



Thèse présentée pour obtenir le grade de Docteur
de l'Université Louis Pasteur Strasbourg I

Discipline : Physique Théorique
par Franck Stauffer

Théories effectives pour corrélations longues portées

Soutenue publiquement le 28 octobre 2005.

Membres du jury

Directeur de Thèse : M. J. Polonyi, Professeur, ULP Strasbourg
Rapporteur Interne : M. D. Cabra, Professeur, ULP Strasbourg
Rapporteur Externe : M. P. Pujol, Maître de Conférence HDR, ENS Lyon
Rapporteur Externe : M. W. Metzner, Professeur, Max Planck Institute Stuttgart
Examineur : M. J-P. Blaizot, Directeur de Recherche, ECT* Trento

Abstract

We study the Luttinger model using the Framework of the Internal Space Renormalization Group. This extension of the usual Renormalization strategy allows the construction of the effective action by resumming the modes according to their amplitude in the internal space.

Our study is limited to a one-loop approximation and shows that in the vicinity of the Fermi points the model is strongly coupled. We also outline several limitations in the bosonization of the Luttinger Hamiltonian. The study of open system is another challenging issue in physics. The easiest way to describe such system is to consider the system to be in contact with its environment. We shall build an effective theory describing the full system in the Current-Density functional formalism and build the corresponding effective action. We perform the study of the classical and quantum systems which both rely on the use of the Causal Dynamics. We then proceed to a spin-boson two-level quantum field theory.

The rapid development of rich and complex structures such as the World Wide Web leads to the statistical physics description of their properties. We propose a new model based on the subtle relations between the individuals on the network that succeeds in developing the scale-free behavior, which in turn is the Hallmark of those complex networks

Résumé

Nous nous proposons d'étudier le modèle de Luttinger en utilisant le groupe de renormalisation dans l'espace interne. Cette extension du groupe de renormalisation permet la construction de la fonctionnelle action effective en resommant les modes selon leur importance dans l'espace interne, caractéristique de l'amplitude des champs de la théorie. Elle s'effectue à l'ordre une boucle et semble indiquer clairement qu'au voisinage des points de Fermi, le système est fortement couplé. Nous mettons aussi en évidence quelques problèmes potentiels liés à la bosonisation du hamiltonien de Luttinger. L'étude des systèmes dissipatifs est un autre problème fondamental en physique. La description la plus simple de ces phénomènes consiste à faire l'hypothèse que le système et son environnement une fois regroupés forment un système isolé, et l'on procède alors à l'étude du système étendu. Nous nous évertuerons à construire une méthode systématique qui permet de d'obtenir l'action effective, comme fonctionnelle de la densité, d'un tel système. Nous procédons à une étude classique qui montre alors l'apparition d'une dérivée temporelle symétrisée, qui se traduit au niveau quantique par l'utilisation des fonctions de Green causales. Nous travaillons ensuite sur un modèle de théorie des champs qui décrit la dynamique d'un système à deux niveaux en contact avec un bain d'oscillateurs harmoniques. Le développement des structures de communication comme le réseau Internet révèle que les réseaux complexes présentent de propriétés très intéressantes. Nous avons réalisé un modèle susceptible de décrire ce comportement particulier comme une conséquence de corrélations subtiles entre les relations physiques qu'ont les individus de tels réseaux et un effet mémoire à court-terme. Nous conduisons cette étude numériquement et observons alors le comportement scale-free caractéristique de ces systèmes.

Remerciements

En premier lieu, mes remerciements vont à mon épouse Irina. Elle a su m'aider au moment où j'en ai eu réellement besoin et a toujours jugé mon travail, mes envies d'un oeil juste. Son amour, ses attentions et son soutien ont été d'un grand réconfort pour moi. Mes remerciements vont aussi à mes parents, mon frère et ma soeur qui m'ont poussé de manière plus ou moins directe à poursuivre mes études et à essayer de réaliser mon projet de vie. Je n'oublie pas non plus mes beaux-parents, mes amis (tout particulièrement Pierre, François, Francis, Kurt, Paul, Ian, Fabian, Jonas, Matthias et tous les autres) qui m'ont tous encouragé.

Bien entendu, j'ai beaucoup appris au contact de Janos Polonyi. Son esprit vif, son intérêt pour la physique en général et ses idées m'ont fait entrevoir la richesse de la Physique comme jamais je ne l'avais jamais vue auparavant. J'essaierai de m'inspirer de sa curiosité, de sa volonté de comprendre plutôt que de simplement démontrer et de sa gentillesse. Ensuite je mentionnerai tous les compères du bureau 360, Adrian et Abdel, avec qui j'ai partagé d'excellents moments et beaucoup d'éclats de rire. Avec Raoul et Tarek, ils ont marqué fortement mon séjour dans ce laboratoire. Je remercie aussi tous les membres du laboratoire pour leur gentillesse, ainsi que les 4 secrétaires qui ont officié durant mon séjour (Nicole, Patricia, Valérie et Martine).

Je tient aussi à mentionner les élèves de Maîtrise de Physique de l'Université Louis Pasteur (2004/2005) qui ont suivi mes travaux dirigés en théorie classique des champs et en modélisation physique. J'ai beaucoup appris du métier d'enseignant-chercheur à leur contact. Leurs questions qui m'ont parfois laissé sans réponse m'ont toujours poussé à me remettre en question et je les en remercie. Je leur souhaite bonne chance.

Finalement, je remercie les membres de mon jury de thèse d'avoir accepté de donner de leur temps et de leur énergie pour juger ce manuscrit.

*À Irina, mes parents, beaux-parents
ainsi qu'à toute ma famille et mes amis...*

"...chaque homme doit inventer son chemin..."
Jean-Paul Sartre, *Les mouches*

Table des matières

1	Introduction	11
1.1	Le problème des divergences infra-rouges en physique	11
1.2	Le modèle de Luttinger	13
1.3	Les systèmes à deux niveaux	13
1.4	Corrélations statistiques : l'exemple des réseaux complexes	14
2	Le Groupe de Renormalisation et ses extensions	15
2.1	Des phénomènes critiques au groupe de renormalisation	15
2.2	Théorie des champs et groupe de renormalisation	20
2.3	De l'approche multiplicative à l'approche fonctionnelle	23
2.3.1	L'équation de Wegner-Houghton	24
2.3.2	Évolution continue	25
2.4	Groupe de Renormalisation dans l'espace interne	27
2.5	Conclusion	31
3	Le modèle de Luttinger	33
3.1	Une courte description du Liquide de Fermi	33
3.2	Le(s) Liquide(s) de Luttinger	37
3.2.1	"Non-Liquides" de Fermi : L'exemple du liquide de Luttinger	37
3.2.2	Le modèle de Luttinger	38
3.3	Approche du Groupe de Renormalisation	41
3.3.1	Perturbations quadratiques	42
3.3.2	Perturbations quartiques	43
3.3.3	Groupe de Renormalisation à l'ordre une boucle	44
3.4	La bosonisation du Hamiltonien de Luttinger	45
3.5	Conclusion	46
4	Groupe de Renormalisation dans l'espace interne pour le modèle de Luttinger	47
4.1	Introduction et motivations physiques	47
4.2	Modèle et fonctionnelles génératrices	50
4.3	Le Schéma BPHZ et la bosonisation	56
4.4	Groupe de renormalisation dans l'espace interne	60
4.5	Équation d'évolution	64

TABLE DES MATIÈRES

4.5.1	Partie quadratique	66
4.5.2	Partie quartique	68
4.6	Constante de couplage courante aux points de Fermi	72
4.7	Fonctions β au voisinage des points de Fermi	73
4.8	Conclusion et perspectives	77
5	Dynamique des systèmes ouverts à deux niveaux	79
5.1	Introduction	79
5.2	Étude de la dissipation au niveau classique	82
5.3	Théorie Quantique effective en temps imaginaire	86
5.4	Remarques sur les équation du mouvement	88
5.4.1	Dynamique causale	88
5.4.2	Dynamique «symétrisée»	89
5.5	Systèmes fermioniques à deux niveaux	90
5.5.1	Modèle et fonctionnelles génératrices	90
5.5.2	Système en interaction	92
5.6	Conclusion et perspectives	97
6	Relations à deux niveaux dans les réseaux complexes	99
6.1	Introduction	99
6.2	L'attachement préférentiel et au delà	102
6.3	Le modèle des relations à deux niveaux	105
6.4	Résultats numériques	109
6.5	Conclusions et perspectives	115
7	Conclusion	117
A	Notations	119
B	Groupe de Renormalisation dans l'espace interne pour le modèle de Luttinger	121
B.1	Relation fonctionnelle entre $W^{(2)}$ et $\Gamma^{(2)}$	121
B.2	Dérivation de l'évolution quartique pour le modèle de Luttinger	123
B.3	Intégrales de boucles	126
B.3.1	Pour la constante de couplage γ^\times	127
B.3.2	Pour la constante de couplage $\gamma^{ }$	128
C	Systèmes à deux niveaux	131
C.1	Identités utiles sur les matrices de Pauli	131
C.2	Intégrales de boucles	132
C.2.1	Pour l'opérateur j	132
C.2.2	Pour l'opérateur Σ	133
C.3	Intégrales de chemins fermioniques	134
C.3.1	Système à un niveau	135
C.3.2	Système à deux niveaux	136

C.4	Fonctions de Green Libres	136
C.4.1	Fonctions de Green pour les fermions	136
C.4.2	Fonctions de Green pour les bosons	139
C.5	Système libre	141
D	Réseaux Complexes	143
D.1	Quelques détails concernant l'implémentation de l'algorithme	143

TABLE DES MATIÈRES

Chapitre 1

Introduction

Rédiger l'introduction d'un travail qui a fait partie intégrante des quelques dernières années de ma vie n'est pas aisé. Avant de nous intéresser aux motivations physiques qui ont guidé mes travaux, je vais me permettre de revenir un instant sur le choix du sujet de thèse proprement dit. Je pense qu'il est nécessaire de passer par cette étape pour comprendre la tonalité globale du manuscrit.

Comme beaucoup, ma passion pour la physique s'est développée au cours des années en partie grâce aux enseignants qui m'ont communiqué leur enthousiasme. Mon séjour à l'École Normale Supérieure de Lyon a été le plus déterminant. La qualité des enseignements qui y sont dispensés et la liberté qu'elle offre aux étudiants de construire le cursus qui leur semble adéquat m'ont permis de m'orienter vers la physique théorique. J'ai donc effectué mon DEA de physique théorique et c'est à ce moment que j'ai commencé à réfléchir aux thèmes que souhaitais aborder au cours de mon doctorat. Deux considérations ont alors prévalu : tout d'abord j'ai souhaité conserver un pied dans le monde de la physique des hautes énergies. C'est donc naturellement que j'ai cherché un sujet où la théorie quantique des champs jouait un rôle prépondérant. Mais mon intérêt pour la physique statistique, les phénomènes critiques et les problèmes de matière condensée m'ont poussé à le choisir de telle sorte qu'il se trouve à mi-chemin entre les hautes et basses énergies.

Le groupe de renormalisation et ses applications en matière condensée et plus particulièrement le groupe de renormalisation fonctionnel dans l'espace interne se sont alors imposés à moi, et c'est avec grand plaisir que j'ai travaillé sur ce sujet. Nous allons maintenant essayer de tracer les contours des travaux que j'ai effectués en collaboration avec mon directeur de thèse Janos Polonyi.

1.1 Le problème des divergences infra-rouges en physique

Nous pouvons entamer cette discussion sous l'angle des phénomènes critiques. Posons nous la question suivante : quelles sont les échelles les plus importantes dans une transition de phase ? Nous savons que nous pouvons distinguer deux types de degrés de

libertés. Tout d’abord les degrés de libertés «rapides», de petites longueurs d’ondes qui correspondent à des phénomènes ayant lieu sur de courtes distances. À l’opposé, nous avons les degrés de libertés «lents», de basses énergies, qui eux correspondent aux phénomènes ayant lieu sur des longues distances. Sans plus de réflexions, on pourrait être tenté d’affirmer que les modes les plus énergétiques jouent un rôle prépondérant. Cependant il n’en est rien, et ce sont bien les modes les plus lents qui ont une importance cruciale. Supposons par exemple que nous étudions un système dans une boîte relativement grande de longueur L . Pour étudier un mode de longueur d’onde $\lambda \ll L$, on peut imaginer que nous subdivisons notre système en petits blocs de côtés L . Si l’on observe le système dans son entier, on ne voit pas l’effet de ces boîtes individuels, mais une moyenne de leur comportement seulement. Si par contre, $\lambda \approx L$, on doit nettement sentir les effets de ces modes.

La physique des hautes énergies s’est longtemps concentré sur les problèmes des divergences ultraviolettes. En effet, beaucoup de modèles de physique de particules (et de matière condensée) présentent un comportement singulier dans l’ultraviolet. Certaines divergences pour des grandes valeurs de l’impulsion rendent les théories mal définies. Le concept de renormalisation joue alors un rôle important. En effet, il est souvent possible de «régulariser» le comportement d’une telle théorie en imposant une borne supérieure aux impulsions du système. Cette «coupure» ultraviolette supprime alors les divergences, mais en règle générale aucune considération ne nous permet de donner à cette coupure une valeur physique. Le concept de renormalisation permet de s’affranchir de ce problème par une redéfinition *ad-hoc* des constantes de couplages. Sans rentrer plus dans les détails, on constate simplement qu’en règle générale, les divergences ultraviolettes ne sont pas les plus problématiques. Elles signifient que dans tous les processus, les fluctuations quantiques donnent des contributions à toutes échelles.

Le choix d’une coupure ultraviolette, ou d’un schéma de régularisation des contributions divergentes est un autre aspect qui peut rendre ces divergences compliquées. Travailler sur un réseau est une possibilité, mais il en existe d’autres comme la régularisation dimensionnelle. Quoi qu’il en soit, le problème des divergences infrarouges est tout autre. Le comportement infra-rouge est dicté par les éventuelles corrélations à longues portées qui gouvernent la dynamique des constituants d’un système. Elles sont physiquement très importantes. De plus, en matière condensée, elles sont souvent les seuls «vrais» divergences car les problèmes ont souvent lieu sur réseau, ce qui introduit de fait une coupure U.V.. Le groupe de renormalisation permet de sonder le comportement infra-rouge d’une théorie, de même que d’autres méthodes de théorie des champs.

Une manière systématique de voir l’étude des propriétés infrarouge d’un système est d’imaginer que l’on se borne à construire une théorie effective représentative du comportement I.R.. Cette construction peut être menée soit directement en construisant un modèle qui semble apte à obtenir de tels informations. Dans les faits, on verra que le groupe de renormalisation est capable de donner une telle théorie effective. Elle est alors construite d’ordinaire par une élimination successive des modes rapides, poussé par la réduction systématique de la coupure vers l’infrarouge. Le groupe de renormalisation dans l’espace interne lui va effectuer cette construction en intégrant progressivement les

fluctuations quantiques croissantes engendrées par les interactions entre les constituants du système. Dans le deux visions du problème, nous pourrions alors discuter plus en détail du comportement infra-rouge du système. Le premier modèle auquel nous nous sommes intéressé est le modèle de Luttinger.

1.2 Le modèle de Luttinger

La physique des électrons fortement corrélés est un domaine extrêmement riche. Le développement de matériaux quasi-unidimensionnels a connu un essor important, ce qui a poussé encore plus l'étude théorique de ces systèmes qui a commencé dans les années 1950. Le modèle de Luttinger est un des modèles phares de ce domaine. Il montre un comportement tout à fait singulier comparé à la théorie de Landau des fermions en interaction. Il a été notamment montré que la fonction beta de ce modèle est nulle. Par ailleurs, la méthode de la bosonisation apporte une solution élégante à l'étude des propriétés du liquide de Luttinger.

Nous nous proposons d'étudier ce modèle en utilisant le groupe de renormalisation dans l'espace interne [1] (*internal space renormalisation group*). Cette extension du groupe de renormalisation permet la construction de la fonctionnelle action effective en resonnant les modes selon leur importance dans l'espace interne, caractéristique de l'amplitude des champs de la théorie. Il constitue une réalisation de la proposition de Callan-Szymanzyk qui vise à éliminer les modes en fonction de l'amplitude des fluctuations quantiques qu'ils génèrent. Notre étude vise à clarifier le comportement infrarouge, au voisinage des points de Fermi, du modèle. Il s'effectue à l'ordre une boucle et semble indiquer clairement qu'au voisinage des points de Fermi, le système est fortement couplé. Nous mettons aussi en évidence quelques problèmes potentiels liés à la bosonisation du hamiltonien de Luttinger. Il semble que la prescription d'ordre normal alors utilisée ne soit pas un régulateur suffisamment bien défini pour être certain que toutes les quantités qu'elle amène à négliger ne contiennent aucune information physique vitale pour les propriétés de basse énergie du système. Ce point nécessitera une étude ultérieure. Le groupe de renormalisation dans l'espace interne permet d'obtenir un éclairage différent du problème. Nous nous sommes par ailleurs aussi intéressé à l'étude des systèmes quantiques ouverts.

1.3 Les systèmes à deux niveaux

L'étude des systèmes dissipatifs est un autre problème fondamental en physique. En effet, le cas idéal d'un système isolé est très rarement rencontré dans les faits. La plupart des systèmes, qu'ils soient classiques où quantiques sont en contact avec un environnement plus ou moins complexes. Il s'en suit que les systèmes peuvent échangé de l'énergie. La dissipation se conçoit aisément dans ce formalisme. Bien que le système puisse fournir ou recevoir de l'énergie grâce à son environnement, le temps caractéristiques des échanges fait que seul la dissipation d'énergie intervient. La description la plus simple de

ces phénomènes consiste à faire l'hypothèse que le système et son environnement une fois regroupés forment un système isolé, et on procède alors à l'étude du système étendu. Au niveau quantique, ces considérations sont entre autre au coeur du problème de la décohérence qui vise à essayer de comprendre comment le monde classique dans lequel nous vivons est obtenu à partir d'une description microscopique nécessairement quantique.

Nous nous évertuons à construire une méthode systématique qui permet de d'obtenir l'action effective, comme fonctionnelle de la densité, d'un tel système. Nous procédons à une étude classique qui montre alors l'apparition d'une dérivée temporelle symétrisée, qui se traduit au niveau quantique par l'utilisation des fonctions de Green causales. Nous travaillons ensuite sur un modèle de théorie des champs qui décrit la dynamique d'un système à deux niveaux (un spin par exemple) en contact avec un «bain» d'oscillateurs harmoniques. Nous détaillons alors la procédure de construction de l'action effective et nous donnons l'équation du mouvement pour la densité issue du principe de moindre action. Nous discutons finalement des étapes qui restent à effectuer pour obtenir des résultats sur la dynamique de relaxation d'un tel système. Nous aborderons alors un dernier point : l'étude des réseaux complexes.

1.4 Corrélations statistiques : l'exemple des réseaux complexes

Jusqu'alors, les corrélations entre les composants du système étaient le fruit de vrais interactions. Le développement des structures de communication comme le réseau internet révèle que les réseaux complexes présentent de propriétés très intéressantes. Ils semblent favoriser bien plus les événements rares que de simples «graphes aléatoire». Nous avons réaliser un modèle susceptible de décrire ce comportement particulier comme une conséquence de corrélations subtiles entre les relations physiques qu'ont les individus de tels réseaux et un effet mémoire à «court-terme» [2]. Nous conduisons cette étude numériquement et observons alors le comportement «scale-free» caractéristique de ce comportement. Le modèle effectif que nous avons construit semble alors reproduire efficacement le comportement de ces assemblages complexes.

Ce dernier point s'inscrit dans un contexte plus général que les précédents. Les corrélations entre les constituants sont purement statistiques, bien que nous verrons qu'il est peut être possible d'obtenir une description de théorie des champs de ce modèle.

Chapitre 2

Le Groupe de Renormalisation et ses extensions

Le groupe de renormalisation est un des points autour duquel s'articule cette thèse. Ce premier chapitre lui est donc naturellement consacré. Il se veut avant tout pédagogique, et a pour objectif d'effectuer un tour d'horizon du concept de renormalisation en général. Dans un premier temps, nous entamerons notre discussion sous l'angle des phénomènes critiques, ce qui nous conduira à une première «vision» du groupe de renormalisation (RG). Cette courte introduction sera mis en parallèle avec une formulation du groupe de renormalisation appliqué à une théorie quantique des champs. Puis nous passerons au coeur de ce chapitre, à savoir les extensions fonctionnelles du formalisme standard du RG. Ces nouvelles formulations ont un certain nombre d'intérêts - comme on le verra dans les chapitres suivants. Notamment, elles vont nous mener tout droit à une de ses généralisation naturelle : le *groupe de renormalisation dans l'espace interne* (que nous appellerons parfois iRG). Cette démarche s'inscrit dans un contexte légèrement différent des méthodes ordinaires, et constituera l'outil de base que nous choisirons pour traiter le modèle de Luttinger dans le chapitre 4.

2.1 Des phénomènes critiques au groupe de renormalisation

La physique des phénomènes critiques est très riche et elle a toujours été source d'une certaine curiosité. Très souvent les modèles les plus simples conduisent à des concepts bien plus sophistiqués, et les transitions de phases ne dérogent pas à cette règle. Une approche «scolaire» du groupe de renormalisation consiste à le mettre en évidence au travers de cas simples, comme les modèles liés au magnétisme de la matière. Nous adopterons cette démarche dans cette section. Nous choisirons d'étudier le modèle d'Ising en 2 dimensions sur un réseau carré. Un grand nombre d'articles et d'ouvrages existent sur le sujet, et peuvent servir de référence au lecteur. On peut citer notamment les références suivantes [3–8] qui abordent les phénomènes critiques sous l'angle du groupe de renormalisation ou *vice versa*. Cette liste n'est bien entendu pas exhaustive, tant ce sujet a cristallisé

l'attention des physiciens ces 30 dernières années.

Notre point de départ est donc un simple réseau carré à 2 dimensions dont nous choisirons d'indexer les noeuds par un seul entier i . Sur le réseau vivent des variables s_i qui sont contraintes à ne prendre que les valeurs ± 1 . Ce modèle est tellement ancré au magnétisme de la matière qu'un léger abus de langage nous permet de les qualifier de «spins». Ces spins ont chacun quatre plus proches voisins sur le réseau. On suppose qu'il existe une interaction entre un spin et ses plus proches voisins de la forme,

$$V = -J \sum_{\langle i,j \rangle} s_i s_j, J > 0. \quad (2.1)$$

Le signe moins devant l'intensité caractéristique de l'interaction J impose qu'il est plus favorable pour les spins de s'aligner, c'est-à-dire d'avoir tous le même signe ($\langle i, j \rangle$ indique la sommation sur les plus proches voisins). On peut aussi supposer que le système est soumis à un champ magnétique externe \vec{B} , perpendiculaire au plan du réseau, qui force les spins à s'aligner dans sa direction, *i.e.*

$$U = -\alpha B \sum_i s_i, \alpha > 0. \quad (2.2)$$

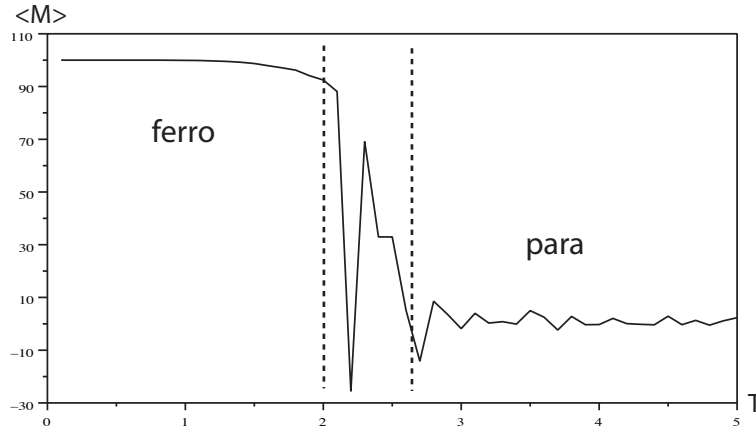


FIG. 2.1 – Valeur moyenne de l'aimantation pour le modèle d'Ising sur réseau carré (100 spins sur un tore) en fonction de la température. On distingue clairement les deux phases ferromagnétique et paramagnétique pour lesquels les fluctuations de l'aimantation autour de la valeur moyenne sont «faibles». Entre pointillés la zone de transition de phase. Bien que la courbe présente des effets de taille finie, elle illustre bien la compétition entre fluctuations thermiques et interactions, qui, au voisinage de la transition de phase, engendre des fluctuations d'échelles très différentes.

Le comportement du système peut être vu comme une compétition de chaque instant entre les fluctuations thermiques et les interactions précédentes. D'un côté, les fluctua-

tions thermiques souhaitent maximiser le désordre du système. De l'autre, les interactions vont contribuer à l'ordonner pour satisfaire les contraintes qu'elles imposent. Le paramètre qui permet de décider qui de l'un ou l'autre l'emportera est l'énergie relative associée aux deux phénomènes. Un moyen très simple de «visualiser» cette lutte est d'effectuer une simulation Monte-Carlo du système par l'algorithme de Metropolis [9]. Supposons pour l'instant que le champ extérieur est nul. Partons de l'état de basse température où tous les spins sont parfaitement alignés (par exemple $s_i = +1$). Ensuite, nous augmentons progressivement la température, et nous utilisons l'algorithme de Metropolis pour échantillonner les configurations du système. Le système, grâce à l'apport de l'énergie d'agitation thermique, va pouvoir adopter des configurations qui ne satisfont pas complètement les contraintes imposées par les interactions. De temps en temps, certains spins du réseau se retournent. Tant que la température est suffisamment basse le poids statistique de ces états, où quelques spins seulement vont à l'encontre de l'interaction ferromagnétique, reste relativement faible. L'aimantation du système varie peu de sa valeur maximum initiale prise à $T = 0$. Au fur et à mesure que la température augmente, ces poids statistiques deviennent de plus en plus importants, et l'aimantation du système commence à varier fortement. Nous approchons alors la zone de transition de phase. Passé cette zone, les fluctuations thermiques sont suffisamment importantes pour remporter la lutte contre l'effet des interactions : le désordre s'installe. Le système devient paramagnétique, les spins adoptent une configuration aléatoire. On peut se reporter à la figure 2.1 qui reproduit la variation d'aimantation, à champ externe nul, pour un système de taille finie ainsi modélisé numériquement par la méthode Monte-Carlo.

Ici, tout l'intérêt des méthodes Monte-Carlo est d'offrir à l'imagination une vision plus concrète des mécanismes qui entrent en jeu. Bien entendu, dans le cas du modèle d'Ising à 2 dimensions, cette méthode n'apporte rien de plus que la solution analytique d'Onsager [10]. Nous ne discuterons pas de cette solution dans ce chapitre. Notre volonté n'est pas de s'attarder sur cette transition en tant que telle, mais de comprendre ce qu'est le groupe de renormalisation. Peut-on visualiser l'aspect «typique» d'un réseau d'Ising 2D en-dessous et au-dessus de la température critique de transition T_c ? La simulation Monte-Carlo dont nous avons parlé précédemment nous permet de répondre par l'affirmative. Si l'on regarde une configuration comme échantillonnée avec l'algorithme de Metropolis, on constate que le système est formé d'agrégats (ou *clusters*) de sites plus proches voisins entre eux qui ont une même orientation. En-dessous de la température critique, le système est ferromagnétique. Il existe un grand agrégat (c'est-à-dire dont la taille est du même ordre que la taille du système) de spin d'orientation $+1$. Au-dessus de la température critique, il existe bien entendu toujours des agrégats, mais leurs tailles sont plus modestes, plus du tout de l'ordre de la taille du réseau. Signalons par ailleurs que dans les deux cas, ils ne sont pas forcément connexes. En moyenne aux hautes températures, aucun des agrégats d'orientation $+1$ ou -1 ne domine par leurs contributions la valeur totale de l'aimantation qui tend alors vers 0. Cette transition entre les deux régimes ferromagnétique et paramagnétique se traduit par la disparition de l'ordre longue portée, généré par l'interaction spin-spin, au profit d'un ordre à courte portée.

Au voisinage du point critique, le système fluctue fortement. En effet, l'agitation ther-

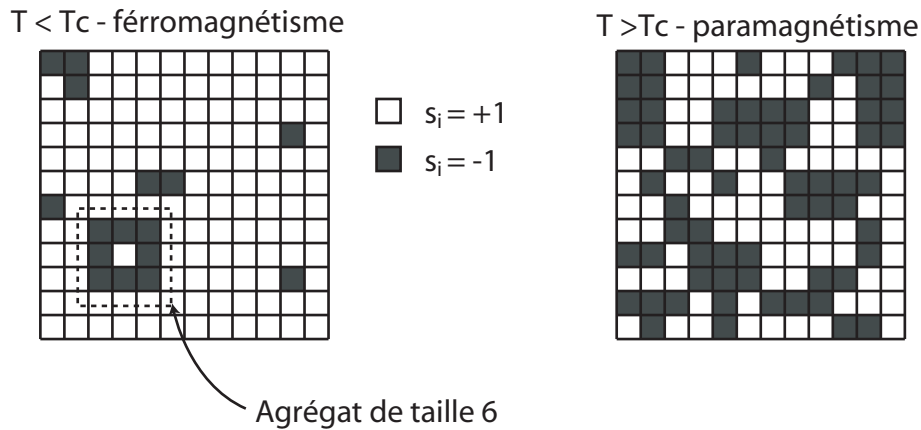


FIG. 2.2 – Deux configurations typiques d'un réseau de type Ising à basse et haute température. Remarquez que les agrégats (ou *clusters*) ne sont pas nécessairement connexes. À basse température, il y a un grand agrégat blanc, l'aimantation totale est forte. À haute température, l'aimantation est faible car les amas clairs et foncés sont de tailles comparables. On verra la conséquence de la présence de ces agrégats lors de l'application d'une transformation du groupe de renormalisation.

mique est suffisante pour détruire l'ordre présent. Les quantités qui jusqu'alors étaient fixées par ces corrélations longues portées se mettent à changer brutalement (on peut se reporter à la figure 2.1, où au voisinage de la transition de phase, on voit bien le changement dans la valeur moyenne de l'aimantation qui avant d'atteindre cette zone était dominée par l'interaction spin-spin). Pour en terminer avec ces considérations d'ordre général, il est important de retenir que dans le cas des phénomènes critiques au voisinage de la transition de phase *toutes les échelles de longueur du problème deviennent importantes*. Ceci diffère de beaucoup d'autres situations physiques que l'on peut décrire à une échelle d'observation sans connaître les détails microscopiques exacts du système.

Cette idée nous suggère que fort probablement à la température critique T_c , le système est *invariant d'échelle*. C'est-à-dire qu'il existe alors des fluctuations à toutes les longueurs caractéristiques dans le système. C'est dans cette optique que s'inscrit le groupe de renormalisation. Introduit par K. Wilson en 1971, il découle directement des travaux menés au début des années 1950 en physique des particules pour éliminer les divergences ultraviolettes (à courtes distances ou hautes énergies) dans les théories quantiques des champs. Une façon de concevoir le groupe de renormalisation est de suivre l'évolution du système sous l'action d'une transformation d'échelle. Dans le cas du modèle d'Ising à 2 dimensions, on regroupe par exemple les spins par blocs (voir figure 2.3) et on remplace les blocs ainsi obtenus par un spin unique, selon la règle de la majorité relative. On regarde alors les propriétés du nouveau système à l'issue de cette transformation. Si nous partons d'un système à basse température ($T < T_c$), où les longueurs corrélations sont

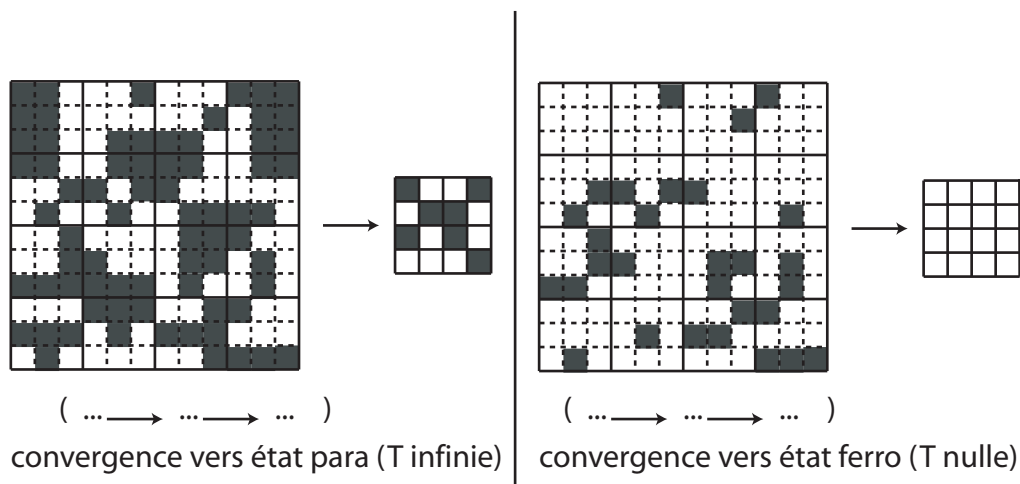


FIG. 2.3 – Transformations d'échelles pour le modèle d'Ising à 2 dimensions. Dans les deux cas, les systèmes initiaux représentent une fraction d'un système de taille infinie. On regroupe les spins 9 par 9 (blocs de 3×3) et on remplace ces spins par un «super-spin» qui prend l'orientation majoritaire du groupe initial. Dans le cas de gauche, si on part d'un réseau pour $T > T_c$ on obtient après un nombre d'itérations plus ou moins grand un réseau complètement désordonné. Alors que si on part d'un réseau à $T < T_c$ on se dirige après de multiples itérations vers un réseau complètement ordonné, équivalent au cas $T = 0$.

«infiniment» grandes, les itérations successives de cette transformation ne vont pas trop altérer leurs présences. On se retrouvera donc toujours avec un système complètement dominé par un ordre à longue portée. Par contre, si le système initial montre des corrélations de plus courtes portées ($T > T_c$), les itérations successives vont contribuer à les rendre encore plus courtes, jusqu'à tant qu'elles atteignent une longueur caractéristique inférieure au pas du réseau. Les spins sont alors libres d'adopter la configuration qu'ils souhaitent aléatoirement. Après toutes ces itérations, le désordre est complet, et l'on se retrouve alors avec un système dont la configuration est caractéristique des hautes températures ($T \rightarrow \infty$). Cependant, à la transition de phase, la suite de transformations n'altérera pas la présence initiale des fluctuations à toutes les échelles. Le système à T_c sera dit *invariant* sous cette transformation de «décimation». C'est un moyen commode de repérer où se produit cette transition de phase.

Cette procédure de réduction du nombre de degré de libertés par une famille de transformations d'échelles constitue de manière formelle l'idée du groupe de renormalisation. Il permet de dégager un certain nombre de comportements universels dans des théories qui *a priori* diffèrent par leurs détails microscopiques. Une très bonne discussion, replacée dans son contexte historique, de ces concepts de base a été donnée par Kenneth G. Wilson dans son article [11] publié à la suite de l'attribution du Prix Nobel de Physique en 1982. Si le groupe de renormalisation s'illustre facilement par le biais de cet exemple élémentaire, il est possible de le formuler d'une manière plus concrète en l'appliquant

dans le cadre général de la théorie des champs. Attardons nous un moment sur cette formulation.

2.2 Théorie des champs et groupe de renormalisation

Nous allons mener une approche plus formelle du groupe de renormalisation dans le cadre d'une théorie quantique des champs. Chaque discipline à son modèle favori, et en théorie quantique des champs, nous utiliserons le modèle scalaire φ^4 . Nous adopterons peu ou prou le même angle d'approche du problème que celui développé dans la référence [12]. Considérons la théorie en temps imaginaire à D dimensions d'espace-temps d'action euclidienne

$$S_E[\varphi] = \int d^D x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 + \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 \right]. \quad (2.3)$$

Nous ne préoccuons pas ici en détail du problème des divergences ultraviolettes de la théorie, et nous admettrons que l'on peut s'affranchir de cette discussion si l'on impose la présence une coupure dure Λ dans l'espace d'impulsion. Elle est introduite dans les mesures d'intégration des intégrales de chemins qui définissent les différentes fonctionnelles génératrices du problème. Par exemple, pour la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green (fonction de partition), on écrira

$$Z[J] = \int \mathcal{D}_\Lambda [\varphi] e^{-S_E[\varphi] + J \cdot \varphi}, \quad \text{où } \mathcal{D}_\Lambda [\varphi] = \prod_{\|k\| < \Lambda} d\varphi_k. \quad (2.4)$$

On sait que les théories des champs euclidiennes peuvent être mises en parallèle avec des problèmes de physique statistique. C'est dans cette optique que la petite discussion triviale sur le modèle d'Ising que nous avons mené précédemment prend tout son sens. À supposer que l'on puisse identifier le champ $\varphi(x)$ au «champ de spin» $s(x)$ du modèle d'Ising, on peut se convaincre que la présence d'une coupure dans l'espace des impulsions est tout à fait raisonnable. Elle correspond simplement au fait que la distance inter-atomique (le pas du réseau) est la distance minimale pour laquelle des fluctuations peuvent avoir lieu. Nous allons adopter la même démarche que dans le cas de ce modèle, et essayer d'éliminer les fluctuations de courtes portées. Puis nous effectuerons une transformation d'échelle (ce qui correspond globalement à la règle de regroupement des spins vue dans la section précédente). L'élimination des fluctuations courtes portées se fait simplement en diminuant la valeur de la coupure ultraviolette. Dans l'intégrale de chemin qui définit la fonction de partition, on peut écrire si on introduit le réel $b = e^{-l}$ inférieur à un (où l est strictement positif) :

$$Z[J] = \int \mathcal{D}_{b\Lambda} [\varphi] \mathcal{D}_{\Lambda, b\Lambda} [\phi] e^{-S_E[\varphi + \phi] + J \cdot (\varphi + \phi)}, \quad \mathcal{D}_{\Lambda, b\Lambda} [\phi] = \prod_{b\Lambda < \|k\| < \Lambda} d\phi_k. \quad (2.5)$$

Cette procédure sépare formellement les modes rapides (que nous voulons éliminer) des modes lents que nous souhaitons conserver. Par ailleurs on peut poser

$$Z[J] = \int \mathcal{D}_{b\Lambda} [\varphi] e^{-S_{\text{eff}}[\varphi] + J \cdot \varphi}, \quad (2.6)$$

où S_{eff} est l'intégrale d'une densité Lagrangienne effective qui fait intervenir *uniquement* les modes lents. Elle est égale, à l'ordre arbre de la série des perturbations ordonnée en puissance λ , à l'action originale du modèle. L'étape suivante est d'effectuer une transformation d'échelle pour sonder les propriétés éventuelles d'invariance du système initial. Si nous posons

$$k' = e^l k, \quad x' = e^{-l} x, \quad (2.7)$$

nous pouvons mettre la nouvelle action S_{eff} sous la forme suivante :

$$S_{\text{eff}}[\phi] = \int d^D x' b^{-D} \left[\frac{1}{2} b^2 (1 + \delta Z) (\partial'_\mu \varphi)^2 + \frac{1}{2} (m^2 + \delta m^2) \varphi^2 + \frac{\lambda + \delta \lambda}{4!} \varphi^4 + b^4 \delta C_1 (\partial'_\mu \varphi)^4 + \delta C_2 \varphi^6 + \dots \right]. \quad (2.8)$$

Les termes absents du Lagrangien initial (précisément ceux en « φ^6 » et « $(\partial'_\mu \varphi)^4$ ») proviennent de l'intégration sur les degrés de libertés rapides. Typiquement, on aimerait pouvoir identifier cette équation avec l'action euclidienne initiale. Pour cela, il nous faut effectuer en plus une transformation d'échelle adéquate sur les champs. Elle va nous permettre de suivre l'évolution des différents termes du Lagrangien effectif au cours des transformations successives d'élimination puis de «rescaling». Si l'on introduit

$$\varphi = b^{D-2} (1 + \delta Z)^{-1/2} \varphi', \quad (2.9)$$

nous pouvons exprimer l'équation (2.8)

$$S_{\text{eff}}[\phi] = \int d^D x' \left[\frac{1}{2} (\partial'_\mu \varphi')^2 + \frac{1}{2} m'^2 \varphi'^2 + \frac{\lambda'}{4!} \varphi'^4 + C'_1 (\partial'_\mu \varphi')^4 + C'_2 \varphi'^6 + \dots \right]. \quad (2.10)$$

Il est alors possible de relier les paramètres «renormalisés» de la densité Lagrangienne effective aux paramètres de la densité originale. On compare leurs expressions pour trouver les relations suivantes :

$$m' \propto (m^2 + \delta m^2) b^{-2}, \quad (2.11)$$

$$\lambda' \propto (\lambda + \delta \lambda) b^{D-4}, \quad (2.12)$$

$$C'_1 \propto \delta C_1 b^D, \quad (2.13)$$

$$C'_2 \propto \delta C_2 b^{2D-6}. \quad (2.14)$$

Remarque: Les quantités du type δm^2 , $\delta \lambda$ viennent de l'intégration des modes rapides au voisinage de la coupure U.V.. Elles sont typiquement proportionnelles à des puissances positives de la constante de couplage «nue» λ , de sorte que dans une approche purement perturbative on pourra les négliger le moment venu.

Si le Lagrangien initial contient une masse et une interaction non-triviale, on constate qu'après une transformation on trouve une forme fonctionnelle assez différente de celle de départ. De nouveaux termes sont apparus, et il n'est pas possible de relier simplement les deux expressions. Mais, si initialement on pose $m = \lambda = 0$, le Lagrangien est invariant sous ces transformations. On dira que le Lagrangien libre,

$$L_0 = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2, \quad (2.15)$$

est un *point fixe* pour la transformation du Groupe de Renormalisation. C'est-à-dire qu'il conserve la même forme fonctionnelle sous la combinaison d'une élimination et d'un «rescaling» adéquat des champs.

Qu'en est-il de la stabilité d'un tel point fixe ? Si l'on perturbe légèrement le Lagrangien L_0 , quelles seront les conséquences des transformations précédentes ? Différents cas sont possibles. Commençons par ajouter le terme d'interaction $\lambda \varphi^4$ avec $\lambda \ll 1$ à L_0 . Dans cette situation, après une transformation nous trouvons une constante de couplage effective $\lambda' \propto \lambda b^{D-4}$. Selon la valeur de D , les applications successives vont alors augmenter ou diminuer la valeur de la constante de couplage renormalisée λ' par rapport à sa valeur initiale λ :

- Si $D > 4$, elles vont faire tendre λ' vers 0 : le «flot» des transformations successives nous reconduit vers le point fixe libre L_0 . On parlera de contribution *inessentiel* (*irrelevant*).
- Si $D < 4$ au contraire, l'interaction augmente et le flot nous éloigne du point fixe libre. Si nous souhaitons suivre ce flot, il faudra tenir compte des premières corrections d'ordres supérieurs $\delta\lambda$ (car λ' n'est plus nécessairement petit). On parlera de contribution *essentiel* (*relevant*).
- Pour $D = 4$, l'interaction ne change pas *a priori*. Mais il faudra là aussi tenir compte des corrections d'ordres supérieurs $\delta\lambda$ pour suivre son évolution en détail. On parlera de contribution *marginale*.

Si l'on effectue le même type de raisonnement pour l'ajout d'un terme de masse, on voit qu'elle est toujours un paramètre essentiel. On peut représenter le flot des constantes de couplages de ce modèle graphiquement. Par exemple, on peut aussi suivre la constante de couplage en φ^6 qui, au voisinage du point fixe libre, se comporte comme b^{2D-6} . La figure 2.4 illustre ce flot dans l'espace tri-dimensionnel des constantes de couplages $\{m^2, \lambda, C_2\}$.

┆ **Remarque:** Pour le modèle $\lambda\varphi^4$, on dit que $D = 4$ est la dimension critique supérieure, au-delà de laquelle l'approximation du champ moyen est valide.

Cette approche du groupe de renormalisation est celle de Wilson. Il existe d'autres stratégies de renormalisation (comme l'équation de Callan-Szymanzik [13, 14]) couramment utilisées. Nous allons plus particulièrement nous intéresser aux extensions fonctionnelles du groupe de renormalisation. En effet, un des grands intérêts de formuler un problème comme une théorie quantique des champs est qu'il est alors possible d'utiliser l'arsenal très complet des outils qui permettent de manipuler les fonctionnelles génératrices. Le groupe de renormalisation, comme on va le voir dans la section suivante peut être formulé de la sorte.

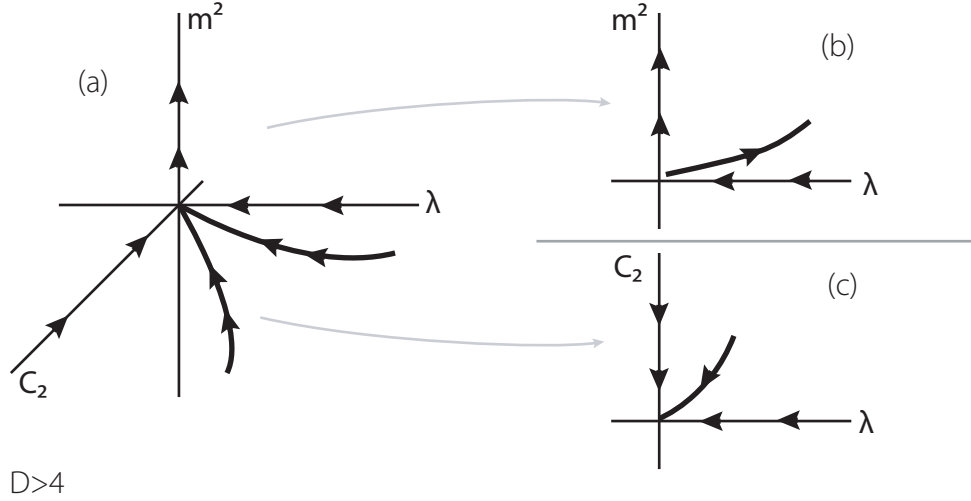


FIG. 2.4 – (a) : Flot du groupe de renormalisation dans l'espace des constantes de couplages $\{m^2, \lambda, C_2\}$ pour $D > 4$. L'origine représente le point fixe du champ scalaire non massif libre. (b) et (c) : représentation dans les plans respectifs $\{m^2, \lambda\}$ et $\{C_2, \lambda\}$. La masse étant un paramètre essentiel sous la transformation du GR, elle nous éloigne toujours du point fixe libre non-massif

2.3 De l'approche multiplicative à l'approche fonctionnelle

Une bonne introduction aux méthodes fonctionnelles de renormalisation est donnée dans le cours [15]. Ce genre d'arguments ont été en partie à l'origine des motivations physiques qui nous ont conduit à traiter le modèle de Luttinger en employant le groupe de renormalisation dans l'espace interne. Nous adopterons partiellement le même type de raisonnement dans la suite de ce chapitre.

En théorie quantique des champs, l'approche usuelle (moins reliée aux phénomènes critiques que ce que nous avons vu avant) du Groupe de renormalisation est dite «multiplicative». Elle consiste à lier les fonctions de Green «renormalisées» vues à l'échelle d'observation μ (comme fonctions des constantes de couplages «renormalisées») aux fonctions de Green «nues» vues à l'échelle de la coupure ultraviolette Λ (comme fonctions cette fois des constantes de couplages nues). Entre ces deux quantités il existe alors une relation du type

$$G^{(n)}(p_1, \dots, p_n; g_R, \mu) = Z^{-n/2} G_B^{(n)}(p_1, \dots, p_n; g_B, \Lambda) + o(\mu^2/\Lambda^2) + o(p_i^2/\Lambda^2). \quad (2.16)$$

Les indices «R» désignent les quantités renormalisées et les indices «B» les quantités nues. Cette égalité dégage les propriétés universelles entre les fonctions de Green des termes *non-universels* représentés ici par les ordres négligés. Il s'en suit une discussion physique du problème en question. Soit nous souhaitons que la théorie renormalisée soit indépendante de la coupure Λ , soit que la théorie nue soit indépendante de l'échelle d'observation μ (ce qui correspond à regarder le même problème vu sous deux angles

différents). Ces méthodes multiplicatives ont toutes le désavantage d’être asymptotiques, c’est-à-dire d’être applicable dans le régime du même nom. C’est le régime qui qualifie l’évolution d’un système dynamique pour lequel l’échelle d’observation μ^2 et l’échelle caractéristique des impulsions du système p^2 sont toutes les deux négligeables devant la coupure ultraviolette Λ ($\mu^2, p^2 \ll \Lambda^2$). De plus, pour des modèles qui présentent un comportement infrarouge singulier (c’est le cas des transitions de phase par exemple), il faut être certain de pouvoir rester dans le régime où les lois d’échelles ultraviolettes dominant la dynamique du système. Ceci revient dans les faits à imposer en plus une borne inférieure aux deux quantités précédentes. En effet, il est tout à fait possible que le jeu d’opérateurs *essentiels* dans le domaine ultraviolet ne soit *pas* le même que celui du domaine infrarouge (voir Réf. [16]). Les méthodes standards ne sont pas non plus complètement adaptées à suivre un grand nombre de constantes de couplages, ce qui est justement intéressant si l’on souhaite contourner le problème précédent. La théorie quantique des champs a montré la puissance des méthodes fonctionnelles, par exemple dans la formulation de la théorie des perturbations. On peut raisonnablement espérer que des méthodes fonctionnelles puissent apporter le même avantage pour le groupe de renormalisation. C’est pourquoi nous nous proposons de faire un tour d’horizon rapide et non exhaustif des extensions fonctionnelles du RG.

2.3.1 L’équation de Wegner-Houghton

La première approche que nous considérons est sans doute la plus directe et la plus naïve qui mène à une expression fonctionnelle des équations du groupe de renormalisation [17]. Commençons par poser le cadre théorique dans lequel cette extension prend place. On étudie une théorie des champs scalaire qui possède une coupure ultraviolette Λ dans l’espace des impulsions. La fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes est donnée par la définition usuelle,

$$e^{\frac{1}{\hbar}W[j]} = \int \mathcal{D}_\Lambda[\varphi] e^{-\frac{1}{\hbar}(S[\varphi] + \int_x j(x)\varphi(x))}. \quad (2.17)$$

La présence de la coupure est matérialisée encore une fois dans la mesure d’intégration fonctionnelle, qui limite l’intégrale de chemin au sous-espace \mathcal{F}_Λ des fonctions dont les transformées de Fourier sont nulles pour $|\vec{p}| > \Lambda$ (c’est-à-dire dont le support est borné). L’approche naturelle consiste à se demander comment cette intégrale fonctionnelle varie lorsque l’on déplace la coupure ultraviolette. Plus précisément, à la manière de ce que l’on fait dans le groupe de renormalisation standard, nous allons regarder comment nous devons modifier l’action du système pour que la fonctionnelle génératrice W reste indépendante du choix de la coupure Λ . Il suffit décrire l’égalité souhaitée, $W_\Lambda[j] = W_{\Lambda-d\Lambda}[j]$, pour trouver la relation suivante :

$$\int \mathcal{D}_\Lambda[\varphi] e^{-\frac{1}{\hbar}(S_\Lambda[\varphi] + \int_x j(x)\varphi(x))} = \int \mathcal{D}_{\Lambda-d\Lambda}[\varphi] e^{-\frac{1}{\hbar}(S_{\Lambda-d\Lambda}[\varphi] + \int_x j(x)\varphi(x))}. \quad (2.18)$$

On peut alors travailler sur cette expression, et effectuer un développement en puissances de la constante de Planck \hbar au voisinage du point-selle $\tilde{\varphi}_{cl}$ (solution des équations

classiques du mouvement). Nous pouvons alors affirmer que :

$$S_\Lambda[\varphi] - S_{\Lambda-d\Lambda}[\varphi] = S_\Lambda[\varphi] - S_\Lambda[\varphi + \tilde{\varphi}_d] - \frac{\hbar}{2} \text{tr} \frac{\delta^2 S_\Lambda[\varphi + \tilde{\varphi}_d]}{\delta \tilde{\varphi} \delta \tilde{\varphi}} + o(\hbar^2). \quad (2.19)$$

À l'ordre arbre, on retrouve simplement la correction de l'action générée par le déplacement de la coupure au niveau classique. L'ordre suivant représente la correction à une boucle, sous la forme d'une trace sur les fonctions qui sont dans \mathcal{F}_Λ mais pas dans $\mathcal{F}_{\Lambda-d\Lambda}$. En clair nous éliminons les modes rapides (pour faire un lien avec les formes standards du groupe de renormalisation). Si nous laissons de côté les problèmes liés au point-selle et à sa valeur lorsque l'on change de manière infinitésimale la coupure U.V., on peut obtenir une équation « explicite » qui ne le fait plus intervenir directement,

$$\begin{aligned} S_\Lambda[\varphi] - S_{\Lambda-d\Lambda}[\varphi] &= \frac{1}{2} \frac{\delta S_\Lambda[\varphi]}{\delta \tilde{\varphi}} \cdot \left(\frac{\delta^2 S_\Lambda[\varphi]}{\delta \tilde{\varphi} \delta \tilde{\varphi}} \right)^{-1} \cdot \frac{\delta S_\Lambda[\varphi]}{\delta \tilde{\varphi}} \\ &\quad - \frac{\hbar}{2} \text{tr} \ln \left(\frac{\delta^2 S_\Lambda[\varphi]}{\delta \tilde{\varphi} \delta \tilde{\varphi}} \right) + o(\hbar^2) + o(d\Lambda^2), \end{aligned} \quad (2.20)$$

où toutes les dérivées fonctionnelles sont prises pour $\tilde{\varphi} = 0$. C'est l'équation connue sous le nom d'équation de Wegner-Houghton[17]. Elle est valable sous certaines conditions que nous ne détaillerons pas ici. Elle s'explique de manière extrêmement simple : si le changement de la coupure est « petit » alors la variation de l'action est simplement donnée par les termes issus de la série de perturbations jusqu'à l'ordre une boucle. Tous les ordres supérieurs sont éliminés si le changement de la coupure est infinitésimale et si il n'y a aucune singularité particulière dans le propagateur qui pourrait contribuer à rendre impossible le déplacement de la coupure vers l'infrarouge. Nous n'insisterons pas d'avantage sur cette équation. Sa construction ne pose pas de difficultés insurmontables comme nous avons pu le constater, mais elle nécessite bien entendu d'être soigneux et de comprendre quelles sont les conditions où les approximations effectuées sont valides. Elle permet *a priori* de suivre toute l'action au fur et à mesure que nous éliminons les degrés de libertés rapides. Ici la coupure est supposée dure. Dans le cas où des contraintes supplémentaires imposent de travailler avec une coupure molle, il existe une autre équation – *l'équation de Polchinski* [18, 19] – bien plus adaptée. La démonstration de cette dernière équation est en grande partie analogue à celle que nous venons d'effectuer (bien que plus technique dans les détails). Nous allons passer à un autre type de raisonnement, que l'on peut qualifier « d'évolution continue ». C'est moins ce raisonnement que sa généralisation la plus directe qui nous intéressa par la suite.

2.3.2 Évolution continue

L'équation précédente suit l'évolution de l'action nue au cours de la procédure de déplacement de la coupure. Les trajectoires renormalisées nous permettent d'obtenir les constantes de couplages nues en fonctions de la coupure Λ . Cependant, ces constantes de couplages ne sont pas à proprement parlé des quantités *physiques*. La différence entre les

paramètres physiques et les constantes de couplages nues est liée aux fluctuations quantique dans les intégrales de chemins. Tant qu’elles sont importantes, les quantités nues n’ont qu’un intérêt au mieux qualitatif. Lorsqu’on s’approche du domaine infrarouge, les degrés de libertés rapides qui contribuent grandement aux fluctuations quantiques, ont été en grande partie éliminés. De ce fait, ce n’est qu’au voisinage du domaine infrarouge que l’action ainsi obtenue a un réel intérêt (c’est-à-dire dans la limite $\Lambda \rightarrow 0$).

L’idée de «l’évolution continue» est de suivre l’action effective (fonctionnelle génératrice des fonctions de Green 1PI) plutôt que l’action au cours de processus de renormalisation. Par ailleurs elle visera à ajouter un terme à l’action nue dans le simple but de supprimer les fluctuations quantiques dans l’intégrale de chemin lorsque la coupure est «grande». De ce fait, l’effet des fluctuations quantiques est bien plus contrôlé que dans l’équation de Wegner-Houghton. Écrivons la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes :

$$e^{\frac{1}{\hbar}W[j]} = \int \mathcal{D}[\varphi]_{\Lambda} e^{-\frac{1}{\hbar}(S_B[\varphi]+C_{\Lambda}[\varphi]-j\cdot\varphi)}. \quad (2.21)$$

Le terme $C_{\Lambda}[\varphi]$ est justement celui censé effectuer la suppression des fluctuations dans l’intégrale de chemin. Ce terme doit avoir plusieurs propriétés si l’on souhaite conserver un sens physique à la démarche :

- Dans la limite $\Lambda \rightarrow \infty$, il doit dominer complètement l’intégrale de chemin. Ceci aura pour effet de supprimer les fluctuations quantiques induites dans l’action nue.
- Par contre, dans la limite $\Lambda \rightarrow 0$, on souhaite retrouver la fonctionnelle génératrice du système originel. Pour cela, il suffit de demander que $C_0[\varphi]$ soit identiquement nulle.
- Le terme de suppression doit avoir le moins d’effets possibles sur l’intégrale de chemin en dehors des deux propriétés précédentes. Seules les fluctuations quantiques doivent être supprimées. C’est pourquoi on impose aussi qu’au voisinage de $\varphi = \langle \varphi \rangle$, $C_{\Lambda}[\varphi]$ soit nulle.

Dans la majorité des situations, ces contraintes peuvent être satisfaites en choisissant un terme de suppression quadratique dans les opérateurs de champs

$$C_{\Lambda}[\varphi] = \frac{1}{2}\varphi \cdot C_{\Lambda} \cdot \varphi. \quad (2.22)$$

Il est simple de trouver l’évolution du générateur des fonctions de Green connexes dans ce cas,

$$\partial_{\Lambda}W_{\Lambda}[j] = -e^{-\frac{1}{\hbar}W_{\Lambda}[j]} \int D[\varphi] \partial_{\Lambda}C_{\Lambda}[\varphi] e^{-\frac{1}{\hbar}(S_B[\varphi]+C_{\Lambda}[\varphi]-j\cdot\varphi)} \quad (2.23)$$

$$= -e^{-\frac{1}{\hbar}W_{\Lambda}[j]} \partial_{\Lambda}C_{\Lambda}\left[\hbar\frac{\delta}{\delta j}\right] e^{\frac{1}{\hbar}W_{\Lambda}[j]}. \quad (2.24)$$

Cette équation se suffit à elle même. Elle ne fait intervenir que $W[j]$, or cette fonctionnelle est extrêmement non-locale. Il nout faudrait arriver à une expression pour l’action effective Γ définie par la transformation de Legendre usuelle,

$$\Gamma[\varphi] + W[j] = j \cdot \varphi \quad (2.25)$$

Ceci ne présente aucune difficultés. On trouve, moyennant un petit changement variable, l'équation suivante [19–24] :

$$\partial_\Lambda \Gamma_\Lambda[\varphi] = \frac{\hbar}{2} \text{tr} \left[\partial_\Lambda C_\Lambda \cdot \frac{1}{C_\Lambda + \frac{\delta^2 \Gamma_\Lambda}{\delta\varphi\delta\varphi}} \right] \quad (2.26)$$

C'est l'équation qui gouverne alors l'évolution de l'action effective, en fonction de l'action de suppression C_Λ lors du changement infinitésimal de la coupure U.V.. Cette démarche peut alors être généralisée, en remplaçant la coupure par un autre paramètre. C'est le principe du groupe de renormalisation dans l'espace interne.

2.4 Groupe de Renormalisation dans l'espace interne

Toutes les méthodes précédentes, ainsi que les généralisations fonctionnelles dont nous avons parlé, s'axent sur les propriétés d'échelles du système, un peu comme dans le cas du modèle d'Ising que nous avons décrit en préambule. C'est donc tout naturellement la coupure dans l'espace des impulsions qui joue un rôle prépondérant. Et c'est l'effet de son déplacement qu'elles tentent de quantifier à mesure que l'on s'approche du domaine infrarouge. On pourrait se demander si d'autres paramètres continus d'une théorie peuvent jouer un rôle équivalent à celui de la coupure, mais bien entendu qui ne seraient pas nécessairement liés à l'invariance d'échelle du système (on peut parlé par exemple de la masse, de la constante de Planck, *etc.*). Au sens strict du terme, si une telle démarche est possible, nous n'aurons plus en face de nous des équations du groupe de renormalisation du même type que lorsque l'on joue sur la coupure, mais simplement des équations d'évolution qui traduisent les ajustements du système suite à la modification (infinitésimale) de ce paramètre continu de la théorie.

Comme toujours, chaque méthode possède un certain nombres d'avantages et d'inconvénients. Faire jouer à un autre paramètre le rôle de la coupure implique qu'entre deux itérations successives de cette approche, on ne suit plus directement les informations qui étaient liées à la dépendance d'échelle de la théorie. Par contre, comme on le verra par la suite, on gagne la possibilité d'effectuer une resommation astucieuse de la série de perturbations. De plus, ces méthodes vont s'avérer apporter un éclairage nouveau sur des problèmes existant. On peut aussi envisager d'utiliser cette généralisation dans des cas où travailler sur la coupure peut être problématique, par exemple pour les théories de jauges. Mais aussi dans certains problèmes de matière condensée liés à la supraconductivité où le traitement sur un même pied d'égalité par le groupe de renormalisation Wilsonien de l'interaction électron-électron et l'interaction électron-phonon peut être délicat, dans la mesure où leurs échelles caractéristiques ne sont pas forcément compatibles.

L'approche conventionnelle du RG classe les degrés de libertés à éliminer selon leur importance dans l'espace externe, c'est-à-dire dans l'espace-temps (ou dans l'espace de Fourier) où les «événements» d'une théorie des champs ont lieu. L'amplitude des champs ϕ d'une théorie est aussi nécessaire pour caractériser ces «événements» (dans le sens où

elles jouent un rôle tout aussi central que la structure dans l'espace externe d'une fonction de couplage). C'est dans cette optique que se base le groupe de renormalisation dans l'espace interne pour l'action effective [25, 26]. Pourquoi ne pas essayer de hiérarchiser les degrés de libertés selon leur importance dans cette espace des amplitudes (que nous conviendrons d'appeler *l'espace interne*) ?

Étudions le cas d'école d'un modèle scalaire dont l'action euclidienne est une certaine fonctionnelle $S_B[\varphi]$, l'action nue du modèle, et dont la structure exacte nous importe peu pour le moment. Traiter le cas scalaire ne préjuge absolument pas de la généralité de cette méthode. Ces idées s'appliquent tout aussi bien dans le cas fermionique (comme on le verra dans le chapitre 4), ou même dans des cas mixtes avec à la fois des degrés de libertés fermioniques et bosoniques. Le point de départ, comme pour l'équation de Wegner-Houghton ou l'évolution continue, est la fonction de partition W (fonctionnelle d'une source externe j) :

$$e^{\frac{1}{\hbar}W[j]} = \int \mathcal{D}_\Lambda[\varphi] e^{-\frac{1}{\hbar}(S_B[\varphi] - \int_x j(x)\varphi(x))}. \quad (2.27)$$

Cette fonctionnelle et l'action effective (fonctionnelle génératrice des fonctions de Green 1-PI) sont reliées par la transformation de Legendre usuelle :

$$W[j] + \Gamma[\phi] = \int_x j(x)\phi(x), \quad (2.28)$$

où les quantités ϕ et j sont conjuguées entre eux par la relation,

$$\phi(x) = \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)}. \quad (2.29)$$

Si d'aventure la théorie présente des divergences ultraviolettes, on assumera la présence d'un régulateur (une coupure dans l'espace des impulsions le plus souvent) dans l'intégrale de chemin. Nous voulons obtenir une équation fondée sur l'importance des degrés de libertés dans l'espace interne, et par conséquent, nous adopterons la démarche suivante. Nous allons progressivement allumer les fluctuations quantiques du système, et suivre l'évolution de l'action effective au cours de cette opération. L'amplitude des fluctuations sera contrôlée par un paramètre continu générique λ réel et positif (qu'il ne faut pas confondre avec la coupure Λ). Il existe plusieurs façons de mettre en oeuvre une telle paramétrisation, la plus simple est d'ajouter un terme dans l'action nue du système qui deviendra alors

$$S_B \rightarrow S_B + \lambda S_s, \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}^+. \quad (2.30)$$

Le terme que nous venons d'introduire est appelé action de suppression (S_s). Et comme la coupure de l'évolution continue détaillée à la section précédente, elle doit être convenablement choisie. En effet pour $\lambda \rightarrow +\infty$, la physique du système est entièrement dominée par ce terme, et les fluctuations engendrées par l'action nue originelle sont négligeables. Il est donc essentiel de choisir un terme de suppression qui correspond à un modèle soluble dans cette limite. Ceci permet d'avoir une «bonne» condition initiale,

suffisamment contrôlable (d'autres contraintes peuvent entrer en jeu, comme le respect des symétries de l'action nue ou des considérations qui visent à simplifier les calculs analytiques ultérieurs).

Lorsque λ tend vers 0, nous retrouvons progressivement le modèle que nous souhaitons étudier. La transition entre ces deux valeurs extrême génère des théories avec des fluctuations quantiques, engendrées par l'action nue, de plus en plus importantes. Elle pose formellement les bases d'une méthode non perturbative d'étude des systèmes fortement corrélés. On souhaite obtenir une équation fonctionnelle différentielle sur l'action effective du type,

$$\frac{d\Gamma}{d\lambda} = \mathcal{F}_\lambda[\Gamma], \quad (2.31)$$

dont la condition initiale est donnée par :

$$\Gamma_{\lambda_0}[\varphi] = S_B[\varphi] + \lambda_0 S_s[\varphi], \quad \lambda_0 \approx +\infty \quad (2.32)$$

On peut comprendre que ce type d'équation représente une généralisation de la stratégie de l'équation de Callan-Symanzik [25]. En effet, on sait qu'au sein des méthodes usuelles de renormalisation, l'équation de Callan-Symanzik est un cas un peu à part. L'évolution des constantes de couplages dans ce formalisme ne se fait pas sur une trajectoire qui relie une même théorie vue à des échelles différentes (trajectoire renormalisée) mais elle relie des théories de masse différentes. Ici, on relie aussi des théories différentes qui sont organisées selon l'importance de leurs fluctuations quantiques (on pourra noter que l'inverse de la masse est aussi une mesure de l'amplitude des fluctuations quantiques, ce qui rend encore cette analogie plus pertinente). Commençons par détailler la variation de l'action effective en fonction de la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connexes à l'aide de l'équation (2.28) :

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \Gamma[\varphi] &= -\partial_\lambda W[j] - \frac{\delta W[j]}{\delta j} \cdot \partial_\lambda j + \partial_\lambda j \cdot \varphi \\ &= -\partial_\lambda W[j], \end{aligned} \quad (2.33)$$

où comme toujours $f \cdot g = \int_x f(x)g(x)$. Ce lien direct qui existe entre l'évolution de Γ et de W va nous permettre de nous concentrer sur le calcul de l'évolution de W seulement. C'est la seule des deux fonctionnelles que nous pouvons exprimer directement sous la forme d'une intégrale de chemin et le calcul de son évolution est simple. À partir de l'expression qui définit $W[j]$,

$$e^{\frac{1}{\hbar}W[j]} = \int \mathcal{D}\varphi e^{-\frac{1}{\hbar}(S_B[\varphi] + \lambda S_s[\varphi] - \int_x j(x)\varphi(x))}, \quad (2.34)$$

on montre facilement que l'on peut obtenir par une simple dérivation l'évolution de W :

$$\begin{aligned} \partial_\lambda W[j] &= -\frac{1}{\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar}W[j]} \int \mathcal{D}[\varphi] S_s[\varphi] e^{-\frac{1}{\hbar}(S_B[\varphi] + \lambda S_s[\varphi] - \int_x j(x)\varphi(x))} \\ &= -\frac{1}{\hbar} e^{-\frac{1}{\hbar}W[j]} S_s\left[\frac{\delta}{\delta j}\right] e^{\frac{1}{\hbar}W[j]} \\ &= -e^{-W[j]} S_s\left[\frac{\delta}{\delta j}\right] e^{W[j]}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Nous avons choisi un système d'unité dans lequel $\hbar = 1$ afin d'alléger les notations. À partir de cette étape, la route qui mène à l'évolution de l'action effective est dégagée si l'on prend la peine de s'attarder sur deux points. Premièrement, nous allons remplacer l'action effective Γ par $\Gamma + \lambda S_s$, ce qui réduira sensiblement le nombre de termes dans l'équation d'évolution. Ensuite se pose la question du choix du terme de suppression. Le plus simple et le moins encombrant d'un point de vue analytique pour la détermination des conditions initiales est de prendre simplement une fonctionnelle quadratique des opérateurs de champs

$$S_s[\varphi] = \frac{1}{2} \varphi \cdot C \cdot \varphi. \quad (2.36)$$

Ceci nous permet de mettre notre équation d'évolution sous la forme suivante

$$\partial_\lambda \Gamma[\varphi] = \frac{1}{2} \int_{x,y} \left[C_{x,y} \left(\frac{\delta^2 W}{\delta j_x \delta j_y} + \varphi_x \varphi_y \right) - \varphi_x C_{x,y} \varphi_y \right]. \quad (2.37)$$

On comprend alors l'intérêt d'avoir effectué un changement de variable dans l'action effective. Des termes quadratiques qui ont pour noyau C vont se simplifier. Il reste un dernier petit obstacle à contourner pour rendre cette équation exploitable. Le membre de droite de l'équation précédent fait intervenir une dérivée fonctionnelle de W . Il serait bien plus commode d'avoir une équation ne faisant intervenir que Γ , ses dérivées fonctionnelles et le terme de suppression (pour qu'elle soit «auto-suffisante»). Il n'est pas difficile de remarquer que l'on peut écrire

$$\begin{aligned} \delta^{(d)}(x-y) &= \frac{\delta \phi_x}{\delta \phi_y} \\ &= \frac{\delta}{\delta \phi_y} \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} \\ &= \int_z \frac{\delta j_z}{\delta \phi_y} \frac{\delta}{\delta j_z} \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} \\ &= \int_z \frac{\delta \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi_z}}{\delta \phi_y} \frac{\delta}{\delta j_z} \frac{\delta W[j]}{\delta j(x)} = \int_z \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi_y \delta \phi_z} \frac{\delta^2 W[j]}{\delta j_z \delta j(x)}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Cette relation fonctionnelle forte entre les dérivées secondes des deux fonctionnelles génératrices (relation d'inverse au sens des distributions) est très générale. Elle peut prendre une forme plus compliquée si jamais nous avons plusieurs champs et sources. Mais dans le simple cas bosonique que nous considérons, elle est suffisamment triviale et compacte pour nous permettre d'obtenir une forme utile de l'équation fonctionnelle qui régit l'évolution de l'action effective Γ lorsque λ varie de manière infinitésimale :

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \Gamma[\varphi] &= \frac{1}{2} \int_{x,y} C_{x,y} \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi_x \delta \varphi_y} \right)^{-1} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[C \cdot \left(\frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \varphi \delta \varphi} \right)^{-1} \right]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Cette équation reste formelle et en aucun cas il n'est possible d'en donner une solution générale. Elle relie deux fonctionnelles entre elles, et nous n'avons aucune idée *a priori* de l'allure qu'elles vont avoir. La difficulté de cette stratégie et des autres formalismes fonctionnelles du groupe de renormalisation se trouve en parti ici. Il est souvent assez facile d'obtenir des équations correctes mais complètement inextricables. Faire le tri de celles qui sont réellement utiles est un point plus délicat.

Le point de vue à adopter dans notre cas peut être la suivant : comme (2.39) est une équation fonctionnelle, on peut se représenter l'évolution de Γ comme une trajectoire dans l'espace des fonctions des opérateurs de champs. Cet espace est très grand, beaucoup trop grand même, et il est impossible de le paramétrer simplement. On conçoit néanmoins qu'il est possible de suivre l'évolution de cette fonctionnelle si on ajoute une contrainte sur sa forme (ce qui assujetti l'évolution dans un sous-espace de l'espace total qui devient de taille raisonnable). Par exemple on peut effectuer un développement de Taylor fonctionnel jusqu'à un certain ordre, et supposer qu'il reste valide tout au long de l'évolution. On peut alors déplacer le problème et se contenter de suivre les «*fonctions-coefficients*» du développement. Le choix de l'ordre du développement est alors motivé par des considérations physiques.

2.5 Conclusion

Ce chapitre introductif nous montre à quel point les idées du groupe de renormalisation et les techniques qui y sont assimilées sont riches et variées. Les méthodes standard ont été appliquées dans une variété de problèmes bien trop grande pour faire l'objet d'une liste exhaustive. Les méthodes fonctionnelles quant à elles sont certainement moins populaires, surtout dans le domaine de la matière condensée. Il est intéressant de noter que des exemples d'applications récents du groupe de renormalisation en matière condensée (voir [27, 28]) on conduit à l'établissement d'équations fonctionnelles, et semblent pour plusieurs raisons être des candidats potentiels à l'application du groupe de renormalisation dans l'espace interne. Il présente l'intérêt d'apporter un nouvel éclairage à des problèmes jusqu'alors difficile à cerner, et de pouvoir s'appliquer par exemple à des problèmes de matière condensée [29], de physique des particule [26, 30] et même de cosmologie [31]. Nous présenterons dans le chapitre 4 son application au modèle de Luttinger. Notons que parmi ces formulations, certaines ont déjà été appliquées au modèle de Luttinger (voir notamment les références [32, 33]).

Chapitre 3

Le modèle de Luttinger

Une grande partie de cette thèse est consacrée à l'application du groupe de renormalisation dans l'espace interne au modèle de Luttinger [1, 34, 35]. Ce chapitre a pour objectifs de présenter l'intérêt de ce modèle ainsi que les principaux résultats le concernant. Nous pourrions alors comparer ces derniers à notre étude que nous présenterons au chapitre 4. Nous découperons ce chapitre en deux grandes parties. Tout d'abord la description de base des liquides et non-liquides de Fermi qui nous conduira à la formulation du modèle de Luttinger. Puis, nous détaillerons l'application du groupe de renormalisation Wilsonien à l'ordre 1-boucle et de la bosonisation sur ce modèle.

3.1 Une courte description du Liquide de Fermi

Le concept de liquides de Fermi a été développé à l'origine par Landau à la fin des années 1950. Encore de nos jours il revêt une importance toute particulière dans l'étude des interactions entre électrons dans les métaux. Il trouve ses fondements dans une idée très simple. Il est présenté dans bien des ouvrages et articles de références (on peut citer les références bibliographiques [36–38] par exemple). Nous nous contenterons d'en donner une brève description dans cette section pour motiver l'intérêt que nous portons au modèle de Luttinger. Le problème des électrons en interactions dans un métal est extrêmement compliqué. Il paraît *a priori* illusoire d'espérer pouvoir trouver systématiquement les états propres du hamiltonien d'un système d'électrons en interaction. Bien sûr, il est possible dans certaines situations de modéliser le système que l'on souhaite étudier de telle sorte qu'une solution analytique existe. La théorie de Landau des liquides de Fermi considère le problème d'un autre point de vue : si ce qui nous intéresse au premier chef sont les excitations de basses énergies et de grandes longueurs d'ondes du système, il est raisonnable d'imaginer que l'on puisse partir du système de fermions libres, puis d'allumer *adiabatiquement* les interactions entre fermions. C'est-à-dire que nous effectuons une approche perturbative des interactions en question. Le terme même de «liquide de Fermi» suggère que le point de départ de cette stratégie est le «gaz de Fermi», c'est-à-dire le système de fermions libres (hormis le principe d'exclusion de Pauli). Penchons nous un instant sur celui-ci. On sait que pour un système de fermion libres, les états $|\mathbf{p}\rangle$

d'impulsion \mathbf{p} sont des états propres du hamiltonien H_0 ,

$$H_0|\mathbf{p}\rangle = \epsilon(\mathbf{p})|\mathbf{p}\rangle, \quad \text{ou } \epsilon(\mathbf{p}) = \frac{\hbar^2}{2m}\mathbf{p}^2. \quad (3.1)$$

Par ailleurs, on sait aussi que la distribution des particules suit la statistique de Fermi-Dirac. Notamment à $T = 0$, on passe brutalement de $n(\mathbf{p}) = 1$ à $n(\mathbf{p}) = 0$ lorsque $\|\mathbf{p}\| = k_F$ (impulsion de Fermi) et l'énergie $\epsilon(\mathbf{p}) = \mu$ où μ est le potentiel chimique. Supposons alors que l'on ajoute au système un électron dans l'état représenté par le ket $|\mathbf{k}\rangle$. Quelle est alors la distribution d'énergie du système ? La fonction spectrale $A(\mathbf{k}, \omega)$, définie en terme de la fonction de Green retardée du système libre,

$$A(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{1}{\pi}\text{Im}G_0(\mathbf{k}, \omega), \quad (3.2)$$

va nous donner une indication sur la distribution des énergies dans le système après cet ajout. On peut effectuer le calcul trivial de la fonction spectrale dans le cas libre. On trouve que

$$\text{Im}G_0(\mathbf{k}, \omega) = \text{Im}\frac{1}{\omega - \epsilon_k + i\eta} = -\pi\delta(\omega - \epsilon_k). \quad (3.3)$$

La fonction spectrale est donc tout naturellement une distribution delta de Dirac. Qu'est-ce que cela implique ? Tout bonnement que dans le cas libre, ajouter une particule dans l'état $|\mathbf{k}\rangle$ revient *in fine* à ajouter une particule d'énergie $\epsilon(\mathbf{k})$. Ceci est on ne peut plus logique car nous avons rapellé, $|\mathbf{k}\rangle$ est vecteur propre du Hamiltonien libre. En règle générale, et en présence d'interactions entre les constituants du système, la fonction spectrale n'est plus un delta de Dirac car les interactions modifient «l'image» que l'on se fait du système. En effet, supposons par exemple la présence d'une interaction entre les électrons et un système de phonons (un cas typique d'interaction en matière condensée). Les phonons vont pouvoir échanger de l'énergie avec l'électron que nous souhaitons ajouter. Si bien qu'il est tout à fait concevable qu'ajouter un électron dans un état $|\mathbf{k}\rangle$ d'impulsion \mathbf{k} se répercute dans la distribution des énergies du système par une énergie plus ou moins grande que sa valeur $\epsilon(\mathbf{k})$ dans le cas libre (selon que l'électron soit diffusé par la «création» ou l'«absorption» d'un phonon). Bien entendu, si les interactions sont faibles, on peut raisonnablement affirmer que la fonction spectrale reste «piquée» au voisinage de $\epsilon(\mathbf{k})$ (voir par exemple la figure 3.1). Cette discussion naïve est au centre de la théorie des Liquides de Fermi. Tant que ce pic dans la fonction spectrale est suffisamment important on peut espérer que le lien qui existe entre la situation libre et en interaction perdure et puisse être effectué de manière *univoque*. Nous pouvons poursuivre plus en détail cette étude du système couplé. Cette fois-ci supposons que les électrons se repoussent, et désignons par $|N\rangle$ la mer de Fermi (composé de N électrons) ainsi que par $|N+1\rangle_{\mathbf{k},\sigma}$ l'état qui correspond à la mer de Fermi plus un électron d'impulsion \mathbf{k} et de spin σ . En l'absence d'interactions, il existe un lien explicite entre les deux états, qui dans un formalisme de seconde quantification peut s'écrire,

$$|N+1\rangle_{\mathbf{k},\sigma} = \sqrt{Z_{\mathbf{k}}}\hat{c}_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger|N\rangle, \quad (3.4)$$

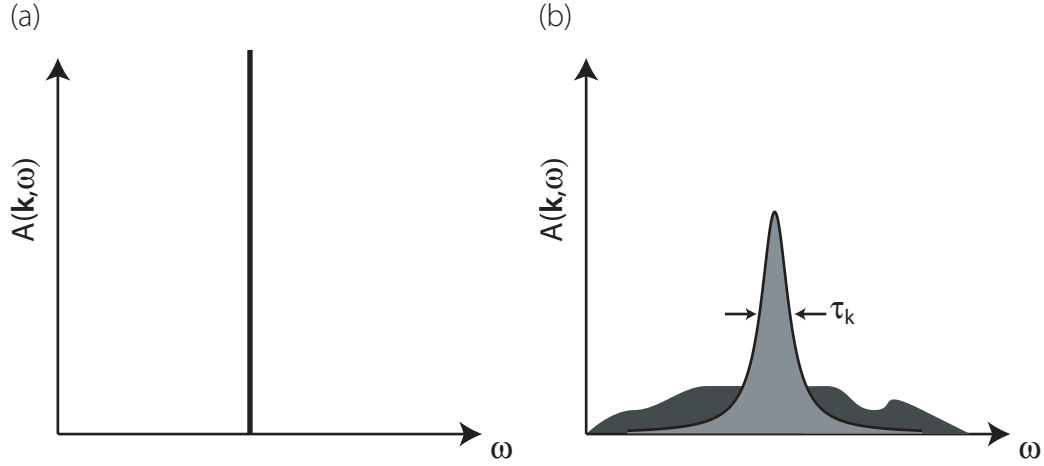


FIG. 3.1 – (a) : fonction spectrale dans le cas libre. (b) : fonction spectrale dans le cas en interaction. Dans un liquide de Fermi, on conserve un pic, mais sa largeur trahit le temps de vie fini des quasi-particules. En nuance plus foncée la contribution incohérente des excitations qui ne peuvent être décrites en termes de quasi-particules.

où $c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger$ est l'opérateur qui crée un électron d'impulsion \mathbf{k} et de spin σ . Formellement, si l'on décrit l'interaction de manière perturbative, il se rajoute une infinité de termes à l'équation précédente. Ils correspondent à des états de plus en plus complexes générés par sa présence. La répulsion implique que la particule ajoutée perturbe la mer de Fermi. Elle peut alors propulser d'autres électrons hors de la surface de Fermi, créant un assemblage complexes d'états particules-trous (voir par exemple figure 3.2). Symboliquement on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
 |N+1\rangle_{\mathbf{k},\sigma} &= \sqrt{Z_{\mathbf{k}}} c_{\mathbf{k},\sigma}^\dagger |N\rangle + \sum_{k_i} \sum_{\sigma_i} \alpha_1(k, \sigma; k_i, \sigma_i) c_{k_3, \sigma_3}^\dagger c_{k_2, \sigma_2} c_{k_1, \sigma_1}^\dagger \\
 &+ \sum_{k_i} \sum_{\sigma_i} \alpha_2(k, \sigma; k_i, \sigma_i) c_{k_5, \sigma_5}^\dagger c_{k_4, \sigma_4} c_{k_3, \sigma_3}^\dagger c_{k_2, \sigma_2} c_{k_1, \sigma_1}^\dagger + \dots \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Si d'aventure le poids du premier état de cette série formelle reste fini, nous pourrions identifier le système couplé avec l'état à $N+1$ particules du système non interactif, et ceux de manière univoque. Pour être un peu plus précis, on sait que les effets de l'interaction à N -corps sont contenus dans l'énergie propre Σ présente dans le propagateur (ici en temps imaginaire),

$$G(k, \omega) = (i\omega - \epsilon_k^0 - \Sigma(k, \omega))^{-1}. \quad (3.6)$$

Le concept de quasi-particules de Landau est équivalent à admettre que cette énergie propre reste *suffisamment régulière* au voisinage de la surface de Fermi pour pouvoir être développable autour d'un petit paramètre. De sorte qu'au premier ordre de ce dévelop-

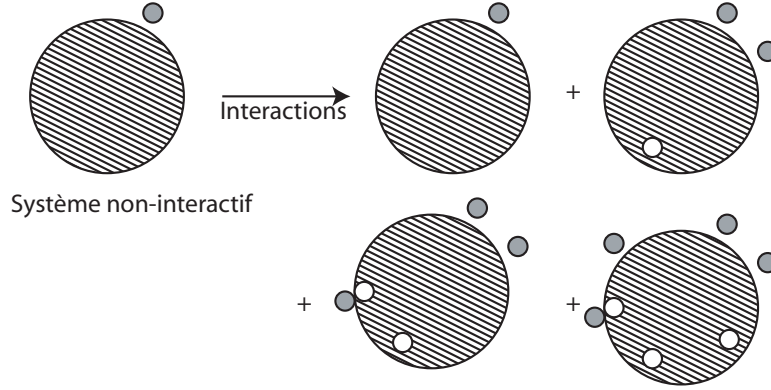


FIG. 3.2 – Vision de Landau : L'ajout d'un électron à la mer de Fermi génère graduellement des états de plus en plus compliqués au fur et à mesure que les interactions sont "allumées" de manière adiabatique. Tant que le poids du premier état de cette série reste fini, nous pouvons établir une correspondance entre l'état "libre" et l'état en interaction. Le système se comporte comme un *liquide de Fermi*.

pement, nous pouvons affirmer que :

$$G(k, \omega) = \frac{Z}{i\omega - \tilde{\epsilon}_k}, \quad Z = (1 - \partial_\omega \Sigma)^{-1} \Big|_{\omega=0, \|\mathbf{k}\|=k_F}, \quad (3.7)$$

où $\tilde{\epsilon}_k$ est l'énergie renormalisée par l'énergie propre. Le terme Z_k de l'équation (3.4) s'identifie alors à Z à la surface de Fermi. C'est cette équation qui impose le saut discontinu dans la fonction de distribution des impulsions $n(\mathbf{k})$, caractéristique du comportement des liquides de Fermi. On appelle Z le poids de quasi-particule. Le système peut être alors décrits efficacement en terme de ces assemblages complexes d'états à plusieurs particules-trous qui se comportent presque comme des particules. La théorie des liquides de Fermi est fascinante car elle s'est avéré être à la fois très simple et très puissante. Bien entendu, beaucoup de travail a été fait pour cerner les conditions microscopiques qui font qu'une telle théorie marche bien. Cependant, il a été rapidement constaté que tous les systèmes d'électrons en interactions que l'on pouvait imaginer, d'un point de vue théorique d'abord et expérimental ensuite, ne suivent pas nécessairement ce comportement. Ces «non-liquides» de Fermi sont d'une importance tout particulière, parce-qu'il semble être une des caractéristiques des système quasi-unidimensionnels. Ces derniers sont de plus important d'un simple point de vue industriel. En effet, les nanotechnologies sont amenées à jouer un rôle prépondérant dans le futur et repose grandement sur de tels systèmes. La course à la miniaturisation nous rapproche continuellement de la frontière de la physique des basses dimensions.

3.2 Le(s) Liquide(s) de Luttinger

Il existe plusieurs situations qui peuvent conduire à spolier la description d'un système dans le cadre de la théorie des Liquides de Fermi. Comme nous l'avons signalé dans la section précédente, lorsque l'on allume progressivement les interactions, tant que le premier terme de la série possède un poids Z_k fini, nous sommes en droit d'espérer que le système tombe dans la catégorie des liquides de Fermi. Cependant, il existe des cas où les interactions génèrent une série divergente d'excitations «particule-trou». C'est dans ces conditions que nous observerons un comportement tout à fait singulier. Une autre situation correspond à la présence d'interactions qui nécessitent l'introduction de nouveaux nombres quantiques qui ne sont pas présents dans la description du système libre (On peut citer par exemple le cas de l'effet Hall quantique ou celui des systèmes uni-dimensionnels). Il est alors impossible d'effectuer une correspondance univoque entre les états du système libre et celui du système en interaction, ce qui brise le fondement de la description de Landau. Parmi toutes ces possibilités, nous choisirons de nous intéresser au modèle de Luttinger.

3.2.1 "Non-Liquides" de Fermi : L'exemple du liquide de Luttinger

Dans les systèmes de fermions en interaction en 1+1 dimensions d'espace-temps, la théorie des liquides de Fermi s'effondre. La description générique d'un tel système en terme d'un problème à N-corps est alors réalisée par ce qu'on appelle le liquide de Luttinger. Ce résultat a été conjecturé par Haldane au début des années 1980 [39]. Bien que dans les deux cas, ce sont les excitations de basses énergies d'un état fondamental à N particules qui donnent les propriétés physiques du système, celles-ci *ne sont plus représentables par des quasi-particules de Landau*. Il est possible d'argumenter ce fait. On sait que la description des Liquide de Fermi nécessite de pouvoir conserver la possibilité d'identifier le système en interaction au système libre. Or, le système libre est caractérisé en particulier par sa surface de Fermi. En 2 ou 3 dimensions, cette surface représente beaucoup d'électrons. Il est donc raisonnable de penser qu'elle n'est pas complètement détruite par la présence d'une interaction entre les fermions (si tant est qu'elle ne soit pas trop forte). Si on travaille avec une seule dimension d'espace, la surface de Fermi se réduit à deux points. Il est donc extrêmement facile de la déstabiliser complètement avec des interactions même faibles.

La dénomination de «Liquide de Luttinger» provient du fait que de tels systèmes peuvent être décrit par des généralisations plus ou moins directes des modèles de Luttinger ou de Tomonaga sur lesquels nous nous attarderons dans la sous-section suivante. Qu'en est-il de la pertinence expérimentale des systèmes à 1+1 dimensions d'espace-temps ? Il est bien entendu évident qu'aucun système n'est réellement unidimensionnel. Mais certains matériaux peuvent être particulièrement bien décrits par des modèles 1-D. C'est notamment le cas des nanotubes de Carbone (figure 3.3), qui comptent parmi les plus prometteurs dans l'investigation de la physique des basses dimensions. Par ailleurs, leurs applications dans les nanotechnologies rendent leur étude essentielle. Il y a bien sûr

d'autres matériaux tels que les sels de Bechgaards, ou les fils fins de semi-conducteurs qui semblent présenter le comportement caractéristique des liquides de Luttinger. Nous allons maintenant passer à la description du modèle de Luttinger à proprement parlé.

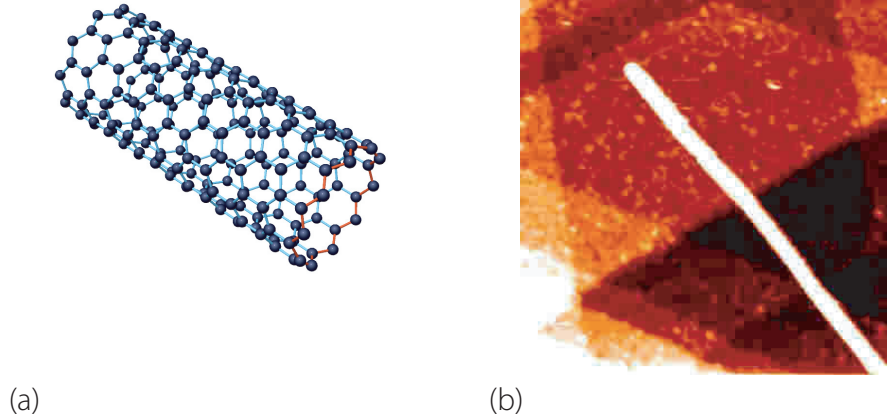


FIG. 3.3 – (a) modèle moléculaire d'un nanotube (voir <http://www.surf.nuqe.nagoya-u.ac.jp/nanotubes/omake/omake.html>) (b) Image en microscopie tunnel à balayage (STM) d'un nanotube (homepage du Molecular Biophysics Group - Delft University of Technology).

3.2.2 Le modèle de Luttinger

Historiquement ce modèle a été introduit dans les années 1950-1960 (selon que l'on parle du modèle de Tomonaga [34] ou de Luttinger [35]). Il est en général formulé en termes de fermions «sans spins». Bien que l'on puisse argumenter que des fermions sans spins sont une hérésie d'un point de vue des représentations du groupe de Lorentz, il est intéressant pour des raisons de simplicité de l'omettre (il peut très bien être rajouté à moindres frais dans une description étendue du modèle). Dans un formalisme de seconde quantification, nous pouvons écrire le Hamiltonien d'un système d'électrons en présence d'une interaction à deux corps,

$$H = H_0 + H_I, \quad (3.8)$$

$$H_0 = \int_p \epsilon_p c_p^\dagger c_p, \quad (3.9)$$

$$H_I = \int_{p,p',q} V(p) c_p^\dagger c_p' c_{p'-q} c_{p+q}. \quad (3.10)$$

Les quantités H_0 et H_I sont respectivement les Hamiltoniens libre et d'interactions. Les opérateurs c^\dagger et c désignent les opérateurs de création et d'annihilation et ϵ l'énergie mesurée par rapport à la surface de Fermi. L'hypothèse fondamentale du modèle de

Luttinger est la linéarisation de la relation de dispersion pour les électrons au voisinage des deux points de Fermi (illustré sur la figure 3.4). C'est-à-dire que nous pourrions écrire,

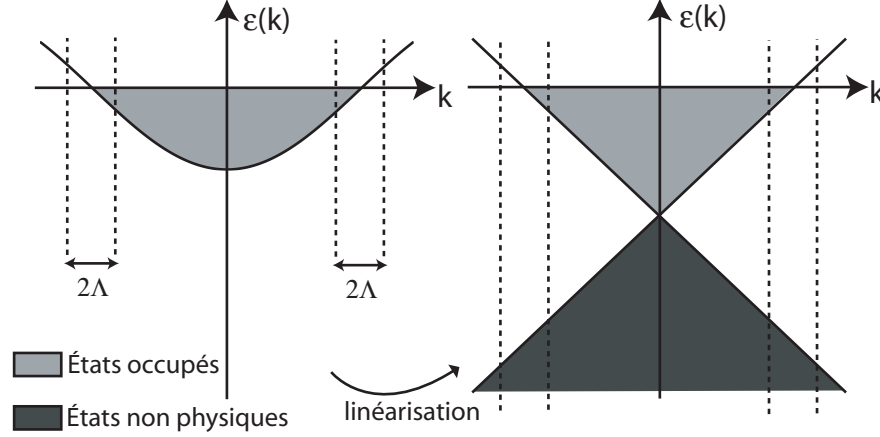


FIG. 3.4 – À gauche la relation de dispersion standard sur réseau dans ce cas particulier. Les états occupés pour le système libre sont représentés en gris clair. À droite, la relation après linéarisation au voisinage des deux points de Fermi. Étendre les branches gauches et droites nécessite l'introduction d'une Mer de Dirac non-physique. Représenté aussi l'éventuelle coupure au voisinage des points de Fermi, qui jouera un rôle notable dans l'approche du groupe de renormalisation.

partant de la relation quadratique ordinaire, l'équation suivante :

$$\epsilon_k = v_F(|k| - k_F) + o((|k| - k_F)^2), \quad (3.11)$$

où k_F et $v_F = \frac{k_F}{m}$ désignent respectivement l'impulsion et la vitesse de Fermi. La linéarisation de la relation de dispersion est parfaitement envisageable pourvu que l'on puisse s'assurer que nous ne quittons pas son domaine de validité. Il existe alors deux approches conduisant à deux modèles «distincts» :

- le modèle de Tomonaga [34] qui s'assure que la linéarisation reste valable en imposant une coupure en impulsion fixe au voisinage des deux points de Fermi.
- le modèle de Luttinger [35, 40] qui introduit cette coupure Λ mais étudie la limite $\Lambda \rightarrow \infty$, ce qui d'un point de vue physique peut paraître plus risquée, mais permet une solution mathématique simple.

Nous travaillerons explicitement en présence du cut-off Λ , et nous ne passerons à la limite $\Lambda \rightarrow \infty$ uniquement lorsque cela sera nécessaire. Au vu de la figure 3.4, on constate que la relation de dispersion peut être décrite par deux branches. Celles-ci séparent effectivement la partie «gauche» de la partie «droite» de l'espace des impulsions. Il est alors commode d'introduire deux espèces de fermions qui décrivent les électrons selon qu'ils se trouvent sur l'une ou l'autre de ces deux branches. On sépare formellement en deux contributions les opérateurs de créations et d'annihilation,

$$c_k = c_{k,+}\Theta(k) + c_{k,-}\Theta(-k). \quad (3.12)$$

Le Hamiltonien d'interaction se divise alors en plusieurs termes. En effet, les produits croisés entre les différents types d'opérateurs de créations et d'annihilations conduisent à des interactions effectives entre fermions d'une même espèce ou d'une espèce différente. On peut directement le réécrire en tenant compte de point. Tout d'abord on trouve l'interaction entre fermions de différentes natures (ou couplage inter-branche),

$$H_I^\times = \int_{p,p',q} V^\times(q) (c_{+,p}^\dagger c_{+,p+q} c_{-,p'}^\dagger c_{-,p'-q} - c_{+,p}^\dagger c_{+,p'-q} c_{-,p'}^\dagger c_{-,p+q} + (+ \leftrightarrow -)). \quad (3.13)$$

Le premier terme de cette somme correspond à un échange d'impulsion q de l'ordre de 0. Le second quant à lui à une impulsion échangée $|q|$ de l'ordre de $2k_F$. Nous allons tout de suite essayer d'obtenir une expression de cette interaction en terme des opérateurs densité pour les fermions «gauches» et «droits»,

$$\rho_+(q) \approx \sum_{p>0} c_{+,p}^\dagger c_{+,p+q}, \quad \rho_-(q) \approx \sum_{p<0} c_{-,p}^\dagger c_{+,p-q}. \quad (3.14)$$

On peut dans une première approximation supposé que le potentiel $V(q)$ dépend suffisamment peu de l'impulsion échangée pour être approché par une constante que nous noterons g^\times (bien que ce ne soit pas sa dénomination standard). Le Hamiltonien inter-branche prend alors la forme conventionnelle suivante,

$$H_I^\times = g^\times \int_q (\rho_+(q) \rho_-(-q) + \rho_-(q) \rho_+(-q)). \quad (3.15)$$

Nous pouvons maintenant nous intéresser au couplage intra-branche. Ce calcul ne présente guère plus de difficultés qu'avant, on peut tout d'abord écrire son expression en fonction des opérateurs de création et d'annihilation,

$$H_I^{\parallel} = \int_{p,p',q} V^{\parallel}(q) (c_{+,p}^\dagger c_{+,p'}^\dagger c_{+,p+q} c_{+,p'-q} + (+ \leftrightarrow -)). \quad (3.16)$$

La formulation de l'équation (3.16) en fonction des opérateurs densité n'est pas aussi triviale qu'il n'y pas paraît. Il existe une certaine ambiguïté dans son écriture qui doit être levée. Pour cela, on a besoin de s'assurer que la charge est conservée pour notre modèle le modèle. Sans entrer plus dans les détails, et en supposant comme avant que le potentiel $V(q)$ peut être remplacé par une constante que nous noterons g^{\parallel} , on trouve

$$H_I = g^{\parallel} \int_{q \neq 0} (\rho_+(-q) + \rho_-(-q)) (\rho_+(-q) + \rho_-(-q)) \quad (3.17)$$

Ceci complète l'expression hamiltonienne du modèle de Luttinger. Il existe beaucoup de conventions différentes pour définir le Hamiltonien d'interaction. Elles varient notamment selon que l'on considère un modèle avec ou sans spins, que l'on inclue les processus d'Umklapp (que nous négligeons ici, voir figure 3.5). Grossièrement on peut distinguer deux grandes techniques qui visent à étudier les propriétés de ce modèle. Tout d'abord nous présenterons l'approche du groupe de renormalisation Wilsonien à l'ordre une boucle. Nous montrerons qu'elle conduit à la liberté asymptotique du modèle de Luttinger. Puis, nous illustrerons rapidement la technique de la bosonisation du hamiltonien de Luttinger. L'intérêt d'une description des interactions en fonctions des opérateurs densité prendra alors tout son sens.

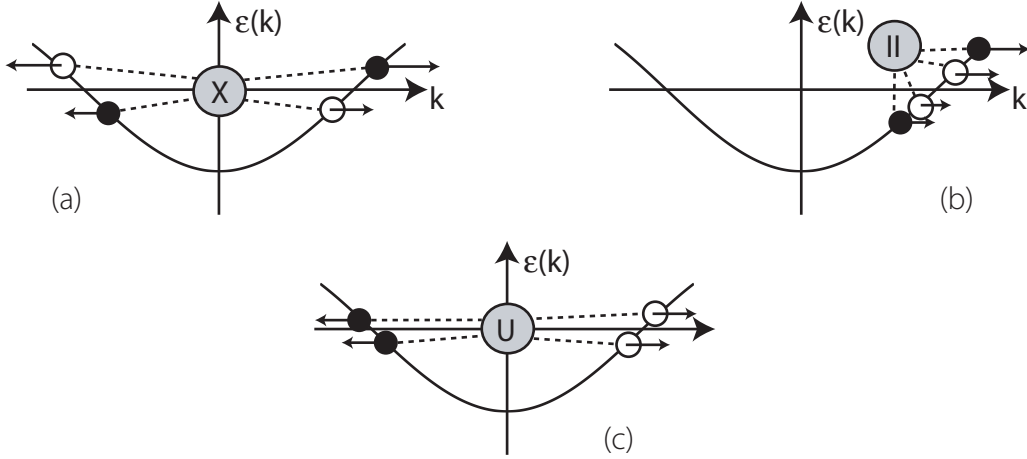


FIG. 3.5 – Les états fonceés sont les fermions avant diffusion par l'interaction. (a) Interaction inter-branch (X) - notons qu'en l'absence de spin il est impossible de suivre chaque particule en interaction et donc de faire la différence entre diffusion en avant et en arrière. (b) Interaction intra-branch (II). (c) Processus *d'Umklapp* que nous négligerons dans notre discussion.

3.3 Approche du Groupe de Renormalisation

Cette approche est assez courante et peut être trouvée dans un certain nombre de références. Citons notamment [41, 42]. Nous suivront la démarche de Shankar par la suite. Le point de départ est le constat que le Hamiltonien d'un système *libre* de fermions sans spins est un *point fixe* pour la transformation du groupe de renormalisation. Il est assez facile de s'en convaincre. Pour cela, commençons par donner l'action euclidienne du système libre dont la relation de dispersion est linéarisée au voisinage des points de Fermi,

$$S_0 = \sum_{\sigma=\pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\Lambda/s}^{+\Lambda/s} \frac{dk}{2\pi} \psi_{\sigma}^{\dagger}(k, \omega) (-i\omega + \sigma k) \psi_{\sigma}(k, \omega). \quad (3.18)$$

L'indice $\sigma = \pm 1$ désigne respectivement les fermions «droits» ou «gauches». L'intégrale sur les impulsions est bornée par une coupure ultraviolette Λ dans l'espace des impulsions et nous allons regarder l'effet de son déplacement sur la fonction de partition du système,

$$Z(\Lambda) = \int D[\psi_{\sigma}^{\dagger}] D[\psi_{\sigma}] e^{-S_0}. \quad (3.19)$$

Nous avons vu au chapitre 2 que le groupe de renormalisation consiste en l'élimination des degrés de liberté au voisinage de la coupure ultraviolette puis d'un «rescaling». Intégrons les modes d'impulsions comprises entre $\frac{\Lambda}{s} \leq |k| \leq \Lambda$. Cette étape est triviale et on constate que $Z(\Lambda) = Z(\frac{\Lambda}{s})Z(\Lambda, \frac{\Lambda}{s})$ avec

$$Z(\Lambda, \Lambda/s) = \int D[\psi_{\sigma}^{\dagger}] D[\psi_{\sigma}] e^{\sum_{\sigma=\pm 1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{\frac{\Lambda}{s} \leq |k| \leq \Lambda} \frac{dk}{2\pi} \psi_{\sigma}^{\dagger}(k, \omega) (-i\omega + \sigma k) \psi_{\sigma}(k, \omega)} \quad (3.20)$$

Ce terme va être réabsorbé dans la normalisation de Z . La contribution restante quant à elle est de la forme :

$$Z(\Lambda) = \int D[\psi_\sigma^\dagger] D[\psi_\sigma] e^{-S'_0}, \quad S'_0 = S_0 \left(\frac{\Lambda}{s} \right). \quad (3.21)$$

Un simple changement d'échelle donné par

$$k' = sk, \quad (3.22)$$

$$\omega' = s\omega \quad (3.23)$$

$$\psi' = s^{-\frac{3}{2}} \psi \quad (3.24)$$

$$\psi^\dagger = s^{-\frac{3}{2}} \psi^\dagger \quad (3.25)$$

nous permet alors d'affirmer que l'action S'_0 et S_0 sont parfaitement identiques. Elle ne change donc pas sous l'action combinée de l'élimination de mode et d'un «rescaling» (voir figure 3.6). Nous sommes bien en présence d'un point fixe.

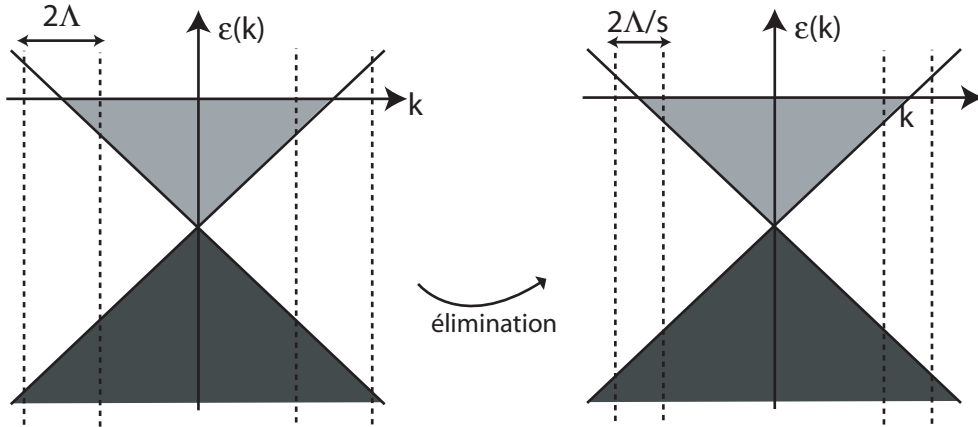


FIG. 3.6 – Représentation schématique de la procédure d'élimination des modes appliqué au modèle de Luttinger.

Le groupe de renormalisation nous permet de déterminer si un tel point fixe est stable, c'est-à-dire de savoir si une perturbation de l'action libre nous en éloigne ou non. Pour commencer, il faut effectuer une analyse de la pertinence des perturbations au sens du chapitre 2.

3.3.1 Perturbations quadratiques

Avant de traiter le cas des interactions à plusieurs corps, nous devons considérer les éventuelles perturbations à l'ordre quadratique dans les opérateurs de champs. Nous

voulons conserver la symétrie originale du système libre entre les fermions gauches et droits. De ce fait, nous considérons une perturbation du type

$$\delta S^{(2)} = \sum_{\sigma} \int_{(k,\omega)} f(k, \omega) \psi_{\sigma}^{\dagger}(k, \omega) \psi_{\sigma}(k, \omega), \quad (3.26)$$

où f est une fonction quelconque suffisamment régulière pour être développable en série de Taylor au voisinage de tout point de son intervalle de définition. Si l'on effectue l'élimination et le «rescaling» précédent, en comparant les actions obtenues on trouve la relation suivante :

$$f'(k', \omega') = s f(k, \omega) \quad (3.27)$$

Formellement on a alors l'égalité

$$\sum_{n,m=0}^{+\infty} f'_{n,m} s^{n+m} \omega^n k^m = s \sum_{n,m=0}^{+\infty} f_{n,m} \omega^n k^m \quad (3.28)$$

Sous la transformation du groupe de renormalisation, $f_{n,m} \rightarrow s^{1-(n+m)} f_{n,m}$, de sorte que le seul terme essentiel (*relevant*) de cette série au sens du GR est $f_{0,0}$. Les autres coefficients sont au mieux marginaux. Une telle perturbation correspond à un changement du potentiel chimique, qui bien entendu provoque un réarrangement de la surface de Fermi (d'où sa pertinence ici). Les perturbations $f_{1,0}$ et $f_{0,1}$ qui sont marginales ne sont pas très importantes car elles correspondent à des termes présents dans l'action libre. De ce fait elle ne nous éloigne jamais du point fixe libre. Tous les autres termes sont «inessentiels» (*irrelevant*). Ils n'interviennent donc pas tant que le régime de «scaling» ultra-violet reste valide. Cette analyse effectuée, nous pouvons passer à l'essentiel, à savoir les vrais interactions entre fermions.

3.3.2 Perturbations quartiques

Nous allons considérer les interactions à deux corps susceptibles de perturber le hamiltonien libre. De manière générique, elles peuvent s'écrire :

$$\delta S^{(4)} = \sum_{\sigma_i} \int_{(k_i, \omega_i)} g(k_i, \omega_i) \psi_{\sigma_1}^{\dagger}(k_1, \omega_1) \psi_{\sigma_2}(k_2, \omega_2) \psi_{\sigma_3}^{\dagger}(k_3, \omega_3) \psi_{\sigma_4}(k_4, \omega_4). \quad (3.29)$$

L'intégration s'effectue sur tous les k_i et ω_i (avec des équations de conservations pour l'énergie et l'impulsion). Sans rentrer dans les détails (on pourra se référer à [41] si besoin), on constate que dans un développement en puissance de la fonction g , seul le premier terme g_0 , indépendant de toutes les fréquences et impulsions, est *marginal*. Tous les autres termes du développement sont inessentiels. Des conditions supplémentaires imposent une symétrie à l'interaction générique de l'expression (3.29). Quoi qu'il en soit, le terme marginal nécessite de mener une enquête approfondie. Il est absent du Lagrangien libre et donc peut contribuer à nous éloigner du point fixe libre. Il va nous falloir effectuer une analyse à l'ordre une boucle *au moins* pour conclure.

3.3.3 Groupe de Renormalisation à l'ordre une boucle

Après élimination des degrés de libertés au voisinage de la coupure ultraviolette, l'interaction g_0 génère une perturbation quadratique dans l'action. Elle contribue à l'évolution du potentiel chimique μ (qu'il faut inclure dans le Lagrangien libre de départ si l'on souhaite encore parlé de point fixe) donné par l'équation suivante [41] :

$$\frac{d\mu}{dt} = \mu - \frac{g_0}{2\pi}, \text{ ou } s = 1 + t. \quad (3.30)$$

Cette équation provient du graphe de Feynman en «têtard» de la figure 3.7. Si l'on souhaite alors travailler à densité fixe, il faut ajuster le potentiel chimique en fonction de la valeur de g en introduisant un contre-terme adéquat.

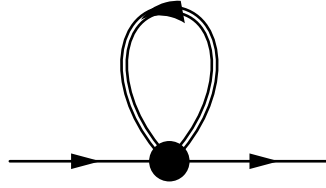


FIG. 3.7 – Renormalisation du potentiel chimique à l'ordre une boucle

L'élimination des modes génère aussi des termes proportionnels g^2 qui renormalisent g . Leur étude détaillée révèle alors trois types de contributions. On peut retrouver leurs expressions dans la référence [41]. Une des contributions lorsqu'on effectue l'intégrale de boucle sera nulle à la surface de Fermi. Pour les deux autres, les contributions sont non-triviales. Une génère une instabilité de type BCS et l'autre une onde de densité de charge (CDW). Cependant elles sont *exactement* opposées. De sorte que d'une manière globale, il n'y a pas de renormalisation de g . La fonction beta est nulle,

$$\beta = \frac{dg}{dt} = 0. \quad (3.31)$$

Cette compensation parfaite est heureuse, et nous permet de conclure. Nous sommes en présence d'une ligne de point fixe infra-rouge qui correspondent au modèle de Luttinger. Ceci explique son importance. L'annulation de ces deux graphes est au centre de ce résultat et toute mise en défaut de ce point changera la donne. Cette approche du groupe de renormalisation initié au début des années 70 [43] a été généralisée à plus qu'une boucle [44] pour permettre de traiter l'effet de couplages plus fort. Notons que ce résultat a été démontré en utilisant d'autres stratégies [45–48]. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre suivant. Maintenant que les propriétés du modèle de Luttinger vis-à-vis du groupe de renormalisation Wilsonien ont été mise en évidence à l'ordre une boucle, nous pouvons nous pencher sur la bosonisation qui offre une solution «exacte» du modèle.

3.4 La bosonisation du Hamiltonien de Luttinger

Nous avons exprimé dans la section 3.2.2 le Hamiltonien d'interaction modèle de Luttinger en fonction des opérateurs de densité pour les fermions gauches et droits,

$$\rho_+(q) \approx \sum_{p>0} c_{+;p}^\dagger c_{+;p+q}, \quad \rho_-(q) \approx \sum_{p<0} c_{-;p}^\dagger c_{+;p-q}. \quad (3.32)$$

Le Hamiltonien libre s'exprime lui aussi trivialement en fonction de ces quantités (on le verra plus bas). Tout ceci pose les bases d'une méthode alternative et exacte à l'étude du modèle de Luttinger, *si tant est que les hypothèses qui nous ont conduit à ces expressions soient vérifiées*. Pour cela il suffit de remarquer que les opérateurs de densité vérifient des règles de commutations bosoniques,

$$[\rho_\sigma(q), \rho_{\sigma'}(q')] = -\delta_{\sigma,\sigma'} \delta_{q'-q,0} \sigma \frac{qL}{2\pi}. \quad (3.33)$$

Ceci nous incite à regarder comment le hamiltonien libre commute avec les opérateurs densité. On trouve alors une relation du type,

$$[H_0, \rho_\sigma(q)] = \sigma v_F q \rho_\sigma(q). \quad (3.34)$$

Cette équation implique que les états créés par l'action de $\rho_\sigma(q)$ sur le vide $|0\rangle$ sont des états propres du hamiltonien libre de valeur propre $\sigma v_F q$. Compte tenu des relations de commutations entre les opérateurs densité, on peut essayer de chercher le hamiltonien sous une forme quadratique dans les opérateurs densité, donc *quartique* dans les champs fermioniques (ce qui peut sembler contre-intuitif au premier chef). Cependant si on se souvient que les ρ créent des paires particules-trous ce résultat,

$$H_0 = \frac{2\pi v_F}{L} \sum_{q>0,\sigma} \rho_\sigma(q) \rho_\sigma(-q), \quad (3.35)$$

devient naturel. On peut alors utiliser cette expression pour conclure que le spectre de la représentation bosonique que nous venons de construire et de la représentation fermionique sont identiques (et identiquement dégénérées). Si l'on inclue alors les interactions de la section 3.2.2, le Hamiltonien bosonisé de Luttinger est quadratique dans les opérateurs densité. Il en suit qu'il est aisément diagonalisable de manière exacte. Pour illustrer, ce point on peut introduire les champs bosoniques suivant,

$$\varphi(x) = \frac{-i\pi}{L} \sum_{q \neq 0, \sigma} \frac{1}{q} e^{-\sigma|q|/2 - iqx} [\rho_+(q) + \rho_-(q)] - (N_+ + N_-) \frac{\pi x}{L}, \quad (3.36)$$

$$\Pi(x) = \frac{1}{L} \sum_{q \neq 0, \sigma} e^{-\sigma|q|/2 - iqx} [\rho_+(q) - \rho_-(q)] - (N_+ - N_-) \frac{\pi x}{L}, \quad (3.37)$$

$$(3.38)$$

où N_+ (resp. N_-) comptabilise le nombre de fermions droits (resp. gauches). Ces deux champs sont canoniquement conjugués par la relation ordinaire :

$$[\varphi(x), \Pi(y)] = i\delta_{x,y}. \quad (3.39)$$

Le Hamiltonien total devient celui d'une corde dont les modes propres correspondent aux oscillations collectives du liquide de Fermions. Il est donné par l'expression,

$$H = \int_x \left(\frac{u}{2\pi K} (\partial_x \varphi(x))^2 + \frac{\pi u K}{2} \Pi(x)^2 \right). \quad (3.40)$$

Ici, u et K s'expriment en fonction des constantes de couplages g [42]. Cette dynamique collective de paires détruit la vision en termes de quasi-particules. Elle explique les propriétés tout à fait particulière du modèle de Luttinger. Notons aussi que l'ajout du spin dans le modèle ne change pas grand chose. La bosonisation prédit même la séparation entre la dynamique de charge et de spin [42].

3.5 Conclusion

Le modèle de Luttinger est un modèle extrêmement riche dont les propriétés semblent être bien cernées. Elles sont surprenantes et c'est pourquoi nous nous sommes penchés sur ce modèle dans le but de lui appliquer la technique du groupe de renormalisation dans l'espace interne. Cette nouvelle stratégie peut éclairer ces résultats sous un nouvel angle et proposer une méthode alternative appréciable à l'étude de ces systèmes. C'est aussi un test de cette méthode dans le contexte de la physique de la matière condensée. Cependant, il va nous falloir trouver un angle d'attaque, une stratégie pour déterminer dans quels contextes une telle extension peut apporter quelque chose d'intéressant. C'est ce que nous nous proposons de faire dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Groupe de Renormalisation dans l'espace interne pour le modèle de Luttinger

L'objectif de ce chapitre est de présenter l'application que nous avons fait du groupe de renormalisation dans l'espace interne au modèle de Luttinger. Cette méthode présente, comme nous allons le voir par la suite, un intérêt pour clarifier les propriétés du système au voisinage des points de Fermi. Le plan du chapitre est le suivant : tout d'abord, nous allons motiver l'application du groupe de renormalisation dans l'espace interne. Puis nous détaillerons les expressions des fonctionnelles génératrices du modèle ainsi que le lien fonctionnel qui existe entre elles. Ensuite nous établirons les équations du groupe de renormalisation dans l'espace interne à l'ordre 2 et 4 dans les opérateurs de champs. Finalement, nous discuterons de la force du couplage au voisinage des points de Fermi. Avant d'entamer le chapitre, il est bon de rappeler au lecteur que le groupe de renormalisation dans l'espace interne diffère quelque peu du groupe de renormalisation standard. Nous essaierons de mettre clairement en évidence les différences entre les deux formalismes afin d'éviter toute confusion. Nous rappelons par ailleurs que ce formalisme a été présenté à la fin du chapitre 2 et que les notations les plus fréquemment utilisées sont détaillées dans l'appendice A. L'article [1] basé sur ce travail a été soumis à la revue *Annals of Physics* en Août 2005. Ce chapitre en reprend les grandes lignes.

4.1 Introduction et motivations physiques

Nous avons rappelé les principaux résultats standards obtenus sur le modèle de Luttinger dans le chapitre précédent. En particulier, nous avons détaillé quelque peu l'application du groupe de renormalisation standard ainsi que de la bosonisation. Rappelons en les principaux points : tout d'abord, l'intérêt du modèle de Luttinger est qu'il ne présente pas les caractéristiques standards d'un liquide de Fermi (comme la continuité de la distribution des impulsion au points de Fermi à température nulle). Il semble être particulièrement adapté à la description de certains nouveaux matériaux «quasi-1D».

Cependant, ses propriétés pourraient être qualifiées «d'heureux accident» dimensionnel. En effet, les fermions non-massifs en 1+1 dimensions d'espace-temps présentent un comportement tout à fait particulier. L'absence de direction transverse dans le mouvement implique que la moindre interaction déstabilise les états asymptotiques de type particule [49, 50]. Il en découle que, si tant est que l'on puisse toujours parler d'états asymptotiques, ils doivent correspondre soit à des quasi-particules de masse non nulle ou à des particules composites qui n'interagissent pas entre elles. Ce n'est pas là la seule spécificité des modèles de fermions unidimensionnels, car hélicité et chiralité sont alors équivalentes. Par conséquent, il y a conservation *individuelle* du nombre de fermions gauches et droits dans les théories invariantes sous la transformation de chiralité. C'est le cas par exemple des modèles de Thirring [51] sans masse et de Gross-Neveu [52].

La physique des électrons contraint à se déplacer dans un «fil» suffisamment fin pour être considéré comme unidimensionnel peut-être décrit de manière effective en linéarisant la relation de dispersion au voisinage des points de Fermi d'un modèle de fermions en interactions. C'est pourquoi le modèle de Luttinger [35], qui réalise cette linéarisation, est extrêmement intéressant. Il est formellement équivalent au modèle de Thirring sans masse, à ceci près que les relations de dispersions pour les fermions gauches et droits sont déplacées horizontalement pour tenir compte de la présence d'un potentiel chimique. Par ailleurs, ce modèle présente une structure suffisamment riche pour être confronté à des situations expérimentales bien contrôlées [38]. Un tel «non-liquide de Fermi» est une autre façon d'aboutir à la destruction des états asymptotiques à une particule mentionnée plus haut.

Pour explorer le secteur asymptotique du modèle de Luttinger, on utilise en règle général la technique de la bosonisation. La bosonisation des excitations à l'intérieur d'un secteur de l'espace de Fock à nombre de fermions constant est possible en principe quelque soit la dimension. Cependant, encore une fois le fait que nous travaillons avec une seule dimension d'espace facilite grandement la tâche. Une fois la théorie «bosonisée» effective construite, on constate qu'elle est locale uniquement en 1+1 dimensions d'espace-temps [40, 53, 54]. Ce nouvel «accident» rend la bosonisation extrêmement puissante dans ce cas. Le modèle de Luttinger bosonisé est alors composé d'excitations bosoniques libres qui représentent les excitations à plusieurs particule-trou de la représentation fermionique, comme montré dans [40, 53]. Tout ceci nous indique que les états asymptotiques se propageant sont construits en optant un écrantage complet de l'interaction résiduelle entre les quasi-particules. Tout n'est malheureusement pas si simple.

Il est utile de nous arrêter quelques instants sur la bosonisation. Nous n'avons nullement mentionné ses limitations dans les chapitres précédents. On peut effectuer la bosonisation dans un formalisme d'opérateurs, en comparant à la fois les états et les fonctions de Green dans les espace de Hilbert pour les bosons et les fermions [40, 53]. Mais on peut aussi l'effectuer dans le cadre général de l'intégrale de chemin, où l'on compare alors les graphes de Feynman obtenus dans les deux cas [54]. Que ce soit dans l'une ou l'autre de ces deux démarches, le terme d'énergie cinétique «sans masse» joue un rôle très important. Pour être plus précis, elles reposent toutes les deux plus ou moins directement sur l'existence d'un développement perturbatif. Cependant, une fois

la théorie bosonisée, il n'est nullement nécessaire d'utiliser la théorie des perturbations. Dans le formalisme «opérateur», l'aspect perturbatif est dû au choix de la relation de dispersion libre et d'une certaine forme d'interaction, alors que dans celui de «l'intégrale de chemin» il vient de la nécessité de tronquer la série des graphes de Feynman à un ordre certes *arbitraire mais fini*. À toutes fins utiles, il est possible de réexprimer la bosonisation en terme d'une intégrale de chemin formelle uniquement [55], ne faisant alors aucunement référence à un quelconque ordre dans la série des graphes de Feynman. Mais alors, l'utilisation d'un régulateur ultra-violet parfaitement défini (comme la régularisation sur réseau) met grandement en défaut cette stratégie. La bosonisation est un outil très puissant qu'il faut manipuler avec précaution en connaissant ses limites. C'est une des premières raisons pour laquelle nous souhaitons appliquer le groupe de renormalisation dans l'espace interne au modèle de Luttinger.

Bien entendu nous n'oublions pas les résultats de la bosonisation ont été confirmée par un grand nombre de travaux qui n'utilisent pas ce formalisme. Par exemple, la liberté asymptotique du modèle de Luttinger a été ainsi démontrée en utilisant des identités de Ward qui montrent l'annulation parfaite de l'énergie propre et des corrections au vertex, rendant ainsi l'approche RPA simpliste exacte [47, 48, 56]. Une application du groupe de renormalisation standard, que nous avons mentionné dans le chapitre précédent, conduit elle aussi, sous certaines conditions, à la liberté asymptotique du modèle [41, 42].

La liberté asymptotique est un problème fondamental en Chromodynamique Quantique (QCD). Il est intéressant de poursuivre plus en profondeur cette analogie (certes formelle) qui existe entre le modèle de Luttinger et le problème du confinement des charges de couleurs en QCD. La non-propagation des excitations fermioniques élémentaires en une dimension d'espace est équivalente à l'annulation du résidu du pôle particule dans les fonctions de Green et dans l'amplitude de diffusion, ce qui constitue le signe caractéristique du confinement en physique hadronique – l'absence d'états asymptotiques «colorés». Nous l'avons signalé, cette analogie reste superficielle. Les deux phénomènes sont bien différents, car les particules nues de la théorie de Luttinger ne se propagent pas quelque soit le signe de l'interaction alors que dans le cas de la QCD, la nature *attractive* de la force colorée est un ingrédient *essentiel* du confinement des quarks.

Comme toute bonne analogie, celle-ci a le mérite de lever un certain de nombre d'interrogations. Notamment, comment est-il possible qu'il n'y ait pas dans le cas du modèle de Luttinger d'interactions résiduelles entre les «hadrons»? Car dans le même temps ses constituants, les «quarks», semblent montrer des corrélations fortes et à longue portée. Répondre à cette question est d'une importance cruciale, car la bosonisation et ses quasi-particules qui n'interagissent pas pourraient être remis en question par la présence de ces corrélations à longue portée. Il a par exemple été montré que les singularités non-massives d'une théorie doivent être resommées avant que l'on puisse se fier au développement perturbatif, car elles induisent ce type de corrélations [57]. Comment être certain que ceci ne met pas en défaut la bosonisation en amont? Il est un autre point qui peut s'avérer problématique. En effet, il est tout à fait concevable que les jeux d'opérateurs «essentiels» au sens du groupe de renormalisation au voisinage du point fixe Gaussien dans l'ultra-violet et du point fixe non-Gaussien dans l'infra-rouge soient différents [16]. Dans

ce cas, les arguments perturbatifs qui visent à déterminer les opérateurs «inessentiels» (en se basant sur le régime des hautes énergies) peuvent tout simplement s’effondrer lorsque l’on s’intéresse aux excitations de basses énergies. Ces questions ont donné naissance à une étude récente [58], basée sur le Groupe de Renormalisation pris à l’ordre une boucle, qui a conduit à la non trivialité des fonctions β et un couplage fort au voisinage des points de Fermi. Comment peut-on alors réconcilier tout ces points de vues, qui semblent être quelques peu contradictoires? Ces contradictions ne sont qu’apparentes, car la singularité des constantes de couplages au voisinage des points de Fermi peut se deviner dans un calcul au second ordre de la théorie des perturbations (voir les annexes de [48] notamment).

Toutes ces considérations nous ont conduit à envisager l’application du groupe de renormalisation dans l’espace interne [25] comme une alternative viable aux techniques existantes. Le but est alors à la fois de clarifier les propriétés asymptotiques du modèles de Luttinger, ainsi que celles des interactions entre ses constituants. Le groupe de renormalisation dans l’espace interne constitue un point de vue suffisamment différent de l’approche Wilsonienne pour espérer recouvrer la majorité des résultats établis vu *sous un autre angle*. Nous nous sommes restreints à une approximation à l’ordre une boucle dans l’objectif de faciliter la résolution des équations mises en jeu. Comme nous l’avons vu dans le chapitre 2, dans ce cadre de travail, les fluctuations sont «allumées» progressivement dans l’espace interne et leurs effets sont accumulés par une équation d’évolution portant sur l’action effective du système [15]. La seule approximation nécessaire dans ce formalisme est la réduction de l’espace fonctionnel dans lequel l’action effective évolue. C’est la seule option qui permettent d’espérer trouver une solution systématique à l’équation d’évolution. Nous avons effectué une contribution modeste à l’étude du modèle de Luttinger qui confirme l’absence d’évolution des couplages aux points de Fermi. Mais nous montrons que lorsque l’on s’éloigne de ces points, notre méthode génère une évolution non-triviale des constantes de couplages. Pour commencer notre étude, il nous faut clarifier dans un premier temps le modèle utilisé et ses fonctionnelles génératrices.

4.2 Modèle et fonctionnelles génératrices

Comme toujours, le premier point d’une discussion d’un problème physique est le choix d’un modèle le plus cohérent et le plus simple possible, compte-tenu des objectifs que nous nous sommes fixés. Nous travaillerons par la suite dans un formalisme de théorie des champs euclidienne. La question de savoir si oui ou non nous devons inclure le spin dans notre modèle peut-être réglée de deux manières : soit on souhaite avoir le modèle le plus simple, auquel cas l’inclusion du spin est une complication qu’il vaut mieux éviter. Soit, comme on l’a vu au chapitre précédent, on argumente ce choix par la séparation entre charge et spin. Physiquement, nous souhaitons étudier le modèle de Luttinger simple, sans interactions de type «Umklapp» ou «Backscattering».

De ce fait, l’utilisation de fermions sans spins n’est absolument pas problématique, bien au contraire. Le modèle de Luttinger ne contient qu’une interaction à deux corps entre les fermions. L’hypothèse habituelle est d’affirmer qu’il est réaliste de considérer une

interaction strictement locale dans l'espace qui se traduit dans l'espace de Fourier par une dépendance simple du vertex d'interaction dans les impulsions externes : une conservation des fréquences et des impulsions avec une amplitude constante de l'interaction. Nous allons laisser la porte ouverte à des dépendances plus subtiles du vertex d'ordre quatre dans les opérateurs de champs. Cependant, ne nous considérerons pas d'interactions à plus de deux corps. L'action euclidienne de notre modèle est donnée par

$$\begin{aligned}
 S[\psi_\sigma^\dagger, \psi_\sigma] &= \sum_\sigma \int_x \psi_{\sigma;x}^\dagger [-\partial_t + \epsilon_\sigma(-i\partial_{\mathbf{x}})] \psi_{\sigma;x} \\
 &+ \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4} \int_{x_1, y_1, x_2, y_2} g_{x_1, y_1, x_2, y_2}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4} \psi_{\sigma_1, x_1}^\dagger \psi_{\sigma_2, y_1} \psi_{\sigma_3, x_2}^\dagger \psi_{\sigma_4, y_2}. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Est-il raisonnable de ne pas considérer des interactions à plus que deux corps, par exemple d'ordre six dans les champs ? La question peut sembler justifiée. Si l'on s'en tient à une simple analyse dimensionnelle, à la manière groupe de renormalisation, nous avons vu que des termes non locaux dans le vertex d'ordre quatre sont *inessentiels* et que la partie constante est tout juste *marginale*. Pour une interaction à six champs, *toutes* les dépendances possibles en fréquences et impulsions sont *inessentielles*. Donc il n'est absolument pas stupide de choisir d'inclure une dépendance non locale dans le vertex à quatre jambes de ce point de vue. Nous choisissons donc par simplicité de laisser tomber les ordres supérieurs, et de laisser aux dépendances plus subtiles dans le vertex à deux corps le soin de générer une dynamique d'évolution non-triviale.

Si jamais nous observons à cet ordre déjà des déviations par rapport aux prédictions standard, il est probable que les ordres supérieurs ne changent rien à la situation ou tout du moins qu'ils nécessitent une étude plus poussée, en dehors du cas des couplages faibles. Des arguments basés sur une simple analyse dimensionnelle n'indiquent pas clairement qu'il faille privilégier l'une ou l'autre de ces contributions. De plus, comme nous souhaitons sonder en détail le régime infra-rouge, il est très important de laisser la possibilité à des termes singuliers (par leurs structures dans l'espace des impulsions) de jouer un rôle dans notre stratégie.

Nous introduisons les deux espèces de fermions «gauches» et «droits», fruits de la linéarisation de la relation de dispersion au voisinage de la surface de Fermi. Nous convenons d'utiliser un indice $\sigma = \pm 1$ pour faire la distinction entre les deux espèces. Dans l'équation (4.1), la sommation se fait sur tous les indices σ_i valant ± 1 . Nous choisissons de formuler notre théorie dans l'espace direct et pas dans l'espace de Fourier pour l'instant. x_1 et un bi-vecteur à une composante temporelle $x_1^0 = t_1$ et une composante spatiale $x_1^1 = \mathbf{x}_1$. Les fermions gauches et droits correspondent respectivement à $\sigma = +1$ et $\sigma = -1$. Les opérateurs de champs vérifient les relations usuelles d'anticommutations pour des fermions sans spins :

$$\left\{ \psi_{\sigma,x}^\dagger, \psi_{\sigma',y}^\dagger \right\} = 0, \quad \left\{ \psi_{\sigma,x}, \psi_{\sigma',y} \right\} = 0, \quad (4.2)$$

$$\left\{ \psi_{\sigma,x}, \psi_{\sigma',y}^\dagger \right\} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta_{x,y}. \quad (4.3)$$

L'interaction entre les fermions reste pour le moment générique. Nous lui donnerons une forme plus précise plus tard. La relation de dispersion est linéarisée en accord avec ce qui a été représenté sur la figure 3.4 du chapitre 3. Dans l'espace de Fourier, on peut alors écrire la relation de dispersion simplement sous la forme,

$$\epsilon_\sigma(\mathbf{p}) = \sigma\mathbf{p} - k_F. \quad (4.4)$$

Introduisons ensuite les transformées de Fourier des opérateurs de champs de notre théorie :

$$\psi_{\sigma;x} = \int_p \underbrace{\Theta(\sigma\mathbf{p})}_{\text{ignoré par suite}} e^{ipx} \psi_{\sigma;p}, \quad \psi_{\sigma;x}^\dagger = \int_p \underbrace{\Theta(\sigma\mathbf{p})}_{\text{ignoré par suite}} e^{-ipx} \psi_{\sigma;p}^\dagger. \quad (4.5)$$

Les distributions de Heaviside traduisent la nature «gauche» ou «droite» des fermions en question. Dans la pratique, nous négligerons l'effet de ces distributions de Heaviside en remarquant que les états non physiques ainsi obtenus sont suffisamment bas en énergie pour que leurs effets ne se fassent pas sentir sur les premières excitations du système. Cette approximation correspond bien à ce que nous avons vu du modèle de Luttinger où les deux branches de la relation de dispersion sont prolongées à l'infini. Le moment est venu de donner une forme plus précise à l'interaction à deux corps que nous avons introduit dans (4.1). La première source de simplifications éventuelles vient du souhait que nous formulons de conserver *indépendamment* les nombres de fermions gauches et droits, en plus du nombre total de fermions. Ceci ne nous laisse la possibilité que de considérer les deux fonctions de couplage $g_{x,y,v,z}^{+,+,+,+}$, $g_{x,y,v,z}^{-,-,-,-}$ qui mélangent les fermions d'une même branche de la relation de dispersion (4.4) (couplage *intra-branche*). Mais aussi $g_{x,y,v,z}^{+,+,-,-}$ et $g_{x,y,v,z}^{-,-,+,+}$ qui couplent les fermions de branches différentes (couplage *inter-branche*). Les symétries de renversement de l'espace-temps nous permettent d'affirmer sans craintes que les relations additionnelles suivantes doivent être vérifiées :

$$g_{x_1,y_1,x_2,y_2}^{+,+,+,+} = g_{x_1,y_1,x_2,y_2}^{-,-,-,-} \quad (4.6)$$

$$g_{x_1,y_1,x_2,y_2}^{+,+,-,-} = g_{x_1,y_1,x_2,y_2}^{-,-,+,+} \quad (4.7)$$

Nous aurons donc à traiter simultanément la présence de deux constantes de couplages dans notre modèle. Cette multiplication du nombre de fonctions à suivre par rapport aux études ordinaires – qui en général ne conserve que g^\times – se fera à moindre frais dans le formalisme du groupe de renormalisation dans l'espace interne. Les transformées de Fourier des fonctions sont données par

$$g_{x_1,y_1,x_2,y_2}^{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4} = \int_{p_1,p_2,p_3,p_4} e^{ip_1x_1 - ip_2y_1 + ip_3x_2 - ip_4y_2} \delta_{p_1 - p_2 + p_3 - p_4; 0} \hat{g}_{p_1,p_2,p_3,p_4}^{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4}. \quad (4.8)$$

Les termes d'interactions nus eux seront pris sous la forme simple suivante :

$$\begin{aligned} \hat{g}_{p_1,p_2,p_3,p_4}^{-,-,+,+} &= e^{i\eta(2p_1^0 - p_2^0 - p_3^0 + 2p_4^0)} g^\times \\ \hat{g}_{p_1,p_2,p_3,p_4}^{+,+,+,+} &= e^{i\eta(2p_1^0 - p_2^0 - p_3^0 + 2p_4^0)} g^\parallel \end{aligned} \quad (4.9)$$

où g^\times and g^\parallel sont des constantes et η un infinitésimal réel strictement positif ($\eta = 0^+$). Ceci paramétrise complètement notre action nue, point de départ de la procédure

de renormalisation dans l'espace interne. Nous avons vu dans le chapitre 2 que nous aurons besoin de déterminer les relations qui existent entre les différentes fonctionnelles génératrices du modèle. On introduit donc de manière conventionnelle le générateur des fonctions de Green connexes W . Pour une théorie euclidienne il est donné par

$$e^{W[j, j^\dagger]} = \int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\psi^\dagger] e^{-S[\psi^\dagger, \psi] + \sum_\sigma (\psi_\sigma^\dagger \cdot j_\sigma + j_\sigma^\dagger \cdot \psi_\sigma)} \quad (4.10)$$

où les j_σ et j_σ^\dagger sont des sources externes. L'action effective Γ (génératrice des fonctions de Green 1-PI) est quant-à-elle donnée par la transformation de Legendre ordinaire,

$$\Gamma[\Psi^\dagger, \Psi] = -W[j, j^\dagger] + \sum_\sigma (\Psi_\sigma^\dagger \cdot j_\sigma + j_\sigma^\dagger \cdot \Psi_\sigma), \quad (4.11)$$

où les relations entre les champs et les sources se résument tout bonnement à

$$\Psi_\sigma^\dagger = -\frac{\delta W}{\delta j_\sigma}, \quad \Psi_\sigma = \frac{\delta W}{\delta j_\sigma^\dagger} \quad (4.12)$$

Notons que nous avons introduits une notation différente pour les champs fermioniques dans cette relation. Bien entendu, ceci est simplement censé rappeler qu'ici les Ψ sont déterminés comme des dérivées fonctionnelles de W , c'est-à-dire dépendent implicitement des sources.

Dans le chapitre 2, nous avons remarqué le lien qui existe entre les dérivées fonctionnelles secondes de W et Γ dans le cas bosonique. Nous avons même signalé qu'une telle relation est très générale. Qu'en-est-il ici ? Commençons par exprimer la distribution de Dirac comme une dérivée fonctionnelle des opérateurs de champs :

$$\begin{aligned} \delta_{x,y} &= \frac{\delta \Psi_{+,x}}{\delta \Psi_{+,y}} \\ &= \frac{\delta}{\delta \Psi_{+,y}} \left[\frac{\delta W[j^\dagger, j]}{\delta j_{+,x}^\dagger} \right] \\ &= \sum_\sigma \int_z \left(\frac{\delta j_{\sigma,z}}{\delta \Psi_{+,y}} \frac{\delta}{\delta j_{\sigma,z}} + \frac{\delta j_{\sigma,z}^\dagger}{\delta \Psi_{+,y}} \frac{\delta}{\delta j_{\sigma,z}^\dagger} \right) \left[\frac{\delta W[j^\dagger, j]}{\delta j_{+,x}^\dagger} \right] \\ &= \sum_\sigma \int_z \left(\frac{\delta^2 \Gamma[\Psi^\dagger, \Psi]}{\delta \Psi_{+,y} \delta \Psi_{\sigma,z}^\dagger} \frac{\delta^2 W[j^\dagger, j]}{\delta j_{\sigma,z} \delta j_{+,x}^\dagger} - \frac{\delta^2 \Gamma[\Psi^\dagger, \Psi]}{\delta \Psi_{+,y} \delta \Psi_{\sigma,z}} \frac{\delta^2 W[j^\dagger, j]}{\delta j_{\sigma,z}^\dagger \delta j_{+,x}^\dagger} \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

Si l'on effectue le même travail pour toutes les combinaisons possibles qui permettent d'obtenir la distribution de Dirac (ce point est abordé un peu plus en détail dans les appendices, voir B.1), on peut résumer la situation sous la forme d'une expression ma-

tricielle. Soient $\Gamma^{(2)}$ et $W^{(2)}$ les deux matrices 4×4 suivantes :

$$\Gamma_{z,y}^{(2)} = \begin{pmatrix} \Gamma_{\Psi_{+,z}^\dagger, \Psi_{+,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{+,z}^\dagger, \Psi_{-,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{+,z}^\dagger, \Psi_{+,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{+,z}^\dagger, \Psi_{-,y}}^{(2)} \\ \Gamma_{\Psi_{-,z}^\dagger, \Psi_{+,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{-,z}^\dagger, \Psi_{-,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{-,z}^\dagger, \Psi_{+,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{-,z}^\dagger, \Psi_{-,y}}^{(2)} \\ \Gamma_{\Psi_{+,z}, \Psi_{+,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{+,z}, \Psi_{-,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{+,z}, \Psi_{+,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{+,z}, \Psi_{-,y}}^{(2)} \\ \Gamma_{\Psi_{-,z}, \Psi_{+,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{-,z}, \Psi_{-,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{-,z}, \Psi_{+,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{-,z}, \Psi_{-,y}}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

$$W_{y,x}^{(2)} = \begin{pmatrix} W_{j_{+,y}^\dagger, j_{+,x}}^{(2)} & W_{j_{+,y}^\dagger, j_{-,x}}^{(2)} & -W_{j_{+,y}^\dagger, j_{+,x}}^{(2)} & -W_{j_{+,y}^\dagger, j_{-,x}}^{(2)} \\ W_{j_{-,y}^\dagger, j_{+,x}}^{(2)} & W_{j_{-,y}^\dagger, j_{-,x}}^{(2)} & -W_{j_{-,y}^\dagger, j_{+,x}}^{(2)} & -W_{j_{-,y}^\dagger, j_{-,x}}^{(2)} \\ -W_{j_{+,y}, j_{+,x}}^{(2)} & -W_{j_{+,y}, j_{-,x}}^{(2)} & W_{j_{+,y}, j_{+,x}}^{(2)} & W_{j_{+,y}, j_{-,x}}^{(2)} \\ -W_{j_{-,y}, j_{+,x}}^{(2)} & -W_{j_{-,y}, j_{-,x}}^{(2)} & W_{j_{-,y}, j_{+,x}}^{(2)} & W_{j_{-,y}, j_{-,x}}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Ces deux matrices contiennent toutes les dérivées fonctionnelles secondes des deux fonctionnelles génératrices précédentes. Elles sont utiles car elle nous permettent d'écrire très simplement le lien entre W et Γ ,

$$\int_y \Gamma_{z,y}^{(2)} \times W_{y,x}^{(2)} = \delta_{x,y} \mathbb{1}_4, \quad (4.16)$$

où $\mathbb{1}_4$ est l'identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$. Cette relation est un peu plus compliquée que dans le cas bosonique du chapitre 2, mais elle demeure simple à obtenir. Elle s'avérera très utile lorsqu'il s'agira d'exprimer certaines dérivées fonctionnelles de W , car elles s'obtiendront comme un développement en puissance de $(\Gamma^{(2)})^{-1}$ autour de sa partie diagonale dans l'espace des impulsions.

Remarque: Nous rappelons que nous utilisons la notation suivante pour les dérivées fonctionnelles secondes,

$$F_{\phi,\chi}^{(2)} = \frac{\delta^2 F[\phi, \chi]}{\delta\phi\delta\chi}, \quad (4.17)$$

dans le but de «condenser» les expressions matricielles précédentes.

Par ailleurs, insistons sur le caractère tout particulier de ces matrices, qui ont pour éléments de distributions. On peut résumer la situation : ces matrices sont en quelque sorte des matrices «généralisées» avec deux indices discrets (liés à la chiralité σ) et deux indices continus d'espace-temps. Ces objets sont à traiter avec attention, notamment en respectant la distinction entre produits matriciels (qui se traduisent par des sommes discrètes) et produits de distribution (qui s'expriment par des intégrales sur l'espace-temps).

Avant de passer à la section suivante, il nous faut discuter de la régularisation de l'intégrale fonctionnelle de l'équation (4.10). Tant que la coupure n'est pas envoyée à l'infini, le choix du régulateur peut conduire à des effets différents. Afin de mieux cerner ces effets, nous pouvons mentionner quatre régulateurs différents qui peuvent être facilement mis en oeuvre dans notre modèle :

1. La coupure dure «naïve» dans l'espace des impulsions. Ce régulateur est le plus simple à utiliser. Il suffit de restreindre l'intégration fonctionnelle aux champs dont les modes de Fourier qui vérifient $|\mathbf{p} - \sigma k_F| < \Lambda$.
2. Une autre «implémentation» d'une telle coupure consiste à travailler sur un réseau d'espace-temps. Dans ce cas, le changement le plus important est la disparition des relations de dispersions précédentes au profit de fonctions périodiques.
3. Si l'on souhaite utiliser un régulateur plus doux, on peut «diluer» les termes locaux du Lagrangien d'interaction à l'aide d'un champ auxiliaire,

$$\psi_{B;\sigma}(x) = \int_y \rho(x-y)\psi_\sigma(y), \quad (4.18)$$

où $\rho(x)$ est une certaine fonction réelle qui dépend de la coupure U.V. Λ . On remplace alors les champs du terme d'interaction de l'équation (4.10) par les ψ_B , tout en conservant la partie quadratique intacte. Un choix naturel pour la fonction ρ peut être

$$\rho(x) = \frac{\Lambda^2}{\pi} e^{-\Lambda^2 x^2}, \quad (4.19)$$

ce qui revient dans l'espace des impulsions à utiliser

$$\psi_{B;\sigma}(p) = \rho(p)\psi_\sigma(p), \text{ avec } \rho(p) = e^{-p^2/4\Lambda^2}. \quad (4.20)$$

Remarque: Le choix particulier de ρ suivant,

$$\rho_\Lambda(\mathbf{p}) = \begin{cases} 1 & |\mathbf{p}| \leq \Lambda \\ 0 & |\mathbf{p}| > \Lambda \end{cases}, \quad (4.21)$$

nous redonne bien entendu le cas (1).

4. Une autre façon de réaliser une régularisation douce de l'équation (4.10) qui préserve la forme locale de l'interaction et sépare les deux courants gauches et droits et d'utiliser l'interaction suivante :

$$S_{iB}[\psi^\dagger, \psi] = \sum_{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4} \int_{x_1, y_1, x_2, y_2, z} \rho_z g_{x_1, y_1, x_2, y_2}^{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4} \psi_{\sigma_1, x_1+z}^\dagger \psi_{\sigma_2, y_1+z} \psi_{\sigma_3, x_2}^\dagger \psi_{\sigma_4, y_2}. \quad (4.22)$$

Notons que tous les régulateurs précédents admettent des identités de Ward nues. Notre objectif est de construire l'action effective du modèle de Luttinger et de vérifier si les interactions restent faibles pour des valeurs faibles des couplages nus, c'est-à-dire $g^\times, g^\parallel \ll 1$. Le plus «simple» pourrait être un développement perturbatif en g^\times et g^\parallel . Mais pour obtenir un résultat qui met en évidence les corrections radiatives d'ordres supérieurs qui sont susceptibles de modifier fortement la forces des interactions dans certains régimes cinématique, il nous faudrait pouvoir resommer partiellement ces contributions. La méthode du groupe de renormalisation dans l'espace interne est un moyen efficace et systématique d'effectuer cette resommation. Nous allons donc nous concentrer sur son application dans les sections suivantes. Avant cela, nous allons discuter un peu plus en détail des limitations de la bosonisation introduite au chapitre 3.

4.3 Le Schéma BPHZ et la bosonisation

Nous avons parlé de la bosonisation du hamiltonien de Luttinger dans le chapitre précédent. La plupart des études du modèle de Luttinger sont menées dans un formalisme de soustraction Hamiltonien élégant, basé sur la prescription d'ordre normal. L'objectif de cette section est de mettre en lumière le caractère particulier de ces résultats. Nous montrerons les similarités qui existent entre la prescription d'ordre normal et le schéma de soustraction BPHZ (Bogoliubov-Parasuik-Hepp-Zimmermann). Ce schéma est basé sur le constat [59, 60] que les divergences primitives d'une fonction de Green 1PI apparaissent dans les premiers ordres de son développement de Taylor dans les impulsions externes. Les divergences, induites par ces quelques termes, sont alors soustraites en introduisant des contre-termes locaux. On peut organiser cette procédure de sorte que la soustraction ait lieu au niveau de l'intégrande dans les intégrales de boucles [61]. Il est remarquable que la procédure qui en résulte soit complètement *sans divergences* [62, 63] (les intégrales de boucles deviennent finies).

Quelle est le lien avec la bosonisation ? Nous nous contenterons de quelques détails sur les effets de la coupure dans ce formalisme [35, 40, 53, 54]. Pour cela, nous introduirons explicitement la coupure. Le point de départ de la bosonisation, comme nous l'avons vu, est d'établir la correspondance entre les opérateurs de champs fermionique du modèle initial et ceux bosoniques du modèle «bosonisé». Ensuite, on montre que le nouveau Hamiltonien est celui d'un système de bosons libres. Nous allons nous pencher en détail sur les relations de commutations entre les opérateurs bosoniques. On rappelle que l'opérateur de champs pour un fermion chiral dans un «boîte» de taille L (conditions aux bords périodiques) s'écrit comme une série de Fourier,

$$\psi(x) = \frac{1}{L} \sum_k e^{ikx} c_k, \quad (4.23)$$

avec $k = 2\pi n_k/L$ et où les n_k sont des entiers. Les opérateurs c_k obéissent aux relations canoniques d'anti-commutations dont la seule qui soit non-triviale dans l'espace des impulsions est $\{c_k, c_{k'}^\dagger\} = \delta_{k,k'}$. Les opérateurs de champs bosoniques s'expriment en fonction de la densité fermionique par l'intermédiaire de la relation suivante :

$$b_q = -\frac{i}{\sqrt{n_q}} \sum_k c_{k-q}^\dagger c_k \quad (4.24)$$

pour $q > 0$. On peut introduire la somme de Fourier ci-dessous,

$$\phi(x) = \frac{1}{L} \sum_{q>0} e^{iqx} b_q. \quad (4.25)$$

Les relations canoniques de commutations pour les opérateurs b_q et b_q^\dagger découlent trivialement de leurs définitions et on peut écrire particulièrement

$$[b_q, b_q^\dagger] = \frac{1}{n_q} \sum_k c_k^\dagger c_k - \frac{1}{n_q} \sum_k c_{k-q}^\dagger c_{k-q}. \quad (4.26)$$

Les éléments de matrices diagonaux de cette équation contiennent la différence de deux quantités divergentes. Avant de pouvoir conclure, il faut régulariser ces deux termes. Le régulateur a deux rôles :

1. Il rend les expressions finies en supprimant les modes de petites longueurs d'ondes.
2. Il définit l'ordre dans lequel les sommes (ou intégrales) doivent être effectuées.

En général, on n'a pas à se soucier de ce dernier cas, car les contre-termes introduits rendent les sommes absolument convergentes (donc indépendantes de l'ordre dans lequel on effectue les sommes). Cependant, il se peut que certaines observables ne soient pas données par des séries absolument convergentes, bien que ces observables convergent vers une limite finie. Pour ces observables, il n'y a bien entendu pas de contre-termes et il faut trouver une règle cohérente pour fixer l'ordre des sommations. On appelle de telles quantités des *observables anormales*. Si l'on se place sur un réseau, la relation de commutation (4.26) devient nulle, car la zone de Brillouin est périodique et l'on peut effectuer la translation $k \rightarrow k + q$ dans le premier terme. Il en va de même pour le cas d'une coupure dure [35].

Mais si l'on utilise un régulateur doux et la prescription d'ordre normal, on trouve un résultat différent [40]. Nous utiliserons le régulateur (3) de la section 4.2. On introduit alors :

$$b_{Bq} = -\frac{i}{\sqrt{n_q}} \sum_k \rho_{k-q}^* \rho_k c_{k-q}^\dagger c_k \quad (4.27)$$

en tant qu'opérateur «nu» pour le Lagrangien d'interaction. Le vide fermionique est défini par $c_k|0\rangle = c_{k'}^\dagger|0\rangle = 0$ pour $k, -k' > 0$ et la prescription d'ordre normal pour un opérateur O est

$$:O := O - \langle 0|O|0\rangle. \quad (4.28)$$

L'équation Eq. (4.26) ainsi régularisée devient

$$\begin{aligned} [b_{Bq}, b_{Bq}^\dagger] &= \frac{1}{n_q} \sum_k |\rho_{k-q}|^2 c_k^\dagger c_k - \frac{1}{n_q} \sum_k |\rho_k|^2 c_{k-q}^\dagger c_{k-q} \\ &= \frac{1}{n_q} \sum_k |\rho_{k-q}|^2 :c_k^\dagger c_k: - \frac{1}{n_q} \sum_k |\rho_k|^2 :c_{k-q}^\dagger c_{k-q}: \\ &\quad + \frac{1}{n_q} \sum_k |\rho_k|^2 \langle 0|c_{k-q}^\dagger c_{k-q}|0\rangle - \frac{1}{n_q} \sum_k |\rho_{k-q}|^2 \langle 0|c_k^\dagger c_k|0\rangle. \end{aligned} \quad (4.29)$$

On peut montrer que n'importe lequel des éléments de matrices des sommes précédentes converge absolument, et que le réarrangement $k \rightarrow k + q$ est autorisé. Ce qui nous donne :

$$[b_{Bq}, b_{Bq}^\dagger] = \mathbb{1}(1 + C_q) + D_q \quad (4.30)$$

où l'on note

$$\begin{aligned} C_q &= \frac{1}{n_q} \sum_{k < 0} (|\rho_k|^2 - |\rho_{k-q}|^2) + \frac{1}{n_q} \sum_{k=0}^q (|\rho_k|^2 - 1) \\ D_q &= \frac{1}{n_q} \sum_k (|\rho_{k-q}|^2 - |\rho_{k+q}|^2) :c_k^\dagger c_k: \end{aligned} \quad (4.31)$$

De manière standard le régulateur utilisé dans les travaux sur la bosonisation du modèle de Luttinger est le numéro (4) de la section 4.2. Il conduit à l'équation (4.29) avec $\rho_k = 1$. La somme des produits normalement ordonnés donne alors des termes absolument convergent, mais les deux derniers termes divergent, ce qui rend le choix de cette coupure difficilement acceptable.

Pour mieux comprendre le problème du choix de régulateur, mettons en évidence les similarités entre la prescription d'ordre normal et le schéma BPHZ mentionné plus haut. Une seule soustraction est nécessaire dans les deux cas pour n'importe quelle intégrale de boucle, mais sa valeur diffère dans les deux stratégies. La prescription d'ordre normale et BPHZ partagent les mêmes avantages et inconvénients. La simplicité de la méthode est avantageuse, mais bien qu'on arrive à supprimer ainsi les divergences, cela ne dispense par pour autant d'utiliser un régulateur bien mieux défini.

S'il existe des intégrales de boucles qui convergent simplement seulement vers une limite finie, il *faut* employer un régulateur pour définir leur valeur de manière univoque et cohérente. Il est essentiel que cette définition soit physiquement acceptable. En effet, on peut choisir n'importe quel ordre de sommation qui donne un résultat fini dans la deuxième sommation de la dernière ligne de l'équation (4.29) (pour $\rho_k = 1$). Mais, nous n'aurons régler la situation que pour un seul terme problématique, ce qui ne garantit pas que cet ordre conviennent pour n'importe lequel des autres expressions que l'on est susceptible d'obtenir. Il faut traiter cette question au niveau du Hamiltonien de départ pour être complètement systématique.

Par ailleurs, lorsque la coupure génère une échelle finie, comme par exemple dans le cas de la «transmutation dimensionnelle», nous aurons besoin d'un régulateur aussi. Celle-ci apparaît par le biais des dépendances finies dans la coupure et se volatilise lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$, car toutes les contributions divergentes sont soustraites dans ce schéma. Pour ne pas louper la présence d'une «transmutation dimensionnelle», il faut donc garder tous ces termes finis avant de resommer la série des perturbations. Le schéma BPHZ est très puissant pour des modèles massifs sans transmutation dimensionnelle mais il devient hautement non-trivial pour des modèles non-massifs car ses paramètres renormalisés sont alors faiblement liés aux vrais constantes de couplages effectives.

Si d'aventure on ne peut bouger la coupure au-delà d'une certaine limite, il faudra la encore utiliser explicitement un régulateur. C'est le cas lorsque l'on s'intéresse à une théorie renormalisable de façon perturbative, pour laquelle les divergences sont éliminés ordre par ordre dans la théorie. Les conditions de renormalisation qui déterminent la théorie prennent la forme d'une série d'équations (qui contiennent d'un côté des valeurs expérimentales de certaines quantités physiques et de l'ordre des équations qui portent sur les paramètres de la théorie). Elles font intervenir la coupure et les paramètres nus d'une manière non-linéaire, et il se peut qu'elles n'aient pas de solutions finies au-delà d'une certaine échelle de la coupure (pôle de Landau).

Revenons à l'équation (4.30). La relation de commutation de la référence [40] s'obtient à partir de cette dernière en imposant $C_q = D_q = 0$ (qui sont des quantités d'ordre $\mathcal{O}(q^2/\Lambda^2)$). Une fois cette simplification faite, on conclue facilement. Il suffit d'écrire le Hamiltonien et et puis d'effectuer une transformation de Bogoliubov. On trouve un

Hamiltonien normalement ordonné pour un champ libre de bosons non-massifs.

Notre argument est que le régulateur (4) régularise tous les graphes de Feynman qui contribuent aux fonctions de Green car il supprime l'interaction au-delà d'une certaine échelle. Mais il ne supprime *pas* toutes les divergences. La prescription d'ordre normal n'est pas un vrai régulateur. Elle se contente de ré-ordonner les termes des sommes. Pour contrôler toutes les divergences, il faut inclure les termes d'ordre $\mathcal{O}(q^2/\Lambda^2)$ dans (4.30), bien que négligeables pour les relations de commutation. Ils sont susceptibles de générer des effets finis non-nuls par le biais de pôles de Landau ou d'une transmutation dimensionnelle. Dans notre contribution nous rechercherons les effets de la présence de la coupure pour voir si l'omission de ces termes est réellement justifiée. Peut-on toujours affirmer que la bosonisation est applicable lorsqu'on utilise une coupure nette dans l'espace des impulsions? C'est ce que nous tenterons de déterminer.

Le fait que différents schémas de régularisation, tous acceptables, conduisent à des résultats différents pour une valeur finie de la coupure U.V. n'est pas surprenant. La seule chose que l'on puisse espérer d'une théorie renormalisable est que des théories prises à une coupure différente convergent toutes vers la *même théorie renormalisée* lorsque l'on supprime cette dernière. L'argument ordinaire d'universalité assure que l'on peut parler d'un unique modèle de Luttinger, tant que ce dernier est renormalisable. Ceci ne dépend pas du régulateur utilisé. Par contre, il se peut que certains effets soient plus ou moins facilement accessibles et identifiables dans un schéma de régularisation donnée. La valeur numérique des observables physiques doit cependant être identique quelque soit le chemin suivi. On peut citer par exemple un théorème de «no-go» [64], relativement célèbre, qui stipule que des fermions chiraux (comme c'est le cas ici) ne peuvent être traités dans le cadre d'une théorie des champs locale lorsque l'on utilise le régulateur sur réseau. Cependant, des constructions complexes, qui violent les conditions d'applications de ce théorème (et qui peuvent être vues comme des schémas de régularisation particuliers), peuvent réaliser des fermions sur réseaux chiraux dans des limites particulières. D'une manière analogue, nous pouvons entrevoir la «fragilité» apparente de la bosonisation comme une indication que cette procédure concentre beaucoup d'information dans la partie d'ordre $\mathcal{O}(\Lambda^{-2})$ de l'action renormalisée. Dans les autres schémas, ces informations se retrouvent dans les parties finies de l'action. Si ces contributions jouent un rôle important dans la dynamique du modèle, on peut s'attendre à ce que les systèmes bosonisés doivent être traités avec beaucoup de soins avant de pouvoir tirer clairement des conclusions. Pour cela, une étude détaillée de ces termes doit être menée, ce qui va au-delà des simples objectifs que nous nous sommes fixés. Par contre, ils feront très certainement l'objet d'une étude ultérieure.

4.4 Groupe de renormalisation dans l'espace interne

La stratégie traditionnelle du groupe de renormalisation consiste en l'élimination successive des modes rapides du modèle [65, 66]. Il existe deux façons de procéder pour déterminer l'ordre dans lequel cette élimination doit être effectuée :

- La manière conventionnelle est d'éliminer les modes au voisinage de la coupure ultraviolette Λ qui se déplace progressivement vers le domaine infrarouge. Une théorie quantique des champs est toujours non-locale à des distances plus courtes que l'échelle de la coupure ultraviolette., et les corrélations associées sont allumées progressivement au cours du déplacement de cette dernière vers l'infrarouge.
- On peut aussi envisager que les modes à éliminer en premier doivent être les plus perturbatifs. Ceci peut-être fait en considérant une théorie effective simple. D'un autre côté, les modes les moins «perturbatifs» doivent être traités à l'aide d'une théorie effective plus compliquée, obtenue après l'élimination d'un grand nombre de modes perturbatifs.

Ces deux procédés se rejoignent car dans les faits, l'énergie cinétique contribue en général à rendre les modes rapides perturbatifs. C'est pourquoi finalement les modes sont éliminés dans l'ordre décroissant de leurs impulsions, ce qui nous ramène alors à la première procédure. Il y a alors une relation claire entre l'espace externe, où «vivent» les impulsions, et l'espace interne où «vivent» les champs. Les opérateurs de champs $\phi(x)$ réalisent l'injection correspondante.

Le problème avec la première stratégie vient justement des effets non-locaux induits par la coupure. Un raisonnement simple permet de déduire que l'échelle de longueur caractéristique des modes qui vivent au niveau de la coupure U.V. est de l'ordre de $\frac{1}{\Lambda}$. En réalité, elle va bien au-delà de cette valeur naïve. Supposons que nous travaillons avec une coupure molle dans l'espace des impulsions qui laisse invariant les modes d'impulsions, $p < \Lambda$ et supprime complètement les modes d'impulsions $p > c\Lambda$ ($c > 1$). Nous n'avons pas besoin de connaître en détail la nature de la coupure (qui influence alors les modes dont l'échelle est comprise entre $\frac{1}{c\Lambda} < p < \frac{1}{\Lambda}$). Ces détails sont non physiques, mais bien que l'on puisse espérer que les corrélations générées disparaissent lorsque $\Lambda \rightarrow \infty$, lorsque l'on se rapproche du régime I.R., elles peuvent devenir importantes. Certes, à chaque étape de la réduction de la coupure, on remplace les contributions gênantes de l'étapes précédentes par des nouvelles. Mais alors, comment être certain qu'une troncature perturbative des équations du groupe de renormalisation les élimine correctement à chaque étape ?

Ce genre de considérations nous poussent à essayer de généraliser la deuxième stratégie. Une de ces généralisations correspond justement au groupe de renormalisation dans l'espace interne que nous avons présenté au chapitre 2. Nous partons des modes d'amplitudes faibles dans l'espace externe et nous éliminons en bout de course les modes de fortes amplitudes. Cette procédure est une réalisation de la proposition de Callan-Symanzik où les amplitudes des modes dans une théorie des champs relativiste sont contrôlées par un paramètre de masse qui ne dépend pas de l'impulsion [13, 14]. Cette procédure de renormalisation est particulièrement importante lorsqu'on ne peut pas faire appel à une suppression indépendante de l'impulsion (par exemple lorsque des symétries empêchent la présence d'un terme de masse). Il suffit alors de prendre n'importe lequel des para-

mètres continus de la théorie qui soit tel qu'il correspond à une expression quadratique des champs et, que dans une certaine limite de ce paramètre, la théorie soit soluble. La première condition nécessite d'appliquer cette stratégie soit dans le cadre d'une théorie effective pour des opérateurs composites (le terme en ϕ^2 dans la théorie $\lambda\phi^4$) ou pour des opérateurs bilinéaires fermioniques [67–70].

Avant d'appliquer ce formalisme au modèle de Luttinger, on peut encore se demander quels types d'effets non-locaux potentiels parasitent ce formalisme. Ils semblent être réduit à un minimum, dans la mesure où pour le modèle de Luttinger, notre application se fera sur les constantes de couplages. Dans ce cas, seules les dépendances en énergie-impulsion contenues dans ces dernières pourront intervenir. Mais elles sont physiques et nécessaires au modèle.

La stratégie sera donc de redimensionner les constantes de couplages par un paramètre continu λ^2 dans l'intervalle $]0, 1]$, ou de manière équivalent de multiplier la partie cinétique par $\frac{1}{\lambda^2}$. L'augmentation progressive de λ génère alors des fluctuations de plus en plus importantes dues aux interactions. Nous suivrons dans ce cas tout simplement l'évolution de l'action effective au cours de la procédure. L'autre avantage est de permettre *in fine* d'obtenir l'interaction effective en dehors de la surface de Fermi, ce qui est difficile dans une procédure standard de renormalisation où la coupure nous bloque progressivement sur la surface de Fermi et ne rend pas facilement compte de l'effet de ces modes voisins.

Après ces motivations quant à l'application du groupe de renormalisation dans l'espace interne, nous pouvons passer à sa formulation proprement dite. Pour cela, nous introduisons un paramètre continu $\lambda \in]0, 1]$ qui servira de point de pivot à notre procédure de renormalisation. Nous l'introduisons en multipliant le terme d'interaction par λ^2 , de sorte que notre action soit paramétrée par la formule ci-dessous :

$$S_\lambda[\psi_\sigma^\dagger, \psi_\sigma] = \sum_{\sigma=\pm 1} \int_x \psi_{\sigma;x}^\dagger [-\partial_t + \epsilon_\sigma(-i\partial_{\mathbf{x}})] \psi_{\sigma;x} + \lambda^2 \sum_{\sigma_i=\pm 1} \int_{x,y,v,z} g_{x,y,v,z}^{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4} \psi_{\sigma_1;x}^\dagger \psi_{\sigma_2;y} \psi_{\sigma_3;v}^\dagger \psi_{\sigma_4;z} \quad (4.32)$$

Lorsque $\lambda \rightarrow 0^+$, notre action tend vers l'action d'un système de fermions libres, et lorsque $\lambda \rightarrow 1$, elle tend vers l'action du modèle de Luttinger. L'objectif est donc de suivre l'évolution de l'action effective en tant que fonctionnelle (qui contient l'ensemble des fonctions de Green à 1 particule irréductible) lorsque ce paramètre varie continûment dans son intervalle de définition. Pour cela, nous allons commencer par manipuler l'action (4.32) afin de rendre notre équation d'évolution plus simple et de mettre en évidence le fait que la partie libre quadratique joue le rôle de "coupure" des fluctuations engendrées par le terme d'interaction. Si l'on redimensionne les champs selon la relation $\psi \rightarrow \lambda^{1/2}\psi$

et $\psi^\dagger \rightarrow \lambda^{1/2}\psi^\dagger$, on peut alors écrire

$$\begin{aligned}
 S_\lambda[\psi^\dagger, \psi] &= \frac{1}{\lambda} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_x \psi^\dagger_{\sigma;x} [-\partial_t + \epsilon_\sigma(-i\partial_{\mathbf{x}})] \psi_{\sigma;x} \\
 &\quad + \sum_{\sigma_i=\pm 1} \int_{x,y,v,z} g_{x,y,v,z}^{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4} \psi^\dagger_{\sigma_1;x} \psi_{\sigma_2;y} \psi^\dagger_{\sigma_3;v} \psi_{\sigma_4;z}. \quad (4.33)
 \end{aligned}$$

Cette équation est le point de départ de l'obtention d'une équation d'évolution cohérente. Il suffit de dériver la relation qui définit Γ (4.11) par rapport au paramètre de contrôle λ . Tout se passe comme dans le cas bosonique du chapitre 2, et on trouve la série d'équations suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{\Gamma}[\psi^\dagger, \psi] &= -\dot{W}[j_\sigma, j_\sigma^\dagger] \\
 &= -\frac{1}{\lambda^2} e^{-W[j_\sigma^\dagger, j_\sigma]} \int \mathcal{D}[\psi_+] \mathcal{D}[\psi_+^\dagger] \mathcal{D}[\psi_-] \mathcal{D}[\psi_-^\dagger] e^{-S_\lambda[\psi^\dagger, \psi] + \sum_{\sigma=\pm 1} j_\sigma^\dagger \cdot j_\sigma + j_\sigma^\dagger \cdot \psi_\sigma} \\
 &\quad \times \int_x \sum_{\sigma=\pm 1} \psi^\dagger_{\sigma;x} [-\partial_t + \epsilon_\sigma(-i\partial_x)] \psi_{\sigma;x} \\
 &= -\frac{1}{\lambda^2} \text{tr} \left[\left(\frac{\delta^2 W[\sigma]}{\delta j_\sigma^\dagger \delta j_\sigma} + \frac{\delta W[\sigma]}{\delta j_\sigma^\dagger} \frac{\delta W[\sigma]}{\delta j_\sigma} \right) \cdot [-\partial_t + \epsilon_\sigma(-i\partial_x)] \right] \\
 &= \frac{1}{\lambda^2} \text{tr} \left[\left(\left(\frac{\delta^2 \Gamma[\psi^\dagger, \psi]}{\delta \psi_\sigma^\dagger \delta \psi_\sigma} \right)^{-1} - \psi_\sigma \psi_\sigma^\dagger \right) \cdot [-\partial_t + \epsilon_\sigma(-i\partial_x)] \right] \quad (4.34)
 \end{aligned}$$

C'est cette dernière expression qui gouverne l'évolution de la fonctionnelle action effective. Il va nous falloir explorer les différentes stratégies possibles pour la résoudre. Cette équation est plus qu'une simple équation différentielle. C'est une équation fonctionnelle, ce qui complique grandement la tâche. Il n'est pas possible *a priori* de résoudre (4.34) directement car il n'existe pas de techniques mathématiques génériques pour traiter ce genre de problèmes.

C'est ce qui nous conduit à l'approximation majeure de notre procédure. L'idée est la suivante : il est réaliste de supposer que l'action effective dépende analytiquement des champs. De ce fait il est naturel de développer $\Gamma[\psi^\dagger, \psi]$ en série formelle des opérateurs de champs par un simple développement de Taylor fonctionnel. Ce développement est un peu particulier, il se fait en puissance des champs et les coefficients de la série sont des fonctions arbitraire de l'espace-temps. Le $n^{\text{ème}}$ ordre de cette série correspond aux corrélations à n -corps. On sait que ces corrélations sont supprimés dans le cadre du groupe de renormalisation Wilsonien dans l'espace externe, lorsque la coupure dure Λ tend vers 0 [71]. Même si cet argument peut être mis en défaut dans la mesure où une coupure dure induit des effets non-locaux qui peuvent substantiellement changer l'énergie cinétique, nous l'utiliserons pour justifier que la troncature la série formelle de Γ à l'ordre 4 dans les opérateurs champs. De sorte que tous les termes d'ordre $n \geq 6$ sont finalement ignorés par notre schéma évolution. Ceci simplifie grandement notre étude, et

rend l'espace fonctionnelle dans lequel Γ est assujéti à se déplacer de taille «raisonnable». Afin de simplifier un peu l'équation (4.34), nous introduisons une fonctionnelle $\tilde{\Gamma}$ liée à l'action effective par

$$\Gamma[\psi^\dagger, \psi] = \tilde{\Gamma}[\psi^\dagger, \psi] - \frac{1}{\lambda} \sum_{\sigma=\pm 1} \psi_\sigma^\dagger \cdot [-\partial_t + \epsilon_\sigma(-i\partial_x)] \cdot \psi_\sigma$$

pour laquelle l'équation d'évolution se reformule simplement

$$\partial_\lambda \tilde{\Gamma}[\Psi^\dagger, \Psi] = -\frac{1}{\lambda^2} \sum_\sigma \text{tr} \left(\Gamma_{\Psi_\sigma^\dagger, \Psi_\sigma}^{(2)-1} \cdot [-\partial_t + \epsilon_\sigma(-i\partial_x)] \right). \quad (4.35)$$

L'argument du développement en série de Taylor tronqué à l'ordre 4 nous conduit à chercher $\tilde{\Gamma}$ sous la forme fonctionnelle suivante (*ansatz* fonctionnel) :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}[\psi^\dagger, \psi] = & \Gamma_0 - \sum_{\sigma=\pm 1} \psi_\sigma^\dagger \cdot \Sigma_\sigma \cdot \psi_\sigma - \int_{a,b,c,d} \gamma_{a,b,c,d}^\times \psi_{-;a}^\dagger \psi_{-;b} \psi_{+;c}^\dagger \psi_{+;d} \\ & - \int_{a,b,c,d} \gamma_{a,b,c,d}'' \left(\psi_{+;a}^\dagger \psi_{+;b} \psi_{+;c}^\dagger \psi_{+;d} + \psi_{-;a}^\dagger \psi_{-;b} \psi_{-;c}^\dagger \psi_{-;d} \right) \end{aligned} \quad (4.36)$$

La fonction $\gamma_{a,b,c,d}^\times$ est l'interaction qui «mélange» les fermions gauches et droits et $\gamma_{a,b,c,d}''$ celle ne qui ne concerne que des fermions de même chiralité. Elles obéissent aux propriétés de symétries ordinaires

$$\gamma_{x_1, y_1, x_2, y_2} = \gamma_{x_2, y_2, x_1, y_1} = -\gamma_{x_1, y_1, x_2, y_2} \quad (4.37)$$

Notre objectif principal est de déterminer si oui ou non la théorie est fortement couplé au voisinage des points de Fermi. Pour cela, il est important de se souvenir qu'une divergence éventuelle des vertex d'interactions n'implique pas forcément que le modèle sot fortement couplé dans ce régime cinématique. En fait, une définition physiquement acceptable de l'interaction à deux corps dans un tel système met inévitablement en jeu une «résolution» finie dans l'espace-temps. On cherche une valeur moyenne représentative de la force de l'interaction dans un volume d'espace-temps très petit mais *fini*. C'est pourquoi une divergence ponctuelle n'est pas forcément essentielle car le comportement dans le reste du volume peut éventuellement diluer complètement son effet. On peut modéliser cette définition en introduisant une fonction de «lissage» à support borné, qui permet de faire cette moyenne dans la définition de la constante de couplage sans dimensions,

$$\gamma = \int_{p,q,r,s} \delta_{p-q+r-s,0} \rho_{p,q,r,s} \hat{\gamma}_{p,q,r,s}, \quad (4.38)$$

où $\hat{\gamma}_{p,q,r,s}$ est obtenu en séparant du vertex la contribution triviale que représente la conservation énergie-impulsion,

$$\gamma_{x_1, y_1, x_2, y_2} = \int_{p,q,r,s} e^{ipx_1 - iqy_1 + irx_2 - isy_2} \delta_{p-q+r-s,0} \hat{\gamma}_{p,q,r,s}. \quad (4.39)$$

Ceci nous amène à postuler qu'une théorie doit être considérée comme fortement couplée dans une certaine région cinématique :

- Soit si la fonction à quatre points $\hat{\gamma}_{p,q,r,s}$ prend des valeurs uniformément grande dans cette région.
- Soit si elle présente des singularités *non-intégrables* dans cette région.

On peut tranquillement explorer le régime faiblement couplé à l'aide de notre ansatz fonctionnel (4.36). Mais lorsque l'on touche une zone fortement couplée au sens que nous venons de définir, nous devons arrêter notre étude. La troncature de l'évolution devient alors trop inexacte. Il nous fait maintenant exprimer le système d'équations différentielles qui gouverne l'évolution des fonctions inconnues de l'équation (4.36). C'est l'objet de la section suivante.

4.5 Équation d'évolution

Pour obtenir le système différentiel en question, il nous faut explicitement inverser la matrice des dérivées secondes fonctionnelles de Γ définie précédemment par la relation :

$$\Gamma^{(2)} = \begin{pmatrix} \Gamma^{(2)}_{\Psi_{+,x}^\dagger, \Psi_{+,y}} & \Gamma^{(2)}_{\Psi_{+,x}^\dagger, \Psi_{-,y}} & \Gamma^{(2)}_{\Psi_{+,x}^\dagger, \Psi_{+,y}} & \Gamma^{(2)}_{\Psi_{+,x}^\dagger, \Psi_{-,y}} \\ \Gamma^{(2)}_{\Psi_{-,x}^\dagger, \Psi_{+,y}} & \Gamma^{(2)}_{\Psi_{-,x}^\dagger, \Psi_{-,y}} & \Gamma^{(2)}_{\Psi_{-,x}^\dagger, \Psi_{+,y}} & \Gamma^{(2)}_{\Psi_{-,x}^\dagger, \Psi_{-,y}} \\ \Gamma^{(2)}_{\Psi_{+,x}, \Psi_{+,y}} & \Gamma^{(2)}_{\Psi_{+,x}, \Psi_{-,y}} & \Gamma^{(2)}_{\Psi_{+,x}, \Psi_{+,y}} & \Gamma^{(2)}_{\Psi_{+,x}, \Psi_{-,y}} \\ \Gamma^{(2)}_{\Psi_{-,x}, \Psi_{+,y}} & \Gamma^{(2)}_{\Psi_{-,x}, \Psi_{-,y}} & \Gamma^{(2)}_{\Psi_{-,x}, \Psi_{+,y}} & \Gamma^{(2)}_{\Psi_{-,x}, \Psi_{-,y}} \end{pmatrix}. \quad (4.40)$$

Cette inversion doit se faire de manière cohérente avec notre ansatz fonctionnel (4.36). Nous commençons par séparer la partie diagonale dans l'espace de Fourier du reste de $\Gamma^{(2)}$. On pose :

$$\Gamma^{(2)} = G_0^{-1} + \Delta^\times + \Delta'' \quad (4.41)$$

G_0^{-1} est une matrice diagonale 4×4 qui ne contient que des propagateurs libres. Elle est donnée par :

$$G_{0\ x,y}^{-1} = \begin{pmatrix} G_{+,x,y}^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{-,x,y}^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -G_{+,y,x}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -G_{-,y,x}^{-1} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

où l'on rappelle que G_σ^{-1} contient explicitement notre paramètre de contrôle λ ,

$$G_\sigma^{-1} = \frac{1}{\lambda} [-\partial_t + \epsilon_\sigma(-i\partial_x)] + \Sigma_\sigma. \quad (4.43)$$

Les matrices Δ^\times et Δ'' peuvent être considérées comme des énergies propres. Elles séparent respectivement les contributions des interactions inter et intra-branches lorsque nous effectuons les dérivées fonctionnelles. En tenant compte des symétries des fonctions de couplages, nous pouvons exprimer leurs éléments de matrices non nuls. Tout d'abord

pour le couplage inter-branche :

$$\begin{aligned}
 (\Delta_{x,y}^\times)_{1,1} &= \int_{z_1,z_2} \gamma_{z_1,z_2,x,y}^\times \Psi_{-;z_1}^\dagger \Psi_{-;z_2} & (\Delta_{x,y}^\times)_{1,2} &= - \int_{z_1,z_2} \gamma_{z_1,y,x,z_2}^\times \Psi_{-;z_1}^\dagger \Psi_{+;z_2} \\
 (\Delta_{x,y}^\times)_{1,4} &= \int_{z_1,z_2} \gamma_{y,z_1,x,z_2}^\times \Psi_{-;z_1} \Psi_{+;z_2} & (\Delta_{x,y}^\times)_{2,1} &= - \int_{z_1,z_2} \gamma_{x,z_1,z_2,y}^\times \Psi_{+;z_2}^\dagger \Psi_{-;z_1} \\
 (\Delta_{x,y}^\times)_{2,2} &= \int_{z_1,z_2} \gamma_{x,y,z_1,z_2}^\times \Psi_{+;z_1}^\dagger \Psi_{+;z_2} & (\Delta_{x,y}^\times)_{2,3} &= \int_{z_1,z_2} \gamma_{x,z_1,y,z_2}^\times \Psi_{-;z_1} \Psi_{+;z_2} \\
 (\Delta_{x,y}^\times)_{3,2} &= - \int_{z_1,z_2} \gamma_{z_1,y,z_2,x}^\times \Psi_{-;z_1}^\dagger \Psi_{+;z_2}^\dagger & (\Delta_{x,y}^\times)_{3,3} &= - \int_{z_1,z_2} \gamma_{z_1,z_2,y,x}^\times \Psi_{-;z_1}^\dagger \Psi_{-;z_2} \\
 (\Delta_{x,y}^\times)_{3,4} &= \int_{z_1,z_2} \gamma_{y,z_1,z_2,x}^\times \Psi_{+;z_2}^\dagger \Psi_{-;z_1} & (\Delta_{x,y}^\times)_{4,1} &= - \int_{z_1,z_2} \gamma_{z_1,x,z_2,y}^\times \Psi_{-;z_1}^\dagger \Psi_{+;z_2}^\dagger \\
 (\Delta_{x,y}^\times)_{4,3} &= \int_{z_1,z_2} \gamma_{z_1,x,y,z_2}^\times \Psi_{-;z_1}^\dagger \Psi_{+;z_2} & (\Delta_{x,y}^\times)_{4,4} &= - \int_{z_1,z_2} \gamma_{y,x,z_1,z_2}^\times \Psi_{+;z_1}^\dagger \Psi_{+;z_2}
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

De même, on trouve les éléments suivants pour la deuxième matrice (couplage intra-branche) :

$$\begin{aligned}
 (\Delta_{x,y}^\parallel)_{1,1} &= 4 \int_{z_1,z_2} \gamma_{x,y,z_1,z_2}^\parallel \Psi_{+;z_1}^\dagger \Psi_{+;z_2} & (\Delta_{x,y}^\parallel)_{1,3} &= 2 \int_{z_1,z_2} \gamma_{y,z_1,x,z_2}^\parallel \Psi_{+;z_1} \Psi_{+;z_2} \\
 (\Delta_{x,y}^\parallel)_{2,2} &= 4 \int_{z_1,z_2} \gamma_{x,y,z_1,z_2}^\parallel \Psi_{-;z_1}^\dagger \Psi_{-;z_2} & (\Delta_{x,y}^\parallel)_{2,4} &= 2 \int_{z_1,z_2} \gamma_{y,z_1,x,z_2}^\parallel \Psi_{-;z_1} \Psi_{-;z_2} \\
 (\Delta_{x,y}^\parallel)_{3,1} &= 2 \int_{z_1,z_2} \gamma_{z_1,y,z_2,x}^\parallel \Psi_{+;z_1}^\dagger \Psi_{+;z_2}^\dagger & (\Delta_{x,y}^\parallel)_{3,3} &= -4 \int_{z_1,z_2} \gamma_{y,x,z_1,z_2}^\parallel \Psi_{+;z_1}^\dagger \Psi_{+;z_2} \\
 (\Delta_{x,y}^\parallel)_{4,2} &= 2 \int_{z_1,z_2} \gamma_{z_1,y,z_2,x}^\parallel \Psi_{-;z_1}^\dagger \Psi_{-;z_2}^\dagger & (\Delta_{x,y}^\parallel)_{2,4} &= -4 \int_{z_1,z_2} \gamma_{y,x,z_1,z_2}^\parallel \Psi_{-;z_1}^\dagger \Psi_{-;z_2}
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Remarque: Nous avons choisi ici de reproduire les éléments non-nuls de chacune des deux matrices de manière séparée. Les matrices sont trop «grandes» pour être représentées de manière simple sur une seule largeur de page.

Attention, ces matrices ont aussi bien des termes diagonaux au sens matriciel. Mais en raison de la dépendance de ces termes en les fonctions de couplages, ils ne sont pas diagonaux dans l'espace de Fourier et nous ne les incluons *pas* dans la partie diagonale G_0^{-1} .

L'inversion se fait ensuite en utilisant une série de Neumann, c'est-à-dire un simple développement en puissance autour de la partie diagonale G_0 de $(\Gamma^{(2)})^{-1}$. Formellement nous pouvons donc affirmer que

$$(\Gamma^{(2)})^{-1} = G_0 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n [(\Delta^\times + \Delta^\parallel) \cdot G_0]^n \tag{4.46}$$

Nous rappelons à toutes fins utiles que cette série fait intervenir *à la fois* des produits au sens des matrices mais aussi au sens des distributions. Les notations compactes que

nous utilisons masquent le fait que cette série est en fait relativement compliquée une fois détaillée. Elle est infinie, et nous permet alors d'écrire l'équation d'évolution sous la forme :

$$\partial_\lambda \tilde{\Gamma} = -\frac{1}{\lambda^2} \text{tr} \left\{ [-\partial_t + \epsilon_\sigma(-i\partial_x)] \cdot G_0 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n [(\Delta^\times + \Delta'') \cdot G_0]^n \right\}, \quad (4.47)$$

valable pour l'hypothèse faite à l'équation (4.36) quant à la forme de notre action effective. Elle ne contient justement que des termes au plus d'ordre 4 dans les champs. Il est donc inutile de conserver tous les termes de la série. En effet, les matrices Δ sont quadratiques dans les champs. C'est pourquoi le terme d'ordre n du développement contient exactement des produits de $2n$ champs. Dans notre schéma, nous ne pouvons pas avoir accès à l'évolution des termes qui ont plus de 4 champs. Nous devons donc couper la série précédente après l'ordre $n = 2$, de sorte que :

$$\partial_\lambda \tilde{\Gamma} = -\frac{1}{\lambda^2} \text{tr} \left\{ [-\partial_t + \epsilon_\sigma(-i\partial_x)] \cdot G_0 \cdot \sum_{n=0}^2 (-1)^n [(\Delta^\times + \Delta'') \cdot G_0]^n \right\}. \quad (4.48)$$

Il suffit alors d'effectuer des dérivées fonctionnelles multiples sur le membre de gauche et de droite de (4.48), nous allons obtenir un système de d'équations intégro-différentielles couplées pour la partie quadratique et l'interaction quartique de l'action effective Γ .

4.5.1 Partie quadratique

En comparant les termes quadratiques du membre de gauche et du membre de droite de l'équation (4.48), nous obtenons l'évolution de la partie quadratique de l'action effective. Ces deux termes valent respectivement

$$\int_{z_1, z_2} (\Psi_{+; z_1}^\dagger \partial_\lambda \Sigma_{+, z_1, z_2} \Psi_{+, z_2} + \Psi_{-; z_1}^\dagger \partial_\lambda \Sigma_{-, z_1, z_2} \Psi_{-, z_2}) \quad (4.49)$$

et

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\lambda^2} \int_{z_1, z_2, z_3, z_4} [G_{+; z_4, z_1} (\Delta_{1,1}^\times + \Delta_{1,1}'')_{z_1, z_2} G_{+; z_2, z_3} [-\partial_t + \epsilon_+(-i\partial_x)]_{z_3, z_4} \\ & -\frac{1}{\lambda^2} \int_{z_1, z_2, z_3, z_4} [G_{-; z_4, z_1} (\Delta_{2,2}^\times + \Delta_{2,2}'')_{z_1, z_2} G_{-; z_2, z_3} [-\partial_t + \epsilon_-(-i\partial_x)]_{z_3, z_4} \end{aligned} \quad (4.50)$$

Il suffit d'égaliser ces deux expressions et de prendre la dérivée fonctionnelle de l'équation ainsi obtenue. On trouve un système de deux équations couplées portant sur les énergies propres Σ_σ . Il s'écrit :

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \Sigma_{-, x, y} &= -\frac{1}{\lambda^2} \int_{z_1, z_2, z_3, z_4} \{ G_{+; z_4, z_1} \gamma_{x, y, z_1, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} [-\partial_t + \epsilon_+(-i\partial_x)]_{z_3, z_4} \\ & \quad + 4G_{-; z_4, z_1} \gamma_{z_1, z_2, x, y}'' G_{-; z_2, z_3} [-\partial_t + \epsilon_-(-i\partial_x)]_{z_3, z_4} \}, \\ \partial_\lambda \Sigma_{+, x, y} &= -\frac{1}{\lambda^2} \int_{z_1, z_2, z_3, z_4} \{ G_{-; z_4, z_1} \gamma_{x, y, z_1, z_2}^\times G_{-; z_2, z_3} [-\partial_t + \epsilon_-(-i\partial_x)]_{z_3, z_4} \\ & \quad + 4G_{+; z_4, z_1} \gamma_{z_1, z_2, x, y}'' G_{+; z_2, z_3} [-\partial_t + \epsilon_+(-i\partial_x)]_{z_3, z_4} \}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

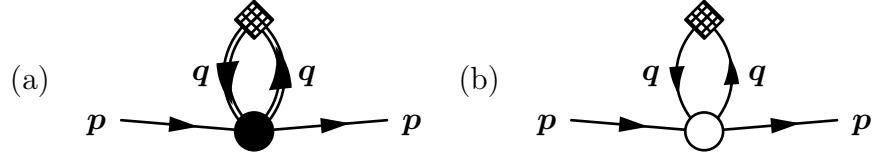


FIG. 4.1 – Représentation en termes de graphes de Feynman des contributions à l'évolution de l'énergie propre. Symboliquement, les lignes simples et doubles représentent respectivement les fermions gauches et droits. Les vertex pleins et vides représentent quant-à-eux aux vertex inter et intra-banches. (a) et (b) correspondent aux corrections à Σ_- . Les diamants hachurés correspondent aux contre-terme engendrés par la suppression dans notre schéma d'évolution

La structure de ces équations trahit la stratégie de type «Callan-Szymanzik» de l'évolution dans l'espace interne en λ . Si l'on introduit l'opérateur de dérivée explicite par rapport à λ , ∂'_λ , qui agit sur les dépendances qui génèrent directement l'évolution, on peut affirmer que :

$$\partial'_\lambda G_\sigma = \partial'_\lambda \frac{1}{\frac{1}{\lambda}[-\partial_t + \epsilon_\sigma(-i\partial_x)] + \Sigma_\sigma} = -\frac{1}{\lambda^2} G_\sigma \cdot [-\partial_t + \epsilon_\sigma(-i\partial_x)] \cdot G_\sigma. \quad (4.52)$$

Cette définition à sont tour nous conduit à une expression plus compacte des équations d'évolution pour l'énergie propre

$$\begin{aligned} \partial_\lambda \Sigma_{-;x,y} &= \partial'_\lambda \int_{z_1, z_2} (\gamma_{x,y,z_1,z_2}^\times G_{+;z_2,z_1} + 4\gamma_{z_1,z_2,x,y}^{\parallel} G_{-;z_2,z_3}), \\ \partial_\lambda \Sigma_{+;x,y} &= \partial'_\lambda \int_{z_1, z_2} (\gamma_{x,y,z_1,z_2}^\times G_{-;z_2,z_1} + 4\gamma_{z_1,z_2,x,y}^{\parallel} G_{+;z_2,z_3}). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Ceci n'est rien d'autre que les fonctions beta de Callan-Symanzik dans une approche perturbative, prises à l'ordre une boucle pour le propagateur. Nous pouvons alors introduire la transformée de Fourier de l'énergie propre,

$$\Sigma_{\sigma;x,y} = \int_{p,q} e^{ixp+iyq} \delta_{p+q,0} \hat{\Sigma}_{\sigma;p,q}, \quad (4.54)$$

qui va nous permettre de mettre l'équation d'évolution de la partie quadratique sous une forme plus simple. On obtient l'expression finale de la première équation du système intégral-différentiel couplé que nous essaierons de résoudre par la suite :

$$\partial_\lambda \Sigma_{\pm;p} = \partial'_\lambda \int_q \frac{\hat{\gamma}_{p,p,q,q}^\times + 4\hat{\gamma}_{p,p,q,q}^{\parallel}}{\frac{1}{\lambda}[-\partial_t + \epsilon_{\mp}(i\partial_x)] + \Sigma_{\mp}}. \quad (4.55)$$

Il est intéressant de remarquer l'apparition des deux types de dérivées dans l'équation (4.55). En toute rigueur, si seulement ∂_λ était intervenue dans les deux membres de l'équation, nous aurions obtenu la contribution standard à l'énergie propre à l'ordre une boucle en théorie des perturbations. La dérivée ∂'_λ dans le membre de droite assure que les

deux vertex effectifs $\hat{\gamma}^\times$ et $\hat{\gamma}''$, qui dépendent en principe de λ , sont conservés intacts dans cette partie de l'équation. Cette procédure illustre parfaitement le fondement de la version de «blocking» infinitésimal du groupe de renormalisation : un changement infinitésimal dans le paramètre de contrôle (dans notre cas λ) peut être réabsorbé par un calcul perturbatif sans craintes. La resommation non-perturbative s'obtient par la répétition de cette stratégie, c'est-à-dire dans notre cas par l'intégration sur λ . Comme λ est continu, on réalise dans les faits une resommation infinie des contributions perturbatives.

Il est possible de représenter graphiquement l'équation d'évolution, que ce soit avant ou après l'adjonction de la dérivée ∂'_λ . Ces graphes sont reproduits dans les figures 4.1 et 4.2. Pour cela nous introduisons deux vertex différents et deux lignes fermioniques différentes, correspondant respectivement aux couplages inter et intra-branche et aux deux types de fermions. Au niveau des graphes, l'équation (4.52) se traduit par l'insertion d'un contre terme dans la boucle du «tadpole» standard. La procédure de renormalisation modifie la valeur de ce contre-terme, contrôlée par λ . Pour l'équation (4.53), en factorisant ce contre-terme par l'opérateur ∂'_λ , on obtient les graphes ordinaires. On comprend alors que la procédure de renormalisation correspond à effectivement l'insertion du contre-terme mentionné précédemment dans un développement standard à une boucle.

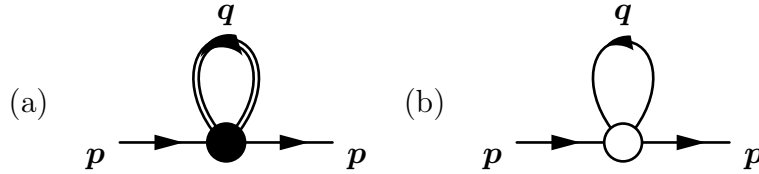


FIG. 4.2 – Représentation en termes de graphes de Feynman des contributions à l'évolution de l'énergie propre. Symboliquement, les lignes simples et doubles représentent respectivement les fermions gauches et droits. Les vertex pleins et vides représentent quant-à-eux les vertex inter et intra-branches. (a) et (b) correspondent aux corrections apportés à Σ_- .

4.5.2 Partie quartique

Il en va de même pour le calcul de la partie quartique que pour celui de la partie quadratique. Il est cependant bien plus long, notamment à cause de la présence de deux constantes de couplages. Ce calcul est effectué de manière relativement détaillée dans l'appendice B.2. Nous nous contenterons d'en donner les principaux résultats. Tout d'abord pour établir l'équation d'évolution il faut calculer les éléments de matrices présent dans l'expression (4.48). Ce sont précisément les huit termes qui sont calculés dans l'annexe B.2. L'évolution est une équation fonctionnelle. Le but de cette section est de convertir cette équation en un système d'équation différentielles qui nous donne les dérivés par rapport à λ des constantes de couplages, $\hat{\gamma}''_{a,b,c,d}$ et $\hat{\gamma}^\times_{a,b,c,d}$. Pour cela, il faut dériver fonctionnellement les deux membres de l'équation d'évolution pour extraire les contributions respectives à ces deux quantités.

Il y a une certaine liberté dans le choix de l'ordre de ces dérivées, notamment en ce qui concerne $\hat{\gamma}''_{a,b,c,d}$, où nous pouvons dériver soit par rapport à des champs gauches ou à

des champs droits uniquement. En fait l'équation obtenue est la même, ce qui est tout à fait logique car nous devons respecter cette symétrie (elle est présente dans notre ansatz de l'équation (4.36)). On obtient une première équation de départ :

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 \dot{\gamma}_{x_1, y_1, x_2, y_2}^\times &= - \int_{z_i} \{ G_{+; z_6, z_1} (-4\gamma_{x_1, y_1, z_1, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} \tilde{\gamma}_{z_3, z_4, x_2, y_2}'' \\
 &\quad - 4\tilde{\gamma}_{z_1, z_2, x_2, y_2}'' G_{+; z_2, z_3} \gamma_{x_1, y_1, z_3, z_4}^\times + \gamma_{x_1, z_2, z_1, y_2}^\times G_{-; z_2, z_3} \gamma_{z_3, y_1, x_2, z_4}^\times \\
 &\quad + \gamma_{z_2, y_1, z_1, y_2}^\times G_{-; z_3, z_2} \gamma_{x_1, z_3, x_2, z_4}^\times) G_{+; z_4, z_5} [-\partial_t + \epsilon_+ (-i\partial_x)]_{z_5, z_6} \\
 &\quad + G_{-; z_6, z_1} (\gamma_{z_1, y_1, x_2, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} \gamma_{x_1, z_4, z_3, y_2}^\times \\
 &\quad + \gamma_{z_1, y_1, z_2, y_2}^\times G_{+; z_3, z_2} \gamma_{x_1, z_4, x_2, z_3}^\times - 4\tilde{\gamma}_{z_1, z_2, x_1, y_1}'' G_{-; z_2, z_3} \gamma_{z_3, z_4, x_2, y_2}^\times \\
 &\quad - 4\gamma_{z_1, z_2, x_2, y_2}^\times G_{-; z_2, z_3} \tilde{\gamma}_{z_3, z_4, x_1, y_1}'') G_{-; z_4, z_5} [-\partial_t + \epsilon_- (-i\partial_x)]_{z_5, z_6} \}, \tag{4.56}
 \end{aligned}$$

ainsi que celle pour l'autre constante de couplage,

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 \dot{\gamma}_{x_1, y_1, x_2, y_2}'' &= - \int_{z_i} \{ G_{+; z_6, z_1} (-\gamma_{x_1, y_1, z_1, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} \gamma_{x_2, y_2, z_3, z_4}^\times \\
 &\quad - \gamma_{x_2, y_2, z_1, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} \gamma_{x_1, y_1, z_3, z_4}^\times + \gamma_{x_1, y_2, z_1, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} \gamma_{x_2, y_1, z_3, z_4}^\times \\
 &\quad + \gamma_{x_2, y_1, z_1, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} \gamma_{x_1, y_2, z_3, z_4}^\times) G_{+; z_4, z_5} [-\partial_t + \epsilon_+ (-i\partial_x)]_{z_5, z_6} \\
 &\quad + G_{-; z_6, z_1} (-16\gamma_{z_1, z_2, x_1, y_1}'' G_{-; z_2, z_3} \gamma_{z_3, z_4, x_2, y_2}'' \\
 &\quad - 16\gamma_{z_1, z_2, x_2, y_2}'' G_{-; z_2, z_3} \gamma_{z_3, z_4, x_1, y_1}'' + 16\gamma_{z_1, z_2, x_1, y_2}'' G_{-; z_2, z_3} \gamma_{z_3, z_4, x_2, y_1}'' \\
 &\quad + 16\gamma_{z_1, z_2, x_2, y_1}'' G_{-; z_2, z_3} \gamma_{z_3, z_4, x_1, y_2}'' - 4\gamma_{z_2, y_1, z_1, y_2}'' G_{-; z_3, z_2} \gamma_{x_1, z_4, x_2, z_3}'' \\
 &\quad + 4\gamma_{z_2, y_2, z_1, y_1}'' G_{-; z_3, z_2} \gamma_{x_1, z_4, x_2, z_3}'') G_{z_4, z_5} [-\partial_t + \epsilon_- (-i\partial_x)]_{z_5, z_6} \}. \tag{4.57}
 \end{aligned}$$

D'une manière équivalente au cas quadratique, on peut regrouper un certain nombre de termes en raison de la stratégie de type Callan-Szymanzyk que nous utilisons. L'équation compacte qui fait intervenir la dérivée explicite ∂'_λ , introduite à la section précédente, s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \dot{\gamma}_{x_1, y_1, x_2, y_2}^\times &= \partial'_\lambda \int_{z_i} \\
 &\quad [G_{+; z_4, z_1} (-4\gamma_{x_1, y_1, z_1, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} \tilde{\gamma}_{z_3, z_4, x_2, y_2}'' + \gamma_{z_2, y_1, z_1, y_2}^\times G_{-; z_3, z_2} \gamma_{x_1, z_3, x_2, z_4}^\times) \\
 &\quad + G_{-; z_4, z_1} (\gamma_{z_1, y_1, x_2, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} \gamma_{x_1, z_4, z_3, y_2}^\times - 4\gamma_{z_1, z_2, x_2, y_2}^\times G_{-; z_2, z_3} \tilde{\gamma}_{z_3, z_4, x_1, y_1}'')] \\
 \dot{\gamma}_{x_1, y_1, x_2, y_2}'' &= \partial'_\lambda \int_{z_i} \\
 &\quad [G_{+; z_4, z_1} (-\gamma_{x_2, y_2, z_1, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} \gamma_{x_1, y_1, z_3, z_4}^\times + \gamma_{x_2, y_1, z_1, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} \gamma_{x_1, y_2, z_3, z_4}^\times) \\
 &\quad + G_{-; z_4, z_1} (-16\gamma_{z_1, z_2, x_1, y_1}'' G_{-; z_2, z_3} \gamma_{z_3, z_4, x_2, y_2}'' \\
 &\quad + 16\gamma_{z_1, z_2, x_1, y_2}'' G_{-; z_2, z_3} \gamma_{z_3, z_4, x_2, y_1}'' - 4\gamma_{z_2, y_1, z_1, y_2}'' G_{-; z_3, z_2} \gamma_{x_1, z_4, x_2, z_3}'')] \}, \tag{4.58}
 \end{aligned}$$

où le symbole correspond à $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$ à ∂_λ . Les fonctions β à l'ordre une boucle sont en fait les membres de gauches des deux équations précédentes. Il s'en suit le travail fastidieux des transformées de Fourier des équations (4.58). Elles sont relativement simples à obtenir cependant. Nous obtenons alors la forme définitive de l'équation d'évolution pour la partie quartique de l'action effective Γ :

$$\begin{aligned}
 \partial_\lambda \gamma_{p,q,r,s}^\times &= \partial'_\lambda \int_{u,v} [G_{+;u}(-4\gamma_{p,q,u,v}^\times G_{+;v} \gamma_{v,u,r,s}'' + \gamma_{v,q,u,s}^\times G_{-;v} \gamma_{p,v,r,u}^\times) \\
 &\quad + G_{-;u}(\gamma_{u,q,r,v}^\times G_{+;v} \gamma_{p,u,v,s}^\times - 4\gamma_{u,v,r,s}^\times G_{-;v} \tilde{\gamma}_{v,u,p,q}'')] \\
 \partial_\lambda \gamma_{p,q,r,s}'' &= \partial'_\lambda \int_{u,v} [G_{+;u}(-\gamma_{r,s,u,v}^\times G_{+;v} \gamma_{p,q,v,u}^\times + \gamma_{r,q,u,v}^\times G_{+;v} \gamma_{p,s,v,u}^\times) \\
 &\quad + G_{-;u}(-16\gamma_{u,v,p,q}'' G_{-;v} \gamma_{v,u,r,s}'' + 16\gamma_{u,v,p,s}'' G_{-;v} \gamma_{v,u,r,q}'' - 4\gamma_{v,q,u,s}'' G_{-;v} \gamma_{p,u,r,v}'')].
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

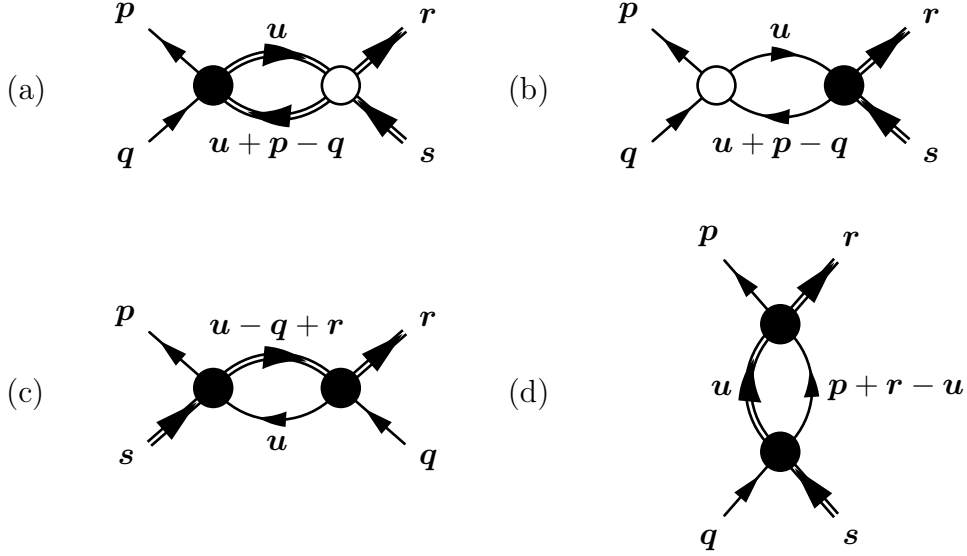


FIG. 4.3 – Représentation en termes de graphes de Feynman des contributions à l'évolution du vertex inter-branches. Symboliquement, les lignes simples et doubles représentent respectivement les fermions gauches et droits. Les vertex pleins et vides représentent quant-à-eux respectivement les vertex inter et intra-branches. (a) et (b) mélangent les contributions inter et intra-branches. Au voisinage de la surface de Fermi, il correspondent à des impulsions échangées de l'ordre de 0. (c) est une contribution du type «zero-sound» analogue à ce que l'on peut obtenir en utilisant le GR usuel avec impulsion échangée de l'ordre de $2k_F$ au voisinage de la surface de Fermi (d) est du type «BCS». Ce sont les compensations incomplètes entre (c) et (d) qui vont générer le comportement particulier observé plus tard lors de la résolution du système couplé.

Les équations (4.59) peuvent elles aussi être représentées sous une forme graphique. Elles sont respectivement présentées dans les figures 4.3 et 4.4. Pour ce qui est de la première équation, la figure 4.3 comporte 4 graphes de Feynman différents. Les graphes

(a) et (b) mélangent les vertex inter et intra-branches alors que (c) et (d) ne concernent que le vertex inter-branche. Si nous regardons les impulsions échangées lorsque nous nous trouvons au voisinage immédiat de la surface de Fermi, (a) et (b) correspondent à un échange \mathbf{Q} de l'ordre de $\mathbf{Q} = \mathbf{p} - \mathbf{q} \approx 0$. Il en est de même pour (d). Le graphe (c) quant à lui va correspondre à des processus à $2k_F$. Dans une approche usuelle du groupe de renormalisation (comme dans [41], voir le chapitre 3), on ne retrouve que les graphes (c) et (d) car on ne conserve dans l'évolution que le vertex inter-branche. Dans cette optique, (c) est de type «Zero-Sound» (ZS) et (d) du type «BCS». On verra que la compensation possible entre (c) et (d) dans l'équation d'évolution aura des conséquences essentielles.

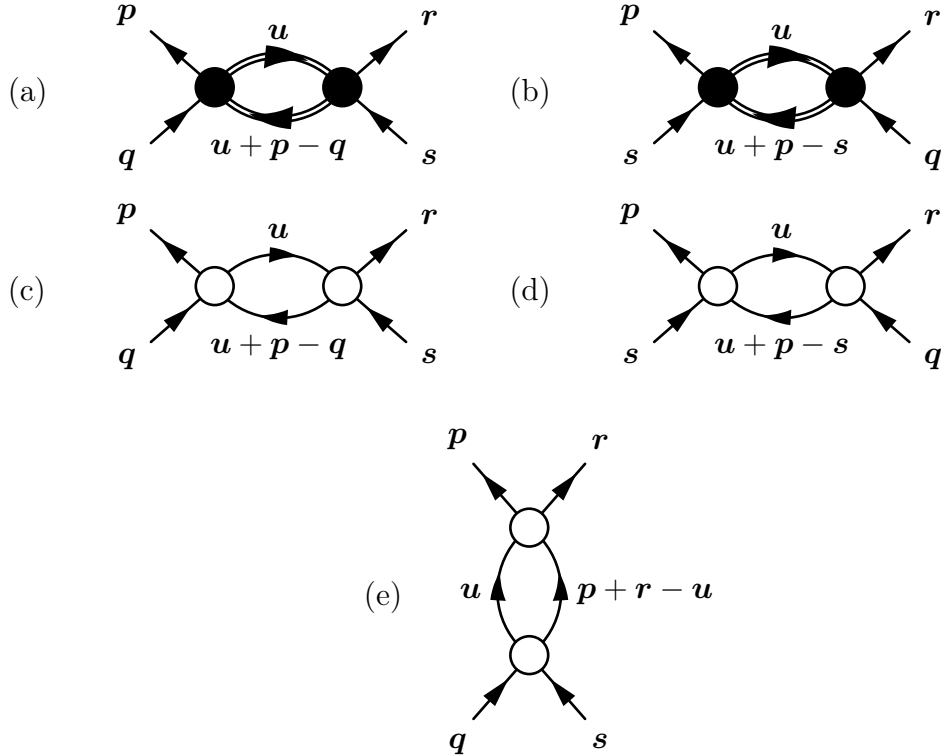


FIG. 4.4 – Représentation en termes de graphes de Feynman des contributions à l'évolution du vertex intra-branche. Symboliquement, les lignes simples et doubles représentent respectivement les fermions gauches et droits. Les vertex pleins et vides représentent quant-à-eux respectivement les vertex inter et intra-branches. (a) et (b) mélangent les contributions inter et intra-branches. Au voisinage de la surface de Fermi, il correspondent à des impulsions échangées de l'ordre de 0. (c) (d) et (e) ne font intervenir que le vertex intra-branche. (a) et (b) influenceront fortement le comportement du couplage intra-branche lorsque la partie inter-branche approche le pôle de Landau.

La figure 4.4 comporte quant à elle 5 graphes de Feynman différents. Les graphes (a) et (b) ne contiennent que des vertex inter-branches et les 3 autres le vertex intra-branche. Les processus qui échangent une impulsion nulle au voisinage de la surface de Fermi correspondent aux graphes (a), (c) et (e). Alors que les processus à $2k_F$ sont donnés par

les graphes (b) et (d). L'intérêt de la représentation en graphes de Feynman de (4.59) est de clarifier l'origine des différents contributions. Nous allons maintenant passer à l'étude des constantes de couplages courantes à la surface de Fermi, ce qui va nous permettre de comparer notre méthode à celle du groupe de renormalisation Wilsonien.

4.6 Constante de couplage courante aux points de Fermi

Le premier test de notre méthode est la confrontation avec les résultats du groupe de renormalisation Wilsonien à l'ordre une boucle appliqué au modèle de Luttinger [41, 42]. Nous adoptons les mêmes conventions que dans ces articles, à savoir :

- Nous supposons que les constantes de couplages ne dépendent pas des impulsions et correspondent à leurs valeurs aux points de Fermi.
- Nous supposons aussi que seul le couplage inter-branche importe dans cette stratégie, *i.e.* $\gamma_{p,q,r,s}^{\parallel} = \gamma^{\parallel} \equiv 0$.

Il suffit alors de reporter ces hypothèses dans les équations obtenues dans la section précédente. Elles s'en trouvent grandement simplifiées. Commençons par la partie quadratique. L'équation (4.55) devient alors naturellement

$$\partial_{\lambda}\Sigma_{\pm;p} = -\partial'_{\lambda} \int_q \frac{\hat{\gamma}^{\times}(\lambda)e^{i\eta q^0}}{\frac{1}{\lambda}(iq^0 - \epsilon_{\mp;q}) - \Sigma_{\mp}}. \quad (4.60)$$

Dans une première approximation, on peut négliger les corrections apportées par l'énergie propre dans le dénominateur de (4.60). En effet, elle sont d'ordre γ , et les contributions engendrées par la présence de l'énergie propre dans le dénominateur sont au bout du compte d'ordre γ^2 . Comme notre point de départ est très faiblement couplé cela n'a pas trop d'importance. Ce qui nous donne une forme extrêmement simple de l'équation d'évolution pour l'énergie propre

$$\partial_{\lambda}\Sigma_{\pm;p} = -\hat{\gamma}_0^{\times}(\lambda) \int_q \frac{e^{i\eta q^0}}{(iq^0 - \epsilon_{\mp;q})}. \quad (4.61)$$

Le membre de droite ne dépend pas de l'impulsion, par conséquent l'énergie propre non plus. Si l'on effectue l'intégration triviale qui reste à faire on constate que la variation de l'énergie propre est de surcroît *réelle*, et par intégration de l'évolution, Σ_{\pm} reste réelle aussi. On peut simplement réabsorber ce terme par une renormalisation adéquate du potentiel chimique. Nous retrouvons ainsi un premier résultat standard du Groupe de Renormalisation du modèle de Luttinger, bien que ne n'utilisons pas la coupure Λ pour générer la dynamique d'évolution.

Nous pouvons maintenant nous intéresser à l'évolution de $\gamma^{\times}(\lambda)$ qui, de part l'équation (4.59), est contenue dans l'équation

$$\partial_{\lambda}\hat{\gamma}^{\times}(\lambda) = \partial'_{\lambda} \int_{u,v} \gamma^{\times 2}(\lambda)[G_{+;u}G_{-;-u} + G_{-;u}G_{+;u+2k_F}]. \quad (4.62)$$

Il faut alors en principe effectuer les deux intégrales de boucles si l'on souhaite conclure. Notons que nous ne faisons pas intervenir l'énergie propre qui est supposée être réabsorbée

par la redéfinition du potentiel chimique. On peut se dispenser de tout calcul si l'on remarque d'emblée que

$$\begin{aligned} \int G_{+;u} G_{-;-u} &= - \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d\mathbf{u}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du^0}{2\pi} \frac{1}{(iu^0 - \mathbf{u})(iu^0 + \mathbf{u})} \\ \int G_{-;u} G_{+;u+2k_F} &= \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{d\mathbf{u}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du^0}{2\pi} \frac{1}{(iu^0 + \mathbf{u})(iu^0 - \mathbf{u})}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Cette égalité entre les deux intégrales de boucles nous montre la trivialité de la fonction β , dans les conditions énoncées au début de la section,

$$\partial_{\lambda} \gamma_0^{\times} = 0. \quad (4.64)$$

Attention, au sens stricte nous ne parlons pas de la même fonction β que pour le groupe de renormalisation standard. L'absence d'habillage des vertex est en accord total avec le travail des références bibliographiques [41, 42]. Le point crucial de cet argument est la compensation parfaite des deux intégrales des équations (4.63), qui se produit uniquement aux points de Fermi. Une étude plus poussée de l'équation d'évolution (4.59) présentée dans la section suivante révèle qu'une compensation uniquement partielle des deux intégrales génère un couplage très fort au voisinage immédiat des points de Fermi. Passons maintenant à ce point.

4.7 Fonctions β au voisinage des points de Fermi

Intéressons nous maintenant à l'évolution complète de notre système. Le problème se sépare en deux parties : l'évolution du propagateur régit par l'équation (4.55) et l'évolution de l'interaction à deux corps gouvernée par l'équation (4.59). Ces deux équations ne sont bien entendu pas indépendantes, ce qui est la source des problèmes que nous allons rencontrer par la suite. Nous ne connaissons pas de solution générale à ce système integro-différentiel couplé. Deux possibilités s'offrent alors à nous : une résolution numérique ou un découplage manuel du système en effectuant certaines approximations. Nous avons évidemment considéré les deux possibilités. Le cas de la simulation numérique est relativement problématique. D'abord le système différentiel ne s'est pas montré très stable. Par ailleurs l'évaluation numérique de fonctions de trois variables est relativement complexe et nécessite beaucoup de mémoire. Nous n'avons pas obtenus de résultats satisfaisant d'un point de vue numérique et nous sommes passés à la deuxième option. C'est pourquoi nous nous contentons de vérifier la présence d'éventuels pôles de Landau dans les constantes de couplages qui pourraient contribuer à rendre le modèle fortement couplé. Comme nous l'avons mentionné précédemment, il est tout à fait envisageable que des termes négligés dans le cadre de la bosonisation génèrent ce type de comportement qui spolieraient alors l'image usuelle que l'on se fait du modèle de Luttinger. Nous simplifions alors notre ansatz de l'équation (4.36) en prenant $\Sigma = 0$, ce qui supprime l'évolution de la partie quadratique. Nous laissons donc le soin aux seuls couplages de construire les interactions effectives.

Cependant l'équation (4.59), bien que découplée de son compagnon, n'est pas pour autant triviale à résoudre de part sa dépendance singulière dans les impulsions externes des vertex. Il nous faut alors supposer de plus que les idées naïves qui poussent usuellement les gens à considérer que l'interaction peut être remplacée par sa valeur aux points de Fermi est généralisable. Nous allons alors utiliser la valeur du vertex en un point «cinématique» quelconque. Cette approximation est en quelque sorte une extension directe de la section précédente, dans le sens où cette fois-ci nous pouvons calculer les couplages en dehors des points de Fermi, et donc sonder les modes qui leurs sont voisins.

Les fonctions β pour les constantes de couplages $\gamma_{\tilde{p},\tilde{q},\tilde{r},\tilde{s}}^\times = \gamma^\times$ et $\gamma_{\tilde{p},\tilde{q},\tilde{r},\tilde{s}}^\parallel = \gamma^\parallel$ dans une certaine région cinématique $(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{s})$ sont définies par la relation ci-dessous,

$$\begin{aligned}\beta^\times &= \beta_{\tilde{p},\tilde{q},\tilde{r},\tilde{s}}^\times = \lambda \partial_\lambda \gamma_{\tilde{p},\tilde{q},\tilde{r},\tilde{s}}^\times, \\ \beta^\parallel &= \beta_{\tilde{p},\tilde{q},\tilde{r},\tilde{s}}^\parallel = \lambda \partial_\lambda \gamma_{\tilde{p},\tilde{q},\tilde{r},\tilde{s}}^\parallel.\end{aligned}\tag{4.65}$$

Supposons alors que la région autour du point $\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{s}$ domine la dynamique du système. Nous pouvons alors approcher les solutions du système d'équations intégral-différentielles (4.59) en substituant la quantité suivantes, indépendante des énergies et des impulsions, $\gamma = \gamma_{\tilde{p},\tilde{q},\tilde{r},\tilde{s}}$ aux vertex $\gamma_{p,q,r,s}$ dans toutes les intégrales de boucles. Cette approximation sera d'autant meilleure que le point $(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{s})$ est choisi proche des points de Fermi.

Nous allons alors paramétrer les énergies et impulsions du système de la manière suivante,

$$(i\omega, \mathbf{p}) = (\pm \hat{\mathbf{p}} + \Delta_p, \hat{\mathbf{p}} \pm k_F),\tag{4.66}$$

où les signes plus et moins correspondent respectivement aux particules «droites» et «gauches». Les paramètres $\Delta_p, \Delta_q, \Delta_r,$ et Δ_s sont là pour mesurer la distance à la couche de masse. Nous devons alors tenir compte de la conservation des impulsions pour les deux vertex γ^\times et γ^\parallel qui apporte une contrainte supplémentaire,

$$\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{q}}.\tag{4.67}$$

La conservation de l'énergie nous permet quant à elle d'écrire les deux relations additionnelles suivantes,

$$2(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{q}}) = \Delta_p - \Delta_q + \Delta_r - \Delta_s \quad \text{pour } \gamma^\times,\tag{4.68}$$

$$0 = \Delta_p - \Delta_q + \Delta_r - \Delta_s \quad \text{pour } \gamma^\parallel.\tag{4.69}$$

Il est bien entendu important de ne pas oublier de tenir compte de ces équations dans la résolution du système. Les fonctions β des équations (4.59) peuvent alors se mettre sous la forme ci-après,

$$\begin{aligned}\beta^\times &= -\lambda^2(\beta_x^{\times\times} \gamma^{\times 2} + \beta_x^{\times\parallel} \gamma^\times \gamma^\parallel), \\ \beta^\parallel &= -\lambda^2(\beta_\parallel^{\times\times} \gamma^{\times 2} + \beta_\parallel^{\parallel\parallel} \gamma^{\parallel 2}).\end{aligned}\tag{4.70}$$

Nous avons introduits les 4 coefficients qui correspondent aux expressions,

$$\beta_x^{\times\times} = -2\pi \ln \left| \frac{(2\hat{q} - \Delta_q + \Delta_r)(2\hat{r} - \Delta_q + \Delta_r)[(2\hat{r} + \Delta_p + \Delta_r)^2 - 4\Lambda^2]}{(2\hat{r} + \Delta_p + \Delta_r)(2\hat{p} - \Delta_p - \Delta_r)[(2\hat{q} + \Delta_q - \Delta_r)^2 - 4\Lambda^2]} \right| \quad (4.71)$$

$$\beta_x^{\times\text{II}} = -8\pi \left(1 + \frac{\Delta_r - \Delta_s}{\Delta_p - \Delta_q} \right) \left(\frac{1}{2 + \frac{\Delta_r - \Delta_s}{\Delta_p - \Delta_q}} + 1 \right) \quad (4.72)$$

$$\beta_{\text{II}}^{\times\times} = -4\pi \left(\frac{\hat{q} - \hat{p}}{\Delta_q - \Delta_p + 2(\hat{q} - \hat{p})} + \frac{\hat{r} - \hat{q} + 2k_F}{\Delta_r - \Delta_q + 2\hat{q} - 2k_F} \right) \quad (4.73)$$

$$\beta_{\text{II}}^{\text{III}} = -4\pi \left(8 \frac{\hat{q} - \hat{p}}{\Delta_q - \Delta_p + 2(\hat{q} - \hat{p})} + 8 \frac{\hat{r} - \hat{q} + 2k_F}{\Delta_r - \Delta_q + 2\hat{q} - 2k_F} - \frac{\hat{p} + \hat{r} + 2k_F}{\Delta_p + \Delta_r + 2\hat{r} + 2k_F} \right) \quad (4.74)$$

Ces équations sont en fait des intégrales de boucles dont le calcul est présenté dans l'annexe B.3.

Nous étudierons de manière détaillée deux régions cinématiques différentes.

- (a) : Tout d'abord le cas pour lequel nous souhaitons satisfaire $\hat{q} = \hat{p}$, $\Delta = 0$, $\hat{r}, \hat{p} \ll k_F, \Lambda$
- (b) : Ensuite la situation pour laquelle nous prendrons : $\hat{q} = \hat{p}$, $2\hat{r} + \Delta_p + \Delta_r = 2\hat{p} + \Delta_q - \Delta_r$, $\hat{r}, \hat{p} \ll k_F$.

Dans les deux conditions précédentes, les coefficients vérifient,

$$\beta_x^{\times\text{II}} = 0 \quad (4.75)$$

$$\beta_{\text{II}}^{\times\times} \approx 4\pi \quad (4.76)$$

$$\beta_{\text{II}}^{\text{III}} \approx 36\pi, \quad (4.77)$$

dans l'hypothèse où nous ignorons à la fois les contributions d'ordres $\mathcal{O}(\hat{p}/k_F)$ et $\mathcal{O}(\hat{r}/k_F)$, qui dépendent de la direction choisie. Le dernier coefficient lui diffère selon que l'on se place dans l'une ou l'autre des deux régions précédentes. On trouve :

$$\beta_x^{\times\times} \approx \begin{cases} 2\pi \frac{\hat{r}^2 - \hat{p}^2}{\Lambda^2} & (a), \\ 2\pi \ln \left| \frac{2\hat{p} + \Delta_q - \Delta_r}{2\hat{p} - \Delta_q + \Delta_r} \right| & (b). \end{cases} \quad (4.78)$$

L'évolution de la constante de couplage γ^\times devient alors autonome, c'est-à-dire que l'on obtient

$$\lambda \frac{d\gamma^\times}{d\lambda} = -\lambda^2 \beta_x^{\times\times} \gamma^{\times 2}, \quad (4.79)$$

dont la solution est tout bonnement

$$\gamma^\times(\lambda) = \frac{\gamma_0^\times}{1 + \gamma_0^\times \beta_x^{\times\times} \lambda^2}. \quad (4.80)$$

Ici, $\gamma^\times(0) = \gamma_0^\times$, désigne la constante de couplage nue qui est supposée être petite (*i.e.* $|\gamma_0^\times| \ll 1$). La solution de l'équation (4.80) nous montre que notre troncature resomme

la série géométrique de la partie diagonale de la fonction de vertex. La troncature de l'action effective a un sens et le système reste faiblement couplé lorsque l'on vérifie la condition suivante :

$$\gamma_0^\times \beta_x^{\times\times} > 0. \quad (4.81)$$

Dans cette situation, $|\gamma^\times(\lambda)|$ décroît au cours de l'évolution. Au contraire lorsque $\gamma_0^\times \beta_x^{\times\times} < -1$, on peut prédire l'apparition d'un pôle de Landau à la valeur λ_L ,

$$\lambda_L = \sqrt{-\frac{1}{\gamma_0 \beta_x^{\times\times}}} < 1, \quad (4.82)$$

avant que la force d'interaction nue γ_0 soit atteinte. Le pôle de Landau apparaît dans le secteur (a) en raison de la présence d'une coupure lorsque l'inégalité suivante est vérifiée par la théorie nue,

$$\frac{1}{2\pi} < \gamma_0^\times \frac{\hat{\mathbf{p}}^2 - \hat{\mathbf{r}}^2}{\Lambda^2}. \quad (4.83)$$

Ce pôle serait typiquement absent dans une application de physique des hautes énergies où la limite $\Lambda \rightarrow \infty$ empêche l'inégalité d'être satisfaite. Par contre, il peut apparaître comme un effet non-universel lorsque le modèle est considéré en tant que théorie effective avec une coupure petite $\Lambda \ll k_F$. Pour le secteur (b), la situation est différente. Le pôle de Landau est toujours présent au voisinage de la couche de masse. Dans cette situation l'inégalité,

$$\frac{1}{2\pi} < \gamma_0^\times \ln \left| \frac{1 - \frac{\Delta_q - \Delta_r}{2\hat{\mathbf{p}}}}{1 + \frac{\Delta_q - \Delta_r}{2\hat{\mathbf{p}}}} \right|, \quad (4.84)$$

peut toujours être satisfaite quelque soit la valeur arbitrairement choisie de γ_0^\times . La constante de couplage effective γ'' est obtenue en intégrant la fonction beta

$$\beta'' = -4\lambda^2 \pi (\gamma^{\times 2} + 9\gamma''^2), \quad (4.85)$$

L'évolution est là encore autonome si l'on suppose que $\gamma^\times(\lambda) \approx 0$ et nous donne simplement

$$\gamma''(\lambda) = \frac{\gamma_0''}{1 + 36\pi\gamma_0''\lambda^2} \quad (4.86)$$

pour laquelle apparaît un autre pôle de Landau lorsque

$$\gamma_0'' < -\frac{1}{36\pi}. \quad (4.87)$$

Quand $\gamma^\times(\lambda)$ approche un pôle de Landau on constate alors que $\gamma'' \rightarrow -\infty$ car nous sommes face à une singularité non-intégrable. Il est utile de remarquer que $\beta_x^{\times\times}$ ainsi que les intensités de couplages $\gamma^\times(\lambda)$ et $\gamma''(\lambda)$ sont invariantes d'échelle dans le régime (b), c'est à dire que les paramètres d'échelles externes que sont k_F et Λ se découplent de la dynamique. Il en résulte que les fonctions β dans le langage habituel du groupe de renormalisation doivent être nulles. Par ailleurs, les fonctions beta (4.71) dans le

formalisme du groupe de renormalisation dans l'espace interne et les couplages effectifs deviennent invariant d'échelle dans la limite $\Lambda \rightarrow \infty$ au point de soustraction $\omega_p = \omega_q = \omega_r = \omega_s = 0$, $\hat{\mathbf{p}}/3 = \hat{\mathbf{q}} = -\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{z}}$ (utilisé dans la référence [48]). Ceci suggère que nous retrouvons bien le comportement attendu dans le sens du groupe de renormalisation Wilsonien à l'ordre une boucle.

4.8 Conclusion et perspectives

La transmutation des quasiparticules est un problème complexe à la fois en physique des particules et en physique de la matière condensée. Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés à un système de fermions non-massifs en 1+1 dimensions d'espace temps et plus précisément au modèle de Luttinger. Nous avons appliqués la méthode fonctionnelle du groupe de renormalisation dans l'espace interne en présence d'une coupure ultraviolette dure dans l'espace des impulsions. L'application de cette méthode conduit à un système d'équations intégral-différentielles couplées dont les conditions initiales sont parfaitement contrôlables et connues. Pour résoudre ce système, nous avons effectué des hypothèses (notamment sur la troncature de l'équation fonctionnelle formelle qui gouverne le système) qui permettent de vérifier la nature faiblement couplée du système aux, et au voisinage, des points de Fermi. Nous observons alors des interactions fortes et une dépendance singulière dans les impulsions au voisinage des points de Fermi pour une valeur arbitraire des paramètres nus de la théorie. Nos résultats sont modestes et constituent l'étape préliminaire d'une exploration complète des propriétés des pôles de Landau au regard de l'hypothèse sur la forme fonctionnelle de l'action effective.

Le groupe de renormalisation dans l'espace interne se montre ici sous un jour avantageux. Il permet de s'affranchir d'un certain nombre de contraintes inhérentes aux méthodes usuelles couramment utilisées pour traiter le modèle de Luttinger. Son caractère systématique et le contrôle complet qu'il offre dans la possibilité d'explorer en détail le régime infra-rouge d'un tel modèle le rend intéressant. Bien entendu, ceci ne va pas sans contraintes – les équations obtenues étant non-triviales. Cependant, nous pensons qu'il représente un intérêt certain dans l'étude des systèmes d'électrons fortement corrélés car il peut apporter un éclairage tout-à-fait différent à des situations qui semblent être parfaitement contrôlées.

Nous avons avancé que la présence des pôles de Landau et des effets de la coupure est générée par les termes d'ordre $\mathcal{O}(\Lambda^{-2})$ dans l'action renormalisée lorsque la prescription d'ordre normale est utilisée (par exemple dans la bosonisation). Il reste beaucoup de travail à effectuer pour clarifier à la fois le rôle de ces termes dans les théories bosonisées mais aussi établir le degré des confiance que l'on peut avoir dans les résultats obtenus dans d'autres schéma de régularisation.

Chapitre 5

Dynamique des systèmes ouverts à deux niveaux

5.1 Introduction

L'étude des systèmes dissipatifs en mécanique quantique n'est pas triviale. En effet, la formulation standard de la mécanique quantique ne connaît pas la «flèche du temps» – le caractère irréversible de l'évolution d'un système. Il a donc été envisagé d'étudier ces systèmes en dehors du cadre usuel de l'équation de Schrödinger. On pourra notamment se référer à l'ouvrage de référence [72] sur les systèmes dissipatifs qui offre un vaste tour d'horizon des méthodes et modèles couramment utilisés.

Le problème au niveau classique se situe dans l'impossibilité d'obtenir un Lagrangien, et donc un principe de moindre action pour le seul système ouvert. Ce point a été abordé il y a maintenant près de 80 ans [73]. Si x désigne la coordonnée généralisée du système, obtenir une équation du type,

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \kappa x = 0, \quad (5.1)$$

nécessite de doubler la taille de l'espace de phase et d'introduire un système additionnel, décrit par une coordonnée généralisée y . Les équations du mouvement pour la coordonnées x s'obtiennent alors en appliquant les équations de Euler-Lagrange pour le Lagrangien

$$L(x, \dot{x}, y, \dot{y}) = m\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2}\gamma(xy - \dot{x}y) - \kappa xy. \quad (5.2)$$

Les équations du mouvement pour y sont alors les même que celles pour x , en échangeant $\gamma \leftrightarrow -\gamma$. Bien qu'une fois ce Lagrangien obtenu, il est possible d'appliquer la procédure de quantification et de passer de suite à la description d'un système quantique, arrêtons un instant sur ce doublement des degrés de liberté.

Beaucoup de systèmes ouverts dans la Nature peuvent être décrits de manière «hiérarchisée». C'est-à-dire que le système qui nous intéresse en premier lieu possède peu de degrés de liberté (il est *petit*), mais son environnement lui en possède une «infinité». Bien que dans l'équation précédente, il n'est pas question de la taille du système, il est

clair qu'il suffit d'étudier un système étendu isolé, composé du système et de son environnement, pour obtenir la description Lagrangienne. L'énergie dissipée par le système original est réabsorbé par les degrés de libertés de l'environnement.

Si la hiérarchisation du problème en terme de la taille respective des deux systèmes est pertinente, cela implique qu'il est très difficile d'obtenir une description complète de l'environnement. C'est pourquoi on peut s'orienter vers une description «probabiliste» de l'environnement et de son effet sur le système. Au niveau classique, il existe une équation simple qui modélise cet effet : l'équation de Langevin. Dérivée pour l'étude du mouvement Brownien, elle part du constat qu'il est impossible de suivre toutes les molécules du fluide dans lequel une particule «brownienne» de masse M se déplace de manière erratique. Cette équation considère la vitesse de la particule test comme un processus stochastique. Elle correspond à l'équation du mouvement en présence d'une force de friction fluide, d'une force *aléatoire* f et éventuellement d'une force extérieure au fluide F_{ext} (cas d'une particule test chargée plongée dans un champ électrique par exemple) :

$$\ddot{q}(t) + \gamma\dot{q}(t) = \frac{f(t)}{m} + \frac{F_{ext}}{m} \quad (5.3)$$

Dans le cas du mouvement Brownien la force aléatoire est un bruit blanc, ce qui nous permet d'affirmer que

$$\langle f(t) \rangle = 0, \quad \langle f(t)f(t') \rangle = 2\gamma mk_B T \delta(t - t') \quad (5.4)$$

Le coefficient de corrélation est choisi de telle sorte que l'on reproduise la relation d'Einstein pour la constante de diffusion. Cette équation est valide sous certaines conditions (notamment il faut que le temps de mémoire de l'environnement fluide, mesuré par $\langle f(t)f(t') \rangle$, soit très petit devant le temps caractéristique associé à la friction fluide). Si jamais l'environnement ne peut-être modélisé par un bruit blanc il faut légèrement modifier l'équation précédente, le coefficient de friction dépend alors du temps :

$$\ddot{q}(t) + \int_{t_0}^t \gamma(t-t')\dot{q}(t')dt = \frac{f(t)}{m} + \frac{F_{ext}}{m} \quad (5.5)$$

Les caractéristiques temporelles de fluctuations de la force aléatoire et le coefficient de dissipation sont lié par la formule de Kubo : (fluctuation-dissipation) :

$$\int_0^{+\infty} \gamma(t)e^{i\omega t} dt = \int_0^{+\infty} \langle f(t)f(0) \rangle e^{i\omega t} dt \quad (5.6)$$

Il est évident que cette description classique ne nous donne pas beaucoup d'indices sur la façon de modéliser un système et son environnement en mécanique quantique. Mais par contre, elle indique clairement le rôle que peut jouer le mouvement brownien. Feynman et Vernon [74] mais aussi Schwinger [75] ont contribué à la description des systèmes «ouverts» dans une étude basée sur le mouvement brownien quantique dans le formalisme de l'intégrale de chemin [76]. D'où vient «la flèche» du temps dans ce cas ? Elle peut-être vue comme une conséquence de la hiérarchisation du problème. L'environnement

étant très grand, le temps caractéristique des échanges d'énergie entre ce dernier et le système sera beaucoup plus grand que celui qui caractérise les échanges du système vers le «réservoir» d'énergie. De sorte que de manière effective, l'énergie conférer aux degrés de libertés du réservoir n'est jamais restitué au système qui dissipe ainsi une partie de son énergie.

On sait qu'il est toujours plus intéressant dans l'optique de quantifier un système de partir d'un Lagrangien. On sait que lorsqu'un lagrangien dépend explicitement du temps le système n'est plus conservatif. Si l'on prend

$$L(q, \dot{q}, t) = \frac{1}{2}m(t)\dot{q}^2 + V(q), \quad (5.7)$$

où la masse dépend du temps, alors les équations classiques du mouvement contiennent sont de la forme d'une équation de Langevin :

$$\ddot{q}(t) + \frac{\dot{m}(t)}{m(t)}\dot{q}(t) = \xi(q, t) \quad (5.8)$$

L'approche naïve consiste donc à prendre un tel Lagrangien avec $m(t)$ et V choisis convenablement, et d'appliquer la procédure usuelle de quantification. Cette approche date des années 1940 et malheureusement, elle est justement trop naïve pour aboutir complètement. Il a été montré qu'une telle théorie n'était pas complètement cohérente avec le principe d'incertitude. Dans les années 1970, bien d'autres approches ont été tentées (Équation de Schrödinger non-linéaire, autre procédures de quantification,...). C'est à cette période qu'on sait rendu compte que l'approche la plus naturelle qui, comme le système complet {système+environnement} est conservatif, consiste à envisager la force de friction comme un échange d'énergie entre le système et son environnement. La dissipation se conçoit alors facilement : le système échange de l'énergie avec le système et l'environnement restitue de l'énergie au système dans un temps caractéristique très supérieur aux autres temps caractéristiques du problème. C'est cette démarche que nous allons analyser dans la suite.

Avant cela, il est utile de parler quelque peu du problème de brisure spontanée ou explicite de la symétrie de renversement du temps. Pour que le temps acquiert une flèche, nous pouvons être amener soit à explicitement briser l'invariance par rapport au renversement du temps, en utilisant une dynamique causale qui fait prendre alors à la condition initiale un rôle important. Mais il se peut aussi que le système soit en mesure de briser spontanément cette symétrie. Notre but va être de laisser au système la possibilité d'en faire ainsi. Nous pouvons dresser une analogie formelle avec le modèle d'Ising (encore une fois). Dans une approche de champ moyen, l'énergie libre d'un système peut s'écrire,

$$\beta F = -\ln \left(e^{\beta Jn\langle s \rangle + h} + e^{-\beta Jn\langle s \rangle + h} \right), \quad (5.9)$$

où $\langle s \rangle$ désigne la valeur moyenne du spin, n la taille du système et h le champ externe. Dans la limite thermodynamique,

$$F \approx -|Jn\langle s \rangle + h| \text{ avec } |\langle s \rangle| > \max \left(\frac{1}{\beta Jn}, \frac{|h|}{Jn} \right). \quad (5.10)$$

Ceci va nous permettre d'obtenir la valeur moyenne du spin, comme dérivée de l'énergie libre :

$$\langle s \rangle = \tanh(\beta(Jn\langle s \rangle + h)) \approx \operatorname{sgn}h. \quad (5.11)$$

Par analogie, dans le système que traiterons à la fin de ce chapitre, un paramètre ϵ de Feynman jouera le rôle de h . La taille n du système sera représenté par le nombre de degrés de libertés du bain et $\langle s \rangle$ par la pulsation ω . Nous travaillerons de manière explicite sur l'action effective Γ et nous pouvons faire l'analogie suivante :

$$F \propto |\langle s \rangle| \Leftrightarrow \Gamma \propto |\omega| \quad (5.12)$$

ce qui suggère que notre système est très proche de briser spontanément la symétrie \mathbb{Z}_2 de renversement du temps.

Notre étude se place dans le cadre de la théorie de la fonctionnelle densité-courant où nous essaierons d'établir l'expression de l'action effective d'un système fermionique à deux niveaux couplé linéairement à un bain d'oscillateurs harmoniques comme fonctionnelle de la densité. L'application de cette méthode à l'hydrodynamique [77] nous a permis d'entrevoir la possibilité d'utiliser ce formalisme pour dériver de manière systématique les équations qui gouvernent la dynamique de ce système. Le chapitre est organisé de la manière suivante. Dans un premier temps nous intéresserons au système classique pour lequel nous montrerons que l'introduction d'une dérivée temporelle symétrisée qui brise spontanément l'invariance par renversement du temps sans nécessité d'introduire explicitement des termes qui jouent ce rôle. Ensuite, nous étudions la généralisation en mécanique de ce modèle classique et constatons que cette dérivée perdure au niveau quantique. Finalement, nous présenterons le modèle de théorie des champs que nous avons développé et établirons l'expression de l'action effective, qui pose les bases de l'étude de la dynamique de relaxation du système. Ce travail [78] est toujours en cours et ce chapitre a pour objectif d'en présenter les principaux points.

5.2 Étude de la dissipation au niveau classique

La première étape de notre étude des systèmes ouverts prend place au niveau classique. Le modèle classique que nous choisissons est celui d'un système \mathcal{S} couplé à un bain d'oscillateurs harmoniques classiques \mathcal{B} . Nous savons que si l'on considère l'ensemble formé par le système et le bain $\{\mathcal{S} + \mathcal{B}\}$, nous pouvons obtenir une description Lagrangienne. On désignera par q, \dot{q} les coordonnées généralisées du système de masse M et par x_a, \dot{x}_a les coordonnées généralisées du $a^{\text{ème}}$ oscillateur harmonique de masse m_a et de pulsation propre ω_a . Le système sera alors couplé linéairement aux éléments de \mathcal{B} (l'intensité du couplage est donné par g_a). Le lagrangien du système,

$$L(q, \dot{q}, x_a, \dot{x}_a, t) = \frac{M}{2} \dot{q}^2 - V(q) + \sum_a \left[\frac{m_a}{2} \dot{x}_a^2 - \frac{m_a \omega_a^2}{2} \left(x_a - \frac{g_a}{m_a \omega_a^2} q \right)^2 \right] \quad (5.13)$$

contient par ailleurs le potentiel V auquel est soumis le système en l'absence des oscillateurs harmoniques. La démarche est simple, il nous faut résoudre les équations du mouvement. Pour cela, il suffit d'écrire les équations d'Euler-Lagrange,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) &= \frac{\partial L}{\partial q}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_a} \right) &= \frac{\partial L}{\partial x_a},\end{aligned}\quad (5.14)$$

qui conduisent tout naturellement au système différentiel suivant :

$$M\ddot{q} = -V'(q) - \sum_a g_a \left(\frac{g_a}{m_a \omega_a^2} q - x_a \right), \quad (5.15)$$

$$m_a \ddot{x}_a = -m_a \omega_a^2 x_a + g_a q. \quad (5.16)$$

Notons bien que nous considérons un potentiel V qui ne dépend que de q . Pour résoudre ce système, le plus simple est bien entendu de passer dans l'espace de Fourier. Nous définissons clairement la convention utilisée pour la transformée de Fourier d'une fonction f ,

$$f(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{f}(\omega). \quad (5.17)$$

Nous allons résoudre le système par une simple élimination des degré de liberté du bain d'oscillateurs. La transformée de Fourier de la coordonnée $x_a(t)$ sera définie comme

$$x_a(t) = \bar{x}_{ha} e^{-i\omega_a t} + \bar{x}_{ha}^* e^{i\omega_a t} + \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} \tilde{x}_a(\omega). \quad (5.18)$$

Nous avons pris soin de factoriser la contribution en fréquence de l'oscillation en l'absence de couplage. En effet, la distribution $x_a(\omega)$ libre est composé de deux delta de Dirac aux pulsations $\pm\omega_a$. Comme l'effet du couplage avec le système va simplement élargir ces pics, il est intéressant d'ôter leurs valeurs libres. La substitution de cette équation dans l'équation (5.16) nous donne

$$\begin{aligned}-m_a \omega^2 \tilde{x}_a(\omega) &= -m_a \omega_a^2 \tilde{x}_a(\omega) + g_a \tilde{q}(\omega), \\ \tilde{x}_a(\omega) &= \frac{g_a}{m_a(\omega_a^2 - \omega^2 - i\epsilon)} \tilde{q}(\omega).\end{aligned}\quad (5.19)$$

Nous avons introduit un petit imaginaire $i\epsilon$ ($\epsilon = 0^+$) car autrement la transformée de Fourier serait mal définie au voisinage de ω_a . Il est par ailleurs tout à fait justifiable de l'introduire, car il correspond simplement à la prescription de Feynman en mécanique quantique retranscrite au niveau classique. Il suffit ensuite de remplacer $\tilde{x}_a(\omega)$ dans l'équation (5.15),

$$M\omega^2 \tilde{q}(\omega) = -\tilde{V}'(\omega) - \sum_a g_a \left(\frac{g_a}{m_a \omega_a^2} \tilde{q}(\omega) - \tilde{x}_a - \bar{x}_{ha} \delta(\omega - \omega_a) - \bar{x}_{ha}^* \delta(\omega + \omega_a) \right). \quad (5.20)$$

La condition initiale x_{ha} est un degré de liberté relativement doux, et nous supposons que son influence sur le système est suffisamment faible pour nous permettre d'effectuer une moyenne temporelle sur sa phase, ce qui conduit à une équation complète pour la transformée de Fourier de la coordonnée q ,

$$\begin{aligned} -M\omega^2\tilde{q}(\omega) &= -\tilde{V}'(\omega) - \sum_a g_a \left(\frac{g_a}{m_a\omega_a^2}\tilde{q}(\omega) - \frac{g_a}{m_a(\omega_a^2 - \omega^2 - i\epsilon)}\tilde{q}(\omega) \right) \\ &= -\tilde{V}'(\omega) - \tilde{q}(\omega)\tilde{K}_{cl}(\omega) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Attention, ici nous avons «moyenné» sur cette condition dans le futur (en $+\omega$ dans Éq. (5.20)), mais aussi dans le passé ($-\omega$ dans Éq.5.20). Ceci ne brise alors pas explicitement la symétrie de renversement du temps. Nous laissons au système seul le soin de la briser spontanément ou non. La distribution \tilde{K}_{cl} correspond à l'effet mémoire dû au bain d'oscillateurs harmoniques sur la dynamique du système \mathcal{S} , comme le montre l'équation précédente dans l'espace direct,

$$M\ddot{q} = -V'(q) - \int_{-\infty}^{\infty} dt' K_{cl}(t-t')q(t). \quad (5.22)$$

Tous les effets dissipatifs sont contenus dans $K_{cl}(t)$, et plus précisément en grande partie lié au comportement de sa partie imaginaire. Il va nous falloir exprimer cette fonction plus en détail afin de déterminer son comportement dans le régime ohmique. Pour cela, nous rappelons que la densité spectrale J du bain \mathcal{B} est définie dans l'espace de Fourier par

$$J(\omega) = \sum_a \frac{g_a^2}{m_a\omega_a} \delta(\omega - \omega_a), \quad (5.23)$$

et que le cas ohmique correspond à une densité spectrale linéaire, *i.e.* $J(\omega) = \eta\omega$. Commençons par exprimer $K_{cl}(\omega)$,

$$\begin{aligned} \tilde{K}_{cl}(\omega) &= \sum_a \frac{g_a^2}{m_a} \left(\frac{1}{\omega_a^2} - \frac{1}{\omega_a^2 - \omega^2 - i\epsilon} \right) \\ &= -\omega^2 \sum_a \frac{g_a^2}{m_a\omega_a^2} \frac{1}{\omega_a^2 - \omega^2 - i\epsilon}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Il devient alors trivial d'exprimer cette fonction en terme de la densité spectrale,

$$\tilde{K}_{cl}(\omega) = -\omega^2 \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{J(\omega')}{\omega'} \frac{1}{\omega'^2 - \omega^2 - i\epsilon}. \quad (5.25)$$

Notons que nous n'effectuons l'intégrale que de 0 à $+\infty$, la fonction étant paire $\tilde{K}_{cl}(-\omega) = \tilde{K}_{cl}(\omega)$. Nous pouvons alors passer au calcul explicite de l'intégrale mise en jeu. Com-

mençons par mettre la fraction rationnelle d'ordre 2 sous une forme plus utile,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\omega'^2 - \omega^2 - i\epsilon} &= \frac{1}{(\omega' - \omega - i\epsilon)(\omega' + \omega - i\epsilon)} \\
 &= \frac{1}{2\omega'} \left(\frac{1}{\omega' - \omega - i\epsilon} + \frac{1}{\omega' + \omega - i\epsilon} \right) \\
 &= \frac{1}{2\omega'} \left[P \frac{1}{\omega' - \omega} + P \frac{1}{\omega' + \omega} + i\pi (\delta(\omega' - \omega) + \delta(\omega' + \omega)) \right] \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

où P est la partie principale.

Remarque: Nous rappelons l'identité (au sens des distributions) suivante :

$$\frac{1}{\omega - i\epsilon} = P \frac{1}{\omega} + i\pi \delta(\omega). \quad (5.27)$$

Cette relation conduit directement aux égalités précédentes.

Il est alors facile d'obtenir une expression explicite pour $\tilde{K}_{\text{cl}}(\omega)$,

$$\begin{aligned}
 \tilde{K}_{\text{cl}}(\omega) &= -\frac{\omega^2}{2} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{J(\omega')}{\omega'^2} \left[P \frac{1}{\omega' - \omega} + i\pi (\delta(\omega' - \omega)) \right. \\
 &\quad \left. + P \frac{1}{\omega' + \omega} + i\pi (\delta(\omega' + \omega)) \right]. \quad (5.28)
 \end{aligned}$$

La partie réelle de $\tilde{K}_{\text{cl}}(\omega)$ est parfaitement régulière, car elle ne fait intervenir que les parties principales de l'expression précédente,

$$\text{Re} \tilde{K}_{\text{cl}}(\omega) = -\omega^2 \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{J(\omega')}{\omega'} P \frac{1}{(\omega' - \omega)(\omega' + \omega)}. \quad (5.29)$$

La partie imaginaire quant à elle est légèrement plus problématique en 0 si l'on s'attache à travailler dans le régime ohmique. En effet elle est donnée par

$$\begin{aligned}
 \text{Im} \tilde{K}_{\text{cl}}(\omega) &= -\frac{\omega^2 \pi}{2} \int_0^{+\infty} d\omega' \frac{J(\omega')}{\omega'^2} (\delta(\omega' - \omega) + \delta(\omega' + \omega)) \\
 &= -\frac{\pi}{2} J(|\omega|). \quad (5.30)
 \end{aligned}$$

La présence de $|\omega|$ provient de la parité de K_{cl} , et pour le régime ohmique on trouve,

$$\text{Im} \tilde{K}_{\text{cl}}(\omega) = -\frac{\eta\pi}{2} |\omega|. \quad (5.31)$$

Nous pouvons alors introduire un nouvel opérateur de dérivée temporelle $\hat{\partial}_t$ qu s'exprime en fonction de la dérivée temporelle usuelle,

$$i\hat{\partial}_t = \sqrt{-\partial_t^2}, \quad (5.32)$$

et dont la transformée de Fourier est approximativement $|\omega|$. Ceci nous permet de donner l'équation différentielle du mouvement pour le système,

$$M\ddot{q} = -V'(q) - \text{Re}K_{\text{cl}}(i\partial_t)q + \frac{\eta\pi}{2}\hat{\partial}_t q \quad (5.33)$$

On constate alors que la dissipation provient de cette dérivée temporelle symétrisée, qui en règle général est remplacée par une dérivée standard. La conséquence de cette dérivée sera, comme on le verra par la suite, l'utilisation du propagateur causal dans la dynamique (plutôt que le propagateur retardé ou avancé).

5.3 Théorie Quantique effective en temps imaginaire

Nous venons de voir l'apparition de la dérivée temporelle symétrisée en mécanique classique. Nous allons rapidement montré l'équivalent dans le cas de la mécanique quantique. Nous utiliserons le formalisme de l'intégrale de chemin pour arriver à ce résultat. Introduisons l'action du système,

$$S[q, \mathbf{x}] = S_S[q] + S_B[q, \mathbf{x}], \quad (5.34)$$

où $S_S[q]$ est l'action du système seul en l'absence du réservoir de chaleur et $S_B[q, \mathbf{x}]$ est l'action du bain d'oscillateur couplé au système. Le vecteur \mathbf{x} contient les coordonnées généralisée de tous les oscillateurs. On peut écrire

$$S_B[q, \mathbf{x}] = \frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot D^{-1} \cdot \mathbf{x} + v\mathbf{x} \cdot \mathbf{g} \cdot q, \quad (5.35)$$

où D est une matrice (diagonale) qui contient les propagateurs pour les oscillateurs harmoniques et \mathbf{g} leurs constantes de couplages respectives avec le système. On peut exprimer l'opérateur densité ρ entre les états finaux et initiaux pour le système complet,

$$\rho(q_f, \mathbf{x}_f; q_i, \mathbf{x}_i) = Z^{-1} \int_{q(0)=q_i}^{q(\hbar\beta)=q_f} D[q] e^{-S_S[q]} \int_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}_i}^{\mathbf{x}(\hbar\beta)=\mathbf{x}_f} D[\mathbf{x}] e^{-S_B[q, \mathbf{x}]}, \quad (5.36)$$

et effectuer la trace sur les degrés de liberté du bain d'oscillateur harmonique pour obtenir formellement la matrice densité réduite au système initial,

$$\rho(q_f; q_i) = Z^{-1} \int_{q(0)=q_i}^{q(\hbar\beta)=q_f} D[q] e^{-S_S[q]} \int_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}(\hbar\beta)} D[\mathbf{x}] e^{-S_B[q, \mathbf{x}]} \quad (5.37)$$

Notons bien la présence de condition périodique dans la trace sur le bain d'oscillateurs. L'intégration sur les degrés de libertés du réservoir est triviale car gaussienne, de ce fait on a :

$$\begin{aligned} \rho(q_f; q_i) &= Z^{-1} \int_{q(0)=q_i}^{q(\hbar\beta)=q_f} D[q] e^{-S_S[q]} \int_{\mathbf{x}(0)=\mathbf{x}(\hbar\beta)} D[\mathbf{x}] e^{-\frac{1}{2}\mathbf{x} \cdot D^{-1} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{g} \cdot q} \\ &= Z^{-1} \int_{q(0)=q_i}^{q(\hbar\beta)=q_f} D[q] e^{-S_S[q] - \frac{1}{2}q \cdot \mathbf{g}^{\text{tr}} \cdot D \cdot \mathbf{g} \cdot q} \end{aligned} \quad (5.38)$$

La dissipation induite par le couplage avec le réservoir d'oscillateurs harmoniques se traduit par l'apparition d'une action de dissipation,

$$S_d[q] = -\frac{1}{2} \int_0^{\hbar\beta} dt \int_0^{\hbar\beta} dt' q(t) K(t-t') q(t') = \frac{1}{2} q \cdot \mathbf{g}^{\text{tr}} \cdot D \cdot \mathbf{g} \cdot q \quad (5.39)$$

Nous introduisons alors les transformées de Fourier discrètes pour une fonction f ,

$$f(t) = \frac{1}{\hbar\beta} \sum_n f_n e^{-i\omega_n t}, \quad \text{où } \omega_n = \frac{2\pi}{\hbar\beta} n. \quad (5.40)$$

Dans ce cas, on peut écrire la partie dissipative de l'action comme une somme,

$$S_d[q] = \frac{1}{2} \sum_n |q_n|^2 |g_n|^2 D_n. \quad (5.41)$$

Nous n'avons pas donné jusqu'à présent une forme explicite au propagateur pour les oscillateurs harmoniques. Pour lever cette ambiguïté, définissons l'action du bain d'oscillateurs comme

$$S_B[q, \mathbf{x}] = \frac{1}{2} \sum_\alpha \int dt [m_\alpha \dot{x}_\alpha^2(t) + m_\alpha \omega_\alpha^2 x_\alpha^2(t)] + \int dt g_\alpha x_\alpha(t) q(t). \quad (5.42)$$

Les transformées de Fourier discrètes du propagateur et des couplages est alors donnée

$$\begin{aligned} (D^{-1})_{m,n}^{\alpha,\gamma} &= \delta^{\alpha,\gamma} \delta_{m,n} m_\alpha (\omega_\alpha^2 - \omega_m^2) \\ g_{\alpha;m,n} &= \delta_{m,n} g_\alpha \end{aligned} \quad (5.43)$$

Ici, les indices grecs courent sur les indices des oscillateurs du bain, alors que l'indices latins eux représente la $n^{\text{ème}}$ composantes de la série de Fourier. On peut alors introduire la fonction

$$K_n = - \sum_\alpha \frac{g_\alpha^2}{m_\alpha (\omega_\alpha^2 - \omega_n^2 - i\epsilon)}, \quad (5.44)$$

que nous allons exprimer en fonction de la densité spectrale $J(\omega)$. Une continuation analytique des séries de Fourier nous permet d'affirmer que

$$\begin{aligned} \tilde{K}(\omega) &= - \int_0^\infty d\omega' \frac{J(\omega') \omega'}{\omega'^2 - \omega^2 - i\epsilon} \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} d\omega' J(\omega') \left[P \frac{1}{\omega' - \omega} + i\pi (\delta(\omega' - \omega)) \right. \\ &\quad \left. P \frac{1}{\omega' + \omega} + i\pi (\delta(\omega' + \omega)) \right]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Encore une fois, nous avons introduit la partie principale afin de séparer les contributions bien définies de celles qui sont plus problématiques dans les intégrales sur les fréquence.

Un raisonnement analogue au cas classique nous permet d'exprimer les parties réelle et imaginaire de $\tilde{K}(\omega)$. On trouve :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\tilde{K}(\omega) &= - \int_0^\infty d\omega' P \frac{J(\omega')\omega'}{(\omega' - \omega)(\omega' + \omega)} \\ \operatorname{Im}\tilde{K}(\omega) &= -\frac{\pi}{2} \int_0^\infty d\omega' J(\omega') (\delta(\omega' - \omega) + \delta(\omega' + \omega)) \\ &= -\frac{\pi}{2} J(|\omega|) \end{aligned} \quad (5.46)$$

Nous pouvons donc conclure que la partie imaginaire de la «mémoire» est la même que celle de son analogue classique,

$$\operatorname{Im}\tilde{K}(\omega) = \operatorname{Im}\tilde{K}_{\text{cl}}. \quad (5.47)$$

Les mêmes conclusions peuvent être faites. La dynamique se traduit par l'introduction de l'opérateur de dérivation symétrisée $\hat{\partial}_t$. Quels en sont les conséquences ? Nous allons essayer de répondre à cette question dans la section suivante.

5.4 Remarques sur les équation du mouvement

5.4.1 Dynamique causale

Considérons un système quantique dont le Lagrangien est donné par,

$$L = \psi^\dagger [i\partial_t - h + i\epsilon \operatorname{sgn}(h)]\psi + j^\dagger \psi + \psi^\dagger j, \quad (5.48)$$

où j représente une source externe et h l'énergie. L'équation du mouvement pour ψ s'obtient trivialement :

$$[i\partial_t - h + i\epsilon \operatorname{sgn}(h)]\psi = -j. \quad (5.49)$$

On peut alors obtenir l'expression explicite du propagateur dans l'espace direct en calculant explicitement sa transformée de Fourier inverse (à l'aide du théorème des résidus) :

$$\begin{aligned} G_t &= \int_\omega \frac{e^{-i\omega t}}{\omega - h + i\epsilon \operatorname{sgn}(h)} \\ &= -ie^{-iht} \Theta(t \operatorname{sgn}(h)), \end{aligned} \quad (5.50)$$

Notons la présence du signe de h dans la fonction de Heaviside de l'équation précédente. Une fois l'expression de la fonction de Green obtenue, la solution de l'équation du mouvement en présence d'une source s'obtient comme un simple produit de convolution. On peut écrire :

$$\psi_t = ie^{-iht} \int_{t'} \Theta((t - t') \operatorname{sgn}(h)) e^{iht'} j_{t'}. \quad (5.51)$$

Que se passe-t-il lorsque h tend vers 0 tout en restant positif ($h = 0^+$) ? L'équation du mouvement se résume dans cette limite à :

$$\partial_t \psi_t = i j_t, \quad (5.52)$$

où l'on choisit la condition initiale $\psi_{-\infty} = 0$ à $t = -\infty$. Selon l'équation Eq. (5.51), nous filtrons la composante de Fourier d'énergie $-h$ dans le passé où le futur, selon le signe de h , ce qui brise explicitement l'invariance par renversement du temps.

5.4.2 Dynamique «symétrisée»

Considérons un système quantique dont le Lagrangien est équivalent au précédent, exception faite que la dérivée temporelle est remplacée par la dérivée symétrisée :

$$\hat{L} = \phi[i\hat{\partial}_t - h + i\epsilon \operatorname{sgn}(h)]\phi + j\phi, \quad (5.53)$$

L'équation du mouvement pour ϕ ne change pas beaucoup :

$$[i\hat{\partial}_t - h + i\epsilon \operatorname{sgn}(h)]\phi = -j. \quad (5.54)$$

Par contre, en raison de $\hat{\partial}_t$, la transformée de Fourier du propagateur ne fait plus intervenir ω , mais $|\omega|$. De ce fait, l'expression en temps du propagateur change et devient :

$$\begin{aligned} \hat{G}_t &= \int_{\omega} \frac{e^{-i\omega t}}{|\omega| - h + i\epsilon \operatorname{sgn}(h)} \\ &= \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{\pi} \frac{\cos \omega t}{\omega - h + i\epsilon \operatorname{sgn}(h)}, \end{aligned} \quad (5.55)$$

Cette fois-ci, il est complètement symétrique par renversement du temps. Que se passe-t-il lorsque $h \rightarrow 0$? Quelque soit le signe de h , l'équation du mouvement est :

$$\hat{\partial}_t \phi = ij_t \quad (5.56)$$

dont la solution s'écrit de manière générale :

$$\phi_t = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \ln[(t - t')^2 + \epsilon^2] j_{t'}. \quad (5.57)$$

Cette équation n'est plus une équation du premier ordre. Mais on peut se convaincre que l'équation du mouvement sans second membre,

$$\hat{\partial}_t \phi = 0 \quad (5.58)$$

admet un seul type de solution non-nulle. Ce sont les fonctions constantes. En effet, dans l'espace de Fourier, on doit vérifier

$$0 = |\omega| \phi_{\omega} \quad (5.59)$$

quelque soit ω . Donc la transformée de Fourier doit être identiquement nulle et $\phi(t) =$ constante. Pour fixer cette constante il suffit alors d'une condition au bord à $t = \infty$ ou $t = -\infty$. Dans le cas précédent, le propagateur dépendait du signe de h , ce qui avait de

grande conséquences à $h = 0$. Ici, il n'en est rien. En quelque sorte, l'équation «mélange» ce qui se passe dans le passé et dans le futur. Pour $h > 0$, le propagateur s'écrit

$$\hat{G}_t(h > 0) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} P \frac{\cos \omega t}{\omega - h} - i\pi \cos ht, \quad (5.60)$$

et filtre par symétrie les composantes de Fourier d'énergie $\pm h$, alors que pour $h < 0$,

$$\hat{G}_t(h < 0) = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\pi} \frac{\cos \omega t}{\omega + |h|}, \quad (5.61)$$

il n'y a pas de filtrage. Ce mélange entre présent et passé est extrêmement intéressant, et il est une conséquence directe de la dérivée symétrisée.

5.5 Systèmes fermioniques à deux niveaux

Jusqu'à présent nous avons étudié le cas d'un système de mécanique quantique avec des degrés de libertés bosoniques. Nous allons maintenant nous intéresser à un modèle analogue au modèle de Caldeira-Leggett [79–81] faisant intervenir un système fermionique à deux niveaux (formellement un spin quantique) couplé à un bain d'oscillateurs harmoniques bosoniques. Nous allons nous contenter d'effectuer une description simple d'un tel modèle. Notre objectif est de voir si la dérivée temporelle symétrisée intervient ici aussi.

5.5.1 Modèle et fonctionnelles génératrices

Modèle

Nous choisissons d'étudier un modèle de théorie des champs «spin-boson» dont le hamiltonien est donné par :

$$H = \psi^\dagger [h\sigma_3 - \mu\mathbb{1}]\psi + \sum_a \left[\frac{\mathbf{p}_a^2}{2m_a} + \frac{m_a\omega_a^2}{2} \mathbf{x}_a^2 \right] + \sum_j \psi^\dagger \sigma_j \psi \sum_a g_{a,j} x_{a,j} \quad (5.62)$$

Le champs ψ correspond à un «spineur» à deux composantes, fruit de la construction de la description en terme de théorie des champs du modèle. On trouvera à titre indicatifs quelques éléments de cette construction dans l'annexe C.3. La fonction de partition du système est alors donné par :

$$Z[\bar{\eta}, \eta] = \int D[\psi^\dagger] D[\psi] D[x] e^{\frac{i}{\hbar} (S_\psi[\psi^\dagger, \psi] + S_x[x] + S_{\psi x}[\psi^\dagger, \psi, x] + \int dt (\psi^\dagger \eta + \bar{\eta} \psi))} \quad (5.63)$$

où l'on définit les quantités suivantes. Tout d'abord le propagateur fermionique libre G , par le biais de l'action :

$$\begin{aligned} S_\psi[\psi^\dagger, \psi] &= \int dt [i\hbar \psi^\dagger \partial_t \psi - (h - \mu)\psi_1^\dagger \psi_1 + (h + \mu)\psi_2^\dagger \psi_2] \\ &= \psi^\dagger \cdot G^{-1} \cdot \psi \end{aligned} \quad (5.64)$$

Notons que les ψ sont des «spineurs» à deux composantes, qui représentent les deux niveaux du système fermionique. G est donc une matrice 2×2 . Nous séparons le bain d'oscillateurs en trois jeux de N oscillateurs chacun et définissons le propagateur pour chacun de ces bains :

$$\begin{aligned} S_x[x] &= \int dt \sum_a \left(\frac{\dot{\mathbf{x}}_a^2}{2m_a} - \frac{m_a \omega_a^2}{2} \mathbf{x}_a^2 \right) \\ &= \sum_{a,b,j} x_{a,j} \cdot D_{0\ a,b,j}^{-1} \cdot x_{b,j} \end{aligned} \quad (5.65)$$

Pourquoi séparer ainsi le réservoir de chaleur en trois ? Nous n'avons pas parlé en détail de l'interaction spin-bosons donnée par l'action :

$$S_{\psi x}[\psi^\dagger, \psi, x] = - \sum_j (\psi^\dagger \sigma_j \psi) \cdot \sum_a g_{a,j} x_{a,j}. \quad (5.66)$$

Les σ_j désignent les matrices de Pauli. Nous séparons le bain en trois car nous considérons dans une première approximation que le système à deux niveaux se couple dans les trois directions avec trois espèces équivalentes d'oscillateurs (décrit par la même densité spectrale ω *a priori*). Cette séparation artificielle simplifie grandement les calculs sans trop nuire à la généralité du modèle.

L'inverse du propagateur fermionique libre à pour expression détaillée

$$G^{-1} = i\hbar \partial_t - (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h))\sigma_3 + \mu \quad (5.67)$$

où μ désigne un potentiel chimique. Par la suite nous nous placerons dans le cas $\mu = 0$. L'inverse du propagateur bosonique pour la direction j du bain s'écrit

$$D_{0\ a,b,j}^{-1} = \delta_{a,b} D_{0\ a}^{-1} \quad (5.68)$$

où $D_{0\ a}^{-1}$ est l'inverse du propagateur pour un oscillateur harmonique de masse m_a et de fréquence ω_a

$$D_{0\ a}^{-1} = -\frac{1}{2m_a} \partial_t^2 - \frac{m_a \omega_a^2}{2} \quad (5.69)$$

Finalement, nous convenons de définir la distribution delta de Dirac généralisée suivante :

$$(\delta_t)_{t_1, t_2} = \delta_{t_1, t+\eta} \delta_{t_2, t-\eta}. \quad (5.70)$$

Fonctionnelles génératrices

Les fonctionnelles génératrices W et Γ sont données par leurs définitions usuelles :

$$e^{\frac{i}{\hbar} W[J]} = \int D[\psi^\dagger] D[\psi] D[x] e^{\frac{i}{\hbar} (S_\psi[\psi^\dagger, \psi] + S_x[x] + S_{\psi x}[\psi^\dagger, \psi, x] + \int dt \psi^\dagger J_\mu \sigma_\mu \psi)} \quad (5.71)$$

$$\Gamma[\rho] = -W[J] + \int_t J_{\mu t} \rho_{\mu t}, \quad \rho_{\mu t} = \frac{\delta W[J]}{\delta J_{\mu t}}, \quad (5.72)$$

$$\Gamma[\rho] = \Gamma_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \Gamma_{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n} (\rho - \rho^*)_{\tilde{a}_1} \cdots (\rho - \rho^*)_{\tilde{a}_n}. \quad (5.73)$$

Le cas de l'expression de la fonctionnelle action effective du système libre est détaillé à la fin de l'annexe C.3. Nous essaierons de nous intéresser essentiellement au cas du système en interaction.

5.5.2 Système en interaction

Nous commençons par calculer $W[J]$, la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green, du modèle en interaction. Nous avons trois champs bosoniques vectorielles \mathbf{x}_j (qui correspondent chacun à N oscillateurs harmoniques) qui se couplent au système à deux niveaux dans la direction σ_j . La constante de couplage vectorielle pour chaque champs bosonique sera notée \mathbf{g}_j . La définition formelle de $W[J]$,

$$e^{\frac{i}{\hbar} W[J]} = \int D[\psi^\dagger] D[\psi] D[\mathbf{x}] e^{\frac{i}{\hbar} [\frac{1}{2} \mathbf{x} \cdot D_0^{-1} \cdot \mathbf{x} + \psi^\dagger \cdot G_J^{-1} \cdot \psi - \sum_j (\psi^\dagger \sigma^j \psi) \cdot (\mathbf{g}_j \cdot \mathbf{x}_j)],} \quad (5.74)$$

nous permet d'écrire,

$$e^{\frac{i}{\hbar} W[J]} = \int D[\psi^\dagger] D[\psi] D[x] e^{\frac{i}{\hbar} [\frac{1}{2} \sum_k x_{k;\alpha} \cdot (D_{0;\alpha;\beta})^{-1} \cdot x_{k;\beta} + \psi^\dagger \cdot G_J^{-1} \cdot \psi - \sum_k (\psi^\dagger \sigma_k \psi) \cdot (g_{k;\alpha} \cdot x_{k;\alpha})]}. \quad (5.75)$$

Dans l'expression précédente, les indices romans courent sur les trois champs couplé dans chacune des trois direction de l'espace ($k = 1, 2, 3$), alors que les indices grecs eux courent sur $\alpha = 1, \dots, N$ (la sommation sur ces indices est implicite). Nous introduisons les notations suivantes :

$$G_J^{-1} = G^{-1} + J, \quad (5.76)$$

$$J = J_{\tilde{k}} \sigma_{\tilde{k}} = J_k(t_k) \sigma_{\tilde{k}}, \quad (5.77)$$

$$(\sigma_{\tilde{k}})_{t', t''} = \sigma_k \delta_{t', t_k + \eta} \delta_{t'', t_k - \eta} \text{ ou } \eta = 0^+. \quad (5.78)$$

Dans l'équation (5.75), le terme dans l'exponentielle est quadratique à la fois dans les champs fermioniques et bosoniques. Nous pouvons donc effectuer n'importe laquelle des deux intégrations possibles. Ensuite, la dépendance de la fonctionnelle dans le champs qui reste à intégrer sera plus compliquée. Nous choisissons d'effectuer en premier l'intégration sur les degrés de libertés bosoniques. On trouve simplement

$$e^{\frac{i}{\hbar} W[J]} = \int D[\psi^\dagger] D[\psi] e^{\frac{i}{\hbar} [-\frac{1}{2} \sum_k (\psi^\dagger \sigma_k \psi) \cdot g_{k;\alpha} D_{0\alpha;\beta} g_{k;\beta} \cdot (\psi^\dagger \sigma_k \psi) + \psi^\dagger \cdot G_J^{-1} \cdot \psi]}, \quad (5.79)$$

où nous avons réabsorbé le déterminant de l'opérateur D_0 dans la normalisation du générateur W . Nous constatons alors que la fonctionnelle obtenue est d'ordre quatre

en ψ . Avoir intégrer en premier les degrés de libertés bosoniques ne semble pas avoir été une bonne idée. Cependant, nous pouvons introduire un «super» champ vectoriel ϕ bosonique et en notant

$$D_{0;k} = g_{k;a} D_{0,a;b} g_{k;b}, \quad (5.80)$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} &= \int D[\psi^\dagger] D[\psi] e^{\frac{i}{\hbar}[-\frac{1}{2}\sum_k(\psi^\dagger\sigma_k\psi)\cdot g_{k;a}D_{0,k;a,b}g_{k;b}\cdot(\psi^\dagger\sigma_k\psi)+\psi^\dagger\cdot G_J^{-1}\cdot\psi]} \\ &= \int D[\psi^\dagger] D[\psi] e^{\frac{i}{\hbar}[-\frac{1}{2}\sum_k(\psi^\dagger\sigma_k\psi)\cdot D_k\cdot(\psi^\dagger\sigma_k\psi)+\psi^\dagger\cdot G_J^{-1}\cdot\psi]} \\ &= \int D[\psi^\dagger] D[\psi] D[\phi] e^{\frac{i}{\hbar}[\frac{1}{2}\sum_k\phi_k\cdot D_k^{-1}\cdot\phi_k+(\psi^\dagger\sigma\psi)\cdot\phi+\psi^\dagger\cdot G_J^{-1}\cdot\psi]} \end{aligned} \quad (5.81)$$

Les contributions bosoniques à l'intégrale de chemin sont réécrite de manière effective en fonction *d'un seul* champ vectoriel à trois composantes. Comme nous l'avons vu, il faut maintenant intégrer les degrés de libertés fermioniques :

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} &= \int D[\psi^\dagger] D[\psi] D[\phi] e^{\frac{i}{\hbar}[\frac{1}{2}\sum_k\phi_k\cdot D_k^{-1}\cdot\phi_k+(\psi^\dagger\sigma\psi)\cdot\phi+\psi^\dagger\cdot G_J^{-1}\cdot\psi]} \\ &= \int D[\psi^\dagger] D[\psi] D[\phi] e^{\frac{i}{\hbar}[\frac{1}{2}\sum_k\phi_k\cdot D_k^{-1}\cdot\phi_k+\psi^\dagger\cdot(G_0^{-1}+(\phi+J)\sigma)\cdot\psi]} \\ &= \int D[\phi] e^{\frac{i}{\hbar}[-i\hbar\text{Tr}\ln[G_0^{-1}+(\phi+J)\sigma]+\frac{1}{2}\sum_k\phi_k\cdot D_k^{-1}\cdot\phi_k]} \end{aligned} \quad (5.82)$$

Nous introduisons le champ $\tilde{\phi} = \phi + J$ qui nous permet d'écrire la relation suivante :

$$e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = \int D[\tilde{\phi}] e^{\frac{i}{\hbar}[-i\hbar\text{Tr}\ln[G_0^{-1}+\tilde{\phi}\sigma]+\frac{1}{2}(\tilde{\phi}-J)\cdot D^{-1}\cdot(\tilde{\phi}-J)]} \quad (5.83)$$

La trace du logarithme dans l'équation précédente va générer une infinité de termes de puissance croissante en $\tilde{\phi}$. Il est impossible de calculer exactement l'intégrale de chemin précédente dans ces conditions. Nous allons faire l'hypothèse d'un couplage suffisamment faible pour nous limiter aux contributions au plus quadratique en $\tilde{\phi}$. De ce fait, nous pouvons affirmer que

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} &\approx \int D[\tilde{\phi}] e^{\frac{i}{\hbar}[-i\hbar\text{Tr}\ln[G_0^{-1}]-i\hbar\text{Tr}[G_0^{-1}\tilde{\phi}\sigma]+\frac{i\hbar}{2}\text{Tr}[G_0^{-1}\tilde{\phi}\sigma G_0^{-1}\tilde{\phi}\sigma]} \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_k(\tilde{\phi}-J)_k\cdot D_k^{-1}\cdot(\tilde{\phi}-J)_k] \end{aligned} \quad (5.84)$$

Formellement, cette dernière équation est Gaussienne donc intégrable. Une fois intégrée, nous pourrions exprimer W à l'ordre quadratique et donc aussi l'action effective Γ à cette ordre. L'action effective nous redonne un principe de moindre action et des équations du mouvement pour les densités ρ . Notre objectif est d'obtenir ces équations. Introduisons l'opérateur j tel que

$$i\hbar\text{Tr}[G_0^{-1}\phi\sigma] = j \cdot \phi. \quad (5.85)$$

Par définition nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned}
 j_k(t) &= i\hbar \frac{\delta \text{Tr}[G_0^{-1} \phi \sigma]}{\delta \phi_k(t)} \\
 &= i\hbar \text{Tr}[G_0^{-1} \sigma_{k;t}] \\
 &= i\hbar \text{tr}[G_{0;t_1, t_2}^{-1} \sigma_k \delta_{t_2, t+\eta} \delta_{t_1, t-\eta}] \\
 &= i\hbar \text{tr}[G_{0;t-\eta, t+\eta}^{-1} \sigma_k],
 \end{aligned} \tag{5.86}$$

où la «grande trace Tr » s'effectue sur les indices discrets et continus et la «petite trace» sur les indices discrets seulement (tr \leftrightarrow trace matricielle). Nous allons travailler avec un potentiel chimique $\mu = 0$. La transformée de Fourier du propagateur fermionique est simplement

$$G_{t,t'} = \int_{\omega} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\hbar\omega - (h - i\epsilon \text{sgn}(h))\sigma_3}. \tag{5.87}$$

Nous pouvons alors calculer explicitement la transformée de Fourier de l'opérateur j ,

$$\begin{aligned}
 j_k(\omega) &= i\hbar \int_t e^{i\omega t} \text{tr}[G_{0;t-\eta, t+\eta}^{-1} \sigma_k] \\
 &= i\hbar \int_{t,\omega'} e^{i\omega t} \text{tr}\left[\frac{e^{i2\omega'\eta}}{\hbar\omega' - (h - i\epsilon \text{sgn}(h))\sigma_3} \sigma_k\right] \\
 &= i\hbar \delta(\omega) \int_{\omega'} e^{i2\omega'\eta} \text{tr}\left[\frac{1}{\hbar\omega' - (h - i\epsilon \text{sgn}(h))\sigma_3} \sigma_k\right]
 \end{aligned} \tag{5.88}$$

Nous pouvons alors utiliser l'égalité (C.11) de l'annexe C.1 pour calculer la dernière trace. On trouve :

$$j_k(\omega) = i\hbar \delta(\omega) \delta_{k,3} \int_{\omega'} e^{i2\omega'\eta} \frac{2(h - i\epsilon \text{sgn}(h))}{(\hbar\omega' - (h - i\epsilon \text{sgn}(h))) (\hbar\omega' + (h - i\epsilon \text{sgn}(h)))} \tag{5.89}$$

L'intégration est effectuée dans l'annexe C.2. On trouve finalement :

$$j_k(\omega) = \text{sgn}(h) \delta(\omega) \delta_{k,3} \tag{5.90}$$

Nous pouvons passer à l'opérateur Σ qui intervient dans la contribution quadratique en ϕ . Nous le définissons tel que :

$$i\hbar \text{Tr}[G_0^{-1} \phi \sigma G_0^{-1} \phi \sigma] = \phi \cdot \Sigma \cdot \phi \tag{5.91}$$

À partir de l'expression précédente, nous obtenons son expression formelle détaillée. Le (k_1, k_2) ^{ème} élément de matrice de Σ vaut :

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{k_1; k_2}(t_1, t_2) &= \frac{i\hbar \delta^2 \text{Tr}[G_0^{-1} \phi \sigma G_0^{-1} \phi \sigma]}{2 \delta \phi_{k_2}(t_2) \delta \phi_{k_1}(t_1)} \\
 &= \frac{i\hbar \delta}{2 \delta \phi_{k_2}(t_2)} [\text{Tr}[G_0^{-1} \sigma_{k_1; t_1} G_0^{-1} \phi \sigma] + \text{Tr}[G_0^{-1} \phi \sigma G_0^{-1} \sigma_{k_1; t_1}]] \\
 &= \frac{i\hbar}{2} [\text{Tr}[G_0^{-1} \sigma_{k_1; t_1} G_0^{-1} \sigma_{k_2; t_2}] + \text{Tr}[G_0^{-1} \sigma_{k_2; t_2} G_0^{-1} \sigma_{k_1; t_1}]] \\
 &= i\hbar [\text{Tr}[G_0^{-1} \sigma_{k_1; t_1} G_0^{-1} \sigma_{k_2; t_2}]] \\
 &= i\hbar \text{tr}[G_{0; t_2 - \eta, t_1 + \eta}^{-1} \sigma_{k_1} G_{0; t_1 - \eta, t_2 + \eta}^{-1} \sigma_{k_2}].
 \end{aligned} \tag{5.92}$$

Nous voulons obtenir une forme explicite de sa transformée de Fourier,

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{k_1; k_2}(\omega_1, \omega_2) &= i\hbar \int_{t_1, t_2} e^{i\omega_1 t_1} e^{i\omega_2 t_2} \text{tr}[G_{0; t_2 - \eta, t_1 + \eta}^{-1} \sigma_{k_1} G_{0; t_1 - \eta, t_2 + \eta}^{-1} \sigma_{k_2}] \\
 &= i\hbar \delta_{\omega_2 + \omega_1, 0} \int_{\omega} e^{2i(\omega_1 + 2\omega)\eta} \text{tr} \left[\frac{1}{\hbar\omega - (h - i\epsilon \text{sgn}(h))\sigma_3} \sigma_{k_1} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{1}{\hbar(\omega_1 + \omega) - (h - i\epsilon \text{sgn}(h))\sigma_3} \sigma_{k_2} \right]
 \end{aligned} \tag{5.93}$$

Avant d'effectuer la dernière intégrale de boucle, il faut calculer la trace qui reste. Ceci se fait à l'aide de l'équation (C.12) de l'annexe C.1. Les éléments diagonaux de la matrice Σ sont donnés formellement par les équations suivantes :

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{1;1}(\omega_1, \omega_2) &= i\hbar \delta_{\omega_2 + \omega_1, 0} \int_{\omega} \frac{e^{2i(\omega_1 + 2\omega)\eta}}{(\hbar\omega + (h - i\epsilon \text{sgn}(h))) (\hbar(\omega_1 + \omega) - (h - i\epsilon \text{sgn}(h)))} \\
 &\quad + \frac{e^{2i(\omega_1 + 2\omega)\eta}}{(\hbar\omega - (h - i\epsilon \text{sgn}(h))) (\hbar(\omega_1 + \omega) + (h - i\epsilon \text{sgn}(h)))} \\
 \Sigma_{1;1}(\omega_1, \omega_2) &= \Sigma_{2;2}(\omega_1, \omega_2) \\
 \Sigma_{3;3}(\omega_1, \omega_2) &= i\hbar \delta_{\omega_2 + \omega_1, 0} \int_{\omega} \frac{e^{2i(\omega_1 + 2\omega)\eta}}{(\hbar\omega + (h - i\epsilon \text{sgn}(h))) (\hbar(\omega_1 + \omega) + (h - i\epsilon \text{sgn}(h)))} \\
 &\quad + \frac{e^{2i(\omega_1 + 2\omega)\eta}}{(\hbar\omega - (h - i\epsilon \text{sgn}(h))) (\hbar(\omega_1 + \omega) - (h - i\epsilon \text{sgn}(h)))}
 \end{aligned} \tag{5.94}$$

Remarque: L'égalité entre $j_1(\omega)$ et $j_2(\omega)$ ainsi que celle entre $\Sigma_{1;1}(\omega_1, \omega_2)$ et $\Sigma_{2;2}(\omega_1, \omega_2)$ ne sont pas surprenantes. En effet les directions x et y sont équivalentes entre elles dans notre modèle.

Il suffit alors d'effectuer les intégrales de boucles. Les calculs sont reproduits dans l'annexe C.2. On trouve les expressions suivantes :

$$\Sigma_{1;1}(\omega_1, \omega_2) = \frac{4h \operatorname{sgn}(h)}{\omega_1^2 - 4h^2} \delta_{\omega_2 + \omega_1, 0}. \quad (5.95)$$

$$\Sigma_{3;3}(\omega_1, \omega_2) = -\frac{e^{2i(\omega_1 - 2h \operatorname{sgn}(h))\eta} - e^{2i(-\omega_1 - 2h \operatorname{sgn}(h))\eta}}{\omega_1} \delta_{\omega_2 + \omega_1, 0} \quad (5.96)$$

Il ne reste plus qu'un seul terme à évaluer :

$$\begin{aligned} \Sigma_{1;2}(\omega_1, \omega_2) &= i\hbar \delta_{\omega_2 + \omega_1, 0} \int_{\omega} \frac{1}{(\hbar\omega - (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h))) (\hbar(\omega_1 + \omega) + (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h)))} \\ &\quad - \frac{1}{(\hbar\omega + (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h))) (\hbar(\omega_1 + \omega) - (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h)))} \\ &= -\frac{2\omega_1}{\omega_1^2 - 4h^2} \delta_{\omega_2 + \omega_1, 0} \end{aligned} \quad (5.97)$$

Reformulons l'équation (5.84) en termes de ces opérateurs :

$$e^{\frac{i}{\hbar} W[J]} \approx \int D[\tilde{\phi}] e^{\frac{i}{\hbar} [-i\hbar \operatorname{Tr} \ln[G_0^{-1}] - (D^{-1} \cdot J + j) \cdot \tilde{\phi} + \frac{1}{2} \tilde{\phi} \cdot (\Sigma + D^{-1}) \cdot \tilde{\phi} + \frac{1}{2} J \cdot D^{-1} \cdot J]} \quad (5.98)$$

On trouve alors en effectuant la dernière intégrale de chemin sur $\tilde{\phi}$

$$\begin{aligned} W[J] &= \text{cste} + \frac{1}{2} (D^{-1} \cdot J + j) \cdot (\Sigma + D^{-1})^{-1} \cdot (D^{-1} \cdot J + j) + \frac{1}{2} J \cdot D^{-1} \cdot J \\ &= W_0 + W_1 \cdot J + \frac{1}{2} J \cdot W_2 \cdot J. \end{aligned} \quad (5.99)$$

Nous introduisons alors l'action effective Γ

$$\Gamma[\rho] = -W[J] + \int_t J_{\mu t} \rho_{\mu t}, \quad \rho_{\mu t} = \frac{\delta W[J]}{\delta J_{\mu t}}, \quad (5.100)$$

$$\Gamma[\rho] = \Gamma_0 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \Gamma_{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n}(\rho - \rho^*)_{\tilde{a}_1} \cdots (\rho - \rho^*)_{\tilde{a}_n}. \quad (5.101)$$

Nous rappelons que l'on a

$$D_k^{-1}(\omega, \omega') = \delta_{\omega, \omega'} \sum_a g_{k;a}^2 m_a (\omega^2 - \omega_a^2) \quad (5.102)$$

Il «suffit» ensuite d'exprimer la densité formellement comme une dérivée fonctionnelle de W . On trouve naturellement que

$$\rho_{k;t} = W_1{}_{k;t} + W_2{}_{k,k';t,t'} J_{k';t'} \quad (5.103)$$

Dans la relation précédente, il y a sommation implicite sur k' et intégration sur t . On en déduit alors l'expression formelle de J en fonction de la densité ρ :

$$J_{k';t'} = W_2^{-1}{}_{k,k';t,t'}(\rho_{k;t} - W_1{}_{k;t}) \quad (5.104)$$

Une fois cette équation établie, il suffit d'exprimer W comme fonctionnelle de la densité en remplaçant les courants par leur expression formelle précédente et d'utiliser la transformation de Legendre qui définit l'action effective :

$$\Gamma[\rho] = -W_0 + \frac{1}{2}W_1 \cdot W_2^{-1} \cdot W_1 - \rho \cdot W_2^{-1} \cdot W_1 + \frac{1}{2}\rho \cdot W_2^{-1} \cdot \rho \quad (5.105)$$

Il suffit ensuite d'analyser la dépendance en fréquence des termes obtenus. Leurs expressions s'obtiennent en tenant compte des intégrales de boucles calculées précédemment et en fonction des propagateurs fermioniques et bosoniques libres. Le but est de faire explicitement intervenir la densité spectrale $J(\omega)$ du bain d'oscillateurs et de regarder le comportement dans le régime de dissipation ohmique $J(\omega) \propto \omega$. Il faut alors regarder si une dépendance en $|\omega|$ est observée ou non. Malheureusement, nous avons manqué de temps lors de la rédaction de ce manuscrit pour effectuer ce dernier travail. Ils sont actuellement toujours en cours et nous espérons pouvoir conclure sur ce dernier point lors de la soutenance de thèse. Une fois les expressions précédentes obtenues, on peut écrire les équation du mouvement et essayer de calculer la dynamique de dissipation du système en fixant l'état initial du système.

5.6 Conclusion et perspectives

Nous avons présenté dans ce chapitre une contribution préliminaire à l'étude de la dynamique des systèmes quantiques ouverts à deux niveaux. Nous nous sommes tout d'abord penché sur le cas classique, où la détermination des équations du mouvement pour le système conduit à l'apparition d'une dérivée symétrisée $\hat{\partial}_t$ dans les équations du mouvement. Elle se traduit dans l'espace de Fourier par la présence du module de ω lorsque l'on étudie le régime ohmique. Au niveau quantique, en temps imaginaire, on constate que cette dérivée «exotique» intervient toujours, brisant spontanément l'invariance par renversement du temps. Une telle dérivée n'est pas un opérateur différentiel simple. Nous avons alors introduit un modèle de théorie des champs modélisant un système fermionique à deux niveaux couplé à un bain d'oscillateurs harmoniques, dans le même esprit que le modèle de Caldeira et Leggett. L'objectif est alors de construire systématiquement l'action effective du modèle. Ce problème est très difficile, et même dans le cas libre le simple principe d'exclusion de Pauli implique que l'expression de l'action effective ne s'obtient que comme une série formelle infinie. Nous sommes passé au cas en interaction et avons obtenus l'expression formelle à l'ordre quadratique de l'action effective, non sans mal. Il reste alors un certain nombre de points à discuter : tout d'abord le cas de la dissipation ohmique qui requiert une expression explicite de l'action effective. Ce point est actuellement en phase d'être complété. Ensuite, il faut discuter de la

dynamique de dissipation en tant que tel. Nous sommes en train d'essayer de déterminer si nous ne devons pas obtenir l'action effective à un ordre plus élevé d'abord.

Nous avons simplement illustré la possibilité d'utiliser le formalisme de la théorie fonctionnelle densité-courant dans le cadre des systèmes quantiques ouverts. Appliquée précédemment à l'hydrodynamique, elle semble permettre de construire d'une manière systématique une théorie effective en intégrant au fur et à mesure tous les détails microscopiques du système. Le temps nous a manqué pour obtenir des résultats plus que qualitatifs, mais ils constituent le point de départ d'un travail que je souhaite compléter par la suite. Notons aussi que ce problème est complètement équivalent d'un point de vue formel à l'électrodynamique quantique (QED). Les bases théoriques que nous avons jetées ici sont très facilement transposables à QED, et suggèrent une application prochaine de cette méthode dans ce cadre. Bien qu'incomplet, ce travail pose un certain nombre de questions sur l'invariance par renversement du temps, sa brisure et la dynamique du système. Nous espérons les avoir partiellement mises en lumière.

Chapitre 6

Relations à deux niveaux dans les réseaux complexes

Ce dernier chapitre se distingue assez nettement des concepts que nous avons étudiés jusqu'à maintenant. Il présente une situation simple où des corrélations explicites dans un système conduisent à un comportement tout-à-fait singulier. Dans une large mesure, ce travail pose les bases de quelques points que je souhaite aborder en marge d'un travail plus analytique de théorie des champs. La richesse des structures que nous allons aborder dans ce chapitre, combinée à la simplicité du modèle que nous avons construit [2], nous ont poussé à inclure ce travail en guise de conclusion à ce manuscrit. S'inscrivant dans la thématique des réseaux complexes, flirtant avec la biophysique, ce travail est complètement abordable et ne requiert aucun bagage particulier dans le domaine des réseaux complexes. Il a été soumis à la revue *Physica A*. Nous commencerons par effectuer un rapide tour d'horizon de la problématique des réseaux complexes – leur pertinence, propriétés remarquables et les modèles qui les décrivent. Puis, nous introduirons le modèle des relations à deux niveaux que nous avons construits et procéderons à son étude numérique. Quelques détails concernant la simulation sont donnés dans l'annexe D.

6.1 Introduction

Au cours des dix dernières années, l'étude des réseaux complexes qui partagent certaines similarités avec des structures comme le World Wide Web s'est fortement développée. On peut comprendre que cet intérêt trouve sa source dans le rôle de plus en plus important que ces réseaux jouent dans l'industrie et dans notre vie quotidienne. Un grand nombre d'études numériques et/ou analytiques [82] ont été menées pour essayer de comprendre leurs spécificités et notamment pourquoi leurs distributions $P(k)$ des degrés de connexions k de leurs noeuds décroissent algébriquement (on rappelle que le degré de connexion d'un noeud correspond simplement au nombre de ses plus proches voisins). En général, nous sommes habitués à travailler avec des structures très régulières dont le degré des noeuds est constant. Des réseaux construits par exemple sur la répartition des liens entre différents sites Internet (WWW) sont beaucoup plus complexes. Certaines

pages ne contiennent que peu de liens, alors que d'autres en sont riches. Des mesures expérimentales de la distribution des liens sortants et entrants sur le WWW ont été effectuées [83, 84]. Les résultats sont reproduits sur la figure 6.1 (qui est extraite de la référence bibliographique [82]). On constate bien que la distribution $P(k)$ observée est algébrique (en loi de puissance), ce qui n'est pas innocent comme nous le verrons par la suite.

La problématique des réseaux complexes a joué un véritable rôle d'attracteur pour différentes disciplines. Que ce soit les mathématiques, la biologie, la sociologie, elles se sont toutes mélangées dans une description de physique statistique du problème. Il n'est pas innocent que tant de domaines aussi divers soient impliqués. En effet, on rencontre ces réseaux «sans-échelle»¹ dans un grand nombre de situations : on peut citer notamment les collaborations sur SPIRES [85], les protéines dans certaines bactéries [86], les réseaux électriques [87]. Les mécanismes qui entrent en jeu pour chacun des cas précédents sont de prime abord relativement complexes. Peut-on pour autant affirmer qu'il est raisonnable, dans une première approximation, de supposer qu'ils sont aléatoires ? Depuis les premiers travaux sur les graphes aléatoires par Erdős et Rényi à la fin des années 1950 [88] (repris et étendus notamment dans les années 80 [89]), on sait qu'une répartition aléatoire des liens génère des réseaux très homogènes où la majorité des noeuds ont le même degré et qui sont incompatibles avec la «queue» en loi de puissance des structures scale-free. Comprendre la source de ce comportement pas si aléatoire qu'il n'y paraît a été un enjeu central, et a conduit au concept *d'attachement préférentiel* entre les noeuds du réseau [90].

Ce point crucial dans le processus de croissance des structures scale-free peut être aisément reformulé en terme de l'adage populaire «les riches deviennent plus riches» (ou toutes variations sur ce thème - la richesse étant remplacée par un autre concept). Il trouve son fondement dans la tendance des «nouveaux» individus d'un réseau à établir des connexions avec ceux qui sont déjà fortement connectés. Nous reviendrons dans la section suivante sur ce modèle (et ses variations), mais on peut d'ores et déjà mentionner son succès dans l'explication de la genèse des réseaux scale-free. Que leurs propriétés proviennent d'un concept aussi «simpliste» rend la situation d'autant plus intéressante. Nous n'avons pas parlé de la fréquence de ces constructions dans la Nature. On ne connaît que quelques situations bien précises où elles sont effectivement observées, et leurs exposants sont variables. En règle générale, les mesures empiriques situent l'exposant de la distribution des degrés $P(k) \propto k^{-\gamma}$ dans l'intervalle [2, 3] [82], avec quelques exceptions notables comme les collaborations sur SPIRES [85] ($\gamma \approx 1.2$) ou bien encore les contacts sexuels [91] ($\gamma \approx 3.4$).

Une constat s'impose : il semble que de telles structures soient très souvent rencontrées dans des situations où les relations sous-jacentes entre individus jouent un rôle important. Ceci nous suggère qu'une bonne compréhension des relations sociales entre individus pourrait donner des pistes additionnelles pour étoffer notre compréhension du problème. Par ailleurs, on peut se demander pourquoi un si petit éventail d'exposants est mesuré,

¹À défaut d'une terminologie française bien définie, nous conviendrons d'utiliser par la suite la dénomination anglo-saxonne de réseaux *scale-free*.

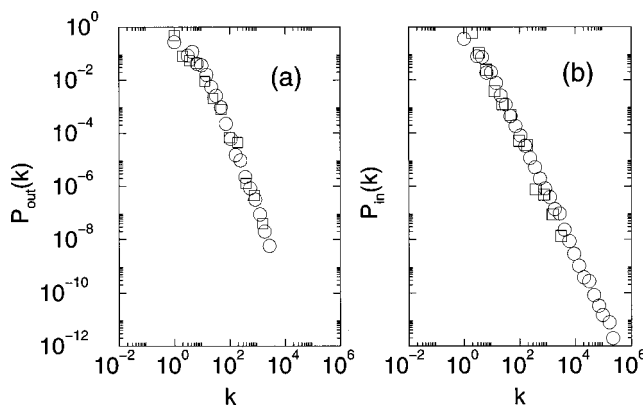


FIG. 6.1 – Études expérimentales des liens entrants et sortants sur le WWW (Extrait de l'article [82]). Elles regroupent les données de [83, 84]. On constate que les distributions des degrés $P(k)$ suivent des lois de puissances. Ceci constitue dans les faits un réseau «sans-échelle» (scale-free network).

alors que des modifications simples de la règle de l'attachement préférentiel (par exemple le vieillissement [92] ou l'«*initial attractiveness*» [93]) prédisent qu'il n'a pas *a priori* de borne supérieure. La réponse, en partie tout du moins, est très simple. Les réseaux réels sont tous de taille finie, ce qui rend très difficile la vérification expérimentale de la loi de puissance sur plusieurs décades (et donc la détermination de l'exposant γ) sans que les données soient parasitées par les inévitables effets de taille finie. Ceci est d'autant plus vrai pour les grandes valeurs de γ , où les probabilités de trouver des noeuds extrêmement connectés sont extrêmement faibles.

On peut se convaincre que le régime *scale-free* nécessite que le système trouve le fragile équilibre entre le caractère aléatoire de la distribution des liens et l'attrait que génère les sites fortement connectés. Si l'on déplace la balance de sorte que l'attrait de ces derniers soit trop grand, les riches vont devenir beaucoup trop riches et l'on détruira toute loi d'échelle (ce qui conduit souvent à des réseaux très centralisés) : c'est le cas de l'attachement préférentiel supra-linéaire (où la probabilité de se connecter à un noeud i existant vaut $\Pi_i \propto k_i^\alpha$ avec $\alpha > 1$ - voir la section suivante). D'un autre côté, si nous rendons le processus de connexion trop arbitraire, nous nous retrouvons dans le cadre formel des graphes aléatoires, ce qui introduit une coupure dans la distribution des degrés $P(k)$. On observera alors plutôt des distributions exponentielles «étirées», comme dans le cas de l'attachement préférentiel sub-linéaire ($\Pi_i \propto k_i^\alpha$ avec $\alpha < 1$). Cet équilibre fragile explique sans doute en grande partie la rareté des réseaux *scale-free*, et pourquoi dans certaines expériences d'autres distributions que la loi de puissance semblent être observés [94]². Bien que l'attachement (presque) linéaire des noeuds est observé dans la croissance de certains réseaux réels [95], d'autres stratégies semblent elles

²Dans ces cas toutefois, elles semblent toujours partager un caractère étiré qui indique que les événements rares (les noeuds très connectés) sont favorisés

aussi capable d’expliquer ce type de régime d’échelle [96, 97] (sans qu’elles dépendent explicitement de l’attachement préférentiel). Dans une large mesure, le mystère demeure sur les détails microscopiques qui mènent au régime *scale-free*, même si toutefois ces derniers travaux semblent en révéler quelques éléments. Les réseaux *scale-free* ne sont pas non plus complètement déconnectés d’autres problèmes de physique statistique. Nous pouvons notamment citer le lien qui existe avec un gaz de Bose à l’équilibre [98]. L’idée est alors d’assigner une énergie à chaque noeud. L’addition d’un noeud correspond alors à l’ajout d’un certain nombre de particules dans le gaz ainsi que d’un «nouveau niveau» d’énergie.

L’attachement préférentiel demeure un raccourci intéressant pour saisir toute la diversité des réseaux *scale-free*. D’un point de vue strictement numérique, bien qu’il soit facile à mettre en oeuvre, il se révèle beaucoup trop lent pour être capable de générer des réseaux très grands (ce qui est logique car il n’a pas été prévu pour cela). Un certain nombre d’applications – comme l’étude de la robustesse vis-à-vis des pannes ou l’étude des améliorations du trafic sur internet – requièrent d’effectuer des simulations numériques sur de tels structures. La croissance exponentielle de la puissance de calcul, la chute du prix de la mémoire permettent d’envisager l’étude de réseaux avec des millions de sites très simplement, mais pas forcément efficacement. D’ordinaire, on les construit à l’aide de données expérimentales, mais alors on se trouve fortement limité par la taille des données collectées. De ce point de vue, un algorithme rapide qui génèrent de telles structures de manière non-triviale, avec un exposant «contrôlable», pourrait s’avérer intéressant. Si l’on prend le problème par l’autre bout de la loupe, on se rend compte que les simulations numériques permettent de tester quels sont les ingrédients qui entrent en jeu dans les processus réels (surtout dans les cas où une étude analytique est impossible).

L’objectif de notre travail est double : tout d’abord nous allons tester quels sont les ingrédients qui ne détruisent pas le fragile équilibre qui donne naissance à ces structures et qui permettent de reproduire facilement la gamme d’exposants observés dans la Nature. Ensuite, nous veillerons à faire en sorte que cette algorithme soit rapide et facilement contrôlable, ce qui nous permettra d’effectuer une étude ultérieure plus poussée de grands réseaux et de leurs propriétés additionnelles. Nous essaierons dans la mesure du possible de faire en sorte que notre construction ne repose pas sur la règle de l’attachement préférentiel, mais plutôt de voir cette dernière comme une conséquence d’un jeu plus subtil entre les noeuds du réseau. Commençons par faire un tour d’horizon rapide de l’attachement préférentiel et des autres techniques habituelles qui conduisent à une distribution du degré $P(k)$ en loi de puissance.

6.2 L’attachement préférentiel et au delà

L’attachement préférentiel [91] «dilue» la popularité des noeuds sur le réseau au cours de sa croissance. Bien que le degré de connexion d’un certain nombre de noeuds «riches» augmente progressivement au cours du temps, il deviendra de plus en plus ardu de trouver des partenaires «intéressants» pour chaque nouvel individu ajouté au système. Commençons par détailler cette procédure. L’attachement préférentiel linéaire, qui conduit à

$P(k) \propto k^{-\gamma}$ avec $\gamma = 3$ (voir [91] pour une dérivation analytique de l'exposant), est basé à la fois sur une règle de sélection des partenaires qui partagent une connexion *et* sur une croissance linéaire de la taille du réseau. Le point de départ est un jeu de m_0 noeuds, connectés de manière aléatoire. Typiquement, m_0 est de l'ordre de quelques unités seulement. Ensuite, à chaque intervalle de temps, on ajoute un nouvel individu au réseau. Ce dernier devra alors établir $m < m_0$ connexions avec des noeuds différents introduits à des étapes antérieures. Le choix des partenaires n'est pas réellement aléatoire, bien que le processus s'effectue en tirant un site i au hasard. Puis, on effectue la connexion avec le site i avec une probabilité Π_i donnée par :

$$\Pi_i = \frac{k_i}{\sum_j k_j}. \quad (6.1)$$

Il est possible que cette procédure doive être répétée plusieurs fois avant de trouver le «bon» candidat. Un fois les m connexions établies, on recommence la procédure jusqu'à atteindre la taille de réseau souhaitée. On apprécie alors les raisons de la lenteur du procédé. L'ajout à chaque instant de m liens au le réseau se traduit par une croissance linéaire de somme des degrés $\sum_j k_j$. Au bout du compte, ceci diminue l'intérêt apparent des sites, si bien qu'il va devenir de moins en moins probable que le bon partenaire soit trouvé en quelques tentatives seulement. Le nombre moyen d'essais va augmenter sensiblement avec t , si bien que le temps moyen réel (au sens du temps que met un programme informatique à s'exécuter) que prend l'ajout d'un noeud va devenir très important. C'est ce qui rend pénible l'application numérique de l'attachement préférentiel pour construire des réseaux de plus que de l'ordre de $N = 10^5$ sites.

Bien que ceci ne remette pas directement en question cette règle, on peut se demander dans quelle mesure ce genre d'effet est pertinent. La réponse est simple, ce n'est *pas* réaliste du tout. Ceci traduit le fait que l'attachement préférentiel ne révèle rien des processus microscopiques qui interviennent dans la croissance des réseaux *scale-free*. Il ne représente que la première étape de l'étude à rebours (en partant du résultat) de ces organisations. Dans les faits, l'équation (6.1) se contente d'assurer que «les riches deviennent effectivement plus riches». Si l'on prend l'exemple des collaborations scientifiques, l'attachement préférentiel signifie que l'on souhaite collaborer avec des gens qui collaborent déjà beaucoup (ce sont les plus populaires), mais que l'on trouve ces gens en cherchant *au hasard*. Au fur et à mesure que le réseau augmente en taille, le rapport «signal/bruit» se dégrade et il devient difficile de trouver les «bons» partenaires. Or dans la réalité, il existe des contraintes en amont qui limitent déjà le choix des partenaires : des exigences sur la distance (il est plus facile de collaborer avec des individus physiquement proches), de coût, d'intérêt relatif, etc... Le modèle de Barbási et Albert n'en tient pas compte. D'un certain point de vue, les processus mis en jeu, surtout s'ils sont multiples et difficilement modélisables, peuvent être négligés et on peut se concentrer exclusivement sur la dynamique de croissance et l'étude du fragile équilibre qui en résulte. Mais d'un autre côté, c'est peut-être ce genre de contraintes qui donnent à la fois la diversité et la rareté des enchevêtrements de ce type.

Un certain nombre de modifications de la règle de l'attachement préférentiel ont été développées. Bien que la plupart partagent cette même limitation, il est intéressant d'en

faire rapidement le tour. Tout d’abord nous mentionnerons le vieillissement graduel. Il reprend les grandes lignes de l’attachement préférentiel, si ce n’est que la probabilité Π_i est donnée par [92] :

$$\Pi_i \propto k_i(t - t_i)^{-\nu}. \quad (6.2)$$

Ce modèle prédit un comportement *scale-free* avec $\gamma \rightarrow 2$ lorsque $\nu \rightarrow -\infty$ et $\gamma \rightarrow \infty$ lorsque $\nu \rightarrow 1$. Il est intéressant à plus d’un titre. Tout d’abord, le vieillissement joue clairement un rôle dans la structure des réseaux complexes. Ensuite, il peut servir à réduire *de facto* le choix des partenaires potentiels pour un noeud en s’arrangeant pour exclure ceux qui sont «trop vieux» du processus de choix (ce qui importe peu lorsque $(t - t_i) \gg 1$). De plus, le vieillissement représente une contrainte additionnelle qui est nécessaire pour aller au-delà du cas $\gamma = 3$.

Ensuite, nous signalerons des modifications visant à prendre en compte la capacité des noeuds à effectuer des connexions. Sous le nom de «Multiplicative node fitness» [99], elle introduit une aptitude initiale η_i pour chaque noeud (réparti selon une certaine loi de probabilité), et la relie à la probabilité de connexion, [92]

$$\Pi_i \propto \eta_i k_i. \quad (6.3)$$

Si la distribution des η_i est uniforme, on trouve alors une solution analytique dans la limite thermodynamique qui conduit à

$$P(k) \propto \frac{k^{-1-C}}{\ln(k)}. \quad (6.4)$$

Tout l’intérêt de cette extension est de montrer que l’attachement préférentiel n’est pas si «robuste» qu’il n’y paraît. Cette modification introduit une déviation non négligeable de la simple loi de puissance. Là encore, il y a réduction de fait du nombre de partenaires potentiels. Les noeuds les moins aptes ($\eta_i \approx 0$) se retrouvent quasiment incapable de devenir des partenaires intéressants (bien qu’il puissent être toujours choisis).

Il existe aussi des méthodes qui réduisent explicitement le temps de recherche d’un partenaire. Récemment un algorithme basé sur des contraintes de distance a été développé [100]. Dans les grandes lignes, il ne diffère que très peu du modèle de Barabási et Albert. Mais il est extrêmement rapide du point de vue numérique. Il rejoint quelques peu des idées que nous avons initialement considérées comme de potentiels améliorations de l’attachement préférentiel. Afin de mieux comprendre comment cette restriction de choix doit s’effectuer, nous avons successivement essayé :

1. De limiter le choix des partenaires pour tout nouvel individu j à un sous-ensemble \mathcal{R}_j du réseau global. \mathcal{R}_j est de taille fixe N' et est construit aléatoirement pour chaque noeud. Dans la limite $N' \ll N$ un tel modèle détruit la loi de puissance alors que dans la limite $N' \gg 1$, on retrouve presque le modèle de Barabási et Albert.
2. Un choix décorrélé de \mathcal{R}_j pour chaque noeud n’est pas réaliste. Nous avons donc conservé des corrélations entre les sous-ensembles successifs. Ceci ne change pas fortement les résultats précédent, dans la limite où les corrélations ne sont pas trop fortes.

3. Enfin nous avons essayé de construire le réseau par petits blocs, en prenant comme point de départ pour chaque nouveau sous-réseau quelques sites du précédent. Là encore, on retrouve un comportement scale-free. Mais on peut observer suivant la taille des sous-réseaux l'apparition d'une seconde queue dans la distribution des degrés (pour les sites les plus connectés). Nous ignorons dans quelle mesure ce genre de distribution peut s'avérer pertinente (il semble que cette procédure favorise trop les sites les plus connectés).

Nous n'avons pas poursuivi plus en détail ces études car elles sont trop ancrées à l'attachement préférentiel pour répondre de manière simple à nos objectifs. Nous nous sommes orientés vers une autre construction que nous allons détailler dans la section suivante.

6.3 Le modèle des relations à deux niveaux

À la lecture des sections précédentes, on peut se convaincre que pour qu'un algorithme soit rapide (aussi bien dans des situations réelles que numériques), il faut être certain que tout nouvel individu trouve un partenaire «immédiatement». Bien entendu, le temps de la simulation (ou de l'algorithme) n'est pas forcément commensurable à un vrai temps physique. Donc il ne faut pas voir cette requête comme une contrainte très forte, mais simplement comme la volonté que tous les nouveaux noeuds soient égaux dans cette recherche. Il est possible de réaliser un tel schéma très simplement. Plutôt que d'essayer de trouver un partenaire aléatoirement, il suffit de choisir un lien au hasard sur le réseau, et de connecter le nouveau site aux deux extrémités de ce lien. Cette procédure génère alors aussi des réseaux scale-free, avec $\gamma = 3$ [97]. Pourquoi cette procédure est-elle si intéressante ? Tout d'abord, elle satisfait la requête que nous avons formulé plus haut. Ensuite, elle met en lumière une certaine intuition que l'on peut se faire de la situation. À supposer que l'on souhaite collaborer avec quelqu'un, on peut prendre un papier au hasard, écrit par deux auteurs et essayer de collaborer avec tous les deux. Cette démarche semble favoriser les individus les plus connectés, car ils sont impliqués dans beaucoup de liens. Pour autant, elle n'empêche pas les sites les moins connectés d'augmenter leur degré, si bien que la balance qui conduit à la loi de puissance semble être respectée. Cet attachement par lien constitue notre point de départ, à la fois suffisamment proche et éloigné de l'attachement préférentiel. Nous pourrions essayer d'appliquer à ce modèle la plupart des modifications envisagées dans le cas du modèle de Barabási et Albert, mais notre objectif est de rester aussi proche que possible des conditions présentes dans des situations réelles. C'est pourquoi nous choisirons de briser l'uniformité des relations qui existent entre les noeuds.

Les liens sociaux qui s'établissent entre des individus sont souvent au coeur de la structure des réseaux complexes. Nous avons mentionné ce point dans l'introduction, et il est temps d'utiliser cette remarque pour motiver la construction de notre modèle. Tout individu fait la distinction entre ses «amis» (ou sa «famille» au sens large) et ses «connaissances». Elle peut être prise au sens strict ou élargi. Par exemple, les «amis» représentent les personnes que nous connaissons bien, avec qui nous avons travaillé (un véritable lien «physique»). Les «connaissances» quant à elles peuvent représenter les

individus dont nous avons entendu parlé, mais avec qui nous n'avons pas de relations privilégiées. Mais elles peuvent modéliser aussi les individus qui reviennent facilement à notre esprit par une sorte d'effet «mémoire» qui réduit implicitement la liste de nos relations. Quoi qu'il en soit, les relations entre individus sont plus complexes qu'une simple règle binaire. Nous allons donc partir de ce constat pour construire une règle de croissance d'un réseau complexe, et vérifier dans quelle mesure elle conduit à un comportement algébrique de la distribution des degrés.

Bien que le choix d'un lien aléatoire a été le point de départ de notre réflexion, nous ne donnerons pas une telle importance directe aux liens. Notre procédure de croissance part d'un petit nombre de sites connectés entre eux (par la suite, dans toutes les simulations numériques on utilisera 3 noeuds seulement). Puis nous suivons l'algorithme suivant :

1. À chaque étape de la simulation nous ajoutons un nouvel individu i au réseau, qui devra se connecter à (exactement) deux partenaires distincts.
2. Le choix du premier partenaire est complètement aléatoire³. Désignons ce noeud par l'indice j . i et j se connectent physiquement. Mais seul j (le site aléatoire) ajoute i dans sa liste de «connaissances». i se contente d'ajouter j parmi ses plus proches voisins.
3. Reste alors à choisir un deuxième partenaire pour l'individu i . Ce choix cette fois-ci n'est pas complètement aléatoire. Il se fait en choisissant *au hasard* un noeud j' parmi la liste des «connaissances» de j (en évitant de choisir i lui-même bien entendu). Si jamais j n'a pas d'autres connaissances que i , on prend alors un autre noeud au hasard⁴.
4. i et j se connectent physiquement (ils s'ajoutent mutuellement à leurs listes des plus proches voisins) mais aussi indirectement (en s'ajoutant mutuellement à leurs listes des «connaissances»).

Ces quatre étapes constituent notre règle de croissance de base, représentée schématiquement sur la figure 6.2. La dissymétrie introduite entre les deux listes (celles des plus proches voisins et celles des «connaissances») peut se reformuler ainsi : au cas où un noeud rencontre *un seul* autre noeud, il l'ajoute dans ses deux listes – c'est le cas de j et j' qui rencontrent seulement le noeud i . Par contre si un noeud rencontre *deux* autres noeuds «simultanément», bien qu'il se connecte physiquement avec les deux (comme i avec j et j'), il ne se souvient *que* du dernier rencontré et l'ajoute dans la liste de ses «connaissances» (c'est le cas de i avec j'). Cette mémoire à «court-terme» induit un contenu potentiellement différent des deux listes.

Mentionnons tout de suite des modifications de cette règle simple, qui introduiront deux paramètres de contrôle auxiliaires. Tout d'abord, nous supposons que l'étape (3) se fait seulement avec une probabilité $Q \leq 1$, ce qui relaxe la contrainte que chaque nouvel individu doit faire deux connexions exactement. Ensuite, nous allons supposer que le noeud j' , rencontré par l'intermédiaire d'un tiers, peut propager sa popularité sur le réseau (car il vient indirectement de «gagner» un voisin). Il s'ajoute donc dans la

³Attention, on choisit bien un noeud aléatoire et pas un lien au hasard.

⁴Dans la pratique, ce cas est évité en choisissant une condition initiale particulière.

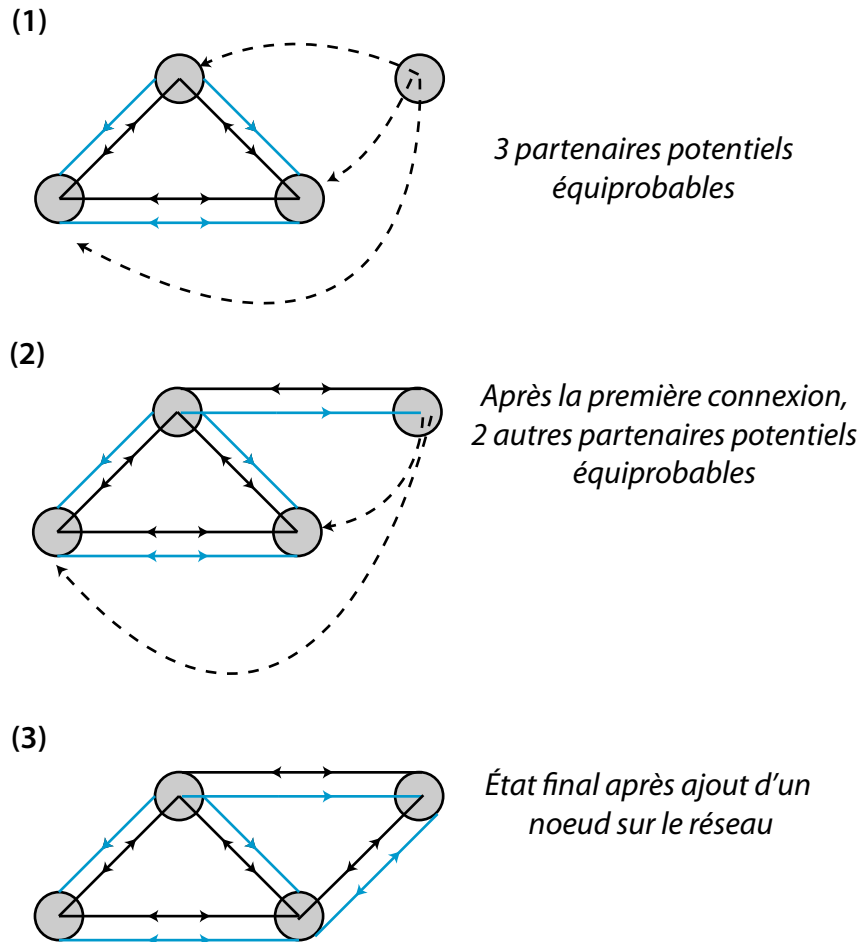


FIG. 6.2 – Représentation de l'algorithme de connexion à deux niveaux en trois étapes. Les liens physiques sont représentés en noir et les liens «indirects» en bleu (ou en nuance de gris). Lorsqu'une flèche va du noeud i au noeud j , cela signifie que le noeud j est dans une des deux listes de i . Les liens physiques sont toujours bidirectionnels mais les liens indirects peuvent être unidirectionnels. À l'étape (1) un nouveau noeud est ajouté, i : il a 3 partenaires potentiels (flèches pointillées). Une fois son premier partenaire choisi, on passe à l'étape (2). Le nouveau noeud se connecte physiquement à un premier noeud j , mais n'ajoute pas ce noeud dans ses liens indirects. Il a alors le choix entre les deux noeuds avec qui j a une relation «indirecte». Il choisit un de ces deux nouveaux noeud (notons le j'). À l'étape (3), il se effectue une connexion physique et indirecte avec j' (de manière *réciproque*). On peut alors réitérer l'algorithme avec un nouveau noeud.

liste des connaissances de R sites au maximum, de plus proches voisins en plus proches voisins. Si jamais l'«onde de popularité» revient à son point de départ j' , la procédure s'arrête. Ce dernier point à deux effets :

- Tout d'abord, la liste des connaissances d'un noeud ne contient plus forcément un exemplaire unique de chaque individu. Ceci gonfle artificiellement la probabilité de se connecter aux sites les plus populaires.
- Ensuite, un site peut devenir une connaissance d'un autre, *sans* qu'il y ait un lien direct entre eux.

Tout le problème est maintenant de déterminer si d'une part la procédure originale permet d'obtenir des réseaux scale-free et si d'autre part les modifications précédentes font de même (tout en apportant un contrôle sur l'exposant).

La première piste que l'on peut explorer consiste à essayer d'établir une équation maîtresse pour certains paramètres du système. Pour chaque site, nous conviendrons de désigner par \mathcal{A} le sous-ensemble du réseau total constitué de ses «connaissances» et par \mathcal{R} celui de ses plus proches voisins. Soit $\langle N(k, t) \rangle$ le nombre moyen de site avec k plus proches voisins à l'instant t . Nous définissons également le nombre moyen de «connaissances» qui ont k' plus proches voisins pour un site de degré k . Nous désignons cette quantité par $\langle n(k', t) \rangle_k$, ainsi que $\langle n(k', t) \rangle = \sum_k \langle n(k', t) \rangle_k$. Des équations de champs moyens sont d'ordinaire utiles pour déterminer la valeur de l'exposant γ à la limite thermodynamique. La variation algébrique $\langle N(k, t + 1) \rangle - \langle N(k, t) \rangle$ reçoit trois types de contributions :

- Celles qui augmentent $\langle N(k, t) \rangle$ d'une ou deux unités.
- Celles qui diminuent $\langle N(k, t) \rangle$ d'une ou deux unités.
- Celles qui laissent $\langle N(k, t) \rangle$ inchangé sans être pour autant triviales.

Nous adoptons les notations explicites suivantes, et convenons d'écrire cette première équation sous la forme :

$$\langle N(k, t + 1) \rangle = \langle N(k, t) \rangle + \Delta_+ \langle N(k, t) \rangle - \Delta_- \langle N(k, t) \rangle. \quad (6.5)$$

Nous devons nous assurer que ni $\Delta_+ \langle N(k, t) \rangle$, ni $\Delta_- \langle N(k, t) \rangle$, ne contiennent ce troisième type de contributions. Un bilan détaillé assez simple conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta_+ \langle N(k, t) \rangle &= \frac{\langle N(k-1, t) \rangle}{t} \left(1 - \frac{\langle n(k-1, t) \rangle_{k-1} + \langle n(k, t) \rangle_{k-1}}{\sum_q \langle n(q, t) \rangle_{k-1}} \right) \\ &+ \sum_{k' \neq k-1, k} \frac{\langle N(k', t) \rangle \langle n(k-1, t) \rangle_{k'}}{t \sum_q \langle n(q, t) \rangle_{k'}} \\ &+ 2 \frac{\langle N(k-1, t) \rangle \langle n(k-1, t) \rangle_{k-1}}{t \sum_q \langle n(q, t) \rangle_{k-1}} + \delta_{k,2}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\Delta_- \langle N(k, t) \rangle = \Delta_+ \langle N(k+1, t) \rangle \quad (k > 2). \quad (6.7)$$

La dernière équation est une simple conséquence des lois de conservations qui existent sur le réseaux. Comme il y a d'autres fonctions inconnues, il nous faut obtenir le même genre d'équations pour $\langle n(k', t) \rangle_k$. Un raisonnement analogue au précédent nous conduit

à une deuxième équation

$$\begin{aligned}
\langle n(k', t+1) \rangle_k &= \langle n(k', t) \rangle_k + \delta_{k,2} \left(\sum_q \frac{\langle N(q, t) \rangle \langle n(k', t) \rangle_q}{t \sum_{q'} \langle n(q', t) \rangle_q} \right) \\
&+ \delta_{k',2} \left(\frac{\langle N(k, t) \rangle (1 - \langle n(k, t) \rangle_k / \sum_q \langle n(q, t) \rangle_k)}{t} \right) \\
&+ \sum_{q \neq k} \frac{\langle N(q, t) \rangle \langle n(k, t) \rangle_q}{t \sum_{q'} \langle n(q', t) \rangle_q} + 2 \frac{\langle N(k, t) \rangle \langle n(k, t) \rangle_k}{t \sum_{q'} \langle n(q', t) \rangle_k} \\
&+ \langle n(k' - 1, t) \rangle_k \frac{\Delta_+ \langle N(k', t) \rangle}{\langle N(k', t) \rangle} \langle n(k', t) \rangle_k \frac{\Delta_- \langle N(k', t) \rangle}{\langle N(k', t) \rangle}. \quad (6.8)
\end{aligned}$$

Il est évident que le système couplé formé par les équations (6.8)-(6.5) est très difficile à résoudre car il met en jeu un grand nombre d'inconnues. Nous n'avons pas réussi à obtenir pour le moment un jeu d'équations plus simples. Les changements que nous avons introduits en partant de la procédure [97] introduisent des corrélations très fortes entre les deux sous-ensembles \mathcal{A} et \mathcal{R} . Nous pouvons cependant comprendre comment la situation évolue et pourquoi elle correspond à augmenter la propension des nouveaux individus à se connecter aux plus riches d'entre eux. En effet, il est très peu probable que l'on trouve un de ces sites très connectés au hasard. Mais, comme ils entrent en jeu dans beaucoup de connexions, il est bien plus probable que l'on trouve ces sites par l'intermédiaire d'un tiers. La compétition qui existe entre les deux listes \mathcal{A} et \mathcal{R} est assez difficile à cerner. Si leurs deux effets se contrebalancent de manière adéquate, nous devrions être en mesure d'observer un réseau avec une distribution de degré en loi de puissance. Pour confirmer ou infirmer cette hypothèse, nous avons choisi d'étudier numériquement le système. Nous présentons les résultats de cette étude dans la section suivante.

6.4 Résultats numériques

Nous avons commencé par explorer l'effet de l'introduction de cette relation à deux niveaux entre les noeuds, sans nous préoccuper des règles additionnelles introduites à la section précédente. Pour cela, nous avons simplement fixé $R = 0$ et $Q = 1$. Nous avons généré numériquement des réseaux avec un maximum de $N = 10^6$ sites. La simulation s'est avérée très rapide : quelques dizaines de secondes suffisent à atteindre la taille souhaitée (sur un ordinateur de bureau standard). Le coût engendré par le maintien de deux listes par noeud se ressent dans l'utilisation de la mémoire qui devient assez importante. Nous avons programmé l'algorithme en C++, ce qui a par ailleurs légèrement augmenté l'utilisation de la mémoire (coût additionné des structures de classes et de la non optimisation des conteneurs de type vector de la Librairie Standard). Cependant, nous nous permettons d'insister sur le fait que le C++ est un langage particulièrement intéressant pour ce genre de simulations numériques, en partie car il permet de réduire sensiblement la taille du programme.

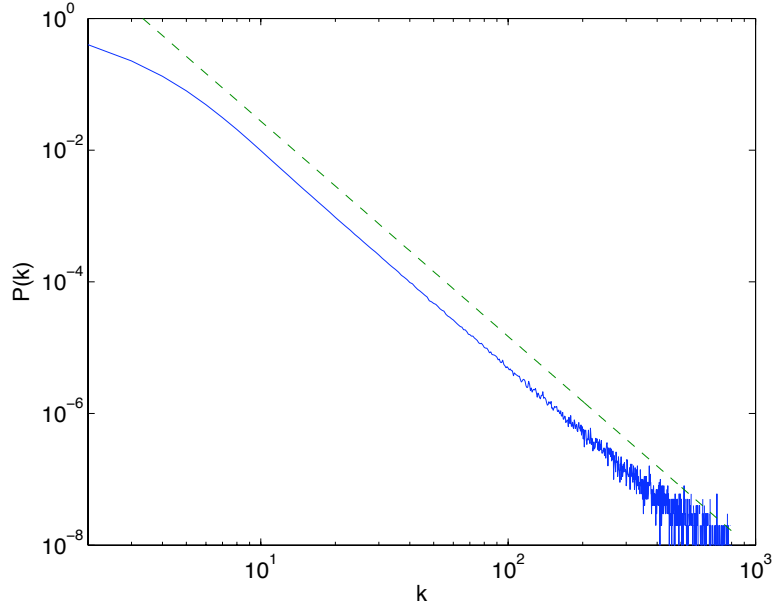


FIG. 6.3 – Distribution du degré de connexion $P(k)$ en échelle double logarithme, pour des réseaux de $N = 10^6$ sites avec $Q = 1$ et $R = 0$. La courbe pleine correspond aux résultats numériques, moyennés sur 100 réalisations. La courbe en pointillés à une régression en loi de puissance d'exposant $\gamma \approx 3.27$.

Avant de décrire nos résultats, nous rappelons que le coefficient d'agrégation d'un noeud (ou *clustering*) est donné par la relation suivante :

$$C_i = 2 \frac{e_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad (6.9)$$

où k_i désigne le degré du noeud et e_i le nombre de liens qui existent entre ses k_i plus proches voisins. La valeur $C_i = 1$ est la plus grande que l'on peut obtenir, car $k_i(k_i - 1)/2$ est le nombre maximum de liens réciproques que l'on peut faire entre k_i noeuds. Pour $R = 0$, notre procédure connecte *toujours* un noeud aux deux extrémités d'un lien qui existe déjà. Pour un noeud de degré k_i , cela signifie que l'on a exactement $k_i - 1$ liens entre ses plus proches voisins. Nous obtenons donc l'expression exacte suivante pour l'agrégation :

$$C_i = \frac{2}{k_i}. \quad (6.10)$$

Chaque simulation consiste en plusieurs réalisations indépendantes (typiquement 100) de réseaux de taille constante N . Nous avons à chaque fois évalué la distribution du degré $P(k)$ sur le réseau, mais aussi la distribution cumulée $P_{CDF}(k) = P(X > k)$ ⁵, l'agrégation moyenne ainsi que celle pour chaque site, et la distance moyenne entre deux sites. Afin

⁵Si la distribution originale suit un loi de puissance d'exposant γ , la distribution cumulée suit une loi de puissance avec un exposant $\gamma - 1$. Cumuler réduit considérablement le bruit statistique des distributions.

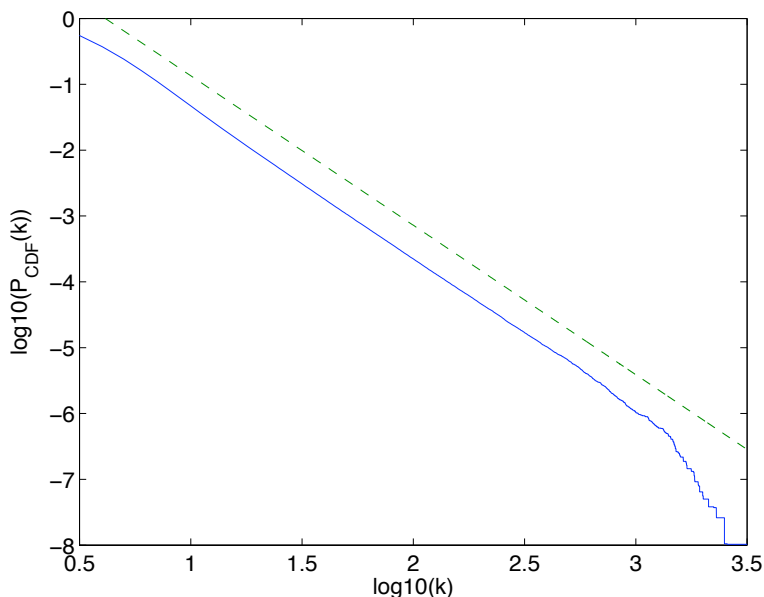


FIG. 6.4 – Logarithme (base 10) de la distribution cumulée $P_{CDF}(k)$ en fonction du logarithme du degré k pour des réseaux de $N = 10^6$ sites avec $Q = 1$ et $R = 0$. La courbe pleine correspond aux résultats numériques, moyennés sur 100 réalisations. La courbe en pointillés à une régression en loi de puissance d'exposant 2.27, utilisée pour déterminer l'exposant γ de la distribution $P(k)$ des degrés.

de visualiser la compétition entre les deux niveaux de relation, nous avons aussi tracé la distribution du degré parmi toutes les «connaissances» sur le réseau, $\sum_q \langle n(k) \rangle_q$. Cette grande liste croît comme $3t$, et nous avons essayé de déterminer si elle aussi suit une distribution scale-free. Nous avons par ailleurs mesuré la valeur de $\langle n(k) \rangle_q$ – le nombre moyen de sites de degré k dans l'ensemble des «connaissances» pour des sites de degré q – pour différentes valeurs de q . Lorsque $R = 0$, nous avons utilisé l'équation (6.10) comme garde-fou pour être certain que notre code de simulation est exempt d'erreurs. La distribution des degrés suit une «queue» en loi de puissance d'exposant $\gamma \approx 3.3 \pm 0.1$ sur plus de 3 décades avec une très bonne précision. Nous avons utilisé la distribution cumulée pour déterminer la valeur de l'exposant γ , car elle réduit considérablement le bruit statistique. Toutes ces courbes sont représentées dans les figures (6.3)-(6.4).

Comme on pouvait le deviner, l'exposant de la queue est plus grand que 3, car la mémoire à «court-terme» que nous avons introduit conduit à omettre quelques partenaires intéressants (qui ont un degré élevé). Nous nous permettons d'insister sur le fait que la croissance se stabilise rapidement dans le régime en loi de puissance, de sorte que des réseaux de taille plus modeste auraient pu être utilisés. Il semble que notre procédure truque les dés juste assez pour que cette stabilisation soit rapide, sans pour autant détruire le régime scale-free. L'agrégation moyenne est relativement élevée, $\langle C \rangle \approx 0.69$, car elle est en grande partie dominée par l'effet des sites avec exactement deux plus proches voisins (pour lesquels $C_i = 1$ lorsque $R = 0$). Au contraire du modèle de Ba-

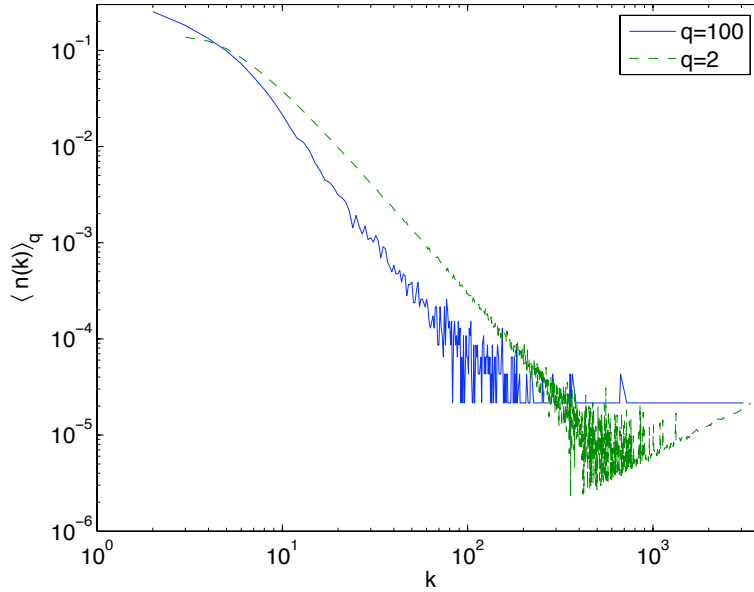


FIG. 6.5 – Logarithme de la distribution des connaissances $\langle n(k) \rangle_q$ pour des noeuds de degré q en fonction du logarithme du degré k (pour des réseaux de $N = 10^6$ sites $Q = 1$, $R = 0$). Les deux courbes représentent la situation observée pour différentes valeurs de q . Lorsque q est petit, on distingue une croissance linéaire pour les grande valeurs de k (ce qui trahit la popularité accrue des sites les plus connectés). Par contre, cette queue disparaît pour des plus grandes valeurs de q (comme le montre la courbe obtenue pour $q = 100$).

rabási et Albert, elle ne décroît pas de manière sensible avec la taille du système N . La distance moyenne entre deux noeuds quelconques du réseau est de 14 sites avec un écart type de 3 (tout ceci pour $N = 10^6$). Le réseau est donc relativement compact.

Le point le plus intéressant concerne la distribution total du degré des connaissances sur le réseau $\sum_q \langle n(k) \rangle_q$ qui semble elle aussi suivre une distribution scale-free avec cette fois-ci un exposant proche de $\gamma \approx 2.1$. Il existe cependant une déviation remarquable dans ce comportement : pour les grandes valeurs de k , on constate la présence d'un crossover entre le comportement décroissant et une croissance linéaire. On pouvait s'attendre à ce type de comportement, car les noeuds les plus connectés entrent majoritairement en jeu par l'intermédiaire d'une tierce personne. Ils vont donc se retrouver dans environ k listes de connaissances différentes sur le réseau, *i.e.* :

$$\sum_q \langle n(k) \rangle_q \propto k, \quad k \gg 1 \quad (6.11)$$

Ce crossover se produit pour des valeurs relativement élevées du degré k . À supposé qu'il ait lieu plus tôt, nous pensons qu'alors le comportement algébrique du degré total aurait disparu. Les distributions individuelles $\langle n(k) \rangle_q$ elles aussi montrent un tel comportement en loi de puissance, à l'exception que seules les distributions qui correspondent à des petites valeurs de q (voir figure 6.5) montrent une croissance linéaire. Ceci suggère

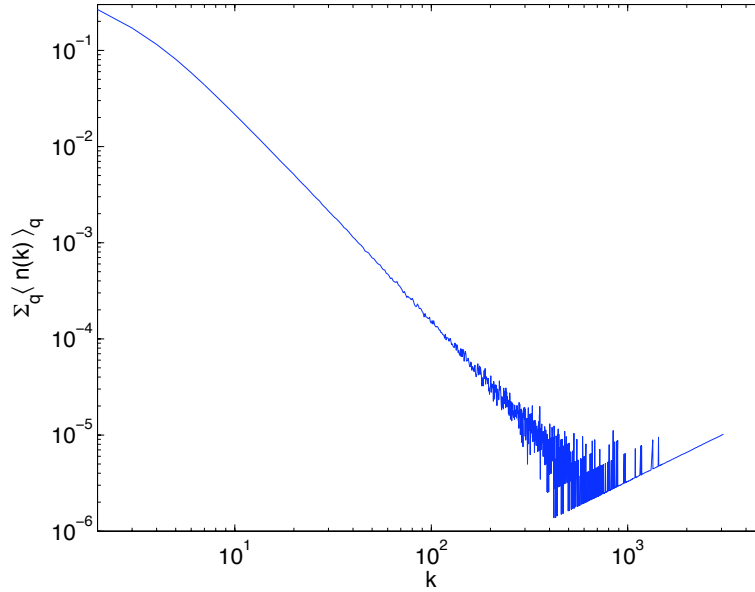


FIG. 6.6 – Distribution du degré total des connaissances moyennée sur 100 réalisations indépendantes de réseau avec 10^6 noeuds ($Q = 1$, $R = 0$). Nous voyons cette croissance linéaire à l'extrémité droite de la courbe. Avant que ce crossover ait lieu, la courbe suit une loi de puissance $P(k) \propto k^{-\gamma}$ d'exposant $\gamma \approx 2.1$.

qu'en moyenne les noeuds les moins connectés ont des relations privilégiées avec les plus connectés, mais que ces derniers n'ont pas de relations particulières entre eux.

Nous avons signalé que nous étions en mesure d'observer la «queue» en loi de puissance pour la distribution des degrés, même pour des valeurs raisonnables de la taille du réseau N . Ce point trouve sa source dans les distributions particulières $\langle n(k) \rangle_q$. En règle générale, les réseaux avec de grandes valeurs de γ prennent beaucoup de temps à se développer. Le concept de «connaissances» que nous avons introduit accélère considérablement ce processus, car il permet au réseau de garder une trace de la présence des noeuds les plus connectés. Les nouveaux individus trouvent alors des partenaires «intéressants» plus facilement.

Nous pouvons maintenant nous intéresser à la diffusion de popularité sur le réseau. Augmenter la valeur de R change très certainement la situation car les noeuds «populaires» (les plus connectés) doivent le devenir encore beaucoup plus. Peut-on alors encore espérer observer le comportement scale-free? Nous allons voir que c'est le cas et que les plus grandes conséquences de cette règle additionnelle est de diminuer à la fois la valeur de γ et de $\langle C \rangle$. Les estimations numériques de l'exposant γ , de $\langle C \rangle$ et de $\langle l \rangle$ sont consignées dans le tableau 6.1. Nous avons observés des exposants qui se trouvent dans l'intervalle $1.9 \lesssim \gamma \lesssim 3.3$. La figure (6.7) illustre quelques une de ces distributions que nous avons rencontrées. Nous constatons que pour des petites valeurs de k , la déviation du comportement en loi de puissance est grande. Mais après une décade dans un diagramme log-log, elle apparaît finalement. Nous pouvons voir des effets de taille finie assez

Q	R	γ	$\langle C \rangle$	$\langle l \rangle$
1	0	3.3 ± 0.1	0.69	14 ± 3
	10	2.4 ± 0.1	0.55	7 ± 2
	50	2.0 ± 0.1	0.26	5 ± 1
	100	1.9 ± 0.1	0.16	5 ± 1

TAB. 6.1 – Exposant, valeur moyenne de l’agrégation (clustering) et valeur moyenne de la distance entre deux noeuds sur le réseaux pour différentes valeurs de R (en gardant $Q = 1$). Toutes les valeurs correspondent à des réseaux de taille $N = 10^6$ et les moyennes sont calculées sur 100 réalisations différentes.

important ici, car les distributions décroissent de plus en plus doucement comparative-ment au cas $R = 0$. La mémoire requise pour aller au-delà de $R = 100$ et $N = 10^6$ est très grande, nous n’avons donc pas pu franchir cette limite.

L’agrégation décroît en moyenne comme nous pouvions nous y attendre, car cette fois-ci les sites avec seulement deux plus proches voisin peuvent contribuer avec $C_i < 1$. Mais nous avons vérifié qu’il n’y a que peu de déviations dans la loi de puissance suivie par $\langle C \rangle_k$, ce qui indique qu’elle reste proportionnelle à k^{-1} avec une très bonne précision. Encore une fois, cette valeur dépend faiblement de la taille du réseau. Il est utile de remarquer que notre procédure de propagation est influencée et influence le clustering. Diffuser la popularité d’un noeud dans une région très agrégée ne porte pas très loin, et ne permet que rarement de «s’échapper» de cette zone. La distance moyenne entre deux noeuds quelconques et son écart type décroissent aussi, ce qui tout à fait logique car la diffusion de popularité compactifie encore plus la structure. La distribution des connaissances ne change pas de manière notable des courbes observées lorsque $R = 0$.

Nous avons rapidement enchaîné par les cas où Q est plus petit que 1. Dans ce cas, il n’y a pas trop d’intérêts d’aller au-delà de $R = 0$. Il paraît en effet tout à artificiel de considérer que quelques noeuds seulement font deux connexion et que dans un même temps ils puissent contribuer à diffuser la popularité sur le réseau. Nous observons un changement graduel vers une coupure exponentiel qui passe par l’augmentation progressive de la valeur de l’exposant ($\gamma \approx 4.1 \pm 0.1$ pour $Q = 0.8$). La coupure exponentielle est net ($P(k) = e^{-k/k_0} k^{-\gamma}$) pour $Q = 0.5$. Il est naturel d’observer ce crossover, car $Q = 0$ correspond à la création d’un réseau complètement aléatoire. L’introduction de noeud socialement «rigides»⁶ réduit progressivement l’effet des deux niveaux de relations. Notons que nous n’avons pas étudié en détail cette transition et nous n’avons pas cherché à déterminer si elle est uniquement due aux des effets de taille finie. Pour cela, il faudrait trouver un paramètre d’ordre qui permet de faire clairement la distinction entre comportement aléatoire et scale-free. Pour conclure, l’adjonction de R et Q a permis de reproduire un grand nombre de situations distinctes, sans pour autant nuire à l’efficacité et la rapidité de l’algorithme.

⁶Au sens où ils sont moins enclins à faire des connexions.

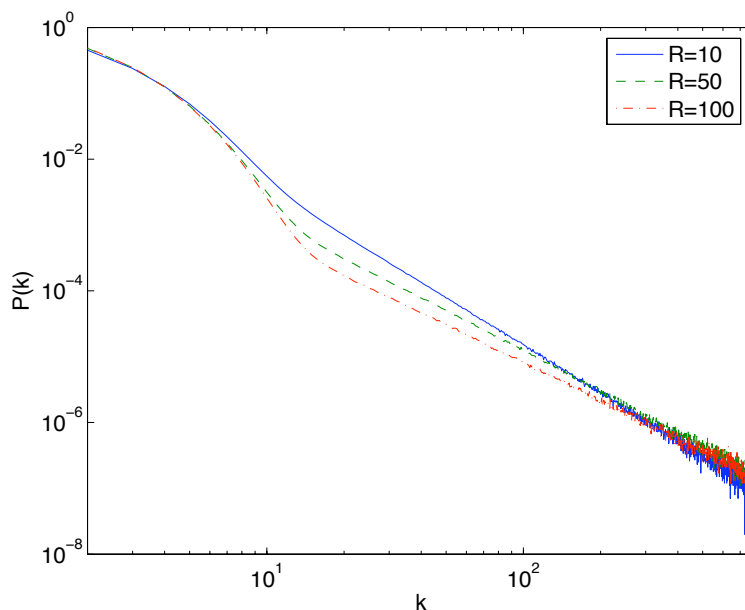


FIG. 6.7 – Logarithme de la distribution du degré en fonction du logarithme du degré pour des réseaux avec $N = 10^6$ sites et $Q = 0$ pour différentes valeurs de R . Les exposants des lois de puissances observées sont respectivement $\gamma = 2.4, 2.0, 1.9 \pm 0.1$ pour $R = 10, 50, 100$ (déterminés par régressions linéaires sur les distributions cumulées).

6.5 Conclusions et perspectives

Nous avons étudié sommairement la possibilité d'améliorer la règle usuelle de l'attachement préférentiel qui permet la croissance de réseaux complexes de type scale-free. L'inclusion de considérations réalistes concernant cette procédure suggère que nous devons trouver un moyen efficace de réduire l'ensemble des partenaires auxquels les nouveaux individus peuvent se connecter. Pour réaliser cette contrainte, nous avons introduit deux niveaux de relations entre les noeuds du réseau : une connexion physique au sens habituel du terme, et une connexion indirecte. Ces deux «couleurs» d'interaction conduisent à des réseaux scale-free non-triviaux avec $\gamma \lesssim 3$. La compétition entre les deux interactions n'est pas simple à cerner, et nous avons par conséquent menée une étude majoritairement numérique. Elle indique que pour les deux relations, une distribution scale-free est observée bien que dans le cas des relations indirectes une queue linéaire est susceptible de se développer. Il a été porté à notre attention que le modèle développé dans la référence [101] présente certaines similarités formelles avec le notre. Nous nous penchons actuellement sur les possibles conséquences de ce lien quant à la résolution analytique de notre modèle et la détermination précise de l'exposant de la distribution.

L'ajout de deux ingrédients – la possibilité de diffuser la popularité d'un noeud ainsi que l'introduction de liens «socialement rigides» – nous a permis par ailleurs d'augmenter l'intervalle des exposants observés ainsi que de nous ramener au cas des graphes aléatoire. Les réseaux que nous avons obtenus sont relativement compacts et bien agrégés, ce

quelque soit leurs tailles. L'implémentation de l'algorithme s'est avérée rapide, suffisamment même pour pouvoir permettre une étude ultérieure des propriétés additionnelles de telles structures.

Nous avons effectué une étape modeste vers une meilleure compréhension des détails microscopique sous-jacent à l'attachement préférentiel. Nos résultats suggèrent que l'on doit tenir compte de deux faits : la réduction du nombre de partenaires – comme récemment suggéré par [100] ainsi que l'introduction de différences dans les relations entre individus. Les contraintes qui gouvernent le premier doivent être explorés plus en détail avant de conclure. Ces deux points permettent peut-être de comprendre pourquoi les cas particuliers pour lesquels $\gamma > 3$ sont rares, bien qu'ils aient été observé pour des réseaux réels de tailles raisonnables. Il a été dit que ce type de réseaux sont rares car lents à croître [97]. Nous pensons que des situations réelles n'empêchent pas leur existence car des contraintes et interactions plus subtiles peuvent contribuer à accélérer le processus sans pour autant détruire le scaling. Leur rareté est peut-être tout simplement le signe que de tels structures vivent sur le fil de la rigidité sociale. Il est alors difficile de justifier même le terme de réseaux. Ils sont trop «faiblement» connectés pour cela et peuvent probablement être brisés avant d'atteindre une taille raisonnable.

L'étude précise des relations indirectes est d'une importance fondamentale dans notre modèle. Une des problèmes de notre méthode est que seuls les noeuds les plus vieux peuvent devenir très connectés, car ils restent dans la «mémoire» de leurs partenaires ad vitam eternam. Ils finissent par monopoliser la majorité des liens sur le réseau. Une modification que nous explorons actuellement est de «vider» cette mémoire par le bas à un certain rythme. On peut aussi se demander comment des mécanismes de priorités dans les connaissances pourraient influencer nos résultats. Il a été montré par ailleurs qu'il est possible d'étudier de tels structures dans un formalisme de théorie des champs [102]. Il paraît évident qu'obtenir une telle description de notre modèle pourrait conduire à une étude analytique approfondie. Les deux couleurs pourraient être alors perçue comme des interactions dans un système à deux niveaux. C'est la voie que nous explorons en priorité.

Pour conclure, nous insistons sur le fait que les simulations numériques sont les outils les plus à même de nous aider à comprendre les détails microscopiques qui se cachent derrière des structures comme le World Wide Web. Comprendre ces mécanismes est très important et nous espérons que des résultats empiriques nouveaux vont permettre d'orienter les recherches dans ce domaine.

Chapitre 7

Conclusion

Nous avons présenté dans ce manuscrit trois travaux indépendants, basés sur le concept général des théories effectives pour des corrélations longues portées. Nous allons rappeler les résultats principaux obtenus ainsi que donner quelques perspectives sur les directions de recherche futures que je souhaite aborder.

La première partie de cette thèse est concentrée sur l'application du groupe de renormalisation dans l'espace interne au modèle de Luttinger. Cette extension fonctionnelle du groupe de renormalisation est une généralisation de la procédure de Callan-Szymanzik, où les degrés de libertés du systèmes sont éliminés en fonction de leur amplitude dans l'espace interne d'une théorie des champs. Les fluctuations quantiques engendrées par l'interaction sont alors allumées progressivement au cours de l'évolution. L'élimination des modes les moins perturbatifs est obtenue à l'aide d'une théorie effective pour laquelle un grand nombre de modes sont déjà éliminés. Appliqué au modèle de Luttinger, nous avons pu mettre en évidence le couplage fort entre les constituants du modèle au voisinage immédiat des points de Fermi. Cette contribution modeste confirme la présence de divergences sans pour autant demander d'effectuer un calcul perturbatif standard. Nous avons par ailleurs retrouvé les résultats standards obtenus soit par l'utilisation d'identités de Ward ou par l'application naïve du groupe de renormalisation. Nos résultats suggère aussi qu'il serai profitable de mener une étude plus approfondie de la bosonisation pour comprendre les effets de la prescription d'ordre normal.

Le deuxième axe de cette thèse avait pour but de jeter les bases d'une construction de l'action effective d'un système quantique ouvert à deux niveaux dans le cadre de la fonctionnelle densité-courant. Nous avons donné les principaux points de la construction et nous espérons dans les prochaines semaines pouvoir obtenir les premiers résultats permettant une comparaison directe avec les méthodes standards. Le point principal est l'apparition au niveau classique et dans un simple modèle quantique d'une dérivée temporelle symétrisée. Nous souhaitons notamment comprendre qu'elle est son effet dans la dynamique de relaxation du système.

Le dernier point traite des réseaux complexes et de leur description en physique statistique. Le développement de l'étude des réseaux «scale-free» est constant et nous nous sommes proposés d'étudier un modèle simple où des corrélations statistiques entre deux ensembles contrôlent la dynamique de croissance du réseau. Ces relations à deux

niveaux entre les noeuds du réseaux ont alors été en mesure de reproduire la distribution en loi de puissance de la connectivité à la fois pour les relations directes entre les noeuds et pour les relations indirectes. Des ingrédients supplémentaires, comme la diffusion «d'une onde de popularité» sur le réseau ont permis de reproduire un large éventail d'exposants tout en conservant la rapidité de l'algorithme. Obtenir une équation naturelle permettant d'obtenir les propriétés de manière analytique et un objectif que nous nous sommes fixés pour la suite.

Enfin, je remercie le lecteur d'être arrivé jusqu'à la conclusion de ce travail.

Annexe A

Notations

Cette annexe contient un certain nombre de notations que nous utilisons fréquemment dans le manuscrit. Soient f et g une fonction de une ou plusieurs variables. Nous noterons :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad (\text{A.1})$$

En particulier la distribution delta de Dirac pourra être notée comme $\delta(x - y) = \delta_{x,y} = \delta_{x-y,0}$. Le produit de convolution sera donné sous la forme :

$$f \cdot g = (f \cdot g)_{x,y} = \int_z f(x, z)g(z, y). \quad (\text{A.2})$$

Si A et B sont deux matrices dont les éléments sont des fonctions à deux variables, nous noterons :

$$(A \cdot B)_{i,j}(x, y) = \sum_k A_{i,k} \cdot B_{k,j} = \sum_k \int_z A_{i,k}(x, z) \cdot B_{k,j}(z, y) \quad (\text{A.3})$$

On définit aussi par ailleurs

$$\int_x = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_{-\infty}^{+\infty} d\mathbf{x} \quad (\text{A.4})$$

ainsi que la notation suivante pour les dérivées fonctionnelles :

$$F_{\phi, \chi}^{(2)} = \frac{\delta^2 F[\phi, \chi]}{\delta\phi\delta\chi} \quad (\text{A.5})$$

Annexe B

Groupe de Renormalisation dans l'espace interne pour le modèle de Luttinger

B.1 Relation fonctionnelle entre $W^{(2)}$ et $\Gamma^{(2)}$

Le lien formelle qui existe entre les dérivées fonctionnelles secondes des deux fonctionnelles génératrices Γ et W repose sur un petit jeu formel consistant à utiliser à la fois les propriétés de base de la dérivation fonctionnelle et la transformation de Legendre qui définit Γ

$$\Gamma[\Psi^\dagger, \Psi] = -W[j, j^\dagger] + \sum_{\sigma} (\Psi_{\sigma}^\dagger \cdot j_{\sigma} + j_{\sigma}^\dagger \cdot \Psi_{\sigma}), \quad (\text{B.1})$$

avec

$$\Psi_{\sigma;x}^\dagger = -\frac{\delta W}{\delta j_{\sigma;x}}, \quad \Psi_{\sigma;x} = \frac{\delta W}{\delta j_{\sigma;x}^\dagger}. \quad (\text{B.2})$$

De manière équivalente, les sources peuvent être exprimées en fonctions des champs Ψ^\dagger et Ψ

$$j_{\sigma;x} = \frac{\delta W}{\delta \Psi_{\sigma;x}^\dagger}, \quad j_{\sigma;x}^\dagger = -\frac{\delta W}{\delta \Psi_{\sigma;x}}. \quad (\text{B.3})$$

Dans un premier temps on exprime la distribution delta de Dirac comme une dérivée fonctionnelle. Ceci peut être fait de 4 différentes manières selon la valeur de l'indice σ

$$\delta_{x,y} = \frac{\delta \Psi_{\sigma;x}}{\delta \Psi_{\sigma;y}} = \frac{\delta \Psi_{\sigma;x}^\dagger}{\delta \Psi_{\sigma;y}^\dagger} \quad (\text{B.4})$$

On verra que ces 4 relations sont indépendantes. Commençons par exemple à effectuer le premier calcul :

$$\begin{aligned}
 \delta_{x,y} &= \frac{\delta\Psi_{+;x}}{\delta\Psi_{+;y}} \\
 &= \frac{\delta}{\delta\Psi_{+;y}} \left[\frac{\delta W[j^\dagger, j]}{\delta j_{+;x}^\dagger} \right] \\
 &= \sum_\sigma \int_z \left(\frac{\delta j_{\sigma;z}}{\delta\Psi_{+;y}} \frac{\delta}{\delta j_{\sigma;z}} + \frac{\delta j_{\sigma;z}^\dagger}{\delta\Psi_{+;y}} \frac{\delta}{\delta j_{\sigma;z}^\dagger} \right) \left[\frac{\delta W[j^\dagger, j]}{\delta j_{+;x}^\dagger} \right] \\
 &= \sum_\sigma \int_z \left(\frac{\delta^2 \Gamma[\Psi^\dagger, \Psi]}{\delta\Psi_{+;y} \delta\Psi_{\sigma;z}^\dagger} \frac{\delta^2 W[j^\dagger, j]}{\delta j_{\sigma;z} \delta j_{+;x}^\dagger} - \frac{\delta^2 \Gamma[\Psi^\dagger, \Psi]}{\delta\Psi_{+;y} \delta\Psi_{\sigma;z}} \frac{\delta^2 W[j^\dagger, j]}{\delta j_{\sigma;z}^\dagger \delta j_{+;x}^\dagger} \right) \quad (B.5)
 \end{aligned}$$

bien entendu de manière triviale, le cas où les signes «+» dans la dérivée d'origine sont remplacés par des «-» s'en déduit sans autre forme de procès :

$$\begin{aligned}
 \delta_{x,y} &= \frac{\delta\Psi_{-;x}}{\delta\Psi_{-;y}} \\
 &= \sum_\sigma \int_z \left(\frac{\delta^2 \Gamma[\Psi^\dagger, \Psi]}{\delta\Psi_{-;y} \delta\Psi_{\sigma;z}^\dagger} \frac{\delta^2 W[j^\dagger, j]}{\delta j_{\sigma;z} \delta j_{-;x}^\dagger} - \frac{\delta^2 \Gamma[\Psi^\dagger, \Psi]}{\delta\Psi_{-;y} \delta\Psi_{\sigma;z}} \frac{\delta^2 W[j^\dagger, j]}{\delta j_{\sigma;z}^\dagger \delta j_{-;x}^\dagger} \right) \quad (B.6)
 \end{aligned}$$

De même, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \delta_{x,y} &= \frac{\delta\Psi_{+;x}^\dagger}{\delta\Psi_{+;y}^\dagger} \\
 &= -\frac{\delta}{\delta\Psi_{+;y}^\dagger} \left[\frac{\delta W[j^\dagger, j]}{\delta j_{+;x}} \right] \\
 &= -\sum_\sigma \int_z \left(\frac{\delta j_{\sigma;z}}{\delta\Psi_{+;y}^\dagger} \frac{\delta}{\delta j_{\sigma;z}} + \frac{\delta j_{\sigma;z}^\dagger}{\delta\Psi_{+;y}^\dagger} \frac{\delta}{\delta j_{\sigma;z}^\dagger} \right) \left[\frac{\delta W[j^\dagger, j]}{\delta j_{+;x}} \right] \\
 &= -\sum_\sigma \int_z \left(\frac{\delta^2 \Gamma[\Psi^\dagger, \Psi]}{\delta\Psi_{+;y}^\dagger \delta\Psi_{\sigma;z}^\dagger} \frac{\delta^2 W[j^\dagger, j]}{\delta j_{\sigma;z} \delta j_{+;x}} - \frac{\delta^2 \Gamma[\Psi^\dagger, \Psi]}{\delta\Psi_{+;y}^\dagger \delta\Psi_{\sigma;z}} \frac{\delta^2 W[j^\dagger, j]}{\delta j_{\sigma;z}^\dagger \delta j_{+;x}} \right), \quad (B.7)
 \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}
 \delta_{x,y} &= \frac{\delta\Psi_{-;x}^\dagger}{\delta\Psi_{-;y}^\dagger} \\
 &= -\sum_\sigma \int_z \left(\frac{\delta^2 \Gamma[\Psi^\dagger, \Psi]}{\delta\Psi_{-;y}^\dagger \delta\Psi_{\sigma;z}^\dagger} \frac{\delta^2 W[j^\dagger, j]}{\delta j_{\sigma;z} \delta j_{-;x}} - \frac{\delta^2 \Gamma[\Psi^\dagger, \Psi]}{\delta\Psi_{-;y}^\dagger \delta\Psi_{\sigma;z}} \frac{\delta^2 W[j^\dagger, j]}{\delta j_{\sigma;z}^\dagger \delta j_{-;x}} \right). \quad (B.8)
 \end{aligned}$$

Ces quatre relations obtenues, il est clair qu'il pourrait être intéressant de les écrire sous la forme d'un produit de convolution de deux matrices. D'autant qu'il y a encore

un certain nombre de relations (12 en tout) que l'on peut écrire qui proviennent de la définition de la dérivée fonctionnelle :

$$0 = \frac{\delta\Psi_{\sigma,x}^\dagger}{\delta\Psi_{\sigma',x}^\dagger}, \frac{\delta\Psi_{\sigma,x}}{\delta\Psi_{\sigma',x}}, \frac{\delta\Psi_{\sigma,x}^\dagger}{\delta\Psi_{\sigma',x}^\dagger} = \dots \quad (\text{B.9})$$

avec σ et σ' choisi de manière adéquate. En tout on obtient 16 relations qui correspondent à l'écriture suivante

$$\int_y \Gamma_{z,y}^{(2)} \times W_{y,x}^{(2)} = \delta_{x,y} \mathbb{1}_4, \quad (\text{B.10})$$

où

$$\Gamma_{z,y}^{(2)} = \begin{pmatrix} \Gamma_{\Psi_{+,z}^\dagger, \Psi_{+,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{+,z}^\dagger, \Psi_{-,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{+,z}^\dagger, \Psi_{+,y}^\dagger}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{+,z}^\dagger, \Psi_{-,y}^\dagger}^{(2)} \\ \Gamma_{\Psi_{-,z}^\dagger, \Psi_{+,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{-,z}^\dagger, \Psi_{-,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{-,z}^\dagger, \Psi_{+,y}^\dagger}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{-,z}^\dagger, \Psi_{-,y}^\dagger}^{(2)} \\ \Gamma_{\Psi_{+,z}, \Psi_{+,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{+,z}, \Psi_{-,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{+,z}, \Psi_{+,y}^\dagger}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{+,z}, \Psi_{-,y}^\dagger}^{(2)} \\ \Gamma_{\Psi_{-,z}, \Psi_{+,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{-,z}, \Psi_{-,y}}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{-,z}, \Psi_{+,y}^\dagger}^{(2)} & \Gamma_{\Psi_{-,z}, \Psi_{-,y}^\dagger}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.11})$$

$$W_{y,x}^{(2)} = \begin{pmatrix} W_{j_{+,y}^\dagger, j_{+,x}}^{(2)} & W_{j_{+,y}^\dagger, j_{-,x}}^{(2)} & -W_{j_{+,y}^\dagger, j_{+,x}^\dagger}^{(2)} & -W_{j_{+,y}^\dagger, j_{-,x}^\dagger}^{(2)} \\ W_{j_{-,y}^\dagger, j_{+,x}}^{(2)} & W_{j_{-,y}^\dagger, j_{-,x}}^{(2)} & -W_{j_{-,y}^\dagger, j_{+,x}^\dagger}^{(2)} & -W_{j_{-,y}^\dagger, j_{-,x}^\dagger}^{(2)} \\ -W_{j_{+,y}, j_{+,x}}^{(2)} & -W_{j_{+,y}, j_{-,x}}^{(2)} & W_{j_{+,y}, j_{+,x}^\dagger}^{(2)} & W_{j_{+,y}, j_{-,x}^\dagger}^{(2)} \\ -W_{j_{-,y}, j_{+,x}}^{(2)} & -W_{j_{-,y}, j_{-,x}}^{(2)} & W_{j_{-,y}, j_{+,x}^\dagger}^{(2)} & W_{j_{-,y}, j_{-,x}^\dagger}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.12})$$

B.2 Dérivation de l'évolution quartique pour le modèle de Luttinger

Pour dériver l'équation (4.56) du chapitre 4, il faut calculer les éléments matriciels de la série de Neumann (4.46) qui interviennent dans la trace de l'équation d'évolution. Il y a deux termes à calculer alors :

$$(G_0 \cdot (\Delta^\parallel + \Delta^\times) \cdot G_0 \cdot (\Delta^\parallel + \Delta^\times) \cdot G_0)_{1,1} \quad (\text{B.13})$$

$$(G_0 \cdot (\Delta^\parallel + \Delta^\times) \cdot G_0 \cdot (\Delta^\parallel + \Delta^\times) \cdot G_0)_{2,2} \quad (\text{B.14})$$

Les indices globaux nous rappellent que ces termes sont les éléments diagonaux d'ordres 4 dans les champs intervenant dans la série de Neuman. Ces termes sont des distributions, donc des fonctions de deux variables d'espace-temps x, y qu'il faudra aussi tracer ultérieurement. Tout d'abord se pose le problème des produits au sens matriciel. On peut écrire formellement les égalités suivantes (en posant $\Delta^\parallel + \Delta^\times = \Delta$) :

$$(G_0 \cdot \Delta \cdot G_0 \cdot \Delta \cdot G_0)_{1,1} = (G_0 \cdot \Delta \cdot G_0 \cdot \Delta)_{1,1} \cdot G_{0;1,1} \quad (\text{B.15})$$

$$= (G_0 \cdot \Delta \cdot G_0)_{1,i} \cdot \Delta_{i,1} \cdot G_{0;1,1} \quad (\text{B.16})$$

$$= G_{0;1,1} \cdot \Delta_{1,i} \cdot G_{0;i,i} \cdot \Delta_{i,1} \cdot G_{0;1,1} \quad (\text{B.17})$$

$$= A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \quad (\text{B.18})$$

où la sommation sur l'indice i est implicite. De même

$$(G_0 \cdot \Delta \cdot G_0 \cdot \Delta \cdot G_0)_{2,2} = (G_0 \cdot \Delta \cdot G_0 \cdot \Delta)_{2,2} \cdot G_{0;2,2} \quad (\text{B.19})$$

$$= (G_0^{-1} \cdot \Delta \cdot G_0)_{2,i} \cdot \Delta_{i,2} \cdot G_{0;2,2} \quad (\text{B.20})$$

$$= G_{0;2,2} \cdot \Delta_{2,i} \cdot G_{0;i,i} \cdot \Delta_{i,2} \cdot G_{0;2,2} \quad (\text{B.21})$$

$$= B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \quad (\text{B.22})$$

Ces huit termes sont des fonctions des variables x, y . Dans la trace de l'équation formelle d'évolution, ils interviennent tous multiplié par la quantité $c_{\sigma;x,y} = [-\partial_t + \epsilon_{\sigma}(-i\partial_x)]\delta_{x,y}$. De sorte qu'il va nous falloir calculer les termes du type $A_{i,x,y}c_{\sigma;y,x}$ où l'on effectue une trace en intégrant sur x, y . Pour les A_i on trouve :

$$(A_1)_{x,y} c_{+;y,x} = G_{+;x,y_1} \left(\gamma_{z_1,z_2,y_1,y_2}^{\times} \psi_{-;z_1}^{\dagger} \psi_{-;z_2} + 4\gamma_{y_1,y_2,z_1,z_2}^{\parallel} \psi_{+;z_1}^{\dagger} \psi_{+;z_2} \right) G_{+;y_2,y_3} \\ \times \left(\gamma_{z_3,z_4,y_3,y_4}^{\times} \psi_{-;z_3}^{\dagger} \psi_{-;z_4} + 4\gamma_{y_3,y_4,z_3,z_4}^{\parallel} \psi_{+;z_3}^{\dagger} \psi_{+;z_4} \right) G_{+;y_4,y} c_{+;y,x} \quad (\text{B.23})$$

$$(A_2)_{x,y} c_{+;y,x} = G_{+;x,y_1} \gamma_{z_1,y_2,y_1,z_2}^{\times} \psi_{-;z_1}^{\dagger} \psi_{+;z_2} G_{-;y_2,y_3} \gamma_{y_3,z_3,z_4,y_4}^{\times} \\ \times \psi_{+;z_3}^{\dagger} \psi_{-;z_4} G_{+;y_4,y} c_{+;y,x} \quad (\text{B.24})$$

$$(A_3)_{x,y} c_{+;y,x} = -4G_{+;x,y_1} \gamma_{y_2,z_1,y_1,z_2}^{\parallel} \psi_{+;z_1} \psi_{+;z_2} G_{+;y_3,y_2} \gamma_{z_3,y_4,z_4,y_3}^{\parallel} \\ \times \psi_{+;z_3}^{\dagger} \psi_{+;z_4}^{\dagger} G_{+;y_4,y} c_{+;y,x} \quad (\text{B.25})$$

$$(A_4)_{x,y} c_{+;y,x} = G_{+;x,y_1} \gamma_{y_2,z_1,y_1,z_2}^{\times} \psi_{-;z_1} \psi_{+;z_2} G_{-;y_3,y_2} \gamma_{z_3,y_3,z_4,y_4}^{\times} \\ \times \psi_{-;z_3}^{\dagger} \psi_{+;z_4}^{\dagger} G_{+;y_4,y} c_{+;y,x} \quad (\text{B.26})$$

De même, pour les B_i :

$$(B_1)_{x,y} c_{-;y,x} = -G_{-;x,e} \gamma_{e,b,c,f}^{\times} \psi_{-;b} \psi_{+;c}^{\dagger} G_{+;f,g} \gamma_{a,h,g,d}^{\times} \psi_{-;a} \psi_{+;d} G_{-;h,y} c_{-;y,x} \quad (\text{B.27})$$

$$(B_2)_{x,y} c_{-;y,x} = G_{-;x,e} \left(\gamma_{e,f,a,b}^{\times} \psi_{+;a} \psi_{+;b} + \tilde{\gamma}_{e,f,a,b}^{\parallel} \psi_{-;a} \psi_{-;b} \right) G_{-;f,g} \\ \times \left(\gamma_{g,h,c,d}^{\times} \psi_{+;c} \psi_{+;d} + \tilde{\gamma}_{g,h,c,d}^{\parallel} \psi_{-;c} \psi_{-;d} \right) G_{-;h,y} c_{-;y,x} \quad (\text{B.28})$$

$$(B_3)_{x,y} c_{-;y,x} = G_{-;x,e} \gamma_{e,b,f,d}^{\times} \psi_{-;b} \psi_{+;d} G_{+;g,f} \gamma_{a,h,c,g}^{\times} \psi_{-;a} \psi_{+;c}^{\dagger} G_{-;h,y} c_{-;y,x} \quad (\text{B.29})$$

$$(B_4)_{x,y} c_{-;y,x} = -G_{-;x,e} \left[\gamma_{f,b,e,d}^{\parallel} - \gamma_{e,b,f,d}^{\parallel} \right] \psi_{-;b} \psi_{-;d} G_{-;g,f} \\ \times \left[\gamma_{a,h,c,g}^{\parallel} - \gamma_{a,g,c,h}^{\parallel} \right] \psi_{-;a} \psi_{-;c}^{\dagger} G_{-;h,y} c_{-;y,x} \quad (\text{B.30})$$

$$(\text{B.31})$$

Il suffit alors de dériver fonctionnellement les équations précédentes afin de pouvoir identifier le membre de gauche et le membre de droite de l'équation d'évolution. Ces dérivées fonctionnelles ne posent aucun problème. Nous ne les présenterons donc pas ici. Il est important de noter que dans les équations précédentes, il y a intégration implicite sur *toutes les variables d'espace-temps* z_i . Par ailleurs, nous constatons que de temps en temps le propagateur insérer au milieu des Δ voit ses indices permutés. Ceci est essentiel pour la cohérence des graphes obtenus. Nous rappelons ici que l'équation (4.48) d'évolution est donnée par :

$$\partial_\lambda \tilde{\Gamma} = -\frac{1}{\lambda^2} \text{tr} \left\{ [-\partial_t + \epsilon_\sigma(-i\partial_x)] \cdot G_0 \cdot \sum_{n=0}^2 (-1)^n [(\Delta^\times + \Delta'') \cdot G_0]^n \right\} \quad (\text{B.32})$$

L'hypothèse fonctionnel que nous avons fait constitue le membre de droite de l'équation d'évolution :

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}[\psi^\dagger, \psi] = & \Gamma_0 - \sum_{\sigma=\pm 1} \psi_\sigma^\dagger \cdot \Sigma_\sigma \cdot \psi_\sigma - \int_{a,b,c,d} \gamma_{a,b,c,d}^\times \psi_{-;a}^\dagger \psi_{-;b} \psi_{+;c}^\dagger \psi_{+;d} \\ & - \int_{a,b,c,d} \gamma_{a,b,c,d}'' \left(\psi_{+;a}^\dagger \psi_{+;b} \psi_{+;c}^\dagger \psi_{+;d} + \psi_{-;a}^\dagger \psi_{-;b} \psi_{-;c}^\dagger \psi_{-;d} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

En comparant donc les dérivées du membres de gauche et du membre de droite on trouve alors les équations suivantes pour l'évolution des constantes de couplages. Pour la première :

$$\begin{aligned} \lambda^2 \dot{\gamma}_{x_1, y_1, x_2, y_2}^\times = & - \int_{z_i} \{ G_{+; z_6, z_1} (-4\gamma_{x_1, y_1, z_1, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} \tilde{\gamma}_{z_3, z_4, x_2, y_2}'' \\ & - 4\tilde{\gamma}_{z_1, z_2, x_2, y_2}'' G_{+; z_2, z_3} \gamma_{x_1, y_1, z_3, z_4}^\times + \gamma_{x_1, z_2, z_1, y_2}^\times G_{-; z_2, z_3} \gamma_{z_3, y_1, x_2, z_4}^\times \\ & + \gamma_{z_2, y_1, z_1, y_2}^\times G_{-; z_3, z_2} \gamma_{x_1, z_3, x_2, z_4}^\times) G_{+; z_4, z_5} [-\partial_t + \epsilon_+(-i\partial_x)]_{z_5, z_6} \\ & + G_{-; z_6, z_1} (\gamma_{z_1, y_1, x_2, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} \gamma_{x_1, z_4, z_3, y_2}^\times \\ & + \gamma_{z_1, y_1, z_2, y_2}^\times G_{+; z_3, z_2} \gamma_{x_1, z_4, x_2, z_3}^\times - 4\tilde{\gamma}_{z_1, z_2, x_1, y_1}'' G_{-; z_2, z_3} \gamma_{z_3, z_4, x_2, y_2}^\times \\ & - 4\gamma_{z_1, z_2, x_2, y_2}^\times G_{-; z_2, z_3} \tilde{\gamma}_{z_3, z_4, x_1, y_1}'') G_{-; z_4, z_5} [-\partial_t + \epsilon_-(-i\partial_x)]_{z_5, z_6} \} \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

ainsi que pour la seconde :

$$\begin{aligned}
 \lambda^2 \dot{\gamma}_{x_1, y_1, x_2, y_2}'' &= - \int_{z_i} \{ G_{+; z_6, z_1} (-\gamma_{x_1, y_1, z_1, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} \gamma_{x_2, y_2, z_3, z_4}^\times \\
 &\quad - \gamma_{x_2, y_2, z_1, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} \gamma_{x_1, y_1, z_3, z_4}^\times + \gamma_{x_1, y_2, z_1, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} \gamma_{x_2, y_1, z_3, z_4}^\times \\
 &\quad + \gamma_{x_2, y_1, z_1, z_2}^\times G_{+; z_2, z_3} \gamma_{x_1, y_2, z_3, z_4}^\times) G_{+; z_4, z_5} [-\partial_t + \epsilon_+ (-i\partial_x)]_{z_5, z_6} \\
 &\quad + G_{-; z_6, z_1} (-16\gamma_{z_1, z_2, x_1, y_1}'' G_{-; z_2, z_3} \gamma_{z_3, z_4, x_2, y_2}'' \\
 &\quad - 16\gamma_{z_1, z_2, x_2, y_2}'' G_{-; z_2, z_3} \gamma_{z_3, z_4, x_1, y_1}'' + 16\gamma_{z_1, z_2, x_1, y_2}'' G_{-; z_2, z_3} \gamma_{z_3, z_4, x_2, y_1}'' \\
 &\quad + 16\gamma_{z_1, z_2, x_2, y_1}'' G_{-; z_2, z_3} \gamma_{z_3, z_4, x_1, y_2}'' - 4\gamma_{z_2, y_1, z_1, y_2}'' G_{-; z_3, z_2} \gamma_{x_1, z_4, x_2, z_3}'' \\
 &\quad + 4\gamma_{z_2, y_2, z_1, y_1}'' G_{-; z_3, z_2} \gamma_{x_1, z_4, x_2, z_3}'') G_{z_4, z_5} [-\partial_t + \epsilon_- (-i\partial_x)]_{z_5, z_6} \}.
 \end{aligned} \tag{B.35}$$

Ce qui achève la dérivation de la partie quartique de l'équation d'évolution. Reste alors le fastidieux travail des transformées de Fourier terme à terme des équations précédentes. On trouve alors le résultat final

$$\begin{aligned}
 \partial_\lambda \gamma_{p, q, r, s}^\times &= \partial'_\lambda \int_{u, v} [G_{+; u} (-4\gamma_{p, q, u, v}^\times G_{+; v} \gamma_{v, u, r, s}'' + \gamma_{v, q, u, s}^\times G_{-; v} \gamma_{p, v, r, u}^\times) \\
 &\quad + G_{-; u} (\gamma_{u, q, r, v}^\times G_{+; v} \gamma_{p, u, v, s}^\times - 4\gamma_{u, v, r, s}^\times G_{-; v} \tilde{\gamma}_{v, u, p, q}'')] \\
 \partial_\lambda \gamma_{p, q, r, s}'' &= \partial'_\lambda \int_{u, v} [G_{+; u} (-\gamma_{r, s, u, v}^\times G_{+; v} \gamma_{p, q, v, u}^\times + \gamma_{r, q, u, v}^\times G_{+; v} \gamma_{p, s, v, u}^\times) \\
 &\quad + G_{-; u} (-16\gamma_{u, v, p, q}'' G_{-; v} \gamma_{v, u, r, s}'' + 16\gamma_{u, v, p, s}'' G_{-; v} \gamma_{v, u, r, q}'' - 4\gamma_{v, q, u, s}'' G_{-; v} \gamma_{p, u, r, v}'')].
 \end{aligned} \tag{B.36}$$

B.3 Intégrales de boucles

Cette section contient les détails des intégrales de boucles qu'il est nécessaire de calculer pour résoudre les équations (4.59). Elles restent relativement simple à calculer et peuvent très facilement se trouver en suivant la même procédure. Nous détaillerons séparément les intégrales en jeu pour les deux équations d'évolution :

B.3.1 Pour la constante de couplage γ^\times

Pour la première des deux équations d'évolution il nous faut calculer ces intégrales :

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbf{t}, \omega} G_{+;t} G_{+;p-q+t}, \\
 I_2 &= \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbf{t}, \omega} G_{+;t} G_{-;p+r-t}, \\
 I_3 &= \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbf{t}, \omega} G_{-;t} G_{+;t-q+r}, \\
 I_4 &= \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbf{t}, \omega} G_{-;t} G_{-;t+r-s},
 \end{aligned} \tag{B.37}$$

où

$$G_\sigma = \frac{\lambda}{-\partial_t + \epsilon_\sigma(-i\partial_x)}. \tag{B.38}$$

C'est un cas standard de l'application du théorème des résidus pour le calcul d'intégrales

$$I_1 = \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} d\mathbf{u} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{(\omega + i\mathbf{u})(\omega + \omega_p - \omega_q + i(\mathbf{u} + \mathbf{p} - \mathbf{q}))} \tag{B.39}$$

On trouve alors

$$I_1 = 2i\pi \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} d\mathbf{u} \left[\frac{\Theta(-\mathbf{u})}{\omega_p - \omega_q + i(\mathbf{p} - \mathbf{q})} + \frac{\Theta(-\mathbf{u} + \mathbf{q} - \mathbf{p})}{\omega_q - \omega_p - i(\mathbf{p} - \mathbf{q})} \right] \tag{B.40}$$

Qui nous donne finalement

$$I_1 = \frac{2\pi(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{q}})}{\Delta_p - \Delta_q + 2(\hat{\mathbf{p}} - \hat{\mathbf{q}})}. \tag{B.41}$$

Les trois autres intégrales se calculent de manière similaire. Successivement :

$$I_2 = \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} d\mathbf{u} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{(\omega + i\mathbf{u})(\omega - \omega_p - \omega_r - i(\mathbf{u} - \mathbf{p} - \mathbf{r}))} \tag{B.42}$$

pour laquelle

$$I_2 = F_2(0) - F_2(-\Lambda) - [F_2(\Lambda) - F_2(\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{r}})] \tag{B.43}$$

où

$$F_2(\mathbf{u}) = -\pi \ln \left| \mathbf{u} - \frac{\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{r}}}{2} i \frac{\omega_p + \omega_r}{2} \right| = -\pi \ln \left| \mathbf{u} - \hat{\mathbf{r}} - \frac{\Delta_p + \Delta_r}{2} \right|. \tag{B.44}$$

Finalement

$$I_2 = -\pi \ln \left| \frac{\left(\hat{\mathbf{r}} + \frac{\Delta_p + \Delta_r}{2} \right) \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{\Delta_p + \Delta_r}{2} \right)}{\left(\Lambda - \hat{\mathbf{r}} - \frac{\Delta_p + \Delta_r}{2} \right) \left(\Lambda + \hat{\mathbf{r}} + \frac{\Delta_p + \Delta_r}{2} \right)} \right|. \tag{B.45}$$

Pour la troisième intégrale :

$$I_3 = - \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} d\mathbf{u} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{(\omega - i\mathbf{u})(\omega - \omega_q + \omega_r + i(\mathbf{u} - \mathbf{q} + \mathbf{r} - 2k_F))} \quad (\text{B.46})$$

qui devient

$$I_3 = -F_3(\Lambda) - F_3(-\Lambda) + F_3(0) + F_3(\hat{\mathbf{q}} - \hat{\mathbf{r}}) \quad (\text{B.47})$$

où

$$F_3(\mathbf{u}) = \pi \ln \left| \mathbf{u} + \frac{\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{q}}}{2} + i \frac{\omega_q - \omega_r}{2} \right| \quad (\text{B.48})$$

après intégration sur les fréquences. Une étape supplémentaire simple donne :

$$I_3 = \pi \ln \left| \frac{\left(\frac{\Delta_q - \Delta_r}{2} - \hat{\mathbf{q}} \right) \left(\frac{\Delta_q - \Delta_r}{2} - \hat{\mathbf{r}} \right)}{\left(\hat{\mathbf{q}} + \frac{\Delta_q - \Delta_r}{2} \right)^2 - \Lambda^2} \right|. \quad (\text{B.49})$$

Enfin

$$I_4 = \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} d\mathbf{u} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{(\omega - i\mathbf{u})(\omega + \omega_r - \omega_s + i(-\mathbf{u} - \mathbf{r} + \mathbf{s}))} \quad (\text{B.50})$$

qui se résume à :

$$\begin{aligned} I_4 &= 2i\pi \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} d\mathbf{u} \left[\frac{\Theta(\mathbf{u})}{\omega_r - \omega_s + i(\mathbf{s} - \mathbf{r})} + \frac{\Theta(\mathbf{u} + \mathbf{r} - \mathbf{s})}{\omega_s - \omega_r - i(\mathbf{s} - \mathbf{r})} \right] \\ &= \frac{2\pi(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{r}})}{\Delta_s - \Delta_r + 2(\hat{\mathbf{s}} - \hat{\mathbf{r}})} \end{aligned} \quad (\text{B.51})$$

B.3.2 Pour la constante de couplage γ^{II}

Pour la deuxième des deux équations d'évolution il nous faut calculer ces cinq intégrales :

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbf{t}, \omega} G_{+;t} G_{+;r-s+t}, \\ J_2 &= \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbf{t}, \omega} G_{+;t} G_{+;r-q+t}, \\ J_3 &= \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbf{t}, \omega} G_{-;t} G_{-;p+r-t}, \\ J_4 &= \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbf{t}, \omega} G_{-;t} G_{-;t-r+s}, \\ J_5 &= \frac{1}{\lambda^2} \int_{\mathbf{t}, \omega} G_{-;t} G_{-;u-r+q}. \end{aligned} \quad (\text{B.52})$$

Les propriétés de symétrie droite/gauche impliquent que $J_4 = J_1$ and $J_5 = J_2$. Puis on procède de manière analogue au cas précédent :

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} d\mathbf{u} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{(\omega + i\mathbf{u})(\omega + \omega_r - \omega_s + i(\mathbf{u} + \mathbf{r} - \mathbf{s}))} \\
 &= 2i\pi \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} d\mathbf{u} \left[\frac{\Theta(-\mathbf{u})}{\omega_r - \omega_s + i(\mathbf{r} - \mathbf{s})} + \frac{\Theta(-\mathbf{u} + \mathbf{s} - \mathbf{r})}{\omega_s - \omega_r - i(\mathbf{r} - \mathbf{s})} \right] \\
 &= \frac{2\pi(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{s}})}{\Delta_r - \Delta_s + 2(\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{s}})},
 \end{aligned} \tag{B.53}$$

et

$$\begin{aligned}
 J_2 &= - \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} d\mathbf{u} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{(\omega + i\mathbf{u})(\omega + \omega_r - \omega_q + i(\mathbf{u} + \mathbf{r} - \mathbf{q}))} \\
 &= -2i\pi \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} d\mathbf{u} \left[\frac{\Theta(-\mathbf{u})}{\omega_r - \omega_q + i(\mathbf{r} - \mathbf{q})} + \frac{\Theta(-\mathbf{u} - \mathbf{r} + \mathbf{q})}{\omega_q - \omega_r - i(\mathbf{r} - \mathbf{q})} \right] \\
 &= 2\pi \frac{\hat{\mathbf{r}} - \hat{\mathbf{q}} + 2k_F}{\Delta_r - \Delta_q + 2\hat{\mathbf{q}} - 2k_F}
 \end{aligned} \tag{B.54}$$

Finalement, la dernière intégrale

$$\begin{aligned}
 J_3 &= - \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} d\mathbf{u} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{1}{(\omega - i\mathbf{u})(\omega - \omega_p - \omega_r - i(\mathbf{u} - \mathbf{p} - \mathbf{r} - 2k_F))} \\
 &= -2i\pi \int_{-\Lambda}^{+\Lambda} d\mathbf{u} \left[\frac{\Theta(\mathbf{u})}{-\omega_p - \omega_r - i(-\mathbf{p} - \mathbf{r} - 2k_F)} + \frac{\Theta(\mathbf{u} - \mathbf{p} - \mathbf{r} - 2k_F)}{\omega_p + \omega_r + i(-\mathbf{p} - \mathbf{r} - 2k_F)} \right] \\
 &= -2\pi \frac{\hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{r}} + 2k_F}{\Delta_p + \Delta_r + 2\hat{\mathbf{r}} + 2k_F}
 \end{aligned} \tag{B.55}$$

Annexe C

Systemes à deux niveaux

C.1 Identités utiles sur les matrices de Pauli

On rappelle que les matrices de Pauli σ_i sont définies par :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

$$(\text{C.4})$$

Nous aurons besoin des quelques identités suivantes :

$$\sigma_i^2 = \mathbb{1}_2, \quad (\text{C.5})$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{i,j} \mathbb{1}_2 + i \epsilon_{i,j,k} \sigma_k, \quad (\text{C.6})$$

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2 \delta_{i,j} \mathbb{1}_2, \quad (\text{C.7})$$

où $\epsilon_{i,j,k}$ est le tenseur de Levi-Civita et la convention d'Einstein sur les indices répétés est appliqué. Nous pouvons écrire alors les 3 relations suivantes :

$$\text{tr}(\sigma_i \sigma_j) = 2 \delta_{i,j}, \quad (\text{C.8})$$

et

$$\begin{aligned} \text{tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k) &= \text{tr}((\delta_{i,j} \mathbb{1}_2 + i \epsilon_{i,j,k'} \sigma_{k'}) \sigma_k) \\ &= 2i \epsilon_{i,j,k}, \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

puis finalement

$$\begin{aligned} \text{tr}(\sigma_i \sigma_j \sigma_k \sigma_l) &= \text{tr}((\delta_{i,j} \mathbb{1}_2 + i \epsilon_{i,j,m} \sigma_m)(\delta_{k,l} \mathbb{1}_2 + i \epsilon_{k,l,n} \sigma_n)) \\ &= 2 \delta_{k,l} \delta_{i,j} - 2 \epsilon_{i,j,m} \epsilon_{k,l,m} \\ &= 2 \delta_{k,l} \delta_{i,j} - 2(\delta_{i,k} \delta_{j,l} - \delta_{i,l} \delta_{j,k}). \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Ces relations vont être utiles pour calculer les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left((a - b\sigma_3)^{-1} \sigma_k \right) &= \operatorname{tr} \left[((a + b\sigma_3)(a - b\sigma_3))^{-1} (a + b\sigma_3) \sigma_k \right] \\ &= \frac{2b}{(a-b)(a+b)} \delta_{k,3}, \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} \left((a - b\sigma_3)^{-1} \sigma_k (c - d\sigma_3)^{-1} \sigma_l \right) &= \frac{1}{(a+b)(a-b)(c+d)(c-d)} \\ &\quad \times \operatorname{tr} \left[(a + b\sigma_3)^{-1} \sigma_k (c + d\sigma_3)^{-1} \sigma_l \right] \\ &= \frac{1}{(a+b)(a-b)(c+d)(c-d)} \\ &\quad \times (2ac\delta_{k,l} + 2i(ab - bc)\epsilon_{k,3,l} \\ &\quad \quad + (4\delta_{3,l}\delta_{3,k} - 2\delta_{k,l})bd), \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

On peut alors définir la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, \mathfrak{S} dont l'élément (k, l) est égal à

$$\mathfrak{S}_{k,l} = \operatorname{tr} \left[(a + b\sigma_3)^{-1} \sigma_k (c + d\sigma_3)^{-1} \sigma_l \right]. \quad (\text{C.13})$$

où a, b, c, d sont quatre nombres complexes tels que $a \neq b$ et $c \neq d$. Son expression détaillée est simplement déduite des égalités précédentes :

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(a+b)(c-d)} + \frac{1}{(a-b)(c+d)} & -\frac{1}{(a+b)(c-d)} + \frac{1}{(a-b)(c+d)} & 0 \\ \frac{1}{(a+b)(c-d)} - \frac{1}{(a-b)(c+d)} & \frac{1}{(a+b)(c-d)} + \frac{1}{(a-b)(c+d)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{(a+b)(c+d)} + \frac{1}{(a-b)(c-d)} \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$

C.2 Intégrales de boucles

C.2.1 Pour l'opérateur j

Nous devons calculer l'intégrale suivante :

$$I_1 = \int_{\omega'} e^{i2\omega'\eta} \frac{2(h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h))}{(\hbar\omega' - (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h)))(\hbar\omega' + (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h)))}, \quad (\text{C.15})$$

pour $\epsilon = 0^+$ et $\eta = 0^+$. Prenons tout d'abord le cas $h > 0$ pour lequel

$$I_1 = I_1^+ = \frac{1}{\hbar} \int_{\omega'} e^{\frac{i}{\hbar} 2\omega'\eta} \frac{2h}{(\omega' - h + i\epsilon)(\omega' + h - i\epsilon)}. \quad (\text{C.16})$$

Nous avons deux pôles dans le plan complexe. L'égalité $\eta = 0^+$ et le préfacteur exponentiel nous permettent de déterminer dans quel demi-plan effectuer l'intégration. Ici, c'est le demi-plan supérieur. En choisissant le contour de la figure xxx, on trouve :

$$I_1^+ = \frac{1}{2\pi\hbar} 2i\pi \frac{2h}{-2h} = -\frac{i}{\hbar} \quad (\text{C.17})$$

La contribution pour $h < 0$ s'en déduit facilement. L'expression avant intégration est la même, mais cette fois ci c'est l'autre pôle qui contribue. De sorte que

$$I_1 = -\operatorname{sgn}h \frac{i}{\hbar}. \quad (\text{C.18})$$

C.2.2 Pour l'opérateur Σ

Nous devons tout d'abord calculer l'intégrale I_2

$$I_2 = \int_{\omega} \frac{e^{2i(\omega_1+2\omega)\eta}}{(\omega + (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h))) (\omega_1 + \omega - (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h)))} + \frac{e^{2i(\omega_1+2\omega)\eta}}{(\omega - (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h))) (\omega_1 + \omega + (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h)))} \quad (\text{C.19})$$

Pour $h > 0$, nous obtenons donc

$$I_2^+ = \int_{\omega} \frac{e^{2i(\omega_1+2\omega)\eta}}{(\omega + h - i\epsilon) (\omega_1 + \omega - h + i\epsilon)} + \frac{e^{2i(\omega_1+2\omega)\eta}}{(\omega - h + i\epsilon) (\omega_1 + \omega + h - i\epsilon)} \quad (\text{C.20})$$

Les mêmes considérations que pour l'intégrale précédente nous conduisent après application du théorème des résidus à :

$$I_2^+ = i \left[\frac{1}{\omega_1 - 2h} + \frac{1}{-\omega_1 - 2h} \right] = -\frac{4ih}{\omega_1^2 - 4h^2} \quad (\text{C.21})$$

Pour $h < 0$, on trouve

$$I_2^- = \int_{\omega} \frac{e^{2i(\omega_1+2\omega)\eta}}{(\omega + h + i\epsilon) (\omega_1 + \omega - h - i\epsilon)} + \frac{e^{2i(\omega_1+2\omega)\eta}}{(\omega - h - i\epsilon) (\omega_1 + \omega + h + i\epsilon)} \quad (\text{C.22})$$

La contribution est la même que précédemment à un signe près, ce qui conduit à :

$$I_2 = -\frac{4ih \operatorname{sgn}(h)}{\omega_1^2 - 4h^2}. \quad (\text{C.23})$$

Nous pouvons alors passer à l'intégrale I_3 définie par

$$I_3 = \int_{\omega} \frac{e^{2i(\omega_1+2\omega)\eta}}{(\hbar\omega + (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h))) (\hbar(\omega_1 + \omega) + (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h)))} + \frac{e^{2i(\omega_1+2\omega)\eta}}{(\hbar\omega - (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h))) (\hbar(\omega_1 + \omega) - (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h)))} \quad (\text{C.24})$$

Pour $h > 0$ on trouve alors,

$$I_3^+ = \int_{\omega} \frac{e^{2i(\omega_1+2\omega)\eta}}{(\omega + h - i\epsilon) (\omega_1 + \omega + h - i\epsilon)} + \frac{e^{2i(\omega_1+2\omega)\eta}}{(\omega - h + i\epsilon) (\omega_1 + \omega - h + i\epsilon)} \quad (\text{C.25})$$

Les mêmes considérations que pour l'intégrale précédente nous conduisent après application du théorème des résidus à :

$$I_3^+ = i \frac{e^{2i(\omega_1-2h)\eta} - e^{2i(-\omega_1-2h)\eta}}{\omega_1} \quad (\text{C.26})$$

Remarque: Contrairement au cas précédent où la limite $\epsilon, \eta \rightarrow 0^+$ conduit à une expression non nulle, ici on a une limite nulle. Nous gardons donc ces termes en η afin de savoir comment la limite est approchée.

Si on fait de même pour $h < 0$ on trouve le résultat suivant :

$$I_3 = i \frac{e^{2i(\omega_1-2h \operatorname{sgn}(h))\eta} - e^{2i(-\omega_1-2h \operatorname{sgn}(h))\eta}}{\omega_1} \quad (\text{C.27})$$

Finalement le calcul de I_4

$$I_4 = - \int_{\omega} \frac{e^{2i(\omega_1+2\omega)\eta}}{(\omega + (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h))) (\omega_1 + \omega - (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h)))} - \frac{e^{2i(\omega_1+2\omega)\eta}}{(\omega - (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h))) (\omega_1 + \omega + (h - i\epsilon \operatorname{sgn}(h)))} \quad (\text{C.28})$$

Pour $h > 0$, nous obtenons donc

$$I_4^+ = - \int_{\omega} \frac{e^{2i(\omega_1+2\omega)\eta}}{(\omega + h - i\epsilon) (\omega_1 + \omega - h + i\epsilon)} - \frac{e^{2i(\omega_1+2\omega)\eta}}{(\omega - h + i\epsilon) (\omega_1 + \omega + h - i\epsilon)} \quad (\text{C.29})$$

Les mêmes considérations que pour l'intégrale précédente nous conduisent après application du théorème des résidus à :

$$I_4^+ = -i \left[\frac{1}{\omega_1 - 2h} - \frac{1}{-\omega_1 - 2h} \right] = \frac{2i\omega_1 h}{\omega_1^2 - 4h^2} \quad (\text{C.30})$$

C.3 Intégrales de chemins fermioniques

Cette section présente quelques point dans la construction formelle de la théorie des champs sous-jacente au modèle à deux niveaux que nous avons étudié. Ils sont reproduits pour référence.

C.3.1 Système à un niveau

$$\begin{aligned}
 \int d\psi \psi^n &= \delta_{n,1} \\
 \prod_k \int d\psi_k^\dagger d\psi_k e^{-\psi_k^\dagger A_k \psi_k} &= \text{Det} A \\
 \Psi(\psi^\dagger) &= a + b\psi^\dagger = |a, b\rangle \\
 \Psi^*(\psi) &= a^* + b^*\psi = \langle a, b| \\
 \langle \Psi | \Phi \rangle &= \int d\psi^\dagger d\psi e^{-\psi^\dagger \psi} \Psi^*(\psi) \Phi(\psi^\dagger) \quad (\text{C.31})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H &= E\psi^\dagger \psi \\
 \langle a_f, b_f | U(t) | a_i, b_i \rangle &= \langle a_f, b_f | e^{-i\frac{t}{\hbar} H} | a_i, b_i \rangle \quad (\text{C.32})
 \end{aligned}$$

$$|0\rangle = |1, 0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = |0, 1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.33})$$

$$U(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} (1 - \frac{iE}{\hbar} \Delta t)^N & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} Et} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.34})$$

$$\begin{aligned}
 \langle a_f, b_f | e^{-i\frac{t}{\hbar} E\psi^\dagger \psi} | a_i, b_i \rangle &= \prod_{k=0}^N \int d\psi_k^\dagger d\psi_k \Psi_f^*(\psi_{N+1}) \Psi_i(\psi_0^\dagger) e^{\sum_{j=0}^N [-\psi_j^\dagger (\psi_j - \psi_{j-1}) - \frac{i}{\hbar} E \Delta t \psi_j^\dagger \psi_{j-1}]} \\
 &= \prod_{k=0}^N \int d\psi_k^\dagger d\psi_k \Psi_f^*(\psi_{N+1}) \Psi_i(\psi_0^\dagger) \\
 &\quad \prod_{j=0}^N e^{-\psi_j^\dagger \psi_j} \cdot e^{(1 - \frac{i}{\hbar} E \Delta t) \psi_j^\dagger \psi_{j-1}}. \quad (\text{C.35})
 \end{aligned}$$

Pour avoir le bon signe pour l'élément de matrice $\langle 1, 0 | U(t) | 1, 0 \rangle$ nous devons imposer :

$$\psi_{-1} = -\psi_N, \quad \psi_{-1}^\dagger = -\psi_N^\dagger. \quad (\text{C.36})$$

$$\langle a_f, b_f | e^{-tE\psi^\dagger \psi} | a_i, b_i \rangle = \prod_{k=0}^N \int d\psi_k^\dagger d\psi_k \Psi_f^*(\psi_{N+1}) \Psi_i(\psi_0^\dagger) e^{\sum_{j=0}^N [-\psi_j^\dagger (\psi_j - \psi_{j-1}) - E \Delta t \psi_j^\dagger \psi_{j-1}]}. \quad (\text{C.37})$$

C.3.2 Système à deux niveaux

$$\begin{aligned}
 H &= \psi^\dagger \mathbf{h} \sigma \psi \\
 |a_\alpha, b_\alpha\rangle &= |a_1, b_1\rangle \otimes |a_2, b_2\rangle \\
 \langle a_{f\alpha}, b_{f\alpha} | e^{-i\frac{t}{\hbar}H} | a_{i\alpha}, b_{i\alpha} \rangle &= \prod_{k=0}^N \prod_{\alpha_k} \int d\psi_{k\alpha_k}^\dagger d\psi_{k\alpha_k} \Psi_f^*(\psi_{N+1\alpha_{N+1}}) \Psi_i(\psi_{0\alpha_0}^\dagger) \\
 &\quad e^{\sum_{j=0}^N [-\psi_{j\alpha_j}^\dagger (\psi_{j\alpha_j} - \psi_{j-1\alpha_j}) - \frac{i}{\hbar} \Delta t \psi_j^\dagger \mathbf{h} \sigma \psi_{j-1}]} \\
 \langle a_{f\alpha}, b_{f\alpha} | e^{-tH} | a_{i\alpha}, b_{i\alpha} \rangle &= \prod_{k=0}^N \prod_{\alpha_k} \int d\psi_{k\alpha_k}^\dagger d\psi_{k\alpha_k} \Psi_f^*(\psi_{N+1\alpha_{N+1}}) \Psi_i(\psi_{0\alpha_0}^\dagger) \\
 &\quad e^{\sum_{j=0}^N [-\psi_{j\alpha_j}^\dagger (\psi_{j\alpha_j} - \psi_{j-1\alpha_j}) - \Delta t \psi_j^\dagger \mathbf{h} \sigma \psi_{j-1}]} \tag{C.38}
 \end{aligned}$$

C.4 Fonctions de Green Libres

C.4.1 Fonctions de Green pour les fermions

Sur réseau

$$\begin{aligned}
 Z[\bar{\eta}, \eta] &= \int D[\psi^\dagger] D[\psi] e^{\frac{i}{\hbar} \Delta t \sum_{j=0}^N [i\hbar \psi_{j\alpha_j}^\dagger \frac{\psi_{j\alpha_j} - \psi_{j-1\alpha_j}}{\Delta t} - \hbar \psi_j^\dagger \sigma_3 \psi_{j-1} + \psi_{j\alpha_j}^\dagger \eta_{j\alpha_j} + \bar{\eta}_{j\alpha_j} \psi_{j\alpha_j}]} \\
 &= \int D[\psi^\dagger] D[\psi] e^{\frac{i}{\hbar} \psi^\dagger \cdot G^{-1} \cdot \psi + \frac{i}{\hbar} \Delta t \psi^\dagger \cdot \eta + \frac{i}{\hbar} \Delta t \bar{\eta} \cdot \psi} \\
 &= Z[0, 0] e^{-\frac{i}{\hbar} (\Delta t \bar{\eta}) \cdot G \cdot (\Delta t \eta)} \tag{C.39}
 \end{aligned}$$

où

$$\int D[\psi^\dagger] D[\psi] = \prod_{k=0}^N \prod_{\alpha_k} \int d\psi_{k\alpha_k}^\dagger d\psi_{k\alpha_k} \Psi_f^*(\psi_{N+1\alpha_{N+1}}) \Psi_i(\psi_{0\alpha_0}^\dagger) \tag{C.40}$$

$$G^{-1} \cdot \psi_j = \Delta t \left[i\hbar \frac{\psi_j - \psi_{j-1}}{\Delta t} - g\sigma_3 \psi_{j-1} \right] = \Delta t (i\hbar \nabla - h\sigma_3) \psi_j \tag{C.41}$$

ainsi que :

$$\nabla \psi_j = \frac{\psi_j - \psi_{j-1}}{\Delta t} \tag{C.42}$$

Transformées de Fourier discrètes : on introduit $T = N\Delta t$, $\omega_n = 2\pi(n + \frac{1}{2})/T$, et on pose

$$\tilde{\psi}_n = \Delta t \sum_j e^{i\omega_n \Delta t j} \psi_j, \quad \psi_j = \frac{1}{T} \sum_n e^{-i\omega_n \Delta t j} \tilde{\psi}_n \tag{C.43}$$

$$\begin{aligned}
 G_{j,k} &= \frac{1}{T} \sum_n \frac{e^{-i\omega_n \Delta t(j-k)}}{\frac{i\hbar}{\Delta t}(1 - e^{i\omega_n \Delta t}) - h\sigma_3} \\
 G \cdot G^{-1} \cdot \psi_j &= \frac{1}{T} \sum_{n,k} \frac{e^{-i\omega_n \Delta t(j-k)}}{\frac{i\hbar}{\Delta t}(1 - e^{i\omega_n \Delta t}) - h\sigma_3} \Delta t (i\hbar \nabla - h\sigma_3) \psi_k \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n,k} \frac{e^{-i\omega_n \Delta t(j-k)}}{\frac{i\hbar}{\Delta t}(1 - e^{i\omega_n \Delta t}) - h\sigma_3} \Delta t (i\hbar \nabla - h\sigma_3) \frac{1}{T} \sum_m e^{-i\omega_m \Delta t k} \tilde{\psi}_m \\
 &= \frac{1}{T} \sum_{n,k} \frac{e^{-i\omega_n \Delta t(j-k)}}{\frac{i\hbar}{\Delta t}(1 - e^{i\omega_n \Delta t}) - h\sigma_3} \frac{1}{T} \sum_m \Delta t \left[\frac{i\hbar}{\Delta t}(1 - e^{i\omega_m \Delta t}) - h\sigma_3 \right] e^{-i\omega_m \Delta t k} \tilde{\psi}_m \\
 &= \frac{1}{T} \sum_n e^{-i\omega_n \Delta t j} \tilde{\psi}_n \tag{C.44}
 \end{aligned}$$

Passage à la limite du continu

Nous passons explicitement du réseau au continuum :

$$\begin{aligned}
 Z[\bar{\eta}, \eta] &= \int D[\psi^\dagger] D[\psi] e^{\frac{i}{\hbar} \int dt [i\hbar \psi^\dagger \partial_t \psi - h\sigma_3 \psi^\dagger \psi + \psi^\dagger \eta + \bar{\eta} \psi]} \\
 &= Z[0, 0] e^{-\frac{i}{\hbar} \int dt dt' \bar{\eta}_t G_{t,t'} \eta_{t'}} \tag{C.45}
 \end{aligned}$$

où l'on note

$$G^{-1} = i\hbar \partial_t - h\sigma_3 \tag{C.46}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\psi}_\omega &= \int dt e^{it\omega} \psi_t = \int_t e^{it\omega} \psi_t \\
 \psi_t &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-it\omega} \tilde{\psi}_\omega = \int_\omega e^{-it\omega} \tilde{\psi}_\omega \tag{C.47}
 \end{aligned}$$

$$G_{t,t'} = \int_\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\hbar\omega - h\sigma_3} \tag{C.48}$$

Expression et propriétés du vide

$$\begin{aligned}
 |0\rangle &= \psi_2^\dagger |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = \omega_{\beta 2} \psi_\beta^\dagger |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \\
 \psi_1 |0\rangle &= \omega_{1\alpha}^\dagger \psi_\alpha \omega_{\beta 2} \psi_\beta^\dagger |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = \omega_{1\alpha}^\dagger \omega_{\alpha 2} |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = 0 \\
 \psi_2^\dagger |0\rangle &= \omega_{\alpha 2} \psi_\alpha^\dagger \omega_{\beta 2} \psi_\beta^\dagger |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 \\
 &= (\omega_{12} \omega_{22} - \omega_{22} \omega_{12}) \psi_1^\dagger \psi_2^\dagger |0\rangle_1 \otimes |0\rangle_2 = 0 \tag{C.49}
 \end{aligned}$$

Ordre en temps - Propagateurs avancés et retardés

$$\begin{aligned}
 i\hbar G_{t,t'} &= \langle 0|T[\psi_t\psi_{t'}^\dagger]|0\rangle, \\
 i\hbar G_{t,t'}^R &= \langle 0|\{\psi_t, \psi_{t'}^\dagger\}|0\rangle\Theta(t-t'), \\
 i\hbar G_{t,t'}^A &= -\langle 0|\{\psi_t, \psi_{t'}^\dagger\}|0\rangle\Theta(t'-t) \\
 G_{t,t'}^E &= \langle 0|T[\psi_t\psi_{t'}^\dagger]|0\rangle,
 \end{aligned} \tag{C.50}$$

$$\begin{aligned}
 i\hbar G_{(t\alpha),(t'\alpha')} &= \langle 0|\Theta(t-t')\psi_{t\alpha}\psi_{t'\alpha'}^\dagger - \Theta(t'-t)\psi_{t'\alpha'}^\dagger\psi_{t\alpha}|0\rangle \\
 &= \omega_{\alpha\beta}\omega_{\beta'\alpha'}^\dagger\langle 0|\Theta(t-t')\psi_{t\beta}\psi_{t'\beta'}^\dagger - \Theta(t'-t)\psi_{t'\beta'}^\dagger\psi_{t\beta}|0\rangle \\
 &= \omega_{\alpha\beta}\omega_{\beta'\alpha'}^\dagger i\hbar G_{(t\beta),(t'\beta')}^\psi
 \end{aligned} \tag{C.51}$$

$$\begin{aligned}
 i\hbar G_{(t\alpha),(t'\alpha')}^\psi &= \langle 0|\Theta(t-t')\psi_{t\alpha}\psi_{t'\alpha'}^\dagger - \Theta(t'-t)\psi_{t'\alpha'}^\dagger\psi_{t\alpha}|0\rangle \\
 &= i\hbar\delta_{\alpha\alpha'}G_{t,t',\alpha}^\psi
 \end{aligned} \tag{C.52}$$

$$\psi_{t\alpha} = \begin{cases} e^{-i\Omega t}\psi_1 & \alpha = 1 \\ e^{i\Omega t}\psi_2 & \alpha = 2 \end{cases} \tag{C.53}$$

avec $\Omega = h/2\hbar$.

$$\Theta(t) = -\int \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\epsilon}, \tag{C.54}$$

$$\begin{aligned}
 i\hbar G_{t,t',\alpha}^\psi &= -\delta_{\alpha 2}i \int_\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega + i\epsilon} e^{i\Omega(t-t')} + \delta_{\alpha 1}i \int_\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega + i\epsilon} e^{-i\Omega(t-t')} \\
 &= -\delta_{\alpha 2}i \int_\omega \frac{e^{i(\Omega+\omega)(t-t')}}{\omega + i\epsilon} + \delta_{\alpha 1}i \int_\omega \frac{e^{-i(\Omega+\omega)(t-t')}}{\omega + i\epsilon} \\
 &= -\delta_{\alpha 2}i \int_\omega \frac{e^{i\omega(t-t')}}{\omega - \Omega + i\epsilon} + \delta_{\alpha 1}i \int_\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega - \Omega + i\epsilon} \\
 &= \delta_{\alpha 2}i \int_\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega + \Omega - i\epsilon} + \delta_{\alpha 1}i \int_\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega - \Omega + i\epsilon}
 \end{aligned} \tag{C.55}$$

On passe en temps imaginaire en posant $t_R = -it_I$ et $\omega_R = i\omega_I$, on peut alors écrire

$$G_{t,t',\alpha}^{E\psi} = -\delta_{\alpha 2} \int_\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{i\omega + \Omega} - \delta_{\alpha 1} \int_\omega \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{i\omega - \Omega} \tag{C.56}$$

$$\begin{aligned}
 i\hbar G_{(t\alpha),(t'\alpha')} &= i\omega_{\alpha 2}\omega_{2\alpha'}^\dagger \int_{\omega} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega + \Omega - i\epsilon} + i\omega_{\alpha 1}\omega_{1\alpha'}^\dagger \int_{\omega} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{\omega - \Omega + i\epsilon} \\
 G_{(t\alpha),(t'\alpha')}^E &= \omega_{\alpha 2}\omega_{2\alpha'}^\dagger \int_{\omega} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{i\omega + \Omega} + \omega_{\alpha 1}\omega_{1\alpha'}^\dagger \int_{\omega} \frac{e^{-i\omega(t-t')}}{i\omega - \Omega}
 \end{aligned} \tag{C.57}$$

C.4.2 Fonctions de Green pour les bosons

Sur le réseau

$$\begin{aligned}
 Z[j] &= \prod_n \int dx_n e^{\frac{i}{\hbar} \Delta t \sum_n [m \frac{(x_{n+1} - x_n)^2}{2\Delta t^2} - \frac{m\omega^2}{2} x_n^2 + x_n j_n]} \\
 &= \prod_n \int dx_n e^{\frac{i}{\hbar} \Delta t \sum_n [m \frac{x_n}{2\Delta t^2} (2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) - \frac{m\omega^2}{2} x_n^2 + x_n j_n]} \\
 &= \int D[x] e^{\frac{i}{\hbar} (\frac{1}{2} x \cdot D^{-1} \cdot x + x \cdot \Delta t j)} = \int D[x] e^{\frac{i}{\hbar} [\frac{1}{2} (x + \Delta t j \cdot D) \cdot D^{-1} \cdot (x + D \cdot \Delta t j) - \frac{1}{2} \Delta t j \cdot D \cdot \Delta t j]} \\
 &= Z[0] e^{-\frac{i}{2\hbar} \Delta t j \cdot D \cdot \Delta t j}
 \end{aligned} \tag{C.58}$$

où

$$D^{-1} x_n = \frac{m}{\Delta t} (2x_n - x_{n+1} - x_{n-1}) - m\omega^2 x_n \tag{C.59}$$

Passage au continu

$$\begin{aligned}
 Z[j] &= \int D[x] e^{\frac{i}{\hbar} \int dt (\frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{m\omega^2}{2} x^2 + x j)} \\
 &= Z[0] e^{-\frac{i}{2\hbar} \int dt dt' j_t D_{t,t'} j_{t'}}
 \end{aligned} \tag{C.60}$$

où

$$D^{-1} = -m(\partial_t^2 + \omega^2) \tag{C.61}$$

Par ailleurs on introduit

$$\begin{aligned}
 \tilde{x}_\omega &= \int_t e^{it\omega} x_t \\
 x_t &= \int_\omega e^{-it\omega} \tilde{x}_\omega
 \end{aligned} \tag{C.62}$$

Ce qui permet d'écrire finalement

$$G_{t,t'} = \frac{1}{m} \int_{\omega'} \frac{e^{-i\omega'(t-t')}}{\omega'^2 - \omega^2} \tag{C.63}$$

Ordre temporel

On pose :

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \\
 x &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger) \\
 x_t &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(e^{-it\omega}a + e^{it\omega}a^\dagger)
 \end{aligned} \tag{C.64}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
 i\hbar D_{t,t'} &= \langle 0|T[x_t x_{t'}]|0\rangle \\
 &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0|\Theta(t-t')(e^{-it\omega}a + e^{it\omega}a^\dagger)(e^{-it'\omega}a + e^{it'\omega}a^\dagger) \\
 &\quad + \Theta(t'-t)(e^{-it'\omega}a + e^{it'\omega}a^\dagger)(e^{-it\omega}a + e^{it\omega}a^\dagger)|0\rangle \\
 &= \frac{\hbar}{2m\omega} \langle 0|\Theta(t-t')e^{-i(t-t')\omega}aa^\dagger + \Theta(t'-t)e^{-i(t'-t)\omega}aa^\dagger|0\rangle
 \end{aligned} \tag{C.65}$$

Ce qui conduit au propagateur euclidien

$$D_{t,t'}^E = \langle 0|T[x_t x_{t'}]|0\rangle \tag{C.66}$$

On rappelle que

$$\Theta(t) = - \int \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i\epsilon}, \tag{C.67}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 i\hbar D_{t,t'} &= \frac{\hbar i}{2m\omega} \left(\int_{\omega'} \frac{e^{-i(\omega'+\omega)(t-t')}}{\omega' + i\epsilon} + \int_{\omega'} \frac{e^{i(\omega'+\omega)(t-t')}}{\omega' + i\epsilon} \right) \\
 &= \frac{\hbar i}{2m\omega} \left(\int_{\omega'} \frac{e^{-i\omega'(t-t')}}{\omega' - \omega + i\epsilon} + \int_{\omega'} \frac{e^{i\omega'(t-t')}}{\omega' - \omega + i\epsilon} \right) \\
 &= \frac{\hbar i}{2m\omega} \left(\int_{\omega'} \frac{e^{-i\omega'(t-t')}}{\omega' - \omega + i\epsilon} - \int_{\omega'} \frac{e^{-i\omega'(t-t')}}{\omega' + \omega - i\epsilon} \right) \\
 &= \frac{\hbar i}{2m\omega} \int_{\omega'} e^{-i\omega'(t-t')} \left(\frac{1}{\omega' - \omega + i\epsilon} - \frac{1}{\omega' + \omega - i\epsilon} \right) \\
 &= \frac{\hbar i}{m} \int_{\omega'} \frac{e^{-i\omega'(t-t')}}{\omega'^2 - \omega^2 + i\epsilon}
 \end{aligned} \tag{C.68}$$

On passe en temps imaginaire avec $t_R = -it_I$ and $\omega_R = i\omega_I$,

$$D_{t,t'}^E = \frac{\hbar}{m} \int_{\omega'} \frac{e^{-i\omega'(t-t')}}{\omega'^2 + \omega^2} \tag{C.69}$$

C.5 Système libre

La fonctionnelle génératrice des fonctions de Green est alors donnée par

$$W_{ni}[J] = -i\hbar \text{Tr} \log[G^{-1} + J] = -i\hbar \text{Tr} \log G^{-1} + i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{Tr}(G \cdot J)^n, \quad (\text{C.70})$$

où $(\sigma_{t,\mu})_{t_1,t_2} = \delta_{t_1,t_2} \delta_{t_1,t} \sigma_\mu$, $\sigma_\mu = (\mathbb{1}, \boldsymbol{\sigma})$. On définit les quantités suivantes :

$$\rho_{\tilde{a}} = -i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{Tr} [(G \cdot J)^n \cdot G \cdot \sigma_{\tilde{a}}] \quad (\text{C.71})$$

$$\tilde{G}_{\tilde{a},\tilde{b}} = -i\hbar \text{Tr}[G \cdot \mathcal{O}_{\tilde{a}} \cdot G \cdot \mathcal{O}_{\tilde{b}}] \quad (\text{C.72})$$

$$\sigma_{\tilde{a}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n} \frac{1}{n!} A_{\tilde{a}, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_n} r_{\tilde{a}_1} \cdots r_{\tilde{a}_n}. \quad (\text{C.73})$$

où $r = \tilde{G}^{-1} \cdot (\rho - \rho^*)$. On obtient alors le développement formel de l'action effective :

$$\rho_{\tilde{a}} = \int_{\tilde{b}} \tilde{G}_{\tilde{a},\tilde{b}} r_{\tilde{b}} + \rho_{\tilde{a}}^* = -i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \text{Tr} [(G \cdot J)^n \cdot G \cdot \mathcal{O}_{\tilde{a}}] \quad (\text{C.74})$$

$$\begin{aligned} \rho_{\tilde{a}}^* &= -i\hbar \text{Tr}[G \cdot \mathcal{O}_{\tilde{a}}] \\ A_{\tilde{c},\tilde{d}} &= -\delta_{\tilde{c},\tilde{d}} \\ A_{\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} &= 2 \cdot \int_{\tilde{a}} \tilde{G}_{\tilde{c},\tilde{a}}^{-1} S_{\tilde{a},\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \\ A_{\tilde{b},\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}} &= \int_{\tilde{a}} \tilde{G}_{\tilde{b},\tilde{a}}^{-1} \left(3! S_{\tilde{a},\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}} - 4 \int_{\tilde{c},\tilde{d}} \tilde{G}_{\tilde{c},\tilde{d}}^{-1} (S_{\tilde{d},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}} S_{\tilde{a},\tilde{c},\tilde{\alpha}} + S_{\tilde{d},\tilde{\alpha},\tilde{\gamma}} S_{\tilde{a},\tilde{c},\tilde{\beta}} + S_{\tilde{d},\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} S_{\tilde{a},\tilde{c},\tilde{\gamma}}) \right) \\ A_{\tilde{b},\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} &= \int_{\tilde{a}} \tilde{G}_{\tilde{b},\tilde{a}}^{-1} \left(4! S_{\tilde{a},\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} - 3! \cdot \int_{\tilde{c}} S_{\tilde{a},\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} A_{\tilde{c},\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} + S_{\tilde{a},\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\gamma}} A_{\tilde{c},\tilde{\beta},\tilde{\delta}} + S_{\tilde{a},\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\delta}} A_{\tilde{c},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}} \right. \\ &\quad + S_{\tilde{a},\tilde{c},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}} A_{\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\delta}} + S_{\tilde{a},\tilde{c},\tilde{\beta},\tilde{\delta}} A_{\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\gamma}} + S_{\tilde{a},\tilde{c},\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} A_{\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} \\ &\quad + 4 \cdot \int_{\tilde{c},\tilde{d}} S_{\tilde{a},\tilde{c},\tilde{d}} (A_{\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} A_{\tilde{d},\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} + A_{\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\gamma}} A_{\tilde{d},\tilde{\beta},\tilde{\delta}} + A_{\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\delta}} A_{\tilde{d},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}}) \\ &\quad \left. - 2 \cdot \int_{\tilde{c}} S_{\tilde{a},\tilde{\alpha},\tilde{c}} A_{\tilde{c},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} + S_{\tilde{a},\tilde{\beta},\tilde{c}} A_{\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} + S_{\tilde{a},\tilde{\gamma},\tilde{c}} A_{\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\delta}} + S_{\tilde{a},\tilde{\delta},\tilde{c}} A_{\tilde{c},\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}} \right) \quad (\text{C.75}) \end{aligned}$$

où

$$S_{\tilde{a},\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_n} = -\frac{i\hbar}{n!} \sum_{P \in S_n} \text{Tr}[G \mathcal{O}_{\tilde{a}_{P(1)}} G \mathcal{O}_{\tilde{a}_{P(2)}} \cdots G \mathcal{O}_{\tilde{a}_{P(n)}} G \mathcal{O}_{\tilde{a}}], \quad (\text{C.76})$$

$$\Gamma_{ni}[\rho] = i\hbar \text{Tr} \log G^{-1} - i\hbar \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{Tr}(G \cdot J)^n + J_{\tilde{\alpha}} \cdot \rho_{\tilde{\alpha}} \quad (\text{C.77})$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_0 &= i\hbar \text{Tr} \log G^{-1} \\
 \Gamma_{\tilde{a},\tilde{b}} &= \tilde{G}_{\tilde{a}\tilde{b}}^{-1} \\
 \Gamma_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}} &= -2\tilde{S}_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}} \\
 \Gamma_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}} &= 2 \cdot 3! \tilde{S}_{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}} \\
 &\quad - 8 \cdot \int_{\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\tilde{\delta},\tilde{e},\tilde{f}} \tilde{G}_{\tilde{a},\tilde{\alpha}}^{-1} \tilde{G}_{\tilde{b},\tilde{\beta}}^{-1} \tilde{G}_{\tilde{c},\tilde{\gamma}}^{-1} \tilde{G}_{\tilde{d},\tilde{\delta}}^{-1} \tilde{G}_{\tilde{a},\tilde{b}}^{-1} (S_{\tilde{a},\tilde{\alpha},\tilde{\beta}} S_{\tilde{b},\tilde{\gamma},\tilde{\delta}} + S_{\tilde{e},\tilde{\alpha},\tilde{\gamma}} S_{\tilde{f},\tilde{\beta},\tilde{\delta}} + S_{\tilde{e},\tilde{\alpha},\tilde{\delta}} S_{\tilde{f},\tilde{\beta},\tilde{\gamma}})
 \end{aligned}
 \tag{C.78}$$

avec

$$\tilde{S}_{\tilde{a}_1,\tilde{a}_2,\dots,\tilde{a}_n} = \int_{\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\dots,\tilde{b}_n} \tilde{G}_{\tilde{b}_1,\tilde{a}_1}^{-1} \tilde{G}_{\tilde{b}_2,\tilde{a}_2}^{-1} \dots \tilde{G}_{\tilde{b}_n,\tilde{a}_n}^{-1} S_{\tilde{b}_1,\tilde{b}_2,\dots,\tilde{b}_n}
 \tag{C.79}$$

Annexe D

Réseaux Complexes

D.1 Quelques détails concernant l'implémentation de l'algorithme

Nous rappelons que nous avons choisi d'implémenter notre algorithme en C++. Le programme a été compilé en utilisant g++ (v. 3.4) sur un PC sous linux. Le niveau d'optimisation choisi est $-O3$. Deux classes étaient implémentées : une classe pour les noeuds du réseau et une pour le réseau lui-même (qui contient les algorithmes pour calculer les observables statistiques). Nous reproduisons ici les parties principales du code utilisé. Bien que cela ne soit pas fondamental pour la compréhension du problème, il n'en demeure pas moins partie intégrante de l'algorithme. Tout d'abord la classe qui définit un noeud (sous la forme d'une structure - tous les membres sont publics) :

Code:

```
struct node
{
    vector<node*> family;
    vector<node*> acquaintances;
    void connect_to(node* a);
    double clustering();
    int index;
};
```

Détaillons chaque membres de cette classe :

- `vector<node*> node::family` correspond au sous ensemble \mathcal{R} des plus proches voisins d'un noeud. Il contient toutes les connexions *physiques*. Les connexions sont stockées sous la forme de pointeur vers une adresse mémoire afin de minimiser les redondances.
- `vector<node*> node::acquaintances` correspond au sous ensemble \mathcal{A} des «connaisances» d'un noeud. Il contient toutes les connexions *indirectes*.
- `void node::connect_to(node* a)` implémente la procédure de connexion.

- `double node::clustering()` retourne la valeur double précision de l’agrégation (clustering) du noeud.
- `int node::index` est un indice unique identifiant le noeud.

La classe qui contient le réseau est elle aussi très simple, elle est une sous-classe de `public vector<node*>`. Nous ne donnerons que sa déclaration ici :

Code:

```
struct network: public vector<node*>
{
    double beta;
    int random_travel();
    void stat_chemin(int nombre_essais);
    void stat_connectivity();
    void write_stat_to_disk();
    void stat_clustering();
    vector<double> cumul_stat;
    vector<int> stat;
    list<paire> cl_stat;
    void output_network();
};
```

Détaillons la fonction membre `void node::connect_to(node* a)`. Tout d’abord nous commençons par choisir le premier voisin, puis une connaissance de ce voisin :

Code:

```
void node::connect_to(node* a)
{
    // Le choix explicite du voisin est assuré par la
    // classe network.
    family.push_back(a); // Connexion physique
                          // sans connexion indirecte
    // Si le noeud a une connaissance et si on veut un deuxième
    // voisin:
    if( a->acquaintances.size() > 0 && ran1() < Q )
    {
        // Choix d’une connaissance aléatoire de a
        int r = random()%a->acquaintances.size();
        node* target = a->acquaintances.at(r);
        //Connexion physique et indirecte réciproque
        family.push_back(target);
        acquaintances.push_back(target);
        target->acquaintances.push_back(this);
        target->family.push_back(this);
    }
}
```


Puis nous diffusons la popularité du noeud `target` de plus proches voisins en plus proches voisins à R sites au maximum.

Code:

```

node* current = target;
int max_i = 0;
if( current->family.size() > 1 )
{
    int i = 0;
    while( i < R )
    {
        int r_p = 0;
        if( current->family.size() > 1 )
            r_p = random()%(current->family.size()-1);
        if( current->family.at(r_p) == target )
            break;
        current = current->family.at(r_p);
        current->acquaintances.push_back(target);
        i++;
    }
}

```

Finalement nous connectons physiquement et indirectement a au noeud courant. Attention, dans cette étape seul a ajoute le noeud courant dans ses connaissances.

Code:

```

a->acquaintances.push_back(this);
a->family.push_back(this);
}

```


Bibliographie

- [1] J. Polonyi and F. Stauffer (2005), submitted to Annals of Physics, cond-mat/0508491.
- [2] F. Stauffer (2005), submitted to Physica A, cond-mat/0508434.
- [3] K. Wilson, Phys. Rev. B **4**, 3174 and 3184 (1971).
- [4] K. Wilson, Rev. Mod. Phys. **47**, 773 (1975).
- [5] A. Lesne, *Méthodes de renormalisation, Phénomènes critiques, Chaos, Structures fractales* (Eyrolles Sciences, 1996).
- [6] M. L. Bellac, *Des phénomènes critiques aux champs de jauge* (CNRS Editions, 2002).
- [7] L. Kadanoff, *Statistical Physics, Statics, Dynamics and Renormalization* (World Scientific, 2000).
- [8] D. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena* (World Scientific, 1997).
- [9] N. Metropolis, A. Rosenbluth, M. Rosenbluth, A. Teller, and E. Teller, J. Phys. Chem. **21**, 1087 (1953).
- [10] L. Onsager, Phys. Rev. **65**, 117 (1944).
- [11] K. Wilson, Rev. Mod. Phys. **55**, 3 (1983).
- [12] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An introduction to Quantum Field Theory* (ABP Westview Press, 1995).
- [13] C. Callan, Phys. Rev. D **2**, 1541 (1970).
- [14] K. Szymanzik, Comm. Math. Phys. **18**, 227 (1970).
- [15] J. Polonyi, Central Eur. J. Phys. **1**, 1 (2004).
- [16] J. Alexandre, V. Branchina, and J. Polonyi, Phys. Rev. D **58**, 16002 (1998).
- [17] F. Wegner and A. Houghton, Phys. Rev. A **8**, 401 (1973).

BIBLIOGRAPHIE

- [18] J. Polchinski, Nucl. Phys. B **231**, 269 (1984).
- [19] T. Morris, Int. J. Mod. Phys A **9**, 2411 (1994).
- [20] C. Wetterich, Phys. Lett. B **301**, 90 (1993).
- [21] M. Reuter and C. Wetterich, Nucl. Phys. B **391**, 147 (1993).
- [22] J. Adams, J. Berges, S. Bornholdt, F. Freire, N. Tetradis, and C. Wetterich, Mod. Phys. Lett. A **10**, 2367 (1995).
- [23] U. Ellwanger, Phys. Lett. B **335**, 364 (1994).
- [24] N. Tetradis and D. F. Litim, Nucl. Phys. B **464**, 492 (1996).
- [25] J. Alexandre and J. Polonyi, Ann. Phys. (NY) **288**, 27 (2001).
- [26] J. Polonyi and K. Sailer, Phys. Rev. D **71**, 025010 (2005).
- [27] S.-W. Tsai, A. H. C. Neto, R. Shankar, and D. K. Campbell (2005), [cond-mat/0505426](#).
- [28] S.-W. Tsai, A. H. C. Neto, R. Shankar, and D. K. Campbell (2004), [cond-mat/0406174](#).
- [29] J. Alexandre, N. Mavromatos, and S. Sarkar, Int. J. Mod. Phys. B **17**, 2359 (2003).
- [30] J. Alexandre, Phys. Rev. D **67**, 105017 (2003).
- [31] J. Alexandre and N. Mavromatos (2005), [hep-th/0508073](#).
- [32] S. Andergassen, T. Enss, V. Meden, W. Metzner, U. Schollwoeck, and K. Schoenhammer, Phys. Rev. B **70**, 075102 (2004).
- [33] F. Schutz, L. Bartosch, and P. Kopietz, Phys. Rev. B **72**, 035107 (2005).
- [34] S. Tomonaga, Prog. Theor. Phys. **5**, 544 (1950).
- [35] J. Luttinger, J. Math. Phys. **4**, 1154 (1963).
- [36] J. Negele and H. Orland, *Quantum Many particle systems* (Addison-Wesley NY, 1988).
- [37] H. Bruus and K. Flensberg, *Many-body Quantum Theory in Condensed Matter Physics* (Oxford Graduate Texts, 2004).
- [38] C. Varma, Z. Nussinow, and W. van Saarloos, Phys. Rep. **361**, 367 (2002).
- [39] F. Haldane, J. Phys. C **14**, 2585 (1981).
- [40] D. Mathis and E. Lieb, J. Math. Phys. **6**, 1154 (1963).

-
- [41] W. Metzner, C. Castellani, and C. D. Castro, *Rev. Mod. Phys.* **66**, 1 (1994).
- [42] H. Schulz, G. Cunniberti, and P. Pieri (1998), [cond-mat/9807366](#).
- [43] J. Sólyom, *Adv. Phys.* **28**, 209 (1979).
- [44] E. Rezayi, J. Sak, and S. Talukdar, *Phys. Rev. B* **19**, 4757 (1979).
- [45] I. Dzyaloshinskii and A. Larkin, *Sov. Phys.–JETP* **38**, 202 (1974).
- [46] H. Evertz and H. Schulz, *Sol. State Comm.* **15**, 1413 (1974).
- [47] C. D. Castro and W. Metzner, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 3852 (1991).
- [48] W. Metzner and C. D. Castro, *Phys. Rev. B* **47**, 16107 (1993).
- [49] K. Johnson, *Nuovo Cim.* **20**, 773 (1961).
- [50] B. Klaiber, *Helv. Phys. Act.* **37**, 554 (1964).
- [51] W. Thirring, *Ann. Phys. (NY)* **3**, 91 (1958).
- [52] D. J. Gross and A. Neveu, *Phys. Rev. D* **10**, 3235 (1974).
- [53] J. van Delft and H. Schoeller, *Ann. Phys. (Leipzig)* **4**, 225 (1998).
- [54] S. Coleman, *Phys. Rev. D* **11**, 2088 (1975).
- [55] J. Thomassen (1998), [hep-th/9810238](#).
- [56] W. Metzner, C. Castellani, and C. D. Castro, *Adv. Phys.* **46**, 317 (1998).
- [57] R. Jackiw and S. Templeton, *Phys. Rev. D* **23**, 2291 (1981).
- [58] D. Boosé, J.-L. Jacquot, and J. Polonyi (2003), to Appear in *Phys. Lett. A*, [cond-mat/0307101](#).
- [59] N. Bogoliubov and O. Parasiuk, *Acta Math.* **97**, 227 (1957).
- [60] K. Hepp, *Comm. Math. Phys.* **2**, 301 (1966).
- [61] W. Zimmermann, *Comm. Math. Phys.* **15**, 208 (1969).
- [62] Y. Hahn and W. Zimmermann, *Comm. Math. Phys.* **10**, 330 (1968).
- [63] W. Zimmermann, *Comm. Math. Phys.* **11**, 1 (1968).
- [64] H. Nielsen and M. Ninomiya, *Nucl. Phys. B* **185**, 20 (1981).
- [65] K. Wilson and J. Kogut, *Phys. Rep.* **C12**, 77 (1974).
- [66] K. Wilson, *Rev. Mod. Phys.* **18**, 227 (1970).

- [67] J. Polonyi and S. Kornel, Phys. Rev. B **66**, 155113 (2002).
- [68] J. Alexandre, S. Kornel, and J. Polonyi, Phys. Lett. B **351**, 316 (2001).
- [69] J. Polonyi, Phys. Rev. B **68**, 014202 (2003).
- [70] C. Honerkamp, D. Rohe, S. Andergassen, and T. Enss, Phys. Rev. B **70**, 235115 (2004).
- [71] W. Metzner, C. Castellani, and C. D. Castro, Adv. Phys. **46**, 317 (1998).
- [72] U. Weiss, *Quantum dissipative systems* (World Scientific, 1993).
- [73] H. Bateman, Phys. Rev. **38**, 815 (1931).
- [74] R. Feynman and F. Vernon, Ann. Phys. (NY) **24**, 118 (1963).
- [75] J. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961).
- [76] R. Feynman and A. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals* (MacGraw-Hill, 1965).
- [77] A. Kenoufi, Ph.D. thesis, ULP Strabsourg (2004).
- [78] J. Polonyi and F. Stauffer, work in progress.
- [79] A. Caldeira and A. Leggett, Ann. Phys. (NY) **149**, 374 (1983).
- [80] A. Caldeira and A. Leggett, Ann. Phys. (NY) **153**, 445 (1984).
- [81] A. Leggett, S. Chakravary, A. Dorsey, M. Fisher, A. Garg, and W. Zwerger, Rev. Mod. Phys. **59**, 1 (1987).
- [82] R. Albert and A.-L. Barabási, Rev. Mod. Phys. **74**, 47 (2002).
- [83] R. Albert, H. Jeong, and A.-L. Barabási, Nature **401**, 130 (1999).
- [84] A. Broder, R. Kumar, F. Maghoul, P. Raghavan, S. Rajalopagan, R. Stata, A. Tomkins, and J. Wiener, Comput. Netw. **33**, 309 (2000).
- [85] M. Newman, Phys. Rev. E **64**, 016131 (2001).
- [86] H. Jeong, S. Mason, and A.-L. Barabási, Nature **411**, 41 (2001).
- [87] D. Watts and S. Strogatz, Nature **393**, 440 (1999).
- [88] P. M. Erdős P., Rényi A., Publ. Math. (Debrecen) **6**, 290 (1959).
- [89] B. Bollobás, Discrete Math. **33**, 1 (1981).
- [90] A.-L. Barabási and R. Albert, Science **286**, 509 (1999).

- [91] F. Liljeros, C. Edlin, L. Amaral, H. Stanley, and Y. Aberg, *Nature* **411**, 907 (2001).
- [92] S. Dorogovtsev and J. Mendes, *Phys. Rev. E* **63**, 025101 (2001).
- [93] S. Dorogovtsev, J. Mendes, and A. Samukhin, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4633 (2000).
- [94] M. Stumpf and P. Ingram, *Europhys. Lett.* **71**, 152 (2005).
- [95] H. Jeong, Z. Nédá, and A.-L. Barabási, *Europhys. Lett.* **61**, 567 (2003).
- [96] A. Vázquez, *Phys. Rev. E* **67**, 056104 (2003).
- [97] S. Dorogovtsev, J. Mendes, and A. Samukhin, *Phys. Rev. E* **63**, 062101 (2001).
- [98] G. Bianconi and A.-L. Barabási, *Phys. Rev. Lett.* **86**, 5632 (2001).
- [99] G. Bianconi and A.-L. Barabási, *Europhys. Lett.* **54**, 436 (2001).
- [100] G. Mukherjee and S. S. Manna (2005), [cond-mat/0503697](#).
- [101] P. Krapivski and S. Redner, *Phys. Rev. E* **63**, 066123 (2001).
- [102] Z. Burda, J. Correia, and A. Krzywicki, *Phys. Rev. E* **64**, 046118 (2001).