À propos de la cohomologie du deuxième groupe stabilisateur de Morava ; application aux calculs de $\pi_*(L_{K(2)}V(0))$ et du groupe Pic_2 de Hopkins.

Nasko Karamanov

1er février 2006

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord mon directeur de thèse, Hans-Werner Henn, pour m'avoir introduit dans le monde de la topologie algébrique. Les rendez-vous au 316, au cours desquels il n'a pas ménagé son temps, m'ont énormément appris . Les repas et les bières bues ensemble n'en ont pas gâché le charme.

Би сакал да и се заблагодарам на мојата фамилија. Без нејзината подршка резултатите не би биле овде.

Je remercie les membres du jury d'avoir accepté de consacrer de leur temps précieux à la lecture de mon travail. J'adresse également mes remerciements à Mark Mahowald pour avoir accepté d'être rapporteur externe.

I would like to thanks Paul Goerss and Mark Mahowald for inviting me for one month at Northwestern University in Evanston, and also Tilman Bauer and Wolfgang Lück for inviting me three months in Münster. We had very intersting and fruitfull discutions.

Les cinq courageux qui ont partagé mon bureau pendant ces années, tous différents les uns des autres, m'ont apporté plus que je n'aurais pu l'imaginer, et parmi cela beaucoup de savoir sur la langue française, sur les séries télés, sur les jeux, sur le bridge et sur les blagues pas très orthodoxes.

J'ai partagé beaucoup de moments agréables et divertissants avec mes collègues.

Mes amis étaient là autant pour le soutien que pour les soirées.

Je remercie tous ceux qui se reconnaîtront.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction

Soit E_* une théorie d'homologie généralisée. La localisation de Bousfield par rapport à E_* est un foncteur L_E de la catégorie des spectres dans elle-même muni d'une transformation naturelle $\lambda : X \to L_E X$ terminale parmi les E_*-équivalences. Bousfield a montré que L_E existe pour toute théorie E_*.

Soit p un premier fixé et $K(n)$ la n-ième K-théorie de Morava. On rappelle que c'est une théorie cohomologique périodique multiplicative dont l'anneau des coefficients est $K(n)_* \cong \mathbb{F}_p[v_n, v_n^{-1}]$ avec $|v_n| = 2(p^n - 1)$. La loi de groupe formel associée est la loi de Honda H_n de hauteur n.

Les foncteurs $L_{K(n)}$ jouent un rôle très important dans la catégorie homotopique stable des complexes finis p-locaux. En effet, il existe une tour de foncteurs de localisation

$$\cdots \to L_n \to L_{n-1} \to \cdots$$

avec $L_n = L_{K(0)\vee\cdots\vee K(n)}$ et des transformations naturelles $id \to L_n$ tels que pour tout spectre fini p-local on a

$$X \simeq holim_n L_n X.$$

De plus, on a un carré h-cartésien (homotopy pullback)

$$\begin{array}{ccc} L_n X & \to & L_{K(n)} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ L_{n-1} X & \to & L_{n-1} L_{K(n)} X \end{array}$$

Les foncteurs $L_{K(n)}$ sont liés aux propriétés cohomologiques du groupe stabilisateur de Morava $\mathbb{S}_n$ qui est le groupe d'automorphismes de la loi de groupe formel de Honda. Ce groupe agit sur le spectre Lubin-Tate E_n de coefficients

$$E_{n*} = \mathbb{W}[[u_1, \cdots, u_{n-1}]][u, u^{-1}]$$

où $\mathbb{W}$ est l'anneau des vecteurs de Witt sur $\mathbb{F}_{p^n}$, les générateurs u_i sont en degré 0 et u est en degré -2.

L'action de $\mathbb{S}_n$ se prolonge en une action du groupe

$$\mathbb{G}_n = \mathbb{S}_n \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$$

et on a une suite spectrale

$$E_2^{s,t} = H^s(\mathbb{G}_n; (E_n)_t) \Rightarrow \pi_{t-s} L_{K(n)} S^0$$

Le foncteur L_1, tout comme L_2, pour $p > 3$ sont bien compris surtout de point de vue calculatoire [21]. Le cas $p = 3$ et $n = 2$ est plus difficile.

Dans ce cas la dimension cohomologique de $\mathbb{G}_2$ est infinie donc il n'existe pas de résolution finie projective du $\mathbb{G}_2$-module trivial $\mathbb{Z}_3$. Par contre, la dimension cohomologique virtuelle est 4, donc il existe un sous groupe d'indice fini dont la dimension cohomologique est 4. Donc on pourrait éventuellement construire une résolution de $\mathbb{Z}_3$ par des modules de permutations sur des sous-groupes finis de $\mathbb{G}_2$. Le groupe $\mathbb{G}_2$ contient un sous-groupe $\mathbb{G}_2^1$ tel que

$$\mathbb{G}_2 \cong \mathbb{G}_2^1 \times \mathbb{Z}_3.$$

Il suffit donc de construire une résolution pour le $\mathbb{G}_2^1$-module trivial $\mathbb{Z}_3$. Une telle résolution a été construite par Goerss, Henn, Mahowald et Rezk dans [7] dont l'une des formes est

$$0 \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z}_3 \longrightarrow 0$$

où

$$\begin{array}{ccccl} C_0 & = & C_3 & = & \mathbb{Z}_3[[\mathbb{G}_2^1]] \otimes_{\mathbb{Z}_3[G_{24}]} \mathbb{Z}_3 \\ C_1 & = & C_2 & = & \mathbb{Z}_3[[\mathbb{G}_2^1]] \otimes_{\mathbb{Z}_3[SD_{16}]} \chi \end{array}$$

où G_{24} et SD_{16} sont des sous-groupes finis de $\mathbb{G}_2^1$ et χ est un certain caractère du groupe SD_{16}.

Cette résolution est l'inspiration principale de ce travail. Elle permet d'étudier la catégorie $K(2)$-locale d'une autre manière que la théorie chromatique.

Pour tout $\mathbb{G}_2^1$-module M à partir de la résolution on construit une suite spectrale

$$Ext^t_{\mathbb{Z}_3[[\mathbb{G}_2^1]]}(C_s; M) \Longrightarrow H^{s+t}(\mathbb{G}_2^1; M)$$

où seules la 0-ième ligne et les 0-ième et 3-ème colonnes sont non nulles.

La construction de GHMR ne donne pas une formule explicite des morphismes de la résolution donc des différentielles de la suite spectrale. Un projet de Mahowald et Rezk [17] et de Mark Behrens [1] est d'interpreter les morphismes en terme de courbes elliptiques. De ce point de vue seul le morphisme ∂_1 est bien compris.

La partie cruciale de cette thèse est la description des morphismes. Pour ceci on présente une autre méthode de construction de la résolution GHMR. Elle utilise les co-invariants par rapports à certains sous-groupes de $\mathbb{G}_2$ bien choisis. On obtient une description explicite de ∂_1, le morphisme ∂_0 étant l'augmentation standard. Le morphismes ∂_2 est le plus difficile. On donne une approximation de ∂_2 qui est suffisante pour nos calculs.

La première application est sur la cohomologie de $\mathbb{G}_2^1$ à coefficients dans $E_{2*}V(0) = \mathbb{F}_9[[u_1]][u, u^{-1}]$ où $V(0)$ est le spectre de Moore pour le premier 3. C'est aussi la deuxième page de la suite spectrale de Adams-Novikov qui converge vers $\pi_*(L_{K(2)}V(0))$, d'où l'importence du calcul. Mahowald [16] a traduit les calculs de Shimomura [22] en terme de la résolution GHMR. Notre méthode est indépendante de celle de Shimomura qui utilise les méthodes classiques de la théorie chromatique.

La deuxième application est le calcul du group Pic_2^{alg} de Hopkins. Rappellons qu'un spectre $K(n)$-local X est inversible s'il existe un spectre $K(n)$-local Y tel que

$$L_{K(n)}(X \wedge Y) = L_{K(n)}S^0.$$

Alors Pic_n est le groupe des spectres inversibles dans la catégorie de spectres $K(n)$-locaux. L'importance de ce groupe en théorie d'homotopie était remarquée par Hopkins. Des résultats de Hopkins, Mahowald et Sadofsky montrent que

$$\begin{array}{llll} p=2 & Pic_1 & \cong & \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/4 \quad [13] \\ p>2 & Pic_1 & \cong & \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}/(2p-2) \quad [13] \\ p>3 & Pic_2 & \cong & \mathbb{Z}_p^2 \times \mathbb{Z}/2(p^2-1) \quad \text{[Hopkins, non publié]} \end{array}$$

Le groupe Pic_n^{alg} est le groupe des modules inversibles de la catégorie des $E_{n*}[[\mathbb{G}_n]]$-modules profinis. Pour tout n on a un morphisme

$$\varepsilon : Pic_n \to H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{W}_{\mathbb{F}_{p^n}}[[u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}]]^\times)$$

où le groupe à droite est un sous-groupe de Pic_n^{alg} d'indice 2. Dans le cas qui nous intéresse, $n = 2$ et $p = 3$, le noyau de ε est déterminé par les auteurs de [7].

Notre deuxième résultat principal est le théorème suivant

Théorème 1.0.1. $H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{W}_{\mathbb{F}_9}[[u_1]]^\times) \cong \mathbb{Z}_3^2 \times \mathbb{Z}/8$

Le présent texte est organisé comme suit : Dans le deuxième chapitre on fait un rappel de la théorie de déformations des lois de groupes formels de

Lubin-Tate, on décrit la structure du groupe stabilisateur de Morava et de certains de ses sous-groupes. Le troisième chapitre traite en détail la construction de la résolution. Cette construction diffère de celle de [7] et permet de donner une approximation du morphisme ∂_2. Dans le quatrième chapitre on décrit l'action de $\mathbb{G}_2$ sur l'anneau de Lubin-Tate modulo une certaine filtration. La suite spectrale mentionnée ci-dessus est décrite dans le chapitre cinq, où on fait également le calcul sur la cohomologie du spectre de Moore. Le calcul de la partie algébrique du groupe de Picard est fait dans le chapitre 6. L'approximation et l'évaluation détaillée du morphisme $C_2 \to C_1$ sont faites dans le dernier chapitre.

Chapitre 2

Prérequis

Dans ce chapitre on rappelle la théorie de Lubin et Tate, en suivant [7], on définit et décrit la structure du groupe stabilisateur de Morava et de certains de ses sous-groupes finis. Pour plus de détails voir [7] et [12].

2.1 La théorie de Lubin et Tate

Soit k un corps parfait de caractéristique p, Γ une loi de groupe formel définie sur k, A un anneau local complet d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et $\pi : A \to A/\mathfrak{m}$ la projection canonique.

Une *déformation* de Γ à A est la donnée d'un couple (G, i) où G est une loi de groupe formel définie sur A et d'un morphisme de corps $i : k \to A/\mathfrak{m}$ tels que $i_*\Gamma = \pi_*G$. L'étoile dans l'indice signifie que la loi en question est obtenue en appliquant le morphisme aux coefficients. On a donc les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & & \downarrow \\ k & \longrightarrow & A/\mathfrak{m} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & G \\ & & \downarrow \\ \Gamma & \longrightarrow & i_*\Gamma = \pi_*G \end{array}$$

On dit que deux telles déformations (G, i) et (H, j) sont $\star$-*isomorphes* s'il existe un isomorphisme de lois groupes formels $F : G \to H$ tel que le morphisme induit sur $A/\mathfrak{m}$ soit l'identité. On note $\mathbf{Def}_\Gamma(A)$ l'ensemble des classes de $\star$-isomorphismes de déformations de Γ sur A.

Soit n la hauteur de Γ. On note $\mathbb{W}_k$ l'anneau des vecteurs de Witt sur k. Soit $E(\Gamma, k) = \mathbb{W}_k[[u_1, \cdots, u_{n-1}]]$. C'est un anneau local complet d'idéal maximal $\mathfrak{m} = (p, u_1, \cdots, u_{n-1})$. On note q l'isomorphisme canonique $k \to E(\Gamma, k)/\mathfrak{m}$.

Le théorème de Lubin et Tate dit que le foncteur $A \mapsto \mathbf{Def}_\Gamma(A)$ est représentable i.e. qu'il existe une déformation (G, q) de Γ sur $E(\Gamma, k)$ telle que l'application naturelle

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_c(E(\Gamma,k),A) & \to & \mathbf{Def}_\Gamma(A) \\ f: E(\Gamma,k)\to A & \mapsto & (f_*G, \overline{f}q) \end{array}$$

soit une bijection. Ici $\overline{f}$ est la réduction de f sur les corps résiduels, et Hom_c sont les homomorphismes continues. La déformation (G,q) est appelée *déformation universelle*. De plus, si deux déformations sont $\star$-isomorphes le $\star$-isomorphisme est unique.

Soit $\mathcal{FGL}_n$ la catégorie des lois de groupes formels de hauteur n dont les objets sont les couples (Γ,k) comme ci-dessus, et les morphismes sont donnés par

$$(f,j):(\Gamma_1,k_1)\to(\Gamma_2,k_2)$$

où $j: k_1\to k_2$ est un homomorphisme de corps et $f: j_*\Gamma_1\to\Gamma_2$ un isomorphisme de lois de groupes formels. Soit $Rings_c$ la catégorie des anneaux locaux complets avec les homomorphismes locaux. On veut définir un foncteur

$$E(\cdot,\cdot):\mathcal{FGL}_n\to Rings_c.$$

Soit (f,j) un morphisme de $\mathcal{FGL}_n$ et G_1 et G_2 des déformations universelles de $E(\Gamma_1,k_1)$ et $E(\Gamma_2,k_2)$ respectivement. Soit $\widetilde{f}\in E(\Gamma_2,k_2)$ un relèvement de $f\in k_2[[x]]$ et H la loi de groupe formel telle que $\widetilde{f}: H\to G_2$ soit un isomorphisme. Plus precisement,

$$H(x,y)=\widetilde{f}^{-1}(G_2(\widetilde{f}(x),\widetilde{f}(y)))$$

et on a le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} G_1 & \longrightarrow & H & \xrightarrow{\widetilde{f}} & G_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_1 & \longrightarrow & j_*\Gamma_1 & \xrightarrow{f} & \Gamma_2 \end{array}$$

Le couple (H,j) est donc une déformation de Γ_1, la théorie de Lubin et Tate donne un homomorphisme $E(\Gamma_1,k_1)\to E(\Gamma_2,k_2)$ classifiant H, et qui est indépendant du relèvement $\widetilde{f}$. Ceci donne le foncteur voulu.

Le groupe d'automorphismes de (Γ,k) dans $\mathcal{FGL}_n$ est appelé le *grand groupe stabilisateur de Morava*. Il est determiné à isomorphisme près par la hauteur de Γ si k est séparablement clos.

Soit H_n la loi de groupe formel p-typique de Honda de hauteur n dont la p-série est donnée par

$$[p]_{H_n}(x)=x^{p^n}.$$

On peut montrer que tout automorphisme de H_n sur toute extension finie de corps de $\mathbb{F}_{p^n}$ est à coefficients dans $\mathbb{F}_{p^n}$. On appelle *groupe stabilisateur de Morava* , noté $\mathbb{S}_n$, le groupe d'automorphismes de H_n sur $\mathbb{F}_{p^n}$.

Le grand groupe stabilisateur de Morava, noté $\mathbb{G}_n$, est le groupe d'automorphismes de $(\Gamma, \mathbb{F}_{p^n})$ dans $\mathcal{FGL}_n$. On a un isomorphisme

$$\mathbb{G}_n \cong \mathbb{S}_n \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p).$$

On note $\mathbf{Def}_\Gamma(A)_*$ l'ensemble des classes d'équivalences des couples (G, u) avec $u \in A^\times$. Un morphisme $f : (F, u) \to (G, v)$ est un isomorphisme de lois de groupes formels $f : G \to H$ tel que $u = f'(0)v$. Comme avant on a un isomorphisme naturel :

$$\mathrm{Hom}_c(E(H_n, k)[u^{\pm 1}], A) \cong \mathbf{Def}_\Gamma(A)_*.$$

2.2 Le groupe stabilisateur de Morava

Dans cette partie on décrit la structure des groupes $\mathbb{S}_n$ et $\mathbb{G}_n$ dans le cas général, et après on se focalise sur le cas qui nous intéresse, c'est-à-dire $n = 2$ et $p = 3$. Pour plus de détails voir [12] et [19].

2.2.1 Propriétés générales de $\mathbb{G}_n$

Le groupe $\mathbb{S}_n$ peut être identifié avec le groupe des unités dans l'ordre maximal $\mathcal{O}_n$ de l'algèbre de division $\mathcal{D}_n$ sur $\mathbb{Q}_p$ de dimension n^2 et d'invariant de Hasse $\frac{1}{n}$.

Plus précisément, soit $\mathbb{W} = \mathbb{W}_{\mathbb{F}_{p^n}}$ l'anneau des vecteurs de Witt sur $\mathbb{F}_{p^n}$. Rappelons que dans ce cas $\mathbb{W}$ est une extension de $\mathbb{Z}_p$ de degré n. Alors $\mathcal{O}_n$ est l'extension de l'anneau $\mathbb{W}$ engendrée par un élément S qui vérifie les propriétés suivantes :

$$Sa = \phi(a)S \text{ and } S^n = p,$$

où $a \in \mathbb{W}$ et $\phi(a)$ est l'image de a par le relèvement de l'automorphisme de Frobenius $x \mapsto x^p$ de $\mathbb{F}_{p^n}$. Le morphisme ϕ engendre le groupe $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$. On a :

$$\phi(a_0 + a_1 S + \cdots + a_{n-1}S^{n-1}) = \phi(a_0) + \phi(a_1)S + \cdots + \phi(a_{n-1})S^{n-1}$$

L'élément S engendre un idéal bilatère $\mathfrak{m}$ tel que $\mathcal{O}_n/\mathfrak{m} \cong \mathbb{F}_{p^n}$. Le noyau de la projection standard $\mathcal{O}_n^\times \to \mathbb{F}_{p^n}^\times$ est appelé *groupe stabilisateur strict* de Morava, noté S_n. 0n a donc une suite exacte courte :

$$1 \to S_n \to \mathbb{S}_n \to \mathbb{F}_{p^n}^{\times} \to 1.$$

qui est scindée et on a $\mathbb{S}_n \cong S_n \rtimes \mathbb{F}_{p^n}^{\times}$.

Le groupe $\mathbb{S}_n$ a une structure profinie naturelle. En effet, on peut définir une filtration sur $\mathbb{S}_n$ par :

$$F_{\frac{k}{n}}\mathbb{S}_n := \{x \in \mathbb{S}_n | x \equiv 1 \bmod S^k\}.$$

Donc on a :

$$\mathbb{S}_n = F_0\mathbb{S}_n \supset S_n = F_{\frac{1}{n}}\mathbb{S}_n \supset F_{\frac{2}{n}}\mathbb{S}_n \supset \cdots$$

et des isomorphismes

$$F_0\mathbb{S}_n / F_{\frac{1}{n}}\mathbb{S}_n \cong \mathbb{F}_{p^n}^{\times},$$

et

$$F_{\frac{k}{n}}\mathbb{S}_n / F_{\frac{k+1}{n}}\mathbb{S}_n \cong \mathbb{F}_{p^n} \text{ pour } k \geq 1$$

induits par

$$x = 1 + aS^k \mapsto \overline{a}$$

pour un élément $a \in \mathbb{W}$ dont sa classe dans $\mathbb{F}_{p^n}$ est $\overline{a}$.

L'intersection des $F_{\frac{k}{n}}\mathbb{S}_n$ est l'élément 1 et $\mathbb{S}_n$ est complet vis à vis de cette filtration, i.e. on a

$$\mathbb{S}_n \cong \lim_{k} \mathbb{S}_n / F_{\frac{k}{n}}\mathbb{S}_n.$$

Comme les quotients $S_n/F_{\frac{k}{n}}S_n$ sont des p-groupes finis, S_n est un p-groupe profini.

L'algèbre graduée associée grS_n avec $gr_iS_n = F_iS_n/F_{i+\frac{1}{n}}S_n$ est une algèbre de Lie de crochet $[\overline{a}, \overline{b}]$ induit par le commutateur dans S_n. On peut aussi définir la puissance p-ième $P : gr_iS_n \to gr_{\varphi(i)}S_n$ où $\varphi(i) = \min\{i+1, pi\}$ qui définit sur gr_iS_n une structure d'algèbre de Lie mixte dans le sens de Lazard [15].

Lemme 2.2.1. *[12]*

a) Soit $\overline{a} \in gr_iS_n$ et $\overline{b} \in gr_jS_n$. Alors

$$[\overline{a}, \overline{b}] = \overline{a}\overline{b}^{p^{ni}} - \overline{b}\overline{a}^{p^{nj}} \in gr_{i+j}S_n$$

b) Soit $\overline{a} \in gr_iS_n$. Alors

$$P\overline{a} = \begin{cases} \overline{a}^{1+p^{ni}+\ldots+p^{(p-1)ni}} & si \quad i < (p-1)^{-1} \\ \overline{a} + \overline{a}^{1+p^{ni}+\ldots+p^{(p-1)ni}} & si \quad i = (p-1)^{-1} \\ \overline{a} & si \quad i > (p-1)^{-1} \end{cases}$$

L'action à droite de $\mathbb{S}_n$ sur $\mathcal{O}_n$ définit un morphisme de groupes $\mathbb{S}_n \to GL_n(\mathbb{W})$. La composition avec le déterminant se prolonge à un morphisme

$$\mathbb{G}_n \to \mathbb{W}^\times \rtimes \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$$

et on peut vérifier que son image est incluse dans $\mathbb{Z}_p^\times \times \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p)$. Or

$$\mathbb{Z}_p^\times \cong \mu_{p-1} \times \mathbb{Z}_p$$

où μ_{p-1} est le groupe des racines $(p-1)$-ièmes de l'unité. On obtient donc un homomorphisme appelé *déterminant réduit* $\mathbb{G}_n \to \mathbb{Z}_p$. On note le noyau $\mathbb{G}_n^1$ et on a donc une suite exacte courte

$$1 \to \mathbb{G}_n^1 \to \mathbb{G}_n \to \mathbb{Z}_p \to 1.$$

À l'aide des relations dans $\mathbb{G}_n$ on peut vérifier que son centre est isomorphe à $\mathbb{Z}_p^\times$ et on peut montrer que la composition

$$\mathbb{Z}_p^\times \to \mathbb{G}_n \to \mathbb{Z}_p^\times$$

envoie x sur x^n. Donc si p ne divise pas n on a

$$\mathbb{G}_n \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{G}_n^1.$$

2.2.2 Le groupe $\mathbb{G}_2$ pour $p = 3$

Tout élément x de $\mathbb{S}_2$ s'écrit sous la forme

$$x = a + bS, \text{ avec } a, b \in \mathbb{W} = \mathbb{W}_{\mathbb{F}_9} \text{ et } a \not\equiv 0 \bmod 3.$$

On peut écrire a et b de façon unique comme

$$a = t_0 + t_2 S^2 + t_4 S^4 + \cdots \text{ et } b = t_1 + t_3 S^2 + t_5 S^4 + \cdots$$

où $t_i = t_i(x) \in \mathbb{W}$ sont des éléments de Teichmüller, ce qui est équivalent à dire qu'ils vérifient $t_i^9 = t_i$. Si x est un élément de S_2 alors $a \equiv 1 \bmod 3$.

On s'intéresse à deux éléments particuliers : $\omega \in \mathbb{W}$, relèvement de Teichmüller d'une 8-ième racine primitive de l'unité, et

$$a = -\frac{1}{2}(1 + \omega S)$$

tel que $a^3 = 1$. Les éléments a et ω vérifient la relation suivante :

$$\omega^2 a = a^2 \omega^2.$$

Donc a et $t := \omega^2$ engendrent un sous groupe d'ordre 12, qu'on note G_{12} qui est isomorphe à

$$\mathbb{Z}/3 \rtimes \mathbb{Z}/4.$$

C'est un sous-groupe distingué d'un sous-groupe G_{24} de $\mathbb{G}_2$, d'ordre 24, engendré par G_{12} et $\psi = \omega\phi$, où ϕ est le générateur du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3)$. On a une suite courte exacte :

$$1 \longrightarrow G_{12} \longrightarrow G_{24} \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3) \longrightarrow 1$$

qui n'est pas scindée. En fait, on a les relations :

$$\psi a = a\psi,\ t\psi = \psi t^3 \text{ et } \psi^2 = t^2$$

Le groupe engendré par ω sera noté C_8. Les éléments ω et ϕ engendrent un sous-groupe isomorphe au sous-groupe semi-dihédrale SD_{16}. Le groupe engendré par t et ψ est isomorphe au groupe des quaternions Q_8.

2.2.3 Les éléments a, b, c et d

On note par S_2^1 le 3-Sylow de $\mathbb{S}_2^1$. D'après Prop 4.4 de [12] on a

$$gr_i S_2^1 \cong \begin{cases} \mathbb{F}_9 & \text{si} \quad i \notin \mathbb{N} \\ \mathbb{F}_3 & \text{si} \quad i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

L'élément $i := -\omega^2$ est une racine quatrième de l'unité. On peut choisir ω tel que

$$\omega = 1 + i \bmod 3$$

donc dans $\mathbb{F}_9$ on a la relation

$$\omega^2 + \omega - 1 = 0.$$

Avec ces notations les classes de 1 et i sont des générateurs de $\mathbb{F}_9$ en tant que $\mathbb{F}_3$-espace vectoriel.

Dans la suite on utilisera les générateurs des premières filtrations de grS_2^1. Rappelons que $a \in F_{\frac{1}{2}}S_2^1$ et soit

$$\begin{array}{rclcrcl} b & = & [a,\omega], & \quad & c & = & [a,b], \\ d & = & [b,c], & \quad & e & = & [a,c], \end{array}$$

avec la convention

$$[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}.$$

D'après le lemme 2.2.1 on a

$$b \in F_{\frac{1}{2}}S_2^1,\ c \in F_1 S_2^1 \text{ et } d, e \in F_{\frac{3}{2}}S_2^1.$$

Le lemme suivant décrit ces éléments dans $\mathbb{S}_2^1$.

Lemme 2.2.2.

(a)

$$\begin{array}{rcl} b & = & \frac{1}{4}(1+3\omega^2+(\omega+\omega^3)S) \\ c & = & -\frac{1}{8}(1+6\omega^2-3\omega S) \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rclll} b & = & 1-S & mod & S^2 \\ c & = & 1+iS^2 & mod & S^3 \\ d & = & 1-iS^3 & mod & S^4 \\ e & = & 1+(i-1)S^3 & mod & S^4 \end{array}$$

(c) Le groupe $gr_{\frac{1}{2}}S_2^1$ est engendré par les classes de a et b, $gr_1 S_2^1$ par la classe de c et $gr_{\frac{3}{2}}S_2^1$ par les classes de e et d.

Démonstration. Pour la partie (a) on utilise la loi de multiplication dans $\mathbb{G}_2^1$. Pour (b) on peut soit utiliser le lemme 2.2.1 soit le déduire de (a). On utilise $\omega \equiv 1+i$ mod 3 d'où

$$\omega+\omega^3 \equiv 1+i+(1+i)^3 = -1.$$

(c) Le groupe $gr_{\frac{1}{2}}S_2^1$ est isomorphe à $\mathbb{F}_9 \cong (\mathbb{Z}/3)^2$ et les classes de a et b, c'est-à-dire $1+i$ et -1 sont des générateurs de $\mathbb{F}_9$. Les autres cas se montrent de la même façon. □

Les $\bullet$ dans l'image suivante représentent les générateurs des groupes $gr_i S_2^1$ en tant que $\mathbb{F}_3$-espaces vectoriels, représentés par les éléments correspondants de S_2^1.

$$\begin{array}{ccc} a\bullet & b\bullet & gr_{\frac{1}{2}}S_2^1 \\ c\bullet & & gr_1 S_2^1 \\ d\bullet & e\bullet & gr_{\frac{3}{2}}S_2^1 \\ \bullet & & \\ \bullet & \bullet & \\ \vdots & & \end{array}$$

On a vu que tout élément $g \in S_2^1$ s'écrit sous la forme $g = 1+\sum_{i>0} g_i S^i$ où $g_i = g_i^9$. Le lemme suivant décrit les éléments a, b, c et d sous une telle forme modulo une puissance de S. On aura besoin de cette description dans le chapitre 4.

Lemme 2.2.3.

$$\begin{array}{rcl} a & = & 1+\omega S+S^2 \ mod \ S^3 \\ b & = & 1-S-\omega S^2 \ mod \ S^3 \\ c & = & 1+iS^2-\omega S^3 \ mod \ S^4 \\ d & = & 1-iS^3 \ mod \ S^4 \end{array}$$

Démonstration. Par définition $a = -\frac{1}{2}(1+\omega S)$ et on a

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{1-3} = 1 + 3 + 3^2 + \cdots$$

donc $a = (1+S^2+S^4+\cdots)(1+\omega S)$ et on obtient (a). Si on procède pour b de la même manière en utilisant

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{1+3} = 1 - 3 + 3^2 - 3^3 + \cdots$$

on obtient

$$b \equiv 1 + (\omega + \omega^3)S + (\omega^2 - 1)S^2 \equiv 1 - S - \omega S^2 \bmod S^3$$

puisque $\omega + \omega^3 \equiv -1 \bmod 3$ et $\omega^2 - 1 \equiv -\omega \bmod 3$.

On utilise la même méthode pour l'élément c. □

On utilisera les propriétés suivantes des éléments a , b, c, d et e dans le chapitre suivant.

Lemme 2.2.4.
(a) $[b,d] \equiv c^3$ *mod* S^5
(b) $ed \equiv b^6$ *mod* S^4
(c) $[a,d] \equiv c^6$ *mod* S^5
(d) $[a,e] \equiv c^6$ *mod* S^5
(e) $[b,e] \equiv c^6$ *mod* S^5

Démonstration. On utilise le lemme 2.2.1 □

2.2.4 Les sous-groupes K et K'

D'après le lemme 2.2.1 un élément $1 + xS$ de S_2 d'ordre 3 vérifie $\overline{x} \neq 0$ et $\overline{x} + \overline{x}^{1+3+9} = 0$ i.e. $\overline{x}^4 = -1$ où $\overline{x}$ est la classe de x dans $gr_{\frac{1}{2}} S_2^1 \cong \mathbb{F}_9$. Comme il n'y pas pas d'élément $\overline{x} \in \mathbb{F}_3$ avec cette propriété si on divise le groupe additif de $\mathbb{F}_9$ avec le groupe additif de $\mathbb{F}_3$ on obtient un homomorphisme

$$S_2^1 \to gr_{1/2} S_2^1 \to \mathbb{Z}/3$$

dont le noyau K est sans torsion. On a donc une suite exacte courte

$$1 \to K \to S_2^1 \to \mathbb{Z}/3 \to 1 \tag{2.1}$$

Puisque S_2^1 contient des éléments d'ordre 3 la suite est scindée et on a

$$S_2^1 \cong K \rtimes \mathbb{Z}/3.$$

Avec cette définition d'après le lemme 2.2.2 l'élément b appartient à K. La filtration de S_2^1 induit une filtration sur K. D'après [12] on a

$$gr_i K \cong \begin{cases} \mathbb{F}_3 & i = \frac{1}{2} \\ \mathbb{F}_3 & i = \frac{k}{2}, \text{ k pair} \\ \mathbb{F}_9 & i = \frac{k}{2}, \text{ k impair} \end{cases}$$

Comme ci-dessus l'image suivante représente les générateurs de $gr_i K$ en tant que $\mathbb{F}_3$ espaces vectoriels. L'élément a qui n'appartient pas à K est représenté par $\circ$.

$$\begin{array}{rcrcl} a & \circ & b & \bullet & \qquad gr_{\frac{1}{2}} K \\ c & \bullet & & & \qquad gr_1 K \\ d & \bullet & e & \bullet & \qquad gr_{\frac{3}{2}} K \\ & \bullet & & & \\ & \bullet & & \bullet & \\ & \vdots & & & \end{array}$$

Le groupe K est étudié et utilisé pour le calcul de $H^*(S_2^1; \mathbb{F}_3)$ dans [12]. On note par K' le groupe $F_1 S_2^1$. De nouveau, on a une suite exacte courte

$$1 \to K' \to S_2^1 \to (\mathbb{Z}/3)^2 \to 1. \tag{2.2}$$

et des générateurs de $gr_i K'$ représentés sur l'image suivante :

$$\begin{array}{rcrcl} a & \circ & b & \circ & \qquad gr_{\frac{1}{2}} K' \\ c & \bullet & & & \qquad gr_1 K' \\ d & \bullet & e & \bullet & \qquad gr_{\frac{3}{2}} K' \\ c^3 & \bullet & & & \\ & \bullet & & \bullet & \\ & \vdots & & & \end{array}$$

Les groupes K et K' sont importants pour notre méthode de construction de la résolution GHMR.

Proposition 2.2.5. *[12] Les algèbres $H^*(K; \mathbb{F}_3)$ et $H^*(K'; \mathbb{F}_3)$ sont des algèbres de dualité de Poincaré de dimension 3.*

$\square$

La proposition suivante décrit des propriétés cohomologiques du groupe K.

Proposition 2.2.6.

(a) $H_0(K;\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3$

(b) $H_1(K;\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}/9 \times \mathbb{Z}/3$, *engendré par les classes de* b *et* c *d'ordre 9 et 3 respectivement.*

(c) $H_2(K;\mathbb{Z}_3) = 0$

Démonstration. Le groupe K agit trivialement sur $\mathbb{Z}_3$ d'où (a).

Pour montrer (b) on utilise l'isomorphisme

$$H_1(K;\mathbb{Z}_3) = K/\overline{[K,K]}$$

où $\overline{[K,K]}$ est la clôture du sous-groupe des commutateurs.

L'application

$$gr_iK \times gr_jK \to gr_{i+j}K$$
$$(x,y) \mapsto [x,y]$$

est surjective si $j = \frac{1}{2}$ et $i = \frac{k}{2}$ avec $k > 1$ un nombre impair. En effet, dans ce cas la formule du commutateur est donnée par $[x,y] = xy^{3^k} - yx = x(y^{3^k} - y)$ et il existe un $y \in gr_1K$ tel que $y^{3^k} - y$ soit non nul. De même, l'application est surjective dans le cas $i = \frac{k}{2}$ et $j = \frac{l}{2}$ où k et l sont pairs. On a donc montré que $F_2K \cap [K,K] = F_2K$. Le lemme 2.2.4 (b) montre que b^3 n'est pas un commutateur. Donc la clôture de $[K,K]$ est engendré par F_2K et $[b,c]$, d'où (b).

Pour montrer (c) on utilise la dualité de Poincaré. En effet, d'après [12] [Prop 4.4] on a $H^1(K;\mathbb{Z}/3) \cong (\mathbb{Z}/3)^2$, est donc par dualité on obtient $H_2(K;\mathbb{Z}/3) \cong (\mathbb{Z}/3)^2$. La suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{Z}_3 \xrightarrow{\times 3} \mathbb{Z}_3 \longrightarrow \mathbb{Z}/3 \to 0$$

induit la suite exacte longue

$$\to H_2(K;\mathbb{Z}_3) \to H_2(K;\mathbb{Z}_3) \to H_2(K;\mathbb{Z}/3) \to H_1(K;\mathbb{Z}_3) \to H_1(K;\mathbb{Z}_3) \to$$

D'après (b) on a $H_1(K;\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/3$ donc le noyau de la multiplication par 3 est isomorphe à $(\mathbb{Z}/3)^2$. Comme $H_2(K;\mathbb{Z}/3) \cong (\mathbb{Z}/3)^2$ le morphisme $H_2(K;\mathbb{Z}_3) \to H_2(K;\mathbb{Z}_3)$ est surjectif. Or K étant 3-profini par la dualité de Poincaré, le groupe $H_2(K;\mathbb{Z}_3)$ est un 3-groupe fini. Puisque la multiplication par 3 est surjective, le groupe est trivial. □

On a des propriétés similaires pour le groupe K'.

Proposition 2.2.7.

(a) $H_0(K';\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3$

(b) $H_1(K';\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}/9 \times \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/3$, *engendré par les classes de c d'ordre 9 et e et d d'ordre 3.*

(c) $H_2(K';\mathbb{Z}_3) = 0$

Démonstration. On procède de la même manière que pour le groupe K. Cette fois la classe de c est d'ordre 9, et celles de d et e d'ordre 3. $\square$

Chapitre 3

La résolution GHMR et le morphisme ∂_2

La résolution GHMR a la forme suivante :

$$0 \longrightarrow C_3 \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z}_3 \longrightarrow 0$$

avec $C_0 = C_3 = \mathbb{Z}_3[[\mathbb{G}_2^1]] \otimes_{\mathbb{Z}_3[G_{24}]} \mathbb{Z}_3$ et $C_2 = C_3 = \mathbb{Z}_3[[\mathbb{G}_2^1]] \otimes_{\mathbb{Z}_3[SD_{16}]} \chi$ où χ est un caractère qui sera donné explicitement ci-dessous. La méthode de [7] utilise le calcul de $H^*(S_2^1; \mathbb{F}_3)$ de [12]. Ici on présente une autre méthode qui utilise les co-invariants par rapport aux groupes K, K' et S_2^1 définis dans le chapitre précédent. Pour nos calculs on aura besoin seulement des morphismes ∂_1 et ∂_2. Dans ce qui suit on ne reconstruira pas toute la résolution, mais on donnera une formule pour ∂_1 et ∂_2.

3.1 Construction de la résolution

3.1.1 Méthode de la construction

Le groupe $\mathbb{G}_2^1$ a une dimension cohomologique virtuelle 4, donc il existe un sous-groupe d'indice fini qui a une dimension cohomologique 4. On peut alors espérer de construire une résolution finie du $\mathbb{G}_2^1$-module trivial $\mathbb{Z}_3$ par des modules de permutation (éventuellement tordus) sur des sous-groupes finis de $\mathbb{G}_2^1$ i.e. des modules de la forme $\mathbb{Z}_3[[\mathbb{G}_2^1]] \otimes_{\mathbb{Z}_3[F]} \nu$ où ν est un caractère d'un sous-groupe fini F de $\mathbb{G}_2^1$.

Les morphismes de la résolution sont $\mathbb{G}_2^1$-équivariants, ils sont donc complétement déterminés par l'image de $1 \otimes 1$. Plus précisément, pour définir un morphisme ∂_i de $C_i := \mathbb{Z}_3[[\mathbb{G}_2^1]] \otimes_{\mathbb{Z}_3[F_i]} \nu_i$ à $C_{i-1} := \mathbb{Z}_3[[\mathbb{G}_2^1]] \otimes_{\mathbb{Z}_3[F_{i-1}]} \nu_{i-1}$ il suffit de trouver un générateur du noyau N_{i-1} de ∂_{i-1} tel que le F_i-module qu'il engendre soit isomorphe à ν_i. Pour cela on cherche un élément qui vérifie ces propriétés au niveau des co-invariants par rapport à un sous-groupe de $\mathbb{G}_2^1$ bien choisi et puis on cherche un représentant dans le noyau N_{i-1}. Le lemme de Nakayama ci-dessous assure la surjectivité de $\partial_i : C_i \to N_{i-1}$ et donc l'exactitude de la résolution. Les sous-groupes avec lesquels on travaille sont K, K' et S_2^1.

Lemme 3.1.1 (Nakayama)**.** *Soit Γ un 3-groupe profini et M un $\mathbb{Z}_3[[\Gamma]]$-module profini de type fini tel que $H_0(\Gamma; M) = 0$. Alors $M = 0$.*

Démonstration. Si Γ est un 3-groupe fini et I le noyau de l'augmentation $\mathbb{Z}_3[\Gamma] \to \mathbb{F}_3$ alors $I^n \subset (3)$ si $n > |\Gamma|$. Donc $H_0(\Gamma; M) = 0$ implique $M = IM = I^2M = \cdots = I^nM$, et donc $M = 3M$ i.e. $M = 0$. Le cas profini se montre de la même manière, en passant aux limites. □

3.1.2 Première étape : le morphisme $\partial_0 : C_0 \to \mathbb{Z}_3$

Soit

$$C_0 = \mathbb{Z}_3[[\mathbb{G}_2^1]] \otimes_{\mathbb{Z}_3[G_{24}]} \mathbb{Z}_3.$$

Le morphisme

$$\partial_0 : C_0 \to \mathbb{Z}_3$$

est l'augmentation standard. On note N_0 son noyau. On a donc une suite exacte courte

$$0 \longrightarrow N_0 \to C_0 \xrightarrow{\partial_0} \mathbb{Z}_3 \longrightarrow 0.$$

3.1.3 Deuxième étape : le morphisme $\partial_1 : C_1 \to C_0$

Pour définir le morphisme ∂_1 une étude sur les K-co-invariants de N_0 suffit. Pour le morphisme ∂_2 une étude des K'-co-invariants sera nécessaire. La proposition suivante donne les propriétés des co-invariants de N_0 dont on aura besoin.

Le groupe $S_2^1/K \cong \mathbb{Z}/3$ engendré par la classe de a agit sur $H_0(K; N_0)$ et le groupe $S_2^1/K' \cong (\mathbb{Z}/3)^2$ engendré par les classes de a et b agit sur $H_0(K'; N_0)$. La proposition suivante détermine aussi cette action.

Proposition 3.1.2.

(a) $H_0(K; N_0) \cong \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/3$.

La partie libre est engendrée par la classe $\overline{h_0}$ de $h_0 = e_0 - \omega e_0$ et la torsion par $\overline{b}$, la classe de $e_0 - be_0$ d'ordre 9 et $\overline{c}$, la classe de $e_0 - ce_0$ d'ordre 3. L'action de a est donnée par :

$$a_*\overline{h_0} = \overline{h_0} + \overline{b} \qquad a_*\overline{b} = \overline{b} + \overline{c} \qquad a_*\overline{c} = \overline{c} - 3\overline{b}.$$

(b) $H_0(K'; N_0) \cong \mathbb{Z}_3^5 \oplus \mathbb{Z}/9 \oplus \mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/3$. *La partie libre est engendrée par les classes de* $h_0 = e_0 - \omega e_0$, $h_1 = e_0 - be_0$, $h_2 = e_0 - b^2 e_0$, $h_3 = e_0 - b\omega e_0$ *et* $h_4 = e_0 - b^2\omega e_0$. *Les partie torsion est engendrée par la classe* $\overline{c}$ *de* c *d'ordre 9 et les classes* $\overline{e}$ *et* $\overline{d}$ *de* e *et* d *respectivement, d'ordre 3. L'action de* a *est donnée par :*

$$\begin{array}{ll} a_*\overline{h_0} = \overline{h_3} & a_*\overline{c} = \overline{c} + \overline{e} \\ a_*\overline{h_1} = \overline{h_1} + \overline{c} & a_*\overline{d} = \overline{d} - 3\overline{c} \\ a_*\overline{h_2} = \overline{h_2} + 2\overline{c} + \overline{d} & a_*\overline{e} = \overline{e} - 3\overline{c} \\ a_*\overline{h_3} = \overline{h_4} + \overline{c} & \\ a_*\overline{h_4} = \overline{h_0} - \overline{c} - \overline{e} & \end{array}$$

L'action de b *est donnée par :*

$$\begin{array}{ll} b_*\overline{h_0} = \overline{h_3} - \overline{h_1} & b_*\overline{c} = \overline{c} + \overline{d} \\ b_*\overline{h_1} = \overline{h_2} - \overline{h_1} & b_*\overline{d} = \overline{d} + 3\overline{c} \\ b_*\overline{h_2} = -\overline{h_1} - \overline{d} - \overline{e} & b_*\overline{e} = \overline{e} - 3\overline{c} \\ b_*\overline{h_3} = \overline{h_4} - \overline{h_1} & \\ b_*\overline{h_4} = \overline{h_0} - \overline{h_1} - \overline{e} - \overline{d} & \end{array}$$

Démonstration. (a) La suite exacte courte (2.1) induit une suite exacte longue :

$$0 \to H_1(K; \mathbb{Z}_3) \to H_0(K; N_0) \to H_0(K; C_0) \to H_0(K; \mathbb{Z}_3) \to 0$$

la première homologie de K à coefficients dans C_0 étant nulle puisque C_0 est libre de rang 2 comme K-module. Comme $H_0(K; C_0) \cong \mathbb{Z}_3^2$ de générateurs les classes de e_0 et ωe_0 on obtient la valeur des co-invariants cherchée.

Pour calculer l'action de a on utilise l'égalité suivante :

$$1 - XY = X(1 - Y) + 1 - X \tag{3.1}$$

où X et Y sont dans $\mathbb{Z}_3[[\mathbb{G}_2^1]]$.

Par définition on a $ae_0 = e_0$ et $a\omega e_0 = a\omega a^{-1}\omega^{-1}\omega a e_0 = b\omega e_0$ d'où

$$a(e_0 - \omega e_0) = e_0 - a\omega e_0 = e_0 - b\omega e_0 = b(e_0 - \omega e_0) + e_0 - be_0$$

où on a utilisé (3.1) pour la dernière égalité. Or $b \in K$ donc au niveau des K-co-invariants on obtient

$$a_*\overline{h_0} = \overline{h_0} + \overline{b}.$$

De même,

$$a(e_0 - be_0) = e_0 - abe_0 \overset{ab=cba}{=} e_0 - cbae_0 \overset{ae_0=e_0}{=} e_0 - cbe_0.$$

De nouveau, en utilisant 3.1 et en passant au co-invariants ($b, c \in K$) on obtient

$$a_* \overline{b} = \overline{b} + \overline{c}$$

D'après lemme 2.2.4 (b) on a $ed = b^6 \bmod F_2K$ et donc $e = d^2b^6$ puisque $d^3 \in F_2K$. Or $F_2K \subset [K,K]$ et $d = [b,c] \in [K,K]$ donc il exite un élément $d' \in [K,K]$ tel que $e = d'b^6$.Donc

$$a(e_0 - ce_0) = e_0 - ace_0 \overset{ac=eca}{=} e_0 - ece_0 = e_0 - d'b^6ce_0$$

ce qui en utilisant deux fois l'égalité 3.1 donne

$$a(e_0 - ce_0) = d'b^6(e_0 - ce_0) + d'(e_0 - b^6e_0) + e_0 - d'e_0.$$

Comme $d' \in [K,K]$ la classe $e_0 - d'e_0$ est nulle dans $H_0(K; N_0)$ et en utilisant 3.1 on montre que la classe de $e_0 - b^6e_0$ est $6\overline{b} = -3\overline{b}$ d'où

$$a_* \overline{c} = \overline{c} - 3\overline{b}$$

(b) On déduit la valeur de $H_0(K'; N_0)$ de la suite exacte longue induite par 2.2. Comme K'-module C_0 est libre de rang 6, donc $H_0(K'; C_0)$ a 6 générateurs, les classes de : e_0, ωe_0, be_0, b^2e_0, $b\omega e_0$ et $b^2\omega e_0$, d'où les générateurs de la partie libre de $H_0(K'; N_0)$.

Comme avant on a :

$$a(e_0 - \omega e_0) = e_0 - a\omega e_0 = e_0 - b\omega e_0$$

d'où

$$a_* \overline{h_0} = \overline{h_3}$$

Aussi

$$a(e_0 - b\omega e_0) = e_0 - ab\omega e_0 = e_0 - cba\omega e_0 = c(e_0 - b^2\omega e_0) + e_0 - ce_0$$

d'où

$$a_* \overline{h_3} = \overline{h_4} + \overline{c}.$$

Pour calculer l'action de a sur $\overline{h_4}$ on utilise le fait que $a_*^3 \overline{h_0} = \overline{h_0}$. Or

$$a_*^3 \overline{h_0} = a_*^2 \overline{h_3} = a_* \overline{h_4} + a_* \overline{c}$$

donc il reste à calculer l'action sur $\overline{c}$:

$$a(e_0 - ce_0) = e_0 - ace_0 = e_0 - ecae_0 = e_0 - ece_0$$

d'où en utilisant 3.1 on obtient

$$a_*\overline{c} = \overline{c} + \overline{e}$$

et donc

$$a_*\overline{h_4} = \overline{h_0} - \overline{c} - \overline{e}.$$

De même

$$a(e_0 - be_0) = e_0 - abe_0 = e_0 - cbae_0 = c(e_0 - be_0) + (e_0 - ce_0)$$

d'où

$$a_*\overline{h_1} = \overline{h_1} + \overline{c}.$$

Aussi

$$a(e_0 - b^2e_0) = e_0 - ab^2e_0 \overset{ab=cba}{\equiv} e_0 - cbabe_0 \overset{ab=cba}{\equiv} e_0 - cbcbae_0 \overset{bc=dcb}{\equiv} e_0 - cdcb^2e_0$$

ce qui en utilisant plusieurs fois 3.1 donne

$$a_*\overline{h_2} = \overline{h_2} + 2\overline{c} + \overline{d}.$$

Rappelons que d'après le lemme 2.2.4 (d) on a $[a, d] \equiv c^6 \mod S^5$ donc

$$ad = lc^6da$$

où $l \in [K', K']$ donc

$$a(e_0 - de_0) = e_0 - ade_0 = e_0 - lc^6dae_0$$

et en utilisant 3.1 on obtient

$$a_*\overline{d} = \overline{d} - 3\overline{c}.$$

L'action sur $\overline{e}$ se calcule de le même façon en utilisant les lemmes 2.2.4 et 3.1.

Pour calculer l'action de b on procède de la même manière :

$$b(e_0 - \omega e_0) = e_0 - \omega e_0 - (e_0 - be_0)$$

donc

$$b_*\overline{h_0} = \overline{h_3} - \overline{h_1}$$

et pareil pour l'action sur $\overline{h_1}$ et $\overline{h_3}$. Pour l'action sur $\overline{h_2}$ on utilise de nouveau le lemme 2.2.4 (b), donc il existe un élément $l \in [K', K']$ tel que $b^3 = ld^2e^2$, donc

$$b(e_0 - b^2e_0) = be_0 - b^3e_0 = be_0 - e_0 + e_0 - ld^2e^2e_0$$

d'où
$$b_*\overline{h_2} = -\overline{h_1} - \overline{d} - \overline{e}.$$
Pour l'action sur $\overline{h_4}$ on utilise le fait que $b^3\overline{h_0} = \overline{h_0}$, et l'action sur $\overline{d}$ et $\overline{e}$ s'obtient en utilisant le lemme 2.2.4 et l'égalité 3.1. □

Soit $C_1 = \mathbb{Z}_3[[\mathbb{G}_2^1]] \otimes_{\mathbb{Z}_3[SD_{16}]} \chi$ où χ est la représentation de SD_{16} sur $\mathbb{Z}_3$ telle que ω et ϕ agissent par multiplication avec -1 et soit e_1 la classe de $1 \otimes 1$ dans C_1.

Proposition 3.1.3. *Le morphisme $\partial_1 : C_1 \to N_0$ défini par $e_1 \mapsto e_0 - \omega e_0$ est surjectif.*

Démonstration. Montrons que le morphisme est bien défini. Par définition ψ fixe e_0. Donc $e_0 = \psi e_0 = \omega\phi e_0$ d'où $\phi e_0 = \omega e_0$ et aussi $e_0 = \phi^2 e_0 = \phi\omega e_0$ ce qui donne

$$\phi\partial_1(e_1) = \phi e_0 - \phi\omega e_0 = \omega e_0 - e_0 = -\partial_1(e_1) = \partial_1(\phi e_1)$$

$$\omega\partial_1(e_1) = \omega e_0 - \omega^2 e_0 = \omega e_0 - e_0 = -\partial_1(e_1) = \partial_1(\omega e_1)$$

donc le morphisme est bien défini. Ce morphisme est un relèvement du morphisme
$$\overline{\partial_1} : H_0(K; C_1) \to H_0(K; N_0),\ \overline{e_1} \mapsto \overline{h_0}.$$
Comme $H_0(K; C_1)$ est libre de générateurs : e_1, ae_1 et a^2e_1 et $ae_1 \mapsto a\overline{h_0} = \overline{h_0} + \overline{b}$ et $a^2e_1 \mapsto \overline{h_0} + 2\overline{b} + \overline{c}$ le morphisme $\overline{\partial_1}$ est surjectif, donc d'après le lemme 3.1.1 il en est de même pour ∂_1. □

3.1.4 Troisième étape : le morphisme $\partial_2 : C_2 \to C_1$

Le morphisme ∂_2 est plus compliqué. On procède de la même manière, donc on commence par une étude au niveau des co-invariants.

Soit N_1 le noyau de $\partial_1 : C_1 \to C_0$. Donc on a une suite exacte courte :

$$0 \to N_1 \to C_1 \to N_0 \to 0$$

Lemme 3.1.4. $H_1(K; N_0) = 0$.

Démonstration. C'est une conséquence immédiate du lemme 2.2.6 (c) et de la suite exacte courte 3.1.2. □

On montre de la même façon :

Lemme 3.1.5. $H_1(K'; N_0) = 0$.

$\square$

On obtient donc un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & H_0(K';N_1) & \longrightarrow & H_0(K';C_1) & \longrightarrow & H_0(K';N_0) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & H_0(K;N_1) & \longrightarrow & H_0(K;C_1) & \longrightarrow & H_0(K;N_0) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & H_0(S_2^1;N_1) & \longrightarrow & H_0(S_2^1;C_1) & \longrightarrow & H_0(S_2^1;N_0) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

La proposition suivante montre que $H_0(K;N_1)$ est engendré par la classe de $g_1 = 3(a-1)e_1$ en tant que module sur le groupe $< a >$. Or g_1 n'appartient pas à N_1. Donc il faut trouver un élément dans N_1 qui a la même classe que g_1 et dont le SD_{16}-module qu'il engendre est isomorphe à χ. Comme SD_{16} n'agit pas sur $H_0(K;N_1)$ il est très difficile de trouver un tel élément.

On choisit donc d'étudier les co-invariants par rapport à S_2^1. De nouveau on a besoin de connaître l'action de SD_{16} sur $H_0(S_2^1;N_1)$. La proposition suivante montre aussi que le morphisme $H_0(S_2^1;N_1) \to H_0(S_2^1;C_1)$ est nul, donc on ne peut pas utiliser un calcul de l'action sur $H_0(S_2^1;C_1)$.

Pour ceci on utilise le groupe K' et donc le diagramme ci-dessus. On calcule d'abord l'action de SD_{16} sur $H_0(K';C_1)$, et donc sur $H_0(K';N_1)$ puisque le morphisme $H_0(K';N_1) \to H_0(K';C_1)$ est injectif. Puis on obtient l'action sur $H_0(S_2^1;N_1)$. À priori on pourrait choisir de ne travailler qu'avec le groupe K', mais il est plus facile de contrôler les S_2^1 co-invariants.

Proposition 3.1.6.

(a) $H_0(K;N_1) \cong \mathbb{Z}_3^2$ *et comme sous-module de* $H_0(K;C_1)$ *il est engendré par les classes de*

$$g_1 = 3(a-1)^2 e_1 \text{ et } g_2 = 9(a-1)e_1.$$

L'action de a *est donnée par :*

$$a_*\overline{g_1} = -2\overline{g_1} - \overline{g_2}, \qquad a_*\overline{g_2} = 3\overline{g_1} + \overline{g_2}$$

(b) On a des isomorphismes de SD_{16}*-sous-modules de* $H_0(K';C_1)$

$$< a^2be_1 + ae_1 + a^2e_1 + ab^2e_1 > \cong < a^2b^2e_1 + be_1 + b^2e_1 + abe_1 > \cong \chi$$

La classe $\overline{f}$ *de*

$$f := -2(a^2be_1 + ae_1 + a^2e_1 + ab^2e_1) + 4e_1 + (a^2b^2e_1 + be_1 + b^2e_1 + abe_1)$$

est dans le noyau de $H_0(K';C_1) \to H_0(K';N_0)$*, son image dans* $H_0(K;C_1)$ *est* $-(\overline{g_1} + \overline{g_2})$.

(c) $H_0(S_2^1; N_1) \cong \mathbb{Z}/3$ engendré par la classe $\overline{\overline{n}}_1$ d'un élément $n_1 \in N_1$ tels que

$$\omega_* \overline{\overline{n}}_1 = -\overline{\overline{n}}_1$$

et

$$\phi_* \overline{\overline{n}}_1 = -\overline{\overline{n}}_1$$

Démonstration. (a) On déduit les valeurs des co-invariants à partir de la suite exacte longue induite par la suite exacte courte 3.1.2. Comme $\mathbb{Z}_3[[K]]$-module C_1 est libre de rang 3, le groupe $H_0(K; C_1)$ a donc trois générateurs : e_1, ae_1 et $a^2 e_1$. On a :

$$\overline{\partial_1}(e_1) = \overline{h_0}, \qquad \overline{\partial_1}(ae_1) = \overline{h_0} + \overline{b}, \qquad \overline{\partial_1}(a^2 e_1) = \overline{h_0} + 2\overline{b} + \overline{c}.$$

Donc $\overline{\partial_1}(9(ae_1 - e_1)) = 9\overline{b} = 0$ et $\overline{\partial_1}(3(a-1)^2 e_1) = 3\overline{c} = 0$.

(b) On a les suites exactes courtes

$$1 \to K' \to S_2^1 \to (\mathbb{Z}/3)^2 \to 1$$

et

$$1 \to S_2^1 \to \mathbb{G}_2^1 \to SD_{16} \to 1.$$

On déduit que

$$H_0(K'; C_1) = \mathbb{Z}_3 \otimes_{\mathbb{Z}_3[[K']]} \otimes \mathbb{Z}_3[[\mathbb{G}_2^1]] \otimes_{\mathbb{Z}_3[SD_{16}]} \chi \cong \mathbb{Z}_3[\mathbb{G}_2^1/K'] \otimes_{\mathbb{Z}_3[SD_{16}]} \chi$$

Mais $\mathbb{G}_2^1/K' \cong (\mathbb{Z}_3/3)^2 \rtimes SD_{16}$ où le produit semi-direct est déterminé par l'action de conjugaison de ω et ϕ sur a et b. Donc

$$H_0(K'; C_1) \cong \chi \uparrow_{SD_{16}}^{(\mathbb{Z}/3)^2 \rtimes SD_{16}}$$

et on en déduit que dans $H_0(K'; C_1)$ on a

$$\begin{aligned} \phi_*(a^2 b e_1 + a e_1 + a^2 e_1 + a b^2 e_1) &= \omega_*(a^2 b e_1 + a e_1 + a^2 e_1 + a b^2 e_1) \\ &= -(a^2 b e_1 + a e_1 + a^2 e_1 + a b^2 e_1) \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned} \phi_*(a^2 b^2 e_1 + b e_1 + b^2 e_1 + a b e_1) &= \omega_*(a^2 b^2 e_1 + b e_1 + b^2 e_1 + a b e_1) \\ &= -(a^2 b^2 e_1 + b e_1 + b^2 e_1 + a b e_1) \end{aligned}$$

d'où les isomorphismes. L'image de e_1 par le morphisme $H_0(K'; C_1) \to H_0(K'; N_1)$, induit par ∂_1, est h_0. On obtient les images des autres générateurs de $H_0(K';C_1)$ à partir des formules de l'action de a et b données dans la proposition 3.1.2 (b).

$$\begin{array}{rcl} e_1 & \mapsto & \overline{h_0} \\ a^2e_1 & \mapsto & \overline{h_4}+\overline{c} \\ abe_1 & \mapsto & h_4-h_1 \\ b^2e_1 & \mapsto & h_4-h_2 \\ a^2b^2e_1 & \mapsto & h_3-h_2+\overline{c}-\overline{e}+\overline{d} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} ae_1 & \mapsto & \overline{h_3} \\ be_1 & \mapsto & h_3-h_1 \\ ab^2e_1 & \mapsto & h_0-h_2-3\overline{c}-\overline{e}-\overline{d} \\ a^2be_1 & \mapsto & h_0-h_1-2\overline{c}-\overline{e} \end{array}$$

et on verfie que $f \mapsto 0$.

(c) Il suffit de quotienter $H(K;N_1)$ par l'action de a. Les éléments g_1 et g_2 n'appartiennent pas à N_1 mais il existe des éléments n_1 et n_2 de N_1 qui ont la même classe dans $H_0(K;C_1)$ que g_1 et g_2. L'injectivité du morphisme

$$H_0(K;N_1) \to H_0(K;C_1)$$

permet, en utilisant (a), de conclure que

$$a_*\overline{n_1} = -2\overline{n_1} - \overline{n_2}$$

$$a_*\overline{n_2} = 3\overline{n_1} + \overline{n_2}$$

où $\overline{n_1}$ et $\overline{n_2}$ sont les classes de n_1 et n_2 dans $H_0(K;N_1)$. Donc si on note $\overline{\overline{n_1}}$ et $\overline{\overline{n_2}}$ les classes de n_1 et n_2 dans $H_0(S^1_2;N_1)$ on a

$$\overline{\overline{n_1}} = a_*\overline{\overline{n_1}} = -2\overline{\overline{n_1}} - \overline{\overline{n_2}}$$

donc

$$3\overline{\overline{n_1}} = \overline{\overline{n_2}}.$$

De même

$$\overline{\overline{n_2}} = a_*\overline{\overline{n_2}} = 3\overline{\overline{n_1}} + \overline{\overline{n_2}}$$

donc

$$3\overline{\overline{n_1}} = \overline{\overline{n_2}} = 0$$

d'où la valeur de $H_0(S^1_2;N_1)$.

Notons i l'inclusion $N_1 \to C_1$. Le morphisme $i_* : H_0(K';N_1) \to H_0(K';C_1)$ étant injectif on déduit l'existence d'un élément $f' \in N_1$ tel que

$$i_*\overline{f'} = \overline{f} \in H_0(K';C_1)$$

La classe de f dans $H_0(K';C_1)$ est $-(\overline{g_1}+\overline{g_2})$ (parce que $b=1$) donc de l'injectivité de $H_0(K;N_1) \to H_0(K;C_1)$ on déduit que la classe de f' dans

$H_0(K;N_1)$ est $-(\overline{n_1}+\overline{n_2})$ et donc $-\overline{\overline{n_1}}$ dans $H_0(S_2^1;N_1)$. Le diagramme suivant résume ces relations

$$\begin{array}{ccc} \overline{f'} & \to & \overline{f} \\ \downarrow & & \downarrow \\ -\overline{n_1}-\overline{n_2} & \to & -\overline{g_1}-\overline{g_2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ -\overline{\overline{n_1}} & \to & 0 \end{array}$$

De (b) on déduit que

$$\phi_*(\overline{f}) = \omega_*\overline{f} = -\overline{f}$$

d'où l'action sur $\overline{f'}$ et par le diagramme précédent l'action sur $\overline{\overline{n_1}}$. □

Soit $C_2 := C_1 = \mathbb{Z}_3[[\mathbb{G}_2^1]] \otimes_{\mathbb{Z}_3[SD_{16}]} \chi$ et $e_2 = 1 \otimes 1 \in C_2$. Le SD_{16}-module engendré par l'élément $n_1 \in N_1$ n'est pas forcement isomorphe à χ. Dans la proposition suivante on construit un élément n_1' qui a la même classe que n_1 dans $H_0(S_2^1;N_1)$ et tel que $\omega n_1' = \phi n_1' = -n_1'$.

Proposition 3.1.7. *Soit*

$$n_1' = \frac{1}{16} \sum_{g \in SD_{16}} \chi(g^{-1}) g(n_1).$$

Le morphisme

$$\partial_2 : C_2 \to C_1, e_2 \mapsto n_1'$$

est bien défini et surjectif.

Démonstration. Le morphisme est bien défini, et le morphisme induit

$$H_0(S_2^1;C_2) \to H_0(S_2^1;N_1)$$

est surjectif donc le résultat suit du lemme 3.1.1. □

3.2 Une formule pour n_1

L'élément n_1 a la même classe de K-co-invariants que $g_1 = 3(a-1)^2 e_1$. La stratégie est la suivante : on cherche des images réciproques des générateurs de N_0, et on exprime l'image d'un élément de même classe que g_1 à l'aide de ses générateurs et en faisant la bonne combinaison linéaire on obtient n_1.

On a

$$\begin{aligned} \partial_1((a-1)e_1) &= (a-1)(1-\omega)e_0 = -a\omega e_0 + \omega e_0 \\ &= -b\omega e_0 + \omega e_0 = -(1-b)(1-\omega)e_0 + (1-b)e_0 \end{aligned}$$

donc en rajoutant $(1-b)e_1$ à $(a-1)e_1$ on obtient une image réciproque de $(1-b)e_0$. Donc on a le lemme suivant

Lemme 3.2.1. *Soit*

$$l_1 := (a-b)e_1.$$

Alors

$$\partial_1(l_1) = (1-b)e_0.$$

$\square$

L'élément l_1 a la même classe de K-co-invariants que $(a-1)e_1$ et donc l'élément $(a-1)l_1$ a la même que $(a-1)^2e_1$. Le calcul suivant

$$\begin{aligned} \partial_1((a-1)l_1) &= (a-1)(1-b)e_0 = -abe_0 + be_0 = -cbae_0 + be_0 \\ &= (1-c)be_0 = -(1-c)(1-b)e_0 + (1-c)e_0 \end{aligned}$$

montre qu'en rajoutant $(1-c)l_1$ à $(a-1)l_1$ on obtient une image réciproque de $(1-c)e_0$, d'où

Lemme 3.2.2. *Soit*

$$l_2 := (a-c)(a-b)e_1.$$

Alors

$$\partial_1(l_2) = (1-c)e_0.$$

$\square$

L'élément l_2 a la même classe de K-co-invariants que $(a-1)^2e_1$.

Lemme 3.2.3. *Soit*

$$l_3 := 3cl_2 + (1-c)^2l_2.$$

Alors

$$\partial_1(l_3) = (1-c^3)e_0.$$

$\square$

Puisque $c \in K$ l'élément l_3 a la même classe que g_1.

Proposition 3.2.4. *Il existe des éléments x et y dans IK tels que*

$$n_1 = l_3 - xl_1 - yl_2$$

Démonstration. D'après le lemme 2.2.4 (a) on a $c^3 = 1$ dans $H_1(K;\mathbb{Z}_3)$ donc $c^3 \in \overline{[K,K]}$. L'égalité suivante

$$1 - [X,Y] = XY\left((1-Y^{-1})(1-X^{-1}) - (1-X^{-1})(1-Y^{-1})\right) \tag{3.2}$$

montre que $1 - c^3$ est dans IK^2. Donc il existe des éléments x et y de IK tels que

$$1 - c^3 = x(1-b) + y(1-c) \tag{3.3}$$

d'où en utilisant les trois lemmes précédents

$$\partial_1(l_3 - xl_1 - yl_2) = 0.$$

Puisque x et y sont dans IK l'élément $l_3 - xl_1 - yl_2$ a la même classe de K-co-invariants que l_3 donc que g_1, c'est-à-dire on peut prendre pour

$$n_1 = l_3 - xl_1 - yl_2.$$

$\square$

Donc il reste à déterminer x et y. Dans le chapitre 7 on donnera une approximation de ces éléments.

Chapitre 4

L'action de $\mathbb{G}_2$ sur $E_{2*}/3$

L'action de $\mathbb{G}_2$ sur $W[[u_1]][u^{\pm 1}]$ est très difficile à décrire explicitement. Devinatz et Hopkins [4] l'ont décrit sur l'algèbre enveloppante à puissances divisées de $W[[u_1]][u^{\pm 1}]$ après un changement de coordonnées qui lui même est assez technique. Ici on donne une méthode plus élémentaire pour déterminer l'action sur $E_{2*}/3$. Il se trouve que pour nos calculs on a besoin de connaître $\partial_2(u_1^k)$ modulo u_1^{k+13}. L'analyse de ∂_2 montrera que pour ceci il suffit de connaître l'action de a et b sur u_1 modulo u_1^7, l'action de c modulo u_1^{10} et l'action de d modulo u_1^{11}.

4.1 Méthode de calcul de l'action

L'anneau universel des lois de groupes formels p-typiques est

$$BP_* = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \ldots]$$

et E_{n*} devient une BP_*-algèbre via l'application

$$r(v_i) = \begin{cases} u_i u^{1-p^i} & i < n \\ u^{1-p^n} & i = n \\ 0 & i > n \end{cases}$$

Les générateurs (de Araki) v_i sont liés par la formule (dans $BP_* \otimes \mathbb{Q}$) [19] [Appendix 2]

$$p\lambda_k = \sum_{0 \leq i \leq k}^{\infty} \lambda_i v_{k-i}^{p^i} \tag{4.1}$$

avec $\lambda_0 = 1$ et le logarithme de la loi universelle sur BP_* est donné par

$$log_{F_{univ}}(x) = x + \sum_{i=1} \lambda_i x^{p^i}$$

et sa p-série

$$[p]_{F_{univ}}(x) = \sum_{i=0}^{F_{univ}} v_i x^{p^i}.$$

Soit H_n la loi de Honda p-typique de p-série :

$$[p]_{H_n}(x) = x^{p^n}.$$

La loi F_n définie sur $(E_n)_0$ par $F_n(x,y) = u^{-1} r_* F_{univ}(ux, uy)$ est p-typique de p-série :

$$[p]_{F_n}(x) = px +_{F_n} u_1 x^p +_{F_n} \cdots +_{F_n} +u_{n-1} x^{p^{n-1}} +_{F_n} x^{p^n}.$$

D'après la théorie de Lubin-Tate c'est une déformation universelle de H_n

Lemme 4.1.1.

$$\begin{array}{rcl} log_{F_2}(x) & = & x + \frac{1}{3} u_1 x^3 + (\frac{1}{3} + \frac{1}{9} u_1^4) x^9 \ \ mod\ x^{27} \\ exp_{F_2}(x) & = & x - \frac{1}{3} u_1 x^3 + \frac{1}{3} u_1^2 x^5 - \frac{4}{9} u_1^3 x^7 + (-\frac{1}{3} + \frac{46}{81} u_1^4) x^9 \ \ mod\ x^{11} \end{array}$$

Démonstration. D'après la formule 4.1 pour $p = 3$ on obtient

$$\lambda_1 = \frac{v_1}{3}$$

et

$$\lambda_2 = \frac{v_2}{3} + \frac{v_1^4}{9}.$$

On obtient la formule du logarithme à partir de l'égalité

$$log_{F_n}(x) = u^{-1} log_{r_* F_{univ}}(ux).$$

□

À partir de ces formules on peut retrouver F_2 [10] :

Lemme 4.1.2.

$$\begin{array}{rcl} x +_{F_2} y & \equiv & x + y - u_1(xy^2 + x^2 y) + u_1^2(xy^4 + x^4 y) - u_1^3(xy^6 + x^6 y) \\ & & -u_1^3(x^3y^4 + x^4y^3) - (x^3y^6 + x^6y^3) + u_1^4(x^4y^5 + x^5y^4) \ \ mod\ (3, \deg 11) \end{array}$$

Démonstration. On utilise la formule

$$x +_{F_n} y = exp_{F_n}(log_{F_n}(x) + log_{F_n}(y)).$$

□

Soit g un élément de $\mathbb{S}_n$. On a une composition d'isomorphismes de lois de groupes formels :

$$h_g : g_* F_n \to \widetilde{F} \xrightarrow{\widetilde{g}} F_n$$

le premier étant le $\star$-isomorphisme et le deuxième un relèvement de g. La loi $\widetilde{F}$ est définie par :

$$\widetilde{F}(x,y) = \widetilde{g}^{-1}(F_n \widetilde{g}(x), \widetilde{g}(y)) \ .$$

D'après [19] [Appendix 2] on peut écrire

$$h_g(x) = \sum_{i \geq 0}{}^{F_n} t_i(g) x^{p^i}$$

pour des fonctions uniques continues

$$t_i : \mathbb{S}_n \to \mathbb{W}_{\mathbb{F}_{p^n}}[[u_1, \cdots, u_{n-1}]] \ .$$

Pour calculer $g_* u_1$ on utilise l'équation :

$$h_g([p]_{g_* F_n}(x)) = [p]_{F_n}(h_g(x))$$

i.e.

$$\sum_{i \geq 0}{}^{F_n} t_i(g) \left([p]_{g_* F_n}(x)\right)^{p^i} = [p]_{F_n} \left(\sum_{i \geq 0}{}^{F_n} t_i(g) x^{p^i} \right) \ .$$

4.2 Cas $n = 2$ et $p = 3$

Dans cette partie on donne une formule de l'action de $\mathbb{G}_2^1$ sur $\mathbb{F}_9[[u_1]]$. Donc tous les calculs qui suivent sont modulo 3.

Soit

$$P_g(x) := \sum_{i \geq 0}{}^{F_2} t_i(g) \left(g_* u_1 x^3 +_{g_* F_n} x^{3^2} \right)^{3^i}$$

et

$$P_d(x) := u_1 \left(\sum_{i \geq 0}{}^{F_2} t_i(g) x^{3^i} \right)^3 +_{F_n} \left(\sum_{i \geq 0}{}^{F_n} t_i(g) x^{3^i} \right)^{3^2}$$

l'expression à gauche (respectivement à droite) de l'égalité ci-dessus, donc

$$P_g(x) = P_d(x) \ . \tag{4.2}$$

La formule de l'action de $\mathbb{G}_2^1$ s'obtient à partir de 4.2 en comparant les coefficients de x des deux cotés. Pour ceci on introduit la notation suivante : si

$$f(x) = f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_i x^i + \cdots$$

avec $f_i \in \mathbb{F}_9$ alors

$$C(f(x), k) := f_k = \text{ le coefficient de } x^k \ .$$

Puisqu'on travaille modulo 3 on a

$$C(f(x)^3, 3k) = C(f(x), k)^3 \ .$$

Lemme 4.2.1.

$$g_* u_1 = u_1 t_0^2 \ .$$

Démonstration. De l'égalité 4.2 on obtient

$$C(P_g(x), 3) = C(P_d(x), 3).$$

Puisque $[p]_{g_* F_2}(x) \subset (x)^3$ on a

$$C(P_g(x), 3) = C(t_0 g_* u_1 x^3, 3) = t_0 g_* u_1.$$

De méme $h_g(x) \subset (x)$ donc

$$C(P_d(x), 3) = C(u_1 h_g(x)^3, 3) = u_1 C(h_g(x), 1)^3 = u_1 t_0^3$$

donc

$$t_0 g_* u_1 = u_1 t_0^3$$

d'où le lemme.

□

Donc pour déterminer l'action sur u_1 il suffit de calculer t_0.

Lemme 4.2.2.

$$t_0 + u_1^3 t_1 t_0^6 = t_0^9 + u_1 t_1^3 \ .$$

Démonstration. On utilise l'égalité

$$C(P_g(x), 9) = C(P_d(x), 9).$$

On a

$$\begin{aligned} C(P_g(x), 9) &= C(t_0 [p]_{g_* F_2}(x) +_{F_2} t_1 [p]_{g_* F_2}(x)^3, 9) \\ &= C(t_0 [p]_{g_* F_2}(x), 9) + C(t_1 [p]_{g_* F_2}(x)^3, 9) \end{aligned}$$

puisque $[p]_{g_*F_2}(x)^3 \subset (x)^9$. Comme $C(t_0[p]_{g_*F_2}(x), 9) = t_0$ et

$$C(t_1[p]_{g_*F_2}(x)^3, 9) = t_1 C(g_* u_1 x^3, 3)^3 = t_1 C(u_1 t_0^2 x^3, 3)^3 = t_1 u_1^3 t_0^6$$

on obtient

$$C(P_g(x), 9) = t_0 + u_1^3 t_1 t_0^6.$$

De même

$$\begin{aligned} C(P_d(x), 9) &= C(u_1 h_g(x)^3 +_{F_2} h_g(x)^9, 9) \\ &= u_1 C(h_g(x), 3)^3 + C(h_g(x), 1)^9 = u_1 t_1^3 + t_0^9 \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Lemme 4.2.3.

$$t_1 - u_1^4 t_1 t_0^8 - u_1^7 t_1^2 t_0^{13} = t_1^9 + u_1 t_2^3 - u_1^2 t_0^{18} t_1^3 - u_1^3 t_0^9 t_1^6 \ mod\ u_1^9 \ .$$

Démonstration. Cette fois on utilise

$$C(P_g(x), 27) = C(P_d(x), 27).$$

On a

$$\begin{aligned} C(P_g(x), 27) &= C(t_0[p]_{g_*F_2}(x) +_{F_2} t_1[p]_{g_*F_2}(x)^3 +_{F_2} t_2[p]_{g_*F_2}(x)^9, 27) \\ &= C(t_0[p]_{g_*F_2}(x) +_{F_2} t_1[p]_{g_*F_2}(x)^3, 27) + C(t_2[p]_{g_*F_2}(x)^9, 27) \\ &= C(t_0[p]_{g_*F_2}(x) +_{F_2} t_1 u_1^3 t_0^6 x^9, 27) + t_1 + t_2 u_1^9 t_0^{18} \end{aligned}$$

puisque $[p]_{g_*F_2}(x)^3 \subset (x)^9$. Maintenant on utilise la formule de $F_2(x, y)$ du lemme 4.1.2, les monômes qui contribuent au coefficient modulo u_1^9 sont $-u_1 x y^2$, $u_1 x^2 y$ et $-u_1^3 x^6 y$.

$$\begin{aligned} &C(t_0[p]_{g_*F_2}(x) +_{F_2} t_1 u_1^3 t_0^6 x^9, 27) = C(t_0[p]_{g_*F_2}(x), 27) \\ &-u_1 \left(C(t_0[p]_{g_*F_2}(x), 9) t_1^2 u_1^3 t_0^{18} + C(t_0[p]_{g_*F_2}(x), 9)^2 t_1 u_1^3 t_0^6 \right) \\ &-u_1^3 C(t_0[p]_{g_*F_2}(x), 3)^6 t_1 u_1^3 t_0^6 \end{aligned}$$

Mais $C(t_0[p]_{g_*F_2}(x), 27) = C(t_0 u_1 t_0^2 x^3 +_{g_*F_2} x^9, 27) \equiv 0 \bmod u_1^9$ puisque le seul terme de $g_*F_2(x, y)$ qui contribue est $-u_1^3 x^6 y$. On obtient donc

$$C(t_0[p]_{g_*F_2}(x) +_{F_2} t_1 u_1^3 t_0^6 x^9, 27) \equiv -u_1 t_0 t_1^2 u_1^6 t_0^{12} - u_1 t_0^2 t_1 u_1^3 t_0^6 \bmod u_1^9$$

d'où l'expression de $C(P_g(x), 27)$. On a

$$\begin{aligned} C(P_d(x),27) &= C(u_1(t_0x +_{F_2} t_1x^3 +_{F_2} t_2x^9)^3 +_{F_2} (t_0x +_{F_2} t_1x^3)^9, 27) \\ &= C(u_1(t_0x +_{F_2} t_1x^3)^3 +_{F_2} t_0^9x^9, 27) + u_1t_2^3 + t_1^9 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} &C(u_1(t_0x +_{F_2} t_1x^3)^3 +_{F_2} t_0^9x^9, 27) = C(u_1(t_0x +_{F_2} t_1x^3)^3, 27) \\ &-u_1(C(u_1(t_0x +_{F_2} t_1x^3)^3, 9)t_0^{18} + C(u_1(t_0x +_{F_2} t_1x^3)^3, 9)^2t_0^9) \\ &-u_1^3C(u_1(t_0x +_{F_2} t_1x^3)^3, 3)^6t_0^9 \end{aligned}$$

et

$$C(u_1(t_0x +_{F_2} t_1x^3)^3, 27) = u_1C(t_0x +_{F_2} t_1x^3, 9)^3 = -u_1(u_1^3t_0^6t_1)^3 \equiv 0 \bmod u_1^9$$
$$C(u_1(t_0x +_{F_2} t_1x^3)^3, 9) = u_1C(t_0x +_{F_2} t_1x^3, 3)^3 = u_1t_1^3$$

donc

$$C(u_1(t_0x +_{F_2} t_1x^3)^3 +_{F_2} t_0^9x^9, 27) \equiv -u_1^2t_0^{18}t_1^3 - u_1^3t_0^9t_1^6 \bmod u_1^9$$

d'où le résultat.

□

Pour un élément $g = g_0 + g_1S + g_2S^2 + g_3S^3 \bmod S^4$ où $g_i \in \mathbb{W}$ avec $g_i^p = g_i$ on a

$$t_i(g) = g_i + g_{i1}u_1 + g_{i2}u_1^2 + \cdots$$

Dans les cas qui nous intéressent $g_0 = 1$, ce qu'on suppose dans la suite.

Proposition 4.2.4.

(a) Soit $g = 1 + g_1S + g_2S^2 \bmod S^3$

(i) $t_0 \equiv 1 + g_1^3u_1 - g_1u_1^3 + (g_2 - g_2^3)u_1^4 + g_1^3u_1^5 + (g_1^2 + g_1^6)u_1^6 \bmod u_1^7$

(ii) $g_*u_1 = u_1 + \sum_{i>1} \lambda_iu_1^i$ *avec*

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= -g_1^3 \\ \lambda_3 &= g_1^6 \\ \lambda_4 &= g_1 \\ \lambda_5 &= g_1^4 + g_2^3 - g_2 \\ \lambda_6 &= g_1^3(g_2^3 - g_2 - 1) \\ \lambda_7 &= g_1^6 \end{aligned}$$

(b) Soit $g = 1 + g_2S^2 + g_3S^3 \bmod S^4$

(i) $t_2 \equiv t_2^9 + u_1t_3^3 \bmod u_1^2$

(ii) $t_0 \equiv 1 + (g_2 - g_2^3)u_1^4 - g_3u_1^7 + (g_2 - g_2^3)u_1^8 \bmod u_1^{10}$

(iii) $g_*u_1 = u_1 + \sum_{i>1} \lambda_i u_1^i$ *avec*

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0 \\ \lambda_5 &= -g_2 \\ \lambda_8 &= g_3 \\ \lambda_9 &= -g_2 + g_2^2 + g_2^3 + g_2^4 + g_2^6 \\ \lambda_{10} &= 0 \end{aligned}$$

Démonstration. (a) (i) A partir du lemme 4.2.2 on obtient :

$$\begin{aligned} g_1^3 &= g_{01}, \\ 0 &= g_{02}, \\ 0 &= g_{03} + g_1, \\ g_{11}^3 &= g_{04} + g_{11}, \\ 0 &= g_{05} + g_{12} \\ 0 &= g_{06} - g_1 g_{01}^3 + g_{13} \end{aligned}$$

et à partir de 4.2.3 :

$$\begin{aligned} g_2^3 &= g_{11}, \\ -g_1^3 &= g_{12}, \\ -g_1^6 &= g_{13} \end{aligned}$$

et la valeur de t_0 suit. (ii) est une conséquence de (i) et du lemme 4.2.1. (b) (i) On utilise l'égalité

$$C(P_g(x), 81) = C(P_d(x), 81).$$

On a

$$\begin{aligned} &C(P_g(x), 81) = \\ &= C(t_0[p]_{g_*F_2}(x) +_{F_2} t_1[p]_{g_*F_2}(x)^3 +_{F_2} t_2[p]_{g_*F_2}(x)^9 +_{F_2} t_3[p]_{g_*F_2}(x)^{27}, 81) \\ &\equiv C(t_0[p]_{g_*F_2}(x) +_{F_2} t_1[p]_{g_*F_2}(x)^3 +_{F_2} t_2[p]_{g_*F_2}(x)^9, 81) \bmod u_1^{27} \\ &\equiv C(t_0[p]_{g_*F_2}(x) +_{F_2} t_1[p]_{g_*F_2}(x)^3, 81) + t_2 \bmod u_1^9 \\ &\equiv C(t_0(u_1 t_0^2 x^3 +_{g_*F_2} x^9) +_{F_2} t_1 x^{27}, 81) + t_2 \bmod u_1^3 \\ &\overset{*}{\equiv} C(t_0 x^9 +_{F_2} t_1 x^{27}, 81) + t_2 \bmod u_1^3 \\ &\overset{**}{\equiv} t_2 \bmod u_1^3 \end{aligned}$$

où on a (*) parce que pour avoir une puissance de x divisible par 9 dans $t_0[p]_{g_*F_2}(x)$ on doit avoir une puissance de $t_0 u_1 t_0^2 x^3$ (venant de $g_*F_2(x,y)$) divisible par 3, ce qui donne zéro modulo u_1^3 et on a (**) du au lemme 4.1.2.

De même

$$\begin{aligned}
&C(P_d(x), 81) = \\
&= C(u_1(t_0x +_{F_2} t_1x^3 +_{F_2} t_2x^9 +_{F_2} t_3x^{27})^3 +_{F_2} (t_0x +_{F_2} t_1x^3 +_{F_2} t_2x^9)^9, 81) \\
&= C(u_1(t_0x +_{F_2} t_1x^3 +_{F_2} t_2x^9)^3 +_{F_2} (t_0x +_{F_2} t_1x^3)^9, 81) + u_1t_3^3 + t_2^9 \\
&\equiv C(u_1(t_0x +_{F_2} t_2x^9)^3 +_{F_2} t_0^9x^9, 81) + u_1t_3^3 + t_2^9 \text{ mod } u_1^4
\end{aligned}$$

parce que $t_1 \equiv 0$ mod u_1. Or

$$C(u_1(t_0x +_{F_2} t_2x^9)^3 +_{F_2} t_0^9x^9, 81) \equiv C(u_1(t_0x +_{F_2} t_2x^9)^3, 81) \text{ mod } u_1^2$$

et

$$C(u_1(t_0x +_{F_2} t_2x^9)^3, 81) = u_1C(t_0x +_{F_2} t_2x^9, 27)^3.$$

Le coefficient de x^{27} dans $t_0x +_{F_2} t_2x^9$ provient d'un monôme de la forme $(t_0x)^{18}(t_2x^9)^1$ ou $(t_0x)^9(t_2x^9)^2$ et d'après le lemme 4.2.5 modulo u_1 la série $F_2(x, y)$ n'a pas de tels monômes.

(ii) Les valeurs des coefficients g_{0i} pour $i \leq 6$ sont une conséquence de (a)(i).

Il reste donc à déterminer g_{07}, g_{08} et g_{09}. À partir de l'équation 4.2.2 on obtient :

$$\begin{aligned}
g_{12}^3 &= g_{07} + g_{14} - g_{11}g_{01}^3, \\
0 &= g_{08} + g_{15} - g_{12}g_{01}^3 \\
g_{01}^9 &= g_{09} - g_{13}g_{01}^3 + g_{16}
\end{aligned}$$

et à partir de l'équation 4.2.3 :

$$\begin{aligned}
g_{21}^3 &= g_{14}, \\
-g_{11}^3 &= -g_{11} + g_{15} \\
0 &= g_{11}g_{01} - g_{12} + g_{16}
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
g_{07} &= -g_3, \\
g_{08} &= g_2 - g_2^3 \\
g_{09} &= 0
\end{aligned}$$

d'où le résultat.

(iii) est une conséquence de (ii) et du lemme 4.2.1 □

Dans la preuve de (b) de la proposition 4.2.4 on utilise le résultat suivant.

Lemme 4.2.5.

$$x +_{F_2} y \equiv x + y + \sum_{i=1} P_{8i+1}(x, y) \ mod \ (3, u_1)$$

où les P_{8i+1} sont des polynômes homogènes de degré $8i+1$ sans termes x^{8i+1} et y^{8i+1}.

Démonstration. La loi F_{univ} est à coefficients dans $\mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, ...]$. Puisque $r(v_1) = u_1 u^{-2} \equiv 0 \bmod u_1$ la série $F_2(x, y)$ modulo u_1 n'a que des coefficients $r(v_2)^i = u^{-8i}$. Or $F_2(x, y)$ est en degré 0 donc pour que $u^{-1} r(v_2)^i (ux)^k (uy)^t$ soit en degré zéro il faut et il suffit que $-1-8i+k+t = 0$ donc $k+t = 8i+1$. Donc modulo u_1 la série $F_2(x, y)$ n'a que des monômes de la forme $\alpha x^k y^t$ avec $k + t = 8i + 1$ et $\alpha \in \mathbb{F}_3$, d'où le résultat. $\square$

On utilise la base 1, i de $\mathbb{F}_9$ comme $\mathbb{F}_3$-module. À partir de la proposition 4.2.4 on obtient les formules suivantes pour l'action sur u_1 :

Proposition 4.2.6.

$$\begin{aligned}
a_* u_1 &= u_1 + (i-1)u_1^2 + iu_1^3 + (1+i)u_1^4 - u_1^5 + (i-1)u_1^6 \ mod \ u_1^7 \\
b_* u_1 &= u_1 + u_1^2 + u_1^3 - u_1^4 + (1-i)u_1^5 + (1+i)u_1^6 \ mod \ u_1^7 \\
c_* u_1 &= u_1 + iu_1^5 - (1+i)u_1^8 + (i-1)u_1^9 \ mod \ u_1^{11} \\
d_* u_1 &= u_1 - iu_1^8 \ mod \ u_1^{11}
\end{aligned}$$

Chapitre 5

Première application : sur la suite spectrale qui converge vers $H^*(\mathbb{G}_2^1; E_{2*}/3)$

Dans la première partie de ce chapitre on construit une suite spectrale à partir de la résolution GHMR, qui converge vers $H^*(\mathbb{G}_2^1; M)$ pour un $\mathbb{G}_2^1$-module M. La première application est sur la cohomologie de $\mathbb{G}_2^1$ à coefficients dans $E_{2*}/3$ et la deuxième (chapitre 6) pour le calcul du groupe de Picard de Hopkins.

5.1 La suite spectrale E

Puisque la résolution GHMR est par des modules de permutations (éventuellement tordus) et pas par des modules projectifs on ne peut pas l'utiliser directement pour un calcul de cohomologie. Par contre, on peut prolonger la résolution en un double complexe de modules projectifs et obtenir une suite spectrale qui converge vers la cohomologie voulue.

Proposition 5.1.1. *Il existe un double complexe $B_{\bullet,\bullet}$:*

$$\begin{array}{ccccccc}
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B_{0,1} & \leftarrow & B_{1,1} & \leftarrow & B_{2,1} & \leftarrow & B_{3,1} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
B_{0,0} & \leftarrow & B_{1,0} & \leftarrow & B_{2,0} & \leftarrow & B_{3,0} \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
C_0 & \overset{\partial_1}{\leftarrow} & C_1 & \overset{\partial_2}{\leftarrow} & C_2 & \overset{\partial_3}{\leftarrow} & C_3
\end{array}$$

tel que $totB_{\bullet,\bullet} \to \mathbb{Z}_3$ est une résolution projective du $\mathbb{G}_2^1$-module trivial $\mathbb{Z}_3$.

Démonstration. On peut prendre pour $B_{i,\bullet}$ la résolution induite par la résolution bar de C_i. La fonctorialité de la résolution bar assure les propriétés de double complexe. □

Une conséquence en est le résultat suivant :

Proposition 5.1.2. *Soit M un $\mathbb{G}_2^1$-module. On a une suite spectrale*

$$E_0^{s,t} = Hom_{\mathbb{G}_2^1}(B_{s,t}; M) \Rightarrow H^{s+t}(\mathbb{G}_2^1; M).$$

De plus,

$$E_1^{0,*} \cong E_1^{3,*} \cong Ext^*_{G_{24}}(\mathbb{Z}_3; M)$$
$$E_1^{1,0} \cong E_1^{2,0} \cong Ext^0_{SD_{16}}(\chi; M)$$
$$E_1^{1,i} = E_1^{2,i} = 0 \text{ pour } i > 0$$

Démonstration. L'existence de la suite spectrale est un résultat classique de l'homologie algébrique. Les valeurs des termes de la première page de la suite spectrale se montrent par un argument de lemme de Shapiro. Le dernier résultat et dû au fait que les modules C_1 et C_2 sont induits par des modules projectifs. □

5.2 Calcul de $E_2^{1,0}$

Rappelons que le spectre de Moore pour le premier p est défini par la cofibration

$$S \xrightarrow{p} S \to V(0)$$

et que pour $p = 3$ on a

$$E_{2*}V(0) \cong \mathbb{F}_9[[u_1]][u, u^{-1}]$$

qu'on notera simplement $E_{2*}/3$.

On peut trouver le calcul des G_{24}-invariants dans [6]. On a un isomorphisme d'anneaux gradués :

$$H^0(G_{24}; E_{2*}/3) \cong \mathbb{F}_3[v_1, \Delta^{\pm 1}]^\wedge = (E_{2*}/3)^{G_{24}}$$

où la complétion est par rapport à l'idéal $(v_1^6\Delta^{-1})$. On rappelle que

$$v_1 = u_1 u^{-2}$$

est $\mathbb{G}_2^1$-invariant modulo 3. Ainsi $|v_1| = 4$. D'après [7] on peut prendre :

$$\Delta = \frac{\omega^2}{(ua_* ua_*^2 u)^4}$$

donc $|\Delta| = 24$.

Les SD_{16}-invariants tordus sont plus faciles à calculer, l'action de ω étant [11] [Lemme 22] :

$$\omega_* u_1 = \omega^2 u_1 \text{ et } \omega_* u = \omega u$$

On rappelle que

$$v_2 = u^{-8}.$$

On obtient :

Lemme 5.2.1. *On a un isomorphisme de $\mathbb{F}_3[[v_1]]$-modules*

$$Ext^0_{SD_{16}}(\chi; E_{2*}/3) \cong \omega^2 v_2^{1/2} \mathbb{F}_3[v_1, v_2^{\pm}]^\wedge =: (E_{2*}/3)^{SD_{16}(\chi)}$$

où la complétion est par rapport à l'idéal $(v_1^4 v_2^{-1})$.

Démonstration. On a

$$\omega_* u_1^\alpha u^\beta = \omega_* u_1^\alpha u^{-2\alpha} u^{\beta+2\alpha} = v_1^\alpha \omega_* u^{\beta+2\alpha} = \omega^{\beta+2\alpha} v_1^\alpha u^{\beta+2\alpha}$$

donc $\omega_* u_1^\alpha u^\beta = -u_1^\alpha u^\beta$ si et seulement si $\beta + 2\alpha \equiv 4 \bmod 8$. De même

$$\phi_* \nu u_1^\alpha u^\beta = -\nu u_1^\alpha u^\beta$$

si et seulement si $\phi(\nu) = -\nu$ i.e. $\nu \in \omega^2 \mathbb{F}_3$ □

Les formules pour l'action de a sur u_1 et u permettent de calculer Δ :

Lemme 5.2.2.

$$\Delta^k \equiv \omega^2 (1 + 2\omega^2 u_1^2 + u_1^4) u^{-12} \ \mathit{mod}\ u_1^6.$$

5.2.1 Étude de la différentielle $E_1^{0,0} \to E_1^{1,0}$

À l'aide du lemme précédent on peut calculer l'image du morphisme ∂_1. Rappelons que ∂_1 envoie e_1 sur $e_0 - \omega e_0$ et que le morphisme n'est pas multiplicatif. Donc on a besoin de donner l'image de toutes les puissances de Δ.

Proposition 5.2.3. *Soit $l \in \mathbb{Z}$ non divisible par 3. Alors on a :*

$$\partial_1(\Delta^l) = \begin{cases} (-1)^{k+1} \omega^2 v_2^{\frac{1}{2}} v_2^{3k+1} (1 + l^2 v_1^4 v_2^{-1}) & \mathit{mod}\ u_1^6 \quad \mathit{si} \quad l = 2k+1; \\ (-1)^k \omega^2 v_2^{\frac{1}{2}} l v_1^2 v_2^{3k-1} & \mathit{mod}\ u_1^6 \quad \mathit{si} \quad l = 2k \end{cases}$$

Démonstration. Les calculs qui suivent sont modulo u_1^6. D'après le lemme 5.2 on a :

$$\Delta^l \equiv \omega^{2l}(1-\omega^2u_1^2+u_1^4)^l u^{-12l} \equiv \omega^{2l}(1-\omega^2 l u_1^2 + (l-\binom{l}{2})u_1^4)u^{-12l}$$

mais $l-\binom{l}{2} \equiv l^2 \bmod 3$, donc

$$\omega_*\Delta^l \equiv (-1)^l\omega^{2l}(1-\omega^6 l u_1^2 + l^2u_1^4)u^{-12l}$$

et donc

$$\partial_1(\Delta^l) \equiv \omega^{2l}(1-(-1)^l-(1+(-1)^l)\omega^2 l u_1^2+(1-(-1)^l)l^2u_1^4)u^{-12l}$$

d'où le résultat pour $l>0$. On procède de la même manière pour les autres cas. □

Puisque les modules sont à coefficients dans $\mathbb{F}_9$ on a

Lemme 5.2.4. *Soit $l=3^nl'$ où l' n'est pas divisible par 3. Alors*

$$\partial_1(\Delta^l)=(\partial_1(\Delta^{l'}))^{3^n}$$

□

Pour les propositions suivantes on aura besoin du lemme suivant

Lemme 5.2.5. *Soit*

$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & \{1+2(3k+1)|k\in\mathbb{Z}\} \\ A_2 & = & \{1+2\cdot 3^n(3k-1)|n\in\mathbb{N}, k\notin 3\mathbb{Z}\} \\ B_1 & = & \{1+2\cdot 3^{n+1}(3k+1)|n\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{Z}\} \\ B_2 & = & \{1+2\cdot 3^n(9k+8)|n\in\mathbb{N}, k\in\mathbb{Z}\} \end{array}$$

Alors les ensembles $\{1\}$, A_1, A_2, B_1 et B_2 forment une partition de $2\mathbb{Z}+1$

Démonstration. Il est clair que les intersections deux à deux des ensembles sont vides. Puisque $9k+8=9(k+1)-1=3k'-1$ avec $k'=3(k+1)$ on voit que $A_2\cup B_2=\{1+2\cdot 3^n(3k-1)|n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}\}$. □

Dans la proposition suivante on construit des générateurs b_l de $(E_{2*}/3)^{SD_{16}(\chi)}$ tels que b_l est dans l'image de ∂_1 si $l\in A_1\cup A_2$.

Proposition 5.2.6. *Pour tout entier k il existe des éléments*

$$b_{2k+1} \in (E_{2*}/3)^{SD_{16}(\chi)}$$

et

$$\widetilde{\Delta}_k \in (E_{2*}/3)^{G_{24}}$$

tels que

(a)

$$\widetilde{\Delta}_k \equiv \Delta^k \; mod \; v_1^4 \; et \; |\widetilde{\Delta}_k| = 24k$$

On a un isomorphisme de $\mathbb{F}_3[v_1]$-modules gradués profinis

$$\prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{F}_3[v_1]\{\widetilde{\Delta}_k\} \cong (E_{2*}/3)^{G_{24}}$$

(b)

$$b_{2k+1} \equiv \omega^2 v_2^{1/2+k} \; mod \; v_1^4 \; et \; |b_{2k+1}| = 8(2k+1)$$

On a un isomorphisme de $\mathbb{F}_3[v_1]$-modules gradués profinis

$$\prod_{k \in \mathbb{Z}} \mathbb{F}_3[v_1]\{b_{2k+1}\} \cong (E_{2*}/3)^{SD_{16}(\chi)}$$

(c) Le morphisme ∂_1 est $\mathbb{F}_9[v_1]$-linéaire continue et

$$\partial_1(\widetilde{\Delta}_l) = \begin{cases} b_{1+2(3k+1)} & si \quad l = 2k+1 \\ v_1^{4 \cdot 3^n - 2} b_{1+2\cdot 3^n(3k-1)} & si \quad l = 2 \cdot 3^n k \\ 0 & si \quad l = 0 \end{cases}$$

Démonstration. (a) On pose $\widetilde{\Delta}_0 := 1$. Soit $k \in \mathbb{Z}$ non divisible par 3, on pose

$$\widetilde{\Delta}_{2k} := \Delta^{2k}$$

À partir de la proposition 5.2.3 on obtient

$$\partial_1(\Delta^{2\cdot 3k}) \equiv (-1)^{3k}\omega^6 2^3 k^3 v_1^6 v_2^{1/2+3(3k-1)+1} \equiv (-1)^{3k}\omega^2 k v_1^6 v_2^{1/2+3(3k-1)+1} \bmod v_1^{18}$$

et

$$\partial_1(\Delta^{2(3k-1)+1}) \equiv (-1)^{3k-1+1}\omega^2(1 + v_1^4 v_2^{-1}) v_2^{1/2+3(3k-1)+1} \bmod v_1^6 \; .$$

On en déduit que

$$\partial_1(\Delta^{2\cdot 3k} - k v_1^6 \Delta^{2(3k-1)+1}) \equiv -k(-1)^{3k}\omega^2 v_1^{10} v_2^{1/2+3(3k-1)} \bmod v_1^{12} \; .$$

On pose :

$$\widetilde{\Delta}_{2\cdot 3k} := \Delta^{2\cdot 3k} - kv_1^6\Delta^{2(3k-1)+1}\ .$$

Par récurrence (sur n) on a

$$\partial_1(\widetilde{\Delta}_{2\cdot 3^n k}) \equiv -k(-1)^{3^n k}\omega^2 v_1^{4\cdot 3^n - 2} v_2^{1/2+3^n(3k-1)} \bmod v_1^{4\cdot 3^n}$$

d'où

$$\partial_1(\widetilde{\Delta}_{2\cdot 3^n k})^3 \equiv -k(-1)^{3^{n+1}k}\omega^6 v_1^{3(4\cdot 3^n-2)} v_2^{1/2+3^{n+1}(3k-1)+1} \bmod v_1^{4\cdot 3^{n+1}}$$

et

$$\partial_1(\Delta^{2\cdot 3^n(3k-1)+1}) \equiv (-1)^{3^n(3k-1)+1}\omega^2(1+v_1^4 v_2^{-1})v_2^{1/2+3^{n+1}(3k-1)+1} \bmod v_1^6.$$

On pose :

$$\widetilde{\Delta}_{2\cdot 3^{n+1}k} := \widetilde{\Delta}^3_{2\cdot 3^n k} - kv_1^{3(4\cdot 3^n-2)}\Delta^{2\cdot 3^n(3k-1)+1}.$$

Pour les indices impairs on a la définition suivante

$$\widetilde{\Delta}_{2k+1} := \Delta^{2k+1},$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a définit

$$\widetilde{\Delta}_k \equiv \Delta^k \bmod v_1^4$$

et on obtient l'isomorphisme de la proposition.

(b) La définition pour b_1 qui suit est suffisante pour la proposition. Mais dans la section 5.2.4 on fera une modification. Soit

$$b_1 := \omega^2 u^{-4}$$

et

$$b_{1+2(3k+1)} := \partial_1((-1)^{k+1}\Delta^{2k+1}).$$

D'après la proposition précédente on a :

$$b_{1+2(3k+1)} \equiv \omega^2 v_2^{1/2+(3k+1)} \bmod v_1^4$$

Soit k non divisible par 3. On a

$$\partial_1(\widetilde{\Delta}_{2k}) \equiv (-1)^{k+1}k\omega^2 v_1^2 v_2^{1/2} v_2^{3k-1} \bmod v_1^6$$

donc $\partial_1(\widetilde{\Delta}_{2k})$ est divisible par v_1^2. On définit

$$b_{1+2(3k-1)} := v_1^{-2}\partial_1(k(-1)^{k+1}\widetilde{\Delta}_{2k})$$

et

$$b_{1+2\cdot 3(3k-1)} := v_1^{-10}\partial_1(k(-1)^{k+1}\widetilde{\Delta}_{2\cdot 3k})$$

Par construction $\partial_1(\widetilde{\Delta}_{2\cdot 3^{n+1}k})$ est divisible par $v_1^{4\cdot 3^{n+1}-2}$ on définit donc

$$b_{1+2\cdot 3^{n+1}(3k-1)} := v_1^{-(4\cdot 3^{n+1}-2)}\partial_1(k(-1)^{k+1}\widetilde{\Delta}_{2\cdot 3^{n+1}k}) \ .$$

Remarquons que les facteurs $k(-1)^k$ qu'on a rajouté sont tels que les congruences de (b) soient satisfaites.

On a construit des b_l pour $l \in A_1 \cup A_2 \cup 1$, donc il reste à construire les b_l pour $l \in B_1 \cup B_2$. Pour un tel l on pourrait prendre $b_l = \omega^2 v_2^{1/2+(l-1)/2}$. Mais on donne une construction plus compliquée, qui est liée à la proposition 5.2.8. Soit $l \in B_1$ avec $n = 0$. Alors $l = 1 + 2\cdot 3(3k+1) = 18k+7$. On définit alors

$$b_{18k+7} := \omega^2 v_2^{1/2+3(3k+1)}.$$

Pour $n > 0$ supposons $b_{1+2\cdot 3^{n+1}(3k+1)}$ déjà défini. Alors

$$b_{1+2\cdot 3^{n+1}(3k+1)} \equiv \omega^2 v_2^{1/2+3^{n+1}(3k+1)} \bmod v_1^4$$

donc

$$b^3_{1+2\cdot 3^{n+1}(3k+1)} \equiv -\omega^2 v_2^{1/2+3^{n+2}(3k+1)+1} \bmod v_1^{12} \ .$$

Mais

$$\begin{aligned} b_{1+2\cdot(3^{n+2}(3k+1)+1)} &= \partial_1((-1)^{3^{n+1}(3k+1)+1}\Delta^{1+2\cdot 3^{n+1}(3k+1)}) \\ &\equiv \omega^2 v_2^{1/2+3^{n+2}(3k+1)+1}(1+v_1^4 v_2^{-1}) \bmod v_1^4 \end{aligned}$$

Donc la somme

$$b^3_{1+2\cdot 3^{n+1}(3k+1)} + b_{1+2\cdot(3^{n+2}(3k+1)+1)}$$

est divisible par v_1^4. On définit alors

$$b_{1+2\cdot 3^{n+2}(3k+1)} := v_1^{-4}(b_{1+2(3^{n+2}(3k+1)+1)} + b^3_{1+2\cdot 3^{n+1}(3k+1)}) \ .$$

Pour $l \in B_2$ on procède de la même manière. Si $n = 0$ alors $l = 18k + 17$ et on définit

$$b_{18k+17} := \omega^2 v_2^{1/2+(9k+8)}$$

et de façon récursive

$$b_{1+2\cdot 3^{n+1}(9k+8)} := v_1^{-4}(b_{1+2(3^{n+1}(9k+8)^3+1)} + b^3_{1+2\cdot 3^{n}(9k+8)}) \ .$$

Par construction, les éléments b_l pour $l \in B_1 \cup B_1$ sont dans $(E_{2*}/3)^{SD_{16}(\chi)}$.

Maintenant (c) est une conséquence de la définition des générateurs. □

Corollaire 5.2.7. *L'image de ∂_1 est le sous-$\mathbb{F}_3[v_1]$-module*

$$\prod_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}\setminus 3\mathbb{Z}} \mathbb{F}_3[v_1]\{v_1^{4\cdot 3^n-2} b_{1+2\cdot 3^n(3k-1)}\} \times \prod_{k\in\mathbb{Z}} \mathbb{F}_3[v_1]\{b_{1+2(3k+1)}\}$$

□

5.2.2 Étude de la différentielle $E_1^{1,0} \to E_1^{2,0}$

Proposition 5.2.8. *Pour tout entier k il existe des éléments*

$$c_{2k+1} \in (E_{2*}/3)^{SD_{16}(\chi)}$$

tels que :

(a) On a

$$c_{2k+1} \equiv \omega^2 v_2^{1/2+k} \ \mathit{mod}\ v_1^4 \ \mathit{et}\ |c_{2k+1}| = 8(2k+1)$$

et un isomorphisme de $\mathbb{F}_3[v_1]$-modules gradués profinis

$$\prod_{i \in 2\mathbb{Z}+1} \mathbb{F}_3[v_1]\{c_i\} \cong (E_{2*}/3)^{SD_{16}(\chi)}$$

(b) Le morphisme ∂_2 est donné par :

$$\partial_2(b_{1+2l}) = \begin{cases} v_1^{2\cdot 3^{n+1}+2} c_{3^{n+1}(6k+1)} & si \quad l = 3^{n+1}(3k+1) \\ v_1^{10\cdot 3^n+2} c_{3^n(18k+11)} & si \quad l = 3^n(9k+8) \\ 0 & si \quad l = 3k+1 \\ 0 & si \quad l = 3^n(3k-1) \end{cases}$$

Démonstration. D'après Prop 7.2.14 on a

$$\partial_2(b_{18k+7}) \equiv \omega^2 v_1^8 v_2^{1/2+(1+9k)} \bmod v_1^{12}.$$

Soit

$$c_{18k+3} := v_1^{-8} \partial_2(b_{18k+7}).$$

On construit les autres éléments par récurrence : d'après la proposition précédente

$$b_{1+2\cdot 3^{n+2}(3k+1)} = v_1^{-4}(b_{1+2(3^{n+2}(3k+1)+1)} + b^3_{1+2\cdot 3^{n+1}(3k+1)})$$

donc

$$\partial_2(b_{1+2\cdot 3^{n+2}(3k+1)}) = v_1^{-4} \partial_2(b^3_{1+2\cdot 3^{n+1}(3k+1)}) = v_1^{-4} v_1^{3(2\cdot 3^{n+1}+2)} c^3_{3^{n+1}(6k+1)}$$

parce que $b_{1+2(3^{n+2}(3k+1)+1)}$ est dans le noyau de ∂_2. On définit alors

$$c_{3^{n+2}(6k+1)} := c^3_{3^{n+1}(6k+1)}$$

et donc

$$\partial_2(b_{1+2\cdot 3^{n+2}(3k+1)}) = v_1^{-4+3(2\cdot 3^{n+1}+2)} c_{3^{n+2}(6k+1)} = v_1^{2\cdot 3^{n+2}+2} c_{3^{n+2}(6k+1)} \ .$$

La construction des éléments $c_{3^n(18k+11)}$ se fait de la même façon i.e.

$$c_{18k+11} := v_1^{-12}\partial_2(b_8^{18k+17})$$

et

$$c_{3^{n+1}(18k+11)} = c^3_{3^n(18k+11)} \ .$$

Pour tout les autres l qui ne sont pas de cette forme on pose

$$c_l := \omega^2 v_2^{1/2+(l-1)/2}$$

Les $b_{1+2(3k+1)}$ sont dans l'image de ∂_1 donc dans le noyau de ∂_2. Il en est de même pour $v_1^{4\cdot 3^n-2} b_{1+2\cdot 3^n(3k-1)}$. Puisque ∂_2 est v_1-linéaire les $b_{1+2\cdot 3^n(3k-1)}$ sont aussi dans le noyau de ∂_2.

□

5.2.3 La suite spectrale E'

Dans la Proposition 5.2.6 on a choisi $b_1 = \omega^2 u^{-4}$. Dans cette partie on construit un nouveau générateur b_1 tel que $\partial_2(b_1) = 0$. Pour ceci on va construire une nouvelle suite spectrale, dont l'un des avantages est que la résolution du G_{24}-module trivial $\mathbb{Z}_3$ est plus petite que la résolution bar, et les différentielles dont on a besoin sont plus facile à expliciter.

On commence par une résolution de $\mathbb{Z}_3$ en tant que G_{24} module trivial. Rappelons que le sous-groupe engendré par t et ψ est isomorphe à Q_8. On note $M \uparrow_{Q_8}^{G_{24}}$ le G_{24}-module induit par le Q_8-module M.

Proposition 5.2.9. *Soit $\overline{\chi}$ la représentation de Q_8 telle que t agit par multiplication par -1 et ψ comme l'identité. Le complexe $P_\bullet \to \mathbb{Z}_3$ défini par*

$$\xrightarrow{a^2-a} 1 \uparrow_{Q_8}^{G_{24}} \xrightarrow{a+a^2+1} 1 \uparrow_{Q_8}^{G_{24}} \xrightarrow{a^2-a} \overline{\chi} \uparrow_{Q_8}^{G_{24}} \xrightarrow{a^2+a+1} \overline{\chi} \uparrow_{Q_8}^{G_{24}} \xrightarrow{a^2-a} 1 \uparrow_{Q_8}^{G_{24}} \longrightarrow \mathbb{Z}_3$$

est une résolution projective 4-périodique du G_{24}-module trivial $\mathbb{Z}_3$.

Démonstration. La présence du caractère $\overline{\chi}$ est du à l'action de t sur $(a^2-a)\widetilde{e_0}$ où $\widetilde{e_0}$ est le générateur de P_0. En effet,

$$t(a^2-a)\widetilde{e_0} = (at - a^2 t)\widetilde{e_0} = (a-a^2)\widetilde{e_0} = -(a-a^2)\widetilde{e_0}.$$

Les modules sont projectifs parce que l'ordre de Q_8 est premier à 3. Les autres propriétés sont faciles à vérifier. □

Proposition 5.2.10. *Il existe un double complexe*

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ P'_{0,2} & \leftarrow & P'_{1,2} \\ \downarrow & & \downarrow \\ P'_{0,1} & \leftarrow & C_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ P'_{0,0} & \leftarrow & C_1 \end{array}$$

noté $P'_{\bullet,\bullet}$ où $P'_{0,\bullet}$ est la résolution induite par la résolution de la Prop 5.2.10. Le morphisme $C_2 \to C_1$ est le morphisme ∂_2 et le morphisme $C_1 \to P'_{0,0}$ est donné par $e_1 \mapsto \widetilde{e_0} - \omega\widetilde{e_0}$. De plus, $totP'_{\bullet,\bullet} \to \mathbb{Z}_3$ est une résolution projective du $\mathbb{G}_2^1$-module trivial $\mathbb{Z}_3$.

Démonstration. Dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & P'_{0,2} & \leftarrow & \vdots & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & P'_{0,1} & \leftarrow & C_2 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & P'_{0,0} & \leftarrow & C_1 & & \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \leftarrow & \mathbb{Z}_3 & \leftarrow & C_0 & \leftarrow & N_0 & \leftarrow & 0 \end{array}$$

$P'_{0,\bullet}$ est la résolution induite par la résolution de la Prop 5.2.9. La deuxième colonne est une résolution projective de N_0 puisque les modules C_1 et C_2 sont projectifs. Les morphismes horizontaux existent parce que les modules C_1, C_2 et $P'_{1,i}$ pour $i > 1$ sont projectifs. Le morphisme $C_1 \to P'_{0,0}$ est donné par $e_1 \to \widetilde{e_0} - \omega\widetilde{e_0}$. □

Proposition 5.2.11. *Pour tout $\mathbb{G}_2^1$-module M il existe une suite spectrale qui converge vers $H^*(\mathbb{G}_2^1; M)$ telle que*

$$E_0^{'1,0} = E_0^{'1,1} = Ext^0_{\mathbb{Z}_3[SD_{16}]}(\chi; M),$$

$$E_1^{'0,*} = H^*(G_{24}; M)$$

et

$$E_0^{'i,k} = 0 \text{ pour } i > 1.$$

Démonstration. La suite spectrale est celle associée au complexe $P'_{\bullet,\bullet}$. Les autres résultats se montrent avec le lemme de Shapiro. □

5.2.4 Modification de b_1

La suite exacte courte

$$1 \longrightarrow E_{2,*} \xrightarrow{\times 3} E_{2,*} \longrightarrow E_{2,*}/3 \longrightarrow 1$$

induit un morphisme connectant

$$H^0(\mathbb{G}_2^1; E_{2,*}/3) \to H^1(\mathbb{G}_2^1; E_{2,*})$$

est on note l'image de v_1 par α. L'homomorphisme croisé

$$\mathbb{G}_2^1 \to E_{2,*} : g \mapsto \frac{g_* v_1 - v_1}{3}$$

est un cycle permanent représentant α.

Proposition 5.2.12. *Le cocycle suivant représente α dans la résolution $P_\bullet \to \mathbb{Z}_3$ du G_{24}-module trivial $\mathbb{Z}_3$*

$$P_1 \to E_{2*}/3 : \widetilde{e_1} \mapsto \frac{a_*^2 v_1 - a_* v_1}{3} \ .$$

Démonstration. Pour trouver le cocycle dans la résolution $P_\bullet \to \mathbb{Z}_3$ on la compare avec la résolution bar $B_\bullet \to \mathbb{Z}_3$ de G_{24}. Rappelons qu'en tant que G_{24}-module $B_k = \mathbb{Z}_3[G_{24}]^{\otimes(k+1)}$ et une $\mathbb{Z}_3[G_{24}]$-base est donnée par

$$[g_1|g_2|\ldots|g_k] = (1, g_1, g_1 g_2, \ldots, g_1 \cdots g_k) \ .$$

La différentielle $\delta_2 : B_2 \to B_1$ est donnée par

$$\delta_2([g|h]) = g[h] - [gh] + [g]$$

et la différentielle $\delta_1 : B_1 \to B_0$ par

$$\delta_1([g]) = g[\ ] - [\ ] = g - 1 \ .$$

Soit

$$\varphi_0 : P_0 \to B_0 : \widetilde{e_0} \mapsto \frac{1}{8}(1 + t + t^2 + t^3 + \psi + \psi t + \psi t^2 + \psi t^3)$$

et

$$\varphi_1 : P_1 \to B_1 : \widetilde{e_1} \mapsto \frac{1}{8}(1 - t + t^2 - t^3 + \psi - \psi t + \psi t^2 - \psi t^3) a[a].$$

Alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
\downarrow & & \downarrow \\
P_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
P_0 & \xrightarrow{\varphi_0} & B_0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathbb{Z}_3 & & \mathbb{Z}_3
\end{array}$$

est commutatif. En effet, la composition $P_1 \to B_1 \to B_0$ est donnée par

$$\widetilde{e}_1 \mapsto \frac{1}{8}(1 - t + t^2 - t^3 + \psi - \psi t + \psi t^2 - \psi t^3)a(a-1)$$

et la composition $P_1 \to P_0 \to B_0$ par

$$\widetilde{e}_1 \mapsto (a^2 - a)\frac{1}{8}(1 + t + t^2 + t^3 + \psi + \psi t + \psi t^2 + \psi t^3) \ .$$

Or $t(a^2 - a) = -(a^2 - a)t$ et t^2 et ψ commutent avec a.

La composition $P_1 \to B_1 \to E_{2*}/3$ donne le cocycle cherché puisque t et ψ agissent trivialement sur $v_1 \in E_{2*}$ [11] [lemme 22]. $\square$

Proposition 5.2.13. *Il existe un élément, qu'on notera b_1, tel que*

(a) $b_1 \equiv \omega^2 u^{-4}$ mod u_1^4 ;

(b) $\partial_2(b_1) = 0$, donc b_1 est un cycle permanent ;

(c) Le cocycle b_1 représente $v_1\alpha \in H^1(\mathbb{G}_2^1; E_{2,*}/3)$.

Démonstration. Puisque $v_1\alpha = 0$ dans $H^1(G_{24}; E_{2*}/3)$ ([7]) le cocycle qui représente $v_1\alpha$ est un cobord pour la résolution $P_\bullet \to \mathbb{Z}_3$ donc il existe un morphisme $\iota : P_0 \to E_{2*}/3$ tel que

$$P_1 \to P_0 \xrightarrow{\iota} E_{2*}/3 : \widetilde{e}_1 \mapsto v_1\frac{a_*^2 v_1 - a_* v_1}{3} \ .$$

Comme $P_0 = 1 \uparrow_{Q_8}^{G_{24}}$ l'image de $\widetilde{e}_0$ par ι est dans $(E_{2*}/3)^{Q_8}$ donc si on pose $h := \iota(\widetilde{e}_0)$ on a

$$a_*^2 h - a_* h = v_1\frac{a_*^2 v_1 - a_* v_1}{3}.$$

Pour connaître le premier terme de h on a besoin d'information sur l'action de a sur E_{2*} (nos formules sont sur $E_{2*}/3$). D'après [19] [Appendix 2] pour tout élément $g \in \mathbb{S}_2$ on a

$$g_* v_1 = v_1 + (3 - 3^3)t_1(g)$$

et

$$t_1(a) \equiv -t_1(a^2) \equiv \omega u^{-2} \bmod (3, u_1) \ .$$

Donc

$$a_*v_1 - v_1 \equiv 3\omega u^{-2} \bmod (9, u_1) \ .$$

De même

$$a_*^2 v_1 - v_1 \equiv -3\omega u^{-2} \bmod (9, u_1)$$

donc

$$v_1 \frac{a_*^2 v_1 - a v_1}{3} \equiv \omega u_1 u^{-4} \bmod u_1^2.$$

Si

$$h \equiv (h_0 + h_1 u_1) u^{-4} \bmod u_1$$

on a

$$\begin{array}{rcl} a_*^2 h & = & (h_0(1+\omega^3 u_1) + h_1 u_1) u^{-4} \bmod u_1^2 \\ a_* h & = & (h_0(1-\omega^3 u_1) + h_1 u_1) u^{-4} \bmod (3, u_1^2) \end{array}$$

et on obtient $h_0 = \omega^2$.

Pour trouver un cocycle global (c'est-à-dire pour la résolution $totP'$) on compare la résolution $totP'_{\bullet,\bullet}$ avec la résolution standard $B_\bullet$ de $\mathbb{G}_2^1$. Les morphismes

$$\begin{array}{rcl} P'_{0,1} \oplus C_1 & \to & B_1 \\ (\widetilde{e_0}, 0) & \mapsto & \frac{1}{8} \sum_{g \in Q_8} \overline{\chi}(g^{-1}) g a[a] \\ (0, e_1) & \mapsto & \frac{1}{8} \sum_{g \in SD_{16}} \chi(g^{-1})[g] \end{array}$$

et

$$P'_{0,0} \to B_0 : \widetilde{e_0} \mapsto \frac{1}{8} \sum_{g \in Q_8} g$$

rendent le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ P'_{0,1} \oplus C_1 & \to & B_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ P'_{0,0} & \to & B_0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_3 & & \mathbb{Z}_3 \end{array}$$

commutatif. En effet, la composition $C_1 \to B_1 \to B_0$ est donnée par

$$e_1 \mapsto \frac{1}{8} \sum_{g \in SD_{16}} \chi(g^{-1})(g-1)$$

et la composition $C_1 \to P'_{0,0} \to B_0$ par

$$e_1 \mapsto (1-\omega)\frac{1}{8}\sum_{g\in Q_8} g\ .$$

Or si $g \in Q_8$ alors $\chi(g^{-1}) = 1$ et $\chi(\omega g^{-1}) = 1$ donc

$$(1-\omega)\frac{1}{8}\sum_{g\in Q_8} g = \frac{1}{8}\sum_{g\in Q_8}\chi(g^{-1})g + \frac{1}{8}\sum_{g\in Q_8}\chi(\omega g^{-1})\omega g = \frac{1}{8}\sum_{g\in SD_{16}}\chi(g^{-1})(g-1)$$

On montre de la même façon que les compositions $P'_{0,1} \to B_1 \to B_0$ et $P'_{0,1} \to P'_{0,0} \to B_0$ coïncident.

La composition $C_1 \longrightarrow B_1 \xrightarrow{v_1\alpha} E_{2*}/3$ est nulle puisque pour tout $g \in SD_{16}$ on a $g_* v_1 = v_1$ (dans E_{2*}). Donc $v_1\alpha$ est représenté par ce cocycle qui est concentré en $P'_{0,1}$ qui lui même est le cobord (vertical) de ι. Donc $v_1\alpha$ est cohomologique à un cocycle qui est trivial sur $P'_{0,1}$ et sur C_1 est donné par

$$e_1 \mapsto (1-\omega)\iota(\widetilde{e_0}) = (1-\omega)h.$$

On pose

$$b_1 := (1-\omega)h.$$

□

5.2.5 $E_2^{1,0}$

Un corollaire de la proposition précédente et de la proposition 5.2.6 est le théorème suivant :

Théorème 5.2.14. *En tant que $\mathbb{F}_3[v_1]$-modules on a :*

$$E_2^{1,0} \cong \prod_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}\setminus 3\mathbb{Z}} \mathbb{F}_3[v_1]/(v_1^{4\cdot 3^n-2})\{b_{1+2\cdot 3^n(3k-1)}\} \times \mathbb{F}_3[v_1]\{b_1\}.$$

De plus le produit est fini en chaque degré.

Démonstration. Montrons que le produit est fini. Supposons que $b_{1+2\cdot 3^n(3k-1)}$ et $v_1^l b_{1+2\cdot 3^{n_1}(3k_1-1)}$ sont de même degré. Donc

$$1 + 2\cdot 3^n(3k-1) = \frac{l}{2} + 1 + 2\cdot 3^{n_1}(3k_1-1) \tag{5.1}$$

$$l > 0 \tag{5.2}$$

$$4 \cdot 3^{n_1} - 2 > l \tag{5.3}$$

L'égalité 5.1 est dû à l'égalité des degrés et l'inégalité 5.3 affirme que l'élément est non nul dans le produit. Donc on obtient

$$0 < l = 4 \cdot 3^n(3k-1) - 4 \cdot 3^{n_1}(3k_1 - 1) < 4 \cdot 3^{n_1} - 2$$

ce qui est équivalent à

$$4 \cdot 3^{n_1}(3k_1 - 1) < 4 \cdot 3^n(3k-1) < 4 \cdot 3^{n_1} 3k_1 - 2\ .$$

Si $n = n_1$ on obtient

$$3k_1 - 1 < 3k - 1 < 3k_1 - \frac{1}{2 \cdot 3^n}$$

c'est-à-dire

$$k + \frac{1}{2 \cdot 3^{n+1}} - \frac{1}{3} < k_1 < k$$

et il n'y a pas de k_1 qui vérifie cette double inégalité.

Si $n > n_1$ l'inégalité devient

$$3k_1 - 1 < 3^{n-n_1}(3k-1) < 3k_1 - \frac{1}{2 \cdot 3^{n_1}}$$

donc il n'y a pas de k_1 qui satisfait aux inégalités.

Si $n_1 > n$ alors l'inégalité devient

$$3^{n_1-n}(3k_1 - 1) < 3k - 1 \tag{5.4}$$

$$3k - 1 < 3^{n_1-n+1}k_1 - \frac{1}{2 \cdot 3^n} \tag{5.5}$$

Si $k > 0$ alors d'après 5.5 $k_1 > 0$ mais alors il y a un nombre fini de n_1 et k_1 qui satisfont 5.4.

Si $k < 0$ alors d'après 5.4 $k_1 < 0$ mais alors il y a un nombre fini de n_1 et k_1 qui satisfont 5.5.

Donc pour n et k fixé, c'est-à-dire pour un degré choisi, il y a un nombre fini d'éléments de la forme $v_1^l b_{1+2\cdot 3^{n_1}(3k_1-1)}$ qui ont le même degré que l'élément $b_{1+2\cdot 3^n(3k-1)}$, donc le produit est fini.

□

La proposition suivante décrit l'image de ∂_2 en tant que $\mathbb{F}_9$-module. C'est une conséquence des propositions 5.2.8 et 5.2.13.

Proposition 5.2.15. *(a) Comme $\mathbb{F}_3[v_1]$-module l'image de ∂_2 est isomorphe à :*

$$\prod_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}} \mathbb{F}_3[v_1]\{v_1^{10\cdot 3^n+2} c_{3^n(18k+11)}\} \times \prod_{n\in\mathbb{N},k\in\mathbb{Z}} \mathbb{F}_3[v_1]\{v_1^{2\cdot 3^{n+1}+2} c_{3^{n+1}(6k+1)}\}.$$

(b) Les éléments $c_{3^{n+1}(18k+11)}$ et $c_{3^{n+1}(6k+1)}$ sont dans le noyau de ∂_3.

Chapitre 6

Deuxième application : le groupe Pic_2 de Hopkins

6.1 Définition et résultats connus

Soit C une catégorie symétrique monoïdale de produit $\wedge$ et d'objet neutre I.

Définition 6.1.1. *Un élément X de C est dit inversible s'il existe un élément Y de C tel que $X \wedge Y \cong I$. Dans le cas ou la collection d'éléments inversibles est un ensemble, c'est un groupe pour le produit $\wedge$. On l'appelle groupe de Picard, noté $Pic(C)$.*

Soit $\mathcal{S}$ la catégorie homotopique stable. Le produit est donné par le produit *smash* des spectres et S^0 est l'élément neutre. Il se trouve que [23] le morphisme naturel

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & Pic(\mathcal{S}) \\ n & \mapsto & S^n \end{array}$$

est un isomorphisme.

Soit $\mathcal{K}_n$ la catégorie des spectres $K(n)$-locaux. Le produit de deux objets X et Y de $\mathcal{K}_n$ est défini par

$$X \wedge Y := L_{K(n)}(X \wedge Y)$$

(le produit de deux spectres $K(n)$-locaux n'est pas forcement $K(n)$-local) et $L_{K(n)}S^0$ est l'élément neutre. Le groupe de Picard de $\mathcal{K}_n$ est noté Pic_n.

Dans l'introduction de ce travail on a présenté les valeurs connues de Pic_n.

La proposition suivante permet d'étudier Pic_n par des méthodes algébriques. Soit

$$E_{n*}X := \pi_* L_{K(n)}(E_n \wedge X) \ .$$

Remarquons que E_{n*} n'est pas une théorie d'homologie (les wedges ne sont pas envoyer sur des sommes de groupes abéliens). Le spectre E_n est $K(n)$-local donc dans le cas où X est un CW-spectre fini il en est de même pour $E_n \wedge X$ et donc $E_{n*}X = \pi_*(E_n \wedge X)$.

Proposition 6.1.2. *[13] Soit X un spectre $K(n)$-local. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) X est inversible dans $\mathcal{K}_n$;

(b) $E_{n*}X$ est un E_{n*}-module libre de rang 1 ;

(c) $E_{n*}X$ est inversible dans la catégorie monoïdale $\mathcal{EG}_n$ des $E_{n*}[[\mathbb{G}_n]]$-modules profinis.

Remarque 6.1.3. *Un $E_{n*}[[\mathbb{G}_n]]$-module profini M est un E_{n*}-module muni d'une action de $\mathbb{G}_n$ compatible avec l'action de $\mathbb{G}_n$ sur E_{n*}. Plus précisément, si $g \in \mathbb{G}_n$, $e \in E_{n*}$ et $m \in M$ alors*

$$g(em) = g(e)g(m).$$

Soit Pic_n^{alg} le groupe de Picard de $\mathcal{EG}_n$. La proposition 6.1.2 montre que si $X \in Pic_n$ alors $E_{n*}X \in Pic_n^{alg}$. Donc on a un homomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \epsilon : Pic_n & \to & Pic_n^{alg} \\ X & \mapsto & E_{n*}X \ . \end{array}$$

Soit $Pic_n^{alg,0}$ le sous-groupe d'indice 2 des modules concentrés en degré pair.

Proposition 6.1.4. $Pic_n^{alg,0} \cong H^1(\mathbb{G}_n; (E_n)_0^\times)$.

Démonstration. Soit $M \in Pic_n^{alg,0}$. D'après la proposition précédente $E_{n*}M$ est de rang 1. Soit ι_M un générateur de M comme E_{n*}-module en degré 0. Alors pour tout $g \in \mathbb{G}_n$ il existe un unique élément $u_g \in (E_n)_0^\times$ tel que $g_*(\iota_M) = u_g\iota_M$. Alors l'application $\theta : g \mapsto u_g$ est un homomorphisme croisé. En effet, $\theta(gh) = u_{gh}\iota_M$ et

$$(gh)_*\iota_M = g_*(u_h\iota_M) = g_*u_h g_*\iota_M = g_*u_h u_g\iota_M \ .$$

On montre de la même façon que θ ne dépend pas du choix de générateur (la différence est un homomorphisme principal). □

6.2 Calcul de $H^1(\mathbb{G}_2; \mathbb{W}[[u_1]]^\times)$

Pour calculer $H^1(\mathbb{G}_2; \mathbb{W}[[u_1]]^\times)$ on fait plusieurs réductions sur le groupe et sur les coefficients. Cette méthode aussi que le lien avec la suite spectrale additive suit celle de Hopkins pour le cas $p > 3$.

1ère réduction

On a une suite exacte courte

$$1 \to \mathbb{G}_2^1 \to \mathbb{G}_2 \to \mathbb{Z}_3 \to 1$$

où le second morphisme est la norme réduite. On calcule donc d'abord $H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{W}[[u_1]]^\times)$.

2ème réduction

On a une 2ème suite exacte courte

$$0 \to \mathbb{W}[[u_1]] \xrightarrow{exp(p-)} \mathbb{W}[[u_1]]^\times \longrightarrow \mathbb{F}_9[[u_1]]^\times \to 0$$

où le second morphisme est la réduction standard. On calcule d'abord $H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{F}_9[[u_1]]^\times)$.

3ème réduction

On a une 3ème suite exacte courte

$$1 \to U_1 \to \mathbb{F}_9[[u_1]]^\times \to \mathbb{F}_9^\times \to 1$$

où

$$U_1 := \{h \in \mathbb{F}_9^\times[[u_1]] | h \equiv 1 \text{ mod } u_1\}.$$

Donc on calcule $H^1(\mathbb{G}_2^1; U_1)$.

6.2.1 Calcul de $H^1(\mathbb{G}_2^1; U_1)$

Les propositions suivantes décrivent la structure de $Hom_{\mathbb{G}_2^1}(C_0; U_1)$ et $Hom_{\mathbb{G}_2^1}(C_1; U_1)$.

Proposition 6.2.1.
(a) $Hom_{\mathbb{G}_2^1}(C_0; U_1)$ est isomorphe à

$$U_1^{G_{24}} \cong \{h \in ((E_{2*}/3)_0)^{G_{24}} | h \equiv 1 \ mod \ u_1\}$$

(b) $(E_{2*}/3)_0^{G_{24}} \cong \mathbb{F}_3[[v_1^{6k}\widetilde{\Delta}_{-k}]]$
(c) Soit $h \in U_1^{G_{24}}$. Alors il existe une famille unique d'éléments $\lambda_k \in \{0, \pm 1\}$, $k \in \mathbb{N}$ telle que $h = \prod_{k=0}^{\infty}(1 + v_1^k \widetilde{\Delta}_{-k})^{\lambda_k}$.

Démonstration. On a $(\mathbb{F}_9[[u_1]]^{G_{24}})^\times = (\mathbb{F}_9[[u_1]]^\times)^{G_{24}}$ d'où (a). La proposition 5.2.6 (a) implique (b). Si $h \in U_1^{G_{24}}$ on peut trouver les λ_k de façon récursive. En effet, d'après (a) et (b) on a $h = 1 + \alpha v_1^{6k}\widetilde{\Delta}_{-k} + \cdots$ où $\alpha \in \{\pm 1\}$. Donc $h(1 + v_1^{6k}\widetilde{\Delta}_{-k})^{-\alpha} = 1 + \beta v_1^{6k_1}\widetilde{\Delta}_{-k_1} + \cdots$ où $k_1 > k$ et $\beta \in \{\pm 1\}$. □

Proposition 6.2.2.

(a) $Hom_{\mathbb{G}_2^1}(C_1; U_1)$ est isomorphe à

$$U_1(\chi) := \{h \in U_1 | \omega_* h \cdot h = \phi_* h \cdot h = 1\} = \{h \in U_1 | \exists k \in U_1^{Q_8}, h = \omega_* k/k\}$$

(b) $(E_{2*})^{Q_8} \cong \mathbb{Z}_3[v_1][\omega^2 u^{-4}]^\wedge$ et donc $((E_2)_0/3)^{Q_8} \cong \mathbb{F}_3[[\omega^2 u_1^2]]$

(c) Soit z_k, $k \in \mathbb{N}$ une famille d'éléments de $U_1(\chi)$ telle que

$$z_k = 1 \pm \omega^2 u_1^{4k+2} + \cdots$$

et soit $h \in U_1(\chi)$. Alors il existe une famille unique d'éléments $\lambda_k \in \{0 \pm 1\}$, $k \in \mathbb{N}$ telle que $h = \prod_{k=0}^{\infty} z_k^{\lambda_k}$.

(d) Une famille comme dans (c) existe. Par exemple

$$z_k := \frac{\omega_*(1 + \omega^2 u_1^{4k+2})}{1 + \omega^2 u_1^{4k+2}} .$$

Démonstration. La preuve est pareil que la preuve de la proposition précédente. Les invariants par rapport au groupe Q_8 se calculent facilement, cf [7]. Pour (c) il suffit de remarquer que si $h \in U_1(\chi)$ avec $h = 1 + \alpha\omega^{2k}u_1^{2k} + \cdots$ alors $k = 2l + 1$ pour un $l \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \{\pm 1\}$. Alors $hz_l^{-\alpha} \in U_1(\chi)$ et donc $hz_l^{-\alpha} = 1 + \beta\omega^{2k_1}u_1^{2k_1} + \cdots$ avec $k_1 > k$ et $\beta \in \{\pm 1\}$. □

Pour calculer les différentielles de la suite spectrale E pour le module U_1, on utilise la même suite spectrale pour le module $E_{2*}/3$, grâce au lemme suivant :

Lemme 6.2.3. *Soit $h \in \mathbb{F}_9[[u_1]]$ tel que $h \equiv 0$ mod u_1^k. Alors*

$$\frac{1}{1+h} \equiv 1 - h \ mod\ u_1^{2k}.$$

Démonstration. La preuve est un calcul élémentaire sur les séries formelles. □

Corollaire 6.2.4. *Soit ∂_{1a} le morphisme suivant induit par ∂_1*

$$(E_{2*}/3)^{G_{24}} \xrightarrow{\partial_{1a}} (E_{2*}/3)^{SD_{16}(\chi)}$$

et ∂_{1m} le morphisme

$$U_1^{G_{24}} \to U_1(\chi)$$

induit par ∂_1. Soit $h \in U_1^{G_{24}}$ tel que $h = 1 + g$ avec $g \equiv 0$ mod u_1^k. Alors

$$\partial_{1m}(h) = \partial_{1m}(1+g) \equiv 1 + \partial_{1a}(g) \ mod\ u_1^{2k} \ .$$

Démonstration. Le morphisme ∂_1 tant donné par $e_1 \mapsto e_0 - \omega e_0$ le corollaire est une conséquence du lemme précédent. □

Les générateurs $\widetilde{\Delta}_k$ de $(E_{2*}/3)^{G_{24}}$ sont définis dans la proposition 5.2.6. Rappelons que

$$\widetilde{\Delta}_k \equiv \Delta^k \bmod u_1^4.$$

La proposition suivante en suit immédiatement.

Proposition 6.2.5. *L'image de ∂_1 est engendrée par les éléments :*

$$\partial_1(1 + v_1^{6\cdot 2\cdot 3^n k}\widetilde{\Delta}_{-2\cdot 3^n k}) \equiv 1 + v_1^{6\cdot 2\cdot 3^n k} v_1^{4\cdot 3^n - 2} b_{1+2\cdot 3^n(3(-k)-1)} \ mod\ u_1^{2\cdot 6\cdot 2\cdot 3^n k}$$

pour $k > 0$, k non divisible par 3 et

$$\partial_1(1 + v_1^{6(1+2k)}\widetilde{\Delta}_{-(1+2k)}) \equiv 1 + v_1^{6(2k+1)} b_{1+2(3(-k-1)+1)} \ mod\ u_1^{12(2k+1)}$$

pour $k \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$ dans le deux cas.

Démonstration. C'est une conséquence du lemme précédent et de la proposition 5.2.6. Pour la deuxième égalité on utilise

$$\widetilde{\Delta}_{-(1+2k)} = \widetilde{\Delta}_{1+2(-k-1)}$$

□

Maintenant on construit une famille explicite z_k qui satisfait 6.2.2 (c). Remarquons que pour $k \geq 0$ on a

$$\omega^2 u_1^{4k+2} = \omega^2 u_1^{4k+2} u^{-2(4k+2)} u^{2(4k+2)} \cong v_1^{4k+2} b_{-(1+2k)} \bmod u_1^{4k+4}.$$

Donc pour chaque $l = -(2k+1)$ avec $k \in \mathbb{N}$ on doit construire un élément z_k tel que $z_k \equiv 1 + v_1^{-2l} b_l \bmod v_1^{-2l+2}$. Rappelons que on a une partition de $2\mathbb{Z}+1$ donnée dans le lemme 5.2.4. Les éléments qui sont dans l'image dans la proposition 6.2.5 sont des éléments pour lesquels $l \in A_1 \cap \mathbb{Z}_{\leq 0}$ et $l \in A_2 \cap \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Donc si $k > 0$ et non divisible par 3 on définit

$$z_{3^n(3k+1)-1} := \partial_1(1 + v_1^{6\cdot 2\cdot 3^n k}\widetilde{\Delta}_{-2\cdot 3^n k})$$

et pour $k \geq 0$ on définit

$$z_{3k+1} := \partial_1(1 + v_1^{6(1+2k)}\widetilde{\Delta}_{-(1+2k)})$$

Donc il reste à définir des éléments z_k tels que $l = -(2k+1)$ avec $l \in (B_1 \cup B_2) \cap \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Soit $k > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, alors on définit

$$z_{3^n(9k+1)-1} := \frac{\omega_*(1 + v_1^{4\cdot 3^n(9k+1)-2}b_{1+2\cdot 3^n(9(-k-1)+8)})}{(1 + v_1^{4\cdot 3^n(9k+1)-2}b_{1+2\cdot 3^n(9(-k-1)+8)})}$$

Soit $k \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, alors on définit

$$z_{3^{n+1}(3k+2)-1} := \frac{\omega_*(1 + v_1^{4\cdot 3^{n+1}(3k+2)-2}b_{1+2\cdot 3^{n+1}(3(-k-1)+1)})}{(1 + v_1^{4\cdot 3^{n+1}(3k+2)-2}b_{1+2\cdot 3^{n+1}(3(-k-1)+1)})}$$

Remarquons que $1+v_1^{-2l}b_l \in (U_1)^{Q_8}$ donc les éléments ci-dessus sont bien dans $U_1(\chi)$ d'après 6.2.2 (a). À priori, avec la première formule on pourrait définir aussi les éléments z_{3^n-1} en prenant $k = 0$. Mais dans ce cas, la proposition 6.2.7 qui suit ne serait plus valable puisqu'on peut pas appliquer le lemme 6.2.6. On définira les éléments z_{3^n-1} pour $n \in \mathbb{N}$ dans le lemme 6.2.15.

Lemme 6.2.6. *Soit ∂_{2a} le morphisme $(E_{2*}/3)^{SD_{16}(\chi)} \to (E_{2*}/3)^{SD_{16}(\chi)}$ induit par ∂_2 et ∂_{2m} le morphisme $U_1(\chi) \to U_1(\chi)$ induit par ∂_2 et soit*

$$h := \frac{\omega_*(1 + v_1^{-2l}b_l)}{(1 + v_1^{-2l}b_l)}$$

pour un $l > 0$. Alors

$$\partial_{2m}(h) \equiv 1 + v_1^{-2l}\partial_{2a}(b_l) \ mod\ u_1^{-4l}$$

Démonstration. C'est une conséquence du lemme 6.2.3 et du fait qu'on a une approximation de ∂_2 (cf chapitre 7) par une somme finie d'éléments dans C_1. □

Proposition 6.2.7. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $k > 0$ on a*

$$\partial_2(z_{3^n(9k+1)-1}) \equiv 1 + \omega^2 u_1^{3^n(36k+14)} \ mod\ u_1^{3^n(36k+18)}$$

et si $k \geq 0$ on a

$$\partial_2(z_{3^{n+1}(3k+2)-1}) \equiv 1 + \omega^2 u_1^{3^{n+1}(12k+10)} \ mod\ u_1^{3^{n+1}(12k+14)}$$

Démonstration. Le calcul de morphisme est une conséquence de Prop 5.2.8 et du lemme précédent. En effet,

$$\partial_2(1 + v_1^{4\cdot 3^n(9k+1)-2} b_{1+2\cdot 3^n(9(-k-1)+8)}) \equiv 1 + v_1^{4\cdot 3^n(9k+1)-2} v_1^{10\cdot 3^n+2} c_{3^n(9(-k-1)+8)}$$

modulo $u_1^{2(4\cdot 3^n(9k+1)-2)}$ et

$$v_1^{4\cdot 3^n(9k+1)-2} v_1^{10\cdot 3^n+2} c_{3^n(9(-k-1)+8)} \equiv \omega^2 u_1^{3^n(36k+14)} \mod u_1^{3^n(36k+14)+4\cdot 3^{n-1}}$$

On procède de la même manière pour la seconde famille. □

6.2.2 Construction de l'élément η

Dans cette partie on définit un élément $\eta \in H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{W}[[u_1]]^\times)$ à l'aide duquel on définira la famille z_{3^n-1}.

On utilise la même méthode que pour la construction de b_1.

Proposition 6.2.8. *L'application*

$$\mathbb{G}_2^1 \to \mathbb{W}[[u_1]]^\times : g \mapsto \frac{g_* u}{u}$$

est un morphisme croisé.

□

Donc elle définit un élément $\eta \in H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{W}[[u_1]]^\times)$.

Proposition 6.2.9. *L'élément η est d'ordre infini dans $H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{W}[[u_1]]^\times)$.*

Démonstration. En effet, on a un morphisme naturel

$$H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{W}[[u_1]]^\times) \longrightarrow H^1(\mathbb{W}^\times; \mathbb{W}^\times)$$

et l'image de η est la composition

$$\mathbb{W}^\times \subset \mathbb{G}_2^1 \xrightarrow{\eta} \mathbb{W}[[u_1]]^\times \longrightarrow \mathbb{W}^\times$$

où le dernier morphisme est la projection canonique et on vérifie que la composition est l'identité. □

L'élément η ne prends pas ses valeurs dans U_1 ($\frac{\omega_* u}{u} = \omega \notin U_1$). Par contre sa huitième puissance, η^8, défini bien un élément de $H^1(\mathbb{G}_2^1; U_1)$. Dans les propositions suivantes on montre que $H^1(G_{24}; U_1) \cong \mathbb{Z}/3$, engendré par la réduction de η^8.

Proposition 6.2.10. $H^1(G_{24}; \mathbb{F}_9[[u_1]]^\times) \cong \mathbb{Z}/6$.

Démonstration. Soit $\mathbb{F}_9((u_1))^\times$ le groupe multiplicatif du corps de fractions de $\mathbb{F}_9[[u_1]]$. Tout élément de $\mathbb{F}_9((u_1))^\times$ s'écrit sous la forme $u_1^n f$ où $f \in \mathbb{F}_9[[u_1]]^\times$ et $n \in \mathbb{Z}$. L'application

$$\mathbb{F}_9((u_1))^\times \to \mathbb{Z} : u_1^n f \mapsto n$$

définit un homomorphisme de groupes dont le noyau est $\mathbb{F}_9[[u_1]]^\times$. On a donc une suite exacte courte de G_{24}-modules

$$1 \to \mathbb{F}_9[[u_1]]^\times \to \mathbb{F}_9((u_1))^\times \to \mathbb{Z} \to 1$$

où G_{24} agit trivialement sur $\mathbb{Z}$. En utilisant Hilbert 90 version multiplicative on obtient $H^1(G_{24}; \mathbb{F}_9((u_1))^\times) = 0$, donc la suite exacte longue induite par la suite exacte courte ci-dessous devient

$$H^0(G_{24}; \mathbb{F}_9[[u_1]]^\times) \to H^0(G_{24}; \mathbb{F}_9((u_1))^\times) \to H^0(G_{24}; \mathbb{Z}) \twoheadrightarrow H^1(G_{24}; \mathbb{F}_9[[u_1]]^\times)$$

D'après proposition 6.2.1

$$H^0(G_{24}; \mathbb{F}_9[[u_1]]^\times) \cong \mathbb{F}_3[[v_1^6\Delta^{-1}]]^\times$$

et par un argument similaire on conclut que

$$H^0(G_{24}; \mathbb{F}_9((u_1))^\times) \cong \mathbb{F}_3((v_1^6\Delta^{-1}))^\times$$

Puisque

$$v_1^6\Delta^{-1} \equiv u_1^6 \bmod u_1^8$$

l'image du morphisme

$$H^0(G_{24}; \mathbb{F}_9((u_1))^\times) \to H^0(G_{24}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$$

est isomorphe à $6\mathbb{Z}$, d'où le résultat. □

Proposition 6.2.11. $H^1(G_{24}; \mathbb{F}_9^\times) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

Démonstration. On note $< a >$ le sous-groupe engendré par a, l'élément d'ordre 3. De la suite exacte courte

$$1 \to < a > \to G_{24} \to Q_8 \to 1$$

on conclut que

$$H^*(G_{24}; \mathbb{F}_9^\times) \cong H^*(Q_8; (\mathbb{F}_9^\times)^{<a>}) \cong H^*(Q_8; \mathbb{F}_9^\times)$$

le dernier isomorphisme est du au fait que $< a >$ agit trivialement sur $\mathbb{F}_9^\times$. Pour calculer $H^*(Q_8; \mathbb{F}_9^\times)$ on utilise la suite spectrale associée à la suite exacte courte

$$1 \to < t > \to Q_8 \to \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3) \to 1$$

où $< t >$ est le sous-groupe d'ordre 4 engendré par t. Le groupe $< t >$ agit trivialement sur $\mathbb{F}_9^\times$ donc

$$H^1(< t >; \mathbb{F}_9^\times) \cong \ker : \mathbb{F}_9^\times \xrightarrow{(-)^4} \mathbb{F}_9^\times \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

engendré par la classe de ω^2, donc

$$H^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3); H^1(< t >; \mathbb{F}_9^\times)) \cong \mathbb{Z}/2$$

où on a utilisé la résolution canonique du groupe cyclique $\mathbb{Z}/4$. Aussi

$$H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3); H^0(< t >; \mathbb{F}_9^\times)) = H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3); \mathbb{F}_9^\times) = 0$$

de nouveau en utilisant Hilbert 90. La classe de ω^2 ci-dessus est annulée par la deuxième différentielle de la suite spectrale puisque on sait que l'image de $\eta \in H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{F}_9^\times) \cong H^1(SD_{16}; \mathbb{F}_9^\times)$ est l'identité dans $H^1(< t >; \mathbb{F}_9^\times/\mathbb{F}_3^\times)$ donc définit un cycle pérmanant. Donc à l'aide de la suite spectrale on conclut que

$$H^1(Q_8; \mathbb{F}_9^\times) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

□

Proposition 6.2.12. $H^1(G_{24}; U_1) \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

Démonstration. La suite exacte courte

$$1 \to U_1 \to \mathbb{F}_9[[u_1]]^\times \to \mathbb{F}_9^\times \to 1$$

induit une suite exacte longue

$$\to H^1(G_{24}; U_1) \to H^1(G_{24}; \mathbb{F}_9[[u_1]]^\times) \to H^1(G_{24}; \mathbb{F}_9^\times) \to$$

Le groupe au milieu est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (Prop 6.2.10) et le groupe à droite $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (Prop 6.2.11). Le groupe U_1 est 3-profini, donc il n'y a pas de 2-torsion dans $H_2(G_{24}; U_1)$ donc le deuxième morphisme est surjectif. De même pusqu'il n'y a pas de 2-torsion dans $H^1(G_{24}; U_1)$ et $H^0(G_{24}; \mathbb{F}_9^\times)$ est un 2-groupe, le premier morphisme de la deuxième suite ci-dessus est injectif. □

Proposition 6.2.13. *L'image de η^8, notée $\widetilde{\eta}^8$, par la restriction*

$$H^1(\mathbb{G}_2^1; U_1) \to H^1(G_{24}; U_1)$$

est un générateur.

Démonstration. Il s'agit de montrer que le cocycle qui représente $\widetilde{\eta}^8$ n'est pas un cobord pour la résolution $P_\bullet \to \mathbb{Z}_3$. L'élément $\widetilde{\eta}^8$ est donné par un morphisme croisé dont on connaît le cocycle correspondant dans la résolution standard de G_{24}. Pour trouver le même cocycle dans la résolution $P_\bullet \to \mathbb{Z}_3$ on utilise la comparaison entre la résolution standard et la résolution $P_\bullet \to \mathbb{Z}_3$ faite dans la preuve de 5.2.12.

Le cocycle (pour la résolution de G_{24}) qui défini $\widetilde{\eta}^8$ est donné par

$$B_1 \to U_1 : [g] \mapsto g_* u^8/u^8$$

pour la résolution standard, donc pour la résolution $P_\bullet$ on a

$$P_1 \to U_1 : \widetilde{e_1} \mapsto \frac{1}{8}(1 - t + t^2 - t^3 + \psi - \psi t + \psi t^2 - \psi t^3)\frac{a_*^2 u^8}{a_* u^8} = \frac{a_*^2 u^8}{a_* u^8}$$

et

$$\frac{a_*^2 u^8}{a_* u^8} \equiv 1 - \omega^3 u_1 \bmod u_1^2.$$

Un morphisme $P_0 \to U_1$ envoie le générateur $\widetilde{e_0}$ à un Q_8-invariant h de U_1. Or si $h = 1 + b_1 u_1 + b_2 u_1^2 + \cdots$ alors

$$t_*(1 + b_1 u_1 + b_2 u_1^2 + \cdots) = 1 - b_1 u_1 + b_2 u_1^2 + \cdots$$

donc

$$h \equiv 1 \bmod u_1^2$$

et la composition

$$P_1 \to P_0 \to U_1$$

envoie $\widetilde{e_1}$ sur un élément congruent à 1 modulo u_1^2 ce qui n'est pas le cas de $\widetilde{\eta}^8$. □

Lemme 6.2.14. *Le cocycle de $(\widetilde{\eta}^8)^3$ est le cobord (pour la résolution de G_{24}) de*

$$P_0 \to U_1 : \widetilde{e_0} \mapsto \frac{u^{24}}{u^8 a_* u^8 a_*^2 u^8}$$

Démonstration. En effet, le cocycle qui représente $\widetilde{\eta}^8$ est donné par

$$P_1 \to U_1 : \widetilde{e_1} \mapsto \frac{a_*^2 (u^8)^3}{a_* (u^8)^3}.$$

□

Proposition 6.2.15. *Il existe un élément $m \in U_1(\chi)$ tel que*

(a) $m \equiv 1 - \omega^2 u_1^2$ *mod* u_1^4
(b) $\partial_2(m) = 1$
(c) Le cocycle de m *représente* $\eta^{24} \in H^1(\mathbb{G}_2^1; U_1)$.

Démonstration. La preuve est similaire à la preuve de 5.2.13. On définit

$$m := (1-\omega)_* \frac{u^{24}}{u^3 a_* u^3 a_*^2 u^3}$$

□

Lemme 6.2.16. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *il existe des éléments* $z_{3^n-1} \in U_1(\chi)$ *tels que*
(a) $z_{3^n-1} \equiv 1 - \omega^2 u_1^{4\cdot 3^n - 2}$ *mod* $u_1^{4\cdot 3^n+2}$
(b) $\partial_2(z_{3^n-1}) = 1$

Démonstration. Soit

$$z_0 := m$$

D'après la proposition précédente m vérifie les propriétés (a) et (b). On a

$$m^3 \equiv 1 + \omega^2 u_1^6 + u_1^{12} \bmod u_1^{18}$$

et

$$z_1 = \partial_1(1 + v_1^6\Delta^{-1}) \equiv 1 - \omega^2 u_1^6 - \omega^2 u_1^{10} \bmod u_1^{12}$$

donc

$$z_2 := m^3 z_1 \equiv 1 - \omega^2 u_1^{10} \bmod u_1^{12}$$

De nouveau z_2 vérifie (a) et (b). On suppose qu'on a construit z_{3^n-1}. Alors

$$z_{3^n-1}^3 \equiv 1 + \omega^2 u_1^{3(4\cdot 3^n-2)} \bmod u_1^{4\cdot 3^{n+1}+6}$$

mais aussi

$$z_{3^{n+1}-2} = \partial_1(1+(v_1^6\Delta^{-1})^{2\cdot 3^n-1}) \equiv 1-\omega^2 u_1^{3(4\cdot 3^n-2)} - \omega^2 u_1^{4\cdot 3^{n+1}-2} \bmod u_1^{4\cdot 3^{n+1}+2}$$

et on définit

$$z_{3^{n+1}-1} := z_{3^n-1}^3 z_{3^{n+1}-2}$$

d'où le résultat. □

Corollaire 6.2.17. $E_2^{1,0} \cong \mathbb{Z}_3$

Démonstration. Dans le lemme 6.2.16 et la remarque après la proposition 6.2.5 on a construit une famille d'éléments z_k qui satisfait la condition (c) de la proposition 6.2.2. Si $l = -(2k+1)$, les z_k où $l \in (A_1 \cup A_1) \cap \mathbb{Z}_{\leq 0}$ sont par définition dans l'image de ∂_1. L'image des éléments z_k tels que $l \in (B_1 \cup B_2 - \{2 \cdot 3^n + 1 | n \in \mathbb{N}\}) \cap \mathbb{Z}_{\leq 0}$ est décrite dans la proposition 6.5.7 et d'après le lemme 6.2.16 les z_{3^n-1} sont dans le noyau de ∂_2. Donc on a une bijection entre $E_2^{1,0}$ et $\{h = U_1(\chi) | h = \prod_{k \in \mathbb{N}} z_{3^n-1}^{\lambda_k}\}$. L'extension (3-adique) continue du morphisme $\mathbb{Z} \to U_1(\chi)$ donné par $1 \to z_0$ donne l'isomorphisme cherché. □

L'avantage de la suite spectrale E' par rapport à E est que la différentielle $E_2^{'0,1} \to E_2^{'2,0}$ est tautaulogiquement triviale, ce qu'on utilisera dans le théorème suivant.

Théorème 6.2.18. *$H^1(\mathbb{G}_2^1; U_1) \cong \mathbb{Z}_3$ engendré (topologiquement) par 8η.*

Démonstration. Pour ceci on utilise la suite spectrale E'. On a déjà montré que $E_1^{'0,1} = E_1^{0,1} = H^1(G_{24}; U_1) \cong \mathbb{Z}/3$ est engendré par la restriction de η^8. Mais comme c'est une classe globale la différentielle $E_1^{'0,1} \to E_1^{'1,1}$ doit être nulle. Donc $E_2^{'0,1} \cong \mathbb{Z}/3$. Le calcul de $E_2^{1,0}$ détermine aussi $E_2^{'1,0} = E_2^{1,0}$ par construction. La deuxième colonne de E_2' est nulle, donc la différentielle $E_{0,1} \to E_{2,0}$ est nulle. Donc il reste à résoudre l'extension

$$0 \to \mathbb{Z}_3 \to H^1(\mathbb{G}_2^1; U_1) \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to 0$$

Or d'après la proposition 6.2.19 le cocycle de m qui représente η^{24} est concentré sur C_1. Donc l'extension est telle que

$$H^1(\mathbb{G}_2^1; U_1) \cong \mathbb{Z}_3.$$

□

6.2.3 Calcul de $H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{W}[[u_1]]^\times)$

Lemme 6.2.19. *$H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{F}_9^\times) \cong \mathbb{F}_9^\times$.*

Démonstration. On a une suite exacte

$$1 \to S_2^1 \to \mathbb{G}_2^1 \to SD_{16} \to 1$$

et puisque S_2^1 agit trivialement sur $\mathbb{F}_9^\times$ on a

$$H^*(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{F}_9^\times) \cong H^*(SD_{16}; \mathbb{F}_9^\times)$$

On a une autre suite exacte courte

$$1 \to < w > \to SD_{16} \to \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3) \to 1$$

est donc une suite spectrale

$$H^*(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3); H^*(< w >; \mathbb{F}_9^\times)) \Rightarrow H^*(SD_{16}; \mathbb{F}_9^\times).$$

La cohomologie $H^*(< w >; \mathbb{F}_9^\times)$ est isomorphe à $\mathbb{F}_9^\times$ en chaque degré, donc on a besoin de calculer que $H^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3); H^1(< w >; \mathbb{F}_9^\times))$ et le groupe $H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3); H^0(< w >; \mathbb{F}_9^\times))$. Mais $H^1(< w >; \mathbb{F}_9^\times)$ est engendré par l'identité qui est invariant par rapport au groupe de Galois, donc

$$H^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3); H^1(< w >; \mathbb{F}_9^\times)) \cong \mathbb{F}_9^\times$$

et en utilisant Hilbert 90

$$H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3); H^0(< w >; \mathbb{F}_9^\times)) = H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3); \mathbb{F}_9^\times) = 0$$

De nouveau puisque l'image de η dans $H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{F}_9^\times) \cong H^1(SD_{16}; \mathbb{F}_9^\times)$ se réduit à l'identité dans $H^1(< \omega >; \mathbb{F}_9^\times)$ la différentielle

$$d_2 : H^0(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3); H^1(< w >; \mathbb{F}_9^\times)) \to H^1(\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_9/\mathbb{F}_3); H^0(< w >; \mathbb{F}_9^\times)$$

est nulle, d'où le résultat. □

Corollaire 6.2.20. $H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{F}_9[[u_1]]^\times) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{F}_9^\times$,

Démonstration. La suite exacte courte

$$1 \to U_1 \to \mathbb{F}_9[[u_1]]^\times \to \mathbb{F}_9^\times \to 1$$

induit la suite exacte longue

$$\to H^0(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{F}_9^\times) \to H^1(\mathbb{G}_2^1; U_1) \to H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{F}_9[[u_1]]^\times) \to H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{F}_9^\times) \to H^2(\mathbb{G}_2^1; U_1)$$

On a montré que $H^1(\mathbb{G}_2^1; U_1) \cong \mathbb{Z}_3$ et $H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{F}_9^\times) \cong \mathbb{F}_9^\times$. Puisque U_1 est un 3-groupe profini, le premier et le dernier morphisme ci-dessus sont nuls d'où le résultat. □

Théorème 6.2.21. $H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{W}[[u_1]]^\times) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{F}_9^\times$ *engendré (topologiquement) par* η.

On montre d'abord

Lemme 6.2.22. $H^1(\mathbb{G}_2^1; \mathbb{F}_9[[u_1]]) = 0$

Démonstration. C'est une conséquence directe du corrollaire 5.2.7 en degré 0 et du fait que $H^1(G_{24};(E_{2*}/3)_0) = 0$ [7][Thm 3.7]. $\square$

Lemme 6.2.23. *Le groupe $H^1(\mathbb{G}_1^2;\mathbb{W}[[u_1]])$ est 3-profini.*

Démonstration. $\mathbb{W}[[u_1]]$ est 3-profini et il existe une résolution de type fini (Lazard) du module trivial, d'où le résultat $\square$

Lemme 6.2.24. $H^1(\mathbb{G}_2^1;\mathbb{W}[[u_1]]) = 0$

Démonstration. La multiplication par 3 induit une suite exacte courte

$$\mathbb{W}[[u_1]] \xrightarrow{\times 3} \mathbb{W}[[u_1]] \longrightarrow \mathbb{F}_9[[u_1]]$$

qui induit la suite exacte longue

$$\longrightarrow H^1(\mathbb{G}_2^1;\mathbb{W}[[u_1]]) \longrightarrow H^1(\mathbb{G}_2^1;\mathbb{W}[[u_1]]) \longrightarrow H^1(\mathbb{G}_2^1;\mathbb{F}_9[[u_1]]) \longrightarrow 0$$

D'après le lemme 6.3.22 le morphisme

$$H^1(\mathbb{G}_2^1;\mathbb{W}[[u_1]]) \longrightarrow H^1(\mathbb{G}_2^1;\mathbb{W}[[u_1]])$$

est surjectif c'est-à-dire le groupe $M := H^1(\mathbb{G}_2^1;\mathbb{W}[[u_1]])$ est 3-divisible. Comme M est 3-profini il est la limite de 3-groupes finis M/I_n. Donc le morphisme $M/I_n \to M/I_n$ induit par la multiplication par 3 est surjectif, le groupe étant 3-groupe fini, il est forcement trivial. Donc M est trivial. $\square$

Démonstration. (**du théorème 6.2.21**) On utilise la suite exacte longue induite par la suite exacte courte de la deuxième réduction. Le morphisme $H^1(\mathbb{G}_2^1;\mathbb{W}[[u_1]]^\times) \to H^1(\mathbb{G}_2^1;\mathbb{F}_9[[u_1]]^\times)$ est injectif (lemme 6.2.24) et aussi surjectif pusqiue l'image de η est un générateur topologique de $H^1(\mathbb{G}_2^1;\mathbb{F}_9[[u_1]]^\times)$. $\square$

Théorème 6.2.25. $H^1(\mathbb{G}_2;\mathbb{W}[[u_1]]^\times) \cong \mathbb{Z}_3^2 \times \mathbb{F}_9^\times$ *engendré par η et la composition de la norme réduite $\mathbb{G}_2 \to \mathbb{Z}_3$ et l'inclusion $\mathbb{Z}_3 \hookrightarrow \mathbb{Z}_3^\times \hookrightarrow \mathbb{W}[[u_1]]^\times$.*

Démonstration. La suite exacte courte

$$1 \to \mathbb{G}_2^1 \to \mathbb{G}_2 \to \mathbb{Z}_3 \to 1$$

est scindée, puisque le centre de $\mathbb{G}_2$ est $\mathbb{Z}_3^\times \subset \mathbb{W}^\times \subset \mathbb{G}_2$. La composition $\mathbb{Z}_3^\times \to \mathbb{G}_2 \to \mathbb{Z}_3^\times$ et donnée par $s \mapsto s^2$ (cf [7] [1.3]). Donc

$$H^1(\mathbb{Z}_3;H^0(\mathbb{G}_2^1;\mathbb{W}[[u_1]]^\times)) \cong H^1(\mathbb{Z}_3;\mathbb{Z}_3) \cong \mathbb{Z}_3$$

et

$$H^0(\mathbb{Z}_3;H^1(\mathbb{G}_2^1;\mathbb{W}[[u_1]]^\times)) \cong H^0(\mathbb{Z}_3;\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{F}_9^\times) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{F}_9^\times$$

Le théorème est une conséquence de la suite exacte courte

$$1 \to H^1(\mathbb{Z}_3;H^0(\mathbb{G}_2^1;\mathbb{W}[[u_1]]^\times)) \to H^1(\mathbb{G}_2;\mathbb{W}[[u_1]]^\times) \to H^0(\mathbb{Z}_3;H^1(\mathbb{G}_2^1;\mathbb{W}[[u_1]]^\times)) \to 1$$

$\square$

Chapitre 7

Analyse et évaluation de ∂_2

Dans ce chapitre on analyse et évalue le morphisme ∂_2. Pour l'évaluation on a besoin de connaître l'action des éléments a, b, c et d sur u_1 modulo u_1^k où k dépend de l'élément en question. Le but de l'analyse est

- de donner une approximation de x et y ;
- de rendre l'évaluation plus efficace (moins calculatoire) ;
- de rendre k le plus petit possible pour les éléments ci-dessus (pour faire moins de calculs pour déterminer l'action sur u_1).

7.1 Analyse de ∂_2

Rappelons que

$$n_1 = l_3 - xl_1 - yl_2$$

avec

$$\begin{array}{rcl} l_1 & = & (a-b)e_1 \\ l_2 & = & (a-c)(a-b)e_1 \\ l_3 & = & (1+c+c^2)(a-c)(a-b)e_1 \end{array}$$

Pour rendre l'évaluation de ∂_2 plus efficace on exprime n_1 en terme de :

$$\begin{array}{rcl} \delta_a & = & a-1 \\ \delta_b & = & b-1 \\ \delta_c & = & c-1 \\ \delta_d & = & d-1 \\ \delta_{ab} & = & a-b \end{array}$$

Les formules 4.2.6 montrent

Lemme 7.1.1. *(a)* $\delta_a(u_1^k) \in (u_1^{k+1})$
(b) $\delta_b(u_1^k) \in (u_1^{k+1})$

(c) $\delta_{ab}(u_1^k) \in (u_1^{k+1})$
(d) $\delta_c(u_1^k) \in (u_1^{k+4})$
(e) $\delta_d(u_1^k) \in (u_1^{k+7})$

$\square$

On utilisera le lemme suivant aussi.

Lemme 7.1.2. *Soit* $g \in \mathbb{S}_2^1$ *et* $k \equiv 2$ *mod* 3. *Alors*

$$(g-1)_* u_1^k \equiv \alpha u_1^{k+1} + \beta u_1^{k+3} \ mod \ u_1^{k+4}$$

où α *et* β *sont dans* $\mathbb{F}_9$.

Démonstration. En effet si $g = 1 + g_1 S \bmod S^2$ d'après la proposition 4.2.4 on a

$$g_* u_1 \equiv u_1 - g_1^3 u_1^2 + g_1^6 u_1^3 + g_1 u_1^4 \bmod u_1^5$$

donc le coefficient du terme u_1^{k+2} de $g_*(u_1^k)$ est $(k+\binom{k}{2})g_1^6 \equiv k(2k-1)g_1^6 \bmod 3$ donc zéro puisque $k \equiv 2 \bmod 3$. $\square$

7.1.1 Approximation de x et y

Lemme 7.1.3. *Soit*

$$x' = -d - bdc + b + dc \text{ et } y' = b^2 - bd - b + d$$

Alors

$$1 - c^3 = x'(1-b) + y'(1-b) + (1-c^3)(1+d)(1-b) - (1-c^3)d(1-c) + z$$

avec $z \in IF_{\frac{5}{2}}\mathbb{S}_2^1$.

Démonstration. Les calculs suivants sont modulo 3. D'après lemme 2.2.4 (a)

$$c^3 \equiv [b,d] \bmod F_{\frac{5}{2}} S_2^1$$

À partir de l'égalité 3.2 modulo $IF_{\frac{5}{2}} S_2^1$ on obtient

$$1 - c^3 \equiv bd\left((1-d^{-1})(1-b^{-1}) - (1-b^{-1})(1-d^{-1})\right)$$

Le premier terme s'écrit sous la forme

$$bd(1-d^{-1})b^{-1}(b-1)$$

Or $d^{-1} = [c,b]$ donc on utilise 3.2 de nouveau pour le deuxième terme

$$-bd(1-b^{-1})cb\left((1-b^{-1})(1-c^{-1})-(1-c^{-1})(1-b^{-1})\right)$$

$$= -bd(1-b^{-1})cb\left((1-b^{-1})c^{-1}(c-1)-(1-c^{-1})b^{-1}(b-1)\right)$$

Donc le coefficient de $1-b$ détermine x' :

$$\begin{array}{rl} & -bd\left((1-d^{-1})b^{-1}+(1-b^{-1})cb(1-c^{-1})b^{-1}\right) \\ = & -bdb^{-1}+1-bdc+bdcbc^{-1}b^{-1}+bdb^{-1}c-bdb^{-1}cbc^{-1}b^{-1} \\ \equiv & -c^3d+1-bdc+b+c^3dc-c^3 \\ \equiv & -d-bdc+b+dc+(1-c^3)(1+d) \end{array}$$

où on a utilisé $bd \equiv c^3db \bmod F_{\frac{5}{2}}\mathbb{S}_2$ et $cb = d^{-1}bc$.

De même le coefficient de $1-c$ détermine y' :

$$\begin{array}{rl} & bd(1-b^{-1})cb(1-b^{-1})c^{-1} \\ = & (bdcb-bdb^{-1}cb)(c^{-1}-b^{-1}c^{-1}) \\ = & bdcbc^{-1}-bdb^{-1}cbc^{-1}-bd+bdb^{-1} \\ \equiv & bdd^{-1}b-bdd^{-1}-bd+c^3d \\ \equiv & b^2-b-bd+d-(1-c^3)d \end{array}$$

□

Le lemme suivant montre que l'élément $z \in IF_{\frac{5}{2}}S_2^1$ ne contribue pas au calcul de $\partial_2(u_1^k)$ modulo u_1^{k+13}.

Lemme 7.1.4. *Soit $z \in IF_{\frac{5}{2}}S_2^1$. Il existe des éléments $r_1(z)$ et $r_2(z)$ de IK tels que*

$$z = r_1(z)(1-b)+r_2(z)(1-c)$$

et pour tout k non divisible par 3 on a

$$\begin{array}{rcl} r_1(z)_*\delta_{ab}(u_1^k) & \equiv & 0 \ mod\ u_1^{k+13} \\ r_2(z)_*\delta_{ac}\delta_{ab}(u_1^k) & \equiv & 0 \ mod\ u_1^{k+13} \end{array}$$

Démonstration. **Étape 1.** On montre d'abord le lemme pour les éléments de la forme

$$\begin{array}{rclcll} \alpha_q & := & c^{3^q} & \equiv & 1+iS^{2q+2} & \bmod S^{2q+3} \\ \beta_q & := & (b^2)^{3^q} & \equiv & 1+S^{2q+1} & \bmod S^{2q+2} \\ \gamma_q & := & [b^{-1},c^{-3^{q-1}}] & \equiv & 1-iS^{2q+1} & \bmod S^{2q+2} \end{array}$$

où $q \geq 2$. Notons que la classe de α_q est une base de $gr_{q+1}S_2^1$ et les classes de β_q et γ_q forment une base de $gr_{q+\frac{1}{2}}S_2^1$.

On a

$$1-\alpha_q \equiv (1-c)^{3^q} = (1-c)^{3^q-1}(1-c) = (1-c)^{3^q-9}(1-c)^8(1-c)$$

donc $r_2(1-\alpha_q) \equiv (1-c)^{3^q-9}(1-c)^8$ et

$$(1-c)^8\delta_{ac}\delta_{ab}(u_1)^k \equiv 0 \bmod u_1^{k+13}$$

On a

$$1-\beta_q \equiv (1-b^2)^{3^q-9}(1-b^2)^8(1-b)$$

donc $r_1(1-\beta_q) \equiv (1-b^2)^{3^q-9}(1-b^2)^8$. De nouveau

$$(1-b^2)^8\delta_{ab}(u_1)^k = (1-b^2)^2(1-b^6)^2\delta_{ab}(u_1)^k \equiv 0 \bmod u_1^{13}$$

puisque $b^6 \in F_{\frac{3}{2}}S_2^1$ d'après 4.2.4 (b)(ii) on a $b_*^6u_1 \equiv 0 \bmod u_1^8$.

En utilisant l'égalité (3.2) on a

$$1-\gamma_q = 1-[b^{-1}, c^{-3^{q-1}}] = b^{-1}c^{-3^{q-1}}(1-c^{3^{q-1}})(1-b)-(1-b)(1-c^{3^{q-1}}))$$

donc

$$r_1(1-\gamma_q) = b^{-1}c^{-3^{q-1}}(1-c^{3^{q-1}}) \equiv b^{-1}c^{-3^{q-1}}(1-c)^{3^{q-1}}$$

et

$$r_2(1-\gamma_q) \equiv -b^{-1}c^{-3^{q-1}}(1-b)(1-c)^{3^{q-1}-1}.$$

Puisque $q \geq 2$ et $(1-c)^3\delta_{ab}(u_1^k) \equiv 0 \bmod u_1^{k+13}$ le terme $r_1(1-\gamma_k)$ vérifie la congruence du lemme.

Pour $r_2(1-\gamma_k)$ on étudie deux cas séparément. Si $k \equiv 1 \bmod 3$ alors on a $\delta_{ab}(u_1^k) = *u_1^{k+1} + *u_1^{k+2} + \cdots$ où les coefficients * ne sont pas relevants pour l'analyse. Comme $k+1 \equiv 2 \bmod 3$ et $k+2$ est divisible par 3, en appliquant le lemme 7.1.2 on obtient $\delta_{ac}\delta_{ab}(u_1^k) = *u_1^{k+2} + *u_1^{k+4} + \cdots$ et $(1-b)(1-c)^2u_1^{k+4} \equiv 0 \bmod u_1^{k+13}$.

Si $k \equiv 2 \bmod 3$ alors $\delta_{ab}(u_1^k) = *u_1^{k+1} + *u_1^{k+3} + \cdots$ mais $k+1 \equiv 0 \bmod 3$ et $k+3 \equiv 2 \bmod 3$ donc $\delta_{ac}\delta_{ab}(u_1^k) = *u_1^{k+4} + *u_1^{k+6} + \cdots$ et puis en procède comme pour le cas précédent.

Étape 2. L'égalité

$$1-XY = -(1-X)(1-Y) + 1-X+1-Y$$

montre que si le lemme est vrai pour $1-X$ et $1-Y$ avec $X, Y \in F_{\frac{5}{2}}S_2^1$ alors il est vrai pour $1-XY$. Puisque les éléments α_q, β_q et γ_q forment des bases de $gr_qS_2^1$ et $gr_{q+\frac{1}{2}}S_2^1$ cela implique que le lemme est vrai modulo $IF_qS_2^1$ pour $q > \frac{5}{2}$ donc pour les éléments de $IF_{\frac{5}{2}}S_2^1/IF_qS_2^1$.

Étape 3. Soit
$$z \in IF_{\frac{5}{2}}S_2^1 = \lim_q IF_{\frac{5}{2}}S_2^1/IF_qS_2^1$$
Alors $z = \lim z_k$ où $z_k = \sum(1-g_t)$ avec $g_t \notin F_kS_2^1$ et donc les g_t sont des produits finis d'éléments de l'étape 1, et d'après l'étape 2 le lemme est vrai pour $1-g_t$. Soit g un tel élément. Alors $1-g = r_1(1-g)(1-b)+r_2(1-g)(1-c)$. De plus on sait que $r_1(1-g) = x_1(1-g)(1-b^2)^8+b^{-1}x_2(1-g)$ où $x_1(1-g) \in IF_{\frac{5}{2}}S_2^1/IF_{k-1}S_2^1$ et $x_2(1-g) \in IF_{\frac{5}{2}}S_2^1/IF_{k-1}S_2^1$.

Soit $s \in F_kS_2^1$ un élément de l'étape 1. Alors l'égalité
$$1-gs = g(1-s)+(1-g)$$
et la décomposition de $1-s$ montrent que $x_1(1-g) \equiv x_1(1-gs) \bmod IF_{k-1}$ et de même $x_2(1-g) \equiv x_2(1-gs) \bmod IF_{k-1}$. Donc ces éléments sont compatibles au passage à la limite. On a la même conclusion pour $r_2(1-g)$ et donc le lemme est vrai pour z.

$\square$

Les lemmes 7.1.3 et 7.1.4 montrent qu'on peut choisir
$$x := x' + (1-c^3)(1+d) + r_1(z)$$
et
$$y := y' - (1-c^3)d + r_2(z).$$
Alors on a

Corollaire 7.1.5. *Soit $\partial_2' : C_2 \to C_1$ défini par*
$$e_2 \to \frac{1}{16}\sum_{g\in SD_{16}} \chi(g^{-1})g_*(l_3 - x'l_1 - y'l_2)$$
Alors
$$\partial_2(u_1^k) \equiv \partial_2'(u_1^k) \ mod\ u_1^{k+13}$$

Démonstration. En effet, d'après les lemmes 7.1.1 (d), 7.1.3 et 7.1.4 la différence $\delta := (l_3 - x'l_1 - y'l_2) - (l_3 - xl_1 - yl_2)$ et telle que $\delta(u_1^k) \equiv 0 \bmod u_1^{k+13}$. $\square$

Lemme 7.1.6.
$$\begin{aligned} x' &= -\delta_d - \delta_b\delta_d\delta_c - \delta_b\delta_c - \delta_b\delta_d \\ y' &= \delta_b^2 - \delta_b\delta_d \end{aligned}$$

Démonstration. On utilise l'égalité

$$1 - XY = -(X-1)(Y-1) - (Y-1) - (X-1)$$

On a

$$x' = -d - bcd + b + dc = 1 - d - 1 + b + 1 - bcd - 1 + dc$$

et en utilisant l'égalité ci-dessus on obtient

$$1 - bcd = -(bd-1)(c-1) - (bd-1) - (c-1)$$

et de même pour $bd - 1$ et on obtient le résultat. Le calcul de l'expression pour y' s'obtient de la même manière. □

Lemme 7.1.7.

$$l_3 = \delta_c^2 \delta_a \delta_{ab} - \delta_c^3 \delta_{ab} \; mod \; 3$$

Démonstration. En effet, $l_3 = ((1-c)^2 + 3c)(a-c)(a-b)$. □

Lemme 7.1.8. *La partie de n_1 qui contribue aux calculs modulo u_1^{13} est*

$$(\delta_c^2\delta_a\delta_b + \delta_d\delta_{ab} + \delta_b\delta_c\delta_{ab} + \delta_b\delta_d\delta_{ab} - \delta_b^2\delta_a\delta_{ab} + \delta_b^2\delta_c\delta_{ab} + \delta_d\delta_b\delta_a\delta_{ab})e_1$$

Mais on peut encore simplifier l'expression pour ∂_2, en effet il se trouve que certains des termes de lemme précédent ne contribuent pas.

Corollaire 7.1.9. *Les termes $\delta_c^3\delta_{ab}$, $\delta_c^2\delta_a\delta_{ab}$ et $\delta_b\delta_d\delta_a\delta_{ab}$ ne contribuent pas au calcul de $\partial_2(u_1^k)$ mod u_1^{k+13}.*

Démonstration. On notera par * les coefficients dont la valeur n'est pas rélevante pour la discussion. Pour le terme $\delta_c^3\delta_{ab}$ on a

$$(u_1^k) \xrightarrow{\delta_{ab}} (u_1^{k+1}) \xrightarrow{\delta_c} (u_1^{k+5}) \xrightarrow{\delta_c} (u_1^{k+9}) \xrightarrow{\delta_c} (u_1^{k+13})$$

Pour le terme $\delta_c^2\delta_a\delta_{ab}$ on étudie les deux cas séparément suivant si $k \equiv 1 \bmod 3$ ou $k \equiv 2 \bmod 3$.

Soit $k \equiv 1 \bmod 3$. Alors $\delta_a b(u_1^k) \equiv *u_1^{k+1} \bmod u_1^{k+2}$. D'après le lemme 7.1.2 on a

$$\delta_a(u_1^{k+1}) \equiv *u_1^{k+2} + *u_1^{k+4} \bmod u_1^{k+5}$$

et donc

$$\delta_a\delta_{ab}(u_1^k) \equiv *u_1^{k+2} + *u_1^{k+4} \bmod u_1^{k+5}$$

puisque le terme u_1^{k+2} de $\delta_{ab}(u_1^k)$ ne contribue pas $(3|k+2)$. Donc

$$\delta_c\delta_a\delta_{ab}(u_1^k) \equiv *u_1^{k+8} \bmod u_1^{k+9}$$

et comme $3|k+8$ on obtient que

$$\delta_c^2\delta_a\delta_{ab}(u_1^k) \equiv 0 \bmod u_1^{k+13}.$$

Soit $k \equiv 2 \bmod 3$. Toujours d'après lemme 7.1.2 on a

$$\delta_{ab}(u_1^k) \equiv *u_1^{k+1} + *u_1^{k+3} \bmod u_1^{k+4}$$

et puisque $3|k+1$ de nouveau en appliquant le lemme 7.1.2 on obtient

$$\delta_a\delta_{ab}(u_1^k) \equiv *u_1^{k+4} + *u_1^{k+6} \bmod u_1^{k+7}$$

(on a aussi utilisé le fait que le terme u_1^{k+4} de $\delta_{ab}(u_1^k)$ ne contribue pas). Or $3|k+4$ et

$$\delta_c^2 u_1^{k+6} \equiv 0 \bmod u_1^{k+12}.$$

Il reste le terme $\delta_b\delta_d\delta_a\delta_{ab}$.

Si $k \equiv 1 \bmod 3$ d'après l'analyse du cas précédent

$$\delta_a\delta_{ab}(u_1^k) \equiv *u_1^{k+2} + *u_1^{k+4} \bmod u_1^{k+5}$$

donc

$$\delta_d\delta_a\delta_{ab}(u_1^k) \equiv *u_1^{k+11} \bmod u_1^{k+12}.$$

Or $3|k+11$ d'où le résultat.

Si $k \equiv 2 \bmod 3$ on a

$$\delta_a\delta_{ab}(u_1^k) \equiv *u_1^{k+4} + *u_1^{k+6} \bmod u_1^{k+7}$$

et $3|k+4$. Le résultat en suit. □

Donc maintenant on peut simplifier n_1.

Proposition 7.1.10. *La partie de n_1 qui contribue au calcul de $\partial_2(u_1)$ modulo u_1^{13} est*

$$(\delta_d\delta_{ab} + \delta_b\delta_c\delta_{ab} + \delta_b\delta_d\delta_{ab} - \delta_b^2\delta_a\delta_{ab} + \delta_b^2\delta_c\delta_{ab})e_1$$

7.1.1.1 Le passage de n_1 à n_1'.

Rappellons que

$$n_1' = \frac{1}{16}\sum_{g\in SD_{16}} \chi(g^{-1})g_*n_1$$

Le résultat de l'évaluation de $e_2 \mapsto n_1$ sur u_1^k est une série de la forme

$$a_0 + a_1u_1 + a_2u_1^2 + \cdots$$

Donc pour calculer ∂_2 il suffit de calculer

$$\frac{1}{16}\sum_{g\in SD_{16}}\chi(g^{-1})g(a_0+a_1u_1+a_2u_1^2+\cdots)$$

La preuve de la proposition suivante est élémentaire.

Proposition 7.1.11.

$$\frac{1}{16}\sum_{g\in SD_{16}}\chi(g^{-1})g(a_ku_1^k)=\begin{cases} a_ku_1^k & si\ k\in 4\mathbb{N}+2\ et\ a_k\in\omega^2\mathbb{F}_3\\ 0 & sinon\end{cases}$$

Démonstration. On a $SD_{16}=C_8\cup C_8\phi$ où C_8 est le sous-groupe engendré par ω. Soit $k=4l+r\in\mathbb{N}$ avec $0\leq r\leq 3$ et $a_k=\alpha+\beta i$. Par définition on a

$$\chi(\omega^j)=(-1)^j$$

donc

$$\sum_{g\in C_8}\chi(g^{-1})g(a_ku_1^k)=a_k\sum_{j=0}^{7}(-1)^j\omega^{2jk}u_1^k=a_ku_1^k\sum_{j=0}^{7}(-1)^j\omega^{2jr}$$

et on peut vérifier que $\sum_{j=0}^{7}(-1)^j\omega^{2jr}=8=-1$ si $r=2$ et nul autrement. De même

$$\chi(\phi\omega^j)=(-1)^{j+1}$$

donc

$$\sum_{g\in C_8}\chi((g\phi)^{-1})g\phi(a_ku_1^k)=(\alpha-\beta i)u_1^k(\sum_{j=0}^{7}(-1)^{j+1}\omega^{2jr})$$

d'où le résultat. □

Pour calculer l'image des puissances de u par ∂_2 on utilise la relation suivante pour $g\in\mathbb{G}_2^1$

$$u_1u^{-2}=v_1=g_*v_1=g_*(u_1u^{-2})=g_*u_1g_*u^{-2}$$

d'où

$$\frac{g_*u_1}{u_1}=\frac{g_*u^2}{u^2}$$

Donc

$$\partial_2(u^{2k})=\frac{\partial_2(u_1^k)}{u_1^k}u^{2k}$$

Les puissances k qui nous intéressent sont de la forme $k = 2(18l + 7)$ et $k = 2(18l + 17)$. Puisque les deux expressions sont de la forme $4i + 2$, la proposition 7.1.8 dit que dans la formule de $\partial_2(u_1^k)/u_1^k$ on a que des puissances de u_1 divisibles par 4. Donc dans l'évaluation de ∂_2 qui suit on se concentre sur ces puissances. De plus, d'après le lemme 7.1.1 et la proposition 7.1.10 le coefficient de u_1^4 est nul, donc les puissances suivant qui nous intéressent sont u_1^8 et u_1^{12}.

Dans ce qui suit on étudie séparément deux cas : $k = 3l+1$ et $k = 3l+2$. Dans le premier cas une étude de $\partial_2(u_1^k)$ modulo u_1^{k+9} est suffisante et dans le deuxième cas, une étude modulo u_1^{k+13}.

7.2 Evaluation de ∂_2

On étudie chacun des termes de la proposition 7.1.10 séparément.

7.2.0.2 $\delta_b^2\delta_a\delta_{ab}$

Cas $k = 3l + 1$.

C'est la partie la plus calculatoire du morphisme. Puisque on veut connaître $\delta_b^2\delta_a\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+9} on a besoin de connaître $\delta_b\delta_a\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+8} et donc de connaître $\delta_a\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+7} et $\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+6}. Puisque $3|k + 5$ le terme $k + 5$ de $\delta_{ab}(u_1^k)$ ne contribue pas. Donc il suffit de connaître $\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+5}. De même

$$u_1^{k+2} \xrightarrow{\delta_a} (u_1^{k+5}) \xrightarrow{\delta_b} (u_1^{k+8})$$

donc le terme u_1^{k+2} de $\delta_{ab}(u_1^k)$ et le terme u_1^{k+5} de $\delta_a\delta_{ab}(u_1^k)$ ne contribuent pas. Aussi $k + 4 \equiv 2 \bmod 3$ donc d'après le lemme 7.1.2 on a

$$\delta_a(u_1^{k+4}) = *u_1^{k+5} + *u_1^{k+7}$$

et ces termes ne contribuent pas. Donc il suffit de connaître $\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+4}.

Dans le lemme suivant qui donne les étapes du calcul on a noté par * les coefficients qui ne contribuent pas au résultat.

Lemme 7.2.1. *Soit $k = 3l + 1$. Alors*

$$\begin{aligned}
\delta_{ab}(u_1^k)/u_1^k &\equiv (1+i)u_1 + *u_1^2 + (-1+l+(1-l)i)u_1^3 \ mod\ u_1^4 \\
\delta_a\delta_{ab}(u_1^k)/u_1^k &\equiv -u_1^2 + iu_1^4 + *u_1^5 + (-1-l+l^2)u_1^6 \ mod\ u_1^7 \\
\delta_b\delta_a\delta_{ab}(u_1^k)/u_1^k &\equiv -(1+l+i)u_1^5 + (-1-l+l^2+(1+l)i)u_1^7 \ mod\ u_1^8 \\
\delta_b^2\delta_a\delta_{ab}(u_1^k)/u_1^k &\equiv (-1+l+l^2+li)u_1^8 \ mod\ u_1^9
\end{aligned}$$

Cas $k = 3l + 2$.

On fait le même type d'analyse. Pour connaître $\delta_b^2\delta_a\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+13} il suffit de connaître $\delta_b\delta_a\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+12} et donc de connaître $\delta_a\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+11}. Or $3|k+10$ donc $\delta_b(u_1^{k+10}) \in (u_1^{k+13})$, donc le terme u_1^{k+10} de $\delta_a\delta_{ab}(u_1^k)$ ne contribue pas. Aussi d'après le lemme 7.1.2 on a

$$\delta_b(u_1^{k+9}) = *u_1^{k+10} + *u_1^{k+12}$$

et le terme u_1^{k+10} de $\delta_b\delta_a\delta_{ab}(u_1^k)$ ne contribue pas.

Donc il suffit de connaître $\delta_a\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+9} et donc de connaître $\delta_{ab}u_1^k$ modulo u_1^{k+8}. De nouveau puisque $3|k+7$ le terme u_1^{k+7} de $\delta_{ab}(u_1^k)$ ne contribue pas. D'après le lemme 7.1.2 on a

$$\delta_a(u_1^{k+6}) \equiv *u_1^{k+7} + *u_1^{k+9}$$

et ces termes ne contribuent pas. Donc il suffit de connaître $\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+6}.

Notons aussi que

$$u_1^{k+1} \xrightarrow{\delta_a} u_1^{k+4} \xrightarrow{\delta_b} u_1^{k+7} \xrightarrow{\delta_b} u_1^{k+10}$$

et donc

$$\delta_b^2\delta_a\delta_{u_1^{k+1}} \equiv *u_1^{k+10} \bmod u_1^{k+13}$$

donc les termes correspondants de chaque étape ne contribue pas au coefficient de u_1^{k+12} du résultat final.

Le lemme suivant donne les étapes du calcul.

Lemme 7.2.2. *Si $k = 3l + 2$ alors*

$$\begin{aligned}
\delta_{ab}(u_1^k)/u_1^k &\equiv *u_1 + l(1-i)u_1^3 + *u_1^4 - (1+i)u_1^5 \ mod\ u_1^6\\
\delta_a\delta_{ab}(u_1^k)/u_1^k &\equiv *u_1^4 + (-1+l+l^2)u_1^6 + *u_1^7 - iu_1^8 \ mod\ u_1^9\\
\delta_b\delta_a\delta_{ab}(u_1^k)/u_1^k &\equiv *u_1^7 + (1+l+l^3-i)u_1^9 + *u_1^{10} + (1-l-l^2+(1-l)i)u_1^{11} \ mod\ u_1^{12}\\
\delta_b^2\delta_a\delta_{ab}(u_1^k)/u_1^k &\equiv *u_1^{10} + (1+l^4+(1+l)i)u_1^{12} \ mod\ u_1^{13}
\end{aligned}$$

Le lemme montre aussi qu'il suffit de connaître l'action de a et b sur u_1 modulo u_1^7.

7.2.0.3 $\delta_d\delta_{ab}$

Cas $k = 3l+1$. Pour connaître $\delta_d\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+9} il suffit de connaître $\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^2.

Dans le cas où $k = 3l + 1$ le terme u_1^{k+5} ne contribue pas

Lemme 7.2.3. *Si $k = 3l + 1$ alors*

$$\delta_d\delta_{ab}(u_1^k)/u_1^k \equiv (-1+i)u_1^8 \ mod \ u_1^9$$

Cas $k = 3l+2$. Pour connaître $\delta_d\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+13} il suffit de connaître $\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^6. Le calcul de $\delta_{ab}(u_1^k)$ est donné dans le lemme 7.2.2.

Lemme 7.2.4. *Si $k = 3l + 2$ alors*

$$\delta_d\delta_{ab}(u_1^k)/u_1^k \equiv *u_1^{10} + (-1+i)u_1^{12} \ mod \ u_1^{13}$$

Le lemme ensemble avec le lemme 7.2.2 montrent aussi qu'on a besoin de connaître l'action de d modulo u_1^{11}.

7.2.0.4 $\delta_b\delta_d\delta_{ab}$

Suite au calcul du cas précédent, des analyses supplémentaires dans ce cas ne sont pas nécessaires, donc on donne directement le résultat.

Lemme 7.2.5.

$$\delta_b\delta_d\delta_{ab}(u_1^k) \equiv \begin{cases} 0 \ mod \ u_1^{k+9} & si \ k = 3l+1 \\ 0 \ mod \ u_1^{k+13} & si \ k = 3l+2 \end{cases}$$

7.2.0.5 $\delta_b\delta_c\delta_{ab}$

Cas $k = 3l + 1$. Pour connaître $\delta_b\delta_c\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+9} il suffit de connaître $\delta_c\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+8} et donc de connaître $\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+4}.

Les étapes du calcul sont présentées dans le lemme suivant.

Lemme 7.2.6. *Si $k = 3l + 1$ alors*

$$\begin{aligned} \delta_c\delta_{ab}(u_1^k)/u_1^k &\equiv (1-i)u_1^5 + (-1+l+(1-l)i)u_1^7 \ mod \ u_1^8 \\ \delta_b\delta_c\delta_{ab}(u_1^k)/u_1^k &\equiv (-1+l)iu_1^8 \ mod \ u_1^9 \end{aligned}$$

Cas $k = 3l + 2$. Pour connaître $\delta_b\delta_c\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+13} il suffit de connaître $\delta_c\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+12} et donc de connaître $\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+8}. Mais le terme u_1^{k+7} de $\delta_{ab}(u_1^k)$ ne contribue pas, et $\delta_c(u_1^{k+6}) \equiv *u_1^{k+10}$ mod u_1^{k+12} et $3|k+10$. Donc il suffit de connaître $\delta_{ab}(u_1^k)$ modulo u_1^{k+6}, le calcul étant fait dans le lemme 7.2.2.

Lemme 7.2.7. *Si $k = 3l + 2$ alors*

$$\delta_c\delta_{ab}(u_1^k)/u_1^k \equiv *u_1^7 + (1-i)u_1^9 + *u_1^{10} - l(1+i)u_1^{11} \ mod \ u_1^{12} \quad (7.1)$$

$$\delta_b\delta_c\delta_{ab}(u_1^k)/u_1^k \equiv *u_1^{10} + liu_1^{12} \ mod \ u_1^{13} \quad (7.2)$$

Les lemmes 7.2.2 et 7.2.7 montrent qu'il suffit de connaître l'action de c modulo u_1^{10} (puisque $3|k+1$ le terme u_1^{k+1} de $\delta_{ab}(u_1^k)$ n'est pas rélevant).

7.2.0.6 $\delta_b^2\delta_c\delta_{ab}$

On utilise les calculs du cas précédent.

Lemme 7.2.8. *Si $k = 3l + 1$ alors*

$$\delta_b^2\delta_c\delta_{ab}(u_1^k)/u_1^k \equiv 0 \ mod \ u_1^9$$

et si $k = 3l + 2$

$$\delta_b^2\delta_c\delta_{ab}(u_1^k)/u_1^k \equiv 0 \ mod \ u_1^{13}$$

7.2.1 Formule pour $\partial_2(u^k)$

En mettant ensemble les calculs précédents on obtient :

Proposition 7.2.9. *Soit $k \in 4\mathbb{N} + 2$. Si $k = 3l + 1$ alors*

$$\partial_2(u_1^k)/u_1^k \equiv \frac{1}{16}\sum_{g\in SD_{16}} \chi(g^{-1})g(-(l + l^2)u_1^8) \ mod \ u_1^{12}$$

et si $k = 3l + 2$ alors

$$\partial_2(u_1^k)/u_1^k \equiv \frac{1}{16}\sum_{g\in SD_{16}} \chi(g^{-1})g((1 - l^4 - li)u_1^{12}) \ mod \ u_1^{16}$$

Corollaire 7.2.10. *Pour $k \in 4\mathbb{N} + 2$ on a*

$$\partial_2(\omega^2u^{2k})/u^{2k} \equiv \begin{cases} -(l + l^2)\omega^2u_1^8 \ mod \ u_1^{12} & si \ k = 3l + 1 \\ (1 - l^4)\omega^2u_1^{12} \ mod \ u_1^{13} & si \ k = 3l + 2 \end{cases}$$

□

On rappelle que

$$b_{18l+7} = \omega^2u^{-4(18l+7)}$$

et

$$b_{18l+17} = \omega^2u^{-4(18l+17)}.$$

Or

$$-4(18l + 7) = 2(3(-5 - 12l) + 1)$$

et

$$-4(18l + 17) = 2(3(-12 - 12l) + 2)$$

donc on peut appliquer la proposition précédente en prenant $k = 3(-5 - 12l) + 1 = -36l - 14$ (respectivement $k = -36l - 34$) pour conclure

Proposition 7.2.11. *Pour $l < 0$ on a*

$$\begin{aligned}\partial_2(b_{18l+7}) &\equiv \omega^2 u_1^8 u^{-4(18l+7)} \; mod \; u_1^{12}\\ \partial_2(b_{18l+17}) &\equiv \omega^2 u_1^{12} u^{-4(18l+17)} \; mod \; u_1^{16}\end{aligned}$$

Donc il reste à étudier l'image des puissances négatives de u.

Lemme 7.2.12. *Soit $g \in \mathbb{G}_2^1$ et $l \geq 0$. Alors*

$$\begin{aligned}g_* u^{-4(18l+7)} &\equiv u^{4\cdot 3^3(18l+7)} g_* u^{4\cdot(3^3-1)(18l+7)} \; mod \; u_1^{27}\\ g_* u^{-4(18l+17)} &\equiv u^{4\cdot 3^3(18l+17)} g_* u^{4\cdot(3^3-1)(18l+17)} \; mod \; u_1^{27}\end{aligned}$$

Démonstration. En effet

$$\begin{aligned}g_* u^{-4(18l+7)} &= g_* u^{-4(18l+7)-4\cdot 3^3(18l+7)+4\cdot 3^3(18l+7)}\\ &= g_* u^{4\cdot(3^3-1)(18l+17)} g_* u^{4\cdot 3^3(18l+7)}\end{aligned}$$

et

$$g_* u^{4\cdot 3^3(18l+7)} \equiv u^{4\cdot 3^3(18l+7)} \text{ mod } u_1^{27}$$

□

Corollaire 7.2.13. *Soit $l \geq 0$. Alors*

$$\begin{aligned}\partial_2(\omega^2 u^{-4(18l+7)}) &\equiv u^{4\cdot 3^3(18l+7)} \partial_2(\omega^2 u^{4\cdot(3^3-1)(18l+7)}) &\equiv \omega^2 u_1^8 u^{4\cdot 3^3(18l+7)} \; mod \; u_1^{12}\\ \partial_2(\omega^2 u^{-4(18l+17)}) &\equiv u^{4\cdot 3^3(18l+17)} \partial_2(\omega^2 u^{4\cdot(3^3-1)(18l+17)}) &\equiv \omega^2 u_1^{12} u^{4\cdot 3^3(18l+17)} \; mod \; u_1^{16}\end{aligned}$$

Démonstration. La preuve est une conséquence de la proposition 7.2.10 et du lemme 7.2.12. □

La proposition suivante est une conséquence de 7.2.11 et 7.2.13.

Proposition 7.2.14. *Pour $l \in \mathbb{Z}$ on a*

$$\begin{aligned}\partial_2(b_{18l+7}) &\equiv \omega^2 u_1^8 u^{-4(18l+7)} \quad mod \; u_1^{12}\\ \partial_2(b_{18l+17}) &\equiv \omega^2 u_1^{12} u^{-4(18l+17)} \quad mod \; u_1^{16}\end{aligned}$$

Bibliographie

[1] Mark Behrens, *A modular description of the $K(2)$-local sphere at prime 3*, à parraitre dans Topology.

[2] Mark Behrens and Satya Pemmaraju, *On the existence of the self map v_2^9 on the Smith-Toda complex $V(1)$ at the prime 3*, Contemp. Math., vol. 346, pp. 9–49.

[3] Ethan S. Devinatz, *Morava's change of rings theorem*, The Čech centennial (Boston, MA, 1993), Contemp. Math., vol. 181, pp. 83–118.

[4] Ethan S. Devinatz and Michael J. Hopkins, *The action of the Morava stabilizer group on the Lubin-Tate moduli space of lifts*, Amer. J. Math. **117** (1995), no. 3, 669–710.

[5] ______, *Homotopy fixed point spectra for closed subgroups of the Morava stabilizer groups*, Topology **43** (2004), no. 1, 1–47.

[6] Paul Goerss, Hans-Werner Henn, and Mark Mahowald, *The homotopy of $L_2V(1)$ for the prime 3*, Categorical decomposition techniques in algebraic topology (Isle of Skye, 2001), Progr. Math., vol. 215, pp. 125–151.

[7] Paul Goerss, Hans-Werner Henn, Mark Mahowald, and Charles Rezk, *A resolution of the $K(2)$-local sphere*, Annals of Mathematics **162** (2005), no. 2, 777–822.

[8] Vassily Gorbounov, Stephen F. Siegel, and Peter Symonds, *The cohomology of the Morava stabilizer group $\mathbf{S}_2$ at the prime* 3, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), no. 3, 933–941.

[9] Vassily Gorbounov and Peter Symonds, *Toward the homotopy groups of the higher real K-theory $E\mathrm{O}_2$*, Homotopy theory via algebraic geometry and group representations (Evanston, IL, 1997), Contemp. Math., vol. 220, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, pp. 103–115.

[10] Michiel Hazewinkel, *Formal groups and applications*, Pure and Applied Mathematics, vol. 78, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.

[11] Hans-Werner Henn, *On finite resolutions of $K(n)$-local spheres*, preprint, disponible sur l'archive de Hopf.

[12] ———, *Centralizers of elementary abelian p-subgroups and mod-p cohomology of profinite groups*, Duke Math. J. **91** (1998), no. 3, 561–585.

[13] Michael J. Hopkins, Mark Mahowald, and Hal Sadofsky, *Constructions of elements in Picard groups*, Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992), Contemp. Math., vol. 158, pp. 89–126.

[14] Mark Hovey and Neil P. Strickland, *Morava K-theories and localisation*, Mem. Amer. Math. Soc. **139** (1999).

[15] Michel Lazard, *Groupes analytiques p-adiques*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1965), no. 26, 389–603.

[16] Mark Mahowald, *The resolution and Shimomura-Wang at 3*, notes.

[17] Mark Mahowald and Charles Rezk, *On topological modular forms of level 3*, notes.

[18] H. R. Miller and D. C. Ravenel, *Mark Mahowald's work on the homotopy groups of spheres*, Algebraic topology (Oaxtepec, 1991), Contemp. Math., vol. 146, pp. 1–30.

[19] Douglas C. Ravenel, *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*, Pure and Applied Mathematics, vol. 121, Academic Press Inc., Orlando, FL, 1986.

[20] ———, *Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory*, Annals of Mathematics Studies, vol. 128, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992.

[21] Katsumi Shimomura, *The homotopy groups of an L_2-localized type one finite spectrum at the prime* 2, Hiroshima Math. J. **28** (1998), no. 1, 113–127.

[22] Katsumi Shimomura and Xiangjun Wang, *The homotopy groups $\pi_*(L_2S^0)$ at the prime 3*, Topology **41** (2002), no. 6, 1183–1198.

[23] N. P. Strickland, *On the p-adic interpolation of stable homotopy groups*, Adams Memorial Symposium on Algebraic Topology, 2 (Manchester, 1990), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 176, pp. 45–54.

[24] Peter Symonds, *The Tate-Farrell cohomology of the Morava stabilizer group S_{p-1} with coefficients in E_{p-1}*, Homotopy theory : relations with algebraic geometry, group cohomology, and algebraic K-theory, Contemp. Math., vol. 346, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004, pp. 485–492.

[25] Peter Symonds and Thomas Weigel, *Cohomology of p-adic analytic groups*, New horizons in pro-p groups, Progr. Math., vol. 184, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2000, pp. 349–410.