

Université de Strasbourg I

U.F.R. de Sciences Economiques

**CONCURRENCE IMPARFAITE ET FLUCTUATIONS
DE L'ACTIVITÉ ÉCONOMIQUE**

Aspects Théoriques et Empiriques

Thèse présentée pour l'obtention du titre de :
Docteur de L'Université de Strasbourg I

Présentée et soutenue publiquement par

Yves KUHRY

Le 05 octobre 2005

Jury

DIRECTEUR DE THÈSE :	M. Rodolphe Dos Santos Ferreira Professeur à l'Université de Strasbourg I
PRÉSIDENT DU JURY	M. Pierre Malgrange Directeur de Recherche, Ecole Normale Supérieure, CEPREMAP
RAPPORTEUR INTERNE :	M. Jamel Trabelsi Maître de Conférences à l'Université de Strasbourg I
RAPPORTEURS EXTERNES	M. Raouf Boucekkine Professeur à l'Université Catholique de Louvain Mme Carine Nourry Professeur à l'Université d'Aix-Marseille II

*La Faculté n'entend donner aucune appro-
bation ou improbation aux opinions émises
dans les thèses. Ces opinions doivent être
considérées comme propres à leur auteur.*

Je voudrais tout d'abord remercier le professeur Dos Santos Ferreira d'avoir accepté de m'encadrer durant ces (longues) années de thèse et m'avoir témoigné de sa confiance. Ses critiques et l'attention qu'il porte dans la relecture ont grandement contribué à l'amélioration de ce travail.

Je remercie ensuite M. Pierre Malgrange, Mme Carine Nourry, M. Jamel Trabelsi et M. Raouf Boucekine de m'avoir fait l'honneur de composer mon jury. Je les remercie également en particulier pour leur patience et en profite pour m'excuser de les avoir ainsi fait attendre. Je voudrais adresser un remerciement tout particulier à Jamel Trabelsi pour sa confiance et ses conseils. J'attends avec impatience l'après-soutenance pour pouvoir m'atteler aux diverses tâches laissées en suspens.

Durant l'élaboration de cette thèse, j'ai bénéficié de l'aide et des conseils d'un certain nombre de "collègues" que je souhaite à présent remercier.

Tout d'abord, je pense à ceux qui ont partagé le bureau 126 et, avant, le rez-de-chaussée du Boulevard d'Anvers : Ghazi Ben Saâd, Mohamed Fekih, Laurent Gagnol, Thomas Seegmuller, Francesco de Palma, Guillaume Horny, Blandine Zimmer, Sandrine Mayer et Samir Chebab¹. Par leur bonne humeur, ils ont contribué à rendre ce bureau très convivial et loin des mesquineries que l'on peut observer ici ou là. De plus, je les remercie pour avoir toujours écouté avec patience mes questions parfois des plus ésotériques (en particulier, lorsque j'étais plongé dans la lecture du Guckenheim et Holmes). Merci aussi à Alban Verchère, pour ses nombreuses visites et discussions et l'aide qu'il m'a apportée.

Je ne connaissais pas grand chose à la programmation avant de démarrer cette thèse, si ce n'est l'expérience gagnée à programmer un puissance IV sur ma calculatrice durant les cours de physique du lycée. Débuter par le langage

1. Samir, si tu me lis, j'ai toujours ton CD de Curtis Mayfield

C n'a pas été une mince affaire et j'ai grandement bénéficié des conseils qui m'ont été donnés sur le forum `usenet.fr.comp.lang.c`. Je remercie donc les divers contributeurs de ce forum et en particulier Emmanuel Delahaye qui détient sans aucun doute le record de posts sur ce forum, et dont les contributions sont toujours instructives.

Un grand merci également à Laurent Gagnol, qui m'a fait découvrir Latex et Linux et par là, que la nécessité de rebooter à tous bouts de champs et les messages d'erreurs incompréhensibles n'étaient pas une loi de l'informatique mais bien un particularisme.

La tentation d'abandonner la thèse et l'indifférence quant aux conséquences de ce choix m'ont souvent traversé. Je remercie donc Laurent Weill d'avoir su trouver les arguments pour me pousser à terminer et à accélérer le bouclage du dernier chapitre. Le rôle des amis est parfois de dire des choses pas très agréables à entendre et tu as très bien joué ce rôle :-)

Enfin, je ne saurais oublier Claude Froeschlé, rencontré lors de l'école de Printemps d'Aussois, qui m'a témoigné de sa sympathie et de sa bienveillance et a montré un intérêt quant à l'avancement de mes travaux pour lequel je lui suis très reconnaissant.

À mes parents



Table des matières

Introduction Générale	1
1 Fluctuations Macroéconomiques Endogènes : Une Introduction	9
1.1 Introduction	10
1.2 Structure Générale du Modèle	14
1.2.1 Les Consommateurs	15
Les Travailleurs	15
Les Capitalistes	24
1.2.2 Les Entreprises	25
1.3 Équilibres et Dynamiques du Modèle	27
1.3.1 Le Cas d'une Économie Monétaire : le Modèle de Grand- mont	30
Existence de cycles	31
Stabilité des Cycles	37

La transition vers des dynamiques chaotiques	39
1.3.2 Fluctuations Endogènes dans une Économie avec Ca- pital Productif	42
Dynamiques Locales	43
Dynamiques Globales dans les Systèmes Bidimensionnels	59
1.4 Rendements Croissants et Concurrence Imparfait	69
1.4.1 Le Marché des Biens	70
1.4.2 Le Marché du Travail	79
1.5 Conclusion	81
A Résolution du programme des consommateurs	85
2 Fluctuations Endogènes dans un Modèle de Concurrence Mo- nopolistique à la Cournot avec Libre Entrée et Variabilité du Pouvoir de Marché	89
2.1 Introduction	90
2.2 Le Modèle	92
2.2.1 Les Travailleurs	93
2.2.2 Les Capitalistes	95
2.2.3 Les Entreprises	95
Le Secteur du Bien Final	96
Le Secteur Intermédiaire	98
2.3 Equilibres et Dynamiques du Modèle	100
2.3.1 Equilibre sur le Marché de la Monnaie	101
2.3.2 Equilibres Intertemporels et Dynamiques Locales . . .	101
2.4 Conclusion	111
B Linéarisation du Système Dynamique	115

C	Conditions de Deuxième Ordre du Secteur Intermédiaire	117
D	Existence de l'Etat Stationnaire :	119
E	Construction des tableaux 1 et 2	121
3	Analyse Numérique des Systèmes Dynamiques Non Linéaires	123
3.1	Introduction	124
3.2	Résolution Numérique des Systèmes d'Équations Non Linéaires	126
3.2.1	La Méthode des Sécantes	127
3.2.2	La Procédure de Newton	128
3.2.3	Procédures Basées sur la Méthode de Newton	133
	Convergence Globale : Recherche Linéaire et Rétroaction	134
	La Méthode de Broyden	135
	Méthode de Broyden avec Recherche Linéaire	140
3.2.4	Méthodes Numériques de Continuation	141
	Description de la Méthode de Prédiction-Correction . .	143
	L'Étape de Prédiction	143
	L'Étape de Correction	147
3.3	Calcul des Variétés Stable et Instable d'un Point-Selle	152
3.3.1	La Problématique	152
3.3.2	Description de l'Algorithme	155
3.4	Conclusion	158
F	La Résolution des Systèmes Linéaires par les Décompositions	
	LU et QR	163
F.1	La décomposition LU	163
F.2	La Décomposition QR	166

G	Le Logiciel DAMP	169
G.1	Installation	169
G.2	Utilisation du Logiciel : l'Exemple du Système de Hénon	170
G.3	Ajout d'un Nouveau Modèle	174
4	Dynamiques des Taux de Marge : Une Analyse Empirique du cas des États-Unis	177
4.1	Introduction	179
4.2	Le Modèle Economique	181
4.3	Analyse Spectrale et Cospectrale	185
4.3.1	Présentation de la méthode	185
4.3.2	L'Analyse de Fourier	189
	Représentation de Fourier des Fonctions Périodiques	191
	Le Cas des Fonctions Non Périodiques	194
4.3.3	Le Cas Stochastique : Densités Spectrales	197
	Densités Spectrales Discrètes	201
4.3.4	Estimation Spectrale	205
4.3.5	Analyse Cospectrale	213
4.4	Filtres Linéaires	216
4.4.1	Motivations et Définitions des Concepts	216
4.4.2	Exemples de Filtres	219
4.4.3	Caractéristiques des Filtres : Fonctions de Transfert et de Phase	220
4.4.4	Extraction de la Composante de Cycles : la Méthode de Pedersen	222
4.5	La Relation Taux de Marge-Revenu aux États-Unis	225
4.6	Conclusion	234

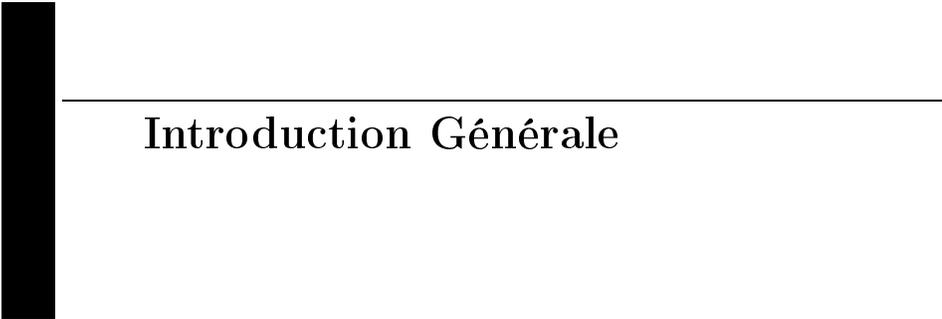


Table des figures

1.1	Détermination de l'optimum	20
1.2	Courbe de réaction des travailleurs	21
1.3	Construction de la courbe de réaction	23
1.4	États stationnaires globalement convergents	33
1.5	Existence d'un cycle de période 2	34
1.6	Condition d'existence d'un cycle de période 3	37
1.7	Diagramme de bifurcation	40
1.8	Bifurcation flip	41
1.9	Renormalisation	42
1.10	Le diagramme Trace-Déterminant	47
1.11	Bifurcation transcritique	50
1.12	Bifurcation fourche supercritique	50
1.13	Bifurcation fourche sous-critique	50
1.14	Bifurcation noeud-col	51
1.15	Bifurcation de Hopf pour l'équation logistique retardée 1.37	52

1.16	Evolution du rayon $\Delta: \sigma < s$	54
1.17	Bifurcation de Hopf	55
1.18	Evolution du rayon $\Delta: \sigma > s$	56
1.19	La transformation de Smale	60
1.20	Bifurcation homocline	65
1.21	Bifurcation homocline dans le modèle de Woodford	68
1.22	Position de la droite Δ_1	74
1.23	Modèle de Cazzavillan <i>et al</i>	75
2.1	Détermination de l'état stationnaire	103
2.2	Bifurcation de Hopf	109
2.3	Bifurcation de Hopf sous-critique	110
2.4	Bifurcation de Hopf supercritique	111
3.1	La méthode des sécantes	129
3.2	Convergence de la méthode de Newton	130
3.3	Cas de non convergence de la méthode de Newton	130
3.4	Cas d'inefficacité du critère d'arrêt	132
3.5	Méthode de corde	133
3.6	L'algorithme de Prédiction-Correction	144
3.7	Problème de points manquants	154
3.8	Problème de points erronés	154
3.9	Erreur d'interprétation Possible	159
G.1	Orbites du modèle de Hénon	171
G.2	Le menu 'Steady States->Parameters'	171
G.3	Paramètres de la procédure de Newton	171
G.4	Variétés stable et instable	173
G.5	Détail des variétés invariantes du modèle de Hénon	174

4.1	Décomposition d'une fonction périodique en composantes sinusoidales	187
4.2	Représentation d'une composante sinusoidale dans le plan complexe	192
4.3	Le phénomène de superposition : pour des valeurs entières de t , les valeurs de $\cos \omega_j t$ et $\cos(\omega_j + 2\pi n)t$ sont confondues.	203
4.4	Fenêtre rectangulaire et noyau de Dirichlet	210
4.5	Exemples de filtres passe-bas	220
4.6	Filtres passe-haut associés à la figure 4.5	220
4.7	Effets de fuite et de compression	224
	PIB	228
	Taux de marge	228
4.8	Fonctions d'autocorrélation	228
4.9	Covariances croisées	229
	PIB	230
	Taux de marge	230
4.10	Densités spectrales	230
4.11	Cospectre	231
4.12	Cohérence	232
4.13	Diagramme de phase	232
4.14	Spectre de quadrature	233
4.15	Diagramme de gain	233



Introduction Générale

L'objectif de cette thèse est d'explorer, théoriquement et empiriquement, la relation entre l'existence de marchés imparfaitement concurrentiels et l'émergence de fluctuations persistantes de l'activité économique. Sur le plan théorique, le modèle d'équilibre général s'est imposé ces dernières décennies comme l'outil de référence pour l'étude des cycles économiques. Au sein de cette modélisation, deux courants se sont distingués dans la littérature selon la nature exogène ou endogène qu'ils mettent en avant dans l'explication des cycles. Selon l'approche exogène, les fluctuations sont la résultante de chocs aléatoires et traduisent la dynamique de propagation de ces chocs. A l'inverse, l'approche endogène postule que les variations de l'activité reflètent la dynamique intrinsèque des fondamentaux de l'économie, en l'absence de chocs externes. La mise en évidence de non-linéarités dans les processus gouvernant l'évolution des variables économiques est l'ingrédient clé de ce pan de la littérature.

Les premières études qui ont avancé une explication endogène des fluctuations se sont basées sur le modèle à générations imbriquées, qui présente l'avantage d'introduire de façon simple l'hypothèse du cycle de vie dans un cadre d'équilibre général. A l'aide de ce modèle, ces travaux pionniers ont caractérisé les conditions permettant l'émergence de cycles, dans des économies d'échange pur ou des économies de production parfaitement concurrentielles. Cependant, l'intérêt de ces travaux est surtout heuristique, car les conditions qu'ils mettent en avant pour l'existence de cycles apparaissent comme trop restrictives et sont réfutées par les faits observés.

L'introduction de concurrence imparfaite dans les modèles apparaît donc comme un moyen de réconcilier la théorie avec les observations empiriques et d'offrir une explication plus satisfaisante des fluctuations économiques. En effet, la possibilité de rendements croissants au niveau de la firme ainsi que l'existence d'un pouvoir de marché susceptible de varier dans le temps sont des facteurs favorables à l'apparition de cycles.

Cette thèse se propose d'étudier la manière dont la prise en compte d'imperfections concurrentielles permet d'expliquer les fluctuations économiques. Le premier chapitre est consacré à l'étude des travaux théoriques existants qui ont analysé les conditions d'émergence de fluctuations. Le chapitre suivant est une contribution théorique à l'analyse des cycles introduisant de la concurrence imparfaite. Le troisième chapitre vise à pallier le manque d'outils informatiques permettant d'étudier les systèmes dynamiques apparaissant dans ce type de modèles et décrit un logiciel développé à cet effet. Enfin, le dernier chapitre analyse la relation taux de marge - cycles économiques d'un point de vue empirique.

Le chapitre 1 est consacré à une revue de la littérature sur les fluctuations endogènes. Plutôt que d'une description exhaustive des travaux, il s'agit d'une présentation des principaux résultats intégrés dans une modélisation unique empruntée à Woodford (1986*a*). Le modèle de base décrit une économie de production avec capital productif, dans laquelle les agents ont une durée de vie illimitée. Il suppose également tous les marchés parfaitement concurrentiels. L'élimination du capital, comme cas limite du modèle, permet de reproduire les résultats de l'article de Grandmont (1985*b*). Dans ce modèle, ce sont les comportements relatifs à l'épargne qui sont la source des fluctuations. En effet, sous certaines conditions, une augmentation du pouvoir d'achat peut favoriser l'épargne au détriment de la consommation si l'effet de revenu domine l'effet de substitution intertemporelle. Grandmont montre ainsi qu'une condition nécessaire d'émergence de cycles est l'unimodalité de la courbe d'offre de travail (qui traduit la dominance des effets revenu) et que son degré de courbure détermine la périodicité des cycles observés. Cependant, ces résultats ne sont pas satisfaisants du point de vue de leur pouvoir explicatif en raison de leur restrictivité et leur absence de validité empirique. C'est pourquoi nous considérons le cas où la production utilise également du capital. Le modèle permet alors de retrouver les résultats de Reichlin (1986) et de Grandmont, Pintus et de Vilder (1998) qui mettent en évidence le rôle de la complémentarité des facteurs de production comme source de cycles endogènes. Ainsi, si l'introduction de capital permet de s'affranchir de l'hypothèse trop contraignante d'une dominance des effets revenu, les conditions d'émergence de cycles restent restrictives, cette fois-ci du point de vue technologique. Deux types d'extensions du modèle sont considérées de manière plus brève dans ce chapitre. Les premières, d'un intérêt essentiellement technique, concernent l'analyse des cycles proprement dite et s'intéressent aux

propriétés globales des dynamiques (Cazzavillan (1996), Kozlovski, Pintus, Van Strien et De Vilder (2001),...). Le deuxième type d'extensions est relatif aux tentatives de trouver des explication plus convaincantes des fluctuations, en se démarquant du modèle de base au niveau des hypothèses microéconomiques (croissance des rendements, concurrence imparfaite, etc...).

Le deuxième chapitre de cette thèse est constitué d'un apport théorique à la littérature sur les fluctuations endogènes. Nous reprenons le modèle développé dans le chapitre 1 en y introduisant de la concurrence imparfaite. Pour ce faire, nous considérons un modèle à deux secteurs dans lequel un bien final est produit sur un marché parfaitement concurrentiel, à l'aide d'un continuum de biens intermédiaires. Chacun de ces biens intermédiaires est produit sur un marché en concurrence à la Cournot avec libre entrée, selon une technologie utilisant du capital et du travail. On a donc un continuum de marchés, chacun caractérisé par un nombre plus ou moins grand de firmes; une telle situation est qualifiée par d'Aspremont, Dos Santos Ferreira et Gérard-Varet (1997) de *concurrence monopolistique à la Cournot*. La concurrence imparfaite est susceptible de contribuer à l'apparition de fluctuations pour deux raisons : d'une part, au travers de l'introduction de rendements croissants internes à la firme et d'autre part du fait de l'existence d'une marge entre les prix et les coûts marginaux traduisant le pouvoir de marché des entreprises. Le taux de marge est en effet susceptible de varier dans le temps au travers de deux facteurs : l'élasticité de substitution entre les différents biens produits et la part de marché respective des entreprises. Ce modèle analyse l'effet des variations de la part de marché, pour une élasticité de substitution supposée constante. Ainsi, le facteur déterminant d'explication des cycles est la dynamique de créations et de destructions d'entreprises associée à l'hypothèse de libre entrée.

Le cas de la concurrence parfaite peut être obtenu dans ce modèle comme le cas limite où le pouvoir de marché est égal à zéro. Ce dernier est mesuré par un indice reflétant l'importance des coûts fixes et le degré de substitutabilité des biens. Il est montré que des cycles ne peuvent émerger que si cet indice est suffisamment élevé. Plus précisément, lorsque les facteurs de production ne sont pas des substituts parfaits et que le capital subit une faible dépréciation, une bifurcation de Hopf se produit lorsque l'indice de pouvoir de marché augmente au delà d'une certaine valeur critique. Cette bifurcation est associée à l'apparition d'une courbe fermée invariante autour de l'un des états stationnaires, c'est à dire à des fluctuations persistantes.

L'analyse dynamique effectuée dans le chapitre 2 est une analyse locale, c'est à dire qu'elle se restreint au voisinage des états stationnaires. L'analyse globale d'un système dynamique ne peut généralement être effectuée de façon analytique et requiert le recours à l'analyse numérique. Cependant, les logiciels existant sur le marché (tels que DSTOOL ou Dynamics) sont prévus pour l'étude de systèmes dynamiques exprimés sous forme explicite. C'est pourquoi le chapitre 3 s'attache à développer un outil informatique permettant d'étudier les dynamiques globales des systèmes dynamiques à deux dimensions, lorsque les équations dynamiques sont sous forme implicite (Kuhry (2002)). Concrètement, l'objectif était de fournir un logiciel permettant pour un système donné de calculer les trajectoires, déterminer les états stationnaires et leur stabilité et, dans le cas d'existence de points selles, de calculer les variétés stables et instables associées. Afin d'avoir un minimum d'intérêt pratique, celui-ci devait également pouvoir permettre de modifier les paramètres à la volée ainsi que l'échelle des graphiques. Enfin, celui-ci devait pouvoir permettre l'intégration facile de nouveaux modèles dynamiques. Le calcul des variétés stable et instable est réalisé à l'aide d'un algorithme

mis au point par You, Kostelitch et Yorke (1991) qui utilise les vecteurs propres au voisinage de l'état stationnaire comme première approximation et reconstruit les courbes par itérations successives en contrôlant les erreurs d'approximation. La détermination des états stationnaires peut être faite selon trois méthodes alternatives: la méthode de Newton avec recherche linéaire, la méthode de Broyden et par continuation. Ce chapitre décrit ainsi les différents algorithmes utilisés dans la conception de ce logiciel. Un CD-Rom accompagnant la thèse contient les sources en C du logiciel ainsi que de la bibliothèque ALLEGRO utilisée pour les traitements graphiques et la gestion des évènements.

Enfin, le chapitre 4 se propose d'étudier empiriquement la relation entre les fluctuations du taux de marge et celle du PIB. En effet, la plupart des études réalisées jusqu'à présent sur ce sujet sont limitées au calcul de corrélations entre ces séries, ce qui n'offre qu'un aperçu grossier de leur relations. C'est pourquoi nous privilégions une approche en terme d'analyse cospectrale. Dans un premier temps une série des taux de marge est construite pour les Etats Unis. Pour cela, nous nous basons sur les méthodologies développées par Hall (1986) et Rotemberg et Woodford (1991). Les séries sont ensuite filtrées à l'aide d'un filtre passe-haut afin d'en extraire les composantes cycliques. Pour cela, nous utilisons la mesure développée par Pedersen (1999*b*) afin d'évaluer les effets distortionnaires du filtre. La décomposition spectrale des séries permet alors de dégager les composantes importantes des séries univariées. Enfin, une analyse cospectrale est menée de manière à déterminer les fréquences qui expliquent le mieux les covariations de la production et des taux de marge au niveau macroéconomique.

Cette thèse fournit donc des éléments de preuve à la fois théoriques et

empiriques quant au lien entre l'imperfection de la concurrence et les fluctuations économiques. Néanmoins, il ne s'agit que d'une première approche qui ne prétend nullement à l'exhaustivité. En effet, la littérature concernant la concurrence imparfaite est d'une grande richesse et nous avons préféré privilégier une approche pluri-méthodologique présentant différentes manières d'approcher l'étude des dynamiques macroéconomiques, tout en mettant l'accent sur le rôle de la concurrence imparfaite.

CHAPITRE

1

**Fluctuations Macroéconomiques
Endogènes : Une Introduction**

Sommaire

1.1	Introduction	10
1.2	Structure Générale du Modèle	14
1.2.1	Les Consommateurs	15
1.2.2	Les Entreprises	25
1.3	Équilibres et Dynamiques du Modèle	27
1.3.1	Le Cas d'une Économie Monétaire: le Modèle de Grandmont	30
1.3.2	Fluctuations Endogènes dans une Économie avec Capital Productif	42
1.4	Rendements Croissants et Concurrence Imparfaite	69
1.4.1	Le Marché des Biens	70
1.4.2	Le Marché du Travail	79
1.5	Conclusion	81

1.1. Introduction

Les dernières décennies ont vu un regain d'intérêt pour les modèles macroéconomiques à fondements microéconomiques mettant en avant le caractère intrinsèque au fonctionnement de l'économie de la croissance et des fluctuations. L'abandon des premiers modèles de fluctuations endogènes, tels que ceux de Hicks et Kaldor, trouve sa justification, selon Boldrin et Woodford (1990), au confluent de trois facteurs : l'absence d'hypothèses microéconomiques cohérentes dont faisaient preuve ces modèles, la réfutation empirique des résultats auxquels ils aboutissaient et les difficultés techniques associées à l'étude des systèmes dynamiques non linéaires.

Le développement de modèles dynamiques reposant sur des bases microéconomiques solides (tels que ceux développés par la théorie des cycles réels), associé aux progrès accomplis par les mathématiciens et les physiciens dans la compréhension des dynamiques non-linéaires ont contribué à renouveler l'intérêt porté à l'étude des modèles de fluctuations macroéconomiques endogènes. Afin d'expliquer ces fluctuations, les modèles développés par cette littérature se sont reposés sur deux types de raisonnements, souvent liés. Le premier, à la suite des idées développées par Cass et Shell (1983), met en avant le rôle des croyances des agents en présence d'incertitude extrinsèque, c'est à dire n'affectant pas les fondamentaux de l'économie. Sous certaines conditions, que ces modèles cherchent à dégager, il est en effet possible de mettre en évidence des équilibres multiples ou de l'indétermination, sur la base desquels peuvent être construits des équilibres stochastiques dits de "taches solaires". À l'inverse, le deuxième type de raisonnement utilise les

développements récents de la théorie des systèmes dynamiques pour apporter des explications purement déterministes aux dynamiques cycliques et apériodiques.

Ce chapitre a pour objectif de présenter certains des principaux résultats concernant les dynamiques dans les modèles macroéconomiques d'équilibre général. Il ne prétend pas à l'exhaustivité mais développe au contraire un modèle de base permettant de mettre en lumière les principaux phénomènes dynamiques susceptibles d'émerger en les reliant aux hypothèses microéconomiques sous-jacentes. Dans le même temps, sont présentées les techniques mathématiques utilisées pour déceler de tels phénomènes.

L'essentiel des résultats présentés dans ce chapitre est obtenu au sein d'une modélisation unique empruntée à Woodford (1986*a*). Il s'agit d'un modèle à agent représentatif vivant une infinité de périodes. Les consommateurs sont hétérogènes et se divisent en deux classes, les travailleurs et les capitalistes. Ils cherchent à maximiser leur utilité intertemporelle en transférant de manière optimale le pouvoir d'achat entre les différentes périodes de leur vie. Pour ce faire, ils peuvent épargner sous forme monétaire ou de capital. Leurs revenus sont ainsi constitués des rendements de leur épargne auxquels s'ajoutent les salaires pour les travailleurs. Dans sa forme canonique, le modèle suppose que la production est réalisée à l'aide de capital et de travail selon une technologie à rendements constants. Tous les marchés sont supposés parfaitement concurrentiels mais une imperfection est introduite sous la forme d'une contrainte de liquidité pour les travailleurs. Par ailleurs, les travailleurs et les capitalistes se distinguent également par l'importance qu'ils confèrent à la consommation présente.

Dans une première section, la structure générale du modèle est présentée. Les comportements des deux classes de consommateurs et ceux des produc-

teurs sont détaillés et les conditions d'existence de solutions analysées.

L'objet de la deuxième section est l'étude des équilibres et dynamiques du modèle. Les conditions assurant l'équilibre temporaire (i.e. à chaque date) sur tous les marchés permettent de décrire l'évolution de l'économie sous la forme d'un système dynamique à deux dimensions. Les solutions de ce système sont les équilibres dynamiques et correspondent à des trajectoires de l'économie sur l'ensemble de l'horizon temporel.

L'élimination du capital obtenue comme cas limite permet de se ramener dans un premier temps à une économie monétaire et à un système dynamique unidimensionnel. Il est alors montré (Grandmont, 1985*b*) que des fluctuations entretenues sont possibles si l'utilité instantanée de la consommation est fortement concave. L'origine de ces fluctuations se trouve dans le conflit entre les effets de substitution et effets revenu associés à une variation du pouvoir d'achat. Lorsque l'effet revenu domine, une augmentation du pouvoir d'achat se traduit par une hausse du loisir. Des renversements de tendance sont ainsi rendus possibles dans les phases de croissance des revenus et de la demande. Par ailleurs, le fait de se limiter à une économie monétaire permet de bénéficier des outils développés spécifiquement pour les systèmes dynamiques à une dimension. De nombreuses caractéristiques intéressantes des systèmes dynamiques peuvent ainsi être présentées dans un cadre simple. En particulier, on peut ainsi bien caractériser l'évolution de complexité des dynamiques au fur et à mesure de l'augmentation contrôlée du degré de concavité de la fonction d'utilité. Néanmoins, la domination des effets de revenu est une hypothèse forte et peu valide empiriquement. Il s'est donc avéré nécessaire d'enrichir le modèle, notamment par l'introduction de capital productif dans la technologie. Nous reprenons alors les résultats de Reichlin (1986) et Grandmont et al. (1998) qui soulignent le rôle de la complémentarité des facteurs comme

moteur des cycles économiques. Le salaire réel et le taux d'intérêt réel varient en effet en sens inverse lorsque le degré de complémentarité des facteurs de production est suffisamment fort, ce qui induit des effets contradictoires sur l'épargne, propices à l'émergence de fluctuations. L'analyse effectuée par ces auteurs se restreint à une caractérisation locale des équilibres dynamiques. Cela implique que, si des conditions suffisantes d'existence de trajectoires périodiques ou apériodiques sont données, ces dernières resteront néanmoins dans un voisinage proche de l'état stationnaire. Diverses contributions se sont de ce fait intéressées à la description des dynamiques au niveau global. En particulier, nous retrouvons ici les résultats obtenus par de Vilder (1996) au sein d'un modèle à générations imbriquées.

Enfin, la dernière section passe en revue diverses extensions du modèle de référence. En effet, que ce soit dans le cadre d'une économie monétaire ou d'une économie avec capital productif, les hypothèses de concurrence parfaite et de non croissance des rendements ne permettent d'obtenir des résultats intéressants du point de vue de la théorie des cycles endogènes qu'au prix d'hypothèses relativement fortes sur les préférences ou la technologie. Nous examinons dans un premier temps le cas de croissance des rendements induits par des externalités positives affectant la production (Cazzavillan, Lloyd-Braga et Pintus, 1998). Cela permet en effet de conserver l'hypothèse de concurrence parfaite sur tous les marchés et de ce fait n'implique qu'une légère modification de la structure du modèle¹. Néanmoins, cette spécification permet de mettre en évidence des dynamiques périodiques ou quasi-périodiques pour des technologies à facteurs fortement substituables. Nous nous intéres-

1. Par ailleurs, comme il est montré dans l'article de Benhabib et Farmer (1994), l'existence de rendements croissants externes est équivalente du point de vue formel à certaines formes de concurrence imparfaite.

sons ensuite aux conséquences de l'introduction d'imperfections de marchés. Le premier cas de figure envisagé est celui de concurrence imparfaite sur le marché du produit. La possibilité pour les firmes de fixer leur prix au-dessus du coût marginal induit en effet de nouvelles sources envisageables de fluctuations des variables économiques. De fait, le taux de marge dépend de deux facteurs susceptibles de varier : la part de marché de l'entreprise, qui peut être affectée par le processus de créations/destructions de firmes au niveau du secteur, et l'élasticité de la demande, dont différentes sources de variabilité ont été mises en avant dans la littérature.

1.2. Structure Générale du Modèle

L'objectif étant de présenter les différentes dynamiques susceptibles d'émerger au niveau macroéconomique, nous restreignons notre étude à une classe particulière de modèles qui servira de fil conducteur tout au long du chapitre. La structure que nous avons adoptée est celle qui a été proposée par Woodford (1986*a*). En effet, en se restreignant à certains équilibres, les choix des travailleurs sont identiques à ceux obtenus dans les modèles à générations imbriquées lorsque la monnaie est utilisée pour les transferts de pouvoir d'achat. Ainsi, nous avons pu reproduire au sein de la même modélisation les résultats de certains articles qui ont initié la littérature sur les fluctuations endogènes (Grandmont, 1985*b*², Reichlin, 1986) et qui considéraient des modèles à générations imbriquées, aussi bien que ceux obtenus

2. Le modèle de Grandmont a été précédé du modèle de Benhabib et Day (1982) qui mettait déjà en évidence des résultats similaires. Néanmoins l'article de Grandmont offre une caractérisation beaucoup plus complète et systématique des dynamiques du modèle et de leurs conditions d'occurrence.

plus récemment dans des modèles à la Woodford³(Grandmont et al., 1998, et Cazzavillan, Lloyd-Braga et Pintus, 1998).

Les comportements des consommateurs font l'objet de la première sous-section, la deuxième sous-section détaillant le programme des entreprises. La version de base du modèle considère la concurrence parfaite sur tous les marchés.

1.2.1 Les Consommateurs

Le forme structurelle retenue pour le comportement des agents est un modèle à agent représentatif à durée de vie infinie proposé par Woodford (1986*a*). Cet auteur distingue deux catégories de consommateurs nommées respectivement travailleurs et capitalistes, dont les choix sont décrits dans les deux sous-sections suivantes.

Les Travailleurs

La distinction entre les deux catégories de consommateurs considérées par Woodford porte sur leurs sources de revenus respectives. En effet, il suppose que certains consommateurs, les capitalistes, n'offrent pas de travail. Leur unique revenu est le rendement du stock de capital qu'ils détiennent et qu'ils utilisent pour consommer et pour accumuler du capital supplémentaire. Les travailleurs disposent en plus de la rémunération de leur offre de travail qui induit une contrainte de liquidité additionnelle. En effet, les salaires ne sont touchés qu'en fin de période et les travailleurs ne peuvent utiliser ces gains dans la période courante en raison de problèmes d'aléa moral. Les salaires sont donc intégralement transférés à la période suivante sous forme de mon-

3. Pour une revue de la littérature concernant les fluctuations dans les modèles à agents représentatifs, voir Nishimura et Sorger (1996).

naie. En revanche, les intérêts sur le stock de capital détenu peuvent être empruntés en engageant le capital comme garantie. De plus, les travailleurs se distinguent des capitalistes par la plus grande importance qu'ils confèrent à la consommation présente. Enfin, nous supposons également, nous démarquant ainsi de Woodford, que les travailleurs ont une dotation initiale de bien C^* à chaque période⁴.

Les travailleurs cherchent à maximiser l'espérance de leur utilité intertemporelle qui dépend de leurs consommations à chaque date $C_t^w > 0$ et de l'effort $L_t \in [0, L^*[$ qu'ils fournissent ou, de manière équivalente, du temps consacré au loisir $L^* - L_t$:

$$U = E_t \sum_{t=1}^{\infty} [\gamma^{t-1} u(C_t^w) + \gamma^t v(L^* - L_t)], \quad (1.1)$$

sous les contraintes :

$$p_t (C_t^w + K_t^w - (1 - \delta) K_{t-1}^w) \leq M_t^w + r_t K_{t-1}^w + p_t C^*, \quad (1.2)$$

$$p_t (C_t^w + K_t^w - (1 - \delta) K_{t-1}^w) + M_{t+1}^w = M_t^w + r_t K_{t-1}^w + w_t L_t + p_t C^* \quad (1.3)$$

où la deuxième contrainte est la contrainte budgétaire standard et la première traduit la contrainte financière des travailleurs précédemment évoquée.

On fait l'hypothèse suivante sur les fonctions d'utilité instantanée :

Hypothèse 1.1

Les fonctions d'utilité instantanée de la consommation et du loisir sont C^r , avec r suffisamment grand, croissantes et concaves respectivement sur $[C^, +\infty[$*

4. A l'instar de Gali et Zilibotti (1995) ou de Aloi, Dixon et Lloyd-Braga (2000), on peut interpréter cette dotation comme le résultat d'une production domestique. Cette hypothèse est nécessaire pour retrouver les résultats du modèle de Grandmont (1985b) concernant les dynamiques globales. Lorsqu'elle ne portera pas à conséquence, on posera $C^* = 0$.

et $[0, L^*[$. De plus, l'utilité marginale du loisir tend vers l'infini lorsque l'offre de travail tend vers la dotation L^* .

Woodford restreint son analyse au voisinage d'un type particulier d'équilibre au voisinage de l'état stationnaire. Cette famille d'équilibres est caractérisée par le fait que le capital a un rendement supérieur à celui de la monnaie :

$$r_{t+1} + (1 - \delta)p_{t+1} > p_t. \quad (1.4)$$

De plus, l'auteur suppose que le taux d'escompte des travailleurs est inférieur à celui des capitalistes. Il montre alors que cette hypothèse implique que les travailleurs privilégient la consommation présente et ne souhaitent pas épargner. Cependant, du fait de l'impossibilité de dépenser leur salaire en cours de période, celui-ci est transféré sous forme de monnaie à la période suivante⁵. Il ressort de cette analyse que le programme des travailleurs, à la date t , peut se réécrire sous la forme :

$$\max_{C_{t+1} \geq C^*, L_t \in [0, L^*]} E_t [u(C_{t+1}^w) + v(L^* - L_t)], \quad (1.5)$$

$$\text{s.c. } M_{t+1} = p_{t+1} (C_{t+1}^w - C^*) = w_t L_t. \quad (1.6)$$

Les préférences peuvent alors être représentées par des isoquantes croissantes convexes : $C_{t+1}^w = u^{-1} [k - v(L^* - L_t)]$ de pente $v'(L^* - L_t)/u'(C_{t+1}^w)$ et de niveau k .

De nombreux modèles posent la structure donnée par les équations (1.5) et (1.6) comme point de départ. Le modèle est alors interprété comme décrivant une économie dans laquelle les agents vivent deux périodes, travaillent durant la première (jeunesse) et consomment dans la deuxième (vieillesse). La justification d'une telle modélisation (dite à *générations imbriquées*) est

5. Ces arguments sont formalisés dans l'annexe A.

de proposer le cadre d'étude le plus simplifié possible permettant de relier des phénomènes dynamiques intéressants au cycle de vie des consommateurs. Ce type de modèles est également utile lorsque l'on souhaite étudier la relation entre les fluctuations économiques et les choix des producteurs. Il permet alors d'intégrer les hypothèses spécifiques sur la technologie et la structure de marchés dans un cadre d'équilibre général dynamique, qui reste suffisamment simple pour être étudié de façon analytique.

L'article de Grandmont (1985*b*) utilise ainsi un modèle à générations imbriquées pour relier l'émergence de dynamiques cycliques ou apériodiques au degré de préférence pour le présent des consommateurs.

Nous avons cependant préféré partir de l'approche de Woodford pour deux raisons : la première, avancée par Boldrin et Woodford (1990), est qu'elle permet de répondre aux critiques dont ont fait l'objet les modèles à générations imbriquées concernant la longueur des cycles (Sims (1986)). En effet, dans ces modèles, une période équivaut à une génération, tandis que le modèle de Woodford a une interprétation en termes de cycles courts. La deuxième différence avec le modèle à générations imbriquées est que sous certaines hypothèses, les choix d'épargne sous forme monétaire ou de capital sont complètement dissociés. Le modèle de Woodford permet d'obtenir ainsi une formulation simple de la dynamique d'accumulation du capital⁶.

En notant $\theta_t \equiv w_t/p_{t+1}$, le pouvoir d'achat du travailleur à la date t ⁷,

6. Celle-ci découle de l'hypothèse de log-linéarité de la fonction d'utilité des capitalistes (voir Barinci et Chéron (2001)).

7. Cette interprétation en termes de pouvoir d'achat est un peu abusive ici et est surtout valide dans le cadre des modèles à générations imbriquées où w_t/p_{t+1} représente en effet le pouvoir d'achat d'un jeune né à la date t . On emploiera néanmoins cette expression, cette réserve étant faite.

l'existence d'une solution intérieure sera assurée par la condition $\theta_t > \bar{\theta}$ avec

$$\bar{\theta} = \frac{\lim_{L_t \rightarrow 0} v'(L^* - L_t)}{\lim_{C_{t+1}^w \rightarrow C^*} u'(C_{t+1}^w)}, \quad (1.7)$$

qui est la pente en $L_t = 0$ de l'isoquante correspondant à un niveau d'utilité nul.

On fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1.2 $\bar{\theta} < 1$

Si la technologie est de la forme $y_t = L_t$, où y_t désigne le niveau de production, les salaires et les prix sont égaux à l'équilibre et l'hypothèse 2 correspond à ce que Gale (1973) a appelé le cas de Samuelson. Littéralement, elle signifie que lorsque les prix sont stationnaires, l'équilibre qui prévaut diffère de l'équilibre autarcique.

Si une solution intérieure existe, le choix optimal du travailleur sera une consommation $C_{t+1}^w(\theta_t)$ et une offre de travail $L_t(\theta_t)$ qui satisfont la relation d'égalité entre le TMS et le rapport des prix :

$$\frac{v'(L^* - L_t(\theta_t))}{u'(C_{t+1}^w(\theta_t))} = \theta_t. \quad (1.8)$$

Le graphique 1.1 illustre la discussion qui précède.

En dérivant (1.8) ainsi que la contrainte budgétaire $C_{t+1}^w(\theta_t) - C^* = \theta_t L_t(\theta_t)$, puis en opérant les substitutions appropriées, on détermine la variation de l'optimum consécutive à une variation du pouvoir d'achat :

$$\frac{\partial L_t}{\partial \theta_t}(\theta_t) = -\frac{u'(C_{t+1}^w(\theta_t)) + (C_{t+1}^w(\theta_t) - C^*)u''(C_{t+1}^w(\theta_t))}{\Delta},$$

$$\frac{\partial C_{t+1}^w}{\partial \theta_t}(\theta_t) = \frac{L_t(\theta_t)v''(L^* - L_t(\theta_t)) - v'(L^* - L_t(\theta_t))}{\Delta} > 0,$$

avec

$$\Delta = v''(L^* - L_t(\theta_t)) + (\theta_t)^2 u''(C_{t+1}^w(\theta_t)) < 0.$$

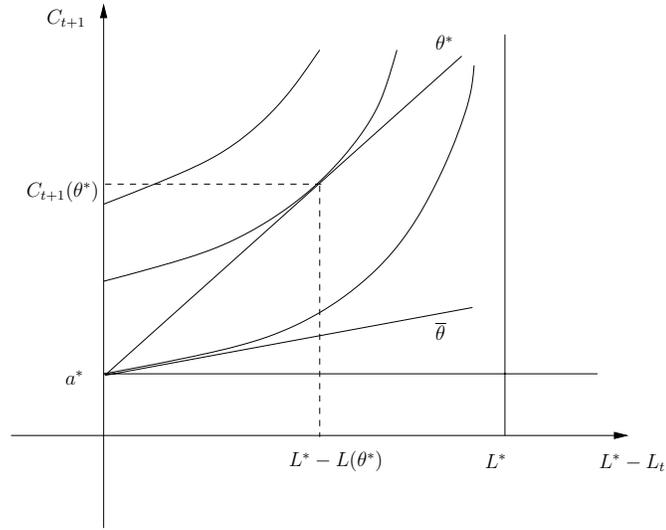


Figure 1.1: Détermination de l'optimum

D'après l'hypothèse 1, l'effet sur la consommation future est positif alors que celui sur l'offre de travail dépend des dérivées première et seconde de la fonction d'utilité instantanée de la consommation. Lorsque la dérivée de la fonction d'offre de travail $L'_t(\theta_t)$ est positive, le loisir et la consommation sont des substituts bruts, c'est à dire si le prix de la consommation baisse relativement à celui du loisir, les agents vont réduire leur demande de loisirs, c'est à dire travailler d'avantage. Il découle directement de l'expression de $L_t(\theta_t)$ que ceci est vérifié si et seulement si :

$$R_2(C_{t+1}^w) \equiv -\frac{C_{t+1}^w u''(C_{t+1}^w)}{u'(C_{t+1}^w)} < \frac{C_{t+1}^w(\theta_t)}{C_{t+1}^w(\theta_t) - C^*}, \quad (1.9)$$

où $R_2()$ désigne le degré de concavité de la fonction d'utilité de la consommation, qui s'interprète dans un cadre d'incertitude, comme le degré d'aversion relative pour le risque aussi appelé coefficient d'Arrow-Pratt.

Le terme à droite de l'inégalité (1.9) est plus grand que 1 et décroît de $+\infty$ à 1 lorsque θ_t varie entre $\bar{\theta}$ et $+\infty$. En particulier, l'offre de travail sera

localement croissante si θ_t est suffisamment proche de $\bar{\theta}$. En effet :

$$\frac{dC_{t+1}^w}{dL_t} = \frac{v'(L^* - L_t(\theta_t)) - L_t(\theta_t)v''(L^* - L_t(\theta_t))}{u'(C_{t+1}^w(\theta_t)) + C_{t+1}^w(\theta_t)u''(C_{t+1}^w(\theta_t))} \xrightarrow{\theta_t \rightarrow \bar{\theta}} \bar{\theta} = \frac{\frac{\partial C_{t+1}^w}{\partial \theta_t}(\bar{\theta})}{\frac{\partial L_t}{\partial \theta_t}(\bar{\theta})}.$$

Comme $\bar{\theta} \geq 0$ et $\partial C_{t+1}^w / \partial \theta_t \geq 0$, la conclusion découle directement. Par conséquent, si on fait l'hypothèse :

Hypothèse 1.3 $R_2(C_{t+1}^w)$ est une fonction non décroissante pour tout $C_{t+1}^w \geq 0$,

seuls deux cas sont susceptibles d'émerger, illustrés par les deux graphiques de la figure 1.2.

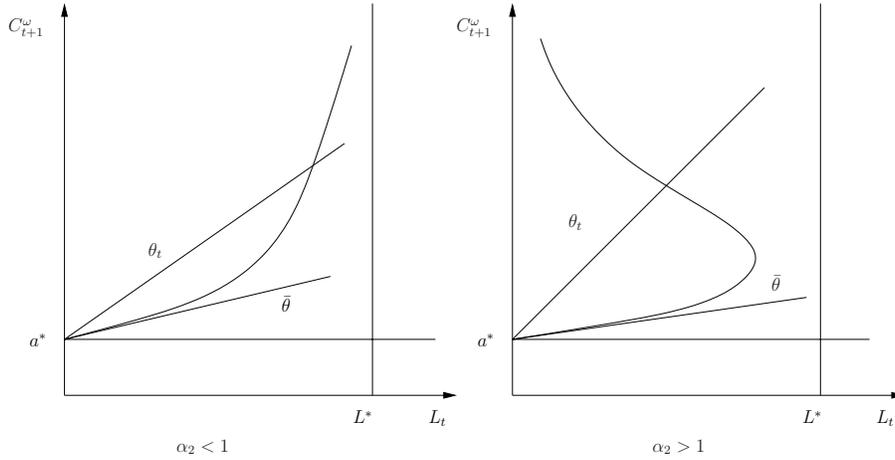


Figure 1.2: Courbe de réaction des travailleurs

Dans le premier cas, la limite α_2 de $R_2(C_{t+1}^w)$ lorsque θ_t tend vers l'infini est inférieure à 1. L'offre de travail varie alors de façon monotone croissante avec le pouvoir d'achat des jeunes⁸. Cela correspond au cas où les effets de substitution intertemporelle dominent partout les effets richesse. Le lieux des consommations et offres de travail optimales lorsque θ_t varie entre $\bar{\theta}$ et l'infini

⁸. On se réfère ici, ainsi qu'on le fera par la suite, à l'interprétation en termes de générations imbriquées du modèle, afin de simplifier l'exposé.

décrit alors une courbe croissante, qu'on appelle courbe de réaction, qui sera notée Γ :

$$\Gamma = \{(L_t(\theta_t), C_{t+1}^w(\theta_t)) \in [0, \bar{L}[\times [C^*, +\infty[\mid \theta_t \in [\bar{\theta}, +\infty[\}.$$

La solution du programme du jeune travailleur associée à un salaire w_t et un niveau de prix p_{t+1} est alors donnée par l'intersection de la droite de budget et de la courbe de réaction.

Dans le cas où α_2 est supérieur à 1, il existe un θ^* unique tel que

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_t}{\partial \theta_t}(\theta_t) &> 0 \quad \forall \theta_t \in [\bar{\theta}, \theta^*[, \\ \frac{\partial L_t}{\partial \theta_t}(\theta^*) &= 0, \\ \frac{\partial L_t}{\partial \theta_t}(\theta_t) &< 0 \quad \forall \theta_t > \theta^*. \end{aligned}$$

Ainsi, la courbe de réaction est unimodale et nous verrons dans la section consacrée à l'étude des équilibres intertemporels que c'est cette caractéristique qui permet d'obtenir des fluctuations expliquées par le comportement des travailleurs. Cette unimodalité vient du fait qu'au-delà de θ^* , les effets revenu dominant les effets de substitution. Une conséquence est que, pour certains niveaux fixés de l'offre de travail correspondent deux niveaux de consommation future (qui sont confondus au point d'inflexion). En l'absence de l'explicitation d'un mécanisme de coordination des choix des agents, on ne peut donc déterminer la dynamique en aval associée à des conditions initiales données.

La condition du premier ordre (1.8) peut se réécrire, en intégrant la contrainte de budget :

$$V(L_t) = U(C_{t+1}^w), \tag{1.10}$$

avec

$$\begin{aligned} V(L_t) &= L_t v'(L^* - L_t) && \text{et} \\ U(C_{t+1}^w) &= (C_{t+1}^w - C^*) u'(C_{t+1}^w). \end{aligned} \tag{1.11}$$

La courbe d'offre est donc définie comme le graphe de la fonction :

$$L_t = V^{-1} \circ U (C_{t+1}^w) \equiv \gamma (C_{t+1}^w). \quad (1.12)$$

Dans le cas où $R_2 (C_{t+1}^w)$ est toujours inférieure à 1, cette fonction est monotone et on peut l'inverser pour définir la dynamique en aval :

$$C_{t+1}^w = \gamma^{-1} (L_t) \equiv \chi (L_t). \quad (1.13)$$

La figure 1.3 montre comment la courbe représentative de $\gamma(C_{t+1})$ peut être déduite de celles de $U(C_{t+1})$ et $V(L_t)$. On voit ici que l'unimodalité de

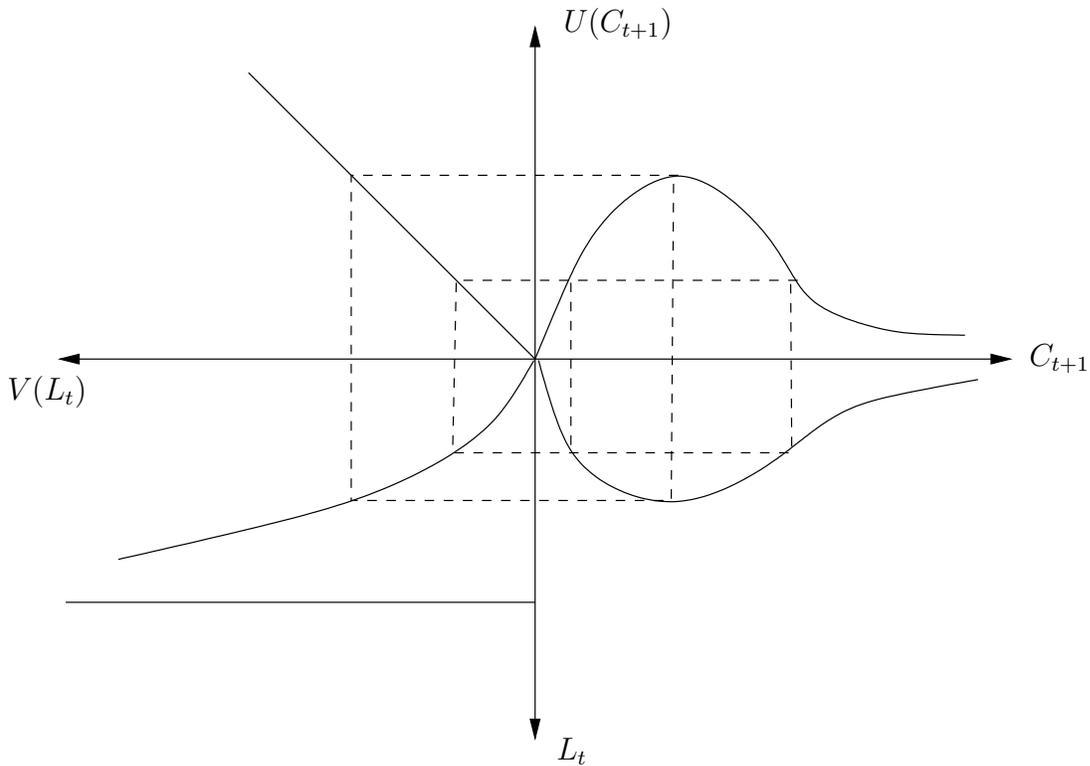


Figure 1.3: Construction de la courbe de réaction

la courbe de réaction nécessite une hypothèse forte, à savoir que l'offre de travail et la consommation future ne soient pas des substituts bruts. C'est, comme le montre la section 1.3.1, cette caractéristique qui permet d'obtenir

des cycles et du chaos dans les systèmes dynamiques unidimensionnels. Le modèle à générations imbriquées, dans sa forme la plus épurée, n'offre donc pas une explication satisfaisante des fluctuations économiques, mais constitue plutôt un modèle de référence pour les développements futurs.

Les Capitalistes

Un deuxième type de consommateurs est considéré par Woodford, les capitalistes, qui se caractérisent par leur unique source de revenus, constituée par les rendements de leurs investissements. L'auteur suppose en outre qu'ils ont une fonction d'utilité de type log-linéaire. Ainsi, ils maximisent par conséquent leur utilité intertemporelle associée à la consommation C_t^c à chaque date :

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} \ln(C_t^c),$$

sous la contrainte de budget ⁹

$$p_t(C_t^c + K_t - (1 - \delta)K_{t-1}) + M_{t+1}^c = M_t^c + r_t K_{t-1},$$

où l'on suppose que le taux de préférence pour le présent est supérieur à celui des travailleurs, i.e. $0 < \gamma < \beta < 1$.

Dans les équilibres considérés, l'épargne sous forme de capital étant mieux rémunérée que celle sous forme de monnaie du fait de (1.4), la demande de monnaie de la part des capitalistes sera nulle à toutes les périodes. La solution de ce programme est alors donnée par :

$$\begin{aligned} C_t^c &= (1 - \beta) \left(\frac{r_t}{p_t} + 1 - \delta \right) K_{t-1}, \\ K_t &= \beta \left(\frac{r_t}{p_t} + 1 - \delta \right) K_{t-1}. \end{aligned} \tag{1.14}$$

9. L'exposant c a été omis pour le stock de capital, puisqu'à l'optimum celui-ci est entièrement détenu par les capitalistes.

Nous nous intéresserons par la suite au cas limite où β est très proche de 1, dans lequel les capitalistes tendent à ne plus consommer et à allouer leurs ressources à l'unique renouvellement de leur stock de capital¹⁰.

L'étude du comportement des consommateurs nous a donc permis de définir deux équations dynamiques : la première traduisant les comportements d'épargne des travailleurs et la seconde correspondant à l'accumulation de capital par les capitalistes. L'étude du programme des entreprises va nous permettre de rendre ce système homogène, c'est à dire d'égaliser le nombre de variables et d'équations dynamiques, et d'équilibrer les marchés.

1.2.2 Les Entreprises

L'économie se caractérise par un continuum d'entreprises identiques sur $[0,1]$, ce qui permet de n'étudier qu'une seule entreprise représentative. Celle ci utilise le stock de capital K_{t-1} constitué à la période précédente ainsi qu'une quantité L_t de travail pour produire un montant Y_t de bien selon une fonction de production homogène de degré 1 :

$$Y_t = F(K_{t-1}, L_t).$$

La maximisation des profits sur un marché de concurrence parfaite conduit aux conditions de premier ordre standard :

$$\begin{aligned} \rho_t &\equiv \frac{r_t}{p_t} = F'_K(K_{t-1}, L_t) = f'(k_t), \\ \omega_t &\equiv \frac{w_t}{p_t} = F'_L(K_{t-1}, L_t) = f(k_t) - k_t f'(k_t), \end{aligned} \tag{1.15}$$

10. On posera $\beta = 1$ dans (1.14), même si dans ce cas, le programme des capitalistes n'admet plus de solution. En effet, les équations alors obtenues peuvent être approchées d'aussi près que l'on souhaite en prenant β dans un voisinage suffisamment petit à gauche de 1.

où $f(\cdot)$ et k_t désignent respectivement la production et le capital par tête. Du fait de la perfection de la concurrence et de l'homogénéité de degré 1 de la fonction de production, les profits sont nuls à l'équilibre¹¹. On suppose :

Hypothèse 1.4 $f(k_t)$ satisfait les conditions d'INADA :

- $f(0) = 0$,
- $f'(0) = +\infty$, $\lim_{+\infty} f'(\cdot) = 0$, et
- $f''(\cdot) < 0$.

Comme la suite va le montrer, la plus ou moins grande complémentarité entre les facteurs de production joue un rôle déterminant dans l'étude des fluctuations endogènes. Celle ci est mesurée par l'élasticité de substitution, $\sigma(k_t)$ dont l'expression est donnée par :

$$\frac{1}{\sigma(k_t)} = \frac{\partial \ln(\omega_t/\rho_t)}{\partial \ln(k_t)} = \varepsilon_\omega(k_t) - \varepsilon_\rho(k_t). \quad (1.16)$$

Un calcul direct donne :

$$\sigma(k_t) = -\frac{\omega_t \rho_t}{k_t f(k_t) f''(k_t)}. \quad (1.17)$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{aligned} \varepsilon_\omega(k_t) &= \frac{\partial \ln \omega_t}{\partial \ln k_t} = \frac{s(k_t)}{\sigma(k_t)}, \\ \varepsilon_\rho(k_t) &= \frac{\partial \ln \rho_t}{\partial \ln k_t} = -\frac{\omega(k_t)}{f(k_t)\sigma(k_t)}, \end{aligned} \quad (1.18)$$

11. Si cette condition n'est pas remplie, le modèle doit comporter en plus un schéma de redistribution des profits. En d'autres termes, il s'agit de déterminer quels agents sont propriétaires des entreprises. Tvede (1989) étudie le cas où une telle redistribution des profits est nécessaire du fait de rendements décroissants dans la production. Il montre que selon que les jeunes ou les vieux détiennent les actions, cela aura pour effet, comparativement au cas de rendements constants, de stabiliser l'économie ou d'engendrer des fluctuations plus facilement.

où $s(k_t) = \rho(k_t)k_t/f(k_t)$ désigne la part du capital dans la production. Les deux cas limite $\sigma(k_t) = 0$ et $\sigma(k_t) \rightarrow \infty$ correspondent respectivement à la complémentarité parfaite et à la substituabilité parfaite. Le cas de la complémentarité parfaite a fait l'objet du premier article étudiant les fluctuations endogènes au sein d'un modèle à générations imbriquées avec capital productif (Reichlin, 1986).

Dans ce dernier cas, nous voyons d'après la définition (1.16) de l'élasticité de substitution que le rapport capital-travail n'est plus sensible aux variations du rapport des prix des facteurs à l'optimum. Autrement dit, le capital et le travail sont utilisés en proportions fixes. On peut donc écrire, en utilisant l'homogénéité de la fonction de production :

$$\begin{aligned} F(K_{t-1}, L_t) &= F(K_{t-1}, K_{t-1}/\bar{k}) \\ &= \frac{K_{t-1}}{\bar{k}} F(\bar{k}, 1) \\ &\equiv \frac{K_{t-1}}{a}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

où \bar{k} désigne la valeur constante du rapport capital-travail et $a \equiv \bar{k}/F(\bar{k}, 1)$. De la même façon, on montre que $Y_t = L_t/b$ avec $b \equiv a/\bar{k}$.

Nous achevons ici la description des fondements microéconomiques du modèle. Dans la section suivante, les conditions d'équilibre sur les marchés du bien et du travail permettront de déterminer le système d'équations qui gouverne les dynamiques du modèle.

1.3. Équilibres et Dynamiques du Modèle

Cette section est consacrée à l'étude des dynamiques générées par les hypothèses comportementales du modèle canonique. On peut distinguer deux

courants dans la littérature sur les fluctuations endogènes :

1. Une voie mathématique, qui s'est efforcée de décrire de plus en plus précisément les dynamiques macroéconomiques dans des modèles volontairement simplistes, caractérisés par de la concurrence parfaite sur tous les marchés. Les articles ayant adopté cette optique se sont ainsi basés sur des variantes plus ou moins équivalentes du système (1.22) (page 29) résultant des hypothèses standard, et se distinguent par les outils utilisés pour l'étude des dynamiques (analyse des bifurcations globales, étude de la transition entre les comportements locaux et globaux, etc...). C'est cette approche qui est développée dans le reste de la section.
2. Une voie économique, qui a cherché à affaiblir les conditions d'émergence de fluctuations endogènes par l'introduction de comportements microéconomiques plus sophistiqués (concurrence imparfaite sur le marché des biens et du travail, croissance des rendements, etc...). Dans cette approche, qui fait l'objet de la prochaine section, l'analyse dynamique est généralement restreinte au voisinage d'un état stationnaire et se concentre davantage sur l'interprétation économique des résultats.

À la date t , l'équilibre sur le marché du bien est défini par l'égalité entre la demande, émanant des consommateurs et des capitalistes, et l'offre qui est égale à la production globale de l'économie. On doit donc avoir :

$$C_t + K_t - (1 - \delta) K_{t-1} = Y_t + C^* = F(K_{t-1}, L_t) + C^*. \quad (1.20)$$

Les équilibres sur les marchés des facteurs sont assurés par le système d'équations (1.15). L'équilibre sur le marché de la monnaie, qui est alors assuré par la loi de Walras, est réalisé lorsque la dépense des vieux (i.e. l'offre de monnaie) est égale au montant que les jeunes souhaitent épargner.

En supposant le stock de monnaie M constant dans le temps, on aura donc :

$$\omega_t(k_t) L_t = \frac{M}{p_t} = C_t, \quad (1.21)$$

où l'égalité de droite correspond, dans le cas d'une économie monétaire, à la théorie quantitative de la monnaie avec une vitesse de circulation égale à 1. On a par conséquent, dans ce cas de figure, la dichotomie caractéristique des modèles néoclassiques entre les sphères réelle et monétaire.

Dans cette section, nous étudions les équilibres intertemporels du modèle de Woodford afin de mettre en évidence les conditions assurant l'existence de trajectoires caractérisées par des fluctuations persistantes des variables endogènes de l'économie. Formellement, on définit un équilibre intertemporel du modèle comme une suite de couples $\{K_{t-1}, L_t\}_{t=1, \dots, +\infty}$ telle qu'il y a équilibre sur tous les marchés à chaque date t , c'est à dire telle que :

$$\begin{cases} U(F(K_t, L_{t+1}) + C^* - K_{t+1} + (1 - \delta) K_t) = V(L_t), \\ K_t = (1 - \delta + \rho_t) K_{t-1} \end{cases} . \quad (1.22)$$

Ce système servira de cadre de référence dans la suite du chapitre. Dans le cas où les facteurs de production sont parfaitement complémentaires, on peut, en utilisant les relations (1.19), réécrire le système dynamique (1.22) sous la forme :

$$U(Y_{t+1} + C^* - aY_{t+2} + a(1 - \delta) Y_{t+1}) = V(Y_t/b). \quad (1.23)$$

Afin de présenter dans un premier temps les résultats concernant les dynamiques unidimensionnelles, on simplifie le modèle en se restreignant à une économie monétaire.

1.3.1 Le Cas d'une Économie Monétaire : le Modèle de Grandmont

Le modèle développé par Grandmont dans l'article de 1985 "On Endogenous Competitive Business Cycles"¹² applique les outils mathématiques d'étude des systèmes dynamiques à une dimension au cas d'une économie monétaire d'échange pur¹³. L'avantage des systèmes dynamiques unidimensionnels est que l'étude de leurs propriétés globales peut être réalisée analytiquement par l'étude de la fonction de transition. Le présent modèle comporte deux sources de dynamiques : les comportements d'épargne des travailleurs et l'accumulation de capital par les capitalistes. Ramener le système à une dimension peut se faire en éliminant le capital du modèle, ce qui est obtenu en posant $a = 0$. Le seul moyen d'avoir dans ce cas une production strictement positive et bornée est que le stock de capital tende également vers zéro. On obtient alors la situation qu'on aurait trouvé en considérant une économie avec une technologie homogène $Y_t = bL_t$. Dans ce cadre, les fluctuations susceptibles d'émerger sont entièrement expliquées par le comportement des travailleurs. Le modèle ainsi obtenu est équivalent au modèle de Grandmont et voit toute sa dynamique caractérisée par l'équation :

$$.U(Y_{t+1} + C^*) = V(Y_t/b). \quad (1.24)$$

Cette équation est tout simplement la condition du premier ordre du programme du consommateur dans laquelle on a utilisé les conditions d'équilibre pour remplacer l'offre de travail et la consommation respectivement par les productions présente et future. Le graphe de la fonction de transition est par

12. Il existe également une version française très proche de cet article (Grandmont, 1985a).

13. Plus exactement, il s'agit d'une économie avec production selon une technologie du type $y_t = L_t$, ce qui revient au même d'un point de vue formel.

conséquent obtenu par transformation affine de la courbe de réaction. On retrouve donc les deux cas de figure évoqués précédemment, à savoir l'unimodalité de la fonction de transition si $\alpha_2 > 1$ et l'inversibilité dans le cas contraire.

Existence de cycles

L'équilibre intertemporel le plus simple est celui dans lequel l'état de l'économie se répète indéfiniment d'une période à l'autre. On définit précisément l'état stationnaire d'un modèle économique comme une suite de vecteurs $\{X_t\}_{t \in \mathbb{N}}$ telle que $X_t = \bar{X}$ pour tout t , où X_t est le vecteur contenant les valeurs instantanées de toutes les variables du modèle. Les modèles de croissance optimale, d'inspiration orthodoxe, se sont essentiellement attachés à déterminer les trajectoires de convergence vers les états stationnaires. Ils ont conduit à la formulation du théorème de l'autoroute qui postule l'unicité de la trajectoire optimale (Dechert, 1984) sous l'hypothèse de concavité de la fonction d'utilité instantanée. Au contraire, la littérature sur les fluctuations endogènes cherche à déterminer les conditions sous lesquelles des cycles ou des trajectoires apériodiques sont possibles sans l'intervention de chocs externes au modèle. Néanmoins, la détermination des états stationnaires n'est pas dénuée d'intérêt pour l'étude des fluctuations endogènes, car les propriétés du système dynamique au voisinage des points stationnaires ont des conséquences sur l'existence de cycles. Celles-ci ont été mises en lumière par la théorie des bifurcations qui étudie les changements de nature topologique des systèmes d'équations sous l'influence d'une variation paramétrique. Nous présenterons dans un premier temps les conditions d'existence de cycles de faibles périodes, puis nous mettrons en relation ces conditions avec la théorie des bifurcations en analysant le rôle d'un paramètre, le degré de concavité

de la fonction de transition.

La proposition suivante, illustrée par la figure 1.4 donne les conditions qui garantissent la non-existence de cycles de périodes supérieures ou égales à 2.

Proposition 1.1 *Notons \bar{Y} , l'équilibre stationnaire monétaire.*

Sous les hypothèses 1.1 (concavité des fonctions d'utilité) et 1.2 (cas de Samuelson), il n'existe aucune trajectoire périodique de période $k \geq 2$ si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

1. $\alpha_2 \leq 1$,
2. $\alpha_2 > 1$ et $\gamma'(\bar{Y}) > 0$.

Les seuls trajectoires invariantes sont alors l'état stationnaire autarcique 0 et l'état stationnaire monétaire \bar{Y} .

Preuve. Pour démontrer (1), rappelons que si $\alpha_2 \leq 1$, la fonction γ est monotone croissante. De ce fait, si $Y < \bar{Y}$, on aura $Y < \gamma(Y) < \gamma(\bar{Y}) = \bar{Y}$. Par itérations de γ , on obtient la convergence vers l'état stationnaire. Le même raisonnement peut être adapté pour le cas où $Y > \bar{Y}$.

Lorsque $\alpha_2 > 1$ et $\gamma'(\bar{Y}) > 0$, la fonction γ est alors unimodale, c'est à dire qu'il existe un point Y^* , tel que $\gamma'(Y) > (<)0$ pour $Y < (>)Y^*$ et $\gamma(Y) \leq \gamma(Y^*)$ pour tout Y . On peut donc supposer que $Y \in]0, \gamma(Y^*)]$. Or la fonction γ est croissante sur cet intervalle car $\gamma'(\bar{Y}) > 0$. Le même argument que dans le cas précédent peut ainsi être appliqué.

Ainsi, pour toute condition initiale différente de l'état stationnaire autarcique, la trajectoire associée converge vers l'état stationnaire monétaire, impliquant l'absence de cycles. ■

Si γ est unimodale, on peut spécifier des conditions précises qui assurent

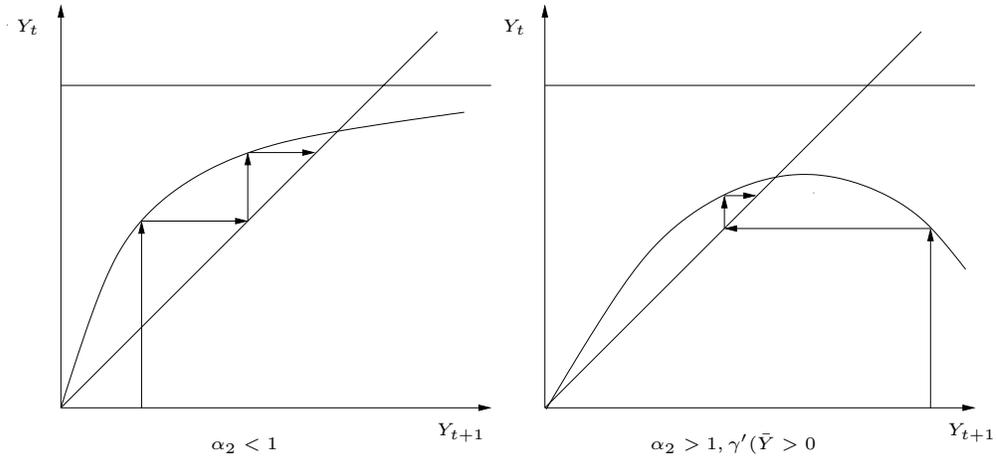


Figure 1.4: États stationnaires globalement convergents

l'existence de cycles de différentes périodes et de trajectoires aperiodiques¹⁴.

En particulier, l'existence de 2-cycles est assurée par la proposition :

Proposition 1.2 *Sous les hypothèses 1, 2 et 3, une condition suffisante d'existence d'un cycle de période 2 est :*

$$\gamma'(\bar{Y}) < -1. \quad (1.25)$$

Autrement dit, un cycle de période 2 existe si l'état stationnaire non-autarcique est instable.

Preuve. Un cycle de période 2 est un état stationnaire de $\gamma \circ \gamma$ mais pas de γ .

L'application γ admet deux états stationnaires (0 et \bar{Y}). Alors, d'après l'hypothèse 2 (cas de Samuelson) :

$$\frac{\partial(\gamma \circ \gamma)}{\partial Y}(0) = \gamma'(\gamma(0))\gamma'(0) = [\gamma'(0)]^2 > 1.$$

14. Pour une étude plus approfondie des systèmes dynamiques unidimensionnels, voir Devaney (1989) ou Collet et Eckmann (1980). Une présentation compacte des principaux outils peut être trouvée dans Grandmont (1986).

D'autre part, si la relation (1.25) est vérifiée, on a :

$$\frac{\partial(\gamma \circ \gamma)}{\partial Y}(\bar{Y}) = [\gamma'(\bar{Y})]^2 > 1.$$

Par continuité de γ (voir graphique), il existe donc $\hat{Y} \in]0, \bar{Y}[$ tel que $\gamma \circ \gamma(\hat{Y}) = \hat{Y}$ et $\gamma(\hat{Y}) \neq \hat{Y}$.

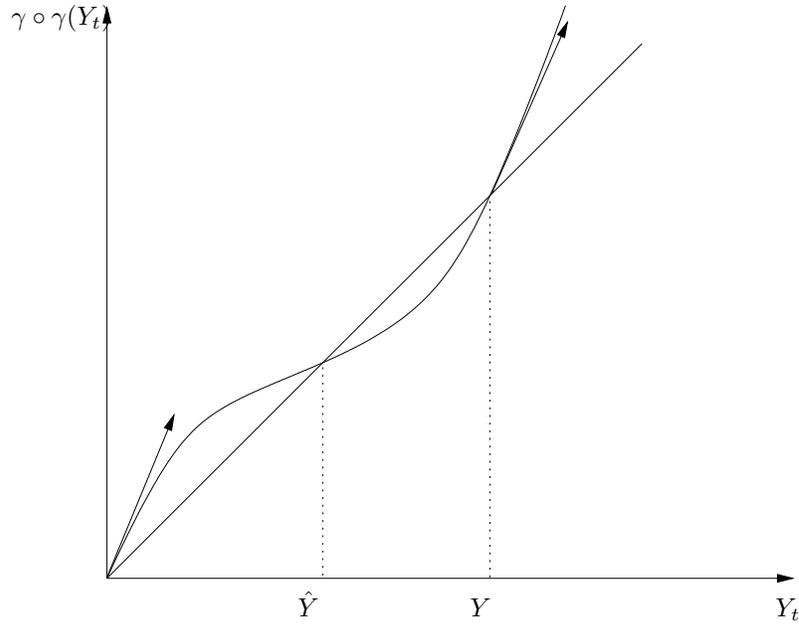


Figure 1.5 – Existence d'un cycle de période 2

■

La condition (1.25) peut être interprétée économiquement. Pour cela, on la réécrit en termes de concavité des préférences :

$$R_2(\bar{Y}) \frac{Y}{Y + C^*} > 1 + b(1 + R_1(\bar{Y})), \quad (1.26)$$

où

$$R_1(Y) \equiv -\frac{Y/bv''(L^* - Y/b)}{v'(L^* - Y/b)}. \quad (1.27)$$

Pour que des cycles d'ordre 2 soient envisageables, il faut donc que la fonction d'utilité des vieux soit fortement concave.

Cette proposition appelle par ailleurs deux remarques. La première est qu'elle ne garantit que l'existence d'un cycle et non sa stabilité. Cette dernière pour être assurée nécessite une condition supplémentaire sur la dérivée troisième que nous préciserons plus loin dans le cadre plus général des cycles de période $n > 1$. La deuxième remarque est qu'elle met en relation l'existence de cycles et le degré de concavité de la fonction. Autrement dit, la nature du système change au fur et à mesure qu'un paramètre, le coefficient d'Arrow-Pratt augmente. Cette caractéristique des fonctions de transition unimodales fera l'objet du paragraphe suivant.

Avant de chercher à caractériser l'évolution de la complexité du système, nous nous intéressons aux conditions d'existence de cycles de période 3. En effet, un important théorème de Sarkovskii permet d'inférer l'existence de cycles de toutes périodes à partir de celle d'un cycle d'ordre 3. Plus précisément, ce théorème s'énonce de la façon suivante :

Théorème 1.1 *Considérons l'ordre suivant sur l'ensemble des éléments de \mathbb{N}^* :*

$$\begin{aligned}
 & 1 \prec 2 \prec 4 \prec \dots 2^k \prec \dots \\
 & \dots 2^{k+1} \cdot (2l + 1) \prec 2^{k+1} \cdot (2l - 1) \prec \dots \prec 2^{k+1} \cdot 5 \prec 2^{k+1} \cdot 3 \prec \dots \\
 & \dots 2^k \cdot (2l + 1) \prec 2^k \cdot (2l - 1) \prec \dots \prec 2^k \cdot 5 \prec 2^k \cdot 3 \prec \dots \\
 & \dots \dots \dots \\
 & \dots 2 \cdot (2l + 1) \prec 2 \cdot (2l - 1) \prec \dots \prec 2 \cdot 5 \prec 2 \cdot 3 \prec \dots \\
 & \dots (2l + 1) \prec (2l - 1) \prec \dots \prec 5 \prec 3.
 \end{aligned}$$

Soit γ une fonction continue d'un intervalle vers lui-même admettant un point périodique de période p . Alors si, selon l'ordre défini ci-dessus $q \prec p$, γ admet également une orbite périodique de période q .

Les réserves émises plus haut concernant la stabilité des cycles sont évidemment également valables ici. On voit donc, d'après ce théorème, que la recherche de cycles de période 3 présente un grand intérêt du point de vue de l'étude des dynamiques du modèle. L'argument de continuité qui a été utilisé pour donner les conditions d'existence de cycles de période 2 ne peut être utilisé à cette fin. En effet, $D\gamma^3(0) > 1$ mais $D\gamma^3(\bar{Y}) = [\gamma'(\bar{Y})]^3 < -1$. La proposition suivante fournit néanmoins un moyen analytique de mettre en évidence de tels cycles :

Proposition 1.3 *Soit le système dynamique décrit par la fonction unimodale $\gamma : [0, Y_1] \rightarrow [0, Y_1]$, telle que $\gamma(0) = 0$ et soit Y^* tel que $\gamma(Y) < Y^*$ (resp. $>$) pour $0 \leq Y < Y^*$ (resp. $Y^* < Y \leq x_1$) et $\gamma(Y^*) = Y^*$.*

Alors, une condition suffisante d'existence d'un cycle de période 3 pour ce système est donnée par la relation :

$$\gamma^3(Y^*) \leq Y^* \tag{1.28}$$

Preuve. La preuve est immédiate en utilisant un argument de continuité. En effet, d'après la règle de dérivation en chaîne, on a :

$$D\gamma^3(0) = (\gamma'(0))^3 > 1.$$

Il en découle que, pour y suffisamment proche de 0, $\gamma^3(Y) > Y$. La condition (1.28) assure ainsi qu'il existe une valeur Y_3 de Y comprise entre 0 et Y^* telle que $\gamma^3(Y_3) = Y_3$, c'est à dire un cycle de période 3 (0 et \bar{Y} étant les uniques points fixes). ■

La figure 1.6 illustre un exemple de fonction $\gamma(Y)$ qui satisfait la condition (1.28). On voit en particulier qu'il est nécessaire que la fonction soit fortement décroissante à droite du sommet, de sorte que $\gamma^2(Y^*)$ soit proche de 0 et son image inférieure à Y^* .

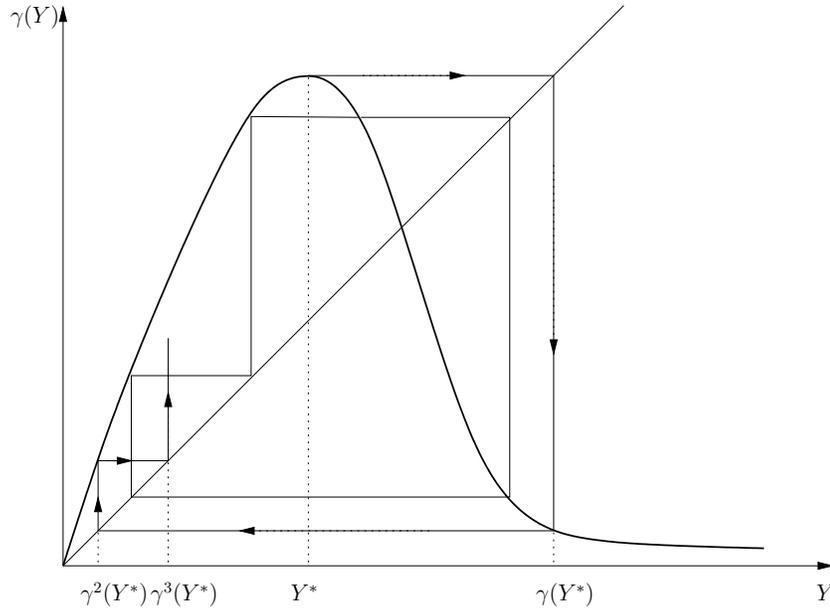


Figure 1.6: Condition d'existence d'un cycle de période 3

Stabilité des Cycles

D'après le théorème de Sarkovskii, on a vu qu'un grand nombre, voire une infinité de cycles de périodes différentes pouvaient coexister. Néanmoins, ce théorème n'apporte aucune précision quant à la stabilité de ces cycles. L'intérêt économique de l'analyse qui précède serait en effet largement diminué si l'ensemble des conditions initiales qui convergent vers des cycles ou des orbites aperiodiques était de mesure nulle. Il importe donc de déterminer si les trajectoires invariantes mises en évidence dans la section précédente sont stable ou non, en ayant à l'esprit que le système dynamique est défini dans le sens inverse de l'écoulement du temps.

Définition 1.1 Soit $f : [a,b] \rightarrow [a,b]$ une fonction trois fois continûment différentiable. Pour $f' \neq 0$, on définit la dérivée Schwarzienne de f , Sf , de

la façon suivante :

$$\begin{aligned} Sf &= \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''}{f'} \right)^2 \\ &= -2|f'|^{1/2} D^2 (|f'|^{-1/2}). \end{aligned} \tag{1.29}$$

En effet, le théorème suivant, dû à Singer (1978) relie la stabilité des cycles à la négativité de la dérivée Schwarzienne.

Théorème 1.2 *Soit $f : [a,b] \rightarrow [a,b]$ une application trois fois continûment différentiable telle que $Sf(x) < 0$ pour tout $x \in [a,b]$. Alors*

1. *L'application f admet au plus une orbite périodique faiblement stable, c'est à dire, une orbite périodique P telle que $|Df(p)| \leq 1$ pour tout $p \in P$*
2. *Le point critique de f est attiré vers P .*

La preuve de ce théorème est fournie dans Collet et Eckmann (1980)¹⁵. On voit donc que, malgré la simplicité du modèle, il est possible de faire apparaître des cycles stables de périodes arbitrairement élevées. Une objection pouvant être soulevée est que les résultats obtenus concernent les dynamiques en amont, c'est à dire dans le sens inverse de l'écoulement du temps. Une réponse à cette critique est également apportée dans l'article et consiste à introduire des phénomènes d'apprentissage à la place de l'hypothèse d'anticipations parfaites. En effet, si un cycle stable existe pour la dynamique en amont, celui ci va être observé par les agents et influencer leurs anticipations.

15. Le livre de Collet et Eckmann considère le cas d'une fonction unimodale sur $[-1,1]$ admettant un maximum en 0, mais la généralisation de la preuve ne pose pas de problème particulier.

La transition vers des dynamiques chaotiques

Le paragraphe précédent a mis en évidence la relation existant entre l'apparition de trajectoires périodiques invariantes non dégénérées et le degré de concavité de la fonction de transition. Nous allons voir à présent que, à mesure que le degré de concavité augmente, le modèle présente des dynamiques de périodicité croissante et finit par admettre, pour certaines plages de valeurs du paramètre, des dynamiques apériodiques. L'augmentation de complexité qui résulte de la variation d'un des paramètres du modèle peut être visualisée directement à l'aide d'un diagramme appelé diagramme de bifurcation qui représente les ensembles limites invariants en fonction des valeurs des paramètres. Afin de tracer ce diagramme, on va retenir dans la suite de l'exposé une spécification particulière pour les fonctions d'utilité, le cas d'aversion relative constante pour le risque¹⁶ (CRRA) :

$$u(C_t) = \frac{C_t^{1-\alpha}}{1-\alpha}, \quad (1.30a)$$

$$v(L^* - L_t) = \frac{(L^* - L_t)^{1+\beta}}{1+\beta}. \quad (1.30b)$$

Le système dynamique prend alors la forme :

$$Y_{t+1}(Y_{t+1} + C^*)^{-\alpha} = \frac{Y_t}{b} \left(L^* - \frac{Y_t}{b} \right)^{-\beta}.$$

Le système est rigoureusement identique à celui de l'article de Grandmont. Son interprétation est toutefois légèrement différente. En effet, Grandmont considère un modèle à générations imbriquées avec consommation dans les deux périodes. Le paramètre L^* , qui représente ici la dotation initiale de loisir, correspond dans son modèle à la production domestique des jeunes. La figure 1.7 représente le diagramme de bifurcation associé au système lorsque

¹⁶. L'appellation est ici un peu abusive, puisqu'on se situe dans un cadre complètement déterministe.

α varie entre 2 et 16. Nous avons utilisé les mêmes valeurs que Grandmont pour les différents paramètres, à savoir, $C^* = 0.5$, $b = 1.0$, $L^* = 2.0$ et $\beta = 0.5$. Sa construction est basée sur le théorème de Singer précédemment cité. En effet, celui-ci stipule que lorsqu'une application unimodale admet une orbite périodique stable, celle-ci est unique et attire le point critique. Pour calculer l'ensemble stable invariant associé à une valeur donnée du paramètre, il suffit donc d'itérer l'application un grand nombre de fois en prenant comme valeur initiale le point critique et de rejeter les premières valeurs obtenues, qui correspondent aux trajectoires hors équilibre.

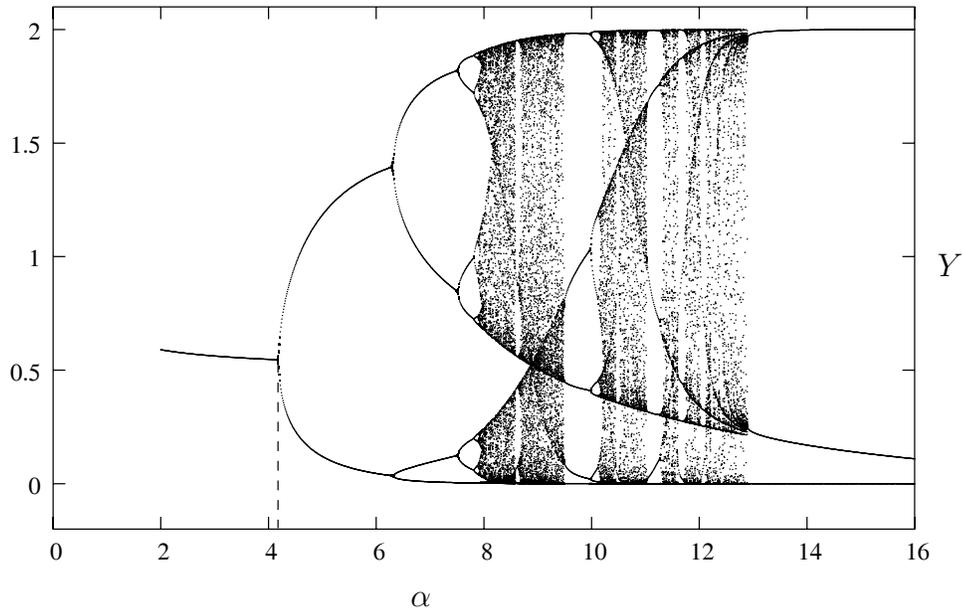


Figure 1.7: Diagramme de bifurcation

Cette figure montre bien la manière dont les dynamiques gagnent progressivement en complexité au fur et à mesure de l'augmentation de α . En effet, pour $\alpha < \alpha_0 \simeq 4.12$, nous voyons que le système converge vers l'état stationnaire non autarcique. À partir de cette valeur, le graphique se scinde en deux branches, indiquant que les dynamiques convergent vers un cycle de période

2. En effet, il se produit en α_0 une bifurcation, c'est à dire un changement de nature du système dynamique. Lorsque α traverse la valeur de bifurcation, la fonction γ évaluée à l'état stationnaire traverse la valeur -1 , traduisant un changement de stabilité du point fixe. Ce type de bifurcation, appelée *bifurcation flip* est illustré par la figure 1.8. Celle-ci montre les deux cas de figure qui peuvent être rencontrés lorsque le point fixe perd sa stabilité. Dans le cas sous-critique, une orbite périodique instable coexiste avec l'état stationnaire stable. Dans le cas supercritique, un cycle attractif de période 2 apparaît autour de l'état stationnaire instable.

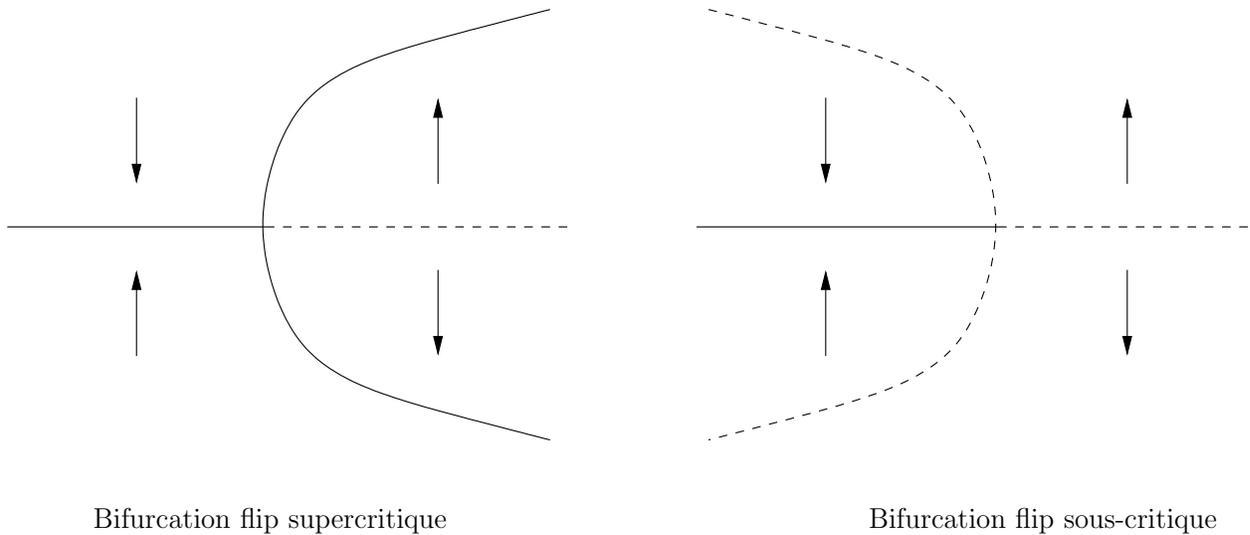


Figure 1.8: Bifurcation flip

Ainsi, la périodicité de l'ensemble limite stable croit progressivement au travers d'une cascade de bifurcations flip de plus en plus rapprochées. Ce schéma n'est pas spécifique au modèle étudié ici, mais se retrouve pour de nombreuses familles uniparamétrées d'applications unimodales. Ce résultat provient du fait que la composition d'une fonction unimodale avec elle-même est une fonction bimodale. Un raisonnement similaire à celui décrit précédemment peut alors être effectué sur $\gamma \circ \gamma$, à l'aide d'un changement de

coordonnées appelé renormalisation, illustré par la figure 1.9.

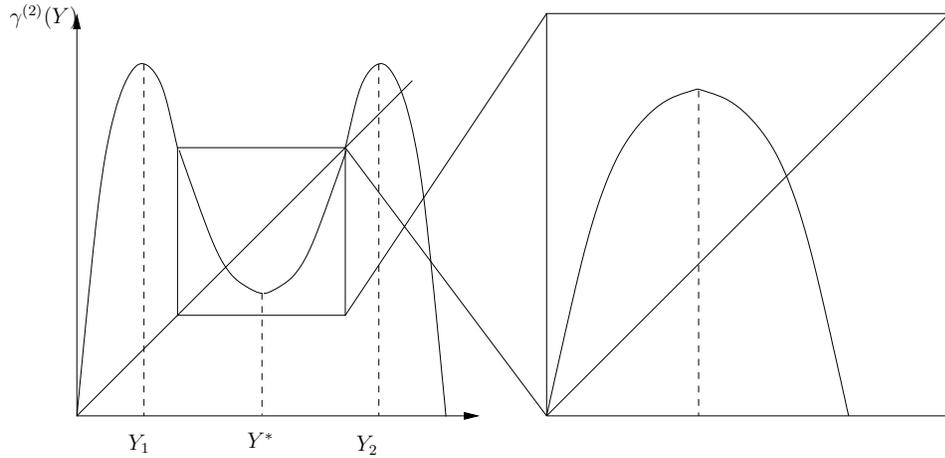


Figure 1.9: Renormalisation

Cette section a ainsi montré qu'il était possible de construire un modèle économique simple qui est caractérisé par des dynamiques complexes. Néanmoins, ce résultat s'appuie sur l'hypothèse d'une très forte élasticité de la fonction d'utilité de la consommation. Afin de relâcher cette hypothèse, nous considérons dans la section suivante le cas d'une économie avec capital productif.

1.3.2 Fluctuations Endogènes dans une Économie avec Capital Productif

Nous étudions à présent les effets de l'introduction de capital productif dans l'économie, c'est à dire que nous considérons le système dynamique obtenu dans l'équation (1.22). Reichlin (1986) est l'un des premiers auteurs à avoir étudié l'impact d'une technologie utilisant du capital et du travail sur les fluctuations endogènes dans un modèle à générations imbriquées. L'hypothèse centrale de son article est la stricte complémentarité des facteurs,

c'est à dire qu'il étudie un système de la forme (1.23). Il montre que pour un tel système dynamique, des trajectoires invariantes périodiques ou quasi-périodiques existent pour certaines valeurs du paramètre technologique (i.e. la proportion fixe entre les facteurs de production). L'article de Reichlin ne se limite cependant pas à la stricte complémentarité des facteurs mais étudie également les conséquences de l'introduction de substituabilité des facteurs de production sous une forme simplifiée.

La caractérisation générale des dynamiques locales en fonction de l'ensemble des valeurs que peut prendre l'élasticité de substitution a fait l'objet de l'article de Grandmont et al. (1998) (voir également Cazzavillan (2001) pour le cas du modèle à générations imbriquées avec consommation uniquement en deuxième période). Le système dynamique sur lequel l'article se fonde est celui qui est défini en (1.22). Celui-ci peut se réécrire¹⁷, en substituant la deuxième équation dans la première :

$$\begin{cases} U(F(K_t, L_{t+1}) - \rho_{t+1}K_t) = V(L_t), \\ K_t = (1 - \delta + \rho_t) K_{t-1}, \end{cases}$$

ou encore, en utilisant les conditions (1.15) de maximisation des profits et :

$$\begin{cases} U\left(\omega_{t+1}(k_t) \frac{K_t}{k_{t+1}}\right) = V\left(\frac{K_{t-1}}{k_{t-1}}\right), \\ K_t = (1 - \delta + \rho_t) K_{t-1} \equiv R(k_t) K_{t-1} \end{cases}. \quad (1.31)$$

Dynamiques Locales

De même que dans le cas unidimensionnel, il est possible de mettre en évidence des dynamiques intéressantes à partir des propriétés de stabilité du ou des états stationnaires. Néanmoins, l'introduction de capital visant à relâcher les conditions trop fortes d'émergence de dynamiques complexes

17. On posera, dans le reste de cette partie $C^* = 0$ (absence de production domestique).

du modèle unidimensionnel, nous excluons d'emblée les cas précédemment rencontrés en imposant la condition :

Hypothèse 1.5 *La consommation et le loisir sont des substituts bruts, c'est à dire :*

$$R_2(C) < 1. \tag{1.32}$$

Sous cette hypothèse, nous avons vu que la courbe d'offre de travail est croissante et qu'il ne peut y avoir de fluctuations associées au comportement des consommateurs. Nous pouvons ainsi isoler les composantes purement technologiques des cycles.

L'intérêt d'étudier des modèles de dimension supérieure, outre le fait de s'affranchir d'hypothèses trop restrictives, réside également dans une plus grande richesse de l'analyse des propriétés locales et globales des systèmes dynamiques. Afin de mener cette analyse, il nous faut donc tout d'abord déterminer les conditions d'existence et d'unicité de l'état stationnaire. Dans le repère retenu, un état stationnaire sera défini par une suite de couples $(K_t, k_{t+1})_{t \in \mathbb{N}}$ telle que $(K_t, k_{t+1}) = (K, k)$ pour tout t . La proposition suivante détermine les conditions d'existence et d'unicité de l'état stationnaire non-autarcique. Nous considérerons ces conditions vérifiées dans la suite de la section.

Proposition 1.4 *L'économie est caractérisée par un état stationnaire unique (K, k) sous la condition :*

$$\bar{\theta} < \omega(k). \tag{1.33}$$

Preuve. Considérons dans un premier temps l'équation définissant l'évolution du stock de capital. On aura $K_t = K_{t-1} \equiv K$ si et seulement si $R(k) = 1 - \delta + \rho(k) = 1$. Par conséquent, à l'état stationnaire, le taux de rendement du capital doit être égal au taux de dépréciation δ . Pour qu'une

solution existe, il faut donc que δ soit encadré par les limites en 0 et $+\infty$ de la fonction $\rho(k)$. Or, cette condition est assurée par l'hypothèse 4 (conditions d'Inada). Notons également que, $\rho(k)$ étant une fonction décroissante du rapport capital-travail, ce dernier est déterminé de façon unique.

Par ailleurs, utilisant conjointement la première équation dynamique et la définition (1.11) des fonctions U et V , l'état stationnaire sera caractérisé par :

$$\omega(k)u'(\omega(k)L) = v'(L^* - L). \quad (1.34)$$

Prenant le rapport capital-travail comme donné, le côté gauche de l'équation définit une fonction décroissante de L , tandis que $v'(L)$ est une fonction croissante de $[0, L^*[$ vers $[0, +\infty[$. Pour chaque valeur donnée de k , cette équation définit donc une solution unique si et seulement si

$$\omega(k) < \lim_{L \rightarrow 0} \frac{v'(L^* - L)}{u'(\omega(k)L)}, \quad (1.35)$$

où la limite à droite de l'expression correspond au $\bar{\theta}$ de l'équation (1.7) page 19. ■

Le théorème d'Hartman et Grobman¹⁸ établit l'équivalence locale du système dynamique et de son approximation linéaire au voisinage d'un état stationnaire. On peut ainsi étudier les propriétés de stabilité de l'état stationnaire et les éventuelles bifurcations à l'aide du système linéaire¹⁹:

$$\begin{pmatrix} dK_t \\ dk_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{K}{k} |\varepsilon^R| \\ \frac{k}{K} \frac{\varepsilon^X - 1}{\varepsilon^\omega - 1} & \frac{\varepsilon^X - |\varepsilon^R|}{\varepsilon^\omega - 1} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} dK_{t-1} \\ dk_t \end{pmatrix}.$$

18. Voir par exemple Hale et Koçak (1992)

19. Les calculs nécessaires à la linéarisation sont détaillés en annexe.

La trace et le déterminant de la matrice de transition du système linéarisé sont :

$$\begin{aligned} T &= T_1 - \frac{1}{\varepsilon^\omega - 1} (\varepsilon^x - 1), \\ D\acute{e}t &= D_1 + \frac{|\varepsilon^R| - 1}{\varepsilon^\omega - 1} (\varepsilon^x - 1), \end{aligned} \tag{1.36}$$

où

$$D_1 = \frac{|\varepsilon^R| - 1}{\varepsilon^\omega - 1} \quad \text{et} \quad T_1 = D_1 + 1.$$

La nature localement stable ou instable de l'état stationnaire est déterminée par l'emplacement des valeurs propres du Jacobien par rapport au cercle unitaire²⁰. Grandmont et al. (1998) ont proposé une méthode géométrique évitant le calcul explicite des valeurs propres qui peut s'avérer problématique lorsque le système dépend d'un grand nombre de paramètres. Ces auteurs utilisent en effet le changement de variable $T \equiv \lambda_1 + \lambda_2$ et $D\acute{e}t \equiv \lambda_1\lambda_2$ pour déterminer la nature de l'état stationnaire en fonction de la trace T et du déterminant $D\acute{e}t$ de la matrice Jacobienne du système²¹. Lorsque l'une des valeurs propres, λ_1 , est égale à 1, on a $T = 1 + \lambda_2 = D\acute{e}t + 1$. De la même façon, lorsque une des valeurs propres vaut -1 , on a la relation $D\acute{e}t = -T - 1$. Enfin, si les deux valeurs propres sont complexes conjuguées de module unitaire, on a $D\acute{e}t = 1$. Le graphique représente également (en pointillés) la frontière entre les deux ensembles correspondant respectivement aux cas où les valeurs propres sont réelles et complexes.

On a ainsi découpé le plan Trace-Déterminant en cinq zones :

20. Une valeur propre inférieure (resp. supérieure) à 1 en module correspond à une contraction (resp. dilatation) dans la direction du vecteur propre correspondant.

21. En effet, la trace et le déterminant sont invariants par changement de base et peuvent donc être calculés directement. Une méthode géométrique comparable a été développée pour les systèmes tri-dimensionnels par Barinci et Drugeon (1999) qui l'appliquent à un modèle à générations imbriquées.

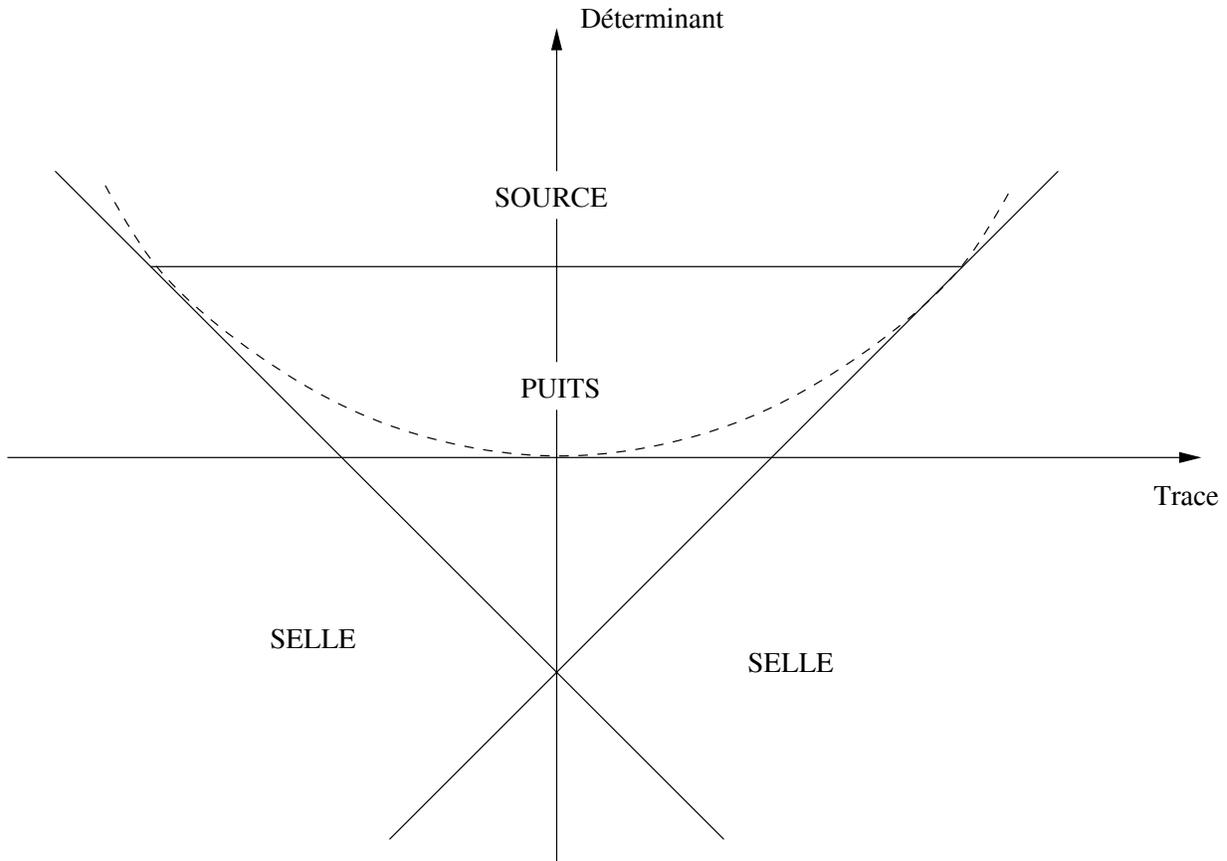


Figure 1.10: Le diagramme Trace-Déterminant

- une zone centrale correspondant aux états stationnaires localement indéterminés (puits). Toute trajectoire ayant pour point de départ un point suffisamment proche de l'état stationnaire converge vers ce dernier.

- deux zones latérales associées à des équilibres stationnaires de type point-selle. Dans ce cas, le lieu des points qui convergent vers l'état stationnaire est une variété unidimensionnelle appelée variété stable. De même, l'ensemble des points qui convergent vers l'état stationnaire par itération de l'application inverse est appelé variété instable.

- les deux zones restantes correspondent aux états stationnaires de type source. Elles se caractérisent par le fait que toute trajectoire ayant un point

de départ appartenant à tout voisinage suffisamment proche de l'état stationnaire et distinct de celui-ci, quitte ce voisinage au bout d'un certain nombre d'itérations.

Ainsi deux zones adjacentes correspondent à des systèmes dynamiques topologiquement distincts au voisinage de l'état stationnaire. Pour certaines familles paramétrées de système dynamiques, il est possible de passer d'une zone à l'autre par variation continue d'un ou plusieurs paramètres. On définit précisément une bifurcation comme ce changement de nature topologique du système consécutif à une variation des paramètres. Ici, les bifurcations sont qualifiées de locales car elles n'affectent les propriétés du système qu'au voisinage de l'état stationnaire. Différents types de bifurcations sont distingués suivant les caractéristiques initiales et finales du système. Or, certaines propriétés dynamiques (comme l'existence d'orbites périodiques ou de trajectoires invariantes apériodiques) ont été mises en relation avec l'émergence de bifurcations locales. La mise en évidence de cycles persistants ou de trajectoires apériodiques, qui peut sembler *a priori* une tâche très difficile, peut donc être réduite au problème beaucoup plus abordable de recherche de valeurs de bifurcation des paramètres. Évidemment, cette méthode n'apporte qu'une information sur le comportement du système au voisinage de l'état stationnaire et ne donne donc qu'une caractérisation très limitée des dynamiques engendrées par le modèle. On peut se référer par exemple à Benhabib, Schmitt-Grohe et Uribe (2001) pour un exemple de modèle où la non prise en compte des propriétés globales peut conduire à des recommandations dangereuses en matière de politique économique. D'autres outils, qui seront présentés dans la suite, ont été développés pour l'étude des dynamiques au niveau global.

Décrivons à présent les différentes bifurcations locales susceptibles de se produire dans un système discret à deux dimensions. Les différents cas ci-dessous sont envisageables²² :

1. Une des valeurs propres traverse la valeur -1 .

En notant P le point $(T(\lambda_1, \lambda_2), D(\lambda_1, \lambda_2))$, on a que P traverse la droite d'équation $D = -T - 1$ et donc que l'état stationnaire correspondant subit un changement de stabilité dans la direction d'un des vecteurs propres. Ce cas correspond à la bifurcation flip précédemment évoquée dans le cadre des systèmes unidimensionnels. L'autre valeur propre ne traversant pas le cercle unitaire, on a donc le passage d'un point-selle à un puits ou une source, ou vice-versa. L'émergence de fluctuations peut donc se produire par l'apparition d'un cycle stable d'ordre 2 dans le cas d'une bifurcation flip supercritique.

2. Une des valeurs propres traverse la valeur 1.

Dans ce cas, le point P traverse la droite d'équation $D = T - 1$. Comme précédemment, la bifurcation transforme un puits ou une source en point-selle ou inversement. En revanche, différents scénarios sont susceptibles de se produire, distingués par le nombre de points fixes créés par la bifurcation :

- (a) la bifurcation transcritique : Le système admet deux états stationnaires avant et après bifurcation. En $\alpha = 0$ ceux-ci fusionnent et il se produit un échange de stabilité, comme illustré par la figure 1.11.
- (b) la bifurcation fourche (pitchfork) : cette bifurcation est illustrée par les figures 1.12 et 1.13, qui correspondent respectivement aux

22. Pour les démonstrations et la caractérisation des conditions d'émergence des différents types de bifurcations, voir Wiggins (1990), pp.357 et seq.

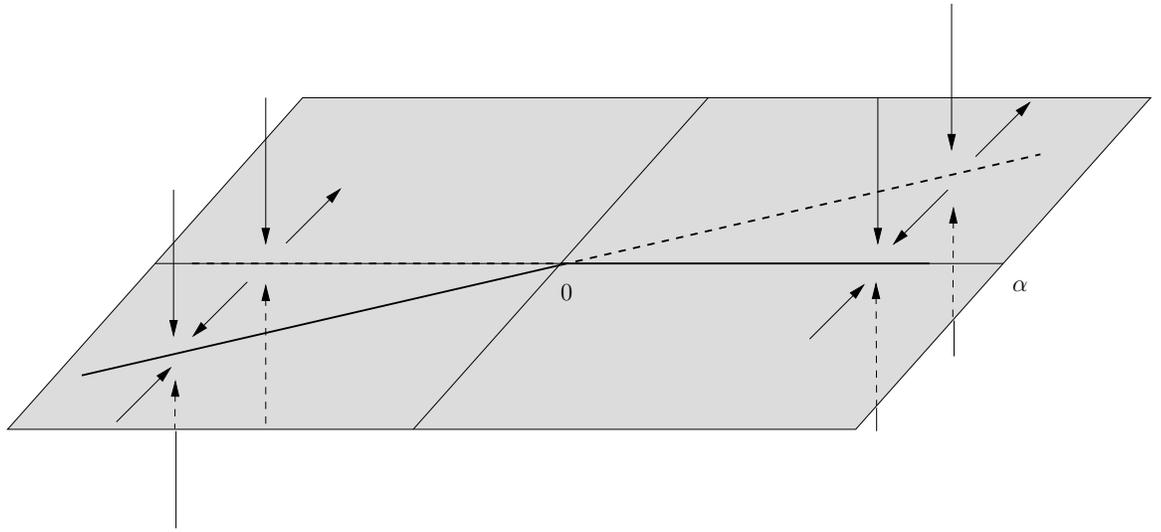


Figure 1.11: Bifurcation transcritique

cas supercritique et sous-critique. Dans le premier cas de figure, on peut voir que l'état stationnaire perd sa stabilité et que deux états stationnaires stables supplémentaires apparaissent autour de celui-ci. À l'inverse, dans le cas sous-critique, deux états stationnaires instables autour d'un point stable laissent place à un état stationnaire unique et stable.

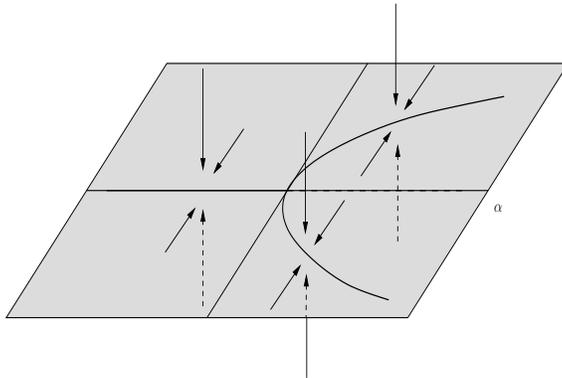


Figure 1.12 – *Bifurcation fourche supercritique*

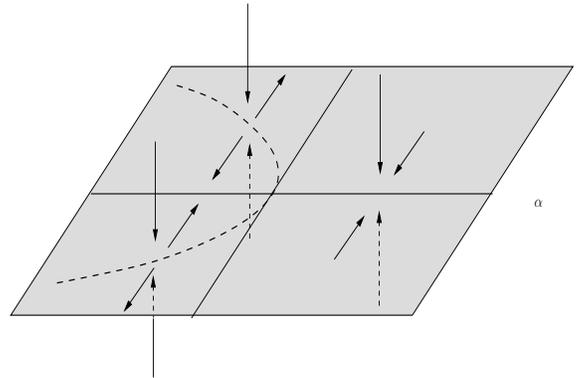


Figure 1.13 – *Bifurcation fourche sous-critique*

- (c) la bifurcation noeud-col : avant la bifurcation, l'état stationnaire stable cohabite avec un état stationnaire instable. Les deux points fixes fusionnent au point de bifurcation et disparaissent au-delà (voir figure 1.14).

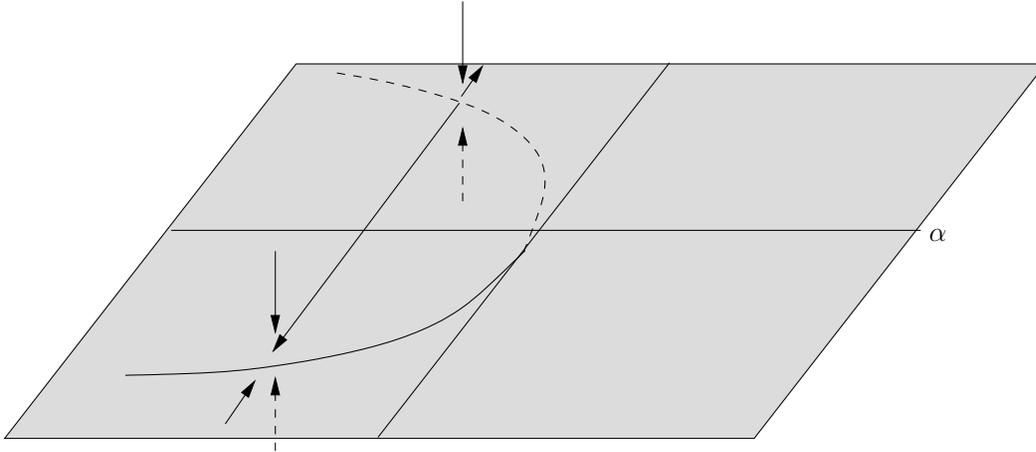


Figure 1.14 – *Bifurcation noeud-col*

On peut donc facilement déterminer le type de bifurcation auquel on est confronté en comparant le nombre d'états stationnaires avant et après bifurcation.

3. Les deux valeurs propres sont complexes conjuguées et leur module traverse la valeur 1.

Dans ce cas, le point P traverse le segment $D = 1, T \in [-2, 2]$ qui sépare les régions de convergence et divergence locales. Les valeurs propres étant complexes, les trajectoires au voisinage de l'état stationnaire oscillent autour de celui-ci. Sous certaines conditions (cas supercritique), les orbites proches de l'état stationnaire répulsif peuvent converger vers une courbe fermée invariante homéomorphe au cercle. Ce cas de figure est illustré par la figure 1.15, obtenue à partir de l'équation logistique

retardée :

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_{n-1}), \quad (1.37)$$

où le paramètre λ varie entre 1.5 et 2.27. Nous voyons bien sur cette figure que le système converge un état stationnaire unique pour $\lambda < 2$ et que celui-ci devient répulsif au-delà, avec l'apparition d'une courbe fermée invariante.

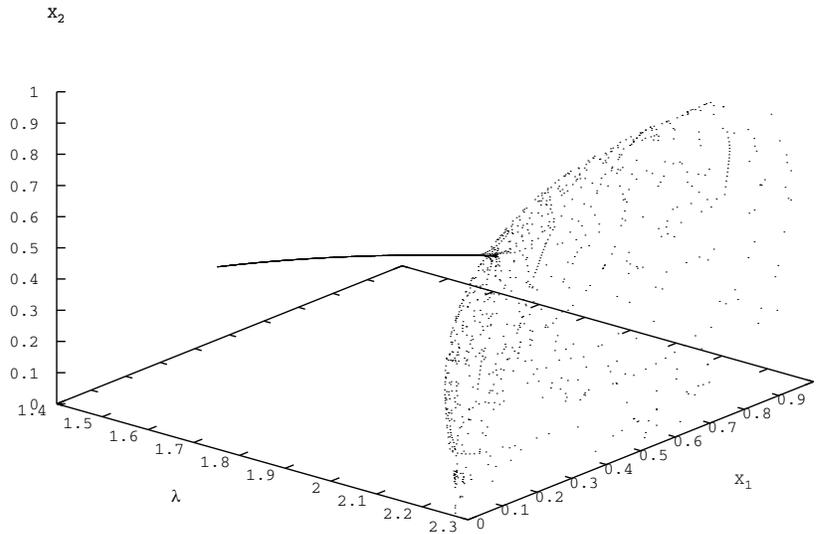


Figure 1.15 – *Bifurcation de Hopf pour l'équation logistique retardée 1.37*

Ce type de bifurcation a été mis en évidence par Neimarck, Hopf et Sacker et est généralement mentionné dans la littérature sous le nom de *bifurcation de Hopf* ou parfois de *bifurcation de Neimark* pour distinguer le cas discret du cas continu. A l'inverse des deux premiers cas de figure, ce type de bifurcation ne peut se produire que pour des systèmes de dimension supérieure à 1.

Grandmont et al. (1998) ont choisi comme paramètre de bifurcation, l'élasticité de la courbe de réaction des travailleurs. En effet, les expressions de T et D peuvent s'interpréter comme la définition paramétrique d'une droite

si les autres paramètres sont pris comme donnés. Ces derniers vont alors déterminer les caractéristiques de cette droite, c'est à dire sa pente et son ordonnée à l'origine. L'élasticité ε^x étant, sous l'hypothèse de substituabilité brute du travail et de la consommation, bornée inférieurement par 1, les équations (1.36) ne définissent en fait qu'un rayon²³ Δ d'équation

$$D = D_1 + (|\varepsilon^R| - 1)(T - T_1), T > T_1.$$

De plus, on voit immédiatement que l'origine (T_1, D_1) de Δ se situe sur la droite d'équation $D = T - 1$.

Grandmont et al. s'intéressent à l'impact sur Δ de deux paramètres : l'élasticité de substitution capital-travail²⁴ et la part du capital dans la production mesurée par l'expression $s(k) = k\rho(k)/f(k)$. Pour ce faire, ils utilisent les relations :

$$\varepsilon^\omega = \frac{s(k)}{\sigma(k)} \quad \text{et} \quad |\varepsilon^R| = \frac{\delta(1-s(k))}{\sigma(k)}. \quad (1.38)$$

Exprimée dans les nouvelles coordonnées²⁵, la pente de la demi-droite devient :

$$pente_\Delta = \frac{\delta(1-s) - \sigma}{\sigma}.$$

Le sens du déplacement sur Δ lorsque ε^x augmente est reflété par le vecteur directeur :

$$\vec{V} = \left(-\frac{1}{\varepsilon^\omega - 1}, \frac{|\varepsilon^R| - 1}{\varepsilon^\omega - 1} \right),$$

ou, de manière équivalente :

$$\vec{V} = \begin{cases} \left(-1, \frac{\delta(1-s)-\sigma}{\sigma} \right) & \text{si } \sigma < s \quad (\varepsilon^\omega > 1), \\ \left(1, \frac{\sigma-\delta(1-s)}{\sigma} \right) & \text{si } \sigma > s \end{cases}.$$

23. C'est à dire une demi-droite orientée.

24. Ce qui leur permet en particulier de relier leurs résultats à ceux de Reichlin.

25. En éliminant la dépendance par rapport à k afin de simplifier les notations.

On supposera dans la suite que l'origine de Δ a une ordonnée inférieure à 1 dans le cas de complémentarité parfaite, c'est-à-dire

$$\frac{\delta(1-s)}{s} < 1.$$

On s'intéresse dans un premier temps au cas où $\sigma < s$. L'évolution du rayon Δ lorsque σ croît continûment entre 0 et s est illustrée par la figure 1.16. Celle-ci fait apparaître quatre zones distinctes numérotées de 1 à 4 et associées à des valeurs croissantes de σ . Les limites entre ces différentes zones correspondent aux réalisations particulières du rayon Δ pour les valeurs remarquables de σ (i.e. les valeurs auxquelles se produit un changement dans la description qualitative du système).

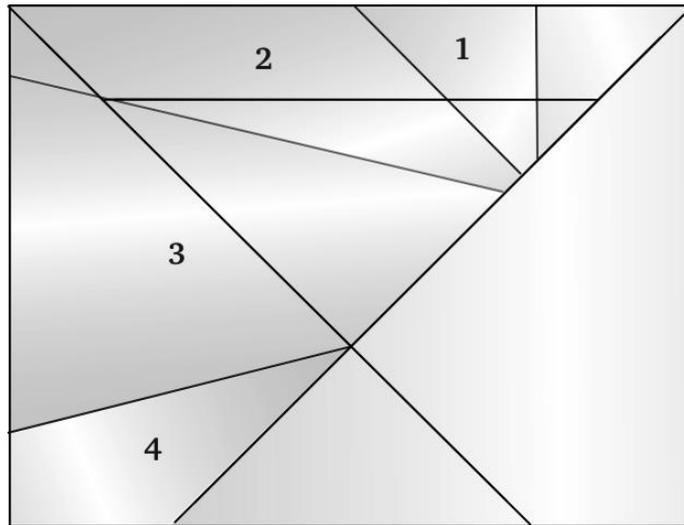


Figure 1.16: Evolution du rayon Δ : $\sigma < s$

Avant de détailler les spécificités de chacune des zones, nous pouvons déjà remarquer que lorsque σ augmente, l'origine de Δ se déplace vers le bas le long de la droite $D = T - 1$. Dans le même temps, la pente P_δ croît de $-\infty$ vers une limite positive inférieure à 1.

- La zone 1 correspond au cas où σ appartient à l'intervalle $[0, \delta(1-s)/2[$

et donc à une forte complémentarité des facteurs de production. Dans le cas de complémentarité parfaite, Δ est un rayon vertical (de pente $-\infty$) et son origine est positive, inférieure à 1. Lorsque σ augmente vers $\sigma_1 \equiv \delta(1-s)/2$, la pente croît vers -1 et l'origine se déplace vers le bas sur la droite $D = T - 1$. Lorsque ε^x traverse la valeur $\gamma^F \equiv (s - \sigma)/(\delta(1-s) - \sigma)$, une bifurcation de Hopf se produit, dans laquelle l'état stationnaire perd sa stabilité, passant d'un puits à une source. Si la bifurcation est supercritique (resp. sous-critique), une courbe fermée invariante stable (resp. instable) apparaît autour de l'état stationnaire pour ε^x supérieur (resp. inférieur) et proche de γ^F . Distinguer les cas sous-critique et supercritique ne peut se faire par l'inspection du jacobien de l'application mais nécessite de prendre également en compte les approximations au deuxième ordre. Dans le cas d'un modèle économique dépendant de nombreux paramètres, il est toutefois plus simple d'examiner les orbites du systèmes obtenues à l'aide de simulations. Les dynamiques restreintes à cette courbe fermée invariante décrivent donc des fluctuations persistantes ne nécessitant pas d'être entretenues par des chocs exogènes.

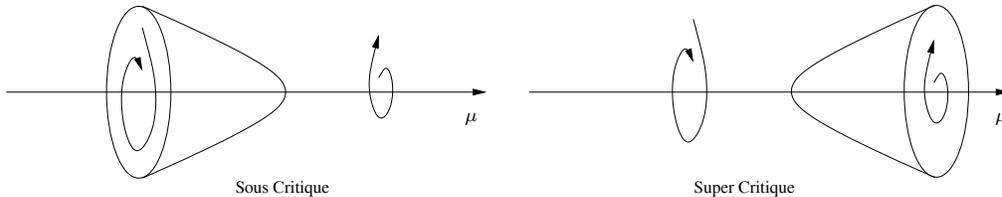
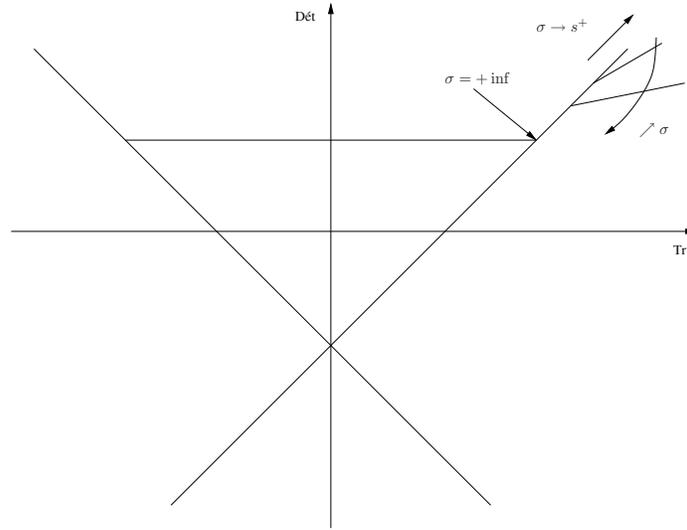


Figure 1.17 – *Bifurcation de Hopf*

- La zone 2 est définie par $\sigma_1 < \sigma \leq \sigma_2$ où

$$\sigma_2 \equiv \frac{s + \delta(1-s) - \sqrt{1 - \delta(1-s)/s}}{2}, \quad (1.39)$$

et est déterminé par le système $T = -2$, $D = 1$. Dans ce cas, comme


 Figure 1.18 – Evolution du rayon Δ : $\sigma > s$

le montre le graphique, une bifurcation de Hopf se produit également mais est suivie d'une bifurcation flip si ε^x traverse la valeur $\gamma^F \equiv$. Pour les valeurs élevées de ε^x , l'équilibre stationnaire sera par conséquent déterminé.

- Lorsque σ varie entre σ_2 et $\sigma_3 \equiv (\delta(1-s) + s)/2$ (zone 3), l'origine de Δ tend vers le point d'ordonnée égale à -1 et sa pente devient positive inférieure à 1. Une bifurcation flip se produit en $\varepsilon^x =$, qui, comme dans le cas précédent peut être supercritique ou sous-critique.
- Enfin, pour les valeurs de σ supérieures à σ_3 (et inférieures à s), l'état stationnaire est localement déterminé quelle que soit la valeur de ε^x . L'origine de Δ tend vers $-\infty$ lorsque σ tend vers s^- et sa pente vers une limite inférieure à 1.

Le cas où $\sigma > s$ est illustré par la figure 1.18. La pente de Δ est à présent positive inférieure à 1 et tend vers 1 lorsque σ tend vers l'infini. Dans le même temps, l'origine D_1 décroît de $+\infty$ à 1. Là encore, l'équilibre stationnaire est

localement déterminé pour toute valeur de ε^λ .

Nous voyons par conséquent, d'après ces résultats, que des fluctuations déterministes²⁶ ne sont envisageables que pour des valeurs suffisamment faibles de l'élasticité de substitution. En calibrant le modèle au moyen de valeurs "raisonnables" des autres paramètres, les auteurs concluent que le degré nécessaire de complémentarité des facteurs permettant d'obtenir de tels résultats n'est pas empiriquement plausible. Il importe donc d'enrichir le modèle par des hypothèses plus réalistes afin de déterminer si des fluctuations peuvent être mises en évidence dans une configuration plus en accord avec les données observées.

La même modélisation peut être utilisée pour fournir une explication alternative aux fluctuations économiques. En effet, l'existence d'équilibres indéterminés peut servir de base à la construction d'équilibres stochastiques dans lesquels les croyances des agents jouent le rôle moteur des fluctuations. Le paragraphe suivant explique brièvement le principe qui gouverne ce type d'équilibres²⁷.

Indétermination et Équilibres Stochastiques Nous avons vu dans l'étude des dynamiques déterministes qu'il existait des valeurs des paramètres pour lesquels toute trajectoire dans un voisinage proche de l'état stationnaire converge vers ce dernier (puits). Une telle configuration où existe une infinité d'équilibres qui peuvent être arbitrairement proches est qualifiée d'indétermination. Si, dans les modèles traditionnels, une telle situation était disqualifiée au moyen de contraintes sur les paramètres, un courant relativement récent

26. Existence de courbes fermées invariantes ou de cycles de période 2 pour les valeurs des paramètres au voisinage des points de bifurcations

27. Pour une revue de la littérature sur les fluctuations endogènes stochastiques, voir Chiappori et Guesnerie (1991) ou Farmer (1993).

met en avant l'existence d'équilibres indéterminés comme moyen d'expliquer un certain nombre de faits économiques, pour lesquels l'approche standard n'apportait pas de réponses satisfaisantes (Benhabib et Farmer, 1994). En particulier, l'indétermination peut être vue comme un moyen d'analyser le rôle des croyances comme moteur des fluctuations économiques. La multiplicité d'équilibres et *a fortiori* l'indétermination peuvent en effet servir de base à la construction d'équilibres à taches solaires. De tels équilibres sont caractérisés par le fait que les agents prennent leurs décisions sur la base de croyances extrinsèques, c'est à dire n'affectant pas les fondamentaux de l'économie, mais susceptibles de coordonner les choix effectués. Cette coordination rend possible la réalisation *a posteriori* des croyances qui sont alors dites *autoréalisatrices*. Ainsi, des fluctuations stochastiques peuvent être engendrées par la révision des anticipation des agents, qui restent néanmoins cohérentes et ne remettent donc pas en cause l'hypothèse de rationalité. Une interprétation possible des équilibres à taches solaires est que ceux-ci reflètent l'alternance de vagues d'optimisme et de pessimisme des agents économiques, autrement dit, les fluctuations de l'activité réelle sont principalement expliquées par les esprits animaux keynésiens.

L'introduction d'une formalisation des effets réels des croyances des agents par la construction d'équilibres à taches solaires est due à Shell (1977) ainsi que Cass et Shell (1983). Ces auteurs montrent en particulier que des équilibres à taches solaires existent lorsque la participation au marché est restreinte (une caractéristique des modèles à générations imbriquées). De tels équilibres ont été mis en évidence au sein de modèles à générations imbriquées unidimensionnels par Azariadis (1981), Azariadis et Guesnerie (1982), qui mettent en avant le rôle de la complémentarité brute entre la consommation et le loisir. Techniquement, les travaux qui ont initié cette littérature

se sont restreints à un cadre simple où les taches solaires suivent un processus de Markov à deux états. Une étude générale de la relation entre taches solaires et indétermination est fournie par Woodford (1986*b*). Grandmont et al. (1998) se basent sur leur construction géométrique pour caractériser les conditions d'existence d'équilibres à taches solaires. Ils montrent que de tels équilibres sont possibles lorsqu'on peut mettre en évidence l'invariance de leur support dans la dynamique déterministe associée. Cette condition est remplie en particulier au voisinage d'un équilibre localement indéterminé, mais également au voisinage des bifurcations locales, consécutivement à l'apparition de cycles déterministes ou de courbes fermées invariantes. Ainsi, la construction d'équilibres stochastiques à taches solaires fait essentiellement appel aux mêmes outils que celle des équilibres déterministes.

Dynamiques Globales dans les Systèmes Bidimensionnels

On commence par présenter les techniques mathématiques utilisées pour l'étude des systèmes dynamiques dans une première sous-section. L'application de ces techniques au domaine économique fait l'objet de la deuxième sous-section.

Les Outils d'Étude Globale des Systèmes Dynamiques On a vu, dans le cas des dynamiques locales, que l'étude des fluctuations persistantes autour de l'état stationnaire pouvait se ramener à un problème plus simple, celui de la recherche de valeurs de bifurcations Hopf et flip. De même, lorsqu'on s'intéresse aux dynamiques globales dans les systèmes de dimension supérieure à 1, la recherche d'orbites compliquées ne peut généralement se faire par une inspection directe du système mais utilise les résultats de la théorie des systèmes dynamiques qui relie la résolution de cette tâche à

d'autres phénomènes plus simples à mettre en évidence. Le principal de ces phénomènes est la détection de fers à cheval de Smale. Au départ, la transformation dite du fer à cheval a été proposée par Smale pour offrir une description stylisée des phénomènes associés à la combinaison de l'étirement et du pliage de l'espace de phase. Pour ce faire, il considère une application définie sur un carré de longueur 1, noté S . Cette application est définie comme la composée d'un étirement, qui transforme le carré en rectangle, et d'un pliage qui conduit à la forme en fer à cheval illustrée par la figure 1.19.

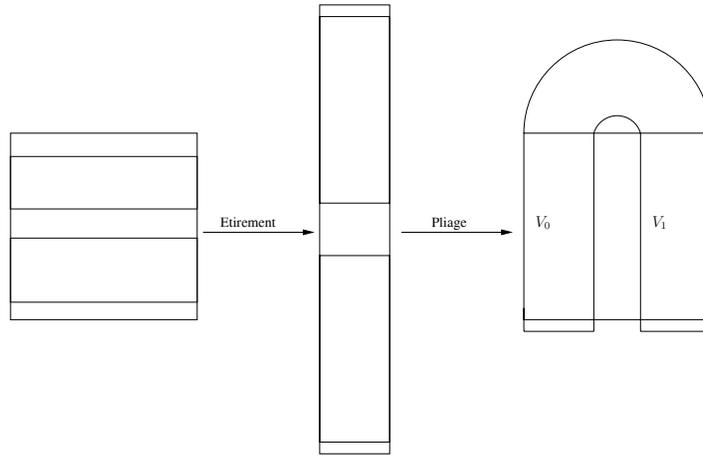


Figure 1.19: La transformation de Smale

La transformation du fer à cheval est donc définie comme la composition d'une application linéaire admettant un point fixe unique de type selle et d'une application non linéaire. Par ailleurs, Smale suppose que l'intersection du carré avec son image est composée de deux rectangles verticaux²⁸ n'ayant pas d'intersection avec les bords droit et gauche du carré. L'intérêt de cette application est qu'elle assure un mélange efficace des points de l'espace initial.

On voit en particulier que l'ensemble des points qui restent dans S après une itération de T est composé des deux rectangles horizontaux H_0 et H_1

²⁸. i.e. la partie incurvée du fer à cheval est située hors de l'espace des phases

dont les images sont données par les rectangles verticaux V_0 et V_1 . De manière plus générale, l'intersection de S et de l'image de tout rectangle horizontal²⁹ consiste en deux rectangles verticaux, un dans V_1 et l'autre dans V_2 .

Une fois cette application définie, on étudie les dynamiques obtenues par itérations successives de T . La première étape de l'analyse est la détermination du plus grand ensemble invariant pour T , c'est à dire qu'on cherche l'ensemble Λ défini par :

$$\Lambda = \{p \in S \mid T^k(p) \in S, \forall k \in \mathbb{Z}\}$$

qui peut également être défini de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \dots \cap T^{-k}(S) \cap \dots \cap T^{-1}(S) \cap S \cap T(S) \cap \dots \cap T^k(S) \cap \dots \\ &= \bigcap_{k \in \mathbb{Z}} T^k(S) \end{aligned}$$

En construisant l'intersection des itérées successives de S par T , on montre facilement que Λ est le produit de deux ensembles de Cantor³⁰.

Le théorème suivant décrit les dynamiques restreintes à l'ensemble Λ .

Théorème 1.3 *L'application du fer à cheval de Smale T restreinte à Λ admet :*

1. *une infinité dénombrable d'orbites périodiques de périodes aussi élevées que l'on veut. Ces orbites périodiques sont toutes de type selle;*
2. *une infinité non dénombrable d'orbites apériodiques;*

29. Par rectangle horizontal, on entend plus précisément un rectangle dans S dont les côtés parallèles à l'axe des abscisses ont une longueur égale à 1. Une définition analogue peut être donnée pour les rectangles verticaux.

30. Cette construction est décomposée en celle de Λ_+ , l'intersection des itérées positives de S , et Λ_- , celle des itérées négatives. Chacun de ces ensembles est le produit d'un ensemble de Cantor et d'un segment de longueur 1. Le passage à la limite est basé sur le théorème de convergence des suites décroissantes d'ensembles.

3. une orbite dense.

La preuve fait appel au concept de dynamiques symboliques. Chaque point x de Λ peut être identifié de façon bi-univoque à un élément de l'espace vectoriel Σ des suites bi-infinie de 0 et de 1, c'est à dire des suites du type $\dots s_j \dots s_{-2} s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_i \dots$ avec $s_i = i$ si $T^i(x) \in V_i$. Le chiffre s_0 indique quelle bande verticale contient le point x . D'autre part T est homéomorphe à l'application de décalage σ définie sur Σ , qui décale le point d'un rang vers la droite³¹. Par ailleurs, l'application du fer à cheval restreinte à l'ensemble Λ présente ce que Ruelle a qualifié de dépendance sensitive aux conditions initiales, c'est à dire que les erreurs d'approximations sur les conditions initiales augmentent exponentiellement avec le temps. De plus, cette application est *topologiquement transitive*, ce qui signifie qu'il est possible de passer de tout voisinage arbitrairement petit à un autre en itérant l'application. Ainsi, l'ensemble Λ ne peut être décomposé en plus petits sous-ensembles invariants. Une application caractérisée par de la dépendance sensitive aux conditions initiales, topologiquement transitive et telle que les orbites périodiques sont denses est qualifiée de *chaotique*.

Il est important de remarquer que Λ n'est pas un attracteur, mais qu'il constitue un cas particulier d'ensemble hyperbolique (c'est à dire admettant des variétés stable et instable). Néanmoins la complexité du comportement du système restreint à Λ implique que les dynamiques transitoires au voisinage de Λ peuvent fluctuer sur une longue période de temps avant de s'éloigner de Λ et converger finalement vers un attracteur simple.

31. Par exemple, les éléments $\dots 111.111\dots$ et $\dots 000.000\dots$ correspondent aux deux points fixes de l'application. Un exemple de point périodique est donné par $\dots 011011.011011\dots$ qui appartient à une orbite de période 3 (la même suite est obtenue en décalant le point de trois rangs vers la droite). Pour plus de détails, voir Guckenheimer et Holmes (1983) ou Wiggins (1990).

L'intérêt du fer à cheval de Smale est de présenter une description qualitative aussi simple que possible des phénomènes dynamiques liés à l'étirement et au pliage de l'espace de phase. En élargissant le concept de fer à cheval à des transformations moins stylisées, il est possible d'appliquer les résultats obtenus à un grand nombre de systèmes dynamiques non linéaires. Une telle définition élargie de la transformation du fer à cheval a été fournie par Conley et Moser. De plus, ces auteurs fournissent des conditions précises pour qu'une application donnée admette un ensemble sur lequel elle est topologiquement conjuguée à un fer à cheval. Néanmoins ces conditions restent d'un intérêt pratique limité. En revanche, du point de vue théorique, elles ont permis de mettre en relation l'existence de fers à cheval avec l'existence de points d'intersection entre les variétés stable et instable d'un point selle. De tels points d'intersection sont appelés points homoclines et jouent un grand rôle dans la caractérisation des dynamiques globales des applications du plan. Une première conséquence de l'existence de points homoclines est l'existence d'une infinité d'autres points homoclines. En effet, soit p un point selle, $W^u(p)$ et $W^s(p)$ respectivement les variétés instable et stable associées, et soit q un point d'intersection de $W^u(p)$ et de $W^s(p)$. Les variétés stable et instable d'un point selle étant des ensembles invariants, toutes les itérées avant et arrière de q sont également des points homoclines.

Le lien entre l'existence de points homoclines et le fer à cheval de Smale est précisé par le théorème suivant, dû à Smale et Birkhoff :

Théorème 1.4 *Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme admettant un point fixe hyperbolique p . Soit $q \neq p$ un point d'intersection transversale entre $W^u(p)$ et $W^s(p)$. Alors f admet un ensemble hyperbolique invariant Λ , sur lequel il est topologiquement équivalent à un sous-décalage de type fini³²*

32. L'expression sous-décalage de type fini se réfère à l'application de décalage évoquée

Il est donc possible de prouver qu'un système dynamique admet des orbites chaotiques en montrant qu'ils existe des points d'intersection entre les variétés stable et instable de l'état stationnaire. Pour ce faire, des procédures numériques (Kostelitch, Yorke et You, 1996, You et al., 1991) existent, qui permettent de conclure avec certitude quant à l'existence de points homoclines (pour des valeurs données des paramètres).

L'existence de points homoclines transversaux étant associée à l'existence de trajectoires chaotiques par le théorème de Smale et Birkhoff, il est intéressant d'étudier comment s'effectue la transition vers le chaos lorsqu'on passe d'une situation où il n'existe aucun point homocline à une situation où les variétés stable et instable ont des intersections transversales. On considère pour ce faire une application indicée par un paramètre, F_α , satisfaisant les conditions suivantes:

Hypothèse 1.6 F_α est une application différentiable, inversible admettant un point fixe p et telle que les valeurs propres λ_1, λ_2 du Jacobien de F_α évaluées en p satisfont:

1. $0 < \lambda_1 < 1 < \lambda_2$ (point fixe hyperbolique),
2. $\lambda_1 \lambda_2 < 1$.

De plus, on suppose qu'une bifurcation homocline se produit lorsque α traverse la valeurs α_0 , c'est à dire

1. $W^s(p) \cap W^u(p) = \emptyset$ pour $\alpha < \alpha_0$,
2. $W^s(p)$ et $W^u(p)$ admettent un point de tangence quadratique lorsque

précédemment. Dans le cas du fer à cheval de Smale dans sa définition la plus restrictive, on a vu que les points de l'ensemble invariant pouvait être reliés bijectivement avec l'ensemble des suites bi-infinies de 0 et de 1. Dans ce théorème, il s'agit d'un décalage sur n symboles. Le terme de sous-décalage souligne le fait que dans le cas présent, toutes les suites de symboles ne correspondent pas à un point de l'ensemble invariant.

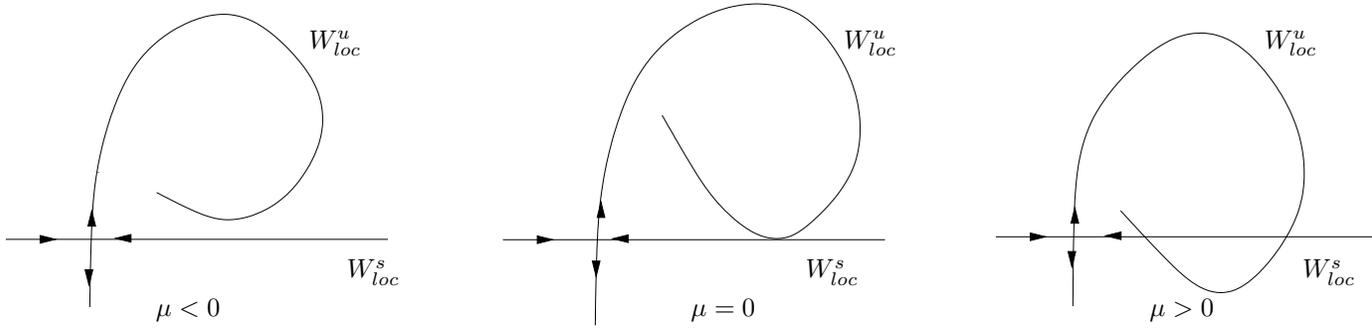


Figure 1.20 – *Bifurcation homocline*

$$\alpha = \alpha_0,$$

3. $W^s(p)$ et $W^u(p)$ ont des points d'intersection transversale lorsque $\alpha > \alpha_0$.

Plusieurs phénomènes intéressants ont été reliés à l'émergence d'une bifurcation homocline³³. D'une part, un théorème, établi par Gavrilov et Silnikov, montre que les conditions (1.6), la transition vers la complexité s'effectue au travers d'une cascade de bifurcations flips et noeud-col alternées. Plus précisément, il existe une suite de valeurs du paramètre $\alpha_{NC}^N < \alpha_F^N < \alpha_{NC}^{N+1} < \alpha_F^{N+1} < \dots < \alpha_{NC}^{N+i} < \alpha_F^{N+i} < \dots$, telle que α_{NC}^{N+1} et α_F^{N+i} correspondent respectivement à une bifurcation noeud-col et une bifurcation flip pour l'application f^{N+i} . (Wiggins, 1990, p. 540). Ce théorème décrit ainsi la manière dont l'infinité d'orbites caractéristique des fers à cheval est progressivement créée. En effet, chaque bifurcation noeud-col crée une nouvelle orbite périodique (de période $N + i$ pour $\alpha = \alpha_{NC}^{N+i}$ dont la période est accrue au travers de la bifurcation flip subséquente. D'autre part, Newhouse a montré que si les

33. Palis et Takens (1993) ont consacré un ouvrage aux conséquences dynamiques des bifurcations homoclines.

variétés stable et instable d'un point selle admettent un point de tangence quadratique en $\alpha = \alpha_0$, alors pour un grand nombre de valeurs de *alpha* proches de α_0 , il existe une infinité d'orbites périodiques. Enfin, pour un ensemble de mesure positive de valeurs autour de α_0 , l'application possède un attracteur semblable à celui obtenu dans le système de Hénon³⁴.

La richesse des comportements dynamiques, lorsque le paramètre est proche d'une valeur de bifurcation homocline, motive la recherche de telles bifurcations et justifie l'intérêt porté aux dynamiques globales. Parmi les articles ayant exploré cette voie, de Vilder (1996) a démontré numériquement qu'une bifurcation homocline se produit dans un système dynamique similaire à celui étudié ici. Le paragraphe suivant présente ses résultats.

Dynamiques Globales dans le Modèle Canonique Medio (1992) ainsi que Medio et Negroni (1996) ont réalisé des simulations des dynamiques dans un modèle à générations imbriquées en distinguant deux types de technologies (C.E.S. et à facteurs complémentaires) et deux types de fonctions d'utilité (aversion absolue ou relative au risque constante). Ils mettent ainsi en évidence numériquement les courbes fermées invariantes autour des orbites périodiques associées aux bifurcations de Hopf, mais également la destruction de ces courbes caractérisant la transition vers le chaos. Néanmoins, ces articles restent descriptifs et n'offrent pas une démonstration rigoureuse de l'existence d'orbites chaotiques.

Les méthodes de détection de dynamiques chaotiques présentées dans la section précédente ont notamment été appliquées au domaine des fluctuations macroéconomiques endogènes dans l'article de de Vilder (1996). Il est important de souligner ici que l'article de de Vilder se base sur un modèle à

34. L'image d'un tel attracteur est fournie dans la figure G.4 page 173

génération imbriquées. En effet, comme nous l'avons souligné dans la présentation des hypothèses du modèle de Woodford, le type particulier de dynamiques obtenu concerne uniquement une famille d'équilibres au voisinage de l'état stationnaire. Un raisonnement global au sein du modèle de Woodford est donc à prendre avec précaution. Nous tirons néanmoins parti de la similarité des deux modèles pour présenter brièvement les résultats de de Vilder, tout en gardant à l'esprit que la critique de Sims, concernant la longueur des cycles, est particulièrement valable dans ce cas de figure. Le modèle considéré se limite au cas de complémentarité parfaite des facteurs de production. Il se distingue néanmoins du modèle de Reichlin en ne supposant qu'une dépréciation partielle du capital lors de son utilisation ($\delta < 1$). L'originalité de cet article consiste à s'intéresser particulièrement à l'état stationnaire autarcique. En effet, l'étude du Jacobien montre que ce dernier est un point-selle et admet donc des variétés stable et instable unidimensionnelles. Ce n'est pas le cas de l'état stationnaire positif, qui est toujours caractérisé par des valeurs propres complexes. De Vilder utilise une procédure numérique (voir Ale Jan Homburg, Sands et de Vilder, 2002) implantée dans le logiciel DUNRO pour tracer les variétés stable et instable associées à l'état stationnaire autarcique. La variation de l'élasticité de l'utilité de la consommation lui permet de mettre en évidence l'émergence d'une bifurcation homocline. Cette méthode, quoique numérique, est parfaitement rigoureuse puisqu'elle prend en compte les erreurs d'approximation de la machine.

La figure 1.21³⁵ montre l'évolution du système lorsque le degré de concavité de la fonction d'utilité de la consommation augmente. Les valeurs choisies sont reprises de l'article de de Vilder, à savoir, $\delta = 0.05$, $a = 3$, $l^* = 2$ et

35. Cette figure a été (partiellement) construite à l'aide du logiciel DAMP présenté dans le chapitre 3.

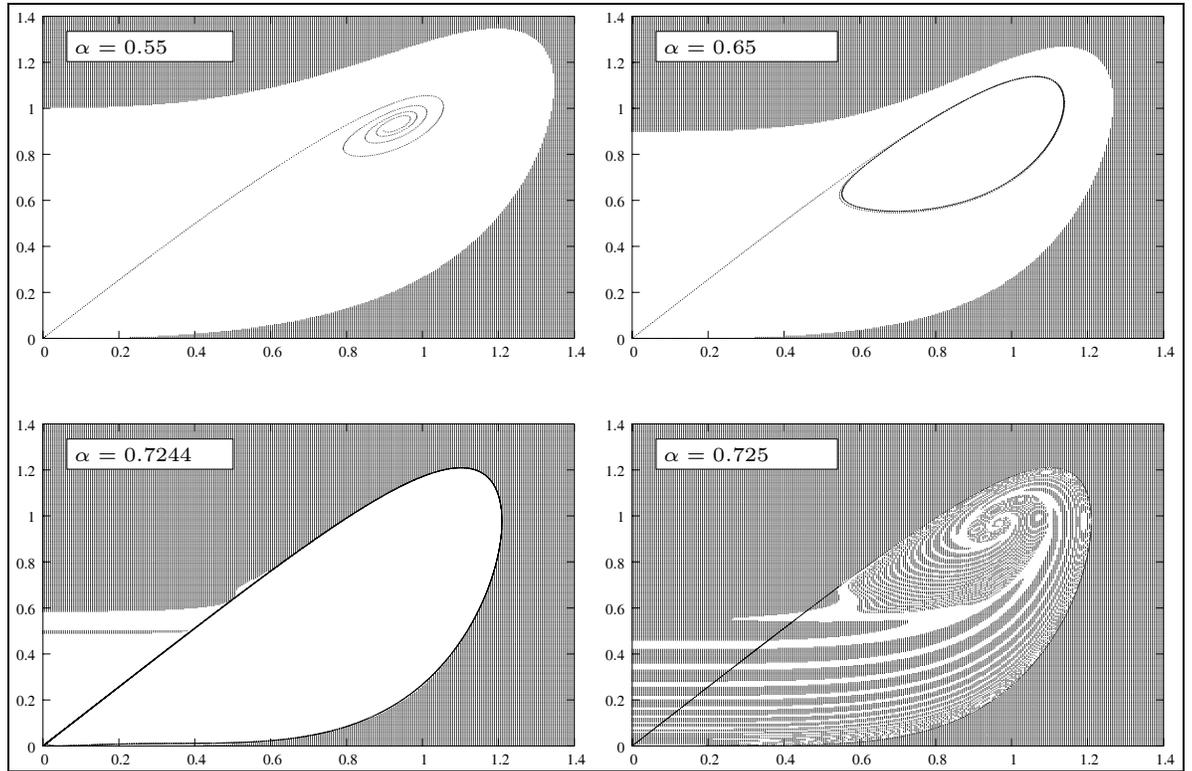


Figure 1.21 – *Bifurcation homocline dans le modèle de Woodford*

$\beta = 0.5$. La figure représente d'une part la variété instable et d'autre part, l'ensemble des points qui quittent l'orthant positif lorsque le système est itéré, c'est à dire l'ensemble des équilibres non soutenables du modèle. De Vilder montre en effet que l'ensemble des conditions initiales soutenables définit une région fermée dont la frontière est confondue avec un sous ensemble fini de la variété stable. Ainsi, nous pouvons analyser les quatre graphiques de la figure 1.21 de la façon suivante :

1. Pour $\alpha = 0.55$, les variétés stable et instable du point autarcique n'ont pas de point d'intersection. L'état stationnaire productif est caractérisé par des valeurs propres complexes de module inférieur à 1. On a donc des oscillations convergentes vers l'état stationnaire positif.

2. Pour $\alpha = 0.65$, les valeurs propres de l'état stationnaire positif sont cette fois de module supérieur à 1. Une bifurcation de Hopf s'est donc produite entre ces deux valeurs, ce qu'atteste la courbe fermée invariante caractéristique des bifurcations de Hopf supercritiques.
3. Lorsque $\alpha = 0.7244$, la région de soutenabilité épouse la forme d'une portion de la variété instable, autrement dit, les variétés stable et instable sont tangentes sur un ensemble de points de mesure positive. Plus intéressante est la présence, également, d'un point de tangence quadratique entre les deux variétés.
4. Enfin, lorsque α est légèrement supérieur à 0.7244, la frontière de la région de soutenabilité devient très irrégulière et comporte de nombreux replis. Une bifurcation homocline transversale s'est produite, et la caractérisation des dynamiques du modèle de Woodford peut ainsi être déduite des différents théorèmes précédemment énoncés.

La détection de points homoclines transversaux peut également se faire de façon analytique en considérant les systèmes bidimensionnels comme des perturbations de systèmes unidimensionnels. Yokoo (2000) présente cette méthode, basée sur les concepts développés par Marotto, dans un modèle à générations dans lequel une contrainte budgétaire de l'État est introduite.

1.4. Rendements Croissants et Concurrence Imparfaite

L'objet de cette section est de présenter, de manière plus brève, les différents travaux qui se sont attachés à développer le modèle présenté ici en introduisant des hypothèses microéconomiques plus spécifiques. Ces exten-

sions visent en particulier à relâcher l'hypothèse de concurrence parfaite que ce soit sur le marché des biens ou celui des facteurs de production et à considérer le cas d'ouverture des économies.

1.4.1 Le Marché des Biens

L'existence de marchés en concurrence imparfaite est un élément susceptible de favoriser l'apparition de fluctuations endogènes dans ce type de modèles. En effet, la concurrence imparfaite permet d'une part l'introduction de rendements croissants au niveau de la firme et d'autre part, elle implique que certains agents ont la possibilité d'influencer les prix sur le marché. La croissance des rendements induit des fonctions de demande de facteurs croissantes et entraîne l'indétermination de l'état stationnaire (voir Benhabib et Farmer, 1994). L'existence d'agents possédant un certain pouvoir de marché va se traduire par des prix plus élevés qu'en concurrence parfaite. Comme l'ont montré d'Aspremont, Dos Santos Ferreira et Gérard-Varet (1995a), le taux de marge est susceptible de varier au travers des deux composantes de l'indice de Lerner : l'élasticité de la demande et la part de marché de l'entreprise. Cette variabilité du pouvoir de marché peut également être la source de fluctuations endogènes.

L'effet des rendements croissants sur les fluctuations endogènes au sein du modèle de Woodford a été étudié par Cazzavillan, Lloyd-Braga et Pintus (1998). Ces auteurs considèrent deux cas de figure strictement identiques du point de vue des résultats : des rendements croissants externes dans un modèle de concurrence parfaite et des rendements croissants internes en concurrence à la Cournot³⁶. Du fait de cette équivalence, nous ne développerons ici que

36. La similarité entre ces deux types de structures de marché a déjà été soulignée par Benhabib et Farmer (1994).

le premier cas de figure. Il se différencie du présent modèle par la spécification de la fonction de production. Cette dernière présente des rendements constants, mais du fait d'externalités affectant la productivité des facteurs, la production de l'économie dans son ensemble se fait avec des rendements croissants. Formellement, pour une entreprise i donnée, ces hypothèses se traduisent par une technologie de la forme :

$$Y_{it} = F (K_{i(t-1)}^*, L_{it}^*),$$

avec

$$\begin{cases} K_{i(t-1)}^* = A (\bar{K}_{t-1}, \bar{L}_t) K_{i(t-1)}, \\ L_{it}^* = A (\bar{K}_{t-1}, \bar{L}_t) L_{it}. \end{cases}$$

où $A(\cdot)$ est une fonction homogène de degré ν représentant l'externalité. Elle est supposée croissante dans les quantités moyennes de capital et de travail \bar{K}_{t-1} et \bar{L}_t , considérées comme données par les entrepreneurs individuels. À l'équilibre, on aura $K_{t-1} = \bar{K}_{t-1}$ et $L_t = \bar{L}_t$ et la quantité produite sera donc donnée par :

$$Y_t = A(K_{t-1}, L_t) F(K_{t-1}, L_t) = A(K_{t-1}, L_t) L_t f(k_{t-1}),$$

où k et f désignent comme précédemment le capital et la production par tête.

Cette formulation des externalités permet aux auteurs d'introduire des rendements croissants au niveau collectif, tout en maintenant l'hypothèse de rendements constants pour les entreprises individuelles, nécessaire au maintien de l'hypothèse de concurrence parfaite.

La présence d'externalités va affecter les fonctions de demande de facteurs et par conséquent le salaire réel et le taux d'intérêt réel d'équilibre qui seront notés respectivement $\Omega(k_t, K_{t-1})$ et $R(k_t, K_{t-1})$. Ceux-ci deviennent en effet

dans ce contexte :

$$\begin{cases} \Omega(k_t, K_{t-1}) = A\Psi(k_t) \left(\frac{K_{t-1}}{k_t}\right)^\nu \omega(k_t), \\ R(k_t, K_{t-1}) = 1 - \delta + A\Psi(k_t) \left(\frac{K_{t-1}}{k_t}\right)^\nu \rho(k_t), \end{cases}$$

où les expressions de $\omega(\cdot)$ et $\rho(\cdot)$ sont données par (1.15) et

$$\Psi(k_t) = A(k_t, 1).$$

Le système dynamique associé à ce modèle est le même que celui défini en (1.31) où il suffit de remplacer $\omega(k_t)$ par $\Omega(K_{t-1}, k_t)$ et $R(k_t)$ par $R(K_{t-1}, k_t)$.

$$\begin{cases} \Omega(K_{t+1}, k_t) \frac{K_t}{k_t} = \chi \left(\frac{K_{t-1}}{k_t}\right), \\ K_t = (1 - \delta + \rho_t) K_{t-1} \equiv R(K_{t-1}, k_t) K_{t-1} \end{cases}. \quad (1.40)$$

Une première conséquence de l'introduction de rendements croissants est la multiplicité d'équilibres stationnaires. En effet, Cazzavillan et al. montrent que l'unicité n'est assurée que si les externalités sont uniformément fortes ou uniformément faibles. Si l'un de ces deux cas n'est pas vérifié, le système admet exactement deux états stationnaires.

La trace et le déterminant du système dynamique linéarisé au voisinage d'un état stationnaire³⁷ s'écrivent à présent :

$$\begin{cases} T = 1 + D_1 + \Lambda - \frac{\varepsilon^\chi - 1}{\varepsilon_k^\Omega - 1}, \\ D = D_1 \varepsilon^\chi, \end{cases}$$

avec :

$$\Lambda = \frac{\varepsilon_k^\Omega \varepsilon_K^R - \varepsilon_K^\Omega \varepsilon_k^R}{\varepsilon_k^\Omega - 1}.$$

Lorsque ε^χ tend vers 1, le déterminant tend vers D_1 et la trace vers $1 + D_1 + \Lambda$. On voit donc que l'extrémité du rayon Δ n'appartient à la droite

³⁷. Du fait des rendements croissants au niveau de l'économie, le système admet deux états stationnaires non autarciques dont les auteurs montrent qu'ils sont Pareto ordonnés.

d'équation $D = T - 1$, que si $\Lambda = 0$, ce qui correspond au cas où Ω et R ne dépendent que de k , c'est à dire le cas sans externalité. Cazzavillan et al. utilisent le même changement de variable que Grandmont et al.³⁸ leur permettant d'obtenir des résultats directement comparables. En effet, l'effet d'une augmentation de l'élasticité de substitution se traduit de la même manière que dans le modèle sans externalités à ceci près que l'origine du rayon Δ ne se déplace pas sur la droite $D = T - 1$, mais sur une droite Δ_1 , coupant $T - 1$.

Plus précisément, l'évolution des propriétés locales du système en fonction du degré de substituabilité des facteurs de production et de l'élasticité de la courbe d'offre de travail peut être décrite comme suit³⁹ :

1. Position de la droite Δ_1

Les auteurs limitent leur analyse à une configuration particulière des paramètres (Lemme 4.1 de l'article). En effet, ils s'intéressent au cas où la droite Δ_1 admet une pente supérieure à 1 et où D_1 et T_1 sont des fonctions décroissantes de σ . Ils montrent que ce cas de figure est réalisé sous des conditions peu restrictives lorsque la durée d'une période est courte. De plus, ils imposent des conditions sur les paramètres assurant que le point I d'intersection entre Δ_1 et la droite $D = T - 1$ ait une ordonnée comprise entre 0 et 1. Ces différentes restrictions sont illustrées par la figure 1.22.

2. Évolution de l'origine de Δ en fonction de l'élasticité σ

Deux cas de figures sont distingués, selon que σ est supérieure ou inférieure à une valeur σ_0 donnée par

$$\sigma_0 = \frac{s}{1 + \nu - \varepsilon^\Psi}, \quad (1.41)$$

38. donné par l'équation (1.38)

39. Nous renvoyons à l'article pour la preuve des affirmations qui suivent.

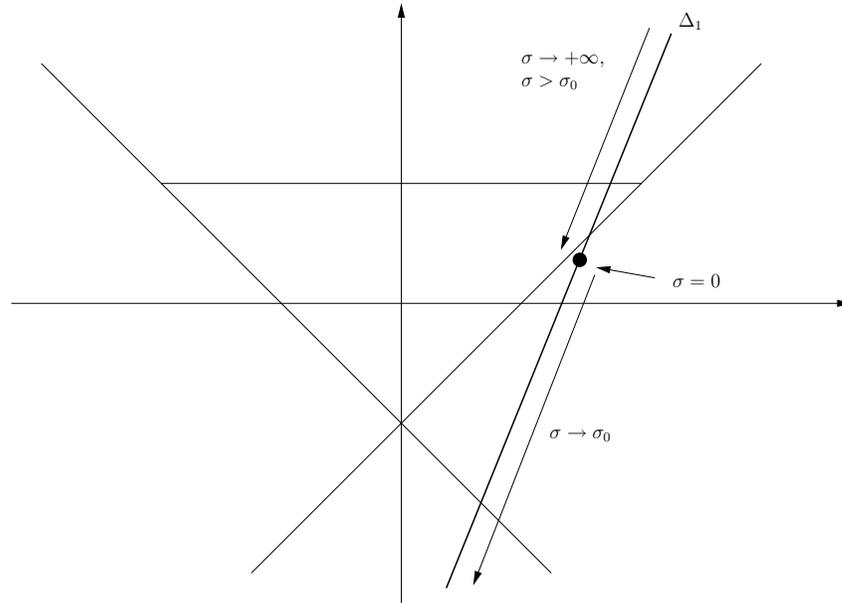


Figure 1.22: Position de la droite Δ_1

où $\varepsilon^\Psi \equiv k\Psi'(k)/\Psi(k)$.

- Lorsque σ augmente de 0 à σ_0 , $D1$ diminue d'une valeur comprise entre 0 et 1 jusqu'à $-\infty$.
- Lorsque σ augmente de σ_0 à $+\infty$, $D1$ diminue de $+\infty$ à 1.

3. Évolution de la pente de Δ avec l'élasticité σ

La pente de Δ croît de façon monotone entre $-\infty$ et une limite $1 + \theta\varepsilon^\psi$ supérieure à 1, lorsque σ augmente de 0 à l'infini. On peut néanmoins, comme dans le cas précédent distinguer les cas où $\sigma < \sigma_0$ et $\sigma > \sigma_0$. En effet, Δ se situe en dessous de la droite Δ_1 dans le premier cas et au-dessus dans le deuxième cas.

Les différents points énoncés ci-dessus sont illustrés par la figure 1.23.

Sans entrer dans le détail de l'analyse des différents cas de figures susceptibles de se produire, nous insistons ici uniquement sur les caractéristiques du

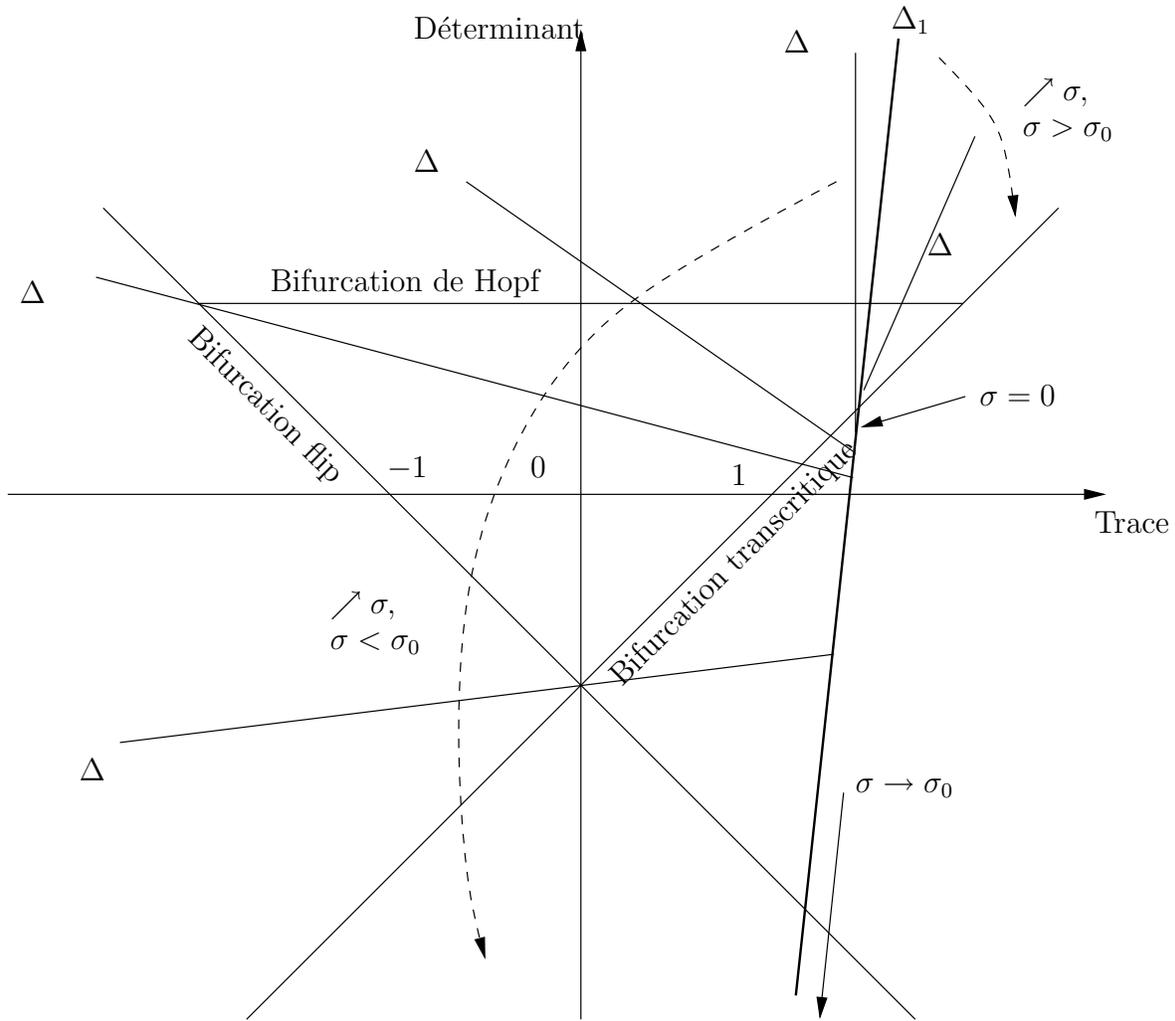


Figure 1.23: Modèle de Cazzavillan *et al*

modèle qui se démarquent de celui de Grandmont *et al*. Deux points méritent en particulier d'être notés :

1. Pour les valeurs de σ comprises entre 0 et σ_0 , le rayon Δ coupe la droite d'équation $D = T - 1$. Par conséquent, il se produit au point d'intersection une bifurcation transcritique qui se traduit par un échange de stabilité entre les deux états stationnaires.
2. Plus important est le fait que, pour $\sigma > \sigma_0$, Δ coupe le segment

$D = 1, T \in [-1, 1]$. Cela signifie que pour les technologies fortement substituables, il existe une valeur de l'élasticité ε^γ correspondant à une bifurcation de Hopf avec les conséquences associées à ce type de bifurcation (trajectoires oscillatoires, courbe fermée invariante, indétermination dans un cadre stochastique).

Il résulte donc de cette analyse que de l'indétermination et des fluctuations déterministes sont possibles, y compris lorsque les facteurs de production sont fortement substituables, à la condition que la production présente des rendements croissants. L'article de Cazzavillan *et al.* répond par conséquent aux critiques dont a fait l'objet le modèle de Grandmont *et al.* en ce qu'il ne nécessite pas la forte complémentarité des facteurs de production.

Les travaux récents ont cherché à montrer que de l'indétermination locale et des équilibres à taches solaires sont possibles en présence de rendements faiblement croissants. Ce faisant, ils apportent une réponse au modèle de Benhabib et Farmer (1994), qui en restreignant leur analyse au cas d'une technologie de type Cobb-Douglas, montrent que de tels résultats ne sont possibles que si la demande de travail est croissante. Leur modèle nécessite par conséquent des effets externes forts pour l'apparition de fluctuations endogènes, ce dont ne rendent pas compte les données observées. L'idée a donc été de considérer des technologies de forme générale par opposition au cas spécifique d'élasticité de substitution unitaire. Ainsi Pintus (2004) montre, dans un modèle de type Ramsey, que des fluctuations sont possibles en présence d'externalités faibles, à la condition que les facteurs de production présentent un degré de substituabilité plus élevé que dans la fonction de Cobb-Douglas. Sous cette condition, de l'indétermination est possible. Des résultats très proches ont été obtenus au sein d'un modèle à générations imbriquées avec consommation dans les deux périodes dans l'article de Lloyd-

braga, Nourry et Venditti (2004), qui met en avant le fort degré de similitude entre les deux types de modélisations.

L'article de Cazzavillan et al. (1998) étudie également le cas de rendements croissants internes, rendus possibles par l'introduction de concurrence imparfaite (Cournot). Ils obtiennent des résultats équivalents au cas de rendements croissants externes, ce qui ne semble donc pas justifier l'intérêt d'étudier les imperfections concurrentielles dans le cadre des modèles d'équilibre général dynamiques. Néanmoins ce résultat s'explique par le fait que, dans le modèle étudié, les taux de marge sont constants. Or, comme l'ont montré d'Aspremont et al., la variabilité des taux de marge est un facteur permettant l'émergence de cycles. Considérons en effet, une économie dans laquelle les entreprises se comportent à la Cournot. Les conditions de maximisation de profit d'une firme j s'écrivent :

$$\frac{p_i}{P} = \frac{\partial F}{\partial x_i} \left[1 - \frac{y_j/Y_{-j}}{\varepsilon_j} \right], \quad (1.42)$$

où p_i désigne le coût du $i^{\text{ème}}$ facteur de production x_i et ε_j est l'élasticité de la demande à la firme j . Le terme entre crochets est une mesure du degré de concurrence dans l'économie⁴⁰.

Deux éléments de variabilité apparaissent par rapport au cas parfaitement concurrentiel : la part de marché de l'entreprise j et l'élasticité de la demande qui lui est adressée. La position sur le marché d'une entreprise est susceptible de se modifier dans le temps du fait des entrées et sorties de firmes. L'hypothèse de libre entrée avec annulation des profits a en effet été mise en relation avec l'émergence de bifurcations de Hopf par Dos Santos Ferreira et Lloyd-Braga (2005), Kuhry (2001) et Seegmuller (2001). Ces modèles font apparaître en particulier que le nombre d'entreprises est procyclique et les

40. $\frac{y_j/Y_j}{\varepsilon_j}$ est l'indice de Lerner mesurant le degré de monopole.

taux de marge contracycliques. Ces résultats s'accordent avec les études empiriques qui ont été menées (voir par exemple Portier (1995) pour le cas de la France). Ceci s'interprète par le fait que supposer que les entreprises ont un comportement cournotien revient à faire implicitement l'hypothèse que le degré de coordination est d'autant plus fort que le nombre d'entreprises est peu élevé.

D'autres manières d'endogénéiser la variation du nombre de firmes sont envisageables. d'Aspremont, Dos Santos Ferreira et Gérard-Varet (1999), par exemple, considèrent un modèle basé sur l'article de Suzumura (1992) dans lequel les entreprises produisent en deux étapes. Dans la première étape, elles utilisent une fraction de l'offre de travail pour produire un bien capital. Dans la deuxième étape, elles produisent le bien de consommation final à partir de travail et du stock de capital constitué. Le travail utilisé pour constituer le stock de capital est rémunéré à la période suivante sous la forme d'une part de profit. Ainsi, travailler dans le secteur de recherche et développement constitue un moyen pour les travailleurs de transférer du pouvoir d'achat. Par conséquent, ils offriront du travail à ce secteur tant que le rendement attendu sera supérieur à celui des placements alternatifs⁴¹. Cette condition d'incitation limite les possibilités de production de l'économie et influe donc sur le nombre d'entreprises à l'équilibre.

L'autre composante de l'indice de Lerner susceptible d'influencer les dynamiques d'équilibre est la variabilité de l'élasticité de la demande. De nombreux modèles ont négligé cet effet en étudiant la concurrence imparfaite au travers de la concurrence monopolistique à la Dixit-Stiglitz. En effet, dans un tel cadre, l'élasticité de la demande est simplement l'élasticité de substitu-

41. Les auteurs considèrent comme unique moyen alternatif de transférer du pouvoir d'achat, la possibilité de toucher une fraction des salaires à la période suivante.

tion entre les différents biens, supposée constante. Cependant, en s'éloignant un peu des hypothèses couramment utilisées de la concurrence imparfaite, la constance de l'élasticité de la demande ne se vérifie généralement plus. Un moyen d'obtenir cette variabilité sans sortir du cadre de Dixit-Stiglitz est de considérer des effets de composition de la demande. Gali (1994) étudie ainsi un modèle (à agent représentatif) dans lequel l'élasticité de substitutions entre les biens diffère selon que ceux-ci sont utilisés pour la consommation ou la constitution de capital physique. L'élasticité de la demande à une entreprise donnée est alors obtenue comme la moyenne pondérée des deux élasticités de substitution, les pondérations dépendant des parts relatives des biens de consommation et capital dans la production.

1.4.2 Le Marché du Travail

Nous passons en revue, dans cette section, diverses contributions qui ont étudié l'impact d'imperfections du marché du travail.

Le rôle d'un marché du travail imparfaitement concurrentiel dans l'explication des cycles a fait l'objet de plusieurs articles. Coimbra, Lloyd-Braga et Modesto (2002) s'intéressent en particulier à la relation entre l'importance du pouvoir de négociation des syndicats et l'émergence de fluctuations. Leur article se base sur un modèle d'équilibre général développé par Devereux et Lockwood (1991) que Coimbra *et al.* modifient afin d'endogénéiser l'offre de travail et de permettre l'existence de rendements croissants dans la production. Dans ce modèle, l'emploi et le niveau des salaires sont déterminés comme la solution d'une négociation à la Nash entre les entreprises et les syndicats. Le pouvoir de négociation des syndicats se traduit par des salaires plus élevés que la productivité marginale des travailleurs correspondant au plein-emploi. Il en résulte que les entreprises substituent du capital au travail.

Néanmoins, l'effet sur la demande de capital est ambigu car l'augmentation des salaires a également pour conséquence une baisse de la production. Les auteurs cherchent ainsi à déterminer les conditions qui vont générer des fluctuations au travers de renversements de l'effet net de l'augmentation des salaires sur la demande de capital. À l'instar du modèle de Grandmont, le conflit entre effets de substitution et de revenu consécutifs à une variation de prix joue un rôle dans l'explication des fluctuations. Toutefois, il est montré que, dès lors que la production présente des rendements croissants (externes), une bifurcation transcritique se produit génériquement suivie d'une bifurcation de Hopf lorsque l'élasticité de substitution des facteurs varie entre 0 et $+\infty$. Ainsi, la présence de syndicats disposant d'un certain pouvoir de négociation n'est pas une condition nécessaire à l'apparition de cycles. Cependant, celle-ci influe les valeurs du paramètre pour lesquelles se produisent les bifurcations. En effet, en présence d'externalités faibles dans la production⁴², l'équilibre sera indéterminé pour une plus grande plage de valeurs de l'élasticité de substitution. Or, comme l'ont montré Grandmont et al. (1998), dans le cas d'indétermination locale de l'équilibre, il existe des équilibres stochastiques à taches solaires au voisinage de l'état stationnaire. En revanche, la bifurcation de Hopf se produira pour une valeur plus élevée de l'élasticité de substitution, par rapport au cas concurrentiel. Les auteurs montrent ainsi que, plus les externalités sont faibles, plus le degré de substituabilité entre les facteurs doit être élevé pour que des fluctuations déterministes soient possibles. Dans le cas où les externalités sont plus fortes mais restent dans une plage acceptable, l'indétermination ne sera possible que pour des va-

42. Différents travaux empiriques ont montré que les externalités dans la production étaient positives mais de faible ampleur (voir Basu et Fernald, 1997 ou Caballero et Lyons, 1992).

leurs faibles (inférieures à 1) de l'élasticité de substitution et les conditions d'émergence d'équilibres stochastiques peuvent s'avérer peu conformes aux observations empiriques. Par contre, la bifurcation de Hopf se produira pour une valeur inférieure à 1 et des fluctuations déterministes peuvent être observées pour des valeurs crédibles des paramètres.

Aloi et Lloyd-Braga (2001) complètent cette analyse en considérant l'impact d'une telle modélisation des syndicats dans un contexte international. Pour ce faire, elles étudient un modèle à deux pays, différenciés par la structure respective de leur marché du travail. En effet, dans le premier pays, celui-ci est supposé parfaitement concurrentiel, tandis que la présence de syndicats dans le deuxième pays est intégrée de façon similaire au modèle précédent. Afin de dégager les effets de l'imperfection du marché du travail dans un modèle à plusieurs pays, différents cas de figures sont comparés. Dans le premier cas de figure, utilisé comme base de comparaison, les deux pays vivent en autarcie. L'équilibre du pays avec syndicats (appelé A) est alors localement indéterminé lorsque la production présente des rendements croissants d'ampleur faible, tandis que l'équilibre de l'autre pays (B) est stable. Les auteurs étudient alors l'effet de la libéralisation des mouvements de capitaux et montrent que celle-ci peut entraîner également de l'indétermination dans le pays sans syndicats. C'est le cas lorsque le pays B plus pauvre que le pays A. Enfin, Aloi et Lloyd-Braga s'intéressent au cas où les mouvements de mains d'œuvres entre pays ne sont pas régulés. Elles montrent alors, qu'en présence de coûts de rapatriement, il est possible d'atteindre une stabilité économique au niveau mondial.

1.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons passé en revue les principales contributions à la théorie des fluctuations endogènes déterministes. A cet effet, les résultats marquants de cette littérature ont été présentés au sein d'un modèle unique emprunté à Woodford. Il apparaît que l'origine des fluctuations réside dans le conflit entre les effets favorables et défavorables à la croissance. Ainsi, dans le modèle d'économie monétaire de Grandmont, les phases de croissance peuvent être entravées par une augmentation trop forte de l'épargne. Celle-ci se produit si les consommateurs ont une fonction d'utilité fortement concave. Bien que faisant reposer l'émergence de fluctuations sur des hypothèses restrictives, cet article a posé les bases de la littérature ultérieure, dont l'objectif a été d'affaiblir les conditions d'apparition de ces fluctuations au prix d'hypothèses microéconomiques plus sophistiquées. A ce titre, l'introduction de capital productif a constitué la première tentative dans cette voie. Il a été ainsi mis en évidence que la forte complémentarité des facteurs de production favorisait les cycles économiques au travers des évolutions contradictoires des rémunérations des facteurs dans les phases de croissance. Nous avons repris à cet effet les résultats du modèle de Grandmont et al. (1998), complétés par ceux de l'article de de Vilder (1996) qui offre une description globale des dynamiques dans le cas de complémentarité parfaite des facteurs. Néanmoins, les conditions d'émergence de fluctuations restaient encore trop restrictives au regard des faits stylisés. C'est pourquoi la dernière section de ce chapitre s'est attachée à décrire de manière plus brève un certain nombre d'extensions, en particulier l'introduction de concurrence imparfaite et de croissance des rendements. En particulier, la présence de rendements croissants faibles, compatibles avec les études empiriques (par exemple Caballero et Lyons, 1992) qui ont été menées, fournit un cadre suffisant à l'émergence de fluctuations.

La littérature sur les fluctuations endogènes fait ainsi apparaître qu'au prix de faibles déviations du cadre néoclassique standard, il est possible de construire des modèles d'économies caractérisées par des fluctuations qui ne se résorbent pas à long terme. Se pose alors la question de déterminer si ces variations dans l'activité économiques sont indésirables (en termes de bien-être) et, le cas échéant, si l'État est en mesure d'atténuer celles-ci au moyen de politiques appropriées. Concernant le premier point, la réponse est ambiguë (Christiano et G. Harrison, 1999, Espinosa-Vega et Guo, 2001). En effet, si d'une part, les agents ont une préférence pour une consommation qui ne subit pas de variations importantes, c'est à dire qu'ils souhaitent lisser leur consommation le long du cycle de vie, d'autre part, la mise en place d'une politique contracyclique peut mener à réduire les effets bénéfiques que pourraient avoir, par exemple, les rendements croissants sur l'économie. En revanche, si l'on considère effectivement que l'État a un rôle à jouer dans la résorption des fluctuations économiques, il a été montré (Guo et Lansing, 1998, Guo, 1999) qu'une politique d'imposition progressive sur les revenus (en particulier du travail), était en mesure de ramener l'économie vers un sentier de type "point-selle". Néanmoins (Guo et Lansing, n.d.) tempèrent cette affirmation en montrant que le succès d'une telle politique dépend dans une très large mesure des paramètres de l'économie et que le fait de limiter l'analyse au voisinage des états stationnaires peut conduire à des conclusions erronées quant-à la réelle nature des dynamiques.

Le chapitre suivant fournit une contribution à l'analyse des fluctuations et utilise une modélisation particulière du marché des biens introduite par d'Aspremont, Dos Santos Ferreira et Gérard Varet, la concurrence monopolistique à la Cournot. Cette modélisation permet en effet d'analyser l'endogénéisation du taux de marge au travers de la variation du nombre d'entreprises. Dans ce

contexte, nous allons analyser la relation entre l'existence d'agents disposant d'un pouvoir de marché et les fluctuations économiques.

ANNEXE

A

Résolution du programme des consommateurs

Nous dérivons ici les conditions de premier ordre associées aux programmes des travailleurs et des capitalistes et dégageons les conditions qui assurent que le stock de capital est entièrement détenu par les capitalistes tandis que seuls les travailleurs épargnent sous forme de monnaie. Du fait de la non saturation des préférences, la contrainte de budget (1.3) peut être utilisée pour substituer à la consommation son expression en termes des autres variables.

En prenant en considération les contraintes de non-négativité du stock de capital et de l'encaisse monétaire, les conditions du premier ordre relatives

au programme des travailleurs (1.1) s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 -u'(C_t^w) + \gamma u'(C_{t+1}^w) - \mu_1 &= 0 \\
 -\frac{u'(C_t^w)}{p_t} + \gamma \frac{u'(C_{t+1}^w)}{p_{t+1}} - \mu_2 - \frac{\mu_3}{p_t} &= 0 \\
 w_t u'(C_t^w) - \gamma v'() + \mu_3 w_t &= 0 \\
 \mu_1 K_{t+1}^w &= 0 \\
 \mu_2 M_{t+1}^w &= 0 \\
 \mu_3 \left(\frac{M_{t+1}^w}{p_t} - w_t L_t \right) &= 0
 \end{aligned}$$

où μ_1 , μ_2 et μ_3 désignent les multiplicateurs de Lagrange associés respectivement aux contraintes de non-négativité du capital et de la monnaie et à la contrainte de liquidité. Ils peuvent être négatifs ou nuls, selon que les contraintes correspondantes sont saturées ou non (conditions de Kuhn et Tucker).

Le choix optimal des travailleurs satisfait donc les conditions :

$$u'(C_t^w) \geq \gamma u'(C_{t+1}^w)(r_t + 1 - \delta), \quad (K_{t+1}^w \geq 0) \quad (\text{A.1})$$

$$w_t u'(C_t^w) \geq \gamma v'(L^* - L_t), \quad (M_{t+1}^w \geq 0) \quad (\text{A.2})$$

$$w_t \frac{p_{t+1}}{p_t} u'(C_{t+1}^w) \leq v'(L^* - L_t), \quad \left(\frac{M_{t+1}^w}{p_t} - w_t L_t > 0 \right) \quad (\text{A.3})$$

où les inégalités entre parenthèses sont strictes lorsque la condition correspondante est saturée et inversement.

De la même façon, nous pouvons dériver les conditions d'optimalité des décisions des capitalistes pour obtenir :

$$C_{t+1}^c \geq \beta(r_{t+1} + 1 - \delta)C_t^c, \quad (K_{t+1}^c \geq 0) \quad (\text{A.4})$$

$$C_{t+1}^c \geq \beta \frac{p_t}{p_{t+1}} C_t^c, \quad (M_{t+1}^c \geq 0) \quad (\text{A.5})$$

Les équations (A.4) et (A.5) traduisent bien l'arbitrage en matière d'épargne auquel font face les capitalistes. La consommation future sera ainsi déterminée à partir de la consommation présente en lui appliquant le taux de

rendement de l'actif choisi et en prenant en compte la préférence pour le présent. Si le rendement du capital est supérieur à celui de la monnaie, les agents effectueront leur épargne sous forme de capital uniquement. On aura donc une égalité dans l'équation (A.4) et une inégalité stricte dans l'équation (A.5). Or, le taux d'escompte, β , étant strictement inférieur à 1, on voit d'après (A.5), qu'il ne peut y avoir d'épargne sous forme de monnaie à l'état stationnaire, et, par continuité, dans un certain voisinage de celui-ci. Ainsi, à l'état stationnaire, les capitalistes ne détiendront que du capital et on aura $\beta(r + 1 - \delta) = 1$. Si, à présent, nous introduisons l'hypothèse supplémentaire que les travailleurs ont une plus forte préférence pour le présent que les capitalistes, $\gamma < \beta$, il vient de la condition (A.1) que les travailleurs ne détiennent pas de capital à l'état stationnaire. Le rendement de la monnaie étant inférieur, il ne souhaiteront pas non plus en posséder. Cependant, du fait de la contrainte de liquidité, il ne peuvent dépenser les revenus de leur travail pour la consommation courante et ceux-ci seront transférés afin de financer la consommation future.

Ainsi, pour résumer, le modèle de Woodford sélectionne un type d'équilibre bien particulier, au voisinage de l'état stationnaire, dans lequel le capital a un rendement supérieur à celui de la monnaie et est entièrement détenu par les capitalistes. Inversement, les consommateurs, qui souhaiteraient dépenser l'intégralité de leur revenu courant, ont une épargne minimale constituée de leurs revenus de fin de période. On a donc, en définitive, les conditions d'optimalité suivantes :

$$wt \frac{p_t + 1}{p_t} u'(C_{t+1}^w) = v'(L^* - L_t), \quad (\text{A.6})$$

$$C_{t+1}^c = \beta(r_{t+1} + 1 - \delta)C_t^c, \quad (\text{A.7})$$

et les contraintes de budgets des travailleurs et des capitalistes deviennent :

$$\frac{p_{t+1}}{p_t} C_{t+1}^w = w_t L_t, \quad (\text{A.8})$$

$$C_t^c + K_{t+1}^c = (r_{t+1} + 1 - \delta) K_t^c \quad (\text{A.9})$$

Notons que les équations concernant les travailleurs sont rigoureusement identiques à celles que l'on aurait obtenues dans un modèle à générations imbriquées où les jeunes travaillent et les vieux consomment et où le seul actif disponible est la monnaie.

Enfin, en utilisant récursivement les équations (A.7) et (A.9), on obtient l'équation gouvernant l'évolution du stock de capital :

$$K_{t+1}^c = \beta(r_t + 1 - \delta) K_t^c. \quad (\text{A.10})$$

CHAPITRE **2** **Fluctuations Endogènes dans un
Modèle de Concurrence Monopolistique à la Cournot avec Libre
Entrée et Variabilité du Pouvoir de
Marché**

Sommaire

2.1	Introduction	90
2.2	Le Modèle	92
2.2.1	Les Travailleurs	93
2.2.2	Les Capitalistes	95
2.2.3	Les Entreprises	95
2.3	Equilibres et Dynamiques du Modèle	100
2.3.1	Equilibre sur le Marché de la Monnaie	101
2.3.2	Equilibres Intertemporels et Dynamiques Locales .	101
2.4	Conclusion	111

2.1. Introduction

Le premier chapitre s'est attaché à présenter les résultats importants de la littérature sur les fluctuations endogènes. Pour ce faire, les principaux modèles qui ont fondé cette littérature ont été intégrés au sein du modèle à agent représentatif de Woodford. Le présent chapitre reprend ce même modèle en modifiant les hypothèses relatives à la production. En effet, comme nous l'avons montré, les conditions permettant d'assurer l'émergence de fluctuations sont relativement restrictives lorsque l'on se limite au cadre d'analyse standard, qui suppose la non croissance des rendements et des marchés parfaitement concurrentiels.

L'effet de rendements croissants dans la production a fait l'objet de l'article de Cazzavillan et al. (1998), qui a montré que cette caractéristique de la fonction de production permettait l'obtention de cycles qui ne reposent pas sur une forte complémentarité des facteurs de production. Cependant, leurs résultats se limitent au cadre de la concurrence¹, et, de ce fait, ne permettent pas d'apprécier l'impact de l'existence de pouvoir de marché sur les fluctuations de l'économie.

C'est pourquoi, le but du présent chapitre est de mettre en valeur le rôle des nonlinéarités induites par l'hypothèse d'un marché des biens imparfaitement concurrentiel sur les dynamiques d'équilibre. La concurrence à la Cournot a été étudiée par d'Aspremont, Dos Santos Ferreira et Gérard-Varet (1995*b*) qui ont détecté deux canaux au travers desquels la concurrence imparfaite

1. Pour être précis, ces auteurs étudient également le cas d'imperfections concurrentielles, mais les résultats qu'ils obtiennent ne se démarquent pas qualitativement du cas concurrentiel. Leur étude ne semble donc pas motiver l'introduction de concurrence imparfaite dans les modèles d'équilibre général dynamique.

peut contribuer à l'apparition de cycles endogènes : d'une part la possibilité de rendements croissants internes à l'entreprise et d'autre part, la variabilité du pouvoir de marché. C'est sur cette dernière caractéristique que nous nous concentrerons ici. En effet, nous souhaitons montrer que la variabilité du pouvoir de marché est un facteur favorable à l'émergence de trajectoires qui ne convergent pas vers un état stationnaire.

Plusieurs sources de variabilité des taux de marge peuvent être avancées. Dans Gali (1994), celle-ci résulte de modifications de la composition de la demande agrégée. Rotemberg et Woodford (1991) proposent différents scénarios (concurrence monopolistique, collusion implicite et **customer market**) qui se traduisent par des relations mutuellement incompatibles entre le taux de marge, d'une part, et les variations des ventes et des profits esperés, d'autre part.

L'ingrédient clé dans ce chapitre est la variation du nombre d'entreprises qui résulte de l'hypothèse de libre entrée associée à la présence de coûts fixes dans la production. Nous étudions un modèle décrivant une économie comportant deux catégories de biens : un bien final produit sur un marché en concurrence parfaite et des biens intermédiaires différenciés. Chacun de ces biens intermédiaires est produit à partir de capital et de travail sur un secteur comportant un nombre fini de firmes déterminé par la condition d'annulation des profits. La présence d'un coût fixe assure que ce nombre reste borné. À la différence de Cazzavillan *et al.*, qui considèrent un modèle dans lequel le taux de marge est constant, le pouvoir de marché est ici variable en raison des entrées et sorties d'entreprises. Nous montrons que cette variabilité est source de comportements dynamiques comparativement plus riches que dans le cas concurrentiel. En effet, si le taux de dépréciation du capital est suffisamment faible (mais reste strictement positif), une bifurcation de Hopf se

produit lorsque le pouvoir de marché² varie entre zéro et une borne au-delà de laquelle le système n'admet plus d'état stationnaire. Dans le cas parfaitement concurrentiel, l'unique état stationnaire non autarcique est localement déterminé, pour toutes les valeurs admissibles des paramètres.

Un modèle très proche a été étudié simultanément par Dos Santos Ferreira et Lloyd-Braga (2005). Leur modèle est plus général dans la mesure où il n'impose pas une spécification particulière pour les préférences et la technologie. Toutefois, l'utilisation d'une fonction de production de type Cobb-Douglas nous a permis de donner une caractérisation complète des conditions d'existence et d'unicité de l'état stationnaire. Un autre avantage du modèle présenté dans la suite est que le paramètre de bifurcation est une mesure directe du pouvoir de marché. Le modèle de Lloyd Braga et Dos Santos Ferreira utilise l'élasticité de la courbe de réaction des travailleurs, à l'instar des modèles qui ont précédé dans cette littérature. Ils fournissent alors des conditions d'émergence de fluctuations qui impliquent la présence de concurrence imparfaite.

La section suivante décrit les hypothèses structurelle du modèle. La caractérisation des équilibres temporaires et intertemporels fait ensuite l'objet de la section 2.3.

2.2. Le Modèle

On considère une économie à deux secteurs. Le premier secteur est parfaitement concurrentiel et produit un bien final qui sera utilisé pour la consommation et l'investissement. Le secteur intermédiaire contient un continuum

2. Celui-ci est mesuré par le rapport entre les coûts fixes et l'élasticité de substitution entre les différents biens intermédiaires.

de marchés de facteurs, les facteurs constituant des substituts imparfaits. On supposera que l'élasticité de substitution entre deux biens intermédiaires est la même quel que soit le couple de biens considéré.

Dans les deux premières sous-sections, on décrit le comportement de deux catégories de consommateurs, les travailleurs et les capitalistes. La dernière sous-section est consacrée à l'analyse du comportement des entrepreneurs.

2.2.1 Les Travailleurs

Le présent modèle est basé sur l'article de Grandmont et al. (1998) qui est lui-même une variante du modèle de Woodford (1986*a*) prenant en compte le cas de fonctions de production à facteurs substituables.

Trois types d'agents sont considérés : les travailleurs, les capitalistes et les firmes. Il y a un continuum de travailleurs représentés par le segment $[0,1]$. On suppose qu'ils sont strictement identiques, de sorte que l'analyse peut être restreinte à un travailleur représentatif. Dans le modèle de Woodford, les travailleurs et les capitalistes sont modélisés par des agents à durée de vie infinie. Ces deux types d'agents détiennent du capital, mais les seuls travailleurs constituent la main d'oeuvre. Ainsi, ils font face à une contrainte de liquidité supplémentaire dans le sens qu'ils ne peuvent dépenser leur revenu salarial durant la période où celui-ci est gagné. Woodford montre que le stock de capital est entièrement détenu par les capitalistes à l'équilibre et que les niveaux de consommation et de travail choisis par les travailleurs sont les mêmes que ceux que l'on obtiendrait dans le cadre d'un modèle à générations imbriquées dans lequel les vieux travailleurs n'offrent pas de travail.

Afin de simplifier la présentation, on imposera d'emblée ici une structure de type générations imbriquées, mais il est important de garder à l'esprit que le cadre de référence initial est celui des modèles à agent représenta-

tif³. Néanmoins, par souci de simplification de l'exposé, on aura recours aux expressions de jeunes et vieux agents.

Les transferts de pouvoir d'achat entre différentes périodes ne sont possibles qu'au travers d'un seul actif : la monnaie. On supposera dans la suite que la quantité de monnaie est constante et égale à $M > 0$. L'objectif de l'agent est de déterminer son offre de travail optimale L_t (et le niveau de consommation associé C_{t+1}) en arbitrant entre l'utilité que lui procure sa consommation et celle que lui apporte son temps de loisir, ou, de manière équivalente, la désutilité du travail. Les prix anticipés P_{t+1} et les salaires nominaux w_t sont pris comme donnés.

Le programme du travailleur représentatif est alors le suivant :

$$\begin{aligned} & \max \frac{C_{t+1}^a}{a} - \frac{L_t^b}{b} \\ \text{s.t.} & \begin{cases} M \leq w_t L_t \\ P_{t+1} C_{t+1} \leq M \end{cases} \end{aligned} \quad (2.1)$$

avec $0 < a < 1$ et $b > 1$.

La condition du premier ordre est donnée par l'égalisation du taux marginal de substitution et du rapport des prix :

$$\frac{L_t^{b-1}}{C_{t+1}^{a-1}} = \frac{w_t}{P_{t+1}}.$$

Associé à la contrainte de budget intertemporelle, cela donne :

$$C_{t+1} = (L_t)^\theta, \quad (2.2)$$

avec $\theta = b/a > 1$.

3. Ce point a des implications importantes, en particulier en ce qui concerne les problèmes de calibration. En effet, dans un tel contexte, les fluctuations sont alors interprétées comme des fluctuations de court terme. A l'inverse, on peut montrer que les résultats des modèles à agents représentatifs peuvent être retrouvés dans un contexte de générations imbriquées sous l'hypothèse d'altruisme des agents.

2.2.2 Les Capitalistes

On considère le cas limite du modèle de Woodford (1986*a*) où les capitalistes détiennent la totalité du stock de capital et ne consomment pas⁴.

En notant δ le taux de dépréciation du capital et ρ_t , le taux d'intérêt réel à la période t , on a l'équation d'accumulation du capital suivante :

$$K_t = (1 - \delta + \rho_t) K_{t-1}, \quad (2.3)$$

où il est important de noter que le bien capital est le même bien composite (même fonction d'agrégation) que le bien de consommation⁵.

Les décisions d'investissement constituent, dans ce contexte très simple, la deuxième source de dynamiques du modèle. On peut voir directement à partir de (2.3) qu'un état stationnaire non autarcique ne peut exister qu'à la condition que le taux de dépréciation du capital soit strictement positif.

L'étude des décisions des entrepreneurs et la définition des équilibres va nous permettre de réécrire les équations (2.2) et (2.3) uniquement en termes des variables K et L et fournira ainsi un système dynamique de dimension 2.

2.2.3 Les Entreprises

Le bien composite utilisé pour la consommation et l'investissement est produit sur un secteur parfaitement concurrentiel qui utilise un continuum de biens intermédiaires comme facteurs de production. Chacun de ces biens intermédiaires est produit selon une technologie utilisant du capital et du

4. Cette situation est obtenue lorsque leur taux d'escompte tend vers 1.

5. A l'inverse de Gali (1994), on suppose que les élasticités de substitution sous les mêmes pour les biens de consommation et capital. Gali a montré que relâcher cette hypothèse endogénéise l'élasticité de la demande agrégée et constitue de ce fait une source envisageable de fluctuations.

travail sur un marché en concurrence imparfaite. Plus précisément, ce marché est caractérisé par un petit nombre (plus grand ou égal à 1) d'entreprises qui adoptent un comportement stratégique en intégrant leur conjectures sur la demande résiduelle émanant du secteur final dans leur programme d'optimisation. L'expression de concurrence monopolistique à la Cournot a été introduite par d'Aspremont et al. pour caractériser une telle structure de marché. En effet, cette dénomination décrit bien les deux principaux traits qui caractérisent ce type de marché : le grand nombre (continuum) de biens intermédiaires (que l'on peut mettre en relation avec les modèles de concurrence monopolistique à la Dixit-Stiglitz) et l'aspect Cournotien des comportements stratégiques sur chaque marché de bien intermédiaire.

Dans un premier temps, on dérive les demandes de facteurs de production en étudiant le comportement des firmes du secteur final, et l'on résout alors la maximisation du profit des firmes du secteur intermédiaire.

Le Secteur du Bien Final

Les firmes du secteur final utilisent l'ensemble des inputs⁶ $x_{jt}, j \in [0,1]$ produits par le secteur intermédiaire de façon à produire une quantité y_t de bien composite qui sera vendue aux capitalistes et aux consommateurs au prix p_t^y . Ce bien est produit selon une technologie de type C.E.S. sur un marché parfaitement concurrentiel, c'est à dire

$$y_t = F(x_{jt})_{j \in [0,1]} = \left(\int_0^1 x_{jt}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}}. \quad (2.4)$$

Le programme d'une entreprise représentative du secteur final sera alors

6. On distingue ici les inputs qui correspondent aux biens produits par le secteur intermédiaire des facteurs qui sont constitués du capital et du travail.

donné par :

$$\max_{(y_t, x_t) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^{[0,1]}} p_t^y y_t - \int_0^1 p_{jt} x_{jt} dj.$$

Ce programme est résolu en deux étapes. Dans la première étape, l'entrepreneur cherche à minimiser sa dépense totale pour un niveau de production donné. On a par conséquent :

$$\begin{aligned} E(y_t) \equiv & \min_{x_{jt} \in \mathbb{R}_+^{[0,1]}} \left(\int_0^1 p_{jt} x_{jt} dj \right) \\ \text{s.t.} & \left(\int_0^1 x_{jt}^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} dj \right)^{\frac{\sigma}{\sigma-1}} \geq y_t. \end{aligned}$$

On en déduit la demande d'inputs comme une fonction du niveau d'output désiré :

$$x_{jt}^* = \left[\frac{p_{jt}}{P_t} \right]^{-\sigma} y_t, \quad (2.5)$$

avec

$$P_t = \left(\int_0^1 (p_{jt}^*)^{1-\sigma} dj \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}.$$

Le niveau de dépense associé est alors :

$$E(y_t) \equiv \int_0^1 p_{jt} x_{jt}^* dj = P_t y_t.$$

Par conséquent, le niveau optimal de production, pour chaque firme du secteur final est donné par :

$$y_t^* \in \arg \max_{y_t} p_t^y y_t - P_t y_t.$$

Ce programme n'admet une solution positive que si $p_t^y = P_t$. Dans ce cas, le niveau global de production :

$$Y_t \equiv \int_0^1 y_{it} di,$$

est déterminé par l'équilibre du marché du bien final.

Le Secteur Intermédiaire

Les inputs sont produits sur un marché consistant en un continuum de secteurs indicés par $j \in [0,1]$, chaque secteur contenant un nombre fini n_j d'entreprises qui adoptent un comportement de type Cournot. Ainsi, les entreprises tiennent compte, dans leur programme, des effets du prix du bien qu'elles produisent sur la demande résiduelle à laquelle elles font face, les autres firmes étant supposées produire une quantité identique \bar{x}_{jt} . Cette variation est incorporée dans leur fonction objectif en remplaçant dans l'expression de la recette totale, les prix par la fonction de demande inverse⁷ :

$$p_{jt}(x_{jt}) = P_t \left(\frac{x_{jt}}{y_t} \right)^{-\frac{1}{\sigma}} = P_t \left(\frac{x_{jt}^h + (n_j - 1) \bar{x}_{jt}}{y_t} \right)^{-\frac{1}{\sigma}}. \quad (2.6)$$

La production d'une entreprise donnée h du secteur j est effectuée à partir de quantités de travail L_{jt}^h et de capital $K_{j(t-1)}^h$ ⁸ selon une technologie de Cobb-Douglas associée à un coût fixe ϕ exprimé en termes d'unités d'input :

$$x_{jt}^h = G(K_{j(t-1)}^h, L_{jt}^h) = (K_{j(t-1)}^h)^\alpha (L_{jt}^h)^{1-\alpha} - \phi.$$

Chaque firme cherche à maximiser ses propres profits en prenant les prix des autres firmes, c'est à dire le niveau général des prix, chaque entreprise ayant un poids statistique nul, comme donnés. De plus, chaque entrepreneur suppose qu'il sera en mesure d'écouler l'ensemble de sa production. Sous ces hypothèses, on a le programme :

$$\underset{(K_{j(t-1)}^h, L_{jt}^h) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+}{Max} \quad p_{jt}(x_{jt}^h + (n_j - 1) \bar{x}_{jt}) G(K_{j(t-1)}^h, L_{jt}^h) - w_t L_{jt}^h - r_t K_{j(t-1)}^h$$

7. On a implicitement supposé que les firmes ont des anticipations parfaites sur la demande qui s'adresse à elles dans la période courante.

8. Le capital est indicé avec une période de retard, afin de souligner le fait qu'il s'agit d'une variable prédéterminée dont le montant résulte des choix opérés aux périodes précédentes.

De la même manière que pour le secteur final, on décompose la résolution de ce programme en deux étapes. Dans la première étape, les entreprises minimisent leur dépense totale sous la contrainte d'atteindre un niveau de production donné :

$$\begin{aligned} CT(\bar{x}_t) &= \underset{\bar{x}_t}{\text{Min}} w_t L_{jt}^h + r_t K_{j(t-1)}^h \\ \text{s.c. } G(K_{j(t-1)}^h, L_{jt}^h) &= (K_{j(t-1)}^h)^\alpha (L_{jt}^h)^{1-\alpha} - \phi \geq \bar{x}_t \end{aligned}$$

Les conditions du premier ordre, associées à la contrainte de production, permettent de calculer les demandes de travail et de capital :

$$\begin{cases} (K_{j(t-1)}^h)^* = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{r_t}{w_t}\right)^{\alpha-1} (\bar{x}_t + \phi) \\ (L_{jt}^h)^* = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{r_t}{w_t}\right)^\alpha (\bar{x}_t + \phi) \end{cases} \quad (2.7)$$

ainsi que la dépense totale correspondante :

$$CT(\bar{x}_t) = \frac{w_t}{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{r_t}{w_t}\right)^\alpha (\bar{x}_t + \phi)$$

La deuxième étape consiste alors en la détermination du niveau optimal de production, qui est défini comme suit :

$$(x_{jt}^h)^* \in \arg \max_{\bar{x}_t \in \mathbb{R}_+} \{p_{jt} (\bar{x}_t + (n_j - 1) \bar{x}_{jt}) \bar{x}_t - CT(\bar{x}_t)\}$$

La condition du premier ordre s'écrit :

$$p_{jt} \left[1 + \frac{\partial p_{jt}}{\partial \bar{x}_t} \frac{\bar{x}_t}{p_{jt}}\right] = Cm(\bar{x}_t) = \frac{w_t}{1-\alpha} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{r_t}{w_t}\right)^\alpha \quad (2.8)$$

En combinant (2.7) et (2.8) et en restreignant notre attention aux équilibres symétriques où $n_{jt} = N_t$, $K_{j(t-1)}^h = K_{t-1}/N_t$, $L_{jt}^h = L_t/N_t$ et $p_{ht} = P_t$, on obtient les deux conditions :

$$\begin{aligned}\rho_t &\equiv \frac{r_t}{P_t} = \alpha \left[1 - \frac{1}{N_t \sigma} \right] k_{t-1}^{\alpha-1} \\ \omega_t &\equiv \frac{w_t}{P_t} = (1 - \alpha) \left[1 - \frac{1}{N_t \sigma} \right] k_{t-1}^\alpha\end{aligned}\tag{2.9}$$

où k_{t-1} représente le ratio capital-travail à la période t .

Afin d'alléger l'écriture, on utilisera la notation λ pour l'inverse du facteur de marge (c'est-à-dire, le degré de concurrence) dans la suite du chapitre :

$$\lambda = 1 - \frac{1}{\sigma N_t}$$

Sous l'hypothèse de libre entrée, le nombre d'entreprises va s'ajuster jusqu'à ce qu'il n'y ait plus d'occasion de profits. En ignorant les contraintes de nombres entiers, on peut par conséquent déterminer le nombre de firmes présentes sur le marché à la période t en utilisant la condition d'annulation des profits du secteur intermédiaire :

$$\frac{\Pi_t}{P_t} = \frac{K_{t-1}^\alpha L_t^{1-\alpha}}{N_t} \left\{ 1 - \alpha \left[1 - \frac{1}{N_t \sigma} \right] - (1 - \alpha) \left[1 - \frac{1}{N_t \sigma} \right] \right\} - \phi = 0$$

ce qui fournit un nombre d'entreprises égal à :

$$N_t = \sqrt{\frac{K_{t-1}^\alpha L_t^{1-\alpha}}{\Phi \sigma}}$$

et finalement, l'inverse du facteur de marge est donné par :

$$\lambda(K_{t-1}, L_t) = 1 - \sqrt{\frac{\Phi}{\sigma K_{t-1}^\alpha L_t^{1-\alpha}}}\tag{2.10}$$

2.3. Equilibres et Dynamiques du Modèle

2.3.1 Equilibre sur le Marché de la Monnaie

A chaque date, le marché de la monnaie est soldé si l'encaisse réelle est égale, d'une part à la quantité que les jeunes agents souhaitent épargner $\omega_t L_t$ et, d'autre part, aux dépenses de consommation effectuées par les vieux. Puisqu'on suppose que la quantité de monnaie reste constante dans le temps, la condition d'équilibre sur le marché de la monnaie peut s'écrire, en termes réels, sous la forme :

$$\omega(K_{t-1}, L_t) L_t = \frac{M}{P_t} = C_t = (L_{t-1})^\theta \quad (2.11)$$

L'équilibre sur le marché des biens et services résulte alors automatiquement de la loi de Walras.

2.3.2 Equilibres Intertemporels et Dynamiques Locales

On note Z_t la fonction de production brute agrégée :

$$Z_t = K_{t-1}^\alpha L_t^{1-\alpha} \quad (2.12)$$

En incluant la condition d'équilibre sur le marché de la monnaie dans la première équation dynamique du système, (2.2), on obtient un système dynamique homogène en termes des variables K_{t-1} et Z_t . On définit alors un équilibre intertemporel de prévision parfaite comme une suite $\{K_{t-1}, Z_t\}_{t=1...+\infty}$ telle qu'à chaque période, il y a un équilibre général temporaire, c'est à dire, une suite qui vérifie :

$$\begin{cases} K_t = (1 - \delta + \rho_t) K_{t-1} = (1 - \delta) K_{t-1} + \alpha \lambda(Z_t) Z_t \\ (1 - \alpha) \lambda(Z_{t+1}) Z_{t+1} = \left(\left(\frac{K_{t-1}^\alpha}{Z_t} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right)^\theta \end{cases} \quad (2.13)$$

où on a conservé, un peu abusivement, la notation $\lambda(\cdot)$ en dépit du changement de coordonnées.

L'étude sera restreinte au voisinage des états stationnaires. Formellement, un couple $\{K, Z\}$ est un état stationnaire du système (2.13) s'il est solution du système d'équations :

$$\begin{cases} K = \left(1 - \delta + \alpha \lambda(Z) \frac{Z}{K}\right) K & \iff \lambda(Z) Z = \frac{\delta}{\alpha} K, \\ (1 - \alpha) \lambda(Z) Z = \left(\left(\frac{K^\alpha}{Z}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)^\theta \end{cases}$$

Les conditions permettant d'assurer l'existence d'au moins un état stationnaire sont données en appendice et peuvent être résumées comme suit :

Proposition 2.1 *On note $\zeta = \phi/\sigma$ une mesure de l'imperfection de la concurrence.*

– *Il existe une valeur strictement positive ζ^* , donnée par*

$$\zeta^* = (B(1 - 2A))^{\frac{1}{A}} \left(\frac{2A}{2A - 1}\right)^{2A},$$

avec

$$A = \frac{(1 - \alpha)(1 - \theta)}{1 - \alpha(1 - \theta)} \quad \text{and} \quad B = \frac{\delta}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\delta(1 - \alpha)}\right)^{\frac{1 - \alpha}{1 - \alpha(1 - \varepsilon^x)}},$$

telle que

- *il n'y a aucun état stationnaire pour $\zeta > \zeta^*$;*
- *il y a exactement un état stationnaire pour $(K(\zeta^*), Z(\zeta^*))$;*
- *il y a deux états stationnaires pour $0 \leq \zeta < \zeta^*$, $(K_1(\zeta^*), Z_1(\zeta^*))$ et $(K_2(\zeta^*), Z_2(\zeta^*))$ avec :*

$$K_1(\zeta) < K_2(\zeta), \quad \text{et}$$

$$Z_1(\zeta) < Z_2(\zeta).$$

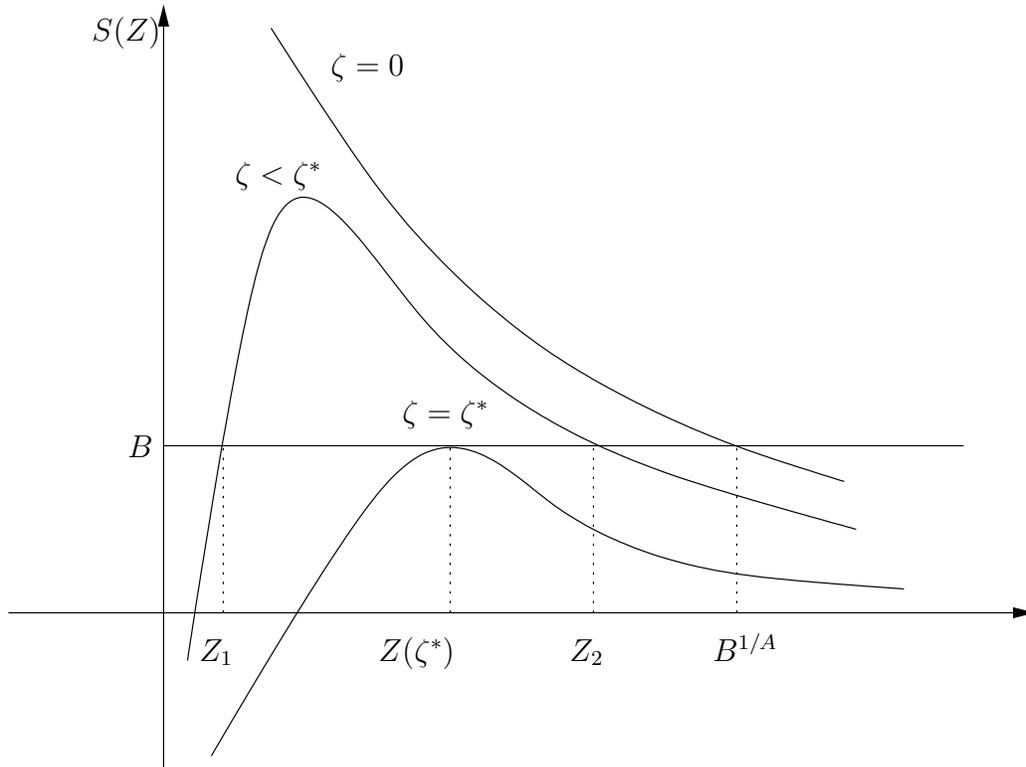


Figure 2.1 – Détermination de l'état stationnaire

En particulier, lorsque ζ tend vers zero, l'état stationnaire inférieur converge vers l'état stationnaire autarcique.

Comme il est montré dans la preuve de la proposition, les états stationnaires sont déterminés par la résolution de l'équation $S(Z) \equiv \left(1 - \sqrt{\zeta/Z}\right) Z^A = B$, où B est une constante positive. Le graphe de la fonction $S(Z)$ pour différentes valeurs possibles de la fonction ζ est donné par la figure 2.1.

Corollaire 2.1 *L'état stationnaire supérieur Pareto-domine l'état stationnaire inférieur.*

Prouver cette affirmation est relativement direct. En effet, les firmes réalisant des profits nuls à l'équilibre de libre entrée, les entrepreneurs sont indifférents entre les deux états stationnaires. Les capitalistes ont une préférence pour l'état stationnaire supérieur car il est associé à un stock de capital plus élevé. Il reste à montrer que l'état stationnaire supérieur est également préféré par les travailleurs. Pour voir cela, notons que l'utilité est croissante le long de la courbe de réaction des travailleurs, de sorte qu'il nous suffit de vérifier que, pour un degré de concurrence ζ donné, $L_2(\zeta) > L_1(\zeta)$. On tire des équations définissant l'état stationnaire la relation :

$$L = \left[\delta \frac{1 - \alpha}{\alpha} K \right]^{\frac{1}{\theta}}.$$

Il s'ensuit que la quantité de travail à l'état stationnaire est une fonction croissante du montant de capital et la propriété désirée suit.

Une fois l'existence d'états stationnaires établie, la question du comportement du système dans un proche voisinage se pose. Utilisant le théorème de Hartman et Grobman, ce problème se réduit à l'étude du système linéaire obtenu par une approximation de Taylor au premier ordre. La linéarisation du système autour d'un état stationnaire non dégénéré fournit le résultat suivant :

$$\begin{bmatrix} dK_t \\ dZ_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \delta & \delta (1 + \varepsilon^\lambda) \frac{K}{Z} \\ \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{Z}{K} \frac{\theta}{1 + \varepsilon^\lambda} & \frac{\theta}{(1 - \alpha)(1 + \varepsilon^\lambda)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dK_{t-1} \\ dZ_t \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

où

$$\varepsilon^\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial Z} \frac{Z}{\lambda}.$$

Les propriétés de stabilité locale des états stationnaires sont alors déterminées en examinant les valeurs propres de la matrice Jacobienne du système. Deux cas peuvent être distingués; celui où les firmes n'ont aucun pouvoir

de marché (correspondant à des coûts fixes nuls ou au cas de substituabilité parfaite) et le cas où les taux de marge sont strictement positifs et varient dans le temps du fait des entrées et sorties de firmes.

La figure, dont la construction ne dépend pas du système particulier étudié, indique, pour les différentes valeurs possibles de la trace et du déterminant la nature de l'état stationnaire correspondant en termes de propriétés de stabilité.⁹

En utilisant les équations (2.10), (2.12) et la notation $\zeta = \phi/\sigma$, on a :

$$\varepsilon^\lambda = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{\zeta}{Z}}}{1 - \sqrt{\frac{\zeta}{Z}}}. \quad (2.15)$$

La trace et le déterminant de la matrice de transition dans (2.14) sont donnés par :

$$\begin{aligned} Tr &= 1 - \delta + \frac{\theta}{(\varepsilon^\lambda + 1)(1 - \alpha)} \\ Det &= \frac{\theta}{(\varepsilon^\lambda + 1)(1 - \alpha)} [1 - \delta + \delta\alpha(\varepsilon^\lambda + 1)] \end{aligned}$$

L'expression $(\varepsilon^\lambda + 1)$ étant la seule qui dépende des paramètres ϕ et σ , on peut considérer que, pour un niveau donné des autres paramètres, ces deux dernières équations définissent une courbe paramétrée dépendant du paramètre $\zeta = \phi/\sigma$. En fait, en opérant la substitution de ζ dans l'équation du déterminant, on voit que cette courbe est plus précisément une droite d'équation :

$$Det = (1 - \delta)Tr + \delta \left(\frac{\alpha\theta}{1 - \alpha} + 2 - \delta \right) - 1. \quad (2.16)$$

Quand ζ tend vers zéro, on converge vers la situation de concurrence parfaite, c'est à dire qu'on aura un équilibre de type point-selle.

9. Voir Grandmont et al. (1998) ou Azariadis (1993) pour les détails de la construction du graphe.

ζ	0		ζ^*
Z_1	0	\nearrow	$(B(1-2A))^{\frac{1}{A}}$
$\varepsilon^\lambda(Z_1)$	$+\infty$	\searrow	$-A$
$Tr(Z_1)$	$1-\delta$	\nearrow	$1-\delta + \frac{\theta}{(1-A)(1-\alpha)}$
$Det(Z_1)$	$\frac{\alpha\delta\varepsilon^x}{1-\alpha}$	\nearrow	$\frac{\theta}{(1-A)(1-\alpha)} [1-\delta + \delta\alpha(1-A)]$

 Tableau 2.1 – *Comportements de la trace et du déterminant pour l'état stationnaire bas*

D'après la proposition 1, pour ζ suffisamment proche de zéro, le système dynamique admet deux équilibres stationnaires. Concentrant notre attention sur la variable Z , on a $Z_1(\zeta) < Z_2(\zeta)$ pour tout ζ appartenant à $[0, \zeta^*]$.

Un problème naît du fait que les états stationnaires ne peuvent être calculés explicitement¹⁰. Afin de réaliser une analyse locale, on calcule les limites des solutions Z_1 et Z_2 quand ζ tend respectivement vers zéro et ζ^* . On définit de cette façon, des bornes entre lesquels le ou les états stationnaires sont susceptibles de varier.

Les tableaux 1 and 2 (dont la construction est détaillée dans l'appendice) résument les évolutions de la trace et du déterminant lorsque ζ varie entre 0 et ζ^* . Les indices 1 et 2 se réfèrent respectivement aux état stationnaires "bas" et "élevé".

10. Dans la plupart des systèmes dynamiques, il n'est pas possible de fournir des expressions explicites des états stationnaires, et donc de la trace ou du déterminant. La méthode que nous adoptons ici est de trouver des valeurs des paramètres pour lesquelles ces expressions peuvent être obtenues. Ces valeurs fournissent des cas limites qui permettent d'inférer sur le comportement du système pour les cas intermédiaires. D'autres articles (par exemple Cazzavillan et al., 1998) introduisent des paramètres additionnels qui permettent de modifier l'échelle du système et de forcer ainsi un des états stationnaires à être égal au point (1,1).

ζ	0		ζ^*
Z_2	$B^{\frac{1}{A}}$	\searrow	$(B(1-2A))^{\frac{1}{A}}$
$\varepsilon^\lambda(Z_2)$	0	\nearrow	$-A$
$Tr(Z_2)$	$1 - \delta + \frac{\theta}{1 - \alpha}$	\searrow	$1 - \delta + \frac{\theta}{(1 - A)(1 - \alpha)}$
$Det(Z_2)$	$\frac{\theta}{1 - \alpha} [1 + \delta(\alpha - 1)]$	\searrow	$\frac{\theta}{(1 - A)(1 - \alpha)} [1 - \delta + \delta\alpha(1 - A)]$

Tableau 2.2 – Comportements de la trace et du déterminant de l'état stationnaire élevé

On peut en déduire la proposition suivante :

Proposition 2.2 *Une bifurcation de Hopf émerge dans le système dynamique (2.13) lorsque le pouvoir de marché, mesuré par la variable ζ , croît entre 0 et ζ^* sous la condition :*

$$0 < \delta < \min \left\{ \frac{1 - \alpha}{\alpha\theta}, \frac{\alpha\theta}{1 - \alpha} \right\}.$$

De plus, lorsque ζ traverse ζ^ , une bifurcation noeud-col se produit, signifiant que les deux états stationnaires fusionnent en ζ^* et que le système n'admet plus aucun état stationnaire pour $\zeta > \zeta^*$.*

Preuve. L'idée de la preuve est de calculer la trace et le déterminant dans les deux cas limites, c'est à dire $\zeta = 0$ (concurrence parfaite) et $\zeta = \zeta^*$. On utilise alors le fait qu'ils évoluent continûment sur un segment de droite lorsque ζ varie, pour montrer qu'une bifurcation de Hopf doit nécessairement émerger.¹¹

Dans un premier temps, on donne des conditions pour que l'état stationnaire inférieur soit localement indéterminé dans la situation parfaitement

11. La preuve étant basée sur un argument de continuité, il n'est pas possible de calculer explicitement la valeur de bifurcation comme une fonction des paramètres du modèle.

compétitive :

$$\begin{aligned}\lim_{\zeta \rightarrow 0} D_1 &> \lim_{\zeta \rightarrow 0} T_1 - 1, \\ \lim_{\zeta \rightarrow 0} D_1 &< 1.\end{aligned}$$

Exprimées en termes des paramètres, ces conditions peuvent être réécrites de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\frac{\alpha\theta}{1-\alpha} &> -1, \\ \frac{1-\alpha}{\alpha\theta} &> \delta.\end{aligned}$$

La deuxième condition sera satisfaite à la condition que le taux de dépréciation du capital soit suffisamment faible et la première est vérifiée quelles que soient les valeurs des paramètres.

Par ailleurs, dans le cas de concurrence pure et parfaite, l'état stationnaire supérieur est nécessairement un point-selle. En effet $Det(Z_2) < Tr(Z_2) - 1$ si et seulement si :

$$\frac{\theta}{1-\alpha} [1 - \delta(\alpha + 1)] < \frac{\theta}{1-\alpha} - \delta,$$

ou, de manière équivalente :

$$\frac{\alpha + 1}{1 - \alpha} \theta > 1,$$

qui est toujours vérifié.

Les traces et déterminant associés aux deux états stationnaires se déplacent sur un segment d'une droite de pente $(1 - \delta)$ lorsque ζ augmente et fusionnent lorsque $\zeta = \zeta^*$.

On peut, par conséquent, définir un segment dans le repère trace-déterminant, dont une extrémité est associée à un équilibre de type point-selle, l'autre extrémité étant associée à un puits, et tel que tous les points correspondent à

des équilibres réalisables. Une condition suffisante pour l'émergence d'une bifurcation de Hopf lorsque ζ varie entre zéro et ζ^* est alors que le déterminant associée à une trace égale à 2 soit supérieur à 1 (voir figure 2.2).

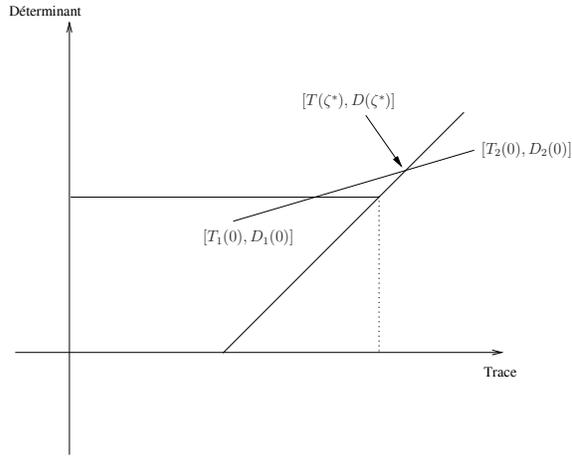


Figure 2.2 – *Bifurcation de Hopf*

En utilisant l'équation (2.16), on voit que cette condition est vérifiée si et seulement si :

$$\delta^2 - \frac{\alpha\theta}{1-\alpha}\delta < 0,$$

ce qui est assuré pour :

$$\delta < \frac{\alpha\theta}{1-\alpha}.$$

La seconde partie de la proposition, à savoir qu'une bifurcation noeud-col se produit en $\zeta = \zeta^*$, n'est qu'une reformulation de la première proposition en termes de théorie des bifurcations.

Une bifurcation noeud-col correspondant à une valeur propre de module égal à 1, on doit avoir la relation¹² :

$$Det(\zeta^*) = Tr(\zeta^*) - 1.$$

12. Si λ_1, λ_2 sont les deux valeurs propres avec $\lambda_1 = 1$, alors $Det = \lambda_2$ et $Tr = \lambda_2 + 1 = Det + 1$.

C'est effectivement vérifié, si on remplace A par son expression, dans les expressions de $Det(\zeta^*)$ and $Tr(\zeta^*)$. ■

Il résulte de la théorie des bifurcations que, lorsqu'une bifurcation de Hopf émerge, une courbe fermée invariante apparaît autour de l'état stationnaire, pour toute les valeurs du paramètre de bifurcation dans un voisinage à droite ou à gauche suffisamment proche de la valeur de bifurcation. L'étude des dynamiques restreintes à cette courbe fermée a révélé qu'il y avait une infinité dénombrable d'orbites périodiques et une infinité non dénombrables d'orbites aperiodiques (voir par exemple de Vilder, Kozlovski et Pintus, 1999 pour une vue d'ensemble des dynamiques associée aux bifurcations de Hopf). Deux cas de figure peuvent être distingués selon que la courbe invariante est attractive (bifurcation supercritique) ou répulsive (bifurcation sous-critique). Ils sont illustrés par respectivement par les figures 2.3 et 2.4. Déterminer lequel de ces deux cas est effectivement réalisé nécessiterait d'étudier les approximations au second ordre du système, et cette tâche n'est pas réalisée ici. On peut trouver des interprétations économiques des bifurcations de Hopf dans l'article

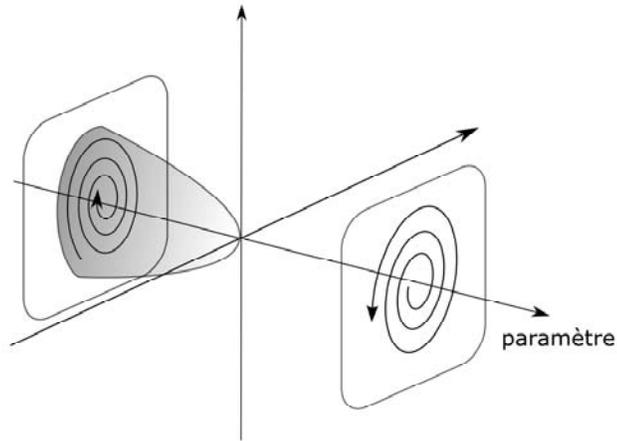


Figure 2.3 – *Bifurcation de Hopf sous-critique*

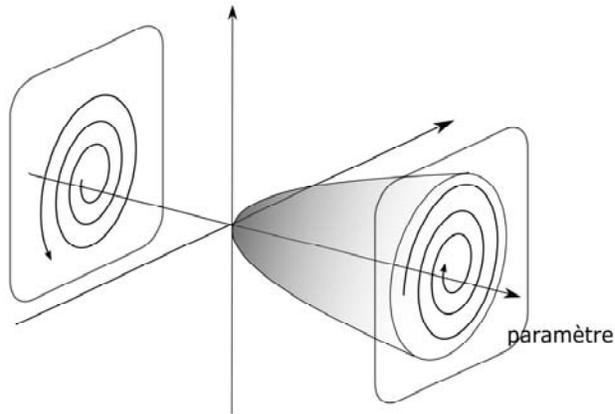


Figure 2.4 – *Bifurcation de Hopf supercritique*

Comme la preuve de la proposition le montre, dans le cas de concurrence parfaite, l'état stationnaire non autarcique est toujours un point-selle. De ce fait, sous l'hypothèse de prévision parfaite, les trajectoires dans un voisinage de l'état stationnaire vont finir par converger (les agents se plaçant à la période 0 sur la variété stable du point-selle). Il n'y a donc pas de fluctuations possibles dans cette configuration¹³.

2.4. Conclusion

Ce chapitre s'est proposé de démontrer que l'introduction de concurrence imparfaite dans un modèle d'équilibre général dynamique n'est pas neutre. En effet, quand les firmes n'ont aucun pouvoir de marché dans ce modèle, l'état stationnaire non dégénéré est de type point-selle, c'est à dire qu'il y

13. Il suit également de la preuve qu' une bifurcation de Hopf émerge pour l'état stationnaire autarcique lorsque δ varie entre 0 et 1. Néanmoins, les dynamiques sur une courbe fermée autour de l'état stationnaire autarcique impliqueraient des valeurs négatives des variables et n'auraient de ce fait aucune pertinence économique.

a une trajectoire unique qui converge vers le point stationnaire. A l'inverse, quand l'indice mesurant l'imperfection de la concurrence est strictement positif et en deçà d'un certain seuil, deux états stationnaires non autarciques coexistent et l'état stationnaire inférieur (qui correspond à l'état stationnaire autarcique de concurrence parfaite) est indéterminé. Lorsque le pouvoir de marché est accru, si le taux de dépréciation du capital est suffisamment faible, une bifurcation de Hopf émerge, suivie d'une bifurcation noeud-col où les deux points fixes se rencontrent et disparaissent. La bifurcation de Hopf implique qu'une courbe invariante fermée existe pour des valeurs du pouvoir de marché proches de la valeur de bifurcation.

Ainsi, nous avons montré que le comportement dynamique de l'économie est plus complexe dans un cadre de concurrence imparfaite. Les fluctuations sont inhérentes au fonctionnement de l'économie et ne nécessitent pas l'introduction de chocs externes. Des fluctuations persistantes sont donc possibles dans le long terme. La source des variations de l'activité économique réside dans les libres entrées et sorties des entreprises du secteur intermédiaire qui implique la nullité des profits à l'équilibre. Une substituabilité imparfaite des biens intermédiaires et la présence d'un coût fixe dans la fonction de production assurent que le nombre de firmes reste borné. De plus, ce nombre varie de manière procyclique tandis que l'évolution du taux de marge est contracyclique, en accord avec les résultats empiriques (voir par exemple Portier, 1995). L'interprétation de ces résultats est que, dans les phases de croissance, la production du secteur final augmente, entraînant un accroissement de la demande d'inputs au secteur intermédiaire. De ce fait, de nouvelles entreprises vont entrer sur le marché des inputs. Dans le cadre Cournotien adopté, la coordination entre les entreprises sera plus faible, résultant en une dépréciation du taux de marge jusqu'à ce qu'il ne soit plus profitable pour

certaines entreprises de rester sur le marché. Le nombre d'entreprises actives va recommencer à baisser et donc la coordination sera à nouveau plus forte etc...

L'intérêt de ce modèle est de souligner les effets dynamiques de l'introduction d'imperfections dans la concurrence dans un contexte très standard, la concurrence à la Cournot. En effet, la littérature récente consacrée à la concurrence imparfaite est caractérisée par une grande variété d'hypothèses concernant les structures de marché et une plus grande complexité des décisions stratégiques. De telles approches n'ont pas encore été largement exploitées dans le cadre des modèles d'équilibre général dynamique et constituent de ce fait une voie possible de recherches futures concernant les aspects dynamiques de la concurrence imparfaite.

ANNEXE

B

Linéarisation du Système Dynamique

On souhaite linéariser le système dynamique :

$$\begin{cases} K_t = (1 - \delta + \rho(k_t)) K_{t-1}, \\ U\left(\omega(k_{t+1}) \frac{K_t}{k_{t+1}}\right) = V\left(\frac{K_{t-1}}{k_t}\right) \end{cases}$$

autour d'un état stationnaire (K, k) .

La différenciation de la première équation donne :

$$\begin{aligned} dK_t &= dK_{t-1} + \left[\frac{\rho'(k)}{\rho(k)} K \right] dk_t \\ &= dK_{t-1} - \frac{K}{k} |\varepsilon^R|, \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que $R(k) = 1$ à l'état stationnaire.

On obtient ensuite en différenciant la deuxième équation :

$$\frac{\omega}{k} U'(C) dK_t + (\omega'k + \omega) \frac{K}{k^2} U'(C) dk_{t+1} = \frac{V'(L)}{k} dK_{t-1} - \frac{K}{k^2} V'(L) dk_t.$$

On a donc le système linéarisé suivant :

$$\begin{pmatrix} dK_t \\ dk_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\rho'K \\ \frac{k}{K} \frac{\varepsilon^X - 1}{\varepsilon^\omega - 1} & -\frac{\varepsilon^X - |\varepsilon^R|}{\varepsilon^\omega - 1} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Or $V'(L) = v'(L) [1 + R_1(L)]$, $U'(C) = u'(C) [1 - R_2(C)]$ et par conséquent, en utilisant la condition du premier ordre (1.10) et l'expression de l'élasticité de la courbe de réaction des travailleurs, on a que :

$$\frac{1}{\omega'k - \omega} \frac{V'(L)}{U'(C)} = \frac{\varepsilon^X}{\varepsilon^\omega - 1}.$$

L'utilisation de cette relation dans B.1 donne fournit le résultat.

ANNEXE

C

Conditions de Deuxième Ordre du Secteur Intermédiaire

Dans la procédure de maximisation en deux étapes, les conditions de premier ordre peuvent s'écrire (en ignorant les indices de temps pour simplifier la notation) :

$$MR(\bar{x}) - MC(\bar{x}) = 0,$$

où $MC(\bar{x})$ est constant et

$$MR(\bar{x}) = p_j \left[1 + \frac{\partial p_j}{\partial \bar{x}} \frac{\bar{x}}{p_j} \right],$$

avec

$$p_j = P \left(\frac{\bar{x} + (n_j - 1)\bar{x}_j}{y} \right)^{-\frac{1}{\sigma}}.$$

D'où, il suffit de démontrer que la fonction de recette marginale $MR(\bar{x})$ est décroissante.

$$\frac{\partial MR(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial p_j}{\partial \bar{x}} \left[1 + \frac{\partial p_j}{\partial \bar{x}} \frac{\bar{x}}{p_j} \right] + p_j \left[1 + \frac{\partial^2 p_j}{\partial \bar{x}^2} \frac{\bar{x}}{p_j} + \frac{\partial p_j}{\partial \bar{x}} \frac{\bar{1}}{p_j} \right],$$

ce qui donne, à l'équilibre symétrique, où $\bar{x} = \bar{x}_j$:

$$\frac{\partial MR(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial p_j}{\partial \bar{x}} \left[1 - \frac{1}{\sigma n_j} \right] - p_j \frac{1}{\sigma} \frac{n_j - 1}{n_j^2 \bar{x}}.$$

D'où la recette marginale est une fonction décroissante, étant donné que le nombre d'entreprises est au moins égal à un¹.

1. Les conditions de second ordre de la minimisation des coûts sont vérifiées directement.

ANNEXE

D

Existence de l'Etat Stationnaire :

Les états stationnaires associés au système (2.13), s'ils existent, sont solution de :

$$\begin{cases} \left(1 - \sqrt{\frac{\zeta}{Z}}\right) Z = \frac{\delta}{\alpha} K, \\ \left(1 - \sqrt{\frac{\zeta}{Z}}\right) Z = \frac{1}{1-\alpha} L^\theta, \\ Z = K^\alpha L^{1-\alpha}. \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

Exprimée en termes du stock de capital et de la production, (D.1) devient :

$$\begin{cases} \left(1 - \sqrt{\frac{\zeta}{Z}}\right) Z = \frac{\delta}{\alpha} K, \\ \left(1 - \sqrt{\frac{\zeta}{Z}}\right) Z = \frac{1}{1-\alpha} K^{\frac{\theta\alpha}{\alpha-1}} Z^{\frac{\theta}{1-\alpha}}, \end{cases}$$

dont on déduit :

$$K = \left(\frac{\alpha}{\delta(1-\alpha)}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha(1-\theta)}} Z^{\frac{\theta}{1-\alpha(1-\theta)}}, \quad (\text{D.2})$$

que l'on substitue dans la première équation de façon à obtenir :

$$\left(1 - \sqrt{\frac{\zeta}{Z}}\right) Z^{\frac{(1-\alpha)(1-\theta)}{1-\alpha(1-\theta)}} = \frac{\delta}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\delta(1-\alpha)}\right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha(1-\theta)}}.$$

On utilisera les notations suivantes :

$$A \equiv \frac{(1-\alpha)(1-\theta)}{1-\alpha(1-\theta)} (< 0),$$

$$B \equiv \frac{\delta}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\delta(1-\alpha)} \right)^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha(1-\theta)}} (> 0).$$

Connaissant le niveau de production, le stock de capital est déterminé de manière univoque par l'équation (D.2). Il nous faut donc spécifier les conditions sous lesquelles l'équation :

$$S(Z) \equiv \left(1 - \sqrt{\frac{\zeta}{Z}} \right) Z^A = B, \quad (D.3)$$

admet au moins une solution.

$S(\cdot)$ est une fonction qui a pour limites :

$$\lim_{Z \rightarrow 0} S(Z) = -\infty,$$

$$\lim_{Z \rightarrow +\infty} S(Z) = 0.$$

De plus, on a :

$$S'(Z) = Z^{A-1} \left(A \left(1 - \sqrt{\frac{\zeta}{Z}} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\zeta}{Z}} \right) \begin{cases} > 0 \text{ if } \sqrt{\frac{\zeta}{Z}} < \frac{2A}{2A-1}, \\ \leq 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

La fonction $S(Z)$ admet un maximum pour $Z_{\max} = \zeta ((2A-1)/2A)^2$, qui est donnée par :

$$S(Z_{\max}) = \frac{\zeta^A}{1-2A} \left(\frac{2A-1}{2A} \right)^{2A} > 0.$$

Il y a par conséquent un niveau Z tel que la condition (D.3) est vérifiée, si et seulement si :

$$\zeta \leq (B(1-2A))^{\frac{1}{A}} \left(\frac{2A}{2A-1} \right)^2.$$

Le système définissant les états stationnaires admet alors de façon générique deux états stationnaires (le cas de l'unicité étant détruit par une légère perturbation).

ANNEXE

E

Construction des tableaux 1 et 2

On souhaite étudier les évolutions de la trace et du déterminant lorsque ζ varie entre 0 et ζ^* . Pour cela, on doit distinguer les cas correspondant à chaque solution stationnaire du système dynamique, i.e. Z_1 et Z_2 ($Z_1 < Z_2$). On peut calculer les expressions de la trace et du déterminant en termes du paramètre ζ , en remplaçant ε^λ par sa valeur :

$$\varepsilon^\lambda = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\frac{\zeta}{Z}}}{1 - \sqrt{\frac{\zeta}{Z}}}.$$

Nous ne spécifions ici que la construction du premier tableau, un raisonnement similaire étant valable pour le deuxième. On a :

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} Z_1 = 0.$$

L'équation (D.3) peut se réécrire :

$$\sqrt{\frac{\zeta}{Z}} = 1 - \frac{B}{Z^A},$$

dont on déduit ($A < 0$):

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\zeta}{Z_1(\zeta)}} = 1.$$

Ainsi les limites de la trace et du déterminant sont :

$$\begin{aligned} \lim_{\zeta \rightarrow 0} Tr(Z_1(\zeta)) &= 1 - \delta, \\ \lim_{\zeta \rightarrow 0} Det(Z_1(\zeta)) &= \frac{\delta \alpha \varepsilon^x}{1 - \alpha}. \end{aligned}$$

Ces limites lorsque ζ tend vers ζ^* peuvent être obtenues par un calcul direct en utilisant le fait que

$$Z(\zeta^*) = \zeta^* \left(\frac{2A - 1}{2A} \right)^2.$$

Afin de conclure la description des tableaux, il reste à étudier leur variations par rapport au paramètre ζ .

On obtient par différenciation de l'équation définissant l'état stationnaire (D.3) :

$$\frac{\partial Z}{\partial \rho} = \frac{Z}{2A\rho} \frac{1}{\sqrt{\frac{Z}{\rho} - \frac{2A-1}{2A}}},$$

qui est positive si $Z > \rho \left(\frac{2A-1}{2A} \right)^2$, et négative sinon. On a :

$$\frac{\partial Tr}{\partial \left(\sqrt{\frac{\zeta}{Z}} \right)} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Det}{\partial \left(\sqrt{\frac{\zeta}{Z}} \right)} < 0.$$

Le signe des dérivées de ζ/Z par rapport ζ est obtenu à l'aide de la règle de calcul des élasticités :

$$\varepsilon_{(\frac{Z}{\zeta})/\zeta} \equiv \frac{\partial \left(\frac{Z}{\zeta} \right)}{\partial \zeta} \frac{\zeta}{\left(\frac{Z}{\zeta} \right)} = \frac{1}{2A \left(\sqrt{\frac{Z}{\zeta} + \frac{1-2A}{2A}} \right)} - 1,$$

ainsi

$$\frac{\partial \left(\sqrt{\frac{\zeta}{Z_1}} \right)}{\partial \zeta} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \left(\sqrt{\frac{\zeta}{Z_2}} \right)}{\partial \zeta} > 0.$$

Les flèches dans le premier tableau suivent directement

CHAPITRE

3

Analyse Numérique des Systèmes Dynamiques Non Linéaires

Sommaire

3.1	Introduction	124
3.2	Résolution Numérique des Systèmes d'Équations Non Linéaires	126
3.2.1	La Méthode des Sécantes	127
3.2.2	La Procédure de Newton	128
3.2.3	Procédures Basées sur la Méthode de Newton	133
3.2.4	Méthodes Numériques de Continuation	141
3.3	Calcul des Variétés Stable et Instable d'un Point- Selle	152
3.3.1	La Problématique	152
3.3.2	Description de l'Algorithme	155
3.4	Conclusion	158

3.1. Introduction

L'étude théorique des systèmes dynamiques, telle qu'elle a été présentée dans le modèle du premier chapitre n'est pas toujours réalisable dans les modèles comportant un grand nombre de paramètres. En effet, le calcul des conditions sur la trace et le déterminant du Jacobien du système peut s'avérer problématique, en particulier si ce dernier dépend des valeurs des variables à l'état stationnaire. D'autre part, l'étude des propriétés des systèmes bidimensionnels à l'aide du diagramme trace/déterminant ne fournit que des informations locales, c'est à dire au voisinage des points stationnaires. L'analyse des propriétés globales permet de mettre en évidence d'autres phénomènes (attracteurs étranges, bifurcations homoclines, hétéroclines et leurs conséquences, ...), mais se révèle souvent irréalisable d'un point de vue strictement analytique (des propriétés globales ont néanmoins été dégagées de façon analytique pour certains systèmes simples, comme le système de Hénon, où l'on a mis en évidence les conditions de Conley-Moser d'existence de fer à cheval de Smale Wiggins (1990), ainsi que l'existence d'orbites homoclines Sterling, H.R.Dullin et Meiss (1999)). C'est pourquoi, l'étude des systèmes dynamiques nécessite souvent le recours à des méthodes numériques de résolution. De plus, même si l'on s'intéresse uniquement aux comportements locaux, l'analyse numérique permet une visualisation des résultats obtenus analytiquement et peut aider à fournir une meilleure intuition des modèles tout en guidant la recherche.

Ce constat a motivé la création d'un logiciel (fourni sur le CD-ROM joint) destiné à faciliter l'analyse numérique des systèmes dynamiques à deux dimensions. Ce logiciel, appelé DAMP¹, a été programmé en langage C et

1. Dynamic Analysis of Maps of the Plane

utilise les bibliothèques Allegro² et Adime³ pour les traitements graphiques et les interactions avec les différents périphériques d'entrées/sorties. Il fait également usage de la bibliothèque libffi⁴, qui a permis la création dynamique de menus dont le nombre d'entrées est déterminé à l'exécution (et non à la compilation). Ce dernier point est important, car il limite la portabilité de l'application. En effet, DAMP a été développé sur un système GNU/Linux et, à notre connaissance, aucun portage n'existe pour Windows ou Macintosh, à la différence d'ALLEGRO et ADIME. Enfin, afin de faciliter l'ajout de nouveaux modèles, un interpréteur à été rajouté, dont l'objectif est de transformer des fichiers de définitions de modèles en code source C. Il aurait été évidemment plus pratique d'intégrer l'interpréteur au logiciel, évitant ainsi une phase de recompilation à chaque ajout de modèle, mais une tentative en ce sens s'est soldée par une importante perte de performance et a donc été abandonnée.

L'objectif qui a guidé la création de ce logiciel a été de le rendre le plus simple d'utilisation possible, en privilégiant les accès à l'aide de la souris. Précisons qu'il n'est pas encore diffusable en l'état, puisqu'il comporte encore un certain nombre de bugs (notamment en ce qui concerne la gestion dynamique de la mémoire⁵) et que certaines procédures nécessitent d'être fortement améliorées (en particulier la procédure de calcul des états stationnaires)⁶.

2. <http://alleg.sourceforge.net/>

3. <http://adime.sourceforge.net/>

4. <http://sources.redhat.com/libffi/>

5. Des erreurs de segmentation, caractéristiques d'une gestion non rigoureuse des allocations et déallocations dynamiques de mémoire se produisent parfois lors du calcul des orbites.

6. De manière générale, les procédures utilisées par le logiciel ont été, sauf indication contraire explicite, créées par l'auteur et seront par conséquent probablement moins effi-

Les principales opérations permises par DAMP sont le tracé des orbites pour des conditions initiales données, le calcul des états stationnaires et de leurs propriétés, et, pour les point-selles, le calcul des variétés stables et instables associées. Il permet en outre d'effectuer des zooms sur les régions d'intérêt et de déplacer les courbes sur l'écran. Il est accompagné d'un script shell pour convertir les images obtenues au format Postscript.

Ce chapitre décrit les différentes procédures utilisées et leur implantation. La première section est consacrée au calcul numérique des états stationnaires par la méthode des sécantes multidimensionnelle. Dans la deuxième section, deux méthodes alternatives sont proposées pour le tracé des variétés stables et instables associées aux points fixes hyperboliques. Enfin, dans la troisième section, le logiciel DAMP est présenté, et son utilisation expliquée à l'aide d'un exemple : le système de Hénon.

3.2. Résolution Numérique des Systèmes d'Équations Non Linéaires

Cette section décrit les algorithmes qui ont été utilisés pour la recherche des états stationnaires ainsi que l'itération des systèmes sous forme implicite. L'objectif a été d'employer une procédure qui ne dépende pas du système dynamique choisi, c'est-à-dire qui ne nécessite pas de spécifier des conditions initiales proches du point à calculer.

caces que des routines écrites par des spécialistes de l'analyse numérique. Néanmoins, le caractère modulaire du langage C permet une maintenance aisée du programme et son amélioration future.

Considérons le système dynamique

$$\mathbf{x}_{t+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \theta), \quad \mathbf{x}_t, \mathbf{x}_{t+1} \in \mathbb{R}^2, \theta \in \mathbb{R}^k, \quad (3.1)$$

où θ est un vecteur de paramètres. On omettra la dépendance du système par rapport à ce vecteur de paramètres dans la suite pour simplifier les notations.

Un état stationnaire du système (3.1) est défini comme un point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ satisfaisant :

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \quad (3.2)$$

ou

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = 0. \quad (3.3)$$

La recherche des états stationnaires revient donc à résoudre un système de deux équations, généralement non linéaires, à deux inconnues avec second membre nul. Le théorème des fonctions implicites assure que, si ce système admet au moins une solution, la situation où les solutions forment un continuum est génériquement évitée. La méthode choisie pour la résolution de l'équation (3.3) a été développée par Broyden (1965) et est une variante au cas multidimensionnel de la méthode des sécantes. Il s'agit d'une méthode de quasi-Newton qui est basée sur une approximation grossière de la matrice Jacobienne du système. La première sous-section rappelle le principe de la méthode des sécantes dans le cas unidimensionnel. La méthode de Newton fait l'objet de la sous-section suivante. Enfin, l'algorithme de Broyden est développé dans la dernière section.

3.2.1 La Méthode des Sécantes

On souhaite résoudre l'équation :

$$f(x) = 0 \quad (3.4)$$

où f désigne une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . La méthode des sécantes est une méthode itérative d'interpolation linéaire. Il s'agit, au départ, de déterminer deux points x_1 et x_2 entourant une des racines de l'équation, c'est-à-dire qu'on doit avoir :

$$f(x_1) < 0 < f(x_2). \quad (3.5)$$

Pour être efficace, la fonction f doit être approximativement linéaire sur la région délimitée par x_1 et x_2 . On définit alors, à chaque itération i , un nouveau point x_{i+1} , donné par :

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \frac{x_{i-1} - x_i}{f(x_{i-1}) - f(x_i)}, \quad (3.6)$$

c'est-à-dire que chaque point calculé sera donné par l'intersection de la droite reliant les images des deux derniers points avec l'axe des abscisses, comme l'illustre la figure 3.1. Par rapport à d'autres méthodes, comme les méthodes de recherche dichotomique ou de false position, cette procédure a l'inconvénient de ne pas assurer que la solution soit constamment entourée par les deux derniers points calculés. Cela peut se traduire par des problèmes de convergence si la fonction n'est pas suffisamment continue. Ce cas de figure est illustré par la figure 3.1.

3.2.2 La Procédure de Newton

Comme nous venons de le voir, la méthode des sécantes se base sur une approximation du comportement local d'une fonction par une droite joignant les images de deux points par cette fonction. Cependant, la meilleure approximation linéaire d'une fonction au voisinage d'un point est fournie par l'équation de la tangente en ce point. Soient f , une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et l'équation $f(x) = 0$ dont on cherche une solution pour une valeur initiale x_0 donnée. La méthode de Newton consiste à approximer la fonction f au

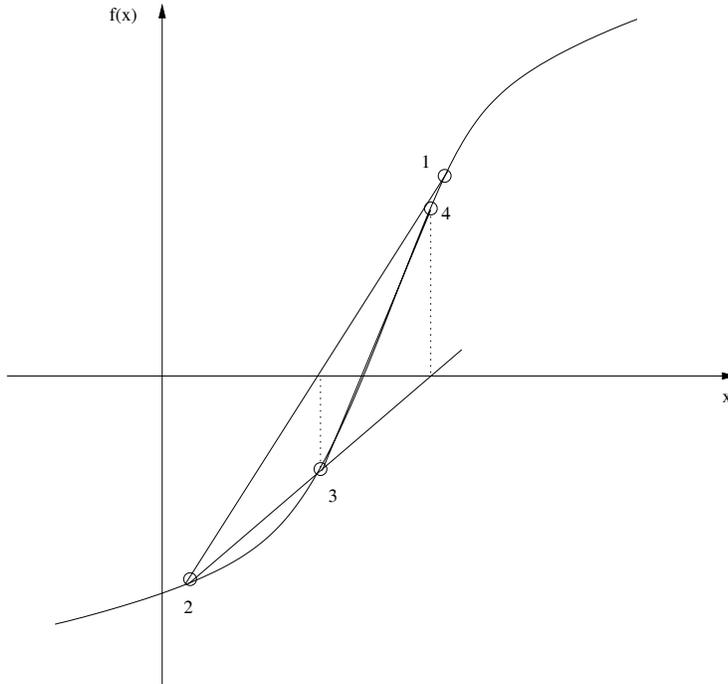


Figure 3.1: La méthode des sécantes

voisinage de x_0 par sa dérivée et à calculer la valeur qui annule l'application linéaire obtenue. En appelant x_1 la solution trouvée, on peut réutiliser celle-ci comme condition initiale et calculer itérativement x_2, x_3, \dots, x_n , jusqu'à ce que la précision souhaitée soit atteinte. Les figures 3.2 et 3.3 illustrent ce principe respectivement dans un cas favorable et dans un cas où la procédure ne converge pas.

Voyons comment cette méthode se traduit algébriquement. Lorsque le i^{eme} point a été calculé, on obtient l'approximation linéaire de f par un développement limité au premier ordre de f :

$$f(x) \approx f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i). \quad (3.7)$$

L'annulation de cette expression fournit la solution :

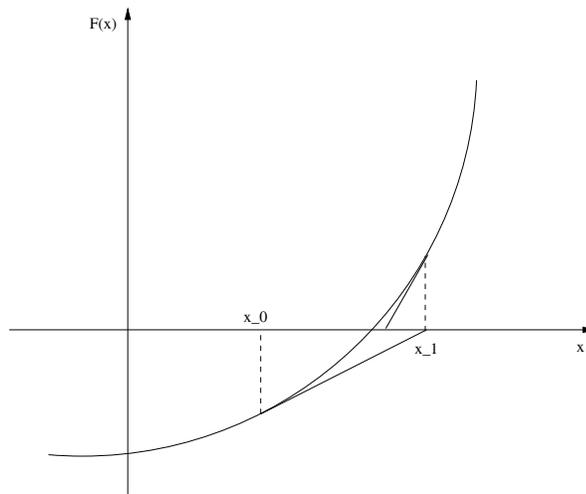


Figure 3.2: Convergence de la méthode de Newton

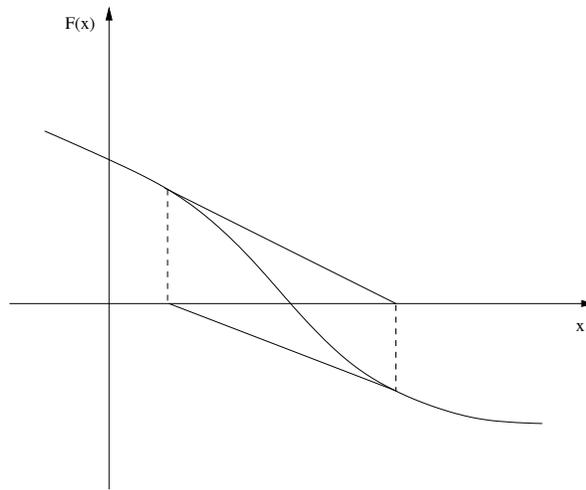


Figure 3.3: Cas de non convergence de la méthode de Newton

$$x_{i+1} = x_i - f'(x_i)^{-1}f(x_i). \quad (3.8)$$

Le terme $f'(x_i)^{-1}f(x_i)$ est appelé *pas de Newton* et correspond à la correction effectuée à chaque itération. Cette procédure se généralise directement

à la résolution de systèmes $F(X) = 0$, où F est une application de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N , en remplaçant la dérivée par le Jacobien F' de F . On aura :

$$X_{i+1} = X_i - J^{-1}F(X_i), \quad (3.9)$$

où J représente la matrice Jacobienne du système évaluée au point x_i . Ainsi, la fonction F est approximée par l'hyperplan tangent au point X . Comme nous l'avons vu dans le cas unidimensionnel, cette suite n'est pas garantie de converger vers la solution recherchée. Plus précisément, la convergence est assurée lorsque le Jacobien est une application Lipschitzienne, est non singulier au point solution et le point initial est suffisamment proche de la solution. Dans ce cas, la convergence est quadratique, c'est à dire qu'on a :

$$\|X_{n+1} - X^*\| \leq \|X_n - X^*\|^2. \quad (3.10)$$

Lorsque, comme c'est le cas ici, il n'est pas possible d'utiliser une étude théorique préalable de la fonction, on peut employer une approche de *force brute* consistant à balayer un ensemble de conditions initiales, et appliquer pour chacune la méthode de Newton, jusqu'à ce qu'une solution soit trouvée.

Afin d'appliquer la méthode de Newton, il reste à déterminer un critère d'acceptabilité d'une solution, la vraie valeur ne pouvant qu'être approchée en un nombre fini d'itérations. Une solution naturelle est d'arrêter le processus itératif lorsque la différence entre deux points successifs est inférieure au degré de précision souhaité. Cela signifie néanmoins qu'une étape supplémentaire est calculée une fois qu'une solution acceptable est obtenue. Lorsque l'évaluation du Jacobien et son inversion sont coûteuses en temps de calcul (systèmes de dimension élevée), un autre critère est généralement préféré consistant à accepter une solution \hat{X} lorsque :

$$\|F(\hat{X})\| \leq \tau_0 \|F(X_0)\| + \tau_a, \quad (3.11)$$

où τ_0 et τ_a sont des paramètres prédéterminés correspondant aux niveaux de tolérance relatif et absolu. La seule prise en compte du niveau relatif de tolérance expose en effet au risque d'absence de convergence si la condition initiale est très proche de la solution ($F(X_0)$ proche du niveau de précision de la machine). Néanmoins, ce critère peut induire en erreur si la fonction est relativement "plate" au voisinage de la solution (voir figure 3.4). Pour que la solution soit acceptable, il est nécessaire que le Jacobien du système évalué au point solution soit bien conditionné.

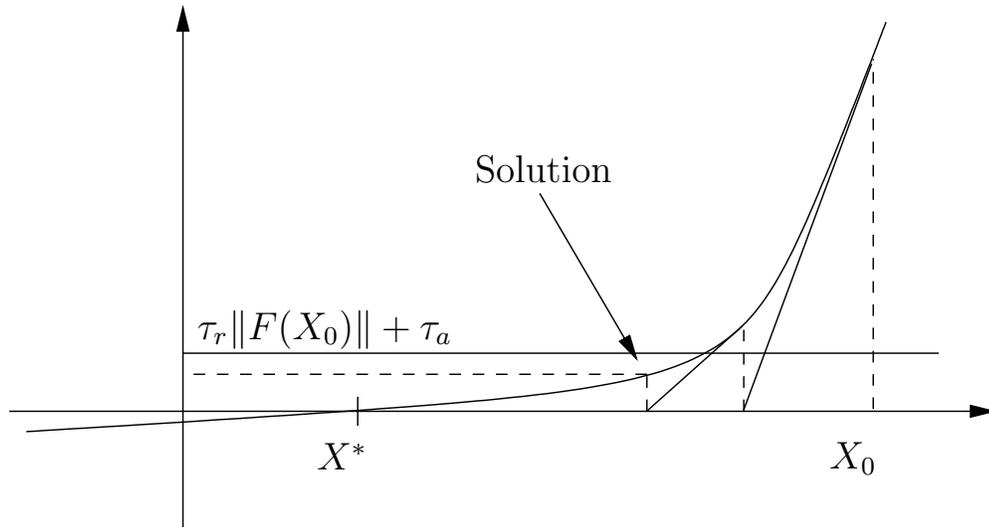


Figure 3.4: Cas d'inefficacité du critère d'arrêt

Le calcul de (3.9) implique l'inversion du Jacobien évalué au dernier point calculé. Celle-ci peut-être effectuée à l'aide de la décomposition LU qui est reléguée en Annexe du chapitre.

Une variante, appelée méthode de corde, consiste à économiser du temps de calcul en n'évaluant la matrice Jacobienne qu'à la première itération. Cela permet de n'utiliser qu'une seule factorisation LU pour toute la durée de la procédure. On n'aura plus alors une convergence quadratique comme dans le cas de la méthode de Newton, mais la perte induite par le plus grand

nombre d'itérations peut se voir compensée par le gain de rapidité de chaque itération. Cette méthode est illustrée dans le cas unidimensionnel par la figure 3.5.

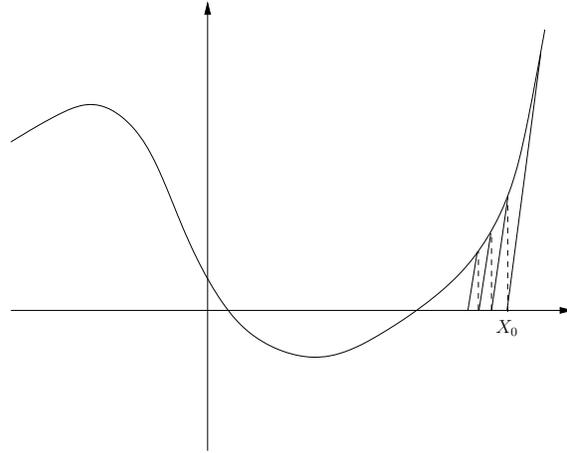


Figure 3.5: Méthode de corde

Shamanskii a, quant à lui, proposé une solution intermédiaire, à savoir la réévaluation du Jacobien toutes les m itérations, permettant à la fois de réduire le nombre d'itérations par rapport à la méthode de corde et d'augmenter la vitesse de convergence vers la solution. Le nombre d'itérations m séparant les mises à jour successives du Jacobien est par conséquent déterminé selon un arbitrage entre le coût d'évaluation/factorisation du Jacobien et le nombre d'itérations nécessaires pour parvenir à la solution recherchée.

3.2.3 Procédures Basées sur la Méthode de Newton

Un défaut de la méthode de Newton est qu'elle ne garantit pas la convergence vers une solution pour un choix arbitraire de conditions initiales. Une convergence globale, c'est à dire, une convergence vers une solution pour (presque) tous les points initiaux, peut néanmoins être assurée en améliorant

un peu la procédure. Une telle amélioration est décrite dans la sous-section suivante consacrée aux techniques de line search et backtracking . L'autre inconvénient limitant l'usage de la procédure de Newton est qu'elle nécessite le calcul de la matrice Jacobienne. En pratique, une approximation grossière est suffisante. On appelle méthodes de quasi-Newton, les méthodes basées sur de telles approximations. La méthode de Broyden, basée sur les différences finies fait l'objet de la deuxième sous-section.

Convergence Globale : Recherche Linéaire et Rétroaction

La méthode de recherche linéaire, due à Armijo, consiste, à chaque itération, à ajuster la taille du pas de Newton, de sorte à s'assurer que l'image du nouveau point calculé a une norme inférieure à celle associée au point précédent. Plus précisément, au point x_n , ayant déterminé le pas de Newton p , on va chercher à minimiser la fonction :

$$g(\lambda) = f(x_n + \lambda p), \lambda \in [0,1], \quad (3.12)$$

où

$$f = \frac{1}{2} F^* F. \quad (3.13)$$

On commence par évaluer la fonction pour $\lambda = 1$. Si cette valeur ne se traduit pas par une baisse de la norme de F ou que cette baisse est trop faible pour assurer une convergence en un nombre raisonnable d'itérations, on va réduire le pas de Newton en déterminant une approximation du minimum de g . Pour simplifier le calcul de ce minimum, on suppose que g est approximativement quadratique, c'est à dire :

$$g(\lambda) \approx a\lambda^2 + b\lambda + c. \quad (3.14)$$

Connaissant $g(0)$, $g(1)$ et $g'(0)$, on peut par identification retrouver les valeurs des coefficients a , b et c . On obtient :

$$\begin{aligned} a &= g(1) - g(0) - g'(0) \\ b &= g'(0) \\ c &= g(0) \end{aligned} \quad (3.15)$$

Le minimum de la fonction est alors obtenu pour :

$$\lambda^* = \frac{g'(0)}{2(g(1) - g(0) - g'(0))}. \quad (3.16)$$

Ce résultat peut être ensuite affiné en modélisant alors g comme une fonction cubique, en utilisant la valeur précédemment calculée $g(\lambda_1)$ et la deuxième valeur plus récente $g(\lambda_2)$:

$$g(\lambda) \approx a\lambda^3 + b\lambda^2 + g'(0)\lambda + g(0). \quad (3.17)$$

On a :

$$\begin{aligned} g(\lambda_1) &= a\lambda_1^3 + b\lambda_1^2 + g'(0)\lambda_1 + g(0), \\ g(\lambda_2) &= a\lambda_2^3 + b\lambda_2^2 + g'(0)\lambda_2 + g(0), \end{aligned} \quad (3.18)$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^2} & -\frac{1}{\lambda_2^2} \\ -\frac{\lambda_2}{\lambda_1^2} & \frac{\lambda_1}{\lambda_2^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(\lambda_1) - g'(0)\lambda_1 - g(0) \\ g(\lambda_2) - g'(0)\lambda_2 - g(0) \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

La minimisation de g fournit alors :

$$\lambda^{**} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ag'(0)}}{3a}. \quad (3.20)$$

La Méthode de Broyden

Une procédure alternative à celle de Newton est proposée par le logiciel, la méthode de Broyden. Celle-ci est une méthode dite de *Quasi-Newton*, c'est à

dire qu'elle est dérivée de la méthode de Newton en intégrant une méthode d'approximation de la matrice Jacobienne à chaque itération. Elle permet ainsi de simplifier l'inclusion de nouveaux modèles en s'économisant l'édition de la matrice Jacobienne. Pour une condition initiale x_0 donnée, l'application de cette procédure consiste à déterminer récursivement une suite de points $\{x_n\}$, $n = 1, 2, \dots, n_A$, selon le processus :

$$x_{n+1} = x_n - A_n^{-1}F(x_n), \quad (3.21)$$

où A_n est une matrice dont la forme dépend de la méthode de Quasi-Newton choisie et n_A le premier indice pour lequel une condition d'arrêt spécifiée à l'avance est remplie.

Broyden part du fait qu'on a, d'après l'approximation de Taylor à l'ordre 1 de la fonction F :

$$F'(x_n)(x_{n+1} - x_n) \approx F(x_{n+1}) - F(x_n). \quad (3.22)$$

Notons que seule la matrice $F'(x_n)$ est inconnue dans cette expression. En remplaçant l'approximation par une égalité, (3.22) peut être considérée comme un système linéaire d'équations admettant le nouveau Jacobien B_{n+1} comme solution. Le problème est que cette solution n'est pas unique, puisque le nombre d'équations (N) est largement inférieur au nombre d'inconnues (N^2). La "bonne formule" de mise à jour de Broyden est basée sur l'idée qu'une solution sera d'autant préférée qu'elle implique un changement minimal par rapport à la dernière approximation B_n calculée. Ainsi, si l'on note $\Delta_n^X = x_{n+1} - x_n$ et $\Delta_n^F = F(x_{n+1}) - F(x_n)$, il s'agira de résoudre le problème de minimisation :

$$\begin{aligned} \min_B \quad & \|B - B_n\|_F \\ \text{s.c.} \quad & B\Delta_n^X = \Delta_n^F \end{aligned}, \quad (3.23)$$

où $\|\cdot\|_F$ désigne la norme de Frobenius :

$$\|B\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N B_{ij}^2} = \sqrt{\text{Tr}(B^*B)}. \quad (3.24)$$

Intuitivement, la solution de ce programme est obtenue en projetant orthogonalement B_n sur l'espace des matrices satisfaisant la condition $B\Delta_n^X = \Delta_n^F$.

Elle s'écrit donc :

$$B_{n+1} = B_n + \frac{\Delta_n^X - B_n \Delta_n^F \Delta_n^{F*}}{\|\Delta_n^X\|^2}. \quad (3.25)$$

Preuve. Soit L , le Lagrangien associé au programme (3.23) :

$$L = \text{Tr}(B - B_n)^*(B - B_n) - 2\lambda^*(B\Delta_n^X - \Delta_n^F). \quad (3.26)$$

On a à l'optimum :

$$\frac{\partial L}{\partial B} = 2B - 2B_n - 2\lambda s^* = 0. \quad (3.27)$$

En multipliant (3.27) à droite par s en en isolant λ , on trouve :

$$\lambda = \frac{\Delta_n^F - B_n \Delta_n^X}{\|\Delta_n^X\|^2}, \quad (3.28)$$

qui, remplacée dans (3.27) donne le résultat (3.25). ■

Une difficulté intervenant dans la mise en oeuvre de cet algorithme est que la formule de mise à jour (3.25) fait intervenir des approximations de la matrice Jacobienne et non de son inverse. L'application directe de l'algorithme s'avère ainsi particulièrement coûteuse en termes d'opérations en virgule flottante. Néanmoins, il est possible de déterminer une relation entre les évaluations successives de l'inverse de la matrice Jacobienne en utilisant la formule de Sherman-Morrison

Proposition 3.1 *Soient B une matrice carrée régulière de dimension N et u et v , deux vecteurs de \mathbb{R}^n . Alors, la matrice $B + uv'$ est inversible si et*

seulement si $1 + v'B^{-1}u \neq 0$ et son inverse est donné par l'expression :

$$(B + uv')^{-1} = \left(I - \frac{B^{-1}uv'}{1 + v'B^{-1}u} \right) B^{-1}. \quad (3.29)$$

Appliquée à la suite de Broyden, l'expression (3.29) permet de dégager une relation de récurrence entre les matrices inverses A_n^{-1} successives. En effet, on peut poser :

$$u_n = \frac{F(X_{n+1})}{\Delta_n^X}, \quad (3.30)$$

$$v_n = \frac{\Delta_n^X}{\|\Delta_n^X\|}, \quad (3.31)$$

$$w_n = \frac{B_n^{-1}u_n}{1 + v_n'B_n^{-1}u_n}, \quad (3.32)$$

et utiliser récursivement la proposition pour obtenir :

$$\begin{aligned} B_{n-1}^{-1} &= (I - w_n v_n') B_n^{-1} \\ &= \dots \\ &= \prod_{j=0}^n (I - w_j v_j'), \end{aligned} \quad (3.33)$$

où l'on a supposé implicitement que le système a été préalablement conditionné de sorte que $B_0 = I$. Il est possible d'économiser du temps de calculs en déterminant une relation de récurrence sur la suite des pas $\{\Delta_n^X\}$. En effet, on peut montrer que :

$$\begin{aligned} \Delta_{n+1}^X &= -\frac{B_n^{-1}F(X_{n+1})}{1 + \frac{\Delta_n^{X'} B_n^{-1} F(X_{n+1})}{\|\Delta_n^X\|^2}}, \\ w_j &= -\frac{\Delta_j^X}{\|\Delta_j^X\|}, \end{aligned} \quad (3.34)$$

où $B_n^{-1}F(X_{n+1})$ est déterminé à l'aide de (3.33) et de l'expression de w_j ci-dessus.

L'équation (3.34) permet ainsi de déterminer le pas à la date $n + 1$ et par conséquent, le point suivant X_{n+2} . Ces considérations, qui ont été développées dans le cas des systèmes linéaires par Deuffhard, Freund et Walter (1990),⁷ motivent l'utilisation de l'algorithme suivant :

$$n = -1; r_0 = \|F(X)\|$$

$$\Delta^X_0 = -F(X)$$

tant que $itc < \maxit$ **faire**

$$n = n + 1$$

$$itc = itc + 1$$

$$F_n = F(X_n)$$

si $\|F(X)\| \leq \tau_r r_0 + \tau_a$ **alors**

quitter

fin si

si $n < n_{\max}$ **alors**

/ Calcul de $B_n^{-1}F(X_n)$ */*

$$z = -F(X)$$

pour $j = 0, n - 1$ **faire**

$$z = z + \frac{\Delta^X_{j+1} \Delta^{X'}_j z}{\|\Delta^X_j\|^2}$$

fin pour

$$\Delta^X_{n+1} = \frac{z}{1 - \frac{\Delta^{X'}_n z}{\|\Delta^X_n\|^2}}$$

fin si

si $n = n_{\max}$ **alors**

$$n = -1; s = -F(X)$$

fin si

7. La généralisation aux systèmes nonlinéaires est due à Kelley (1995), Kelley (2001).

fin tant que

Méthode de Broyden avec Recherche Linéaire

Les méthodes de line search peuvent être combinées avec la procédure de Broyden afin d'assurer une convergence globale de l'algorithme. Dans ce cas, l'équation sécante devient :

$$\Delta_n^X = -\lambda_n B_n^{-1} F(X_n), \quad (3.35)$$

où $\lambda_n < 1$ est déterminé de manière optimale, et la formule de mise à jour (3.25) prend alors la forme :

$$B_{n+1} = B_n + \frac{F(X_{n+1}) - (1 - \lambda_n)F(X_n)}{\|\Delta_n^X\|^2} \Delta_n^X. \quad (3.36)$$

On peut donc, comme précédemment, appliquer la formule de Sherman-Morrison afin d'obtenir une récurrence entre les inverses successives de B_n , en prenant cette fois-ci :

$$u_n = \frac{F(X_{n+1}) - (1 - \lambda_n)F(X_n) \|\Delta_n^X\|}{\|\Delta_n^X\|}, \quad (3.37)$$

et v_n inchangé. On peut alors montrer que, dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} w_n &\equiv \frac{B_n^{-1} u_n}{1 + v_n' B_n^{-1} u_n} \\ &= \lambda_n \left(\frac{-\frac{\Delta_n^X}{\lambda_{n+1}} + (1/\lambda_n - 1)\Delta_n^X}{\|\Delta_n^X\|} \right), \end{aligned} \quad (3.38)$$

et

$$\frac{\Delta_{n+1}^X}{\lambda_{n+1}} = -\frac{\|\Delta_n^X\|^2 B_n^{-1} F(X_{n+1}) - (1 - \lambda_n) \Delta_n^X \Delta_n^{X'} B_n^{-1} F(X_{n+1})}{\|\Delta_n^X\|^2 + \lambda_n \Delta_n^{X'} B_n^{-1} F(X_{n+1})}. \quad (3.39)$$

On a par conséquent l'algorithme suivant, qui utilise conjointement les relations (3.38), (3.39) et (3.33) :

calculer $F(X)$

$$r_0 = \|F(X)\|; n = -1$$

calculer λ_0

$$\Delta^X_0 = -\lambda_0 F(X)$$

tant que $n < \text{maxit}$ **faire**

$$n = n + 1$$

$$X_n = X_{n-1} + \Delta^X_{n-1}$$

évaluer $F(X_n)$

si $\|F(X_n)\| \leq \tau_r r_0 + \tau_a$ **alors**

quitter

fin si

$$z = -F(X_n)$$

pour $j=0, n-1$ **faire**

$$a = -\frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}}$$

$$b = 1 - \lambda_j$$

$$z = z + \frac{a\Delta^X_{j+1} + b\Delta^X_j}{\|\Delta^X_j\|} \frac{\Delta^X_{j'}}{\|\Delta^X_j\|^2} z$$

fin pour

/* calcul de */

$$d = \frac{\|\Delta^X_n\|^2 z + (1 - \lambda_n) \Delta^X_n{}' z \Delta^X_n}{\|\Delta^X_n\|^2 - \lambda_n \|\Delta^X_n{}' z\|}$$

calcul de λ_{n+1} par recherche linéaire

$$\Delta^X_{n+1} = \lambda_{n+1} d$$

fin tant que

3.2.4 Méthodes Numériques de Continuation

La méthode de Broyden appliquée au modèle économique du chapitre s'est avérée peu efficace pour le calcul des orbites des systèmes dynamiques défi-

nis de manière implicite. Lorsque l'une des équations est sous forme explicite, comme c'est le cas dans l'exemple cité, on peut simplifier le problème en calculant dans un premier temps directement une des coordonnées du nouveau point, puis substituer la valeur obtenue dans la deuxième équation qui sera résolue numériquement. Cependant, l'efficacité des méthodes numériques traditionnelles pour résoudre des équations à une seule inconnue dépend fortement, comme on l'a vu brièvement dans la première section, du choix de conditions initiales. L'avantage des méthodes dites de continuation est justement de ne pas requérir la détermination de conditions initiales pour converger.

L'idée de base de ces méthodes est la suivante : supposons que l'on cherche une solution d'un système d'équations donné sous la forme :

$$F(X) = 0, \quad F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (3.40)$$

où F est une fonction lisse⁸. une telle solution peut être considérée comme un point situé sur une courbe continue constituée de solutions d'un système d'équations plus général. Plus précisément, on définit ce qu'on appelle une homotopie ou déformation H , de la façon suivante :

$$\begin{aligned} H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ X, \lambda &\mapsto H(X, \lambda), \end{aligned} \quad (3.41)$$

avec

$$H(X, 0) = F(X) \quad \text{et} \quad H(X, 1) = G(X), \quad (3.42)$$

où G est une application de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n dont une solution \bar{X} existe est peut être calculée facilement. Sous l'hypothèse que l'application H est lisse,

8. On entendra par fonction lisse dans le reste de la section, une fonction C^∞ , afin de simplifier l'exposé.

il suit du théorème des fonctions implicites que le système $H(X) = 0$ définit une courbe lisse $c(s) \in H^{-1}(0)$ au voisinage de \bar{X} , et paramétrée par la longueur d'arc s . Connaissant un point de la courbe, $(X, \lambda) = (\bar{X}, 1)$, on peut l'utiliser comme valeur initiale pour construire une approximation de cette courbe jusqu'au point qui nous intéresse, celui où $\lambda = 0$ et $F(X) = 0$. L'ensemble des procédures basées sur ce principe porte le nom de méthodes de continuation.

Dans leur ouvrage sur les méthodes de continuation, Allgower et Georg (1990) distinguent deux familles de procédures : celles qui sont basées sur un principe de prédiction-correction (PC) et celles qui utilisent une triangulation de l'espace pour déterminer des approximations linéaires par morceaux de la courbe solution, et qu'ils notent PL (pour "Piecewise Linear"). Nous ne nous intéresserons ici qu'au premier type d'approximations. Le principe de base en est très simple. Dans un premier temps, une approximation grossière du point suivant de la courbe est donnée. Celle-ci est obtenue en déterminant la tangente à la courbe solution $c(s)$ au dernier point calculé et en effectuant un déplacement de longueur h sur cette tangente. C'est l'étape de prédiction. L'étape de correction va améliorer cette première estimation en intégrant l'information que la fonction H doit s'annuler pour les points de $c(s)$. Le nouveau point retenu sera par conséquent le point de la courbe le plus proche de celui obtenu dans l'étape de prédiction. Ce principe général est illustré par la figure 3.6.

Description de la Méthode de Prédiction-Correction

L'Étape de Prédiction

Détaillons à présent ces deux étapes et leur mise en place concrète pour un système donné. L'étape de prédiction se traduit généralement par l'utilisation

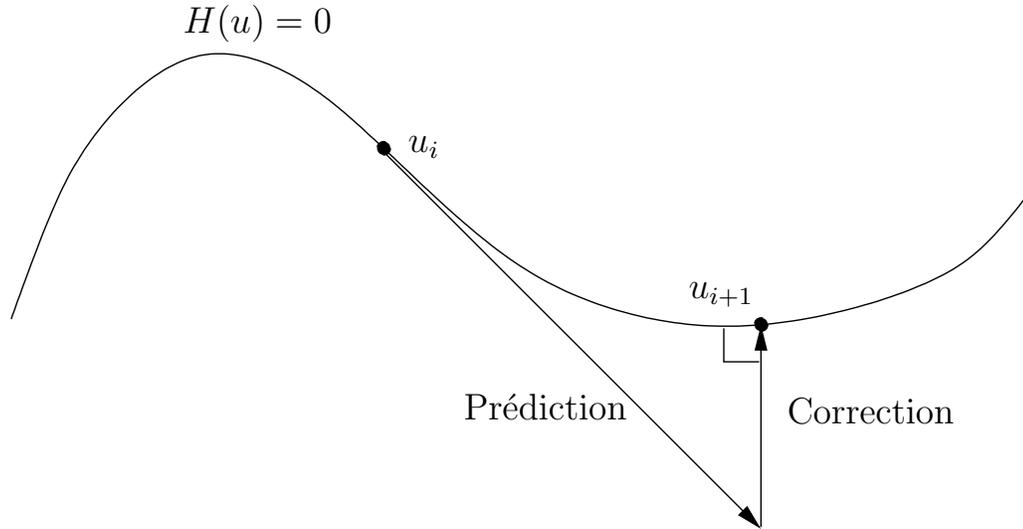


Figure 3.6: L'algorithme de Prédiction-Correction

d'un prédicteur d'Euler, de la forme suivante :

$$v_{i+1} = u_i + ht(H'(u_i)), \quad (3.43)$$

où u_i, v_{i+1} sont respectivement le dernier point calculé et une approximation du point suivant, $h > 0$ désigne la taille de pas choisie (nous la supposons fixe dans un premier temps) et t est la notation utilisée pour le vecteur tangent à $c(s)$ au point u_i . Ce dernier est déterminé à partir du Jacobien de H évalué en u_i et nous avons traduit cette dépendance explicitement. Nous ferons l'hypothèse dans la suite que le Jacobien, de dimensions $N \times (N + 1)$ est de rang maximal N . Les points qui satisfont cette hypothèse sont qualifiés de *réguliers*. De même, on dira d'une valeur de l'application H qu'elle est régulière si tous ses antécédents sont des points réguliers. On peut donc reformuler ainsi l'hypothèse sur laquelle se base la suite de la discussion :

Hypothèse 3.1 0 est une valeur régulière pour l'application H

En utilisant le fait que $H(c(s)) \equiv 0$, on obtient par différenciation :

$$H'(c(s))c'(s) = 0, \quad (3.44)$$

signifiant que le vecteur tangent $c'(s)$ est orthogonal à toutes les lignes de la matrice Jacobienne. De plus, en utilisant le fait que s est la longueur d'arc, on peut montrer que la norme du vecteur tangent est égale à 1. Cela ne suffit pas à déterminer ce dernier de façon unique, puisqu'il peut pointer dans deux directions opposées suivant le sens dans lequel on se déplace sur la courbe. On définira dans la suite le vecteur tangent comme étant celui qui correspond à une orientation positive de la courbe.

Précisons cette dernière notion en introduisant la matrice Jacobienne augmentée :

$$\begin{pmatrix} H'(c(s)) \\ c'(s)^* \end{pmatrix}, \quad (3.45)$$

où A^* désigne la transposée complexe d'une matrice A .

Cette matrice est de plein rang puisque le Jacobien est de rang maximal N (i.e. les N premières lignes sont linéairement indépendantes) et que le vecteur tangent est orthogonal aux lignes de $H'(c(s))$. Ainsi, son déterminant ne s'annulera jamais et par conséquent son signe reste constant sur l'ensemble de la courbe solution.

Définition 3.1 *On dit que la courbe $c(s)$ est orientée positivement, si le signe du déterminant du Jacobien augmenté est positif pour tout s .*

Sous la condition que la courbe solution soit orientée positivement, on peut alors déterminer le vecteur tangent de façon unique, et, de manière plus générale, on définira le vecteur tangent associé à une matrice de la façon suivante :

Définition 3.2 *Soit A une matrice de dimensions $N \times (N + 1)$. On appelle*

vecteur tangent induit par A , le vecteur unique v qui satisfait :

1. $Av = 0$,
2. $\|v\| = 0$,
3. $\det \begin{pmatrix} A \\ v' \end{pmatrix} = 0$.

Le calcul de ce vecteur dans la pratique, c'est à dire, dans une application numérique, peut s'effectuer à l'aide d'une décomposition QR de la transposée du Jacobien⁹. En effet, rappelons que, pour une matrice carrée, cette décomposition consiste à écrire celle-ci sous la forme du produit d'une matrice Q orthonormée et d'une matrice R triangulaire inférieure. La transposée du Jacobien n'étant pas carrée, la décomposition QR s'écrira sous la forme :

$$H'(c(s))^* = Q \begin{pmatrix} R \\ 0^* \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

L'annexe décrit la méthode des rotations de Givens utilisée pour déterminer Q et R à partir d'une matrice quelconque. Une fois une telle décomposition obtenue, l'obtention du vecteur tangent est directe. En effet, Q étant orthonormée, son inverse et sa transposée sont égales et on peut réécrire (3.46) comme suit :

$$Q^* H'(c(s))^* = \begin{pmatrix} R \\ 0^* \end{pmatrix}, \quad (3.47)$$

ce qui implique que la dernière ligne de Q^* , c'est à dire la dernière colonne de Q est orthogonale au Jacobien et par construction sa norme est égale à 1. Il ne reste donc plus qu'à s'assurer que le déterminant de la matrice Jacobienne augmentée est positif et, dans le cas contraire, multiplier la dernière colonne

9. Voir l'annexe de ce chapitre concernant la résolution des systèmes linéaires.

de Q par -1 pour obtenir le vecteur tangent. Or,

$$(H'(c(s)), c'(s)) = Q \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0^* & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.48)$$

d'où

$$\det \begin{pmatrix} H'(c(s))^* \\ c'(s)^* \end{pmatrix} = \det Q \det R = \det R. \quad (3.49)$$

La dernière égalité provient du fait que Q est le produit de matrices de Givens et son déterminant vaut par conséquent 1. Par ailleurs, R étant triangulaire, le calcul de son déterminant ne pose pas de problème.

Tous les éléments sont ainsi réunis pour réaliser la première étape, à savoir l'obtention d'une approximation qui va servir de valeur initiale pour calculer le point suivant sur la courbe des solutions de $H(X, \lambda) = 0$. Ce calcul est effectué dans l'étape de correction qui fait l'objet de la sous-section suivante.

L'Étape de Correction

L'avantage de la méthode de continuation par prédiction-corrrection est que, le point obtenu dans la méthode de prédiction étant proche de la courbe solution, on bénéficie de propriétés de forte convergence dans l'étape de correction. En appelant v , le "prédicteur", la correction va consister à rechercher le point de $H^{-1}(0)$ le plus proche de v , c'est à dire celui qui minimise la distance à la courbe selon le programme :

$$\min_{\omega} \{ \|\omega - v\| \mid H(\omega) = 0 \}. \quad (3.50)$$

Pour peu que la taille de pas soit choisie suffisamment petite dans la première étape, une recherche numérique de la solution au programme (3.50) est garantie de converger. Le pendant négatif à la vitesse rapide de calcul de nouveaux points sur la courbe est que la longueur de cette courbe peut varier

fortement d'un problème à l'autre et le nombre de points à calculer peut être très élevé. Cela est particulièrement critique si l'on souhaite, comme c'est le cas ici, calculer un grand nombre d'itérées successives d'un système dynamique. Le logiciel DAMP propose donc deux méthodes alternatives pour le calcul des variétés stable et instable associées aux points fixes hyperboliques : la méthode de Broyden, qui peut s'avérer plus rapide, mais risque d'échouer (par exemple en raison de la non inversibilité du Jacobien) et la méthode de continuation par prédiction-correction, qui garantit de meilleures propriétés de convergence mais peut être très lente pour certains systèmes.

La solution du problème d'optimisation (3.50) est obtenue en utilisant la méthode de Lagrange. On cherche ainsi la solution du programme auxiliaire :

$$w_0 = \arg \min \|v - w\| - 2\lambda^* H(w), \quad (3.51)$$

où λ désigne le multiplicateur de Lagrange, qui est ici un vecteur.

On obtient la condition du premier ordre¹⁰ :

$$2(v - w) = 2H'(w)^* \lambda. \quad (3.52)$$

D'où, le vecteur $(v - w)$ appartient à l'image de l'espace engendré par les colonnes du Jacobien. Une autre façon de l'exprimer est de dire que $(v - w)$ appartient à l'orthogonal du vecteur tangent $t(H'(u))$. En effet, pour toute matrice A , $\text{im}(A) = \ker(A)^\perp$, et le noyau du Jacobien est de dimension 1, puisque celui-ci est de plein rang en colonne. Comme par définition, le vecteur tangent est orthogonal à $H'(v)$, il forme une base de l'espace orthogonal au Jacobien. On peut ainsi redéfinir le problème à résoudre sous la forme :

Trouver un vecteur w tel que :

$$\begin{aligned} H(w) &= 0 \\ (v - w) \in (t(H'(w)))^\perp &\Leftrightarrow (t(H'(w)))^*(v - w) = 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

10. En utilisant le fait que $\|v - w\| = (v - w)^*(v - w)$.

Une solution approximative à ce système d'équations est déterminée en utilisant une approximation de la fonction H par son hyperplan tangent en v . Pour cela, on calcule le développement limité des équations du système (3.53) au voisinage de v , respectivement à l'ordre 0 et à l'ordre 1 :

$$\begin{aligned} H(w) &\approx H(v) + H'(v)(w - v), \\ t(H'(w))^*(v - w) &\approx t(H'(v))^*(w - v). \end{aligned} \tag{3.54}$$

et on résout le système linéaire obtenu en annulant le membre de droite des équations du système (3.54)

La Résolution du Système Linéaire Réécrit plus simplement, le système (3.54) est de la forme :

$$\begin{aligned} A(w - v) &= b, \\ t(A)^*(w - v) &= 0, \end{aligned} \tag{3.55}$$

où $A = H'(v)$ et $b = -H(v)$.

Proposition 3.2 *Soient A une matrice $N \times (N + 1)$ et v un vecteur de dimension $N + 1$. Alors, la solution w du système (3.55) est de la forme :*

$$w = A^+b, \tag{3.56}$$

où A^+ désigne l'inverse de Penrose-Moore :

$$A^+ = A^*(AA^*)^{-1}. \tag{3.57}$$

Le nouveau point de la courbe sera par conséquent déterminé à partir du prédicteur v sous la forme :

$$N(v) = v - H'(v)^+H(v). \tag{3.58}$$

Détermination de la Taille du Pas Il reste une indéterminée pour pouvoir implanter la méthode de prédiction-corrrection, à savoir la taille de pas h utilisée dans le prédicteur d'Euler :

$$v(h) = u + ht(H'(u)). \quad (3.59)$$

La stratégie adoptée consiste à évaluer *a posteriori* la taille de pas qui aurait été optimale pour le dernier prédicteur d'Euler. Différents critères peuvent être envisagés pour caractériser cette optimalité. Nous utilisons ici un critère basé sur le taux de contraction dans la procédure de Newton. Celui-ci est défini comme le rapport des normes des deux premiers pas calculés. C'est à dire, que pour v défini par (3.59) et

$$w(h) = v(h) - H(v)^+H(v), \quad (3.60)$$

le taux de contraction sera défini comme :

$$k(u,h) = \frac{\|H(v)^+H(w)\|}{\|H(v)^+H(v)\|}. \quad (3.61)$$

Si l'expression du taux de contraction en fonction de u et h était connue, on pourrait déterminer \tilde{h} tel que $k(u,\tilde{h}) = \tilde{k}$, où \tilde{k} est prédéterminé et correspondant au taux de contraction souhaité. L'idée est alors d'utiliser une approximation séparable de $k(u,h)$ et d'utiliser (3.61) pour calculer la composante qui ne dépend que de u . En effet, on peut montrer que :

$$k(u,h) = \kappa(u)h^2 + O(h^3). \quad (3.62)$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur, on a

$$k(u,\tilde{h}) = \kappa(u)\tilde{h}^2 = \tilde{k}, \quad (3.63)$$

d'où l'on déduit :

$$\tilde{h} = h\sqrt{\frac{\tilde{k}}{k(u,h)}}. \quad (3.64)$$

Autrement dit, le pas choisi à l'étape $n + 1$ sera celui de l'étape précédente multiplié par un facteur mesurant l'écart entre les taux de contraction souhaité et observé.

L'algorithme de Prédiction-Correction peut finalement être synthétisé de la façon suivante :

Conditions initiales

$$u_0 \in \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } H(u_0) = 0$$

$h > 0$ largeur de pas initiale

répéter

1:

$$u = x + ht \quad \text{Prédicteur d'Euler}$$

$$H'(u)$$

$$\text{Décomposition QR} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} R \\ 0' \end{pmatrix}$$

calcul du nombre de condition : $cond$

si $cond \leq c_{\max}$ **alors**

$i=0$

répéter

$$i = i + 1$$

$$u = u - A^+ H(u)$$

$$dist = \|A^+ H(u)\|$$

si $i > 1$ **alors**

$$contr = \frac{dist}{disto}$$

fin si

$$disto = dist$$

```
    si  $dist > d_{\max}$  ou  $contr > ct_{\max}$  alors
        réduire le pas  $h$  et retourner en 1
    fin si

    jusqu'à  $dist < tol$ 
         $x = u, t = t(A)$ 
        si  $\lambda = x[n + 1] > 1$  alors
             $h = -\frac{\lambda - 1}{t[n + 1]}$ 
        sinon
            adapter  $h$ 
        fin si
    fin si

    jusqu'à  $|h| < hmin$ 
```

3.3. Calcul des Variétés Stable et Instable d'un Point-Selle

Cette section décrit une méthode permettant de représenter sur ordinateur les variétés stables et instables de points-selle. Celle-ci, due à Kostelich, Yorke et You se base sur l'invariance de ces ensembles pour déduire les points qui les composent à partir d'une approximation dans un voisinage très proche de l'état stationnaire.

3.3.1 La Problématique

L'article de Kostelitch, Yorke et You (1996) (voir aussi You et al. (1991)) présente une méthode numérique permettant une représentation rigoureuse

des variétés stable et instable. En effet, leur méthode tient compte des erreurs d'approximation liées au calcul en virgule flottante. On s'intéressera dans le reste de cette section à une application T de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}^2 admettant un point fixe hyperbolique p dont on souhaite calculer les variétés stable et instable.

Afin de décrire la procédure, on se limitera au cas de la représentation de la variété instable. Le principe de leur méthode est de choisir un ensemble de points sur une courbe connexe suffisamment proche de la variété instable locale

$$W_{loc}^u(p) = \{q \in B(p, \varepsilon) \mid \lim_{k \rightarrow \infty} T^{-k}(q) = p\}, \quad (3.65)$$

du point fixe hyperbolique p et de calculer les n itérées successives de ces points par l'application T , pour un n donné. Si les erreurs d'approximation sont prises en compte, cette méthode permet de calculer une portion de la variété instable suffisamment éloignée du point stationnaire pour détecter des phénomènes dynamiques intéressants.

Le problème se pose alors dans les termes suivants : comment calculer les n itérées d'un graphe par une application T , de manière à obtenir une image fiable (dans un sens que l'on précisera dans la suite) de la vraie courbe.

Deux écueils sont soulevés par Kostelich et al. et pris en compte dans leur procédure. Le premier concerne la possibilité de points manquant dans le calcul des itérées de la courbe. En effet, une courbe continue sera considérée, lors de l'implantation sur ordinateur comme un ensemble discret de points, tels que la distance entre deux points successifs ne dépasse pas la taille d'un pixel. Autrement dit, la vraie courbe sera approximée par une courbe linéaire par morceau. Il faudra alors s'assurer que la portion de la courbe finale située entre deux points consécutifs est raisonnablement approchée par un segment de droite. Un contre-exemple est fourni par la figure 3.7. L'autre problème potentiel soulevé par les auteurs est l'éventualité de points erronés dus aux

erreurs d'approximation inhérentes au calcul numérique. Ce cas de figure est illustré par la figure 3.8. Ces deux problèmes sont particulièrement critiques lorsqu'on s'intéresse aux variétés associées aux points fixes hyperboliques de systèmes dynamiques non linéaires qui peuvent comporter de nombreux replis, bosses etc...

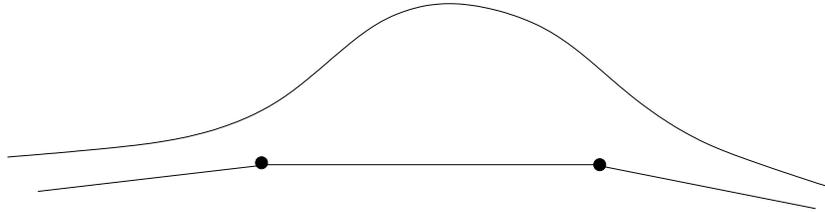


Figure 3.7: Problème de points manquants

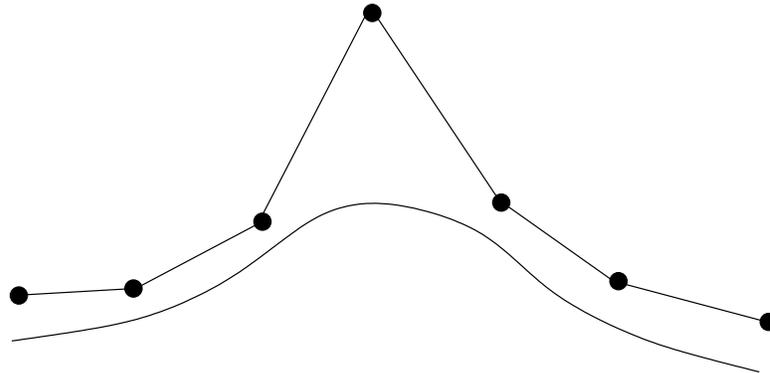


Figure 3.8: Problème de points erronés

Ces considérations montrent la nécessité de définir un critère de fiabilité de la représentation sur ordinateur des variétés stable et instable. Kostelich et al. appellent ε -graphe une telle représentation et la définissent de la façon suivante :

Définition 3.3 Soient $W^u(p)$ la variété instable pour le point fixe hyperbo-

lique p et \hat{W} une courbe linéaire par morceaux.

On dit que \hat{W} est un ε -graphe pour la variété $W^u(p)$ s'il existe un sous-ensemble connexe W_{partial}^u de $W^u(p)$, contenant p , tel que tout point sur un des segment composant \hat{W} se trouve à une distance inférieure à ε de W_{partial}^u .

Un choix de ε inférieur à la résolution de l'écran (ou de l'imprimante) garantit la fiabilité de la courbe tracée. La détection numérique de points homoclines ou hétéroclines peut donc être considérée avec confiance en utilisant cette méthode¹¹.

3.3.2 Description de l'Algorithme

Comme nous l'avons exposé dans la section précédente, le problème initial se ramène à la détermination d'une procédure garantissant la fiabilité du calcul des itérées successives sous une application T d'une portion de courbe donnée que l'on notera γ . L'application de cette procédure aux variétés stable et instable pose le problème supplémentaire du calcul de la courbe initiale γ .

Dans la pratique, il s'agit de trouver une partition de la courbe γ qui prenne en compte les problèmes de points manquants et de points erronés exposés précédemment. Dans un premier temps, on s'intéresse au cas des points manquants, c'est-à-dire qu'il va falloir s'assurer que la longueur des segments de la courbe calculée soit inférieure à la résolution du périphérique de sortie standard. Reprenant les notations des auteurs, on indice la courbe γ par $s \in [0,1]$ et on définit une partition de la courbe comme l'ensemble de points

$$\{\gamma(s_k); 0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m = 1\}. \quad (3.66)$$

L'image par la $n^{\text{ième}}$ itérée de T de la portion de courbe comprise entre

11. à une réserve près que nous exposerons plus loin.

$\gamma(s_k)$ et $\gamma(s_k + \delta_k)$ est une courbe connexe de longueur d'arc :

$$l_k = \int_{s_k}^{s_k + \delta_k} \left\| \frac{d}{ds} T^n(\gamma(s)) \right\| ds. \quad (3.67)$$

Une condition suffisante pour que cette longueur d'arc soit inférieure à un niveau de précision ε fixé est de choisir une distance δ_k entre deux indices successifs, donnée par :

$$\delta_k = \frac{\varepsilon}{r_n}, \quad (3.68)$$

où on a posé :

$$r_i = \max_{s \in [s_k, s_k + \delta_k]} \left\| \frac{d}{ds} T^i(\gamma(s)) \right\|. \quad (3.69)$$

Le problème qui se pose alors est le calcul des $r_i, i = 1, \dots, n$. Sous l'hypothèse que la matrice Jacobienne DT du système est Lipschitzienne, c'est à dire :

$$\exists C, \|(DT(p) - DT(q))v\| \leq C\|p - q\|\|v\|, \forall p, q, v \in B, \quad (3.70)$$

un calcul simple permet d'obtenir une relation de récurrence entre les r_i . En effet, on peut montrer que :

$$r_{i+1} \leq Cr_i^2 \delta_k + \|DT(T^i(\gamma(s_k)))\| r_i. \quad (3.71)$$

Etant donné un point $\gamma(s_k)$ de la partition, le point suivant sera alors déterminé en choisissant un pas δ_k tel que la distance entre les images $T^n(\gamma(s_k))$ et $T^n(\gamma(s_k + \delta_k))$ soit inférieure à ε , ce qui est assuré en résolvant l'équation :

$$\varepsilon = r_n \delta, \quad (3.72)$$

avec

$$\begin{aligned} r_1 &= C\delta_k + d_0, \\ r_{i+1} &= Cr_i^2 \delta_k + d_i r_i. \end{aligned} \quad (3.73)$$

La résolution est effectuée dans la pratique par la méthode de recherche dichotomique ou par la méthode des sécantes.

Une légère modification de ces équations permet de prendre également en compte les erreurs d'arrondi. En effet, chaque coordonnée est exprimée comme un nombre en virgule flottante en double précision (ce qui peut se traduire par des tailles mémoires différentes selon les implantations et donc par des précisions différentes) et comporte nécessairement un certain degré d'imprécision. Kostelich et al. montrent que la prise en compte de ces erreurs d'arrondi revient à reformuler l'équation (3.73) par :

$$\begin{aligned} r_1 &= C\delta_k + d_0 + 2C\varepsilon \\ r_{i+1} &= Cr_i^2\delta_k + (d_i + 2C\varepsilon)r_i \end{aligned} \quad (3.74)$$

Le calcul des points de la partition peut donc être effectué en utilisant récursivement l'algorithme Step suivant pour $k = 0, \dots, m - 1$:

L'algorithme Step(s_k, n)

1. Evaluation de la matrice Jacobienne pour les itérées de $\gamma(s_k)$ de 0 à n .
Calcul des d_i en utilisant la norme Euclidienne pour les matrices.
2. Calcul du pas à l'aide des équations (3.72) et 3.73. La procédure est schématisée par la figure .
3. Retourner $s_k + \delta_k$.

Une fois l'algorithme Step implanté, le calcul de la variété s'opère en déterminant successivement chaque point de partition et son image par l'application T^n , jusqu'à ce que l'indice du point suivant dépasse 1.

Les variétés stable et instable d'un point-selle peuvent s'éloigner arbitrairement de celui-ci au fur et à mesure que l'application est itérée. En général, la région d'intérêt se limite à une boîte B contenant l'état stationnaire. Ainsi, la procédure, telle qu'elle a été décrite jusqu'à présent, est susceptible de

mobiliser inutilement du temps de calcul et des ressources système en calculant un grand nombre de points hors de la région d'intérêt. Cette situation peut-être évitée et est également traitée dans l'article. Le concept introduit par les auteurs afin de remédier à cet inconvénient est celui de région de rejet. L'idée de base est que, s'il est possible de montrer que certains points ne reviendront jamais dans la région B en itérant l'application T , il n'est pas nécessaire de continuer les calculs et on peut passer à la détermination du pas suivant. Par exemple, si B est un ensemble positivement invariant pour l'application inverse T^{-1} , c'est-à-dire si $T^{-1}(B) \subset (B)$, alors pour tout point $p \notin B$, $T^i(p) \notin B$, pour tout $i > 0$. Une région de rejet est définie plus généralement de la manière suivante :

Définition 3.4 *Soient L et B deux ensembles. On dit que L est une région de rejet pour B sous l'application T si, lorsque $T^k(p) \notin L$ pour un k donné, alors $T^m(p) \notin B$ pour tout $m > k$.*

Notons enfin que certains points peuvent être pris à tort pour des intersections entre les variétés stable et instable. La figure 3.9 représente ce cas de figure. En effet, si la résolution du périphérique de sortie est insuffisante, une telle configuration peut donner l'impression que les courbes se croisent. Néanmoins, si le programme utilisé pour le tracé des courbes permet la visualisation du tracé des points en temps réel, ce problème ne se pose plus.

3.4. Conclusion

Ce chapitre a présenté les différentes méthodes numériques implantées dans le logiciel DAMP . La motivation qui a présidé à la création de ce logiciel était de fournir un outil permettant d'analyser les systèmes dynamiques bidimensionnels, tels que ceux qui apparaissent dans les deux premiers chapitre.

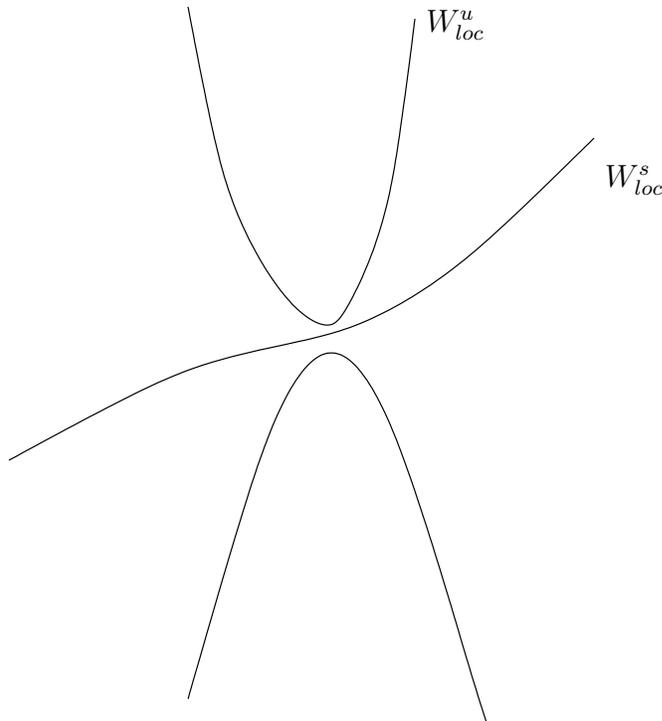


Figure 3.9 – *Erreur d'interprétation Possible*

En effet, une étude théorique n'est pas toujours possible, notamment lorsque l'on s'intéresse aux propriétés globales de ces systèmes. Le recours aux simulations est donc parfois nécessaire et les logiciels permettant de réaliser celles-ci font relativement défaut; relativement, car des initiatives en ce sens ont déjà été prises par le passé. Notamment, le logiciel DUNRO, développé par Duncan Sands et Robin De Vilder, vise un objectif similaire. Néanmoins sa version actuelle est inachevée et, aux dires même des auteurs, ne peut être exploitée par des personnes tierces.¹². De plus, son développement a été, pour l'instant, interrompu par les auteurs. Un autre logiciel du même type est

¹². En témoin l'avertissement sur le site consacré à DUNRO: "This is an alph version. Yes, it's not even alpha! It's here to make it easier for testers to get hold of it. You don't want to try it!".

DSTOOL, basé sur le programme **kaos** de J. Guckenheimer et S.Kim. Celui-ci est parfaitement fonctionnel et réalise bien d'autres objectifs que ceux visés par DAMP , mais n'intègre pas la possibilité de définir des systèmes dynamiques sous forme implicite.¹³ Or, bien peu de modèles dynamiques d'équilibre général sont caractérisés par un système sous forme explicite. Il y avait donc un manque à combler, qui a fourni l'incitation à la création de DAMP . Initialement, son développement a été motivé par un objectif concret, à savoir, la détection de points hétéroclines¹⁴ pour le système dynamique du modèle de Cazzavillan et al. (1998). En effet, il est possible de déterminer des conditions d'existence de points-selle dans ce système, qui nécessitent un certain degré de concurrence imparfaite. La conception d'une interface "user-friendly" s'est révélée nécessaire afin d'éviter la recompilation des sources à chaque modification de paramètres. Cette analyse aurait dû fournir un chapitre supplémentaire de cette thèse, mais nous n'avons pas été en mesure de mettre en évidence de tels points hétéroclines. Pour paraphraser Duncan Sands, DAMP est toujours dans sa phase alph et nécessite de nombreuses améliorations ainsi que l'introduction de tests unitaires systématiques afin d'augmenter sa robustesse. Notamment, l'utilisation de procédures numériques pour l'itération des systèmes sous forme implicite s'est avérée pour l'instant décevante et demande à être améliorée.

Ce chapitre achève la composante théorique de cette thèse et nous nous intéressons à présent à la confirmation empirique du lien entre l'existence de marchés en concurrence imparfaites et les fluctuations globales de l'économie.

13. Cette dernière affirmation n'est pas tout à fait exacte, puisque le code source de DSTOOL est distribué et qu'il est donc possible de rajouter ses propres procédures d'itération du système et de compiler le logiciel.

14. Un point hétérocline est un point fixe hyperbolique dont la variété stable (resp.instable) est confondue avec la variété instable (resp.stable) d'un autre point fixe

Le chapitre suivant conduit cette analyse sur données américaines à l'aide des méthodes de traitement du signal (analyse spectrale et cospectrale).

ANNEXE

F**La Résolution des Systèmes Linéaires par les Décompositions LU et QR**

Comme nous l'avons vu dans ce chapitre, les méthodes numériques pour trouver les solutions des systèmes d'équations non linéaires se basent de manière générale sur des procédures itératives consistant à résoudre des approximations linéaires successives du système. Ainsi, à chaque itération, il s'agit de résoudre un système d'équations linéaires de la forme :

$$A_n x_n = b_n \tag{F.1}$$

où A_n est une matrice carrée.

La solution, si elle existe et est unique, est trouvée en réécrivant la matrice A_n sous forme d'un produit de matrices permettant de simplifier le problème. Nous présentons dans cet appendice deux décompositions de ce type, la décomposition LU et la décomposition QR.

F.1. La décomposition LU

La décomposition LU est basée sur une réécriture matricielle de la méthode d'élimination gaussienne. Soit, par exemple, le système :

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 5 \\ 4x_1 - x_2 &= 4 \end{aligned} \tag{F.2}$$

En multipliant la première équation par 2 et en la retranchant de la seconde, on obtient le système équivalent :

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &= 5 \\ 5x_2 &= -6 \end{aligned} \tag{F.3}$$

dont la résolution est directe.

On peut réécrire cette dernière opération sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} \tag{F.4}$$

Nous voyons, sur cet exemple simple, que la matrice de transformation du système est triangulaire inférieure unitaire¹ et que la matrice du système transformé est triangulaire supérieure. Plus précisément, chaque ligne de A_n est remplacée par une combinaison linéaire des lignes de A_n , dont les coefficients sont donnés par la ligne correspondante de la matrice de transformation. De manière générale, une matrice sera appelée *transformation de Gauss*, si elle est de la forme :

$$M_k = I - \tau e_k^* \tag{F.5}$$

1. c'est à dire comportant des 1 sur la diagonale.

où

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \tau_{k+1} \\ \vdots \\ \tau_n \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \tau_i = \frac{A_{ki}}{A_{kk}} \quad (\text{F.6})$$

L'application de cette matrice aura pour effet d'annuler les composantes $A_{ki}, i = k + 1, \dots, n$. Afin d'obtenir un système triangulaire supérieur, on applique successivement les matrices M_1, M_2, \dots, M_{n-1} à la matrice du système. Des problèmes peuvent se poser, si, à la $k^{\text{ème}}$ étape, $A_{kk} = 0$. Dans ce cas, une décomposition LU de la matrice n'est pas possible.

Dans le cas où les transformations de Gauss successives sont bien définies, le système (F.1) peut se réécrire :

$$M_{n-1} \dots M_2 M_1 A_n x_n \equiv L^{-1} A_n x_n \equiv U x_n = L^{-1} b_n \quad (\text{F.7})$$

On en déduit l'expression de L

$$L = \prod_{i=1}^{n-1} M_i^{-1} = \prod_{i=1}^{n-1} (I + \tau^{(i)} e_i^*) = I + \sum_{i=1}^{n-1} \tau^{(i)} e_i^* \quad (\text{F.8})$$

La solution du problème initial est alors obtenue en résolvant successivement deux systèmes triangulaires :

$$Ly = b \quad (\text{F.9})$$

puis

$$Ux = y \quad (\text{F.10})$$

La matrice L étant triangulaire inférieure, on peut résoudre (F.9) dans l'ordre croissant des lignes en substituant le résultat obtenu dans la dernière ligne

traitée dans la ligne suivante. Le système (F.10) est résolu de la même façon en commençant par la dernière ligne et en remontant.

F.2. La Décomposition QR

Une autre décomposition très largement utilisée est la décomposition QR. Celle ci consiste à écrire la matrice A du système linéaire sous la forme du produit d'une matrice orthonormée Q et d'une matrice triangulaire supérieure R . L'intérêt d'utiliser une matrice orthonormée est que son inversion est directe, puisque la matrice inverse est dans ce cas égale à la transposée. On peut donc réécrire le système sous la forme :

$$Rx = Q'b \equiv c. \quad (\text{F.11})$$

La matrice R étant triangulaire supérieure, le système peut être résolu récursivement selon la méthode décrite dans la section précédente.

Plusieurs méthodes ont été développées pour effectuer une telle décomposition. La plus utilisée est probablement la méthode de Householder basée sur les projections orthogonales. Nous décrivons néanmoins ici une autre méthode, celle des rotations de Givens qui est implémentée dans le logiciel. L'idée est d'annuler successivement les différentes composantes sous la diagonale de la matrice A en effectuant des transformations appelées rotations. Soit un vecteur $X = (x,y)'$ de \mathbb{R}^2 . Une rotation d'angle θ du vecteur X est une application linéaire définie de la manière suivante :

$$R(X,\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (\text{F.12})$$

On vérifie directement que la matrice de l'application est orthonormée et

que son application à un vecteur de \mathbb{R}^2 revient à effectuer une rotation de ce vecteur d'un angle θ dans le sens des aiguilles d'une montre². Il s'agit à présent de déterminer l'angle θ permettant d'annuler la composante y du vecteur X . En notant c le cosinus de θ et s le sinus, il s'agit de résoudre :

$$\begin{aligned} cx + sy &= \|x\| \\ -sx + cy &= 0 \end{aligned} \tag{F.13}$$

On en déduit les expressions de c et s :

$$\begin{aligned} c &= \frac{x}{\|X\|} \\ s &= \frac{y}{\|X\|} \end{aligned} \tag{F.14}$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne.

À présent, supposons que l'on ait une matrice carrée A de dimension n que l'on souhaite exprimer selon la décomposition QR. La procédure proposée par Givens consiste à effectuer $n(n-1)/2$ rotations de manière à annuler toutes les composantes de A situées sous la diagonale. Ainsi, pour annuler la composante a_{ik} , $k > i$ de A , on pré-multiplie A par la matrice :

$$G(i,k,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ k \\ \\ \end{matrix}$$

$i \qquad k$

2. Si l'on note α l'argument du vecteur X , le vecteur $X' = R(X, \theta)$ aura pour composantes $x' = \cos(\alpha - \theta)$ et $y' = \sin(\alpha - \theta)$

où c et s sont donnés par :

$$\begin{aligned} c &= \frac{a_{ii}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ki}^2}} \\ s &= \frac{a_{ki}}{\sqrt{a_{ii}^2 + a_{ki}^2}} \end{aligned} \tag{F.15}$$

Cela aura pour effet de modifier les lignes i et k de la matrice A , et en particulier d'annuler la composante a_{ik} . Notons que les composantes déjà égales à zéro resteront nulles. En effectuant les pré-multiplications de A par $G(i,k,\theta)$ pour i et k variant respectivement de 1 à n et de $i+1$ à n , on obtient la matrice triangulaire inférieure R . La matrice Q est donnée par le produit des matrices de Givens :

$$Q = \prod_{i=1, \dots, n} \prod_{k=i+1, \dots, n} G(i,k,\theta) \tag{F.16}$$

En effet, le produit de matrice orthonormées est une matrice orthonormée³. L'algorithme des rotations de Givens est résumé par la figure.

3. Soient A et B deux matrices orthonormées. Alors $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B'A'$, et $(B'A')AB = B'IB = I$.

ANNEXE

G

Le Logiciel DAMP

Cette section décrit le fonctionnement du logiciel DAMP . Les différentes possibilités offertes sont illustrées sur l'exemple du système de Hénon à la section G.2. Le logiciel est accompagné d'un utilitaire permettant à l'utilisateur de rajouter ses propres systèmes, dont le fonctionnement est expliqué dans la section G.3

G.1. Installation

Le logiciel est fourni sous la forme d'un fichier au format tgz. Les différentes étapes d'installation sont :

1. Placer le fichier dans le répertoire désiré (par exemple, dans le répertoire home de l'utilisateur).
2. Taper dans une console la commande :

```
[user@foo user]$ tar -xvzf dynamics.tgz
```

Un répertoire DAMP / est créé.

3. Aller dans le sous répertoire DAMP /src/ et taper les deux commandes :

```
[user@foo src]$ .configure
```

```
[user@foo src]$ make
```

4. Afin de pouvoir lancer le programme à partir de n'importe quel répertoire, il faut ajouter le répertoire de l'exécutable à la variable d'environnement \$PATH. Pour ce faire, il faut rajouter les lignes suivantes dans le fichier \$HOME/.bashrc :

```
export DAMP=$HOME/DAMP
```

```
export PATH=$PATH:$DAMP/src
```

G.2. Utilisation du Logiciel : l'Exemple du Système de Hénon

Dans cette section, l'utilisation de DAMP est illustrée par un exemple, le système de Hénon.

Lancer l'application en tapant DAMP dans une console. Le système est choisi en sélectionnant 'Henon Map' dans le menu 'System->select' (l'opération est ici inutile car il s'agit du système par défaut). Les orbites en amont et en aval peuvent être calculées en double-cliquant les boutons gauche et droit de la souris. Le point de départ des orbites est fixé aux coordonnées de la souris. La figure G.1 représente les orbites calculées pour les valeurs par défaut des paramètres.

Les points stationnaires peuvent ensuite être déterminés à l'aide du menu 'Steady-States'. Il est possible de modifier les paramètres utilisés par la pro-

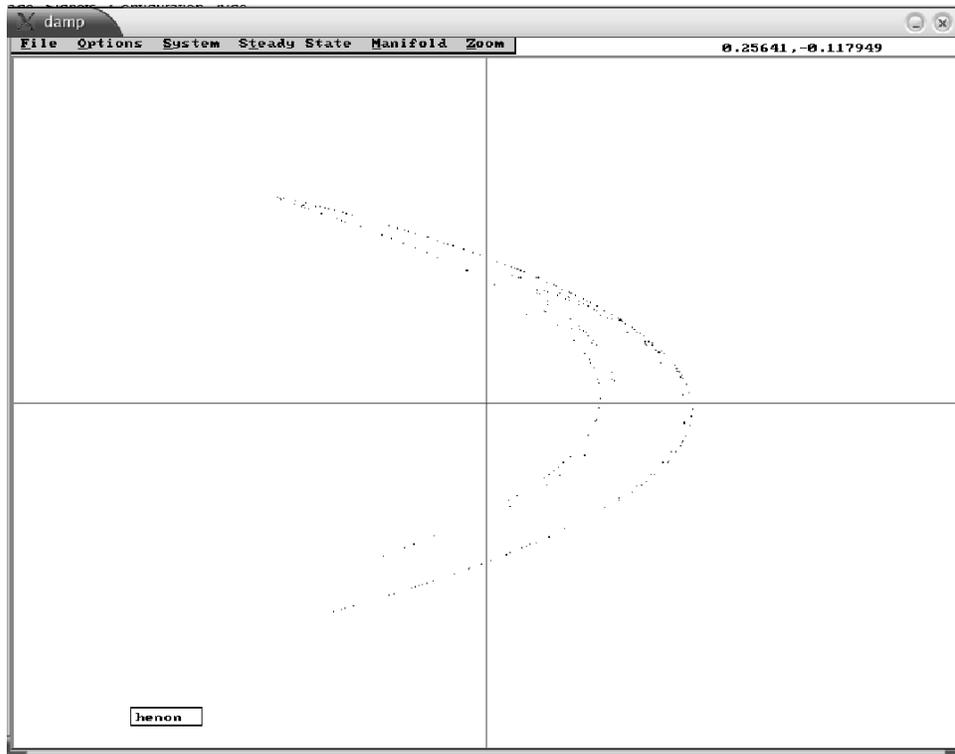


Figure G.1: Orbites du modèle de Hénon

cédure de Broyden en sélectionnant 'Parameters' et en rentrant les valeurs souhaitées à l'aide des touches du pavé numérique. La liste des paramètres

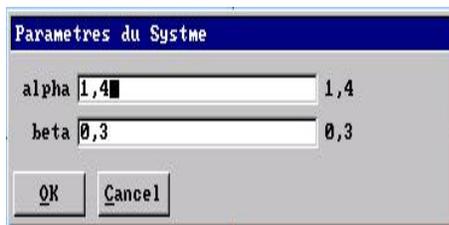


Figure G.2 – Le menu 'Steady States->Parameters'

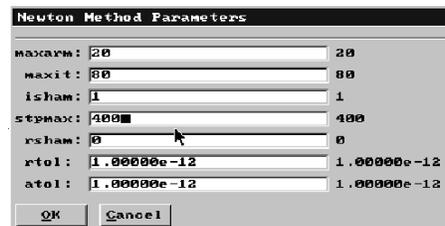


Figure G.3 – Paramètres de la procédure de Newton

et leurs significations est donnée dans le tableau . Sélectionner 'Compute' dans le même menu une fois les différents seuils de tolérance définis. Deux

croix devraient apparaître indiquant la présence de deux états stationnaires de type points-selle (les puits sont représentés par un 'o' et les sources par une astérisque).

Les états stationnaires étant des points selle, on peut tracer les variétés associées. Là encore, il est possible de contrôler les paramètres en choisissant 'Parameters' dans le menu 'Manifolds'. Ceux-ci sont résumés par le tableau . La selection de 'Compute' permet le calcul et le tracé des variétés. Un rond rouge apparaît alors autour d'un des deux états stationnaires. Il permet de sélectionner le point dont on souhaite représenter les variétés en cliquant sur le bouton gauche de la souris. Une fois le bon point choisi, la procédure est lancée à l'aide du bouton droit.

Il peut arriver, si les variétés quittent durablement la zone délimitée par l'écran, que de longues phases de calculs se produisent sans produire d'effets. Il est alors possible à tout moment d'interrompre la procédure en appuyant sur la touche 'a'. L'image obtenue pour les valeurs par défaut est reproduite dans la figure G.4.

Le menu 'Zoom' permet de redéfinir les dimensions du graphique. En sélectionnant 'Zoom in', on peut ainsi sélectionner à la souris une portion de l'écran afin d'effectuer un zoom sur cette partie du graphique. La figure G.5 donne un exemple d'agrandissement de l'image des variétés stable et instable précédemment calculées.

Modifier à présent les paramètres du système en choisissant $\alpha=0.1$ et $\beta=1$. Les résultats précédemment obtenus sont effacés de la mémoire et l'écran nettoyé. Recalculer les états stationnaires et tracer quelques orbites à proximité. Un résultat semblable à la figure devrait apparaître.

Calculer les variétés pour un des deux points-selle. L'image obtenue semble assez régulière et ne suggère pas *a priori* la présence de chaos. Néanmoins,

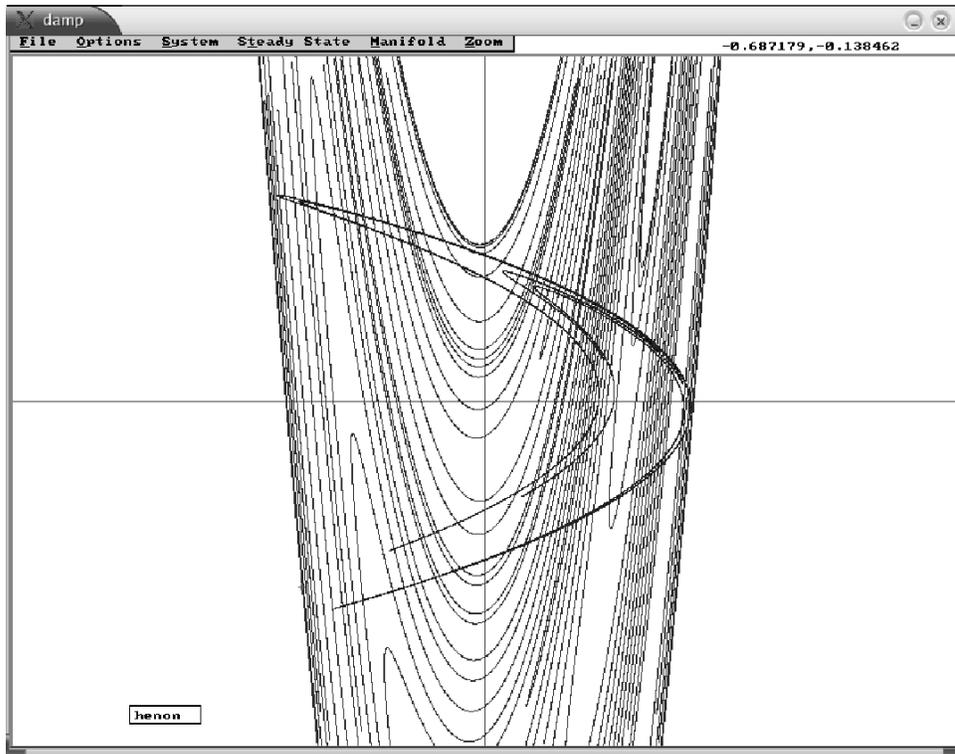


Figure G.4: Variétés stable et instable

un examen plus minutieux du graphique montre la présence de points homoclines. Pour voir cela, il est nécessaire de faire un zoom sur la région proche du point selle. Le choix de 'Zoom In' dans le menu 'Zoom' permet de délimiter la région que l'on souhaite en maintenant le bouton gauche appuyé. On obtient alors un résultat semblable à la figure G.5.

Pour revoir l'image dans sa globalité, on peut sélectionner 'Zoom out' qui effectue un zoom arrière que l'on arrête à l'aide du bouton gauche, ou cliquer 'reset' dans le menu ouvert par 'Define Box'.

Enfin, une fois que les résultats obtenus sont convenables, on sauve l'image obtenue à l'aide de 'File->Save Image' où un choix de formats est proposé.

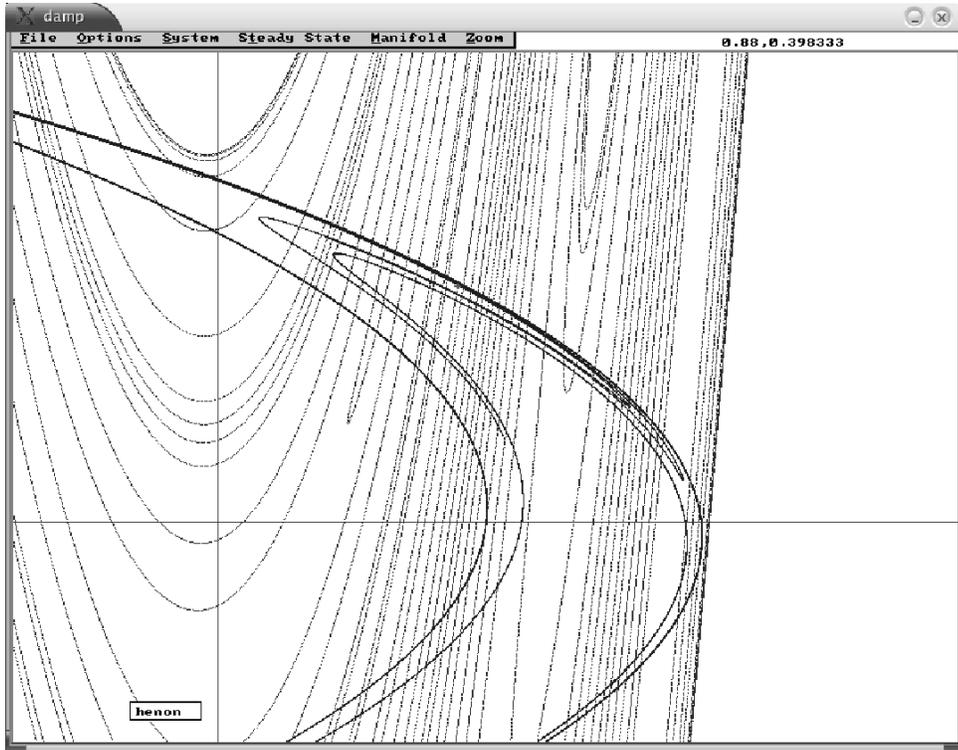


Figure G.5: Détail des variétés invariantes du modèle de Hénon

G.3. Ajout d'un Nouveau Modèle

L'ajout d'un modèle est facilité par un logiciel annexe qui interprète un fichier texte édité par l'utilisateur, le traduit en langage C et recompile DAMP. Il s'est en effet avéré qu'inclure un interpréteur au sein même du logiciel résultait en une perte de performance importante. La traduction des fichiers textes en langage C est effectuée à l'aide de l'exécutable *parser* qui se trouve dans le répertoire `$DAMP/src/parser`. D'autres fichiers doivent également être modifiés pour mettre à jour les menus. Ces modifications sont réalisées par le script bash `$DAMP/bin/newmodel`.

L'exemple ci-dessous est le fichier texte ayant servi à la création du modèle

de de Vilder :

names

prefix vilder

parameters

a=3.0

l=2.0

alpha1=0.5

alpha2=0.65

end

forward

f1=y

f2=(1/a+1-delta)*y-1/a*(x/sqrt(2-x))^(1/(1-alpha2))

#backward

#g1=

#g2=

implicit

h1=X-y

h2=Y-((1/a+1-delta)*y-1/a*(x/sqrt(2-x))^(1/(1-alpha2)))

jacobian

j11=0.0

j12=1.0

j21=-((1/a)*(1/(1-alpha2))*(x/sqrt(2-x))^(1/(1-alpha2))*(1/x-1/(2*(2-x))))

j22=1/a+1-delta

left jac

j11=1.0

j12=0.0

j21=0.0

j22=1.0

```
right jac

j11=0.0
j12=1.0
j21=-(1/a)*(1/(1-alpha2))*(x/sqrt(2-x))^(alpha2/(1-alpha2))*((8-3*x)/(2*(2-x)^(3/2)))
j22=1/a+1-delta
```

La ligne `prefix` définit un identificateur qui servira de préfixe aux différentes fonctions créées. Deux modèles distincts ne peuvent donc avoir le même préfixe. Par ailleurs, comme le montre la figure G.5, le préfixe est affiché en bas à gauche de l'écran de DAMP. Une section délimitée par les mots-clés `Parameters` et `end` permet ensuite de définir les noms et valeurs par défaut des différents paramètres du modèle. Les six sections suivantes définissent le modèle proprement dit. La section `implicit` correspond à la forme implicite du modèle utilisée lorsqu'il n'existe pas d'expression explicite pour les orbites en amont et/ou en aval. Les sections `left jac` et `right jac` définissent respectivement les dérivées du système sous forme implicite par rapport aux valeurs présentes et passées des variables. Notons enfin que les lignes de la section `backward` sont précédées d'un dièse qui est utilisé pour les commentaires.

Les fichiers de définition des modèles se trouvent dans le répertoire `$DAMP/user`. Pour rajouter un nouveau modèle à partir de ce répertoire, taper la commande :

```
[user@foo user]$ newmodel nom_fichier "nom du modèle"
```

De même, la suppression un modèle existant est effectuée à l'aide de la commande :

```
[user@foo user]$ delmodel prefix
```

où `prefix`, désigne le préfixe associé au modèle.

CHAPITRE

4**Dynamiques des Taux de Marge :
Une Analyse Empirique du cas des
États-Unis**

Sommaire

4.1	Introduction	179
4.2	Le Modèle Economique	181
4.3	Analyse Spectrale et Cospectrale	185
4.3.1	Présentation de la méthode	185
4.3.2	L'Analyse de Fourier	189
4.3.3	Le Cas Stochastique : Densités Spectrales	197
4.3.4	Estimation Spectrale	205
4.3.5	Analyse Cospectrale	213
4.4	Filtres Linéaires	216
4.4.1	Motivations et Définitions des Concepts	216
4.4.2	Exemples de Filtres	219
4.4.3	Caractéristiques des Filtres : Fonctions de Transfert et de Phase	220

4.4.4	Extraction de la Composante de Cycles: la Mé-	
	thode de Pedersen	222
4.5	La Relation Taux de Marge-Revenu aux États-Unis	225
4.6	Conclusion	234

4.1. Introduction

L'objectif de ce chapitre est de mettre en évidence la relation entre les fluctuations du pouvoir de marché et les variations de l'activité économique d'un point de vue empirique. L'hypothèse de concurrence parfaite s'avère en effet problématique car elle mène à des conclusions qui sont contredites par les données observées. Rotemberg et Woodford (1991) citent deux exemples de prédictions liées à l'hypothèse de concurrence parfaite qui sont réfutées par les observations. Le premier concerne la relation entre la production et les salaires. Dans un cadre concurrentiel, la courbe de demande de travail à une date t est décroissante et, le stock de capital étant prédéterminé et la technologie exogène, n'est pas susceptible d'être affectée par des chocs de demande. Ainsi, si des variations de la demande agrégée doivent influencer la production, cela ne peut se faire que par un déplacement le long de la courbe de demande de travail, ce qui implique une relation inverse entre la production et les salaires réels. Or, dès 1938, la critique qu'adressent Dunlop (1938) et Tarshis (1939) à la Théorie Générale de Keynes fait remarquer que les mouvements du salaire réel étaient plutôt procycliques. Une raison invoquée par Dunlop pour expliquer cette observation repose sur le fait mis en évidence par Kalecki (1938) que le degré de monopole varie de façon contracyclique. Ces remarques seront finalement prises en compte par Keynes lui-même et intégrées à son analyse (Keynes, 1939).

Il ressort donc qu'une augmentation conjointe de la production et des heures travaillées n'est envisageable qu'au travers d'un déplacement vers le bas de la courbe d'offre de travail. Celui-ci peut-être déterminé par un accroissement de l'utilité marginale de la richesse, consécutif, par exemple, à une politique de dépenses publiques. Il en découlerait donc une contracyclicité de

la consommation agrégée, contrastant là encore avec la réalité observée.

La réponse néoclassique à ces critiques a été principalement de considérer que les fluctuations économiques sont surtout le fait de variations technologiques exogènes. Outre le caractère insatisfaisant d'une explication externe au modèle des principaux mouvements de l'activité, se pose aussi la difficulté de mettre en relation la fréquence des innovations technologiques avec celle des phases de croissance. D'autres objections ont remis en cause l'utilisation du salaire horaire comme mesure de la productivité marginale du travail, mais l'utilisation de variables proxy plus adaptées (introduction de coûts d'ajustements des salaires, prise en compte de l'hypothèse de cycle de vie, ...), n'a fait que renforcer le constat de contracyclicité des salaires dans un cadre parfaitement concurrentiel.

À l'inverse, la reconnaissance du caractère imparfait de la concurrence au niveau macroéconomique permet de reproduire les faits qualitatifs observés sans le recours à des hypothèses peu standard et au prix d'une faible complexification des modèles. En effet, si l'on parvient à mettre en évidence le fait que les taux de marge sont contracycliques, un accroissement de la demande aurait pour conséquence une diminution des taux de marge et donc un déplacement vers le haut de la courbe de demande de travail, fournissant ainsi une explication simple et attractive à la procyclicité des salaires réels.

C'est pourquoi, cette dernière partie se propose de vérifier empiriquement l'importance de la concurrence imparfaite et de la contracyclicité des taux de marge dans l'explication des cycles économiques. Cette vérification est précisément l'objet de l'article de Rotemberg et Woodford, et l'apport de ce chapitre est par conséquent plus de nature méthodologique. En effet, la contracyclicité mise en évidence par ces auteurs concerne exclusivement les comouvements instantanés des deux séries. Il est donc intéressant d'étudier

leur relation afin de discerner si elle ne comporte pas une plus grande richesse en fonction de l'horizon temporel considéré. À ce titre, l'analyse spectrale est en mesure d'apporter des éclairages précis puisqu'elle permet de décomposer la relation entre variables économiques selon les différentes longueurs de cycle possibles et ainsi, d'identifier les fréquences où cette relation est la plus forte. En outre, les éventuels décalages entre séries peuvent également être détectés par cette méthode.

Nous avons par conséquent besoin de deux séries de données pour conduire cette analyse, la production intérieure et les taux de marge. Si la première est immédiatement disponible, la deuxième est plus problématique puisque le taux de marge n'est pas une variable observable. Il est donc nécessaire de construire cette série à partir des données disponibles, ce que nous décrivons dans la section suivante.

4.2. Le Modèle Economique

Nous décrivons à présent les considérations théoriques sur lesquelles se base la construction d'une série pour les taux de marge. Le principe adopté se base sur un perfectionnement de la méthode avec laquelle Solow s'est proposé de mesurer les chocs de productivité. En partant de la log-linéarisation d'une fonction de production incluant un progrès technique neutre à la Hicks, Solow calcule le taux de croissance de la productivité des facteurs comme la part de la croissance de la production qui n'est pas expliquée par la croissance des facteurs. Le caractère résiduel de cette mesure lui a valu le nom de "résidu de Solow". De fait, s'il semble raisonnable de conclure que le résidu de Solow traduit dans une certaine mesure les variations de la productivité, d'autres facteurs sont susceptibles d'entrer en compte. Par exemple, l'omission des

matières premières dans la spécification de la fonction de production peut conduire à une surévaluation du progrès technique.

L'article de Hall part de l'observation que l'utilisation du résidu de Solow comme mesure des changements technologiques ne se justifie que dans un cadre concurrentiel en l'absence de croissance des rendements. Si ces dernières hypothèses ne sont pas vérifiées, l'utilisation des prix comme variable proxy pour le coût marginal est à remettre en cause. C'est pourquoi Hall propose la démarche inverse qui consiste à poser des hypothèses sur les variations de la productivité et en déduire des implications sur la structure des marchés. Cet article vise principalement à construire une procédure de test permettant de détecter la présence d'imperfections sur les marchés. L'auteur décrit en outre une méthode pour déterminer le taux de marge moyen sur la période considérée.

Rotemberg et Woodford complètent cette analyse en décrivant un moyen de construire pour la série des variations du taux de marge. Cela leur permet d'analyser les co-mouvements de cette série avec celles de la production et des profits anticipés. Ces auteurs distinguent plusieurs scénarios (modèles de concurrence monopolistique, de marché de clientèle et de collusion implicite) conduisant à une variabilité des taux de marge. Les conclusions auxquelles aboutissent ces différents modèles étant mutuellement exclusives, l'estimation des corrélations observées leur permet de discriminer entre ces trois types de modélisations.

Les auteurs considèrent une économie comportant un certain nombre d'entreprises symétriques qui produisent un bien selon une technologie de la forme :

$$y_t^i = F(K_t^i, z_t(H_t^i - \bar{H}_t)), \quad (4.1)$$

où y_t^i , K_t^i , et H_t^i désignent respectivement la quantité produite, le stock de

capital utilisé et le nombre d'heures travaillées employées par l'entreprise i à la date t . La variable z_t correspond à l'état de la technologie à la date t et permet de rendre compte de l'effet du progrès technique sur la productivité du travail. Enfin, la fonction de production dépend d'un coût fixe en travail, \bar{H} permettant de réconcilier la présence d'imperfection de la concurrence avec la non significativité des profits aux États-Unis

Sous l'hypothèse de concurrence imparfaite, le taux de marge sur le coût marginal au niveau agrégé est donné par :

$$\mu_t = \frac{z_t F_H(K_t, z_t(H_t - \bar{H}))}{\omega_t}, \quad (4.2)$$

où ω_t désigne le salaire réel.

La log-linéarisation de cette équation autour de la tendance de long terme permet de construire une série des déviations du taux de marge en fonction de celles des autres variables, c'est à dire de la production, du capital, des heures travaillées et du niveau technologique. Néanmoins, ce dernier n'est pas observable, c'est pourquoi, on construit dans un premier temps une approximation des fluctuations de la technologie à partir de log-linéarisation de la fonction de production agrégée :

$$Y_t = F(K_t, z_t(H_t - \bar{H}_t)), \quad (4.3)$$

qui fournit l'équation :

$$\hat{y}_t = \frac{KF_1}{Y} \hat{k}_t + \frac{zHF_2}{Y} \hat{h}_t + \frac{z(H - \bar{H})F_2}{Y} \hat{z}_t. \quad (4.4)$$

On pose :

$$s_K = \frac{\rho K}{Y} \quad \text{et} \quad s_H = \frac{\omega H}{Y},$$

qui correspondent respectivement aux parts du capital et du travail dans la production.

Alors, l'équation (4.4) peut être utilisée pour déterminer les variations de l'état de la technologie, données par :

$$\widehat{z}_t = \frac{\widehat{y}_t - \mu_{S_K} \widehat{k}_t - \mu_{S_H} \widehat{h}_t}{1 - \mu_{S_K}}, \quad (4.5)$$

où l'on a utilisé la relation d'Euler :

$$\mu_{S_K} + \mu_{S_H} \frac{H - \bar{H}}{H} = 1.$$

La log-linéarisation de l'équation (4.2) fournit l'équation :

$$\widehat{\mu}_t = \widehat{z}_t - \widehat{\omega}_t + \frac{K F_{21}}{F_2} \widehat{k}_t + \frac{z F_{22} (H - \bar{H})}{F_2} \widehat{z}_t + \frac{z H F_{22}}{F_2} \widehat{h}_t. \quad (4.6)$$

L'homogénéité de degré 1 de la fonction de production agrégée peut être utilisée pour réécrire cette dernière équation sous une forme ne faisant intervenir que les parts du capital et du travail dans la production et l'élasticité de substitution σ de la fonction de production. Rappelons que cette dernière est définie par :

$$\frac{1}{\sigma} = \frac{f''(k) k f(k)}{f'(k) (f(k) - k f'(k))}, \quad (4.7)$$

où

$$k = \frac{K}{z(H - \bar{H})}, \quad f(k) = F\left(\frac{K}{z(H - \bar{H})}, 1\right). \quad (4.8)$$

On a alors¹ :

$$\widehat{\mu}_t = \widehat{z}_t - \widehat{\omega}_t + \frac{\mu_{S_K}}{\sigma} \left[\widehat{k}_t - \widehat{z}_t - \frac{\mu_{S_H}}{1 - \mu_{S_K}} \widehat{h}_t \right]. \quad (4.9)$$

L'expression finalement retenue est obtenue en substituant (4.5) dans cette équation, ce qui donne :

$$\widehat{\mu}_t = \frac{\sigma - \mu_{S_K}}{\sigma(1 - \mu_{S_K})} \widehat{y}_t + \frac{(1 - \sigma) \mu_{S_K}}{\sigma(1 - \mu_{S_K})} \widehat{k}_t - \frac{\mu_{S_H}}{1 - \mu_{S_K}} \widehat{h}_t - \widehat{\omega}_t. \quad (4.10)$$

1. Du fait de l'homogénéité de degré 1, on peut montrer que

$$F_{21} = -\frac{k f''(k)}{z(H - \bar{H})} \quad \text{et} \quad F_{22} = -\frac{k^2 f''(k)}{z(H - \bar{H})}.$$

A l'inverse des articles précités, nous ne supposons pas que les déviations sont déterminées à partir d'une tendance linéaire commune, mais, suivant en cela Burns et Mitchell, définissons la composante cyclique comme les fluctuations de fréquence supérieure à $\pi/16$, c'est à dire dont la durée n'excède pas 8 ans. En accord avec cette définition, les écarts à la tendance sont déterminés de manière à minimiser les effets de distortion de la procédure de filtrage, et, de ce fait, le risque d'introduire des cycles fallacieux lors de l'extraction de la composante cyclique. Par ailleurs, ce chapitre cherche à apporter des éclairages sur la décomposition de la relation revenu - facteurs de marge en termes des différents horizons temporels ainsi que sur l'avance ou le retard de l'une de ces séries par rapport à l'autre. Avant de présenter les résultats empiriques, nous décrivons donc la méthodologie employée, à savoir l'analyse spectrale et cospectrale.

4.3. Analyse Spectrale et Cospectrale

4.3.1 Présentation de la méthode

L'analyse macroéconomique dynamique explique les évolutions temporelles des différentes variables macroéconomiques au moyen de modèles théoriques. Ces évolutions comportent généralement une composante de long terme (appelée *tendance*) et des variations autour de cette tendance qualifiés de *cycles*. L'approche économétrique traditionnelle adopte également cette approche. Ainsi, les modèles à corrections d'erreurs, par exemple, distinguent, dans les relations entre différentes variables, une composante de long terme (tendance), la relation de cointégration, et des fluctuations de court terme. Ces

modèles permettent donc de spécifier des relations distinctes entre plusieurs variables selon l'horizon temporel étudié.

L'analyse spectrale généralise cette idée en considérant la composante de cycle comme étant elle-même constituée de différentes composantes qui correspondent à des fréquences, des amplitudes et des phases (décalages) différentes. Ainsi, l'avantage de l'analyse spectrale par rapport aux méthodes économétriques traditionnelles est qu'elle permet une détermination endogène, c'est à dire par les données, des horizons temporels pertinents. Elle permet ainsi de détecter avec précision quelles sont les composantes, et donc les horizons temporels, qui contribuent le plus à expliquer les variations des séries et dans un cadre bivarié de distinguer la relation entre deux séries selon la durée des cycles considérée.

L'analyse spectrale trouve ses fondements dans les travaux de Fourier qui décrivent la représentation des fonctions périodiques à l'aide des fonctions trigonométriques sinus et cosinus. Ainsi la composante correspondant à une fréquence ω donnée sera de la forme :

$$C_\omega(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t), \quad -T \leq t \leq T. \quad (4.11)$$

Cette expression peut se réécrire

$$C_\omega(t) = \alpha \cos(\omega t + \phi), \quad (4.12)$$

avec $\alpha = A/\cos \phi = -B/\sin \phi$.

La forme d'une composante de fréquence donnée est donc obtenue à partir du graphe de la fonction cosinus pour cette fréquence en le décalant de ϕ vers la gauche et en le dilatant par un facteur α .

La forme retenue pour modéliser les fluctuations est la sinusoïde, d'une part parce que son emploi est pratique d'un point de vue technique et, d'autre

part, parce que la somme de sinusôides semble une représentation raisonnable des fluctuations d'un certain nombre de séries. Des méthodes basées sur des composantes primitives de formes différentes existent (par exemple Broadbent et Maksik (1992)), mais ne sont pas abordées ici.

On considérera dans la suite que les séries observées peuvent être décrites comme des sommes de composantes du type (4.11) associées chacune à une fréquence donnée. La figure 4.1 montre un exemple de fonction périodique qui peut être décomposée en trois composantes primitives du type (4.11). L'opération inverse consistant à reconstruire le signal à partir de ses différentes composantes est appelée *synthèse*.

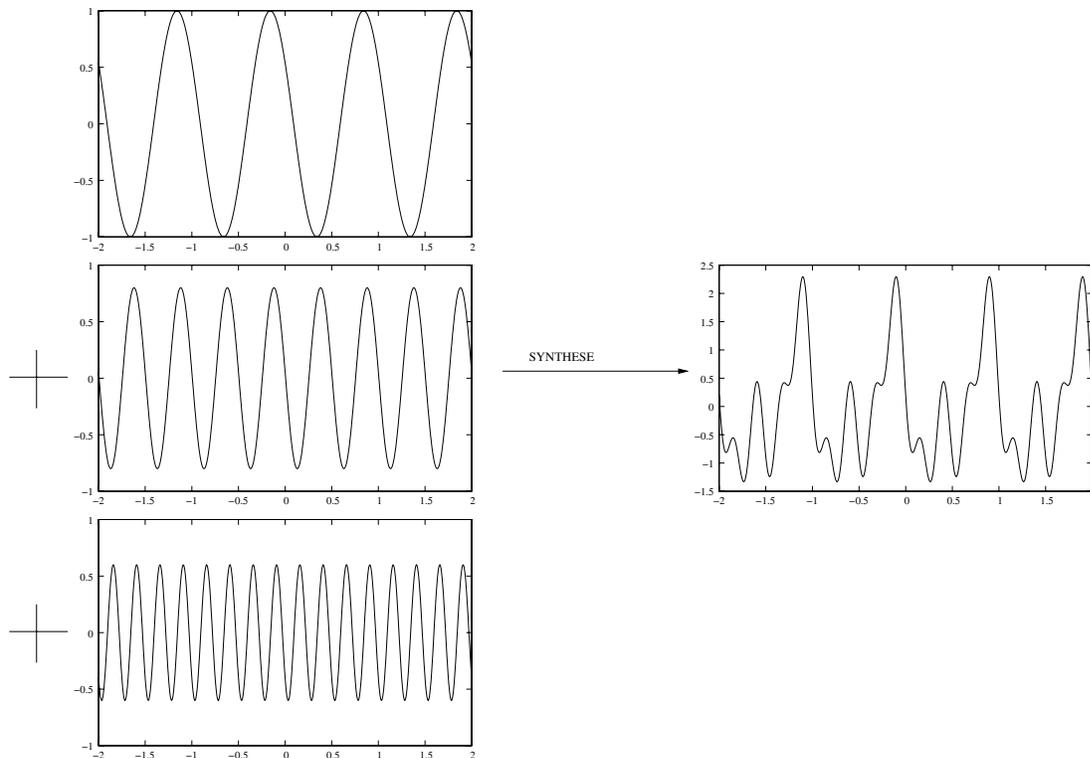


Figure 4.1 – *Décomposition d'une fonction périodique en composantes sinusoidales*

Les deux questions majeures qui nous préoccupent sont par conséquent :

- Dans quelle mesure une telle écriture sous forme de sinusoides est-elle possible? Autrement dit, quelles conditions doivent remplir les séries d'observations pour admettre une telle représentation?
- Comment isoler pour une décomposition donnée, les composantes qui ont le plus fort pouvoir explicatif.

Dans le cas des fonctions périodiques continues par morceau, la décomposition est toujours possible et porte le nom de *série de Fourier*. En effet, les fonctions $\sin(nx)$ et $\cos(nx)$, $n = 1, \dots, \infty$, forment un système orthogonal complet. Ainsi, pour toute fonction f de ce type, on a la représentation :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \quad (4.13)$$

Du fait de l'orthogonalité entre les éléments du système $\{\cos(nx), \sin(nx)\}, n = 1, \dots, \infty$, il est facile de mesurer l'impact d'une composante donnée sur la série obtenue par synthèse. Ce faisant, nous pouvons dégager les composantes qui contribuent le plus aux fluctuations de la série et mesurer de la sorte les fréquences les plus caractéristiques des cycles économiques.

L'analyse de Fourier, que l'on détaille dans la sous-section suivante, suffit à présenter les principaux aspects de l'analyse spectrale qui en reprend les principes. Son développement a essentiellement visé à résoudre un certain nombre de problèmes techniques auxquels sont confrontés ces principes lorsqu'on souhaite les appliquer à des données expérimentales. D'une part, les observations des séries économiques ne sont pas périodiques, mais présentent plutôt des caractéristiques qualitatives qui se reproduisent à intervalles de temps plus ou moins réguliers. Il s'agit donc d'enrichir l'analyse au cas de fonctions apériodiques, ce que nous traitons dans la sous-section 4.3.2. D'autre part, les données observées constituent des réalisations de processus

aléatoires, c'est à dire qu'elles sont entachées d'erreur. Il s'agit donc dans un premier temps d'adapter les concepts développés de manière à prendre en compte cette part d'aléa. Cela fait l'objet de la sous-section 4.3.3 qui introduit la fonction de densité spectrale. Cette fonction associe à toute fréquence, une mesure de la contribution de cette fréquence aux variations globales de la série. Il s'agit d'une fonction théorique en ce qu'elle nécessite la connaissance du processus générateur, qui, dans le cas des séries économiques est inobservable. C'est pourquoi, il est nécessaire de proposer un estimateur de la densité spectrale, ce qui, nous allons le voir, n'est pas sans poser problème. L'estimation spectrale est présentée dans la sous-section 4.3.4. Enfin, afin de clore cette présentation de l'analyse spectrale, le cas bivarié est examiné et l'on montre comment l'analyse cospectrale permet d'apporter des éclairages sur les similitudes entre séries économiques.

L'application des méthodes spectrales au cas des États-Unis clôt ce chapitre. Néanmoins, une condition nécessaire pour leur utilisation est de disposer d'observations stationnaires.² C'est pourquoi, l'analyse empirique est précédée d'une description des techniques de filtrage permettant la stationnarisation des séries économiques.

4.3.2 L'Analyse de Fourier

L'analyse spectrale, dont l'origine remonte aux travaux de Fourier, s'intéresse à la décomposition des séries dans le domaine des fréquences. Autrement dit, elle diffère de l'analyse traditionnelle des séries temporelles au sens où, plutôt que de chercher à expliquer les observations d'une série par ses valeurs passées, on considère la série dans son ensemble (elle est alors qualifiée

2. C'est à dire dont les moments principaux ne varient pas d'une période à l'autre.

de signal³⁾ et on cherche à exprimer celle-ci sous la forme d'une somme de sinusoides de différentes fréquences. Cette décomposition effectuée, se pose la question de savoir quelles composantes expliquent le mieux les fluctuations de la série, c'est à dire quelles composantes contribuent le plus à la variance totale du processus. La réponse à cette question est fournie par la fonction de densité spectrale qui représente précisément, pour chaque fréquence, la contribution de la composante sinusoidale associée à la variance totale du signal. La théorie cospectrale permet quant-à elle d'analyser les co-mouvements qui caractérisent les différentes séries économiques. L'intérêt de cette méthode, par rapport à l'approche des séries temporelles dans le domaine du temps est donc d'apporter une information précise sur la longueur des cycles en mettant en évidence les périodicités cachées de celles-ci.

Le principe de base de l'analyse de Fourier est qu'il est possible d'approcher toute fonction déterministe par une somme infinie de composantes sinusoidales. Ce paragraphe décrit la manière dont une telle représentation, appelée transformée de Fourier, est construite⁴. Considérons la composante sinusoidale F donnée par :

$$F(t) = A \cos \theta = A \cos(\omega t + \phi), \quad (4.14)$$

où A est un paramètre appelé *amplitude* et θ est une fonction linéaire du temps appelée *phase*.

3. Cette terminologie est empruntée au domaine du traitement du signal numérique(digital signal processing). On utilisera également dans la suite indifféremment le terme de *processus* hérité de l'analyse dans le domaine temporel.

4. Cette section est redevable des discussions contenues dans Priestley (1981), Pedersen (1999b), Bresson et Pirotte (1995) et Smith (1997). Si le livre de Priestley est sans conteste le plus complet, Pedersen apporte des compléments quant aux applications économiques de la théorie. Enfin Smith apporte une introduction peu formalisée et intuitive de l'analyse spectrale.

L'utilisation des notations d'Euler permet de représenter F dans le plan complexe. On a, en effet :

$$F(t) = \frac{A}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}),$$

avec

$$\begin{cases} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \\ e^{-i\theta} &= \cos \theta - i \sin \theta \end{cases}$$

La position du système à un instant donné est donc obtenue comme la somme d'un vecteur dans le plan complexe d'argument θ et de son symétrique par rapport à la droite réelle (voir figure 4.2).

La phase peut être décomposée en une composante fixe ϕ , qui représente la phase à l'origine des temps, et une composante variable ωt . La variation instantanée de phase ω est appelée *fréquence angulaire* et est mesurée en radians par unité de temps. On définit la *fréquence circulaire* en exprimant cette variation par rapport à la longueur du cycle, c'est à dire :

$$\omega = 2\pi f,$$

où f est exprimée en cycles par unité de temps. Enfin, le temps écoulé lors du parcours d'un cycle complet est appelé *période* (notée T) et est donné par l'inverse de la fréquence circulaire : $T = 1/f$.

Représentation de Fourier des Fonctions Périodiques

L'article soumis par Joseph Fourier en 1807 à l'Institut de France présentait une démonstration de l'affirmation selon laquelle toute fonction périodique admettait une représentation sous la forme d'une somme de composantes sinusoïdales. Formellement, soit $X(t)$ une fonction périodique de période $2T$. Alors $X(t)$ peut s'écrire sous la forme d'une série, appelée série de Fourier,

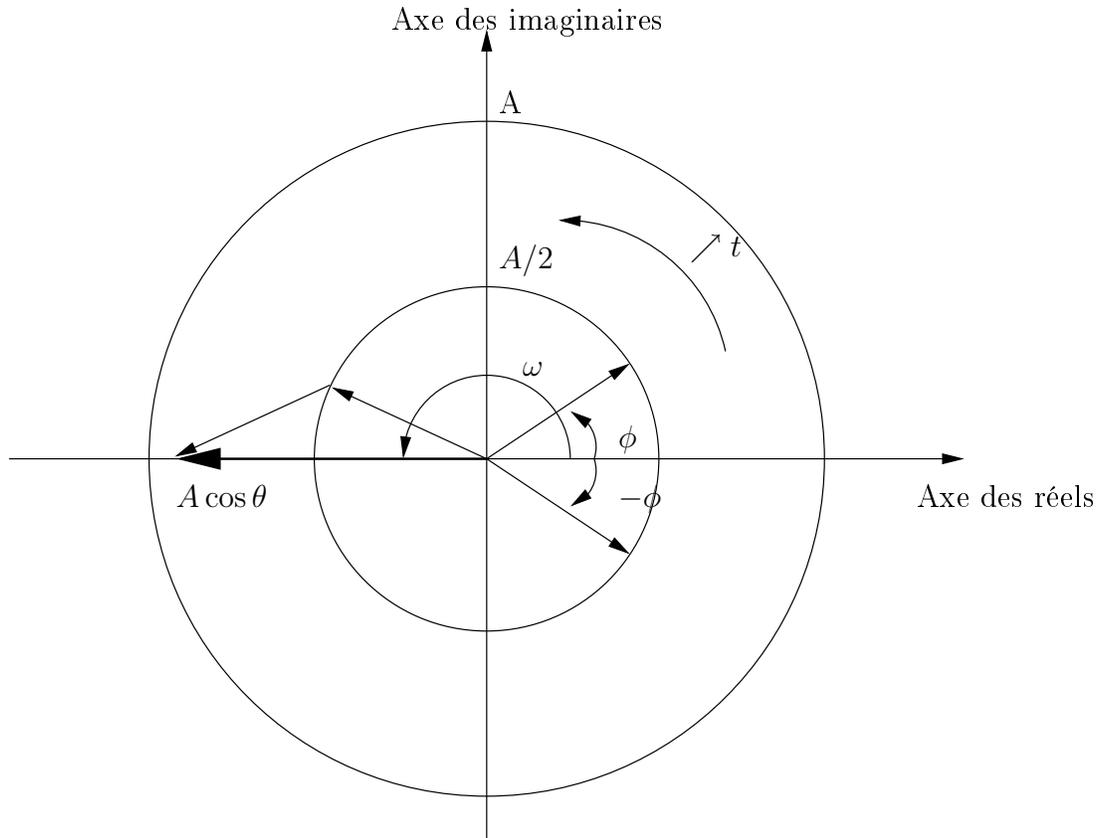


Figure 4.2 – Représentation d'une composante sinusoïdale dans le plan complexe

qui s'écrit :

$$X(t) = \frac{1}{2}\alpha_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j \cos \omega_j t + \beta_j \sin \omega_j t), \quad \omega_j = \frac{\pi j}{T}.$$

Ainsi, une série de Fourier correspond à la décomposition d'un signal en une composante constante, une composante de période $2T$ appelée *fondamentale* et des composantes de périodes $2T/k$, où $k=2,3,4\dots$ appelées respectivement première harmonique, seconde harmonique et ainsi de suite.

Afin de déterminer les valeurs des α_j et β_j , on peut remarquer que les fonctions $\cos \omega_j t$ et $\sin \omega_j t$, $j = 0, \dots, \infty$ forment une base orthogonale d'un

espace de dimension infinie muni du produit scalaire :

$$\langle U(t), V(t) \rangle = \int_{-T}^T U(t)V(t)dt.$$

Ainsi, pour trouver la valeur des coefficients, il suffit de projeter $X(t)$ sur les vecteurs de la base. Ces derniers étant deux-à-deux orthogonaux, les coefficients de projection sont égaux à ceux obtenus en projetant séparément $X(t)$ sur chacun des vecteurs (voir Gourieroux et Monfort, 1989). Ainsi, on a⁵

$$\begin{aligned}\alpha_j &= \langle \cos \omega_j t, \cos \omega_j t \rangle^{-1} \langle \cos \omega_j t, X(t) \rangle \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T}^T X(t) \cos \omega_j t dt,\end{aligned}$$

et de la même façon :

$$\beta_j = \frac{1}{T} \int_{-T}^T X(t) \sin \omega_j t dt.$$

Les coefficients de la série de Fourier sont finis si le signal $X(t)$ est absolument intégrable, c'est à dire :

$$\int_{-T}^T |X(t)| dt < \infty.$$

Il est intéressant, une fois la décomposition de Fourier effectuée, d'apporter des précisions quant à l'impact respectif de chaque composante sinusoïdale sur le signal $X(t)$. Plus précisément, on s'intéresse à la contribution de chaque

5. Le calcul des intégrales intervenant dans la détermination des coefficients est direct en utilisant les relations :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

et

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

terme de la série à la norme au carré de $X(t)$, dont la définition découle de celle du produit scalaire :

$$\begin{aligned}\|X(t)\|^2 &= \langle X(t), X(t) \rangle = \int_{-T}^T X(t)^2 dt \\ &= \int_{-T}^T \left(\frac{1}{2} \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j \cos \omega_j t + \beta_j \sin \omega_j t) \right) dt \\ &= T \left[\frac{1}{2} \alpha_0^2 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^2 + \beta_j^2 \right].\end{aligned}\quad (4.15)$$

Cette relation est connue sous le nom de relation de Parseval. Elle correspond à une généralisation du théorème de Pythagore pour les espaces de dimension infinie⁶.

On peut réécrire cette relation de façon plus compacte en notant $c_0 = \alpha_0/2$ et $c_n = (\alpha_n^2 + \beta_n^2)/2$:

$$\|X(t)\|^2 = 2T \sum_{j=0}^{\infty} c_n^2.$$

où le terme c_n^2 représente la contribution à la norme au carré du signal, du terme $\alpha_n \cos \omega_n t + \beta_n \sin \omega_n t$.

Le Cas des Fonctions Non Périodiques

Considérons à présent le cas où $X(t)$ est apériodique. Il n'est alors pas possible de l'exprimer sous forme de série de Fourier. L'idée est alors de considérer $X(t)$ comme la limite d'une fonction périodique de période $2T$

6. En effet, pour $X(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j U_j(t)$ avec $\langle U_i(t), U_j(t) \rangle = 0 \forall i \neq j$, la relation de Parseval stipule, de manière générale, que :

$$\|X(t)\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 \|U(t)\|^2.$$

lorsque T tend vers l'infini. Considérons en effet la fonction :

$$\begin{cases} X_T^*(t) &= X(t), & -T < t < T \\ X^*(t + 2pt) &= X(t), & p = \pm 1, 2, 3 \dots \end{cases},$$

c'est à dire, la fonction périodique de période T identique à $X(t)$ sur l'intervalle $[-T, T]$. Utilisant les résultats de la sous-section précédente, on peut exprimer cette fonction sous forme de série de Fourier :

$$X^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n \cos 2\pi f_n t + \beta_n \sin 2\pi f_n t),$$

avec $f_n = n/2T$.

La phase est ici exprimée en termes de fréquence circulaire. Ce choix sera utile lors du passage à la limite, car il permet d'écrire la série de Fourier comme une somme de Riemann. De plus, l'utilisation des notations d'Euler permet de réécrire la fonction sous une forme plus compacte :

$$X_T^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e^{i2\pi f_n t},$$

avec :

$$A_n = \begin{cases} \frac{\alpha_n - i\beta_n}{2}, & n > 0 \\ \frac{1}{2}\alpha_0, & n = 0 \\ \frac{\alpha_{|n|} + i\beta_{|n|}}{2}, & n < 0 \end{cases}.$$

En remplaçant les coefficients α_n et β_n par leurs expressions respectives, on obtient une expression unique pour le a_n :

$$A_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T X_T^*(t) e^{-i2\pi f_n t} dt.$$

D'où, pour $t \in [-T, T]$,

$$X_T^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X_T^*(t) e^{-i2\pi f_n t} dt,$$

qui peut être mis sous la forme d'une somme de Riemann en remarquant que $1/T = f_n - f_{n-1} = df_n$. Lorsque T tend vers l'infini, la variation de fréquence devient infinitésimale et cette expression admet alors la représentation intégrale suivante :

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P(f)e^{i2\pi ft} df, \quad (4.16)$$

avec

$$P(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-i2\pi ft} dt.$$

$P(f)$ est appelée transformée de Fourier du signal $X(t)$ et (4.16) est la représentation intégrale de Fourier de $X(t)$. La similarité de ces deux expressions a motivé l'appellation de *paires de Fourier* pour les désigner. L'expression d'un signal sous forme d'intégrale de Fourier fait donc intervenir deux intégrales sur $] - \infty, + \infty[$: la première correspond aux produits scalaires du signal avec les vecteurs de la base⁷; la deuxième intégrale traduit le fait que, la fonction étant apériodique, les fréquences doivent être définies sur un continuum pour qu'une représentation de Fourier soit possible.

Naturellement, il est nécessaire d'imposer des restrictions sur le signal pour que l'intégrale qui intervient dans l'expression de la transformée de Fourier soit définie. On peut montrer qu'une condition suffisante d'existence de $P(f)$ est que $X(t)$ soit absolument intégrable sur $] - \infty, + \infty[$.

Le passage aux fréquences circulaires s'est avéré nécessaire pour mettre la série sous forme de Riemann et passer à la limite. On peut à présent retrouver les expressions en termes de fréquences angulaires en opérant le changement

7. C'est à dire, de manière équivalente, aux coefficients de projection de $X(t)$ sur les vecteurs de la base $B = \{e^{-i2\pi ft}, f \in \mathbb{R}\}$, puisque $\|e^{-i2\pi ft}\| = 1$.

de variable $\omega = 2\pi f$:

$$\begin{aligned} X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i\omega t} dt \right) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \end{aligned}$$

avec

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-i\omega t} dt,$$

où le facteur $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ a été choisi de manière à préserver la symétrie entre les paires de Fourier.

4.3.3 Le Cas Stochastique : Densités Spectrales

L'analyse qui a précédé ne concernait jusqu'à présent que des fonctions déterministes du temps. Or, la théorie économique s'intéresse à des processus dans lesquels intervient une grande part d'incertitude, du fait de chocs non prévisibles sur les variables, de la nécessaire omission de certains facteurs explicatifs inobservables ou difficilement modélisables etc... Les notions présentées jusqu'à présent doivent donc être étendues au cas où les processus étudiés comportent une composante stochastique. Cette extension fait intervenir plusieurs difficultés supplémentaires. Tout d'abord, il ne s'agit plus d'étudier un signal unique mais une infinité de signaux correspondant à l'ensemble des réalisations possibles du processus. Par ailleurs, une réalisation particulière n'admet de représentation ni sous forme de série de Fourier (elle n'est pas périodique) ni sous forme d'intégrale de Fourier (une série stationnaire ayant une variance constante, la condition d'intégrabilité absolue est violée). De fait, il n'est pas possible de définir quelque chose comme la contribution d'une fréquence donnée à la variance totale du processus, en raison de cette non-intégrabilité. C'est pourquoi, la solution consiste à normaliser les

intégrales par la taille du domaine d'intégration. Ce faisant, on définit une mesure des contributions de chaque fréquence *par unité de temps*, appelée densité spectrale, que nous noterons $h(\omega)$.

Afin de fixer le cadre d'analyse, nous considérons le cas où $X(t)$ est un processus stochastique stationnaire au second ordre, c'est à dire :

Définition 4.1 *Un processus stochastique univarié $X(t), t \in \mathbb{R}$ est dit stationnaire au second ordre ou stationnaire au sens large si*

1. $E(X_t^2) < \infty \quad \forall t \in \mathbb{R}$
2. $E(X(t)) = \mu_t \quad \forall t \in \mathbb{R}$
3. $cov(X(t), X(s)) = cov(X(t+k), X(s+k)) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}, \forall k \geq 0$

La dernière condition implique en particulier que la variance est constante dans le temps.

Parler de contributions des différentes fréquences à la variance du processus ne fait sens que si l'on peut montrer qu'un processus stationnaire peut effectivement être vu comme la juxtaposition de composantes sinusoïdales de différentes fréquences. Le théorème suivant établit précisément la représentabilité de (presque) tout processus stationnaire sous la forme d'une somme de sinusoides et de cosinusoides. Différentes preuves de ce théorème peuvent être trouvées dans Priestley (1981) (pp. 246 et suivantes). Plus précisément, ce théorème s'énonce de la façon suivante :

Théorème 4.1 *Soit $\{X(t)\}, -\infty < t < \infty$, un processus stationnaire stochastiquement continu⁸ de moyenne nulle. Alors, il existe un processus orthogonal, $\{Z(\omega)\}$, tel que, pour tout t ,*

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega), \quad (4.17)$$

8. Un processus stationnaire $\{X(t)\}$ est dit stochastiquement continu en t_0 si $\lim_{t \rightarrow t_0} \{E(X(t) - X(t_0))^2\} = 0$

où l'intégrale est définie au sens de la moyenne quadratique. Ce processus est par ailleurs caractérisé par :

1. $E(dZ(\omega)) = 0, \forall \omega,$
2. $E(|dE(\omega)|^2) = dH(\omega), \forall \omega,$ où $H(\omega)$ désigne le spectre intégré de $X(t)$.⁹
3. Pour tout couple de fréquences distinctes (ω, ω') ,

$$\text{cov}[dZ(\omega), dZ(\omega')] = 0. \quad (4.18)$$

L'équation (4.17) est appelée représentation spectrale ou représentation de Cramer du processus $\{X(t)\}$. Il apparaît clairement dans l'énoncé de ce théorème, que la seule limite à la représentation des processus stationnaires dans le domaine des fréquences est la condition de continuité stochastique, ce qui lui confère une grande généralité et justifie de ce fait l'intérêt pratique de l'analyse spectrale. D'autre part, il apparaît dans la démonstration de ce théorème, que la fonction $Z(\omega)$ n'est pas différentiable. Il est par conséquent nécessaire d'utiliser une représentation sous la forme d'intégrale de Stieltjes.

Du fait du théorème de représentation spectrale, la question de l'influence des composantes (stochastiques) aux différentes fréquences sur la variance totale du signal est légitime et nous détaillons à présent cette notion.

Considérons, dans un premier temps, une réalisation donnée $\widehat{X}(t)$ du processus. Afin de contourner les problèmes mentionnés ci-dessus, cette réalisation peut être approximée par une fonction qui satisfait la condition d'intégrabilité absolue requise. Pour ce faire, on utilise la fonction tronquée :

$$\widehat{X}_T(t) = \begin{cases} X(t), & -T < t < T, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

⁹. En particulier, si $X(t)$ est caractérisé par une densité spectrale continue, $dH(\omega) = h(\omega)d\omega$.

Cette fonction admet une représentation sous forme d'intégrale de Fourier donnée par :

$$\widehat{X}_T(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G_T(\omega) e^{i\omega t} d\omega,$$

avec

$$G_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \widehat{X}_T(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Les fréquences étant définies sur un continuum, l'influence de la composante associée à une fréquence donnée sur la norme au carré du signal est nulle. En revanche, on peut mesurer l'influence des composantes de fréquences comprises entre ω et $\omega + d\omega$, qui est donnée par :

$$|G_T(\omega)|^2 d\omega.$$

Afin d'obtenir une mesure finie lors du passage à la limite, on normalise cette expression par la longueur de l'intervalle $[-T, T]$. Enfin, l'espérance de l'expression obtenue permet de construire une mesure qui ne dépende pas d'une réalisation particulière. On définit ainsi une fonction $h(\omega)$ appelée fonction de densité spectrale de puissance ou simplement spectre de $X(t)$ qui mesure la contribution (par unité de temps) de chaque fréquence à la *variance* du signal :

$$h(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left(\frac{|G_T(\omega)|^2}{2T} \right). \quad (4.19)$$

Le théorème suivant¹⁰ décrit la relation entre cette fonction et la fonction d'autocovariance du processus $X(t)$:

Théorème 4.2 *Soit $X(t)$ un processus continu stationnaire de moyenne nulle et de fonction d'autocovariance $\gamma(\tau)$. Alors la fonction de densité spectrale de puissance $h(\omega)$ associée est la transformée de Fourier de $\gamma(\tau)$, c'est*

10. Voir Priestley (1981) pour la preuve.

à dire :

$$h(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} \gamma(\tau) d\tau. \quad (4.20)$$

Ce résultat découle du fait, aisément démontrable, que le module au carré de la transformée de Fourier d'une fonction $f(t)$ est égal à la transformée de Fourier du produit de convolution $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(u-t)du$. L'espérance du produit de convolution étant égale à la fonction d'autocovariance $\gamma(\tau)$, l'expression (4.20) est obtenue par passage à la limite, *sous la condition que $\gamma\tau$ soit absolument intégrable.*

Densités Spectrales Discrètes

Dans la pratique, même si les phénomènes étudiés varient de façon continue, les données utilisées sont collectées à intervalles de temps réguliers. On ne dispose donc d'observations que sur une période finie et en temps discret. Il est par conséquent nécessaire d'adapter les développements précédents afin de pouvoir les appliquer concrètement. Le caractère fini de l'échantillon disponible n'est pas un problème en soi, puisqu'il est toujours possible compléter artificiellement celui-ci par des zéros ou par des répliques de lui-même. Ainsi, selon le choix effectué, on considère que les données sont issues d'un processus continu périodique ou apériodique mais absolument intégrable. Cependant, il est nécessaire de disposer d'échantillons de taille raisonnable si l'on souhaite avoir une information suffisante sur le processus générateur. Ce problème est particulièrement patent en macroéconomie où la construction de données agrégées n'a démarré qu'à la suite de la révolution keynésienne avec les travaux de Stone et Meade et où la fréquence des observations est basse. L'analyse spectrale requiert donc dans ce domaine l'utilisation de données mensuelles ou au moins trimestrielles.

Les modifications de la théorie liées au caractère discret des données empiriques sont de deux ordres : d'une part, l'intégrale par rapport à la variable temporelle devient une somme discrète et d'autre part, la gamme des fréquences prises en considération ne s'échelonne plus que sur un intervalle de longueur 2π . Ce dernier point s'explique par un phénomène découvert par Nyquist appelé "effet de superposition". Celui-ci consiste en l'impossibilité de distinguer les composantes de fréquences distantes d'un multiple de 2π . La figure 4.3 illustre cette difficulté. On peut en effet constater sur cette figure que pour $t = 0, 1, 2, \dots$, les valeurs des deux sinusoïdales sont égales. Si l'on ne disposait que d'un ensemble discret d'observations (celles représentées sur la figure par des petits carrés), il ne nous serait pas possible de déterminer si le processus générateur (continu) correspond à la fréquence fondamentale (trait plein) ou à l'une de ses harmoniques (pointillés).

De ce fait, il est inutile de représenter la fonction de densité spectrale hors de l'intervalle $[-\pi, \pi]$. Le passage du cas continu au cas discret peut s'opérer en considérant dans un premier temps le signal continu obtenu en reliant les points successifs de la fonction d'autocovariance par des segments de droites. On peut ensuite décomposer le domaine temporel en intervalles de longueur 2π et écrire :

$$\begin{aligned}\gamma(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{(2s-1)\pi}^{(2s+1)\pi} e^{i\omega\tau} h(\omega) d\omega \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(\omega+2s\pi)\tau} h(\omega + 2s\pi) d\omega.\end{aligned}$$

Cette expression peut être simplifiée lorsque τ prend des valeurs entières. En effet, dans ce cas, $\exp[i2\pi\omega s\tau] = 1$. On a donc, pour un signal en temps

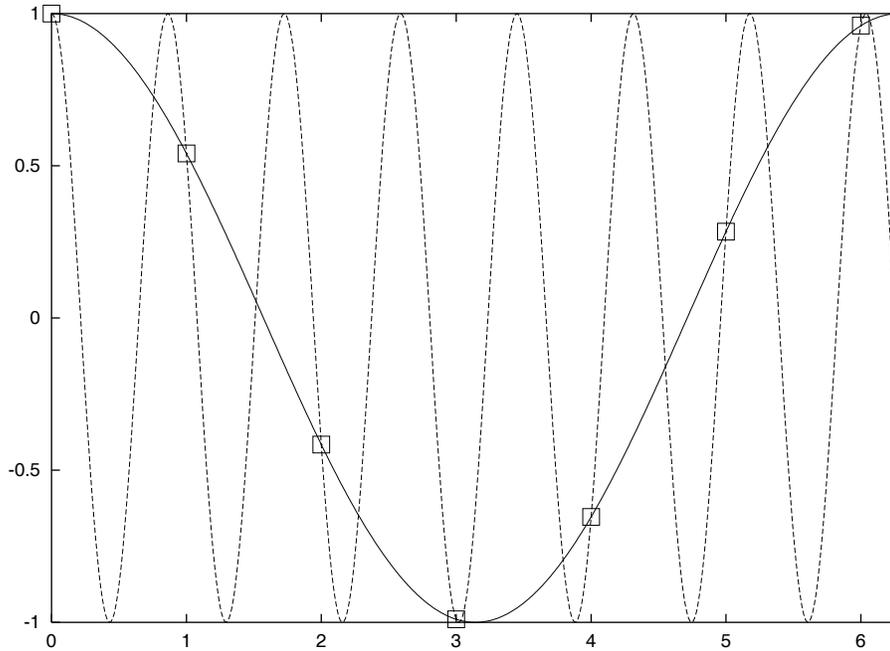


Figure 4.3: Le phénomène de superposition :

pour des valeurs entières de t , les valeurs de $\cos \omega_j t$ et $\cos(\omega_j + 2\pi n)t$ sont confondues.

discret :

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} \left(\sum_{s=-\infty}^{\infty} h(\omega + 2s\pi) \right) d\omega \\ &\equiv \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega\tau} h_d(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (4.21)$$

On peut inverser (4.21) et exprimer la densité spectrale sous forme de série de Fourier :

$$h_d(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \rho(\tau) e^{-i\omega\tau}. \quad (4.22)$$

En effet, on peut vérifier cette dernière relation à l'aide du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} h_d(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega &= \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma(s) e^{-i\omega s} \right\} e^{i\omega\tau} d\omega \\ &= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma(s) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega(\tau-s)} d\omega \right\} \\ &= \rho(\tau). \end{aligned}$$

En posant $\tau = 0$, il découle de l'expression (4.21) la relation suivante :

$$\gamma(0) = \int_{-\pi}^{\pi} h_d(\omega) d\omega, \quad (4.23)$$

c'est à dire que la variance instantanée du processus est égale à la somme des densités spectrales associées aux fréquences entre $-\pi$ et π . Ce résultat s'accorde bien avec la manière dont la fonction de densité spectrale a été construite (cf. équation (4.19)), c'est à dire comme la contribution des différentes fréquences à la variance moyenne.

En pratique, on utilisera plutôt la *fonction de densité spectrale normalisée*, qui a l'avantage de présenter les mêmes propriétés qu'une fonction de densité de probabilité :

Définition 4.2 Soit X_t un signal discret de fonction de densité spectrale $h_d(\omega)$. La fonction de densité spectrale normalisée est donnée par :

$$f_d(\omega) = \frac{h_d(\omega)}{\sigma_X^2},$$

où σ_X^2

On dispose ainsi d'une description dans le domaine des fréquences des processus discrets qui est fournie par la fonction de densité spectrale (4.22). C'est cette expression qui servira de base pour la construction d'estimateurs, que nous décrivons à présent.

4.3.4 Estimation Spectrale

Cette sous-section décrit la construction d'un estimateur asymptotiquement non biaisé de la fonction de densité spectrale. L'analyse des propriétés spectrales du processus se base sur la représentation graphique de cet estimateur qui permet de détecter les fréquences dominantes en identifiant les pics significatifs. Deux approches d'estimation ont été développées dans la littérature. L'approche *paramétrique*, qui n'est pas abordée ici, suppose connue la forme structurelle (généralement, un processus ARMA¹¹) du processus générateur. Il est ainsi possible de construire l'estimateur spectral à partir de la fonction de densité spectrale théorique du processus générateur retenu. À l'inverse, l'approche *non paramétrique* n'impose pas de restrictions *a priori* sur la vraie loi du processus. Pour un processus général, la distribution spectrale peut être décomposée en somme de deux fonctions (théorème de décomposition spectrale) : une fonction absolument continue et une fonction en escalier¹². Un processus caractérisé par un spectre purement discret peut être modélisé par une somme discrète de K composantes associées à K

11. Un processus ARMA est une suite $\{x_t\}_{t=-\infty, \dots, \infty}$ qui vérifie :

$$\Phi(L)x_t = \Theta(L)\epsilon_t, \quad \forall t,$$

où ϵ_t est un bruit blanc et Φ et Θ sont des polynômes de l'opérateur retard L ($Lx_t = x_{t-1}$).

Du fait de l'hypothèse de stationarité du processus, celui-ci admet nécessairement une représentation de type ARMA (théorème de Wold). L'aspect paramétrique intervient dans le choix de la distribution du bruit blanc.

12. L'énoncé exact du théorème de décomposition spectrale stipule en fait qu'une troisième fonction intervient dans la somme, mais elle est généralement omise dans l'étude des estimateurs spectraux du fait de ses propriétés pathologiques (dérivées nulles presque partout).

fréquences différentes :

$$X_t = \sum_{i=1}^K (A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)). \quad (4.24)$$

Si les fréquences ω_i dans l'expression (4.24) sont connues, le calcul des coefficients A_i et B_i est direct en appliquant la méthode des moindres carrés ordinaires au modèle obtenu en rajoutant un terme d'erreur dans l'équation. Dans le cas contraire, la méthode proposée par Schuster, consiste à balayer l'ensemble des fréquences $\omega_p = 2\pi p/N$, $p = 0, 1, \dots, N/2$, et à estimer, pour chacune de ces fréquences, l'amplitude au carré associée. Ainsi, si la grille est suffisamment fine (i.e. si le nombre d'observations N est suffisamment élevé), certaines des fréquences ω_p seront proches des fréquences ω_i qui interviennent dans la composition du processus X_t . Pour ces fréquences, l'amplitude au carré estimée sera significative, permettant de ce fait de détecter ce que Schuster a appelé les "périodicités cachées" du processus.

La représentation graphique des fréquences ω_p et des amplitudes au carré associée est appelée *périodogramme de Schuster* et constitue l'outil principal pour l'étude des processus ayant un spectre purement discret.

Le cas des processus de spectres purement continus pose, en revanche, des difficultés supplémentaires, comparables à celles qui sont soulevées par l'estimation de densités de probabilités. En effet, comme nous allons le voir, l'estimateur naturel de la densité spectrale, c'est à dire celui obtenu en remplaçant l'expression de la densité spectrale par sa version d'échantillon, a de très mauvaises propriétés statistiques. L'expression de cet estimateur est obtenue en remplaçant $\gamma(\tau)$ dans l'expression de la densité spectrale par l'autocovariance d'échantillon :

$$\hat{\gamma}(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-\tau} (x_t - \bar{x})(x_{t+\tau} - \bar{x}).$$

Ainsi, pour un processus réel, la densité spectrale est estimée par la fonction $\widehat{P}(\omega)$, dont l'expression est donnée par :

$$\widehat{P}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} \widehat{\gamma}(\tau) \cos \omega\tau. \quad (4.25)$$

On peut montrer que cette expression est, à un coefficient multiplicatif près, identique à celle du périodogramme, c'est pourquoi $\widehat{P}(\omega)$ est indifféremment appelée *fonction de densité spectrale d'échantillon* ou *périodogramme modifié*, ou plus simplement *périodogramme* lorsque le contexte ne permet pas l'ambiguïté. Le caractère continu ou discret du spectre est cependant déterminant dans la caractérisation des propriétés asymptotique du périodogramme. Nous ne détaillons ici, que le cas continu,

Il s'agit bien d'un estimateur asymptotiquement sans biais puisque

$$E\left(\widehat{P}(\omega)\right) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} E\left(\widehat{\gamma}(\tau)\right) \cos \omega\tau$$

converge vers l'expression (4.22) lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini. En revanche, il ne s'agit pas d'un estimateur convergent, puisqu'on peut montrer que sa variance est asymptotiquement strictement positive et que la covariance du périodogramme pour deux fréquences voisines est décroissante. Ainsi le périodogramme présente des fluctuations qui ne reflètent pas nécessairement l'aspect de la fonction de densité spectrale du processus générateur des observations, et ce, quelle que soit la taille de l'échantillon. Deux éléments expliquent les faibles qualités du corrélogramme. D'une part, les autocorrélations d'ordre élevé sont estimées à partir d'un petit nombre d'observations et engendrent de ce fait un degré d'imprécision qui persiste avec l'augmentation de la taille de l'échantillon. D'autre part, le calcul de $\widehat{P}(\omega)$ fait intervenir $2T - 1$ autocovariances d'échantillon, dont l'effet cumulé

explique la persistance d'une variance positive lorsque le nombre d'observations devient arbitrairement grand. Il semble donc naturel d'essayer d'améliorer les propriétés de l'estimateur en atténuant l'impact des autocovariances d'ordre élevé dans le calcul de l'expression (4.25).

La méthode de Blackman et Tukey propose de réaliser cet objectif en affectant un coefficient de pondération aux autocovariances d'échantillon, qui décroît avec le retard. Ainsi, ces auteurs proposent de substituer à l'expression (4.25) un estimateur de la forme :

$$\widehat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} \lambda(\tau) \widehat{\gamma}(\tau) \cos \omega\tau. \quad (4.26)$$

qui diffère de (4.25) par l'introduction du coefficient de lissage $\lambda(\tau)$, satisfaisant les conditions :

- Hypothèse 4.1**
1. $\lambda(\tau)$ est une fonction paire, c'est à dire $\lambda(-\tau) = \lambda(\tau)$,
 2. $\lambda(0) = 1$,
 3. $\lambda(\tau) = 0$ pour $|\tau| \geq M$ avec $M < N$,
 4. $\lambda(\tau)$ décroît de façon lisse sur $[0, \pm M]$.

Ainsi, $\lambda(\tau)$ pondère les retards des covariances d'échantillon sur un domaine restreint et porte le nom de fenêtre de décalage. Si l'on note $W(\omega)$ la transformée de Fourier discrète de $\lambda(\tau)$, on peut vérifier immédiatement que :

$$\widehat{f}(\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{P}(\theta) W(\omega - \theta) d\theta, \quad (4.27)$$

où

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-(T-1)}^{T-1} \lambda(\tau) \cos(\omega\tau) \quad (4.28)$$

porte le nom de fenêtre spectrale. L'espérance de l'estimateur en est déduite directement :

$$E\left(\widehat{f}(\omega)\right) = \int_{-\pi}^{\pi} f_d(\theta)W(\omega - \theta)d\theta. \quad (4.29)$$

Il en découle que l'estimateur ainsi construit comporte un biais d'autant plus important que la fenêtre spectrale diffère d'une impulsion de Dirac. Ainsi, le gain associé à la réduction de variance voit pour contrepartie l'introduction d'un biais supplémentaire. L'étude pratique des propriétés spectrales d'une série se caractérise donc par un arbitrage entre la variance et le biais de l'estimateur spectral. Une autre difficulté provient du fait qu'il faille s'assurer que la courbe ainsi construite soit positive sur tout son ensemble de définition. Comme nous allons le voir, cette propriété ne peut être assurée par la majeure partie des fenêtres spectrales qui ont été proposées.

Un exemple de fenêtre couramment utilisé a été proposé par Bartlett et consiste à attribuer un poids de 1 aux retards $|\tau| < M$ et 0 ailleurs. L'expression de $W(\omega)$ peut être obtenue de la manière suivante :

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=-M}^M M \cos s\theta = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin([M + 1/2]\theta)}{\sin(\theta/2)}. \quad (4.30)$$

Cette fenêtre, dite rectangulaire, et sa transformée de Fourier¹³ sont représentées sur la figure 4.4. Celle ci nous permet de préciser l'effet de l'application d'une fenêtre dans la construction du corrélogramme. D'une part, le lobe principal, centré autour de la valeur 0, va entraîner un lissage du corrélogramme. Il en résulte la réduction de variance souhaitée. Cependant, si la vraie densité spectrale présente des pics à des fréquences très voisines, ce lissage peut conduire à la fusion des pics en un pic plus large unique. De ce fait, l'estimation perd en précision, ou, pour utiliser la terminologie en

13. Dans le cas d'une fenêtre rectangulaire, la fenêtre spectrale est appelée noyau de Dirichlet.

vigueur, la résolution en fréquence diminue. Il est donc nécessaire d'effectuer un arbitrage entre la réduction de variance et la précision de l'estimation. Celui-ci est reflété par la valeur choisie pour le nombre de retards M . Des techniques existent pour un choix optimal de ce paramètre, mais sont malheureusement conditionnées par une connaissance du processus générateur des données, qu'il n'est pas possible d'obtenir en économie (voir Priestley, 1981). Dans la pratique, on a donc recours à la méthode de *fermeture spectrale* qui consiste à choisir dans un premier temps une valeur élevée de M (donc un lissage faible) et à diminuer cette valeur. Les pics robustes, c'est à dire ceux qui persistent en augmentant le degré de lissage, sont considérés comme significatifs. L'expérience suggère de choisir une valeur de M comprise entre $T/3$ et $T/5$.

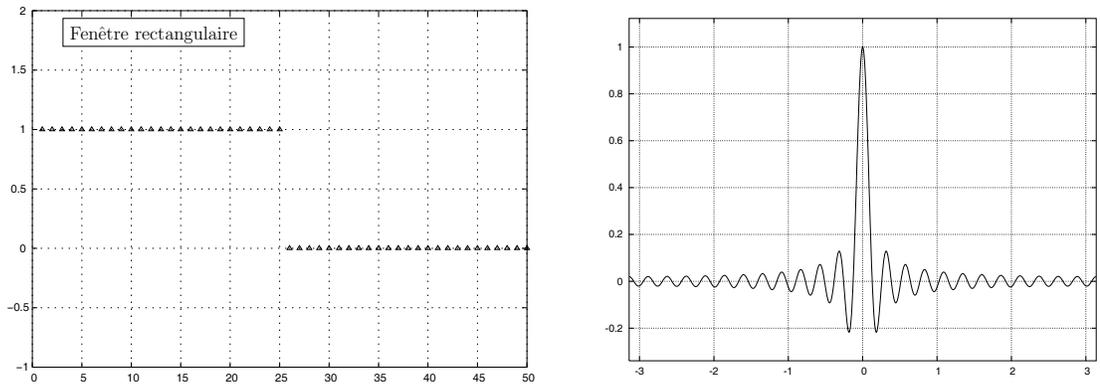


Figure 4.4 – Fenêtre rectangulaire et noyau de Dirichlet

Un autre effet indésirable est associé à la présence de lobes de part et d'autre du lobe principal, les lobes secondaires. Si la densité spectrale d'un signal comporte un pic important à une fréquence donnée, ceux-ci vont transférer la variance associée vers des bandes de fréquence où la variance est faible, engendrant un effet d'"écho" qualifié de fuite spectrale.

Différentes fenêtres couramment utilisées et leurs propriétés sont décrites

dans le tableau 4.1 (source : Jenkins et Watts, 1968). La perte d'information mesure le pourcentage de la variance qui réside dans les lobes secondaires.

	Rectangulaire	Bartlett	Tukey-Hanning	Parzen	Blackman
Fenêtre de pas	$\lambda(\tau) = \mathbb{1}_{\ \tau\ \leq M}$	$\lambda(\tau) = 1 - \frac{\ \tau\ }{M}$	$\lambda(\tau) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi\tau}{M} \right)$	$\lambda(\tau) = \frac{1}{6} \left(\frac{\ \tau\ }{M} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\ \tau\ }{M} \right)^3$	$\lambda(\tau) = 0.42 + 0.5 \cos \left(\frac{\pi\tau}{M} \right) + 0.08 \cos \left(\frac{2\pi\tau}{M} \right)$
Amplitude du pic principal	$2M$	M	M	$0.75M$	$0.84M$
Position du premier zéro	$0.5\theta M$	θM	θM	$2\theta M$	$1.5\theta M$
Position du premier lobe négatif	$0.72\theta M$		$1.19\theta M$		$2.22\theta M$
Perte d'information	1.178	0.903	1.013	0.0997	1.0
Variance	$2 \frac{M}{T}$	$0.667 \frac{M}{T}$	$0.75 \frac{M}{T}$	$0.539 \frac{M}{T}$	$0.61 \frac{M}{T}$
Degré de liberté	$\frac{T}{M}$	$3 \frac{T}{M}$	$2.667 \frac{T}{M}$	$3.71 \frac{T}{M}$	$3.28 \frac{T}{M}$
Largeur de bande standard	0.5	1.5	1.333	1.86	1.64

Tableau 4.1 – Propriétés des fenêtres spectrales courantes

4.3.5 Analyse Cospectrale

Les résultats introduits dans les sections précédentes peuvent à présent être généralisés au cas multivarié. On s'intéressera par conséquent dans la suite, à un processus $\{\mathbf{y}_t\}$, que l'on suppose covariance-stationnaire, c'est à dire :

Définition 4.3 Soit $\{\mathbf{y}_t\}_{t=-\infty}^{\infty}$ un processus stochastique à n dimensions ($n > 1$). Alors $\{\mathbf{y}_t\}$ est dit stationnaire en covariance si la matrice d'autocovariance :

$$\Gamma(\tau) \equiv E [(\mathbf{y}_t - \mu)(\mathbf{y}_{t-\tau} - \mu)'] \quad (4.31)$$

ne dépend que du décalage τ .

Afin de simplifier l'exposé, nous considérerons dans la suite le cas d'un vecteur de dimension 2, $\mathbf{y}_t = (X(t), Y(t))'$. Dans ce cas, la matrice d'autocovariance d'ordre τ s'écrit :

$$\mathbf{\Gamma}(\tau) = \begin{pmatrix} \gamma_X(\tau) & \gamma_{XY}(\tau) \\ \gamma_{YX}(\tau) & \gamma_Y(\tau) \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Les termes croisés représentent les covariances entre $X(t)$ (resp. $Y(t)$) et $X(t - \tau)$ (resp. $Y(t - \tau)$). La matrice d'autocovariance n'est généralement pas symétrique, traduisant l'asymétrie des effets de X sur Y et de Y sur X . Autrement dit, à l'inverse du cas univarié, l'autocovariance ne sera pas une fonction paire, $\mathbf{\Gamma}(\tau) \neq \mathbf{\Gamma}(-\tau)$. Cependant, on a par construction

$$\mathbf{\Gamma}(\tau) = \mathbf{\Gamma}(-\tau)', \quad (4.33)$$

puisque

$$\gamma_{XY}(\tau) \equiv E [(X(t) - \mu_X)(Y(t - \tau) - \mu_Y)] \quad (4.34)$$

$$= E [(Y(t - \tau) - \mu_Y)(X(t) - \mu_X)] \quad (4.35)$$

$$= \gamma_{YX}(-\tau). \quad (4.36)$$

Le *spectre multivarié* associé au vecteur \mathbf{y}_t est défini de façon similaire au cas univarié par :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathbf{y}}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Gamma}(\tau) e^{-i\omega\tau} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \mathbf{\Gamma}(\tau) (\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau) \\ &\equiv \begin{pmatrix} f_X(\omega) & f_{XY}(\omega) \\ f_{YX}(\omega) & f_Y(\omega) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Les termes hors-diagonale, appelés spectres croisés ou fonctions de densité cospectrale, précisent les relations entre les composantes de même fréquence associées à X et Y . Contrairement à la fonction de densité spectrale, le spectre croisé peut être à valeurs complexes. En effet, la partie imaginaire du spectre croisée est donnée par

$$\begin{aligned} f_{ij}(\omega) &= - \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \gamma_{ij}(\tau) \sin \omega\tau \\ &= - \left(\sum_{\tau=1}^{\infty} (\gamma_{ij}(\tau) - \gamma_{ji}(\tau)) \sin \omega\tau \right), \end{aligned} \quad (4.38)$$

où la dernière égalité est obtenue en utilisant (4.34) et $\sin(0) = 0$. On voit que la partie imaginaire s'annule lorsque $i = j$, mais peut être non nulle pour les termes croisés du fait de l'asymétrie de $\Gamma(\tau)$. Ce constat a motivé l'introduction de la terminologie suivante :

Définition 4.4 *Soit $\{\mathbf{y}_t\}$ un processus stochastique multivarié stationnaire en covariance. Si l'on note $f_{ij}(\omega)$ le spectre croisé entre les composantes i et j de \mathbf{y} , alors on peut écrire*

$$f_{ij}(\omega) = c_{ij}(\omega) + i \cdot q_{ij}(\omega). \quad (4.39)$$

La partie réelle du spectre croisé, $c_{ij}(\omega)$ est appelée cospectre, et la partie imaginaire, $q_{ij}(\omega)$ spectre de quadrature.

Le cospectre s'interprète comme la part de la covariance entre y_{it} et y_{jt} que l'on peut attribuer aux composantes stochastiques de fréquence ω . Le spectre de quadrature traduit, quant-à lui, le déphasage entre les deux séries. Une approche alternative consiste à considérer que la série Y_t est obtenue par l'application d'un filtre linéaire à la série X_t :

$$Y_t = \sum_{\tau=-M}^M \delta_\tau X_{t-\tau}. \quad (4.40)$$

Dans ce cas, on peut calculer l'expression de la covariance croisée :

$$\begin{aligned} \gamma_{XY}(t) &= E(X_t Y_{t-\tau}) \\ &= E\left(X_t \sum_{\tau=-M}^M \delta_\tau X_{t-\tau}\right) \\ &= \sum_{\tau=-M}^M \delta_\tau E(X_t X_{t-\tau}) \\ &= \sum_{\tau=-M}^M \delta_\tau \gamma_X(t-\tau), \end{aligned} \quad (4.41)$$

et utiliser celle-ci pour déterminer le spectre croisé :

$$\begin{aligned} f_{XY}(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \gamma_{XY}(t) e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \sum_{\tau=-M}^M \delta_\tau \gamma_X(t-\tau) e^{-i\omega t} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-M}^M \delta_\tau e^{-i\omega\tau} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \gamma_X(t-\tau) e^{-i\omega(t-\tau)} \\ &\equiv A(\omega) f_X(\omega), \end{aligned} \quad (4.42)$$

où la fonction $A(\omega)$, appelée *fonction de transfert* ne dépend que des caractéristiques du filtre et peut s'écrire sous forme polaire :

$$f_{XY}(\omega) = [G_{XY}(\omega) e^{i\Phi_{XY}(\omega)}] f_X(\omega), \quad (4.43)$$

où $\Phi_{XY}(\omega)$ représente la *phase*, c'est à dire le décalage, entre les composantes des séries X et Y à la fréquence ω et $G_{XY}(\omega)$ désigne le *gain* de Y sur X . Or, d'après l'expression alternative (4.39) du spectre croisé, nous voyons que le gain et la phase peuvent être déterminés à partir des calculs du cospectre et du spectre de quadrature de la manière suivante ::

$$\begin{aligned} G_{xy}(\omega) &= \frac{|f_{XY}(\omega)|}{f_X(\omega)} = \frac{\sqrt{c_{XY}(\omega)^2 + q_{XY}(\omega)^2}}{f_X(\omega)}, \\ \Phi_{XY}(\omega) &= \arctan \left[\frac{q_{XY}(\omega)}{c_{XY}(\omega)} \right]. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Enfin, un dernier indicateur intéressant est donné par la *cohérence* qui est une mesure globale de la relation entre les deux séries pour une fréquence donnée. Celle-ci est déterminée comme le coefficient de détermination de la régression spectrale de Y sur X à la fréquence ω et est définie par :

$$C_{XY}(\omega) = \frac{c_{XY}^2(\omega) + q_{XY}^2(\omega)}{f_X(\omega)f_Y(\omega)}. \quad (4.45)$$

Nous avons abordé dans cette sous-section la notion de filtre afin de définir les fonctions de gain et de phase. La section suivante décrit de manière plus approfondie les caractéristiques et l'intérêt pratique des filtres.

4.4. Filtres Linéaires

4.4.1 Motivations et Définitions des Concepts

L'approche retenue par les praticiens du traitement du signal numérique est de considérer les signaux comme la somme de diverses composantes qui contribuent chacune à la forme observée du signal étudié. Selon l'objectif poursuivi, tous les éléments qui constituent un signal ne présenteront pas la

même pertinence et il peut s'avérer nécessaire de "nettoyer" le signal en supprimant les composantes inintéressantes afin de n'en conserver que l'information exploitable. Autrement dit, on applique au signal un filtre qui produit en sortie un nouveau signal purgé des composantes superflues pour l'analyse. De manière générale, on appelle filtre toute transformation associant à un signal entrant x_t un signal sortant y_t . Ainsi, la suppression du bruit ne constitue qu'une des nombreuses applications des filtres. Parmi celles-ci, on peut citer l'élimination de la tendance déterministe, des composantes saisonnières, l'amplification ou la réduction de certaines composantes etc...

La description se limitera à une famille particulière de filtres : les filtres linéaires invariants dans le temps.

Définition 4.5 Soit h un filtre. Il est dit linéaire si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Homogénéité : $h(\lambda x_t) = \lambda h(x_t)$
2. Additivité : $h(x_t^1 + x_t^2) = h(x_t^1) + h(x_t^2)$

Il est de plus invariant dans le temps si on a :

$$h(\{x_t\}) = \{y_t\} \Rightarrow h(\{x_{t+s}\}) = \{y_{t+s}\},$$

où $\{x_{t+s}\}$ désigne le processus $\{x_t\}$ décalé de s périodes vers la gauche.

Intuitivement, l'invariance dans le temps signifie qu'un décalage dans le signal d'entrée induit un décalage identique du signal de sortie.

La linéarité est une propriété importante des filtres car elle permet de caractériser de façon simple leur effet sur les signaux au moyen d'une fonction appelée *fonction de réponse impulsionnelle*. En effet, un processus discret $\{x_t\}$ donné peut être décomposé en somme d'impulsions à chaque date t . Plus précisément, on peut écrire :

$$x_t = \sum_{t=-\infty}^{\infty} x_t^r, \quad (4.46)$$

où

$$x_t^\tau = \begin{cases} x_t, & \text{si } \tau = t, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or, ces impulsions sont toutes obtenues en appliquant une translation et une homothétie à la fonction *delta* :

$$\delta_t = \begin{cases} 1, & t = -1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad (4.47)$$

c'est à dire :

$$\{x_t^\tau\} = x_\tau \{\delta_{t-\tau}\}. \quad (4.48)$$

Définition 4.6 *La fonction de réponse impulsionnelle d'un filtre $h()$ est le signal obtenu en appliquant ce filtre à la fonction delta (4.47) :*

$$\begin{aligned} \{\phi(t)\} &= h(\{\delta_t\}) \\ &= \{\phi_t\}_{t=-\infty, \dots, \infty}. \end{aligned} \quad (4.49)$$

La connaissance de cette fonction permet de déterminer l'effet de ce filtre sur n'importe quel signal en procédant en trois étapes :

1. Décomposition du signal d'entrée en impulsions selon (4.46).
2. Application du filtre aux éléments $\{x_t^\tau\}$ de la décomposition. Du fait de l'homogénéité et de l'invariance dans le temps, on a :

$$h(\{x_t^\tau\}) = x_\tau h(\{\delta_{t-\tau}\}).$$

3. Synthèse du signal de sortie par juxtaposition des images obtenues (additivité) :

$$h(\{x_t\}) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} h(\{x_t^\tau\}). \quad (4.50)$$

La fonction de réponse impulsionnelle décrit ainsi comment chaque observation du signal entrant influence un certain nombre d'observations du signal

sortant. D'après (4.50) on a, pour une observation individuelle y_t du signal de sortie :

$$\begin{aligned}y_t &= h(x_t) \\ &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x_{\tau} h(\delta_{t-\tau}) \\ &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} x_{\tau} \phi_{t-\tau}.\end{aligned}\tag{4.51}$$

Les observations du signal de sortie sont donc obtenues en calculant une moyenne pondérée avec pour pondérations les coefficients de la fonction de réponse impulsionnelle. Si ces coefficients ne sont différents de zéro que sur l'intervalle $[s_1, s_2]$, l'expression (4.51) devient :

$$y_t = \sum_{\tau=t-s_2}^{t-s_1} x_{\tau} \phi_{t-\tau},$$

qu'on peut réécrire :

$$y_t = \sum_{s=s_1}^{s_2} x_{t-s} \phi_s.$$

4.4.2 Exemples de Filtres

Afin d'illustrer l'utilisation des filtres en pratique, nous décrivons dans cette section plusieurs filtres couramment utilisés. Le premier de ces filtres, appelé filtre passe-bas (low-pass filter) est employé lorsqu'on souhaite éliminer les composantes de hautes fréquences d'un signal. Les filtres passe-bas sont donc généralement utilisés à des fins de réduction du bruit. Une manière de procéder est d'effectuer un lissage du signal en remplaçant les observations par des moyennes pondérées des observations adjacentes où les pondérations décroissent avec la distance au point. Deux exemples de filtres passe-bas sont représentés dans la figure (4.5)

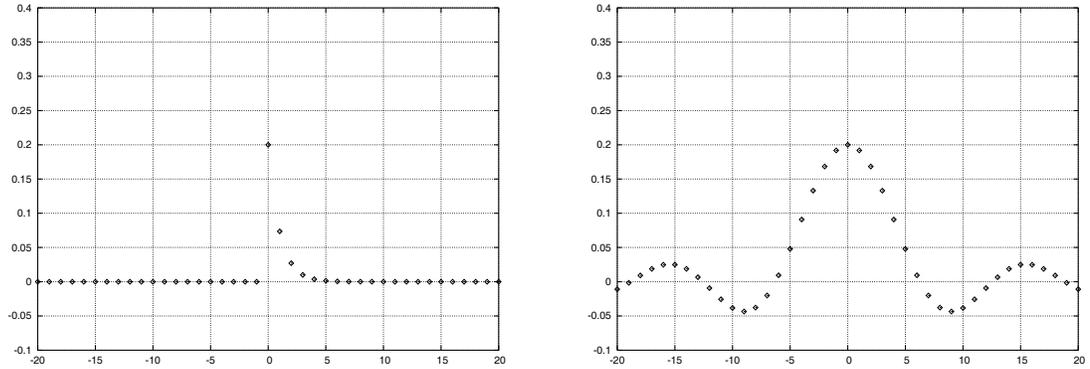


Figure 4.5 – Exemples de filtres passe-bas

Un filtre passe-haut, qui ne laisse passer que les hautes fréquences, peut alors être construit comme la différence entre la fonction delta et un filtre passe bas. Le résultat de ce calcul pour les exemples de la figure 4.5 est représenté dans la figure 4.6.

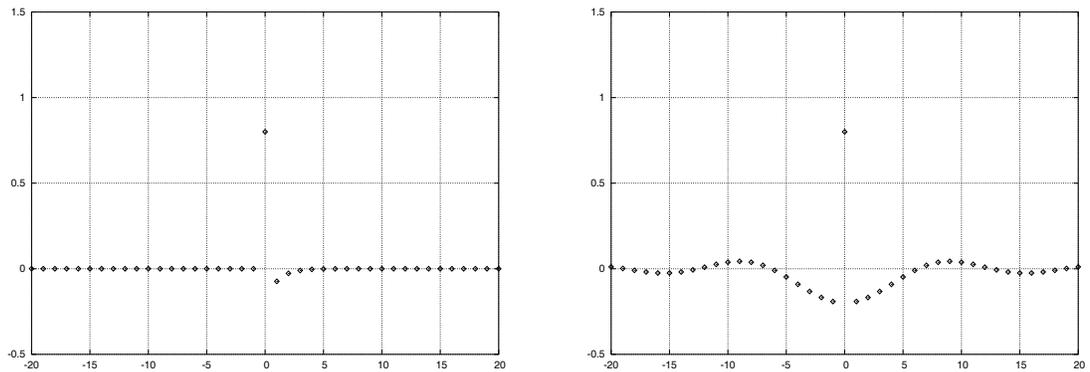


Figure 4.6 – Filtres passe-haut associés à la figure 4.5

4.4.3 Caractéristiques des Filtres : Fonctions de Transfert et de Phase

Nous avons vu en abordant l'analyse de Fourier qu'il était possible de décomposer un signal en somme de sinusoïdales et de cosinoïdales. On peut

s'interroger sur la raison qui a motivé le choix de ce type de décomposition au détriment d'autres alternatives comme par exemple des oscillations en dents de scie ou en créneaux. La raison est qu'une propriété importante des fonctions sinus et cosinus est qu'elles ne sont que très peu altérées par les systèmes linéaires. En effet, comme nous allons le voir, l'application d'un filtre linéaire à une composante sinusoïdale produit en sortie une composante sinusoïdale de même fréquence. Seules l'amplitude et la phase seront modifiées et ces modifications peuvent de ce fait être utilisées pour caractériser de manière biunivoque les filtres linéaires.

Considérons l'action d'un filtre sur l'exponentielle complexe associée à la fréquence ω :

$$\begin{aligned}h(e^{i\omega t}) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \phi_{\tau} e^{i\omega(t-\tau)} \\ &= e^{i\omega t} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \phi_{\tau} e^{-i\omega\tau} \\ &= e^{i\omega t} A_{\omega}.\end{aligned}$$

Ainsi, l'application du filtre revient dans ce cas à multiplier le signal d'entrée par une constante (complexe). Il n'y a donc pas de modification de fréquence mais seules l'amplitude et la phase changent. Plus précisément, on peut développer la fonction $A(\omega)$, appelée *fonction de réponse en fréquence du filtre*, sous la forme :

$$\begin{aligned}A(\omega) &= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \phi_{\tau} e^{i\omega\tau} = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \phi_{\tau} \cos \omega\tau - i \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \phi_{\tau} \sin \omega\tau \\ &= A_1(\omega) - iA_2(\omega),\end{aligned}$$

ou encore sous forme polaire :

$$A(\omega) = G(\omega) e^{i\theta(\omega)},$$

où le module $G(\omega)$ est donné par :

$$G(\omega) = \sqrt{A_1(\omega)^2 + A_2(\omega)^2},$$

et l'argument $\theta(\omega)$ par :

$$\theta(\omega) = \arctan \frac{A_1(\omega)}{A_2(\omega)}.$$

On a par conséquent :

$$h(e^{i\omega t}) = G(\omega)e^{i(\omega t + \theta(\omega))}.$$

L'effet du filtre est donc précisément de modifier l'amplitude d'un facteur $G(\omega)$ appelé *fonction de transfert du filtre*, le changement de phase étant donné par la *fonction de phase du filtre* $\theta(\omega)$. Un filtre passe-bas sera ainsi caractérisé par une fonction de transfert élevée pour les basses fréquences et faible pour les hautes fréquences.

4.4.4 Extraction de la Composante de Cycles : la Méthode de Pedersen

Dans l'analyse empirique des cycles, une première difficulté survient du fait de la définition même de cycles. En effet, si la plupart des séries économiques peuvent être vues comme la juxtaposition d'une tendance et d'une composante cyclique autour de cette tendance, ces deux éléments ne sont pas directement observables. De plus, la manière dont la décomposition d'une série en tendance et cycle est effectuée n'est pas neutre et l'application d'un filtre à une série peut entraîner des distortions telles que l'apparition de cycles fallacieux. Ce paragraphe vise ainsi à présenter une méthode, proposée par Pedersen (1999a), permettant de mesurer l'effet distorsif des filtres et, par

là même, de sélectionner le candidat optimal au sein d'une famille de filtres imparfaits.

Le principe sur lequel repose la méthode de Pedersen est l'évaluation de la distance entre la composante cyclique obtenue à l'aide d'un filtre particulier et celle résultant de l'application d'un filtre idéal, c'est à dire n'induisant aucune distortion. Afin de mieux cerner cette idée, considérons une série économique y_t , $t = 1 \dots T$ et sa décomposition :

$$y_t = \tau_t + c_t, \quad (4.52)$$

où τ_t et c_t désignent respectivement les composantes de tendance et de cycles. Dit autrement, τ_t correspond aux composantes de la série de fréquence inférieure à un seuil prédéfini ω_l , et c_t synthétise les fréquences au-delà de ce seuil. Extraire la composante de cycles d'une série économique suppose par conséquent :

1. la détermination de la fréquence de seuil au-delà de laquelle les fluctuations sont considérées comme des cycles économiques. L'utilisation d'un filtre déterminé de manière optimale permet de s'affranchir de l'arbitraire consistant à fixer ce seuil selon une idée *a priori* de sa valeur. À ce propos, Pedersen reconsidère dans un autre article (Pedersen, 1998), la manière dont les économistes ont jusqu'à présent effectué cette décomposition. En effet, depuis la parution de l'étude de Burns et Mitchell (1946), un large consensus s'est établi parmi les économistes pour fixer approximativement ce seuil à huit années, consensus qui, selon l'auteur, s'apparente à un mythe, non étayé par les faits empiriques.
2. l'application d'un filtre passe-haut qui extrait les composantes de fréquence supérieure au seuil ω_l et bloque les basses fréquences. Dans la pratique, néanmoins, deux effets indésirables sont inévitables. D'une

part, les fréquences faibles, qui entrent dans la détermination de la tendance, ne peuvent être complètement éliminées (phénomène de fuites de fréquences). D'autre part, les composantes de fréquences élevées sont atténuées au voisinage de la fréquence de seuil (compression). Comme la suite va le montrer, le caractère critique de ces deux effets dépend des propriétés de la série filtrée.

L'étude de la fonction de réponse en fréquences, ou, de manière équivalente, de la fonction de transfert d'un filtre permet de bien mettre en évidence la distance qui le sépare d'un filtre idéal. À titre d'exemple considérons la figure 4.7 qui représente les fonctions de transfert respectives d'un filtre passe-haut idéal et du filtre de Hodrick-Prescott pour une valeur de 1600 du paramètre λ .

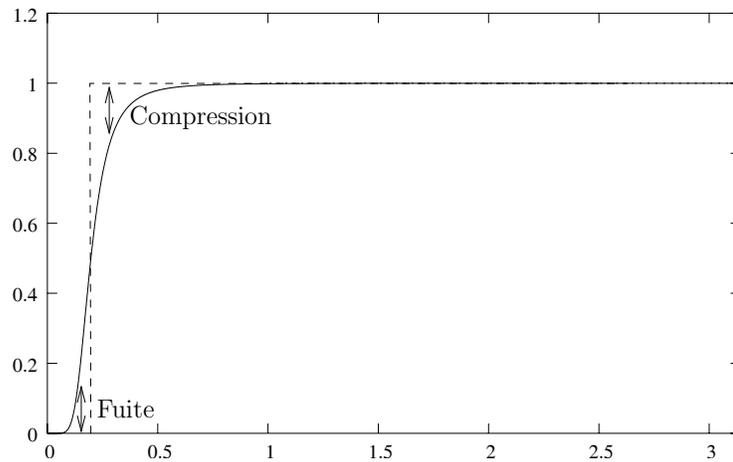


Figure 4.7: Effets de fuite et de compression

La fonction de transfert d'un filtre passe-haut idéal est définie par :

$$H(\omega) = \begin{cases} 0, & |\omega| < \omega_l \\ 1, & |\omega| \geq \omega_l. \end{cases} \quad (4.53)$$

Nous voyons sur la figure que les fonctions de transfert des deux filtres diffèrent essentiellement au voisinage de la fréquence de seuil. À gauche de

cette fréquence, la fonction de transfert, qui devrait être nulle, est positive pour le filtre d'Hodrick et Prescott, traduisant l'effet de fuite précédemment évoqué. À droite, elle est inférieure à 1 et les composantes de fréquence proche du seuil sont atténuées.

Néanmoins, les phénomènes de fuite et de compression ne portent pas nécessairement à conséquence. En effet, si la variance de la série étudiée dépend très faiblement des fréquences proches du seuil, les effets de fuite et de compression s'appliqueront à des composantes négligeables de la série. C'est pourquoi, Pedersen propose comme mesure de l'effet distorsif d'un filtre une grandeur qui intègre explicitement les propriétés spectrales de la série filtrée :

$$Q = \sum_{\omega \in W} |H(\omega) - H^*(\omega)| \cdot 2 \cdot S_y(\omega) \cdot \Delta\omega, \quad (4.54)$$

où $H(\omega)$, $H^*(\omega)$ désignent respectivement les fonctions de transfert du filtre étudié et du filtre idéal, $S_y(\omega)$ représente la fonction de densité spectrale du processus étudié et W est un ensemble discret de fréquences régulièrement espacées comprises entre 0 et π .

L'expression (4.54) représente la distance entre les densités spectrales des composante cycliques déterminées respectivement à l'aide d'un filtre idéal et d'une approximation donnée de celui-ci. En effet, si l'on note $S_c(\omega)$, la fonction de densité spectrale de la composante de cycles d'une série y , on a la relation:

$$S_c(\omega) = H(\omega) \cdot 2 \cdot S_y(\omega). \quad (4.55)$$

4.5. La Relation Taux de Marge-Revenu aux États-Unis

Cette section présente les résultats d'estimation dans le domaine des fréquences de la relation taux de marge-revenu aux États-Unis. L'échantillon utilisé porte sur des données trimestrielles couvrant la période du premier trimestre de 1947 au dernier trimestre de 1988. Il s'agit du même échantillon que celui utilisé par Rotemberg et Woodford et comporte des séries pour le PIB, les heures travaillées, les salaires horaires et les prix¹⁴.

Dans un premier temps, il s'agit de décomposer chacune des séries de l'échantillon en tendance et cycles. Ceci nous permettra de construire la série des déviations du taux de marge. Le filtre retenu est celui introduit par Hodrick et Prescott (1997), dont l'avantage est que sa fonction de réponse impulsionnelle ne présente pas de fluctuations pouvant introduire des cycles factices. Ce filtre est déterminé par la résolution d'un programme d'optimisation, minimisant la somme des écarts au carré entre la série initiale et la composante de tendance inobservable sous la contrainte que les différences secondes de la tendance ne dépassent pas un certain seuil :

$$\begin{aligned}
 c_t &= \arg \min_{\tau_t} \sum_{t=1}^T (y_t - \tau_t)^2 \\
 s.c. \sum_{t=2}^{T-1} [(\tau_{t+1} - \tau_t) - (\tau_t - \tau_{t-1})]^2 &\leq \mu.
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Le tableau 4.5 présente les valeurs optimales du coefficient λ du filtre de Hodrick-Prescott, ainsi que les distorsions associées. On peut ainsi constater que ces valeurs sont très inférieures à celle de 1600 généralement préconisée pour les séries trimestrielles.

La composante cyclique des taux de marge est alors construite selon la méthode de Rotemberg et Woodford appliquée à une fonction de production de type Cobb-Douglas ($e = 1$). Nous avons supposé ici $s_k = 0$ et choisi pour

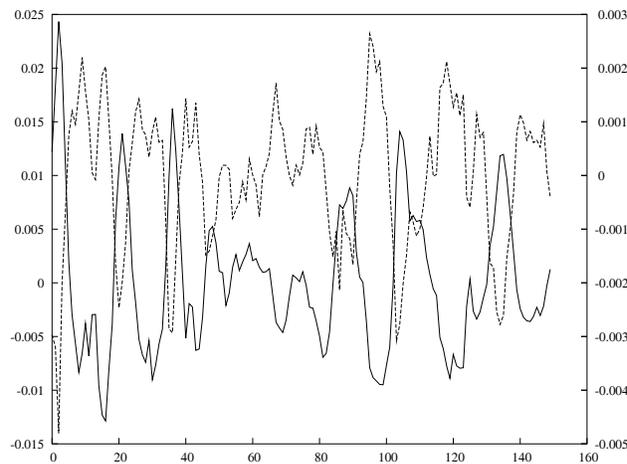
14. Je remercie Bill Russell pour m'avoir fait parvenir ces données.

Série	λ	100×distortion
PIB	1008	0.323
Heures	914	0.011
Salaires réels	962	0.244

Tableau 4.2 – Valeurs optimales du paramètre λ

μ^* , la même valeur que les auteurs ont déterminé à l'aide de la méthode de Hall, c'est à dire $\mu^* = 1.6$.

La figure 4.5 représente les séries obtenues pour les déviations de la production et des taux de marge par rapport à leur composante de long terme.



Ce graphique fait bien apparaître la contracyclicité des deux séries, un pic dans la production correspondant à un creux des taux de marge et vice-versa. Il semble également y avoir un léger décalage entre les deux séries, ce que l'analyse spectrale permettra de préciser. L'examen des fonctions d'autocorrélation (figure 4.8) fait apparaître une forte décroissance pour les premiers retards, confirmant l'élimination de racines unitaires par la procédure de filtrage. Les courbes en pointillés représentent plus ou moins deux fois l'écart

type : $\hat{\sigma}(\hat{\rho}_\tau)$ où

$$\hat{\sigma}(\hat{\rho}_\tau) = \frac{1}{\sqrt{T} \left(1 + 2 \sum_{j=1}^{\tau-1} \hat{\rho}_j^2\right)} \quad (4.57)$$

est l'estimateur proposé par Bartlett. Les autocorrélations à l'extérieur de ces courbes sont donc celles qui admettent un t de Student supérieur à 2, donc significatives au seuil de 5%.

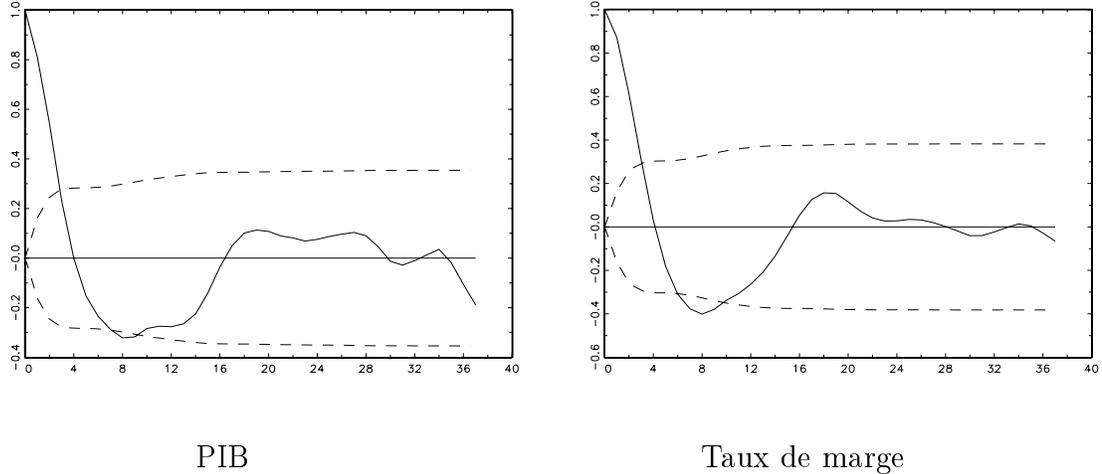


Figure 4.8 – *Fonctions d'autocorrélation*

Le calcul et la représentation graphiques des covariances croisées est plus intéressant puisque l'on peut déjà constater (figure 4.9) que, pour les premiers retards, celles-ci sont négatives et significatives. Nous avons bien ici confirmation de la contracyclicité des taux de marge, en accord, par exemple, avec l'hypothèse de covariations expliquées par les processus de créations-destructions d'entreprises.

Nous pouvons à présent passer aux analyses spectrale et cospectrale proprement dites afin de détecter les fréquences importantes dans l'explication de la variance (d'où l'on déduit la durée des cycles), mettre en évidence le décalage entre les séries et éventuellement vérifier si les séries ne sont pas procycliques pour certaines fréquences, ce qui nécessiterait d'enrichir la théorie.

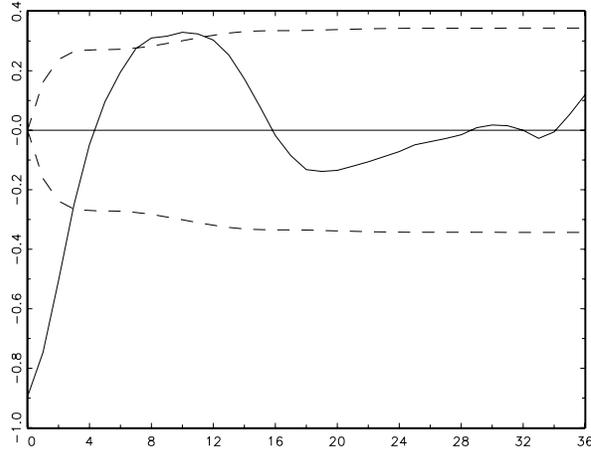


Figure 4.9: Covariances croisées

Les densités spectrales pour les séries du PIB et des taux de marge sont représentées sur la figure 4.10. Celles-ci ont été calculées à l'aide de l'estimateur spectral défini en (4.26), en utilisant la fenêtre de Tukey :

$$\lambda(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 + \cos \left(\frac{\pi\tau}{M} \right) \right), & |\tau| \leq M \\ 0, & |\tau| > M \end{cases} \quad (4.58)$$

avec $M = 50$ et $M = 30$ (fermeture spectrale¹⁵). Les valeurs en ordonnées ont été représentées selon une échelle logarithmique. Les principaux pics sont indiqués par les traits verticaux en pointillés. Les fréquences associées sont indiquées en haut du graphique ainsi que les durées associées en unités d'échantillonnage (trimestres). Le trait vertical plein correspond à la fréquence de $\pi/16$. En effet, il s'agit de la fréquence de seuil sélectionnée pour l'opération de filtrage de la composante de tendance. Les valeurs non-nulles en deçà de cette fréquence correspondent à des résidus que le filtre passe-haut n'a pu éliminer. Celles-ci doivent donc être ignorées de l'analyse.

¹⁵. La taille de l'échantillon après lissage étant de 150 données, ces valeurs correspondent aux valeurs extrêmes généralement préconisées ($T/3$ et $T/5$). La valeur optimale se situe donc vraisemblablement entre ces deux bornes.

Les deux densités spectrales se caractérisent par un pic important entre 0.25 et 0.3 ainsi que d'autres pics (ou paliers) de moindre importance aux environs des valeurs 0.6 et 1. Aucune des fréquences au delà de la valeur 1.4 n'a de contribution significative à la variance, quelle que soit la série étudiée. Cela signifie, en particulier, que si des cohérences élevées sont observées pour ces hautes fréquences, elles n'auront pas de signification particulière, puisque les dites fréquences ont un impact négligeable sur le comportement des séries.

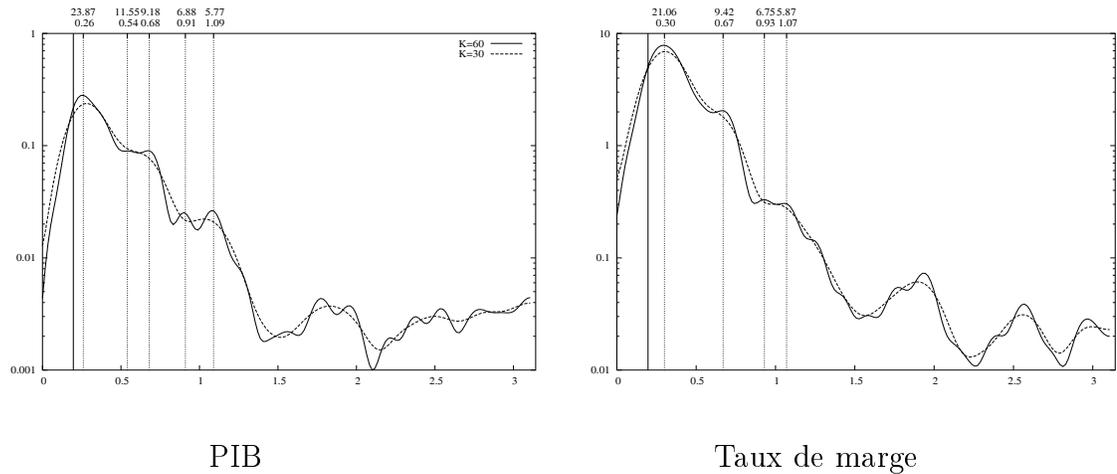


Figure 4.10 – *Densités spectrales*

Traduites en termes de durées¹⁶, les valeurs reportées signifient que la fréquence contribuant le plus à l'explication des cycles correspond à une longueur de cycle comprise entre 21 et 24 périodes, c'est à dire entre cinq et six ans, en accord avec les mesures de Pedersen (1998). Les composantes associées à des cycles de deux ans et demi et un an et demi semblent également contribuer aux fluctuations des deux séries, mais cette influence est moins évidente; notamment, lorsque la taille de la fenêtre de pas est petite, les pics correspondant à deux ans et demi disparaissent, et ceux associés à une durée d'un an et demi deviennent très peu marqués. Il apparaît donc que la

¹⁶. La durée associée à la fréquence angulaire ω est donnée par $2\pi/\omega$.

décomposition des deux séries économiques en contributions des différentes fréquences ne révèle pas une très grande richesse.

L'étude du cospectre (figure 4.11) nous permet à présent d'analyser les relations entre les fluctuations de la production et des taux de marge. En particulier, nous voyons que celui-ci est négatif pour l'ensemble des fréquences. Les deux séries sont donc fortement contracycliques et ce résultat justifie par conséquent la prise en compte de la concurrence imparfaite comme facteur explicatif de l'émergence de cycles. Par ailleurs, les pics du cospectre correspondent à ceux observés dans les densités spectrales, confirmant que les fréquences pour lesquelles les séries ont des comportements corrélés sont celles-là mêmes qui expliquent ces séries prises isolément. De surcroît, on

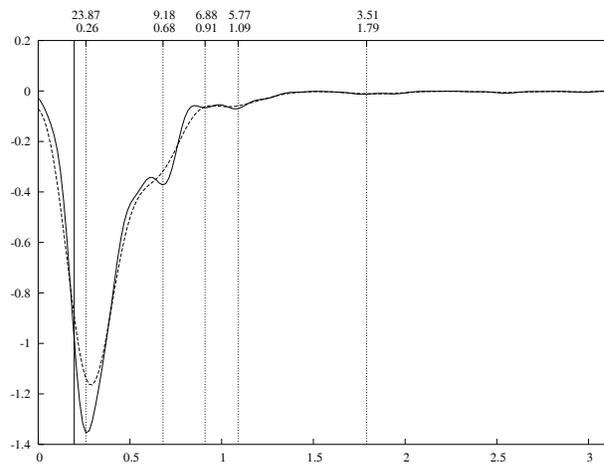


Figure 4.11: Cospectre

peut constater que la cohérence pour ces fréquences (figure 4.12) est proche de 1, traduisant la forte relation qui unit ces deux séries.

L'analyse cospectrale permet également de mettre en évidence les éventuels décalages entre séries économiques au moyen du diagramme de phase. La figure 4.13 représente celui-ci pour la production et les taux de marge. Dans la bande de fréquences d'intérêt, on observe une phase négative variant

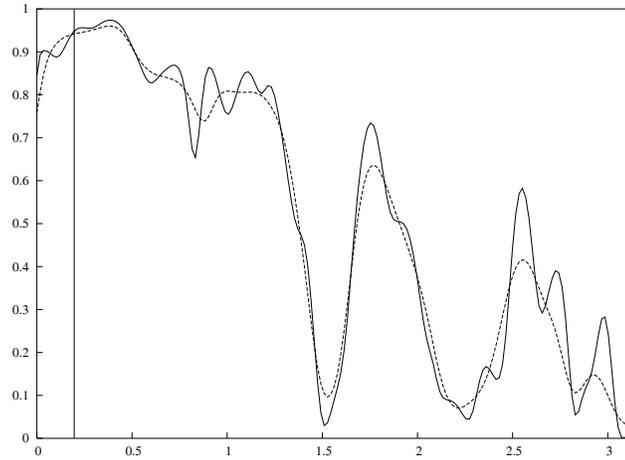


Figure 4.12: Cohérence

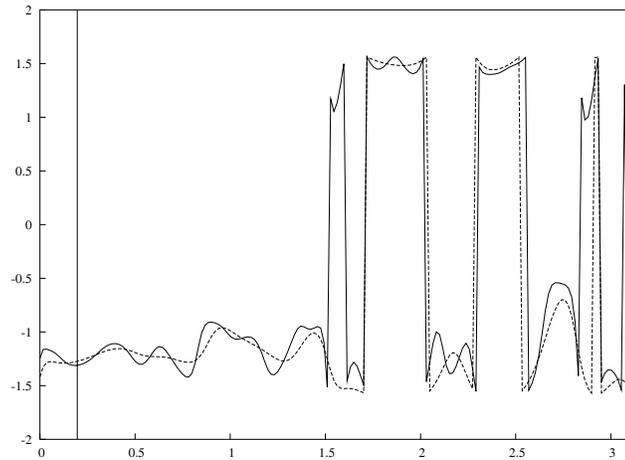


Figure 4.13: Diagramme de phase

entre -1 et -1.5 .

Enfin, le diagramme de gain (figure 4.15) est également intéressant. En effet, pour les fréquences inférieures à 1.4, celui ci présente l'allure d'une fonction monotone décroissante, caractéristique des modèles à retards échelonnés de type Koyck. Outre son intérêt dans l'étude des caractéristiques des filtres et dans l'analyse des fluctuations, l'analyse spectrale permet également de suggérer la spécification adéquate pour un modèle économétrique bivarié.

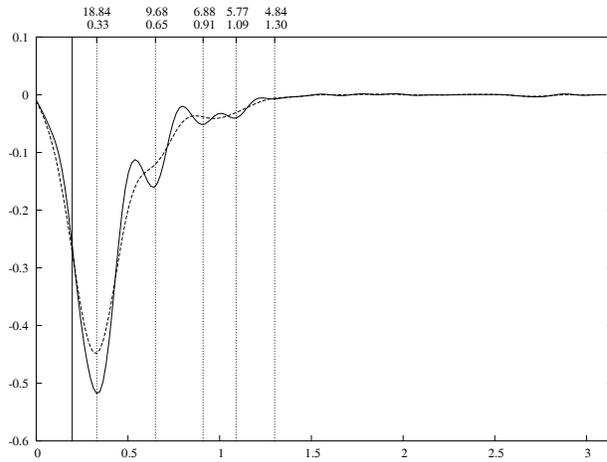


Figure 4.14: Spectre de quadrature

Pour ce faire, la relation entre deux variables X et Y est interprétée en termes de filtre linéaire dont on peut calculer la fonction de gain théorique. Le gain observé peut alors être comparé aux gains théoriques de différents modèles afin de sélectionner celui qui correspond le mieux aux caractéristiques observées.

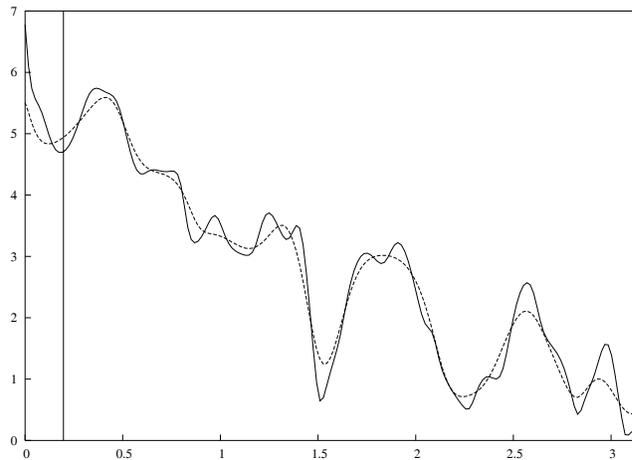


Figure 4.15: Diagramme de gain

Comme indiqué ci-dessus, une fonction de gain monotone décroissante ca-

ractérise le modèle à retards échelonnés de type Koyck. Les modèles à retards échelonnés ont été introduits dans la littérature afin d'étudier des systèmes dans lesquels une variable exerce une influence prolongée sur une autre variable. Les différents modèles de cette famille se distinguent par l'hypothèse implicite qui est faite sur la distribution des effets sur la variable expliquée d'un choc sur la variable endogène. Le modèle de Koyck suppose une distribution géométrique des effets dans le temps, c'est à dire qu'on considère un modèle du type :

$$Y_t = \beta \sum_{\tau=0, \dots, \infty} \lambda_\tau X_{t-\tau} + \varepsilon_t \quad (4.59)$$

avec

$$\lambda_\tau = \lambda_0 \lambda^\tau, \quad (4.60)$$

et λ_0 est posé égal à 1 pour normaliser la distribution des coefficients. La transformation de Koyck permet de se ramener à un nombre fini de régresseurs en calculant la différence $Y_t - \lambda Y_{t-1}$. On se ramène ainsi au modèle :

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = \beta(1 - \lambda)X_t. \quad (4.61)$$

Le tableau ci-dessous présente les résultats d'estimation du modèle de Koyck par la méthode des variables instrumentales¹⁷ en utilisant les retards du facteur de marge comme instruments.

4.6. Conclusion

Ce chapitre a montré que la contracyclicité des taux de marge est un fait validé par les données macroéconomiques. L'échantillon étudié est le même

17. Par construction, la variable y_{t-1} est corrélée avec le terme d'erreur. L'estimateur des moindres carrés usuel est par conséquent biaisé.

Dependent Variable PIB - Estimation by Nonlinear Instrumental Variables

Iterations Taken 3

Usable Observations 148 Degrees of Freedom 146

Centered R**2 0.603620 R Bar **2 0.600905

Uncentered R**2 0.603689 T x R**2 89.346

Mean of Dependent Variable 0.0017005469

Std Error of Dependent Variable 0.1296363659

Standard Error of Estimate 0.0818964427

Sum of Squared Residuals 0.9792259904

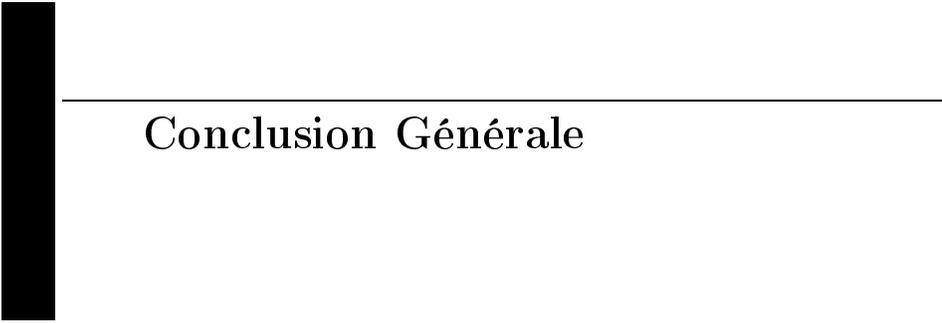
Durbin-Watson Statistic 0.526375

Variable	Coeff	Std Error	T-Stat	Signif

1. LAM	-0.775613286	0.235962950	-3.28701	0.00126841
2. BET	-0.175528137	0.005796546	-30.28151	0.00000000

Tableau 4.3 – *Estimation du modèle de Koyck*

que celui de l'article de Rotemberg et Woodford (1991) et concerne les variables macroéconomiques américaines. La méthodologie retenue est celle de l'analyse spectrale et cospectrale qui permet de décrire dans toute sa richesse la relation entre différentes variables économiques. À ce titre, les résultats obtenus peuvent apparaître comme légèrement décevants, puisqu'ils ne mettent pas en évidence une grande complexité de la relation PIB-taux de marge, qui aurait pu déboucher sur un enrichissement de la théorie basé sur la distinction entre différents horizons temporels. Néanmoins, ils apportent une forte confirmation de la relation inverse entre la production et les taux de marge, un aspect illustré théoriquement dans des modélisations telles que celle du chapitre 2. Ainsi, l'existence de marchés imparfaitement concurrentiels apparaît comme un facteur explicatif de l'émergence de cycles, dont la cohérence est attestée à la fois sur les plans théorique et empirique.



Conclusion Générale

L'hypothèse selon laquelle les échanges économiques s'opèrent sur des marchés parfaitement concurrentiels a longtemps constitué l'approche dominante dans de nombreux pans de la littérature économique. Selon cette vision, les agents économiques ne sont pas en mesure d'exercer une influence significative sur les prix, du fait de la concurrence d'un grand nombre d'agents aux caractéristiques similaires. Poser d'emblée un cadre parfaitement concurrentiel dans un modèle économique est souvent justifié, ne serait-ce que pour des raisons de simplicité analytique. Lorsque, dans un raisonnement économique, les formes de la concurrence n'ont *a priori* pas d'impact sur la validité des arguments, il semble des plus raisonnables de postuler la parfaite concurrence des marchés en vue de simplifier l'exposé. Néanmoins, de tels présupposés apparaissent comme plus critiquables, dès lors que des considérations normatives entrent en jeu. En effet, l'optimalité de l'équilibre concurrentiel plaide pour une neutralité de l'État au regard des questions économiques. À l'inverse, l'existence d'agent disposant d'un certain pouvoir de marché se

traduit généralement par la nécessité d'une intervention étatique afin de rétablir une répartition optimale des biens à l'équilibre. Or, loin de constituer des alternatives disjointes, ces deux types de concurrence doivent plutôt être vues selon une optique cournotienne, dans laquelle la concurrence parfaite correspond au cas limite où le pouvoir de marché des agents devient négligeable en raison de la dilution des dits agents au sein d'une population de plus en plus importante et homogène. Ainsi, les modèles qui prennent en compte les possibles imperfections de marchés possèdent un degré de généralité qui fait défaut à ceux qui se basent sur des comportements d'agents *preneurs de prix*. Il en résulte de fait une plus grande complexité des modèles ainsi qu'une grande hétérogénéité des formes que peut prendre les imperfections concurrentielles. C'est pourquoi la concurrence imparfaite a surtout fait l'objet d'une littérature abondante dans des domaines tels que l'organisation industrielle et la théorie des jeux où les marchés peuvent être étudiés isolément. Jusqu'à récemment, elle a néanmoins été relativement absente des modèles macroéconomiques à fondements microéconomiques, ou alors sous des formes qui ne se démarquent pas significativement de leurs contreparties parfaitement concurrentielle.

Dans cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'apport de la concurrence imparfaite à l'explication des cycles macroéconomiques. En effet, l'existence d'agents disposant d'une influence sur les prix d'équilibre est susceptible de modifier la nature des relations dynamiques entre variables macroéconomiques et, par là même, de fournir une explication séduisante à l'observation de cycles entretenus. Nous nous sommes cependant limités au cas où les imperfections concernent uniquement le secteur de production. Dans ce cadre, les entreprises disposant d'un pouvoir de marché de par leur faible nombre ou la singularité des produits qu'elles offrent, peuvent profiter de leur avantage

et fixer un prix de vente strictement supérieur au coût marginal. Le taux de marge (rapport entre prix et coût marginal) dépend des tailles relatives des entreprises et du marché ainsi que du degré de substituabilité entre les biens produits. À l'exception des modélisations les plus simples de la concurrence imparfaite, l'existence de ce taux de marge induit un facteur de variabilité supplémentaire à même d'engendrer des fluctuations au niveau de l'économie dans son ensemble.

Notre problématique implique donc trois dimensions : une dimension microéconomique correspondant à la modélisation des comportements stratégiques des agents sur chaque marché, une dimension macroéconomique et une dimension temporelle. Du fait de sa complexité, cette thématique nécessite donc, dans un premier temps, de déterminer les outils théoriques à même de refléter ces trois dimensions. Deux approches ont été développées dans la littérature afin de répondre à ces exigences et diffèrent par la manière dont sont modélisés les comportements des travailleurs/consommateurs. Dans la première, on considère un agent représentatif à durée de vie infinie dont les choix seront déterminés en examinant leurs conséquences sur tout l'horizon temporel. La deuxième approche met en jeu deux ou plusieurs générations d'individus à durée de vie limitée (modèles à générations imbriquées). Ces deux types de modélisations se rejoignent dans une certaine mesure et il est possible d'obtenir des résultats concordants au prix d'hypothèses supplémentaires.¹⁸ L'approche retenue dans le premier chapitre est un exemple

18. La prise en compte d'altruisme intergénérationnel dans les modèles à générations permet en particulier la prise en compte par les agents de l'ensemble des dates futures à l'instar des agents à durée de vie infinie. Inversement, l'introduction de contraintes de liquidité dans les modèles à agents représentatifs restreint les arbitrages intertemporels de ces derniers et les conduit à adopter des décisions similaires à celles d'agents à durée de vie finie (modèle à la Woodford).

d'une telle réconciliation des résultats obtenus avec ces deux méthodologie. En effet, ce chapitre a présenté un modèle à la Woodford qui a permis de synthétiser un certain nombre de résultats de la littérature sur les fluctuations endogènes dans les modèles d'équilibre général des deux types. En premier lieu, nous avons constaté que, sous l'hypothèse de concurrence parfaite sur l'ensemble des marchés, les conditions assurant l'émergence de fluctuations (non expliquées par des chocs externes) apparaissent par trop irréalistes. En effet, lorsque l'on se restreint au cas d'une économie purement monétaire (modèle de Grandmont (1985*b*)), seules des conditions extrêmes sur les préférences (domination des effets richesse sur les effets de substitutions) sont à même d'empêcher la convergence de l'économie vers un état stationnaire de long terme. L'article de Grandmont a néanmoins eu le mérite d'initier la littérature sur les fluctuations endogènes dans les modèles d'équilibre général et de poser les bases méthodologiques pour les travaux ultérieurs. L'introduction de capital productif dans le modèle à permis de lever ces conditions en les remplaçant par une hypothèse sur la technologie: la forte complémentarité des facteurs de production, capital et travail. On le voit donc, un cadre standard de concurrence parfaite sur tous les marchés ne fournit pas un moyen satisfaisant de fournir une explication des cycles ne passant pas par l'introduction de chocs exogènes *ad hoc*. C'est pourquoi nous avons également esquissé dans ce chapitre les raisons qui amènent à plaider en faveur de l'introduction d'imperfections concurrentielles dans ce type de modèles et présenté les premières incursions dans cette voie.

Le deuxième chapitre poursuit dans cette voie en proposant un modèle théorique similaire dans lequel l'hypothèse de concurrence imparfaite est introduite sous la forme de *concurrence monopolistique à la Cournot* sur le marché des biens intermédiaires. Il inclut en effet des éléments de concurrence

monopolistique du fait de l'existence de plusieurs secteurs correspondant à des biens différenciés, et de concurrence cournotienne au sein de chaque secteur de production. L'hypothèse de libre-entrée sur le marché, d'où résulte l'annulation des profits, permet d'obtenir un taux de marge variable dans le temps, qui dépend du nombre d'entreprises en activité. Ainsi, les processus de création et de destruction d'entreprises au gré des opportunités de profits va jouer le rôle moteur dans l'apparition de cycles. Dans ce modèle, l'existence d'entreprises ayant un certain pouvoir de marché est apparue comme une condition nécessaire d'occurrence de cycles. Celui-ci résulte de la non-substituabilité parfaite des biens produits.

Le choix de structure de marché adopté dans le deuxième chapitre a été en partie guidé par des considérations de simplicité analytique. Il s'agissait en effet d'introduire un élément de variabilité supplémentaire (ce que n'aurait pas permis une transposition directe du modèle de Dixit-Stiglitz) tout en évitant autant que faire se peut de trop alourdir les calculs. La concurrence monopolistique à la Cournot a par conséquent semblé une bonne alternative, en permettant l'endogénéisation du taux de marge par la variation du nombre d'entreprises, sans introduire de complications supplémentaires liées aux redistributions de profits. Néanmoins, il serait intéressant d'approfondir cette étude à d'autres types d'imperfections plus sophistiquées telles que celles étudiées dans des modèles d'équilibre partiel. L'augmentation de complexité qui en résulterait risquerait cependant de se heurter à l'impossibilité de résoudre analytiquement les équations des modèles. C'est pourquoi, le besoin d'outils numériques se fait ressentir et le troisième chapitre présente à cet effet un logiciel, développé dans le cadre de cette thèse, visant à répondre partiellement à cette nécessité. Plus précisément, il s'agit d'un utilitaire destiné à l'étude des modèles dynamiques discrets à deux dimensions, tels qu'on est amené à

rencontrer dans les modèles à agent représentatif ou à générations. Le chapitre décrit ainsi les différentes procédures mises en oeuvre pour la recherche d'états stationnaires, la détermination des orbites du système et le calcul des variétés stables et instables associées à l'existence de points-selle. Ce logiciel, DAMP, est toujours à l'état de pré-version, en ce qu'il a subi plusieurs remaniements de fond qui n'ont pas été totalement finalisés. Le manque d'expérience de la programmation qui a présidé à son élaboration s'est également traduit par certaines erreurs de conception et la non systématisation de tests unitaires au cours du développement.

Enfin le dernier chapitre a considéré l'apport de la concurrence imparfaite sous l'angle empirique. Il est un fait que les relations entre variables économiques telles qu'elles sont décrites dans un cadre de concurrence parfaite pure ne correspondent pas aux données observées. Il est en particulier des plus problématiques de rendre compte de la procyclicité des salaires réels sans abandonner l'optique concurrentielle. L'explication des cycles en termes de chocs technologiques est par ailleurs insatisfaisante du fait de son caractère exogène et de la difficulté d'établir une relation claire entre la fréquence des innovations et celle des phases de croissance. L'idée d'expliquer la procyclicité des salaires réelles par les variations des marges appliquées par les entreprises remonte aux travaux des années trente qui cherchaient à fournir une explication convaincante aux cycles économiques. Elle a été récemment remise au goût du jour, notamment avec les travaux de d'Aspremont, Gérard-Varet et Dos Santos Ferreira. Selon ce courant, les taux de marges sont contracycliques (comme c'est le cas lorsqu'ils varient principalement du fait des entrées et sorties d'entreprises sur le marché); la procyclicité des salaires peut alors s'expliquer par le fait que, toutes choses égales par ailleurs, la demande de travail augmente dans les phases de croissance, en

raison de la diminution des marges de profit. C'est ce dernier point (contracyclité des taux de marge) que nous avons cherché à vérifier sur données observées. L'apport de ce chapitre consiste essentiellement en la méthodologie employée. L'objectif a été en effet d'étudier si la relation entre production et marges de profit dépendait de l'horizon temporel considéré. À cet effet, l'analyse cospectrale est en mesure d'apporter des réponses plus précises que les autres outils économétriques. Il s'est avéré que, dans le cas des États-Unis considéré, la contracyclité des taux de marge est très robuste sur la période considérée puisqu'elle se vérifie pour l'ensembles des fréquences pour lesquelles une relation existe entre la production et les taux de marge. À cet titre, la concurrence imparfaite et, en particulier, l'hypothèse de marchés cournotiens avec libre-entrée, apparaissent comme des explications simples et cohérentes des variations observées de l'activité économique, sur un plan qualitatif. Afin d'obtenir des confirmations supplémentaire de la pertinence de la prise en compte de la concurrence imparfaite, il serait utile de vérifier également cette relation pour les autres pays industrialisés. Les pays de l'Union Européenne offrent de ce point de vue des sujets d'observation très intéressants. Il serait en effet instructif d'étudier l'impact de l'intégration sur l'évolution des marges des entreprises. Bottasso et Sembellini (2001) ont montré par exemple que, dans le cas de l'Italie, les entreprises les plus exposées à l'apparition de nouveaux concurrents ont vu une baisse significative de leur marge après la mise en place du Marché Unique. L'étude comparée du caractère procyclique ou contracyclique des salaires réels et des taux de marge, avant et après 1992, dans les différents pays européens offrirait un moyen de valider plus fortement l'explication de la concurrence imparfaite comme moteur des fluctuations économiques.



Bibliographie

Ale Jan Homburg, Sands, D. et de Vilder, R. (2002), 'Computing invariant sets', *Working Papers du DELTA*.

Allgower, E. L. et Georg, K. (1990), *Numerical Continuation Methods, An Introduction*, Springer-Verlag, New-York.

Aloi, M. et Lloyd-Braga, T. (2001), 'Unions, international factor mobility and indeterminacy', *University of Nottingham Research Paper*.

Aloi, M., Dixon, H. et Lloyd-Braga, T. (2000), 'Endogenous fluctuations in an open economy with increasing returns to scale', *Journal of Economic Dynamics and Control*.

Azariadis, C. (1981), 'Self-fulfilling prophecies', *Journal of Economic Theory* **25**, 380–396.

Azariadis, C. (1993), *Intertemporal Macroeconomics*, Blackwell, Oxford.

Azariadis, C. et Guesnerie, R. (1982), 'Sunspots and cycles', *Review of Economic Studies* **58**, 725–737.

- Barinci, J.-P. et Chéron, A. (2001), ‘Sunspots and the business cycle in a finance constrained economy’, *Journal of Economic Theory* **97**, 30–49.
- Barinci, J.-P. et Drugeon, J.-P. (1999), ‘A geometric approach to local indeterminacy and local bifurcations in three-dimensional dynamical systems’, *mimeo*.
- Basu, S. et Fernald, J. (1997), ‘Returns to scale in us production: Estimates and implications’, *Journal of Political Economy* **105**, 249–283.
- Benhabib, J. et Day, R. (1982), ‘A characterization of erratic dynamics in the overlapping generations model’, *Journal of Economic Dynamics and Control* **4**, 37–55.
- Benhabib, J. et Farmer, R. (1994), ‘Indeterminacy and increasing returns’, *Journal of Economic Theory* **63**, 19–41.
- Benhabib, J., Schmitt-Grohe, S. et Uribe, M. (2001), ‘The perils of taylor rules’, *Journal of Economic Theory* **96**(1-2), 40–69.
- Boldrin, M. et Woodford, M. (1990), ‘Equilibrium models displaying endogenous fluctuations and chaos’, *Journal of Monetary Economics* **25**, 189–222.
- Bottasso, A. et Sembellini, A. (2001), ‘Market power, productivity and the eu single market program: Evidence from a panel of italian firms’, *European Economic Review* **45**, 167–186.
- Bresson, G. et Pirotte, A. (1995), *Econométrie des Séries Temporelles*, Presses Universitaires de France, Paris.
- Broadbent, H. A. et Maksik, Y. A. (1992), ‘Analysis of periodic data using walsh functions’, *Behavior Research Methods Instruments and Computers* **24**, 238–247.
- Broyden, C. (1965), ‘A class of methods for solving nonlinear simultaneous equations’, *Mathematics of Computation* **19**, 577–593.

- Burns, A. et Mitchell, W. (1946), *Measuring Business Cycles*, National Bureau of Economic Research, New-York.
- Caballero, R. et Lyons, R. (1992), 'External effects in us procyclical productivity', *Journal of Monetary Economics* **29**, 209–225.
- Cass, D. et Shell, K. (1983), 'Do sunspots matter?', *Journal of Political Economy* **91**(2), 193–227.
- Cazzavillan, G. (1996), 'Public spending, endogenous growth, and endogenous fluctuations', *Journal of Economic Theory* **71**, 394–415.
- Cazzavillan, G. (2001), 'Indeterminacy and endogenous fluctuations with arbitrary small externalities', *Journal of Economic Theory* **101**(1), 133–157.
- Cazzavillan, G., Lloyd-Braga, T. et Pintus, P. (1998), 'Multiple steady states and endogenous fluctuations with increasing returns to scale in production', *Journal of Economic Theory* pp. 60–107.
- Chiappori, P. et Guesnerie, R. (1991), Sunspot equilibria in sequential market models, in W. Hildenbrand et H. Sonnenschein, eds, 'Handbook of Mathematical Economics', Vol. 4, North-Holland, Amsterdam.
- Christiano, L. J. et G. Harrison, S. (1999), 'Chaos, sunspots and automatic stabilizers', *Journal of Monetary Economics* **44**(1), 3–31.
- Coimbra, R., Lloyd-Braga, T. et Modesto, L. (2002), 'Endogenous fluctuations in unionised economy with productive externalities', *CEPR Discussion Paper*.
- Collet et Eckmann, J. P. (1980), *Iterated Maps on the Interval as a Dynamical System*, Birkhäuser, Boston.
- d'Aspremont, C., Dos Santos Ferreira, R. et Gérard-Varet, L.-A. (1995a), 'Imperfect competition in an overlapping generations model: a case for fiscal policy', *Annales d'Economie et de Statistique*.

- d'Aspremont, C., Dos Santos Ferreira, R. et Gérard-Varet, L.-A. (1995*b*), *Market Power, Coordination Failures and Endogenous Fluctuations*, Cambridge University Press, pp. 94–138.
- d'Aspremont, C., Dos Santos Ferreira, R. et Gérard-Varet, L.-A. (1997), 'General equilibrium concepts under imperfect competition: a cournotian approach', *Journal of Economic Theory* **73**, 199–230.
- d'Aspremont, C., Dos Santos Ferreira, R. et Gérard-Varet, L.-A. (1999), 'Endogenous business cycles and business formation in an oligopolistic olig model with strategic r-d investment', *Documents de travail LEA*.
- de Vilder, R. (1996), 'Complicated endogenous business cycles under gross substitutability', *Journal of Economic Theory* **71**, 416–442.
- de Vilder, R., Kozlovski, O. et Pintus, P. (1999), 'Coexisting invariant structures in 2-d dynamic economic models'.
- Dechert, W. D. (1984), 'Does optimal growth preclude chaos? a theorem on monotonicity', *Zeitschrift für Nationalökonomie* **44**, 57–61.
- Deuffhard, P., Freund, R. et Walter, A. (1990), 'Fast secant methods for the iterative solution of large nonsymmetric linear systems', *IMPACT of Computing in Science and Engineering* **2**, 244–276.
- Devaney, R. (1989), *Chaotic Dynamical Systems: Second Edition*, Addison-Wesley, New-York.
- Devereux, M. B. et Lockwood, B. (1991), 'Trade unions, non binding wage agreements and capital accumulation', *European Economic Review* **35**, 1411–1426.
- Dos Santos Ferreira, R. et Lloyd-Braga, T. (2005), 'Non-linear endogenous fluctuations with free entry and variable markups', *Journal of Economic Dynamics and Control* **29**(5), 847–871.

- Dunlop, J. (1938), 'The movement of real and money wage rates', *Economic Journal* **48**, 413–434.
- Espinosa-Vega, M. A. et Guo, J.-T. (2001), 'On business cycles and counter-cyclical policies', *Economic Review* **0**, 1–11.
- Farmer, R. (1993), *The Economics of Self-Fulfilling Prophecies*, MIT Press, Cambridge MA.
- Gale, D. (1973), 'Pure exchange equilibrium of dynamic economic models', *Journal of Economic Theory* **44**, 12–36.
- Gali, J. (1994), 'Monopolistic competition, business cycles, and the composition of aggregate demand', *Journal of Economic Theory* **63**, 73–96.
- Gali, J. et Zilibotti, F. (1995), 'Endogenous growth and poverty traps in a cournotian model', *Annales d'Economie et de Statistique*.
- Gourieroux, C. et Monfort, A. (1989), *Statistiques et Modèles Econométriques*, Vol. 2, Economica, Paris.
- Grandmont, J.-M. (1985a), 'Cycles concurrentiels endogènes', pp. 50–81.
- Grandmont, J.-M. (1985b), 'On endogenous competitive business cycles', *Econometrica* **53/5**, 995–1045.
- Grandmont, J.-M. (1986), *Periodic and Aperiodic Behaviour in Discrete One-Dimensional Dynamical Systems*, Contributions to Mathematical Economics, Elsevier Science, North-Holland, pp. 227–65.
- Grandmont, J.-M., Pintus, P. et de Vilder, R. (1998), 'Capital-labor substitution and competitive nonlinear endogenous business cycles', *Journal of Economic Theory* **80**, 14–59.
- Guckenheimer, J. et Holmes, P. (1983), *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, New-York.
- Guo, J. et Lansing, K. (1998), 'Indeterminacy and stabilization policy', *Journal of Economic Theory* **82**, 481–490.

- Guo, J. et Lansing, K. (n.d.), ‘Fiscal policy, increasing returns, and endogenous fluctuations’, *Macroeconomic Dynamics* **6**, 633–664.
- Guo, J.-T. (1999), ‘Multiple equilibria and progressive taxation of labor income’, *Economics Letters* **65**(1), 97–103.
- Hale, J. et Koçak, H. (1992), *Dynamics and Bifurcations*, Springer-Verlag, New-York.
- Hall, R. (1986), ‘Market structure and macroeconomic fluctuations’, *Brooking Papers on Economic Activity* **2**, 285–322.
- Hodrick, R. J. et Prescott, E. C. (1997), ‘Postwar u.s. business cycles: An empirical investigation’, *Journal of Money, Credit and Banking* **29**(1), 1–16.
- Jenkins, G. et Watts, D. (1968), *Spectral Analysis and its Applications*, Holden-Day, San Francisco.
- Kalecki, M. (1938), ‘The determinants of distribution of the national income’, *Econometrica* **6**, 97–112.
- Kelley, C. T. (1995), *Iterative Methods for Linear and Nonlinear Equations*, SIAM, Philadelphia.
- Kelley, C. T. (2001), ‘Solving nonlinear equations with newton’s method’. www4.ncsu.edu/eos/users/c/ctkelley/www/newton.PS.pdf.
- Keynes, J. M. (1939), ‘Relative movements of real wages and output’, *Economic Journal* pp. 34–51.
- Kind, C. (1999), ‘Remarks on the economic interpretation of hopf bifurcations’, *Economic Letters* **62**, 147–154.
- Kostelitch, E. J., Yorke, J. A. et You, Z. (1996), ‘Plotting stable manifolds: Error estimates and noninvertible maps’, *Physica D* **93**, 210–222.
- Kozlovski, O., Pintus, P., Van Strien, S. et De Vilder, R. (2001), ‘Business cycle models: Closing the gap between the different approaches’.

- Kuhry, Y. (2001), ‘Endogenous fluctuations in a cournotian monopolistic competition model with free entry and market power variability’, *Research in Economics* **55**, 389–412.
- Kuhry, Y. (2002), ‘Damp: Dynamical analysis of maps of the plane’. <http://sourceforge.net/projects/damp/>.
- Lloyd-braga, T., Nourry, C. et Venditti, A. (2004), ‘Indeterminacy in dynamic models : when diamond meets ramsey’, *Working Paper GREQAM*.
- Medio, A. (1992), *Chaotic Dynamics: Theory and Applications to Economics*, Cambridge University Press.
- Medio, A. et Negrone, G. (1996), *Chaotic Dynamics in Overlapping Generations Models with Production*, Vol. Nonlinear Dynamics and Economics, Cambridge University Press, pp. 3–44. (W. Barnett, A. Kirman and M. Salmon eds).
- Nishimura, K. et Sorger, G. (1996), ‘Optimal cycles and chaos: A survey’, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics* **1**, 11–28.
- Palis, J. et Takens, F. (1993), *Hyperbolicity and Sensitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations*, Cambridge University Press.
- Pedersen, T. M. (1998), ‘How long are business cycles? reconsidering fluctuations and growth’, *Institute of Economics Discussion Papers*.
- Pedersen, T. M. (1999a), Business cycles and economic growth, Technical report, University of Copenhagen, Institute of Economics.
- Pedersen, T. M. (1999b), Spectral analysis, business cycles, and filtering of economic time series. a survey, in *Business Cycles and Economic Growth* Pedersen (1999a).
- Pintus, P. (2004), ‘Indeterminacy with almost constant returns to scale: Capital-labor substitution matters’, *Working Paper GREQAM*.

- Portier, F. (1995), ‘Business formation and cyclical markups in the french business cycle’, *Annales d’Economie et de Statistique* **37/38**, 411–440.
- Priestley, M. B. (1981), *Spectral Analysis and Time Series*, Academic Press, New-York.
- Reichlin, P. (1986), ‘Equilibrium cycles in an overlapping generations economy with production’, *Journal of Economic Theory* **40**, 89–102.
- Rotemberg, J. et Woodford, M. (1991), ‘Markups and the business cycle’, *NBER Macroeconomics Annual* pp. 63–129.
- Seegmuller, T. (2001), ‘Concurrence imparfaite, variabilité du taux de marge et fluctuations endogènes’, *Documents de Travail du BETA*.
- Shell, K. (1977), ‘Monnaie et allocation intertemporelle’, *mimeo, Séminaire d’Économétrie Roy-Malinvaud*.
- Sims, C. A. (1986), *Comments, Models of Economics Dynamics*, Springer-Verlag, New-York.
- Singer, D. (1978), ‘Stable orbits and bifurcations of maps of the interval’, *SIAM journal of Applied Mathematics* **35**, 260–267.
- Smith, S. (1997), *The Scientist and Engineer’s Guide to Digital Signal Processing*, California Technical Publishing.
- Sterling, D., H.R.Dullin et Meiss, J. (1999), ‘Homoclinic bifurcations for the hénon map’, *Physica D* **134**, 153–184.
- Suzumura, K. (1992), ‘Cooperative and noncooperative retd in an oligopoly with strategic commitments’, *American Economic Review* **82**, 1307–1320.
- Tarshis, L. (1939), ‘Changes in real and money wages’, *Economic Journal* **49**, 150–154.
- Tvede, M. (1989), Profits, business-cycles and chaos, Working paper, Institut for National Economy, Copenhagen.

- Wiggins, S. (1990), *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*, Springer-Verlag, New-York.
- Woodford, M. (1986*a*), ‘Stationary sunspot equilibria in a finance constrained economy’, *Journal of Economic Theory* **40**, 128–137.
- Woodford, M. (1986*b*), ‘Stationary sunspot equilibria: The case of small fluctuations around a deterministic steady state’, *mimeo, Univ. of Chicago*.
- Yokoo, M. (2000), ‘Chaotic dynamics in a two-dimensional overlapping generations model’, *Journal of Economics Dynamics and Control* **24**, 909–934.
- You, Z., Kostelitch, E. J. et Yorke, J. A. (1991), ‘Calculating stable and unstable manifolds’, *International Journal of Bifurcations and Chaos* **3**, 605–623.