

THÈSE
présentée pour obtenir
le grade de DOCTEUR
de l'Université Louis Pasteur
(Strasbourg I)
Spécialité MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par Vincent ISRAEL-JOST

**OPTIMISATION DE LA RECONSTRUCTION EN TOMOGRAPHIE
D'ÉMISSION MONOPHOTONIQUE AVEC COLIMATEUR STÉNOPÉ**

Soutenue le jeudi 16 novembre 2006 devant la Commission d'Examen :

Irène BUVAT, Directeur de Recherche
André CONSTANTINESCO, Professeur
Laurent DESBAT, Professeur
Fabrice HEITZ, Professeur
Stéphanie SALMON, Maître de conférence
Éric SONNENDRÜCKER, Professeur

Rapporteur externe
Co-directeur de thèse
Rapporteur externe
Rapporteur interne
Examineur
Directeur de thèse

Table des matières

Avant-propos	11
Notations générales	13
Les transformées	13
Les ensembles fonctionnels	13
Opérations, opérateurs	13
Matrices et opérations sur les matrices	13
Autres quantités	14
Introduction	15
I La tomographie et la TEMP sténopé	19
1 Tomographie et imagerie médicale	21
1.1 Définition	21
1.2 Pourquoi la tomographie ?	21
1.3 Différentes modalités d'imagerie : scintigraphie et tomodensitométrie	25
1.3.1 Imagerie fonctionnelle et morphologique	25
1.3.2 La scintigraphie	27
1.3.3 Géométrie de la projection	27
1.3.4 La tomodensitométrie	28
1.4 Une première formulation mathématique du problème	30
2 Tomographie et mathématiques	33
2.1 Méthodes analytiques	33
2.1.1 Les algorithmes de reconstruction	35
2.2 Linéarité du problème	39
2.2.1 Le problème linéaire	39
2.2.2 La tomographie posée comme système linéaire	43
2.3 Les méthodes itératives	44
2.3.1 Algorithmes séquentiels, simultanés et par blocs	45
2.3.2 Quelques algorithmes itératifs	46
2.3.3 Schéma de Landweber	48
2.3.4 Algorithmes de maximisation de l'espérance	51
3 La TEMP sténopée	53
3.1 But et contraintes de la TEMP sténopée	53
3.2 Etat de l'art de l'imagerie	57
3.3 Etat de l'art mathématique	58
3.4 Modélisation du problème	62

3.4.1	Les différents effets modélisés	63
3.4.2	Réponse impulsionnelle et projection des voxels	66
3.5	calibrage de la gamma-caméra	72
3.5.1	Correction des imperfections de la gamma-caméra	73
3.5.2	Détermination de l'efficacité de la gamma-caméra	74
 II Optimisation des calculs		77
4	Codage efficace de l'opérateur de projection : la méthode EAR	79
4.1	Symétries du système	81
4.1.1	Symétrie de rotation et discrétisation adaptée	82
4.1.2	Symétrie Avant/Arrière	101
4.2	Factorisation de la réponse impulsionnelle	101
5	Mise en œuvre de la méthode EAR	103
5.1	L'opérateur de projection	103
5.2	Résolution du système linéaire dans la base des voxels EAR	105
5.3	Rééchantillonnage sur une grille cubique	107
5.4	Organisation du programme	110
6	Résultats et performances	111
6.1	Fantôme informatique	111
6.2	Fantôme physique	114
6.2.1	Fantôme en plexiglas	115
6.2.2	Fantôme faisceau	117
6.2.3	Fantôme d'homogénéité	119
6.2.4	Quantification	120
6.3	Temps de calcul et estimation du gain	120
6.4	Discussion	121
 III Algorithmique		125
7	Une classe d'algorithmes adaptés à la fréquence	127
7.1	Construction d'un algorithme adapté à la fréquence	129
7.2	L'algorithme FA-SART et sa version par blocs	134
8	Propriétés des algorithmes adaptés à la fréquence	137
8.1	Accélération de la déconvolution	137
8.2	Convergence de l'algorithme FA-SART	143
8.3	Un exemple numérique simple	148
8.3.1	Présence de hautes fréquences	149
8.3.2	Absence de hautes fréquences	150
8.3.3	Conclusions	150
9	Résultats, discussion et comparaisons	151
9.1	Résultats numériques	152
9.1.1	Reconstruction des hautes fréquences	152
9.1.2	Reconstruction d'un objet bruité	152
9.2	Fantôme physique	154

9.3	Résultats sur animaux	155
9.3.1	Préparation des animaux	156
9.3.2	Etude du myocarde synchronisé chez le rat	157
9.3.3	Etude du myocarde synchronisé chez la souris	157
9.3.4	Cerveau de rat	159
9.3.5	Cerveau de souris	159
9.4	Utilisation adéquate de l'algorithme FA-SART	161
9.5	Conclusion	163
IV	Conclusion	165
	Perspectives	167
A	Publications	169
B	Le programme et son interface	173
	Bibliographie	177

Ce travail a été co-financé par Siemens et la Région Alsace au cours des deux premières années, puis intégralement par la Région Alsace au cours de la troisième. Je remercie autant Siemens que la Région Alsace pour leur investissement, sans lequel cette thèse n'aurait probablement pas pu être lancée.

Remerciements

Je remercie tout particulièrement M. le Professeur André Constantinesco, Chef du Service de Biophysique et Médecine Nucléaire de l'Hôpital de Hautepierre, pour l'initiation patiente qu'il a entreprise en acceptant qu'un mathématicien de culture totalement étrangère à la biologie vienne travailler dans son service. Les développements, même mathématiques qui ont émergé au cours de ce travail sont dûs en grande partie à son exigence et son perfectionnisme.

Je remercie également M. Philippe Choquet, Maître de Conférence Universitaire et Praticien Hospitalier au Service de Biophysique et Médecine Nucléaire de l'Hôpital de Hautepierre, pour son enthousiasme et ses encouragements nombreux.

Je suis extrêmement reconnaissant envers M. le Professeur Eric Sonnendrücker de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de l'Université Louis Pasteur à Strasbourg d'avoir accepté un sujet nouveau dans ce département de mathématiques appliquées. Ses conseils se sont toujours révélés avisés et fructueux.

Un grand merci à Cyrille Blondet, Maître de Conférence Universitaire et Praticien Hospitalier au Service de Biophysique et Médecine Nucléaire de l'Hôpital de Hautepierre, pour s'être toujours investi intellectuellement et pratiquement dans les travaux liés à cette thèse. Nous avons passé de très nombreuses heures à nous éclairer réciproquement sur nos champs respectifs.

J'ai été ravi de travailler avec Stéphanie Salmon, Maître de Conférence à l'Institut de Recherche Mathématique Avancée de l'Université Louis Pasteur à Strasbourg. Qu'elle soit grandement remerciée pour tout le temps qu'elle a passé à lire et se voir exposer ce travail, mais aussi à rentrer dans les détails de la programmation. Elle m'a par ailleurs dispensé des conseils importants dans la formalisation et l'écriture mathématique.

Merci à mes parents pour leur soutien à tout point de vue et à ma sœur pour ses encouragements. J'adresse également tous mes remerciements à ceux et celles avec qui j'ai passé l'essentiel de ces quatre années dans le Service de Biophysique et Médecine Nucléaire de l'Hôpital de Hautepierre, les internes, externes et médecins étrangers qui se sont succédés : Nomen Elkadri, Ihsen Slim, Marcelo Claria et Alessio Imperiale ont tous contribué à créer un cadre à la fois sympathique et stimulant. Merci enfin à M. le Professeur Izzie Namer, Julien Detour, Elodie Breton et les différents cadres, manipulateurs ou secrétaires, tous fort sympathiques.

Enfin, je remercie énormément Ariel Bardi pour tout son soutien, sans compter sa participation à la rédaction, en langue anglaise, de différentes publications.

Avant-propos

Ce travail de thèse est le fruit d'une collaboration entre l'Institut de Recherche en Mathématiques Avancées (Université Louis Pasteur) et le Laboratoire de Biophysique et Médecine Nucléaire (Hôpital de Hautepierre). De ce fait, les problématiques qui y sont abordées ont été guidées avant tout par des besoins pratiques, articulés en plusieurs étapes. La première était de doter le Laboratoire de Biophysique et Médecine Nucléaire d'un outil permettant d'exploiter des images scintigraphiques en les reconstruisant par des techniques de tomographie. Des généralités à ce sujet ainsi qu'un état de l'art sont présentés dans la première partie de la présente thèse et nous renvoyons également à notre mémoire de DEA [31] qui consistait à développer un tel outil. Or il apparaît rapidement que les calculs relatifs à la reconstruction tomographique doivent être exécutés dans un temps court. La mise en place d'un programme d'imagerie de recherche à un rythme soutenu demande en effet le développement d'un logiciel qui puisse fournir des résultats le plus rapidement possible, non seulement pour suivre le rythme de reconstruction imposé par ces acquisitions, mais aussi pour pouvoir rectifier si nécessaire certains défauts et converger rapidement vers les conditions d'acquisition idéales pour un examen donné. L'objet de la deuxième partie de cette thèse est donc la description de quelques étapes permettant une optimisation de la reconstruction tomographique, basées sur l'exploitation de symétries et une discrétisation adéquate tout en conservant une modélisation du problème tenant compte des principaux phénomènes en jeu. Il était naturel également que cette phase s'accompagne d'un effort porté sur des questions purement informatiques tel le passage d'un langage interprété (Matlab) à un langage compilé (C). Enfin, la diversité des images que nous avons eu à traiter a inspiré la troisième partie de cette thèse en mettant en évidence des différences visibles entre des reconstructions d'objets peu détaillés et d'autres beaucoup plus fins, nous conduisant à proposer une classe d'algorithmes de reconstruction adaptés à la fréquence. Il nous faut donc mettre l'accent sur le cadre stimulant, y compris d'un point de vue mathématique, qu'a constitué le Laboratoire de Biophysique et Médecine Nucléaire et lire cette thèse comme certaines solutions apportées à des problèmes concrets.

Notations générales

\mathbb{R}^n	ensemble des vecteurs réels de dimension n
\mathbb{N}, \mathbb{Z}	ensemble des entiers naturels et relatifs
S^{n-1}	sphère unité en dimension n
ξ	variable fréquentielle
e	fonction exponentielle

Les transformées

f	fonction décrivant le volume à reconstruire
\hat{f}	transformée de Fourier de la fonction f
\mathcal{F}	transformée de Fourier (utilisé lorsque l'argument est composé)
$\mathbf{R}f$	transformée de Radon de la fonction f
$\mathbf{P}f$	transformée rayons X de la fonction f

Les ensembles fonctionnels

$L^1(\mathbb{R}^n)$	ensemble des fonctions intégrables
$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$	espace de Schwartz

Opérations, opérateurs

$f * h$	produit de convolution de la fonction f par le noyau h
$\langle x, y \rangle$	produit scalaire des vecteurs x et y
$\ x\ $	norme du vecteur x
$ x $	valeur absolue de x

Matrices et opérations sur les matrices

A	matrice (désigne en général le modèle direct)
A^k	k^{e} bloc de la matrice, correspondant à la k^{e} position du détecteur
$A_{[n]}$	bloc de la matrice dans un découpage général sur les lignes
$A_{i,\bullet}$	i^{e} ligne de la matrice
$A_{i,j}$	terme courant d'une matrice
x	vecteur colonne représentant le volume à reconstruire
x_j	terme courant du vecteur colonne
$x^{(n)}$	n^{e} itérée lors du calcul de x
x^T ou A^T	transposée d'un vecteur x ou d'une matrice A
I	matrice identité

Autres quantités

M	nombre d'équations (de pixels)
i	indice courant de l'équation
N	nombre d'inconnues (de voxels)
j	indice courant du voxel
P	nombre de projections
K	nombre de pixels dans une projection
F	distance focale du collimateur sténopé
D	plan du détecteur
τ_j	point de D correspondant au centre de la projection du voxel j
σ_j	écart-type du modèle gaussien de projection du voxel j
h_j	fraction du rayonnement émis par le voxel j qui parvient au détecteur
c_j	centre du voxel j

Nous précisons enfin que dans ce travail, une partie importante de la méthode proposée repose sur l'exploitation d'une symétrie de rotation de la gamma-caméra autour de son axe. Sauf indication contraire, toute apparition dans le texte du mot *rotation* se réfère à la rotation autour de l'axe de rotation de la gamma-caméra (axe (Oz)).

Introduction

De la radioactivité à la tomoscintigraphie

Malgré la quasi-simultanéité de la découverte des rayons X, en 1895 par Roentgen¹ et de la radioactivité, en 1896 par Becquerel, les rayons X nous semblent beaucoup plus familiers lorsque l'on en vient à parler d'imagerie médicale. La première moitié du 20^{ème} siècle est ainsi jalonnée de témoignages de l'émotion populaire, suite à la révélation, par la radiographie, des structures internes du corps humain vivant. Fascination, rejet, fantasmes, dérision ont été autant de réactions face à cette extraordinaire nouveauté, sans que l'on ait très bien su à l'époque à quelle application elle serait destinée, pur outil scientifique ou média populaire, à l'instar du cinéma. Or cette prédominance des rayons X dans les esprits est peut-être due à ce que ces rayons ont immédiatement servi à la formation d'une image ; mieux, ils ont été découverts par l'image. La radioactivité s'est, elle, longtemps *mesurée*, à l'aide d'un compteur. Malgré des premières applications précoces en médecine, puisque dès 1913, Hevesy commença à employer des atomes radioactifs comme « indicateurs », les premières décennies furent avant tout consacrées au développement d'éléments ayant un intérêt biologique. La fabrication de radionucléides artificiels fut lancée après qu'Irène Curie et Frédéric Joliot aient pu isoler, en 1934, l'isotope radioactif $^{30}_{15}P$ du phosphore, responsable de l'activité β^+ . Il faudra attendre la fin des années 1940 et que B. Cassen ait l'idée de déplacer linéairement le compteur de Geiger-Müller au moyen d'un moteur pour obtenir des mesures qui conduisent à une image, obtenue par frappe sur papier d'un stylet inscripteur. Mais ce sera Hal Anger qui, au début des années 1960, proposera l'outil moderne de détection des rayons γ , la *gamma-caméra* : derrière un collimateur à trou d'épingle, dit aussi sténopé, un cristal d'iodure de sodium est placé devant un réseau de photomultiplicateurs. Un circuit calcule le point d'impact de chaque photon sur le cristal et à partir de ces coordonnées, l'image est formée sur un oscilloscope cathodique, ouvrant définitivement la voie à la scintigraphie. Si les progrès techniques ont largement contribué à l'amélioration de cette gamma-caméra depuis sa commercialisation, en 1964, ils ne sont intervenus que sur les aspects extérieurs : informatisation du pilotage de la machine, des données, des images, meilleure précision mécanique. Quant au détecteur en lui-même, il est resté à peu près inchangé depuis, les tentatives pour l'améliorer s'étant révélées jusque-là infructueuses.

En arrière-plan de ces différentes techniques d'imagerie, le mathématicien allemand J. Radon développait dès 1917 des outils mathématiques qui devaient leur être rattachés. La nouveauté étant qu'en exploitant de nouveaux types de rayonnements, les images de projection acquises sont composées de points qui représentent une information sur la profondeur de l'objet imagé, dimension jusque-là inaccessible à l'image photographique ou rétinienne, Radon décrivait cette projection comme une somme des valeurs d'une fonction le long d'une droite, valeurs qui seront plus tard interprétées comme des coefficients d'atténuation (en radiographie) ou des mesures d'activité (en scintigraphie). La projection étant décrite par la *transformée de Radon*, il démontrait la possibilité théorique de reconstruire la fonction à partir de ses projections en donnant une

¹Pour l'ensemble des références de cette partie « historique », voir l'ouvrage de Paul Blancquet et Daniel Blanc, *La médecine nucléaire* dans la collection *Que sais-je ?*, PUF, 1976.

formule d'inversion de sa transformée.

Dès lors, la combinaison des outils théoriques et pratiques permit à Kuhl de réaliser le premier système tomographique en 1963 à partir d'un appareil de radiographie, tandis qu'Anger adaptait dès 1968 sa gamma-caméra pour en faire également un système tomographique, mais dans le domaine de la scintigraphie (on parlera alors de tomoscintigraphie).

Les nombreuses perspectives qui semblent se dessiner à ce point seraient bien sûr impossible à mettre en œuvre sans la puissance de calcul permettant de mener à bien des calculs relativement lourds. Nous pouvons dire sur ce point que le développement des ordinateurs a libéré l'imagerie médicale de la plupart des contraintes qui étaient les siennes à ses débuts. Au cours de ces quarante dernières années, les progrès exponentiels de l'informatique se sont néanmoins répercutés de manière moins brutale sur les applications liées à l'imagerie médicale. Le passage de la reconstruction tomographique bidimensionnelle à partir de projection linéiques à la reconstruction tridimensionnelle à partir d'images de projection ne date ainsi que des années 1990 tandis que l'on commence à peine maintenant à pouvoir traiter des données sans limitation de taille pouvant affecter la qualité des images reconstruites. Pour appliquer la loi de Moore (qui prévoit un doublement de la puissance de calcul tous les 18 mois) en tomographie, il ne faut pas oublier que le problème de reconstruction en 3D a en quelque sorte six dimensions : les trois de l'objet à reconstruire, les deux des images de projection et le nombre de projection et donc qu'un doublement de l'ensemble de ces dimensions est permis, à temps de calcul égal et suivant la loi de Moore, non pas tous les 18 mois mais tous les 9 ans ! Et l'on devrait encore ajouter dans le cas des acquisitions synchronisées la dimension temporelle permettant de prendre en compte le mouvement du cœur notamment. Même si la puissance informatique l'a emporté et ne constitue plus une limite insurmontable, il ne faut donc pas s'étonner, en regardant dix ans en arrière, de voir les problèmes qui sont « seulement » résolus aujourd'hui dans une grille de 128^3 voxels, déjà résolus à l'époque dans une grille de 64^3 voxels.

Enfin, pour comprendre ce qui a motivé la recherche biologique qui est à l'origine de cette thèse de mathématiques, il convient d'aborder le domaine de l'imagerie spécifiquement appliquée au petit animal. Avant de nous concentrer sur les difficultés que présente l'application de la tomoscintigraphie au rat et à la souris, essentiellement liées à la taille réduite de ces organismes par rapport à l'espèce humaine, nous nous devons de donner un aperçu des débouchés de la technique, que l'on ne saurait comprendre que par leur rôle d'*organismes modèles*. Ce terme d'organisme modèle² s'applique à une classe d'organismes telle une variété, une espèce ou encore un groupe taxinomique plus large, qui par certains aspects est représentative d'autres classes, relativement à une problématique donnée. Tandis que la mouche drosophile en constitue l'exemple le plus célèbre, en génétique, le rat et la souris se sont naturellement imposés en imagerie pour la facilité de leur élevage et le fait qu'ils soient des mammifères pourvus d'organes comparables à ceux de l'homme. Mais une condition presque aussi importante dans leur rôle de modèle que la proximité morphologique et fonctionnelle de leurs organes avec ceux de l'homme, est leur standardisation, qui permet une expérimentation quasiment délivrée de l'idiosyncrasie individuelle. L'éradication du cauchemar

²Pour une étude beaucoup plus complète, à la fois historique et philosophique concernant les organismes modèles, voir l'article de Jean Gayon, "Les organismes modèles en biologie et en médecine," in Gabriel Gachelin, éd., Paris, Presses Universitaires de France, 2006.

des expérimentateurs - et en premier lieu de Claude Bernard - jusqu'au début du XX^{ème} siècle est ainsi à peu près complète, dès lors que des séries d'animaux quasi-identiques permettent de réaliser des expériences en faisant varier un paramètre, toute chose supposée égale par ailleurs. Ainsi, les applications de la tomoscintigraphie au rat et à la souris offrent des perspectives riches dans des domaines fort différents : études pharmacologiques, génétiques, observations de pathologies, connaissance intrinsèque de ces animaux et confrontation avec les données issues d'autres techniques sont des bénéfices immédiats d'un tel projet.

Cette thèse

Nous avons particulièrement tenu, dans ce travail, à ne pas nous affranchir d'un contexte riche et multidisciplinaire pour nous concentrer uniquement sur les mathématiques.

En particulier, le choix d'un modèle pour la description mathématique du système d'imagerie est une partie primordiale du problème et ne peut être décidé à la légère. Il détermine aussi bien la qualité des résultats, par le degré de son adéquation avec ce que nous savons du dispositif physique, que les temps de calcul, par sa complexité. Il influence aussi bien sûr grandement les développements mathématiques possibles. Dans un premier temps, nous nous sommes laissés guider par la seule contrainte de la bonne qualité de l'image, qui nous a ainsi conduit à écarter les méthodes analytiques, basées sur l'inversion d'un opérateur de projection continu, car elles nous ont paru trop limitées quant à la possibilité d'incorporer un modèle réaliste de réponse impulsionnelle, qu'elles réduisent généralement à une masse de Dirac. Mais par la suite, une prise en compte minutieuse de la distribution théorique des photons émis par un voxel sur le plan de détection aurait été aussi pénible mathématiquement que pénalisante du point de vue des temps de calcul, sans être justifiée par de meilleurs résultats car la tomographie d'émission monophotonique ne produit que des images dont nous savons qu'elles sont fort bruitées. De plus, le processus d'émission d'un photon suit une loi statistique, ce qui demanderait, pour nous rapprocher asymptotiquement de la distribution théorique, des temps de pose plus longs et des activités plus élevées, nonobstant la présence de bruit sur l'image.

Un juste milieu devait donc être trouvé mais une réponse appropriée au problème ne pouvait passer que par la compréhension des phénomènes dont nous avons parlé plus haut. Tandis que la nature statistique de l'émission et le bruit inhérent à l'image scintigraphique ne nous encourageaient pas à pousser la modélisation trop précisément, les limitations actuelles de la résolution spatiale du détecteur nous obligeaient à prendre en compte une réponse impulsionnelle large dans le modèle. De plus, malgré les progrès de l'informatique que nous avons soulignés, nous pensions qu'il valait encore la peine à l'heure actuelle de chercher à économiser du temps et des ressources de calcul.

Enfin, nous pensons que l'imagerie du vivant ne peut se passer d'une mise à l'épreuve sur fantôme et en conditions réelles (sur le vivant) aussi souvent et de manière autant variée que possible des algorithmes et des programmes, moins que dans tout autre domaine de l'imagerie. Outre les nombreuses corrections qu'elle nous a permis d'apporter à nos premiers travaux, cette confrontation est entièrement à l'origine de nos développements algorithmiques puisque c'est sur les images de structures différentes que nous avons pu nous rendre compte des performances variables des algorithmes utilisés jusque-là.

La présentation de notre travail suivra l'ordre suivant :

Dans la première partie, après avoir introduit la tomoscintigraphie du point de vue de son utilisation biomédicale et des mathématiques sous-jacentes, nous insistons sur notre choix des méthodes itératives par rapport aux algorithmes provenant des méthodes analytiques et dressons un panorama contemporain des méthodes de résolution itératives de systèmes linéaires utilisées en tomographie. Nous relevons en cours de route que le problème physique est non linéaire *a priori*, puisque des interactions de l'objet avec lui-même se produisent et justifions donc certaines approximations faites pour poser malgré tout un système linéaire. Enfin, nous proposons un modèle de projection basé sur des réponses impulsionnelles gaussiennes qui soit compatible avec une stratégie d'économie de calculs.

Cette stratégie, nous la développons dans la deuxième partie en exploitant des symétries et en n'utilisant qu'un petit nombre de réponses impulsionnelles précalculées. Nous y montrons qu'aucune perte significative de résolution spatiale n'a lieu au cours de ces réductions, tandis que les temps de calculs diminuent de manière importante, ainsi que la mémoire nécessaire à la reconstruction tomographique. Nous y montrons également des résultats obtenus sur des simulations numériques, et des fantômes physiques.

La troisième partie revient sur les méthodes itératives existantes en notant qu'aucune d'entre-elles ne permet pour l'instant de s'affranchir de la contrainte que constitue le fait que les basses fréquences soient généralement reconstruites avant les hautes. Ce phénomène est à l'origine d'un fort rallongement des temps de calcul puisque des itérations supplémentaires sont nécessaires pour recouvrir l'ensemble du spectre fréquentiel intéressant. Nous proposons donc une nouvelle classe d'algorithme dits *adaptés à la fréquence* et montrons que ces algorithmes peuvent être programmés pour reconstruire préférentiellement un niveau de détail donné. Nous apportons également quelques éléments visant à assurer des bases mathématiques à ces algorithmes et donnons un résultat de convergence. Nous finissons en discutant de l'utilisation de ces nouveaux algorithmes à la lumière de résultats, à nouveau sur simulations et fantômes physiques, mais aussi sur différents organes du rat et de la souris.

Première partie

La tomographie et la
TEMP sténopé

Dans cette partie, nous introduisons la tomographie à travers l'exemple de la médecine nucléaire - la scintigraphie - et de la tomодensitométrie. L'intérêt de la tomoscintigraphie se dégage, étant données ses moindres performances en terme de résolution spatiale comparées à celles de la tomодensitométrie, par l'aspect fonctionnel de l'image obtenue. Après avoir présenté les principales méthodes de reconstruction tomographique qui se répartissent en deux classes, méthodes analytiques et algébriques, nous justifions l'emploi de ces dernières et décrivons la modélisation qui nous permet de poser le problème comme un grand système linéaire. L'ensemble des effets que nous prenons en compte apparaît donc dans les paramètres d'une réponse impulsionnelle gaussienne.

Chapitre 1

Tomographie et imagerie médicale

1.1 Définition

Littéralement, la tomographie (du grec *tomos* (section, coupe) et *graphein* (écrire)) désigne tout processus d'imagerie ayant pour résultat un cube de données c'est-à-dire un objet tridimensionnel, visible de ce fait en coupe. Dans ce sens, les techniques de reconstruction tomographique sont utilisées dans la plupart des types d'examen d'imagerie médicale (radiographie, échographie, résonance magnétique nucléaire, scintigraphie...) ainsi que dans d'autres domaines tels que l'océanographie, la géophysique, la sismologie ou encore la météorologie. Ce mot couvre donc l'ensemble des techniques de reconstruction d'objets 3D à partir de projections 2D (ou d'objets 2D à partir de projections 1D), ce dont nous parlerons dans ce travail à propos de scintigraphie (tomoscintigraphie) ou de radiographie (tomodensitométrie), mais ne s'y limite pas. On peut en effet tout aussi bien parler de tomographie dans la cas de l'imagerie par résonance magnétique (IRM), sans que les données acquises prennent systématiquement la forme de projections.

Nous restreignons donc ici la tomographie au sens de technique de reconstruction d'objet en dimension n à partir de projections de dimensions $n - 1$ essentiellement obtenues par application d'un opérateur de projection intégral sur des lignes.

1.2 Pourquoi la tomographie ?

La reconstruction tomographique n'est pas une nécessité imposée par l'impossibilité d'exploiter une image de projection. Les techniques d'imagerie donnant lieu à des reconstructions tomographiques ont en général un certain nombre d'applications pour lesquelles la reconstruction n'est pas nécessaire. La radiographie (imagerie par rayons X) qui génère des examens de tomodensitométrie est encore largement utilisée sous la simple forme d'image directe de projection, ce que l'on appelle communément une radio. De même, certains examens scintigraphiques comme celui du métabolisme osseux ou le calcul de la frac-

tion d'éjection cardiaque se font en mode planaire, c'est-à-dire sous la forme d'images de projections vues sous un angle unique et sans reconstruction. En un mot, tout examen répond à une question, que cette question soit de l'ordre de la recherche ou de la routine clinique, et si l'image de projection est suffisante pour y apporter une réponse, le chercheur ou le clinicien s'y tiendra bien volontiers.

De manière générale cependant, deux phénomènes confèrent au volume tridimensionnel reconstruit un intérêt par rapport à l'image bidimensionnelle de projection. Le premier tient à la sensibilité respective de ces deux présentations : puisque d'après ce qui a été dit précédemment l'image de projection s'obtient à partir de l'application d'un opérateur intégral sur un volume, des différences d'intensité qui pourraient apparaître localement dans le volume sont moyennées et peuvent n'être plus visibles sur l'image de projection. Ce problème est illustré par la figure 1.1 sur laquelle une différence de l'ordre de 10% dans l'objet d'étude se traduit par une variation d'intensité de l'ordre de 2% sur sa projection, conduisant à une quasi-impossibilité de conclure à une variation d'intensité qui ne serait pas due au bruit par exemple.

La deuxième raison justifiant l'emploi de la reconstruction tomographique est relative à l'ambiguïté inhérente à l'imagerie de projection. En effet, si en dépit de ce qui vient d'être exposé, une variation est malgré tout détectée sur la projection, que pourra-t-on en dire ? Pour certains types d'examen, cette information sera sans doute suffisante pour pouvoir conclure à une lésion par exemple, mais dans d'autres cas, cette surintensité pourra aussi bien être accidentelle. Ainsi sur la figure 1.1 considérant le profil de projection obtenu horizontalement comme somme des colonnes du tableau de valeurs, la surintensité très faible de 2% provient d'une surintensité dans le volume localisée et relativement importante mais un résultat identique aurait été obtenu si une variation de 2% étalée sur toute la colonne s'était produite.

Ainsi est-il parfois fondamental de retrouver l'information perdue sur la profondeur du volume au cours de l'opération de projection. La figure 1.2 permet de comparer l'information obtenue sur une image de projection et sur une coupe du volume reconstruit d'un thorax et démontre la clarté de cette dernière, débarrassée de tout phénomène de superposition de l'information.

Nombre de projections

En restreignant la reconstruction tomographique au cas de la reconstruction d'objets en dimension n à partir de projections de dimensions $n - 1$ obtenues par application d'un opérateur de projection intégral sur des lignes, une remarque simple permet de préciser le nombre de projections, qui est en général un paramètre laissé au choix de l'utilisateur.

Théoriquement, les formules d'inversion qui seront présentées au chapitre 2 demandent de connaître les projections en continu sur 180° ce qui, en pratique, est inenvisageable. Mais cette nécessité s'accorde avec une ambition tout aussi théorique de reconstruire l'objet qui a donné lieu à ces projections avec une précision infinie. En pratique, des images discrètes sont obtenues à pas angulaires discrets et donnent lieu à une reconstruction elle aussi discrète. Dès lors un raisonnement algébrique simple permet de prévoir le nombre approximatif de projections nécessaire pour espérer se rapprocher du cas où l'ensemble des équations définit une et une seule solution : pour des projections acquises

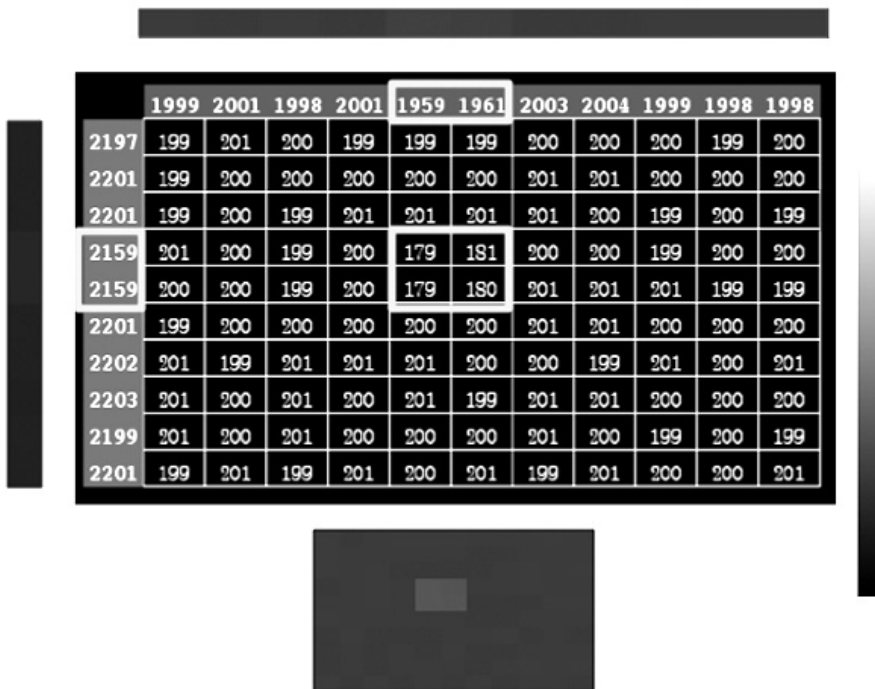


FIG. 1.1 – Sensibilité de l'image de projection aux variations d'intensité de l'objet. Ici, une diminution de l'ordre de 10% est introduite au sein d'une image homogène légèrement bruitée. Sur les projections (i.e. les sommes des valeurs du tableau) horizontales et diagonales, compte tenu du moyennage inhérent à la sommation, cette diminution ne se ressent plus qu'à hauteur d'environ 2%, rendant très incertaine la distinction entre cette diminution inhérente à l'objet et une diminution qui serait due au bruit dans l'image.

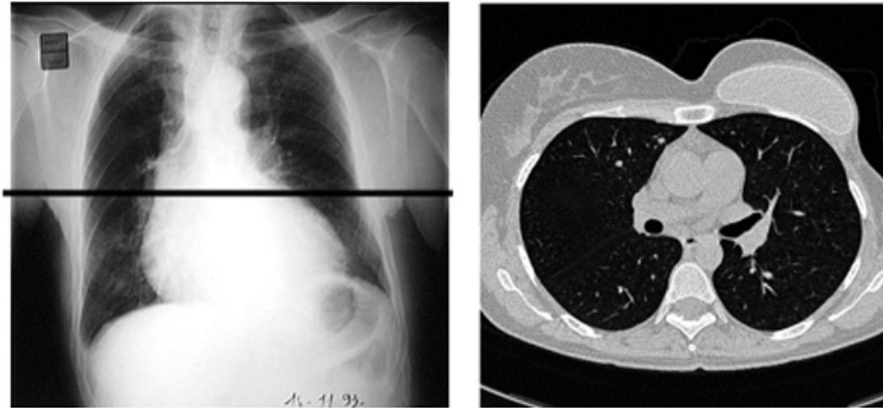


FIG. 1.2 – Comparaison de l'image plane projetée d'un thorax par radiographie avec une coupe de l'image tomодensitométrique (projections acquises en scanner X et reconstruites par tomographie). Tandis qu'à gauche toutes les structures qui sont sur le chemin d'un même rayon se confondent sur l'image en surimpression, on a à droite, correspondant à la coupe indiquée par la ligne noire à gauche, l'image reconstruite sans ambiguïté pour la distinction des différentes structures.

avec une taille d'image donnée (K pixels) et un volume reconstruit d'une taille également donnée (N voxels), le nombre P de projections acquises doit compenser le déficit entre le nombre d'inconnues et d'équations. Il faudrait donc vérifier, pour avoir un même nombre d'équations que d'inconnues, que $P = N/K$. Le plus souvent, $N = k^3$ est le cube d'une puissance de deux et l'on a $K = k^2$. Dans ce cas, le nombre de projections P devrait être égal à k mais la condition n'est pas nécessaire et nous travaillerons souvent avec des systèmes linéaires dont la matrice des coefficients est rectangulaire.

Il ne s'agit donc que d'une règle très générale, et à adapter aux nombreuses situations que peut rencontrer la tomographie. Pour certains problèmes, comme l'estimation du volume d'une pièce mécanique que l'on sait pleine et homogène, la quantité d'information *a priori* est telle que quelques images de projections seraient sans doute suffisantes pour répondre à la question. Dans le cas de l'estimation du volume du ventricule gauche chez un mammifère, la complexité des structures, la variabilité de leur organisation et de leur taille font que l'on n'introduit pas en général d'information *a priori*. Nous avons donc toujours respecté l'ordre de grandeur du nombre de projections suggéré par le simple raisonnement algébrique ci-dessus.

1.3 Différentes modalités d'imagerie : scintigraphie et tomодensitométrie

1.3.1 Imagerie fonctionnelle et morphologique

Les deux modalités d'imagerie que nous considérerons ici, scintigraphie et tomодensitométrie, sont suffisamment différentes pour comprendre en grande partie les besoins de l'imagerie médicale et les choix qu'ils génèrent parmi les techniques disponibles. La scintigraphie est ainsi l'exemple même de la technique d'*imagerie fonctionnelle*. Sur ce type d'examens en effet, c'est moins la forme d'un organe que sa fonction qui est étudiée et ce avec une résolution médiocre, en général supérieure à un demi-centimètre chez l'homme. Puisque c'est ce type d'imagerie en particulier qui nous intéressera au cours de ce travail, nous aurons l'occasion de revenir et sur les raisons physiques de cette résolution spatiale limitée et sur un certain nombre de moyens de l'améliorer.

Il y a naturellement dans une image tirée d'une telle technique d'imagerie fonctionnelle une composante morphologique importante. L'information fonctionnelle est donc localisée et l'on pourra aisément l'associer à un organe particulier. Il faut néanmoins s'attendre à des changements de contenu importants par rapport à l'image purement morphologique, c'est-à-dire qui ne rend compte que de la présence des tissus, os, ou d'ailleurs de toute matière. La comparaison montrée sur la figure 1.3 illustre des différences marquées entre un cœur "anatomique", obtenu par des images de tomодensitométrie et un cœur "fonctionnel" obtenu par scintigraphie. Dans cette dernière technique, un traceur radioactif est injecté à faible dose, traceur qui suit un parcours spécifique dans l'organisme. Dans le cas du cœur, plusieurs traceurs sont envisageables pour obtenir différents types d'information : la scintigraphie cavitaire par exemple, consiste dans un premier temps à administrer au patient des pyrophosphates non marqués par voie intraveineuse, puis à injecter du $^{99m}\text{Tc-TcO}_4^-$ (pertechnétate) vingt minutes après par une autre voie veineuse. Les pyrophosphates tapissent donc d'abord la membrane des hématies (il leur faut 20 minutes) et ensuite captent le pertechnétate. Le compartiment sanguin est ainsi marqué et permet une analyse à l'équilibre, éventuellement couplée à une synchronisation à l'ECG pour une analyse dynamique. Un deuxième examen, la tomoscintigraphie du myocarde, après injection de thallium 201 ou de molécules marquées au technétium 99m, a pour but d'évaluer la qualité de l'irrigation sanguine du muscle cardiaque. Cet examen permet de détecter les sujets menacés par l'infarctus du myocarde puis de contrôler l'efficacité du traitement. Dans le cas d'un patient ayant déjà eu un infarctus du myocarde, le tissu myocardique cicatriciel n'est plus irrigué et n'apparaît donc sur l'image scintigraphique que comme un trou, se distinguant en cela de l'image morphologique sur laquelle un tissu apparaît sur l'image qu'il soit mort ou vivant.

Si donc il y a forcément une composante morphologique dans toute image fonctionnelle, l'inverse est aussi généralement vrai : un cœur qui pompe moins, dont la fraction d'éjection est diminuée après un infarctus ou du fait d'une moins bonne irrigation devient souvent plus gros et cette caractéristique morphologique permet d'inférer sur son état fonctionnel. Par ailleurs, de même qu'il existe différents traceurs permettant d'étudier autant de processus physiologiques, il existe des produits de contraste qui permettent de donner une

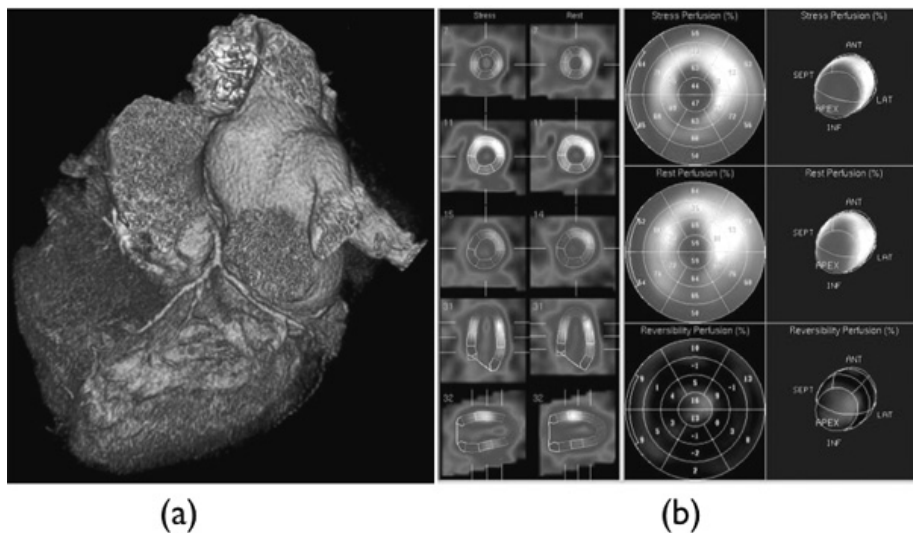


FIG. 1.3 – Comparaison entre deux images cardiaques obtenues par technique radiologique (a) et scintigraphique (b). La première est un rendu 3D d'angiogramme coronarien dont le principe consiste à opacifier les artères coronaires qui irriguent le coeur. Un cathéter est introduit dans une veine d'un membre supérieur pour injecter un produit de contraste radiologique iodé qui se mélange au sang circulant : le système vasculaire devient visible sur les clichés radiologiques grâce aux propriétés radio-opaques de l'iode. L'acquisition débute au moment où le produit de contraste va s'engager dans le réseau coronaire. Cette technique est le pendant non invasif de la coronarographie. Comme pour cette dernière, seuls les vaisseaux de diamètre important seront visualisés. Les sténoses compromettant la circulation sanguine ne seront donc diagnostiquées que sur les artères coronaires de gros calibre. La seconde est une synthèse des données perfusionnelles myocardiques obtenues par recueil des photons gamma issus d'un traceur marqué au technétium 99 métastable (^{99m}Tc -tétrafosmine), administré par voie veineuse au patient au maximum d'un effort d'une part et au repos d'autre part. La comparaison des territoires présentant un défaut de perfusion, c'est-à-dire un défaut d'irrigation des cellules musculaires cardiaques, permet la quantification et la localisation du muscle cardiaque ischémié à l'effort mais normalement perfusé au repos. Cette caractérisation explore *de facto* la totalité de la vascularisation coronaire, depuis les artères de gros calibre jusqu'aux artérioles, ainsi que la viabilité des cellules cardiaques. Il peut donc exister de franches discordances entre les deux examens, radiologique et scintigraphique, dans la mesure où l'information physiopathologique qu'ils apportent n'est pas de même nature.

composante fonctionnelle à une image morphologique.

Nous rentrons maintenant davantage dans la description de ces deux techniques d'imagerie.

1.3.2 La scintigraphie

Cette technique repose sur l'administration d'un *traceur*, c'est-à-dire une substance repérable, car marquée par un atome radioactif émetteur gamma, s'inscrivant dans un métabolisme, sans interférer avec celui-ci du fait de l'administration d'une quantité infinitésimale (et c'est là un avantage déterminant par rapport aux produits de contraste). Ainsi, les rayonnements servant à former l'image proviennent de l'objet d'étude lui-même. Sur le principe des organismes phosphorescents, le corps ou l'objet est "éclairé par sa propre lumière" et l'on parle de *tomographie d'émission* pour désigner les problèmes de tomographie qui sont rattachés à ce genre de procédés. On parle ainsi de *tomographie d'émission monophotonique* (TEMP) lorsque le traceur utilisé émet des photons gamma et de *tomographie par émission de positons* (TEP) lorsque les images sont obtenues par injection dans l'organisme d'une molécule radioactive marquée par des isotopes du carbone, du fluor ou de l'oxygène (émetteurs de positons).

Une image scintigraphique renseigne donc sur la distribution d'une substance (le traceur) dans l'organisme, mais puisque cette substance émet des rayonnements, ceux-ci sont aussi atténués par les différentes structures qui se trouveront sur le trajet entre le lieu de l'émission et le détecteur. Ceci conduit à une difficulté supplémentaire de l'imagerie d'émission, à savoir que l'on a en réalité deux "cartes" à retrouver : celle des coefficients d'atténuation $\mu(x)$ et celle de la distribution d'activité $f(x)$.

1.3.3 Géométrie de la projection

L'émission de rayonnement se produit dans toutes les directions de manière uniforme. La détection d'un photon par la *gamma-caméra*, l'appareil sensible aux photons gamma, ne permet donc de faire aucune hypothèse sur le lieu de l'émission. Pour restreindre les possibilités quant à la provenance du photon, il est nécessaire de collimater le détecteur de manière à ne compter que les photons arrivant sur le détecteur selon un certain angle solide. C'est donc au niveau de la collimation qu'il est nécessaire de faire un choix entre sensibilité et résolution qui sont respectivement augmentée et diminuée par un angle solide plus grand. En scintigraphie, la collimation se fait en posant devant le détecteur un dispositif de trous plus ou moins larges séparés par un matériau opaque aux rayonnements tels le plomb ou le tungstène. C'est la disposition des trous qui détermine la géométrie de la projection : un *collimateur parallèle*, dont les trous sont parallèles entre eux et perpendiculaires au plan de détection donne lieu à une projection ayant la même échelle que l'objet tandis qu'un trou unique situé à une certaine distance du détecteur et correspondant à un *collimateur sténopé* ou pinhole permet une projection avec un coefficient d'agrandissement utile pour compenser une résolution spatiale comprise entre 5 et 10 mm en collimation parallèle. La figure 1.4 illustre ces deux géométries associées à des types de collimation différents.

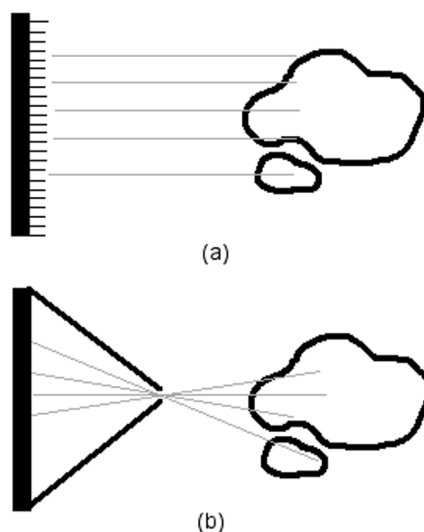


FIG. 1.4 – Géométrie de projection associée au collimateur parallèle (a) et sténopé (pinhole) (b).

1.3.4 La tomodensitométrie

Cette technique a davantage évolué depuis son invention en 1968 par Hounsfield que la scintigraphie. Plusieurs générations de scanners se sont succédées, allant du simple faisceau de rayons X collimaté allié à un unique détecteur en translation-rotation à un faisceau de rayons X plus large associé à une couronne entière de détecteurs (voir figure 1.5). Le principe physique n'en est pas moins toujours le même : un tube émet des rayons X qui traversent l'objet ou le patient et ce rayonnement est mesuré après atténuation. C'est donc en quelque sorte une image d'ombre qui est obtenue : plus les structures traversées sont atténuantes, plus faible est la fraction de rayonnement qui parvient jusqu'au détecteur. Cette image ne donne donc de renseignements que sur les coefficients d'absorption en chaque point, qui sont relatifs à une énergie de rayonnement donnée (en général, plus un rayonnement est énergétique et moins il est atténué) et dépendent essentiellement de la densité des tissus auxquels ils appartiennent. Les os sont donc les structures les plus opaques, ce qui a constitué historiquement l'une des grandes difficultés de la radiologie, notamment pour l'imagerie cérébrale¹ et a largement justifié le traitement tomographique des images obtenues par rayons X.

¹On sait que dès 1896, c'est-à-dire dans la première année de la découverte des rayons X par Roentgen, Edison se déclarait prêt à obtenir une image du cerveau à travers le crâne. Il se heurtera pourtant aux effets dont parle déjà Roentgen en 1895 : "...alors que la chair est très transparente [à ce rayonnement], les os sont à peu près opaques". C'est également cet obstacle qui peut expliquer l'abandon progressif des rayons X comme source de divertissement populaire - en plus des conséquences de l'irradiation naturellement -, car tandis que cette technique se heurte à une utilisation beaucoup plus délicate qu'il n'y paraissait au premier abord et ne parvient pas à contenter les attentes du public, la déception est ressentie d'autant plus fortement que le cinéma, né la même année, connaît lui un développement sans entraves et conforme aux attentes.

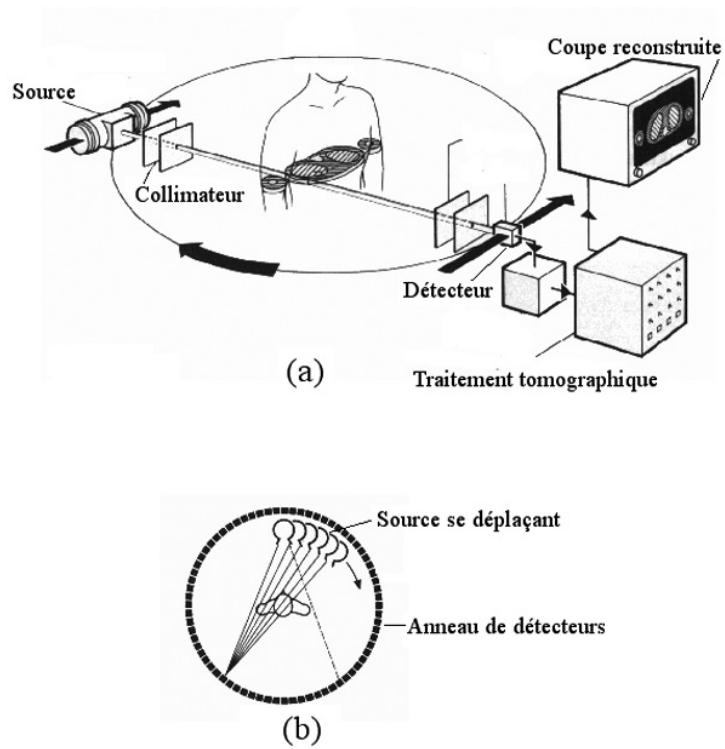


FIG. 1.5 – La tomodensitométrie peut ne reposer que sur une source collimatée alliée à un unique détecteur en translation (a) ou fonctionner avec un faisceau associé à une couronne de détecteurs (b). Illustration tirée de <http://www.metz.supelec.fr/metz/elevs/themes/imagerie/scannerX.htm>

Notons que cette technique d'imagerie offre une bien meilleure résolution spatiale que la scintigraphie pour des raisons physiques liées à la précision de la détection des deux types de rayonnements gamma et X. Les scanners utilisés chez l'homme ont aujourd'hui une résolution spatiale inférieure à 0,5 mm soit un facteur supérieur à 10 par rapport à la résolution obtenue en scintigraphie. Malgré cela, les caractéristiques de ces deux types d'imagerie les rendent l'une et l'autre utiles à des fins diagnostiques différentes et si la précision du scanner est incomparable dans certains cas, la sensibilité de la scintigraphie, qui reflète des phénomènes se déroulant à l'échelle moléculaire, apporte une information fondamentale et complémentaire le cas échéant.

1.4 Une première formulation mathématique du problème

Sans rentrer pour le moment dans les détails de la modélisation propre à chacune des deux techniques que nous avons décrites, nous pouvons déjà donner deux formulations correspondant aux deux grandes familles de problèmes : tomographie d'émission et tomographie par transmission, dans le cas d'une collimation et d'une détection idéales, chaque évènement étant détecté avec une précision infinie et ayant forcément son origine sur une ligne. Comme on l'a vu, la tomographie par émission concerne des objets pour lesquels la source de rayonnement est dans l'objet lui-même (le traceur radioactif qui a été administré) selon une distribution inconnue $f(x)$ où x représente la position dans \mathbb{R}^3 . Ainsi, pour toute ligne L de l'espace, l'intensité I mesurée par un détecteur collimaté de manière à ne mesurer que les radiations émises le long de L est donnée par :

$$I = \int_L f(x) dx \quad (1.1)$$

qui correspond à un point de la *transformée en rayons X* (voir section 2.1). Dans le cas où l'atténuation du rayonnement par l'objet n'est pas négligeable, un coefficient d'atténuation $\mu(x)$ doit être introduit pour pondérer cette intégrale de telle sorte que l'intensité mesurée est alors :

$$I = \int_L f(x) e^{-\int_{L(x)} \mu(y) dy} dx \quad (1.2)$$

La transformation intégrale associée est ainsi une généralisation de la transformée en rayons X appelée transformée en rayons X atténuée.

Dans le cas de la tomographie par transmission qui modélise le scanner X, une source d'intensité I_0 traverse un objet pour lequel $f(x)$ représente la carte des coefficients d'atténuation. Le parcours d'une petite distance Δx à la position x donne lieu à une perte d'intensité relative :

$$\Delta I / I = f(x) \Delta x \quad (1.3)$$

qui intégrée sur une ligne L entière donne le rapport entre l'intensité mesurée I_1 et celle de la source :

$$I_1/I_0 = e^{-\int_L f(x)dx} \quad (1.4)$$

En passant au logarithme, on obtient :

$$\ln(I_0/I_1) = \int_L f(x)dx \quad (1.5)$$

ce qui nous ramène à la transformée en rayons X, montrant qu'il y a équivalence mathématique de la résolution de ces deux problèmes physiquement différents qui, après une analyse rapide, se posent tous deux comme des problèmes se rattachant à l'inversion de la même transformée intégrale.

Chapitre 2

Tomographie et mathématiques

2.1 Méthodes analytiques

La formulation du problème lié à l'inversion d'une transformée intégrale telle que celle de l'équation 1.1 remonte aux travaux de Radon en 1917 dans lesquels il donne une solution sous la forme d'une formule d'inversion. Avant de définir l'espace de Schwartz qui sera le cadre naturel de la transformée de Radon, nous rappelons quelques notations impliquant les multi-indices :

Pour $k, l \in \mathbb{Z}_+^n$ deux multi-indices, on définit $x^k = \prod_{j=1}^n x_j^{k_j}$ et $D^l f = \frac{\partial^{|l|} f}{\prod_{j=1}^n (\partial^{l_j} x_j)}$ avec $|l| = \sum_{j=1}^n l_j$.
 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ est alors l'espace vectoriel des fonctions $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pour lesquelles

$$|f|_{k,l} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^k D^l f(x)|$$

est fini pour tous les multi-indices $k, l \in \mathbb{Z}_+^n$.

Par la suite, nous désignons par S^{n-1} la sphère unité dans \mathbb{R}^n . On définit également, pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions intégrables sur \mathbb{R}^n , la transformée de Fourier \hat{f} et la transformée de Fourier inverse \bar{f} par

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x) dx,$$

$$\bar{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} f(x) dx.$$

Les outils essentiels des problèmes de tomographie sont les transformées intégrales suivantes :

DÉFINITION 2.1 (Transformée de Radon) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et pour $\theta \in S^{n-1}$ et $s \in \mathbb{R}$, la transformée de Radon n -dimensionnelle \mathbf{R} est définie comme :*

$$\mathbf{R}f(\theta, s) = \int_{x \cdot \theta = s} f(x) dx = \int_{\theta^\perp} f(s\theta + y) dy.$$

La transformée de Radon $\mathbf{R}f(\theta, s)$ fait donc correspondre à la fonction f l'ensemble de ses projections intégrales sur des hyperplans perpendiculaires à θ à la distance signée s de l'origine. Néanmoins, elle ne s'applique aux problèmes de tomographie issus de l'imagerie médicale que lorsque $n = 2$ puisque dans ce cas, la projection intégrale s'effectue bien suivant des lignes. Pour les dimensions supérieures, c'est la transformée en rayons X qui modélise la situation physique de manière adéquate puisqu'elle conserve une projection suivant des lignes intégrales, et non des plans.

DÉFINITION 2.2 (Transformée en rayons X) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et pour $\theta \in S^{n-1}$ et $x \in \mathbb{R}^n$, la transformée en rayons X n -dimensionnelle \mathbf{P} est définie comme :*

$$\mathbf{P}f(\theta, x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + t\theta) dt$$

Dans cette définition, si x se déplace dans la direction θ , $\mathbf{P}f(\theta, x)$ est inchangé, si bien que l'on peut restreindre x à θ^\perp . De cette manière, $\mathbf{P}f$ est une fonction sur l'ensemble

$$T = \{(\theta, x) : \theta \in S^{n-1}, x \in \theta^\perp\}$$

tangent à S^{n-1} . On définit également

$$\mathbf{P}_\theta f(x) = \mathbf{P}f(\theta, x).$$

Ainsi, bien que ces deux définitions coïncident si $n = 2$, nous décrivons préférentiellement la transformée en rayons X qui modélise la situation physique qui nous intéresse ici, y compris dans les dimensions supérieures (notamment $n = 3$). Il faut néanmoins souligner que ces deux transformées partagent essentiellement les mêmes propriétés mathématiques, dont toutes celles que nous rappelons ici et notamment le théorème de la coupe centrale (reper-torié dans la littérature anglophone sous différentes appellations, outre 'central slice theorem', comme 'projection theorem' ou 'Fourier slice theorem'). Pour les démonstrations, nous renvoyons aux ouvrages de Natterer [50] et Natterer et Wübbeling [51].

THÉORÈME 2.1 (Théorème de la coupe centrale) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on a*

$$\widehat{\mathbf{P}_\theta f}(\eta) = (2\pi)^{1/2} \widehat{f}(\eta), \quad \eta \in \theta^\perp.$$

Il nous faut également définir un outil fondamental des mathématiques de la tomographie :

DÉFINITION 2.3 *L'opérateur de rétroprojection \mathbf{P}^* est défini par*

$$(\mathbf{P}^*g)(x) = \int_{S^{n-1}} g(\theta, E_\theta x) d\theta$$

où E_θ est la projection orthogonale sur θ^\perp : $E_\theta x = x - (x \cdot \theta)\theta$.

Cet opérateur \mathbf{P}^* est l'adjoint de \mathbf{P} vérifiant

$$\int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} g \mathbf{P} f d\theta dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{P}^* g \cdot f dx. \quad (2.1)$$

Enfin, voici une autre relation classique qui se trouve à la base des méthodes de reconstruction analytiques :

THÉORÈME 2.2 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathcal{S}(T)$, on a*

$$\mathbf{P}^* g * f = \mathbf{P}^*(g * \mathbf{P} f).$$

2.1.1 Les algorithmes de reconstruction

Les méthodes les plus courantes pour calculer f à partir de ses projections sont basées sur les théorèmes 2.1 et 2.2. Bien qu'elles soient donc issues de deux théorèmes mathématiques différents et aboutissent également à des algorithmes différents, les deux types de méthodes sont souvent repertoriées sous l'appellation de *rétroprojection filtrée*. Ce nom décrit en effet correctement l'un et l'autre type et nous verrons par ailleurs que toute reconstruction donne en général lieu à une opération de rétroprojection, aussi bien dans les méthodes analytiques que les méthodes algébriques qui seront traitées plus loin.

Pour distinguer toutefois entre les deux algorithmes que nous allons décrire, nous adoptons la convention de Natterer [50] et décrivons l'algorithme issu du théorème de la coupe centrale comme faisant partie des *méthodes de Fourier*. Ce théorème relie en effet la transformée de Fourier des projections $\mathbf{P}f$ avec celle de la fonction f , qui peut par conséquent être retrouvée immédiatement par transformée de Fourier inverse à travers l'algorithme suivant, restreint à deux dimensions et donc aussi bien valable pour la transformée de Radon que pour la transformée en rayons X. En géométrie parallèle, nous savons que les méthodes de reconstruction en deux dimensions sont suffisantes dans le cadre des méthodes analytiques pour faire de l'imagerie tridimensionnelle, car nous avons la possibilité de reconstruire l'objet plan par plan. Le cas de la géométrie conique sera spécifiquement abordé au chapitre 3.

ALGORITHME 2.1 (Reconstruction standard par méthode de Fourier)

A partir des données, les projections discrètes $g_{j,l} = g(\theta_j, x_l)$, $j = 0, \dots, p-1$, $l = -q, \dots, q$, soit p projections à une dimension :

- Pour $j = 0, \dots, p-1$, calculer la transformée de Fourier discrète

$$\widehat{g}_{j,r} = (2\pi)^{-1/2} \frac{\rho}{q} \sum_{l=-q}^q e^{-i\pi r l / q} g_{j,l}, \quad r = -q, \dots, q. \quad (2.2)$$

Ceci nous donne immédiatement la transformée de Fourier de f sur une grille polaire à l'aide de la relation donnée dans le théorème 2.1, avec une distance radiale d'échantillonnage de π/ρ .

- Calculer une approximation de la transformée de Fourier de f sur une grille cartésienne par une méthode d'interpolation (plus proche voisin, interpolation

bilinéaire...) : pour chaque $k \in \mathbb{Z}^2, |k| \leq q$, trouver j et r tels que $r\theta_j$ soit le plus proche possible de k puis appliquer

$$\widehat{f}_k = (2\pi)^{-1/2} \widehat{g}_{j,r}. \quad (2.3)$$

• Calculer une approximation f_m de $f(m\rho/q), m \in \mathbb{Z}^2$ par transformée de Fourier inverse discrète 2D

$$f_m = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\pi}{\rho} \right)^2 \sum_{|k| \leq q} e^{i\pi m \cdot k/q} \widehat{f}_k, \quad |m| \leq q. \quad (2.4)$$

Ecrite de manière continue et en fonction des projections $g_\theta(x) = \mathbf{P}f(\theta, x)$, la formule de reconstruction s'écrit selon Dubois [21]

$$f(x_1, x_2) = \int_0^\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{g}(\nu, \theta) |\nu| e^{i2\pi\nu u} d\nu d\theta \quad (2.5)$$

où (x_1, x_2) sont les coordonnées cartésiennes dans le plan \mathbb{R}^2 , $u = x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta$ et $\nu = \sqrt{\nu_1^2 + \nu_2^2}$, ν_1 et ν_2 étant les variables fréquentielles.

Dans cette dernière équation, l'intégrale interne est la transformée de Fourier inverse de la transformée de Fourier de la projection multipliée par $|\nu|$ et peut donc être vue comme une projection filtrée avec le filtre rampe $|\nu|$. L'intégrale externe réalise quant à elle l'opération de rétroprojection, si bien que l'on comprend que les méthodes de reconstruction de type Fourier soient souvent confondues avec la rétroprojection filtrée basée sur le théorème de convolution 2.2 que nous décrivons plus loin.

En tout état de cause, cet algorithme est peu utilisé du fait des artefacts générés par le passage nécessaire d'une grille polaire à une autre cartésienne. On trouvera chez Natterer quelques solutions pour améliorer les reconstructions faites par méthodes de Fourier : l'algorithme de Pasciak [55] ou la méthode de grille de Brouw [9].

Une autre solution classique consiste à rajouter au filtre rampe un filtre passe-bas destiné à réduire l'influence des hautes fréquences qui sont les plus mal échantillonnées sur une grille polaire et contiennent également le bruit. On quitte dans ce cas-là le domaine des solutions exactes, mais souvent pour un résultat bien meilleur (voir Dubois [21]).

Nous abordons maintenant l'algorithme de rétroprojection filtrée proprement dit, c'est-à-dire basé sur le théorème 2.2 que nous rappelons, en supposant toujours être en dimension 2 :

$$W_b * f = \mathbf{P}^*(w_b * \mathbf{P}f) \quad W_b = \mathbf{P}^*(w_b). \quad (2.6)$$

L'idée ici est de choisir la fonction w_b de telle sorte que W_b soit une bonne approximation de la distribution de Dirac δ . Pour cela, on suppose que W_b est un filtre passe-bas à la fréquence de coupure b en définissant

$$\widehat{W}_b(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \widehat{\Phi}(|\xi|/b) \quad (2.7)$$

où $0 \leq \widehat{\Phi} \leq 1$ et $\widehat{\Phi}(\sigma) = 0$ pour tout $\sigma \geq 1$. Pour le filtre passe-bas idéal $\widehat{\Phi}(\sigma) = 1$ si $\sigma \leq 1$, on a

$$W_b(x) = (2\pi)^{-n/2} b^n \frac{J_{n/2}(b|x|)}{(b|x|)^{n/2}}, \quad (2.8)$$

et $W_b \rightarrow \delta$ quand $b \rightarrow \infty$.

La relation entre W_b et w_b s'exprime en terme de transformée de Fourier (voir le théorème II.1.4 de [50]) :

$$\widehat{W}_b(\xi) = (2\pi)^{(n-1)/2} |\xi|^{1-n} \left(\widehat{w}_b \left(\frac{\xi}{|\xi|}, |\xi| \right) + \widehat{w}_b \left(-\frac{\xi}{|\xi|}, -|\xi| \right) \right) \quad (2.9)$$

\widehat{W}_b étant radiale, \widehat{w}_b peut s'exprimer par le seul deuxième argument. Pour \widehat{w}_b pair, on obtient :

$$\widehat{w}_b(\xi) = \frac{1}{2} (2\pi)^{1/2-n} |\sigma|^{n-1} \widehat{\Phi}(|\sigma|/b) \quad (2.10)$$

Pour une telle fonction w_b , on a donc :

ALGORITHME 2.2 (Rétroprojection filtrée)

A partir des données, les projections discrètes $g_{j,l} = g(\theta_j, x_l)$, $j = 0, \dots, p-1$, $l = -q, \dots, q$, soit p projections à une dimension :

- Pour $j = 0, \dots, p-1$, calculer la convolution discrète

$$w_b * g(\theta_j, x) = \frac{1}{q} \sum_{l=-q}^q w_b(x - x_l) g(\theta_j, x_l) \quad (2.11)$$

- Pour tout x , calculer la rétroprojection discrète

$$\mathbf{P}^* w_b * g(\theta_j, x) = \sum_{j=1}^p \alpha_{pj} (w_b * g)(\theta_j, x \cdot \theta_j) \quad (2.12)$$

où les α_{pj} sont les poids positifs utilisés dans la formule de quadrature sur S^{n-1} .

En résumé, on a :

$$f_{FBP} = \mathbf{P}^* w_b * g(\theta_j, x) \quad (2.13)$$

qui est l'algorithme sans doute encore le plus populaire pour la plupart des applications de la tomographie.

Sans rentrer davantage dans ces techniques analytiques, un certain nombre de remarques doivent néanmoins être faites à leur sujet. La première est, comme nous l'avons déjà dit, le rôle fondamental joué par l'opérateur de rétroprojection. Ce rôle se comprend particulièrement bien en tomographie puisque cet opérateur permet de relier un point à reconstruire à l'ensemble des points sur lesquels il a été projeté et nous retrouverons exactement la même idée en explorant les méthodes algébriques. La deuxième remarque découle de l'équation (1.5) qui nous démontrait l'équivalence mathématique des problèmes de tomographie par émission et par transmission. Même si le modèle de la projection intégrale (transformée de Radon ou transformée en rayons X) correspond bien à celui

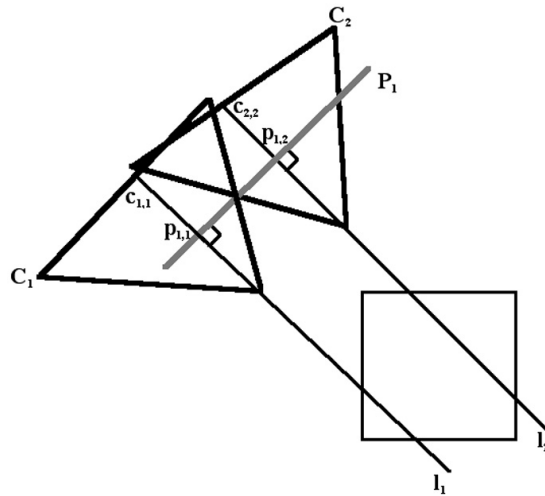


FIG. 2.1 – Illustration de la correspondance entre données acquises en géométrie conique et parallèle. Pour un point $p_{1,1}$ acquis comme projection parallèle suivant une droite de projection l_1 sur le détecteur P_1 , il existe une position pour le détecteur conique C_1 telle que la même droite de projection donne lieu à une mesure $c_{1,1}$. Il en est de même pour tout autre point $p_{1,2}$ issu d'une droite l_2 , en cherchant le point de projection conique correspondant $c_{2,2}$ sur une nouvelle position du détecteur conique C_2 .

de la tomographie par émission, un simple passage au logarithme permet de ramener le cas de la tomographie par transmission à celui décrit. La troisième remarque va dans le même sens, celui de la généralité du problème mais cette fois en terme de géométrie. Les transformées que nous avons définies fonctionnent en effet pour une géométrie parallèle de projection, qui s'associe par exemple avec la tomographie d'émission pour un détecteur muni d'un collimateur parallèle. Or la donnée - supposée dans un raisonnement analytique - de toutes les projections parallèles en 2D permet de déduire l'ensemble des projections telles qu'elles seraient obtenues en géométrie conique par simple réorganisation des données. Réciproquement, la donnée de l'ensemble des projections coniques permet une réorganisation en projections obtenues de manière parallèle (voir la figure 2.1). Cette correspondance des géométries permet, au moins en 2D, d'exploiter ces mêmes algorithmes de reconstruction (méthode de Fourier et rétroprojection filtrée) sans autre adaptation spécifique.

Pourquoi alors développer d'autres méthodes? Il y a essentiellement deux raisons pour cela :

D'abord, même en 2D où le passage d'une géométrie à une autre est possible, cette réorganisation des données introduit des artefacts qui rendent préférable le développement de méthodes adaptées à chaque géométrie. De plus, la facilité pour passer d'une géométrie à l'autre disparaît lorsque l'on travaille en 3D, ce qui sera notre cas. La correspondance mentionnée plus haut entre projections parallèles et coniques n'est valable que pour un objet 2D et des projections 1D, et n'est valable en 3D que dans le plan perpendiculaire à l'axe de rotation

du détecteur passant par le centre de l'unique trou du collimateur conique. Ceci impose le développement de méthodes analytiques débouchant sur des algorithmes spécifiques à la géométrie conique. Ces méthodes, apparues au début des années 1980, seront étudiées plus loin dans la section 3.3.

Ensuite, la modélisation physique du problème souffre de limitations dues à la complexité des formules d'inversion (si elles existent) pour un opérateur de projection qui tiendrait compte des principaux paramètres en jeu dans l'imagerie tomographique : résolution intrinsèque du détecteur ou taille du collimateur font en effet que la projection d'un point de l'objet ne se fait pas sur un point de l'image mais suivant une tache. C'est pourquoi nous introduisons les méthodes algébriques, qui sont aveugles à cette complexité.

2.2 Linéarité du problème

2.2.1 Le problème linéaire

En tomographie comme dans de nombreux problèmes que l'on peut trouver dans toutes les branches de la science, un objet mathématique (l'inconnue) doit être retrouvé à partir de données mesurées. Si la relation entre l'inconnue et les données est linéaire ou si on la suppose linéaire - les effets non linéaires pouvant parfois être négligés lorsqu'ils sont faibles -, le problème peut alors être exprimé simplement, par un système d'équations linéaires souvent très grand qu'il faut résoudre.

En regardant la rapide modélisation que nous avons donnée du problème tomographique à partir de la transformée de Radon (définition 2.1) ou de la transformée en rayons X (définition 2.2), il est clair que nous sommes dans le cas linéaire, ces opérateurs ne mettant en jeu que des intégrales. Or ces méthodes analytiques ne tiennent pas compte d'un certain nombre de paramètres et d'effets physiques, et c'est l'une des raisons pour lesquelles nous pensons devoir nous tourner vers les méthodes algébriques. Encore faut-il vérifier que leur prise en compte n'introduise pas de non-linéarité dans le problème tomographique.

A cet effet, nous avons dressé la liste des différents effets physiques en jeu en tomoscintigraphie en fonction de leur comportement linéaire ou non. Ces différents effets seront détaillés plus loin, dans la section 3.4 consacrée à la modélisation du problème. Nous ne discutons pour le moment que de leur linéarité et regardons particulièrement, pour ceux qui sont non linéaires *a priori*, s'ils peuvent légitimement être approchés par une modélisation linéaire.

Effets linéaires

Par linéarité du problème, nous entendons que si A est l'opérateur de projection, x_1 et x_2 sont deux distributions quelconques de radioactivité (en scintigraphie) ou d'une autre quantité associée à une autre modalité d'imagerie, alors :

$$A(x_1 + x_2) = A(x_1) + A(x_2).$$

Sont donc linéaires les effets liés au dispositif de détection qui ne dépendent pas de l'intensité du rayonnement. Les interactions ayant lieu au sein même de la distribution de radioactivité sont non-linéaires comme nous allons le voir.

- Diamètre des trous du collimateur/ diamètre effectif du collimateur pinhole

Il est important de tenir compte de l'ouverture du trou aussi bien pour des raisons géométriques que pour l'estimation de l'activité d'un objet. En effet, plus l'ouverture est large et plus l'image projetée d'un point de l'objet (c'est-à-dire la réponse impulsionnelle du détecteur) est étalée. Par ailleurs un trou plus grand permet d'obtenir une meilleure sensibilité du détecteur, celle-ci variant proportionnellement en fonction de la surface d'ouverture du trou. Pour tenir compte du phénomène de pénétration du rayonnement gamma sur les bords du ou des trous du collimateur, on substitue habituellement au diamètre réel un diamètre effectif, plus grand. Ceci ne change rien quant à la linéarité du problème : la quantité $f(x)$ de rayonnement pouvant arriver au détecteur depuis un point particulier de la distribution ne dépend pas de la distribution $f(y)$, prise en un autre point. Ce serait le cas si pour un diamètre donné pour un trou du collimateur, seule une quantité limitée de photons pouvait passer par unité de temps, les photons émis depuis le point x étant alors « mis en concurrence » avec ceux émis depuis le point y , ceci aboutirait au passage d'une fraction seulement des photons issus de x , inversement proportionnelle à l'activité en y . En supposant que le flux à travers un trou du collimateur n'est pas limité par unité de temps, prendre en compte le diamètre réel ou effectif du trou ne conduit pas à une non linéarité.

- Résolution intrinsèque de la gamma-caméra

Les détecteurs utilisés en scintigraphie ne localisent pas les photons incidents avec précision, si bien que si un faisceau de photons est dirigé vers un point du détecteur, celui-ci rendra une image suivant une tache. Cet effet est indépendant de la distribution de radioactivité en ce que la précision du détecteur ne dépend pas là non plus de l'intensité du flux de photons incidents.

Effets non-linéaires

- Efficacité de la gamma-caméra

Lors de l'arrivée d'un flux de photons sur la surface du détecteur, seule une partie d'entre eux peut être détectée, compte tenu du temps mort qui affecte la caméra après la détection d'un événement. La modélisation de ce phénomène peut se révéler complexe si l'on considère que cette sensibilité intrinsèque, appelée aussi efficacité de la gamma-caméra est dépendante du flux de photons. Il est évident que plus celui-ci est important et moins l'efficacité est grande alors qu'elle peut atteindre les 100% pour un flux de photons très faible. Dans notre cas, les doses utilisées étant toujours sensiblement les mêmes, nous n'avons estimé qu'une seule valeur pour l'efficacité de la gamma-caméra qui correspond à nos conditions d'acquisition. Pour ces conditions - pour une gamme d'activité donnée - l'efficacité du détecteur peut être supposée constante, rendant sa réponse linéaire en terme de sensibilité.

- Atténuation

La question de l'atténuation en TEMP (tomographie d'émission monophotonique) se distingue évidemment radicalement de l'atténuation en tomodensitométrie (tomographie de transmission) dans la mesure où dans le deuxième cas, elle représente l'information principale de l'acquisition, ce qui est mesuré. Dans le cas de la scintigraphie au contraire, il s'agit d'estimer quelle est la part de rayonnement émis par une zone donnée prise dans la distribution de radioactivité et qui n'est pas détectée du fait d'une atténuation avant même le collimateur. Or la possibilité d'une atténuation existe du moment qu'il y a matière, indépendamment de ce que cette matière soit elle-même émettrice de photons gamma ou pas. Ainsi, en plaçant devant un animal à qui l'on a administré une certaine quantité d'un traceur et que l'on considère comme un objet x_1 une plaque de plexiglas x_2 , nous avons, du point de vue du nombre de photons émis N :

$$N = N_{x_1} + N_{x_2}$$

où N_{x_1} est le nombre de photons émis par l'objet x_1 et N_{x_2} est le nombre de photons émis par l'objet x_2 , soit

$$N = N_{x_1}$$

puisque N_{x_2} est égal à zéro. Mais en considérant maintenant le résultat sur la projection mesurée par la gamma-caméra Ax , nous avons :

$$Ax = A(x_1 + x_2) < Ax_1$$

car x_2 n'émet pas de photons et au contraire, atténue le rayonnement issu de x_1 . L'opérateur de projection A devient donc non-linéaire, conduisant à différentes approches :

- Le calcul exact à partir des cartes d'atténuation mesurées au scanner. Dans ce cas, l'opérateur A doit être modifié pour chaque acquisition en incluant l'information sur la présence de matière atténuante et nous retrouvons un problème linéaire. Il s'agit là évidemment de la solution idéale puisqu'elle ne fait pas d'approximation, tout en permettant de rester dans le cadre d'un système d'équations linéaires. Son inconvénient est qu'il faut disposer du matériel permettant de mesurer l'atténuation (micro-scanner dans le cas du petit animal) et de la recalculer précisément sur la distribution de radioactivité.

- Les méthodes de correction itératives de type Chang [16] incluent dans l'algorithme de reconstruction une correction suivant l'hypothèse que là où de l'activité est reconstruite, il y a de la matière et donc de l'atténuation. Ces méthodes ont longtemps été parmi les plus utilisées chez l'homme, même si elles montrent des limites dans tous les cas où une structure très atténuante ne contient pas de traceur (structures osseuses dans les tomoscintigraphies non-osseuses, lit ou support du patient...). Elles sont aujourd'hui largement remplacées par une prise en compte de l'atténuation, de manière exacte ou non, dans l'opérateur de projection.

- Les méthodes de prise en compte d'un coefficient d'atténuation uniforme pris dans une certaine enveloppe pré-déterminée (boule, cylindre ou ellipsoïde par exemple). C'est la méthode que nous avons choisi d'adopter parce qu'elle nous paraît aussi correcte que celle de Chang tout en étant plus simple à mettre en œuvre. Elle permet par ailleurs de se replacer dans le cadre d'un problème linéaire.

Diffusion Compton

La non-linéarité de la diffusion Compton s'explique exactement de la même manière que celle de l'atténuation en TEMP : c'est l'interaction de l'objet avec lui-même qui provoque cet effet, certains des photons gamma émis par une partie de cet objet étant déviés en passant à proximité d'électrons présents sur leur parcours dans l'objet avant d'atteindre le collimateur. Une partie de ces photons déviés subiront donc un effet comparable à de l'atténuation : l'angle duquel ils ont été déviés ou la perte d'énergie qu'ils subissent les empêchent d'être détectés créant un déficit dans le comptage sur l'image. La capacité du système à éliminer ces photons déviés dépend de la résolution en énergie du détecteur. Meilleure est cette résolution et mieux les photons pourront être discriminés entre ceux qui ont suivi une trajectoire en ligne droite et ceux qui auront été déviés mais auront alors nécessairement perdu de l'énergie. Malheureusement, cette résolution est en général limitée, de l'ordre de 10% autour du pic énergétique de 140 keV. Une fenêtre de 20% autour de l'énergie de l'isotope utilisé est donc mise en place pour tenir compte de cette résolution en énergie, ce qui a pour effet de permettre la détection de photons diffusés par effet Compton. A l'inverse de l'atténuation, il y a donc aussi une partie des photons qui n'auraient pas du être comptés et qui le sont après déviation.

Plusieurs solutions peuvent être envisagées pour modéliser la diffusion Compton. La plus simple consiste à se contenter de la sélection en énergie décrite plus haut et qui permet de réduire la fraction des photons diffusés à environ 30%. Une autre demande une acquisition en double fenêtrage d'énergie permettant de soustraire aux projections acquises avec la fenêtre habituelle d'énergie p_d une fraction des projections acquises dans une gamme d'énergie plus faible correspondant aux photons déviés p_{sc} (« sc » pour *scatter*). On obtient ainsi les projections finales p_f comme

$$p_f = p_d - k \cdot p_{sc}$$

avec k généralement inférieur à 0,5 qui dépend de la fenêtre secondaire et de l'isotope utilisé. Cette méthode a été mise au point par Jaszczak et al. [35].

Une troisième méthode repose sur le calcul d'une fonction filtre qui modélise le diffusé et se rajoute aux projections par convolution. La combinaison de ce filtre avec la réponse impulsionnelle doit conduire à une déconvolution de l'ensemble des effets au cours de la reconstruction. Ce travail a été fait par exemple chez Yang et al. [72] mais demande une adaptation très fine au matériel utilisé (notamment collimateur) ainsi qu'à la forme de la matière dans laquelle se situe l'interaction.

Nous avons donc opté pour l'absence de prise en compte autre que par sélection en énergie, n'étant pas convaincus de réellement améliorer la modélisation par un filtre approximatif.

Nous voyons donc comment, à partir d'un problème mettant en jeu certains effets non linéaires, nous pouvons, par le biais de certaines approximations, revenir à un problème linéaire.

2.2.2 La tomographie posée comme système linéaire

L'approche algébrique implique une discrétisation de l'ensemble du problème antérieure à la conception des méthodes de résolution, à l'inverse des méthodes analytiques dont les formules de reconstruction sont issues d'un raisonnement sur une distribution et des projections continues et sont discrétisées ensuite. Compte tenu du fait que la distribution sera forcément reconstruite de manière discrète, mais aussi de ce que les projections sont discrètes (images composées de pixels) et séparées par des pas d'angle discrets, raisonner sur ces données discrètes paraît adapté à la situation physique concrète même si d'autres considérations basées sur la modélisation du problème justifient ce choix.

Nous supposons désormais que les distributions f à reconstruire sont à support compact : $Supp(f) \subset \Omega(\mathbb{R}^3)$. Nous supposons également données pour le moment des fonctions de base ou *voxels* $v_j, j = 1, \dots, N$ normées à supports disjoints et recouvrant $\Omega(\mathbb{R}^3)$ dans le sens où $\bigcup_j Supp(v_j) \supset \Omega(\mathbb{R}^3)$ et à partir desquelles la distribution f peut être estimée par un vecteur x comme :

$$x = \sum_{j=1}^N x_j \cdot v_j \quad (2.14)$$

où par exemple $x_j = \int_{Supp(v_j)} f(x) dx$.

De même, nous supposons donné un opérateur de projection A linéaire. Pour une géométrie et un nombre de projections P donnés, cet opérateur agit sur les fonctions de base en les projetant sur l'ensemble des plans correspondant aux positions prises par le détecteur au cours des P projections mesurées. Ces projections sont elles-mêmes discrètes et sont chacune exprimées dans une base de M fonctions appelées *pixels*. Cette discrétisation est inhérente au détecteur, sous forme de fonctions indicatrices de carrés disjoints et de même taille et ne sera donc pas discutée plus avant ici.

Nous reviendrons par contre dans la deuxième partie et notamment au cours du chapitre 4 sur le choix des fonctions de base de l'*espace objet* $\Omega(\mathbb{R}^3)$ discuté dans le cadre d'une réduction du nombre de calculs et avant cela sur le calcul de l'opérateur de projection A dans la section 3.4, qui sera consacrée à l'élaboration d'un modèle pour la tomoscintigraphie avec collimateur sténopé.

Avec les notations définies plus haut, et posant $K = M/P$ le nombre de pixels dans une image de projection, l'opérateur de projection s'écrit sous la forme d'une matrice :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{1,1}^1 & A_{1,2}^1 & \dots & A_{1,N}^1 \\ A_{2,1}^1 & A_{2,2}^1 & \dots & A_{2,N}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{K,1}^1 & A_{K,2}^1 & \dots & A_{K,N}^1 \\ A_{1,1}^2 & A_{1,2}^2 & \dots & A_{1,N}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{K,1}^2 & A_{K,2}^2 & \dots & A_{K,N}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{K,1}^P & A_{K,2}^P & \dots & A_{K,N}^P \end{pmatrix}$$

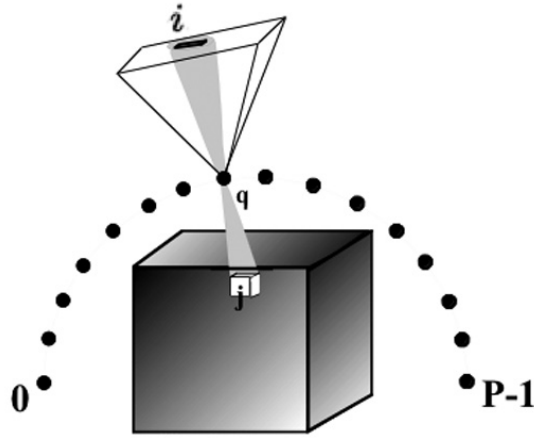


FIG. 2.2 – Illustration du problème consistant à estimer l’activité de chaque voxel indicé par j par chacune des projections indicées par q et composées de pixels indicés par i .

Cette matrice correspond à un opérateur décrivant l’ensemble des P projections. Les opérateurs associés à chacune des P projections apparaissent dans la matrice A comme des blocs de taille $K \times N$ que nous appelons respectivement $A^1, A^2 \dots A^P$.

Le problème tomographique posé linéairement s’écrit alors :

$$b = Ax \quad (2.15)$$

où, en tomoscintigraphie, le coefficient $A_{i,j}$ est la fraction de photons émis par le voxel j qui atteint le pixel i sur le détecteur. Le vecteur $b = (b_1, \dots, b_M)$ contient l’ensemble des mesures qui associent à chaque pixel le nombre de photons détectés sur sa surface.

Ce système peut être découpé en blocs associés à chaque projection :

$$b^q = A^q x \quad (2.16)$$

pour $q = 0, \dots, P - 1$ (voir figure 2.2).

La résolution du système (2.15) par des méthodes directes ne peut s’envisager que si $M = N$ et si M et N sont petits. Ce cas ne sera pas le nôtre en raison de la taille des données mais aussi de la non-existence en général d’un inverse unique si bien que nous nous tournons d’entrée vers les méthodes itératives.

2.3 Les méthodes itératives

Le système (2.15) est dit consistant s’il admet une unique solution. Cette condition peut être envisagée d’un point de vue mathématique, si A est une matrice carrée de déterminant non-nul ou d’un point de vue physique puisque tout système d’équation décrivant des processus physiques doit bien posséder au moins une solution : la solution physique. Dès lors, il devrait suffire d’avoir un nombre suffisant d’équations pour éliminer toutes les autres solutions possibles

et même la surdétermination du système ne devrait pas empêcher l'obtention de la solution unique.

Il n'en est malheureusement pas ainsi, d'une part parce qu'une composante aléatoire existe dans les mesures sous la forme d'un bruit non négligeable, notamment en médecine nucléaire, et d'autre part parce que la modélisation du système qui apparaît dans la matrice A ne peut jamais atteindre un degré de précision garantissant l'exacte adéquation des données mesurées à l'objet reconstruit. Pour ces raisons, nous sommes dans le cadre des problèmes mal posés au sens de Hadamard. Pour aborder ces problèmes, une littérature propre aux problèmes de tomographie s'est développée parallèlement aux méthodes générales permettant de traiter les problèmes linéaires. C'est ce panorama des méthodes usuelles de reconstruction par méthodes itératives en tomographie que nous voulons exposer ici.

Les systèmes linéaires dont nous parlons sont à la fois grands et creux. Nous verrons en effet en abordant la modélisation du problème qu'un voxel ne se projette que sur une surface composée de quelques pixels, si bien que de nombreux coefficients de la matrice A sont nuls.

2.3.1 Algorithmes séquentiels, simultanés et par blocs

Les algorithmes qui suivront rentrent tous dans la classification proposée par Censor et Zenios [13] que nous allons voir. A cette fin, il faut d'abord souligner que les algorithmes de résolution de systèmes linéaires reposent sur l'alternance de deux étapes. La première est la génération de données de projection par application de la matrice de projection A à l'itérée courante $x^{(k)}$. On obtient alors $\bar{b} = Ax^{(k)}$. Cette étape peut en réalité consister à ne calculer qu'une partie des projections, pouvant être réduite au minimum à un seul pixel i de la forme $\bar{b}_i = A_{i,\bullet}x^{(k)}$, où $A_{i,\bullet}$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A .

La deuxième étape consiste à comparer ces données générées aux données mesurées, opération qui se fait le plus souvent par une différence $b - \bar{b}$, qui aboutit aux algorithmes de type ART [24] que nous détaillerons plus loin ou par une division b/\bar{b} , d'où dérivent les algorithmes de type EM [20]. La mise à jour de $x^{(k)}$ est alors fonction de cette différence. Nous reviendrons en détail sur ces différents algorithmes, mais ceci nous suffit déjà à la compréhension des trois principaux types d'implémentation.

Un algorithme est ainsi dit *séquentiel* si les deux étapes de génération de données de projection et de comparaison des données générées et mesurées alternent pour chaque équation indicée par $i = 1, \dots, M$. On ne calcule donc, au cours de la première étape, qu'un scalaire $\bar{b}_i = A_{i,\bullet}x^{(k)}$.

Un algorithme est dit *simultané* si la deuxième étape n'intervient qu'après que la première ait été effectuée pour l'ensemble des équations, c'est-à-dire après que l'on ait calculé $\bar{b} = Ax^{(k)}$.

Enfin, un algorithme est dit *par blocs* si la première étape consiste à calculer une partie des projections, c'est à dire à générer un vecteur de projections estimées de taille $I(k)$ - qui donc peut varier au cours des itérations - avant d'effectuer la comparaison et la mise à jour.

2.3.2 Quelques algorithmes itératifs

Une des manières d'aborder la résolution de grands systèmes linéaires est de les comprendre comme des cas particuliers de *problèmes de faisabilité convexe* consistant à trouver un point $x^* \in C = \bigcap_{i=1}^M C_i \neq \emptyset$, où C est l'intersection non vide d'un nombre fini d'ensembles convexes fermés $C_i \subseteq \mathbb{R}^N, i = 1, 2, \dots, M$ dans l'espace euclidien. De même que les systèmes d'équations linéaires, les systèmes d'inégalités linéaires ou convexes sont des cas particuliers importants du problème de faisabilité convexe qui apparaissent fréquemment dans toutes sortes d'applications scientifiques.

Dans la classification proposée plus haut, l'algorithme de Cimmino est l'archétype de l'algorithme simultané. Ici, des « points intermédiaires » sont obtenus en projetant l'itérée courante x^k sur les différents ensembles

$$x^{(k+1,i)} = P_i(x^{(k)}), \quad i = 1, 2, \dots, M, \quad (2.17)$$

où P_i est la projection orthogonale (minimisant la distance euclidienne) sur C_i et l'itérée suivante est

$$x^{(k+1,i)} = x^k + \lambda_k \left(\sum_{i=1}^M w_i x^{(k+1,i)} - x^{(k)} \right), \quad (2.18)$$

où les w_i sont des poids fixés tels que $w_i > 0$ pour tout i et $\sum_{i=1}^M w_i = 1$. Les paramètres de relaxation $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$ sont généralement pris dans l'intervalle $\epsilon \leq \lambda_k \leq 2 - \epsilon$ pour un $\epsilon > 0$ fixé mais arbitrairement petit (voir [17]). Le système de poids fixes $\{w_i\}_{i=1}^M$ peut être remplacé par $\{w_i^k\}_{i=1}^M$ avec $w_i^k > 0$ et $\sum_{i=1}^M w_i^k = 1$ tout en conservant un schéma convergeant dans le cas consistant, lorsque le problème de faisabilité convexe a une intersection non vide C .

Avec les notations définies plus haut, la matrice A modélisant le système de M équations à N inconnues, l'algorithme de Cimmino prend donc la forme suivante :

ALGORITHME 2.3 (Cimmino)

Pour tout $j \in 1, 2, \dots, N$, calculer :

$$x_j^{(k+1)} = x_j^k + \lambda_k \sum_{i=1}^M \frac{1}{M} \frac{A_{i,j}^T}{\|A_{i,\bullet}\|^2} (b_i - A_{i,\bullet} x^{(k)}) \quad (2.19)$$

où A^T désigne la transposée de la matrice A .

Cette méthode simultanée a l'avantage d'être convergente même dans le cas inconsistant, et la solution obtenue minimise les sommes pondérées des carrés des distances aux ensembles $C_i, i = 1, 2, \dots, M$ (voir [18]). Cependant son taux de convergence est lent et ce particulièrement pour les grands systèmes qui sont creux (nous en verrons la raison plus loin). Cela en fait un algorithme peu utilisé dans l'ensemble des travaux relatifs au domaine de la tomographie.

Un autre algorithme basé sur l'idée de *projection sur des ensembles convexes* est l'*Algebraic Reconstruction Technique* (ART) introduit par Gordon et al. [24] en 1970 en tomographie. L'idée originale est due à Kaczmarz [38] et consiste à projeter cycliquement l'itérée courante sur des hyperplans, sans réaliser la moyenne

de ces projections qui apparaît dans l'algorithme de Cimmino. Il s'écrit donc sous la forme :

ALGORITHME 2.4 (ART)

$$x^{(k+1)} = x^k + \lambda_k \frac{b_i - A_{i,\bullet} x^{(k)}}{\|A_{i,\bullet}\|^2} A_{i,\bullet}^T \quad (2.20)$$

où i est l'indice de l'équation traitée au cours d'une itération et qui varie cycliquement parmi les M équations du système, b_i est la $i^{\text{ème}}$ composante du vecteur de données b et $A_{i,\bullet}$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A .

Dans le cas inconsistant, la convergence est cyclique (voir [65]) mais Censor et al. [14] ont montré que pour un paramètre de relaxation donné, les limites de ce cycle restent à une distance finie de la solution des moindres carrés, atteinte par exemple par l'algorithme de Cimmino. De plus, cette distance dépend du paramètre de relaxation et peut être rendue arbitrairement petite lorsque le paramètre de relaxation tend vers zéro. Cet algorithme a été l'un des plus utilisés au cours des années 70 et au début des années 80, avant d'être modifié par Andersen et Kak [3] en 1984 dans l'idée de le rendre simultané. L'algorithme *Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique* (SART) modifie donc la $(k+1)^{\text{ème}}$ itérée à partir de l'ensemble des équations de projection :

ALGORITHME 2.5 (SART)

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}} \sum_{i=1}^M \frac{b_i - (Ax^k)_i}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}} A_{i,j}^T \quad (2.21)$$

On retrouve donc dans cet algorithme une forme semblable à celle de l'algorithme de Cimmino, à ceci près que le poids de $1/M$ attribué à chaque équation chez Cimmino devient ici $\frac{A_{i,j}^T}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}}$. Cela implique que l'équation i participe à la modification de l'inconnue j proportionnellement au coefficient $A_{i,j}$, ce qui permet une convergence nettement plus rapide dans le cas de systèmes très creux, puisque les équations qui ne contiennent pas l'inconnue j ne participent simplement pas à sa mise à jour au cours des itérations. A l'inverse, de nombreuses valeurs nulles sont utilisées dans une itérations avec Cimmino pour estimer une inconnue j lorsque le système est creux, conduisant à une sous-évaluation systématique de sa valeur et une grande lenteur dans la convergence.

Pour remédier à ce phénomène, Censor et al. ont proposé une adaptation de l'algorithme de Cimmino basée sur l'exploitation d'une projection oblique au lieu de la projection orthogonale classique. Ainsi, considérant l'hyperplan $H \triangleq \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle a, x \rangle = b\}$ avec $a = (a_j) \in \mathbb{R}^N, p \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, on pose pour G une matrice de taille $N \times N$ symétrique et définie positive la norme ellipsoïdale $\|x\|_G^2 \triangleq \langle x, Gx \rangle$. Pour un point $z \in \mathbb{R}^N$, la projection oblique de z sur H par rapport à la norme G est l'unique point $P_H^G(z) \in H$ tel que

$$P_H^G(z) = \operatorname{argmin}\{\|x - z\|_G \mid x \in H\}. \quad (2.22)$$

La résolution de ce problème de minimisation conduit à

$$P_H^G(z) = z + \frac{b - \langle a, z \rangle}{\|a\|_{G^{-1}}^2} G^{-1} a, \quad (2.23)$$

où G^{-1} est l'inverse de G . Pour $G = I$ la matrice identité, l'équation (2.23) redonne la projection orthogonale de z sur H . Le principe de l'algorithme *Component Averaging* (CAV) de Censor et al. [12] consiste alors à introduire dans la matrice G qui définit la projection orthogonale une information concernant la nullité des coefficients de la matrice de projection R . Si l'on représente le système à résoudre $Ax = b$ par M hyperplans

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^N \mid \langle A_{i,\bullet}, x \rangle = b_i\} \quad (2.24)$$

où $A_{i,\bullet} = (A_{i,j}) \in \mathbb{R}^N$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de A , $A_{i,\bullet} \neq 0$ pour tout i et $b = (b_i) \in \mathbb{R}^N$, on définit les matrices diagonales de taille $N \times N$ $G_i = \text{diag}(g_{i,1}, \dots, g_{i,N})$ avec $g_{i,j} \leq 0$ et telles que $\sum_{i=1}^M G_i = I$. L'ensemble des matrices $\{G_i\}_{i=1}^M$ est appelé *motif d'espacement* (*sparsity pattern oriented* ou SPO) par rapport à une matrice A de taille $M \times N$ si pour $i = 1, \dots, M$ et $j = 1, \dots, N$, $g_{i,j} = 0$ si et seulement si $A_{i,j} = 0$.

Le choix du motif d'espacement conduisant à l'algorithme CAV est le suivant :

$$g_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{s_j} & \text{si } A_{i,j} \neq 0 \\ 0 & \text{si } A_{i,j} = 0 \end{cases}$$

où s_j est le nombre d'éléments non nuls $A_{i,j} \neq 0$ dans la $j^{\text{ème}}$ colonne de A et l'on a :

ALGORITHME 2.6 (CAV)

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + \lambda_k \sum_{i=1}^M \frac{b_i - \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle}{\sum_{l=1}^N s_l (A_{i,l})^2} \cdot A_{i,j}, \quad (2.25)$$

où $\{\lambda_k\}_{k \geq 0}$ sont les paramètres de relaxation.

Ainsi les propriétés intéressantes de l'algorithme de Cimmino, et notamment la convergence dans le cas inconsistant, sont maintenues tout en obtenant une bien meilleure vitesse de convergence, comparable selon les auteurs à celle de l'algorithme ART.

Nous mentionnons également l'existence d'une version de l'algorithme CAV par blocs, l'algorithme *Block-Iterative CAV* (BICAV) de Censor et Elfving [15].

2.3.3 Schéma de Landweber

Un intéressant travail d'homogénéisation a été réalisé par Jiang et Wang [36], qui dérivent l'ensemble des algorithmes mentionnés jusque-là à partir d'un unique schéma basé sur la méthode de Landweber. Pour le résolution d'un système

$$Ax = b \quad (2.26)$$

le schéma sous sa forme simultanée s'écrit de la manière suivante :

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \lambda_n V^{-1} A^T W (b - Ax^{(n)}) \quad (2.27)$$

où les matrices V et W sont toutes deux diagonales et définies positives et respectivement d'ordre N et M . La version par blocs de ce schéma demande quelque raffinement des notations en supposant que l'ensemble des indices $B = \{1, \dots, M\}$ est partitionné en T sous-ensembles disjoints B_t tels que

$$B = \{1, \dots, M\} = \bigcup_{1 \leq t \leq T} B_t \quad (2.28)$$

où les sous-ensembles B_t ne sont pas nécessairement disjoints, chacun d'entre eux consistant en $M(t) \geq 1$ indices

$$B_t = \{i_1^t, \dots, i_{M(t)}^t\}. \quad (2.29)$$

Pour $n \geq 0$, soit $[n] \triangleq n(\bmod T) + 1$ et enfin, on définit

$$\mathbf{A}_t = \begin{pmatrix} A_{i_1^t, \bullet} \\ \vdots \\ A_{i_{M(t)}^t, \bullet} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}_t = \begin{pmatrix} W_{i_1^t} & & \\ & \ddots & \\ & & W_{i_{M(t)}^t} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathbf{b}_t = \begin{pmatrix} b_{i_1^t} \\ \vdots \\ b_{i_{M(t)}^t} \end{pmatrix}$$

qui sont les blocs de A, W et b correspondant à la partition (2.28), (2.29), où $A_{i, \bullet}$ est la $i^{\text{ème}}$ ligne de A , W_i est le $i^{\text{ème}}$ élément diagonal de W et b^i est la $i^{\text{ème}}$ composante de b respectivement. La version par blocs de (2.27) s'écrit alors :

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \lambda_n V^{-1} A_{[n]}^T W_{[n]} (b_{[n]} - A_{[n]} x^{(n)}) \quad (2.30)$$

Si $T = 1$, cette dernière équation se réduit à la version simultanée 2.27. Dans tous les cas, on définit un cycle comme le traitement pour $n = kT$ jusqu'à $n = (k+1)T - 1$. Avec ces notations, les différents algorithmes se retrouvent de la manière suivante :

- Algorithme de Cimmino : en définissant V et W comme

$$V = I \quad (2.31)$$

$$\frac{1}{W_i} = M \|A_{i, \bullet}\|^2, \text{ pour } i = 1, \dots, M \quad (2.32)$$

l'équation (2.27) devient

$$x_j^{(n+1)} = x_j^n + \lambda_n \sum_{i=1}^M \frac{1}{M \|A_{i, \bullet}\|^2} A_{i,j}^T (b_i - A_{i, \bullet} x^{(n)}) \quad (2.33)$$

qui est bien la même que (2.19).

• Algorithme ART : cet algorithme étant séquentiel, $[n]$ est défini avec $T = M$ et $A_{[n]}x^{(n)}$ est le produit de la matrice $1 \times N$ $A_{[n]}$ avec le vecteur $N \times 1$ $x^{(n)}$. Les matrices V et W sont alors définies comme

$$V = I \quad (2.34)$$

$$\frac{1}{W_i} = \|A_i\|^2, \text{ pour } i = 1, \dots, M \quad (2.35)$$

tandis que l'ensemble de partition B_t devient

$$B_t = \{t\}, \text{ pour } t = 1, \dots, M \quad (2.36)$$

l'équation (2.27) devient

$$x^{(n+1)} = x^n + \lambda_n \frac{b_{[n]} - A_{[n]}x^{(n)}}{\|A_{[n]}\|^2} A_{[n]}^T \quad (2.37)$$

qui correspond à (2.20).

• Algorithme SART : en définissant V et W comme

$$V_j = A_{+,j} = \sum_{i=1}^M |A_{i,j}|, \text{ pour } j = 1, \dots, N \quad (2.38)$$

$$\frac{1}{W_i} = A_{i,+} = \sum_{j=1}^N |A_{i,j}|, \text{ pour } i = 1, \dots, M \quad (2.39)$$

l'algorithme SART (2.21) peut être écrit sous la forme de l'équation (2.27)

$$x_j^{n+1} = x_j^n + \frac{\lambda_n}{\sum_{i=1}^M |A_{i,j}|} \frac{\sum_{i=1}^M \frac{b_i - A_{i,\bullet} x^n}{\sum_{j=1}^N |A_{i,j}|} A_{i,j}^T}{\sum_{j=1}^N |A_{i,j}|} \quad (2.40)$$

qui est bien la formule établie précédemment (2.21).

• Algorithme CAV : en définissant V et W comme

$$V = I \quad (2.41)$$

$$\frac{1}{W_i} = \sum_{\substack{1 \leq l \leq N \\ g_{i,l} \neq 0}} \frac{|A_{i,l}^2|}{g_{i,l}}, \text{ pour } i = 1, \dots, M \quad (2.42)$$

et avec

$$g_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{s_j} & \text{si } A_{i,j} \neq 0 \\ 0 & \text{si } A_{i,j} = 0 \end{cases}$$

où s_j est le nombre d'éléments non nuls $A_{i,j} \neq 0$ dans la $j^{\text{ème}}$ colonne de A , l'algorithme CAV (2.25) peut bien être écrit à partir de l'équation (2.27)

$$x_j^{n+1} = x_j^n + \lambda_n \sum_{i=1}^M \frac{b_i - A_{i,\bullet} x^{(n)}}{\sum_{l=1}^N s_l (A_{i,l})^2} \cdot A_{i,j}^T. \quad (2.43)$$

L'intérêt de cette description est que la convergence (cyclique dans les cas non simultanées) des algorithmes ne relève plus que de celle du schéma dont ils sont dérivés et qui est démontrée dans le même article [36], dans les cas consistant et inconsistant.

2.3.4 Algorithmes de maximisation de l'espérance

Une autre classe d'algorithmes qui a été et continue d'être utilisée massivement en reconstruction d'images, et en tomographie en particulier est celle qui fait appel aux techniques de maximisation de la vraisemblance.

Ces techniques ne sont apparues que plusieurs années après les premiers algorithmes de reconstruction algébriques car bien que la théorie des estimateurs du maximum de vraisemblance était fort avancée dans les années 1970, le problème qui demeurait était la possibilité d'application de cette théorie et plus précisément le calcul pratique des estimateurs du maximum de vraisemblance.

La solution est apparue en 1977 avec l'algorithme *Expectation Maximization* (EM) de Dempster et al. [20] pour des types de problème incluant une phase de reconstruction. On qualifie dans ce cas les données observées b d'« incomplètes », chaque valeur b_i étant la somme des contributions $z_{i,j}$ de chaque voxel j de l'objet :

$$b_i = \sum_j z_{i,j} = \sum_j A_{i,j} x_j \quad (2.44)$$

Ces contributions $z_{i,j}$ représentent le nombre de photons émis par le voxel j et détectés sur le pixel i de la gamma caméra. Elles constituent les données « complètes » mais non observées.

L'algorithme EM réalise alors deux opérations, la première, l'étape E, qui calcule l'espérance conditionnelle des données complètes z connaissant à la fois les données incomplètes b et l'itérée courante $x^{(k)}$ par

$$\mathbb{E} \left(\ln(P(z|f) | (b, x^{(k)})) \right) \quad (2.45)$$

et la deuxième, l'étape M, qui maximise l'expression obtenue précédemment pour obtenir une nouvelle estimation :

$$x^{(k+1)} = \arg \max_x \{ \mathbb{E} \left(\ln(P(z|f) | (b, x^{(k)})) \right) \}. \quad (2.46)$$

Les détails menant de ces deux étapes à l'algorithme EM peuvent être trouvés notamment chez Dempster et al. [20], mais aussi dans les articles de Shepp et Vardi [63] qui ont introduit les algorithmes de maximum de vraisemblance en tomographie en 1982 ou chez Lange et Carson [39] qui ont développé l'étude de ces algorithmes en distinguant les cas de la tomographie par émission et par transmission (1984). La méthode de maximisation de la vraisemblance débouche sur l'algorithme suivant :

ALGORITHME 2.7 (EM)

$$x_j^{(k+1)} = \frac{x_j^{(k)}}{\sum_i A_{i,j}} \sum_i \frac{A_{i,j} b_i}{\sum_l A_{i,l} x_l^{(k)}}. \quad (2.47)$$

Cet algorithme, dont la correction se fait multiplicativement, a été décrit comme relativement lent, notamment pour la reconstruction des hautes fréquences.

Nous reviendrons dans la troisième partie, qui est consacrée à cette question générale du rééquilibrage de la vitesse de convergence en fonctions de la taille des détails, sur certaines modifications faites à l'algorithme EM pour corriger

cela. Pour le moment, nous ne mentionnons que l'adaptation la plus populaire de l'algorithme EM : l'*ordered subsets*-EM ou OS-EM qui a été décrite en 1994 par Hudson et Larkin dans [30] et dont le statut d'article le plus cité de l'année de la revue IEEE Transactions on Medical Imaging a naturellement conduit à faire de l'OS-EM l'un des outils phares de la reconstruction tomographique depuis le milieu des années 1990. Un traitement séquentiel y est proposé et appliqué à l'algorithme EM - bien que l'idée puisse être appliquée à n'importe quel algorithme - au cours duquel les projections mesurées (les données) sont groupées en *sous-ensembles ordonnés* (ordered subsets). Le *niveau* désigne le nombre de ces sous-ensembles dont plusieurs exemples sont donnés dans l'article.

Le découpage le plus courant est celui en *sous-ensembles disjoints* où les M équations de projections sont groupées en n sous-ensembles contenant chacun T équations (c'est-à-dire T mesures ou T pixels de l'image planaire de projection). On a ainsi : $S_1 = \{1, 2, \dots, T\}$, $S_2 = \{T + 1, T + 2, \dots, 2T\}$, \dots , $S_n = \{(n - 1)T + 1, \dots, nT\}$.

Un autre découpage possible consisterait en des *sous-ensembles cumulatifs* $S_1 = \{1, \dots, T\}$, $S_2 = \{1, \dots, 2T\}$, \dots , $S_n = \{1, \dots, nT\}$. On préfère néanmoins utiliser des sous-ensembles disjoints qui ne favorisent pas certaines mesures particulières dans la reconstruction. Au cours d'une seule itération, c'est-à-dire un passage à travers les n différents sous-ensembles, on a en effet utilisé n fois les T premières mesures et une seule fois les T dernières.

Enfin, l'algorithme EM standard s'écrit comme cas particulier de l'OS-EM en choisissant un unique sous-ensemble contenant toutes les équations de projection $S_1 = \{1, \dots, nT\}$.

Pour un choix donné de sous-ensembles S_1, \dots, S_n , l'algorithme OS-EM est donc une version par blocs de l'EM :

ALGORITHME 2.8 (OS-EM)

$$x_j^{(k+1)} = \frac{x_j^{(k)}}{\sum_{i \in S_k} A_{i,j}} \sum_{i \in S_k} \frac{A_{i,j} b_i}{\sum_l A_{i,l} x_l^{(n)}}. \quad (2.48)$$

Les résultats de cette implémentation par blocs sont intéressants puisque pour un niveau donné d'erreur, le nombre d'itérations requises est inversement proportionnel au *niveau* (choisi) de l'OS-EM. Par ailleurs, les mêmes auteurs insistent sur l'ordre des sous-ensembles que l'on a intérêt à choisir en fonction de la plus grande variabilité entre deux projections traitées successivement. Notons aussi que cette dernière remarque, qui conduit à grouper dans le même sous-ensemble ou à traiter successivement des projections acquises à angle droit l'une de l'autre, permet d'exploiter la symétrie qui existe pour différents opérateurs de projection pris perpendiculairement. Cette réduction possible des calculs des opérateurs de projection sera abordée dans la deuxième partie.

Enfin, tout comme les algorithmes algébriques que nous avons étudiés précédemment peuvent être dérivés à partir d'un schéma général, celui de Landweber, les algorithmes de maximum de vraisemblance EM et OS-EM apparaissent comme cas particuliers de l'algorithme *Rescaled Block-iterative-EM* (RBI-EM) de Byrne [10] et bénéficient donc d'un certain nombre de résultats théoriques sur cet algorithme plus général.

Chapitre 3

La TEMP sténopée

Nous rentrons avec ce chapitre dans des questions plus spécifiquement liées à notre travail, c'est-à-dire à l'imagerie TEMP réalisée avec une gamma-caméra munie d'un collimateur sténopé (ou *pinhole*). Nous allons voir en effet que ce type de collimation est capital pour le traitement de nombreuses problématiques liées à l'imagerie du petit animal (rat ou souris) par la tomoscintigraphie qui, en collimation parallèle - celle utilisée le plus souvent chez l'homme - serait pénalisée par une résolution incompatible avec la taille des organes étudiés dans des organismes nettement plus petits.

3.1 But et contraintes de la TEMP sténopée

Le double visage de la scintigraphie : sensibilité et résolution

Nous avons vu au cours du premier chapitre que la scintigraphie reposait sur l'administration d'un traceur dans l'organisme, qui s'inscrit dans un métabolisme sans interférer avec celui-ci. Cette technique parvient donc à mettre en images des phénomènes se déroulant à l'échelle moléculaire et ce, avec une quantité infinitésimale de traceur. On parle alors d'imagerie moléculaire, qui devrait rendre possible l'observation macroscopique *in vivo* de processus biologiques microscopiques. En ce sens, la scintigraphie est sans doute la technique d'imagerie la plus sensible à l'heure actuelle.

Il faut néanmoins tempérer ces performances en les inscrivant dans le système d'ensemble que forme le traceur, l'organisme étudié et le système physique de détection, c'est-à-dire la gamma-caméra. Car si des phénomènes relatifs à une activité microscopique sont détectables en théorie, ils le sont par un dispositif qui malheureusement dégrade fortement l'information en terme de résolution spatiale. Les photons gamma émis par le traceur ne sont en effet détectés qu'avec une précision de l'ordre de 5 mm due à la faible résolution intrinsèque du détecteur, rendant la technique inadaptée à l'expérimentation sur des organismes tels que le rat (masse environ 200 fois inférieure à celle de l'homme) ou la souris (masse environ 2000 fois inférieure à celle de l'homme).

A titre d'exemple, mais d'exemple important, le coeur a chez l'homme une taille comprise, pour sa plus grande dimension, entre 80 mm et 130 mm, soit 10 fois environ la résolution du détecteur (qui comprend la résolution intrinsèque du détecteur et la perte supplémentaire due à l'ouverture non infiniment petite du

ou des trous du collimateur). Ce ratio de 1/10 entre l'incertitude (conduisant à un flou sur l'image) et la dimension caractéristique de l'organe étudié est acceptable en imagerie fonctionnelle où, on l'a dit, l'information intéressante est loin de reposer uniquement sur la composante morphologique. Néanmoins, le passage au petit animal fait perdre un ordre de grandeur sensiblement égal à 10 puisque les dimensions du coeur chez la souris sont d'environ 10 mm. On peut imaginer quel résultat inexploitable atteindrait l'examen cardiaque scintigraphique de la souris avec du matériel dédié à l'homme (typiquement une gamma-caméra standard munie d'un collimateur parallèle). La solution appliquée depuis une dizaine d'années pour introduire des problématiques liées au petit animal en scintigraphie consiste à utiliser un collimateur conique appelé sténopé ou pinhole et qui a la propriété de permettre un grossissement de l'objet d'étude à mesure que celui-ci est rapproché de l'ouverture, comme sur un appareil photo muni d'un objectif. Pour en comprendre les avantages, mais aussi les inconvénients, il est nécessaire de détailler le fonctionnement de la caméra munie d'un tel collimateur au-delà du gain obtenu par l'effet de grossissement.

A cet effet, nous avons proposé dans [32] une distinction entre plusieurs quantités auxquelles renvoie souvent indistinctement le terme de *résolution spatiale* (sauf indication contraire, le mot « résolution » seul se référera toujours dans ce travail à la résolution spatiale, et non en temps) :

- La résolution planaire géométrique ou taux d'échantillonnage qui donne l'échelle du pixel (en mm/pixel) en mesurant la longueur représentée par le côté d'un pixel. De fait cette mesure ne tient compte que du grossissement de l'objet puisque l'échelle d'une image (en mm/pixel) est la même que cette image soit floue ou non.
- La résolution planaire estimée est le niveau de détail effectivement visible sur l'image, donné en terme de la séparation visible de détails d'une certaine taille. Cette mesure tient compte à la fois du grossissement éventuel, lorsque l'on utilise un collimateur sténopé, mais aussi de la résolution intrinsèque du détecteur et de la perte de résolution due au collimateur.
- La résolution tomographique mesure le niveau de détail obtenu après reconstruction tomographique.

La résolution intrinsèque du détecteur est une constante lorsqu'on l'exprime en pixels, indépendante du facteur de grossissement obtenu. Autrement dit, quelle que soit la résolution planaire géométrique atteinte, l'indétermination lors de la détection d'un photon rajoute une incertitude constante en nombre de pixels, si bien que si l'échelle du pixel diminue (i.e. la résolution planaire géométrique augmente), l'incertitude diminue aussi, relativement à l'échelle de l'objet. Ainsi, une incertitude de 3 pixels lorsque la résolution planaire géométrique est 2 mm/pixel pour un grossissement égal à 1 correspond à une incertitude de 6 mm. Si l'image planaire est obtenue avec un grossissement $\times 4$, la résolution planaire géométrique passe à 0,5 mm/pixel et l'échelle relative de l'incertitude et donc du flou par rapport à l'objet grossi devient alors égale à 1,5 mm. C'est ainsi qu'à partir du grossissement obtenu par l'emploi du collimateur sténopé, on peut espérer atteindre une résolution qui est de l'ordre du millimètre et qui permet d'envisager le passage à des organes de taille nettement inférieure à celle des organes de l'homme.

Néanmoins, on ne peut penser la résolution sans la sensibilité et le rôle joué par l'une et l'autre doit être étudié encore plus attentivement dans le cas de la collimation sténopée. En effet, le gain potentiel en résolution spatiale espéré

avec un collimateur sténopé est contrebalancé par la perte en sensibilité due à l'unique trou qui permet le passage des photons gamma (contre plusieurs milliers sur un collimateur parallèle). L'augmentation de la taille du trou, qui est indépendante du facteur de grossissement atteint, rajouterait un flou sur les images qui irait au final également contre le gain en résolution¹. Comment alors exploiter cette technique, sans se heurter à la dégradation de l'une des qualités de l'image lorsque l'on cherche à améliorer l'autre ?

Il existe heureusement une propriété partagée par la résolution et la sensibilité lorsque l'on utilise un collimateur sténopé : les deux gagnent à une minimisation de la distance objet-collimateur. Pour un objet situé à une distance r du trou, le facteur de grossissement, dont on a intérêt à ce qu'il soit le plus important possible est en effet proportionnel à $1/r$, tandis que la sensibilité augmente en $1/r^2$.

Il est donc clair que la règle pour faire de l'imagerie chez le petit animal sera de minimiser le rayon de rotation de la caméra autour de celui-ci pour gagner à la fois en résolution et en sensibilité. Par ailleurs, ce rayon minimal de rotation étant limité par la taille de l'animal, un animal plus gros (le rat) apparaîtra sur des images planaires moins zoomées et donc sensiblement moins résolues que celles d'un animal plus petit (la souris). Il y a donc une adaptation automatique du système d'imagerie aux dimensions plus ou moins réduites des organismes étudiés.

En marge des deux principaux phénomènes évoqués ci-dessus, un certain nombre d'autres problèmes spécifiques à l'imagerie de structures de petites dimensions par scintigraphie sont à relever. D'un point de vue mécanique d'abord, la réalisation d'un dispositif comprenant une gamma caméra munie d'un collimateur en plomb ou en tungstène - donc lourd - qui puisse tourner autour d'un axe avec une précision parfaite relève de la performance technique. Le poids de l'ensemble rend en effet difficile le maintien horizontal de la caméra dont la trajectoire ne suit un cercle tournant autour d'un axe qu'à quelques millimètres près. La modélisation se doit alors d'être bien plus minutieuse que chez l'homme, avec un collimateur parallèle, où un défaut de 1 à 2 millimètres n'engendre pas de différence notable sur les images. Avec un collimateur sténopé, tout défaut sera amplifié par le grossissement et affectera le résultat d'une manière bien plus sévère. Nous décrirons en détail ce phénomène et la manière de le corriger dans la section consacrée à la calibration de la gamma-caméra, plus loin dans ce chapitre.

Enfin, d'un point de vue informatique et mathématique, il apparaît que la mise en oeuvre de toute méthode de reconstruction est plus lourde qu'en géométrie parallèle. Le problème tomographique ne peut en effet plus être traité comme une suite de problème à deux dimensions, tranche par tranche, mais complètement en trois dimensions puisque des tranches différentes du volume se projettent au même endroit sur l'image (voir la figure 3.1). Malgré les progrès constants enregistrés en informatique où la puissance des ordinateurs permet de traiter à temps égal des données beaucoup plus lourdes qu'il y a quelques

¹La résolution des images de projection serait pénalisée à coup sûr, celle des images tomographiques dépendrait de la capacité de l'algorithme à déconvoluer au mieux les images de projection. Néanmoins même une méthode incluant une déconvolution théoriquement parfaite produira des résultats moins bons lorsque la réponse impulsionnelle devient nettement plus large

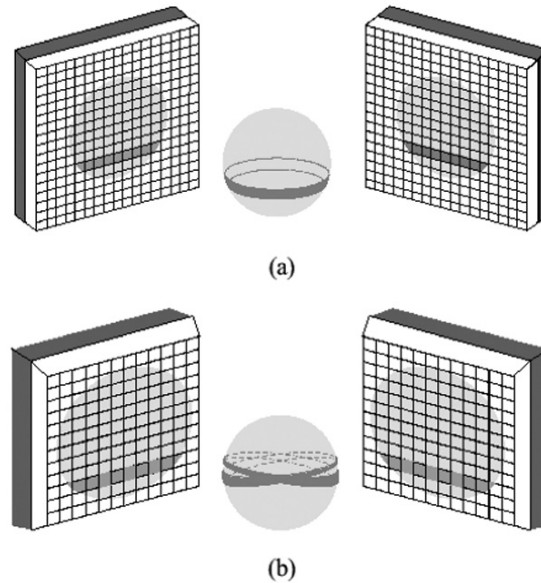


FIG. 3.1 – Géométrie de projection associée au collimateur parallèle (a) et sténopé (pinhole) (b). Dans le premier cas, une ligne horizontale de projection est associée à un unique plan de l'objet sphérique qui se projette, ce qui permet une reconstruction en 2D de chacune des tranches indépendamment des autres. Dans le cas de la géométrie conique induite par le collimateur sténopé, il n'y a pas cette indépendance, et la reconstruction doit se faire en « vraie » 3D. (Tiré de la thèse de M. Ivan Laurette [41], avec son aimable autorisation).

années, le calcul et le stockage d'un opérateur de projection 3D demande des ressources encore importantes. Les aspects mathématiques et informatiques de cette question seront surtout explorés dans la deuxième partie de cette thèse.

Les enjeux de l'imagerie du petit animal

L'adaptation de la tomoscintigraphie au petit animal se comprend comme la nécessité de pouvoir appliquer une méthode d'imagerie fonctionnelle et non-invasive (à la différence de l'autoradiographie qui est basée sur la détection de radiations émises par une substance radioactive mais nécessite le sacrifice de l'animal) à des organismes modèles. Ce terme d'organisme modèle peut à la fois désigner un modèle *d'*une maladie lorsqu'une pathologie humaine est reproduite sur l'animal ou un modèle *pour* étudier le comportement d'un nouveau traceur ou les effets d'un traitement. Enfin, cette technique d'imagerie fournit un outil intéressant pour évaluer les conséquences physiologiques des modifications génétiques réalisées sur les animaux.

Le contexte de l'imagerie moléculaire est donc celui d'une technique naissante mais qui répond à une attente forte de la part des chercheurs en sciences biomédicales. Nous ne pouvons dresser ici la liste des applications de la tomoscintigraphie chez le petit animal, des différents traceurs, organes, pathologies qui ont été ou sont en train d'être étudiés par cette technique mais nous pro-

poserons un état de l'art non exhaustif qui donne une idée des performances atteintes pour le moment.

3.2 Etat de l'art de l'imagerie

Un bref historique nous permet de situer les débuts de l'imagerie tomoscintigraphique appliquée au petit animal au début des années 1990. L'une des premières publications sur le sujet qui décrit des résultats probants est celle de Weber et al. [69], qui démontre la faisabilité des études cardiaques et de tumeurs cérébrales chez le rat. Depuis lors, certaines équipes sont allées plus loin que le stade de la simple faisabilité en proposant des études sur la perfusion myocardique chez le rat [68] ou la souris [70] ou [71]. La plupart de ces équipes atteignent, en utilisant un collimateur sténopé une résolution légèrement supérieure au millimètre, tandis que Beekman et ses collaborateurs ont pu obtenir dès 2004 [6] des résultats bien meilleurs avec une résolution largement submillimétrique en mode planaire, grâce à un dispositif particulièrement soigné (embout du collimateur en or pour réduire au maximum la pénétration sur les bords du trou) et une minimisation de la distance objet-collimateur sténopé. Ces résultats ont été convertis en 2005 avec le dispositif U-SPECT [?, Beekman2005] destiné à l'imagerie *in vivo* de la souris, dans lequel un tube percé d'un jeu de 75 ouvertures contient l'animal et sert donc à la fois de support et de collimateur. Derrière sont placées trois détecteurs, ce qui a pour effet, à temps de pose égal, de multiplier la sensibilité par 3, en plus bien sûr du gain obtenu par le nombre de trous. Les images obtenues chez la souris y sont impressionnantes et la résolution démontrée sur fantôme descend sous 0,5 mm. Le diamètre du tube au niveau des ouvertures étant réduit à 44 mm, soit un rayon de 22 mm, on comprend en effet que le facteur de grossissement soit important tandis que l'immobilité de l'ensemble du système (rien ne tourne) assure une absence de flou provenant d'un léger déplacement de l'animal ou d'une imprécision mécanique. Enfin, la résolution intrinsèque du détecteur est mesurée à 3,2 mm, ce qui est également bien meilleur que sur un dispositif standard.

Cette approche semble être la plus performante concernant l'application à la souris parmi les équipes travaillant sur des systèmes à collimateur multi-trous (ou collimateur *multi-pinhole*). Ces trous agissent donc chacun comme un sténopé et sont souvent disposés suivant un motif qui permet de minimiser le chevauchement des images de projection. On trouvera cette solution employée avec succès, mais de manière plus classique, chez Schramm et al. [60], [61] avec un système pour lequel le mouvement de rotation est encore présent, avant que la même équipe ne décrive également un dispositif sur lequel ne demeure qu'un mouvement de translation : le T-SPECT [62]. De nombreuses autres équipes s'intéressent depuis maintenant deux ans à ce type de collimation et de récentes publications [11], [47], qui décrivent encore souvent des simulations ou font une étude de faisabilité, montrent que l'on peut s'attendre à une utilisation massive de ces dispositifs dans les années à venir.

Nous avons également établi un comparatif des performances obtenues par différentes équipes travaillant sur l'imagerie TEMP du petit animal en 2003 (voir [32]).

3.3 Etat de l'art mathématique

Le cas de la collimation sténopée a donné lieu à une adaptation des méthodes analytiques basées sur l'inversion de la transformée de Radon. La projection décrite est en effet conique et l'existence d'un inverse n'est assurée que si l'échantillonnage de l'espace est réalisé de manière par exemple à pouvoir retrouver l'ensemble des projections parallèles par réorganisation des projections. Néanmoins cette condition, qui impliquerait une trajectoire du détecteur couvrant toute la sphère S^2 dans l'espace \mathbb{R}^3 peut être affaiblie pour avoir des conditions d'échantillonnage physiquement réalisables. L'outil de base de la tomoscintigraphie à géométrie conique, la transformée en rayons coniques (*cone beam transform*), n'est pas très différent des deux premières transformées que nous avons rencontrées, celle de Radon et la transformée en rayons X :

DÉFINITION 3.1 (Transformée en rayons coniques) *Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et pour $\theta \in S^{n-1}$ et $a \in \mathbb{R}^n$, la transformée en rayons coniques n -dimensionnelle \mathbf{D} est définie comme :*

$$\mathbf{D}f(a, \theta) = \int_0^{+\infty} f(a + t\theta) dt$$

Une autre manière d'obtenir des formules d'inversion de la transformée de Radon est en utilisant le potentiel de Riesz I^α dans \mathbb{R}^n :

$$(I^\alpha f)^\wedge(\xi) = |\xi|^{-\alpha} \hat{f}(\xi), \quad \alpha < n \quad (3.1)$$

On a alors le théorème suivant :

THÉORÈME 3.1 *Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $g = \mathbf{R}f$, on a*

$$f = \frac{1}{2} (2\pi)^{1-n} I^{-\alpha} \mathbf{R}^* I^{\alpha-n+1} g.$$

Dans le cas des dimensions impaires qui est le nôtre avec $n = 3$, la formule d'inversion se réduit particulièrement bien pour donner :

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\mathbf{R}f)(\theta, x \cdot \theta) d\theta \quad (3.2)$$

Il nous faut alors une relation entre \mathbf{D} et \mathbf{R} pour pouvoir inverser \mathbf{D} à partir de la formule d'inversion donnée par le théorème 3.1. Nous disposons de cette relation par le théorème suivant :

THÉORÈME 3.2 *Soit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Alors, avec $s = a \cdot \theta$, pour tout $\theta \in S^2$, $a \in \mathbb{R}^3$, on a*

$$\frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{R}f)(\theta, a \cdot \theta) = \int_{\omega \in \theta^\perp \cap S^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{D}f)(a, \omega) d\omega$$

En utilisant ces différentes relations, il est possible de trouver une formule d'inversion exacte pour f , ce que réalise la méthode de Grangeat [25].

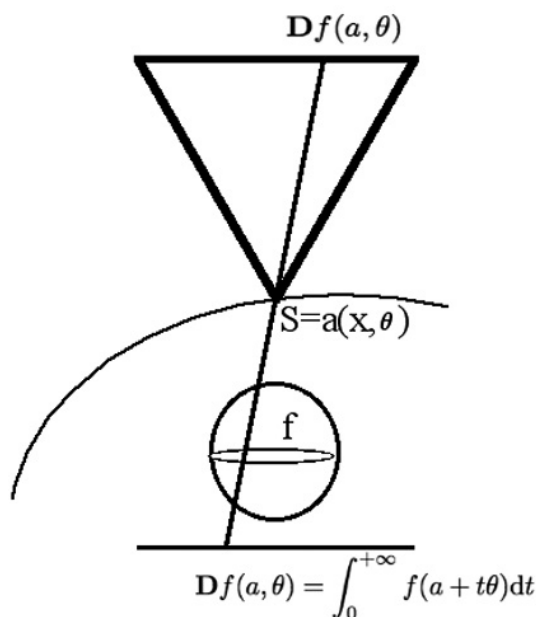


FIG. 3.2 – La trajectoire de la gamma-caméra est repérée par la courbe décrite par le centre du pinhole $S = a(x, \theta)$. On appelle souvent ce point la « source » car toute ligne de projection peut aussi bien être vue en scintigraphie (émission depuis l'objet f , passage du rayonnement par le pinhole et arrivée sur le détecteur, en haut de la figure) qu'en tomodynamométrie (transmission depuis la source, à travers l'objet et détection, en bas de la figure). A toute projection conique en scintigraphie correspond donc une projection virtuelle en tomodynamométrie.

La méthode de Grangeat

Cette méthode présuppose que la courbe décrite par le centre du trou du collimateur (de la « source », voir figure 3.2) ait la propriété suivante : tout plan intersectant $\text{supp}(f)$ contient au moins un point de la trajectoire de la source. En d'autres termes, pour tout $x \in \text{supp}(f)$ et tout $\theta \in S^2$, il existe une source (un point de la courbe) $a(x, \theta)$ telle que $x \cdot \theta = a(x, \theta) \cdot \theta$.

Partant de l'équation 3.2

$$f(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{S^2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} (\mathbf{R}f)(\theta, x \cdot \theta) d\theta$$

et avec la propriété de notre courbe qui donne

$$(\mathbf{R}f)(\theta, x \cdot \theta) = (\mathbf{R}f)(\theta, a(x, \theta) \cdot \theta)$$

on obtient, en appliquant le théorème 3.2

$$\frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{R}f)(\theta, x \cdot \theta) = \int_{\omega \in \theta^\perp \cap S^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (Df)(a(x, \theta), \omega) d\omega.$$

Dès lors, $\frac{\partial^2}{\partial s^2} (\mathbf{R}f)(\theta, s)$ peut être calculé avec $s = x \cdot \theta$ pour tout x et l'on obtient $f(x)$ à partir de la formule 3.2.

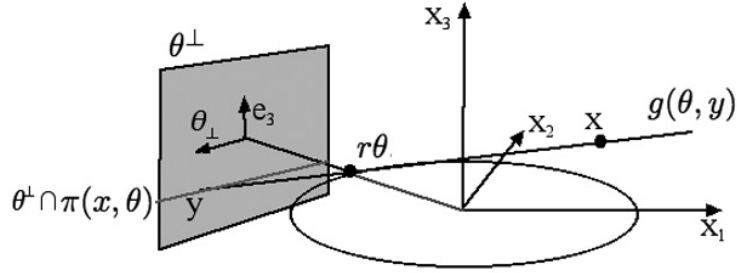


FIG. 3.3 – Géométrie et notations de l’algorithme FDK.

D’autres formules exactes de reconstruction existent, qui imposent des propriétés plus ou moins fortes sur la courbe de la source. On citera la méthode de Tuy, à partir de laquelle celle de Grangeat peut être obtenue ou la rétroprojection filtrée pour la transformée en rayons coniques. Néanmoins, aussi faibles que soient les conditions sur la courbe, elles demeurent en général trop fortes pour les courbes que permettent de réaliser effectivement les gamma caméras usuelles, à savoir des arcs de cercles ou des cercles entiers. Dès lors, la méthode analytique la plus utilisée en reconstruction tomographique à géométrie conique est celle de Feldkamp, Davis et Kress (FDK) [23] qui est une formule approchée mais qui fait bien l’hypothèse que la courbe de la source est un cercle.

La formule approchée de FDK

Supposons que la source (comme dans le paragraphe précédent, le terme « source » désigne le centre du pinhole en référence à une source virtuelle, voir figure 3.2) suive un cercle de rayon r dans le plan horizontal $x_1 - x_2$. Pour une source donnée $r\theta$, $\theta \in S^1$, soit $g(\theta, y)$ la ligne intégrale de f le long de la droite joignant $r\theta$ à un point du détecteur $y \in \theta^\perp$, c’est-à-dire

$$g(\theta, y) = (Df) \left(r\theta, \frac{y - r\theta}{|y - r\theta|} \right)$$

(voir la figure 3.3). La fonction f est comme d’habitude supposée nulle en dehors de l’ensemble $|x| \leq \rho \leq r$. On introduit un système de coordonnées dans θ^\perp en définissant, pour $\theta = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)^T$, $\theta_\perp = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)^T$. θ_\perp, e_3 forme alors une base orthonormée dans θ^\perp . La droite joignant $r\theta$ et un point x à reconstruire coupe θ^\perp en $y = y_2\theta_\perp + y_3e_3$ où

$$y_2 = \frac{r}{r - x \cdot \theta} x \cdot \theta_\perp, \quad y_3 = \frac{r}{r - x \cdot \theta} x_3$$

La droite $\mathbb{R}\theta_\perp + y_3e_3$ est l’intersection entre θ^\perp et $\pi(x, \theta)$, le plan passant par x et $r\theta$ qui intersecte θ^\perp horizontalement. En définissant le point y_3e_3 du détecteur comme origine dans $\pi(x, \theta)$, les coordonnées x' de x dans $\pi(x, \theta)$ sont $x' = x - y_3e_3$ et le vecteur directionnel situé au-dessus (ou en-dessous) de θ dans $\pi(x, \theta)$ est

$$\theta' = (r\theta - y_3e_3)/r', \quad r' = (r^2 + y_3^2)^{1/2}.$$

Notons que r' est la distance de $r\theta$ à l'origine dans $\pi(x, \theta)$. Considérons que $\theta^\perp \cap \pi(x, \theta)$ est une ligne d'un détecteur avec collimateur *fan-beam* (géométrie en éventail, équivalent à la géométrie conique en 2D). Dans cette géométrie, on dispose également d'une formule d'inversion de f par rétroprojection filtrée donnée par la formule (voir [51] paragraphe 5.1.4)

$$(V_\Omega * f)(x) = \int_{S^1} \frac{r^2}{(r - x \cdot \theta)^2} \int_{-\rho}^{\rho} v_\Omega \left(\frac{rx \cdot \theta_\perp}{r - x \cdot \theta} - y \right) g(\theta, y) \frac{r dy}{(r^2 + y^2)^{1/2}} d\theta. \quad (3.3)$$

La contribution de l'intégrale qui appartient à θ' dans l'estimation $(V_\Omega * f)(x)$ de (3.3) est

$$I(x, \theta) = \frac{r'^2}{(r' - x' \cdot \theta)^2} \int_{-\rho}^{\rho} v_\Omega \left(\frac{r'x' \cdot \theta_\perp}{r' - x' \cdot \theta'} - y'_2 \right) g(\theta, y'_2 \theta_\perp + y_3 e_3) \frac{r' dy'_2}{(r'^2 + y'^2_2)^{1/2}}.$$

De plus, on a :

$$x' \cdot \theta' = \frac{r'}{r} x \cdot \theta.$$

En utilisant cette dernière relation et le fait que $x' \cdot \theta_\perp = x \cdot \theta_\perp$, on obtient

$$I(x, \theta) = \frac{r^2}{(r - x \cdot \theta)^2} \int_{-\rho}^{\rho} v_\Omega(y_2 - y'_2) g(\theta, y'_2 \theta_\perp + y_3 e_3) \frac{\sqrt{r^2 + y_3^2} dy'_2}{\sqrt{r^2 + y_2^2 + y_3^2}}.$$

Cette quantité est la contribution de la direction θ' dans $\pi(x, \theta)$ à l'approximation de la rétroprojection filtrée $f(x)$ donnée par (3.3). Pour calculer cette approximation de manière exacte, il faudrait en principe intégrer sur les contributions correspondantes pour toutes les directions dans $\pi(x, \theta)$. Or cela est impossible puisque nous ne disposons pas des sources nécessaires dans $\pi(x, \theta)$. L'idée de FDK est de n'intégrer que sur les sources dont nous disposons effectivement, c'est-à-dire d'utiliser

$$f(x) \sim \int I(x, \theta) d\theta'$$

comme approximation de $f(x)$. En regardant θ' comme une fonction de θ , on arrive à

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \int_{S^1} I(x, \theta) \frac{r}{r'} d\theta \\ &= \int_{S^1} \frac{r^2}{(r - x \cdot \theta)^2} \int_{-\rho}^{\rho} v_\Omega(y_2 - y'_2) g(\theta, y'_2 \theta_\perp + y_3 e_3) \frac{\sqrt{r^2 + y_3^2} dy'_2}{\sqrt{r^2 + y_2^2 + y_3^2}} d\theta \end{aligned}$$

qui est la formule d'approximation de FDK. Il s'agit donc d'un algorithme du type rétroprojection filtrée où les données sont d'abord filtrées avec un facteur $r/\sqrt{r^2 + y_2^2 + y_3^2}$, puis filtrées le long de lignes horizontales avec un filtre v_Ω tel que ceux vus dans la section 2.1, et enfin rétroprojetées avec un poids $r^2/(r - x \cdot \theta)^2$.

Nous empruntons cet exposé synthétique de la méthode FDK à l'ouvrage de Natterer et Wübbeling [51]. Les détails des différents calculs pourront être trouvés dans l'article original [23].

L'implémentation de cet algorithme qui devait permettre une comparaison des images reconstruites avec la très populaire méthode FDK a donné lieu à un stage de maîtrise effectué par Virginie Pacorel [54] durant l'été 2004. Les parties consacrées aux résultats de notre algorithme donneront donc en général la possibilité au lecteur de se référer à des reconstructions tomographiques sur les mêmes données obtenues par la méthode FDK.

3.4 Modélisation du problème

Nous présentons ici les choix que nous avons faits pour modéliser le problème de la tomoscintigraphie avec collimateur sténopé appliquée au petit animal. Il nous faut tout d'abord souligner que des choix doivent *nécessairement* être faits pour modéliser certains effets de manière approchée en dehors de quoi les calculs deviendraient vite impraticables. Par ailleurs, même des calculs réalisables peuvent être inutiles s'ils sont fondés sur des hypothèses théoriques invérifiables en pratique. Un exemple est le phénomène de pénétration du rayonnement gamma sur les bords biseautés du trou du collimateur. Compte tenu de ce que l'on sait du taux de pénétration du rayonnement d'une énergie donnée à travers un matériau donné et de la forme du collimateur, ce calcul devrait pouvoir être mené pour aboutir à l'exacte prise en compte du phénomène. Néanmoins, l'usinage du matériau - spécialement quand il s'agit du plomb, moins quand il s'agit d'un métal plus dur comme le tungstène - ne garantit pas une précision telle que le calcul exact ait un sens et l'on préférera utiliser une formule approchée plus économique et mieux adaptée aux incertitudes que l'on a sur le système.

La modélisation du problème est importante concernant les aspects de déconvolution du problème de tomographie que nous traitons. Les images de projection mesurées sont habituellement floues à cause des différents effets physiques et il s'agit donc d'un problème mixte de tomographie et déconvolution. Or il existe des méthodes dites de déconvolution aveugle (blind deconvolution) qui permettent de s'affranchir d'une modélisation complète des réponses impulsionnelles qui deviennent alors des inconnues, au même titre que l'objet à reconstruire. Ces méthodes ont été notamment utilisées en microscopie ainsi qu'en astronomie mais nous doutons qu'elles soient applicables au cas de la tomoscintigraphie, du fait justement de la mixité du problème. Les images de projection mesurées ne sont pas l'image originale convoluée avec une réponse impulsionnelle mais une somme des différents plans qui composent l'objet. De plus, nous savons que la réponse impulsionnelle n'est pas spatialement indépendante, ce qui rend le problème probablement trop complexe pour en extraire à la fois l'objet reconstruit et les réponses impulsionnelles. Par ailleurs, l'optimisation des temps de calcul étant la première motivation de ce travail, les méthodes de déconvolution aveugle présentent généralement l'inconvénient de prendre nettement plus de temps que lorsque les réponses impulsionnelles sont connues. Néanmoins, l'introduction de ces méthodes en tomographie pourrait constituer une base de travail intéressante, surtout si les réponses impulsionnelles reconstruites peuvent servir à la reconstruction d'autres objets dont les projections ont été acquises dans les mêmes conditions.

3.4.1 Les différents effets modélisés

- *Diamètre effectif du collimateur pinhole*

Pour tenir compte du phénomène de pénétration du rayonnement gamma sur les bords du trou, Anger [4] a utilisé la formule suivante qui corrige le diamètre réel de l'ouverture d en lui rajoutant une partie due à la pénétration :

$$d_e = \sqrt{d^2 + \frac{2d \cdot \tan(\alpha)}{\mu}} \quad (3.4)$$

d_e est appelé diamètre effectif du pinhole, α est l'angle d'ouverture du collimateur (voir figure 3.4) et μ le coefficient d'atténuation du matériau utilisé pour l'embout pinhole, exprimé en mm^{-1} .

Une étude théorique menée durant ce travail de thèse par François Herzog (été 2003, stage de maîtrise de mathématiques) a démontré que si des différences non-négligeables pouvaient apparaître entre le nombre de photons gamma détectés effectivement et le nombre de ces mêmes photons que l'on comptait en ne tenant compte que du diamètre réel de l'ouverture, la prise en compte de la pénétration par le diamètre effectif de la formule 3.4 donnait des résultats tout à fait satisfaisants. Il a été démontré en particulier que l'erreur de quantification (la différence entre l'activité comptée par le détecteur et celle qu'il faudrait compter avec un collimateur sans pénétration), qui était de 15% pour le plomb et 12% pour le tungstène, pour un pinhole de 1 mm de diamètre en approximant la probabilité de passage du rayonnement par une marche correspondant au diamètre réel de l'ouverture, était ramenée respectivement à 1,25% et 0,75% pour une marche correspondant au diamètre effectif. Nous avons donc inclus ce diamètre effectif plutôt que le diamètre réel dans nos calculs.

- *Résolution intrinsèque de la gamma-caméra*

La technologie du détecteur sur les gamma-caméras n'a que peu évolué en 40 ans et demeure basée sur un cristal relié à des photomultiplicateurs qui n'estiment la localisation du photon incident qu'à environ 5 mm près. Selon les caméras, cette incertitude varie de 3 à 7 mm et sa prise en compte dans la modélisation peut certainement aider à améliorer la résolution spatiale sur l'image tomographique reconstruite.

- *Décroissance radioactive*

Le temps pris par l'examen, qui approche en général une heure (une minute par projection pour une cinquantaine de projections) doit être pris en compte pour le phénomène de décroissance radioactive du traceur, car il n'est pas négligeable comparé à sa demi-vie, c'est-à-dire le temps après lequel l'activité du traceur est divisée de moitié, qui est de six heures pour le technétium 99m , isotope le plus utilisé en scintigraphie.

Si P projections sont acquises pendant S secondes chacune et que T est la demi-vie du traceur, en secondes aussi, pour chaque projection indiquée par $q = 0, \dots, P - 1$, la $q^{\text{ème}}$ projection doit être corrigée par un facteur multiplicatif :

$$\nu(q) = \exp(\ln(2)qS/T) \quad (3.5)$$

pour se ramener à l'activité volumique présente en début d'acquisition.

- *Sensibilité de la gamma-caméra*

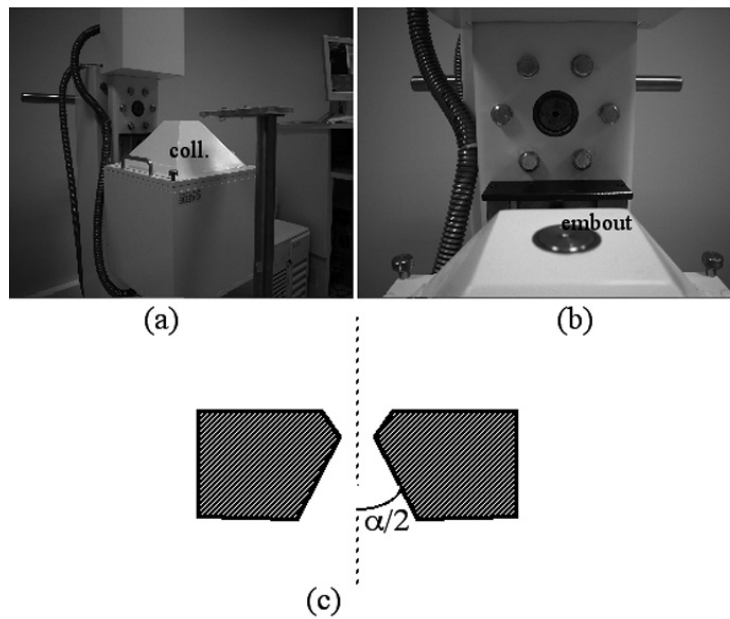


FIG. 3.4 – Collimateur pinhole monté sur une gamma-caméra (a). Au sommet du collimateur se trouve l'embout contenant le trou d'entrée par lequel passe le rayonnement gamma (b). Sur la partie (c) de la figure, une vue en coupe de l'embout explique la notion de diamètre effectif : la partie la plus étroite de l'embout est comptée comme diamètre du trou d'ouverture. Mais c'est aussi à ce niveau que le métal lourd (tungstène, or) qui compose l'embout est le moins épais, impliquant une pénétration sur les bords du trou. Cette pénétration est prise en compte par un diamètre effectif, plus grand que le diamètre réel de l'ouverture.

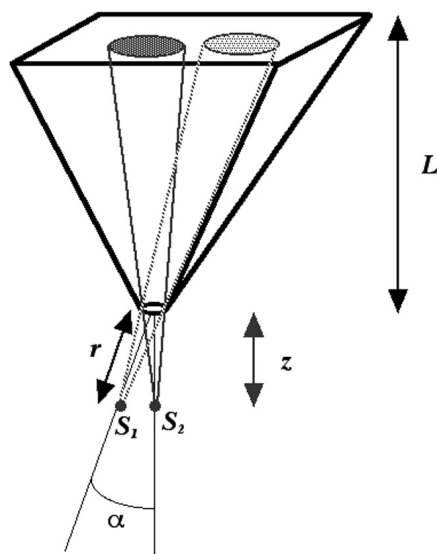


FIG. 3.5 – Les deux sources ponctuelles S_1 et S_2 , qui sont à la même distance $L+z$ du plan de détection, L étant la distance séparant le pinhole du détecteur et z la distance entre le pinhole et le plan parallèle au détecteur contenant les deux points sources, ont la même projection géométrique. L'intensité de la projection varie elle en fonction de l'angle α sous lequel est vu le pinhole.

Nous avons vu dans la section 2.2.1 consacrée à la linéarité du problème que pour une gamme d'énergie de rayonnement donnée (exemple : 140 keV pour le technétium 99m) et pour une dose administrée donnée, l'efficacité de la gamma caméra pouvait être considérée comme une constante. La détermination de cette constante E_c relève de la calibration de la caméra et sera donc détaillée dans la section 3.5.

- *Variation spatiale de la sensibilité*

Pour une source S_2 située sur l'axe perpendiculaire au détecteur passant par le centre de l'ouverture du collimateur pinhole P , le trou d'entrée est vu comme étant rond. Pour une source S_1 située elle en dehors de cet axe, le trou sera vu comme étant ovale étant donné l'angle α formé par $\widehat{S_1 P S_2}$. Il est aisé de voir que le flux d'un rayonnement émis par S_2 à travers le trou d'entrée du collimateur pinhole est égal à celui émis par S_1 à un facteur multiplicatif $\cos(\alpha)$ près (voir figure 3.5).

- *Atténuation*

L'atténuation est un problème insoluble de manière exacte si l'on s'en tient à la seule imagerie TEMP. L'information dont nous disposons concerne en effet la distribution d'une substance radioactive dans l'organisme, mais nous ne savons rien *a priori* de la distribution de matière atténuante, si ce n'est que là où il y a activité, il y a atténuation. Nous avons détaillé dans la section 2.2.1 quelles étaient les approximations possibles (dans le cas où l'on ne dispose donc pas

de cartes d'atténuation obtenues en tomодensitométrie) et avons opté pour un modèle cylindrique d'atténuation uniforme. Nous avons pris soin de préciser que notre modélisation concernait l'imagerie *chez le petit animal* et faisons usage ici de cette précision : les animaux que nous étudierons (rat et souris) justifient un modèle aussi simple à la fois par leur taille, l'épaisseur de leur corps rendant moins important le phénomène d'atténuation, mais aussi par leur forme, que l'on peut identifier à un cylindre plus facilement que chez l'homme. Nous modélisons donc un système physique mais en fonction d'une classe d'objets particulière qui nous permet de faire ces hypothèses simplificatrices. Un paramètre μ est donc utilisé dans un modèle d'atténuation exponentielle en fonction de la distance parcourue par le rayonnement dans le tissu atténuant. La valeur² que nous avons utilisée pour les tissus est $\mu = 0,11 \text{ cm}^{-1}$.

- *Diffusion Compton*

Comme nous l'avons vu au chapitre 2, une sélection en énergie permet de s'affranchir d'une partie importante du diffusé. Nous n'avons pas cherché une modélisation plus avancée de ce phénomène, n'étant pas sûrs que l'approximation nécessaire à cette modélisation complexe (dépendant de l'objet, sa géométrie, sa composition, du matériel utilisé aussi dans une moindre mesure) apporte réellement un gain sur les images reconstruites.

Nous allons maintenant voir comment combiner ces différents effets et leur modélisation mathématique pour calculer la projection globale d'un voxel

3.4.2 Réponse impulsionnelle et projection des voxels

Nous fixons pour le moment le détecteur, en supposant que le centre du trou d'entrée du collimateur sténopé est aux coordonnées $S = (0, s_y, 0)$ et que le détecteur est dans le plan $D = \{(x, y, z) \mid y = F + s_y\}$, où F est la distance focale du collimateur. A tout point $m \in \Omega^0(\mathbb{R}^3) = \{(x, y, z) \mid y < s_y\}$ correspond alors une *réponse impulsionnelle* $\phi_m(x, z)$, à valeur dans le plan D . Cette fonction, propre au dispositif d'imagerie, étant connue, la projection d'un voxel v_j se calcule en toute rigueur en déterminant la contribution $A_{i,j}$ de l'ensemble des points qui composent le voxel v_j sur chaque pixel b_i , de sorte que :

$$A_{i,j} = \iiint_{v_j} \iint_{b_i} \phi_m(x, z) dx dz dm. \quad (3.6)$$

Le calcul pratique de cette intégrale peut s'effectuer par différents moyens, qui introduisent un échantillonnage aléatoire, comme dans la méthode de Monte-Carlo, où discrétisent chaque intégrale de manière déterministe. Mais quelle que soit la méthode employée, il apparaît vite que, compte tenu du nombre de voxels et de pixels pour lesquels la quantité $A_{i,j}$ devrait être calculée, son calcul par l'équation (3.6) est extrêmement long. L'emploi d'une approximation sphérique de la distribution d'activité au sein du voxel, telle qu'apparaissant chez Matej et al. [45] permet néanmoins de faire apparaître des symétries et de réduire la quantité de calculs.

²Cette valeur devrait en réalité être corrigée à $\mu = 0,15 \text{ cm}^{-1}$ qui est la valeur dans les tissus mous. Merci à Irène Buvat pour cette précision.

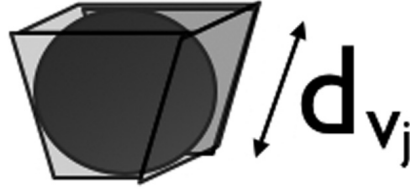


FIG. 3.6 – Approximation sphérique uniforme de la distribution d’activité au sein d’un voxel v_j dont la forme n’est pas nécessairement cubique, caractérisée par un diamètre d_{v_j} .

D’autres auteurs ont privilégié une approche expérimentale, consistant à mesurer la projection du voxel pour un certain nombre de points, en déplaçant une source d’activité de forme cubique ou sphérique dans l’espace objet. Comme seule une infime partie des mesures nécessaires peut être effectuée, les mesures manquantes sont alors calculées par interpolation et ceci permet de s’affranchir de l’introduction des paramètres physiques dans le calcul. Les projections des voxels physiques ainsi mesurées constituent donc autant de « boîtes noires », dont nous savons qu’elles décrivent le système, mais sans les analyser en composantes géométriques auxquelles on rajoute l’imprécision due au détecteur et les différents effets dont nous avons parlé. Cette manière de procéder demande néanmoins de disposer d’un matériel adéquat pour déplacer une source ponctuelle à des coordonnées très précises, matériel dont nous ne disposons pas, ce qui devait nous faire rejeter cette méthode. On la trouvera néanmoins exploitée avec succès dans le même domaine de l’imagerie TEMP du petit animal chez Beekman [7].

Aussi nous sommes nous tourné vers une méthode intermédiaire entre la méthode analytique et la méthode expérimentale. Nous avons d’abord supposé que nos voxels v_j , quelle que soit leur forme réelle, pouvaient être caractérisés par un diamètre d_v^j qui, pour une discrétisation de l’espace par des voxels v_j de taille uniforme, pouvait être remplacé par un unique diamètre d_v . Nous verrons au chapitre 4 comment nous avons pu justifier cette approximation qui nécessite à la fois que nos voxels aient une taille sensiblement égale dans les trois directions de l’espace (propriété d’isotropie, voir figure 3.6) et que les variations de taille entre différents voxels soient faibles. A partir de là, les seules mesures que nous avons effectuées auront été pour nous convaincre que les réponses impulsives en tout point, de même que les projections d’objets homogènes de très petites dimensions pouvaient être approximées par des fonctions gaussiennes.

La mesure représentée sur la figure 3.7 montre la projection d’un fil fin (diamètre d’environ 0.1 mm) imbibé de technétium $99m$ sur l’image planaire ainsi qu’un profil transversal. Un ajustement de ce profil par une gaussienne permet d’obtenir une erreur tout à fait satisfaisante en ajustant les paramètres de translation τ_x , dilatation σ_x et hauteur h de la gaussienne

$$\frac{h}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\tau_x)^2}{2\sigma_x^2}}. \quad (3.7)$$

Nous avons donc pu engendrer l’ensemble des projections des différents

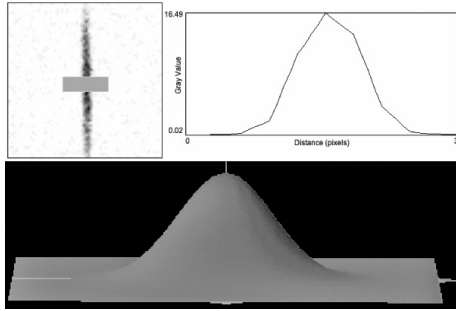


FIG. 3.7 – Image de projection obtenue sur une source linéique (fil imbibé de technétium $99m$ (en haut à gauche) avec en gris la ligne (20 pixels d'épaisseur) correspondant au profil affiché en haut à droite. En bas, représentation d'une gaussienne ajustée de manière à minimiser l'erreur entre profil mesuré et modèle gaussien.

voxels à partir de fonctions gaussiennes.

Calcul de la projection d'un voxel

Sous l'hypothèse que les réponses impulsionnelles sont engendrées par des fonctions gaussiennes comme apparaissant dans l'équation 3.7, il faut, pour chaque voxel v_j , déterminer chacun des trois paramètres mentionnés plus haut : translation τ , dilatation σ et hauteur h de la gaussienne. C'est ainsi que nous générerons les colonnes de l'opérateur de projection A qui a la forme d'une matrice $N \times M$. Nous associons pour cela un nouvel opérateur à chacun des trois paramètres : A_τ , A_σ et A_h .

- *Le paramètre de translation* τ correspond au centre de la projection du voxel et contient donc deux coordonnées, $\tau_j = (\tau_x^j, \tau_y^j)$ que l'on calcule comme intersection de la droite passant par le centre du voxel et le centre du trou d'entrée avec le plan de détection. Ce calcul est nécessaire pour toute méthode de reconstruction tomographique, qu'elle soit analytique ou itérative puisque l'information spatiale liant les points de l'espace (ou les voxels) aux points (ou pixels) du détecteur doit toujours être présente. On donne donc :

DÉFINITION 3.2 Soit $S = (0, s_y, 0)$ et $D = \{(x, y, z) \mid y = F + s_y\}$. Pour tout $m \in \Omega^0(\mathbb{R}^3) = \{(x, y, z) \mid y < s_y\}$ on définit

$$A_\tau : \Omega(\mathbb{R}^3) \rightarrow D \quad (3.8)$$

$$m = (m_x, m_y, m_z) \mapsto \left(\frac{-Fm_x}{|s_y - m_y|}, F + s_y, \frac{-Fm_z}{|s_y - m_y|} \right) \quad (3.9)$$

En identifiant D au plan \mathbb{R}^2 , on écrit :

$$A_\tau : \Omega(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3.10)$$

$$m = (m_x, m_y, m_z) \mapsto \left(\frac{-Fm_x}{|s_y - m_y|}, \frac{-Fm_z}{|s_y - m_y|} \right) \quad (3.11)$$

Posant cette fois $\Omega(\mathbb{R}^3) = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < s_y\}$ on définit alors :

DÉFINITION 3.3

$$A_\tau^\phi : \Omega(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (3.12)$$

$$m = (m_x, m_y, m_z) \mapsto A_\tau(R_{-\phi}(m)) \quad (3.13)$$

où R_ϕ est la rotation d'angle ϕ autour de l'axe de rotation du détecteur, si bien que, posant $u_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi)$, cet opérateur calcule la projection centrale passant par s d'un point m sur le plan $D_\phi = \{d/d.u_\phi = F + s_y\}$.

L'opérateur A_τ^ϕ sera utilisé pour calculer cette projection pour des points particuliers de la discrétisation, considérés comme « centres » des voxels.

- *Le paramètre de dilatation σ_j* est supposé être le même dans les deux directions, nos réponses impulsionnelles ayant une symétrie circulaire. Ce paramètre contient des effets physiques comme le diamètre effectif du pinhole d_e , la résolution intrinsèque de la gamma-caméra g et la diffusion Compton, mais aussi des effets géométriques comme la taille du voxel (son « diamètre » d_v , puisque nous utilisons un modèle sphérique du voxel pour ce calcul) et le facteur de grossissement qui ont tous pour effets d'élargir l'image de projection du voxel sur le plan de détection. A partir de ces différents paramètres, nous pouvons calculer le diamètre de la projection de base circulaire du voxel. En ne tenant compte que de la géométrie du système sur la figure 3.8, il s'agit dans un premier temps de calculer le diamètre géométrique d_{pg} de la projection du voxel v sur le plan de détection en fonction de son diamètre d_v , de l'ouverture du pinhole modélisée par le diamètre effectif d_e de la distance focale F du collimateur caractérisant la distance entre l'ouverture et le plan de détection et de la distance r entre le voxel v et le trou, mesurée le long d'un axe perpendiculaire au plan de détection. La relation de Thalès nous donne

$$\frac{d_v}{d_e} = \frac{b}{a} = \frac{r_b}{r_a}.$$

Comme $r_a + r_b = r$, on obtient

$$r_a = \frac{d_e r}{d_e + d_v}$$

et

$$r_b = r - \frac{d_e r}{d_e + d_v}$$

En appliquant à nouveau Thalès, on déduit le diamètre géométrique de la projection :

$$d_{pg} = \frac{F + r_a}{r_b} d_v = \frac{(d_e + d_v)F + d_e r}{r}$$

Le diamètre de la projection tenant compte des effets physiques demande de rajouter une constante correspondant à la résolution intrinsèque du détecteur g (5 mm sur la gamma camera que nous avons utilisée) et une autre qui tienne compte de la diffusion Compton $c_{Compton}$. Nous obtenons ainsi le diamètre total de la projection

$$d_p = d_{pg} + g + c_{Compton} \quad (3.14)$$

que nous calculons à partir de l'opérateur A_σ , défini de la manière suivante :

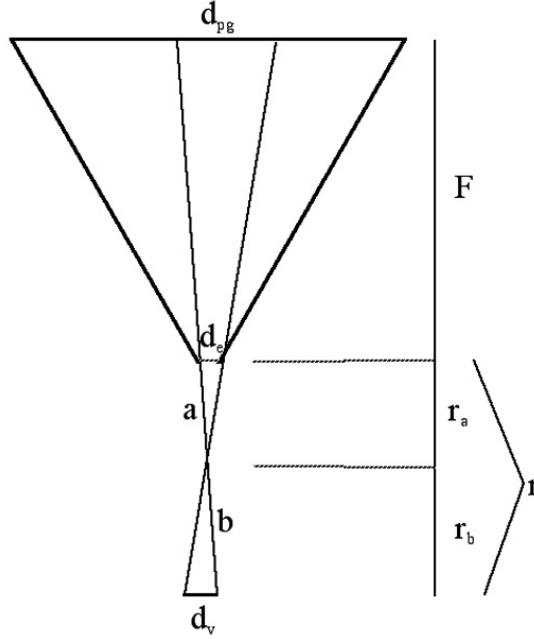


FIG. 3.8 – Géométrie du dispositif permettant d'évaluer le diamètre de la projection d'un objet de taille donnée.

DÉFINITION 3.4 Soit $S = (0, s_y, 0)$, F la distance focale du collimateur sténopé, d_v la taille du voxel et d_e le diamètre du trou d'entrée du collimateur sténopé. Pour tout $m \in \Omega^0(\mathbb{R}^3) = \{(x, y, z) \mid y < s_y\}$ on définit

$$A_\sigma : \Omega(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.15)$$

$$m = (m_x, m_y, m_z) \mapsto \frac{(d_e + d_v)F}{s_y - m_y} + d_e \quad (3.16)$$

Posant maintenant $\Omega(\mathbb{R}^3) = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < s_y\}$ on définit :

DÉFINITION 3.5

$$A_\sigma^\phi : \Omega(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.17)$$

$$m = (m_x, m_y, m_z) \mapsto A_\sigma(R_{-\phi}(m)) \quad (3.18)$$

où R_ϕ est la rotation d'angle ϕ autour de l'axe du détecteur, si bien que, posant $u_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi)$, cet opérateur calcule la largeur de la projection géométrique d_{pg} d'un voxel de taille d_v à travers un trou centré en s et de diamètre d_e sur le plan $D_\phi = \{d \mid d \cdot u_\phi = F + s_y\}$.

Notons que ce que l'on appelle le grossissement n'est pas le rapport d_p/d_v mais F/r , ceci pour obtenir une définition indépendante de la taille du trou d'entrée. Un trou d'entrée plus large s'associe en effet à un flou plus important sur l'image, que l'on ne peut assimiler à un grossissement. Le rapport d_p/d_v tient compte des deux phénomènes ensemble, grossissement et flou.

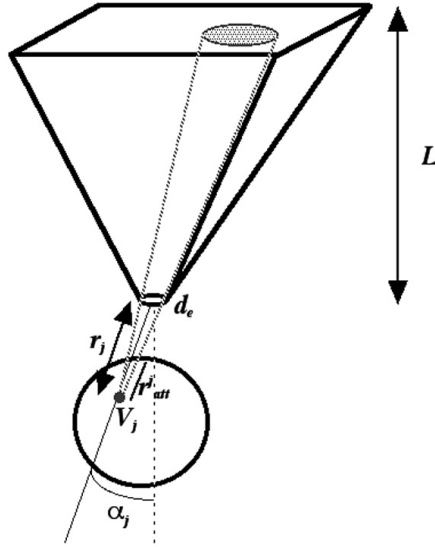


FIG. 3.9 – Intensité de la projection d’un voxel v_j situé à une distance r_j du trou d’entrée avec un angle α_j par rapport à la normale au plan de détection passant par le centre du trou d’entrée. Le rayonnement émis est supposé être atténué sur une distance r_{att}^j et le diamètre utilisé pour l’ouverture du collimateur est le diamètre effectif d_e .

REMARQUE 3.1 *Puisque nous avons opté pour un modèle gaussien de la projection, le diamètre doit être traduit en terme d’écart-type σ . Nous avons utilisé pour cela les tables de lois gaussiennes qui nous assurent que 95,46% de l’intégrale de la fonction gaussienne sont atteints en restreignant son support à l’intervalle $[-2\sigma; 2\sigma]$. En choisissant comme support 2D un disque centré en τ_j de diamètre $[-2\sigma; 2\sigma]$ avec $\sigma = d_p/4$, nous obtenons des fonctions ayant la forme appropriée et que nous prolongeons par 0 en dehors du disque.*

- Le paramètre de hauteur h_j représente la fraction globale du rayonnement émis par le voxel qui est effectivement détectée et inclut donc le diamètre effectif du pinhole, la sensibilité de la gamma-caméra, la variation spatiale de la sensibilité et l’atténuation. Le calcul de cette quantité pour un voxel j est ramené au calcul fait pour un point c_j considéré comme le centre du voxel. Pour un voxel désaxé d’un angle α_j , situé à une distance r_j du trou d’entrée et dont les photons sont atténués sur une distance r_{att}^j avant de sortir de l’enveloppe d’atténuation, on a (voir figure : 4.12) :

$$h_j = E_c \cdot \sin(\alpha_j) \cdot \frac{\pi \cdot \frac{d_e^2}{4}}{\pi \cdot r_j^2} \cdot e^{-\mu \cdot r_{att}^j} \quad (3.19)$$

où E_c est l’efficacité de la gamma-caméra et d_e est le diamètre effectif du trou d’entrée.

Puisque cette quantité dépend de la forme du champ de vue, considéré comme un champ d’atténuation uniforme dans le calcul de r_{att} , son calcul ex-

plicite ne sera détaillé qu'au chapitre 4, après nous être donné une géométrie précise pour le champ de vue à reconstruire.

Pour le moment, nous définissons l'opérateur A_h qui calcule la quantité h_j pour une position fixe du détecteur ainsi que l'opérateur A_h^ϕ qui calcule h_j en fonction de A_h pour toute position angulaire ϕ du détecteur.

DÉFINITION 3.6 Soit $S = (0, s_y, 0)$ le centre du trou du collimateur sténopé de diamètre d_e et μ le coefficient d'atténuation. Pour tout $m = (m_x, m_y, m_z) \in \Omega^0(\mathbb{R}^3) = \{(x, y, z) \mid y < s_y\}$, posant r_{att} la longueur d'atténuation associée au point m , on définit

$$A_h : \Omega(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.20)$$

$$m \mapsto E_c e^{-\mu r_{att}^j} d_e^2 \frac{\sqrt{m_x^2 + m_z^2}}{4(m_x^2 + (s_y - m_y)^2 + m_z^2)^{3/2}} \quad (3.21)$$

Avec $\Omega(\mathbb{R}^3) = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < s_y\}$ on définit $R_{-\phi}(m)$ la rotation du point m d'un angle $-\Phi$ on a :

DÉFINITION 3.7

$$A_h^\phi : \Omega(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.22)$$

$$m = (m_x, m_y, m_z) \mapsto A_h(R_{-\phi}(m)) \quad (3.23)$$

Ainsi, l'image d'un voxel v_j par l'opérateur de projection R donne la réponse impulsionnelle associée sous la forme d'une gaussienne :

$$R(v_j)(x, y) = \frac{h_j}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\tau_x^j)^2 + (y-\tau_y^j)^2}{2 \cdot \sigma_j^2}} \quad (3.24)$$

où les paramètres $\tau_j = (\tau_x^j, \tau_y^j)$, σ_j et h_j ont été calculés respectivement avec les opérateurs A_τ , A_σ et A_h .

3.5 calibrage de la gamma-caméra

Même si elle tient compte des différents effets décrits en 3.4, la reconstruction tomographique peut se révéler nettement en dessous des résultats escomptés. Puisque l'on cherche à obtenir une résolution millimétrique sur des structures dont les détails sont de l'ordre de quelques millimètres au maximum, l'opérateur de projection A se doit également de tenir compte des imperfections de la gamma-caméra, c'est-à-dire des variations des différents paramètres géométriques et physiques autour de leurs valeurs théoriques.

Le problème de la calibrage de systèmes de gamma-caméras munies d'un collimateur pinhole fait actuellement l'objet de très grands efforts pour réduire au maximum les artefacts dus en général à des imperfections mécaniques qui empêchent la caméra de tourner le long d'une trajectoire parfaitement circulaire ou électroniques, lorsque les photons détectés sont localisés avec une erreur dont la moyenne statistique est décentrée.

Par ailleurs, il est important de pouvoir estimer l'efficacité de détection de la gamma-caméra pour pouvoir remonter à une quantification absolue du traceur, comme nous l'avons vu précédemment. Ce sont donc ces deux problèmes que nous allons aborder successivement.

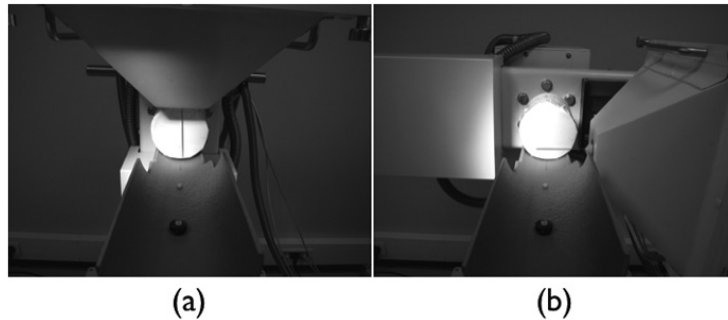


FIG. 3.10 – Détermination mécanique de l’axe de rotation en croisant deux perpendiculaires au détecteur passant par le centre du collimateur pinhole (a) et (b). En faisant passer un fil imbibé de technétium 99m par le point obtenu, parallèlement à l’axe longitudinal du détecteur, la source doit matérialiser l’axe de rotation s’il existe ou mettre en évidence les déplacements de l’image de projection induits par les imperfections du détecteur.

3.5.1 Correction des imperfections de la gamma-caméra

Depuis les travaux de Bequé et al. [8], l’existence de sept paramètres de calibrage a été admise. Parmi ces paramètres, seuls la longueur focale L et le rayon de rotation r sont non nuls dans le cas idéal, mais toujours supposés constants tout au long de l’acquisition tomographique. Le cas le plus général consiste à considérer un déplacement mécanique m , un déplacement électronique e_u et e_v , un *tilt* (angle d’inclinaison de la caméra vers l’avant par rapport à l’horizontale) ϕ et un angle de rotation de la caméra par rapport à l’axe perpendiculaire au détecteur passant par le centre du collimateur ou *twist* ψ , dont les valeurs peuvent varier non seulement entre deux acquisitions, mais aussi au cours d’une seule et même acquisition. Le travail cité ci-dessus ne prend pas en compte cette seconde possibilité pour déterminer les 7 paramètres, qui sont donc considérés comme constants au cours d’une même acquisition et concerne donc davantage les dérèglements provoqués par un changement de collimateur. Pour vérifier la validité d’une telle hypothèse avec notre matériel (Gamma-caméra TEMP Gaede Medizinsysteme GMBH, Freiburg, Allemagne) nous avons placé un fil de telle sorte qu’il matérialise l’axe de rotation de la caméra en étant à l’intersection de deux perpendiculaires au détecteur passant par le centre du trou d’entrée du collimateur (voir fig.3.10). Ce fil est également parallèle à l’axe longitudinal du détecteur si bien que sa position doit rendre sa projection sur le détecteur invariante par rotation de celui-ci.

Or l’existence même d’un axe de rotation n’est pas assurée puisque seule une trajectoire parfaitement circulaire de la gamma-caméra autour du fil ($L = C^{te}$ et $m = \phi = \psi = 0$) couplée à une absence de déplacement électronique ($e_u = e_v = 0$) la permettrait.

Les résultats de la figure 3.11 démontrent en effet que l’hypothèse selon laquelle il n’est pas besoin de corriger les défauts de la gamma-caméra est nettement insuffisante, tandis que l’hypothèse d’une correction indépendante de l’angle de la gamma-caméra autour de l’objet d’étude est elle-même mise en

défaut.

La correction que nous employons ne fait pas la distinction entre les variations des différents paramètres et relocalise simplement l'activité mesurée sur les images de projection par la translation mesurée sur le fil centré, comme sur la figure 3.11b. Il s'agit donc d'une précorrection pour laquelle les résultats obtenus après reconstruction tomographique respectivement sans et avec correction (figure 3.11c et d) démontrent une disparition des artefacts liés aux variations des paramètres décrits précédemment. Dans ce dernier cas, la résolution spatiale tomographique mesurée par la largeur à mi-hauteur du diamètre diminuée du diamètre du fil est d'environ 1,1 mm avec la méthode de reconstruction qui sera détaillée dans les parties 2 et 3 et pour un diamètre du collimateur sténopé de 1,5 mm. Cette correction suppose une stationnarité spatiale du défaut mais il paraît vraisemblable que la correction soit la même en tout point, puisqu'il s'agit finalement de rectifier la position relative du détecteur par rapport à l'objet. Il n'en demeure pas moins que la stationnarité du défaut mécanique dans le temps ou même selon les réglages de l'acquisition (le rayon de rotation notamment) n'est pas assurée et demanderait un contrôle régulier.

3.5.2 Détermination de l'efficacité de la gamma-caméra

Ce paramètre noté E_c ne peut que difficilement être évalué, comme il a été dit au chapitre précédent. Sa dépendance quant à l'énergie et l'intensité du rayonnement détecté oblige à fixer l'une et l'autre pour se situer dans un comportement moyen, représentatif des conditions réelles d'acquisition. La question de l'énergie est la plus simple puisque tous les radiotraceurs que nous utilisons sont marqués au technétium $99m$ qui émet des photons gamma à une énergie de 140 keV. L'intensité du rayonnement détecté est elle proportionnelle à l'activité utilisée lors de l'acquisition, que l'on peut situer autour de 10 mCi, soit 370 MBq pour faire de l'imagerie chez le petit animal. Pour déterminer le comportement du détecteur, nous avons donc fait l'acquisition d'une source calibrée de technétium $99m$, dont l'activité était 395 mBq. Le comptage de l'activité dans le volume reconstruit en supposant une efficacité parfaite nous a donné 247 MBq, soit un déficit qui est compensé si l'on compte une efficacité $E_c = 0,625$.

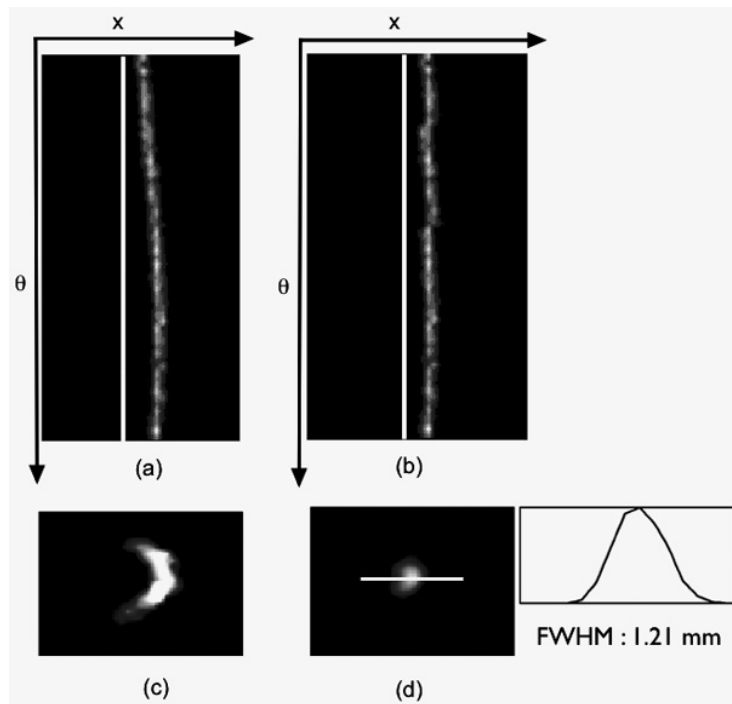


FIG. 3.11 – Figure détaillant les effets des imperfections du détecteur au cours de l’acquisition d’un fil centré par rapport au champ de vue (diamètre d’environ 0,1 mm) imbibé de technétium 99m. Sur la figure (a), le sinogramme montre un déplacement latéral de la projection du fil à mesure que le détecteur tourne, déplacement qui peut être mesuré par rapport à la ligne témoin verticale, en blanc. Sur la figure (b), les projections ont été corrigées en fonction du déplacement mesuré sur la figure (a) pour que la projection du fil soit centrée tout du long. Les figures (c) et (d) montrent une coupe transverse de la reconstruction du fil respectivement sans et avec correction et l’aspect fin et rond du fil sur la figure (d) montrent que les artefacts caractéristiques présents sur la figure (c) ont été éliminés. Dans ce cas, la résolution spatiale tomographique mesurée par la largeur à mi-hauteur du diamètre diminuée du diamètre du fil est d’environ 1,1 mm.

Deuxième partie

Optimisation des calculs

Nous avons souligné que les méthodes analytiques ne répondaient pas de manière satisfaisante à certains problèmes de tomographie. La modélisation de réponses impulsionnelles larges n'est en général pas assurée par les opérateurs de projection de type Radon ou leur prise en compte par l'introduction de convolutions supplémentaires rendrait alors problématique l'obtention de formules d'inversion.

Tout se passe donc comme si cette catégorie de problèmes à réponse impulsionnelle large nécessitait une double opération sur les données afin d'obtenir une reconstruction satisfaisante : celle proprement tomographique, idéalisée, qui consiste à reconstituer une distribution à partir de ses projections par des opérations de rétroprojection en supposant que la réponse impulsionnelle du détecteur se modélise par une distribution de Dirac et l'opération de déconvolution, qui tient compte de la réalité des réponses impulsionnelles et permet d'améliorer très sensiblement la résolution des images reconstruites qui seraient floues autrement. Cependant, la déconvolution ne peut être dissociée de la reconstruction tomographique en pratique car chaque point des projections mesurées est une somme de contributions d'une même ligne de projection et ces points qui composent la ligne de projection se projettent suivant des réponses impulsionnelles variables (le paramètre σ_j des définitions 3.4 et 3.5 est spatialement dépendant). Ceci exclut la possibilité d'une déconvolution venant avant la reconstruction tomographique, à moins de réaliser une déconvolution moyenne et d'obtenir ainsi une reconstruction approchée.

C'est essentiellement cet état de chose qui nous a fait nous tourner vers les méthodes itératives sur lesquelles nous allons nous concentrer maintenant. Les deuxièmes et troisièmes parties décrivent en effet un certain nombre de perfectionnements pouvant être classés selon qu'ils touchent à l'opération tomographique « idéale » ou à l'opération de déconvolution et seuls les premiers pourront être généralisés à l'ensemble des méthodes de reconstruction tomographique.

Dans cette deuxième partie, la plupart des résultats du chapitre 4 optimisent le calcul, le stockage et l'utilisation de l'opérateur de projection et jouiront encore d'une certaine généralité même si nous ne les avons appliqués qu'à une méthode itérative tandis que les méthodes analytiques nous serviront de témoin pour comparer les reconstructions tomographiques obtenues au chapitre 6.

Chapitre 4

Codage efficace de l'opérateur de projection : la méthode EAR

Les problèmes de tomographie apparaissant en scintigraphie donnent la possibilité, comme pour beaucoup de problèmes physiques, de faire apparaître quelques simplifications ou redondances, qui permettent de ne pas décrire le système entièrement et de s'épargner certains calculs. Nous ne pouvons malheureusement tenir ici un discours général sur les simplifications de la scintigraphie et devons nous cantonner à la scintigraphie sténopée. Il a été dit en effet au chapitre précédent que l'une des distinctions remarquables de cette configuration géométrique du collimateur par rapport à la collimation parallèle était la nécessité de résoudre le problème en trois dimensions, sans possibilité de le réduire à une série de problèmes à deux dimensions. Néanmoins, nous allons voir que l'exploitation des symétries permet une réduction des calculs par un facteur important. Il faut cependant demeurer attentif aux conséquences pratiques de cette idée : une simple symétrie demande parfois, pour pouvoir être appliquée, une adaptation de la discrétisation dont la mise en oeuvre peut se révéler problématique. Dans le même ordre d'idée, nous rapportions également au chapitre 2 que la reconstruction de Fourier n'était pas beaucoup utilisée du fait de la complexité qu'engendre l'interpolation d'une grille cartésienne à partir d'une grille polaire. Ainsi, bien que le contexte soit favorable aux économies de calculs puisque comme nous le rappelions dans l'introduction, les progrès informatiques sont lents lorsqu'ils sont noyés dans le nombre de dimensions d'un problème, beaucoup de chercheurs hésitent à investir dans une méthode théoriquement très avantageuse mais pratiquement compliquée à mettre en oeuvre correctement. Ceci explique sans doute le peu de travaux que nous ayons trouvés qui soient relatifs aux symétries. Nous avons cependant estimé que l'effort consenti au cours du développement d'une méthode de reconstruction incluant certains passages délicats pouvait se justifier par des gains de temps considérables et ce chapitre décrit la mise en oeuvre d'une reconstruction itérative plus efficace, tenant compte des réductions possibles du système.

L'utilisation de symétries pour réduire le nombre de calculs a surtout été rapportée jusque-là au niveau local, par une modélisation sphérique des voxels

[45]. Mais à notre connaissance, en dehors du travail de Sauve et al. [58] adapté à la fabrication d'une caméra TEMP à effet Compton, le seul travail exploitant une symétrie globale en TEMP a été publié par Hebert et al. [27] avec une discrétisation polaire prenant en compte la symétrie de rotation du système, avec le même nombre de voxels sur chaque couronne. Ceci conduit à un suréchantillonnage important au centre du cylindre reconstruit. Cette symétrie de rotation évidente puisque due à la rotation de la gamma caméra autour d'un axe demande donc un soin plus important pour être exploitée. Le travail de Rafecas et al. [57] exploite lui aussi la symétrie de rotation mais cette fois en TEP et ne change pas la discrétisation usuelle en voxels cubiques, ce qui permet de faire des calculs exacts. En contrepartie, il n'est plus possible d'utiliser l'ensemble des symétries, trois d'entre elles étant exploitées sur les dix-neuf possibles. On notera cependant un frémissement dans l'exploitation de la symétrie de rotation dans sa globalité, notamment en imagerie TEP, avec les derniers travaux proposés par Mora et Rafecas [49] d'un côté et Scheins et Herzog [59] de l'autre au IEEE Nuclear Science Symposium (San Diego, Etats-Unis, octobre 2006).

Rappelons que notre but est la résolution du système :

$$Ax = b \tag{4.1}$$

où A réalise la projection de N voxels stockés dans le vecteur x sur M pixels répartis sur P différentes projections stockées dans le vecteur b et le coefficient $A_{i,j}$, $i = 1 \dots M$, $j = 1 \dots N$ étant la fraction de photons émis par le voxel j qui atteint le pixel i sur le détecteur. On demande en général que M et N soient proches pour faire coïncider le nombre d'équations et le nombre d'inconnues, mais la condition d'égalité stricte n'est que rarement respectée.

Nous allons mettre en œuvre trois réductions, qui démontrent que le calcul et le stockage de l'ensemble des coefficients $A_{i,j}$, $i = 1 \dots M$, $j = 1 \dots N$ qui décrivent le système est loin d'être nécessaire. La première réduction exploite la symétrie circulaire provenant de la trajectoire du détecteur autour du champ de vue reconstruit et permet de ne calculer qu'un seul opérateur de projection, pour une seule position du détecteur et de retrouver les autres opérateurs de projection, correspondant aux autres points du détecteur sur sa trajectoire par simple permutation des colonnes de l'opérateur déjà calculé. La deuxième réduction consiste à mettre en évidence une symétrie entre les projections des voxels situés « à l'avant » du champ de vue reconstruit et ceux situés « à l'arrière ». Cette méthode efficace de reconstruction algébrique (Efficient Algebraic Reconstruction method ou EAR method) peut être utilisée avec n'importe lequel des algorithmes couramment employés dans le domaine (ART, EM, gradient conjugué...) puisqu'elle ne fait que fournir l'ensemble des équations de manière efficace -tout en permettant parfois de calculer aussi plus aisément quelques quantités nécessaires aux différents algorithmes-, mais nous l'avons appliquée en combinaison avec l'algorithme SART, dont les résultats seront montrés au chapitre 6. Ces deux premières étapes sont indépendantes de l'opération de déconvolution, c'est-à-dire qu'elles peuvent être mises en œuvre quelle que soit la modélisation de l'opérateur de projection. De fait, elles devraient donc également pouvoir être appliquées dans le cas des méthodes analytiques ou plus généralement lorsque la réponse impulsionnelle du détecteur est approchée par une masse de Dirac.

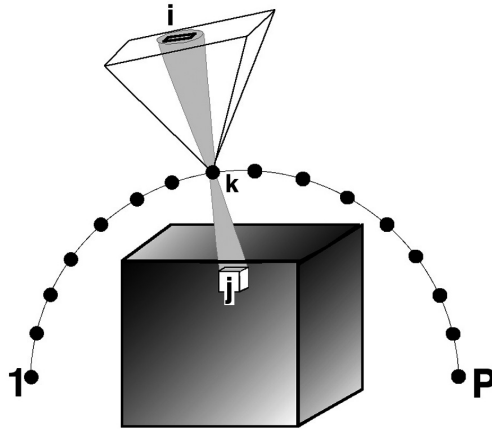


FIG. 4.1 – Illustration du problème consistant à estimer l’activité de chaque voxel indicé par j par chacune des projections indicées par k et composées de pixels indicés par i .

La troisième étape décrira de quelle manière les réponses impulsionnelles peuvent être factorisées pour minimiser le nombre de coefficients $A_{i,j}$, $i = 1 \dots M$, $j = 1 \dots N$ à calculer et à stocker. Cette étape est donc uniquement valable dans le cas d’une modélisation des réponses impulsionnelles sous la forme de fonctions à support sur plusieurs pixels.

Il est habituel, dans le cas de systèmes linéaires décrits par des matrices creuses, de ne pas stocker les coefficients nuls de la matrice et nous comparerons donc les économies de calculs et de stockage par rapport à une description du système par matrices creuses.

4.1 Symétries du système

Pour résoudre le système (4.1) par des méthodes itératives, il est courant de le séparer en une série d’équations de projection de la forme :

$$A^q x = b^q \tag{4.2}$$

pour $q = 1 \dots P$ (voir figure 4.1). Ce découpage par blocs est le plus approprié pour mettre en évidence les réductions mais n’empêche en aucune manière de résoudre le système par une approche simultanée, c’est-à-dire dans laquelle une itération de l’algorithme utilisé prend en compte toutes les équations.

Nous cherchons à accomplir une optimisation des calculs *a priori* : contrairement à l’approche consistant à calculer l’opérateur de projection puis à observer sa structure matricielle pour y découvrir des motifs par blocs, nous observons les économies de calcul et de stockage qui peuvent être faites à partir de considérations sur la configuration géométrique du problème qui est modélisé.

4.1.1 Symétrie de rotation et discrétisation adaptée

La méthode des *ordered subsets* (OS), décrite par Hudson et Larkin en 1994 [30] et décrite au chapitre 2, s'applique à tout algorithme itératif *simultané*, c'est-à-dire pour lequel la solution estimée est remise à jour à partir de l'ensemble des équations du système. Les résultats obtenus à partir de l'algorithme OS-EM, qui est la version OS de l'algorithme EM, également décrit au chapitre 2, démontrent une accélération de la convergence de l'algorithme lorsqu'un traitement *séquentiel*, et non *simultané*, est appliqué. Il est donc nettement plus rapide d'itérer la solution à partir d'une seule projection ou d'un groupe de projections, plutôt que de l'ensemble des projections.

Cette idée simple a conduit à considérer des groupements de projections dans lesquels un groupe devait naturellement être constitué de projections correspondant à des positions du détecteur orthogonales entre elles et ce pour deux raisons :

La première est que l'information portée par deux telles projections (que nous appellerons « projections orthogonales ») est beaucoup moins redondante que dans le cas où les deux projections utilisées sont angulairement proches. Ceci conduit également à une accélération de la convergence de l'algorithme.

La seconde raison est que dans le cas d'une discrétisation classique, c'est-à-dire un cube, composé de voxels cubiques, il n'est possible d'exploiter la symétrie de rotation que pour des positions du détecteur séparées de 90° (voir figure 4.2) ou pour des positions du détecteur situées à $n.90^\circ \pm \alpha$. Dès lors, pour une acquisition de P projections sur 360° , le choix de subsets contenant 4 projections orthogonales permet de ne calculer que l'une des quatre et de déduire les trois autres par symétrie.

C'est fondamentalement cette idée que nous avons voulu généraliser, pour des positions du détecteur séparées par un angle quelconque. Les trajectoires du détecteur sont en effet souvent limitées à 180° pour concentrer le nombre de projections autour de l'organe ciblé lors de l'examen : face ventrale de l'animal pour le cœur, face dorsale pour le cerveau. De telles trajectoires permettent également de s'affranchir de l'atténuation du support sur lequel repose l'animal et acquérant systématiquement sur une trajectoire opposée au support. De plus, certains expérimentateurs recommandent, en géométrie conique, une trajectoire du détecteur le long d'un angle légèrement supérieur à 180° pour un échantillonnage optimal des lignes de projection. Dans ce cas il devient difficile d'utiliser une symétrie qui ne s'applique que pour des positions orthogonales.

Or en considérant l'orbite circulaire de la gamma-caméra le long d'une longueur d'arc quelconque autour de l'objet, il est possible de simplifier notablement les calculs. Mais pour pouvoir déduire un opérateur matriciel de projection d'un autre quel que soit l'angle séparant les deux projections, il est nécessaire d'utiliser une discrétisation plus complexe, c'est-à-dire de faire un autre choix que des fonctions indicatrices sur des cubes pour les fonctions de base v_j avec lesquelles est exprimé le volume x :

$$x = \sum_{j=1}^N x_j v_j. \quad (4.3)$$

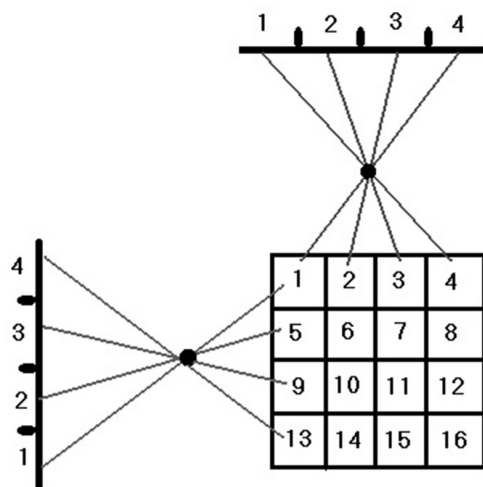


FIG. 4.2 – Discrétisation habituelle de l'espace (ici en 2D), qui ne conduit à une invariance globale du système que pour des positions du détecteur séparées de 90° . Ici le voxel 1 se projette à gauche de l'exacte même manière que se projette le voxel 4 vers le haut et ceci est facilement généralisable à l'ensemble des voxels.

Champ de vue et discrétisation

Tout d'abord, le champ de vue que nous allons reconstruire doit être doté d'une symétrie compatible avec celle que nous souhaitons exploiter. La forme générale devrait donc être à section circulaire dans tout plan coupant l'axe de rotation du détecteur perpendiculairement. Un champ sphérique, ovoïde ou de forme plus quelconque (figure 4.3) doté de la bonne symétrie pourrait convenir mais le plus simple est de définir un champ de vue cylindrique dont les différentes sections auront donc la même taille et la même structure. Compte tenu de ce que les images de projection acquises sont carrées, nous décidons d'inscrire le cylindre dans un cube, c'est-à-dire d'avoir une hauteur identique au diamètre. Une fois la géométrie du champ de vue établie, un cylindre inscrit dans un cube d'arête c , il nous faut préciser une discrétisation elle aussi compatible avec la symétrie de rotation.

Dans le repère cylindrique associé au champ de vue, la hauteur du cylindre est discrétisée en T différentes tranches de taille c/T (voir figure 4.4 a). La discrétisation suivant la direction radiale, pour chacune de ces tranches, est obtenue en découpant le disque en $\frac{T}{2}$ couronnes concentriques et un disque central, tous de même épaisseur, ce qui garantit que la dimension radiale et la profondeur du voxel sont à peu près les mêmes (voir figure 4.4 b). La taille radiale d'une couronne est donc : $c/(T+1)$, ce qui satisfait la condition d'homogénéité si T est assez grand (en général, $T \geq 64$), auquel cas c/T est proche de $c/(T+1)$.

Dans la direction tangentielle enfin, c'est-à-dire pour décider du nombre de voxels à placer sur chaque couronne, nous devons respecter des règles qui nous permettent à la fois d'utiliser la symétrie de rotation, tout en prenant garde à ne pas suréchantillonner le centre du cylindre, si des couronnes proches du centre

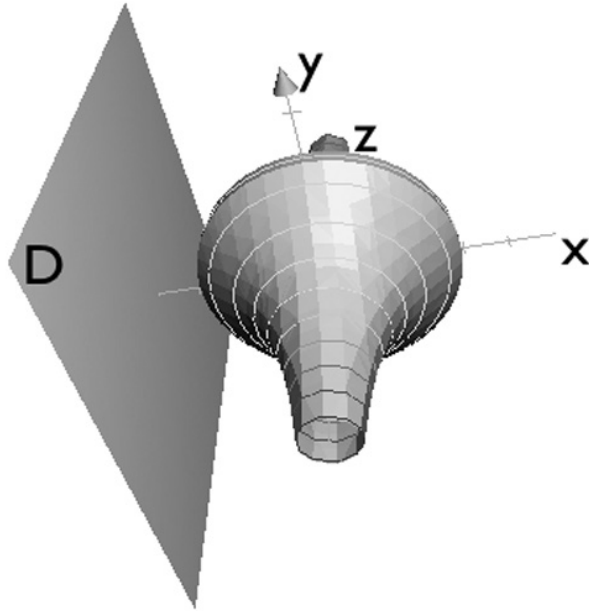


FIG. 4.3 – Champ de vue adapté à la symétrie circulaire. Le champ doit être à section circulaire dans chaque plan perpendiculaire à l'axe (Oz) autour duquel tourne le détecteur D.

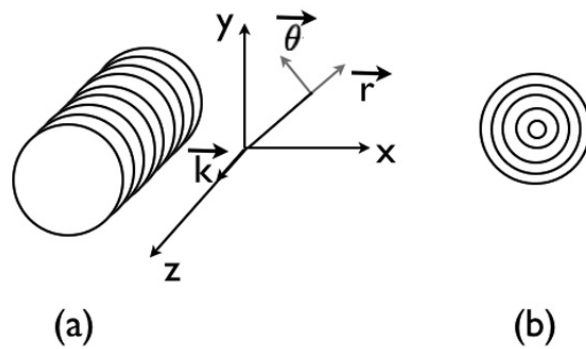


FIG. 4.4 – Initialisation de la structure du champ de vue. Pour une longueur de cylindre donnée c , correspondant à la dimension du champ de vue décidée arbitrairement, le nombre de tranches T est défini également arbitrairement (a). La structure d'une tranche est alors décidée en la décomposant en $T/2$ couronnes concentriques et un disque central (b).

devaient contenir autant de voxels que ceux du bord. Nous donnons donc :

RÈGLE 4.1 *i) Invariance par rotation. Le pas angulaire entre deux voxels consécutifs doit être multiple ou diviseur du pas angulaire de la caméra entre deux images successives de l'acquisition. Par conséquent la discrétisation dépend du nombre de projections et de l'angle total parcouru par la caméra.*

ii) Isotropie. Les trois dimensions des voxels doivent être aussi proches que possible pour éviter d'avoir une meilleure résolution dans une direction privilégiée. Leur dimension tangentielle doit être aussi proche que possible de leur dimension radiale qui est déjà fixée et comparable à leur épaisseur.

Plusieurs stratégies sont possibles pour suivre ces règles, mais nous remarquons que la première est beaucoup plus facile à respecter sous certaines conditions. Pour un nombre \tilde{P} de projections sur 360° (si les P projections ont été acquises sur 180° , $\tilde{P} = 2.P$, elle impose en effet que certaines couronnes indicées par a , les plus proches du centre, aient un nombre de voxels V_a de la forme $V_a = \tilde{P}/m$ avec m entier. Il est donc nécessaire que \tilde{P} admette des diviseurs entiers. De plus, si \tilde{P} admet de nombreux diviseurs entiers, le choix de V_a se trouve élargi et permet de respecter la règle ii) plus facilement. Puisque nous décidons du nombre de projections acquises P , il nous est possible de le choisir en suivant ces considérations mais cela ne change en rien la coutume, qui consiste à choisir une puissance de 2 ou un autre nombre admettant de nombreux diviseurs. A titre d'exemple ; l'ensemble des acquisitions qui ont été réalisées dans ce programme de recherche a consisté en 48, 60 ou 64 projections acquises sur 180° , soit $\tilde{P} = 96, 120$ ou 128 .

Nous procédons alors de la manière suivante pour inclure ces deux règles dans le choix du nombre de voxels sur une couronne a donnée : nous testons un paramètre $m \in \mathbb{N}^*$ qui sera le rapport entre \tilde{P} et le nombre de voxels V_a sur la couronne a . Nous commençons avec $m = 1$, ce qui correspond à $V_a = \tilde{P}$ et remplit la condition (i) et nous calculons d_t^a , la taille tangentielle des voxels par la formule :

$$d_t^a = \frac{p_a}{V_a} \quad (4.4)$$

où p_a est le périmètre de la $a^{\text{ème}}$ couronne.

Alors si $d_t^a < d_r$, où d_r est la taille radiale du voxel et est donc déjà entièrement déterminée, il y a trop de voxel sur la couronne et nous devrions réduire leur nombre en considérant des V_r) de la forme $\frac{\tilde{P}}{m}$ pour $m = 2, 3 \dots$ et m diviseur de \tilde{P} .

Le dernier m pour lequel l'inégalité $d_t^a \leq d_r$ est encore vérifiée est choisi et ainsi, le nombre de voxels sur la couronne est : $V_a = \frac{\tilde{P}}{m}$.

Si par contre la valeur $m = 1$ aboutit à $d_t^a > d_r$, il y a trop peu de voxels sur la couronne pour remplir la condition (ii) et nous testons alors des nombres de voxels de la forme $m.\tilde{P}$ pour $m = 2, 3 \dots$, sans autre condition sur m .

Le premier m pour lequel on a $d_t^a \leq d_r$ est choisi et le nombre de voxels sur la couronne est : $V_a = m.\tilde{P}$. Cette méthode revient donc toujours à garder le plus grand d_t^a tel que $d_t^a \leq d_r$ pour respecter la condition (ii) et la manière de faire varier le nombre de voxels par multiples ou diviseurs de \tilde{P} implique que la condition (i) est automatiquement respectée.

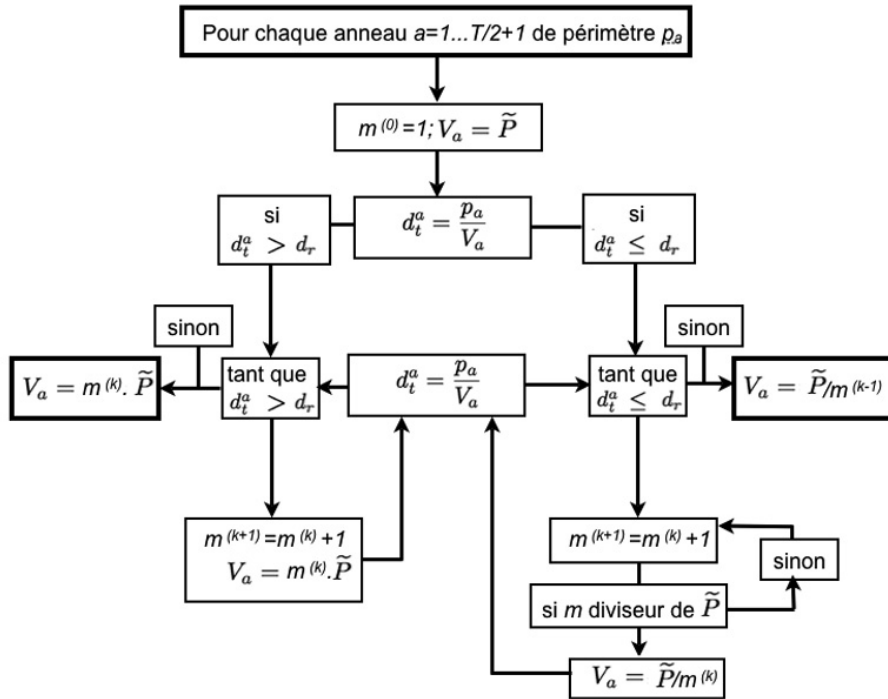


FIG. 4.5 – Schéma de l’algorithme de décision du nombre de voxels sur chaque couronne de la discrétisation cylindrique.

Cet algorithme peut être résumé sous la forme schématique de la figure 4.5

Toutes les tranches ont la même structure et la même épaisseur ce qui rend le calcul et le stockage de la discrétisation négligeables : pour 64 tranches, seules 32 couronnes sont nécessaires pour découper le diamètre d’une tranche en 64 parts (plus un voxel central) et le nombre de voxels n’a donc à être décidé par la méthode ci-dessus que pour 32 tranches. La figure 4.6 montre la structure d’une tranche.

L’utilisation de cette discrétisation adaptée à la symétrie de rotation du dispositif d’imagerie en tomographie est la composante principale de la méthode EAR. La discrétisation ainsi décrite sera appelée discrétisation EAR dans la suite de ce travail.

Propriétés de la discrétisation EAR

Les règles que nous nous sommes données pour la discrétisation EAR doivent permettre d’exploiter la symétrie de rotation tout en limitant les variations radiales de la densité de l’échantillonnage, en particulier le suréchantillonnage au centre du champ de vue. La première question est donc de savoir dans quelle mesure nous pouvons limiter cette variation. Avant de donner une caractérisation générale, en fonction du nombre de projections acquises sur 360° , nous proposons l’étude d’un exemple pour lequel $\tilde{P} = 96$.

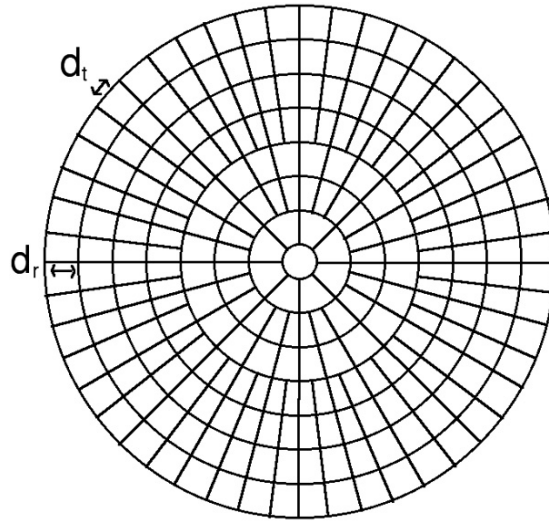


FIG. 4.6 – Structure des 8 premières couronnes d’une tranche du volume à reconstruire pour 48 projections acquises sur 180° (la tranche entière a en tout 32 couronnes plus le voxel central). Sur chaque couronne d’épaisseur d_r , le nombre de voxels est calculé de telle sorte que la dimension tangentielle des voxels d_t soit proche de d_r et que la condition (i) soit respectée. Le voxel cylindrique central a pour diamètre d_r et l’épaisseur de la tranche est aussi égale à d_r .

EXEMPLE 4.1 Pour $\tilde{P} = 96$, la dimension tangentielle d_t^a des voxels vérifie

$$\frac{d_r}{2} \leq d_t^a \leq d_r \quad (4.5)$$

pour chacune des couronnes, indicée par a .

L’inégalité $d_t^a \leq d_r$ est automatiquement vérifiée pour tout a puisque c’est la condition d’arrêt de l’algorithme que nous avons proposé.

Pour vérifier l’autre inégalité, $d_r/2 \leq d_t^a$, on définit l’unité de longueur égale à d_r pour simplifier les notations. On montre alors que $d_t^a \geq 1/2$ pour tout a .

La numérotation des couronnes part du centre en posant $V_0 = 1$, le nombre de voxels au centre, c’est-à-dire un seul. L’algorithme a ensuite calculé le nombre de voxels sur la couronne $a = 1$: $V_1 = 8$. La dimension tangentielle de ces voxels est calculée le long d’un cercle passant en chaque point par le milieu de l’épaisseur de la couronne (c’est-à-dire de rayon égal à la moyenne des rayons intérieur et extérieur de la couronne).

Le périmètre P_1 de ce cercle est ici égal à 2π et l’on a :

$$d_t^1 = \frac{2\pi}{8} \approx 0,79$$

et l’inégalité est vérifiée. Par la suite, comme $96 = 2^5 \cdot 3$, le nombre de voxels sur les couronnes suivantes peut soit rester identique, soit être multiplié par 2 ou 3, pour continuer à respecter la règle i).

Le périmètre P_2 du cercle suivant, associé à la deuxième couronne, est égal à $2P_1$ puisque son rayon a doublé. Dans le même temps, le nombre de voxels calculés par l'algorithme est $V_2 = 24 = 3V_1$. On a donc

$$d_t^2 = \frac{P_2}{V_2} = \frac{2P_1}{3V_1} = \frac{2}{3}d_t^1 \approx 0,52$$

et l'inégalité est vérifiée. Dès lors, le nombre de voxels sur les couronnes suivantes ne peut plus qu'être multiplié par deux ou rester inchangé entre deux couronnes successives jusqu'à arriver à $V_a = 96$. Ceci implique que l'inégalité $1/2 \leq d_t^a$ sera automatiquement vérifiée puisque dans l'hypothèse inverse, le nombre de voxels $V_a = \frac{\tilde{P}}{m}$ ne serait pas optimal et l'algorithme diviserait m par 2.

Enfin, lorsque a est suffisamment grand, V_a prend la forme $m\tilde{P}$. Ainsi, si pour un V_a donné, on avait $1/2 > d_t^a$, d_t^a ne serait pas optimal et un choix possible serait de doubler m , mais les possibilités deviennent de toute façon plus larges à ce niveau.

Cet exemple permet de montrer que l'homogénéité de la taille des voxels peut être caractérisée par l'inégalité $\frac{d_r}{2} \leq d_t^a \leq d_r$ lorsque le nombre d'images acquises par le détecteur sur 360° est de la forme $\tilde{P} = 2^n 3$.

La proposition suivante établit un résultat plus général.

PROPOSITION 4.1 *Pour un nombre \tilde{P} de projections sur 360° , soit $\tilde{P} = \alpha_1^{n_1} \cdot \alpha_2^{n_2} \cdot \dots \cdot \alpha_p^{n_p}$ la décomposition en facteurs premiers de \tilde{P} . Pour une taille radiale de voxel d_r , la taille tangentielle d_t^a de tout voxel de la discrétisation EAR vérifie l'encadrement*

$$\frac{d_r}{\alpha} \leq d_t^a \leq d_r \quad (4.6)$$

où $\alpha = \max_{i=1\dots p}(\alpha_i)$.

Preuve Si $d_t^a > d_r$ (partie gauche du graphe de l'algorithme), le nombre de voxels V_a de la couronne a peut être multiplié par tout facteur entier, et donc d_t^a peut être divisé par tout facteur entier, de telle sorte que l'on ait

$$\frac{d_r}{2} \leq d_t^a \leq d_r$$

et donc aussi

$$\frac{d_r}{\alpha} \leq d_t^a \leq d_r.$$

Si $d_t^a \leq d_r$ (partie droite du graphe de l'algorithme) et que l'on a de plus $d_t^a < \frac{d_r}{\alpha}$, le nombre de voxels V_a prend la forme $\tilde{P}/m^{(k)}$, où $m^{(k)}$ sont les diviseurs successifs de \tilde{P} , rangés dans l'ordre croissant. Nous choisissons alors le plus grand diviseur $m^{(j)}$ de \tilde{P} tel que si $V_a(j) = \tilde{P}/m^{(j)}$, on ait $d_t^a(j) = p_a/V_a(j) \leq d_r$ avec p_a le périmètre de la couronne a . L'inégalité $d_t^a \leq d_r$ est donc vérifiée puisque c'est la condition d'arrêt de l'algorithme. Mais ceci implique également que le diviseur suivant de \tilde{P} , $m^{(j+1)}$ est tel que si $V_a(j+1) = \tilde{P}/m^{(j+1)}$, alors $d_t^a(j+1) = p_a/V_a(j+1) > d_r$. Comme on a nécessairement $m^{(j+1)}/m^{(j)} \leq \alpha$, on obtient que

$$\frac{d_t^a(j+1)}{d_t^a(j)} = \frac{m^{(j+1)}}{m^{(j)}} \leq \alpha$$

soit

$$\frac{d_t^a(j+1)}{\alpha} \leq d_t^a(j)$$

et donc aussi

$$\frac{d_r}{\alpha} \leq d_t^a(j)$$

L'encadrement est donc bien vérifié dans tous les cas. \square

A titre de comparaison, un échantillonnage polaire pour lequel toutes les couronnes seraient divisées de la même manière et contiendraient donc le même nombre de voxels aboutit à une différence de taille tangentielle des voxels proportionnelle au rayon r . La 32^{ème} couronne d'une telle discrétisation aurait donc des voxels environ 32 fois plus grands que les voxels de la première couronne. Pour nous, le cas le plus favorable est donc celui où le nombre d'images acquises sur 360° est de la forme $\tilde{P} = 2^n$. L'inégalité 4.5 s'y trouve aisément respectée par l'algorithme. A l'opposé, si le nombre d'images acquises sur 360° admet des diviseurs premiers plus grands que 3, l'inégalité 4.5 doit être corrigée en (4.6) et la taille tangentielle des voxels est variable à l'intérieur d'un intervalle plus large.

Cette prescription de réaliser de préférence des acquisitions tomographiques pour lesquelles le nombre de projections sur 360° est de la forme $\tilde{P} = 2^n$ en accompagne bien une autre dont nous avons déjà parlé, qui consiste à compenser le déficit entre le nombre d'inconnues et d'équations par le nombre de projections (voir chapitre 1). Comme, le plus souvent, le nombre N d'inconnues est de la forme k^3 et le nombre de pixels dans une image - c'est-à-dire d'équations fournies par une image - est de la forme $M = k^2$ où k est une puissance de deux, le nombre de projections acquises sur 180° ou 360° devrait être égal à k c'est-à-dire être une puissance de deux. Nous avons dit que le strict respect de cette condition n'était en général pas obligatoire et nous avons effectivement travaillé assez souvent avec un nombre P de projections tel que $MP < N$ mais dans le cas de l'utilisation d'une discrétisation EAR, elle se trouve renforcée par la proposition 4.1.

Calcul d'un nouvel opérateur de projection

Nous avons vu (équation 5.1) une décomposition naturelle de l'opérateur de projection A par blocs correspondant chacun à une position du détecteur. L'exploitation de la symétrie de rotation en utilisant la discrétisation EAR doit permettre, pour un de ces blocs A^q , $q = 1, \dots, P$, de déduire tous les autres. En supposant donc déjà calculé le premier opérateur A^1 , nous donnons le résultat suivant

PROPOSITION 4.2 *Soit A^1 un bloc de l'opérateur de projection déjà calculé, correspondant à une position du détecteur. Alors, étant donnée une discrétisation EAR, pour toute autre position q prise par le détecteur, l'opérateur de projection A^q peut être calculé à partir de permutations des colonnes de A^1 pour toutes les couronnes pour lesquelles le nombre de voxels V_a est de la forme $V_a = m \cdot \tilde{P}$ avec $m \in \mathbb{N}^*$.*

Preuve Pour un nombre \tilde{P} de projections acquises sur 360° , supposons d'abord que le nombre de voxels V_a sur la couronne a soit $V_a = \tilde{P}$. En fonction de la position q prise par le détecteur, la couronne munie de l'ensemble de voxels $\Omega_{V_a} =$

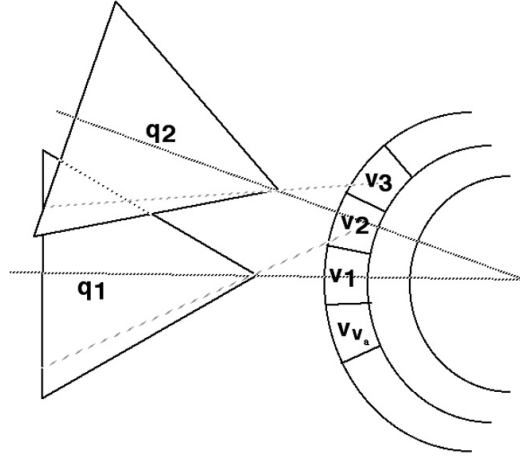


FIG. 4.7 – Exemple montrant l’invariance globale d’une couronne de voxels a lorsque le nombre de voxels V_a est égal à P . La projection du voxel v_2 sur le détecteur à la position q_2 est ici la même que celle du voxel v_1 sur le détecteur à la position q_1 . Des relations similaires permettent de déduire la projection de cette couronne pour toute position du détecteur à partir de la seule position q_1 par permutation des indices des voxels.

$\{v_1^a, v_2^a, \dots, v_{V_a}^a\}$ est globalement invariante : seule la numérotation des voxels varie, relativement à la position du détecteur, pas leur disposition géométrique sur la couronne (voir figure 4.7). Dès lors, il existe une permutation $\eta_a^q : \Omega_{V_a} \rightarrow \Omega_{V_a}$ telle que

$$A^q|_{\Omega_{V_a}} \equiv A^1 \circ \eta_a^q|_{\Omega_{V_a}} \quad (4.7)$$

Si $V_a = m \cdot \tilde{P}$, la même invariance géométrique permet de conclure également à l’existence d’une permutation. \square

Lorsque $V_a = \tilde{P}/m$, il n’y a en revanche plus d’invariance de l’ensemble de voxels $\Omega_{V_a} = \{v_1^a, v_2^a, \dots, v_{V_a}^a\}$ pour toute position prise par le détecteur. Il y a néanmoins une invariance *modulo* m , c’est-à-dire pour des positions du détecteurs q_1, q_2 telles que $q_1 - q_2$ soit divisible par m . Il existe donc, pour de telles positions, une permutation η_a^q sur l’ensemble Ω_{V_a} telle que

$$A^{q_2}|_{\Omega_{V_a}} \equiv A^{q_1} \circ \eta_a^q|_{\Omega_{V_a}} \quad (4.8)$$

Lorsque $q_1 - q_2 < m$, on définit simplement $\eta_a^q = I$ (identité) et l’on génère ainsi tous les blocs A^q de A à partir d’un unique bloc A^1 . Les approximations générées par l’exploitation de la symétrie de rotation sur ces couronnes donneront lieu à des majorations qui nous permettront de démontrer que l’erreur dans le calcul de l’opérateur de projection est bien contrôlée.

Étant assurés de l’existence d’une permutation η_a^q pour calculer un opérateur de projection A^q pour une position quelconque q du détecteur à partir de A^1 , ce pour chaque couronne a de la discrétisation EAR, nous donnons la forme de la permutation.

DÉFINITION 4.1 Soit une couronne a d'une discrétisation EAR, munie d'un ensemble de V_a voxels $\Omega_{V_a} = \{v_1^a, v_2^a, \dots, v_{V_a}^a\}$. On pose

$$\begin{aligned} \eta : \Omega_{V_a} &\rightarrow \Omega_{V_a} \\ v_i &\mapsto v_{i-1}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Supposons que $V_a = m \cdot \tilde{P}$ pour $m \in \mathbb{N}^*$, en posant $s = +1$ si le détecteur tourne dans le sens croissant de la numérotation des voxels et $s = -1$ sinon et q l'indice de la position du détecteur, on définit

$$\eta_a^q = \eta^{(s \cdot q \cdot m)} \quad (4.10)$$

Si $V_a = \tilde{P}/m$ pour m diviseur de \tilde{P} , on définit

$$\eta_a^q = \eta^{([s \cdot q / m])} \quad (4.11)$$

où $[s \cdot q / m]$ désigne l'entier le plus proche de $s \cdot m / q$.

DÉFINITION 4.2 Soit A^0 un bloc de la matrice de projection, calculé pour une position du détecteur. Pour toute position q du détecteur, on définit le bloc \hat{A}^q par $\hat{A}^q|_{\Omega_{V_a}} \equiv A^0 \circ \eta_a^q|_{\Omega_{V_a}}$ pour toute couronne a de la discrétisation EAR.

L'opérateur \hat{A}^q de la définition précédente est calculé par permutation des colonnes de l'opérateur A^0 plutôt que de calculer un nouvel opérateur A^q par la méthode directe décrite dans la section 3.4.2. Seul le bloc $\hat{A}^0 = A^0$ est alors calculé par la méthode directe. Mais nous devons nous assurer alors que \hat{A}^q est une bonne approximation de A^q . Pour ce faire, nous majorons l'erreur commise sur les trois paramètres qui définissent la projection d'un voxel : le paramètre de translation τ , de dilatation σ et de hauteur h (voir la section 3.4.2).

Majoration des erreurs

L'opérateur de calcul du centre de la projection A_τ . Considérons d'abord l'opérateur A_τ^ϕ restreint au plan central du volume à reconstruire, le plan $z = 0$. En posant $\Omega(\mathbb{R}^2) = \{(x, y) / \sqrt{x^2 + y^2} < s_y\}$ où le centre du trou du collimateur sténopé s'écrit $S = (0, s_y)$, on définit, F étant la distance entre le plan du détecteur et le trou du collimateur (ou distance focale) :

$$A_\tau^\phi : \Omega(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.12)$$

$$m = (m_x, m_y) \mapsto \frac{-F(m_x \cos \phi + m_y \sin \phi)}{|s_y - (m_y \cos \phi - m_x \sin \phi)|} \quad (4.13)$$

Les différentes positions prises par le détecteur sont indicées par un angle ϕ qui est multiple d'un angle $\Phi = 2\pi/\tilde{P}$. Plus précisément, le point S parcourt un cercle échantillonné par pas d'angle Φ , définissant, dans le plan $(0xy)$ la suite $S_q = |S| (\cos(q\Phi), \sin(q\Phi))$, $q = 0, \dots, \tilde{P} - 1$. On remplace alors A_τ^ϕ par :

$$A_\tau^q : m = (m_x, m_y) \mapsto \frac{-F(m_x \cos q\Phi + m_y \sin q\Phi)}{|s_y - (m_y \cos q\Phi - m_x \sin q\Phi)|}. \quad (4.14)$$

et l'on pose $A_\tau^0 = A_\tau$.

Nous avons défini les centres de nos voxels, pour une couronne

$$\mathcal{C}_a = \{(a - 1/2)d_r \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq (a + 1/2)d_r\}$$

comme les points c_j , $j = 1, \dots, V_a$ situés sur un cercle de rayon $d_r a$ et où c_j et c_{j+1} sont séparés d'un angle θ .

– Si $V_a = m\tilde{P}$, $\theta = 2\pi/m\tilde{P}$. Par convention, on suppose que c_1 est sur la droite Os_0 .

R_θ étant la rotation d'angle θ dans le plan (Oxy) , on a $c_j = R_{\theta_j}c_1$ pour tout $j = 1, \dots, V_a$ où $\theta_j = j2\pi/m\tilde{P}$ et

$$A_\tau^q(c_j) = \frac{-F(R_{-q\Phi}c_j)_x}{s_y - (R_{-q\Phi}c_j)_y} \quad (4.15)$$

Or $R_{-q\Phi}c_j = R_{-q2\pi/\tilde{P}}c_j = R_{-qm\theta}c_j = c_{(j-qm) \pmod{V_a}}$ et donc, posant $j' = (j - qm) \pmod{V_a}$, on obtient que

$$A_\tau^q(c_j) = \frac{-F(c_{j'})_x}{s_y - (c_{j'})_y} = A_\tau(c_{j'})$$

ce qui nous permet de prouver que, posant $\hat{A}_\tau^q|_{\Omega_{V_a}} \equiv A_\tau \circ \sigma_a^q|_{\Omega_{V_a}}$, on a alors $\hat{A}_\tau^q|_{\Omega_{V_a}} = A_\tau^q|_{\Omega_{V_a}}$.

– Dans le cas où $V_a = \tilde{P}/m$, d'après la forme de la permutation donnée dans la définition 4.1, on approche $A_\tau^q(c_j)$ par $\hat{A}_\tau^q(c_j) = A_\tau(c_j)$ pour $q = -m/2, \dots, m/2$ (voir figure (4.8)). Dans ce cas, en effet, le point $R_{-q\Phi}c_j$ ne correspond au centre d'aucun voxel de la discrétisation EAR et est dès lors remplacé par le plus proche centre d'un voxel. Or l'erreur due à cette approximation peut être majorée par la proposition suivante :

PROPOSITION 4.3 *Supposons que l'angle d'ouverture γ du collimateur sténopé vérifie $\gamma = \pi/4$ et que la distance l_{min} entre le champ de vue cylindrique de la discrétisation EAR et le trou d'entrée du collimateur, de centre S , vérifie $l_{min} > 0$. Notant F la distance focale du collimateur sténopé, si pour toute couronne indiquée par a , la taille tangentielle des voxels d_t^a vérifie*

$$d_t^a \leq \frac{d_p}{2G}$$

où $G = F/l_{min}$, on a

$$|\hat{A}_\tau^q(c_j) - A_\tau^q(c_j)| \leq d_p \quad (4.16)$$

pour tout voxel j de centre c_j .

Preuve Soit M_x le nombre de pixels dans la longueur l_x du détecteur. On a la taille du pixel $d_p = l_x/M_x$. En fonction de l'excentricité du pixel sur le détecteur et posant B et C ses bords, nous vérifions que l'angle $\alpha = \widehat{BSC}$ diminue lorsque B et C s'éloignent de A , le centre du détecteur. L'angle α correspondant au pixel le plus excentré vérifie :

$$\alpha = \frac{\pi}{4} - \widehat{ASB}$$

et comme $\widehat{ASB} = \arctan\left(\frac{l_x - d_p}{l_x}\right)$, on obtient :

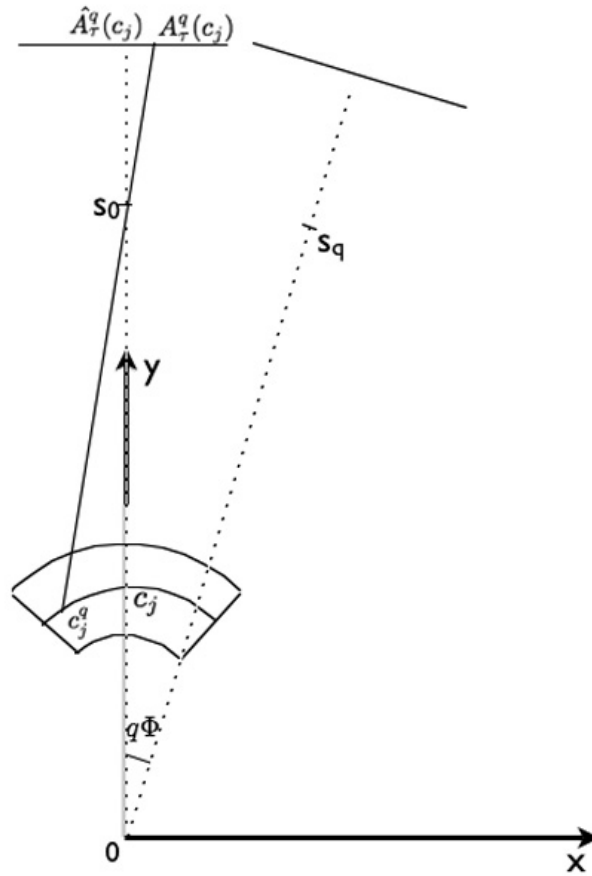


FIG. 4.8 – Approximation de $A_\tau^q(c_j) = A_\tau(R_{-q\Phi}c_j)$ par $\hat{A}_\tau^q(c_j) = \hat{A}_\tau(c_j)$, avec $q\Phi = \widehat{S_0 0 S_q}$

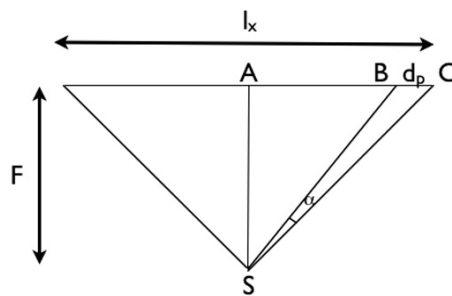


FIG. 4.9 – Correspondance entre un pixel de longueur d_p et l'angle α sous lequel il est vu depuis S .

$$\tan \alpha = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \arctan \left(\frac{l_x - d_p}{l_x} \right) \right) \quad (4.17)$$

$$= \frac{\tan \pi/4 - \frac{l_x - d_p}{l_x}}{1 + \tan \pi/4 \left(\frac{l_x - d_p}{l_x} \right)} \quad (4.18)$$

$$= \frac{d_p}{2l_x - d_p} \quad (4.19)$$

et par conséquent, pour tous les pixels, on a $\tan \alpha \geq \frac{d_p}{2l_x - d_p}$. On obtient ainsi une minoration de l'angle sous lequel est vu tout pixel de longueur d_p depuis S .

Considérons maintenant la figure 4.10 et soit l la distance $\|c_j S\|$. On pose r la

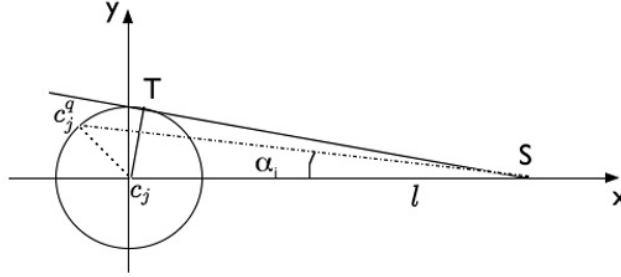


FIG. 4.10 – Correspondance entre les deux points c_j et c_j^q séparés par la distance r dans le voxel j et l'angle α_j sous lequel le segment $[c_j c_j^q]$ est vu depuis S .

distance entre le centre c_j du voxel j et le point $c_j^q = R_{-\varphi} c_j$. Remarquons que la distance r est nécessairement inférieure à $d_t^a/2$, le point c_j étant au centre du voxel j tandis que le point c_j^q est encore dans le même voxel, de taille tangentielle d_t^a . Le point c_j est utilisé comme une approximation du point c_j^q lorsque l'on calcule $A_\tau^q(c_j) = A_\tau(c_j^q)$ à partir de l'opérateur \hat{A}_τ^q . L'angle $\alpha_j = \widehat{c_j S c_j^q}$ est alors majoré par l'angle $\widehat{c_j S T}$, où T est tel que (ST) est la tangente au cercle $\mathcal{C}(c_j, r)$. Les coordonnées de T se calculent aisément dans un repère centré en c_j où $c_j S$ est l'axe des x en calculant l'intersection du cercle $\mathcal{C}(c_j, r)$ avec le cercle de diamètre $[c_j S]$: $T = (r^2/l, r/l\sqrt{l^2 - r^2})$. Par conséquent, on a :

$$\tan(\alpha_j) \leq \frac{T_x}{T_y} = \frac{r}{\sqrt{l^2 - r^2}} \leq \frac{r}{\sqrt{l_{min}^2 - r^2}} \quad (4.20)$$

Or on a :

$$|\hat{A}_\tau^q(c_j) - A_\tau^q(c_j)| \leq d_p \Leftrightarrow \alpha_j \leq \alpha \Leftrightarrow \tan(\alpha_j) \leq \tan(\alpha).$$

Si $d_t^a \leq \frac{d_p}{2G}$, puisque $r \leq d_t^a/2$, avec $F = l_x/2$ on a :

$$r \leq \frac{d_p}{4G} = \frac{d_p l_{min}}{2l_x} \quad (4.21)$$

Soit M_x le nombre de pixels dans la longueur l_x de telle sorte que l'on ait :

$$d_p = \frac{l_x}{M_x}$$

On a alors :

$$\frac{d_p l_{min}}{2l_x} \leq \frac{d_p l_{min}}{l_x \sqrt{4 - \frac{4}{M_x} + \frac{2}{M_x^2}}} \quad (4.22)$$

$$= \frac{d_p l_{min}}{l_x \sqrt{4 - \frac{4d_p}{l_x} + \frac{2d_p^2}{l_x^2}}} = \frac{d_p l_{min}}{\sqrt{4l_x^2 - 4l_x d_p + 2d_p^2}} \quad (4.23)$$

$$= \frac{d_p l_{min}}{\sqrt{(2l_x - d_p)^2 + d_p^2}} \quad (4.24)$$

Or de

$$r \leq \frac{d_p l_{min}}{\sqrt{(2l_x - d_p)^2 + d_p^2}} \quad (4.25)$$

on tire :

$$r^2 ((2l_x - d_p)^2 + d_p^2) \leq d_p^2 l_{min}^2 \quad (4.26)$$

$$\Leftrightarrow r^2 + \frac{d_p^2 r^2}{(2l_x - d_p)^2} \leq \frac{d_p^2 l_{min}^2}{(2l_x - d_p)^2} \quad (4.27)$$

$$\Leftrightarrow r^2 \leq \frac{d_p^2 (l_{min}^2 - r^2)}{(2l_x - d_p)^2} \quad (4.28)$$

$$\Leftrightarrow r \leq \frac{d_p \sqrt{l_{min}^2 - r^2}}{2l_x - d_p} \quad (4.29)$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{\sqrt{l_{min}^2 - r^2}} \leq \frac{d_p}{2l_x - d_p} \quad (4.30)$$

soit

$$\tan(\alpha_j) \leq \tan(\alpha) \quad (4.31)$$

ce qui est équivalent à $| \hat{A}_\tau^q(c_j) - A_\tau^q(c_j) | \leq d_p$ et prouve ainsi la proposition. \square

Nous donnons une interprétation de cette proposition comme exprimant la correspondance entre les longueurs prises dans l'espace objet et celles prises dans l'espace image. Pour que l'image par A_τ d'un voxel soit plus petite qu'un pixel, il suffit que l'on ait $d_t^a \leq \frac{d_p}{2G}$ où G est le grossissement maximal qui affecte le champ de vue.

Or par construction de notre discrétisation, nous décidons d'abord « à la main » de la taille de notre champ de vue à reconstruire (la longueur du cylindre, qui est la même que son diamètre c) et du nombre T de tranches dans ce cylindre. Le rapport $d_z = c/T$ nous donne la taille du voxel suivant l'axe (Oz) . Par la suite, nous savons que les tailles radiales d_r et tangentielles d_t^a pour chaque couronne a vérifient :

$$d_t^a \leq d_r < d_z \quad (4.32)$$

Par conséquent, pour respecter l'hypothèse de la proposition 4.3, il suffit de vérifier :

$$\frac{c}{T} \leq \frac{d_p}{2G} \quad (4.33)$$

où G est le grossissement maximal dans le cylindre : $G = F/l_{min}$.

En pratique, il est suffisant de vérifier l'inégalité

$$\frac{c}{T} \leq \frac{d_p}{G} \quad (4.34)$$

dans la mesure où cette proposition donne une majoration de l'erreur commise pour les couronnes a telles que le nombre V_a de voxels sur ces couronnes est de la forme $V_a = \tilde{P}/m$, c'est-à-dire les couronnes les plus centrales. On vérifie en général que la distance l_{cc} entre le trou d'entrée S et la première couronne a avec $V_a = \tilde{P}/m$ vérifie :

$$l_{cc} > 2l_{min} \quad (4.35)$$

et par conséquent le grossissement maximal G_{cc} sur ces couronnes centrales vérifie quant à lui :

$$G_{cc} < 2G. \quad (4.36)$$

Nous établissons donc la correspondance entre la taille des pixels et la taille des voxels par l'équation (4.33) qui admet une interprétation simple (voir la figure 4.11). Comme enfin le diamètre du champ de vue est lui-même égal à c par construction, le grossissement maximal G est égal à $\frac{F}{(r-c/2)}$ et l'équation (4.34) devient :

$$c \leq \frac{2d_p r T}{2F + d_p T}. \quad (4.37)$$

Enfin, l'hypothèse selon laquelle l'angle d'ouverture γ du collimateur vérifie $\gamma \leq \pi/4$ est justifiée sur la plupart des gamma-caméras. Sur celle que nous avons utilisée (Gamma-caméra TEMP Gaede Medizinsysteme GmbH, Freiburg, Allemagne), la distance focale F était de 12 cm, tandis que la longueur du champ l_x de vue était de 18 cm, vérifiant donc $F \geq l_x/2$.

L'opérateur de calcul du diamètre de la projection A_σ . Nous avons déjà défini les opérateurs A_σ et A_ϕ au chapitre 3. Suivant ce que nous avons fait pour l'opérateur A_τ , nous restreignons maintenant ϕ aux valeurs angulaires qui sont effectivement prises par le détecteur et posons, pour tout $m = (m_x, m_y, m_z) \in \Omega(\mathbb{R}^3) = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < s_y\}$:

$$A_\sigma^q(m) = A^\sigma(R_{-q\Phi}m) \quad (4.38)$$

où Φ est le pas angulaire du détecteur, $\Phi = 2\pi/\tilde{P}$ et R_Φ est la rotation d'angle Φ dans le plan (Oxy) dans le sens de rotation du détecteur.

Pour un voxel j de centre c_j , on montre comme précédemment pour A_τ que le remplacement de $A_\sigma^q(c_j)$ par $\hat{A}_\sigma^q(c_j) = A_\sigma(c_j)$ n'est une approximation que pour les couronnes a pour lesquelles le nombre de voxels V_a est de la forme $V_a = \tilde{P}/m$ pour m entier. La proposition suivante donne une majoration de l'erreur commise :

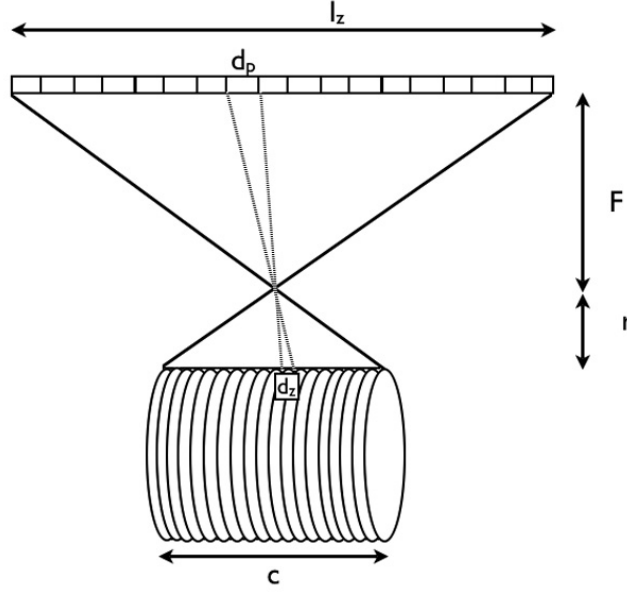


FIG. 4.11 – Correspondance entre la taille du voxel d_z et celle du pixel d_p .

PROPOSITION 4.4 Soit d_e le diamètre du trou d'entrée et F la distance focale du collimateur sténopé. Posant d_r la taille radiale des voxels, d_p la taille du pixel sur le détecteur, l_{\min} la distance entre le centre du trou du collimateur s et le champ de vue à reconstruire et $G = F/l_{\min}$ le grossissement maximal sur le champ de vue cylindrique, si $l_{\min} \geq d_e + d_r$ et $d_r < d_p/G$ alors on a

$$| \hat{A}_\sigma^q(c_j) - A_\sigma^q(c_j) | \leq d_p \quad (4.39)$$

pour tout voxel j de centre c_j .

Preuve Pour un voxel j de centre $c_j = (c_x^j, c_y^j, c_z^j)$, soit $t_y^j = s_y - c_y^j > 0$. On a $\hat{A}_\sigma^q(c_j) = A_\sigma(c_j)$ et $A_\sigma^q(c_j) = A_\sigma(R_{-q\Phi}c_j)$ où R_Φ est la rotation d'angle Φ . On définit la fonction :

$$f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^* \quad (4.40)$$

$$t \mapsto \frac{(d_e + d_r)F}{t} + d_e = \frac{K}{t} + d_e \quad (4.41)$$

avec $K = (d_e + d_r)F$. Posant $c_j^q = R_{-q\Phi}c_j = (c_{j,x}^q, c_{j,y}^q, c_{j,z}^q)$ et $t_{j,y}^q = s_y - c_{j,y}^q$, on a

$$| A_\sigma(c_j) - A_\sigma(c_j^q) | = | f(t_y^j) - f(t_{j,y}^q) | \quad (4.42)$$

avec $| t_y^j - t_{j,y}^q | \leq d_r$ par construction de la discrétisation EAR et donc $| f(t_y^j) - f(t_{j,y}^q) | \leq d_r | f'_{\max} |$, où f'_{\max} est le maximum de la dérivée sur l'intervalle $[t_y^j; t_{j,y}^q]$. Or $f'(t) = -K/t^2$ et donc

$$| f(t_y^j) - f(t_{j,y}^q) | \leq d_r \frac{K}{l_{\min}^2} \quad (4.43)$$

Si $l_{min} \geq d_e + d_r$, on a :

$$l_{min} \geq \frac{(d_e + d_r)F}{F} \quad (4.44)$$

$$\Leftrightarrow l_{min} \geq \sqrt{\frac{(d_e + d_r)Fl_{min}}{F}} \quad (4.45)$$

$$\Leftrightarrow l_{min} \geq \sqrt{\frac{(d_e + d_r)F}{G}} \quad (4.46)$$

$$\Leftrightarrow l_{min} \geq \sqrt{\frac{K}{G}} \quad (4.47)$$

$$(4.48)$$

L'équation (4.43) nous donne alors :

$$|f(t_j) - f(t_j^q)| \leq d_r G \quad (4.49)$$

Sous l'hypothèse suggérée par la proposition 4.3 que $d_r \leq d_p/G$, on a alors :

$$|f(t_j) - f(t_j^q)| \leq d_p \quad (4.50)$$

soit

$$|\hat{A}_\sigma^q(c_j) - A_\sigma^q(c_j)| \leq d_p. \quad \square$$

L'hypothèse selon laquelle $l_{min} \geq d_e + d_r$ peut être facilement remplie en décidant de la taille du champ de vue cylindrique à reconstruire. Posant c son diamètre et sa hauteur, il suffit que $s_y - c$ soit plus grand que $d_e + d_r$. Nous avons travaillé le plus souvent avec un diamètre d_e du trou d'entrée de 1,5 mm et des tailles de voxel $d_t^a \leq d_r \leq d_z < 1$ mm ce qui représente un espace entre le champ de vue et le trou d'entrée supérieur à 2,5 mm. La condition est en fait automatiquement satisfaite en rappelant que la partie du champ de vue qui est problématique, c'est-à-dire pour laquelle l'utilisation de la discrétisation EAR conduit à une approximation, est un cylindre constitué des couronnes proches du centre et donc relativement éloignées du trou, remplissant très certainement la condition d'éloignement ci-dessus.

L'opérateur de calcul de l'intensité de la projection A_h . Cet opérateur tient notamment compte de l'atténuation par un modèle uniforme dans tout le champ de vue reconstruit. Il s'agit alors de calculer la longueur d'atténuation subie par le rayonnement émis depuis le centre de chaque voxel j .

Calcul de la longueur d'atténuation. L'hypothèse sous-jacente d'une atténuation homogène dans l'ensemble du champ de vue, et non seulement d'un cylindre plus petit qui serait centré dans celui-ci et de dimensions plus conformes à celles de l'animal, se justifie par le fait que l'animal n'est en général pas centré. Il est de fait placé au plus près du détecteur, qui tourne suivant une trajectoire de 180° au-dessus de lui. Dès lors, l'animal est effectivement placé relativement proche de la limite du champ de vue, du moins dans la partie supérieure de celui-ci.

Soit $c_j = (c_x^j, c_y^j, c_z^j)$ le centre du voxel j et $S = (s_x, s_y, s_z) = (0, s_y, 0)$ le centre du trou d'entrée du collimateur sténopé. On pose $t^j = (s_x - c_x^j, s_y - c_y^j, s_z -$

$c_j^j = (t_x^j, t_y^j, t_z^j)$ et c le diamètre du champ de vue. La longueur d'atténuation r_{att}^j associée au voxel j est la distance entre c_j et le point I d'intersection entre le segment $[c_j S]$ et le cercle de rayon $c/2$ qui délimite le champ de vue dans chaque plan $(0xy)$ (voir figure 4.12). De ce fait, le point $I = (I_x, I_y, I_z)$ vérifie l'équation du cercle :

$$I_y = \sqrt{\frac{c^2}{4} - I_x^2} \quad (4.51)$$

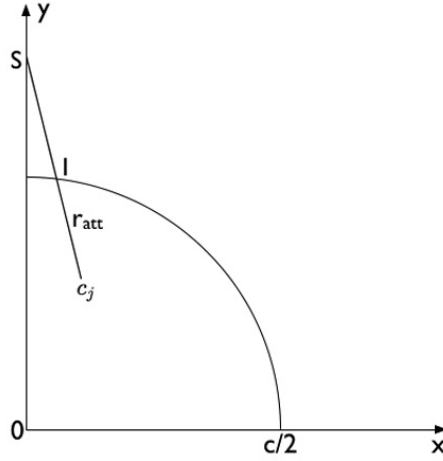


FIG. 4.12 – Calcul de la longueur d'atténuation r_{att} pour le voxel j de centre c_j .

Le point I est obtenu comme :

$$I = c_j + r_{att} \frac{t^j}{\|t^j\|_{\mathbb{R}^3}} = \left(c_x^j + r_{att} \frac{t_x^j}{\|t\|_{\mathbb{R}^3}}, c_y^j + r_{att} \frac{t_y^j}{\|t\|_{\mathbb{R}^3}}, c_z^j + r_{att} \frac{t_z^j}{\|t\|_{\mathbb{R}^3}} \right) \quad (4.52)$$

Pour le calcul de I , nous nous plaçons dans le plan (Oxy) et vérifions donc, posant $\tilde{t}^j = (t_x^j, t_y^j)$ la projection canonique de t dans $(0xy)$:

$$\left(c_y^j + r_{att} \frac{\tilde{t}_y^j}{\|\tilde{t}^j\|_{\mathbb{R}^2}} \right)^2 = \frac{c^2}{4} - \left(c_x^j + r_{att} \frac{\tilde{t}_x^j}{\|\tilde{t}^j\|_{\mathbb{R}^2}} \right)^2 \quad (4.53)$$

qui équivaut à

$$r_{att}^2 + 2 \frac{c_x^j \tilde{t}_x^j + c_y^j \tilde{t}_y^j}{\|\tilde{t}^j\|_{\mathbb{R}^2}^2} r_{att} + \|c_j\|_{\mathbb{R}^2} - \frac{c^2}{4} = 0. \quad (4.54)$$

Nous ne conservons que la solution positive de cette équation du second degré en r_{att} et obtenons :

$$r_{att} = - \frac{c_x^j \tilde{t}_x^j + c_y^j \tilde{t}_y^j}{\|\tilde{t}^j\|_{\mathbb{R}^2}^2} + \sqrt{\frac{(c_x^j \tilde{t}_x^j + c_y^j \tilde{t}_y^j)^2}{\|\tilde{t}^j\|_{\mathbb{R}^2}^2} - \|c_j\|_{\mathbb{R}^2} + \frac{c^2}{4}}. \quad (4.55)$$

Avec une valeur r_{att}^j associée au voxel j , nous pouvons calculer l'intensité de la projection de ce voxel d'après son centre $c_j = (c_x^j, c_y^j, c_z^j)$ avec l'opérateur A_h défini au chapitre 3, que nous rappelons ici :

$$A_h(c_j) = \frac{E_c e^{-\mu r_{att}^j} d_e^2}{4} \frac{\sqrt{((c_x^j)^2 + (c_z^j)^2)}}{((c_x^j)^2 + (s_y - c_y^j)^2 + (c_z^j)^2)^{3/2}} \quad (4.56)$$

avec E_c l'efficacité du détecteur et μ le coefficient d'atténuation, supposé constant à l'intérieur du champ de vue reconstruit. L'opérateur A_h s'exprime plus simplement en fonction de t^j et \tilde{t}^j comme :

$$A_h(c_j) = \frac{E_c e^{-\mu r_{att}^j} d_e^2}{4} \frac{\|\tilde{t}^j\|_{\mathbb{R}^2}}{\|t^j\|_{\mathbb{R}^3}^3}. \quad (4.57)$$

Comme précédemment pour A_τ et A_σ , nous restreignons l'opérateur A_h^ϕ défini au chapitre 3 pour tout ϕ aux seules valeurs angulaires prises par le détecteur. Ainsi, pour tout $m = (m_x, m_y, m_z) \in \Omega(\mathbb{R}^3) = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} < s_y\}$, nous posons :

$$A_h^q(m) = A^h(R_{-\phi} m) \quad (4.58)$$

où Φ est le pas angulaire du détecteur, $\Phi = 2\pi/\tilde{P}$ et R_Φ est la rotation d'angle Φ dans le plan (Oxy) dans le sens de rotation du détecteur.

Pour un voxel j de centre c_j , le remplacement de $A_h^q(c_j)$ par $\hat{A}_h^q(c_j) = A_\sigma(c_j)$ n'est une approximation que pour les couronnes a pour lesquelles le nombre de voxels V_a est de la forme $V_a = \tilde{P}/m$ pour m entier. Nous ne donnons pas ici de majoration précise de l'erreur commise, mais compte tenu de la distance entre c_j et c_j^q , inférieure à la moitié de la taille tangentielle du voxel et de la valeur du coefficient d'atténuation utilisé (on rappelle que $\mu = 0,15 \text{ cm}^{-1}$ dans les tissus mous), l'exponentielle décroissante qui modélise l'atténuation varie peu. Le terme en $\|\tilde{t}^j\|_{\mathbb{R}^2} / \|t^j\|_{\mathbb{R}^3}^3$ ainsi que sa dérivée tendent rapidement vers zéro, si bien que là encore, l'approximation de $A_h^q(c_j)$ par $\hat{A}_h^q(c_j) = A_\sigma(c_j)$ serait insuffisante pour des points c_j pris très proches du trou d'entrée S . Par conséquent, nous renouvelons notre prescription de la proposition 4.4 d'avoir $l_{\min} > d_e + d_r$, où l_{\min} est la distance entre S et le champ de vue reconstruit. Par ailleurs, nous rappelons que, comme pour A_τ et A_σ , le calcul de $A_h^q(c_j)$ par $\hat{A}_h^q(c_j) = A_\sigma(c_j)$ est exact sur les couronnes extérieures pour lesquelles le nombre de voxels prend la forme $V_a = m\tilde{P}$. Pour les couronnes les plus centrales, pour lesquelles le nombre de voxels prend la forme $V_a = \tilde{P}/m$, la condition de distance entre S et ces couronnes est respectée automatiquement.

En conclusion, moyennant des hypothèses relativement modestes, nous voyons que les approximations induites dans les parties centrales du champ de vue par la méthode EAR et la discrétisation adaptée donnent lieu à une erreur faible et devraient nous permettre d'avoir une reconstruction plus rapide, sans être pénalisé par des artefacts de calcul.

Il nous restera néanmoins à détailler l'opération de rééchantillonnage sur une grille cubique au chapitre suivant pour nous assurer que nous ne souffrirons pas, là non plus, d'effets visibles sur l'image reconstruite.

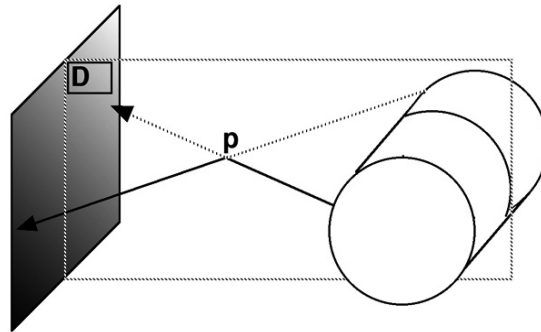


FIG. 4.13 – Géométrie du système mettant en évidence la symétrie avant/arrière de la projection des voxels. Le plan du détecteur est en gris, P est le centre du pinhole et D est le plan de symétrie qui divise le plan du détecteur et le champ de vue cylindrique en deux.

4.1.2 Symétrie Avant/Arrière

La figure 4.13 montre une symétrie de la projection des voxels sur le détecteur : pour chaque position de celui-ci, il existe un plan D passant par le centre du pinhole et orthogonal au plan du détecteur qui coupe le volume à reconstruire en deux ensembles de voxels symétriques. Ce volume peut être choisi aussi bien cubique (comme sur la figure 4.1) que cylindrique (figure 4.13).

L'exploitation de cette symétrie impose quelques conditions simples. La première concerne la disposition des tranches de la discrétisation suivant l'axe (Oz). Que le nombre de tranches soit pair ou impair, le champ de vue reconstruit devrait être symétrique par rapport au plan D , c'est-à-dire que nous devrions avoir le même nombre de tranches de chaque côté de ce plan. La seconde concerne la structure des tranches, celle-ci devant être la même pour deux tranches symétriques. Cette condition est automatiquement remplie par la discrétisation EAR que nous avons décrite puisque nous y avons donné la même structure à toutes les tranches.

Dans ces conditions, chaque voxel pris d'un côté du plan D peut être associé à son voxel symétrique situé de l'autre côté du plan D et pour chaque couple de tels voxels conjugués, leurs projections sont également symétriques. Ainsi, la connaissance de la partie de l'opérateur de projection R qui n'agit que sur la moitié avant ou arrière des voxels est suffisante pour traiter tout le volume, sur des opérations de projection comme de rétroprojection. Ceci a pour effet de réduire d'un facteur 2 aussi bien le stockage de l'opérateur R et de remplacer les calculs de projection et de rétroprojection pour la moitié du volume par un simple calcul d'indices de voxels et pixels conjugués.

4.2 Factorisation de la réponse impulsionnelle

Nous avons décrit la projection des voxels au chapitre 3 en choisissant un modèle gaussien pour lequel nous calculons les paramètres de translation τ , dilatation σ et intensité h . Or seul un changement dans le paramètre de dila-

tation engendre une nouvelle fonction ou, en d'autres termes, si les projections de deux voxels ne diffèrent que par les paramètres τ et h , la même fonction gaussienne précalculée peut être utilisée en la multipliant par un paramètre d'intensité h différent et en la translatant. Cette remarque est importante car elle permet de ramener le calcul de N fonctions de projections où $N = 64^3$, ou parfois $N = 128^3$ au calcul des seules fonctions de projection pour lesquelles le paramètre de dilatation σ est différent. Ce paramètre n'a certes aucune raison d'être identique pour des voxels différents mais nous le ramenons à un nombre de pixels qui représente le diamètre de la fonction de projection. Dès lors, pour engendrer l'ensemble des fonctions de projection, il suffit de les calculer pour tous les diamètres possibles, allant de 1 pixel à un nombre maximal qui dépend de nombreux paramètres (taille des pixels, taille des voxels, résolution intrinsèque du détecteur, diamètre du trou d'entrée du collimateur sténopé...) mais est très limité. Il le serait déjà compte tenu du nombre limité de pixels que nous avons dans une dimension sur le détecteur (64 ou 128) mais la plupart du temps, le diamètre maximal de la projection des voxels est de l'ordre de 10 pixels pour un nombre d'équation M et d'inconnues N de 64^3 et de l'ordre de 20 pixels pour un nombre d'équation M et d'inconnues N de 128^3 . Le calcul de ces différentes fonctions gaussiennes à deux dimensions devient donc négligeable si on les stocke en mémoire. De plus, nous savons que les fonctions gaussiennes à deux dimensions jouissent de la propriété de séparabilité sur laquelle nous reviendrons dans le prochain chapitre.

A partir de ces différents éléments que sont la discrétisation EAR, la symétrie avant/arrière et la factorisation impulsométrique, nous allons donc voir comment mettre en œuvre une méthode de reconstruction tomographique efficace qui exploite l'ensemble de ces économies de calcul.

Chapitre 5

Mise en œuvre de la méthode EAR

Nous avons vu au chapitre précédent que toute méthode de reconstruction basée sur la résolution itérative d'un système donnait lieu au calcul d'un opérateur qui modélise la projection de chaque voxel. Ce calcul peut être largement plus économique en mettant en œuvre les différentes réductions que nous avons décrites : la discrétisation EAR, adaptée à la symétrie de rotation, la symétrie avant/arrière et la factorisation des réponses impulsionnelles. Nous verrons donc dans un premier temps comment effectuer concrètement le calcul de notre opérateur de projection A en tenant compte de ces réductions, puis nous décrirons le déroulement de la résolution itérative du système. Enfin, la dernière phase consistera à décrire une méthode nous permettant de rééchantillonner le volume reconstruit dans la base des voxels EAR dans une nouvelles base, composée de voxels cubiques ou parallélépipédiques.

5.1 L'opérateur de projection

Nous supposons donnée une discrétisation EAR de l'espace nous donnant nos fonctions de bases v_j^{EAR} , $j = 1, \dots, N$. Sauf indication contraire, que nous rencontrerons dans la section concernant le rééchantillonnage du volume sur des voxels cubiques et où nous devons donc faire une distinction entre différents types de voxels, nous désignerons les voxels EAR par v_j , $j = 1, \dots, N$. Ces voxels se projettent sur P différentes positions du détecteur, nous donnant M équations de projections. Chaque position du détecteur nous donne donc $K = M/P$ équations, ce qui représente précisément le nombre de pixels sur le détecteur. Nous avons donc le système à résoudre :

$$A^q x = b^q \text{ pour } q = 0, \dots, P - 1. \quad (5.1)$$

Chaque colonne $A^q_{\cdot j}$ représente la projection du voxel j sur la grille de pixels, c'est-à-dire la proportion des photons émis par le volume correspondant au voxel j qui atteint la surface correspondant aux différents pixels indicés par i à la position q du détecteur. Le modèle de projection que nous avons proposé au chapitre 3 est un modèle gaussien, entièrement déterminé par les paramètres de transla-

tion τ (centre de la gaussienne), de dilatation σ (écart-type de la gaussienne) et d'intensité (proportion de photons émis par le voxel j qui atteint le détecteur). Nous avons donc défini différents opérateurs qui effectuent ces trois calculs pour une position unique du détecteur que nous choisissons arbitrairement, pour fixer les idées, « au-dessus » du champ de vue. Plus précisément, le champ de vue étant cylindrique de hauteur et diamètre c , centré à l'origine, la hauteur étant l'axe (Oz), le trou d'entrée S^q du collimateur est dans le plan (Oxy). A la position $q = 0$ pour laquelle nous voulons calculer l'opérateur de projection, les coordonnées de S^0 sont $(0, S_y^0)$ et le détecteur se trouve dans le plan $y = y_0$.

Pour chaque voxel v_j de centre c_j , nous calculons $\tau_j = A_\tau(c_j)$, qui est converti en l'indice du pixel qui contient $A_\tau(c_j)$. Nous calculons ensuite $d_{pg}^j = A_\sigma(c_j)$ que nous convertissons d'abord en diamètre de la projection $d_p^j = d_{pg}^j + g$ en rajoutant la constante g de la résolution intrinsèque du détecteur suivant l'équation (3.14), puis en écart-type, exprimé en nombre de pixels dont la longueur est d_p . On obtient : $\sigma_j = [d_p^j/4d_p]$ d'après la remarque 3.1, où $[x]$ est l'arrondi de x à l'entier le plus proche. Enfin nous calculons $h_j = A_h(c_j)$, le paramètre d'intensité, qui inclut le calcul de la distance d'atténuation r_{att}^j . Nous obtenons ainsi les trois paramètres relatifs à notre gaussienne (voir figure 5.1).

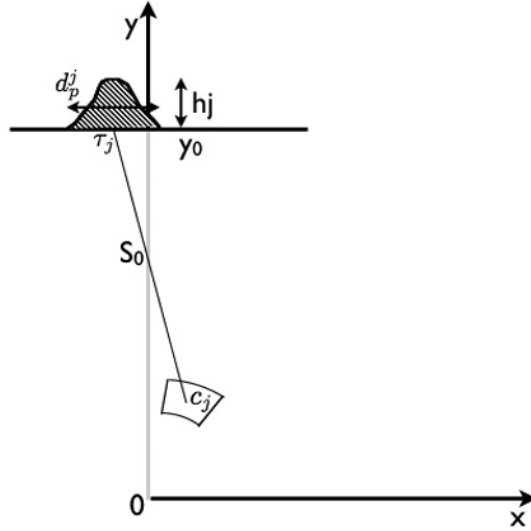


FIG. 5.1 – Interprétation des trois paramètres calculés pour déterminer la projection d'un voxel de centre c_j à travers un trou centré en S_0 sur un plan $y = y_0$.

Nous avons donc, dans un premier temps, associé au voxel v_j un triplet (τ_j, σ_j, h_j) dont les composantes sont respectivement de type `int`, `short int` et `float`. Notons $\sigma_{\max} = \max_j(\sigma_j)$. Nous précalculons alors la base des fonctions de projection possibles, c'est-à-dire les fonctions :

$$R_\sigma(x, y) = \begin{cases} \frac{h_j}{\sigma_j \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma_j^2}} & \text{si } \sqrt{x^2 + y^2} \leq 2\sigma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La projection du voxel v_j s'obtient donc comme :

$$A(v_j) = h_j R_{\sigma_j}(x_i, y_i) * \delta\tau_j \quad (5.2)$$

où le points (x_i, y_i) est le centre du pixel b_i . La convolution $R_{\sigma_j}(x_i, y_i) * \delta\tau_j$ est donc une convolution discrète entre la fonction R , évaluée sur les centres des pixels et la masse de Dirac associée au pixel central de la projection du voxel v_j .

REMARQUE 5.1 *Les gaussiennes bidimensionnelles possèdent l'intéressante propriété de séparabilité : la convolution avec une gaussienne bidimensionnelle peut être remplacée par deux convolution perpendiculaires avec des gaussiennes à une dimension. Néanmoins, il est plus avantageux de précalculer des masques gaussiens à deux dimensions de taille n^2 qui nous permettent de ne faire que n^2 multiplications plutôt que de précalculer des masques de taille n , qui nous feraient calculer une convolution à une dimension dans un sens, soit n multiplications, puis dans l'autre sens, soit n^2 multiplications (au total : $n + n^2$ multiplications). Ce choix est justifié par le très petit nombre de masques que nous avons à précalculer.*

Lorsque le détecteur tourne, la projection s'obtient en associant au voxel v_j un triplet qui a déjà été calculé pour la position $q = 0$ pour un autre voxel, situé sur la même couronne a de la discrétisation EAR. A cet effet, nous utilisons la permutation η_a^q de la définition 4.1. Nous obtenons :

$$A^q(v_j) = A \circ \eta_a^q(v_j) \quad (5.3)$$

Dès lors, avec un volume x exprimé dans la base des voxels v_j comme

$$x = \sum_{j=1}^{N^3} x_j \cdot v_j \quad (5.4)$$

où $x_j \geq 0$ pour tout $j = 1 \dots N^3$, la projection de ce volume se calcule comme :

$$A^q x = \sum_{j=1}^{N^3} x_j A^q v_j \quad (5.5)$$

5.2 Résolution du système linéaire dans la base des voxels EAR

L'opérateur A nous permet de calculer la projection d'un volume, exprimé dans la base des voxels EAR, pour toute position du détecteur. Cette opération de projection est nécessaire dans toute méthode itérative, pour comparer la projection mesurée avec une projection estimée du volume courant x^k . De manière générale, le fonctionnement des méthodes itératives se fait suivant le schéma suivant :

La comparaison entre la projection mesurée et celle du volume courant $x^{(k)}$ se fait soit de manière additive, soit de manière soustractive et la matrice C

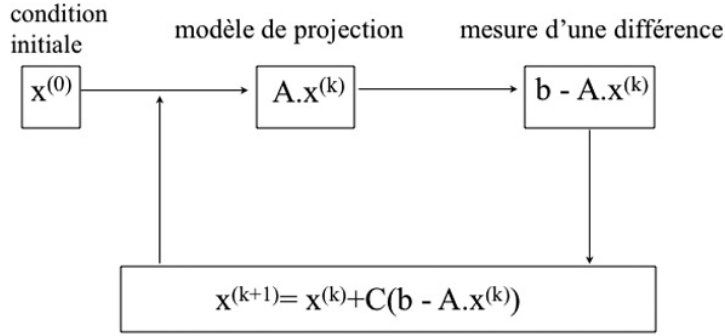


FIG. 5.2 – Schéma général des méthodes de résolution itératives. Après le choix d'une condition initiale x^0 , la différence entre l'image de projection mesurée b et estimée $Ax^{(k)}$ est calculée puis rétroprojetée dans le volume avec une matrice C .

est calculée à partir de la matrice transposée de A . Nous renvoyons à la section 2.3.1 pour un éventail des algorithmes communément utilisés en reconstruction tomographique.

Nous avons essentiellement travaillé avec une version par blocs de l'algorithme SART dont nous rappelons l'itération de l'équation (2.21) :

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}} \sum_{i=1}^M \frac{b_i - (Ax^k)_i}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}} A_{i,j} \quad (5.6)$$

Pour la version par blocs, nous avons toujours utilisé des blocs constitués d'une image de projection. Pour une image de projection correspondant à la $q^{\text{ème}}$ position du détecteur, la matrice de projection est notée A^q et les pixels sont notés b_i , $i = i_1^q, \dots, i_K^q$ où $K = M/P$ est le nombre de pixels dans une image. Dès lors, l'itération SART devient :

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=i_1^q}^{i_K^q} A_{i,j}^q} \sum_{i=i_1^q}^{i_K^q} \frac{b_i - (A^q x^k)_i}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}^q} A_{i,j}^q \quad (5.7)$$

pour q variant cycliquement de 0 à $P - 1$.

Les quantités $\sum_{i=1}^M A_{i,j}^q$ et $\sum_{j=1}^N A_{i,j}^q$ sont précalculées et bénéficient également de l'exploitation de la symétrie de rotation. La première n'est rien d'autre que la quantité h_j^q que nous utilisons déjà pour le calcul de l'opérateur de projection A . La seconde est précalculée sous la forme d'un tableau y_i^0 de taille K puisque cette quantité doit être connue pour chaque pixel d'une image. Une fois le tableau y_i^0 calculé, les autres tableaux y_i^q pour $q = 1, \dots, P - 1$ sont tous égaux à y_i^0 par symétrie. Nous stockons donc un tableau de K nombres de type `float`. Géométriquement, la quantité $\sum_{j=1}^N A_{i,j}^q$ s'interprète comme le volume du cône de rétroprojection, intersecté avec le champ de vue à reconstruire. La possibilité d'appliquer une symétrie de rotation au cours de ce calcul provient donc du fait que le champ de vue est cylindrique et que le modèle d'atténuation est uniforme dans ce champ de vue (voir figure 5.3).

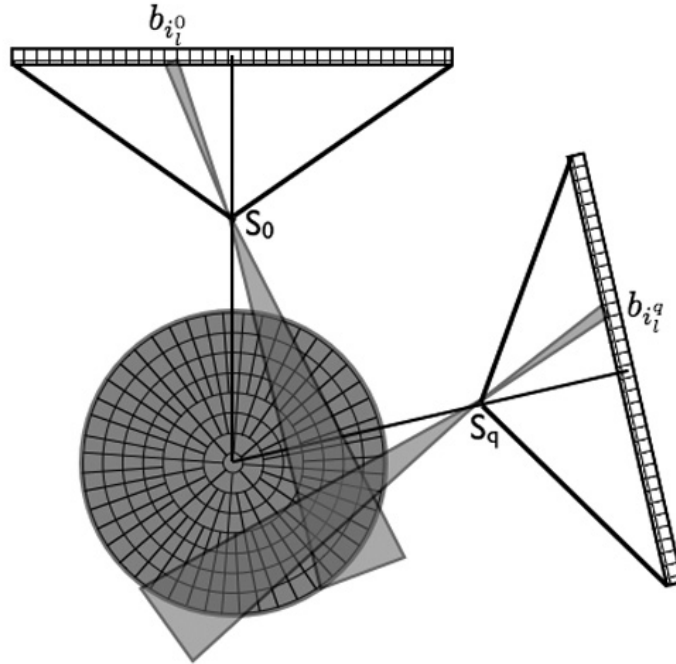


FIG. 5.3 – Pour un pixel b_i , la quantité $\sum_{j=1}^N A_{i,j}^q$ s'interprète géométriquement comme le volume de l'intersection du cône de rétroprojection (en gris clair) avec le champ de vue (en gris foncé). Par symétrie du champ de vue et du modèle d'atténuation, cette quantité est invariante pour un même pixel pris à des positions q différentes.

5.3 Rééchantillonnage sur une grille cubique

La discrétisation qui permet l'exploitation de la symétrie de rotation demande un rééchantillonnage sur une grille cubique pour que le volume puisse être visualisé et éventuellement plus facilement post-traité. Ce problème est en fait réduit à deux dimensions puisque le découpage du volume en tranches régulières suivant l'axe $(0z)$ apparaît déjà dans la discrétisation de la méthode EAR. Il s'agit donc de convertir le volume tranche par tranche, opération pour laquelle nous avons opté pour une approche matricielle : une matrice de conversion C est calculée analytiquement, le coefficient $C_{p,q}$ représentant la fraction du voxel EAR q recouverte par le voxel cubique p (voir figure 5.4).

Ce calcul ne présente pas de difficulté particulière dans la mesure où les coordonnées précises des deux types de voxels nous sont connues et leurs formes sont simples, mais il convient de remarquer, pour cette étape du calcul, que la matrice C a une structure extrêmement creuse (un voxel EAR q ne peut être recouvert que par un nombre très limité de voxels cubiques) et qu'il est donc inutile de calculer le recouvrement en dehors d'un périmètre relativement restreint (de l'ordre de deux fois le diamètre du voxel) centré sur le voxel EAR.

Dans le plan $(0xy)$, le coefficient $C_{p,q}$ est donc obtenu comme l'intersection d'un carré $v_p^c = \{(x, y) \mid x_1 \leq x \leq x_2 \text{ et } y_1 \leq y \leq y_2\}$ avec un voxel de la

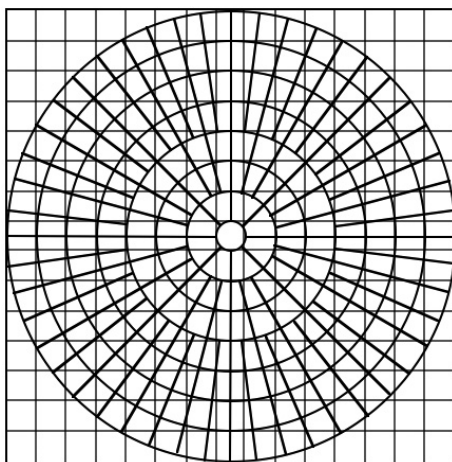


FIG. 5.4 – Superposition d’une discrétisation cubique sur une tranche de la discrétisation EAR.

discrétisation EAR v_{EAR}^q . Nous détaillons le calcul dans le cas où le voxel q est pris dans le quart du plan tel que $x \geq 0$ et $y \geq 0$. Le voxel q , qui appartient à une couronne a , est la surface comprise entre deux arcs de cercle concentriques de rayons respectifs $r_1 < r_2$ et deux droites vectorielles d’équations respectives $a_1x = \tan(\alpha_1)x$ et $a_2x = \tan(\alpha_2)x$, où l’angle $(\alpha_2 - \alpha_1)$ est égal à $2\pi/V_a$ où V_a est le nombre de voxels sur la couronne a (voir figure 5.5).

L’intersection entre les deux droites vectorielles et les deux arcs de cercle donne lieu à quatre points distincts q_1, q_2, q_3, q_4 , rangés par abscisse croissante. En fonction de l’inclinaison du voxel q , le calcul du recouvrement entre le voxel cubique p et le voxel EAR q se décompose des deux manières (a) et (b) indiquées sur la figure 5.6. Nous ne détaillons que le cas (a), obtenant :

$$\begin{aligned}
C_{p,q} &= \int_{q_1}^{q_2} \min(y_2, a_2x) - \max(y_1, \sqrt{r_1^2 - x^2}) dx \\
&+ \int_{q_2}^{q_3} \min(y_2, \sqrt{r_2^2 - x^2}) - \max(y_1, \sqrt{r_1^2 - x^2}) dx \\
&+ \int_{q_3}^{q_4} \min(y_2, \sqrt{r_2^2 - x^2}) - \max(y_1, a_1x) dx \quad (5.8)
\end{aligned}$$

Ce calcul est effectué de manière approchée par une somme discrète, l’intervalle $[q_1, q_4]$ étant divisé en 20 sous-intervalles de même longueur. L’algorithme qui réalise ce calcul prend donc la forme suivante :

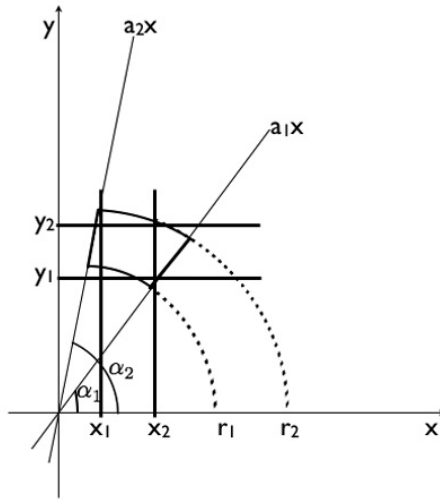


FIG. 5.5 – Recouvrement d'un voxel de la discrétisation EAR par un voxel cubique.

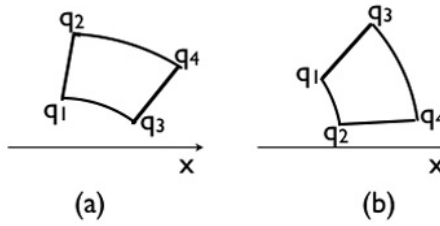


FIG. 5.6 – Ordre des points q_1, q_2, q_3, q_4 par abscisse croissante en fonction de l'inclinaison du voxel de la discrétisation EAR.

ALGORITHME 5.1 (Rééchantillonnage de la discrétisation EAR)

Pour chaque voxel q de centre c_q de la discrétisation EAR (sur une seule tranche)

Ordonner les points q_1, q_2, q_3, q_4

Pour chaque voxel cubique p de centre c'_p et de longueur d'arête d_c

Si $\|c_q - c'_p\| < d_r + d_c$

Calculer $C_{p,q}$ par la formule 5.8 discrétisée.

Le volume exprimé dans la base des voxels cubiques est obtenu en appliquant la matrice $(C)_{p,q}$ à chaque tranche du volume exprimé dans la base des voxels EAR.

5.4 Organisation du programme

Nous avons à présent tous les éléments qui nous permettront de réaliser la reconstruction tomographique de la distribution d'activité à partir de ses projections. Le programme s'organise selon le schéma suivant :

Schéma du programme

Calculer la discrétisation EAR

Pour chaque voxel v_j , calculer (τ_j, σ_j, h_j)

Pour tous les paramètres $\sigma \leq \sigma_{\max}$, calculer la gaussienne tronquée discrète $R_\sigma(b_i)$

Pour chaque pixel b_i , calculer la quantité $s_i = \sum_{j=1}^N A_{i,j}^q$

Initialiser la solution $x^0 = 0$

Boucle sur les projections q (cyclique) et sur les itérations k pour un nombre d'itérations donné

Calculer le nouvel opérateur de projection, i.e. le nouveau triplet $(\tau_j^q, \sigma_j^q, h_j^q)$ par permutation sur les indices j

*Calculer la projection q du volume : $p^{(k)} = \sum_{j=1}^N x_j^{(k)} h_j^q R_{\sigma_j^q}(x_i, y_i) * \delta_{\tau_j^q}$*

Calculer la différence entre projection acquise et estimée $d^{(k)} = b^q - p^{(k)}$

Mettre à jour le volume (algorithme SART) :

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + \frac{\lambda_k}{h_j^q} \sum_{i=i_1^q}^{i_K^q} \frac{d_i^{(k)}}{s_i} A_{i,j}^q$$

Rééchantillonnage sur une grille carrée

Chapitre 6

Résultats et performances

Dans ce chapitre, nous vérifions que les nouveautés ou différences induites par la méthode EAR par rapport aux implémentations classiques de méthodes algébriques en imagerie TEMP n'occasionnent pas d'artefacts sur l'image reconstruite. Nous illustrons en particulier les résultats du chapitre 4 relatifs à l'erreur commise lors du calcul d'un opérateur de projection par permutation des colonnes d'un opérateur déjà calculé (propositions 4.3, 4.4) par différents exemples montrant cette fois par la pratique que la discrétisation adaptée à la symétrie de rotation ne donne pas lieu à des problèmes visibles. Pour ce faire, nous abordons pour le moment deux types d'applications. En premier lieu, des fantômes informatiques nous démontreront que l'erreur purement numérique est faible et que notre implémentation de l'algorithme SART converge bien vers une solution proche de l'objet avec lequel nous avons simulé les projections, y compris en présence de bruit rajouté sur les projections.

Le deuxième type d'exemples permet de vérifier l'adéquation de notre modélisation avec le dispositif physique d'acquisition des projections en reconstruisant des objets physiques simples. Nous vérifierons également ce que nous avons dit au chapitre 3 sur les conditions d'acquisition. Parmi les paramètres sur lesquels l'expérimentateur peut jouer comme le rayon de rotation, le diamètre du trou d'entrée du collimateur sténopé mais aussi l'activité, tous sont importants pour obtenir le meilleur résultat, notamment en termes de résolution spatiale.

Les résultats *in vivo* sont présentés au chapitre 9 car beaucoup d'entre eux ont été produits à partir des résultats développés au cours de la troisième partie du présent travail.

Mais pour aborder les difficultés dans l'ordre, nous commençons par des résultats sur fantômes informatiques.

6.1 Fantôme informatique

Ce type d'expérimentations ne permet évidemment pas de s'assurer que la modélisation du problème est correcte. Pour une distribution simulée de l'activité, où nous nous donnons donc les valeurs des voxels de $x = \sum_{j=1}^N x_j v_j$ dans la base de voxels EAR v_j , nous simulons les projections en appliquant l'opérateur de projection A . Nous obtenons ainsi des images de projections composées de pixels b_i à partir desquels nous cherchons à retrouver x à partir du problème

inverse $Ax = b$. L'opérateur A étant bien entendu le même dans la phase de reconstruction que celui qui nous a servi à obtenir les projections b , nous nous plaçons dans un cas idéalisé, mais néanmoins intéressant pour obtenir la confirmation que la méthode numérique marche dans son ensemble.

Un objet composé de trois petits cylindres proches les uns des autres et d'un plus gros cylindre séparé a été reconstruit pour trois diamètres simulés d'ouvertures du collimateur sténopé différents, respectivement 2,5 mm, 1,5 mm et 0,025 mm, sans fond d'activité. Le rayon de rotation était fixé à 30 mm et le champ de vue reconstruit, de 64 tranches et 33 anneaux concentriques correspondait à un cylindre de 45 mm de hauteur et de diamètre. Les plus petits cylindres mesuraient 1,4 mm de diamètre, séparés par 2,1 mm tandis que le plus gros cylindre avait un diamètre de 6 mm. Ayant fixé le nombre d'itérations à trois, une itération étant le traitement de l'ensemble des équations de projections, nous voyons que l'objet reconstruit est plus proche de l'objet original à mesure que la taille du trou diminue. Dans ces circonstances en effet, les réponses impulsionnelles sont plus fines et ne demandent que peu d'itérations pour recouvrir l'objet, l'opération de déconvolution étant alors de moindre importance (voir figure 6.1).

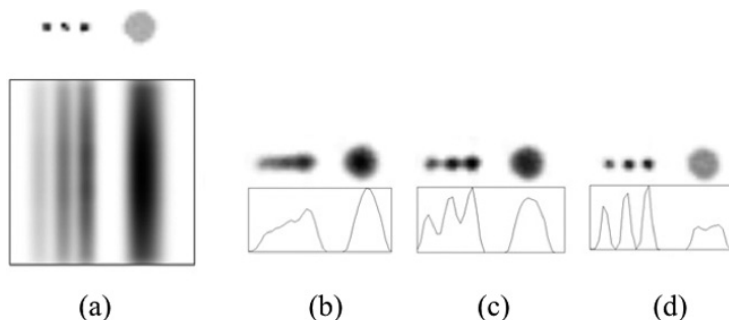


FIG. 6.1 – Fantôme informatique constitué de trois barres fines et rapprochées et d'un cylindre homogène vues en coupe (a, en haut). Les projections de cet objet (a, en bas) sont obtenues par l'application de l'opérateur A pour trois diamètres différents du trou d'entrée du collimateur : 2,5 mm, 1,5 mm et 0,025 mm, avec des réponses impulsionnelles plus ou moins larges. Dans chaque cas, 48 projections ont été calculées et nous montrons celles obtenues pour un diamètre de 1,5 mm, pour un plan de détection situé « au-dessus » de l'objet (a, en bas). Les reconstructions obtenues pour 2,5 mm (b), 1,5 mm (c) et 0,025 mm (d) pour un même nombre d'itérations fixé à trois démontrent que l'objet est bien reconstruit dans tous les cas, mais avec un meilleur niveau de détail lorsque les réponses impulsionnelles sont moins larges (d). Les profils, sous les reconstructions permettent d'évaluer dans quelle mesure les petites barres peuvent être séparées sur l'image reconstruite.

Une chose importante est que nous ne relevons pas de traces de présence d'artefacts circulaires, qui trahiraient une inadéquation due à la méthode EAR, exploitant la symétrie de rotation. Cette remarque est également illustrée par l'exemple suivant, qui par ailleurs permet d'évaluer le rendu d'un objet parfaitement homogène : un cylindre homogène remplissant le champ de vue reconstruit

est projeté avec l'opérateur A (48 projections sur 180° pour un diamètre du trou d'entrée de 1,5 mm) avant d'être reconstruit (voir figure 6.2). Cet objet est le pendant informatique d'un objet physique largement utilisé pour la calibration des gamma-caméras, pour évaluer le rendu de l'homogénéité du dispositif.



FIG. 6.2 – Fantôme informatique constitué d'un cylindre homogène. La reconstruction montrée ici est calculée à partir de 48 projections acquises sur un arc de 180° et un diamètre d'ouverture du collimateur de 1,5 mm et démontre que la méthode EAR n'affecte pas le rendu de l'homogénéité.

Le dernier exemple que nous montrons reprend le premier fantôme, dans le cas de 48 projections sur 180° et un diamètre du trou d'entrée de 1,5 mm. Mais cette fois, les projections ont été dégradées par l'ajout d'un bruit blanc gaussien dont l'écart-type s'élève à 7% du maximum d'intensité sur les projections sans bruit. Ceci nous permet de nous placer dans des conditions plus réalistes puisque la technique de la TEMP conduit dans son utilisation, à l'obtention d'images dégradées par du bruit. Mathématiquement, un tel exemple est intéressant parce qu'il nous fait quitter à coup sûr le domaine des problèmes *bien posés*. En d'autres termes, la résolution du problème inverse $Ax = b$ où b est bruité n'admet certainement pas de solution. Dans ce cas, l'utilisation d'un algorithme *simultané* tel que SART permet de converger vers une solution approchée qui minimise la différence $\|Ax - b\|$ au sens des moindres carrés. Nous rappelons néanmoins que nous avons programmé cet algorithme non pas dans sa version totalement simultanée, mais par blocs, chaque bloc étant constitué des équations données par une seule projection. Dans ce cas-là, l'article *Convergence Studies on Iterative Algorithms for Image Reconstruction* de Jiang et Wang [36] donne une synthèse intéressante des résultats des principaux auteurs sur le sujet, en rappelant que chaque bloc d'équations aboutit à sa propre limite. Dès lors, nous avons une convergence cyclique avec P différentes limites, correspondant à autant de projections et la limite x^q , $x \in \mathbb{R}^N$, où N est le nombre de voxels, correspond à la solution qui minimise l'écart $A^q x - b^q$ pour la projection q . L'ensemble de ces limites est appelé le *cycle limite* et nous avons essentiellement le choix entre deux possibilités pour traiter ce problème : soit les différents points x^q sont proches les uns des autres et n'importe quel x^q peut alors être considéré comme limite, cette fois pour l'ensemble des équations de projection, soit le paramètre de relaxation $\lambda^{(k)}$ associé à chaque itération devrait vérifier la condition :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{(k)} \rightarrow 0 \quad (6.1)$$

Les détails, ainsi que des conditions annexes peuvent être trouvés dans [36], [13], [66], [67] et [14] par exemple, surtout pour l'algorithme ART, mais nous n'avons pas fait varier le paramètre de relaxation, le laissant à sa valeur 1 pour toutes

nos reconstructions, celles-ci ne semblant pas être affectées par un cycle limite très disparate.

Les résultats, sensiblement moins bons que dans le cas idéal, démontrent néanmoins que l'on converge vers une solution approchée de l'objet initial (voir figure 6.3).

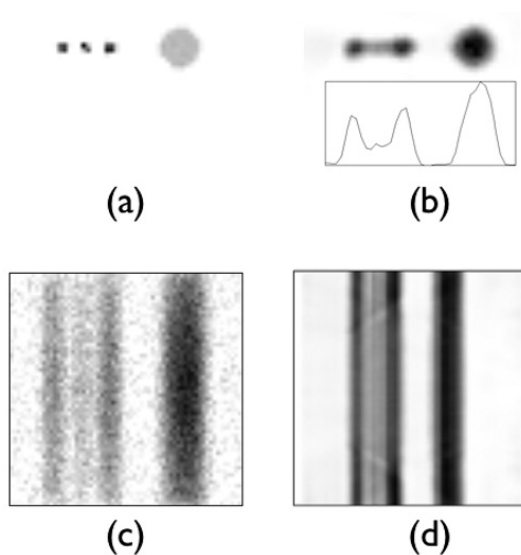


FIG. 6.3 – Fantôme informatique identique à celui de la figure 6.1, vu en coupe (a). La reconstruction vue en coupe (b) est calculée à partir de 48 projections acquises sur 180° et un diamètre du trou d'entrée de 1,5 mm, dégradées par un bruit blanc gaussien dont l'écart-type s'élève à 7% du maximum d'intensité sur les projections sans bruit (c). Le volume reconstruit est également montré suivant une coupe longitudinale (d).

6.2 Fantôme physique

L'étape suivante consiste à se donner la confirmation qu'outre les aspects numériques, la modélisation physique du dispositif est suffisamment bonne pour nous permettre de reconstruire des objets dont les projections ont été acquises sur la gamma-caméra, à partir d'un fantôme physique. Compte tenu de la technique d'imagerie utilisée, toute mise en image d'un objet demande une certaine adaptation de celui-ci à l'utilisation d'un traceur liquide. L'objet est donc nécessairement composé de cavités ou de cathéters qui permettent un remplissage. Ceci impose des contraintes non négligeables sur la conception des fantômes, qui rendent très délicate la mesure de la résolution en dessous du millimètre. Ainsi, des cavités de diamètre infra-millimétrique percées dans un objet en plexiglas sont difficiles à usiner, tandis que dans le cas où l'on utilise des cathéters, même de diamètre intérieur de l'ordre du demi-millimètre, le diamètre extérieur est alors d'environ un millimètre. Nous montrons les deux types de fantômes, cavitaire et composé d'un faisceau de cathéters, ainsi que les

particularités du dispositif qu'ils permettent de mettre en évidence.

6.2.1 Fantôme en plexiglas

Un cylindre en plexiglas de 45 mm de diamètre et 40 mm de hauteur a été percé de trois séries de trous alignés de diamètres respectifs 1 mm, 1,5 mm et 2 mm. Les cavités d'un diamètre donné sont séparés par une distance égale au diamètre en question (voir figure 6.4). La préparation du fantôme consiste à le remplir d'un traceur technécisé, en évitant la formation de microbulles qui dégraderaient le résultat en matière d'homogénéité.

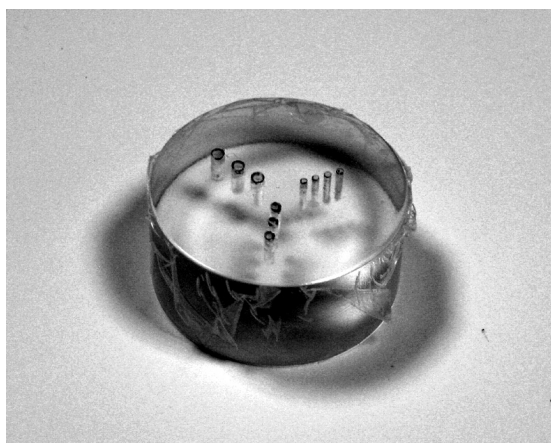


FIG. 6.4 – Photo du fantôme composé d'un cylindre de plexiglas percé de cavités.

Au cours de l'acquisition, 48 projections ont été enregistrées sur un arc de 180° et un diamètre du trou d'entrée du collimateur sténopé de 1,5 mm. Le rayon de rotation était de 40 mm, assurant un grossissement $\times 3$ au centre de l'objet. Toutes les reconstructions ont été effectuées avec un champ de vue cylindrique de 50 mm (diamètre et hauteur).

Les résultats obtenus dans un premier temps nous ont convaincu de la nécessité de corriger les défauts de la rotation du détecteur. Les résultats de la figure 6.5 (a) montrent en effet que des formes circulaires ont un rendu en « queue de comète » caractéristique de ce défaut (voir à ce sujet l'exposé de McBride disponible en ligne [46] et notamment les diapositives 13-17). C'est ainsi que nous avons mis au point la correction détaillée à la fin du chapitre 3, dont l'application nous permet d'obtenir un résultat plus conforme à nos attentes (figure 6.5 (b)).

Par la suite, nous avons reconstruit l'objet avec la méthode EAR et l'algorithme SART, en variant le nombre d'itérations. Nous avons alors pu confirmer ce qui a été remarqué par tous les utilisateurs de méthodes itératives, à savoir qu'en multipliant le nombre d'itérations, les hautes fréquences étaient reconstruites. Ainsi, une seule itération SART ne nous permet de voir que les détails les plus grossiers de l'image (figure 6.6 a). En montant le nombre d'itérations à dix, certains détails apparaissent et il devient notamment possible de séparer les trois cavités les plus grandes (figure 6.6 b). Après 30 itérations, toutes les

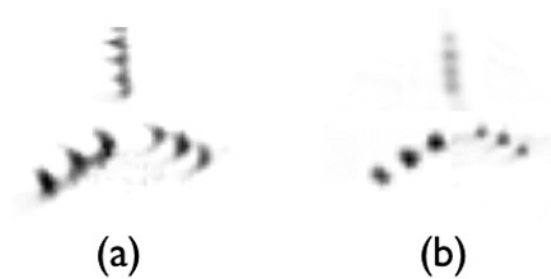


FIG. 6.5 – Résultats obtenus sur le fantôme en plexiglas après reconstruction tomographique. Une coupe est montrée pour une reconstruction avec l’algorithme SART (30 itérations) sans correction du rayon de rotation (a) et avec correction du rayon de rotation (b). Nous avons par la suite appliqué systématiquement cette correction.

cavités peuvent être séparées (figure 6.6 c) et l’on obtient un résultat sensiblement meilleur qu’avec la méthode de Feldkamp, Davis et Kreiss (FDK) [23] programmée par Virginie Pacorel [54](figure 6.6 d), tant pour la séparation des cavités sur l’image que pour l’aspect de l’image, globalement moins entaché d’artefacts. Nous avons pour cela fait varier le paramètre de fréquence de coupe propre à l’algorithme FDK de manière à choisir le meilleur rendu en terme de résolution spatiale.

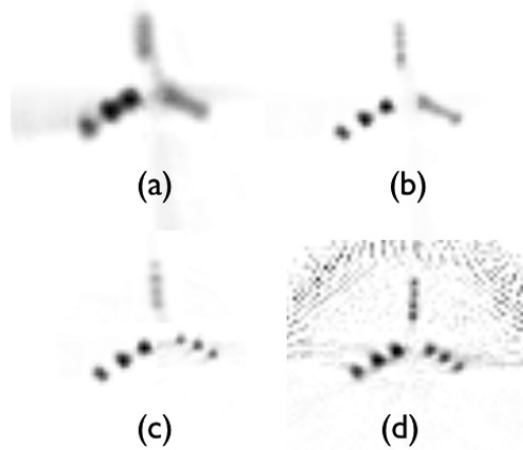


FIG. 6.6 – Même coupe de la reconstruction tomographique du fantôme en plexiglas, obtenue par la méthode EAR et l’algorithme SART avec 1 itération (a), 10 itérations (b) et 30 itérations (c). La même coupe est également montrée pour une reconstruction obtenue avec la méthode FDK (d).

6.2.2 Fantôme faisceau

Nous avons pu reconstruire les plus petits détails du fantôme en plexiglas et avons donc cherché à créer un fantôme plus fin. Pour cela, nous avons utilisé une plaquette de bakélite pour tendre un faisceau de quatre cathéters (diamètre intérieur de 0,58 mm, diamètre extérieur de 0,96 mm) dont la distance bord-à-bord décroît linéairement sur 40 mm, la distance maximale étant de 1,5 mm (voir figure 6.7). La largeur du fantôme est de 24 mm et nous avons rempli les cathéters avec 0,15 mL d'une solution aqueuse contenant 70 MBq de $[^{99m}\text{Tc}]\text{-TcO}_4^-$. Nous avons acquis 48 projections sur 180° , avec 30 mm de rayon de rotation, un diamètre du trou d'entrée du collimateur sténopé de 1,5 mm et 1 minute par projection.

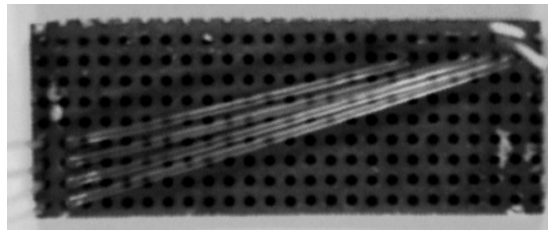


FIG. 6.7 – Fantôme composé d'un faisceau de cathéter fixé sur une plaquette de bakélite.

Les résultats montrés sur la figure 6.8 ont été obtenus avec la méthode EAR et l'algorithme SART respectivement pour 1 itération (a), 3 itérations (b) et 10 itérations (c), tandis que la coupe (d) provient d'une reconstruction réalisée avec la méthode FDK. Sur cette coupe, l'écart minimal entre deux cathéters est de 0,7 mm soit une distance entre sources de 1,08 mm. Tout comme pour le premier fantôme, ceci nous donne une indication de la résolution spatiale tomographique obtenue, de l'ordre du millimètre.

Pour nous rapprocher des conditions d'acquisitions qui sont celles de l'imagerie du petit animal, le fantôme a ensuite été plongé dans un bain contenant une concentration inférieure de $[^{99m}\text{Tc}]\text{-TcO}_4^-$ (40 MBq dans 12 mL), simulant ainsi une activité de fond. Nous avons acquis 60 projections sur 180° , avec 42 mm de rayon de rotation, un diamètre du trou d'entrée du collimateur sténopé de 1,5 mm et 1 minute par projection. Nous n'avons pas simulé d'atténuation ici car la hauteur de liquide permettait juste d'immerger le fantôme.

Les coupes transaxiales du volume reconstruit (champ de vue de 45 mm et 64 tranches dans la discrétisation cylindrique EAR) sont montrées sur la figure 6.9 pour une distance minimale entre sources de 1,48 mm. Avec la méthode EAR et l'algorithme SART, 3 itérations (a) puis 10 itérations (b) ont été calculées. Sur la figure (c), 3 itérations ont été calculées avec l'algorithme SART mais cette fois sur une grille de voxels cubiques, obtenant un résultat comparable à celui de la figure (a). Enfin sur la figure (d), le volume a été reconstruit par la méthode FDK. Les profils nous permettent de constater que les images (a), (c) et (d) sont proches en terme de séparation des sources. Les 10 itérations calculées sur la figure (b) permettent par contre d'accentuer un peu le contraste entre les pics et les creux. La résolution est donc quelque peu améliorée par la méthode

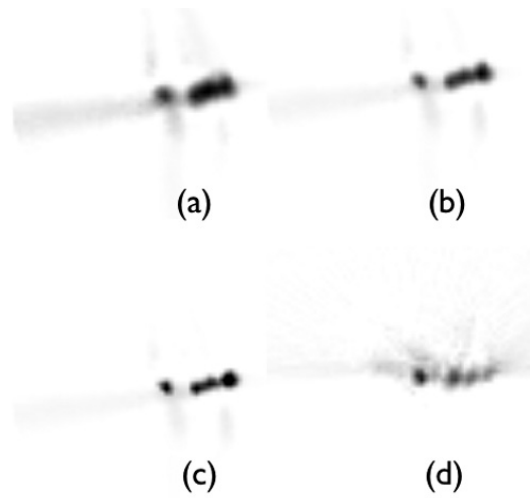


FIG. 6.8 – Coupe de la reconstruction tomographique du fantôme à partir d’une itération de la méthode EAR-SART (a), 3 itérations EAR-SART (b), 10 itérations EAR-SART (c) et la méthode FDK (d).

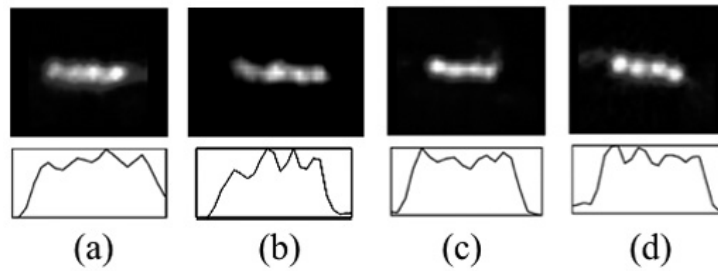


FIG. 6.9 – Fantôme composé d’un faisceau de cathéter fixé sur une plaquette de bakélite.

itérative, comparée aux images planaires ou à la reconstruction FDK, dès lors que suffisamment d’itérations ont été calculées.

Utilisation du fantôme faisceau pour l’estimation de la résolution spatiale tomographique

Nous avons également essayé de définir un peu plus précisément notre résolution spatiale tomographique par la largeur à mi-hauteur de la réponse impulsionnelle reconstruite. Pour cela, nous avons réalisé 12 mesures de largeur à mi-hauteur (LMH) sur les images reconstruites des cathéters, lorsque le fantôme était plongé dans le bain d’activité pour simuler un bruit de fond. En moyenne, la LMH était de 1,58 mm, alors que nous savons que le diamètre de la source était de 0,58 mm. Nous avons donc injecté des gaussiennes de LMH différentes jusqu’à obtenir le profil mesuré de 1,58 mm comme une convolution entre le profil théorique de 0,58 mm et une fonction gaussienne, résolvant ainsi empiriquement la résolution spatiale.

riquement une équation de convolution. La gaussienne obtenue a une LMH de 1,04 mm, qui est ce que nous pouvons considérer comme la résolution spatiale tomographique pour ces conditions d'acquisitions (voir figure 6.10). Cette notion est évidemment relative puisqu'elle dépend non seulement du rayon de rotation du dispositif (ici 42 mm) mais aussi de la place de l'objet considéré pour sa mesure dans le champ de vue.

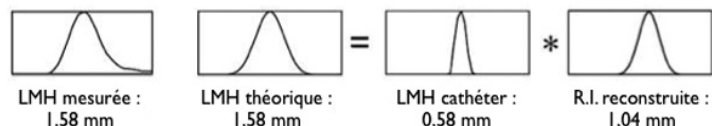


FIG. 6.10 – A partir de la LMH moyenne mesurée de 1,58 mm, la LMH d'une gaussienne de 1,58 mm est bien approximée par une gaussienne de LMH égale à 0,58 mm représentant le diamètre intérieur du cathéter convoluée avec une réponse impulsionnelle tomographique de 1,04 mm qui représente notre résolution spatiale tomographique.

6.2.3 Fantôme d'homogénéité

Nous avons refait physiquement l'expérience consistant à nous assurer de l'homogénéité d'une large source homogène que nous avons mentionnée dans les exemples obtenus à partir de fantômes informatiques. Une source homogène composée d'un tube de 20 mm de diamètre, rempli d'un traceur technécium (580 MBq de $[^{99m}\text{Tc}]\text{-TcO}_4^-$ dans 10 mL) a donné lieu à 48 projections sur 180° avec un trou d'entrée du collimateur de 1,5 mm et un rayon de rotation de 32 mm. La reconstruction par la méthode EAR avec l'algorithme SART (3 itérations) donne un rendu homogène à 10% près ce qui est dans la norme des images produites en médecine nucléaire.

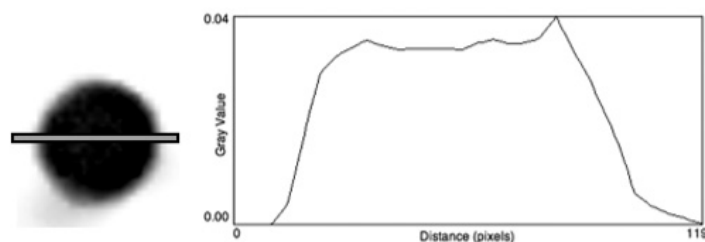


FIG. 6.11 – Fantôme d'homogénéité composé d'un tube cylindrique rempli de traceur : reconstruction EAR-SART vue en coupe transverse (gauche) et profil correspondant au diamètre marqué en gris clair (droite).

6.2.4 Quantification

La question de quantification absolue du traceur a déjà été abordée au chapitre 3 dans le paragraphe 3.5.2 concernant la détermination de l'efficacité de la gamma-caméra. L'objet de cette expérience est de réaliser une nouvelle acquisition sur un fantôme, considéré ici uniquement comme une source ayant une certaine activité et de vérifier que le paramètre d'efficacité $E_c = 0,625$ qui avait été estimé permet l'estimation correcte de l'activité dans notre fantôme. En réutilisant le fantôme d'homogénéité, l'activité globale reconstruite était de 495 MBq, soit une légère sous-estimation de l'activité mesurée juste au moment de la préparation du fantôme (580 MBq). Néanmoins, il faut encore relativiser cet écart par le temps qui s'est écoulé entre la mesure de l'activité et le début de l'acquisition, soit environ une demi-heure ou encore $1/12^{\text{ème}}$ de la demi-vie du traceur. En corrigeant cela, c'est-à-dire en multipliant 495 par $\exp(\ln(2)/12)$, on obtient une activité reconstruite de 524 MBq, soit une erreur inférieure à 10%.

6.3 Temps de calcul et estimation du gain

L'objectif de la méthode EAR, de la discrétisation EAR adaptée à la symétrie circulaire ainsi que de l'exploitation de la symétrie avant/arrière et de la factorisation des réponses impulsionnelles est de limiter à la fois le nombre de calculs et l'espace mémoire nécessaire au stockage des différentes quantités nécessaires au cours du processus. La projection d'un voxel v_j sous la forme des trois quantités τ_j , σ_j et h_j n'est calculée qu'une seule fois, pour une position arbitraire $q = 0$ de la gamma-caméra. Pour les autres positions $q = 1, \dots, P - 1$ où P est le nombre total de projections, une opération de permutation permet d'associer au voxel v_j un triplet déjà calculé pour un autre voxel à la position $q = 0$. Cette opération a été mesurée comme étant 30 fois plus rapide que si nous refaisions le calcul de la projection des voxels pour chaque position q du détecteur, conduisant à des temps de calcul largement réduits : toute chose égale par ailleurs, le temps pris par une itération est d'environ 180 s pour $P = 60$, $N = 64^3$ (nombre d'inconnues) et $M = 64^2 P$ (nombre d'équations), soit environ 3 s pour le traitement d'une projection alors qu'en recalculant l'opérateur de projection, le temps de traitement d'une projection est d'environ 5 s. Une large part du gain dans les temps de calcul est aussi assurée par la factorisation des réponses impulsionnelles : leur stockage, négligeable en terme d'espace mémoire vu leur nombre très limité, nous permet d'accéder à des fonctions précalculées lors des opérations de projection et de rétroprojection. Le calcul de ces fonctions gaussiennes pour N voxels, pour une projection équivaldrait à lui seul à environ 3 s de calcul lorsque $N = 64^3$. Au total, nous avons estimé à environ 12 s le temps nécessaire par projection si nous utilisons pour nos calculs une matrice de projection A^q dont les coefficients seraient totalement calculés. L'écart se creuse encore en augmentant la résolution : pour $N = 128^3$ et $M = 128^2 P$, le temps pris pour le traitement d'un projection avec l'algorithme SART est d'environ 35 s contre environ 3 minutes pour un calcul explicite de chaque coefficient de la matrice de projection A^q .

Du point de vue de la mémoire, si cet aspect des choses devient de moins en moins critique avec les performances des ordinateurs récents, il n'en reste pas moins que le stockage des coefficients réels (`float`) d'une matrice de projec-

tion pour une position q du détecteur prend 4 octets par coefficient soit 4.64^5 octets soit environ 4,3 Go. En ne stockant que les coefficients non nuls, nous avons calculé empiriquement qu'un voxel se projetait en moyenne, selon notre modélisation, sur 37 pixels sur les 4096 que compte un image de projection soit un taux de remplissage des colonnes de la matrice A^q d'environ 9/1000ème. Son stockage prendrait alors une place mémoire d'environ 40 Mo, qu'il reste à multiplier par le nombre total de projections P puisque ces opérateurs seront réutilisés au fil des itérations, soit au final 2,3 Go pour $P = 60$. Avec la méthode EAR, trois coefficients sont stockés pour chaque voxel, de type `int`, `short int` et `float`, soit un total de 7 octets par voxels. Un opérateur de projection prend donc une place très limitée de $\frac{7}{2}64^3$ octets soit 0,9 Mo et nous n'en gardons qu'un seul en mémoire, qui engendre tous les autres. Cette économie peut sembler superflue, mais elle permet d'effectuer les calculs sur un système modeste et d'exploiter des ordinateurs plus puissants pour augmenter le nombre de voxels et pixels. En particulier, le calcul pour $N = 128^3$ et $M = 128^2P$ se fait sans difficulté sur un Apple Power Mac G4, 1,2 GHz bi-processeur, doté de 2 Go de mémoire.

Plus généralement, tandis qu'une représentation usuelle en matrice creuse demande le stockage de plus de $\frac{1}{2}N^4P$ coefficients soit plus de $2N^4P$ octets, avec la méthode EAR, nous nous limitons à $\frac{3}{2}N^3$ coefficients qui demandent $\frac{7}{2}N^3$ octets.

Enfin, puisque le calcul de l'opérateur de projection devient négligeable, nous en concluons que la charge principale des calculs est reportée sur les opérations de projection et de rétroprojection. Mais nous rappelons que l'algorithme SART fait appel à des quantités $\sum_{i=1}^M A_{i,j}^q$ et $\sum_{j=1}^N A_{i,j}^q$ qui sont elles aussi précalculées puisque nous pouvons leur appliquer la symétrie de rotation (voir le paragraphe 5.2), gagnant là aussi un temps de calcul intéressant, estimé à environ 1 s par projection pour $N = 64^3$ et $M=64^2P$.

Les seuls temps de calcul qui soient rajoutés par la méthode EAR sont ceux de la conversion du volume exprimé dans la discrétisation EAR en un volume exprimé dans une discrétisation classique en voxels cubiques, mais cette opération prend environ 3 s pour $N = 64^3$ et $M=64^2P$ et 1 minute pour $N = 128^3$ et $M=128^2P$, ce qui est négligeable en regard du gain obtenu de plusieurs minutes dans le premier cas, plusieurs dizaines de minutes dans le second.

6.4 Discussion

Nous avons pour l'heure donné deux étapes importantes du processus de reconstruction tomographique des images TEMP. La première est la modélisation du problème qui, par une méthode de reconstruction itérative, doit prendre en compte le fait que les volumes des voxels émettent des photons γ qui atteignent non par un mais plusieurs pixels, suivant une distribution gaussienne dont nous calculons la position du centre, l'écart-type et l'intégrale. Cette étape nous permet d'obtenir des résultats meilleurs avec un algorithme itératif (pour nous SART) qu'avec une méthode directe comme l'algorithme de FDK. La deuxième étape vise à réduire les temps de calcul et de manière plus générale, les ressources informatiques nécessaires par les trois réductions décrites au chapitre 4 : la discrétisation EAR adaptée à la symétrie de rotation (4.1.1), la symétrie avant/arrière (4.1.2) et la factorisation des réponses impulsionnelles (4.2). Cette

étape permet donc l'obtention des coefficients de l'opérateur de projection (c'est-à-dire ceux du système linéaire à résoudre) de manière rapide et efficace et peut être étendue au calcul d'autres quantités requises au cours des itérations par un algorithme donné. Elle repose sur le stockage de quantités d'information relativement petites, dont la transformation par des opérations rapides donne accès à toute l'information nécessaire.

La discrétisation adaptée EAR, requise pour l'exploitation de la symétrie de rotation a été conçue de sorte à réduire l'inhomogénéité de la taille des voxels par la règle 4.1 ii). La taille des voxels varie cependant en fonction des différentes couronnes de la discrétisation dans une tranche mais la règle donnée nous assure que les tailles radiales et tangentielles sont toujours plus petites ou égales à la profondeur des voxels, qui est fixe. Ceci implique que la densité de voxels sur certaines couronnes est plus élevée que ce qu'elle serait avec une grille de voxels cubiques, mais le nombre total de voxels est approximativement le même puisque le champ de vue reconstruit est plus petit : c'est un cylindre inscrit dans le cube qui serait le champ de vue reconstruit avec la grille cubique.

Par ailleurs l'inhomogénéité de la taille des voxels est fortement limitée par la règle de construction de la discrétisation EAR et nous pensons que cette stratégie est cruciale pour que l'exploitation de la symétrie de rotation soit intéressante. Une discrétisation polaire simple de l'espace, avec des voxels placés à angles égaux sur chaque couronne, donnerait lieu à un suréchantillonnage important au centre de chaque tranche. Ce point n'est pas discuté dans le travail de Hebert et al. [27] alors que la taille des voxels augmente - et la résolution est divisée - d'un facteur n entre la première couronne (au centre) et la $n^{\text{ème}}$ couronne.

La comparaison des résultats obtenus par la méthode EAR avec une reconstruction faite sur une grille cubique ne montre pas de diminution significative de la résolution spatiale, tandis que les temps de calcul ainsi que l'espace mémoire utilisé diminuent tous deux fortement.

Puisque cette stratégie de calcul repose en grande partie sur l'exploitation de la symétrie de rotation, nous devrions néanmoins considérer dans quels cas cette symétrie est brisée et comment réagira la méthode EAR. Bequé et al. [8] ont caractérisé la géométrie d'acquisition de la TEMP avec collimateur sténopé avec sept paramètres. Dans la situation idéale, supposée jusque-là, seuls la distance focale F et le rayon de rotation d sont non-nuls. Le *décalage mécanique* m , le *décalage électrique* e_u et e_v , l'*inclinaison* (tilt) ϕ et l'*angle de torsion* (twist) ψ sont tous supposés nuls, impliquant une position, trajectoire et détections sans défaut. Si par contre un ou plusieurs de ces paramètres sont non-nuls, cela aboutit à des différences sur les images de projection par rapport au cas idéal qu'il nous convient soit de modéliser, soit de précorriger.

Dans cet article [8], les différents paramètres, s'ils sont supposés éventuellement non-nuls sont néanmoins aussi supposés constants durant toute l'acquisition, c'est-à-dire pour chaque position prise par le détecteur, conservant ainsi la symétrie de rotation, quelle que soit la valeur prise effectivement par ces paramètres. Par conséquent, en incorporant ces changements dans l'opérateur de projection, la factorisation des réponses impulsives ainsi que la symétrie de rotation peuvent toujours être appliquées. Seule la symétrie avant/arrière ne serait pas préservée par un angle d'inclinaison ϕ non-nul, tandis qu'un paramètre e_u non-nul ne ferait que changer le plan de symétrie.

Lorsque les paramètres dépendent de la position angulaire q prise par le détecteur, la symétrie de rotation est brisée et la méthode EAR ne peut être

appliquée qu'à la condition que les projections soient précorrigées. Une telle précorrection peut être facilement mise en œuvre pour $m(q)$, $e_u(q)$ et $e_v(q)$ car elle consiste à traduire l'image globalement d'un paramètre respectivement $-m(q)$, $-e_u(q)$ et $-e_v(q)$. De même, la précorrection de l'angle de torsion $\psi(q)$ est une rotation globale de l'image de projection d'un angle $-\psi(q)$. Mais pour des variations importantes du rayon de rotation $d(q)$ ou de l'inclinaison $\phi(q)$, l'influence de ces paramètres sur le facteur d'agrandissement nous empêche d'appliquer une précorrection aux projections puisque celle-ci serait différente selon l'endroit d'où le photon a été émis. Par conséquent, la méthode EAR ne s'applique qu'aux détecteurs dont les défauts de rayon de rotation et d'inclinaison sont faibles (mais néanmoins existant, comme nous l'avons vu concernant le rayon de rotation).

La factorisation des réponses impulsionnelles gaussiennes est une approximation, Metzler et al. ayant démontré dans [48] que les réponses impulsionnelles n'étaient pas symétriques et que leur forme dépendait de la position des voxels. Cependant, la variation globale de la sensibilité du détecteur est prise en compte dans notre modélisation (voir le point *Variation spatiale de la sensibilité* paragraphe 3.4.1).

Concernant l'atténuation enfin, celle-ci doit également suivre une symétrie circulaire, mais il n'est pas nécessaire qu'elle soit uniforme pour que la réduction basée sur la symétrie circulaire fonctionne. L'approximation liée à cette contrainte géométrique sur l'atténuation peut ne pas être gênante, lorsqu'elle s'applique à un objet cylindrique ou au corps d'un animal, mais n'est pas un bon modèle lorsque l'objet imagé est plat, comme le fantôme faisceau présenté précédemment. Les distances d'atténuation sont heureusement significativement plus petites que dans le cas de l'imagerie du corps humain, ce qui rend l'hypothèse d'une atténuation symétrique acceptable, mais il ne serait pas possible par exemple d'incorporer un modèle d'atténuation issu de mesures faites par tomographie, à moins qu'une approximation symétrique en soit d'abord calculée.

Troisième partie
Algorithmique

Nous avons insisté tout au long de ce travail, sur l'importance que prend la modélisation lorsque la réponse impulsionnelle du système physique d'imagerie s'éloigne d'une distribution de Dirac. Dans notre cas, en fonction des conditions d'acquisition et notamment de la taille du trou d'entrée du collimateur sténopé, cette réponse impulsionnelle se modélise correctement par une fonction gaussienne plus ou moins large et c'est l'introduction de cette fonction de dispersion dans le système linéaire $Ax = b$ qui permet, au cours de la résolution du système par un algorithme itératif, de réaliser une déconvolution des projections et de gagner ainsi en résolution spatiale. L'objectif de cette troisième partie est de démontrer que l'opération de déconvolution peut être optimisée en fonction des fréquences présentes dans l'objet à reconstruire. Nous générerons ainsi une nouvelle classe d'algorithmes *adaptés à la fréquence* ou algorithmes FA (frequency adapted). La construction de tels algorithmes, leur étude mathématique et la démonstration de leur efficacité par des résultats sur fantômes informatiques, physiques et sur l'animal in vivo constitueront plus précisément les points abordés au cours des chapitres 7, 8 et 9.

Chapitre 7

Une classe d'algorithmes adaptés à la fréquence

Tandis que les méthodes analytiques telles que les méthodes de Fourier, de rétroprojection filtrée ou, en géométrie conique, l'algorithme de FDK [23] ont été très populaires dans chaque application conduisant à un problème de reconstruction tomographique comme la tomodensitométrie, la TEMP, la tomographie par émission de positon (TEP) la tomographie optique et d'autres encore jusque vers le milieu des années 1990, il semble que leur utilisation soit maintenant limitée aux seules applications disposant d'une très bonne résolution intrinsèque, c'est-à-dire dont la réponse impulsionnelle est proche d'une distribution de Dirac. Il est en effet très difficile, lorsque l'on incorpore un modèle plus complexe de réponse impulsionnelle dans un opérateur intégral tel que la transformée de Radon, d'obtenir une formule d'inversion. Par conséquent, ces méthodes analytiques ne s'appliquent véritablement qu'au « pur » problème tomographique, c'est-à-dire celui qui n'implique pas de déconvolution par la réponse impulsionnelle, et s'adressent dorénavant essentiellement à la tomodensitométrie (le scanner X) dont la résolution intrinsèque permet effectivement d'approcher la réponse impulsionnelle par une distribution de Dirac. Pour les autres modalités d'imagerie, et notamment la TEMP qui nous intéresse ici, *un voxel se projette*¹ suivant une tache, atteignant plus d'un pixel. Chaque image de projection est donc rendue floue et devrait être traitée comme telle, en incorporant différents paramètres dans l'opérateur de projection qui modélise le processus de l'émission des photons, ainsi que leur détection. Nous avons proposé un modèle dans le chapitre 3, reposant sur des réponses impulsionnelles gaussiennes dont les paramètres, notamment la largeur, sont variables selon les voxels considérés. Des méthodes de reconstruction itératives ne sont alors que des algorithmes itératifs de résolution du système linéaire

$$Ax = b \tag{7.1}$$

où A est l'opérateur de projection, x est un ensemble de valeurs inconnues prises par les voxels dans l'espace à trois dimensions (l'activité pour nous, en TEMP) et b est l'ensemble des mesures de cette activité dont nous disposons, organisées sous forme d'images de projection.

¹Nous entendons par là « les photons émis par un voxel atteignent le détecteur »

L'immense avantage des méthodes itératives par rapport aux méthodes analytiques est qu'elles ne dépendent en rien du modèle choisi : l'algorithme itératif résout un système linéaire de la même manière, que ce système soit creux ou non, que le modèle soit très simplifié ou au contraire très fidèle à la situation physique sous-jacente. La complexité du modèle peut certes affecter les temps de calcul, mais pas la forme de l'algorithme : ART, SART, CAV ou l'algorithme de gradient conjugué gardent strictement la même forme quelle que soit la modélisation. Ainsi nous pouvons dire que les méthodes itératives sont aveugles à la complexité du modèle, ce qui représente à notre sens, un avantage déterminant dans le choix que nous avons fait de les utiliser.

Si la croissance exponentielle de la puissance de calcul du matériel informatique rend ces méthodes itératives de plus en plus applicables, ramenant les temps de calcul à quelques minutes ou autorisant des reconstructions sur des grilles composées d'un nombre de voxels autrefois inaccessible, certaines questions restent ouvertes et bénéficient de larges efforts réalisés dans le cadre général des problèmes inverses, et d'un échange continu entre la théorie et les applications.

Les études actuelles qui concernent l'emploi des algorithmes itératifs en reconstruction tomographique touchent ainsi à l'accélération d'algorithmes existant (comme l'algorithme CAV de Censor et al. [12] qui est basé sur l'algorithme de Cimmino [17] mais l'accélère notablement), ou aux propriétés de convergence des algorithmes, notamment dans le cas de systèmes mal posés, c'est-à-dire n'admettant pas une unique solution. Le choix du meilleur algorithme parmi ceux cités au chapitre 2 par exemple (*algebraic reconstruction technique* (ART) [24], *simultaneous algebraic reconstruction technique* (SART) [3], *expectation maximization* (EM) [39] ou le gradient conjugué pour les principaux), différents types d'implémentation (séquentiel (Seq), simultané (Sim) ou itératifs par blocs (BI)), la régularisation ou le choix du paramètre de relaxation (voir [13] pour les détails) constituent autant de sujets qui sont encore d'actualité.

Mais quel que soit l'algorithme employé, tous ceux qui se sont tournés vers ces méthodes itératives en tomographie ont constaté que les hautes fréquences (les détails) étaient reconstruites après les basses fréquences. Dans le cas d'objets aux détails fins, un nombre important d'itérations doit être calculé pour obtenir la précision nécessaire sur l'image reconstruite, c'est-à-dire une précision rendant compte des détails jugés importants par le consommateur de l'image. Le choix d'un algorithme mais aussi de son implémentation, de la manière dont il est régularisé le cas échéant ou de son paramètre de relaxation a certainement une influence sur ses performances, notamment sa vitesse de convergence, mais le fait demeure que les itérations doivent être multipliées pour parvenir à reconstruire l'ensemble du spectre fréquentiel, les hautes fréquences n'apparaissant qu'après les moyennes et les basses.

Certaines idées pour la compréhension de ce phénomène peuvent être trouvées chez Norton [52] mais seulement dans un cadre de géométrie intégrale, c'est-à-dire de méthodes analytiques, impliquant une réponse impulsionnelle ponctuelle, et par conséquent fort éloigné de notre contexte.

Dans ce chapitre, nous proposons un moyen d'accélérer la convergence de certaines méthodes itératives, dans le cas spécifique de la reconstruction tomographique d'objets possédant des détails fins mais dont les images de projection ont été acquises par une technique ayant une réponse impulsionnelle relativement large : la TEMP. Pour ce faire, nous basons ces algorithmes sur l'uti-

lisation d'un opérateur de rétroprojection incomplet, n'exploitant, pour l'estimation de la valeur d'un voxel donné, que certaines des mesures disponibles. Ceci peut être formulé comme une pondération de chaque correction $d_{i,j}^k$ du voxel j par l'équation i durant la $k^{\text{ème}}$ itération avec des poids $w_{i,j}^k$ tels que $\sum_i w_{i,j}^k = 1$ pour tout j et k et la *condition de rétroprojection incomplète* :

$$w_{i,j}^k = 0 \text{ pour certains } i, \text{ même si } A_{i,j} \neq 0 \quad (7.2)$$

qui, à notre connaissance, n'a pas été discutée jusque-là dans l'utilisation d'algorithmes itératifs pour la reconstruction tomographique.

Nous commencerons par expliciter la condition de rétroprojection incomplète de manière telle qu'elle permette l'accélération attendue et décrivons la formulation d'un algorithme FA qui inclut cette condition, en nous basant sur l'algorithme SART qui devient alors l'algorithme FA-SART. Nous évoquons ensuite en quoi cette condition devrait permettre l'accélération de la convergence en mettant à jour les voxels à partir des mesures les plus pertinentes et nous dressons enfin un parallèle avec certains algorithmes reposant sur des projections successives sur des ensembles convexes (les méthodes POCS, *projection onto convex sets*).

7.1 Construction d'un algorithme adapté à la fréquence

Nous nous concentrons à présent sur les seules techniques qui conduisent à des images obtenues avec une réponse impulsionnelle « large », c'est-à-dire ne pouvant être modélisée de façon adéquate par une distribution de Dirac, comme la TEMP, qui illustrera ici tous nos propos. Il faudra néanmoins garder à l'esprit que les algorithmes que nous allons construire s'appliquent en premier lieu à la résolution d'un système linéaire et que par conséquent, ils ne sauraient s'appliquer qu'à la seule imagerie TEMP, mais nous laisserons aux utilisateurs de méthodes itératives pour d'autres techniques d'imagerie possédant une réponse impulsionnelle large, le soin d'appliquer les méthodes présentées ici.

Concernant la TEMP, le nombre de processus et de paramètres pris en compte dans la modélisation est la source de développements constants. Les aspects géométriques appliqués au détecteur mais aussi aux entités abstraites comme la taille et la forme des voxels, la connaissance de la physique de détection (résolution intrinsèque, efficacité), celle du collimateur (coefficient d'atténuation du matériau utilisé, pénétration sur les bords) sont maintenant souvent pris en compte (voir le chapitre 3) et le sont d'autant plus lorsque la technique est destinée à faire de l'imagerie du petit animal pour laquelle la résolution spatiale devient critique, étant donnée la taille des organes du rat ou de la souris.

Le modèle choisi incorpore donc généralement le fait que la réponse impulsionnelle ne soit pas réduite à une masse de Dirac, c'est-à-dire, dans sa version discrète, que les photons émis par un voxel donné v_j atteignent bien plus d'un pixel sur le détecteur. Ceci apparait dans les coefficients de la matrice de projection A , dans laquelle le coefficient $A_{i,j}$, $i = 1, \dots, M$ et $j = 1, \dots, M$ contient la proportion de photons émis par le voxel v_j qui atteignent le pixel b_i . Reprenant les notations des chapitres précédents, c'est-à-dire décomposant le système linéaire 7.1 en une série de P systèmes correspondants à autant d'images de

projection, nous avons à trouver x , solution ou meilleure solution approchée de :

$$A^q x = b^q \quad q = 0, \dots, P - 1 \quad (7.3)$$

où A^q est un bloc de la matrice A de taille $K \times N$ où $K = M/P$, ne contenant que les lignes des indices de pixels appartenant à la $q^{\text{ème}}$ image de projection et b^q est un bloc du vecteur de données b ne contenant que les valeurs des pixels appartenant à la $q^{\text{ème}}$ image de projection.

Dire qu'un voxel se projette sur plusieurs pixels revient à dire que les colonnes des matrices A^q contiennent plus d'un coefficient non-nul. Nous avons modélisé les projections des voxels, de même que les réponses impulsionnelles, par des gaussiennes, ce qui est un choix courant en imagerie, même si d'autres auteurs on proposé des modèles plus élaborés, et ce particulièrement en imagerie TEMP avec collimateur sténopé (voir Metzler et al. [48]). Dans cette partie, nous parlerons indistinctement de « projections des voxels » et de « réponses impulsionnelles » dans la mesure où notre propos concerne le cas où les unes comme les autres ne peuvent être réduites à des masses de Dirac. Nous renvoyons à la section 3.4.2 pour la distinction précise entre ces deux termes et le lien qui les unit.

Quel que soit le modèle de projection adopté, nous voyons qu'un voxel se projettera donc sur plusieurs pixels, ce qui ajoute une étape de déconvolution au problème purement tomographique, qui consiste à retrouver un objet 3D à partir de projections 2D. Les réponses impulsionnelles sont malheureusement spatialement dépendantes; un point situé proche du trou d'entrée du collimateur aura une projection plus large qu'un point situé plus loin et ceci nous empêche de procéder à une étape préliminaire de déconvolution des projections 2D avant d'utiliser une formule d'inversion analytique, dérivée de l'inversion de la transformée de Radon. Par contre, la déconvolution sera automatiquement effectuée en résolvant simplement le système linéaire 7.1, du moment que la réponse impulsionnelle apparaît dans les colonnes $A_{\bullet,j}^q$ des matrices A^q . Les coefficients de ces matrices sont supposés positifs ou nuls, ce qui est réaliste en TEMP et simplifie les notations, mais il est tout à fait envisageable d'appliquer ce que nous allons exposer à des systèmes linéaires dont certains coefficients seraient négatifs.

L'idée de la condition de rétroprojection incomplète évoquée dans l'introduction, est de mettre à jour la valeur des voxels seulement à partir des mesures les plus significatives. Pour expliciter cette idée, nous partons de l'exemple de l'algorithme SART dont l'itération s'écrit :

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}} \sum_{i=1}^M \frac{b_i - (Ax^{(k)})_i}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}} A_{i,j} \quad (7.4)$$

où $k \in \mathbb{N}$ est l'indice de l'itérée, $j = 1 \dots N$ est l'indice du voxel et $i = 1 \dots M$ est l'indice du pixel de sorte que $x^{(k)} \in \mathbb{R}^N$ pour tout k , $b \in \mathbb{R}^M$, A est une matrice $M \times N$ qui modélise la projection et λ est le paramètre de relaxation. Cette équation peut être réécrite sous une forme matricielle présentée par Jiang and Wang [36] (T représente la transposée d'une matrice ou d'un vecteur) :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda V A^T W (b - Ax^{(k)}) \quad (7.5)$$

avec $V = \text{diag}(\frac{1}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}})$ une matrice diagonale $N \times N$ et $W = \text{diag}(\frac{1}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}})$ une matrice diagonale $M \times M$. Nous supposons aussi que les conditions

$$\sum_{i=1}^M A_{i,j} \neq 0 \text{ pour tout } j \quad (7.6)$$

et

$$\sum_{j=1}^N A_{i,j} \neq 0 \text{ pour tout } i \quad (7.7)$$

sont respectées.

Une manière de comprendre ce que cet algorithme réalise est de considérer une version itérative par blocs de l'équation (7.4), avec des blocs réduits à une seule équation. Bien qu'elle puisse paraître antinomique avec le terme *simultané* qui apparaît dans SART, une telle version de l'algorithme, écrite sous une forme séquentielle, rentre dans le cadre de l'analyse présentée dans [15] par Censor et Elfving. Pour l'écrire, nous nous ramenons à peu près aux notations qui sont celles de Censor et Elfving pour séparer le système $Ax = b$ en blocs d'équations. Ce travail faisait suite chez eux à la présentation de l'algorithme CAV [12] que nous avons rencontré au chapitre 2 (algorithme 2.6).

Soit alors T le nombre de blocs et, pour $t = 1, 2, \dots, T$, soit le bloc d'indices $B_t \subseteq \{1, 2, \dots, M\}$ un sous-ensemble ordonné de la forme $B_t = \{l_1^t, l_2^t, \dots, l_{M(t)}^t\}$ où $M(t)$ est le nombre d'éléments de B_t . Pour $t = 1, 2, \dots, T$, soit A_t la matrice formée par les lignes $\{A_{i,\bullet}\}$ de A dont les indices appartiennent au bloc B_t :

$$A_t := \begin{pmatrix} A_{l_1^t, \bullet} \\ A_{l_2^t, \bullet} \\ \vdots \\ A_{l_{M(t)}^t, \bullet} \end{pmatrix}$$

Le vecteur b est partitionné de la même façon, b^t étant l'élément de b dont les indices appartiennent au bloc B_t :

$$b^t := \begin{pmatrix} b_{l_1^t} \\ b_{l_2^t} \\ \vdots \\ b_{l_{M(t)}^t} \end{pmatrix}$$

Posant enfin A_t^j la $j^{\text{ème}}$ colonne de A_t , l'équation (7.4) devient :

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + \frac{1}{\|A_t^j\|_1} \sum_{i=1}^{M(t(k))} \frac{b_i^{t(k)} - \langle A_{l_i^{t(k)}, \bullet}, x^{(k)} \rangle}{\|A_{l_i^{t(k)}, \bullet}\|_1} A_{l_i^{t(k)}, j} \quad (7.8)$$

Dans notre cas, c'est-à-dire pour une écriture séquentielle de l'algorithme, nous posons $T = M$ et pour chaque t , $B_t = \{t\}$. L'équation (7.8) se simplifie alors notablement puisqu'alors $A_t = A_{t,\bullet}$ tandis que b^t se réduit à b_t , obtenant :

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + \frac{b_i - \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle}{\|A_{i,\bullet}\|_1} \frac{A_{i,j}}{A_{i,j}}. \quad (7.9)$$

Le quotient $\frac{A_{i,j}}{A_{i,j}}$ doit encore être clarifié si $A_{i,j} = 0$. Puisque nous ne voulons pas que la valeur du voxel j soit changée par la $i^{\text{ème}}$ équation si $A_{i,j} = 0$, nous définissons simplement

$$\frac{A_{i,j}}{A_{i,j}} := \begin{cases} 1 & \text{si } A_{i,j} > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'où la forme séquentielle de l'algorithme SART, écrite composante par composante :

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \lambda \frac{b_i - \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle}{\|A_{i,\bullet}\|_1} \mathbf{1}_{A_{i,j}>0} = P_i(x^{(k)})_j. \quad (7.10)$$

Appliquant cet algorithme sous la forme matricielle de l'équation (7.5), avec

$$x^{(k+1)} = P_i(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} P_i(x^{(k)})_1 \\ P_i(x^{(k)})_2 \\ \vdots \\ P_i(x^{(k)})_N \end{pmatrix}$$

il est facile de vérifier le résultat suivant :

PROPOSITION 7.1 *Si le paramètre de relaxation λ vérifie $\lambda = 1$, la nouvelle itérée $x^{k+1} = P_i(x^k) = (P_i(x^k)_1, \dots, P_i(x^k)_N)^T$ est la projection de x^k sur l'hyperplan $H_i = \{x \in \mathbb{R}^N / \langle A_{i,\bullet}, x \rangle = b_i\}$*

Preuve La version séquentielle de la forme matricielle de l'algorithme SART donnée dans l'équation (7.5) est, avec $\lambda = 1$:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + VA^T W(b_i - \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle) \quad (7.11)$$

avec $V = \text{diag}(\frac{1}{A_{i,j}})$ une matrice diagonale $N \times N$ et $W = \text{diag}(\frac{1}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}})$ une matrice diagonale $M \times M$. On a donc :

$$P_i(x^k) = x^{(k)} + VA_{i,\bullet}^T W(b_i - \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle) \quad (7.12)$$

$$= x^{(k)} + (\mathbf{1}_{A_{i,1}>0}, \dots, \mathbf{1}_{A_{i,N}>0})^T \frac{(b_i - \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle)}{\|A_{i,\bullet}\|_1} \quad (7.13)$$

Projetant $P_i(x^k)$ sur l'équation i , on obtient :

$$\begin{aligned} & \langle A_{i,\bullet}, P_i(x^k) \rangle \\ &= \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle + (\mathbf{1}_{A_{i,1}>0}, \dots, \mathbf{1}_{A_{i,N}>0})^T \frac{(b_i - \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle)}{\|A_{i,\bullet}\|_1} \rangle \quad (7.14) \end{aligned}$$

$$= \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle + \frac{\|A_{i,\bullet}\|_1}{\|A_{i,\bullet}\|_1} (b_i - \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle) \quad (7.15)$$

$$= b_i \quad \square \quad (7.16)$$

Ceci constitue notre point de départ pour un algorithme adapté à la fréquence, basé sur SART. La condition de rétroprojection incomplète que nous voulons poser nous demande la définition suivante.

DEFINITION 7.1.1 *Soit P le nombre de projections acquises et A la matrice de projection, composée des blocs A^0, A^1, \dots, A^{P-1} . Pour $0 \leq \rho \leq 1$ et pour chaque $0 \leq q \leq P-1$, la matrice de rétroprojection incomplète de A^q de seuil ρ est définie par*

$$A_{i,j}^{q,\rho} := \begin{cases} A_{i,j}^q & \text{si } A_{i,j}^q \geq \rho \cdot \|A_{\bullet,j}^q\|_\infty \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

de sorte que $A^{q,\rho}$ ne garde dans chaque colonne que les coefficients de A^q supérieurs à ρ fois le maximum de la colonne. La matrice de rétroprojection incomplète A^ρ de A est alors la concaténation des blocs $A^{1,\rho}, A^{2,\rho}, \dots, A^{P,\rho}$.

Nous définissons alors les matrices $V^\rho := \text{diag}(\frac{1}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}^\rho})$ et $W^\rho := \text{diag}(\frac{1}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}^\rho})$. Nous obtenons ainsi, suivant l'équation (7.5) l'itération suivante :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda V^\rho A^{\rho T} W^\rho (b - Ax^{(k)}) \quad (7.17)$$

De même que pour l'équation (7.5), nous définissons la forme séquentielle de cette itération comme :

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \lambda \frac{b_i - (A^\rho x^k)_i}{\|A_{i,\bullet}^\rho\|_1} \mathbf{1}_{A_{i,j}^\rho > 0} = P_i^\rho(x^{(k)})_j. \quad (7.18)$$

La même proposition peut alors être établie pour cette itération que précédemment, pour la forme séquentielle de l'algorithme SART. Posant cette fois :

$$x^{(k+1)} = P_i^\rho(x^{(k)}) = \begin{pmatrix} P_i^\rho(x^{(k)})_1 \\ P_i^\rho(x^{(k)})_2 \\ \vdots \\ P_i^\rho(x^{(k)})_N \end{pmatrix}$$

on a :

PROPOSITION 7.2 *Si le paramètre de relaxation λ vérifie $\lambda = 1$, la nouvelle itérée $x^{k+1} = P_i^\rho(x^k) = (P_i^\rho(x^k)_1, \dots, P_i^\rho(x^k)_N)^T$ est une projection de x^k sur l'hyperplan $H_i = \{x \in \mathbb{R}^N / \langle A_{i,\bullet}, x \rangle = b_i\}$*

Preuve Posant $\lambda = 1$, l'itération 7.18 a la forme matricielle :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + V^\rho (A^\rho)^T W^\rho (b_i - \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle) \quad (7.19)$$

avec $V^\rho = \text{diag}(\frac{1}{A_{i,j}^\rho})$ une matrice diagonale $N \times N$ et $W^\rho = \text{diag}(\frac{1}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}^\rho})$ une matrice diagonale $M \times M$. On a donc :

$$P_i^\rho(x^k) = x^{(k)} + V^\rho (A_{i,\bullet}^\rho)^T W^\rho (b_i - \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle) \quad (7.20)$$

$$= x^{(k)} + (\mathbf{1}_{A_{i,1}^\rho > 0}, \dots, \mathbf{1}_{A_{i,N}^\rho > 0})^T \frac{(b_i - \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle)}{\|A_{i,\bullet}^\rho\|_1} \quad (7.21)$$

Projetant $P_i^\rho(x^k)$ sur l'équation i , on obtient :

$$\begin{aligned} & \langle A_{i,\bullet}, P_i^\rho(x^k) \rangle \\ &= \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} + (\mathbf{1}_{A_{i,1}^\rho > 0}, \dots, \mathbf{1}_{A_{i,N}^\rho > 0})^T \frac{(b_i - \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle)}{\|A_{i,\bullet}^\rho\|_1} \rangle \quad (7.22) \end{aligned}$$

$$= \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle + \frac{\|A_{i,\bullet}^\rho\|_1}{\|A_{i,\bullet}^\rho\|_1} (b_i - \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle) \quad (7.23)$$

$$= b_i \quad \square \quad (7.24)$$

REMARQUE 7.1 Les opérateurs P_i et P_i^ρ sont tous les deux des projecteurs sur l'hyperplan $H_i = \{x \in \mathbb{R}^N / \langle A_{i,\bullet}, x \rangle = b_i\}$, mais P_i^ρ possède également la propriété de projeter tout élément x de \mathbb{R}^N dans le sous-espace affine de \mathbb{R}^N :

$$\Omega_i^k = \{x \in \mathbb{R}^N / P_i^\rho(x)_j = x_j \text{ pour tout } j / A_{i,j} < \rho \cdot \|A_{\bullet,j}\|_\infty\} \quad (7.25)$$

projetant donc l'itérée sur $C_i^k := H_i \cap \Omega_i^k$, qui est un sous-ensemble fermé de \mathbb{R}^N . Ceci pourrait pousser à analyser les propriétés de l'algorithme proposé dans le cadre des méthodes de projection sur des ensembles convexes, dont font partie les algorithmes de Cimmino ou CAV. Nos outils d'analyse ont cependant été autres, compte tenu de la forme particulière que prend l'ensemble convexe C_i^k .

7.2 L'algorithme FA-SART et sa version par blocs

Nous voulons maintenant considérer le schéma de l'équation (7.18) dans le cadre naturel de l'algorithme, qui a par nature une forme simultanée. Nous changeons donc l'itération originale de l'algorithme SART pour y inclure la condition de rétroprojection incomplète et obtenons :

ALGORITHME 7.1 (FA-SART)

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}^\rho} \sum_{i=1}^M \frac{b_i - (Ax^k)_i}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}^\rho} A_{i,j}^\rho$$

Il est important de remarquer que seules les opérations de rétroprojection utilisent la matrice A^ρ de la définition 7.1.1. Les schémas d'algorithme itératifs reposent tous plus ou moins sur l'alternance de deux étapes. La première est la mesure d'une différence entre les données mesurées (le vecteur b) et l'opérateur qui modélise le problème appliqué à l'itérée courante (le vecteur $Ax^{(k)}$) et la seconde est la mise à jour de l'itérée par une matrice de correction (en tomographie, une matrice de rétroprojection) appliquée à la différence mesurée (voir le schéma de la figure 5.2). La matrice A^ρ n'intervient donc que dans cette deuxième étape, la matrice qui modélise le problème se devant de rester le modèle original et donc la matrice A .

Pour la version itérative par blocs, plutôt que de rester dans le cas général proposé par Censor et al., nous nous restreignons au cas de blocs composés d'une image de projection qui est le cadre naturel de l'algorithme, puisqu'il repose sur le seuillage des matrices de projections pour chaque position prise

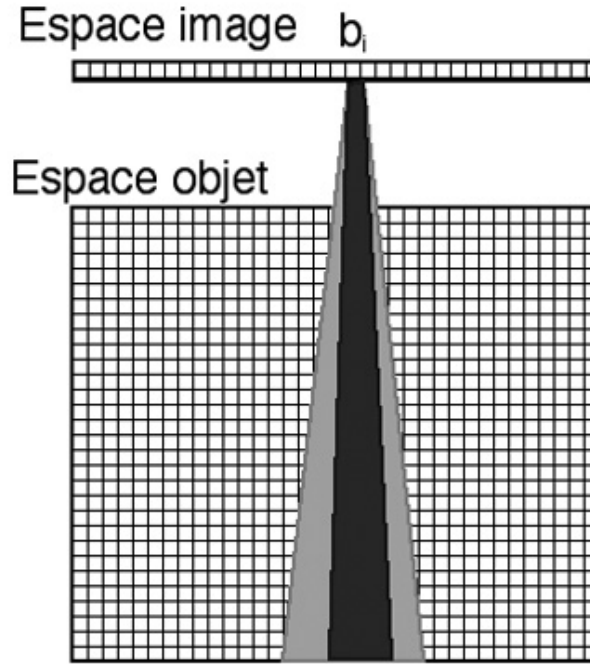


FIG. 7.1 – Le cône de rétroprojection original correspondant à un pixel b_i et composé des voxels v_j tels que $A_{i,j} \geq 0$ (en gris clair) est remplacé par un ensemble de voxels tels que $A_{i,j} > \rho \cdot \|A_{\bullet,j}\|_\infty$ (en gris foncé), devenant ainsi moins large.

par le détecteur. Les notations sont ainsi plus simples que celles introduites pour l'équation (7.8) de l'algorithme SART dans sa version itérative par blocs. Nous reprenons ainsi les notations qui nous ont servi au chapitre 5, pour l'équation (5.7)

Pour une image de projection correspondant à la $q^{\text{ème}}$ position du détecteur, $q = 0, \dots, P - 1$, la matrice de projection est notée A^q et les pixels sont notés b_i , $i = i_1^q, \dots, i_K^q$ où $K = M/P$ est le nombre de pixels dans une image. Nous utilisons alors, dans les opérations de rétroprojection uniquement, les matrices $A^{q,\rho}$ de la définition 7.1.1. L'itération FA-SART dans sa version itérative par blocs est alors :

ALGORITHME 7.2 (BI FA-SART)

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=i_1^q}^{i_K^q} A_{i,j}^{q,\rho}} \sum_{i=i_1^q}^{i_K^q} \frac{b_i - (A^q x^k)_i}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}^{q,\rho}} A_{i,j}^{q,\rho}$$

pour q variant cycliquement de 0 à $P - 1$.

Cet algorithme réalise une rétroprojection qui se caractérise géométriquement par un cône de rétroprojection moins large que celui de l'algorithme SART (voir la figure 7.2).

Chapitre 8

Propriétés des algorithmes adaptés à la fréquence

Nous avons développé au chapitre précédent une nouvelle version de l'algorithme SART destinée à résoudre le problème, fréquemment évoqué dans la littérature consacrée au sujet, de la lente reconstruction des hautes fréquences par les méthodes itératives en tomographie. Nous avons alors proposé une condition de rétroprojection incomplète, qui implique que les valeurs des voxels sont estimées à partir des seules mesures les plus significatives, c'est-à-dire pour lesquelles le coefficient de la matrice de projection A dépasse un certain seuil. Cette condition peut être appliquée à d'autres algorithmes que SART mais nous nous concentrons sur l'algorithme SART adapté à la fréquence (FA-SART) pour étudier en quoi cette adaptation permet une accélération de la reconstruction des hautes fréquences. Nous rappelons également que nous proposons cet algorithme dans le cas de techniques d'imagerie possédant une réponse impulsionnelle large, ne pouvant être réduite à une distribution de Dirac, et impliquant donc une déconvolution des projections au cours de la reconstruction tomographique.

Nous allons voir dans ce chapitre en quoi le remplacement de la matrice A par la matrice A^p dans les opérations de rétroprojection peut occasionner l'accélération attendue, avant d'étudier la convergence de l'algorithme FA-SART sous certaines hypothèses. Notons que cette analyse peut s'inscrire dans le cadre général proposé par Zeng et Gullberg [73] des algorithmes ayant des opérateurs de projection et de rétroprojection « dépareillés » (*unmatched*). Le cas d'un opérateur de rétroprojection défini par seuillage de la réponse impulsionnelle de l'opérateur de projection n'a toutefois pas été décrit jusque-là et il est intéressant de souligner que l'accélération obtenue pour la reconstruction des hautes fréquences peut être expliquée mathématiquement, en plus des démonstrations empiriques qui seront vues au chapitre 9.

8.1 Accélération de la déconvolution

Les systèmes d'imagerie par tomographie en général et la TEMP en particulier ne peuvent pas être considérés comme linéaires et invariants par translation (LIT ou LSI en anglais pour *linear and shift-invariant*). Ils ne sont en réalité

ni linéaires, pour les raisons évoquées au chapitre 3, le volume à reconstruire interagissant avec lui-même compte tenu des phénomènes d'atténuation notamment, ni invariants par translation, la réponse du détecteur étant dépendante de l'éloignement du point considéré. Des modèles linéaires sont cependant utilisés - notamment dans tout ce travail de thèse - et représentent une bonne approximation du problème, tandis que dans cette section, nous détaillerons l'accélération obtenue sur la reconstruction des hautes fréquences dans des plans parallèles au détecteur, et pour lesquels nous considérons les réponses impulsionnelles comme étant les mêmes, à un facteur d'amplitude près. Nous nous replaçons donc, pour cette analyse, dans le cadre d'un problème LIT.

Nous avons mentionné déjà à plusieurs reprises que le défaut des méthodes analytiques était leur inaptitude à prendre en compte la réalité des réponses impulsionnelles. Or le problème que nous avons à résoudre est en quelque sorte double : la reconstruction tomographique « pure », c'est-à-dire la désambiguïsation des images de projection mais aussi la déconvolution de ces mêmes images de projection, par rapport aux réponses impulsionnelles. Or tandis que les méthodes analytiques ne peuvent prendre en charge cette opération et que les méthodes de déconvolution aveugle seraient inadaptées dans ce problème tomographique, la déconvolution est automatiquement accomplie par toute méthode itérative qui inclut un modèle de réponse impulsionnelle dans la matrice de projection A puisque la différence $b - Ax^{(k)}$ tend vers zéro lorsque le nombre d'itérations augmente.

L'algorithme SART nous permet de donner un aperçu de la manière dont marche la déconvolution. A partir d'une itération de la forme séquentielle, déjà vue au chapitre précédent (équation(7.9)) :

$$x_j^{(k+1)} = x_j^{(k)} + \lambda \frac{b_i - \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle}{\|A_{i,\bullet}\|_1} \mathbf{1}_{A_{i,j} > 0} \quad (8.1)$$

nous obtenons la correction $d_{i,j} = \frac{b_i - \langle A_{i,\bullet}, x^{(k)} \rangle}{\|A_{i,\bullet}\|_1} \mathbf{1}_{A_{i,j} > 0}$ du pixel i pour le voxel j . Dans sa forme « normale », c'est-à-dire simultanée, SART met à jour le voxel j à partir d'une combinaison convexe de corrections $d_{i,j}$, auxquelles correspondent respectivement les poids $w_{i,j}^k = A_{i,j} / \sum_i A_{i,j}$:

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}} \sum_{i=1}^M \frac{b_i - (Ax^k)_i}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}} A_{i,j} \quad (8.2)$$

Ici, la combinaison convexe suit la forme de la réponse impulsionnelle, ce qui s'accorde avec l'idée intuitive qui consiste à donner à la correction $d_{i,j}$ un poids proportionnel au coefficient $A_{i,j}$. A notre connaissance, tous les algorithmes avec une correction additive utilisés en tomographie ont la propriété d'avoir $w_{i,j}^k > 0$ du moment que $A_{i,j} \neq 0$, ce que nous appelons la *condition de rétroprojection complète*. L'adaptation de la méthode de Cimmino par Censor et al., qui consiste à remplacer une projection orthogonale de l'itérée sur l'espace

$$H_i = \{x / \langle A_{i,\bullet}, x \rangle = b_i\}$$

par une projection oblique conserve également cette contrainte puisque la projection obtenue minimise une norme définie par une matrice définie positive.

La pondération qui apparaît dans l'algorithme SART présente au moins trois avantages : premièrement, le bruit qui existe sur les images de projection est

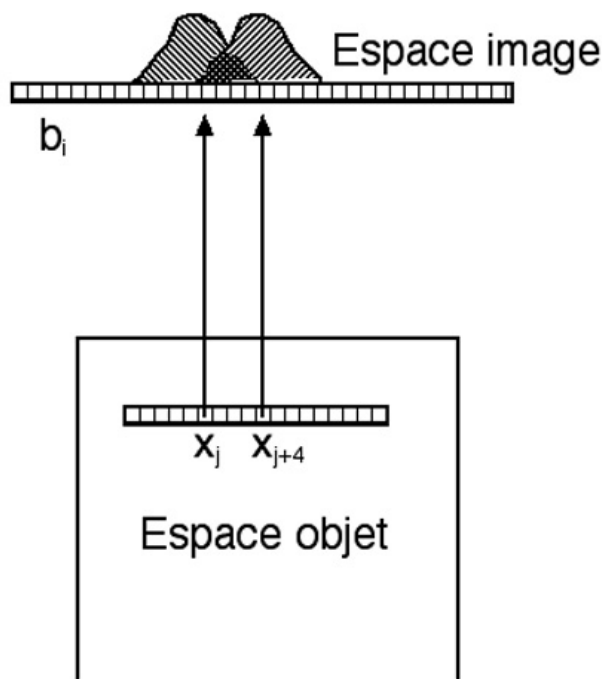


FIG. 8.1 – Chevauchement entre les réponses impulsionnelles de voxels proches. La zone en gris foncé est utilisée pour reconstruire la valeur x_j mais aussi x_{j+4} (et toutes celles entre les voxels j et $j + 4$), conduisant à une reconstruction lissée lorsque seules quelques itérations sont calculées.

réduit par le fait que le voxel est estimé à partir d'une moyenne pondérée sur plusieurs mesures, deuxièmement, seules les mesures correspondant aux coefficients non nuls de la matrice A sont utilisées, ce qui garantit une convergence relativement rapide par rapport à l'algorithme de Cimmino par exemple pour lequel les poids sont tous égaux à $1/M$, même si $A_{i,j} = 0$. Troisièmement enfin, les poids de l'algorithme SART correspondent aux valeurs de la réponse impulsionnelle normalisée, ce qui attribue un poids faible aux mesures affectées d'une statistique faible. Néanmoins, ces bonnes propriétés n'empêchent pas SART de souffrir du même problème que les autres algorithmes, c'est-à-dire la lente reconstruction des hautes fréquences, et nous pensons qu'il est dû à la condition de rétroprojection complète.

Ce problème est illustré par la figure 8.1, où les pixels indiqués en gris foncé, correspondant à une zone de chevauchement de plusieurs réponses impulsionnelles, sont utilisés pour mettre à jour plusieurs voxels. Cet ensemble de mesures communes lisse la nouvelle estimée suivant des plans parallèles à celui du détecteur.

La question qui se pose, après l'introduction de l'algorithme FA-SART au chapitre 7 est donc : quel gain pouvons-nous espérer lorsque nous estimons les valeurs des voxels seulement à partir des mesures correspondant aux sommets - plus ou moins larges - des réponses impulsionnelles ? Nous avons mentionné

en effet que l'estimation de la nouvelle valeur d'un voxel à partir de plusieurs mesures nous permettait de réduire le bruit. La réponse que nous apportons est que nous avons affaire à un bruit haute fréquence et qu'il est par conséquent lentement reconstruit, comme l'ensemble du spectre hautes fréquences. Il est à ce sujet recommandé d'arrêter les itérations à partir d'un certain moment, avant que le bruit ne soit reconstruit. En dépit de la convergence théorique des algorithmes utilisés en tomographie, il est en effet connu que la norme de la différence entre l'estimée et la solution décroît durant les premières itérations avant d'augmenter et de diverger lentement à mesure que le bruit apparaît dans la reconstruction. Par conséquent, tout le problème de la convergence empirique d'un algorithme dépend de ce que nous estimons être la limite entre les fréquences de l'objet à reconstruire et celles du bruit. La figure 8.2 montre les deux principales situations qui peuvent survenir, une réponse impulsionnelle étant donnée : l'objet à reconstruire f , supposé plat dans les deux cas, c'est-à-dire compris dans un plan parallèle au détecteur, peut être composé d'une structure relativement large et homogène (a), dont la projection b couvre un grand nombre de pixels et est dégradée par un bruit haute fréquence ϵ . Dans ce cas, le lissage induit par la condition de rétroprojection complète de l'algorithme SART est utile pour éliminer le bruit sur la nouvelle estimée \tilde{f} et la reconstruction peut ne prendre que quelques itérations. Mais la structure f peut aussi bien présenter des détails fins, c'est-à-dire de la même taille ou plus petits que la réponse impulsionnelle (b). Sa projection b est à la fois lissée par une réponse impulsionnelle large et dégradée par un bruit haute fréquence ϵ . Dans ce cas, la rétroprojection de b selon l'algorithme SART lisse encore la nouvelle estimée, de sorte que le bruit est fortement réduit, mais les hautes fréquences « importantes », celles qui font partie des structures de l'objet, sont également réduites. À l'inverse, la rétroprojection incomplète de FA-SART permet de conserver la trace des hautes fréquences dans la nouvelle estimée \tilde{f} .

Notre hypothèse est alors que pour des structures présentant des détails fins, l'estimation des valeurs des voxels à partir des mesures les plus significatives des réponses impulsionnelles s'accorde mieux avec la présence de détails.

Pour formaliser cette idée, nous avons besoin de formuler en premier lieu certaines hypothèses sur nos images de projection :

HYPOTHÈSES 8.1

i) Les images de projection sont à bande limitée

ii) Le spectre des images de projection peut être divisé en deux intervalles disjoints de la forme $[0, f_{\max}] \dot{\cup} [n_{\min}, n_{\max}]$, où le premier intervalle est le spectre de la projection de l'objet f sans le bruit et le second couvre les fréquences relatives au bruit haute fréquence

Ces hypothèses sont réalistes dans la mesure où le bruit haute fréquence peut généralement être dissocié de la projection de l'objet sur les images de projection acquises, notamment en TEMP et en TEP.

Ainsi, une bonne reconstruction devrait pouvoir retrouver le premier intervalle du spectre, tout en éliminant le second.

Cependant, pour une image de projection correspondant à la $q^{\text{ème}}$ position du détecteur, $q = 0, \dots, P - 1$, la matrice de projection étant notée A^q et les pixels étant indicés par b_i , $i = i_1^q, \dots, i_K^q$ où $K = M/P$ est le nombre de pixels dans une image, l'itération SART dans cette version itérative par blocs est :

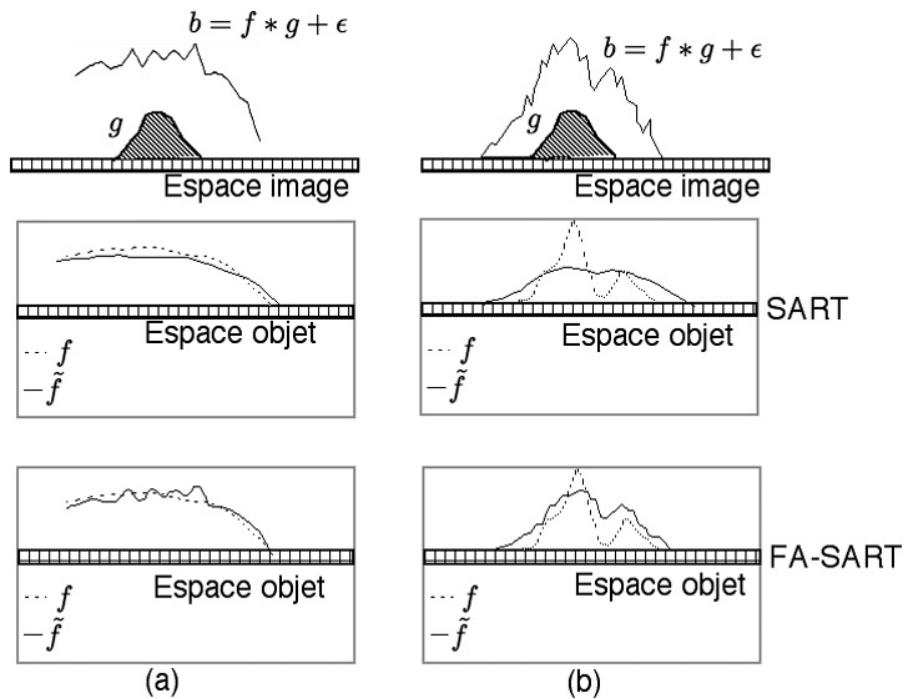


FIG. 8.2 – Comparaison des deux cas exemplaires. Dans le premier cas, un profil a été mesuré, correspondant à la projection d’une structure f large et relativement homogène avec une réponse impulsionnelle g et un bruit ϵ (a). Dans le second cas, le profil mesuré correspond à la projection d’un objet f possédant des détails fins, c’est-à-dire de taille égale ou inférieure à la réponse impulsionnelle (b). Sur la figure (a), utiliser toutes les mesures discrètes de la réponse impulsionnelle pour l’estimation de la valeur des voxels, comme dans l’algorithme SART, conduit à une nouvelle estimée \tilde{f} lissée ce qui réduit la présence du bruit qui resterait présent dans l’estimée obtenue à partir de l’algorithme FA-SART ((a), en bas). Sur la figure (b), des hautes fréquences « importantes » disparaissent sur la nouvelle estimée \tilde{f} du fait du lissage produit avec l’itération SART et davantage d’itérations seront nécessaires pour obtenir une reconstruction adaptée à l’objet. A l’inverse, l’itération FA-SART préserve les détails de la nouvelle estimée \tilde{f} ((b), en bas).

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=i_1^q}^{i_K^q} A_{i,j}^q} \sum_{i=i_1^q}^{i_K^q} \frac{b_i - (A^q x^k)_i}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}^q} A_{i,j}^q \quad (8.3)$$

pour q variant cycliquement de 0 à $P - 1$.

Nous ne considérons pour le moment que la manière dont un plan parallèle au détecteur est reconstruit, comme dans les figures 8.1 et 8.2. On pose $d_i = \frac{b_i - (A x^k)_i}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}}$ pour $i = 1 \dots, M$ qui est la différence en chaque pixel entre la projection mesurée et la projection estimée, corrigée par un masque d'intensité, c'est-à-dire divisée par la contribution de tous les voxels à un pixel donné. Ce masque d'intensité peut être constant, comme c'est le cas en TEMP avec collimateur parallèle, ou avoir une variation angulaire avec un collimateur sténopé, mais dans tous les cas, ses variations sont lentes relativement à celles de l'objet imagé. La quantité f_{\max} de l'hypothèse 8.1 ii) est donc supposée s'appliquer à $(d_i)_{i=1, \dots, M}$ comme elle s'applique à $(b_i)_{i=1, \dots, M}$ et l'itération SART devient

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{\lambda}{\sum_{i=i_1^q}^{i_K^q} A_{i,j}^q} \sum_{i=i_1^q}^{i_K^q} d_i A_{i,j}^q \quad (8.4)$$

Les réponses impulsionnelles normalisées $G_{i,j}^q = A_{i,j}^q / \sum_{i=i_1^q}^{i_K^q} A_{i,j}^q$, sont les mêmes pour tous les voxels situés sur un même plan parallèle au détecteur puisque leur largeur, calculée par l'opérateur A_σ défini au chapitre 3 (définition 3.4), ne dépend que de la coordonnée y le long de la normale au détecteur. La largeur constante des réponses impulsionnelles sur un plan parallèle au détecteur a aussi été montrée expérimentalement par Habraken et al. [26] en TEMP avec collimateur sténopé. Ces réponses impulsionnelles normalisées sont donc les translatées d'une unique fonction (discrète) G^q . Posant $d^q = (d_{i_1^q}, \dots, d_{i_K^q})$, l'itération SART prend la forme d'une convolution :

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \lambda (d^q * G^q)(h_j^q) \quad (8.5)$$

où h_j^q est le centre de la projection du voxel j sur le plan du détecteur à la position q , calculé par l'opérateur A_h de la définition 3.6.

Avec une réponse impulsionnelle modélisée par une gaussienne

$$g(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2}\right)$$

de variance σ^2 , modèle que nous avons adopté dans tout ce travail, la convolution d'une fonction 1D $d(t)$ avec $g(t)$ correspond à un filtrage passe-bas de f avec un filtre gaussien de variance $1/\sigma^2$ puisque l'on a :

$$\mathcal{F}(d * g)(\xi) = \mathcal{F}(d) \cdot \mathcal{F}(g)(\xi) \quad (8.6)$$

$$= \mathcal{F}(d) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-t^2}{\frac{2}{\sigma^2}}\right) \quad (8.7)$$

Ce filtrage passe-bas n'est pas à support borné, ce qui explique que les hautes fréquences finissent par être reconstruites, mais il est connu que plus

de 95% de l'intégrale d'une distribution normale est comprise dans un intervalle $[-2/\sigma; 2/\sigma]$, confirmant que les hautes et même moyennes fréquences disparaissent rapidement et que par conséquent, leur reconstruction puisse demander beaucoup d'itérations. La quantité critique est donc :

$$\mu = \sigma f_{\max} \quad (8.8)$$

dont l'ordre de grandeur détermine si oui ou non l'algorithme SART est adapté à la reconstruction de l'objet. Si $\mu > 2$ par exemple, c'est-à-dire si f_{\max} est plus grand que deux fois l'inverse de l'écart-type, la reconstruction de l'objet par l'algorithme SART sera lente et demandera beaucoup d'itérations avant d'arriver à un résultat qui rende compte des détails de l'objet f .

Dans ces conditions, la solution la plus simple consiste à élargir le filtre passe-bas, ce que nous faisons en convoluant notre image de différence d^q avec une fonction moins large dans le domaine spatial. Nous pourrions pour cela utiliser une fonction gaussienne avec une variance plus petite mais nous avons trouvé plus simple de tronquer la réponse impulsionnelle gaussienne, définissant ainsi l'algorithme FA-SART tel qu'il a été construit au chapitre 7.

Nous démontrons ainsi que le fait de changer le filtrage de l'équation 8.5, en remplaçant la réponse impulsionnelle normalisée par sa tronquée permet d'accélérer la reconstruction des hautes fréquences en diminuant l'effet de lissage sur des plans parallèles au détecteur, résultat que nous avons obtenu en une dimension mais qui est aisément transposable en deux dimensions. Enfin, puisque le détecteur décrit une courbe autour de l'objet - généralement un cercle ou un arc de cercle -, ce gain en résolution sera obtenu dans l'ensemble des directions parallèles au détecteur et sera donc isotrope.

8.2 Convergence de l'algorithme FA-SART

Puisque l'algorithme FA-SART a été conçu pour accélérer seulement la reconstruction des hautes fréquences, il serait sans doute infructueux de donner une idée de ses performances par une analyse asymptotique : pour certains objets, l'accélération sera notable par rapport à SART et pour d'autres non. Nous verrons dans les exemples et la discussion du chapitre 9 sous quelles conditions nous gagnons à utiliser l'algorithme FA-SART et comment l'utiliser, notamment en fonction du paramètre de seuillage de la réponse impulsionnelle ρ . Nous donnons néanmoins ici une preuve de sa convergence sous certaines hypothèses, suggérée par un relecteur anonyme de la revue *International Journal of Biomedical Imaging*, au cours du processus d'édition de notre article [34].

Nous rappelons que l'algorithme FA-SART, dans sa version simultanée, calcule l'itération :

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{\lambda}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}^\rho} \sum_{i=1}^M \frac{b_i - (Ax^k)_i}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}^\rho} A_{i,j}^\rho \quad (8.9)$$

où A^ρ est la matrice composée des blocs $A^{q,\rho}$ correspondants aux opérateurs de projection pour chaque position q du détecteur, $q = 0, \dots, P-1$, dont les colonnes ont été seuillées en mettant à zéro les coefficients $A_{i,j}$ inférieurs à ρ fois le maximum de la colonne ($A_{\bullet,j}^q$) (voir la définition 7.1.1).

La version matricielle de FA-SART s'écrit :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + V^\rho(A^\rho)^T W^\rho(b - \langle A, x^{(k)} \rangle) \quad (8.10)$$

avec $V^\rho = \text{diag}(\frac{1}{\sum_{i=1}^M A_{i,j}^\rho})$ une matrice diagonale $N \times N$ et $W^\rho = \text{diag}(\frac{1}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}^\rho})$ une matrice diagonale $M \times M$. Cette équation peut être réécrite, posant $C_{i,j} = A_{i,j}^\rho / (\sum_i A_{i,j}^\rho \sum_j A_{i,j}^\rho)$ comme :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda C^T (b - Ax^{(k)}) \quad (8.11)$$

qui peut également s'écrire $x^{k+1} = Tx^k$ où T est l'opérateur affine :

$$Tx = (I - \lambda C^T A)x + \lambda C^T b \quad (8.12)$$

ayant pour partie linéaire

$$Lx = (I - \lambda C^T A)x. \quad (8.13)$$

En comparaison avec l'algorithme SART, l'analyse de la convergence de FA-SART est rendue plus difficile par le fait que l'opération de rétroprojection est réalisée par la matrice C^T au lieu de la matrice $VA^T W$. Cette dernière expression est en effet reliée à l'équation normale

$$A^T W A x = A^T W b \quad (8.14)$$

dont les solutions minimisent aussi la norme $\|b - Ax\|_W^2$ (voir [37] pour les détails). Mais ici, l'équation normale correspondante est :

$$C^T A x = C^T b \quad (8.15)$$

pour laquelle nous ne savons pas si $C^T A$ est non singulière lorsque A est de rang maximal, bien que la structure de C soit fortement reliée à celle de A . Nous utilisons alors la théorie des contractions, qui est suffisamment générale et ne repose pas en tout cas sur les propriétés de l'équation normale. Nous introduisons les définitions suivantes :

DÉFINITION 8.1 Soit A une application linéaire de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N (nous nous limitons aux matrices réelles). Si $Ax = \lambda x$, où $x \neq 0$ et λ est un scalaire réel ou complexe, alors x est appelé vecteur propre et λ valeur propre. L'ensemble de toutes les valeurs propres de A est appelé le spectre de A et noté $S(A)$.

DÉFINITION 8.2 Le spectre $S(A)$ de A étant défini, $\rho(A) = \max_{\lambda \in S(A)} |\lambda|$ est appelé le rayon spectral de A et représente donc la valeur absolue maximale parmi les valeurs propres de A .

Nous avons alors le lemme :

LEMME 8.1 Soit T une matrice non singulière et soit $\|x\|_T = \|Tx\|_\infty$ et $\|A\|_T = \sup_{x \neq 0} (\|Ax\|_T / \|x\|_T)$, la norme matricielle induite. Alors

- (a) $\|A\|_T = \|TAT^{-1}\|_\infty$.
- (b) Pour tout $\epsilon > 0$ et toute matrice A , il existe une matrice non singulière T pour laquelle

$$\|A\|_T \leq \rho(A) + \epsilon.$$

Ce lemme et sa preuve peuvent être trouvés chez [5] (lemme 5.1). Il nous servira par la suite en nous permettant d'interpréter le rayon spectral d'une matrice comme étant arbitrairement proche d'une norme de cette matrice. Cette norme pourra néanmoins paraître peu naturelle mais nous n'aurons pas à l'utiliser en pratique.

THÉORÈME 8.1 (Convergence de FA-SART pour $M = N$) *Si $M = N$, supposons que A et C soient inversibles et que $C^T A$ soit non singulière et ait des valeurs propres positives. Alors l'itération définie par l'opérateur T converge vers l'unique solution du système.*

Preuve Puisque A est inversible, il existe une unique solution de $Ax = b$. Si le rayon spectral $\rho(L)$ de la matrice $L = I - C^T A$ vérifie $|\rho(L)| < 1$, alors, il existe selon le lemme 8.1 une norme matricielle de L arbitrairement proche de μ et par conséquent, cette norme de L est inférieure à un. L'opérateur T est ainsi une contraction stricte par rapport à cette norme et l'itération converge vers l'unique solution de $Ax = b$.

Si le rayon spectral $\rho(L)$ de L ne vérifie pas $|\rho(L)| < 1$, nous pouvons alors nous retourner vers la version paramétrique de FA-SART et sélectionner un paramètre de relaxation λ tel que le rayon spectral de $L = I - \lambda C^T A$ soit inférieur à un, ce qui est garanti si la matrice $C^T A$ a des valeurs propres positives. L'opérateur T est ainsi une contraction stricte par rapport à une norme arbitrairement proche du rayon spectral et l'itération converge vers l'unique solution de $Ax = b$. \square

THÉORÈME 8.2 (Convergence de FA-SART pour $M > N$) *Si $M > N$, supposons que $C^T A$ soit inversible et ait des valeurs propres positives. Alors l'itération définie par l'opérateur T converge vers l'unique solution du système $C^T Ax = C^T b$.*

Preuve Puisque $M > N$, il n'y a probablement pas de solution au système $Ax = b$, mais l'équation $C^T Ax = C^T b$ a une unique solution, qui est alors une solution approchée de $Ax = b$. Comme précédemment, en vertu du lemme 8.1, si le rayon spectral $\rho(L)$ de la matrice $L = I - C^T A$ vérifie $|\rho(L)| < 1$, il existe une norme matricielle de L arbitrairement proche de $\rho(L)$ et cette norme de L est plus petite que un. Ainsi, l'opérateur T est une contraction stricte par rapport à cette norme et l'itération converge vers le point fixe de T , alors unique solution de $C^T Ax = C^T b$.

Si le rayon spectral ne vérifie pas $|\rho(L)| < 1$, nous nous retournons vers la version paramétrique de FA-SART et, sélectionnant un paramètre de relaxation λ tel que le rayon spectral de $L = I - \lambda C^T A$ soit inférieur à un, ce qui est garanti si la matrice $C^T A$ a des valeurs propres positives, l'opérateur T est alors un contraction stricte par rapport à une norme arbitrairement proche de ce rayon spectral. L'itération converge alors vers l'unique solution de $C^T Ax = C^T b$. \square

Le cas sous-déterminé ne nous permet pas d'utiliser la théorie des contractions strictes, dans la mesure où il y a généralement plusieurs solutions à l'équation $Ax = b$. Ceci implique que A est non injective et il en est donc de même de $C^T A$. En d'autres termes, certaines valeurs propres de $L = I - C^T A$ sont égales

à un alors que nous savons qu'une matrice ne peut être contractante que si elle n'a pas de valeur propre sur le cercle unité. Nous allons voir cependant que sous certaines conditions sur L , l'itération FA-SART converge.

THÉORÈME 8.3 (Convergence de FA-SART pour $M < N$) *Si $M < N$, supposons que L soit diagonalisable et que toutes ses valeurs propres qui ne sont pas sur le cercle unité soient plus petites que un. Alors, si le système $Ax = b$ admet au moins une solution, la séquence itérative $x^{k+1} = Tx^k$ converge vers une solution de $Ax = b$.*

Preuve Soient μ_j , for $j = 1, \dots, N$ les valeurs propres de L associées aux vecteurs propres u^j . Nous définissons la norme $\| \cdot \|_U$ pour des vecteurs x par

$$\| x \|_U = \sum_{j=1}^N | a_j | \quad (8.16)$$

pour

$$x = \sum_{j=1}^N a_j u^j. \quad (8.17)$$

Supposons que $|\mu_j| < 1$ pour $j = 1, \dots, K$ et que $\mu_j = 1$ pour $j = K + 1, \dots, N$. Puisque le système $Ax = b$ admet au moins une solution, il existe \hat{x} un point fixe arbitraire de T avec

$$\hat{x} = \sum_{j=1}^N \hat{a}_j u^j. \quad (8.18)$$

Posant $d = \lambda C^T b$, d se décompose dans la base $\{u_j\}$, $j = 1, \dots, N$ comme :

$$d = \sum_{j=1}^N d_j u^j \quad (8.19)$$

Du fait que \hat{x} soit point fixe de T , nous avons $T\hat{x} = \hat{x} = L\hat{x} + d$ et

$$\sum_{j=1}^N \hat{a}_j u^j = \sum_{j=1}^N (\mu_j \hat{a}_j + d_j) u^j. \quad (8.20)$$

Alors, avec

$$x^k = \sum_{j=1}^N a_j^k u^j \quad (8.21)$$

et

$$x^{k+1} = Lx^k + d = \sum_{j=1}^N (\mu_j a_j^k + d_j) u^j, \quad (8.22)$$

nous avons

$$x^k - \hat{x} = \sum_{j=1}^N (a_j^k - \hat{a}_j) u^j. \quad (8.23)$$

Appliquant T à cette expression, nous obtenons :

$$x^{k+1} - \hat{x} = \sum_{j=1}^K \mu_j (a_j^k - \hat{a}_j) w^j + \sum_{j=K+1}^N (a_j^k - \hat{a}_j) w^j. \quad (8.24)$$

Par conséquent, nous avons

$$\|x^k - \hat{x}\|_U = \sum_{j=1}^K |a_j^k - \hat{a}_j| + \sum_{j=K+1}^N |a_j^k - \hat{a}_j|, \quad (8.25)$$

tandis que

$$\|x^{k+1} - \hat{x}\|_U = \sum_{j=1}^K |\mu_j| \cdot |a_j^k - \hat{a}_j| + \sum_{j=K+1}^N |a_j^k - \hat{a}_j|. \quad (8.26)$$

Nous obtenons ainsi :

$$\|x^k - \hat{x}\|_U - \|x^{k+1} - \hat{x}\|_U = \sum_{j=1}^K (1 - |\mu_j|) \cdot |a_j^k - \hat{a}_j| > 0. \quad (8.27)$$

Il s'ensuit que la suite $\{\|x^k - \hat{x}\|_U\}$ est décroissante tandis que les suites $\{|a_j^k - \hat{a}_j|\}$ convergent vers zéro pour tout $j = 1, \dots, K$ car :

$$|a_j^{k+1} - \hat{a}_j| = |\mu_j a_j^k + d_j - \mu_j \hat{a}_j - d_j| = |\mu_j (a_j^k - \hat{a}_j)|$$

et $|\mu_j| < 1$.

La suite $\{x^k\}$ vérifie également $\|x^{k+1}\|_U \leq \|\hat{x}\|_U + \|x^k\|_U$ et est donc bornée. Elle admet un point d'accumulation x^* avec

$$x^* = \sum_{j=1}^N a_j^* w^j \quad (8.28)$$

de sorte que nous avons $\{|a_j^k - a_j^*|\} \rightarrow 0$ au moins pour $j = 1, \dots, K$ et il existe une sous-suite $\{x^{k_l}\}$ of $\{x^k\}$ qui converge vers x^* . On a donc $\hat{a}_j = a_j^*$ pour $j = 1, \dots, K$. Par conséquent, nous pouvons conclure que :

$$\hat{x} - L\hat{x} = \sum_{j=1}^K (\hat{a}_j w^j - \mu_j \hat{a}_j w^j) + \sum_{j=K+1}^N (\hat{a}_j w^j - \hat{a}_j w^j) \quad (8.29)$$

$$= \sum_{j=1}^K (1 - \mu_j) \hat{a}_j w^j \quad (8.30)$$

$$= x^* - Lx^*, \quad (8.31)$$

de sorte que x^* est une autre solution du système $(I - L)x = d$. Ainsi, \hat{x} peut être remplacé par x^* dans (8.27) et la suite $\{\|x^k - x^*\|_U\}$ est décroissante. Mais une sous-suite converge vers zéro et donc la suite toute entière doit converger vers zéro. Ainsi $\{x^k\}$ converge vers la solution x^* . \square

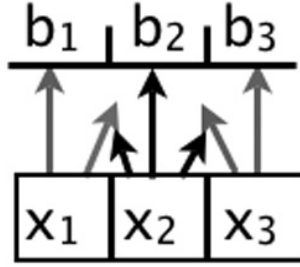


FIG. 8.3 – Exemple de modélisation pour un problème trivial de tomographie.

8.3 Un exemple numérique simple

Nous avons travaillé sur une exemple très simple à trois inconnues et trois équations pour apprécier le comportement des algorithmes SART et FA-SART. Sur la figure 8.3, l'activité dans le volume x s'écrit :

$$\sum_{j=1}^3 x_j v_j$$

où v_j , $j = 1, 2, 3$ sont les fonctions de base, ici des pixels carrés.

Cette activité conduit à l'émission de photons qui sont détectés sur un plan découpé en trois « dexels » (des pixels à une dimension). La matrice qui modélise cette émission et détection de photons est :

$$A = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/8 & 0 \\ 1/4 & 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1/8 & 3/4 \end{pmatrix}$$

Dans cet exemple, étant donné que seules deux valeurs sont non nulles par colonne, seuiliser les colonnes de A avec tout paramètre de la forme $0 < \rho < 1$ conduit à la même matrice A^ρ de la forme suivante :

$$A^\rho = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

L'itération SART s'écrit :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda V A^T W (b - \langle A, x^{(k)} \rangle) \quad (8.32)$$

où $V = \text{diag} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^3 A_{i,j}^\rho} \right)$ et $W = \text{diag} \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^3 A_{i,j}^\rho} \right)$ sont toutes deux des matrices 3×3 .

L'itération FA-SART s'écrit :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda V^\rho (A^\rho)^T W^\rho (b - \langle A, x^{(k)} \rangle) \quad (8.33)$$

où $V^\rho = \text{diag} \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^3 A_{i,j}^\rho} \right)$ et $W^\rho = \text{diag} \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^3 A_{i,j}^\rho} \right)$ sont toutes deux des matrices 3×3 . Posant $C_{i,j} = A_{i,j}^\rho / \left(\sum_i A_{i,j}^\rho \sum_j A_{i,j}^\rho \right)$, l'itération FA-SART devient :

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda C^T (b - \langle A, x^{(k)} \rangle). \quad (8.34)$$

Dans notre exemple, la matrice C est diagonale et s'écrit : $C = \text{diag}(4/3)$. Pour appliquer le théorème de convergence dans le cas $M = N$ (théorème 8.1), il nous faut vérifier que la matrice $C^T A$ a toutes ses valeurs propres positives, ce qui est le cas ici, les valeurs propres étant $2/3, 1$ et $4/3$.

Etant sûr que les deux algorithmes convergent, nous appliquons alors les itérations SART et FA-SART sur deux cas, représentatifs respectivement de la présence ou l'absence de hautes fréquences dans l'objet à reconstruire. Les calculs ont été effectués sur le logiciel MAPLE.

8.3.1 Présence de hautes fréquences

Nous avons défini de manière informelle ce que nous entendions par hautes fréquences, par comparaison avec la taille de la réponse impulsionnelle. Les réponses impulsionnelles s'étalent ici sur deux ou trois dexels, si bien que nous parlons de hautes fréquences pour des variations significatives de valeurs ayant lieu entre deux pixels consécutifs. Nous définissons l'objet à reconstruire par $x = (0, 10, 0)$. La projection de x sur le détecteur est

$$b = Ax = \begin{pmatrix} 5/4 \\ 15/2 \\ 5/4 \end{pmatrix}$$

Iteration FA-SART

En appliquant l'algorithme FA-SART (équation 8.34) avec A^p défini ci-dessus et $\lambda = 1$, nous obtenons les itérées suivantes :

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (5/3, 10, 5/3) \\ x^{(2)} &= (0, 80/9, 0) \\ x^{(3)} &= (5/27, 10, 5/27) \\ x^{(4)} &= (0, 800/81, 0) \end{aligned}$$

Sur cet exemple, la deuxième itérée montre déjà un bon résultat, tandis que la quatrième a une erreur en norme l^∞ inférieure à 2%.

Iteration SART

L'itération SART (équation 8.32) avec $\lambda = 1$ donne :

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= (18/7, 34/7, 18/7) \\ x^{(2)} &= (486/245, 1478/245, 486/245) \\ x^{(3)} &= (13122/8575, 59506/8575, 13122/8575) \\ x^{(4)} &= (54294/300125, 2292662/300125, 354294/300125) \end{aligned}$$

...

et l'évaluation de la 7^{ème} itérée nous donne :

$x^{(7)} = (.5419369764, 8.916126047, .5419369764)$ qui démontre encore une erreur en norme l^∞ supérieure à 10%.

Ceci montre que tandis que les algorithmes SART et FA-SART convergent tous les deux, FA-SART accélère nettement la reconstruction de cet objet par son aisance à attribuer des valeurs très différentes à des pixels proches. SART, qui a tendance à lisser les valeurs des pixels reconstruits demande donc largement plus d'itérations pour faire apparaître des différences fortes entre pixels voisins.

8.3.2 Absence de hautes fréquences

Si nous définissons l'objet par $x = (9, 10, 11)$, qui donc ne laisse pas apparaître de différences relatives importantes entre pixels voisins, la projection de x est :

$$b = Ax = \begin{pmatrix} 8 \\ 25/2 \\ 19/2 \end{pmatrix}$$

Iteration FA-SART

En appliquant l'algorithme FA-SART (équation 8.34) avec A^p défini ci-dessus et $\lambda = 1$, nous obtenons les itérées suivantes :

$$x^{(1)} = (32/3, 50/3, 38/3)$$

$$x^{(2)} = (71/9, 80/9, 89/9)$$

$$x^{(3)} = (248/27, 290/27, 302/27)$$

$$x^{(4)} = (719/81800, 81881/81)$$

et l'évaluation de cette dernière itérée nous donne :

$$x^{(4)} = (8.876543210, 9.876543210, 10.87654321) \text{ qui a une erreur } l^\infty \text{ de } 0.12345678.$$

Iteration SART

L'itération SART (équation 8.32) avec $\lambda = 1$ donne :

$$x^{(1)} = (131/14, 10, 149/14)$$

$x^{(2)} = (1789/196, 10, 2131/196)$ dont l'évaluation est :

$$x^{(2)} = (9.127551020, 10, 10.87244898) \text{ soit une erreur comparable à celle de}$$

FA-SART après quatre itérations.

Ainsi cette fois, l'algorithme SART semble mieux s'adapter aux variations lentes de l'objet à reconstruire de par le lissage qu'il réalise.

8.3.3 Conclusions

Il semble donc que les résultats obtenus sur cet exemple numérique concordent avec les résultats que nous avons dégagés dans les sections 8.1 et 8.2, concernant l'accélération de la reconstruction des hautes fréquences par l'algorithme FA-SART par rapport à l'itération SART et la convergence de FA-SART. Une discussion approfondie, basée sur des résultats obtenus à partir de données variées, sera donnée dans le dernier chapitre au sujet de l'adéquation de l'algorithme au type de structure à reconstruire, en fonction de son paramètre de seuillage ρ .

Chapitre 9

Résultats, discussion et comparaisons

Les différents objectifs de ce chapitre sont de soutenir l'analyse faite au chapitre 8 sur l'accélération obtenue avec l'algorithme FA-SART pour la reconstruction des hautes fréquences et sa convergence empirique, même dans le cas de données réelles, bruitées et pour des matrices de projection A du système $Ax = b$ qui ne soient pas carrées.

Ces exemples nous serviront de base à une discussion centrée sur la meilleure manière d'utiliser l'algorithme FA-SART en fonction du type d'objet à reconstruire. Ces exemples, numériques, sur fantômes et sur petit animal ont pour une bonne part déjà été publiés, notamment dans [19], [33] et [34].

Pour cette utilisation pratique de l'algorithme, il était naturel de l'utiliser dans sa forme par blocs composés d'une image de projection, et nous avons donc travaillé avec l'algorithme 7.2 que nous rappelons ici :

Pour une image de projection correspondant à la $q^{\text{ème}}$ position du détecteur, $q = 0, \dots, P - 1$, la matrice de projection est notée A^q et les pixels sont notés b_i , $i = i_1^q, \dots, i_K^q$ où $K = M/P$ est le nombre de pixels dans une image. Nous utilisons alors, dans les opérations de rétroprojection uniquement, les matrices $A^{q,\rho}$ de la définition 7.1.1. L'itération FA-SART dans sa version itérative par blocs est alors :

ALGORITHME 9.1 (BI FA-SART)

$$x_j^{k+1} = x_j^k + \frac{\lambda_k}{\sum_{i=i_1^q}^{i_K^q} A_{i,j}^{q,\rho}} \sum_{i=i_1^q}^{i_K^q} \frac{b_i - (A^q x^k)_i}{\sum_{j=1}^N A_{i,j}^{q,\rho}} A_{i,j}^{q,\rho}$$

pour q variant entre les différentes positions du détecteur, de 0 à $P - 1$. L'ordre des projections utilisé a été calculé de manière à ce que deux positions q traitées successivement par l'algorithme soient aussi orthogonales que possible.

9.1 Résultats numériques

9.1.1 Reconstruction des hautes fréquences

Nous commençons, comme au chapitre 6, à donner des résultats numériques qui nous permettront de dégager les propriétés de l'algorithme FA-SART avec moins d'ambiguïté, l'objet à reconstruire étant connu par avance. Nous reprenons l'exemple d'un objet composé de trois petits cylindres proches les uns des autres et d'un plus gros cylindre séparé a été reconstruit pour trois diamètres simulés d'ouvertures du collimateur sténopé différents, respectivement 2,5 mm, 1,5 mm et 0,25 mm. Les résultats obtenus sur la figure 9.1.1, ont tous été obtenus en fixant le nombre d'itérations à trois, une itération étant le traitement de l'ensemble des équations de projections. Les figures (d), (e) et (f) ont été obtenus par une reconstruction SART, également appliquée par blocs composés d'une image de projection et démontrent, comme cela a été vu au chapitre 6, que trois itérations ne permettent pas une déconvolution complète de la réponse impulsionnelle lorsque celle-ci est large (figure (d)). C'est, à l'inverse, dans ce cas que l'algorithme FA-SART, dont le seuil a été réglé ici à $\rho = 1$, permet une accélération importante (figure (a)) : les détails à reconstruire étant de dimension inférieure à la réponse impulsionnelle, il est avantageux d'estimer la valeur des voxels uniquement à partir de la mesure la plus centrale de la réponse impulsionnelle (avec $\rho = 1$, nous ne gardons en effet qu'un coefficient par colonne dans la matrice A^ρ qui sert à la rétroprojection). Pour une simulation faite avec une ouverture du collimateur sténopé large, de 2,5 mm, la reconstruction FA-SART permet donc, après trois itérations de distinguer les trois petits cylindres, ce qui n'est pas le cas sur la reconstruction SART.

Lorsque le diamètre d'ouverture est de 1,5 mm, les trois cavités apparaissent cette fois sur la reconstruction SART (figure (e)), mais elles sont mieux séparées par la reconstruction FA-SART (figure (b)).

Enfin, pour un diamètre d'ouverture négligeable de 0,25 mm, il n'y a plus vraiment de différence visible entre la reconstruction FA-SART (figure (c)) et SART (figure (f)), l'opération de déconvolution des projections devenant presque inexistante dans ce cas.

9.1.2 Reconstruction d'un objet bruité

En ajoutant un bruit gaussien dont l'écart-type s'élève à 7% du maximum d'intensité sur les projections sans bruit avec un diamètre d'ouverture de 1,5 mm, nous pouvons évaluer les performances des algorithmes SART et FA-SART dans des conditions réalistes d'utilisation. Sur la figure 9.1.2, les résultats obtenus sont évidemment moins bon que dans le cas où aucun bruit n'a été rajouté sur l'image, pour l'algorithme FA-SART avec $\rho = 1$ (figure (a)), comme pour l'algorithme SART (figure (b)). L'algorithme FA-SART en particulier semble mal réagir au bruit, surtout sur le rendu du cylindre le plus large, qui n'apparaît plus de manière homogène. La reconstruction SART est relativement propre du point de vue du bruit mais les trois petits cylindres ne sont plus vraiment visibles comme tels sur l'image. Il semble par conséquent que nous devrions sélectionner un paramètre ρ intermédiaire entre 0, qui correspond à l'algorithme SART, et 1. Nous préférons cependant une manière de faire alternative, qui consiste à faire décroître ρ durant les itérations. Au cours des trois

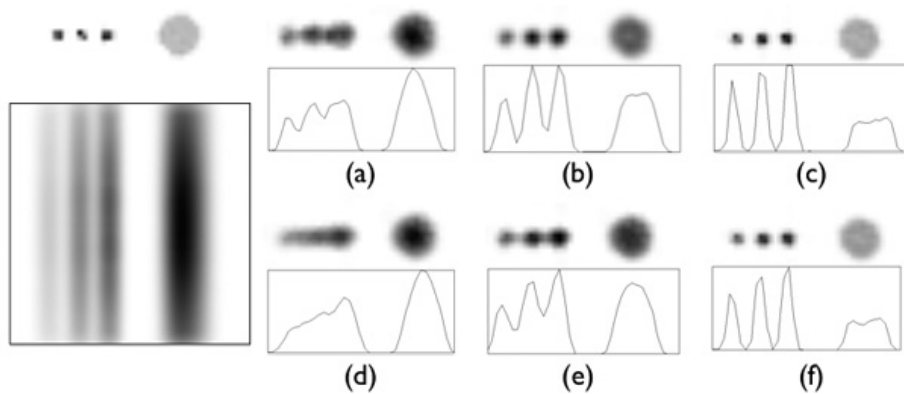


FIG. 9.1 – Simulation avec un fantôme informatique composé de trois petits cylindres et un cylindre plus gros (à gauche). Les figures (a)-(b)-(c) montrent les résultats obtenus après trois itérations de l’algorithmes FA-SART avec $\rho = 1$, respectivement pour des projections simulées avec un diamètre d’ouverture de 2,5 mm, 1,5 mm et 0,025 mm. Les figures (d)-(e)-(f) montrent les résultats obtenus après trois itérations de l’algorithmes SART, respectivement pour des projections simulées avec un diamètre d’ouverture de 2,5 mm, 1,5 mm et 0,025 mm. Les résultats obtenus sont meilleurs avec l’algorithme FA-SART lorsque la réponse impulsionnelle est large car c’est alors que l’opération de déconvolution des projections est importante. Une des soixante images de projection est montrée en bas à gauche, pour un diamètre d’ouverture de 1,5 mm.

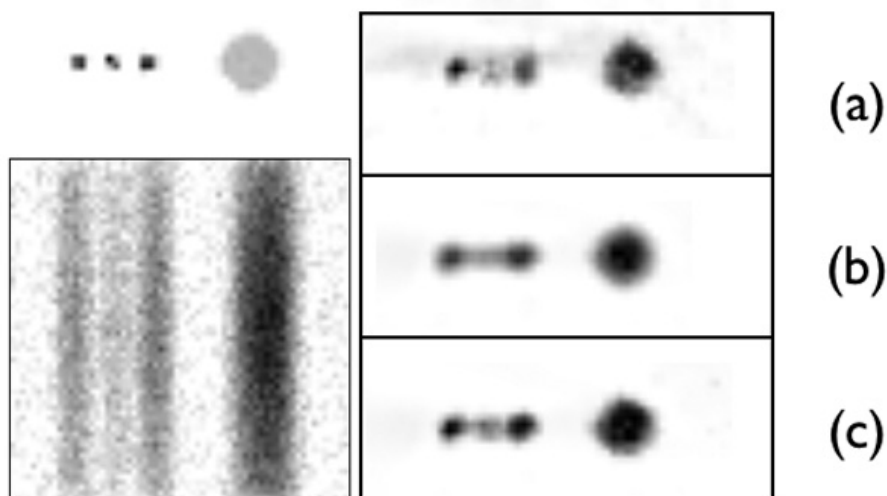


FIG. 9.2 – Fantôme informatique (en haut à gauche) avec un bruit important rajouté sur les images de projection (en bas à gauche). Les trois itérations calculées avec l’algorithme FA-SART, $\rho = 1$ (a) donnent un résultat qui est trop sensible au bruit. Celles qui sont calculées avec SART sont trop lissées, faisant disparaître le bruit de la reconstruction mais aussi les détails de l’objet (b). La figure (c), obtenue avec trois itérations de l’algorithme FA-SART en changeant successivement ρ (ici, $\rho = 1, 0,5$ et 0) permet de combiner le meilleur des deux reconstructions (a) et (b) : le bruit est absent de l’image reconstruite mais les détails importants de l’objet sont encore visibles.

itérations, nous avons donc fait prendre successivement à ρ les valeurs 1, 0,5 et 0, ce qui améliore sensiblement le résultat, visible sur la figure (c). En finissant par une ou plusieurs itérations SART, l’algorithme FA-SART devient alors simplement un préconditionneur du système $Ax = b$, ce qui permet de s’affranchir d’éventuels problèmes de convergence, puisque la démonstration de convergence dont nous disposons fait apparaître des conditions sur les valeurs propres des opérateurs que nous ne sommes pas toujours en mesure de vérifier.

Enfin, les projections bruitées, dont l’une est montrée en bas à gauche de la figure 9.1.2 semblent indiquer que notre hypothèse selon laquelle le spectre correspondant à l’image de la projection idéale de l’objet et le spectre du bruit peuvent être séparés, est justifiée, le bruit se situant dans une gamme de fréquence assez nettement plus élevée que les détails les plus fins de l’objet.

9.2 Fantôme physique

Nous avons repris le fantôme en plexiglas du chapitre 6, composé de trois types de cavités cylindriques de diamètres respectifs 1 mm, 1,5 mm et 2 mm et séparés par une distance égale à leur diamètre. Les cavités ont été remplies avec 20 MBq de ^{99m}Tc . Nous avons acquis 60 projections de 64×64 pixels sur un arc de 180° et 1 minute par projection. Les résultats, montrés sur la figure 9.2 ont

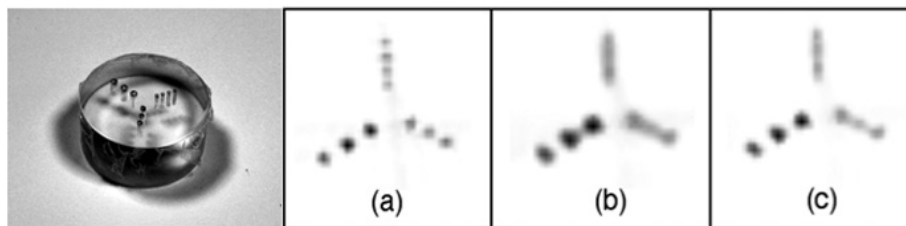


FIG. 9.3 – Photo du fantôme avec trois types de cavités (diamètre 1 mm, 1.5 mm et 2 mm séparées par la même distance) pouvant être remplies avec un traceur radioactif (gauche). Coupes transaxiales de la reconstruction tomographique calculée avec 3 itérations de FA-SART et $\rho = 1$ (a), 3 itérations de SART (b) et 10 itérations de SART (c).

été obtenus avec 3 itérations de l’algorithme FA-SART, $\rho = 1$ (a), 3 itérations de l’algorithme SART (b) et 10 itérations de l’algorithme SART (c). Pour cet objet fortement détaillé, relativement à l’ouverture du collimateur sténopé qui était ici de 1,5 mm ce qui, combiné avec la résolution intrinsèque du détecteur, aboutit à une réponse impulsionnelle large, les résultats obtenus avec 3 itérations de FA-SART sont meilleurs que ceux obtenus avec 3 ou même 10 itérations de SART. Le calcul de ces itérations FA-SART est lui-même environ deux fois plus rapide qu’avec SART puisque moins de calculs sont effectués, les valeurs des voxels n’étant estimées qu’à partir d’une mesure lorsque $\rho = 1$, contre plusieurs dizaines pour $\rho = 0$.

9.3 Résultats sur animaux

Nous terminerons enfin avec ce qui représente l’objectif de cette thèse, c’est-à-dire des résultats *in vivo* sur le petit animal. Ces résultats ne peuvent être compris qu’à la condition de s’être assuré au préalable du bon fonctionnement de l’ensemble : système d’acquisition, logiciel de reconstruction et modélisation. L’application d’une technique d’imagerie complexe à des organismes vivants donne lieu en effet à une classe de problèmes potentiels particuliers, et ne peut être assimilée à l’imagerie des objets inertes, malgré toutes les précautions prises pour stabiliser au maximum le métabolisme de l’animal.

Les problèmes peuvent être dus à la méconnaissance relative des effets du traceur chez le rat et la souris. Nous avons dit que la technique d’imagerie TEMP était largement utilisée chez l’homme depuis plus de trente ans et les traceurs que nous avons utilisés chez le petit animal sont donc ceux qui ont été développés pour l’homme. Les similarités entre l’organisme humain et ces organismes-modèles sont suffisamment établies pour servir de base à l’idée selon laquelle le traceur relatif à une fonction chez l’homme devrait pouvoir servir à l’examen de la même fonction chez le petit animal. Des contre-exemples existent pourtant, mais qui ne peuvent être jugés tels qu’à la condition de s’être assuré que le problème perçu ne pouvait être associé à un autre dysfonctionnement. Pour un traceur dont l’efficacité est établie, les autres sources de problèmes strictement relatifs aux organismes vivants sont la difficulté à injecter le tra-

ceur, puis, pendant l'acquisition, de s'assurer de la stabilité de l'animal, tant en ce qui concerne son immobilité (relative puisque des mouvements respiratoires subsistent) que la régularité de son métabolisme. Sa température et sa fréquence cardiaque doivent ainsi être contrôlées par la quantité de gaz anesthésiant qui lui est administrée et la température de ce gaz, mélangé à de l'air, l'animal pouvant aussi être couvert si besoin.

L'ensemble des résultats numériques et sur fantômes physiques que nous avons donnés jusque-là était donc nécessaire, pour valider l'ensemble de la démarche expérimentale, allant du niveau mécanique, puisque nous avons dû corriger un défaut de rotation du dispositif, jusqu'aux aspects purement numériques, liés par exemple à la discrétisation EAR que nous avons utilisée. La validation de ces différentes étapes nous convainc, en cas d'anomalie sur l'image reconstruite de l'animal, que ce que nous percevons comme un problème doit être compris au niveau biologique et non numérique ou informatique.

9.3.1 Préparation des animaux

Pour les souris, des femelles adultes CD1 normales de 30 g ont été utilisées (Clinique de la Souris, Illkirch), tandis que les rats étaient des Wistar pesant 350 g (Faculté de Médecine de Strasbourg). L'une des extrémités du support de l'animal était attachée à un tube respiratoire connecté à un système d'anesthésie pour petit animal, capable de délivrer un mélange de gaz chauffé (de l'air et entre 1,5% et 2,5% d'isoflurane) pour maintenir constante la température de l'animal durant l'acquisition (Minerve, Esternay). Pour la synchronisation à l'ECG, nous avons utilisé des aiguilles électrodes sous-cutanées reliées à un électrocardiographe (Physiogard RSM 784 ODAM, Wissembourg). Pour toutes les expérimentations faites ici, la veine fémorale ou caudale a été cathétérisée pour l'administration du traceur par voie intraveineuse.

Pour la perfusion myocardique chez le rat, 600 MBq de ^{99m}Tc -tetrofosmin (General Electric Healthcare, Little Chalfont, Grande-Bretagne) ont été injectés dans 1 mL d'une solution aqueuse. Pour la perfusion cérébrale, les mêmes volume et activité de ^{99m}Tc -HMPAO (General Electric Healthcare, Little Chalfont, Grande-Bretagne) ont été utilisés.

Pour la perfusion myocardique chez la souris, 400 MBq de ^{99m}Tc -tetrofosmin (General Electric Healthcare, Little Chalfont, Grande-Bretagne) ont été utilisés. Le volume injecté de traceur variait entre 0,15 et 0,26 mL de manière à éviter tout changement significatif du volume sanguin global qui, chez cet animal, est de l'ordre de 2 à 3 mL. Pour la perfusion cérébrale de la souris, les mêmes volume et activité de ^{99m}Tc -HMPAO (General Electric Healthcare, Little Chalfont, Grande-Bretagne) ont été utilisés.

Les acquisitions de perfusion myocardique ont commencé 15 à 20 minutes après l'administration du traceur pour assurer un meilleur contraste entre le cœur et les tissus mous. Le rayon de rotation de la gamma-caméra était de 50 mm, soit un facteur de grossissement moyen de $\times 2,5$ environ pour les rats, tandis que pour les souris, il était de 25 mm soit un facteur de grossissement moyen de $\times 5$, avec un diamètre d'ouverture du collimateur sténopé de 1,5 mm. Une fenêtre de 20% centrée sur le pic photoélectrique de 140 keV du ^{99m}Tc a été utilisée. La trajectoire de la gamma-caméra a suivi un arc de 180° autour de la partie ventrale de l'animal et 48 projections de 64×64 pixels, 16 bits unsigned ont été enregistrées, depuis le côté latéral gauche jusqu'au côté latéral droit, au niveau

du thorax, les animaux demeurant tous sur le dos. Pour chaque projection, 300 battements cardiaques ont été enregistrés avec une fenêtre temporelle de 20% autour de l'intervalle RR moyen et 16 phases par cycle cardiaque chez le rat, 10 phases par cycle cardiaque chez la souris.

Pour la perfusion cérébrale, les souris et les rats étaient placés sur le ventre, conduisant à une trajectoire de la gamma-caméra selon un arc de 180° cette fois le long de la partie dorsale de l'animal. Le reste était identique aux conditions d'acquisitions pour l'examen myocardique : 48 projections acquises de 64×64 pixels, 16 bits unsigned, depuis le côté latéral gauche jusqu'au côté latéral droit avec un rayon de rotation de 50 mm chez le rat et 25 mm chez la souris. Le temps d'exposition était de 1 minute par projection.

Le logiciel Amide [42] a été utilisé pour le recalage des images TEMP et micro-CT. Ce recalage permet d'associer la perfusion cérébrale à des repères anatomiques situés sur le crâne et dans les tissus et ainsi, de se référer à un atlas lorsque celui-ci existe.

9.3.2 Etude du myocarde synchronisé chez le rat

Bien que les organes du rat soient plus gros que ceux de la souris, la taille du rat lui-même conduit à augmenter le rayon de rotation de la gamma-caméra, limitant par là le grossissement et ainsi la résolution spatiale. Des coupes axiales non-réorientées sont présentées sur la figure 9.4 et permettent de retrouver l'aspect caractéristique de la perfusion pariétale du ventricule gauche sur 16 phases du cycle RR (fréquence moyenne : 300 bpm) : fin de diastole (cœur « dilaté »), puis variation du volume de la cavité ventriculaire gauche. Le ventricule droit est également visible, bien qu'il contienne moins d'activité que le ventricule gauche. 4 itérations EAR, FA-SART ont été calculées avec $\rho = 0,8$ et un champ de vue reconstruit de 45 mm (temps pris par la reconstruction : environ 40 minutes).

9.3.3 Etude du myocarde synchronisé chez la souris

Comme la petite taille de la souris permet de réduire le rayon de rotation, le grossissement moyen est ici deux fois plus grand que chez le rat. Ce grossissement $\times 5$ permet d'obtenir des images tomographiques de la perfusion myocardique avec une décomposition du mouvement le long de 10 phases temporelles du cycle cardiaque (fréquence moyenne sous anesthésie gazeuse à l'isoflurane : 350 bpm). Comme pour le rat, l'épaississement de la paroi ventriculaire de fin de systole ainsi que la variation de volume de la cavité ventriculaire gauche apparaît clairement sur les images de coupes axiales non-réorientées de la figure 9.5 et le ventricule droit est visible. 4 itérations EAR, FA-SART ont été calculées avec $\rho = 0,8$ et un champ de vue reconstruit de 32 mm (temps pris par la reconstruction : environ 30 minutes).

La figure 9.6 nous permet d'apprécier les différences entre des images obtenues avec un paramètre ρ et un nombre d'itérations variables. Le rendu de l'image (a), obtenue après reconstruction à partir des projections avec 3 itérations de l'algorithme FA-SART et $\rho = 1$ ne semble pas tout à fait adéquat, le lissage étant insuffisant pour rendre compte de l'homogénéité de la distribution de traceur présente dans le myocarde. A l'inverse, l'image (c), obtenue par une reconstruction avec 3 itérations de l'algorithme SART est trop lissée et ne permet pas

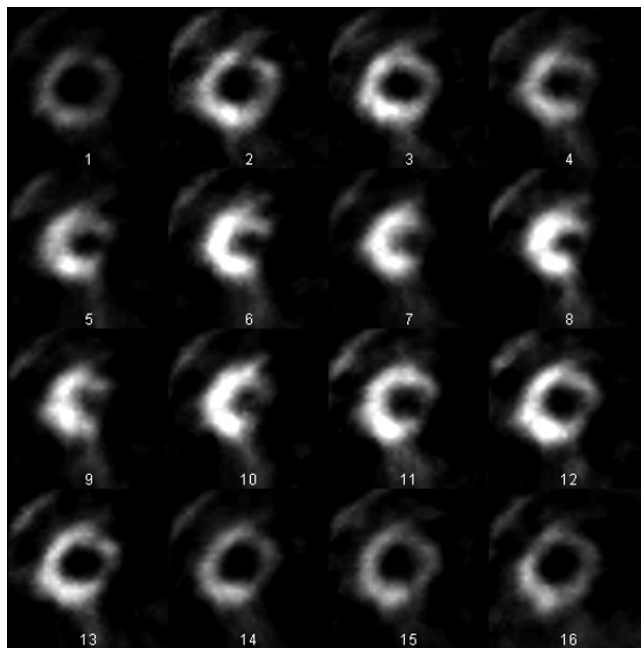


FIG. 9.4 – Perfusion myocardique : 16 phases temporelles d’une coupe axiale medio-ventriculaire du cœur de rat synchronisé. La phase 1 est la fin de diastole, la phase 9 est la fin de systole. Le traceur utilisé est le ^{99m}Tc -tetrofosmin. Reconstruction calculée avec 4 itérations EAR, FA-SART en combinaison avec un seuil $\rho = 0,8$.

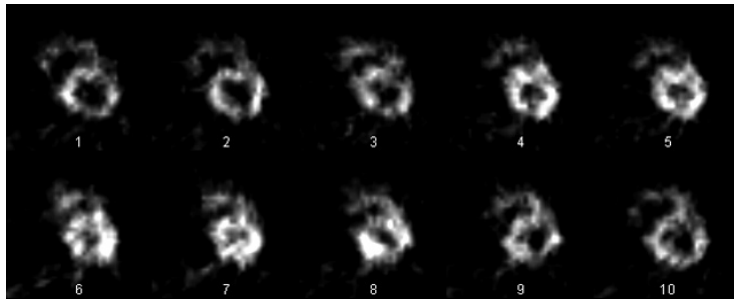


FIG. 9.5 – Perfusion myocardique de la souris : 10 phases temporelles d’une coupe axiale medio-ventriculaire du cœur de rat synchronisé. Le traceur utilisé est le ^{99m}Tc -tetrofosmin. Reconstruction calculée avec 3 itérations EAR, FA-SART en combinaison avec un seuil $\rho = 0,8$.

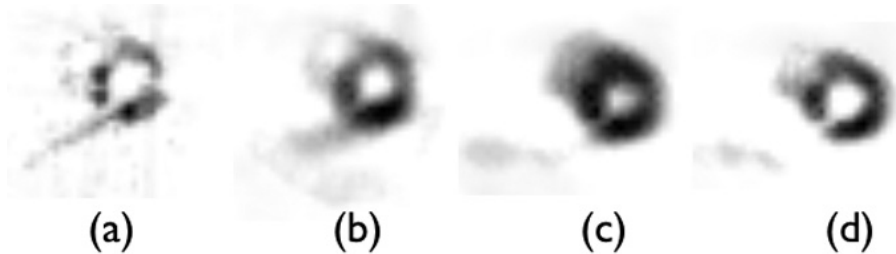


FIG. 9.6 – Perfusion myocardique de la souris. Reconstruction avec 3 itérations FA-SART, $\rho = 1$ (a), $\rho = 0,8$ (b), 3 itérations SART (c) et 10 itérations SART (d).

de distinguer le ventricule droit du ventricule gauche. Pour cet examen, les reconstructions (b) et (d), obtenues respectivement avec 3 itérations de FA-SART et $\rho = 0,8$ et 10 itérations SART, sont à peu près équivalentes, mais l’algorithme FA-SART permet alors de faire l’économie de 7 itérations. Par ailleurs, les itérations FA-SART sont environ deux fois plus rapides que les itérations SART.

9.3.4 Cerveau de rat

Certaines des principales structures du cerveau peuvent être reconnues sur la reconstruction tomographique de la perfusion cérébrale chez le rat, ainsi que la symétrie de la perfusion normale (voir figure 9.7. 4 itérations EAR, FA-SART ont été calculées avec $\rho = 0,6$ et un champ de vue reconstruit de 40 mm (temps pris par la reconstruction : environ 5 minutes).

9.3.5 Cerveau de souris

Les images TEMP, obtenues après 4 itérations EAR, FA-SART ont été calculées avec $\rho = 0,7$ et un champ de vue reconstruit de 32 mm (temps pris par

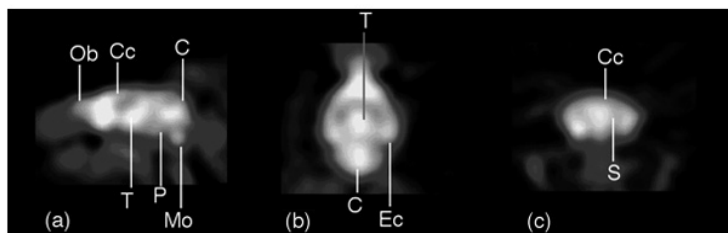


FIG. 9.7 – Perfusion normale du cerveau chez le rat (traceur : ^{99m}Tc -HMPAO) sur des coupes sagittales (a), transverses (b) et frontales (c). Les principales structures peuvent être identifiées et la symétrie des deux hémisphères peut être observée sur les coupes transverses et frontales.

C : Cerebellum, Cc : Cortex Cérébral, Ec : Cortex Entorhinal, Mo : Medulla oblongata, Ob : Bulbe olfactif, P : Pons, S : Striatum, T : Thalamus. Reconstruction obtenue après 4 itérations EAR, FA-SART en combinaison avec un seuil $\rho = 0,6$.

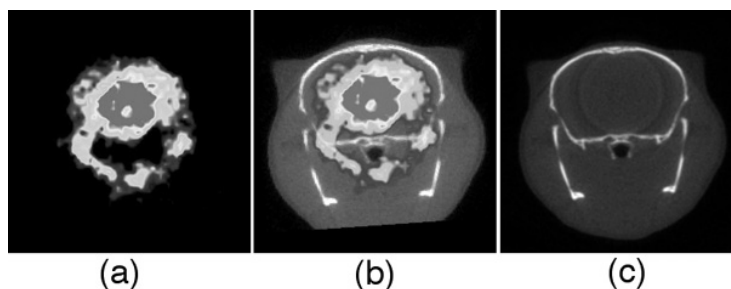


FIG. 9.8 – Perfusion normale du cerveau chez la souris sur des coupes transverses (a), fusion d'une coupe frontale TEMP et micro-CT (b) et coupe transverse au micro-CT (tomodensitométrie) (c). Traceur : ^{99m}Tc -HMPAO. Reconstruction calculée avec 4 itérations EAR, FA-SART en combinaison avec un seuil $\rho = 0,7$.

la reconstruction : environ 5 minutes), démontrent la symétrie de la perfusion normale et le recalage sur les coupes de micro-CT correspondantes aide à avoir une idée de référence anatomique pour l'activité reconstruite (voir figure 9.8).

Parmi les autres applications de la technique, nous avons pu conclure à un échec dans la détection des tumeurs cérébrales chez le rat avec un traceur tumoral. La tumeur, que nous savions être de grande taille, n'était en effet pas visible sur les images tomographiques reconstruites, montrant par là que le traceur ne parvenait pas, pour des raisons qui sont à chercher au niveau biologique, jusqu'à la tumeur. L'hypothèse la plus vraisemblable serait que la barrière hémato-encéphalique n'est pas rompue ici.

9.4 Utilisation adéquate de l'algorithme FA-SART

Les différents résultats illustrent l'accélération obtenue par l'utilisation de l'algorithme FA-SART et indiquent également quels points sont à discuter. Le but principal d'un tel algorithme est de réguler le nombre des itérations. Au lieu de calculer davantage d'itérations lorsque la présence de détails fins dans l'objet le demande, nous avons pu vérifier que trois à quatre itérations au maximum étaient suffisantes dans tous les cas lorsque l'algorithme est correctement utilisé. Ainsi, au lieu de laisser à l'utilisateur le soin de décider du nombre d'itérations, ce qui est pour une large part, la manière actuelle de procéder en reconstruction tomographique, ce choix doit être converti en celui d'un paramètre ρ adéquat, ceci pour un nombre d'itérations fixé à trois par exemple. Nous avons alors obtenu des résultats identiques voire souvent meilleurs qu'en multipliant les itérations SART.

Nous proposons cependant qu'une discussion détaillée est requise pour une bonne compréhension du comportement de l'algorithme FA-SART. Nous nous concentrons en premier lieu sur la situation idéale où des projections ont été acquises sans aucune présence de bruit sur les images. Dans ce cas, l'algorithme FA-SART accélère la reconstruction des détails par rapport à SART et ce particulièrement lorsque la réponse impulsionnelle est large, c'est-à-dire lorsque l'étape de déconvolution est importante. Lorsque la réponse impulsionnelle se rapproche d'une masse de Dirac, les algorithmes FA-SART et SART ne montrent plus de différence notable, ce qui indique que les modalités d'imagerie ayant une réponse impulsionnelle fine comme le scanner X ne sont pas réellement affectées par le remplacement de SART par FA-SART. Pour des réponses impulsionnelles plus larges, quel que soit le niveau de détail à reconstruire - ce que nous avons appelé f_{\max} précédemment, le paramètre ρ peut malgré tout être choisi dans l'intervalle $[0, 1]$ et l'accélération sera plus importante à mesure que ρ augmente. Les structures larges et homogènes sont alors correctement reconstruites par FA-SART, même lorsque $\rho = 1$ (voir la section 9.1.1).

Mais la situation réelle en TEMP montre qu'un bruit important est généralement présent sur les images de projection et les résultats présentés dans la section 9.1.2 nous montrent que FA-SART met en évidence ce bruit sur la reconstruction lorsque ρ n'a pas été correctement sélectionné. Une qualité importante de SART est sa robustesse et nous avons pu voir que même en présence d'un bruit important, bien que les structures fines de l'objet n'aient pu être distinctement reconstruites, le bruit est lissé et l'image est relativement propre.

Nous proposons deux solutions pour améliorer les résultats obtenus avec l'algorithme SART. La première consiste à utiliser FA-SART en prenant davantage de précautions quant au choix du paramètre de seuillage ρ . Dans cet exemple de la section 9.1.2, celui-ci ne pouvait simplement pas être choisi égal à 1 puisqu'il détermine la fréquence reconstruite la plus haute et que dans ce cas, elle se rapprocherait davantage de celle du bruit que de celle des structures de l'objet. Nous devrions par conséquent suivre la prescription de l'équation (8.8) et adapter ρ de manière à ce que l'opération de rétroprojection agisse comme un filtre passe-bas et coupe le bruit. On pourrait certes reprocher à cette façon de procéder que ρ est alors sélectionné en fonction de la plus haute fréquence à reconstruire dans l'objet, empêchant l'obtention d'un bon rendu des structures plus larges. Mais le contexte de la TEMP est celui de l'imagerie fonctionnelle dans laquelle, en général, on ne s'intéresse qu'à une seule structure - souvent un

organe - dans l'image.

La deuxième solution consiste à changer ρ au cours des itérations, en le faisant passer de 1 à 0. En décidant de fixer le nombre d'itérations à un seuil bas, trois ou quatre, nous n'avons certes pas la possibilité de choisir pour ρ une descente très sophistiquée, mais celle que nous avons appliquée, la descente $\{1; 0, 5; 0\}$ nous a permis de combiner le meilleur des reconstruction FA-SART avec $\rho = 1$ et SART, qui n'est autre que FA-SART avec $\rho = 0$. Cette méthode présente plusieurs avantages en ce que, pour commencer, l'utilisateur n'a plus besoin de s'interroger sur aucun paramètre, qu'il soit nombre d'itération ou seuil ρ . Ce dernier choix n'est en effet pas facile, même s'il est régi par l'équation (8.8) car il fait intervenir la quantité f_{\max} que l'on ne saurait déterminer, pour un objet donné, qu'avec une certaine expérience que l'on fera d'ailleurs aussi bien de faire porter directement sur ρ . La descente de ρ au cours des itérations permet également d'adapter la reconstruction à tout type de structure présent dans l'objet et d'avoir un bon rendu à la fois des structures très et peu détaillées sur la même image. Enfin, les itérations FA-SART calculées avant l'itération SART peuvent alors être considérées comme un simple préconditionnement du système, ce qui est intéressant d'un point de vue théorique puisqu'alors, même sans hypothèse sur la positivité des valeurs propres de l'opérateur $C^T A$ qui intervient dans notre démonstration de la convergence de FA-SART, nous sommes au moins assurés de finir nos itérations avec un algorithme convergeant.

Ce dernier point ne devrait pas nous empêcher d'utiliser l'algorithme FA-SART avec $\rho > 0$, celui-ci ayant été appliqué à des ensembles d'images de projection nombreux et variés qui ont soutenu l'hypothèse de sa convergence. Nous n'avons pas même eu à changer le paramètre de relaxation, laissant constamment $\lambda = 1$ dans l'algorithme FA-SART.

Un autre point positif important de l'algorithme FA-SART est qu'il ne requiert que peu d'adaptations lorsque SART a déjà été programmé. Du point de vue de la programmation, le principal changement est que certaines boucles ne sont que partiellement exécutées - celles relatives à la rétroprojection -, ce qui implique en plus qu'une itération FA-SART est plus rapide qu'une itérations SART. Lorsque $\rho = 1$ cette différence dépasse le facteur deux, ce qui en fait une propriété importante de FA-SART.

Enfin, nous avons également exploré la possibilité d'adapter le choix de ρ aux fréquences locales des images de projection. Cette manière d'utiliser l'algorithme FA-SART est plus complexe que les deux déjà mentionnées puisqu'elle consiste à découper chaque image de projection en zones de hautes, moyennes et basses fréquences et d'appliquer, pour la rétroprojection des valeurs des pixels correspondant à ces zones, un seuil ρ adapté, par exemple égal à 1 pour la zone hautes fréquences, 0, 5 pour la zone moyennes fréquences et 0 pour la zone basses fréquences. A cet effet, nous avons procédé à une analyse locale en fréquences de chaque image de projection à partir d'ondelettes « chapeau mexicain » (laplacien d'une gaussienne) de trois tailles différentes, correspondant aux détails fins, moyens et grossiers. En convoluant l'image de projection avec l'ondelette la plus dilatée, celle servant à la détection des zones basses fréquences, nous obtenons une carte des coefficients d'ondelettes qui nous permet notamment de détourner l'objet par une zone de points négatifs. Cette zone apparaît en noir dans la vignette 1 de la figure 9.4 et est due à la prédominance du lobe négatif de l'ondelette sur les bords de l'objet. Une très bonne référence quant à la description de cette méthode de détection des contours, appliquée à la vision humaine,

demeure l'ouvrage de David Marr *Vision : A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information* qui peut, à ce titre, être considéré comme l'un des précurseurs de la théorie des ondelettes. Nous continuons notre analyse en convoluant cette fois avec l'ondelette moyenne et relevons sur la carte de coefficients obtenus les nouvelles zones négatives apparues dans l'objet ainsi que les intensités plus fortes, signe que l'ondelette s'accorde davantage avec les structures présentes sur l'image et nous faisons encore une fois la même chose avec l'ondelette la plus fine. La synthèse de ces trois cartes de coefficients d'ondelettes nous permet d'obtenir une carte contenant trois zones, auxquelles correspondront donc trois coefficients ρ différents.

Nous avons néanmoins dû abandonner cette voie, car outre la difficulté que nous avons éprouvée à obtenir une carte telle que nous l'aurions dessinée au vu des projections, le calcul de celle-ci, qui passe donc nécessairement par l'analyse en ondelettes de plusieurs dizaines d'images de projections, prenait nécessairement un temps considérable. L'objectif premier de notre méthode, basée sur l'algorithme FA-SART, étant de diminuer les temps de calculs, nous perdions donc d'un côté ce que nous avons gagné de l'autre, au prix d'une complexité devenue bien trop élevée par rapport au calcul d'une dizaine d'itérations SART.

9.5 Conclusion

A notre connaissance, l'algorithme FA-SART est un type nouveau d'algorithme qui s'applique au problème de reconstruction tomographique mettant en jeu une réponse impulsionnelle large et utilise une rétroprojection incomplète pour accélérer la reconstruction des hautes fréquences. Nous avons montré comment l'accélération était obtenue, par le filtrage des projections avec une fonction plus fine que la réponse impulsionnelle originale qui apparaît dans l'algorithme SART, et qui est la réponse impulsionnelle tronquée, à un seuil ρ qui constitue un paramètre de l'algorithme. L'utilisation de l'algorithme a été discutée parmi plusieurs possibilités pour obtenir les calculs les plus rapides et les plus fiables, y compris en présence de bruit et donc de données inconsistantes. Il se dégage que le calcul d'itérations FA-SART en préconditionnement du système linéaire $Ax = b$ semble constituer une bonne manière de s'accomoder des difficultés pratiques d'un algorithme adapté à la reconstruction d'une fréquence particulière.

Nous pensons qu'un travail théorique demeure possible sur ce type d'algorithmes, pour démontrer leur convergence avec moins d'hypothèses que ce que nous avons fait et adapter ce raisonnement à d'autres champs d'expériences, en dehors même de la tomographie, notamment dans des problèmes de déconvolution.

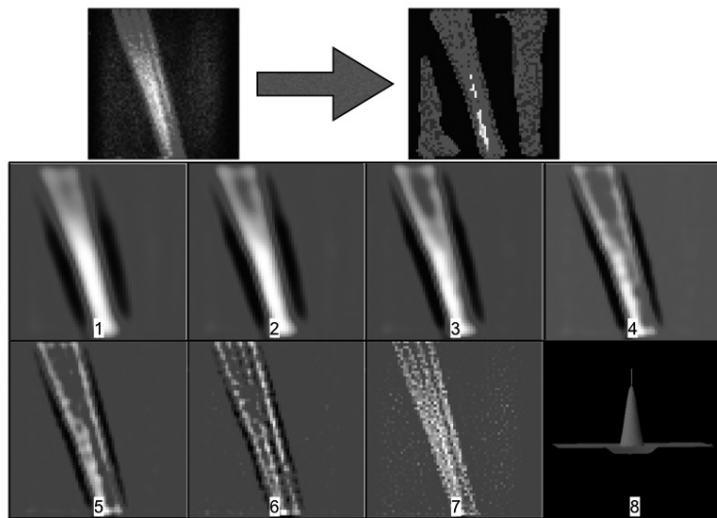


FIG. 9.9 – Création d’une carte des fréquences locales pour une projection du fantôme faisceau (en haut à gauche) étudié dans la section 6.2.2, composé de quatre capillaires remplies d’un traceur radioactif. Ces capillaires pouvaient être distinguées en haut du fantôme mais pas en bas puisqu’ils se resserrent et finissent pas se toucher. Sept niveaux de détails ont été calculés ici avec une ondelette « chapeau mexicain », montrée en bas à droite (vignette 8). Nous avons d’abord calculé les coefficients correspondant à l’ondelette la plus dilatée (vignette 1), qui permet d’isoler l’objet du reste de l’image en créant une zone de coefficients négatifs autour de lui (en noir). Puis, nous avons calculé les niveaux 2 à 7 en considérant un pixel comme faisant partie d’une zone d’un niveau donné lorsque son coefficient augmentait ou au contraire devenait négatif. La carte obtenue (en haut à droite) montre une zone de basses fréquences en bas de l’objet, là où les capillaires ne peuvent plus être distinguées tandis que le reste de l’objet est associé à des fréquences moyennes ou hautes.

Quatrième partie

Conclusion

Nous avons tenté, dans ce travail, de mettre en évidence les conditions les plus favorables à une bonne exploitation des images de projections acquises en scintigraphie, dans le domaine de l'imagerie du petit animal. Les quatre étapes essentielles suivantes peuvent alors être dégagées :

1. Les conditions d'acquisition (Remarques indépendantes de la méthode de reconstruction)

Munie d'un collimateur sténopé, la gamma caméra permet l'acquisition d'images de projection sur lesquelles l'objet d'étude apparaît grossi à mesure qu'il est approché du collimateur. **Un rayon de rotation minimal devrait donc être choisi pour favoriser la résolution spatiale à travers le meilleur facteur de grossissement possible.** Nous avons également souligné que si les images étaient acquises avec une taille de K pixels par image où $K = k^2$ et que nous voulions les reconstruire dans une base de N voxels où $N = k^3$, **le nombre de projections acquises P devrait être proche de k .**

2. La modélisation

Compte tenu de la faible résolution intrinsèque du détecteur et de la taille du trou d'entrée du collimateur, **la réponse impulsionnelle doit, pensons-nous, être prise en compte sous la forme d'une fonction à support sur plusieurs pixels.** Notre choix s'est porté sur des fonctions gaussiennes dont les paramètres sont calculés pour chaque voxel, en fonction de plusieurs paramètres physiques et géométriques. Avec une telle modélisation, nous nous sommes orienté vers les méthodes de reconstruction itératives, en posant le problème de la reconstruction tomographique en TEMP comme un problème linéaire.

3. Les économies de calcul (Remarques propres à la méthode EAR décrite dans la deuxième partie, mais valables pour tout algorithme itératif de reconstruction.)

Au cours de l'exposé de la deuxième partie, nous avons notamment décrit une manière d'exploiter la symétrie de rotation inhérente au dispositif puisque la trajectoire du détecteur est circulaire autour de l'objet d'étude. Nous avons d'abord proposé une discrétisation de l'espace par des voxels répartis sur des couronnes, pour laquelle nous avons démontré que **la taille des voxels de la discrétisation EAR était la plus homogène lorsque le nombre de projection acquises sur 180° ou 360° était une puissance de deux** - remarque qui concerne donc les conditions d'acquisition -.

Par la suite, T étant le nombre de tranches dans le champ de vue reconstruit cylindrique et posant $T = k$ où k^2 est le nombre de pixels dans une image de projection en vertu des remarques précédentes, la condition sur la longueur du champ de vue reconstruit c - la hauteur du cylindre - de l'équation (4.37) devient

$$c \leq \frac{2l_x r}{2F + l_x}.$$

où l_x est la longueur du détecteur, r son rayon de rotation et F la distance focale du collimateur.

4. L'algorithme (Remarques relatives uniquement à l'algorithme FA-SART, indépendamment de son implémentation avec ou sans la méthode EAR.)

L'utilisation de l'algorithme FA-SART peut grandement améliorer les résultats de la reconstruction tomographique des objets détaillés. **La manière la plus simple et la plus efficace de l'utiliser consiste à fixer un nombre bas d'itérations, 3 ou 4, et de faire varier linéairement le paramètre ρ entre 1 et 0 au cours de ces itérations.**

Ces quelques remarques synthétiques sont essentielles pour tirer le meilleur des images scintigraphiques chez le petit animal à partir du logiciel de reconstruction qui est présenté dans l'annexe B.

Perspectives

Plusieurs pistes intéressantes semblent se dégager à la suite de ce travail. Du côté expérimental d'abord, un certain nombre de manipulations seraient envisageables pour améliorer le modèle de fonction de réponse. La diffusion, qui n'a pas été prise en compte jusque-là, gagnerait ainsi à être modélisée mais cet effet étant, comme on l'a vu, non linéaire, la fonction prenant en charge cet effet devrait être mesurée séparément dans le cas du rat et de la souris. Une telle étude - si elle n'a pas encore été menée ailleurs - serait sans doute utile pour l'ensemble des équipes travaillant sur l'imagerie TEMP du petit animal.

On peut également souligner les faiblesses du modèle symétrique et uniforme d'atténuation. Faute de disposer de cartes d'atténuation mesurées, changer l'enveloppe cylindrique du modèle uniforme pour une enveloppe définie par les contours de l'animal et reconstruite à partir des mesures du diffusé serait certainement plus adéquat, notamment d'un point de vue quantitatif. Mais cette suggestion d'Irène Buvat pose alors la question de l'application ou non des économies de calcul basées sur l'exploitation de la symétrie de rotation. Si l'on souhaite modéliser au mieux la projection en TEMP, il faudra abandonner l'idée du codage efficace décrite dans notre deuxième partie, ou du moins l'appliquer de préférence à d'autres modalités d'imagerie, TEP ou tomodensitométrie par exemple.

Le type d'algorithme que nous décrivons dans la troisième partie mériterait à notre sens d'être appliqué à d'autres modalités d'imagerie, voire en dehors de domaine de l'image. Nous pensons que tout problème linéaire incluant une opération de déconvolution par une fonction assez régulière pourrait bénéficier des améliorations qui ont semblé se dessiner avec l'algorithme FA-SART. D'un point de vue théorique, il reste sans doute un travail considérable à effectuer. Ayant défini la classe d'algorithmes FA (adaptés à la fréquence), nous n'avons pour le moment généré que l'algorithme dérivé de SART. L'application d'un seuillage sur l'opérateur de rétroprojection semble pourtant être une idée assez générale pour être appliquée à la plupart des algorithmes existant.

Une étude plus poussée permettrait peut-être d'arriver à une démonstration de convergence moins restrictive quant à la forme de la matrice de projection, ou au contraire, permettrait de comprendre pourquoi de telles hypothèses sont nécessaires. Enfin, une mise en correspondance avec les travaux de Zeng et Gullberg [73] concernant les algorithmes dont l'opérateur de projection est différent de l'opérateur de rétroprojection serait également fort pertinente tant nos deux approches semblent corrélées, jusque dans les hypothèses nécessaires à la convergence du schéma. Notre prise de connaissance tardive de ces travaux, grâce à

la relecture de cette thèse par Irène Buvat, reporte cette analyse à des travaux ultérieurs.

Annexe A

Publications

Nous incluons la liste (titre et résumé) des articles publiés relatifs à ce travail de thèse :

1. V. Israel-Jost, Ph. Choquet, C. Blondet, I.J. Namer, I. Slim, N. Elkadri, L. Monassier, E. Sonnendrücker, A. Constantinesco, "Théorie et état de l'art de l'imagerie scintigraphique du petit animal avec collimateur pinhole simple et multi-trous." *Med. Nucl.*, vol.27, pp.557-567, 2003.
Pour définir les conditions les plus favorables de l'expérimentation en imagerie monophotonique du petit animal (images planaires et tomographiques), nous avons précisé les différentes définitions de la résolution spatiale présentes dans la littérature et avons analysé les paramètres qui agissent sur la résolution et la sensibilité des images scintigraphiques avec un collimateur de type pinhole à un ou plusieurs trous. Ces résultats théoriques sont corroborés par ceux obtenus par plusieurs équipes couvrant les différentes démarches possibles du point de vue du matériel utilisé en collimation (simple pinhole, micro-pinhole, multi-pinhole et ouverture codée) et en détection (cristal de NaI, semi-conducteurs). Leurs résultats sont discutés à la lumière des définitions précédentes, en insistant aussi sur les méthodes de reconstruction tomographiques employées, et notamment sur la modélisation du problème physique dont les principaux phénomènes sont décrits dans cet article.
Mots-clés : Pinhole, petit animal, TEMP, traitement d'images, reconstruction
2. V. Israel-Jost, L. Monassier, Ph. Choquet, C. Blondet, E. Sonnendrücker, A. Constantinesco, "Faisabilité de la tomoscintigraphie synchronisée cardiaque chez le rat avec une gamma-camera standard," *ITBM*, vol.25, pp.15-22, 2004.

Objectif : démontrer la faisabilité de la tomographie d'émission monophotonique de perfusion myocardique chez la souris.

Méthodes : nous avons employé une caméra micro-TEMP dédiée couvrant un champ de vue de 17 cm x 17 cm, et munie d'un collimateur pinhole de 1,5 mm de diamètre avec une distance focale de 12 cm. Un fantôme linéique infra millimétrique a permis de

mesurer les résolutions spatiales planaire et tomographique. Deux souris adultes normales (30g) ont été étudiées sous anesthésie gazeuse (isoflurane 1,5%) et après administration IV de 0,1 mL de ^{99m}Tc-Sestamibi (350 MBq) pour l'une et de ²⁰¹Tl (64 MBq) pour l'autre. Dans les deux cas, 48 projections de 1 mn sur 180° ont été acquises en format 64 × 64 avec un rayon de rotation de 2,5 cm et avec une fenêtre de 20% centrée soit sur le pic photoélectrique du ^{99m}Tc soit de la raie à 71 KeV du ²⁰¹Tl. La reconstruction des images a été réalisée à l'aide d'un algorithme ART propre adapté à la géométrie conique.

Résultats : à partir du fantôme les LMH ont été respectivement de 1,6 mm et 1,5 mm en modes planaire et tomographique pour un champ de vue de reconstruction de 26 mm. La résolution tomographique était de 1 mm pour un champ de vue de 10 mm. Des images TEMP avec un volume du voxel reconstruit de 0,064 mm³ ont été obtenues permettant une résolution anatomique de la perfusion du myocarde de souris, plus fine avec le Sestamibi qu'avec le thallium.

Conclusion : cette étude pilote démontre le potentiel de l'imagerie micro TEMP en cardiologie nucléaire de la souris.

Mots-clés : imagerie moléculaire, TEMP , pinhole , souris, myocarde, perfusion

3. A. Constantinesco, Ph. Choquet, L. Monassier, V. Israel-Jost, L. Elfertak, E. Sonnendrücker, "Etude pilote de la perfusion myocardique chez la souris par micro-imagerie TEMP," *Med Nucl*, vol.28, pp.163-168, 2004.

Objectif : démontrer la faisabilité de la tomographie d'émission monophotonique de perfusion myocardique chez la souris.

Méthodes : nous avons employé une caméra micro-TEMP dédiée couvrant un champ de vue de 17cm x 17 cm, et munie d'un collimateur pinhole de 1,5 mm de diamètre avec une distance focale de 12cm. Un fantôme linéique infra millimétrique a permis de mesurer les résolutions spatiales planaire et tomographique. Deux souris adultes normales (30g) ont été étudiées sous anesthésie gazeuse (isoflurane 1,5%) et après administration IV de 0,1 mL de ^{99m}Tc-Sestamibi (350 MBq) pour l'une et de ²⁰¹Tl (64MBq) pour l'autre. Dans les deux cas, 48 projections de 1 mn sur 180° ont été acquises en format 64 × 64 avec un rayon de rotation de 2,5 cm et avec une fenêtre de 20% centrée soit sur le pic photoélectrique du ^{99m}Tc soit de la raie à 71 KeV du ²⁰¹Tl. La reconstruction des images a été réalisée à l'aide d'un algorithme ART adapté à la géométrie conique.

Résultats : à partir du fantôme les LMH ont été respectivement de 1,6 mm et 1,5 mm en modes planaire et tomographique pour un champ de vue de reconstruction de 26 mm. La résolution tomographique était de 1 mm pour un champ de vue de 10 mm. Des images TEMP avec un volume du voxel reconstruit de 0,064 mm³ ont été obtenues permettant une résolution anatomique de la perfusion du myocarde de souris, plus fine avec le Sestamibi qu'avec le thallium.

Conclusion : cette étude pilote démontre le potentiel de l'imagerie micro-TEMP en cardiologie nucléaire de la souris.

Mots-clés : Imagerie moléculaire, TEMP, pinhole, souris, myocarde, perfusion

4. A. Constantinesco, Ph. Choquet, L. Monassier, V. Israel-Jost, L. Mertz, "Assessment of left ventricular perfusion, volumes and motion in mice using pinhole gated SPECT," *J Nucl Med*, vol.46, pp.1005-1011, 2005.

Quantitative functional normal data should be a prerequisite before applying SPECT in murine models of cardiac disease. Therefore, we investigated the capability of in vivo pinhole gated SPECT for establishment of a reference database for left ventricular myocardial perfusion, volumes, and motion in normal mice. Methods : A small-animal dedicated pinhole -camera with a field of view of 17 cm and a focal distance of 12 cm was used with a 1.5-mm pinhole and a 2.5-cm radius of rotation. Phantoms were designed to test spatial resolution and microvolume measurements of accuracy. Eight adult normal mice (CD1) were studied using a heated mixture of air (0.3 L/min) and 1.5%-2.5% isoflurane for anesthesia. For myocardial perfusion, 350-450 MBq of ^{99m}Tc -tetrofosmin were used in 0.15-0.25 mL. Gated acquisitions (8 or 10 time bins per cardiac cycle) were obtained using a 180° circular arc and 48 anterior projections of 300 R-R intervals. Image reconstruction was done using a specific Algebraic Reconstruction Technique (ART) cone-beam algorithm. For quantification, reconstructed images were processed using standard nuclear medicine software. Results : Millimetric spatial resolution and volume calibration linear relationships ($r^2 = 0.99$) in the 10- to 100- μL range were obtained in phantoms and used to scale in vivo volume values. In mice, left ventricular perfusion was lower in the apex ($65\% \pm 6\%$) versus lateral ($72\% \pm 5\%$), inferior ($74\% \pm 5\%$), septum ($75\% \pm 4\%$), and anterior ($74\% \pm 2\%$) walls. The left ventricular ejection fraction was $60\% \pm 9\%$, end-diastolic volume was $50 \pm 8 \mu\text{L}$, end-systolic volume was $20 \pm 6 \mu\text{L}$, stroke volume was $29.5 \pm 6 \mu\text{L}$, and cardiac output was $9.6 \pm 1.6 \text{ mL/min}$. Wall thickening was higher in the apex ($47\% \pm 12\%$) versus lateral ($30\% \pm 9\%$), inferior ($33\% \pm 8\%$), septum ($37\% \pm 10\%$), and anterior ($33\% \pm 10\%$) walls. Conclusion : This work shows that in vivo pinhole gated SPECT can be used for assessment of left ventricular perfusion, volumes, and cardiac function in normal mice.

Mots-clés : mice, gated SPECT, myocardial perfusion, ventricular function, molecular imaging

5. V. Israel-Jost, Ph. Choquet, S. Salmon, C. Blondet, E. Sonnendrücker, A. Constantinesco, "Pinhole SPECT Imaging : Compact Projection/Backprojection Operator for Efficient Algebraic Reconstruction," *IEEE Trans Med Imaging*, vol. 25, pp.158-167, 2006. We describe the Efficient Algebraic Reconstruction (EAR) method, which applies to cone-beam tomographic reconstruction problems with a circular symmetry. Three independent steps/stages are presented, which use two symmetries and a factorization of the Point Spread Functions (PSF), each reducing computing times and eventually storage in memory

or hard drive. In the case of pinhole Single Photon Emission Computed Tomography (SPECT), we show how the EAR method can incorporate most of the physical and geometrical effects which change the PSF compared to the Dirac function assumed in analytical methods, thus showing improvements on reconstructed images. We also compare results obtained by the EAR method with a cubic grid implementation of an algebraic method and modeling of the PSF and we show that there is no significant loss of quality, despite the use of a non-cubic grid for voxels in the EAR method.

Data from a phantom, reconstructed with the EAR method, demonstrate 1.08 mm spatial tomographic resolution despite the use of a 1.5 mm pinhole SPECT device and several applications in rat and mouse imaging are shown. Finally, we discuss the conditions of application of the method when symmetries are broken, by considering the different parameters of the calibrage and non-symmetric physical effects such as attenuation.

Mots-clés : Single photon emission computed tomography, Image reconstruction, Pinhole, Symmetries, Small animal imaging

6. V. Israel-Jost, Ph. Choquet, A. Constantinesco, "A prospective study on algorithms adapted to the spatial frequency in tomography, " *International Journal of Biomedical Imaging* 2006, article ID 34043, 6 pages, 2006.

The use of iterative algorithms in tomographic reconstruction always leads to a frequency adapted rate of convergence in that low frequencies are accurately reconstructed after a few iterations while high frequencies sometimes require many more computations. In this paper, we propose to build *frequency adapted* (FA) algorithms based on a condition of incomplete backprojection and propose a *FA-simultaneous algebraic reconstruction technique* (FA-SART) algorithm as an example. The results obtained with the FA-SART algorithm demonstrate a very fast convergence on a highly detailed phantom when compared to the original SART algorithm. Though the use of such a FA algorithm may seem difficult, we specify in which case it is relevant and propose several ways to improve the reconstruction process with FA algorithms.

Mots-clés : tomography, iterative algorithms, deconvolution, frequency adapted algorithms, SPECT

Annexe B

Le programme et son interface

L'objectif de ce travail de thèse a été en premier lieu de doter le Laboratoire de Biophysique et Médecine Nucléaire de l'Hôpital de Hautepierre d'un outil permettant de réaliser des reconstructions tomographiques à partir d'un système d'imagerie TEMP avec collimateur sténopé. Cet outil devant être utilisable par quelqu'un qui ne connaisse pas le programme, nous avons codé l'algorithme dans l'environnement Project Builder sous mac OS 10, qui permet de relier le programme proprement dit avec une interface graphique. Cette interface est essentiellement destinée à pouvoir changer l'ensemble des paramètres en fonction des acquisitions réalisées, sans avoir à le faire directement dans le programme puis à recompiler celui-ci. Les paramètres sont nombreux au final, couvrant à la fois la géométrie de l'acquisition, la géométrie de la reconstruction, le choix de l'algorithme et des paramètres qui lui sont propres, les facteurs temporels et enfin d'orientation. Les deux panneaux de commandes sont reproduits sur les figures B.1 et B.2 et nous dressons ici la liste des paramètres, ainsi que leur correspondance avec les notations du texte présent.

Panneau 1/2 :

1. Diamètre pinhole : le diamètre d d'entrée du trou du collimateur sténopé, en mm (le diamètre effectif est calculé automatiquement et pris en compte par la suite).
2. Distance focale collimateur : la distance F entre le plan de détection et le centre du trou d'entrée du collimateur sténopé, en mm.
3. Champ de vue du détecteur : la taille l_x d'une arête du détecteur, en mm.
4. Taille matrices d'acquisition : le nombre k de pixels dans un côté de l'image de projection. Le nombre de pixels dans une image est $K = k^2$.
5. Sens de rotation : il est positif ou négatif et intervient dans le paramètre s de la définition 4.1.
6. Nombre de projection : c'est P , que l'on recommande de choisir égal à k .
7. Angle total de la rotation, en degré. Intervient dans la quantité \tilde{P} , qui est le nombre de projections extrapolé sur 360° .

8. Angle de départ, en degré. Pas d'équivalent dans le texte, détermine la bonne orientation de l'objet reconstruit.
9. Rayon de rotation : r , en mm.
10. Nombre de voxels : détermine T , le nombre de tranches dans le champ de vue cylindrique reconstruit (méthode EAR) ou le nombre de voxels dans un côté du cube pour une discrétisation classique (pour l'algorithme FDK).
11. Champ de vue conseillé : propose à l'utilisateur une valeur pour c , la longueur et le diamètre du cylindre reconstruit, en mm.
12. Champ de vue choisi : valeur décidée par l'utilisateur pour c , en mm.
13. Taille physique du voxel : calcule le rapport c/T pour connaître la taille géométrique du voxel.

Panneau 2/2 :

1. Menu déroulant EAR : choix de la méthode, itérative ou algorithme FDK.
2. Nombre d'itérations : nombre d'itérations dans le cas de la méthode itérative.
3. Seuillage PSF : choix du paramètre ρ , en pourcentage et non compris entre 0 et 1.
4. Fréq. coupure FDK : détermine les propriétés fréquentielles du filtre v_Ω qui intervient dans la formule de reconstruction de FDK.
5. Fréq. coupure FDK conseillée : calcule une fréquence de coupure en fonction des paramètres géométriques.
6. Correction du centre de rotation : pour appliquer ou non la correction proposée au chapitre 3, pour le défaut mécanique de rotation de la caméra autour de son axe.
7. Le volet orientation permet d'indiquer la position de l'animal au moment de l'acquisition et de choisir une orientation pour le volume reconstruit.
8. Synchronisation : nombre de pas de temps dans le cas d'acquisitions synchronisées à l'ECG.
9. Temps d'acquisition : temps de pose par projection, en secondes. Intervient dans la correction de la décroissance radioactive du traceur.
10. Demi-vie de l'isotope : temps après lequel l'activité de l'isotope est diminuée de moitié, en minutes.

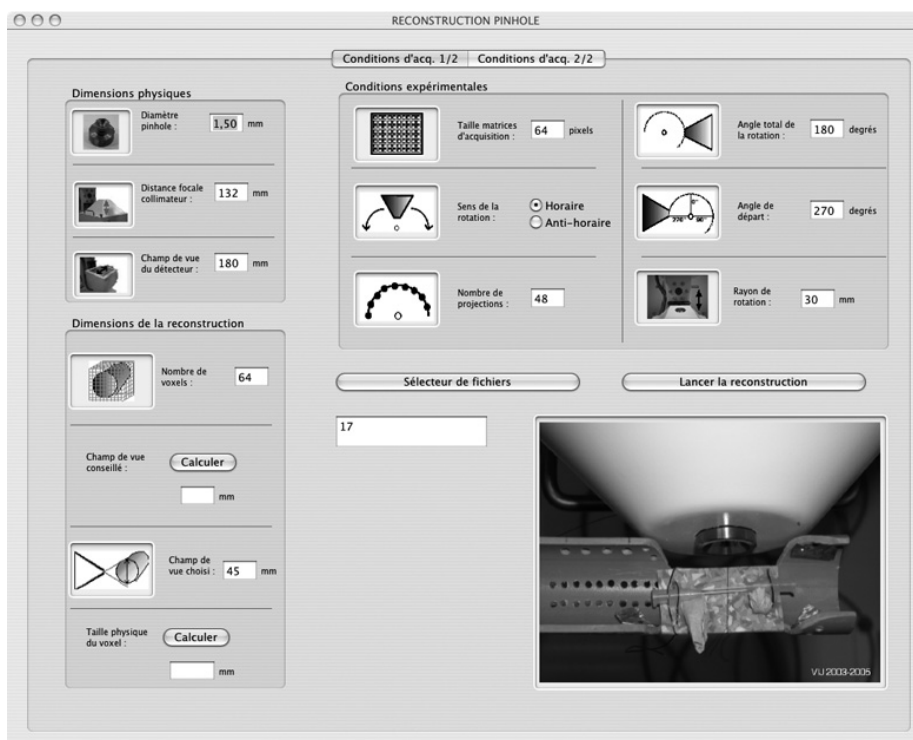


FIG. B.1 – Panneau de l'interface (1/2).

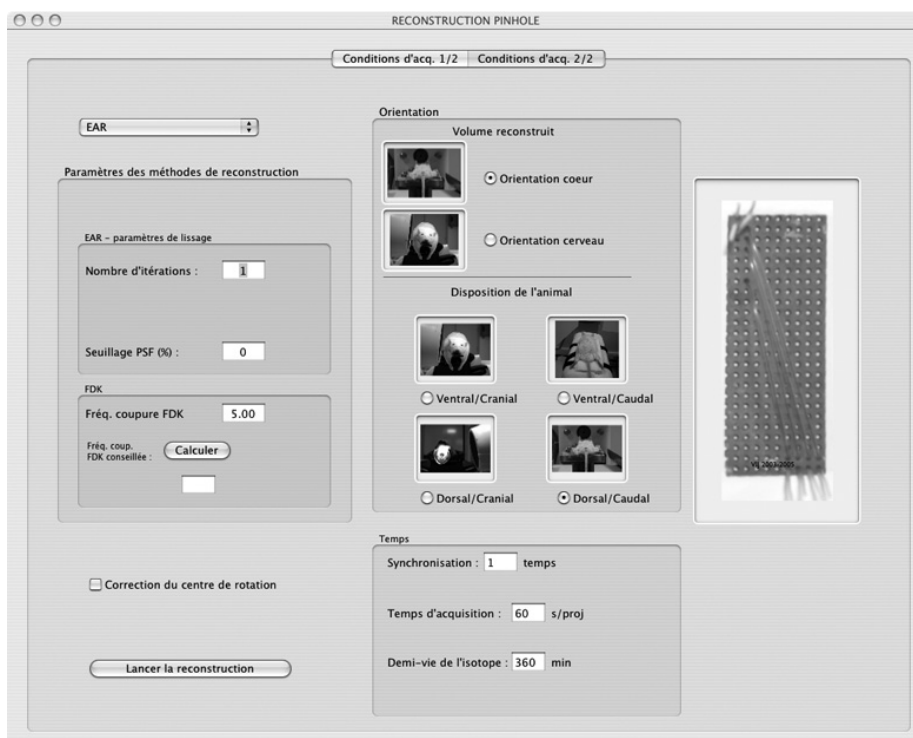


FIG. B.2 – Panneau de l'interface (2/2).

Bibliographie

- [1] R. Accorsi, F. Gasparini and R.C. Lanza, "A coded aperture for high-resolution nuclear medicine planar imaging with a conventional Anger camera : Experimental results," *IEEE Trans Nucl Sci*, vol.48, pp.2411-2417, 2001.
- [2] P.D. Acton, S.-R. Choi, K. Plössl and H.F. Kung, "Quantification of dopamine transporters in the mouse brain using ultra-high resolution single-photon emission tomography," *Eur J Nucl Med*, vol.29, pp.691-698, 2002.
- [3] A.H. Andersen and A.C. Kak, "Simultaneous algebraic reconstruction technique (SART) : a superior implementation of the ART algorithm," *Ultrasound Imaging*, vol.6, pp.81-94, 1984.
- [4] H. O. Anger, "Radioisotope cameras," in *Instrumentation in Nuclear Medicine*, G. J. Hine, Ed. New York : Academic, 1967, vol. 1, pp.485-552.
- [5] O. Axelsson, *Iterative Solution Methods*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [6] F.J. Beekman and B. Vastenhouw, "Design and simulation of a high-resolution stationary SPECT system for small animals," *Phys Med Biol*, vol.49, pp.4579-4592, 2004.
- [7] F.J. Beekman, F. van der Have, B. Vastenhouw, A.J.A. van der Linden, P.P. van Rijk and M.P. Smidt, "U-SPECT-I : A Novel System for Submillimeter-Resolution Tomography with Radiolabeled Molecules in Mice," *J Nucl Med*, vol.46, pp.1194-1200, 2005.
- [8] D. Bequé, J. Nuyts, G. Bormans, P. Suetens, and P. Dupont, "Characterization of pinhole SPECT acquisition geometry," *IEEE Trans Med Imaging*, vol. 22, pp. 599-612, May 2003.
- [9] W.N. Brouw, "Aperture synthesis," *Methods Comput Phys*, B14, 131-175, 1975.
- [10] C.L. Byrne, "Accelerating the EMLL algorithm and related algorithms by rescaled block-iterative methods," *IEEE Trans Image Process*, vol.7, pp.100-109, 1998.
- [11] Z. Cao, G. Bal, R. Accorsi and P. D. Acton, "Optimal number of pinholes in multi-pinhole SPECT for mouse brain imaging—a simulation study," *Phys Med Biol*, vol.50, pp.4609-4624, 2005.
- [12] Y. Censor, D. Gordon and R. Gordon, "Component averaging : An efficient iterative parallel algorithm for large and sparse unstructured problems," *Parallel Computing*, vol.27, pp. 777-808, 2001.

- [13] Y. Censor et S. A. Zenios, *Parallel Optimization - Theory, Algorithms, and Applications*. Oxford University Press, New York, 1997.
- [14] Y. Censor, P.P.B. Eggermont, D. Gordon, "Strong underrelaxation in Kaczmarz's method for inconsistent systems," *Numer Math* vol.41, pp.83-92, 1983.
- [15] Y. Censor, T. Elfving, "Block-iterative algorithms with diagonally scaled oblique projections for the linear feasibility problem," *SIAM J Matrix Anal Appl*, vol.24, pp.40-58, 2002.
- [16] L.T. Chang, "A method for attenuation correction in radionuclide computed tomography," *IEEE Trans Nucl Sci*, vol.25, pp. 638 - 643, 1978.
- [17] G. Cimmino, "Calcolo approssimato per soluzioni dei sistemi di equazioni lineari," *La Ricerca Scientifica XVI*, series II, Anno IX, pp.326-333, 1938.
- [18] P.L. Combettes, "Inconsistent signal feasibility problems : least-squares solutions in a product space," *Trans. Signal Process.* SP-42, 2955-2966, 1994.
- [19] A. Constantinesco, P. Choquet, L. Monassier, V. Israel-Jost, L. Mertz, "Assessment of left ventricular perfusion, volumes and motion in mice using pinhole gated SPECT," *J Nucl Med*, vol.46, pp.1005-1011, 2005.
- [20] A.P. Dempster, N.M. Laird, D.B. Rubin, "Maximum likelihood from incomplete data," *J Roy Stat Soc Series B*, vol.39, pp.1-38, 1977.
- [21] F. Dubois, "Reconstruction des images tomographiques par retroprojection filtrée," *Revue de l'ACOMEN*, vol.4, pp.92-99, 1998.
- [22] T. Elfving, "Block-iterative methods for consistent and inconsistent linear equations," *Numer Math*, vol. 35, pp. 1-12, 1980.
- [23] L.A. Feldkamp, L.C. Davis, J.W. Kress, "Practical cone-beam algorithm," *J Opt Soc Am A*, vol.1, pp.612-619, 1984.
- [24] R. Gordon, R. Bender, and G.T. Herman, "Algebraic reconstruction techniques (ART) for three-dimensional electron microscopy and x-ray photography," *J Theoret Biology*, vol.29 , pp. 471-481, 1970.
- [25] P. Grangeat, *Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the Radon transform in Mathematical Methods in Tomography*, G.T. Herman, A.K. Louis, F. Natterer, Lecture Notes in Mathematics, pages 66-97, 1991.
- [26] J.B.A. Habraken, K. de Bruin, M. Shehata, J. Booij, R. Bennink, L.F. Berthe et al., "Evaluation of High-Resolution Pinhole SPECT Using a Small Rotating Animal," *J Nucl Med* vol.42, pp.1863-1869, 2001.
- [27] T. Hebert, R. Leahy, M. Singh, "Fast MLE for SPECT using an intermediate polar representation and a stopping criterion," *IEEE Trans Nucl Sci*, vol.35, pp. 615-619, 1988.
- [28] G. T. Herman, *Image Reconstruction from Projections - The fundamentals of Computerized Tomography*. W. Rheinboldt, Ed. New-York : Academic Press, 1980 ; 180-205.
- [29] T. Hirai, R. Nohara, R. Hosokawa, M. Tanaka, H. Inada, Y. Fujibayashi, M. Fujita, J. Konishi, S. Sasayama, "Evaluation of myocardial infarct size in rat heart by pinhole SPECT," *J Nucl Cardiol*, vol.7, pp.107-111, 2000.

- [30] H. M. Hudson, R. S. Larkin, "Accelerated Image Reconstruction using Ordered Subsets of Projection Data," *IEEE Trans Med Imaging*, vol.13, pp.601-609, 1994.
- [31] V. Israel-Jost, "Reconstruction volumique d'images tomoscintigraphiques à partir de projections en géométrie cone-beam : application au collimateur sténopé ou pinhole," mémoire de D.E.A. de mathématiques appliquées et de 3^e année d'école d'ingénieur, Université Louis Pasteur et Ecole Nationale Supérieure de Physique de Strasbourg, Strasbourg, 2002.
- [32] V. Israel-Jost, Ph. Choquet, C. Blondet, I. J. Namer, I. Slim, N. Elkadri, L. Monassier, E. Sonnendrücker, A.Constantinesco,"Théorie et état de l'art de l'imagerie scintigraphique du petit animal avec collimateur pinhole simple et multi-trous," *Med.Nucl.*, vol.27, pp.557-567, 2003.
- [33] V. Israel-Jost, Ph. Choquet, S. Salmon, C.Blondet, E. Sonnendrücker, A. Constantinesco, "Pinhole SPECT Imaging : Compact Projection/Backprojection Operator for Efficient Algebraic Reconstruction," *IEEE Trans Med Imaging*, vol. 25, pp.158-167, 2006.
- [34] V. Israel-Jost, Ph. Choquet et A. Constantinesco, "A Prospective Study on Algorithms Adapted to the Spatial Frequency in Tomography," *International Journal of Biomedical Imaging*, vol.2006, article ID 34043, pp.1-6 (revue en ligne), 2006.
- [35] J. R. Jaszczak, L. K. Greer, E. C. Floyd, C. C. Harris, R. E. Coleman, "Improved SPECT quantification using compensation for scattered photons," *J Nucl Med*, vol.25, pp.893-900, 1984.
- [36] M. Jiang et G. Wang, "Convergence Studies on Iterative Algorithms for Image Reconstruction," *IEEE Trans Med Imaging*, vol. 22, no.5, pp. 569-579, 2003.
- [37] M. Jiang et G. Wang, "Convergence of the Simultaneous Algebraic Reconstruction Technique (SART)," *IEEE Trans Image Process*, vol. 12, pp. 957-961, 2002.
- [38] S. Kaczmarz, "Angenäherte auflösung von systemen linearer gleichungen," *Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et Lettres*, A35, pp.355-357, 1937.
- [39] K. Lange, R ; Carson, "EM reconstruction algorithms for emission and transmission tomography," *J Comp Ass Tomogr*, vol.8, pp.306-316, 1984.
- [40] I. Laurette, Ph. Desvignes, P. M. Koulibaly, E. Debreuve and J. Darcourt (1998, Apr.). Reconstruction en géométrie conique : utilisation d'un collimateur sténopé pour l'exploration thyroïdienne. *Revue de l'ACOMEN* [Online]. 4(2), pp. 152-157. Available : www.univ-st-etienne.fr/lbti/acomen/revue/1998/pdf2/laurette.pdf
- [41] I. Laurette, "Reconstruction en géometrie conique : application à l'imagerie d'émission tridimensionnelle," thèse de doctorat, mention Sciences de l'Ingénieur, Université de Nice-Sophia Antipolis, 1997.
- [42] A.M. Loening, S.S. Gambhir, "AMIDE : A Free Software Tool for Multimodality Medical Image Analysis", *Molecular Imaging*, 2(3) :131-137, 2003. Amide software. [Online]. Available : <http://amide.sourceforge.net>

- [43] J.R. Mallard and M. J. Myers, "The performance of a gamma camera for the visualization of radioactive isotopes in vivo," *Phys Med Biol*, vol. 8, pp. 165-182, 1963.
- [44] D. Marr, "Vision : A Computational Investigation into the Human Representation and Processing of Visual Information," W.H. Freeman and Company, NY, 1982.
- [45] S. Matej, R. M. Lewitt, "Practical considerations for 3D image reconstruction using spherically symmetric volume elements," *IEEE Trans Med Imaging*, vol. 15, pp. 68-78, 1996.
- [46] B. McBride. (Décembre 2003). SPECT : QC & QA. Présenté à WORKSHOP 2003 : "ADVANCES IN SPECT", Sydney. [En ligne]. Disponible à : <http://www.mrs.fhs.usyd.edu.au/anzsnm/PhySIG%202003/08-McBrideTalk.PDF>
- [47] S. R. Meikle, P. Kench, A. G. Weisenberger, R. Wojcik, M. F. Smith, S. Majewski, S. Eberl, R. R. Fulton, A. B. Rosenfeld and M. J. Fulham, "A prototype coded aperture detector for small animal SPECT," *IEEE Trans Nucl Sci*, vol.49, pp.2167–2171, 2002.
- [48] S.D. Metzler, J.E. Bowsher, M.F. Smith, R.J. Jaszczak, "Analytic Determination of pinhole collimator sensitivity with penetration," *IEEE Trans Med Imaging*, vol.20, pp.730-741, 2001.
- [49] C. Mora, M. Rafecas, "Polar Pixels for High Resolution Small Animal PET," IEEE Nuclear Science Symposium, San Diego, Etats-Unis, octobre 2006.
- [50] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography*. SIAM, Philadelphie, 2001.
- [51] F. Natterer et F. Wübbeling, *Mathematical Methods in Image Reconstruction*. SIAM, Philadelphie, 2001.
- [52] S.J. Norton, "Iterative reconstruction algorithms : convergence as a function of spatial frequency," *J Opt Soc Am A*, vol.2, pp. 6-13, 1985.
- [53] K. Ogawa, T. Kawade, J. Jolkkonen, K. Nakamura, A. Kubo, T. Ichihara, "Ultra high resolution pinhole SPECT for small animal study," *IEEE Trans Nucl Sci*, vol.45, pp.3122-3126, 1998.
- [54] V. Pacorel, "Mise en œuvre de la méthode FDK en reconstruction tomographique", rapport de stage de maîtrise, 2004.
- [55] J.E. Pasciak, *A note on the Fourier Algorithm for Image Reconstruction*, Brookhaven National Laboratory, Upton, NY, 1981.
- [56] J. Radon, "Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten," *Berichte Sächsische Akademie der Wissenschaften Math-Phys Kl*, 69, pp.262-267, 1917.
- [57] M. Rafecas, B. Mosler, M. Dietz, M. Pogl, A. Stamatakis, D.P. McElroy, S.I. Ziegler, "Use of a Monte Carlo-based probability matrix for 3-D iterative reconstruction of MADPET-II data," *IEEE Trans Nucl Sci*, vol.51, pp.2597- 2605, 2004.
- [58] A.C. Sauve, A.O. Hero, W.L. Rogers, S.J. Wilderman, N.H. Clinthorne, "3D image reconstruction for a Compton SPECT camera model," *IEEE Trans Nucl Sci*, vol.46, pp. 2075-2084, 1999.

- [59] J.J. Scheins, H. Herzog, "Enhanced System Matrix Compression for Iterative PET Reconstruction Using Non-Cuboid, Rotationally Symmetric Voxel Formations," *IEEE Nuclear Science Symposium*, San Diego, Etats-Unis, octobre 2006.
- [60] N.U. Schramm, M. Schipper, T. Schurrat, M. Béhé, H. Alfke, U. Engeland, G. Ebel, T.M. Behr, "Performance of a multi-pinhole animal SPECT," in *Proc IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record*, vol.3, pp.2077-2079, 2003.
- [61] N. Schramm, A. Wirrwar, F. Sonnenberg, and H. Halling, "Compact high resolution detector for small animal SPECT," *IEEE Trans Nucl Sci*, vol.47, pp.1163-1167, 2000.
- [62] C. Lackas, N.U. Schramm, J.W. Hoppin, U. Engeland, A. Wirrwar, H.Halling, "T-SPECT : a novel imaging technique for small animal research," *IEEE Trans Nucl Sci*, vol.52, pp.181-187, 2005.
- [63] L.A. Shepp, Y. Vardi, "Maximum likelihood reconstruction for emission tomography," *IEEE Trans Med Imaging*, vol.1, pp.113-122, 1982.
- [64] J.W. Stayman and J. A. Fessler, "Regularization for uniform spatial resolution properties in penalized-likelihood image reconstruction," *IEEE Trans Med Imaging*, vol.19, pp.601-615, 2000.
- [65] K. Tanabe, "Projection method for solving a singular system of linear equations and its applications," *Numer Math* vol.17, pp.203-214, 1971.
- [66] M. R. Trummer, "Reconstructing pictures from projections : on the convergence of the ART algorithm with relaxation," *Computing*, vol. 26, pp.189-195, 1981.
- [67] M. R. Trummer, "A note on the ART of relaxation," *Computing*, vol. 33, pp.349-352, 1984.
- [68] C. Vanhove, T. Lahoutte, M. Defrise, A. Bossuyt, P. Franken, "Reproducibility of left ventricular volume and ejection fraction measurements in rat using pinhole gated SPECT," *Eur J Nucl Med Mol Imaging*, vol. 32, pp.211-220, 2005.
- [69] D.A. Weber, M. Ivanovic, D. Franceschi, S.E. Strand, K. Erlandsson, M. Franceschi, H.L. Atkins, J.A. Coderre, H. Susskind, T. Button, K. Ljunggren, "Pinhole SPECT : An Approach to In Vivo High Resolution SPECT Imaging in Small Laboratory Animals," *J Nucl Med*, vol.35, pp.342-348, 1994.
- [70] M.C. Wu, D.W. Gao, R.E. Sievers, R.J. Lee, B.H. Hasegawa, M.W. Dae, "Pinhole Single-Photon Emission Computed Tomography for Myocardial Perfusion Imaging of Mice," *J Am Coll Cardiol*, vol.42, pp.576-582, 2003.
- [71] M.C. Wu, H.R. Tang, D.W. Gao, A. Ido, J.W. O'Connell, B.H. Hasegawa, M.W. Dae, "ECG-Gated Pinhole SPECT in Mice with Millimeter Spatial Resolution," *IEEE Trans Nucl Sci*, vol.47, pp.1218-1221, 2000.
- [72] J. Yang, P. Karjalainen, J. Kuikka, L. Patomaki, "A Scatter Correction Based on the Deconvolution Method in SPECT," in : Yuan B, Tang X, eds. 1996 3rd International Conference on Signal Processing. Proceedings, Beijing, China, October 14-18,1996, p. 501-504. New York : IEEE Press, 1996.

- [73] G.L. Zeng, G.T. Gullberg, "Unmatched Projector/Backprojector Pairs in an Iterative Reconstruction Algorithm," *IEEE Trans Med Imaging*, vol.19, pp.548-555, 2000.