

IPHC : 06-013

N° ordre ULP : 5030

Université Louis Pasteur

THÈSE

Potentiel effectif non-perturbatif Limites sur la masse du boson de Higgs et applications dynamiques

présentée par

Hugo FAIVRE

pour obtenir le grade de

Docteur de l'université Louis Pasteur de Strasbourg

Spécialité : Physique Théorique

Soutenue publiquement le 23 janvier 2006 devant la commission d'examen

Pierre Binétruy

Gabriele Veneziano

Abdelhak Djouadi

Janos Polonyi

Marc Winter

Vincenzo Branchina

Président du jury

Rapporteur externe

Rapporteur externe

Rapporteur interne

Examineur

Directeur de thèse

Parabol

*So familiar and overwhelmingly warm,
This one, this form I hold now.
Embracing you, this reality here,
This one, this form I hold now, so
Wide eyed and hopeful.
Wide eyed and hopefully wild.
We barely remember what came before this precious moment,
Choosing to be here, right now. Hold on, stay inside...
This body holding me, reminding me that I am not alone in,
This body makes me feel eternal. All this pain is an illusion.*

*Tellement intime et irrésistiblement chaude,
Celle-ci, cette forme que je porte en ce moment.
Je t'enlace, cette réalité qui est là,
Celle-ci, cette forme que je porte en ce moment,
Aux yeux grands ouverts et si prometteurs,
Aux yeux grands ouverts et qui promettent d'être sauvages.
On se souvient à peine de ce qui a précédé ce moment précieux,
Choisissant d'être ici, maintenant. Attends, reste à l'intérieur...
Ce corps qui me tient, me rappelle que je ne suis pas seul dedans,
Ce corps me donne l'impression d'être éternel. Toute cette douleur est illusion.*



Remerciements

Bien que la rédaction d'une thèse prenne parfois l'allure d'une véritable course en solitaire, le doctorant peut toujours compter sur le soutien indéfectible d'une poignée de comparses. En l'occurrence, je tiens à remercier en premier lieu Enzo Branchina pour m'avoir encadré et soutenu pendant un nombre incalculable (divergence ultraviolette sans aucun doute) d'heures au cours desquelles nous nous escrimâmes à percer les limbes de la physique des particules. Sa présence et sa perspicacité furent salutaires pour surmonter les écueils que je ne manquai pas de rencontrer au cours de mes explorations subatomiques.

Ensuite, je suis profondément reconnaissant à messieurs Pierre Binétruy, Gabriele Veneziano, Abdelhak Djouadi, Janos Polonyi et Marc Winter d'avoir accepté de former mon jury de thèse et de s'être intéressés avec attention à mon travail. La qualité de leurs analyses et de leurs conseils, ainsi que leur sympathie, ont été pleinement appréciées. Je remercie également Jonny Bartel de m'avoir accueilli avec son amabilité proverbiale dans le laboratoire de Physique Théorique de l'Institut de Recherches Subatomiques. Le savoir-faire, la disponibilité et la bonne humeur de Jean-Pierre Engel et de Benoit Speckel m'ont été d'un grand secours, autant humainement que techniquement.

J'ai aussi une pensée de gratitude pour Magalie, non pas seulement pour m'avoir supporté durant toutes ces années, mais pour avoir été la correctrice en chef de mes balbutiants manuscrits. Enfin, il m'est impossible d'oublier mes compagnons irésiens, thésards et autres, Anne-Catherine, Àngel, Arnaud, Auguste, Benjamin, Damien, Éric, Jérôme, Noël et Renaud, qui, s'ils ne m'ont guère aidé pour cette thèse (ce serait même plutôt le contraire...), ont permis d'agrémenter ces trois années de moments de détente appréciables et de mettre un peu d'entrain et de folie derrière l'austérité des équations du groupe de renormalisation.

Quelques conventions, notations et définitions

Le système d'unité est le standard de la théorie des champs :

$$\hbar = c = 1. \quad (1)$$

Ce qui implique les dimensions suivantes pour les quantités fondamentales :

$$[\text{longueur}] = [\text{temps}] = [\text{énergie}]^{-1} = [\text{masse}]^{-1}. \quad (2)$$

La signature de la métrique est $(+, -, -, -)$ dans l'espace minkowskien. Toutefois, la métrique euclidienne, de signature $(+, +, +, +)$ sera majoritairement utilisée. Les quantités x et p sont en toute généralité des quadrivecteurs, $x^\mu = (x_0, \vec{x})$ et $p^\mu = (p_0, \vec{p})$.

Les distributions de Heavyside, fonction marche $\theta(x)$, et de Dirac, fonction delta $\delta(x)$, sont définies comme :

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x < 0 \\ 1 & \text{pour } x > 0 \end{cases}, \quad \delta(x) = \frac{d}{dx}\theta(x). \quad (3)$$

La fonction delta se généralise en d dimensions et s'écrit en représentation de Fourier :

$$\delta^{(d)}(x) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i k \cdot x}. \quad (4)$$

Les transformées de Fourier en version discrètes et continues sont définies comme :

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i k \cdot x} \tilde{f}(k) & , & \quad \tilde{f}(k) = \int d^d x e^{-i k \cdot x} f(x) \\ f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\Omega_d}} \sum_k \tilde{f}_k e^{i k \cdot x} & , & \quad \tilde{f}(k) = \sqrt{\Omega_d} \sum_x f_x e^{-i k \cdot x}, \end{aligned} \quad (5)$$

où $\Omega_d = \int d^d x$ est le volume d'espace-temps à d dimensions. Le symbole \sim est réservé aux fonctions exprimées dans l'espace conjugué (il sera toutefois omis en l'absence de confusion possible).

La fonction Gamma, utilisée dans le schéma de régularisation dimensionnelle, est définie par l'intégrale suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty dt e^{-t} t^{z-1}. \quad (6)$$

L'expression de l'intégrale gaussienne généralisée nous sera également utile :

$$\int \prod_{i=1}^n dx_i \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n x_i A_{ij} x_j\right) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}}, \quad (7)$$

où le déterminant n'est rien d'autre que le produit des valeurs propres si la matrice A_{ij} est diagonale.

Table des matières

Introduction	1
1 Renormalisation perturbative	9
1.1 Fonctions de Green	9
1.2 Développement perturbatif et divergences	12
1.3 Renormalisation perturbative	13
1.4 Groupe de renormalisation	15
2 Renormalisation non-perturbative et action effective	19
2.1 Groupe de renormalisation wilsonien	20
2.1.1 Renormalisation du terme cinétique	24
2.1.2 Invariance de jauge	25
2.1.3 Connexions avec l'approche perturbative	26
2.2 Potentiel effectif	28
2.2.1 Définition(s) de l'action effective	29
2.2.2 Signification physique et définition variationnelle	30
2.2.3 Propriété de convexité	32
3 Potentiel effectif non-perturbatif en mécanique quantique	35
3.1 Mise en place du problème	36
3.2 Écart énergétique entre les deux premiers niveaux	37
3.3 Équations du groupe de renormalisation wilsonien	40
3.4 Stratégie numérique	41
3.5 Résultats et analyse	43
3.5.1 Évolution du potentiel	43
3.5.2 Précision des résultats et effets de la renormalisation de la masse . .	46

4	Étude non-perturbative du secteur de Higgs du SM	51
4.1	Introduction, contexte et problématique	52
4.2	Phase brisée et instabilité dynamique	56
4.3	Potentiels one-loop et RGI	64
4.3.1	Régularisation dimensionnelle : schéma \overline{MS}	64
4.3.2	Régularisation par cutoff des moments	67
4.4	Stabilité du potentiel effectif	69
4.5	Bornes inférieures sur la masse du Higgs	76
4.6	Analyse non-perturbative	80
4.6.1	Groupe de renormalisation wilsonien	81
4.6.2	Comparaison avec d'autres travaux non-perturbatifs	85
4.7	Conclusions et perspectives	87
5	Équation quantique du mouvement	89
5.1	Introduction, contexte et problématique	89
5.2	Limitations d'applicabilité	91
5.3	Validité d'une équation quantique du mouvement	94
5.3.1	Problème des conditions asymptotiques	94
5.3.2	Allumage adiabatique de la source	96
5.3.3	Mouvement périodique	99
5.4	Une application simple : l'oscillateur harmonique	100
5.5	Dynamique du double puits	102
5.6	Conclusions et perspectives	112
6	Perspectives de recherche	115
6.1	Modèle de Coleman et Weinberg	115
6.1.1	Modèle de deux champs scalaires non-massifs	116
6.1.2	Remarques et pistes d'investigations	118
6.2	Équations du groupe de renormalisation invariante de jauge	119
	Conclusion	121
	ANNEXES	127
A	Schéma \overline{MS}	129

B Régularisation par cutoff	133
B.1 Calcul en 4 dimensions	133
B.2 Calcul en une dimension	135
C Autres conditions de renormalisation	137
D Potentiel RGI du Modèle Standard	139
E Modèle $O(2)$	141
E.1 Cas simple : coordonnées cartésiennes	142
E.2 Expression en coordonnées polaires	145
E.3 Transformation de Fourier	146
E.4 Calcul de la dérivée covariante	149
Bibliographie	153

Table des figures

3.1	Énergies E_0 et E_1 (en unité $\hbar\omega$) pour l'oscillateur anharmonique (a) et pour le double puits (b) en fonction de la constante de couplage λ	44
3.2	Évolution du potentiel effectif $U_k(x)$ avec l'échelle k , pour $\lambda(\Lambda) = 0.1$: (a) cas de l'oscillateur anharmonique (b) cas du double puits.	45
3.3	Évolution de la masse m^2 (a) et de la constante de couplage λ (b) en fonction de l'échelle k pour le double puits. Nous vérifions que le flot de renormalisation, conformément à ce qui est attendu en mécanique quantique, sature à la fois dans l'IR et dans l'UV.	46
3.4	Valeurs de ΔE en fonction de λ données par la méthode du RG, par les solutions exactes de l'équation de Schrödinger et par le résultat analytique de l'approximation non-perturbative du gaz dilué d'instantons.	49
4.1	Construction de Maxwell pour le potentiel classique d'une théorie avec une seule composante scalaire considérée dans le texte. Les paramètres choisis sont : $\lambda = 5 \cdot 10^{-2}$ et $m^2 = -10^{-2}$; les unités sont arbitraires (se reporter au texte).	58
4.2	Construction de Maxwell pour le potentiel classique d'une théorie avec une seule composante scalaire et avec un terme de brisure explicite de la symétrie $-\varepsilon\phi$. On vérifie bien que le point de tangence ϕ_t se trouve à gauche du minimum absolu v_c et que les dérivées en ce point sont parfaitement définies. Les paramètres choisis sont : $\lambda = 5 \cdot 10^{-2}$, $m^2 = -10^{-2}$ et $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$	60

- 4.3 Flot du RG pour le potentiel d'une théorie avec une seule composante scalaire et avec un terme de brisure explicite de la symétrie. Seul le flot dans la région interne a été considéré, c'est-à-dire celui donné par l'équation (4.3). Les conditions aux limites pour les paramètres à $k = 0.1$ sont : $\lambda = 5 \cdot 10^{-2}$, $m^2 = -10^{-2}$ et $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ 62
- 4.4 Potentiel classique V_{cl} et potentiels effectifs one-loop V^{1l} et amélioré par le RG V_{RGI} , donnés respectivement par les équations (4.4), (4.5) et (4.12). Les paramètres sont choisis à l'échelle $\mu = 1.1 \cdot 10^{-1}$ et sont : $\lambda = 2 \cdot 10^{-3}$, $m^2 = -10^{-4}$, $g = 3 \cdot 10^{-1}$ (unités arbitraires, comme explicité auparavant). L'instabilité de V^{1l} et de V_{RGI} est évidente. De plus, ces deux approximations sont très proches dans cette région. 66
- 4.5 À la différence de la figure 4.4, nous avons ici utilisé d'autres conditions de renormalisation de manière à ce que la position du minimum et la courbure de V^{1l} en ce point soient les mêmes que ceux de V_{cl} (cf. annexe C). Les paramètres choisis sont les mêmes que ceux de la figure 4.4. 67
- 4.6 Potentiel effectif one-loop de l'équation (4.15) (avant soustraction des divergences quadratiques), pour $\lambda_\Lambda = 5 \cdot 10^{-2}$, $m_\Lambda^2 = -10^{-2}$, $g_\Lambda = 0.35$ et $\Lambda = 100$. En oubliant la région interne (cf. explications dans le texte), nous voyons qu'au-delà des minima le potentiel est convexe. 70
- 4.7 Potentiels classique et one-loop nu après soustraction des divergences quadratiques. Les paramètres nus sont choisis comme ceux de la figure 4.6.
 (a) On se focalise sur une petite région de ϕ proche des minima classiques.
 (b) Nous traçons ici le potentiel effectif sur toute l'échelle de ϕ (jusqu'au cutoff Λ) et nous constatons sa stabilité. 71
- 4.8 Potentiel effectif wilsonien $V_{wil} = V_{k=0}$. Les conditions aux limites pour les paramètres sont celles de la figure 4.6. Seule la région externe aux minima doit être considérée. Par comparaison, nous avons également tracé le potentiel effectif one-loop de la figure 4.6. Nous observons que, comme expliqué dans le texte, V_{wil} et V^{1l} sont très proches l'un de l'autre. 82

4.9 Potentiel nu (classique), wilsonien après soustraction des divergences quadratiques et one-loop (celui de la figure 4.7). Les conditions aux limites pour les valeurs des paramètres sont toujours celles de la figure 4.6.
 (a) Zoom sur la région de ϕ proche des minima classiques.
 (b) Allure des potentiels sur toute l'échelle de ϕ (jusqu'au cutoff Λ).
 Seule la région externe aux minima doit être considérée. Nous observons que, même après la soustraction des divergences quadratiques, V_{wil} et V^{1l} restent très similaires. 83

4.10 Flots de la masse m^2 (a) et de la constante de couplage λ (b) obtenus respectivement par la méthode wilsonienne, l'approximation one-loop et la technique RGI.
 Les divergences quadratiques n'ont pas été soustraites. Les conditions aux limites pour les valeurs des paramètres sont toujours celles de la figure 4.6. On remarque l'existence d'une valeur critique k_{cr} de l'échelle courante en dessous de laquelle les équations habituelles du RG ne sont plus valables, et donc l'évolution des paramètres est stoppée. Dans la région $k \leq k_{cr}$, on s'attend à retrouver la construction de Maxwell pour le potentiel effectif. On constate aussi que le one-loop et le RGI fournissent des bonnes approximations du flot wilsonien lorsque la masse peut être négligée dans l'expression des β -fonctions. 84

5.1 Évolution de source $J(\vec{x}, t)$ en fonction du temps (unité arbitraire) :
 1) Allumage adiabatique jusqu'à la valeur J_0 ,
 2) Suppression temporaire dans l'intervalle $[t_0, t_1]$,
 3) Restauration puis extinction adiabatique. 98

5.2 Potentiel classique double puits $V_{dw}(q)$ et potentiel renormalisé $V_{RG}(q)$ tiré de la résolution de l'équation du RG (5.23). Les valeurs nues de la constante de couplage et de la masse sont respectivement $\lambda = 0.15$ et $m^2 = -1$ 103

5.3 Le cas $\lambda = 1.1$.
 (a) Paquets d'ondes initiaux $\psi_J(q)$ et $\psi_g(q)$.
 (b) Évolution temporelle de $q(t)$ obtenue à partir de l'équation de Schrödinger avec les paquets d'ondes initiaux $\psi_J(q)$ et $\psi_g(q)$, et d'après l'équation (5.24) avec les conditions initiales précisées dans le texte. 104

5.4	Diagramme position-impulsion $q - p$ pour les trois cas considérés dans la figure 5.3b ($\lambda = 1.1$).	105
5.5	Le cas $\lambda = 0.15$.	
	(a) Paquets d'ondes initiaux $\psi_J(q)$ et $\psi_g(q)$.	
	(b) Évolution temporelle de $q(t)$ obtenue à partir de l'équation de Schrödinger avec les paquets d'ondes initiaux $\psi_J(q)$ et $\psi_g(q)$, et d'après l'équation (5.24) avec les conditions initiales précisées dans le texte.	106
5.6	Diagramme position-impulsion $q - p$ pour les trois cas considérés dans la figure 5.5b ($\lambda = 0.15$).	107
5.7	Le cas $\lambda = 0.07$.	
	(a) Paquets d'ondes initiaux $\psi_J(q)$ et $\psi_g(q)$.	
	(b) Évolution temporelle de $q(t)$ obtenue à partir de l'équation de Schrödinger avec les paquets d'ondes initiaux $\psi_J(q)$ et $\psi_g(q)$, et d'après l'équation (5.24) avec les conditions initiales précisées dans le texte.	108
5.8	Diagramme position-impulsion $q - p$ pour les trois cas considérés dans la figure 5.7b ($\lambda = 0.07$).	109
5.9	Comparaison entre le développement perturbatif et la méthode wilsonienne.	
	(a) Potentiels effectifs one-loop (non convexe) et du RG (convexe).	
	(b) Diagrammes position-impulsion obtenus à partir de l'équation (5.24) avec V_{eff} approximé par V^{1l} et V_{RG} pour un mouvement avec $q(0) = 0.5$ correspondant à une énergie inférieure à la barrière de potentiel (avec $\lambda = 0.15$). Contrairement à V_{RG} , V^{1l} échoue totalement à décrire l'effet tunnel.	110
5.10	Diagrammes position-impulsion obtenus à partir de l'équation (5.24) avec V_{eff} approximé par V^{1l} et V_{RG} pour un mouvement avec $q(0) = 0.7$ correspondant à une énergie supérieure à la barrière de potentiel (avec $\lambda = 0.25$). Même si maintenant V^{1l} explore tout l'espace q , de nouveau le mouvement est très bien reproduit par V_{RG} et non par V^{1l}	111

*“In the beginning, the universe was created.
This made a lot of people very angry, and has
been widely regarded as a bad move.”*

*« Au commencement l'univers fut créé.
Ce qui mit en colère beaucoup de gens et fut
considéré comme étant une erreur. »*

Douglas Adams

Introduction

La théorie des perturbations en mécanique quantique et plus généralement en théorie des champs est un outil puissant qui permet d'appréhender des phénomènes complexes en traitant les interactions comme de petites perturbations altérant un système soluble exactement. Toutefois, il existe une certaine classe de problèmes où cette méthode n'est pas appropriée. C'est naturellement le cas lorsque l'état fondamental est profondément modifié par les interactions, ce qui se produit par exemple lorsque l'on considère des théories à symétries brisées. C'est pourquoi il apparaît essentiel de disposer de méthodes non-perturbatives pour rendre correctement compte de ce type de problématique. Après un bref survol historique de la notion de renormalisation, nous introduirons le point de vue de Wilson [1] qui a permis de mettre au point la stratégie non-perturbative que nous utiliserons tout au long de ce travail. Nous présenterons ensuite les problèmes physiques auxquels nous nous sommes intéressés dans cette thèse.

L'électrodynamique quantique [2] (QED), façonnée durant les années 20 et saluée aujourd'hui comme une des avancées théoriques majeures de la physique des particules, a connu une enfance difficile. En effet, l'enthousiasme suscité par cette toute première théorie quantique des champs (QFT) a été rapidement éclipsé par la découverte de termes divergents pour certaines quantités physiques mesurables (telles que les sections efficaces de diffusion) lors des calculs aux ordres supérieurs de la théorie des perturbations. Ce phénomène a pour origine la sommation infinie sur les états intermédiaires, qui engendre des contributions divergentes. Physiquement, cela est interprété comme le processus de création et d'annihilation de particules virtuelles (paires électron-positron). Ce constat est en fait valable pour n'importe quelle QFT. La théorie de la renormalisation a été élaborée pour remédier à cette déconvenue et propose un formalisme à même de gérer correctement les divergences et de rendre les QFT prédictives.

Suivant cette méthode, on commence par régulariser les intégrales, par exemple en introduisant un "cutoff" (coupure) fini Λ dans l'espace des impulsions en remplacement de la borne supérieure infinie. La valeur Λ représente l'énergie maximale allouée pour les états intermédiaires. Ensuite il s'agit d'isoler les termes divergents, typiquement proportionnels à $\ln \Lambda$ et Λ^2 , des autres contributions finies. L'étape suivante consiste à distinguer les paramètres (charge, masse, constante de couplage, etc.) "nus", définis à l'échelle du cutoff, de ceux "habillés" ou renormalisés, qui correspondent à leurs valeurs expérimentales à basse énergie. Enfin, on considère que les paramètres nus, non physiques puisque non mesurables, présentent des divergences de signe opposé à celles issues des corrections quantiques. Ainsi, ces dernières sont "absorbées" et le résultat final est fini et indépendant du cutoff. Ce schéma laisse cependant une part de liberté dans le choix de ce que l'on appelle les conditions de renormalisation, ce qui indique qu'il est possible de paramétriser la théorie de différentes façons tout en aboutissant aux mêmes résultats. Ce passage d'une paramétrisation à l'autre constitue un groupe de transformations dénommé "groupe de renormalisation" (RG) [3]. Jusqu'à présent, la théorie de la renormalisation a toujours été couronnée de succès, depuis la QED jusqu'à l'avènement du Modèle Standard (SM) pour lequel les accords entre les prédictions et les données expérimentales atteignent des records de précision.

Cependant, tous ces résultats ont été obtenus essentiellement dans une logique perturbative. Si la découverte de la liberté asymptotique en chromodynamique quantique (QCD) a permis de conserver un traitement perturbatif pour cette théorie, dans le cas des "basses" énergies (en dessous du GeV), la constante de couplage de l'interaction forte devient grande et un développement perturbatif est de moins en moins fiable. Cela signifie qu'il est relativement difficile, à partir des degrés de liberté à haute énergie de la QCD, à savoir les gluons et les quarks, de décrire le comportement des hadrons. C'est pourquoi des méthodes non-perturbatives, notamment le recours aux calculs sur réseaux, ont été développées pour pouvoir utiliser la QCD dans cette gamme d'énergie.

En revanche, pour la QED et plus généralement pour le SM, l'analyse perturbative habituelle permet une très bonne prédiction des quantités physiques. Toutefois, il subsiste des domaines encore mal compris, en particulier le secteur scalaire du SM. En effet, pour les théories à symétries brisées, les méthodes non-perturbatives apportent une meilleure compréhension des phénomènes mis en jeu. Par exemple, elles seules permettent de recouvrer la propriété de convexité du potentiel effectif. Pourtant, ce constat est sou-

vent considéré comme un "détail" technique n'ayant pas d'impact sur la phénoménologie. Notre objectif est donc de montrer quelles peuvent être les retombées et les apports de la renormalisation non-perturbative par rapport à quelques applications usuelles impliquant des symétries brisées.

Ainsi, en nous basant sur le formalisme wilsonien, nous remettons en question le phénomène d'instabilité du vide électrofaible, ce qui aura pour conséquence de modifier les déterminations habituelles des bornes inférieures théoriques sur la masse du boson de Higgs. Dans un autre registre, à savoir l'utilisation de l'action effective pour évaluer la dynamique d'un champ quantique, nous verrons que les méthodes non-perturbatives sont indispensables pour espérer décrire correctement le système.

L'interprétation physique de la renormalisation, restée énigmatique un certain temps, s'est nettement améliorée dans les années 70. Guidé par les nombreuses analogies entre théorie des champs et physique statistique, Wilson a proposé une approche apportant un éclairage nouveau [1]. L'idée de base de son raisonnement est de concevoir le processus de renormalisation comme la transformation de la théorie à mesure que le nombre de degrés de liberté diminue. L'approche wilsonienne de la renormalisation consiste donc à éliminer par "bloc" les degrés de liberté successifs et à considérer la théorie en diminuant de plus en plus la résolution spatiale, en passant d'une échelle ultraviolette (UV) à une échelle infrarouge (IR).

Ainsi, le mécanisme en œuvre dans les systèmes critiques en physique statistique, comme par exemple le ferromagnétisme autour de la température de Curie, présente des points communs avec l'apparition des divergences en QFT. En effet, dans les systèmes statistiques sujets à des transitions de phase de second ordre, tous les degrés de liberté (chaque atome) se comportent de manière cohérente. Autrement dit, chaque fluctuation provenant d'un point est infiniment corrélée avec toutes les autres. En conséquence, bien que la théorie UV, en l'occurrence microscopique, soit connue et régulière, si l'on cherche à extraire des informations macroscopiques (température, magnétisation, etc.), on se heurte à des quantités divergentes. La singularité de la physique IR naît donc de cette accumulation de fluctuations provenant de toutes les échelles du système.

En QFT, on observe un phénomène analogue. La physique IR, caractérisée par les données expérimentales, est tributaire des fluctuations à courte distance, ce qui engendre des divergences dans le calcul des quantités physiques aux ordres supérieurs de la théorie des perturbations. La différence avec la physique statistique est qu'en QFT la valeur des

paramètres à l'échelle UV est inconnue car cette région est inaccessible à la mesure. Dans ces deux théories, qui impliquent un nombre infini de degrés de liberté, l'origine des divergences tient donc au fait que les effets provenant de toutes les échelles contribuent de manière égale au calcul des quantités physiques, rendant ainsi leur sommation arbitrairement grande.

Dans le cadre du formalisme de Wegner et Houghton [4], l'application de la stratégie wilsonienne d'élimination infinitésimale des degrés de liberté permet de construire une équation exacte du RG, même si en réalité on est presque obligatoirement ramené à recourir à quelque approximation ou troncature. En revanche, cette méthode est par construction *non-perturbative*, ce qui lui confère un intérêt indubitable. Cette technique permet d'établir des relations entre les paramètres à l'échelle du cutoff et ceux à l'échelle courante k . En procédant par itérations successives, on extrait un "flot de renormalisation" qui décrit l'évolution des constantes de couplage avec l'échelle. On peut ainsi en déduire la théorie *effective* associée à chaque échelle.

Cette approche signifie qu'une description correcte des processus physiques nécessite de considérer une théorie effective, c'est-à-dire valable uniquement sur une gamme d'énergie restreinte. Tous les paramètres en jeu, tels que la masse ou la charge, sont alors définis à une échelle donnée, et dès que l'on s'en éloigne, les paramètres *effectifs* en sont modifiés. La renormalisation nous offre alors la possibilité de savoir, à partir d'une théorie valide à une certaine échelle, comment les paramètres vont évoluer au fur et à mesure que l'on change la résolution avec laquelle on observe le système.

L'idée sous-jacente de ce raisonnement est que, pour des distances inférieures à Λ^{-1} , toute théorie effective cesse d'être valable et une nouvelle lui succède. Un exemple célèbre est la théorie de l'interaction faible à quatre fermions développée par Fermi [5]. Celle-ci, bien que remarquablement prédictive pour des énergies allant jusqu'à l'ordre du GeV, doit ensuite céder sa place à la théorie électrofaible du Modèle Standard. La perte de validité de ce modèle s'explique ainsi : lorsque des processus mettent en jeu des énergies de l'ordre d'une centaine de GeV, la masse des bosons vecteurs de l'interaction faible ne peut plus être approximée comme infinie. Il faut donc prendre en compte ces degrés de liberté supplémentaires pour construire une théorie plus fondamentale.

Pour les théories effectives dont on ne connaît pas encore la limite (le Modèle Standard par exemple), on s'attend à ce que, pour des énergies de l'ordre du cutoff Λ , de nouveaux degrés de liberté soient découverts. Ainsi, pour décrire la physique avec une résolution

inférieure à Λ^{-1} , il faudra considérer une nouvelle théorie plus globale (supersymétrie ou théorie des cordes par exemple).

Comme dernière remarque, on peut noter que, dans l'esprit des théories effectives, une connaissance précise de la physique à très courte distance est totalement inutile car il est toujours possible d'ajouter des interactions locales dans le lagrangien de manière à simuler les effets de ces degrés de liberté inconnus pour reproduire les valeurs mesurées à l'échelle infrarouge [6, 7]. Cette approche permet de considérer des théories très générales, en incluant les interactions dites non-renormalisables dans la classification habituelle. En effet, toujours dans une logique perturbative, les contributions de ces dernières à l'échelle IR p sont proportionnelles à des puissances de p/Λ et sont donc négligeables lorsque l'on se place suffisamment loin du cutoff. Ainsi, en se limitant sciemment à une résolution maximale Λ^{-1} donnée, on peut envisager toutes les interactions imaginables. On parle alors d'opérateur inessentiel, essentiel ou marginal, selon leur comportement dans l'IR. Il peut également arriver que des constantes de couplage inessentiels deviennent importantes au cours du flot si des phénomènes non-perturbatifs entrent en jeu [8].

Cette thèse est articulée comme suit. Tout d'abord nous allons introduire le langage de la théorie de la renormalisation perturbative en rappelant quelques concepts fondamentaux. Ensuite, nous nous focaliserons sur deux notions particulièrement importantes pour notre étude : le groupe de renormalisation wilsonien et l'action effective. En adoptant le formalisme de Wegner et Houghton, nous spécifierons les équations exactes du RG pour le potentiel et le terme suivant du développement en gradient.

La première application des équations du RG à un problème physique est relatée au chapitre 3 dans lequel nous exploiterons la méthode wilsonienne pour déterminer l'écart énergétique entre les deux premiers niveaux d'énergie dans un potentiel double puits. La prise en compte non-perturbative des effets quantiques fait ainsi "disparaître" la barrière de potentiel au cours de la renormalisation. En d'autres termes, à partir d'un potentiel classique double puits, les équations du RG conduisent à un potentiel effectif convexe, cela en accord avec les théorèmes généraux [9, 10]. La pertinence des prédictions issues de la technique du RG sera quantifiée par la comparaison avec les solutions exactes découlant de la résolution numérique de l'équation de Schrödinger. L'obtention d'un très bon accord pour les valeurs de l'écart énergétique ainsi calculé constituera un solide argument sur le bien-fondé de notre approche.

Ayant ainsi testé et validé notre méthode d'approximation, nous avons considéré un domaine où de nombreuses questions restent ouvertes, en l'occurrence le secteur de Higgs du Modèle Standard. Il est couramment admis que le couplage de Yukawa entre le quark top et le boson de Higgs engendre à haute énergie l'instabilité du vide électrofaible, ce qui signifie que le potentiel effectif V_{eff} devient non limité inférieurement ("unbounded from below") pour certaines valeurs du couplage. En imposant alors la contrainte phénoménologique de stabilité (ou de métastabilité) de V_{eff} , on peut en déduire des contraintes sur la masse minimale du Higgs en fonction du cutoff physique de la théorie, autrement dit de l'échelle de la *nouvelle physique*.

Cependant, cette procédure semble en nette contradiction avec la propriété de convexité du potentiel effectif qui proscrit un tel comportement. À partir d'un modèle simple, constitué d'un champ scalaire avec couplage de Yukawa, nous développerons des arguments conduisant à remettre en cause cette instabilité, cette dernière constituant en réalité un artefact engendré par une extrapolation des équations du RG hors de leur domaine de validité. En dépit de l'inexistence de l'instabilité, nous expliquerons comment la prise en compte de l'autoconsistance de la théorie permet de déterminer de nouvelles limites inférieures sur la masse du Higgs. Nous parachèverons cette étude [11] en montrant comment réconcilier la convexité du potentiel effectif avec le calcul des fonctions de Green dans la phase brisée. À cette fin, nous combinerons le critère d'instabilité dynamique de Bogolubov avec les équations du groupe de renormalisation.

Le cinquième chapitre sera dévolu à l'utilisation du potentiel effectif pour la description de l'évolution temporelle de la valeur moyenne du champ quantique. Dans ce contexte, l'équation $\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi} = 0$ (où Γ est l'action effective) est souvent considérée comme l'analogie quantique de l'équation classique du mouvement $\frac{\delta S}{\delta\phi} = 0$ (où S est l'action classique). Cette interprétation suggère que la dynamique de la valeur moyenne du champ quantique peut être décrite, dans l'approximation du potentiel local, par les équations classiques du mouvement dans lesquelles le potentiel effectif remplace son homologue classique.

Ce mimétisme doit cependant être tempéré car la définition même de l'action effective englobe des conditions asymptotiques (états "in" et "out") qui ne ressortent pas de façon manifeste dans l'expression de Γ . Nous montrerons que si ces conditions sous-jacentes sont respectées et si une approximation non-perturbative pour le potentiel effectif est choisie, alors la dynamique de la valeur moyenne du champ est fidèlement décrite par cette approche. Notre analyse sera conduite dans un cadre général avant d'être testée

analytiquement dans un cas simple, puis numériquement pour la description du mouvement d'une particule dans le double puits (en mécanique quantique). Ce travail [12] pourrait présenter un intérêt en cosmologie où nous sommes parfois amenés à considérer l'évolution dynamique de la valeur moyenne d'un champ scalaire (comme c'est le cas pour l'inflaton), et pourrait constituer une direction de recherche pour l'avenir.

Enfin, avant de présenter nos conclusions, nous allons brièvement présenter deux pistes de recherche prometteuses. La première perspective est l'étude non-perturbative du mécanisme de brisure dynamique de symétrie proposé par Coleman et Weinberg [13]. Il s'agit ici de se demander si la construction de Maxwell peut être reproduite par les équations du RG dans ce cas particulier de théorie à symétrie brisée. En outre, nous ébaucherons un recensement des hypothèses sur lesquelles reposent ce mécanisme et nous verrons dans quelle mesure celles-ci peuvent être validées. D'autre part, l'application d'une nouvelle formulation pour l'équation wilsonienne du RG [14] constitue également un projet de recherche intéressant. Cette dernière peut en effet être utilisée pour les théories de jauge puisqu'elle est invariante par reparamétrisation. Dans l'immédiat, son exploitation est envisagée dans le cadre des modèles sigma linéaire et non-linéaire.

« *Observer, c'est perturber.* »

Hubert Reeves

1

Renormalisation perturbative

Afin d'introduire quelques notions qui seront utiles par la suite, nous rappelons ici quelques concepts essentiels de théorie des champs, en particulier la renormalisation perturbative dans la formulation euclidienne. Le lecteur familier avec ces notions est invité à passer directement au chapitre suivant où nous nous attarderons sur deux points plus précis, en l'occurrence la renormalisation wilsonienne et l'action effective, auxquels nous ferons souvent référence dans notre travail.

1.1 Fonctions de Green

Pour illustrer notre propos, nous considérons ici une théorie des champs scalaire à une composante ϕ avec autointeraction quartique, en gardant à l'esprit la généralisation possible aux autres types de champs (fermionique, de jauge, etc). Le lagrangien¹ s'écrit alors :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{24} \lambda \phi^4. \quad (1.1)$$

¹Par simplicité, le mot lagrangien désignera sans distinction le lagrangien $L = \int d^3x \mathcal{L}$ et la densité de lagrangien \mathcal{L} .

L'amplitude de persistance du vide en présence d'une source $J(x)$ n'est rien d'autre que la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green déconnectées :

$$Z[J] = \langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle_J = N \int \mathcal{D}\phi e^{i \int d^4x (\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) + J(x)\phi(x))}. \quad (1.2)$$

La notation formelle $\mathcal{D}\phi$ dans l'équation (1.2) indique que nous sommes en présence d'une intégrale fonctionnelle, ce qui signifie que l'on intègre sur l'ensemble de toutes les configurations possibles du champ. La mesure $\mathcal{D}\phi$ est *a priori* mal définie, mais il existe plusieurs stratégies possibles pour rendre les intégrales de chemin mathématiquement correctes [15].

Dans le cas libre ($\lambda = 0$), $Z[J]$ s'écrit :

$$Z_0[J] = \exp\left(\frac{i}{2} \int d^4x d^4y J(x)G_0(x-y)J(y)\right), \quad (1.3)$$

où la normalisation habituelle $Z_0[0] = 1$ a été choisie et où $G_0(x-y)$ est la fonction de Green libre définie comme la solution de :

$$(\square + m^2)G_0(x-y) = \delta(x-y). \quad (1.4)$$

Il convient de spécifier les conditions aux limites pour déterminer de façon univoque les fonctions de Green. Dans le cas présent, ces dernières sont données par la prescription de Feynman, qui sera explicitée par la suite.

En toute généralité, les fonctions de Green à n points $G^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$ sont définies comme la valeur moyenne du produit ordonné temporellement de n champs :

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | \mathcal{T} [\phi(x_1) \dots \phi(x_n)] | 0 \rangle. \quad (1.5)$$

Les expressions de $G^{(n)}$ sont indispensables pour calculer les sections efficaces de diffusion via les formules de réduction. La connaissance de la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green à n points $Z[J]$ permet de déduire $G^{(n)}$:

$$\left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1) \dots \delta J(x_n)} \right|_{J=0} = (i)^n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (1.6)$$

Ensuite le théorème de Wick peut être utilisé pour exprimer les fonctions à n points libres $G_0^{(n)}$ suivant des combinaisons de $G_0(x-y)$. Cette dernière correspond naturellement, à un facteur conventionnel i près, à la fonction de Green libre à deux points. En passant en représentation de Fourier dans l'équation (1.4), on démontre facilement que $G_0(x-y)$ peut s'écrire :

$$G_0(x-y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^3\vec{k} dk_0}{(2\pi)^4} \frac{e^{i k_0(x_0-y_0) - i \vec{k} \cdot (\vec{x}-\vec{y})}}{k_0^2 - \vec{k}^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (1.7)$$

où nous avons distingué la composante temporelle de celles spatiales pour mettre en évidence la présence de deux pôles réels $\pm(\vec{k}^2 + m^2)^{\frac{1}{2}}$ dans l'expression ci-dessus. L'ambiguïté qui en résulte dans l'intégrale de contour est résolue par la prescription de Feynman. Suivant cette procédure, on introduit la variable petite ϵ qui permet de déplacer les pôles dans le plan complexe. Ce choix particulier de contour offre une interprétation physique intéressante puisque cela signifie que les particules se propagent dans le sens du temps et les antiparticules en sens inverse [16]. La fonction de Green à deux points, appelée aussi propagateur de Feynman, est donc causale.

Il existe une autre alternative pour contourner les pôles du propagateur, qui consiste à effectuer une rotation d'un quart de tour dans le plan complexe. Cette opération permet également de changer le caractère oscillatoire des intégrales de chemin définissant $Z[J]$ et d'accéder à une convergence absolue. Cette technique, connue sous le nom de rotation de Wick, repose sur la continuation analytique de la variable temporelle dans le plan complexe imaginaire pur : $x_0 \rightarrow -i x_4$ et $k_0 \rightarrow -i k_4$ dans l'espace conjugué (cf. [17] par exemple). Par conséquent, la métrique minkowskienne devient euclidienne avec des grandeurs définies positives : $-k_E^2 = -(k_4^2 + \vec{k}^2)$, $-x_E^2 = -(x_4^2 + \vec{x}^2)$ et $-k_E \cdot x_E = -(k_4 x_4 + \vec{k} \cdot \vec{x})$. La continuation analytique de l'équation (1.7) permet de définir, dans l'espace réel et conjugué, les fonctions de Green libre euclidienne :

$$G_{0E}(x_E - y_E) = \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} \frac{e^{-k_E \cdot (x_E - y_E)}}{k_E^2 + m^2} \quad , \quad \tilde{G}_{0E}(p_E) = \frac{1}{p_E^2 + m^2} \quad , \quad (1.8)$$

où le terme en ϵ n'a plus lieu d'être, les pôles étant désormais des nombres imaginaires purs. On passe ainsi de la formulation minkowskienne à celle euclidienne, et vice-versa, par les relations :

$$G_0(x)|_{x_0 \rightarrow -i x_4} \rightarrow i G_{0E}(x_E) \quad ; \quad G_{0E}(x_E)|_{x_4 \rightarrow i x_0} \rightarrow -i G_0(x) \quad . \quad (1.9)$$

La rotation de Wick modifie également l'expression de l'amplitude de persistance du vide (1.2), qui s'écrit dans sa version euclidienne comme :

$$Z_E[J] = N \int \mathcal{D}\phi e^{-\int d^4 x_E (\mathcal{L}_E(\phi, \partial_\mu \phi) + J\phi)} \quad , \quad (1.10)$$

où le lagrangien est désormais :

$$\mathcal{L}_E = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 + \frac{1}{24}\lambda \phi^4 \quad . \quad (1.11)$$

Nous utiliserons la théorie des champs euclidienne dans l'essentiel de notre travail, donc les indices E seront sous-entendus à partir de maintenant.

1.2 Développement perturbatif et divergences

L'étape suivante consiste à séparer le terme d'interaction $\mathcal{L}_{int} = \lambda\phi^4/24$ de la partie libre en réexprimant $Z[J]$ comme :

$$Z[J] = e^{-\int d^4x \mathcal{L}_{int}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right)} Z_0[J] \quad (1.12)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left[\int d^4x \mathcal{L}_{int}\left(\frac{\delta}{\delta J(x)}\right) \right]^n Z_0[J]. \quad (1.13)$$

Dans cette équation, dite formule de Gell-Mann et Low, nous avons remplacé la variable ϕ de \mathcal{L}_{int} par son équivalent en tant qu'opérateur fonction de J car Z est une fonctionnelle de J . L'équation (1.12) n'est généralement pas soluble exactement. C'est donc à ce niveau qu'intervient la théorie des perturbations qui conduit à tronquer le développement de l'exponentielle (1.13) à un ordre donné correspondant aux puissances de la constante de couplage λ . La relation (1.6) permet alors de déterminer les fonctions de Green à n points à ce même ordre.

L'ensemble de ces développements en puissances se traduit graphiquement par les célèbres diagrammes de Feynman, qui permettent d'une part de visualiser les processus physiques mis en jeu et d'autre part d'identifier l'ordre du développement perturbatif, à savoir le nombre de boucles présentes. À partir de l'ordre 1, les intégrales apparaissant dans les fonctions de Green présentent des divergences UV^2 . En dérivant $Z[J]$ deux fois par rapport à J , on trouve la fonction à deux points $G^{(2)}(x-y)$. Cette dernière est la somme de $G_0(x-y)$, le propageur libre, plus un terme d'ordre λ provenant de l'interaction ϕ^4 (ce qui correspond à la prise en compte d'une boucle à ce niveau d'approximation) :

$$G^{(2)}(x-y) = G_0(x-y) - \frac{\lambda}{2} G_0(0) \int dz G_0(z-x) G_0(z-y) \quad (1.14)$$

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \tilde{G}_0(p) - \frac{\lambda}{2} G_0(0) \tilde{G}_0(p). \quad (1.15)$$

On peut ainsi écrire de manière compacte [18] :

$$G^{(2)}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-p(x-y)}}{p^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} G_0(0)}. \quad (1.16)$$

Ce résultat, comparé à l'équation (1.8), amène à l'interprétation suivante : la masse physique de la particule, qui correspond au pôle apparaissant dans le propagateur, est modifiée par les fluctuations quantiques. En d'autres termes, la masse renormalisée m_R^2 , observée

²Pour les théories sans masse, des divergences IR sont également présentes, mais nous nous bornons aux théories massives scalaires dans ce chapitre introductif général.

expérimentalement, est la somme de la masse nue m_B^2 , quantité qui serait mesurée dans un monde non-quantique, et d'une correction Σ_0 , évaluée ici au premier ordre, soit :

$$m_R^2 = m_B^2 + \Sigma_0 \quad \text{avec} \quad \Sigma_0 = \frac{\lambda}{2} G_0(0). \quad (1.17)$$

Par construction, on s'attend à ce que la modification soit petite, puisque l'on est dans une logique perturbative. Or, la mauvaise surprise est que $G_0(0) = G_0(x-x)$ est tout simplement fortement divergente ! Elle s'écrit en effet (cf. équation (1.8)) :

$$G_0(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d^4k \frac{1}{k^2 + m^2} \propto \int_0^\Lambda dp \frac{p^3}{p^2 + m^2} \propto \Lambda^2, \quad (1.18)$$

où le cutoff Λ a été introduit pour régulariser l'intégrale.

Pour remédier à ce problème, l'idée fondamentale de la renormalisation est de choisir la masse nue m_B^2 de la théorie, de telle façon à compenser exactement, à chaque ordre du développement, les termes divergents correspondant aux corrections radiatives issues de chaque boucle successive. En effet, la masse nue à l'échelle Λ est de toute façon inobservable, donc on peut fixer sa valeur arbitrairement de manière à éliminer les divergences et rendre les QFT prédictives.

Le même phénomène se produit avec la constante de couplage λ . En dérivant $Z[J]$ quatre fois, on obtient plusieurs contributions distinctes. Cependant, certaines d'entre elles constituent des diagrammes déconnectés, c'est-à-dire décrivant la propagation de deux particules indépendantes. On introduit donc une nouvelle famille de fonctions de Green, $\Gamma^{(n)}$, qui sont dites connectées irréductibles à une particule (1PI), ou plus simplement fonctions de vertex. Ainsi, à l'ordre 1 du développement perturbatif on trouve [18] :

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \lambda + \sum_{i=1}^3 \frac{\lambda^2}{2} \int \frac{d^d p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2 + m^2} \cdot \frac{1}{(p - q_i)^2 + m^2}, \quad (1.19)$$

où les q_i^2 correspondent aux trois variables de Mandelstam : $s = p_1^2 + p_2^2$, $t = p_1^2 + p_3^2$ et $u = p_1^2 + p_4^2$.

On vérifie bien que chacune des trois contributions de boucle est proportionnelle à $\ln(\Lambda/m^2)$ et donc diverge logarithmiquement.

1.3 Renormalisation perturbative

Il s'agit ici de disposer d'une méthode systématique qui permette de rendre finies les contributions provenant de chaque boucle virtuelle. Pour cela, il faut définir, à chaque

ordre du développement des *contre-termes* δm^2 , $\delta\lambda$ et δZ , tels qu'ils compensent *toutes* les divergences. Il existe diverses manières de régulariser les théories des champs : la régularisation par cutoff dans l'espace des impulsions, les calculs sur réseaux, la régularisation dimensionnelle, etc. Nous utiliserons principalement la première puisqu'elle est indispensable dans la logique wilsonienne. La dernière est la plus employée, notamment car elle permet de préserver l'invariance de jauge.

La régularisation dimensionnelle consiste à effectuer les intégrales sur d dimensions, avec $d = 4 - 2\epsilon$, et à exprimer celles-ci en termes de fonctions Gamma $\Gamma(n)$. Ensuite la limite $d \rightarrow 4$ ($\epsilon \rightarrow 0$) donne des contributions finies et des pôles proportionnels à $\frac{1}{\epsilon}$ qui sont compensés par les contre-termes. Dans le schéma de soustraction minimale (MS), les contre-termes contiennent uniquement les pôles ; dans le schéma modifié (\overline{MS}) on y inclut également, par commodité, les termes finis proportionnels à $-\gamma$ (constante d'Euler) et à $\ln(4\pi)$.

Les paramètres physiques renormalisés, quant à eux, sont donnés par la valeur des fonctions de vertex à l'échelle arbitraire de basse énergie μ , appelée échelle de renormalisation. Plus précisément, les conditions de renormalisation sont typiquement définies à l'impulsion $p^2 = \mu^2$ de la manière suivante (cf. [19] par exemple) :

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) \Big|_{p^2=\mu^2} = m^2 \quad (1.20)$$

$$\frac{d^2}{dp^2} \tilde{\Gamma}^{(2)}(p) \Big|_{p^2=\mu^2} = 1 \quad (1.21)$$

$$\tilde{\Gamma}^{(4)}(p_1, p_2, p_3, p_4) \Big|_{s=t=u=\mu^2} = \lambda. \quad (1.22)$$

Ces relations fixent respectivement la masse, la renormalisation du champ et la constante de couplage. Cependant, il existe toujours une certaine liberté dans les choix (1.20-1.22), puisque des contre-termes finis peuvent être choisis arbitrairement sans changer la théorie. Les équations (1.20-1.22) permettent d'implémenter la suppression des divergences dans l'expression des fonctions de vertex renormalisées.

Par exemple, pour la renormalisation de la masse, il faut déterminer δm^2 tel que :

$$m_B^2 + \Sigma_0 = m_R^2 + \delta m^2 + \Sigma_0 = m_R^2 + \Sigma_R, \quad (1.23)$$

où m_R^2 et Σ_R sont finis. Explicitement le calcul de Σ_0 en d dimensions donne [17] :

$$\Sigma_0 = \int \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^2 + m^2} = m^2 \frac{\lambda}{(4\pi)^2} \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right)^{\frac{d}{2}-2} \frac{1}{2} \Gamma \left(1 - \frac{d}{2} \right). \quad (1.24)$$

Ainsi en choisissant $\delta m^2 = -m^2 \frac{\lambda}{(4\pi)^2} \frac{1}{\epsilon}$, ce qui correspond au schéma MS , on trouve à la limite $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\Sigma_R = \frac{1}{2} m^2 \frac{\lambda}{(4\pi)^2} \left(\ln \left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right) + \gamma - 1 \right), \quad (1.25)$$

où μ est une échelle arbitraire de basse énergie.

De la même façon, il faut construire les contre-termes $\delta\lambda$ et δZ pour la constante de couplage et le champ respectivement. Le fait que les paramètres à devoir être renormalisés sont en nombre fini indique que la théorie ϕ^4 est perturbativement renormalisable. Si l'on avait été en présence de termes proportionnels à ϕ^6 par exemple, il aurait été nécessaire d'introduire une infinité de nouveaux paramètres pour supprimer les divergences à tous les ordres.

1.4 Groupe de renormalisation

Les paramètres physiques renormalisés sont définis à une certaine échelle de basse énergie μ , tandis que les paramètres nus le sont à une échelle de très haute énergie Λ . Cette observation suggère que les "constantes" de couplage ne sont justement pas constantes. En effet, la philosophie de la renormalisation conduit à voir une QFT comme une succession de théories effectives valables chacune dans une certaine gamme d'énergie (l'approche wilsonienne exploite d'ailleurs cette idée au-delà du cadre perturbatif). Autrement dit, la contribution de la physique à très courte distance ($< \Lambda^{-1}$) ne change pas le fond des QFT, mais simplement leur forme, les degrés de liberté vivant au-delà du cutoff ne modifiant que la valeur des paramètres.

Aussi, il est crucial de connaître l'évolution des constantes de couplage avec l'échelle considérée. C'est le but du Groupe de Renormalisation (RG). Les paramètres sont alors dit "courants" et dépendent donc de l'énergie μ à laquelle ils sont considérés. En prenant une constante de couplage générique renormalisée $g(\mu)$, on décrit sa dépendance avec l'échelle μ à l'aide de la fonction bêta (β -fonction) définie comme :

$$\mu \frac{\partial g}{\partial \mu} = \beta_g(\{g_i\}, \mu), \quad (1.26)$$

où $\{g_i\}$ constitue l'ensemble de toutes les constantes de couplage du système évaluées au point μ . Évidemment, le flot exact de $g(\mu)$ n'est connu que pour des cas triviaux et il faut généralement recourir à des approximations pour déterminer les β -fonctions. L'analyse dimensionnelle en théorie des perturbations permet de montrer que ces dernières

ne dépendent pas explicitement de μ .

Pour savoir comment varie $g(\mu)$ avec μ , on choisit une échelle de renormalisation différente $\mu' = \mu + \delta\mu$ dans les conditions de renormalisation (1.20-1.22), ce qui fournit l'expression de $g(\mu')$. La limite $\delta\mu = 0$ permet ensuite d'obtenir la β -fonction.

Pour les masses, afin d'avoir des objets sans dimension, on définit les fonctions γ_m comme :

$$\mu \frac{\partial m}{\partial \mu} = m \gamma_m(\{g_i\}). \quad (1.27)$$

Enfin, dans le cas de la renormalisation de la fonction d'onde, on écrit :

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} \ln \sqrt{Z} = \gamma(\{g_i\}), \quad (1.28)$$

ce qui introduit la notion de dimension anormale γ du champ (elle est nulle au premier ordre dans le modèle ϕ^4).

Étant donné que toute la dépendance de la théorie effective par rapport à l'échelle est endossée par les paramètres, cela signifie que les fonctions de Green doivent être indépendantes vis-à-vis de μ . En d'autres termes, ces dernières ne doivent pas être modifiées par les transformations du type $\mu \rightarrow \mu'$, qui forment le groupe de renormalisation. Cela implique donc que la dérivée totale de $\Gamma^{(n)}$ doit être nulle :

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n; \mu, g_i) = 0. \quad (1.29)$$

Or, comme la fonction de vertex renormalisée dépend explicitement des constantes de couplage, l'équation précédente s'écrit, dans le cas de la théorie ϕ^4 :

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_\lambda(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma(\lambda) + m^2 \gamma_{m^2}(\lambda) \frac{\partial}{\partial m^2} \right] \Gamma^{(n)} = 0. \quad (1.30)$$

Cette relation est appelée équation du groupe de renormalisation ou équation de Callan-Symanzik [20]. Elle permet d'exprimer l'invariance des fonctions de Green vis-à-vis d'un changement d'échelle. En introduisant la variable sans dimension $t = \ln(\mu/\mu')$, la solution générale de cette équation est (cf. [21] par exemple) :

$$\Gamma^{(n)}(\{x_i\}, t, \lambda, m^2) = \exp \left[-n \int_0^t dt' \gamma(\bar{\lambda}(t')) \right] \Gamma^{(n)}(\{x_i\}, t, \bar{\lambda}(t), \bar{m}^2(t)), \quad (1.31)$$

où l'on a introduit les constantes de couplage courantes $\bar{g}_i(t)$. Ces dernières sont la généralisation des équations (1.26-1.28) dans lesquelles le membre de droite devient également fonction de l'échelle. On remplace ainsi les paramètres $g_i(\mu)$ définis au point μ par les

paramètres courants $\overline{g}_i(t)$ fonction de l'échelle t . Les valeurs de $\overline{g}_i(t)$ en $\mu' = \mu$ ($t = 0$) constituent alors les conditions aux limites, soit explicitement :

$$\frac{\partial \overline{g}}{\partial t} = \beta_g(\{\overline{g}_i\}) \quad \text{avec} \quad \overline{g}_i(t = 0) = g(\mu). \quad (1.32)$$

De cette manière, la dépendance des constantes de couplage avec l'échelle est efficacement prise en compte.

Par exemple, pour λ , la β -fonction à une boucle ("one-loop") est $\beta_\lambda^{1l}(\lambda) = \frac{3}{16\pi^2}\lambda^2$ et les résultats de la théorie des perturbations donnent l'expression suivante pour la dépendance de la constante de couplage avec l'échelle μ' :

$$\lambda(\mu') = \lambda(\mu) \left(1 + \frac{3\lambda(\mu)}{16\pi^2} \ln \frac{\mu'}{\mu} \right). \quad (1.33)$$

L'application de l'équation de Callan-Symanzik (1.30) montre que la constante de couplage courante est en fait la solution de l'équation (1.32), soit :

$$\overline{\lambda}(\mu') = \frac{\lambda(\mu)}{1 - \frac{3\lambda(\mu)}{16\pi^2} \ln \frac{\mu'}{\mu}}. \quad (1.34)$$

Le résultat à une boucle "naïf" (1.33) correspond en fait au premier terme de la série de puissances des corrections logarithmiques provenant des boucles successives. C'est pourquoi l'équation (1.34) est interprétée comme la resommation géométrique des logarithmes dominants (ces derniers constituant une classe particulière de diagrammes de Feynman).

Dans cet esprit, en anticipant la notion de potentiel effectif V_{eff} qui sera décrite au chapitre suivant, on peut appliquer l'équation de Callan-Symanzik (1.30) à V_{eff} . On obtient alors le potentiel amélioré par le groupe de renormalisation (RGI³), noté V_{RGI} , qui permet d'élargir le domaine de validité de l'approximation en boucles.

En effet, la limite de l'approximation perturbative simple se lit dans l'équation (1.33) où l'on voit que la correction $\frac{3\lambda(\mu)}{16\pi^2} \ln \frac{\mu'}{\mu}$ doit évidemment être inférieure à l'unité. Or, pour des valeurs importantes de μ' , le logarithme peut devenir suffisamment grand pour invalider le développement perturbatif. La simple inspection de l'équation (1.34) montre que le recours à l'équation du RG (1.30) permet d'obtenir une constante de couplage nettement moins sensible à la valeur de μ' . Cela permet donc d'étendre le domaine de validité des résultats perturbatifs.

³Renormalisation Group Improved.

“In science one tries to tell people, in such a way as to be understood by everyone, something that no one ever knew before. But in poetry, it’s the exact opposite.”

« En sciences, on essaie d’expliquer aux gens, de manière à être compris par tous, quelque chose que personne n’a jamais su. Mais en poésie, c’est exactement l’inverse. »

Paul Dirac

2

Renormalisation non-perturbative et action effective

Ce chapitre est consacré à la description de deux outils fondamentaux pour notre travail. Le premier concerne la renormalisation wilsonienne, procédé non-perturbatif qui permet d’aboutir à des équations exactes du RG. L’idée de base du raisonnement de Wilson [1] est de découper le problème en une série de sous-problèmes, chacun mettant en jeu un nombre restreint d’échelles, et de chercher ensuite une solution en résolvant de manière itérative ces derniers. En d’autres termes, cette démarche consiste à intégrer progressivement les fluctuations quantiques en commençant par les modes de très haute énergie, puis en répétant l’opération de proche en proche jusqu’à l’échelle infrarouge.

Les concepts d’action effective et de potentiel effectif, quant à eux, sont très précieux pour l’étude et la compréhension des phénomènes de brisure spontanée de symétrie. En effet, le potentiel effectif correspond, de façon très schématique, à l’analogue quantique du potentiel classique et permet donc d’observer comment les effets quantiques modifient la forme du potentiel. Les définitions, propriétés et interprétations de l’action et du potentiel effectifs seront ainsi détaillées dans la seconde partie de ce chapitre.

2.1 Groupe de renormalisation wilsonien

Rappelons simplement que, comme pour toute la suite de notre travail, nous avons affaire à la formulation euclidienne de la QFT en d dimensions, c'est-à-dire que l'action s'écrit :

$$S[\Phi, \partial_\mu \Phi] = \int d^d x \left(\frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi)^2 + V(\Phi) \right). \quad (2.1)$$

Nous avons pris, comme auparavant, un champ scalaire $\Phi(x)$ qui présente la décomposition standard en modes de Fourier :

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_d}} \sum_{0 < |p| < \Lambda} \Phi_p e^{i p \cdot x}, \quad (2.2)$$

où $\Omega_d = \int d^d x$ est le volume d'espace-temps euclidien en d dimensions.

Dans l'approche wilsonienne, on régularise la théorie en introduisant un cutoff dans l'espace des impulsions, c'est pourquoi les modes Φ_p appartiennent à l'intervalle fini $0 < |p| < \Lambda$. Cette procédure signifie, comme nous l'avons déjà souligné, que l'on limite la résolution en ignorant délibérément tout ce qui se passe à des distances inférieures à Λ^{-1} . On décompose le champ $\Phi(x)$ en un champ de fond infrarouge (IR) $\phi(x)$ qui contient les modes compris entre 0 et p , et en un champ de fluctuations $\eta(x)$ contenant les modes ultraviolets (UV) appartenant à l'intervalle $[p, \Lambda]$:

$$\Phi(x) = \phi(x) + \eta(x). \quad (2.3)$$

Pour rendre compte de la dynamique d'une particule de moment p , avec $|p| \ll \Lambda$, notre objectif est de connaître l'action effective S_p à l'échelle p , c'est-à-dire là où les expériences et les mesures sont réalisées. Or, comme nous l'avons évoqué en introduction, tous les degrés de liberté d'énergie supérieure (jusqu'à Λ) contribuent, via des créations de paires virtuelles particules-antiparticules, à la physique de plus basse énergie. On prend en compte ces fluctuations quantiques issues des modes UV par une intégrale de chemin pour $S_p(\phi)$ à travers la relation suivante :

$$e^{-S_p(\phi)} = \int [D\eta] e^{-S_\Lambda(\phi+\eta)} = \int \left[\prod_{|p| < |q| < \Lambda} d\eta_q \right] e^{-S_\Lambda(\phi+\eta)}. \quad (2.4)$$

On nomme S_p l'action wilsonienne effective, car les paramètres (masses, constantes de couplage, etc.) caractérisant $S_p(\phi)$ sont définis à l'échelle d'impulsion p . À cette échelle IR, nous avons donc une théorie *a priori* différente de celle qui régissait la physique à haute énergie (Λ) où la forme du lagrangien était donnée par l'équation (2.1). Autrement

dit, S_p est l'action effective résultante à basse énergie d'une théorie plus fondamentale définie à l'échelle Λ ; les effets de cette dernière (contributions des modes UV) étant pris en compte à travers l'intégrale de chemin (2.4).

La stratégie habituelle est ensuite de calculer l'intégrale sur η en passant par le développement en boucles, c'est-à-dire en puissance de la constante de couplage ou en puissance de \hbar , les deux formulations étant équivalentes [15]. À l'ordre de l'arbre $O(1)$, on a $\forall p \quad S_p(\phi) = S_\Lambda(\phi)$. À l'ordre suivant (une boucle), la correction à cette relation est obtenue par le développement de $S_\Lambda(\phi + \eta)$ jusqu'aux termes d'ordre $O(\eta^2)$, ce qui revient à une approximation gaussienne. Le problème posé par cette approche est que l'on génère pour les constantes de couplage des termes correctifs logarithmiquement grands, du type $\ln\left(\frac{\Lambda}{p}\right)$, qui deviennent numériquement très importants pour les faibles valeurs de p . Ce phénomène est dû au fait qu'en QFT les échelles ne sont pas découplées, donc chaque mode de l'intervalle $[p, \Lambda]$ apporte une contribution identique.

La méthode wilsonienne du RG offre une alternative en proposant de passer d'une échelle à l'autre par étapes infinitésimales. On se basera ici sur la formulation établie par Wegner et Houghton [4]. On considère désormais qu'il est possible de passer des échelles UV à IR en intégrant les modes progressivement. On se place à une échelle k , telle que $|p| < |k| < \Lambda$, et on suppose connue exactement l'action effective S_k . Alors, on peut définir $S_{k-\delta k}$, l'action à l'échelle infinitésimale en dessous, en procédant à une intégrale de chemin des fluctuations quantiques de la même façon que nous avons défini S_p à partir de S_Λ dans l'équation (2.4) :

$$e^{-S_{k-\delta k}(\phi)} = \int' [D\eta] e^{-S_k(\phi+\eta)}, \quad (2.5)$$

où l'exposant ' indique que η contient uniquement les modes appartenant à l'intervalle $[k - \delta k, k]$, dénommé la "shell", c'est-à-dire une sorte de coquille d'épaisseur infinitésimale δk autour de la d -sphère de rayon k . Ensuite, il suffit de construire S_p par itération à partir de S_Λ , en y retranchant l'une après l'autre les contributions proportionnelles à δk issues de chaque shell. De cette manière, on a affaire, par construction même, à des logarithmes petits de type $\ln\frac{k}{k-\delta k} \sim \frac{\delta k}{k}$, qui ne sont plus divergents. L'avantage le plus remarquable de cette méthode est qu'elle est *non-perturbative* : à chaque étape, on calcule les corrections sur l'action effective par rapport à l'action connue à l'échelle *infinitésimale* supérieure. Ce procédé est donc conceptuellement différent de l'approximation perturbative dans laquelle on suppose que les fluctuations quantiques modifiant l'action nue S_Λ en action

renormalisée S_p sont suffisamment petites pour que S_p puisse être exprimée comme un développement perturbatif autour de S_Λ . Naturellement, l'approximation perturbative à une boucle peut être reproduite par la méthode wilsonienne si l'intégrale (2.5) est faite en une seule étape, c'est-à-dire en considérant l'intervalle (p, Λ) plutôt que des shells successives.

La suite du raisonnement consiste, comme pour le développement en boucles, à développer l'exponentielle du membre de droite de l'équation précédente à l'ordre $O(\eta^2)$:

$$e^{-S_{k-\delta k}[\phi]} = e^{-S_k[\phi]} \int [\mathcal{D}\eta] \exp \left(- \int d^d x \frac{\delta S_k[\phi]}{\delta \phi(x)} \eta(x) + \frac{1}{2} \int d^d x d^d y \frac{\delta^2 S_k[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} \eta(x) \eta(y) \right). \quad (2.6)$$

Pour un δk infinitésimal, cette approximation gaussienne est *exacte*, car les corrections provenant des puissances supérieures en η sont au moins d'ordre $O(\delta k^2)$, et donc négligeables devant δk [4]. À la limite $\delta k \rightarrow 0$, on peut obtenir une équation différentielle pour l'action effective, dans laquelle S_Λ joue le rôle de la condition à la limite.

L'équation pour S_k résultant du développement (2.6) est toutefois compliquée, et il est nécessaire de recourir à une approximation. Habituellement, on considère pour S_k le développement en gradient, c'est-à-dire en termes de dérivées du champ :

$$S_k(\Phi) = \int d^d x \left[U_k(\Phi) + \frac{1}{2} Z_k(\Phi) \partial_\mu \Phi \partial_\mu \Phi + Y_k(\Phi) (\partial_\mu \Phi \partial_\mu \Phi)^2 + \dots \right]. \quad (2.7)$$

Les équations du RG pour S_k s'écrivent alors comme un système infini d'équations différentielles couplées pour les fonctions U_k, Z_k, Y_k, \dots . À l'ordre le plus bas, on se place dans l'approximation dite du potentiel local (LPA¹) qui consiste à ne conserver que les deux premiers termes U_k et Z_k et à maintenir le second constant : $Z_k(\Phi) = cste = 1$. Dans le langage habituel, ce choix pour Z signifie que l'on ne tient pas compte de la renormalisation de la fonction d'onde. Ce choix de troncation, qui peut sembler un peu radical, est en pratique bien adapté aux problèmes que nous considérerons tout au long de notre travail. L'action prend alors la forme simplifiée :

$$S_k(\Phi) = \int d^d x \left[U_k(\Phi) + \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial_\mu \Phi \right]. \quad (2.8)$$

Partant de là, il est possible d'établir l'équation du groupe de renormalisation pour U_k . Comme celle-ci est fondamentale pour notre étude, nous allons rappeler ici en détail comment est obtenue cette équation [4, 23, 24]. Revenant à la décomposition (2.3) de Φ , on réalise un développement de Taylor de $U_k[\Phi]$ autour du champ constant $\phi(x) = \phi$:

$$U_k[\Phi] = U_k(\phi) + U'_k(\phi) \eta(x) + \frac{1}{2} U''_k(\phi) \eta^2(x) + \frac{1}{3!} U'''_k(\phi) \eta^3(x) + \frac{1}{4!} U^{(4)}_k(\phi) \eta^4(x) + \dots \quad (2.9)$$

¹Local Potential Approximation

D'où l'expression de $S_k[\Phi]$:

$$\begin{aligned}
 S_k[\Phi] &= \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \eta(x)^2 + U_k(\phi) + U'_k(\phi) \eta(x) + \frac{1}{2} U''_k(\phi) \eta^2(x) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{3!} U'''_k(\phi) \eta^3(x) + \frac{1}{4!} U^{(4)}_k(\phi) \eta^4(x) + \dots \right\}. \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

On calcule alors l'intégrale en décomposant la fluctuation $\eta(x)$ sur un nombre restreint de modes de Fourier :

$$\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_d}} \sum_{k-\delta k < |p| < k} \eta_p e^{i p \cdot x}, \quad (2.11)$$

où la sommation dans l'espace des impulsions se limite à la shell $[k - \delta k, k]$, ce que l'on spécifiera systématiquement par l'exposant ' (notation valable pour les symboles somme, produit et intégrale).

Ainsi, le premier terme de (2.10) devient :

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{2} \partial_\mu \eta(x)^2 d^d x &= \frac{1}{2} \sum'_{p,q} \eta_p \eta_q (ip)(iq) \frac{1}{\Omega_d} \int e^{i(p+q) \cdot x} d^d x \\
 &= -\frac{1}{2\Omega_d} \sum'_{p,q} \eta_p \eta_q p q \delta(p+q) \\
 &= \frac{1}{2} \sum'_p \eta_p \eta_{-p} p^2. \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Par un calcul similaire, on trouve que les termes comportant des puissances impaires de $\eta(x)$ sont nuls (orthogonalité de Fourier), car il apparaît un $\delta(p)$ égal à zéro puisque dans la shell on a $p \neq 0$. Quant aux contributions des puissances paires de $\eta(x)$, elles sont déterminées de la même façon que précédemment, d'où le résultat :

$$S_k[\Phi] = \Omega_d U_k(\phi) + \frac{1}{2} \sum'_p (p^2 + U''_k(\phi)) \eta_p \eta_{-p} + \frac{1}{4!} \frac{1}{\Omega_d} \sum'_{p,p'} U^{(4)}_k(\phi) \eta_p \eta_{-p} \eta_{p'} \eta_{-p'} + \dots \quad (2.13)$$

La définition (2.5) de $S_{k-\delta k}$ s'écrit alors :

$$e^{-S_{k-\delta k}(\phi)} = \int \left[\prod'_p d\eta_p \right] e^{-\left\{ \Omega_d U_k(\phi) + \frac{1}{2} \sum'_p (p^2 + U''_k(\phi)) \eta_p \eta_{-p} + \frac{1}{4!} \frac{1}{\Omega_d} \sum'_{p,p'} U^{(4)}_k(\phi) \eta_p \eta_{-p} \eta_{p'} \eta_{-p'} + \dots \right\}}. \quad (2.14)$$

On vérifie ainsi explicitement que les termes suivants après $\eta_p \eta_{-p}$ sont d'ordre $O(\delta k^2)$, puisque chaque sommation sur la shell apporte une puissance de δk , comme nous le verrons plus tard. En conservant les termes d'ordre δk , il nous reste :

$$e^{-S_{k-\delta k}(\phi)} = e^{-\Omega_d U_k(\phi)} \int \left[\prod'_p d\eta_p \right] \exp \left(-\frac{1}{2} \sum'_p (p^2 + U''_k(\phi)) \eta_p \eta_{-p} + O(\delta k^2) \right). \quad (2.15)$$

Il s'agit d'une intégrale gaussienne, donc l'expression devient :

$$\begin{aligned}
e^{-S_{k-\delta k}(\phi)} &= e^{-\Omega_d U_k(\phi)} \prod_p' (p^2 + U_k''(\phi))^{-\frac{1}{2}} \\
&= e^{-\Omega_d U_k(\phi)} e^{\ln \prod_p' (p^2 + U_k''(\phi))^{-\frac{1}{2}}} \\
&= e^{-\Omega_d U_k(\phi) - \frac{1}{2} \sum_p' \ln(p^2 + U_k''(\phi))} \\
&= e^{-\Omega_d U_k(\phi) - \frac{\Omega_d}{2} \int' \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln(p^2 + U_k''(\phi))}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Et en remarquant que $e^{-S_{k-\delta k}(\phi)} = e^{-\Omega_d U_{k-\delta k}(\phi)}$ on obtient la relation :

$$U_{k-\delta k}(\phi) = U_k(\phi) + \frac{1}{2} \int' \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln(p^2 + U_k''(\phi)). \tag{2.17}$$

En utilisant les coordonnées polaires généralisées pour p , soit $d^d p = \theta_d q^{d-1} dq$ avec $q = |p|$ la norme de la d -impulsion et θ_d l'angle solide en d dimensions², et en se rappelant que les bornes d'intégration sont celles de la shell $[k - \delta k, \delta k]$, on trouve :

$$U_k(\phi) - U_{k-\delta k}(\phi) = -\frac{k^{d-1} \theta_d}{2 (2\pi)^d} \ln(k^2 + U_k''(\phi)) \delta k. \tag{2.18}$$

Finalement, à la limite $\delta k \rightarrow 0$, on aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$k \frac{\partial U_k(\phi)}{\partial k} = -\frac{\theta_d}{2} \left(\frac{k}{2\pi} \right)^d \ln(k^2 + U_k''(\phi)). \tag{2.19}$$

Il reste ensuite à normaliser l'argument du logarithme en retranchant la contribution indépendante de ϕ provenant de $U_k''(0) + k^2$ pour obtenir l'expression définitive usuelle :

$$k \frac{\partial U_k(\phi)}{\partial k} = -\frac{\theta_d}{2} \left(\frac{k}{2\pi} \right)^d \ln \left(\frac{k^2 + U_k''(\phi)}{k^2 + U_k''(0)} \right). \tag{2.20}$$

2.1.1 Renormalisation du terme cinétique

Le calcul précédent a permis de déterminer l'équation du RG (2.20) suivant la LPA, qui est l'approximation à l'ordre le plus bas. À l'ordre suivant du développement en gradient, on tient compte du terme $Z(\phi)$ non constant dans le développement (2.7) et il s'agit de voir comment sont modifiées les équations du groupe de renormalisation. Dans cette optique, nous devons considérer l'équation générale d'évolution pour l'action [4] :

$$S_k[\Phi] - S_{k-\delta k}[\Phi] = -\frac{1}{2} \text{Tr}' \ln \frac{\partial^2 S_k[\Phi]}{\partial \Phi_p \partial \Phi_q} + \sum_{p,q}' \frac{\partial S_k[\Phi]}{\partial \Phi_p} \left(\frac{\partial^2 S_k[\Phi]}{\partial \Phi_p \partial \Phi_q} \right)^{-1} \frac{\partial S_k[\Phi]}{\partial \Phi_q}. \tag{2.21}$$

²Les angles solides sont donnés (cf. [21] par exemple) par $\theta_d = 2\pi^{\frac{d}{2}}/\Gamma(d/2)$, c'est-à-dire pour les dimensions usuelles : $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 2\pi$, $\theta_3 = 4\pi$ et $\theta_4 = 2\pi^2$.

Cette fois-ci, nous ne pouvons plus développer l'action autour d'un champ constant ϕ , et nous devons en conséquence modifier la décomposition (2.3) en introduisant $\phi_f(x)$, un champ de fond IR dépendant de x , soit $\Phi(x) = \phi + \phi_f(x) + \eta(x)$. Le calcul est non-trivial, notamment parce qu'il faut respecter simultanément $k - \delta k < |p| < k$ et $k - \delta k < |p + q| < k$, ce qui déforme la shell et entraîne l'apparition de termes non-analytiques. La résolution de ce problème [25–27] permet d'aboutir aux équations du RG suivantes :

$$k \frac{\partial U_k}{\partial k} = -\frac{\theta_d}{2} \left(\frac{k}{2\pi} \right)^d \ln \left(\frac{A}{k^2} \right) \quad (2.22)$$

$$k \frac{\partial Z_k}{\partial k} = -\frac{\theta_d}{2} \left(\frac{k}{2\pi} \right)^d \left(\frac{Z_k''}{A} - \frac{2Z_k' A' + Z_k'^2 k^2}{A^2} + \frac{Z_k A'^2 + 4Z_k' Z_k A' k^2}{A^3} - 4 \frac{Z_k'^2 A'^2 k^2}{A^4} \right), \quad (2.23)$$

où $A = Z_k(x)k^2 + U_k''(x)$.

L'utilisation de ce résultat est encore délicate et, bien que ce dernier donne lieu à une amélioration pour le calcul des niveaux énergétiques du potentiel anharmonique dans le cadre de la mécanique quantique, son implémentation pour les potentiels à symétrie brisée reste sujet à caution, comme nous le verrons au chapitre 3.

2.1.2 Invariance de jauge

La recherche d'une équation wilsonienne du RG adaptée aux théories de jauge est également un domaine activement étudié. En effet, l'introduction explicite du cutoff brise naturellement l'invariance de jauge car l'équation du RG ainsi obtenue n'est pas invariante selon le choix de paramétrisation. Récemment, une nouvelle définition [14] de l'action effective Γ_k , basée sur l'utilisation de la transformée de Legendre partielle ainsi que sur des considérations géométriques, a permis d'aboutir à une formulation invariante par reparamétrisation, donc susceptible de s'appliquer aux théories de jauge.

Nous présenterons ce formalisme dans le chapitre 6, dans lequel nous envisagerons les premières exploitations possibles de cette approche. En guise de préambule, nous avons vérifié que la formulation de [14] permet bien de retrouver les équations du RG pour le potentiel dans le cadre du modèle $O(2)$ exprimé en coordonnées polaires. Ce travail, qui constitue une étape préliminaire avant de passer au cas moins trivial du modèle sigma non-linéaire, est consigné dans l'annexe E.

2.1.3 Connexions avec l'approche perturbative

Si la méthode de Wegner-Houghton peut sembler quelque peu éloignée du traitement perturbatif habituel, elle constitue en fait une amélioration de cette dernière. Elle est donc censée pouvoir reproduire, moyennant des hypothèses simplificatrices, les résultats perturbatifs. Ainsi, il est facile de retrouver le potentiel one-loop à partir de l'équation du RG (2.20). Il suffit de figer la dérivée seconde du potentiel effectif dans le membre de droite, soit $U_k'' \rightarrow U_\Lambda''$. De cette manière, il devient possible d'effectuer l'intégrale analytiquement. On retrouve alors le potentiel nu à une boucle, auquel il faut adjoindre des conditions de renormalisation pour obtenir l'expression du potentiel effectif à une échelle de basse énergie μ . Cette stratégie est d'ailleurs employée au chapitre 4, dans lequel nous montrons que ce calcul aboutit à un potentiel one-loop renormalisé identique à celui issu de la méthode de régularisation dimensionnelle pour un choix approprié de conditions de renormalisation.

Un autre pont entre l'approche wilsonienne et la renormalisation perturbative habituelle réside dans la détermination des fonctions bêta. En effet, l'équation du RG (2.20) permet de généraliser les résultats traditionnels. Il suffit de prendre un potentiel effectif U_k sous la forme d'un polynôme en puissances paires de ϕ :

$$U_k = \frac{m^2(k)}{2!}\phi^2 + \frac{\lambda(k)}{4!}\phi^4 + \frac{g_6(k)}{6!}\phi^6 + \frac{g_8(k)}{8!}\phi^8 + \dots \quad (2.24)$$

avec $m^2 \equiv g_2$ et $\lambda \equiv g_4$. L'équation différentielle partielle (2.20) se transforme alors en un système infini d'équations différentielles ordinaires couplées pour les fonctions $g_{2n}(k)$. En effet, ces dernières sont tout simplement les dérivées $2n$ -ièmes du potentiel effectif en $\phi = 0$, soit $g_{2n}(k) = \left. \frac{\partial^{2n} U_k(\phi)}{\partial \phi^{2n}} \right|_{\phi=0}$. En appliquant cette opération à l'équation du RG (2.20) pour le potentiel, on trouve :

$$\begin{cases} \frac{dm^2}{dk} &= -\frac{k^3}{16\pi^2} \frac{\lambda(k)}{k^2+m^2(k)} \\ \frac{d\lambda}{dk} &= -\frac{k^3}{16\pi^2} \left(\frac{g_6(k)}{k^2+m^2(k)} - 3 \frac{\lambda^2(k)}{[k^2+m^2(k)]^2} \right) \\ \frac{dg_6}{dk} &= -\frac{k^3}{16\pi^2} \left(\frac{g_8(k)}{k^2+m^2(k)} - 15 \frac{\lambda(k) \cdot g_6(k)}{[k^2+m^2(k)]^2} + 30 \frac{\lambda^3(k)}{[k^2+m^2(k)]^3} \right) \\ \frac{dg_8}{dk} &= \dots \end{cases} \quad (2.25)$$

Nous avons ainsi accès à toutes les β -fonctions pour l'ensemble des constantes de couplage. Il est ensuite possible de faire le lien avec leurs expressions one-loop en procédant à quelques approximations dans le système (2.25). Par exemple, pour β_λ , si l'on néglige g_6 d'une part et m^2 devant k^2 d'autre part, on trouve :

$$k \frac{d\lambda}{dk} \approx + \frac{3\lambda^2(k)}{16\pi^2}. \quad (2.26)$$

Le membre de droite de l'équation (2.26), en fixant $\lambda(k)$ à la valeur $\lambda(\mu)$, n'est donc rien d'autre que la β -fonction à une boucle. On peut noter à ce stade que la dépendance de la constante de couplage λ avec l'échelle, observée grâce à l'approche wilsonienne (équation (2.26)), est exactement la même que celle obtenue au chapitre précédent par l'application de l'équation de Callan-Symanzik (1.30) aux résultats à une boucle. La stratégie de l'amélioration des calculs perturbatifs par le RG (méthode RGI) est donc intrinsèque dans le formalisme wilsonien.

En revanche, l'application du raisonnement ci-dessus dans le cas de la masse conduit à un résultat quelque peu différent. Effectivement, nous obtenons pour $m^2(k) \ll k^2$:

$$k \frac{dm^2}{dk} = \frac{\lambda(k)}{16\pi^2} (-k^2 + m^2(k)), \quad (2.27)$$

tandis que la β -fonction habituelle one-loop est :

$$\beta_{m^2}^{1l} \equiv k \frac{dm^2}{dk} = \frac{\lambda m^2}{16\pi^2}. \quad (2.28)$$

Cette observation illustre une différence profonde entre les divergences logarithmiques et quadratiques. Si ces deux types de divergences sont considérés et traités de la même manière dans la renormalisation perturbative, ce n'est pas le cas lors d'une approche non-perturbative. De fait, alors que les premières apparaissent simplement comme une conséquence de l'interdépendance de toutes les échelles impliquées en QFT, les secondes sont plus difficiles à appréhender.

En effet, le schéma wilsonien n'élimine pas de manière *ad hoc* les divergences quadratiques, ce qui nous amène à deux interprétations possibles. Soit nous choisissons de considérer notre QFT comme une théorie effective *strictu sensu*, c'est-à-dire définie avec un cutoff physique matérialisant notre ignorance des lois de la physique en deçà d'une distance Λ^{-1} . Dans ce cas, les valeurs des paramètres nus, en particulier celles des masses, peuvent être très différentes des quantités renormalisées mesurées.

Soit la QFT doit rendre compte de la phénoménologie et pour "protéger" la masse des champs scalaires, il faut imaginer qu'un processus physique, pour l'instant inconnu, nous débarrasse des divergences quadratiques. Ici, cette tâche pourrait être accomplie par des effets provenant de degrés de liberté inconnus au-delà du cutoff, ce qui pose le problème du "fine-tuning", ou alors par un scénario supersymétrique qui permettrait d'associer à chaque particule son partenaire supersymétrique, compensant de fait les divergences. Nous reviendrons sur ce point au cours du chapitre 4, lorsque nous aborderons l'analyse non-perturbative du secteur de Higgs du SM.

Pour revenir à la β -fonction β_{m^2} , nous pouvons remarquer qu'il est facile de modifier l'équation wilsonienne (2.27) pour retrouver les résultats de la renormalisation perturbative habituelle. Il suffit en effet, dans ce cas simple, d'ajouter un contre-terme $\frac{\lambda(k)}{32\pi^2} k \phi^2$ au membre de droite de l'équation (2.20) pour implémenter la suppression des divergences quadratiques dans la méthode wilsonienne.

2.2 Potentiel effectif

Nous allons présenter dans cette partie deux objets très importants qui seront au cœur de notre étude : l'action effective et son "descendant direct" le potentiel effectif.

L'action effective est un outil de prédilection en QFT fréquemment utilisé pour l'analyse de la structure du vide [15, 17, 28] et pour établir des propriétés de renormalisation [29]. Le potentiel effectif, déjà rencontré précédemment avec la méthode de renormalisation à la Wilson, est quant à lui plus ancien, puisqu'il a été introduit originellement par Heisenberg et Euler (1936) [30] et par Schwinger (1951) [31]. Son application aux problèmes avec brisure spontanée de la symétrie, due à Goldstone, Salam et Weinberg (1962) [32] et Jona-Lasino (1964) [28], a considérablement popularisé cette notion par l'éclairage qu'elle apporte à la compréhension de ces phénomènes. Par la suite, les travaux de Symanzik [9, 20] et de Jackiw [33] dans les années 70 ont permis d'étudier en profondeur les propriétés de l'action effective et de pourvoir un formalisme théorique solide.

Toutes ces analyses permettent aujourd'hui d'appréhender ces objets sous différents angles, qui offrent des définitions alternatives et équivalentes.

Ainsi, l'action effective peut être définie comme :

- transformée de Legendre de la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connectées,
- fonctionnelle génératrice des fonctions de vertex irréductibles à une particule (1PI),
- élément de matrice stationnaire, intégré par rapport au temps, de $i\partial_t - \hat{H}$.

De même, le potentiel effectif peut être décrit comme :

- la restriction aux configurations constantes de l'action effective,
- le générateur des graphes 1PI avec des implusions externes nulles,
- le minimum de la valeur moyenne de la densité d'énergie,
- le potentiel renormalisé.

Nous allons donc rappeler ici dans quel contexte s'inscrivent ces définitions et quelles sont les interprétations physiques de l'action et du potentiel effectifs.

2.2.1 Définition(s) de l'action effective

La définition "habituelle" de l'action effective est construite à partir de la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green non-connectées $Z[J]$, c'est-à-dire l'amplitude de persistance du vide $\langle 0, +\infty | 0, -\infty \rangle^J$ (cf. équation (1.2)). Il s'agit ensuite d'introduire la fonctionnelle $W[J]$ définie comme :

$$W[J] = -\ln Z[J]. \quad (2.29)$$

Il est facile de montrer [18] que cette quantité est la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connectées, $G_c^{(n)}$. À partir de $W[J]$, on définit le champ classique ϕ_c comme :

$$\phi_c(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0 + | \hat{\Phi}(x) | 0 - \rangle_J}{\langle 0 + | 0 - \rangle_J}. \quad (2.30)$$

Ce dernier dépend de la source J mais est égal à la valeur moyenne du champ dans la limite où la source s'annule : $\lim_{J \rightarrow 0} \phi_c = \langle \hat{\Phi} \rangle$. Ensuite l'action effective, notée Γ_{eff} ou tout simplement Γ , est définie par la transformée de Legendre de $W[J]$:

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J(x)\phi_c(x). \quad (2.31)$$

Elle obéit à la relation :

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x)} = -J(x). \quad (2.32)$$

Il n'est pas inutile de rappeler ici que lorsque la source s'annule, l'équation ci-dessus est souvent interprétée comme *l'équation quantique du mouvement*. La pertinence et les conditions de validité de cette approche seront explorées en détail au chapitre 5.

L'action effective constitue également la fonctionnelle génératrice des fonctions de vertex irréductibles à une particule (1PI) notées $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n)$, soit explicitement :

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \phi_c(x_1) \cdots \phi_c(x_n) \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (2.33)$$

La notion de potentiel effectif émerge lorsque l'on s'intéresse aux configurations pour lesquelles le champ classique $\phi_c(x)$ est constant (indépendant de l'espace-temps). Dans ce cas on peut réécrire l'action effective comme :

$$\Gamma[\phi_c] = \int d^4x V_{eff}(\phi_c) = \Omega_4 V_{eff}(\phi_c), \quad (2.34)$$

avec Ω_4 le volume quadridimensionnel. En considérant la formulation (2.33) dans l'espace des impulsions, on en déduit que V_{eff} est le générateur des graphes 1PI avec des impulsions

externes nulles. Le potentiel effectif a naturellement la même dimension (densité d'énergie) que le potentiel classique. Dans la logique perturbative on peut d'ailleurs relier ces deux quantités, puisqu'à l'ordre le plus bas du développement en boucles (niveau de l'arbre $O(\hbar^0)$), on trouve [15] :

$$V_{eff}(\phi_c) = V(\phi_c) + O(\hbar). \quad (2.35)$$

Cette propriété est vue comme une indication tendant à montrer que le potentiel effectif peut être interprété comme le "potentiel quantique", c'est-à-dire l'équivalent du potentiel classique dans lequel on prendrait en compte les corrections provenant de la physique quantique.

2.2.2 Signification physique et définition variationnelle

On peut interpréter $V_{eff}(\phi_c)$ sous un autre angle, d'une manière plus physique. On peut en effet prouver [9,34] que le potentiel effectif est le minimum de la valeur moyenne de la densité d'énergie dans la classe des états normalisés $|\psi\rangle$ qui satisfont $\langle\psi|\hat{\Phi}(\vec{x})|\psi\rangle = \phi_c$, autrement dit que :

$$V_{eff}(\phi_c) = \langle\psi|\hat{\mathcal{H}}|\psi\rangle \quad (2.36)$$

pour un état $|\psi\rangle$ obéissant à

$$\delta\langle\psi|\hat{\mathcal{H}}|\psi\rangle = 0 \quad (2.37)$$

et sujet aux contraintes

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad \text{et} \quad \langle\psi|\hat{\Phi}(\vec{x})|\psi\rangle = \phi_c, \quad (2.38)$$

où la notation \mathcal{H} désigne la densité de hamiltonien ($H = \int d^3x \mathcal{H}$).

La relation (2.36) nous donne des informations directes sur la structure du vide puisque la valeur de $V_{eff}(\phi_c)$ au minimum correspond à l'énergie de l'état fondamental $|0\rangle$ de la théorie. Si cette valeur ϕ_{min} est différente de zéro, on est alors en présence d'une théorie avec une brisure spontanée de symétrie. En vertu de cette propriété, le potentiel effectif est largement utilisé pour l'analyse du mécanisme de brisure de symétrie. En effet, cette approche permet, par la redéfinition $\phi'_c = \phi_c - \phi_{min}$, de recréer la structure habituelle de brisure spontanée de symétrie de la théorie des champs *classique*, dans laquelle on a substitué le potentiel classique $V(\phi)$ par le potentiel effectif $V_{eff}(\phi_c)$ [34].

D'autre part, comme V_{eff} prend en compte l'essentiel des informations quantiques, le potentiel effectif est souvent utilisé dans certains domaines de cosmologie (par exemple [78]), notamment dans le cadre des modèles d'inflation.

En 1979, Jackiw et Kermann [33] ont généralisé le résultat (2.36) à l'action effective elle-même et ils ont démontré qu'il est possible de la définir également selon un principe variationnel. D'après leurs travaux, l'action effective peut être considérée comme l'élément de matrice stationnaire, intégré par rapport au temps, de $i\partial_t - \hat{H}$, soit :

$$\Gamma[\phi] = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \langle \psi_-, t | (i\partial_t - \hat{H}) | \psi_+, t \rangle, \quad (2.39)$$

où le membre de droite est stationnaire quand les deux états dépendants du temps $|\psi_{\pm}, t\rangle$ varient arbitrairement et indépendamment, avec cependant les deux contraintes :

$$\langle \psi_-, t | \psi_+, t \rangle = 1 \quad \text{et} \quad \langle \psi_-, t | \hat{\Phi}(\vec{x}) | \psi_+, t \rangle = \phi(\vec{x}, t), \quad (2.40)$$

ainsi que les conditions aux limites asymptotiques

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} |\psi_{\pm}, t\rangle = |0\rangle, \quad (2.41)$$

où $|0\rangle$ est l'état fondamental du hamiltonien \hat{H} . La minimisation de $\Gamma[\phi]$, associée avec les deux contraintes (2.40), se traduit par les équations :

$$\left(i\partial_t - \hat{H} + \int d^3\vec{x} J(\vec{x}, t) \hat{\Phi}(\vec{x}) \right) | \psi_+, t \rangle = w(t) | \psi_+, t \rangle \quad (2.42)$$

$$\left(i\partial_t - \hat{H} + \int d^3\vec{x} J(\vec{x}, t) \hat{\Phi}(\vec{x}) \right) | \psi_-, t \rangle = w^*(t) | \psi_-, t \rangle, \quad (2.43)$$

où $J(\vec{x}, t)$ et $w(t)$ sont les multiplicateurs de Lagrange introduits suivant la procédure standard pour implémenter les deux contraintes. En se limitant aux configurations constantes (en temps et en espace) du champ, l'action effective se réduit au potentiel effectif (cf. équation (2.34)) et on retrouve le résultat précédent, à savoir que $V_{eff} = \min_{\psi} \langle \psi | \hat{\mathcal{H}} | \psi \rangle$ avec les contraintes (2.38). Dans ce cas, la minimisation avec la prise en compte des contraintes génère l'équation de Schrödinger indépendante du temps pour un hamiltonien avec source externe :

$$\left(\hat{H} - J \int d^3\vec{x} \hat{\Phi}(\vec{x}) \right) | \psi \rangle = E | \psi \rangle, \quad (2.44)$$

où de nouveau J et E sont les multiplicateurs de Lagrange représentant les contraintes (2.38). Physiquement, ces dernières correspondent respectivement à la force extérieure agissant sur le système et à la valeur propre de l'énergie. À l'exception de rares cas, la forme exacte de l'action effective ne peut être trouvée et nous devons recourir à une approximation. La plus appropriée dans ce contexte est clairement le développement en gradient (2.7), étant donné que le potentiel effectif en constitue le premier terme.

Dans les applications, nous nous limiterons souvent à l'approximation du potentiel local. Néanmoins, les raisonnements que nous ferons s'étendent naturellement à n'importe quel ordre du développement.

2.2.3 Propriété de convexité

L'action effective, de même que le potentiel effectif, possèdent une autre propriété fondamentale dont les conséquences sont considérables : $\Gamma[\phi]$ et $V_{eff}(\phi)$ sont des fonctions convexes de leur argument. Cette observation [9] est intrinsèque à la définition (2.31) de l'action effective dans le formalisme des intégrales de chemin et est l'analogie en physique statistique de la positivité de la chaleur spécifique [35]. Nous allons rappeler ici le raisonnement (cf. [15,36] ou [17] pour une démarche différente) permettant de démontrer cette propriété.

Considérons la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green connectées $W[J]$, définie par l'équation (2.29), et écrite explicitement (pour une source constante) sous la forme :

$$e^{-W[J]} = N \int \mathcal{D}\phi e^{-(S[\phi] - J \int d^4x \phi(x))}. \quad (2.45)$$

Introduisons ensuite la notation $\langle F \rangle$ désignant la valeur moyenne d'une fonctionnelle $F[\phi]$ et définie comme :

$$\langle F \rangle = \frac{\int \mathcal{D}\phi F[\phi] e^{-(S[\phi] - J \int d^4x \phi(x))}}{\int \mathcal{D}\phi e^{-(S[\phi] - J \int d^4x \phi(x))}}. \quad (2.46)$$

Cette quantité est analogue à la moyenne statistique habituelle, à ceci près qu'il s'agit d'une intégrale fonctionnelle dans laquelle la mesure formelle $\mathcal{D}\phi$ est *a priori* mal définie puisqu'elle implique une infinité de degrés de liberté. Donc, la rigueur mathématique de la formule (2.46) n'est obtenue que si l'on rend cette intégrale (dé)finie, soit par discrétisation du champ sur un réseau, soit par un développement en moments dans l'espace de Fourier. Dans le premier cas, le pas du réseau "régularise" l'intégrale et dans l'autre, ce rôle est joué par le cutoff UV.

Cette hypothèse étant considérée comme vérifiée, il est aisé de calculer la dérivée seconde de $W[J]$:

$$\frac{\partial^2 W[J]}{\partial J^2} = \left\langle \left(\int d^4x \phi(x) \right)^2 \right\rangle - \left\langle \left(\int d^4x \phi(x) \right)^2 \right\rangle. \quad (2.47)$$

Ce qui nous intéresse maintenant est de connaître le signe de cette expression. Pour cela, il suffit d'établir la relation triviale générale suivante :

$$0 \leq \left\langle (\langle a \rangle - a)^2 \right\rangle = \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2, \quad (2.48)$$

qui, appliquée au membre de droite de l'équation (2.47) avec $\int d^4x \phi(x) \equiv a$, indique que la dérivée seconde de $W[J]$ est négative. Il s'agit maintenant de voir comment ce résultat

se répercute sur l'action effective $\Gamma[\phi_c]$, qui n'est autre que la transformée de Legendre de $W[J]$. À l'aide des relations (2.32) et (2.30) respectivement, on montre que :

$$\frac{\partial^2 \Gamma[\phi_c]}{\partial \phi_c^2} \cdot \frac{\partial^2 W[J]}{\partial J^2} = -\frac{\partial J}{\partial \phi_c} \cdot \frac{\partial \phi_c}{\partial J} = -1. \quad (2.49)$$

Ce qui nous amène à la conclusion annoncée :

$$\frac{\partial^2 \Gamma[\phi_c]}{\partial \phi_c^2} \geq 0, \quad (2.50)$$

qui n'est rien d'autre que la formulation mathématique de la convexité de l'action effective vis-à-vis du champ classique. Le potentiel effectif étant la restriction de $\Gamma[\phi_c]$ pour des configurations statiques, il est évident qu'il possède également cette propriété. Il suffit d'effectuer les transpositions $\Gamma[\phi] = \Omega_4 V_{eff}(\phi)$ et $W[\phi] = \Omega_4 w(\phi)$ pour se rendre compte que les étapes (2.45) à (2.50) sont analogues.

On peut noter que la propriété de convexité (2.50) est tout à fait générale et reste donc vraie quelle que soit la forme du potentiel nu, ce qui inclut le cas où ce dernier n'est pas convexe. Cela implique que les fluctuations quantiques "convexifient" systématiquement, d'une manière ou d'une autre, tout potentiel classique non-convexe, comme le double puits par exemple. Cependant, il est impossible de mettre en évidence cet effet avec un développement d'ordre fini en puissances de \hbar , ce qui souligne l'importance de maîtriser des méthodes d'approximations non-perturbatives, comme celle du RG wilsonien, qui conduisent à l'obtention d'un potentiel effectif en conformité avec cette propriété exacte intrinsèque.

Nous allons maintenant nous tourner vers les applications possibles des équations du RG (2.22-2.23) à des problèmes physiques. Pour l'instant, nous allons considérer un cas de figure simplifié, en l'occurrence la détermination par la méthode wilsonienne des niveaux énergétiques dans un potentiel double puits en mécanique quantique ordinaire. Cette étude, qui est l'objet du chapitre suivant, soulignera notamment l'importance du respect de la propriété de convexité du potentiel effectif pour la description correcte de l'effet tunnel. De plus, ce travail permettra d'évaluer avec précision l'exactitude de notre approche.

« Les quelques pages de démonstration qui suivent tirent toute leur force du fait que l'histoire est entièrement vraie, puisque je l'ai imaginée d'un bout à l'autre. »

Boris Vian

3

Potentiel effectif non-perturbatif en mécanique quantique

L'objectif principal de ce chapitre est de tester les équations wilsoniennes du RG dans un contexte plus simple, celui de la mécanique quantique unidimensionnelle. En effet, cette dernière n'est rien d'autre qu'une théorie des champs élémentaire avec un seul degré de liberté et on peut transposer formellement toutes les relations obtenues en QFT générale par la substitution $\Phi(\vec{x}, t) \rightarrow x(t)$. L'idée d'utiliser le groupe de renormalisation en mécanique quantique pour la détermination des niveaux d'énergie dans un potentiel double puits est récente [37] puis [38, 39], et a émergé de deux considérations principales.

En premier lieu, l'intérêt d'une telle QFT simplifiée est de s'affranchir de certaines difficultés techniques, principalement la régularisation des divergences UV et les problèmes IR causés par la présence du mode zéro dans les phénomènes de brisure spontanée de symétrie. Ces deux complications supplémentaires seront d'ailleurs traitées avec soin au chapitre suivant où nous étendrons notre raisonnement à une thématique bien connue de théorie des champs : le secteur de Higgs du Modèle Standard. La seconde justification de cette approche est qu'elle offre l'opportunité de tester quantitativement les méthodes du RG puisqu'il est possible de comparer les résultats obtenus avec la solution exacte du problème déterminée par la résolution (numérique) de l'équation de Schrödinger. Si

un bon accord est constaté, cela fournit un argument supplémentaire en faveur de cette méthode, ce qui légitime son utilisation en QFT à 3+1 dimensions où les solutions exactes manquent et où une approximation fiable est nécessaire pour appréhender la physique des hautes énergies.

Cette première étape de notre travail est donc importante pour entériner la méthode wilsonienne avant de l'appliquer à des thématiques plus complexes.

3.1 Mise en place du problème

Notre point de départ est le potentiel suivant :

$$V_{dw}(x) = \frac{1}{2}m^2x^2 + \lambda x^4. \quad (3.1)$$

Il s'agit du potentiel classique, c'est-à-dire exprimé en langage du RG, le potentiel nu de la théorie, qui n'a pas encore été habillé par les fluctuations quantiques. En prenant $m^2 > 0$, le potentiel (3.1) est tout simplement celui d'un oscillateur anharmonique, tandis que pour $m^2 < 0$, nous avons un double puits avec deux minima $x_{\pm} = \pm\sqrt{\frac{-m^2}{4\lambda}}$ (dans ce cas, on rajoute la constante $\frac{m^4}{16\lambda}$ au potentiel afin qu'il soit positif défini).

L'objectif de cette étude est donc de déterminer les deux premiers niveaux énergétiques E_0 et E_1 dans ces deux cas de figures à l'aide du potentiel effectif calculé avec les équations exactes du RG.

Dans le cas du potentiel anharmonique, le travail peut sembler un peu académique, néanmoins il n'existe pas de solution analytique exacte et le développement perturbatif au second ordre n'est valide que pour des faibles valeurs de λ (par la suite, le recours à la resommation de Borel des termes perturbatifs fournit de très bons résultats [40]). Nous verrons ici que la méthode du RG prédit les valeurs correctes d'énergie dans tout l'intervalle $[0 : 1]$ avec une précision surprenante.

Le cas du double puits est, quant à lui, nettement plus intéressant. En effet, l'écart énergétique entre les deux premiers niveaux est très faible, puisque dans la limite $\lambda \rightarrow 0$ on a deux puits séparés et donc une dégénérescence en énergie. Pour $\lambda \neq 0$, cette dernière est levée en raison de l'effet tunnel qui autorise la particule à passer d'un puits à l'autre, même si son énergie est inférieure à la barrière de potentiel. Ce phénomène est bien connu et a la particularité de ne pas pouvoir être mis en évidence par un traitement perturbatif. Des approches alternatives, comme l'approximation semi-classique, dite WKB (Wentzel, Kramers, Brillouin), ou la méthode du gaz dilué d'instantons, indiquent que

l'écart énergétique est proportionnel à $e^{-\frac{1}{\lambda}}$. Ce résultat signifie qu'il existe une singularité essentielle en $\lambda = 0$, c'est-à-dire que l'écart énergétique est non-analytique vis-à-vis de la constante de couplage autour de $\lambda = 0$. Ce comportement, caractéristique de l'effet tunnel, ne peut donc être reproduit par un développement en puissances de λ , autrement dit un traitement perturbatif du problème est incapable d'approximer le résultat exact¹.

3.2 Écart énergétique entre les deux premiers niveaux

Les niveaux d'énergie sont donnés par l'équation de Schrödinger indépendante du temps :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x)\right)\psi(x) = E\psi(x). \quad (3.2)$$

Notre but est d'évaluer la différence énergétique ΔE entre les deux premiers niveaux d'énergie pour un potentiel double puits (et pour un oscillateur anharmonique) en utilisant la méthode wilsonienne de renormalisation. Dans cette optique, il s'agit de collecter les fluctuations quantiques qui modifient le potentiel nu et conduisent à un potentiel effectif (ou renormalisé) à une échelle de basse énergie. Cette opération va ainsi donner lieu à une modification profonde du potentiel qui aura l'allure d'un simple puits une fois renormalisé. En effet, il a été rappelé au chapitre précédent que le potentiel effectif était nécessairement convexe, ce qui signifie que même en choisissant un potentiel classique muni d'une partie concave, cette dernière est convexifiée par les effets quantiques. C'est pourquoi on assiste à l'aplatissement progressif de la barrière au cours du processus de renormalisation, ce qui instaure la convexité.

En fait, ce phénomène diffère en mécanique quantique et en QFT sur un point principal. Dans le premier cas, le minimum du potentiel se déplace progressivement au cours du flot de renormalisation vers zéro, tandis qu'en théorie des champs (même avec une seule dimension spatiale), les deux minima à droite et à gauche subsistent et c'est toute la partie centrale qui devient plate : c'est la célèbre construction de Maxwell (en référence historique au phénomène comparable se présentant en thermodynamique avec l'équation des gaz de Van der Waals, où cette construction est nécessaire pour rendre correctement compte des isothermes). Au final, le potentiel effectif ne présente pas un minimum absolu comme en mécanique quantique (ni deux comme il y avait avant renormalisation), mais

¹On peut tout de même utiliser une approche perturbative, mais en développant autour d'un autre paramètre que λ [40].

une infinité, situés dans sa partie centrale². Cette différence essentielle de comportement tient au fait que la QFT implique une infinité de degrés de liberté. C'est pourquoi le phénomène de brisure spontanée de la symétrie se présente en théorie des champs et non en mécanique quantique ordinaire.

Il nous reste maintenant à établir la connexion entre le potentiel effectif et les niveaux énergétiques [37]. Comme nous l'avons rappelé lors du chapitre précédent, la définition variationnelle du potentiel effectif permet d'interpréter ce dernier comme le minimum de la valeur moyenne de la densité d'énergie (cf. équations (2.36) à (2.38)), ce qui signifie que l'énergie du vide s'écrit en mécanique quantique comme :

$$E_0 \equiv \langle 0 | \hat{H} | 0 \rangle = V_{eff}(x)|_{x=\langle x \rangle}, \quad (3.3)$$

avec la notation $\langle x \rangle = \langle 0 | \hat{x} | 0 \rangle$. Il est clair que pour un potentiel convexe et symétrique comme le nôtre, nous avons $\langle x \rangle = 0$. Ensuite on peut obtenir la relation suivante entre l'écart énergétique et la fonction de corrélation³ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle 0 | \mathcal{T}[\hat{x}(t)\hat{x}'(0)] | 0 \rangle \propto e^{-(E_1 - E_0)|t|}. \quad (3.4)$$

Ce résultat est tout à fait général [41] et nous allons brièvement le démontrer dans le contexte général de la QFT. Il s'agit donc d'isoler la dépendance temporelle (euclidienne) de la fonction de Green à deux points, $G^{(2)}(x, x') = \langle 0 | \mathcal{T}[\hat{\phi}(x)\hat{\phi}(x')] | 0 \rangle$ d'après sa définition (1.5). En considérant la représentation de Heisenberg de l'opérateur $\hat{\phi}$, à savoir :

$$\hat{\phi}(\vec{x}, t) = e^{Ht}\hat{\phi}(\vec{x}, 0)e^{-Ht}, \quad (3.5)$$

nous pouvons exprimer la fonction à deux points comme :

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x, x') &= \theta(t - t')e^{E_0(t-t')} \langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}, 0)e^{-H(t-t')}\hat{\phi}(\vec{x}', 0) | 0 \rangle \\ &+ \theta(t' - t)e^{E_0(t'-t)} \langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}', 0)e^{-H(t'-t)}\hat{\phi}(\vec{x}, 0) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Nous insérons ensuite l'identité $\sum_n |n\rangle\langle n|$, où $\{|n\rangle\}$ constitue l'ensemble complet des états propres du hamiltonien de la théorie avec les valeurs propres $\{E_n\}$.

De manière compacte la fonction à deux points s'écrit alors :

$$G^{(2)}(x, x') = \sum_n \left[\langle 0 | \hat{\phi}(\vec{x}, 0) | n \rangle \langle n | \hat{\phi}(\vec{x}', 0) | 0 \rangle + (x \leftrightarrow x') \right] e^{-(E_n - E_0)|t-t'|}. \quad (3.7)$$

²Nous verrons au chapitre suivant qu'il existe un scénario physique, proposé par Bogolubov, qui permet de sélectionner un minimum unique en considérant une instabilité dynamique.

³En QFT euclidienne, les fonctions de Green à n points prennent une forme tout à fait similaire à celles des fonctions de corrélation en physique statistique, ce qui autorise l'utilisation des deux langages.

Plaçons-nous dans la limite où la séparation temporelle est très grande, $|t - t'| \rightarrow \infty$. Dans ce cas, la contribution dominante de la somme (3.7) est celle pour laquelle $E_n - E_0$ est la plus faible. Autrement dit, c'est le terme correspondant à l'état $|1\rangle$ qui se couple le plus fortement avec le vide $|0\rangle$ à travers l'opérateur $\hat{\phi}$. Notons au passage que le vide ne contribue pas à (3.7) puisque la valeur moyenne $\langle 0|\hat{\phi}(\vec{x}, 0)|0\rangle$ est nulle. L'expression finale limite pour la fonction de corrélation est donc :

$$\lim_{|t-t'|\rightarrow\infty} G^{(2)}(\vec{x}, \vec{x}') = \left[\langle 0|\hat{\phi}(\vec{x}, 0)|1\rangle\langle 1|\hat{\phi}(\vec{x}', 0)|0\rangle + (x \leftrightarrow x') \right] e^{-(E_1-E_0)|t-t'|}. \quad (3.8)$$

On déduit la relation (3.4) de cette propriété générale en se restreignant à la mécanique quantique et en prenant $t' = 0$.

Il nous reste maintenant, afin d'identifier ΔE , à évaluer la fonction à deux points par calcul direct. Le théorème de Wick stipule que cette dernière est égale au premier ordre à la fonction de Green $G_0(t - t')$ de la théorie libre. Comme on est intéressé par les niveaux de basse énergie nous pouvons effectuer l'approximation harmonique du potentiel effectif autour du minimum, en l'occurrence zéro, et ainsi obtenir un lagrangien effectif (de type Klein-Gordon). L'action effective, à l'ordre suivant de la LPA, est donnée par la transposition de l'équation (2.7) en mécanique quantique :

$$S_k(x) = \int dt \left[U_k(x) + \frac{1}{2} Z_k(x) \dot{x}^2 \right]. \quad (3.9)$$

Le terme $Z_k(x)$ est déjà une correction d'ordre supérieur, donc nous ne retenons que sa valeur en $x = 0$ à ce niveau d'approximation. Le développement de Taylor de U_k à proximité de l'origine conduit à un lagrangien effectif à l'échelle IR ($k = 0$) de la forme :

$$L_{eff}(x, \dot{x}) = E_0 + \frac{1}{2} U_0''(0) x^2 + \frac{1}{2} Z_0(0) \dot{x}^2. \quad (3.10)$$

En introduisant la notation $m_{eff}^2 \equiv U_0''(0)/Z_0(0)$, la fonction de Green de ce problème est donnée naturellement par (le terme constant n'a dans ce cas aucune importance) :

$$(\nabla_t^2 + m_{eff}^2)G_0(t - t') = \delta(t - t'). \quad (3.11)$$

La fonction de Green $G_0(t - t')$ s'écrit explicitement en passant par la transformée de Fourier et ainsi l'expression (1.8) s'écrit à une seule dimension comme :

$$G_0(t - t') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi} \frac{e^{-iE(t-t')}}{E^2 + m_{eff}^2}. \quad (3.12)$$

Cette intégrale peut être évaluée grâce à la méthode des résidus⁴. Les deux pôles de (3.12) étant $z_{\pm} = \pm i m_{eff}$, le résultat de l'intégrale est donc pour $t' = 0$:

$$G_0(t) = \frac{1}{m_{eff}} e^{-m_{eff} |t|}. \quad (3.13)$$

On peut désormais, à partir des relations (3.4) et (3.13), identifier les énergies du niveau fondamental et de la première excitation en fonction du potentiel effectif :

$$E_0 = V_{eff}|_{x=0} \quad (3.14)$$

$$E_1 = V_{eff}|_{x=0} + \sqrt{\frac{1}{Z_0(0)} \frac{d^2 V_{eff}}{dx^2} \Big|_{x=0}}. \quad (3.15)$$

La valeur de ΔE est donc essentiellement déterminée par la dérivée seconde (la courbure) du potentiel effectif à l'origine. En revenant au langage wilsonien, l'écart énergétique s'écrit de manière compacte :

$$\Delta E = \sqrt{\frac{U_0''(0)}{Z_0(0)}}. \quad (3.16)$$

3.3 Équations du groupe de renormalisation wilsonien

Nous avons travaillé avec les deux niveaux d'approximation, à savoir $Z_k = 1$ (LPA) et $Z_k = Z_k(x)$. L'inclusion de la renormalisation de la masse Z_k complique les calculs puisqu'elle met en jeu une seconde équation différentielle partielle. La prise en compte de ce terme supplémentaire aboutit à des résultats contrastés : pour l'oscillateur anharmonique la renormalisation de la masse améliore les résultats par rapport à la LPA ; en revanche, dans le cas du double puits, l'accord est dégradé lorsque l'équation pour Z_k

⁴La méthode des résidus consiste à se placer dans le plan complexe, à repérer les pôles, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles le dénominateur s'annule, puis à les entourer suivant un contour formé par l'axe des réels et le demi-cercle appartenant au plan des coordonnées imaginaires positives.

Le résultat mathématique s'énonce ainsi :

Soit une fonction trigonométrique $e^{i ax}$ avec a réel non nul, et une fonction rationnelle $R(x)$, respectant $\lim_{x \rightarrow \infty} R(x) = 0$ et possédant N pôles complexes z_k dans le demi-cercle imaginaire positif (négatif) pour a positif (négatif), le théorème de Cauchy montre que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx R(x) e^{i ax} = \text{Sign}(a) \cdot 2\pi i \sum_{k=1}^N \text{Res}(R(z) e^{i az}, z_k)$$

où le résidu Res est défini par : $\text{Res}(R(z) e^{i az}, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) R(z) e^{i az}$.

est considérée. Ce dernier constat est surprenant puisque dans le cadre d'un formalisme légèrement différent, en l'occurrence celui du "proper time", l'ajout de la renormalisation de la masse améliore nettement les résultats [39]. Nous reviendrons sur les effets de la prise en compte de $Z_k(x)$ lors de l'analyse des résultats.

Le potentiel effectif $U_k(x)$ et la fonction $Z_k(x)$ sont obtenus à partir des équations wilsoniennes (2.22) et (2.23), qui deviennent en une dimension :

$$\frac{\partial U_k}{\partial k} = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(Z_k + \frac{U''}{k^2} \right) \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial Z_k}{\partial k} = -\frac{1}{2\pi} \left(\frac{Z_k''}{A} - \frac{2Z_k' A' + Z_k'^2 k^2}{A^2} + \frac{Z_k A'^2 + 4Z_k' Z_k A' k^2}{A^3} - 4 \frac{Z_k'^2 A'^2 k^2}{A^4} \right), \quad (3.18)$$

où $A = Z_k k^2 + U_k''$ et où la dépendance spatiale de U et Z est sous-entendue.

Nous travaillons avec des quantités dimensionnées, l'échelle de base est fixée par le choix $m^2 = \pm 1$ comme unité de masse. Les équations du RG doivent être intégrées depuis un cutoff Λ jusqu'à zéro. La valeur de Λ est prise de telle façon à être très grande comparée aux grandeurs caractéristiques du problème. Le choix $\Lambda = 1500$, qui correspond à un rapport d'échelle de 6 ordres de grandeurs entre m^2 et Λ^2 , a été retenu dans notre travail. Nous pourrions vérifier *a posteriori* sur les figures 3.3a et 3.3b, que cette valeur est suffisamment éloignée de la région de variation des constantes de couplage. Les conditions initiales des équations (3.17) et (3.18) sont données à l'échelle UV respectivement par $U_\Lambda = V_{dw}$ et $Z_\Lambda = 1$.

3.4 Stratégie numérique

Il s'agit ici de trouver une méthode numérique capable de résoudre un système d'équations différentielles partielles non linéaires de second ordre couplées. En apparence facile, la résolution numérique pose deux problèmes majeurs.

Le premier est que l'on cherche à déterminer ΔE à la quatrième décimale près, ce qui implique d'avoir un programme suffisamment stable et efficace pour atteindre une précision supérieure à 10^{-4} sur la dérivée seconde. Ce problème de précision se trouve d'ailleurs accentué par le fait que l'on met en jeu des échelles sur dix ordres de grandeurs (de $k \sim 10^3$ à $k \sim 10^{-8}$), les variations essentielles des fonctions se faisant sur un intervalle restreint, variable selon la valeur de λ , typiquement $[0.1, 10]$, ce qui correspond à la zone où les modes énergétiques k^2 sont du même ordre que la masse m^2 .

La seconde difficulté est liée au comportement des équations différentielles elles-mêmes lorsqu'elles sont appliquées au potentiel double puits. En effet, si l'on s'intéresse à l'équation pour U seulement, on remarque que pour $k \sim O(1)$, la valeur de $U''(k)$ devient très proche de $-k^2$, ce qui signifie que l'argument du logarithme dans l'équation (3.17) est presque nul. En conséquence, ce passage est délicat numériquement puisque les erreurs éventuelles peuvent entraîner des valeurs négatives pour $U''(k) + k^2$, ce qui rend le comportement du logarithme explosif. Ce problème est d'autant plus marqué que les valeurs de λ sont petites, ce qui est logique car la présence de ce pôle $U'' = -k^2$ traduit le changement de concavité du potentiel (cf. figure 3.2b) et c'est pourquoi il devient difficile d'effectuer ce passage pour des barrières de potentiel de plus en plus grandes.

Nous avons exploré trois approches distinctes. La première consiste à discrétiser $U(x)$ et $Z(x)$ sur un intervalle $[-x_{max}, +x_{max}]$ et résoudre ensuite les équations différentielles (ordinaires) en k par un Runge-Kutta à l'ordre 4 indépendamment pour chaque valeur de x . Enfin, pour déterminer avec précision les dérivées premières et secondes de U et Z , nous les avons évaluées sur sept points en utilisant les coefficients de Lagrange appropriés. Cette méthode fournit de bons résultats et elle est peu sensible à la troncation en x_{max} . En contrepartie, nous ne pouvons utiliser qu'un faible nombre de points (inférieur à cent) et sa rigidité nous limite à considérer l'équation pour U seule.

La seconde stratégie consiste à ajouter un ajustement polynomial pour U et Z à chaque itération en se servant de la routine du CERN appelée MINUIT [42], qui fournit un algorithme de minimisation efficace. On gagne en souplesse en lissant les fluctuations numériques et il est ainsi possible, quoi qu'avec difficulté, de considérer le système d'équations couplées. Il reste cependant deux écueils : une grande sensibilité des résultats selon le choix de x_{max} et l'obligation de "forcer" une forme polynomiale d'ordre fini (huit semblant être le meilleur compromis) pour U et Z .

La dernière alternative est d'utiliser les algorithmes de la librairie NAG [43] pour obtenir des améliorations en stabilité et en précision. La routine employée est basée sur la méthode de la collocation de Chebychev pour la discrétisation spatiale et sur celle des lignes pour la conversion des équations différentielles partielles en équations différentielles ordinaires. Une fois le code correctement implémenté, nous constatons des résultats en accord avec ceux des programmes précédents, mais avec une stabilité excellente et une meilleure souplesse permettant de descendre à des valeurs de λ plus basses pour le double puits (0.03 contre 0.08 précédemment). De plus, la prise en compte de l'équation pour Z

se fait relativement facilement et toujours avec une précision très bonne.

Le seul bémol est que la structure même du code ne nous permet pas de travailler avec le potentiel U mais avec sa dérivée première ou seconde, ce qui nous fait perdre l'information sur la valeur de E_0 .

Ce succès de NAG nous a convaincu d'utiliser d'autres routines de sa librairie pour calculer les solutions exactes de l'équation aux valeurs propres de Schrödinger, dont les résultats concordent avec [39] et [40]. Dans ce cas, l'algorithme est basé sur la transformation de Pruefer et sur la méthode du tir pour résoudre cette équation aux valeurs propres.

La précision relative atteinte par l'utilisation de la librairie NAG est de l'ordre de 10^{-6} pour le double puits et de 10^{-8} pour le potentiel anharmonique avec chacun des deux programmes de résolution des équations du RG et de celle de Schrödinger.

3.5 Résultats et analyse

La résolution du système (3.17-3.18) nous permet d'observer les modifications du potentiel U et de la masse Z au fur et à mesure du flot de renormalisation, c'est-à-dire en prenant compte progressivement des effets quantiques sur la physique classique. Cette évolution du potentiel avec l'échelle k est montrée sur les figures 3.2a et 3.2b. Les résultats pour les niveaux d'énergie sont reportés sur les figures 3.1a, 3.1b et 3.4 ainsi que dans les tableaux 3.1 et 3.2. Tous ces graphes présentent les résultats exacts (tirés de l'équation de Schrödinger) et ceux obtenus dans le cadre de la LPA. Les effets de la renormalisation de la masse sont consignés dans les deux tableaux, où l'indice $U + Z$ correspond au calcul de l'écart d'énergie avec les deux équations (3.17) et (3.18).

3.5.1 Évolution du potentiel

D'un point de vue qualitatif, force est de constater que les calculs issus de la méthode wilsonienne du RG reproduisent très bien les valeurs attendues des deux premiers niveaux d'énergie pour l'oscillateur anharmonique et pour le double puits. Dans le premier cas, notre méthode est applicable avec exactitude sur une gamme très étendue de la valeur de la constante de couplage λ , depuis zéro, cas limite où on retrouve la relation bien connue $E_n = (n + \frac{1}{2})\hbar\omega$ associée à l'oscillateur harmonique, jusqu'à l'unité à partir de laquelle on atteint un régime hautement non-perturbatif.

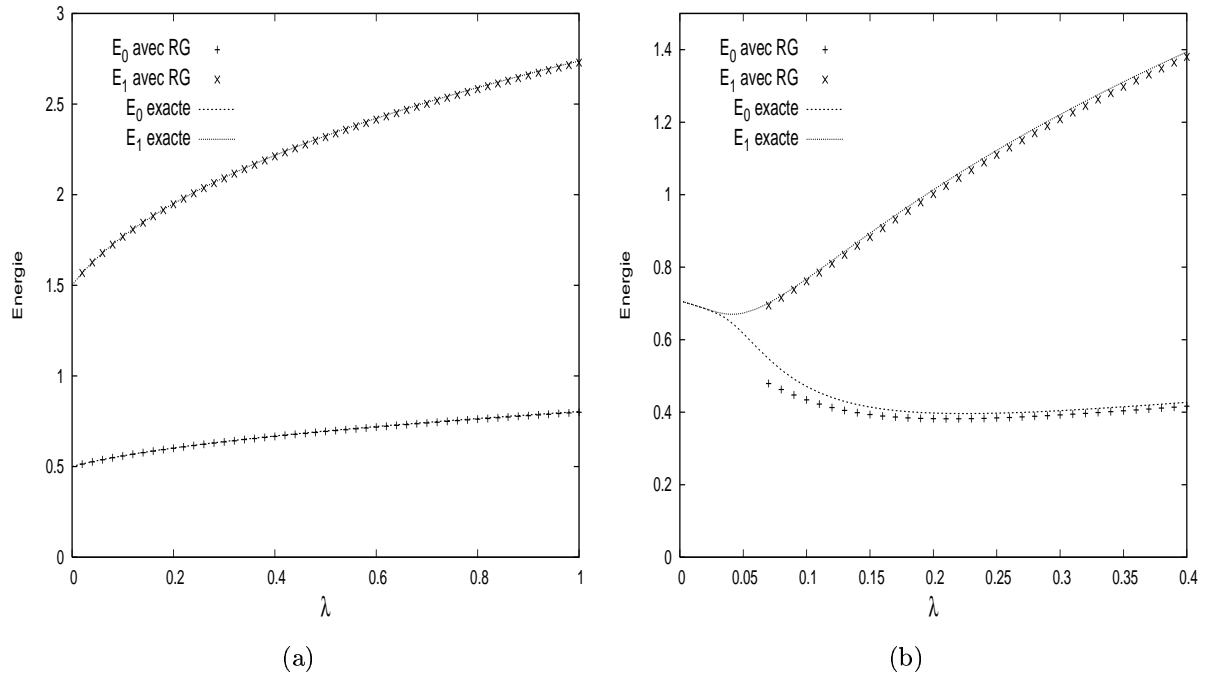


FIG. 3.1 – Énergies E_0 et E_1 (en unité $\hbar\omega$) pour l'oscillateur anharmonique (a) et pour le double puits (b) en fonction de la constante de couplage λ .

Concernant le double puits, l'accord est également très bon, même si des différences significatives (cf. étude quantitative ci-après) font leur apparition pour les faibles valeurs de λ . Ici, le cas limite $\lambda \rightarrow 0$ nécessite quelques précisions : en effet, en prenant $\lambda = 0$ strictement, on aurait affaire à un potentiel classique en forme de puits inversé, donc totalement non-physique. C'est pourquoi il faut faire tendre λ vers 0^+ pour trouver le comportement correct.

L'expression (3.1) de V_{dw} montre que la hauteur de barrière est proportionnelle à $\frac{1}{\lambda}$ et la distance entre les deux minima à $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, ce qui signifie qu'une valeur infiniment petite de la constante de couplage correspond à deux puits infiniment loins et séparés par une barrière de potentiel infiniment haute; en d'autres termes les deux puits deviennent totalement indépendants. Donc, pour connaître l'énergie de l'état fondamental de l'un d'eux, il suffit d'appliquer l'approximation harmonique autour d'un des minima. Par exemple, pour le minimum positif x_+ on trouve un potentiel classique $V_{\lambda \rightarrow 0^+}(x) \simeq -m^2(x - x_+)^2$ dont le niveau fondamental est $\frac{\sqrt{2}}{2} \simeq 0.71$ en unités $\hbar\omega$. C'est la raison pour laquelle on observe sur la figure 3.1b, la dégénérescence de E_0 et E_1 à cette valeur lorsque λ s'approche de zéro. On constate que la méthode du RG réussit bien à reproduire ce comportement.

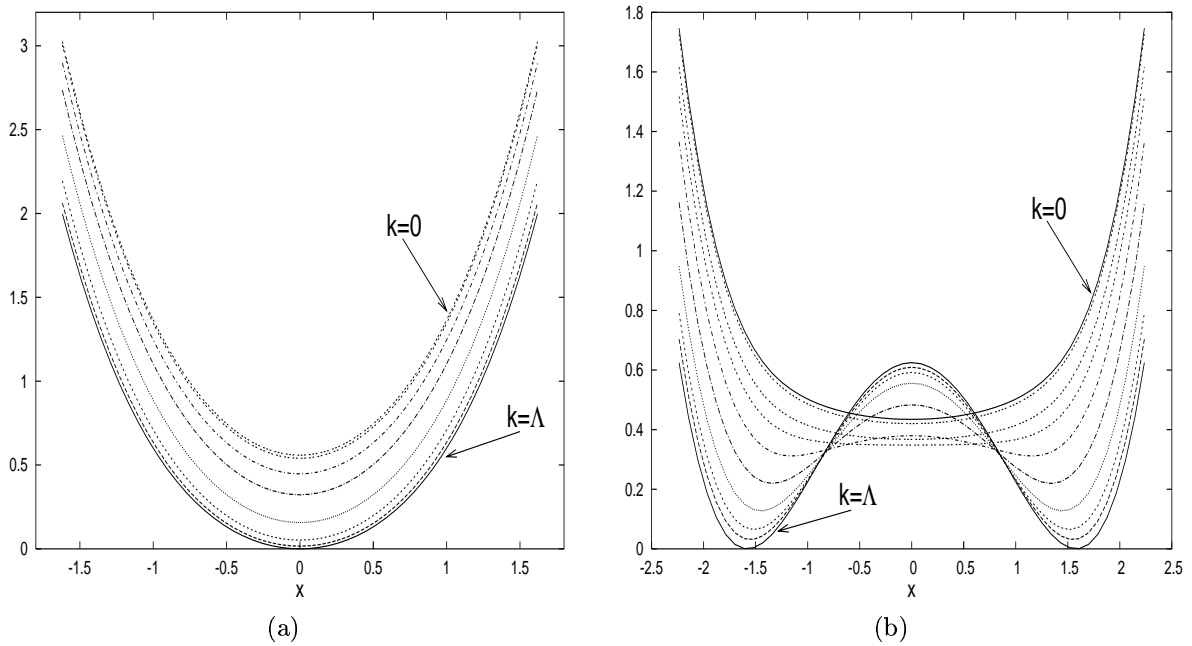


FIG. 3.2 – Évolution du potentiel effectif $U_k(x)$ avec l'échelle k , pour $\lambda(\Lambda) = 0.1$:
 (a) cas de l'oscillateur anharmonique
 (b) cas du double puits.

Les figures 3.2a et 3.2b montrent comment la prise en compte progressive des effets quantiques modifie la forme du potentiel pour aboutir à un potentiel effectif convexe. On vérifie aussi que la valeur de $V_{eff}(0)$ correspond bien à la valeur de E_0 en accord avec les propriétés du potentiel effectif. Cette observation est valable en mécanique quantique ; en revanche, en théorie des champs, le comportement du terme constant de V_{eff} , à savoir la constante cosmologique, est "explosif" car proportionnel à Λ^4 . Or, nous le verrons au chapitre suivant, les équations wilsoniennes du RG ne règlent pas de manière *ad hoc* le problème des divergences quartiques et quadratiques.

Afin de mieux suivre l'effet du flot de renormalisation, nous avons également reporté sur les figures 3.3a et 3.3b l'évolution de la masse m^2 et de la constante de couplage λ en fonction de l'échelle k , autrement dit les fonctions bêta de la théorie. Nous pouvons ainsi vérifier que, comme prévu en mécanique quantique ordinaire, les valeurs des paramètres sont pratiquement insensibles aux contributions provenant des échelles éloignées. En effet, pour des valeurs de k très faibles ou très grandes, l'évolution des paramètres est insignifiante.

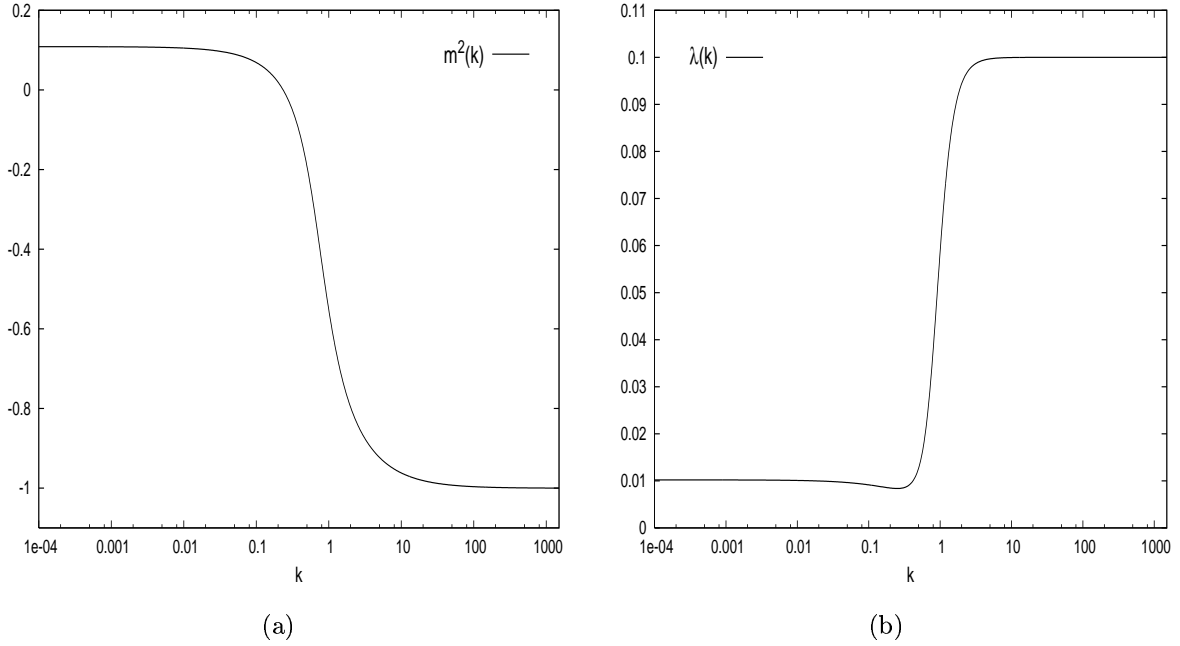


FIG. 3.3 – Évolution de la masse m^2 (a) et de la constante de couplage λ (b) en fonction de l'échelle k pour le double puits. Nous vérifions que le flot de renormalisation, conformément à ce qui est attendu en mécanique quantique, sature à la fois dans l'IR et dans l'UV.

Ces graphes (à titre d'exemple on peut les comparer avec leurs analogues en QFT représentés sur la figure 4.10) mettent en lumière une différence fondamentale entre la mécanique quantique ordinaire et la théorie des champs : dans la seconde, toutes les échelles sont couplées et tous les modes k apportent des contributions du même ordre de grandeur. Au contraire, en mécanique quantique, seuls les modes dont l'énergie est comparable à celles des quantités physiques considérées (rappelons que la grandeur des quantités dimensionnées est donnée par la valeur unitaire de la masse carrée) ont une influence sur la physique.

3.5.2 Précision des résultats et effets de la renormalisation de la masse

D'un point de vue plus quantitatif, nous sommes en mesure d'évaluer l'accord de nos résultats avec le calcul exact.

Concernant l'oscillateur anharmonique, l'accord est excellent puisque pour la LPA (indice LPA) l'erreur est inférieure à 0.1% pour $\lambda \leq 0.07$ et à 0.2% pour $0.1 \leq \lambda \leq 0.4$.

λ	ΔE_{LPA}	ΔE_{U+Z}	ΔE_{exact}	$Z_0(0)$
1	1.9293	1.9392	1.9341	0.9885
0.4	1.5450	1.5495	1.5482	0.9928
0.2	1.3461	1.3481	1.3481	0.9956
0.1	1.2091	1.2099	1.2104	0.9978
0.07	1.1582	1.1586	1.1591	0.9985
0.05	1.1202	1.1204	1.1208	0.9990
0.02	1.0540	1.0540	1.0542	0.9997

TAB. 3.1 – Valeurs de ΔE pour l’oscillateur anharmonique. Nous avons consigné ici les résultats de la méthode du RG où l’on considère le développement en gradient à l’ordre le plus bas (*LPA*, colonne deux) et à l’ordre suivant ($U + Z$, colonne trois) dans lequel on prend en compte la renormalisation de la masse ($Z_0(0)$, dernière colonne). Les solutions exactes de l’équation de Schrödinger sont reportées dans la quatrième colonne.

La prise en compte de Z (indice $U + Z$) améliore encore d’un facteur deux la précision. Dans le cas des très grandes constantes de couplage, par exemple $\lambda = 1$, la précision est un peu moins bonne (0.25%) et les deux calculs donnent la même erreur relative, ce qui indique qu’il faudrait commencer à considérer le terme suivant du développement en gradient pour $\lambda \geq 1$.

Ces bons accords quantitatifs permettent donc de valider la méthode du RG ainsi que le choix du développement en gradient et notamment de l’équation pour Z [25].

Dans le cas du double puits, les conclusions sont plus nuancées. Les calculs par la méthode du RG ont également été comparés ici avec un résultat analytique issu d’une autre approximation non-perturbative, le gaz dilué d’instantons.

Cette dernière solution apparaît lorsque l’on recherche en mécanique quantique euclidienne (temps t imaginaire pur) les chemins stationnaires qui minimisent l’action :

$$\left[\frac{\delta S_E[x(t)]}{\delta x} \right]_{x(t)=\bar{x}(t)} = 0. \quad (3.19)$$

Les configurations $\bar{x}(t)$ non-triviales issues de ce calcul sont appelées instantons et anti-instantons et prennent la forme suivante dans un potentiel double puits [44] :

$$\bar{x}(t) = \pm x_0 \tanh \left(x_0 \frac{\sqrt{\lambda}}{2} (t - t_0) \right) = \pm x_0 \tanh \left(\frac{t - t_0}{\Delta t} \right). \quad (3.20)$$

En joignant alternativement des instantons avec des anti-instantons de telle façon que leur

λ	ΔE_{inst}	ΔE_{LPA}	ΔE_{U+Z}	ΔE_{exact}	$Z_0(0)$
1	—	1.5015	1.5440	1.5058	0.9504
0.4	1.6645	0.9656	1.0360	0.9667	0.8862
0.3	1.5793	0.8174	0.9175	0.8166	0.8235
0.2	1.3058	0.6212	0.8777	0.6160	0.5669
0.1	0.5683	0.3297	—	0.2969	—
0.07	0.2474	0.2239	—	0.1539	—
0.06	0.1524	0.1902	—	0.1030	—
0.05	0.0761	0.1577	—	0.0562	—
0.04	0.0262	0.1260	—	0.0210	—
0.03	0.0042	0.0947	—	0.0037	—

TAB. 3.2 – Valeurs de ΔE pour le double puits. La première colonne contient les résultats issus de l'approximation du gaz dilué d'instantons. Ensuite viennent ceux obtenus avec la méthode du RG où l'on considère le développement en gradient à l'ordre le plus bas (*LPA*, colonne deux) et à l'ordre suivant ($U + Z$, colonne trois) dans lequel on prend en compte la renormalisation de la masse ($Z_0(0)$, dernière colonne). Les solutions exactes de l'équation de Schrödinger sont reportées dans la quatrième colonne.

taille Δt soit petite devant la distance entre deux centres x_0 (d'où le qualificatif "dilué"), on obtient une configuration qui domine l'intégrale de chemin [34]. On peut alors en déduire les niveaux énergétiques dans le double puits et obtenir l'expression analytique suivante pour ΔE [45] :

$$\Delta E = 2\sqrt{\frac{2\sqrt{2}}{\pi\lambda}} \exp\left(-\frac{1}{3\sqrt{2}\lambda}\right). \quad (3.21)$$

Un des aspects remarquables de cette approche est qu'elle permet de reproduire, à un facteur $\sqrt{\pi/e} \simeq 0.93$ près, le résultat plus ancien (cf. [46] par exemple) issu de l'approximation semi-classique WKB à l'ordre 1 en puissance de \hbar . L'équation (3.21) est également intéressante puisque l'écart énergétique, comme nous l'avons évoqué, est fonction de $e^{-\frac{1}{\lambda}}$, laquelle présente une singularité en $\lambda = 0$. Cette caractéristique ne peut être recouverte par le développement perturbatif $E = E^0 + \lambda E^1 + \lambda^2 E^2 + \dots$ et témoigne donc de l'impuissance de ce dernier pour décrire ce phénomène.

Le tableau 3.2 montre que les résultats du RG wilsonien reproduisent correctement les valeurs attendues dans une large plage de valeurs de λ avec une erreur relative inférieure à 1% pour $\lambda \geq 0.2$. Cependant, la méthode des instantons s'avère plus efficace lorsque

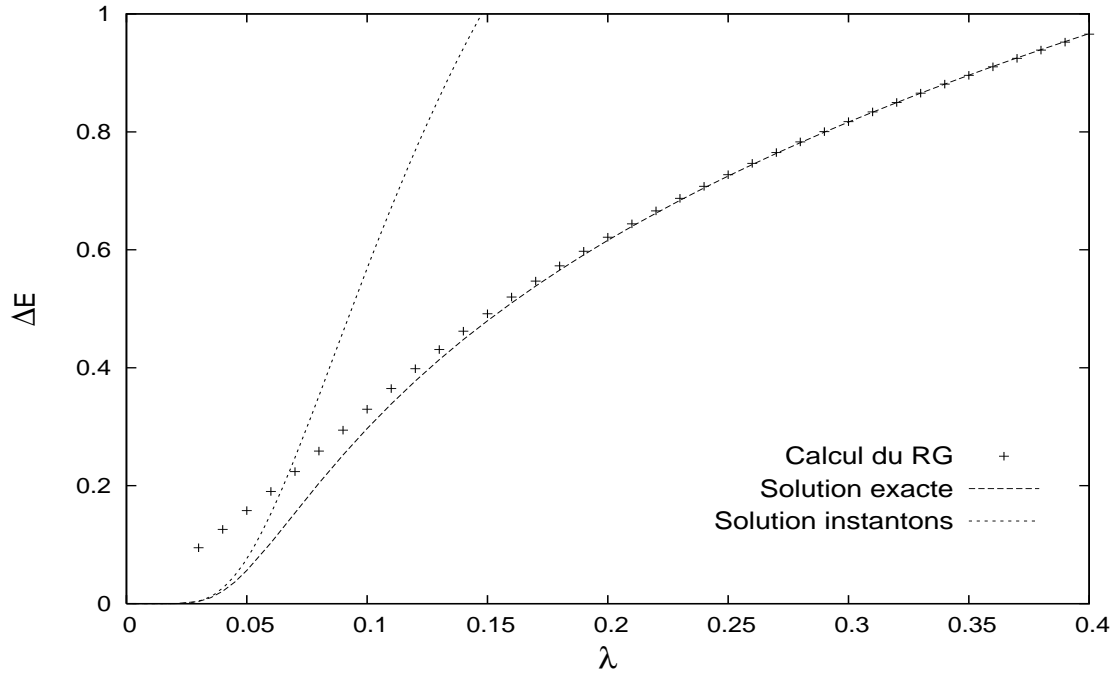


FIG. 3.4 – Valeurs de ΔE en fonction de λ données par la méthode du RG, par les solutions exactes de l'équation de Schrödinger et par le résultat analytique de l'approximation non-perturbative du gaz dilué d'instantons.

λ devient très faible, ce qui correspond à de très hautes barrières de potentiel où l'effet tunnel devient moindre et où logiquement une approche semi-classique fournit une bonne approximation. L'erreur relative entre les valeurs exactes et celle de la méthode du RG devient alors très importante, tout simplement parce que l'écart d'énergie tend vers zéro pour $\lambda \rightarrow 0$, donc un raisonnement en terme d'erreur relative devient absurde.

Pour évaluer la précision du RG sur cette plage de valeurs $\lambda < 0.1$, il est préférable de regarder l'erreur absolue qui se stabilise autour de 0.1 à partir de $\lambda = 0.06$. Cette erreur, à comparer avec $E_0 \simeq E_1 \simeq 0.7$, reste donc raisonnable. De plus, comme on le constate sur la figure 3.4, les valeurs de ΔE d'après la méthode du RG semblent bien tendre vers zéro pour $\lambda \rightarrow 0$. Donc, en s'appuyant éventuellement sur la complémentarité avec l'approximation du gaz dilué d'instantons, il est possible de couvrir à peu près tous les cas de figure avec une bonne fiabilité.

En revanche, contrairement à nos attentes, la renormalisation de la masse n'apporte pas d'améliorations et même dégrade la précision atteinte avec le potentiel seul (se reporter au tableau 3.2). En effet, les corrections sur ΔE sont trop importantes car Z s'éloigne

énormément de sa valeur initiale unitaire. Bien qu'une explication totalement satisfaisante manque encore, certaines hypothèses peuvent être avancées. Étant donné que l'équation pour Z "fonctionne" correctement dans le cas de l'oscillateur anharmonique, on peut supposer que c'est peut-être le développement en gradient qui est inadapté au problème du double puits. Il est également envisageable que la convergence de cette approximation n'est pas uniforme et qu'il faut prendre également en compte les termes suivants pour espérer une amélioration.

En dépit de ce bémol, ce premier test de la méthode du RG wilsonien s'est révélé très satisfaisant, et nous a conforté dans son utilisation dans d'autres domaines de la théorie des champs.

Une première idée d'application de notre approche est la suivante. La génération d'un potentiel effectif convexe suggère l'interprétation alternative suivante : le mouvement quantique d'un paquet d'ondes dans le double puits, en particulier l'évolution temporelle des valeurs moyennes de la position et de l'impulsion, peut être reproduit par le mouvement *classique* d'une particule dans le simple puits de potentiel *renormalisé*. Ce qui accrédirait l'hypothèse que l'essentiel de l'information quantique est contenue dans le potentiel effectif et qu'il est alors possible de traiter un problème quantique suivant le formalisme de la physique classique. Cette idée, relativement intuitive et confortée par les bons accords trouvés dans l'étude des niveaux énergétiques, sera explorée au cours du chapitre 5, dans lequel nous verrons qu'elle ne peut pas être appliquée naïvement.

Néanmoins, sous certaines conditions, nous montrerons, avec le support d'arguments théoriques, que le mouvement classique d'une particule dans le potentiel renormalisé peut constituer une bonne approximation de l'évolution temporelle de la valeur moyenne de la position dans le double puits.

Une autre voie possible serait d'exporter nos raisonnements et nos résultats dans une QFT à 4 dimensions afin de voir si la méthode du RG est aussi efficace dans ce contexte. Il s'est avéré tout naturel de nous diriger vers l'étude d'un autre potentiel de type double puits, en l'occurrence l'incontournable potentiel de Higgs du Modèle Standard, plus que jamais d'actualité. Nous allons ainsi investiguer au chapitre suivant de quelle manière la convexité du potentiel effectif se manifeste-t-elle et quelles conséquences phénoménologiques cela peut-il avoir, notamment sur la question de la détermination des bornes inférieures sur la masse du boson de Higgs.

« On fait la science avec des faits, comme on fait une maison avec des pierres ; mais une accumulation de faits n'est pas plus une science qu'un tas de pierre n'est une maison. »

Henri Poincaré

4

Étude non-perturbative du secteur de Higgs du Modèle Standard

Après avoir éprouvé la méthode du groupe de renormalisation wilsonien dans le cadre de la mécanique quantique (théorie des champs élémentaire à 0+1 dimension spatio-temporelle), nous nous tournons naturellement vers son application aux QFT à $d = 4$ dimensions. Ainsi, nous allons voir si les résultats encourageants de notre analyse non-perturbative précédente peuvent être étendus à des problématiques s'inscrivant dans le cadre du Modèle Standard (SM) de la physique des particules.

Le SM est une théorie confortée par de nombreuses confirmations expérimentales de grande précision. Toutefois, ce modèle n'est pas tout à fait complet et le secteur scalaire pose encore un certain nombre de questions de fond irrésolues. Par ailleurs, en l'absence de détection expérimentale du boson de Higgs, la recherche de contraintes théoriques sur sa masse m_H est cruciale. Dans le contexte du SM, cette quantité n'est pas fixée par la théorie, il s'agit donc d'un paramètre libre qu'*a priori* seule l'expérimentation peut déterminer. Cependant, l'exploration des propriétés du secteur de Higgs du SM (ou de ses extensions supersymétriques) a permis d'apporter des informations sur ce point.

Ainsi, deux contraintes théoriques sont couramment avancées : une borne de masse supérieure, basée sur la trivialité de la constante de couplage quartique [47] (pôle de

Landau), et une borne inférieure reposant sur la nécessité d'avoir un vide électrofaible (EW¹) stable (voire métastable) [48–57]. Ces limites théoriques dépendent de la valeur du cutoff physique, c'est-à-dire de l'échelle de la nouvelle physique à partir de laquelle le SM perd sa validité.

4.1 Introduction, contexte et problématique

Nous nous focaliserons ici [11] sur le bien-fondé d'une telle détermination des bornes inférieures sur la masse du Higgs et sur la légitimité du phénomène d'instabilité.

Le potentiel effectif est communément calculé dans l'approximation à une ou deux boucles améliorée par la méthode du RG, et noté² $V_{RGI}(\phi)$. Cette technique (présentée lors du chapitre 1) consiste à resommer les contributions dominantes d'une certaine classe de diagrammes de Feynman, ce qui étend notablement la validité des calculs en boucles. Notre analyse sera donc basée en premier lieu sur ce choix de détermination du potentiel effectif, puis confirmée par des calculs non-perturbatifs grâce aux équations exactes du groupe de renormalisation.

Le raisonnement usuel indique que la prise en compte de la correction radiative issue du couplage de Yukawa entre le boson de Higgs et le quark top³ déstabilise le vide électrofaible du potentiel effectif. En effet, cette contribution est de signe négatif (en raison de la boucle fermionique $t\bar{t}$) et peut concurrencer le terme classique $\lambda\phi^4$. Il arrive ainsi que V_{RGI} fléchisse vers le bas pour des valeurs de ϕ plus grandes que la position v du minimum EW. Ensuite, selon le choix des valeurs des paramètres physiques, le potentiel peut soit rester non limité inférieurement ("unbounded from below") jusqu'à l'échelle de Planck, soit remonter pour former un nouveau minimum plus loin et plus profond que celui électrofaible. On parle de métastabilité dans ce second cas de figure.

Puisque l'instabilité se présente pour des grandes valeurs du champ, le potentiel V_{RGI} est approximé en conservant uniquement le terme quartique [54], c'est-à-dire en notation standard :

$$V_{RGI}(\phi) \approx \frac{\bar{\lambda}(\phi)}{24} \phi^4. \quad (4.1)$$

¹ElectroWeak

²Renormalisation Group Improved. Un développement en boucles est sous-entendu dans la notation. Ainsi, dans notre modèle simplifié on considère d'abord une seule boucle, puis deux dans le cas du SM.

³Naturellement l'ensemble des couplages de Yukawa entre les six quarks et le boson de Higgs est à considérer. En pratique cependant, seule la contribution du top est prise en compte, étant donné que celle des autres quarks est négligeable en raison de la masse beaucoup plus faible de ces derniers.

Dans cette équation, la dépendance de $\bar{\lambda}(\phi)$ avec ϕ est essentiellement la même que celle de la constante de couplage quartique RGI $\lambda(\mu)$ avec l'échelle courante μ , de telle façon qu'il est possible de décrire le comportement du potentiel d'après le flot de $\lambda(\mu)$. Toutefois, comme cela a été correctement souligné dans [57], la fonction $\bar{\lambda}(\phi)$ contient aussi des termes qui n'apparaissent pas dans $\lambda(\mu)$. Ces différences, souvent laissées de côté, ne sont négligeables que pour des très grandes valeurs de ϕ .

La requête que le vide électrofaible soit stable vis-à-vis des fluctuations quantiques est vue comme une *contrainte phénoménologique additionnelle* à imposer au potentiel effectif. Cet impératif induit une relation entre le cutoff physique et la masse minimale du Higgs. La détermination de cette limite inférieure est réalisée d'après le raisonnement suivant. À partir du choix des conditions aux limites pour $\lambda(\mu)$ et pour les autres constantes de couplage, typiquement à l'échelle $\mu = M_Z$, les équations du RG sont résolues. À mesure que μ augmente, $\lambda(\mu)$ décroît (avant de remonter tôt ou tard vers le pôle de Landau). Selon sa valeur initiale $\lambda(M_Z)$, il peut arriver qu'à une certaine échelle $\mu = \Lambda$, la constante de couplage quartique courante λ puisse s'annuler et devenir négative pour des valeurs supérieures à Λ . Si on souhaite que le vide EW soit stable, la valeur Λ s'interprète alors comme le cutoff physique de la théorie, en d'autres termes l'énergie à partir de laquelle le SM n'est plus valide et où une nouvelle physique est attendue.

Enfin, connaissant la relation reliant m_H à $\lambda(\mu)$, la "condition de matching", qui s'écrit au niveau de l'arbre $m_H^2 = \frac{\lambda(M_Z)}{3} v^2$, il est possible d'obtenir une limite inférieure pour la masse du Higgs en fonction de Λ de manière univoque. C'est la procédure standard qui conduit à déterminer ce que la littérature a dénommé la borne de stabilité de m_H .

La possibilité d'avoir un minimum plus bas que celui électrofaible est également considéré. L'argument est que si le temps nécessaire au passage par effet tunnel entre le faux vide (EW) et le vrai est suffisamment grand par rapport à l'âge de l'univers, alors il est envisageable que nous puissions vivre dans un vide EW métastable. Suivant cette approche, des bornes de métastabilité sur la masse du Higgs sont trouvées [49, 51, 58].

Cependant, ces raisonnements apparaissent peu compatibles avec une des propriétés fondamentales du potentiel effectif V_{eff} , qui stipule que ce dernier est une fonction convexe de son argument ϕ , comme cela a été souligné au chapitre 2. Il est également notoire que lorsque le potentiel classique n'est pas convexe (ce qui représente les cas phénoménologiques les plus intéressants), l'approximation de V_{eff} à travers un développement en

boucles, à n'importe quel ordre fini, ne permet pas de recouvrir cette propriété. Des méthodes alternatives non-perturbatives pour le calcul du potentiel effectif, telles que les simulations sur réseau [59], les approches variationnelles [60] ou des moyennes adéquates de résultats perturbatifs [61], fournissent la forme convexe correcte. Comme nous l'avons déjà vérifié dans le cadre restreint de la mécanique quantique lors du chapitre précédent, les équations wilsoniennes constituent aussi un outil non-perturbatif offrant une approximation convexe pour V_{eff} [37–39, 62–64].

L'objectif principal de ce travail est de montrer que V_{eff} n'est *instable nulle part*. Cette apparente instabilité observée n'est qu'une conséquence artificielle de l'extrapolation du potentiel effectif à des valeurs de ϕ situées en dehors de sa région de validité. Naïvement pourtant, il semble que cette instabilité se produise dans une zone où la théorie des perturbations semble être fiable [34] et c'est pourquoi les analyses précédentes n'ont pas mis en évidence cette erreur. De plus, l'utilisation de la méthode RGI, qui permet d'élargir le domaine de validité de la théorie des perturbations par la resommation des logarithmes (dominants, sous-dominants, etc.) a conduit à penser que l'existence de l'instabilité était un problème théoriquement réglé.

Nous montrerons ensuite qu'en dépit de la convexité irréfragable du potentiel effectif, il reste possible, paradoxalement grâce à cette propriété, de dériver des bornes inférieures sur la masse du Higgs. Néanmoins, ces dernières ne constituent pas le résultat de l'application d'une contrainte phénoménologique supplémentaire, à savoir la nécessité de la stabilité du potentiel, mais elles sont en réalité déjà incluses dans la théorie. En d'autres termes, en respectant soigneusement l'autoconsistance de la théorie, nous sommes en mesure d'en identifier ses limites intrinsèques pour chaque jeu de paramètres, ce qui trahit l'existence de bornes inférieures sur m_H .

En ce qui concerne la phénoménologie, nous verrons que si l'échelle de la nouvelle physique se trouve aux environs du TeV, l'écart entre nos bornes et celles trouvées par la méthode standard du critère de stabilité devient significatif. Une autre conséquence de notre analyse est que le scénario de métastabilité est définitivement exclu.

Un autre volet de cette étude est consacré à clarifier le phénomène de convexification du potentiel effectif dans la région interne, où nous montrerons qu'il est possible de reproduire la construction de Maxwell à partir d'équations non-perturbatives du RG [26], adaptées à ce type de problème où deux points de selle non triviaux coexistent avec le même poids dans l'intégrale de chemin.

À cette occasion, nous reconsidérerons certains arguments populaires [51, 65] qui sont parfois proposés comme la solution du problème de l'instabilité du vide EW. Notre analyse soulignera que ces raisonnements, basés sur des relations entre le problème de la convexité (de la région interne) et celui de l'instabilité (de la région externe) prêtent pour le moins à confusion et ne semblent pas constituer un traitement pertinent de ces questions.

Nous verrons en fait que chacune de ces difficultés est résolue individuellement de façon rigoureuse et cohérente ; la première est surmontée grâce au concept d'instabilité dynamique de Bogolubov et la seconde, comme nous l'avons déjà évoqué, a pour origine une extrapolation illégale du domaine de validité de la théorie. Ce travail constituera une bonne entrée en matière sur le mécanisme de brisure de symétrie et permettra de mettre en lumière les différences entre ce processus et la convexification du double puits en mécanique quantique ordinaire.

Pour comprendre l'origine de cette apparente instabilité du vide EW, il n'est pas nécessaire de considérer le SM en entier. En effet, la structure de groupe et de jauge de la théorie n'est pas essentielle pour la compréhension du phénomène. Comme ce dernier est uniquement dû au couplage du Higgs avec le top, un modèle plus simple, formé par un champ scalaire interagissant avec un fermion par un couplage de Yukawa, décrit de la même façon le mécanisme de l'instabilité. Il est donc suffisant, pour développer notre argumentation, de se limiter à ce modèle simplifié où le rôle joué par chaque terme est beaucoup plus facilement identifiable. L'extension de nos résultats au SM est immédiate et a été effectuée en tenant compte des dernières mesures expérimentales connues [66] à la date de publication de notre article [11].

L'instabilité du potentiel effectif scalaire fait l'objet de nombreuses études dans lesquelles V^{1l} et V_{RGJ} sont calculés à l'aide de la méthode de la régularisation dimensionnelle. Suivant cette logique, nous commencerons de même par déterminer le potentiel effectif de notre modèle suivant le schéma \overline{MS} habituel. Cependant, comme on le comprendra clairement par la suite, la régularisation dimensionnelle ne peut pas révéler l'origine du problème. L'erreur de raisonnement contenue dans la procédure classique sera mise en évidence grâce à des schémas de régularisation plus physiques, à savoir par l'introduction d'un cutoff ultraviolet (UV) dans l'échelle des impulsions et par la méthode wilsonienne du RG. La régularisation dimensionnelle est un outil très puissant qui fournit directement les résultats finis de la théorie des perturbations renormalisée. Cependant, ces deux autres schémas permettent de suivre plus consciencieusement (et plus laborieusement) les étapes

à effectuer pour passer du potentiel nu au renormalisé. C'est de cette manière qu'il est possible d'appréhender l'anomalie à l'origine de l'instabilité du vide EW.

Nous avons noté au cours de notre travail que deux articles récents [67, 68] ont été consacrés à ce même problème. Bien que nos conclusions s'apparentent à celles défendues par ces auteurs, notre travail se différencie sur plusieurs aspects importants, qui nécessitent une certaine mise au point. Une comparaison sera donc présentée dans la partie consacrée à l'analyse non-perturbative de l'apparente instabilité de V_{eff} .

Notre étude, qui se propose d'analyser en toute généralité l'influence des corrections radiatives fermioniques sur un potentiel dans une phase à symétrie brisée, et en particulier de celle du top sur le secteur de Higgs du SM, est articulée en cinq étapes.

La première partie sera consacrée à clarifier la question de la convexité du potentiel effectif dans sa partie centrale en détaillant comment le critère d'instabilité dynamique de Bogolubov permet de concilier la convexité de Γ_{eff} avec l'existence d'une phase brisée et comment les fonctions de Green peuvent être calculées à partir de l'action effective convexe. De plus, nous montrerons qu'il est possible d'implémenter le concept d'instabilité dynamique dans le cadre de la méthode wilsonienne du RG. Ensuite, nous déterminerons analytiquement, en suivant le schéma \overline{MS} , le potentiel effectif one-loop puis RGI pour notre modèle simplifié et nous verrons qu'ils sont tous deux instables.

Dans un second temps, nous vérifierons que la régularisation par un cutoff dans l'espace des impulsions conduit à un résultat identique. L'étape suivante permettra, par l'analyse des calculs précédents, de montrer que l'instabilité du potentiel renormalisé provient de son extrapolation au-delà de son domaine de validité. Par ailleurs, en appliquant la contrainte (intrinsèque) de convexité, nous proposerons un critère pour trouver le cutoff physique de la théorie. Nous étendrons notre travail au SM dans une quatrième partie, et nous comparerons les bornes inférieures sur la masse du Higgs, déterminées à l'aide de notre critère, avec celles calculées selon la stratégie habituelle. Enfin, le traitement du problème de l'instabilité dynamique dans le contexte non-perturbatif de la méthode wilsonienne du RG nous permettra de corroborer nos conclusions.

4.2 Phase brisée et instabilité dynamique

Avant de commencer l'étude détaillée de notre modèle, nous allons procéder à l'analyse de certains arguments populaires [51, 65], souvent avancés comme étant la résolution du

problème de l'instabilité, et ainsi montrer que ces raisonnements ne sont pas pertinents. À cette occasion, nous rappellerons les grandes lignes du mécanisme de brisure de symétrie et soulignerons comment la propriété de convexité du potentiel effectif est restaurée. Nous vérifierons au passage que ce phénomène se différencie de la convexification du double puits en mécanique quantique ordinaire. De plus, en alliant le critère d'instabilité dynamique de Bogolubov avec la méthode du RG wilsonien, nous conforterons le bien-fondé de notre approche.

Dans les travaux [51, 65], l'action effective $\Gamma_{eff}[\phi]$ et la fonctionnelle génératrice de fonctions de vertex 1PI de la phase brisée Γ_{1PI} sont présentées comme deux quantités différentes. Ce distinguo est une première source de confusion puisque nous avons rappelé au chapitre 2 que ce sont deux définitions complémentaires du même objet. En fait, ces auteurs considèrent non pas Γ_{1PI} , mais son approximation issue d'un développement au premier ordre en \hbar , Γ_{1PI}^{1l} , et remarquent que cette dernière est non-convexe. Ce constat n'a rien d'étonnant puisque le développement en boucles est, comme nous l'avons déjà évoqué, incapable par construction de satisfaire à la propriété de convexité dans ce genre de problème avec brisure spontanée de la symétrie. Néanmoins, c'est une bonne approximation de Γ_{eff} au voisinage des minima (moyennant quelques précautions à prendre, comme nous l'indiquerons par la suite) et plus généralement dans la région externe. En revanche, dans la zone interne non-convexe (classiquement), elle constitue une approximation incorrecte de l'action effective.

Ensuite, l'argument de [51, 65] est que, pour étudier la stabilité du vide électrofaible, la quantité pertinente à prendre en compte est V_{1PI} (ou plus généralement sa version améliorée par le RG, V_{RGI}) plutôt que le potentiel convexe V_{eff} , et qu'étant donné que V_{1PI} est non-convexe, il n'y a donc pas de problème avec la convexité et l'instabilité est tout à fait légitime [51]. La justification de leur argument est la suivante. Le potentiel V_{eff} peut être obtenu (cf. chapitre 2) par la minimisation de $\langle \psi | \hat{\mathcal{H}} | \psi \rangle$, où $\hat{\mathcal{H}}$ est la densité d'énergie du système et $|\psi\rangle$ un état qui satisfait la contrainte $\langle \psi | \hat{\phi} | \psi \rangle = \phi$. Pour un potentiel classique qui brise la symétrie, les états correspondant aux valeurs de ϕ dans la région entre les deux minima classiques $\pm v$ ne sont pas localisés (nous reviendrons sur ce point à la fin de cette partie). Puisque seuls les états localisés sont intéressants et que V_{1PI}^{1l} est sensé correspondre à des états localisés, y compris dans cette région interne [65], la conclusion est que V_{1PI}^{1l} est en fait le potentiel à considérer le mieux approprié.

Il n'est pas difficile cependant de voir que cette ligne de raisonnement est erronée. En effet, l'instabilité du vide EW a lieu pour des valeurs de ϕ nécessairement plus grandes

que $|v|$. Or, contrairement à ce qui se passe dans la région *interne* $-v \leq \phi \leq v$, les états correspondant à la gamme de ϕ de la région *externe* sont parfaitement localisés et donc l'argument ne peut pas s'appliquer.

En outre, comme nous allons le montrer ci-après, les fonctions de Green à moments nuls de la phase brisée $\Gamma_n^{(v)}$, peuvent être obtenues à partir du potentiel convexe V_{eff} à travers une procédure physique justifiée et basée sur l'idée d'instabilité dynamique des minima classiques (critère de Bogolubov). Ce cadre conceptuel permet alors de procéder au développement en boucles habituel pour V_{eff} et nous aidera à clarifier le lien entre V_{eff} et V_{1PI}^{1l} .

Dans *tous* les cas, le potentiel à considérer est V_{eff} , qui est *convexe dans tout l'espace*. Néanmoins, tant que nous sommes intéressés par les fonctions de Green de la théorie brisée, c'est-à-dire par les propriétés *locales* de V_{eff} autour de $\phi = v$, il est possible (et même plus facile d'un point de vue pratique) de considérer une approximation non-convexe telle que V_{1PI}^{1l} , qui coïncide avec V_{eff} au voisinage de v .

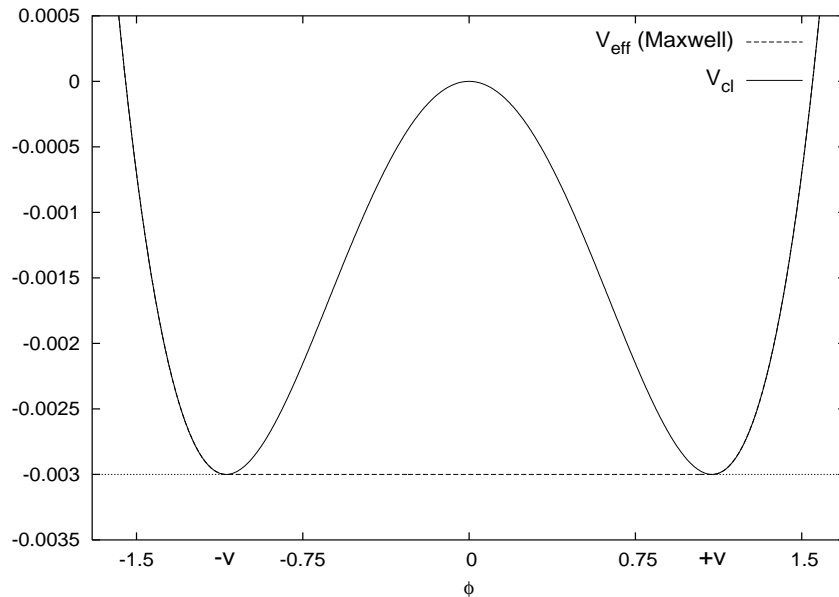


FIG. 4.1 – Construction de Maxwell pour le potentiel classique d'une théorie avec une seule composante scalaire considérée dans le texte.

Les paramètres choisis sont : $\lambda = 5 \cdot 10^{-2}$ et $m^2 = -10^{-2}$; les unités sont arbitraires (se reporter au texte).

En effet, le seul domaine de valeur de ϕ pour lequel on s'attend à une différence significative entre l'approximation du développement en boucles et le potentiel effectif exact, est la région interne $-v \leq \phi \leq v$. La raison en est connue et est simple à comprendre.

Par construction, dans l'approximation à une boucle, l'intégrale de chemin qui définit le potentiel effectif considère le développement de l'action autour d'un unique point de selle. Cependant, pour des valeurs de ϕ appartenant à la région interne, il y a une compétition entre deux points de selle de même poids [15]. En prenant en compte chacune de ces contributions, on retrouve pour le potentiel effectif la forme plate (convexe) bien connue entre les deux minima classiques (construction de Maxwell). Au contraire, pour les valeurs de champ $\phi \geq v$, l'intégrale de chemin est dominée par un seul point de selle trivial (égal à zéro). C'est pourquoi aucune différence importante ne peut se creuser dans la région externe entre le potentiel effectif exact et son approximation par le développement en boucles.

Un argument identique peut être donné dans le cadre de l'approche wilsonienne où il a été montré qu'à la différence de la phase non-brisée, l'intégrale de chemin qui définit les transformations infinitésimales du RG pour le potentiel wilsonien dans la phase brisée est saturée par des points de selle non-triviaux [26].

Nous allons maintenant montrer comment les fonctions de Green de la phase brisée $\Gamma_n^{(v)}$ sont obtenues à partir de l'action effective convexe Γ_{eff} . Pour illustrer ce mécanisme, il est suffisant de se limiter au cas d'un champ de fond constant, autrement dit de considérer V_{eff} plutôt que l'action effective complète. De toute façon, nous serons par la suite uniquement intéressés par V_{eff} . Par simplicité, nous nous limitons au cas d'une théorie à une seule composante scalaire.

Il est également utile de préciser que nous allons manipuler des quantités dimensionnées (à l'exception bien sûr des constantes de couplage) et que celles-ci seront exprimées en unités arbitraires (de puissance d'énergie). La seule notion pertinente est en effet la distance relative des grandeurs entre elles et par rapport au cutoff. Il est ensuite facile de revenir à la phénoménologie (comme nous le ferons tout à l'heure) puisqu'il suffit par exemple d'attribuer à la position du minimum du potentiel une valeur physique, à savoir 246.22 Gev pour le Modèle Standard, pour fixer⁴ les unités de l'ensemble des grandeurs dimensionnées.

Des théorèmes généraux [9, 10], ainsi que plusieurs études analytiques et numériques non-perturbatives [26, 37–39, 59–64], indiquent que V_{eff} est une fonction convexe de ϕ avec un fond plat entre $-v$ et $+v$, les minima du potentiel classique. À l'ordre le plus bas (niveau de l'arbre), V_{eff} correspond à la fameuse construction de Maxwell (aussi appelée double tangente) tracée sur la figure 4.1. Les quantités $\Gamma_n^{(v)}$ (à moments externes nuls)

⁴Les liens entre masses des particules et constantes de couplage sont récapitulés dans l'annexe D.

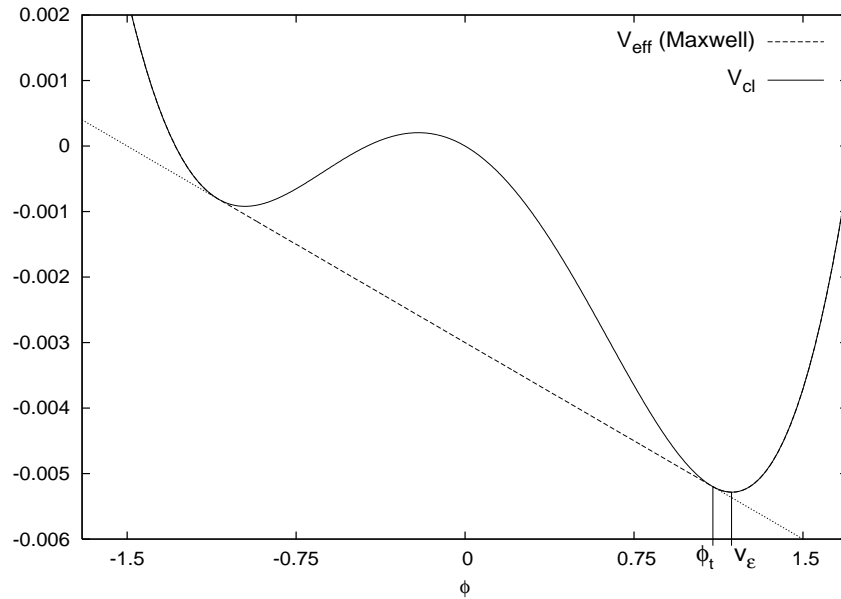


FIG. 4.2 – Construction de Maxwell pour le potentiel classique d'une théorie avec une seule composante scalaire et avec un terme de brisure explicite de la symétrie $-\varepsilon\phi$.

On vérifie bien que le point de tangence ϕ_t se trouve à gauche du minimum absolu v_ε et que les dérivées en ce point sont parfaitement définies.

Les paramètres choisis sont : $\lambda = 5 \cdot 10^{-2}$, $m^2 = -10^{-2}$ et $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$.

sont obtenues en prenant les n dérivées successives de V_{eff} en $\phi = v$. En raison de la forme très particulière du potentiel effectif cependant, cette opération est ambiguë et doit être définie avec certaines précautions.

L'approche que nous allons considérer ici [69, 70], loin d'être un détail technique, a une signification physique profonde. Suivant la logique de Bogolubov, il faut en fait interpréter cette apparition de la brisure de symétrie comme la manifestation de "l'instabilité dynamique" des différents minima du potentiel qui constitueraient sinon des vides équivalents. En ajoutant au lagrangien un terme infinitésimal de source $-\varepsilon\phi$ qui brise explicitement la symétrie classique de la théorie, on sélectionne ainsi un seul des deux minima classiques (cf. figure 4.2).

Plus précisément, ce terme supplémentaire crée un minimum absolu v_ε proche de l'ancien v . Physiquement, cela signifie qu'une symétrie parfaite n'existe pas dans la Nature et qu'en pratique il y aura toujours des petites (voire infinitésimales) irrégularités et fluctuations provoquant une brisure explicite de la symétrie, ce qui génère alors un vide préférentiel pour la théorie.

Comme dans le cas de figure symétrique, V_{eff} peut être obtenu à l'ordre le plus bas

à l'aide de la construction de la double tangente. La simple observation de la figure 4.2 montre que les dérivées à $\phi = v_\varepsilon$ du potentiel effectif modifié $V_{eff}(\phi; \varepsilon)$ peuvent être prises en toute sécurité. En effet, alors que dans le cas symétrique (figure 4.1) la région plate s'étend d'un minimum classique à l'autre (les points de tangence ϕ_t et les minima coïncident), le potentiel effectif de la figure 4.2 a un minimum absolu v_ε , et la région "plate" commence au point $\phi_t < v_\varepsilon$. Les fonctions de Green correspondantes $\Gamma_n^{(v_\varepsilon; \varepsilon)}$ à cet ordre peuvent être obtenues sans problème. Ensuite, le passage à la limite $\varepsilon \rightarrow 0$ fournit les quantités $\Gamma_n^{(v)}$ souhaitées. Sans rentrer dans les détails de la procédure, il est utile de souligner que pour construire les fonctions $\Gamma_n^{(v)}$, il faut commencer avec un système à volume fini puis prendre la limite de volume infini avant d'envoyer ε à zéro.

Clairement, les fonctions de Green $\Gamma_n^{(v)}$ obtenues de cette façon ne sont rien d'autre que celles à l'ordre de l'arbre. Pour aller à des niveaux supérieurs d'approximation, il est nécessaire d'aller au-delà de cette construction de Maxwell (ordre le plus bas). Suivant [26], nous allons maintenant montrer qu'à l'aide de la méthode du RG wilsonien, les résultats précédents peuvent être étendus au-delà de cet ordre.

Nous pouvons maintenant utiliser l'équation non-perturbative du RG, à savoir l'équation (2.20), pour le potentiel effectif wilsonien $U_k(\phi)$. Cette dernière s'écrit en $d = 4$ dimensions comme [4, 22–24] :

$$k \frac{\partial}{\partial k} U_k(\phi) = -\frac{k^4}{16\pi^2} \ln \left(\frac{k^2 + U_k''(\phi)}{k^2 + U_k''(0)} \right), \quad (4.2)$$

où la notation $'$ désigne comme d'habitude la dérivation par rapport à ϕ .

Rappelons que le potentiel classique (nu) est $V_{cl}(\phi) = U_{k=\Lambda}(\phi)$ et que le potentiel effectif est $V_{eff}(\phi) = U_{k=0}(\phi)$. Pour une théorie dans une phase brisée cependant, l'équation (4.2) devient instable. Plus précisément, pour des valeurs de ϕ dans la région interne, cette équation développe une singularité pour une valeur critique finie $k_{cr}(\phi)$ de l'échelle courante k . En deçà de $k = k_{cr}(\phi)$, l'équation (4.2) n'est plus valide. En effet, il n'est pas difficile de voir que cette dernière n'est plus définie (dans l'espace des réels) lorsque $U_k''(\phi) \leq -k^2$, c'est-à-dire lorsque l'argument du logarithme devient négatif.

Ce comportement illustre la différence entre la mécanique quantique unidimensionnelle ordinaire (un seul degré de liberté) et la QFT (une infinité de degré de liberté). Dans le premier cas, nous avons vu au chapitre 3 que le pôle est atteint mais jamais traversé, c'est-à-dire que le logarithme reste défini pendant tout le flot de renormalisation, même si son argument s'approche de la valeur critique. En QFT, pour un jeu de paramètres où la symétrie est brisée, la valeur k_{cr} est franchie et l'équation du RG (4.2) devient caduque.

Dans la référence [26], une nouvelle équation non-perturbative du RG pour le champ ϕ dans la région instable a été établie :

$$U_{k-\delta k}(\phi) = \min_{\{\varrho\}} \left[k^2 \varrho^2 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx U_k(\phi + 2\varrho \cos(\pi x)) \right]. \quad (4.3)$$

Le minimum $\varrho_k(\phi)$ de cette équation est l'amplitude des points de selle non-triviaux qui dominent l'intégrale de chemin définissant la transformation infinitésimale du RG dans la région interne. Pour $\phi > v$ en revanche, l'intégrale de chemin est dominée par le point de selle trivial nul et donc $\varrho_k(\phi) = 0$.

Dans [26], le cas du potentiel symétrique (figure 4.1) était considéré et la construction de Maxwell pour V_{eff} y était retrouvée. Ici, nous étendons cette analyse au cas du potentiel avec un terme de brisure explicite de la symétrie.

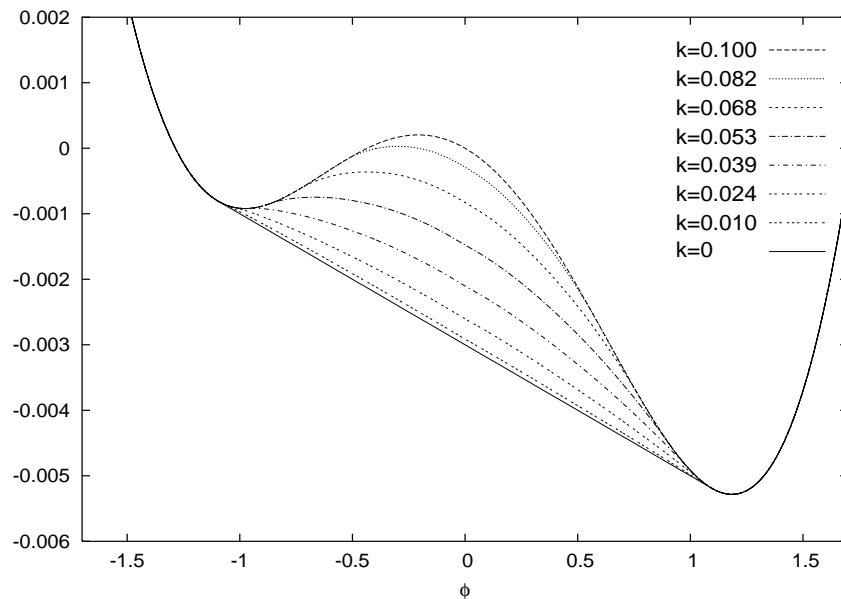


FIG. 4.3 – Flot du RG pour le potentiel d'une théorie avec une seule composante scalaire et avec un terme de brisure explicite de la symétrie. Seul le flot dans la région interne a été considéré, c'est-à-dire celui donné par l'équation (4.3). Les conditions aux limites pour les paramètres à $k = 0.1$ sont : $\lambda = 5 \cdot 10^{-2}$, $m^2 = -10^{-2}$ et $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-3}$.

La figure 4.3 nous décrit le flot du potentiel wilsonien $U_k^{(\varepsilon)}(\phi)$ en deçà de la valeur critique $k_{cr}(\phi)$. Nous voyons ainsi qu'il existe, y compris dans ce cas asymétrique, une région où le potentiel effectif $V_{eff}^{(\varepsilon)}(\phi) = U_{k=0}^{(\varepsilon)}(\phi)$ est "plat" (linéaire entre les deux minima) et obéit à la construction de la double tangente. Les remarques faites précédemment

restent donc valables. En particulier, le point de tangence est déplacé à gauche de v_ε et les dérivées de $V_{eff}^{(\varepsilon)}(\phi)$ en v_ε peuvent être prises en toute rigueur.

La conclusion générale de cette analyse est qu'à l'aide des équations (4.2) puis (4.3), le potentiel wilsonien peut être calculé sur toute l'échelle, depuis $k = \Lambda$ jusqu'à $k = 0$. Il en résulte une approximation non-perturbative convexe pour le potentiel effectif, qui présente la forme linéaire typique dans la région interne (entre les deux minima classiques), tandis que pour la région externe son allure est gouvernée par l'équation (4.2).

Intéressons-nous maintenant au potentiel one-loop $V^{1l}(\phi; \varepsilon)$. À la lumière de la discussion précédente, il est aisé de comprendre que dans la mesure où l'on se limite à considérer des valeurs de ϕ suffisamment proches du minimum absolu, $V^{1l}(\phi; \varepsilon)$ constitue une bonne approximation de $V_{eff}(\phi; \varepsilon)$. Évidemment, cette remarque reste vraie à n'importe quel ordre du développement en boucles.

Avant de conclure cette partie consacrée à la convexité de la région interne du potentiel effectif, nous aimerions développer, comme nous l'avions annoncé, l'argument selon lequel V_{eff} ne serait pas le potentiel approprié pour l'étude de la stabilité du vide [51].

Nous adoptons la notation $|v\rangle$ et $|-v\rangle$ pour désigner les vides construits autour de $\phi = v$ et $\phi = -v$ respectivement. La constance de V_{eff} dans la région $-v < \phi < v$ implique que toutes les combinaisons linéaires d'états $\alpha|v\rangle + \beta|-v\rangle$ (avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$) sont des vides équivalents et possèdent la même énergie. À l'exception des configurations triviales ($|\alpha| = 1, \beta = 0$ et $\alpha = 0, |\beta| = 1$), avec n'importe quelle autre combinaison nous obtenons des fonctions de Green qui violent la propriété de décomposition en cluster. De plus, la valeur moyenne du champ n'est pas constante sur tout le volume de quantification Ω . En effet, pour un état général $\alpha|v\rangle + \beta|-v\rangle$, la valeur moyenne $\langle\phi\rangle$ est donnée par $(|\alpha|^2 - |\beta|^2)v$, et Ω contient une fraction $|\alpha|^2$ de $\langle\phi\rangle = v$ et une fraction $|\beta|^2$ de $\langle\phi\rangle = -v$. Manifestement, ces états ne sont pas localisés.

L'analyse ci-dessus est considérée comme une indication montrant que le potentiel convexe V_{eff} n'est pas adéquat dans ce genre de problème. Bien que tout à fait correctes, ces observations n'ont rien à voir avec le problème de l'instabilité. Comme nous venons de le rappeler, les états non-localisés appartiennent à la région interne. Or l'instabilité du vide EW se produit dans la région externe, où les états sont parfaitement localisés. De surcroît, le recours au critère de Bogolubov permet de lever la dégénérescence dans la région interne et de sélectionner (dans la limite de volume infini) un seul vide.

4.3 Potentiels one-loop et RGI

Afin de clarifier l'analyse, nous basons notre étude sur un modèle simplifié qui reproduit le mécanisme de l'instabilité. Ce dernier consiste en une QFT pourvue d'un champ scalaire (représentant le boson de Higgs) et d'un champ fermionique (correspondant au quark top). Les interactions prises en compte sont l'(auto)-interaction scalaire quartique et le couplage du Yukawa, ce qui se traduit par le lagrangien suivant :

$$\mathcal{L}(\phi, \psi, \bar{\psi}) = \int d^4x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi + i \bar{\psi} \gamma_\mu \partial_\mu \psi + \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\lambda}{24} \phi^4 + g \phi \bar{\psi} \psi \right). \quad (4.4)$$

4.3.1 Régularisation dimensionnelle : schéma \overline{MS}

Pour ce modèle, nous allons maintenant calculer, suivant le schéma \overline{MS} , l'approximation à une boucle du potentiel effectif, V^{1l} , puis sa version améliorée par le RG, V_{RGI} . L'application de la régularisation dimensionnelle, détaillée dans l'annexe A, nous donne directement l'expression du potentiel renormalisé :

$$\begin{aligned} V^{1l}(\phi) &= \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{24} \phi^4 + \frac{1}{64\pi^2} \left(m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2 \right)^2 \left(\ln \left(\frac{m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right) \\ &\quad - \frac{g^4 \phi^4}{16\pi^2} \left(\ln \frac{g^2 \phi^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

où m^2 , λ et g dépendent de l'échelle de renormalisation μ , c'est-à-dire :

$$m^2 = m^2(\mu), \quad \lambda = \lambda(\mu), \quad g = g(\mu). \quad (4.6)$$

Dans le membre de droite de l'équation (4.5), la contribution fermionique est de signe négatif. C'est la raison pour laquelle il est possible de trouver des valeurs de λ et de g (avec $g^4 > \lambda$) pour lesquelles le potentiel $V^{1l}(\phi)$ chute et devienne inférieur à $V^{1l}(v)$ (cf. figure 4.4), tout en respectant, sur une échelle suffisante en ϕ , les conditions perturbatives :

$$\lambda < 1, \quad g < 1 \quad \text{et} \quad \frac{g^4}{16\pi^2} \ln \frac{g^2 \phi^2}{\mu^2} < 1. \quad (4.7)$$

C'est précisément le problème de l'instabilité pour notre potentiel one-loop.

Bien entendu, nous pouvons améliorer ce résultat à l'aide des techniques du RG.

Considérons les fonctions bêta à une boucle pour λ , g , m^2 et l'énergie du vide⁵ Υ :

$$\begin{aligned} \beta_\lambda &= \frac{3\lambda^2}{16\pi^2} - \frac{3g^4}{\pi^2} & ; & & \beta_g &= \frac{g^3}{8\pi^2} \\ \beta_\Upsilon &= \frac{\lambda m^4}{32\pi^2} & ; & & \gamma_{m^2} &= \frac{\lambda}{16\pi^2}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

⁵Lorsque l'on considère la méthode RGI, le terme de constante cosmologique doit être pris en compte, même s'il était absent au départ.

Pour le moment, nous négligeons la renormalisation de la fonction d'onde, il en sera tenu compte lors de l'application au SM en considérant la dimension anormale lorsque nous dériverons les bornes inférieures sur la masse du Higgs. La correction logarithmique la plus grande dans le membre de droite de l'équation (4.5) provient du dernier terme (dû au fermion). D'après la logique de la RGI, il faut désormais choisir la variable t , de telle façon à faire disparaître cette contribution dominante dans l'expression du potentiel amélioré, soit $t = \frac{1}{2} \ln \frac{g^2 \phi^2}{\mu^2} - \frac{3}{4}$. Cette stratégie permet ainsi d'absorber le logarithme contenu dans le terme fermionique, afin de tempérer sa "dangerosité" (pour des grandes valeurs de ϕ) et d'étendre ainsi le domaine de validité de la théorie des perturbations.

Les paramètres courants, fonction de l'échelle t , à savoir $\bar{\lambda}(t)$, $\bar{g}(t)$, $\bar{m}^2(t)$ et $\bar{\Upsilon}(t)$, sont définis comme les solutions des équations différentielles respectives :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\lambda}}{dt} &= \beta_\lambda(\bar{\lambda}, \bar{g}, \bar{\Upsilon}, \bar{m}^2) & ; & & \frac{d\bar{g}}{dt} &= \beta_g(\bar{\lambda}, \bar{g}, \bar{\Upsilon}, \bar{m}^2) \\ \frac{d\bar{\Upsilon}}{dt} &= \beta_\Upsilon(\bar{\lambda}, \bar{g}, \bar{\Upsilon}, \bar{m}^2) & ; & & \frac{d\bar{m}^2}{dt} &= \bar{m}^2 \gamma_{m^2}(\bar{\lambda}, \bar{g}, \bar{\Upsilon}, \bar{m}^2), \end{aligned} \quad (4.9)$$

avec les conditions aux limites

$$\bar{\lambda}(t=0) = \lambda; \quad \bar{g}(t=0) = g; \quad \bar{\Upsilon}(t=0) = 0; \quad \bar{m}^2(t=0) = m^2. \quad (4.10)$$

Il n'est pas difficile de voir que ce système d'équations différentielles peut être résolu analytiquement. Pour $\bar{g}(t)$ et $\bar{\lambda}(t)$, auxquelles nous nous intéressons particulièrement, nous avons :

$$\begin{aligned} \bar{g}(t) &= g \left(1 - \frac{g^2 t}{4\pi^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \bar{\lambda}(t) &= \frac{2}{3} \bar{g}^2(t) \left(1 - \alpha + 2\alpha \left[1 + \left(\frac{\bar{g}(t)^2}{g^2} \right)^\alpha \frac{2g^2(\alpha+1) - 3\lambda}{2g^2(\alpha-1) + 3\lambda} \right]^{-1} \right), \end{aligned} \quad (4.11)$$

avec $\alpha = \sqrt{37}$.

Finalement, le potentiel one-loop RGI s'écrit :

$$V_{RGI} = \frac{1}{2} \bar{m}^2(t) \phi^2 + \frac{\bar{\lambda}(t)}{24} \phi^4 + \bar{\Upsilon}(t) + \frac{(\bar{m}^2(t) + \frac{\bar{\lambda}(t)}{2} \phi^2)^2}{64 \pi^2} \ln \frac{\bar{m}^2(t) + \frac{\bar{\lambda}(t)}{2} \phi^2}{\bar{g}^2(t) \phi^2}. \quad (4.12)$$

La figure 4.4 représente l'allure de V_{RGI} et de celle des potentiels one-loop et classique pour un choix particulier des paramètres renormalisés. La simple observation de ces graphes montre que V_{RGI} (aussi bien que V^{1l}) est instable.

En prévision du raisonnement qui suivra, nous avons aussi tracé le potentiel V^{1l} pour d'autres conditions de renormalisation également utilisées (cf. [71] par exemple). En effet,

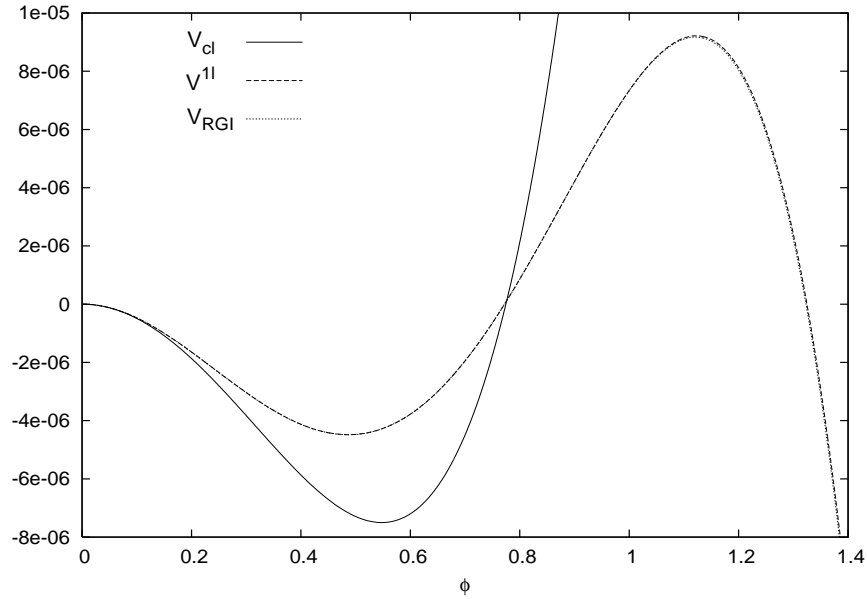


FIG. 4.4 – Potentiel classique V_{cl} et potentiels effectifs one-loop V^{1l} et amélioré par le RG V_{RGI} , donnés respectivement par les équations (4.4), (4.5) et (4.12). Les paramètres sont choisis à l'échelle $\mu = 1.1 \cdot 10^{-1}$ et sont : $\lambda = 2 \cdot 10^{-3}$, $m^2 = -10^{-4}$, $g = 3 \cdot 10^{-1}$ (unités arbitraires, comme explicité auparavant).

L'instabilité de V^{1l} et de V_{RGI} est évidente. De plus, ces deux approximations sont très proches dans cette région.

la notion de groupe de renormalisation indique qu'il existe une certaine arbitrarité pour celles-ci et qu'un choix différent pour les contre-termes finis n'a pas d'influence (dans la limite $\Lambda \rightarrow \infty$) sur les résultats renormalisés. La figure 4.5 représente le potentiel à une boucle obtenu suivant ces conditions de renormalisation (détaillées dans l'annexe C) et montre comme prévu la même instabilité que nous avons observée précédemment.

Avant d'aborder la régularisation par cutoff dans l'espace des impulsions, nous tenons à rappeler qu'en raison de la compétition entre les termes en λ^2 et en g^4 dans β_λ (la première des équations (4.8)), la constante de couplage courante $\lambda(\mu)$, après avoir diminué sur une région d'énergie, remonte au final dans l'UV (vers le pôle de Landau). Cela génère un second minimum dans le potentiel effectif, plus bas que le premier.

Pour un certain jeu de valeurs de m_t et de m_H , compatible avec les déterminations et les limites expérimentales actuelles, le potentiel effectif de Higgs du SM montre un tel comportement avant d'atteindre l'échelle de Planck. Attendu que la durée nécessaire pour passer par effet tunnel du faux vide (EW) au vrai se révèle suffisamment grande (en comparaison de l'âge de l'univers), le scénario alternatif de la métastabilité du vide

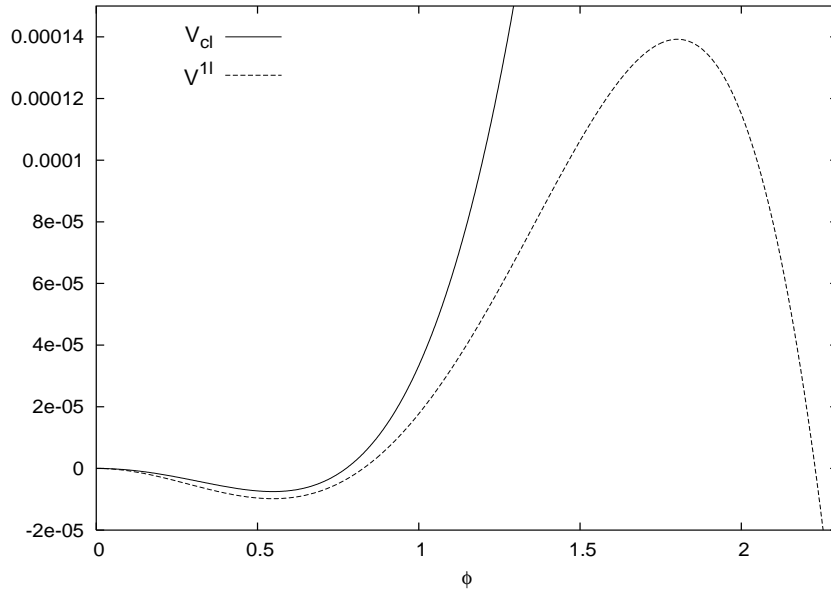


FIG. 4.5 – À la différence de la figure 4.4, nous avons ici utilisé d'autres conditions de renormalisation de manière à ce que la position du minimum et la courbure de V^{1l} en ce point soient les mêmes que ceux de V_{cl} (cf. annexe C). Les paramètres choisis sont les mêmes que ceux de la figure 4.4.

EW est également envisagé et des bornes de métastabilité sur la masse du Higgs en sont déduites [51, 58]. Cependant, en anticipant l'analyse à venir, le traitement correct du problème indique que le potentiel effectif n'est instable nulle part. En conséquence, ce scénario ne doit pas être considéré.

4.3.2 Régularisation par cutoff des moments

L'objectif est ici de montrer qu'en prenant comme point de départ une théorie définie avec un cutoff dans l'espace des impulsions, il est possible de retrouver le potentiel effectif one-loop renormalisé (4.5) précédent. Afin de préparer la discussion prévue dans la partie suivante, nous allons détailler les étapes du calcul.

La théorie est définie à l'échelle ultraviolette Λ , donc les paramètres du lagrangien sont nus. Cela signifie le remplacement dans l'équation (4.4) de m^2 , λ et g par m_Λ^2 , λ_Λ et g_Λ respectivement. Comme lors de l'application du schéma \overline{MS} , pour rester simple, nous ne tenons pas compte de la renormalisation de la fonction d'onde. L'application directe de

la théorie des perturbations, développée dans l'annexe B, donne le potentiel nu :

$$\begin{aligned}
V^{1l}(\phi) &= \frac{m_\Lambda^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{24}\phi^4 + \frac{1}{64\pi^2} \left\{ \Lambda^4 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}\phi^2}{\Lambda^2} \right) \right. \\
&+ \left. \left(m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}\phi^2 \right) \Lambda^2 - \left(m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}\phi^2 \right)^2 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}\phi^2}{m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}\phi^2} \right) \right\} \\
&- \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \Lambda^4 \ln \left(1 + \frac{g_\Lambda^2\phi^2}{\Lambda^2} \right) + g_\Lambda^2\phi^2\Lambda^2 - g_\Lambda^4\phi^4 \ln \left(\frac{\Lambda^2 + g_\Lambda^2\phi^2}{g_\Lambda^2\phi^2} \right) \right\}. \quad (4.13)
\end{aligned}$$

En se limitant à des valeurs de ϕ petites devant le cutoff,

$$\frac{\phi}{\Lambda} < 1, \quad (4.14)$$

puis en développant le membre de droite de l'équation (4.13) en puissance de $\frac{\phi}{\Lambda}$ et en négligeant les termes qui sont supprimés par des puissances négatives de Λ , on trouve :

$$\begin{aligned}
V^{1l}(\phi) &= \frac{m_\Lambda^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{24}\phi^4 - \frac{1}{16\pi^2} \left\{ 2g_\Lambda^2\phi^2\Lambda^2 - g_\Lambda^4\phi^4 \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{g_\Lambda^2\phi^2} \right) + \frac{1}{2} \right] \right\} \\
&+ \frac{1}{64\pi^2} \left\{ 2 \left(m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}\phi^2 \right) \Lambda^2 - \left(m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}\phi^2 \right)^2 \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{m_\Lambda^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{2}\phi^2} \right) + \frac{1}{2} \right] \right\}. \quad (4.15)
\end{aligned}$$

Il est maintenant possible, avec le potentiel one-loop sous cette forme, de passer de la théorie des perturbations nue à celle renormalisée. Dans cet esprit, on procède à la séparation des paramètres nus de la façon habituelle :

$$m_\Lambda^2 = m^2 + \delta m^2, \quad \lambda_\Lambda = \lambda + \delta\lambda, \quad g_\Lambda = g + \delta g, \quad (4.16)$$

où les paramètres dépourvus d'indice correspondent aux quantités renormalisées.

Ensuite, on injecte les expressions (4.16) dans l'équation (4.15) en négligeant les termes d'ordre supérieur, c'est-à-dire en éliminant δm^2 , $\delta\lambda$ et δg dans les contributions dues aux fluctuations quantiques. Le potentiel s'écrit maintenant en fonction des paramètres renormalisés :

$$\begin{aligned}
V^{1l}(\phi) &= \frac{m^2 + \delta m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda + \delta\lambda}{24}\phi^4 - \frac{1}{16\pi^2} \left\{ 2g^2\phi^2\Lambda^2 - g^4\phi^4 \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{g^2\phi^2} \right) + \frac{1}{2} \right] \right\} \\
&+ \frac{1}{64\pi^2} \left\{ 2 \left(m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^2 \right) \Lambda^2 - \left(m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^2 \right)^2 \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^2} \right) + \frac{1}{2} \right] \right\}. \quad (4.17)
\end{aligned}$$

Il reste alors à déterminer les contre-termes de manière à compenser conjointement les divergences quadratiques et logarithmiques de V^{1l} .

Il y a une arbitrarité dans la détermination des contre-termes (résultant des différents choix de conditions de renormalisations), ce qui se traduit par une arbitrarité dans les paramètres finis du potentiel renormalisé. En choisissant :

$$\begin{cases} \delta m^2 = \delta m_{bos}^2 + \delta m_{fer}^2 \\ \delta \lambda = \delta \lambda_{bos} + \delta \lambda_{fer} \end{cases}, \quad (4.18)$$

avec (μ étant une échelle quelconque à basse énergie)

$$\begin{aligned} \delta m_{bos}^2 &= -\frac{\lambda \Lambda^2}{32\pi^2} + \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) - 1 \right] \quad ; \quad \delta m_{fer}^2 = \frac{g^2 \Lambda^2}{4\pi^2} \\ \delta \lambda_{bos} &= \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) - 1 \right] \quad ; \quad \delta \lambda_{fer} = -\frac{3g^4}{2\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\Lambda^2}{\mu^2} \right) - 1 \right], \end{aligned} \quad (4.19)$$

on trouve :

$$\begin{aligned} V^{1l}(\phi) &= \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{24} \phi^4 + \frac{1}{64\pi^2} \left(m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2 \right)^2 \left(\ln \left(\frac{m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right) \\ &\quad - \frac{g^4 \phi^4}{16\pi^2} \left(\ln \frac{g^2 \phi^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right), \end{aligned} \quad (4.20)$$

qui est identique au potentiel one-loop (4.5) trouvé par régularisation dimensionnelle.

De même, les paramètres qui apparaissent dans le potentiel (4.20) sont définis à l'échelle μ . Ensuite, la méthode du RGI peut être appliquée de la même façon que précédemment pour retrouver l'expression (4.12).

4.4 Stabilité du potentiel effectif

Nous allons maintenant montrer que le potentiel effectif n'est instable nulle part, l'apparente instabilité du vide EW couramment évoquée découlant en fait d'une extrapolation de V^{1l} (V_{RGI}) dans une région de valeurs de ϕ pour laquelle la théorie des perturbations n'est plus valide.

Avant de nous attacher au potentiel renormalisé, commençons par considérer la théorie nue, dans laquelle le potentiel à une boucle est donné par l'équation (4.15). Pour un certain domaine de l'espace des paramètres (m_Λ^2 , λ_Λ , g_Λ), ce potentiel présente, comme dans le cas classique, deux minima (on est donc dans la phase de Higgs). Comme nous l'avons déjà expliqué, le développement en boucles est inapproprié dans la région interne comprise entre les deux minima. Durant toute la suite de notre travail, nous ignorons cette région afin de nous concentrer sur celle externe, où le développement en boucles est censé être

une bonne approximation. Naturellement, comme cela a été souligné précédemment, nous gardons à l'esprit que la convexité dans la région interne est restaurée par la construction de Maxwell.

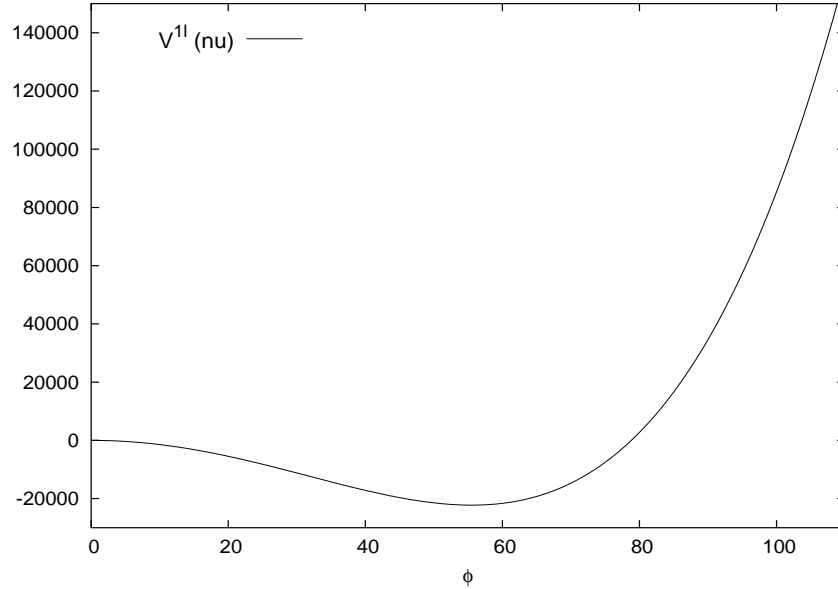


FIG. 4.6 – Potentiel effectif one-loop de l'équation (4.15) (avant soustraction des divergences quadratiques), pour $\lambda_\Lambda = 5 \cdot 10^{-2}$, $m_\Lambda^2 = -10^{-2}$, $g_\Lambda = 0.35$ et $\Lambda = 100$. En oubliant la région interne (cf. explications dans le texte), nous voyons qu'au-delà des minima le potentiel est convexe.

Une analyse attentive de l'équation (4.15) montre que dans la région externe, et pour des valeurs de ϕ où le potentiel est défini, c'est-à-dire pour $\frac{|\phi|}{\Lambda} < 1$, le potentiel effectif nu est convexe (en accord avec les théorèmes exacts). Il ne présente donc aucune instabilité, comme nous pouvons le voir sur la figure 4.6 qui représente V^{1l} , tel qu'il est défini par l'équation (4.15) pour un choix particulier de paramètres.

Nous procédons maintenant à la soustraction des termes quadratiquement divergents dans le potentiel nu (4.17), ce qui revient à considérer un seul et unique contre-terme $dm^2 = -\frac{\lambda\Lambda^2}{32\pi^2} + \frac{g^2\Lambda^2}{4\pi^2}$. Cette opération, comme chacun sait, prend une signification physique bien précise. Dans un scénario non-supersymétrique, cette suppression est interprétée comme le résultat d'une connivence entre des degrés de liberté inconnus existant au-delà du cutoff et les fluctuations quantiques du champ ayant lieu en deçà du cutoff. De cette façon, la masse scalaire du Higgs est "protégée" et ne risque plus de devenir extrêmement grande à cause des fluctuations quantiques. Cependant, cette interprétation pose l'épineux problème de l'ajustement très fin ("fine tuning") requis pour que cette suppression se

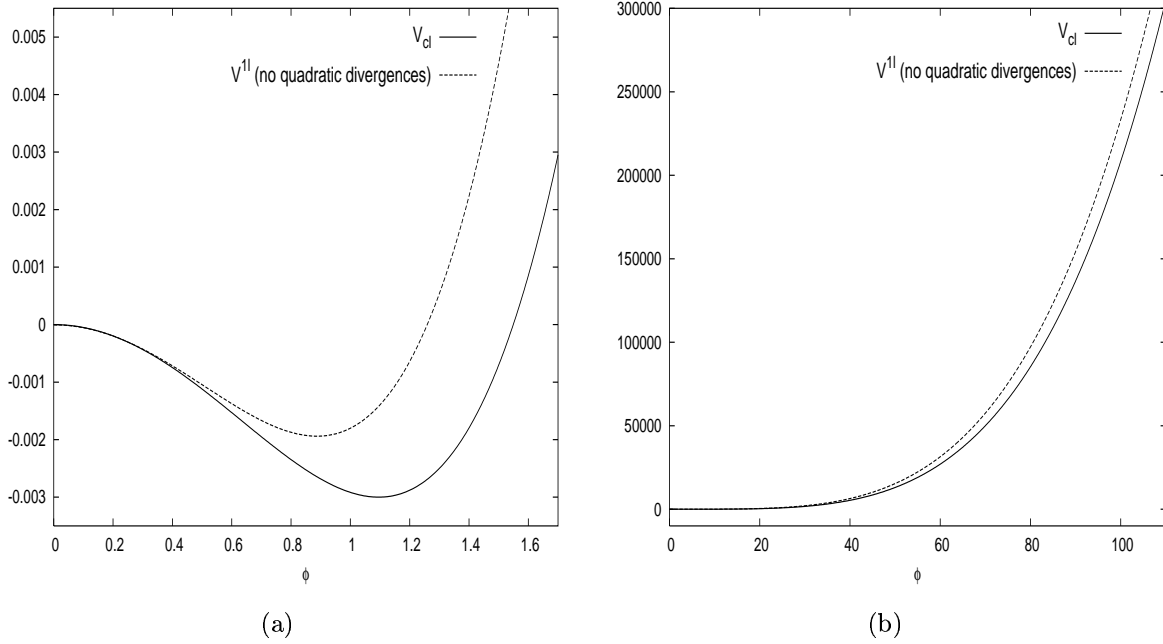


FIG. 4.7 – Potentiels classique et one-loop nu après soustraction des divergences quadratiques. Les paramètres nus sont choisis comme ceux de la figure 4.6.

(a) On se focalise sur une petite région de ϕ proche des minima classiques.

(b) Nous traçons ici le potentiel effectif sur toute l'échelle de ϕ (jusqu'au cutoff Λ) et nous constatons sa stabilité.

produise effectivement.

Différemment, dans un scénario de type SUSY, cette compensation survient de manière plus "naturelle" : elle serait due à l'existence de degrés de liberté supplémentaires (les partenaires supersymétriques) dans la physique en dessous du cutoff.

La figure 4.7 représente le potentiel one-loop nu où les divergences quadratiques ont été supprimées pour le même choix de paramètres que la figure 4.6. De nouveau, nous pouvons observer que le potentiel effectif résultant est bien convexe dans la région externe. Le potentiel nu ne présente donc aucun signe d'instabilité, même après la soustraction des divergences quadratiques.

Une remarque s'impose à ce stade : les potentiels des figures 4.6 et 4.7 appartiennent en fait à deux théories effectives différentes (avec ou sans les termes en Λ^2) puisqu'ils décrivent des degrés de liberté différents. Cependant, du point de vue des applications phénoménologiques en physique des particules, nous sommes plutôt intéressés par la théorie dans laquelle les divergences quadratiques sont soustraites.

Nous venons de vérifier que le potentiel nu (avec ou sans compensation des divergences quadratiques) est stable partout. Comment diable est-il possible que le potentiel renormalisé exhibe une instabilité? Pour répondre à cette question, reconsidérons l'équation (4.15) après soustraction des divergences quadratiques.

Comme nous le savons, l'instabilité apparaît parce que les fluctuations quantiques dues aux fermions peuvent compenser et même surpasser le terme classique $\lambda \frac{\phi^4}{24}$. Dans cette optique, il est possible, sans perte de généralité, de négliger la contribution bosonique, ainsi que tous les autres termes finis sans importance, et de se limiter à écrire le potentiel one-loop comme :

$$V^{1l}(\phi) = \frac{1}{2}m_\Lambda^2\phi^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{24}\phi^4 + \frac{g_\Lambda^4\phi^4}{16\pi^2}\ln\frac{\Lambda^2}{g_\Lambda^2\phi^2}. \quad (4.21)$$

À une échelle plus basse μ ($< \Lambda$) nous avons :

$$V^{1l}(\phi) = \frac{1}{2}m_\mu^2\phi^2 + \frac{\lambda_\mu}{24}\phi^4 + \frac{g_\mu^4\phi^4}{16\pi^2}\ln\frac{\mu^2}{g_\mu^2\phi^2}, \quad (4.22)$$

qui est toujours le même potentiel, donné par l' reproduire équation (4.21), mais écrit en termes des paramètres renormalisés m_μ^2 , λ_μ et g_μ .

Assurément, si l'équation (4.21) ne montre aucune instabilité, la même chose est vraie pour l'équation (4.22). Admettons pour le moment que nous n'avons pas fait cette observation et considérons l'application phénoménologique habituelle du potentiel (4.22), ce dernier ayant pu être obtenu de façon indépendante et autonome à travers le schéma \overline{MS} . À partir des deux premiers termes de l'équation (4.22), le vide classique s'écrit :

$$v^2 = -\frac{6m_\mu^2}{\lambda_\mu}. \quad (4.23)$$

La contribution fermionique, constituée par le dernier terme de l'équation (4.22), peut déstabiliser ce vide si elle devient suffisamment grande et négative. Pour être exact, la présence de cette correction radiative modifie également la position du minimum classique, mais ce n'est pas une complication insurmontable. En effet, même si ce n'est pas une étape nécessaire, nous pouvons légèrement changer les expressions ci-dessus en adoptant des conditions de renormalisation qui conservent la position du minimum classique. Avec ce choix, la forme du potentiel reste qualitativement la même, comme nous avons pu le vérifier sur la figure 4.4, et l'équation (4.22) est remplacée par (cf. annexe C pour les

détails du calcul) :

$$V^{1l}(\phi) = \frac{1}{2}m_v^2\phi^2 + \frac{\lambda_v}{24}\phi^4 - \frac{g_v^4\phi^4}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\phi^2}{v^2} - \frac{3}{2} \right) - \frac{g_v^4 v^2}{8\pi^2} \phi^2. \quad (4.24)$$

Dans cette équation (4.24) les paramètres m_v^2 , λ_v et g_v sont définis à l'échelle infrarouge v , qui est la position classique (et quantique) du minimum donnée désormais par :

$$v^2 = -\frac{6 m_v^2}{\lambda_v}. \quad (4.25)$$

De la même manière, l'équation (4.21) est modifiée en :

$$V^{1l}(\phi) = \frac{1}{2}m_\Lambda^2\phi^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{24}\phi^4 - \frac{g_\Lambda^4\phi^4}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\phi^2}{\Lambda^2} - \frac{3}{2} \right) - \frac{g_\Lambda^4 v^2}{8\pi^2} \phi^2. \quad (4.26)$$

En revenant à l'équation (4.24), il s'agit maintenant de chercher des valeurs de λ_v , g_v et ϕ telles que cette équation demeure dans son domaine de validité tout en affichant :

$$V^{1l}(\phi) < V^{1l}(v). \quad (4.27)$$

Pour assurer la validité de l'équation (4.24), on requiert habituellement que les constantes de couplage renormalisées λ_v et g_v , de même que la correction quantique $\frac{g_v^4}{16\pi^2} \ln \frac{\phi^2}{v^2}$, soient perturbatives, c'est-à-dire que :

$$\lambda_v < 1 \quad , \quad g_v < 1, \quad (4.28)$$

et

$$\left| \frac{g_v^4}{16\pi^2} \ln \frac{\phi^2}{v^2} \right| < 1. \quad (4.29)$$

On peut noter que ces équations (4.28) et (4.29) ne sont rien d'autre que les conditions perturbatives (4.7) adaptées à ce choix particulier de renormalisation.

Nous allons maintenant montrer que, contrairement à ce qui est communément admis, les équations (4.28) et (4.29) ne sont pas suffisantes pour garantir que l'équation (4.24) est dans son domaine de validité. Une contrainte supplémentaire doit être prise en compte et l'apparente instabilité du vide provient du non-respect de cette condition.

Par exemple, choisissons λ_v et g_v de telle façon que ces constantes de couplage satisfassent, en plus des contraintes (4.28), la relation :

$$\lambda_v = \frac{3g_v^4}{4\pi^2}. \quad (4.30)$$

Ensuite, considérons une valeur de $\bar{\phi}$ telle que :

$$\ln \frac{\bar{\phi}^2}{v^2} = 2. \quad (4.31)$$

Étant donné que $g_v < 1$, il est trivial de montrer qu'en vertu de l'équation (4.31), la contrainte perturbative (4.29) est satisfaite pour $\bar{\phi}$. Enfin, en insérant les équations (4.30) et (4.31) dans l'équation (4.24), on trouve :

$$V^{1l}(\bar{\phi}) < V^{1l}(v). \quad (4.32)$$

Tout prète donc à conclure que, dans le domaine de ϕ donné par $v < \phi < \bar{\phi}$, le potentiel renormalisé de l'équation (4.24) respecte bien les conditions de perturbativité, et que son instabilité (cf. figure 4.4 ou 4.5) est théoriquement bien établie. C'est en effet le raisonnement qui est habituellement fait [53].

Afin d'éviter les malentendus, il est opportun de préciser que la méthode du RGI ne peut pas affecter cette conclusion. En effet, dans le domaine de ϕ considéré dans cet exemple, la condition (4.29) est remplie, donc, dans cette région, V^{1l} et V_{RGI} sont très proches l'un de l'autre, ce que l'on vérifie aisément sur la figure 4.4.

Aussi rigoureuses semblent-elles, ces conclusions quant à la validité du potentiel à une boucle sont pourtant erronées. Pour en comprendre la raison, simplifions d'abord la discussion (sans perte de généralité) en négligeant les flots de m^2 et de g . À partir des équations (4.24) et (4.26), on déduit alors l'égalité :

$$\frac{\lambda_\Lambda}{24} \phi^4 + \frac{g^4 \phi^4}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\phi^2} = \frac{\lambda_v}{24} \phi^4 + \frac{g^4 \phi^4}{16\pi^2} \ln \frac{v^2}{\phi^2}, \quad (4.33)$$

qui donne immédiatement :

$$\lambda_\Lambda = \lambda_v - \frac{3g^4}{2\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{v^2}. \quad (4.34)$$

En insérant ensuite les équations (4.30) et (4.31) dans l'équation (4.33), on montre facilement que :

$$\frac{\lambda_\Lambda}{24} + \frac{g^4}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\phi^2} = \frac{\lambda_v}{24} + \frac{g^4}{16\pi^2} \ln \frac{v^2}{\phi^2} < 0. \quad (4.35)$$

Évidemment, pour que la théorie soit définie, il faut que $\lambda_\Lambda > 0$. Ainsi, pour que l'équation (4.35) soit correcte, nous devrions avoir :

$$\frac{\Lambda^2}{\phi^2} \leq 1. \quad (4.36)$$

L'équation (4.36) démontre donc *ab absurdo* que, contrairement à notre attente naïve, le champ $\bar{\phi}$ se situe au-delà du domaine de validité de V^{1l} (V_{RGI}).

Nous comprenons donc l'origine de l'apparente instabilité du potentiel renormalisé : celle-ci apparaît lorsque l'on extrapole la théorie des perturbations hors de son domaine de validité, ce qui explique au passage pourquoi la convexité du potentiel effectif (dans la région externe) est perdue. Notre raisonnement indique également que, pour savoir si une certaine valeur de ϕ appartient ou non à une région dans laquelle V^{1l} est valide, le simple respect des équations (4.28) et (4.29) est insuffisant. En effet, en se limitant à ces contraintes, *nous perdons l'information contenue dans la condition indépendante supplémentaire* :

$$\frac{\lambda_v}{24}\phi^4 + \frac{g^4\phi^4}{16\pi^2} \ln \frac{v^2}{\phi^2} > 0. \quad (4.37)$$

En revanche, lorsque cette condition est prise en considération, le potentiel effectif ne présente aucune instabilité (cf. figure 4.7b). En d'autres termes, l'instabilité se produit dans une région de ϕ dans laquelle l'équation (4.24) pour V^{1l} n'est plus valable.

Naturellement, les mêmes conclusions auraient pu être tirées en envisageant le problème du point de vue inverse. En effet, nous pouvons maintenant revenir à l'observation que nous avons laissé de côté auparavant : en raison de la condition $\phi^2 < \Lambda^2$, la combinaison $\frac{\lambda_\Lambda}{24} + \frac{g^4}{16\pi^2} \ln \frac{\Lambda^2}{\phi^2}$ ne peut pas être négative. Donc, l'équation (4.35) ne peut jamais être satisfaite et aucune instabilité ne peut se produire.

La relative longueur de cette discussion se justifie dans la mesure où il existe un dogme consensuel selon lequel les équations (4.28) et (4.29) sont les *seules conditions* à devoir être vérifiées pour s'assurer de la validité des résultats pour V^{1l} . Or, cette assertion est incorrecte, et c'est la raison pour laquelle l'instabilité du vide EW a toujours été considérée (jusqu'à présent) comme un effet réel des corrections quantiques sur le potentiel de Higgs. Une analyse approfondie révèle que le point au-delà duquel le potentiel effectif cesse d'être convexe, c'est-à-dire le point d'inflexion ϕ_{inf} de la région externe, est déjà en dehors de son domaine de validité. En effet, un calcul élémentaire montre que :

$$\phi_{inf} \geq \Lambda. \quad (4.38)$$

L'équation (4.38) est importante pour deux raisons. D'une part, elle confirme que le potentiel effectif est convexe dans toute la région où il est défini. D'autre part, cette relation permet de fournir un critère de dérivation des bornes inférieures sur la masse des champs scalaires. Dans la partie suivante, en étendant notre raisonnement au secteur

scalaire du SM, nous déterminerons de cette façon des bornes inférieures sur la masse du boson de Higgs.

Pour mieux comprendre ce dernier point, revenons à la démarche habituelle qui consiste à déduire une borne sur la constante de couplage renormalisée λ à partir de l'équation (4.34) (et plus généralement à partir de l'expression complète du flot de λ). L'instabilité apparaît s'il existe une certaine valeur ϕ_0 telle que $V^{II}(\phi_0) = V^{II}(v)$ puis $V^{II}(\phi) < V^{II}(v)$ pour $\phi > \phi_0$. On montre alors que ϕ_0 correspond (à peu de choses près) à la valeur de l'échelle μ à laquelle $\lambda(\mu)$ s'annule (cf. équation (4.1)). Enfin, en prenant $\lambda_\Lambda = 0$ dans l'équation (4.34), on en déduit la valeur maximale que peut prendre le cutoff physique Λ correspondant à une valeur donnée de la constante de couplage renormalisée λ_v .

À la place, notre analyse suggère que la borne supérieure limite pour ϕ , qui constitue également la valeur la plus élevée possible pour un cutoff auto-consistant, devrait être le point d'inflexion de l'équation (4.38), à partir duquel le potentiel effectif cesse d'être convexe.

Bien que nous nous soyons intéressés jusqu'ici à un modèle simple de champ scalaire avec couplage de Yukawa, il est évident que notre raisonnement est totalement général. Nous allons ainsi voir comment le critère précédent de convexité peut être exporté au SM pour obtenir de nouvelles bornes inférieures sur la masse du Higgs.

Avant de passer à cette application phénoménologique, nous aimerions simplement rappeler que, dans l'approche habituelle, la requête de stabilité du vide EW apparaît comme une contrainte phénoménologique *supplémentaire* qu'il est possible d'appliquer ou non à la théorie. Dans cette philosophie, un potentiel instable peut donc être considéré comme légitime. C'est dans cet esprit qu'a pu être échafaudé le scénario de métastabilité, qui se base sur la possibilité d'avoir un second minimum du potentiel plus bas que le vide EW. Cependant, la stabilité du potentiel effectif est une propriété intrinsèque de la théorie, donc aucun raisonnement ne peut être basé sur l'existence d'un potentiel instable ou métastable.

4.5 Bornes inférieures sur la masse du Higgs

L'objectif de cette partie est de mesurer l'importance des implications phénoménologiques de la *stabilité* du potentiel effectif dans le cadre du Modèle Standard. Il est clair que le premier point à souligner est que le potentiel effectif de Higgs ne présente aucune instabilité, contrairement à ce qui est habituellement pensé. Concernant la détermination

des bornes inférieures sur m_H , nous avons montré que la consistance interne de la théorie implique que le cutoff physique soit pris comme la valeur du champ au point d'inflexion du potentiel (celui situé dans la région externe, au-delà du minimum).

En appliquant ce critère pour déterminer l'échelle de la nouvelle physique, nous pourrions établir des bornes inférieures sur la masse du Higgs. Nos résultats seront alors comparés avec ceux obtenus avec le critère habituel d'instabilité.

Le potentiel one-loop du secteur scalaire du SM s'écrit [13] :

$$\begin{aligned}
V^{1l}(\phi) = & \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{24}\phi^4 + \frac{1}{64\pi^2} \left[\left(m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^2 \right)^2 \left(\ln \left(\frac{m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right) \right. \\
& + 3 \left(m^2 + \frac{\lambda}{6}\phi^2 \right)^2 \left(\ln \left(\frac{m^2 + \frac{\lambda}{6}\phi^2}{\mu^2} \right) - \frac{3}{2} \right) + 6 \frac{g_1^4}{16}\phi^4 \left(\ln \left(\frac{\frac{1}{4}g_1^2\phi^2}{\mu^2} \right) - \frac{5}{6} \right) \\
& \left. + 3 \frac{(g_1^2 + g_2^2)^2}{16}\phi^4 \left(\ln \left(\frac{\frac{1}{4}(g_1^2 + g_2^2)\phi^2}{\mu^2} \right) - \frac{5}{6} \right) - 12g^4\phi^4 \left(\ln \frac{g^2\phi^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \right], \quad (4.39)
\end{aligned}$$

où g_1 et g_2 sont les constantes de couplage de l'interaction faible, tandis que g est le couplage de Yukawa du quark top.

Afin d'avoir une comparaison bien définie entre le critère habituel et le nôtre, nous avons choisi de suivre le travail de Casas, Espinosa et Quirós [56, 57]. En particulier, nous avons pris leurs conditions aux limites pour g_1, g_2, m_t, \dots à l'échelle M_Z , de même que leurs conditions de matching pour la détermination des masses physiques du boson de Higgs et du quark top (cf. annexe D et [56, 57] pour plus de détails).

Le potentiel amélioré par le RG, V_{RGI} , est obtenu selon la procédure décrite précédemment. Évidemment, les fonctions bêta (β -fonctions) appropriées à considérer dans les équations du RG (4.9) sont désormais celles du SM. Dans l'esprit de [56, 57], nous avons utilisé les β -fonctions à deux boucles [53]. Notons également qu'à la différence de notre ancien modèle simple, nous avons ici trois équations du RG additionnelles, en l'occurrence celles pour g_1, g_2 et g_s (le couplage de l'interaction forte), et que, bien entendu, aucune solution analytique pour le flot des constantes de couplage ne peut être trouvée. En choisissant $t = \frac{1}{2}\ln\frac{\phi^2}{\mu^2}$, on obtient :

$$V_{RGI}(\phi) = m^2(t)\frac{\phi^2(t)}{2} + \lambda_{eff}(t)\frac{\phi^4(t)}{24} + \Upsilon(t), \quad (4.40)$$

où :

- $\Upsilon(t)$ est l'énergie du vide en fonction de l'échelle,
- $\phi(t) = \xi(t)\phi$,
- $\xi(t) = \exp\left(-\int_0^t \gamma(t')dt'\right)$,

- $\gamma(t)$ est la dimension anormale du Higgs,
- $\lambda_{eff}(t)$ est la constante de couplage "effective" donnée par :

$$\lambda_{eff}(t) = \lambda + \frac{3}{8\pi^2} \left[6 \frac{g_1^4}{16} \left(\ln \left(\frac{g_1^2}{4} \right) - \frac{5}{6} \right) - 12 g^4 \left(\ln g^2 - \frac{3}{2} \right) + 3 \frac{(g_1^2 + g_2^2)^2}{16} \left(\ln \left(\frac{g_1^2 + g_2^2}{4} \right) - \frac{5}{6} \right) \right], \quad (4.41)$$

avec $\lambda = \lambda(t)$, $g = g(t)$, $g_1 = g_1(t)$ et $g_2 = g_2(t)$.

En premier lieu, nous avons vérifié que lorsque le critère habituel $V_{RGI} = 0$ est utilisé, ce qui signifie dans ce cas que l'échelle de la nouvelle physique Λ est déterminée par la valeur du champ donnée par [57] :

$$\lambda_{eff} + 12 \frac{m^2}{\xi^2 \Lambda^2} + 24 \frac{\Upsilon}{\xi^4 \Lambda^4} = 0, \quad (4.42)$$

les résultats de [56, 57] sont bien retrouvés. Ensuite, nous avons déterminé le cutoff physique selon notre critère, c'est-à-dire que nous avons recherché le point d'inflexion de V_{RGI} . Le tableau 4.1 rassemble les résultats obtenus suivant les deux critères pour différentes valeurs de Λ .

Λ (TeV)	M_H^{inf} (GeV)	M_H (GeV)	ΔM_H (GeV)
1	66	55.5	10.5
5	88	81	7
10	94.5	88.5	6
100	108.5	105.5	3
1000	117	115	2
10^{16}	137.5	137.5	0

TAB. 4.1 – Limites inférieures sur la masse du Higgs en fonction du cutoff physique. Les valeurs des paramètres physiques sont choisies d'après [56, 57] (cf. annexe D). La seconde et la troisième colonne contiennent les bornes obtenues respectivement avec le critère de la convexité et celui de l'instabilité.

Pour des faibles valeurs de cutoff, les bornes inférieures sur M_H données par notre critère sont plus élevées d'une dizaine de GeV comparées aux déterminations standards [57]. Pour des valeurs croissantes de Λ , cette différence tend à disparaître. Cette convergence entre les deux méthodes pour des cutoffs élevés s'explique simplement. Oublions, pour

un instant, la contrainte de convexité du potentiel effectif. À mesure que M_H croît, le point d'inflexion se déplace vers des valeurs de plus en plus grandes de ϕ . Naturellement, ce constat s'applique aussi pour le point où le potentiel s'annule. Dans cette région, où V_{RGI} est très bien approximé par l'équation (4.1), $\bar{\lambda}(\phi)$ varie très lentement avec ϕ . Cela explique que les deux critères donnent pratiquement la même valeur de Λ .

Le but du tableau 4.1 est de proposer une comparaison entre ces deux méthodes différentes de détermination des bornes inférieures sur M_H . Dans cette optique, les valeurs des paramètres physiques sont celles de [56, 57] (cf. annexe D), plutôt que leurs valeurs mesurées les plus récentes. Il est ainsi possible de vérifier que nos résultats obtenus avec le critère habituel (reportés dans la troisième colonne du tableau 4.1) sont bien conformes à ceux de [56, 57].

Ce recoupement étant validé, il est maintenant possible de considérer les dernières valeurs en date : $M_Z = 91.2$ GeV, $M_W = 80.4$ GeV, $\alpha_s = 0.119$ [72] et $M_t = 178$ GeV [66]. Avec ces mesures des paramètres physiques, nous obtenons des bornes inférieures sur M_H , que l'on a reportées dans le tableau 4.2. La prise en compte des incertitudes expérimentales sur la masse du top [66], $M_t = 178 \pm 4.3$ GeV, donne : $M_H = 68.5^{+3}_{-3.5}$ GeV pour $\Lambda = 1$ TeV jusqu'à $M_H = 143.5 \pm 8.5$ GeV pour $\Lambda = 10^{19}$ GeV.

Λ (TeV)	M_H^{inf} (GeV)	M_H (GeV)	ΔM_H (GeV)
1	68.5	57.5	11
5	91.5	84	7.5
10	98	92	6
100	113	109.5	3.5
1000	122	120	2
10^{16}	143.5	143.5	0

TAB. 4.2 – Limites inférieures sur la masse du Higgs en fonction du cutoff physique. À la différence du tableau 4.1, les valeurs des paramètres physiques sont choisies d'après les déterminations expérimentales les plus récentes (se reporter au texte). De même que pour le tableau 4.1, la seconde et la troisième colonne contiennent les bornes inférieures obtenues respectivement avec le critère de convexité et celui de l'instabilité.

Au niveau du calcul théorique, les erreurs numériques sont négligeables et la seule incertitude sur les résultats provient de la légère dépendance résiduelle de M_H avec l'échelle courante μ (se reporter à l'annexe D pour plus de détails). En effet, si l'équation de Callan-

Symanzik [20] permet de rendre le potentiel effectif invariant vis-à-vis de μ , ce n'est vrai qu'approximativement car on ne dispose pas des β -fonctions exactes, mais seulement de leurs estimations à deux boucles. Cela induit des variations de l'ordre de ± 0.5 GeV sur la masse du Higgs dans la gamme d'énergie raisonnable $[10^2, 10^3]$ GeV. Toutefois, l'objectif est ici de comparer deux critères, celui de la convexité et celui de la stabilité. Or, attendu que cette comparaison a été faite de manière consistante, l'incertitude théorique sur le calcul n'a pas d'influence sur les différences constatées entre les bornes inférieures sur la masse du Higgs obtenues selon l'une ou l'autre des deux méthodes.

Il convient également de rappeler que les limites déterminées ici sont relatives à l'exploitation des propriétés du seul Modèle Standard. Dans l'hypothèse d'un scénario supersymétrique, la valeur de la constante de couplage λ n'est plus un paramètre réellement libre car elle est contrainte par les effets provenant de la particule supersymétrique la plus légère. Dans ce cas, le potentiel effectif ne peut jamais apparaître comme instable, donc la requête de stabilité ou de convexité est sans objet quant à la détermination des bornes inférieures sur la masse du Higgs dans un modèle SUSY.

En revanche, dans le cas où le SM est valide jusqu'à des énergies de l'ordre de la dizaine de TeV, notre analyse montre (cf. tableau 4.2) que les limites théoriques pour la masse minimale du Higgs sont significativement plus hautes que celles calculées jusqu'à présent en imposant la stabilité du potentiel V_{eff} . Notre travail permet donc de mettre en lumière que la perte de la propriété de convexité de V_{eff} causée par le traitement perturbatif peut se révéler avoir des conséquences sur la phénoménologie de la physique des particules.

4.6 Analyse non-perturbative

Dans les parties précédentes, nous avons remis en cause le phénomène d'instabilité du vide dans le cadre de la théorie des perturbations et exploré les incidences phénoménologiques qui en découlent. Nous allons maintenant, afin de fournir une justification complémentaire à notre analyse, envisager un traitement non-perturbatif du problème. Dans cette perspective, en revenant à notre modèle simple du champ scalaire avec un couplage de Yukawa, nous montrerons qu'à l'aide de la méthode du RG wilsonien, nos conclusions peuvent être étendues au-delà du seul contexte perturbatif.

Nous allons aussi revenir sur les travaux de [67, 68], basés sur une autre méthode non-perturbative, et discuter leurs conclusions et leurs analyses.

4.6.1 Groupe de renormalisation wilsonien

À partir de l'action wilsonienne $S_k[\phi, \bar{\psi}, \psi]$ de notre modèle à l'échelle courante k , les équations non-perturbatives du RG sont données par [73] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_k(\phi, \sigma)}{\partial k} &= -\frac{k^3}{16\pi^2} \ln \left(\frac{k^2 + U_k''(\phi, \sigma)}{k^2 + U_k''(0, \sigma)} \right) + \frac{k^3}{4\pi^2} \ln \left(1 + \frac{\dot{U}_k^2(\phi, \sigma)}{k^2} \right) \\ &- \frac{k^3}{16\pi^2} \ln \left(1 + \frac{2\sigma \dot{U}_k(\phi, \sigma)}{k^2 + \dot{U}_k^2(\phi, \sigma)} \left(\ddot{U}_k(\phi, \sigma) - \frac{\dot{U}_k'^2(\phi, \sigma)}{k^2 + U_k''(\phi, \sigma)} \right) \right). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Ici, $\sigma = \bar{\psi}\psi$ et les notations U' et \dot{U} désignent respectivement les dérivées du potentiel par rapport à ϕ et à σ .

Le potentiel nu, qui n'est rien d'autre que la condition à la limite de l'équation ci-dessus, s'écrit (cf. équation (4.4)) :

$$U_\Lambda(\phi, \sigma) = \frac{1}{2}m_\Lambda^2\phi^2 + \frac{\lambda_\Lambda}{24}\phi^4 + g_\Lambda\phi\sigma. \quad (4.44)$$

Nous considérons ensuite une troncation supplémentaire pour $U_k(\phi, \sigma)$:

$$U_k(\phi, \sigma) = V_k(\phi) + G_k(\phi)\sigma, \quad (4.45)$$

ce qui signifie que l'on néglige les contributions des puissances supérieures de $\bar{\psi}\psi$. En insérant l'équation (4.45) dans l'équation (4.43), on obtient les expressions finales pour les équations du RG :

$$\frac{\partial V_k(\phi)}{\partial k} = -\frac{k^3}{16\pi^2} \ln \left(\frac{k^2 + V_k''(\phi)}{k^2 + V_k''(0)} \right) + \frac{k^3}{4\pi^2} \ln \left(1 + \frac{G_k^2(\phi)}{k^2} \right) \quad (4.46)$$

$$\frac{\partial G_k(\phi)}{\partial k} = -\frac{k^3}{16\pi^2} \frac{1}{k^2 + V_k''(\phi)} \left(G_k''(\phi) - \frac{2G_k(\phi)G_k'(\phi)}{k^2 + G_k^2(\phi)} \right). \quad (4.47)$$

D'après l'équation (4.44), on voit que les conditions aux limites pour V_k et G_k deviennent :

$$\begin{cases} V_\Lambda(\phi) = \frac{1}{2}m_\Lambda^2\phi^2 + \frac{1}{24}\lambda_\Lambda\phi^4 \\ G_\Lambda(\phi) = g_\Lambda\phi \end{cases}. \quad (4.48)$$

Une fois données les valeurs initiales m_Λ^2 , λ_Λ et g_Λ à l'échelle $k = \Lambda$, nous pouvons résoudre itérativement les équations du RG (4.46-4.47) et obtenir, pour le potentiel effectif scalaire $V_{eff}(\phi)$, l'approximation non-perturbative $V_{wil}(\phi) = V_{k=0}(\phi)$. En choisissant $\lambda_\Lambda = 5 \cdot 10^{-2}$, $m_\Lambda^2 = -1 \cdot 10^{-2}$ et $g_\Lambda = 5 \cdot 10^{-1}$ à $\Lambda = 100$, c'est-à-dire en prenant les mêmes valeurs (toujours en unités arbitraires) que celles utilisées dans la figure 4.6, nous

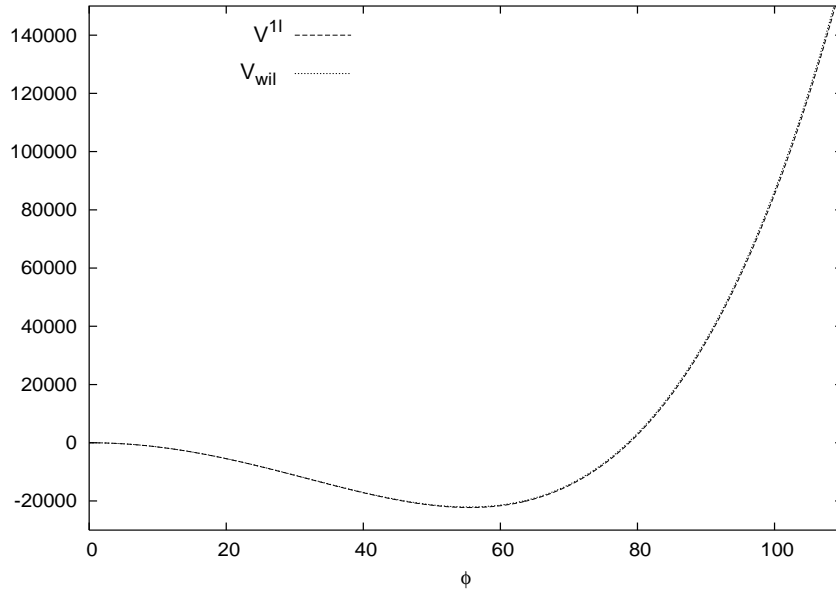


FIG. 4.8 – Potentiel effectif wilsonien $V_{wil} = V_{k=0}$. Les conditions aux limites pour les paramètres sont celles de la figure 4.6. Seule la région externe aux minima doit être considérée. Par comparaison, nous avons également tracé le potentiel effectif one-loop de la figure 4.6. Nous observons que, comme expliqué dans le texte, V_{wil} et V^{1l} sont très proches l’un de l’autre.

avons tracé sur la figure 4.8 le potentiel effectif non-perturbatif V_{wil} (en se rappelant que l’équation du RG (4.43) n’est valide que dans la région externe).

À des fins de comparaison, nous avons aussi tracé le potentiel V^{1l} correspondant (en l’occurrence, celui de la figure 4.6). Comme nous pouvons facilement le remarquer, les potentiels V_{wil} et V^{1l} sont très semblables. Ce constat était en fait prévisible. Nous savons en effet que, dans la région externe, l’intégrale de chemin qui définit le potentiel effectif est dominée par un seul point de selle. C’est pourquoi nous nous attendons à ce que le développement en boucles, et en particulier le one-loop, fournisse une bonne approximation de V_{eff} . La concordance entre V^{1l} (perturbatif) et V_{wil} (non-perturbatif) confirme cette attente.

Par construction, la méthode wilsonienne ne comprend aucune soustraction *ad hoc* de termes. C’est la raison pour laquelle nous avons comparé le potentiel effectif solution des équations (4.46-4.47) avec le résultat à une boucle original, c’est-à-dire le potentiel nu de la figure 4.6, où les divergences quadratiques ont été conservées.

Si l’on désire une comparaison avec le potentiel perturbatif V^{1l} dans lequel les divergences quadratiques ont été supprimées (cf. figure 4.7), il est alors nécessaire d’incorporer cette

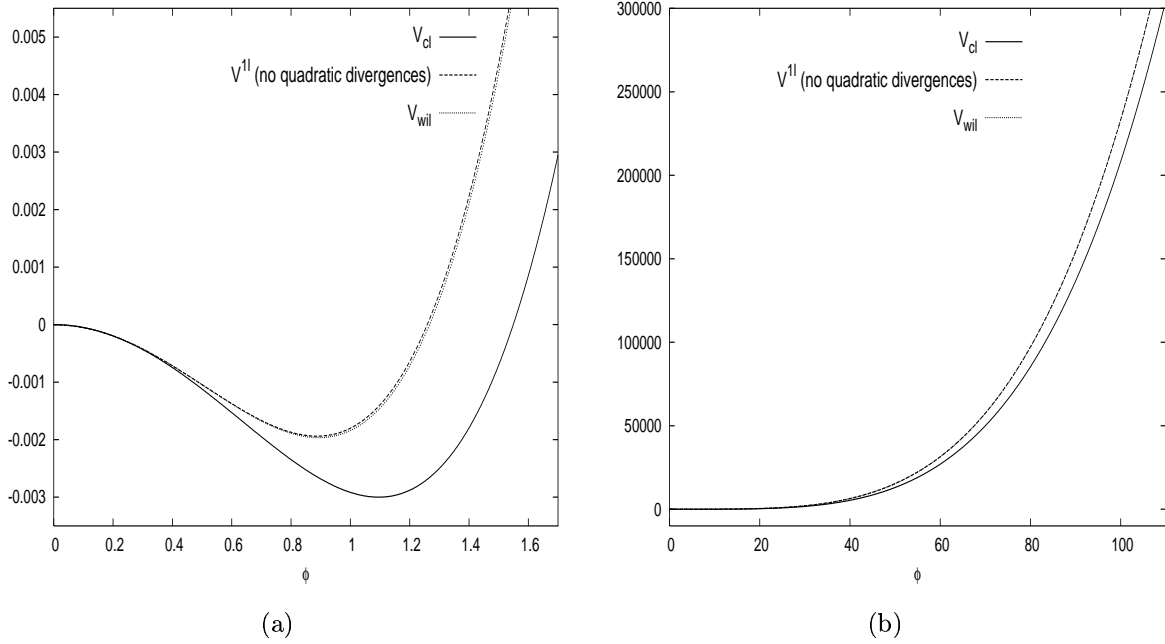


FIG. 4.9 – Potentiel nu (classique), wilsonien après soustraction des divergences quadratiques et one-loop (celui de la figure 4.7). Les conditions aux limites pour les valeurs des paramètres sont toujours celles de la figure 4.6.

(a) Zoom sur la région de ϕ proche des minima classiques.

(b) Allure des potentiels sur toute l'échelle de ϕ (jusqu'au cutoff Λ).

Seule la région externe aux minima doit être considérée. Nous observons que, même après la soustraction des divergences quadratiques, V_{wil} et V^{1l} restent très similaires.

opération *ex nihilo* dans les équations wilsoniennes de flot.

En exprimant $V_k(\phi)$ et $G_k(\phi)$ sous forme polynomiale, il est aisé de réaliser que la soustraction des divergences quadratiques, dans la logique du RG, revient à ajouter dans le membre de droite de l'équation (4.46) le terme :

$$\left(\frac{\lambda_k}{32\pi^2} - \frac{g_k^2}{4\pi^2} \right) k \phi^2. \quad (4.49)$$

Dans l'équation ci-dessus, λ_k est le coefficient de ϕ^4 dans le développement en puissance du champ de $V_k(\phi)$, tandis que g_k est le coefficient de ϕ dans celui de $G_k(\phi)$. Les valeurs des paramètres courants λ_k et g_k sont déterminées, à chaque étape de la résolution itérative des équations (4.46-4.47), par un ajustement polynomial de V_k et de G_k respectivement. Leurs valeurs aux limites sont bien sûr λ_Λ et g_Λ .

En prenant pour m_Λ^2 , λ_Λ , g_Λ et Λ les mêmes valeurs que celles considérées lors de l'étude perturbative, nous pouvons résoudre numériquement le système d'équations du RG (4.46)

et (4.47), avec la modification apportée par le terme additionnel (4.49), et obtenir finalement V_{wil} . Ce dernier est représenté sur la figure 4.9 avec son homologue V^{1l} . Comme précédemment, on remarque que V_{wil} et V^{1l} sont pratiquement identiques.

Cette analyse non-perturbative confirme donc les conclusions faites jusque-là, à savoir que le potentiel effectif ne présente absolument aucun signe d'instabilité.

On peut également s'intéresser aux flots des constantes de couplage λ et m^2 , déterminés suivant le RG wilsonien et les comparer avec leurs homologues one-loop. Les figures 4.10a et 4.10b montrent l'évolution des paramètres (masse et constante de couplage quartique) en fonction de l'échelle pour les équations originelles du RG (4.46) et (4.47), c'est-à-dire en présence des divergences quadratiques.

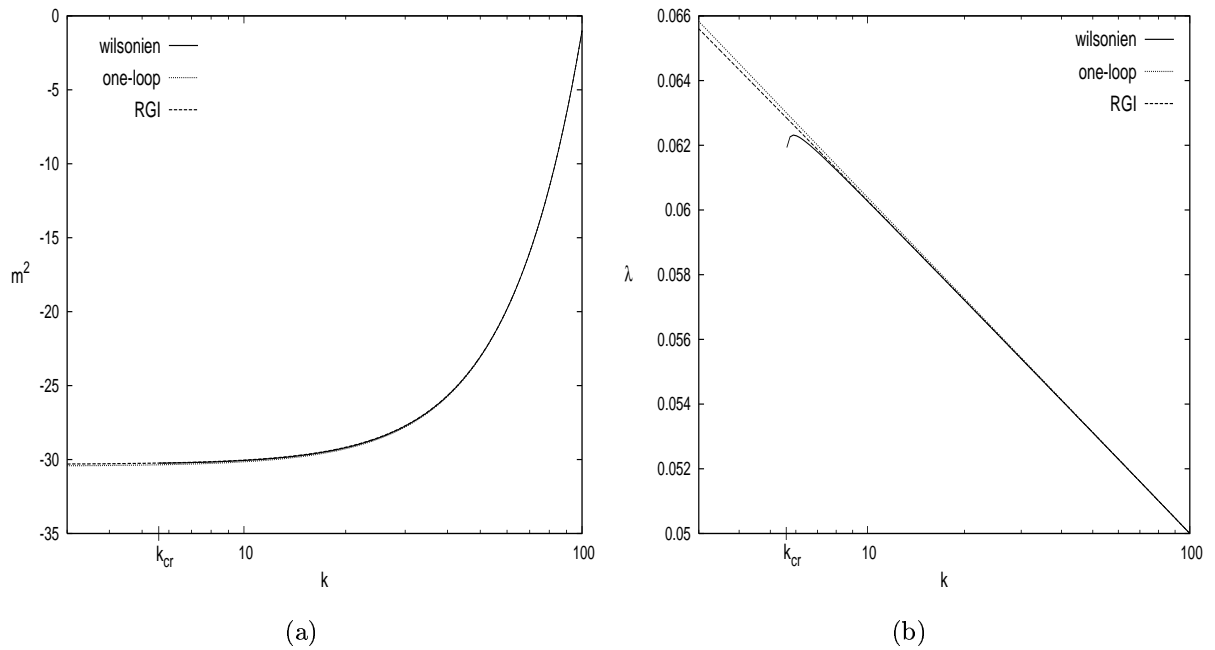


FIG. 4.10 – Flots de la masse m^2 (a) et de la constante de couplage λ (b) obtenus respectivement par la méthode wilsonienne, l'approximation one-loop et la technique RGI.

Les divergences quadratiques n'ont pas été soustraites. Les conditions aux limites pour les valeurs des paramètres sont toujours celles de la figure 4.6.

On remarque l'existence d'une valeur critique k_{cr} de l'échelle courante en dessous de laquelle les équations habituelles du RG ne sont plus valables, et donc l'évolution des paramètres est stoppée. Dans la région $k \leq k_{cr}$, on s'attend à retrouver la construction de Maxwell pour le potentiel effectif.

On constate aussi que le one-loop et le RGI fournissent des bonnes approximations du flot wilsonien lorsque la masse peut être négligée dans l'expression des β -fonctions.

Comme attendu, on constate qu'avec les équations wilsoniennes habituelles (4.46) et (4.47), il est impossible d'atteindre $k = 0$ puisque l'on rencontre la valeur k_{cr} en dessous de laquelle les équations du RG cessent d'être valides. Pour $k \leq k_{cr}$, il faudrait recourir à l'équivalent pour ce modèle de l'équation (4.3) pour retrouver la construction de Maxwell. Il faut noter que cette dernière équation est hautement non-locale, donc le développement en polynômes n'a plus de sens lorsque l'on considère deux points de selle. Il est par exemple évident que la forme du potentiel effectif engendrée par la construction de Maxwell est impossible à reproduire par un quelconque développement en puissances fini.

Dans la région où $k \geq k_{cr}$, on constate un bon accord entre les flots one-loop et wilsonien, ce qui confirme que le développement en boucles est une bonne approximation si un seul point de selle domine l'intégrale de chemin. Notons ici que la β -fonction à une boucle pour la masse, sans soustraction des divergences quadratiques, est modifiée en $\beta_{m^2}^1 = \mu^2 \frac{\lambda - 8g^2}{16\pi^2}$. Évidemment, l'approximation one-loop, de même que la technique RGI, ne "voient" pas la singularité du logarithme car les expressions des β -fonctions sont obtenues suivant l'hypothèse que la masse reste petite devant l'échelle de renormalisation IR. On ne doit donc pas croire les résultats du one-loop lorsque $k^2 \leq |m^2|$, ce qui correspond bien sûr aux valeurs inférieures à k_{cr} .

Si l'on implémente la suppression des divergences quadratiques, alors la masse évolue très peu et reste donc proche de sa valeur initiale $m_\Lambda^2 = -1$. Cela implique donc que la valeur k_{cr} survient un peu plus tard dans le flot, lorsque l'échelle courante k s'approche de l'unité. Ceci mis à part, les flots de λ et de g sont pratiquement inchangés.

Par ailleurs, les flots des constantes de couplage témoignent de la divergence des contributions UV, étant donné qu'à la différence de la mécanique quantique ordinaire où l'on observait un plateau de saturation (cf. figure 3.3), les fluctuations quantiques contribuent ici avec le même poids à toutes les échelles, c'est pourquoi les constantes de couplage progressent continûment dans la région UV. En revanche, le secteur IR est protégé des divergences par le terme de masse qui stoppe le flot en deçà de k_{cr} .

4.6.2 Comparaison avec d'autres travaux non-perturbatifs

Avant de conclure cette étude, nous allons mentionner d'autres travaux [67, 68] sur l'instabilité du vide. Les auteurs entendent montrer, à l'aide d'une autre méthode non-perturbative, à savoir les calculs sur réseaux, que le potentiel de Higgs effectif est stable.

Tout d'abord, nous avons souligné dans notre analyse que le problème de l'instabilité

concerne le potentiel effectif renormalisé. Il est donc important de réaliser cette étude dans la région de ϕ où la théorie des perturbations renormalisée est (ou est censée être) valide. Cependant, dans les travaux [67, 68], le potentiel présente un minimum au cutoff, c'est-à-dire à $\phi \sim \Lambda = \frac{\pi}{a}$ (cf. figure 2 de [67] et figure 4 de [68]). De plus, toutes les échelles pertinentes du problème, en l'occurrence l'échelle de basse énergie μ , le cutoff Λ et la position du minimum v , sont toutes du même ordre de grandeur. Cet "écrasement" des échelles n'aide pas, selon nous, à bien discerner l'origine du problème de l'instabilité. Leur démarche pour déterminer le potentiel renormalisé (cf. équation (2) de [68]) est similaire à la nôtre. À partir du potentiel nu dans lequel les divergences quadratiques sont soustraites (cf. équation (5) de [68]), ce dernier est développé en puissances de $\frac{\phi}{\Lambda}$ et les puissances négatives de Λ sont ensuite négligées. Malheureusement, les auteurs basent leur argumentation sur les différences entre le potentiel nu et celui renormalisé pour des valeurs de ϕ *supérieures au cutoff*, ce qui n'apporte aucun éclairage pertinent sur le problème. Au contraire, nous pensons avoir clairement identifié dans notre étude l'origine de l'apparente instabilité du potentiel effectif. Enfin, contrairement à ce qui est prétendu dans [68], celle-ci n'a rien à voir avec la trivialité.

Pour comprendre ce dernier point, il est important de rappeler une fois de plus que nous considérons des théories effectives. Dans ce contexte, la trivialité signifie simplement que la constante de couplage λ augmente pour des valeurs croissantes de l'échelle d'énergie. Indépendamment, comme chacun sait, l'instabilité peut être appréhendée à partir du comportement du flot de $\lambda(\phi)$ et cette dernière est due à la contribution des boucles fermioniques qui conduisent λ à des valeurs négatives. Le rôle de la trivialité, suivant le sens rappelé ci-dessus, apparaît ultérieurement lorsque l'on atteint des valeurs de ϕ plus grandes. La trivialité implique en effet que, tôt ou tard, la constante de couplage $\lambda(\phi)$ va remonter, générant ainsi un nouveau minimum de V_{eff} . C'est précisément ce comportement "trivial" de λ qui a donné naissance aux scénarios de métastabilité, comme nous l'avons déjà évoqué dans la première partie de notre étude. Dans cette logique, le flot particulier de λ (gouverné par la première de nos équations (4.8)) est dû aux présences conjointes dans la β -fonction du terme en $-g^4$, qui rend initialement λ négatif, et du terme habituel en $+\lambda^2$ qui prend ensuite la relève. Nous en concluons que la trivialité n'a rien à voir avec l'instabilité de V_{eff} .

Comme dernière remarque, nous ajoutons que les auteurs de [67, 68] se servent du potentiel contraint [74] afin de rester avec un potentiel non-convexe (pour un volume fini). Au contraire, en nous appuyant sur la convexité de V_{eff} en tant que propriété directrice,

nous avons pu mettre en évidence l'erreur à l'origine de l'instabilité du potentiel effectif dans la région externe.

4.7 Conclusions et perspectives

En commençant par l'analyse de certains arguments populaires [51, 65] mais incorrects, nous avons étudié le problème de l'instabilité du vide électrofaible à l'aide d'un modèle simple constitué d'un champ scalaire (correspondant au Higgs) possédant un couplage de Yukawa avec un fermion (en particulier le quark top).

En mariant l'approche de Bogolubov sur la brisure de symétrie, à savoir l'instabilité dynamique des minima classiques, avec la méthode wilsonienne du RG, nous avons pu montrer qu'il n'y a aucune incompatibilité entre la convexité du potentiel effectif et l'existence de fonctions de vertex dans la phase brisée. Cette étape liminaire a été utile pour mettre en évidence les inexactitudes impliquées dans les raisonnements cités ci-avant.

Ensuite, nous avons mis en lumière que l'instabilité du potentiel est causée par une extrapolation illégale du potentiel effectif renormalisé dans une région de ϕ où les résultats de la théorie des perturbations renormalisée ne sont plus valables. Au demeurant, en accord avec les théorèmes généraux [9, 10], nous avons vérifié que le potentiel effectif avec cutoff de notre modèle simplifié est bien convexe dans toute la région où il est défini.

Pour établir ces résultats, il a été nécessaire d'aller au-delà des conditions habituelles d'applicabilité de la théorie des perturbations. Concernant ce point, il est notoire que le schéma de régularisation dimensionnelle, de par sa propre construction, fournit directement les résultats de la théorie des perturbations renormalisée. Cependant, comme le met en évidence notre analyse, la connexion entre les secteurs UV et IR de la théorie (la relation entre la théorie nue et celle renormalisée) peut présenter des aspects qui sont masqués lors de l'application naïve de la régularisation dimensionnelle.

Dans notre cas de figure, la contrainte de consistence de la théorie ($\phi \leq \Lambda$) associée à l'équation (4.33), implique que la combinaison $\frac{\lambda_m}{24} + \frac{g^4}{16\pi^2} \ln \frac{v^2}{\phi^2}$ ne peut pas être négative. Si l'on considère sans précaution les résultats de la théorie des perturbations, cette information est perdue. En effet, les équations (4.28) et (4.29), généralement considérées comme les uniques conditions de validité de la théorie des perturbations renormalisée, ne contiennent pas la contrainte indépendante précédente. C'est précisément lorsqu'elle est ignorée que le potentiel effectif apparaît instable.

Nous avons d'abord construit notre analyse à partir du schéma de régularisation par cutoff dans l'espace des impulsions. Dans un second temps, l'utilisation des équations wilsoniennes du RG a permis de généraliser nos résultats dans un contexte non-perturbatif. De plus, en dépit de la stabilité du potentiel effectif, nous avons montré que des bornes inférieures sur la masse du Higgs peuvent être dérivées malgré tout. En effet, pour une valeur donnée renormalisée de λ , le cutoff physique correspondant peut être trouvé en recherchant le point d'inflexion de V_{eff} dans la région externe ($|\phi| > v$). Si l'échelle de la nouvelle physique n'est très élevée en énergie, nous constatons une différence significative entre nos bornes et celles habituelles. Pour Λ dans la région du TeV, nous trouvons une valeur de M_H plus élevée d'une dizaine de GeV par rapport aux déterminations actuelles. Au-delà de ces implications phénoménologiques, il est important de souligner la profonde différence conceptuelle entre notre analyse et le raisonnement standard. Selon notre point de vue, la stabilité du potentiel, aussi bien que les bornes sur M_H , se présentent comme la manifestation de la consistance interne de la théorie, en l'occurrence le respect de la propriété de convexité du potentiel effectif. Par contre, dans la démarche habituelle, les bornes inférieures découlent de l'imposition d'une (apparente) contrainte additionnelle sur le potentiel effectif, à savoir la stabilité du vide EW. L'instabilité est donc considérée comme une possibilité théoriquement légitime. Dans cet esprit, le scénario de métastabilité envisage les conséquences de la présence d'un vide plus bas que celui électrofaible. Nos résultats excluent *de facto* ce scénario.

Dans cette étude, nous nous sommes exclusivement intéressés à la question de l'instabilité. Cependant, nous pensons que nos observations sont une manifestation d'un problème plus général, à savoir la connexion (parfois délicate) entre les secteurs UV et IR de la théorie des champs. Par exemple, nous présenterons lors du dernier chapitre nos perspectives de recherche pour l'analyse du mécanisme de brisure dynamique de symétrie.

Nous allons maintenant nous intéresser de plus près à l'action effective, et en particulier essayer de clarifier dans quelles situations et sous quelles conditions cette dernière est apte à décrire la dynamique d'un système quantique.

« La destinée de l'univers est tracée de toute éternité par les lignes essentielles. Mais il y a une multitude de chemins qui permettent de suivre ces lignes. »

Grzegorz Rosinski - Jean Van Hamme

5

Équation quantique du mouvement

Nous venons de voir au travers de deux exemples que le groupe de renormalisation wilsonien s'avère être une approximation pertinente, voire indispensable, pour déterminer le potentiel effectif. À cette occasion, nous avons pu vérifier que ce dernier constituait un outil appréciable en théorie des champs. C'est pourquoi nous abordons maintenant une nouvelle facette de l'action effective, à savoir sa propulsion à traiter les problèmes dynamiques. Nous travaillerons ici [12] avec la version minkowskienne de la théorie, seules les équations du RG seront issues de la formulation euclidienne.

5.1 Introduction, contexte et problématique

Comme nous l'avons rappelé au chapitre 2 (équation (2.32)), en l'absence de source extérieure, l'action effective $\Gamma[\phi]$ satisfait à l'équation :

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(\vec{x}, t)} = 0. \quad (5.1)$$

Cette relation est communément considérée comme *l'équation quantique du mouvement*, la "généralisation quantique" de l'équation classique $\frac{\delta S}{\delta\phi} = 0$. De fait, à l'ordre le plus bas du développement semi-classique, $\Gamma[\phi]$ coïncide avec l'action classique $S[\phi]$. Cette propriété suggère ainsi (un peu naïvement) que $\Gamma[\phi]$ doit être interprétée comme l'action

quantique du système et l'équation (5.1) comme l'équation quantique de la dynamique correspondante. Cette interprétation est en réalité à nuancer et n'est correcte que sous certaines conditions. Par ailleurs, même lorsque cette interprétation s'applique, l'équation (5.1) n'est généralement pas fiable directement à un quelconque développement semi-classique, en particulier lorsque des phénomènes non-perturbatifs sont en jeu comme c'est le cas avec le double puits. L'applicabilité de l'équation (5.1) comme équation quantique du mouvement avait déjà été brièvement discutée en [76] où un cadre théorique rigoureux avait été fixé afin de compléter et de clarifier un autre travail [77] sur le sujet. Il s'agit ici de développer et d'étendre l'étude [76] afin de comprendre sous quelles conditions la dynamique d'un système quantique peut être décrite par la relation (5.1).

L'approximation pour $\Gamma[\phi]$ la mieux adaptée à ce type de problème est encore le développement en gradient :

$$\Gamma(\phi) = \int d^4x \left(-V_{eff}(\phi) + \frac{1}{2}Z(\Phi)\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + Y(\phi)(\Phi)(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi)^2 + W(\phi)(\partial_\mu\partial^\mu\phi)^2 \dots \right). \quad (5.2)$$

Compte tenu des conclusions de l'étude de la statique du double puits au chapitre 3, nous nous cantonnerons ici à considérer l'ordre le plus bas, à savoir l'approximation du potentiel local (LPA) qui allie efficacité et simplicité. Rappelons que la LPA est obtenue en négligeant les dérivées d'ordre supérieur dans le développement (5.2) et en gardant constant le facteur de renormalisation de la fonction d'onde, ce qui revient, sans perte de généralité, à choisir $Z = 1$:

$$\Gamma[\phi] = \int d^4x \left(-V_{eff}(\phi) + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi \right). \quad (5.3)$$

L'équation quantique du mouvement (5.1) s'écrit alors :

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi = -\frac{\partial V_{eff}(\phi)}{\partial\phi}, \quad (5.4)$$

et prend ainsi la même forme que l'équation classique du mouvement où le potentiel classique est remplacé par le potentiel effectif. Cette équation a été largement utilisée pour décrire l'évolution temporelle de la valeur moyenne¹ d'un champ scalaire, notamment dans des modèles en cosmologie [78]. Plus récemment cependant, quelques limitations ont été notées vis-à-vis de l'utilisation de la relation (5.4), et plus généralement de (5.1), comme équations de la dynamique et un formalisme différent pour traiter ces problèmes a été

¹Remarque sémantique : dans tout ce chapitre, l'expression "valeur moyenne" aura toujours le sens précis, malheureusement équivoque en français, de l'anglais "expectation value", c'est-à-dire l'élément de matrice $A_{ij} = \langle i|\hat{A}|j\rangle$ d'un opérateur \hat{A} .

développé [79–81]. Notre étude complète ces derniers travaux et approfondit la réflexion sur la légitimité de l'emploi de l'équation (5.1).

Nous nous proposons ici, par une analyse attentive des limitations de l'applicabilité de cette équation aux problèmes dynamiques, de montrer dans quels cas de figures et sous quelles conditions cet outil est-il bien approprié pour décrire l'évolution des valeurs moyennes du champ. Il en ressort que deux éléments, jusqu'ici plutôt sous-estimés, jouent un rôle crucial : la prise en compte correcte des conditions aux limites incluses dans la définition de l'action effective et l'utilisation d'une approximation non-perturbative pour le potentiel effectif apparaissant dans l'équation (5.4).

5.2 Limitations d'applicabilité

Une utilisation adéquate de l'équation (5.1) comme équation quantique du mouvement requiert de spécifier avec soin trois éléments :

- (i) le formalisme dans lequel est dérivée l'équation (5.1) afin de connaître la signification physique exacte de ϕ ;
- (ii) le choix des conditions aux limites associées à cette dernière en conformité avec le point (i) ;
- (iii) l'approximation employée pour $\Gamma[\phi]$ qui doit être naturellement bien adaptée au problème considéré afin que les résultats aient un sens physique.

Par rapport au premier point, il faut être prudent lorsque l'on considère ϕ comme la valeur moyenne du champ car ce n'est pas vrai en général. Comme nous l'avons rappelé au cours du chapitre 2, l'action effective $\Gamma[\phi]$ est la transformée de Legendre de $W[J]$, la génératrice des fonctions de Green connectées. Cette dernière est elle-même définie par $e^{\frac{i}{\hbar}W[J]} = Z[J] = \langle 0, t = +\infty | 0, t = -\infty \rangle_J$.

Dans la représentation de Schrödinger, l'amplitude de persistance du vide $Z[J]$ peut être écrite explicitement comme :

$$Z[J] = \langle 0 | \hat{U}(+\infty, -\infty) | 0 \rangle_J = \langle 0 | \mathcal{T} \left(e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dt (\hat{H} - J(t)\hat{\Phi}(\vec{x}))} \right) | 0 \rangle, \quad (5.5)$$

où $\hat{U}(+\infty, -\infty)$ est l'opérateur d'évolution temporelle en présence d'une source J , et $|0\rangle$ l'état fondamental du hamiltonien du système. À partir de la relation (5.5) et de la définition du champ classique $\phi(\vec{x}, t) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(\vec{x}, t)}$, on peut écrire ce dernier sous la forme [82] :

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{\langle -, t | \hat{\Phi}(\vec{x}) | +, t \rangle}{\langle -, t | +, t \rangle} \quad (5.6)$$

où

$$\langle -, t | = \langle 0 | \hat{U}(+\infty, t) \quad \text{et} \quad | +, t \rangle = \hat{U}(t, -\infty) | 0 \rangle. \quad (5.7)$$

Il est clair que $|+, t\rangle$ et $|-, t\rangle$ sont (en général) des états différents. En conséquence de quoi, $\phi(\vec{x}, t)$ n'est pas (en général) un élément de matrice diagonal du champ quantique $\hat{\Phi}(\vec{x})$. Par ailleurs, ce dernier peut présenter des valeurs complexes étant donné que Γ est la fonctionnelle génératrice des fonctions de vertex 1PI, qui sont des quantités complexes satisfaisant à la prescription causale de Feynman. Il faut donc effectuer un choix bien particulier pour la source J si l'on veut avoir $|+, t\rangle = |-, t\rangle$. Ce n'est que dans ce cas que l'équation (5.1) décrit l'évolution dynamique de la valeur moyenne de l'opérateur $\hat{\Phi}(\vec{x})$.

Les actions effectives définies suivant l'équation (5.5) sont dites de Schwinger-De Witt (ou "in-out") [83]. Elles comprennent des conditions aux limites qui sont adaptées aux problèmes dans lesquels sont considérées des transitions d'états asymptotiques dans le passé vers des états asymptotiques dans le futur (par exemple lors d'un processus de diffusion). On peut noter en passant que des définitions plus générales d'actions effectives in-out peuvent être élaborées en remplaçant les états asymptotiques $|+, t\rangle$ et $|-, t\rangle$ par des états génériques $|in\rangle$ et $|out\rangle$ correspondant à des conditions aux limites plus globales.

Le formalisme fonctionnel la plupart du temps approprié pour ce type de problèmes dynamiques est le formalisme "in-in" ou close-time path [84–86], où l'on est à même de construire des actions effectives in-in qui génèrent l'évolution dynamique des valeurs moyennes du champ. Ici cependant, nous n'allons pas nous intéresser à cette approche et à ses récents développements. Notre but est plutôt de montrer qu'il est malgré tout possible, sous certaines conditions, de définir une équation du mouvement dans le formalisme in-out. Compte tenu du fait que l'équation (5.1) est parfois utilisée comme la contrepartie quantique de l'équation classique du mouvement, le problème vaut sans doute la peine d'être étudié.

Dans les cas où ce dernier formalisme peut être utilisé correctement, nous devons encore régler le point (ii). L'équation (5.5) fait appel à deux conditions asymptotiques à l'instant initial ($t = -\infty$) et final ($t = +\infty$). Ces conditions sont implémentées dans la définition même de l'action effective, ainsi que dans celle du champ classique ϕ (qui est l'argument de Γ). Il apparaît évident que nous ne pouvons pas choisir en toute liberté des conditions aux limites particulières pour le champ et ses dérivées à un temps initial t_0 et adopter simultanément une forme "physiquement convenable" pour le paquet d'ondes

(fonctionnel) du système à ce même instant, puis laisser évoluer la valeur moyenne du champ quantique suivant l'équation (5.1). En effet, des conditions initiales arbitraires pour ϕ et pour le paquet d'ondes ne sont généralement pas compatibles avec les conditions asymptotiques incorporées dans la définition de Γ .

Dans la partie suivante, nous allons développer un raisonnement apte à déterminer, pour un jeu spécifique de conditions initiales pour la valeur moyenne du champ et ses dérivées, la forme du paquet d'ondes initial (à $t = t_0$) compatible avec les conditions asymptotiques inhérentes à la définition de l'action effective. De cette manière, l'équation (5.1) peut être utilisée en toute rigueur. Ces arguments théoriques seront confortés par des résultats numériques décrivant l'évolution dynamique, d'après l'équation (5.1), de la valeur moyenne de l'opérateur position dans un potentiel double puits en mécanique quantique. Dans ce cas, l'évolution dynamique exacte est régie par l'équation de Schrödinger dépendante du temps et en comparant les deux méthodes, nous montrerons qu'un excellent accord est trouvé si le paquet d'ondes initial est choisi suivant notre critère.

Il est apparu judicieux d'investiguer la question de la détermination du paquet d'ondes initial au travers du cadre théorique de la définition variationnelle de l'action effective [33], qui constitue la généralisation au cas dépendant du temps de la définition variationnelle bien connue du potentiel effectif [34]. Dans cette approche, détaillée au chapitre 2, l'action effective $\Gamma[\phi]$ est obtenue par l'extrémisation d'une fonctionnelle de deux états différents, appelés $|\psi_+, t\rangle$ et $|\psi_-, t\rangle$, avec la contrainte que $\langle \psi_+, t | \hat{\Phi}(\vec{x}) | \psi_-, t \rangle = \phi(\vec{x}, t)$. De cette démarche résulte la définition (2.39) accompagnée des contraintes (2.40) et des conditions asymptotiques (2.41).

Finalement, il reste à discuter le point (iii) et à réfléchir à l'approximation utilisée pour calculer l'action et le potentiel effectif. La plus simple pour Γ est donnée par la LPA (équation (5.3)) et l'approximation la plus directe pour le potentiel effectif est le potentiel one-loop V^{1l} . Or, cette dernière présente un inconvénient de taille. Comme nous l'avons déjà plusieurs fois répété, le potentiel effectif exact est une fonction convexe de son argument [9, 15, 87]. Or, lorsque le potentiel classique (nu) n'est pas convexe, nous savons que l'approximation du développement en boucles, à n'importe quel ordre fini, est incapable de reproduire cette propriété (un nouvel exemple est donné ici par la figure 5.9). Comme nous l'avons vérifié par deux fois au cours des parties précédentes (cf. figures 3.2b et 4.3), les équations wilsoniennes du RG [26, 37, 62–64] fournissent une approximation non-perturbative convexe fiable pour le potentiel effectif V_{RG} .

On vérifiera par la suite, lors de l'application à la dynamique d'une particule dans le double puits, que les résultats obtenus en insérant V_{RG} dans l'équation (5.4) concordent avec ceux tirés de la résolution numérique de l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Cela confirme que le potentiel effectif V_{RG} s'avère être une excellente approximation du "potentiel quantique" correct à utiliser dans l'équation quantique du mouvement. Afin d'être complet, nous avons également vérifié que V^{1l} , qui ne rend bien sûr pas compte de l'effet tunnel, est inapproprié pour décrire convenablement la dynamique quantique dans le double puits, que ce soit pour une particule d'énergie initiale inférieure ou supérieure à la barrière de potentiel.

Pour résumer, dans le cadre du formalisme "in-out", il est nécessaire, pour appréhender correctement la dynamique d'un système quantique, de respecter d'une part les conditions (2.40) et (2.41) relatives à la définition variationnelle de l'action effective, et de disposer d'autre part d'une approximation non-perturbative du potentiel effectif.

Ces deux modalités sont totalement indépendantes, mais seule leur application conjointe garantit la validité du raisonnement, comme le confirmera de manière explicite l'étude du mouvement dans le double puits.

5.3 Validité d'une équation quantique du mouvement

Le raisonnement que nous allons développer s'appuie sur les définitions de l'action et du potentiel effectifs par le principe variationnel, approche déjà présentée lors du chapitre 2 (cf. équations (2.39) à (2.44) et [33, 34] pour plus de détails). Comme les deux états $|\psi_+, t\rangle$ et $|\psi_-, t\rangle$ sont *a priori* différents, le champ classique $\phi(\vec{x}, t)$ n'est généralement pas un élément de matrice diagonal, c'est-à-dire qu'il ne correspond pas à la valeur moyenne du champ quantique $\hat{\Phi}$. Cependant, il est possible, sous certaines conditions que nous précisons par la suite, de faire coïncider ces états : $|\psi_+, t\rangle = |\psi_-, t\rangle = |\psi, t\rangle$. Admettons pour le moment que nous sommes dans ce cas de figure.

5.3.1 Problème des conditions asymptotiques

Considérons maintenant l'équation différentielle (5.1) pour $\phi(\vec{x}, t)$ quand l'action effective est approximée par un développement en gradient tronqué à un certain ordre m , où $2m$ indique le nombre maximal de dérivées du champ considérées (pour la LPA nous

avons $m = 1$). Afin d'obtenir une solution unique de l'équation (5.1) dans l'intervalle $[t_0, t_1]$ (avec t_1 arbitraire), nous devons spécifier $2m$ conditions aux limites, que l'on peut choisir par exemple sur la variété $t = t_0$, où t_0 correspond à l'instant initial à partir duquel on étudie l'évolution temporelle de ϕ .

Toutefois, la définition variationnelle de Γ comprend des conditions asymptotiques (2.41) à $t = \pm\infty$. C'est pourquoi il est nécessaire de considérer l'évolution de $\phi(\vec{x}, t)$ dans l'intégralité de la gamme temporelle allant de $t = -\infty$ à $t = +\infty$. Cela implique donc de s'intéresser à $\phi(\vec{x}, t)$, ainsi qu'à la source $J(\vec{x}, t)$ associée, également dans les intervalles temporels $] -\infty, t_0]$ et $[t_1, +\infty[$. Afin de clarifier notre propos, nous introduisons les notations intuitives $\phi^\mp(\vec{x}, t)$ et $J^\mp(\vec{x}, t)$ pour désigner le champ classique et la source dans ces deux intervalles respectifs, et $\phi^*(\vec{x}, t)$ et $J^*(\vec{x}, t)$ pour ces mêmes quantités dans l'intervalle $[t_0, t_1]$.

Finalement, le champ et la source s'écrivent :

$$\begin{cases} \phi(\vec{x}, t) = \theta(t + t_0)\phi^-(\vec{x}, t) + \theta(t - t_0)\theta(t + t_1)\phi^*(\vec{x}, t) + \theta(t - t_1)\phi^+(\vec{x}, t) \\ J(\vec{x}, t) = \theta(t + t_0)J^-(\vec{x}, t) + \theta(t - t_0)\theta(t + t_1)J^*(\vec{x}, t) + \theta(t - t_1)J^+(\vec{x}, t) \end{cases} \quad (5.8)$$

Les conditions initiales ont déjà été fixées à t_0 , donc nous pouvons choisir librement $\phi^\mp(\vec{x}, t)$ à la condition expresse que nous respections les deux conditions asymptotiques (2.41) issues du principe variationnel. De plus, il faut naturellement que $\phi(\vec{x}, t)$ soit continue en t_0 et en t_1 , autrement dit que $\phi^-(\vec{x}, t_0)$ et $\phi^+(\vec{x}, t_1)$ coïncident en ces deux points précis avec les valeurs $\phi^*(\vec{x}, t_0)$ et $\phi^*(\vec{x}, t_1)$ du champ classique tel qu'il a été défini comme solution unique de l'équation du mouvement (5.1). Une fois la fonction $\phi(\vec{x}, t)$ ainsi déterminée dans tout l'intervalle temporel $] -\infty, +\infty[$, la procédure variationnelle peut être appliquée et se traduit par le système sans contraintes (2.42-2.43), dont la résolution nous donne la forme de l'état $|\psi_+, t\rangle = |\psi_-, t\rangle = |\psi, t\rangle$, celle de la source correspondante $J(\vec{x}, t)$ ainsi que les valeurs propres de l'énergie.

On peut noter en passant que la source $J(\vec{x}, t)$ peut aussi être tirée de sa relation bien connue avec la dérivée fonctionnelle de l'action effective :

$$\frac{\delta\Gamma[\phi]}{\delta\phi(\vec{x}, t)} = J(\vec{x}, t). \quad (5.9)$$

qui est la généralisation de l'équation (5.1) lorsqu'une source est linéairement couplée au champ. Bien évidemment, dans l'intervalle $[t_0, t_1]$ où l'on s'intéresse à la dynamique $J(\vec{x}, t)$ doit s'annuler, c'est-à-dire qu'il est nécessaire que $J^*(\vec{x}, t) = 0$.

Ainsi, sur la base du principe variationnel, on arrive à la conclusion qu'il n'existe qu'un seul état $|\psi, t\rangle$ qui soit associé à la fonction spécifique $\phi(\vec{x}, t)$ introduite précédemment, et

en particulier qu'à $t = t_0$ les conditions aux limites considérées pour l'évolution temporelle du champ sont en fait tributaires de $|\psi, t_0\rangle$. C'est un point important car, comme mentionné en introduction, si les contraintes (2.40) et (2.41) découlant du principe variationnel sont négligées, alors on peut en général trouver plusieurs états normalisés compatibles avec le jeu de conditions aux limites à t_0 . Cependant, parmi ces états, seul $|\psi, t\rangle$ est réellement relié à l'action effective et donc à l'évolution du champ classique $\phi(\vec{x}, t)$ dans l'intervalle temporel $] -\infty, +\infty[$.

Ce constat justifie les limites que nous avons anticipées vis-à-vis de l'utilisation de l'équation quantique du mouvement. Par exemple, dans les applications cosmologiques courantes, l'action effective pour le champ scalaire est approximée par la LPA, une forme commode (typiquement une gaussienne) du paquet d'ondes à l'instant $t = t_0$ est choisie, et les valeurs initiales de la valeur moyenne du champ et sa dérivée première sont prises comme $\phi(t_0) = cste$ et $\dot{\phi}(t_0) = 0$. Or, sur la base du raisonnement précédent, on se rend compte facilement que l'évolution temporelle de ϕ n'est pas forcément corrélée avec celle du paquet d'ondes considéré, ou en d'autres termes que $\phi(\vec{x}, t)$ n'est pas nécessairement la valeur moyenne de $\hat{\Phi}(\vec{x})$ dans l'état $|\psi, t\rangle$.

La difficulté principale est donc de déterminer l'état particulier $|\psi, t_0\rangle$ nous garantissant que l'interprétation physique directe de $\phi(\vec{x}, t)$ comme l'évolution temporelle de la valeur moyenne du champ puisse être valable. Bien qu'il soit certainement difficile de trouver une solution pour des conditions aux limites génériques, on s'attend à ce qu'il soit possible de déterminer $|\psi, t_0\rangle$ dans certaines circonstances. Partant de là, nous nous restreignons à un cas de figure particulier, pertinent pour la majeure partie des applications physiques, pour lequel $|\psi, t_0\rangle$ peut être trouvé. En l'occurrence, nous choisissons à $t = t_0$ un champ constant $\phi(t_0, x) = \phi_0$ avec des dérivées nulles jusqu'à l'ordre $2m$. Notre objectif est désormais d'identifier l'état $|\psi, t_0\rangle$ tel qu'il est défini à travers le principe variationnel.

5.3.2 Allumage adiabatique de la source

Nous allons proposer dans cette partie une argumentation qui permet, dans ce cas particulier souvent considéré pour les applications, de déterminer l'état initial $|\psi, t_0\rangle$ en accord avec les conditions asymptotiques (2.41). Notre analyse, basée sur le théorème de Gell-Mann et Low [88], permet d'obtenir $|\psi, t_0\rangle$ à l'aide de l'équation (5.11), ce qui constitue à notre avis un résultat important quant à l'utilisation appropriée de l'action effective pour appréhender la dynamique du champ quantique.

Le respect de la condition asymptotique (2.41) à $t = -\infty$ implique que la source $J^-(\vec{x}, t)$ doit s'annuler dans cette limite afin que l'état $|\psi_+, t\rangle$ corresponde à l'état fondamental $|0\rangle$ du hamiltonien. L'idée est alors de recourir à *l'allumage adiabatique* (adiabatic switching-on) de la source J^- depuis $J^-(\vec{x}, t = -\infty) = 0$ jusqu'à une certaine valeur $J^-(\vec{x}, t = t_0) = J_0$ à l'instant t_0 . Cela revient ainsi à "préparer" un état $|\psi(J_0)\rangle$ à $t = t_0$ à partir de l'état fondamental $|0\rangle$. L'intérêt crucial d'un tel processus adiabatique est que, dans ce cas précis, nous sommes en mesure de faire appel au théorème de Gell-Mann et Low [88] pour connaître l'évolution de l'état quantique du système tout au long de l'opération, soit dans l'intervalle complet $[-\infty, t_0]$.

De fait, le théorème démontre que les états, à chaque instant t , sont donnés par la solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps dans laquelle le hamiltonien est égal à :

$$\hat{H}_{adia}(t) = \hat{H} - \int d^3\vec{x} J^-(\vec{x}, t) \hat{\Phi}(\vec{x}). \quad (5.10)$$

Ce résultat est fondamental et montre que l'état du système à $t = t_0$ est donné par l'état propre du hamiltonien modifié $\hat{H} - J_0 \int d^3\vec{x} \hat{\Phi}(\vec{x})$. Ensuite il suffit d'éteindre suffisamment rapidement la source $J(\vec{x}, t)$ de telle manière que $J^*(\vec{x}, t_0 + \epsilon) = 0$ où ϵ est une durée infinitésimale. Contrairement au processus adiabatique, au cours duquel on pouvait considérer que le système s'équilibrait à chaque instant successif, l'extinction brutale de la source ne modifie pas l'état du système. C'est simplement une force extérieure qui ne s'applique plus, sa disparition n'a pas d'influence sur l'état dans lequel le système se trouvait avant.

Ainsi, le hamiltonien est simplement \hat{H} dans l'intervalle $[t_0 + \epsilon, t_1]$ où l'on étudie la dynamique, tandis que l'état initial de la fonction d'onde sera donné par $|\psi(J_0)\rangle$, que l'on tire de la résolution de :

$$\left(\hat{H} - J_0 \int d^3\vec{x} \hat{\Phi}(\vec{x}) - E_0 \right) |\psi(J_0)\rangle = 0. \quad (5.11)$$

Cette équation constitue un résultat crucial puisqu'elle fournit un critère systématique pour trouver l'unique paquet d'ondes initial associé à la définition de l'action effective. Il est d'ailleurs remarquable de constater ici que la relation (5.11) n'est rien d'autre que l'équation qui définit le potentiel effectif par le principe variationnel statique, soit l'équation (2.44) du chapitre 2. Le fait que nous retrouvions le résultat variationnel, simplement par l'introduction de la notion d'allumage adiabatique, consolide le bien-fondé de notre raisonnement.

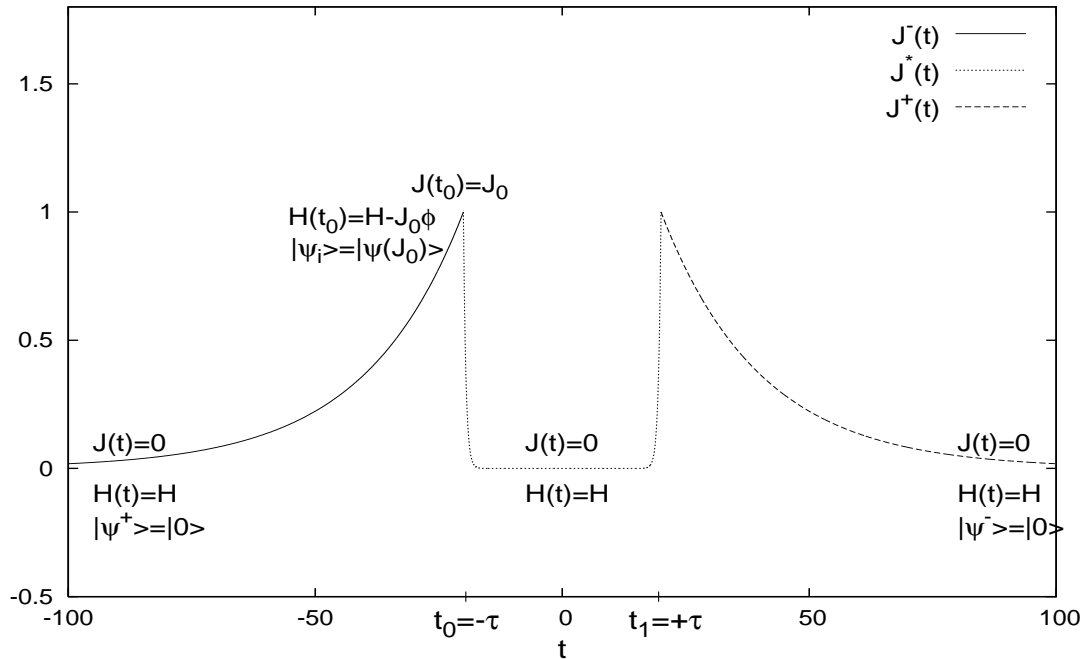


FIG. 5.1 – Évolution de source $J(\vec{x}, t)$ en fonction du temps (unité arbitraire) :

- 1) Allumage adiabatique jusqu'à la valeur J_0 ,
- 2) Suppression temporaire dans l'intervalle $[t_0, t_1]$,
- 3) Restauration puis extinction adiabatique.

La seule hypothèse impliquée dans cette procédure est que la discontinuité de $J(\vec{x}, t)$ en t_0 puisse être remplacée par une variation très rapide sans que cela modifie la physique. La schématisation de cette utilisation particulière de la source est présentée sur la figure 5.1, sur laquelle nous avons également tracé la partie symétrique pour $[t_1 : +\infty]$, dont la justification suivra.

Revenons juste un instant sur le sens de l'allumage adiabatique avant d'aborder cette question. Nous emprunterons dans ces quelques lignes le langage de la mécanique quantique pour simplifier la discussion. Il est effectivement possible d'appréhender le procédé décrit ici sous un angle plus pragmatique dans lequel la source représente l'expérimentateur qui prépare son système à l'aide d'une force externe quelconque (champ électrique par exemple) pour l'amener progressivement - adiabatement - hors de son état fondamental, dans le but avoué d'en étudier la dynamique. Il est en effet évident qu'en considérant un système dans son état fondamental, autrement dit à son niveau d'énergie le plus bas, l'évolution de la position est plus que triviale, puisqu'avec un potentiel symétrique

on aura $\langle 0|\hat{q}(t)|0\rangle = q_0 = 0$. Donc, l'allumage d'une source nous permet de construire une valeur initiale non-nulle $q_0(J_0)$. L'avantage indéniable de cette procédure est qu'elle respecte naturellement la condition asymptotique (2.41) à $t = -\infty$, tandis qu'en prenant une forme générique, par exemple une gaussienne, comme fonction d'onde initiale, nous n'avons aucune garantie *a priori* que nous puissions trouver (rétroactivement) une source J^- capable d'amener l'état fondamental à $t = -\infty$ à la forme gaussienne arbitraire choisie à $t = t_0$. *A contrario*, l'allumage adiabatique nous le garantit par construction.

5.3.3 Mouvement périodique

Il nous reste maintenant, avant de passer aux applications, une dernière question à traiter. Il s'agit de savoir s'il est possible, au moins dans certains cas, que l'action effective (ou son approximation) puisse être obtenue comme un élément de matrice diagonal, c'est-à-dire que l'on ait $|\psi_-, t\rangle = |\psi_+, t\rangle$ dans l'équation (2.39). Nous pouvons montrer que c'est le cas si le mouvement du champ ϕ est périodique dans l'intervalle temporel $[t_0, t_1]$, là où le mouvement est régi par l'équation (5.1) associée au jeu habituel de conditions aux limites. Supposons que l'intervalle temporel couvre n périodes Δt , autrement dit que $t_1 = t_0 + n \Delta t$. Alors à l'instant $t = t_1$, le champ ϕ et ses dérivées prennent la même valeur qu'à $t = t_0$.

Maintenant, nous pouvons évidemment effectuer une translation sur l'axe du temps sans changer la physique et prendre le point $t = 0$ symétrique par rapport à t_0 et t_1 , soit $-t_0 = t_1 = \tau$ dans le nouveau repère. Choisissons ensuite la source J dans l'équation (2.42) telle qu'elle soit symétrique vis-à-vis d'une réflexion temporelle, ce qui revient à déterminer $J^-(\vec{x}, t)$ de façon à ce que le système évolue de l'état fondamental $|0\rangle$ à $t = -\infty$ vers l'état $|\psi, -\tau\rangle = |\psi(J_0)\rangle$ à $t = -\tau$, puis que $J^*(\vec{x}, t)$ soit nulle dans l'intervalle $[-\tau, +\tau]$ (dans lequel ϕ couvre n périodes), et enfin que la source soit allumée symétriquement pour $\tau < t < +\infty$, soit $J^+(\vec{x}, t) = J^-(\vec{x}, -t)$.

Avec un tel choix (observable sur la figure 5.1), les évolutions des deux états dans les équations (2.42) et (2.43) sont symétriques par renversement du temps et donc identiques, d'où $|\psi_+, t\rangle = |\psi_-, t\rangle$, CQFD.

La conclusion de ce chapitre peut être synthétisée ainsi : en se limitant aux cas pour lesquels on considère un développement en dérivée tronqué de l'action effective et où on a affaire à une évolution dynamique périodique pour ϕ , alors cette dernière quantité a bien

la signification de la valeur moyenne de l'opérateur champ ; d'autre part, l'état quantique associé, à un instant particulier $t = t_0$, peut être identifié avec l'état apparaissant dans la définition du potentiel effectif suivant le principe variationnel statique (équations (2.36) à (2.38)). Par ailleurs, si une méthode non-perturbative de calcul du potentiel effectif, telles que les équations exactes du RG wilsonien, est utilisée, on s'attend à ce que l'équation quantique du mouvement (5.1) constitue une bonne approximation de l'évolution temporelle de la valeur moyenne du champ ϕ lorsque l'état initial du système est celui défini par l'équation (5.11).

5.4 Une application simple : l'oscillateur harmonique

Afin de tester nos arguments pour des applications physiques, nous allons considérer un cas de figure académique, en l'occurrence l'oscillateur harmonique unidimensionnel, parce que nous avons ainsi l'opportunité de réaliser des calculs analytiques exacts. Le problème non-trivial du double puits sera traité ensuite. Comme en [33], nous nous plaçons en mécanique quantique (QFT à zéro dimension spatiale et une temporelle), et choisissons comme hamiltonien :

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2} + \frac{\omega^2 \hat{Q}^2}{2} - \frac{\omega}{2}, \quad (5.12)$$

où le terme $-\frac{\omega}{2}$ a été ajouté pour obtenir une énergie du vide nulle. Dans ce cas, on sait que l'action effective Γ coïncide avec l'action classique S . Dans [33], ce résultat a été retrouvé au moyen du principe variationnel que nous avons détaillé précédemment, et les solutions explicites des équations (2.42) et (2.43) pour une source $J(t)$ s'écrivent :

$$\langle Q | \psi_+, t \rangle = \langle Q | \psi_-, t \rangle = \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{\omega}{2}(Q - q)^2 - i\dot{q}(Q - q) - \frac{i q \dot{q}}{2} \right\} \quad (5.13)$$

avec

$$q(t) = \langle \psi_-, t | \hat{Q} | \psi_+, t \rangle = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' J(t') e^{-i\omega|t-t'|}. \quad (5.14)$$

La relation (5.13) montre que $|\psi_+, t\rangle = |\psi_-, t\rangle$, ce qui est attendu puisque nous avons affaire à un oscillateur harmonique, donc à un mouvement périodique pour la position q . De plus, nous voyons que les membres de droite des équations (5.13) et (5.14) sont totalement déterminés une fois la source J donnée.

Nous pouvons alors appliquer de manière concrète la procédure présentée auparavant. Nous dérivons ainsi, à partir de l'action effective, l'équation quantique du mouvement pour $q(t)$, qui, dans ce cas particulier trivial, coïncide avec l'équation du mouvement classique

puisque $S[q] = \Gamma[q]$. L'équation (5.4) se ramène donc à $\ddot{q}(t) = \omega q(t)$, dont la solution caractéristique s'écrit :

$$q(t) = A \cos(\omega t + \omega \tau), \quad (5.15)$$

où la constante τ est fixée par les conditions aux limites du problème. En prenant

$$\tau = \frac{n\pi}{\omega}, \quad (5.16)$$

avec n entier et $t_0 = -\tau$ (où t_0 est l'instant "initial" introduit précédemment), nous nous retrouvons dans les conditions souhaitées, puisque nous avons $q(-\tau) = A$ et $\dot{q}(-\tau) = 0$, de même $q(\tau) = A$ et $\dot{q}(\tau) = 0$, étant donné que $q(t)$ couvre n périodes dans l'intervalle de temps $[-\tau, \tau]$.

Notre problème maintenant est de trouver les sources particulières $J^\mp(t)$ qui conduisent respectivement de $q(-\infty)$ vers $q(-\tau) = A$ et de $q(\tau) = A$ vers $q(+\infty)$ (avec toujours les notations (5.8)). Nous avons ici $q(\mp\infty) = 0$ puisque la valeur moyenne de l'opérateur position \hat{Q} dans l'état fondamental est bien sûr nulle pour un oscillateur harmonique (et plus généralement pour un potentiel symétrique). Ensuite, dans l'intervalle $-\tau < t < \tau$, on a $J^*(t) = 0$ et $q(t)$ a alors le comportement périodique mentionné. La source $J(t)$ dans tout l'intervalle temporel qui présente ces caractéristiques est :

$$J(t') = A \omega e^{-\epsilon|t'|} \quad (-\infty < t' < -\tau) \text{ et } (\tau < t' < +\infty) \quad (5.17)$$

$$J(t') = 0 \quad (-\tau < t' < \tau), \quad (5.18)$$

où ϵ est un paramètre petit que l'on fait tendre vers zéro à la fin des calculs. En insérant cette source précise dans l'équation (5.14), on retrouve l'expression (5.15) pour $q(t)$ dans l'intervalle $-\tau < t < \tau$:

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{i\omega A}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{-T}^{-\tau} dt' e^{-i\omega t} e^{i\omega t'} e^{\epsilon t'} + \int_{\tau}^T dt' e^{i\omega t} e^{-i\omega t'} e^{-\epsilon t'} \right\} \\ &= A \cos(\omega t + \omega \tau), \end{aligned} \quad (5.19)$$

où on a introduit l'étape intermédiaire d'introduire des bornes $\pm T$ (T positif) dans l'intégrale temporelle à la place de $\pm\infty$ et de prendre la limite $T \rightarrow +\infty$ en fin de calcul. Le résultat final (5.19) est bien celui recherché, et il a été obtenu à l'aide de la relation

$$\exp(-i\omega\tau) = \exp(i\omega\tau), \quad (5.20)$$

que l'on déduit de l'équation (5.16).

Nous avons également vérifié le comportement de $q(t)$ à $t = +\infty$ avec la source définie par les équations (5.17) et (5.18). Nous avons alors calculé l'intégrale (5.14) en introduisant comme précédemment les bornes temporelles finies $\pm T$:

$$\begin{aligned} q(+\infty) &= \frac{i\omega A}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow +\infty} \left\{ \int_{-T}^{-\tau} dt' e^{-i\omega T} e^{i\omega t'} e^{\epsilon t'} + \int_{\tau}^T dt' e^{-i\omega T} e^{i\omega t'} e^{-\epsilon t'} \right\} \\ &= \frac{i\omega A}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow +\infty} \left\{ \frac{e^{-i\omega T}}{i\omega + \epsilon} e^{-i\omega\tau - \epsilon\tau} - \frac{e^{-i\omega T}}{i\omega - \epsilon} e^{i\omega\tau - \epsilon\tau} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Dans ce calcul, nous ne prenons pas la limite $T \rightarrow \infty$ pour le terme $\exp(-i\omega T)$, ce dernier se factorisant naturellement, et nous procédons d'abord au passage à la limite $\epsilon \rightarrow 0$ puis nous utilisons la relation (5.20) pour trouver sans difficulté $q(+\infty) = 0$. La procédure pour $q(-\infty)$ est totalement similaire et donne de même $q(-\infty) = 0$.

Les équations (5.19) et (5.21) fournissent donc le résultat souhaité pour la position $q(t)$ lorsque la source $J(t)$ est choisi suivant les relations (5.17) et (5.18). Comme nous l'avons déjà noté, cette fonction $J(t)$ présente une discontinuité aux deux points $t = \pm\tau$; cependant, dans cet exemple, cela n'a pas de conséquences sur la valeur moyenne de la position et de ses dérivées qui sont continues en ces points.

5.5 Dynamique du double puits

Nous avons désormais tous les outils en main pour appréhender la dynamique d'un paquet d'ondes dans le double puits et tester l'équation quantique du mouvement (5.1) en tenant compte de toutes les observations précédentes. L'étude du double puits au chapitre 3 ayant mis en évidence la fiabilité de la LPA pour l'action effective, ce choix est maintenu ici. Dans le même esprit, le potentiel effectif $V_{eff}(q)$ sera obtenu à l'aide de l'équation wilsonienne du RG (3.17), celle-ci permettant de générer un potentiel effectif non-perturbatif et convexe (à des fins de comparaison, le potentiel effectif one-loop sera aussi considéré à la fin du chapitre). Comme annoncé, nous fixons pour q et \dot{q} les conditions initiales :

$$q(t_0) = q_0 \quad \text{et} \quad \dot{q}(t_0) = 0. \quad (5.22)$$

Ensuite, étant en présence d'un mouvement périodique, nous sommes autorisés à utiliser la relation (5.1) comme équation quantique du mouvement pour $q(t) = \langle \hat{Q} \rangle_t = \langle \psi, t | \hat{Q} | \psi, t \rangle$.

D'après nos arguments, la fonction $q(t)$ issue de la procédure décrite précédemment doit correspondre à celle obtenue par la résolution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps où la forme du paquet d'ondes initial est fixée par la relation (5.11). À titre

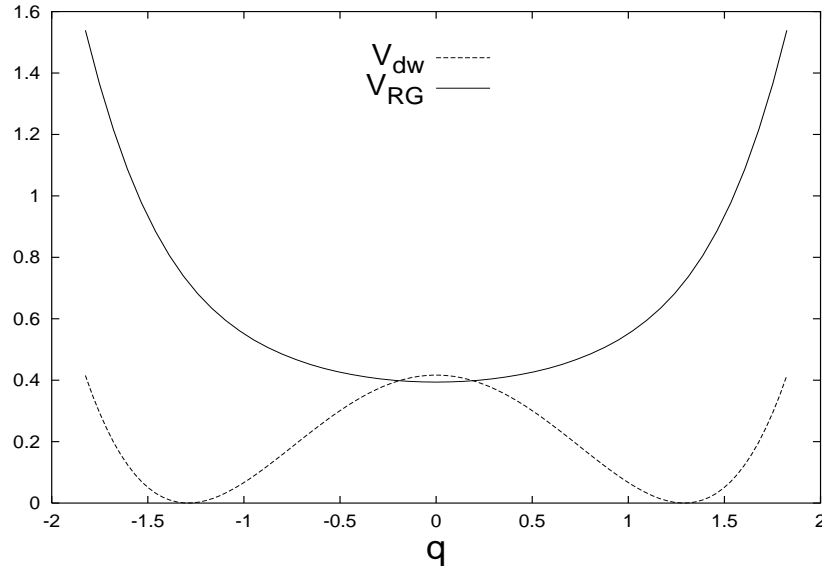


FIG. 5.2 – Potentiel classique double puits $V_{dw}(q)$ et potentiel renormalisé $V_{RG}(q)$ tiré de la résolution de l'équation du RG (5.23). Les valeurs nues de la constante de couplage et de la masse sont respectivement $\lambda = 0.15$ et $m^2 = -1$.

de comparaison, l'évolution d'un paquet d'ondes initial gaussien, fréquemment employé dans les applications, a également été considéré. Les résolutions numériques de l'équation du RG pour le potentiel, de l'équation de Schrödinger dépendante du temps ainsi que le calcul des valeurs moyennes de \hat{Q} et \hat{P} ont été réalisés à l'aide de routines appartenant à la librairie NAG [43].

La comparaison des résultats exacts avec ceux obtenus par le formalisme de l'action effective montre que, pour les conditions initiales (5.22), l'équation quantique du mouvement (5.1) fournit une description très précise de l'évolution dynamique de $q(t)$ uniquement si l'état initial est choisi selon notre critère, c'est-à-dire d'après la relation (5.11). Nous avons par ailleurs la confirmation que le potentiel effectif one-loop (non-convexe), approximation souvent utilisée dans les applications, est inapproprié pour décrire la dynamique de $q(t)$.

Sur la figure 5.2, nous avons tracé le potentiel double puits $V_{dw}(q) = -\frac{1}{2}q^2 + \lambda q^4 + \frac{1}{16\lambda}$, identique à celui du chapitre 3 (cf. équation (3.1)), et le potentiel effectif $V_{eff}(q)$ obtenu par la résolution de l'équation du RG [4, 23, 25, 75] :

$$\frac{\partial U_k(q)}{\partial k} = -\frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{U_k''(q) + k^2}{k^2} \right), \quad (5.23)$$

que nous avons utilisée auparavant pour l'étude des niveaux énergétiques (cf. équation (3.17)). Dans ce contexte, notons que le potentiel classique double puits $V_{dw}(q)$ n'est rien

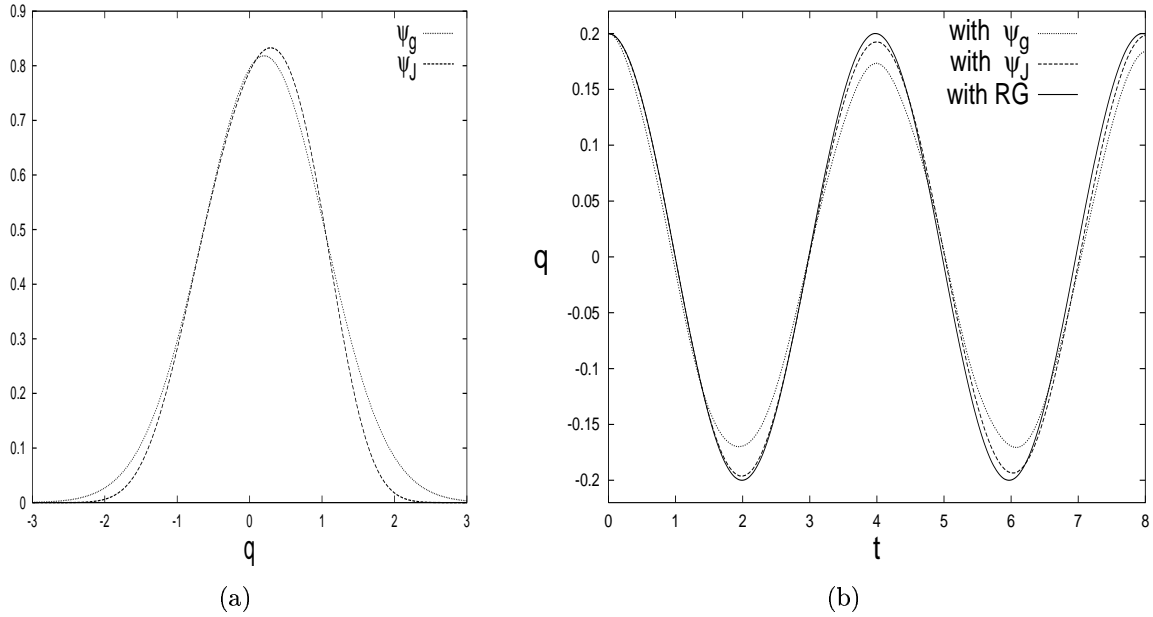


FIG. 5.3 – Le cas $\lambda = 1.1$.

(a) Paquets d'ondes initiaux $\psi_J(q)$ et $\psi_g(q)$.

(b) Évolution temporelle de $q(t)$ obtenue à partir de l'équation de Schrödinger avec les paquets d'ondes initiaux $\psi_J(q)$ et $\psi_g(q)$, et d'après l'équation (5.24) avec les conditions initiales précisées dans le texte.

d'autre que le potentiel nu, donc la condition à la limite UV pour $U_k(q)$. De même, le potentiel effectif $V_{eff}(q)$ est donné par la solution de l'équation du RG (5.23) intégrée de Λ jusqu'à $k = 0$ (c'est-à-dire lorsque toutes les fluctuations quantiques ont été prises en compte), soit $V_{eff}(q) = V_{RG}(q) = U_{k=0}(q)$. Rappelons également que nous considérons des quantités dimensionnées, l'unité étant donnée par le choix $m^2 = -1$ pour la masse.

Suivant la LPA, l'équation du mouvement prend la forme générale compacte (5.4), celle-ci s'écrivant dans notre cas :

$$\ddot{q} = -\frac{d}{dq} V_{eff}(q). \quad (5.24)$$

Cela signifie que l'évolution dynamique de la valeur moyenne de la position est donnée par l'équation classique du mouvement où le potentiel classique est remplacé par V_{eff} , lequel sera approximé par V_{RG} dans notre analyse numérique.

Nous allons illustrer notre raisonnement en étudiant le comportement de la position $q(t)$ et de l'impulsion $p(t)$ ($= \dot{q}(t)$) dans trois cas de figures significatifs correspondant à des valeurs décroissantes de λ (donc à des barrières de potentiel de plus en plus importantes),

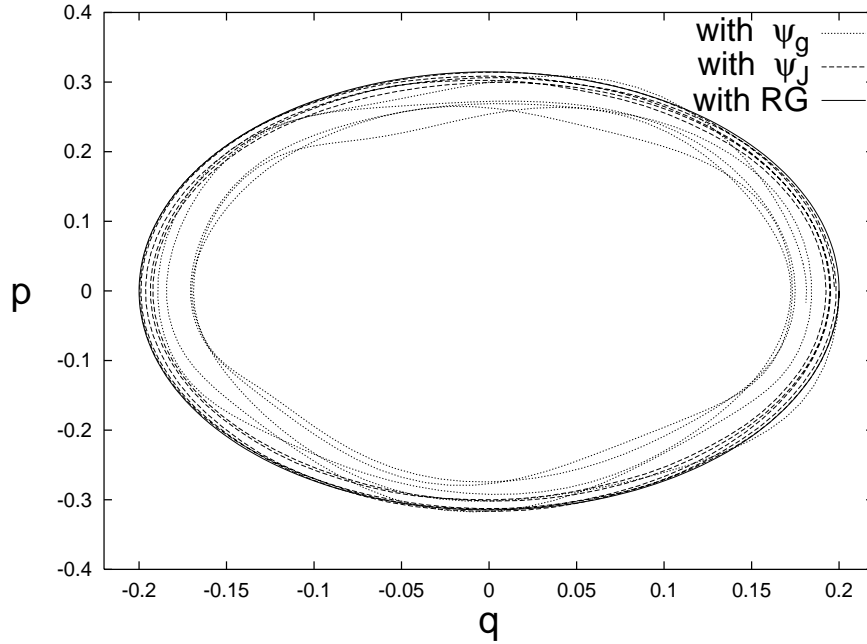


FIG. 5.4 – Diagramme position-impulsion $q - p$ pour les trois cas considérés dans la figure 5.3b ($\lambda = 1.1$).

à savoir 1.1, 0.15 et 0.07. À l'instant initial $t_0 = 0$, les valeurs q_0 et \dot{q}_0 des positions et des impulsions à $t = t_0$ sont respectivement : $q_0 = 0.2$ pour $\lambda = 1.1$, $q_0 = 0.5$ pour $\lambda = 0.15$, $q_0 = 1.0$ pour $\lambda = 0.07$, et $\dot{q}(0) = 0$ dans tous les cas.

D'après nos arguments et pour un tel choix des valeurs initiales, l'équation (5.1) décrit l'évolution temporelle de la valeur moyenne $q(t)$ reliée au paquet d'ondes initial solution de l'équation de Schrödinger indépendante du temps (5.11) avec la source constante $J_0 = J(t_0) = J^-(t_0)$, valeur finale de la source allumée adiabatiquement depuis $t = -\infty$. Cela s'écrit ici explicitement :

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V_{dw}(q) - J_0 q \right) \psi(q) = E_J \psi(q), \quad (5.25)$$

où, pour chaque valeur initiale q_0 de la position, la source constante $J_0 = J(q_0)$ est calculée de façon à respecter $\langle \psi_J | \hat{Q} | \psi_J \rangle = q_0$. Une fois le paquet d'ondes initial déterminé à l'aide de cette équation (5.25), $\psi(x, t)$ est obtenue par la résolution numérique de l'équation de Schrödinger dépendante du temps à partir de laquelle on détermine les valeurs exactes de $q(t)$ et $p(t)$. Ces résultats sont alors comparés avec ceux provenant de la solution de l'équation quantique du mouvement (5.24).

Comme nous l'avons évoqué au début de ce chapitre, les conditions aux limites qui définissent l'action effective ne sont généralement pas correctement prises en compte dans

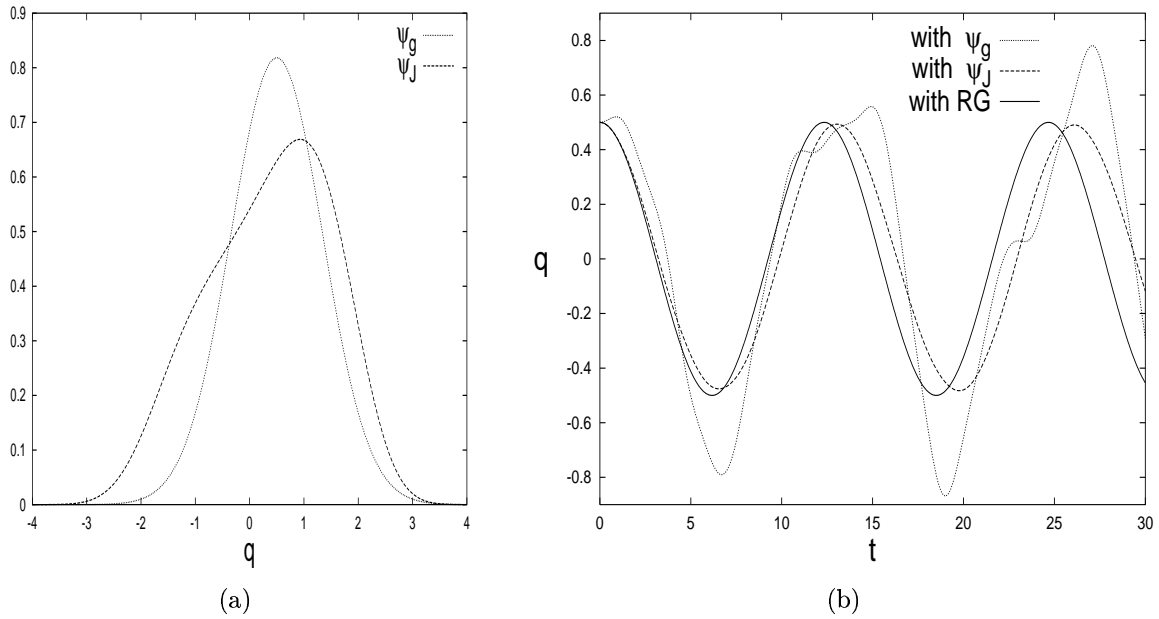


FIG. 5.5 – Le cas $\lambda = 0.15$.

(a) Paquets d'ondes initiaux $\psi_J(q)$ et $\psi_g(q)$.

(b) Évolution temporelle de $q(t)$ obtenue à partir de l'équation de Schrödinger avec les paquets d'ondes initiaux $\psi_J(q)$ et $\psi_g(q)$, et d'après l'équation (5.24) avec les conditions initiales précisées dans le texte.

les applications de ce formalisme aux problèmes dynamiques. Typiquement on associe un paquet d'ondes gaussien avec les conditions initiales (5.22). C'est pourquoi, nous avons aussi calculé l'évolution exacte d'un paquet d'ondes gaussien, choisi de telle façon que sa largeur soit égale à celle de l'état fondamental dans l'approximation harmonique autour du minimum de l'un des deux puits. Explicitement nous avons donc $\psi_g = \frac{1}{(\pi\sigma^2)^{\frac{1}{4}}} e^{-\frac{(q-q_0)^2}{2\sigma^2}}$ où l'écart-type est donné par $\sigma = \frac{1}{\sqrt{\omega}} = 2^{-\frac{1}{4}}$. Le centre de la gaussienne est naturellement choisi aux mêmes positions q_0 définies précédemment.

Pour chaque valeur de λ considérée, nous allons présenter dans les figures suivantes :

- la forme des paquets d'ondes initiaux $\psi_J(q)$ et $\psi_g(q)$,
- la valeur moyenne de l'opérateur position $\langle \hat{Q} \rangle_t = q(t)$ en fonction du temps selon ces deux conditions initiales différentes,
- l'évolution de la position $q(t)$ donnée par l'équation quantique du mouvement,
- le diagramme de position-impulsion $q - p$.

Nous commençons par commenter les résultats pour $\lambda = 1.1$ reportés dans les figures 5.3 et 5.4. On peut voir que les évolutions temporelles des positions et impulsions moyennes

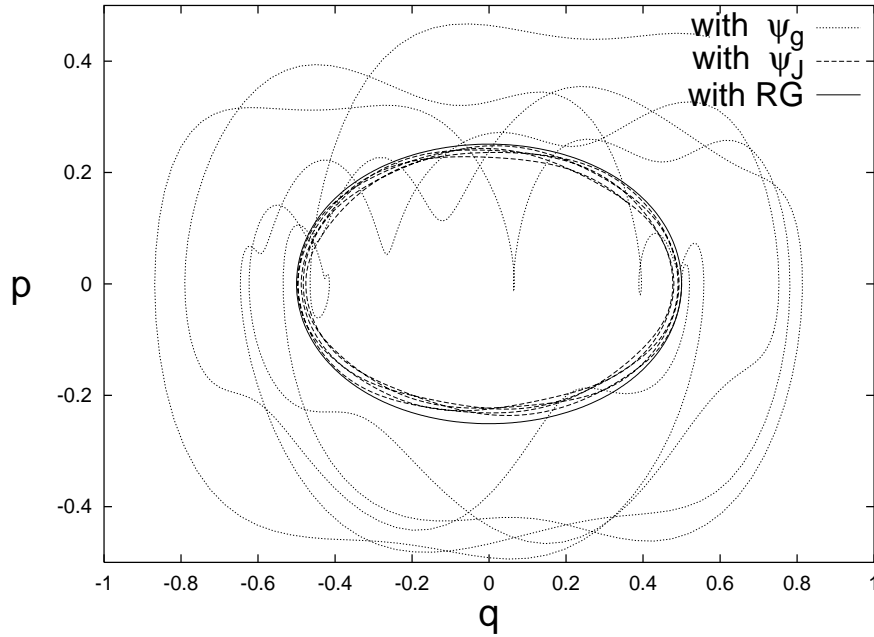


FIG. 5.6 – Diagramme position-impulsion $q - p$ pour les trois cas considérés dans la figure 5.5b ($\lambda = 0.15$).

obtenues à partir de $\psi_J(q)$ ou de $\psi_g(q)$ sont pratiquement les mêmes et qu'elles sont toutes deux bien reproduites par la solution de l'équation quantique du mouvement (5.24). On le constate clairement sur la figure 5.3a, la raison de cette coïncidence est que, pour cette valeur particulière de λ , les paquets d'ondes $\psi_J(q)$ et $\psi_g(q)$ sont quasiment identiques.

Cependant, nous allons constater maintenant que pour d'autres valeurs de λ correspondant à des hauteurs de barrières différentes (en l'occurrence plus grandes), le choix du paquet d'ondes initial correct devient crucial. Prenons par exemple le cas $\lambda = 0.15$, nous obtenons deux formes distinctes pour $\psi_J(q)$ et $\psi_g(q)$ (cf. figure 5.5a). Il est naturel de penser que cela va donner lieu à deux évolutions dynamiques différentes, comme on peut en effet le vérifier sur les figures 5.5b et 5.6. Le résultat fondamental de notre analyse est que l'équation quantique du mouvement à travers la LPA constitue une très bonne approximation de l'évolution temporelle de $\langle \hat{Q} \rangle$ si et seulement si l'état initial du système est $\psi_J(q)$ (cf. figure 5.6). Ce succès confère un certain crédit quant aux arguments développés dans ce travail.

Comme exemple additionnel et à titre de vérification, nous considérons le cas $\lambda = 0.07$. Comme prévu, les figures 5.7 et 5.8 confirment que le formalisme de l'action effective, en particulier la LPA, décrit déceimment l'évolution dynamique de la valeur moyenne de l'opérateur position lorsque l'état initial est sélectionné selon le critère (5.25). Il est

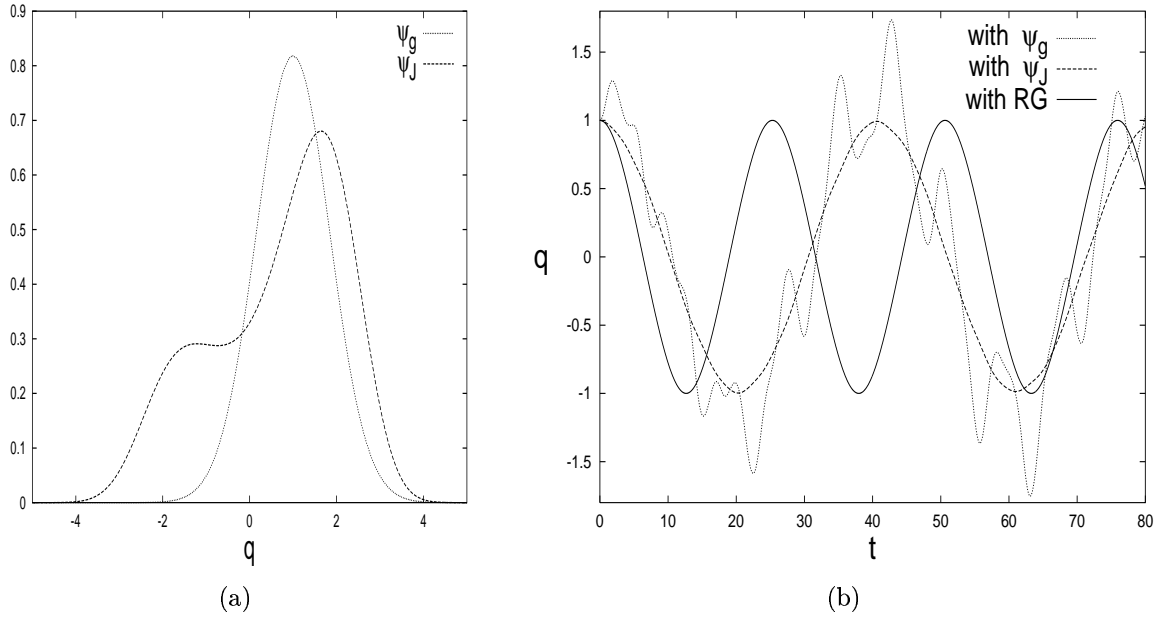


FIG. 5.7 – Le cas $\lambda = 0.07$.

(a) Paquets d'ondes initiaux $\psi_J(q)$ et $\psi_g(q)$.

(b) Évolution temporelle de $q(t)$ obtenue à partir de l'équation de Schrödinger avec les paquets d'ondes initiaux $\psi_J(q)$ et $\psi_g(q)$, et d'après l'équation (5.24) avec les conditions initiales précisées dans le texte.

intéressant de noter qu'en raison des conditions initiales choisies pour q et \dot{q} , les cas présentés ici décrivent le processus d'effet tunnel car la position initiale q_0 correspond à une énergie potentielle inférieure à la barrière de potentiel.

Comme chacun sait, un développement semi-classique de Γ à l'ordre le plus bas, soit l'approximation $\Gamma = S$, qui correspond à $V_{eff} = V_{dw}$, aurait été incapable de décrire cet effet. Nous allons montrer explicitement dans la suite que ce constat reste vrai à l'ordre suivant, à savoir dans le cas du potentiel à une boucle.

Au vu des résultats présentés, il apparaît clair que la trajectoire du paquet d'ondes gaussien dévie de plus en plus du résultat correct pour des valeurs décroissantes de λ , ce qui correspond à des effets quantiques plus importants en raison de l'effet tunnel.

C'est pourquoi cette forme gaussienne peut être employée en lieu et place du paquet d'ondes correct uniquement pour une gamme restreinte de couplage λ . C'est par exemple ce qui a été fait en [76], où les résultats obtenus avec un paquet d'ondes gaussien sont encore corrects (de la même manière que dans le cas $\lambda = 1.1$ considéré dans notre étude). Il y a là un signal clair que l'approximation semi-classique de l'équation (5.1) n'est pas

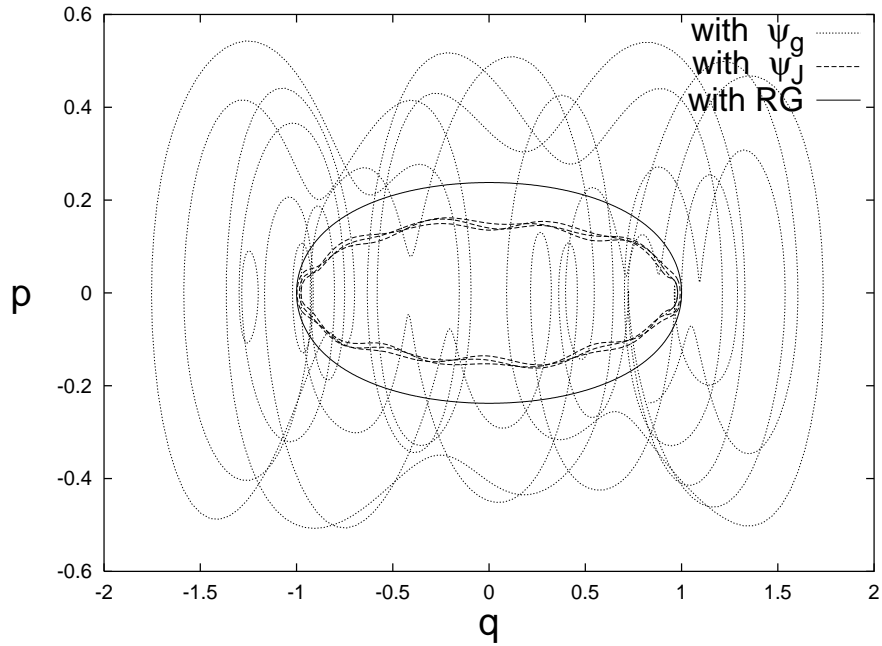


FIG. 5.8 – Diagramme position-impulsion $q - p$ pour les trois cas considérés dans la figure 5.7b ($\lambda = 0.07$).

pertinente puisque pour des valeurs perturbativement petites de λ , elle donnerait lieu à un mouvement périodique d'un paquet d'ondes à peu près gaussien autour d'un des minima classiques.

La figure 5.8 appelle un autre commentaire. En effet, pour cette faible valeur de λ , le diagramme position-impulsion obtenu avec le paquet d'ondes initial "correct", bien que qualitativement bien reproduit par l'équation quantique de mouvement (5.24), témoigne d'une certaine déviation par rapport à ce dernier. Une raison de cet écart a déjà été avancée dans [76] et concernerait l'approximation faite pour Γ , la LPA. De fait, il a été montré dans cet article que l'inclusion du terme suivant dans le développement en dérivée de l'action effective, en l'occurrence la renormalisation de la fonction d'onde Z , améliore les résultats provenant de la LPA. Cependant, comme annoncé, nous ne nous attardons pas sur ce point, car il n'y a pas encore de consensus à ce propos.

Avant de terminer cette étude, nous allons développer un peu la comparaison entre les deux approximations du potentiel effectif que sont le potentiel issu du RG et le one-loop notés respectivement V_{RG} et V^{1l} qui sont tous deux représentés sur la figure 5.9a. Comme cela est bien connu, le potentiel à une boucle ne respecte pas la propriété de convexité du potentiel effectif exact et ceci reste vrai à tous les ordres du développement en boucles.

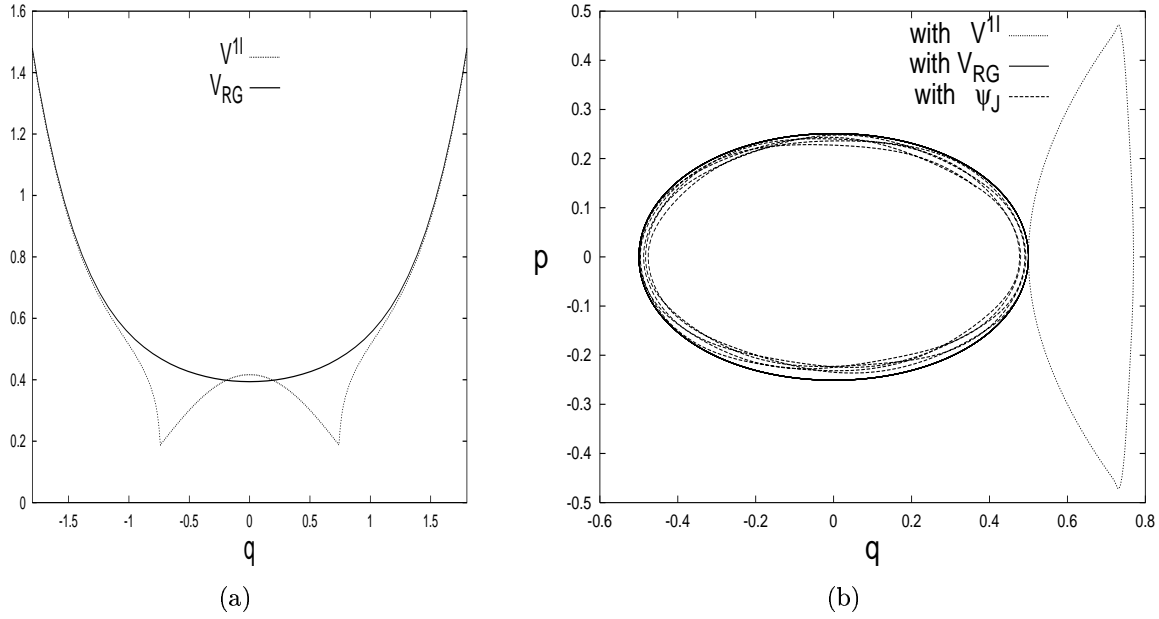


FIG. 5.9 – Comparaison entre le développement perturbatif et la méthode wilsonienne. (a) Potentiels effectifs one-loop (non convexe) et du RG (convexe). (b) Diagrammes position-impulsion obtenus à partir de l'équation (5.24) avec V_{eff} approximé par V^{1l} et V_{RG} pour un mouvement avec $q(0) = 0.5$ correspondant à une énergie inférieure à la barrière de potentiel (avec $\lambda = 0.15$). Contrairement à V_{RG} , V^{1l} échoue totalement à décrire l'effet tunnel.

De plus, dans la région interne entre les deux points d'inflexion du potentiel classique, V^{1l} comporte une partie imaginaire. Selon l'interprétation habituelle [61], ce phénomène signale l'instabilité des configurations dans cette région. Sur la figure 5.9a, seule la partie réelle du potentiel est montrée puisque c'est elle seule qui est prise en compte dans les problèmes dynamiques.

Une manière possible pour calculer V^{1l} analytiquement est de remplacer U_k'' par U_Λ'' (rappelons que $U_\Lambda = V_{dw}$) dans le membre de droite de l'équation (5.23) et d'effectuer l'intégration élémentaire de $k = \Lambda$ à $k = 0$. C'est une méthode que nous avons déjà utilisée et qui revient à résoudre l'équation de flot du RG dans l'approximation où les modes sont indépendants. On obtient alors $V^{1l} = V_{dw} + \delta V^{1l}$. On développe ensuite en $\frac{1}{\Lambda}$ et on néglige les termes ne dépendant pas de q pour aboutir à l'expression suivante (cf. Annexe B pour les détails) de la correction one-loop :

$$\begin{cases} \delta V^{1l} = \frac{1}{\pi} \sqrt{V_{dw}''} \arctan \frac{\Lambda}{\sqrt{V_{dw}''}} + O\left(\frac{1}{\Lambda}\right) & \text{pour } |x| > \frac{1}{\sqrt{12\lambda}} \\ \delta V^{1l} = -\frac{1}{2\pi} \frac{V_{dw}''}{\Lambda} + O\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) + \frac{i}{2} \sqrt{-V_{dw}''} & \text{pour } |x| < \frac{1}{\sqrt{12\lambda}} \end{cases} \quad (5.26)$$

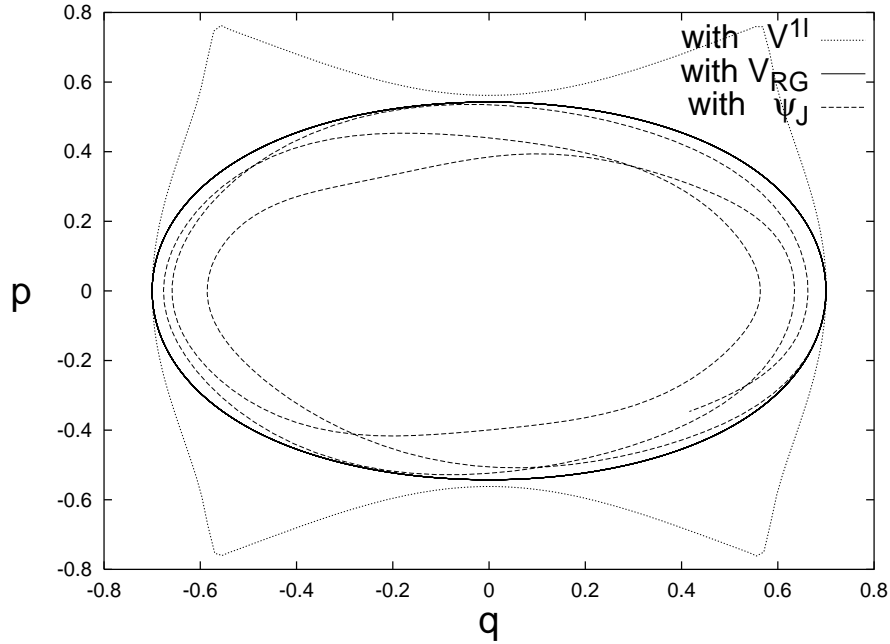


FIG. 5.10 – Diagrammes position-impulsion obtenus à partir de l'équation (5.24) avec V_{eff} approximé par V^{1l} et V_{RG} pour un mouvement avec $q(0) = 0.7$ correspondant à une énergie supérieure à la barrière de potentiel (avec $\lambda = 0.25$).

Même si maintenant V^{1l} explore tout l'espace q , de nouveau le mouvement est très bien reproduit par V_{RG} et non par V^{1l} .

Les équations précédentes indiquent que dans la région $|x| < \frac{1}{\sqrt{12\lambda}}$, la partie réelle de δV^{1l} est nulle à la limite $\Lambda \rightarrow \infty$. La comparaison entre les figures 5.9a et 5.2 confirme également que, dans la région intérieure, V^{1l} est pratiquement égal à V_{dw} . C'est un nouvel exemple qui rappelle, comme chacun sait, que le développement en boucles ne peut pas changer la concavité de V_{dw} .

Il est clair que pour le type de problème considéré ici, à savoir le processus d'effet tunnel, le potentiel effectif one-loop est aussi inadéquat que le potentiel classique V_{dw} pour approximer V_{eff} dans l'équation (5.24). La figure 5.9b en est l'illustration, où il est montré que, pour une position initiale correspondant à une énergie inférieure à la barrière de potentiel, le mouvement est évidemment confiné dans un seul puits. La connaissance des résultats du développement semi-classique, permet d'affirmer que ce type de phénomène ne peut, à aucun ordre fini du développement, être décrit par l'équation (5.24) avec un potentiel effectif semi-classique. En revanche, V_{RG} , la solution de l'équation (5.23), qui constitue l'ordre le plus bas de l'approximation du développement en gradient, offre une très bonne représentation de l'effet tunnel en mécanique quantique ordinaire.

Afin d'approfondir la comparaison, nous avons également considéré un mouvement pour lequel les conditions initiales donnent à la particule une énergie supérieure à la barrière de potentiel. Bien entendu, dans ce cas, en utilisant V^{1l} dans l'équation (5.24), nous obtenons une solution qui explore toute la région de l'espace de la même façon que pour V_{RG} . Cependant, la figure 5.10 confirme une nouvelle fois et sans conteste que la description correcte du mouvement est donnée par V_{RG} et non par V^{1l} .

De plus, on peut remarquer sur la figure 5.10 que la seule zone où l'approximation à une boucle décrit correctement le mouvement est celle où les valeurs de la position sont les plus extrêmes (associées aux valeurs minimales de l'impulsion), c'est-à-dire pour la région qui correspond à la partie la plus externe du potentiel. Cette observation concorde avec ce que nous avons déjà vérifié auparavant, à savoir que le développement en boucles constitue une bonne approximation *uniquement* dans la région située *au-delà* des minima.

5.6 Conclusions et perspectives

Ce travail nous a permis de montrer qu'une utilisation idoine de l'équation quantique du mouvement $\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi} = 0$ implique d'être attentif à un certain nombre de questions.

En premier lieu, nous avons dû nous assurer que nous étions dans des conditions telles que l'argument de Γ , le champ classique $\phi(\vec{x}, t)$, constituait bien la valeur moyenne de l'opérateur quantique $\hat{\Phi}(\vec{x})$ dans un état donné $|\psi, t\rangle$, ce qui n'est pas automatique.

Une fois ces conditions établies, nous avons montré que les états asymptotiques $|in\rangle$ et $|out\rangle$ qui entrent dans la définition variationnelle de l'action effective doivent être pris en compte de manière appropriée lors de la détermination de la fonctionnelle d'onde initiale $\Psi[\phi(\vec{x}, t_0)]$ associée au mouvement de $\phi(\vec{x}, t)$. Plus précisément, en utilisant un développement en dérivée pour Γ nous avons prouvé qu'il est possible de déterminer un état initial unique $\Psi[\phi(\vec{x}, t_0)]$ à partir des conditions aux limites pour le mouvement de $\phi(\vec{x}, t)$ en choisissant une variété $t = t_0$ (temps initial) en concordance avec les conditions asymptotiques relatives aux états $|in\rangle$ et $|out\rangle$.

Pour des conditions initiales particulièrement importantes dans les applications, en l'occurrence le cas d'un champ initial ϕ constant et aux dérivées nulles à $t = t_0$, nous avons été à même de montrer qu'en vertu du théorème de Gell-Mann et Low, le paquet d'ondes (fonctionnel) initial est donné par l'équation de Schrödinger indépendante du temps avec une source constante J_0 . La valeur J_0 est celle que prend la source à la fin de son allumage adiabatique. La relation (5.11) obtenue, qui est l'un des résultats fondamentaux de notre

travail, correspond par ailleurs à l'équation définissant le potentiel effectif à travers le principe variationnel statique.

Pour finir, nous avons aussi montré que dans le cadre de la LPA, où l'équation quantique du mouvement prend la forme de l'équation classique du mouvement dans laquelle le potentiel classique est remplacé par le potentiel effectif, une approximation fiable de ce dernier est obtenue par la résolution des équations wilsoniennes du RG correspondantes. À l'inverse, l'emploi d'un potentiel one-loop, et plus généralement d'une approximation à un ordre fini du développement en boucles pour V_{eff} , est inapproprié pour décrire correctement la dynamique de $\phi(\vec{x}, t)$.

Tous ces points ont été illustrés par des exemples de mécanique quantique. Le cas simple de l'oscillateur harmonique a confirmé analytiquement le bien-fondé de notre approche, laquelle a été ensuite appliquée au problème non-trivial du double puits (par un traitement numérique cette fois-ci) et s'est révélée en très bon accord avec les résultats exacts. En effet, l'intérêt de considérer des exemples de mécanique quantique est d'avoir l'opportunité de calculer l'évolution dynamique des paquets d'ondes via l'équation de Schrödinger dépendante du temps et d'obtenir ainsi les solutions exactes (numériques). Le bon accord entre ces dernières et nos résultats nous a ainsi permis de valider nos conjectures.

Un aspect a été volontairement occulté dans ce travail, à savoir l'extension possible de l'étude de la dynamique aux ordres suivants du développement en gradient de Γ . Ce serait certainement intéressant d'explorer l'impact de l'inclusion de termes non-locaux dans Γ . Cependant, en raison des interrogations soulevées par cette extension lors des calculs des niveaux énergétiques au chapitre 3, cette piste d'investigation demeure délicate.

En revanche, l'utilisation de ces enseignements en QFT, où il est impossible de résoudre exactement les équations du mouvement (Heisenberg ou Schrödinger), offre un vaste champ d'applications dans lesquelles nous espérons nous plonger dans le futur. Entre autres, notre analyse pourrait se révéler être un bon outil de travail pour l'étude de la dynamique quantique de l'inflaton dans le cadre des modèles inflationnaires en cosmologie.

Avant de conclure cette thèse, nous allons esquisser les thématiques de recherche sur lesquels nous travaillons actuellement ou qui sont prévus dans un avenir proche. Nous explorons deux pistes en particulier : l'étude non-perturbative du mécanisme de la brisure de symétrie induite par corrections radiatives proposé par Coleman et Weinberg [13] et l'utilisation d'une nouvelle équation du RG invariante par reparamétrisation [14].

*« On ne fait jamais attention à ce qui a été fait ;
on ne voit que ce qui reste à faire. »*

Marie Curie

6

Perspectives de recherche

Fort des succès précédents, nous envisageons actuellement deux autres axes principaux de recherche. Tout d'abord, la mise en évidence de l'extrapolation illégitime dans le régime UV du potentiel effectif de Higgs du SM nous a logiquement conduit à nous intéresser au mécanisme de brisure dynamique de symétrie proposé par Coleman et Weinberg [13]. En effet, ce processus de création d'un potentiel à symétrie brisée à partir des corrections radiatives nous pose encore question, notamment au niveau du fonctionnement de ce mécanisme dans la région IR en regard de la convexité du potentiel effectif. D'autre part, comme nous l'avons déjà évoqué au chapitre 2, nous aimerions explorer les propriétés d'une nouvelle formulation des équations du RG [14], qui est invariante par reparamétrisation. Les applications potentielles d'une telle équation non-perturbative sont considérables car cette dernière s'applique aux théories de jauge.

6.1 Modèle de Coleman et Weinberg

La compréhension de la cause de l'instabilité du vide électrofaible dans le secteur de Higgs, en l'occurrence l'extrapolation des équations du RG au-delà de leur domaine de validité, a mis en évidence que la propriété de convexité du potentiel effectif ne saurait être prise en défaut et que, partant de là, son non-respect peut constituer l'indication

d'une certaine pathologie. C'est dans cette optique que nous nous sommes tournés vers la question du mécanisme de Coleman et Weinberg [13]. Leur célèbre modèle montre comment les corrections radiatives dues au champ électromagnétique peuvent *induire* une brisure de symétrie sur un potentiel scalaire classique quartique. Les auteurs montrent ainsi que lorsque la contribution radiative du photon est du même ordre de grandeur que la constante de couplage quartique ($\lambda \sim e^4$), il se crée un potentiel renormalisé avec symétrie brisée de la forme suivante :

$$V_{cw}(\phi) \propto \phi^4 \ln \frac{\phi}{\mu}. \quad (6.1)$$

On se rend aisément compte que pour des valeurs de ϕ inférieures à μ , le potentiel devient négatif. Ce comportement, dû au logarithme, se trouve contre-balançé par le terme ϕ^4 en facteur qui domine pour les faibles valeurs de ϕ , ce qui impose $V_{cw}(0) = 0$. Ce type de potentiel n'est pas très éloigné qualitativement du potentiel double puits déjà considéré.

Néanmoins, la concavité (partielle) de V_{cw} après renormalisation est de nouveau en contradiction avec la propriété de convexité du potentiel effectif. Notre intuition initiale est donc de voir si, à l'instar du potentiel de Higgs, cette entorse à la convexité peut être causée par une extrapolation des calculs perturbatifs hors de leur domaine de validité, mais cette fois-ci dans la région infrarouge.

De la même façon que pour le problème de l'instabilité, il n'est pas nécessaire de prendre en compte toute la structure de jauge du photon et il est possible d'étudier le phénomène à l'aide de deux champs scalaires [36].

6.1.1 Modèle de deux champs scalaires non-massifs

Appelons ϕ le champ scalaire dont on veut calculer le potentiel effectif et B le champ scalaire de notre modèle qui remplace le champ électromagnétique de l'étude originale de Coleman et Weinberg. Le lagrangien d'un tel système s'écrit :

$$S[\phi] = \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla B)^2 + \frac{1}{2} g^2 \phi^2 B^2 + V(\phi) + \hbar \delta V(\phi) \right), \quad (6.2)$$

où $\frac{1}{2} g^2 \phi^2 B^2$ représente le terme d'interaction et $\hbar \delta V(\phi) = \hbar \delta V^\phi(\phi) + \hbar \delta V^B(\phi)$ les contre-termes respectifs pour ϕ et B .

Le potentiel classique $V(\phi)$ est quartique :

$$V(\phi) = \frac{\lambda}{24} \phi^4. \quad (6.3)$$

L'amplitude de persistance du vide s'écrit pour ce système :

$$Z(J) = N \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + V(\phi) - J\phi + \hbar \delta V(\phi) \right) \right\} \\ \int \mathcal{D}B \exp \left\{ -\frac{1}{\hbar} \int d^4x \left(\frac{1}{2} (\nabla B)^2 + \frac{1}{2} g^2 \phi^2 B^2 \right) \right\}. \quad (6.4)$$

L'intégrale sur le champ B étant quadratique, elle peut être calculée exactement et est égale à $\det(\nabla^2 + g^2\phi^2)^{-\frac{1}{2}}$. En développant $\phi(x)$ autour d'un unique point de selle ϕ_0 , soit $\phi = \phi_0 + \hbar^{\frac{1}{2}}\eta$, et en se limitant aux termes d'ordre $O(\hbar)$ au maximum, l'expression de Z devient :

$$Z(J) = N e^{-\frac{\Omega}{\hbar}(V(\phi_0) - J\phi_0 + \hbar \delta V(\phi_0) + \frac{\hbar}{2\Omega} \text{Tr} \ln(k^2 + g^2 \phi_0^2))} \int \mathcal{D}\eta e^{-\frac{1}{2} \int d^4x ((\nabla\eta)^2 + V''(\phi_0)\eta^2(x))}. \quad (6.5)$$

Alors, si l'on suit la stratégie perturbative habituelle, les corrections radiatives issues du champ B ainsi que les contre-termes sont formellement d'ordre \hbar et ne contribuent pas (à cet ordre) à l'intégrale sur η . La quantité $V''(\phi_0)$ qui apparaît ci-dessus est égale à $\frac{\lambda}{2}\phi_0^2$, donc l'intégrale gaussienne peut être effectuée et les contre-termes sont bien définis par la procédure de renormalisation. $Z(J)$ s'écrit finalement :

$$Z(J) = N e^{-\frac{\Omega}{\hbar} \left(V(\phi_0) - J\phi_0 + \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(k^2 + g^2 \phi_0^2) + \hbar \delta V^B(\phi_0) + \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(k^2 + V''(\phi_0)) + \hbar \delta V^\phi(\phi_0) \right)}. \quad (6.6)$$

Connaissant la relation entre le champ classique ϕ_c et le point de selle ϕ_0 , à savoir [16] $\phi_c = \phi_0 + O(\hbar)$, la définition (2.31) de l'action effective donne directement l'expression du potentiel effectif :

$$V_{eff}(\phi_c) = V(\phi_c) + \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(k^2 + g^2 \phi_c^2) + \hbar \delta V^B(\phi_c) \\ + \frac{\hbar}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \ln(k^2 + V''(\phi_c)) + \hbar \delta V^\phi(\phi_c) + O(\hbar^2). \quad (6.7)$$

L'application des conditions de renormalisation habituelles (cf. [13]) donne le potentiel one-loop renormalisé suivant :

$$V^{1l}(\phi) = \frac{\lambda}{24} \phi^4 + \frac{\hbar g^4}{64\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\phi^2}{\mu^2} \right) - \frac{25}{6} \right] + \frac{\hbar \lambda^2}{256\pi^2} \left[\ln \left(\frac{\phi^2}{\mu^2} \right) - \frac{25}{6} \right]. \quad (6.8)$$

Si la combinaison $\frac{\hbar g^4}{64\pi^2}$ est de l'ordre de λ , alors les corrections radiatives dues aux champ scalaire B sont capables d'induire une brisure de symétrie. Dans ce cas, on peut naturellement négliger la correction radiative relative au champ ϕ . Le potentiel (6.8) correspond au résultat de Coleman et Weinberg.

6.1.2 Remarques et pistes d'investigations

La question qui se pose immédiatement à la lecture du raisonnement précédent est comment est-il possible d'obtenir un potentiel effectif non-convexe. Les réponses proposées [36,89] ont montré que l'intégration (6.5) ne peut pas être réalisée pour l'ensemble de tous les modes puisque, dans l'IR, l'approximation d'un point de selle unique n'est plus valable. Cette observation permet de justifier ensuite la construction de Maxwell pour le potentiel one-loop non-convexe.

Nous nous sommes alors demandé s'il était possible de retrouver ce résultat à partir de l'équation du RG valable dans la phase brisée [26]. Les premiers résultats tendent à montrer que l'équation (4.3) est en effet capable de reproduire la construction de Maxwell en dépit de la forme non polynomiale du potentiel. Cependant, c'est une observation au niveau de l'arbre et la prise en compte des corrections à l'ordre suivant pose encore question.

Concernant le raisonnement de [36], nous avons remarqué que les corrections radiatives relatives au champ B ne sont pas prises en compte dans l'intégrale de chemin pour le champ ϕ étant données que ces dernières sont formellement d'ordre \hbar . Cependant, la condition de base du mécanisme de Coleman et Weinberg est que la constante de couplage λ soit du même ordre de grandeur que la correction radiative $\frac{\hbar g^4}{64\pi^2}$. Il semble donc délicat de négliger cette dernière devant λ dans l'intégrale (6.4). Lorsque l'on essaie de prendre en compte cette contribution, on rencontre un certain nombre de difficultés en raison de la non-analyticité du potentiel effectif en $\phi = 0$. Cette question est activement étudié et nous espérons pouvoir clarifier ce point dans un futur proche.

Nous allons encore mentionner deux observations. La première, qui peut apparaître un peu évidente, a tout de même son importance. En effet, on se rend facilement compte que le mécanisme de Coleman et Weinberg ne peut fonctionner que si les divergences quadratiques des champs scalaires sont supprimées. Dans le cas contraire, les équations du RG génèrent une masse positive énorme qui empêche catégoriquement l'apparition d'une brisure de symétrie. Cette remarque relance la question de la justification de la compensation des divergences quadratiques (qui n'est nullement garantie puisqu'aucun champ scalaire n'a encore jamais été observé). Si le scénario habituel fonctionne, il semblerait que, moyennant un "fine tuning" *ad hoc*, on soit en mesure de rendre compte du mécanisme de Coleman et Weinberg par l'approche non-perturbative wilsonienne.

Par ailleurs, l'observation des fonctions bêta révèle que la constante de couplage λ prend des valeurs négatives lorsque l'échelle de renormalisation est de l'ordre du minimum du potentiel effectif. Cette remarque souligne qu'à la différence du phénomène de brisure spontanée de symétrie où le coefficient de ϕ^2 est négatif et celui de ϕ^4 positif, dans le mécanisme de Coleman et Weinberg, il est nécessaire que le coefficient de ϕ^4 soit négatif et celui de ϕ^6 positif. Cette particularité constitue également une piste de réflexion.

Pour terminer, afin de s'affranchir des éventuelles pathologies des théories des champs sans masse (divergences IR notamment), il peut être intéressant d'introduire dans ce modèle des termes de masse, petits par rapport aux autres grandeurs du problème, afin d'avoir une liberté plus grande dans le choix des conditions de renormalisation. Cette approche est aussi en cours de développement.

Au stade actuel, notre travail ne permet pas encore de conclure sur la validité du mécanisme de Coleman et Weinberg, nous pensons cependant que notre analyse pourra apporter très prochainement un éclairage sur cette question.

6.2 Équations du groupe de renormalisation invariante de jauge

Dans un récent travail [14] une équation exacte du groupe de renormalisation invariante de jauge a été mise en place. Cette dernière est obtenue en combinant la stratégie wilsonienne habituelle avec l'approche géométrique de Vilkovisky-De Witt qui permet de définir une action effective invariante par reparamétrisation [90, 91].

Nous envisageons ici une première application simple de cette nouvelle équation du RG au modèle linéaire $O(2)$. Dans l'annexe E, nous introduirons le formalisme développé dans [14]. Ensuite, en choisissant les coordonnées polaires pour le modèle $O(2)$ (où les connexions sont naturellement non-nulles), nous vérifierons que l'on peut retrouver les équations du RG attendues pour le potentiel (au niveau de la LPA).

Un de nos objectifs actuels est d'appliquer cette équation du RG invariante par reparamétrisation dans le cas non-trivial du modèle sigma non-linéaire, pour lequel nous avons déjà entrepris des travaux préliminaires et obtenu quelques résultats intéressants.

À plus long terme, il s'agira de considérer l'équation du RG invariante de jauge (cf. [14]) dans l'espoir d'aboutir à une description non-perturbative des théories de jauge.

Conclusion

»Eine Hauptursache der Armut in den Wissenschaften ist meist eingebildeter Reichtum. Es ist nicht ihr Ziel, der unendlichen Weisheit eine Tür zu öffnen, sondern eine Grenze zu setzen dem unendlichen Irrtum.«

« Une des causes principales de la pauvreté de la science est généralement considérée comme une richesse. Son but n'est pas d'ouvrir la porte de l'infinie connaissance mais bien de fixer une limite à l'erreur infinie. »

Bertolt Brecht

Cette thèse avait pour dessein d'évaluer l'apport de l'utilisation de méthodes non-perturbatives à des problématiques de théorie des champs d'intérêt phénoménologique. En particulier, les équations exactes du groupe de renormalisation wilsonien [4, 22–25, 75] ont constitué notre outil de départ pour investiguer cette physique.

Ainsi, une première étape a été franchie en appliquant la méthode wilsonienne à la détermination de l'écart énergétique entre le niveau fondamental et le premier niveau excité dans un potentiel double puits. L'objectif était lui-même double.

D'une part, cette étude a permis de vérifier quantitativement les prédictions du RG wilsonien puisque l'on dispose, pour cette "QFT élémentaire", de la solution exacte du problème donnée par l'équation de Schrödinger. Nous avons ainsi montré que la précision des équations du RG à l'ordre le plus bas (LPA) est supérieure à 0.2% pour les niveaux d'énergie dans un potentiel anharmonique, et elle est d'environ 1% dans le cas du double puits pour des barrières de potentiel modérées. Lorsque le double puits est très marqué, l'effet tunnel devient très faible et notre méthode présente une certaine déviation par rapport aux résultats attendus. Néanmoins, le comportement qualitatif est bien reproduit puisque l'écart énergétique tend bien vers zéro pour des valeurs de constantes de couplage s'annulant.

D'autre part, ce travail a confirmé qu'en vertu de leurs propriétés non-perturbatives, les équations du RG respectent la propriété de convexité du potentiel effectif dans les théories à symétries brisées. Cette méthode témoigne ainsi de son efficacité par rapport à l'analyse perturbative habituelle dans laquelle cette propriété est perdue. L'approche wilsonienne présente donc certains atouts quant à son application aux théories qui présentent une brisure spontanée de symétrie.

C'est dans cet esprit que nous avons étendu notre travail à une problématique très importante à l'heure actuelle : la détermination de limites théoriques sur la masse du boson de Higgs dans le contexte du Modèle Standard.

En effet, il est couramment admis que le couplage de Yukawa entre le quark top et le boson de Higgs engendre un flot particulier pour la constante de couplage quartique qui peut devenir négative, ce qui semblerait indiquer que le potentiel effectif serait non limité inférieurement ("unbounded from below") et qu'en conséquence le vide électrofaible deviendrait instable. L'imposition de la contrainte phénoménologique de stabilité (voire de métastabilité) du vide EW permet alors, selon la démarche usuelle, de dériver des bornes inférieures sur la masse du Higgs [48–57].

En remarquant que cette observation est en contradiction flagrante avec la propriété de convexité du potentiel effectif, nous avons identifié l'origine de ce phénomène en mettant en évidence [11] que l'instabilité du vide EW est en réalité un artefact produit par l'extrapolation des résultats perturbatifs hors de leur domaine de validité.

En premier lieu, nous avons écarté certains arguments populaires [51, 65] qui sont souvent avancés comme la réponse au problème de l'instabilité du vide EW. Notre analyse a été fondée sur un modèle simple constitué d'un champ scalaire (correspondant au Higgs) possédant un couplage de Yukawa avec un fermion (représentant le top). À cette occasion, nous avons montré qu'il n'y a aucune incompatibilité entre la convexité du potentiel effectif et l'existence de fonctions de vertex dans la phase brisée. À cette fin, nous avons combiné l'approche de Bogolubov sur la brisure de symétrie, à savoir l'instabilité dynamique des minima classiques [69, 70], avec les équations wilsoniennes du RG. Cette approche permet de générer la construction de Maxwell au cours du flot de renormalisation et d'aller au-delà du niveau de l'arbre. Ce travail liminaire a permis de confirmer que les équations wilsoniennes habituelles, associées à celle valable dans la phase brisée (où les contributions conjointes de deux points de selle non-triviaux sont considérées) [26], constituent un outil de premier choix pour décrire le mécanisme de brisure de symétrie.

Ensuite, le résultat fondamental de cette étude a été de déceler que la cause de l'instabilité du potentiel repose sur l'extrapolation illégale du potentiel effectif renormalisé dans une région de ϕ où les résultats de la théorie des perturbations renormalisée ne sont plus valables. Autrement dit, l'instabilité *n'existe pas*. Au reste, en accord avec les théorèmes généraux [9, 10], nous avons vérifié que le potentiel effectif avec cutoff de notre modèle simplifié est bien convexe dans toute la région où il est défini.

Notre analyse a montré qu'il était nécessaire de bien comprendre la délicate connexion entre les secteurs UV et IR de la théorie pour découvrir l'origine de cette apparente instabilité. C'est pourquoi l'application naïve de la régularisation dimensionnelle, qui donne accès directement aux résultats de la théorie des perturbations renormalisée, ne permet pas de recouvrer l'erreur faite dans le raisonnement habituel : le lien entre la théorie nue et celle renormalisée est perdu.

Ainsi, pour établir nos conclusions, nous avons montré que lorsque l'on considère le SM comme une théorie effective valable jusqu'à l'échelle de la nouvelle physique Λ (démarche à la base de la détermination des bornes inférieures sur la masse du Higgs), les conditions habituelles d'applicabilité de la théorie des perturbations sont en réalité insuffisantes.

Dans notre cas de figure, la contrainte de consistance de la théorie ($\phi \leq \Lambda$) associée à l'équation (4.33), implique que la combinaison $\frac{\lambda_v}{24} + \frac{g^4}{16\pi^2} \ln \frac{v^2}{\phi^2}$, où v est l'échelle de renormalisation IR, ne peut pas être négative. Or, si l'on s'intéresse uniquement aux *résultats* de la théorie des perturbations, cette information n'apparaît pas. En effet, les équations (4.28) et (4.29), qui requièrent la petitesse des constantes de couplages et des corrections radiatives, sont généralement considérées comme les seules conditions de validité de la théorie des perturbations renormalisée. Toutefois, notre travail révèle que c'est précisément en oubliant la contrainte indépendante supplémentaire précédente que le potentiel effectif apparaît comme instable.

Par la suite, nous avons généralisé nos résultats dans un contexte non-perturbatif en conduisant l'analyse à l'aide des équations wilsoniennes du RG et en aboutissant aux mêmes conclusions.

D'un point de vue plus phénoménologique, nous avons montré que l'absence d'instabilité du potentiel effectif n'est pas un obstacle à la détermination de bornes inférieures sur la masse du Higgs. En effet, la consistance de la théorie indique que V_{eff} doit être convexe, donc la recherche du point d'inflexion de V_{eff} dans la région externe ($|\phi| > v$) fournit un critère sensé pour trouver le cutoff physique associé à une valeur donnée de λ . Si l'échelle de la nouvelle physique Λ se trouve dans la région du TeV, nous observons une différence significative puisque nos bornes donnent une valeur de M_H plus élevée d'une dizaine de GeV en comparaison des déterminations habituelles.

Au-delà de ces répercussions sur le SM, notre analyse implique aussi une profonde différence conceptuelle par rapport au raisonnement standard : la stabilité du potentiel, de même que les bornes sur M_H , ne sont qu'une manifestation de la consistance interne

de la théorie, en l'occurrence le respect de la propriété de convexité du potentiel effectif et du domaine de validité de la théorie effective ($\phi \leq \Lambda$). En revanche, dans la démarche usuelle, l'instabilité est considérée comme une possibilité théorique légitime. En d'autres termes, la stabilité du vide EW y apparaît comme une requête additionnelle dictée par des contraintes phénoménologiques. C'est la raison pour laquelle le scénario de métastabilité, basé sur les conséquences de la présence d'un vide plus bas que celui électrofaible, a pu être envisagé. Une conséquence notable de nos travaux est que ce type de scénario est définitivement exclu.

Afin d'explorer d'autres potentialités de la renormalisation non-perturbative, nous sommes penchés sur la pertinence de l'usage de l'action effective Γ pour décrire la dynamique d'un champ quantique. Notre étude détaillée [12] a permis de montrer qu'une utilisation rigoureuse de l'équation $\frac{\delta\Gamma}{\delta\phi} = 0$ comme "équation quantique du mouvement" nécessite d'être attentif à un certain nombre de points souvent ignorés.

Tout d'abord, il convient de vérifier que l'argument de Γ , le champ classique $\phi(\vec{x}, t)$, correspond bien à la valeur moyenne de l'opérateur quantique $\hat{\Phi}(\vec{x})$ dans un état donné $|\psi, t\rangle$. En effet, la définition variationnelle de l'action effective montre que $\phi(\vec{x}, t)$ n'est pas nécessairement un élément de matrice diagonal. Concernant ce point, nous avons fourni un argument indiquant que la classe des mouvements périodiques respecte bien cette condition.

Le second point, qui constitue la partie centrale de notre étude, consiste à respecter les conditions asymptotiques pour les états $|in\rangle$ et $|out\rangle$ qui entrent dans la définition de l'action effective, ce qui implique de déterminer de façon appropriée la fonctionnelle d'onde initiale $\Psi[\phi(\vec{x}, t_0)]$ associée au mouvement de $\phi(\vec{x}, t)$. En particulier, en se basant sur un développement en dérivée pour Γ , il est possible de déterminer un état initial unique $\Psi[\phi(\vec{x}, t_0)]$ à partir des conditions aux limites pour le mouvement de $\phi(\vec{x}, t)$. Il suffit pour cela de choisir une variété $t = t_0$ (instant initial) en accord avec les conditions asymptotiques pour les états $|in\rangle$ et $|out\rangle$.

Dans le cas d'un champ initial ϕ constant et dont les dérivées sont nulles à $t = t_0$, ce qui correspond à des conditions fréquemment utilisées dans les applications, le théorème de Gell-Mann et Low [88] nous a permis de démontrer que le paquet d'ondes (fonctionnel) initial est donné par l'équation de Schrödinger indépendante du temps avec une source constante. Ce résultat est très important car il permet de déterminer précisément quelle dynamique est décrite par l'équation quantique du mouvement, à savoir l'évolution de la

valeur moyenne d'un champ dont le paquet d'ondes initial obéit à la relation (5.11). Cette dernière équation se trouve d'ailleurs être celle-là même qui est utilisée pour définir le potentiel effectif à partir du principe variationnel statique.

Une troisième considération est encore nécessaire. En effet, nous avons également montré que dans le cadre de la LPA pour Γ , où l'équation quantique du mouvement prend la forme de l'équation classique du mouvement dans laquelle le potentiel classique est remplacé par le potentiel effectif, seule une approximation non-perturbative fournit un résultat fiable. La comparaison entre l'utilisation des équations wilsoniennes du RG et celle d'un développement en boucles à un ordre fini (one-loop dans notre exemple) pour calculer V_{eff} a permis de souligner l'importance d'une approximation appropriée pour une description correcte de la dynamique de $\phi(\vec{x}, t)$.

Tous ces raisonnements ont été illustrés par des exemples de mécanique quantique, de façon analytique pour le cas simple de l'oscillateur harmonique, puis numériquement pour le problème non-trivial du double puits. Un très bon accord avec les résultats exacts (fournis par l'équation de Schrödinger dépendante du temps) est obtenu si l'on respecte les critères que nous avons mis en avant. Cette observation constitue une solide confirmation de nos conjectures.

Cette analyse pourrait être un bon point de départ pour aborder des problématiques liées à la cosmologie, où nous sommes souvent amenés à étudier l'évolution dynamique de champs scalaires, comme par exemple celle de l'inflaton dans le cadre des modèles inflationnaires.

Concernant la poursuite de nos recherches, deux études sont actuellement engagées. La première envisage une exploration active du modèle de Coleman et Weinberg [13] d'un point de vue non-perturbatif. Parallèlement, l'application d'une équation du RG invariante par reparamétrisation [14] au modèle sigma non-linéaire est en cours. Nous avons bon espoir d'aboutir à des résultats intéressants pour chacun de ces problèmes.

ANNEXES

“13h26, restate my assumptions :

1, mathematics is the langage of nature

2, everything around us can be represented and understood through numbers

3, if you grab the numbers of any system, add on them each.

Therefore, there are add-ons everywhere in nature.”

« 13h26, je reformule mes hypothèses :

1, les mathématiques sont le langage de la nature

2, tout ce qui nous entoure peut être mis en équation

3, tous les chiffres d’un système donnent des séquences.

Résultat, il y a des séquences partout dans la nature. »

Darren Aronofsky

A	Schéma \overline{MS}	129
B	Régularisation par cutoff	133
C	Autres conditions de renormalisation	137
D	Potentiel RGI du Modèle Standard	139
E	Modèle $O(2)$	141

A

Schéma \overline{MS}

Notre objectif est ici de rappeler comment le potentiel à une boucle renormalisé est obtenu suivant la régularisation dimensionnelle. Nous pouvons par exemple utiliser comme point de départ l'équation du RG (2.17) correctement normalisée, soit :

$$U_{k-\delta k}(\phi) = U_k(\phi) + \frac{1}{2} \int' \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \ln \left(\frac{p^2 + U_k''(\phi)}{p^2} \right), \quad (\text{A.1})$$

dans laquelle on considère désormais que la dimension est formellement égale à $d = 4 - 2\epsilon$. Il suffit alors de prendre des bornes d'intégration infinies au lieu de celles de la shell et d'approximer U_k'' par U_Λ'' dans le membre de droite de l'équation (A.1). Ainsi, l'expression du potentiel one-loop renormalisé s'écrit :

$$V^{1l} = V_{cl} + \frac{1}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln \left(\frac{k^2 + V_{cl}''(\phi)}{k^2} \right), \quad (\text{A.2})$$

où $V^{1l} \equiv U_0$, $V_{cl} \equiv U_\Lambda$ et $V_{cl}''(\phi) = m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^2$.

Afin d'être plus général, considérons l'intégrale :

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln \left(\frac{k^2 + M^2}{k^2} \right) \\ &= \int_0^{M^2} da \left[\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 + a} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

L'intégrale entre crochet est un cas particulier d'intégrale de boucles habituelle dont le résultat est bien connu (cf. [21] par exemple) :

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + a)^n} = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(n - \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(n)} a^{\frac{d}{2} - n}. \quad (\text{A.4})$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{M^2} da \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) a^{\frac{d}{2} - 1} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right)}{d/2} (M^2)^{\frac{d}{2}} \\ &= \left(\frac{M^2}{4\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)}{\frac{d}{2}\left(1 - \frac{d}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

où l'on a utilisé la relation :

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \quad (\text{A.6})$$

dans la dernière ligne.

Nous pouvons maintenant écrire explicitement la dimension comme $d = 4 - 2\epsilon$:

$$I = - \left(\frac{M^2}{4\pi}\right)^2 \left[\left(\frac{4\pi}{M^2}\right)^\epsilon \frac{\Gamma(\epsilon)}{(2 - \epsilon)(1 - \epsilon)} \right]. \quad (\text{A.7})$$

En développant la fonction $\Gamma(1 + \epsilon)$ autour de la valeur 1 et à l'aide de l'équation (A.6), on trouve $\Gamma(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} - \gamma + O(\epsilon)$, où $\gamma = -\Gamma'(1)$ est la constante d'Euler. Avec cette relation et en réalisant le développement limité en ϵ du dénominateur de l'équation (A.7), cette dernière devient :

$$I = - \left(\frac{M^2}{4\pi}\right)^2 \left[\left(\frac{4\pi}{M^2}\right)^\epsilon \left(\frac{1}{\epsilon} - \gamma\right) \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right) (1 + \epsilon) \right]. \quad (\text{A.8})$$

En considérant $x = e^{\ln x}$, il est clair que :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x^\epsilon}{\epsilon} = \ln x + \frac{1}{\epsilon}. \quad (\text{A.9})$$

L'équation (A.9) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{2} \left(\frac{M^2}{4\pi}\right)^2 \left[\left(\ln \frac{4\pi}{M^2} + \frac{1}{\epsilon} - \gamma\right) \left(1 + \frac{3}{2}\epsilon\right) \right] \\ I &= -\frac{1}{2} \left(\frac{M^2}{4\pi}\right)^2 \left[\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) - \ln(M^2) + \frac{3}{2} \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Le schéma \overline{MS} stipule alors que les contre-termes doivent compenser les trois premiers termes apparaissant dans l'expression entre crochets. De plus, il faut également introduire la quantité arbitraire μ pour respecter la dimensionnalité dans ce schéma de régularisation. Au final, cela revient à l'opération formelle [21] :

$$\frac{1}{\epsilon} - \gamma + \ln(4\pi) \rightarrow \ln(\mu^2). \quad (\text{A.11})$$

On obtiendrait rigoureusement le même résultat en définissant individuellement chacun des contre-termes pour la masse, la constante de couplage et le champ.

Le résultat final de l'application du schéma \overline{MS} est donc :

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \ln \left(\frac{k^2 + M^2}{k^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{M^2}{4\pi} \right)^2 \left(\ln \frac{M^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right). \quad (\text{A.12})$$

On peut alors déterminer le potentiel one-loop à partir de l'équation (A.2) :

$$V^{\text{1l}} = m^2 \frac{\phi^2}{2} + \lambda \frac{\phi^4}{24} + \frac{\left(m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^2\right)^2}{64\pi^2} \left(\ln \frac{m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right), \quad (\text{A.13})$$

dans laquelle les paramètres sont définis à l'échelle renormalisée μ .

B

Régularisation par cutoff

B.1 Calcul en 4 dimensions

Il s'agit ici de calculer le potentiel à un boucle renormalisé pour une théorie avec un champ scalaire massif en utilisant la régularisation par cutoff. À partir de l'équation du RG (2.20) en 4 dimensions :

$$k \frac{\partial U_k(\phi)}{\partial k} = -\frac{k^4}{16\pi^2} \ln \left(\frac{k^2 + U_k''(\phi)}{k^2} \right), \quad (\text{B.1})$$

on peut procéder à l'intégration analytique entre 0 et Λ en une seule étape en remplaçant U_k'' par U_Λ'' dans le membre de droite de l'équation (B.1). Dans le schéma de régularisation par cutoff, on calcule le potentiel effectif en fonction du cutoff fini Λ , ce sont ensuite les conditions de renormalisation qui permettent d'obtenir le potentiel renormalisé à l'échelle IR μ . Gardant à l'esprit que $U_\Lambda \equiv V_{cl}$ et $U_0 \equiv V_B^{1l}$, l'expression du potentiel one-loop nu s'écrit :

$$V_B^{1l} = V_{cl} + \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\Lambda dk k^3 \ln \left(\frac{k^2 + U_\Lambda''(\phi)}{k^2} \right). \quad (\text{B.2})$$

Étant donné que $U_\Lambda'' = m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^2$, avec $m^2 < 0$, il faut distinguer les deux cas de figures $U_\Lambda'' \geq 0$ et $U_\Lambda'' < 0$.

Dans le premier cas, on doit calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^\Lambda dk k^3 \ln(k^2 + a) \quad \text{avec } a = U_\Lambda'' \geq 0 \quad \text{pour } |\phi| \geq \sqrt{\frac{-2m^2}{\lambda}} \quad (\text{B.3})$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\Lambda^2} dK K \ln(K+a) \quad \text{avec } K = k^2. \quad (\text{B.4})$$

En intégrant ensuite I par partie avec $dU = K dK$ et $V = \ln(K+a)$, on a $U = \frac{K^2}{2}$ et $dV = \frac{dK}{K+a}$, soit :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{K^2}{2} \ln(K+a) \right]_0^{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \int_0^{\Lambda^2} dK \frac{K^2}{K+a} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left[K^2 \ln(K+a) \right]_0^{\Lambda^2} - \int_0^{\Lambda^2} dK \left(K + \frac{a^2}{K+a} - a \right) \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \left[K^2 \ln(K+a) - \frac{K^2}{2} + aK \right]_0^{\Lambda^2} - a^2 \int_0^{\Lambda^2} dK \frac{1}{K+a} \right\} \\ I &= \frac{1}{4} \left[k^4 \ln(k^2+a) - a^2 \ln(k^2+a) - \frac{k^4}{2} + a k^2 \right]_0^{\Lambda}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

De la même façon, on calcule l'intégrale J lorsque $U''_{\Lambda} < 0$:

$$J = \int_0^{\Lambda} dk k^3 \ln(k^2 - b) \quad \text{avec } b = -U''_{\Lambda} > 0 \quad \text{pour } |\phi| < \sqrt{\frac{-2m^2}{\lambda}} \quad (\text{B.6})$$

$$= \int_{\sqrt{b}}^{\Lambda} dk k^3 \ln(k^2 - b) + \int_0^{\sqrt{b}} dk k^3 \left(i\pi + \ln(b - k^2) \right). \quad (\text{B.7})$$

Nous avons prolongé ici le logarithme dans l'espace complexe (à l'aide de $e^{i\pi} = -1$) lorsque son argument devient négatif (pour $\sqrt{b} \leq k$). Cette apparition d'une partie complexe dans le potentiel à une boucle témoigne, selon l'interprétation habituelle [61], de l'instabilité des configurations dans cette région.

Cette spécificité mise à part, l'intégration se fait comme précédemment, et on trouve :

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{4} \left[k^4 \ln(b - k^2) - b^2 \ln(b - k^2) - \frac{k^4}{2} - b k^2 + i\pi k^4 \right]_0^{\sqrt{b}} \\ &+ \frac{1}{4} \left[k^4 \ln(k^2 - b) - b^2 \ln(k^2 - b) - \frac{k^4}{2} - b k^2 \right]_{\sqrt{b}}^{\Lambda} \\ &= \frac{1}{4} \left[k^4 \ln|k^2 - b| - b^2 \ln|k^2 - b| - \frac{k^4}{2} - b k^2 \right]_0^{\Lambda} + i\pi \frac{b^2}{4}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

On peut alors combiner les expressions (B.5) et (B.8) pour obtenir le résultat compact suivant :

$$\int_0^{\Lambda} dk k^3 \ln(k^2 + U''_{\Lambda}) = \frac{1}{4} \left[k^4 \ln|k^2 + U''_{\Lambda}| - U''_{\Lambda}{}^2 \ln|k^2 + U''_{\Lambda}| - \frac{k^4}{2} + U''_{\Lambda} k^2 \right]_0^{\Lambda} + i\pi \frac{U''_{\Lambda}{}^2}{4}. \quad (\text{B.9})$$

Pour obtenir le potentiel one-loop nu, il faut encore retrancher à l'équation (B.9) la quantité :

$$\int_0^\Lambda dk k^3 \ln(k^2) = \frac{1}{4} \left[k^4 \ln(k^2) - \frac{k^4}{2} \right]_0^\Lambda. \quad (\text{B.10})$$

On peut maintenant écrire V_B^{1l} :

$$\begin{aligned} V_B^{1l} &= V_{cl} + \frac{1}{64\pi^2} \left[k^4 \ln|k^2 + U_\Lambda''| - k^4 \ln(k^2) - U_\Lambda''^2 \ln|k^2 + U_\Lambda''| + U_\Lambda'' k^2 \right]_0^\Lambda + i\pi U_\Lambda''^2 \\ V_B^{1l} &= V_{cl} + \frac{1}{64\pi^2} \left\{ \Lambda^4 \ln \frac{|\Lambda^2 + U_\Lambda''|}{\Lambda^2} + U_\Lambda''^2 \ln \frac{|U_\Lambda''|}{|\Lambda^2 + U_\Lambda''|} + U_\Lambda'' \Lambda^2 + i\pi U_\Lambda''^2 \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

On retrouve bien ainsi la partie bosonique du potentiel nu à une boucle (4.13) avant implémentation des conditions de renormalisation. Ces dernières sont généralement choisie comme :

$$\left. \frac{d^2 V^{1l}}{d\phi^2} \right|_{\phi=\mu} = m_R^2 \quad \text{et} \quad \left. \frac{d^4 V^{1l}}{d\phi^4} \right|_{\phi=\mu} = \lambda_R. \quad (\text{B.12})$$

Toutefois, les conditions de renormalisation reste largement arbitraires (en ce qui concerne les contre-termes finis), donc un autre choix est également envisageable comme nous pourrons en voir un exemple dans l'annexe suivante.

B.2 Calcul en une dimension

Déterminons maintenant le potentiel effectif one-loop en mécanique quantique, autrement dit pour une théorie des champs à une seule dimension temporelle et zéro dimension spatiale. L'équation du RG (2.20) s'écrit alors :

$$k \frac{\partial U_k(x)}{\partial k} = -\frac{k}{2\pi} \ln \left(\frac{k^2 + U_k''(x)}{k^2} \right). \quad (\text{B.13})$$

L'approximation à une boucle revient à remplacer $U_k''(x)$ par $U_\Lambda''(x) = \frac{m_\Lambda^2}{2} x^2 + \lambda_\Lambda x^4$ dans le membre de droite de l'équation (B.13) et à effectuer l'intégration entre 0 et Λ .

Le potentiel one-loop est donc donné par :

$$V^{1l} = U_\Lambda + \frac{1}{2\pi} \int_0^\Lambda dk \ln \left(\frac{k^2 + U_\Lambda''(x)}{k^2} \right). \quad (\text{B.14})$$

Comme précédemment, il convient de distinguer deux situations, selon que U_Λ'' soit positif ou négatif.

Dans le premier cas, on considère l'intégrale I , définie comme :

$$I = \int_0^\Lambda dk \ln(k^2 + a^2) \quad \text{avec} \quad a = \sqrt{U_\Lambda''} > 0 \quad \text{pour} \quad |x| > \sqrt{\frac{m_\Lambda^2}{12\lambda}}. \quad (\text{B.15})$$

En intégrant par partie avec $dU = dk$ et $V = \ln(k^2 + a^2)$, on a $U = k$ et $dV = \frac{2k dk}{k^2 + a^2}$, soit :

$$\begin{aligned} I &= \left[k \ln(k^2 + a^2) \right]_0^\Lambda - 2 \int_0^\Lambda dk \frac{k^2}{k^2 + a^2} \\ &= \left[k \ln(k^2 + a^2) \right]_0^\Lambda - 2 \int_0^\Lambda dk + 2a^2 \int_0^\Lambda \frac{dk}{k^2 + a^2} \\ &= \left[k \ln(k^2 + a^2) - 2k + 2a \arctan\left(\frac{k}{a}\right) \right]_0^\Lambda. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

De la même façon, on calcule l'intégrale J lorsque $U''_\Lambda < 0$:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\Lambda dk \ln(k^2 - b^2) \quad \text{avec } b = \sqrt{-U''_\Lambda} \geq 0 \quad \text{pour } |x| \leq \sqrt{\frac{m^2}{12\lambda}} \\ &= \int_0^b dk \left(i\pi + \ln(b^2 - k^2) \right) + \int_b^\Lambda dk \ln(k^2 - b^2). \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

On note ici encore la présence d'une composante complexe qui reflète l'instabilité des configurations dans la région interne [61] et l'inadéquation de l'approximation en boucles dans cette zone.

Cela étant, l'intégration se fait de manière analogue et on trouve :

$$\begin{aligned} J &= \left[k \ln(b^2 - k^2) - 2k + i\pi k \right]_0^b + 2b^2 \int_0^b \frac{dk}{b^2 - k^2} + \left[k \ln(k^2 - b^2) - 2k \right]_b^\Lambda - 2b^2 \int_b^\Lambda \frac{dk}{k^2 - b^2} \\ &= \left[k \ln(b^2 - k^2) - 2k + 2b \operatorname{arctanh}\left(\frac{k}{b}\right) \right]_0^b + i\pi b + \left[k \ln(k^2 - b^2) - 2k + 2b \operatorname{arccotanh}\left(\frac{k}{b}\right) \right]_b^\Lambda \\ &= \left[k \ln|k^2 - b^2| - 2k + b \ln \frac{k+b}{|k-b|} \right]_0^\Lambda + i\pi b. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Pour obtenir le potentiel à une boucle, il faut aussi retrancher aux équations (B.16) et (B.18) la quantité :

$$\int_0^\Lambda dk \ln(k^2) = \left[k \ln(k^2) - 2k \right]_0^\Lambda. \quad (\text{B.19})$$

On peut maintenant écrire V^{1l} :

$$V^{1l} = U_\Lambda + \frac{1}{2\pi} \Lambda \ln \frac{|\Lambda^2 + U''_\Lambda|}{\Lambda^2} + \frac{1}{2\pi} \begin{cases} 2\sqrt{U''_\Lambda} \arctan\left(\frac{\Lambda}{\sqrt{U''_\Lambda}}\right) & \text{pour } |x| > \sqrt{\frac{m^2}{12\lambda}} \\ \sqrt{-U''_\Lambda} \ln \frac{\Lambda + \sqrt{-U''_\Lambda}}{|\Lambda - \sqrt{-U''_\Lambda}|} + i\pi\sqrt{-U''_\Lambda} & \text{pour } |x| \leq \sqrt{\frac{m^2}{12\lambda}} \end{cases}. \quad (\text{B.20})$$

En développant en puissances de Λ , on vérifie bien (cf. équation (5.26)) que la contribution de la partie interne est d'ordre $O(\Lambda^{-1})$, ce qui signifie que le potentiel one-loop n'est pratiquement pas modifié dans cette région. Cela implique naturellement que la propriété de convexité n'est pas satisfaite au travers de cette approximation.

Par ailleurs, on peut remarquer qu'aucune divergence n'apparaît en une dimension, ce qui illustre l'inanité de la renormalisation en mécanique quantique.

C

Autres conditions de renormalisation

Il s'agit ici de calculer le potentiel renormalisé de l'équation (4.24), dans lequel les conditions de renormalisation permettent de fixer la position du minimum et la courbure en ce point de façon à ce qu'elles correspondent aux valeurs classiques. Ces conditions s'écrivent donc naturellement :

$$\left. \frac{dV^{1l}}{d\phi} \right|_{\phi=v} = 0 \quad (\text{C.1})$$

$$\left. \frac{d^2V^{1l}}{d\phi^2} \right|_{\phi=v} = \frac{\lambda v^2}{3} = -2m^2, \quad (\text{C.2})$$

avec $v = \sqrt{\frac{-6m^2}{\lambda}}$. À partir de l'équation (4.17) on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{dV^{1l}}{d\phi} &= \phi \left(m^2 + \delta m^2 + (\lambda + \delta\lambda) \frac{\phi^2}{6} + \left(\frac{\lambda}{32\pi^2} - \frac{g^2}{4\pi^2} \right) \Lambda^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda}{32\pi^2} \left(m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2 \right) \ln \frac{m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2}{\Lambda^2} - \frac{g^4 \phi^2}{4\pi^2} \ln \frac{g^2 \phi^2}{\Lambda^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

La condition (C.1) devient alors :

$$\begin{aligned} 0 &= \delta m^2 + \delta\lambda \frac{v^2}{6} + \left(\frac{\lambda}{32\pi^2} - \frac{g^2}{4\pi^2} \right) \Lambda^2 \\ &\quad + \frac{\lambda}{32\pi^2} \left(m^2 + \frac{\lambda}{2} v^2 \right) \ln \frac{m^2 + \frac{\lambda}{2} v^2}{\Lambda^2} - \frac{g^4 v^2}{4\pi^2} \ln \frac{g^2 v^2}{\Lambda^2}. \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

En dérivant V^{1l} par rapport à ϕ une seconde fois, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 V^{1l}}{d\phi^2} &= m^2 + \delta m^2 + \left(\frac{\lambda}{32\pi^2} - \frac{g^2}{4\pi^2} \right) \Lambda^2 + \frac{\lambda}{32\pi^2} \left(m^2 + \frac{3}{2} \lambda \phi^2 \right) \ln \frac{m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2}{\Lambda^2} \\ &+ \frac{\phi^2}{2} \left(\lambda + \delta\lambda + \frac{\lambda}{16\pi^2} - \frac{3g^4}{2\pi^2} \left(\ln \frac{g^2 \phi^2}{\Lambda^2} + \frac{2}{3} \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

et la condition (C.2) s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 &= \delta m^2 + \delta\lambda \frac{v^2}{2} + \left(\frac{\lambda}{32\pi^2} - \frac{g^2}{4\pi^2} \right) \Lambda^2 + \frac{\lambda}{32\pi^2} \left(m^2 + \frac{3}{2} \lambda v^2 \right) \ln \frac{m^2 + \frac{\lambda}{2} v^2}{\Lambda^2} \\ &+ \frac{v^2}{2} \left(\frac{\lambda^2}{16\pi^2} - \frac{3g^4}{2\pi^2} \left(\ln \frac{g^2 v^2}{\Lambda^2} + \frac{2}{3} \right) \right). \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

En combinant les équations (C.4) et (C.6), on arrive aux expressions finales des contre-terms :

$$\delta\lambda = \frac{3g^4}{2\pi^2} \left(\ln \frac{g^2 v^2}{\Lambda^2} + 1 \right) - \frac{3\lambda^2}{32\pi^2} \left(\ln \frac{m^2 + \frac{\lambda}{2} v^2}{\Lambda^2} + 1 \right) \quad (\text{C.7})$$

$$\delta m^2 = \left(\frac{g^2}{4\pi^2} - \frac{\lambda}{32\pi^2} \right) \Lambda^2 - \frac{\lambda m^2}{32\pi^2} \left(\ln \frac{m^2 + \frac{\lambda}{2} v^2}{\Lambda^2} + 3 \right) - \frac{g^4 v^2}{4\pi^2}. \quad (\text{C.8})$$

En insérant ces résultats (C.7) et (C.8) dans V^{1l} , donné par l'équation (4.17), on obtient le potentiel renormalisé suivant :

$$\begin{aligned} V^{1l} &= \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{\lambda}{24} \phi^4 + \frac{\left(m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2 \right)^2}{64\pi^2} \left(\ln \frac{m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi^2}{m^2 + \frac{\lambda}{2} v^2} - \frac{3}{2} \right) \\ &- \frac{g^4 \phi^4}{16\pi^2} \left(\ln \frac{\phi^2}{v^2} - \frac{3}{2} \right) + \frac{v^2}{2} \phi^2 \left(\frac{3\lambda^2}{32\pi^2} - \frac{g^4}{4\pi^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Si l'on néglige la contribution bosonique, on vérifie que l'équation (C.9) est bien le potentiel one-loop renormalisé (4.24) que l'on a tracé sur la figure 4.5.

D

Potentiel RGI du Modèle Standard

Nous allons ici donner des précisions relatives au calcul du potentiel one-loop RGI du SM utilisé lors du chapitre 4. Suivant [56], les "conditions de matching", c'est-à-dire les relations entre les constantes de couplage et les masses physiques des particules, sont, pour le boson de Higgs et le quark top :

$$M_H^2(t) = m_H^2(t^*) \frac{\xi^2(t^*)}{\xi^2(t)} + Re \left(\Pi(p^2 = M_H^2) - \Pi(p^2 = 0) \right) \quad (D.1)$$

$$M_t = m_t(M_t) \left(1 + \frac{g_s(M_t)^2}{3\pi^2} \right), \quad (D.2)$$

où Π est la self-énergie du Higgs (l'expression explicite complète se trouve dans l'appendice A de [56]). De plus, bien que le potentiel effectif exact soit indépendant d'échelle (équation de Callan-Symanzik), ce n'est vrai qu'approximativement pour V^{1l} et V_{RGI} . La valeur t^* du paramètre t qui apparaît dans l'équation (D.1) est choisie de façon à minimiser la dépendance de V_{RGI} par rapport au choix de l'échelle courante $\mu(t) = M_Z e^t$. La valeur de $\mu(t^*)$ correspondante est dans notre cas : $\mu(t^*) \sim 130$ GeV. En omettant les contributions (négligeables) du Higgs et du boson de Goldstone, la valeur de $m_H^2(t^*)$ est donnée par [56] :

$$\begin{aligned} m_H^2(t^*) &= \xi^2(t^*) v^2 \left(\frac{\lambda(t^*)}{3} + \frac{3}{64\pi^2} \left\{ g_1^4(t^*) \left[\log \frac{g_1^2(t^*) \xi^2(t^*) v^2}{4 \mu^2(t^*)} + \frac{2}{3} \right] \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{2} [g_1^2(t^*) + g_2^2(t^*)]^2 \left[\log \frac{[g_1^2(t^*) + g_2^2(t^*)] \xi^2(t^*) v^2}{4 \mu^2(t^*)} + \frac{2}{3} \right] \right\} \right) \end{aligned}$$

$$- 8 g^4(t^*) \log \left. \frac{g^2(t^*) \xi^2(t^*) v^2}{2 \mu^2(t^*)} \right\} , \quad (\text{D.3})$$

où l'on reconnaît la relation au niveau de l'arbre pour m_H^2 dans le premier terme du membre de droite de l'équation, tandis que les contributions suivantes proviennent des corrections de boucle.

Les valeurs aux limites des constantes de couplage sont similaires à celles de [56] :

$$\begin{cases} g_1(M_Z) = 0.650 & ; & g(M_t) = 0.9635 \\ g_2(M_Z) = 0.355 & ; & g_s(M_Z) = 1.218 \\ \gamma(M_Z) = 0 & ; & \Upsilon(M_Z) = 0 \end{cases} , \quad (\text{D.4})$$

ce qui correspond à $M_W = 80$ GeV, $M_Z = 91.2$ GeV, $M_t = 175$ GeV et $\alpha_s(M_Z) = 0.118$.

Les conditions de matching sont données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} M_W^2(M_Z) &= \frac{1}{4} g_1^2(M_Z) v^2 & ; & \quad m_t(M_t) = \frac{1}{2} g^2(M_t) \xi^2(M_t) v^2 \\ M_Z^2(M_Z) &= \frac{1}{4} (g_1^2(M_Z) + g_2^2(M_Z))^{\frac{1}{2}} v^2 & ; & \quad \alpha_s(M_Z) = \frac{g_s(M_Z)}{4\pi} . \end{aligned} \quad (\text{D.5})$$

La constante de couplage $\lambda(M_Z)$ est gardée comme paramètre libre.

Comme expliqué dans le chapitre 4, en choisissant différentes valeurs de $\lambda(M_Z)$, on détermine des cutoffs physiques distincts. Ainsi, il en découle des bornes inférieures sur la masse du Higgs en fonction de l'échelle de la nouvelle physique.

Il faut également noter que, pour maintenir la position des minima à ses valeurs phénoménologiques, la masse m^2 doit être fixée par la condition : $\frac{\leq \phi(t^*) \geq}{\xi(t^*)} = v = 246.22$ GeV, ce qui revient à [56] :

$$\begin{aligned} m^2(t^*) &= -\xi^2(t^*) v^2 \left(\frac{\lambda(t^*)}{6} + \frac{3}{64\pi^2} \left\{ \frac{1}{2} g_1^4(t^*) \left[\log \frac{g_1^2(t^*) \xi^2(t^*) v^2}{4 \mu^2(t^*)} - \frac{1}{3} \right] \right. \right. \\ &+ \frac{1}{4} [g_1^2(t^*) + g_2^2(t^*)]^2 \left[\log \frac{[g_1^2(t^*) + g_2^2(t^*)] \xi^2(t^*) v^2}{4 \mu^2(t^*)} - \frac{1}{3} \right] \\ &\left. \left. - 4 g^4(t^*) \left[\log \frac{g^2(t^*) \xi^2(t^*) v^2}{2 \mu^2(t^*)} - 1 \right] \right\} \right) . \end{aligned} \quad (\text{D.6})$$

Toutes les conditions aux limites étant établies, on peut alors résoudre numériquement le système d'équations du RG pour les constantes de couplage courantes. Il en résulte l'équation (4.40) du chapitre 4 pour l'expression du potentiel $V_{RGI}(\phi)$.

Nous terminons cette annexe en donnant les valeurs aux limites des constantes de couplage correspondant aux données expérimentales récentes de M_Z , M_W , α_s et M_t considérées dans le chapitre 4 : $g_1(M_Z) = 0.653$, $g_2(M_Z) = 0.349$, $g_s(M_Z) = 1.223$ et $g(M_t) = 0.980$.

E

Modèle $O(2)$

Cette annexe s'attaque à un premier test de l'applicabilité de l'équation non-perturbative du RG invariante par reparamétrisation issue des travaux de [14].

Le point de départ cette démarche consiste à se servir de la transformée de Legendre partielle pour le champ classique $\bar{\phi}$ dont les modes appartiennent au régime UV :

$$\Gamma_k[\bar{\phi}_<, \bar{\phi}_>] = W_k[\bar{\phi}_<, J_>] - J_> \bar{\phi}_> \quad \text{avec} \quad \bar{\phi}_> = \frac{\delta W_k[\bar{\phi}_<, J_>]}{\delta J_>}, \quad (\text{E.1})$$

les composantes UV et IR étant notées par les indices respectifs $>$ et $<$.

On écrit alors l'action effective comme :

$$\Gamma_k[\bar{\phi}] = \int \mathcal{D}\phi_> e^{-S[\bar{\phi}_<, \phi_>] + (\phi^a - \bar{\phi}^a)\Gamma_k[\bar{\phi}]_a}, \quad (\text{E.2})$$

où la lettre a représente de manière condensée toutes les indices relatifs aux modes UV du champ et la virgule la dérivation par rapport à $\bar{\phi}_>$. Ensuite, le raisonnement habituel de Wegner et Houghton [4] permet d'aboutir à une équation du RG sous la forme familière :

$$\Gamma_{k-\delta k} = \Gamma_k + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\det \Gamma_{k,AB}}{\det \Gamma_{k,ab}} \right), \quad (\text{E.3})$$

dans laquelle les indices A, B et a, b décrivent respectivement les modes contenus dans les intervalles $[k - \delta k, \Lambda]$ et $[k, \Lambda]$, ce qui indique clairement que l'on calcule le déterminant dans la shell $[k - \delta k, k]$.

Le travail de [14] consiste à tenir compte de la structure géométrique non-banale de la théorie, comme par exemple celle du modèle sigma non-linéaire ou des théories de jauge. L'équation (E.3) devient alors :

$$\Gamma_{\lambda-\delta\lambda}[\varphi_*, \bar{\phi}] = \Gamma_\lambda[\varphi_*, \bar{\phi}] + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\det \bar{\Gamma}_{\lambda A}^B}{\det \bar{\Gamma}_{\lambda a}^b} \right). \quad (\text{E.4})$$

Les quantités $\bar{\Gamma}_{ij}$ sont obtenues à partir des dérivées covariantes de l'action effective et des relations de changement de coordonnées :

$$\bar{\Gamma}_{ij} = \Gamma_{;ij} - \sigma_{;ij}^l (D^{-1})_l^k \Gamma_{,k}, \quad (\text{E.5})$$

où le point-virgule symbolise la dérivation covariante. Les expressions de σ et D et la signification de φ_* sont données explicitement dans [14].

Considérons maintenant un système de deux champs, $\phi^1(x)$ et $\phi^2(x)$ en coordonnées cartésiennes, dont l'action effective $\Gamma_k[\phi^1, \phi^2]$ est approximée comme suit :

$$\Gamma_k[\phi^1, \phi^2] = \sum_{i,j=1}^2 \int dx dy g_{\phi^{(i,x)} \phi^{(j,y)}} \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu^x \phi^i(x) \partial_\nu^y \phi^j(y) + U_k \left(\left(\phi^i(x) \phi^j(y) \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right\}. \quad (\text{E.6})$$

Il s'agit donc ici du modèle général sigma, qui peut être linéaire ou non-linéaire par rapport à l'espace de coordonnées internes (i, j) ou/et par rapport à l'espace-temps (x, y) . Le modèle linéaire, qui n'est autre que $O(2)$, est caractérisé par une métrique linéaire pour les indices internes et externes, qui prend alors la forme triviale :

$$g_{\phi^{(i,x)} \phi^{(j,y)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(x - y). \quad (\text{E.7})$$

Dans le cas d'un choix de coordonnées polaires, la métrique devient (artificiellement) non triviale et les connexions sont alors différentes de zéro. Néanmoins, les valeurs de σ sont toutes nulles, donc pour obtenir l'expression de $\bar{\Gamma}_{\lambda i}^j$, il suffit de contracter la dérivée seconde covariante $\Gamma_{;ik}$ avec la métrique g^{kj} .

Notre objectif est maintenant de déterminer l'équation du RG pour U_k à partir des relations (E.4) et (E.6).

E.1 Cas simple : coordonnées cartésiennes

Dans cette partie, nous allons utiliser les coordonnées cartésiennes, ce qui signifie que l'équation générale (E.4) se ramène à l'équation habituelle :

$$\Gamma_{k-\delta k}[\phi] - \Gamma_k[\phi] = \frac{1}{2} \text{Tr}' \ln \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi_s^i(x) \delta \phi_s^j(y)} \right), \quad (\text{E.8})$$

où la notation Tr' signifie que l'on considère la trace dans la shell $[k - \delta k, k]$ pour les indices externes ainsi que la trace dans l'espace interne. Cette simplification permet de résoudre facilement le problème afin de pouvoir par la suite comparer ce résultat avec celui découlant de l'utilisation de l'équation (E.4). En effet, dans la partie suivante, nous ferons le calcul avec les coordonnées polaires dans l'espace des impulsions, ce qui amène des complications géométriques puisque les connexions sont alors non-nulles.

À partir des équations (E.6) et (E.7), on voit immédiatement que $\Gamma_k[\phi_1, \phi_2]$ prend la forme :

$$\Gamma_k[\phi^1, \phi^2] = \sum_{l=1}^2 \int dz \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu^z \phi^l(z) \partial_\mu^z \phi^l(z) + U_k \left((\phi^l(z) \phi^l(z))^{\frac{1}{2}} \right) \right\}. \quad (\text{E.9})$$

Dans toute la suite de cette étude, la sommation sur l'espace interne sera implicite. Maintenant, nous devons calculer $\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi_s^i(x) \delta \phi_s^j(y)}$ avant d'en déterminer la trace. Avec l'indice s permettant de rappeler que nous procédons aux dérivées dans la shell, on trouve :

$$\frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi_s^i(x)} = \sum_{l=1}^2 \int dz \left\{ \partial_\mu^z \phi^l(z) \delta_l^i \partial_\mu \delta(z-x) + \frac{\delta}{\delta \phi_s^i(x)} U_k \left((\phi^l(z) \phi^l(z))^{\frac{1}{2}} \right) \right\},$$

En introduisant $\rho(z) = (\phi^l(z) \phi^l(z))^{\frac{1}{2}}$, on obtient :

$$\frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi_s^i(x)} = \int dz \left\{ -\partial_\mu^z \partial_\mu^z \phi^i(z) \delta(z-x) + \frac{\delta U_k}{\delta \rho(z)} \frac{\delta \rho(z)}{\delta \phi_s^i(x)} \right\}. \quad (\text{E.10})$$

Il est facile de montrer que :

$$\frac{\delta \rho(z)}{\delta \phi_s^i(x)} = \frac{1}{\rho(z)} \phi_s^i(z) \delta(x-z).$$

On obtient ainsi, en abandonnant l'indice s dans le membre de droite :

$$\frac{\delta \Gamma_k}{\delta \phi_s^i(x)} = -\partial_\mu^x \partial_\mu^x \phi^i(x) + \frac{1}{\rho(x)} \frac{\delta U_k}{\delta \rho(x)} \phi^i(x). \quad (\text{E.11})$$

En dérivant cette équation (E.11) par rapport à $\phi_s^j(y)$, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi_s^i(x) \delta \phi_s^j(y)} &= -\partial_\mu^x \partial_\mu^x (\delta(x-y) \delta^{ij}) - \frac{1}{\rho^2(x)} \frac{1}{\rho(y)} \phi^j(y) \delta(x-y) \frac{\delta U_k}{\delta \rho(x)} \phi^i(x) \\ &+ \frac{1}{\rho(x)} \frac{\delta^2 U_k}{\delta \rho(x) \delta \rho(y)} \frac{1}{\rho(y)} \phi^j(y) \delta(x-y) \phi^i(x) + \frac{1}{\rho(x)} \frac{\delta U_k}{\delta \rho(x)} \delta(x-y) \delta^{ij} \\ \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi_s^i(x) \delta \phi_s^j(y)} &= \left(-\delta^{ij} \square^x - \frac{1}{\rho^3(x)} \frac{\delta U_k}{\delta \rho(x)} \phi^i(x) \phi^j(x) + \frac{1}{\rho^2(x)} \frac{\delta^2 U_k}{\delta \rho(x) \delta \rho(y)} \phi^i(x) \phi^j(x) \right. \\ &+ \left. \delta^{ij} \frac{1}{\rho(x)} \frac{\delta U_k}{\delta \rho(x)} \right) \delta(x-y). \end{aligned} \quad (\text{E.12})$$

Considérons maintenant l'approximation LPA qui consiste à choisir un champ constant tel que $(\phi^1(x), \phi^2(x)) = (\rho_0, 0) = \phi_0$. De cette manière, l'expression (E.11) lorsque $\phi^i(x) = \phi_0$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi_s^i(x) \delta \phi_s^j(y)} \Big|_{\phi^i(x)=\phi_0} &= \left(-\delta^{ij} \square^x - \frac{1}{\rho_0^3} U'_k(\rho_0) \phi_0^i \phi_0^j + \frac{1}{\rho_0^2} U''_k(\rho_0) \phi_0^i \phi_0^j + \delta^{ij} \frac{1}{\rho_0} U'_k(\rho_0) \right) \delta(x-y) \\ \frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi_s^i(x) \delta \phi_s^j(y)} \Big|_{\phi^i(x)=\phi_0} &= \begin{pmatrix} -\square^x + U''_k(\rho_0) & 0 \\ 0 & -\square^x + \frac{U'_k(\rho_0)}{\rho_0} \end{pmatrix} \delta(x-y). \end{aligned} \quad (\text{E.13})$$

Puisque l'on a des champs constants $(\phi^1(x), \phi^2(x)) = (\rho_0, 0)$, le terme de quadrivolume Ω se factorise dans l'expression de l'action effective :

$$\Gamma_{k-\delta k}[\phi_0] - \Gamma_k[\phi_0] = \Omega (U_{k-\delta k}(\rho_0) - U_k(\rho_0)). \quad (\text{E.14})$$

En combinant ce résultat avec notre équation du RG (E.8), on trouve :

$$\begin{aligned} U_{k-\delta k}(\rho_0) - U_k(\rho_0) &= \frac{1}{2\Omega} \text{Tr}' \ln \left(\frac{\delta^2 \Gamma_k}{\delta \phi_s^i(x) \delta \phi_s^j(y)} \Big|_{\phi^i(x)=\phi_0} \right) \\ &= \frac{1}{2\Omega} \text{tr}' \ln \left[\left(-\square + U''_k(\rho_0) \right) \delta(x-y) \right] + \frac{1}{2\Omega} \text{tr}' \ln \left[\left(-\square + \frac{U'_k(\rho_0)}{\rho_0} \right) \delta(x-y) \right], \end{aligned} \quad (\text{E.15})$$

où tr' est la trace dans l'espace externe seulement (et toujours dans la shell).

Calculons explicitement la trace dans l'espace des implusions :

$$\begin{aligned} U_{k-\delta k}(\rho_0) - U_k(\rho_0) &= \frac{1}{2\Omega} \int d^4x \int' \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \langle p | \ln \left[\left(-\square + U''_k(\rho_0) \right) \right] \\ &\quad + \ln \left[\left(-\square + \frac{U'_k(\rho_0)}{\rho_0} \right) \right] |x \rangle \langle x| p \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int' \frac{q^3 dq}{(2\pi)^4} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \left[\ln(q^2 + U''_k(\rho_0)) + \ln \left(q^2 + \frac{U'_k(\rho_0)}{\rho_0} \right) \right] \\ &= \frac{1}{16\pi^2} k^3 \delta k \left[\ln(k^2 + U''_k(\rho_0)) + \ln \left(k^2 + \frac{U'_k(\rho_0)}{\rho_0} \right) \right]. \end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\frac{\partial}{\partial k} U_k(\rho_0) = -\frac{k^3}{16\pi^2} \ln \left[\left(k^2 + U''_k(\rho_0) \right) \left(k^2 + \frac{U'_k(\rho_0)}{\rho_0} \right) \right]. \quad (\text{E.16})$$

C'est l'équation du RG désirée pour potentiel U_k pour le modèle $O(2)$, obtenue suivant la LPA, $\phi^i(x) = \phi_0$. Il s'agit de vérifier si l'équation générale (E.4) est à même de retrouver ce résultat pour une géométrie non-triviale, en l'occurrence en raisonnant avec des coordonnées polaires.

E.2 Expression en coordonnées polaires

On note les coordonnées polaires sous la forme : $\alpha^{(1,x)} = \rho(x)$ et $\alpha^{(2,x)} = \theta(x)$. On peut alors déterminer la métrique en utilisant la formule standard de changement de coordonnées :

$$g_{\alpha^{(i,x)} \alpha^{(j,y)}} = \int dz dt \frac{\partial \phi^{(l,z)}}{\partial \alpha^{(i,x)}} \frac{\partial \phi^{(m,t)}}{\alpha^{(j,y)}} g_{\phi^{(l,z)} \phi^{(m,t)}} . \quad (\text{E.17})$$

Étant donné que :

$$\begin{cases} \phi^{(1,z)} = \rho(z) \cos \theta(z) \\ \phi^{(2,z)} = \rho(z) \sin \theta(z) \end{cases} ,$$

on déduit facilement les relations :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi^{(1,z)}}{\partial \alpha^{(1,x)}} = \cos \theta(z) \delta(x - z) \\ \frac{\partial \phi^{(1,z)}}{\partial \alpha^{(2,x)}} = -\rho(z) \sin \theta(z) \delta(x - z) \\ \frac{\partial \phi^{(2,z)}}{\partial \alpha^{(1,x)}} = \sin \theta(z) \delta(x - z) \\ \frac{\partial \phi^{(2,z)}}{\partial \alpha^{(2,x)}} = \rho(z) \cos \theta(z) \delta(x - z) \end{cases} .$$

Calculons maintenant les quatres composantes de la métrique en coordonnées polaires :

$$\begin{aligned} g_{\alpha^{(1,x)} \alpha^{(1,y)}} &= \int dz dt \left\{ \frac{\partial \phi^{(1,z)}}{\partial \alpha^{(1,x)}} \frac{\partial \phi^{(1,t)}}{\alpha^{(1,y)}} + \frac{\partial \phi^{(2,z)}}{\partial \alpha^{(1,x)}} \frac{\partial \phi^{(2,t)}}{\alpha^{(1,y)}} \right\} \delta(z - t) \\ &= \int dz dt \left\{ \cos \theta(z) \delta(x - z) \cos \theta(t) \delta(y - t) + \sin \theta(z) \delta(x - z) \sin \theta(t) \delta(y - t) \right\} \delta(z - t) \\ &= \int dz \left\{ \cos^2 \theta(z) \delta(x - z) \delta(y - z) + \sin^2 \theta(z) \delta(x - z) \delta(y - z) \right\} \\ &= \cos^2 \theta(x) \delta(y - x) + \sin^2 \theta(x) \delta(y - x) \\ &= \delta(x - y) . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{\alpha^{(1,x)} \alpha^{(2,y)}} &= \int dz dt \left\{ \frac{\partial \phi^{(1,z)}}{\partial \alpha^{(1,x)}} \frac{\partial \phi^{(1,t)}}{\alpha^{(2,y)}} + \frac{\partial \phi^{(2,z)}}{\partial \alpha^{(1,x)}} \frac{\partial \phi^{(2,t)}}{\alpha^{(2,y)}} \right\} \delta(z - t) \\ &= \int dz dt \left\{ -\cos \theta(z) \delta(x - z) \rho(t) \sin \theta(t) \delta(y - t) \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta(z) \delta(x - z) \rho(t) \cos \theta(t) \delta(y - t) \right\} \delta(z - t) \\ &= \int dz \left\{ -\rho(z) \cos \theta(z) \sin \theta(z) \delta(x - z) \delta(y - z) + \rho(z) \cos \theta(z) \sin \theta(z) \delta(x - z) \delta(y - z) \right\} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

De la même façon, on trouve $g_{\alpha^{(2,x)} \alpha^{(1,y)}} = 0$.

$$g_{\alpha^{(2,x)} \alpha^{(2,y)}} = \int dz dt \left\{ \frac{\partial \phi^{(1,z)}}{\partial \alpha^{(2,x)}} \frac{\partial \phi^{(1,t)}}{\alpha^{(2,y)}} + \frac{\partial \phi^{(2,z)}}{\partial \alpha^{(2,x)}} \frac{\partial \phi^{(2,t)}}{\alpha^{(2,y)}} \right\} \delta(z - t)$$

$$\begin{aligned}
&= \int dz dt \left\{ [-\rho(z) \sin \theta(z) \delta(x-z)] [-\rho(t) \sin \theta(t) \delta(y-t)] \right. \\
&+ \left. \rho(z) \cos \theta(z) \delta(x-z) \rho(t) \cos \theta(t) \delta(y-t) \right\} \delta(z-t) \\
&= \int dz \left\{ \rho^2(z) \sin^2 \theta(z) \delta(x-z) \delta(y-z) + \rho^2(z) \cos^2 \theta(z) \delta(x-z) \delta(y-z) \right\} \\
&= \rho^2(x) \left(\sin^2 \theta(x) \delta(y-x) + \cos^2 \theta(x) \delta(y-x) \right) \\
&= \rho(x)^2 \delta(x-y).
\end{aligned} \tag{E.18}$$

Finalement on obtient :

$$\begin{aligned}
g_{\alpha^{(i,x)} \alpha^{(j,y)}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2(x) \end{pmatrix} \delta(x-y) \\
g_{\alpha^{(i,x)} \alpha^{(j,y)}} &= \bar{g}_{ij}(\underline{\alpha}(x)) \delta(x-y).
\end{aligned} \tag{E.19}$$

E.3 Transformation de Fourier

On décompose maintenant les coordonnées polaires en séries de Fourier :

$$\rho(x) = \sum_p \rho_p e^{ipx}, \quad \theta(x) = \sum_p \theta_p e^{ipx}.$$

De manière plus générale, les relations ci-dessus s'écrivent comme :

$$\alpha^{(i,x)} = \sum_q \alpha^{(i,q)} e^{iqx}. \tag{E.20}$$

La métrique s'écrit alors dans l'espace conjugué comme :

$$\begin{aligned}
g_{\alpha^{(i,p)} \alpha^{(j,q)}} &= \int dx dy \frac{\partial \alpha^{(l,x)}}{\partial \alpha^{(i,p)}} \frac{\partial \alpha^{(m,y)}}{\alpha^{(j,q)}} g_{\alpha^{(l,x)} \alpha^{(m,y)}} \\
&= \int dx dy \left[\sum_{q'} \delta_{p,q'} \delta_i^l e^{iq'x} \right] \left[\sum_{q''} \delta_{q,q''} \delta_j^m e^{iq''y} \right] \bar{g}_{lm}(\underline{\alpha}(x)) \delta(x-y) \\
&= \int dx \delta_i^l e^{ipx} \delta_j^m e^{iqx} \bar{g}_{lm}(\underline{\alpha}(x)) \\
&= \int dx \bar{g}_{ij}(\underline{\alpha}(x)) e^{i(p+q)x} \\
&= \int dx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2(x) \end{pmatrix} e^{i(p+q)x}.
\end{aligned} \tag{E.21}$$

Les deux termes diagonaux sont donc :

$$\begin{aligned}
\int dx e^{i(p+q)x} &= \delta(p+q) \quad \text{et} \\
\int dx \rho^2(x) e^{i(p+q)x} &= \int dx \sum_{p_1} \sum_{p_2} \rho_{p_1} \rho_{p_2} e^{i(p+q+p_1+p_2)x} \\
&= \sum_{p_1, p_2} \rho_{p_1} \rho_{p_2} \delta(p+q+p_1+p_2).
\end{aligned}$$

On obtient alors l'expression compacte :

$$g_{\alpha^{(i,p)} \alpha^{(j,q)}} = \begin{pmatrix} \delta(p+q) & 0 \\ 0 & \sum_{p_1, p_2} \rho_{p_1} \rho_{p_2} \delta(p+q+p_1+p_2) \end{pmatrix}. \quad (\text{E.22})$$

Si l'on considère le développement :

$$\rho(x) = \rho_0 + \sum_{p \neq 0} \rho_p e^{ipx}, \quad (\text{E.23})$$

alors dans l'approximation du potentiel local, à savoir $\rho(x) \simeq \rho_0$, on obtient l'expression suivante pour la métrique :

$$g_{\alpha^{(i,p)} \alpha^{(j,q)}} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho_0^2 \end{pmatrix} \delta(p+q). \quad (\text{E.24})$$

Dans le but de calculer les connexions Γ_{ij}^k nous avons besoin de connaître le tenseur métrique inverse $g^{\alpha^{(j,q)} \alpha^{(l,k)}}$. On peut ainsi montrer qu'en postulant que :

$$g^{\alpha^{(j,q)} \alpha^{(l,k)}} = \int dy \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2(y)} \end{pmatrix} e^{-i(q+k)y}, \quad (\text{E.25})$$

nous retrouvons bien :

$$\sum_{j,q} g_{\alpha^{(i,p)} \alpha^{(j,q)}} g^{\alpha^{(j,q)} \alpha^{(l,k)}} = \mathcal{I}.$$

En effet, le calcul explicite donne :

$$\begin{aligned} \sum_{j,q} g_{\alpha^{(i,p)} \alpha^{(j,q)}} g^{\alpha^{(j,q)} \alpha^{(l,k)}} &= \sum_q \int dx \int dy \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \rho^2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho^2(y)} \end{pmatrix} e^{i(p+q)x} e^{-i(q+k)y} \\ &= \int dx dy \left[\sum_q e^{iq(x-y)} \right] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{\rho^2(x)}{\rho^2(y)} \end{pmatrix} e^{ipx} e^{-iky} \\ &= \int dx \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{i(p-k)x} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \delta(p-k) = \mathcal{I}. \end{aligned}$$

On est maintenant en mesure de déterminer les connexions $\Gamma_{\alpha^{(jq)} \alpha^{(lk)}}^{\alpha^{(ip)}}$, définies par :

$$\Gamma_{\alpha^{(jq)} \alpha^{(lk)}}^{\alpha^{(ip)}} = \frac{1}{2} g^{\alpha^{(ip)} \alpha^{(mq_1)}} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha^{(jq)} \alpha^{(mq_1)}}}{\partial \alpha^{(lk)}} + \frac{\partial g_{\alpha^{(lk)} \alpha^{(mq_1)}}}{\partial \alpha^{(jq)}} - \frac{\partial g_{\alpha^{(jq)} \alpha^{(lk)}}}{\partial \alpha^{(mq_1)}} \right\}, \quad (\text{E.26})$$

qui nous permettrons de calculer la dérivée covariante de l'action effective.

La simple observation de l'équation (E.22) révèle que seule la dérivée $\frac{\partial g_{\alpha(2p)\alpha(2q)}}{\partial \alpha(1k)}$ est non-nulle. On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\alpha(2p)\alpha(2q)}}{\partial \alpha(1k)} &= \frac{\partial}{\partial \rho_k} \left(\sum_{p_1, p_2} \rho_{p_1} \rho_{p_2} \delta(p + q + p_1 + p_2) \right) \\ &= \sum_{p_1, p_2} \rho_{p_1} \delta_{k, p_2} \delta(p + q + p_1 + p_2) + \sum_{p_1, p_2} \rho_{p_2} \delta_{k, p_1} \delta(p + q + p_1 + p_2) \\ &= 2 \sum_{p_1} \rho_{p_1} \delta(p + q + k + p_1). \end{aligned} \quad (\text{E.27})$$

Grâce à ce résultat on peut désormais calculer les différentes connexions Γ à partir de l'équation (E.26). Pour $i = 1$, on remarque que seule la valeur $m = 1$ donne naissance à des valeurs non-nulles de la métrique covariante impliquée dans la définition de la connexion. De plus, seule la combinaison $j = l = 2$ va donner lieu à des dérivées non-nulles de la métrique covariante. Finalement, pour $i = 1$, la seule contribution non-triviale est :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha(2q)\alpha(2k)}^{\alpha(1p)} &= \frac{1}{2} \sum_{q_1} g^{\alpha(1p)\alpha(1q_1)} \left\{ \frac{\partial g_{\alpha(2q)\alpha(1q_1)}}{\partial \alpha(2k)} + \frac{\partial g_{\alpha(2k)\alpha(1q_1)}}{\partial \alpha(2q)} - \frac{\partial g_{\alpha(2q)\alpha(2k)}}{\partial \alpha(1q_1)} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{q_1} \delta(p + q_1) \left(0 + 0 - 2 \sum_{p_1} \rho_{p_1} \delta(q + k + q_1 + p_1) \right) \\ &= - \sum_{p_1} \rho_{p_1} \delta(q + k - p + p_1). \end{aligned} \quad (\text{E.28})$$

Pour $i = 2$, c'est la même chose, seul le cas $m = 2$ contribue et cette fois-ci on distingue deux combinaisons qui donnent des résultats non-nuls, à savoir $j = 2, l = 1$ et $l = 2, j = 1$, qui sont égales :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha(1q)\alpha(2k)}^{\alpha(2p)} = \Gamma_{\alpha(2q)\alpha(1k)}^{\alpha(2p)} &= \frac{1}{2} \sum_{q_1} g^{\alpha(2p)\alpha(2q_1)} \left\{ 0 + \frac{\partial g_{\alpha(2q)\alpha(2q_1)}}{\partial \alpha(1k)} - 0 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{q_1} \left(\int dy \frac{e^{-i(p+q_1)y}}{\rho^2(y)} \right) \left(2 \sum_{p_1} \rho_{p_1} \delta(k + q_1 + q + p_1) \right) \\ &= \sum_{q_1, p_1} \rho_{p_1} \int dy \int dx \frac{1}{\rho^2(y)} e^{-i(p+q_1)y} e^{-i(k+q_1+q+p_1)x} \\ &= \sum_{p_1} \rho_{p_1} \int dy \int dx \frac{1}{\rho^2(y)} \sum_{q_1} e^{-i(x+y)q_1} e^{-ipy} e^{-i(k+q+p_1)x} \\ &= \sum_{p_1} \rho_{p_1} \int dx \frac{1}{\rho^2(x)} e^{-i(k+q+p_1-p)x}. \end{aligned} \quad (\text{E.29})$$

Toutes les autres connexions différentes de (E.28) et (E.29) sont nulles.

En se plaçant de nouveau dans le cadre de la LPA avec $\rho(x) = \rho_0$ et $\theta(x) = \theta_0$, les

connexions s'écrivent :

$$\begin{aligned}\Gamma_{\alpha^{(iq)}\alpha^{(jk)}}^{\alpha^{(1p)}} \Big|_{\alpha(x)=\alpha_0} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\rho_0 \end{pmatrix} \delta(q+k-p) \\ \Gamma_{\alpha^{(iq)}\alpha^{(jk)}}^{\alpha^{(2p)}} \Big|_{\alpha(x)=\alpha_0} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\rho_0} \\ \frac{1}{\rho_0} & 0 \end{pmatrix} \delta(q+k-p).\end{aligned}\quad (\text{E.30})$$

E.4 Calcul de la dérivée covariante

Nous disposons de l'approximation (E.9) pour l'action effective Γ_k , qui s'écrit en coordonnées polaires et dans l'espace de Fourier :

$$\Gamma_k[\rho, \theta] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} g_{ij}(\underline{\alpha}(x)) \partial_\mu \alpha^i(x) \partial_\mu \alpha^j(x) + U_k(\alpha) \right\}, \quad (\text{E.31})$$

où $g_{ij}(\underline{\alpha}(x))$ n'évolue pas avec l'échelle k dans l'approximation du potentiel local. Suivant l'équation (E.19), nous avons alors :

$$\begin{aligned}\Gamma_k[\rho, \theta] &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \rho(x) \partial_\mu \rho(x) + \frac{1}{2} \rho^2(x) \partial_\mu \theta(x) \partial_\mu \theta(x) + U_k(\rho(x)) \right\} \\ &= \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \sum_{p_1, p_2 \neq 0} (ip_1)(ip_2) \rho_{p_1} \rho_{p_2} e^{i(p_1+p_2)x} + \frac{1}{2} \sum_{q_1, q_2} \rho_{q_1} \rho_{q_2} e^{i(q_1+q_2)x} \right. \\ &\quad \cdot \left. \sum_{p_1, p_2 \neq 0} (ip_1)(ip_2) \theta_{p_1} \theta_{p_2} e^{i(p_1+p_2)x} + U_k(\rho_0) + U'_k(\rho_0) \tilde{\rho}(x) + \frac{1}{2} U''_k(\rho_0) \tilde{\rho}^2(x) \right\} \\ &= U_k(\rho_0) \int d^4x + \frac{1}{2} \left\{ - \sum_{p_1, p_2 \neq 0} p_1 p_2 \rho_{p_1} \rho_{p_2} \int d^4x e^{i(p_1+p_2)x} - \sum_{q_1, q_2} \sum_{p_1, p_2 \neq 0} \rho_{q_1} \rho_{q_2} p_1 p_2 \theta_{p_1} \theta_{p_2} \right. \\ &\quad \cdot \left. \int d^4x e^{i(q_1+q_2+p_1+p_2)x} + U''_k(\rho_0) \sum_{p_1, p_2 \neq 0} \rho_{p_1} \rho_{p_2} \int d^4x e^{i(p_1+p_2)x} \right\} \\ &= U_k(\rho_0) \Omega + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{p \neq 0} \rho_p \rho_{-p} (p^2 + U''_k(\rho_0)) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{q_1, q_2} \sum_{p_1, p_2 \neq 0} \rho_{q_1} \rho_{q_2} \theta_{p_1} \theta_{p_2} p_1 p_2 \delta(q_1 + q_2 + p_1 + p_2) \right\}.\end{aligned}\quad (\text{E.32})$$

Passons maintenant au calcul de $\frac{\delta \Gamma_k}{\delta \alpha^{(ip)}}$ pour $p \neq 0$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Gamma_k}{\partial \rho_p} &= \rho_{-p} (p^2 + U''_k(\rho_0)) - \sum_{q_1} \sum_{p_1, p_2 \neq 0} \rho_{q_1} \theta_{p_1} \theta_{p_2} p_1 p_2 \delta(q_1 + p + p_1 + p_2) \\ \frac{\partial \Gamma_k}{\partial \theta_p} &= - \sum_{q_1, q_2} \sum_{p_1 \neq 0} \rho_{q_1} \rho_{q_2} \theta_{p_1} p_1 p_2 \delta(q_1 + q_2 + p_1 + p).\end{aligned}\quad (\text{E.33})$$

Pour $p = 0$ nous obtenons :

$$\frac{\delta \Gamma_k}{\delta \alpha_0^i} = \begin{pmatrix} U'_k(\rho_0) \Omega \\ 0 \end{pmatrix}.\quad (\text{E.34})$$

Cela peut sembler étrange de calculer $\frac{\delta\Gamma_k}{\delta\alpha^{(ip)}}$ à $p = 0$ alors que nous savons que notre objectif est d'évaluer la dérivée seconde de Γ_k dans la shell, c'est-à-dire pour $k - \delta k < p < k$, ce qui exclut bien sûr le cas $p = 0$. En fait, nous verrons que $\frac{\delta\Gamma_k}{\delta\alpha_0^i}$ sera utile dans le calcul de $\Gamma_{k;ij}$ car les connexions présentes dans la définition de la dérivée covariante possèdent des indices libres, et non restreint à la shell, comme nous pouvons l'observer ci-dessous :

$$\Gamma_{k;ij} = \frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\alpha_s^{(ip)}\delta\alpha_s^{(jq)}} - \sum_{l,q_1} \Gamma_{\alpha^{(ip)}\alpha^{(jq)}}^{\alpha^{(lq_1)}} \frac{\delta\Gamma_k}{\delta\alpha^{(lq_1)}}. \quad (\text{E.35})$$

Il est clair que seul les indices p et q doivent appartenir à la shell, il n'y a pas de contraintes sur les indices q_1 . On peut alors déterminer la dérivée seconde dans la shell à partir de l'équation (E.33) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\Gamma_k}{\partial\rho_p\partial\rho_q} &= (p^2 + U_k''(\rho_0))\delta(p+q) - \sum_{p_1,p_2 \neq 0} \theta_{p_1}\theta_{p_2} p_1 p_2 \delta(q+p+p_1+p_2) \\ \frac{\partial^2\Gamma_k}{\partial\rho_p\partial\theta_q} &= -2 \sum_{q_1} \sum_{p_1 \neq 0} \rho_{q_1} \theta_{p_1} p_1 q \delta(q_1+p_1+q+p) \\ \frac{\partial^2\Gamma_k}{\partial\theta_p\partial\rho_q} &= -2 \sum_{q_1} \sum_{p_1 \neq 0} \rho_{q_1} \theta_{p_1} p_1 p \delta(q_1+p_1+q+p) \\ \frac{\partial^2\Gamma_k}{\partial\theta_p\partial\theta_q} &= - \sum_{q_1,q_2} \rho_{q_1}\rho_{q_2} q p \delta(q_1+q_2+q+p). \end{aligned} \quad (\text{E.36})$$

Suivant la LPA, soit :

$$\rho_0 \neq 0 \text{ et } \rho_p = 0 \ \forall p \neq 0, \quad \theta_0 \neq 0 \text{ et } \theta_p = 0 \ \forall p \neq 0,$$

nous avons :

$$\left. \frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\alpha^{(ip)}\delta\alpha^{(jq)}} \right|_{\alpha(x)=\alpha_0} = \begin{pmatrix} p^2 + U_k''(\rho_0) & 0 \\ 0 & p^2 \rho_0^2 \end{pmatrix} \delta(p+q). \quad (\text{E.37})$$

On peut finalement calculer $\Gamma_{k;ij}$ suivant la LPA :

$$\begin{aligned} \Gamma_{k;ij} \Big|_{\alpha(x)=\alpha_0} &= \left[\frac{\delta^2\Gamma_k}{\delta\alpha^{(ip)}\delta\alpha^{(jq)}} - \sum_{l,r} \Gamma_{\alpha^{(ip)}\alpha^{(jq)}}^{\alpha^{(lr)}} \frac{\delta\Gamma_k}{\delta\alpha^{(lr)}} \right]_{\alpha(x)=\alpha_0} \\ &= \begin{pmatrix} p^2 + U_k''(\rho_0) & 0 \\ 0 & p^2 \rho_0^2 \end{pmatrix} \delta(p+q) - \left[\Gamma_{\alpha^{(ip)}\alpha^{(jq)}}^{\alpha^{(1r)}} \frac{\delta\Gamma_k}{\delta\alpha^{(1r)}} - \Gamma_{\alpha^{(ip)}\alpha^{(jq)}}^{\alpha^{(2r)}} \frac{\delta\Gamma_k}{\delta\alpha^{(2r)}} \right]_{\alpha(x)=\alpha_0} \\ &\text{ce qui donne, à l'aide des relations (E.30) et (E.34) :} \\ &= \begin{pmatrix} p^2 + U_k''(\rho_0) & 0 \\ 0 & p^2 \rho_0^2 \end{pmatrix} \delta(p+q) - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\rho_0 \end{pmatrix} \delta(p+q) U_k'(\rho_0) \Omega \\ &= \begin{pmatrix} p^2 + U_k''(\rho_0) & 0 \\ 0 & p^2 \rho_0^2 + \rho_0 U_k'(\rho_0) \end{pmatrix} \delta(p+q). \end{aligned} \quad (\text{E.38})$$

La toute dernière étape consiste à déterminer la quantité $\bar{\Gamma}_i^j$, qui est (dans notre cas) la contraction de la dérivée covariante avec le tenseur métrique :

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{\alpha^{(ip)}}^{\alpha^{(jq)}} &= \Gamma_{;\alpha^{(ip)}\alpha^{(kr)}} g^{\alpha^{(kr)}\alpha^{(jq)}} \\
&= \sum_r \begin{pmatrix} p^2 + U_k''(\rho_0) & 0 \\ 0 & p^2 \rho_0^2 + \rho_0 U_k'(\rho_0) \end{pmatrix} \delta(p+r) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho_0^2} \end{pmatrix} \delta(r+q) \\
&= \begin{pmatrix} p^2 + U_k''(\rho_0) & 0 \\ 0 & p^2 + \frac{U_k'(\rho_0)}{\rho_0} \end{pmatrix} \delta(p+q). \tag{E.39}
\end{aligned}$$

Ce résultat est le même (en représentation de Fourier) que celui qui avait été obtenu en coordonnées cartésiennes (cf. équation (E.13)). Nous avons donc vérifié que l'expression covariante de Γ permet de retrouver les résultats attendus.

En fait, l'expression complète de $\bar{\Gamma}_{ij}$ est donnée par l'équation (E.5). Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la contribution provenant des termes en σ est effectivement nulle.

Bibliographie

“There is a theory which states that if ever anybody discovers exactly what the Universe is for and why it is here, it will instantly disappear and be replaced by something even more bizarre and inexplicable. There is another theory which states that this has already happened.”

« Il y a une théorie qui dit que si un jour on découvre à quoi sert l'univers et pourquoi il est là, il disparaîtra immédiatement pour être remplacé par quelque chose d'encore plus bizarre et inexplicable. Une autre théorie dit que cela s'est déjà passé. »

Douglas Adams

- [1] K.G. Wilson, Phys. Rev. B **4**, 3174 (1971) ; K.G. Wilson, Phys. Rev. B **4**, 3184 (1971) ; K.G. Wilson, M.E. Fischer, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972) ; K.G. Wilson, J. Kogut, Phys. Rep. **C 12**, 75 (1974) ; K.G. Wilson, Rev. Mod. Phys. **55**, 583 (1983).
- [2] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London **A114**, 243 (1927).
- [3] E.C.G. Stueckelberg, A. Petermann, Helv. Phys. Acta **26**, 499 (1953).
- [4] F. Wegner, A. Houghton, Phys. Rev. A **8**, 401 (1973).
- [5] E. Fermi, Nuovo Cim. **11**, 1 (1934).
- [6] G.P. Lepage, *Lectures at the VIII Jorge André Swieca Summer School*, Brazil (1997), nucl-th/9706029.
- [7] A.V. Manohar, *Lectures at Schladming Winter School* (1996), hep-th/9606222.
- [8] V. Branchina, J. Polonyi, Nucl. Phys. **B433**, 99 (1995).
- [9] K. Symanzik, Commun. Math. Phys. **16**, 48 (1970).
- [10] J. Iliopoulos, C. Itzykson, A. Martin, Rev. Mod. Phys. **47**, 165 (1975).
- [11] V. Branchina, H. Faivre, "Effective potentiel (in)stability and lower bounds on the scalar (Higgs) mass", Phys. Rev. D **72** 065017 (2005).
- [12] V. Branchina, H. Faivre, D. Zappalà, "Effective action and the quantum equation of motion", Eur. Phys. J. **C 36**, 271 (2004).
- [13] S. Coleman, E. Weinberg, Phys. Rev. D **7**, 1888 (1973).
- [14] V. Branchina, K.A. Meissner, G. Veneziano, Phys. Lett. B **574**, 319 (2003).
- [15] R.J. Rivers, *Path Integral Methods in Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1987).

- [16] P. Ramond, *Field Theory : A Modern Primer*, Addison-Wesley Publishing Compagny (1990).
- [17] Lowell S. Brown, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press (1995).
- [18] L.H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Second edition, Cambridge University Press (1996).
- [19] C. Itzykson, J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Book Compagny (1988).
- [20] C.G. Callan, Phys. Rev. D **2**, 1541 (1970) ; K. Symanzik, Commun. Math. Phys. **18**, 227 (1970).
- [21] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company (1995).
- [22] J.F. Nicoll, T.S. Chang, H.E. Stanley, Phys. Rev. Lett. **33**, 540 (1974).
- [23] A. Hasenfratz, P. Hasenfratz, Nucl. Phys. **B270**, 687 (1986).
- [24] S.B. Liao, J. Polonyi, Annals Phys. **222**, 122 (1993).
- [25] A. Bonanno, V. Branchina, H. Mohrbach, D. Zappalà, Phys. Rev. D **60**, 065009 (1999) ; V. Branchina, Phys. Rev. D **62**, 065010 (2000).
- [26] J. Alexandre, V. Branchina, J. Polonyi, Phys. Lett. B **445**, 351 (1999).
- [27] J. Alexandre, Thèse *Renormalisation en présence de condensat*, Université Louis Pasteur, Strasbourg (1998).
- [28] G. Jona-Lasinio, Nuovo Cimento **34**, 1790 (1964).
- [29] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory of Critical Phenomena*, Oxford Science Publications (1993).
- [30] W. Heisenberg, H. Euler, Z. Phys. **98**, 714 (1936).
- [31] J. Schwinger Phys. Rev. **82**, 664 (1951).
- [32] J. Goldstone, A. Salam, S. Weinberg, Phys. Rev. **127**, 965 (1962).
- [33] R. Jackiw, A. Kerman, Phys. Lett. A **71**, 158 (1979).
- [34] S. Coleman, *Aspect of symmetry*, Cambridge University Press (1985), p. 113-183 (potentiel effectif et renormalisation) et p. 265-348 (instantons).
- [35] R. B. Griffiths, "Rigorous results and theorems", in *Phase transitions and critical phenomena Vol 1* edited by C. Domb, M.S. Green, New York Academic Press (1972).

- [36] R.J. Rivers, *Z. Phys. C* **22**, 137 (1984).
- [37] A. Horikoshi, K.-I. Aoki, M. Taniguchi, H. Terao, in *Proceedings of the Workshop on the Exact Renormalization Group*, Faro, Portugal, 1998, World Scientific, Singapore (1999), hep-th/9812050.
- [38] A.S. Kapoyannis, N. Tetradis, *Phys. Lett. A* **276**, 225 (2000).
- [39] D. Zappalà, *Phys. Lett. A* **290**, 35 (2001).
- [40] W.E. Caswell, *Annals Phys.* **123**, 153 (1979).
- [41] E. Fradkins, Lecture "General Field Theory",
<http://w3.physics.uiuc.edu/~efradkin/phys582/physics582.html> (2005).
- [42] F. James, M. Roos, MINUIT (Function Minimization and Error Analysis), Users Guide, Program Library D506, CERN (1981).
- [43] The Numerical Algorithms Group Limited, NAG Fortran Library Manual, Mark 18 (1997).
- [44] B. Felsager, *Geometry, Particles and Fields*, Odense University Press (1981).
- [45] E. Gildener, A. Patrascioiu, *Phys. Rev. D* **16**, 423 (1977).
- [46] L. Landau, E. Lifchitz, *Mécanique Quantique, théorie non relativiste*, Mir (1966).
- [47] T.Hambye, K. Riesselmann, *Phys. Rev. D* **55**, 7255 (1997), ainsi que les références citées dans l'article.
- [48] N. Cabibbo, L. Maiani, G. Parisi, R. Petronzio, *Nucl. Phys.* **B158**, 295 (1979).
- [49] R.A. Flores, M. Sher, *Phys. Rev. D* **27** 1679, (1983).
- [50] M. Lindner, *Z. Phys.* **31** 295, (1986).
- [51] M. Sher, *Phys. Rep.* **179**, 273 (1989).
- [52] M. Lindner, M. Sher, H. W. Zaglauer, *Phys. Lett. B* **228**, 139 (1989).
- [53] C. Ford, D.R.T. Jones, P.W. Stephenson, M.B. Einhorn, *Nucl. Phys.* **B395**, 17 (1993).
- [54] M. Sher, *Phys. Lett. B* **317**, 159 (1993).
- [55] G. Altarelli, G. Isidori, *Phys. Lett. B* **337**, 141 (1994).
- [56] J.A. Casas, J.R. Espinosa, M. Quirós, *Phys. Lett. B* **342**, 171 (1995).
- [57] J.A. Casas, J.R. Espinosa, M. Quirós, *Phys. Lett. B* **382**, 374 (1996).
- [58] G. Isidori, G. Ridolfi, A. Strumia, *Nucl. Phys.* **B609**, 387 (2001).

- [59] D.J. Callaway, D.J. Maloof, Phys. Rev. D **27**, 406 (1983); D.J. Callaway, Phys. Rev. D **27**, 2974 (1983).
- [60] V. Branchina, P. Castorina, D. Zappalà, Phys. Rev. D **41**, 1948 (1990).
- [61] E. J. Weinberg, A. Wu, Phys. Rev. D **36**, 2474 (1987).
- [62] R. Fukuta, Prog. Theor. Phys. Rev. **56**, 258 (1976).
- [63] A. Ringwald, C. Wetterich, Nucl. Phys. **B334**, 506 (1990).
- [64] N. Tetradis, C. Wetterich, Nucl. Phys. **B383** 197 (1992).
- [65] A. Dannenberg, Phys. Lett. B **202**, 110 (1988).
- [66] M. Abazov et al. (D0 Collaboration), Nature (London) **429**, 638 (2004).
- [67] K. Holland, J. Kuti, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **129**, 765 (2004), hep-lat/0308020.
- [68] K. Holland, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **140**, 155 (2005), hep-lat/0409112.
- [69] A.S. Whitmann, in *Proceedings of the 9th Coral Gables Conference on Fundamental Interactions at High Energy*, Coral Gables, 1972, edited by G. Iverson, A. Perlmutter and S. Mintz, Plenum Press, New York (1973).
- [70] F. Strocchi, *Elements of Quantum Mechanics of Infinite Systems*, World Scientific (1986).
- [71] A. Miransky, *Dynamical symmetry breaking in quantum field theory*, World Scientific (1993).
- [72] S. Eidelman et al., Phys. Lett. B **592**, 1 (2004).
- [73] T.E. Clark, B. Haeri, S.T. Love, Nucl. Phys. **B402**, 628 (1993).
- [74] R. Fukuda, E. Kyriakopoulos, Nucl. Phys. **B85** 354, (1975); L. O’Raifeartaigh, A. Wipf, H. Yoneyama, Nucl. Phys. **B271**, 653 (1986).
- [75] A. Bonanno, D. Zappalà, Phys. Rev. D **57**, 7383 (1998).
- [76] G. Andronico, V. Branchina, D. Zappalà, Phys. Rev. Lett. **88**, 178902 (2002).
- [77] R. Ramirez, T. López-Ciudad, J.C. Noya, Phys. Rev. Lett. **81**, 3303 (1998).
- [78] R.H. Brandeberger, Rev. Mod. Phys. **57**, 1 (1985); G.F. Mazenko, W.G. Unruh, R.M. Wald, Phys. Rev. D **31**, 273 (1985).
- [79] D. Boyanovsky, H.J. De Vega, R. Holman, Phys. Rev. D **49**, 2769 (1994).
- [80] F. Cooper, S.-Y. Pi, P. Stancioff, Phys. Rev. D **34**, 3831 (1986).
- [81] S.-Y. Pi, M. Samiullah, Phys. Rev. D **36**, 3128 (1987).

- [82] F. Cametti, G. Jona-Lasinio, C. Presilla, F. Toninelli, in *Proceedings of the International School of Physics "Enrico Fermi"*, Course CXLIII, edited by G. Casati, I. Guarneri, U. Smilansky, Amsterdam, IOS Press, (2000), p. 431-448, hep-th/9910065.
- [83] B. De Witt, *The Global Approach to Quantum Field Theory*, Oxford University Press (2003).
- [84] J. Schwinger, *J. Mat. Phys.* **2**, 407 (1961).
- [85] P.M. Bakshi, K.T. Mahantappa, *J. Mat. Phys.* **4**, 1 (1963).
- [86] E. Calzetta, B.L. Hu, *Phys. Rev. D* **15**, 495 (1987).
- [87] T. Curtright, C. Thorn, *J. Math. Phys.* **25** 541, (1984).
- [88] M. Gell-Mann, F. Low, *Phys. Rev.* **84**, 350 (1951).
- [89] Y. Fujimoto, L. O'Raiifeartaigh, G. Parravicini, *Nucl. Phys.* **B212**, 268 (1983).
- [90] G.A. Vilkovisky, in *B. S. De Witt Sixieth Aniversary Volume*, edited by S. Christensen, Adam Hilger, Bristol (1983); G.A. Vilkovisky *Nucl. Phys.* **B234**, 125 (1984).
- [91] B. De Witt, in *Quantum Field Theory and Quantum Statistics, Essays in Honor of the 60th Birthday of E.S. Fradkin*, I.A. Batalin, C.J. Isham and G.A. Vilkovisky Editors, Institute of Physics, Bristol (1987).
- [92] Voici les quelques œuvres grandioses qui inspirèrent certaines citations de cette thèse : Douglas Adams, *Le guide du routard galactique* (1979) ; Boris Vian, *L'écume des jours* (1946) ; Grzegorz Rosinski et Jean Van Hamme, *Le grand pouvoir du Chninkel* (1988) ; Darren Aronofsky, *Pi* (1999).



Institut Pluridisciplinaire Hubert Curien

Service de reprographie

Michel Schlée

23, rue du Loess

67037 Strasbourg Cedex 2