \\ h_{t+\Delta} &= \mu + \beta h_t + \delta v_t, \end{aligned} \quad (2.10)$$

où y_t désigne le rendement du support et où $\mu = \kappa\vartheta\Delta$, $\beta = 1 - \kappa\Delta$ et $\delta = \gamma\sqrt{\Delta}$. Finalement, les variations entre deux observations sont modélisées suivant la forme standard :

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha + \exp[h_t] \sqrt{\Delta} u_t, \\ h_t &= \ln \sigma_t^2, \\ h_t &= \mu + \beta h_{t-1} + \delta v_t. \end{aligned} \quad (2.11)$$

¹Si les deux mouvements Browniens sont corrélés, on discrétisera (1.48).

Les autres spécifications peuvent être discrétisées de la même façon. Des études approfondies sur les propriétés de ces modèles à volatilité stochastique discrets ont été menées par Taylor (1994) et Ghysels *et al.* (1996). Une revue de littérature récente portant sur l'estimation de ces modèles est fournie par Broto et Ruiz (2002). Ces modèles présentent l'avantage de converger fortement vers les modèles en temps continu pourvu que les données soient observées avec une fréquence assez élevée (des données journalières semblent suffire). À l'instar des modèles à volatilité stochastique exprimés en temps continu, la fonction de densité de transition des y_t n'est pas connue. Il en découle que le calcul de la vraisemblance s'avère complexe. Plus précisément, pour pouvoir écrire la fonction de vraisemblance de la loi marginale des y_t , il nous faut intégrer la fonction de densité jointe des rendements et de la volatilité par rapport à la loi de la volatilité. Formellement, en adoptant les notations $y = y_1, \dots, y_T$, $h = h_1, \dots, h_T$ et $\theta = (\alpha, \mu, \beta, \delta)$, la vraisemblance est donnée par :

$$f(y|\theta) = \int f(y|h, \theta) f(h|\theta) dh, \quad (2.12)$$

où la dimension de l'intégrale est égale à la taille de l'échantillon T . Évidemment, le cas idéal serait de disposer d'une volatilité observable. En effet, l'estimation des paramètres ne poserait pas de difficultés et s'effectuerait à travers la loi jointe de (y, h) d'où l'on pourrait déduire la vraisemblance suivante :²

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(y_t, h_t) = & \prod_{t=1}^T \frac{1}{(2\pi h_t)^{T/2}} \exp\left(-\frac{[y_t - \alpha]^2}{h_t^2}\right) \times \\ & \frac{1}{(2\pi h_t)^{T/2}} \exp\left(-\frac{[\ln(h_t^2) - \mu - \beta \ln(h_{t-1}^2)]^2}{2\delta^2}\right). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Les méthodes d'estimation fondées sur les moments On conçoit aisément que le type de vraisemblance donnée par (2.12) ne se prête pas facilement à des calculs. Par ailleurs, nous savons que les modèles à volatilité stochastique sont stationnaires et que les moments sont facilement calculables. C'est pourquoi les premières tentatives faites pour estimer les paramètres d'un modèle à volatilité stochastique discret sont fondées sur la méthode des moments et ses extensions : la méthode des moments généralisés introduite par Hansen (1982), la méthode des moments simulés (Duffie

²Un certain nombre de techniques d'estimations, que nous allons détaillées par la suite, consiste justement à rendre la volatilité instantanée observable, soit en la remplaçant par une estimation, soit en fournissant une approximation. Nous emploierons alors un procédé connu sous le nom d'*augmentation de données*.

et Singleton, 1993) ou encore la méthode des moments efficients (Gallant et Tauchen, 1996). Ces estimateurs reposent sur la convergence des moments de l'échantillon vers leurs espérances. Ils sont convergents et asymptotiquement normaux. De plus, la procédure est simple à mettre en oeuvre. On peut se référer aux travaux de Taylor (1986), Chesney et Scott (1989), Melino et Turnbull (1990), Andersen (1994) ou encore Andersen et Lund (1997) pour des applications en finance.

Pour illustrer la méthode des moments, reprenons le modèle (2.11), dans lequel nous posons $\alpha = 0$. Nous savons que la loi de $h_t = \ln \sigma_t^2$ est une loi normale de paramètres $\mu_h = \mu/(1 - \beta)$ et de variance $\sigma_h^2 = \delta^2/(1 - \beta^2)$. On en déduit, par exemple, les moments d'ordre m , $E(y_t^m)$, avec $m = 1, 2, 3, 4$:

$$\begin{aligned} m_1 &= E(y_t) = 0, \\ m_2 &= E(y_t^2) = E(\sigma_t^2 u_t^2) = E(\exp[h_t]) E(u_t^2), \\ &= \exp(\mu_h + \sigma_h^2/2), \\ m_3 &= E(y_t^3) = E(\sigma_t^3) E(u_t^3) = 0, \\ m_4 &= E(y_t^4) = 3 \exp(2\mu_h + 2\sigma_h^2). \end{aligned}$$

En égalisant ces espérances à leur moments empiriques $1/T \sum_{t=1}^T y_t^m$, on est amené à résoudre un système de 4 équations à 3 inconnues (μ, β, δ). Prendre un nombre d'équations supérieur au nombre de paramètres permet de prendre en compte davantage d'informations. On peut alors être confronté à l'absence de solutions. La méthode des moments généralisés apporte une bonne méthode de résolution du système liant les observations aux paramètres. En notant $g_T(\theta)$ la relation qui lie les observations aux paramètres (dans le cas précédent g serait un vecteur à 4 composantes dont chaque élément serait la différence entre le moment théorique et le moment empirique), l'estimateur de la méthode des moments généralisés, $\hat{\theta}_T$, est solution de :

$$\hat{\theta}_T = \underset{\theta}{\text{Arg min}} g_T(\theta)' \Omega_T g_T(\theta), \quad (2.14)$$

où Ω_T désigne une matrice de produit scalaire de dimension égale au nombre d'équations et dont les éléments diagonaux reflètent l'importance accordée à l'adéquation entre le moment d'ordre empirique et le moment d'ordre théorique.

Cette procédure présente toutefois un inconvénient majeur puisqu'il est connu que d'un point de vue théorique, les méthodes d'estimations fondées sur les moments sont sous-optimales en termes d'efficacité par rapport aux méthodes fondées sur la vraisemblance.

Il faut également souligner l'apparition de nouvelles méthodes d'estimation fondées sur la fonction caractéristique, voir par exemple Carrasco *et al.* (2003) ou Chacko et Viceira (2003), qui sont apparentées à la méthode des moments généralisés.

Méthodes fondées sur la vraisemblance Les méthodes d'estimation utilisant la vraisemblance peuvent être classées en deux catégories. La première part du modèle (2.11), la seconde utilise un modèle qui a été *linéarisé* :

$$\begin{aligned} \ln y_t^2 &= c + h_t + \ln(u_t)^2, \\ h_t &= \ln \sigma_t^2, \\ h_t &= \mu + \beta h_{t-1} + \delta v_t, \end{aligned} \tag{2.15}$$

où $c = \ln(\alpha)$.

Méthodes s'appliquant à y_t Deux alternatives possibles ont été plus particulièrement étudiées. Elles permettent l'estimation des paramètres du modèle tel qu'il est écrit en (2.11). Il s'agit de la méthode du Maximum de Vraisemblance Simulée (MVS) décrite dans Danielsson et Richard (1993) et l'approche Bayésienne par la Méthode de Monte Carlo par Chaînes de Markov (MCMC) développée par Jacquier *et al.* (1994). Des applications de la première approche peuvent être trouvées dans Danielsson (1994) et Liesenfeld (1998, 2001). Cependant, la méthode du MVS souffre de ne pas pouvoir s'adapter facilement à d'autres spécifications que celle donnée dans (2.11) comme l'indiquent Danielsson (1998) et Shepard (2000). Aussi, nous préférons étudier en détail l'approche suggérée par Jacquier *et al.* (1994). Pour alléger les notations, nous supposons que $\alpha = 0$ et désignons par θ l'ensemble des paramètres (μ, β, δ) .

Tout d'abord, Jacquier *et al.* (1994) réinterprètent la spécification du modèle à volatilité stochastique comme étant une structure hiérarchique à trois niveaux de distributions.

1. $f_{\mathcal{N}}(y_t|h_t)$,
2. $f_{\ln \mathcal{N}}(h_t|\theta)$,
3. $f(\theta)$.

Le premier niveau signifie que la distribution conditionnelle de $y_t|h_t$ est une loi normale, le second niveau signifie que la distribution conditionnelle $h_t|\theta$ est la loi log-normale. Enfin, comme on se place dans un cadre Bayésien, on affecte une loi a priori aux paramètres θ . Dans ce contexte, l'équation de la volatilité stochastique, gouvernée par la loi $f_{\ln \mathcal{N}}(h_t|\theta)$, peut être considérée comme une loi a priori pour h_t . En d'autres termes, h_t est vu comme un paramètre dans le niveau 1, et on lui affecte donc naturellement une loi a priori. Nous avons, d'une certaine façon, *augmenté* les paramètres avec le vecteur de volatilité inobservable $h = (h_1, \dots, h_T)$. Cette idée est connue sous le nom d'*augmentation des données* et a été introduite par Tanner et Wong (1987). La loi a posteriori jointe de l'ensemble des paramètres (h, θ) est donnée par

le théorème de Bayes et est proportionnelle au produit de la vraisemblance $f(y|h) = \prod_{t=1}^T f_{\mathcal{N}}(y_t|h_t)$ et des lois a priori $f(h|\theta) = \prod_{t=1}^T f_{\ln \mathcal{N}}(h_t|\theta)$ et $f(\theta)$:

$$f(h, \theta|y) \propto f(y|h)f(h|\theta)f(\theta). \quad (2.16)$$

À partir de cette loi a posteriori, on peut utiliser la loi marginale $f(\theta|y, h)$ pour estimer les paramètres et la loi marginale $f(h|\theta, y)$ pour générer des volatilités. Le problème qui se pose est de pouvoir simuler des observations à partir de cette loi a posteriori. Ceci peut être fait grâce à l'échantillonnage de Gibbs. Le principe de cet algorithme, proposé par Gelfand et Smith (1990), consiste à décomposer la loi a posteriori jointe en des distributions conditionnelles univariées dont il est possible de simuler des tirages. En tirant de manière itérative dans chacune de ces lois univariées, on dispose d'observations issues de la loi a posteriori jointe.

Dans le cas d'un modèle à volatilité stochastique, Jacquier *et al.* (1994) décomposent la loi a posteriori jointe en deux blocs : $f(\theta|y, h)$ et $f(h|\theta, y)$. En fixant des lois a priori conjuguées pour les éléments de θ , on trouve facilement les lois a posteriori conditionnelles pour chacun des paramètres composant θ . Le bloc $f(h|\theta, y)$ peut lui aussi être scindé en T fonctions de densité univariées $f(h_t|\theta, y_t)$. On peut alors remarquer que pour t donné, le terme h_t intervient aussi bien dans la loi de $h_t|h_{t-1}$ que dans la loi de $h_{t+1}|h_t$. Par conséquent, la loi $f(h_t|\theta, y_t)$ s'écrit de manière plus précise $f(h_t|h_{t-1}, h_{t+1}, \theta, y)$. Malheureusement, le noyau de cette fonction de densité ne correspond à aucune loi usuelle, on a en effet :

$$\begin{aligned} f(h_t|h_{t-1}, h_{t+1}, \theta, y) &\propto f(y_t|h_t)f(h_t|h_{t-1})f(h_t|h_{t+1}) \\ &\propto \underbrace{\frac{1}{\sqrt{h_t}} \exp\left(-\frac{y_t^2}{2h_t}\right)}_{f(y_t|h_t)} \underbrace{\frac{1}{h_t} \exp\left[-\frac{(\ln h_t - a_t)^2}{2b^2}\right]}_{f(h_t|h_{t-1}, h_{t+1})}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

où $a_t = (\mu(1 - \beta) + \beta(\ln(h_{t+1}) + \ln(h_{t-1}))(1 + \beta^2))$ et $b = \delta^2/(1 + \beta^2)$. Jacquier *et al.* (1994) évoquent deux pistes pour effectuer des tirages dans (2.17). La première voie repose sur la méthode d'acceptation-rejet. Il s'agit de proposer une fonction de densité g dont il est facile de simuler des observations et qui vérifie $f(h_t) \leq cg(h_t)$, pour tout h_t appartenant au support de f . Si l'on dispose de c et g , l'algorithme permettant de générer des tirages dans f consiste 1) à effectuer un tirage dans g pour obtenir un candidat h_t^* , puis 2) à accepter h_t^* avec probabilité $f(h_t^*)/[cg(h_t^*)]$. S'il y a rejet, on répète les deux étapes jusqu'à acceptation. Une autre possibilité consiste à construire un algorithme de Hastings-Metropolis indépendant. Dans ce cas, on utilise une fonction de densité instrumentale q pour générer les h_t . Partant d'une

2.2. Estimation des modèles à volatilité stochastique

valeur de $h_t^{(i)}$, une nouvelle valeur $h_t^{(i+1)}$ est proposée en effectuant un tirage dans q , cette nouvelle valeur est acceptée avec probabilité :

$$\min \left(\frac{f(h_t^{(i+1)})/q(h_t^{(i+1)})}{f(h_t^{(i)})/q(h_t^{(i)})}, 1 \right). \quad (2.18)$$

S'il y a rejet, on reprend la valeur $h_t^{(i)}$ comme étant la nouvelle valeur. Jacquier *et al.* (1994) combinent ces deux possibilités. Leur algorithme consiste donc à effectuer un tirage h_t^* dans g , l'accepter avec probabilité $\min[f(h_t^*)/(cg(h_t^*))]$ et répéter cette étape jusqu'à l'acceptation d'un h_t^* . Ensuite, h_t^* entre dans l'étape d'Hastings-Metropolis. Si $h_t^{*(i+1)}$ n'est pas accepté, on retient $h_t^{*(i)}$. À présent, se pose la question du choix de c , g et q . Jacquier *et al.* (1994) s'appuient sur un résultat de Tierney (1994) pour montrer que la fonction q à utiliser dans (2.18) est :

$$q(h) \propto \min[f(h), cq(h)]. \quad (2.19)$$

Il ne reste donc plus qu'à déterminer c et g . Le choix de g s'effectue en observant, dans (2.17), que l'expression de la loi de h_t contient les noyaux de deux lois connues, la loi inverse-gamma de paramètres -0.5 et $y_t^2/2$ (à gauche) et la loi log-normale (à droite). Jacquier *et al.* (1994) calibrent alors la loi log-normale par une loi inverse-gamma en faisant correspondre les deux premiers moments de ces lois :

$$\begin{aligned} \frac{\beta_{LN,t}}{\alpha_{LN,t} - 1} &= \exp(a_t + b^2/2), \\ \frac{\beta_{LN,t}^2}{(\alpha_{LN,t} - 1)^2(\alpha_{LN,t} - 2)} &= \exp(2a_t + b^2)[\exp(b^2) - 1]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

La loi g qui en résulte est donc une loi inverse-gamma dont les paramètres sont formés par la somme des paramètres de la loi inverse-gamma initialement présente dans (2.17) et de la loi inverse-gamma calibrée à la loi log-normale :

$$\begin{aligned} \alpha_g &= \alpha_{LN,t} + (-0.5) + 1, \\ \beta_g &= \beta_{LN,t} + y_t^2/2. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Enfin, Jacquier *et al.* (1994) proposent de définir c comme étant la valeur du rapport $1.1 \times f/g$ évalué au mode de g , c'est à dire en $\beta_g/(\alpha_g + 1)$. Ce choix de c s'explique par des considérations pratiques permettant d'améliorer les performances de l'algorithme (éviter un trop grand nombre de rejets ou de répétitions). Davantage de détails peuvent être trouvés dans Jacquier *et al.* (1994, 2004).

L'approche Bayésienne se distingue des autres méthodes présentées dans cette section 2.2.1 par ses bonnes performances empiriques, voir par exemple Broto et Ruiz (2002) et les références données pour une comparaison entre différentes méthodes d'estimation. De plus, elle permet de générer naturellement des observations de la volatilité latente, celles-ci pouvant être utilisées par exemple pour l'évaluation d'options.

Méthodes s'appliquant à $\ln y_t^2$ Pour obtenir le modèle (2.15), Harvey *et al.* (1994) ont procédé à une *linéarisation*. Cette transformation permet de faire émerger un modèle état-mesure. Dès lors, le *filtre de Kalman* peut être appliqué pour obtenir la vraisemblance et les estimateurs peuvent être fournis par la méthode du Pseudo Maximum de Vraisemblance. Il faut toutefois supposer que $\ln u_t^2$ peut être correctement approchée par une loi normale d'espérance -1.2704 et de variance $\pi^2/2$, sachant que sa loi exacte est une $\log\text{-}\chi^2$.³ L'utilisation du pseudo maximum de vraisemblance devrait nous prémunir des conséquences d'une mauvaise spécification de la loi des termes d'erreur. Dans les faits, la qualité de cette approximation dépend des valeurs du vecteur des paramètres θ et elle semble inappropriée comme l'indiquent Jacquier *et al.* (1994), Andersen et Sørensen (1996) ou encore Ghysels *et al.* (1996). Ainsi, cette approximation peut produire, via le lisseur de Kalman, des estimations de mauvaise qualité de la variable d'état h , c'est à dire de la volatilité inobservable. Pour parvenir à une meilleure approximation de la loi du $\log\text{-}\chi^2$, Kim *et al.* (1998) puis Mahieu et Schotman (1998) ont proposé des mélanges de lois normales. L'avantage inhérent à l'utilisation de mélanges de lois normales est que, conditionnellement à la composante du mélange, le modèle état-mesure est Gaussien.

Méthode d'Inférence Indirecte L'idée clef de l'inférence indirecte proposée par Gouriéroux *et al.* (1993) est l'introduction d'un modèle auxiliaire paramétré par un vecteur qu'on notera ξ , pour estimer l'ensemble des paramètres d'intérêts θ . Plus précisément, le principe de l'inférence indirecte consiste à choisir un modèle auxiliaire remplissant deux critères : 1) l'ensemble des paramètres ξ est facile à estimer et 2) le lien entre ξ et θ permet l'identification de θ . Les modèles de type ARCH, que nous allons étudier dans la section suivante, répondent parfaitement à ces critères. L'estimateur de ξ peut être obtenu en maximisant une pseudo vraisemblance f^* :

$$\hat{\xi}_T = \text{Arg max}_{\xi} \sum_{t=1}^T \ln f^*(y_t | y_{t-1}, \xi). \quad (2.22)$$

³voir Abramovitz et Stegun (1970).

Gouriéroux *et al.* (1993) proposent alors d'estimer le même vecteur de paramètre ξ en utilisant des données simulées à partir du modèle d'intérêt. Ces tirages peuvent être effectués facilement si, au préalable, on a discrétisé le modèle d'intérêt, par exemple selon le schéma d'Euler. L'opération consiste à simuler H trajectoires du processus (2.11) en supposant θ donné. On dispose ainsi de HT données, $\hat{y}_t^i(\theta)_{t=1}^T$ pour $i = 1, \dots, H$. Un nouvel estimateur de ξ peut alors être obtenu à partir de ces données simulées :

$$\hat{\xi}_{HT}(\theta) = Arg \max_{\xi} \frac{1}{H} \sum_{i=1}^H \sum_{t=1}^T \ln f^*(\hat{y}_t^i(\theta) | \hat{y}_{t-1}^i(\theta), \xi). \quad (2.23)$$

On minimise alors l'écart entre $\hat{\xi}_T$ et $\hat{\xi}_{HT}(\theta)$ pour trouver l'estimateur indirect de θ . En d'autres mots, on cherche à faire correspondre les moments issus des données observées avec les moments issus des données simulées et dépendants de θ . Formellement, $\hat{\theta}_{HT}$ vérifie :

$$\hat{\theta}_{HT} = Arg \min_{\theta} [\hat{\xi}_T - \hat{\xi}_{HT}(\theta)]' \Omega_T [\hat{\xi}_T - \hat{\xi}_{HT}(\theta)] \quad (2.24)$$

À l'instar des méthodes fondées sur les moments, il existe une matrice de pondération optimale Ω_T qui peut être estimée. Engle et Lee (1996) ou Pastorello *et al.* (2000) fournissent des exemples d'application.

Pour des modèles qui ne comportent pas une volatilité stochastique, l'utilisation de l'inférence indirecte s'avère également utile pour réduire le biais de la discrétisation, voir par exemple Broze *et al.* (1995).

2.2.1.2 Les modèles ARCH

Les modèles de la famille ARCH (*AutoRegressive Conditional Heteroscedasticity*) ont connu un succès considérable depuis leur première version exposée par Engle (1982). Ils constituent une extension au modèle Gaussien en spécifiant la variance comme un processus de type autorégressif. Des revues de littérature sont fournies dans Bollerslev *et al.* (1992) et Bollerslev *et al.* (1994). À l'instar des modèles présentés précédemment, ces modèles sont exprimés en temps discret. Un modèle de la famille ARCH respecte une spécification du type :

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_t + \sqrt{h_t} u_t \\ h_t &= g(\underline{u}_{t-1}^2, \underline{h}_{t-1}, \theta), \end{aligned} \quad (2.25)$$

où $u_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ et θ un vecteur de paramètres. Trois spécifications pour α_t et $g(\cdot)$ se sont imposées dans la littérature. La première d'entre elles est le modèle GARCH (Bollerslev, 1986) qui spécifie pour h_t l'expression suivante :

$$h_t = \mu + \beta h_{t-1} + \delta u_{t-1}^2. \quad (2.26)$$

Dans un contexte financier, ce modèle permet de prendre en compte le fait, fréquemment constaté, qu'une variation d'une certaine ampleur sera suivie d'une variation de la même ampleur mais de signe inconnu. Le modèle GARCH-*in Mean* (Engle *et al.*, 1987) reprend le modèle GARCH en incorporant dans α_t une dépendance par rapport à h_t . On a :

$$\alpha_t = \alpha_1 y_{t-1} + \alpha_2 h_{t-1}. \quad (2.27)$$

Autrement dit, le modèle GARCH-M permet de mesurer la corrélation entre les rendements et la volatilité, c'est à dire le *leverage effect* décrit dans le modèle précédent. Une autre spécification encore a été proposée par Nelson (1990) : le modèle *Exponential-GARCH*. Il diffère des deux modèles de la famille ARCH précédents, en permettant à la volatilité de réagir différemment selon que les variations des rendements sont positives ou négatives. En effet, l'impact des bonnes nouvelles sur la volatilité est généralement plus faible que l'impact des mauvaises nouvelles (comme les crashes). Dans ce cas, la spécification de h_t est :

$$h_t = \mu + \beta h_{t-1} + \delta_1 u_{t-1} + \delta_2 (|u_{t-1}| + \sqrt{2/\pi}). \quad (2.28)$$

Ces modèles semblent donc pouvoir être très performants puisqu'ils sont capables de tenir compte d'une série de faits stylisés en finance. De plus, les méthodes d'estimations usuelles, telles que le pseudo maximum de vraisemblance ou l'approche Bayésienne, s'appliquent aisément à ces modèles car la vraisemblance s'écrit de manière simple. Ce dernier point est primordial. Si la vraisemblance ne s'écrit pas sous forme d'intégrale à l'instar des modèles à volatilité stochastique, c'est parce que dans les modèles ARCH, il n'y a qu'une seule source d'aléa : u_t . Malgré leurs similitudes au premier abord, les modèles ARCH et les modèles à volatilité stochastique autorégressifs diffèrent considérablement. En particulier, les modèles ARCH ne sont pas des discrétisations employant le schéma d'Euler des modèles en temps continu. Il semblerait donc que les modèles ARCH n'ont pas de lien avec les modèles à volatilité stochastique employés en finance.

Un résultat de Nelson (1990a) infirme cette dernière remarque et donne un intérêt supplémentaire à la modélisation de type ARCH. En effet, Nelson (1990a) montre que des modèles ARCH ont les mêmes distributions stationnaires que certains modèles à volatilité stochastique exprimés en temps continu. Précisément, le modèle GARCH-M (respectivement E-GARCH) possède la même distribution stationnaire qu'une version du modèle linéaire (log-OU) donnée par les équations (1.46), (1.50) et (1.53). Par conséquent, les modèles du type GARCH convergent (en loi) vers des diffusions bivariées.

Les modèles ARCH peuvent donc constituer une alternative simple aux modèles à volatilité stochastique.⁴

Enfin, il faut souligner que Duan (1995) a mis en place une procédure permettant d'évaluer le prix des options à partir des modèles ARCH, c'est à dire à partir d'un modèle discret. Bauwens et Lubrano (2002) ont conjugué les travaux de Duan (1995) avec une approche Bayésienne. Ils parviennent ainsi à : 1) estimer les paramètres, 2) générer des volatilités, 3) évaluer le prix des options et 4) fournir une distribution a posteriori du prix des options.

2.2.2 Estimation utilisant le prix des options

Nous n'avons utilisé, jusqu'ici, que les rendements pour estimer l'ensemble des paramètres. L'emploi des prix d'options semble pourtant pertinent pour au moins trois raisons. D'abord, les prix d'options théoriques sont fonctions directes des paramètres. Il y a donc un lien évident entre les données sur les options et les paramètres du modèle. D'autre part, si l'hypothèse de rationalité des marchés est vérifiée, le contenu informatif des options doit être égal à celui des cours du support. Par contre, tout écart par rapport à la rationalité doit favoriser le marché des options en termes de capacité à véhiculer l'information, car les intervenants présents sur ce marché sont les plus avertis. Enfin, et c'est la raison la plus importante, la seule donnée des rendements ne permet pas d'envisager l'estimation des paramètres du processus risque-neutre. Par contre, les options, elles, contiennent une information sur ces paramètres puisqu'elles ont été évaluées sous la mesure risque-neutre.

D'un point de vue économétrique, l'emploi des prix d'options peut également s'avérer bénéfique. Dans un certain sens, des données de prix des options permettent de rendre la volatilité observable. Étant donnée la relative complexité des méthodes d'estimation proposées dans la section précédente, méthodes basées uniquement sur les données des rendements, les méthodes d'estimation utilisant le prix des options ont donc connu un succès certain ces dernières années, voir par exemple : Bates (1996), Bakshi *et al.* (1997), Bates (2000), Chernov et Ghysels (2000), Pan (2002), Forbes *et al.* (2002), Eraker (2004).

Nous détaillons ici la méthode la plus fréquemment employée, puis nous développerons dans les deux sections suivantes d'autres approches.

⁴Il faut noter que la convergence en loi est une convergence faible. Les modèles à volatilité stochastique convergent, eux, fortement vers les modèles en temps continu. Il en résulte qu'un véritable débat s'est instauré sur le choix d'une des deux spécifications, modèles à volatilité stochastique autorégressifs et ARCH. On peut se référer à l'étude de Carnero *et al.* (2001) et aux références incluses dans ce papier pour de plus amples informations.

La première étape consiste à collecter, aux dates t , N prix d'options sur un même sous-jacent. Ce nombre N doit être supérieur ou égal au nombre de paramètres à estimer plus un. Pour chaque option $n = 1, \dots, N$, on note τ_n son temps avant expiration et K_n son prix d'exercice. Le prix observé de la n -ième option est noté $C_n^*(S_t, K_n, \tau_n)$, et $C_n(S_t, K_n, V_t, \tau_n, \theta)$ désigne le prix de l'option issu du modèle théorique.⁵ Si le modèle théorique est une bonne approximation de la réalité, nous avons pour chaque option n :

$$C_n^*(S_t, K_n, \tau_n) = C_n(S_t, K_n, V_t, \tau_n, \theta) + \epsilon_n. \quad (2.29)$$

La différence entre le prix théorique et le prix observé est un bruit ϵ_n , qui dépend aussi bien des valeurs non-observables, c'est à dire la volatilité et la valeur des paramètres, que des variables observables.

La seconde étape consiste alors à trouver V_t et θ qui minimisent l'amplitude des bruits. Ceci peut être fait en utilisant les moindres carrés ordinaires comme l'ont fait Bakshi *et al.* (1997). Bates (1996, 2000) montre toutefois que les bruits présentent une structure plus complexe. Ils peuvent être par exemple autocorrélés. De plus, comme certaines options font plus que d'autres l'objet de transactions, il s'ensuit que certains prix d'options sont plus pertinents, et on peut alors vouloir pondérer les écarts. De fait, la méthode des moindres carrés non-linéaires généralisés est préférable. Le point de vue Bayésien a été traité par Forbes *et al.* (2002).

Forbes *et al.* (2002) supposent que les résidus sont distribués selon une loi normale d'espérance nulle et de variance σ_ϵ^2 . La prise en compte de la corrélation dans les résidus ou d'une dépendance des résidus par rapport aux maturités ou à la moneyness ne présente pas de difficultés particulières. On note $C^* = (C_1^*, \dots, C_N^*)$ le vecteur des prix d'options, $z_n = (K_n, \tau_n)$ les caractéristiques observables d'une option, et S le vecteur des cours du sous-jacent observés sur la période d'étude. Enfin, V désigne le vecteur des volatilités inobservables. Sous ces hypothèses, la vraisemblance issue du modèle (2.29) est :

$$f(C^* | S, V, \theta, \sigma_\epsilon^2, z) \propto (2\pi\sigma_\epsilon^2)^{-N/2} \prod_{i=1}^N \exp\left(-\frac{[C_i^*(S, z) - C_i(S, V, \theta, z)]^2}{2\sigma_\epsilon^2}\right). \quad (2.30)$$

Comme dans le cas développé par Jacquier *et al.* (1994), Forbes *et al.* (2002) procèdent à une augmentation des données, c'est à dire qu'ils incorporent

⁵Le vecteur de paramètres θ englobe l'ensemble des paramètres constituant le modèle théorique. Il peut en particulier inclure un paramètre de corrélation entre le sous-jacent et la volatilité instantanée et le paramètre représentant la prime de risque associée à une volatilité stochastique.

artificiellement V dans la vraisemblance. Ainsi, V devient un vecteur de volatilité à estimer. On en déduit la loi a posteriori jointe pour l'ensemble des variables inobservables :

$$\begin{aligned} f(V, \theta, \sigma_\epsilon^2 | C^*, S, z) &\propto f(C^* | S, V, z, \theta, \sigma_\epsilon^2) f(S, V | z, \theta, \sigma_\epsilon^2) f(\theta, \sigma_\epsilon^2), \\ &\propto f(C^* | S, V, z, \theta, \sigma_\epsilon^2) f(S | V, z, \theta, \sigma_\epsilon^2) \times \\ &\quad f(V | z, \theta, \sigma_\epsilon^2) f(\theta, \sigma_\epsilon^2). \end{aligned} \tag{2.31}$$

Forbes *et al.* (2002) décomposent alors cette expression en plusieurs lois a posteriori conditionnelles : celles des volatilités instantanées, $f(V | \theta, \sigma_\epsilon^2, C^*, S, z)$, celles des paramètres du modèle, $f(\theta | V, \sigma_\epsilon^2, C^*, S, z)$ et enfin la loi a posteriori de la variance des résidus, $f(\sigma_\epsilon^2 | V, \theta, C^*, S, z)$. En d'autres mots, ils construisent un algorithme de Gibbs pour pouvoir générer des réalisations à partir des lois a posteriori. Forbes *et al.* (2002) précisent que les lois a posteriori pour le vecteur de volatilités instantanées V et le vecteur de paramètres θ ne sont pas toutes conjuguées. Ils fournissent alors des procédures particulières, reposant sur l'algorithme de Metropolis-Hastings pour parvenir à générer des observations de ces lois. La loi a posteriori de σ_ϵ^2 peut, quant à elle, être une loi conjuguée, en supposant simplement que sa loi a priori est une inverse-gamma.

Deux principaux avantages découlent de cette méthode d'estimation qui utilise des prix d'options. Le premier est qu'elle s'adapte à des modèles plus complexes que les modèles à volatilité stochastique standard. Par exemple, Eraker (2004) applique une approche bayésienne similaire sur un modèle comportant des sauts dans les rendements et dans la volatilité stochastique. Le second avantage de cette méthode est qu'elle permet l'estimation simultanée des paramètres du processus générateur de données et ceux du processus sous la mesure risque-neutre. Elle permet, ainsi, l'estimation de la prime de risque.

En revanche, cette méthode présente l'inconvénient majeur de nécessiter, à chaque étape de l'algorithme constituant la procédure d'estimation, l'évaluation des prix théoriques des options (C_n). Ceci conduit à des procédures qui peuvent s'avérer assez coûteuses en temps de calcul.⁶ Le problème demeure lorsqu'on utilise une méthode des moments ou une méthode du maximum de vraisemblance car l'optimisation doit également se faire à travers un algorithme.

⁶Artigas et Tsay (2004) indiquent que, même pour les modèles les plus simples, il faut compter plusieurs heures pour produire 1000 itérations provenant de l'échantillonnage de Gibbs.

2.2.3 Estimation à partir de la volatilité implicite

Tout au long de ce chapitre nous avons insisté sur l'inobservabilité de la volatilité instantanée. Concrètement, cela nous a empêché de pouvoir estimer directement les paramètres du processus de la volatilité. Or, la volatilité implicite est une quantité directement observable à travers une inversion de la formule de Black et Scholes (1973). Dès lors, il paraît intéressant d'utiliser la volatilité implicite comme proxy de la volatilité instantanée.⁷ Cette section tente d'apporter des réponses aux deux questions suivantes : 1) quel est le lien entre la volatilité implicite et la volatilité instantanée ? et 2) comment exploiter ce lien pour parvenir à l'estimation des paramètres de la volatilité instantanée à partir de la volatilité implicite ?

Nous supposons que la volatilité instantanée évolue selon un processus du type Cox-Ingersoll-Ross. La définition de la volatilité implicite associée à l'étude menée par Hull et White (1987) fournit en grande partie le lien entre ces deux notions de volatilité. Rappelons qu'un des principaux résultats de Hull et White (1987) est donné par l'équation (1.69) qui peut se réécrire sous la forme suivante :⁸

$$C_{HW}(S_t, K, \sigma_t^2, T - t) = E_t \left[C_{BS} \left(S_t, K, \frac{1}{T - t} \int_t^T \sigma^2(s) ds, T - t \right) \right]. \quad (2.32)$$

D'autre part, la volatilité implicite, $\sigma_{I,t}$ vérifie l'équation :

$$C^*(S_t, K, \sigma_t, T - t) = C_{BS}(S_t, K, \sigma_{I,t}, T - t), \quad (2.33)$$

ou encore :

$$C^*(S_t, K, \sigma_t^2, T - t) = C_{BS}(S_t, K, \sigma_{I,t}^2, T - t), \quad (2.34)$$

car la formule de Black et Scholes (1973) est monotone par rapport à la volatilité. À présent, considérons une option à parité $S_t \approx K \exp[-r(T - t)]$. La formule de Black et Scholes (1973) se simplifie et est approximativement

⁷D'autres approximations pour la volatilité instantanée sont envisageables comme la *volatilité intégrée*. Concrètement, il s'agit de calculer la volatilité réalisée dans un jour donné à partir de données intra-journalières (ou données à haute fréquence), voir Andersen *et al.* (2002b), Barndorff-Nielsen et Shepard (2002) ou encore Gallant *et al.* (1999) pour plus de détails.

⁸Romano et Touzi (1997) montrent que ce résultat reste valable, à un changement de variable près, lorsqu'on relâche l'hypothèse d'indépendance entre le processus du sous-jacent et le processus de la volatilité.

linéaire en σ .⁹ On a :

$$C_{BS}(S_t, K, \sigma^2, T - t) \approx \sigma^2 S_t \frac{\sqrt{T - t}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (2.35)$$

Par conséquent, si on suppose que le prix d'une option à parité est donné par la formule de Hull et White (1987), nous déduisons d'abord de (2.32) et (2.34) que :

$$E_t \left[C_{BS} \left(\frac{1}{T - t} \int_t^T \sigma^2(s) ds \right) \right] = C_{BS}(\sigma_{I,t}^2), \quad (2.36)$$

puis en appliquant (2.35) à (2.36), et en utilisant à nouveau la propriété de monotonie de la formule de Black et Scholes (1973) par rapport à la volatilité, on obtient la relation entre la volatilité implicite et la volatilité instantanée :

$$\sigma_{I,t}^2 \approx E_t \left[\frac{1}{T - t} \int_t^T \sigma^2(s) ds \right]. \quad (2.37)$$

À l'instar de Ghysels *et al.* (1996), si nous négligeons le fait que l'espérance d'une racine carrée est différente de la racine carrée de l'espérance, on voit pourquoi la volatilité implicite est souvent perçue comme étant la moyenne espérée de la volatilité future sur la durée de vie restante d'une option :

$$\sigma_{I,t} \approx E_t \left[\frac{1}{T - t} \int_t^T \sigma(s) ds \right]. \quad (2.38)$$

Une façon d'utiliser la volatilité implicite pour estimer les paramètres de la volatilité instantanée a été proposée par Renault et Touzi (1996).¹⁰ Ils supposent d'abord que le prix observé des options C^* est effectivement donné par la formule (2.32). On note donc :

$$C^*(S_t, K, r, \sigma_t^2, T - t, \theta) = C_{HW}(S_t, K, r, \sigma_t^2, T - t, \theta), \quad (2.39)$$

où θ désigne l'ensemble des paramètres définissant le modèle du type Hull et White (1987).¹¹ Pour obtenir la volatilité implicite du prix observé de

⁹Ce résultat provient du fait que pour x proche de 0, la fonction de répartition de la loi normale $\Phi(x)$ est approximativement égale à $0.5 + x/\sqrt{2\pi}$.

¹⁰La même idée, consistant à utiliser la volatilité implicite issue soit de la formule de Black et Scholes (1973), soit du modèle théorique choisi, est présente dans Chernov et Ghysels (2000) et Pan (2002).

¹¹Par l'expression "un modèle du type Hull et White" nous entendons un modèle à volatilité stochastique où la corrélation entre le sous-jacent et sa volatilité instantanée est nulle.

l'option, on applique la fonction réciproque de Black et Scholes (1973) C_{BS}^{-1} à C^* , on obtient :

$$\sigma_{I,t}^2(S_t, K, r, \sigma_t^2, T - t, \theta) = C_{BS}^{-1} \circ C_{HW}(S_t, K, r, \sigma_t^2, T - t, \theta). \quad (2.40)$$

Parce que les options à parité $S_t \approx K$ sont les plus liquides et sont donc les plus aptes à capturer l'information disponible sur le marché, Renault et Touzi (1976) se restreignent à ce cas. On peut alors alléger l'écriture de l'équation (2.40) :

$$\sigma_{I,t}^2 = h(T - t, \sigma_t^2, \theta), \quad (2.41)$$

ce qui en d'autres termes signifie que la volatilité implicite, quantité observable, est fonction bijective de la volatilité instantanée et des paramètres la régissant. L'observation de la volatilité implicite équivaut donc à l'observation de la volatilité instantanée. Pour obtenir $\hat{\theta}$, Renault et Touzi (1996) proposent une procédure itérative similaire à l'algorithme *EM*. Partant d'une valeur initiale $\theta^{(0)}$, l'algorithme consiste à effectuer à chaque itération i :

- Étape 1 : Sachant $\theta^{(i)}$, trouver $\sigma_t^{(i)}$ tel que $\sigma_{I,t} = h(\sigma_t^{(i)}, \theta^{(i)})$,
- Étape 2 : Sachant $\sigma_t^{(i)}$, estimer $\theta^{(i+1)}$.

jusqu'à obtenir la convergence. L'étape 1 revient à déduire la volatilité instantanée, qui est également la volatilité implicite issue de la formule de Hull et White (1987), à partir de l'observation de la volatilité implicite issue de la formule de Black et Scholes (1973). Disposant des observations de la volatilité instantanée, l'étape 2 consiste à estimer θ en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance. Renault et Touzi (1996) montrent que, pour des volatilités implicites extraites à partir d'options à parité, cet algorithme est effectivement un algorithme *EM*, où l'étape 1 correspond à l'étape espérance *E*, et l'étape 2 à l'étape maximisation *M*.¹² Renault et Touzi (1996) notent qu'en posant $\theta^{(0)} = 0$ on a $\sigma_{I,t} = \sigma_t$, c'est à dire que la volatilité implicite est égale à la volatilité instantanée. En effectuant des itérations supplémentaires, la procédure de Renault et Touzi (1996) permet de corriger le biais de la maturité induit par l'utilisation de la volatilité implicite extraite d'options expirant dans quelques jours et non instantanément. Pastorello *et al.* (2000) et Moraux *et al.* (1998, 1999) appliquent cette méthode pour des modèles à volatilité stochastique. Moraux *et al.* (1998, 1999) relèvent toutefois la présence de périodes où on ne peut pas trouver de volatilité instantanée solution de (2.41). Ils proposent donc une autre approche.

¹²L'algorithme de Renault et Touzi (1996) ne correspond pas à un algorithme *EM* standard, puisque le lien entre les variables latentes (volatilités instantanées) et les variables observables (volatilités implicites) dépend du vecteur des paramètres θ . Ils montrent toutefois que la convergence presque sûre vers la vraie valeur des paramètres est assurée.

2.2. Estimation des modèles à volatilité stochastique

Moraux *et al.* (1998, 1999) supposent que la volatilité instantanée suit un processus *racine-carrée* :

$$\sigma_t^2 = \kappa(\vartheta - \sigma_t^2)dt + \gamma\sigma_t dW_t.$$

Dans ce cadre, ils rappellent deux résultats importants. D'une part, il est possible d'obtenir une relation explicite entre la volatilité instantanée et la volatilité implicite en utilisant (2.37). En effet, pour un processus de volatilité du type Cox-Ingersoll-Ross, on a :

$$\sigma_{I,t}^2 \approx \frac{1}{T-t} E_t \left[\int_t^T \sigma^2(s) ds \right] = \kappa(\sigma_t^2 - \vartheta) \frac{1 - \exp[-\kappa(T-t)]}{\kappa(T-t)}. \quad (2.42)$$

On remarquera que la volatilité implicite est fonction affine de la volatilité instantanée. Le second résultat tient dans le fait que la fonction de transition, $f(\sigma_t^2 | \sigma_{t-1}^2)$, associée au modèle *racine-carrée* est disponible et donc que la log-vraisemblance est calculable.¹³ Si les σ_t^2 étaient observables, nous aurions donc :

$$\ln f(\sigma^2 | \theta) = \sum_{i=t}^T \ln f(\sigma_i^2 | \sigma_{i-1}^2, \theta). \quad (2.43)$$

Moraux *et al.* (1998, 1999) combinent ces deux résultats.¹⁴ L'équation (2.42) montre que la volatilité implicite peut être interprétée comme provenant d'un changement de variable. Dès lors, on peut utiliser (2.43) pour écrire la log-vraisemblance fondée sur l'observation de la volatilité implicite comme étant égale à :

$$\ln f(\sigma_I^2 | \theta) = \sum_{i=t}^T -\ln |J_i| + \ln f(\sigma_i^2 | \sigma_{i-1}^2, \theta), \quad (2.44)$$

où les σ_i^2 sont obtenus à partir de la relation (2.42) et $J_i = \partial \sigma_{I,i}^2 / \partial \sigma_i^2 = 1 - \exp[-\kappa(T-t)] / [\kappa(T-t)]$ est le Jacobien de la transformation. La forme de la log-vraisemblance donnée dans (2.44) autorise l'emploi du maximum de vraisemblance. Cette méthode s'avère donc plus facile à mettre en oeuvre que la méthode de Renault et Touzi (1996).

La relation explicite entre la volatilité implicite et la volatilité instantanée donnée dans l'équation (2.42) apporte une autre interprétation intéressante. Lorsque la date d'expiration de l'option est proche, c'est à dire pour $T-t$

¹³Nous donnons l'expression de $f(\sigma_t^2 | \sigma_{t-1}^2)$ en annexe, équation (A.63).

¹⁴Voir également Pearson et Sun (1994) et Duan (1994) pour un procédé similaire mais appliqué à des modèles de taux d'intérêt.

qui tend vers 0, on a :

$$\lim_{T-t \rightarrow 0} \frac{1 - \exp[-\kappa(T-t)]}{\kappa(T-t)} = 1. \quad (2.45)$$

La relation (2.42) se simplifie alors et devient dans ce cas :

$$\sigma_t^2 \approx \sigma_{I,t}^2, \quad (2.46)$$

autrement dit, pour des options à parité et proches de l'échéance, la volatilité implicite peut être considérée comme un bon proxy de la volatilité instantanée. Ce résultat est également fourni dans Ledoit et Santa-Clara (2002). Il permet de justifier de manière ex-post l'étude de Heynen *et al.* (1994) qui ont, les premiers, utilisé des options à parité et à quelques jours de l'échéance pour estimer les paramètres de la volatilité instantanée. Évidemment, puisque l'échéance des options se situe généralement à la fin du mois, il est impossible d'observer tous les jours des options de très courte échéance.

La solution proposée par Moraux *et al.* (1998, 1999) consiste à se servir des indices de volatilité émis par les marchés gérant les transactions d'options. L'utilisation d'un indice de volatilité est également présente dans Jones (2003) et Aït-Sahalia et Kimmel (2004). Nous détaillerons cette approche dans les chapitres 4 et 5.

2.3 Estimation des modèles à sauts

Cette section est consacrée à l'étude de diverses méthodes d'estimation des modèles à sauts. Comparés aux modèles à volatilité stochastique, les modèles à sauts ont l'avantage d'admettre une solution analytique connue. Par conséquent, la distribution de la solution est connue et explicite. Malheureusement, cette distribution n'est pas exploitable à des fins économétriques car elle s'écrit sous la forme d'un mélange de lois dont le nombre de composantes est infini. Dans un premier temps, nous détaillons la technique de discrétisation de Ball et Torous (1983, 1985) permettant de contourner ce problème. L'estimation des modèles à sauts revient alors à estimer des modèles de mélanges dont le nombre de composantes est fini et égal à 2. Nous développons ensuite les méthodes d'estimations connues des mélanges de lois. Nous insistons en particulier sur la démarche Bayésienne.

2.3.1 La discrétisation

L'estimation des paramètres des modèles à sauts a parfois donné lieu à des méthodes peu rigoureuses. Ainsi Merton (1990) suggère dans son ouvrage

Continuous Time Finance d'effectuer un repérage visuel des sauts, d'isoler ces observations puis d'en déduire la moyenne et la variance. Une autre méthode fondée sur les moments a été suggérée par Beckers (1981). On peut remarquer que dans cette étude la variance estimée est parfois négative. Pour éviter ce genre de résultats aberrants, Beckers (1981) suggère d'imposer des contraintes sur les paramètres, par exemple, l'amplitude des sauts est d'espérance nulle. Ceci nous conduit naturellement à des résultats peu satisfaisants.

Un aspect intéressant des modèles à sauts est que nous disposons de la solution du processus générateur de données. Par suite, nous disposons également de la distribution du sous-jacent et donc de la distribution des rendements. En effet, nous rappelons que le modèle à sauts standard tel qu'il est présenté par Merton (1976) s'écrit :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (\alpha_c - \lambda E(J))dt + \sigma dB_t + JdN_t, \quad (2.47)$$

où $\ln(1+J)$ suit une loi normale d'espérance α_J et de variance σ_J^2 . De manière équivalente, en appliquant la formule d'Itô pour les modèles à sauts, cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$d \ln(S_t) = \left(\alpha_c - \lambda E(J) - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t + \ln(1+J)dN_t, \quad (2.48)$$

Dans le chapitre précédent, nous avons également fourni la solution des équations différentielles stochastiques :

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\alpha_c - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E(J) \right) t + \sigma B_t + \sum_{i=0}^{N_t} \ln(1+J_i) \right]. \quad (2.49)$$

Selon l'équation choisie, (2.48) ou (2.49) comme point de départ de la discrétisation, nous avons deux méthodes de discrétisation aboutissant au même résultat.

2.3.1.1 À partir de la solution

Partant de l'équation (2.49), une discrétisation exacte de ce processus est envisageable et son expression est :

$$S_{t+\Delta} = S_t \exp \left[\left(\alpha_c - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E(J) \right) \Delta + \sigma B_\Delta + \sum_{i=1}^{N_\Delta} \ln(1+J_i) \right], \quad (2.50)$$

où Δ désigne le pas de discrétisation, B_Δ est un mouvement brownien de variance Δ , et N_Δ représente le nombre de sauts arrivés dans la période de temps Δ . On peut donc en déduire que les rendements $y_t = \ln S_{t+\Delta}/S_t$ sont égaux à :

$$y_t = \left(\alpha_c - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E(J) \right) \Delta + \sigma \sqrt{\Delta} \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{N_\Delta} \ln(1 + J_i), \quad (2.51)$$

où ε_t est une variable aléatoire Gaussienne centrée réduite. Comme $\ln(1 + J)$ suit une loi normale, nous pouvons voir que la loi de y_t sachant N_Δ est une loi normale, tandis que la loi marginale de y_t est un mélange de lois normales :

$$f(y_t) = \sum_{n=0}^{N_\Delta} \frac{\exp(-\lambda\Delta)(\lambda\Delta)^n}{n!} f_{\mathcal{N}}(y_t; \alpha_n, \sigma_n^2), \quad (2.52)$$

où :

$$\alpha_n = \left(\alpha_c - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda\alpha_J \right) \Delta + n\alpha_J,$$

et

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 \Delta + n\sigma_J^2.$$

On peut noter que, pour Δ grand, le nombre de sauts N_Δ tend vers l'infini. Par conséquent, la loi de y_t est un mélange de lois dont le nombre de composantes tend vers l'infini. Une première approche consiste à dire que pour Δ suffisamment petit, le nombre de sauts est fini et que par conséquent, le nombre de composantes du mélange est fini comme le pose Jorion (1988). Évidemment on peut aller plus loin encore en affirmant, que pour des données journalières ($\Delta = 1/252$), il ne peut y avoir au plus qu'un saut par jour de cotation, par conséquent N_Δ est au plus égal à 1. C'est l'approche de Ball et Torous (1983, 1985). Dès lors, les rendements obéissent à la loi suivante :

$$f(y_t) = \sum_{n=0}^1 \frac{\exp(-\lambda\Delta)(\lambda\Delta)^n}{n!} f_{\mathcal{N}}(y_t; \alpha_n, \sigma_n^2). \quad (2.53)$$

En utilisant le fait que Δ et λ sont petits alors $\lambda\Delta$ est également proche de 0. Or, nous savons qu'au voisinage de 0, $\exp(x) \approx 1 + x$, d'où nous déduisons que la loi de y_t est :

$$f(y_t) = (1 - \lambda\Delta) f_{\mathcal{N}}[y_t; (\alpha_c - \sigma^2/2 - \lambda\alpha_J)\Delta, \sigma^2\Delta] + \lambda\Delta f_{\mathcal{N}}[y_t; (\alpha_c - \sigma^2/2 - \lambda\alpha_J)\Delta + \alpha_J, \sigma^2\Delta + \sigma_J^2], \quad (2.54)$$

2.3. Estimation des modèles à sauts

ce qui en adoptant les notations suivantes, $p = 1 - \lambda\Delta$, $\alpha_1 = (\alpha_c - \sigma_2^2 - \lambda\alpha_J)\Delta$ et $\sigma_1^2 = \sigma^2\Delta$, donne :

$$f(y_t) = pf_{\mathcal{N}}(y_t; \alpha_1, \sigma_1^2) + (1 - p)f_{\mathcal{N}}(y_t; \alpha_1 + \alpha_J, \sigma_1^2 + \sigma_J^2), \quad (2.55)$$

c'est à dire un mélange de deux lois normales.

2.3.1.2 À partir de l'équation différentielle stochastique

Une autre façon d'obtenir le même résultat a pour point de départ l'équation différentielle stochastique (2.48). La première étape de la discrétisation de Bernoulli consiste à effectuer une discrétisation d'Euler sur l'équation (2.48). Nous obtenons :

$$\ln(S_{t+\Delta}) - \ln(S_t) = \alpha_1\Delta + \sigma_1\varepsilon_t + \ln(1 + J)\Delta N_t, \quad (2.56)$$

où α_1 et σ_1 sont définis comme précédemment. Le pas de la discrétisation Δ est égale à T/N où T représente la période couverte en années et N le nombre de divisions effectuées dans cet intervalle. L'argument clef de la seconde étape est de considérer ΔN_t comme étant une variable aléatoire distribuée selon une loi de Bernoulli. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} P[\Delta N_t = 0] &= 1 - \lambda\Delta, \\ P[\Delta N_t = 1] &= \lambda\Delta. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Dans ce cadre, N_t , la variable aléatoire désignant le nombre total d'arrivées à l'instant t , est la somme des arrivées sur les N intervalles de longueur Δ , c'est à dire :

$$N_t = \sum_{i=0}^N \Delta N_i.$$

N_t est donc une variable aléatoire binomiale dont la fonction de distribution est :

$$P[N_t = k] = C_N^k (\lambda\Delta)^k (1 - \lambda\Delta)^{N-k} \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.58)$$

En faisant tendre Δ vers 0, c'est à dire en augmentant le nombre de subdivisions N , nous savons que :

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} P[N_t = k] = \frac{\exp[-\lambda t] (\lambda t)^k}{k!}, \quad (2.59)$$

d'où l'on déduit que l'approximation de ΔN_t par une variable de Bernoulli fait converger la loi de N_t vers une loi de Poisson d'intensité λt . Autrement dit, nous retrouvons le modèle initial. Cette approximation va simplifier considérablement la fonction de transition des rendements puisque

$y_t = \ln(S_{t+\Delta}) - \ln(S_t)$ évolue selon le processus :

$$y_t = \begin{cases} \alpha_1 + \sigma_1 \varepsilon_t & \text{avec probabilité } p, \\ \alpha_1 + \sigma_1 \varepsilon_t + \ln(1 + J) & \text{avec probabilité } 1 - p, \end{cases} \quad (2.60)$$

où $p = 1 - \lambda\Delta$. Comme $\ln(1 + J)$ est une variable aléatoire normale d'espérance α_J et de variance σ_J^2 , nous obtenons :

$$y_t = \begin{cases} \alpha_1 + \sigma_1 \varepsilon_t & \text{avec probabilité } p, \\ \alpha_1 + \alpha_J + \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_J^2} \varepsilon_t & \text{avec probabilité } 1 - p. \end{cases} \quad (2.61)$$

La fonction de transition de la volatilité est donc réduite à un mélange de deux composantes normales dont l'expression est donnée dans (2.55).

2.3.2 Méthode d'estimation

Il est intéressant de noter que la littérature financière a longtemps ignoré les avancées enregistrées dans l'estimation des mélanges de lois.¹⁵ L'estimation des mélanges a pourtant été introduite par Pearson (1894) en utilisant la méthode des moments. Cette méthode est simple à appliquer puisque les moments d'un modèle de mélange sont faciles à calculer. Par exemple, l'espérance et la variance du modèle défini par l'équation (2.55) sont :¹⁶

$$\begin{aligned} E(y_t) &= p\alpha_1 + (1 - p)(\alpha_1 + \alpha_J), \\ &= \alpha_1 + (1 - p)\alpha_J, \end{aligned} \quad (2.62)$$

et,

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_t) &= p\sigma_1^2 + (1 - p)(\sigma_1^2 + \sigma_J^2) + p(1 - p)[\alpha_1 - (\alpha_1 + \alpha_J)]^2, \\ &= \sigma_1^2 + (1 - p)(p\alpha_J^2 + \sigma_J^2). \end{aligned} \quad (2.63)$$

Il est toutefois connu que les méthodes dont l'inférence est basée sur les moments souffre d'une certaine inefficience par rapport à des méthodes fondées sur le maximum de vraisemblance. Ces dernières ne sont pas exemptes de difficultés dans leur mise en oeuvre dans le cadre de mélanges de lois. Ces problèmes peuvent être mis en lumière à partir de l'écriture de la vraisemblance de notre modèle de mélange :

$$\mathcal{L}(\theta|y) = \prod_{t=1}^T [pf_{\mathcal{N}}(y_t|\theta_1) + (1 - p)f_{\mathcal{N}}(y_t|\theta_1, \theta_2)], \quad (2.64)$$

¹⁵Voir Titterington *et al.* (1985) pour une revue des méthodes d'estimation classique.

¹⁶Si X désigne une variable aléatoire distribuée selon un mélange de lois, alors les moments d'ordre m de X sont simplement donnés par $E(X^m) = pE_1(X^m) + (1 - p)E_2(X^m)$, où E_1 et E_2 désignent les espérances conditionnelles à la composante du mélange. Nous signalons également les travaux de Carrasco et Florens (2000) pour la détermination des moments et l'estimation d'un modèle de mélange à partir de la fonction caractéristique.

où $\theta_1 = (\alpha_1, \sigma_1^2)$ désigne le vecteur des paramètres de la première composante du mélange, $\theta_2 = (\alpha_J, \sigma_J^2)$ désigne le vecteur des paramètres spécifiques à la seconde composante, et $\theta = (p, \theta_1, \theta_2)$ représente l'ensemble des paramètres à estimer. Plusieurs commentaires peuvent alors être effectués. Le premier consiste à remarquer que la vraisemblance se décompose en 2^T termes. Par conséquent, son calcul devient vite impossible en pratique et ce même pour un nombre restreint d'observations. Pour remédier à cet état de fait, l'estimation des modèles de mélange nécessite de faire émerger une structure latente, que nous détaillons plus bas, et la mise en place d'un algorithme. La seconde remarque concerne le problème d'identification dans un modèle de mélange. En effet, la vraisemblance reste invariante par permutation des deux composantes, c'est à dire lorsqu'on intervertit les deux termes de la somme dans (2.64). Cela a des répercussions d'autant plus graves lorsque la vraisemblance est évaluée de manière itérative comme dans le cas d'un algorithme. En effet, rien ne garantit que la première composante conserve les mêmes caractéristiques (p, α_1, σ_1) tout au long de la procédure itérative. Il faut donc imposer des contraintes identifiantes du type : la probabilité d'apparition (ou l'espérance ou la variance) de la première composante est plus grande que celle associée à la seconde composante. Dans un cadre Bayésien, l'identification peut également être obtenue en supposant des lois a priori informatives. Parmi ces contraintes d'identification certaines se révèlent être inefficaces en pratique pour dissocier les composantes comme le met en évidence Frühwirth-Schnatter (2001). Fort heureusement, dans notre cas, il y a deux contraintes d'identification naturelles. L'une concerne les probabilités d'apparition, l'autre les variances des composantes. Nous savons, en effet, que σ_J^2 est la variance des sauts, par conséquent il s'agit d'une quantité positive et donc, $\sigma_1^2 + \sigma_J^2 > \sigma_1^2$, la variance de la seconde composante est forcément plus grande que celle de la première composante. D'autre part, les sauts apparaissent de manière peu fréquente, la deuxième composante du mélange, qui représente ces sauts, doit donc avoir une probabilité d'apparition inférieure à la première composante représentant la diffusion, d'où $1 - p < p$. Une troisième remarque concerne la probabilité p^T (ou $[1 - p]^T$) de n'avoir aucune observation affectée à la deuxième composante (première composante). Pour T suffisamment grand, cette probabilité est très faible, mais dans un algorithme, la probabilité qu'un tel événement survienne est démultipliée. Dans ce cas, aucune information ne peut être extraite des observations pour estimer les paramètres de la deuxième composante. Dans le même ordre d'idée, lorsqu'un très petit nombre d'observations est affecté à une composante, les estimations qui en résulteront seront très peu précises. Pire encore, la variance de cette composante peut tendre vers 0 ce qui rend la vraisemblance non-bornée.

Nous développons à présent deux méthodes d'estimations d'un modèle de mélange. Il s'agit de l'algorithme Espérance-Maximisation (EM) dans le cadre classique et de l'échantillonnage de Gibbs dans le cadre Bayésien. L'estimation des mélanges par la démarche Bayésienne a connu de nombreuses applications ces dernières années dans des domaines très variés. En finance, Kim *et al.* (1998) ont recours à l'approche Bayésienne pour estimer des mélanges mais ils le font dans un contexte différent de celui des modèles à sauts (voir section 2.2.1.1). Dans les deux cas, classique et Bayésien, l'astuce permettant l'estimation d'un modèle de mélange repose sur la mise en évidence d'une structure latente, également appelée *structure à données manquantes*, et que nous allons décrire maintenant.

L'idée proposée par Dempster *et al.* (1977) consiste à remarquer que dans un modèle de mélange nous disposons, certes, des données y_t , mais qu'il nous manque une variable indiquant à quelle composante est allouée chaque observation. Supposons à présent qu'on puisse associer à chaque observation y_t une variable indicatrice z_t qui prend la valeur 1 si y_t appartient à la première composante, et la valeur 2 si y_t appartient à la seconde composante. Les observations pourraient donc être regroupées en 2 groupes notés S_1 et S_2 et définis par $S_k = \{y_t : z_t = k, t = 1, \dots, T\}$ et $k = 1, 2$. Le nombre d'observations contenues dans S_k serait noté n_k . L'estimation des paramètres pourrait alors être effectuée sans aucune difficulté sur chacun des deux groupes d'observations. Plus précisément, à la place d'utiliser la vraisemblance (2.64) pour estimer les paramètres d'intérêts, on préférerait utiliser la vraisemblance suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\theta|y, z) &= \prod_{t=1}^T p_{z_t} f_{\mathcal{N}}(y_t|\theta_{z_t}), \\ &= \prod_{k=1}^2 \prod_{t:z_t=k}^T p_k f_{\mathcal{N}}(y_t|\theta_k), \end{aligned} \tag{2.65}$$

où les données observables y ont été complétées par des données manquantes $z = \{z_t, t = 1, \dots, T\}$ et $z_t = 1, 2$ selon l'appartenance de la t -ième observation à la première ou deuxième composante. De fait, la connaissance de y et z permettrait d'éliminer la structure de mélange.

Évidemment, le vecteur z composé de variables indicatrices n'est pas connu. Par contre, il peut être traité comme un ensemble de paramètres qu'il faut estimer. En effet, la vraisemblance du modèle complété et donnée en (2.65) peut également s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{L}(\theta|y, z) = \prod_{t=1}^T f_{\mathcal{N}}(y_t|\theta_{z_t}, z_t) f(z_t), \tag{2.66}$$

où nous avons simplement décomposé la loi jointe de y et z en un produit

2.3. Estimation des modèles à sauts

de la loi conditionnelle de $y|z$ et de la loi marginale de z . Comme z_t est une variable qui ne prend que deux valeurs, sa loi est donc une Bernoulli. Il reste donc à déterminer la probabilité que z_t soit égal à 1. Celle-ci est obtenue en déduisant de la loi jointe de y et z , la loi marginale de z . Nous avons, pour $k = 1, 2$:

$$Pr[z_t^{(i)} = k] = \frac{p^{(i)} f_{\mathcal{N}}(y_t | \theta_k^{(i)})}{p^{(i)} f_{\mathcal{N}}(y_t | \theta_k^{(i)}) + (1 - p^{(i)}) f_{\mathcal{N}}(y_t | \theta_k^{(i)})}. \quad (2.67)$$

Dès lors l'algorithme EM, revient à répéter à chaque itération i , et ce jusqu'à satisfaire un critère de convergence, les deux opérations suivantes :¹⁷

- Étape E : générer les observations manquantes $z_t^{(i)}$ selon (2.67).
- Étape M : puis déduire les estimations $\theta^{(i)}$ en maximisant la vraisemblance $\mathcal{L}(\theta^{(i)} | y, z^{(i)})$

Durant cette dernière décennie, le développement des Méthodes de Monte Carlo par Chaînes de Markov (MCMC) a favorisé l'utilisation de l'approche Bayésienne dans l'estimation des mélanges (voir Diebolt et Robert, 1994 et Robert et Mengersen, 1999). Le principe de l'estimation des modèles de mélange par cette approche Bayésienne va être intensivement utilisé dans les prochains chapitres, nous donnons donc ici une explication détaillée de sa mise en oeuvre. L'idée générale est la même que celle exposée dans la mise en oeuvre de l'algorithme EM et il s'agit de faire apparaître une structure latente. Il y a simplement transposition au cadre Bayésien.

Dans ce cadre Bayésien, et comme nous l'avons déjà indiqué pour l'estimation des modèles à volatilité stochastique, les paramètres eux-mêmes sont considérés comme des variables aléatoires. On les dote donc de lois a priori. Nous adoptons des lois a priori conjuguées à chaque fois que cela est possible. Ce choix permet, d'une part, de faciliter le calcul des lois a posteriori, et d'autre part, d'envisager l'incorporation des résultats provenant d'études antérieures.¹⁸ Nos lois a priori sont :

$$\alpha_1 \sim \mathcal{N}(a_1, \zeta_1), \quad \alpha_J \sim \mathcal{N}(a_2, \zeta_2), \quad p \sim \mathcal{Be}(a_p, b_p). \quad (2.68)$$

où \mathcal{Be} désigne la loi bêta (voir annexe A.4). Notons que sous la forme actuelle du modèle, il n'est pas possible d'affecter des lois a priori conjuguées pour

¹⁷Pour être exact, il ne s'agit pas de l'algorithme EM décrit par Dempster *et al.* (1977) mais d'une version plus performante donnée par Celeux et Diebolt (1992). L'algorithme est appelé *Stochastic-EM* car on a remplacé l'étape d'estimation des $z_t^{(i)}$ par une étape de simulation des z_t^i . Honoré (1998) fournit une application de cette méthode à des données financières.

¹⁸Étant donné le grand nombre d'études empiriques en finance, il peut être judicieux de prendre en considération leurs résultats. Concrètement on affecte des valeurs aux hyperparamètres (les valeurs des paramètres des lois a priori) qui traduisent nos connaissances.

les paramètres σ_1^2 et σ_J^2 . Pour contourner ce problème, nous effectuons une reparamétrisation des termes de variance. Nous gardons σ_1^2 inchangée, mais nous définissons la quantité σ_2^2 qui vérifie :

$$\sigma_2^2 \sigma_1^2 = \sigma_1^2 + \sigma_J^2. \quad (2.69)$$

Le fait de maintenir la présence de σ_1^2 dans la variance de la seconde composante permet de préserver la dépendance avec la variance de la première composante et donc d'assurer une meilleure performance de l'algorithme comme le suggèrent Robert et Mengersen (1999).¹⁹ Avec cette écriture, la fonction de densité des y_t donnée dans (2.55) devient :

$$f(y_t) = p f_{\mathcal{N}}(y_t; \alpha_1, \sigma_1^2) + (1 - p) f_{\mathcal{N}}(y_t; \alpha_1 + \alpha_J, \sigma_1^2 \sigma_2^2), \quad (2.70)$$

et se prête à l'emploi de lois a priori conjuguées pour σ_1^2 et σ_2^2 . Ces lois sont :

$$\sigma_1^2 \sim \mathcal{IG}(b_1, d_1), \quad \sigma_2^2 \sim \mathcal{IG}(b_2, d_2), \quad (2.71)$$

où \mathcal{IG} désigne la loi inverse-gamma (voir annexe A.4). Deux remarques sont à faire. D'une part l'identification de σ_J^2 est assurée étant donné son lien bijectif avec σ_2^2 . D'autre part, il faut imposer la contrainte $\sigma_2^2 > 1$ pour garantir que la variance de la seconde composante soit plus grande que celle de la première.

Nous pouvons à présent poursuivre la mise en place de la procédure d'estimation Bayésienne à partir du modèle (2.70). Le produit des lois a priori $\pi(\theta)$ par la vraisemblance donne la loi a posteriori à partir de laquelle les inférences sur les paramètres peuvent être menées. Diebolt et Robert (1994) montrent que les estimateurs Bayésiens sont disponibles sous forme explicite mais que leur calcul est impossible en pratique suite au très grand nombre de termes qu'il faut évaluer. En d'autres mots il faut recourir à une procédure numérique itérative pour parvenir à l'estimation des paramètres. Par analogie avec l'algorithme EM, Diebolt et Robert (1994) préconisent l'utilisation de la méthode d'*augmentation des données* suggérée par Tanner et Wong (1987). Ils introduisent donc le vecteur de variables indicatrices z de la même façon que nous l'avons décrit pour l'algorithme EM. Dès lors, en adoptant les mêmes notations que précédemment, la loi a posteriori du modèle complété

¹⁹Cette reparamétrisation a également été proposée par Johannes *et al.* (1999) dans un contexte en tout point analogue (estimation d'un modèle à sauts dont la discrétisation aboutit à un mélange de lois normales). Cette dernière étude et en particulier cette reparamétrisation est souvent invoquée dans l'estimation des modèles à sauts par une approche bayésienne, voir par exemple Eraker *et al.* (2003), Eraker (2004) ou Raggi (2005).

2.3. Estimation des modèles à sauts

est :

$$\begin{aligned}
\pi(\theta, z|y) &= \pi(\theta) \prod_{k=1}^2 \prod_{t:y_t \in S_k} p_k f_{\mathcal{N}}(y_t|\theta_k) \\
&\propto p^{n_1} (1-p)^{n_2} \frac{1}{\sigma_1^{n_1+n_2} \sigma_2^{n_2}} \times \\
&\quad \exp \left(\sum_{t:z_t=1} \frac{(y_t - \alpha_1)^2}{2\sigma_1^2} + \sum_{t:z_t=2} \frac{(y_t - \alpha_1 - \alpha_J)^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} \right) \times \\
&\quad \pi(p, \alpha_1, \alpha_J, \sigma_1^2, \sigma_2^2).
\end{aligned} \tag{2.72}$$

Cette loi a posteriori jointe est ensuite décomposée en deux blocs, la loi conditionnelle $f(z|y, \theta)$ et la loi conditionnelle $\pi(\theta|y, z)$ pour permettre la mise en place d'un échantillonnage de Gibbs. En partant de valeurs initiales $\theta^{(0)}$, l'algorithme consiste à effectuer, à chaque itération i , les opérations suivantes :

- Étape 1 : générer les T z_t selon une loi de Bernoulli de probabilité donnée en (2.67), puis calculer les quantités :

$$\begin{aligned}
n_1 &= \sum_t \mathbb{I}[z_t = 1], & n_2 &= \sum_t \mathbb{I}[z_t = 2], \\
\bar{y}_1 &= \sum_t y_t \mathbb{I}[z_t = 1], & \bar{y}_2 &= \sum_t y_t \mathbb{I}[z_t = 2], \\
\bar{s}_1 &= \sum_t \frac{(y_t - \alpha_1)^2}{2} \mathbb{I}[z_t = 1], & \bar{s}_2 &= \sum_t \frac{(y_t - \alpha_1 - \alpha_J)^2}{2} \mathbb{I}[z_t = 2].
\end{aligned}$$

- Étape 2 : simuler les paramètres à partir de leurs lois a posteriori conditionnelles :

$$\begin{aligned}
p &\sim \mathcal{B}e(n_1 + a_p, n_2 + b_p), \\
\sigma_1^2 &\sim \mathcal{IG}(A_1, B_1), \\
\sigma_2^2 &\sim \mathcal{IG}(A_2, B_2), \\
\alpha_1^2 &\sim \mathcal{N}(E_1, V_1), \\
\alpha_J^2 &\sim \mathcal{N}(E_2, V_2),
\end{aligned}$$

et où :

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{n_1 + n_2}{2} + b_1, & A_2 &= \frac{n_2}{2} + b_2, \\
B_1 &= \frac{\bar{s}_1 + \bar{s}_2}{2} + d_1, & B_2 &= \frac{\bar{s}_2}{2} + d_2, \\
E_1 &= \frac{1}{V_1} \left(\frac{\bar{y}_1}{\sigma_1^2} + \frac{\bar{y}_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} + n_2 \alpha_J + \frac{a_1}{\zeta_1^2} \right), & E_2 &= \frac{1}{V_2} \left(\frac{\bar{y}_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} + n_2 \alpha_1 + \frac{a_2}{\zeta_2^2} \right), \\
\frac{1}{V_1} &= \frac{n_1}{\sigma_1^2} + \frac{n_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} + \frac{1}{\zeta_1^2}, & \frac{1}{V_2} &= \frac{n_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2} + \frac{1}{\zeta_2^2}.
\end{aligned}$$

Cet algorithme converge théoriquement et produit des tirages de la loi a posteriori jointe. De manière générale, l'échantillonnage de Gibbs appliqué aux mélanges peut toutefois entrer dans des états-pièges dans lesquels toutes les observations sont affectées à une seule composante. L'algorithme ne parvient plus alors à produire une autre répartition des observations entre les deux composantes durant une période indéfinie. Pour éviter ce problème, Robert et Mengersen (1999) proposent de lier les paramètres de la deuxième composante à ceux de la première. Dès lors, chaque observation contribue à l'estimation de l'ensemble des paramètres. Dans notre cas, ce lien est présent de façon naturelle puisque les paramètres de la seconde composante dépendent de manière explicite des paramètres de la première composante. De fait, nous pouvons espérer que notre algorithme est performant. Pour vérifier sa convergence effective, nous pouvons lancer plusieurs chaînes ayant des valeurs initiales différentes. Si la totalité des chaînes conduisent à la même loi stationnaire, nous déduisons que celle-ci est la loi a posteriori souhaitée. Dans la suite de la thèse nous construirons toujours nos algorithmes à partir d'une version reparamétrisée du modèle traité et la convergence sera systématiquement vérifiée en lançant 3 chaînes différentes.

Un dernier point concerne la valeur des hyperparamètres, c'est à dire les valeurs numériques des paramètres des loi a priori. Nous faisons le choix d'imposer des a priori diffus. Concrètement, les valeurs sont choisies de sorte qu'elle aient un impact très faible sur les estimations finales. Ceci implique des variances très grandes pour les lois a priori normales (par exemple $\zeta_1^2 = \zeta_2^2 = 1000$), et des valeurs proches de 0 pour les paramètres des lois bêta et inverse-gamma (par exemple $a_p = b_p = 0.5$ et $b_1 = b_2 = d_1 = d_2 = 0.001$). En pratique, l'utilisation de lois a priori diffuses peut compromettre les performances de l'algorithme. Ici, nous sommes à l'abri de ce problème, car nous disposons de contraintes d'identification des composantes.

Dans le premier chapitre, nous avons vu les méthodes d'évaluation du prix des options dans le cadre des modèles financiers standard : Black et Scholes (1973), modèles à volatilité stochastique, modèle à sauts du type Merton (1976). Ici, nous venons d'achever la revue des différentes méthodes d'estimation pour ces mêmes modèles. Nous nous proposons à présent de poursuivre le travail en nous intéressant à l'évaluation d'options et à la méthode d'estimation de modèles plus complexes, associant sauts dans la volatilité stochastique et sauts dans les rendements.

Chapitre 3

Sauts dans la volatilité

3.1 Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons exposé les principaux modèles utilisés pour décrire le processus du sous-jacent. Il s'agissait du processus Brownien géométrique standard, des modèles à volatilité stochastique et des modèles à sauts. Nous avons conclu ce premier chapitre par une brève description des modèles les plus récents : le modèle de Bates (1996) qui combine des sauts dans l'évolution du sous-jacent avec une volatilité stochastique et le modèle étudié dans Duffie *et al.* (2000) qui comporte des sauts dans le processus du sous-jacent et dans le processus de la volatilité. Ce dernier modèle apparaît comme étant le plus complet disponible à l'heure actuelle, tous les autres pouvant être considérés comme des cas particuliers. Par rapport au modèle de Bates, l'extension principale proposée par Duffie *et al.* (2000) est la prise en compte des sauts dans la volatilité. Outre la souplesse statistique que permet une telle modélisation, deux points importants méritent d'être soulignés. Tout d'abord, l'existence de sauts dans la volatilité est justifiée de manière intuitive. Par exemple, la volatilité est souvent interprétée comme une mesure de l'incertitude régnant sur les marchés financiers. Il semble donc naturel de supposer que l'arrivée subite de mauvaises (respectivement bonnes) nouvelles augmente (diminue) substantiellement et brusquement le niveau de volatilité. D'autre part, Duffie *et al.* (2000) montrent que la prise en compte de sauts dans la volatilité a un impact important sur l'évaluation du prix d'une option. Ainsi, l'existence de sauts dans la volatilité n'est plus simplement une façon de mieux appréhender les phénomènes régissant le processus du sous-jacent, mais également une manière d'accroître l'adéquation entre les prix issus d'un modèle théorique et les prix observés.

À terme, notre objectif est d'étudier une variante du modèle de Duf-

fie *et al.* (2000). Ce travail sera effectué dans le cinquième chapitre. Nous y décrirons en détail la modélisation, l'estimation des paramètres, l'évaluation d'options et l'impact des sauts, provenant du processus du sous-jacent comme ceux provenant de la volatilité, sur la surface de volatilité. Auparavant, il nous semble intéressant et nécessaire de fournir quelques résultats intermédiaires concernant uniquement la modélisation des sauts dans la volatilité. Ce travail préliminaire va se décomposer en deux parties. Dans un premier temps, nous nous intéressons à un modèle qui se situe à mi-chemin entre un modèle à volatilité stochastique et le modèle de Duffie *et al.* (2000). Il constitue une extension aux modèles à volatilité stochastique mais demeure néanmoins un cas particulier du modèle de Duffie *et al.* (2000). Comme Bates (1996) nous partons d'un modèle à volatilité stochastique auquel nous incorporons des sauts. La différence se situe dans la façon de rajouter ces sauts. Au lieu de considérer la présence d'une composante à sauts directement dans le processus du sous-jacent, nous supposons que les sauts interviennent dans le processus de volatilité. À notre connaissance ce type de modèle n'a pas encore été étudié. Notre ambition n'est pas de proposer un modèle alternatif qui se placerait comme compétiteur face au modèle de Bates (1996). Aussi, nous ne cherchons pas ici à comparer les deux modèles d'un point de vue quantitatif. Plus modestement, notre objectif dans ce chapitre est de 1) fournir des résultats permettant de traiter des modèles contenant des sauts dans la volatilité et 2) discuter de la pertinence de ce type de modèle. Dans un second temps, et ce sera l'objet du prochain chapitre, nous développerons une méthode d'estimation pour ces modèles à sauts dans la volatilité.

Dans la première section de ce chapitre, nous revenons sur le concept d'un modèle à sauts dans la volatilité, ceci afin d'éviter toute confusion avec le modèle de Bates (1996). Nous y décrivons ensuite un modèle de volatilité standard, souvent employé dans la littérature de l'économétrie financière ; le modèle Ornstein-Uhlenbeck dans sa version logarithmique (noté log-OU par la suite). Nous nous attachons à le décrire en détail en fournissant non seulement sa solution, sa distribution et ses moments mais également les procédés pour y arriver. Nous effectuons en quelque sorte une compilation des résultats déjà présents dans la littérature mais disponibles uniquement sous forme fragmentée. Nous poursuivons cet effort avec l'extension du modèle log-OU aux sauts. Là encore, nous fournissons de nombreux résultats originaux sur les caractéristiques de ce processus. Nous discutons également de la spécification des sauts.

La deuxième section est consacrée à la risque-neutralisation des modèles étudiés ainsi qu'à l'évaluation d'options. Contrairement à d'autres modèles à volatilité stochastique, il n'est pas possible de fournir une expression quasi-analytique du prix d'une option, et ce même dans le cas simple d'une vola-

tilité régie par un processus log-OU et d'une option de type européen. Par conséquent, nous proposons une méthode de Monte Carlo, simple à mettre en oeuvre, et largement inspirée des travaux de Hull et White (1987).

La troisième section nous permet d'illustrer certaines caractéristiques des modèles à sauts dans la volatilité, et de comparer ses performances par rapport à des modèles standard. Par exemple, nous montrons que des sauts dans la volatilité du sous-jacent peuvent engendrer des variations du sous-jacent très fortes, comparables à celles obtenues par des modèles à sauts du type Merton (1976), mais dont l'effet persiste sur l'évolution du support. Nous illustrons également l'impact des sauts dans la volatilité sur la surface de la volatilité et nous mettons en évidence les capacités de notre modèle à reproduire un certain nombre de faits stylisés.

3.2 Modèles de volatilité

Avant de décrire en détail les modèles auxquels nous nous intéressons, il nous semble utile de revenir sur la terminologie des différents modèles déjà étudiés dans les chapitres précédents. Ceci nous permettra d'éviter par la suite toute confusion dans la désignation des modèles.

Un *modèle de volatilité stochastique* spécifie l'évolution de la volatilité instantanée proprement dite. Il s'agit donc d'une équation différentielle stochastique univariée. Associée à l'équation définissant les mouvements du sous-jacent, elle caractérise un *modèle à volatilité stochastique* qui est, quant à lui, un processus bivarié. Lorsque l'évolution du sous-jacent et de sa volatilité instantanée sont chacune spécifiées selon une diffusion, nous parlerons de *modèles à volatilité stochastique standard*. Ce type de modèle a été étudié par, entre autres, Hull et White (1987), Scott (1987) ou encore Heston (1993). Parallèlement à ces modèles à volatilité stochastique standard, se sont développés les *modèles à sauts* initialement introduits par Merton (1976). Au sens usuel, un modèle à sauts désigne un processus univarié caractérisant l'évolution d'un sous-jacent. Au sens large, un modèle à sauts désigne le processus d'une variable financière composé d'une partie continue (représentée par une diffusion) et d'une partie discrète (représentée par un processus de Poisson). Nous parlerons ainsi d'un *modèle de volatilité stochastique à sauts* pour nommer un processus univarié où la volatilité est spécifiée par la juxtaposition d'une diffusion et d'une composante discrète. Pour désigner un processus bivarié comportant des sauts uniquement dans la volatilité, nous utiliserons le terme de *modèle à volatilité stochastique avec sauts dans la volatilité* ou plus simplement d'un *modèle à sauts dans la volatilité*. Il s'agit de ne pas confondre ces derniers modèles avec les *modèles à sauts avec volatilité stochastique* ou

encore les *modèles à volatilité stochastique avec sauts* qui sont deux expressions équivalentes que l'on peut trouver dans la littérature pour désigner un seul et même modèle bivarié. Le sous-jacent y est spécifié par la combinaison d'un modèle à sauts dans l'évolution du support proprement dite et d'une volatilité stochastique décrite par une diffusion. Cette volatilité stochastique ne comporte pas de composante à sauts. De tels modèles ont été introduits par Bates (1996) et étudiés, entre autres, par Bakshi *et al.* (1997), Andersen *et al.* (2002), Pan (2002) et Chacko et Viceira (2003). Enfin, les *modèles à sauts dans le sous-jacent et la volatilité* que nous désignerons parfois comme étant des *modèles complets* ont été décrits par Duffie *et al.* (2000), Bakshi et Cao (2002), Eraker *et al.* (2003), Chen et Scott (2004) et Eraker (2004). Ce sont des modèles bivariés qui spécifient l'évolution du sous-jacent et de sa volatilité instantanée par des processus comportant une diffusion et une partie discrète.

Nous cherchons à présent à déterminer quelles spécifications choisir pour la partie continue d'un processus de volatilité stochastique. Comme nous l'avons déjà souligné dans les chapitres précédents, il existe diverses manières de spécifier un modèle de volatilité stochastique, chacune d'elle comportant des avantages et des inconvénients. Pour prendre en considération l'existence d'une force de retour à la moyenne et la stationnarité du processus de volatilité, la modélisation financière a proposé des modèles en temps continu adéquats tels que le modèle d'Ornstein-Uhlenbeck (désormais noté OU). Ce modèle a été intensivement utilisé pour modéliser l'évolution de taux d'intérêt à la suite de Vasiček (1977). Les travaux de Schoebel et Zhu (1999) constituent une application récente dans une perspective d'évaluation d'options sur actions. Ils montrent en particulier qu'il existe une formulation quasi-analytique pour le prix d'une option. Il faut toutefois signaler l'inconvénient majeur de ce modèle, qui est de pouvoir générer des volatilités négatives. Dans le cadre d'un modèle à volatilité stochastique standard, cette caractéristique est gênante, même si pour des valeurs de paramètres plausibles, la probabilité qu'un tel événement survienne est très faible, voir Schoebel et Zhu (1999) pour une illustration. Le modèle de Cox *et al.* (1985) (ou modèle racine carrée) tient une place de première importance dans la modélisation financière. Il a été utilisé dans de nombreux travaux de référence traitant de l'évaluation du prix d'options, comme Heston (1993), Bates (1996) ou Duffie *et al.* (2000). L'avantage de ce type de modèle est de disposer d'une formule quasi-analytique pour le prix d'une option. Malheureusement, d'un point de vue économétrique et par anticipation avec les travaux que nous serons amenés à effectuer dans le chapitre suivant, ce modèle présente l'inconvénient majeur de ne pas posséder de solution analytique connue à l'équation différentielle qui le définit. Cox *et al.* (1985) fournissent certes la fonction

de densité de transition mais celle-ci se prête difficilement à des méthodes d'estimation fondées sur le maximum de vraisemblance.¹ Aussi, nous nous tournons naturellement vers le modèle Ornstein-Uhlenbeck dans sa version logarithmique qui présente de nombreux avantages (désormais noté log-OU). Tout d'abord, et contrairement à un modèle OU, le modèle log-OU permet d'éviter des volatilités négatives. Andersen *et al.* (2001), Eraker (2004) ou encore Chourdakis (2004) évoquent également une plus grande souplesse du modèle log-OU à capturer les propriétés statistiques de la volatilité. Ensuite, il préserve certaines bonnes propriétés mathématiques d'un modèle OU (solution analytique, fonction de transition connue). Ceci est souhaitable pour envisager une méthode d'estimation assez simple et, explique que son utilisation ait été privilégiée en économétrie de la finance, voir par exemple les articles de référence dans ce domaine que sont Jacquier *et al.* (1994) et Harvey *et al.* (1994). Enfin, le modèle log-OU supporte aisément une extension à une composante à sauts. En contrepartie, il n'y a pas de formule quasi-analytique connue du prix d'une option. Évidemment, des méthodes numériques restent envisageables comme nous le montrerons plus tard.

Nous nous proposons, dans un premier temps, de donner les principaux résultats concernant le modèle de volatilité stochastique log-OU. Il s'agit essentiellement de regrouper des résultats déjà présents dans diverses études. Ce travail récapitulatif s'avère être indispensable pour établir, dans un second temps, les propriétés du modèle log-OU comportant des sauts (noté désormais log-OUS). Dans ce cas, nous offrons des résultats qui, à notre connaissance, sont originaux. Certains d'entre eux, vont nous servir directement dans ce chapitre. Par exemple, pour l'évaluation d'options, nous devons pouvoir exprimer l'évolution de la volatilité au carré sachant que la modélisation initialement proposé concerne la log-volatilité au carré. D'autres résultats, portant sur les moments de la log-volatilité au carré, et la volatilité au carré, vont prendre toute leur importance dans les chapitres suivants, lorsqu'il s'agira d'estimer les paramètres de ces modèles. Une fois ce travail sur la description des spécifications de la volatilité instantanée effectué, nous serons en mesure d'étudier les modèles à volatilité stochastique qui en découlent.

¹ Voir Moraux *et al.* (1998, 1999) pour une application de la méthode du maximum de vraisemblance à ce modèle. D'autres méthodes d'estimation restent évidemment envisageables.

3.2.1 Le modèle log-OU

Le modèle log-OU spécifie les variations de la volatilité σ_t selon l'équation différentielle stochastique suivante :

$$d \ln(\sigma_t^2) = \kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^2)]dt + \gamma dW_t, \quad (3.1)$$

où dW_t représente un mouvement Brownien, κ désigne la vitesse de retour à la moyenne et ϑ est le niveau de référence autour duquel la volatilité évolue. Il présente l'avantage de posséder une solution et une fonction de transition aisées à manipuler. Concrètement, la solution de cette équation différentielle est obtenue par une simple application de la formule d'Itô.² En partant de la valeur initiale σ_τ , la valeur de la volatilité en $t > \tau$ est :

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) &= \vartheta(1 - \exp[-\kappa(t - \tau)]) + \ln(\sigma_\tau^2) \exp[-\kappa(t - \tau)] \\ &+ \int_\tau^t \exp[\kappa(s - t)] \gamma dW_s. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Notons que le terme $\int_\tau^t \exp[\kappa(s - t)] \gamma dW_s$ représente un processus Gaussien. La loi de $\ln(\sigma_t^2)$ conditionnelle à la valeur initiale σ_τ est donc une loi normale d'espérance :

$$E[\ln(\sigma_t^2) | \sigma_\tau] = \vartheta(1 - \exp[-\kappa(t - \tau)]) + \ln(\sigma_\tau^2) \exp[-\kappa(t - \tau)], \quad (3.3)$$

et de variance :

$$Var[\ln(\sigma_t^2) | \sigma_\tau] = \frac{\gamma^2}{2\kappa} (1 - \exp[-2\kappa(t - \tau)]). \quad (3.4)$$

En faisant tendre t vers l'infini, on obtient les moments inconditionnels. Ainsi, l'espérance marginale est $E[\ln(\sigma_t^2)] = \vartheta$ et la variance marginale est $V[\ln(\sigma_t^2)] = \gamma^2/(2\kappa)$.

Une application directe de l'équation (3.3) consiste à s'en servir pour donner une idée de la vitesse d'ajustement du niveau de la log-volatilité au carré actuel à son niveau de référence ϑ . Concrètement, si on se place à la date t nous savons que pour une date future $s > t$:

$$E[\ln(\sigma_s^2) | \sigma_t] = \vartheta(1 - \exp[-\kappa(s - t)]) + \ln(\sigma_t^2) \exp[-\kappa(s - t)]. \quad (3.5)$$

On peut dès lors calculer le temps nécessaire $s - t$ pour que le niveau actuel de la log-volatilité au carré, $\ln(\sigma_t^2)$, se situe à mi-chemin entre un niveau de volatilité future $\ln(\sigma_s^2)$ et son niveau de référence ϑ . Pour y parvenir, nous

²Voir l'annexe A.5.3.

remplaçons donc dans (3.5), $\ln(\sigma_t^2)$ par $[\ln(\sigma_\tau^2) + \vartheta]/2$. Un calcul rapide donne $s - t = \ln 2/\kappa$.

De (3.2), on peut également déduire que la volatilité au carré suit une loi log-normale. En effet, en prenant l'exponentielle de cette équation, nous avons :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \exp(\ln(\sigma_\tau^2) \exp[-\kappa(t - \tau)] + \vartheta(1 - \exp[-\kappa(t - \tau)])) \times \\ &\exp\left(\int_\tau^t \exp[\kappa(s - t)] \gamma dW_s\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

L'espérance et la variance de σ_t^2 sont alors données par :

$$\begin{aligned} E(\sigma_t^2 | \sigma_\tau) &= \exp(E[\ln(\sigma_t^2) | \sigma_\tau] + V[\ln(\sigma_t^2) | \sigma_\tau]/2), \\ &= \exp[\vartheta(1 - \exp[-\kappa(t - \tau)]) + \ln(\sigma_\tau^2) \exp[-\kappa(t - \tau)]] \times \\ &\exp\left[\frac{\gamma^2}{4\kappa}(1 - \exp[-2\kappa(t - \tau)])\right], \end{aligned} \quad (3.7)$$

et :

$$V(\sigma_t^2 | \sigma_\tau) = E(\sigma_t^2 | \sigma_\tau)^2 [\exp(V[\ln(\sigma_t^2) | \sigma_\tau]) - 1]. \quad (3.8)$$

Finalement, en faisant tendre t vers l'infini, on peut trouver l'espérance et la variance inconditionnelles de σ_t^2 . On a :

$$E(\sigma_t^2) = \exp[\theta + \gamma^2/(4\kappa)], \quad (3.9)$$

et :

$$V[\sigma_t^2] = \exp[\theta + \gamma^2/(2\kappa)] - \exp[\theta + \gamma^2/(4\kappa)]. \quad (3.10)$$

3.2.2 Le modèle log-OUS

Nous définissons à présent l'extension du modèle log-OU à la présence de sauts. Par analogie à Merton (1976) qui a suggéré l'existence de discontinuités dans l'évolution du cours des actifs, il semble naturel que la volatilité, parfois interprétée comme l'incertitude inhérente au sous-jacent, puisse elle aussi varier subitement. Ces discontinuités sont des variations d'une ampleur telle qu'un modèle de diffusion ne peut les générer. On peut évidemment penser aux crashes ou plus généralement à l'arrivée soudaine d'informations importantes remettant largement en cause le prix actuel du support. On peut également fournir des explications puisant leur source dans le comportement des agents. Il existe en effet un courant de littérature (voir par exemple He,

2003, et les références internes) dans lequel on considère que le marché est partagé en deux types d'agents ; les fundamentalistes (*fundamentalists*) et les suiveurs (*followers* ou encore *chartists*), chaque agent pouvant changer de profil. Les premiers se basent sur des données rationnelles pour évaluer le prix du support, leurs opinions évoluent lentement et leur horizon de placement est lointain. Les seconds fondent leurs anticipations sur une lecture graphique des cours passés du support et leurs placements ont des objectifs à très court terme. Lorsqu'une analyse technique leur émet un signal de renversement de tendance dans l'évolution du support, les chartistes changent brutalement d'opinion. Ce comportement tend à remettre en cause l'équilibre régnant sur le marché et donc à accroître soudainement la volatilité. L'incertitude gagne d'autres agents, qui de fundamentalistes deviennent suiveurs et la volatilité continue à rester élevée. Cette contagion explique le phénomène de persistance des chocs dans la volatilité. Un modèle à sauts dans la volatilité permet de tenir compte aisément d'une telle structure du marché, la partie continue du modèle représentant les fundamentalistes tandis que la composante à sauts reflète l'attitude versatile des chartistes. En plus de ces justifications intuitives, la prise en compte de sauts dans la volatilité est également motivée par les récents travaux de Duffie *et al.* (2000) ou Eraker *et al.* (2003), qui montrent que l'existence de sauts dans la volatilité peut sensiblement améliorer l'adéquation entre le prix observé d'une option et le prix issu d'un tel modèle théorique.

Pour obtenir le modèle log-OUS, nous allons combiner une diffusion (le modèle log-OU) avec un processus à sauts. Ce processus à sauts est constitué par la donnée de deux éléments : 1) un processus de Poisson pour modéliser l'arrivée des événements extraordinaires et 2) un terme aléatoire représentant l'ampleur de la variation. Le processus de Poisson est noté N_t et désigne le nombre de sauts ayant eu lieu à la date t . Par ailleurs, nous notons $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N_t}$ les dates auxquelles se produisent ces sauts. N_t suit une loi de Poisson d'intensité λ_J .³ Pour un intervalle de temps très court $[t-h; t]$, nous avons :

$$\begin{aligned} P[\Delta_h N_t = 0] &= 1 - \lambda_J h + o(h), \\ P[\Delta_h N_t = 1] &= \lambda_J h + o(h), \\ P[\Delta_h N_t > 1] &= o(h). \end{aligned}$$

Après avoir caractérisé le processus d'arrivée des sauts, il nous reste à spécifier leur nature. Nous avons déjà évoqué un certain nombre de spécifications possibles pour les sauts. Ainsi, lorsque la diffusion est représentée par un processus Brownien géométrique standard, comme dans Merton (1976) les sauts

³Notons simplement que N_t n'est pas un processus de Poisson compensé et n'est donc pas une martingale.

sont fréquemment supposés être Gaussiens. Kou (2002) est une exception et il suppose des sauts distribués selon une loi double-exponentielle. Pour un modèle OU, Das (2002) suggère des sauts Gaussiens. Enfin, pour un modèle à la Cox-Ingersoll-Ross les sauts sont généralement supposés comme étant issus d'une loi exponentielle, donc forcément positifs, voir Duffie *et al* (2000) ou encore Eraker (2004) et Chacko et Viceira (2003) pour une alternative. Le choix de ces lois est essentiellement, sinon entièrement, motivé par des considérations d'ordre calculatoire. Un autre critère auquel notre choix doit être soumis est son adaptation économétrique. Pour toutes ces raisons, nous supposons que l'amplitude des sauts est distribuée selon une loi normale d'espérance $E(J) = \mu_J$ et de variance $V(J) = \gamma_J^2$. Une telle hypothèse présente l'avantage de pouvoir considérer des variations de volatilité aussi bien positives que négatives. En effet, nous ne savons pas, a priori, si les fortes variations dans la volatilité sont nécessairement associées à des mauvaises nouvelles, donc positives.

Le modèle log-OU étendu à des sauts est décrit par :

$$d \ln(\sigma_t^2) = \kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^2)]dt + \gamma dW_t + J dN_t. \quad (3.11)$$

Il peut également se réécrire sous la forme plus intuitive suivante :

$$d \ln(\sigma_t^2) = \begin{cases} \kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^2)]dt + \gamma dW_t & \text{avec probabilité } 1 - \lambda_J dt \\ \kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^2)]dt + \gamma dW_t + J & \text{avec probabilité } \lambda_J dt \end{cases} \quad (3.12)$$

Cette écriture permet de mieux appréhender ce qui se produit lorsqu'il y a un saut à une date τ_i . En notant τ_i^- l'instant qui précède le saut, on a $\ln(\sigma_{\tau_i}^2) - \ln(\sigma_{\tau_i^-}^2) = 0 + J_i$. La variation générée par la partie continue est nulle car l'intervalle de temps séparant τ_i^- de τ_i est nul. On en déduit que la valeur de $\ln(\sigma_{\tau_i}^2)$ est égale à $\ln(\sigma_{\tau_i^-}^2) + J_i$.

Pour trouver la solution de l'équation différentielle (3.11), nous pouvons employer la formule d'Itô pour les modèles à sauts fournie par exemple dans Cont et Tankov (2003). Nous détaillons ici une autre façon d'obtenir cette solution (voir Hauswirth, 1999, pour l'application de la même méthode au modèle OU et évidemment le chapitre 1 pour l'application au processus Brownien géométrique standard). Rappelons que les sauts interviennent aux instants $\{\tau_i\}_{i=1, \dots, n}$, il en découle que sur l'intervalle de temps $[\tau; \tau_1[$, aucun saut n'a lieu et l'évolution de la volatilité est décrite par un processus log-OU. La solution est donnée par (3.2). On a donc pour $t \in [\tau, \tau_1[$:

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) &= \ln(\sigma_\tau^2) \exp[-\kappa(t - \tau)] + \vartheta(1 - \exp[-\kappa(t - \tau)]) \\ &\quad + \int_\tau^t \exp[\kappa(s - t)] \gamma dW_s. \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.2. Modèles de volatilité

De même, pour $t \in [\tau_1, \tau_2[$, nous avons :

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) &= \ln(\sigma_{\tau_1}^2) \exp[-\kappa(t - \tau_1)] + \vartheta(1 - \exp[-\kappa(t - \tau_1)]) \\ &\quad + \int_{\tau_1}^t \exp[\kappa(s - t)] \gamma dW_s. \end{aligned} \quad (3.14)$$

En tenant compte du fait que $\ln(\sigma_{\tau_1}^2) = \ln(\sigma_{\tau_1^-}^2) + J_1$, on déduit de (3.14) que pour $t \in [\tau_1, \tau_2[$:

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) &= [\ln(\sigma_{\tau_1^-}^2) + J_1] \exp[-\kappa(t - \tau_1)] + \vartheta(1 - \exp[-\kappa(t - \tau_1)]) \\ &\quad + \int_{\tau_1}^t \exp[\kappa(s - t)] \gamma dW_s, \\ &= \ln(\sigma_{\tau_1^-}^2) \exp[-\kappa(t - \tau_1)] + \vartheta(1 - \exp[-\kappa(t - \tau_1)]) \\ &\quad + \int_{\tau_1}^t \exp[\kappa(s - t)] \gamma dW_s + J_1 \exp[-\kappa(t - \tau_1)]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

En remplaçant dans cette dernière équation la valeur de $\ln(\sigma_{\tau_1^-}^2)$ par son expression :

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_{\tau_1^-}^2) &= \ln(\sigma_{\tau}^2) \exp[-\kappa(\tau_1^- - \tau)] + \vartheta(1 - \exp[-\kappa(\tau_1^- - \tau)]) \\ &\quad + \int_{\tau}^{\tau_1^-} \exp[\kappa(s - \tau_1^-)] \gamma dW_s, \end{aligned} \quad (3.16)$$

on obtient que pour $t \in [\tau, \tau_2[$, la volatilité évolue selon le processus :

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) &= \ln(\sigma_{\tau}^2) \exp[-\kappa(t - \tau)] + \vartheta(1 - \exp[-\kappa(t - \tau)]) \\ &\quad + \int_{\tau}^t \exp[\kappa(s - t)] \gamma dW_s + J_1 \exp[-\kappa(t - \tau_1)]. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Finalement, ce raisonnement répété sur l'ensemble des instants où il y a eu un saut conduit à la solution :

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_t^2) &= \ln(\sigma_{\tau}^2) \exp[-\kappa(t - \tau)] + \vartheta(1 - \exp[-\kappa(t - \tau)]) \\ &\quad + \int_{\tau}^t \exp[\kappa(s - t)] \gamma dW_s + \sum_{i=0}^{N_t} J_i \exp[-\kappa(t - \tau_i)]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

On pourrait en conclure que la volatilité a une tendance croissante puisqu'à chaque saut le niveau de volatilité augmente d'une quantité dépendante de la valeur du saut. Dans les faits, le saut peut être rapidement compensé si 1) κ

n'est pas exagérément faible, c'est à dire si la vitesse de retour à la moyenne est suffisamment élevée ou encore si 2) la date à laquelle a eu lieu le saut est lointaine, c'est à dire $t - \tau_i$ grand.

Avec l'hypothèse de sauts Gaussiens, on voit que la solution se décompose en une variable aléatoire Gaussienne provenant de la solution sans sauts et de la somme de variables aléatoires normales provenant de la partie discontinue du processus. Par conséquent, la distribution de la solution, conditionnellement à un nombre de sauts donné, $N_t = n$, et à σ_τ , sur la période, est une loi normale :

$$f[\ln(\sigma_t^2) | \sigma_\tau, N_t = n] = f_{\mathcal{N}}[\ln(\sigma_t^2) | M_n, \Omega_n^2], \quad (3.19)$$

où M_n et Ω_n^2 désignent l'espérance et la variance dans le cas où il y a eu n sauts. Les expressions de ces deux quantités sont obtenues en effectuant les opérations suivantes. Tout d'abord M_n est défini par :

$$\begin{aligned} M_n &= E[\ln(\sigma_t^2) | \sigma_\tau, N_t = n], \\ &= M^c + M_n^d, \\ &= \vartheta(1 - \exp[-\kappa(t - \tau)]) + \ln(\sigma_\tau^2) \exp[-\kappa(t - \tau)] \\ &\quad + E\left(\sum_{i=0}^n J_i \exp[-\kappa(t - \tau_i)]\right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

La deuxième égalité signifie simplement que M_n est égale à la somme de l'espérance de la partie continue M^c du processus, qui ne dépend pas du nombre de sauts, et de l'espérance de la partie discrète M_n^d . Nous devons à présent fournir l'expression de cette dernière quantité. Nous avons :

$$\begin{aligned} M_n^d &= E\left(\sum_{i=0}^n J_i \exp[-\kappa(t - \tau_i)]\right), \\ &= \sum_{i=0}^n E(J_i \exp[-\kappa(t - \tau_i)]), \\ &= \sum_{i=0}^n E(J_i) E(\exp[-\kappa(t - \tau_i)]). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Ce résultat provient simplement du fait de la linéarité de l'opérateur espérance et de l'indépendance entre la taille du saut et sa date d'apparition. Rappelons également que l'une des hypothèses nécessaires pour la construction d'un processus de Poisson est la distribution uniforme des dates d'ap-

partition.⁴ Nous avons donc :

$$\begin{aligned} E(\exp[-\kappa(t - \tau_i)]) &= \int_{\tau}^t \exp[-\kappa(t - \tau_i)] \frac{1}{t - \tau} d\tau_i, \\ &= \frac{1}{\kappa\tau} (1 - \exp[-\kappa(t - \tau)]). \end{aligned} \quad (3.22)$$

En combinant ce résultat à l'équation (3.21) et en notant que les J_i sont i.i.d, on obtient :

$$E\left(\sum_{i=0}^n J_i \exp[-\kappa(t - \tau_i)]\right) = \frac{nE(J)}{\kappa(t - \tau)} (1 - \exp[-\kappa(t - \tau)]), \quad (3.23)$$

puis finalement :

$$M_n = \left(\vartheta + \frac{nE(J)}{\kappa(t - \tau)}\right) (1 - \exp[-\kappa(t - \tau)]) + \ln(\sigma_\tau^2) \exp[-\kappa(t - \tau)]. \quad (3.24)$$

En procédant de manière analogue, nous aboutissons à l'expression suivante pour Ω_n^2 :

$$\begin{aligned} \Omega_n^2 &= V[\ln(\sigma_t^2) | \sigma_\tau, N_t = n], \\ &= \Omega^{c,2} + \Omega_n^{d,2}, \\ &= \frac{\gamma^2(t - \tau) + nE(J^2)}{2\kappa(t - \tau)} (1 - \exp[-2\kappa(t - \tau)]) \\ &\quad - \frac{nE(J)^2}{\kappa^2(t - \tau)} (1 - \exp[-\kappa(t - \tau)])^2, \end{aligned} \quad (3.25)$$

où $\Omega^{c,2}$ et $\Omega_n^{d,2}$ désignent respectivement la variance de la partie continue et discrète du processus. Ayant à notre disposition tous ces éléments, nous pouvons poursuivre le raisonnement en cherchant à déterminer la loi de $\ln(\sigma_t^2)$

⁴Si les dates auxquelles ont lieu les sauts sont distribuées selon une loi uniforme $U[\tau, t]$, la durée entre deux sauts est quant à elle distribuée selon une loi exponentielle.

sachant uniquement σ_τ . Nous connaissons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} f[\ln(\sigma_t^2)|\sigma_\tau] &= \int f_{\mathcal{N}}[\ln(\sigma_t^2)|M_{N_t}, \Omega_{N_t}^2] f_{\mathcal{P}}(N_t) dN_t, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda_J(t-\tau)][\lambda_J(t-\tau)]^n}{n!} f_{\mathcal{N}}[\ln(\sigma_t^2)|M_n, \Omega_n^2]. \end{aligned} \quad (3.26)$$

En d'autres termes, la loi de $\ln(\sigma_t^2)$ sachant σ_τ est un mélange infini de lois normales. Dans ce cas, déterminer l'espérance et la variance marginales nécessite l'utilisation des relations entre les moments d'un mélange de lois et les moments des composantes de ce mélange. Nous savons en effet, que les moments d'un mélange sont égaux à la somme pondérée par la probabilité d'apparition des moments de chacune des composantes. Ainsi pour l'espérance, nous avons :

$$E[\ln(\sigma_t^2)|\sigma_\tau] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda_J(t-\tau)][\lambda_J(t-\tau)]^n}{n!} M_n, \quad (3.27)$$

Maintenant, en utilisant le fait que $M_n = M^c + M_n^d$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda_J(t-\tau)][\lambda_J(t-\tau)]^n}{n!} = 1, \quad (3.28)$$

et :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \exp[-\lambda_J(t-\tau)][\lambda_J(t-\tau)]^n}{n!} = \lambda_J(t-\tau), \quad (3.29)$$

nous parvenons à :

$$\begin{aligned} E[\ln(\sigma_t^2)|\sigma_\tau] &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda_J(t-\tau)][\lambda_J(t-\tau)]^n}{n!} (M^c + M_n^d), \\ &= M^c + \frac{\lambda_J E(J)}{\kappa} (1 - \exp[-\kappa(t-\tau)]), \\ &= \left(\vartheta + \frac{\lambda_J E(J)}{\kappa} \right) (1 - \exp[-\kappa(t-\tau)]) \\ &\quad + \ln(\sigma_\tau^2) \exp[-\kappa(t-\tau)]. \end{aligned} \quad (3.30)$$

3.2. Modèles de volatilité

De manière analogue, nous trouvons, après avoir déterminé le moment d'ordre 2, que la variance est :

$$V[\ln(\sigma_t^2)|\sigma_\tau] = \frac{\gamma^2 + \lambda_J E(J^2)}{2\kappa} (1 - \exp[-2\kappa(t - \tau)]). \quad (3.31)$$

Notons que ces résultats peuvent également être obtenus en utilisant la fonction caractéristique du processus $\ln(\sigma_t^2)$ comme dans l'annexe de Das (2002).

Comme dans le cas log-OU, il nous est possible de donner la loi de σ_t^2 . Il suffit pour cela de remarquer que :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 = & \exp[\ln(\sigma_\tau^2) \exp[-\kappa(t - \tau)] + \vartheta(1 - \exp[-\kappa(t - \tau)])] \times \\ & \exp\left[\int_\tau^t \exp[\kappa(s - t)] \gamma dW_s\right] \exp\left(\sum_{i=0}^{N_t} J_i \exp[-\kappa(t - \tau_i)]\right), \end{aligned} \quad (3.32)$$

est un produit de deux quantités qui sont chacune distribuées selon une loi log-normale. En effet, le premier terme est la solution du processus σ_t^2 lorsqu'il n'y a pas de sauts, et nous avons vu dans la section précédente que cette solution suivait une loi log-normale. Le second terme est l'exponentielle d'une somme de variables aléatoires normales et par conséquent il est également distribué selon une loi log-normale. Or, le produit de deux variables log-normales étant lui aussi une variable log-normale, nous en déduisons que σ_t^2 , sachant σ_τ et le nombre de sauts $N_t = n$, est distribué selon une loi log-normale. Nous avons donc :

$$f(\sigma_t^2 | \sigma_\tau, N_t = n) = f_{\ln \mathcal{N}}(\sigma_t^2 | M_n, \Omega_n^2). \quad (3.33)$$

L'espérance et la variance conditionnelles de σ_t^2 par rapport à σ_τ et N_t se déduisent directement du lien entre les moments de la loi normale et la log-normale. Par conséquent, l'espérance est égale à :

$$E(\sigma_t^2 | \sigma_\tau, N_t = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda_J(t - \tau)] [\lambda_J(t - \tau)]^n}{n!} \exp(M_n + \Omega_n^2/2), \quad (3.34)$$

et la variance :

$$\begin{aligned} V(\sigma_t^2 | \sigma_\tau, N_t = n) = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda_J(t - \tau)] [\lambda_J(t - \tau)]^n}{n!} \exp(2M_n + \Omega_n^2) \times \\ & [\exp(\Omega_n^2) - 1]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Le même type de raisonnement que celui mené précédemment nous conduit à la loi de σ_t^2 sachant σ_τ :

$$f(\sigma_t^2|\sigma_\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda_J(t-\tau)][\lambda_J(t-\tau)]^n}{n!} f_{\ln \mathcal{N}}(\sigma_t^2|M_n, \Omega_n^2), \quad (3.36)$$

c'est à dire un mélange infini de lois log-normales. Les expressions analytiques pour l'espérance et la variance deviennent plus compliquées dans ce cadre. Pour illustrer ce point nous ne donnons que l'expression pour l'espérance, celle-ci étant la seule quantité dont nous aurons besoin par la suite.

$$\begin{aligned} E(\sigma_t^2|\sigma_\tau) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda_J(t-\tau)][\lambda_J(t-\tau)]^n}{n!} \exp(M_n + \Omega_n^2/2), \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda_J(t-\tau)][\lambda_J(t-\tau)]^n}{n!} \times \\ &\quad \exp[M^c + M_n^d + (\Omega^{c,2} + \Omega_n^{d,2})/2], \\ &= \exp(M^c + \Omega^{c,2}/2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda_J(t-\tau)][\lambda_J(t-\tau)]^n}{n!} \times \\ &\quad \exp(M_n^d + \Omega_n^{d,2}/2). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Tandis que le premier terme est connu, c'est l'espérance de la partie continue de σ_t^2 , la sommation peut être calculée en notant que les expressions de M_n^d et $\Omega_n^{d,2}$ sont disponibles et que pour une quantité B_t constante par rapport à n on a :

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda_J(t-\tau)][\lambda_J(t-\tau)]^n}{n!} \exp(nB_t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda_J(t-\tau)][\lambda_J(t-\tau) \exp(B_t)]^n}{n!}, \quad (3.38) \\ &= \exp(\lambda_J(t-\tau)[\exp(B_t) - 1]). \end{aligned}$$

L'ensemble de ces éléments nous permet de donner l'expression de l'espé-

3.3. Évaluation d'option

rance :

$$\begin{aligned}
 E(\sigma_t^2 | \sigma_\tau) &= \exp[\vartheta(1 - \exp[-\kappa(t - \tau)]) + \ln(\sigma_\tau^2) \exp[-\kappa(t - \tau)]] \times \\
 &\quad \exp\left[\frac{\gamma^2}{4\kappa}(1 - \exp[-2\kappa(t - \tau)])\right] \times \\
 &\quad \exp(\lambda_J(t - \tau)[\exp(B_t) - 1]),
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

avec :

$$\begin{aligned}
 B_t &= E(J_i \exp[-\kappa(t - \tau_i)]) + V(J_i \exp[-2\kappa(t - \tau_i)])/2, \\
 &= \frac{E(J)}{\kappa(t - \tau)}(1 - \exp[-\kappa(t - \tau)]) + \frac{E(J^2)}{4\kappa(t - \tau)}(1 - \exp[-2\kappa(t - \tau)]) \\
 &\quad - \frac{E(J)^2}{2\kappa^2(t - \tau)^2}(1 - \exp[-\kappa(t - \tau)])^2.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Lorsque t tend vers l'infini, on obtient l'espérance non-conditionnelle de σ_t^2 :⁵

$$E(\sigma_t^2) = \exp\left[\vartheta + \frac{\lambda_J E(J)}{\kappa} + \frac{\gamma^2 + \lambda_J E(J^2)}{4\kappa}\right], \tag{3.41}$$

Les propriétés statistiques établies ici nous permettent évidemment de mieux appréhender le comportement de la volatilité sous de telles modélisations. Elles vont également s'avérer utiles dans le chapitre 4 consacré à l'estimation de ces modèles.

3.3 Évaluation d'option

Pour évaluer des options à partir des modèles présentés dans ce chapitre, nous allons employer l'approche risque-neutre développée par Cox et Ross (1976) déjà évoquée à de maintes reprises dans le chapitre 1. Auparavant, il nous faut évidemment déterminer l'expression du modèle employé sous sa forme risque-neutre.

⁵Le calcul effectif de la limite se fait en factorisant B_t par $1/(t - \tau)$ puis en développant $\exp(B_t)$ en série entière.

3.3.1 Le modèle risque-neutre

Pour l'heure nous n'avons étudié que les processus de la volatilité instantanée du sous-jacent. Nous n'avons pas encore spécifié explicitement le processus du sous-jacent. Nous supposons que le support est régi par un processus Brownien géométrique standard :

$$dS_t = \alpha_c S_t dt + \sigma_t S_t dB_t. \quad (3.42)$$

La volatilité instantanée σ_t est stochastique et nous envisageons les deux spécifications déjà traitées précédemment pour la modéliser :

$$\begin{aligned} \text{log-OU} : \ln(\sigma_t^2) &= \kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^2)]dt + \gamma dW_t, \\ \text{log-OUS} : \ln(\sigma_t^2) &= \kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^2)]dt + \gamma dW_t + JdN_t. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Nous supposons que la corrélation entre les rendements et la volatilité est nulle : $E(dB_t dW_t) = 0$.

Étudions d'abord la procédure de risque-neutralisation pour le modèle log-OU. Elle ressemble point par point à celle décrite dans la section des modèles à volatilité stochastique du chapitre 1. En suivant l'argumentation de Scott (1987), nous devons avoir à notre disposition, non plus le processus de la log-volatilité au carré mais le processus de la volatilité au carré lui-même. Aussi, nous réécrivons l'équation différentielle stochastique du processus log-OU sous la forme :

$$d\sigma_t^2 = \sigma_t^2[(\kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^2)] + \gamma^2/2)dt + \gamma dW_t]. \quad (3.44)$$

Il s'agit simplement d'appliquer la formule d'Itô pour parvenir à ce résultat. Toujours d'après la formule d'Itô, mais cette fois appliquée à un modèle bivarié (voir l'annexe A.1.2), le prix d'un call européen doit vérifier l'équation suivante :

$$\begin{aligned} dC &= \frac{\partial C}{\partial S} dS_t + \frac{\partial C}{\partial \sigma^2} d\sigma_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (dS_t)^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial \sigma^2} dS_t d\sigma_t^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^4} (d\sigma_t^2)^2 + \frac{\partial C}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (3.45)$$

En effectuant les remplacements suivants ; $(dS_t)^2 = \sigma_t^2 S_t^2 dt$, $dS_t d\sigma_t^2 = 0$ et $(d\sigma_t^2)^2 = \sigma_t^4 \gamma^2 dt$, l'équation (3.45) devient :

$$dC = \frac{\partial C}{\partial S} dS_t + \frac{\partial C}{\partial \sigma^2} d\sigma_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma_t^2 S_t^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^4} \sigma_t^4 \gamma^2 dt + \frac{\partial C}{\partial t} dt. \quad (3.46)$$

3.3. Évaluation d'option

La prise en compte de l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage se traduit par une modification de cette dernière équation en :

$$r \left(C - \frac{\partial C}{\partial S} S_t \right) dt = \frac{\partial C}{\partial \sigma^2} d\sigma_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma_t^2 S_t^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^4} \sigma_t^4 \gamma^2 dt + \frac{\partial C}{\partial t} dt. \quad (3.47)$$

Évidemment, suite à la présence d'un terme stochastique $d\sigma_t^2$ dans cette équation, il existe une infinité de solutions à cette équation différentielle. Pour restreindre l'ensemble des solutions à un unique prix d'option, il nous faut supposer une fonction de préférence. Une fonction de préférence logarithmique permet d'aboutir à une version risque-neutre du modèle qui préserve sa structure. En effet, sous cette hypothèse, on a, voir par exemple Melino et Turnbull (1990) :

$$\gamma \sigma_t^2 dW_t = \eta_V \sigma_t^2 dt, \quad (3.48)$$

où η_V représente la prime de risque associée à la présence d'une volatilité stochastique. Dès lors, en remplaçant le terme de gauche de l'équation (3.48) par le terme de droite dans l'expression de $d\sigma_t^2$, le prix d'un call de type européen est l'unique solution de :⁶

$$\begin{aligned} r \left(C - \frac{\partial C}{\partial S} S_t \right) dt &= \frac{\partial C}{\partial \sigma^2} (\kappa [\vartheta - \ln(\sigma_t^2)] + \gamma^2/2 + \eta_V) \sigma_t^2 dt \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma_t^2 S_t^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^4} \sigma_t^4 \gamma^2 dt + \frac{\partial C}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Nous pouvons facilement constater que cette équation différentielle aurait pu être obtenue à partir du processus suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= r dt + \sigma_t dB_t, \\ \frac{d\sigma_t^2}{\sigma_t^2} &= (\kappa^Q [\vartheta^Q - \ln(\sigma_t^2)] + \gamma^2/2) dt + \gamma dW_t. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Pour résumer, la neutralisation du risque dans un modèle à volatilité stochastique standard revient à poser : $\alpha_c = r$, κ devient $\kappa^Q = \kappa + \eta_V$, ϑ devient $\vartheta^Q = \kappa \vartheta / (\kappa + \eta_V)$ et γ demeure inchangé.⁷

⁶Pour être exact, il faut également prendre en compte les conditions aux bornes d'un call européen.

⁷Dans la section 1.4.2, et plus précisément dans les notes des pages 56 et 58, nous

Nous nous intéressons maintenant à la risque-neutralisation d'un modèle où la volatilité instantanée est définie par un modèle log-OU. La première étape consiste à passer de $d \ln(\sigma_t^2)$ à $d\sigma_t^2$. Nous appliquons la formule d'Itô pour les processus à sauts (voir l'annexe A.1.3 ou Cont et Tankov, 2003), à $d \ln(\sigma_t^2)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} d\sigma_t^2 &= \sigma_t^2 [(\kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^2)] + \gamma^2/2)dt + \gamma dW_t + [\exp(J) - 1] dN_t, \\ &= d\sigma_t^{2,c} + \sigma_t^2[\exp(J) - 1]dN_t, \end{aligned} \quad (3.51)$$

où, dans la dernière ligne, nous mettons en évidence la distinction entre les variations $d\sigma_t^{2,c}$ provenant de la partie continue du processus des variations discrètes. Nous pouvons à présent déterminer les variations de prix d'un call. Celles-ci sont égales aux variations du call induites par la partie continue du processus et données par la formule d'Itô pour un processus bivarié auxquelles on ajoute les variations discrètes. Nous avons donc :

$$\begin{aligned} dC - \frac{\partial C}{\partial S} dS_t &= \frac{\partial C}{\partial \sigma^{2,c}} d\sigma_t^{2,c} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} (dS_t)^2 + \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial \sigma^{2,c}} dS_t d\sigma_t^{2,c} + \frac{\partial C}{\partial t} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^{4,c}} (d\sigma_t^{2,c})^2 + [C(\sigma_t^{2,c}[\exp(J) - 1]) - C(\sigma_t^{2,c})] dN_t. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Après avoir effectué les mêmes simplifications que dans le cas log-OU, prendre en compte l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage nous conduit à :

$$\begin{aligned} r \left(C - \frac{\partial C}{\partial S} S_t \right) dt &= \frac{\partial C}{\partial \sigma^{2,c}} (\kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^{2,c})] dt + \gamma^2/2) \sigma_t^{2,c} dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma_t^{2,c} S_t^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^{4,c}} \sigma_t^{4,c} \gamma^2 dt + \frac{\partial C}{\partial t} dt \\ &\quad + \frac{\partial C}{\partial \sigma^{2,c}} \gamma dW_t + [C(\sigma_t^{2,c}[\exp(J) - 1]) - C(\sigma_t^{2,c})] dN_t. \end{aligned} \quad (3.53)$$

avons évoqué la possibilité d'avoir des spécifications plus souples pour la prime de risque η_V . Cela était possible car le modèle Cox-Ingersoll-Ross s'y prêtait. Ici, il est plus difficile d'envisager des formes plus générales et donc d'éviter le problème de suridentifiabilité du paramètre η_V .

3.3. Évaluation d'option

Étant donnée la présence de deux termes aléatoires dW_t et dN_t , il est évident que cette équation différentielle admet une infinité de solutions. La question qui se pose alors est comment parvenir à éliminer ces deux sources de risques.

Il existe diverses manières de le faire. La plus simple consiste à supposer que les risques associés à une volatilité stochastique et à la présence de sauts dans la volatilité sont tous deux diversifiables. Sous cette hypothèse l'absence d'opportunités d'arbitrage n'implique plus seulement :

$$dC - \frac{\partial C}{\partial S} dS_t = r \left(C - \frac{\partial C}{\partial S} S_t \right) dt, \quad (3.54)$$

mais :

$$E \left(dC - \frac{\partial C}{\partial S} dS_t \right) = r \left(C - \frac{\partial C}{\partial S} S_t \right) dt. \quad (3.55)$$

Comme $E(dW_t) = 0$ et $E(dN_t) = \lambda_J dt$, prendre l'espérance du terme de droite de l'équation (3.52) nous amène à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} r \left(C - \frac{\partial C}{\partial S} S_t \right) dt &= \frac{\partial C}{\partial \sigma^{2,c}} (\kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^{2,c})] dt + \gamma^2/2) \sigma_t^{2,c} dt \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} \sigma_t^{2,c} S_t^2 dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial \sigma^{4,c}} \sigma_t^{4,c} \gamma^2 dt + \frac{\partial C}{\partial t} dt \\ &+ \lambda_J E[C(\sigma_t^{2,c}[\exp(J) - 1]) - C(\sigma_t^{2,c})] dt. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Cette équation ne comporte plus de termes aléatoires et pourrait être obtenue à partir du processus risque-neutre suivant :

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= r dt + \sigma_t dt, \\ d\sigma_t^2 &= \sigma_t^2 [(\kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^2)] + \gamma^2/2) dt + \gamma dW_t + [\exp(J) - 1] dN_t], \end{aligned} \quad (3.57)$$

où, non seulement la structure est inchangée par rapport à la mesure initiale, mais également toutes les valeurs de paramètres présents dans le processus de volatilité.

Une autre façon de faire est d'envisager que seul le risque associé à la partie continue de la volatilité est rémunéré. Le risque associé aux sauts est, quant à lui, supposé diversifiable. Le processus risque-neutre qui découlerait de telles hypothèses peut être facilement déduit de l'argumentation qui

précède et nous aurions :

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= rdt + \sigma_t dt, \\ d\sigma_t^2 &= \sigma_t^2 [(\kappa^Q[\vartheta^Q - \ln(\sigma_t^2)] + \gamma^2/2)dt + \gamma dW_t + [\exp(J) - 1]dN_t],\end{aligned}\tag{3.58}$$

où κ^Q et ϑ^Q ont déjà été définis dans le cadre de la version risque-neutre du modèle log-OU.

Évidemment le cas le plus réaliste consiste à considérer qu'aucune des deux sources de risque n'est diversifiable. Dans ce cas et à notre connaissance, il n'existe aucune étude qui 1) formule les hypothèses d'ordre économique nécessaires à l'obtention d'une unique solution pour (3.53) et 2) spécifie explicitement le lien entre les paramètres pris sous la mesure objective et ceux de la version risque-neutre. Nous pourrions espérer trouver des réponses dans les travaux qui s'intéressent aux modèles à volatilité stochastique comportant des sauts dans le sous-jacent et dans la volatilité. Malheureusement, la phase de neutralisation du risque y est généralement omise. Par exemple, Duffie *et al.* (2000) partent directement d'un processus risque-neutre sans avoir spécifié le lien avec le processus générateur de données, tandis que dans l'article d'Eraker (2004), les sauts dans la volatilité interviennent aux mêmes instants que les sauts dans le sous-jacent. Par conséquent, le risque associé aux sauts dans la volatilité est inclus dans le risque associé aux sauts dans le support. Il existe néanmoins une étude qui apporte un précieux élément de réponse. Il s'agit du travail de Bakshi et Cao (2002). Ces auteurs considèrent un modèle plus général où des sauts interviennent de manière indépendante aussi bien dans les rendements que dans la volatilité. Le processus de volatilité qu'ils supposent est différent du nôtre et est constitué d'une partie continue représentée par une spécification à la Cox-Ingersoll-Ross et d'une composante à sauts. Par ailleurs, l'amplitude des sauts est distribuée selon une loi exponentielle. Dans ce contexte, ils parviennent à montrer que la risque-neutralisation dans la composante à sauts du processus de volatilité conduit à un changement dans l'intensité du processus de Poisson et une modification de l'amplitude moyenne des sauts. Ils donnent également un lien explicite entre les paramètres risque-neutres et ceux sous la mesure objective. Bakshi et Cao (2002) obtiennent ces résultats en procédant au même type d'argumentaire que Cox *et al.* (1985) et Bates (1988), c'est à dire en partant d'un modèle d'équilibre général. La transposition à notre cas semble possible mais cela dépasse largement notre objectif. Nous faisons simplement remarquer, qu'en ce qui nous concerne, le résultat majeur de Bakshi et Cao (2002) réside dans le fait qu'un changement de mesure qui préserve la structure du modèle doit laisser les paramètres de variance inchangés.

3.3. Évaluation d'option

Parce que notre modèle est différent de Bakshi et Cao (2002), il nous est impossible de fournir une formulation explicite liant les paramètres risque-neutralisés aux paramètres du processus générateur des données. Toutefois, nous pouvons supposer que sous les hypothèses d'absence d'opportunités d'arbitrage, de préférences logarithmiques et d'une hypothèse complémentaire, à définir, et qui concernerait le risque associé aux sauts, il existe un processus risque-neutre qui mène à un prix unique d'option et qui garde la même structure que le processus générateur de données. Ce processus risque-neutre a la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= rdt + \sigma_t dt, \\ d\sigma_t^2 &= \sigma_t^2 \left[(\kappa^Q[\vartheta^Q - \ln(\sigma_t^2)] + \gamma^2/2)dt + \gamma dW_t + [\exp(J^Q) - 1]dN_t^Q \right],\end{aligned}\tag{3.59}$$

où κ^Q et θ^Q ont les mêmes expressions que précédemment, dN_t^Q est un processus de Poisson d'intensité λ_J^Q et J^Q a la même distribution que J excepté son paramètre d'espérance qui change. Les paramètres de variance γ^2 et γ_J^2 demeurent, quant à eux, inchangés.

Le fait de ne pas disposer de lien explicite entre les paramètres du processus générateur de données et ceux du processus risque-neutre peut apparaître comme un réel handicap. Ce dernier propos doit toutefois être nuancé. Si l'objectif est d'évaluer des prix d'options, c'est la donnée du processus risque-neutre et des valeurs de ses paramètres qui importe et non le processus générateur de données lui-même. D'ailleurs les primes de risque n'interviennent pas directement dans l'écriture du processus risque-neutre. Évidemment, on pourrait rétorquer que l'obtention pratique des paramètres risque-neutre s'effectue en ajustant les paramètres du processus générateur des données issus d'estimations par les différentes primes de risques. Nous verrons dans le chapitre 4 comment estimer directement les paramètres d'un processus risque-neutre. Nous poursuivons donc notre étude à partir du modèle risque-neutre donné par (3.59). De plus, pour alléger les notations, nous considérons désormais que les paramètres sont exprimés sous la mesure risque-neutre.

3.3.2 Méthodes de Monte-Carlo

Avant de donner une procédure d'évaluation du prix d'une option, nous rappelons que nous avons supposé que la corrélation entre le sous-jacent et la volatilité était nulle, $E(dB_t dW_t) = 0$. Cette hypothèse est empiriquement contestable, en particulier pour les indices. Elle nous permet toutefois d'utiliser le raisonnement de Hull et White (1987) pour évaluer le prix d'une option

européenne. Nous discuterons les conséquences de son relâchement dans la conclusion.

Dans un monde neutre au risque, Cox et Ross (1976) ont montré que le prix d'un call européen à la date t , expirant en T et dont le prix d'exercice est K , est donné par :

$$\begin{aligned} C_t &= \exp[-r(T-t)]E[\max(S_T - K, 0)], \\ &= \exp[-r(T-t)] \int \max(0, S_T - K) f(S_T) dS_T, \end{aligned} \quad (3.60)$$

où f désigne la fonction de densité du support à la date d'échéance. Cette fonction est évidemment inconnue pour les modèles que nous étudions. Dans ce cas et contrairement aux modèles à volatilité stochastique qui spécifient les mouvements de volatilité selon un processus Cox-Ingersoll-Ross ou un processus OU, les modèles log-OU et log-OUS ne se prêtent pas à l'obtention de formules quasi-analytiques pour le prix des options. Ce fait est documenté dans Chourdakis (2004).⁸ Ce dernier propose certes une autre méthode de calcul assez rapide mais elle n'est directement applicable que dans le cas log-OU. Comme nous souhaitons également évaluer des options dans le cadre du modèle log-OUS, nous nous tournons naturellement vers les méthodes standard de Monte-Carlo. L'idée sur laquelle repose ces méthodes est la loi forte des grands nombres. Transposée à notre cas, l'idée est d'approcher le prix d'un call, qui est formulé comme une espérance, par :

$$\bar{C}_t = \exp[-r(T-t)] \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \max(0, S_T^{(m)} - K), \quad (3.61)$$

c'est à dire par la moyenne empirique de M cours du support à l'échéance. Une première façon de faire est de simuler des trajectoires du support à partir du processus bivarié qui le définit. Comme le cas log-OUS englobe le cas log-OU, nous ne donnons la méthode que pour ce premier modèle. La première étape consiste à discrétiser le processus bivarié. Comme nous disposons des solutions pour S_t et σ_t^2 , les discrétisations suivantes sont envisageables pour

⁸Duffie *et al.* (2000) obtiennent des formules quasi-analytiques pour un très vaste nombre de modèles partageant tous une structure commune qu'ils nomment *AJD* (*Affine Jump-Diffusion*). Cette classe de modèles *AJD* est caractérisée par le fait que les termes de tendance, de variance, de corrélation, et de fréquence des sauts sont tous fonction affine du support, S_t , et de la volatilité au carré, σ_t^2 . Duffie *et al.* (2000) montrent alors que la fonction caractéristique de ces modèles présente une forme exponentielle affine, d'où ils peuvent déduire le prix d'une option de manière similaire à celle employée par Heston (1993) ou Bakshi et Madan (2000). Dans le cas LOG-OU et LOG-OUS, on peut facilement constater qu'il n'y a pas de telles relations affines. De fait, la méthode de Duffie *et al.* (2000) ne peut pas être utilisée ici.

3.3. Évaluation d'option

les deux processus. Pour S_t , nous avons :

$$S_i = S_{i-1} \exp \left[(r - \sigma_{i-1}^2/2)\Delta + \sigma_{i-1}\sqrt{\Delta}u_i \right], \quad (3.62)$$

où Δ est le pas de la discrétisation et u_i est une variable aléatoire Gaussienne centrée réduite. Nous choisissons de poser $\Delta = 1/252$ et d'exprimer les paramètres comme étant annualisés. De même, nous pouvons discrétiser σ_t^2 en partant de (3.32). Nous faisons simplement remarquer que pour le pas de discrétisation adopté, la probabilité que plus d'un saut se produise est négligeable. Par conséquent, nous pouvons supposer qu'elle est nulle. D'autre part et toujours parce que Δ est faible, on a :

$$\sigma_i^2 = \begin{cases} \exp \left(\vartheta [1 - \exp(-\kappa\Delta)] + \ln(\sigma_{i-1}^2) \exp(-\kappa\Delta) \right) \times \\ \exp \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{2\kappa} [1 - \exp(-2\kappa\Delta)]} v_i \right) \text{ avec probabilité } 1 - \lambda_J\Delta, \text{ ou :} \\ \exp \left(\vartheta [1 - \exp(-\kappa\Delta)] + \ln(\sigma_{i-1}^2) \exp(-\kappa\Delta) \right) \times \\ \exp \left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{2\kappa} [1 - \exp(-2\kappa\Delta)]} v_i + J_i \right) \text{ avec probabilité } \lambda_J\Delta. \end{cases} \quad (3.63)$$

La variable v_i suit une loi normale centrée réduite, et J_i est une variable normale d'espérance μ_J et de variance γ_J^2 . La seconde étape consiste à simuler une trajectoire représentant $T + 1$ jours de cotations du sous-jacent à partir des équations (3.62) et (3.63). À chaque date $t = t + i\Delta$ ($0 \leq i \leq T$), on génère les deux variables aléatoires u_i , v_i et une variable aléatoire de Bernoulli qui vaut 1 avec probabilité $\lambda_J\Delta$. Si cette variable dichotomique est égale à 1, on génère une variable aléatoire Gaussienne supplémentaire, J_i , dont l'espérance est μ_J et la variance γ_J^2 . L'ensemble de ces éléments permet d'obtenir une valeur simulée S_T du support à la date T . En répétant M fois ces opérations, nous obtenons M cours de support à l'échéance et nous pouvons donc approcher le prix d'un call par la moyenne empirique donnée dans l'équation (3.61).

Évidemment, plus le nombre M de trajectoires ainsi simulées est grand et plus la précision est grande. L'inconvénient inhérent à l'augmentation de M est la consommation supplémentaire en temps de calcul due essentiellement à la génération des variables aléatoires. Une autre méthode pour accroître la précision tout en limitant l'augmentation du temps de calculs consiste à utiliser la technique des variables antithétiques. Cette technique repose sur la constatation suivante, si u_i est une variable aléatoire normale centrée réduite,

– u_i peut également être considérée comme étant un tirage de cette même loi normale du fait de la symétrie de la loi Gaussienne. Cette remarque s’applique également à v_i et à J_i .⁹ Ainsi, pour une trajectoire fondée sur le tirage des variables aléatoires u_i, v_i, J_i , nous pouvons former 7 autres trajectoires de support différentes. Autrement dit, nous disposons de 8 prix de calls différents pour chaque trajectoire simulée. Le prix final de l’option est alors la moyenne de ces prix d’options. Davantage de détails peuvent être trouvés, par exemple, dans Boyle *et al.* (1997).

Une autre version de la méthode de Monte-Carlo, encore moins coûteuse en temps de calculs repose sur l’idée développée par Hull et White (1987). Nous définissons la quantité $\bar{V}_{t,T}$ comme étant la quantité moyenne du processus de volatilité sur la durée de vie de l’option :

$$\bar{V}_{t,T} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds. \quad (3.64)$$

Le prix du call peut alors se réécrire ainsi (voir page 59) :

$$C_t = \int \underbrace{\exp[-r(T-t)] \max(0, S_T - K) f(S_T | \bar{V}_{t,T}) dS_T}_{(3.65)} f(\bar{V}_{t,T}) d\bar{V}_{t,T}.$$

Or, le terme mis en évidence dans l’équation (3.65) n’est rien d’autre que le prix d’un call européen obtenu par la formule de Black et Scholes (1973) dans laquelle on a injecté une volatilité égale à $\bar{V}_{t,T}$. Le prix d’un call européen est donc donné par :

$$C_t = E_t [C_{BS}(S_t, K, r, T-t, \bar{V}_{t,T})], \quad (3.66)$$

et peut être approché par :

$$\bar{C}_t = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M C_{BS}(S_t, K, r, T, \bar{V}_{t,T}^{(m)}). \quad (3.67)$$

En d’autres mots, le prix d’un call peut être vu comme une moyenne, sur la volatilité, de prix issus de la formule de Black et Scholes (1973). Pour obtenir la quantité $\bar{V}_{t,T}^{(m)}$, nous simulons simplement une trajectoire de volatilité à partir de (3.63), puis nous calculons la valeur moyenne de cette trajectoire. La technique des variables antithétiques sur v_i et J_i peut également être employée ici. On devine aisément que la précision, pour un même nombre M

⁹Pour J_i , il suffit de noter que si $J_i \sim \mathcal{N}(\mu_J, \gamma_J^2)$ alors $2\mu_J - J_i \sim \mathcal{N}(\mu_J, \gamma_J^2)$.

de trajectoires simulées, va être supérieure dans cette seconde version de la méthode de Monte-Carlo, puisqu'on supprime toute la variabilité inhérente à la simulation du cours du support.

Le résultat (3.67) a été fourni par Hull et White (1987) dans le cadre d'un modèle à volatilité stochastique standard et il faut noter que ce résultat reste valable lorsqu'il y a des sauts dans la volatilité. La prise en compte des sauts n'intervient que dans la quantité $\bar{V}_{t,T}$ qui diffère selon que la volatilité instantanée évolue suivant un processus log-OU ou log-OUS.

3.4 Illustrations

Dans cette section, nous illustrons les capacités d'un modèle à sauts dans la volatilité. Nous effectuons ce travail sous deux perspectives différentes. La première consiste à mettre en évidence certains phénomènes empiriques liés à la présence de sauts dans la volatilité. La seconde se fait du point de vue de l'impact des sauts sur une surface de volatilité.

3.4.1 Simulations de trajectoires

Ici, nous souhaitons discuter des capacités d'un modèle à sauts dans la volatilité à reproduire un certain nombre de faits stylisés établis en finance. À cette fin nous nous proposons d'abord de mener une brève étude de cas.

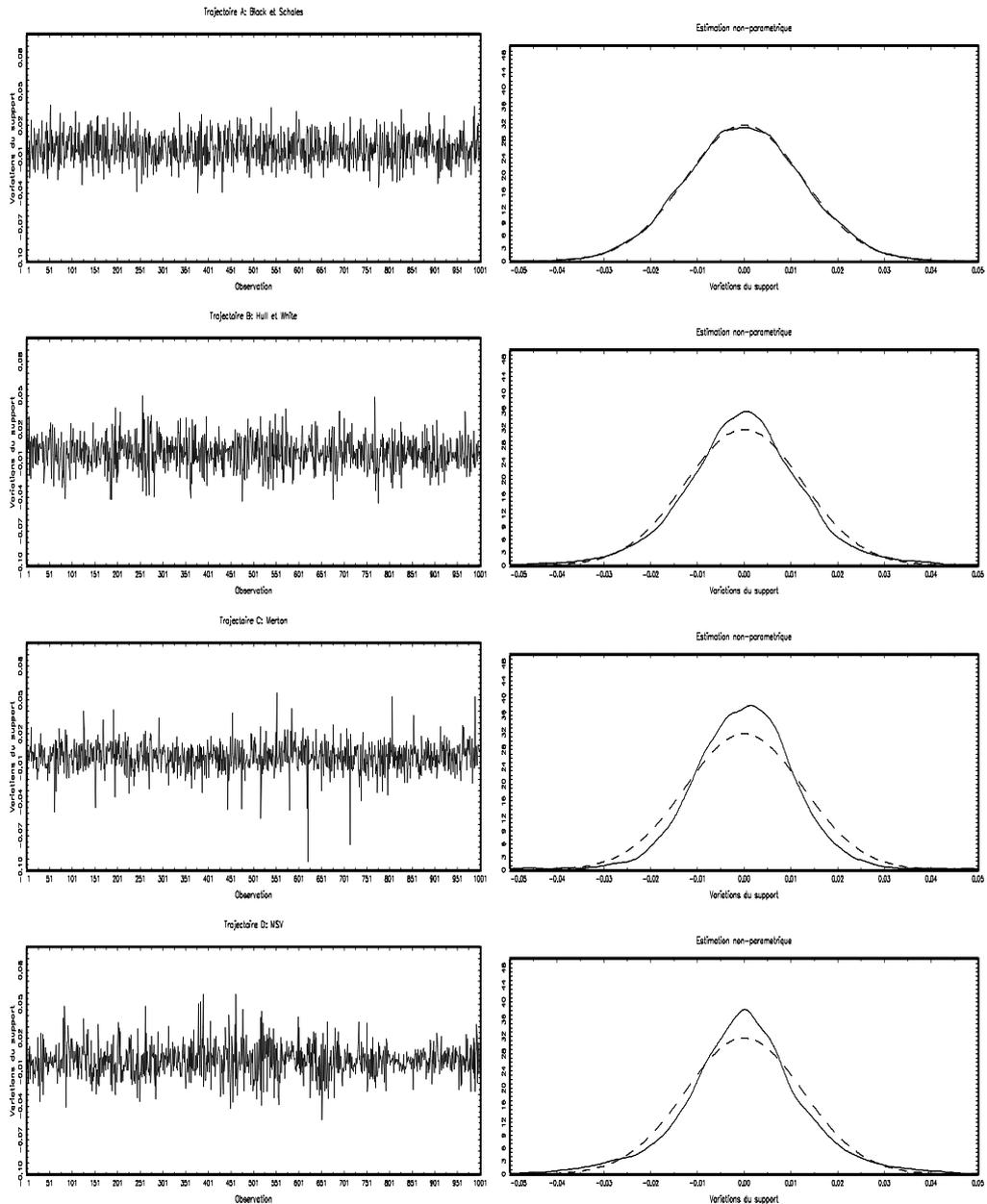
Que se passe-t-il si la volatilité augmente brusquement ? Dans un premier temps, cela augmente les chances d'avoir une forte variation (de signe indéterminé) dans l'évolution du sous-jacent, variation qui peut être comparable à un saut. Dans un second temps, la volatilité va rejoindre son niveau de long-terme mais de manière plus ou moins rapide suivant la valeur de κ , voir l'équation (3.32). De fait, un choc dans la volatilité va persister, entraînant dans son sillage une succession de fortes variations (de signe indéterminé) dans le support. Cette description correspond à ce qu'avait observé Mandelbrot (1963) sur des séries de rendements. Cette idée a en partie motivé l'introduction des modèles à volatilité stochastique standard. L'ajout de sauts dans la volatilité permet d'accentuer les effets d'une volatilité stochastique. Il permet surtout de prendre en compte un effet de persistance.

Que se passe-t-il lorsqu'il y a une diminution brutale de volatilité ? Ce cas correspond par exemple à l'arrivée d'une annonce confortant les anticipations des agents. Les conséquences sur le cours du support sont

alors inversées par rapport au cas précédent. De faibles variations du sous-jacent se succèdent et le cours du support entre dans une phase très calme où il poursuit sa tendance sans heurt. En soi, ce type de phénomène peut évidemment être modélisé par un processus Brownien géométrique standard. L'avantage des modèles à sauts est de pouvoir expliquer l'alternance de périodes où le sous-jacent varie peu avec des périodes beaucoup plus mouvementées.

Nous illustrons les propos tenus jusqu'ici par des simulations de trajectoires reproduites dans le graphique 3.1. Nous avons généré quatre séries de variations d'un sous-jacent selon le modèle de A) Black et Scholes, B) Hull et White, C) Merton, et D) un modèle à sauts dans la volatilité (noté MSV). Les quatre processus ont des valeurs de paramètres fixées de sorte que leurs espérances et leurs variances soient identiques. Plus précisément, l'espérance est égale à 0 et la variance correspond à une volatilité annuelle de 20%. Pour le modèle de Black et Scholes qui équivaut à supposer une loi Gaussienne pour les rendements, la seule donnée de l'espérance et de la variance suffit à déterminer les valeurs de paramètres du processus. Pour les autres modèles, nous disposons de degrés de liberté supplémentaires qui vont nous permettre de faire émerger les spécificités de chacun d'eux. Étant donné que nous avons supposé une corrélation nulle entre les variations du sous-jacent et la volatilité, les modèles comportant une volatilité stochastique, contrairement au modèle de Merton (1976), ne peuvent générer des fonctions de distributions des rendements qui soient asymétriques. Aussi, pour faciliter la comparaison entre les trajectoires, nous imposons une espérance de la taille des sauts dans le modèle de Merton (1976) égale à 0. D'autre part, pour les modèles contenant des sauts (Merton et MSV), nous avons choisi que ceux-ci interviennent à la même date avec une fréquence de 10 sauts par an. Ceci nous permettra de comparer l'impact des sauts selon leur provenance, rendements ou volatilité, sur les trajectoires. Ensuite, pour les modèles ayant une volatilité stochastique, log-OU et log-OUS, nous avons imposé une même vitesse de retour à la moyenne (κ) et un même paramètre de variance (γ^2) dans la diffusion. Les paramètres ϑ sont, quant à eux, ajustés afin de produire des trajectoires ayant la même tendance à long-terme de la volatilité. Enfin, pour le modèle log-OUS, il nous reste encore deux degrés de liberté incarnés dans l'espérance et la variance des sauts. Nous avons pris les valeurs suivantes : $\mu_J = 0.5$ et $\gamma_J^2 = 0.5$. La longueur des trajectoires a été de 20000 observations, la totalité des simulations a été utilisée pour calculer les estimations non-paramétriques des fonctions de densité des rendements issues de chacun des modèles. Par contre, et afin de préserver une certaine lisibilité, nous n'avons reporté que les 1000 premières simulations de chacune des trajectoires, ce qui correspond à environ 4 années de cotations quotidiennes.

3.4. Illustrations



Les quatre trajectoires ont les deux premiers moments identiques. À gauche et en partant du haut, les variations évoluent selon A) le modèle de Black et Scholes, B) Hull et White, C) Merton et D) un modèle à sauts dans la volatilité, noté MSV. À droite, nous fournissons les fonctions de densité estimées qui résultent de ces trajectoires. Pour chacune de ces fonctions de densité, nous avons ajusté la loi normale (traits discontinus).

FIG. 3.1 – Variations d'un sous-jacent simulées selon quatre processus différents.

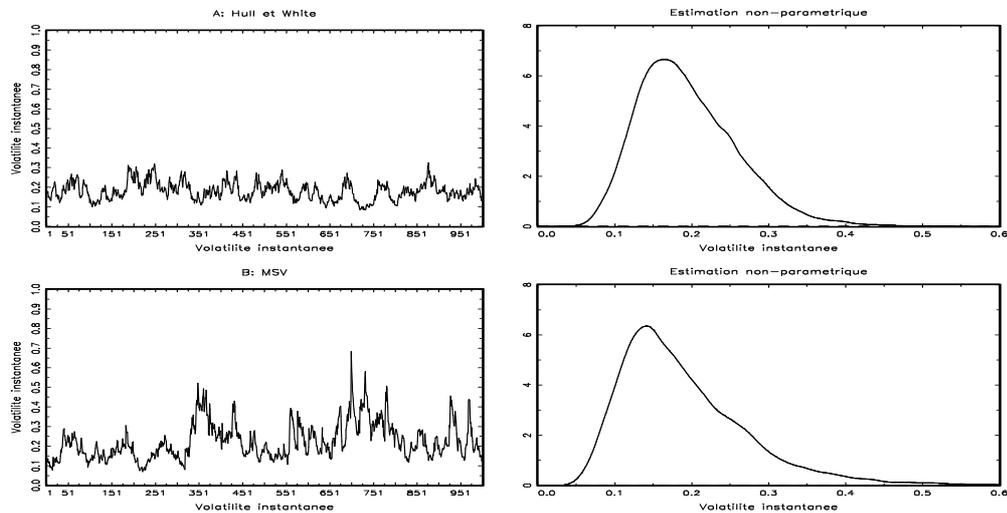
La première constatation qui se dégage immédiatement est la nette différence entre la trajectoire issue du modèle de Black et Scholes (1973), celle du modèle de Merton (1976) et celle d'un modèle à volatilité stochastique. Ainsi, le modèle de Black et Scholes (figure 3.1.A) génère des variations qui sont toujours de même amplitude. On ne voit jamais apparaître des périodes agitées. Toutes les variations sont de même nature. Ceci va évidemment à l'encontre des phénomènes observés sur les marchés. Ainsi, le graphique de gauche de la figure 3.3 permet de donner une idée de la faible qualité d'ajustement de la loi normale à une fonction de densité estimée à partir de rendements réellement observés. Au contraire, le modèle de Merton (figure 3.1.C) permet de générer de fortes variations dans les rendements, illustrées par des pics. Ceci se traduit par une fonction de densité qui diffère sensiblement de la loi normale et semble donc plus apte à être en conformité avec ce qui est empiriquement constaté. Toutefois, nous faisons remarquer que ces fortes variations sont toujours isolées dans le temps. Le modèle de Merton (1976) n'explique donc pas la présence de périodes entières où les rendements de fortes amplitudes se succèdent.¹⁰ Nous passons maintenant à l'étude des modèles à volatilité stochastique (log-OU et log-OUS) dont les trajectoires sont illustrées en 3.1.B et 3.1.D. Ces modèles parviennent à combler les lacunes du modèle de Merton (1976) et produisent facilement des périodes où des forts mouvements dans le support alternent avec des périodes plus calmes où le support varie peu. Ils génèrent également des fonctions de densité pouvant être en adéquation avec la réalité. Les différences entre le modèle log-OU et log-OUS semblent, à première vue, infimes ou du moins difficilement discernables, même si on peut observer que les périodes calmes sont plus prononcées et que les fortes variations sont plus fréquentes dans le cas log-OUS.

Cependant, les différences entre ces deux modèles existent et se dégagent plus nettement en comparant les trajectoires de volatilité conduisant à ces variations du support. Ces trajectoires de volatilité sont présentées dans la figure 3.2. Rappelons que pour produire une volatilité annuelle de 30%, les deux processus de volatilité doivent avoir la même espérance. Alors que les deux trajectoires de volatilité mettent en évidence de manière très nette l'existence d'un niveau de référence, la façon de graviter autour est très différente. Ainsi, le modèle log-OU produit des niveaux de volatilité qui sont toujours proches de la tendance. Des niveaux de volatilité élevés ne sont jamais atteints et il n'y a jamais de brusques variations.¹¹ Ces caractéristiques contrastent avec

¹⁰Cette lacune du modèle de Merton (1976) provient, en partie, du fait que l'intensité du processus de Poisson est constante dans le temps.

¹¹On pourrait rétorquer qu'en augmentant la variance γ^2 dans le processus de diffusion, des niveaux de volatilité plus élevés pourraient être atteints, mais cela se ferait au détriment des niveaux de volatilité plus faibles. En d'autres termes, en épaississant la queue de la

3.4. Illustrations



À gauche, se trouvent les trajectoires simulées de la volatilité instantanée du modèle log-OU (en haut) et log-OUS (en bas). À droite, nous fournissons leurs fonctions de densité estimées de façon non-paramétrique.

FIG. 3.2 – Trajectoires de volatilité issues des modèles log-OU et log-OUS.

celles du modèle log-OUS qui parvient à, non-seulement produire des niveaux de volatilité élevés après de fortes variations, mais également à s’y maintenir.

Les chocs et la persistance des chocs dans la volatilité peuvent donc être pris en compte par ce modèle et ces phénomènes se traduisent, en termes de fonction de densité, par l’émergence d’une queue épaisse à droite de la distribution de la volatilité. L’ajout d’une composante à sauts dans la volatilité stochastique semble donc renforcer notre capacité à expliquer la dynamique de la volatilité. La possibilité de pouvoir faire apparaître des fonctions de densité aux allures non-standard est cruciale comme en témoigne le graphique de droite de la figure 3.3. Nous y avons reproduit, à partir de données réelles sur le CAC 40, la fonction de densité estimée de la volatilité.¹² Le fait de trouver une allure présentant un mode prononcé et une queue épaisse met en

distribution de la volatilité nous abaisserions son mode. Cet arbitrage n’a plus lieu d’être dans un modèle log-OUS.

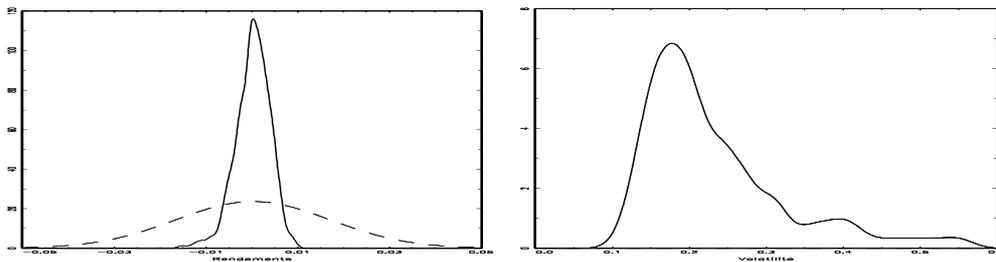
¹²Il s’agit d’une estimation non-paramétrique de la variance (voir Tjøstheim et Auestadt (1994a, b) ou Lubrano (2003)), calculée sur une fenêtre glissante de 22 observations pondérées par un noyau d’Epanechnikov.

évidence l'existence d'au moins deux régimes dans la volatilité et plaide fortement en faveur du modèle log-OUS. Nous cherchons maintenant à voir si les performances d'un tel modèle ont un impact réel sur la surface de volatilité.

3.4.2 Impacts sur la surface de volatilité

Pour κ , ϑ et γ donnés, un modèle à volatilité stochastique standard ne peut fournir qu'une seule surface de volatilité. L'introduction d'une composante à sauts dans la volatilité ajoute une infinité de variantes pour cette structure donnée. En effet, nous avons à notre disposition trois leviers supplémentaires pour jouer sur l'allure de la surface de volatilité : λ_J , μ_J et γ_J . Nous étudions à présent l'impact de chacun de ces paramètres sur la surface de volatilité. Les graphiques représentés dans la figure 3.4 ont été obtenus en extrayant la volatilité implicite de prix d'options par l'inversion de la formule de Black et Scholes (1973). Ces prix d'options ont été déterminés en appliquant la seconde version de la procédure de Monte-Carlo décrite dans la section précédente. Plus précisément, nous avons simulé 5000 trajectoires de volatilité pour chacun des prix d'exercice et chacune des maturités donnés. Les prix d'exercice s'étalent sur une plage de plus et moins 20% de la parité, tandis que les maturités étudiées vont de 3 à 38 jours de cotations.

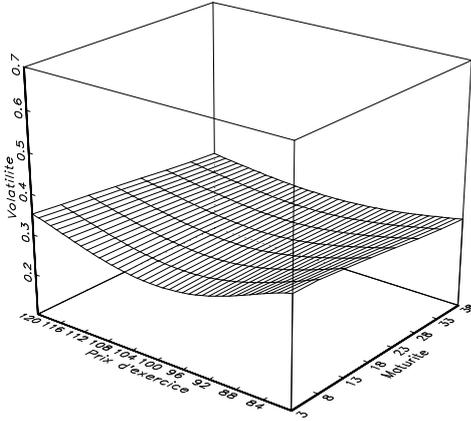
Étudions d'abord l'impact des sauts lorsque ceux-ci ont une amplitude d'espérance nulle (cas B). Nous pouvons immédiatement formuler deux remarques. La première concerne la profondeur du smile pour les options d'échéance courte, celui-ci peut être plus ou moins prononcé selon la valeur plus ou moins grande de la variance des sauts. Deuxièmement, ce smile



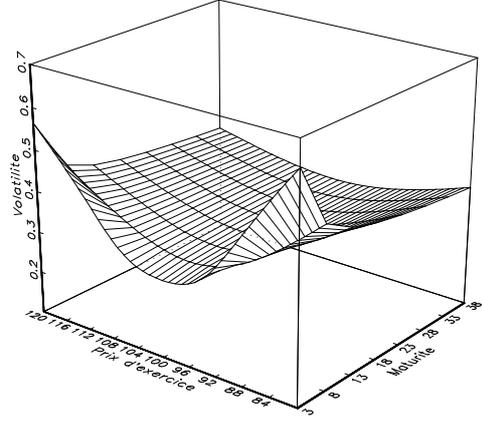
Le graphique de gauche représente la fonction de densité estimée des variations du CAC 40 auquel nous avons ajusté (en traits discontinus) la loi normale. Le graphique de droite représente la fonction de densité estimée de la volatilité.

FIG. 3.3 – Estimations non-paramétriques des fonctions de densité des rendements du CAC 40 et de sa volatilité.

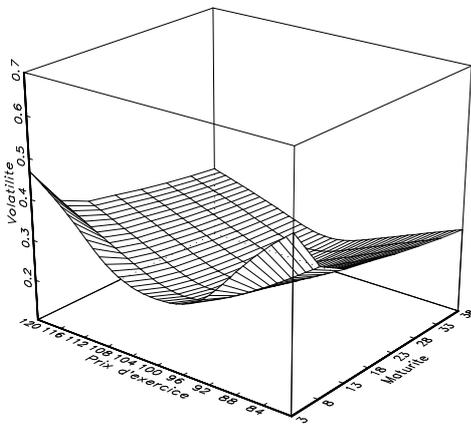
3.4. Illustrations



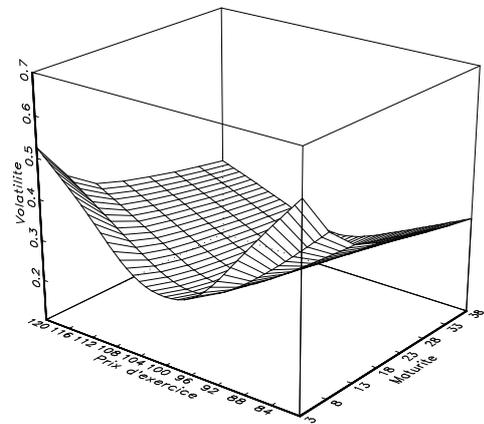
• Cas A : $\kappa = 14$, $\vartheta = -3$, $\gamma = 5$, sans sauts.



• Cas B : κ , ϑ et γ inchangés, $\lambda_J = 12.5$, $\mu_J = 0$, $\gamma_J = 1$.



• Cas C : κ , ϑ et γ inchangés, $\lambda_J = 12.5$, $\mu_J = -0.2$, $\gamma_J = 1$.



• Cas D : κ , ϑ et γ inchangés, $\lambda_J = 25$, $\mu_J = -0.2$, $\gamma_J = 1$.

FIG. 3.4 – Impacts des sauts sur une structure de volatilité donnée.

perdure à travers l'augmentation des maturités. C'est une propriété fortement souhaitée si l'on se réfère aux papiers de Bakshi *et al.* (1997), Duffie *et al.* (2000), Bates (2000) ou encore Pan (2002) et qui ne peut être reproduit ni par les modèles à volatilité stochastique standard, ni par les modèles à sauts, voir Jiang (1999) ou Das et Sundaram (1999), ni même par un modèle de Bates (1996). Le fait que le smile perdure s'explique certainement par la persistance des chocs de volatilité dans l'évolution du support.¹³

Le second levier d'un modèle à sauts dans la volatilité est constitué par le coefficient μ_J représentant l'espérance du saut. Son impact sur la surface de volatilité est illustré par le cas C. Tout d'abord nous soulignons le fait que notre modèle s'accommode facilement de sauts négatifs dans la volatilité. C'est une avancée par rapport aux modèles de Duffie *et al.* (2000) ou d'Eraker (2004) où les sauts dans la volatilité sont générés suivant une loi exponentielle et donc forcément positifs. Pour des sauts négatifs, deux effets particuliers méritent d'être relevés. Premièrement, nous pouvons apercevoir que la valeur de l'amplitude moyenne d'un saut va accentuer la profondeur du smile pour les options d'échéances les plus longues. Ceci reste vrai pour μ_J positif. La seconde caractéristique concerne le niveau de volatilité implicite pour des options à parité. Avec des sauts négatifs nous pouvons faire apparaître une tendance décroissante à travers les maturités. Cette propriété, qui peut se présenter empiriquement, ne peut être obtenue à partir d'un modèle à sauts du type Merton (1976). Les modèles à volatilité stochastique (standard et du type Bates) n'offrent cette possibilité qu'à travers la valeur initiale σ_0^2 .¹⁴ Ici, nous apportons donc un degré de liberté supplémentaire. Enfin, le fait d'avoir des sauts négatifs contribue à estomper le creux du smile pour des options proches de l'expiration. Ce résultat se comprend assez aisément puisque l'éventualité d'une forte baisse de la volatilité se traduit également par une baisse générale des prix d'options.

Finalement le cas D illustre l'effet d'un accroissement de la fréquence des sauts. Conformément à nos attentes, augmenter la probabilité d'apparition des sauts va accentuer l'ensemble des impacts déjà évoqués. Un dernier point fondamental qui concerne ces surfaces de volatilité est leur caractère symétrique. Sur ce point le modèle à sauts dans la volatilité stochastique, tel que nous l'avons formulé, ne permet pas de produire les effets skew rencontrés empiriquement. Néanmoins, et comme dans le cas des modèles à volatilité

¹³Le fait que le smile perdure signifie également que la distribution résultant d'un modèle à sauts dans la volatilité converge lentement vers une loi normale (théorème central limite). À terme, pour des options expirant à très longue échéance, le théorème central limite va effectivement s'appliquer et faire disparaître le smile.

¹⁴Si σ_0^2 est supérieure (inférieure) à sa tendance de long-terme, il y aura une tendance décroissante (croissante).

stochastique standard, cette lacune du modèle pourrait être compensé en introduisant un terme de corrélation entre le support et sa volatilité.

3.5 Conclusion et extensions

Dans ce chapitre nous avons tenté de mettre en évidence les conséquences d'une modélisation qui consisterait à prendre en compte des sauts dans la volatilité. Nous avons pour cela déterminé un certain nombre de résultats concernant les propriétés mathématiques d'un modèle log-OU et de son extension aux sauts, le modèle log-OUS. Nous avons également donné une procédure d'évaluation du prix d'une option dans ce contexte. Enfin, nous avons montré que ce type de modélisation permet d'envisager des surfaces de volatilité beaucoup plus souples qu'un modèle à volatilité stochastique standard.

Le travail produit ici va nous permettre dans le chapitre 5 de considérer des modèles plus complexes, comparables à celui de Duffie *et al.* (2000), comportant des sauts aussi bien dans le processus du sous-jacent que dans celui de la volatilité. Nous allons également utiliser de nombreux résultats dès le chapitre suivant, qui vise à estimer les paramètres d'un modèle à sauts dans la volatilité.

Ce travail nous conduit à envisager d'autres extensions. Par exemple, il serait intéressant d'entreprendre la construction d'un modèle d'équilibre général permettant de déduire un lien explicite entre les paramètres du processus générateur de données et le processus risque-neutre. Ceci nous permettrait de mener une étude plus poussée sur les primes de risque associées aux différentes sources d'incertitudes. Il serait également intéressant d'étudier d'autres façons d'évaluer le prix des options. Nous pensons en particulier à une méthode assez simple à mettre en oeuvre et consistant à exprimer le prix d'une option sous la forme d'un développement limité comme l'ont fait Hull et White (1987) ou Garcia *et al.* (2001), ou encore à la technique suggérée par Chourdakis (2004). Celle-ci repose sur la construction d'une chaîne de Markov qui mime le processus bivarié du sous-jacent, et dont il a permis d'extraire une formule quasi-analytique du prix d'une option. Si le modèle log-OU se prête parfaitement à cette méthode, tout reste encore à faire dans le cas log-OUS.

Enfin, l'extension la plus facile à effectuer et certainement aussi la plus riche en interprétations, consisterait à introduire un terme de corrélation dans le modèle. C'est la plus facile car, la présence d'un terme de corrélation n'entraîne pas de modifications profondes dans la risque-neutralisation. D'autre part, l'évaluation pratique du prix d'une option pourrait être effectuée à partir de la première version de la méthode de Monte-Carlo que nous

avons fournie. Il s'agirait simplement de l'adapter et cela ne poserait aucune difficulté. Même la seconde version de la méthode de Monte-Carlo serait envisageable à condition d'effectuer une certaine reparamétrisation décrite par Romano et Touzi (1997). c'est aussi la plus riche en termes d'interprétations, car elle permettrait d'introduire de l'asymétrie dans la surface de volatilité, et reproduire ainsi plus fidèlement encore les surfaces de volatilités observées.

Chapitre 4

Estimation de modèles à sauts dans la volatilité

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous poursuivons le travail préliminaire entamé dans le chapitre 3 sur un modèle à sauts dans la volatilité. Ici, nous nous focalisons sur l'estimation de ce modèle. Nous avons déjà répertorié un certain nombre de techniques économétriques dans le chapitre 2, mais celles-ci concernaient des modèles sans sauts tel que le modèle log-OU. Nous proposons dans ce chapitre de développer l'une de ces méthodes pour permettre l'estimation des paramètres d'un modèle log-OUS. Le problème récurrent avec les modèles à volatilité stochastique (standard ou comportant des sauts) est l'inobservabilité de la volatilité instantanée. Il y a trois approches possibles pour contourner cette difficulté.

La première consiste à n'utiliser que des données sur le sous-jacent pour estimer l'ensemble des paramètres du modèle, c'est par exemple ce que font Jacquier *et al.* (1994, 2004). Deux éléments majeurs, inhérents à cette méthode, nous dissuadent de son utilisation pour le modèle log-OUS. Tout d'abord, même dans le cas simple d'un modèle à volatilité stochastique standard du type log-OU, il faut faire apparaître une structure latente. Lorsqu'on incorpore des sauts dans la volatilité, ce qui revient *in fine* à considérer des modèles de mélange, on ajoute encore une structure latente dans une structure latente. De fait, l'estimation pratique des paramètres peut s'avérer délicate. D'autre part, le fait de n'utiliser que les rendements nous empêche d'obtenir des paramètres qui soient risque-neutres. Dès lors, l'évaluation d'options à partir des paramètres estimés va conduire à des prix erronés.

La seconde approche permet d'éviter cet écueil en utilisant des prix d'op-

tions dans la procédure d'estimation. C'est d'ailleurs l'approche la plus communément adoptée dès que l'on s'intéresse à des modèles plus complexes que les modèles à sauts du type Merton (1976) où les modèles à volatilité stochastique standard. Elle nécessite toutefois la collecte de nombreux prix d'options et donc un travail non-négligeable sur les données. Évidemment, cet argument ne peut pas être considéré comme décisif. Par contre, cette méthode d'estimation est généralement fondée sur un algorithme à l'intérieur duquel il faut à chaque itération réévaluer des prix des options. Il est donc préférable de disposer d'une formule quasi-analytique pour déterminer rapidement ces prix d'options. Dans le cas des modèles que nous nous sommes proposés d'étudier, nous avons vu qu'une telle formule n'existait pas et qu'il fallait recourir à des procédures numériques, par exemple une méthode de Monte Carlo. En soi, l'évaluation du prix d'une option par une méthode de Monte Carlo peut s'effectuer en une fraction de seconde. Toutefois, lorsque cette évaluation doit se faire à l'intérieur d'une procédure itérative et pour un nombre éventuellement important d'options, cela peut conduire à des temps de calcul très élevés.

Aussi, nous privilégions une troisième approche, qui elle repose sur l'utilisation d'un indice de volatilité implicite, voir par exemple Moraux *et al.* (1998, 1999), Jones (2003) ou encore Aït-Sahalia et Kimmel (2004) pour des applications. Cet indice de volatilité présente de nombreux avantages. Tout d'abord, il est directement observable par les intervenants et délivré par l'organisme gérant le marché des options. Ensuite, sa construction est basée sur les options les plus liquides du marché et par conséquent les plus aptes à véhiculer l'information détenue par les intervenants. Il constitue ainsi une volatilité de référence. Enfin et surtout, même si l'indice est construit à partir de la formule de Black et Scholes (1973), il est possible d'établir un lien explicite entre lui et la volatilité instantanée inobservable d'un modèle plus complexe. En d'autres mots, l'utilisation d'un indice de volatilité permet de rendre observable la volatilité instantanée et contribue ainsi à simplifier considérablement l'estimation des modèles à volatilité stochastique standard. Plus concrètement, les paramètres du processus de volatilité instantanée peuvent être estimés à partir des seules données de l'indice de volatilité implicite. Cela ouvre la voie à l'estimation de modèles complexes tel que le modèle log-OU.

Le plan du chapitre est donné ci-après. Dans la première section, nous détaillons les principales raisons motivant l'utilisation de l'indice de volatilité : la facilité d'obtenir les données, la référence qu'il constitue, sa capacité à prévoir la volatilité future et son lien avec la volatilité instantanée. Nous montrons également que la relation entre l'indice de volatilité et la volatilité instantanée est linéaire et qu'elle dépend de la maturité des options utilisées pour construire l'indice. Ainsi, si nous considérons que la maturité est proche

de 0, nous pouvons utiliser directement l'indice de volatilité comme proxy de la volatilité instantanée. Dans le cas contraire, nous mettons en évidence l'existence d'un biais de maturité induit par l'utilisation directe de l'indice de volatilité comme proxy de la volatilité instantanée. La deuxième section est consacrée à la méthode d'estimation des modèles log-OU et log-OUS. Nous donnons d'abord les versions discrétisées de ces modèles, puis, ayant adopté un cadre Bayésien, nous développons un premier échantillonnage de Gibbs dans lequel nous considérons que l'indice de volatilité est un bon proxy de la volatilité instantanée. Dans un second temps, nous proposons une méthode d'estimation qui permet de corriger le biais de maturité. Dans la troisième section, nous appliquons cette méthode au marché français. Les estimations semblent confirmer que la correction du biais de maturité est indispensable. D'autre part, nous montrons que la prise en compte de sauts dans la volatilité permet de mieux appréhender la dynamique de la volatilité instantanée. Nous illustrons également l'impact du biais de maturité et des sauts sur la surface de volatilité implicite. Enfin, dans la quatrième section nous discutons des différences qui émergent dans les estimations selon la source de données utilisée, rendements ou options.

4.2 L'indice de volatilité implicite

Dans cette section, nous donnons les raisons qui justifient, à nos yeux, l'emploi d'un indice de volatilité pour l'estimation des paramètres d'un modèle de volatilité stochastique. Avant d'entrer dans le vif du sujet, commençons par rappeler certains faits élémentaires concernant la volatilité implicite. Tout d'abord, la volatilité implicite est une notion largement connue dans les milieux financiers. Elle est également une quantité "libre de spécification". Nous entendons par là qu'elle est, certes, déduite de l'inversion de la formule de Black et Scholes (1973), mais qu'elle n'est pas spécifiée comme étant dépendante, par exemple, de son niveau passé ou d'un terme d'erreur. Enfin, la volatilité implicite est en lien bijectif avec le prix de l'option dont elle est extraite. Or, ce prix d'option doit véhiculer l'ensemble des informations disponibles sur le marché. En particulier, si les marchés sont efficients, il doit vérifier l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage. Par conséquent, ceci nous amène à dire que la donnée d'un vecteur de volatilité implicite contient également des informations sur le processus risque-neutre du sous-jacent.

Ainsi, si de manière générale nous souhaitons effectuer une étude sur le comportement de la volatilité, la volatilité implicite semble être une bonne candidate. Cependant, deux problèmes subsistent et doivent être résolus. Tout d'abord, la volatilité implicite diffère d'une option à l'autre, la question

qui se pose est donc de savoir s'il existe des options qui véhiculent mieux l'information que d'autres. La littérature financière répond par l'affirmative et il est établi que les options à parité et d'échéance courte doivent être privilégiées. La raison principale est que les options présentant ces caractéristiques connaissent, et de manière très nette, les plus forts volumes d'échanges. De cette première constatation, il découle immédiatement un second problème qui tient du fait qu'il est impossible d'avoir, sur deux jours consécutifs, deux options partageant les mêmes caractéristiques. En effet, les options expirent généralement entre le 15-ième et le 21-ième jour du mois. Ainsi, si l'échéance a lieu le 15 du mois, on ne pourra observer que des options qui expirent dans 15 jours modulo 1 mois. De même, il est très rare que le cours de clôture du support soit exactement égal à un prix d'exercice donné. De fait, il est impossible de mener une étude *ceteris paribus*, et cela pèse évidemment sur la validité des conclusions. Pour évacuer ce problème, la solution réside en la construction d'un indice de volatilité qui reflèterait le comportement de la volatilité implicite d'une option qui serait toujours à parité et d'échéance constante à travers le temps. La construction de cet indice est l'objet de la section suivante. Nous étudierons ensuite la pertinence de cet indice en vérifiant que ses propriétés statistiques vérifient les principaux faits stylisés établis sur la volatilité. Nous montrerons également que cet indice de volatilité est le plus apte, parmi d'autres volatilités envisageables (historique ou GARCH), à prédire la volatilité future. Enfin, nous établirons un lien explicite entre cet indice et la volatilité instantanée. Ce lien revêt un aspect fondamental de notre étude et constitue notre principale justification de l'utilisation d'un indice de volatilité pour l'estimation des paramètres du processus de volatilité instantanée.¹

4.2.1 Construction

Le marché des options négociables de Paris (MONEP) a, comme toutes les autres grandes sociétés gérant des marchés d'options, créé ses indices de volatilité. Ainsi, le Chicago Board of Exchange a émis plusieurs indices de volatilité, le VIX (basé sur des options de type européen du S&P 500), le VXO (basé sur des options de type américain du S&P 100) et le VXN (basé sur des options du Nasdaq 100). De même, la Deutsche Börse a lancé l'indice VDAX basé sur des options portant sur le DAX 30. Notre étude portera sur l'indice CAC 40, aussi nous nous intéresserons plus particulièrement à un indice de volatilité basé sur des options du CAC 40 : l'indice VX1. Cet indice

¹Un dernier argument en faveur d'un indice de volatilité est de permettre l'évaluation d'options sur la volatilité, voir Brenner *et al.* (2003).

reflète le niveau de volatilité implicite d'un call européen à parité qui expire dans un mois. Nous pouvons noter qu'il existe également, depuis 2001, des indices de volatilité sur les actions du CAC 40. Ces indices constituent de facto des références pour les agents intervenant sur ces marchés.

Le calcul de l'indice VX1 de volatilité implicite du marché français repose sur la méthode de Brenner et Galai (1993). Nous donnons ici les principales étapes de sa construction, mais on peut se référer au site web du MONEP ainsi qu'à Moraux *et al.* (1999) pour une explication plus détaillée. La méthode consiste à collecter sur le marché quatre prix d'options $C(K^-, t^-)$, $C(K^+, t^-)$, $C(K^-, t^+)$ et $C(K^+, t^+)$ où K^- et K^+ désignent leur prix d'exercice et t^- et t^+ leur maturité en jours calendaires. Les valeurs des prix d'exercice, K^- et K^+ , sont choisies de sorte qu'elles encadrent, au plus près, le cours du support, l'une lui étant inférieure et l'autre supérieure. De même, les durées résiduelles, t^- et t^+ , sont choisies de sorte que $t^- < 31 < t^+$, où 31 représente la durée en jours d'un mois calendaire. Ce nombre équivaut généralement à 22 jours de cotations.

Prenons un exemple pour clarifier nos propos. Supposons que le premier jour d'un mois calendaire, le niveau du CAC 40 cote à $S_t = 3980$ points. Supposons par ailleurs que les échéances des séries d'options se situent au vingtième jour de chaque mois et que les prix d'exercice de ces options sont séparés de 25 points entre eux. Les prix d'exercice qui encadrent au plus près le cours du support sont donc $K^- = 3975$ et $K^+ = 4000$. D'autre part, les options les plus proches de l'échéance ont une durée de vie de $t^- = 20$ jours. L'échéance qui suit se situe, quant à elle, à $20 + 31$ jours, d'où $t^+ = 51$.

Ayant à notre disposition ces quatre prix d'options, nous effectuons une double interpolation linéaire, sur les durées résiduelles et les prix d'exercice, afin d'obtenir le prix d'un contrat synthétique à parité et à maturité constante égale à un mois. La première interpolation consiste à déduire, pour chacun des prix d'exercice K^- et K^+ , le prix d'une option dont la maturité est égale à 1 mois. Nous effectuons donc les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} C^*(K^-, 31) &= \frac{31 - t^-}{t^+ - t^-} [C(K^-, t^-) - C(K^-, t^+)] + C(K^-, t^-), \\ C^*(K^+, 31) &= \frac{31 - t^-}{t^+ - t^-} [C(K^+, t^-) - C(K^+, t^+)] + C(K^+, t^-). \end{aligned} \quad (4.1)$$

La seconde interpolation linéaire vise à obtenir le prix d'une option à parité :

$$C^{**}(S_t, 31) = \frac{S_t - K^+}{K^- - K^+} [C^*(K^-, 31) - C^*(K^+, 31)] + C^*(K^+, 31). \quad (4.2)$$

L'indice de volatilité s'obtient finalement en extrayant de C^{**} la volatilité implicite. Notons que l'indice découle d'une combinaison d'options qui sont parmi les plus liquides du marché (proches de la parité et de l'échéance). Nous pouvons donc légitimement penser qu'il concentre l'information détenue par les opérateurs et qu'il reflète fidèlement le comportement de la volatilité du marché. C'est ce dernier point que nous cherchons à vérifier dans ce qui suit.

4.2.2 Propriétés statistiques

Nous avons à notre disposition un échantillon qui comporte $N = 1539$ observations quotidiennes de l'indice de volatilité VX1. La période couverte s'étend du 17 octobre 1997 au 28 novembre 2003. L'évolution et les variations de l'indice sont reproduites dans les figures 4.1 et 4.2. Nous fournissons également des estimations non-paramétriques de leurs fonctions de densité respectives dans les figures 4.3 et 4.4. Il en ressort trois constatations. La première est que la volatilité est un processus stationnaire (d'ordre 1). Ceci peut être vu aussi bien dans le graphique 4.1 illustrant la dynamique de l'indice, que dans sa fonction de densité (4.3). Plus rigoureusement, nous confirmons la stationnarité de la série au moyen d'un test de racine unitaire (test de Dickey-Fuller augmenté, noté ADF). Ainsi, après avoir exclu l'existence d'un terme représentant une tendance déterministe non-nulle, nous rejetons l'hypothèse d'une racine unitaire dans la régression qui consiste à projeter le niveau de volatilité en t sur une constante et la volatilité en $t - 1$. La statistique du test ADF est en effet égale à -4.10 tandis que la valeur critique au seuil de 1 % est de -3.43. La régression donne les valeurs suivantes :

$$VX1_t = \begin{matrix} 0.0297 \\ (0.00550) \end{matrix} + \begin{matrix} 0.886 \\ (0.0229) \end{matrix} VX1_{t-1}, \quad (4.3)$$

où les écarts-types figurent entre parenthèses. La seconde constatation est que la volatilité semble être partagée en deux régimes différents, des périodes courtes où les variations de la volatilité sont fortes et des périodes plus longues où la volatilité varie peu. Les fonctions de densité de l'indice et des variations de l'indice corroborent ce résultat. En effet, on peut observer que la distribution des volatilités (4.3) est quasiment bimodale tandis que la distribution des écarts successifs de volatilité (4.4) indique que les variations sont très fréquemment faibles (pic au voisinage de 0) mais que les variations fortes ont une probabilité non-négligeable d'apparaître (queues épaisses). Une troisième constatation peut être faite à partir du graphique 4.5. On observe que la régression non-paramétrique des variations de volatilité en t sur les

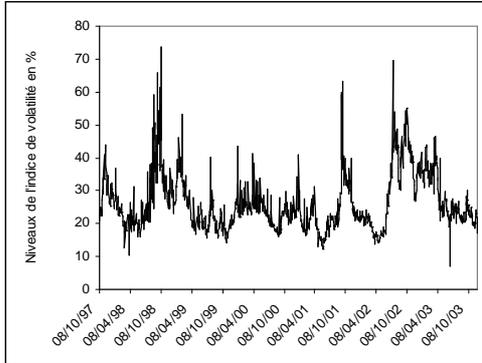


FIG. 4.1 – Niveau de l'indice de volatilité VX1

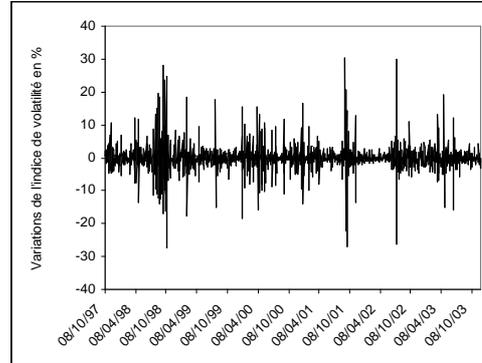


FIG. 4.2 – Variations de l'indice de volatilité VX1

variations en $t - 1$ a une pente globalement négative.² Cela signifie qu'une variation est généralement suivie d'une variation de signe opposé, c'est à dire qu'il y a compensation des variations de volatilité. Autrement dit, il existe un phénomène de retour à la moyenne. Notons que la stationnarité associée au fait que le niveau de volatilité puisse s'exprimer comme un processus autorégressif, impliquait déjà l'existence d'un effet de retour à la moyenne autour d'une tendance de long-terme. Les résultats de l'estimation 4.3 permettent d'évaluer ce niveau de volatilité moyen à 26.05 %.³ Ces trois faits empiriques sont largement admis dans la littérature et forment des faits stylisés sur la volatilité. Granger et Poon (2003) offrent une revue de littérature récente sur ce sujet.

À ce stade, nous pouvons donc considérer que l'indice de volatilité reflète assez fidèlement le comportement de la volatilité du marché. La rapide étude statistique que nous venons d'effectuer nous conduit à émettre une remarque supplémentaire. Elle concerne une éventuelle modélisation de la dynamique de l'indice de volatilité, et par suite la modélisation de la volatilité instantanée.⁴ En effet, nous pouvons facilement constater que la forme

²Pour des grandes variations à la baisse en $t - 1$, la pente n'est visiblement pas négative, nous avancerons une explication à ce phénomène dans la section 4.4.

³Une autre façon de mettre en évidence le phénomène de retour à la moyenne est d'utiliser le test du ratio de variance détaillé dans Campbell *et al.* (1997).

⁴Les propos que nous tenons ici peuvent faire l'objet de controverses. Par exemple, des sauts dans le sous-jacent peuvent induire des sauts dans la volatilité implicite sans même qu'une volatilité stochastique soit comprise dans la modélisation. Brigo et Mercurio (2000, 2002) abordent d'autres modélisations encore où la volatilité implicite peut présenter des sauts. Toutefois, et en anticipant sur le résultat de la section 4.2.4, qui montrera le lien direct entre volatilité instantanée et volatilité implicite, nous maintenons la proposition qui consiste à dire que les faits empiriques constatés sur l'indice de volatilité concernent

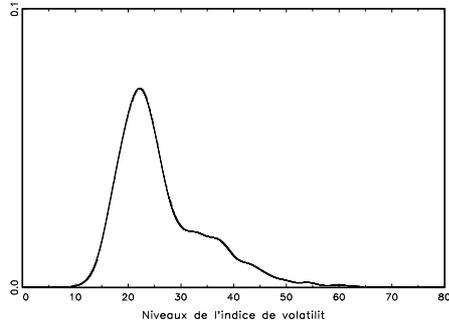


FIG. 4.3 – Estimation non-paramétrique de la fonction de densité de l'indice de volatilité VX1

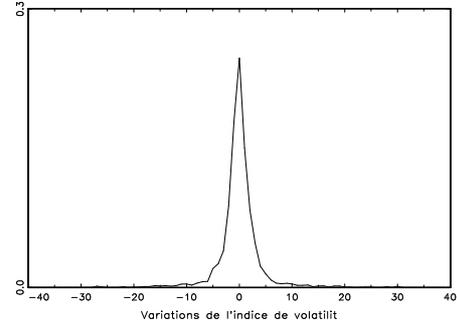


FIG. 4.4 – Estimation non-paramétrique de la fonction de densité des variations de l'indice de volatilité VX1

obtenue pour la fonction de densité estimée du niveau de volatilité n'est pas standard. Elle ne correspond pas, par exemple, à une loi stationnaire qui proviendrait d'une diffusion du type Ornstein-Uhlenbeck, log-Orstein-Uhlenbeck ou encore Cox-Ingersoll-Ross. En effet, pour les diffusions pré-citées, les lois stationnaires sont respectivement la loi normale, log-normale et gamma. Ces modèles semblent donc inadéquats pour prendre en compte l'ensemble des phénomènes qui régissent la dynamique de l'indice de volatilité, et par suite de la volatilité du marché. Par contre, il apparaît très clairement dans le graphique 4.1 que l'indice connaît de brusques variations, aussi bien à la hausse qu'à la baisse. Ces pics expliquent d'ailleurs la présence d'un second mode dans la distribution des niveaux de volatilité. Par conséquent, il nous semble naturel de nous tourner vers des modèles à sauts. Ces derniers permettent d'ailleurs de produire facilement des fonctions de densité non-standard et de la forme obtenue dans la figure 4.3.

4.2.3 Contenu informationnel

Il a été montré à de nombreuses reprises que la volatilité implicite possédait un contenu informatif supérieure à la volatilité historique ou à une volatilité GARCH. En d'autres mots, elle permettait de mieux prédire la

également la volatilité instantanée.

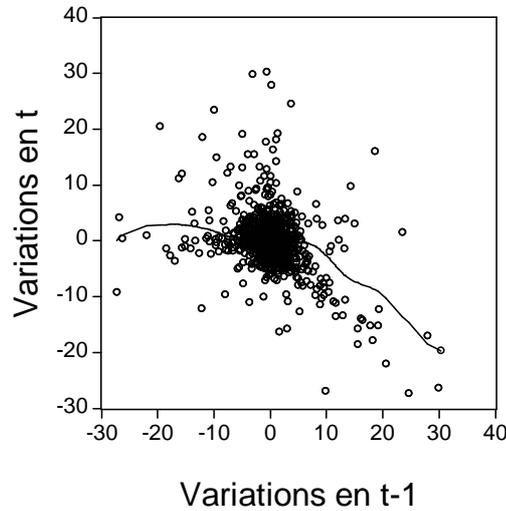


FIG. 4.5 – Estimation non-paramétrique de la relation entre deux variations de volatilité successives.

volatilité future que ne le font ces volatilités alternatives.⁵ Nous donnons ici une liste quasi-exhaustive de ces études : Latané et Rendleman (1976), Chiras et Manaster (1978), Schmalensee et Trippi (1978), Beckers (1981a), Day et Lewis (1992, 1993), Lamoureux et Lastrapes (1993), Flemming *et al.* (1995), Jorion (1995), Christensen et Prabhala (1998), Moraux *et al.* (1998, 1999), Szakmary *et al.* (2003), Shu et Zang (2004). À l’opposé, seuls Canina et Figlewski (1993) et Noh *et al.* (1994), trouvent que les volatilités déduites des séries de rendements (volatilité historique et GARCH) ont davantage de contenu informationnel que la volatilité implicite.

Nous nous proposons donc de vérifier ici le contenu informationnel de l’indice de volatilité du marché français. Nous adoptons une démarche traditionnelle et commune à l’ensemble des études traitant de ce sujet. Elle consiste à régresser la volatilité future réalisée sur différents estimateurs de volatilité future disponibles : volatilité implicite, volatilité historique ou volatilité GARCH. Avant d’exposer la régression, il nous faut au préalable définir les différentes quantités mentionnées. En nous plaçant à une date t , nous définissons la volatilité future réalisée comme étant l’écart-type du vecteur

⁵On utilisera indifféremment les termes de contenu informationnel, pouvoir explicatif ou pouvoir prédictif.

4.2. L'indice de volatilité implicite

des rendements y sur une période de 22 jours suivants la date t :⁶

$$\sigma_{R,t} = \sqrt{\frac{1}{22} \sum_{i=t+1}^{t+22} (y_i - \bar{y})^2}. \quad (4.4)$$

Nous avons choisi une période de 22 jours de cotation car cela correspond à la durée de vie de l'option synthétique dont est extrait l'indice de volatilité implicite. Un premier estimateur de la volatilité future est, bien évidemment, l'indice de volatilité, noté dorénavant $\sigma_{I,t}$. Un autre estimateur naturel de cette volatilité future est la volatilité historique, c'est à dire l'écart-type des rendements précédant la date t . C'est d'ailleurs l'estimateur de la volatilité future qu'avaient proposé Black et Scholes (1973). Nous définissons la volatilité historique, $\sigma_{H,t}$, comme étant égale à :

$$\sigma_{H,t} = \sqrt{\frac{1}{252} \sum_{i=t-252}^t (y_i - \bar{y})^2}. \quad (4.5)$$

L'estimateur est fondé sur les 252 derniers rendements pour calculer la volatilité historique, mais d'autres durées sont envisageables. Nous avons simplement pris une longueur de période qui est la plus fréquemment utilisée dans les études empiriques. Enfin, un dernier estimateur de la volatilité future peut être déduit à partir d'un modèle de la famille GARCH. Son obtention requiert davantage de calculs mais reste simple. Il s'agit d'abord de choisir un modèle dans la famille des spécifications GARCH (voir chapitre 2). Nous nous sommes tenus à la version la plus simple, c'est à dire à un modèle GARCH(1,1). Nous pensons qu'une autre spécification ne devrait pas bouleverser nos résultats. Rappelons que le modèle GARCH(1,1) s'écrit :

$$\begin{aligned} y_t &= c + \sigma_{g,t} \epsilon_t, \\ \sigma_{g,t}^2 &= \alpha_0 + \beta_0 \sigma_{g,t-1}^2 + \delta_0 \epsilon_{t-1}^2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

où $\sigma_{g,t}$ est la volatilité à l'instant t . Pour un échantillon donné, nous pouvons estimer l'ensemble des paramètres d'un modèle GARCH, ainsi que les variances GARCH pour toutes les dates incluses dans l'échantillon. Si t désigne la dernière date de l'échantillon, nous pouvons donc déduire $\sigma_{g,t}$, la volatilité GARCH en t . Malheureusement, cette valeur $\sigma_{g,t}$ n'est pas un estimateur de la volatilité future. Pour obtenir l'estimateur GARCH de la volatilité future, nous devons, à partir des paramètres estimés, construire une prévision des

⁶Nous disposons évidemment des rendements du CAC 40 sur la période couverte par les données de l'indice de volatilité.

volatilités GARCH sur les 22 jours suivants t . C'est la moyenne de ces volatilités GARCH prévues qui nous donne l'estimateur de la volatilité future. Concrètement, pour obtenir des estimateurs quotidiens de la volatilité future à partir du modèle GARCH, nous estimons, sur une fenêtre glissante de 252 jours $[t - 252, t]$, les paramètres de ce modèle. Ayant à disposition les paramètres estimés ainsi que la valeur $\sigma_{g,t}$, il est alors possible de construire une prévision en procédant comme dans Noh *et al.* (1994).⁷ Nous notons que pour une date $t + i$ postérieure à t , la volatilité GARCH prévue est égale à :

$$\begin{aligned}\sigma_{g,t+i}^2 &= \alpha_0 + \beta_0 \sigma_{g,t+i-1}^2 + \delta_0 E_t(\epsilon_{t+i-1}^2), \\ &= \alpha_0 + (\beta_0 + \delta_0) \sigma_{g,t+i-1}^2.\end{aligned}\tag{4.7}$$

C'est seulement en effectuant la moyenne sur les 22 jours suivant la date t des volatilités prédites, que nous obtenons finalement l'estimateur GARCH de la volatilité future, noté $\sigma_{G,t}$:

$$\sigma_{G,t} = \frac{1}{22} \sum_{i=t+1}^{t+22} \sigma_{g,i}.\tag{4.8}$$

Les procédures décrites ci-dessus concernent le calcul de la volatilité future, la volatilité historique et la volatilité GARCH pour une date donnée t . Pour disposer d'un vecteur pour chacune de ces volatilités, nous répétons ces procédures pour chaque t en faisant glisser chaque jour un échantillon de 252 observations des rendements du CAC 40.⁸

Nous pouvons, à présent, évaluer le contenu informationnel des différents estimateurs de la volatilité future en effectuant la régression suivante :

$$\sigma_{R,t} = \alpha + \beta_H \sigma_{H,t} + \beta_G \sigma_{G,t} + \beta_I \sigma_{I,t} + \varepsilon_t.\tag{4.9}$$

Cette démarche peut se décliner de sept manières différentes. Ainsi, pour mesurer le contenu informationnel propre à chacune des volatilités, on régresse la volatilité future sur une seule volatilité à la fois (3 régressions possibles).

⁷Lorsque $\alpha_0 + \beta_0$ est égal à 1, il peut y avoir un problème de persistance, voir Nelson (1990b). Ici, il nous était difficile de tester à chaque date t si cette somme était différente de 1. En effet, il y aurait eu plus d'un millier de vérifications à effectuer puisque nous avons travaillé sur des fenêtres glissantes. Nous n'avons toutefois pas constaté de problèmes chroniques de cet ordre.

⁸La base de données totale contient 1539 observations de l'indice de volatilité et autant de rendements du CAC 40. Les 252 premiers rendements sont nécessaires pour le calcul du premier élément des vecteurs de volatilité historique et GARCH. Les 22 derniers rendements sont quant à eux nécessaires pour le calcul du dernier élément du vecteur de la volatilité future. Finalement, nous disposons donc de $1539 - 252 - 22 = 1265$ observations des différentes volatilités pour mesurer le contenu informationnel.

4.2. L'indice de volatilité implicite

On peut également comparer le pouvoir explicatif des différents estimateurs de la volatilité future en la régressant sur deux (3 régressions possibles), ou sur l'ensemble des volatilités proposées (1 régression). L'analyse des résultats des différentes régressions se fait à travers la valeur des coefficients obtenus et la valeur du R^2 -ajusté.⁹ Si l'estimateur σ_X , $X = H, G$ ou I , de la volatilité future contient une information sur la volatilité future réalisée, le coefficient β_X devrait être non-nul. De plus, si cet estimateur est sans biais, alors on devrait avoir les valeurs suivantes $\alpha = 0$ et $\beta_X = 1$.

Une autre façon d'évaluer le pouvoir prédictif des estimateurs de volatilité future en compétition a été introduite par Jorion (1995) puis reprise par Moraux *et al.* (1998, 1999). Il s'agit de mesurer le pouvoir prédictif à très courte échéance des différents estimateurs. Ainsi, au lieu de considérer la volatilité future issue des 22 jours suivant la date t , on considère la volatilité du lendemain. La mesure du contenu informationnel des différents estimateurs se fait alors à travers la régression suivante :

$$\sqrt{y_{t+1}^2} = \alpha + \beta_H \sigma_{H,t} + \beta_G \sigma_{G,t} + \beta_I \sigma_{I,t} + \varepsilon_t, \quad (4.10)$$

où $\sqrt{y_{t+1}^2}$, représente la volatilité du lendemain. Dans ce cas, la volatilité GARCH, $\sigma_{G,t}$, est corrigée en conséquence et est obtenue à partir de (4.7) en se limitant à $i = t + 1$. En revanche, les volatilités historique et implicite demeurent inchangées. De fait, pour l'indice de volatilité implicite, l'horizon de prévision (un jour) diffère de sa définition (22 jours). Par conséquent, on ne s'attend plus à ce que l'indice de volatilité soit un estimateur sans biais, c'est à dire $\beta_I = 1$, mais plus simplement à ce que β_I soit positif.

De la première régression, dont les résultats sont donnés dans la première partie du tableau 4.1, il ressort plusieurs points. Tout d'abord, en fondant nos interprétations sur les régressions (4.9a) à (4.9c), on peut constater qu'aucune des volatilités en compétition ne constitue un estimateur sans biais de la volatilité future. Il faut toutefois noter une grande disparité entre ces différentes volatilités. Ainsi, la volatilité historique ne semble contenir qu'une faible quantité d'information susceptible d'expliquer la volatilité future, comme en témoigne la valeur très faible 0.0479 du R^2 -ajusté. Les volatilités GARCH et implicite sont, quant à elles, plus aptes à véhiculer l'information disponible en t pour déterminer la volatilité future, étant données les valeurs du R^2 -ajusté pour ces deux volatilités. Soulignons aussi que pour la volatilité implicite, les valeurs estimées des coefficients $\alpha = 0.0492$ et $\beta_I = 0.8618$ sont assez proches des valeurs théoriques d'un estimateur sans biais, même si elles demeurent

⁹Il s'agit en d'autres termes d'effectuer une analyse de la variance. Ici, comme dans l'ensemble des articles traitant du sujet, nous nous limitons à une analyse sommaire.

TAB. 4.1 – Résultats d’estimations des régressions visant à mesurer le contenu informationnel des différentes volatilités.

α	β_H	β_G	β_I	R^2 -ajusté	
Régression (4.9)					
0.1431	0.3760	-	-	0.0479	(4.9a)
0.0675	-	0.6875	-	0.3664	(4.9b)
0.0492	-	-	0.8618	0.4681	(4.9c)
0.1272	-0.3653	0.8225	-	0.4266	(4.9d)
0.0710	-0.1500	-	0.9414	0.4903	(4.9e)
0.0282	-	0.2672	0.6574	0.5100	(4.9f)
0.0856	-0.3484	0.4010	0.6495	0.5376	(4.9)
Régression (4.10)					
0.1088	0.3280	-	-	0.0107	(4.10a)
(0.0350)	-	0.6434	-	0.1053	(4.10b)
(0.0062)	-	-	0.8466	0.1306	(4.10c)
0.0811	-0.2586	0.7252	-	0.1096	(4.10d)
(0.0398)	(-0.1749)	-	0.9032	0.1288	(4.10e)
(-0.0033)	-	0.2451*	0.6214	0.1325	(4.10f)
0.0476*	-0.2915	0.3274	0.6370	0.1382	(4.10)

Les termes entre parenthèses sont non-significatifs au seuil de 5 %. Les termes étoilés sont significatifs au seuil de 5 %, les autres sont significatifs au seuil de 1 %.

significativement différentes au sens statistique du terme. Sur la base de ces premières interprétations nous sommes donc amenés à conclure à la supériorité de la volatilité implicite sur les deux autres estimateurs de la volatilité future. Les résultats des régressions (4.9d) à (4.9f) vont également dans ce sens en apportant quelques compléments d’interprétations. En effet, en ajoutant la volatilité historique à la volatilité GARCH, nous constatons que cette combinaison a un pouvoir explicatif supérieur aux contenus informationnels de chacune d’elles prises séparément (R^2 -ajusté = 0.4266). Il semble donc que la volatilité GARCH et la volatilité historique véhiculent des informations complémentaires. En revanche, la volatilité implicite semble englober la quasi-totalité du contenu informatif de la volatilité historique, le R^2 -ajusté ne variant que marginalement lorsqu’on incorpore la volatilité historique. Ce résultat tend à indiquer que l’ensemble des informations dévoilées par les co-

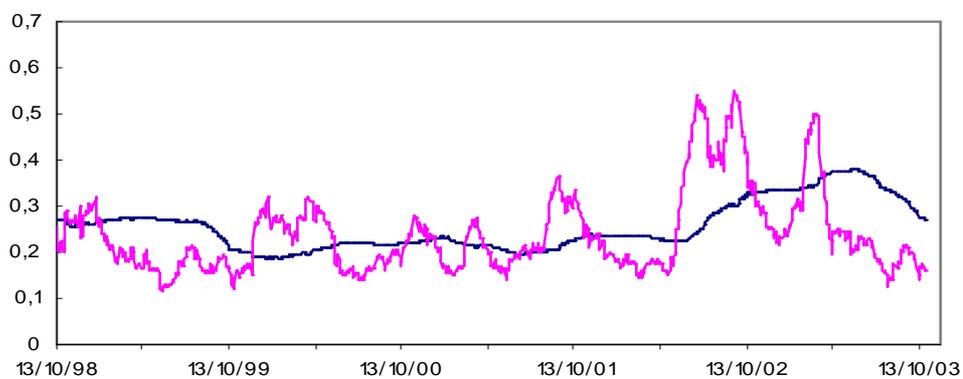
4.2. L'indice de volatilité implicite

tations du CAC 40 est pris en compte sur le marché des options. La régression (4.9f) nous indique que les volatilités GARCH et implicite possèdent toutes deux un pouvoir explicatif puisque le R^2 -ajusté vaut 0.5100, alors qu'il valait 0.3664 pour la seule volatilité GARCH et 0.4681 pour la volatilité implicite. Nous en déduisons que, si les deux volatilités sont complémentaires, la part explicative de la volatilité implicite est prépondérante.

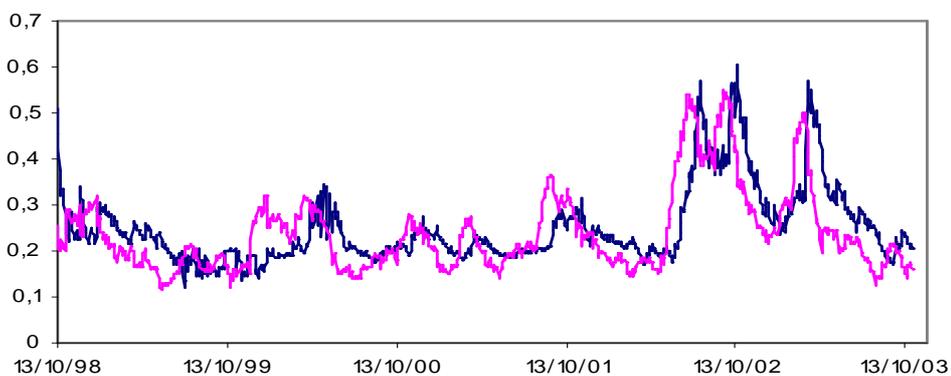
Afin de pouvoir mieux discerner encore la capacité de chacun des estimateurs à expliquer la volatilité future, nous avons reproduit dans la figure 4.6 leurs trajectoires respectives ainsi que celle de la volatilité réalisée. Le graphique 4.6.A illustre la faiblesse de la volatilité historique à prévoir les mouvements futurs de la volatilité. L'allure très lisse de son évolution s'explique évidemment par le fait que l'on ait choisi de prendre les 252 dernières observations pour aboutir à son calcul. D'autres fenêtres, plus courtes, n'auraient toutefois pas effacé entièrement le décalage qui se produit entre ces nouveaux estimateurs et la volatilité réalisée. Ce décalage systématique se manifeste également pour la volatilité GARCH et est illustré dans le graphique 4.6.B. Il nous semble que le problème de fond soulevé ici est que l'observation des rendements passés ne parvient pas à expliquer de manière satisfaisante ce qui va se produire dans un avenir immédiat. Les rendements seuls, ne parviennent à véhiculer qu'une petite part des anticipations des agents en ce qui concerne la volatilité. En revanche, le graphique 4.6.C semble montrer davantage de correspondances entre la volatilité implicite et la volatilité réalisée. De toute évidence, le décalage entre les deux courbes est nettement plus faible que celui constaté avec les autres estimateurs de la volatilité, et il y a même parfois des simultanés dans leurs évolutions respectives. Le marché des options, d'où est déduite la volatilité implicite, semble ainsi mieux véhiculer l'information concernant l'évolution de la volatilité future que le marché des actions. Une conséquence qui découle de ce constat est qu'il nous semble préférable d'utiliser des données en provenance de ce marché pour effectuer une inférence sur la volatilité.

Enfin, les résultats de la régression (4.10), visant à évaluer le pouvoir prédictif à court terme de chacune des volatilités, sont donnés dans la seconde partie du tableau 4.1. Les interprétations qui en résultent sont plus tranchées en faveur de la volatilité implicite que celles déduites à partir des variantes de la régression (4.9). En effet, en comparant le R^2 -ajusté des régressions (4.10c) et (4.10g), on constate que celui-ci n'est amélioré que de façon négligeable si l'on rajoute les volatilités GARCH et historique à la volatilité implicite. Bref, notre étude conforte une opinion largement répandue, à savoir que la volatilité implicite a un pouvoir prédictif supérieur à celui des volatilités historique ou GARCH.

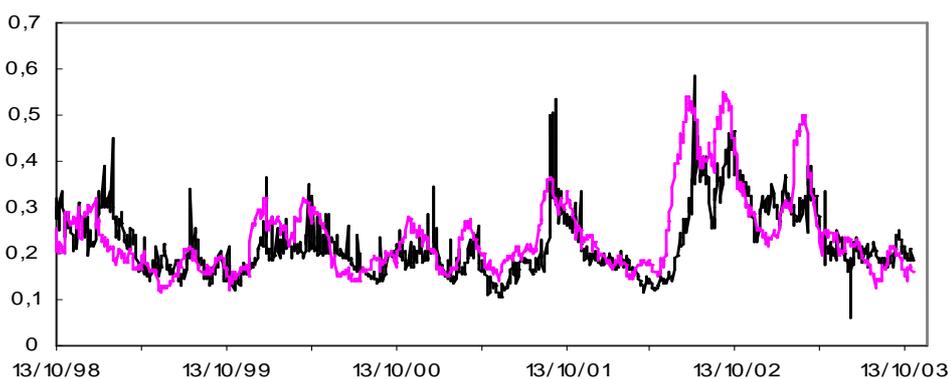
Enfin, et pour clôturer cette section concernant le contenu information-



Graphique 4.6.A : Volatilité historique



Graphique 4.6.B : Volatilité GARCH



Graphique 4.6.C : Volatilité implicite

FIG. 4.6 – Comparaison entre les différents estimateurs de la volatilité future et la volatilité réalisée (tracé clair).

nel de la volatilité implicite, Johannes *et al.* (1999) ont montré qu'un indice de volatilité était en mesure de prédire l'arrivée de sauts dans le sous-jacent et même de délivrer de l'information sur la taille de ce saut. Le raisonnement qui les a guidés dans l'obtention de ce résultat est simple, si la volatilité augmente fortement, cela signifie que les agents anticipent l'arrivée d'une nouvelle importante remettant en cause le consensus actuel sur le prix du support. Cette incertitude se révèle d'abord dans le prix des options, où la volatilité est un ingrédient fondamental pour évaluer le prix des options, puis elle se concrétise dans un second temps par un saut effectif dans le support. L'exemple typique de ce phénomène est le crash de 1987, où plusieurs jours avant que ne se produise effectivement le crash, l'indice de volatilité connaissait une forte hausse.

4.2.4 Lien entre volatilité implicite et volatilité instantanée

Dans cette section, nous abordons un point crucial de notre étude. Nous établissons un lien explicite entre la volatilité instantanée issue d'un modèle à volatilité stochastique standard (log-OU) ou d'un modèle à sauts dans la volatilité (log-OUS) et la volatilité implicite. Tout d'abord, rappelons que la volatilité implicite est définie comme étant la volatilité qui, injectée dans la formule de Black et Scholes (1973), nous permet de retrouver le prix observé d'une option. Formellement, la volatilité implicite vérifie :

$$C_t^* = C_{BS}(S_t, K, r, T - t, \sigma_{I,t}), \quad (4.11)$$

où C_t^* désigne le prix observé d'un call européen. À présent, nous supposons que le prix observé du call est déterminé par les modèles exposés (versions risque-neutre) dans le chapitre 3, c'est à dire, selon que la volatilité contient ou non des sauts :

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= rdt + \sigma_t dB_t, \\ \text{log-OU : } d \ln(\sigma_t^2) &= \kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^2)]dt + \gamma dW_t, \\ \text{log-OUS : } d \ln(\sigma_t^2) &= \kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^2)]dt + \gamma dW_t + JdN_t. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Dès lors, nous savons que le prix observé d'un call est égal à :

$$C_t^* = E_t [C_{BS}(S_t, K, r, T - t, \bar{V}_{t,T})], \quad (4.13)$$

où la notation et la définition de $\bar{V}_{t,T}$ ont été préservées par rapport au chapitre précédent. En combinant (4.11) et (4.13), on obtient donc l'équation

suivante :

$$E_t [C_{BS}(S_t, K, r, T - t, \bar{V}_{t,T})] = C_{BS}(S_t, K, r, T - t, \sigma_{I,t}^2). \quad (4.14)$$

Par ailleurs, pour des options à parité, $S_t \approx \exp[-r(T - t)]K$, nous savons que la formule de Black et Scholes (1973) est approximativement linéaire en son paramètre de volatilité σ . Nous avons donc :

$$C_{BS}(S_t, K, r, T, \sigma) \approx \sigma S_t \frac{\sqrt{T - t}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.15)$$

En insérant ce résultat dans (4.14), nous obtenons :

$$\begin{aligned} E_t(\bar{V}_{t,T}) &= E_t \left[\frac{1}{T - t} \int_t^T \sigma_s^2 ds \right] \\ &= \frac{1}{T - t} \int_t^T E_t(\sigma_s^2) ds \\ &\approx \sigma_{I,t}^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Normalement, la dernière étape avant d'obtenir la relation entre volatilité implicite et volatilité instantanée consiste à calculer l'intégrale dans (4.16), voir par exemple Ball et Roma (1994) ou Moraux *et al.* (1998, 1999). Cependant, les expressions de σ_s^2 , dans le cas log-OU comme dans le cas log-OUS ne se prêtent pas facilement à l'intégration. On peut alors montrer, à l'instar de Heynen *et al.* (1994), qu'empiriquement la relation suivante est valide :¹⁰

$$\frac{1}{T - t} \int_t^T \ln[E_t(\sigma_s^2)] ds \approx \ln[\sigma_{I,t}^2]. \quad (4.17)$$

¹⁰Pour établir ce résultat empirique, il faut procéder ainsi :

- Choisir le modèle log-OU ou log-OUS.
- Fixer les valeurs de paramètres du modèle.
- Calculer le prix théorique d'une option à parité, et ce pour diverses échéances, à partir d'une des méthodes de Monte Carlo présentée au chapitre 3.
- Dédire la volatilité implicite de ces prix d'options et en prendre le logarithme.
- Calculer le terme de gauche de (4.17). Le calcul pratique ne pose pas de problème étant donné que nous connaissons les valeurs de paramètres et la maturité $T - t$.
- Remarquer que pour diverses valeurs de paramètres et pour différents horizons, la relation reste valide avec une marge d'erreur inférieure à 1%.

Notons que prendre $\frac{1}{T - t} \int_t^T E[\ln(\sigma_s^2)] ds$ semble être a priori un choix plus judicieux comme

approximation de $\ln(\sigma_{I,t}^2)$. En effet, l'intégrale serait plus facile à calculer. Dans les faits cette approximation se révèle être peu performante.

4.2. L'indice de volatilité implicite

Le calcul de l'intégrale est à présent considérablement facilité. En effet, dans le cas du modèle log-OU, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T-t} \int_t^T \ln[E(\sigma_s^2|\sigma_t)] ds &= \vartheta + \frac{\gamma^2}{4\kappa} \left(1 - \frac{1 - \exp[-2\kappa(T-t)]}{2\kappa(T-t)} \right) \\ &+ [\ln(\sigma_t^2) - \vartheta] \left(\frac{1 - \exp[-\kappa(T-t)]}{\kappa(T-t)} \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

De même, pour le modèle log-OUS, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T-t} \int_t^T \ln[E(\sigma_s^2|\sigma_t)] ds &= \vartheta + \frac{\gamma^2}{4\kappa} \left(1 - \frac{1 - \exp[-2\kappa(T-t)]}{2\kappa(T-t)} \right) \\ &+ [\ln(\sigma_t^2) - \vartheta] \left(\frac{1 - \exp[-\kappa(T-t)]}{\kappa(T-t)} \right) \\ &+ \frac{1}{T-t} \int_t^T \lambda_J(s-t) [\exp(B_s) - 1] ds. \end{aligned} \quad (4.19)$$

où B_s est défini par l'équation (3.40) du chapitre précédent. Il reste à calculer, dans cette dernière équation, l'intégrale d'une fonction dépendant de B_s . Il est malheureusement impossible d'en donner une expression analytique. En revanche, sachant les valeurs de paramètres, il est facile d'en calculer une approximation numérique très précise.

Des équations (4.18) et (4.19), nous déduisons que la relation entre volatilité implicite et volatilité instantanée pour le modèle log-OU est :

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_{I,t}^2) &\approx \vartheta + \frac{\gamma^2}{4\kappa} \left(1 - \frac{1 - \exp[-2\kappa(T-t)]}{2\kappa(T-t)} \right) \\ &+ [\ln(\sigma_t^2) - \vartheta] \left(\frac{1 - \exp[-\kappa(T-t)]}{\kappa(T-t)} \right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

et s'écrit, comme suit, dans le cas log-OUS :

$$\begin{aligned} \ln(\sigma_{I,t}^2) &\approx \vartheta + \frac{\gamma^2}{4\kappa} \left(1 - \frac{1 - \exp[-2\kappa(T-t)]}{2\kappa(T-t)} \right) \\ &+ [\ln(\sigma_t^2) - \vartheta] \left(\frac{1 - \exp[-\kappa(T-t)]}{\kappa(T-t)} \right) \\ &+ \frac{1}{T-t} \int_t^T \lambda_J(s-t) [\exp(B_s) - 1] ds. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Dans les deux cas cette relation est affine. Nous disposons donc d'un lien simple et linéaire entre une quantité observable, la volatilité implicite, et une quantité inobservable, la volatilité instantanée. Il est intéressant de remarquer que lorsque $(T - t)$ est proche de zéro, c'est à dire lorsque l'option traitée est proche de l'échéance, alors :

$$\lim_{T-t \rightarrow 0} \frac{1 - \exp[-\kappa(T - t)]}{\kappa(T - t)} = 1, \quad (4.22)$$

c'est à dire, pour les deux cas log-OU et log-OUS :¹¹

$$\ln(\sigma_t^2) \approx \ln(\sigma_{I,t}^2). \quad (4.23)$$

Autrement dit, pour des options proches de l'échéance, la volatilité implicite peut être considérée comme une bonne approximation de la volatilité instantanée. Ce résultat a déjà été mis en évidence dans le chapitre 2. Ici, nous souhaitons revenir sur la notion "proche de l'échéance" qui semble être toute relative. Ainsi, Aït-Sahalia et Kimmel (2004) estiment les paramètres d'un modèle à volatilité stochastique standard, du type Cox-Ingersoll-Ross, à partir de deux bases de données différentes. Une première source de données est constituée par l'indice de volatilité américain VIX. Cet indice possède les mêmes caractéristiques que l'indice français VX1 et représente la volatilité implicite d'une option à parité à un mois de l'échéance. La seconde source de données repose sur des prix d'options. Leurs résultats d'estimations sont très fortement similaires dans les deux cas. Aussi, nous serions amenés à penser que l'approximation reste bonne pour une maturité égale à 1 mois. À l'inverse, Moraux *et al* (1998, 1999) montrent qu'utiliser directement l'indice de volatilité comme approximation de la volatilité instantanée, au lieu d'employer la relation explicite qui lie les deux quantités, mène à des estimations très différentes. Ils concluent donc à l'existence d'un biais de maturité.

Nous développerons dans la section suivante deux méthodes d'estimation différentes, l'une prenant l'indice comme proxy de la volatilité instantanée, l'autre prenant compte d'un éventuel biais de maturité. Nous pourrions donc juger de l'existence du biais de maturité. Il faut bien comprendre que si l'approximation (4.23) est valable, la question de l'estimation devient très simple, puisque la volatilité instantanée devient directement observable. Dans le cas contraire, il faut évidemment procéder à quelques aménagements.

Mais avant de pousser, nous insistons sur deux points fondamentaux. Le point de départ qui nous a permis d'établir le lien entre volatilité implicite

¹¹Pour le cas log-OUS, il suffit de remarquer que pour $T - t$ tendant vers 0, la quantité B_s tend vers une constante, et finalement l'intégrale dépendante de B_s de t à T tend vers 0.

et volatilité instantanée est l'équation (4.12), c'est à dire le processus sous sa forme risque-neutre. Les paramètres que nous nous apprêtons à estimer sont donc les paramètres risque-neutres, et ces estimations pourront directement servir à évaluer des prix d'options. Le second point consiste à remarquer que les seuls paramètres à estimer sont ceux du processus de volatilité instantanée. Le seul paramètre qui est présent dans le premier étage du processus bivarié est connu. C'est le taux sans risque r qui n'a donc pas besoin d'être estimé. Ainsi, la donnée de l'indice de volatilité implicite suffit à estimer l'ensemble des paramètres inconnus et il n'est nul besoin d'avoir recours aux rendements.

4.3 Méthodologie

Les méthodes d'estimation des modèles (avec ou sans sauts) que nous proposons nécessitent que nous disposions de leur version discrète. Pour le modèle log-OU, la fonction de densité de transition est disponible, et de fait la discrétisation exacte est possible. Pour le modèle log-OUS, comportant des sauts, la discrétisation exacte reste envisageable mais n'est plus exploitable. En effet, la fonction de transition est connue, mais elle se présente sous la forme d'un mélange de lois dont le nombre de composantes est infini. Nous sommes donc amenés à utiliser le schéma de discrétisation de Bernoulli développé par Ball et Torous (1983). Cette forme de discrétisation peut certes introduire un biais dans les estimations, mais ce biais peut généralement être considéré comme négligeable pour des données quotidiennes (voir par exemple Eraker, 2004). Pour donner une idée du biais induit par la discrétisation d'Euler, nous donnerons les résultats d'estimation suivant les deux schémas de discrétisation dans le cas simple log-OU.

4.3.1 Modèles en temps discret

Nous considérons tout d'abord la discrétisation exacte du modèle log-OU. Pour cela, nous subdivisons la période étudiée de longueur $T \approx 6.1$ années en $N - 1 = 1538$ sous-intervalles de longueur $\Delta = T/N \approx 1/252$, 252 étant approximativement le nombre de jours ouvrés dans une année. Pour obtenir la discrétisation exacte du modèle log-OU, il suffit d'utiliser le fait que la loi de $\ln(\sigma_t^2)$ sachant σ_τ est Gaussienne. En fixant $\tau = t - \Delta$, on a :

$$\ln(\sigma_t^2) = \vartheta(1 - \exp[-\kappa\Delta]) + \exp[-\kappa\Delta] \ln(\sigma_{t-\Delta}^2) + \gamma \sqrt{\frac{1 - \exp[-2\kappa\Delta]}{2\kappa}} \varepsilon_t, \quad (4.24)$$

où $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$. En d'autres termes, $\ln(\sigma_t^2)$ évolue selon un processus Gaussien autorégressif d'ordre 1 défini par la récurrence :

$$\ln(\sigma_t^2) = \mu + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \delta \varepsilon_t, \quad (4.25)$$

avec ici :

$$\begin{aligned} \mu &= \vartheta(1 - \exp[-\kappa\Delta]), \\ \beta &= \exp[-\kappa\Delta], \\ \delta^2 &= \frac{\gamma^2}{2\kappa}(1 - \exp[-2\kappa\Delta]). \end{aligned} \quad (4.26)$$

Dans ce cas, la vraisemblance peut s'écrire facilement et l'estimation des paramètres ne pose aucune difficulté.

Nous détaillons à présent la discrétisation d'Euler. Celle-ci s'obtient à partir de l'équation différentielle stochastique (3.1) qui décrit l'évolution de la volatilité dans le modèle log-OU. Ainsi, la variation de volatilité $\Delta\sigma_t$ entre deux instants $t - \Delta$ et t est :

$$\Delta \ln(\sigma_t^2) = \kappa[\vartheta - \ln(\sigma_{t-\Delta}^2)]\Delta + \gamma\sqrt{\Delta}\varepsilon_t, \quad (4.27)$$

qui se réécrit :

$$\ln(\sigma_t^2) = \kappa\vartheta\Delta + (1 - \kappa\Delta) \ln(\sigma_{t-\Delta}^2) + \gamma\sqrt{\Delta}\varepsilon_t. \quad (4.28)$$

La transition entre deux observations de volatilité s'effectue à nouveau selon un processus Gaussien autorégressif d'ordre 1 du type (4.25), mais avec cette fois :

$$\begin{aligned} \mu &= \kappa\vartheta\Delta, \\ \beta &= 1 - \kappa\Delta, \\ \delta^2 &= \gamma^2\Delta. \end{aligned}$$

Nous décrivons maintenant la méthode de discrétisation du modèle log-OUS. Il s'agit dans un premier temps d'effectuer une discrétisation d'Euler puis d'exploiter le fait qu'une binomiale tend vers une loi de Poisson. Nous avons déjà décrit cette méthode dans le chapitre 2 pour le processus Brownien géométrique standard. L'idée est similaire dans le cas présent. Nous procédons simplement à quelques adaptations.

La première étape de la discrétisation de Bernoulli consiste donc à effectuer une discrétisation d'Euler sur l'équation (3.11). Nous obtenons :

$$\ln(\sigma_t^2) = \mu + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \delta \varepsilon_t + J\Delta N_t, \quad (4.29)$$

avec $\mu = \kappa\vartheta\Delta$, $\beta = 1 - \kappa\Delta$, $\delta = \gamma\sqrt{\Delta}$ et $\Delta = T/N$. L'argument clef de la seconde étape est de considérer ΔN_t comme étant une variable aléatoire

4.3. Méthodologie

distribuée selon une loi de Bernoulli. Nous avons alors :

$$\begin{aligned} P[\Delta N_t = 0] &= 1 - \lambda_J \Delta, \\ P[\Delta N_t = 1] &= \lambda_J \Delta. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Cette approximation va simplifier considérablement la fonction de transition puisque $\ln(\sigma_t^2)$ évolue selon le processus :¹²

$$\ln(\sigma_t^2) = \begin{cases} \mu + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \delta \varepsilon_t & \text{avec probabilité } 1 - p, \\ \mu + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \delta \varepsilon_t + J & \text{avec probabilité } p, \end{cases} \quad (4.31)$$

où $p = \lambda_J \Delta$. Comme J est une variable aléatoire normale d'espérance μ_J et de variance γ_J^2 , nous obtenons :

$$\ln(\sigma_t^2) = \begin{cases} \mu + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \delta \varepsilon_t & \text{avec probabilité } 1 - p, \\ \mu + \mu_J + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2) + \sqrt{\delta^2 + \gamma_J^2} \varepsilon_t & \text{avec probabilité } p. \end{cases} \quad (4.32)$$

La fonction de transition de la volatilité est donc réduite à un mélange de deux composantes normales :

$$\begin{aligned} f(\ln(\sigma_t^2) | \sigma_{t-1}) &= p f_{\mathcal{N}}[\ln(\sigma_t^2); \mu + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2), \delta^2] \\ &\quad + (1 - p) f_{\mathcal{N}}[\ln(\sigma_t^2); \mu + \mu_J + \beta \ln(\sigma_{t-1}^2), \delta^2 + \gamma_J^2]. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Nous sommes ainsi amenés à estimer les paramètres d'un mélange de lois.

4.3.2 Méthode d'estimation

Dans un premier temps, nous proposons une méthode d'estimation sous l'hypothèse que l'indice de volatilité implicite est une bonne approximation de la volatilité instantanée. Dès lors, la volatilité instantanée est directement observable et nous sommes amenés à construire un échantillonnage de Gibbs permettant l'estimation des paramètres d'un modèle de mélange avec un terme autorégressif dans les moyennes. Cela revient simplement à adapter l'algorithme construit dans le chapitre 2 au cas log-OUS. Pour estimer les modèles autorégressifs simples qui découlent de la discrétisation exacte ou selon le schéma d'Euler, il suffit de remarquer que ce sont des cas particuliers de mélanges de lois pour lesquelles une des composantes a une probabilité nulle d'apparaître. Dans un second temps, nous tenons compte du biais de maturité et nous mettons en oeuvre un algorithme permettant de le corriger.

¹²L'approximation repose sur une hypothèse qui nous semble réaliste, et qui stipule qu'il ne peut y avoir plus d'un saut par jour.

4.3.2.1 À partir de l'indice

Nous détaillons la procédure d'estimation pour le modèle log-OUS, celui-ci étant le plus complexe. Le modèle log-OU peut être estimé à partir de cette méthode en imposant $p = 1$. Pour alléger les écritures nous désignons $\ln(\sigma_t^2)$ par h_t et nous écrivons le modèle à estimer sous la forme :

$$f(h_t|h_{t-1}) = pf_{\mathcal{N}}(h_t; \mu + \beta h_{t-1}, \delta^2) + (1-p)f_{\mathcal{N}}(h_t; \mu + \mu_J + \beta h_{t-1}, \xi^2 \delta^2). \quad (4.34)$$

Nous avons procédé à un changement de paramétrisation dans la variance de la deuxième composante du mélange pour pouvoir mettre en oeuvre notre méthode d'estimation. L'identification de γ_J , qui disparaît dans l'écriture (4.34), est assurée en imposant $\xi^2 \delta^2 = \delta^2 + \gamma_J^2$. Pour garantir la positivité de γ_J^2 , nous posons $\xi > 1$ ce qui fournit également une contrainte identifiante des composantes du mélange. La première composante du mélange aura une variance plus faible que la seconde.

La méthodologie adoptée est la même que celle qui a été proposée dans le chapitre 2 dans la section consacrée à l'estimation des mélanges. La seule différence réside dans le fait qu'ici il y a un terme autorégressif dans le mélange. Nous adaptons simplement l'échantillonnage de Gibbs à ce cas.

La mise en place de notre méthode d'estimation se fait en plusieurs étapes. Tout d'abord, la démarche Bayésienne nécessite de doter les paramètres de lois a priori. L'écriture du modèle sous la forme (4.34) permet de choisir des lois a priori conjuguées pour les différents paramètres, nous posons :

$$\begin{aligned} \mu &\sim \mathcal{N}(a_\mu, b_\mu), & \mu_J &\sim \mathcal{N}(a_J, b_J), & \beta &\sim \mathcal{N}(a_\beta, b_\beta), \\ \delta^2 &\sim \mathcal{IG}(a_\delta, b_\delta), & \xi^2 &\sim \mathcal{IG}(a_\xi, b_\xi), & p &\sim \mathcal{Be}(a_p, b_p), \end{aligned}$$

où \mathcal{IG} représente la loi inverse-gamma et \mathcal{Be} , la loi bêta. La valeur des hyperparamètres $\omega = (a_p, b_p, a_\mu, b_\mu, a_J, b_J, a_\beta, b_\beta, a_\delta, b_\delta, a_\xi, b_\xi)$ apparaissant dans ces lois a priori est fixée de sorte que les a priori soient diffus.¹³ Nous pouvons à présent écrire la loi a posteriori :

$$\begin{aligned} \pi(\theta, z|h) &\propto \prod_{t=1}^N (f_{\mathcal{N}}(h_t|z_t; \theta_{z_t}) f_{\mathcal{B}}(z_t)) \pi(\theta|\omega) \\ &\propto p^{N_0} (1-p)^{N_1} \prod_{t:z_t=0} f_{\mathcal{N}}(h_t|\theta_0) \prod_{t:z_t=1} f_{\mathcal{N}}(h_t|\theta_1) \pi(\theta|\omega), \end{aligned} \quad (4.35)$$

¹³Ce dernier propos, concernant les a priori vagues, doit toutefois être nuancé. Nous imposons en effet des valeurs aux hyperparamètres qui rendent les lois a priori diffuses, par exemple, l'espérance et la variance d'une loi a priori normale sont posées comme étant respectivement égales à 0 et 100. Pour la loi inverse-gamma, nous choisissons que les deux hyperparamètres soient égaux à 0.001, enfin pour la loi bêta les deux hyperparamètres sont égaux à 0.5. Mais, nous avons également imposé des contraintes identifiantes, qui peuvent légitimement être interprétées comme des a priori extrêmement informatifs.

4.3. Méthodologie

où z_t désigne la variable latente indiquant si l'observation t appartient à la composante à sauts ($z_t = 1$) ou à la partie continue du processus ($z_t = 0$). L'algorithme qui permet de générer des observations issues de cette loi a posteriori (4.35) consiste, en partant de valeurs initiales $\theta^{(0)}$, à répéter à chaque itération i les deux étapes suivantes :

- Étape 1 : générer les N variables indicatrices z_t selon :

$$P[z_t = 0] = \frac{pf_{\mathcal{N}}(h_t|\theta_0)}{pf_{\mathcal{N}}(h_t|\theta_0) + (1-p)f_{\mathcal{N}}(h_t|\theta_1)},$$

puis calculer les statistiques :

$$\begin{aligned} N_0 &= \sum_{t=1}^N \mathbb{I}[z_t = 0], & N_1 &= \sum_{t=1}^N \mathbb{I}[z_t = 1], \\ \bar{h}_{01} &= \sum_{t=2}^N h_{t-1} \mathbb{I}[z_t = 0], & \bar{h}_{11} &= \sum_{t=2}^N h_{t-1} \mathbb{I}[z_t = 1], \\ \bar{h}_{02} &= \sum_{t=1}^N h_t \mathbb{I}[z_t = 0], & \bar{h}_{12} &= \sum_{t=1}^N h_t \mathbb{I}[z_t = 1], \\ \bar{s}_{01} &= \sum_{t=2}^N \mathbb{I}[z_{t-1} = 0], & \bar{s}_{11} &= \sum_{t=1}^N \mathbb{I}[z_t = 1], \\ \bar{s}_{02} &= \sum_{t=2}^N \mathbb{I}[z_{t-1} = 0], & \bar{s}_{12} &= \sum_{t=1}^N \mathbb{I}[z_t = 1], \\ \tilde{s}_0 &= \sum_{t=2}^N (h_t - \mu - \beta h_{t-1})^2 \mathbb{I}[z_t = 0], \\ \tilde{s}_1 &= \sum_{t=2}^N (h_t - \mu - \mu_J - \beta h_{t-1})^2 \mathbb{I}[z_t = 1], \end{aligned}$$

- Étape 2 : Tirer dans les lois a posteriori conditionnelles :

$$\begin{aligned} p &\sim \mathcal{B}e(N_0 + a_p, N_1 + b_p), \\ \delta^2 &\sim \mathcal{IG}\left(\frac{N_0}{2} + \frac{N_1}{2\xi^2} + a_\delta, \frac{\tilde{s}_0}{2} + \frac{\tilde{s}_1}{2\xi^2} + b_\delta\right), \\ \xi^2 &\sim \mathcal{IG}\left(\frac{N_1}{2\delta^2} + a_\xi, \frac{\tilde{s}_1}{2\delta^2} + b_\xi\right), \\ \mu &\sim \mathcal{N}(E_\mu, V_\mu), \\ \mu_J &\sim \mathcal{N}(E_J, V_J), \\ \beta &\sim \mathcal{N}(E_\beta, V_\beta). \end{aligned}$$

avec :

$$E_\mu = \frac{1}{V_\mu} \left(\frac{\bar{s}_{02} - \bar{h}_{01}\beta}{\delta^2} + \frac{\bar{s}_{12} - \bar{s}_{11}\mu_J - \bar{h}_{11}\beta}{\delta^2\xi^2} + \frac{a_\mu}{b_\mu} \right),$$

$$V_\mu = \frac{1}{\bar{s}_{01}/\delta^2 + \bar{s}_{11}/(\delta^2\xi^2) + 1/b_\mu},$$

$$E_J = \frac{1}{V_J} \left(\frac{\bar{s}_{12} - \bar{s}_{11}\mu - \bar{h}_{11}\beta}{\delta^2\xi^2} + \frac{a_J}{b_J} \right),$$

$$V_J = \frac{1}{\bar{s}_{11}/(\delta^2\xi^2) + 1/b_J},$$

$$E_\beta = \frac{1}{V_\beta} \left(\frac{\bar{h}_{02} - \bar{h}_{01}\mu}{\delta^2} + \frac{\bar{h}_{12} - \bar{h}_{11}(\mu + \mu_J)}{\delta^2\xi^2} + \frac{a_\beta}{b_\beta} \right),$$

$$V_\beta = \frac{1}{\bar{h}_{01}/\delta^2 + \bar{h}_{11}/(\delta^2\xi^2) + 1/b_\beta}.$$

La première partie de l'algorithme consiste à simuler les variables z_t inconnues suivant un rapport de vraisemblance. Ensuite étant donnée la répartition des observations dans les deux composantes, on peut effectuer des tirages dans les lois a posteriori conditionnelles. Notons que grâce à la reparamétrisation, chaque observation contribue à l'estimation de l'ensemble des paramètres, et non seulement aux paramètres de sa composante d'affectation.

4.3.2.2 Correction du biais de maturité

Si nous considérons que l'indice de volatilité n'est pas un bon proxy de la volatilité instantanée, alors il nous faut utiliser la relation entre les deux quantités. Pour alléger les écritures, nous notons h^* le vecteur des volatilités implicites et θ le vecteur des paramètres à estimer. Le problème de l'estimation peut se poser de la manière suivante : nous observons $h^* = v(h, \theta)$ et nous connaissons la fonction de densité conditionnelle $f(h|\theta)$. Une approche naturelle consiste à effectuer un changement de variable pour obtenir la densité conditionnelle $g(h^*|\theta)$, puis à écrire la vraisemblance. La relation v est linéaire en h , par conséquent la relation $h = v^{-1}(h^*, \theta)$ s'obtient immédiatement, et le calcul du Jacobien que nécessite le changement de variable ne

pose aucune difficulté, voir par exemple Duan (1994) ou Moraux *et al.* (1998, 1999). Dans le cas présent, le changement de variable nous conduit à manipuler une loi a posteriori complexe dont il est impossible d'extraire une loi a posteriori conditionnelle standard pour un des paramètres du modèle, le coefficient de retour à la moyenne κ . Bien que ceci n'empêche pas réellement de mettre en oeuvre un algorithme de Monte Carlo par chaînes de Markov, nous proposons toutefois une autre méthode.

La solution que nous préconisons est d'utiliser la démarche Bayésienne et d'effectuer une augmentation des données. Partant de la loi inconnue des volatilités implicites $f(h_t^*|\theta)$ nous pouvons écrire :

$$f(h_t^*, h_t|\theta) = f(h_t^*|h_t, \theta)f(h_t|\theta), \quad (4.36)$$

où nous avons augmenté les données disponibles par les volatilités instantanées inobservables h_t . Dès lors, la loi a posteriori jointe de h_t et θ s'écrit :

$$f(\theta, h_t|h_t^*) \propto f(h_t^*|h_t, \theta)f(h_t|\theta)f(\theta). \quad (4.37)$$

La construction d'un échantillonnage de Gibbs ne pose alors aucun problème puisque les lois a posteriori conditionnelles $f(\theta|h_t, h_t^*)$ et $f(h_t|\theta, h_t^*)$ sont connues et facilement simulables. En effet, concernant $f(h_t|\theta, h_t^*)$ il suffit de remarquer que :

$$f(h_t|\theta, h_t^*) = \delta[h_t = v^{-1}(h_t^*, \theta)], \quad (4.38)$$

où $\delta[\cdot]$ désigne la masse de Dirac et concentre toute la probabilité en un seul point. En d'autres termes, le fait que la relation entre volatilité implicite et volatilité instantanée soit déterministe se traduit par une fonction de distribution de h_t sachant h_t^* et θ qui est une masse de Dirac. La connaissance de h_t^* et θ suffit donc à générer des volatilités instantanées inobservables h_t . D'autre part, la connaissance de h_t^* est une information redondante si par ailleurs nous connaissons h_t et θ , nous pouvons donc simplifier $f(\theta|h_t, h_t^*)$ en $f(\theta|h_t)$. Or, sachant h_t , les paramètres qui constituent le vecteur θ peuvent être simulés à partir de l'échantillonnage de Gibbs donné dans la sous-section précédente.

Par conséquent, notre algorithme qui permet de tenir compte du biais de maturité se décompose en deux étapes. Nous partons de valeurs initiales arbitraires $\theta^{(0)}$, puis à chaque itération i , nous effectuons :

- Étape 1 : Sachant $\theta^{(i-1)}$, calculer pour chaque observation $t = 1, \dots, N$ la volatilité instantanée d'après la relation :

$$h_t^{(i)} = v^{-1}(h_t^*, \theta^{(i-1)}).$$

- Étape 2 : Étant donné $h^{(i)}$, générer $\theta^{(i)}$ en utilisant l'échantillonnage de Gibbs décrit dans la section précédente.

Dans la pratique, nous avons constaté la convergence de nos algorithmes (avec et sans correction du biais de maturité) en lançant, pour chacun d'eux, trois chaînes avec différentes valeurs initiales. Nous avons observé qu'elles convergeaient toutes vers la même loi a posteriori, et ce de manière assez rapide (quelques centaines d'itérations). Aussi nous nous sommes limités à 5000 itérations pour chaque chaîne dont nous avons écarté les 2500 premières (période de *burn-in*). Avec le logiciel GAUSS et une station de travail cadencée à 1.8 MHz, le temps de calcul pour une chaîne prend environ 25 secondes lorsqu'il y a correction du biais de maturité.

4.4 Résultats

Les résultats que nous présentons s'articulent autour de trois grands axes : 1) l'estimation des paramètres, 2) les surfaces de volatilité que l'on peut en déduire et 3) la confrontation entre ces estimations, issues de données en provenance du marché des options, et les estimations qui résultent de la seule utilisation des rendements.

4.4.1 Estimations

Les résultats des estimations sont donnés dans le tableau 4.2. Précisons que les valeurs des paramètres obtenues à partir de ces discrétisations sont annualisées. Nous commentons dans un premier temps les estimations obtenues sans la correction du biais de maturité. Cela revient donc à considérer que la volatilité implicite est égale à la volatilité instantanée, ou en d'autres mots encore, que nous avons directement modélisé la dynamique de l'indice de volatilité. On peut d'abord constater que, pour le modèle log-OU, les estimations obtenues à partir des deux schémas de discrétisation (Euler ou exacte) sont assez proches.¹⁴ Ce résultat est important car il contribue, dans une certaine mesure, à valider la discrétisation pour les modèles à sauts. Toujours pour ce modèle log-OU, on constate que la volatilité instantanée évolue autour d'une tendance à long terme égale à 27.42 %. Pour obtenir ce résultat, il suffit d'utiliser l'équation (3.9) et d'en prendre la racine. On trouve également une valeur de κ assez élevée, ce qui tend à indiquer un effet

¹⁴Le fait que ϑ ait la même valeur selon les deux schémas de discrétisation est naturel. Dans les deux cas, sa valeur est obtenue selon le même rapport $\mu/(1 - \beta)$ d'après le système d'équation (4.26) liant les paramètres du modèle en temps discret aux paramètres du modèle en temps continu.

prononcé de retour à la moyenne. Par exemple, le temps nécessaire pour que le niveau de volatilité ait une valeur à mi-chemin entre la volatilité actuelle et son niveau de référence est d'environ 8 jours de cotation.¹⁵

Étudions à présent l'impact des sauts sur la modélisation. Une première constatation consiste à observer une baisse sensible de l'effet de retour à la moyenne. La valeur de κ passe de 25.22 pour le modèle log-OU à une valeur de 11.73 pour le modèle log-OUS. Le processus de volatilité implicite est donc soumis à un effet de persistance plus important que l'analyse du modèle sans sauts ne le laissait suggérer. Ceci signifie par exemple, que s'il y a eu un choc dans la volatilité, la partie continue du processus ne lui permet de rejoindre que lentement sa tendance de long terme. De plus, la valeur du niveau de la volatilité à long terme, ϑ , est abaissée, ce qui sous-entend que la volatilité moyenne durant les périodes calmes est plus faible. Enfin, la volatilité de la volatilité, γ , est divisée par deux par rapport au modèle sans sauts. Ceci indique que la partie continue de la volatilité évolue de manière assez concentrée autour de sa tendance à long-terme. L'introduction des sauts autorise donc une interprétation beaucoup plus précise de l'évolution de la volatilité dans les périodes calmes.

Passons maintenant à l'analyse de la nature des sauts. Les sauts se produisent à une fréquence assez importante puisqu'ils apparaissent environ 48 fois par an. Ce chiffre surpasse nos attentes. Cela équivaut en moyenne à un saut toutes les semaines. Par ailleurs, la taille des sauts, $\mu_J = 0.04$, est relativement faible et correspond à une variation moyenne de -1.36 % par rapport au niveau de long terme de la log-volatilité ϑ . Si l'on ajoute à cela que la valeur de ce coefficient est statistiquement non-significative, on comprend aisément que faire correspondre des sauts uniquement à des crashes boursiers devient une hypothèse de travail erronée. La question qui se pose est donc de savoir à quoi peuvent correspondre les sauts. La valeur de l'écart-type estimé des sauts, $\gamma_J = 0.51$, permet d'apporter des éléments de réponse. D'abord, étant donnée la valeur proche de 0 de μ_J , elle signifie que les sauts peuvent être aussi bien négatifs que positifs. D'autre part, ces sauts peuvent avoir une taille assez importante et ce quel qu'en soit le signe. Pour illustrer ce dernier propos, rappelons que la loi des sauts est supposée Gaussienne, par conséquent on en déduit qu'environ un tiers des sauts dans la log-volatilité ont une taille supérieure à $\mu_J + \sigma_J = 0.56$, ou inférieure à $\mu_J - \sigma_J = -0.47$. Ces chiffres correspondent concrètement à des écarts brutaux de -19 % et 15 % par rapport au niveau de long terme de la log-volatilité. Par conséquent, nous en déduisons que la composante à sauts est parfaitement apte à capturer les très fortes variations de volatilité (à la hausse comme à la baisse). Il est

¹⁵Voir l'équation (3.5).

TAB. 4.2 – Résultats d’estimation avec (*) et sans correction du biais de maturité pour les modèles log-OU et log-OUS.

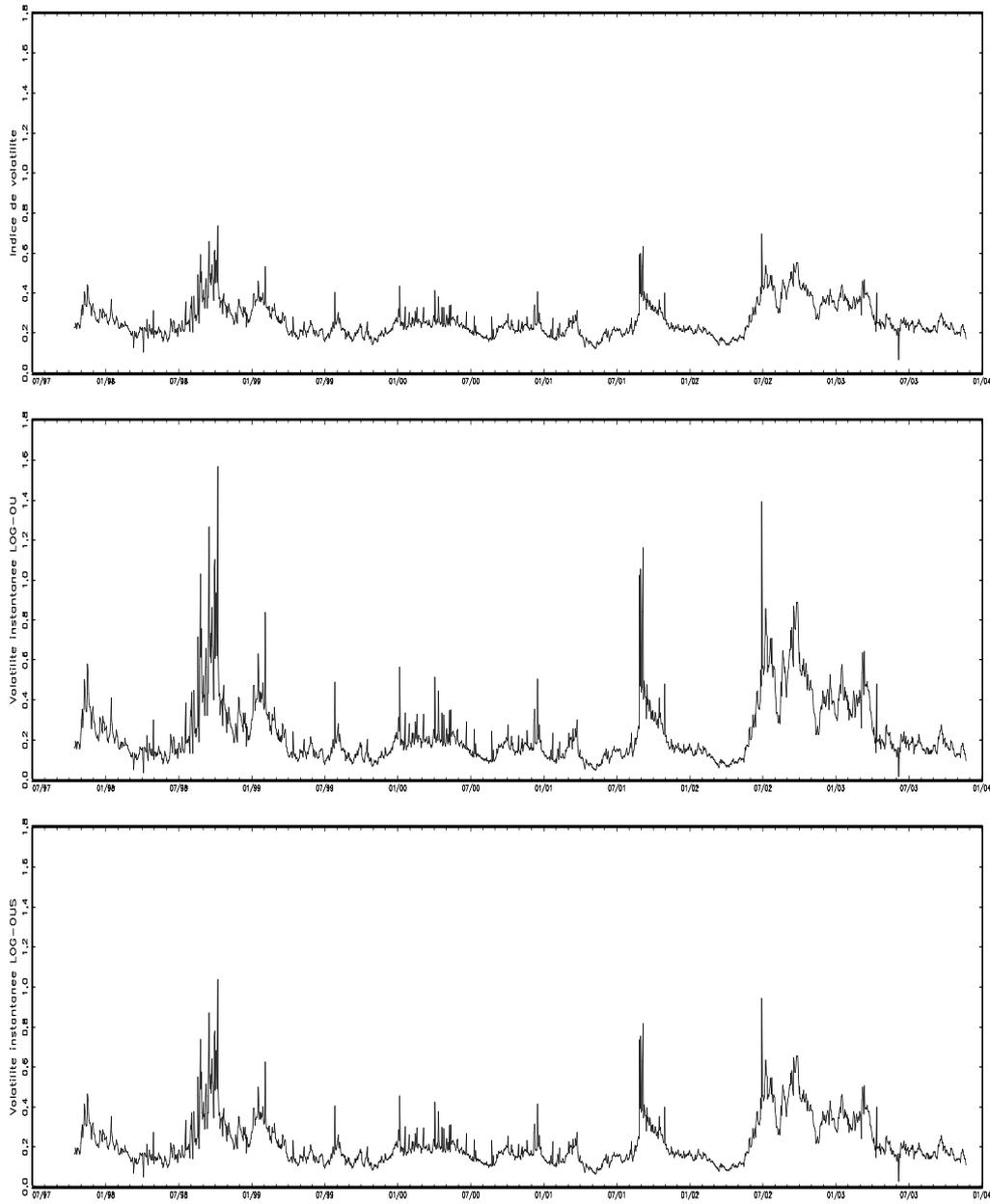
	log-OU Euler	log-OU Exacte	log-OU* Euler	log-OUS Bernoulli	log-OUS* Bernoulli
κ	24.00 [19.00,29.55]	25.23 [19.75,31.43]	17.05 [13.99,20.29]	11.74 [8.67,15.48]	11.01 [8.13,14.20]
ϑ	-2.767 [-4.324,-1.770]	-2.767 [-4.321,-1.769]	-3.923 [-6.539,-1.906]	-2.941 [-5.189,-1.663]	-3.395 [-6.428,-1.866]
γ	4.048 [3.908,4.194]	4.253 [4.062,4.458]	9.207 [7.391,14.983]	2.008 [1.856,2.164]	3.060 [2.558,3.629]
λ_J	- -	- -	- -	48.55 [38.53,60.33]	47.08 [36.32,58.59]
μ_J	- -	- -	- -	0.0408 [-0.0284,0.1032]	0.0593 [-0.0535,0.1763]
γ_J	- -	- -	- -	0.5135 [0.4250,0.6153]	0.8105 [0.6114,1.0639]

Les résultats entre crochets sont les bornes des intervalles de confiance à 95 %

en revanche plus difficile d'expliquer pourquoi la majorité des variations assimilées à des sauts sont de taille plus modeste. Nous avançons une explication possible qui réside dans une remise en cause de notre hypothèse de normalité de la taille des sauts. En effet, plaçons-nous dans un contexte où les sauts de taille négative (positive) seraient distribués selon une loi Gaussienne centrée autour d'une valeur négative (positive), μ_J^- , ($\mu_J^+ \approx -\mu_J^-$). La distribution des sauts (négatifs et positifs) serait donc un mélange de lois normales qui aurait une allure bimodale. À présent, en estimant les paramètres d'une distribution des sauts supposée Gaussienne alors qu'elle est, dans les faits, un mélange de lois Gaussiennes, nous aurions de très fortes similitudes entre ces résultats d'estimation et les estimations obtenues. En effet, nous observerions une forte variance estimée et un paramètre de location qui fluctue, au cours des itérations, entre les deux modes. La moyenne estimée se situerait finalement entre les deux modes mais avec un intervalle de confiance très large. C'est exactement ce que nous observons à partir des estimations de μ_J et σ_J . Au delà de la critique, cette remarque permet d'envisager une modélisation plus fine des sauts en les séparant selon leur signe comme dans Chacko et Viceira (2003).

Nous étudions à présent l'effet de la correction du biais de maturité sur les résultats d'estimation. Dans ce cas, la volatilité instantanée n'est plus égale à l'indice de volatilité mais elle est déduite à partir de lui. Elle dépend également du modèle choisi, voir les équations (4.20) et (4.21). Nous illustrons ces différences dans le graphique 4.7, où nous avons reproduit l'indice de volatilité implicite, la volatilité instantanée associée au modèle log-OU et celle correspondant au modèle log-OUS.¹⁶ La principale constatation est immédiate et on observe une très nette disparité entre les différentes quantités. La volatilité instantanée, qu'elle soit issue du modèle log-OU ou log-OUS, a un caractère beaucoup moins lisse que l'indice de volatilité. Elle amplifie en particulier les fortes variations dans l'indice. En fait, cette remarque est assez naturelle, puisque la volatilité implicite peut être considérée comme la moyenne de la volatilité instantanée sur la durée de vie restante de l'option. Ici, nous avons donc un début de confirmation qu'il existe un biais de maturité. Un second point qui mérite notre attention réside dans les valeurs excessivement élevées que peut prendre la volatilité instantanée issue du modèle LOG-OU. Nous interprétons la génération de tels niveaux de volatilité comme un signe qui tend à montrer que le modèle LOG-OU n'est pas adapté à la complexité du processus de volatilité.

¹⁶Pour chacun des modèles LOG-OU et LOG-OUS corrigé du biais de maturité, le vecteur de volatilité instantanée estimé est calculé en effectuant la moyenne des vecteurs de volatilité instantanée obtenus à chaque itération de l'algorithme de Gibbs.



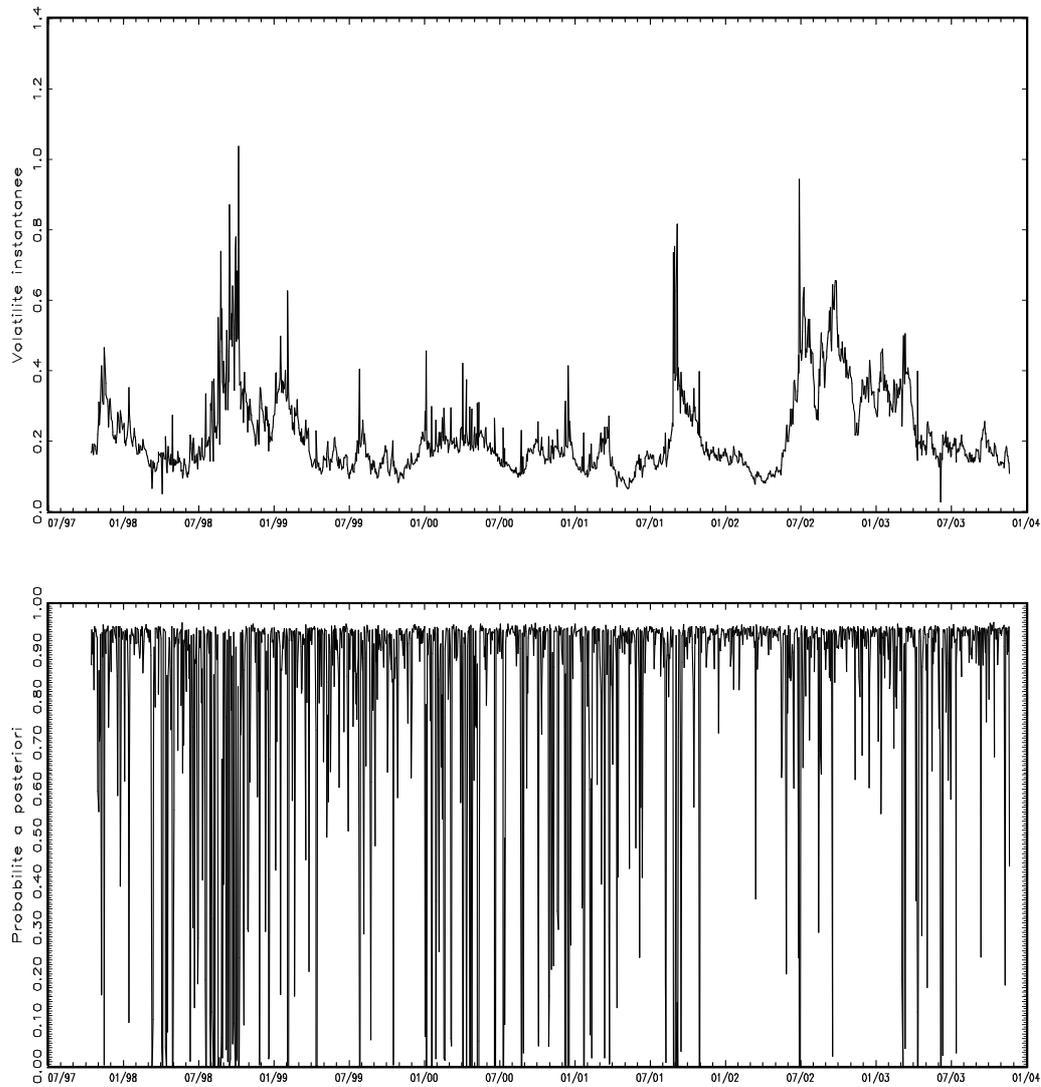
Les graphiques représentent, en partant du haut, l'indice de volatilité, la volatilité instantanée du modèle log-OU corrigé et la volatilité instantanée du modèle log-OUS corrigé.

FIG. 4.7 – Volatilités instantanées.

Si, à présent, nous étudions l'impact de la correction du biais sur les estimations, nous pouvons noter avec force un résultat majeur. La valeur des paramètres est profondément modifiée. Par conséquent, nous sommes confortés dans le fait qu'utiliser l'indice de volatilité directement comme proxy de la volatilité instantanée mène à des estimations biaisées. Tous les paramètres sont touchés. Ainsi, la valeur de κ diminue considérablement lorsqu'on corrige la volatilité implicite de son biais de maturité. D'autre part, la volatilité instantanée, issue du modèle log-OU, varie plus fortement que l'indice de volatilité d'après la valeur de γ qui a plus que doublé. Enfin, la tendance de long-terme de la log-volatilité est elle aussi fortement affectée puisqu'elle passe de $\vartheta = -2.767$ à $\vartheta = -3.923$. Paradoxalement, ce changement pour ϑ n'affecte pas grandement la tendance de long terme de la volatilité instantanée puisqu'on trouve une valeur de 26.18 %, à peine inférieure à la valeur trouvée sans la correction du biais de maturité. On en déduit finalement que la volatilité instantanée et la volatilité implicite évoluent toutes deux autour du même niveau de référence mais de façon différente. Il faut noter que ces conclusions sont similaires à celles obtenues par Moraux *et al.* (1998, 1999) pour un modèle du type Cox-Ingersoll-Ross. Ils constatent eux aussi une diminution de κ , une hausse de γ et une valeur inchangée pour la valeur de long-terme de la volatilité instantanée.

La correction du biais de maturité a un effet moins frappant sur les estimations du modèle log-OUS. La tendance à long terme de la log-volatilité ϑ passe, certes, de -2.94 à -3.39, mais les intervalles de confiance des estimations se chevauchent et on ne peut donc affirmer qu'il y a une réelle différence entre les deux valeurs. De même, la fréquence des sauts reste pratiquement inchangée. Enfin, et bien que la taille moyenne des sauts, représentée par le paramètre μ_J semble avoir augmenté, on ne peut rien en conclure étant donnée l'étendue de l'intervalle de confiance. Nous réitérons ici nos remarques concernant la modélisation des sauts par une loi normale. Les seuls changements notoires concernent les paramètres de variance du processus, c'est à dire γ_J et γ . Nous verrons plus bas que ces ajustements ont un impact important sur la forme de la surface de volatilité.

Auparavant, nous tenons à mettre en lumière un point intéressant qui découle directement de notre méthode d'estimation. Celle-ci nous permet d'associer à chaque instant la probabilité qu'une variation de volatilité provienne soit de la composante à sauts, soit de la diffusion. Si de plus nous choisissons d'allouer définitivement une variation à la composante à sauts dès que sa probabilité d'y appartenir est supérieure à 0.5, alors nous obtenons les graphiques représentés dans la figure 4.8. Plusieurs remarques peuvent être effectuées à partir de là. Tout d'abord, nous remarquons que chaque fois qu'il y a des variations de grande amplitude dans le niveau de



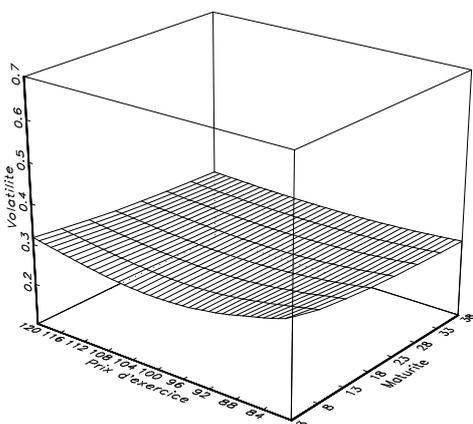
Le graphique du dessus représente l'évolution de la volatilité instantanée issue du modèle LOG-OUS. Le graphique du dessous associe à chaque observation la probabilité de provenir de la diffusion (valeur proche de 1) ou de la composante à sauts (valeur proche de 0).

FIG. 4.8 – Probabilité a posteriori qu'une observation soit issue d'un saut pour le modèle log-OUS.

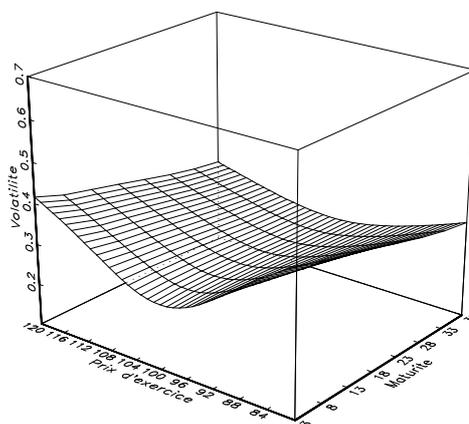
volatilité instantanée, l'observation est considérée comme provenant de la composante du processus générant des sauts. Nous en déduisons à nouveau que la composante à sauts parvient à capturer l'ensemble de ces fortes variations. Ensuite, nous constatons que les pics de volatilité sont formés par l'association d'un saut positif dans la volatilité (versant gauche du pic) auquel succède immédiatement un autre saut, négatif cette fois. Ceci peut expliquer en partie la fréquence élevée des sauts, puisqu'à chaque pic correspond deux sauts. Ce phénomène remet également en cause l'hypothèse de sauts distribués selon une loi de Poisson, puisque théoriquement les sauts devraient être indépendants. Ici, les sauts sont visiblement liés. Le fait que les sauts négatifs succèdent à des sauts positifs, et donc permettent un retour immédiat à un niveau de volatilité raisonnable explique également la forte décroissance de la valeur κ par rapport à un modèle sans sauts. En fait, κ , l'effet de retour à la moyenne, ne s'exerce plus sur les sauts positifs, toujours compensés par des sauts négatifs, mais uniquement sur les petites variations.

4.4.2 Surfaces de volatilité

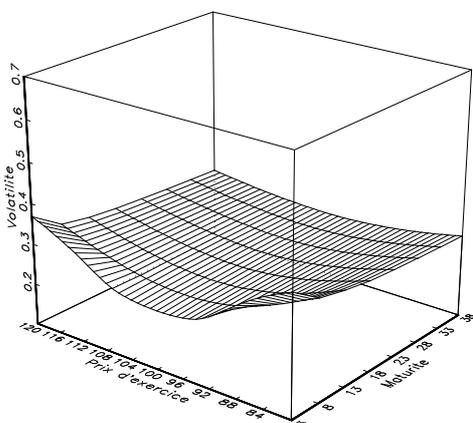
Nous examinons à présent l'impact des sauts et de la correction du biais de maturité sur l'évaluation du prix d'options. Nous effectuons ce travail à travers l'analyse des surfaces de volatilité correspondant à chacun des modèles et avec les paramètres issus des estimations. Ces surfaces de volatilité sont reportées dans la figure 4.9. Comparons d'abord les cas A et C qui résultent des modèles log-OU et log-OUS sans correction du biais de maturité. On peut immédiatement observer que la surface associée au modèle log-OU est quasiment plate, hormis pour les options très proches de l'échéance. Pour le modèle log-OUS, le smile est plus prononcé pour ces mêmes options, et on peut distinguer une légère courbure pour des échéances plus lointaines. Toutefois, les modèles log-OU et log-OUS, avec les paramètres estimés sans la correction du biais, présentent des surfaces de volatilité en faible adéquation avec ce qui est empiriquement observé. En revanche, la correction du biais de maturité a d'importantes répercussions sur l'allure générale des courbes (cas B et D). À ce stade, nous pouvons affirmer que ne pas tenir compte du biais de maturité a de graves incidences sur l'évaluation des options. Étant donnée que la variance estimée est extrêmement forte $\gamma^2 = 84.76$ dans le cas log-OU, il n'est pas étonnant de voir d'une part (cas B), un smile avec une importante profondeur pour des options proches de l'échéance, et d'autre part que ce smile s'atténue mais reste présent en augmentant la maturité des options. Malgré cette valeur élevée de γ , on peut voir, par exemple en projetant la surface sur le plan défini par le niveau de volatilité et la maturité, que le smile s'estompe de manière continue. On s'attend donc à ce qu'il disparaisse



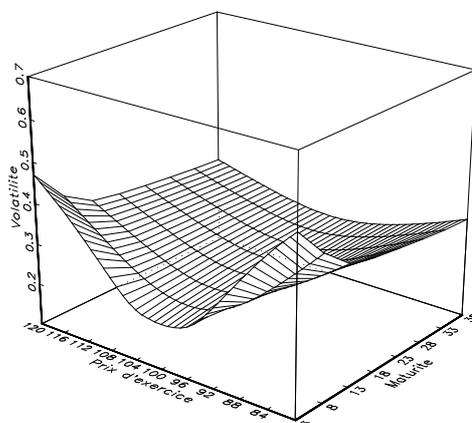
- Cas A : Modèle log-OU sans correction du biais de maturité.



- Cas B : Modèle log-OU avec correction du biais de maturité.



- Cas C : Modèle log-OUS sans correction du biais de maturité.



- Cas D : Modèle log-OUS avec correction du biais de maturité.

FIG. 4.9 – Surfaces de volatilité pour les modèles log-OU et log-OUS avec et sans correction du biais de maturité.

complètement dans un horizon assez proche. Ce résultat découle du fait que la vitesse à laquelle la profondeur du smile s'amenuise est directement liée à la valeur de κ . Or, dans le cas log-OU, la valeur de κ est élevée. À l'opposé, le modèle log-OUS (cas D) parvient à générer un smile dont la profondeur ne décroît pratiquement plus avec l'éloignement de la date d'expiration des options. De plus, il permet de générer un smile plus accentué pour des options proches de l'échéance que ne le fait le modèle log-OU, tout en préservant des valeurs de paramètres plus réalistes.

4.5 La compatibilité entre les sources de données

Nous souhaitons étudier ici trois autres points intéressants. Le premier vise à comparer nos résultats d'estimations à ceux que nous aurions obtenu en adoptant l'approche de Jacquier *et al.* (1994). En d'autres termes, nous nous proposons de voir si les résultats d'estimations provenant de l'utilisation de l'indice de volatilité et ceux déduits des rendements apportent des informations comparables, ou au moins compatibles. Cette étude va également nous permettre d'apporter des éléments alimentant la discussion sur la prime de risque associée à une volatilité stochastique. Le second point est dans le même ordre d'idée. Alors que notre méthode d'estimation repose uniquement sur les données de l'indice de volatilité (et de fait ne permet pas l'estimation du paramètre α_c , le terme déterministe du processus Brownien décrivant l'évolution du support), nous pouvons légitimement nous demander s'il est possible d'y ajouter l'autre source de données disponible c'est à dire les rendements. Ceci nous amènera directement à commenter la prime de risque associée à la présence d'un terme aléatoire dans l'évolution du support. Enfin, le dernier point consistera à donner quelques éléments de comparaison avec d'autres études.

4.5.1 Comparaison

Dans un premier temps, nous cherchons donc à comparer les résultats des deux méthodes d'estimation basées soit sur les rendements, soit sur l'indice de volatilité. Nous devons préciser que cette comparaison ne peut être effectuée que dans le cas du modèle LOG-OU. En effet, bien que nous ayons essayé d'étendre la méthode de Jacquier *et al.* (1994) au cas LOG-OUS, les performances de cet algorithme se sont révélées être peu convaincantes. Par exemple la convergence des lois a posteriori des paramètres n'est pas acquise

sur des chaînes de 10000 itérations, et ce même pour des échantillons simulés de 2000 observations avec deux composantes qui ont des caractéristiques bien différenciées. La difficulté provient du fait que les rendements, comme dans Jacquier *et al.* (1994), doivent servir à générer les volatilités instantanées inobservables, mais que ces dernières quantités doivent également être réutilisées pour générer d'autres variables inobservables à savoir l'allocation de chacune des volatilités à la composante de diffusion ou à la composante à sauts. Pour résumer, il y a une double structure latente et imbriquée qui émerge et qui explique grandement les faiblesses de l'algorithme.

Pourtant, on pourrait rétorquer qu'Eraker *et al.* (2003) et Raggi (2005) sont parvenus à estimer des modèles plus complexes, contenant des sauts dans les rendements et dans la volatilité. Il paraît donc surprenant de ne pas y arriver dans notre cas. Il nous semble que deux causes peuvent expliquer ce manque de résultat. Tout d'abord, dans l'étude de Raggi (2005) le modèle est exprimé de sorte que les sauts dans la volatilité et dans les rendements se produisent toujours de manière simultanée. Cette caractéristique lui permet de déduire la date des sauts directement à partir des rendements et non plus à partir des variables latentes formées par le vecteur de volatilité instantanée inobservable. Ainsi, il a certes $2N$ variables latentes à générer (N volatilités instantanées et N allocations) à partir de N rendements mais cette double structure latente n'est pas imbriquée. De fait en supprimant les sauts dans les rendements, nous supprimons la possibilité d'utiliser directement ces rendements pour estimer les dates d'apparition des sauts, et par conséquent, nous revenons à une double structure latente imbriquée. Néanmoins, l'étude d'Eraker *et al.* (2003) semble nous indiquer qu'il ne s'agit pas de la seule raison. Partant eux-aussi d'un modèle à la Cox-Ingersoll-Ross avec des sauts distribués selon une loi exponentielle dans la volatilité, ils envisagent les deux cas de figures ; des sauts corrélés ou indépendants des sauts dans les rendements. En d'autres mots, ils parviennent à estimer le modèle à partir des seuls rendements même lorsque les sauts sont indépendants. Nous en déduisons que c'est notre spécification du processus de volatilité qui pose problème. En effet, l'un des avantages du processus LOG-OU est de pouvoir générer des trajectoires moins lisses qu'un processus du type Cox-Ingersoll-Ross. Ici, cela joue en notre défaveur, car en admettant une spécification qui autorise de fortes variations de volatilité à partir de sa seule composante continue, nous rendons plus difficile le travail de détection des sauts. Aussi, nous ne pouvons donc, pour l'heure, que fournir des comparaisons portant sur le modèle LOG-OU.

La méthode d'estimation de Jacquier *et al.* (1994) a déjà été présentée en 2.2.1.1, aussi nous passons directement à l'interprétation des estimations qui résultent de son application. Afin de faciliter la comparaison entre ces

4.5. La compatibilité entre les sources de données

résultats, déduits des rendements, et présentés dans la première colonne du tableau 4.3, nous avons récapitulé les estimations inhérentes à notre méthodologie dans la seconde colonne de ce même tableau. Tout d'abord, la méthode de Jacquier *et al.* (1994), permet d'estimer le paramètre α_c , présent dans l'équation différentielle stochastique qui régit les variations du support. L'estimation trouvée signifie que le taux d'accroissement du support est de 12.45 % par an. On ne peut toutefois exclure que ce taux est statistiquement égal à 0. Ce résultat peut également être comparé à la moyenne des rendements sur la période étudiée et qui s'élève à 5.36 %.

TAB. 4.3 – Résultats d'estimations obtenus selon les différentes données utilisées.

<u>Nature des données utilisées :</u>			
	Rdts	Ind. de vol.	Ind. de vol. et rdts
α_c	0.1245 [-0.0555, 0.3025]	-	0.5645 [0.4455, 0.6802]
κ	7.645 [3.937, 11.75]	17.05 [13.99, 20.29]	17.05 [13.99, 20.29]
ϑ	-2.956 [-3.229, -2.691]	-3.923 [-6.539, -1.906]	-3.923 [-6.539, -1.906]
γ	2.301 [1.880, 2.743]	9.207 [7.391, 14.983]	9.207 [7.391, 14.983]
$\widehat{\sqrt{h_t}}$	0.2382 (0.07172)	0.2351 (0.1644)	0.2351 (0.1644)

Les termes entre crochets désignent les intervalles de confiance à 95 %. Les termes entre parenthèses représentent des écarts-types. L'expression $\widehat{\sqrt{h}}$ désigne la moyenne des volatilités instantanées (rappelons que h est en fait le processus de la variance).

Passons à présent à l'étude des paramètres κ et ϑ . Les valeurs obtenues à partir des rendements correspondent aux valeurs prises sous la mesure objective. Rappelons qu'à l'inverse, celles obtenues à partir de l'indice de volatilité sont prises sous la mesure risque-neutre. S'il y a différence entre les deux, ceci signifie l'existence d'une prime de risque associée à une volatilité stochastique. Ici, nous constatons effectivement que κ et ϑ diffèrent sensiblement selon les

deux mesures. Nous en déduisons que l'hypothèse d'une prime de risque nulle est invalide et que par conséquent, les seuls rendements ne peuvent fournir une appréciation correcte des paramètres sous la mesure risque-neutre. Toutefois, ayant à notre disposition les estimations sous les deux mesures, nous sommes théoriquement capable d'évaluer la valeur de la prime de risque associée à la présence d'une volatilité stochastique. En effet dans le chapitre 3 nous avons mis en évidence une relation explicite qui lie κ^Q , ϑ^Q (les paramètres sous la mesure risque neutre), κ , ϑ (les paramètres sous la mesure objective) et η_V la prime de risque. Plus précisément, nous avons montré que, sous la condition que les agents aient des préférences logarithmiques :

$$\begin{aligned}\kappa^Q &= \kappa + \eta_V, \\ \theta^Q &= \kappa\theta/(\kappa + \eta_V).\end{aligned}\tag{4.39}$$

En cherchant à déterminer la valeur de η_V , nous constatons immédiatement que le paramètre η_V est suridentifié, et qu'ici, avec les valeurs estimées, le système (4.39) n'a pas de solution. On peut évidemment chercher à trouver une valeur de η_V qui satisfait approximativement ce système tout en conservant des valeurs de κ^Q , ϑ^Q , κ et θ dans leurs intervalles de confiance. Néanmoins, il nous semble que de toute évidence la spécification adoptée pour la prime de risque associée est inadéquate. Ce qui découle de ce constat est donc la remise en cause de l'hypothèse des préférences logarithmiques des agents en ce qui concerne cette prime de risque. À terme, il faudrait parvenir à une forme plus souple de la prime de risque, comme cela a été fait par Chernov et Ghysels (2000) dans le cadre d'un modèle Cox-Ingersoll-Ross. Cela entraînerait également la recherche d'une hypothèse adéquate sur les préférences des agents.

Un autre élément qui remet en cause la procédure de risque-neutralisation menée dans le chapitre 3 est la valeur de γ sous les deux mesures. Théoriquement, pour que la risque-neutralisation préserve la structure du modèle, tous les paramètres de variance des processus qui composent le modèle doivent être inchangés. Cette caractéristique découle directement de l'application du théorème de Girsanov et c'est un résultat constant quel que soit le type de modèle étudié (modèle à volatilité stochastique, modèles à sauts, modèles combinant sauts et volatilité). Concrètement, cela signifie que ni γ , ni même h_t la volatilité instantanée (ou σ_t selon que nous adoptons l'écriture du modèle sous sa version discrète ou continue) ne devrait changer. Or, il apparaît clairement que ces deux quantités diffèrent fortement selon le monde dans lequel on se place. Ainsi, la valeur de γ fait plus que quadrupler en passant du processus générateur de données au processus risque-neutre et la différence est statistiquement validée (les intervalles de confiance ne se recoupant pas).

4.5. La compatibilité entre les sources de données

Cette hausse de γ implique également que le processus de volatilité instantanée h , déduit de l'indice de volatilité, est plus "versatile" que ne l'est celui issu des rendements. Ceci peut également être vu à travers les écarts-types des deux séries estimées de la volatilité instantanée (0.07112 lorsque les rendements sont utilisés pour l'estimation et 0.1644 dans l'autre cas) et surtout à travers le graphique 4.10 où l'on aperçoit de manière très claire les différences. De façon très nette, les volatilités instantanées issues de l'indice surpassent largement celles issues des rendements dans les périodes troublées. En revanche, elles sont systématiquement plus basses pour les périodes calmes. Il faut toutefois noter certaines similitudes. Par exemple, l'allure générale des deux courbes est similaire et les moyennes des deux volatilités sont proches (voir le tableau 4.3).

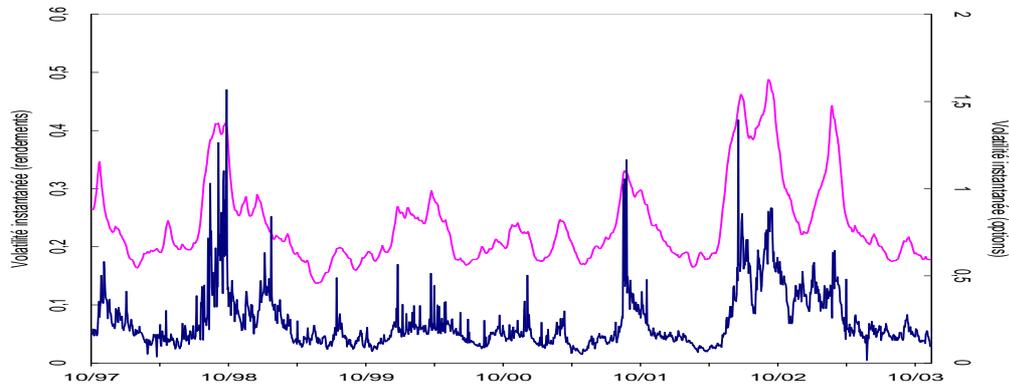


FIG. 4.10 – Comparaison entre la volatilité instantanée estimée par les rendements et la volatilité instantanée estimée par l'indice de volatilité (tracé clair).

Ces résultats, concernant la différence des paramètres de variance h_t et γ selon la mesure objective et la mesure risque-neutre, ne constituent pas une découverte originale et propre à notre modèle, notre méthode d'estimation ou encore notre échantillon. Ils ont déjà été constatés par Bakshi *et al.* (1997), Bates (2000), Pan (2002) ou encore Eraker (2004). Les principales explications évoquées sont :

- une spécification du modèle insuffisamment riche pour pouvoir prendre en compte correctement l'ensemble des phénomènes régissant la loi du support. Ceci contraint les paramètres à synthétiser de manière inexacte l'information disponible dans les différentes sources de données. De fait, cela peut conduire à des valeurs de paramètres peu plausibles.
- Un trop faible nombre d'observations pour pouvoir constater la conver-

gence entre les deux sources de données,

- enfin, une remise en cause de la fiabilité de la méthode d'estimation à partir des seuls rendements. Le fait d'avoir des variables latentes à estimer contribuerait à affaiblir la précision de l'estimation.

Le dernier argument dépend essentiellement de la méthode d'estimation employée pour déduire le vecteur des volatilités instantanées. Comme l'ont souligné Jacquier *et al.* (1994), Broto et Ruiz (2002) ou encore Eraker (2004), l'approche bayésienne permet d'éviter cet écueil en fournissant des estimations plutôt précises, contrairement aux méthodes fondées sur le maximum de vraisemblance et sur les méthodes de moments.

La question qui se pose à présent est, puisque les deux sources de données donnent des résultats différents, laquelle faut-il privilégier dans le but d'évaluer des options ? Étant données à la fois la supériorité du contenu informationnel de l'indice de volatilité, et la capacité que l'on a d'en déduire des paramètres risque-neutres, indépendants de la spécification de la prime de risque, nous avons naturellement tendance à favoriser notre méthode d'estimation par rapport à celle de Jacquier *et al.* (1994) fondée uniquement sur les rendements. Toutefois, Eraker (2004) montre qu'une combinaison des deux peut donner de meilleurs résultats, en termes d'adéquation de la surface de volatilité issue du modèle par rapport à celle observée, que l'utilisation exclusive d'une seule source. Dans la pratique, la combinaison évoquée par Eraker (2004), consiste simplement à voir si, par exemple, remplacer ϑ^Q par ϑ et garder tous les autres paramètres sous leur version risque-neutre, conduit à un rapprochement entre les surfaces de volatilité théorique et empirique.

4.5.2 Incorporation des rendements

Comme nous l'avons déjà souligné, notre méthode d'estimation permet 1) d'estimer les paramètres risque-neutres du processus de volatilité instantanée et 2) de générer les volatilités instantanées elles-mêmes. Par contre, elle ne permet pas d'estimer le paramètre α_c , présent dans le processus concernant spécifiquement l'évolution du support :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha_c dt + \sigma_t dB_t, \quad (4.40)$$

où σ_t est décrit par un processus LOG-OU. Dans sa version discrétisée, 4.40 signifie que la distribution des rendements y_t , sachant la volatilité instantanée inobservable, est une loi normale :

$$\frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} = y_t | h_t \sim \mathcal{N}(\alpha_c \Delta, h_t \Delta), \quad (4.41)$$

où Δ désigne le pas de discrétisation et $h_t\Delta$ la variance.

L'idée qui consisterait à combiner rendements et indice de volatilité semblerait donc attrayante pour estimer α_c . En effet, il suffirait d'injecter dans (4.41) les volatilités instantanées h_t estimées grâce à l'indice de volatilité pour pouvoir déduire, à partir des rendements observés, une estimation pour α_c . On peut rétorquer qu'il y a ici, une incompatibilité d'informations puisque la volatilité instantanée est déduite d'un monde risque-neutre alors que les rendements sont observés sous la mesure objective. Cet argument n'est toutefois pas valable d'un point de vue théorique. En effet, une risque-neutralisation standard implique certes, des changements de paramètres dans le processus de volatilité et la transformation de (4.40) en :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma_t dB_t + \eta_S \sigma_t dt, \quad (4.42)$$

où $\eta_S = (\alpha_c - r)/\sigma_t$ désigne la prime de risque associé au caractère aléatoire de l'évolution du support, mais laisse la volatilité instantanée σ_t (et donc h_t dans la version discrète) inchangée.

Concrètement, la section qui précède a montré qu'il existait de fortes disparités entre les volatilités instantanées selon que celles-ci soient estimées à partir des rendements ou de l'indice de volatilité. On s'attend donc à ce que l'estimation de α_c diffère, elle aussi. Au delà de la valeur estimée que l'on pourra trouver, c'est surtout sa répercussion au niveau de la prime de risque qu'il sera intéressant d'étudier. Nous pourrions ainsi voir si l'aversion des agents face au risque, telle qu'elle peut être déduite à partir du marché des actions, est identique à celle déduite du marché des options. Mais avant de pouvoir fournir cette estimation, il nous faut évidemment compléter notre méthode d'estimation en incorporant les rendements. Comme les rendements ne servent qu'à estimer le paramètre α_c , ceux-ci n'interfèrent ni dans l'estimation des paramètres de volatilité, ni dans la volatilité instantanée. Aussi, la méthode d'estimation des paramètres et de la volatilité instantanée décrite précédemment demeure en l'état. Ajouter les rendements se résume donc simplement à déterminer la loi a posteriori du paramètre α_c . En lui associant une loi a priori normale d'hyperparamètres a_α et b_α , notre algorithme ne subit que des modifications mineures, c'est à dire, l'ajout du calcul des deux statistiques suivantes dans l'étape 1 :

$$\bar{y}_0 = \sum_{t=1}^N \frac{\Delta}{h_t}, \quad \bar{y}_1 = \sum_{t=1}^N \frac{y_t}{h_t},$$

et l'ajout, dans l'étape 2, de la loi a posteriori conditionnelle pour α_c :

$$\alpha_c \sim \mathcal{N}(E_\alpha, V_\alpha),$$

avec :

$$E_\alpha = \frac{1}{V_\alpha}(\bar{y}_1 + a_\alpha/b_\alpha),$$

et

$$V_\alpha = \frac{1}{\bar{y}_2 + 1/b_\alpha}.$$

Nous obtenons ainsi une valeur estimée pour α_c égale à 56.45 % (voir la troisième colonne du tableau 4.3). Cette valeur est statistiquement différente de 0 ainsi que de la valeur déduite des rendements (12.45 %). Rappelons que la moyenne des rendements annualisée vaut 5.36 %, c'est à dire 10 fois plus faible que celle que nous venons de déduire. Elle indique un taux d'accroissement annuel du support très grand et qui peut nous paraître complètement irréaliste. En effet, pour un taux sans risque annuel de 3.60 %, une telle valeur de α_c suggère que les agents ont exigé et bénéficié d'une prime équivalente à une hausse de $56.45 - 3.60 = 52.85$ % du support juste pour rémunérer leur prise de risque.¹⁷ À titre de comparaison, pour le même taux sans risque, l'estimation de α_c déduite des seuls rendements établirait cette prime à $12.45 - 3.60 = 8.85$ % qui paraît plus raisonnable (surtout qu'on ne peut rejeter, étant donné l'intervalle de confiance pour α_c l'hypothèse d'une prime de risque nulle). Plusieurs questions se posent, en particulier comment interpréter et justifier une telle valeur ?

Un premier élément de réponse peut être trouvé dans la nature même des données employées. Lorsque nous n'utilisons que les rendements, il est clair que la prime de risque ainsi évaluée correspond à la rémunération qu'exige les agents sur le marché des actions. Cette prime reflète leur aversion au risque pris pour un placement direct sur le support et doit être associée directement avec le mouvement Brownien dB_t . L'estimation à partir des rendements permet donc de dire que cette aversion existe mais qu'elle est plutôt modérée. En revanche, lorsqu'on utilise des données sur options (l'indice de volatilité) conjointement aux rendements, la prime de risque qui en résulte comporte nécessairement une information sur l'aversion qu'ont les agents à se placer sur le marché des produits dérivés. Or ce marché d'options, qui peut certes être vu comme un endroit où trouver des instruments de couverture, est également réputé pour sa "dangerosité" (due à l'effet de levier, aux fourchettes de prix larges, parfois au manque de liquidité). Par conséquent, il semble

¹⁷Nous avons supposé que le taux d'intérêt sans risque était constant sur la période. En fait, 3.60 % correspond à la moyenne des taux quotidiens de l'EURIBOR 1 an sur la période allant de janvier 1999 à novembre 2003 et la moyenne des taux quotidiens du PIBOR 1 an sur la période octobre 1997 à décembre 1998.

naturel que lorsqu'ils interviennent sur ce marché, les agents demandent une rémunération plus importante pour compenser le risque pris. Dès lors, il n'est plus étonnant d'avoir une valeur de α_c élevée si, dans celle-ci, transparait le comportement des agents sur le marché des options.

Une seconde explication peut également être fournie si nous considérons comme légitime l'hypothèse selon laquelle l'indice de volatilité véhicule de l'information sur les attitudes des agents face au risque. Dans ce cas, la prime de risque associée au caractère aléatoire de l'évolution du support, c'est à dire l'écart entre α_c et r , synthétise l'ensemble des primes de risque qui n'ont pas été explicitement prises en compte dans la modélisation et qui ont pourtant servi à déterminer le prix des options. Bref, en utilisant des données d'options $\alpha_c - r$ ne représente plus seulement le risque associé à la présence du mouvement Brownien dB_t mais concentre l'ensemble des risques qui ne peuvent être évalués faute d'une spécification assez riche. Ainsi, dans le cadre du modèle LOG-OU, $\alpha_c - r$ doit prendre en compte la globalité des primes de risque en dehors de celle associée à une volatilité stochastique. De même, dans le cadre LOG-OUS, $\alpha_c - r$ va donc représenter l'ensemble des primes de risque, exceptées celles associées à une volatilité stochastique et à la présence de sauts dans la volatilité. On s'attend donc à ce que l'écart entre $\alpha - c$ et r s'amoinsse dans ce cas. C'est effectivement ce qui se produit puisqu'on trouve alors $\alpha_c = 0.4831$ (l'intervalle de confiance à 95 % étant $[0.3445, 0.6167]$). À la lumière de ce résultat, il nous paraît clair qu'il manque (au moins) un terme dans la modélisation du support qui permettrait d'absorber une partie importante de l'écart entre α_c et r et qui représenterait un événement pour lequel les agents ont une très forte aversion. La prise en compte d'une telle composante impliquerait une baisse substantielle de la prime de risque associée au mouvement Brownien. En cherchant les types d'événements que redoutent les agents, nous pensons naturellement aux crashes, modélisés par une composante à sauts dans le processus du support. Cette idée est directement inspirée de l'étude de Pan (2002), où l'auteur souligne une très forte aversion des agents envers les sauts, et donc une prime de risque associée à ces sauts relativement importante et de l'ordre de 18 %. Comme le marché et la période étudiés par Pan (2002) diffèrent des nôtres, il nous est difficile d'incorporer directement ce résultat, mais cela donne toutefois une idée de l'importance du risque associé aux sauts dans les rendements.

À la lumière de ces explications, il nous semble que l'écart entre α_c et r n'est plus si irréaliste. Elle tendrait plutôt à nous encourager à poursuivre nos efforts selon deux axes. D'une part, continuer à utiliser des données provenant du marché des options, comme l'indice de volatilité, afin de tirer au mieux l'information qu'elles comportent sur l'attitude des agents face au risque. Ce travail implique, d'autre part, de poursuivre l'enrichissement de

la spécification initial du modèle, par exemple en incorporant des sauts dans les rendements ou en adoptant des spécifications plus souples pour les primes de risque, afin de mesurer plus rigoureusement la prime affectée à un risque précis.

4.5.3 Conformité des résultats

Le dernier point que nous souhaitons étudier est la conformité de nos estimations avec la littérature existante. Nous nous restreignons pour le moment aux modèles à volatilité stochastique sans sauts. La tâche s'avère difficile car les modèles (LOG-OU ou Cox-Ingersoll-Ross), les méthodes d'estimations (méthodes fondées sur les moments, sur la vraisemblance, sur les moindres carrés, ou démarche bayésienne), la fréquence des observations (mensuelles, hebdomadaires, quotidiennes), la nature des données (rendements ou options) ou encore les échantillons employés (marché américain ou français, période) diffèrent d'une étude à l'autre. Par ailleurs certains auteurs donnent des valeurs estimées sur une base annualisée, d'autres sur une base hebdomadaire et d'autres encore sur une base quotidienne. Il nous faut donc pouvoir donner des éléments de comparaison. Tout d'abord, nous avons converti à chaque fois que cela était nécessaire, les résultats donnés par les auteurs en valeur annualisée. Cette étape ne pose pas de difficultés particulières. En fait, les auteurs effectuent souvent eux-mêmes cette conversion dans le corps de leur article. Cette étape accomplie, il reste à élucider un problème plus grave, qui consiste à comparer les paramètres d'un modèle à la Cox-Ingersoll-Ross où la volatilité est régie selon :

$$d\sigma_t^2 = \kappa(\vartheta - \sigma_t^2)dt + \gamma\sigma_t dW_t, \quad (4.43)$$

aux paramètres d'un modèle LOG-OU :

$$d\ln(\sigma_t^2) = \kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^2)]dt + \gamma dW_t. \quad (4.44)$$

D'abord, dans les deux modèles, le paramètre κ a la même signification et représente la vitesse d'ajustement au niveau de long-terme de la volatilité. Par conséquent, il peut être comparé sans subir aucune transformation. Les paramètres ϑ et γ ne bénéficient pas de cette caractéristique. En revanche, on peut déduire à partir d'une estimation de ϑ , la tendance à long-terme de la volatilité noté $\bar{\sigma}$. Dans le cadre d'un modèle du type Cox-Ingersoll-Ross, il suffit de constater que $\bar{\sigma} = \sqrt{\vartheta}$, alors que pour un modèle LOG-OU $\bar{\sigma} = \sqrt{\exp[\vartheta + \gamma^2/(4\kappa)]}$.

Nous récapitulons dans le tableau 4.4 les principales caractéristiques des études antérieures. On peut constater une certaine hétérogénéité des valeurs

TAB. 4.4 – Résultats d'estimations obtenus par d'autres auteurs.

	κ	$\bar{\sigma}$	Données	Méthode	Modèle	Marché	Période
Jacquier <i>et al.</i> (1994)	2.60	0.1666	–	B	LOG-OU	NYSE	1962 :1991
Bakshi <i>et al.</i> (1997)	1.15	0.2000	+	C	CIR	S&P 500	1988 :1991
Moraux <i>et al.</i> (1999)	5.41	0.2515	+	V	CIR	CAC 40	1994 :1998
Chernov et Ghysels (2000)	0.69	0.0812	+	M	CIR	S&P 500	1985 :1993
Pan (2002)	7.10	0.1170	+	M	CIR	S&P 500	1989 :1996
Chacko et Viceira (2003)	14.28	0.1816	–	M	CIR	S&P 500	1980 :2000
Eraker <i>et al.</i> (2003)	5.82	0.1510	–	B	CIR	S&P 500	1980 :1999
Eraker (2004)	4.78	0.2205	+	B	CIR	S&P 500	1986 :1991

Les paramètres κ et $\bar{\sigma}$ ont été convertis, lorsque cela était nécessaire, en base annuelle. La colonne intitulée "Données" permet de savoir si des options ont été utilisées (+), ou non (–), et indique donc si les paramètres κ et $\bar{\sigma}$ sont donnés sous la mesure risque-neutre ou objective. La valeur $\bar{\sigma}$ représente le niveau de long-terme de la volatilité. La colonne Méthode permet de connaître l'idée générale de la méthode d'estimation employée, M désigne une méthode fondée sur les moments, V une méthode fondée sur le maximum de vraisemblance, B une méthode Bayésienne et C une méthode reposant sur des moindres carrés. La colonne Modèle indique le type de modèle estimé, CIR désignant le modèle Cox-Ingersoll-Ross. La colonne Marché indique l'indice sur lequel porte l'estimation, le NYSE (New York Stock Exchange) et le S&P 500 (Standard & Poor's 500) proviennent du marché américain.

de κ et $\bar{\sigma}$, mais sans rentrer dans les détails, on remarque surtout que les valeurs obtenues sont, grosso modo, toujours de la même grandeur. Aussi, les valeurs que nous avons obtenues pour κ (17.05) et pour $\bar{\sigma}$ (0.2618), sont certes supérieures à l'ensemble des autres résultats mais semblent toutefois cohérentes.

La conformité des résultats trouvés à partir du modèle LOG-OUS avec d'autres études s'avère quant à elle impossible à vérifier. Il n'en existe pas, en effet, portant sur ce type de modèle. Les seules qui pourraient éventuellement servir de références sont celles qui présentent des modèles comportant des sauts dans la volatilité et dans les rendements. Il s'agit par exemple des études d'Eraker *et al.* (2003), Eraker (2004) ou Raggi (2005). Ces modèles diffèrent du nôtre non seulement par le fait qu'ils admettent des sauts dans les rendements, mais également par la spécification des sauts dans la volatilité. Alors que notre modélisation permet à la volatilité de connaître des sauts à la hausse comme à la baisse, ces modèles ne considèrent que des sauts à la hausse. D'autre part lorsque les sauts dans la volatilité et dans les rendements interviennent de manière indépendante, certaines fortes variations du support peuvent être pris en compte par la composante à sauts dans les rendements et donc affaiblir l'intensité des sauts dans la volatilité. Pour ses raisons, on s'attend donc à ce que la fréquence des sauts estimée à partir de notre modèle soit supérieure à l'intensité estimée par ces auteurs. C'est effectivement le cas puisque les études précitées aboutissent à une intensité qui varie entre 1 saut tous les deux ans (Eraker *et al.*, 2003 et Eraker, 2004) et 15 sauts par an (Raggi, 2005). La différence est telle que les arguments évoqués à l'instant ne peuvent suffire à l'expliquer totalement. D'autres facteurs sont alors susceptibles d'être avancés comme le fait que nous n'étudions ni les mêmes marchés, ni les mêmes périodes. Ainsi, les auteurs qui trouvent une fréquence très basse incluent dans leurs données le crash de 1987. L'ampleur de ce phénomène a été telle qu'elle prend une part prépondérante dans l'estimation des paramètres des composantes à sauts. Il devient alors difficile de trouver d'autres observations partageant les mêmes caractéristiques.

4.6 Conclusion et extensions

Le but de ce chapitre a été de fournir une méthode d'estimation pour un modèle du type log-OUS. La procédure que nous avons employée repose sur l'utilisation d'un indice de volatilité implicite qui permet d'estimer directement la valeur des paramètres risque-neutres. Nous avons pour cela établi un lien explicite entre l'indice de volatilité, observable, et la volatilité instantanée, inobservable. Nous avons montré que cette relation entre les deux quanti-

tés dépendait, entre autres, de la maturité de l'option utilisée pour construire l'indice. Lorsque cette maturité est supposée proche de 0, nous avons indiqué que l'indice de volatilité et la volatilité instantanée étaient équivalentes. En revanche, si cette hypothèse s'avérait être infondée, cela pouvait alors nous mener vers un biais de maturité dans les estimations. Nous nous sommes donc proposé de vérifier la validité de cette hypothèse en construisant deux échantillonnages de Gibbs différents, l'un sans et l'autre avec la correction du biais de maturité. Les résultats montrent très clairement l'existence et l'importance du biais de maturité. Ils révèlent par conséquent qu'il faut privilégier la méthode d'estimation permettant de le corriger. Celle-ci s'avère être très rapide, puisqu'elle ne nécessite que quelques secondes pour obtenir les estimations.

Parallèlement à la résolution de ce problème d'ordre économétrique, nous avons cherché à comparer les résultats d'estimations issus des modèles log-OU et log-OUS. Conformément aux critiques émises dans les études de Das et Sundaram (1999) et Jiang (1999), nous avons constaté que le modèle log-OU ne s'ajustait aux données qu'en affectant aux paramètres des valeurs peu plausibles. Au contraire, le modèle comportant des sauts dans la volatilité nous a permis de mieux comprendre la diversité des phénomènes régissant le processus de volatilité. Cette étude confirme empiriquement la capacité théorique du modèle log-OUS à générer des caractéristiques souhaitables sur les surfaces de volatilité, à savoir, un smile prononcé pour les options proches de l'échéance, et un smile qui perdure en augmentant la maturité des options.

Évidemment, nous ne prétendons pas que ce modèle à sauts parvient à prendre en compte l'ensemble des phénomènes agissant sur la volatilité. De même, la surface de volatilité générée par ce modèle présente encore de nombreuses insuffisances. Ainsi, les deux principales limitations de notre étude concernent l'absence de corrélation entre la volatilité et les rendements, et l'absence d'estimation pour la prime de risque associée à une volatilité stochastique. Cette dernière limitation ne pourra être franchie qu'avec le développement des procédures de risque-neutralisation. Même si cette absence de résultats n'a pas de conséquences pour l'évaluation des options, la prime de risque possède un fort contenu économique qu'il serait intéressant d'étudier, Pan (2002) en fournit un exemple. La seconde limitation concerne l'hypothèse d'absence de corrélation entre la volatilité instantanée et le sous-jacent. Sur notre échantillon, nous obtenons une corrélation, entre l'indice de volatilité implicite et le CAC 40, très faible et égale à 0.0279. Cela justifie a posteriori notre choix de ne pas en tenir compte. Cette hypothèse reste, en général, difficilement défendable d'un point de vue empirique et en particulier pour les indices boursiers (voir par exemple Ghysels *et al.*, 1996). Nous avons émis l'hypothèse de corrélation nulle car elle nous a permis d'utiliser le résultat

de Hull et White (1987) puis d'interpréter la volatilité implicite comme une moyenne de la volatilité instantanée. En réalité et comme nous l'avons déjà souligné dans le chapitre 3, cette hypothèse peut être relâchée assez facilement, du moins dans le cas log-OU, tout en préservant les résultats essentiels. En effet, Romano et Touzi (1997) ont montré qu'en effectuant une reparamétrisation du modèle qui tient compte d'une corrélation non-nulle, interpréter la volatilité implicite comme moyenne de la volatilité instantanée reste valide. Nous pouvons donc envisager, à l'instar de Moraux *et al.* (1999) d'étendre notre méthode d'estimation au cas où il y a corrélation entre la volatilité et le sous-jacent. Pour le modèle log-OUS, l'extension nécessite de plus amples investigations.

À terme, plusieurs autres extensions à cette étude mériteraient d'être développées. La première concerne la spécification de la composante à sauts. Ainsi, nous ne nous satisfaisons pas de l'imprécision dans nos estimations d'un paramètre de première importance : la taille moyenne des sauts. Nous pensons qu'une spécification plus riche, en termes de souplesse statistique mais aussi et surtout en termes de compréhension de la dynamique de la volatilité, nous permettrait de résoudre ce problème. Plus précisément, distinguer les sauts selon leurs signes devrait contribuer à résoudre ce problème. D'un point de vue économétrique, et en supposant que les sauts positifs et négatifs soient séparément distribués selon une loi Gaussienne, ceci reviendrait à l'estimation d'un mélange à trois composantes, ce qui reste parfaitement envisageable. Une seconde idée consisterait à faire dépendre l'intensité du (ou des) processus de Poisson du niveau de volatilité passée. Cela nous permettrait de relâcher l'hypothèse d'indépendance des sauts qui visiblement n'est pas vérifiée (présence de pics dans la volatilité signifiant qu'un saut à la hausse est compensé dès le lendemain par un saut à la baisse). Ces améliorations dans la spécification de la composante à sauts ont déjà été effectuées par Chacko et Viceira (2003), concernant la distinction des sauts, et par Bates (2000), Andersen *et al.* (2002) ou Eraker (2004), entre autres, concernant l'intensité du processus de Poisson. Une troisième extension consisterait à effectuer des tests statistiques visant à choisir, sur des critères plus objectifs, le modèle qui est le plus en adéquation avec les données. Nous nous sommes, en effet, limités à une comparaison entre les modèles, basée sur une discussion de la capacité de chacun d'eux à prendre en compte des phénomènes empiriquement constatés et ayant des répercussions fortes sur l'évaluation des options. Disposer d'un test serait certainement plus pertinent. L'adoption de la démarche Bayésienne nous conduit naturellement vers le *facteur de Bayes*, voir Kass et Raftery (1995). La détermination effective de cette quantité nécessite le calcul du rapport des vraisemblances marginales associées à chacun des deux modèles à comparer, où la vraisemblance marginale d'un modèle

est l'intégrale, par rapport aux paramètres, du produit de la vraisemblance et de la loi a priori. Chib (1995) a mis au point une technique numérique qui permet d'utiliser les tirages de loi a posteriori pour calculer ce facteur de Bayes. Berkhof *et al.* (2003) en fournissent une application récente pour des modèles de mélange. Un autre critère envisageable pour comparer les modèles de mélanges est celui de Mengersen et Robert (1996), fondé sur la distance de Kullback-Leibler. Par contre, le *Deviance Information Criterion* développé par Spiegelhalter *et al.* (2002), qui connaît un certain succès dans le contexte Bayésien de la sélection de modèles, semble présenter quelques lacunes dans le cas des mélanges comme l'indiquent Celeux *et al.* (2003). Nous laissons de côté, pour l'heure, ces travaux sur la comparaison des modèles.

Conformément au plan que nous avons annoncé dès le chapitre 3, nous allons nous concentrer dans le chapitre qui suit sur des modèles comportant des sauts dans le sous-jacent et sa volatilité. Nous allons voir 1) comment les sauts dans le sous-jacent peuvent améliorer les modèles à sauts dans la volatilité décrits jusqu'ici, et 2) comment l'indice de volatilité peut être utilisé pour estimer les paramètres de tels modèles.

Chapitre 5

Sauts dans les rendements et dans la volatilité

5.1 Introduction

Dans les deux chapitres précédents nous nous sommes proposé d'étudier des modèles comportant des sauts uniquement dans la volatilité. Le but était de cerner les améliorations qui sont directement imputables à la présence de sauts dans la volatilité. Ces avancées peuvent être résumées ainsi : d'un point de vue statistique, les sauts dans la volatilité permettent de prendre en compte l'existence de périodes troublées dans l'évolution du sous-jacent ; d'un point de vue financier, ils permettent l'émergence d'un effet smile pour les options à maturité longue. Toutefois, nous avons également souligné que ce type de modèle ne peut ni générer des distributions asymétriques, ni générer des surfaces de volatilité asymétrique. Or, ces deux faits empiriques ont largement nourri la littérature financière.

Il y a trois façons d'introduire ces phénomènes d'asymétrie. La première consiste à introduire explicitement une composante à sauts dans l'évolution du support. La seconde façon consiste à incorporer une corrélation entre les variations de volatilité et les variations du support. Enfin, la troisième résulte de la combinaison des deux premières et apparaît ainsi comme la plus complète des trois. Nous nous limitons ici à l'introduction des sauts dans les rendements, laissant de côté le paramètre de corrélation. Ceci est fait uniquement dans le but de faciliter nos calculs.

Notre objectif dans cette étude est donc de proposer un modèle à sauts dans les rendements et dans la volatilité, les sauts intervenant de manière indépendante dans les deux processus. Par ailleurs, nous cherchons également à construire une procédure d'estimation des paramètres d'un tel modèle.

Dans la première section nous détaillerons les caractéristiques de notre modèle. Nous verrons que la différence essentielle qui le distingue des études présentes dans la littérature est la possibilité d'avoir des sauts de volatilité négatifs. Nous discuterons ensuite la transformation du processus générateur de données en processus risque-neutre. Cela nous conduira en particulier à émettre un certain nombre d'hypothèses sur les préférences des agents face aux différents risques encourus. Nous poursuivrons notre travail en donnant une formule d'évaluation d'options de type européen qui nous permettra d'illustrer les performances de notre modèle à travers l'étude de surfaces de volatilité.

Dans la deuxième section, nous reviendrons sur les méthodes d'estimation existantes pour les modèles à sauts dans les rendements et dans la volatilité. Nous mettrons en place une méthode d'estimation Bayésienne des paramètres du processus risque-neutre. Celle-ci reposera sur deux types de données, un indice de volatilité et les rendements du sous-jacent. Nous montrerons comment on peut relier l'indice de volatilité à la volatilité instantanée. Nous verrons que la relation entre ces deux quantités n'est plus linéaire comme cela était le cas dans le chapitre 4.

Dans la troisième section, nous appliquerons notre méthode à des données simulées. Nous chercherons à déterminer ainsi les performances de notre algorithme. Ce travail s'effectuera notamment en analysant la capacité de notre méthode d'estimation à détecter les sauts. Nous conclurons ce chapitre en exposant les développements à accomplir afin de pouvoir estimer notre modèle avec des données réelles.

5.2 Le modèle

Cette section est consacrée à l'exposition d'un modèle comportant 1) des sauts dans les rendements, 2) une volatilité stochastique et 3) des sauts dans le processus de volatilité. Nous commençons par présenter le modèle sous la mesure objective, et nous le comparons aux modèles déjà existants. Nous discutons ensuite de sa neutralisation face aux différentes sources de risques qu'engendre la présence de ces trois éléments. Disposant de la version risque-neutre du processus, nous pouvons établir le prix d'une option. Son évaluation concrète nécessite l'utilisation d'une méthode de Monte Carlo. Enfin, nous illustrons les capacités de notre modèle à générer des surfaces de volatilité très souples.

5.2.1 Présentation

Le modèle que nous proposons s'écrit sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\frac{dS_t}{S_t} &= [\alpha_c - \lambda_Z E(Z_t)]dt + \sigma_t dB_t + Z_t dM_t, \\ d\ln(\sigma_t^2) &= \kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^2)]dt + \gamma dW_t + J_t dN_t.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Nous supposons par ailleurs qu'il n'y a pas de corrélation entre les deux mouvements Browniens, $E(dB_t dW_t) = 0$. Cette hypothèse, acceptable dans le cadre d'une modélisation de taux d'intérêt ou de taux de change, est en revanche contestable lorsque le support est un indice ou une action. Nous l'imposons pour simplifier nos calculs, mais nous discuterons son relâchement dans la conclusion.

Les sauts sont représentés par les composantes dM_t et dN_t . Ces deux quantités sont des processus de Poisson supposés indépendants et dont les intensités respectives, λ_Z et λ_J , sont également supposées être constantes dans le temps. Le terme $-\lambda_Z E(Z_t)$ permet de compenser le processus de Poisson dM_t et ainsi de s'assurer que l'évolution du support dS_t/S_t est une martingale (voir page 63). Les tailles des sauts dans le support et dans la volatilité sont représentées par les termes Z_t et J_t . Nous effectuons les hypothèses suivantes sur la distribution de ces sauts :

$$\ln(1 + Z_t) \sim \mathcal{N}(\alpha_Z, \sigma_Z^2),$$

et

$$J_t \sim \mathcal{N}(\mu_J, \gamma_J^2).$$

De nombreux cas particuliers découlent de ce modèle que nous appellerons désormais SRSVI (sauts dans les rendements et sauts dans la volatilité indépendants). Lorsqu'il n'y a pas de sauts, c'est à dire, $\lambda_Z = \lambda_J = 0$ et que la volatilité est constante, $d\ln(\sigma_t^2) = \vartheta dt$, nous retrouvons le modèle utilisé par Black et Scholes (1973). En relâchant la contrainte d'une volatilité constante, et en maintenant l'hypothèse d'absence de sauts, nous obtenons le modèle à volatilité stochastique standard du type Hull et White (1987). À l'inverse, si $\lambda_J = 0$, $\lambda_Z > 0$ et que la volatilité est supposée constante, nous faisons émerger le modèle de Merton (1976). Maintenant, si l'on admet qu'il y a des sauts uniquement dans la volatilité, c'est à dire $\lambda_Z = 0$ et $\lambda_J > 0$, nous aboutissons aux modèles à sauts dans la volatilité des deux chapitres précédents. Enfin, lorsque $\lambda_J = 0$ et $\lambda_Z > 0$ nous aboutissons à un modèle dont la forme est similaire à celle proposée initialement par Bates (1996) et

correspond exactement à celle proposée par Andersen *et al.* (2002).¹

Il est évidemment intéressant de situer le modèle *SRSVI* que nous proposons par rapport aux autres modèles à sauts dans les rendements et dans la volatilité. La littérature est, pour l'heure, encore assez réduite mais connaît un développement certain. Une liste à notre connaissance exhaustive de ces études est constituée par : Duffie *et al.* (2000), Bakshi et Cao (2002), Chernov *et al.* (2003), Eraker *et al.* (2003), Broadie *et al.* (2004), Chen et Scott (2004), Eraker (2004), Raggi (2005) et Rockinger et Semenova (2005).² Le tableau 5.1 synthétise les différentes caractéristiques des modèles que ces auteurs ont examinés. Il faut tout d'abord souligner que Duffie *et al.* (2000) ont fourni un modèle très général et une procédure d'évaluation du prix d'options qui l'accompagne. Les autres auteurs se sont toujours référés à ce travail et en ont toujours examiné des cas particuliers. La raison est simple et tient du fait que ces auteurs cherchent, comme nous, à estimer les paramètres d'un tel modèle. Accepter le modèle de Duffie *et al.* (2000) dans toute sa généralité rend cette tâche très délicate, aussi certaines restrictions sont nécessaires.

Les points communs à toutes ces études sont la spécification de la partie continue du processus de volatilité (Cox-Ingersoll-Ross) ainsi que la distribution de l'amplitude des sauts dans la volatilité (loi exponentielle). Ce sont, en effet, deux conditions concomitantes pour préserver une formule quasi-analytique du prix d'une option reposant sur des transformées de Fourier. Dans ce contexte à la Cox-Ingersoll-Ross, imposer une autre loi pour les sauts dans la volatilité, et dont le support comprendrait des valeurs négatives, n'impliquerait pas seulement la perte d'une formule d'évaluation simple à mettre en oeuvre, mais également l'émergence de volatilités négatives. Notre modèle permet, au contraire, des sauts négatifs dans la volatilité, tout en maintenant, comme nous le verrons, une méthode d'évaluation assez rapide.

Plusieurs autres points de notre modélisation doivent être discutés à la lumière des autres modèles présents dans la littérature. Le premier concerne la modélisation de l'intensité des deux processus de Poisson. Nous avons supposé que λ_Z et λ_J étaient constants et ne dépendaient pas, par exemple, du niveau de volatilité ou du fait qu'un saut venait de se produire. Pourtant, nous avons remarqué, dans le chapitre précédent, que les sauts dans la volatilité semblaient se succéder ; un saut positif était souvent compensé par un saut négatif. Une alternative aurait été de faire dépendre l'intensité des sauts dans la volatilité du niveau de volatilité lui-même. Plus la volatilité est

¹La spécification de Bates (1996) diffère de la nôtre simplement du fait qu'il suppose que la partie continue du processus de volatilité est régie par un processus du type Cox-Ingersoll-Ross, alors que nous supposons un processus LOG-OU.

²Notons que quatre de ces études ne sont pas encore publiées. Il s'agit de Bakshi et Cao (2002), Broadie *et al.* (2004), Chen et Scott (2004) et Rockinger et Semenova (2005).

TAB. 5.1 – Caractéristiques des modèles à sauts dans les rendements et la volatilité étudiés par différents auteurs.

	dV_t^c	M_t	N_t	$\ln(1 + Z_t)$	J_t	$Corr.$
SRSVI	LOG-OU	λ_Z	λ_J	$\mathcal{N}(\alpha_Z, \sigma_Z^2)$	$\mathcal{N}(\mu_J, \gamma_J^2)$	0
Duffie <i>et al.</i> (2000)	CIR	$\lambda_{0,Z} + \lambda_{1,Z}x_t$	$\lambda_{0,J} + \lambda_{1,J}x_t$	$\mathcal{N}(\alpha_Z + \rho_Z J_t, \sigma_Z^2)$	$\mathcal{E}xp(\mu_J)$	ρdt
Bakshi et Cao (2002)	CIR	λ_Z	$\equiv M_t$	$\mathcal{N}(\alpha_Z + \rho_Z J_t, \sigma_Z^2)$	$\mathcal{E}xp(\mu_J)$	ρdt
	CIR	λ_Z	λ_J	$\mathcal{N}(\alpha_Z, \sigma_Z^2)$	$\mathcal{E}xp(\mu_J)$	ρdt
Chernov <i>et al.</i> (2003)	CIR	λ_Z	$\equiv M_t$	$\mathcal{N}(\alpha_Z + \rho_Z J_t, \sigma_Z^2)$	$\mathcal{E}xp(\mu_J)$	ρdt
Eraker <i>et al.</i> (2003)	CIR	λ_Z	$\equiv M_t$	$\mathcal{N}(\alpha_Z + \rho_Z J_t, \sigma_Z^2)$	$\mathcal{E}xp(\mu_J)$	ρdt
	CIR	λ_Z	λ_J	$\mathcal{N}(\alpha_Z, \sigma_Z^2)$	$\mathcal{E}xp(\mu_J)$	ρdt
Broadie <i>et al.</i> (2004)	CIR	λ_Z	$\equiv M_t$	$\mathcal{N}(\alpha_Z + \rho_Z J_t, \sigma_Z^2)$	$\mathcal{E}xp(\mu_J)$	ρdt
Chen et Scott (2004)	CIR	$\lambda_{0,Z} + \lambda_{1,Z}\sigma_t^2$	λ_J	$\mathcal{N}(0, \sigma_Z^2)$	$\mathcal{E}xp(\mu_J)$	0
Eraker (2004)	CIR	$\lambda_{0,Z} + \lambda_{1,Z}\sigma_t^2$	$\equiv M_t$	$\mathcal{N}(\alpha_Z + \rho_Z J_t, \sigma_Z^2)$	$\mathcal{E}xp(\mu_J)$	ρdt
Raggi (2005)	CIR	λ_Z	$\equiv M_t$	$\mathcal{N}(\alpha_Z + \rho_Z J_t, \sigma_Z^2)$	$\mathcal{E}xp(\mu_J)$	ρdt
Rockinger et Semenova (2005)	CIR	λ_Z	$\equiv M_t$	$\mathcal{N}(\alpha_Z + \rho_Z J_t, \sigma_Z^2)$	$\mathcal{E}xp(\mu_J)$	ρdt

La colonne dV_t^c indique le type de processus adopté pour décrire la partie continue du processus de volatilité, l'abréviation CIR représentant le processus Cox-Ingersoll-Ross. Pour l'étude de Duffie *et al.* (2000), x_t peut désigner S_t ou σ_t^2 . La seconde et troisième colonne indiquent la modélisation de l'intensité des différents processus de Poisson. Lorsque les sauts dans la volatilité se produisent en même temps que les sauts dans les rendements, nous avons noté $N_t \equiv M_t$. La quatrième et cinquième colonne indiquent la distribution de l'amplitude des sauts dans les rendements et la volatilité, $\mathcal{E}xp$ désignant la loi exponentielle et ρ_Z représentant la corrélation entre l'amplitude des sauts dans la volatilité et des sauts dans les rendements. Enfin, la dernière colonne indique s'il y a prise en compte de la corrélation entre la volatilité et les rendements.

élevée et plus on a de chances de la voir décroître brutalement. Dans le même ordre d'idée, on pourrait également faire dépendre l'intensité des sauts dans les rendements du niveau de volatilité. Plus la volatilité est grande, c'est à dire plus l'incertitude régnant sur le marché est forte, et plus importante est la probabilité de voir le cours du support chuter. Une telle représentation de l'intensité des sauts $\lambda_{0,Z} + \lambda_{1,Z}\sigma_t^2$ a été étudiée, et les paramètres estimés, par Chernov *et al.* (1999), Bates (2000), Andersen *et al.* (2002) pour des cas où il n'y avait pas de sauts dans la volatilité. Eraker (2004) l'a considérée dans un contexte plus général où il y a des sauts dans les rendements et dans la volatilité. Leurs conclusions sont plutôt contrastées : Chernov *et al.* (1999), Bates (2000) et Andersen *et al.* (2002) ne trouvent pas d'améliorations significatives à considérer une intensité dépendante de la volatilité, alors qu'Eraker (2004) parvient à évaluer à 50 % la hausse de la probabilité qu'un saut se produise lorsque la volatilité est élevée. Nous considérons que ces résultats n'offrent pas de preuves formelles plaidant en faveur d'une spécification de l'intensité des sauts dépendante de la volatilité. En outre, comme le soulignent Broadie *et al.* (2004), l'estimation de $\lambda_{1,Z}$ est sujette à un problème d'identification, car lorsque la volatilité est élevée, le processus des rendements peut facilement générer d'importantes variations sans avoir recours à la composante à sauts. Il est ainsi difficile de distinguer, pour un niveau de volatilité élevée, si la forte variation du sous-jacent est due à cette forte volatilité ou bien à la présence d'un saut favorisé par une augmentation de sa probabilité d'apparition.

Le second point que nous souhaitons éclaircir est l'hypothèse d'indépendance entre les dates d'arrivée des sauts dans la volatilité et celles des sauts dans les rendements. À nouveau, Duffie *et al.* (2000) ont donné le cadre le plus général possible. Ils ont considéré trois cas, 1) des sauts dans la volatilité peuvent se produire sans être accompagnés de sauts dans les rendements, 2) des sauts dans les rendements peuvent se produire sans être accompagnés de sauts dans la volatilité et 3) des sauts dans la volatilité et les rendements peuvent se produire simultanément. D'autre part, lorsque ces sauts simultanés apparaissent, l'amplitude du saut dans les rendements est corrélée à la taille du saut dans la volatilité, ce qui se traduit par $\ln(1 + Z_t) \sim \mathcal{N}(\alpha_Z + \rho_Z J_t)$. À l'inverse, s'il n'y a pas de sauts dans la volatilité, $Z = 0$, la taille du saut dans les rendements est distribuée selon une loi normale de paramètres α_Z et σ_Z^2 . Nous détaillons maintenant les correspondances de ces trois cas avec des phénomènes empiriques. Des sauts dans la volatilité entraînent une augmentation soudaine de l'incertitude concernant l'évolution future du support. Cet accroissement de l'incertitude peut certes entraîner une révision du cours du support dans les jours qui suivent mais n'implique pas forcément sa chute immédiate. Dans les faits, cela correspond à toutes

les périodes où la nervosité sur les marchés boursiers règne sans qu'il y ait pour autant de fortes variations dans le cours du sous-jacent. Ici encore, il faut noter qu'un saut dans la volatilité peut également engendrer des variations (à la hausse comme à la baisse) du cours du support comparables à des sauts dans les rendements. Ensuite, la présence de sauts dans les rendements non-accompagnés de sauts dans la volatilité peut s'expliquer, par exemple, par la révélation de bonnes nouvelles. Ainsi, la confirmation de bons résultats d'une société peut s'accompagner d'une forte réévaluation de son cours sans que cela ait un impact sur sa volatilité. En revanche, on voit plus difficilement comment une forte correction du cours peut se produire sans qu'il y ait augmentation de l'incertitude sur son évolution future. Un tel phénomène peut éventuellement se rencontrer dans un marché baissier où l'ensemble des agents considèrent que le marché est trop cher. Enfin, l'apparition simultanée de sauts dans la volatilité et dans les rendements, peut, par exemple, se produire lorsqu'une société publie des résultats qui sont à l'opposé des anticipations des agents et qui remettent en cause l'évaluation actuelle de son action.

L'étude de Duffie *et al.* (2000) est certes complète mais elle reste d'ordre théorique. En regardant dans le tableau (5.1), on s'aperçoit qu'aucune autre des études listées (qui sont toutes empiriques) ne considère ce cas général. Elles supposent toutes soit des sauts qui sont corrélés, soit des sauts indépendants. L'explication en est simple et repose là encore sur un problème d'identification. En effet, supposons que nous ayons localisé avec certitude un saut dans les rendements, il semble très difficile d'en identifier la nature exacte. Provient-il uniquement de la composante à sauts présente dans les rendements ou alors de la combinaison d'un saut dans les rendements et dans la volatilité? En imposant l'hypothèse de sauts simultanés, on évacue ce problème puisque tout saut dans les rendements est forcément associé à un saut dans la volatilité. Il suffit alors de mesurer la contribution de chaque saut. De même, en imposant l'hypothèse d'indépendance des sauts, le saut dans les rendements est nécessairement généré par la composante dM_t .

Il reste maintenant à justifier notre choix en faveur de l'hypothèse d'indépendance des sauts face à l'hypothèse de sauts simultanés. Tout d'abord, Eraker *et al.* (2003) ont testé les deux types de spécification et ont abouti aux conclusions suivantes : 1) les deux modèles présentent des comportements similaires (par exemple, des trajectoires de volatilité, des dates d'arrivée de sauts ou encore des amplitudes de sauts analogues), 2) néanmoins, le modèle avec des sauts indépendants est statistiquement meilleur, et 3) l'hypothèse d'indépendance des sauts permet d'attribuer à la volatilité son rôle exact. Concrètement, le dernier point signifie que l'indépendance permet de dissocier les fortes variations du support provenant des sauts dans les rendements

de celles générées par les sauts dans la volatilité. Ensuite, il nous semble que les périodes de crash sont mieux caractérisées par une hausse de l'incertitude suivie d'un décrochage brutal du cours que par une simultanéité des deux phénomènes.

Le modèle que nous proposons ayant été présenté, nous allons maintenant étudier ses performances en terme de capacité à générer des surfaces de volatilité souples. Au préalable, il faut donc que nous procédions à sa risque-neutralisation, puis à la description de la méthode d'évaluation du prix d'une option.

5.2.2 La risque-neutralisation

Nous nous intéressons à présent au passage du processus générateur de données au processus risque-neutre. Nous savons que l'introduction, par rapport au modèle de Black et Scholes (1973), d'une source de risque supplémentaire, se traduit par une infinité de processus respectant l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage et demeurant équivalents au processus sous la mesure objective. Dans notre cas, le modèle SRSVI présente plusieurs sources de risques ; les risques associés aux fréquences des sauts dans les rendements et la volatilité (λ_Z et λ_J), ceux correspondants aux tailles des sauts (Z_t et J_t), celui induit par la présence d'une volatilité stochastique (dW_t) et enfin le risque associé aux variations continues du processus des rendements (dB_t). Nous savons également, voir Bates (1991), Naïk et Lee (1990) ou Runggaldier (2002) pour des modèles à sauts, Heston (1993) pour des modèles à volatilité stochastique standard, Bates (1996, 2000) pour des modèles à volatilité stochastique comportant des sauts dans les rendements, Bakshi et Cao (2002) pour des modèles à sauts dans les rendements et dans la volatilité, et Cont et Tankov (2003) pour des structures plus générales, que si l'on veut préserver la structure initiale du processus générateur de données, la phase de risque-neutralisation ne doit affecter aucun paramètre de variance.³ Aussi nous en déduisons que la forme générale d'un processus risque-neutre s'écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= [r - \lambda_Z^Q E(Z_t^Q)]dt + \sigma_t dB_t^Q + Z_t^Q dM_t^Q, \\ d\ln(\sigma_t^2) &= \kappa^Q [\vartheta^Q - \ln(\sigma_t^2)]dt + \gamma dW_t^Q + J_t^Q dN_t^Q, \end{aligned} \quad (5.2)$$

³Broadie *et al.* (2004) ont montré, mathématiquement, qu'il existe des procédures de risque-neutralisation qui peuvent conduire à une reparamétrisation de σ_Z^2 , c'est à dire d'une variance. Néanmoins ils précisent que ce résultat ne peut être relié à des considérations d'ordre économique et d'autre part, ils ne fournissent pas de liens explicites entre les paramètres sous les deux mesures différentes.

où, dM_t^Q et dN_t^Q sont des processus de Poisson d'intensité λ_Z^Q et λ_J^Q , et où la taille des sauts est distribuée selon :

$$\ln(1 + Z_t^Q) \sim \mathcal{N}(\alpha_Z^Q, \sigma_Z^2),$$

$$J_t^Q \sim \mathcal{N}(\mu_J^Q, \gamma_J^2).$$

Même si l'on connaît la forme générale du processus risque-neutre, nous n'avons pas encore de liens explicites entre les paramètres risque-neutres et ceux issus de la mesure objective. Or, ces relations vont s'avérer être essentielles pour que nous puissions appliquer notre méthode d'estimation exposée dans la prochaine section. Plus exactement, nous devons disposer des liens entre la mesure risque-neutre et la mesure objective pour tous les paramètres intervenant dans le processus des rendements. La seule façon de les obtenir est d'émettre un certain nombre d'hypothèses d'ordre économique. Ces hypothèses vont réduire le nombre (infini) de processus risque-neutres vérifiant (5.2) à un seul.

Par exemple, si nous émettons l'hypothèse que les agents ont un comportement qui est neutre face à tous les risques et n'exigent aucune contrepartie financière pour rémunérer leurs prises de risque, ou, ce qui revient au même, que ces risques sont parfaitement diversifiables, les paramètres risque-neutres et ceux issus de la mesure objective coïncident (hormis α_c qui devient r). Évidemment, cette hypothèse paraît peu crédible dans le cas où le sous-jacent est un indice ou une action. Chen et Scott (2004) soutiennent cependant que si le support est un taux d'intérêt, une telle hypothèse peut être émise.

La question qui se pose est donc de trouver des hypothèses plus réalistes qui permettent d'obtenir des relations explicites entre les paramètres des deux mesures. À ce stade, il paraît naturel de se tourner vers les autres études comportant des sauts dans les rendements et dans la volatilité, pour voir comment ce problème a été traité. Malheureusement, comme cela peut être vu dans le tableau (5.2), une partie importante de la littérature actuelle néglige cet aspect. En effet, la plupart des auteurs ne s'intéressent qu'à l'un des deux processus, soit celui sous la mesure objective, soit celui sous la mesure risque-neutre, et ils ne délivrent par conséquent aucun élément qui pourrait faciliter notre démarche. À l'inverse, Broadie *et al.* (2004) envisagent certes le changement des paramètres mais ne donnent aucun lien entre les deux mesures. Les deux seules études qui peuvent nous apporter quelques éléments de réponses sont celles d'Eraker (2004) et de Bakshi et Cao (2002). Néanmoins, elles n'apportent que des éléments de réponse qui sont soit incomplets, soit difficilement transposables à notre modèle. Ainsi, Eraker (2004) suppose que la risque-neutralisation ne change que α_c en r ,

TAB. 5.2 – Hypothèses sur les paramètres suite au changement de mesure.

	Mesure risque- neutre/objective	M_t^Q	N_t^Q	α_Z^Q	μ_J^Q	κ^Q	ϑ^Q
Duffie <i>et al.</i> (2000)	+/-	n.p.	n.p.	n.p.	n.p.	n.p.	n.p.
Bakshi et Cao (2002)	+/+	$\frac{\lambda_Z b}{1 + \lambda_Z(1 + b)}$	$\frac{\lambda_J}{(1 - \lambda_J)d + \lambda_J}$	$\alpha_Z - a\sigma_Z^2$	$\frac{\mu_J}{d}$	n.p.	n.p.
Chernov <i>et al.</i> (2003)	-/+	n.p.	n.p.	n.p.	n.p.	n.p.	n.p.
Eraker <i>et al.</i> (2003)	-/+	n.p.	n.p.	n.p.	n.p.	n.p.	n.p.
Broadie <i>et al.</i> (2004)	+/+	λ_Z^Q	λ_J^Q	α_Z^Q	μ_J^Q	κ^Q	ϑ^Q
Chen et Scott (2004)	+/+	λ_Z	λ_J	0	μ_J	κ	ϑ
Eraker (2004)	+/+	λ_Z	$\equiv M_t$	$\alpha_Z + \eta_Z$	μ_J	$\kappa + \eta_V$	$\frac{\kappa\vartheta}{\kappa + \eta_V}$
Raggi (2005)	-/+	n.p.	n.p.	n.p.	n.p.	n.p.	n.p.
Rockinger et Semenova (2005)	-/+	n.p.	n.p.	n.p.	n.p.	n.p.	n.p.

Dans la première colonne, nous indiquons si les auteurs ont (+) ou n'ont pas (-) pris en considération la mesure risque-neutre et la mesure objective. Concernant Bakshi et Cao (2002), nous complétons ici les notations qui ont été introduites, $b = \exp(-a\alpha_Z + a^2\sigma_Z^2/2)$, $d = 1 - ca\mu_J$, où a représente le degré d'aversion d'un investisseur et $c > 0$, est un coefficient représentant la sensibilité d'un portefeuille, supposé protéger l'agent face aux variations de la volatilité. L'abréviation n.p. (non précisé) signifie que les auteurs n'ont pas fourni d'éléments de réponse.

le coefficient de retour à la moyenne de la volatilité κ , la tendance de long-terme de la volatilité ϑ et l'amplitude des sauts dans les rendements ($\alpha_Z^Q = \alpha_Z - \eta_Z$). Pour la dernière prime de risque, η_Z , il spécifie une forme très particulière puisque $\eta_Z = (\alpha_Z - r)\sigma_t$. Pour être plus clair et apporter une interprétation à η_Z , nous réécrivons une partie du processus du sous-jacent (le processus des rendements) et son équivalent risque-neutre tels qu'ils ont été donnés par Eraker (2004). Nous avons, sous la mesure objective :

$$\frac{dS_t}{S_t} = [\alpha_c - \lambda_Z E(Z_t)]dt + \sigma_t dB_t + Z_t dM_t, \quad (5.3)$$

qui devient, sous la mesure risque-neutre :

$$\frac{dS_t}{S_t} = [r - \lambda_Z E(Z_t^Q)]dt + \sigma_t dB_t^Q + Z_t^Q dM_t, \quad (5.4)$$

où $dB_t^Q = dB_t + \eta_Z dt$ et $E(Z_t^Q) = E(Z_t) - \eta_Z$. Comme nous pouvons le voir désormais, il n'y a pas de dissociation entre la prime de risque associée à dB_t et la prime de risque attribuée à la taille des sauts. En d'autres mots, η_Z n'est pas spécifique au risque encouru par l'amplitude des sauts mais doit plutôt être interprété comme un paramètre regroupant l'ensemble des risques présents.

Bakshi et Cao (2002) fournissent une étude plus complète en apportant une expression pour l'ensemble des primes de risque associées aux fréquences et aux tailles des sauts dans les rendements et la volatilité. Néanmoins, ces spécifications ne constituent pas une réponse directe au problème posé. En effet, dans Bakshi et Cao (2002), les spécifications des primes de risque dépendent encore de deux paramètres. Il s'agit du paramètre a représentant le degré d'aversion des agents face au risque et le paramètre c représentant un coefficient de sensibilité d'un portefeuille particulier face aux variations de volatilité (voir Bakshi et Cao, 2002, pour plus de détails concernant c). Alors que le paramètre a peut être fixé selon l'hypothèse faite sur les préférences des agents, les auteurs ne donnent aucune indication sur la valeur éventuelle que peut prendre c . Par ailleurs la fonction d'utilité des agents qu'ils utilisent diffère de celle employée par Cox *et al.* (1985) ou Bates (1988).⁴ Enfin, comme nous l'avons déjà indiqué dans le chapitre 3, il faudrait vérifier que leur méthode de risque-neutralisation peut être appliquée à notre cas, c'est

⁴Cox *et al.* (1985) et Bates (1988) supposent une fonction d'utilité de la forme $U(W) = (W^a - 1)/a$ alors que Bakshi et Cao (2002) emploient $U(W) = W^a/a$, où W représente la richesse de l'agent représentatif. Cette différence explique également pourquoi les λ^Q et α_Z^Q de Bakshi et Cao (2002) diffèrent de ceux de Bates (1988).

à dire si leur raisonnement mené à partir d'un modèle CIR avec des sauts dans la volatilité distribués selon une loi exponentielle s'adapte à un modèle LOG-OU avec des sauts dans la volatilité distribués selon une loi normale.

Pour ces raisons, nous laissons ouverte la question de la neutralisation des risques du processus de volatilité et nous supposons simplement qu'il vérifie (5.2). Comme nous le verrons plus tard, notre méthode d'estimation ne requiert pas davantage d'informations sur le lien entre les paramètres intervenant dans le processus de volatilité sous la mesure objective et ceux issus du processus de volatilité risque-neutre.

En ce qui concerne la spécification des primes de risque intervenant dans le processus des rendements, nous reprenons les travaux de Bates (1988) déjà décrits dans le chapitre 1, voir page 71. Nous avons, donc, sous certaines hypothèses, dont des préférences logarithmiques des agents ($a = 1$), les liens suivants :

$$\lambda_Z^Q = \lambda_Z \exp(-\alpha_Z + \sigma_Z^2/2), \quad (5.5)$$

$$\alpha_Z^Q = \alpha_Z - \sigma_Z^2/2, \quad (5.6)$$

$$\eta\sigma_t = \alpha_c - r. \quad (5.7)$$

On peut noter que pour des valeurs plausibles de α_Z et σ_Z , les paramètres risques-neutres ne s'écartent pas beaucoup des paramètres sous la mesure objective. Cela est essentiellement dû à l'hypothèse des préférences logarithmiques. Si l'on pense que les primes de risques sont plus élevées, il suffit de changer d'hypothèse sur l'aversion des agents face aux risques, c'est à dire changer d'hypothèse sur les préférences des agents. Bates (1988) fournit les outils nécessaires pour parvenir à d'autres expressions analytiques liant paramètres objectifs et risque-neutres. Nous nous limiterons pour l'heure aux formes spécifiées dans (5.5) à (5.7).

Enfin, avant de conclure cette section, nous faisons remarquer, et c'est un point-clef, que les paramètres du processus des rendements sous la mesure objective permettent de déterminer entièrement les paramètres risque-neutres. En d'autres mots, la connaissance des paramètres du processus générateur revient à déterminer les paramètres risque-neutres. Il n'y a pas d'autres quantités à estimer. D'autre part, lors de la risque-neutralisation, la volatilité σ_t ne change pas. Par conséquent, si nous disposons d'un outil qui permet d'obtenir les volatilités instantanées à partir de la mesure risque-neutre, celles-ci peuvent être employées pour estimer les paramètres du processus des rendements sous la mesure objective. Rejeter cette proposition revient à remettre en question la stabilité de la structure du modèle lors de la risque-neutralisation.

5.2.3 Évaluation du prix d'une option

Ayant à notre disposition le modèle sous sa forme risque-neutre, nous pouvons utiliser l'approche traditionnelle de Cox et Ross (1976) pour déterminer le prix d'une option.⁵ Le raisonnement que nous menons ici est une combinaison des argumentations développées pour les modèles à sauts et les modèles à volatilité stochastique décrits dans le chapitre 3. Nous partons donc du résultat fondamental de Cox et Ross (1976), où le prix d'un call de type européen s'écrit :

$$C_t = \exp[-r(T-t)] \int_K^\infty (S_T - K) f(S_T) dS_T. \quad (5.8)$$

Évidemment, la loi du support à l'échéance, $f(S_T)$, est indisponible. Elle peut toutefois se réécrire sous une autre forme. En effet, en tenant compte du fait que 1) le niveau du support à l'échéance dépend à la fois du nombre de sauts qui se sont produits et de la volatilité moyenne sur la période, et 2) qu'il y a absence de corrélation entre la volatilité et le support, nous avons :

$$f(S_T) = \int \int f(S_T | \bar{V}_{t,T}, M_T) f(\bar{V}_{t,T}, M_T) dM_T d\bar{V}_{t,T}, \quad (5.9)$$

où M_T désigne le nombre de sauts observés sur la période $T-t$ et $\bar{V}_{t,T}$, la volatilité moyenne sur ce même intervalle de temps,

$$\bar{V}_{t,T} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds. \quad (5.10)$$

Nous faisons remarquer que nous avons déjà défini cette dernière quantité dans le chapitre 3. Comme, d'une part, la volatilité moyenne et le nombre de sauts dans les rendements sont deux variables aléatoires indépendantes, et d'autre part, la loi d'apparition des sauts dans les rendements est une loi de Poisson de paramètre $\lambda_Z(T-t)$, nous pouvons poursuivre la transformation de $f(S_T)$ en écrivant :

$$f(S_T) = \int \int f(S_T | \bar{V}_{t,T}, M_T) f(\bar{V}_{t,T}) f(M_T) dM_T d\bar{V}_{t,T}. \quad (5.11)$$

Puis, en utilisant le fait que $f(M_T)$ a un support discret, on a :

$$f(S_T) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda_Z(T-t)] [\lambda_Z(T-t)]^m}{m!} \int f(S_T | M_T = m, \bar{V}_{t,T}) f(\bar{V}_{t,T}) d\bar{V}_{t,T}. \quad (5.12)$$

⁵Pour éviter de surcharger les écritures en rajoutant Q , nous précisons que les paramètres du modèle sont pris sous la mesure risque-neutre.

5.2. Le modèle

À ce stade, nous faisons remarquer que la loi de $f(S_T|M_T = m, \bar{V}_{t,T})$ est une loi log-normale. Ceci nous permet de réutiliser des résultats connus. En effet, (5.12) peut être formulée de manière plus simple :

$$C_t = \int c(S_T, K, r, T - t, \bar{V}_{t,T}, \lambda_Z, m) f(\bar{V}_{t,T}) d\bar{V}_{t,T}, \quad (5.13)$$

où,

$$c(\cdot) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda_Z(T-t)][\lambda_Z(T-t)]^m}{m!} \times \exp[-r(T-t)] \int_K^{\infty} (S_T - K) f_{\mathcal{N}}(S_T|M_T = m, \bar{V}_{t,T}) dS_T. \quad (5.14)$$

Or, $c(\cdot)$ n'est rien d'autre que la formule de Merton (1976) du prix d'une option pour une quantité $\bar{V}_{t,T}$ donnée (voir page 69). Nous pouvons donc réécrire (5.13) sous la forme :

$$C_t = \int C_{Merton}(S_t, K, r_m, s_{m,t}, 1) f(\bar{V}_{t,T}) d\bar{V}_{t,T}, \quad (5.15)$$

où $C_{Merton}(\cdot)$ est égale à :

$$C_{Merton}(\cdot) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda'_Z(T-t)][\lambda'_Z(T-t)]^m}{m!} C_{BS}(S_t, K, r_m, s_m, 1), \quad (5.16)$$

et où C_{BS} désigne la formule de Black et Scholes (1973) :

$$C_{BS}(S_t, K, r_m, s_m, 1) = S_t \Phi(d_{1,m}) - K \exp[-r_m(T-t)] \Phi(d_{2,m}). \quad (5.17)$$

Les différentes quantités présentes dans (5.16) et (5.17) sont définies ainsi :

$$r_m = (r - \lambda_Z E(Z_t))(T-t) + m(\alpha_Z + \sigma_Z^2/2), \quad (5.18)$$

$$s_{m,t}^2 = \bar{V}_{t,T}(T-t) + m\sigma_Z^2. \quad (5.19)$$

$$\lambda'_Z = \lambda_Z[1 + E(Z_t)], \quad (5.20)$$

$$E(Z) = \exp(\alpha_Z + \sigma_Z^2/2) - 1, \quad (5.21)$$

$$d_{1,m} = \frac{\ln(S_t/K) + r_m + s_{m,t}^2/2}{s_m}, \quad (5.22)$$

et enfin,

$$d_{2,m} = \frac{\ln(S_t/K) + r_m - s_{m,t}^2/2}{s_m}. \quad (5.23)$$

Finalement, l'équation (5.15) nous conduit à l'expression suivante du prix d'un call :

$$C_t = E_t[C_{Merton}(\bar{V}_{t,T})], \quad (5.24)$$

qui peut être approchée par :

$$\bar{C}_t = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H C_{Merton}(\bar{V}_{t,T}^{(h)}). \quad (5.25)$$

En d'autres mots, le prix d'une option peut être vu comme une moyenne de prix d'options découlant de la formule de Merton (1976) pour différentes trajectoires de la volatilité instantanée. Il s'agit donc d'un résultat analogue à celui de Hull et White (1987) que nous avons déjà mis à profit dans le chapitre 3 pour l'étendre à un modèle comportant des sauts uniquement dans la volatilité. L'incorporation de sauts dans les rendements implique simplement que la formule de Black et Scholes (1973) soit remplacée par la formule de Merton (1976). Dès lors, l'évaluation pratique du prix d'une option s'effectue simplement en simulant des trajectoires de volatilité d'après la procédure décrite page 132. Une fois ces H trajectoires de volatilité obtenues, on calcule leurs moyennes $\bar{V}_{t,T}^{(i)}$ que l'on injecte dans (5.25). Pour donner une idée de la rapidité de la procédure, sur une station de travail cadencée à 1.8 MHz et en utilisant le logiciel GAUSS, nous mettons 3.03 secondes pour générer 5000 trajectoires de volatilité de longueur 22 jours (soit 20000 trajectoires en employant la technique des variables antithétiques), puis 2.72 secondes supplémentaires pour obtenir le prix définitif.

Une autre façon d'évaluer dans la pratique le prix d'une option consiste à effectuer un développement limité de $C_{Merton}(\bar{V})$ au voisinage de $E_t(\bar{V})$. Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} C_{Merton}(\bar{V}) &= C_{Merton}[E_t(\bar{V})] + \frac{\partial C_{Merton}(\bar{V})}{\partial \bar{V}} [E_t(\bar{V})][\bar{V} - E_t(\bar{V})] + \\ &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{Merton}(\bar{V})}{\partial \bar{V}^2} [E_t(\bar{V})][\bar{V} - E_t(\bar{V})]^2 + \\ &\quad \frac{1}{6} \frac{\partial^3 C_{Merton}(\bar{V})}{\partial \bar{V}^3} [E_t(\bar{V})][\bar{V} - E_t(\bar{V})]^3 + \dots, \end{aligned} \quad (5.26)$$

puis en passant cette expression sous l'opérateur E_t , nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 E_t[C_{Merton}(\bar{V})] &= C_{Merton}[E_t(\bar{V})] + \\
 &\quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{Merton}(\bar{V})}{\partial \bar{V}^2} [E_t(\bar{V})] Var_t(\bar{V}) + \\
 &\quad \frac{1}{6} \frac{\partial^3 C_{Merton}(\bar{V})}{\partial \bar{V}^3} [E_t(\bar{V})] E_t[\bar{V} - E_t(\bar{V})]^3 + \dots
 \end{aligned} \tag{5.27}$$

L'idée est strictement analogue à celle employée par Hull et White (1987) et détaillée dans l'annexe A.7.2.1. Les dérivées partielles se déduisent facilement puisque C_{Merton} est une somme pondérée de la formule de Black et Scholes (1973). En revanche ce qui pose problème, ce sont les quantités $Var_t(\bar{V})$ et $E_t[\bar{V} - E_t(\bar{V})]^3$, c'est à dire les moments d'ordre supérieur à 1 de la volatilité moyenne. L'espérance de la volatilité moyenne a en effet déjà été calculée dans le chapitre 4. Par contre, il est plus difficile de trouver une expression équivalente pour les autres moments. Évidemment, ces moments peuvent toujours être approchés en utilisant une méthode de Monte-Carlo, mais, comme nous le verrons plus tard, il sera indispensable de trouver à terme un lien entre ces moments et la volatilité instantanée σ_t .

5.2.4 Surface de volatilité

Lorsque nous avons étudié les modèles à volatilité stochastique standard et les modèles à sauts du type Merton (1976), nous avons fait remarquer deux points importants. Le premier était que les modèles à sauts permettaient de fournir des surfaces de volatilité conformes à celles observées, mais seulement pour des échéances courtes. En effet, l'effet smile ou skew disparaissait très rapidement en augmentant la maturité de l'option. Le second point concernait la capacité des modèles à volatilité stochastique standard à produire des smiles qui perduraient avec l'allongement de la durée de vie de l'option, mais uniquement si l'on imposait des valeurs très fortes pour le paramètre de volatilité de la volatilité (γ). Nous avons vu dans le chapitre 3 qu'une solution permettant de préserver des valeurs raisonnables pour γ tout en maintenant un effet smile sur des horizons lointains consistait à ajouter des sauts dans la volatilité. En revanche, le modèle que nous y avons présenté ne permettait pas de générer des surfaces de volatilité asymétriques. Le modèle SRSVI, qui comporte des sauts dans les rendements et dans la volatilité, permet de pallier ces insuffisances. Nous illustrons ici sa capacité à produire des surfaces de volatilité aux formes très souples.

Dans la figure 5.1, nous avons reproduit diverses surfaces de volatilité obtenues en faisant varier les paramètres du modèle SRSVI. La figure 5.1.A

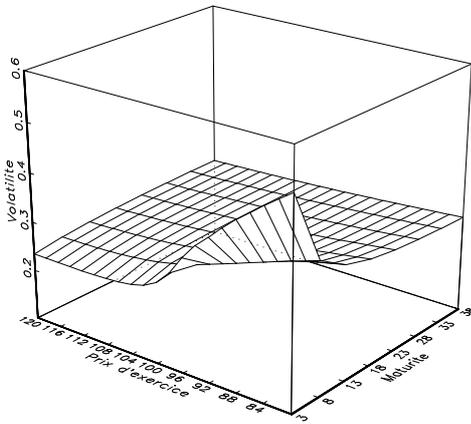
représente le type de surface de volatilité qui peut être obtenu en utilisant le modèle de Bates (1996), c'est à dire un cas particulier du modèle SRSVI ($\lambda_J = 0$). On peut très nettement y observer l'asymétrie de la surface de volatilité. Évidemment, on constate également que l'effet skew enregistré sur les options d'échéance courte s'estompe rapidement, même s'il ne disparaît pas complètement.⁶ C'est cette insuffisance des modèles à sauts dans les rendements et à volatilité stochastique qui a poussé la recherche à s'intéresser aux modèles comprenant non seulement des sauts dans les rendements mais aussi des sauts dans la volatilité. La figure 5.1.B permet de voir l'amélioration qui est apportée en ajoutant des sauts dans la volatilité par rapport au modèle de Bates (1996). On distingue clairement que pour les options à échéances plus lointaines, l'effet skew perdure. Pour les options à faible maturité, l'ajout des sauts dans la volatilité a renforcé la pente de la surface pour les options en dehors de la monnaie. Cette conséquence est attendue puisque l'ajout de sauts contribue à augmenter la variance totale du modèle et donc à surévaluer le prix des options. Ceci explique également que le niveau de volatilité augmente pour les options fortement dans la monnaie.

Dans la figure 5.1.C, nous avons fait varier la taille espérée des sauts dans les rendements. Nous constatons que diminuer α_Z a une répercussion insignifiante pour les options à maturité longue. En revanche, nous pouvons remarquer que pour les échéances courtes, cette diminution renforce l'effet skew. En fait, faire varier n'importe quel autre paramètre caractérisant l'arrivée et la distribution des sauts dans les rendements (λ_Z, σ_Z^2) n'aura pas d'impact sur l'allure de la surface de volatilité pour des maturités longues mais la modifiera substantiellement pour des maturités courtes.

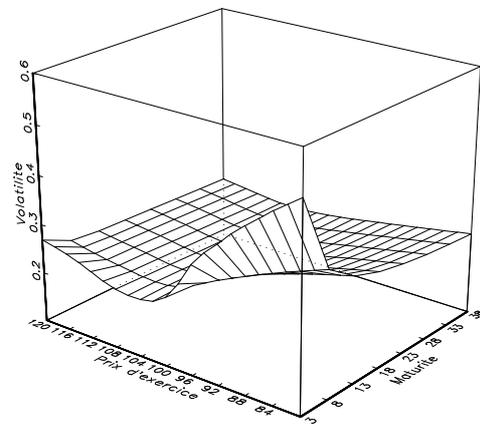
Enfin, la figure 5.1.D illustre les capacités de notre modèle à englober le cas particulier de Bates (1996), figure 5.1.A. Non seulement il parvient à reproduire pour des échéances courtes une courbe de volatilité similaire à celle observée chez Bates (1996), c'est-à-dire quasiment décroissante, mais surtout cette caractéristique est maintenue pour les options ayant une maturité plus grande. Pour résumer, il nous semble que le modèle que nous proposons est muni de suffisamment de leviers pour pouvoir envisager une très grande capacité d'adéquation entre les surfaces de volatilité qui peuvent en être déduites et celles empiriquement observables. D'autre part, comme nous l'avons déjà précisé dans le chapitre 3, le fait de disposer d'une distribution des sauts dans la (log-) volatilité dont le support est \mathbb{R} permet de générer une pente décroissante en fonction des maturités pour les options à parité. Évidemment, pour

⁶Notons qu'en agrandissant la fenêtre des moneyness étudiés, nous observerions à nouveau une croissance du niveau de volatilité implicite pour les options fortement dans la monnaie.

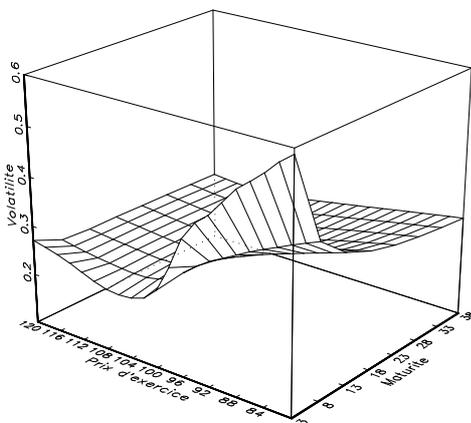
5.2. Le modèle



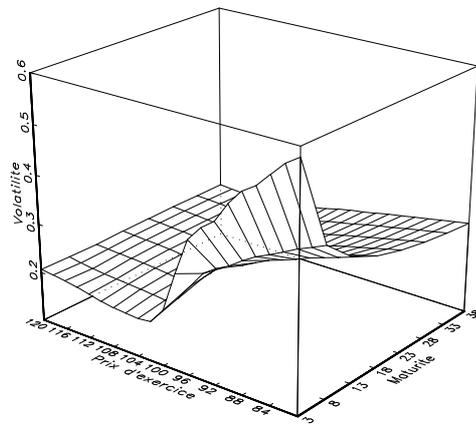
• Cas A : Modèle de Bates, $\lambda_J = 0$.



• Cas B : Modèle SRSVI.



• Cas C : Modèle SRSVI, $\alpha_Z = -0.065$.



• Cas D : Modèle SRSVI, $\alpha_Z = -0.065$,
 $\mu_J = -0.45$.

Les valeurs initiales sont : $r = 0$, $\lambda_Z = 10$, $\alpha_Z = -0.05$, $\sigma_Z = 0.01$, $\kappa = 12$, $\vartheta = -3$, $\gamma = 1$, $\lambda_J = 20$, $\mu_J = -0.3$, $\gamma_J = 0.5$. La valeur du paramètre $\mu_J = -0.45$ (cas D) correspond à un saut positif dans la volatilité annualisé de l'ordre de 4.5 points de pourcentage.

FIG. 5.1 – Surfaces de volatilité obtenues en faisant varier certains paramètres du modèle SRSVI.

augmenter encore la souplesse du modèle, nous devons à terme envisager l'incorporation d'un paramètre de corrélation entre les mouvements Browniens. Cela permettra, par exemple, de décaler le creux du smile ou du skew à travers la moneyness.

5.3 Estimation

Le but de cette section est d'apporter une méthode d'estimation des paramètres du modèle SRSVI qui repose sur deux sources de données ; les rendements et un indice de volatilité. La donnée d'un indice de volatilité n'est pas essentielle pour le fonctionnement global de la méthode mais elle revêt un caractère pratique qui en simplifie la mise en oeuvre. Nous insistons néanmoins sur le fait que notre méthode d'estimation s'adapterait parfaitement à l'observation directe de prix d'options. Dans un premier temps, nous allons effectuer un bref récapitulatif des méthodes d'estimations existantes pour des modèles à sauts dans la volatilité et dans les rendements. Nous développerons ensuite l'idée sur laquelle repose notre méthode d'estimation.

5.3.1 Méthodes existantes

Lorsque nous cherchons à estimer les paramètres du processus SRSVI, nous avons 3 choix possibles au niveau des sources de données à utiliser. Nous présentons dans le tableau (5.3) un récapitulatif du type de données et des méthodes d'estimation employés par les différents auteurs. La première voie possible consiste à n'utiliser que les rendements observés. Les paramètres estimés qui en résultent sont ceux sous la mesure objective. Toutes les méthodes d'estimation sont alors envisageables. Néanmoins, utiliser ces estimations pour évaluer des prix d'options peut mener à des prix fortement erronés puisqu'ils reposent sur une hypothèse peu défendable, à savoir que les agents n'exigent aucune prime de risque. La seconde possibilité est de n'employer que des prix d'options. Dans ce cas, les paramètres estimés sont ceux sous la mesure risque-neutre. Cette approche semble très attrayante puisqu'elle fournit des valeurs de paramètres directement exploitables pour l'évaluation du prix des options. Nous avons nous-mêmes revendiqué ce choix dans le chapitre 4. Ici, en enrichissant le modèle qui y était étudié avec des sauts dans les rendements, nous perdons la faculté de pouvoir nous reposer sur des données provenant du seul marché des options. Nous pourrions alors envisager de procéder comme Broadie *et al.* (2004), c'est à dire collecter N prix d'options, puis utiliser une méthode des moindres carrés dans la régression :

$$C_n^*(\Psi_n) = C_n(\Psi_n, \sigma_t^2, \theta^Q) + \varepsilon_n, \quad (5.28)$$

où C_n^* représente le prix observé de la n -ième option, Ψ_n désigne les caractéristiques données par le marché de cette même option, et C_n son prix théorique qui dépend, entre autres, des paramètres risque-neutres θ^Q et de la volatilité instantanée.⁷ Il y a deux objections à ce que nous reproduisions cette méthode. La première est pragmatique et concerne l'évaluation des prix théoriques des options. Il nous est certes possible d'évaluer des prix d'options, mais le temps de calcul est bien plus grand dans notre cas que dans celui adopté par Broadie *et al.* (2004). Nous devons en effet passer par la méthode de Monte-Carlo qui nécessite une poignée de secondes pour l'évaluation d'un prix, tandis que Broadie *et al.* (2004) utilisent la formule développée par Duffie *et al.* (2000) qui ne nécessite qu'une fraction de seconde. La seconde objection réside dans le fait que les estimations qui en résultent dépendent de manière cruciale de la spécification qui a été adoptée pour ε . Ce problème a été résumé par Bates (2000, p195) : "A fundamental difficulty with implicit parameter estimation is the absence of an appropriate statistical theory of option pricing errors".

Nous préférons par conséquent nous tourner vers la troisième possibilité, c'est à dire fonder notre méthode d'estimation sur l'observation jointe de données provenant du marché des options et des rendements. Disposer des deux sources de données est une condition nécessaire pour pouvoir construire notre méthode d'estimation. C'est également une voie qui doit être au moins aussi informative que de n'utiliser qu'une seule de ces deux sources. Nous nous inscrivons ainsi dans la même démarche qu'Eraker (2004) et Chen et Scott (2004). Dans cette dernière étude, une approche originale est adoptée. Chen et Scott (2004) utilisent la volatilité implicite de Black et Scholes (1973) issue d'options à parité et d'échéance courte comme proxy de la volatilité instantanée. Ils rendent par conséquent la volatilité instantanée observable, ce qui simplifie considérablement la tâche de l'estimation. Pour autant, il nous semble que deux points importants sont, pour l'heure, absents de cette étude. Tout d'abord, ces auteurs supposent implicitement que les paramètres risque-neutres et ceux sous la mesure objective coïncident. Cette hypothèse est peut-être défendable dans le cadre de leur étude (ils s'intéressent à la modélisation de taux d'intérêt et non d'une action ou d'un indice), mais cela nous empêche d'appliquer leur méthode. D'autre part, ils ne donnent aucune justification pouvant valider l'utilisation des volatilités implicites issues de Black et Scholes (1973) comme proxy de la volatilité instantanée. Ils indiquent certes qu'ils ne prennent que des options proches de la parité et proches de l'échéance. Mais, comme nous l'avons discuté dans le chapitre précédent, il

⁷Nous avons déjà décrit, de manière plus détaillée, cette façon de faire dans le chapitre 2, pages 90 à 92.

est impossible de disposer de telles données à n'importe quel instant. Par conséquent, ils s'exposent naturellement à un biais de maturité.

Finalement, nous pourrions également envisager d'adapter la méthode d'Eraker (2004) à notre modèle. La nature des données utilisées est en effet similaire et il se place également dans un cadre Bayésien. Le seul point qui diffère réside dans la spécification du processus de volatilité. Néanmoins, Eraker (2004) fonde sa méthode d'estimation sur la régression (5.28), car son modèle lui permet d'évaluer rapidement des prix d'options à chaque itération de son algorithme. Notre modèle ne partageant pas cette caractéristique, nous sommes contraints de proposer une autre méthode d'estimation.

Celle-ci s'appuiera sur une version discrétisée du processus générateur de données. La présence de sauts nous pousse à effectuer une discrétisation selon la méthode proposée par Ball et Torous (1983). Cette méthode de discrétisation est adoptée dans l'ensemble des études qui estiment les paramètres des modèles à partir de la vraisemblance (Eraker, 2003, Chen et Scott, 2004, Eraker, 2004 et Raggi, 2005). Le modèle dans sa version discrétisée s'écrit :

$$\begin{aligned} f(y_t|h_t) &= pf_{\mathcal{N}}(y_t; \alpha, h_t\Delta) + (1-p)f_{\mathcal{N}}(y_t; \alpha + \alpha_Z, h_t\Delta + \sigma_Z^2), \\ f[\ln(h_t)|h_{t-1}] &= qf_{\mathcal{N}}[\ln(h_t); \mu + \beta \ln(h_{t-1}), \delta^2] \\ &\quad + (1-q)f_{\mathcal{N}}[\ln(h_t); \mu + \mu_J + \beta \ln(h_{t-1}), \delta^2 + \gamma_J^2], \end{aligned} \quad (5.29)$$

avec :

$$\begin{aligned} \alpha &= [\alpha_c - \lambda_Z E(Z)]\Delta, & h_t &= \sigma_t^2, \\ p &= 1 - \lambda_Z \Delta, & q &= 1 - \lambda_J \Delta, \\ \mu &= \vartheta \kappa \Delta, & \beta &= 1 - \kappa \Delta, \\ \delta^2 &= \gamma^2 \Delta, \end{aligned}$$

où Δ désigne le pas de la discrétisation. Pour des raisons pratiques liées aux bonnes performances de notre algorithme, nous effectuons une reparamétrisation dans (5.29) en reformulant les termes de variance. La transformation consiste à exprimer la variance des composantes associées aux sauts comme étant proportionnelle à la variance des composantes associées au processus sans sauts. On obtient :

$$\begin{aligned} f(y_t|h_t) &= pf_{\mathcal{N}}(y_t; \alpha, h_t\Delta) \\ &\quad + (1-p)f_{\mathcal{N}}(y_t; \alpha + \alpha_Z, \tilde{\sigma}^2 h_t\Delta), \\ f[\ln(h_t)|h_{t-1}] &= qf_{\mathcal{N}}[\ln(h_t); \mu + \beta \ln(h_{t-1}), \delta^2] \\ &\quad + (1-q)f_{\mathcal{N}}[\ln(h_t); \mu + \mu_J + \beta \ln(h_{t-1}), \delta^2 \xi^2]. \end{aligned} \quad (5.30)$$

L'identification des paramètres se fait au travers des contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} h_t\Delta + \sigma_Z^2 &= h_t\tilde{\sigma}^2\Delta, & \delta^2 + \gamma_J^2 &= \delta^2\xi^2, \\ \alpha_c\Delta &= \alpha - \lambda_Z E(Z)\Delta, \end{aligned}$$

TAB. 5.3 – Comparaison des méthodes d'estimation existantes et des sources de données utilisées par différents auteurs.

	Options	Rendements	Méthode	Marché	Période
Bakshi et Cao (2002)	+	-	C	CBOE	1996
Chernov <i>et al.</i> (2003)	-	+	M	DJIA	1953 :1999
Eraker <i>et al.</i> (2003)	-	+	B	S&P 500	1980 :1999
Broadie <i>et al.</i> (2004)	+	-	C	S&P 500	1987 :2003
Chen et Scott (2004)	+	+	V	US LIBOR 3m	1985 :2000
Eraker (2004)	+	+	B	S&P 500	1986 :1991
Raggi (2005)	-	+	B	S&P 500	1988 :2003
Rockinger et Semanova (2005)	-	+	M	S&P 500	1980 :1999

Les deux premières colonnes indiquent si oui (+) ou non (-) les options ou les rendements sont utilisés pour l'estimation des paramètres. La troisième colonne donne l'idée générale de la méthode d'estimation employée, les lettres C, M, V et B désignent respectivement une méthode d'estimation par les moindres carrés, les moments, la vraisemblance et l'analyse Bayésienne. La quatrième colonne indique le marché étudié, CBOE est l'abréviation pour le Chicago Board of Exchange, DJIA, le Dow Jones Industrial Average et US LIBOR 3m, le taux d'intérêt américain à 3 mois.

où $\tilde{\sigma}^2 > 1$ et $\xi^2 > 1$.

5.3.2 Alternative

Nous avons vu dans le chapitre 4 comment nous pouvons déduire d'un indice de volatilité une approximation de la volatilité instantanée. De plus, le lien entre ces deux quantités était linéaire. Dans le contexte d'un modèle comprenant également des sauts dans les rendements, cette propriété disparaît. Dans la première partie de cette section, nous voyons comment une relation entre les deux quantités peut néanmoins être retrouvée. Puis, disposant de ce lien, nous décrivons l'idée générale de notre méthode d'estimation. Auparavant nous adoptons les notations suivantes ; θ_S (θ_S^Q), désigne l'ensemble des paramètres du processus des rendements sous la mesure objective (risque-neutre), et θ_V^Q l'ensemble des paramètres du processus de volatilité sous la mesure risque-neutre.

5.3.2.1 Lien entre volatilité implicite et volatilité instantanée

Pour obtenir le lien entre volatilité implicite et volatilité instantanée, nous partons d'un simple rappel. En effet, nous avons défini précédemment la quantité $\bar{V}_{t,T}$, volatilité moyenne sur la durée de vie restante de l'option. En prenant son espérance conditionnelle sachant la volatilité instantanée en t , $E_t(\cdot) = E(\cdot | \sigma_t)$, nous avons :

$$E_t(\bar{V}_{t,T}) = \frac{1}{T-t} \int_t^T E_t(\sigma_s^2) ds. \quad (5.31)$$

Or, dans le chapitre 3, nous avons déjà fourni l'expression de l'intégrande que nous reproduisons ici :

$$\begin{aligned} E_t(\sigma_s^2) &= \exp[\vartheta(1 - \exp[-\kappa(s-t)]) + \ln(\sigma_t^2) \exp[-\kappa(s-t)]] \times \\ &\exp\left[\frac{\gamma^2}{4\kappa}(1 - \exp[-2\kappa(s-t)])\right] \times \\ &\exp(\lambda_J(s-t)[\exp(B_s) - 1]), \end{aligned} \quad (5.32)$$

où B_s était défini par :

$$B_s = \frac{E(J)}{\kappa(s-t)}(1 - \exp[-\kappa(s-t)]) + \frac{E(J^2)}{4\kappa(s-t)}(1 - \exp[-2\kappa(s-t)]) - \frac{E(J)^2}{2\kappa^2(s-t)^2}(1 - \exp[-\kappa(s-t)])^2. \quad (5.33)$$

Le calcul analytique de l'intégrale dans (5.32) semble évidemment compromis, en revanche on peut remarquer que si l'on connaît l'ensemble des paramètres intervenant dans l'intégrale ainsi que σ_t , on peut numériquement en déduire une valeur approchée très précise. Réciproquement, si l'on connaît $E(\bar{V}_{t,T})$, on peut chercher, numériquement, la valeur de σ_t qui permet d'obtenir l'égalité dans (5.32). Autrement dit, si l'on dispose d'une valeur pour $E_t(\bar{V}_{t,T})$, on peut retrouver la valeur de la volatilité instantanée.

Nous montrons à présent comment déduire $E_t(\bar{V}_{t,T})$ à partir du prix d'une option. Si nous supposons que notre modèle correspond à la réalité, nous pouvons écrire que, pour les vraies valeurs de paramètres, le prix théorique doit correspondre au prix observé du marché. Par conséquent, nous devons avoir :

$$E_t[C_{Merton}(\bar{V}_{t,T}, \theta_S^Q, \theta_V^Q, \Psi)] = C_{BS}(\sigma_{I,t}, \Psi), \quad (5.34)$$

où $\Psi = (S_t, K, r, T - t)$ représente les caractéristiques d'une option, $\sigma_{I,t}$ désigne la volatilité implicite et θ_S^Q et θ_V^Q sont les paramètres risque-neutres du modèle. L'égalité (5.34) peut être reformulée de manière approximative ainsi :⁸

$$C_{Merton}[E_t(\bar{V}_{t,T}), \theta_S^Q, \theta_V^Q, \Psi] = C_{BS}(\sigma_{I,t}, \Psi). \quad (5.35)$$

Là encore, la forme de C_{Merton} en fonction de $E_t(\bar{V}_{t,T})$ est trop compliquée pour pouvoir établir un lien analytique entre $E_t(\bar{V}_{t,T})$ et $\sigma_{I,t}$, voir l'équation (5.27). En revanche, pour θ_S^Q , θ_V^Q et Ψ donnés, il est possible de déterminer numériquement la valeur de $E_t(\bar{V}_{t,T})$ qui permet de vérifier (5.35). En d'autres mots, nous avons un lien entre la volatilité moyenne espérée et la volatilité implicite. Ainsi, si nous disposons du prix d'une option, nous pouvons en déduire la volatilité instantanée. La relation qui lie la volatilité instantanée à la volatilité implicite est notée :

$$\sigma_t = g(\sigma_{I,t}, \Psi, \theta_S^Q, \theta_V^Q). \quad (5.36)$$

Il est important de noter que l'égalité (5.36) n'admet pas forcément une solution en $E_t(\bar{V}_{t,T})$, quelles que soient les valeurs de paramètres θ_S^Q et θ_V^Q .

⁸Nous reviendrons sur la qualité de cette approximation à la fin de cette section.

Cela est dû au fait que la formule C_{Merton} n'est pas une fonction bijective en son paramètre $E_t(\bar{V}_{t,T})$ mais simplement injective, contrairement à la formule de Black et Scholes (1973). Pour voir cela, il suffit de remarquer que même pour $E_t(\bar{V}_{t,T})=0$, la formule de l'option que nous utilisons, voir (5.16) à (5.21) délivre un prix d'option non-nul, car il reste un paramètre de variance σ_Z^2 qui maintient $d_{1,m}$ et $d_{2,m}$ différents. De manière plus générale, si la volatilité implicite d'une option est inférieure à la valeur de σ_Z , l'égalité (5.36) n'admet pas de solution. Évidemment, on peut supposer que de tels cas se présentent rarement et qu'ils sont essentiellement dus à une aberration du marché.

Nous faisons également remarquer que la donnée de l'indice de volatilité n'est finalement qu'accessoire. Ce qui importe est d'avoir un prix d'option à chaque date t . Toutefois, il y a deux avantages d'ordre pratique qui plaident en faveur de l'utilisation d'un indice. D'une part, il est plus facile d'en obtenir une série chronologique que de collecter des prix d'options (les sources étant souvent payantes). D'autre part, il n'y a plus de travail de traitement de données à effectuer pour sélectionner les options les plus informatives.

À présent, il nous faut revenir sur un point crucial qui a de lourdes conséquences sur la validité de notre méthode d'estimation. L'égalité (5.35) provient du développement limité de $C_{Merton}(\bar{V})$ au voisinage de $E_t(\bar{V})$ effectué dans la section consacrée à l'évaluation du prix d'une option. Ici, nous nous sommes arrêté au premier ordre du développement limité. L'égalité (5.35) n'est donc, en réalité, qu'une approximation grossière. La question qui se pose est donc de savoir pourquoi nous n'avons pas tenu compte des ordres supérieurs. La réponse est simple et réside dans le fait que nous n'avons pas, pour l'heure, réussi à exprimer tous les moments de \bar{V} . Dans l'annexe A.8, nous illustrons la complexité, mais aussi la faisabilité pour trouver ces moments. Dès lors que ces relations entre les moments et la volatilité instantanée pourront être établies, l'idée générale de la méthode d'estimation sera strictement la même. Il faudra simplement déterminer numériquement à quelle valeur de la volatilité instantanée correspond la volatilité implicite. Évidemment, une répercussion immédiate de l'absence de ces résultats mathématiques est que nous ne pouvons pas envisager l'application de notre méthode sur des données réelles. En revanche, nous pourrions tester ses performances sur des échantillons simulés vérifiant l'égalité (5.35).

Nous poursuivons maintenant la description de notre méthode en supposant que les résultats obtenus jusqu'ici sont valides.

5.3.2.2 Méthodologie

En nous appuyant sur le lien (5.36), nous pouvons mener le raisonnement suivant. Les paramètres que nous souhaitons estimer sont ceux sous

la mesure risque-neutre et les données dont nous disposons sont les rendements et un indice de volatilité. Or, les premières sont issues de la mesure objective, tandis que les secondes proviennent de la mesure risque-neutre. Le point-clef de notre argumentaire est donc de nous assurer de la cohérence entre ces deux sources de données. Il nous suffit pour cela de rappeler deux résultats importants de la section 5.2.2 consacrée à la risque-neutralisation. D'une part, la volatilité instantanée ne subit pas de transformation lors du passage d'une mesure à l'autre. Par conséquent, si la volatilité instantanée est déduite de la mesure risque-neutre, elle peut être utilisée pour estimer les paramètres du processus des rendements sous la mesure objective. D'autre part, nous avons vu que la donnée de θ_S équivalait à connaître θ_S^Q , puisque les éléments du vecteur θ_S^Q sont fonctions uniquement des paramètres composant θ_S . Ainsi, l'estimation des paramètres du processus des rendements sous la mesure objective revient à l'estimation des paramètres du même processus sous la mesure risque-neutre.

De manière formelle, l'idée de notre méthode repose sur la fonction de densité jointe, inconnue, des rendements et de l'indice, $f(y_t, \sigma_{I,t} | \theta_S, \theta_V^Q)$. En procédant à une augmentation des données qui consiste à introduire h_t , la volatilité instantanée inobservable, on a :

$$f(y_t, \sigma_{I,t} | \theta_S, \theta_V^Q) = \int f(y_t, \sigma_{I,t}, h_t) dh_t. \quad (5.37)$$

Or, l'intégrande est égal à :

$$f(y_t, \sigma_{I,t}, h_t | \theta_S, \theta_V^Q) = f(y_t | \sigma_{I,t}, h_t, \theta_S, \theta_V^Q) \times f(\sigma_{I,t} | h_t, \theta_S, \theta_V^Q) f(h_t | \theta_S, \theta_V^Q). \quad (5.38)$$

Cette écriture peut être simplifiée en effectuant quelques remarques supplémentaires. D'une part, comme la volatilité implicite et la volatilité instantanée sont liées par une égalité déterministe, $f(\sigma_{I,t} | h_t, \theta_S, \theta_V^Q)$ est une masse de Dirac $\delta[h_t = g(\sigma_{I,t})]$. La connaissance de $\sigma_{I,t}$ étant équivalente à celle de h_t , $\sigma_{I,t}$ est redondant dans la fonction de densité des rendements. D'autre part, θ_V^Q et θ_S n'apparaissent pas, respectivement, dans les fonctions de densité de y_t et h_t . En effet, sachant la volatilité instantanée, la loi des rendements est un mélange de lois normales dont les paramètres ne sont composés que des éléments de θ_S . De même, la loi de la (log-) volatilité instantanée est un mélange de lois normales dont les paramètres ne sont composés que des éléments de θ_V^Q . Par conséquent, (5.38) se réduit à :

$$f(y_t, \sigma_{I,t}, h_t | \theta_S, \theta_V^Q) = f(y_t | h_t, \theta_S) f(h_t | \theta_V^Q) \delta[h_t = g(\sigma_{I,t}, \theta_S^Q, \theta_V^Q)]. \quad (5.39)$$

Nous pouvons à présent écrire la loi a posteriori du modèle :

$$f(\theta_S, \theta_V^Q, h_t | y_t, \sigma_{i,t}) = \prod_{t=1}^T \int f(y_t | h_t, \theta_S) f(h_t | \theta_V^Q) \delta[h_t = g(\sigma_{I,t}, \theta_S^Q, \theta_V^Q)] dh_t \times f(\theta_S, \theta_V^Q), \quad (5.40)$$

où $f(\theta_S, \theta_V^Q)$ désigne la loi a priori pour θ_S et θ_V^Q . Nous voyons maintenant se profiler la construction d'un échantillonnage de Gibbs. Partant de valeurs initiales pour θ_S (et donc θ_S^Q) et θ_V^Q , il s'agit dans un premier temps de simuler les volatilités instantanées selon leur loi a posteriori. Or, celle-ci s'écrit :

$$f(h_t | \sigma_{I,t}, \theta_S, \theta_V^Q) \propto f(y_t | h_t, \theta_S) f(h_t | \theta_V^Q) \delta[h_t = g(\sigma_{I,t}, \theta_S^Q, \theta_V^Q)] f(\theta_S, \theta_V^Q), \quad (5.41)$$

ou, plus simplement :

$$f(h_t | \sigma_{I,t}, \theta_S, \theta_V^Q) \propto \delta[h_t = g(\sigma_{I,t}, \theta_S^Q, \theta_V^Q)], \quad (5.42)$$

puisque tous les autres points définissant son support sont de mesure nulle. Cela signifie que les volatilités instantanées sont directement déduites à partir de l'égalité qui les unit aux volatilités implicites $h_t = g(\sigma_{I,t}, \theta_S, \theta_V^Q)$. Lorsque cette étape est achevée, il suffit d'entrer dans l'étape suivante qui consiste à simuler des tirages dans les autres lois a posteriori conditionnelles :

$$f(\theta_S | y_t, h_t) \propto \prod_{t=1}^T f(y_t | h_t, \theta_S) f(\theta_S), \quad (5.43)$$

et

$$f(\theta_V^Q | h_t) \propto \prod_{t=1}^T f(h_t | \theta_V^Q) f(\theta_V^Q). \quad (5.44)$$

Le fait que $f(y_t | h_t, \theta_S)$ et $f(h_t | \theta_V^Q)$ soient des mélanges va impliquer l'introduction d'autres variables latentes z_t^y et z_t^h , indiquant pour chaque observation son allocation à l'une ou l'autre composante du mélange. Nous n'insistons pas sur ce dernier point car nous l'avons déjà détaillé à deux reprises dans les chapitres 1 et 4. Finalement, lorsque ces étapes sont effectués, il ne reste plus qu'à déduire θ_S^Q à partir de θ_S . L'algorithme consiste à répéter l'ensemble de ces étapes jusqu'à ce que la convergence puisse être observée. Nous fournissons dans l'annexe A.9 davantage de détails techniques sur l'algorithme. Il reste maintenant à vérifier les performances de cette procédure d'estimation, et c'est l'objet de la section suivante.

Auparavant, nous tenons à formuler quelques précisions supplémentaires. Tout d'abord, nous avons indiqué précédemment qu'il était possible que nous

5.4. Application

ne trouvions pas toujours une quantité $E_t(\bar{V}_{t,T})$ qui satisfasse l'égalité entre le prix théorique et le prix observé. Cela signifie qu'il est possible de ne pas pouvoir en extraire une volatilité instantanée. Nous avons également précisé que cet événement ne pouvait se produire que rarement, c'est à dire lorsque la volatilité implicite se résume à la volatilité des sauts dans les rendements. Or, notre méthode d'estimation étant itérative, la valeur de σ_Z prend à chaque itération une valeur nouvelle. Il est donc fortement envisageable que lors de certaines itérations, σ_Z atteignent des valeurs élevées. Aussi, lorsqu'un tel cas se présente, nous simulons des valeurs de θ_S et θ_V^Q , à partir de lois a posteriori, tant que le lien entre prix d'option et volatilité instantanée ne peut être établi. D'autre part, il en découle que des valeurs initiales totalement arbitraires peuvent stopper l'exécution de l'algorithme dès sa première itération. Il faut donc veiller à imposer une valeur de départ pour σ_Z assez proche de 0.

Nous faisons également remarquer que cette méthode permet d'estimer les différentes déclinaisons du modèle SRSVI.⁹ En particulier, elle autorise l'estimation d'un modèle à sauts uniquement dans la volatilité, c'est à dire le modèle étudié dans le chapitre 3 et 4. Dans ce cas, il est préférable d'employer la méthode qui y est décrite, puisqu'on y utilise un lien plus simple entre les volatilités instantanée et implicite, lequel nécessite moins de calculs.

5.4 Application

Dans cette section, nous fournissons une application de notre méthode à des données simulées. Nous décrivons d'abord la procédure de génération des données simulées, puis nous discutons les performances de notre algorithme.

5.4.1 Génération des données

La méthode d'estimation que nous proposons repose sur deux sources de données : d'une part, les rendements, et d'autre part la volatilité implicite de Black et Scholes (1973) pour un call de type européen à parité et à 22 jours de l'échéance. Pour retrouver ces mêmes informations dans un contexte de données simulées, il nous faut donc, d'une part générer des rendements sous la mesure objective, et d'autre part générer une volatilité implicite qui est, elle, déduite d'un monde risque-neutre.

Nous notons, T , le nombre d'observations simulées. La première étape de la procédure consiste à générer des volatilités instantanées. Ceci s'effectue à

⁹Pour les modèles du type Black et Scholes (1973) et Merton (1976), c'est à dire ceux ne contenant pas de volatilité stochastique, il n'y a pas besoin de générer des volatilités instantanées, et de fait, seuls les rendements sont nécessaires.

partir de la discrétisation suivante du processus de volatilité (voir page 132) :

$$h_t^2 = \begin{cases} \exp(\vartheta[1 - \exp(-\kappa\Delta)] + \ln(h_{t-1}^2) \exp(-\kappa\Delta)) \times \\ \exp\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{2\kappa}}[1 - \exp(-2\kappa\Delta)]v_t\right) & \text{avec probabilité } 1 - \lambda_J\Delta, \text{ ou :} \\ \exp(\vartheta[1 - \exp(-\kappa\Delta)] + \ln(h_{t-1}^2) \exp(-\kappa\Delta)) \times \\ \exp\left(\sqrt{\frac{\gamma^2}{2\kappa}}[1 - \exp(-2\kappa\Delta)]v_t + J_t\right) & \text{avec probabilité } \lambda_J\Delta. \end{cases} \quad (5.45)$$

La variable v_t suit une loi normale centrée réduite, et J_t est une variable normale d'espérance μ_J et de variance γ_J^2 . Pour alléger les notations, nous avons omis la lettre Q pour désigner les paramètres risque-neutres. Néanmoins, il est sous-entendu que les paramètres de ce processus de volatilité sont ceux issus de cette mesure.

La seconde étape consiste à générer les rendements sous la mesure objective. Comme la risque-neutralisation ne doit pas altérer les volatilités instantanées afin de préserver la structure du modèle, nous pouvons injecter les h_t dans la discrétisation du processus des rendements. Cette dernière s'écrit :

$$S_t = \begin{cases} S_{t-1} \exp\left[(\alpha_c - h_{t-1}^2/2 - \lambda_Z E(Z))\Delta + h_{t-1}\sqrt{\Delta}u_t\right] \\ \text{avec probabilité } 1 - \lambda_Z\Delta, \text{ ou :} \\ S_{t-1} \exp\left[(\alpha_c - h_{t-1}^2/2 - \lambda_Z E(Z))\Delta + h_{t-1}\sqrt{\Delta}u_t + \ln(1 + Z_t)\right] \\ \text{avec probabilité } \lambda_Z\Delta. \end{cases} \quad (5.46)$$

La variable u_t suit une loi normale centrée réduite, et $\ln(1 + Z_t)$ est une variable normale d'espérance α_Z et de variance σ_Z^2 . Les rendements y_t sont simplement déduits à partir de :

$$y_t = \ln(S_t/S_{t-1}). \quad (5.47)$$

Dans la troisième étape, nous générons T prix d'options qui à chaque date t sont à parité et à un mois de l'échéance. Pour effectuer cela, nous avons besoin d'introduire des quantités supplémentaires. Tout d'abord, le fait que l'option doit être à parité et à un mois de l'échéance chaque jour, implique que le prix d'exercice est défini par $K_t = S_t \exp(r\tau\Delta)$, où $\tau = 22$ représente la durée de vie restante, en jours, de l'option. Le taux d'intérêt sans risque est supposé constant et égal à r . Ensuite, nous avons besoin de connaître les

5.4. Application

paramètres risque-neutres du processus des rendements. En nous référant à la section 5.2.2, nous avons :

$$\lambda_Z^Q = \lambda_Z \exp(-\alpha_Z + \sigma_Z^2/2),$$

et,

$$\alpha_Z^Q = \alpha_Z - \sigma_Z^2/2.$$

Finalement, il nous reste encore à définir la volatilité moyenne espérée de l'option sur sa durée de vie restante. Dans le cadre de données simulées, les volatilités instantanées futures à une date t sont connues. Par conséquent, la volatilité moyenne espérée correspond simplement à la moyenne des volatilités futures, et nous avons :

$$E_t(\bar{V}_{t,t+\tau}) = \frac{1}{\tau} \sum_{i=t}^{t+\tau} h_i^2. \quad (5.48)$$

Disposant de tous ces éléments, nous sommes en mesure d'évaluer le prix d'une option.

Pour simplifier la procédure, nous considérons que les paramètres risque-neutres et ceux sous la mesure objective du processus de rendement coïncident. Évidemment, comme nous l'avons déjà souligné à maintes reprises, cette hypothèse est irréaliste. Pour autant, nous rappelons également que les paramètres risque-neutres du processus des rendements sont entièrement déterminés par les paramètres du processus générateur de données. Ainsi, si notre méthode nous permet d'aboutir à des estimations assez proches des valeurs exactes alors il en découle forcément que les paramètres risque-neutres seront également estimés avec précision.

5.4.2 Performances de l'algorithme

Nous avons effectué les simulations de données selon le modèle de Bates (1996) et selon le modèle SRSVI et ce pour 1000 et 2000 observations. Nous avons choisi des trajectoires assez courtes par rapport aux périodes habituellement choisies par les auteurs. Ce choix nous permet de pouvoir mesurer les performances de notre algorithme sur des échantillons de tailles relativement petites. Ces propos doivent être nuancés puisque 1000 observations, correspondent tout de même à 4 années de cotations. Commentons à présent les valeurs des paramètres choisies. Le nombre attendu de sauts, aussi bien dans les rendements que dans la volatilité, s'élève à 10 par an. Nous espérons ainsi atteindre une qualité acceptable des estimations des autres paramètres de la composante à sauts, à savoir, la taille moyenne et la variance. Les

caractéristiques des sauts dans les rendements sont sélectionnées afin de faciliter leur localisation. Typiquement, pour $\alpha_Z = -0.05$ et $\sigma_Z = 0.01$, les sauts dans les rendements seront quasi-systématiquement négatifs et importants. Au contraire, les sauts dans la volatilité ont des caractéristiques plus floues. Nous savons simplement qu'ils peuvent générer des variations substantielles étant donné la valeur de $\gamma_J = 0.5$.

Nous passons maintenant à l'interprétation des résultats d'estimation pour le modèle de Bates (1996). Celle-ci se fonde sur le tableau 5.4 et la figure 5.2. On peut s'apercevoir que pour une trajectoire de 1000 observations les résultats semblent convenables. En effet, l'ensemble des valeurs estimées sont relativement proches des vraies valeurs, celles-ci étant toujours contenues dans les intervalles de confiance. Pour affiner notre analyse, nous avons reproduit dans la figure 5.2 les différentes quantités simulées c'est-à-dire les rendements, la taille et la date des sauts, et la volatilité instantanée. Nous y avons ajouté la probabilité a posteriori d'avoir un saut et la volatilité instantanée estimée. En comparant les quantités simulées et estimées, on peut s'apercevoir tout d'abord qu'un certain nombre de sauts qui ont effectivement eu lieu (5.2.B), n'ont pas été localisés par notre procédure d'estimation (5.2.C). À l'inverse, certaines variations des rendements (5.2.A) ont été affectées à tort à la composante à sauts. La période des 300 premières observations est particulièrement parlante sur ces points. En regardant attentivement ce morceau de trajectoire, nous pouvons facilement fournir la cause de ces phénomènes. En effet, tandis que la figure (5.2.B) indique clairement qu'il y a des sauts à certaines dates, la figure (5.2.A), retraçant l'évolution des rendements ne semble pas comporter de fortes variations en ces mêmes dates. L'explication tient au fait que le saut a été compensé par une variation positive provenant de la diffusion. Ainsi, notre algorithme n'a pas pu détecter ces sauts puisqu'il n'y avait pas de variations sensibles dans les rendements. De même, le saut qui a été à tort localisé aux environs de la 200-ième observation (figure 5.2.C) s'explique simplement par la présence d'une baisse d'approximativement 5% du support (figure 5.2.A).

Il reste à expliquer comment nous avons pu obtenir une estimation correcte pour λ_Z alors que les sauts estimés et les sauts simulés ne correspondent pas toujours. Notons d'abord que la majorité des sauts simulés ont été effectivement détectés, mais très rarement avec certitude (les probabilités a posteriori sont rarement très proches de 1). Par ailleurs, seules deux variations dans les rendements ont été attribuées à tort à la composante à sauts. Par conséquent, nous devrions avoir une estimation de λ_Z inférieure à sa vraie valeur. Les deux quantités correspondent néanmoins car pour de nombreuses observations, notre algorithme affecte une probabilité non-nulle d'appartenir à la composante à sauts. Cela contribue à augmenter à la fois l'imprécision et

TAB. 5.4 – Résultats d'estimations à partir des données simulées.

Vraies valeurs		<u>Bates</u>		<u>SRSVI</u>	
		1000 obs.	2000 obs.	1000 obs.	2000 obs.
α_c	0	-0.005704 [-0.3420, 0.3339]	-0.04419 [-0.4426, 0.2851]	-0.2270 [-1.141, 0.8353]	0.1650 [-0.5721, 0.3590]
λ_Z	10	11.07 [4.070, 19.79]	17.52 [8.828, 38.94]	54.67 [25.18, 93.92]	9.027 [4.862, 16.48]
α_Z	-0.05	-0.03646 [-0.05782, -0.009700]	-0.03805 [-0.05341, -0.001051]	-0.02087 [-0.03093, 0.001475]	-0.04383 [-0.06557, -0.01566]
σ_Z	0.01	0.01532 [0.008783, 0.02662]	0.01557 [0.01061, 0.02477]	0.01815 [0.01380, 0.02416]	0.01796 [0.01182, 0.02722]
κ	12	9.855 [7.675, 12.94]	9.218 [7.132, 11.31]	12.49 [10.74, 30.19]	11.83 [10.54, 14.67]
ϑ	-3	-2.832 [-3.330, -2.499]	-3.061 [-3.891, -2.382]	-3.265 [-3.877, -2.627]	-2.955 [-3.380, -2.554]
γ	1	0.8211 [0.6505, 1.219]	1.041 [0.7345, 1.756]	1.181 [0.8990, 1.591]	0.9495 [0.8125, 1.194]
λ_J	10	-	-	17.30 [10.74, 30.19]	15.55 [11.08, 24.61]
μ_J	0.05	-	-	0.2168 [0.01490, 0.4335]	0.1329 [0.01282, 0.2350]
γ_J	0.5	-	-	0.6391 [0.4495, 0.9609]	0.4713 [0.3929, 0.5641]

Les résultats entre crochets sont les bornes des intervalles de confiance à 95 %

la valeur estimée pour λ_Z . D'autre part, cela a également des conséquences sur les estimations de α_Z et σ_Z .

Maintenant, en comparant la volatilité estimée et la volatilité simulée (figure 5.2.D), on constate une certaine similitude entre ces deux trajectoires. Pour autant, la volatilité estimée semble souffrir d'un certain biais, puisque sa trajectoire se situe quasi-systématiquement en dessous de la volatilité simulée. Ceci explique évidemment les différences observées entre les estimations des paramètres du processus de volatilité et les vraies valeurs.

En augmentant le nombre d'observations, on s'attend à ce que les estimations soient plus précises. Ici, ce n'est pas réellement le cas. Certains paramètres du processus de volatilité sont certes plus proches de leurs vraies valeurs, comme ϑ et γ . En revanche l'intervalle de confiance de κ ne comprend plus la valeur exacte.¹⁰ De même, la fréquence des sauts paraît plus importante et plus imprécise que dans le cas où nous avons produit 1000 observations. Il semblerait donc qu'une augmentation plus conséquente du nombre d'observations soit nécessaire pour obtenir des estimations précises des paramètres du modèle de Bates (1996).

Nous étudions à présent les résultats d'estimation pour le modèle SRSVI. Les valeurs estimées sont répertoriées dans le tableau 5.4. La première constatation flagrante est l'imprécision des résultats obtenus à partir d'un échantillon de 1000 observations. La qualité de l'estimation des paramètres des fréquences et de l'amplitude moyenne des sauts, aussi bien dans les rendements que dans la volatilité, est insatisfaisante. Notons que ces estimations sont issues de 3 chaînes différentes, et que pour chacune d'elles nous avons obtenu des résultats similaires. En augmentant la taille de l'échantillon, nous obtenons les résultats escomptés. De nombreux points ne donnent pas entière satisfaction, mais l'amélioration est assez nette. Par exemple, les paramètres de la partie continue du processus de volatilité sont assez proches de leurs vraies valeurs. La fréquence estimée des sauts dans la volatilité apparaît être surestimée. Il en est de même de l'amplitude moyenne de ces sauts. En revanche, la qualité de l'estimation du paramètre de volatilité de ces sauts est satisfaisante. En observant la figure 5.3.A, qui vise à comparer la volatilité simulée et la volatilité estimée, on s'aperçoit que, malgré les écarts entre les paramètres estimés et leurs vraies valeurs, les deux trajectoires sont quasiment confondues. Il peut sembler paradoxal que le modèle SRSVI donne de meilleurs résultats sur ce plan que le modèle de Bates (1996), étudié précédemment. Deux réponses peuvent être apportées pour expliquer ce phéno-

¹⁰ Comme notre étude ne comporte qu'un seul échantillon simulé, ce propos doit être nuancé. Seule une réelle étude de Monte Carlo portant sur plusieurs milliers de trajectoires permettrait d'affirmer si l'estimation de κ est systématiquement biaisée ou non.

5.4. Application

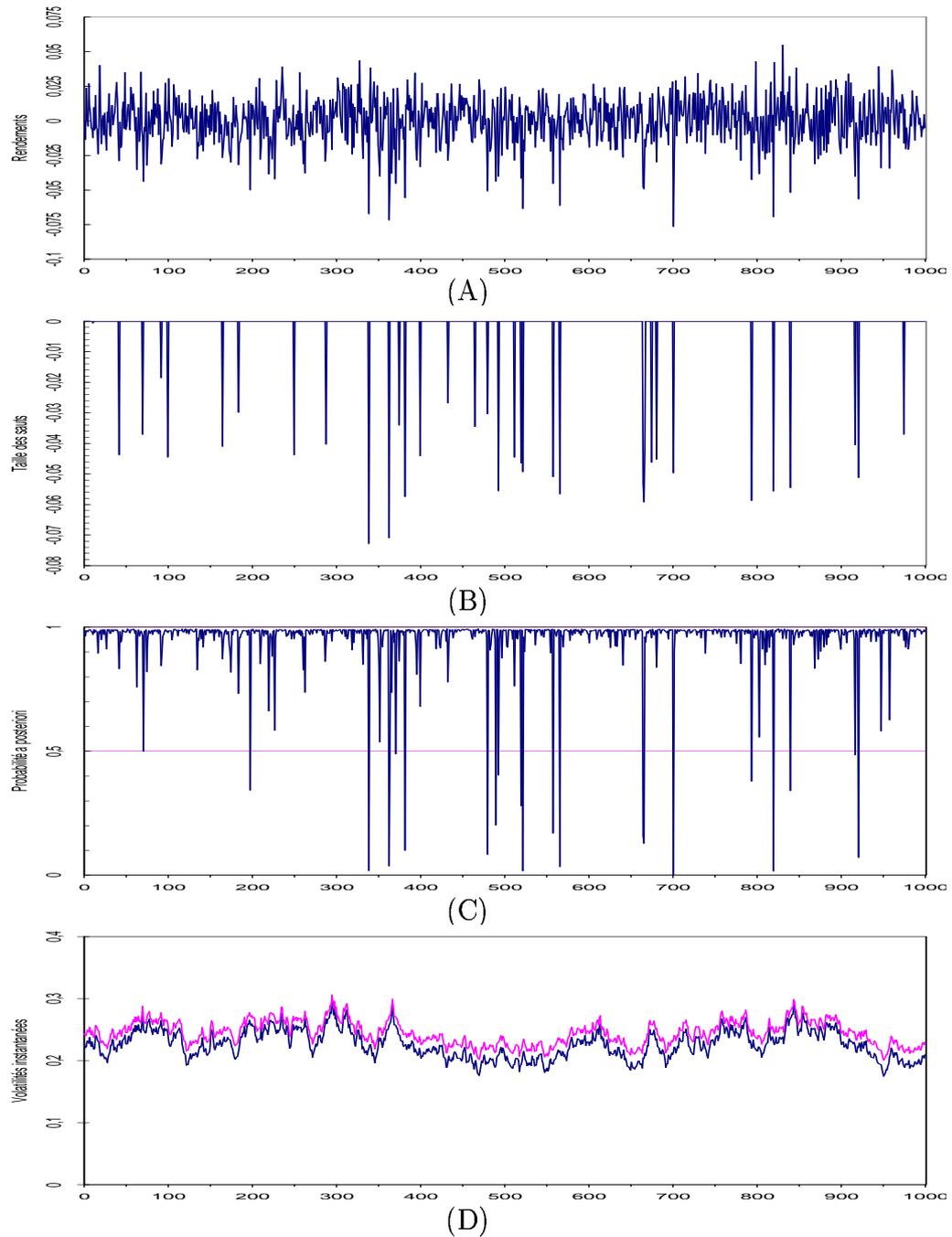


FIG. 5.2 – Étude des résultats d'estimation du modèle de Bates (1996). En partant du haut, le graphique A représente les rendements simulés, le graphique B désigne la taille des sauts simulés, le graphique C représente les probabilités estimées qu'une observation appartienne à la diffusion, enfin le graphique D permet de comparer la volatilité instantanée générée (tracé claire) à la volatilité instantanée estimée.

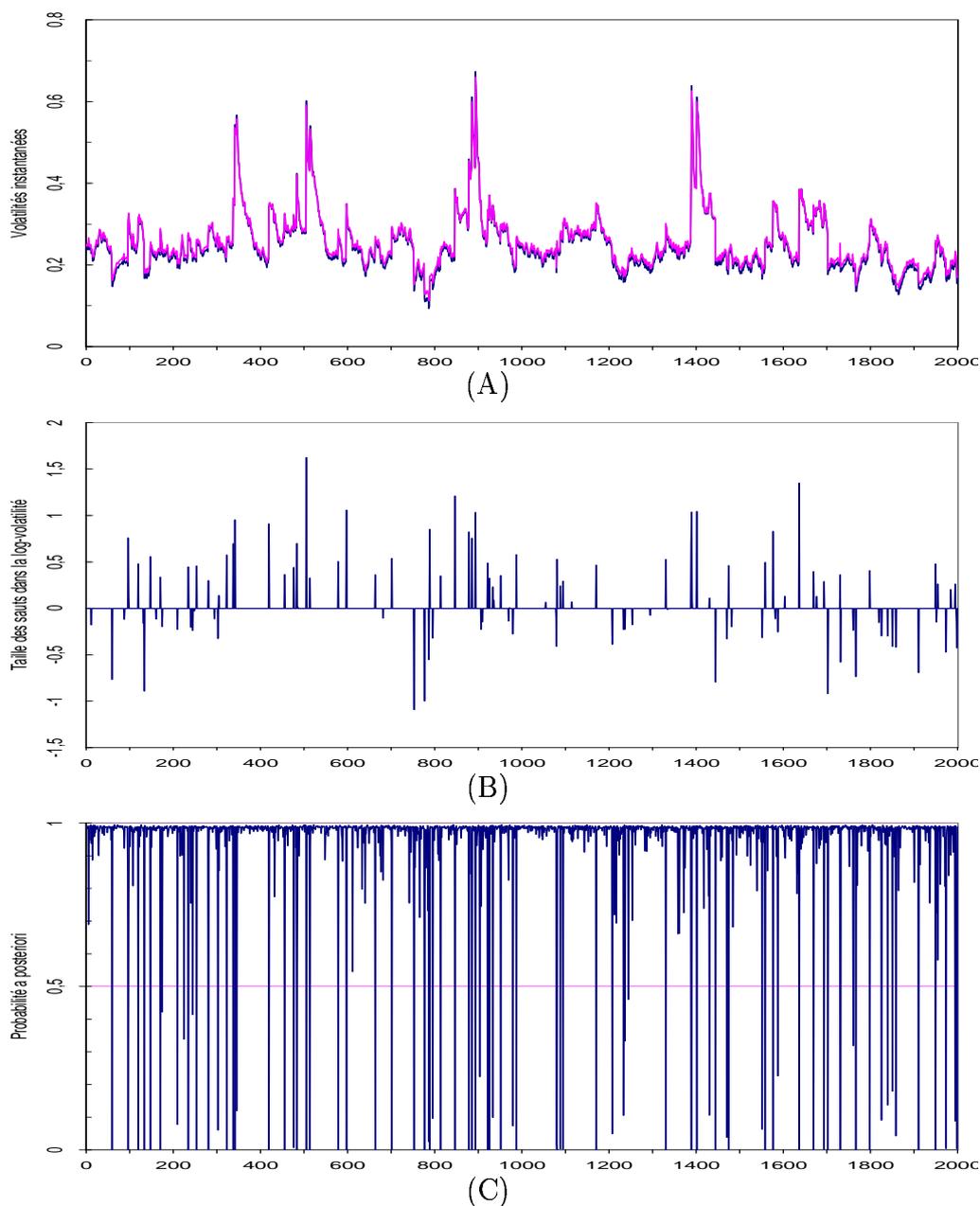


FIG. 5.3 – Étude des sauts dans le processus de volatilité. Le graphique A permet de comparer les trajectoires de volatilité simulée (tracé clair) et estimée. Le graphique B indique la date et l'amplitude des sauts qui ont été générées. Le graphique C donne la probabilité a posteriori pour une observation d'appartenir à la partie continue du processus de volatilité.

5.4. Application

mène. La première consiste simplement à faire remarquer que pour le modèle de Bates (1996), nous avons reporté les deux trajectoires de volatilité pour un échantillon de 1000 observations alors qu'ici, il y a 2000 observations. Néanmoins, nous avons également vu que l'augmentation de la taille de l'échantillon dans le contexte du modèle de Bates (1996) ne conduisait pas à une précision de l'estimation aussi grande que celle constatée avec le modèle SRSVI. Nous pensons donc que la principale explication réside dans la capacité de la composante à sauts à absorber toutes les variations suspectes présentes dans l'évolution de la volatilité instantanée. En effectuant ce travail de "nettoyage", la composante à sauts évacue toutes les observations qui pourraient poser problème à la partie continue du processus. Les observations restantes permettent alors de mieux cerner les caractéristiques de cette dernière.

De plus, on peut noter la précision remarquable avec laquelle la procédure d'estimation détecte les sauts dans la volatilité (figures 5.3.B et 5.3.C). Les probabilités a posteriori sont souvent soit proches de 0, et font donc correspondre l'observation à la partie continue du processus de volatilité, soit proches de 1, et l'observation appartient avec certitude à la composante à sauts. Hormis les sauts de taille minimale, qui deviennent de par leur ampleur indistinguables par rapport à des variations produites par la partie continue du processus de volatilité, les autres sont clairement identifiés. Ces résultats viennent atténuer les réserves que l'on peut émettre concernant la valeur estimée de λ_J .

Nous passons finalement à l'étude du comportement de notre méthode d'estimation en ce qui concerne le processus des rendements. Nous pouvons d'abord remarquer l'étendue assez large de l'intervalle de confiance pour α_c . Ce résultat est assez surprenant : on s'attend à ce que ce paramètre soit estimé avec davantage de précision puisque l'ensemble des observations y contribue. Lorsque nous nous intéressons à la composante à sauts, nous constatons que la fréquence λ_Z et l'amplitude moyenne des sauts α_Z sont assez proches de leurs vraies valeurs. De manière générale, les constatations faites pour le modèle de Bates (1996) concernant la composante à sauts dans les rendements peuvent être reprises ici. Elles peuvent être vérifiées à partir de la figure 5.4. À nouveau, l'estimation de σ_Z présente clairement un biais. Nous pouvons nous interroger ici sur la pertinence de notre reparamétrisation effectuée lors de la discrétisation. Rappelons que nous avons posé :

$$\sigma_t^2 \Delta + \sigma_Z^2 = \sigma_t^2 \Delta \tilde{\sigma}^2,$$

de sorte que l'estimation pratique de σ_Z s'effectue à partir de :

$$\sigma_Z^2 = \sigma_t^2 \Delta (\tilde{\sigma}^2 - 1),$$

ou, plus précisément :

$$\sigma_Z^2 = \frac{\sum_{t \in S_Z} \sigma_t^2 \Delta (\tilde{\sigma}^2 - 1)}{n_Z},$$

où n_Z indique le nombre d'observations affectées à la composante à sauts, et S_Z l'ensemble de ses observations. Le but de la manoeuvre est de pouvoir attribuer à $\tilde{\sigma}^2$ une loi conjuguée inverse-gamma dont il est facile d'obtenir des tirages. Il serait peut être préférable de générer les σ_Z^2 directement à partir d'une étape de Metropolis-Hastings.

5.5 Conclusion et extensions

Dans ce dernier chapitre, nous nous sommes proposé d'étudier un nouveau type de modèle comportant des sauts dans les rendements et dans la volatilité. La différence essentielle avec d'autres modèles comparables est la possibilité d'avoir des sauts négatifs dans la volatilité. Nous avons ensuite discuté des procédés de risque-neutralisation envisageables pour obtenir notre version du modèle tenant compte de l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage. Puis, nous avons poursuivi en fournissant une formule assez simple pour évaluer le prix des options de type européen. Plus précisément, le prix de l'option peut être interprété comme une moyenne sur la volatilité de prix issus de la formule de Merton (1976). Quelques exemples nous ont permis d'illustrer les capacités de notre modèle à générer des surfaces de volatilité très souples, qui justifient à elles seules l'intérêt qu'il faut porter à ce type de modèle. Dans un second temps, nous nous sommes proposé d'établir une méthode d'estimation basée sur deux sources de données, les rendements et l'indice de volatilité implicite. Le but était de pouvoir estimer l'ensemble des paramètres du modèle risque-neutre. Malheureusement, de nombreux résultats facilitant la mise en oeuvre de l'algorithme décrit dans le chapitre 4 disparaissent lorsqu'on introduit des sauts dans les rendements. Faute de résultats mathématiques, nous avons été contraints d'émettre une hypothèse forte pour pouvoir établir un lien exploitable entre volatilité implicite et volatilité instantanée. L'idée de la méthode d'estimation que nous avons présentée restera néanmoins valable dès lors que nous parviendrons à établir de manière plus précise le lien entre ces deux quantités. Ce manque de résultats nous a empêché d'effectuer une application de notre algorithme directement sur des données réelles. Nous avons donc procédé à une simulation de données qui respecte les conditions nécessaires pour pouvoir mettre en oeuvre notre méthode d'estimation.

5.5. Conclusion et extensions

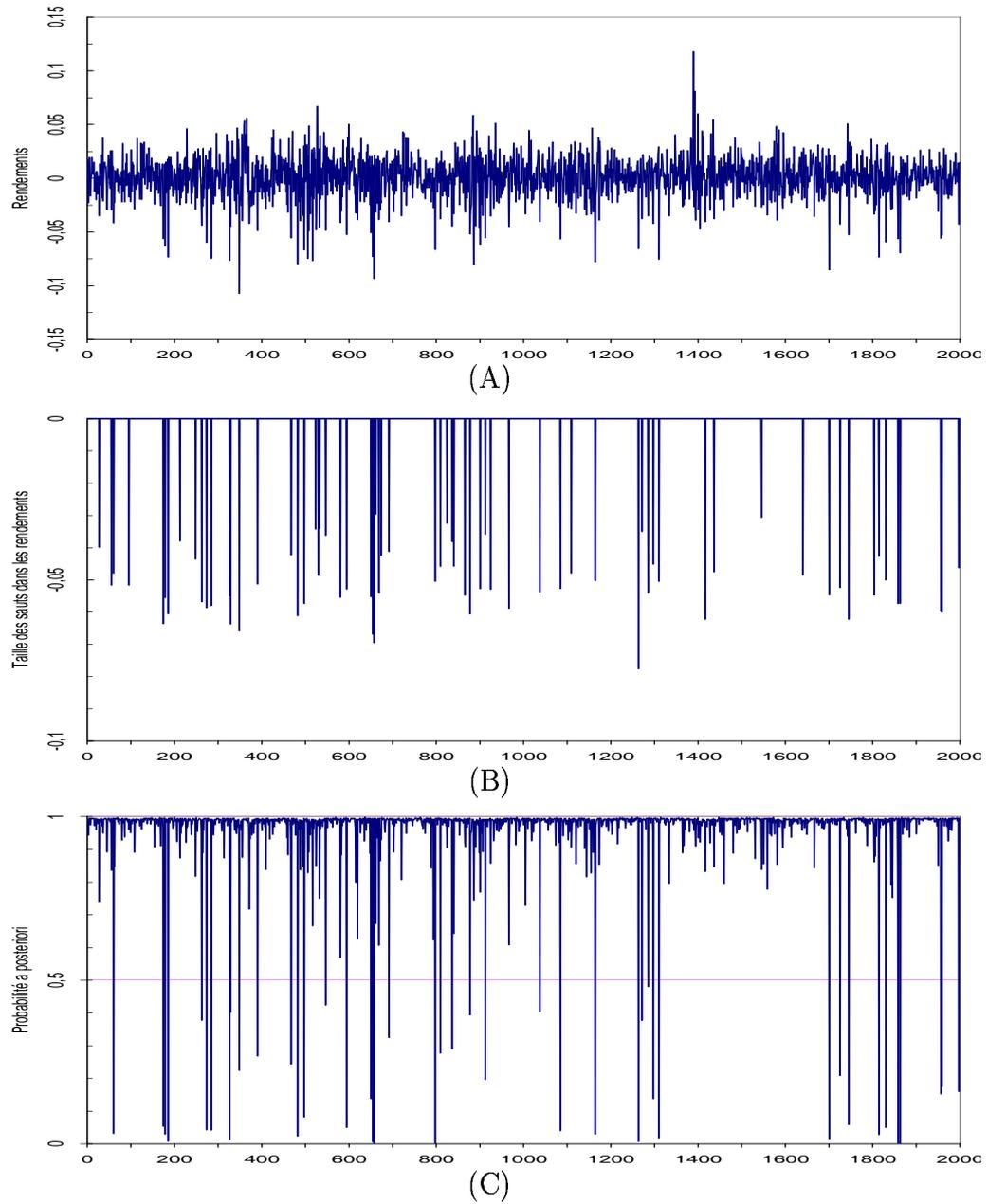


FIG. 5.4 – Étude des sauts dans le processus des rendements.

L'analyse des performances de notre algorithme a permis de faire ressortir des résultats encourageants.

La suite logique de cette étude est de fournir une expression analytique (ou au moins quasi-analytique) pour les quantités $E(\bar{V}^2)$ et $E(\bar{V}^3)$. En d'autres mots, il s'agit de pouvoir calculer les moments d'ordre 2 et 3 de la volatilité moyenne. Il faut noter que ces moments peuvent être déduits aisément pour les modèles du type CIR ou Ornstein-Uhlenbeck simple. Par exemple, ils peuvent l'être à partir de la fonction génératrice des moments ou de la fonction caractéristique du processus de volatilité (voir par exemple Ball et Roma, 1994 ou Bollerslev et Zhou, 2002). Malheureusement, le modèle LOG-OU ne se prête pas à l'utilisation de tels outils et il faudra trouver une autre voie.

Lorsque cette étape sera franchie, plusieurs extensions pourront être envisagées à partir de notre étude. La première consisterait à étendre le modèle à une corrélation non-nulle entre les rendements et la volatilité. La présence d'une telle corrélation a été largement documentée dans la littérature et sa modélisation semble nécessaire. Il faudra néanmoins s'assurer que dans ce cas un lien, même numérique, peut être établi entre volatilité implicite et volatilité instantanée. Dans le même ordre d'idées, on pourrait envisager d'enrichir le modèle en considérant d'autres lois pour la composante à sauts. Ceci concerne aussi bien l'intensité des processus de Poisson que les distributions à partir desquelles la taille des sauts est générée. Nous avons toujours supposé que les sauts étaient issus d'une loi normale forcément symétrique. D'autres lois, comme un mélange de lois normales, sont certainement plus aptes à capturer la diversité des sauts. Enfin, une troisième piste à explorer est la comparaison statistique des différents modèles.

Dans un autre registre, il sera nécessaire de revenir sur la spécification des primes associées aux différentes sources de risque. Tout d'abord, il faudra, en partant du travail de Bakshi et Cao (2002), déterminer exactement l'impact que peut avoir la risque-neutralisation sur les paramètres des sauts dans la volatilité. D'autre part, nous devons nous attacher à donner des formes plus souples aux primes de risque qui correspondent aux sauts dans les rendements. En effet, avec des préférences logarithmiques, les paramètres risque-neutres déduits des travaux de Bates (1988) ne diffèrent que peu de ceux du processus sous la mesure objective. Or, Pan (2002) suggère qu'au contraire l'aversion des agents face au risque de sauts est importante et que les paramètres sous les deux mesures diffèrent fortement.

Enfin, on peut légitimement se demander si nous n'avons pas atteint les limites du modèle LOG-OU ainsi que son pendant LOG-OUS comportant des sauts. Ce dernier offre certes des avantages, par exemple des sauts négatifs dans la volatilité sont facilement pris en compte ou encore la loi de la

log-volatilité est un mélange de lois normales. Toutefois, comparé au modèle fondé sur un processus à la Cox-Ingersoll-Ross, il n'offre pas assez de manipulabilité mathématique pour pouvoir subir facilement des extensions. Un exemple frappant à ce sujet est fourni par les difficultés que nous rencontrons à calculer les moments de notre processus de volatilité par rapport à la facilité de leur obtention dans le cas Cox-Ingersoll-Ross. Cette différence a des répercussions immédiates, non seulement sur la façon d'évaluer les options mais aussi sur les méthodes d'estimation. Par exemple, l'idée de l'utilisation de l'indice de volatilité peut facilement être adaptée aux cas Cox-Ingersoll-Ross, avec ou sans sauts, et le lien entre volatilité instantanée et volatilité implicite y est bien plus simple à établir.

Conclusion générale

Si la prise en compte de discontinuités dans l'évolution du cours du support date des travaux de Merton (1976), ce n'est que très récemment que les sauts dans la volatilité ont été modélisés par Duffie *et al.* (2000). Nos travaux s'inscrivent dans ce courant de littérature naissant qui prend lui-même sa source dans un domaine bien plus ancien de la finance visant : 1) à fournir le prix théorique d'une option, et 2) à expliquer son prix observé, de la manière la plus précise possible. Parallèlement à cette recherche ayant pour but une meilleure adéquation entre la modélisation et la réalité, se pose également le problème de l'estimation des paramètres de modèles de plus en plus sophistiqués. L'objet principal de nos travaux a donc été d'estimer des modèles destinés à l'évaluation de prix d'options et contenant des sauts dans le processus de volatilité du sous-jacent.

Pour atteindre cet objectif, nous avons, dans un premier chapitre, présenté les principaux modèles d'évaluation du prix d'une option. Il s'agissait du modèle de Black et Scholes (1973), des modèles à volatilité stochastique introduits par Hull et White (1987) et des modèles à sauts du type Merton (1976). Pour chacun de ces modèles, nous avons détaillé la prise en compte de l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage puis décrit les calculs menant à l'obtention d'une formule du prix d'une option. Nous avons également illustré sur chaque modèle ses capacités à capturer les phénomènes empiriques établis dans la littérature et mis en évidence ses limites.

Dans le second chapitre, nous avons revu les principales méthodes d'estimation disponibles. Nous avons constaté qu'en quittant le contexte à la Black et Scholes, les autres modèles présentaient tous une structure latente. Nous avons en particulier insisté sur les façons de contourner le problème de l'inobservabilité de la volatilité instantanée pour les modèles à volatilité stochastique, par exemple en utilisant des prix d'options. L'estimation des modèles à sauts nous a, quant à elle, poussé à étudier les modèles de mélange de lois. Dans les deux cas, nous avons privilégié la description des études utilisant l'approche Bayésienne, celle-ci étant particulièrement adaptée pour traiter ce type de problème.

Ces deux premiers chapitres nous ont permis de donner les éléments essentiels servant de base à la partie originale de notre travail qui débute au chapitre 3. Dans ce chapitre, nous sommes parti d'un modèle à volatilité stochastique standard où la volatilité est régie selon un processus Ornstein-Uhlenbeck dans sa version logarithmique (LOG-OU). Cette spécification a été fréquemment employée dans la littérature pour décrire le processus de volatilité et constitue une alternative à la modélisation du type Cox-Ingersoll-Ross (CIR). En y incorporant une composante à sauts, nous avons obtenu un nouveau modèle nommé LOG-OUS. Celui-ci apparaît comme étant plus flexible que son homologue CIRS car il supporte une distribution de sauts qui ne génère pas systématiquement des sauts positifs de la volatilité, mais peut également produire des décrochages. Après avoir discuté la risque-neutralisation du modèle, nous avons fourni une formule quasi-analytique et une méthode numérique pour parvenir à calculer le prix d'une option de type européen.

Dans le quatrième chapitre, nous nous sommes penché sur l'estimation des paramètres risque-neutres des modèles LOG-OU et LOG-OUS. Nous avons montré que l'utilisation de l'indice de volatilité, délivré par le MONEP, se révélait être un choix particulièrement judicieux. En effet, outre sa capacité à véhiculer de l'information concernant la volatilité future, nous avons établi que l'indice est relié à la volatilité instantanée inobservable. Ceci nous a permis de contourner le problème de structure latente inhérent aux modèles à volatilité stochastique. Notre méthode d'estimation s'avère simple à mettre en oeuvre et rapide. D'autre part, comme l'indice est issu du marché des options, il offre la possibilité d'estimer directement les paramètres des modèles sous leur version neutre au risque. De fait, les résultats d'estimation peuvent être directement employés pour évaluer le prix des options. Enfin, et comme l'ont déjà souligné d'autres auteurs ayant traité ce point, nous avons remarqué qu'il existait une divergence dans les estimations, non-justifiée théoriquement, suivant les sources de données utilisées (options ou rendements).

Finalement, dans le cinquième chapitre, nous avons proposé notre modèle le plus abouti, comportant des sauts dans la volatilité et les rendements. Nous avons fourni une procédure d'évaluation du prix des options et illustré les capacités de ce modèle à produire des surfaces de volatilité très souples. Nous avons également développé une méthode d'estimation reposant sur deux sources de données, les rendements et l'indice de volatilité, et permettant de déterminer les paramètres sous une mesure risque-neutre. L'absence, pour l'heure, de certains résultats mathématiques concernant les moments de la volatilité intégrée, nous a empêché d'appliquer notre méthode à des données réelles. En revanche, notre illustration sur des données simulées est porteuse d'espoir sur les performances potentielles de cet algorithme.

À l'issue de cette étude, il nous semble que quatre grandes pistes de recherche pourraient être empruntées. La première consisterait à poursuivre le travail entrepris dans le dernier chapitre. Il s'agirait d'abord d'appliquer la méthode d'estimation à des données réelles. Ceci implique notamment la détermination des moments de la volatilité intégrée afin d'avoir accès à une procédure rapide d'évaluation du prix d'une option. Toujours dans ce contexte LOG-OUS, il nous semble primordial de prendre en compte la corrélation entre la volatilité et le sous-jacent, jusqu'ici supposée nulle. Les travaux de Romano et Touzi (1997) pourraient servir de point de départ pour une telle extension.

La seconde voie possible serait d'appliquer notre méthode d'estimation à un modèle dont la spécification de la volatilité est du type CIRS, modèle proposé par Duffie *et al.* (2000) et repris, entre autres, par Eraker (2004). Il en découlerait immédiatement que nous aurions à notre disposition une formule d'évaluation qui permet de déterminer très rapidement le prix d'une option. Ceci résoudrait la difficulté rencontrée dans le chapitre 5. L'idée de la méthode d'estimation serait strictement la même et le seul changement notable que le choix d'une spécification CIRS induirait concernerait la fonction de densité de la volatilité. Celle-ci ne serait plus un mélange de lois normales mais un mélange d'une loi normale avec une loi résultant de l'addition d'une variable gaussienne à une variable exponentielle. Il suffirait alors de se référer aux études d'Eraker *et al.* (2003) ou Raggi (2005) pour obtenir une façon de traiter ce type de mélanges.

La troisième piste de recherche devrait nous amener à valider empiriquement l'existence des sauts, aussi bien dans le support que dans sa volatilité. En effet, si nous avons illustré les capacités de nos différents modèles à générer des surfaces de volatilité souples, nous n'avons jamais testé les différentes spécifications ou vérifié que le gain, en termes d'adéquation aux données, était substantiel.

Enfin, une dernière voie qu'il faudrait explorer concernerait les procédures de risque-neutralisation. Ce domaine d'investigation constitue davantage un nouvel axe de recherche qu'une simple extension. Ce travail s'avère pourtant indispensable pour apporter des réponses satisfaisantes aux difficultés posées par la réconciliation des différentes sources de données. Il nécessitera, d'une part, la maîtrise d'autres techniques de risque-neutralisation, plus générales que le théorème de Girsanov. Par exemple, l'application de celui-ci, dans le cadre des modèles à sauts, n'autorise qu'un changement de la fréquence d'apparition des sauts. Or, l'utilisation de la transformée d'Esscher permet d'aboutir à une version risque-neutre plus souple où la taille espérée des sauts est également modifiée. Broadie *et al.* (2004) vont plus loin encore en montrant que le paramètre de variance de la distribution des sauts

CONCLUSION GÉNÉRALE

peut lui aussi subir un changement. Ces avancées mathématiques peuvent expliquer les différences des résultats d'estimation selon la source de données utilisée. En revanche, ces procédés n'établissent pas un lien explicite entre les paramètres risque-neutres et ceux de la mesure objective. Il faudra donc, d'autre part, construire un modèle d'équilibre général à l'instar de Cox *et al.* (1985), Bates (1988, 1996) ou Bakshi et Cao (2002), afin de déterminer les hypothèses d'ordre économique qui permettent l'obtention de spécifications souples (par exemple non suridentifiées, comme c'est le cas pour les modèles à volatilité stochastique) pour les différentes primes de risque.

Bibliographie

- ABRAMOVITZ, M., ET N. STEGUN (1970) : *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications Inc., New-York.
- AHN, C. (1992) : “Option Pricing when Jump Risk is Systematic,” *Mathematical Finance*, 2, 299–308.
- AMIN, K. (1993) : “Jump-Diffusion Option Valuation in Discrete Time,” *Journal of Finance*, 48, 1833–1863.
- ANDERSEN, T. (1994) : “Stochastic Autoregressive Volatility : A Framework for Volatility Modelling,” *Mathematical Finance*, 4, 75–102.
- ANDERSEN, T., L. BENZONI, ET J. LUND (2002) : “An Empirical Investigation of Continuous-Time Equity Return Models,” *Journal of Finance*, 57, 1239–1284.
- ANDERSEN, T., T. BOLLERSLEV, F. DIEBOLD, ET H. EBENS (2001) : “The Distribution of Realized Stock Return Volatility,” *Journal of Financial Economics*, 61, 43–76.
- ANDERSEN, T., T. BOLLERSLEV, F. DIEBOLD, ET P. LABYS (2002) : “Modeling and Forecasting Realized Volatility,” Document de travail, University of Pennsylvania.
- ANDERSEN, T., T. BOLLERSLEV, ET N. MEDDAHI (2004) : “Analytical Evaluation of Volatility Forecasts,” *International Economic Review*, 45, 1079–1110.
- ANDERSEN, T., ET J. LUND (1997) : “Estimating Continuous-Time Stochastic Volatility Models of the Short-Term Interest Rate,” *Journal of Econometrics*, 77, 343–377.
- ANDERSEN, T., ET B. SORENSEN (1996) : “GMM Estimation of a Stochastic Volatility Model : A Monte Carlo Study,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 14, 328–352.
- ARTIGAS, J., ET R. TSAY (2004) : “Efficient Estimation of Stochastic Diffusion Models with Leverage Effects and Jumps,” Document de travail, University of Chicago.

BIBLIOGRAPHIE

- AÏT-SAHALIA, Y., ET R. KIMMEL (2004) : “Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Volatility Model,” Document de travail, Princeton University.
- BAKSHI, G., ET C. CAO (2002) : “Risk Neutral Kurtosis, Jumps, and Option Pricing : Evidence from 100 Most Actively Traded Firms on the CBOE,” Document de travail, University of Maryland.
- BAKSHI, G., C. CAO, ET Z. CHEN (1997) : “Empirical Performance of Alternative Pricing Models,” *Journal of Finance*, 52, 499–547.
- BAKSHI, G., ET D. MADAN (2000) : “Spanning and Derivative-Security Valuation,” *Journal of Financial Economics*, 55, 205–238.
- BALL, C., ET A. ROMA (1994) : “Stochastic Volatility Option Pricing,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, 589–607.
- BALL, C., ET W. TOROUS (1983) : “A Simplified Jump Processes for Common Stock Returns,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 18, 53–65.
- (1985) : “On Jumps in Common Stock Prices and their Impacts on Call Option Pricing,” *Journal of Finance*, 40, 155–173.
- BARNDORFF-NIELSEN, O., ET N. SHEPARD (2002) : “Econometric Analysis of Realised Volatility and its Use in Estimating Stochastic Volatility Models,” *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 64, 253–280.
- BATES, D. (1988) : “Pricing Options on Jump-Diffusion Processes,” Document de travail, Wharton School, University of Pennsylvania.
- (1991) : “The Crash of 87 : Was it Expected? The Evidence from Options Markets,” *Journal of Finance*, 46, 1009–1044.
- (1996) : “Jumps and Stochastic Volatility : Exchange Rate Processes Implicit in Deutsche Mark Options,” *Review of Financial Studies*, 9, 69–107.
- (2000) : “Post-87 Crash Fears in the S& P 500 Futures Option Market,” *Journal of Econometrics*, 94, 181–238.
- BAUWENS, L., ET M. LUBRANO (2002) : “Bayesian Option Pricing Using Asymmetric GARCH Models,” *Journal of Empirical Finance*, 9, 321–344.
- BECKAERT, G., ET G. WU (2000) : “Asymmetric Volatility and Risk in Equity Market,” *Review of Financial Studies*, 13, 1–42.
- BECKERS, S. (1980) : “The Constant Elasticity of Variance Model and its Implications for Option Pricing,” *Journal of Finance*, 35, 661–673.
- (1981a) : “A Note on Estimating Parameters of a Jump-Diffusion Process of Stock Returns,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 16, 127–140.

BIBLIOGRAPHIE

- (1981b) : “Standard Deviations Implied in Options Prices,” *Journal of Banking and Finance*, 5, 363–381.
- BEINERT, M., ET S. TRAUTMANN (1995) : “Stock Price Jumps and Their Impacts on Option Valuation,” Document de travail, Johannes Gutenberg-Universität Main.
- BERKHOF, J., I. VAN MECHELEN, ET A. GELMAN (2003) : “A Bayesian Approach to the Selection and Testing of Mixture Models,” *Statistica Sinica*, 13, 423–442.
- BLACK, F. (1975) : “Fact and Fantasy in the Use of Options,” *Financial Analyst Journal*, 31, 36–72.
- (1976a) : “The Pricing of Commodity Contracts,” *Journal of Financial Economics*, 3, 167–179.
- (1976b) : “Studies of Stock Price Volatility Changes,” *Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, pp. 177–181.
- BLACK, F., ET M. SCHOLES (1973) : “The Pricing of Options and Corporate Liabilities,” *Journal of Political Economy*, 81, 637–659.
- BLATTBERG, R., ET M. GONEDDES (1974) : “A Comparison of the Stable and Student Distribution as Statistical Models for Stock Prices,” *Journal of Business*, 47, 244–280.
- BOLLERSLEV, T. (1986) : “Generalized Autoregressive Conditionnal Heteroskedasticity,” *Journal of Econometrics*, 31, 307–327.
- BOLLERSLEV, T., R. CHOU, ET K. KRONER (1992) : “ARCH Modelling in Finance : A Review of the Theory and Empirical Evidence,” *Journal of Econometrics*, 52, 5–59.
- BOLLERSLEV, T., R. ENGLE, ET D. NELSON (1994) : *ARCH Models* vol. 4, chap. 49, pp. 2961–3038. Elsevier Science, Amsterdam.
- BOLLERSLEV, T., ET H. ZHOU (2002) : “Estimating Stochastic Volatility Diffusion Using Conditional Moments of Integrated Volatility,” *Journal of Econometrics*, 109, 33–65.
- BOYLE, P., M. BROADIE, ET P. GLASSERMAN (1997) : “Monte Carlo Methods for Security Pricing,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21, 1267–1321.
- BRACE, A., D. GATAREK, ET M. MUSIELA (1997) : “The Market Model of Interest Rate Dynamics,” *Mathematical Finance*, 7, 127–155.
- BRENNER, M., ET D. GALAI (1993) : “Hedging Volatility in Foreign Currencies,” *Journal of Derivatives*, 1, 53–59.

BIBLIOGRAPHIE

- BRENNER, M., E. OU, ET J. ZHANG (2003) : “Hedging Volatility Risk,” Document de travail, New York University, Salomon Brothers Center.
- BRIGO, D., ET F. MERCURIO (2000) : “Fitting Volatility Skews and smiles with Analytical Stock-Price Models,” Document de travail, Banca IMI.
- (2002) : “Log-Normal Mixture Dynamics and Calibration to Market Volatility Smiles,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 5, 427–446.
- BROADIE, M., M. CHERNOV, ET M. JOHANNES (2004) : “Model Specification and Risk Premia : Evidence from Futures Options,” Document de travail, Columbia University.
- BROADIE, M., J. DETEMPLE, E. GHYSELS, ET O. TÒRRES (2000) : “American Options with Stochastic Volatility and Dividends : A Nonparametric Investigation,” *Journal of Econometrics*, 94, 53–92.
- BROTO, C., ET E. RUIZ (2002) : “Estimation Methods for Stochastic Volatility Models : A Survey,” Document de travail, Universidad Carlos III, Departamento de Estadística y Econometría.
- BROZE, L., O. SCAILLET, ET J.-M. ZAKOÏAN (1995) : “Testing for Continuous Time Models of the Short Term Interest Rate,” *Journal of Empirical Finance*, 2, 199–223.
- CAMPBELL, J., A. LO, ET A. MACKINLAY (1997) : *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, New Jersey.
- CANINA, L., ET S. FIGLEWSKI (1993) : “The Informational Content of Implied Volatility,” *Review of Financial Studies*, 6, 659–682.
- CARNERO, M., D. PEÑA, ET E. RUIZ (2001) : “Is Stochastic Volatility More Flexible Than Garch?,” Document de travail, Universidad Carlos III, Departamento de Estadística y Econometría.
- CARR, P., ET D. MADAN (1998) : “Option Valuation using the Fast Fourier Transform,” *Journal of Computational Finance*, 2, 61–73.
- CARRASCO, M., M. CHERNOV, J.-P. FLORENS, ET E. GHYSELS (2003) : “Efficient Estimation of Jump Diffusions and General Dynamic Models with a Continuum of Moment Conditions,” Document de travail, CIRANO, Université de Montréal.
- CARRASCO, M., ET J.-P. FLORENS (2000) : “Estimation of a Mixture via the Empirical Characteristic Function,” Document de travail, Econometric Society World Congress 2000 Contributed Papers.
- CELEUX, G., ET J. DIEBOLT (1992) : “A Classification type EM Algorithm for the Mixture Problem,” *Stochastics and Stochastics Reports*, 41, 119–134.

BIBLIOGRAPHIE

- CELEUX, G., F. FORBES, C. ROBERT, ET D. TITTERINGTON (2003) : “Deviance Information Criteria for Missing Data Models,” *Cahiers du CEREMADE*, 0325.
- CHACKO, G., ET L. VICEIRA (2003) : “Spectral GMM Estimation of Continuous-Time Processes,” *Journal of Econometrics*, 116, 259–292.
- CHEN, J., H. HONG, ET J. STEIN (2001) : “Forecasting Crashes : Trading Volume, Past Returns and Conditional Skewness in Stock Prices,” *Journal of Financial Economics*, 61, 345–381.
- CHEN, R.-R., ET L. SCOTT (2004) : “Stochastic Volatility and Jumps in Interest Rates : An Empirical Analysis,” Document de travail, Rutgers University.
- CHERNOV, M., A. GALLANT, E. GHYSELS, ET G. TAUCHEN (1999) : “A New Class of Stochastic Volatility Models with Jumps : Theory and Estimation,” Document de travail, CIRANO.
- (2003) : “Alternative Models of Stock Price Dynamics,” *Journal of Econometrics*, 116, 225–257.
- CHERNOV, M., ET E. GHYSELS (2000) : “Towards a Unified Approach to the Joint Estimation of Objective and Risk Neutral Measures for the Purpose of Options Valuation,” *Journal of Financial Economics*, 56, 407–458.
- CHESNEY, M., ET L. SCOTT (1989) : “Pricing European Currency Options : A Comparison of the Modified Black-Scholes Model and a Random Variance Model,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 24, 267–284.
- CHIB, S. (1995) : “Marginal Likelihood from the Gibbs Output,” *Journal of the American Statistical Association*, 90, 1313–1321.
- CHIRAS, D., ET S. MANASTER (1978) : “The Information Content of Options Prices and a Test of Market Efficiency,” *Journal of Financial Economics*, 6, 213–234.
- CHOURDAKIS, K. (2004) : “Non-Affine Option Pricing,” *Journal of Derivatives*, 11, 10–25.
- CHRISTENSEN, B., ET N. PRABHALA (1998) : “The Relation between Implied and Realized Volatility,” *Journal of Financial Economics*, 50, 125–150.
- CHRISTIE, A. (1982) : “The Stochastic Behavior of Common Stock Variances : Value, Leverage and Interest Rate Effects,” *Journal of Financial Economics*, 10, 407–432.
- CONT, R., ET P. TANKOV (2003) : *Financial Modeling with Jump Processes*, Financial Mathematics. Chapman & Hall, London.

BIBLIOGRAPHIE

- COX, J., J. INGERSOLL, ET S. ROSS (1985) : “An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices,” *Econometrica*, 53, 363–384.
- COX, J., ET S. ROSS (1976) : “The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes,” *Journal of Financial Economics*, 3, 145–166.
- COX, J., S. ROSS, ET M. RUBINSTEIN (1979) : “Option Pricing : A Simplified Approach,” *Journal of Financial Economics*, 7, 229–263.
- DANIELSSON, J. (1994) : “Stochastic Volatility in Asset Prices : Estimation with Simulated Maximum Likelihood,” *Journal of Econometrics*, 64, 375–400.
- (1998) : “Multivariate Stochastic Volatility Models : Estimation and Comparison with VGARCH Models,” *Journal of Empirical Finance*, 5, 155–173.
- DANIELSSON, J., ET J.-F. RICHARD (1993) : “Accelerated Gaussian Importance Sampler with Application to Dynamic Latent Variable Models,” *Journal of Applied Econometrics*, 8, 153–173.
- DAS, S. (2002) : “The Surprise Element : Jumps in Interest Rates,” *Journal of Econometrics*, 126, 27–65.
- DAS, S., ET S. FORESI (1996) : “Exact Solutions for Bond and Option Prices with Systematic Jump Risk,” *Review of Derivatives Research*, 1, 7–24.
- DAS, S., ET R. SUNDARAM (1999) : “Of Smiles and Smirks : A Term Structure Perspective,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 34, 211–239.
- DAY, T., ET C. LEWIS (1992) : “Stock Market Volatility and the Information Content of Stock Index Options,” *Journal of Econometrics*, 52, 267–287.
- (1993) : “Forecasting Futures Market Volatility Using Alternative Models for Conditional Volatility,” *Journal of Derivatives*, 1, 33–50.
- DEMPSTER, A., N. LAIRD, ET D. RUBIN (1977) : “Maximum Likelihood from Incomplete Data via the EM Algorithm,” *Journal of the Royal Statistical Association, Ser. B*, 33, 1–38.
- DIEBOLT, J., ET C. ROBERT (1994) : “Estimation of Finite Mixture Distributions through Bayesian Sampling,” *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 56, 163–175.
- DIZ, F., ET T. FINUCANE (1993) : “Do the Options Markets Really Overreact?,” *Journal of Futures Markets*, 13, 298–312.
- DUAN, J. (1994) : “Maximum Likelihood Estimation Using Price Data of the Derivative Contract,” *Mathematical Finance*, 4, 155–167.

BIBLIOGRAPHIE

- (1995) : “The GARCH Option Pricing Model,” *Mathematical Finance*, 5, 13–32.
- DUFFIE, D., J. PAN, ET K. SINGLETON (2000) : “Option Pricing and Transform Analysis for Affine Jump-Diffusions,” *Econometrica*, 68, 1343–1376.
- DUFFIE, D., ET K. SINGLETON (1993) : “Simulated Moments Estimation of Markov Models of Asset Prices,” *Econometrica*, 61, 929–952.
- DUMAS, B., J. FLEMMING, ET R. WHALEY (1998) : “Implied Volatility Functions : Empirical Tests,” *Journal of Finance*, 53, 2059–2106.
- ELIE, L. (1994) : *Modélisation ARCH : Théorie Statistique et Applications dans le Domaine de la Finance* chap. Les Processus ARCH comme Approximations des Processus en Temps Continu, pp. 171–201. Ellipses Marketing.
- ENGLE, R. (1982) : “Autoregressive Conditionnal Heteroskedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation,” *Econometrica*, 50, 987–1008.
- ENGLE, R., ET G. LEE (1996) : *Modelling Stock Market Volatility* chap. Estimating Diffusion Models of Stochastic Volatility, pp. 333–355. Academic Press.
- ENGLE, R., D. LILIEN, ET R. ROBINS (1987) : “Estimating Time-Varying Risk Premia in the Term Structure : the ARCH-M Model,” *Econometrica*, 55, 391–407.
- ENGLE, R., ET V. NG (1993) : “Measuring and Testing the Impact of News on Volatility,” *Journal of Finance*, 48, 1749–1801.
- ERAKER, B. (2001) : “MCMC Analysis of Diffusion Models with Application to Finance,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 19, 177–191.
- (2004) : “Do Stock Prices and Volatility Jump? Reconciling evidence from Spot and Option Prices,” *Journal of Finance*, 59, 1367–1403.
- ERAKER, B., M. JOHANNES, ET N. POLSON (2003) : “The Impacts of Jumps in Volatility and Returns,” *Journal of Finance*, 53, 1269–1300.
- FAMA, E. (1963) : “Mandelbrot and the Stable Paretian Distribution,” *Journal of Business*, 36, 420–429.
- (1965) : “The Behavior of Stock Market Prices,” *Journal of Business*, 38, 34–195.
- FLEMING, J., B. OSTDIEK, ET R. WHALEY (1995) : “Predicting Stock Market Volatility : A New Measure,” *Journal of Futures Market*, 15, 265–302.
- FORBES, C., G. MARTIN, ET J. WRIGHT (2002) : “Bayesian Estimation of a Stochastic Volatility Model Using Option and Spot Prices,” Document de travail, Monash University.

BIBLIOGRAPHIE

- FRENCH, K., W. SCHWERT, ET G. STAMBAUGH (1997) : “Expected Stock Returns and Volatility,” *Journal of Financial Economics*, 19, 3–30.
- FRÜHWIRTH-SCHNATTER, S. (2001) : “Markov Chain Monte Carlo Estimation of Classical and Dynamic Switching and Mixture Models,” *Journal of the American Statistical Association*, 96, 194–209.
- GALLANT, A., C. HSU, ET G. TAUCHEN (1999) : “Using Daily Range Data to Calibrate Volatility Diffusions and Extract the Forward Integrated Variance,” *Review of Economics and Statistics*, 81, 617–631.
- GALLANT, A., P. ROSSI, ET G. TAUCHEN (1992) : “Stock Prices and Volume,” *Review of Financial Studies*, 5, 199–242.
- (1993) : “Nonlinear Dynamics Structures,” *Econometrica*, 61, 871–907.
- GALLANT, R., ET G. TAUCHEN (1996) : “Which Moments to Match?,” *Econometric Theory*, 12, 657–681.
- GARCIA, R., M. LEWIS, ET E. RENAULT (2001) : “Estimation of Objective and Risk-Neutral Distributions Based on Moments of Integrated Volatility,” Document de travail, Cirano, Université de Montréal.
- GELFAND, A., ET A. SMITH (1990) : “Sampling-Based Approaches to Calculating Marginal Densities,” *Journal of the American Statistical Association*, 85, 398–409.
- GESKE, R. (1978) : “Pricing of Options with Stochastic Dividend Yield,” *Journal of finance*, 33, 617–625.
- (1979) : “A Note on an Analytic Valuation Formula for Unprotected American Call Options on Stocks with Known Dividends,” *Journal of Financial Economics*, 5, 251–258.
- GHYSELS, E., A. HARVEY, ET E. RENAULT (1996) : *Stochastic Volatility* vol. 14 of *Handbook of Statistics*, pp. 119–191. Elsevier, North-Holland, Amsterdam.
- GIOT, P. (2002) : “Implied Volatility Indices as Leading Indicators of Stock Index Returns?,” Document de travail 50, CORE.
- GOURIÉROUX, C., ET J. JASIAK (2001) : *Financial Econometrics*. Princeton University Press, Princeton.
- GOURIÉROUX, C., ET A. MONFORT (1996) : *Statistique et Modèles Économétriques*, vol. 1 & 2. Economica, Paris, 2nde edn.
- GOURIÉROUX, C., A. MONFORT, ET E. RENAULT (1993) : “Indirect Inference,” *Journal of Applied Econometrics*, 8, 85–118.

BIBLIOGRAPHIE

- HANSEN, L. (1982) : “Large Sample Properties of Generalized Method of Moments Estimators,” *Econometrica*, 50, 1029–1054.
- HANSON, F., ET J. WESTMAN (2002) : “Jump-Diffusion Stock Return Models in Finance : Stochastic Process Density with Uniform-Jump Amplitude,” *Proceedings of the 15th Synopsium on Mathematical Theory of Networks and Systems*, pp. 1–6.
- HARVEY, A., E. RUIZ, ET N. SHEPARD (1994) : “Multivariate Stochastic Variance Models,” *Review of Economic Studies*, 61, 247–264.
- HARVEY, C., ET R. WHALEY (1992) : “Market Volatility Prediction and the Efficiency of the S&P 100 Index Option Market,” *Journal of Financial Economics*, 31, 43–74.
- HAUSWIRTH, C. (1999) : “Bond Markets where the Short Rate is a Jump Diffusion,” Thèse de Doctorat, University of Zürich.
- HE, X.-Z. (2003) : “Asset Pricing, Volatility and Market Behaviour : A Market Fraction Approach,” Document de travail, Quantitative Finance Research Centre.
- HEATH, D., R. JARROW, ET A. MORTON (1992) : “Bond Pricing and Term Structure of Interest Rates : A New Methodology,” *Econometrica*, 60, 77–105.
- HESTON, S. (1993) : “A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options,” *Review of Financial Studies*, 6, 327–343.
- HEYNEEN, R., A. KEMNA, ET T. VORST (1994) : “Analysis of the Term Structure of Implied Volatility,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, 31–56.
- HO, T., ET S.-B. LEE (1986) : “Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims,” *Journal of Finance*, 41, 1011–1029.
- HONORÉ, P. (1998) : “Pitfalls in Estimating Jump-Diffusion Processes,” Document de travail, Aarhus University.
- HULL, J. (2003) : *Options, Futures and Other Derivatives*, Finance Series. Prentice Hall, New Jersey, 5th edn.
- HULL, J., ET A. WHITE (1987) : “The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities,” *Journal of Finance*, 42, 281–300.
- JACOD, J., ET A. SHIRYAEV (2002) : *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer Verlag, Berlin, 2nd edn.
- JACQUIER, E., N. POLSON, ET P. ROSSI (1994) : “Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 12, 371–417.

BIBLIOGRAPHIE

- (2004) : “Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models with Fat-tails and Correlated Errors,” *Journal of Econometrics*, 122, 185–212.
- JIANG, G. (1999) : “Stochastic Volatility and Jump-Diffusion : Implications on Option Pricing,” *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 2, 409–440.
- JOHANNES, M., R. KUMAR, ET N. POLSON (1999) : “State Dependent Jump Models : How do US Equity Indices Jump?,” Document de travail, University of Chicago.
- JOHNSON, N., ET S. KOTZ (1993) : *Univariate Discrete Distributions*. Wiley, New-York, 2nd edn.
- JOHNSON, N., S. KOTZ, ET N. BALAKRISHNAN (1994) : *Continuous Univariate Distributions*. Wiley, New-York, 2nd edn.
- JONES, C. (2003) : “The Dynamics of Stochastic Volatility : Evidence from Underlying and Options Markets,” *Journal of Econometrics*, 116, 181–224.
- JORION, P. (1988) : “On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets,” *Review of Financial Studies*, 1, 427–445.
- (1995) : “Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market,” *Journal of Finance*, 50, 507–528.
- KARATZAS, I., ET S. SHREVE (1997) : *Brownian Motion and Stochastic Calculus*. Springer, New-York, 2nd edn.
- KASS, R., ET R. RAFTERY (1995) : “Bayes Factor,” *Journal of the American Statistical Association*, 90, 773–795.
- KIM, S., N. SHEPARD, ET S. CHIB (1998) : “Stochastic Volatility : Likelihood Inference and Comparison with ARCH Models,” *Review of Economic Studies*, 65, 361–393.
- KON, S. (1984) : “Models of Stocks Returns - A Comparison,” *Journal of Finance*, 39, 149–165.
- KOU, S. (2002) : “A Jump-Diffusion Model for Option Pricing,” *Management Science*, 48, 1086–1101.
- LAMOUREUX, C., ET W. LASTRAPES (1993) : “Forecasting Stock-Return Variance : Toward an Understanding of Stochastic Implied Volatilities,” *Review of Financial Studies*, 6, 293–326.
- LATANÉ, H., ET R. RENDLEMAN (1976) : “Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Options Prices,” *Journal of Finance*, 2, 369–381.
- LEDOIT, O., ET P. SANTA-CLARA (2002) : “Relative Pricing of Options with Stochastic Volatility,” Document de travail, University of California, Los Angeles.

BIBLIOGRAPHIE

- LEISEN, D. (2004) : “Mixed Lognormal Distributions for Derivatives Pricing and Risk-Management,” McGill University, Montreal.
- LELAND, H. (1985) : “Option Pricing and Replication with Transaction Costs,” *Journal of Finance*, 40, 1283–1302.
- LEWIS, A. (2001) : “A Simple Option Formula for General Jump-Diffusions and Other Exponential Lévy Processes,” Document de Travail, <http://www.optioncity.net>.
- LIESENFELD, R. (1998) : “Dynamic Bivariate Mixture Models : Modeling the Behavior of Prices and Trading Volume,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 16, 101–109.
- (2001) : “A Generalized Bivariate Mixture Model for Stock Price Volatility and Trading Volume,” *Journal of Econometrics*, 104, 141–178.
- LONGSTAFF, F., ET E. SCHWARTZ (1992) : “Interest Rate Volatility and the Term Structure : A Two Factor General Equilibrium Model,” *Journal of Finance*, 47, 1259–1282.
- LUBRANO, M. (2003) : “Modélisation Bayésienne Non-Linéaire du Taux d’Intérêt de Court Terme Américain,” Document de travail, GREQAM, Marseille.
- MAHIEU, R., ET P. SCHOTMAN (1998) : “An Empirical Application of Stochastic Volatility Models,” *Journal of Applied Econometrics*, 13, 333–360.
- MANASTER, S., ET KOEHLER (1982) : “The Calculation of Implied Variances from the Black-Scholes Model : A Note,” *Journal of Finance*, 37, 227–230.
- MANDELBROT, B. (1963) : “The Variation of Certain Speculative Prices,” *Journal of Business*, 36, 394–419.
- MEDDAHI, N. (2001) : “An Eigenfunction Approach for Volatility Modeling,” Document de travail, CIRANO, Montréal.
- MELINO, A., ET S. TURNBULL (1990) : “Pricing Foreign Currency Options with Stochastic Volatility,” *Journal of Econometrics*, 45, 239–265.
- MENGERSEN, K., ET C. ROBERT (1996) : *Testing for Mixtures : A Bayesian Entropic Approach (with discussions)* vol. Bayesian Statistics 5, pp. 255–276. Oxford University Press, Oxford.
- MERTON, R. (1973) : “The Theory of Rational Option Pricing,” *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141–183.
- (1976) : “Option Pricing when Underlying Stock Returns are Discontinuous,” *Journal of Financial Economics*, 3, 125–144.
- (1990) : *Continuous-Time Finance*. Blackwell, Cambridge.

BIBLIOGRAPHIE

- MERVILLE, L., ET D. PIPTEA (1989) : “Stock-Price Volatility, Mean-Reverting Diffusion, and Noise,” *Journal of Financial Economics*, 242, 193–214.
- MORAUX, F., P. NAVATTE, ET C. VILLA (1998) : “Market Volatility Index and Implicit Maximum Likelihood Estimation of Stochastic Volatility Models,” *Finance*, 19, 17–40.
- (1999) : “The Predictive Power of French Market Volatility Index : A Multi-Horizons Forecast Study,” *European Finance Review*, 2, 303–320.
- NAIK, V., ET M. LEE (1990) : “General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns,” *Review of Financial Studies*, 3, 493–521.
- NELSON, D. (1990a) : “ARCH Models as Diffusion Approximations,” *Journal of Econometrics*, 45, 347–370.
- (1990b) : “Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model,” *Econometric Theory*, 6, 318–334.
- (1991) : “Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns : A New Approach,” *Econometrica*, 59, 347–370.
- NOH, J., R. ENGLE, ET A. KANE (1994) : “Forecasting Volatility and Options Prices of the S& P500 Index,” *Journal of Derivatives*, 2, 17–30.
- PAGAN, A. (1996) : “The Econometrics of Financial Markets,” *Journal of Empirical Finance*, 3, 15–102.
- PAN, J. (2002) : “The Jump-Risk Premia Implicit in Options : Evidence from an Integrated Time-Series Study,” *Journal of Financial Economics*, 63, 3–50.
- PASTORELLO, S., E. RENAULT, ET N. TOUZI (2000) : “Statistical Inference for Random-Variance Option Pricing,” *Journal of Business and Economic Statistics*, 18, 358–367.
- PEARSON, K. (1894) : “Contribution to the Mathematical Theory of Evolution,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Ser. A*, 185, 71–110.
- PEARSON, N., ET T.-S. SUN (1994) : “Exploiting the Conditional Density in Estimating the Term Structure : An Application to the Cox, Ingersoll, and Ross Model,” *Journal of Finance*, 49, 1279–1304.
- PHAM, H., ET N. TOUZI (1996) : “Equilibrium State Price in a Stochastic Volatility Model,” *Mathematical Finance*, 7, 215–236.
- POON, S., ET C. GRANGER (2003) : “Forecasting Volatility in Financial Markets : A Review,” *Journal of Economic Literature*, 41, 478–539.

BIBLIOGRAPHIE

- POTERBA, J., ET L. SUMMERS (1986) : “The Persistence of Volatility and Stock Market Fluctuations,” *American Economic Review*, 76, 1142–1151.
- RAGGI, D. (2005) : “Adaptive MCMC Methods for Inference on Affine Stochastic Volatility Models with Jumps,” *The Econometrics Journal*, 8, 235–250.
- RENAULT, E., ET N. TOUZI (1996) : “Option Hedging and Implied Volatilities in a Stochastic Volatility Model,” *Mathematical Finance*, 6, 279–302.
- RITCHEY, R. (1990) : “Call Option Valuation for Discrete Normal Mixtures,” *Journal of Financial Research*, 13, 285–296.
- ROBERT, C., ET K. MENGERSEN (1999) : “Reparametrisations Issues in Mixture Modelling and their Bearings on MCMC Algorithms,” *Computational Statistics and Data Analysis*, 29, 325–343.
- ROCKINGER, M., ET M. SEMENOVA (2005) : “Estimation of Jump-Diffusion Processes via Empirical Characteristic Functions,” Document de travail, HEC-Université de Lausanne.
- ROLL, R. (1977) : “A Critique of the Asset Pricing Theory’s Tests : Part I,” *Journal of Financial Economics*, 4, 129–176.
- ROMANO, M., ET N. TOUZI (1997) : “Contingent Claims and Market Completeness in a Stochastic Volatility Model,” *Mathematical Finance*, 7, 399–412.
- RUBINSTEIN, M. (1985) : “Non Parametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978,” *Journal of Finance*, 40, 455–480.
- RUNGGALDIER, W. (2002) : “Jump-Diffusion Models,” Document de travail, Università di Padova.
- SCHMALENSEE, R., ET R. TRIPPI (1978) : “Common Stock Volatility Estimates Implied by Option Premia,” *Journal of Finance*, 33, 129–147.
- SCHOEBEL, R., ET J. ZHU (1999) : “Stochastic Volatility with an Ornstein-Uhlenbeck Process : An Extension,” *European Finance Review*, 3, 23–46.
- SCHWERT, G. (1989) : “Why Does Stock Market Volatility Change over Time,” *Journal of Finance*, 44, 1115–1153.
- SCOTT, L. (1987) : “Option Pricing when Variance Changes Randomly : Theory, Estimation and an Application,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 419–438.
- SHEIKH, A. (1993) : “The Behavior of Volatility Expectations and Their Effects on Expected Returns,” *Journal of Business*, 66, 93–116.

BIBLIOGRAPHIE

- SHEPARD, N. (2000) : “Discussion of Durbin and Koopman (2000),” *Journal of the Royal Statistical Association, Ser. B*, 62, 30–32.
- SHU, J., ET J. ZANG (2004) : “The Relationship Between Implied and Realized Volatility of S& P 500 Index,” *Wilmott Magazine*, 4, 83–91.
- SPIEGELHALTER, D., N. BEST, B. CARLIN, ET A. VAN DER LINDE (2002) : “Bayesian Measures of Model Complexity and Fit (with discussions),” *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 64, 583–639.
- STEIN, E., ET J. STEIN (1991) : “Stock Price Distribution with Stochastic Volatility : An Analytical Approach,” *Review of Financial Studies*, 4, 727–752.
- STEIN, J. (1989) : “Overreactions in the Options Market,” *Journal of Finance*, 44, 1011–1023.
- STOLL, H. (1969) : “The Relationship between Put and Call Option Parity,” *Journal of Finance*, 24, 801–822.
- SZAKMARY, A., O. EVREN, J. KIM, ET W. DAVIDSON (2003) : “The Predictive Power of Implied Volatility : Evidence from 35 Futures Markets,” *Journal of Banking and Finance*, 27, 2151–2175.
- TANNER, M., ET W. WONG (1987) : “The Calculation of Posterior Distributions,” *Journal of the American Statistical Association*, 82, 528–550.
- TAYLOR, S. (1986) : *Modelling Financial Time Series*. John Wiley and Sons, London.
- TAYLOR, S. (1994) : “Modelling Stochastic Volatility : A Review and Comparative Study,” *Mathematical Finance*, 4, 183–204.
- TAYLOR, S., ET X. XU (1994) : “The Term Structure of Volatility Implied by Foreign Exchange Options,” *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, 57–74.
- TIERNEY, L. (1994) : “Markov Chains for Exploring Posterior Distributions,” *Annals of Statistics*, 22, 1701–1722.
- TITTERINGTON, D., A. SMITH, ET U. MAKOV (1985) : *Statistical Analysis of Finite Mixture Distributions*. Wiley, New York.
- TJØ STHEIM, D., ET B. AUESTADT (1994a) : “Non-Parametric Identification of Non-Linear Time Series : Projection,” *Journal of the American Statistical Association*, 89, 1398–1409.
- (1994b) : “Non-Parametric Identification of Non-Linear Time Series : Selecting Significant Lags,” *Journal of the American Statistical Association*, 89, 1410–1419.

BIBLIOGRAPHIE

- VASIČEK, O. (1977) : “An Equilibrium Characterisation of the Term Structure,” *Journal of Financial Economics*, 5, 177–188.
- WHALEY, R. (1982) : “Valuation of American Futures Options : Theory and Empirical Tests,” *Journal of Finance*, 41, 127–150.
- WIGGINS, J. (1987) : “Option Values under Stochastic Volatility : Theory and Empirical Estimates,” *Journal of Financial Economics*, 19, 351–372.
- WILMOTT, P. (1998) : *Derivatives : The Theory and Practice of Financial Engineering*. John Wiley and Sons, New York.
- ZHAO, Y., ET W. ZIEMBA (2003) : “On Leland’s Option Hedging Strategy with Transaction Costs,” *Stochastic Programming E-Print Series*, 22, 1–34.

Annexes

A.1 Formule d'Itô

La formule d'Itô permet d'effectuer un changement de variable dans une équation différentielle stochastique. Son application sert généralement à trouver la solution de l'équation différentielle stochastique, et par suite d'obtenir la distribution de la solution.

A.1.1 Le cas uni-dimensionnel

Soit une équation différentielle stochastique :

$$dX_t = a(t, \theta)dt + b(t, \theta)dW_t, \quad (\text{A.1})$$

et soit $Y_t = f(t, X_t)$. La formule d'Itô permet d'écrire :

$$\begin{aligned} dY_t = & \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) + a(t, \theta) \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) + \frac{b^2(t, \theta)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) \right) dt \\ & + b(t, \theta) \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dW_t. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

A.1.2 Le cas bi-dimensionnel

Cette fois on suppose que :

$$\begin{aligned} dX_{1,t} &= a_1(t, \theta)dt + b_1(t, \theta)dW_t^{X_1}, \\ dX_{2,t} &= a_2(t, \theta)dt + b_2(t, \theta)dW_t^{X_2}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où $E(dW_t^{X_1} dW_t^{X_2}) = \rho dt$, c'est à dire que $dW_t^{X_1}$ et $dW_t^{X_2}$ sont éventuellement corrélés. Si f est une fonction de t , $X_{1,t}$ ou $X_{2,t}$, alors la formule d'Itô permet

A.1. Formule d'Itô

d'obtenir :

$$\begin{aligned}
 df &= \frac{\partial f}{\partial x_1} dX_{1,t} + \frac{\partial f}{\partial x_2} dX_{2,t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (dX_{1,t})^2 \\
 &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} dX_{1,t} dX_{2,t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} (dX_{2,t})^2 + \frac{\partial f}{\partial t} dt.
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

A.1.3 Le cas des modèles à sauts

Soit une équation différentielle stochastique comportant des sauts :

$$dX_t = a(t, \theta) dt + b(t, \theta) dW_t + J dN_t, \tag{A.5}$$

où N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt . Si $Y_t = f(t, X_t)$, alors on a le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
 dY_t &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + a(t, \theta) \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dt + \frac{b^2(t, \theta)}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) dt \\
 &+ \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) b(t, \theta) dW_t + [f(t, X_{t-} + J_t) - f(t, X_{t-})] dN_t.
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

A.1.4 Règles de calcul

Certaines règles de calcul permettent souvent de simplifier les expressions obtenues après transformation par la formule d'Itô. Celles-ci sont résumées dans le tableau A.5.

TAB. A.5 – Règles de calcul stochastique

\times	dN_t	dt	dW_t
dN_t	dN_t	0	0
dt	0	0	0
dW_t	0	0	dt

A.2 Théorème de Girsanov

Nous donnons dans cette section l'écriture formelle et une interprétation intuitive de l'application du théorème de Girsanov. L'intérêt de ce théorème est triple :

- Il permet de calculer le prix des options pour des modèles plus généraux que le modèle de Black et Scholes (1973).
- Il permet de calculer le prix d'options exotiques.
- D'après Cox et Ross (1976), le prix d'une option est égal à une espérance sous la mesure risque-neutre. Évaluer une telle espérance est souvent plus facile que de trouver l'équation différentielle que doit résoudre une option. L'application du théorème de Girsanov permet de trouver directement cette version neutre au risque du processus générateur des données.

Davantage de détails peuvent être trouvés dans, par exemple, Karatzas et Shreve (1997) et Jacod et Shiryaev (2002).

A.2.1 Pour un mouvement Brownien

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité, où P désigne une mesure de probabilité. Soient B_t un mouvement Brownien standard sous la mesure P et \mathcal{F}_t la filtration générée par B_t . Notons que B_t est une martingale sous la mesure P . Soit enfin η_t un processus adapté à \mathcal{F}_t . Nous définissons tout d'abord :

$$dB_t^Q = dB_t + \eta_t dt. \quad (\text{A.7})$$

On remarque que dB_t^Q n'est plus une martingale sous la mesure P , puisque pour tout $\eta_t \neq 0$, $E(dB_t^Q) = \eta_t dt$. L'idée du théorème de Girsanov est de pouvoir se placer dans un monde défini par la mesure Q où dB_t^Q devient une martingale. Pour cela, nous définissons :

$$\begin{aligned} M_t &= \frac{dQ}{dP}, \\ &= \exp \left(- \int_0^t \eta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \eta_s^2 ds \right), \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

ou de manière équivalente :

$$Q(F) = \int_F M_t dP, \forall F \in \mathcal{F}. \quad (\text{A.9})$$

Avec M_t et la mesure Q ainsi définis, le théorème de Girsanov stipule que sous la mesure Q , dB_t^Q est un mouvement Brownien standard. Plusieurs remarques importantes doivent être faites :

A.2. Théorème de Girsanov

- Q est une mesure équivalente à P , au sens où Q et P affectent une probabilité non-nulle aux mêmes événements : $\forall F \in \mathcal{F}, Q(F) \geq 0 \Leftrightarrow P(F) \geq 0$.
- M_t est une martingale définie par la quantité appelée *dérivée de Radon-Nikodym* (dQ/dP).
- Si $\theta_t = \theta$ alors la distribution de B_t^Q sous P est une loi normale, $B_t^Q \sim \mathcal{N}(\theta t, t)$ alors que sous Q , $B_t^Q \sim \mathcal{N}(0, t)$.

Pour le cas particulier du processus Brownien géométrique standard, pour passer du processus sous la mesure objective P défini par :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha_c dt + \sigma dB_t, \quad (\text{A.10})$$

au processus risque-neutre sous la mesure Q :

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dB_t^Q, \quad (\text{A.11})$$

il suffit de poser :

$$\eta_t = \eta = \frac{\alpha_c - r}{\sigma}. \quad (\text{A.12})$$

Dès lors, le théorème de Girsanov nous assure que Q est une mesure équivalente à P et que sous cette mesure dB_t^Q est une martingale. Ici, cette mesure est en plus unique.

A.2.2 Pour un processus bivarié

Le théorème de Girsanov pour un processus bivarié peut être trouvé dans Pham et Touzi (1996). Pour ce type de processus (modèles à volatilité stochastique), nous posons :

$$\begin{aligned} dB_t^Q &= dB_t + \eta_t dt, \\ dW_t^Q &= dW_t + \nu_t dt. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

La mesure Q est équivalente à P et dB_t^Q , dW_t^Q sont des martingales sous Q si la martingale M_t est définie comme-suit :

$$\begin{aligned} M_t &= \frac{dQ}{dP}, \\ &= \exp \left(\int_0^t \eta_s dB_s + \int_0^t \nu_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \eta_s^2 ds - \frac{1}{2} \int_0^t \nu_s^2 ds \right). \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Dans ce cas, prendre en compte l'absence d'opportunités d'arbitrage et poser $\eta_t = \eta = (\alpha_c - r)/\sigma$ ne conduit plus à une unique mesure Q mais à une infinité dont chacune dépend de l'expression de ν_t . Pour obtenir M_t définie de manière unique, et donc une seule mesure Q équivalente à P il faut émettre des hypothèses sur ν_t . Hull et White (1987), comme Scott (1987) ou Wiggins (1987) proposent de poser $\nu_t = 0$. On obtient alors effectivement une mesure Q unique. Heston (1993) propose une spécification de ν_t proportionnelle à la volatilité et obtient un modèle risque-neutre dont la structure sous la mesure Q est inchangée par rapport à celle donnée sous P mais dont les paramètres du processus ont été modifié.

A.2.3 Pour un modèle à sauts

Pour un processus à sauts du type Merton (1976), nous posons (voir Runggaldier, 2002) :

$$\begin{aligned} dB_t^Q &= dB_t + \eta_t dt, \\ dN_t^Q &= dN_t + \psi_t \lambda_t dt, \end{aligned} \tag{A.15}$$

où λ_t représente l'intensité (éventuellement dépendante du temps) du processus de Poisson compensé dN_t sous la mesure P , et ψ_t est un réel positif. Alors, il faut avoir :

$$\begin{aligned} M_t &= \frac{dQ}{dP}, \\ &= \exp \left(\int_0^t \eta_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \eta_s^2 ds \right) \times \\ &\quad \exp \left(\int_0^t (1 - \psi_s) \lambda_s ds + \int_0^t \ln(\psi_s) dN_s \right), \end{aligned} \tag{A.16}$$

pour que sous la mesure Q , dB_t^Q et dN_t^Q soient des martingales. Le changement de mesure implique ici une translation du Brownien dB_t et le changement de l'intensité du processus de Poisson de λ_t à $\psi_t \lambda_t$. À l'instar de ce qui se produit pour un processus bivarié, le théorème de Girsanov, ne nous conduit pas directement à une mesure unique, il garantit l'existence d'au moins une mesure Q qui est équivalente à P . Ici, prendre en compte l'absence d'opportunités d'arbitrage ne conduit pas à une mesure unique mais à une infinité de mesures équivalentes. C'est une hypothèse supplémentaire sur les préférences des agents et donc sur ψ_t qui va nous conduire à une unique mesure risque-neutre permettant l'évaluation concrète du prix d'une option dans ce cadre.

A.3 Dérivation de la sensibilité d'un call par rapport au sous-jacent.

La formule de Black et Scholes (1973) est donnée par :

$$\begin{aligned}
 C &= S\Phi(d_1) - K \exp(-r\tau)\Phi(d_2), \\
 d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}, \\
 d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{\tau}.
 \end{aligned} \tag{A.17}$$

La dérivée de C par rapport à S est :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial C}{\partial S} &= \Phi(d_1) + S \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S} - K \exp(-r\tau) \frac{\partial \Phi(d_2)}{\partial S}, \\
 &= \Phi(d_1) + S \frac{\partial d_1}{\partial S} \frac{\partial \Phi}{\partial d_1} - K \exp(-r\tau) \frac{\partial d_2}{\partial S} \frac{\partial \Phi}{\partial d_2}.
 \end{aligned} \tag{A.18}$$

Les dérivées partielles ont pour expressions :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial d_1}{\partial S} &= \frac{\partial d_2}{\partial S} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}}, \\
 \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= f_{\mathcal{N}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-x^2/2).
 \end{aligned} \tag{A.19}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
 f_{\mathcal{N}}(d_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-d_2^2/2), \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-(d_1 - \sigma\sqrt{\tau})^2/2], \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-(d_1^2 - 2d_1\sigma\sqrt{\tau} + \sigma^2\tau)/2], \\
 &= \frac{\exp(-d_1^2/2)}{\sqrt{2\pi}} \exp[-(\sigma^2\tau - 2d_1\sigma\sqrt{\tau})/2].
 \end{aligned} \tag{A.20}$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial S} &= \Phi(d_1) + \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \left[f_{\mathcal{N}}(d_1) - \frac{K \exp(-r\tau)}{S} f_{\mathcal{N}}(d_2) \right], \\
&= \Phi(d_1) + \frac{\exp(-d_1^2/2)}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}} \left[1 - \frac{K}{S} \exp[-(r + \sigma^2/2)\tau + d_1\sigma\sqrt{\tau}] \right], \\
&= \Phi(d_1) + \frac{\exp(-d_1^2/2)}{\sigma\sqrt{\tau}\sqrt{2\pi}} \left[1 - \frac{K}{S} \exp[\ln(S/K)] \right], \\
&= \Phi(d_1).
\end{aligned} \tag{A.21}$$

En procédant à des calculs analogues, on retrouve les différentes sensibilités de l'option.

A.4 Lois de probabilité

Nous donnons l'expression des lois de probabilité utilisées dans ce travail. Les ouvrages de référence dans ce domaine sont ceux de Johnson et Kotz (1993) et Johnson *et al.* (1994).

A.4.1 Loi normale, \mathcal{N}

La loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 a pour fonction de densité :

$$f_{\mathcal{N}}(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right]. \tag{A.22}$$

Elle est définie sur \mathbb{R} .

A.4.2 Loi log-normale, $\ln\mathcal{N}$

Si $Y = \ln X$ suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 , alors X suit une loi log-normale de paramètres μ et σ^2 . La fonction de densité s'écrit :

$$f_{\mathcal{N}}(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \frac{1}{x} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathbb{I}_{[0, +\infty[}. \tag{A.23}$$

L'espérance et la variance sont définies par :

$$\begin{aligned}
E(X) &= \exp(\mu + \sigma^2/2), \\
Var(X) &= \exp(2\mu + \sigma^2)[\exp(\sigma^2) - 1].
\end{aligned} \tag{A.24}$$

A.4.3 Loi inverse-gamma, \mathcal{IG}

La fonction de densité de la loi inverse-gamma de paramètres $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ s'écrit :

$$f_{\mathcal{IG}}(x; \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{x^{\alpha+1}} \exp\left(-\frac{\beta}{x}\right) \mathbb{I}_{[0, +\infty[}. \quad (\text{A.25})$$

L'espérance est définie si $\alpha > 1$ et la variance est définie si $\alpha > 2$ par :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\beta}{\alpha - 1}, \\ \text{Var}(X) &= \frac{\beta^2}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

A.4.4 Loi binomiale, \mathcal{B}

La fonction de distribution de la loi binomiale de paramètres $n > 0$ et $0 \leq p \leq 1$ s'écrit :

$$f_{\mathcal{B}}(x; n, p) = C_n^x p^x (1 - p)^{n-x} \mathbb{I}_{\{0, \dots, n\}}. \quad (\text{A.27})$$

L'espérance et la variance sont définies par :

$$\begin{aligned} E(X) &= np, \\ \text{Var}(X) &= np(1 - p). \end{aligned} \quad (\text{A.28})$$

Lorsque $n = 1$, on retrouve la loi de Bernoulli, notée \mathcal{Ber} .

A.4.5 Loi bêta, \mathcal{Be}

La fonction de densité de la loi bêta s'écrit, pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

$$f_{\mathcal{Be}}(x; \alpha, \beta) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1 - x)^{\beta-1} \mathbb{I}_{[0, 1]}. \quad (\text{A.29})$$

L'espérance et la variance sont définies par :

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \\ \text{Var}(X) &= \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}. \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

A.4.6 Loi de Poisson, \mathcal{P}

La fonction de densité de la loi de Poisson s'écrit, pour $\lambda > 0$:

$$f_{\mathcal{P}}(x; \lambda) = \frac{\lambda^x}{x!} \exp(-\lambda) \mathbb{I}[\mathbb{N}]. \quad (\text{A.31})$$

L'espérance et la variance sont définies par :

$$\begin{aligned} E(X) &= \lambda, \\ \text{Var}(X) &= \lambda. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

A.5 Solutions et distributions des solutions des modèles de diffusion standard

Nous fournissons ici les solutions, les lois de transition de l'instant t à l'instant T ($t \leq T$), et les deux premiers moments centrés des modèles de diffusion les plus fréquemment rencontrés dans la littérature.

A.5.1 Processus Brownien géométrique standard

L'équation différentielle stochastique qui définit le processus Brownien géométrique standard est :

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \alpha dt + \sigma dW_t. \quad (\text{A.33})$$

Pour trouver sa solution, il suffit de poser :

$$Z_t = \ln(Y_t), \quad (\text{A.34})$$

puis d'appliquer la formule d'Itô. Évidemment on suppose que Y_t est strictement positif. Les éléments qui interviennent dans la formule d'Itô sont :

$$\frac{\partial Z_t}{\partial Y_t} = \frac{1}{Y_t}, \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{\partial^2 Z_t}{\partial Y_t^2} = -\frac{1}{Y_t^2}, \quad (\text{A.36})$$

A.5. Solutions et distributions des solutions des modèles de diffusion standard

et,

$$\frac{\partial Z_t}{\partial t} = 0. \quad (\text{A.37})$$

Nous obtenons donc :

$$dZ_t = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dW_t. \quad (\text{A.38})$$

Maintenant, si nous procédons à l'intégration de cette dernière équation, nous avons :

$$Z_T = Z_t + \int_t^T \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) ds + \int_t^T \sigma dW_s, \quad (\text{A.39})$$

c'est à dire, en utilisant l'équation (A.34) liant Z_T et Z_t à Y_T et Y_t :

$$\ln(Y_T) = \ln(Y_t) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma W_T. \quad (\text{A.40})$$

On peut remarquer que la loi de $\ln(Y_T)$ sachant Y_t est une loi normale d'espérance :

$$E[\ln(Y_T)|Y_t] = \ln(Y_t) + \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t), \quad (\text{A.41})$$

et de variance :

$$\text{Var}[\ln(Y_T)|Y_t] = \sigma^2(T - t). \quad (\text{A.42})$$

Finalement, en prenant l'exponentielle de (A.40), on trouve l'expression de la solution de l'équation différentielle stochastique (A.33), on a :

$$Y_T = Y_t \exp \left[\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} \right) (T - t) + \sigma W_T \right]. \quad (\text{A.43})$$

Cela signifie que la loi conditionnelle de Y_T sachant Y_t est une loi log-normale, d'espérance :

$$E(Y_T|Y_t) = Y_t \exp[\alpha(T - t)], \quad (\text{A.44})$$

et de variance :

$$\text{Var}(Y_T|Y_t) = Y_t^2 \exp[2\alpha(T - t)] (\exp[\sigma^2(T - t)] - 1) \quad (\text{A.45})$$

Il est facile de constater que le processus décrit par (A.43) n'est pas stationnaire puisque son espérance et sa variance dépendent de l'intervalle de temps séparant t de T . Dès lors, on comprend aisément qu'il n'est pas adapté à modéliser la volatilité qui est, quant à elle, stationnaire.

A.5.2 Processus Ornstein-Uhlenbeck simple

Le processus s'écrit sous la forme :

$$dX_t = \kappa(\vartheta - X_t)dt + \gamma dW_t. \quad (\text{A.46})$$

Pour trouver la solution, nous posons :

$$Z_t = X_t \exp(\kappa t). \quad (\text{A.47})$$

Les éléments intervenant dans la formule d'Itô sont :

$$\frac{\partial Z_t}{\partial X_t} = \exp(\kappa t), \quad (\text{A.48})$$

$$\frac{\partial^2 Z_t}{\partial X_t^2} = 0, \quad (\text{A.49})$$

et,

$$\frac{\partial Z_t}{\partial t} = \kappa X_t \exp(\kappa t). \quad (\text{A.50})$$

L'application de la formule d'Itô donne :

$$\begin{aligned} dZ_t &= [\kappa X_t \exp(\kappa t) + \kappa(\vartheta - X_t) \exp(\kappa t)] dt + \gamma \exp(\kappa t) dW_t, \\ &= \kappa \vartheta \exp(\kappa t) dt + \gamma \exp(\kappa t) dW_t. \end{aligned} \quad (\text{A.51})$$

En intégrant cette expression de t à T , nous obtenons :

$$Z_T = Z_t + \kappa \vartheta \int_t^T \exp(\kappa s) ds + \gamma \int_t^T \exp(\kappa s) dW_s. \quad (\text{A.52})$$

En remplaçant Z_T et Z_t par leurs expressions contenant X_T et X_t , voir l'équation (A.47), et en effectuant le calcul simple de la première intégrale dans (A.52), nous déduisons que :

$$X_T = X_t \exp[-\kappa(T - t)] + \vartheta (1 - \exp[-\kappa(T - t)]) + \int_t^T \gamma \exp[\kappa(s - T)] dW_s. \quad (\text{A.53})$$

En d'autres mots, la loi de X_T sachant X_t est une loi Gaussienne :

$$X_T | X_t \sim \mathcal{N}(E[X_T], \text{Var}[X_T]), \quad (\text{A.54})$$

dont l'espérance est égale à :

$$E(X_T | X_t) = X_t \exp[-\kappa(T - t)] + \vartheta (1 - \exp[-\kappa(T - t)]), \quad (\text{A.55})$$

A.5. Solutions et distributions des solutions des modèles de diffusion standard

et la variance est :

$$\begin{aligned}
 Var(X_T|X_t) &= Var\left(\int_t^T \gamma \exp[\kappa(s-T)]dW_s\right), \\
 &= \int_t^T \exp[2\kappa(s-T)]\gamma^2 ds, \\
 &= \frac{\gamma^2}{2\kappa} (1 - \exp[2\kappa(t-T)]).
 \end{aligned} \tag{A.56}$$

Notons enfin que pour assurer la stationnarité du processus, κ doit être strictement positif.

A.5.3 Processus Ornstein-Uhlenbeck dans sa version logarithmique

En utilisant les résultats de la section qui précède, on peut facilement trouver la solution et la distribution de σ_t^2 lorsque σ_t^2 est régi selon un processus Ornstein-Uhlenbeck dans sa version logarithmique :

$$d \ln(\sigma_t^2) = \kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^2)]dt + \gamma dW_t. \tag{A.57}$$

En effet, il suffit de poser :

$$X_t = \ln(\sigma_t^2), \tag{A.58}$$

pour en déduire que :

$$\begin{aligned}
 \sigma_T^2 &= \exp[\vartheta(1 - \exp[-\kappa(T-t)]) + \ln(\sigma_t^2) \exp[-\kappa(T-t)]] \times \\
 &\quad \exp\left(\gamma \int_t^T \exp[\kappa(s-T)]dW_s\right).
 \end{aligned} \tag{A.59}$$

Autrement dit, la loi conditionnelle de σ_T^2 sachant σ_t est une log-normale, d'espérance :

$$\begin{aligned}
 E(\sigma_T^2|\sigma_t) &= \exp\left(E[\ln(\sigma_T^2)|\sigma_t] + \frac{Var[\ln(\sigma_T^2)|\sigma_t]}{2}\right), \\
 &= \exp[\vartheta(1 - \exp[-\kappa(T-t)]) + \ln(\sigma_t^2) \exp[-\kappa(T-t)]] \times \\
 &\quad \exp\left[\frac{\gamma^2}{4\kappa} (1 - \exp[-\kappa(T-t)])\right],
 \end{aligned} \tag{A.60}$$

et de variance :

$$Var(\sigma_T^2|\sigma_t) = E(\sigma_T^2|\sigma_t)^2 [\exp(Var[\ln(\sigma_T^2)|\sigma_t]) - 1]. \tag{A.61}$$

A.5.4 Processus Cox-Ingersoll-Ross

Lorsque σ_t^2 est régi selon le processus Cox-Ingersoll-Ross, c'est à dire :

$$d\sigma_t^2 = \kappa(\vartheta - \sigma_t^2)dt + \gamma\sqrt{\sigma_t^2}dW_t, \quad (\text{A.62})$$

il n'est pas possible d'employer la formule d'Itô pour obtenir la solution de cette équation différentielle stochastique. En revanche, Cox *et al.* (1985) montrent que la loi conditionnelle de σ_T^2 sachant σ_t est une loi du χ^2 décentrée. La fonction de densité s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \ln f(\sigma_T^2|\sigma_t) &= \ln c - c(\sigma_T^2 + \exp[-\kappa(T-t)]\sigma_t^2) \\ &+ 1/2q \ln \left(\frac{\sigma_T^2}{\sigma_t^2 \exp[-\kappa(T-t)]} \right) \\ &+ \ln(I_q)(2c\sqrt{\sigma_T^2\sigma_t^2 \exp[-\kappa(T-t)]}) \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

où,

$$\begin{aligned} c &= \frac{2\kappa}{\gamma^2(1 - \exp[-\kappa t])}, \\ q &= \frac{2\kappa\vartheta}{\gamma^2} - 1, \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

et, I_q désigne la fonction de Bessel modifiée de première espèce d'ordre q :

$$I_q(x) = (x/q)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2n}}{n!\Gamma(q+n+1)}. \quad (\text{A.65})$$

Par ailleurs, l'espérance et la variance conditionnelles sont égales à :

$$E(\sigma_T^2|\sigma_t) = \sigma_t^2 \exp[-\kappa(T-t)] + \vartheta(1 - \exp[-\kappa(T-t)]), \quad (\text{A.66})$$

et,

$$\begin{aligned} Var(\sigma_T^2|\sigma_t) &= \frac{\gamma^2\sigma_t^2}{\kappa} (\exp[-\kappa(T-t)] - \exp[-2\kappa(T-t)]) + \\ &\frac{\gamma^2\vartheta}{2\kappa} (1 - \exp[-\kappa(T-t)])^2. \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Notons enfin qu'il faut que $\gamma^2 \leq 2\kappa\vartheta$, pour que le processus soit stationnaire.

A.5.5 Modèle linéaire

Le modèle linéaire est défini par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dY_t = \kappa(\vartheta - Y_t)dt + \gamma Y_t dW_t. \quad (\text{A.68})$$

Elie (1994) fournit les méthodes pour l'obtention de la solution et de sa distribution marginale. Cet auteur trouve la solution suivante :

$$Y_T = \xi_T \left(Y_t + \kappa\vartheta \int_t^T \xi_s^{-1} ds \right), \quad (\text{A.69})$$

où :

$$\xi_T = \exp \left[- \left(\kappa + \frac{\gamma^2}{2} \right) (T - t) + \gamma W_T \right]. \quad (\text{A.70})$$

La loi conditionnelle de la solution Y_T sachant Y_t n'est pas connue, en revanche la loi stationnaire de la solution est une loi inverse-gamma :

$$Y_T \sim \mathcal{IG} \left(\frac{2\kappa}{\gamma^2} + 1, \frac{2\kappa\vartheta}{\gamma^2} \right), \quad (\text{A.71})$$

d'où l'on déduit l'espérance et la variance marginales du processus :

$$E(Y_T) = \vartheta, \quad (\text{A.72})$$

et,

$$\text{Var}(Y_T) = \frac{\vartheta^2}{2\kappa/\gamma^2 - 1}, \quad (\text{A.73})$$

si $2\kappa > \gamma^2$.

A.6 Algorithme de Newton-Raphson

Nous décrivons l'utilisation de l'algorithme de Newton-Raphson pour obtenir la volatilité implicite. Une description plus générale est fournie dans, par exemple, Gouriéroux et Monfort (1996). Soit C^* le prix observé d'un call, d'après la formule de Black et Scholes (1973), ce prix est fonction, entre autres de la volatilité. Nous notons :

$$C^* = BS(\sigma). \quad (\text{A.74})$$

Une simple inversion de la formule donne :

$$\sigma = BS^{-1}(C^*), \quad (\text{A.75})$$

où σ est la volatilité implicite associée à ce call. L'expression de la fonction BS^{-1} n'est pas disponible analytiquement. L'algorithme de Newton-Raphson consiste d'abord à poser une valeur initiale, $\sigma^{(0)}$, on pourra prendre celle suggérer par Manaster et Koehler (1982) :

$$\sigma^{(0)} = \sqrt{2(|\ln(S/K)| + rT)/T}, \quad (\text{A.76})$$

puis à répéter l'étape suivante jusqu'à obtenir la précision souhaitée :

$$\sigma^{(k+1)} = \sigma^{(k)} + \frac{BS(\sigma^{(k)}) - C^*}{vega(\sigma^{(k)})}. \quad (\text{A.77})$$

Cet algorithme se révèle être suffisant pour déterminer la volatilité implicite pour des options européennes.

A.7 Évaluation pratique des options

Nous fournissons ici des compléments d'informations nécessaires à l'obtention pratique du prix d'une option pour différents modèles traités dans notre étude.

A.7.1 Black et Scholes

Dans le cadre d'un processus Brownien géométrique standard, la formule de Black et Scholes (1973) donne directement le prix d'une option de type européen. Lorsque dans ce même cadre, on change la valeur de l'option à l'échéance, il est plus difficile d'établir le prix d'une option et il faut recourir à des méthodes de simulation de trajectoire du support.

A.7.1.1 La solution analytique

Le calcul du prix d'une option dans Black et Scholes (1973) implique le calcul de la fonction de répartition de la loi normale. Celle-ci n'a pas de forme analytique directement exploitable. On utilise alors la formule d'approximation suivante (voir Johnson *et al.*, 1994) :

$$\Phi(x) = 1 - f_{\mathcal{N}}(x)(a_1 k + a_2 k^2 + a_3 k^3), \quad (\text{A.78})$$

si x est positif, et,

$$\Phi(x) = 1 - \Phi(-x), \quad (\text{A.79})$$

si x est négatif, avec $k = \frac{1}{1+\alpha x}$, $\alpha = 0.33267$, $a_1 = 0.4361836$, $a_2 = -0.1201676$ et $a_3 = 0.9372980$.

A.7.1.2 Méthode de Monte-Carlo

Le résultat de Cox et Ross (1976) permet d'écrire le prix d'une option de type européen sous la forme :

$$\begin{aligned} C_t &= \exp[-r(T-t)]E(C_T), \\ &= \exp[-r(T-t)] \int_K^\infty (S_T - K) f(S_T|\theta_Q) dS_T, \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

où $f(S_T|\theta_Q)$ désigne la fonction de densité du support à l'échéance, ici f est supposée log-normale, et les paramètres θ_Q sont définis dans un monde neutre au risque. D'après la loi des grands nombre, la moyenne d'une série d'observations tend vers l'espérance de cette série. C'est le principe des méthodes de Monte-Carlo. On peut donc envisager de remplacer l'intégrale par une somme, on a :

$$C_t \approx \exp[-r(T-t)] \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (S_{T,i} - K) f(S_{T,i}|\theta_Q), \quad (\text{A.81})$$

où $S_{T,i}$ désigne la valeur du support à l'échéance pour la i -ème des N trajectoires simulées.

A.7.2 Hull et White

Nous utilisons le modèle "racine carrée" pour illustrer les méthodes de calculs. On a, dans un monde neutre au risque :

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma_t S_t dB_t, \\ d\sigma_t^2 &= \kappa(\vartheta - \sigma_t^2) dt + \gamma \sigma_t dW_t, \end{aligned} \quad (\text{A.82})$$

et $E(dB_t dW_t) = \rho dt$.

A.7.2.1 Développements limités

Hull et White (1988) fournissent une approximation du prix d'une option obtenue à partir d'un développement limité de Taylor d'ordre 2, au voisinage de la valeur espérée de la variance intégrée, sur la formule de Black et Scholes (1973). On note :

$$\bar{V}_{t,T} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma^2(s) ds, \quad (\text{A.83})$$

et,

$$\tilde{V} = E(\bar{V}_{t,T} | \sigma_t). \quad (\text{A.84})$$

Le prix d'une option est alors donné par :

$$\begin{aligned}
 C_{HW}(\sigma_t^2) &= C_{BS}(\tilde{V}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C_{BS}(x)}{\partial x^2}(\tilde{V}) Var_t(\tilde{V}) + \\
 &\quad \frac{1}{6} \frac{\partial^3 C_{BS}(x)}{\partial x^3}(\tilde{V}) E_t([\tilde{V} - \tilde{V}]^3) + \dots \\
 &= C_{BS}(\tilde{V}) + \frac{1}{2} \frac{S\sqrt{T-t}\Phi'(d_1)(d_1d_2 - 1)}{4\tilde{V}^{3/2}} Var_t(\tilde{V}) + \\
 &\quad \frac{1}{6} \frac{S\sqrt{T-t}\Phi'(d_1)[(d_1d_2 - 3)(d_1d_2 - 1) - (d_1^2 + d_2^2)]}{8\tilde{V}^{5/2}} E_t([\tilde{V} - \tilde{V}]^3) \\
 &\quad + \dots
 \end{aligned} \tag{A.85}$$

où :

$$\begin{aligned}
 d_1 &= \frac{\ln(S/K) + (r + \tilde{V}/2)(T-t)}{\sqrt{\tilde{V}(T-t)}}, \\
 d_2 &= d_1 - \sqrt{\tilde{V}(T-t)}.
 \end{aligned} \tag{A.86}$$

Garcia *et al.* (2001) fournissent davantage de détails sur l'obtention de cette formule ainsi que sur l'expression des sensibilités. Il faut noter qu'en dehors de la formule analytique donnée par Heston, cette écriture est la seule disponible.

A.7.2.2 Méthode de Monte Carlo

On peut également avoir recours à des simulations de trajectoires pour évaluer le prix d'une option. La procédure est simple mais peut être chronophage. Nous partons du processus risque-neutre :

$$\begin{aligned}
 dS_t &= rS_t dt + \sigma_t S_t dB_t, \\
 d\sigma_t^2 &= \kappa(\vartheta - \sigma_t^2) dt + \gamma\sigma_t \rho dB_t + \gamma\sigma_t \sqrt{1 - \rho^2} dW_t,
 \end{aligned} \tag{A.87}$$

où dB_t et dW_t sont deux browniens indépendants.

Si l'option expire à la date T et qu'on est en t , on subdivise l'intervalle de temps $[T-t, T]$ en n sous-intervalles de longueur $\Delta t = (T-t)/n$, on génère n variables aléatoires normales u_i et v_i ($1 \leq i \leq n$), et on simule les trajectoires suivantes :

$$\begin{aligned}
 S_i &= S_{i-1}[(1+r)\Delta t + \sigma_{i-1}u_i\sqrt{\Delta t}], \\
 \sigma_i^2 &= \kappa\vartheta\Delta t + (1-\kappa)\sigma_{i-1}^2\Delta t + \gamma\sigma_{i-1}\rho u_i\sqrt{\Delta t} + \gamma\sigma_{i-1}v_i\sqrt{1-\rho^2}\sqrt{\Delta t}.
 \end{aligned} \tag{A.88}$$

A.7. Évaluation pratique des options

La valeur initiale S_0 de la procédure est observable et σ_0 peut être simulée à partir de la loi marginale de σ_t^2 . Pour M simulations de trajectoires, le prix d'un call européen est alors approché par :

$$\exp[-r(T-t)] \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M \max(S_{m,n} - K, 0). \quad (\text{A.89})$$

On peut améliorer les performances de cette procédure en utilisant la technique des variables antithétiques. Il s'agit simplement d'exploiter la symétrie de la loi normale pour pouvoir réutiliser les tirages de u_i et v_i . Ceci a pour effet de réduire l'écart type de la moyenne sur les trajectoires simulées. Elle consiste à calculer des trajectoires en remplaçant u_i par $-u_i$ et v_i par $-v_i$. Pour davantage de détails sur les méthodes de Monte Carlo et les techniques permettant de réduire le temps des calculs, on peut se référer à Boyle *et al.* (1997).

A.7.3 Heston

Heston (1993) suppose que le support et la volatilité sont générés, dans un monde neutre au risque, selon le processus bivarié suivant :

$$\begin{aligned} dS_t &= rS_t dt + \sigma_t S_t dB_t, \\ d\sigma_t^2 &= \kappa^*(\vartheta^* - \sigma_t^2) dt + \gamma \sigma_t dW_t. \end{aligned} \quad (\text{A.90})$$

Il obtient une formule pour le prix d'un call européen de la forme :

$$C_{Heston} = SP_1 - K \exp(-rTP_2). \quad (\text{A.91})$$

L'expression de P_j pour $j = 1, 2$ est :

$$P_j = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{\exp[ix \ln(K)] f_j(x)}{ix} \right) dx, \quad (\text{A.92})$$

où f_j désigne la fonction caractéristique du processus. Celle-ci s'écrit :

$$f_j = \exp [C + D\sigma_t^2 + ix \ln(S)], \quad (\text{A.93})$$

avec :

$$\begin{aligned}
C &= rxi(T-t) + \frac{\kappa^* \vartheta^*}{2} \left[(b_j - \rho\gamma xi + d)(T-t) - 2 \ln \left(\frac{1 - ge^{d(T-t)}}{1-g} \right) \right], \\
D &= \frac{b_j - \rho\gamma xi + d}{\gamma^2} \frac{1 - e^{d(T-t)}}{1-g}, \\
g &= \frac{b_j - \rho\gamma xi + d}{b_j - \rho\gamma xi - d}, \\
d &= \sqrt{(\rho\gamma xi - b_j)^2 - \gamma^2(2u_j xi - x^2)},
\end{aligned} \tag{A.94}$$

et $u_1 = 1/2$, $u_2 = -1/2$, $b_1 = \kappa^* - \rho\gamma$, $b_2 = \kappa^*$. L'évaluation de l'intégrale, malgré son apparente complexité, peut être effectuée à partir de nombreux logiciels statistiques. En fait il suffit de remarquer que l'intégrale de la dernière équation est une transformée de Fourier de la fonction f_j . Il existe différentes méthodes d'approximation de cette intégrale, nous renvoyons le lecteur intéressé aux travaux de Carr et Madan (1998) et Lewis (2001). Ce résultat est uniquement valable pour des options européennes. Il existe toutefois, pour certaines options exotiques, des formules analogues, voir Lewis (2001) ou Duffie *et al.* (2000). Évidemment, on peut également utiliser la méthode de Monte carlo lorsqu'il n'y a pas de formulation explicite du prix de l'option.

On peut également supposer que la volatilité stochastique évolue selon un processus Ornstein-Uhlenbeck, dans ce cas, la solution est donnée par Schoebel et Zhu (1999).

A.7.4 Merton

Nous donnons ici une méthode de simulation de trajectoires du support lorsque le support évolue selon le modèle à sauts défini par Merton (1976) :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \alpha_c dt + \sigma dW_t + J dN_t, \tag{A.95}$$

où $\ln(1+J) \sim \ln \mathcal{N}(\alpha_J, \sigma_J^2)$. Une trajectoire du support est obtenue en effectuant les étapes suivantes :

- Étape 1 : Subdiviser l'intervalle de temps $[T-t, T]$ en n sous-intervalles de longueur $\Delta t = (T-t)/n$.
- Étape 2 : Simuler la variable aléatoire N dans une loi de Poisson de paramètre $\lambda(T-t)$. N représente le nombre total de sauts intervenant durant la période de longueur $T-t$.

A.7. Évaluation pratique des options

- Étape 3 : Simuler N variables aléatoires U_i , uniformément distribuées sur l'intervalle $[t, T]$. Ces variables correspondent aux dates d'arrivées des sauts.
- Étape 4 : Simuler l'amplitude des N sauts à partir de la loi de J , en déduire J_i .
- Étape 5 : Générer n variables aléatoires normales u_i .
- Étape 6 : Simuler le cours du support selon,

$$S_i = S_{i-1}[(1 + \alpha_c)\Delta t + \sigma u_i \sqrt{\Delta t}] + J_i.$$

A.7.5 Ritchey

Une méthode très proche de celle de Merton (1976) dans le sens, où les valeurs des options qui en résultent sont presque identiques, est fournie par Ritchey (1990). Il suppose que les rendements sont distribués selon un mélange de lois normales :

$$f(y_t) = p f_{\mathcal{N}}(y_t | \mu_1, \sigma_1^2) + (1 - p) f_{\mathcal{N}}(y_t | \mu_2, \sigma_2^2), \quad (\text{A.96})$$

où μ_1 , μ_2 , σ_1 et σ_2 sont les paramètres respectant la condition de neutralité face au risque. On peut noter que Ritchey (1990) n'indique pas quelle procédure utiliser. Évidemment lorsque le lien entre les modèles de mélanges et les modèles à sauts est fait, la risque-neutralisation de ce type de processus rejoint celle des modèles à sauts.

Plaçons nous à la date $t = T - 1$, c'est à dire à une période de l'échéance ($\tau = 1$), et cherchons à évaluer le prix du call :

$$C_t = \exp(-r\tau) E(C_T). \quad (\text{A.97})$$

L'espérance $E(C_T)$ se calcule facilement. En effet, il suffit de remarquer que le rendement généré sur cette unique période proviendra, soit d'une loi Gaussienne de moyenne μ_1 et de variance σ_1^2 avec une probabilité p , soit d'une loi Gaussienne de moyenne μ_2 et de variance σ_2^2 avec une probabilité $1 - p$. Dans les deux cas, cette variation sera issue d'une loi normale. Nous pouvons donc appliquer pour chaque cas la formule de Black et Scholes (1973). Nous obtenons le résultat suivant :

$$E(C_T) = p E(C_T | \mu_1, \sigma_1, \tau = 1) + (1 - p) E(C_T | \mu_2, \sigma_2, \tau = 1). \quad (\text{A.98})$$

Autrement dit, le prix du call est égal à la somme, pondérée par les probabilités d'apparition de chacune des deux composantes, de prix de calls évalués par la formule de Black et Scholes (1973).

Pour évaluer le prix d'une option à la date $t = T - \tau$, nous procédons suivant le même principe. Si y_t est distribuée suivant un mélange de deux lois normales, alors la fonction de densité des rendements à l'échéance T est un mélange de $\tau + 1$ lois normales :

$$f(y_T) = \sum_{i=1}^{\tau+1} \omega_i f_{\mathcal{N}}(y_T | M_i, \Sigma_i) \quad (\text{A.99})$$

où :

$$\begin{aligned} \omega_i &= \frac{\tau!}{\tau_1! \tau_2!} p^{\tau_1} (1-p)^{\tau_2}, \sum_{i=1}^{\tau+1} \omega_i = 1, \\ M_i &= \tau_1 \mu_1 + \tau_2 \mu_2, \\ \Sigma_i^2 &= \tau_1 \sigma_1^2 + \tau_2 \sigma_2^2, \end{aligned} \quad (\text{A.100})$$

et $\tau_1, \tau_2 = \tau - \tau_1$ représentent, respectivement, le nombre d'apparitions de la première et seconde composante sur la période. Comme dans le cas à une période, on peut calculer la valeur espérée du call à l'échéance :

$$E(C_T) = \sum_{i=1}^{\tau+1} \omega_i E(C_T | M_i, \Sigma_i, \tau = 1), \quad (\text{A.101})$$

et sa valeur présente est :

$$C_t = \exp(-r\tau) \sum_{i=1}^{\tau+1} \omega_i E(C_T | M_i, \Sigma_i, \tau = 1). \quad (\text{A.102})$$

Chacune des $\tau + 1$ composantes étant une loi normale, l'espérance est égale à la somme des valeurs d'un call évaluées par la formule de Black et Scholes (1973). La méthode est illustrée dans le graphique A.5.

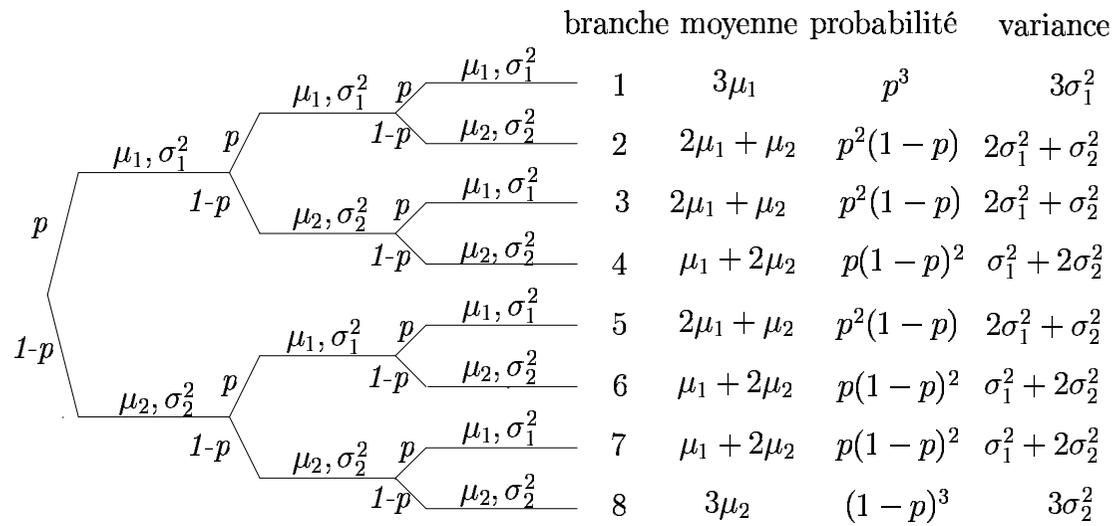


FIG. A.5 – Arbre de probabilités

A.8 Moments de \bar{V}

Dans le chapitre 5, nous avons indiqué que l'application de notre méthode d'estimation à des données réelles nécessite la détermination des premiers moments de la quantité $\bar{V}_{t,T}$. Rappelons que celle-ci est définie comme étant la moyenne de la volatilité au carré intégrée :

$$\bar{V}_{t,T} = \frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_s^2 ds. \quad (\text{A.103})$$

Nous avons déjà donné les expressions du premier moment de $\bar{V}_{t,T}$ des cas LOG-OU et LOG-OUS dans le chapitre 4 (voir les équations (4.18) et (4.19)). Nous cherchons ici à donner une procédure afin de déterminer le moment non-centré d'ordre 2 de la volatilité intégrée lorsque la volatilité est régie selon un processus LOG-OU :

$$d \ln(\sigma_t^2) = \kappa[\vartheta - \ln(\sigma_t^2)]dt + \gamma dW_t. \quad (\text{A.104})$$

Les moments non-centrés d'ordre supérieur à 2 se déduisent de la même manière. L'obtention des moments centrés ne pose, quant à elle, aucune difficulté si nous disposons des moments non-centrés. Par ailleurs, la procédure que nous nous apprêtons à décrire reste valable pour le cas LOG-OUS, il y a simplement un accroissement important des écritures. C'est ce qui justifie que nous privilégions le cas simple.

Pour déterminer le moment non-centré d'ordre 2, la première étape consiste à remarquer que (A.104) peut être réécrit sous une forme équivalente en utilisant la formule d'Itô :

$$df_t = -\kappa f_t dt + \sqrt{2\kappa} dW_t, \quad (\text{A.105})$$

pour,

$$f_t = \frac{\sqrt{2\kappa}}{\gamma} [\ln(\sigma_t^2) - \vartheta]. \quad (\text{A.106})$$

En réappliquant la formule d'Itô sur le processus df_t , nous obtenons la solution suivante pour f_t :

$$f_T = f_t \exp[-\kappa(T-t)] + \int_t^T \sqrt{2\kappa} \exp[\kappa(s-T)] ds \quad (\text{A.107})$$

Parallèlement à ce résultat, nous savons également que :

$$E_t \left(\left[\int_t^T \sigma_s^2 ds \right]^2 \right) = 2 \int_t^T \int_t^s E_t(\sigma_u^2 \sigma_s^2) du ds, \quad (\text{A.108})$$

A.8. Moments de \bar{V}

pour $u \leq s$ et où $E_t(\cdot) = E(\cdot|\sigma_t)$ désigne l'espérance conditionnelle sachant la volatilité instantanée en t . Il nous faut, à présent, calculer l'intégrande dans (A.108). Nous avons :

$$E_t(\sigma_u^2 \sigma_s^2) = E_t \left[\exp \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\kappa}} f_u + \vartheta \right) \exp \left(\frac{\gamma}{\sqrt{2\kappa}} f_s + \vartheta \right) \right], \quad (\text{A.109})$$

ceci provient simplement de l'équation (A.106) liant f_t et σ_t^2 . Maintenant, si nous exploitons les expressions de f_u et f_s données dans (A.107) et que nous séparons les termes déterministes des termes stochastiques dans (A.109), nous obtenons :

$$E_t(\sigma_u^2 \sigma_s^2) = A(t, s, u) E_t [\exp(X_s) \exp(X_u)] \quad (\text{A.110})$$

où,

$$A(t, s, u) = \exp \left[2\vartheta + \frac{\gamma}{\sqrt{2\kappa}} f_t (\exp[-\kappa(s-t)] + \exp[-\kappa(u-t)]) \right], \quad (\text{A.111})$$

et,

$$X_i = \int_t^i \gamma \exp[\kappa(x-i)] dW_x, \quad (\text{A.112})$$

pour $i = s, u$.

Nous faisons remarquer que par un simple jeu d'écriture l'espérance conditionnelle dans (A.110) peut se réécrire :

$$E_t [\exp(X_s) \exp(X_u)] = E_t [\exp(X_s - X_u) \exp(2X_u)]. \quad (\text{A.113})$$

Or, $X_s - X_u$ et $2X_u$ sont deux mouvements Browniens indépendants, d'où :

$$E_t [\exp(X_s - X_u) \exp(2X_u)] = E_t [\exp(X_s - X_u)] E_t [\exp(2X_u)]. \quad (\text{A.114})$$

Il reste donc à calculer les deux espérances conditionnelles présentes dans le terme de droite de l'équation (A.114). Toutes deux étant des espérances de variables aléatoires distribuées selon une loi log-normale, nous avons donc :

$$\begin{aligned} E_t [\exp(X_s - X_u)] &= \exp \left[E_t(X_s - X_u) + \frac{\text{Var}_t(X_s - X_u)}{2} \right], \\ &= \exp \left(\frac{\text{Var}_t(X_s - X_u)}{2} \right), \end{aligned} \quad (\text{A.115})$$

car X_u et X_s ont une espérance nulle. De même, on trouve :

$$E_t [\exp(2X_u)] = \exp[2\text{Var}_t(X_u)]. \quad (\text{A.116})$$

À présent, il suffit de noter que :

$$Var_t(X_s - X_u) = Var_t(X_s) + Var_t(X_u) - 2Cov_t(X_s, X_u), \quad (\text{A.117})$$

$$Var_t(X_i) = \frac{\gamma^2}{2\kappa} (1 - \exp[2\kappa(t - i)]), \quad (\text{A.118})$$

pour $i = s, u$, et,

$$\begin{aligned} Cov_t(X_s, X_u) &= \int_t^u \gamma^2 \exp[\kappa(x - u)] \exp[\kappa(x - s)] dx, \\ &= \frac{\gamma^2}{2\kappa} (\exp[\kappa(u - s)] - \exp[2\kappa t - \kappa(u + s)]), \end{aligned} \quad (\text{A.119})$$

pour achever le calcul de (A.114). Le résultat final est relativement compliqué puisqu'il s'écrit encore sous la forme d'une double intégrale qu'il semble difficile de réduire :

$$\begin{aligned} E_t \left(\left[\int_t^T \sigma_s^2 ds \right]^2 \right) &= 2 \int_t^T \int_t^s A(t, s, u) \exp[-Cov_t(X_s, X_u)] \times \\ &\quad \exp \left[\frac{5}{2} Var_t(X_u) + \frac{1}{2} Var_t(X_s) \right] dud s, \end{aligned} \quad (\text{A.120})$$

où tous les termes présents ont été définis. En revanche, nous faisons remarquer que son approximation par des techniques numériques ne pose aucune difficulté particulière. D'autre part, l'expression du second moment non-centré de $\bar{V}_{t,T}$ dépend de la volatilité instantanée en t via f_t dans $A(t, s, u)$. En d'autres mots, il est possible de déterminer numériquement la valeur du second moment non-centré, et par suite le second moment centré, de $\bar{V}_{t,T}$, pour une valeur $\ln(\sigma_t^2)$.

Une autre façon de faire pour déterminer les moments de \bar{V} est donnée par Meddahi (2001) et Andersen *et al.* (2004). Ces études sont issues du courant de littérature visant à approcher la volatilité instantanée par la volatilité réalisée intra-journalière. Dans cette approche, les moments de la volatilité intégrée, c'est à dire ce que nous cherchons, sont des quantités fondamentales. Les recherches dans ce domaine s'arrêtent actuellement à des modèles de volatilité stochastique sans sauts. Nous donnons ici un certain nombre de résultats susceptibles d'être employés dans notre méthode d'estimation.

Meddahi (2001) montre que dans le cas où la volatilité est régie selon un processus LOG-OU, la solution σ_t^2 peut également s'écrire sous la forme :

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i H(i, f_t), \quad (\text{A.121})$$

où f_t est définie par (A.106),

$$a_i = \exp\left(\vartheta + \frac{\gamma^2}{4\kappa}\right) \frac{(\gamma/\sqrt{2\kappa})^i}{\sqrt{i!}}, \quad (\text{A.122})$$

et,

$$H(i, x) = 2xH(i-1, x) - 2(i-1)H(i-2, x), \quad (\text{A.123})$$

désigne le polynôme d'Hermite. Avec ce type d'expression pour σ_t , ses moments prennent des formes plus facilement manipulables, puisque Andersen *et al.* (2004) obtiennent par exemple :

$$E(\sigma_T^2) = a_0, \quad (\text{A.124})$$

ou encore :

$$E_t(\sigma_T^2) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \exp(-\kappa i(T-t)) H(i, f_t). \quad (\text{A.125})$$

Ainsi, les moments de la volatilité intégrée deviennent plus faciles à calculer, par exemple, le premier moment est :

$$E_t(\bar{V}_{t,T}) = a_0(T-t) + \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{1 - \exp[-\kappa i(T-t)]}{\kappa i} H(i, f_t). \quad (\text{A.126})$$

Les auteurs indiquent, sans toutefois les donner, que les moments d'ordre supérieur peuvent facilement être déterminés.

Enfin, et à titre de comparaison, on peut trouver dans l'annexe de Bollerslev et Zhou (2002) l'expression des premiers moments de la volatilité intégrée pour un processus à la Cox-Ingersoll-Ross. On constatera que les expressions y sont bien plus simples que celles obtenues dans le cas LOG-OU.

A.9 Détails de l'algorithme décrit dans le chapitre 5.

Nous décrivons ici les détails techniques de l'algorithme permettant d'estimer les paramètres du modèle complet décrit dans le chapitre 5. L'estimation des cas particuliers qui en découle se déduit facilement de ce cas général.

Nous imposons les lois a priori suivantes :

$$\begin{aligned}\alpha &\sim \mathcal{N}(a_\alpha, b_\alpha), & \alpha_Z &\sim \mathcal{N}(a_Z, b_Z), \\ \mu &\sim \mathcal{N}(a_\mu, b_\mu), & \mu_J &\sim \mathcal{N}(a_J, b_J), \\ \beta &\sim \mathcal{N}(a_\beta, b_\beta), \\ p &\sim \mathcal{Be}(a_p, b_p), & q &\sim \mathcal{Be}(a_q, b_q), \\ \xi &\sim \mathcal{IG}(c_\xi, d_\xi), & \delta &\sim \mathcal{IG}(c_\delta, d_\delta), \\ \tilde{\sigma} &\sim \mathcal{IG}(c_\sigma, d_\sigma).\end{aligned}$$

Les valeurs des hyperparamètres pour les lois a priori normales sont, pour $i = \{\alpha, Z, \mu, J, \beta\}$, $a_i = 0$, $b_i = 100$. Pour les lois bêtas, nous avons $a_p = b_p = a_q = b_q = 0.5$. Enfin, pour les lois inverses-gamma, nous avons choisi pour $j = \{\xi, \delta, \sigma\}$, $c_j = 0.001$ et $d_j = 0.001$. Toutes ces lois a priori sont donc diffuses, néanmoins nous avons également des contraintes identifiantes qui peuvent être interprétés comme des a priori très forts. En effet, nous imposons $p > 1 - p$, $q > 1 - q$, $\xi^2 > 1$ et, $\tilde{\sigma} > 1$.

L'algorithme que nous proposons consiste d'abord à :

- Étape 0 : Collecter T prix d'options C_t^* , ou si nous disposons de l'indice de volatilité, retrouver le prix d'une option à parité et à un mois de l'échéance en injectant la valeur de l'indice dans la formule de Black et Scholes (1973), $C_t^* = C_{BS}(\sigma_{I,t})$.

Puis, dans un second temps, à construire un échantillonnage de Gibbs où, à chaque itération, nous répétons les étapes suivantes :

- Étape 1 : Pour des vecteurs de paramètre θ_S^Q et θ_V^Q donnés, trouver pour chaque observation, la volatilité moyenne espérée $E(\bar{V}_{t,T})$ qui vérifie $C_{Merton}[E(\bar{V}_{t,T})] = C_t^*$. Si pour une observation cette valeur n'est pas définie, aller à l'étape 2. Sinon, étant donnée $E(\bar{V}_{t,T})$, trouver la valeur σ_t qui vérifie l'équation $E(\bar{V}_{t,T}) = \frac{1}{T-t} \int_t^T E(\sigma_s^2 | \sigma_t) ds$. Dans les deux cas les techniques employées sont numériques et nous avons procédé par tâtonnements. À l'issue de cette étape, nous disposons des T volatilités instantanées.
- Étape 2.A : générer les T z_t^y selon :

$$P[z_t^y = 0] = \frac{p f_{\mathcal{N}}(y_t; \alpha, h_t \Delta)}{p f_{\mathcal{N}}(y_t; \alpha, h_t \Delta) + (1 - p) f_{\mathcal{N}}(y_t; \alpha + \alpha_Z, h_t \Delta \tilde{\sigma}^2)},$$

A.9. Détails de l'algorithme décrit dans le chapitre 5.

puis calculer les statistiques suivantes :

$$\begin{aligned}
n_{11} &= \sum_t \mathbb{I}[z_t^y = 0], & n_{12} &= \sum_t \mathbb{I}[z_t^y = 1], \\
\bar{y}_{11} &= \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t} \mathbb{I}[z_t^y = 0], & \bar{y}_{21} &= \sum_{t=1}^T \frac{1}{h_t} \mathbb{I}[z_t^y = 1], \\
\bar{y}_{12} &= \sum_{t=1}^T \frac{y_t}{h_t} \mathbb{I}[z_t^y = 0], & \bar{y}_{22} &= \sum_{t=1}^T \frac{y_t}{h_t} \mathbb{I}[z_t^y = 1], \\
\bar{x} &= \sum_{t=1}^T \frac{(y_t - \alpha - \alpha_J)^2}{h_t \Delta} \mathbb{I}[z_t^y = 1], & \tilde{y} &= \sum_{t=1}^T h_t \mathbb{I}[z_t^y = 1].
\end{aligned}$$

– Étape 2.B : générer les T variables indicatrices z_t^h selon :

$$P[z_t^h = 0] = \frac{q f_{\mathcal{N}}(\ln(h_t) | \mu + \beta \ln(h_{t-1}), \delta^2)}{q f_{\mathcal{N}}(\ln(h_t) | \mu + \beta \ln(h_{t-1}), \delta^2) + (1 - q) f_{\mathcal{N}}(\ln(h_t) | \mu + \mu_J + \beta \ln(h_{t-1}), \xi^2 \delta^2)},$$

puis calculer les statistiques :

$$\begin{aligned}
n_{21} &= \sum_{t=1}^T \mathbb{I}[z_t^h = 0], & n_{22} &= \sum_{t=1}^T \mathbb{I}[z_t^h = 1], \\
\bar{h}_{01} &= \sum_{t=2}^T \ln(h_{t-1}) \mathbb{I}[z_t^h = 0], & \bar{h}_{11} &= \sum_{t=2}^T \ln(h_{t-1}) \mathbb{I}[z_t^h = 1], \\
\bar{h}_{02} &= \sum_{t=1}^T \ln(h_t) \mathbb{I}[z_t^h = 0], & \bar{h}_{12} &= \sum_{t=1}^T \ln(h_t) \mathbb{I}[z_t^h = 1], \\
\bar{s}_{01} &= \sum_{t=2}^T \mathbb{I}[z_t^h = 0], & \bar{s}_{11} &= \sum_{t=1}^T \mathbb{I}[z_t^h = 1], \\
\bar{s}_{02} &= \sum_{t=2}^T \mathbb{I}[z_t^h = 0], & \bar{s}_{12} &= \sum_{t=1}^T \mathbb{I}[z_t^h = 1], \\
\tilde{s}_0 &= \sum_{t=2}^T [\ln(h_t) - \mu - \beta \ln(h_{t-1})]^2 \mathbb{I}[z_t^h = 0], \\
\tilde{s}_1 &= \sum_{t=2}^T (\ln(h_t) - \mu - \mu_J - \beta \ln(h_{t-1}))^2 \mathbb{I}[z_t^h = 1],
\end{aligned}$$

– Étape 3 : simuler les paramètres suivant leur lois a posteriori condi-

tionnelles :

$$\begin{aligned}
p &\sim \mathcal{B}e(n_{11} + a_p, n_{12} + b_p), \\
q &\sim \mathcal{B}e(n_{21} + a_q, n_{22} + b_q), \\
\tilde{\sigma}^2 &\sim \mathcal{IG}\left(\frac{n_{12}}{2} + c_\sigma + 1, \frac{\bar{x}}{2} + d_\sigma\right), \\
\delta^2 &\sim \mathcal{IG}\left(\frac{n_{21}}{2} + \frac{n_{22}}{2\xi^2} + c_\delta, \frac{\tilde{s}_0}{2} + \frac{\tilde{s}_1}{2\xi^2} + d_\delta\right), \\
\xi^2 &\sim \mathcal{IG}\left(\frac{n_{21}}{2\delta^2} + c_\xi, \frac{\tilde{s}_1}{2\delta^2} + d_\xi\right), \\
\alpha &\sim \mathcal{N}(E_\alpha, V_\alpha), \\
\alpha_Z &\sim \mathcal{N}(E_Z, V_Z), \\
\mu &\sim \mathcal{N}(E_\mu, V_\mu), \\
\beta &\sim \mathcal{N}(E_\beta, V_\beta), \\
\mu_J &\sim \mathcal{N}(E_J, V_J), \\
\sigma_Z^2 &= \frac{\tilde{y}}{n_{12}}(\tilde{\sigma}^2 - 1),
\end{aligned}$$

où :

$$E_\alpha = \left(\bar{y}_{12} + \frac{\bar{y}_{22} + \alpha_Z \bar{y}_{21}}{\tilde{\sigma}^2} + \frac{a_\alpha}{b_\alpha} \right) V_\alpha,$$

$$V_\alpha = \frac{1}{\bar{y}_{11} + \bar{y}_{21}/\tilde{\sigma} + 1/b_\alpha},$$

$$E_Z = \left(\frac{\bar{y}_{22} - \alpha \bar{y}_{21}}{\tilde{\sigma}^2} + \frac{a_Z}{b_Z} \right) V_Z,$$

$$V_Z = \frac{1}{\bar{y}_{21}/\tilde{\sigma}^2 + 1/b_z}.$$

$$E_\mu = \frac{1}{V_\mu} \left(\frac{\bar{s}_{02} - \bar{h}_{01}\beta}{\delta^2} + \frac{\bar{s}_{12} - \bar{s}_{11}\mu_J - \bar{h}_{11}\beta}{\delta^2\xi^2} + \frac{a_\mu}{b_\mu} \right),$$

$$V_\mu = \frac{1}{\bar{s}_{01}/\delta^2 + \bar{s}_{11}/(\delta^2\xi^2) + 1/b_\mu},$$

$$E_J = \frac{1}{V_J} \left(\frac{\bar{s}_{12} - \bar{s}_{11}\mu - \bar{h}_{11}\beta}{\delta^2\xi^2} + \frac{a_J}{b_J} \right),$$

$$V_J = \frac{1}{\bar{s}_{11}/(\delta^2\xi^2) + 1/b_J},$$

$$E_\beta = \frac{1}{V_\beta} \left(\frac{\bar{h}_{02} - \bar{h}_{01}\mu}{\delta^2} + \frac{\bar{h}_{12} - \bar{h}_{11}(\mu + \mu_J)}{\delta^2\xi^2} + \frac{a_\beta}{b_\beta} \right),$$

$$V_\beta = \frac{1}{\bar{h}_{01}/\delta^2 + \bar{h}_{11}/(\delta^2\xi^2) + 1/b_\beta}.$$

- Étape 4 : Dédire, de ces tirages, la valeur des paramètres en temps continu,

$$\sigma_Z^2 = \frac{\tilde{y}}{n_1 2} (\tilde{\sigma}^2 - 1),$$

puis les paramètres risque-neutres du processus de volatilité.