Fabrice Krieger

SUR LES INVARIANTS TOPOLOGIQUES DES ACTIONS DE GROUPES MOYENNABLES DISCRETS

Fabrice Krieger

Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7, rue René Descartes, 67084 Strasbourg Cedex, France.

E-mail : krieger@math.u-strasbg.fr

Url : http://www-irma.u-strasbg.fr/~krieger/

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 37B40, 37B05, 43A07, 37B10, 37B50, 28C10, 20E26, 20F65.

Mots clefs. — Dimension topologique moyenne, entropie topologique, groupe moyennable, décalage, système minimal, système de Toeplitz.

à mes parents,

SUR LES INVARIANTS TOPOLOGIQUES DES ACTIONS DE GROUPES MOYENNABLES DISCRETS

Fabrice Krieger

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à mes parents, Betty et Jean-Paul, qui m'ont fait confiance et m'ont soutenu tout au long de mes études.

Un grand merci va tout droit à Michel Coornaert qui a guidé mes pas vers la recherche mathématique. Sa générosité, sa rigueur et ses précieux conseils ont été d'une importance primordiale pour l'accomplissement de ce travail.

Je remercie Laurent Bartholdi, Tullio Ceccherini-Silberstein, Patrick Foulon et Alain Valette d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je tiens aussi à remercier toutes les personnes avec qui j'ai pu discuter de mathématiques mais aussi celles qui m'ont conseillé ou aidé d'une quelconque autre manière.

INTRODUCTION

Cette thèse est consacrée à l'étude de certains invariants topologiques des systèmes dynamiques. On s'intéresse plus particulièrement à la dimension topologique moyenne et à l'entropie topologique d'actions de groupes moyennables discrets.

Les groupes moyennables ont été introduits en 1929 par J. von Neumann [**Neu**]. Un groupe est dit *moyennable* si l'ensemble de ses parties admet une mesure finie qui est finiment additive et invariante par translation. La classe des groupes moyennables contient les groupes finis et les groupes commutatifs. Elle est stable par passage aux sous-groupes, par passage aux quotients, par extensions et par limites inductives. Un groupe moyennable ne peut pas contenir de sous-groupe isomorphe au groupe libre à deux générateurs F_2 mais il existe des groupes non moyennables ne contenant pas de sous-groupe isomorphe à F_2. On trouve dans la littérature de nombreuses définitions équivalentes à la moyennabilité. Notons $\mathcal{F}(G)$ l'ensemble des parties finies non vides de G. Le critère de Følner donne une caractérisation combinatoire de la moyennabilité : un groupe dénombrable G est moyennable si et seulement si il existe une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}(G)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(gF_n) \bigtriangleup F_n|}{|F_n|} = 0 \quad \text{quel que soit } g \in G,$$

où $A \bigtriangleup B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ désigne la différence symétrique entre les ensembles A et B, et $|A|$ est le cardinal de A. Une telle suite (F_n) est appelée *suite de Følner* de G.

Le théorème suivant est un résultat de convergence pour les fonctions sous-additives invariantes définies sur les parties finies d'un groupe dénombrable moyennable G :

***Théorème A* (Ornstein-Weiss).** — *Soit G un groupe dénombrable moyennable et $h\colon \mathcal{F}(G) \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les propriétés suivantes :*

(a) *h est sous-additive, c'est-à-dire*

$$h(A \cup B) \leq h(A) + h(B) \text{ quelles que soient } A, B \in \mathcal{F}(G) \;;$$

(b) *h est invariante à droite, c'est-à-dire*

$$h(Ag) = h(A) \text{ quels que soient } g \in G \text{ et } A \in \mathcal{F}(G).$$

Alors il existe un réel $\lambda = \lambda(G, h) \geq 0$ *tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{h(F_n)}{|F_n|} = \lambda$$

pour toute suite de Følner $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de* G.

Ce théorème se déduit d'un résultat général dû à D. S. Ornstein et B. Weiss sur les quasi-pavages (voir [**OrW**, Section I.2, Th. 6], [**LiW**, Th. 6.1]). On donne [**Kr1**] une démonstration directe de ce résultat en suivant des idées esquissées par M. Gromov dans [**Gro**, Section 1.3].

Le théorème A est utilisé dans la définition d'invariants d'actions de groupes moyennables discrets comme l'entropie topologique, l'entropie métrique et la dimension topologique moyenne.

Étant donné un groupe dénombrable discret G, on appellera *système dynamique* ou encore G*-système* la donnée d'un espace topologique compact métrisable X muni d'une action continue de G. On dit qu'un G-système X est *minimal* si toutes les orbites sont denses dans X.

Soit K un espace compact métrisable et munissons

$$K^G = \{x = (x_g)_{g\in G} \colon x_g \in K\}$$

de la topologie produit. Un exemple fondamental de G-système est le G*-décalage* sur K^G défini par $(g'x)_g = x_{gg'}$. On appelle *sous-décalage* toute partie G-invariante $X \subset K^G$.

Si X et Y sont des G-systèmes, on dit que le G-système X *se plonge* dans Y s'il existe un plongement topologique G-équivariant de X dans Y.

La dimension topologique moyenne est un invariant topologique d'actions de groupes moyennables introduit par M. Gromov en 1999 dans [**Gro**]. C'est une variante dynamique de la dimension topologique classique de Čech Lebesgue qui permet de distinguer des systèmes de dimension et d'entropie topologique infinies.

Étant donné un groupe dénombrable moyennable G, on donne la définition de la dimension topologique moyenne $\mathrm{mdim}(X, G)$ d'un G-système X et l'on établit quelques résultats sur la dimension topologique moyenne des sous-décalages fermés de K^G, où l'espace des symboles K est un espace compact métrisable. Lorsque X est un sous-décalage fermé de K^G, alors on a $\mathrm{mdim}(X, G) \leq \dim(K)$, où $\dim(K)$ est la dimension topologique usuelle de K, avec égalité si $X = K^G$ où K est un polyèdre (c'est-à-dire un espace topologique homéomorphe à un complexe simplicial fini). Une question naturelle qui se pose alors est de savoir quelles sont les valeurs possibles que peut atteindre la dimension topologique moyenne des sous-décalages fermés de K^G, lorsque K est fixé. On démontre le théorème suivant [**CoK**] :

Théorème B. — *Soient* G *un groupe dénombrable moyennable contenant des sous-groupes d'indice fini arbitrairement grand (c'est-à-dire tel que pour tout entier* $N \in \mathbb{N}$*, il existe un sous-groupe* $H \subset G$ *tel que* $N \leq [G : H] < \infty$*) et* P *un polyèdre. Alors pour tout réel* ρ *tel que* $0 \leq \rho \leq \dim(P)$*, il existe un sous-décalage fermé* $X \subset P^G$ *tel que* $\mathrm{mdim}(X, G) = \rho$.

Les groupes $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 1$, les groupes infinis nilpotents de type fini et plus généralement tous les groupes infinis linéaires de type fini ne contenant pas de sous-groupe isomorphe à F_2 vérifient les hypothèses du théorème précédent.

Puisque le G-décalage sur H^G, où $H = [0,1]^{\mathbb{N}}$ désigne le cube de Hilbert, a une dimension topologique moyenne infinie, le théorème B montre en particulier que la dimension topologique moyenne des G-systèmes atteint toutes les valeurs de l'intervalle $[0, \infty]$.

Les liens entre la dimension topologique moyenne, l'entropie topologique et la propriété de la petite frontière ont été étudiés par E. Lindenstrauss et B. Weiss dans le cas $G = \mathbb{Z}$ (voir [**LiW**], [**Lin**]). L'extension de certains de leurs résultats au cas d'actions de groupes dénombrables moyennables ne pose pas de difficulté particulière.

Les origines de la notion d'entropie remontent à Kolmogorov, Sinai et Shannon. On rappelle la définition de l'entropie topologique d'un G-système lorsque G est un groupe dénombrable moyennable et l'on donne quelques résultats standard sur les propriétés de cet invariant. On démontre que tout G-système dont l'entropie topologique est finie a une dimension topologique moyenne nulle.

On définit la propriété de la petite frontière pour un G-système, lorsque G est un groupe moyennable. On démontre que tout G-système qui vérifie la propriété de la petite frontière a une dimension topologique moyenne nulle. Tous les G-systèmes uniquement ergodiques vérifient la propriété de la petite frontière. Cela fournit d'autres exemples encore de systèmes de dimension topologique moyenne nulle.

Étant donné un groupe dénombrable commutatif G, un théorème de Jaworski [**Jaw**] affirme que si X est un G-système minimal de dimension topologique finie, alors il se plonge dans le G-décalage sur $[0,1]^G$. Une question importante en théorie des systèmes dynamiques qui est restée ouverte durant de nombreuses années était de savoir si tout $\mathbb{Z}$-système minimal X se plonge dans le $\mathbb{Z}$-décalage sur $[0,1]^{\mathbb{Z}}$. En 2000, dans [**LiW**], Lindenstrauss et Weiss ont utilisé la dimension topologique moyenne pour répondre négativement à cette question. Nous généralisons la construction du contre-exemple de Lindenstrauss et Weiss au cas des groupes dénombrables moyennables et résiduellement finis [**Kr2**]. Plus précisément, on démontre le théorème suivant :

Théorème C. — *Soit G un groupe infini dénombrable, moyennable et résiduellement fini. Alors il existe un G-système minimal $X \subset ([0,1]^2)^G$ qui ne se plonge pas dans le G-décalage sur $[0,1]^G$.*

Comme tous les groupes commutatifs de type fini vérifient les hypothèses du théorème C, on ne peut donc pas supprimer l'hypothèse de finitude de la dimension topologique dans le résultat de Jaworski lorsque G est infini de type fini.

Soit K un ensemble fini de cardinal $|K|$ et G un groupe dénombrable. On introduit une classe de sous-décalages minimaux de K^G généralisant les sous-décalages de Toeplitz lorsque $G = \mathbb{Z}$. On dit qu'un élément $x \in K^G$ est un *élément de Toeplitz* s'il existe une suite $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de sous-groupes d'indice fini de G telle que pour tout $g \in G$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que la restriction de x à gH_n est constante. Lorsque $G = \mathbb{Z}$ on retrouve la notion de suite de Toeplitz introduite en 1969 par K. Jacobs et M. Keane [**JaK**]. Une suite $x \in K^{\mathbb{Z}}$ est une suite de Toeplitz si et seulement si il existe une partition de $\mathbb{Z}$ par des progressions arithmétiques telles que la restriction de x à chacune des progressions est constante. On appelle *sous-décalage de Toeplitz* l'adhérence dans K^G de l'orbite d'un élément de Toeplitz. Tout sous-décalage de Toeplitz de K^G est un sous-ensemble minimal. Lorsque G est moyennable et résiduellement fini, on donne une méthode de construction et d'estimation de l'entropie topologique des sous-décalages de Toeplitz de K^G. On démontre le théorème suivant [**Kr3**] :

Théorème D. — *Soit G un groupe dénombrable infini, moyennable et résiduellement fini. Soient K un ensemble fini et $\theta \in [0, \log|K|[$. Alors il existe un sous-décalage de Toeplitz $X \subset K^G$ d'entropie topologique* $\mathrm{h}(X) = \theta$.

Ce théorème généralise celui que l'on trouve dans [**Kůr**, Th. 4.77] lorsque $G = \mathbb{Z}$ (voir aussi [**Wil**]).

La thèse est organisée de la façon suivante. Dans le chapitre 1, on rappelle la définition des groupes moyennables discrets ainsi que quelques résultats standart. On y démontre l'équivalence entre plusieurs caractérisations bien connues de la moyennabilité. On récapitule les principaux résultats dans la dernière section du chapitre.

On expose dans le chapitre 2 une démonstration du théorème A en s'inspirant des idées contenues dans [**Gro**]. Le résultat clef de la démonstration du théorème A est le lemme de remplissage (lemme 2.11) qui donne un procédé de recouvrement partiel des parties finies du groupe G par des parties ϵ-disjointes. Les propriétés de ce recouvrement permettent de contrôler le rapport $h(F_n)/|F_n|$ dans la démonstration du théorème A. On donne aussi deux versions plus faibles du théorème d'Ornstein-Weiss que l'on peut rencontrer dans la littérature.

Le chapitre 3 est consacrée à la dimension topologique moyenne. On donne deux définitions équivalentes de la dimension topologique moyenne $\mathrm{mdim}(X, G)$ d'un G-système X, où G est un groupe dénombrable moyennable. L'une est purement topologique et l'autre fait intervenir une métrique compatible avec la topologie de X. On étudie des propriétés générales de la dimension topologique moyenne des sous-décalages fermés de K^G, où K est un compact métrisable. On introduit la notion de sous-décalage de type bloc associé à un sous-groupe d'indice fini de G. Lorsque P est un polyèdre et H un sous-groupe de G d'indice $\nu < \infty$, on montre comment obtenir, pour tout entier r tel que $0 \leq r \leq \nu$, un sous-décalage de type bloc de P^G de dimension topologique moyenne $r/\nu \dim(P)$. Ceci est utilisé dans la dernière section du chapitre pour obtenir le sous-décalage fermé de P^G du théorème B.

Dans le chapitre 4, on étudie le lien entre l'entropie topologique et la dimension topologique moyenne d'un G-système, lorque G est un groupe dénombrable moyennable. On rappelle la définition de l'entropie topologique et quelques résultats concernant cet invariant. On démontre que la dimension topologique moyenne d'un G-système d'entropie topologique finie est nulle.

La notion d'ensemble G-petit, qui apparaît au chapitre 5, a été introduite par Shub et Weiss dans [**ShW**] lorsque $G = \mathbb{Z}$. Pour tout sous-ensemble E d'un G-système X, on définit la notion de *capacité orbitale* de E. On appelle ensemble *G-petit* tout sous-ensemble de X ayant une capacité orbitale nulle. On dit qu'un G-système X vérifie la *propriété de la petite frontière* s'il admet une base d'ouverts $\mathcal{B}$ constituée d'éléments ayant une frontière topologique G-petite. Le résultat principal de ce chapitre est que si G est dénombrable moyennable alors tout G-système qui vérifie la propriété de la petite frontière a une dimension topologique moyenne nulle. On montre qu'un sous-ensemble fermé E de X est G-petit si et seulement si pour toute mesure de probabilité borélienne régulière G-invariante μ de X, on a $\mu(E) = 0$. Cette caractérisation ergodique des sous-ensembles fermés G-petits permet de démontrer que tout G-système uniquement ergodique vérifie la propriété de la petite frontière.

Le but du chapitre 6 est la généralisation au cas des actions de groupes moyennables résiduellement finis du contre-exemple de Lindenstrauss et Weiss sur les plongements de systèmes dynamiques dans les décalages. Après avoir établi quelques propriétés des sous-décalages de type bloc, on donne une méthode permettant de minorer la dimension topologique moyenne de certains systèmes minimaux. On démontre ensuite le théorème C. On construit pour tout entier $N \geq 1$, une suite décroissante de sous-décalages de type bloc $X^{(n)} \subset ([0,1]^N)^G$, dont l'intersection est un système minimal de dimension topologique moyenne strictement plus grande que $N/2$.

Le chapitre 7 est consacré à une classe de systèmes minimaux appelés *sous-décalages de Toeplitz*. Au début du chapitre on rappelle quelques résultats sur les systèmes minimaux et les points presque périodiques. On introduit ensuite les sous-décalages de Toeplitz de K^G, lorsque G est un groupe dénombrable et K un espace compact métrisable. On établit une proposition due à B. Weiss (proposition 7.10) sur les suites de Følner dans les groupes moyennables résiduellement finis que l'on utilise pour estimer l'entropie dans la démonstration du théorème D. Lorsque K est fini et le groupe G moyennable et résiduellement fini, on donne une méthode de construction de sous-décalages de Toeplitz d'entropie topologique donnée et l'on démontre le théorème D.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

GROUPES MOYENNABLES

Dans ce chapitre on rappelle la définition de la moyennabilité pour les groupes discrets ainsi que quelques résultats (pour plus de détails voir par exemple [**Gre**], [**Pat**], [**BHV**, II.G]).

Les origines de la notion de moyennabilité remontent au début du XX$^{\text{e}}$ siècle lorsque Lebesgue [**Leb**] soulève des questions à propos des propriétés d'unicité de la mesure qui porte son nom. Les groupes moyennables ont été introduits en 1929 par von Neumann [**Neu**] qui était en partie motivé par l'étude du paradoxe de Banach-Tarski [**BaT**].

1.1. Moyennes

Soit X un ensemble. Notons $\mathbb{R}^X = \{u\colon X \to \mathbb{R}\}$ l'espace vectoriel réel des fonctions de X dans $\mathbb{R}$. On utilisera aussi la notation $u = (u_x)_{x\in X}$ pour toute fonction $u \in \mathbb{R}^X$. Notons $\ell^\infty(X)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^X$ défini par

$$\ell^\infty(X) = \{u \in \mathbb{R}^X\colon \sup_{x\in X} |u_x| < \infty\}.$$

Rappelons que $\ell^\infty(X)$ muni de la norme définie par

$$||u||_\infty = \sup_{x\in X} |u_x| \quad \text{quel que soit } u \in \ell^\infty(X)$$

est un espace de Banach.

Si $(E, ||.||_E)$ est un espace vectoriel réel normé, on désigne par E^* son dual topologique, c'est-à-dire l'espace vectoriel des formes linéaires continues sur E. On munit l'espace E^* de la norme duale standart

$$||f|| = ||f||_{E^*} = \sup_{\{x\in E\colon ||x||_E \le 1\}} |f(x)| \quad \text{quel que soit } f \in E^*$$

qui fait de E^* un espace de Banach.

Pour toute partie A d'un ensemble X, on note $\chi_A\colon X \to \{0,1\}$ la fonction caractéristique de A.

Définition 1.1. — On appelle *moyenne* sur $\ell^\infty(X)$ une forme linéaire $m\colon \ell^\infty(X) \to \mathbb{R}$ vérifiant la condition suivante :

$$\inf_{x\in X} u_x \leq m(u) \leq \sup_{x\in X} u_x \quad \text{quel que soit } u \in \ell^\infty(X). \tag{1.1}$$

On note $\Sigma(X)$ l'ensemble (convexe) des moyennes sur $\ell^\infty(X)$.

Remarques 1.2. — Une forme linéaire $\varphi\colon \ell^\infty(X) \to \mathbb{R}$ est dite *positive* si $\varphi(u) \geq 0$ quel que soit $u \geq 0$ et *normalisée* si $\varphi(\chi_X) = 1$. Les moyennes sur $\ell^\infty(X)$ sont donc les formes linéaires positives et normalisées sur $\ell^\infty(X)$.

L'inégalité (1.1) montre qu'une moyenne m est une forme linéaire continue sur $\ell^\infty(X)$ de norme $||m|| = 1$.

Soit $\ell^1(X)$ le sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(X)$ défini par

$$\ell^1(X) = \{v \in \mathbb{R}^X : ||v||_1 = \sum_{x\in X} |v_x| < \infty\}$$

et rappelons que l'on a un plongement isométrique d'espaces vectoriels normés

$$j\colon (\ell^1(X), ||.||_1) \to (\ell^\infty(X)^*, ||.||_{\ell^\infty(X)^*})$$

défini par la formule

$$j(v)(u) = \sum_{x\in X} v_x u_x \tag{1.2}$$

quels que soient $v \in \ell^1(X)$ et $u \in \ell^\infty(X)$. Notons $P(X)$ la partie de $\ell^1(X)$ définie par

$$P(X) = \{v \in \ell^1(X)\colon v \geq 0 \text{ et } ||v||_1 = 1\}$$

et remarquons que pour tout $v \in P(X)$, la forme linéaire $j(v)$ est une moyenne sur $\ell^\infty(X)$. Posons $\Sigma_1(X) = j(P(X))$. Alors $\Sigma_1(X)$ est une partie convexe de $\Sigma(X)$ que l'on appellera l'*espace des moyennes discrètes* sur $\ell^\infty(X)$.

Le *support* d'un élément $u \in \mathbb{R}^X$, noté $\mathrm{supp}(u)$, est l'ensemble des x dans X vérifiant $u_x \neq 0$. Notons $S_0(X)$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^X$ des fonctions à support fini et posons

$$\Sigma_0(X) = j\big(P(X) \cap S_0(X)\big).$$

Alors $\Sigma_0(X)$ est une partie convexe de $\Sigma_1(X)$ appelée *espace des moyennes à support fini* sur $\ell^\infty(X)$.

Soit E un espace vectoriel normé. Rappelons que la topologie faible* sur E^* est la topologie la moins fine sur E^* rendant continues toutes les applications $\Psi_x\colon E^* \to \mathbb{R}$, $x \in E$, où $\Psi_x(\varphi) = \varphi(x)$ quel que soit $\varphi \in E^*$. Muni de cette topologie, E^* est un espace vectoriel topologique séparé localement convexe.

Proposition 1.3. — *L'ensemble $\Sigma(X) \subset \ell^\infty(X)^*$ est un convexe compact relativement à la topologie faible*.*

DÉMONSTRATION. — Munissons $\ell^\infty(X)^*$ de la topologie faible*. D'après les remarques 1.2, l'ensemble des moyennes $\Sigma(X)$ est un convexe inclus dans la boule $B = \{\varphi \in \ell^\infty(X)^* \colon ||\varphi|| \leq 1\}$. D'après le théorème d'Alaoglu ([**DuS**, Th. V.4.2]) la boule B est compact relativement à la topologie faible*. Pour montrer que $\Sigma(X)$ est compact, il suffit donc de voir que $\Sigma(X)$ est un fermé de $\ell^\infty(X)^*$. D'après la définition d'une moyenne, on a pour tout $m \in \ell^\infty(X)^*$

$$m \in \Sigma(X) \Leftrightarrow m(u) \in [\inf_{x\in X} u_x, \sup_{x\in X} u_x] \quad \forall u \in \ell^\infty(X).$$

Il en résulte

$$\Sigma(X) = \bigcap_{u\in\ell^\infty(X)} {\Psi_u}^{-1}(I_u),$$

où $I_u = [\inf_{x\in X} u_x, \sup_{x\in X} u_x]$. Puisque les applications $\Psi_u \colon \ell^\infty(X)^* \to \mathbb{R}$, $u \in \ell^\infty(X)$, sont continues, on en déduit que $\Sigma(X)$ est un fermé de $\ell^\infty(X)^*$. $\square$

Proposition 1.4. — *L'espace $\Sigma_0(X)$ est dense dans $\Sigma(X) \subset \ell^\infty(X)^*$ relativement à la topologie faible*.*

DÉMONSTRATION. — Munissons $\ell^\infty(X)^*$ de la topologie faible*. Raisonnons par l'absurde et supposons $\overline{\Sigma_0(X)} \neq \Sigma(X)$. Soit $m \in \Sigma(X) \setminus \overline{\Sigma_0(X)}$. Alors $K_1 = \overline{\Sigma_0(X)}$ est un convexe fermé de $\ell^\infty(X)^*$ ne contenant pas m. On peut donc appliquer un théorème de séparation d'un point et d'un convexe fermé dans l'espace vectoriel topologique séparé localement convexe $\ell^\infty(X)^*$ ([**DuS**, Th. V.2.10]) qui affirme qu'alors il existe une forme linéaire continue $\Psi \colon \ell^\infty(X)^* \to \mathbb{R}$ telle que

$$\Psi(K_1) < \Psi(m).$$

Puisque K_1 est un fermé du compact B, c'est un espace compact. La continuité de Ψ implique alors

$$\sup_{\varphi\in K_1} \Psi(\varphi) < \Psi(m). \tag{1.3}$$

Rappelons que les formes linéaires $\Psi \colon \ell^\infty(X)^* \to \mathbb{R}$ qui sont continues relativement à la topologie faible* sont de la forme $\varphi \mapsto \Psi_u(\varphi) = \varphi(u)$, où $u \in \ell^\infty(X)$ ([**DuS**, Th. V.3.9]). On en déduit qu'il existe $u^{(0)} \in \ell^\infty(X)$ tel que $\Psi = \Psi_{u^{(0)}}$. L'inégalité (1.3) s'écrit donc

$$\sup_{\varphi\in K_1} \varphi(u^{(0)}) < m(u^{(0)}). \tag{1.4}$$

Posons $D = \{\delta_x \colon x \in X\}$, où $\delta_x \in \Sigma_0(X)$ est défini par $\delta_x(u) = u_x$ pour tout $u \in \ell^\infty(X)$. Alors $D \subset K_1$ et d'après l'inégalité (1.4), on a

$$\sup_{x\in X} u_x^{(0)} = \sup_{\varphi\in D} \varphi(u^{(0)}) < m(u^{(0)}).$$

Ceci contredit le fait que m est une moyenne. Donc on a bien $\overline{\Sigma_0(X)} = \Sigma(X)$. $\square$

1.2. Groupes moyennables

Toutes les actions de groupe que l'on considère sont des actions à gauche. Soit G un groupe. On notera 1_G l'élément neutre de G. Supposons que G agit sur un ensemble X. Alors G induit une action naturelle sur $\mathbb{R}^X$ définie par

$$(gu)_x = u_{g^{-1}x}$$

quels que soient $g \in G$, $x \in X$ et $u \in \mathbb{R}^X$. Observons qu'alors $\ell^\infty(X)$ est un sous-ensemble G-invariant de $\mathbb{R}^X$ et que la restriction de cette action à l'espace normé $\ell^\infty(X)$ est continue lorsque G est muni de la topologie discrète.

Définition 1.5. — Soit X un ensemble muni d'une action d'un groupe G. Une moyenne m sur $\ell^\infty(X)$ est dite *invariante* si $m(gu) = m(u)$ quels que soient $g \in G$ et $u \in \ell^\infty(X)$. On note $\Sigma_{inv}(X)$ l'ensemble des moyennes invariantes sur $\ell^\infty(X)$.

Lorsque le groupe G agit sur $X = G$, l'action que l'on considère est $L\colon G \times G \to G$ (resp. l'action $R\colon G \times G \to G$) définie par $L(g, s) = L_g(s) = gs$ (resp. $R(g, s) = R_g(s) = sg^{-1}$). Pour simplifier, on notera $(g, u) \mapsto gu$ (resp. $(g, u) \mapsto g \star u$) l'action (à gauche) induite par L (resp. par R) sur $\ell^\infty(G)$.

Définition 1.6. — Une moyenne m sur $\ell^\infty(G)$ est dite *invariante à gauche* (resp. *à droite*) si $m(gu) = m(u)$ (resp. $m(g \star u) = m(u)$) quels que soient $g \in G$ et $u \in \ell^\infty(G)$. Une moyenne sur $\ell^\infty(G)$ est dite *bi-invariante* si elle est invariante à gauche et à droite.

Pour tout $u \in \mathbb{R}^G$, on définit $\widetilde{u} \in \mathbb{R}^G$ par $\widetilde{u}_g = u_{g^{-1}}$ pour tout $g \in G$.

Proposition 1.7. — *Il existe une moyenne invariante à gauche sur $\ell^\infty(G)$ si et seulement si il existe une moyenne invariante à droite sur $\ell^\infty(G)$.*

Démonstration. — Pour toute moyenne m sur $\ell^\infty(G)$, on définit la moyenne

$$\widetilde{m}\colon \ell^\infty(G) \to \mathbb{R}$$

par $\widetilde{m}(u) = m(\widetilde{u})$ quel que soit $u \in \ell^\infty(G)$. Comme on a $\widetilde{g \star u} = g\widetilde{u}$ et $\widetilde{gu} = g \star \widetilde{u}$ quels que soient $g \in G$ et $u \in \ell^\infty(G)$, on en déduit que m est une moyenne invariante à gauche sur $\ell^\infty(G)$ si et seulement si $\widetilde{m}$ est une moyenne invariante à droite sur $\ell^\infty(G)$. □

Corollaire 1.8. — *Il existe une moyenne invariante à gauche (resp. à droite) sur $\ell^\infty(G)$ si et seulement s'il existe une moyenne bi-invariante sur $\ell^\infty(G)$.*

Démonstration. — Soit m_l une moyenne invariante à gauche sur $\ell^\infty(G)$. Par la proposition 1.7, il existe une moyenne invariante à droite m_r sur $\ell^\infty(G)$. Pour tout $u \in \ell^\infty(G)$ soit $F_u\colon G \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$F_u(g) = m_l(g \star u)$$

quel que soit $g \in G$. Remarquons que pour tout $u \in \ell^\infty(G)$, on a

$$\sup_{g\in G} |F_u(g)| \leq \sup_{g\in G} |u_g|,$$

ce qui montre que $F_u \in \ell^\infty(G)$. Définissons $m\colon \ell^\infty(G) \to \mathbb{R}$ par

$$m(u) = m_r(F_u)$$

pour tout $u \in \ell^\infty(G)$. Il est clair que m est une forme linéaire positive normalisée sur $\ell^\infty(G)$. Or, on a $F_{gu} = F_u$ et $F_{g\star u} = g \star F_u$ quels que soient $g \in G$ et $u \in \ell^\infty(G)$. On en déduit que m est une moyenne invariante à gauche et à droite sur $\ell^\infty(G)$. □

Définition 1.9. — On dit qu'un groupe G est *moyennable* s'il existe une moyenne invariante à gauche sur $\ell^\infty(G)$.

Remarque 1.10. — Il existe de nombreuses définitions équivalentes de la moyennabilité. Nous en donnerons quelques-unes dans ce chapitre. Certains des résultats sur les groupes moyennables que l'on rappelle dans cette section pourraient se démontrer plus facilement en utilisant l'une ou l'autre de ces définitions.

Exemple 1.11. — Les groupes finis sont moyennables. En effet, si le groupe G est fini, la forme linéaire $m\colon \ell^\infty(G) \to \mathbb{R}$ définie par

$$m(u) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} u_g \quad \text{quel que soit } u \in \ell^\infty(G)$$

est une moyenne invariante sur $\ell^\infty(G)$ (et c'est la seule).

Théorème 1.12. — *Tout sous-groupe d'un groupe moyennable est moyennable.*

Démonstration. — Soient G un groupe moyennable et H un sous-groupe de G. Comme G est moyennable, il existe une moyenne invariante à gauche m sur $\ell^\infty(G)$. Soit $C \subset G$ un système complet de représentants des classes à droite de G suivant H. Pour tout $v \in \ell^\infty(H)$ considérons la fonction $F_v \in \ell^\infty(G)$ définie par

$$F_v(hc) = v_h$$

quels que soient $h \in H$ et $c \in C$. Posons $\overline{m}(v) = m(F_v)$ pour tout $v \in \ell^\infty(H)$. Alors $\overline{m}$ est une forme linéaire positive normalisée sur $\ell^\infty(H)$. Comme $F_{hv} = hF_v$ quels que soient $h \in H$ et $v \in \ell^\infty(H)$, la moyenne $\overline{m}$ est invariante à gauche. Donc H est moyennable. □

Théorème 1.13. — *Tout quotient d'un groupe moyennable est moyennable.*

Démonstration. — Soient G un groupe moyennable et π un homomorphisme surjectif de G sur un groupe H. Comme G est moyennable, il existe une moyenne invariante à gauche m sur $\ell^\infty(G)$. Soit $v \in \ell^\infty(H)$. Alors $v\circ\pi \in \ell^\infty(G)$. Définissons $\overline{m}\colon \ell^\infty(H) \to \mathbb{R}$ par

$$\overline{m}(v) = m(v \circ \pi)$$

pour tout $v \in \ell^\infty(H)$. Il est clair que $\overline{m}$ est une forme linéaire positive sur $\ell^\infty(H)$ et que $\overline{m}(\chi_H) = m(\chi_G) = 1$. Donc $\overline{m}$ est une moyenne sur $\ell^\infty(H)$. Soit $h \in H$. Comme π est surjective, il existe $g \in G$ tel que $h = \pi(g)$. On a donc $(hu) \circ \pi = g(u \circ \pi)$ et l'invariance à gauche de $\overline{m}$ sur $\ell^\infty(H)$ résulte alors de l'invariance à gauche de m sur $\ell^\infty(G)$. Donc H est moyennable. □

Théorème 1.14. — *Toute extension d'un groupe moyennable par un groupe moyennable est moyennable.*

Démonstration. — Soit H un sous-groupe distingué d'un groupe G. Supposons H et G/H moyennables. On va montrer qu'alors G est moyennable. La moyennabilité de H et G/H implique qu'il existe m_l (resp. m_r) une moyenne invariante à gauche (resp. à droite) sur $\ell^\infty(H)$ (resp. sur $\ell^\infty(G/H)$). Soient $g \in G$, $h \in H$ et $u \in \ell^\infty(G)$. Les restrictions des fonctions gu et $(hg)u$ à H sont bornées et l'on a

$$m_l(gu) = m_l(h(gu)) = m_l((hg)u).$$

On en déduit que la fonction $F_u \in \ell^\infty(G)$ définie par $F_u(g) = m_l(gu)$ est constante sur les classes de G suivant H et définit donc un élément de $\ell^\infty(G/H)$ que l'on note $\overline{F_u}$. Posons

$$m(u) = m_r(\overline{F_u}),$$

pour tout $u \in \ell^\infty(G)$ et remarquons que m est une forme linéaire positive normalisée. Comme on a $\overline{F_{gu}} = \overline{g} \star \overline{F_u}$ quels que soient $g \in G$ et $u \in \ell^\infty(G)$, où $\overline{g}$ est la classe de g dans G/H, on en déduit que m est une moyenne invariante à gauche sur $\ell^\infty(G)$. Le groupe G est donc moyennable. □

Théorème 1.15. — *Soient G un groupe et $(H_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ une famille de sous-groupes moyennables de G telle que*

(1) $G = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} H_\gamma$;

(2) *quels que soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, il existe $\gamma_3 \in \Gamma$ tel que $H_{\gamma_1} \cup H_{\gamma_2} \subset H_{\gamma_3}$.*

Alors G est moyennable.

Démonstration. — Soit $\gamma \in \Gamma$. Comme H_γ est moyennable, il existe une moyenne m_γ invariante à gauche sur $\ell^\infty(H_\gamma)$. Alors l'application $\overline{m}_\gamma \colon \ell^\infty(G) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\overline{m}_\gamma(u) = m_\gamma(u_{|H_\gamma})$$

quel que soit $u \in \ell^\infty(G)$, où $u_{|H_\gamma} \in \ell^\infty(H_\gamma)$ désigne la restriction de u à H_γ, est une moyenne sur $\ell^\infty(G)$ vérifiant

$$\overline{m}_\gamma(hu) = \overline{m}_\gamma(u) \tag{1.5}$$

quels que soient $h \in H_\gamma$ et $u \in \ell^\infty(G)$. Posons

$$\Sigma_\gamma = \{m \in \Sigma(G) \colon m(hu) = m(u) \quad \forall h \in H_\gamma,\ \forall u \in \ell^\infty(G)\}.$$

D'après (1.5) on a $\overline{m}_\gamma \in \Sigma_\gamma$ ce qui montre $\Sigma_\gamma \neq \varnothing$. Munissons $\ell^\infty(G)^*$ de la topologie faible* et montrons que Σ_γ est un fermé de $\Sigma(G) \subset \ell^\infty(G)^*$. Rappelons que pour tout $u \in \ell^\infty(G)$, on définit la forme linéaire continue Ψ_u sur $\ell^\infty(G)^*$ par $\Psi_u(\varphi) = \varphi(u)$ pour tout $\varphi \in \ell^\infty(G)^*$. Soient $u \in \ell^\infty(G)$ et $h \in H_\gamma$. Alors on a

$$\Sigma_\gamma = \Sigma(G) \cap \Big(\bigcap_{h\in H_\gamma, u\in\ell^\infty(G)} \Psi^{-1}_{(u-hu)}(0) \Big),$$

ce qui montre que Σ_γ est un fermé de $\Sigma(G)$. Observons que la propriété (2) vérifiée par la famille $(H_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ implique que toute intersection finie d'ensembles de la famille $(\Sigma_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est non vide. Par compacité de $\Sigma(G)$ (proposition 1.3), on en déduit que $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \Sigma_\gamma \neq \varnothing$. De la propriété (1) résulte alors que tout élément de $\bigcap_{\gamma\in\Gamma} \Sigma_\gamma$ est une moyenne invariante à gauche sur $\ell^\infty(G)$. Donc G est moyennable.

□

Corollaire 1.16. — *Un groupe G est moyennable si et seulement si tous ses sous-groupes de type fini sont moyennables.*

DÉMONSTRATION. — Cela résulte des théorèmes 1.12 et 1.15. □

1.3. Critère de Dixmier

Le résultat suivant est dû à Jacques Dixmier [**Di1**].

***Théorème 1.17* (Critère de Dixmier)**. — *Soient G un groupe et V le sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(G)$ engendré par l'ensemble $\{u - gu\colon u \in \ell^\infty(G), g \in G\}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *G est moyennable ;*

(b) $\sup_{g\in G} v_g \geq 0$ *quel que soit $v \in V$.*

DÉMONSTRATION. — Montrons que (a) implique (b). Supposons G moyennable. Soient m une moyenne invariante à gauche sur $\ell^\infty(G)$ et $v \in V$. Alors on a $0 = m(v) \leq \sup_{g\in G} v_g$, ce qui montre (b).

Réciproquement, supposons (b). Posons $C = \{u \in \ell^\infty(G)\colon \sup_{g\in G} u_g < 0\}$. Alors C est un ouvert convexe non vide dans l'espace vectoriel normé $\ell^\infty(G)$ et $C \cap V = \varnothing$. On en déduit en appliquant le théorème de Mazur (voir par exemple [**Ko2**, th.2.7]) qu'il existe une forme linéaire continue $m \in \ell^\infty(G)^*$ telle que $m(v) = 0$ pour tout $v \in V$ et $m(u) < 0$ pour tout $u \in C$. On peut donc supposer que m est normalisée. Soit $u \in \ell^\infty(G)$ vérifiant $u > 0$. Alors $-u \in C$ et donc $m(u) > 0$. La forme linéaire m est donc positive. Comme m s'annule sur V, c'est une moyenne invariante à gauche sur $\ell^\infty(G)$. Cela montre que (b) implique (a). □

Corollaire 1.18. — *Tous les groupes commutatifs sont moyennables.*

DÉMONSTRATION. — Nous allons utiliser le critère de Dixmier. Soit G un groupe commutatif. Notons V le sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(G)$ engendré par l'ensemble $\{u - gu\colon u \in \ell^\infty(G), g \in G\}$. Soit $v \in V$. Alors il existe un entier $n \geq 1$, une suite $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ de fonctions de $\ell^\infty(G)$ et une suite $g_1, \dots, g_n$ d'éléments de G tels que

$$v_g = \sum_{k=1}^{n} (u_g^{(k)} - u_{g_k g}^{(k)})$$

quel que soit $g \in G$. Nous allons montrer que $\sup_{g\in G} v_g \geq 0$, ce qui prouvera le corollaire d'après le théorème 1.17.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et posons $\Lambda_p = \{1, 2, \dots, p\}^n$. On a $|\Lambda_p| = p^n$, où $|\Lambda_p|$ désigne le cardinal de Λ_p. Pour tout $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \Lambda_p$, on définit l'élément $\tau(\lambda) \in G$ par

$$\tau(\lambda) = g_1^{\lambda_1} \dots g_n^{\lambda_n}.$$

Soit $1 \leq k \leq n$ et posons

$$S_k = \sum_{\lambda \in \Lambda_p} (u_{\tau(\lambda)}^{(k)} - u_{g_k \tau(\lambda)}^{(k)}).$$

La commutativité de G implique que l'on a

$$S_k = \sum_{\{\lambda \in \Lambda_p\colon \lambda_k = 1\}} u_{\tau(\lambda)}^{(k)} - \sum_{\{\lambda \in \Lambda_p\colon \lambda_k = p\}} u_{g_k \tau(\lambda)}^{(k)}.$$

On en déduit

$$S_k \geq -2p^{n-1} ||u^{(k)}||_\infty. \tag{1.6}$$

Observons que l'on a

$$|\Lambda_p| \sup_{g\in G} v_g \geq \sum_{\lambda \in \Lambda_p} v_{\tau(\lambda)} = \sum_{\lambda \in \Lambda_p} \sum_{k=1}^{n} (u_{\tau(\lambda)}^{(k)} - u_{g_k \tau(\lambda)}^{(k)}). \tag{1.7}$$

Posons $M = \max_{1\leq k\leq n} ||u^{(k)}||_\infty$. En échangeant l'ordre de sommation dans la double somme de l'inégalité (1.7) et en utilisant l'inégalité (1.6), on obtient

$$|\Lambda_p| \sup_{g\in G} v_g \geq \sum_{k=1}^{n} S_k \geq -2Mnp^{n-1}.$$

Il en résulte

$$\sup_{g\in G} v_g \geq \frac{-2Mn}{p}.$$

En faisant tendre p vers l'infini, on en déduit $\sup_{g\in G} v_g \geq 0$. □

Corollaire 1.19. — *Tout groupe résoluble est moyennable.*

Démonstration. — Soit G un groupe résoluble. Alors il existe une suite de sous-groupes de G

$$\{e\} = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_n = G$$

telle que $G_i \lhd G_{i+1}$ et G_{i+1}/G_i commutatif pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$. En utilisant le corollaire 1.18 et le théorème 1.14, une récurrence immédiate montre alors que G_i est moyennable pour tout $i = 0, \ldots, n$. $\square$

1.4. Mesures finiment additives

Pour tout ensemble X, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X.

Définition 1.20. — Soit X un ensemble muni d'une action d'un groupe G. On appelle *mesure finiment additive* sur X une fonction $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,1]$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\mu(X) = 1$,

(2) μ est *finiment additive*, c'est-à-dire
$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ quelles que soient $A, B \in \mathcal{P}(X)$ telles que $A \cap B = \varnothing$.

Soit X un ensemble muni d'une action d'un groupe G. Une mesure finiment additive μ sur X est dite *invariante* si $\mu(gA) = \mu(A)$ quels que soient $g \in G$ et $A \in \mathcal{P}(X)$.

On notera $M(X)$ (resp. $M_{inv}(X)$) l'ensemble des mesures finiment additives (resp. finiment additives invariantes) sur X.

Lorsque $X = G$, l'action de G que l'on considère est la multiplication à gauche $(g, g') \mapsto gg'$.

Lemme 1.21. — *Notons $B_0(X)$ le sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(X)$ engendré par les fonctions caractéristiques de parties de X. Alors $B_0(X)$ est dense dans l'espace vectoriel normé $\ell^\infty(X)$.*

Démonstration. — Soit $u \in \ell^\infty(X)$ et posons $M = ||u||_\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u^{(n)} \in B_0(X)$ par

$$u^{(n)} = \sum_{-n \leq k \leq n} \frac{kM}{n} \chi_{E_k},$$

où $E_k = \{x \in X\colon u_x \in [\frac{kM}{n}, \frac{(k+1)M}{n}[\}$ pour $k = -n, \ldots, n$. Alors il est clair que $||u - u^{(n)}||_\infty \leq \frac{M}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La suite $(u^{(n)})$ converge donc vers u. $\square$

Lemme 1.22. — *Soit X un ensemble muni d'une action d'un groupe G. Alors l'application $f\colon \Sigma_{inv}(X) \to M_{inv}(X)$ définie par*

$$f(m)(A) = m(\chi_A)$$

quels que soient $m \in \Sigma_{inv}(X)$ et $A \in \mathcal{P}(X)$ est une bijection.

Démonstration. — Notons tout d'abord que si m est une moyenne invariante sur $\ell^\infty(X)$, alors $f(m)$ définit bien une mesure finiment additive invariante sur X.

Montrons que f est bijective. Soit $\mu \in M_{inv}(X)$. Munissons $B_0(X)$ de la norme induite par celle de $\ell^\infty(X)$. On définit une forme linéaire $m\colon B_0(X) \to \mathbb{R}$ en posant

$$m\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}\Big) = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i)$$

pour toute suite finie $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ de parties disjointes de X et pour tous réels a_i, $i = 1, \ldots, n$. Remarquons que m est bien définie, continue, positive, invariante et vérifie $m(\chi_X) = \mu(X) = 1$. Comme $B_0(X)$ est dense dans $\ell^\infty(X)$ (lemme 1.21), on peut prolonger m en une forme linéaire continue $\overline{m}$ à tout l'espace $\ell^\infty(X)$ telle que $||\overline{m}|| = ||m|| = 1$ (voir par exemple [**Di2**, th. 8.7.7]). Il reste à vérifier que $\overline{m}$ est une moyenne invariante sur $\ell^\infty(X)$. Posons

$$A = \{u \in \ell^\infty(X)\colon \inf_{x\in X} u_x \leq \overline{m}(u) \leq \sup_{x\in X} u_x\} \cap \{u \in \ell^\infty(X)\colon \overline{m}(u - gu) = 0\ \forall g \in G\}.$$

Comme les applications $u \mapsto \inf_{x\in X} u_x$, $u \mapsto \sup_{x\in X} u_x$, $u \mapsto \overline{m}(u)$ et $u \mapsto \overline{m}(u - gu)$ sont continues sur $\ell^\infty(X)$, la partie A est fermée dans $\ell^\infty(X)$. Observons que les propriétés de m impliquent $B_0(X) \subset A$. Par densité de $B_0(X)$ dans $\ell^\infty(X)$, on a donc $A = \ell^\infty(X)$. On en déduit que $\overline{m}$ est une moyenne invariante sur $\ell^\infty(X)$ vérifiant $\overline{m}(\chi_A) = \mu(A)$ pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$. Donc f est surjective. L'injectivité de f résulte du fait que si deux moyennes coïncident sur les fonctions caractéristiques χ_A, $A \subset G$, alors elles coïncident sur le sous-espace dense $B_0(X)$ de $\ell^\infty(X)$ et donc partout par continuité. Il en résulte que f est bijective. □

Théorème 1.23. — *Soit G un groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *G est moyennable ;*

(b) *il existe une mesure finiment additive invariante sur G ;*

(c) *pour toute action de G sur un ensemble X, il existe une mesure finiment additive invariante sur X.*

Démonstration. — D'après le lemme 1.22 appliqué à $X = G$ on a l'équivalence entre (a) et (b). La propriété (c) implique (b) en faisant agir G sur lui-même par translation à gauche. Montrons que (b) implique (c). Soit μ une mesure finiment additive invariante sur G et fixons un point $x_0 \in X$. Définissons $\nu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ par

$$\nu(A) = \mu(\{g \in G\colon gx_0 \in A\})$$

pour tout $A \in \mathcal{P}(X)$. Alors ν est une mesure finiment additive sur X. L'invariance de ν résulte de celle de μ. □

Corollaire 1.24. — *Le groupe libre engendré par deux générateurs n'est pas moyennable.*

DÉMONSTRATION. — Notons F_2 le groupe libre engendré par les deux générateurs a et b. Raisonnons par l'absurde en supposant que F_2 est moyennable. Alors il existe une mesure finiment additive invariante sur F_2 d'après le theorème 1.23. Notons A

l'ensemble des éléments de F_2 qui ont une écriture réduite commençant par une puissance non nulle de a. Puisque $A \cup aA = F_2$ et que les parties A, bA et b^2A sont disjointes, les propriétés de μ impliquent

$$1 = \mu(F_2) \leq \mu(A) + \mu(aA) = 2\mu(A)$$

et

$$3\mu(A) = \mu(A) + \mu(bA) + \mu(b^2A) \leq \mu(F_2) = 1.$$

On obtient alors une contradiction. Donc F_2 n'est pas moyennable. □

Corollaire 1.25. — *Tout groupe ayant un sous-groupe isomorphe à un groupe libre non commutatif est non moyennable.*

DÉMONSTRATION. — Rappelons qu'un groupe libre non commutatif contient un sous-groupe isomorphe à F_2. Le résultat résulte alors du corollaire 1.24 et du théorème 1.12. □

La classe des *groupes élémentaires*, notée EG, est la plus petite classe de groupes contenant les groupes finis, les groupes commutatifs et vérifiant les propriétés suivantes :

1. si H est un sous-groupe de G et si $G \in EG$, alors $H \in EG$;
2. si H est distingué dans G et $G \in EG$, alors $G/H \in EG$;
3. si H est distingué dans G et si H et G/H sont dans EG, alors $G \in EG$;
4. si $G = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} H_\gamma$ où $(H_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ est une famille de sous-groupes de G dans EG vérifiant quels que soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, il existe $\gamma_3 \in \Gamma$ tel que $H_{\gamma_1} \cup H_{\gamma_2} \subset H_{\gamma_3}$, alors $G \in EG$.

(D'après [**Chou**] les conditions 3 et 4 suffisent.)

On note AG la classe des groupes moyennables et NF celle des groupes ne contenant pas de groupe libre non commutatif. D'après les résultats de cette section, on a

$$EG \subset AG \subset NF.$$

Qu'en est-il des égalités ? La question de savoir si l'on a $AG = NF$ est formulée dans [**Day**] et est appelée parfois le *problème de von Neumann*. En 1980 Ol'shanskii [**Ols**] répondit négativement à cette question en montrant la non-moyennabilité de certains groupes qu'il avait construits. Ce sont des groupes infinis non cycliques dont tous les sous-groupes propres sont cycliques. Un tel groupe appartient donc bien a NF. En 1982, Adian [**Adi**] montra que les groupes de Burnside $B(m, n)$ de rang $m \geq 2$ et d'exposant impair $n \geq 665$ ne sont pas moyennables. Rappelons que $B(m, n)$ est le groupe de présentation

$$B(m, n) = \langle g_1, \ldots, g_m \colon w^n = 1 \rangle,$$

où w décrit les mots en $g_1, \ldots, g_m$ et leur inverse. Dans leurs constructions, Ol'shanskii et Adian ont utilisé des critères de moyennabilité se trouvant dans [**Gr1**]. Aucun de leurs exemples n'est de présentation finie. En 2003 dans [**OlS**], Ol'shanskii et Sapir ont construit des groupes de présentation finie non moyennables et ne contenant pas F_2. Le problème de von Neumann a donc une réponse négative, même dans la classe des groupes de présentation finie.

L'autre question, à savoir si $EG = AG$, a été résolue négativement en 1984 par Grigorchuck [**Gr2**] qui a construit un groupe infini de type fini, à croissance intermédiaire dont tous les éléments sont d'ordre fini. On montre qu'un tel groupe est dans $AG\backslash EG$. Un groupe de présentation finie qui appartient à $AG \setminus EG$ est donné dans [**Gr3**].

Rappelons que l'on appelle *groupe linéaire* tout groupe isomorphe à un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{K})$, où $\mathbb{K}$ est un corps de caractéristique nulle et $n \geq 1$. L'alternative de Tits affirme qu'un groupe linéaire possède soit un sous-groupe isomorphe à F_2, soit un sous-groupe résoluble d'indice fini. On en déduit qu'un groupe linéaire est moyennable si et seulement si il ne contient pas de sous-groupe isomorphe à F_2.

1.5. Critère de Day

Convergence de filets. — Pour plus de détails concernant la notion de filet, on pourra consulter par exemple [**DuS**], [**Ke2**], [**Ko1**].

Un ensemble *préordonné filtrant à droite* est un ensemble I muni d'une relation de *préordre* (c'est-à-dire une relation transitive et réflexive) tel que toute partie finie de I admet un majorant.

On appelle *filet* dans un ensemble E une fonction $u \colon I \to E$, où I est un ensemble préordonné filtrant à droite. On écrira aussi $u = (u_i)_{i \in I}$.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ un filet dans un ensemble E. Un *sous-filet* de $(u_i)_{i\in I}$ est un filet $(v_j)_{j\in J}$ tel qu'il existe une application $\varphi \colon J \to I$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $v_j = u_{\varphi(j)}$ quel que soit $j \in J$;
2. pour tout $i \in I$, il existe $j \in J$ tel que $\varphi(k) \geq i$ pour tout $k \geq j$.

Supposons que E soit un espace topologique. On dit qu'un filet $(u_i)_{i\in I}$ de E *converge* vers $u \in E$ ou que u est une *limite* de $(u_i)_{i\in I}$, si pour tout voisinage V de u, il existe $i_0 \in I$ tel que $u_i \in V$ pour tout $i \geq i_0$. Si la limite est unique, on écrit $\lim_{i\in I} u_i = u$. Un point $u \in E$ est appelé *point d'accumulation* du filet $(u_i)_{i\in I}$ si pour tout voisinage V de u et pour tout $i \in I$, il existe $j \geq i$ tel que $u_j \in V$. Notons que u est un point d'accumulation du filet $(u_i)_{i\in I}$ si et seulement si il existe un sous-filet de $(u_i)_{i\in I}$ qui converge vers u. Rappelons que tout filet d'un espace topologique compact admet un point d'accumulation.

Soit E un espace vectoriel topologique séparé localement convexe. La topologie faible sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les formes linéaires $\varphi \in E^*$. On dira qu'un filet d'éléments de E converge *fortement* (resp. *faiblement*) vers un point $u \in E$ s'il converge vers u relativement à la topologie originale (resp. relativement à la topologie faible) de E.

Lemme 1.26. — *Soit G un groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *il existe un filet $(v^{(i)})_{i\in I}$ d'éléments de $P(G)$ tel que $(gv^{(i)} - v^{(i)})_{i\in I}$ converge fortement (relativement à la norme $||.||_1$) vers 0 dans $\ell^1(G)$ pour tout $g \in G$.*

(b) *il existe un filet $(v^{(i)})_{i\in I}$ d'éléments de $P(G)$ tel que $(gv^{(i)} - v^{(i)})_{i\in I}$ converge faiblement vers 0 dans $\ell^1(G)$ pour tout $g \in G$.*

Démonstration. — L'implication (a)⇒(b) résulte du fait que les ouverts de la topologie faible sont des ouverts de la topologie forte.

Montrons (b)⇒(a). Pour tout $g \in G$ posons $V_g = \ell^1(G)$ que l'on munit de sa topologie d'espace vectoriel normé. Définissons l'espace vectoriel V par

$$V = \prod_{g\in G} V_g.$$

Muni de la topologie produit, V est un espace vectoriel topologique séparé localement convexe. Définissons l'application linéaire $T \colon \ell^1(G) \to V$ par

$$T(v)_g = gv - v$$

quels que soient $v \in \ell^1(G)$ et $g \in G$. Rappelons que la topologie faible sur V coïncide avec le produit des topologies faibles des V_g, $g \in G$ ([**Ke1**]). Comme le filet $(gv^{(i)} - v^{(i)})_{i\in I}$ converge faiblement vers 0 dans $\ell^1(G)$ pour tout $g \in G$, il en résulte que le filet $(T(v^{(i)}))_{i\in I}$ converge faiblement vers 0 dans V. L'élément 0 appartient donc à la fermeture faible du convexe $C = T(P(G)) \subset V$. Comme la fermeture faible du convexe C coïncide avec la fermeture de C relativement à la topologie originale de V ([**DuS**, Th. V.3.13]), il existe un filet $(w^{(j)})_{j\in J}$ dans $P(G)$ telle que $(T(w^{(j)}))_{j\in J}$ converge fortement vers 0 dans V. On en déduit que $(||gw^{(j)} - w^{(j)}||_1)_{j\in J}$ converge vers 0 pour tout $g \in G$. Cela montre que (b) implique (a). □

Critère de Day. —

Théorème 1.27. — *Soit G un groupe. Alors G est moyennable si et seulement si il existe un filet $(v^{(i)})_{i\in I}$ d'éléments de $P(G)$ tel que $(gv^{(i)} - v^{(i)})_{i\in I}$ converge faiblement vers 0 dans $\ell^1(G)$ pour tout $g \in G$.*

Démonstration. — Supposons qu'il existe un filet $(v^{(i)})_{i\in I}$ d'éléments de $P(G)$ tel que $(gv^{(i)} - v^{(i)})_{i\in I}$ converge faiblement vers 0 dans $\ell^1(G)$ pour tout $g \in G$. Puisque $\Sigma_1(G) = j(P(G)) \subset \Sigma(G)$ et que $\Sigma(G)$ est compact pour la topologie faible* (proposition 1.3), on en déduit qu'il existe un sous-filet $(w^{(k)})_{k\in K}$ de $(v^{(i)})_{i\in I}$ tel que le filet $(j(w^{(k)}))_{k\in K}$ converge vers une moyenne $m \in \Sigma(G)$ relativement à la topologie faible*. Montrons que m est invariante à gauche sur $\ell^\infty(G)$. Soient $u \in \ell^\infty(G)$, $g \in G$ et $k \in K$. On a :

$$j(w^{(k)})(gu) - j(w^{(k)})(u) = \sum_{s\in G} w_s^{(k)} u_{g^{-1}s} - \sum_{s\in G} w_s^{(k)} u_s.$$

Par un changement de variable, on obtient

$$j(w^{(k)})(gu) - j(w^{(k)})(u) = \sum_{s \in G} (g^{-1}w_s^{(k)} - w_s^{(k)})u_s. \tag{1.8}$$

La convergence de $(j(w^{(k)}))_{k \in K}$ vers m relativement à la topologie faible* implique que le membre de gauche de l'égalité ci-dessus converge vers $m(gu) - m(u)$. Puisque le filet $(g^{-1}w^{(k)} - w^{(k)})_{k \in K}$ converge faiblement vers 0 dans $\ell^1(G)$, le membre de droite de l'égalité (1.8) converge vers 0. On a donc

$$m(gu) - m(u) = 0,$$

ce qui montre que m est invariante à gauche. Le groupe G est donc moyennable.

Supposons que G est moyennable. Soit m une moyenne invariante à gauche sur $\ell^\infty(G)$. Comme $\Sigma_1(G)$ est dense dans $\Sigma(G)$ relativement à la topologie faible* (proposition 1.4), il existe un filet $(v^{(i)})_{i \in I}$ d'éléments de $P(G)$ tel que $(j(v^{(i)}))_{i \in I}$ converge vers m relativement à la topologie faible*. Soit $u \in \ell^\infty(G)$, $g \in G$ et $i \in I$. On a

$$j(gv^{(i)})(u) = \sum_{s \in G} v_{g^{-1}s}^{(i)} u_s = \sum_{s \in G} v_s^{(i)} (g^{-1}u)_s = j(v^{(i)})(g^{-1}u).$$

Donc

$$j(gv^{(i)} - v^{(i)})(u) = (j(gv^{(i)}) - j(v^{(i)}))(u) = j(v^{(i)})(g^{-1}u) - j(v^{(i)})(u).$$

Par passage à la limite dans l'égalité précédente, on obtient

$$\lim_i j(gv^{(i)} - v^{(i)})(u) = m(g^{-1}u) - m(u) = 0$$

quels que soient $u \in \ell^\infty(G)$ et $g \in G$. Puisque $\ell^1(G)^* = \ell^\infty(G)$, il en résulte que le filet $(gv^{(i)} - v^{(i)})_{i \in I}$ converge faiblement vers 0 dans $\ell^1(G)$. □

La première partie de la preuve précédente donne le résultat suivant :

Corollaire 1.28. — *Soient G un groupe et $(v^{(i)})_{i \in I}$ un filet d'éléments de $P(G)$ tel que $(gv^{(i)} - v^{(i)})_{i \in I}$ converge faiblement vers 0 dans $\ell^1(G)$ pour tout $g \in G$. Alors tout point d'accumulation (relativement à la topologie faible*) du filet $(j(v^{(i)}))_{i \in I}$ est une moyenne invariante à gauche sur $\ell^\infty(G)$.* □

1.6. Propriété du point fixe

Soient V, W des espaces vectoriels et $C \subset V$ un convexe. On dit qu'une application $A\colon C \to W$ est *affine* si elle vérifie

$$A(\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2) = \lambda A(c_1) + (1-\lambda)A(c_2)$$

quels que soient $c_1, c_2 \in C$ et $\lambda \in [0,1]$.

***Définition 1.29* (action affine).** — Soit G un groupe agissant (à gauche) sur un convexe C d'un espace vectoriel V. On dit que G agit *affinement* sur C si l'on a

$$g(\lambda c_1 + (1-\lambda)c_2) = \lambda g c_1 + (1-\lambda) g c_2$$

quels que soient $c_1, c_2 \in C$, $\lambda \in [0,1]$ et $g \in G$.

Soit G un groupe agissant sur un convexe C d'un espace vectoriel V. Le groupe G agit affinement sur C si et seulement si pour tout $g \in G$, l'application $A_g \colon C \to V$ définie par

$$A_g(c) = gc$$

quel que soit $c \in C$ est affine.

Définition 1.30. — On dit qu'un groupe G a la *propriété du point fixe* si toute action affine continue de G sur un convexe compact C d'un espace vectoriel topologique séparé localement convexe V admet un point fixe, c'est-à-dire un point $c \in C$ tel que $gc = c$ pour tout $g \in G$.

Théorème 1.31. — *Un groupe G a la propriété du point fixe si et seulement si G est moyennable.*

DÉMONSTRATION. — Supposons que G vérifie la propriété du point fixe. Munissons $\ell^\infty(G)^*$ de la topologie faible* et rappelons (proposition 1.3) qu'alors $\Sigma(G)$ est un convexe compact de l'espace vectoriel topologique séparé localement convexe $\ell^\infty(G)^*$. On définit une action de G sur $\Sigma(G)$ en posant

$$gm(u) = m(g^{-1}u)$$

quels que soient $m \in \Sigma(G)$, $u \in \ell^\infty(G)$ et $g \in G$. Observons que c'est une action affine continue. Puisque G vérifie la propriété du point fixe, il existe donc $m_0 \in \Sigma(G)$ tel que $gm_0 = m_0$ quel que soit $g \in G$, c'est-à-dire m_0 est une moyenne invariante à gauche sur $\ell^\infty(G)$. Donc G est moyennable.

Montrons la réciproque. Soit G un groupe moyennable agissant affinement et continûment sur un convexe compact C d'un espace vectoriel topologique localement convexe V. Fixons $c_0 \in C$. Soit $A(C)$ l'espace vectoriel des applications affines continues de C dans $\mathbb{R}$ et observons que $\{\varphi_{|C} \colon \varphi \in V^*\} \subset A(C)$. Pour tout $\varphi \in A(C)$ définissons $h_\varphi \colon G \to \mathbb{R}$, $g \mapsto \varphi(gc_0)$. Puisque C est compact et que φ est continue, l'espace $\varphi(C)$ est compact. Donc $h_\varphi \in \ell^\infty(G)$. Pour tout $m \in \Sigma(X)$, définissons une forme linéaire T_m sur $A(C)$ par

$$T_m(\varphi) = m(h_\varphi)$$

quel que soit $\varphi \in A(C)$. Soit $m \in \Sigma(G)$. Nous allons montrer qu'il existe $c_m \in C$ tel que

$$T_m(\varphi) = \varphi(c_m) \tag{1.9}$$

quel que soit $\varphi \in A(C)$.

Pour tout $g \in G$ notons $\delta_g \colon \ell^\infty(G) \to \mathbb{R}$ l'élément de $\Sigma_0(G)$ défini par $\delta_g(u) = u_g$ pour tout $u \in \ell^\infty(G)$. Soit $\mu \in \Sigma_0(G)$. Alors il existe une suite $g_1, g_2, \ldots, g_n$ d'éléments de G et une suite $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de réels strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ et $\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i \delta_{g_i}$. Par définition de T_μ, on a

$$T_\mu(\varphi) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \varphi(g_i c_0) = \varphi(\sum_{i=1}^n \lambda_i g_i c_0)$$

quel que soit $\varphi \in A(C)$, ce qui montre que (1.9) est vérifiée lorsque $m \in \Sigma_0(G)$ avec $c_\mu = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i c_0 \in C$. Rappelons (proposition 1.4) que $\Sigma_0(G)$ est dense dans $\Sigma(G)$ pour la topologie faible*. On peut donc trouver un filet $(\mu_i)_{i\in I}$ d'éléments de $\Sigma_0(G)$ convergeant vers m. Pour tout $i \in I$, posons $c_i = c_{\mu_i} \in C$. Soit τ_C la topologie la moins fine sur C rendant continus tous les éléments de $A(C)$. Puisque tout ouvert de τ_C est un ouvert de C (muni de la topologie induite par celle de V), on en déduit que C est compact pour la topologie τ_C. Quitte à prendre un sous-filet de $(c_i)_{i\in I}$, on peut supposer que le filet $(c_i)_{i\in I}$ converge vers un élément $c_m \in C$ relativement à la topologie τ_C. Or, on a

$$\mu_i(h_\varphi) = T_{\mu_i}(\varphi) = \varphi(c_i)$$

quels que soient $i \in I$ et $\varphi \in A(C)$. En passant à la limite suivant i, on obtient

$$T_m(\varphi) = \varphi(c_m)$$

quel que soit $\varphi \in A(C)$. Cela démontre (1.9).

Supposons maintenant que m est une moyenne invariante à gauche sur $\ell^\infty(G)$ et montrons que c_m est un point fixe pour l'action de G. Remarquons que si $\varphi \in V^*$ et $g \in G$ alors $\varphi \circ A_g \in A(C)$, où $A_g \colon C \to C$ est défini par $A_g(c) = gc$ pour tout $c \in C$. Soient $\varphi \in V^*$ et $g \in G$. En utilisant l'égalité (1.9), on a

$$\varphi(gc_m) = \varphi \circ A_g(c_m) = T_m(\varphi \circ A_g) = m(s \mapsto \varphi(gsc_0)).$$

On en déduit en utilisant l'invariance à gauche de m et (1.9)

$$\varphi(gc_m) = m(s \mapsto \varphi(sc_0)) = T_m(\varphi) = \varphi(c_m).$$

Comme l'inégalité précédente est vérifiée pour tout $\varphi \in V^*$ et que V est un espace vectoriel topologique séparé localement convexe, on en déduit que $gc_m = c_m$ ([**DuS**, Cor. V.2.13]). Cela démontre que c_m est un point fixe pour l'action de G. □

Mesures boréliennes. — Soit X un espace topologique. La *tribu borélienne* de X, que l'on notera $\mathcal{B}(X)$, est la plus petite tribu contenant tous les ouverts de X. Une mesure définie sur $\mathcal{B}(X)$ et prenant des valeurs finies sur les compacts est dite *borélienne*. Une mesure borélienne μ est dite *régulière* si elle est *intérieurement régulière* et *extérieurement régulière*, c'est-à-dire si pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(X)$, on a

$$\mu(B) = \inf\{\mu(V) \colon B \subset V,\ V \text{ ouvert}\}$$

et
$$\mu(B) = \sup\{\mu(K)\colon K \subset B,\ K \text{ compact}\}.$$

Supposons X compact et séparé. On note $\mathcal{M}(X)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes régulières sur X. Soit $x \in X$. La *masse de Dirac* en x est la mesure borélienne δ_x définie pour tout $B \in \mathcal{B}(X)$ par $\delta_x(B) = 1$ si $x \in B$ et $\delta_x(B) = 0$ sinon. Notons que $\delta_x \in \mathcal{M}(X)$.

Soit $C(X)$ l'espace vectoriel réel des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$ que l'on munit de la norme sup. Soit $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Alors l'application $L_\mu\colon C(X) \to \mathbb{R}$ définie par
$$L_\mu(f) = \int_X f\ d\mu \quad \text{quel que soit } f \in C(X)$$
est une forme linéaire continue positive de norme $||L_\mu|| = 1$. Réciproquement, il résulte du théorème de représentation de Riesz (voir [**Ru2**, th. 2.14]) que si $L\colon C(X) \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire continue positive de norme 1, alors il existe une unique mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{M}(X)$ vérifiant $L = L_\mu$. L'espace $\mathcal{M}(X)$ s'identifie donc à un sous-ensemble convexe de la boule unité $B = \{L \in C(X)^*\colon ||L|| \leq 1\}$ de $C(X)^*$.

Rappelons que la topologie faible* sur $C(X)^*$ est la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications $\Psi_f\colon C(X)^* \to \mathbb{R}$, $f \in C(X)$, où $\Psi_f(L) = L(f)$ quel que soit $L \in C(X)^*$. Muni de cette topologie, l'espace $C(X)^*$ devient un espace vectoriel topologique séparé localement convexe dans lequel B est compact (cela résulte du théorème [**DuS**, Th. V.4.2]). On munit $\mathcal{M}(X) \subset C(X)^*$ de la topologie induite par la topologie faible* de $C(X)^*$. Alors $\mathcal{M}(X)$ est un compact puisque c'est un sous-ensemble fermé du compact B. Notons $\mathcal{M}_0(X)$ l'ensemble des combinaisons linéaires convexes de masses de Dirac. Alors $\mathcal{M}_0(X)$ est un sous-espace convexe dense dans $\mathcal{M}(X)$.

Supposons que X est muni d'une action continue d'un groupe G. On dit qu'une mesure $\mu \in \mathcal{M}(X)$ est *G-invariante* si $\mu(gB) = \mu(B)$ pour tout borélien B et pour tout $g \in G$.

Barycentre d'un compact convexe. — Pour plus de détails et résultats concernant la notion de barycentre voir [**Cho**], [**Phe**].

Lemme 1.32. — *Soit K un compact convexe non vide d'un espace vectoriel topologique séparé localement convexe E. Soit $\mu \in \mathcal{M}(K)$. Alors*

(a) *il existe un unique $b = b(\mu) \in K$ vérifiant*
$$f(b) = \int_K f(k)\ d\mu(k)$$
*quel que soit $f \in E^*$. Le point $b(\mu)$ est appelé μ-*barycentre *de K ;*

(b) *l'application $b\colon \mathcal{M}(K) \to K$, $\mu \mapsto b(\mu)$ est une application continue ;*

(c) *on a $A(b(\mu)) = b(A * \mu)$ pour toute application affine continue $A\colon K \to K$, où $A * \mu$ désigne la mesure image de μ par A, c'est-à-dire $A * \mu(B) = \mu(A^{-1}(B))$.*

Démonstration. — L'unicité résulte du fait que si b et b' sont des μ-barycentres de K, alors $f(b) = f(b')$ quel que soit $f \in E^*$. On en déduit $b = b'$ ([**DuS**, Cor. V.2.13]).

Montrons l'existence du μ-barycentre de K. Soit $\mu \in \mathcal{M}(K)$ et notons $L_\mu(f) = \int_K f \, d\mu$ pour tout $f \in E^*$. Définissons pour tout $f \in E^*$, la partie fermée $K_f \subset K$ par

$$K_f = \{k \in K \colon L_\mu(f) = f(k)\}.$$

Montrons que $\bigcap_{f \in E^*} K_f \neq \varnothing$. Soient $f_1, \ldots, f_n$ une suite finie d'éléments de E^* et définissons l'application linéaire $T \colon K \to \mathbb{R}^n$ par

$$T(k) = (f_1(k), f_2(k), \ldots, f_n(k))$$

quel que soit $k \in K$. Alors $T(K)$ est un convexe compact de $\mathbb{R}^n$. Supposons $\bigcap_{i=1}^n K_{f_i} = \varnothing$ et posons $x = (L_\mu(f_1), L_\mu(f_2), \ldots, L_\mu(f_n))$. Alors $x \notin T(K)$. Par un théorème de séparation de convexes disjoints dans $\mathbb{R}^n$, il existe une forme linéaire $l \in (\mathbb{R}^n)^*$ et un réel $c > 0$ telle que $l(x) \leq l(T(k)) - c$ pour tout $k \in K$. En intégrant cette inégalité en $k \in K$ par rapport à μ, on obtient

$$l(x) = \int_K l(x) \, d\mu(k) \leq \int_K (l(T(k)) - c) \, d\mu(k) = l\big(\int_K T(k) \, d\mu(k)\big) - c = l(x) - c$$

ce qui est absurde. Donc $\bigcap_{i=1}^n K_{f_i} \neq \varnothing$. Par compacité de K on a alors $\bigcap_{f \in E^*} K_f \neq \varnothing$.

Montrons que l'application barycentre $b \colon \mathcal{M}(K) \to K$ est continue. Soit $(\mu_i)_{i \in I}$ un filet d'éléments de $\mathcal{M}(K)$ convergeant vers μ et posons $x_i = b(\mu_i)$ pour tout $i \in I$. On va montrer que $(x_i)_{i \in I}$ converge vers $b(\mu)$. Par compacité de K, il suffit de démontrer que tout sous-filet de $(x_i)_{i \in I}$ convergeant, converge vers $b(\mu)$. Soit $(x_{\varphi(j)})_{j \in J}$ un sous-filet de $(x_i)_{i \in I}$ qui converge vers un élément $x \in K$. Comme $x_{\varphi(j)} = b(\mu_{\varphi(j)})$ pour tout $j \in J$, on a $f(x_{\varphi(j)}) = L_{\mu_{\varphi(j)}}(f)$ quels que soient $f \in E^*$ et $j \in J$. Puisque f est continue et $\lim_j \mu_{\varphi(j)} = \mu$, on obtient par passage à la limite $f(x) = L_\mu(f)$. On en déduit donc $f(x) = f(b(\mu))$ quel que soit $f \in E^*$. Par unicité du barycentre, on a donc $x = b(\mu)$.

Montrons la dernière assertion. Soient $A \colon K \to K$ une application affine continue et $\mu \in \mathcal{M}(K)$. Par densité de $\mathcal{M}_0(K)$ dans $\mathcal{M}(K)$, il existe un filet $(\mu_i)_{i \in I}$ d'éléments de $\mathcal{M}_0(K)$ qui converge vers μ. Soit $i \in I$. Puisque $\mu_i \in \mathcal{M}_0(X)$ et que A est une application affine, on vérifie immédiatement que $A(b(\mu_i)) = b(A * \mu_i)$. Par continuité de b et de A, on en déduit par passage à la limite $A(b(\mu)) = b(A * \mu)$. □

Théorème 1.33. — *Soit G un groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *G est moyennable ;*

(b) *pour toute action continue de G sur un espace compact séparé X, il existe une mesure de probabilité $\mu \in \mathcal{M}(X)$ qui est G-invariante.*

Démonstration. — Montrons que (a) implique (b). Supposons G moyennable. Si G agit continûment sur un espace compact séparé X, alors il existe une moyenne invariante m sur $\ell^\infty(X)$ d'après le théorème 1.23. En particulier m est une forme linéaire positive normalisée continue sur $C(X)$ vérifiant $m(gu) = m(u)$ pour tous $u \in C(X)$ et $g \in G$. D'après le théorème de représentation de Riesz, la moyenne m définit une mesure de probabilité G-invariante $\mu \in \mathcal{M}(X)$.

Montrons que (b) implique (a). Pour cela, on va montrer que G a la propriété du point fixe. Supposons que G agit continûment et affinement sur un compact convexe X d'un espace vectoriel topologique séparé localement convexe E. D'après (b), l'espace X admet une probabilité $\mu \in \mathcal{M}(X)$ qui est G-invariante. Notons $b = b(\mu)$ le μ-barycentre de X (voir lemme 1.32) et montrons que b est un point fixe pour l'action de G. Notons $A_g \colon X \to X$ l'application définie par $A_g(x) = gx$ quels que soient $x \in X$ et $g \in G$. Puisque μ est G-invariant, on a $A_g * \mu = \mu$. Il en résulte en utilisant le lemme 1.32

$$A_g(b(\mu)) = b(A_g * \mu) = b(\mu)$$

pour tout $g \in G$. Donc $b(\mu)$ est fixé par G. On en déduit que G est moyennable d'après le théorème 1.31.

□

1.7. Critère de Følner

Soient A et B deux ensembles. On note $A \bigtriangleup B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ la différence symétrique entre A et B et $|A|$ le cardinal de A.

On dit qu'un groupe G vérifie la *condition de Følner* si pour tout $\epsilon > 0$ et pour toute partie finie $K \subset G$, il existe une partie finie non vide $F \subset G$ telle que

$$\frac{|kF \bigtriangleup F|}{|F|} \leq \epsilon$$

quel que soit $k \in K$.

Le résultat suivant est dû à Følner [**Føl**] :

***Théorème 1.34* (Critère de Følner).** — *Un groupe G est moyennable si et seulement si il vérifie la condition de Følner.*

Démonstration. — Supposons que G vérifie la condition de Følner. Nous allons utiliser le critère de Day pour montrer que G est moyennable. Posons

$$J = \{(\epsilon, K) \colon \ \epsilon > 0, \ K \text{ partie finie de } G\}$$

que l'on munit du préordre défini par $(\epsilon_1, K_1) \leq (\epsilon_2, K_2)$ si et seulement si $\epsilon_2 \leq \epsilon_1$ et $K_1 \subset K_2$. Alors J est un ensemble filtrant à droite. Soit $j = (\epsilon, K) \in J$. D'après la condition de Følner, il existe une partie finie non vide $L_j \subset G$ telle que

$$\frac{|kL_j \bigtriangleup L_j|}{|L_j|} \leq \epsilon \tag{1.10}$$

quel que soit $k \in K$. Pour tout $j \in J$, posons $v_j = \chi_{L_j}/|L_j|$. Alors $v_j \in P(G)$ et l'on a

$$||gv_j - v_j||_1 = \frac{1}{|L_j|}\sum_{s\in G}|\chi_{gL_j}(s) - \chi_{L_j}(s)| = \frac{1}{|L_j|}\sum_{s\in G}\chi_{gL_j\triangle L_j}(s) = \frac{|gL_j \triangle L_j|}{|L_j|}$$

pour tout $g \in G$. En utilisant (1.10), on en déduit que le filet $(||gv_j - v_j||_1)_{j\in J}$ converge vers 0 pour tout $g \in G$. D'après le critère de Day (théorème 1.27) on a donc que G est moyennable.

Réciproquement, supposons que G est moyennable. Soient $\epsilon > 0$ et K une partie finie non vide de G. D'après le théorème 1.27, il existe $v \in P(G)$ telle que

$$||kv - v||_1 \leq \frac{\epsilon}{|K|} \tag{1.11}$$

quel que soit $k \in K$. Pour tout réel $t > 0$, posons $E_t = \{g \in G\colon v_g \geq t\}$ et remarquons que le fait que $v \in P(G)$ implique que E_t est une partie finie de G. Soit $k \in K$. Alors $kE_t = \{g \in G\colon (kv)_g \geq t\}$. Soit $g \in G$ et écrivons

$$v_g = \int_0^{v_g} dt = \int_0^{\infty}\chi_{E_t}(g)\ dt \quad \text{et} \quad kv_g = \int_0^{kv_g} dt = \int_0^{\infty}\chi_{kE_t}(g)\ dt.$$

Alors on a

$$|kv_g - v_g| = \int_0^{\infty}(\ \chi_{kE_t}(g) - \chi_{E_t}(g)\chi_{kE_t}(g)\ )\ dt + \int_0^{\infty}(\ \chi_{E_t}(g) - \chi_{kE_t}(g)\chi_{E_t}(g)\ )\ dt. \tag{1.12}$$

En effet, supposons par exemple $kv_g \geq v_g$ (l'autre cas se traite de façon analogue). Alors $\chi_{kE_t}(g) \geq \chi_{E_t}(g)$ et donc $\chi_{kE_t}(g)\chi_{E_t}(g) = \chi_{E_t}(g)$. On en déduit l'égalité (1.12) puis que

$$||kv - v||_1 = \int_0^{\infty}|kE_t \setminus E_t| + |E_t \setminus kE_t|\ dt = \int_0^{\infty}|kE_t \triangle E_t|\ dt.$$

L'inégalité (1.11) implique alors

$$\int_0^{\infty}|kE_t \triangle E_t|\ dt \leq \frac{\epsilon}{|K|}.$$

En sommant sur $k \in K$, on en déduit

$$\int_0^{\infty}|E_t|\sum_{k\in K}\frac{|kE_t \triangle E_t|}{|E_t|}\ dt \leq \epsilon.$$

Puisque

$$\int_0^{\infty}|E_t|\ dt = \int_0^{\infty}\sum_{g\in G}\chi_{E_t}(g)\ dt = \sum_{g\in G}\int_0^{\infty}\chi_{E_t}(g)\ dt = \sum_{g\in G}v_g = ||v||_1 = 1,$$

on en déduit qu'il existe un réel $t_0 \geq 0$ tel que

$$\sum_{k\in K}\frac{|kE_{t_0} \triangle E_{t_0}|}{|E_{t_0}|} \leq 2\epsilon$$

ce qui montre

$$\frac{|kE_{t_0} \triangle E_{t_0}|}{|E_{t_0}|} \leq 2\epsilon \quad \text{pour tout } k \in K.$$

Le groupe G vérifie donc la condition de Følner. □

Notons $\mathcal{F}(G)$ l'ensemble des parties finies non vides de G. On appelle *suite de Følner* de G une suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}(G)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|(gF_n) \triangle F_n|}{|F_n|} = 0 \quad \text{quel que soit } g \in G.$$

Exemples 1.35. — Si G est un groupe fini, il est clair que la suite de terme général G est une suite de Følner.

Pour le groupe $\mathbb{Z}^k$, où $k \in \mathbb{N}$, on vérifie que la suite (F_n) définie par $F_n = \{1, 2, \ldots, n\}^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est une suite de Følner.

Proposition 1.36. — *Soit G un groupe dénombrable. Alors G est moyennable si et seulement si G admet une suite de Følner.*

Démonstration. — Si G admet une suite de Følner, il est clair que G vérifie la condition de Følner. Donc G est moyennable.

Supposons que G est moyennable. Alors G vérifie la condition de Følner d'après le théorème 1.34. Puisque G est dénombrable, il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies croissantes de G telle que $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant la condition de Følner à $\epsilon = \frac{1}{n+1}$ et à $K = K_n$, il existe $F_n \in \mathcal{F}(G)$ telle que

$$\frac{|(gF_n) \triangle F_n|}{|F_n|} \leq \frac{1}{n+1} \quad \text{quel que soit } g \in K_n.$$

Alors il est clair que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Følner de G. □

Proposition 1.37. — *Soient (F_n) et (F'_n) des suites de Følner d'un groupe G. Les assertions suivantes sont vérifiées :*

(a) *la suite $(F_n \cup F'_n)$ est une suite de Følner de G ;*

(b) *si (g_n) est une suite d'éléments de G, alors la suite $(F_n g_n)$ est une suite de Følner de G ;*

(c) *si $g \in G$ alors les suites $(F_n g)$ et (gF_n) sont des suites de Følner de G ;*

(d) *si K est une partie finie de G alors les suites $(F_n K)$ et (KF_n) sont des suites de Følner de G.*

(e) *si K est une partie finie de G alors on a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|KF_n|}{|F_n|} = 1.$$

Démonstration. — Montrons (a). Remarquons tout d'abord que l'on a

$$(A \cup B) \triangle (C \cup D) \subset (A \triangle C) \cup (B \triangle D)$$

quels que soient $A, B \subset G$. On en déduit

$$\frac{|(F_n \cup F'_n) \triangle g(F_n \cup F'_n)|}{|F_n \cup F'_n|} \leq \frac{|F_n \triangle gF_n|}{|F_n|} + \frac{|F'_n \triangle gF'_n|}{|F'_n|}$$

quels que soient $g \in G$ et $n \in \mathbb{N}$. Puisque (F_n) et (F'_n) sont des suites de Følner de G, l'inégalité précédente montre qu'il en est de même pour la suite $(F_n \cup F'_n)$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $g, g' \in G$. Les assertions (b) et (c) résultent respectivement des égalités

$$|F_n g_n \triangle g(F_n g_n)| = |(F_n \triangle gF_n)g_n| = |F_n \triangle gF_n|$$

et

$$|gF_n \triangle g'(gF_n)| = |g^{-1}(gF_n \triangle g'gF_n)| = |F_n \triangle g^{-1}g'gF_n|.$$

Montrons (d). D'après (c), la suite $(F_n k)$ (resp. (kF_n)) est une suite de Følner de G quel que soit $k \in K$. Puisque $F_n K = \bigcup_{k \in K} F_n k$ (resp. $KF_n = \bigcup_{k \in K} kF_n$), l'assertion (d) résulte de (a).

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $KF_n \triangle F_n \subset \bigcup_{k \in K} kF_n \triangle F_n$ et que (F_n) est une suite de Følner de G, on en déduit que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|KF_n \triangle F_n|}{|F_n|} \leq \lim_{n \to \infty} \sum_{k \in K} \frac{|kF_n \triangle F_n|}{|F_n|} = 0.$$

Il en résulte

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|KF_n \cap F_n|}{|F_n|} = 1 \text{ et } \lim_{n \to \infty} \frac{|KF_n \setminus F_n|}{|F_n|} = 0.$$

Comme on a $KF_n = (KF_n \cap F_n) \cup (KF_n \setminus F_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit (e). $\square$

1.8. Récapitulatif

Les théorèmes suivants regroupent les principaux résultats démontrés dans ce chapitre.

Le premier théorème donne des conditions équivalentes à la moyennabilité.

Théorème 1.38. — *Soit G un groupe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(a) *G est moyennable ;*

(b) *pour toute action de G sur un ensemble X, il existe une moyenne invariante sur $\ell^\infty(X)$;*

(c) *pour toute action continue de G sur un compact séparé X, il existe une mesure de probabilité G-invariante $\mu \in \mathcal{M}(X)$;*

(d) *G vérifie la propriété du point fixe : toute action continue affine de G sur un compact convexe C d'un espace vectoriel topologique séparé localement convexe E admet un point fixe dans C ;*

(e) *G vérifie la condition de Følner : pour tout $\epsilon > 0$ et pour toute partie finie $K \subset G$, il existe une partie finie non vide $F \subset G$ telle que*

$$\frac{|kF \triangle F|}{|F|} \leq \epsilon$$

quel que soit $k \in K$;

(f) *il existe un filet $(v^{(i)})_{i \in I}$ d'éléments de $P(G) \subset \ell^1(G)$ tel que le filet $(gv^{(i)} - v^{(i)})_{i \in I}$ converge fortement vers 0 ;*

(g) *il existe un filet $(v^{(i)})_{i \in I}$ d'éléments de $P(G) \subset \ell^1(G)$ tel que le filet $(gv^{(i)} - v^{(i)})_{i \in I}$ converge faiblement vers 0.*

□

On trouve encore d'autres définitions équivalentes à la moyennabilité dans la littérature. Pour une caractérisation des groupes moyennables en termes de décompositions paradoxales, voir par exemple [**Wag**], [**CGH1**], [**CGH2**].

Le résultat suivant récapitule les propriétés de fermeture de la classe des groupes moyennables.

Théorème 1.39. — *On a :*

(a) *tous les groupes finis sont moyennables ;*

(b) *tous les groupes commutatifs sont moyennables ;*

(c) *tout quotient d'un groupe moyennable est moyennable ;*

(d) *toute extension d'un groupe moyennable par un groupe moyennable est moyennable.*

(e) *si $(H_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ est une famille de sous-groupes moyennables d'un groupe G telle que*

(1) $G = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} H_\gamma$;

(2) *quels que soient $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$, il existe $\gamma_3 \in \Gamma$ tel que $H_{\gamma_1} \cup H_{\gamma_2} \subset H_{\gamma_3}$,*

alors G est moyennable.

□

CHAPITRE 2

LE LEMME D'ORNSTEIN-WEISS D'APRÈS GROMOV

Dans ce chapitre on démontre un théorème de convergence pour les fonctions sous-additives invariantes définies sur les parties finies d'un groupe dénombrable moyennable. Ce résultat est utilisé dans la définition de la dimension topologique moyenne et dans celle de l'entropie topologique (voir les chap. 3 et 4). Le théorème peut être déduit d'un résultat général dû à D.S. Ornstein et B. Weiss mais la démonstration que l'on présente ici suit une preuve esquissée par M. Gromov. Le contenu de ce chapitre est repris dans [**Kr1**].

2.1. Présentation du résultat

Soit G un groupe dénombrable. Rappelons (cf. proposition 1.36) que G est moyennable si et seulement si G admet une suite de Følner, c'est-à-dire une suite $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de parties finies non vides de G telle que

$$\lim_{i\to\infty} \frac{|(gF_i) \triangle F_i|}{|F_i|} = 0 \quad \text{quel que soit } g \in G,$$

où $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ désigne la différence symétrique entre les ensembles A et B, et $|A|$ est le cardinal de A.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 2.1 **(Ornstein-Weiss)**. — *Soit G un groupe dénombrable moyennable et $h\colon \mathcal{F}(G) \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les propriétés suivantes :*

(a) *h est sous-additive, c'est-à-dire*

$$h(A \cup B) \leq h(A) + h(B) \text{ quelles que soient } A, B \in \mathcal{F}(G)\ ;$$

(b) *h est invariante à droite, c'est-à-dire*

$$h(Ag) = h(A) \text{ quels que soient } g \in G \text{ et } A \in \mathcal{F}(G).$$

Alors il existe un réel $\lambda = \lambda(G, h) \geq 0$ *tel que*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{h(F_i)}{|F_i|} = \lambda$$

pour toute suite de Følner $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *de* G.

Une démonstration de ce résultat (énoncé avec des hypothèses plus fortes sur la fonction h) à partir d'un théorème dû à Ornstein et Weiss sur les quasi-pavages [**OrW**, Section I.2, Th. 6] se trouve dans [**LiW**, Th. 6.1]. Dans [**Gro**, Section 1.3], Gromov esquisse une preuve directe du théorème 2.1 en laissant au lecteur la vérification de certains passages. Il utilise des notions introduites par Ornstein et Weiss dans [**OrW**]. La démonstration qui est présentée ici suit l'approche de Gromov.

Le théorème 2.1 est à la base de la construction d'invariants d'actions de groupes moyennables comme l'entropie métrique, l'entropie topologique et la dimension topologique moyenne (cf. chap. 3 et 4). On trouve dans [**Mou**] un théorème de convergence de ce type pour des fonctions invariantes vérifiant une condition plus forte que la sous-additivité. Le résultat énoncé dans [**Mou**] est suffisant pour définir l'entropie métrique d'actions de groupes moyennables.

2.2. Moyennabilité relative

On définit dans cette section les notions de K-intérieur, K-extérieur et K-frontière d'une partie d'un groupe (voir [**OrW**]).

Soient K et A des parties d'un groupe G. On appelle *K-intérieur* (resp. *K-extérieur*) de A la partie de G notée $\mathrm{Int}_K(A)$ (resp. $\mathrm{Ext}_K(A)$) formée des éléments $g \in G$ tels que Kg soit contenu dans A (resp. dans $G \setminus A$). On définit la *K-frontière* de A par :

$$\partial_K(A) = G \setminus \big(\mathrm{Int}_K(A) \cup \mathrm{Ext}_K(A)\big).$$

La K-frontière de A est donc l'ensemble des éléments $g \in G$ tels que Kg rencontre à la fois A et $G \setminus A$. La proposition suivante est une conséquence immédiate de la définition de la K-frontière :

Proposition 2.2. — *Soient K, A, B des parties d'un groupe G et $g \in G$. On a*

(i) $\partial_K(A) = \partial_K(G \setminus A)$;

(ii) $\partial_K(A \cup B) \subset \partial_K(A) \cup \partial_K(B)$;

(iii) $\partial_K(A \setminus B) \subset \partial_K(A) \cup \partial_K(B)$;

(iv) $\partial_K(A) \subset \partial_{K'}(A)$ *si* $K \subset K' \subset G$;

(v) $\partial_{Kg}(A) = g^{-1}\partial_K(A)$;

(vi) $\partial_K(Ag) = \partial_K(A)g$.

□

Soient K et A des parties finies d'un groupe G. Alors $\partial_K(A)$ est finie. Supposons $A \neq \varnothing$. On appelle *constante de moyennabilité relative* de A par rapport à K le rationnel $\alpha(A, K)$ défini par :

$$\alpha(A, K) = \frac{|\partial_K(A)|}{|A|}.$$

Remarquons que les égalités (v) et (vi) de la proposition 2.2 impliquent

$$\alpha(A, Kg) = \alpha(Ag, K) = \alpha(A, K) \text{ quel que soit } g \in G. \tag{2.1}$$

Lemme 2.3. — *Soient K et A des parties d'un groupe G. Supposons $K = K^{-1}$ et $1_G \in K$. Alors on a les inclusions suivantes :*

(i) $(kA) \triangle A \subset \partial_K(A)$ *quel que soit* $k \in K$ *;*

(ii) $\partial_K(A) \subset K((KA) \triangle A)$.

Démonstration. — Montrons l'inclusion (i). Soit $g \in (kA) \triangle A$ avec $k \in K$. Alors soit $k^{-1}g \in A$ et $g \in G \setminus A$, soit $g \in A$ et $k^{-1}g \in G \setminus A$. Or k^{-1} et 1_G appartiennent à K. Dans les deux cas, on a donc $Kg \cap A \neq \varnothing$ et $Kg \cap (G \setminus A) \neq \varnothing$. On en déduit $g \in \partial_K(A)$.

Montrons l'inclusion (ii). Soit $g \in \partial_K(A)$. Alors on a $g \in K^{-1}A = KA$ et $Kg \cap (G \setminus A) \neq \varnothing$. Supposons tout d'abord $g \notin A$. Alors $g \in KA \setminus A = (KA) \triangle A \subset K\big((KA) \triangle A\big)$ puisque $1_G \in K$. Supposons maintenant $g \in A$. Comme $Kg \cap (G \setminus A) \neq \varnothing$, il existe $k \in K$ tel que $kg \in KA \setminus A = (KA) \triangle A$. On en déduit $g \in K((KA) \triangle A)$. $\square$

Proposition 2.4. — *Soit $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de parties finies non vides d'un groupe dénombrable G. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) *La suite (F_i) est une suite de Følner de G ;*

(b) *Pour toute partie finie $K \subset G$, on a*

$$\lim_{i \to \infty} \alpha(F_i, K) = 0.$$

Démonstration. — Montrons l'implication (a)⇒(b). Supposons que (F_i) est une suite de Følner de G. Soit K une partie finie de G et définissons $L \subset G$ par

$$L = K \cup K^{-1} \cup \{1_G\}.$$

Alors L est une partie finie de G contenant 1_G et vérifiant $L = L^{-1}$. Soit $i \in \mathbb{N}$. La proposition 2.2.(iv) et le lemme 2.3.(ii) impliquent

$$\partial_K(F_i) \subset \partial_L(F_i) \subset L((LF_i) \triangle F_i).$$

Puisque l'on a

$$(LF_i) \triangle F_i \subset \bigcup_{l \in L} ((lF_i) \triangle F_i),$$

on en déduit

$$\alpha(F_i, K) = \frac{|\partial_K(F_i)|}{|F_i|} \leq |L| \sum_{l \in L} \frac{|(lF_i) \bigtriangleup F_i|}{|F_i|}.$$

Comme (F_i) est une suite de Følner de G, le membre de droite de la dernière inégalité tend vers 0 lorsque i tend vers l'infini. On a donc $\lim_{i \to \infty} \alpha(F_i, K) = 0$, ce qui démontre (b).

Montrons l'implication (b)$\Rightarrow$(a). Supposons que la suite (F_i) vérifie la propriété (b). Soient $g \in G$ et $i \in \mathbb{N}$. Posons $K = \{1_G, g, g^{-1}\}$. D'après le lemme 2.3.(i), on a

$$(gF_i) \bigtriangleup F_i \subset \partial_K(F_i).$$

Il en résulte

$$\frac{|(gF_i) \bigtriangleup F_i|}{|F_i|} \leq \frac{|\partial_K(F_i)|}{|F_i|} = \alpha(F_i, K).$$

Comme $\lim_{i \to \infty} \alpha(F_i, K) = 0$, on en déduit

$$\lim_{i \to \infty} \frac{|(gF_i) \bigtriangleup F_i|}{|F_i|} = 0$$

ce qui montre que (F_i) est une suite de Følner de G. □

2.3. Le lemme de remplissage

Définition 2.5. — Soient X un ensemble et $\epsilon \geq 0$. On dit qu'une famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties finies de X est *ϵ-disjointe* s'il existe une famille $(B_i)_{i \in I}$ de parties disjointes de X telle que $B_i \subset A_i$ et $|B_i| \geq (1 - \epsilon)|A_i|$ pour tout $i \in I$.

Lemme 2.6. — *Soient X un ensemble et $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ une famille ϵ-disjointe de parties finies de X. Alors on a*

$$(1 - \epsilon) \sum_{i=1}^{n} |A_i| \leq |\bigcup_{i=1}^{n} A_i|.$$

Démonstration. — Comme la famille $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ est ϵ-disjointe, il existe une famille $(B_1, B_2, \ldots, B_n)$ de parties disjointes de X vérifiant $B_i \subset A_i$ et $|B_i| \geq (1 - \epsilon)\ |A_i|$ pour tout $1 \leq i \leq n$. On a donc

$$(1 - \epsilon) \sum_{i=1}^{n} |A_i| \leq \sum_{i=1}^{n}\ |B_i| = |\bigcup_{i=1}^{n} B_i| \leq |\bigcup_{i=1}^{n} A_i|.$$

□

Lemme 2.7. — *Soient K une partie finie d'un groupe G et $0 \leq \epsilon < 1$. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille ϵ-disjointe de parties finies non vides de G. Alors on a*

$$\alpha(\bigcup_{i=1}^{n} A_i, K) \leq \frac{1}{1 - \epsilon} \max_{i=1,\ldots,n} \alpha(A_i, K).$$

Démonstration. — Posons $M = \max_{i=1,\dots,n} \alpha(A_i, K)$. En utilisant la proposition 2.2.(ii), on obtient

$$|\partial_K(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} |\partial_K(A_i)| = \sum_{i=1}^{n} \alpha(A_i, K)|A_i| \leq M \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

En utilisant le lemme 2.6, on en déduit

$$|\partial_K(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)| \leq \frac{M}{1-\epsilon} |\bigcup_{i=1}^{n} A_i|.$$

□

Lemme 2.8. — *Soient K, A et Ω des parties finies d'un groupe G telles que $A \neq \varnothing$ et $A \subset \Omega$. Supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que $|\Omega \setminus A| \geq \epsilon |\Omega|$. Alors on a*

$$\alpha(\Omega \setminus A, K) \leq \frac{\alpha(\Omega, K) + \alpha(A, K)}{\epsilon}.$$

Démonstration. — En utilisant la proposition 2.2.(iii) et le fait que $|\Omega \setminus A| \geq \epsilon|\Omega| \geq \epsilon|A|$, on obtient

$$\alpha(\Omega \setminus A, K) = \frac{|\partial_K(\Omega \setminus A)|}{|\Omega \setminus A|} \leq \frac{\alpha(\Omega, K) + \alpha(A, K)}{\epsilon}.$$

□

Lemme 2.9. — *Soient A et B des parties finies d'un groupe G. On a*

$$\sum_{g \in G} |Ag \cap B| = |A||B|.$$

Démonstration. — Pour $E \subset G$, rappelons que l'on note $\chi_E \colon G \to \{0, 1\}$ la fonction caractéristique de E. On a

$$\sum_{g \in G} |Ag \cap B| = \sum_{g \in G} \sum_{g' \in G} \chi_{Ag \cap B}(g') = \sum_{g \in G} \sum_{g' \in G} \chi_A(g'g^{-1}) \chi_B(g').$$

En échangeant l'ordre de sommation puis par un changement de variable, on obtient

$$\sum_{g \in G} |Ag \cap B| = \sum_{g' \in G} \chi_B(g') \sum_{g \in G} \chi_A(g'g^{-1}) = |B||A|.$$

□

***Définition 2.10* ((ϵ, K)-remplissage).** — Soient K et Ω des parties d'un groupe G et $\epsilon > 0$. Une partie $R \subset G$ est appelée un (ϵ, K)-*remplissage de* Ω si les conditions suivantes sont vérifiées :

(C1) $R \subset Int_K(\Omega)$;

(C2) la famille $(Kg)_{g \in R}$ est ϵ-disjointe.

Remarquons qu'un (ϵ, K)-remplissage peut être vide.

La démonstration du théorème 2.1 repose sur le lemme suivant :

***Lemme 2.11* (lemme de remplissage).** — *Soient Ω et K des parties finies non vides d'un groupe G. Soit $0 < \epsilon \leq 1$. Alors il existe une partie finie $R \subset G$ vérifiant les conditions suivantes :*

(a) *R est un (ϵ, K)-remplissage de Ω ;*

(b) *$\left|\bigcup_{g \in R} Kg\right| \geq \epsilon(1-\alpha_0)|\Omega|$, où $\alpha_0 = \alpha(\Omega, K)$ désigne la constante de moyennabilité relative de Ω par rapport à K.*

Démonstration. — Soit $k_0 \in K$. Puisque $\alpha(\Omega, K) = \alpha(\Omega, Kk_0^{-1})$ d'après les égalités (2.1), on peut supposer $1_G \in K$ dans l'énoncé du lemme.

Comme $1_G \in K$, on a $\mathrm{Int}_K(\Omega) \subset \Omega$ et $\mathrm{Ext}_K(\Omega) \subset G \setminus \Omega$. On en déduit

$$\Omega \setminus \partial_K(\Omega) = \mathrm{Int}_K(\Omega)$$

et donc

$$(1 - \alpha_0)|\Omega| \leq |\Omega \setminus \partial_K(\Omega)| = |\mathrm{Int}_K(\Omega)|. \tag{2.2}$$

Puisque $\mathrm{Int}_K(\Omega) \subset \Omega$, tout (ϵ, K)-remplissage de Ω est contenu dans Ω et a donc un cardinal majoré par $|\Omega|$. Choisissons $R \subset G$ un (ϵ, K)-remplissage de Ω de cardinal maximal et posons $A = \bigcup_{g \in R} Kg$. Dans la suite, nous allons démontrer que $|A| \geq \epsilon(1 - \alpha_0)|\Omega|$, ce qui montrera (b). D'après le lemme 2.9, on a

$$\sum_{g \in \mathrm{Int}_K(\Omega)} |Kg \cap A| \leq |K||A|. \tag{2.3}$$

Montrons que

$$\epsilon|K| \leq |Kg \cap A| \quad \text{quel que soit } g \in \mathrm{Int}_K(\Omega). \tag{2.4}$$

Si $g \in R$, alors on a $Kg \cap A = Kg$ et l'inégalité (2.4) est trivialement vérifiée puisque $\epsilon \leq 1$. Supposons maintenant que $g \in \mathrm{Int}_K(\Omega) \setminus R$ et que $|Kg \cap A| < \epsilon|K|$. Mais alors

$$|Kg \setminus A| > (1 - \epsilon)|Kg|,$$

ce qui implique que $R \cup \{g\}$ est un (ϵ, K)-remplissage de Ω et contredit la maximalité du cardinal de R. L'inégalité (2.4) est donc satisfaite. On en déduit

$$\epsilon|K||\mathrm{Int}_K(\Omega)| \leq \sum_{g \in \mathrm{Int}_K(\Omega)} |Kg \cap A|. \tag{2.5}$$

Les inégalités (2.2), (2.3) et (2.5) impliquent alors

$$|A| \geq \epsilon(1 - \alpha_0)|\Omega|.$$

□

2.4. Démonstration du théorème

Avant de démontrer le théorème 2.1, faisons les remarques suivantes :

(1) En choisissant $A = B$ dans l'hypothèse (a) du théorème 2.1, on obtient $h(A) \geq 0$ pour toute partie $A \in \mathcal{F}(G)$.

(2) Si on montre la convergence de la suite $(h(F_i)/|F_i|)$ pour toute suite de Følner (F_i), alors on aura prouvé le théorème. En effet, si $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont des suites de Følner, il en est de même pour la suite $(F_i)_{i\in\mathbb{N}} = (A_0, B_0, A_1, B_1, \ldots)$. L'existence de $\lim_{i\to\infty} h(F_i)/|F_i|$ implique alors l'égalité

$$\lim_{i\to\infty} h(A_i)/|A_i| = \lim_{i\to\infty} h(B_i)/|B_i|.$$

Démonstration du théorème 2.1. — Soient $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de Følner de G et $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}]$. Posons

$$\lambda = \liminf_{i\to\infty} \frac{h(F_i)}{|F_i|}$$

et remarquons que $\lambda < \infty$ puisque les propriétés de h impliquent $h(A) \leq h(1_G)|A|$ pour tout $A \in \mathcal{F}(G)$. Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une suite finie $K_1, K_2, \ldots, K_n$ extraite de la suite (F_i) vérifiant les conditions suivantes :

(C1) $h(K_j)/|K_j| \leq \lambda + \epsilon$ quel que soit $1 \leq j \leq n$,

(C2) $\alpha(K_j, K_i) \leq \epsilon^{2n}$ quels que soient $1 \leq i < j \leq n$.

En effet, d'après la définition de λ, il existe une sous-suite $(F_{\varphi(i)})$ de (F_i) vérifiant

$$\frac{h(F_{\varphi(i)})}{|F_{\varphi(i)}|} \leq \lambda + \epsilon,$$

pour tout $i \in \mathbb{N}$. Comme la suite $(F_{\varphi(i)})$ est aussi une suite de Følner de G, la proposition 2.4 permet alors de construire une sous-suite finie $K_1, K_2, \ldots, K_n$ de $(F_{\varphi(i)})$ vérifiant la condition (C2).

Soit D une partie finie non vide de G telle que

$$\alpha(D, K_j) \leq \epsilon^{2n} \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq n. \tag{2.6}$$

Nous allons démontrer que pour n assez grand, il existe une famille ϵ-disjointe dans D formée d'un certain nombre des $K_j g$ (où $1 \leq j \leq n$ et $g \in G$) qui remplissent partiellement D, c'est-à-dire telle que la proportion de D recouverte par ces parties soit supérieure ou égale à $1-\epsilon$. On utilisera ensuite ce recouvrement partiel et les propriétés de la fonction h pour montrer que $\limsup_{i\to\infty} h(F_i)/|F_i| \leq \lambda$, ce qui prouvera le théorème.

Définissons par récurrence finie un procédé de recouvrement partiel de D en au plus n étapes :

Étape 1. Rappelons que l'on $\alpha(D,K_j)\leq\epsilon^{2n}$ pour tout $1\leq j\leq n$. D'après le lemme 2.11 appliqué à $\Omega=D$ et à $K=K_n$, il existe $R_n\subset G$ un (ϵ,K_n)-remplissage fini de D tel que

$$\frac{|\bigcup_{g\in R_n}K_ng|}{|D|}\geq\epsilon\bigl(1-\alpha(D,K_n)\bigr)\geq\epsilon(1-\epsilon^{2n}).$$

Posons $D_1=D\setminus\bigcup_{g\in R_n}K_ng$. D'après l'inégalité précédente, on a

$$|D_1|\leq|D|\bigl(1-\epsilon(1-\epsilon^{2n})\bigr). \tag{2.7}$$

On continue le procédé de recouvrement par une récurrence finie de la manière suivante. Posons $D_0=D$. Supposons que le processus de recouvrement partiel se poursuive jusqu'à l'étape k, où $1\leq k\leq n-1$.

Les hypothèses de récurrence au rang k sont :

(H1) $\alpha(D_{k-1},K_j)\leq(2(k-1)+1)\epsilon^{2n-k+1}$ pour tout $1\leq j\leq n-k+1$;

(H2) $R_{n-k+1}\subset G$ est un (ϵ,K_{n-k+1})-remplissage fini de D_{k-1} ;

(H3) en posant

$$D_k=D_{k-1}\setminus\bigcup_{g\in R_{n-k+1}}K_{n-k+1}g,$$

on a

$$|D_k|\leq|D|\prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\epsilon\bigl(1-(2i+1)\epsilon^{2n-i}\bigr)\right).$$

Remarquons que ces hypothèses sont vérifiées pour $k=1$. Construisons l'étape $k+1$:

Étape $k+1$. Si $|D_k|\leq\epsilon|D_{k-1}|$ alors $|D_k|\leq\epsilon|D|$ et on arrête le processus de recouvrement. Supposons maintenant que $|D_k|>\epsilon|D_{k-1}|$. Soit $1\leq j\leq n-k$. Le lemme 2.8 implique

$$\alpha(D_k,K_j)\leq\frac{\alpha(\bigcup_{g\in R_{n-k+1}}K_{n-k+1}g,K_j)}{\epsilon}+\frac{\alpha(D_{k-1},K_j)}{\epsilon}. \tag{2.8}$$

D'après les égalités (2.1) et la condition (C2), on a

$$\alpha(K_{n-k+1}g,K_j)=\alpha(K_{n-k+1},K_j)\leq\epsilon^{2n}.$$

Puisque la famille $(K_{n-k+1}g)_{g\in R_{n-k+1}}$ est ϵ-disjointe, il résulte du lemme 2.7 que l'on a

$$\alpha(\bigcup_{g\in R_{n-k+1}}K_{n-k+1}g,K_j)\leq\frac{\epsilon^{2n}}{1-\epsilon}.$$

On en déduit en utilisant l'inégalité (2.8) et l'hypothèse de récurrence (H1)

$$\alpha(D_k,K_j)\leq\frac{\epsilon^{2n}}{(1-\epsilon)\,\epsilon}+\frac{\bigl(2(k-1)+1\bigr)\epsilon^{2n-k+1}}{\epsilon}\leq(2k+1)\epsilon^{2n-k}$$

pour $1 \leq j \leq n-k$. Cette dernière inégalité est (H1) au rang $k+1$. En appliquant le lemme 2.11 à $\Omega = D_k$ et à $K = K_{n-k}$, il existe $R_{n-k} \subset G$ un (ϵ, K_{n-k})-remplissage fini de D_k tel que

$$\frac{|\bigcup_{g\in R_{n-k}} K_{n-k}g|}{|D_k|} \geq \epsilon\, \big(1-\alpha(D_k, K_{n-k})\big) \geq \epsilon\, \big(1-(2k+1)\epsilon^{2n-k}\big).$$

En particulier (H2) est vérifiée au rang $k+1$. Posons

$$D_{k+1} = D_k \setminus \bigcup_{g\in R_{n-k}} K_{n-k}g.$$

Alors on a

$$|D_{k+1}| \leq |D_k|\big(1-\epsilon\big(1-(2k+1)\epsilon^{2n-k}\big)\big).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence (H3) et l'inégalité précédente, on obtient

$$|D_{k+1}| \leq |D| \prod_{i=0}^{k} \big(1-\epsilon\big(1-(2i+1)\epsilon^{2n-i}\big)\big)\,.$$

Ceci montre l'inégalité (H3) au rang $k+1$ et achève la construction de l'étape $k+1$.

Supposons que le processus de recouvrement partiel se poursuive jusqu'à l'étape n et que $|D_{n-1}| > \epsilon|D_{n-2}|$. D'après (H3) au rang n, on a

$$|D_n| \leq |D| \prod_{i=0}^{n-1} \big(1-\epsilon\big(1-(2i+1)\epsilon^{2n-i}\big)\big)\,. \tag{2.9}$$

Remarquons que pour n assez grand (ne dépendant que de ϵ) on a $|D_n| \leq \epsilon|D|$. En effet, on déduit de l'inégalité (2.9) la majoration suivante :

$$|D_n| \leq |D|\big(1-\epsilon(1-(2n-1)\epsilon^{n+1})\big)^n. \tag{2.10}$$

Comme $\lim_{i\to\infty}(2i-1)\epsilon^{i+1} = 0$ et $\lim_{i\to\infty}(1-\frac{\epsilon}{2})^i = 0$, il existe un entier n_0 tel que pour $i \geq n_0$, on ait $(2i-1)\epsilon^{i+1} \leq \frac{1}{2}$ et $(1-\frac{\epsilon}{2})^i \leq \epsilon$. Si $n \geq n_0$, il résulte de l'inégalité (2.10)

$$|D_n| \leq |D|(1-\frac{\epsilon}{2})^n \leq \epsilon|D|.$$

Supposons à partir de maintenant que l'entier n fixé au début de la démonstration est plus grand que n_0. On vient donc de démontrer que pour toute partie finie D telle que $\alpha(D, K_j) \leq \epsilon^{2n}$ pour tout $1 \leq j \leq n$, il existe un entier k_0 (où $1 \leq k_0 \leq n$) tel que $|D_{k_0}| \leq \epsilon|D|$. Plus précisément, la proportion de D recouverte par les parties des familles ϵ-disjointes

$$(K_n g)_{g\in R_n}, (K_{n-1}g)_{g\in R_{n-1}}, \ldots, (K_{n-k_0+1}g)_{g\in R_{n-k_0+1}},$$

est supérieure ou égale à $1-\epsilon$.

Passons à la majoration de $h(D)/|D|$. Pour simplifier posons $J = \{n-k_0+1, \ldots, n\}$ et notons $K_jR_j = \bigcup_{g\in R_j} K_j g$ pour tout $j \in J$. Dans la suite on utilisera sans le préciser la sous-additivité et l'invariance à droite de h. Puisque l'on a

$$D = \bigcup_{j \in J} K_j R_j \cup D_{k_0}$$

et

$$|D_{k_0}| \leq \epsilon |D|,$$

on en déduit

$$\frac{h(D)}{|D|} \leq \frac{h(\bigcup_{j\in J} K_j R_j)}{|D|} + \frac{h(D_{k_0})}{|D|} \leq \frac{h(\bigcup_{j\in J} K_j R_j)}{|D|} + \epsilon h(1_G). \tag{2.11}$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{h(\bigcup_{j\in J} K_j R_j)}{|D|} \leq \sum_{j\in J} \sum_{g \in R_j} \frac{h(K_j g)}{|D|} = \sum_{j\in J} \sum_{g \in R_j} \frac{h(K_j)}{|K_j|} \frac{|K_j g|}{|D|}.$$

En utilisant la condition (C1), on en déduit

$$\frac{h(\bigcup_{j\in J} K_j R_j)}{|D|} \leq (\lambda + \epsilon) \sum_{j\in J} \sum_{g \in R_j} \frac{|K_j g|}{|D|}. \tag{2.12}$$

Remarquons que la famille formée des $K_j g$, où $j \in J$ et $g \in R_j$, est ϵ-disjointe dans D. Il résulte du lemme 2.6

$$\sum_{j\in J} \sum_{g \in R_j} |K_j g| \leq \frac{|D|}{1-\epsilon}. \tag{2.13}$$

Les inégalités (2.12) et (2.13) impliquent alors

$$\frac{h(\bigcup_{j\in J} K_j R_j)}{|D|} \leq \frac{\lambda + \epsilon}{1 - \epsilon}. \tag{2.14}$$

On a donc d'après les inégalités (2.11) et (2.14)

$$\frac{h(D)}{|D|} \leq \frac{\lambda + \epsilon}{1-\epsilon} + \epsilon h(1_G). \tag{2.15}$$

À l'aide de l'inégalité précédente, montrons la convergence de la suite $(h(F_i)/|F_i|)$. Comme (F_i) est une suite de Følner, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$(i \geq N) \Rightarrow \alpha(F_i, K_j) \leq \epsilon^{2n} \quad \text{pour tout } 1 \leq j \leq n.$$

En appliquant l'inégalité (2.15) à $D = F_i$ pour $i \geq N$, on en déduit

$$\limsup_{i\to\infty} \frac{h(F_i)}{|F_i|} \leq \frac{\lambda+\epsilon}{1-\epsilon} + \epsilon h(1_G).$$

Puisque cette dernière inégalité est vraie pour tout $\epsilon \in]0, \frac{1}{2}]$, on obtient en faisant tendre ϵ vers 0

$$\limsup_{i\to\infty} \frac{h(F_i)}{|F_i|} \leq \lambda = \liminf_{i\to\infty} \frac{h(F_i)}{|F_i|},$$

ce qui démontre le théorème. $\square$

Le théorème 2.1 est aussi utilisé sous les formes plus faibles suivantes (cf. [**LiW**, Th. 6.1] et [**Mou**]) :

Corollaire 2.12. — *Soit G un groupe dénombrable moyennable. Soit $h\colon \mathcal{F}(G) \to \mathbb{R}$ une application vérifiant les conditions suivantes :*

(a) $h(A) \geq 0$ *quelle que soit* $A \in \mathcal{F}(G)$,

(b) $h(A) \leq h(B)$ *quelles que soient* $A, B \in \mathcal{F}(G)$ *telles que* $A \subset B$,

(c) $h(A \cup B) \leq h(A) + h(B)$ *quelles que soient* $A, B \in \mathcal{F}(G)$ *telles que* $A \cap B = \varnothing$,

(d) $h(Ag) = h(A)$ *quels que soient* $g \in G$ *et* $A \in \mathcal{F}(G)$.

Alors il existe un réel $\lambda = \lambda(G, h) \geq 0$ *ne dépendant que de* G *et* h *vérifiant*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{h(F_i)}{|F_i|} = \lambda$$

pour toute suite de Følner $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *de* G.

Démonstration. — Soient $A, B \in \mathcal{F}(G)$. Supposons tout d'abord $A \setminus B \neq \varnothing$. Alors les conditions (b) et (c) impliquent

$$h(A \cup B) = h((A \setminus B) \cup B) \leq h(A \setminus B) + h(B) \leq h(A) + h(B).$$

Si $A \setminus B = \varnothing$ alors $A \subset B$. On a donc $h(A \cup B) = h(B) \leq h(A) + h(B)$ d'après (a). On en déduit la sous-additivité de h telle qu'elle est définie au théorème 2.1.(a). On conclut en utilisant le théorème 2.1. $\square$

Remarque 2.13. — Soit G un groupe non réduit à l'élément neutre. Observons qu'il existe des fonctions sous-additives invariantes à droite $h\colon \mathcal{F}(G) \to \mathbb{R}$ qui ne vérifient pas la condition (b) du corollaire 2.12. En effet, il suffit de définir h par $h(A) = |A|$ pour tout $A \in \mathcal{F}(G)$ vérifiant $|A| \geq 2$ et $h(\{g\}) = 3$ pour tout $g \in G$. Alors h est sous-additive, invariante à droite mais ne vérifie pas la condition (b) du corollaire 2.12 puisque $h(\{g, g'\}) = 2 < h(\{g\}) = 3$ si $g \neq g'$.

Corollaire 2.14. — *Soit G un groupe dénombrable moyennable. Soit $h\colon \mathcal{F}(G) \cup \{\varnothing\} \to \mathbb{R}$ une application vérifiant les conditions suivantes :*

(a) $h(A) \geq 0$ *quelle que soit* $A \in \mathcal{F}(G) \cup \{\varnothing\}$,

(b) $h(A \cup B) + h(A \cap B) \leq h(A) + h(B)$ *quelles que soient* $A, B \in \mathcal{F}(G) \cup \{\varnothing\}$,

(c) $h(Ag) = h(A)$ *quels que soient* $g \in G$ *et* $A \in \mathcal{F}(G) \cup \{\varnothing\}$.

Alors il existe un réel $\lambda = \lambda(G, h) \geq 0$ *ne dépendant que de* G *et* h *vérifiant*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{h(F_i)}{|F_i|} = \lambda$$

pour toute suite de Følner $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *de* G.

Démonstration. — Les conditions (a) et (b) impliquent

$$h(A \cup B) \leq h(A) + h(B)$$

quelles que soient $A, B \in \mathcal{F}(G)$. On en déduit la sous-additivité de h telle qu'elle est définie au théorème 2.1.(a). Le théorème 2.1 permet alors de conclure. $\square$

CHAPITRE 3

DIMENSION TOPOLOGIQUE MOYENNE

La dimension topologique moyenne est un invariant numérique d'actions de groupes moyennables introduit par M. Gromov [**Gro**]. Étant donné un groupe dénombrable moyennable G qui agit continûment sur un espace compact métrisable X, on définit la dimension topologique moyenne du système dynamique (X, G). On étudie des propriétés générales de la dimension topologique moyenne des sous-décalages fermés de K^G, où l'espace des symboles K est compact et métrisable. Les résultats de ce chapitre ont été publiés dans [**CoK**].

3.1. Introduction

Dans le cas d'actions de $\mathbb{Z}$, la dimension topologique moyenne a été utilisée par E. Lindenstrauss et B. Weiss [**LiW**] pour montrer l'existence d'une action continue minimale de $\mathbb{Z}$ sur un espace compact métrisable tel que le système dynamique associé ne se plonge pas dans le $\mathbb{Z}$-décalage $[0, 1]^{\mathbb{Z}}$. Leur construction permet de répondre à une question restée ouverte durant de nombreuses années en théorie des systèmes dynamiques (voir [**Aus**, Chap. 13]).

Soit G un groupe dénombrable moyennable agissant continûment sur un espace compact métrisable X. La dimension topologique moyenne $\mathrm{mdim}(X, G)$ du système dynamique (X, G) est obtenue en appliquant le lemme d'Ornstein-Weiss (théorème 2.1) à une fonction sous-additive invariante définie sur les parties finies de G (voir les sections 2 et 3). Lorsque X est un sous-décalage fermé du G-décalage K^G, où l'espace des symboles K est compact et métrisable, alors on a $\mathrm{mdim}(X, G) \leq \dim(K)$ avec égalité si $X = K^G$ où K est un polyèdre (corollaire 3.22). Une question naturelle qui se pose alors est de savoir quelles sont les valeurs possibles que peut atteindre la dimension topologique moyenne des sous-décalages fermés de K^G, lorsque K est fixé. Le théorème suivant, qui est le résultat principal de ce chapitre, donne une réponse partielle à cette question.

Théorème 3.1. — *Soient G un groupe dénombrable moyennable contenant des sous-groupes d'indice fini arbitrairement grand (c'est-à-dire tel que pour tout entier $N \in \mathbb{N}$, il existe un sous-groupe $H \subset G$ tel que $N \leq [G : H] < \infty$) et P un polyèdre. Alors pour tout réel ρ tel que $0 \leq \rho \leq \dim(P)$, il existe un sous-décalage fermé $X \subset P^G$ tel que* $\mathrm{mdim}(X, G) = \rho$.

Les groupes $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 1$, les groupes infinis nilpotents de type fini et, plus généralement, les groupes infinis polycycliques de type fini (voir [**Rob**]) vérifient les hypothèses du théoreme 3.1. En effet, observons qu'un groupe infini résiduellement fini contient des sous-groupes d'indice fini arbitrairement grand. D'après un résultat de Mal'cev [**Mal**], tout groupe linéaire (c'est-à-dire isomorphe à un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{C})$ pour un entier $n \geq 1$) de type fini est résiduellement fini. D'autre part, il résulte de l'alternative de Tits qu'un groupe linéaire de type fini ne contenant pas de groupe libre de rang 2 est virtuellement résoluble, donc moyennable. On en déduit que tout groupe linéaire infini de type fini ne contenant pas de groupe libre de rang 2 vérifie les hypothèses du théorème 3.1. Notons qu'il existe des groupes moyennables de type fini, résiduellement finis qui ne sont pas linéaires. Le premier groupe de Grigorchuk en est un exemple (voir [**Har**]). Un exemple dû à P. Hall, d'un groupe de type fini résoluble (et donc moyennable) qui n'est pas résiduellement fini est donné dans [**Rob**, exerc. 15.4.6]. Néanmoins ce groupe contient des sous-groupes d'indice arbitrairement grand puisqu'il se surjecte sur $\mathbb{Z}$.

Il existe des polyèdres de dimension topologique entière $n \in \mathbb{N}$ arbitraire (par exemple $P = [0, 1]^n$). D'autre part, le G-décalage K^G, où K est le cube de Hilbert $[0, 1]^{\mathbb{N}}$, a une dimension topologique moyenne infinie (corollaire 3.23). On en déduit en utilisant le théorème précédent la surjectivité de la dimension topologique moyenne pour les actions de groupes dénombrables moyennables contenant des sous-groupes d'indice fini arbitrairement grand. Plus précisément :

Corollaire 3.2. — *Soit G un groupe dénombrable moyennable contenant des sous-groupes d'indice fini arbitrairement grand. Alors pour tout $\rho \in [0, \infty]$ il existe un espace compact métrisable X muni d'une action continue de G telle que* $\mathrm{mdim}(X, G) = \rho$.

3.2. Résultats préliminaires

Dans cette section X désigne un espace compact métrisable.

Recouvrements. — Un *recouvrement* (resp. *recouvrement ouvert*) de X est une famille $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ de parties (resp. de parties ouvertes) de X telle que $X = \bigcup_{i \in I} U_i$.

Le *cardinal* $|\alpha|$ du recouvrement $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ de X est le cardinal de l'ensemble d'indice I. Un recouvrement de X est dit *fini* si son cardinal est fini.

Soient $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ et $\beta = (V_j)_{j\in J}$ des recouvrements de X. On dit que α est un *sous-recouvrement* de β s'il vérifie $I \subset J$ et $U_i = V_i$ quel que soit $i \in I$. On dit que β est plus *fin* que α, et l'on note $\beta \succ \alpha$, si pour tout $j \in J$, il existe $i \in I$ tel que $V_j \subset U_i$. En particulier tout sous-recouvrement de α est plus fin que α.

On appelle *joint* des recouvrements α et β le recouvrement $\alpha \vee \beta$ de X défini par

$$\alpha \vee \beta = (U_i \cap V_j)_{(i,j)\in I\times J}.$$

Remarquons que si α et β sont des recouvrements ouverts finis de X alors il en est de même de $\alpha \vee \beta$.

Définition et propriétés de $D(\alpha)$. — Pour plus de détails concernant les notions introduites dans ce paragraphe, on pourra consulter par exemple [**HuW**], [**LiW**].

Soit $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini de X. L'*ordre* $\operatorname{ord}(\alpha)$ de α est défini par

$$\operatorname{ord}(\alpha) = -1 + \max_{x\in X} \operatorname{card}(\{\, i \in I \mid \ x \in U_i\}).$$

On définit l'entier $D(\alpha)$ par

$$D(\alpha) = \min_{\beta} \operatorname{ord}(\beta), \tag{3.1}$$

où β décrit tous les recouvrements ouverts finis de X tels que $\beta \succ \alpha$. Notons que l'on a $D(\alpha') \geq D(\alpha)$ si $\alpha' \succ \alpha$ par transitivité de $\succ$.

La *dimension topologique* $\dim(X) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de X est définie par

$$\dim(X) = \sup_{\alpha} D(\alpha),$$

où α décrit tous les recouvrements ouverts finis de X.

Soient α un recouvrement ouvert fini de X et Y un espace compact métrisable. On dit qu'une application continue $f\colon X \to Y$ est *α-compatible* s'il existe un recouvrement ouvert fini γ de Y tel que $f^{-1}(\gamma) \succ \alpha$.

Lemme 3.3. — *Soient α un recouvrement ouvert fini de X et $f\colon X \to Y$ une application continue α-compatible. Alors on a $D(\alpha) \leq \dim(Y)$.*

Démonstration. — Soit γ un recouvrement ouvert fini de Y tel que $f^{-1}(\gamma) \succ \alpha$. Par définition de $\dim(Y)$, il existe un recouvrement ouvert fini γ' de Y tel que $\gamma' \succ \gamma$ et $\operatorname{ord}(\gamma') \leq \dim(Y)$. On a $f^{-1}(\gamma') \succ f^{-1}(\gamma) \succ \alpha$. Cela implique $D(\alpha) \leq \dim(Y)$ puisque $\operatorname{ord}(f^{-1}(\gamma')) \leq \operatorname{ord}(\gamma')$. □

Lemme 3.4. — *Soient $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini de X et $f\colon X \to Y$ une application continue vérifiant la condition suivante : pour tout $y \in Y$ il existe $i \in I$ tel que $f^{-1}(y) \subset U_i$. Alors f est α-compatible.*

Démonstration. — Posons $W_i = \{\, y \in Y \mid \ f^{-1}(y) \subset U_i\}$. Observons que $Y \setminus W_i = f(X \setminus U_i)$ est fermé dans Y puisque $X \setminus U_i$ est compact. Il en résulte que $\gamma = (W_i)_{i\in I}$

est un recouvrement ouvert fini de Y. On a $f^{-1}(\gamma) \succ \alpha$ puisque $f^{-1}(W_i) \subset U_i$ pour tout $i \in I$. Donc f est α-compatible. □

Un *polyèdre* est un espace topologique homéomorphe à la réalisation géométrique d'un complexe simplicial fini.

Lemme 3.5. — *Soit α un recouvrement ouvert fini de X. Alors il existe une application continue α-compatible $f\colon X \to P$, où P est un polyèdre de dimension topologique* $\dim(P) = D(\alpha)$.

Démonstration. — Considérons un recouvrement ouvert fini $\beta = (V_j)_{j\in J}$ de X tel que $\beta \succ \alpha$ et $\mathrm{ord}(\beta) = D(\alpha)$. Soit P la réalisation géométrique du nerf de β. On a $\dim(P) = \mathrm{ord}(\beta) = D(\alpha)$. Soit $(f_j)_{j\in J}$ une partition de l'unité subordonnée à β, c'est-à-dire une famille de fonctions continues $f_j\colon X \to [0,1]$, $j \in J$, telles que $\sum_{j\in J} f_j(x) = 1$ pour tout $x \in X$ et $f_j(x) = 0$ pour tout $x \in X \setminus V_j$. Soit v_j le sommet de P correspondant à V_j. L'application $f\colon X \to P$ definie par

$$f(x) = \sum_{j\in J} f_j(x) v_j$$

est β-compatible d'après le lemme 3.4. Comme $\beta \succ \alpha$, l'application f est aussi α-compatible. □

Lemme 3.6. — *Soient α_1 et α_2 des recouvrements ouverts finis de X. Alors*

$$D(\alpha_1 \vee \alpha_2) \leq D(\alpha_1) + D(\alpha_2).$$

Démonstration. — D'après le lemme 3.5, pour $i = 1, 2$, il existe une application continue α_i-compatible $f_i\colon X \to P_i$ où P_i est un polyèdre tel que $\dim(P_i) = D(\alpha_i)$. Soit $\beta_i = (V_j^{(i)})_{j\in J_i}$ un recouvrement ouvert fini de P_i tel que $f_i^{-1}(\beta_i) \succ \alpha_i$. Alors $\gamma = (V_{j_1}^{(1)} \times V_{j_2}^{(2)})_{(j_1,j_2)\in J_1\times J_2}$ est un recouvrement ouvert fini de $P_1 \times P_2$ et l'application $F\colon X \to P_1 \times P_2$ définie par $F(x) = (f_1(x), f_2(x))$ satisfait $F^{-1}(\gamma) \succ \alpha_1 \vee \alpha_2$. Donc F est $(\alpha_1 \vee \alpha_2)$-compatible. En appliquant le lemme 3.3, on obtient $D(\alpha_1 \vee \alpha_2) \leq \dim(P_1 \times P_2)$. Cela implique $D(\alpha_1 \vee \alpha_2) \leq D(\alpha_1) + D(\alpha_2)$ puisque $\dim(P_1 \times P_2) = \dim(P_1) + \dim(P_2)$. □

Définition et propriétés de $\dim_\epsilon(X,d)$. — Les notions introduites dans ce paragraphe sont dues à Gromov [**Gro**]. Soient (X,d) un espace métrique compact et $\epsilon > 0$. Une application f de X dans un ensemble E est dite ϵ-*injective* si l'on a $d(x_1,x_2) < \epsilon$ quels que soient $x_1, x_2 \in X$ vérifiant $f(x_1) = f(x_2)$.

On définit $\dim_\epsilon(X,d)$ par

$$\dim_\epsilon(X,d) = \min_K \dim(K),$$

où le minimum est pris sur tous les espaces compacts métrisables K tels qu'il existe une application continue ϵ-injective $f\colon X \to K$.

Remarques 3.7. — 1) On a $\dim_\epsilon(X,d) \leq \dim(X)$ puisque l'application identique de X est ϵ-injective.

2) Considérons un recouvrement fini α de X par des boules ouvertes de rayon $\epsilon/2$. D'après le lemme 3.5, il existe un polyèdre P vérifiant $\dim(P) = D(\alpha)$ et une application continue $f\colon X \to P$ qui est α-compatible. Cela montre que $\dim_\epsilon(X,d) \leq D(\alpha)$. En particulier, on a $\dim_\epsilon(X,d) < \infty$.

3) La fonction $\epsilon \mapsto \dim_\epsilon(X,d)$ est décroissante puisque toute application ϵ-injective est ϵ'-injective pour tout $\epsilon' \geq \epsilon$.

Lemme 3.8. — *Soit (X',d') un espace métrique compact tel qu'il existe une application continue $\varphi\colon X \to X'$ vérifiant*

$$d(x_1,x_2) \leq d'(\varphi(x_1),\varphi(x_2)) \quad \textit{quels que soient } x_1,x_2 \in X.$$

Alors on a $\dim_\epsilon(X,d) \leq \dim_\epsilon(X',d')$.

Démonstration. — Si $f\colon X' \to K$ est ϵ-injective, alors $f \circ \varphi\colon X \to K$ est ϵ-injective. □

Proposition 3.9. — *Soit $n \in \mathbb{N}$ et notons d la métrique induite sur le n-cube $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ par la norme sup. Alors on a*

$$\dim_\epsilon([0,1]^n,d) = n$$

pour tout $\epsilon \leq 1$.

Démonstration. — On a $\dim_\epsilon([0,1]^n,d) \leq \dim([0,1]^n) = n$ pour tout $\epsilon > 0$. Supposons $\epsilon \leq 1$. Considérons le recouvrement ouvert α de $[0,1]^n$ par les 2^n parties de $[0,1]^n$ de la forme $U_1 \times \cdots \times U_n$, où chaque U_i est soit l'intervalle $[0,1[$ soit l'intervalle $]0,1]$ pour $1 \leq i \leq n$. Aucun ouvert de α n'intersecte deux faces opposées du cube $[0,1]^n$. On en déduit $D(\alpha) \geq n$ d'après le lemme de Lebesgue (voir par exemple [**LiW**]). Soit $f\colon [0,1]^n \to K$ une application continue ϵ-injective, où K est un espace compact métrisable. Puisque f est ϵ-injective, l'ensemble $f^{-1}(y)$ est contenu dans un élément de α pour tout $y \in K$. Il en résulte que f est α-compatible d'après le lemme 3.4. En utilisant le lemme 3.3, on obtient $D(\alpha) \leq \dim(K)$. On en déduit $n \leq \dim_\epsilon([0,1]^n,d)$. □

Corollaire 3.10. — *Soit P un polyèdre et notons ρ une métrique sur P compatible avec la topologie. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit ρ_n la métrique sur P^n définie par*

$$\rho_n(x,y) = \max_{1\leq i\leq n} \rho(x_i,y_i) \quad \textit{quels que soient } \ x=(x_i), y=(y_i) \in P^n.$$

Alors il existe une constante $\epsilon_0 = \epsilon_0(P,\rho)$ qui ne dépend pas de n et vérifiant

$$\dim_\epsilon(P^n,\rho_n) = n\dim(P)$$

quel que soit $\epsilon \leq \epsilon_0$.

Démonstration. — Posons $\delta = \dim(P)$. On a $\dim_\epsilon(P^n, \rho_n) \leq \dim(P^n) = n\delta$ pour tout $\epsilon > 0$. On peut plonger topologiquement P dans $\mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{N}$, de telle façon que le cube unité $C = [0,1]^\delta \times \{0\} \subset \mathbb{R}^N$ soit contenu dans P. Notons ρ' la métrique sur $P \subset \mathbb{R}^N$ induite par la norme sup. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit ρ'_n la métrique sur P^n définie par

$$\rho'_n(x,y) = \max_{1 \leq i \leq n} \rho'(x_i, y_i) \quad \text{quels que soient } \; x = (x_i), y = (y_i) \in P^n.$$

Observons que ρ'_n est la métrique sur $P^n \subset \mathbb{R}^{nN}$ induite par la norme sup. On a $\dim_\epsilon(P^n, \rho'_n) \geq \dim_\epsilon(C^n, \rho'_n)$ pour tout $\epsilon > 0$ puisque $C^n \subset P^n$. D'autre part, il résulte de la proposition 3.9 que $\dim_\epsilon(C^n, \rho'_n) = n\delta$ pour tout $\epsilon \leq 1$. Cela montre que $\dim_\epsilon(P^n, \rho'_n) \geq n\delta$ pour tout $\epsilon \leq 1$. Par compacité de P, il existe ϵ_0 tel que pour tous $p, q \in P$ vérifiant $\rho(p,q) \leq \epsilon_0$ on ait $\rho'(p,q) < 1$. Par définition de ρ_n et ρ'_n, il résulte que tous $x, y \in P^n$ tels que $\rho_n(x,y) \leq \epsilon_0$ vérifient $\rho'_n(x,y) < 1$. On en déduit que pour tout $\epsilon \leq \epsilon_0$ on a

$$\dim_\epsilon(P^n, \rho_n) \geq \dim_1(P^n, \rho'_n) \geq n\delta$$

ce qui complète la preuve du corollaire 3.10. □

3.3. Dimension topologique moyenne

Dans cette section on suppose que G est un groupe dénombrable moyennable agissant continûment sur un espace compact métrisable X.

Définition de $\mathbf{mdim}(X, G)$. — Soient $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement de X et $A \in \mathcal{F}(G)$. On définit le recouvrement α_A par

$$\alpha_A = \bigvee_{g \in A} g^{-1}\alpha.$$

Notons que si le recouvrement α est fini, il en est de même pour α_A.

Lemme 3.11. — *Soit α un recouvrement ouvert fini. On a :*

(i) $D(\alpha_A) \leq D(\alpha_B)$ *quelles que soient $A, B \in \mathcal{F}(G)$ telles que $A \subset B$,*

(ii) $D(\alpha_{A \cup B}) \leq D(\alpha_A) + D(\alpha_B)$ *quelles que soient $A, B \in \mathcal{F}(G)$ telles que $A \cap B = \varnothing$,*

(iii) $D(\alpha_{Ag}) = D(\alpha_A)$ *quels que soient $g \in G$ et $A \in \mathcal{F}(G)$.*

Démonstration. — La propriété (i) résulte du fait que si $A \subset B$ alors $\alpha_B \succ \alpha_A$. Si $A \cap B = \varnothing$, alors $\alpha_{A \cup B} = \alpha_A \vee \alpha_B$. On a donc $D(\alpha_{A \cup B}) \leq D(\alpha_A) + D(\alpha_B)$ d'après le lemme 3.6. Cela montre (ii). La propriété (iii) résulte du fait que l'homéomorphisme $x \mapsto g^{-1}x$ envoie α_A sur α_{Ag}. □

Définissons $D(\alpha, G)$ par

$$D(\alpha, G) = \lim_{n\to\infty} \frac{D(\alpha_{F_n})}{|F_n|}, \tag{3.2}$$

où (F_n) est une suite de Følner de G. Il résulte du lemme 3.11 et du corollaire 2.12 que cette limite existe, qu'elle est finie et qu'elle ne dépend pas du choix de la suite de Følner (F_n).

La *dimension topologique moyenne* $\mathrm{mdim}(X, G) \in [0, \infty]$ du système dynamique (X, G) est définie par

$$\mathrm{mdim}(X, G) = \sup_{\alpha} D(\alpha, G),$$

où α décrit tous les recouvrements ouverts finis de X.

Approche métrique de mdim(X, G). — Soit d une métrique sur X qui est compatible avec la topologie.

Pour tout $A \in \mathcal{F}(G)$ soit d_A la métrique sur X définie par

$$d_A(x, y) = \max_{g\in A} d(gx, gy) \quad \text{quels que soient } x, y \in X.$$

Il est clair que d_A est compatible avec la topologie de X.

Lemme 3.12. — *Soit $\epsilon > 0$. Alors on a :*

(i) $\dim_\epsilon(X, d_A) \leq \dim_\epsilon(X, d_B)$ *quelles que soient $A, B \in \mathcal{F}(G)$ telles que $A \subset B$,*

(ii) $\dim_\epsilon(X, d_{A\cup B}) \leq \dim_\epsilon(X, d_A) + \dim_\epsilon(X, d_B)$ *quelles que soient $A, B \in \mathcal{F}(G)$ telles que $A \cap B = \varnothing$,*

(iii) $\dim_\epsilon(X, d_{Ag}) = \dim_\epsilon(X, d_A)$ *quels que soient $g \in G$ et $A \in \mathcal{F}(G)$.*

Démonstration. — La propriété (i) est une conséquence immédiate du lemme 3.8 appliquée à l'application identité de (X, d_A) dans (X, d_B) puisque l'on a $d_A \leq d_B$ si $A \subset B$. Soient $A, B \in \mathcal{F}(G)$ telles que $A \cap B = \varnothing$. Soient K et L des espaces compacts métrisables, et soient $f\colon X \to K$ et $g\colon X \to L$ des applications continues. Supposons que f est ϵ-injective relativement à d_A et que g est ϵ-injective relativement à d_B. Alors l'application $F\colon X \to K \times L$ définie par $F(x) = (f(x), g(x))$ est ϵ-injective relativement à la métrique $\max(d_A, d_B) = d_{A\cup B}$. Puisque $\dim(K \times L) \leq \dim(K) + \dim(L)$ d'après un résultat classique en théorie de la dimension (voir par exemple [**HuW**]), on obtient (ii). La propriété (iii) résulte du fait que l'application $x \mapsto gx$ est une isométrie entre les espaces métriques (X, d_{Ag}) et (X, d_A). $\square$

On définit le réel $\mathrm{mdim}_\epsilon(X, d, G)$ par

$$\mathrm{mdim}_\epsilon(X, d, G) = \lim_{n\to\infty} \frac{\dim_\epsilon(X, d_{F_n})}{|F_n|},$$

où $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Følner de G. Il résulte du lemme 3.12 et du corollaire 2.12 que cette limite existe, qu'elle est finie et qu'elle ne dépend pas du choix de la suite de Følner (F_n).

Soient $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X et d une métrique sur X compatible avec la topologie. On appelle *nombre de Lebesgue* de α relativement à d un réel $\lambda > 0$ vérifiant la condition suivante : pour toute partie $E \subset X$ de d-diamètre $\mathrm{diam}(E,d) \leq \lambda$, il existe $i \in I$ tel que $E \subset U_i$. Notons que tout recouvrement ouvert d'un espace compact métrisable admet un nombre de Lebesgue.

Théorème 3.13. — *Soit X un espace compact métrisable et G un groupe dénombrable moyennable agissant continûment sur X. Soit d une métrique sur X compatible avec la topologie. Alors on a*

$$\mathrm{mdim}(X,G) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{mdim}_\epsilon(X,d,G). \tag{3.3}$$

Démonstration. — Soient $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini de X et $\lambda > 0$ un nombre de Lebesgue de α relativement à la métrique d. Montrons que l'on a

$$D(\alpha_A) \leq \dim_\lambda(X, d_A) \tag{3.4}$$

quelle que soit $A \in \mathcal{F}(G)$. Pour voir cela, considérons un espace compact métrisable K tel qu'il existe une application continue $f \colon X \to K$ qui est λ-injective relativement à la métrique d_A. Alors, quels que soient $y \in K$ et $g \in A$, l'ensemble $gf^{-1}(y)$ a un d-diamètre strictement inférieur à λ. Comme λ est un nombre de Lebesgue pour α, on en déduit que $f^{-1}(y)$ est contenu dans un ouvert de α_A. Donc f est α_A-compatible d'après le lemme 3.4. On en déduit $D(\alpha_A) \leq \dim(K)$ en utilisant le lemme 3.3. Cela démontre l'inégalité (3.4).

Soit maintenant une suite de Følner $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de G. En utilisant l'inégalité (3.4), on obtient

$$\frac{D(\alpha_{F_n})}{|F_n|} \leq \frac{\dim_\lambda(X, d_{F_n})}{|F_n|}$$

quel que soit $n \in \mathbb{N}$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$D(\alpha, G) \leq \mathrm{mdim}_\lambda(X, d, G).$$

Puisque l'application $\epsilon \mapsto \mathrm{mdim}_\epsilon(X,G)$ est décroissante, on a

$$D(\alpha, G) \leq \lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{mdim}_\epsilon(X, d, G).$$

On en déduit

$$\mathrm{mdim}(X,G) = \sup_\alpha D(\alpha, G) \leq \lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{mdim}_\epsilon(X, d, G).$$

Montrons l'inégalité

$$\mathrm{mdim}(X,G) \geq \lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{mdim}_\epsilon(X, d, G) \tag{3.5}$$

ce qui terminera la preuve de (3.3).

Soit $\epsilon > 0$. Considérons un recouvrement ouvert fini $\beta = (B_j)_{j \in J}$ de X par des d-boules ouvertes de rayon $\epsilon/2$. Soit $A \in \mathcal{F}(G)$. D'après le lemme 3.5, il existe un polyèdre P vérifiant $\dim(P) = D(\beta_A)$ et une application continue $f \colon X \to P$ qui est β_A-compatible. Soit $y \in P$. Puisque f est β_A-compatible, l'ensemble $f^{-1}(y)$ est contenu dans un élément de β_A. Il en résulte que pour tout $g \in A$, il existe une boule B_i telle que $gf^{-1}(y) \subset B_i$. Ceci montre que f est ϵ-injective relativement à d_A. On en déduit

$$\dim_\epsilon(X, d_A) \leq \dim(P) = D(\beta_A).$$

Si (F_n) est une suite de Følner, on a donc

$$\frac{\dim_\epsilon(X, d_{F_n})}{|F_n|} \leq \frac{D(\beta_{F_n})}{|F_n|}$$

pour tout n. Par passage à la limite en n, on obtient

$$\mathrm{mdim}_\epsilon(X, d, G) \leq D(\beta, G) \leq \mathrm{mdim}(X, G).$$

L'inégalité (3.5) s'en déduit en faisant tendre ϵ vers 0. $\square$

Un sous-ensemble Y de X est dit *G-invariant* si $gY \subset Y$ quel que soit $g \in G$.

Proposition 3.14. — *Soit Y un sous-ensemble fermé et G-invariant de X. Alors on a* $\mathrm{mdim}(Y, G) \leq \mathrm{mdim}(X, G)$.

Démonstration. — Soient $A \in \mathcal{F}(G)$ et $\epsilon > 0$. Si $f\colon X \to K$ est ϵ-injective relativement à d_A, alors la restriction de f à Y l'est aussi. Il en résulte $\dim_\epsilon(Y, d_A) \leq \dim_\epsilon(X, d_A)$. Donc, si (F_n) est une suite de Følner de G, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{mdim}_\epsilon(Y, d, G) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\dim_\epsilon(Y, d_{F_n})}{|F_n|} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \frac{\dim_\epsilon(X, d_{F_n})}{|F_n|} = \mathrm{mdim}_\epsilon(X, d, G).\end{aligned}$$

En faisant tendre ϵ vers 0, on en déduit $\mathrm{mdim}(Y, G) \leq \mathrm{mdim}(X, G)$ d'après le théorème 3.13. $\square$

3.4. Sous-décalages

Soient G un groupe dénombrable moyennable et K un espace compact métrisable. On appelle *G-décalage* (ou encore *G-décalage d'espace de symboles* K) le système dynamique défini par l'action (à gauche) de G sur l'espace produit K^G

$$g'(x_g)_{g\in G} = (x_{gg'})_{g\in G}$$

quels que soient $g' \in G$ et $(x_g)_{g\in G} \in K^G$. Notons que K^G est compact et métrisable puisque c'est un produit dénombrable d'espaces compacts métrisables. Un sous-ensemble G-invariant de K^G est appelé un *sous-décalage*.

Pour toute partie $E \subset G$, on note π_E la projection de $K^G = K^E \times K^{G\setminus E}$ sur K^E. Le résultat suivant est la "Pro-Mean Inequality" que l'on trouve dans [**Gro**, Prop. 1.9.A].

Proposition 3.15. — *Soit K un espace compact métrisable de dimension topologique finie. Soit $X \subset K^G$ un sous-décalage fermé. Alors on a*

$$\operatorname{mdim}(X, G) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{\dim(\pi_{F_n}(X))}{|F_n|} \tag{3.6}$$

pour toute suite de Følner $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de G.

Démonstration. — Choisissons une métrique d sur K^G compatible avec la topologie. Soit $\epsilon > 0$. Par compacité de K^G, il existe $A \in \mathcal{F}(G)$ telle que,

$$\pi_A(x) = \pi_A(y) \Rightarrow d(x, y) < \epsilon$$

quels que soient $x, y \in K^G$. On peut supposer $1_G \in A$.

Soit $F \in \mathcal{F}(G)$. Soit $f \colon X \to K^{AF}$ la restriction de π_{AF} à X. Si $x, y \in X$ vérifient $f(x) = f(y)$ alors on a $\pi_A(gx) = \pi_A(gy)$ pour tout $g \in F$. Donc f est ϵ-injective relativement à la métrique d_F. On en déduit

$$\dim_\epsilon(X, d_F) \leq \dim(f(X)).$$

Observons que $F \subset AF$ puisque $1_G \in A$. Donc $f(X) \subset \pi_F(X) \times K^{AF \setminus F}$. Ceci implique

$$\begin{aligned} \dim(f(X)) &\leq \dim(\pi_F(X) \times K^{AF \setminus F}) \\ &\leq \dim(\pi_F(X)) + \dim(K^{AF \setminus F}) \\ &\leq \dim(\pi_F(X)) + |AF \setminus F| \dim(K). \end{aligned}$$

Comme $AF \setminus F = F \triangle (AF)$, on obtient

$$\dim_\epsilon(X, d_F) \leq \dim(\pi_F(X)) + |F \triangle (AF)| \dim(K). \tag{3.7}$$

Considérons une suite de Følner $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de G. L'inégalité (3.7) implique

$$\frac{\dim_\epsilon(X, d_{F_n})}{|F_n|} \leq \frac{\dim(\pi_{F_n}(X))}{|F_n|} + \frac{|F_n \triangle (AF_n)|}{|F_n|} \dim(K) \tag{3.8}$$

pour tout n. Puisque

$$F_n \triangle (AF_n) \subset \bigcup_{g \in A} F_n \triangle (gF_n),$$

et que (F_n) est une suite de Følner de G, on en déduit

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|F_n \triangle (AF_n)|}{|F_n|} = 0.$$

On obtient en faisant tendre n vers l'infini dans (3.8)

$$\operatorname{mdim}_\epsilon(X, d, G) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{\dim(\pi_{F_n}(X))}{|F_n|}.$$

D'après le théorème 3.13, on obtient l'inégalité (3.6) en faisant tendre ϵ vers 0. $\square$

Puisque $\dim(K^{n+m}) \leq \dim(K^n) + \dim(K^m)$ quels que soient $n, m \geq 1$, on sait d'après un résultat classique sur les suites sous-additives que la suite $\dim(K^n)/n$ converge et que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dim(K^n)}{n} = \inf_{n\geq 1} \frac{\dim(K^n)}{n}.$$

En appliquant la dernière proposition à $X = K^G$, on obtient le résultat suivant :

Corollaire 3.16. — *Supposons que G est infini. Alors, pour tout espace compact métrisable K, on a*

$$\operatorname{mdim}(K^G, G) \leq \inf_{n\geq 1} \frac{\dim(K^n)}{n}.$$

En particulier, on a $\operatorname{mdim}(K^G, G) \leq \dim(K)$. □

3.5. Sous-décalages de type bloc

Soit G un groupe dénombrable moyennable. Soit H un sous-groupe d'indice fini de G. Fixons un système complet de représentants des classes à gauche de G suivant H, c'est-à-dire une partie $C \subset G$ telle que l'application de $C \times H$ dans G définie par $(c, h) \mapsto ch$ est une bijection. D'après le théorème 1.12, le sous-groupe H est moyennable. La proposition suivante montre comment obtenir une suite de Følner de G à partir d'une suite de Følner de H.

Proposition 3.17. — *Soit $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Følner de H. Alors la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où $F_n = CL_n$, est une suite de Følner de G.*

Dans la preuve de la proposition 3.17, on utilise la propriété suivante qui résulte immédiatement de la définition de la différence symétrique $\triangle$.

Lemme 3.18. — *Soient $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ des familles d'ensembles vérifiant*

$$(A_i \cup B_i) \cap (A_j \cup B_j) = \varnothing \quad \textit{quels que soient } i \neq j.$$

Alors on a

$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \triangle \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} A_i \triangle B_i.$$

□

Démonstration de la proposition 3.17. — Soit $g \in G$. Puisque G agit par multiplication à gauche sur l'ensemble des classes à gauche de G suivant H, il existe une permutation $\sigma\colon C \to C$ et une application $\rho\colon C \to H$ telle que

$$gc = \sigma(c)\rho(c) \quad \text{pour tout } c \in C.$$

On a

$$F_n = CL_n = \bigcup_{c\in C} cL_n$$

et

$$gF_n = gCL_n = \bigcup_{c \in C} \sigma(c)\rho(c)L_n.$$

En utilisant le lemme 3.18, on obtient

$$F_n \triangle (gF_n) = \bigcup_{c \in C} (cL_n) \triangle (c\rho(\sigma^{-1}(c))L_n).$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} \frac{|F_n \triangle (gF_n)|}{|F_n|} &= \sum_{c \in C} \frac{|(cL_n) \triangle (c\rho(\sigma^{-1}(c))L_n)|}{|F_n|} \\ &= \sum_{c \in C} \frac{|L_n \triangle (\rho(\sigma^{-1}(c))L_n)|}{[G : H]|L_n|}. \end{aligned}$$

Cela montre que

$$\frac{|F_n \triangle (gF_n)|}{|F_n|} \to 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty$$

puisque $\rho(\sigma^{-1}(c)) \in H$ pour tout $c \in C$ et que (L_n) est une suite de Følner de H. Donc (F_n) est une suite de Følner de G. □

Soient K un espace compact métrisable et $B \subset K^C$ un fermé. On définit le sous-ensemble $X_0 \subset K^G$ par

$$\begin{aligned} X_0 = X_0(H, C, B) &= \{ x \in K^G \mid \pi_C(hx) \in B \text{ pour tout } h \in H \} \\ &= \bigcap_{h \in H} h^{-1}\pi_C^{-1}(B). \end{aligned}$$

Il est clair que X_0 est un fermé H-invariant de K^G.

Remarque 3.19. — Il y a un homéomorphisme H-équivariant $B^H \to X_0$ induit par l'inclusion $B^H \subset (K^C)^H = K^{C \times H} = K^G$, où l'on identifie $C \times H$ avec G par la bijection $(c, h) \mapsto ch$.

Le sous-décalage fermé $X \subset K^G$ défini par

$$X = X(H, C, B) = \bigcup_{g \in G} gX_0 = \bigcup_{c \in C} cX_0$$

est appelé *sous-décalage de type bloc* associé au triplet (H, C, B).

Lemme 3.20. — *Supposons que la dimension topologique de K est finie, que H est distingué dans G et que B satisfait à la propriété suivante : il existe une famille $(B_c)_{c \in C}$ de parties fermées de K telle que $B = \prod_{c \in C} B_c$. Alors le sous-décalage de type bloc $X = X(H, C, B)$ vérifie*

$$\operatorname{mdim}(X, G) \leq \frac{\dim(B)}{[G : H]}.$$

Démonstration. — Soient $h \in H$ et $g \in G$. Montrons que

$$\dim(\pi_{Ch}(gX_0)) \leq \dim(B). \tag{3.9}$$

Observons tout d'abord que l'on a

$$\pi_{Ch}(gX_0) \subset \prod_{c \in C} \pi_{ch}(gX_0).$$

Pour tout $c \in C$, l'espace $\pi_{ch}(gX_0)$ est naturellement homéomorphe à $\pi_{chg}(X_0)$. Puisque H est distingué dans G, il existe $h' \in H$ tel que $hg = gh'$. L'espace $\pi_{chg}(X_0) = \pi_{cgh'}(X_0)$ est homéomorphe à $\pi_{cg}(h'X_0)$. Comme X_0 est H-invariant, on a $h'X_0 = X_0$. Donc $\pi_{ch}(gX_0)$ est homéomorphe à $\pi_{cg}(X_0)$. D'autre part, il existe une permutation $\sigma \colon C \to C$ et une application $\eta \colon C \to H$ telles que $cg = \sigma(c)\eta(c)$ pour tout $c \in C$. L'espace $\pi_{cg}(X_0) = \pi_{\sigma(c)\eta(c)}(X_0)$ est homéomorphe à $\pi_{\sigma(c)}(\eta(c)X_0) = \pi_{\sigma(c)}(X_0)$ pour tout $c \in C$. Il en résulte que $\pi_{Ch}(gX_0)$ est homéomorphe à une partie fermée de $\prod_{c \in C} B_{\sigma(c)} = B$. Cela démontre (3.9).

Soit $L \in \mathcal{F}(H)$. On a

$$\pi_{CL}(X) = \pi_{CL}(\bigcup_{g \in C} gX_0) = \bigcup_{g \in C} \pi_{CL}(gX_0).$$

Il en résulte en utilisant un théorème de somme pour la dimension topologique dim (voir par exemple [**HuW**]),

$$\dim(\pi_{CL}(X)) \leq \max_{g \in C} \dim(\pi_{CL}(gX_0)).$$

Par ailleurs, on a

$$\pi_{CL}(gX_0) \subset \prod_{h \in L} \pi_{Ch}(gX_0),$$

ce qui implique

$$\dim(\pi_{CL}(X)) \leq \sum_{h \in L} \dim(\pi_{Ch}(gX_0)).$$

D'après l'inégalité (3.9), on obtient

$$\dim(\pi_{CL}(X)) \leq |L| \dim(B). \tag{3.10}$$

Considérons maintenant une suite de Følner $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de H. Alors $(CL_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Følner de G d'après la proposition 3.17. On a donc

$$\operatorname{mdim}(X, G) \leq \liminf_{n \to \infty} \frac{\dim(\pi_{CL_n}(X))}{|CL_n|}$$

d'après la proposition 3.15. Puisque $|CL_n| = |C||L_n| = [G : H]|L_n|$, l'inégalité (3.10) implique

$$\frac{\dim(\pi_{CL_n}(X))}{|CL_n|} \leq \frac{\dim(B)}{[G : H]}.$$

On en déduit $\operatorname{mdim}(X, G) \leq \dim(B)/[G : H]$. □

Théorème 3.21. — *Soit G un groupe dénombrable moyennable. Soit P un polyèdre et $p_0 \in P$. Soient H un sous-groupe distingué d'indice fini de G et C un système complet de représentants des classes de G suivant H. Soit $R \subset C$ et considérons le sous-ensemble fermé $B \subset P^C$ défini par*

$$B = P^R \times \{p_0\}^{C \setminus R} \subset P^R \times P^{C \setminus R} = P^C.$$

Soit $X = X(H, C, B) \subset P^G$ le sous-décalage de type bloc associé à (H, C, B). Alors on a

$$\mathrm{mdim}(X, G) = \frac{|R| \dim(P)}{[G : H]}.$$

Démonstration. — Pour simplifier, posons $\delta = \dim(P)$, $r = |R|$ et $\nu = [G : H]$. En appliquant le lemme 3.20, on obtient $\mathrm{mdim}(X, G) \leq r\delta/\nu$ puisque $\dim(B) = \dim(P^R) = r\delta$. Il suffit donc de démontrer que

$$\mathrm{mdim}(X, G) \geq \frac{r\delta}{\nu}. \tag{3.11}$$

Considérons une métrique ρ sur P qui est compatible avec la topologie. Puisque G est dénombrable, il existe une famille $(\alpha_g)_{g \in G}$ de réels strictement positifs tels que $\sum_{g \in G} \alpha_g < \infty$ et $\alpha_{1_G} = 1$. Considérons la métrique d sur P^G définie par

$$d(x, y) = \sum_{g \in G} \alpha_g \rho(x_g, y_g) \quad \text{quels que soient } x = (x_g), y = (y_g) \in P^G.$$

Observons que l'on a

$$\rho(x_{1_G}, y_{1_G}) \leq d(x, y) \quad \text{quels que soient } x = (x_g), y = (y_g) \in P^G. \tag{3.12}$$

Soit $A \in \mathcal{F}(G)$. Rappelons que la métrique d_A sur P^G est définie par

$$d_A(x, y) = \max_{g \in A} d(gx, gy) \quad \text{quels que soient } x, y \in P^G.$$

Soit ρ_A la métrique sur P^A donnée par

$$\rho_A(u, v) = \max_{g \in A} \rho(u_g, v_g) \quad \text{quels que soient } u = (u_g), v = (v_g) \in P^A.$$

Considérons le plongement topologique $\psi_A \colon P^A \to P^G$ qui associe à tout $u = (u_g)_{g \in A} \in P^A$ l'élément $x = (x_g)_{g \in G} \in P^G$ défini par $x_g = u_g$ si $g \in A$ et $x_g = p_0$ sinon. On obtient en utilisant l'inégalité (3.12)

$$\rho_A(u, v) \leq d_A(\psi_A(u), \psi_A(v)) \quad \text{quels que soient } u, v \in P^A. \tag{3.13}$$

Soit $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Følner de H et considérons la suite de Følner $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de G définie par $F_n = CL_n$ (voir la proposition 3.17). Puisque $\psi_{RL_n}(u) \in X_0 \subset X$ quel que soit $u \in P^{RL_n}$, l'application ψ_{RL_n} est un plongement topologique de P^{RL_n} dans X. On a

$$\rho_{RL_n}(u, v) \leq d_{RL_n}(\psi_{RL_n}(u), \psi_{RL_n}(v)) \leq d_{F_n}(\psi_{RL_n}(u), \psi_{RL_n}(v))$$

quels que soient $u, v \in P^{RL_n}$ d'après (3.13). En appliquant le lemme 3.8 à l'application

$$\psi_{RL_n} \colon P^{RL_n} \to X,$$

on obtient

$$\dim_\epsilon(X, d_{F_n}) \geq \dim_\epsilon(P^{RL_n}, \rho_{RL_n}) \tag{3.14}$$

quel que soit $\epsilon > 0$. D'après le corollaire 3.10, il existe une constante $\epsilon_0 = \epsilon(P, \rho)$, qui ne dépend pas de n, telle que

$$\dim_\epsilon(P^{RL_n}, \rho_{RL_n}) = |RL_n|\delta$$

quel que soit $\epsilon \leq \epsilon_0$. Comme $|RL_n| = |R||L_n| = r|F_n|/\nu$, on en déduit en utilisant l'inégalité (3.14)

$$\frac{\dim_\epsilon(X, d_{F_n})}{|F_n|} \geq \frac{r\delta}{\nu}$$

quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $\epsilon \leq \epsilon_0$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient $\mathrm{mdim}_\epsilon(X, d, G) \geq r\delta/\nu$ quel que soit $\epsilon \leq \epsilon_0$. On en déduit (3.11) en faisant tendre ϵ vers 0. □

En choisissant $R = C$, on a $X = P^G$. On en déduit le résultat suivant :

Corollaire 3.22. — *On a* $\mathrm{mdim}(P^G, G) = \dim(P)$ *pour tout polyèdre* P. □

Corollaire 3.23. — *Soit* $K = [0,1]^{\mathbb{N}}$ *le cube de Hilbert. Alors on a* $\mathrm{mdim}(K^G, G) = \infty$.

Démonstration. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $([0,1]^n)^G$ est un sous-décalage fermé de K^G, il résulte de la proposition 3.14 que l'on a $\mathrm{mdim}(K^G, G) \geq n$. □

Corollaire 3.24. — *Supposons que pour tout entier* $\nu \geq 1$*, il existe un sous-groupe distingué de* G *d'indice fini* ν *(par exemple si* G *se surjecte sur* $\mathbb{Z}$*). Alors pour tout nombre rationnel* ρ *tel que* $0 \leq \rho \leq \dim(P)$*, il existe un sous-décalage de type bloc* $X \subset P^G$ *vérifiant* $\mathrm{mdim}(X, G) = \rho$.

Démonstration. — On écrit $\rho = r\dim(P)/\nu$, où r et ν sont des entiers vérifiant $\nu \geq 1$ et $0 \leq r \leq \nu$. Soient H un sous-groupe de G d'indice fini ν et C un système complet de représentants des classes de G suivant H. Soit $R \subset C$ un sous-ensemble de cardinal r. Considérons le sous-décalage de type bloc $X \subset P^G$ associé à (H, C, B), où $B = P^R \times \{p_0\}^{C \setminus R} \subset P^C$. On a $\mathrm{mdim}(X, G) = \rho$ d'après le théorème 3.21. □

3.6. Construction d'un sous-décalage fermé de dimension topologique moyenne arbitraire

Démontrons le résultat principal de ce chapitre.

Démonstration du théorème 3.1. — Soit $\zeta = \rho/\dim(P)$. Si $\rho = \dim(P)$, on peut choisir $X = P^G$ d'après le corollaire 3.22. On peut donc supposer $\zeta < 1$.

Puisque G contient des sous-groupes d'indice fini arbitrairement grand, il existe une suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-groupes distingués d'indice fini de G tels que $H_0 = G$, $H_{n+1} \subset H_n$ et $H_{n+1} \neq H_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Considérons la suite d'entiers positifs $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\nu_n = [G : H_n]$. On a $\nu_0 = 1$ et $\nu_{n+1}/\nu_n = [H_n : H_{n+1}] \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut donc choisir (ν_n) comme base pour l'approximation de ζ relativement à $1/\nu_n$ (voir par exemple [**Bou**, IV p. 40]). Ces approximations sont obtenues de la façon suivante. Soit a_n la partie entière de $\nu_n\zeta$ et posons $b_n = a_n + 1$. Alors $u_n = a_n/\nu_n$ et $v_n = b_n/\nu_n$ vérifient

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \zeta \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 1 \tag{3.15}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, les suites (u_n) et (v_n) convergent vers ζ.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, choisissons un système complet $C_n \subset G$ de représentants des classes à gauche de G suivant H_n. Soit $\mu_n \colon C_{n+1} \to C_n$ l'application qui associe à chaque élément de C_{n+1} sa classe à gauche suivant H_n. Notons que μ_n est surjective et que le cardinal de $\mu_n^{-1}(c)$ est égal à ν_{n+1}/ν_n pour tout $c \in C_n$. On a $a_n\nu_{n+1}/\nu_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n\nu_{n+1}/\nu_n$ pour tout n d'après (3.15). On en déduit qu'en posant $I_0 = \emptyset$ et $J_0 = C_0$, on peut (de façon non unique) construire par récurrence des sous-ensembles $I_n \subset J_n \subset C_n$ vérifiant

(P1) $|I_n| = a_n$,

(P2) $|J_n| = b_n$,

(P3) $\mu_n^{-1}(I_n) \subset I_{n+1}$,

(P4) $J_{n+1} \subset \mu_n^{-1}(J_n)$,

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Fixons un point base $p_0 \in P$ et considérons les sous-ensembles $A_n \subset B_n \subset P^{C_n}$ définis par

$$A_n = P^{I_n} \times \{p_0\}^{C_n\setminus I_n} \quad \text{et} \quad B_n = P^{J_n} \times \{p_0\}^{C_n\setminus J_n}.$$

Soient $Y^{(n)} \subset P^G$ et $Z^{(n)} \subset P^G$ les sous-décalages de type bloc associés respectivement à (H_n, C_n, A_n) et (H_n, C_n, B_n). On a alors $Y^{(n)} = \bigcup_{g\in G} gY_0^{(n)}$ et $Z^{(n)} = \bigcup_{g\in G} gZ_0^{(n)}$, où

$$\begin{aligned} Y_0^{(n)} &= \{\, x = (x_g)_{g\in G} \in P^G \mid \ \pi_{C_n}(hx) \in A_n \quad \text{quel que soit } h \in H_n\} \\ &= \{\, x = (x_g)_{g\in G} \in P^G \mid \ x_g = p_0 \quad \text{si } g \notin I_nH_n\}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} Z_0^{(n)} &= \{\, x = (x_g)_{g\in G} \in P^G \mid \ \pi_{C_n}(hx) \in B_n \quad \text{quel que soit } h \in H_n\} \\ &= \{x = (x_g)_{g\in G} \in P^G \mid \ x_g = p_0 \quad \text{si } g \notin J_nH_n\}. \end{aligned}$$

Montrons que l'on a

(Q1) $Y^{(n)} \subset Z^{(n)}$,

(Q2) $Y^{(n)} \subset Y^{(n+1)}$,

(Q3) $Z^{(n+1)} \subset Z^{(n)}$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La propriété (Q1) résulte de l'inclusion $I_n \subset J_n$ qui implique $Y_0^{(n)} \subset Z_0^{(n)}$. Considérons un élément $g \in I_n H_n$. Alors $g = ch$, où $c \in I_n$ et $h \in H_n$. Écrivons $g = c'h'$, où $c' \in C_{n+1}$ et $h' \in H_{n+1}$. Observons que $\mu_n(c') = c$ puisque $h'h^{-1} \in H_n$. Cela implique $c' \in I_{n+1}$ d'après (P3). Donc $I_n H_n \subset I_{n+1} H_{n+1}$. Il en résulte que l'on a $Y_0^{(n)} \subset Y_0^{(n+1)}$. Cela montre (Q2). De façon analogue, on en déduit $J_{n+1} H_{n+1} \subset J_n H_n$ en utilisant (P4). Cela implique $Z_0^{(n+1)} \subset Z_0^{(n)}$ et démontre (Q3).

Considérons maintenant le sous-décalage fermé $X \subset P^G$ défini par

$$X = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z^{(n)}.$$

En appliquant le théorème 3.21 et en utilisant les propriétés (P1) et (P2), on obtient

$$\operatorname{mdim}(Y^{(n)}, G) = \frac{|I_n|}{\nu_n} \dim(P) = u_n \dim(P),$$

et

$$\operatorname{mdim}(Z^{(n)}, G) = \frac{|J_n|}{\nu_n} \dim(P) = v_n \dim(P).$$

Puisque $X \subset Z^{(n)}$, on obtient

$$\operatorname{mdim}(X, G) \leq \operatorname{mdim}(Z^{(n)}, G) = v_n \dim(P)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la proposition 3.14. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\operatorname{mdim}(X, G) \leq \zeta \dim(P) = \rho. \tag{3.16}$$

D'autre part, on a $Y^{(n)} \subset Y^{(N)} \subset Z^{(N)}$ pour tout $N \geq n$ d'après (Q1) et (Q2). Il en résulte

$$Y^{(n)} \subset \bigcap_{N \geq n} Z^{(N)} = X.$$

Appliquant encore la proposition 3.14, on obtient

$$u_n \dim(P) = \operatorname{mdim}(Y^{(n)}, G) \leq \operatorname{mdim}(X, G)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. En faisant tendre n vers l'infini, on obtient

$$\rho = \zeta \dim(P) \leq \operatorname{mdim}(X, G). \tag{3.17}$$

Les inégalités (3.16) et (3.17) impliquent $\operatorname{mdim}(X, G) = \rho$. $\square$

CHAPITRE 4

ENTROPIE TOPOLOGIQUE

Dans ce chapitre, on rappelle la définition et quelques propriétés de l'entropie topologique d'un espace compact métrisable X muni d'une action continue d'un groupe dénombrable moyennable G. On démontre que si l'entropie topologique de X est finie, alors sa dimension topologique moyenne est nulle (th. 4.15). Ce résultat est démontré par E. Lindenstrauss et B. Weiss dans le cas $G = \mathbb{Z}$ (voir [**LiW**, Th. 4.2]).

Dans tout ce chapitre, X désigne un espace compact métrisable muni d'une action continue d'un groupe dénombrable G.

4.1. Recouvrements

Soient $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ et $\beta = (V_j)_{j\in J}$ des recouvrements de X. Si $\alpha \succ \beta$ et $\beta \succ \alpha$, on écrit $\alpha \sim \beta$. C'est une relation d'équivalence. Rappelons que le joint de α et β est le recouvrement $\alpha \vee \beta = (U_i \cap V_j)_{(i,j)\in I\times J}$.

La *taille* d'un recouvrement ouvert α de X est l'entier $|\alpha|_s$ défini par

$$|\alpha|_s = \min_{\alpha_0} |\alpha_0|,$$

où α_0 décrit tous les sous-recouvrements finis de α. Remarquons que cet entier est bien défini puisque X est compact.

Proposition 4.1. — *Soient α et β des recouvrements ouverts de X. On a :*

(a) $\alpha \vee \beta \succ \alpha$ *;*

(b) $|\alpha \vee \beta|_s \leq |\alpha|_s |\beta|_s$ *;*

(c) $\beta \succ \alpha \Rightarrow |\beta|_s \geq |\alpha|_s$.

Démonstration. — Posons $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ et $\beta = (V_j)_{j\in J}$.

(a) On a $U_i \cap V_j \subset U_i$ pour tout $(i,j) \in I \times J$. Ceci montre $\alpha \vee \beta \succ \alpha$.

(b) Soit α_0 (resp. β_0) un sous-recouvrement fini de α (resp. de β) de cardinal minimal. Alors $\alpha_0 \vee \beta_0$ est un sous-recouvrement ouvert fini de $\alpha \vee \beta$. Il en résulte

$$|\alpha \vee \beta|_s \leq |\alpha_0 \vee \beta_0| = |\alpha_0||\beta_0| = |\alpha|_s|\beta|_s.$$

(c) Supposons $\beta \succ \alpha$. Soit $\beta_0 = (V_j)_{j \in J'}$, avec $J' \subset J$, un sous-recouvrement fini de β de cardinal minimal. Comme $\beta \succ \alpha$, il existe $\varphi\colon J \to I$ vérifiant $V_j \subset U_{\varphi(j)}$ pour tout $j \in J$. Posons $I' = \varphi(J')$. On en déduit que $\alpha' = (U_i)_{i \in I'}$ est un sous-recouvrement fini de α de cardinal inférieur ou égal à celui de β_0. On a donc

$$|\alpha|_s \leq |\alpha'| \leq |\beta_0| = |\beta|_s.$$

□

Soit $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X. Si d est une métrique sur X compatible avec la topologie, la *maille* de α relativement à d est définie par

$$\mathrm{maille}(\alpha, d) = \sup_{i \in I} \mathrm{diam}(U_i, d),$$

où $\mathrm{diam}(U_i, d)$ désigne le d-diamètre de U_i.

Soit G un groupe dénombrable agissant continûment sur X. Pour tout $g \in G$, on note $g^{-1}\alpha$ le recouvrement ouvert $(g^{-1}U_i)_{i \in I}$. Rappelons que l'on note $\mathcal{F}(G)$ l'ensemble des parties finies non vides de G. Soit $F \in \mathcal{F}(G)$. On définit le recouvrement ouvert α_F de X par

$$\alpha_F = \bigvee_{g \in F} g^{-1}\alpha = \big(\bigcap_{g \in F} g^{-1}U_{\rho(g)}\big)_{\rho \in I^F}.$$

Soit d une métrique sur X compatible avec la topologie. On dit qu'un recouvrement ouvert α de X est *générateur* s'il existe une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}(G)$ telle que :

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{maille}(\alpha_{P_n}, d) = 0.$$

Observons que cette définition ne dépend pas du choix de la métrique d compatible avec la topologie de l'espace compact X.

Exemple 4.2. — Soient G un groupe dénombrable et K un ensemble fini. On munit K de la topologie discrète et K^G de la topologie produit. Le *G-décalage* sur K^G est l'action continue (à gauche) de G sur K^G définie par

$$(gx)_{g'} = x_{g'g}$$

quels que soient $x = (x_g)_{g \in G} \in K^G$ et $g, g' \in G$.

Soient $A \in \mathcal{F}(G)$ et $u \in K^A$. Le *A-cylindre* de u est le sous-ensemble $[u] \subset K^G$ défini par

$$[u] = \{x \in K^G \colon \pi_A(x) = u\},$$

où π_A désigne la projection canonique de $K^G = K^A \times K^{G\setminus A}$ sur K^A. Notons que $([u])_{u\in K^A}$ est une partition ouverte finie de K^G. Soit $\zeta = ([k])_{k\in K}$ la partition obtenue par les 1_G-cylindres de K^G. Alors on a

$$\zeta_A = ([u])_{u\in K^A}$$

pour tout $A \in \mathcal{F}(G)$.

Soient d une métrique sur K^G compatible avec la topologie et $n \in \mathbb{N}^*$. Par définition de la topologie produit sur K^G, il existe $P_n \in \mathcal{F}(G)$ telle que

$$\pi_{P_n}(x) = \pi_{P_n}(y) \Rightarrow d(x, y) \leq 1/n$$

quels que soient $x, y \in K^G$. Il en résulte

$$\text{maille}(\zeta_{P_n}, d) \leq 1/n.$$

On en déduit que ζ est un recouvrement ouvert générateur de K^G.

Soit f une application continue de X dans un espace compact métrisable Y. Pour tout recouvrement ouvert $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ de Y, on note $f^{-1}(\alpha)$ le recouvrement ouvert de X défini par

$$f^{-1}(\alpha) = (f^{-1}(U_i))_{i\in I}.$$

Proposition 4.3. — *Soient α et β des recouvrements ouverts de Y. Alors on a*

(a) $f^{-1}(\alpha \vee \beta) = f^{-1}(\alpha) \vee f^{-1}(\beta)$ *;*

(b) $\beta \succ \alpha \Rightarrow f^{-1}(\beta) \succ f^{-1}(\alpha)$ *;*

(c) $|f^{-1}(\alpha)|_s \leq |\alpha|_s$ *;*

(d) *Si f est surjective, alors* $|f^{-1}(\alpha)|_s = |\alpha|_s$.

Démonstration. — Posons $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ et $\beta = (V_j)_{j\in J}$.

(a) On a $f^{-1}(U_i \cap V_j) = f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(V_j)$ pour tout $(i, j) \in I \times J$. On en déduit $f^{-1}(\alpha \vee \beta) = f^{-1}(\alpha) \vee f^{-1}(\beta)$.

(b) Supposons $\beta \succ \alpha$. Alors il existe une application $\varphi\colon J \to I$ vérifiant $V_j \subset U_{\varphi(j)}$ pour tout $j \in J$. On a alors $f^{-1}(V_j) \subset f^{-1}(U_{\varphi(j)})$ pour tout $j \in J$, ce qui implique $f^{-1}(\beta) \succ f^{-1}(\alpha)$.

(c) Soit $\alpha_0 = (U_i)_{i\in I'}$, où $I' \subset I$, un sous-recouvrement fini de α de cardinal minimal. Alors $f^{-1}(\alpha_0) = (f^{-1}(U_i))_{i\in I'}$ est un sous-recouvrement fini de $f^{-1}(\alpha)$ de même cardinal que α_0. Il en résulte

$$|f^{-1}(\alpha)|_s \leq |f^{-1}(\alpha_0)| = |\alpha_0| = |\alpha|_s.$$

(d) Supposons f surjective. D'après l'inégalité (c), il suffit de démontrer $|\alpha|_s \leq |f^{-1}(\alpha)|_s$. Soit $\beta_0 = (f^{-1}(U_i))_{i\in I'}$, où $I' \subset I$, un sous-recouvrement fini de $f^{-1}(\alpha)$ de cardinal minimal. La surjectivité de f implique que la famille $\alpha' = (U_i)_{i\in I'}$ est un sous-recouvrement fini de α. On en déduit

$$|\alpha|_s \leq |\alpha'| = |\beta_0| = |f^{-1}(\alpha)|_s.$$

□

Proposition 4.4. — *Soit G un groupe dénombrable agissant continûment sur X. Soient α et β des recouvrements ouverts de X et $F, F' \in \mathcal{F}(G)$. Alors on a*

(a) $F' \subset F \Rightarrow \alpha_F \succ \alpha_{F'}$;

(b) $F \cap F' = \varnothing \Rightarrow \alpha_{F \cup F'} = \alpha_F \vee \alpha_{F'}$;

(c) $\alpha_{Fg} = g^{-1}\alpha_F$ *pour tout* $g \in G$;

(d) $\beta \succ \alpha \Rightarrow \beta_F \succ \alpha_F$;

(e) $(\alpha_{F'})_F \sim \alpha_{F'F}$.

Démonstration. — Posons $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ et $\beta = (V_j)_{j\in J}$.

(a) Supposons $F' \subset F$. Pour tout élément $\rho \in I^F$, notons $\rho_{|F'} \in I^{F'}$ la restriction de ρ à F'. On a

$$\bigcap_{g\in F} g^{-1}U_{\rho(g)} \subset \bigcap_{g\in F'} g^{-1}U_{\rho_{|F'}(g)},$$

pour tout $\rho \in I^F$. On en déduit $\alpha_F \succ \alpha_{F'}$.

(b) Supposons $F \cap F' = \varnothing$. Alors on a une bijection naturelle de $I^{F\cup F'}$ sur $I^F \times I^{F'}$ donnée par $\rho \mapsto (\rho_{|F}, \rho_{|F'})$. Pour tout $\rho \in I^{F\cup F'}$, on a

$$\bigcap_{g\in F\cup F'} g^{-1}U_{\rho(g)} = \Big(\bigcap_{g\in F} g^{-1}U_{\rho_{|F}(g)}\Big) \cap \Big(\bigcap_{g\in F'} g^{-1}U_{\rho_{|F'}(g)}\Big).$$

Il en résulte $\alpha_{F\cup F'} = \alpha_F \vee \alpha_{F'}$.

(c) Pour tout $a \in G$ définissons $R_a \colon G \to G$ par $g \mapsto ga$. Soient $g \in G$ et $F \in \mathcal{F}(G)$. Alors l'application de I^F dans I^{Fg} définie par $\rho \mapsto \rho \circ R_{g^{-1}}$ est une bijection. Pour tout $\rho \in I^F$, on a

$$g^{-1}\Big(\bigcap_{f\in F} f^{-1}U_{\rho(f)}\Big) = \bigcap_{f\in F} g^{-1}f^{-1}U_{\rho(f)} = \bigcap_{h\in Fg} h^{-1}U_{\rho\circ R_{g^{-1}}(h)}.$$

On en déduit $g^{-1}\alpha_F = \alpha_{Fg}$.

(d) Supposons $\beta \succ \alpha$. Alors il existe $\varphi\colon J \to I$ telle que $V_j \subset U_{\varphi(j)}$ pour tout $j \in J$. Il en résulte que pour tout $\rho \in J^F$, on a

$$\bigcap_{g\in F} g^{-1}V_{\rho(g)} \subset \bigcap_{g\in F} g^{-1}U_{\varphi\circ\rho(g)},$$

ce qui implique $\beta_F \succ \alpha_F$.

(e) Pour tout $\theta \in I^{F'}$, posons

$$V_\theta = \bigcap_{f'\in F'} {f'}^{-1}U_{\theta(f')}.$$

Alors on a

$$(\alpha_{F'})_F = \Big(\bigcap_{f\in F} f^{-1}V_{\rho(f)}\Big)_{\rho\in(I^{F'})^F} = \Big(\bigcap_{f\in F, f'\in F'} (f'f)^{-1}U_{\rho(f)(f')}\Big)_{\rho\in(I^{F'})^F}. \tag{4.1}$$

Remarquons que tout élément $\tau \in I^{F'F}$ définit un élément ρ de $(I^{F'})^F$ par $\rho(f)(f') = \tau(f'f)$ quels que soient $f \in F$ et $f' \in F'$. On a donc

$$\bigcap_{g \in F'F} g^{-1} U_{\tau(g)} \subset \bigcap_{f' \in F', f \in F} (f'f)^{-1} U_{\rho(f)(f')}$$

pour tout $\tau \in I^{F'F}$. On en déduit en utilisant (4.1) que $\alpha_{F'F} \succ (\alpha_{F'})_F$.

Choisissons pour chaque $g \in F'F$ un couple $(f'_g, f_g) \in F' \times F$ tel que $g = f'_g f_g$. Soit $\rho \in (I^{F'})^F$. On définit un élément $\tau \in I^{F'F}$ en posant $\tau(g) = \rho(f_g)(f'_g)$ pour tout $g \in F'F$. On a donc

$$\bigcap_{f \in F, f' \in F'} (f'f)^{-1} U_{\rho(f)(f')} \subset \bigcap_{g \in F'F} g^{-1} U_{\tau(g)}$$

pour tout $\rho \in (I^{F'})^F$, ce qui montre $(\alpha_{F'})_F \succ \alpha_{F'F}$ d'après (4.1). On en déduit $(\alpha_{F'})_F \sim \alpha_{F'F}$. □

Corollaire 4.5. — *Soient $F, F' \in \mathcal{F}(G)$ et α un recouvrement ouvert de X. Alors on a*

(a) $F' \subset F \Rightarrow \log(|\alpha_{F'}|_s) \leq \log(|\alpha_F|_s)$ *;*

(b) $(F \cap F' = \varnothing) \Rightarrow \log(|\alpha_{F \cup F'}|_s) \leq \log(|\alpha_F|_s) + \log(|\alpha_{F'}|_s)$ *;*

(c) $\log(|\alpha_{Fg}|_s) = \log(|\alpha_F|_s)$ *quel que soit* $g \in G$.

Démonstration. — Ces assertions résultent des propositions 4.1 et 4.4. □

4.2. Entropie topologique

Dans le restant du chapitre, on supposera le groupe G moyennable.

Définition de h(X). — Soient α un recouvrement ouvert de X et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Følner de G. Il résulte du corollaire 4.5 et du corollaire 2.12 que la limite suivante existe

$$\mathrm{H}(X, \alpha) = \mathrm{H}(X, G, \alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{\log(|\alpha_{F_n}|_s)}{|F_n|},$$

qu'elle est finie et qu'elle ne dépend pas du choix de la suite de Følner (F_n). Le réel $\mathrm{H}(X, \alpha)$ est appelé *entropie topologique de* α. Il résulte des propositions 4.4.(d) et 4.1.(c) que l'on a

$$\beta \succ \alpha \Rightarrow \mathrm{H}(X, \beta) \geq \mathrm{H}(X, \alpha). \tag{4.2}$$

L'*entropie topologique* du système dynamique X est définie par :

$$\mathrm{h}(X) = \mathrm{h}(X, G) = \sup_{\alpha} \mathrm{H}(X, \alpha),$$

où α décrit tous les recouvrements ouverts de X.

Soit Y un espace compact métrisable muni d'une action continue de G. Une application continue $f\colon X \to Y$ est dite *G-équivariante* si elle vérifie $f(gx) = gf(x)$ quels que soient $g \in G$ et $x \in X$.

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la définition de l'entropie :

Proposition 4.6. — *Soit X (resp. Y) un espace compact métrisable muni d'une action continue d'un groupe dénombrable moyennable G. Supposons qu'il existe un homéomorphisme G-équivariant de X sur Y. Alors on a* $\mathrm{h}(X) = \mathrm{h}(Y)$. □

Proposition 4.7. — *Soit $(\alpha^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de recouvrements ouverts de X, telle que* $\lim_{n\to\infty} \mathrm{maille}(\alpha^{(n)}, d) = 0$*, où d est une métrique sur X compatible avec la topologie. Alors on a*

$$\mathrm{h}(X) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{H}(X, \alpha^{(n)}).$$

Démonstration. — Notons $\alpha^{(n)} = (U_i^{(n)})_{i\in I_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\beta = (V_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de X et λ un nombre de Lebesgue de β relativement à d. Puisque $\lim_{n\to\infty} \mathrm{maille}(\alpha^{(n)}, d) = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{maille}(\alpha^{(n)}, d) \leq \lambda$ pour tout $n \geq N$. Fixons un entier $n \geq N$ et soit $i \in I_n$. Comme $\mathrm{diam}(U_i^{(n)}, d) \leq \lambda$, il existe $j \in J$ tel que $U_i^{(n)} \subset V_j$. Il en résulte $\alpha^{(n)} \succ \beta$ et donc

$$\mathrm{H}(X, \alpha^{(n)}) \geq \mathrm{H}(X, \beta)$$

d'après (4.2). Puisque cette inégalité est vraie pour tout $n \geq N$, on a donc

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{H}(X, \alpha^{(n)}) \geq \mathrm{H}(X, \beta).$$

On en déduit

$$\liminf_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{H}(X, \alpha^{(n)}) \geq \sup_{\beta} \mathrm{H}(X, \beta) \geq \limsup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{H}(X, \alpha^{(n)}),$$

où β décrit tous les recouvrements ouverts de X. □

Corollaire 4.8. — *Supposons que α est un recouvrement ouvert générateur de X. Alors on a*

$$\mathrm{h}(X) = \mathrm{H}(X, \alpha).$$

Démonstration. — Soit d une métrique sur X compatible avec la topologie. Puisque α est un recouvrement ouvert générateur, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{F}(G)$ telle que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{maille}(\alpha_{P_n}, d) = 0$. Fixons $n \in \mathbb{N}$. D'après les propositions 4.4.(e) et 4.1.(c), on a

$$|(\alpha_{P_n})_{F_k}|_s = |\alpha_{P_n F_k}|_s,$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. On en déduit

$$\mathrm{H}(X, \alpha_{P_n}) = \lim_{k\to\infty} \frac{\log(|(\alpha_{P_n})_{F_k}|_s)}{|F_k|} = \lim_{k\to\infty} \frac{\log(|\alpha_{P_n F_k}|_s)}{|P_n F_k|} \frac{|P_n F_k|}{|F_k|}. \tag{4.3}$$

D'après le lemme 1.37, la suite $(P_nF_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Følner de G et $\lim_{k\to\infty}\frac{|P_nF_k|}{|F_k|} = 1$. On a donc en utilisant (4.3)

$$\mathrm{H}(X,\alpha_{P_n}) = \lim_{k\to\infty}\frac{\log(|\alpha_{P_nF_k}|_s)}{|P_nF_k|} = \mathrm{H}(X,\alpha).$$

Comme $\lim_{n\to\infty}\mathrm{maille}(\alpha_{P_n},d) = 0$, la proposition 4.7 implique

$$\mathrm{h}(X) = \lim_{n\to\infty}\mathrm{H}(X,\alpha_{P_n}) = \mathrm{H}(X,\alpha).$$

$\square$

Proposition 4.9. — *Soient G un groupe dénombrable moyennable, K un ensemble fini muni de la topologie discrète et X un sous-décalage fermé de K^G. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Følner de G. Alors on a*

$$\mathrm{h}(X) = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(|\pi_{F_n}(X)|)}{|F_n|}.$$

En particulier, $\mathrm{h}(K^G) = \log(|K|)$.

Démonstration. — Rappelons que la partition ouverte $([k])_{k\in K}$ de K^G formée des $\{1_G\}$-cylindres

$$[k] = \{(x_g)_{g\in G}\in K^G\colon x_{1_G} = k\},$$

où $k\in K$, est un recouvrement ouvert générateur de K^G (exemple 4.2). Posons $U_k = [k]\cap X$ pour tout $k\in K$. Alors la famille $\alpha = (U_k)_{k\in K}$ est un recouvrement ouvert générateur de X et d'après le corollaire 4.8, on a

$$\mathrm{h}(X) = \mathrm{H}(X,\alpha).$$

Calculons $\mathrm{H}(X,\alpha)$. Soit $F\in\mathcal{F}(G)$. Alors on a

$$\alpha_F = (\{x\in X\colon \pi_F(x) = u\})_{u\in K^F}$$

et donc $|\alpha_F|_s = |\pi_F(X)|$. On en déduit

$$\mathrm{h}(X) = \mathrm{H}(X,\alpha) = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(|\alpha_{F_n}|_s)}{|F_n|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\log(|\pi_{F_n}(X)|)}{|F_n|}.$$

$\square$

On dit que le système dynamique X se *plonge* dans le système dynamique Y s'il existe un plongement topologique G-équivariant de X dans Y.

Proposition 4.10. — *Soient G un groupe dénombrable moyennable et X (resp. Y) un espace compact métrisable muni d'une action continue de G. Supposons que le système dynamique X se plonge dans Y. Alors* $\mathrm{h}(X)\leq\mathrm{h}(Y)$.

Démonstration. — Soit f un plongement topologique G-équivariant de X dans Y. Soit $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X. Puisque f est un plongement topologique, il existe un ouvert V_i de Y tel que $f(U_i) = V_i \cap f(X)$ pour tout $i \in I$. Soit β le recouvrement ouvert de Y formé de $Y \setminus f(X)$ et des V_i, où $i \in I$. Alors $f^{-1}(V_i) = U_i$ pour tout $i \in I$. Soit $F \in \mathcal{F}(G)$. Puisque f commute avec les actions, on a $f^{-1}(\bigcap_{g\in F} g^{-1}V_{\rho(g)}) = \bigcap_{g\in F} g^{-1}f^{-1}V_{\rho(g)} = \bigcap_{g\in F} g^{-1}U_{\rho(g)}$ quel que soit $\rho \in I^F$. On en déduit $f^{-1}(\beta_F) \sim \alpha_F$. Il en résulte en utilisant les propositions 4.1.(c) et 4.3.(c)

$$|\alpha_F|_s = |f^{-1}(\beta_F)|_s \leq |\beta_F|_s,$$

ce qui implique $\mathrm{H}(X,\alpha) \leq \mathrm{H}(Y,\beta) \leq \mathrm{h}(Y)$. On en déduit

$$\mathrm{h}(X) = \sup_{\alpha} \mathrm{H}(X,\alpha) \leq \mathrm{h}(Y).$$

□

On dit que le système dynamique Y est un *facteur* de X s'il existe une application continue surjective et G-équivariante de X sur Y.

Proposition 4.11. — *Soient G un groupe dénombrable moyennable et X (resp. Y) un espace compact métrisable muni d'une action continue de G. Supposons que le système dynamique Y est un facteur de X. Alors* $\mathrm{h}(X) \geq \mathrm{h}(Y)$.

Démonstration. — Soit f une application continue surjective et G-équivariante de X sur Y. Soit $\beta = (V_j)_{j\in J}$ un recouvrement ouvert de Y. Alors $\alpha = (f^{-1}(V_j))_{j\in J}$ est un recouvrement ouvert de X. Soit $F \in \mathcal{F}(G)$. Puisque f commute avec les actions, on a

$$f^{-1}(\bigcap_{g\in F} g^{-1}V_{\rho(g)}) = \bigcap_{g\in F} g^{-1}\big(f^{-1}(V_{\rho(g)})\big),$$

pour tout $\rho \in J^F$. Donc $f^{-1}(\beta_F) = \alpha_F$. Comme f est surjective, on a $|\beta_F|_s = |\alpha_F|_s$ d'après la proposition 4.3.(d). Il en résulte $\mathrm{H}(Y,\beta) = \mathrm{H}(X,\alpha) \leq \mathrm{h}(X)$. On en déduit $\mathrm{h}(Y) \leq \mathrm{h}(X)$. □

Si X et Y sont des espaces compacts métrisables munis d'une action continue de G, alors G agit continûment sur la réunion disjointe $X \coprod Y$ et sur le produit $X \times Y$ de manière naturelle.

Proposition 4.12. — *Soient G un groupe dénombrable moyennable et X, Y des espaces compacts métrisables munis d'actions continues de G. Alors on a*

(a) $\mathrm{h}(X \coprod Y) = \max(\mathrm{h}(X), \mathrm{h}(Y))$;

(b) $\mathrm{h}(X \times Y) = \mathrm{h}(X) + \mathrm{h}(Y)$.

Démonstration. — Soit d_X (resp. d_Y) une métrique compatible sur X (resp. sur Y). Soit $\alpha^{(n)} = (U_i^{(n)})_{i\in I_n}$ (resp. $\beta^{(n)} = (V_j^{(n)})_{j\in J_n}$), $n \in \mathbb{N}$, une suite de recouvrements ouverts de X (resp. de Y) telle que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{maille}(\alpha^{(n)}, d_X) = 0$ (resp. $\lim_{n\to\infty} \mathrm{maille}(\beta^{(n)}, d_Y) = 0$).

(a) Notons $d_{X\coprod Y}$ la métrique sur $X\coprod Y$ compatible avec la topologie définie par :

$$d_{X\coprod Y}(z_1,z_2)=\begin{cases} d_X(z_1,z_2) & \text{si } z_1,z_2\in X,\\ \\ d_Y(z_1,z_2) & \text{si } z_1,z_2\in Y,\\ \\ 1 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$ notons $\gamma^{(n)}$ le recouvrement ouvert fini de $X\coprod Y$ composé des ouverts de $\alpha^{(n)}$ et de $\beta^{(n)}$ vus dans $X\coprod Y$ et observons que l'on a

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{diam}(\gamma^{(n)},d_{X\coprod Y})=0.$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $g^{-1}U_i^{(n)}\cap h^{-1}V_j^{(n)}=\varnothing$ dans $X\coprod Y$ quels que soient $g,h\in G$ et $(i,j)\in I_n\times J_n$. Pour tout $F\in\mathcal{F}(G)$ les ouverts non vides de $\gamma_F^{(n)}$ sont exactement ceux de $\alpha_F^{(n)}$ et $\beta_F^{(n)}$ vus dans $X\coprod Y$. On en déduit $|\gamma_F^{(n)}|_s=|\alpha_F^{(n)}|_s+|\beta_F^{(n)}|_s$.

Supposons dans la suite que $\mathrm{h}(X)\le\mathrm{h}(Y)$. Soit $\epsilon>0$. D'après la proposition 4.7 appliquée aux suites de recouvrements ouverts $(\alpha^{(n)})$ et $(\beta^{(n)})$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que l'on ait

$$\mathrm{H}(X,\alpha^{(n)})\le\mathrm{H}(Y,\beta^{(n)})+\epsilon/2, \tag{4.4}$$

pour tout $n\ge N$. Fixons $n\ge N$ et soit $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Følner de G. L'inégalité (4.4) implique alors qu'il existe un entier M tel que pour tout $k\ge M$, on ait

$$\frac{\log(|\alpha_{F_k}^{(n)}|_s)}{|F_k|}\le\frac{\log(|\beta_{F_k}^{(n)}|_s)}{|F_k|}+\epsilon,$$

et donc

$$|\gamma_{F_k}^{(n)}|_s=|\alpha_{F_k}^{(n)}|_s+|\beta_{F_k}^{(n)}|_s\le|\beta_{F_k}^{(n)}|_s(e^{|F_k|\epsilon}+1).$$

On déduit de cette inégalité

$$\mathrm{H}(X\coprod Y,\gamma^{(n)})\le\lim_{k\to\infty}\frac{\log(|\beta_{F_k}^{(n)}|_s)}{|F_k|}+\lim_{k\to\infty}\frac{\log(e^{|F_k|\epsilon}+1)}{|F_k|}=\mathrm{H}(Y,\beta^{(n)})+\epsilon.$$

En appliquant la proposition 4.7 aux suites $(\gamma^{(n)})$ et $(\beta^{(n)})$ et en faisant tendre n vers l'infini dans l'inégalité précédente, on obtient

$$\mathrm{h}(X\coprod Y)\le\mathrm{h}(Y)+\epsilon.$$

Comme ϵ est arbitraire, on en déduit

$$\mathrm{h}(X\coprod Y)\le\mathrm{h}(Y)=\max(\mathrm{h}(X),\mathrm{h}(Y)).$$

L'inégalité $\mathrm{h}(Y)\le\mathrm{h}(X\coprod Y)$ résulte de la proposition 4.10 puisque le système dynamique Y se plonge dans $X\coprod Y$.

(b) Munissons $X\times Y$ de la métrique compatible avec la topologie produit définie par

$$d_{X\times Y}((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max(d_X(x_1,x_2),d_Y(y_1,y_2))$$

quel que soit $(x_i, y_i) \in X \times Y$, $i = 1, 2$. Pour tout entier n, définissons le recouvrement ouvert fini $\gamma^{(n)}$ de $X \times Y$ par $\gamma^{(n)} = (U_i^{(n)} \times V_j^{(n)})_{i \in I_n \times J_n}$ et remarquons que $\lim_{n\to\infty} \mathrm{maille}(\gamma^{(n)}, d_{X\times Y}) = 0$. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $F \in \mathcal{F}(G)$. On a

$$\bigcap_{g\in F} g^{-1}(U_{\rho(g)}^{(n)} \times V_{\tau(g)}^{(n)}) = (\bigcap_{g\in F} g^{-1}U_{\rho(g)}^{(n)}) \times (\bigcap_{g\in F} g^{-1}V_{\tau(g)}^{(n)}),$$

quels que soient $\rho \in (I_n)^F$ et $\tau \in (J_n)^F$. Il en résulte que $|\gamma_F^{(n)}|_s = |\alpha_F^{(n)}|_s |\beta_F^{(n)}|_s$ et donc

$$\mathrm{H}(X \times Y, \gamma^{(n)}) = \mathrm{H}(X, \alpha^{(n)}) + \mathrm{H}(Y, \beta^{(n)}).$$

En utilisant la proposition 4.7, on en déduit

$$\mathrm{h}(X \times Y) = \mathrm{h}(X) + \mathrm{h}(Y).$$

□

Approche métrique de h(X). — Soit d une métrique sur X compatible avec la topologie. Pour tout $\epsilon > 0$, on pose

$$\Phi(X, d, \epsilon) = \min_{\alpha} \log(|\alpha|),$$

où α décrit tous les recouvrements ouverts finis de X tels que

$$\mathrm{maille}(\alpha, d) \leq \epsilon.$$

Notons que $\Phi(X, d, \epsilon)$ est un réel bien défini puisque X est compact.

Soit $F \in \mathcal{F}(G)$. Rappelons que l'on définit une métrique sur X compatible avec la topologie par

$$d_F(x, y) = \max_{g\in F} d(gx, gy) \text{ quels que soient } x, y \in X.$$

Lemme 4.13. — *Soient $A, B \in \mathcal{F}(G)$. On a*

(a) $\Phi(X, d_{A\cup B}, \epsilon) \leq \Phi(X, d_A, \epsilon) + \Phi(X, d_B, \epsilon)$ *;*

(b) $\Phi(X, d_{Ag}, \epsilon) = \Phi(X, d_A, \epsilon)$ *quel que soit $g \in G$;*

(c) $\Phi(X, d, \epsilon) \leq \Phi(X, d, \epsilon')$ *si $\epsilon' \leq \epsilon$.*

Démonstration. — Montrons (a). Soient $A, B \in \mathcal{F}(G)$. Alors il existe des recouvrements ouverts finis α et β de X tels que $\mathrm{maille}(\alpha, d_A) \leq \epsilon$, $\mathrm{maille}(\beta, d_B) \leq \epsilon$, $\log(|\alpha|) = \Phi(X, d_A, \epsilon)$ et $\log(|\beta|) = \Phi(X, d_B, \epsilon)$. On en déduit $\mathrm{maille}(\alpha\vee\beta, d_{A\cup B}) \leq \epsilon$. Comme $|\alpha \vee \beta| = |\alpha||\beta|$, on a donc

$$\begin{aligned} \Phi(X, d_{A\cup B}, \epsilon) &\leq \log(|\alpha \vee \beta|) = \log(|\alpha|) + \log(|\beta|) \\ &= \Phi(X, d_A, \epsilon) + \Phi(X, d_B, \epsilon). \end{aligned}$$

L'assertion (b) résulte du fait que $x \mapsto gx$ est une isométrie entre les espaces métriques (X, d_{Ag}) et (X, d_A). L'inégalité (c) résulte du fait qu'un recouvrement ouvert fini de maille inférieure ou égale à ϵ' est aussi de maille inférieure ou égale à ϵ si $\epsilon' \leq \epsilon$. □

Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Følner de G. On déduit du lemme 4.13 et du corollaire 2.12 que pour tout $\epsilon > 0$, la limite suivante existe

$$\mathrm{h}_\epsilon(X,d) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Phi(X, d_{F_n}, \epsilon)}{|F_n|},$$

qu'elle est finie et qu'elle ne dépend pas du choix de la suite de Følner de G. Observons que $\epsilon \mapsto \mathrm{h}_\epsilon(X,d)$ est décroissante d'après l'inégalité 4.13.(c). On en déduit que $\lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{h}_\epsilon(X,d)$ existe dans $[0,\infty]$.

Proposition 4.14. — *Soit G un groupe dénombrable moyennable agissant continûment sur un espace compact métrisable X. Soit d une métrique sur X compatible avec la topologie. Alors on a*

$$\mathrm{h}(X) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{h}_\epsilon(X,d).$$

Démonstration. — Soient d une métrique compatible sur X et $(\beta^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de recouvrements ouverts finis de X telle que $\epsilon_n = \mathrm{maille}(\beta^{(n)}, d)$ converge vers 0 lorsque $n \to \infty$.

Montrons d'abord l'inégalité

$$\lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{h}_\epsilon(X,d) \leq \mathrm{h}(X). \tag{4.5}$$

Soient $F \in \mathcal{F}(G)$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $\mathrm{maille}(\beta_F^{(n)}, d_F) \leq \epsilon_n$. On a donc $\Phi(X, d_F, \epsilon_n) \leq \log(|\beta_F^{(n)}|_s)$. En appliquant cette inégalité à une suite de Følner $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de G, il en résulte

$$\frac{\Phi(X, d_{F_k}, \epsilon_n)}{|F_k|} \leq \frac{\log(|\beta_{F_k}^{(n)}|_s)}{|F_k|}$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. En faisant tendre k vers l'infini dans la dernière inégalité, on obtient

$$\mathrm{h}_{\epsilon_n}(X,d) \leq \mathrm{H}(X, \beta^{(n)}) \leq \mathrm{h}(X).$$

Comme $\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0$, on en déduit l'inégalité (4.5).

Démontrons

$$\mathrm{h}(X) \leq \lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{h}_\epsilon(X,d). \tag{4.6}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons λ_n un nombre de Lebesgue pour $\beta^{(n)}$ relativement à d. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Soient $F \in \mathcal{F}(G)$ et $\alpha^{(n)}$ un recouvrement ouvert fini de X tel que $\mathrm{maille}(\alpha^{(n)}, d_F) \leq \lambda_n$ et vérifiant $\log(|\alpha^{(n)}|) = \Phi(X, d_F, \lambda_n)$. Pour tout $g \in F$, on a alors $\mathrm{maille}(g\alpha^{(n)}, d) \leq \lambda_n$ et donc $\alpha^{(n)} \succ g^{-1}\beta^{(n)}$. On en déduit $\alpha^{(n)} \succ \beta_F^{(n)}$ puis $|\beta_F^{(n)}|_s \leq |\alpha^{(n)}|_s$ d'après la 4.1.(c). On a donc

$$\log(|\beta_F^{(n)}|_s) \leq \log(|\alpha^{(n)}|_s) \leq \log(|\alpha^{(n)}|) = \Phi(X, d_F, \lambda_n).$$

Soit $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Følner de G. En appliquant l'inégalité précédente à $F = F_k$, on obtient

$$\frac{\log(|\beta_{F_k}^{(n)}|_s)}{|F_k|} \leq \frac{\Phi(X, d_{F_k}, \lambda_n)}{|F_k|},$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par passage à la limite en k, il en résulte

$$\mathrm{H}(X, \beta^{(n)}) \leq \mathrm{h}_{\lambda_n}(X, d).$$

On en déduit en utilisant la proposition 4.7

$$\mathrm{h}(X) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{H}(X, \beta^{(n)}) \leq \lim_{n\to\infty} \mathrm{h}_{\lambda_n}(X, d).$$

Comme (λ_n) converge vers 0, on obtient l'inégalité (4.6).

□

4.3. Entropie topologique et dimension topologique moyenne

Dans cette section, on va démontrer le résultat suivant :

Théorème 4.15. — *Soit X un espace compact métrisable muni d'une action continue d'un groupe dénombrable moyennable G. Si l'entropie topologique du système dynamique X est finie, alors sa dimension topologique moyenne est nulle.*

Commençons par établir quelques lemmes. Soit d une métrique sur X compatible avec la topologie. Posons

$$\mathrm{M}(X, d) = \liminf_{\epsilon\to 0} \frac{\mathrm{h}_\epsilon(X, d)}{|\log \epsilon|}.$$

Lemme 4.16. — *Supposons que l'entropie topologique de X est finie. Alors on a* $\mathrm{M}(X, d) = 0$.

Démonstration. — D'après la proposition 4.14, on a $\mathrm{h}(X) = \lim_{\epsilon\to 0} \mathrm{h}_\epsilon(X, d)$. Comme $\mathrm{h}(X) < \infty$, on a

$$\mathrm{M}(X, d) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\mathrm{h}_\epsilon(X, d)}{|\log \epsilon|} = 0.$$

□

Lemme 4.17. — *Soit $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini de X. Alors il existe une famille d'ouverts $(V_i)_{i\in I}$ vérifiant $X = U_i \cup V_i$ pour tout $i \in I$ et telle que le recouvrement ouvert β défini par*

$$\beta = \bigvee_{i\in I} (U_i, V_i)$$

soit plus fin que α.

Démonstration. — Pour tout x dans X, il existe $i \in I$ et un voisinage ouvert W_x de x tel que $W_x \subset \overline{W_x} \subset U_i$. Puisque $(W_x)_{x\in X}$ est un recouvrement ouvert du compact X, il existe une partie finie $E \subset X$ telle que $(W_x)_{x\in E}$ soit un recouvrement de X. Pour chaque $i \in I$, notons K_i la réunion des $\overline{W_x}$, où $x \in E$ et $\overline{W_x} \subset U_i$. Posons $V_i = X \setminus K_i$. Alors le recouvrement ouvert de X défini par

$$\beta = \bigvee_{i\in I}(U_i, V_i)$$

est plus fin que α. En effet, cela résulte du fait que $\bigcap_{i\in I} V_i = \varnothing$ puisque $(K_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de X. □

Pour tous $Y \subset X$ et $x \in X$, on notera $\operatorname{dist}(x, Y)$ la distance de x à Y relativement à d. Rappelons que $x \mapsto \operatorname{dist}(x, Y)$ est 1-lipschitzienne sur X.

Lemme 4.18. — *Soit (U, V) un recouvrement ouvert de X. Définissons $w\colon X \to [0, 1]$ par*

$$w(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, X \setminus V)}{\operatorname{dist}(x, X \setminus V) + \operatorname{dist}(x, X \setminus U)} \quad \textit{quel que soit } x \in X.$$

Alors w est une fonction lipschitzienne sur X vérifiant

$$U = w^{-1}([0, 1[) \textit{ et } V = w^{-1}(]0, 1]).$$

Démonstration. — Posons $f_1(x) = \operatorname{dist}(x, X \setminus U)$ et $f_2(x) = \operatorname{dist}(x, X \setminus V)$ pour tout $x \in X$. Remarquons tout d'abord que w est bien définie puisque $f_1 + f_2$ est strictement positive sur $X = U \cup V$. De plus, comme $f_1 + f_2$ est continue sur le compact X, il existe $\delta > 0$ tel que

$$f_1(x) + f_2(x) \geq \delta \tag{4.7}$$

pour tout $x \in X$. Montrons que w est lipschitzienne sur X. Soient $x, y \in X$. On a

$$w(x) - w(y) = \frac{f_2(x)(f_2(y) + f_1(y)) - f_2(y)(f_2(x) + f_1(x))}{(f_2(x) + f_1(x))(f_2(y) + f_1(y))}.$$

En utilisant l'inégalité (4.7), il en résulte

$$|w(x) - w(y)| \leq \frac{|f_2(x)f_1(y) - f_2(y)f_1(x)|}{\delta^2}.$$

Comme f_1 et f_2 sont 1-lipshitziennes, on a

$$\begin{aligned} |f_2(x)f_1(y) - f_2(y)f_1(x)| &= |f_2(x)(f_1(y) - f_1(x)) + f_1(x)(f_2(x) - f_2(y))| \\ &\leq (f_2(x) + f_1(x))\, d(x, y). \end{aligned}$$

En utilisant ces inégalités, on en déduit

$$|w(x) - w(y)| \leq \frac{f_1(x) + f_2(x)}{\delta^2}\, d(x, y)$$

quels que soient $x, y \in X$. Donc w est L-lipschitzienne sur X avec

$$L = \frac{\sup_{x \in X}(f_1(x) + f_2(x))}{\delta^2}.$$

Par définition de w, il est clair que l'on a

$$U = w^{-1}([0,1[) \text{ et } V = w^{-1}(]0,1]).$$

□

Soient $(U_i)_{i \in I}$ et $(V_i)_{i \in I}$ (où I est fini) des familles d'ouverts de X telles que $X = U_i \cup V_i$ pour tout $i \in I$. On définit le recouvrement ouvert fini β par

$$\beta = \bigvee_{i \in I}(U_i, V_i). \tag{4.8}$$

Définissons pour tout $i \in I$ la fonction $w_i \colon X \to [0,1]$ par

$$w_i(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, X \setminus V_i)}{\operatorname{dist}(x, X \setminus V_i) + \operatorname{dist}(x, X \setminus U_i)}$$

quel que soit $x \in X$. Pour tout $F \in \mathcal{F}(G)$, on définit l'application $f_F \colon X \to [0,1]^{I \times F}$ par

$$f_F(x) = (w_i(gx))_{(i,g) \in I \times F}. \tag{4.9}$$

Soit $S \subset I \times F$. On note π_S la projection de $[0,1]^{I \times F} = [0,1]^S \times [0,1]^{(I \times F) \setminus S}$ sur $[0,1]^S$. Si $S = \{(i,g)\}$, on écrira pour simplifier $\pi_S = \pi_{i,g}$.

Lemme 4.19. — *Soient $F \in \mathcal{F}(G)$ et $r \colon f_F(X) \to [0,1]^{I \times F}$ une application continue telle que l'implication suivante est vérifiée quels que soient $a \in \{0,1\}$, $y \in f_F(X)$ et $(i,g) \in I \times F$:*

$$\pi_{i,g}(y) = a \Rightarrow \pi_{i,g} \circ r\,(y) = a.$$

Alors $r \circ f_F \colon X \to [0,1]^{I \times F}$ est β_F-compatible. En particulier, on a que f_F est β_F-compatible.

Démonstration. — Soient $z \in [0,1]^{I \times F}$. D'après le lemme 3.4, il suffit de montrer que $(r \circ f_F)^{-1}(z)$ est contenu dans un ouvert de β_F. Rappelons que $\beta = \bigvee_{i \in I}(U_i, V_i)$ (voir (4.8)). Soient $i \in I$ et $g \in F$. Supposons tout d'abord $\pi_{i,g}(z) \neq 1$. Soit $x \in (r \circ f_F)^{-1}(z)$. L'hypothèse du lemme implique alors que $\pi_{i,g}(f_F(x)) \neq 1$ ce qui équivaut à $w_i(gx) \neq 1$. Comme $w_i^{-1}[0,1[= U_i$, on en déduit $x \in g^{-1}U_i$. Donc $(r \circ f_F)^{-1}(z) \subset g^{-1}U_i$. Supposons maintenant $\pi_{i,g}(z) \neq 0$. Un raisonnement analogue montre alors que $(r \circ f_F)^{-1}(z) \subset g^{-1}V_i$. Le sous-ensemble $(r \circ f_F)^{-1}(z)$ est donc bien contenu dans un ouvert de β_F. On en déduit que $r \circ f_F$ est β_F-compatible. □

Lemme 4.20. — *Soit $\epsilon > 0$ et posons $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}(X,d)$. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Følner de G. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ vérifiant la propriété suivante :*
pour tout $n \geq N$, il existe $\xi_n \in]0,1[^{I \times F_n}$ tel que pour toute partie $S \subset I \times F_n$, on ait

$$|S| \geq (M_0 + \epsilon)|F_n| \Rightarrow \pi_S(\xi_n) \notin \pi_S \circ f_{F_n}(X).$$

Démonstration. — D'après le lemme 4.18, pour tout $i \in I$, il existe une constante $L_i > 0$ telle que w_i soit L_i-lipschitzienne. Posons $L = \max_{i \in I} L_i$. Par définition de $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}(X, d)$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\delta < \min(1, (2^{|I|} L^{M_0 + \epsilon})^{-2/\epsilon}, 1/L), \tag{4.10}$$

et

$$\frac{\mathrm{h}_\delta(X, d)}{|\log \delta|} \leq M_0 + \epsilon/4. \tag{4.11}$$

Par définition de $\mathrm{h}_\delta(X, d)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait

$$\frac{\Phi(X, d_{F_n}, \delta)}{|F_n|} \leq \mathrm{h}_\delta(X, d) + \frac{\epsilon}{4} |\log \delta|.$$

On en déduit en utilisant l'inégalité (4.11)

$$\frac{\Phi(X, d_{F_n}, \delta)}{|F_n|} \leq (M_0 + \epsilon/2) |\log \delta|.$$

Fixons un entier $n \geq N$. Il résulte de la dernière inégalité qu'il existe un recouvrement ouvert fini $\gamma = (W_j)_{j \in J}$ de X tel que maille$(\gamma, d_{F_n}) \leq \delta$ et

$$|J| = |\gamma| \leq \delta^{-(M_0 + \epsilon/2)|F_n|}. \tag{4.12}$$

Alors $(f_{F_n}(W_j))_{j \in J}$ est un recouvrement de $f_{F_n}(X)$. Soit $j \in J$ et montrons

$$\mathrm{diam}(f_{F_n}(W_j), d_\infty) \leq L\delta, \tag{4.13}$$

où d_∞ est la métrique sur $f_{F_n}(X)$ induite par la norme sup de $\mathbb{R}^{I \times F_n}$. Soient $x, x' \in W_j$. On a

$$d_\infty(f_{F_n}(x), f_{F_n}(x')) = \max_{(i,g) \in I \times F_n} |w_i(gx) - w_i(gx')|.$$

Puisque w_i est L_i-lipschitzienne pour tout $i \in I$ et que maille$(\gamma, d_{F_n}) \leq \delta$, on en déduit

$$d_\infty(f_{F_n}(x), f_{F_n}(x')) \leq \max_{(i,g) \in I \times F_n} L_i \, d(gx, gx') \leq L\delta,$$

ce qui montre l'inégalité (4.13). Soit $S \subset I \times F_n$. Notons μ la mesure de Lebesgue sur le cube $C = [0,1]^{I \times F_n}$. Nous allons majorer la mesure du borélien B_S défini par

$$B_S = \{\xi \in C \colon \pi_S(\xi) \in \pi_S \circ f_{F_n}(X)\}.$$

Comme $\big(f_{F_n}(W_j)\big)_{j \in J}$ est un recouvrement fini d'ensembles mesurables de $f_{F_n}(X)$, on a

$$\mu(B_S) \leq \sum_{j \in J} \mu\big(\{\xi \in C \colon \pi_S(\xi) \in \pi_S \circ f_{F_n}(W_j)\}\big). \tag{4.14}$$

Or, pour tout $j \in J$ on a

$$\mu\big(\{\xi \in C \colon \pi_S(\xi) \in \pi_S \circ f_{F_n}(W_j)\}\big) \leq \big(\mathrm{diam}(f_{F_n}(W_j), d_\infty)\big)^{|S|}.$$

En utilisant les inégalités (4.12), (4.13) et (4.14), on en déduit

$$\mu(B_S) \leq \delta^{-(M_0 + \epsilon/2)|F_n|} (L\delta)^{|S|}. \tag{4.15}$$

Posons

$$B = \{\xi \in C \colon \exists S \subset I \times F_n \text{ tel que } |S| \geq (M_0 + \epsilon)|F_n| \text{ et } \pi_S(\xi) \in \pi_S \circ f_{F_n}(X)\}$$

et remarquons que l'on a

$$B \subset \bigcup_S B_S,$$

où S décrit l'ensemble $\{S \subset I \times F_n \ : \ |S| \geq (M_0 + \epsilon)|F_n|\}$. On en déduit en utilisant les inégalités (4.15) et (4.10) que l'on a

$$\begin{aligned}
\mu(B) &\leq \sum_{\{S \subset I \times F_n \ : \ |S| \geq (M_0+\epsilon)|F_n|\}} \mu(B_S) \\
&\leq |\{S \subset I \times F_n\}| \, \delta^{-(M_0+\epsilon/2)|F_n|}(L\delta)^{(M_0+\epsilon)|F_n|} \\
&= 2^{|I||F_n|}(L^{M_0+\epsilon}\delta^{\epsilon/2})^{|F_n|} < 1.
\end{aligned}$$

En particulier $C \setminus B$ est non vide et la conclusion du lemme est vérifiée pour tout $\xi \in C \setminus B$. □

Le théorème suivant est une conséquence des lemmes précédents :

Théorème 4.21. — *Soit G un groupe dénombrable moyennable agissant continûment sur un espace compact métrisable X. Soit d une métrique sur X compatible avec la topologie. Alors on a*

$$\operatorname{mdim}(X, G) \leq \mathrm{M}(X, d).$$

Démonstration. — Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Følner de G. Rappelons (voir chap. 3) que la dimension topologique moyenne de X est donnée par

$$\operatorname{mdim}(X, G) = \sup_\alpha \lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{D}(\alpha_{F_n})}{|F_n|},$$

où α décrit tous les recouvrements ouverts finis de X. Posons $\mathrm{M}_0 = \mathrm{M}(X, d)$. Soit $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini de X. D'après le lemme 4.17, il existe un recouvrement ouvert fini $\beta \succ \alpha$ tel que

$$\beta = \bigvee_{i\in I}(U_i, V_i),$$

où $X = U_i \cup V_i$ pour tout $i \in I$. Puisque $\beta \succ \alpha$, on a $\beta_{F_n} \succ \alpha_{F_n}$ d'après la proposition 4.4.(d) puis $\mathrm{D}(\alpha_{F_n}) \leq D(\beta_{F_n})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la définition de D (voir (3.1)). Soit $\epsilon > 0$. On va démontrer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{D}(\beta_{F_n})}{|F_n|} \leq M_0 + \epsilon, \tag{4.16}$$

ce qui prouvera le théorème.

Pour tout $F \in \mathcal{F}(G)$, on considère l'application $f_F \colon X \to [0,1]^{I\times F}$ associée au recouvrement ouvert fini β (voir (4.9) pour la définition de f_F). Soit N un entier obtenu par le lemme 4.20 pour ϵ et (F_n). Fixons $n \geq N$ et considérons un élément

$\xi_n \in]0,1[^{I\times F_n}$ vérifiant la conclusion du lemme 4.20. Posons $t_n = (M_0+\epsilon)|F_n|$ et définissons $B \subset C = [0,1]^{I\times F_n}$ par

$$B = \{y \in C \colon \exists S \subset I \times F_n \text{ avec } |S| \geq t_n \text{ et } \pi_S(y) = \pi_S(\xi_n)\}.$$

D'après la propriété vérifiée par ξ_n (voir le lemme 4.20), on a

$$f_{F_n}(X) \subset C \setminus B. \tag{4.17}$$

Posons $Y = f_{F_n}(X)$ et

$$d_n = \dim(C) - [t_n],$$

où $[t_n]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal au réel t_n.

Nous allons démontrer

$$\mathrm{D}(\beta_{F_n}) \leq (\mathrm{M}_0 + \epsilon)|F_n|. \tag{4.18}$$

Si $d_n \leq 0$, alors $\dim(C) \leq (\mathrm{M}_0+\epsilon)|F_n|$. Puisque $f_{F_n}\colon X \to C$ est β_{F_n} compatible (voir le lemme 4.19), il résulte du lemme 3.3 que $\mathrm{D}(\beta_{F_n}) \leq \dim(C) \leq (\mathrm{M}_0+\epsilon)|F_n|$. Dans ce cas l'inégalité (4.18) est vérifiée. Supposons maintenant $d_n \geq 1$. Pour $m \in \mathbb{N}$ définissons le squelette de codimension m du cube C par

$$J_m = \{y \in C \colon \pi_{i,g}(y) \in \{0,1\} \text{ pour au moins } m \text{ indices } (i,g) \in I \times F_n\}.$$

Soit $y \in Y$. Nous allons construire par récurrence une suite finie $(y_k)_{0\leq k\leq d_n}$ d'éléments de C telle que $y_0 = y$ et $y_k \in J_k$ pour $0 \leq k \leq d_n$. Posons $y_0 = y$. Comme $d_n \geq 1$, on a $\dim(C) \geq [t_n]+1$. D'après l'inclusion (4.17), ξ_n et y n'ont pas un nombre supérieur où égal à $[t_n]+1$ composantes égales. En particulier $\xi_n \neq y$. On peut donc définir $y_1 \in J_1$ comme étant l'intersection de la demi-droite issue de ξ_n et passant par y avec J_1. Soit C_1 l'une des faces de C de codimension 1 contenant y_1 et notons p_1 la projection orthogonale de p_0 sur C_1.

Supposons construits $y_k, p_k \in J_k$, où $k \geq 1$. Si $y_k \neq p_k$, on définit y_{k+1} comme étant l'intersection avec J_{k+1} de la demie-droite issue de y_k et passant par p_k. Comme p_0 et y_0 n'ont pas un nombre supérieur où égal à $[t_n]+1$ composantes égales, la condition $y_k \neq p_k$ est vérifiée si $\dim(J_k) \geq [t_n]+1$, c'est-à-dire si $k \leq d_n - 1$. Dans ce cas, notons C_{k+1} l'une des faces de codimension $k+1$ contenant y_{k+1} et p_{k+1} la projection orthogonale de p_k sur C_{k+1}. Cela achève la construction des suites $(y_k)_{0\leq k\leq d_n}$ et $(p_k)_{0\leq k\leq d_n}$.

Définissons $r\colon Y \to J_{d_n}$ par $r(y) = y_{d_n}$. Par construction r est continue. Soient $a \in \{0,1\}$ et $\xi \in f_{F_n}(X)$. Si $\pi_{i,g}(\xi) = a$ alors ξ appartient à la face $\{y = (y_{i,g})_{(i,g)\in I\times F_n} \in C \colon y_{i,g} = a\}$ et donc aussi $r(\xi)$ par définition de r. Les hypothèses du lemme 4.19 sont donc bien vérifiées. Il en résulte que $r \circ f_{F_n}\colon X \to J_{d_n}$ est β_{F_n}-compatible. D'après le lemme 3.3, on a alors

$$\mathrm{D}(\beta_{F_n}) \leq \dim(J_{d_n}) = [t_n] \leq (M_0+\epsilon)|F_n|,$$

ce qui démontre l'inégalité (4.18). L'inégalité (4.16) en résulte. $\square$

Le théorème 4.15 résulte du lemme 4.16 et du théorème 4.21.

CHAPITRE 5

DIMENSION TOPOLOGIQUE MOYENNE ET PROPRIÉTÉ DE LA PETITE FRONTIÈRE

Étant donné un espace compact métrisable X muni d'une action continue d'un groupe dénombrable moyennable G, on définit la propriété de la petite frontière du système dynamique X et l'on démontre que si X vérifie la propriété de la petite frontière, alors sa dimension topologique moyenne est nulle. Ce résultat est établi par Lindenstrauss et Weiss [**LiW**] lorsque $G = \mathbb{Z}$. Tous les systèmes dynamiques uniquement ergodiques vérifient la propriété de la petite frontière. La dimension topologique moyenne d'un tel système est donc nulle.

Dans tout ce chapitre, X est un espace compact métrisable muni d'une action continue d'un groupe dénombrable G.

5.1. Propriété de la petite frontière

Rappelons que $\mathcal{F}(G)$ désigne l'ensemble des parties finies non vides de G. Soit $F \in \mathcal{F}(G)$. On définit

$$\mathrm{M}_F(E) = \max_{x \in X} \sum_{g \in F} \chi_E(gx)$$

pour toute partie $E \subset X$, où $\chi_E \colon E \to \{0,1\}$ désigne la fonction caractéristique de E.

Lemme 5.1. — *Soient $E, E' \subset X$ et $F, F' \in \mathcal{F}(G)$. Alors on a :*

(i) $0 \leq \mathrm{M}_F(E) \leq |F|$ *;*

(ii) $\mathrm{M}_{F \cup F'}(E) \leq \mathrm{M}_F(E) + \mathrm{M}_{F'}(E)$ *;*

(iii) $\mathrm{M}_F(E) \leq \mathrm{M}_{F'}(E)$ *si* $F \subset F'$ *;*

(iv) $\mathrm{M}_{Fg}(E) = \mathrm{M}_F(E)$ *quel que soit* $g \in G$ *;*

(v) $\mathrm{M}_F(E) \leq \mathrm{M}_F(E')$ *si* $E \subset E'$ *;*

(vi) $\mathrm{M}_F(E \cup E') \leq \mathrm{M}_F(E) + \mathrm{M}_F(E')$.

Démonstration. — Les propriétés (i), (ii) et (iii) sont claires. Pour l'égalité (iv), remarquons que $\sum_{g' \in Fg} \chi_E(g'x) = \sum_{g' \in F} \chi_E(g'gx)$. On en déduit $\mathrm{M}_{Fg}(E) = \mathrm{M}_F(E)$ puisque l'application $x \mapsto gx$ est une permutation de X. Les inégalités (v) et (vi) résultent respectivement des inégalités $\chi_E \leq \chi_{E'}$ si $E \subset E'$ et $\chi_{E \cup E'} \leq \chi_E + \chi_{E'}$. □

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Følner de G. D'après les inégalités (ii) et (iv) du lemme 5.1 et le théorème 2.1, pour toute partie E de X, la limite suivante existe

$$\operatorname{ocap}(E) = \lim_{n \to \infty} \frac{\mathrm{M}_{F_n}(E)}{|F_n|},$$

elle est finie et ne dépend pas du choix de la suite de Følner. On l'appelle la *capacité orbitale* de E dans X. Remarquons que l'on a $\operatorname{ocap}(E) \in [0, 1]$ d'après l'inégalité 5.1.(i).

On dira que $E \subset X$ est un ensemble *G-petit* si $\operatorname{ocap}(E) = 0$. Il résulte des l'inégalités (v) et (vi) du lemme 5.1 que l'on a

$$\operatorname{ocap}(E) \leq \operatorname{ocap}(E') \quad \text{si } E \subset E'$$

et

$$\operatorname{ocap}(E \cup E') \leq \operatorname{ocap}(E) + \operatorname{ocap}(E').$$

On en déduit que tout sous-ensemble d'un ensemble G-petit est G-petit et qu'une réunion finie d'ensembles G-petits est G-petite.

Pour tout sous-ensemble Y d'un espace topologique X, on note $\operatorname{Fr}(Y)$ la frontière topologique de Y.

Définition 5.2. — On dit que le système dynamique X vérifie la *propriété de la petite frontière* si pour tout $x \in X$ et pour tout ouvert U contenant x, il existe un voisinage ouvert $V \subset U$ de x tel que $\operatorname{ocap}(\operatorname{Fr}(V)) = 0$.

Lemme 5.3. — *Supposons que le système dynamique X vérifie la propriété de la petite frontière. Soit $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini de X. Alors il existe un recouvrement ouvert fini $\beta = (V_i)_{i \in I}$ de X tel que $\overline{V_i} \subset U_i$ et* $\operatorname{ocap}(\operatorname{Fr}(V_i)) = 0$ *pour tout $i \in I$.*

Démonstration. — Soit $x \in X$. Puisque α est un recouvrement ouvert de X, il existe un voisinage ouvert W_x de x et $i \in I$ tels que $W_x \subset \overline{W_x} \subset U_i$. Comme X vérifie la propriété de la petite frontière, on peut supposer $\operatorname{ocap}(\operatorname{Fr}(W_x)) = 0$. Par compacité de X, il existe une partie finie $A \subset X$ telle que $(W_a)_{a \in A}$ soit un recouvrement ouvert fini de X. Posons pour tout $i \in I$

$$V_i = \bigcup_{\{a \in A :\, \overline{W_a} \subset U_i\}} W_a.$$

Alors $\beta = (V_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert fini de X vérifiant $\overline{V_i} \subset U_i$ et

$$\operatorname{Fr}(V_i) = \operatorname{Fr}\Big(\bigcup_{\{a \in A :\, \overline{W_a} \subset U_i\}} W_a\Big) \subset \bigcup_{\{a \in A :\, \overline{W_a} \subset U_i\}} \operatorname{Fr}(W_a)$$

pour tout $i \in I$. On en déduit que $\mathrm{Fr}(V_i)$ est G-petit puisque c'est un sous-ensemble d'une réunion finie d'ensembles G-petits. Le recouvrement β vérifie donc la conclusion du lemme. $\square$

Lemme 5.4. — *Soient K un fermé de X et $F \in \mathcal{F}(G)$. Alors il existe un ouvert U de X tel que $K \subset U$ et $\mathrm{M}_F(K) = \mathrm{M}_F(U)$.*

Démonstration. — Soit $x \in X$. Comme X est métrisable, c'est un espace normal. Il existe donc des ouverts $U_x \supset K$ et $V_x \supset \{gx \colon g \in F\} \setminus K$ tels que $U_x \cap V_x = \varnothing$. On a alors

$$\sum_{g\in F} \chi_{U_x}(gx) = \sum_{g\in F} \chi_K(gx).$$

Comme U_x et V_x sont des ouverts disjoints, la continuité en x des applications $y \mapsto gy$, où $g \in F$, implique qu'il existe un voisinage ouvert W_x de x tel que

$$\sum_{g\in F} \chi_{U_x}(gy) = \sum_{g\in F} \chi_{U_x}(gx) = \sum_{g\in F} \chi_K(gx) \quad \text{pour tout } y \in W_x. \tag{5.1}$$

Puisque les ouverts W_x, $x \in X$, recouvrent le compact X, il existe un sous-recouvrement fini $(W_a)_{a\in A}$, où A est une partie finie de X. Posons $U = \bigcap_{a\in A} U_a$. Alors $K \subset U$ et donc $\mathrm{M}_F(K) \leq \mathrm{M}_F(U)$ d'après le lemme 5.1.(v). Soit $y \in X$. Alors il existe $a \in A$ tel que $y \in W_a$. En utilisant (5.1), on en déduit

$$\sum_{g\in F} \chi_U(gy) \leq \sum_{g\in F} \chi_{U_a}(gy) = \sum_{g\in F} \chi_K(ga) \leq \mathrm{M}_F(K).$$

Il en résulte $\mathrm{M}_F(U) \leq \mathrm{M}_F(K)$. $\square$

5.2. Propriété de la petite frontière et dimension topologique moyenne

Soit $f \colon X \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Le *support* de f, que l'on note $\mathrm{supp}(f)$, est le sous-ensemble de X défini par

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in X : f(x) \neq 0\}}.$$

Lemme 5.5. — *Supposons que le système dynamique X vérifie la propriété de la petite frontière. Soient $\alpha = (U_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert fini de X et $\epsilon > 0$. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Følner de G. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, il existe des fonctions continues $\Phi_i \colon X \to [0,1]$, pour tout $i \in I$, vérifiant les propriétés suivantes :*

(P1) $\mathrm{supp}(\Phi_i) \subset U_i$ *quel que soit* $i \in I$,

(P2) $\sum_{i\in I} \Phi_i(x) = 1$ *quel que soit* $x \in X$,

(P3) $\mathrm{M}_{F_n}(\Omega) \leq \epsilon |F_n|$, *où* $\Omega = \bigcup_{i\in I} {\Phi_i}^{-1}(]0,1[)$.

Démonstration. — Posons $I = \{1, \ldots, k\}$ où $k = |\alpha|$. D'après le lemme 5.3, il existe un recouvrement ouvert fini $\beta = (V_i)_{i \in I}$ de X tel que $\overline{V_i} \subset U_i$ et $\operatorname{ocap}(\operatorname{Fr}(V_i)) = 0$ pour tout $i \in I$. On en déduit qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait

$$\mathrm{M}_{F_n}(\operatorname{Fr}(V_i)) \leq \frac{\epsilon |F_n|}{k} \quad \text{quel que soit } i \in I.$$

Fixons un entier $n \geq N$. Soit d une métrique sur X compatible avec la topologie. Le lemme 5.4 et la normalité de X impliquent qu'il existe, pour tout $i \in I$, un ouvert W_i de X vérifiant $\operatorname{Fr}(V_i) \subset W_i \subset \overline{W_i} \subset U_i$ tel que

$$\mathrm{M}_{F_n}(W_i) = \mathrm{M}_{F_n}(\operatorname{Fr}(V_i)) \leq \frac{\epsilon |F_n|}{k} \quad \text{quel que soit } i \in I. \tag{5.2}$$

Soit $i \in I$. Puisque $\operatorname{Fr}(V_i) \subset W_i$, les fermés $\overline{V_i}$ et $X \setminus (V_i \cup W_i)$ sont disjoints dans X. On en déduit qu'il existe une fonction continue $\Psi_i \colon X \to [0,1]$ vérifiant $\overline{V_i} = {\Psi_i}^{-1}(1)$ et $X \setminus (V_i \cup W_i) = {\Psi_i}^{-1}(0)$. On a alors

$$\operatorname{supp}(\Psi_i) \subset \overline{V_i \cup W_i} \subset U_i. \tag{5.3}$$

On définit par récurrence une suite de fonctions continues $(\Phi_i)_{i \in I}$ de X dans $[0,1]$ en posant

$$\Phi_1 = \Psi_1,$$

et

$$\Phi_i = \min(\Psi_i, 1 - \sum_{j=1}^{i-1} \Phi_j),$$

pour $2 \leq i \leq k$. Montrons tout d'abord que Φ_i est à valeurs dans $[0,1]$ pour tout $i \in I$. C'est clair pour $i = 1$. Soit $i \in \{2, \ldots, k\}$ et $x \in X$. Alors $\Phi_i(x) \leq \Psi_i(x) \leq 1$. Si $\Phi_i(x) = \Psi_i(x)$, alors $\Phi_i(x) \geq 0$. Sinon $\Phi_i(x) = 1 - \sum_{j=1}^{i-1} \Phi_j(x)$. Comme $\Phi_{i-1}(x) \leq 1 - \sum_{j=1}^{i-2} \Phi_j(x)$ (par définition de Φ_{i-1}), on en déduit

$$\Phi_i(x) = 1 - \sum_{j=1}^{i-2} \Phi_j(x) - \Phi_{i-1}(x) \geq 0.$$

L'inclusion (P1) résulte de l'inclusion (5.3) puisque l'on a $\operatorname{supp}(\Phi_i) \subset \operatorname{supp}(\Psi_i)$ pour tout $i \in I$. Montrons (P2), c'est-à-dire

$$\sum_{i \in I} \Phi_i(x) = 1 \quad \text{quel que soit } x \in X.$$

Soit $x \in X$. Notons tout d'abord que l'inégalité $\Phi_k(x) \leq 1 - \sum_{j=1}^{k-1} \Phi_j(x)$ implique $\sum_{i \in I} \Phi_i(x) \leq 1$. Comme $(V_i)_{i \in I}$ est un recouvrement de X, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in V_{i_0}$. On a alors $\Psi_{i_0}(x) = 1$, ce qui implique $\Phi_{i_0}(x) = 1 - \sum_{j=1}^{i_0-1} \Phi_j(x)$. Il en résulte $\sum_{i \in I} \Phi_i(x) = 1$. Montrons que l'on a

$$\Phi_i^{-1}(]0,1[) \subset \bigcup_{j=1}^{i} W_j. \tag{5.4}$$

Soit $x \in X$ tel que $\Phi_i(x) \notin \{0,1\}$. Par définition de Φ_i on a alors $\Psi_i(x) \notin \{0,1\}$ ou $\sum_{j=1}^{i-1} \Phi_j(x) \notin \{0,1\}$. Supposons $\Psi_i(x) \notin \{0,1\}$. Alors $x \in (V_i \cup W_i) \setminus \overline{V_i}$ et donc $x \in W_i$. Supposons maintenant $\sum_{j=1}^{i-1} \Phi_j(x) \notin \{0,1\}$. Il en résulte qu'il existe $1 \leq i_0 \leq i-1$ tel que $\Phi_{i_0}(x) \notin \{0,1\}$. On a alors $\Psi_{i_0}(x) \neq 0$. Comme $\sum_{j=1}^{i-1} \Phi_j(x) \neq 1$, on a en particulier $\Phi_{i_0}(x) \neq 1 - \sum_{j=1}^{i_0-1} \Phi_j(x)$. Cela montre que $\Psi_{i_0}(x) \neq 1$. On a donc $\Psi_{i_0}(x) \notin \{0,1\}$, ce qui implique $x \in (V_{i_0} \cup W_{i_0}) \setminus \overline{V_{i_0}} \subset W_{i_0}$. On en déduit (5.4).

D'après l'inclusion (5.4), on a donc

$$\Omega = \bigcup_{i \in I} {\Phi_i}^{-1}(]0,1[) \subset \bigcup_{i \in I} W_i.$$

D'après les inégalités (v) et (vi) du lemme 5.1 et l'inégalité (5.2) on a

$$M_{F_n}(\Omega) \leq \sum_{i \in I} M_{F_n}(W_i) \leq \epsilon |F_n|.$$

Cela démontre l'inégalité (P3). □

Voici le résultat principal de ce chapitre :

Théorème 5.6. — *Soit G un groupe dénombrable moyennable agissant continûment sur un espace compact métrisable X. Supposons que le système dynamique X vérifie la propriété de la petite frontière. Alors on a*

$$\operatorname{mdim}(X, G) = 0.$$

Démonstration. — Soient $\alpha = (U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert fini de X et $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Følner de G. On va démontrer que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{D(\alpha_{F_n})}{|F_n|} = 0,$$

ce qui démontrera le théorème d'après la définition de $\operatorname{mdim}(X, G)$ (voir chap. 3). Soit $\epsilon > 0$. D'après le lemme 3.3, il suffit de montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, il existe une application continue α_{F_n}-compatible de X dans un espace compact de dimension inférieure ou égale à $\epsilon |F_n|$.

Posons $k = |\alpha|$ et appliquons le lemme 5.5 à α, à ϵ/k et à la suite (F_n) : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$, il existe des fonctions continues $\Phi_i \colon X \to [0,1]$, $i \in I$, satisfaisant les propriétés suivantes :

(P1) $\operatorname{supp}(\Phi_i) \subset U_i$ quel que soit $i \in I$,

(P2) $\sum_{i \in I} \Phi_i(x) = 1$ quel que soit $x \in X$,

(P3) $\mathrm{M}_{F_n}(\Omega) = \max_{x \in X} \sum_{g \in F_n} \chi_\Omega(gx) \leq \frac{\epsilon |F_n|}{k}$, où $\Omega = \bigcup_{i \in I} {\Phi_i}^{-1}(]0,1[)$.

Fixons un entier $n \geq N$. Définissons une application continue $f_{F_n} \colon X \to \mathbb{R}^{I \times F_n}$ par

$$f_{F_n}(x) = (\Phi_i(gx))_{(i,g) \in I \times F_n}.$$

Montrons que l'application $f_{F_n} \colon X \to f_{F_n}(X)$ est α_{F_n}-compatible. En effet, soient $y \in f_{F_n}(X)$ et $g \in F_n$. D'après (P2), il existe $i_g \in I$ tel que $\Phi_{i_g}(gx) > 0$ pour tout

$x \in f_{F_n}^{-1}(y)$. D'après (P1), on a alors $f_{F_n}^{-1}(y) \subset \bigcap_{g \in F_n} g^{-1} U_{i_g}$. Donc $f_{F_n}^{-1}(y)$ est inclus dans un ouvert de α_{F_n}. On conclut en utilisant le lemme 3.4.

Il reste à montrer que $\dim(f_{F_n}(X)) \leq \epsilon |F_n|$. Soit $(e_{i,g})_{(i,g) \in I \times F_n}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{I \times F_n}$. Pour toute partie $B \subset F_n$ et pour tout $\xi \in \{0,1\}^{I \times F_n}$, on définit le sous-espace affine $A(\xi, B)$ de $\mathbb{R}^{I \times F_n}$ par

$$A(\xi, B) = \xi + V(B),$$

où $V(B)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{I \times F_n}$ engendré par les $(e_{i,g})_{(i,g) \in I \times B}$. Nous allons montrer que l'on a

$$f_{F_n}(X) \subset \bigcup_{B, \xi} A(\xi, B), \tag{5.5}$$

où B décrit les sous-ensembles de F_n vérifiant $|B| \leq \frac{\epsilon |F_n|}{k}$ et où ξ décrit $\{0,1\}^{I \times F_n}$.

Soit $x \in X$. D'après la propriété (P3), il existe $B \subset F_n$ tel que $|B| \leq \frac{\epsilon |F_n|}{k}$ et $\Phi_i(gx) \in \{0,1\}$ quels que soient $i \in I$ et $g \in F_n \setminus B$. On en déduit $f_{F_n}(x) \in A(\xi, B)$, où $\xi \in \{0,1\}^{I \times F_n}$ est défini par

$$\xi_{i,g} = \begin{cases} \Phi_i(gx) & \text{si } (i,g) \in I \times (F_n \setminus B) \\ \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'inclusion (5.5) est donc vérifiée. Comme $f_{F_n}(X)$ est inclus dans une réunion finie de sous-espaces affines de $\mathbb{R}^{I \times F_n}$ de dimension inférieure où égale à $\epsilon |F_n|$, on a $\dim(f_{F_n}(X)) \leq \epsilon |F_n|$. Cela achève la démonstration du théorème. □

5.3. Systèmes uniquement ergodiques

Soit X un espace compact métrisable muni d'une action continue d'un groupe moyennable G. Le système dynamique X est dit *uniquement ergodique* s'il admet une unique mesure G-invariante $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Rappelons que si G est moyennable, il existe au moins une mesure G-invariante sur X d'après une caractérisation de la moyennabilité (théorème 1.33).

La notion d'ensemble $\mathbb{Z}$-petit pour les actions de $\mathbb{Z}$ a été introduite par Shub et Weiss dans [**ShW**] où il est démontré que tout système uniquement ergodique vérifie la propriété de la petite frontière. Dans ce qui suit, on étend la démonstration au cas d'actions de groupes dénombrables moyennables discrets.

Lemme 5.7. — *Soit $E \subset X$ un fermé. Alors E est G-petit si et seulement si $\mu(E) = 0$ pour toute mesure G-invariante $\mu \in \mathcal{M}(X)$.*

Démonstration. — Soit E un borélien qui est G-petit. Soient $\mu \in \mathcal{M}(X)$ une mesure G-invariante sur X et $\epsilon > 0$. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Følner de G. Puisque ocap$(E) = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on ait

$$\sup_{x \in X} \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \chi_E(gx) \leq \epsilon. \tag{5.6}$$

Comme μ est G-invariante, on a $\mu(E) = \int_{x \in X} \chi_E(gx)\, d\mu(x)$ pour tout $g \in G$. On en déduit en utilisant (5.6) que l'on a

$$\mu(E) = \int_{x \in X} \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \chi_E(gx)\, d\mu(x) \leq \epsilon$$

pour tout $n \geq N$. Il en résulte que $\mu(E) = 0$.

Supposons maintenant que E est un fermé qui n'est pas G-petit. Nous allons montrer qu'il existe une mesure G-invariante $\mu \in \mathcal{M}(X)$ vérifiant $\mu(E) > 0$. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Følner de G. Puisque ocap$(E) > 0$, il existe un réel $c > 0$ et une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de X tels que

$$\frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \chi_E(gx_n) \geq c \quad \text{quel que soit } n \in \mathbb{N}. \tag{5.7}$$

Définissons pour tout $n \in \mathbb{N}$ la mesure $\mu_n \in \mathcal{M}(X)$ par

$$\mu_n = \frac{1}{|F_n|} \sum_{g \in F_n} \delta_{gx_n},$$

où δ_x désigne la masse de Dirac en x. Puisque $\mathcal{M}(X)$ est un compact métrisable pour la topologie faible* (la métrisabilité résulte du fait que $C(X)$ est séparable lorsque X est métrisable, voir [**DuS**, Th. V.5.1]), quitte à prendre une sous-suite de $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut donc supposer que (μ_n) converge vers une mesure $\mu \in \mathcal{M}(X)$ relativement à la topologie faible*. Montrons que μ est G-invariante et que $\mu(E) > 0$. Soient $f \in C(X)$ et $g' \in G$. Définissons $f_{g'} \colon X \to \mathbb{R}$ par $f_{g'}(x) = f(g'x)$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\left|L_{\mu_n}(f_{g'}) - L_{\mu_n}(f)\right| = \frac{1}{|F_n|} \Big| \sum_{g \in F_n} f(g'gx_n) - \sum_{g \in F_n} f(gx_n) \Big| \leq \frac{|g'F_n \bigtriangleup F_n|}{|F_n|} ||f||_\infty. \tag{5.8}$$

Comme (F_n) est une suite de Følner de G, on a

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|g'F_n \bigtriangleup F_n|}{|F_n|} = 0.$$

Par passage à la limite dans (5.8), on en déduit

$$L_\mu(f) = L_\mu(f_{g'}),$$

ce qui montre la G-invariance de μ.

Montrons $\mu(E) > 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant $\mu(E) = 0$. Comme μ est régulière, il existe un ouvert V contenant E tel que $\mu(V) \leq c/2$. Soit $f \colon X \to [0, 1]$

une fonction continue vérifiant $f(x) = 1$ si $x \in E$ et $f(x) = 0$ si $x \in X \backslash V$. En utilisant l'inégalité (5.7), on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$L_{\mu_n}(f) = \int_X f \ d\mu_n \geq \int_X \chi_E \ d\mu_n = \mu_n(E) \geq c.$$

Par passage à la limite, on a $L_\mu(f) \geq c$. Par ailleurs, on a

$$L_\mu(f) = \int_X f \ d\mu \leq \int_X \chi_V \ d\mu = \mu(V) \leq c/2.$$

On obtient ainsi une contradiction. On en déduit $\mu(E) > 0$. □

Proposition 5.8. — *Soit X un espace compact métrisable muni d'une action continue d'un groupe dénombrable moyennable G. Supposons que le système dynamique X est uniquement ergodique. Alors X vérifie la propriété de la petite frontière.*

Démonstration. — Soit d une métrique sur X compatible avec la topologie. Pour tous $x \in X$ et $r > 0$, on pose $B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) \leq r\}$ et $S(x, r) = \{y \in X : d(x, y) = r\}$. Notons que l'on a $\mathrm{Fr}(B(x, r)) \subset S(x, r)$.

Soit $\mu \in \mathcal{M}(X)$ l'unique mesure G-invariante sur X. Soit $x \in X$. Définissons $R_x \subset \mathbb{R}$ par

$$R_x = \{r \in]0, \infty[: \ \mathrm{ocap}(S(x, r)) > 0\}.$$

D'après le lemme 5.7, on a

$$R_x = \{r \in]0, \infty[: \mu(S(x, r)) > 0\}.$$

Comme $\mu(X)$ est finie, l'ensemble R_x est dénombrable quel que soit $x \in X$. On en déduit que tout point de X admet une base de voisinages constituée de boules ouvertes de frontière G-petite. L'espace X vérifie donc la propriété de la petite frontière.

□

Corollaire 5.9. — *Soit X un espace compact métrisable muni d'une action continue uniquement ergodique d'un groupe dénombrable moyennable G. Alors la dimension topologique moyenne de X est nulle.*

Démonstration. — Cela résulte du théorème 5.6 et de la proposition 5.8. □

CHAPITRE 6

GÉNÉRALISATION D'UN CONTRE-EXEMPLE DE LINDENSTRAUSS ET WEISS

Étant donné un groupe infini dénombrable, moyennable et résiduellement fini G, on construit dans ce chapitre une action continue minimale de G sur un espace compact métrisable X telle que le système dynamique (X, G) ne se plonge pas dans le G-décalage sur $[0,1]^G$. Cela généralise une construction due à E. Lindenstrauss et B. Weiss [**LiW**] pour $G = \mathbb{Z}$. Les résultats de ce chapitre sont repris dans [**Kr2**].

6.1. Introduction

Soient G un groupe dénombrable et K un espace topologique. On munit l'ensemble $K^G = \{x = (x_g)_{g \in G} : x_g \in K\}$ de la topologie produit. Rappelons que le G-décalage sur K^G (ou encore *G-décalage d'espace de symboles K*) est le système dynamique $(K^G, G) = (K^G, \sigma)$, où $\sigma \colon G \times K^G \to K^G$, $(g, x) \mapsto gx$ est l'action (à gauche) de G sur K^G définie par

$$(gx)_{g'} = x_{g'g},$$

quels que soient $x \in K^G$ et $g, g' \in G$.

Un théorème dû à A. Jaworski (voir [**Jaw**, Cor. IV.2.1]) affirme que si G est commutatif, alors toute action continue minimale de G sur un espace compact métrisable de dimension topologique finie se plonge dans le G-décalage sur $[0,1]^G$. Dans [**LiW**, Prop. 3.5], E. Lindenstrauss et B. Weiss ont construit une action continue φ de $\mathbb{Z}$ sur un espace compact métrisable X telle que le système dynamique (X, φ) soit minimal et ne se plonge pas dans le $\mathbb{Z}$-décalage sur $[0,1]^{\mathbb{Z}}$. L'existence d'un tel système montre en particulier que le théorème de Beboutov sur le plongement des flots (voir par exemple [**Aus**, Th.1 p.184] ou [**Kak**]) n'a pas d'analogue discret.

Dans ce chapitre, on généralise la construction de Lindenstrauss et Weiss. Nous démontrons le résultat suivant :

Théorème 6.1. — *Soit G un groupe infini dénombrable, moyennable et résiduellement fini. Alors il existe un espace compact métrisable X, muni d'une action continue φ de G, tel que le système dynamique (X, φ) soit minimal et ne se plonge pas dans le G-décalage sur $[0,1]^G$.*

Un groupe G est dit *résiduellement fini* si l'intersection de tous ses sous-groupes d'indice fini est réduit à $\{1_G\}$. Si G est dénombrable alors G est résiduellement fini si et seulement si il existe une suite décroissante (H_n) de sous-groupes d'indice fini de G (que l'on peut supposer distingués) telle que $\bigcap_n H_n = \{1_G\}$.

Tous les groupes commutatifs de type fini sont moyennables et résiduellement finis. Le théorème 6.1 montre donc que l'on ne peut pas supprimer l'hypothèse de finitude de la dimension topologique dans le théorème de Jaworski si G est un groupe de type fini.

L'outil essentiel utilisé dans la démonstration du théorème 6.1 est la dimension topologique moyenne (notée ici $\mathrm{mdim}(X, \varphi)$). Cet invariant donne une condition nécessaire pour l'existence d'un plongement d'un système dynamique dans un autre. La démonstration du théorème 6.1 se réduit alors à la construction d'un système dynamique minimal (X, φ) de dimension topologique moyenne strictement supérieure à $\mathrm{mdim}([0,1]^G, \sigma) = 1$.

6.2. Sous-décalages de type bloc

Soient G un groupe dénombrable et K un espace topologique. Rappelons que pour tout $A \subset G$, on note π_A la projection de $K^G = K^A \times K^{G \setminus A}$ sur K^A.

Pour tout $g \in G$, considérons l'homéomorphisme $\sigma_A^g \colon K^{Ag} \to K^A$ défini par

$$\sigma_A^g\big((x_{g'})_{g' \in Ag}\big) = (x_{ag})_{a \in A},$$

pour tout $(x_{g'})_{g' \in Ag} \in K^{Ag}$. Posons pour simplifier $\sigma^g = \sigma_G^g$. Remarquons que $\sigma^g \colon K^G \to K^G$ est l'application $x \mapsto gx$. Avec ces notations, on obtient le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} K^G \arrow[r, "\sigma^g"] \arrow[d, "\pi_{Ag}"'] & K^G \arrow[d, "\pi_A"] \\ K^{Ag} \arrow[r, "\sigma_A^g"] & K^A. \end{tikzcd} \tag{6.1}$$

Soit H un sous groupe de G. Soit $G/H = \{gH \colon g \in G\}$ l'ensemble des classes à gauche de G suivant H. On note μ_H la surjection canonique de G sur G/H. Fixons un système complet de représentants des classes à gauche de G suivant H, c'est-à-dire un sous-ensemble $C \subset G$ tel que la restriction de μ_H à C soit une bijection de C sur

G/H. Soit B un sous-ensemble de K^C. On définit $X_0 \subset K^G$ par

$$\begin{aligned} X_0 = X_0(H,C,B) &= \{x \in K^G \mid \pi_C(hx) \in B \text{ pour tout } h \in H\} \\ &= \bigcap_{h \in H} h^{-1}\pi_C^{-1}(B). \end{aligned}$$

Il est clair que X_0 est un sous-espace H-invariant de K^G.

Remarque 6.2. — Considérons des parties E et D de G telles que $E \subset H$ et $D \subset C$. L'identification de $D \times E$ avec DE fournie par la bijection $(x,h) \mapsto xh$, donne un homéomorphisme naturel entre les espaces $(K^D)^E$ et K^{DE}. En prenant $E = H$ et $D = C$, on obtient un homéomorphisme H-équivariant entre $(K^C)^H$ et K^G qui induit un homéomorphisme H-équivariant entre $B^H \subset (K^C)^H$ et X_0.

Le sous-espace $X \subset K^G$ défini par

$$X = X(H,C,B) = \bigcup_{g \in G} gX_0$$

est un sous-décalage de K^G appelé *sous-décalage de type bloc* associé au triplet (H,C,B). Observons que l'on a $X = \bigcup_{g \in C} gX_0$.

Rappelons qu'un système dynamique X est dit *topologiquement transitif* s'il admet une orbite dense dans X.

Lemme 6.3. — *Soit $X \subset K^G$ le sous-décalage de type bloc associé au triplet (H,C,B). Supposons H infini et B séparable. Alors le système dynamique (X,σ) est topologiquement transitif.*

Démonstration. — Rappelons que l'on a un homéomorphisme H-équivariant entre X_0 et B^H (remarque 6.2). Comme $X = \bigcup_{g \in G} gX_0$, il suffit de démontrer que le H-décalage sur B^H est topologiquement transitif.

Comme H est dénombrable, il existe une suite croissante $E_0 \subset E_1 \subset \dots$ de parties finies de H telle que $H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} E_i$. Soit $A \subset B$ une partie dénombrable dense dans B. Alors $A^{E_i} \subset B^{E_i}$ est dense dans B^{E_i} pour tout $i \in \mathbb{N}$. Posons $D = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A^{E_i}$. Comme D est dénombrable, on peut supposer $D = \{d^{(n)} \colon n \in \mathbb{N}\}$.

On va obtenir un élément $y \in B^H$ d'orbite dense en concaténant les éléments de D. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\psi(n) \in \mathbb{N}$ tel que $d^{(n)} \in A^{E_{\psi(n)}}$. Comme H est infini, on peut trouver une suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de H telle que la suite $(E_{\psi(n)}h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit composée de parties disjointes de H. Choisissons arbitrairement $b \in B$. On définit l'élément $y = (y_h)_{h \in H} \in B^H$ de la façon suivante

$$y_h = \begin{cases} (d^{(n)})_{hh_n^{-1}} & \text{s'il existe } n \in \mathbb{N} \text{ tel que } h \in E_{\psi(n)}h_n \\ \\ b & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que l'on a $(h_n y)_h = (d^{(n)})_h$ quel que soit $h \in E_{\psi(n)}$. Il est clair alors que y est un élément d'orbite dense du H-décalage sur B^H.

□

Soient X un espace topologique, $A \subset X$ et $x \in A$. On dit que x est un *point isolé* de A s'il existe un voisinage ouvert V de x dans X tel que $V \cap A = \{x\}$.

Lemme 6.4. — *Soit $X \subset K^G$ le sous-décalage de type bloc associé au triplet (H, C, B). Supposons que H est infini et que B contient au moins deux éléments. Alors X est sans point isolé.*

Démonstration. — D'après la remarque 6.2, l'espace X_0 est homéomorphe à B^H (muni de la topologie produit). Comme H est infini et que B contient au moins deux éléments, tous les ouverts non vides de B^H contiennent une infinité d'éléments. L'espace X_0 est donc sans point isolé. On en déduit que $X = \bigcup_{g\in G} gX_0$ est sans point isolé. □

6.3. Minoration de la dimension topologique moyenne de systèmes minimaux

Les résultats de cette section, qui généralisent des résultats contenus dans [**LiW**], sont utilisés pour construire des sous-décalages minimaux de dimensions topologiques moyennes arbitrairement grandes.

Soit (X, d) un espace métrique et $\epsilon > 0$. On dit qu'un sous-ensemble $Y \subset X$ est *ϵ-dense* dans X si pour tout $x \in X$, il existe $y \in Y$ tel que $d(x, y) \le \epsilon$.

On dit qu'un système dynamique X est *minimal* si toutes ses orbites sont denses dans X.

Lemme 6.5. — *Soit φ une action continue d'un groupe G sur un espace métrique (E, d). Soient $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles G-invariants de E et $X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. On suppose qu'il existe une suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs qui converge vers 0 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in X_n$, l'orbite de x soit ϵ_n-dense dans X_n. Alors le système dynamique (X, φ) est minimal.*

Démonstration. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $x, y \in X$, alors $x, y \in X_n$. Comme l'orbite de x est ϵ_n-dense dans X_n, il existe $g_n \in G$ tel que $d(g_n x, y) \le \epsilon_n$. L'orbite de x est donc dense dans X. □

Soit G un groupe dénombrable moyennable. On définit la densité $\delta(J) \in [0, 1]$ d'un sous-ensemble $J \subset G$ par

$$\delta(J) = \sup_{(F_i)} \limsup_{i\to\infty} \frac{|J \cap F_i|}{|F_i|},$$

où (F_i) décrit les suites de Følner de G.

Lemme 6.6. — *Soit G un groupe dénombrable moyennable. Notons $K = [0,1]^N$, où $N \in \mathbb{N}$. Soit $X \subset K^G$ un sous-décalage fermé. Supposons qu'il existe un élément $\bar{x} = (\bar{x}_g)_{g\in G} \in X$ et un sous-ensemble $J \subset G$ vérifiant la condition suivante : tout élément $x = (x_g)_{g\in G} \in K^G$ tel que $\pi_{G\setminus J}(x) = \pi_{G\setminus J}(\bar{x})$ appartient à X. Alors on a*

$$\mathrm{mdim}(X,\sigma) \geq N\delta(J).$$

Démonstration. — Considérons la métrique ρ sur K induite par la norme sup de $\mathbb{R}^N$. Comme G est dénombrable, on peut trouver une famille $(\alpha_g)_{g\in G}$ de réels strictement positifs tels que $\alpha_{1_G} = 1$ et $\sum_{g\in G} \alpha_g < \infty$. Considérons la métrique d sur K^G définie par

$$d(x,y) = \sum_{g\in G} \alpha_g \rho(x_g, y_g) \quad \text{quels que soient } x = (x_g)_{g\in G}, y = (y_g)_{g\in G} \in K^G.$$

Observons que d est compatible avec la topologie produit sur K^G et que l'on a

$$\rho(x_{1_G}, y_{1_G}) \leq d(x,y), \tag{6.2}$$

quels que soient $x = (x_g)_{g\in G}, y = (y_g)_{g\in G} \in K^G$. Soit F une partie finie non vide de G. Rappelons que la métrique d_F est donnée par

$$d_F(x,y) = \max_{g\in F} d(gx, gy) \quad \text{quels que soient } x, y \in K^G.$$

Soit ρ_F la métrique sur K^F définie par

$$\rho_F(u,v) = \max_{g\in F} \rho(u_g, v_g), \tag{6.3}$$

quels que soient $u = (u_g)_{g\in F}$, $v = (v_g)_{g\in F} \in K^F$. Considérons le plongement $\psi_F \colon K^F \to K^G$ qui associe à chaque élément $u = (u_g)_{g\in F} \in K^F$ l'élément $x = (x_g)_{g\in G} \in K^G$ défini par

$$x_g = \begin{cases} u_g & \text{si } g \in F \\ \bar{x}_g & \text{si } g \in G \setminus F. \end{cases}$$

L'inégalité (6.2) et l'égalité (6.3) entraînent

$$\rho_F(u,v) \leq d_F(\psi_F(u), \psi_F(v)) \text{ quels que soient } u, v \in K^F. \tag{6.4}$$

Soient (F_i) une suite de Følner de G et $n \in \mathbb{N}$. Posons $J_n = J \cap F_n$. Les propriétés vérifiées par $\bar{x}$ et J impliquent que $\psi_{J_n}(u) \in X$ pour tout $u \in K^{J_n}$. L'inégalité (6.4) et le fait que $J_n \subset F_n$ nous donnent

$$\rho_{J_n}(u,v) \leq d_{J_n}(\psi_{J_n}(u), \psi_{J_n}(v)) \leq d_{F_n}(\psi_{J_n}(u), \psi_{J_n}(v))$$

quels que soient $u, v \in K^{J_n}$. En utilisant le lemme 3.8, on en déduit que l'on a

$$\dim_\epsilon(K^{J_n}, \rho_{J_n}) \leq \dim_\epsilon(X, d_{F_n}), \tag{6.5}$$

pour tout $\epsilon > 0$. Supposons maintenant $\epsilon \leq 1$. Remarquons que la métrique ρ_{J_n} sur $K^{J_n} = ([0,1]^N)^{J_n}$ est la métrique induite par la norme sup de $\mathbb{R}^{N|J_n|}$. Il résulte de la proposition 3.9 que $\dim_\epsilon(K^{J_n}, \rho_{J_n}) = N|J_n|$. L'inégalité (6.5) donne alors

$$N|J_n| \leq \dim_\epsilon(X, d_{F_n}). \tag{6.6}$$

Par définition de $\mathrm{mdim}_\epsilon(X, d, \sigma)$ (chap. 3), on a

$$\mathrm{mdim}_\epsilon(X, d, \sigma) = \lim_{i \to \infty} \frac{\dim_\epsilon(X, d_{F_i})}{|F_i|}.$$

Comme l'inégalité (6.6) est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit

$$N\delta(J) \leq \mathrm{mdim}_\epsilon(X, d, \sigma).$$

En utilisant le théorème 3.13, on obtient

$$\mathrm{mdim}(X, \sigma) = \lim_{\epsilon \to 0} \mathrm{mdim}_\epsilon(X, d, \sigma) \geq N\delta(J).$$

□

Lemme 6.7. — *Soit G un groupe dénombrable moyennable. Soit $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0. Posons $K = [0,1]^N$, où $N \in \mathbb{N}$. Soit $X^{(n)}$ une suite de sous-décalages fermés de K^G ($n \in \mathbb{N}$). Soit d une métrique sur K^G compatible avec la topologie produit. On suppose qu'il existe, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un élément $\bar{x}^{(n)} \in X^{(n)}$ et un sous-ensemble $I^{(n)} \subset G$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(P1) *l'orbite de tout point de $X^{(n)}$ est ϵ_n-dense dans $X^{(n)}$ relativement à d,*

(P2) $X^{(n+1)} \subset X^{(n)}$,

(P3) $I^{(n+1)} \subset I^{(n)}$,

(P4) $\pi_{G\setminus I^{(n)}}(\bar{x}^{(n+1)}) = \pi_{G\setminus I^{(n)}}(\bar{x}^{(n)})$,

(P5) *tout $x \in K^G$ tel que $\pi_{G\setminus I^{(n)}}(x) = \pi_{G\setminus I^{(n)}}(\bar{x}^{(n)})$ appartient à $X^{(n)}$,*

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $X \subset K^G$ le sous-décalage fermé défini par

$$X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X^{(n)}.$$

Alors le système dynamique (X, σ) est minimal et l'on a

$$\mathrm{mdim}(X, \sigma) \geq N\delta(J),$$

où $\delta(J)$ est la densité de l'ensemble $J \subset G$ défini par

$$J = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I^{(n)}.$$

Démonstration. — La propriété (P1) implique que le système dynamique (X, σ) est minimal d'après le lemme 6.5. Par compacité de K^G, on peut extraire de la suite $(\bar{x}^{(n)})$ une sous-suite qui converge vers un élément $\bar{x} \in K^G$. On a $\bar{x} \in X$ en utilisant (P2) et l'hypothèse de fermeture des $X^{(n)}$. D'autre part, les propriétés (P2), (P3) et (P4) entraînent $\pi_{G \setminus I^{(n)}}(\bar{x}) = \pi_{G \setminus I^{(n)}}(\bar{x}^{(n)})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En utilisant (P5), on en déduit que tout élément $x \in K^G$ tel que $\pi_{G \setminus J}(x) = \pi_{G \setminus J}(\bar{x})$ appartient à X. On a donc $\mathrm{mdim}(X, \sigma) \geq N\delta(J)$ d'après le lemme 6.6. □

6.4. Construction de systèmes dynamiques minimaux

Dans cette section on construit des actions minimales de dimension topologique moyenne arbitrairement grande. Plus précisément nous allons démontrer le théorème suivant :

Théorème 6.8. — *Soit G un groupe infini dénombrable, moyennable et résiduellement fini. Pour tout entier $N \geq 1$, il existe un sous-décalage fermé $X \subset ([0,1]^N)^G$ tel que le système dynamique (X, σ) soit minimal et vérifie*

$$\mathrm{mdim}(X, \sigma) > N/2.$$

On utilisera les lemmes élémentaires suivants dans la preuve du théorème 6.8.

Lemme 6.9. — *Soit H un sous-groupe d'un groupe G et C un système complet de représentants des classes à gauche de G suivant H. Soient D et E des parties finies de G telles que $D \subset C$ et $E \subset H$. Alors $|DE| = |D||E|$.*

Démonstration. — Cela résulte du fait que l'application de $C \times H$ vers G définie par $(c, h) \mapsto ch$ est une bijection. □

Lemme 6.10. — *Soit $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de sous-groupes d'un groupe G telle que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i = \{1_G\}$. Soit $F \subset G$ une partie finie. Alors il existe $i_F \in \mathbb{N}$ tel que la restriction à F de la surjection canonique $\mu_{G_i} \colon G \to G/G_i$ soit injective pour tout $i \geq i_F$.*

Démonstration. — Comme F est fini, il suffit de démontrer que pour des éléments distincts g et g' de F, on a $\mu_{G_i}(g) \neq \mu_{G_i}(g')$ pour i assez grand. Si ce n'était pas le cas, on aurait $\mu_{G_i}(g) = \mu_{G_i}(g')$ pour une infinité d'entiers i. La décroissance de la suite (G_i) impliquerait alors $g^{-1}g' \in \bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i = \{1_G\}$, ce qui est absurde. □

Lemme 6.11. — *Soit φ une action continue d'un groupe G sur un espace métrique compact (X, d) sans point isolé. Soit $y \in X$ un point d'orbite dense dans X. Soient F une partie finie de G et $\epsilon > 0$. Alors il existe une partie finie $K \subset G$ ne rencontrant pas F telle que pour tout $x \in X$, il existe $k \in K$ vérifiant $d(x, ky) < \epsilon$.*

Démonstration. — Soit $x \in X$. Comme x n'est pas un point isolé dans l'espace métrique X, que l'orbite de y est dense dans X et que F est une partie finie de G, il existe $g_x \in G \setminus F$ tel que $d(x, g_x y) < \epsilon$. Par continuité de la distance, il existe un voisinage ouvert V_x de x tel que $d(z, g_x y) < \epsilon$ pour tout $z \in V_x$. Par compacité de X, on peut trouver un ensemble fini $A \subset X$ tel que les V_x, $x \in A$, recouvrent X. Il suffit alors de prendre $K = \{g_x : x \in A\}$. □

Démonstration du théorème 6.8. — Posons $K = [0,1]^N$. Comme G est dénombrable, il existe une suite croissante $(E_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de parties finies de G telle que $G = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i$. On munit K^G d'une métrique d qui soit compatible avec la topologie produit. Donnons-nous une suite de nombres réels strictement positifs $(\epsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que $\epsilon_0 = \operatorname{diam}(K^G)$, ainsi qu'une suite d'entiers strictement positifs $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui tend vers l'infini (une condition sur les a_i sera imposée en fin de démonstration). Puisque G est un groupe dénombrable résiduellement fini, il existe une suite décroissante $G = G_0 \supset G_1 \supset \dots$ de sous-groupes d'indice fini de G telle que $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i = \{1_G\}$. Comme G est infini, on a $\lim_{i\to\infty}[G \colon G_i] = +\infty$. Quitte à extraire une sous-suite de (G_i), on peut supposer que la suite (G_i) est strictement décroissante.

On va construire une suite de triplets $(H_n, C_n, B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, où H_n est un sous-groupe de G, où C_n est un système complet de représentants des classes à gauche de G suivant H_n contenant 1_G et où B_n est un sous-espace fermé de K^{C_n} contenant au moins deux éléments. En fait, la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera une sous-suite de la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$, c'est-à-dire $H_n = G_{\varphi(n)}$ ($n \in \mathbb{N}$) où $\varphi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. On va aussi construire une suite de sous-ensembles non vides $I^{(n)} \subset G$ telle que les ensembles $X_0^{(n)}$ et $X^{(n)}$ définis par

$$\begin{aligned} X_0^{(n)} = X_0(H_n, C_n, B_n) &= \{x \in K^G \mid \pi_{C_n}(hx) \in B_n \text{ pour tout } h \in H_n\} \\ &= \bigcap_{h\in H_n} h^{-1}\pi_{C_n}^{-1}(B_n) \end{aligned}$$

et

$$X^{(n)} = X(H_n, C_n, B_n) = \bigcup_{g\in G} gX_0^{(n)} = \bigcup_{g\in C_n} gX_0^{(n)}$$

vérifient les propriétés suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}$:

(Q1) l'orbite de tout élément de $X^{(n)}$ est ϵ_n-dense dans $X^{(n)}$ relativement à d,

(Q2) $\pi_{G\setminus I^{(n)}}(x) = \pi_{G\setminus I^{(n)}}(x')$ quels que soient $x, x' \in X_0^{(n)}$,

(Q3) $X_0^{(n+1)} \subset X_0^{(n)}$ (et donc $X^{(n+1)} \subset X^{(n)}$),

(Q4) $I^{(n+1)} \subset I^{(n)}$.

Construction des $X^{(n)}$. — La construction se fait par récurrence sur n. On commence par prendre $H_0 = G_0 = G$, $C_0 = \{1_G\}$, $B_0 = K^{\{1_G\}}$ et $I^{(0)} = G$. On a donc $X_0^{(0)} = X^{(0)} = K^G$. Notons que B_0 contient au moins deux points et que les conditions (Q1) et (Q2) sont trivialement vérifiées pour $n = 0$. On pose $\varphi(0) = 0$.

Supposons que l'on ait déjà construit H_n, C_n, B_n et $I^{(n)}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On construit H_{n+1}, C_{n+1}, B_{n+1} et $I^{(n+1)}$ de la manière suivante. Comme B_n est un espace compact métrisable, il est séparable. D'autre part H_n est infini puisque c'est un sous-groupe d'indice fini du groupe infini G. Il résulte du lemme 6.3 que le système dynamique $(X^{(n)}, \sigma)$ est topologiquement transitif. On peut donc trouver un élément $y \in X^{(n)}$ dont l'orbite est dense dans $X^{(n)}$. Quitte à remplacer y par un point de son orbite, on peut supposer $y \in X_0^{(n)}$. Par définition de la topologie produit sur K^G, il existe une partie finie non vide $P_{n+1} \subset G$ telle que

$$\pi_{P_{n+1}}(x) = \pi_{P_{n+1}}(x') \Rightarrow d(x, x') \leq \frac{\epsilon_{n+1}}{2} \tag{6.7}$$

quels que soient $x, x' \in K^G$. Par hypothèse de récurrence, l'espace B_n contient au moins deux éléments. On en déduit en utilisant le lemme 6.4 que l'espace $X^{(n)}$ est sans point isolé. Il résulte du lemme 6.11 qu'il existe une partie finie $T_{n+1} \subset G$ disjointe de la partie finie $P_{n+1}^{-1} C_n$ telle que pour tout $x \in X^{(n)}$, il existe $k \in T_{n+1}$ tel que

$$d(x, ky) \leq \frac{\epsilon_{n+1}}{2}. \tag{6.8}$$

Par hypothèse de récurrence, on a $1_G \in C_n$. Par le choix de T_{n+1}, on a alors $1_G \notin P_{n+1} T_{n+1}$. D'autre part, puisque $G = C_n H_n$, il existe une partie finie $Q_{n+1} \subset H_n$ telle que

$$P_{n+1} T_{n+1} \subset C_n Q_{n+1}. \tag{6.9}$$

Or, $P_{n+1} T_{n+1} \cap C_n = \varnothing$. On peut donc supposer

$$1_G \notin Q_{n+1}. \tag{6.10}$$

Notons que le groupe H_n est moyennable comme sous-groupe du groupe moyennable G. Soit $(F_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de Følner de H_n. Alors $(C_n F_i^{(n)})_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite de Følner de G d'après la proposition 3.17. D'après la proposition 2.4, il existe $\psi(n) \in \mathbb{N}$ tel que

$$\alpha_G(C_n F_{\psi(n)}^{(n)}, E_n) \leq \frac{1}{n+1}. \tag{6.11}$$

Comme H_n est infini et que $F_{\psi(n)}^{(n)}$ et Q_{n+1} sont des parties finies de H_n, on peut trouver un élément $h_n \in H_n$ tel que

$$F_{\psi(n)}^{(n)} h_n \cap Q_{n+1} = \varnothing. \tag{6.12}$$

Posons $A_n = F_{\psi(n)}^{(n)} h_n$. Observons que les propriétés de α_G (voir les égalités (2.1)) et l'inégalité (6.11) impliquent

$$\alpha_G(C_n A_n, E_n) = \alpha_G(C_n F_{\psi(n)}^{(n)}, E_n) \leq \frac{1}{n+1}. \tag{6.13}$$

Nous allons construire H_{n+1} et C_{n+1}. Rappelons que par hypothèse de récurrence, on a $H_n = G_{\varphi(n)}$. Comme $\lim_{i\to\infty}[G, G_i] = +\infty$, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\frac{[G\colon G_i] - |C_n Q_{n+1}|}{[G\colon G_i]} \geq \frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}}, \tag{6.14}$$

pour tout $i \geq i_0$. Puisque $\bigcap_{i\in\mathbb{N}} G_i = \{1_G\}$, le lemme 6.10 implique qu'il existe un entier $m \geq \max(i_0, \varphi(n) + 1)$ tel que la restriction à la partie finie $Q_{n+1} \cup A_n \cup \{1_G\}$ de la surjection canonique $\mu_{G_m}\colon G \to G/G_m$ est injective. Comme $m > \varphi(n)$, le sous-groupe G_m est strictement inclus dans $G_{\varphi(n)} = H_n$. L'injectivité de la restriction de μ_{G_m} à $Q_{n+1} \cup A_n \cup \{1_G\} \subset H_n$ implique l'existence d'une partie finie $R_{n+1} \subset H_n$ vérifiant

$$R_{n+1} \supset Q_{n+1} \cup A_n \cup \{1_G\} \tag{6.15}$$

et telle que R_{n+1} soit un système complet de représentants des classes à gauche de H_n suivant G_m. On en déduit que $C_n R_{n+1}$ est un système complet de représentants des classes à gauche de G suivant G_m. Posons

$$C_{n+1} = C_n R_{n+1}$$

et remarquons que $1_G \in C_{n+1}$. En utilisant le lemme 6.9, on a

$$\frac{|R_{n+1} \setminus Q_{n+1}|}{|R_{n+1}|} = \frac{|C_n(R_{n+1} \setminus Q_{n+1})|}{|C_n R_{n+1}|} = \frac{[G\colon G_m] - |C_n Q_{n+1}|}{[G\colon G_m]}.$$

On déduit de l'égalité précédente et de l'inégalité (6.14) :

$$\frac{|R_{n+1} \setminus Q_{n+1}|}{|R_{n+1}|} \geq \frac{a_{n+1}}{1 + a_{n+1}}. \tag{6.16}$$

Posons $\varphi(n + 1) = m$ et $H_{n+1} = G_{\varphi(n+1)}$. Remarquons qu'avec ces notations, on a alors

$$H_n = R_{n+1} H_{n+1}. \tag{6.17}$$

Soit B_{n+1} le sous-ensemble fermé de $K^{C_{n+1}}$ défini par :

$$B_{n+1} = \{(x_g)_{g\in C_{n+1}} \in (B_n)^{R_{n+1}} \subset (K^{C_n})^{R_{n+1}} = K^{C_{n+1}} \mid x_g = y_g \text{ si } g \in C_n Q_{n+1}\}.$$

Remarquons tout d'abord que B_{n+1} contient au moins deux éléments. Cela résulte du fait que B_n contient au moins deux éléments et que $Q_{n+1} \neq R_{n+1}$ car $1_G \in R_{n+1} \setminus Q_{n+1}$ (voir (6.10) et (6.15)). Considérons les ensembles

$$X_0^{(n+1)} \subset X^{(n+1)}$$

définis par le triplet $(H_{n+1}, C_{n+1}, B_{n+1})$. On a $X_0^{(n+1)} \subset X_0^{(n)}$. En effet, en utilisant la définition de B_{n+1}, les identifications discutées dans la remarque 6.2 et l'égalité (6.17), on a

$$X_0^{(n+1)} = (B_{n+1})^{H_{n+1}} \subset ((B_n)^{R_{n+1}})^{H_{n+1}} = (B_n)^{R_{n+1}H_{n+1}} = (B_n)^{H_n} = X_0^{(n)}.$$

Il en résulte $X^{(n+1)} \subset X^{(n)}$. Montrons que l'orbite d'un élément quelconque de $X^{(n+1)}$ est ϵ_{n+1}-dense dans $X^{(n+1)}$. Soient $x, x' \in X^{(n+1)} \subset X^{(n)}$. Par le choix de T_{n+1} (voir l'inégalité (6.8)), il existe $k \in T_{n+1}$ tel que

$$d(x, ky) \leq \frac{\epsilon_{n+1}}{2}. \tag{6.18}$$

Comme $P_{n+1}T_{n+1} \subset C_n Q_{n+1}$ (c'est l'inclusion (6.9)), la définition de $X^{(n+1)}$ implique qu'il existe $g \in G$ tel que $\pi_{P_{n+1}T_{n+1}}(gx') = \pi_{P_{n+1}T_{n+1}}(y)$. En particulier, on a $\pi_{P_{n+1}k}(gx') = \pi_{P_{n+1}k}(y)$, ce qui équivaut

$$\pi_{P_{n+1}}(kgx') = \pi_{P_{n+1}}(ky) \tag{6.19}$$

(voir le diagramme (6.1)). En utilisant l'inégalité triangulaire, l'inégalité (6.18), l'implication (6.7) et l'égalité (6.19), on obtient

$$d(x, kgx') \leq d(x, ky) + d(ky, kgx') \leq \epsilon_{n+1}.$$

Cela démontre que l'orbite de x' est ϵ_{n+1}-dense dans $X^{(n+1)}$. La propriété (Q1) est donc vérifiée au rang $n+1$.

Posons

$$S_{n+1} = C_n(R_{n+1} \setminus Q_{n+1})H_{n+1}$$

et remarquons que

$$G \setminus S_{n+1} = C_n Q_{n+1} H_{n+1}.$$

Définissons $I^{(n+1)} \subset I^{(n)}$ par

$$I^{(n+1)} = I^{(n)} \cap S_{n+1}.$$

Si $x, x' \in X_0^{(n+1)}$, on a $\pi_{G\setminus S_{n+1}}(x) = \pi_{G\setminus S_{n+1}}(x')$ par définition de $X_0^{(n+1)}$. D'autre part, on a $\pi_{G\setminus I^{(n)}}(x) = \pi_{G\setminus I^{(n)}}(x')$ puisque $X_0^{(n+1)} \subset X_0^{(n)}$ et que la propriété (Q2) est vraie au rang n par hypothèse de récurrence. Comme

$$G \setminus I^{(n+1)} = (G \setminus I^{(n)}) \cup (G \setminus S_{n+1}),$$

on en déduit $\pi_{G\setminus I^{(n+1)}}(x) = \pi_{G\setminus I^{(n+1)}}(x')$. La propriété (Q2) est donc vérifiée au rang $n+1$. Cela achève la construction de la suite $X^{(n)}$ par récurrence.

Choisissons de manière arbitraire un élément $\bar{x}^{(n)} \in X_0^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a

(Q5) $\pi_{G\setminus I^{(n)}}(\bar{x}^{(n+1)}) = \pi_{G\setminus I^{(n)}}(\bar{x}^{(n)})$,

d'après (Q2) et (Q3). Montrons par récurrence sur n la propriété suivante :

(Q6) tout $x \in K^G$ tel que $\pi_{G\setminus I^{(n)}}(x) = \pi_{G\setminus I^{(n)}}(\bar{x}^{(n)})$ appartient à $X_0^{(n)}$.

Pour $n = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons la propriété vraie au rang n et donnons-nous un élément $x \in K^G$ tel que

$$\pi_{G\setminus I^{(n+1)}}(x) = \pi_{G\setminus I^{(n+1)}}(\bar{x}^{(n+1)}).$$

En utilisant (Q4) et (Q5), on obtient $\pi_{G\setminus I^{(n)}}(x) = \pi_{G\setminus I^{(n)}}(\bar{x}^{(n)})$. L'hypothèse de récurrence implique alors $x \in X_0^{(n)}$. D'autre part, comme $G \setminus S_{n+1} \subset G \setminus I^{(n+1)}$, on a aussi

$$\pi_{G\setminus S_{n+1}}(x) = \pi_{G\setminus S_{n+1}}(\bar{x}^{(n+1)}).$$

On en déduit finalement $x \in X_0^{(n+1)}$, ce qui achève la démonstration par récurrence de (Q6).

Posons pour tout entier i

$$F_i = C_i A_i,$$

et montrons la propriété suivante :

(Q7) la suite $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de Følner de G.

Soit L une partie finie de G. Comme G est une réunion croissante des E_i pour $i \in \mathbb{N}$, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que $L \subset E_i$ pour tout $i \geq i_0$. On en déduit en utilisant les inégalités (2.1) et (6.13) :

$$\alpha_G(F_i, L) \leq \alpha_G(F_i, E_i) \leq \frac{1}{i+1},$$

pour tout $i \geq n_0$. On a donc $\lim_{i\to\infty} \alpha_G(F_i, L) = 0$. Il résulte de la proposition 2.4 que $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de Følner de G.

Considérons le sous-décalage $X \subset K^G$ défini par

$$X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X^{(n)}.$$

Il résulte des propriétés (Q1),(Q3),(Q4),(Q5) et (Q6) que les suites $X^{(n)}, \bar{x}^{(n)}$ et $I^{(n)}$ vérifient les hypothèses du lemme 6.7. On en déduit que le système dynamique (X, σ) est minimal et que l'on a

$$\operatorname{mdim}(X, \sigma) \geq N\delta(J), \tag{6.20}$$

où $\delta(J) \in [0, 1]$ est la densité dans G de

$$J = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I^{(n)} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S_{n+1}.$$

Minoration de la densité de *J*. — Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $C_n R_{n+1} = C_{n+1}$ et $1_G \in R_{n+2} \setminus Q_{n+2}$, on a

$$C_n(R_{n+1} \setminus Q_{n+1}) \subset C_{n+1} \subset C_{n+1}(R_{n+2} \setminus Q_{n+2}).$$

Il en résulte

$$C_n(R_{n+1} \setminus Q_{n+1}) \subset C_{k-1}(R_k \setminus Q_k)H_k = S_k, \tag{6.21}$$

quel que soit $k \geq n + 1$.

Supposons $n \geq 1$ et calculons le cardinal de $F_n \cap J$, où $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est la suite de Følner de G définie par $F_i = C_i A_i$ (voir la propriété (Q7)). Les inclusions (6.15), (6.21) et (6.12) impliquent

$$F_n \subset C_n(R_{n+1} \setminus Q_{n+1}) \subset S_k,$$

pour tout $k \geq n+1$. On en déduit

$$F_n \cap J = F_n \cap (\bigcap_{k\in\mathbb{N}} S_{k+1}) = C_n A_n \cap (\bigcap_{k=1}^{n} S_k).$$

Comme $A_n \subset H_n$ et que $S_k h = S_k$ quels que soient $h \in H_n$ et $1 \leq k \leq n$, on a

$$F_n \cap J = (C_n \cap (\bigcap_{k=1}^{n} S_k))A_n.$$

En passant au cardinal dans l'égalité précédente et en appliquant le lemme 6.9, on obtient :

$$|F_n \cap J| = |(C_n \cap (\bigcap_{k=1}^{n} S_k))A_n| = |C_n \cap (\bigcap_{k=1}^{n} S_k)||A_n|.$$

D'autre part, $|F_n| = |C_n A_n| = |C_n||A_n|$. On déduit de ces égalités

$$\frac{|F_n \cap J|}{|F_n|} = \frac{|C_n \cap (\bigcap_{k=1}^{n} S_k)|}{|C_n|}. \tag{6.22}$$

Montrons

$$\frac{|C_n \cap (\bigcap_{k=1}^{n} S_k)|}{|C_n|} = \prod_{k=1}^{n} \frac{|R_k \setminus Q_k|}{|R_k|}. \tag{6.23}$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Comme $C_k = C_{k-1}R_k$ et $R_k \subset H_{k-1}$, le lemme 6.9 implique

$$|C_k| = |C_{k-1}||R_k|.$$

Comme $|C_0| = 1$, on en déduit par une récurrence immédiate

$$|C_n| = \prod_{k=1}^{n} |R_k|. \tag{6.24}$$

Par ailleurs, on a

$$C_n \cap (\bigcap_{k=1}^{n} S_k) = (C_{n-1}R_n \cap S_n) \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} S_k.$$

Or,

$$C_{n-1}R_n \cap S_n = C_{n-1}R_n \cap C_{n-1}(R_n \setminus Q_n)H_n = C_{n-1}(R_n \setminus Q_n),$$

puisque $C_{n-1}R_n = C_n$ est un système complet de représentants des classes à gauche de G suivant H_n. On a donc

$$C_n \cap (\bigcap_{k=1}^{n} S_k) = C_{n-1}(R_n \setminus Q_n) \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} S_k.$$

Or, on a $S_k h = S_k$ quels que soient $h \in H_{n-1}$ et $1 \leq k \leq n-1$. Comme $R_n \setminus Q_n \subset H_{n-1}$, on en déduit :

$$C_n \cap (\bigcap_{k=1}^{n} S_k) = (C_{n-1} \cap (\bigcap_{k=1}^{n-1} S_k))(R_n \setminus Q_n).$$

En appliquant le lemme 6.9, on obtient

$$|C_n \cap (\bigcap_{k=1}^{n} S_k)| = |(C_{n-1} \cap (\bigcap_{k=1}^{n-1} S_k))(R_n \setminus Q_n)| = |C_{n-1} \cap (\bigcap_{k=1}^{n-1} S_k)||R_n \setminus Q_n|.$$

Une récurrence immédiate donne

$$|C_n \cap (\bigcap_{k=1}^{n} S_k)| = \prod_{k=1}^{n} |R_k \setminus Q_k|. \tag{6.25}$$

Les inégalités (6.24) et (6.25) donne l'égalité (6.23). On déduit alors des inégalités (6.16), (6.22) et (6.23)

$$\frac{|F_n \cap J|}{|F_n|} \geq \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{1+a_k}. \tag{6.26}$$

On choisit maintenant une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de telle sorte que

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+{a_i}^{-1}) < 2. \tag{6.27}$$

On peut prendre par exemple $a_i = 2^{i+1}$ puisque l'inégalité $\log(1+x) \leq x$ $(x \geq 0)$ entraîne

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+2^{-i-1}) \leq \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i-1}\right) = \sqrt{e} < 2.$$

Par définition de $\delta(J)$, les inégalités (6.26) et (6.27) impliquent

$$\delta(J) > \frac{1}{2}.$$

On en déduit en utilisant l'inégalité (6.20)

$$\mathrm{mdim}(X, \sigma) > \frac{N}{2}.$$

□

Corollaire 6.12. — *Soit G un groupe infini dénombrable, moyennable et résiduellement fini. Soit K un espace compact métrisable de dimension topologique finie. Alors il existe un espace compact métrisable X muni d'une action continue φ de G, tel que le système dynamique (X, φ) soit minimal et ne se plonge pas dans le G-décalage (K^G, σ).*

Démonstration. — D'après le théorème 6.8, il existe un espace compact métrisable X muni d'une action continue φ de G, tel que le système dynamique (X, φ) soit minimal et ait une dimension topologique moyenne strictement plus grande que $\dim(K)$. Par le corollaire 3.16, on a

$$\mathrm{mdim}(K^G, \sigma) \leq \dim(K).$$

On en déduit en utilisant la proposition 3.14 que (X, φ) ne se plonge pas dans le G-décalage (K^G, σ). □

Le théorème 6.1 résulte du corollaire 6.12 en prenant $K = [0, 1]$.

CHAPITRE 7

SOUS-DÉCALAGES DE TOEPLITZ SUR LES GROUPES MOYENNABLES RÉSIDUELLEMENT FINIS

Soit G un groupe dénombrable, moyennable et résiduellement fini. Soit K un ensemble fini. On introduit dans ce chapitre une classe de sous-décalages minimaux de K^G généralisant les sous-décalages de Toeplitz lorsque $G = \mathbb{Z}$. On démontre que pour tout $\theta \in [0, \log |K|[$, il existe un sous-décalage de Toeplitz $X \subset K^G$ d'entropie topologique θ.

7.1. Introduction

Soient G un groupe dénombrable et K un ensemble fini de cardinal $|K|$. On munit K de la topologie discrète et $K^G = \{x = (x_g)_{g\in G} \colon x_g \in K\}$ de la topologie produit. Rappelons que le *G-décalage* sur K^G est l'action continue (à gauche) de G sur K^G définie par

$$(gx)_{g'} = x_{g'g}$$

quels que soient $g \in G$ et $x \in K^G$.

On dira qu'un élément $x \in K^G$ est un *élément de Toeplitz* s'il existe une suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-groupes d'indice fini de G telle que pour tout $g \in G$ il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que la restriction de x à gH_n est constante. On appelle *sous-décalage de Toeplitz* l'adhérence dans K^G de l'orbite d'un élément de Toeplitz. Tout sous-décalage de Toeplitz est un sous-ensemble minimal de K^G (corollaire 7.7).

Les sous-décalages de Toeplitz sur $\mathbb{Z}$ ont été introduits en 1969 par Jacobs et Keane [**JaK**]. Une suite $x \in K^{\mathbb{Z}}$ est une suite de Toeplitz si et seulement si il existe une partition de $\mathbb{Z}$ par des progressions arithmétiques telles que la restriction de x à chacune des progressions est constante. Les propriétés topologiques et ergodiques des sous-décalages de Toeplitz sur $\mathbb{Z}$ ont donné lieu a de nombreux travaux (voir par exemple [**Oxt**], [**Wil**], [**Do1**], [**Do2**], [**GjJ**]). Pour tout ensemble fini K et pour tout réel $\theta \in [0, \log |K|[$, il existe un sous-décalage de Toeplitz sur $\mathbb{Z}$ d'entropie topologique θ (voir [**Kůr**, Th. 4.77], [**Wil**]). Dans cet article on généralise ce résultat aux groupes dénombrables moyennables résiduellement finis. Plus précisément, on démontre le théorème suivant :

Théorème 7.1. — *Soit G un groupe dénombrable infini, moyennable et résiduellement fini. Soient K un ensemble fini et $\theta \in [0, \log |K|[$. Alors il existe un sous-décalage de Toeplitz $X \subset K^G$ d'entropie topologique $\mathrm{h}(X) = \theta$.*

Les groupes $\mathbb{Z}^n$, $n \geq 1$, les groupes infinis nilpotents de type fini, et plus généralement les groupes linéaires infinis de type fini ne contenant pas de groupe isomorphe au groupe libre à deux générateurs vérifient les hypothèses du théoreme 7.1.

7.2. Sous-décalages de Toeplitz

7.2.1. Sous-ensembles minimaux et points presque périodiques. — Soit X un espace compact métrisable muni d'une action continue d'un groupe G. Rappelons que l'action de G sur X est dite *minimale* si toutes les orbites sont denses dans X. On appelle *sous-ensemble minimal* de X toute partie fermée, G-invariante et non vide $M \subset X$ telle que la restriction de l'action de G à M soit minimale.

Une partie S de G est dite *syndétique* s'il existe une partie finie $F \subset G$ vérifiant $G = FS$.

Exemples 7.2. —

1. Toute partie d'un groupe G contenant une partie syndétique est syndétique.
2. Un sous-groupe d'un groupe G est syndétique si et seulement si il est d'indice fini.
3. Soit G un groupe de type fini et $E \subset G$ une partie génératrice finie. La *longueur* $l_E(g)$ d'un élément $g \in G$ est le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe une suite $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ d'éléments de $E \cup E^{-1}$ telle que $g = e_1 e_2 \ldots e_n$. Définissons une métrique d_E sur G par
$$d_E(g_1, g_2) = l_E(g_1 {g_2}^{-1}).$$
Muni de cette métrique, le groupe G devient un espace métrique qui agit isométriquement sur lui-même par multiplication à droite.

   Une partie $A \subset G$ est dite *cobornée* s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que tout élément $g \in G$ se trouve à une distance inférieure à C d'un élément de A. Une partie $S \subset G$ est syndétique si et seulement si S est cobornée. Cela résulte du fait que les boules de rayons finis de l'espace métrique (G, d_E) sont finies.

Un point $x \in X$ est dit *presque périodique* si pour tout voisinage ouvert U de x, il existe une partie syndétique S de G telle que $Sx \subset U$.

On dit qu'un point $x \in X$ est *périodique* si son orbite est finie, ce qui revient à dire que son stabilisateur $\mathrm{Stab}(x)$ est un sous-groupe d'indice fini de G. Puisque tout sous-groupe d'indice fini de G est syndétique, tout point périodique est presque périodique.

On a le résultat bien connu suivant :

Proposition 7.3. — *Un point $x \in X$ est presque périodique si et seulement si $\overline{Gx}$ est un sous-ensemble minimal de X.*

Démonstration. — Supposons que $x \in X$ est presque périodique. Raisonnons par l'absurde en supposant que $Y = \overline{Gx}$ n'est pas un sous-ensemble minimal de X. Alors il existe une partie fermée G-invariante $Z \subset Y$ telle que $\varnothing \neq Z \neq Y$. Remarquons qu'alors $x \notin Z$. Par normalité de X, il existe des ouverts disjoints U et V de X tels que $x \in U$ et $Z \subset V$. Posons $S = \{g \in G \mid gx \in U\}$. Nous allons montrer que S n'est pas une partie syndétique de G, ce qui contredira le fait que x est presque périodique. Soit F une partie finie de G. Puisque $Z \subset V$ est une partie G-invariante et que G agit continûment sur X, il existe un ouvert W de X tel que $Z \subset W$ et $F^{-1}W \subset V$. Comme $W \cap Y$ est un ouvert non vide de $Y = \overline{Gx}$, il existe $g_0 \in G$ tel que $g_0 x \in W \cap Y$. Il en résulte $F^{-1}g_0 x \subset V$. On a donc $F^{-1}g_0 x \cap U = \varnothing$, ce qui montre $g_0 \notin FS$. Puisque F est une partie finie arbitraire de G, l'ensemble S n'est pas syndétique dans G. Donc Y est bien un sous-ensemble minimal de X.

Réciproquement, supposons que $Y = \overline{Gx}$ est un sous-ensemble minimal de X et soit U un voisinage ouvert de x dans X. Nous allons montrer que $S = \{g \in G \mid gx \in U\}$ est une partie syndétique de G. Posons $V = U \cap Y$ et observons qu'alors $Y = GV$. En effet, puisque $Y \setminus GV \neq Y$ est une partie fermée G-invariante de Y, on a $Y \setminus GV = \varnothing$ par minimalité de Y. Par compacité de Y, on en déduit qu'il existe une partie finie $F \subset G$ telle que $Y = \bigcup_{f \in F} fV$. Soit $g \in G$. Alors il existe $f \in F$ tel que $gx \in fV$. Cela implique $f^{-1}g \in S$ et donc $g \in fS$. Il en résulte $G = FS$ ce qui montre que S est syndétique dans G. On en déduit que x est presque périodique. □

7.2.2. Éléments de Toeplitz. — Soient G un groupe dénombrable et K un espace compact métrisable. Munissons l'ensemble

$$K^G = \{x = (x_g)_{g \in G} \,:\, x_g \in K\}$$

de la topologie produit. Le G-décalage sur K^G est l'action continue (à gauche) de G sur K^G définie par

$$(gx)_{g'} = x_{g'g} \quad \text{quels que soient } g \in G \text{ et } x \in K^G.$$

Soient H un sous-groupe de G et $x \in K^G$. On définit le sous-ensemble $\mathrm{Per}_H(x) \subset G$ par

$$\mathrm{Per}_H(x) \quad = \quad \{g \in G \colon (hx)_g = x_g \text{ quel que soit } h \in H\}.$$

On a $g \in \mathrm{Per}_H(x)$ si et seulement si la restriction de x à gH est constante. Le sous-ensemble $\mathrm{Per}_H(x)$ est donc la réunion des classes à gauche de G suivant H telles que la restriction de x à chacune de ces classes est constante. Notons que l'on a $G = \mathrm{Per}_H(x)$

si et seulement si $x \in \mathrm{Fix}(H)$, où $\mathrm{Fix}(H)$ est l'ensemble des points de K^G fixés par tous les éléments de H.

Si L et H sont des sous-groupes de G tels que $L \subset H$ alors on a $\mathrm{Per}_H(x) \subset \mathrm{Per}_L(x)$.

Remarque 7.4. — Soit H un sous-groupe de G. Notons μ_H la surjection canonique de G dans l'ensemble G/H des classes à gauche de G suivant H. L'application $\Psi_H \colon K^{G/H} \to \mathrm{Fix}(H)$ définie par

$$\Psi_H(y)_g = y_{\mu_H(g)}$$

quels que soient $g \in G$ et $y \in K^{G/H}$ est une bijection.

Définition 7.5. — On dit qu'un élément $x \in K^G$ est un élément de *Toeplitz* s'il existe une suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-groupes d'indice fini de G telle que $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Per}_{H_n}(x)$. On dira alors que x est un élément de Toeplitz relativement à la suite (H_n).

Rappelons que pour toute partie $A \subset G$, on note π_A la projection canonique de $K^G = K^A \times K^{G\setminus A}$ sur K^A.

Proposition 7.6. — *Tout élément de Toeplitz de K^G est presque périodique.*

Démonstration. — Soit $x \in K^G$ un élément de Toeplitz relativement à la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit U un voisinage ouvert de x. Par définition de la topologie produit, il existe une partie finie $F \subset G$ tel que ${\pi_F}^{-1}(\pi_F(x)) \subset U$. Puisque $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Per}_{H_n}(x)$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $F \subset \bigcup_{n=0}^{N} \mathrm{Per}_{H_n}(x)$. Donc on a $F \subset \mathrm{Per}_H(x)$, où $H = \bigcap_{n=0}^{N} H_n$. On a alors $\pi_F(hx) = \pi_F(x)$ quel que soit $h \in H$, ce qui implique $Hx \subset {\pi_F}^{-1}(\pi_F(x))$. Donc $Hx \subset U$. Comme H est d'indice fini dans G, c'est une partie syndétique de G. On en déduit que x est presque périodique. □

Soit $x \in K^G$ un élément de Toeplitz. On appelle *sous-décalage de Toeplitz* associé à x le sous-décalage fermé $\overline{Gx} \subset K^G$.

Corollaire 7.7. — *Tout sous-décalage de Toeplitz est un sous-ensemble minimal de K^G.*

Démonstration. — Le corollaire résulte des propositions 7.3 et 7.6. □

7.3. Groupes moyennables

Soit G un groupe dénombrable. Rappelons que l'on note $\mathcal{F}(G)$ les parties finies non vides de G. D'après la proposition 1.36, le groupe G est moyennable si et seulement si il admet une suite de Følner, c'est-à-dire (prop. 2.4) une suite (F_n) d'éléments de $\mathcal{F}(G)$ vérifiant :

$$\lim_{i\to\infty} \alpha(F_i, K) = 0$$

pour toute partie finie $K \subset G$.

On va donner quelques résultats bien connus relatifs à la moyennabilité sous une forme qui conviendra pour la suite.

Lemme 7.8. — *Soient $A, K \in \mathcal{F}(G)$ vérifiant $\alpha(A, K) < 1$. Alors il existe $g \in G$ tel que $Kg \subset A$.*

Démonstration. — D'après (2.1), on peut supposer que $1_G \in K$. Remarquons alors que l'on a :

$$A \setminus \partial_K(A) \subset \{g \in A \colon Kg \subset A\}.$$

Comme $\alpha(A, K) = \frac{|\partial_K(A)|}{|A|} < 1$, on en déduit

$$|\{g \in A \colon Kg \subset A\}| \geq |A \setminus \partial_K(A)| \geq |A| - |\partial_K(A)| > 0.$$

□

Lemme 7.9. — *Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Følner d'un groupe dénombrable moyennable G. Alors il existe une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de G et une suite (F'_n) extraite de (F_n) telles que la suite (F''_n) définie par $F''_n = F'_n g_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifie les conditions suivantes :*

(i) *(F''_n) est une suite de Følner de G ;*

(ii) *$F''_n \subset F''_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;*

(iii) *$G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F''_n$.*

Démonstration. — Comme G est dénombrable, il existe une suite $E_0 \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ de parties finies de G telles que $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. En utilisant le fait que (F_n) est une suite de Følner, le lemme 7.8 permet de construire par récurrence une sous-suite (F'_n) de (F_n) et une suite (g_n) d'éléments de G telles que la suite (F''_n) définie par $F''_n = F'_n g_n$ vérifie $E_n \cup F''_n \subset F''_{n+1}$. Les propriétés (ii) et (iii) sont vérifiées par construction. La propriété (i) résulte de (2.1) et du fait que toute sous-suite d'une suite de Følner est une suite de Følner. □

7.4. Suites de Følner dans les groupes moyennables résiduellement finis

Rappelons qu'un groupe G est dit *résiduellement fini* si l'intersection de ses sous-groupes d'indice fini est réduit à $\{1_G\}$. Si G est dénombrable alors G est résiduellement fini si et seulement si il existe une suite décroissante (H_n) de sous-groupes d'indice fini de G (que l'on peut supposer distingués) telle que $\bigcap_n H_n = \{1_G\}$.

Un *pavé* dans un groupe G est une partie $C \subset G$ pour laquelle il existe $A \subset G$ telle que les parties $Ca, a \in A$, forment une partition de G. Notons que si H est un sous-groupe de G, alors tout système complet de représentants des classes à gauche de G suivant H est un pavé de G. Un théorème de B. Weiss (voir [**Wei**, Th. 1]) implique que si G est un groupe dénombrable moyennable résiduellement fini, alors G admet une suite de Følner constituée de pavés. Nous aurons besoin du résultat de Weiss sous la forme plus précise suivante :

Proposition 7.10 (**Weiss**). — *Soit G un groupe dénombrable moyennable et résiduellement fini. Soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de sous-groupes distingués d'indice fini de G vérifiant $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = \{1_G\}$. Alors il existe une suite de Følner $(C'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de G et une suite $(H'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ extraite de la suite (H_n) telles que C'_n est un système complet de représentants des classes de G suivant H'_n vérifiant $C'_n \subset C'_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C'_n$.*

Pour le confort du lecteur, nous donnons ici une preuve détaillée de la proposition 7.10 en suivant les idées contenues dans [**Wei**]. Établissons tout d'abord quelques résultats préliminaires.

Pour tous $A, B \subset G$ tels que $1_G \in B$, on définit $A^{+B} \subset G$ par

$$A^{+B} = \bigcup_{\{g\in G\colon\ Bg\cap A\neq\varnothing\}} Bg.$$

Remarquons que l'on a $A^{+B} = A \cup \big(\bigcup_{g\in\partial_B(A)} Bg\big)$.

Lemme 7.11. — *Soient G et H des groupes et $A, K \in \mathcal{F}(G)$ avec $1_G \in K$. Soit $f\colon G \to H$ un homomorphisme de groupes tel que la restriction de f à A^{+K} soit injective. Alors on a $\alpha(A, K) = \alpha(f(A), f(K))$.*

Démonstration. — Tout d'abord remarquons que l'on a $|f(A)| = |A|$ puisque $A \subset A^{+K}$. On va démontrer que f induit une bijection de $\partial_K(A)$ sur $\partial_{f(K)}(f(A))$, ce qui prouvera le lemme.

Soit $g \in G$ tel que $Kg \cap A \neq \varnothing$. Alors les parties Kg et A sont contenues dans A^{+K}. L'injectivité de la restriction de f à A^{+K} implique alors :

$$f(Kg \cap A) = f(K)f(g) \cap f(A) \quad\text{et}\quad f(Kg \setminus A) = f(K)f(g) \setminus f(A). \tag{7.1}$$

On en déduit que f induit une injection de $\partial_K(A)$ dans $\partial_{f(K)}(f(A))$.

Montrons la surjectivité de $f\colon \partial_K(A) \to \partial_{f(K)}(f(A))$. Soit $y \in \partial_{f(K)}(f(A))$. Alors il existe x dans G tel que $f(x) = y$. On a donc $f(Kx) \cap f(A) = f(K)y \cap f(A) \neq \varnothing$. On en déduit qu'il existe z dans le noyau de f tel que $Kxz \cap A \neq \varnothing$. Les égalités (7.1) appliquées à $g = xz$ montrent alors que $xz \in \partial_K(A)$. On en déduit $y = f(xz) \in f(\partial_K(A))$. □

Si A et B sont des ensembles disjoints, on notera $A \sqcup B$ leur réunion. Soient $f\colon G \to H$ un homomorphisme de groupes et $B \subset H$. On appelle *relevé* de B par f une partie $C \subset G$ telle que la restriction de f à C soit une bijection de C sur B.

Lemme 7.12. — *Soient f un homomorphisme surjectif d'un groupe G dans un groupe fini H et $K \in \mathcal{F}(G)$ tel que $1_G \in K$. Soient $\epsilon \in]0, 1/2]$ et $n \geq 1$ un entier vérifiant $(1-\epsilon/2)^n \leq \epsilon$. Soit $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ une suite d'éléments de $\mathcal{F}(G)$ vérifiant $1_G \in A_i$ et $\alpha(A_i, K) \leq \epsilon/4$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $\alpha(A_j, A_i) \leq \epsilon/4$ quels que soient $1 \leq i < j \leq n$. Posons $A = K \cup \big(\bigcup_{i=1}^n A_i\big)$ et supposons que la restriction de f à A^{+A} est injective. Alors il existe un relevé $C \subset G$ de H par f tel que $\alpha(C, K) \leq 5\epsilon|K| + \epsilon/2$.*

Démonstration. — Posons $A_0 = K$ et $K_i = f(A_i)$ pour tout $i \in I = \{0, \dots, n\}$. Soient $i, j \in I$ tels que $i < j$. Comme $A_j^{+A_i} \subset A^{+A}$, la restriction de f à $A_j^{+A_i}$ est injective et le lemme 7.11 implique que l'on a

$$\alpha(K_j, K_i) = \alpha(A_j, A_i) \leq \epsilon/4. \tag{7.2}$$

Nous utiliserons dans la suite les égalités (2.1) vérifiées par α.

Définissons par récurrence finie un procédé de recouvrement partiel du groupe fini H par certains translatés $K_i h$ (où $1 \leq i \leq n$ et $h \in H$) formant une famille ϵ-disjointe, en au plus n étapes :

Étape 1. Puisque $\alpha(H, K_n) = 0$, le lemme 2.11 appliqué à $\Omega = H$ et à $K = K_n$ implique qu'il existe un (ϵ, K_n)-remplissage fini R_n de H tel que $|\bigcup_{h \in R_n} K_n h| \geq \epsilon |H|$. En posant $D_1 = H \setminus \big(\bigcup_{h \in R_n} K_n h\big)$, on a donc

$$|D_1| \leq (1 - \epsilon)|H| \leq (1 - \epsilon/2)|H|. \tag{7.3}$$

On continue le procédé de recouvrement par récurrence de la manière suivante. Posons $D_0 = H$ et supposons que le processus de recouvrement partiel se poursuive jusqu'à l'étape k, où $1 \leq k \leq n-1$. Les hypothèses de récurrence au rang k sont les suivantes :

(H1) $R_{n-i+1} \subset H$ est un (ϵ, K_{n-i+1})-remplissage fini de D_{i-1} pour tout $i = 1, \dots, k$;

(H2) On a $|D_k| \leq (1 - \epsilon/2)^k |H|$ où $D_k = D_{k-1} \setminus \big(\bigcup_{h \in R_{n-k+1}} K_{n-k+1} h\big)$.

Remarquons que ces hypothèses sont vérifiées pour $k = 1$. Construisons l'étape $k+1$:

Étape k+1. Si $|D_k| \leq \epsilon |H|$, on arrête le processus de recouvrement. Supposons maintenant que $|D_k| > \epsilon |H|$. Comme on a

$$D_k = H \setminus \big(\bigsqcup_{i=1}^{k} \bigcup_{h \in R_{n-i+1}} K_{n-i+1} h \big),$$

on en déduit en utilisant le lemme 2.8 que l'on a

$$\alpha(D_k, K_{n-k}) \leq \frac{\alpha(\bigsqcup_{i=1}^{k} \bigcup_{h \in R_{n-i+1}} K_{n-i+1} h,\ K_{n-k})}{\epsilon}.$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence (H1) et les inégalités (7.2), on obtient en appliquant deux fois le lemme 2.7

$$\alpha(\bigsqcup_{i=1}^{k} \bigcup_{h \in R_{n-i+1}} K_{n-i+1} h, K_{n-k}) \leq \max_{i=1,\dots,k} \alpha(\bigcup_{h \in R_{n-i+1}} K_{n-i+1} h, K_{n-k}) \leq \frac{\epsilon/4}{1 - \epsilon}.$$

On en déduit en utilisant le fait que $\epsilon \leq 1/2$ que l'on a

$$\alpha(D_k, K_{n-k}) \leq \frac{\epsilon/4}{\epsilon(1 - \epsilon)} \leq \frac{1}{2}.$$

D'après le lemme 2.11 appliqué à $\Omega = D_k$ et à $K = K_{n-k}$, il existe un (ϵ, K_{n-k})-remplissage fini $R_{n-k} \subset H$ de D_k tel que

$$|\bigcup_{h\in R_{n-k}} K_{n-k}h| \geq \epsilon(1-\alpha(D_k, K_{n-k}))|D_k| \geq \frac{\epsilon}{2}|D_k|.$$

Posons $D_{k+1} = D_k \setminus \big(\bigcup_{h\in R_{n-k}} K_{n-k}h\big)$. En utilisant l'hypothèse de récurrence (H2), on déduit de l'inégalité précédente

$$|D_{k+1}| \leq (1-\epsilon/2)|D_k| \leq (1-\epsilon/2)^{k+1}|H|,$$

ce qui termine la récurrence.

Comme n est tel que $(1-\epsilon/2)^n \leq \epsilon$, il existe un entier $k \in \{1,\dots,n\}$ tel qu'à l'issue de l'étape k on ait

$$|D_k| \leq \epsilon|H|. \tag{7.4}$$

Fixons cet entier k et posons $D = D_k$, $J = \{n-k+1,\dots,n\}$. Soit $j \in J$. Comme la famille $(K_jh)_{h\in R_j}$ est ϵ-disjointe, il existe une famille $(K(j,h))_{h\in R_j}$ de parties disjointes de G vérifiant $K(j,h) \subset K_jh$ et $(1-\epsilon)|K_jh| \leq |K(j,h)|$ pour tout $h \in R_j$. On a alors

$$|\bigcup_{h\in R_j} K_jh \setminus \bigcup_{h\in R_j} K(j,h)| \leq |\bigcup_{h\in R_j} (K_jh \setminus K(j,h))| \leq 2\epsilon \sum_{h\in R_j} |K(j,h)|. \tag{7.5}$$

Soit $h \in R_j$. Choisissons $A(j,h) \subset A_j$ un relevé de $K(j,h)h^{-1}$ par f et $g_h \in f^{-1}(h)$ de sorte que $f(A(j,h)g_h) = K(j,h)$. En utilisant l'inclusion 2.2.(iii) appliquée à $K(j,h)$ que l'on écrit $K(j,h) = K_jh \setminus (K_jh \setminus K(j,h))$, on obtient

$$\partial_{K_0}(K(j,h)) \subset \partial_{K_0}(K_jh) \cup \partial_{K_0}(K_jh \setminus K(j,h)).$$

Comme $\partial_{K_0}(K_jh\setminus K(j,h)) \subset K_0^{-1}(K_jh\setminus K(j,h))$, on en déduit en utilisant l'inégalité $(1-\epsilon)|K_jh| \leq |K(j,h)|$

$$\alpha(K(j,h), K_0) \leq \frac{\alpha(K_jh, K_0) + \epsilon|K_0^{-1}|}{1-\epsilon} \leq \epsilon/2 + 2\epsilon|K_0|. \tag{7.6}$$

Puisque $A(j,h) \subset A_j$ et que la restriction de f à $A(j,h)^{+K} \subset A^{+A}$ est injective, le lemme 7.11 et l'inégalité (7.6) donnent

$$\alpha(A(j,h), K) = \alpha(K(j,h), K_0) \leq \epsilon/2 + 2\epsilon|K_0| = \epsilon/2 + 2\epsilon|K|. \tag{7.7}$$

Posons $D' = H \setminus \big(\bigsqcup_{j\in J} \bigsqcup_{h\in R_j} K(j,h)\big)$. D'après (7.4), (7.5) et en utilisant le fait que les parties $K(j,h)$, où $j \in J$ et $h \in R_j$, sont disjointes, on a

$$|D'| = |D| + |\bigsqcup_{j\in J}\big(\bigcup_{h\in R_j} K_jh \setminus \bigcup_{h\in R_j} K(j,h)\big)| \leq \epsilon|H| + 2\epsilon|H| = 3\epsilon|H|. \tag{7.8}$$

Soit $\widehat{D'} \subset G$ un relevé quelconque de D' par f et définissons $C \subset G$ par

$$C = \widehat{D'} \cup \big(\bigsqcup_{j\in J} \bigsqcup_{h\in R_j} A(j,h)g_h\big).$$

Notons que c'est une réunion disjointe et que C est un relevé du groupe H par f. En utilisant les propriétés de α et les inégalités (7.7) et (7.8), on a :

$$\alpha(C, K) \leq \frac{|K^{-1}||\widehat{D'}|}{|C|} + \epsilon/2 + 2\epsilon|K| \leq 5\epsilon|K| + \epsilon/2.$$

□

Démonstration de la proposition 7.10. — On peut supposer $H_0 = G$.
Comme G est dénombrable, il existe une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties finies de G vérifiant $\{1_G\} = K_0 \subset K_1 \ldots$ et $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Nous allons construire par récurrence une suite croissante $(\varphi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{N}$ et une suite (C'_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, C'_n soit un système complet de représentants des classes de G suivant $H'_n = H_{\varphi(n)}$ vérifiant

$$\alpha(C'_n, K_n) \leq \frac{1}{n+1}. \tag{7.9}$$

Cela démontrera que (C'_n) est une suite de Følner de G.

Posons $C'_0 = \{1_G\}$, $\varphi(0) = 0$ et remarquons que l'on a $\alpha(C'_0, K_0) = 0$. Soit $n \geq 0$ et supposons que l'on ait construit C'_n, un système complet de représentants des classes de G suivant $H'_n = H_{\varphi(n)}$ vérifiant (7.9). Soit $\epsilon \in]0, 1/2]$ et $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $(1-\epsilon/2)^k \leq \epsilon$. Soit (F_n) une suite de Følner de G. Alors il existe une suite finie $(A_i)_{i=1,\ldots,k}$ extraite de (F_n) vérifiant $\alpha(A_i, K_{n+1}) \leq \epsilon/4$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ et $\alpha(A_j, A_i) \leq \epsilon/4$ quels que soient $1 \leq i < j \leq k$. On peut supposer que $1_G \in A_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ d'après (2.1). Posons $A = K_{n+1} \cup \left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right)$. Puisque $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = \{1_G\}$, il existe un entier $m > \varphi(n)$ tel que la restriction à A^{+A} de la projection canonique $\mu_m \colon G \to G/H_m$ soit injective. D'après le lemme 7.12 appliqué à $H = G/H_m$, $K = K_{n+1}$ et à $f = \mu_m$, il existe $C'_{n+1} \subset G$ un relevé du groupe H par μ_m vérifiant $\alpha(C'_{n+1}, K_{n+1}) \leq 5\epsilon|K_{n+1}| + \epsilon/2$. Posons $\varphi(n+1) = m$. En choisissant ϵ de telle sorte que $5\epsilon|K_{n+1}| + \epsilon/2 \leq \frac{1}{n+2}$, l'inégalité (7.9) est vérifiée au rang $n+1$. Ceci termine la construction de la suite (C'_n).

Notons que quels que soient $n \in \mathbb{N}$ et $g \in G$, la partie $C'_n g$ est un système complet de représentants des classes de G suivant H'_n. En utilisant le lemme 7.9, on peut donc supposer que la suite (C'_n) est croissante et vérifie $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C'_n$. □

7.5. Sous-décalage de Toeplitz et entropie topologique

Dans cette section G désigne un groupe dénombrable résiduellement fini et K un ensemble fini muni de la topologie discrète.

7.5.1. Construction de sous-décalages de Toeplitz. — Supposons donnée une suite décroissante $G = H_0 \supset H_1 \supset \ldots$ de sous-groupes distingués d'indice fini de G telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = \{1_G\}$. Dans ce qui suit, on va décrire une méthode de construction d'un élément de Toeplitz $x \in K^G$ relativement à la suite (H_n).

Notons $\widetilde{K} = K \cup \{*\}$ l'espace discret fini obtenu en adjoignant à K un élément $* \notin K$. Pour tout $z \in \widetilde{K}^A$, où A est un ensemble, on définit le sous-ensemble $S(z) \subset A$ par

$$S(z) = \{a \in A \colon z_a = *\}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $H_{n+1} \subset H_n$, la surjection canonique $\mu_n \colon G \to G/H_n$ induit une surjection $\nu_n \colon G/H_{n+1} \to G/H_n$. On en déduit une injection $j_n \colon \widetilde{K}^{G/H_n} \to \widetilde{K}^{G/H_{n+1}}$ définie par $j_n(z)_g = z_{\nu_n(g)}$ quels que soient $z \in \widetilde{K}^{G/H_{n+1}}$ et $g \in G/H_{n+1}$. Notons i l'application identique de G. On obtient les diagrammes suivants :

$$\begin{tikzcd} H_n \arrow[r, "i_{|H_n}"] \arrow[d, "\mu_{n+1|H_n}"'] & G \arrow[d, "\mu_{n+1}"'] \arrow[dr, "\mu_n"] & \\ H_n/H_{n+1} \arrow[r, "\bar{i}"] & G/H_{n+1} \arrow[r, "\nu_n"] & G/H_n. \end{tikzcd} \qquad \widetilde{K}^{G/H_{n+1}} \xleftarrow{j_n} \widetilde{K}^{G/H_n}. \tag{7.10}$$

Supposons donnés, pour tout $n \in \mathbb{N}$, des parties D_n, S_n de G/H_n et un élément $u^{(n)} \in K^{D_n}$, où D_n et S_n vérifient les propriétés suivantes :

(P0) $D_0 = \varnothing$, $S_0 = G/G$;

(P1) $D_{n+1} \subset \nu_n^{-1}(S_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(P2) $S_{n+1} = \nu_n^{-1}(S_n) \setminus D_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;

(P3) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mu_n^{-1}(D_n) = G$.

Lemme 7.13. — *Avec les notations précédentes, on a :*

(1) $\mu_n^{-1}(S_n) = G \setminus \bigcup_{k=0}^n \mu_k^{-1}(D_k)$ *quel que soit* $n \in \mathbb{N}$ *;*

(2) les parties $\mu_n^{-1}(D_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *sont disjointes dans* G.

Démonstration. — Les propriétés (P1) et (P2) impliquent

$$\mu_n^{-1}(S_n) = \mu_n^{-1}(\nu_{n-1}^{-1}(S_{n-1})) \setminus \mu_n^{-1}(D_n) = \mu_{n-1}^{-1}(S_{n-1}) \setminus \mu_n^{-1}(D_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On en déduit l'égalité (1) en utilisant (P0).

Pour (2), remarquons que (P1) implique

$$\mu_{n+1}^{-1}(D_{n+1}) \subset \mu_{n+1}^{-1}(\nu_n^{-1}(S_n)) = \mu_n^{-1}(S_n)$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit en utilisant l'égalité (1) que les parties $\mu_{n+1}^{-1}(D_{n+1})$ et $\bigcup_{k=0}^n \mu_k^{-1}(D_k)$ sont disjointes pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

On définit par récurrence une suite $(z^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, où $z^{(n)} \in \widetilde{K}^{G/H_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, en posant $z^{(0)} = *$ et

$$z_c^{(n+1)} = \begin{cases} u_c^{(n+1)} & \text{si } c \in D_{n+1} \\ j_n(z^{(n)})_c & \text{sinon} \end{cases} \tag{7.11}$$

quels que soient $c \in G/H_{n+1}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 7.14. — Observons que la suite $(z^{(n)})$ ainsi définie vérifie $S(z^{(n)}) = S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet, cela se démontre par récurrence en utilisant les propriétés (P0), (P1) et (P2).

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $x^{(n)} = \Psi_{H_n}(z^{(n)})$ l'élément de $\mathrm{Fix}(H_n) \subset \widetilde{K}^G$ associé à $z^{(n)}$ (remarque 7.4). Sous les hypothèses et notations précédentes, on a le résultat suivant :

Lemme 7.15. — *Pour tout $g \in G$, il existe $k \in \mathbb{N}$ et $x_g \in K$ tels que $x_g^{(n)} = x_g$ quel que soit $n \geq k$. L'élément $x = (x_g)_{g \in G} \in K^G$ est un élément de Toeplitz relativement à la suite (H_n).*

Démonstration. — Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $g \in \mu_k^{-1}(D_k)$. Alors on a $x_g^{(k)} = \Psi_{H_k}(z^{(k)})_g = z^{(k)}_{\mu_k(g)} = u^{(k)}_{\mu_k(g)} \in K$. Montrons que pour tout $n \geq k$, on a

$$x_g^{(n)} = x_g^{(k)}. \tag{7.12}$$

Soit $n \geq k$. Puisque $g \in \mu_k^{-1}(D_k)$, on a $\mu_{n+1}(g) \notin D_{n+1}$ d'après le lemme 7.13.(2). Il en résulte

$$z^{(n+1)}_{\mu_{n+1}(g)} = j_n(z^{(n)})_{\mu_{n+1}(g)} = z^{(n)}_{\nu_n \circ \mu_{n+1}(g)} = z^{(n)}_{\mu_n(g)}.$$

Donc $x_g^{(n+1)} = x_g^{(n)}$. L'égalité (7.12) s'en déduit par une récurrence immédiate. Posons $x_g = x_g^{(k)}$. On vient donc de démontrer que

$$x_g^{(n)} = x_g \quad \text{quels que soient } g \in \mu_k^{-1}(D_k) \text{ et } n \geq k. \tag{7.13}$$

Soit $g \in G$. D'après la propriété (P3), il existe un entier k tel que $g \in \mu_k^{-1}(D_k)$. Comme $gH_k \subset \mu_k^{-1}(D_k)$ et que $x^{(k)} \in \mathrm{Fix}(H_k)$, on a d'après (7.13)

$$x_{gh} = x_{gh}^{(k)} = x_g^{(k)} = x_g$$

pour tout $h \in H_k$. Donc $g \in \mathrm{Per}_{H_k}(x)$. On en déduit $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Per}_{H_n}(x)$, ce qui montre que x est un élément de Toeplitz relativement à la suite (H_n). $\square$

Observons que l'élément $x \in K^G$ ainsi défini est la limite dans $\widetilde{K}^G$ de la suite $(x^{(n)})$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x coïncide avec $x^{(n)}$ sur $G \setminus S(x^{(n)})$.

7.5.2. Estimation de l'entropie topologique de systèmes de Toeplitz. — Soit $X \subset K^G$ un sous-décalage fermé de K^G, où G désigne un groupe dénombrable moyennable. Soit (F_n) une suite de Følner de G. Rappelons (prop. 4.9) que l'*entropie topologique* de X est le réel $\mathrm{h}(X)$ défini par :

$$\mathrm{h}(X) = \lim_{n \to \infty} \frac{\log |\pi_{F_n}(X)|}{|F_n|},$$

où $\pi_{F_n} \colon K^G \to K^{F_n}$ désigne la projection sur K^{F_n}.

Sous les hypothèses et notations introduites au paragraphe précédent, on a le résultat suivant :

Lemme 7.16. — *Supposons le groupe G infini moyennable. Alors l'entropie topologique du sous-décalage de Toeplitz $X = \overline{Gx}$ vérifie :*

$$\mathrm{h}(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{[G\colon H_n]} \log |K|.$$

Démonstration. — Soient $n \in \mathbb{N}$ et C_n un système complet de représentants des classes de G suivant H_n. Pour tout $g \in G$ notons $\widehat{g}$ l'unique représentant de $\mu_n(g)$ dans C_n. Nous allons majorer le cardinal de l'ensemble

$$\pi_{C_n}(X) = \{\pi_{C_n}(gx) \colon g \in G\}.$$

Notons $x^{(n)} = \Psi_{H_n}(z^{(n)})$ l'élément H_n-périodique de $\widetilde{K}^G$ associé à $z^{(n)} \in \widetilde{K}^{G/H_n}$. Soient $g \in G$ et $c \in C_n$. Alors on a

$$(gx^{(n)})_c = x^{(n)}_{cg} = z^{(n)}_{\mu_n(cg)} = z^{(n)}_{\mu_n(c)\mu_n(g)}.$$

Puisque $\mu_n(g) \in G/H_n$ pour tout $g \in G$ et que la multiplication à droite des éléments de G/H_n par $\mu_n(g)$ définit une permutation de G/H_n, il en résulte que l'ensemble

$$\{\pi_{C_n}(gx^{(n)}) \;:\; g \in G\} \subset \widetilde{K}^{C_n}$$

contient au plus $|G/H_n| = |C_n|$ éléments. Chacun de ces éléments est une fonction de C_n dans $\widetilde{K}$ prenant $|S_n(z^{(n)})| = |S_n|$ fois la valeur $*$. On en déduit

$$|\{\pi_{C_n}(gx) \colon g \in G\}| \leq |C_n||K|^{|S_n|}$$

puisque x est obtenu à partir de $x^{(n)}$ en remplaçant toutes ses étoiles par des éléments de K (lemme 7.15). On a donc

$$\frac{\log |\pi_{C_n}(X)|}{|C_n|} \leq \frac{|S_n|}{|C_n|} \log |K| + \frac{\log |C_n|}{|C_n|}. \tag{7.14}$$

Comme tout sous-groupe d'un groupe moyennable est moyennable, le groupe H_n admet une suite de Følner $(F_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$. Alors $(C_nF_i^{(n)})_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de Følner de G d'après la proposition 3.17. Puisque l'on a

$$|\pi_{A\cup B}(X)| \leq |\pi_A(X)||\pi_B(X)| \quad \text{et} \quad |\pi_{Ag}(X)| = |\pi_A(X)|$$

quels que soient $A, B \in \mathcal{F}(G)$ et $g \in G$, on en déduit

$$|\pi_{C_nF_i^{(n)}}(X)| \leq |\pi_{C_n}(X)|^{|F_i^{(n)}|}.$$

On en déduit

$$\frac{\log |\pi_{C_nF_i^{(n)}}(X)|}{|C_nF_i^{(n)}|} \leq \frac{|F_i^{(n)}| \ \log |\pi_{C_n}(X)|}{|F_i^{(n)}||C_n|} = \frac{\log |\pi_{C_n}(X)|}{|C_n|}$$

quel que soit $i \in \mathbb{N}$. On a donc

$$\mathrm{h}(X) = \lim_{i\to\infty} \frac{\log |\pi_{C_nF_i^{(n)}}(X)|}{|C_nF_i^{(n)}|} \leq \frac{\log |\pi_{C_n}(X)|}{|C_n|}.$$

Puisque G est infini et que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H_n = \{1_G\}$, on a $\lim_{n\to\infty}[G\colon H_n] = \lim_{n\to\infty}|C_n| = \infty$. On en déduit en utilisant l'inégalité (7.14)

$$\mathrm{h}(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{|C_n|} \log|K|.$$

□

Démonstration du théorème 7.1. — Soient $x \in [0,1[$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite strictement croissante d'entiers telle que $r_0 = 1$ et $r_{n+1}/r_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors la suite (r_n) peut être utilisée comme base pour l'approximation du réel x de la manière suivante. Soit $n \in \mathbb{N}$ et posons $a_n = [r_n x]$, où $[t]$ désigne le plus grand entier inférieur ou égal au réel t. Posons $b_n = a_n + 1$, $u_n = a_n/r_n$ et $v_n = b_n/r_n$. Alors on a $u_n \leq u_{n+1} \leq x < v_{n+1} \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et les suites (u_n) et (v_n) convergent vers x.

Puisque G est un groupe dénombrable et résiduellement fini, la proposition 7.10 implique qu'il existe une suite décroissante $(H'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-groupes distingués d'indice fini de G tels que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H'_n = \{1_G\}$ et une suite de Følner $(C'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de G telle que C'_n est un système complet de représentants des classes de G suivant H'_n vérifiant $C'_n \subset C'_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C'_n$. Comme G est infini et $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} H'_n = \{1_G\}$, on a $\lim_{n\to\infty}[G : H'_n] = \infty$.

Soit $\rho \in [0,1[$. Nous allons construire par récurrence une suite (H_n) extraite de (H'_n) et pour tout $n \in \mathbb{N}$ des parties S_n, D_n de G/H_n, où S_n et D_n vérifient les propriétés (P0), (P1), (P2), (P3) et tels que $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{[G\colon H_n]} = \rho$. On montrera que l'élément de Toeplitz $x \in K^G$ obtenu par le lemme 7.15 vérifie $\mathrm{h}(\overline{Gx}) = \rho$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nous allons définir un élément $z^{(n)} \in \widetilde{K}^{G/H_n}$ où $H_n = H'_{\varphi(n)}$ avec $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante vérifiant $\varphi(0) = 0$. On notera $C_n = C'_{\varphi(n)}$ et on utilisera dans la suite les applications définies en (7.10). On peut supposer $H'_0 = G$ et $C'_0 = \{1_G\}$.

Étape 0. Définissons $z^{(0)} \in \widetilde{K}^{G/G} \simeq \widetilde{K}$ par $z^{(0)} = *$. Posons $D_0 = \varnothing$, $S_0 = G/G$, $\varphi(0) = 0$, $r_0 = 1$ et $b_0 = [\rho r_0] + 1 = 1$.

Étape 1. Puisque $\lim_{n\to\infty}[G : H'_n] = \infty$ et $\rho < 1$, on peut choisir un entier $\varphi(1) > 0$ de sorte que

$$p_0 = [G : H'_{\varphi(1)}] - |K| \geq 0 \tag{7.15}$$

et

$$\rho < \frac{p_0}{p_0 + |K|}. \tag{7.16}$$

Posons $H_1 = H'_{\varphi(1)}$, $C_1 = C'_{\varphi(1)}$, $r_1 = |C_1|$ $(= p_0 + |K|)$. Soit $E_0 \subset G/H_1$ contenant $\mu_1(1_G)$ telle que $|E_0| = |K|$ (ceci est possible d'après l'inégalité (7.15)). Définissons $y^{(1)} \in \widetilde{K}^{G/H_1}$ par $y^{(1)} = j_0(z^{(0)})$. Alors on a

$$y^{(1)}_d = z^{(0)} = *$$

pour tout $d \in G/H_1$. Modifions $y^{(1)}$ de la façon suivante. À chaque $d \in E_0$ on associe de façon bijective un élément de K et l'on substitue $y_d^{(1)}$ par cet élément. Ceci est possible puisque $|E_0| = |K|$. Par abus, on notera encore $y^{(1)}$ ce nouvel élément de $\widetilde{K}^{G/H_1}$. On aura alors $|S(y^{(1)})| = [G : H_1] - |K| = p_0$. D'après l'inégalité (7.16) on a

$$\frac{p_0}{r_1} = \frac{p_0}{p_0 + |K|} > \rho$$

(ce rapport représente la fréquence d'étoiles de $y^{(1)} \in \widetilde{K}^{G/H_1}$). Posons $b_1 = [\rho r_1] + 1$. Il est clair d'après l'inégalité précédente que $b_1 \leq p_0$. On va modifier $y^{(1)}$ de sorte que la fréquence de ses étoiles soit b_1/r_1. Pour cela, on choisit $A_1 \subset S(y^{(1)})$ telle que $|A_1| = p_0 - b_1$. Soit $z^{(1)} \in \widetilde{K}^{G/H_1}$ l'élément obtenu à partir de $y^{(1)}$ en remplaçant les étoiles $y_c^{(1)}$, $c \in A_1$, par des éléments arbitraires de K. On aura alors $|S(z^{(1)})| = b_1$. Notons pour simplifier $x^{(1)} = \Psi_{H_1}(z^{(1)})$ l'élément de $\mathrm{Fix}(H_1) \subset \widetilde{K}^G$ associé à $z^{(1)}$. Soit $\widehat{E_0} \subset G$ un système de représentants de $E_0 \subset G/H_1$ et observons que l'ensemble $\{x_g^{(1)} : g \in \widehat{E_0}\} = \{y_d^{(1)} : d \in E_0\}$ contient exactement $|K|$ éléments, par construction de $y^{(1)}$.

On définit les sous-ensembles D_1 et S_1 de G/H_1 par $D_1 = E_0 \cup A_1$ et $S_1 = (G/H_1') \setminus D_1 = \nu_0^{-1}(S_0) \setminus D_1$. Notons que l'on a $|S_1| = |S(z^{(1)})| = b_1$.

On poursuit la construction de $(z^{(n)})$ par récurrence. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et supposons que l'on ait construit $z^{(k)} \in \widetilde{K}^{G/H_k}$ où $H_k = H'_{\varphi(k)}$, $D_k \subset \nu_{k-1}^{-1}(S_{k-1})$, $S_k = \nu_{k-1}^{-1}(S_{k-1}) \setminus D_k$ tels que $|S_k| = |S(z^{(k)})| = b_k$, $|C_k| = |G/H_k| = r_k$, et $\rho < b_k/r_k$. Construisons l'étape $k+1$.

Étape k+1. Puisque $\lim_{n\to\infty}[G : H_n'] = \infty$ et que H_k est d'indice fini dans G, on a $\lim_{n\to\infty}[H_k : H_n'] = \infty$. Puisque $\rho < b_k/r_k$, on peut choisir un entier $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ de sorte que

$$p_k = [H_k : H'_{\varphi(k+1)}] - |K|^{b_k} \geq 0 \tag{7.17}$$

et

$$\rho < \frac{p_k b_k}{p_k r_k + |K|^{b_k} r_k}. \tag{7.18}$$

Posons $H_{k+1} = H'_{\varphi(k+1)}$, $C_{k+1} = C'_{\varphi(k+1)}$, $r_{k+1} = |C_{k+1}|$ $(= p_k r_k + |K|^{b_k} r_k)$. Comme on a $G = \bigsqcup_{h\in H_k} C_k h$, on en déduit que $\mu_{k+1}(G) = \bigcup_{h\in H_k} \mu_{k+1}(C_k)\mu_{k+1}(h)$ ce qui donne

$$G/H_{k+1} = \bigsqcup_{d\in H_k/H_{k+1}} \mu_{k+1}(C_k)d$$

(notons que la restriction de μ_{k+1} à C_k est injective). Soit $E_k \subset H_k/H_{k+1}$ une partie contenant $\mu_{k+1}(1_G)$ et telle que $|E_k| = |K|^{b_k}$ (ceci est possible d'après (7.17)). On définit $y^{(k+1)} \in \widetilde{K}^{G/H_{k+1}}$ par $y^{(k+1)} = j_k(z^{(k)})$. Alors on a

$$y^{(k+1)}_{\mu_{k+1}(c)d} = z^{(k)}_{\nu_k(\mu_{k+1}(c)d)} = z^{(k)}_{\mu_k(c)} \tag{7.19}$$

quels que soient $c \in C_k$ et $d \in H_k/H_{k+1}$. Il en résulte en utilisant l'égalité $|S(z^{(k)})| = b_k$ que l'on a

$$|S(\pi_{\mu_{k+1}(C_k)d}(y^{(k+1)}))| = |S(z^{(k)})| = b_k$$

pour tout $d \in H_k/H_{k+1}$. Notons par ailleurs qu'il aurait exactement $|K|^{b_k}$ manières différentes de remplacer les b_k étoiles de $z^{(k)}$ par des éléments de K. Pour chaque $d \in E_k$ (rappelons que $|E_k| = |K|^{b_k}$), on choisit une telle manière et l'on remplace les b_k étoiles de la restriction de $y^{(k+1)}$ à $\mu_{k+1}(C_k)d$ en utilisant l'identification donnée par l'égalité (7.19). Par abus, on notera encore $y^{(k+1)}$ ce nouvel élément de $\widetilde{K}^{G/H_{k+1}}$. On aura alors $|S(y^{(k+1)})| = [H_k : H_{k+1}]b_k - |K|^{b_k} b_k = p_k b_k$. D'après l'inégalité (7.18), on a

$$\frac{p_k b_k}{r_{k+1}} = \frac{p_k b_k}{p_k r_k + |K|^{b_k} r_k} > \rho$$

(ce rapport représente la fréquence d'étoiles de $y^{(k+1)} \in \widetilde{K}^{G/H_{k+1}}$). Posons $b_{k+1} = [\rho r_{k+1}] + 1$. Il est clair d'après l'inégalité précédente que $b_{k+1} \leq p_k b_k$. On va modifier $y^{(k+1)}$ de sorte que la fréquence de ses étoiles soit b_{k+1}/r_{k+1}. Pour cela, on choisit $A_{k+1} \subset S(y^{(k+1)})$ telle que $|A_{k+1}| = p_k b_k - b_{k+1}$. Soit $z^{(k+1)} \in \widetilde{K}^{G/H_{k+1}}$ l'élément obtenu à partir de $y^{(k+1)}$ en remplaçant les étoiles $y_c^{(k+1)}$, $c \in A_{k+1}$, par des éléments arbitraires de K, de sorte que l'on ait $|S(z^{(k+1)})| = b_{k+1}$. Notons pour simplifier $x^{(k+1)} = \Psi_{H_{k+1}}(z^{(k+1)})$ l'élément de $\mathrm{Fix}(H_{k+1}) \subset \widetilde{K}^G$ associé à $z^{(k+1)}$. Soit $\widehat{E_k} \subset H_k$ un système de représentants de $E_k \subset H_k/H_{k+1}$. Par construction (voir la définition de $y^{(k+1)}$), on a

$$\{\pi_{C_k}(gx^{(k+1)}) \colon g \in \widehat{E_k}\} \subset K^{C_k} \tag{7.20}$$

et

$$|\{\pi_{C_k}(gx^{(k+1)}) \colon g \in \widehat{E_k}\}| = |E_k| = |K|^{b_k}. \tag{7.21}$$

Soient D_{k+1} et S_{k+1} les parties de G/H_{k+1} définies par :

$$D_{k+1} = \mu_{k+1}(C_k \cap \mu_k^{-1}(S_k))E_k \cup A_{k+1}$$

et

$$S_{k+1} = \nu_k^{-1}(S_k) \setminus D_{k+1}.$$

Notons que D_{k+1} représente l'emplacement des étoiles de $j_k(z^{(k)}) \in \widetilde{K}^{G/H_{k+1}}$ que l'on a substituées par des éléments de K pour obtenir $z^{(k+1)}$. Par construction on a $D_{k+1} \subset \nu_k^{-1}(S_k)$ et $|S_{k+1}| = |S(z^{(k+1)})| = b_{k+1}$.

Ceci achève la construction de la suite $(z^{(n)})$.

Observons que les parties D_n et S_n, $n \in \mathbb{N}$, vérifient les propriétés (P0), (P1) et (P2) par construction. Montrons la propriété (P3). Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme on a

$$D_{n+1} = \mu_{n+1}(C_n \cap \mu_n^{-1}(S_n))E_n \cup A_{n+1}$$

et $\mu_{n+1}(1_G) \in E_n$, on en déduit

$$\mu_{n+1}^{-1}(D_{n+1}) \supset C_n \cap \mu_n^{-1}(S_n).$$

Il en résulte en utilisant l'égalité (1) du lemme 7.13

$$\mu_{n+1}^{-1}(D_{n+1}) \cup \bigcup_{k=0}^{n} \mu_k^{-1}(D_k) \supset C_n.$$

Puisque $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, on a aussi $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n^{-1}(D_n)$ ce qui démontre (P3). On peut poser $u^{(n)} = \pi_{D_n}(z^{(n)})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, de sorte que $(z^{(n)})$ soit obtenue comme dans (7.11). D'après le lemme 7.15, la suite $(z^{(n)})$ définit un élément de Toeplitz $x \in K^G$ relativement à la suite (H_n) (et donc aussi relativement à (H'_n)). Posons $X = \overline{Gx}$. Le lemme 7.16 implique

$$\text{(7.22)} \qquad \mathrm{h}(X) \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{[G\colon H_n]} \log|K| = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{r_n} \log|K| = \rho \log|K|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après (7.20) et (7.21), on a

$$|\{\pi_{C_n}(gx) \,:\, g \in \widehat{E_n}\}| = |\{\pi_{C_n}(gx^{(n+1)}) \,:\, g \in \widehat{E_n}\}| = |K|^{b_n}.$$

On a donc $|\pi_{C_n}(X)| = |\pi_{C_n}(Gx)| \geq |K|^{b_n}$. Comme (C_n) est une suite de Følner de G, on en déduit

$$\text{(7.23)} \qquad \mathrm{h}(X) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(|\pi_{C_n}(X)|)}{|C_n|} \geq \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{r_n} \log|K| = \rho \log|K|.$$

Les inégalités (7.22) et (7.23) montrent que $\mathrm{h}(X) = \rho \log|K|$. $\square$

BIBLIOGRAPHIE

[Adi] S. I. Adian, The Burnside problem and identities in groups, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **95**, Springer-Verlag, Berlin, 1979.

[Aus] J. Auslander, Minimal Flows and their Extensions, North-Holland Mathematics Studies **153**, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1988.

[BaT] S. Banach, A. Tarski, *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents*, Fund. Math. **6** (1924), 244–277.

[BHV] B. Bekka, P. de la Harpe, A. Valette, Kazhdan's Property (T), prépublication.

[Bou] N. Bourbaki, Topologie générale, chapitres 1 à 4, Hermann, Paris, 1971.

[Bre] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, Mathématiques appliquées pour la maîtrise, Masson, Paris, 1983.

[Bri] M. Brin, G. Stuck, Introduction to Dynamical Systems, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[CGH1] T. Ceccherini-Silberstein, R. I. Grigorchuk, P. de la Harpe, *Décompositions paradoxales des groupes de Burnside*, C. R. Acad. Sci. Paris Sr. I Math. **327** (1998), no. 2, 127–132.

[CGH2] T. Ceccherini-Silberstein, R. I. Grigorchuk, P. de la Harpe, *Amenability and paradoxical decompositions for pseudogroups and discrete metric spaces*, Proc. Steklov Inst. Math. **224** (1999), no. 1, 57–97.

[Cho] G. Choquet, Lectures on analysis. Vol. I, edited by J. Marsden, T. Lance and S. Gelbart W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1969.

[Chou] C. Chou, *Elementary amenable groups*, Illinois J. Math. **24** (1980), no. 3, 396–407.

[CoK] M. Coornaert, F. Krieger, *Mean topological dimension for actions of discrete amenable groups*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **13** (2005), no. **3**, 779–793.

[Coo] M. Coornaert, Dimension topologique et systèmes dynamiques, Cours spécialisés **14**, Société Mathématique de France, Paris, 2005.

[Day] M. M. Day, *Amenable semigroups*, Illinois J. Math. **1** (1957), 509–544.

[Di1] J. Dixmier, *Les moyennes invariantes dans les semi-groupes et leurs applications*, Acta. Sci. Math. (Szeged) **12** (1950), 213–227.

[Di2] J. Dixmier, Topologie générale, Puf mathématiques, Presses Universitaires de France, Paris, 1981.

[Do1] T. Downarowicz, *Sets of invariant measures in minimal flows*, Bull. Ac. Pol. Math., **35** (1987), 521–523.

[Do2] T. Downarowicz, *A minimal 0-1 subshift with noncompact set of ergodic measures*, Probab. Th. Rel. Fields, **79** (1988), 29–35.

[DuS] N. Dunford, J.T. Schwartz, Linear operators. Part I. General theory, Pure and applied mathematics, Wiley Classics Library, New York, 1988.

[Føl] E. Følner, *On groups with full Banach mean value*, Math. Scand. **3** (1955), 245–254.

[Fol] Gerald B. Folland, Real Analysis, Pure and Applied Mathematics, Willey-Interscience, New York, 1984.

[GjJ] R. Gjerde, Ø. Johansen, *Bratelli-Vershik models for Cantor minimal systems : application to Toeplitz flows*, Erg. Th. and Dynam. Sys. **20** (2000), 1687–1710.

[Gre] F. P. Greenleaf, Invariant means on topological groups and their applications, Van Nostrand mathematical studies **16**, New York, 1969.

[Gr1] R. I. Grigorchuk, Symmetrical random walks on discrete groups. Multicomponent random systems, pp. 285–325, Adv. Probab. Related Topics **6**, Dekker, New York, 1980.

[Gr2] R. I. Grigorchuk, *Degrees of growth of finitely generated groups and the theory of invariant means*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **48** (1984), no. 5, 939–985.

[Gr3] R. I. Grigorchuk, *An example of a finitely presented amenable group that does not belong to the class EG* (Russian. Russian summary) Mat. Sb. **189** (1998), no. 1, 79–100, translation in Sb. Math. **189** (1998), no. 1-2, 75–95.

[Gro] M. Gromov, *Topological invariants of dynamical systems and spaces of holomorphic maps, Part I*, Math. Phys. Anal. Geom. **2** (1999), 323–415.

[Har] P. de la Harpe, Topics in geometric group theory, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, 2000.

[HuW] W. Hurewicz, H. Wallman, Dimension Theory, Princeton mathematical series **4**, Princeton University Press, Princeton, 1948.

[JaK] K. Jacobs, M. Keane, *0-1 sequences of Toeplitz type*, Z. Wahr. Verw. Gebiete **13** (1969), 123–131.

[Jaw] A. Jaworski, *Ph.D thesis of Alan Jaworski*, University of Maryland, 1974.

[Kak] S. Kakutani, *A Proof of Beboutov's Theorem*, J. of differential equations **4**, 194–201 (1968).

[Ke1] John L.Kelley, I. Namioka, Linear topological spaces, Van Nostrand, New York, 1963.

[Ke2] John L.Kelley, General Topology, Graduate Texts in Mathematics **27**, Springer-Verlag, New-York, 1975.

[Ko1] V. Komornik, Précis d'analyse réelle. Vol. 1, Mathématiques pour le 2e cycle, Ellipses, Paris, 2002.

[Ko2] V. Komornik, Précis d'analyse réelle. Vol. 2, Mathématiques pour le 2e cycle, Ellipses, Paris, 2002.

[Kr1] F. Krieger, *Le lemme d'Ornstein-Weiss d'après Gromov*, à paraître dans "Recent progress in dynamics" edited by Boris Hasselblatt, Cambridge University Press.

[Kr2] F. Krieger, *Groupes moyennables, dimension topologique moyenne et sous-décalages*, à paraître dans Geometriae Dedicata.

[Kr3] F. Krieger, *Sous-décalages de Toeplitz sur les groupes moyennables résiduellement finis*, prépublication.

[Kůr] P. Kůrka, Topological and Symbolic Dynamics, Cours Spécialisés, **11**, Société Mathématique de France, Paris, 2003.

[Leb] H. Lebesgue, Leçon sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[Lin] E. Lindenstrauss, *Mean dimension, small entropy factors and an embedding theorem*, Inst. Hautes tudes Sci. Publ. Math. **89** (1999), 227–262 (2000).

[LiW] E. Lindenstrauss, B. Weiss, *Mean topological dimension*, Israel J. Math. **115** (2000), 1–24.

[Mal] A. I. Mal'cev, *On the faithful representations of infinite groups by matrices*, Amer. Math. Soc. Transl. **45** (1965), 1–18.

[Mou] J. Moulin Ollagnier, Ergodic Theory and Statistical Mechanics, Lecture Notes in Mathematics **1115**, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[Neu] J. von Neumann, *Zur allgemeinen Theorie des Masses*, Fund. Math. **13** (1929), 73–116.

[Ols] A. Yu Ol'shanskii, *On the question of the existence of an invariant mean on a group*, (Russian) Usp. Mat. Nauk **35** (1980), no. 4 (214), 199-200.

[OlS] A. Yu Ol'shanskii, M. V. Sapir, *Non-amenable finitely presented torsion-by-cyclic groups*, Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci. **96** (2002), 43-169.

[OrW] D. S. Ornstein, B. Weiss, *Entropy and isomorphism theorems for actions of amenable groups*, J. Analyse Math. **48** (1987), 1–141.

[Oxt] J. C. Oxtoby, *Ergodic sets*, Bull. Amer. Math. Soc. **58** (1952), 116–136.

[Pat] A. Paterson, Amenability, Mathematical Surveys and Monographs **29**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1988.

[Phe] R. R. Phelps, Lectures on Choquet's theorem. Second edition, Lecture notes in mathematics **1757**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[Rob] D. J. Robinson, A course in the theory of groups, Graduate texts in mathematics **80**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[Ru1] W. Rudin, Functional Analysis, International Series in Pure and Applied Mathematics, Second Edition, New York, 1991.

[Ru2] W. Rudin, Analyse réelle et complexe, troisième édition, Dunod, Paris, 1998.

[ShW] M. Shub, B. Weiss, *Can one always lower topological entropy ?*, Ergodic Theory Dynam. Systems **11** (1991), no.3, 535–546.

[Wag] S. Wagon, The Banach-Tarski Paradox, Encyclopedia of mathematics and its applications **24**, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[Wei] B. Weiss, *Monotileable amenable groups*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 202 (2001), 257–262.

[Wil] S. Williams, *Toeplitz minimal flows which are not uniquely ergodic*, Z. Wahr. Verw. Gebiete **67** (1984), 95–107.

LISTE DES SYMBOLES

INDEX