Thèse

présentée par
Karima Sbihi

pour obtenir le grade de docteur de
L'Université Louis Pasteur Strasbourg 1

Spécialité :
Mathématiques

Etude de quelques E.D.P. non linéaires dans L^1 avec des conditions générales sur le bord

---

Date de soutenance : 13 octobre 2006 devant la Commission d'Examen

Directrice de thèse	Petra WITTBOLD, Technische Universität Berlin
Rapporteur externe	Noureddine IGBIDA, Université de Picardie
Rapporteur externe	Michel PIERRE, Ecole Normale Supérieure de Cachan
Rapporteur interne	Vilmos KOMORNIK, Université Louis Pasteur
Examinateur	Boris ANDREIANOV, Université de Franche-Comté

Etude de quelques E.D.P. non linéaires dans L^1 avec des conditions générales sur le bord

Résumé : L'objectif de ce travail est l'étude de divers problèmes d'équations aux dérivées partielles non linéaires du type hyperbolique et d'autres du type elliptique-parabolique faisant intervenir un opérateur en forme divergentielle du type Leray-Lions. Ces équations sont d'une façon générale mal posées dans le cadre de solutions faibles (i.e. au sens des distributions), car en général on n'a pas l'unicité. Des formulations plus appropriées ont alors vu le jour : les solutions appelées SOLA, les solutions entropiques et les solutions renormalisées. Cette thèse composée de cinq chapitres, présente des résultats d'existence et d'unicité de solutions entropiques et renormalisées pour quatre problèmes non linéaires du type mentionnés ci-dessus. Après un bref exposé de définitions et résultats nécessaires à la suite du travail, nous prouvons au chapitre 2 l'existence et l'unicité de la solution entropique pour un problème elliptique du type diffusion-convection avec des conditions non linéaires sur le bord. Ces conditions englobent en particulier les conditions usuelles. Dans le même axe, au chapitre 3, l'existence et l'unicité de la solution entropique d'un problème parabolique avec absorption dépendant de la variable d'espace sont démontrés. Le chapitre 4 a pour but de présenter un résultat d'existence de solutions renormalisées pour un problème de Stefan non linéaire. Le dernier résultat, présenté au chapitre 5, est l'existence et l'unicité de la solution entropique d'un problème de lois de conservation scalaires avec des conditions non linéaires sur le bord.

Mots clés : problèmes elliptique-parabolique-hyperbolique, conditions non linéaires au bord, semigroupes non linéaires, opérateur accrétif, capacité, dédoublement de variables, lois de conservation scalaires, trace forte.

AMS classification : 35J60, 35J65, 35K55, 35K60, 35L60, 35L65.

A mes parents

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à PETRA WITTBOLD, qui a encadré cette thèse avec beaucoup de patience et de gentillesse. Elle a su motiver chaque étape de mon travail par des remarques pertinentes et a su me faire progresser dans mes recherches. Je la remercie très sincèrement pour sa disponibilité (même à distance) et son accueil chaleureux à Berlin.

Le travail que je présente ici n'aurait pas pu aboutir sans la contribution de BORIS ANDREIANOV avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler et qui m'a beaucoup apporté. Nos contacts ont toujours été très agréables et instructifs grâce à sa gentillesse et ses grandes connaissances scientifiques. Je le remercie également de m'avoir accueilli au sein du laboratoire de mathématiques de l'université de Franche-Comté, dont Monsieur Christian Le Merdy est directeur.

Je suis très reconnaissante envers messieurs NOUREDDINE IGBIDA, VILMOS KOMORNIK et MICHEL PIERRE d'avoir accepté de rapporter cette thèse et de faire partie de mon jury de soutenance. Je suis très sensible à l'honneur que m'a fait NOUREDDINE IGBIDA en s'intéressant à mon travail tout au long de ces années.

Mes remerciements vont aussi aux membres de l'IRMA et du laboratoire de mathématiques de l'université de Franche-Comté, que j'ai côtoyés pendant ces années et qui m'ont témoigné beaucoup de sympathie et d'encouragements.

Je pense à mes parents Khelifa et Taous dont le travail n'aurait pu aboutir sans leur inépuisable soutien et encouragements. Qu'ils trouvent dans la réalisation de ce travail, l'aboutissement de leurs efforts ainsi que l'expression de ma plus affectueuse gratitude. Je tiens également à remercier mes soeurs, Kahina, Lila et Lynda, pour leur présence et leur soutien constant. Une pensée toute spéciale à mes grands-parents que je sais si fiers et que je remercie pour leur soutien et amour. De tous mon coeur je remercie ma belle famille, qui par leur affection et bienveillance m'ont permis d'accomplir ce travail dans la sérénité.

Enfin mes plus tendres remerciements vont à celui qui partage et embellit ma vie depuis de nombreuses années. Merci pour le tendre soutien et les relectures assidues. Merci de m'avoir poussée et encouragée à aller au delà de mes capacités. Merci pour le réconfort, les bons moments et l'amour que tu m'offres chaque jour. Une très grande *thanemirt* donc à Mohand, avec tout mon amour.

Karima

Notations

Ω : ouvert de $\mathbb{R}^N$
$\partial\Omega$: frontière topologique de Ω
$x = (x_1, \cdots, x_N)$: point générique de $\mathbb{R}^N$
$dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_N$: mesure de Lebesgue sur Ω
$d\sigma$: mesure de surface sur $\partial\Omega$, notée parfois $\mathcal{H}^{N-1}$
Q : $(0,T) \times \Omega,\ t \in (0,T)$, t variable du temps, $T > 0$
Σ : $(0,T) \times \partial\Omega$
η : normale unitaire extérieure à Ω
Du : gradient de u
$\mathrm{Supp}(f)$: support d'une fonction f
f^+, f^- : $\max(f,0),\ \max(-f,0)$
$f \wedge g, f \vee g$: $\inf(f,g),\ \sup(f,g)$
p-cap(B,Ω) : p-capacité de l'ensemble B relativement à Ω

$\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{D}(Q), ...$: espace des fonctions différentiables et à support compact dans $\Omega, Q, ...$
$\mathcal{D}_+(\Omega), \mathcal{D}_+(Q), ...$: espace des fonctions positives de $\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{D}(Q), ...$
$C^k(\Omega), C^k(Q)$: espace des fonctions k-fois continûment différentiables dans Ω, Q
$C_0(\Omega), C_0(Q)$: espace des fonctions continues nulles au bord dans Ω, Q
$\mathcal{M}_b(\Omega)$: espace des mesures de Radon bornées
$\mathcal{M}_0(\Omega)$: espace des mesures de Radon bornées ne chargeant pas les ensembles de capacités nulles
$L^p(\Omega)$: espace des fonctions de puissance p-ème intégrables sur Ω pour la mesure dx; $\|f\|_p = \big(\int_\Omega |f(x)|^p dx\big)^{\frac{1}{p}}$
$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega),\ Du \in (L^p(\Omega))^N\}$; $\|u\|_{1,p} = \big(\|u\|_p^p + \|Du\|_p^p\big)^{\frac{1}{p}}$
$W_0^{1,p}(\Omega)$: adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{1,p}(\Omega)$
$W^{-1,p'}(\Omega)$: espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$
$W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)$: espace des traces des fonctions $W^{1,p}(\Omega)$
$W^{\frac{-1}{p'},p'}(\partial\Omega)$: espace dual de $W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)$

Si X est un espace de Banach
$L^p(0,T;X) = \{f : (0,T) \to X \text{ mesurable};\ \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt < \infty\}$
$L^\infty(0,T;X) = \{f : (0,T) \to X \text{ mesurable};\ ess\text{-}\sup_{t\in(0,T)} \|f(t)\|_X < \infty\}$
$C^k([0,T];X)$: espace des fonctions k-fois continûment différentiables de $[0,T] \to X$
$\mathcal{D}([0,T];X)$: espace des fonctions continûment différentiables à support compact dans $[0,T]$

Table des matières

Introduction Générale

Les équations aux dérivées partielles permettent d'aborder d'un point de vue mathématique des phénomènes observés, par exemple dans les domaines de la physique et de la chimie. Les situations dépendant du temps se traduisent plus particulièrement par des équations d'évolution tenant compte d'éventuelles interactions entre objets et événements.

Les travaux présentés dans cette thèse concernent quelques équations aux dérivées partielles du type hyperbolique et d'autres du type elliptique-parabolique faisant intervenir l'opérateur divergentiel "$Au = -\text{div } a(u, Du)$", où $a : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est un champ vérifiant des hypothèses du type Leray-Lions.

La préoccupation première du mathématicien confronté à une équation aux dérivées partielles est de lui donner un sens dans des espaces fonctionnels appropriés et d'y démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

Illustrons tout d'abord quelques difficultés qui peuvent apparaître lors de l'étude de ces équations en considérant les problèmes modèles suivants : du type elliptique-parabolique dégénéré

$$(EP)\begin{cases} b(u)_t - \text{div } a(u, Du) = f & \text{sur } \ Q := (0,T)\times\Omega \\ b(u)(0,\cdot) = b(u_0) & \text{sur } \ \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \ \Sigma := (0,T)\times\partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue croissante avec $b(0) = 0$, $(u_0, f) \in L^2(\Omega) \times L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega))$, et des problèmes du type hyperbolique

$$(H)\begin{cases} u_t + \text{div } \varphi(u) = 0 & \text{sur } (0,T)\times\mathbb{R}^N \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

où $\varphi \in C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}^N)$ et $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ sont données.

Ces équations sont d'une façon générale mal posées dans le cadre des solutions faibles (c'est-à-dire des solutions au sens de distributions). L'existence et l'unicité de la solution faible du problème elliptique (E) (cas où $b = 0$), ainsi que sa version parabolique (P) ($b = \text{Id}$) et lorsque la donnée f est une mesure bornée, a été étudié par L. BOCCARDO ET T. GALLOUËT [26]. Pour le problème elliptique (E) la solution faible est dans les espaces de Sobolev $W_0^{1,q}(\Omega)$ pour tout $1 < q < \frac{N(p-1)}{N-1}$ (ceci lorsque $p > 2 - \frac{1}{N}$, afin que les espaces en question soient bien définis), et la solution faible du problème parabolique (P) est, pour $p > 2 - \frac{1}{N+1}$, dans les espaces $L^q(0,T;W_0^{1,q}(\Omega))$ pour tout $q < \frac{(P-1)(N+1)+1}{N+1}$. Cependant ces formulations faibles sont trop faibles car en général on n'a pas l'unicité de solutions (voir les travaux de J. SERRIN [73], PH. BÉNILAN ET F. BOUHSSIS [17] et A. PRIGNET [70]).

L'existence et l'unicité de solutions faibles des problèmes non linéaires dégénérés du type (EP) ont intéressé également de nombreux auteurs parmi lesquels on peut citer sans aucune exhaustivité : H.W. ALT ET S. LUCKHAUS [2], F. SIMONDON [74], PH. BÉNILAN [15], J. CARRILLO [35], PH. BÉNILAN ET P. WITTBOLD [21], G. GAGNEUX ET M. MADAUNE-TORT [46], F. OTTO [65], *etc...* De tels problèmes interviennent en effet dans la modélisation des écoulements de fluides (newtoniens et non-newtoniens) à travers un milieu poreux (cf. G. GAGNEUX ET M. MADAUNE-TORT [47]). La difficulté principale dans leur résolution provient de la dégénérescence (des "plats") de la fonction b, correspondant en physique aux zones saturées ou sèches du milieu. Il en résulte une absence de régularité en temps des solutions ne permettant pas de prouver l'existence et même l'unicité des solutions faibles du problème dégénéré (EP). L'objectif premier recherché alors est de dégager des hypothèses sur les données afin d'établir l'existence et l'unicité des solutions. Il a été prouvé par H.W. ALT ET S. LUCKHAUS [2] et PH. BÉNILAN ET P. WITTBOLD [21] que de telles solutions existent si les données f et u_0 satisfont la condition d'énergie :

$$B(u_0) \in L^1(\Omega) \quad \text{et } f \in L^1(Q) \cap L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)),$$

où $B(z) = \int_0^z r db(r)$, et le champ a satisfait la condition, dite de structure, suivante :

$$b(r) = b(s) \Longrightarrow a(r,\xi) = a(s,\xi).$$

La non unicité des solutions faibles du problème (H) est une difficulté classique. L'exemple type est celui de l'équation de Burgers

$$\begin{cases} u_t + (\frac{u^2}{2})_x = 0 & t > 0,\ x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

où pour $u_0(x) = -1$ si $x < 0, u_0(x) = 1$ si $x > 0$, un petit calcul montre que les fonctions u et v, définies par $u(t,x) = u_0(x)$ et $v(t,x) = -1$ si $x < -t,\ v(t,x) = \frac{x}{t}$ si $-t \le x \le t,\ v(t,x) = 1$ si $x > t$, sont deux solutions faibles du problème précédent. La notion de solution faible ne suffit donc pas à déterminer la solution physiquement observée car elle n'est pas unique. Il apparaît alors nécessaire de trouver un critère d'origine physique qui permet de sélectionner parmi toutes les solutions faibles la solution physiquement admissible. La juste notion de solution est celle dite entropique. Si $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, on dit que $u \in L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^N)$ est une solution entropique de (H) si $\forall k \in \mathbb{R}$, et pour toute fonction $\phi \in C_c^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^N)$, $\phi \geq 0$ on a

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} |u-k|\phi_t + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^N} \mathrm{sign}(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k)) \cdot D\phi + \int_{\mathbb{R}^N} |u_0 - k|\phi(0) \geq 0.$$

En supposant le flux φ localement lipschitzien, S.N. Kruzhkov [51] a démontré l'existence et l'unicité d'une telle solution entropique pour le problème (H). L'idée pour prouver l'existence est d'approcher la loi de conservation scalaire par une équation comportant un peu de diffusion. D'un point de vue physique, si on prend en compte en plus des phénomènes d'échange les phénomènes de diffusion, le nouveau problème nous amène à un problème du type

$$\begin{cases} u_{\varepsilon,t} + \mathrm{div}\ \varphi(u_\varepsilon) = \varepsilon \Delta u_\varepsilon & \text{sur } (0,T) \times \mathbb{R}^N \\ u_\varepsilon(0,\cdot) = u_0 & \text{sur } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

où ε est un paramètre d'autant plus petit que l'importance des phénomènes de diffusion est faible. Ce n'est que parce que ε est jugé assez petit que la diffusion est négligée et que le problème (H) est considéré. Pour les résultats d'existence, d'unicité et de compacité de la solution u_ε, on renvoie le lecteur aux ouvrages de A. Bressan [30], J. Málek *et al* [56] et D. Serre [72]. Ceci concerne des lois de conservation posées sur tout l'espace $\mathbb{R}^N$. D'autre part, on peut légitimement se poser la question de l'existence de solutions dans le cas des domaines bornés $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Une des difficultés essentielles des lois de conservation en domaine borné est la manière dont les conditions au bord doivent être prises en compte. L'article pionnier sur le sujet vient de C. Bardos, A.Y. Le Roux et J.-C. Nédélec [13] lorsque la donnée initiale $u_0 \in BV(\Omega)$ et la donnée de Dirichlet u_d est de classe C^2. Les auteurs assurent l'existence et l'unicité de la solution entropique dans la classe $L^\infty(Q) \cap BV(Q)$. En effet, imposer à la solution d'être BV permet de définir une fonction γu, trace de la solution entropique sur le bord, et de donner un sens à la condition de bord formulée de la manière suivante : pour tout k compris entre γu et u_d on a

$$\mathrm{sign}(\gamma u - u_d)(\varphi(\gamma u) - \varphi(k)) \cdot \eta \geq 0 \quad \text{p.p. sur } \Sigma, \tag{0.1}$$

où η est la normale unitaire extérieure à Ω. Cette condition est couramment appelée BLN, en référence aux trois auteurs qui l'ont introduite. Le résultat a été ensuite amélioré par F. Otto [64] (on pourra à ce propos se reporter à l'ouvrage, très détaillé, de J. Málek *et al* [56]), où les termes de bord sont inclus dans une formulation purement intégrale qui donne existence et unicité de la solution entropique pour des données uniquement bornées. Cette solution entropique est formulée comme étant une fonction bornée sur Q vérifiant

$$-\int_Q H(u,k)\phi_t + Q(u,k) \cdot D\phi \leq \int_\Omega H(u_0,k)\phi(0) + L\int_\Sigma H(u_d,k)\phi$$

pour tout $\phi \in C_c^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^N)$, $\phi \geq 0$, $k \in \mathbb{R}$ et toute paire d'entropies au bord (H, Q). Récemment, R. Bürger, H. Frid et K.H. Karlsen [34] ont étudié le problème de lois de conservation avec une condition de Neumann sur le bord. L'existence et l'unicité de la solution entropique ont été établis sous la condition que le flux $\varphi \in C^3$ et que l'ensemble $\{\xi;\ \kappa + \zeta\varphi'(\xi) = 0\}$ soit de mesure nulle pour tout $(\kappa, \zeta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Cette hypothèse, introduite auparavant par A. Vasseur [75], est utilisée dans la perspective particulière de définir la fonction γu, trace de la solution entropique, et de formuler la condition de bord de la manière suivante :

$$\varphi(\gamma u) \cdot \eta = 0 \ \text{ p.p. sur } \Sigma.$$

Le problème de non unicité des solutions des problèmes elliptiques et paraboliques se pose également lorsque les données sont peu régulières (fonctions intégrables ou mesures). Des formulations, plus appropriées que le cadre habituel des solutions faibles, ont alors vu le jour, avec l'espoir d'arriver à une définition de solutions qui permettrait d'obtenir l'unicité. Trois notions de solutions ont été adoptées : les solutions appelées SOLA (solutions obtenues comme limite d'approximation) utilisées par A. Dall'Aglio [39], les solutions entropiques au sens de Ph. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre et J.-L. Vazquez [16] et enfin les solutions renormalisées ayant pour origine l'article de R. DiPerna et P.L. Lions [41] sur les équations de Boltzmann. Par exemple, pour le problème elliptique (E) la solution entropique u est une fonction mesurable sur Ω vérifiant

$$\begin{cases} T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)\ \forall k > 0 \\ \displaystyle\int_\Omega a(u, Du) \cdot DT_k(u - \phi) \leq \int_\Omega f T_k(u - \phi) \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

où T_k est la fonction troncature au niveau k définie par $T_k(z) = \min(k, \max(z, -k))$. Il faut souligner que parallèlement à cette définition, F. Murat [61, 62] a développé le concept de solutions renormalisées pour le problème elliptique, et s'est avéré, pour de nombreux problèmes d'ailleurs, équivalent à celui de solutions entropiques, et les deux mènent à une unique solution. Ces solutions renormalisées vérifient

$$\begin{cases} T_k(u) \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \displaystyle\lim_{h\to\infty} \int_{\{h \leq |u| \leq h+k\}} |Du|^p = 0\ \forall k > 0 \\ \displaystyle\int_\Omega a(u, Du) \cdot D(S(u)\phi) = \int_\Omega f S(u)\phi \end{cases}$$

pour tout $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et toute fonction régulière S à support compact. En 1996, une notion de solutions renormalisées a été introduite par J. Carrillo et P. Wittbold [37] pour le problème dégénéré (EP). Ces solutions vérifient

$$\begin{cases} b(u) \in L^1(Q),\ T_k(u) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)),\ \displaystyle\lim_{h\to\infty} \int_{\{h \leq |u| \leq h+k\}} |Du|^p = 0\ \forall k > 0 \\ \displaystyle -\int_Q \xi_t \int_{u_0}^u h(r)\,dr\,db(r) + \int_Q a(u, Du) \cdot D(h(u)\xi) = \int_Q f h(u)\xi \end{cases}$$

pour tout $\xi \in \mathcal{D}([0,T) \times \Omega)$ et $h \in C_c^1(\mathbb{R})$. Ils démontrent d'ailleurs l'unicité de telles solutions sans supposer la condition d'énergie et la condition de structure rappelées ci-dessus. Pour l'établir, ils s'appuient sur la méthode de dédoublement de variables de S.N. KRUZHKOV [51] et adoptent des techniques d'inégalités entropiques des problèmes hyperboliques au problème elliptique-parabolique (EP) (voir J. CARRILLO [36]). L'existence a été, quant à elle, établie plus tard par K. AMMAR ET P. WITTBOLD [5] avec une preuve qui repose sur une méthode d'approximation en deux étapes par des perturbations strictement monotones, combinée avec la méthode de dédoublement de variables de S.N. KRUZHKOV.

Cette thèse, qui est composée de cinq chapitres, présente des résultats d'existence et d'unicité de solutions entropiques ou renormalisées pour quatre problèmes non linéaires du type mentionnés ci-dessus. Nous allons présenter ici d'une manière détaillée le contenu de chacun d'eux.

Le CHAPITRE 1 est entièrement consacré à l'exposé des définitions et résultats nécessaires à la suite de ce travail. Nous rappelons tout d'abord quelques résultats de base sur les espaces de Sobolev et les capacités variationnelles. Ces dernières sont utilisées en particulier pour introduire les différents concepts de solutions entropiques aux Chapitres 2 et 3. Des propriétés sur les opérateurs multivoques et les bonnes solutions sont également rappelées en ce chapitre. On verra régulièrement, dans cette thèse, des liens entre la théorie des opérateurs, accrétifs en particulier, l'approche par les bonnes solutions et l'approche par les solutions entropiques ou renormalisées.

Le CHAPITRE 2 est consacré à l'étude des équations elliptiques du type diffusion-convection : $-\text{div } a(u, Du) = f$, où $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est un champ vérifiant les hypothèses du type Leray-Lions suivantes :

$(\mathbf{H_1})$- monotonie en $\xi \in \mathbb{R}^N$:

$$(a(r,\xi) - a(r,\eta)) \cdot (\xi - \eta) \geq 0 \quad \forall r \in \mathbb{R},\ \forall \xi,\ \eta \in \mathbb{R}^N$$

$(\mathbf{H_2})$- coercivité : $\exists \lambda_0 > 0$, $p > 1$ tels que

$$(a(r,\xi) - a(r,0)) \cdot \xi \geq \lambda_0 |\xi|^p \quad \forall r \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

$(\mathbf{H_3})$- condition de croissance : $\exists\ \Lambda : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, croissante telle que

$$|a(r,\xi)| \leq \Lambda(|r|)(1 + |\xi|^{p-1}) \quad \forall r \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

$(\mathbf{H_4})$- $\exists\ C : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$|a(r,\xi) - a(s,\xi)| \leq C(r,s)|r - s|(1 + |\xi|^{p-1}) \quad \forall r, s \in \mathbb{R},\ \forall \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Un exemple type d'application satisfaisant ces hypothèses est $a(r,\xi) = |\xi|^{p-2}\xi + F(r)$, où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est lipschitzienne. Notons que dans tout ce travail, a est supposé vérifier ces hypothèses $(\mathbf{H_1})$-$(\mathbf{H_4})$.

Malgré la diversité des problèmes elliptiques étudiés, la plupart d'eux se limite à une condition de Dirichlet ou de Neumann sur le bord. Cependant pour les problèmes mathématiques issus de la modélisation de problèmes concrets en mécanique comme les modèles d'écoulement à plusieurs phases en milieu poreux (voir G. Gagneux et M. Madaune-Tort [47]), des conditions au bord plus générales et mêmes non linéaires s'imposent. Dans cet esprit, une notion de solution entropique a été introduite par F. Andreu *et al* [10] pour le problème

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\ a(x, Du) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ -a(x, Du) \cdot \eta \in \beta(u) & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f \in L^1(\Omega)$ et β est un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R}^2$ avec $0 \in \beta(0)$. Sous des hypothèses supplémentaires sur a ou β, les auteurs montrent que ce problème admet une unique solution entropique vérifiant : $u \in \mathcal{T}_{tr}^{1,p}(\Omega)$[a], $\exists\, w \in L^1(\partial\Omega)$ telle que $w(x) \in \beta(u(x))$ p.p. $x \in \partial\Omega$ et

$$\int_\Omega a(u, Du) \cdot DT_k(u - \phi) \leq \int_\Omega f T_k(u - \phi) - \int_{\partial\Omega} w T_k(u - \phi) \qquad (0.2)$$

pour tout $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$ telle que $\phi(x) \in D(\beta)$ p.p. $x \in \partial\Omega$. Récemment, une généralisation aux conditions de bord du type $-a(\cdot, Du) \cdot \eta + \beta(u) \ni \psi$ avec $\psi \in L^1(\partial\Omega)$ a été proposée par K. Ammar et P. Wittbold [6] et K. Ammar, F. Andreu et J. Toledo [4]. Dans notre travail, nous avons élargi cette notion de solutions à un cadre plus général en prenant en compte une dépendance de a en u et β en x :

$$(E)(f) \begin{cases} u - \mathrm{div}\ a(u, Du) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ -a(u, Du) \cdot \eta \in \beta(x, u) & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\beta(x, \cdot) = \partial j(x, \cdot)$ avec $j \in \mathcal{J}_0(\partial\Omega)$[b]. Notons que ce problème englobe en particulier la condition de Dirichlet, la condition de Neumann et les conditions au bord du type obstacle. Les dépendances de a en u et β en x font apparaître des mesures (voir Définition 2.4.1). Ainsi la fonction w apparaissant dans l'inégalité (0.2) est remplacée par une mesure μ ne chargeant pas les ensembles de capacités nulles dont la partie régulière vérifie $\mu_r(x) \in \partial j(x, u(x)) + \partial I_{[\gamma_-(x), \gamma_+(x)]}(u(x))$ p.p. $x \in \partial\Omega$, où γ_+ et γ_- sont des fonctions quasi semi-continue inférieurement et supérieurement, respectivement, liées à la fonctionnelle j (cf. Lemme 2.2.1). Tandis

[a] $\mathcal{T}_{tr}^{1,p}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mesurable ; $T_k(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\exists (u_n)_n \in W^{1,p}(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ p.p. dans Ω, $DT_k(u_n) \to DT_k(u)$ fortement dans $L^1(\Omega)$ pour tout $k > 0$, et $\exists v : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $(\gamma(u_n))_n$ converge p.p. dans $\partial\Omega$ vers $v\}$.

[b] $\mathcal{J}_0(\partial\Omega) := \{j : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ mesurable en $x \in \partial\Omega$, convexe s.c.i. en $r \in \mathbb{R}$ avec $j(\cdot, 0) = 0\}$.

que sa partie singulière est liée à la solution entropique u par : $\tilde{u} = \gamma_{+/-} \quad \mu_s^{+/-}$ − p.p. sur $\partial\Omega$, où $\tilde{u}$ est le représentant quasi-continu de la fonction u (cf. Définition 1.2.2). Un obstacle majeur à l'obtention du résultat d'existence pour les solutions entropiques provient de la difficulté d'obtenir des estimations L^∞ par les méthodes classiques pour cause de l'apparition du terme $a(u, 0)$ lors de l'usage de l'hypothèse (H_2). Pour pallier à cet inconvénient, on commence par étudier le problème perturbé suivant :

$$\begin{cases} u - \text{div } a(u, Du) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ -a(u, Du) \cdot \eta \in \beta(x, u) + \delta\Psi(u) & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

pour lequel on montre l'existence de solutions faibles. Ici Ψ est une fonction paire et monotone sur $\mathbb{R}^+$. Puis en une deuxième étape, en choisissant une perturbation bi-monotone, en passant à la limite avec δ vers zéro dans le problème précédent on conclut à l'existence de solutions entropiques. L'unicité de la solution entropique est déduite d'un résultat de comparaison entre une solution entropique quelconque et une solution entropique construite précédemment par approximation.

Dans le même axe, un autre problème étudié dans le Chapitre 3 est le cas avec absorption :

$$(P)(u_0, f) \begin{cases} u_t - \text{div } a(u, Du) + \beta(\cdot, u) \ni f & \text{sur} \quad Q \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases}$$

où $\beta(x, \cdot) = \partial j(x, \cdot)$ avec $j \in \mathcal{J}_0(\Omega)$, $f \in L^1(Q)$ et $u_0 \in L^1(\Omega)$. La version stationnaire de $P(u_0, f)$ (dans le cas de l'opérateur $Au = -\text{div } a(x, Du)$) a été étudiée par P. Wittbold [78]. L'étude du problème parabolique en revanche, s'est avérée difficile pour cause de difficultés liées à la dépendance en x du graphe β, et est restée ouverte depuis. Inspirés par les techniques du chapitre précédent, nous avons pu introduire une notion de solution entropique au problème $P(u_0, f)$ (cf. Définition 3.3.1) et prouver son existence et unicité. L'approche adoptée pour prouver l'existence des solutions entropiques s'appuie sur une méthode d'approximation en deux étapes. En effet, par la théorie générale des semigroupes non linéaires, on montre d'abord l'existence de solutions faibles du problème

$$\begin{cases} u_t - \text{div } a(u, Du) + \beta_\lambda(\cdot, u) + \psi_{m,n}(u) = f & \text{sur} \quad Q \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Sigma, \end{cases}$$

où β_ψ est la régularisée de Yosida du graphe β et $\psi_{m,n}(r) = \frac{1}{m}r^+ - \frac{1}{n}r^-, m, n \in \mathbb{N}^*$. Puis on montre comment l'étude de ce problème approché et perturbé permet, lorsque $\lambda \to 0$, ensuite $m, n \to \infty$, d'atteindre une solution entropique du problème $(P)(u_0, f)$. Un résultat d'injection d'espaces intervenants dans notre étude (cf. Lemme 3.2.4) est l'outil clef pour la définition de solutions entropiques. Signalons au passage que cette démarche fait apparaître une hypothèse suffisante et acceptable sur la donnée initiale qui assure que le problème soit bien posé (cf. Théorème 3.3.1). L'unicité de la solution entropique est prouvée à l'aide de la méthode de dédoublement de variables de S.N. KRUZHKOV [51].

L'objet du CHAPITRE 4 est de présenter un résultat d'existence de solutions renormalisées pour le problème de Stefan :

$$\beta(u)_t - \text{div } a(u, Du) \ni f \text{ sur } Q,$$

où u est assujettie à vérifier la condition initiale $\beta(u)(t=0) \ni b_0$ sur Ω, et la condition de Dirichlet : $u = 0$ sur Σ. Ici β est un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R}^2$ avec $0 \in \beta(0)$, $f \in L^1(Q)$ et $b_0 \in L^1(\Omega)$. Nombreux travaux ont été dédiés aux questions d'existence et d'unicité de solutions faibles ou renormalisées pour ce type de problèmes, citons par exemple les travaux de H.W. ALT ET S. LUCKHAUS [2], X. XU [79], D. BLANCHARD ET G. FRANCFORT [24], D. BERDA [22], N. IGBIDA ET J.M. URBANO [48], K. AMMAR ET P. WITTBOLD [5], D. BLANCHARD ET A. PORRETTA [25] et N. IGBIDA ET P. WITTBOLD [49], *etc...* On notera au passage le travail de F. ANDREU *et al* [8, 9] sur le problème de Stefan avec des conditions dynamiques au bord. En ce qui nous concerne, on s'est intéressé à l'existence de solutions renormalisées définies comme suit : $u : Q \to \mathbb{R}$ mesurable telle que $T_k(u) \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$ pour tout $k > 0$ et il existe $b \in L^1(Q)$ telle que $b \in \beta(u)$ p.p. dans Q, vérifiant [c]

$$-\int_Q \xi_t \int_0^b S'(\beta_0^{-1}(r))drdxdt - \int_\Omega \xi(0) \int_0^{b_0} S'(\beta_0^{-1}(r))drdx$$

$$+\int_Q a(u, Du) \cdot D(S'(u)\xi) = \int_Q fS'(u)\xi$$

pour tout $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ avec S' à support compact, et tout $\xi \in C_c^\infty([0,T) \times \overline{\Omega})$ telle que $S'(u)\xi \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$, et de plus,

$$\lim_{l\to\infty} \int_{\{l \le |u| \le 2l\}} (a(u, Du) - a(u, 0)) \cdot Du = 0.$$

Le problème étudié ici fait suite à l'article de D. BLANCHARD ET A. PORRETTA [25] où il est question de l'existence et de l'unicité de la solution renormalisée d'un problème de même type que le notre : $\beta(u)_t - \text{div } a(x, Du) + \text{div } \phi(u) \ni f$, $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ étant une fonction lipschitzienne. Les auteurs démontrent l'existence de solutions renormalisées pour des graphes dont le graphe réciproque est continu et l'unicité pour des graphes monotones quelconques. La nouveauté de notre

[c]Ici β_0^{-1} désigne la section minimale du graphe β^{-1}.

travail réside dans le résultat d'existence où on s'affranchit de cette condition supplémentaire sur le graphe. En effet, la méthode employée pour prouver l'existence des solutions renormalisées fait appel aux techniques de D. BLANCHARD ET A. PORRETTA [25] et K. AMMAR ET P. WITTBOLD [5]. On commence en un premier temps par prouver, grâce à la théorie des semigroupes non linéaires, l'existence de solutions faibles du problème

$$(S_k)\begin{cases} \beta_k(u)_t - \text{div } a(u, Du) + \psi(u) \ni f & \text{sur } Q \\ \beta_k(u)(t=0) \ni b_0^k & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

où $\beta_k(r) = \beta(r) + \frac{1}{k}r,\ k > 0$ et ψ est une fonction strictement croissante. La méthode de dédoublement de variables de S.N. KRUZHKOV [51] combinée avec les techniques de D. BLANCHARD ET A. PORRETTA [25] permet d'obtenir des estimations *a priori* sur la suite de solutions $(u_k)_k$ du problème précédent et de passer à la limite avec k vers l'infini. En un deuxième temps, en faisant tendre ψ de manière monotone vers zéro, l'existence de solutions renormalisées est établie.

Le dernier problème, présenté au CHAPITRE 5, concerne les lois de conservation scalaires. Les équations hyperboliques sont omniprésentes en mécanique des fluides : dès qu'une quantité est conservée, un bilan donne souvent une équation aux dérivées partielles hyperbolique vérifiée par cette quantité. La forme mathématique de base est le problème (H). Toutefois, il reste que dans bien des études de phénomènes physiques, le domaine physique est borné. Ce qui se produit sur le bord doit être pris en compte et une des difficultés essentielles est de comprendre de quelle manière. Cependant, comme signalé plus haut, les résultats d'existence et d'unicité de solutions entropiques n'existent que pour des conditions de Dirichlet et récemment pour une condition de Neumann. Dans ce travail, nous élargissons le cadre de solutions entropiques au problème :

$$(LCS)\begin{cases} u_t + \text{div } \varphi(u) = f & \text{sur } Q \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega \\ \varphi(u)\cdot\eta \in \beta(u) & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est une fonction lipschitzienne, $f \in L^1(Q), \int_0^T \|f(t)\|dt < \infty$, $u_0 \in L^\infty(\Omega)\cap L^1(\Omega)$ et β est un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R}^2$ avec $0 \in \beta(0)$. Notons que ce problème englobe en particulier la condition de Dirichlet homogène ($\beta = \{0\}\times\mathbb{R}$) et la condition de Neumann ($\beta = \mathbb{R}\times\{0\}$). La difficulté rencontrée lors de l'étude du problème (LCS) est la considération des conditions aux limites imposées à la solution sur le bord, d'où la nécessité de définir une notion de traces pour une solution entropique du problème (LCS). Cette dernière que nous définissons comme étant une fonction $u \in L^\infty(Q)$ vérifiant l'inégalité entropique :

$$(u-k)_t^\pm + \text{div}(\text{sign}^\pm(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k))) \le \text{sign}^\pm(u-k)f \text{ dans } \mathcal{D}'(Q)\ \forall k \in \mathbb{R}$$

et telle que

$$\text{ess-}\lim_{t\to 0}\int_{\Omega}|u(t,x)-u_0(x)|=0$$

et les traces[d] $\gamma V_{\varphi\cdot\eta}(u)$ et $\gamma\varphi\cdot\eta(u)$ existent (cf. Proposition 5.2.1) et vérifient :

$$(\gamma V_{\varphi\cdot\eta}(u),\gamma\varphi\cdot\eta(u))\in\tilde{\beta}\circ V_{\varphi\cdot\eta}^{-1}\ \text{ p.p. sur } \Sigma,$$

où $\tilde{\beta}$ est une sorte de "projection" du graphe β sur le graphe de la fonction $\varphi\cdot\eta$ (cf. (5.9)). Par exemple, le graphe $\tilde{\beta}$ correspondant à $\beta=\{0\}\times\mathbb{R}$ est (voir FIG. 5.1)

$$\tilde{\beta}:=\{(z,\varphi(z)\cdot\eta);\ \operatorname{sign}(z)(\varphi(z)-\varphi(k))\cdot\eta\geq 0\ \forall k\in[z\wedge 0,z\vee 0]\}.$$

On se rend donc bien compte que l'on retrouve la condition BLN (0.1). D'autre part, le résultat d'existence de traces de la fonction $V_{\varphi\cdot\eta}(u)$ est dû à E. YU PANOV [68] et n'est démontré, à ce jour, que pour $\Omega=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^{N-1}$ et nous nous placerons désormais dans ce cas. Notons que la généralisation des résultats de E.Yu. Panov au cas d'une frontière courbée suffisamment régulière est en cours, aussi nous nous attendons à ce que la formulation de la condition de bord suggérée dans ce chapitre soit valable pour une classe plus générale de domaines (et même pour des conditions au bord du type $\beta(x,\cdot)+g$ avec $g\in L^\infty(\Sigma)$).
La démarche suivie pour prouver l'existence des solutions entropiques requiert l'existence des solutions entropiques (cf. Théorème 5.3.1) du problème stationnaire correspondant :

$$\begin{cases} u+\operatorname{div}\varphi(u)=f & \text{dans} \quad \Omega\\ \varphi(u)\cdot\eta\in\beta(u) & \text{sur} \quad \partial\Omega.\end{cases}$$

Ainsi en utilisant quelques outils de la théorie des semigroupes non linéaires, on montre l'existence d'une unique bonne solution du problème de Cauchy correspondant au problème stationnaire précédent, et à l'aide d'estimations *a priori* et des passages à la limite on montre que cette bonne solution coïncide avec une solution entropique du problème (LCS). L'unicité de la solution entropique découle en comparant deux solutions en dehors d'un compact puis, par passage à la limite sur les fonctions tests, en utilisant le résultat d'existence de traces de E.Yu Panov, la comparaison de deux solutions entropiques est déduite.

[d]Ici $V_{\varphi\cdot\eta}(z):=\operatorname{sign}(z)\operatorname{Var}_{[0\wedge z,0\vee z]}(\varphi(\cdot)\cdot\ \eta)$, c'est-à-dire la variation de la fonction $\varphi\cdot\eta$.

Chapitre 1

Rappels et notations générales

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail. Le chapitre est organisé comme suit : en premier lieu, nous rappelons quelques définitions et résultats sur les espaces de Sobolev et les espaces $L^p(0,T;X)$. La Section 2 a pour objet d'examiner et de présenter quelques résultats sur les capacités variationnelles, qui joueront un rôle essentiel dans les Chapitres 2 et 3. Dans la Section 3, nous donnons quelques définitions et résultats sur les opérateurs multivoques et sur la théorie des bonnes solutions. Enfin, la dernière section rappelle le théorème de Minty-Browder.

1.1 Espaces fonctionnels

Les espaces de Sobolev sont un outil omniprésent dans l'étude des équations aux dérivées partielles elliptiques et paraboliques. Leur compréhension est donc une étape nécessaire avant d'aborder les équations en question. Nous reprenons dans cette section certains énoncés de O. Kavian [50] et de H. Brezis [33] sur le sujet, pour une présentation plus complète des espaces de Sobolev, on pourra consulter l'ouvrage de R.A. Adams [1].
Par la suite, Ω est un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$. On désigne par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans Ω. Pour $1 \leq p < \infty$, on note $L^p(\Omega)$ l'espace défini par

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}; \int_\Omega |u|^p < \infty\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_p = \Big(\int_\Omega |u|^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

et pour $p = \infty$, on note

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}; \ ess\text{-}\sup_\Omega |u| < \infty\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|u\|_\infty = ess\text{-}\sup_\Omega |u|.$$

L'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ \exists g_1, \cdots, g_N \in L^p(\Omega), \int_\Omega g_i\varphi = -\int_\Omega u\varphi_{x_i}\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{1,p} = \left(\|u\|_p^p + \|Du\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

si $p < \infty$, et

$$\|u\|_{1,\infty} = \max(\|u\|_\infty, \|Du\|_\infty)$$

si $p = \infty$. On note pour $1 \le p < \infty$

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{1,p}(\Omega)}.$$

On désigne par $W^{-1,p'}(\Omega)$, $p' = \frac{p}{p-1}, 1 \le p < \infty$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ que l'on peut caractériser comme suit : $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$, alors il existe $f_0, f_1, \cdots, f_N \in L^{p'}(\Omega)$ telles que

$$\langle F, \phi \rangle = \int_\Omega f_0\phi + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\ \ \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega)\ \text{ et } \|F\| = \max_{1\le i\le N} \|f_i\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

A présent rappelons quelques propriétés de base de ces espaces. Commençons par le critère de compacité de Fréchet-Kolmogorov.

Théorème de Fréchet-Kolmogorov : *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $\omega \subset \Omega$. Soit $\mathcal{F}$ un sous-ensemble borné de $L^p(\Omega)$ avec $1 \le p < \infty$. On suppose que*

$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \delta < \operatorname{dist}(\omega, \mathbb{R}^N \backslash \Omega) \textit{ tel que} \\ \|f(\cdot + h) - f(\cdot)\|_{L^p(\omega)} < \varepsilon\ \forall h \in \mathbb{R}^N \textit{ avec } |h| < \delta \textit{ et } \forall f \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

Alors $\mathcal{F}_{|\omega}$ est relativement compact dans $L^p(\omega)$.

Résultat de densité : *On suppose Ω de classe C^1. Soit $u \in W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \le p < \infty$. Alors il existe une suite $(u_n)_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $u_{n|\Omega} \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$.*

Théorème de Rellich-Kondrachov : *On suppose Ω de classe C^1. Si $p < N$, alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \forall q \in [1, p^*[,\ \textit{ où } \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$$

avec injection compacte. En particulier $W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ *avec injection compacte pour tout* p.

Voici quelques inégalités très utiles portant sur les normes de Sobolev.

Inégalité de Poincaré : *Soient* $1 \leq p < \infty$ *et* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$. *Alors il existe une constante* C *telle que pour tout* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *on ait*

$$\|u\|_p \leq C\|Du\|_p.$$

En particulier, $\|Du\|_p$ *est une norme équivalente à celle de* $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Inégalité de Poincaré-Wirtinger : *Soient* $1 \leq p \leq \infty$ *et* Ω *un ouvert borné, connexe et lipschitzien de* $\mathbb{R}^N$. *Alors il existe une constante* C *telle que pour tout* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *on ait*

$$\|u - \overline{u}\|_p \leq C\|Du\|_p,$$

où $\overline{u} = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(x)dx$.

Traces des fonctions $W^{1,p}(\Omega)$

On peut mentionner le résultat suivant sur les traces des fonctions $W^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.1.1. *Soient* Ω *un ouvert régulier de* $\mathbb{R}^N$ *et* $1 \leq p \leq \infty$. *Alors il existe un opérateur linéaire continu* $\tau : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$, *appelé opérateur trace, tel que*

$$\tau : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega) \text{ est compact.}$$

Pour $1 \leq p \leq \infty$ ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) on définit l'espace vectoriel $W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)$ comme suit :

$$W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega) = \{\tau(u);\ u \in W^{1,p}(\Omega)\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|f\|_{\frac{1}{p'},p} = \inf\{\|u\|_{1,p};\ \tau(u) = f\}.$$

Les premières propriétés les plus remarquables et utiles à notre exposé sont les suivantes :

- Si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, alors $\tau : W^{1,p}(\Omega) \to W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)$ est linéaire surjectif et

$$\|\tau(u)\|_{\frac{1}{p'},p} \leq C\|u\|_{1,p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

- Comme Ω est régulier, toute fonction $u \in W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega)$ est la trace d'une fonction $\widehat{u} \in W_0^{1,p}(G)$, i.e. $\widehat{u}_{|\partial\Omega} = u$, où G est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ contenant $\overline{\Omega}$.

Sur les questions concernant les espaces traces, voir par exemple C.B.Jr. Morrey [60], J. Nečas [63], J.L. Lions et E. Magenes [54] et J. Droniou [43].

Les espaces $L^p(0,T;X)$

Dans cette section, on présente brièvement quelques résultats utiles sur les espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach. Ici et dans toute la suite X désigne un espace de Banach et $T>0$. On définit les espaces suivants :

$$C([0,T];X) = \{u : [0,T] \to X \text{ continue}\},$$

$$L^p(0,T;X) = \{u : (0,T) \to X \text{ mesurable}^{\mathrm{a}};\ \int_0^T \|u(t)\|_X dt < \infty\},\ 1 \le p < \infty$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \Big(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\Big)^{\frac{1}{p}},$$

et

$$L^\infty(0,T;X) = \{u : (0,T) \to X \text{ mesurable}\,;\ \exists C > 0\ \|u(t)\|_X \le C \text{ p.p. } t\}$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \inf\{C > 0;\ \|u(t)\|_X \le C \text{ p.p. } t\}.$$

Remarque 1.1.1. *Pour tout $1 \le p < \infty$, $L^p(0,T;X)$ est un espace de Banach et $C([0,T];X)$ est dense dans $L^p(0,T;X)$. Si $1 < p < \infty$ et si X est réflexif, alors $L^p(0,T;X)$ est réflexif (cf.* H. Brezis *[32] et* J. Droniou *[42]).* $\Diamond$

Théorème de Egorov : *Si $f_n : (0,T) \to X$ est une suite de fonctions qui converge presque partout vers f, alors $\forall\varepsilon > 0$ il existe un ensemble mesurable $A_\varepsilon \subset (0,T)$ tel que $|A_\varepsilon| < \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur $(0,T)\backslash A_\varepsilon$.*

Un autre résultat de base de la théorie d'intégration est le théorème de Vitali, qui repose sur la définition suivante :

Définition 1.1.1. *Soit $1 \le p < \infty$. On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_n$ de $L^p(0,T;X)$ est p-équi-intégrable si elle vérifie la condition suivante :*
$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$ tel que $\forall n \ge 1, \forall A \subset (0,T)$ mesurable avec $|A| < \delta$, on ait

$$\int_A \|f_n(t)\|_X^p dt < \varepsilon.$$

[a] Voir par exemple J. Droniou [42] sur les questions de mesurabilité.

Remarque 1.1.2. *Une fonction* $f \in L^p(0,T;X)$ *est p-équi-intégrable* (*cf.* J. Droniou *[42]*). $\Diamond$

Théorème de Vitali : *Soit* $1 \leq p < \infty$. *Si* $(f_n)_n$ *est une suite de* $L^p(0,T;X)$ *convergeant presque partout vers* f, *alors*

$$f_n \to f \text{ dans } L^p(0,T;X) \text{ si, et seulement si } (f_n)_n \text{ est p-équi-intégrable.}$$

Autour du dual de $L^p(0,T;X)$

Désignons par X^* le dual de X, et intéressons nous à la caractérisation des fonctionnelles linéaires continues sur $L^p(0,T;X)$. Rappelons qu'une application $\psi : (0,T) \to X^*$ est dite faiblement $*$ mesurable (notée parfois w^*-mesurable) si l'application $t \mapsto \langle x, \psi(t)\rangle$ est mesurable pour tout $x \in X$.
Muni de cette définition, on peut énoncer le

Théorème 1.1.2. *[38, Theorem 1.5.4]* *Soit* $1 \leq p < \infty$, *alors pour tout* $\Gamma \in (L^p(0,T;X))^*$ *il existe une fonction* $\psi : (0,T) \to X^*$ *telle que*
- ψ *est faiblement* $*$ *mesurable*
- *L'application* $t \mapsto \|\psi(t)\|_{X^*}$ *est mesurable et appartient à* $L^{p'}(0,T)$
- $\Gamma(f) = \int_0^T \langle f(t), \psi(t)\rangle dt$ *pour tout* $f \in L^p(0,T;X)$
- $\|\Gamma\| = \|\|\psi(\cdot)\|_{X^*}\|_{p'}$.

Inversement, toute fonction $\psi : (0,T) \to X^*$ w^**-mesurable pour laquelle il existe* $g' \in L^{p'}(0,T)$ *telle que* $\|\psi(t)\|_{X^*} \leq g(t)$ *p.p.* $t \in (0,T)$, *induit, par la troisième propriété, une fonctionnelle linéaire continue* Γ *sur* $L^p(0,T;X)$, *de norme inférieure ou égale à* $\|g\|_{p'}$.

Le théorème précédent donne une bonne caractérisation des fonctionnelles linéaires continues sur $L^p(0,T;X)$; cependant une structure vectorielle fait défaut, dans le sens que si ψ_1, ψ_2 sont associées à Γ_1, Γ_2, $\psi_1 + \psi_2$ peut ne pas convenir à $\Gamma_1 + \Gamma_2$. Cela est due notamment au fait que la mesurabilité de $t \mapsto \|\psi_1(t)\|, \|\psi_2(t)\|$ ne garantit pas la mesurabilité de $t \mapsto \|\psi_1(t) + \psi_2(t)\|$. Pour y remédier, on procède comme suit :

Soit $1 \leq q \leq \infty$. On note par $\mathcal{L}^q(0,T,w^*\text{–}X^*)$ l'espace des fonctions $\psi : (0,T) \to X^*$ faiblement $*$ mesurables pour lesquelles il existe $g \in L^q(0,T)$ telle que

$$\|\psi(t)\|_{X^*} \leq g(t) \text{ pour presque tout } t \in (0,T).$$

Considérons dans $\mathcal{L}^q(0,T,w^*\text{–}X^*)$ la relation d'équivalence $\overset{*}{\sim}$, définie par

$$\psi_1 \overset{*}{\sim} \psi_2 \Leftrightarrow \text{ pour tout } x \in X,\ \langle x, \psi_1(t)\rangle = \langle x, \psi_2(t)\rangle \text{ p.p. } t \in (0,T).$$

Soit $L^q(0,T;w^*\!-X^*)$ l'espace quotient induit par $\overset{*}{\sim}$. On définit la norme d'une classe $[\psi]$ comme

$$||| \ [\psi] \ |||_q = \inf \|g\|_q,$$

où l'infimum est pris sur toutes les fonctions $g \in L^q(0,T)$ pour lesquelles il existe une certaine $\psi_0 \in [\psi]$ telle que $\|\psi_0(t)\|_{X^*} \le g(t)$ pour presque tout t.

Proposition 1.1.1. *Soit $1 \le q \le \infty$. Alors l'espace $L^q(0,T;w^*\!-X^*)$ muni de la norme $||| \ [\,\cdot\,] \ |||_q$ est un espace de Banach.*

Soit $1 \le p \le \infty$ ($\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1$) et soit l'application

$$\begin{array}{llll} \mathcal{I} : L^{p'}(0,T;w^*\!-X^*) & \longrightarrow & (L^p(0,T;X))^* & \\ \qquad [\psi] & \longrightarrow & \mathcal{I}[\psi] & \text{définie par } \mathcal{I}[\psi](f) = \displaystyle\int_\Omega \langle f(t), \psi_0(t)\rangle dt \end{array}$$

où $\psi_0 \in [\psi]$.

A l'aide de l'application $\mathcal{I}$, le Théorème 1.1.2 se formule alors comme suit :

Théorème 1.1.3. *[38, Theorem 1.5.5] Soit $1 \le p < \infty$, alors l'application linéaire $\mathcal{I}$ est un isomorphisme isométrique sur $(L^p(0,T;X))^*$, et pour tout $[\psi] \in L^{p'}(0,T;w^*\!-\,X^*)$ il existe $\psi_0 \in [\psi]$ telle que la fonction $t \mapsto \|\psi_0(t)\|_{X^*}$ est mesurable et appartient à $L^{p'}(0,T)$, et $||| \ [\psi] \ |||_{p'} = \| \ \|\psi_0(\cdot)\|_{X^*}\|_{p'}$.*

Cas où X est séparable

Lorsque X est séparable, la construction précédente se simplifie considérablement grâce au lemme suivant :

Lemme 1.1.1. *[40, Lemme 1] Soient X un espace de Banach séparable et ψ : $(0,T) \to X^*$ une fonction w^*-mesurable. Alors la fonction $t \mapsto \|\psi(t)\|_{X^*}$ est mesurable.*

En effet, grâce à ce lemme, l'espace $L^q(0,T;w^*\!-\,X^*)$ se définit tout simplement comme

$$L^q(0,T;w^*\!-\,X^*) := \{\psi : (0,T) \to X^* \ \ w^*\text{-mesurable; } \int_0^T \|\psi(t)\|_{X^*}^q dt < \infty\}$$

que l'on munit de la norme

$$\|\psi(\cdot)\|_{L^q(0,T;w^*\!-X^*)} = \Big(\int_0^T \|\psi(t)\|_{X^*}^q dt\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

1.2 Capacités variationnelles

Un outil efficace pour étudier finement les propriétés des fonctions de Sobolev est fourni par la notion de capacité. Cette dernière permet de mesurer les ensembles plus finement que la mesure de Lebesgue et ainsi de voir que les fonctions dans les espaces de Sobolev sont définies mieux que presque partout. Elle permet donc d'établir, de manière très précise, des énoncés en théorie des équations aux dérivées partielles. Il existe plusieurs types de capacités. Dans nos travaux, nous avons choisi la capacité de Sobolev, appelée également, capacité variationnelle. Pour plus de détails, nous renvoyons par exemple aux ouvrages de W.P. Ziemer [80], L. Evans et R.F. Gariepy [44] et J. Maly et W.P. Ziemer [57].

Définition 1.2.1. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$ et $1 < p \leq N$. La p-capacité de l'ensemble K est définie par*

$$p\text{-cap}(K) = \inf\{\int_{\mathbb{R}^N} |\phi|^p + |D\phi|^p,\ \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ \phi \geq 1 \textit{ sur } K\}.$$

La p-capacité d'un ouvert O est définie par

$$p\text{-cap}(O) = \sup_{K \text{ compact}, K\subset O} p\text{-cap}(K),$$

puis celle d'un borélien B par

$$p\text{-cap}(B) = \inf_{O \text{ ouvert}, B\subset O} p\text{-cap}(O).$$

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté à craindre, nous écrirons simplement $\text{cap}(K)$ au lieu de p-cap(K).

Exemples

1. La 2-capacité d'un point dans $\mathbb{R}^2$ est nulle. En général la 2-capacité d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ de dimension $(N-2)$ est nulle.
2. La p-capacité d'un ensemble dénombrable de $\mathbb{R}^N$ est nulle si $p \leq N$.

D'autres exemples sont cités dans l'article de J. Frehse [45] et les références des ouvrages qui s'y trouvent.

La quasi-continuité

Par analogie à la théorie de mesure, on dit qu'une propriété $\mathcal{P}(x)$ a lieu quasi-partout sur Ω (ou pour quasi tout $x \in \Omega$), si elle est vérifiée sur le complémentaire d'un ensemble de capacité nulle. On notera $\mathcal{P}(x)$ q.p. $x \in \Omega$.

Définition 1.2.2. *Soit* $u : \Omega \to \mathbb{R}$.
- u *est quasi-continue si pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un ouvert* $O \subset \Omega$ *avec* $\text{cap}(O) < \varepsilon$ *tel que la restriction de* u *à* $\Omega \backslash O$ *soit continue.*
- *On appelle représentant quasi-continu de* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *tout élément quasi-continu* v *de* $W^{1,p}(\Omega)$ *vérifiant* $v = u$ *p.p. sur* Ω.

Un résultat qui aide à la compréhension de la notion de capacité est donné par la proposition ci-dessous. Celle-ci énonce que deux fonctions peuvent différer sur un ensemble de capacité nulle tout en correspondant au même élément de $W^{1,p}(\Omega)$.

Proposition 1.2.1. *Soient* $O \subseteq \Omega$ *un ouvert et* $u \in W^{1,p}(\Omega)$. *Alors*

$$u_{|O} \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ si, et seulement si } \tilde{u} = 0 \text{ q.p. sur } \Omega \backslash O,$$

où $\tilde{u}$ *est le représentant quasi-continu de* u.

Pour la preuve, on renvoie par exemple à l'ouvrage de L. Evans et R.F. Gariepy [44].

Remarque 1.2.1. *On peut aussi prouver que si* $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *et* $u = v$ *presque partout, alors leurs représentants quasi-continus coïncident en dehors d'un ensemble de capacité nulle : c'est en ce sens que l'on peut dire que "les fonctions de* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *sont définies mieux que presque partout" (des ensembles peuvent être de mesure de Lebesgue nulle, mais de capacité non nulle).* $\diamondsuit$

1.3 Opérateurs multivoques et théorie des bonnes solutions

Une application $A : X \to \mathcal{P}(X)$ est dite opérateur multivoque, son domaine effectif est donné par

$$D(A) = \{x \in X;\ A(x) \neq \emptyset\}$$

et son image est définie par

$$R(A) = \{y \in X;\ \exists x \in X, y \in A(x)\}.$$

Si pour tout $x \in D(A)$, $A(x)$ est réduit à un élément, on parle d'opérateur univoque. Par convention, on identifie l'opérateur A avec son graphe dans $X \times X$, noté $G(A) = \{(x, y) \in X \times X;\ y \in A(x)\}$.

Intéressons-nous à des classes particulières d'opérateurs non linéaires.

Définition 1.3.1. *Soit A un opérateur multivoque de X.*

- *A est accrétif dans X si*

$$\forall \alpha > 0,\ \forall (x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in A \quad \|x - \tilde{x}\|_X \leq \|x - \tilde{x} + \alpha(y - \tilde{y})\|_X.$$

  Autrement dit, A est accrétif si l'opérateur univoque $(I + \alpha A)^{-1} : R(I + \alpha A) \to X$ est une contraction.

- *A est m-accrétif dans X si*

$$A \text{ est accrétif et vérifie } R(I + \alpha A) = X \quad \forall \alpha > 0.$$

Si de plus X est réticulé, alors

- *A est T-accrétif dans X si*

$$\forall \alpha > 0,\ \forall (x, y), (\tilde{x}, \tilde{y}) \in A \quad \|(x - \tilde{x})^+\|_X \leq \|(x - \tilde{x} + \alpha(y - \tilde{y}))^+\|_X$$

- *A est m-T-accrétif dans X si*

$$A \text{ est } T\text{-accrétif et vérifie } R(I + \alpha A) = X \quad \forall \alpha > 0.$$

Pour donner une autre caractérisation des opérateurs accrétifs dans $L^1(\Omega)$ introduisons les applications suivantes :

$$\operatorname{sign}(r) := \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r < 0 \\ [-1, 1] & \text{si} \quad r = 0 \\ -1 & \text{si} \quad r > 0 \end{cases}$$

et

$$\operatorname{sign}^+(r) := \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r < 0 \\ [0, 1] & \text{si} \quad r = 0 \\ 1 & \text{si} \quad r > 0. \end{cases}$$

Proposition 1.3.1. *Soit A un opérateur dans $L^1(\Omega)$.*

- *A est accrétif si, et seulement si*

$$\forall (u, v), (u', v') \in A,\ \exists \kappa \in L^\infty(\Omega) \text{ avec } \kappa \in \operatorname{sign}(u - u') \text{ t.q. } \int_\Omega \kappa(v - v') \geq 0.$$

- *A est T-accrétif si, et seulement si*

$$\forall (u, v), (u', v') \in A,\ \exists \kappa \in L^\infty(\Omega) \text{ avec } \kappa \in \operatorname{sign}^+(u - u') \text{ t.q. } \int_\Omega \kappa(v - v') \geq 0.$$

Un résultat que l'on utilisera dans ce travail est le suivant :

Proposition 1.3.2. *Soit A un opérateur dans $L^1(\Omega)$ tel que*
- *A est T-accrétif*
- *$R(I+\alpha A)$ est dense dans $L^1(\Omega)$ $\forall \alpha > 0$.*

Alors la fermeture $\overline{A}$ de A dans $L^1(\Omega)$ est un opérateur m-T-accrétif dans $L^1(\Omega)$.

Graphes monotones dans $\mathbb{R}^2$

Soit β une application multivoque dans $X = \mathbb{R}$, on identifie β et son graphe et on parle alors de graphe.
On dit que β est *monotone* si

$$\forall (u,v),(u',v') \in \beta \quad (u-u')(v-v') \geq 0.$$

Le graphe β est *maximal monotone* si β est monotone et vérifie : $\forall \tilde{\beta}$ monotone tel que $\beta \subset \tilde{\beta}$ on ait $\beta = \tilde{\beta}$.
Les graphes que nous considérons dans ce travail sont des sous-différentiels des applications j appartenant à l'ensemble

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_0(\Omega) \;\; := \;\; & \{j : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty];\ j(\cdot,r) \text{ mesurable } \forall r \in \mathbb{R},\ j(x,\cdot) \text{ convexe,} \\ & \quad \text{semi continue inférieurement telle que } j(x,0)=0 \text{ p.p. } x \in \Omega\}.\end{aligned}$$

A un graphe $\beta(x,\cdot) = \partial j(x,\cdot)$ on peut associer pour presque tout x les graphes suivants :

$$\beta(x,r^+) = \inf \beta(x,]r,+\infty[)$$
$$\beta(x,r^-) = \sup \beta(x,]-\infty,r[)$$

et

$$\beta^0(x,r) = \begin{cases} \inf \beta(x,r) & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r = 0 \\ \sup \beta(x,r) & \text{si } r < 0, \end{cases}$$

avec les conventions usuelles $\inf \emptyset = +\infty$ et $\sup \emptyset = -\infty$.

On désigne par β_λ la régularisée de Yosida de β, définie par

$$\beta_\lambda(x,\cdot) = 1/\lambda(I - (I + \lambda\beta(x,\cdot))^{-1}) \;\text{ p.p. } x.$$

Observons que β_λ est lipschitzienne, que pour presque tout x $|\beta_\lambda(x,r)| \uparrow_{\lambda\downarrow 0} |\beta^0(x,r)|$ $\forall r \in D(\beta(x,\cdot))$ et que $\beta_\lambda = \partial j_\lambda$, où

$$j_\lambda(x,r) = \inf_{s\in\mathbb{R}} \{1/(2\lambda)|r-s|^2 + j(x,s)\}.$$

Les bonnes solutions

Considérons le problème de Cauchy suivant :

$$(CP)(u_0,f) \begin{cases} u_t + Au \ni f \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

où A est un opérateur non linéaire multivoque dans X, $u_0 \in X$ et $f \in L^1(0,T;X)$. Une notion de solutions pour le problème $(CP)(u_0,f)$ est celle introduite par Ph. Bénilan [15]. Soit $\varepsilon > 0$, on choisit une subdivision $(t_i)_i, i = 1,\cdots,l$, de $(0,T)$ vérifiant

$$\begin{cases} 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_l < T \\ t_i - t_{i-1} < \varepsilon \quad \forall i = 1,\cdots,l \\ T - t_l < \varepsilon. \end{cases}$$

On approche la fonction f par la fonction f^ε constante par morceaux, définie par $f^\varepsilon(t) = f_i^\varepsilon$ sur $[t_{i-1},t_i[$ pour $i = 1,\cdots,l$, où $f_i^\varepsilon \in X$ et vérifient

$$\sum_{i=1}^{l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f(t) - f_i^\varepsilon\|_X < \ \varepsilon.$$

L'ensemble de ces données est appelé une ε-discrétisation du problème $(CP)(u_0,f)$, et se note $D_A^\varepsilon(t_0,\cdots,t_l;f_1^\varepsilon,\cdots,f_l^\varepsilon;u_0)$. On considère le problème de Cauchy discrétisé en temps

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} \dfrac{u_i^\varepsilon - u_{i-1}^\varepsilon}{t_i - t_{i-1}} + Au_i^\varepsilon \ni f_i^\varepsilon \quad \forall i = 1,\cdots,l \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

équivalent à

$$\begin{cases} u_i^\varepsilon \in (I + (t_i - t_{i-1})A)^{-1}(u_{i-1}^\varepsilon + (t_i - t_{i-1})f_i^\varepsilon) \quad \forall i = 1,\cdots,l \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

On remarque immédiatement que ce problème discrétisé peut se résoudre si $R(I+\alpha A) = X$ pour $\alpha > 0$ suffisamment petit, et de manière unique si $(I+\alpha A)^{-1}$ est univoque pour α petit.
On appelle solution ε-approchée du problème (P_ε) la fonction u^ε constante par morceaux, définie par :

$$u^\varepsilon : \begin{array}{lll} [0,t_l] & \rightarrow & X \\ t & \mapsto & u_i^\varepsilon \ \text{ pour } t \in]t_{i-1},t_i] \ \ i = 1,\cdots,l \\ 0 & \mapsto & u^\varepsilon(0). \end{array}$$

Enfin, on espère que, lorsque $\varepsilon \to 0$, les solutions vont converger en un sens à définir vers une fonction u qui sera solution du problème de Cauchy $(CP)(u_0,f)$.

Définition 1.3.2. *On appelle bonne solution du problème de Cauchy $(CP)(u_0,f)$ toute fonction $u \in C([0,T];X)$ avec $u(0) = u_0$ et vérifiant pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une ε-discrétisation $D_A^\varepsilon(t_0,\cdots,t_l;f_1^\varepsilon,\cdots,f_l^\varepsilon;u_0)$ et une solution ε-approchée u^ε du problème (P_ε) telles que $\sup\limits_{0\le t\le t_l} \|u^\varepsilon(t) - u(t)\|_X < \varepsilon$.*

Le théorème suivant nous fournit une classe d'opérateurs pour lesquels la méthode décrite précédemment, appelée méthode des semigroupes, permet d'obtenir une bonne solution pour le problème $(CP)(u_0, f)$.

Théorème 1.3.1. *Soit A un opérateur m-accrétif dans X, alors pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_X}$ et toute fonction $f \in L^1(0,T;X)$, il existe une unique bonne solution u du problème $(CP)(u_0, f)$. Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$ et toute ε-discrétisation $D_A^\varepsilon(t_0, \cdots, t_l; f_1^\varepsilon, \cdots, f_l^\varepsilon; u_0)$, la solution ε-approchée u^ε du problème (P_ε) existe et on a $\sup\limits_{0\le t\le t_l} \|u^\varepsilon(t) - u(t)\|_X \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$.*

Pour un exposé sur les bonnes solutions, le lecteur peut consulter les travaux de Ph. Bénilan [15, 19].

Remarque 1.3.1. *Soit A un opérateur accrétif dans X tel que $\overline{R(I+\alpha A)} = X$ $\forall\alpha > 0$. Alors pour tout $u_0 \in \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_X}$ et toute fonction $f \in L^1(0,T;X)$, il existe une unique bonne solution du problème de Cauchy $(CP)(u_0, f)$.* $\diamondsuit$

On a le théorème suivant de Ph. Bénilan [15] fournissant une caractérisation des bonnes solutions et un résultat de comparaison lorsque A est m-accrétif.

Théorème 1.3.2. *[15] Soit A un opérateur m-accrétif dans X. Soient $u_0 \in \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_X}$ et $f \in L^1(0,T;X)$. Alors*

1- Une fonction $u \in C([0,T];X)$ vérifiant $u(0) = u_0$ est une bonne solution de $(CP)(u_0, f)$ si, et seulement si $\forall 0 \le s < t \le T$

$$\|u(t) - x\|_X \le \|u(s) - x\|_X + \int_s^t [u(\tau) - x, f(\tau) - y]_+ d\tau \quad \forall (x,y) \in A$$

où le crochet $[x,y]_+ := \lim\limits_{\lambda\to 0^+} \dfrac{\|x+\lambda y\|_X - \|x\|_X}{\lambda}$.

2- Si u est une bonne solution de $(CP)(u_0, f)$ et v est une bonne solution de $(CP)(v_0, g)$, où $v_0 \in \overline{D(A)}^{\|\cdot\|_X}$ et $g \in L^1(0,T;X)$, alors $\forall 0 \le t \le T$ on a

$$\|u(t) - v(t)\|_X \le \|u_0 - v_0\|_X + \int_0^t \|f(\tau) - g(\tau)\|_X d\tau.$$

Remarque 1.3.2. *On en déduit en particulier l'unicité pour les bonnes solutions, ainsi que la propriété de dépendance continue par rapport aux données pour les opérateurs m-accrétif.* $\diamondsuit$

Remarque 1.3.3. *Les Théorèmes 1.3.1 et 1.3.2 restent valables si A est m-T-accrétif.* $\diamondsuit$

1.4 Théorème de Minty-Browder

Soit $A : X \to X^*$ un opérateur non linéaire, éventuellement multivoque. Un des outils important dans la résolution de $Au \ni f$ est le théorème de Minty-Browder suivant :

Théorème 1.4.1. *[53] Soit A un opérateur vérifiant*
- *A est borné*
- *A est hémi-continu, i.e. l'application*

$$t \mapsto \langle A(u+tv), w\rangle \text{ est continue } \forall u, v, w \in X$$

- *A est monotone, i.e. $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0 \ \forall u, v \in X$*
- *A est coercif, i.e. $\dfrac{\langle Au, u\rangle}{\|u\|_X} \to +\infty$ lorsque $\|u\|_X \to +\infty$.*

Alors A est surjectif, i.e. $\forall f \in X^*$, il existe $u \in X$ tel que $Au \ni f$. Si de plus, A est strictement monotone, alors u est unique.

Remarque 1.4.1. *[31] Le théorème de Minty-Browder reste vrai si l'on remplace l'hypothèse de monotonie par la Propriété (M) : on dit que A satisfait la Propriété (M) si pour toute suite $(u_n)_n \in X$ et $u \in X$ vérifiants*

$$u_n \rightharpoonup u \text{ dans } X, \ Au_n \rightharpoonup \chi \text{ dans } X^* \text{ avec } \limsup_{n\to\infty} \langle Au_n, u_n - u\rangle \leq \langle \chi, u\rangle,$$

on a $Au = \chi$. $\diamondsuit$

Chapitre 2

Solution entropique d'un problème elliptique avec des conditions non linéaires sur le bord

2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude du problème elliptique suivant :

$$(E)(f)\left\{\begin{array}{lll} u - \operatorname{div}\, a(u, Du) = f & \text{dans} & \Omega \\ -\langle a(u, Du), \eta\rangle \in \beta(x, u) & \text{sur} & \partial\Omega, \end{array}\right.$$

où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^N$ de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$, η est la normale unitaire extérieure à Ω, $f \in L^1(\Omega)$, et pour p.p. $x \in \partial\Omega$, $\beta(x, \cdot) = \partial j(x, \cdot)$, où $j \in \mathcal{J}_0(\partial\Omega)$[a], et le champ $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ satisfait les hypothèses du type Leray-Lions (H_1)-(H_4) énoncées à l'introduction générale.
Le cas d'un graphe $\beta(u)$ et d'un champ $a(x, Du)$ a été étudié par F. Andreu *et al* [10] et K. Ammar, F. Andreu et J. Toledo [4]. Sous l'une des hypothèses β est fermé, ou a est régulier, les auteurs ont défini une solution entropique et prouvé son existence et unicité. Dans ce chapitre, on montre l'existence et l'unicité de la solution entropique du problème $(E)(f)$ dans le cas de graphes dépendants de x et de champs dépendants de u. Le plan est le suivant : A la Section 2, nous rappelons quelques résultats et outils préparatoires pour la présentation de nos résultats. A la section qui suit, on étudie le problème $(E)(f)$ par des méthodes variationnelles. Pour ce faire, on introduit un opérateur A_δ associé au problème

[a]Rappelons que $\mathcal{J}_0(\partial\Omega) := \{j : \partial\Omega \times \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ mesurable en $x \in \partial\Omega$, convexe s.c.i. en $r \in \mathbb{R}$ avec $j(\cdot, 0) = 0\}$.

perturbé suivant :

$$(E_\delta)(f)\begin{cases} u - \text{div } a(u, Du) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ -\langle a(u, Du), \eta\rangle \in \beta(x, u) + \delta\psi(u) & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

et on montre que cet opérateur est T-accrétif à domaine dense dans $L^1(\Omega)$ et vérifie $R(I + \alpha A_\delta) \supset L^\infty(\Omega)$ pour tout $\alpha > 0$ (cf. Théorème 2.3.1). Dans la Section 4, on définit la notion de solution entropique dont on montre l'existence et l'unicité, en caractérisant l'opérateur $\mathcal{A}$, limite de l'opérateur A_δ dans $L^1(\Omega)$ (cf. Théorème 2.4.1). A la Section 5, on étend nos résultats à un problème avec des conditions plus générales sur le bord. Enfin on termine le chapitre par quelques remarques et problèmes ouverts.

2.2 Préliminaires

Pour exposer nos résultats, on rappelle en premier lieu l'énoncé de divers résultats dont on va faire usage dans ce chapitre.
Dans la suite $\mathcal{M}_b(\partial\Omega)$ désigne l'ensemble des mesures de Radon sur $\partial\Omega$ à variation totale bornée, et

$$\mathcal{M}_0(\partial\Omega) = \{\mu \in \mathcal{M}_b(\partial\Omega);\ \mu(B) = 0 \text{ pour tout } B \ \text{ tel que cap}(B) = 0\}.$$

La décomposition de Radon-Nikodym d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}_b(\partial\Omega)$ relativement à la mesure de Lebesgue $d\sigma$ sur $\partial\Omega$ sera notée par

$$\mu = \mu_r d\sigma + \mu_s.$$

Etant donnée une fonctionnelle $j \in \mathcal{J}_0(\partial\Omega)$, on définit

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega) &\longrightarrow [0, \infty] \\ u &\longmapsto \int_{\partial\Omega} j(\cdot, u) d\sigma. \end{aligned}$$

Soit $\widehat{\mathcal{J}}$ l'extension de $\mathcal{J}$ sur $W_0^{1,p}(G) \cap L^\infty(G)$ définie de la manière suivante : $\widehat{\mathcal{J}}(u) = \displaystyle\int_{\partial\Omega} j(\cdot, \tau(u)) d\sigma$ pour tout $u \in W_0^{1,p}(G)$, où $\tau(u)$ désigne la trace de u.
La fermeture de $D(\widehat{\mathcal{J}})$ dans $W_0^{1,p}(G)$ est un convexe bilatéral [b] et se caractérise donc d'après H. Attouch et C. Picard [11] de la façon suivante :

Lemme 2.2.1. *[11, Théorème 3.7] Il existe d'uniques* (*dans le sens q.p.*) *fonctions γ_+, γ_- quasi-s.c.i. et quasi-s.c.s., respectivement, telles que*

$$\overline{D(\mathcal{J})}^{\|\cdot\|_{\frac{1}{p'},p}} = \{u \in W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega);\ \gamma_-(x) \le \tilde{u}(x) \le \gamma_+(x) \quad q.p. \ sur \ \partial\Omega\}.$$

[b] Un ensemble C est dit un convexe bilatéral si il est un convexe fermé de $W_0^{1,p}(\Omega)$ vérifiant $u, w \in C \Rightarrow u \wedge w, u \vee w \in C$.

De plus, $\gamma_-(x) = \inf_n \tilde{u}_n(x) = \lim_n \inf_{1\le k\le n} \tilde{u}_k(x)$ *et* $\gamma_+(x) = \sup_n \tilde{u}_n(x)$ *q.p.* $x \in \partial\Omega$ *pour toute suite* $(u_n)_n$ *dense dans* $D(\mathcal{J})$.

Quant à la caractérisation du sous-différentiel de $\mathcal{J}$, qui est défini par

$$\mu \in \partial\mathcal{J}(u) \Longleftrightarrow \begin{cases} u \in W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega),\ \mu \in W^{-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega) + (L^\infty(\partial\Omega))^* \\ \text{et } \mathcal{J}(w) \ge \mathcal{J}(u) + \langle \mu, w-u\rangle \ \forall w \in W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega), \end{cases}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit de dualité entre $W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$ et son dual, est donnée par le lemme suivant qui s'établit essentiellement en regroupant les résultats de G. Bouchitté [28, Proposition 20] et de H. Attouch et C. Picard [11].

Lemme 2.2.2. *[28, Proposition 20] Soit* $\mu \in \mathcal{M}_0(\partial\Omega)$, *alors*

$$\mu \in \partial\mathcal{J}(u) \Longleftrightarrow \begin{cases} \mu_r(x) \in j(x,u(x)) + \partial I_{[\gamma_-(x),\gamma_+(x)]}(u(x)) \ \textit{p.p. } x \in \partial\Omega \\ \textit{et } \ \tilde{u} = \gamma_- \ \ \mu_s^- - \textit{p.p. sur } \partial\Omega, \quad \tilde{u} = \gamma_+ \ \ \mu_s^+ - \textit{p.p. sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où pour un intervalle donné $[a,b]$, $I_{[a,b]}$ *désigne la fonctionnelle convexe et s.c.i. sur* $\mathbb{R}$ *définie par* 0 *sur* $[a,b]$, *et* $+\infty$ *ailleurs.*

2.3 Approche variationnelle

L'approche variationnelle classique nécessite des estimations L^∞ sur les solutions, difficile à obtenir directement dans notre problème à cause de l'apparition du terme $a(u,0)$ lors de l'usage de l'hypothèse (H_2). Pour pallier à cette difficulté, on redéfinit en premier lieu la fonction Λ, qui apparaît dans l'hypothèse (H_3), en une fonction ψ paire et monotone sur $\mathbb{R}^+$ telle que $|\dfrac{a(k,0)}{\psi(k)}| \to 0$ lorsque $k \to \infty$, en posant

$$\psi(r) := \sup_{|z|\le r}\{\Lambda(|z|), |z||a(z,0)|\} \text{ pour } r \ge 0.$$

On ajoute ensuite le terme de pénalisation $\delta\psi(u)$ sur le bord pour un δ fixé. Ceci nous permettra de compenser le terme $a(u,0)$ en choisissant k assez grand de sorte que $|\frac{a(k,0)}{\psi(k)}| < \delta$. Ainsi, le problème auquel on est confronté est le suivant :

$$(E_\delta)(f) \begin{cases} u - \operatorname{div} a(u,Du) = f & \text{dans } \ \Omega \\ \\ -a(u,Du)\cdot\eta \in \beta(x,u) + \delta\psi(u) & \text{sur } \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour commencer, à ce dernier problème on associe un opérateur A_δ défini comme suit :

$(u, f) \in A_\delta$ si, et seulement si $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $f \in L^1(\Omega)$ et s'il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}_0(\partial\Omega)$ vérifiant

$$\mu_r(x) \in \partial j(x, u(x)) + \partial I_{[\gamma_-(x),\gamma_+(x)]}(u(x)) \text{ p.p. } x \in \partial\Omega$$

et pour tout $\phi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega a(u, Du) \cdot D(u - \phi) + \delta \int_{\partial\Omega} \psi(u)(u - \phi) \leq \int_\Omega f(u - \phi) - \int_{\partial\Omega} (\tilde{u} - \tilde{\phi}) d\mu$$

et

$$\tilde{u} = \gamma_+ \quad \mu_s^+ - \text{p.p. sur } \partial\Omega, \qquad \tilde{u} = \gamma_- \quad \mu_s^- - \text{p.p. sur } \partial\Omega. \tag{2.1}$$

Remarque 2.3.1. *On verra plus tard (voir l'équation (2.14) ci-dessous) que la mesure $\mu \in \mathcal{M}_b(\partial\Omega) \cap (W^{-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega) + (L^\infty(\partial\Omega))^*)$, et donc $|\mu|$ ne charge pas les ensembles de capacités nulles. Du fait que $|\mu_s| \leq |\mu|$, il vient aussi que $|\mu_s|$ ne charge pas les ensembles de capacités nulles. Par conséquent, la condition (2.1) a bien un sens.* $\diamondsuit$

Maintenant, on est en mesure de donner notre premier résultat.

Théorème 2.3.1. *L'opérateur A_δ est T-accrétif à domaine dense dans $L^1(\Omega)$ et vérifie $L^\infty(\Omega) \subset R(I + \alpha A_\delta)$ pour tout $\alpha > 0$.*

La preuve du Théorème 2.3.1 est divisée en 3 propositions.

Proposition 2.3.1. *L'opérateur A_δ est T-accrétif dans $L^1(\Omega)$, i.e.*

$$\int_\Omega (u - v)^+ \leq \int_\Omega (f - g)^+ \tag{2.2}$$

dès que

$$f \in u + A_\delta u \text{ et } g \in v + A_\delta v. \tag{2.3}$$

Preuve. Soit T_k la fonction troncature au niveau k définie par $T_k(z) = \min(k, \max(z, -k))$. Considérons les fonctions tests $\phi_1 = u - \frac{1}{k}T_k(u - v)^+$ et $\phi_2 = v + \frac{1}{k}T_k(u - v)^+$ dans les problèmes (2.3) successivement, on obtient après avoir sommé les deux inégalités :

$$\begin{aligned}\frac{1}{k}\int_{\{(u-v)^+<k\}} (a(u, Du) - a(v, Dv)) \cdot D(u - v)^+ + \frac{1}{k}\delta \int_{\partial\Omega} (\psi(u) - \psi(v)) T_k(u - v)^+ \\ \leq \frac{1}{k}\int_\Omega (f - u - g + v) T_k(u - v)^+ - \frac{1}{k}\Big(\int_{\partial\Omega} T_k(\tilde{u} - \tilde{v})^+ d\mu_1 - \int_{\partial\Omega} T_k(\tilde{u} - \tilde{v})^+ d\mu_2\Big).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Notons I_1, respectivement I_2, les deux intégrales dans le terme de gauche de l'inégalité (2.4). En utilisant les hypothèses (H_1) et (H_4), on a

$$\begin{aligned} I_1 &\geq \frac{1}{k}\int_{\{(u-v)^+<k\}} (a(u,Dv)-a(v,Dv))\cdot D(u-v)^+ \\ &\geq \frac{-Ck}{k}\int_{\{(u-v)^+<k\}} (1+|Dv|^{p-1})|D(u-v)^+|. \end{aligned}$$

D'où $\liminf_{k\to 0} I_1 \geq 0$. Notons que les propriétés des mesures μ_1 et μ_2 nous garantissent que le terme entre parenthèses dans le terme de droite de l'inégalité (2.4) est positif. En effet, pour s'en apercevoir, il suffit de le décomposer comme suit :

$$\int_{\partial\Omega} T_k(u-v)(\mu_{r,1}-\mu_{r,2}) + \int_{\partial\Omega} T_k(\gamma_+ - \tilde{v})d\mu_{s,1}^+ - \int_{\partial\Omega} T_k(\tilde{u}-\gamma_+)d\mu_{s,2}^+$$
$$-\int_{\partial\Omega} T_k(\gamma_- - \ \tilde{v})d\mu_{s,1}^- + \int_{\partial\Omega} T_k(\tilde{u}-\gamma_-)d\mu_{s,2}^-,$$

qui est clairement positif grâce aux propriétés des fonctions $\gamma_{+/-}$.
Or $I_2 \geq 0$ (grâce à la monotonie de ψ), donc le passage à la limite avec k dans l'inégalité (2.4) donne

$$\lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\int_\Omega (u-v)T_k(u-v)^+ \leq \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}\int_\Omega (f-g)T_k(u-v)^+ \leq \int_\Omega (f-g)^+,$$

c'est-à-dire l'inégalité (2.2) est vérifiée. ■

Proposition 2.3.2. *L'opérateur A_δ vérifie $L^\infty(\Omega)\subset R(I+\alpha A_\delta)$ $\forall\alpha>0$.*

Preuve. Notons qu'il n'est pas restreignant de supposer $\alpha=1$. Pour prouver le résultat on approche le problème

$$\begin{cases} u - \operatorname{div}\, a(u,Du) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ -a(u,Du)\cdot\eta \in \beta(x,u)+\delta\psi(u) & \text{sur} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

par les problèmes

$$\begin{cases} T_l(u_\lambda) - \operatorname{div}\, a(T_l(u_\lambda),Du_\lambda) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \\ -a(T_l(u_\lambda),Du_\lambda)\cdot\eta = \beta_\lambda(x,u_\lambda)+\delta T_l(\psi(u_\lambda)) & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $k \geq \|f\|_\infty + 1$, k satisfait $|\frac{a(k,0)}{\psi(k)}| < \delta$, $l > \max\{k,\psi(k)\}$ et pour p.p. $x\in\partial\Omega$ $\beta_\lambda(x,\cdot)$ désigne la régularisée de Yosida de $\beta(x,\cdot)$.
Considérons l'opérateur $A_{\delta,\lambda} : W^{1,p}(\Omega) \to (W^{1,p}(\Omega))^*$ défini par

$$\langle A_{\delta,\lambda}u,\phi\rangle = \int_\Omega T_l(u)\phi + \int_\Omega a(T_l(u),Du)\cdot D\phi + \int_{\partial\Omega}\beta_\lambda(\cdot,u)\phi + \delta\int_{\partial\Omega} T_l(\psi(u))\phi$$

pour tout $\phi\in W^{1,p}(\Omega)$. Ici, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit de dualité entre $W^{1,p}(\Omega)$ et son dual $(W^{1,p}(\Omega))^*$.

Lemma 2.3.1. *L'opérateur $A_{\delta,\lambda}$ est borné, coercif et vérifie la Propriété (M).*

Preuve. La preuve est classique (cf. par exemple J.L. Lions [53]). ■

Par le Lemme 2.3.1 et le théorème de Minty-Browder, pour tout $f \in (W^{1,p}(\Omega))^*$ il existe $u_\lambda \in W^{1,p}(\Omega)$ telle que pour tout $\phi \in W^{1,p}(\Omega)$ on ait

$$\langle A_{\delta,\lambda} u_\lambda - f, u_\lambda - \phi \rangle \leq 0. \tag{2.5}$$

Soit la fonction test $\phi = u_\lambda - p_\varepsilon^+(u_\lambda - k)$ dans l'inégalité (2.5), où $p_\varepsilon^+(\cdot)$ est l'approximation du $\mathrm{sign}_0^+(\cdot)$ définie comme suit :

$$p_\varepsilon^+(r) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad r > \varepsilon \\ \frac{1}{\varepsilon} r & \text{si} \quad 0 < r < \varepsilon \\ 0 & \text{si} \quad r < 0. \end{cases}$$

L'hypothèse (H_2) implique

$$\begin{aligned} &\int_\Omega p_\varepsilon^+(u_\lambda - k) T_l(u_\lambda) + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{k < u_\lambda < k+\varepsilon\}} a(T_l(u_\lambda), 0) \cdot Du_\lambda \\ \leq &\int_\Omega f p_\varepsilon^+(u_\lambda - k) - \delta \int_{\partial\Omega} p_\varepsilon^+(u_\lambda - k) T_l(\psi(u_\lambda)) - \int_{\partial\Omega} p_\varepsilon^+(u_\lambda - k) \beta_\lambda(\cdot, u_\lambda). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Notons du fait que $l > k$ on a

$$\begin{aligned} \Big| \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{k < u_\lambda < k+\varepsilon\}} a(T_l(u_\lambda), 0) \cdot Du_\lambda \Big| &\leq \Big| \int_\Omega \mathrm{div}\Big(\int_0^{\frac{(u_\lambda - k)^+}{\varepsilon} \wedge 1} a(T_l(\varepsilon r + k), 0) dr \Big) \Big| \\ &= \Big| \int_{\partial\Omega} \int_0^{\frac{(u_\lambda - k)^+}{\varepsilon} \wedge 1} a(T_l(\varepsilon r + k), 0) dr . \eta \; d\sigma \Big| \\ &\to \Big| \int_{\partial\Omega} \mathrm{sign}_0^+(u_\lambda - k) a(k, 0) \; d\sigma \Big| \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

D'où

$$\begin{aligned} \liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{\{k < u_\lambda < k+\varepsilon\}} a(T_l(u_\lambda), 0) \cdot Du_\lambda &\geq - \frac{|a(k,0)|}{T_l(\psi(k))} \int_{\partial\Omega \cap \{u_\lambda > k\}} T_l(\psi(u_\lambda)) \\ &\geq -\delta \int_{\partial\Omega \cap \{u_\lambda > k\}} T_l(\psi(u_\lambda)). \end{aligned} \tag{2.8}$$

En passant à la limite dans l'inégalité (2.6) avec ε vers zéro, on obtient

$$\int_{\{u_\lambda > k\}} T_l(u_\lambda) - k \leq \int_{\{u_\lambda > k\}} f - k \leq \int_\Omega (f - k)^+.$$

Comme $k \geq \|f\|_\infty + 1$,

$$\int_{\{u_\lambda > k\}} (T_l(u_\lambda) - k)^+ \leq 0 \quad \forall\, l > k.$$

D'où

$$T_l(u_\lambda) \leq k \quad \text{p.p. sur} \quad \{u_\lambda > k\}.$$

On conclut alors que $u_\lambda \leq k$ p.p. sur Ω. D'une manière analogue, en choisissant la fonction test $p_\varepsilon^-(\cdot)$ qui approche la fonction $\text{sign}^-(\cdot)$, on montre que $u_\lambda \geq -k$ p.p. sur Ω. Par conséquent, en convenant de noter C toute constante indépendante de λ, on a

$$\|u_\lambda\|_\infty \leq C. \tag{2.9}$$

En considérant la fonction test $\phi = 0$ dans l'inégalité (2.5), on obtient après avoir utilisé l'hypothèse (H_2), la formule de Gauss-Green et l'estimation (2.9)

$$\lambda_0 \int_\Omega |Du_\lambda|^p \leq \int_\Omega f u_\lambda + C. \tag{2.10}$$

A l'aide des estimations (2.9) et (2.10), il vient que la suite $(u_\lambda)_\lambda$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ et admet donc une sous-suite, notée encore $(u_\lambda)_\lambda$, telle que

$$u_\lambda \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } W^{1,p}(\Omega) \text{ lorsque } \lambda \to 0.$$

Grâce au théorème de Rellich-Kondrachov et au Théorème 1.1.1 on a

$$u_\lambda \to u \text{ dans } L^p(\Omega) \text{ lorsque } \lambda \to 0$$

et

$$u_\lambda \to u \text{ dans } L^p(\partial\Omega) \text{ lorsque } \lambda \to 0.$$

On peut supposer aussi que $u_\lambda \to u$ p.p. sur Ω. Par conséquent, par l'estimation (2.9) on a

$$\|u\|_\infty \leq C.$$

En considérant la fonction test $\phi = u_\lambda - \frac{1}{k} T_k(u_\lambda)$ dans l'inégalité (2.5) et en passant à la limite avec $k \to 0$, on a

$$\int_{\partial\Omega} |\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda)| + \delta \int_{\partial\Omega} |T_l(\psi(u_\lambda))| \leq C. \tag{2.11}$$

En passant à une sous-suite si nécessaire, on conclut

$$\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda) \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \quad \text{faiblement } * \text{ dans } \mathcal{M}_b(\partial\Omega) \text{ lorsque } \lambda \to 0.$$

Notons que pour tout $\nu > \lambda > 0$, on a pour p.p. $x \in \partial\Omega$ $|\beta_\lambda(x,r)| \geq |\beta_\nu(x,r)|$ $\forall r \in \mathbb{R}$. Ainsi, par l'inégalité (2.11), $\displaystyle\int_{\partial\Omega} |\beta_\nu(\cdot, u_\lambda)| \leq C$, et en passant à la limite avec successivement $\lambda \to 0$, $\nu \to 0$, on obtient $\displaystyle\int_{\partial\Omega} |\beta_\nu(\cdot,u)| \leq C$ puis $\displaystyle\int_{\partial\Omega} |\beta^0(\cdot,u)| \leq C$. Par ailleurs, grâce aux estimations (2.9) et (2.10) et à l'hypothèse (H_3), $(a(u_\lambda, Du_\lambda))_\lambda$ est bornée dans $\left(L^{p'}(\Omega)\right)^N$, et donc, quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, converge faiblement vers χ dans $\left(L^{p'}(\Omega)\right)^N$ lorsque $\lambda \to 0$. A l'aide de l'argument classique de pseudo-monotonie, on va montrer que div $a(u, Du)$ n'est rien d'autre que div χ. Pour cela, il suffit de s'assurer que

$$\limsup_{\lambda\to 0} \int_\Omega a(u_\lambda, Du_\lambda)\cdot D(u_\lambda - u) = 0. \tag{2.12}$$

En considérant la fonction test $\phi = u_\lambda - (u_\lambda - u)^+$ dans l'inégalité (2.5), on a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(u_\lambda, Du_\lambda)\cdot D(u_\lambda - u)^+ \\ \leq\ &\int_\Omega (f-u_\lambda)(u_\lambda - u)^+ - \delta\int_{\partial\Omega} T_l(\psi(u_\lambda))(u_\lambda-u)^+ - \int_{\partial\Omega}\beta_\lambda(\cdot,u_\lambda)(u_\lambda-u)^+ \\ \leq\ &\int_\Omega (f-u_\lambda)(u_\lambda - u)^+ - \delta\int_{\partial\Omega} T_l(\psi(u_\lambda))(u_\lambda-u)^+ - \int_{\partial\Omega}\beta_\lambda(\cdot,-u_\lambda^-)(u_\lambda-u)^+, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que $\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda^+)(u_\lambda - u)^+ \geq 0$.
Ayant en esprit que la suite $(u_\lambda)_\lambda$ est bornée dans $L^\infty(\partial\Omega)$, il vient

$$\|(u_\lambda - u)^+\|_\infty \leq C \text{ et } (u_\lambda - u)^+ \to 0 \text{ p.p. lorsque } \lambda \to 0.$$

Notons que

$$\beta_\lambda(\cdot, -u_\lambda^-) \geq \beta_\lambda(\cdot, -u^-) \geq \beta^0(\cdot, -u^-) \text{ sur } \{u_\lambda \geq u\}.$$

Or $\beta^0(\cdot,-u^-) \in L^1(\partial\Omega)$, d'où $\displaystyle\int_{\partial\Omega}\beta_\lambda(\cdot,-u_\lambda^-)(u_\lambda - u)^+ \to 0$. Par conséquent $\displaystyle\limsup_{\lambda\to0}\int_\Omega a(u_\lambda, Du_\lambda)\cdot D(u_\lambda - u)^+ \leq 0$, et de la même manière on montre que $\displaystyle\limsup_{\lambda\to0}\int_\Omega a(u_\lambda, Du_\lambda)\cdot D(-(u_\lambda - u)^-) \leq 0$. On conclut alors

$$\limsup_{\lambda\to0}\int_\Omega a(u_\lambda, Du_\lambda)\cdot D(u_\lambda - u) \leq 0,$$

qui grâce à la monotonie de a entraîne la limite (2.12).
Pour tout $\phi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ on peut passer à la limite dans l'inégalité (2.5) et il vient

$$\int_\Omega a(u,Du)\cdot D(u-\phi) + \delta\int_{\partial\Omega}\psi(u)(u-\phi) \leq \int_\Omega (f-u)(u-\phi) - \int_{\partial\Omega}(\tilde{u}-\tilde{\phi})d\mu. \tag{2.13}$$

Par densité, cette inégalité reste vraie pour tout $\phi \in W^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. On conclut alors

$$\int_\Omega a(u,Du)\cdot D\phi + \delta\int_{\partial\Omega}\psi(u)\phi = \int_\Omega (f-u)\phi - \int_{\partial\Omega}\tilde{\phi}d\mu \tag{2.14}$$

pour tout $\phi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Il nous reste à caractériser la mesure μ obtenue. Par l'équation (2.14), on déduit que $\mu \in \mathcal{M}_b(\partial\Omega) \cap (W^{-\frac{1}{p'},p'}(\partial\Omega) + (L^\infty(\partial\Omega))^*)$ et que $|\mu|$ ne charge pas les ensembles de capacités nulles. En procédant comme G. BOUCHITTÉ [28, 29] et P. WITTBOLD [78], nous allons montrer que $\mu \in \partial\mathcal{J}(u)$. Rappelons que $\beta_\lambda = \partial j_\lambda$ et que pour p.p. $x \in \partial\Omega$ et pour tout $r \in \mathbb{R}$, $j_\lambda(x,r) \uparrow j(x,r)$ lorsque $\lambda \downarrow 0$. Par la définition du sous-différentiel, il en découle pour tout $\nu > \lambda > 0$ et p.p. $x \in \partial\Omega$

$$\begin{aligned} j(x,r) &\geq j_\lambda(x,r) \\ &\geq j_\lambda(x,u_\lambda(x)) + \partial j_\lambda(x,u_\lambda(x))(r-u_\lambda(x)) \\ &\geq j_\nu(x,u_\lambda(x)) + \partial j_\lambda(x,u_\lambda(x))(r-u_\lambda(x)) \ \forall r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_{\partial\Omega} j(\cdot,\xi) \geq \int_{\partial\Omega} j_\nu(\cdot,u_\lambda) + \int_{\partial\Omega} \partial j_\lambda(\cdot,u_\lambda)(\xi-u_\lambda) \quad \forall \xi \in W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega).$$

Ayant en esprit que $u_\lambda \to u$ p.p. sur Ω lorsque $\lambda \to 0$, grâce au lemme de Fatou et au théorème de la convergence monotone, en passant à la limite en premier avec $\lambda \to 0$ ensuite avec $\nu \to 0$, on obtient pour tout $\xi \in C_c(\partial\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} j(\cdot,\xi) &\geq \int_{\partial\Omega} j(\cdot,u) + \liminf_{\lambda\to 0} \int_{\partial\Omega} \beta_\lambda(\cdot,u_\lambda)(\xi-u_\lambda) \\ &\geq \int_{\partial\Omega} j(\cdot,u) + \liminf_{\lambda\to 0} \int_{\partial\Omega} \beta_\lambda(\cdot,u_\lambda)(\xi-u) + \liminf_{\lambda\to 0} \int_{\partial\Omega} \beta_\lambda(\cdot,u_\lambda)(u-u_\lambda) \\ &\geq \int_{\partial\Omega} j(\cdot,u) + \int_{\partial\Omega} (\xi-u)d\mu + \liminf_{\lambda\to 0} \int_{\partial\Omega} \beta_\lambda(\cdot,u_\lambda)(u-u_\lambda). \end{aligned} \tag{2.15}$$

En utilisant la limite (2.12), la monotonie de λ, les estimations L^∞ sur u_λ et la convergence presque partout de u_λ vers u, on obtient de l'inégalité (2.5)

$$\begin{aligned} &\liminf_{\lambda\to 0} \int_{\partial\Omega} \beta_\lambda(\cdot,u_\lambda)(u-u_\lambda) \\ \geq\ & \lim_{\lambda\to 0} \int_\Omega (f-u_\lambda)(u-u_\lambda) + \limsup_{\lambda\to 0} \int_\Omega a(u_\lambda, Du_\lambda)\cdot D(u_\lambda-u) \\ &+\delta \lim_{\lambda\to 0} \int_{\partial\Omega} (\psi(u_\lambda)-\psi(u))(u_\lambda-u) + \delta \lim_{\lambda\to 0} \int_{\partial\Omega} \psi(u)(u_\lambda-u) \\ \geq\ & 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, à l'aide de l'inégalité (2.15) on conclut que

$$\mathcal{J}(\xi) \geq \mathcal{J}(u) + \langle \mu, \xi-u\rangle \quad \forall \xi \in C_c(\partial\Omega).$$

Mais le fait que $\mu \in \mathcal{M}_0(\partial\Omega)$ entraîne que l'inégalité précédente reste vraie aussi pour tout $\xi \in W^{\frac{1}{p'},p}(\partial\Omega) \cap L^\infty(\partial\Omega)$, d'où $\mu \in \partial\mathcal{J}(u)$. Pour conclure la preuve de la Proposition 2.3.2 il suffit d'appliquer le Lemme 2.2.2. ■

Proposition 2.3.3. *L'opérateur A_δ est à domaine dense dans $L^1(\Omega)$.*

Preuve. Nous allons montrer que $L^\infty(\Omega) \subset \overline{D(A_\delta)}^{\|\cdot\|_1}$. Soient $\alpha > 0$ et $f \in L^\infty(\Omega)$. Posons $u_\alpha := (I + \alpha A_\delta)^{-1} f$, alors $(u_\alpha, \frac{1}{\alpha}(f - u_\alpha)) \in A_\delta$. En considérant la fonction test $\phi = 0$ dans la définition de l'opérateur A_δ, on obtient en utilisant les hypothèses (H_2) et (H_3), la monotonie de ψ, la décomposition de la mesure μ_α et les estimations L^∞ sur u_α

$$\begin{aligned}
\lambda_0 \int_\Omega |Du_\alpha|^p &\leq \frac{1}{\alpha} \int_\Omega (f - u_\alpha) u_\alpha - \delta \int_{\partial\Omega} \psi(u_\alpha) u_\alpha - \int_{\partial\Omega} \tilde{u}_\alpha d\mu_\alpha - \int_\Omega a(u_\alpha, 0) \cdot Du_\alpha \\
&\leq \frac{1}{\alpha} \int_\Omega (f - u_\alpha) u_\alpha + C \\
&\leq \frac{1}{\alpha} C' + C,
\end{aligned}$$

où C, C' sont des constantes indépendantes de α. Grâce à l'hypothèse (H_3) et cette dernière estimation il est facile de voir que

$$\alpha \int_\Omega |a(u_\alpha, Du_\alpha)| \to 0 \text{ lorsque } \alpha \to 0.$$

D'autre part, en considérant les fonctions test $u_\alpha + \phi$ et $u_\alpha - \phi$ avec $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ dans la définition de l'opérateur A_δ, on a

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_\Omega u_\alpha \phi = \int_\Omega f\phi \quad \text{pour tout } \phi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.16}$$

Puisque $(u_\alpha)_\alpha$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$, il existe une sous-suite $(u_{\alpha_n})_n$ telle que $u_{\alpha_n} \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^p(\Omega)$, ce qui implique d'après (2.16) que $u = f$. Or $\|u_\alpha\|_p \leq \|f\|_p$, d'où $u_\alpha \to f$ dans $L^p(\Omega)$. Par conséquent, $f \in \overline{D(A_\delta)}^{\|\cdot\|_1}$ et la preuve est complète. ■

En mettant bout à bout les preuves des trois propositions précédentes, le Théorème 2.3.1 s'ensuit.

2.4 Existence et unicité de la solution entropique

Cette section est consacrée à l'existence et l'unicité de la solution entropique du problème $(E)(f)$, pour des données $f \in L^1(\Omega)$. Pour cela, on passe à la limite avec $\delta \to 0$ pour se débarrasser du terme de pénalisation ajouté.
Afin d'introduire la notion de solution entropique du problème $(E)(f)$, on définit les espaces suivants, similaires à ceux introduit dans Ph. Bénilan *et al* [16] et F. Andreu *et al* [10]. D'abord on note

$$\mathcal{T}^{1,p}(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}; \ \ T_k(u) \in W^{1,p}(\Omega) \ \text{ pour tout } \ k > 0\}.$$

Il a été prouvé par PH. BÉNILAN *et al* [16, Lemma 2.1] que pour tout $u \in \mathcal{T}^{1,1}(\Omega)$, il existe une unique fonction mesurable $w : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que

$$DT_k(u) = w\chi_{\{|w|<k\}} \ \forall k > 0. \tag{2.17}$$

De plus, si $u \in W^{1,1}(\Omega)$, alors $w = Du$ dans le sens faible usuel. La dérivée Du d'une fonction $u \in \mathcal{T}^{1,1}(\Omega)$ est définie comme étant une fonction vérifiant (2.17). On note $\mathcal{T}^{1,p}_{tr}(\Omega)$ le sous-espace de $\mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$ constitué des fonctions u qui peuvent être approchées par des fonctions $(u_\delta)_\delta \in W^{1,p}(\Omega)$ telles que :
- $u_\delta \to u$ p.p. sur Ω
- $DT_k(u_\delta) \rightharpoonup DT_k(u)$ faiblement dans $L^1(\Omega)$ pour tout $k > 0$
- il existe une fonction mesurable $v : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ telle que $(\tau(u_\delta))_\delta$ converge p.p. sur $\partial\Omega$ vers v. La fonction v est appelée la trace de u, et est notée indifféremment $\tau(u)$ ou u. Clairement, on a

$$W^{1,p}(\Omega) \subset \mathcal{T}^{1,p}_{tr}(\Omega) \subset \mathcal{T}^{1,p}(\Omega).$$

Notons que la définition de l'espace $\mathcal{T}^{1,p}_{tr}(\Omega)$ de [16, 10] suppose la convergence forte des gradients de la suite $(T_k(u_\delta))_\delta$ au lieu de la convergence faible.

Le concept de solutions entropiques pour les problèmes avec des conditions non linéaires sur le bord a été introduit par F. ANDREU *et al* [10] pour le problème

$$\begin{cases} -\text{div } a(x, Du) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ -a(x, Du) \cdot \eta \in \beta(u) & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

En s'inspirant de leur définition, on définit la solution entropique pour notre problème $(E)(f)$ comme suit :

Définition 2.4.1. *Une fonction $u \in \mathcal{T}^{1,p}_{tr}(\Omega)$ est une solution entropique du problème $(E)(f)$ s'il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}_0(\partial\Omega)$ vérifiant*

$$\mu_r(x) \in \partial j(x, u(x)) + \partial I_{[\gamma_-(x),\gamma_+(x)]}(u(x)) \quad p.p.\ x \in \partial\Omega \tag{2.18}$$

et pour tout $\phi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega a(u, Du) \cdot DT_k(u - \phi) \le \int_\Omega (f - u)T_k(u - \phi) - \int_{\partial\Omega} T_k(\tilde{u} - \tilde{\phi})d\mu$$

et

$$\tilde{u} = \gamma_+ \quad \mu_s^+ - p.p.\ sur\ \partial\Omega, \qquad \tilde{u} = \gamma_- \quad \mu_s^- - p.p.\ sur\ \partial\Omega. \tag{2.19}$$

Remarque 2.4.1. *Notons que chaque intégrale dans la définition précédente est bien définie. En effet, la première intégrale doit être comprise comme $\int_\Omega a(T_l(u), DT_l(u)) \cdot DT_k(u-\phi)$, où $l \ge k + \|\phi\|_\infty$. Puisque $\phi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, on a $u-\phi \in \mathcal{T}^{1,p}_{tr}(\Omega)$*

(cf. [10, Theorem 3.1]). Ainsi $T_k(u-\phi) \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et admet une trace qui a un représentant quasi-continu, et donc la dernière intégrale dans la définition précédente est bien définie. Enfin, notons aussi que la condition (2.19) a un sens. $\Diamond$

On définit maintenant l'opérateur $\mathcal{A}$ par :

$$(u, f-u) \in \mathcal{A} \text{ si, et seulement si } \left\{ \begin{array}{l} u, f \in L^1(\Omega) \text{ et} \\ u \text{ est une solution entropique de } (E)(f). \end{array} \right.$$

Par la suite, on va utiliser la notation $A_{m,n}$, respectivement $\psi_{m,n}$, au lieu de A_δ, respectivement $\delta\psi$, où $\psi_{m,n}(u) = \frac{1}{m}\psi(u^+) - \frac{1}{n}\psi(u^-),\ m,n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème 2.4.1. *L'opérateur $\mathcal{A}$ est m-accrétif à domaine dense dans $L^1(\Omega)$ et $\mathcal{A} = \liminf_{m,n\to\infty} A_{m,n}$, où l'opérateur $\liminf_{m,n\to\infty} A_{m,n}$ est défini par*

$$(x,y) \in \liminf_{m,n\to\infty} A_{m,n} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \textit{pour tout } m>0, n>0 \textit{ il existe } (x_{m,n}, y_{m,n}) \in A_{m,n} \\ \textit{tel que } (x,y) = \lim\limits_{m,n\to\infty} (x_{m,n}, y_{m,n}). \end{array} \right.$$

Comme conséquence immédiate

Corollaire 2.4.1. *Pour tout $f \in L^1(\Omega)$ il existe une unique solution entropique du problème $(E)(f)$.*

Preuve du Théorème 2.4.1. La preuve se fera en plusieurs étapes.

ÉTAPE 1 : Estimations *a priori*

Soit $f \in L^1(\Omega)$. On approche f par $f_{m,n} = (f \wedge m) \vee (-n) \in L^\infty(\Omega)$, croissante en m, décroissante en n et $\|f_{m,n}\|_1 \le \|f\|_1$. Par le Théorème 2.3.1, $f_{m,n} \in R(I + A_{m,n})$ et il existe $u_{m,n} \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et une mesure $\mu_{m,n} \in \mathcal{M}_0(\partial\Omega)$ vérifiant

$$(\mu_{m,n})_r(x) \in \partial j(x, u_{m,n}(x)) + \partial I_{[\gamma_-(x),\gamma_+(x)]}(u_{m,n}(x)) \text{ p.p. } x \in \partial\Omega,$$

et pour tout $\phi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ on a

$$\begin{aligned} &\int_\Omega a(u_{m,n}, Du_{m,n}) \cdot D(u_{m,n} - \phi) + \int_{\partial\Omega} \psi_{m,n}(u_{m,n})(u_{m,n} - \phi) \\ \le\ &\int_\Omega (f_{m,n} - u_{m,n})(u_{m,n} - \phi) - \int_{\partial\Omega} (\tilde{u}_{m,n} - \tilde{\phi}) d\mu_{m,n} \end{aligned} \tag{2.20}$$

et

$$\tilde{u}_{m,n}^{+/-} = \gamma_{+/-} \quad (\mu_{m,n})_s^{+/-} - \text{p.p. sur } \partial\Omega.$$

Ici et dans toute la suite, on notera le représentant quasi-continu de $u_{m,n}$ par $\tilde{u}_{m,n}$ au lieu de $\widetilde{u_{m,n}}$. Fixons $k > 0$. En considérant la fonction test $u_{m,n} - T_k(u_{m,n})$ dans l'inégalité (2.20) et en utilisant l'hypothèse (H_2), on obtient

$$\begin{aligned} \psi_0 \int_\Omega |DT_k(u_{m,n})|^p + \frac{1}{m}\int_{\partial\Omega} T_k(u_{m,n})\psi(u^+_{m,n}) - \frac{1}{n}\int_{\partial\Omega} T_k(u_{m,n})\psi(u^-_{m,n}) \\ \leq \int_\Omega T_k(u_{m,n})(f_{m,n} - u_{m,n}) - \int_{\partial\Omega} T_k(\tilde{u}_{m,n}) d\mu_{m,n} - \int_\Omega a(u_{m,n},0)\cdot DT_k(u_{m,n}). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Par le théorème de Gauss-Green et l'hypothèse (H_3), il vient, en convenant de noter C toute constante indépendante de m, n,

$$\begin{aligned} \Big|\int_\Omega a(u_{m,n},0)\cdot DT_k(u_{m,n})\Big| &\leq \Big|\int_{\partial\Omega}\int_0^{T_k(u_{m,n})} a(r,0)dr\cdot\eta d\sigma\Big| \\ &\leq \int_{\partial\Omega}\int_0^{T_k(u_{m,n})} \Lambda(|r|)drd\sigma \\ &\leq C. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Ainsi, par l'inégalité (2.21) et en utilisant la monotonie de ψ, on conclut que

$$\lambda_0 \int_\Omega |DT_k(u_{m,n})|^p \leq C. \tag{2.23}$$

Par conséquent, $(T_k(u_{m,n}))_{m,n}$ est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ et après extraction d'une sous-suite si nécessaire, on peut supposer que $T_k(u_{m,n}) \rightharpoonup v_k$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ et $T_k(u_{m,n}) \to v_k$ dans $L^p(\Omega)$ lorsque $m, n \to \infty$. D'autre part, on peut aussi supposer que $DT_k(u_{m,n}) \rightharpoonup g_k$ faiblement dans $(L^p(\Omega))^N$ lorsque $m, n \to \infty$.

Par la suite on a besoin de la convergence forte de $u_{m,n}$ dans $L^1(\Omega)$. Rappelons que $\|u_{m,n}\|_1 \leq \|f\|_1$. Puisque $A_{m,n}$ est T-accrétif dans $L^1(\Omega)$, en utilisant la monotonie de $f_{m,n}$ et $\psi_{m,n}$, on a pour tout $m \geq m'$ et tout $n \geq n'$, $u_{m',n} \leq u_{m,n} \leq u_{m,n'}$ p.p. sur Ω. Par conséquent,

$$u_{m,n}\uparrow_m u^n \downarrow_n u, \quad u_{m,n}\downarrow_n u_m \uparrow_m u \text{ dans } L^1(\Omega). \tag{2.24}$$

Ici, et dans la suite, on note $\uparrow_n$, respectivement $\downarrow_n$, pour désigner la convergence d'une suite qui est monotone croissante, respectivement monotone décroissante, en n.
Grâce à la convergence (2.24), on conclut que $v_k = T_k(u)$ et $g_k = DT_k(u)$. Ainsi, $T_k(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ pour tout $k > 0$. Par conséquent, $u \in \mathcal{T}^{1,p}(\Omega)$.
D'autre part, on peut montrer, comme dans F. Andreu *et al* [10, Proof of Theorem 4.2], que $(\tau(u_{m,n}))_{m,n}$ converge p.p. sur $\partial\Omega$. Ainsi, $u \in \mathcal{T}^{1,p}_{tr}(\Omega)$.

Étape 2 : Existence d'une mesure

On va montrer que la suite $(\mu_{m,n})_{m,n}$ converge fortement vers une mesure μ dans $\mathcal{M}_b(\partial\Omega)$. Soit la fonction $u^\lambda_{m,n}$ vérifiant pour tout $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega a(u^\lambda_{m,n}, Du^\lambda_{m,n})\cdot D\varphi + \frac{1}{m}\int_{\partial\Omega}\psi(u^{\lambda,+}_{m,n})\varphi - \frac{1}{n}\int_{\partial\Omega}\psi(u^{\lambda,-}_{m,n})\varphi\\ = &\int_\Omega (f_{m,n}-u^\lambda_{m,n})\varphi - \int_{\partial\Omega}\beta_\lambda(\cdot, u^\lambda_{m,n})\varphi. \end{aligned} \tag{2.25}$$

On sait d'après la Proposition 2.3.2 que $\|\beta_\lambda(\cdot,u^\lambda_{m,n})\|_1$ est uniformément bornée en λ, ainsi $\beta_\lambda(\cdot,u^\lambda_{m,n}) \overset{*}{\rightharpoonup} \mu_{m,n}$ faiblement $*$ dans $\mathcal{M}_b(\partial\Omega)$ lorsque $\lambda\to 0$. Par conséquent

$$\|\mu_{m,n}\|_{\mathcal{M}_b(\partial\Omega)} \le \liminf_{\lambda\to 0}\|\beta_\lambda(\cdot,u^\lambda_{m,n})\|_{\mathcal{M}_b(\partial\Omega)} \le C,$$

et on déduit, après extraction d'une sous suite si nécessaire, que

$$\mu_{m,n} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \text{ faiblement } * \text{ dans } \mathcal{M}_b(\partial\Omega) \text{ lorsque } m,n\to\infty.$$

Pour établir la convergence forte de la mesure $\mu_{m,n}$, on a besoin du lemme de comparaison suivant :

Lemme 2.4.1. *Supposons $\tilde m \ge m$, $\tilde n \ge n$. Alors*

$$u^\lambda_{m,\tilde n} \le u^\lambda_{m,n} \le u^\lambda_{\tilde m,n} \quad \textit{p.p. sur } \Omega$$

et

$$\beta_\lambda(\cdot,u^\lambda_{m,\tilde n}) \le \beta_\lambda(\cdot,u^\lambda_{m,n}) \le \beta_\lambda(\cdot,u^\lambda_{\tilde m,n}) \quad \textit{p.p. sur } \partial\Omega.$$

Preuve. La preuve de ce lemme est standard (voir [3, 5]). En effet, considérons la fonction test $\varphi = \frac{1}{l}T_l(u^\lambda_{m,n}-u^\lambda_{\tilde m,n})^+$ dans l'équation (2.25) et $\varphi = \frac{1}{l}T_l(u^\lambda_{\tilde m,n}-u^\lambda_{m,n})^+$ dans l'équation correspondant à la solution $u^\lambda_{\tilde m,n}$. En passant à la limite dans la somme des deux équations résultantes avec $l\to 0$, on obtient $u^\lambda_{m,n}\le u^\lambda_{\tilde m,n}$ p.p. sur Ω et $\beta_\lambda(\cdot,u^\lambda_{m,n}) \le \beta_\lambda(\cdot,u^\lambda_{\tilde m,n})$ p.p. sur $\partial\Omega$. D'une manière analogue on montre les autres inégalités, d'où le résultat. ■

Notons que le Lemme 2.4.1 reste valable pour les parties positives et négatives, i.e.

$$\pm\beta_\lambda(\cdot,u^\lambda_{m,\tilde n})^\pm \le \pm\beta_\lambda(\cdot,u^\lambda_{m,n})^\pm \le \pm\beta_\lambda(\cdot,u^\lambda_{\tilde m,n})^\pm \quad \text{p.p. sur } \partial\Omega.$$

On obtient alors

$$\pm\mu^\pm_{m,\tilde n} \le \pm\mu^\pm_{m,n} \le \pm\mu^\pm_{\tilde m,n},$$

et aussi les mêmes inégalités de comparaison pour les parties régulières et singulières. Il en ressort que $\mu^+_{m,n}\uparrow \mu^+_n$ dans $\mathcal{M}_b(\partial\Omega)$ lorsque $m\to\infty$. En effet, soit

$\mu_n^+ : \mathcal{B}(\partial\Omega) \to [0, +\infty[$ définie par $\mu_n^+(A) = \lim_{m\to\infty} \mu_{m,n}^+(A) < \infty$, où $\mathcal{B}(\partial\Omega)$ désigne l'ensemble des boréliens de $\partial\Omega$. On a alors

$$\begin{aligned}
\|\mu_{m,n}^+ - \mu_n^+\|_{\mathcal{M}_b(\partial\Omega)} &= \sup_{(E_i)_{i=1,n}\in\mathcal{B}(\partial\Omega)} \sum_{i=1}^{n} (\mu_{m,n}^+ - \mu_n^+)(E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[\mu_{m,n}^+(E_i) - \mu_n^+(E_i)\right] \\
&= \mu_{m,n}^+(\partial\Omega) - \mu_n^+(\partial\Omega) \\
&\to 0 \ \text{ lorsque } \ m \to \infty,
\end{aligned}$$

où le suprémum est pris sur toutes les partitions finies de $\partial\Omega$. Les mêmes méthodes peuvent être appliquées pour montrer que $-\mu_{m,n}^- \uparrow_{m\to\infty} -\mu_n^-$ dans $\mathcal{M}_b(\partial\Omega)$ et aussi $\pm\mu_n^\pm \downarrow_{n\to\infty} \pm\mu^\pm$, et ceci conclut la preuve de la convergence forte de la suite de mesures $(\mu_{m,n})_{m,n}$.

Étape 3 : Argument de pseudo-monotonie

Rappelons que $u_{m,n}$ satisfait, pour tout $\varphi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(u_{m,n}, Du_{m,n}) \cdot D\varphi + \frac{1}{m}\int_{\partial\Omega} \psi(u_{m,n}^+)\varphi - \frac{1}{n}\int_{\partial\Omega} \psi(u_{m,n}^-)\varphi + \int_{\partial\Omega} \tilde{\varphi}d\mu_{m,n} \\
= \ &\int_\Omega (f_{m,n} - u_{m,n})\varphi.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Grâce à l'hypothèse (H_3) et à l'estimation (2.23), $(a(T_k(u_{m,n}), DT_k(u_{m,n})))_{m,n}$ est bornée dans $\left(L^{p'}(\Omega)\right)^N$ et donc, quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, converge faiblement dans $\left(L^{p'}(\Omega)\right)^N$ vers χ_k. Grâce à l'argument de pseudo-monotonie, on va identifier div χ_k et div $a(T_k(u), DT_k(u))$. Pour ce faire, définissons pour $l < k$, l'intégrale suivante :

$$I := \int_\Omega \left[a(T_k(u_{m,n}), DT_k(u_{m,n})) - a(T_k(u_{m',n'}), DT_k(u_{m',n'}))\right] \cdot DT_l(T_k(u_{m,n}) - T_k(u_{m',n'})), \tag{2.27}$$

qui peut être décomposée comme

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|u_{m,n}|<k, |u_{m',n'}|<k\}} \left[a(u_{m,n}, Du_{m,n}) - a(u_{m',n'}, Du_{m',n'})\right] \cdot DT_l(u_{m,n} - u_{m',n'}) \\
&+ \int_{\{|u_{m,n}|<k, |u_{m',n'}|\geq k\}} \left[a(u_{m,n}, Du_{m,n}) - a(T_k(u_{m',n'}), 0)\right] \cdot DT_l(u_{m,n} - T_k(u_{m',n'})) \\
&+ \int_{\{|u_{m,n}|\geq k, |u_{m',n'}|<k\}} \left[a(T_k(u_{m,n}), 0) - a(u_{m',n'}, Du_{m',n'})\right] \cdot DT_l(T_k(u_{m,n}) - u_{m',n'}) \\
=: \ &I_1 + I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

On veut passer à la limite dans chacun de ces termes, avec $m', n' \to \infty, m, n \to \infty$ et ensuite avec $l \to 0$. Le terme I_1 peut être écrit comme

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \big[a(u_{m,n}, Du_{m,n}) - a(u_{m',n'}, Du_{m',n'})\big] \cdot DT_l(u_{m,n} - u_{m',n'})\\
&- \int_{\{|u_{m,n}|<k, |u_{m',n'}|\geq k\}} \big[a(u_{m,n}, Du_{m,n}) - a(u_{m',n'}, Du_{m',n'})\big] \cdot DT_l(u_{m,n} - u_{m',n'})\\
&- \int_{\{|u_{m,n}|\geq k, |u_{m',n'}|< k\}} \big[a(u_{m,n}, Du_{m,n}) - a(u_{m',n'}, Du_{m',n'})\big] \cdot DT_l(u_{m,n} - u_{m',n'})\\
&- \int_{\{|u_{m,n}|\geq k, |u_{m',n'}|\geq k\}} \big[a(u_{m,n}, Du_{m,n}) - a(u_{m',n'}, Du_{m',n'})\big] \cdot DT_l(u_{m,n} - u_{m',n'})\\
&=: I_1^1 - I_1^2 - I_1^3 - I_1^4.
\end{aligned}$$

Choisissons la fonction test $T_l(u_{m,n} - u_{m',n'})$ dans l'équation (2.26) et $T_l(u_{m',n'} - u_{m,n})$ dans celle correspondant à la solution $u_{m',n'}$, additionnons les deux équations et utilisons le fait que $u_{m,n}, u_{m',n'} \to u$ p.p. sur Ω, $f_{m,n}, f_{m',n'} \to f$ dans $L^1(\Omega)$, $\mu_{m,n}, \mu_{m',n'} \to \mu$ fortement dans $\mathcal{M}_b(\partial\Omega)$ et que $\displaystyle\int_{\partial\Omega} |\frac{1}{m}\psi(u_{m,n}^+) - \frac{1}{n}\psi(u_{m,n}^-)|$ est bornée uniformément en m, n, on aura

$$\lim_{l\to 0}\lim_{m,n\to\infty}\lim_{m',n'\to\infty} I_1^1 = 0.$$

Grâce aux hypothèses (H_1) et (H_4), à l'inégalité de Hölder et à l'estimation (2.23),

$$\begin{aligned}
I_1^2 \;&\geq\; \int_{\{|u_{m,n}|<k, |u_{m',n'}|\geq k\}} \big[a(u_{m,n}, Du_{m',n'}) - a(u_{m',n'}, Du_{m',n'})\big] \cdot DT_l(u_{m,n} - u_{m',n'})\\
&\geq\; -\int_{\mathcal{F}_1} \big|a(u_{m,n}, Du_{m',n'}) - a(u_{m',n'}, Du_{m',n'})\big|\big|D(u_{m,n} - u_{m',n'})\big|\\
&\geq\; -\Big[\int_{\mathcal{F}_1} 2^{p'} C(|u_{m,n}|, |u_{m',n'}|)^{p'} |u_{m,n} - u_{m',n'}|^{p'} (1 + |Du_{m',n'}|^p)\Big]^{1/p'}\\
&\qquad \times \Big[\int_{\mathcal{F}_1} |D(u_{m,n} - u_{m',n'})|^p\Big]^{1/p}\\
&\geq\; -Cl,
\end{aligned}$$

où $\mathcal{F}_1 := \{|u_{m,n}| < k, |u_{m',n'}| < 2k, |u_{m,n} - u_{m',n'}| < l\}$ et C est une constante indépendante de m, n, m', n' et l, d'où

$$\lim_{l\to 0}\lim_{m,n\to\infty}\lim_{m',n'\to\infty} I_1^2 \geq 0.$$

Par les mêmes méthodes,

$$\lim_{l\to 0}\lim_{m,n\to\infty}\lim_{m',n'\to\infty} I_1^3 \geq\ 0.$$

Reste à évaluer $\lim\limits_{l\to 0}\lim\limits_{m,n\to\infty}\lim\limits_{m',n'\to\infty} I_1^4$, pour cela définissons la fonction h_k par

$$h_k(r) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |r| < k \\ r - k\mathrm{sign}_0(r) & \text{si} \quad |r| \geq k. \end{cases}$$

Alors le terme I_1^4 est égal à

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \big[a(u_{m,n}, Du_{m,n}) - a(u_{m',n'}, Du_{m',n'})\big] \cdot DT_l(h_k(u_{m,n}) - h_k(u_{m',n'})) \\
&- \int_{\{|u_{m,n}|<k, |u_{m',n'}|\geq k\}} \big[a(u_{m,n}, Du_{m,n}) - a(u_{m',n'}, Du_{m',n'})\big] \cdot DT_l(-h_k(u_{m',n'})) \\
&- \int_{\{|u_{m,n}|\geq k, |u_{m',n'}|< k\}} \big[a(u_{m,n}, Du_{m,n}) - a(u_{m',n'}, Du_{m',n'})\big] \cdot DT_l(h_k(u_{m,n})) \\
&=: K_1 - K_2 - K_3.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

L'étude du terme K_1 est identique à celle de I_1^1. En effet, en utilisant $T_l(h_k(u_{m,n}) - h_k(u_{m',n'}))$ comme fonction test dans les inégalités correspondants aux deux solutions $u_{m,n}$ et $u_{m',n'}$, on montre, comme dans I_1^1, que

$$\lim_{l\to 0}\lim_{m,n\to\infty}\lim_{m',n'\to\infty} K_1 = 0.$$

Notons qu'en considérant la fonction test $T_l(h_k(u_{m,n}))$ dans l'équation (2.26), par les mêmes techniques que (2.22), il s'ensuit

$$\int_\Omega |DT_l(h_k(u_{m,n}))|^p \leq lC, \tag{2.29}$$

où C est une constante indépendante de m, n et l. Par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}
|K_2| &\leq \int_{\mathcal{F}_2} |a(u_{m,n}, Du_{m,n}) - a(u_{m',n'}, Du_{m',n'})||DT_l(h_k(u_{m',n'}))| \\
&\leq \Big[\int_{\{|u_{m,n}|<k, |u_{m',n'}|<2k\}} |a(u_{m,n}, Du_{m,n}) - a(u_{m',n'}, Du_{m',n'})|^{p'}\Big]^{1/p'} \\
&\quad \times \Big[\int_\Omega |DT_l(h_k(u_{m',n'}))|^p\Big]^{1/p},
\end{aligned}$$

où $\mathcal{F}_2 := \{|u_{m,n}| < k, |u_{m',n'}| \geq k, |h_k(u_{m',n'})| < l\}$. Par suite, l'hypothèse (H_3) et les estimations (2.23) et (2.29) impliquent

$$\lim_{l\to 0}\lim_{m,n\to\infty}\lim_{m',n'\to\infty} K_2 = 0.$$

D'une manière analogue, $\lim\limits_{l\to 0}\lim\limits_{m,n\to\infty}\lim\limits_{m',n'\to\infty} K_3 = 0$. En combinant toutes ces limites dans l'équation (2.28), on a $\lim\limits_{l\to 0}\lim\limits_{m,n\to\infty}\lim\limits_{m',n'\to\infty} I_1^4 = 0$, et on conclut que

$$\lim_{l\to 0}\lim_{m,n\to\infty}\lim_{m',n'\to\infty} I_1 \leq 0.$$

Pour le terme I_2 remarquons que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\{|u_{m,n}|<k, |u_{m',n'}|\geq k\}} \big[a(u_{m,n}, Du_{m,n}) - a(u_{m,n}, 0)\big] \cdot DT_l(u_{m,n} - T_k(u_{m',n'})) \\ &\quad + \int_{\{|u_{m,n}|<k, |u_{m',n'}|\geq k\}} \big[a(u_{m,n}, 0) - a(T_k(u_{m',n'}), 0)\big] \cdot DT_l(u_{m,n} - T_k(u_{m',n'})) \\ &=: I_2^1 + I_2^2. \end{aligned}$$

L'hypothèse (H_4), l'inégalité de Hölder et l'estimation (2.23) impliquent

$$\begin{aligned} |I_2^2| &\leq \int_{\mathcal{F}_3} C(|u_{m,n}|, |u_{m',n'}|)|T_k(u_{m,n}) - T_k(u_{m',n'})||DT_k(u_{m,n})| \\ &\leq C\Big[\int_{\{|T_k(u_{m,n})-T_k(u_{m',n'})|<l\}} |T_k(u_{m,n}) - T_k(u_{m',n'})|^{p'}\Big]^{1/p'}, \end{aligned}$$

où $\mathcal{F}_3 := \{|u_{m,n}| < k, |u_{m',n'}| < 2k, |T_k(u_{m,n}) - T_k(u_{m',n'})| < l\}$, et donc

$$\lim_{l\to 0} \lim_{m,n\to\infty} \lim_{m',n'\to\infty} I_2^2 = 0.$$

L'hypothèse (H_2) nous assure que $I_2^1 \geq 0$. D'autre part

$$I_2^1 \leq \int_{\{k-l<|u_{m,n}|<k\}} \big[a(u_{m,n}, Du_{m,n}) - a(u_{m,n}, 0)\big] \cdot Du_{m,n}.$$

Maintenant, en considérant la fonction test $T_k(u_{m,n}) - T_{k-l}(u_{m,n})$ dans l'équation (2.26), la monotonie de ψ, l'hypothèse (H_3) et la convergence presque partout de $u_{m,n}$ vers u lorsque $m, n \to \infty$, impliquent que la limite dans le terme de gauche de l'inégalité précédente est négative, ainsi $\lim_{l\to 0} \lim_{m,n\to\infty} \lim_{m',n'\to\infty} I_2^1 = 0$.
Les mêmes techniques peuvent être appliquées pour le terme I_3. Ainsi, en combinant toutes ces limites, il vient enfin

$$\lim_{l\to 0} \lim_{m,n\to\infty} \lim_{m',n'\to\infty} I \leq 0. \tag{2.30}$$

A l'aide de cette limite, on va montrer que div $a(T_k(u), T_k(u)) =$ div χ_k. Pour cela soit $\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$. En utilisant la limite (2.30), on a

$$
\begin{aligned}
&2\int_\Omega \chi_k \cdot D\varphi \\
&\geq \lim_{l\to 0} \lim_{m,n\to\infty} \lim_{m',n'\to\infty} \\
&\quad \Big[\int_{\{|T_k(u_{m,n})-T_k(u_{m',n'})|<l\}} a(T_k(u_{m,n}), DT_k(u_{m,n}))\cdot D(T_k(u_{m,n})-T_k(u_{m',n'})+\varphi) \\
&\quad + \int_{\{|T_k(u_{m,n})-T_k(u_{m',n'})|\geq l\}} a(T_k(u_{m,n}), DT_k(u_{m,n}))\cdot D\varphi \\
&\quad + \int_{\{|T_k(u_{m,n})-T_k(u_{m',n'})|<l\}} a(T_k(u_{m',n'}), DT_k(u_{m',n'}))\cdot D(T_k(u_{m',n'})-T_k(u_{m,n})+\varphi) \\
&\quad + \int_{\{|T_k(u_{m,n})-T_k(u_{m',n'})|\geq l\}} a(T_k(u_{m',n'}), DT_k(u_{m',n'}))\cdot D\varphi\Big] \\
&=: J_1+J_2+J_3+J_4. \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

Considérons le terme J_1. Grâce à l'hypothèse (H_1) et au fait que $DT_k(u_{m,n}) \rightharpoonup DT_k(u)$ faiblement dans $(L^p(\Omega))^N$ et que $T_k(u_{m,n}) \to T_k(u)$ p.p. sur Ω lorsque $m,n\to\infty$, on a

$$
\begin{aligned}
&\lim_{l\to 0} \lim_{m,n\to\infty} \lim_{m',n'\to\infty} J_1 \\
&\geq \lim_{l\to 0} \lim_{m,n\to\infty} \int_{\{|T_k(u_{m,n})-T_k(u)|<l\}} a(T_k(u_{m,n}), D(T_k(u)-\varphi))\cdot D(T_k(u_{m,n})-T_k(u)+\varphi) \\
&\geq \int_\Omega a(T_k(u), D(T_k(u)-\varphi))\cdot D\varphi.
\end{aligned}
$$

Traitons le terme J_2. Comme $a(T_k(u_{m,n}), DT_k(u_{m,n}))$ est bornée dans $\left(L^{p'}(\Omega)\right)^N$, l'inégalité de Hölder appliquée à J_2 donne

$$
|J_2| \leq C\Big[\int_{\{|T_k(u_{m,n})-T_k(u_{m',n'})|\geq l\}} |D\varphi|^p\Big]^{1/p}.
$$

Comme $T_k(u_{m,n}) \to T_k(u)$ p.p. sur Ω, alors par le théorème de la convergence dominée

$$
\lim_{l\to 0} \lim_{m,n\to\infty} \lim_{m',n'\to\infty} J_2 = 0.
$$

De la même manière

$$
\lim_{l\to 0} \lim_{m,n\to\infty} \lim_{m',n'\to\infty} J_4 = 0.
$$

Aussi, on remarque que le terme J_3 peut être décomposé comme suit :

$$\begin{aligned}
&\int_{\{|T_k(u_{m,n})-T_k(u_{m',n'})|<l\}} a(T_k(u_{m',n'}), DT_k(u_{m',n'}))\cdot D(T_k(u_{m',n'})-T_k(u)+\varphi)\\
&+\int_{\{|T_k(u_{m,n})-T_k(u_{m',n'})|<l\}} a(T_k(u_{m',n'}), DT_k(u_{m',n'}))\cdot D(T_k(u)-T_k(u_{m,n}))\\
=:&\quad J_3^1+J_3^2.
\end{aligned}$$

Par l'hypothèse (H_1) et le théorème de la convergence dominée, on a

$$\begin{aligned}
&\lim_{l\to 0}\lim_{m,n\to\infty}\lim_{m',n'\to\infty} J_3^1\\
&\geq \lim_{l\to 0}\lim_{m,n\to\infty}\lim_{m',n'\to\infty}\Big[\\
&\int_{\{|T_k(u_{m,n})-T_k(u_{m',n'})|<l\}} a(T_k(u_{m',n'}), D(T_k(u)-\varphi))\cdot D(T_k(u_{m',n'})-T_k(u)+\varphi)\Big]\\
&\geq \int_\Omega a(T_k(u), D(T_k(u)-\varphi))\cdot D\varphi.
\end{aligned}$$

D'autre part, puisque $a(T_k(u_{m',n'}), DT_k(u_{m',n'}))\rightharpoonup\chi_k$ faiblement dans $\left(L^{p'}(\Omega)\right)^N$ et $DT_k(u_{m,n})\rightharpoonup DT_k(u)$ faiblement dans $(L^p(\Omega))^N$ lorsque $m,n\to\infty$, on a

$$\lim_{l\to 0}\lim_{m,n\to\infty}\lim_{m',n'\to\infty} J_3^2=0.$$

Le bilan de toutes ces limites dans l'inégalité (2.31) fournit alors

$$2\int_\Omega \chi_k\cdot D\varphi\geq 2\int_\Omega a(T_k(u), D(T_k(u)-\varphi))\cdot D\varphi \tag{2.32}$$

pour tout $\varphi\in W^{1,p}(\Omega)$.
Prenons φ de la forme $\alpha\zeta$, où $\zeta\in\mathcal{D}(\Omega)$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, divisons cette dernière inégalité par $\alpha>0$, respectivement $\alpha<0$, passons à la limite avec $\alpha\downarrow 0$, respectivement $\alpha\uparrow 0$, il vient

$$\int_\Omega \chi_k\cdot D\zeta=\int_\Omega a(T_k(u), DT_k(u))\cdot D\zeta$$

pour tout $\zeta\in\mathcal{D}(\Omega)$, et le résultat s'ensuit.

ÉTAPE 4 : Passage à la limite dans l'équation (2.26)

Soit la fonction test $\varphi=S(u_{m,n}-\phi)$ dans l'équation (2.26), où $S\in\mathcal{P}:=\{p\in C^1(\mathbb{R});\ p(0)=0,\ 0\leq p'\leq 1,\ \text{Supp}(p')\text{ est compact}\}$ et $\phi\in W^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$, et définissons $l:=\|\phi\|_\infty+\max\{|z|, z\in\text{Supp}(S')\}$. Considérons la première intégrale et utilisons l'hypothèse de monotonie sur a, il en ressort

$$\int_\Omega a(u_{m,n}, D(u_{m,n}))\cdot DS(u_{m,n}-\phi)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n})) \cdot DS(u_{m,n} - \phi) \\
&= \int_\Omega \Big(a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n})) - a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u)) \Big) \\
&\qquad\qquad \cdot D(T_l(u_{m,n}) - T_l(u)) S^{'}(u_{m,n} - \phi) \\
&\quad + \int_\Omega a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n})) \cdot DT_l(u) S^{'}(u_{m,n} - \phi) \\
&\quad + \int a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u)) \cdot D(T_l(u_{m,n}) - T_l(u)) S^{'}(u_{m,n} - \phi) \\
&\quad - \int_\Omega a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n})) \cdot D\phi S^{'}(u_{m,n} - \phi) \\
&\geq \int_\Omega a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n})) \cdot DT_l(u) S^{'}(u_{m,n} - \phi) \\
&\quad + \int_\Omega a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u)) \cdot D(T_l(u_{m,n}) - T_l(u)) S^{'}(u_{m,n} - \phi) \\
&\quad - \int_\Omega a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n})) \cdot D\phi S^{'}(u_{m,n} - \phi). \qquad (2.33)
\end{aligned}
$$

Puisque $S^{'}(u_{m,n}-\phi) \to S^{'}(u-\phi)$ p.p. sur Ω, $DT_l(u_{m,n}) \rightharpoonup DT_l(u)$ faiblement dans $(L^p(\Omega))^N$, $T_l(u_{m,n}) \to T_l(u)$ p.p. sur Ω et $a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n})) \rightharpoonup \chi_l$ faiblement dans $(L^{p'}(\Omega))^N$ lorsque $m, n \to \infty$, on obtient après passage à la limite dans l'inégalité (2.33)

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m,n\to\infty} \int_\Omega a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n})) \cdot DS(u_{m,n} - \phi) \\
\geq\ & \int_\Omega \chi_l \cdot DT_l(u) S^{'}(u - \phi) - \int_\Omega \chi_l \cdot D\phi S^{'}(u - \phi) \\
=\ & \int_\Omega \chi_l \cdot DS(u - \phi).
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\lim_{m,n\to\infty} \int_\Omega a(u_{m,n}, Du_{m,n}) \cdot DS(u_{m,n} - \phi) \geq \int_\Omega a(u, Du) \cdot DS(u - \phi). \qquad (2.34)
$$

Par le théorème de la convergence dominée

$$
\lim_{m,n\to\infty} \int_\Omega (f_{m,n} - u_{m,n}) S(u_{m,n} - \phi) = \int_\Omega (f - u) S(u - \phi). \qquad (2.35)
$$

D'autre part, observons que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{m} \int_{\partial\Omega} \psi(u^+_{m,n}) S(u^+_{m,n} - \phi) - \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} \psi(u^-_{m,n}) S(u^-_{m,n} - \phi) \\
&= \frac{1}{m} \int_{\partial\Omega} (\psi(u^+_{m,n}) - \psi(\phi)) S(u^+_{m,n} - \phi) - \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} (\psi(u^-_{m,n}) - \psi(\phi)) S(u^-_{m,n} - \phi) \\
&\quad + \frac{1}{m} \int_{\partial\Omega} \psi(\phi) S(u^+_{m,n} - \phi) - \frac{1}{n} \int_{\partial\Omega} \psi(\phi) S(u^+_{m,n} - \phi). \qquad (2.36)
\end{aligned}
$$

Les deux premières intégrales de (2.36) sont positives alors que les deux dernières tendent vers zéro lorsque $m, n \to \infty$, ce qui entraîne que

$$\lim_{m,n\to\infty} \big(\frac{1}{m}\int_{\partial\Omega} \psi(u^+_{m,n})S(u^+_{m,n}-\phi) - \frac{1}{n}\int_{\partial\Omega} \psi(u^-_{m,n})S(u^-_{m,n}-\phi)\big) \geq 0. \quad (2.37)$$

Il reste à montrer que μ vérifie (2.18), (2.19) et que

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_{\partial\Omega} S(\tilde{u}_{m,n}-\tilde{\phi})d\mu_{m,n} = \int_{\partial\Omega} S(\tilde{u}-\tilde{\phi})d\mu. \quad (2.38)$$

On sait que

$$(\mu_{m,n})_r \in \partial j(\cdot, u_{m,n}) + \partial I_{[\gamma_-,\gamma_+]}(u_{m,n}) \text{ p.p. sur } \partial\Omega.$$

Or $u_{m,n} \to u$ p.p. sur $\partial\Omega$ et $\|(\mu_{m,n})_r - \mu_r\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq \|\mu_{m,n}-\mu\|_{\mathcal{M}_b(\partial\Omega)} \to 0$ lorsque $m, n \to \infty$, donc

$$\mu_r \in \partial j(\cdot, u) + \partial I_{[\gamma_-,\gamma_+]}(u) \text{ p.p. sur } \partial\Omega.$$

D'autre part, on a

$$\int_{\partial\Omega} (\gamma_+ - \tilde{u}_{m,n})d(\mu_{m,n})^+_s = 0 \text{ et } \int_{\partial\Omega} (\gamma_- - \tilde{u}_{m,n})d(\mu_{m,n})^-_s = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\tilde{u}_{m,n} = \gamma_{+/-} \quad (\mu_{m,n})^{+/-}_s - \text{p.p. sur } \partial\Omega.$$

Or u est finie quasi-partout sur $\partial\Omega$ et, de plus, $(\mu_{m,n})_s \to \mu_s$ fortement dans $\mathcal{M}_b(\partial\Omega)$ lorsque $m, n \to \infty$, d'où en passant à la limite

$$\int_{\partial\Omega} (\gamma_+ - \tilde{u})d\mu^+_s = 0 \text{ et } \int_{\partial\Omega} (\gamma_- - \tilde{u})d\mu^-_s = 0,$$

ce qui est équivalent à

$$\tilde{u} = \gamma_{+/-} \quad \mu^{+/-}_s - \text{p.p. sur } \partial\Omega.$$

Comme $u_{m,n} \to u$ p.p. sur $\partial\Omega$ et $\mu_{m,n} \to \mu$ fortement dans $\mathcal{M}_b(\partial\Omega)$, (2.38) est vérifiée. Finalement, en collectant toutes les limites (2.34)-(2.38), il vient

$$\int_\Omega a(u, Du)\cdot DS(u-\phi) + \int_{\partial\Omega} S(\tilde{u}-\tilde{\phi})d\mu \leq \int_\Omega (f-u)S(u-\phi)$$

pour tout $\phi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. En approchant T_k par $S \in \mathcal{P}$, on obtient l'inégalité entropique désirée. Ainsi on a montré que, pour tout $f \in L^\infty(\Omega)$, $(I + A_{m,n})^{-1} f$ converge dans $L^1(\Omega)$ vers une solution entropique de $(E)(f)$, d'où

$\liminf_{m,n\to\infty} A_{m,n} \subset \mathcal{A}$. L'autre inclusion sera démontrée au cours de l'étape suivante.

ÉTAPE 5 : Accrétivité de l'opérateur $\mathcal{A}$

Pour prouver l'accrétivité de $\mathcal{A}$, il suffit de montrer que

$$\int_\Omega |w - v| \leq \int_\Omega |f - g|, \tag{2.39}$$

dès que $f \in w + \mathcal{A}w$ et $g \in v + \mathcal{A}v$.
Soient $w_{m,n} = (I + A_{m,n})^{-1} f$ et $v_{m,n} = (I + A_{m,n})^{-1} g$. Notons que

$$w = \lim_{m,n\to\infty} w_{m,n} \text{ et } v = \lim_{m,n\to\infty} v_{m,n} \text{ dans } L^1(\Omega).$$

En effet, considérons $\phi_1 = w_{m,n}$ et $\phi_2 = \frac{1}{h} T_h(w_{m,n} - T_l(w))$, où $l \geq \|w_{m,n}\|_\infty + h + 1$, comme fonctions test dans les inégalités correspondants aux solutions w et $w_{m,n}$, respectivement, additionnons les deux inégalités résultantes et passons à la limite avec $h \to 0$ et $l \to \infty$, ensuite avec $m, n \to \infty$, on obtient le résultat.
D'autre part, on a montré à la Proposition 2.3.1 que l'opérateur $A_{m,n}$ est accrétif, d'où

$$\int_\Omega |w_{m,n} - v_{m,n}| \leq \int_\Omega |f - g|.$$

Or $\int_\Omega |w - v| \leq \int_\Omega |w - w_{m,n}| + \int_\Omega |w_{m,n} - v_{m,n}| + \int_\Omega |v_{m,n} - v|$, et l'inégalité (2.39) en découle immédiatement.

ÉTAPE 6 : Densité de $D(\mathcal{A})$ dans $L^1(\Omega)$

Il suffit de montrer que $L^\infty(\Omega) \subset \overline{D(\mathcal{A})}^{\|\cdot\|_1}$. Soit $u \in L^\infty(\Omega)$ et soient $u^\alpha_{m,n}$ et $u_\alpha, \alpha > 0$ telles que

$$u^\alpha_{m,n} + \alpha A_{m,n} u^\alpha_{m,n} \ni u \quad \text{et} \quad u_\alpha + \alpha \mathcal{A} u_\alpha \ni u. \tag{2.40}$$

De la preuve de la densité de $D(A_{m,n})$ dans $L^1(\Omega)$ (cf. Proposition 2.3.3), on a, pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$,

$$u^\alpha_{m,n} \to u \quad \text{dans } L^1(\Omega) \quad \text{lorsque } \alpha \to 0.$$

Montrons que

$$u^\alpha_{m,n} \to u_\alpha \quad \text{dans } L^1(\Omega) \quad \text{lorsque } m, n \to \infty.$$

Pour ce faire, prenons $T_l(u^\alpha_{m,n} - u_\alpha)$, respectivement $u^\alpha_{m,n}$, comme fonction test dans les formulations des problèmes définis par (2.40), additionnons les deux inégalités résultantes et divisons le résultat par $l > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{l}\int_\Omega (a(u^\alpha_{m,n}, Du^\alpha_{m,n}) - a(u_\alpha, Du_\alpha)) \cdot DT_l(u^\alpha_{m,n} - u_\alpha) \\
&+ \frac{1}{lm}\int_{\partial\Omega} \psi(u^{\alpha,+}_{m,n})T_l(u^\alpha_{m,n} - u_\alpha) - \frac{1}{ln}\int_{\partial\Omega} \psi(u^{\alpha,-}_{m,n})T_l(u^\alpha_{m,n} - u_\alpha) \\
\leq & -\frac{1}{\alpha}\int_\Omega (u^\alpha_{m,n} - u_\alpha)\frac{1}{l}T_l(u^\alpha_{m,n} - u_\alpha) \\
& - \frac{1}{l}\int_{\partial\Omega} T_l(\tilde{u}^\alpha_{m,n} - \tilde{u}_\alpha)d\mu^\alpha_{m,n} - \frac{1}{l}\int_{\partial\Omega} T_l(\tilde{u}_\alpha - \tilde{u}^\alpha_{m,n})d\mu_\alpha. \qquad (2.41)
\end{aligned}$$

Les hypothèses (H_1) et (H_4) impliquent

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{l}\int_\Omega (a(u^\alpha_{m,n}, Du^\alpha_{m,n}) - a(u_\alpha, Du_\alpha)) \cdot DT_l(u^\alpha_{m,n} - u_\alpha) \\
\geq \;& \frac{1}{l}\int_\Omega (a(u^\alpha_{m,n}, Du^\alpha_{m,n}) - a(u_\alpha, Du^\alpha_{m,n})) \cdot DT_l(u^\alpha_{m,n} - u_\alpha) \\
\geq \;& -\frac{1}{l}\int_{\mathcal{F}} C(\|u^\alpha_{m,n}\|_\infty, l)|u^\alpha_{m,n} - u_\alpha|(1 + |Du^\alpha_{m,n}|^{p-1})|D(u^\alpha_{m,n} - u_\alpha)| \\
\to \;& 0 \text{ lorsque } l \to 0,
\end{aligned}$$

où $\mathcal{F} := \{|u_\alpha| \leq \|u^\alpha_{m,n}\|_\infty + l\} \cap \{|u^\alpha_{m,n} - u_\alpha| < l\}$. D'autre part, les deux dernières intégrales dans le terme de gauche de l'inégalité (2.41) sont négatives. En effet, ces intégrales peuvent être décomposées comme suit : $-\int_{\partial\Omega} T_l(\tilde{u}^\alpha_{m,n} - \tilde{u}_\alpha)((\mu^\alpha_{m,n})_r - (\mu_\alpha)_r) - \int_{\partial\Omega} T_l(\gamma_+ - \tilde{u}_\alpha)d(\mu^\alpha_{m,n})^+_s + \int_{\partial\Omega} T_l(\gamma_- - \tilde{u}_\alpha)d(\mu^\alpha_{m,n})^-_s + \int_{\partial\Omega} T_l(\tilde{u}^\alpha_{m,n} - \gamma_+)d(\mu_\alpha)^+_s - \int_{\partial\Omega} T_l(\tilde{u}^\alpha_{m,n} - \gamma_-)d(\mu_\alpha)^-_s$, qui sont clairement négatives par les propriétés des mesures et de $\gamma_{+/-}$. Ainsi, en passant à la limite dans l'inégalité (2.41) avec $l \to 0$, on a

$$\int_\Omega |u^\alpha_{m,n} - u_\alpha| \leq \frac{1}{m}\int_{\partial\Omega} |\psi(u^{\alpha,+}_{m,n})| + \frac{1}{n}\int_{\partial\Omega} |\psi(u^{\alpha,-}_{m,n})|.$$

Par conséquent, $\|u^\alpha_{m,n} - u_\alpha\|_1 \to 0$ lorsque $m, n \to \infty$. Enfin, comme

$$\|u_\alpha - u\|_1 \leq \|u_\alpha - u^\alpha_{m,n}\|_1 + \|u^\alpha_{m,n} - u\|_1 \to 0 \text{ lorsque } \alpha \to 0 \text{ et } m, n \to \infty,$$

on en déduit que $u \in \overline{D(\mathcal{A})}^{\|\cdot\|_1}$. ■

Remarque 2.4.2. *On n'a pas pu montrer le principe de comparaison des solutions entropiques sans utiliser la méthode d'approximation. Il s'agit là d'une question ouverte.* ◊

2.5 Cas de conditions plus générales sur le bord

Avec la même approche que précédemment, on peut résoudre le problème suivant

$$(E)(f,g)\begin{cases} u - \operatorname{div} a(u,Du) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ -\langle a(u,Du),\eta\rangle \in \beta(x,u) + g & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $f \in L^1(\Omega), g \in L^1(\partial\Omega)$ et pour p.p. $x \in \partial\Omega$ $\beta(x,\cdot) = \partial j(x,\cdot)$, où $j \in \mathcal{J}_0(\partial\Omega)$. Les solutions entropiques sont définies comme suit :

Définition 2.5.1. *Une fonction mesurable $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une solution entropique de $(E)(f,g)$ si $u \in \mathcal{T}^{1,p}_{tr}(\Omega)$ et s'il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}_0(\partial\Omega)$ vérifiant*

$$\mu_r(x) \in \partial j(x,u(x)) + \partial I_{[\gamma_-(x),\gamma_+(x)]}(u(x)) \ \ p.p\ x \in \partial\Omega$$

telle que pour tout $\phi \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $k > 0$ on ait

$$\int_\Omega a(u,Du)\cdot DT_k(u-\phi) + \int_{\partial\Omega} gT_k(u-\phi) + \int_{\partial\Omega} T_k(\tilde{u}-\tilde{\phi})d\mu \leq \int_\Omega (f-u)T_k(u-\phi)$$

et

$$\tilde{u} = \gamma_{+/-} \quad \mu_s^{+/-} - p.p.\ sur\ \partial\Omega.$$

On a le résultat suivant d'existence et d'unicité de la solution entropique et le principe de contraction :

Théorème 2.5.1. *Pour tout $f \in L^1(\Omega)$ et $g \in L^1(\partial\Omega)$, il existe une unique solution entropique du problème $(E)(f,g)$.*
De plus, si u_1, respectivement u_2, est solution entropique du problème $(E)(f_1,g_1)$, respectivement de $(E)(f_2,g_2)$, alors

$$\int_\Omega |u_1 - u_2| \leq \int_\Omega |f_1 - f_2| + \int_{\partial\Omega} |g_1 - g_2|.$$

2.6 Remarques et problèmes ouverts

1)- L'hypothèse (H_4) n'est pas optimale. En effet, il est suffisant de supposer, par exemple, que a satisfait une certaine continuité Höldérienne et une hypothèse de croissance en r (cf. B. Andreianov et F. Bouhssis [7]). En revanche, la motivation première de ce travail n'étant pas d'étudier les hypothèses les moins restrictives sur a mais de se focaliser sur les conditions non linéaires sur le bord et quel concept de solutions sera adapté au problème elliptique $(E)(f)$.

2)- Par la théorie générale des semigroupes non linéaires, il est possible de résoudre, au sens de bonnes solutions, le problème d'évolution suivant :

$$\frac{du}{dt} + \mathcal{A}u = f, \quad u(0) = u_0$$

pour tout $u_0 \in L^1(\Omega)$ et $f \in L^1(0,T;L^1(\Omega))$, correspondant au problème

$$\begin{cases} u_t - \text{div } a(u,Du) = f & \text{sur} \quad Q \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur} \quad \Omega \\ -\langle a(u,Du), \eta\rangle \in \beta(x,u) & \text{sur} \quad \Sigma. \end{cases}$$

Naturellement il convient de voir dans quel sens ces bonnes solutions résolvent-elles notre problème. Pour l'heure, on n'a pas pu répondre à cette question, néanmoins une étape dans la compréhension des difficultés est donnée au chapitre suivant, qui est consacré à l'étude du problème :

$$(P)(u_0,f) \begin{cases} u_t - \text{div } a(u,Du) + \beta(\cdot,u) \ni f & \text{sur} \quad Q \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Sigma. \end{cases}$$

3)- Une autre question intéressante est d'étudier l'existence et l'unicité de solutions du problème suivant :

$$(S)(u_0,f) \begin{cases} \gamma(u) - \text{div } a(u,Du) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ -a(u,Du)\cdot\eta \in \beta(\cdot,u) & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où γ est un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R}^2$.
Le cas linéaire où $a(u,Du) = Du$ et avec la condition au bord $u_\nu + \beta(u) \ni 0$ sur $\partial\Omega$ a été étudié par Ph. Bénilan, M.G. Crandall et P. Sacks [20]. Dans ce cas, quelques conditions supplémentaires sur les graphes β et γ ont été nécessaires pour obtenir l'existence et l'unicité des solutions. Les conditions qui intervenaient principalement sont : $D(\gamma) \cap D(\beta) \neq \emptyset$ et $D(\gamma) \cap \beta^{-1}(0) \neq \emptyset$.
Récemment F. Andreu *et al* [8] ont étudié le problème

$$\begin{cases} \gamma(u) - \text{div } a(x,Du) \ni \phi & \text{dans} \quad \Omega \\ a(x,Du)\cdot\eta + \beta(u) \ni \psi & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\phi \in L^1(\Omega)$ et $\psi \in L^1(\partial\Omega)$. Ils prouvent, sous des conditions supplémentaires sur les graphes, l'existence et l'unicité de solutions faibles et entropiques pour ce dernier problème.

Chapitre 3

Solution entropique d'un problème parabolique avec absorption

3.1 Introduction

Dans ce travail, on s'intéresse au problème d'évolution suivant :

$$(P)(u_0, f) \begin{cases} u_t - \text{div}\ a(u, Du) + \beta(\cdot, u) \ni f & \text{sur} \quad Q := (0, T) \times \Omega \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Sigma := (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$ à frontière lipschitzienne, $T > 0$, $\beta(x, \cdot) = \partial j(x, \cdot)$ p.p. $x \in \Omega$, où $j : \Omega \times \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ mesurable en $x \in \Omega$, convexe s.c.i. en $r \in \mathbb{R}$ avec $j(\cdot, 0) = 0$, $f \in L^1(Q), u_0 \in L^1(\Omega)$ et $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est un champ vérifiant les hypothèses (H_1)-(H_4) énoncées à l'introduction générale.
La version stationnaire de $P(u_0, f)$, avec $a(u, Du)$ remplacé par $a(x, Du)$, a été étudiée par P. Wittbold [78], où elle montre l'existence d'une unique solution généralisée (cf. [78, Definition 2.6]). L'étude du problème parabolique en revanche, s'est avérée difficile pour cause de difficultés liées à la dépendance en x du graphe β, et est restée ouverte depuis. Dans ce chapitre, nous attaquons l'étude du problème $(P)(u_0, f)$ en s'inspirant des techniques du chapitre précédent.
Le plan de ce chapitre est le suivant : dans la Section 2 on donne quelques résultats qui nous permettent d'affirmer que le problème de Cauchy

$$u_t + A^\lambda_{m,n} \ni f, \quad u(0) = u_0$$

admet une unique bonne solution, où l'opérateur $A^\lambda_{m,n}$ est défini par $(u, f) \in A^\lambda_{m,n}$ si, et seulement si $u \in W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $f \in L^1(\Omega)$ et pour tout $\phi \in W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega a(u, Du) \cdot D(u - \phi) + \int_\Omega \beta_\lambda(\cdot, u)(u - \phi) + \int_\Omega \psi_{m,n}(u)(u - \phi) \leq \int_\Omega f(u - \phi),$$

où $\psi_{m,n}(r) = \frac{1}{m}r^+ - \frac{1}{n}r^-$, $r \in \mathbb{R}$, m, n fixés, et pour p.p. $x \in \Omega$ $\beta_\lambda(x,\cdot)$ est la régularisée de Yosida du graphe $\beta(x,\cdot)$. Le recours aux perturbations permet de dégager des estimations sur les solutions. Puis on va montrer que, lorsque $f \in L^\infty(Q)$ et $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, cette bonne solution est une solution faible du problème

$$(P_{\lambda,\lambda,m,n})(u_0,f) \begin{cases} u_t - \text{div } a(u,Du) + \beta_{\lambda,\lambda}(\cdot,u) + \psi_{m,n}(u) = f & \text{sur } Q \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

où $\beta_{\lambda,\nu}(r) = \beta_\lambda(r^+) + \beta_\nu(-r^-)$. On note $(P_{\lambda,\nu,m,n})(u_0,f)$ le problème obtenu en remplaçant dans le problème précédent $\beta_{\lambda,\lambda}$ par $\beta_{\lambda,\nu}$. L'étape qui suit consiste alors à passer à la limite avec $\lambda \to 0$ et à montrer l'existence de solutions faibles pour le problème

$$(P_{m,n})(u_0,f) \begin{cases} u_t - \text{div } a(u,Du) + \beta(\cdot,u) + \psi_{m,n}(u) \ni f & \text{sur } Q \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

Ce passage à la limite nécessite une régularité de la donnée initiale (cf. Proposition 3.2.2). A ce dernier problème, on associera un opérateur $A_{m,n}$ défini par :
$(u,f) \in A_{m,n}$ si, et seulement si $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, $f \in L^1(\Omega)$ et s'il existe une mesure $\mu \in \mathcal{M}_0(\Omega)$ vérifiant $\mu_r(x) \in \partial j(x,u(x)) + \partial I_{[\gamma_-(x),\gamma_+(x)]}(u(x))$ p.p. $x \in \Omega$ et pour tout $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega a(u,Du)\cdot D(u-\phi) + \int_\Omega \psi_{m,n}(u)(u-\phi) \leq \int_\Omega f(u-\phi) - \int_\Omega (\tilde{u}-\tilde{\phi})d\mu$$

et

$$\tilde{u} = \gamma_{+/-} \quad \mu_s^{+/-} - \text{p.p. sur } \Omega,$$

où $\tilde{u}$ est le représentant quasi-continu de u et $\gamma_{+/-}$ sont des fonctions quasi semi continues inférieurement et supérieurement, respectivement, liées à la fonctionnelle j (cf. Lemme 3.2.1).
Puis par passage à la limite dans $(P_{m,n})(u^0_{m,n}, f_{m,n})$, où $f_{m,n}$ et $u^0_{m,n}$ sont des approximations bi-monotones (cf. Lemme 3.3.1) de f et u_0 respectivement, on montre l'existence de solutions, dites entropiques, du problème initial $(P)(u_0,f)$ pour $f \in L^1(Q)$ et une donnée initiale u_0 régulière.
A la Section 4, on montre l'unicité de la solution entropique en s'appuyant sur une méthode d'approximation. L'approche directe étant difficile à mettre en oeuvre pour l'instant.
On termine le chapitre par un Annexe où on donnera quelques résultats, utilisés dans les étapes précédentes, sur le problème

$$u + Au + Bu \ni f,$$

où $A = \overline{A_0}^{\|\cdot\|_{L^1}}$ est la fermeture de l'opérateur A_0 défini sur $D(A_0) := \{h \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega); -\text{div } a(h, Dh) \in L^\infty(\Omega)\}$ par $A_0 u := -\text{div } a(u, Du)$, et B est l'opérateur défini sur $L^1(\Omega)$ par

$$w \in Bu \Leftrightarrow w, u \in L^1(\Omega), w(x) \in \partial j(x, u(x)) \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

On notera que A est un opérateur m-T-accrétif dans $L^1(\Omega)$. On montre aussi dans le même Annexe un résultat d'injection d'espaces intervenants dans notre problème (cf. Lemme 3.2.4) et qui joue un rôle clef pour la définition des solutions faibles et entropiques.

3.2 Existence de solutions faibles

Comme K. Ammar et P. Wittbold [5], on peut montrer que l'opérateur $\overline{A^\lambda_{m,n}}^{\|\cdot\|_{L^1}}$ est m-T-accrétif dans $L^1(\Omega)$ et à domaine dense dans $L^1(\Omega)$, ce qui nous assure, par la théorie des semigroupes non linéaires, l'existence d'une unique bonne solution $u \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ du problème de Cauchy :

$$u_t + A^\lambda_{m,n} u \ni f, \ u(0) = u_0, \tag{3.1}$$

correspondant au problème d'évolution

$$(P_{\lambda,\lambda,m,n})(u_0, f) \begin{cases} u_t - \text{div } a(u, Du) + \beta_{\lambda,\lambda}(\cdot, u) + \psi_{m,n}(u) = f & \text{sur } Q \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

La question qui se pose est : est-ce que cette bonne solution est une solution faible du problème $(P_{\lambda,\lambda,m,n})(u_0, f)$ au sens suivant :

Définition 3.2.1. *Une fonction mesurable $u : Q \to \mathbb{R}$ est une solution faible de $(P_{\lambda,\lambda,m,n})(u_0, f)$ si $u \in C([0,T]; L^1(\Omega)) \cap L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ et vérifie*

$$\begin{aligned} & -\int_Q (u_\lambda - u_0)\phi_t + \int_Q a(u_\lambda, Du_\lambda) \cdot D\phi + \int_Q \psi_{m,n}(u_\lambda)\phi \\ \leq \ & \int_Q f\phi - \int_Q \beta_{\lambda,\lambda}(\cdot, u_\lambda)\phi \end{aligned} \tag{3.2}$$

pour tout $\phi \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ avec $\phi_t \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega))$ et $\phi(T) = 0$.

La réponse est oui. En effet,

Proposition 3.2.1. *Soient $f \in L^\infty(Q)$ et $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Alors la bonne solution du problème de Cauchy (3.1) est une solution faible de $(P_{\lambda,\lambda,m,n})(u_0, f)$.*

Preuve. Considérons le problème discrétisé en temps suivant :

$$\frac{u_i^\varepsilon - u_{i-1}^\varepsilon}{t_i - t_{i-1}} + A_{m,n}^\lambda u_i^\varepsilon \ni f_i^\varepsilon,$$

avec :
- $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_l \leq T$ tels que $t_i - t_{i-1} < \varepsilon$ $\forall i = 1, \cdots, l$ et $T - t_l < \varepsilon$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{l} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f(t) - f_i^\varepsilon\|_1 dt \leq \varepsilon$ avec $\|f_i^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|f\|_{L^\infty(Q)}$ pour tout $i = 1, \cdots, l$
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{l} (t_i - t_{i-1}) \|f_i^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \int_0^T \|f(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} dt.$

Pour tout $f_i^\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$, il existe $u_i^\varepsilon \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ vérifiant

$$\int_\Omega \frac{u_i^\varepsilon - u_{i-1}^\varepsilon}{t_i - t_{i-1}} \phi + \int_\Omega a(u_i^\varepsilon, Du_i^\varepsilon) \cdot D\phi + \int_\Omega \psi_{m,n}(u_i^\varepsilon)\phi = \int_\Omega f_i \phi - \int_\Omega \beta_{\lambda,\lambda}(\cdot, u_i^\varepsilon)\phi \tag{3.3}$$

pour tout $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. On note u_ε la fonction constante par morceaux définie par $u_\varepsilon(t) = u_i^\varepsilon$ pour tout $t \in]t_{i-1}, t_i]$, $u_\varepsilon(0) = u_0$. Par la théorie générale des semigroupes non linéaires, u_ε converge dans $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$ vers la bonne solution u du problème de Cauchy (3.1). D'autre part, toujours d'après les résultats du cas stationnaire, on a pour tout i l'estimation suivante :

$$\|u_i^\varepsilon\|_\infty \leq \|u_0\|_\infty + \sum_{j=1}^{i} (t_j - t_{j-1}) \|f_j^\varepsilon\|_\infty + C_{m,n},$$

où $C_{m,n}$ est une constante dépendant de m et n. Ainsi,

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(Q)} \leq C(\|f\|_{L^\infty(Q)}, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, m, n). \tag{3.4}$$

Soit la fonction $\zeta(r) = \frac{r^2}{2}$ [qui vérifie $\zeta(r) - \zeta(\tilde{r}) \leq (r - \tilde{r})r$], en choisissant la fonction test $\phi = u_i^\varepsilon$ dans l'équation (3.3) et en sommant sur $i = 1, \cdots, l$, on obtient après avoir utilisé l'hypothèse (H_2), le théorème de Gauss-Green et la monotonie de la fonction $\psi_{m,n}$

$$\int_\Omega \zeta(u_\varepsilon(t)) + \lambda_0 \int_Q |Du_\varepsilon|^p \leq \int_Q f_\varepsilon u_\varepsilon + \int_\Omega \zeta(u_0).$$

Or u_ε est uniformément bornée en ε, et $u_0 \in L^1(\Omega)$, d'où, en convenant de noter C toute constante indépendante de ε,

$$\int_Q |Du_\varepsilon|^p \leq C.$$

D'où l'estimation uniforme en ε

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \leq C. \tag{3.5}$$

Il existe une fonction mesurable u telle que, pour une sous-suite encore notée $(u_\varepsilon)_\varepsilon$, on a

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)).$$

Soit la fonction $\widehat{u}_\varepsilon(t) = u_{i-1}^\varepsilon + \dfrac{t-t_{i-1}}{t_i - t_{i-1}}(u_i^\varepsilon - u_{i-1}^\varepsilon)$ pour $t \in [t_{i-1}, t_i], i = 1, \cdots, l$. Elle est continue, affine par morceaux, et vérifie pour tout $t \in]t_{i-1}, t_i], (\widehat{u}_\varepsilon)_t(t) = \dfrac{u_i^\varepsilon - u_{i-1}^\varepsilon}{t_i - t_{i-1}}$ et $\widehat{u}_\varepsilon \to u$ dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$. D'où

$$u \in C([0,T];L^1(\Omega)).$$

En choisissant la fonction test $\phi = \frac{1}{k}T_k(u_i^\varepsilon)$ dans l'équation (3.3), en intégrant sur $(0,T)$ et en passant à la limite avec $k \to 0$, on obtient

$$\int_Q |\beta_{\lambda,\lambda}(\cdot, u_\varepsilon)| \leq C.$$

Grâce à l'estimation (3.4) et au fait que $u_\varepsilon \to u$ p.p. sur Q on a

$$\beta_{\lambda,\lambda}(\cdot, u_\varepsilon) \to \beta_{\lambda,\lambda}(\cdot, u) \text{ dans } L^1(Q) \text{ lorsque } \varepsilon \to 0.$$

D'autre part, $(a(u_\varepsilon, Du_\varepsilon))_\varepsilon$ est bornée dans $(L^{p'}(Q))^N$, donc, quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, on peut supposer que $a(u_\varepsilon, Du_\varepsilon)$ converge faiblement dans $(L^{p'}(Q))^N$ vers χ lorsque $\varepsilon \to 0$. Montrons que div $a(u, Du) =$ div χ. Pour cela il suffit de montrer

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \int_Q a(u_\varepsilon, Du_\varepsilon) \cdot D(u_\varepsilon - u) \leq 0, \tag{3.6}$$

et d'utiliser ensuite l'argument classique de monotonie. En considérant dans l'équation (3.3) la fonction test $(u_i^\varepsilon - u)$ et en sommant sur $i = 1, \cdots, l$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_Q a(u_\varepsilon, Du_\varepsilon) \cdot D(u_\varepsilon - u) \\
\leq \; & \int_Q f_\varepsilon(u_\varepsilon - u) - \int_Q (u_\varepsilon - u)\beta_{\lambda,\lambda}(\cdot, u_\varepsilon) - \int_Q \psi_{m,n}(u_\varepsilon)(u_\varepsilon - u) \\
& - \int_0^T \langle (u_\varepsilon)_t - u_t, (u_\varepsilon - u)\rangle - \int_0^T \langle u_t, (u_\varepsilon - u)\rangle \\
\leq \; & \int_Q f_\varepsilon(u_\varepsilon - u) - \int_Q (u_\varepsilon - u)\beta_{\lambda,\lambda}(\cdot, u) - \int_Q \psi_{m,n}(u)(u_\varepsilon - u) \\
& + \frac{1}{2}\int_\Omega |u_\varepsilon - u|^2(0) - \frac{1}{2}\int_\Omega |u_\varepsilon - u|^2(T) - \int_0^T \langle u_t, u_\varepsilon - u\rangle,
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule d'intégration par parties de H.W. ALT ET S. LUCKHAUS [2] et la monotonie de $\beta_{\lambda,\lambda}$ et $\psi_{m,n}$. On a, grâce au théorème de la convergence dominée, $\limsup_{\varepsilon\to 0}\int_Q a(u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\cdot D(u_\varepsilon - u) \leq 0$, ce qui prouve (3.6).
Soient maintenant $\phi \in \mathcal{D}(Q)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}
\alpha \int_Q \chi \cdot D\phi &\geq \lim_{\varepsilon\to 0} \alpha \int_Q a(u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\cdot D\phi \\
&\geq \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_Q a(u_\varepsilon, Du_\varepsilon)\cdot D(u_\varepsilon - u + \alpha\phi) \\
&\geq \limsup_{\varepsilon\to 0} \int_Q a(u_\varepsilon, D(u-\alpha\phi))\cdot D(u_\varepsilon - u + \alpha\phi) \\
&\geq \alpha \int_Q a(u, D(u-\alpha\phi))\cdot D\phi.
\end{aligned}$$

En divisant par $\alpha > 0$, respectivement par $\alpha < 0$, et en passant à la limite avec $\alpha \to 0$, on obtient div $a(u, Du) =$ div χ dans $\mathcal{D}'(Q)$.
En passant à la limite avec $\varepsilon \to 0$ dans l'équation de départ, on obtient une solution faible $u^\lambda_{m,n}$ du problème $(P_{\lambda,\lambda,m,n})(u_0, f)$. ∎

Remarque 3.2.1. *Il convient de retenir la propriété suivante : si u est solution faible de $(P_{\lambda,\lambda,m,n})(u_0, f)$, alors $-u$ est solution faible du problème $u_t +$ div $\tilde{a}(u, Du)+\tilde{\beta}_\lambda(\cdot, u)+\tilde{\psi}_{m,n}(u) = \tilde{f}$, où $\tilde{a}(r, \xi) = -a(-r, -\xi)$, $\tilde{\beta}_\lambda(\cdot, r) = -\beta_\lambda(\cdot, -r)$, $\tilde{\psi}_{m,n}(r) = -\psi_{m,n}(-r)$ et $\tilde{f} = -f$.* ◇

En vue de définir rigoureusement la notion de solutions faibles du problème $(P_{m,n})(u_0, f)$ on rappelle brièvement quelques résultats utiles à la suite de l'exposé. Etant donnée une fonctionnelle $j \in \mathcal{J}_0(\Omega)$, on définit

$$\begin{aligned}
\mathcal{J} : W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) &\longrightarrow [0, \infty] \\
u &\longmapsto \int_\Omega j(\cdot, u)dx.
\end{aligned}$$

Les deux résultats qui suivent, analogues aux Lemmes 2.2.1 et 2.2.2, donnent quelques propriétés de $\mathcal{J}$.

Lemme 3.2.1. *[11, Théorème 3.7] Il existe d'uniques (dans le sens q.p.) fonctions γ_+ et γ_- quasi-s.c.i. et quasi-s.c.s., respectivement, telles que*

$$\overline{D(\mathcal{J})}^{\|\cdot\|_{1,p}} = \{u \in W^{1,p}_0(\Omega);\ \gamma_-(x) \leq \tilde{u}(x) \leq \gamma_+(x) \quad q.p.\ sur\ \ \Omega\}.$$

De plus, $\gamma_-(x) = \inf_n \tilde{u}_n(x) = \lim_n \inf_{1\leq k\leq n} \tilde{u}_k(x)$ et $\gamma_+(x) = \sup_n \tilde{u}_n(x)$ q.p. $x \in \Omega$ pour toute suite $(u_n)_n$ dense dans $D(\mathcal{J})$.

Lemme 3.2.2. *[28, Proposition 20] Soit $\mu \in \mathcal{M}_0(\Omega)$, alors*

$$\mu \in \partial\mathcal{J}(u) \Longleftrightarrow \begin{cases} \mu_r(x) \in j(x,u(x)) + \partial I_{[\gamma_-(x),\gamma_+(x)]}(u(x)) \ \textit{p.p. } x \in \Omega \\ \textit{et} \ \ \tilde{u} = \gamma_- \ \ \mu_s^- - \textit{p.p. sur } \Omega, \quad \tilde{u} = \gamma_+ \ \ \mu_s^+ - \textit{p.p. sur } \Omega, \end{cases}$$

où pour un intervalle donné $[a,b]$, $I_{[a,b]}$ désigne la fonctionnelle convexe et s.c.i. sur $\mathbb{R}$ définie par 0 sur $[a,b]$, et $+\infty$ ailleurs.

Comme le dual de $C_0(\Omega)$ s'identifie à $\mathcal{M}_b(\Omega)$, et comme $C_0(\Omega)$ est séparable, d'après la Section 1.1 on peut définir

$$L^1(0,T;w^*\!-\!\mathcal{M}_b(\Omega)) := \{\mu : (0,T) \to \mathcal{M}_b(\Omega) \ \ w^*\text{-mesurable}; \ \int_0^T \|\mu(t)\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} dt < \infty\}.$$

On pose aussi

$$L_0^1(0,T;w^*\!-\mathcal{M}_b(\Omega)) := \{\mu \in L^1(0,T;w^*\!-\mathcal{M}_b(\Omega)); \ \mu(t) \in \mathcal{M}_0(\Omega)\}.$$

On définit la notion de solutions faibles du problème $(P_{m,n})(u_0,f)$ comme suit :

Définition 3.2.2. *Une fonction mesurable $u : Q \to \mathbb{R}$ est dite solution faible de $(P_{m,n})(u_0,f)$ si $u \in C([0,T];L^1(\Omega)) \cap L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ et s'il existe une mesure $\mu \in L_0^1(0,T;w^*\!-\!\mathcal{M}_b(\Omega))$ telle que*

$$\mu_r(t) \in \partial j(\cdot,u(t)) + \partial I_{[\gamma_-(\cdot),\gamma_+(\cdot)]}(u(t)) \quad \textit{p.p. sur } \Omega \textit{ pour presque tout } t$$

de sorte que pour tout $\phi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ on ait

$$-\int_Q (u-u_0)\phi_t + \int_Q a(u,Du)\cdot D\phi + \int_Q \psi_{m,n}(u)\phi \le \int_Q f\phi - \int_Q \tilde{\phi}(t)d\mu(t)dt$$

et

$$\tilde{u}(t) = \gamma_{+/-} \ \ \mu_s^{+/-}(t) - \textit{p.p. sur } \Omega \textit{ pour presque tout } t.$$

Ici et dans la suite, $\tilde{u}(t)$ désigne le représentant quasi-continu de $u(t)$.

L'exemple suivant en dimension 1 montre que le deuxième terme apparaissant dans la caractérisation de la partie régulière de la mesure est nécessaire.

Exemple 3.2.1. Ecrivons $\mathbb{Q} = \{r_i, \ i \in \mathbb{N}^*\}$. Soient $R := \{r; \ \exists i \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } |r - r_i| \le 1/2^{i+2}\}$ et $f \in L^1(Q)$ avec $f < 0$. Considérons le problème suivant posé sur $\Omega = (0,1)$

$$(I)\begin{cases} u_t - u_{xx} + \beta(\cdot,u) \ni f & \text{sur } \ Q \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur } \ \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \ \Sigma, \end{cases}$$

où $\beta(\cdot,r) = \partial j(\cdot,r)$ avec $j(x,r) = \chi_R(x) j_1(r)$, et

$$j_1(r) = \begin{cases} \infty & \text{si} \quad r < 0 \\ 0 & \text{si} \quad r \geq 0. \end{cases}$$

Pour ce j, on a clairement

$$\overline{D(\mathcal{J})}^{1,p} = \{u \in W_0^{1,p}(0,1);\ 0 \leq \tilde{u}(x) \leq +\infty \text{ q.p. } x \in (0,1)\},$$

c'est-à-dire $\gamma_- = 0$ et $\gamma_+ = +\infty$. Rappelons qu'en dimension un d'espace, il n'y a pas d'ensemble de capacité nulle et par suite, la fonction $\tilde{u}$ est continue. Le principe de contraction implique que $u(t) \leq f(t) \leq 0$ p.p. sur Ω. D'autre part $u(t) \in \overline{D(\mathcal{J})}^{1,p}$ implique $u(t) \geq 0$ q.p. sur Ω pour presque tout t. Par conséquent $u = 0$ est la seule solution du problème (I). Alors, d'après la définition de solutions faibles, il existe une mesure telle que $\mu = f$ dans $\mathcal{D}'(Q)$, ce qui implique que la mesure μ est régulière. Mais remarquons que l'on ne peut pas se contenter de $\mu_r(t) \in \partial j(\cdot, u(t))$ p.p. t, car alors pour tout $x \in (0,1)\backslash R$, on a $f(t) = \mu_r(t) = 0$ pour presque tout t, ce qui contredit l'hypothèse. L'ajout du terme $\partial I_{[0,+\infty]}(u(t))$ est donc nécessaire.

L'exemple qui suit montre que la partie singulière de la mesure est aussi indispensable.

Exemple 3.2.2. Soient $\Omega = (-2,2)$ et $f \in L^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-2,0) \\ -1-(x-2)^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit la fonctionnelle $j \in \mathcal{J}_0(\Omega)$ donnée par

$$j(x,r) = \begin{cases} 0 & x \in (-2,0) \text{ et } r \leq 0, \text{ ou } x \in (0,2) \text{ et } r \geq 0 \\ +\infty & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

et considérons le problème suivant

$$(II) \begin{cases} u_t - u_{xx} + \partial j(\cdot,u) \ni f & \text{sur} \quad Q \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sur} \quad \Sigma. \end{cases}$$

On peut montrer que ce dernier problème admet une solution u dont la mesure correspondante vérifie

$$\mu_r(t) \in \partial j(\cdot,u(t)) + \partial I_{[\gamma_-(\cdot),\gamma_+(\cdot)]}(u(t)) \quad \text{p.p. sur } \Omega \text{ pour presque tout } \ t,$$

où

$$\gamma_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,2[\\ -\infty & \text{si } x \in]-2,0[\end{cases}$$

et

$$\gamma_+(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-2,0] \\ +\infty & \text{si } x \in]0,2[, \end{cases}$$

et $u(t) = \gamma_{+/-}\ \ \mu_s^{+/-} -$ p.p. sur Ω pour presque tout t.

Remarque 3.2.2. *Dans le cas où le graphe β ne dépend pas de x, la mesure μ n'apparaît pas dans la définition de solutions faibles. En effet, l'opérateur T-accrétif A_0, défini précédemment, vérifie $R(I + A_0) = L^1(\Omega)$ et le principe du maximum : $\|J_\rho^{A_0}(u)\|_\infty \leq \|u\|_\infty$ pour tout $u \in L^\infty(\Omega)$, $\rho > 0$, et d'après le résultat de* M. Beye *[23, Proposition 4.1], si β ne dépend pas de x, l'opérateur $\overline{A_0}^{\|\cdot\|_{L^1}} + B$ est m-T-accrétif dans $L^1(\Omega)$, et a fortiori la mesure μ n'apparaîtra pas dans la définition de solutions.* $\Diamond$

Le passage à la limite dans $(P_{\lambda,\lambda,m,n})(u_0, f)$ nécessite quelques hypothèses supplémentaires. Pour les introduire nous avons besoin de quelques notations et définitions. Par B on désigne l'opérateur défini sur $L^1(\Omega)$ par

$$w \in Bu \Leftrightarrow w, u \in L^1(\Omega),\ w(x) \in \partial j(x, u(x)) \ \text{ p.p. } x \in \Omega.$$

Soit B_λ l'opérateur associé à j_λ, où $j_\lambda(x,r) = \inf_{s\in\mathbb{R}}\{1/(2\lambda)|r-s|^2 + j(x,s)\}$ (i.e. l'analogue de B avec j remplacé par j_λ). On note $\mathcal{A}_j := \liminf_{\lambda\to 0} A + B_\lambda$, c'est une extension m-T-accrétive de l'opérateur $A + B$ (cf. Théorème 3.5.1).

Nous avons également besoin de rappeler les notions de sous et sur-solutions.

Définition 3.2.3. *[14] Soit A un opérateur m-T-accrétif dans $L^1(\Omega)$. On dit que v est une sous-solution (respectivement une sur-solution) du problème $y \in Av$ si, et seulement si il existe un $\varrho_0 > 0$ tel que*

$$v \leq J_\varrho^A(v + \varrho y) \ (\textit{respectivement } v \geq J_\varrho^A(v + \varrho y)) \ \ \textit{pour } 0 < \varrho < \varrho_0,$$

où J_ϱ^A désigne la résolvante de l'opérateur A.

Introduisons les ensembles suivants :

$$\mathcal{C}_\lambda := \left\{ u \in L^\infty(\Omega);\ \begin{array}{l} \exists y_{+/-}, v \in L^\infty(\Omega) \text{ avec } \pm v^{+/-} \text{ est sous/sur-solution de} \\ (A + B_\lambda)(\pm v^{+/-}) \ni y_{+/-} \text{ tels que } -v^- \leq u \leq v^+ \end{array} \right\}$$

et

$$\mathcal{C} := \left\{ u \in L^\infty(\Omega);\ \begin{array}{l} \exists y_{+/-}, v \in L^\infty(\Omega) \text{ avec } \pm v^{+/-} \text{ est sous/sur-solution de} \\ \mathcal{A}_j(\pm v^{+/-}) \ni y_{+/-} \text{ tels que } -v^- \leq u \leq v^+ \end{array} \right\}.$$

Il est immédiat de voir que l'ensemble $\mathcal{C}$ est stable par le sup et que $\mathcal{C}_\lambda \subset \mathcal{C}$. L'intéret de l'ensemble $\mathcal{C}$ vient de la proposition suivante.

Proposition 3.2.2. *Soient $f \in L^\infty(Q)$ et $u_0 \in \mathcal{C}$. Alors le problème $(P_{m,n})(u_0, f)$ admet une solution faible.*

Preuve. La preuve se fera en plusieurs étapes :

Étape 1 : Principe de contraction dans $L^1(\Omega)$

Soient u_1 et u_2 deux solutions faibles de $(P_{m,n})(u_{01}, f_1)$ et $(P_{m,n})(u_{02}, f_2)$ respectivement. En considérant la fonction test $\frac{1}{k}T_k(u_1 - u_2)$ dans les inégalités correspondants aux deux solutions et en les sommant, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_{u_{01}-u_{02}}^{u_1-u_2} \frac{1}{k}T_k(r)dr + \frac{1}{k}\int_Q (a(u_1, Du_1) - a(u_2, Du_2)) \cdot DT_k(u_1 - u_2) \\
&+\frac{1}{k}\int_Q (\psi_{m,n}(u_1) - \psi_{m,n}(u_2))T_k(u_1 - u_2) \\
\leq\ & \frac{1}{k}\int_Q (f_1 - f_2)T_k(u_1 - u_2) - \frac{1}{k}\int_Q T_k(\tilde{u}_1(t) - \tilde{u}_2(t))(d\mu_1(t) - d\mu_2(t)).
\end{aligned}$$

Notons que la dernière intégrale peut être décomposée comme suit :

$$\begin{aligned}
&\int_Q T_k(u_1 - u_2)(\mu_{r,1}(t) - \mu_{r,2}(t)) + \int_Q T_k(\gamma_+ - \tilde{u}_2(t))d\mu^+_{s,1}(t) \\
&- \int_Q T_k(\tilde{u}_1(t) - \gamma_+)d\mu^+_{s,2}(t) - \int_Q T_k(\gamma_- - \tilde{u}_2(t))d\mu^-_{s,1}(t) + \int_Q T_k(\tilde{u}_1(t) - \gamma_-)d\mu^-_{s,2}(t),
\end{aligned} \tag{3.7}$$

qui est clairement positive par les propriétés des mesures et des fonctions $\gamma_{+/-}$. En utilisant les hypothèses (H_1) et (H_4) et la monotonie de $\psi_{m,n}$, on obtient après passage à la limite avec $k \to 0$

$$\int_\Omega |u_1 - u_2|(t) - \int_\Omega |u_{01} - u_{02}| \leq \int_Q |f_1 - f_2|$$

pour presque tout t.

Étape 2 : Estimations *a priori* et convergences

Soient $\lambda, \nu > 0$, et $u_{\lambda,\nu}$ la solution du problème $(P_{\lambda,\nu,m,n})(u_0, f)$. Par l'inégalité (3.4), on a l'estimation suivante uniforme en λ et ν,

$$\|u_{\lambda,\nu}\|_{L^\infty(Q)} \leq C. \tag{3.8}$$

En considérant la fonction test $\phi = u_{\lambda,\nu}$ dans l'inégalité (3.2) et en utilisant la formule d'intégration par parties, les hypothèses (H_2) et (H_3), le théorème de Gauss-Green, la monotonie de $\psi_{m,n}$ et l'estimation (3.8), on déduit

$$\int_Q |Du_{\lambda,\nu}|^p \leq C,$$

où C est une constante indépendante de λ et ν. Ainsi, la suite $(u_{\lambda,\nu})_{\lambda,\nu}$ est bornée dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$.
Maintenant pour pouvoir passer à la limite avec $\lambda,\nu \to 0$ dans le problème $(P_{\lambda,\nu,m,n})$, on va montrer que $u_{\lambda,\nu}$ converge fortement dans $L^1(Q)$, et cela en s'appuyant sur la monotonie de cette suite en λ et ν. Soient $\lambda > \tilde{\lambda} > 0, \nu > 0$. En considérant la fonction test $p_\varepsilon^+(u_{\lambda,\nu} - u_{\tilde{\lambda},\nu}), \varepsilon > 0$ ($p_\varepsilon^+(\cdot)$ est une approximation du $\mathrm{sign}_0^+(\cdot)$) dans les inégalités correspondants aux solutions $u_{\lambda,\nu}, u_{\tilde{\lambda},\nu}$ et en les additionnant, on obtient après avoir utilisé la formule d'intégration par parties

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_0^{(u_{\lambda,\nu}-u_{\tilde{\lambda},\nu})(t)} p_\varepsilon^+(r)dr + \int_Q (a(u_{\lambda,\nu}, Du_{\lambda,\nu}) - a(u_{\tilde{\lambda},\nu}, Du_{\tilde{\lambda},\nu})) \cdot Dp_\varepsilon^+(u_{\lambda,\nu} - u_{\tilde{\lambda},\nu}) \\
&+ \int_Q (\beta_{\lambda,\nu}(\cdot, u_{\lambda,\nu}) - \beta_{\tilde{\lambda},\nu}(\cdot, u_{\tilde{\lambda},\nu}))p_\varepsilon^+(u_{\lambda,\nu} - u_{\tilde{\lambda},\nu}) \\
&+ \int_Q (\psi_{m,n}(u_{\lambda,\nu}) - \psi_{m,n}(u_{\tilde{\lambda},\nu}))p_\varepsilon^+(u_{\lambda,\nu} - u_{\tilde{\lambda},\nu}) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses (H_1) et (H_4), il est clair que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \int_Q (a(u_{\lambda,\nu}, Du_{\lambda,\nu}) - a(u_{\tilde{\lambda},\nu}, Du_{\tilde{\lambda},\nu})) \cdot Dp_\varepsilon^+(u_{\lambda,\nu} - u_{\tilde{\lambda},\nu}) \geq 0.$$

Ainsi en passant à la limite avec ε et en négligeant tous les termes positifs, on obtient

$$\int_Q (\psi_{m,n}(u_{\lambda,\nu}) - \psi_{m,n}(u_{\tilde{\lambda},\nu}))^+ \leq 0.$$

Or $\psi_{m,n}$ est strictement croissante, d'où

$$u_{\lambda,\nu} \leq u_{\tilde{\lambda},\nu} \text{ p.p. sur } Q.$$

De même, on peut montrer que pour tout $\nu > \tilde{\nu} > 0$, et tout $\lambda > 0$ on a $u_{\lambda,\nu} \geq u_{\lambda,\tilde{\nu}}$ p.p. sur Q. L'estimation (3.8) implique, grâce au théorème de la convergence monotone, que

$$u_{\lambda,\nu} \downarrow_\lambda u_{0,\nu} \uparrow_\nu u \;\text{ et } u_{\lambda,\nu} \uparrow_\nu u_{\lambda,0} \downarrow_\lambda u \;\text{ dans } L^1(Q).$$

Par un procédé diagonal, on peut trouver une fonction $\nu(\lambda)$ telle que $u_\lambda := u_{\lambda,\nu(\lambda)} \to u$ dans $L^1(Q)$. Quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, on déduit

$$u_\lambda \rightharpoonup u \;\text{ faiblement dans } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)),$$

$$u_\lambda \to u \text{ dans } C([0,T];L^1(\Omega))$$

et

$$u_\lambda \to u \;\text{ p.p. sur } Q.$$

Étape 3 : Existence d'une mesure

Rappelons que la fonction u_λ vérifie

$$-\int_Q (u_\lambda - u_0)\phi_t + \int_Q a(u_\lambda, Du_\lambda)\cdot D\phi + \int_Q \psi_{m,n}(u_\lambda)\xi \leq \int_Q f\phi - \int_Q \beta_{\lambda,\lambda}(\cdot, u_\lambda)\phi. \tag{3.9}$$

En choisissant dans l'inégalité (3.9) la fonction test $\frac{1}{k}T_k(u_\lambda)$ et en utilisant l'hypothèse (H_2) et la formule d'intégration par parties de Alt-Luckhaus, on déduit que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega \int_{u_0}^{u_\lambda(t)} \frac{1}{k}T_k(r)dr + \frac{1}{k}\int_Q a(u_\lambda, 0)\cdot DT_k(u_\lambda) + \frac{1}{k}\int_Q \beta_{\lambda,\lambda}(u_\lambda)T_k(u_\lambda)\\
\leq\ & \frac{1}{k}\int_Q fT_k(u_\lambda) - \frac{1}{k}\int_Q \psi_{m,n}(u_\lambda)T_k(u_\lambda).
\end{aligned}$$

Par la monotonie de la fonction $\psi_{m,n}$ et le théorème de Gauss-Green, on déduit, après passage à la limite avec $k \to 0$, que

$$\int_Q |\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda)| \leq C,$$

où C est une constante indépendante de λ. Ainsi $(\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda))_\lambda$ est bornée dans $\mathcal{M}_b(Q)$. D'autres informations sur β_λ sont données par le lemme suivant :

Lemme 3.2.3. *La suite $(\beta_\lambda)_\lambda$ vérifie les propriétés suivantes :*

$$(\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda))_\lambda \ \ \textit{est bornée dans}\ \ L^\infty(0,T;\mathcal{M}_b(\Omega)),$$

$$\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda) \rightharpoonup \mu \ \textit{faiblement dans}\ L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$$

et

$$\mu \in L^1_0(0,T; w^*\!-\!\mathcal{M}_b(\Omega)).$$

Preuve. Notons tout d'abord que

$$\psi_{m,n}(r) = \frac{1}{m}r^+ - \frac{1}{n}r^- = \frac{1}{m}r + (\frac{1}{m} - \frac{1}{n})r^- = (\frac{1}{m} - \frac{1}{n})r^+ + \frac{1}{n}r =: \phi_{m,n}(r) + \frac{1}{n}r.$$

On a $u_0 \in \mathcal{C}_\lambda$, donc $\exists y_+, v \in L^\infty(\Omega)$ telles que $u_0 \leq v^+$, avec v^+ sous-solution de $(A + B_\lambda)(v^+) \ni y_+$. On a alors $v^+ \leq J_n^{A+B_\lambda}(v^+ + ny_+) := w$
La fonction $w \in D(A + B_\lambda)$ est solution du problème

$$\begin{cases} \frac{1}{n}w - \operatorname{div}\, a(w, Dw) + \beta_\lambda(\cdot, w) + \phi_{m,n}(w) = \frac{1}{n}v^+ + y_+ + \phi_{m,n}(w) & \text{dans}\ \ \Omega\\ w = 0 & \text{sur}\ \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Soit v_λ une solution du problème stationnaire suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{n}v_\lambda - \operatorname{div}\, a(v_\lambda, Dv_\lambda) + \beta_\lambda(\cdot, v_\lambda) + \phi_{m,n}(v_\lambda) = g & \text{dans} \quad \Omega \\ v_\lambda = 0 & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où $g \in L^\infty(\Omega)$ est choisie de sorte que $g \geq \max\{\frac{1}{n}v^+ + y_+ + \phi_{m,n}(w), \|f\|_\infty\}$.
On peut montrer que $\|v_\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C$ et

$$\beta_\lambda(\cdot, v_\lambda) \in (L^\infty(\Omega) + W^{-1,p'}(\Omega)) \cap \mathcal{M}_b(\Omega) = W^{-1,p'}(\Omega) \cap \mathcal{M}_b(\Omega),$$

de plus

$$\|\beta_\lambda(\cdot, v_\lambda)\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} \leq \ C \text{ et } \|\beta_\lambda(\cdot, v_\lambda)\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} \leq C \quad (\text{unif. en } \lambda).$$

On affirme aussi que $v_\lambda \geq u_0$. En effet, en comparant les deux solutions v_λ et w, on a

$$\int_\Omega (w - v_\lambda)^+ \leq n \int_\Omega \left[\frac{1}{n}v^+ + y_+ + \phi_{m,n}(w) - g\right]^+.$$

Par le choix de g, on obtient $v_\lambda \geq w \geq v^+ \geq u_0$. D'où le résultat.
D'autre part, on remarque que v_λ est aussi solution de

$$(I) \begin{cases} v_{\lambda,t} - \operatorname{div}\, a(v_\lambda, Dv_\lambda) + \beta_\lambda(\cdot, v_\lambda) + \psi_{m,n}(v_\lambda) = g & \text{sur} \ \ Q \\ v_\lambda(0, \cdot) = v_\lambda & \text{sur} \ \ \Omega \\ v_\lambda = 0 & \text{sur} \ \ \Sigma. \end{cases}$$

Considérons dans $(P_{\lambda,\lambda,m,n})(u_0, f)$ et dans (I) la fonction test $p_\varepsilon^+(u_\lambda - v_\lambda)$, additionnons les deux inégalités résultantes, on obtient après avoir négligé les termes positifs

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \int_0^{(u_\lambda - v_\lambda)(t)} p_\varepsilon^+(r)dr - \int_\Omega \int_0^{u_0 - v_\lambda} p_\varepsilon^+(r)dr \\ &+ \int_Q (a(u_\lambda, Du_\lambda) - a(v_\lambda, Dv_\lambda)) \cdot D(u_\lambda - v_\lambda)^+ p'_\varepsilon(u_\lambda - v_\lambda) \\ &+ \int_Q (\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda) - \beta_\lambda(\cdot, v_\lambda)) p_\varepsilon^+(u_\lambda - v_\lambda) \leq \int_Q (f - g) p_\varepsilon^+(u_\lambda - v_\lambda). \quad (3.10) \end{aligned}$$

Grâce aux hypothèses (H_1) et (H_4)

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \int_Q (a(u_\lambda, Du_\lambda) - a(v_\lambda, Dv_\lambda)) \cdot D(u_\lambda - v_\lambda)^+ p'_\varepsilon(u_\lambda - v_\lambda) \geq 0.$$

En passant à la limite dans l'inégalité (3.10) avec $\varepsilon \to 0$, on obtient

$$\int_\Omega (u_\lambda - v_\lambda)^+(t) + \int_\Omega (u_0 - v_\lambda)^+ + \int_Q (\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda) - \beta_\lambda(\cdot, v_\lambda)) \chi_{\{u_\lambda > v_\lambda\}} \leq 0.$$

Ce qui implique
$$u_\lambda(t) \leq v_\lambda(t) \text{ p.p. sur } \Omega \ \text{ p.p. } t$$
et donc
$$\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda(t)) \leq \beta_\lambda(\cdot, v_\lambda(t)) \text{ p.p. sur } \Omega \ \text{ p.p. } t.$$
De la même manière, en raisonnant sur la sur-solution, on montre que $u_\lambda(t) \geq -v_\lambda(t)$ sur Ω p.p. t. Ainsi, en passant en norme $\|\cdot\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}$, on a
$$(\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda))_\lambda \text{ est bornée dans } L^\infty(0,T;\mathcal{M}_b(\Omega)). \tag{3.11}$$
Quitte à décomposer $\beta(r) = \beta(\cdot, r^+) + \beta(\cdot, -r^-)$, on peut supposer β nul sur le demi-axe négatif. Soit $\phi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$. On a
$$\begin{aligned}
\Big|\int_Q \phi\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda)\Big| &\leq \int_Q |\phi||\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda)| \\
&\leq \int_Q |\phi||\beta_\lambda(\cdot, v_\lambda)| \\
&= \int_0^T \langle \beta_\lambda(\cdot, v_\lambda), |\phi|\rangle \\
&\leq C\|\phi\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))},
\end{aligned}$$
c'est-à-dire que la fonctionnelle linéaire
$$\phi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q) \mapsto \int_Q \phi\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda)$$
est continue pour la norme de $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ sur un sous-espace dense dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$. Elle possède donc une extension unique $F_\lambda \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$ avec $\|F_\lambda\|_{L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))} \leq C$. Quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, on peut supposer que $F_\lambda \rightharpoonup F$ dans $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$. On a
$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{\lambda\to 0} \int_Q \beta_\lambda(\cdot, u_\lambda)\phi \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \int_0^T \langle F_\lambda(t), \phi(t)\rangle \\
&= \int_0^T \langle F(t), \phi(t)\rangle
\end{aligned}$$
pour tout $\phi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q),\ \phi \geq 0$. En prenant ϕ sous la forme $\kappa\xi$, avec $\kappa \in \mathcal{D}_+(0,T)$ et $\xi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\ \xi \geq 0$, on déduit
$$\langle F(t), \xi\rangle \geq 0 \ \text{ pour presque tout } t,$$

ce qui implique que $F(t)$ est une forme linéaire positive sur $\mathcal{D}(\Omega)$. C'est donc une mesure de Radon pour presque tout t, que l'on notera par la suite $\mu(t)$.
D'autre part, pour tout $\kappa \in \mathcal{D}_+(0,T)$ et $\zeta \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a

$$\int_0^T \int_\Omega \kappa\zeta d\mu(t)dt = \int_0^T \kappa(t)\langle F(t), \zeta\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega),W^{1,p}(\Omega)}dt.$$

Ainsi $\mu(t) \in W^{-1,p'}(\Omega) \cap \mathcal{M}_b(\Omega) \subset \mathcal{M}_0(\Omega)$ pour presque tout t (cf. L. Boccardo, T. Gallouët et L. Orsina [27, Theorem 2.1]).
D'autre part, l'espace $L^\infty(0,T;\mathcal{M}_b(\Omega))$ est un sous-espace de $(L^1(0,T;C_0(\Omega)))^* \simeq L^\infty(0,T;w^*{-}\mathcal{M}_b(\Omega))$ (cf. Section 1.1), et ce dernier étant un sous-espace de $L^1(0,T;w^*{-}\mathcal{M}_b(\Omega))$. Ainsi, modulo une sous-suite, on a

$$\beta_\lambda(\cdot,u_\lambda) \overset{*}{\rightharpoonup} \mu \text{ dans } L^\infty(0,T;w^*{-}\mathcal{M}_b(\Omega)),$$

$$\mu \in L^1(0,T;w^*{-}\mathcal{M}_b(\Omega))$$

avec $\mu(t) \in \mathcal{M}_0(\Omega)$ pour presque tout t, c'est-à-dire

$$\mu \in L^1_0(0,T;w^*{-}\mathcal{M}_b(\Omega))$$

qui, d'après le lemme ci-dessous, s'injecte dans $\Big(L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)\Big)^*$.
D'après l'équation, $u_t + \mu \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1(Q)$, donc

$$u_t,\ \mu \in \Big(L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)\Big)^*.$$

■

Lemme 3.2.4. *On a*
(i) L'injection de $L^1_0(0,T;w^*{-}\mathcal{M}_b(\Omega))$ *dans* $\Big(L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap\ L^\infty(Q)\Big)^*$.
(ii) Cette injection est continue par rapport aux topologies fortes des espaces de départ et d'arrivée.

Pour ne pas alourdir l'exposé, on diffère la preuve de ce lemme à la fin du chapitre.

Étape 4 : Argument de pseudo-monotonie

Grâce aux estimations précédentes sur u_λ, on déduit que $(a(u_\lambda, Du_\lambda))_\lambda$ est bornée dans $(L^{p'}(Q))^N$, et donc, quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, on peut supposer que $a(u_\lambda, Du_\lambda)$ converge faiblement vers χ dans $(L^{p'}(Q))^N$. Comme précédemment, identifions div χ et div $a(u, Du)$. Pour ce faire, montrons que

$$\limsup_{\lambda\to 0} \int_Q a(u_\lambda, Du_\lambda)\cdot D(u_\lambda - u) = 0. \tag{3.12}$$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0}\int_Q a(u_\lambda, Du_\lambda)\cdot D(u_\lambda - u) &= \lim_{\lambda\to 0}\int_Q a(u_\lambda, Du_\lambda)\cdot Du_\lambda - \int_Q \chi\cdot Du \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\Big[\int_Q f(u_\lambda - u) - \int_Q \psi_{m,n}(u_\lambda)u_\lambda - \psi_{m,n}(u)u\Big] \\
&\quad - \lim_{\lambda\to 0}\Big[\int_Q u_{\lambda,t}u_\lambda - \int_Q u_t u\Big] \\
&\quad - \lim_{\lambda\to 0}\Big[\int_Q \beta_\lambda(\cdot, u_\lambda)u_\lambda - \int_Q u d\mu\Big] \\
&=: \lim_{\lambda\to 0}\ (I_1 - I_2) - (I_3 - I_4) - (I_5 - I_6).
\end{aligned}$$

Il est clair que $\lim\limits_{\lambda\to 0} I_1 = 0$.
Grâce à la monotonie de la fonction $\psi_{m,n}$ et la convergence presque partout de u_λ (pour une certaine sous-suite au moins) on a

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0} I_2 &= \lim_{\lambda\to 0}\Big[\int_Q (\psi_{m,n}(u_\lambda) - \psi_{m,n}(u))(u_\lambda - u) + \psi_{m,n}(u_\lambda)u - \psi_{m,n}(u)u_\lambda\Big] \\
&\geq \lim_{\lambda\to 0}\int_Q \psi_{m,n}(u_\lambda)u - \psi_{m,n}(u)u_\lambda = 0.
\end{aligned}$$

La formule d'intégration par parties de Alt-Luckhaus implique, grâce aux estimations L^∞ sur u_λ et au fait que $u_{\lambda,t},\ u_t \in \big(L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)\big)^*$ et que u_λ converge vers u dans $C([0,T];L^1(\Omega))$, que

$$\lim_{\lambda\to 0}(I_3 - I_4) = \lim_{\lambda\to 0}\frac{1}{2}\int_\Omega (u_\lambda^2(T) - u_0^2) - \frac{1}{2}\int_\Omega (u^2(T) - u_0^2) = 0.$$

Or β_λ est monotone, d'où

$$\begin{aligned}
&\lim_{\lambda\to 0}(I_5 - I_6) \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\Big(\int_Q (\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda) - \beta_\lambda(\cdot, u))(u_\lambda - u) + \beta_\lambda(\cdot, u)(u_\lambda - u) + \beta_\lambda(\cdot, u_\lambda)u - \int_Q u d\mu\Big) \\
&\geq \lim_{\lambda\to 0}\int_Q \beta_\lambda(\cdot, u)(u_\lambda - u) + \beta_\lambda(\cdot, u_\lambda)u - \int_Q u d\mu \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car $\beta_\lambda(\cdot, u) \to \beta^0(\cdot, u)$ dans $L^1(Q)$, $u_\lambda \to u$ dans $L^1(Q)$, $\|u_\lambda - u\|_\infty \leq C$ et $\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda) \rightharpoonup \mu$ faiblement dans $L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$. En combinant ces limites, on déduit

$$\limsup_{\lambda\to 0}\int_Q a(u_\lambda, Du_\lambda)\cdot D(u_\lambda - u) \leq 0.$$

La limite (3.12) se déduit alors grâce à la monotonie de a.

ÉTAPE 5 : Caractérisation de la mesure μ

En s'appuyant sur le Lemme 3.2.2, on va caractériser la mesure μ en montrant que $\mu(t) \in \partial\mathcal{J}(u(t))$ pour presque tout t. Notons que $\beta_\lambda = \partial j_\lambda$, où $j_\lambda \in \mathcal{J}_0(\Omega)$, et que pour p.p. $x \in \Omega$ et pour tout $r \in \mathbb{R}$ $j_\lambda(x,r) \uparrow j(x,r)$ lorsque $\lambda \downarrow 0$. Ainsi, par la définition du sous-différentiel, pour tout $\varrho > \lambda > 0$ et p.p. $x \in \Omega$ et pour presque tout t,

$$\begin{aligned} j(x,r) &\geq j_\lambda(x,r) \\ &\geq j_\lambda(x,u_\lambda(t,x)) + \partial j_\lambda(x,u_\lambda(t,x))(r-u_\lambda(t,x)) \\ &\geq j_\varrho(x,u_\lambda(t,x)) + \partial j_\lambda(x,u_\lambda(t,x))(r-u_\lambda(t,x)) \ \forall r \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Soient $\xi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $\zeta \in L^\infty_+(0,T)$. En multipliant par ζ l'inégalité précédente et en intégrant sur Ω, ensuite sur $(0,T)$, on déduit,

$$\int_0^T \zeta \Big[\int_\Omega j(\cdot,\xi) - \int_\Omega j_\varrho(\cdot,u_\lambda(t))\Big] \geq \int_0^T \zeta \int_\Omega \beta_\lambda(\cdot,u_\lambda(t))(\xi - u_\lambda(t)).$$

En passant à la limite avec $\lambda \to 0$ ensuite avec $\varrho \to 0$, et en utilisant le fait que $u_\lambda \to u$ p.p. sur Q lorsque $\lambda \to 0$ et que $\displaystyle\int_Q \zeta\beta_\lambda(\cdot,u_\lambda)(\xi-u) \to \int_Q \zeta(\xi-u)d\mu$, on déduit

$$\int_0^T \zeta\big[\int_\Omega j(\cdot,\xi) - \int_\Omega j(\cdot,u(t))\big] \ \geq \ \int_Q \zeta(\xi-u)d\mu(t) + \liminf_{\lambda\to 0}\int_Q \zeta\beta_\lambda(\cdot,u_\lambda)(u-u_\lambda). \tag{3.13}$$

Admettons pour le moment que l'on a

$$\liminf_{\lambda\to 0}\int_Q \zeta\beta_\lambda(\cdot,u_\lambda)(u-u_\lambda) \geq 0. \tag{3.14}$$

Il vient alors de l'inégalité (3.13)

$$\int_0^T \Big[\mathcal{J}(\xi) - \mathcal{J}(u) - \int_\Omega (\xi-u)d\mu(t)\Big]\zeta(t)dt \geq 0 \ \ \forall \zeta \in L^\infty_+(0,T).$$

Ce qui implique

$$\mathcal{J}(\xi) - \mathcal{J}(u(t)) - \langle \mu(t), \xi - u(t)\rangle \geq 0 \ \text{ pour presque tout } t \tag{3.15}$$

pour tout $\xi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. On déduit alors de l'inégalité (3.15) que $\mu(t) \in \partial\mathcal{J}(u(t))$ pour presque tout t. D'où la caractérisation de la mesure μ en utilisant le Lemme 3.2.2. Montrons à présent l'inégalité (3.14). En choisissant la fonction test $(u_\lambda - u)\zeta$ dans l'inégalité (3.9), on obtient, en utilisant la monotonie de $\psi_{m,n}$

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega \zeta\beta_\lambda(\cdot, u_\lambda)(u - u_\lambda) \quad \geq \quad & \int_Q f(u - u_\lambda)\zeta + \int_Q a(u_\lambda, Du_\lambda) \cdot D(u_\lambda - u)\zeta \\ & + \int_Q \psi_{m,n}(u)(u_\lambda - u)\zeta \\ & + \int_Q u_t(u_\lambda - u)\zeta + \int_Q (u_{\lambda,t} - u_t)(u_\lambda - u)\zeta.\end{aligned}$$

Grâce aux estimations L^∞ sur u_λ et u, la convergence presque partout de u_λ vers u dans Q, la convergence faible de u_λ vers u dans $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, la limite (3.12) et la formule d'intégration par parties, il n'y a plus de problèmes pour passer à la limite dans les termes de l'inégalité précédente.
Enfin, du passage à la limite en λ dans le problème $(P_{\lambda,\nu(\lambda),m,n})(u_0, f)$, il vient que u est solution faible du problème $(P_{m,n})(u_0, f)$ au sens de la Définition 3.2.2.
■

3.3 Existence de solutions entropiques

On va montrer dans cette section comment l'étude du problème perturbé $(P_{m,n})(u_0, f)$ permet, lorsque $m, n \to \infty$, d'atteindre une solution entropique du problème $(P)(u_0, f)$ pour des données $f \in L^1(Q)$ et

$$u_0 \in \overline{\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega);\ \gamma_-(x) \leq \tilde{v}(x) \leq \gamma_+(x) \text{ q.p. } x \in \Omega\}}^{\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}}.$$

Définition 3.3.1. *Une fonction mesurable $u : Q \to \mathbb{R}$ est une solution entropique de $P(u_0, f)$ si $u \in C([0, T]; L^1(\Omega))$ et*

$$T_k(u) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \quad \textit{pour tout } k > 0$$

et s'il existe une mesure $\mu \in L^1_0(0, T; w^*-\mathcal{M}_b(\Omega))$ vérifiant

$$\mu_r(t) \in \partial j(\cdot, u(t)) + \partial I_{[\gamma_-(\cdot),\gamma_+(\cdot)]}(u(t)) \quad \textit{p.p. sur } \Omega \textit{ pour presque tout } t$$

et pour tout $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $\xi \in \mathcal{D}_+[0, T)$ on a

$$\begin{aligned}& -\int_0^T \int_\Omega \xi_t \int_{u_0}^{u(t)} T_k(r - \phi)drdxdt + \int_0^T \int_\Omega \xi a(u, Du) \cdot DT_k(u - \phi)dxdt \\ \leq & \int_0^T \int_\Omega fT_k(u - \phi)\xi dxdt - \int_0^T \int_\Omega \xi T_k(\tilde{u}(t) - \tilde{\phi})d\mu(t)dt\end{aligned}$$

et

$$\tilde{u}(t) = \gamma_{+/-} \quad \mu_s^{+/-}(t) - \textit{p.p. sur } \Omega \textit{ pour presque tout } t.$$

Remarque 3.3.1. *Notons que chaque intégrale dans la définition précédente est bien définie. En effet,* $|\int_{u_0}^{u(t)} T_k(r-\phi)dr| \leq k|u(t)-u_0| \in L^1(\Omega)$. *Le deuxième terme a vrai dire doit être compris comme* $\displaystyle\int_Q \xi a(T_l(u), DT_l(u)) \cdot DT_k(u-\phi)$, *où* $l \geq k + \|\phi\|_\infty$. *La dernière intégrale est bien définie car* $T_k(u(t)-\phi) \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *et admet un représentant quasi-continu pour presque tout* t. *Enfin, notons aussi que la dernière condition dans la définition précédente a bien un sens car* $\mu(t) \in \mathcal{M}_0(\Omega)$ *pour presque tout* t. $\Diamond$

Le résultat principal de cette section est le suivant :

Théorème 3.3.1. *Le problème* $P(u_0, f)$ *admet une solution entropique pour* $f \in L^1(Q)$ *et* $u_0 \in \overline{\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega); \gamma_-(x) \leq \tilde{v}(x) \leq \gamma_+(x) \text{ q.p. } x \in \Omega\}}^{\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}}$.

Remarque 3.3.2. *Rappelons que les résultats de la section précédente sont valables pour* $f \in L^\infty(Q)$ *et* $u_0 \in \mathcal{C}$. *Nous allons montrer que le Théorème 3.3.1 est vrai pour* $u_0 \in \overline{\mathcal{C}}^{\|\cdot\|_{L^1}}$, *qui d'après le Théorème 3.5.1 (cf. Annexe) contient* $\overline{\{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega); \gamma_-(x) \leq \tilde{v}(x) \leq \gamma_+(x) \text{ q.p. } x \in \Omega\}}^{\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}}$. $\Diamond$

Mais avant cela montrons le lemme suivant :

Lemme 3.3.1. *Soit* E, F *deux sous-ensembles de* $L^1(\Omega)$ *tels que* E *est dense dans* F, *pour* $\|\cdot\|_{L^1}$, *et* E *est stable par le sup. Alors il existe une approximation bi-monotone de tout élément de* F *par des éléments de* E, *i.e. pour tout* $e \in F$, *il existe* $(e_{m,n})_{m,n} \subset E$ *et* $(e_n)_n \subset L^1(\Omega)$ *telles que* $e_{m,n} \uparrow_{m\to\infty} e_n \downarrow_{n\to\infty} e$ *dans* $L^1(\Omega)$.

Preuve. On choisit une suite $(e_k)_k \subset E$ qui converge vers $e \in F$ dans $L^1(\Omega)$, p.p. sur Ω, et telle que $|e_k| \leq h \in L^1(\Omega)$. On pose

$$e_{m,n} = \sup_{n \leq k \leq m} e_k.$$

Alors $|e_{m,n}| \leq h$ et $e_{m,n}$ est croissante en m, donc elle a une limite $e_n \in L^1(\Omega)$, et $|e_n| \leq h$. De la même manière, on trouve que $e_n \downarrow_{n\to\infty} e_o$ dans $L^1(\Omega)$. Enfin, $e_o = e$, car pour presque tout $x \in \Omega$ $|e_{m,n}(x) - e(x)| \leq \sup_{n \leq k} |e_k(x) - e(x)| \to 0$ lorsque $n \to \infty$, grâce à la convergence presque partout de e_k. ∎

Preuve du Théorème 3.3.1.

Nous ferons la preuve en plusieurs étapes :

ÉTAPE 1 : Estimations *a priori*

Soient $f \in L^1(Q)$ et $u_0 \in \overline{\mathcal{C}}^{\|\cdot\|_{L^1}}$. Par le Lemme 3.3.1, on peut approcher f et u_0 par des suites bi-monotones $(f_{m,n})_{m,n} \subset L^\infty(Q)$ et $(u^0_{m,n})_{m,n} \subset \mathcal{C}$. D'après la Proposition 3.2.2, il existe $u_{m,n} \in L^p(0,T;W^{1,p}_0(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ et une mesure $\mu_{m,n} \in L^1_0(0,T;w^*\!-\mathcal{M}_b(\Omega))$ vérifiant

$$(\mu_{m,n})_r(t) \in \partial j(\cdot, u_{m,n}(t)) + \partial I_{[\gamma-(\cdot),\gamma+(\cdot)]}(u_{m,n}(t)) \text{ pour presque tout } t$$

et pour tout $\phi \in L^p(0,T;W^{1,p}_0(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ on a

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega (u_{m,n})_t \phi + \int_0^T \int_\Omega a(u_{m,n}, Du_{m,n}) \cdot D\phi + \int_0^T \int_\Omega \psi_{m,n}(u_{m,n})\phi \\ \leq\ & \int_0^T \int_\Omega f_{m,n}\phi - \int_0^T \int_\Omega \tilde{\phi}(t) d\mu_{m,n}(t)dt \end{aligned} \tag{3.16}$$

et

$$\tilde{u}^{+/-}_{m,n}(t) = \gamma_{+/-} \quad (\mu_{m,n})^{+/-}_s(t) - \text{p.p. sur } \Omega \text{ pour presque tout } t.$$

Fixons $k > 0$. Soit la fonction test $\phi = T_k(u_{m,n})$ dans l'inégalité (3.16), en utilisant l'hypothèse (H_2), la monotonie de $\psi_{m,n}$ et la formule d'intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \int_0^{u_{m,n}(t)} T_k(r)dr + \int_\Omega \int_0^{u^0_{m,n}} T_k(r)dr + \lambda_0 \int_Q |DT_k(u_{m,n})|^p \\ &\leq \int_Q T_k(u_{m,n}) f_{m,n} - \int_Q T_k(\tilde{u}_{m,n})(t) d\mu_{m,n}(t) - \int_Q a(u_{m,n}, 0) \cdot DT_k(u_{m,n}). \end{aligned} \tag{3.17}$$

Par la formule de Gauss-Green, on a

$$\begin{aligned} \Big|\int_Q a(u_{m,n}, 0) \cdot DT_k(u_{m,n})\Big| &\leq \Big|\int_Q \operatorname{div} \int_0^{T_k(u_{m,n})} a(r,0)drdxdt\Big| \\ &\leq \Big|\int_\Sigma \int_0^{T_k(u_{m,n})} a(r,0)dr \cdot \eta d\sigma dt\Big| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'intégrale $\int_Q T_k(\tilde{u}_{m,n})(t) d\mu_{m,n}(t)$ est positive car elle se décompose en trois termes positifs :

$$\int_Q T_k(u_{m,n})(t)(\mu_{m,n})_r(t) + \int_Q T_k(\gamma^+) d(\mu_{m,n})^+_s(t) - \int_Q T_k(\gamma^-) d(\mu_{m,n})^-_s(t). \tag{3.18}$$

De l'inégalité (3.17) on obtient donc

$$\int_\Omega \int_0^{u_{m,n}(t)} T_k(r)dr + \lambda_0 \int_Q |DT_k(u_{m,n})|^p \leq Ck, \tag{3.19}$$

où C est une constante indépendante de m et n. Ainsi $(DT_k(u_{m,n}))_{m,n}$ est bornée dans $(L^p(Q))^N$. On déduit alors que $(T_k(u_{m,n}))_{m,n}$ est bornée dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, et ainsi $T_k(u_{m,n}) \rightharpoonup v_k$ faiblement (modulo une sous-suite) dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ lorsque $m,n \to \infty$. On déduit aussi de (3.19), en prenant le suprémum sur $]0,T[$, que $(u_{m,n})_{m,n}$ est bornée dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$.

ÉTAPE 2 : Convergence forte des suites $(u_{m,n})_{m,n}$ et $(\mu_{m,n})_{m,n}$

Soit $u^\lambda_{m,n}$ une solution faible du problème $(P_{\lambda,\lambda,m,n})(u^0_{m,n}, f_{m,n})$. D'après la Section 2, on sait que $u^\lambda_{m,n} \to u_{m,n}$ fortement dans $L^1(Q)$ et que $\beta_\lambda(\cdot, u^\lambda_{m,n})^{+/-} \overset{*}{\rightharpoonup} \mu^{+/-}_{m,n}$ faiblement $*$ dans $L^\infty(0,T;w^*\!-\mathcal{M}_b(\Omega))$ lorsque $\lambda \to 0$. On va étudier maintenant la convergence forte de la suite de mesures et de la suite de solutions. Pour cela, on va commencer par montrer le lemme de comparaison suivant :

Lemme 3.3.2. *Soient $\tilde{m} > m$, $\tilde{n} > n$, alors*

$$u^\lambda_{m,\tilde{n}} \le u^\lambda_{m,n} \le u^\lambda_{\tilde{m},n} \quad \textit{p.p. sur } Q$$

et

$$\beta_\lambda(\cdot, u^\lambda_{m,\tilde{n}}) \le \beta_\lambda(\cdot, u^\lambda_{m,n}) \le \beta_\lambda(\cdot, u^\lambda_{\tilde{m},n}) \quad \textit{p.p. sur } Q.$$

Preuve. La preuve de ce lemme est analogue à l'Étape 1 de la preuve de la Proposition 3.2.2, il suffira de prendre dans les inégalités correspondants aux solutions $u^\lambda_{m,n}$ et $u^\lambda_{\tilde{m},n}$, les fonctions test $p^+_\varepsilon(u^\lambda_{m,n} - u^\lambda_{\tilde{m},n})$ et $p^+_\varepsilon(u^\lambda_{m,\tilde{n}} - u^\lambda_{m,n})$. ■

Le lemme reste vrai pour les parties positives et négatives, i.e.

$$\pm(u^\lambda_{m,\tilde{n}})^\pm \le \pm(u^\lambda_{m,n})^\pm \le \pm(u^\lambda_{\tilde{m},n})^\pm \quad \text{p.p. sur } Q$$

et

$$\pm\beta_\lambda(\cdot, u^\lambda_{m,\tilde{n}})^\pm \le \pm\beta_\lambda(\cdot, u^\lambda_{m,n})^\pm \le \pm\beta_\lambda(\cdot, u^\lambda_{\tilde{m},n})^\pm \quad \text{p.p. sur } Q.$$

On déduit alors, après passage à la limite avec $\lambda \to 0$, que

$$\pm u^\pm_{m,\tilde{n}} \le \pm u^\pm_{m,n} \le \pm u^\pm_{\tilde{m},n} \quad \text{p.p. sur } Q.$$

Ce qui implique par le théorème de la convergence monotone que

$$\pm u^\pm_{m,n} \uparrow \pm u^\pm_n \text{ dans } L^1(Q) \text{ lorsque } m \to \infty.$$

De la même manière, on montre que $\pm u^\pm_n \downarrow \pm u^\pm$ dans $L^1(Q)$ lorsque $n \to \infty$. D'autre part, en choisissant la fonction test $p_\varepsilon(u^\lambda_{\tilde{m},n} - u^\lambda_{m,n})$ ($p_\varepsilon(\cdot)$ est une approximation du $\text{sign}_0(\cdot)$) dans les inégalités correspondants aux solutions $u^\lambda_{\tilde{m},n}$ et $u^\lambda_{m,n}$, en passant à la limite avec $\varepsilon \to 0$ et en négligeant les termes positifs, on a

$$\int_Q \beta_\lambda(\cdot, u^\lambda_{\tilde{m},n}) - \beta_\lambda(\cdot, u^\lambda_{m,n}) \le \int_Q |f_{\tilde{m},n} - f_{m,n}| + \int_\Omega |u^0_{\tilde{m},n} - u^0_{m,n}|.$$

Ce qui implique pour tout $\varphi \in L^1(0,T;C_0(\Omega))$ avec $0 \leq \varphi \leq 1$ que

$$\int_0^T \int_\Omega \varphi(\beta_\lambda(\cdot, u^\lambda_{\tilde{m},n})^+ - \beta_\lambda(\cdot, u^\lambda_{m,n})^+) + \int_0^T \int_\Omega \varphi(-\beta_\lambda(\cdot, u^\lambda_{\tilde{m},n})^- + \beta_\lambda(\cdot, u^\lambda_{m,n})^-)$$
$$\leq \int_Q |f_{\tilde{m},n} - f_{m,n}| + \int_\Omega |u^0_{\tilde{m},n} - u^0_{m,n}|.$$

Après passage à la limite avec $\lambda \to 0$ on déduit pour tout $0 \leq \varphi \leq 1$

$$\int_0^T \int_\Omega \varphi(d\mu^+_{\tilde{m},n} - d\mu^+_{m,n}) + \int_0^T \int_\Omega \varphi(-d\mu^-_{\tilde{m},n} + d\mu^-_{m,n})$$
$$\leq \int_Q |f_{\tilde{m},n} - f_{m,n}| + \int_\Omega |u^0_{\tilde{m},n} - u^0_{m,n}|.$$

D'où

$$\int_0^T \|\mu^+_{\tilde{m},n}(t) - \mu^+_{m,n}(t)\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} + \int_0^T \|\mu^-_{m,n}(t) - \mu^-_{\tilde{m},n}(t)\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}$$
$$\leq \int_Q |f_{\tilde{m},n} - f_{m,n}| + \int_\Omega |u^0_{\tilde{m},n} - u^0_{m,n}|.$$

Par conséquent, $\pm\mu^\pm_{m,n} \uparrow_m \pm\mu^\pm_n$ fortement dans $L^1(0,T;w^*\!-\mathcal{M}_b(\Omega))$. De la même manière, on montre que $\pm\mu^\pm_n \downarrow_n \pm\mu^\pm$ dans $L^1(0,T;w^*\!-\mathcal{M}_b(\Omega))$.
On conclut alors que

$$u_{m,n}\uparrow_{m\to\infty} \downarrow_{n\to\infty} u \;\text{ fortement dans } L^1(Q),$$

$$\mu_{m,n} \uparrow_{m\to\infty}\downarrow_{n\to\infty} \mu \;\text{ fortement dans } L^1(0,T;w^*\!-\mathcal{M}_b(\Omega))$$

et

$$\mu(t) \in \mathcal{M}_0(\Omega) \;\text{ pour presque tout } t.$$

Grâce au Lemme 3.2.4, on déduit aussi une convergence forte de la suite de mesures $(\mu_{m,n})_{m,n}$ dans $\Big(L^p(0,T;W^{1,p}_0(\Omega)) \cap L^\infty(Q)\Big)^*$.

ÉTAPE 3 : $(u_{m,n})_{m,n}$ est une suite de Cauchy dans $C([0,T];L^1(\Omega))$

Soient $m > m'$, $n > n'$. Considérons dans les inégalités vérifiées par les solutions $u_{m,n}$ et $u_{m',n'}$ la fonction test $p_\varepsilon(u_{m,n} - u_{m',n'}), \varepsilon > 0$ ($p_\varepsilon(\cdot)$ est une approximation du $\mathrm{sign}_0(\cdot)$), on obtient après avoir sommé les deux inégalités, utilisé le lemme d'intégration par parties, les hypothèses (H_1) et (H_4), la monotonie de $\psi_{m,n}$ et passé à la limite avec $\varepsilon \to 0$

$$\int_\Omega |u_{m,n}(t) - u_{m',n'}(t)| \leq \int_Q |f_{m,n} - f_{m',n'}| + \int_\Omega |u^0_{m,n} - u^0_{m',n'}|$$

pour presque tout t. Or $f_{m,n}, f_{m',n'} \to f$ dans $L^1(Q)$ et $u^0_{m,n}, u^0_{m',n'} \to u_0$ dans $L^1(\Omega)$, donc $(u_{m,n})_{m,n}$ est une suite de Cauchy dans $C([0,T];L^1(\Omega))$ et converge vers $u \in C([0,T];L^1(\Omega))$.

ÉTAPE 4 : Argument de pseudo-monotonie

Puisque $(T_k(u_{m,n}))_{m,n}$ est bornée dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, grâce à l'hypothèse (H_3), $(a(T_k(u_{m,n}), DT_k(u_{m,n})))_{m,n}$ est bornée dans $\left(L^{p'}(Q)\right)^N$ et, quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, converge faiblement dans $\left(L^{p'}(Q)\right)^N$ vers χ_k lorsque $m,n \to \infty$. On va montrer, via l'argument de pseudo-monotonie, que div $\chi_k =$ div $a(T_k(u), DT_k(u))$. Pour ce faire, on utilise la méthode de régularisation de Landes. Rappelons ici sa définition et quelques-unes de ses propriétés. Pour plus de détails, consulter l'article de R. LANDES [52]. Soient $\nu > 0$ et $(u^0_\nu)_\nu$ une suite telle que

$$\begin{cases} u^0_\nu \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \\ \|u^0_\nu\|_{L^\infty(\Omega)} \le k \\ u^0_\nu \to T_k(u_0) \text{ p.p. sur } \Omega \text{ lorsque } \nu \to \infty \\ \frac{1}{\nu}\|u^0_\nu\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \to 0 \text{ lorsque } \nu \to \infty. \end{cases}$$

Alors, pour $k, \nu > 0$, la régularisée de Landes $(T_k(u))_\nu$ est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (T_k(u))_\nu}{\partial t} = \nu((T_k(u) - (T_k(u))_\nu) & \text{sur} \quad Q \\ \\ (T_k(u))_\nu(0,\cdot) = u^0_\nu & \text{sur} \quad \Omega. \end{cases}$$

Elle vérifie notamment

$$(T_k(u))_\nu \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q),$$

$$\frac{\partial (T_k(u))_\nu}{\partial t} \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q),$$

quitte à passer à une sous-suite si nécessaire, on peut supposer que

$$(T_k(u))_\nu \to T_k(u) \ \text{ fortement dans } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \ \text{ et p.p. sur } Q,$$

$$(T_k(u))_\nu(t) \to T_k(u)(t) \ \text{ p.p. sur } \Omega \text{ pour presque tout } t$$

et

$$\|(T_k(u))_\nu\|_{L^\infty(Q)} \le k \quad \forall \nu > 0.$$

Soient $h_l(r) = (l+1-|r|)^+ \wedge 1, l \in \mathbb{N},\ l > k$ et $\kappa \in \mathcal{D}_+[0,T)$. Montrons que

$$\limsup_{\nu\to\infty} \limsup_{m,n\to\infty} \int_Q \kappa a(u_{m,n}, Du_{m,n}) \cdot D(h_l(u_{m,n})(T_k(u_{m,n}) - (T_k(u))_\nu)) \le 0.$$

Considérons la fonction test $\kappa h_l(u_{m,n})(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu)$ dans l'inégalité (3.16) et passons à la limite dans chacun des termes.
On peut montrer exactement de la même manière que K. AMMAR ET P. WITTBOLD [5, Proof of Theorem 2.4] que

$$\liminf_{\nu\to\infty}\lim_{m,n\to\infty}\int_0^T\langle (u_{m,n})_t, \kappa h_l(u_{m,n})(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu)\rangle \geq 0. \tag{3.20}$$

Il est clair que

$$\lim_{\nu\to\infty}\lim_{m,n\to\infty}\int_Q \kappa\psi_{m,n}(u_{m,n})h_l(u_{m,n})(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu)=0 \tag{3.21}$$

et

$$\lim_{\nu\to\infty}\lim_{m,n\to\infty}\int_Q \kappa f_{m,n}h_l(u_{m,n})(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu)=0. \tag{3.22}$$

Reste à traiter le terme $\lim\limits_{\nu\to\infty}\lim\limits_{m,n\to\infty}\int_Q \kappa h_l(\tilde{u}_{m,n}(t))(T_k(\tilde{u}_{m,n}(t))-(T_k(\tilde{u}))_\nu(t))d\mu_{m,n}(t)dt$.
Pour ce faire, décomposons le comme suit :

$$\begin{aligned}&\int_Q \kappa h_l(\tilde{u}_{m,n}(t))(T_k(\tilde{u}_{m,n}(t))-(T_k(\tilde{u})(t))_\nu(t))(d\mu_{m,n}(t)-d\mu(t))dt\\&+\int_Q \kappa h_l(\tilde{u}_{m,n}(t))(T_k(\tilde{u}_{m,n}(t))-(T_k(\tilde{u}))_\nu(t))d\mu(t)dt =: I_1+I_2.\end{aligned}$$

Grâce à la convergence forte de $\mu_{m,n}$ vers μ dans $L^1(0,T;w^*\!-\mathcal{M}_b(\Omega))$ lorsque $m,n\to\ \infty$, on a

$$|I_1|\leq 2k\|\kappa\|_\infty\|\mu_{m,n}-\mu\|_{L^1(0,T;\mathcal{M}_b(\Omega))}\to 0.$$

D'autre part, l'intégrale I_2 s'écrit comme

$$\begin{aligned}&\int_Q \kappa h_l(\tilde{u}_{m,n}(t))(T_k(\tilde{u}_{m,n}(t))-T_k(\tilde{u})(t))d\mu(t)dt\\&+\int_Q \kappa h_l(\tilde{u}_{m,n}(t))(T_k(\tilde{u})(t)-(T_k(\tilde{u}))_\nu(t))d\mu(t)dt =: I_2^1+I_2^2.\end{aligned}$$

Grâce à la convergence quasi-partout de $u_{m,n}(t)$ vers $u(t)$ pour presque tout t on a

$$\lim_{m,n\to\infty} I_2^1=0 \quad\text{et}\quad \lim_{m,n\to\infty} I_2^2=\int_Q \kappa h_l(u)(T_k(u)-(T_k(u))_\nu)d\mu(t)dt.$$

Puisque $(T_k(u))_\nu(t)\to T_k(u)(t)$ q.p. sur Ω pour presque tout t lorsque $\nu\to\infty$, il s'ensuit $\lim\limits_{\nu\to\infty}\lim\limits_{m,n\to\infty} I_2^2=0$. D'où

$$\lim_{\nu\to\infty}\lim_{m,n\to\infty}\int_Q \kappa h_l(\tilde{u}_{m,n}(t))(T_k(\tilde{u}_{m,n}(t))-(T_k(\tilde{u}))_\nu(t))d\mu_{m,n}(t)dt=0. \tag{3.23}$$

En tenant compte des limites (3.20)-(3.23), on déduit que

$$\limsup_{\nu\to\infty}\limsup_{m,n\to\infty}\int_Q \kappa a(u_{m,n},Du_{m,n})\cdot D(h_l(u_{m,n})(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu))\le 0, \quad (3.24)$$

ce qui peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned}&\limsup_{\nu\to\infty}\limsup_{m,n\to\infty}\Big(\int_Q \kappa h_l(u_{m,n})a(u_{m,n},Du_{m,n})\cdot D\big(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu\big)\\ &\qquad+\int_{\{l<|u_{m,n}|<l+1\}}\kappa h_l'(u_{m,n})(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu)a(u_{m,n},Du_{m,n})\cdot Du_{m,n}\Big)\\ &\le 0.\end{aligned}$$

Par le choix de la fonction h_l et $l>k$ on obtient

$$\begin{aligned}&\int_{\{l<|u_{m,n}|<l+1\}}\kappa h_l'(u_{m,n})T_k(u_{m,n})a(u_{m,n},Du_{m,n})\cdot Du_{m,n}\\ &=-\int_{\{l<|u_{m,n}|<l+1\}}k\kappa a(u_{m,n},Du_{m,n})\cdot Du_{m,n}.\end{aligned}$$

En choisissant dans l'inégalité (3.16) la fonction test $\phi_l(u_{m,n})$, où $\phi_l(r)=\mathrm{sign}_0(r)(|r|-l)^+\wedge 1$, on obtient

$$\limsup_{l\to\infty}\sup_{m,n}\int_{\{l<|u_{m,n}|<l+1\}}\kappa a(u_{m,n},Du_{m,n})\cdot Du_{m,n}\le 0.$$

En tenant compte de

$$\int_{\{|u_{m,n}|\ge k\}}\kappa h_l(u_{m,n})a(u_{m,n},Du_{m,n})\cdot DT_k(u_{m,n})=0$$

et des limites suivantes

$$\begin{aligned}&\limsup_{\nu\to\infty}\limsup_{m,n\to\infty}\int_{\{l<|u_{m,n}|<l+1\}}\kappa h_l'(u_{m,n})(T_k(u))_\nu a(u_{m,n},Du_{m,n})\cdot Du_{m,n}\\ &\le\ 0\ \ \text{(par Gauss-Green)}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\limsup_{\nu\to\infty}\limsup_{m,n\to\infty}\int_{\{|u_{m,n}|\ge k\}}\kappa h_l(u_{m,n})a(u_{m,n},Du_{m,n})\cdot D(T_k(u))_\nu\\ &=\int_{\{|u|\ge k\}}\kappa h_l(u)\chi_{l+1}\cdot D(T_k(u))_\nu=0,\end{aligned}$$

il en résulte de la limite (3.24) que

$$\limsup_{\nu\to\infty}\limsup_{m,n\to\infty}\int_Q \kappa a(T_k(u_{m,n}),DT_k(u_{m,n}))\cdot D\big(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu\big)\le 0. \quad (3.25)$$

A l'aide de cette limite, montrons que

$$\operatorname{div} \chi_k = \operatorname{div} a(T_k(u), DT_k(u)) \quad \forall k > 0.$$

Pour $\xi \in \mathcal{D}_+(Q),\ \alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
&\alpha \int_Q \kappa \chi_k \cdot D\xi \\
=\ & \lim_{n\to\infty} \int_Q \alpha\kappa a(T_k(u_{m,n}), DT_k(u_{m,n})) \cdot D\xi \\
\geq\ & \limsup_{\nu\to\infty} \limsup_{m,n\to\infty} \int_Q \kappa a(T_k(u_{m,n}), DT_k(u_{m,n})) \cdot D\big(T_k(u_{m,n}) - (T_k(u))_\nu + \alpha\xi\big) \\
\geq\ & \limsup_{\nu\to\infty} \limsup_{m,n\to\infty} \int_Q \kappa a(T_k(u_{m,n}), D[(T_k(u))_\nu - \alpha\xi]) \cdot D\big(T_k(u_{m,n}) - (T_k(u))_\nu + \alpha\xi\big) \\
\geq\ & \int_Q \alpha\kappa a(T_k(u), D[T_k(u) - \alpha\xi]) \cdot D\xi.
\end{aligned}$$

En divisant par $\alpha > 0$, respectivement $\alpha < 0$, et en passant à la limite avec $\alpha \to 0$, on obtient $\operatorname{div} \chi_k = \operatorname{div} a(T_k(u), DT_k(u))\ \forall k > 0$.

Étape 5 : Passage à la limite dans l'équation

Considérons la fonction test $\varphi = \xi S(u_{m,n} - \phi)$ dans (3.16), où $S \in \mathcal{P} := \{p \in C^1(\mathbb{R}),\ p(0) = 0,\ 0 \leq p' \leq 1,\ \operatorname{Supp}(p') \text{ compact}\}$, $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $\xi \in \mathcal{D}_+[0,T)$, définissons $l := \|\phi\|_\infty + \max\{|z|, z \in \operatorname{Supp}(S')\}$ et passons à la limite dans chacun des termes. Par le théorème de la convergence dominée

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_Q (f_{m,n} - u_{m,n}) S(u_{m,n} - \phi)\xi = \int_Q (f - u) S(u - \phi)\xi \tag{3.26}$$

et

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{1}{m} \int_Q u^+_{m,n} S(u_{m,n} - \phi) - \frac{1}{n} \int_Q u^-_{m,n} S(u_{m,n} - \phi) = 0. \tag{3.27}$$

La formule d'intégration par parties implique

$$\int_0^T \langle (u_{m,n})_t, \xi S(u_{m,n} - \phi)\rangle = -\int_Q \xi_t \int_{u^0_{m,n}}^{u_{m,n}(t)} S(r - \phi) dr dx dt,$$

et le théorème de la convergence dominée à nouveau nous assure que

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_Q \xi_t \int_{u^0_{m,n}}^{u_{m,n}(t)} S(r - \phi) dr dx dt = \int_Q \xi_t \int_{u_0}^{u(t)} S(r - \phi) dr dx dt. \tag{3.28}$$

Sous l'hypothèse (H_4) on a

$$\int_Q a(u_{m,n}, D(u_{m,n})) \cdot DS(u_{m,n} - \phi)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_Q a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n})) \cdot DS(u_{m,n} - \phi) \\
&= \int_Q \Big(a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n})) - a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u)) \Big) \\
&\qquad\qquad \cdot D(T_l(u_{m,n}) - T_l(u)) S'(u_{m,n} - \phi) \\
&\quad + \int_Q a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n})) \cdot DT_l(u) S'(u_{m,n} - \phi) \\
&\quad + \int a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u)) \cdot D(T_l(u_{m,n}) - T_l(u)) S'(u_{m,n} - \phi) \\
&\quad - \int_Q a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n})) \cdot D\phi S'(u_{m,n} - \phi) \\
&\geq \int_Q a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n})) \cdot DT_l(u) S'(u_{m,n} - \phi) \\
&\quad + \int_\Omega a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u)) \cdot D(T_l(u_{m,n}) - T_k(u)) S'(u_{m,n} - \phi) \\
&\quad - \int_Q a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n})) \cdot D\phi S'(u_{m,n} - \phi). \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Comme $S'(u_{m,n}-\phi) \to S'(u-\phi)$ p.p. sur Q, $DT_l(u_{m,n}) \rightharpoonup DT_l(u)$ faiblement dans $(L^p(Q))^N$, $T_l(u_{m,n}) \to T_l(u)$ p.p. sur Q et $a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n})) \rightharpoonup \chi_l$ faiblement dans $(L^{p'}(Q))^N$ lorsque $m, n \to \infty$, on obtient après passage à la limite dans (3.29) avec $m, n \to \infty$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m,n\to\infty} \int_Q a(T_l(u_{m,n}), DT_l(u_{m,n})) \cdot DS(u_{m,n} - \phi) \\
\geq\ & \int_\Omega \chi_k \cdot DT_l(u) S'(u - \phi) - \int_Q \chi_l \cdot D\phi S'(u - \phi) \\
=\ & \int_Q \chi_l \cdot DS(u - \phi).
\end{aligned}
$$

Par conséquent,

$$
\lim_{m,n\to\infty} \int_Q a(u_{m,n}, Du_{m,n}) \cdot DS(u_{m,n} - \phi) \geq \int_Q a(u, Du) \cdot DS(u - \phi). \qquad (3.30)
$$

Grâce à la convergence forte $\mu_{m,n} \to \mu$ dans $L^1(0, T; w^*\text{–}\mathcal{M}_b(\Omega))$ et $u_{m,n}(t) \to u(t)$ q.p. sur Ω pour presque tout t, on a

$$
\lim_{m,n\to\infty} \int_Q \xi S(\tilde{u}_{m,n}(t) - \tilde{\phi}) d\mu_{m,n}(t) dt = \int_Q \xi S(\tilde{u}(t) - \tilde{\phi}) d\mu(t) dt.
$$

D'autre part, la convergence presque partout de $u_{m,n}$ et la convergence forte des mesures $\mu_{m,n}$ préservent la même caractérisation des mesures pour presque tout t, c'est-à-dire, puisque

$$
(\mu_{m,n})_r(t) \in \partial j(\cdot, u_{m,n}(t)) + \partial I_{[\gamma_-(\cdot), \gamma_+(\cdot)]}(u_{m,n}(t)) \text{ p.p. } t,
$$

et $u_{m,n} \to u$ fortement dans $L^1(Q)$ et $(\mu_{m,n})_r(t) \to \mu_r(t)$ fortement dans $L^1(\Omega)$ p.p. t, la même caractérisation s'ensuit pour $\mu_r(t)$.
De la même manière, $\tilde{u}_{m,n}(t) = \gamma_{+/-} \quad (\mu_{m,n})_s^{+/-}(t) -$ p.p. sur Ω p.p. t, ce qui implique aussi $\tilde{u}(t) = \gamma_{+/-} \quad \mu_s^{+/-}(t) -$ p.p. sur Ω p.p. t.
Enfin, en tenant compte des limites (3.26)-(3.30), et en prenant $S \in \mathcal{P}$ une certaine approximation de T_k, on déduit l'existence de solutions entropiques du problème $(P)(u_0, f)$ pour tout $f \in L^1(Q)$ et $u_0 \in \overline{\mathcal{C}}^{\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}}$. La Remarque 3.3.2 achève alors la preuve. ■

3.4 Unicité de la solution entropique

L'unicité de la solution entropique est une conséquence immédiate du théorème suivant :

Théorème 3.4.1. *Soient u et v deux solutions entropiques des problèmes $(P)(u_0, f)$ et $(P)(v_0, g)$ respectivement. Alors elles vérifient*

$$\int_\Omega |u(t) - v(t)| \leq \int_\Omega |u_0 - v_0| + \int_Q |f - g| \quad \textit{presque partout } t \in (0, T).$$

La preuve de ce théorème est basée sur les deux propositions suivantes :

Proposition 3.4.1. *Soient $u_{m,n}$ et $v_{m,n}$ des solutions faibles respectives des problèmes*

$$u_t + A_{m,n} u \ni f_{m,n}, \; u(0) = u_{m,n}^0 \quad \textit{et} \quad v_t + A_{m,n} v \ni g_{m,n}, \; v(0) = v_{m,n}^0.$$

Alors elles vérifient le principe de contraction suivant :

$$\int_\Omega |u_{m,n}(t) - v_{m,n}(t)| \leq \int_\Omega |u_{m,n}^0 - v_{m,n}^0| + \int_Q |f_{m,n} - g_{m,n}|$$

presque partout $t \in (0, T)$.

Preuve. La preuve est immédiate d'après la Section 3 et la théorie générale des semigroupes non linéaires (cf. [15, 19]), en effet, rappelons qu'à l'origine une solution faible $u_{m,n}$ est aussi la bonne solution du problème de Cauchy $u_t + A_{m,n} u \ni f_{m,n}, \; u(0) = u_{m,n}^0 \in \mathcal{C}$ et que l'opérateur $A_{m,n}$ est m-T-accrétif dans $L^1(\Omega)$. ■

Proposition 3.4.2. *Soient u une solution entropique de $(P)(u_0, f)$ et $u_{m,n}$ une solution faible de $(P_{m,n})(u_{m,n}^0, f_{m,n})$. Alors*

$$\lim_{m,n \to \infty} \|u_{m,n}(t) - u(t)\|_{L^1(\Omega)} = 0 \quad \textit{pour presque tout } t.$$

Preuve. La preuve repose sur un dédoublement de variables en temps. Soient $t, s \in [0,T]$ et considérons $u_{m,n}, f_{m,n}$ en fonction de (t,x) et u, f en fonction de (s,x). Soient $\kappa \in \mathcal{D}_+[0,T)$ et $(\rho_l)_l$ une suite régularisante telle que $\mathrm{Supp}(\rho_l) \subset [-\frac{2}{l}, 0]$. On considère dans la formulation faible de $u_{m,n}$ la fonction test $\frac{1}{k}T_k(u_{m,n}-u)\rho_l(t-s)\kappa(t)$, on intègre en $s \in [0,T]$; et dans la formulation entropique de u on prend $\phi = u_{m,n}$ et $\xi = \frac{1}{k}\rho_l(t-s)\kappa(t)$, et on l'intègre en t, on obtient après avoir sommé les deux inégalités résultantes et utilisé la formule d'intégration par parties :

$$
\begin{aligned}
&-\int_{[0,T]^2\times\Omega}(\rho_l\kappa)_t\frac{1}{k}\int_{u^0_{m,n}}^{u_{m,n}(t)}T_k(r-u)dr-\int_{[0,T]^2\times\Omega}\kappa(\rho_l)_s\frac{1}{k}\int_{u_0}^{u(s)}T_k(r-u_{m,n})dr\\
&+\frac{1}{k}\int_{[0,T]^2\times\Omega}\big(a(u,Du)-a(u_{m,n},Du_{m,n})\big)\cdot DT_k(u-u_{m,n})\rho_l\kappa\\
&+\frac{1}{k}\int_{[0,T]^2\times\Omega}(\frac{1}{m}u^+_{m,n}-\frac{1}{n}u^-_{m,n})T_k(u_{m,n}-u)\rho_l\kappa\\
&+\frac{1}{k}\int_{[0,T]^2\times\Omega}T_k(\tilde u(s)-\tilde u_{m,n}(t))\rho_l\kappa d\mu(s)-\frac{1}{k}\int_{[0,T]^2\times\Omega}T_k(\tilde u(s)-\tilde u_{m,n}(t))\rho_l\kappa d\mu_{m,n}(t)\\
\le&\frac{1}{k}\int_{[0,T]^2\times\Omega}(f-f_{m,n})T_k(u-u_{m,n})\rho_l\kappa. \qquad (3.31)
\end{aligned}
$$

Notons ces intégrales respectivement par $J_1, \cdots, J_7$. Nous allons passer à la limite dans (3.31) avec $k \to 0$, $l \to \infty$ ensuite avec $m, n \to \infty$.
Grâce aux hypothèses (H_1) et (H_4) il en découle

$$
\begin{aligned}
\liminf_{k\to 0} J_3 &\ge \liminf_{k\to 0}\frac{1}{k}\int_{\{|u-u_{m,n}|<k\}}\big(a(u,Du)-a(u_{m,n},Du)\big)\cdot D(u-u_{m,n})\rho_l\kappa\\
&\ge -\liminf_{k\to 0}\int_{\{|u-u_{m,n}|<k\}}\frac{1}{k}C(|u|,|u_{m,n}|)|u-u_{m,n}|(1+|Du|^p)|D(u-u_{m,n})|\rho_l\kappa\\
&\ge 0.
\end{aligned}
$$

D'où

$$\lim_{l\to\infty}\liminf_{k\to 0} J_3 \ge 0. \qquad (3.32)$$

Par la monotonie de la fonction $\psi_{m,n}$, on voit bien que

$$J_4 \ge \frac{1}{k}\int_{[0,T]^2\times\Omega}(\frac{1}{m}u^+-\frac{1}{n}u^-)T_k(u_{m,n}-u)\rho_l\kappa =: J_4'.$$

Or

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{k\to 0}|J_4'| \le \frac{1}{m}\int_Q u^+\kappa+\frac{1}{n}\int_Q u^-\kappa,$$

d'où

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{k\to 0} J_4 \ge -\frac{1}{m}\int_Q u^+\kappa-\frac{1}{n}\int_Q u^-\kappa. \qquad (3.33)$$

D'autre part, on décompose les intégrales J_5 et J_6 comme dans (3.18) et on a

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{k\to 0} J_5 + J_6 \geq 0, \tag{3.34}$$

et par le théorème de la convergence dominée

$$\lim_{l\to\infty}\lim_{k\to 0} J_7 \leq \int_0^T\int_\Omega |f - f_{m,n}|\kappa. \tag{3.35}$$

Reste à traiter le terme $J_1 + J_2$. D'abord il est facile de voir que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0} J_1 + J_2 &= \int_{[0,T]^2\times\Omega} \rho_l\kappa_t\big(|u - u^0_{m,n}| - |u - u_{m,n}|\big)\\ &\quad + \int_{[0,T]^2\times\Omega} (\rho_l)_t\kappa\big(|u - u^0_{m,n}| - |u - u_{m,n}|\big)\\ &\quad + \int_{[0,T]^2\times\Omega} (\rho_l)_s\kappa\big(|u_0 - u_{m,n}| - |u - u_{m,n}|\big).\end{aligned}$$

On sait que pour $u^0_{m,n} \in L^\infty(\Omega)$ il existe $(u^q_{m,n})_q \in W^{1,p}_0(\Omega)$ telle que $u^q_{m,n} \to u^0_{m,n}$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $q \to \infty$. En utilisant le fait que $(\rho_l)(t-s)_t = -(\rho_l)(t-s)_s$ et que $\mathrm{Supp}(\rho_l) \subset [-\frac{2}{l}, 0]$ on déduit que

$$\begin{aligned}\lim_{k\to 0} J_1 + J_2 &\geq -\int_0^T\int_\Omega \kappa(0)\rho_l(-s)|u - u^q_{m,n}| - \int_0^T\int_\Omega \kappa(0)\rho_l(-s)|u^0_{m,n} - u^q_{m,n}|\\ &\quad -\int_{[0,T]^2\times\Omega} \rho_l\kappa_t|u - u_{m,n}|\\ &=: K_1 + K_2 + K_3.\end{aligned}$$

Il est clair que $\lim\limits_{l,q\to\infty} K_2 = 0$ et que $\lim\limits_{l\to\infty} K_3 = -\int_0^T\int_\Omega \kappa_t|u - u_{m,n}|$. Pour passer à la limite dans K_1 on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.4.1. *Si u est solution entropique de $(P)(u_0, f)$ alors elle vérifie*

$$-\int_Q \zeta_t|u-\phi| + \int_\Omega \zeta(0)|u_0 - \phi| + \int_Q \mathrm{sign}(u-\phi)\zeta d\mu(t)dt \leq \int_Q f\mathrm{sign}(u-\phi)\zeta$$

pour tout $\phi \in W^{1,p}_0(\Omega)$ et $\zeta \in \mathcal{D}_+[0,T)$.

Preuve. Il suffit de considérer $\xi = \frac{1}{k}\zeta$ avec $\zeta \in \mathcal{D}_+[0,T)$ dans l'inégalité entropique correspondant à la solution u et de passer à la limite avec $k \to 0$ en utilisant les hypothèses (H_1) et (H_4). ∎

Revenons maintenant au terme K_1. Définissons la fonction $\phi_l(s) = \displaystyle\int_s^T \rho_l(-r)dr\kappa(0)$ $= \int_{\inf(s,\frac{2}{l})}^{\frac{2}{l}} \rho_l(-r)dr\kappa(0)$. En considérant dans le lemme précédent $\phi = u^q_{m,n}$ et $\xi = \phi_l \in \mathcal{D}_+[0,T)$, on remarque que

$$
\begin{aligned}
K_1 &= \int_0^{\frac{2}{l}} \int_\Omega |u - u^q_{m,n}|(\phi_l)_s \\
&\geq \int_\Omega \phi_l(0)|u_0 - u^q_{m,n}| - \int_0^{\frac{2}{l}} \int_\Omega f\mathrm{sign}(u - u^q_{m,n})\phi_l + \int_0^{\frac{2}{l}} \int_\Omega \mathrm{sign}(u - u^q_{m,n})\phi_l d\mu(t)dt.
\end{aligned}
$$

Le théorème de la convergence dominée permet de conclure que $\displaystyle\lim_{l,q\to\infty} K_1 \geq \int_\Omega \kappa(0)|u_0 - u^0_{m,n}|$ en tenant compte du fait $\phi_l(0) = \kappa(0)$. Ainsi on a

$$
\lim_{l\to\infty}\lim_{k\to 0} J_1 + J_2 \geq \int_\Omega \kappa(0)|u_0 - u^0_{m,n}| - \int_Q \kappa_t|u - u_{m,n}|. \tag{3.36}
$$

En combinant toutes les limites (3.32)-(3.36), on en déduit

$$
\int_\Omega \kappa(0)|u_0 - u^0_{m,n}| - \int_Q \kappa_t|u - u_{m,n}| \leq \int_Q |f - f_{m,n}|\kappa - \frac{1}{m}\int_Q u^+\kappa - \frac{1}{n}\int_Q u^-\kappa
$$

pour tout $\kappa \in \mathcal{D}_+[0,T)$.

Par un argument classique (cf. [36]), on a

$$
\int_\Omega |u(t) - u_{m,n}(t)| \leq \int_\Omega |u_0 - u^0_{m,n}| + \int_Q |f - f_{m,n}| - \frac{1}{m}\int_Q u^+ - \frac{1}{n}\int_Q u^-
$$

presque partout $t \in (0,T)$. Le passage à la limite avec $m,n \to \infty$ nous assure alors le résultat désiré. ■

Maintenant, on est en mesure de prouver le Théorème 3.4.1.

Preuve du Théorème 3.4.1. Soient u et v deux solutions entropiques de $P(u_0,f)$ et $P(v_0,g)$ respectivement. D'après la Proposition 3.4.2, on sait que $u(t) = \displaystyle\lim_{m,n\to\infty} u_{m,n}(t)$ dans $L^1(\Omega)$ p.p. t et $v(t) = \displaystyle\lim_{m,n\to\infty} v_{m,n}(t)$ dans $L^1(\Omega)$ p.p. t, où $u_{m,n}$, respectivement $v_{m,n}$, est une solution faible de $(P_{m,n})(u^0_{m,n}, f_{m,n})$, respectivement de $(P_{m,n})(v^0_{m,n}, g_{m,n})$, avec $f_{m,n}, g_{m,n}, u^0_{m,n}$ et $v^0_{m,n}$ des approximations bi-monotones de f, g, u_0 et v_0 respectivement. D'après la Proposition 3.4.1, les solutions faibles vérifient

$$
\int_\Omega |u_{m,n}(t) - v_{m,n}(t)| \leq \int_\Omega |u^0_{m,n} - v^0_{m,n}| + \int_Q |f_{m,n} - g_{m,n}| \ \text{ p.p. } t.
$$

D'autre part,

$$\int_\Omega |u(t)-v(t)| \le \int_\Omega |u(t)-u_{m,n}(t)| + |u_{m,n}(t)-v_{m,n}(t)| + |v_{m,n}(t)-v(t)| \quad \text{p.p. } t,$$

et $f_{m,n} \to f$, $g_{m,n} \to g$ dans $L^1(Q)$ et $u^0_{m,n} \to u_0$, $v^0_{m,n} \to v_0$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $m,n\to\infty$, d'où, par le théorème de la convergence dominée

$$\int_\Omega |u(t)-v(t)| \le \int_\Omega |u_0-v_0| + \int_Q |f-g|$$

pour presque tout t. Ce qui finit la preuve. ■

3.5 Annexe

3.5.1 Quelques résultats sur le problème stationnaire

Dans cette section, on étudie le problème

$$u + Au + Bu \ni f, \tag{3.37}$$

où $A = \overline{A_0}^{\|\cdot\|_{L^1}}$ est la fermeture de l'opérateur A_0 défini sur $D(A_0) := \{h \in W_0^{1,p}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega); -\text{div }a(h,Dh)\in L^\infty(\Omega)\}$ par $A_0(u) := -\text{div }a(u,Du)$. B est l'opérateur dans $L^1(\Omega)$ défini par

$$w\in Bu \Leftrightarrow w,u\in L^1(\Omega), w(x)\in\partial j(x,u(x)) \quad \text{p.p. } x\in\Omega.$$

On notera que A est m-T-accrétif dans $L^1(\Omega)$.
Dans des travaux antérieures, P. Wittbold [77, 78] a étudié le problème (3.37) dans le cas où $A(u) = \text{div }a(x,Du)$ (qui est un opérateur m-complètement accrétif). Elle a montré qu'en général l'opérateur $A+B$ n'est pas m-complètement accrétif, par contre il admet toujours une extension $\mathcal{A}_j$ m-complètement accrétive dans $L^1(\Omega)$. L'idée consistait à approcher le problème (3.37) par les problèmes

$$u_\lambda + Au_\lambda + \beta_\lambda(\cdot,u_\lambda) = f,$$

et à montrer que $\mathcal{A}_j := \liminf_{\lambda\downarrow 0} A + B_\lambda$, où B_λ désigne l'opérateur associé à $j_\lambda(x,r) = \inf_{s\in\mathbb{R}}\{1/(2\lambda)|r-s|^2 + j(x,s)\}$, est une extension m-complètement accrétive dans $L^1(\Omega)$ de l'opérateur $A+B$.
En s'appuyant sur les mêmes idées, on étend ses résultats à notre contexte en montrant qu'il existe une extension m-T-accrétive $\mathcal{A}_j$ de l'opérateur $A+B$.

Théorème 3.5.1. *On a*

1- $\mathcal{A}_j := \liminf_{\lambda \downarrow 0} A + B_\lambda$ *est une extension m-T-accrétive de* $A+B$ *dans* $L^1(\Omega)$. *De plus, si* $u \in D(\mathcal{A}_j) \cap L^\infty(\Omega)$ *et* $f \in \mathcal{A}_j u$, *alors il existe une mesure* $\mu \in \mathcal{M}_0(\Omega)$ *dont la partie régulière* $\mu_r \in \partial j(\cdot, u) + \partial I_{[\gamma_-(\cdot),\gamma_+(\cdot)]}(u)$ *p.p. sur* Ω *et vérifie*

$$u - \operatorname{div}\, a(u, Du) + \mu = f + u \quad \textit{dans } \mathcal{D}'(\Omega)$$

et

$$\tilde{u}^{+/-} = \gamma_{+/-} \quad \mu_s^{+/-} - \textit{p.p. sur } \Omega.$$

2- On a[a]

$$\begin{aligned} & \overline{D(\mathcal{A}_j)}^{\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}} = \overline{\widehat{D}(A) \cap D(B)}^{\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}} \\ = \; & \overline{\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega);\ j(\cdot, u) \in L^1(\Omega)\}}^{\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}} \\ = \; & \overline{\{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega);\ \gamma_-(x) \le \tilde{u}(x) \le \gamma_+(x) \ \textit{q.p. } x \in \Omega\}}^{\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}} \end{aligned}$$

et

$$\overline{D(\mathcal{A}_j)}^{\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}} \subseteq \overline{\mathcal{C}}^{\|\cdot\|_{L^1(\Omega)}},$$

où l'on rappelle que

$$\mathcal{C} := \left\{ u \in L^\infty(\Omega); \begin{array}{l} \exists y_{+/-}, v \in L^\infty(\Omega) \textit{ avec } \pm v^{+/-} \textit{ est sous/sur-solution de} \\ \mathcal{A}_j(\pm v^{+/-}) \ni y_{+/-} \textit{ tels que } -v^- \le u \le v^+ \end{array} \right\}.$$

Preuve. Pour le premier résultat, il suffit d'adapter les techniques contenues dans [77, 78]. Pour le second point, on peut montrer de la même manière que P. Wittbold [77] que $\widehat{D}(\mathcal{A}_j) = \widehat{D}(A) \cap D(B)$. Prouvons maintenant la deuxième égalité. Etant donnée $u \in \widehat{D}(A) \cap D(B) \cap L^\infty(\Omega)$ on a $u_\delta := (I + \delta A)^{-1} u \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $\|u_\delta\|_\infty \le \|u\|_\infty$ et $u_\delta \to u$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $\delta \to 0$. Or $A_0 u_\delta$ est borné dans $L^1(\Omega)$ (car $A_0 u_\delta \le A_0 u$ et $u \in \widehat{D}(A)$), d'où

$$\lambda_0 \int_\Omega |Du_\delta|^p \le \int_\Omega A_0 u_\delta \cdot u_\delta \le \|A_0 u_\delta\|_1 \|u_\delta\|_\infty \le C.$$

Par conséquent, $(u_\delta)_\delta$ est bornée dans $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
D'autre part, $u \in D(B) \cap L^\infty(\Omega)$, alors $\int_\Omega j(\cdot, u) \le \|u\|_\infty \|\partial j^0(\cdot, u)\|_1$. D'où $\widehat{D}(A) \cap D(B) \cap L^\infty(\Omega) \subset \{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega);\ j(\cdot, u) \in L^1(\Omega)\}$.
Réciproquement, soit $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ avec $j(\cdot, u) \in L^1(\Omega)$ et considérons $u_{\delta,\lambda} = (I + \delta A + \delta B_\lambda)^{-1} u$. On a

$$u_{\delta,\lambda} - \delta \operatorname{div}\, a(u_{\delta,\lambda}, Du_{\delta,\lambda}) + \delta \beta_\lambda(x, u_{\delta,\lambda}) = u \ \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{3.38}$$

[a]Rappelons (cf. par exemple [19]) qu'étant donné un opérateur A, le domaine généralisé de A est défini par $\widehat{D}(A) := \{u; |u|_A < \infty\}$, où $|u|_A := \inf\{M \in [0, +\infty[;$ il existe $v_n \in Au_n$ tel que $u_n \to u, \|v_n\| \le M\}$. Si A est m-accrétif, alors $|u|_A = \sup_{\lambda > 0} \|A_\lambda u\| = \lim_{\lambda \to 0} \|A_\lambda u\|$.

On déduit de cette équation que $u_{\delta,\lambda} \in L^\infty(\Omega)$ avec $\|u_{\delta,\lambda}\|_\infty \leq \|u\|_\infty$, et que $\beta_\lambda(\cdot, u_{\delta,\lambda}) \in L^\infty(\Omega)$. Par suite $u_{\delta,\lambda} \in D(A_0)$ et

$$\delta \int_\Omega |Du_{\delta,\lambda}|^p \leq C \quad \text{(unif. en } \delta, \lambda). \tag{3.39}$$

Nous allons prouver que $u_\delta := \lim_\lambda u_{\delta,\lambda}$ converge vers la fonction u. Pour cela, choisissons dans l'équation (3.38) la fonction test $u_{\delta,\lambda} - u$, on obtient

$$\int_\Omega (u_{\delta,\lambda} - u)^2 + \delta \int_\Omega a(u_{\delta,\lambda}, Du_{\delta,\lambda}) \cdot D(u_{\delta,\lambda} - u) \leq \delta \int_\Omega \beta_\lambda(\cdot, u_{\delta,\lambda})(u - u_{\delta,\lambda}). \tag{3.40}$$

En utilisant les hypothèses (H_1) et (H_3), et l'estimation (3.39) on a

$$\begin{aligned}
\delta \int_\Omega a(u_{\delta,\lambda}, Du_{\delta,\lambda}) \cdot D(u_{\delta,\lambda} - u) &\geq \delta \int_\Omega a(u_{\delta,\lambda}, Du) \cdot D(u_{\delta,\lambda} - u) \\
&\geq -\Big(\int_\Omega |a(u_{\delta,\lambda}, Du)|^{p'} \Big)^{\frac{1}{p'}} \delta \Big(\int_\Omega |D(u_{\delta,\lambda} - u)|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq -C \Big(\int_\Omega |Du_{\delta,\lambda}|^p \Big)^{\frac{1}{p'}} 2^p \delta^p \Big(\delta \int_\Omega |Du_{\delta,\lambda}|^p + |Du|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq -C\delta^p \\
&\to 0 \text{ lorsque } \delta \to 0 \text{ unif. en } \lambda.
\end{aligned}$$

D'autre part

$$\delta \int_\Omega \beta_\lambda(\cdot, u_{\delta,\lambda})(u - u_{\delta,\lambda}) \leq \delta \int_\Omega j_\lambda(\cdot, u) \leq \delta \int_\Omega j(\cdot, u) \to 0 \text{ lorsque } \delta \to 0 \text{ unif. en } \lambda.$$

Par conséquent, du passage à la limite en δ dans l'inégalité (3.40) il vient

$$\|u_\delta - u\|_2^2 = \lim_{\lambda \to 0} \|u_{\delta,\lambda} - u\|_2^2 \to 0 \text{ lorsque } \delta \to 0.$$

D'où $u_\delta \to u$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $\delta \to 0$, ce qui prouve l'inclusion.
La dernière égalité est une conséquence du Lemme 3.2.1. Il nous reste à vérifier que $\overline{D(\mathcal{A}_j)} \subseteq \mathcal{C}$. Soit $u \in D(\mathcal{A}_j) \cap L^\infty(\Omega)$. Il existe $y \in L^\infty(\Omega)$ telle que $\mathcal{A}_j u \ni y$, d'où $\mathcal{A}_j(u \vee 0) \leq y \vee 0$, i.e. u^+ est sous-solution de $\mathcal{A}_j(u^+) \ni y^+$. De la même manière, on montre qu'il existe $y_- \in L^\infty(\Omega)$ telle que $-u^-$ est sur-solution de $\mathcal{A}_j(-u^-) \ni y^-$ et on a bien sûr $-u^- \leq u \leq u^+$. D'où le résultat. ∎

3.5.2 Preuve du Lemme 3.2.4

Dans cette partie on montre le Lemme 3.2.4 dont on rappelle d'abord l'énoncé.

Lemme 3.5.1. *On a*

(i) L'injection de $L_0^1(0,T;w^*\!-\!\mathcal{M}_b(\Omega))$ *dans* $\Big(L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\cap\ L^\infty(Q)\Big)^*$.

(ii) Cette injection est continue par rapport aux topologies fortes des espaces de départ et d'arrivée.

Preuve. (i) Notons que l'on peut approcher tout $\phi\in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\cap L^\infty(Q)$ par des fonctions $\phi\in C(Q)$ en norme $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\cap L^\infty(Q)$. Pour montrer que tout élément $\mu\in L_0^1(0,T;w^*\!-\!\mathcal{M}_b(\Omega))$ peut être identifié à une fonctionnelle continue sur $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\cap L^\infty(Q)$, il suffit de montrer que

$$\begin{gathered}\forall\varepsilon>0,\ \exists\kappa>0\ \text{ tel que }\ \forall\varphi\in C(Q)\cap L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))\cap L^\infty(Q)\\ \text{avec }\ \|\varphi\|_\infty\le M,\ \|\varphi\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}\le\kappa\ \text{ on ait }\ |\textstyle\int_Q\varphi d\mu|<\varepsilon.\end{gathered}$$

Plaçons-nous dans le cas où μ est positive. Le cas général se traite en décomposant $\mu=\mu^+-\mu^-$. Comme $\mu(t)\in\mathcal{M}_0(\Omega)$, $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ tel que $\operatorname{cap}(E)<\delta$ entraîne $\mu(t)(E)<\varepsilon$. Montrons que l'on peut majorer ε en fonction de δ de manière mesurable en $t\in(0,T)$.
Montrons que ce δ peut être choisi d'une manière uniforme en t en dehors d'un compact de mesure aussi petite que l'on veut. Plus exactement, on va montrer que pour tout $\nu>0$, il existe un compact $K\subset(0,T)$ avec $|(0,T)\backslash K|<\nu$ et une fonction π continue tels que

$$\sup_{\operatorname{cap}(E)<\delta}\mu(t)(E)\le\pi(\delta)\ \forall t\in K.$$

Comme $\mu(t)\in\mathcal{M}_0(\Omega)$, elle peut être représentée comme $\mu_r(t)+\mu_s(t)$, où la partie régulière $\mu_r(t)\in L^1(\Omega)$ et la partie singulière $\mu_s(t)\in W^{-1,p'}(\Omega)\cap\mathcal{M}_b(\Omega)$ (cf. Boccardo, Gallouët et Orsina [27]) ; de plus, la w^*-mesurabilité de $t\mapsto\mu(t)$ entraîne la w^*-mesurabilité de $t\mapsto(\mu_r(t),\mu_s(t))$, grâce à la continuité des applications $\mu\mapsto\mu_r$ et $\mu\mapsto\mu_s$.
On a aussi

$$\sup_{\operatorname{cap}(E)<\delta}\mu(t)(E)\le\sup_{\psi\in D_\delta^r}\int\psi\ d\mu_r(t)+\sup_{\varphi\in D_\delta^s}\int\varphi\, d\mu_s(t)=:\pi_r^t(\delta)+\pi_s^t(\delta),$$

où

$$D_\delta^r:=\{\psi\in L^\infty(\Omega);\ 0\le\psi\le1,\ \operatorname{cap}(\operatorname{Supp}\psi)\le2\delta\}$$

et

$$D_\delta^s:=\{\varphi\in W_0^{1,p}(\Omega);\ 0\le\varphi\le1,\ \|\varphi\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}\le2\delta\}.$$

Notons que $\pi_r^t(\delta)+\pi_s^t(\delta)\le\mu(t)(\Omega)<\infty$ pour presque tout t. De plus, pour presque tout $t\in(0,T)$, $\pi_s^t(\delta)\to0$ et $\pi_r^t(\delta)\to0$ lorsque $\delta\to0$.
D'autre part, pour tout $\delta>0$, il existe deux familles dénombrables $(\psi_k)_k\subset C(\Omega)\cap D_\delta^r$ et $(\varphi_k)_k\subset C(\Omega)\cap D_\delta^s$ telles que $(\psi_k)_k$ est dense dans D_δ^r pour la topologie de la convergence presque partout et $(\varphi_k)_k$ est dense dans D_δ^s pour la

norme de $W_0^{1,p}(\Omega)$. Ainsi, dans les définitions de π_r^t et π_s^t on peut prendre le suprémum sur ces familles dénombrables de $\psi \in C(\Omega)$ et $\varphi \in C(\Omega)$ respectivement. La w^*-mesurabilité de $t \mapsto (\mu_r(t), \mu_s(t))$ permet de conclure à la mesurabilité de $t \mapsto (\pi_r^t(\delta), \pi_s^t(\delta))$ pour tout δ.
Considérons l'enveloppe concave de $\pi_0^t := \pi_r^t + \pi_s^t$, sur $[0, \mathrm{cap}(\Omega)]$, i.e. la fonction définie par

$$\pi^t(\delta) := \min\{\pi'(\delta);\ \pi'\text{concave } \pi' \geq \pi_0^t \text{ sur } [0, \mathrm{cap}(\Omega)]\}.$$

Cette dernière vérifie $\pi^t(\delta) \to 0$ lorsque $\delta \to 0$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe $\rho > 0$ tel que $\forall \delta < \rho$ on a $\pi_0^t(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$. On sait aussi que $\pi_0^t(\delta) \leq \mu(t)(\Omega)$. Soit la fonction affine par morceaux définie par $\pi'(\delta) := \mu(t)(\Omega)$ si $\delta > \rho, \pi'(0) = \frac{\varepsilon}{2}$ et π' est linéaire sur $[0, \rho]$. On a bien π' concave et $\pi'(\delta) \geq \pi_0^t(\delta)$. De plus, $\exists \rho_1$ tel que $\pi'(\delta) < \varepsilon\ \forall \delta < \rho_1$. Or $0 \leq \pi^t(\delta) \leq \pi'(\delta)$, ce qui fournit le résultat.
Comme π_0^t est monotone en δ, son enveloppe concave est définie par des valeurs dans un ensemble dénombrable de points $(\delta_k)_k$, commun pour presque tout $t \in (0, T)$. Puisque $t \mapsto \pi_0^t(\delta_k)$ est mesurable sur $(0, T)$, on conclut que $t \mapsto \pi^t$ est également mesurable de $(0, T)$ à valeurs dans $C([0, \mathrm{cap}(\Omega)])$.
On peut alors appliquer le théorème de Lusin pour conclure qu'à tout $\nu > 0$ on peut associer une fonction continue $\pi^* : [0, T] \to C([0, \mathrm{cap}(\Omega)])$ et un compact $K \subset (0, T)$ tels que $|(0, T)/K| < \nu$ et $\pi^t(\delta) = \pi^*(t)(\delta)\ \forall t \in K$. Comme pour tout $t, \bar{t} \in K$

$$\begin{aligned}
|\pi^*(t)(\delta) - \pi^*(\bar{t})(\bar{\delta})| &\leq |\pi^t(\delta) - \pi^{\bar{t}}(\delta)| + |\pi^{\bar{t}}(\delta) - \pi^{\bar{t}}(\bar{\delta})| \\
&\leq \sup_{\delta \in [0, \mathrm{cap}(\Omega)]} |\pi^t(\delta) - \pi^{\bar{t}}(\delta)| + |\pi^{\bar{t}}(\delta) - \pi^{\bar{t}}(\bar{\delta})|,
\end{aligned}$$

la fonction $\pi^*(\cdot, \cdot)$ $(\pi^*(t, \delta) = \pi^*(t)(\delta))$ est continue sur $K \times [0, \mathrm{cap}(\Omega)]$. A présent, considérons la fonction $\widehat{\pi}(\delta) = \sup_{t \in K} \pi^*(t)(\delta)$, qui est bien continue car $\pi^*(\cdot, \cdot)$ est continue, et on a

$$\begin{aligned}
|\widehat{\pi}(\delta) - \widehat{\pi}(\bar{\delta})| &\leq |\sup_{t \in K} \pi^*(t)(\delta) - \sup_{t \in K} \pi^*(t)(\bar{\delta})| \\
&\leq \sup_{t \in K} |\pi^*(t)(\delta) - \pi^*(t)(\bar{\delta})|.
\end{aligned}$$

Par conséquent $\widehat{\pi}(\delta) \to \widehat{\pi}(0) = 0$ lorsque $\delta \to 0$. Soit l'enveloppe concave de $\widehat{\pi}$, que l'on notera π (notez que cette fois-ci π ne dépend que de δ). Comme précédemment, on montre que $\pi(\delta) \to 0$ lorsque $\delta \to 0$. Ainsi

$$\sup_{\mathrm{cap}(E) < \delta} \mu(t)(E) \leq \pi_0^t(\delta) \leq \pi^t(\delta) \leq \pi(\delta)\ \forall t \in K.$$

D'autre part, grâce au fait que $\|\mu(t)\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} \in L^1(0, T)$, il existe une fonction $\tilde{\pi} : (0, T) \to \mathbb{R}^+$ telle que $\tilde{\pi}(\nu) \to 0$ lorsque $\nu \to 0$ et

$$\sup_{A \subset (0,T), |A| < \nu} \int_A \|\mu(t)\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} \leq \tilde{\pi}(\nu).$$

Pour finir la preuve, rappelons les deux lemmes suivants :

Lemme 3.5.2. *[44, Lemma 1] Soit $\alpha > 0$. Alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$\operatorname{cap}\{x \in \Omega;\ \phi(x) > \alpha\} \leq \frac{C}{\alpha^p} \int_\Omega |D\phi|^p dx \quad \forall \phi \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Lemme 3.5.3. *[71] Soient π une fonction concave, f une fonction mesurable et $E \subset \Omega$ mesurable, alors on a l'inégalité*

$$\int_E \pi(f(x))dx \leq |E|\pi(\frac{1}{|E|}\int_\Omega f(x)dx).$$

Poursuivons notre preuve du lemme. Soit $\varphi \in C(Q) \cap L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$ avec $\|\varphi\|_\infty \leq M$ et $\|\varphi\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} < \kappa$. En utilisant les deux lemmes précédents, on déduit

$$\begin{aligned}
|\int_Q \varphi d\mu| &\leq |\int_{(0,T)/K}\int_\Omega \varphi d\mu(t)dt| + |\int_K \int_{\{x;\ \varphi(t,x)\leq\alpha\}} \varphi d\mu(t)dt| \\
&\quad + |\int_K \int_{\{x;\ \varphi(t,x)>\alpha\}} \varphi d\mu(t)dt| \\
&\leq \|\varphi\|_\infty \tilde{\pi}(\nu) + \alpha\|\mu\|_{L^1(0,T;\mathcal{M}_b(\Omega))} + \|\varphi\|_\infty \int_K \int_{\{x;\ \varphi(t,x)>\alpha\}} d\mu(t)dt \\
&\leq M\tilde{\pi}(\nu) + C\alpha + M\int_K \pi\big(\frac{C'}{\alpha^p}\int_\Omega |D\varphi(t)|^p\big) \\
&\leq M\tilde{\pi}(\nu) + C\alpha + Mc\pi\big(\frac{C'}{\alpha^p}\int_0^T\int_\Omega |D\varphi(t)|^p\big) \\
&\leq M\tilde{\pi}(\nu) + C\alpha + Mc\pi\big(\frac{C'}{\alpha^p}\kappa^p\big).
\end{aligned}$$

Choisissons $\nu > 0$ de sorte que $\tilde{\pi}(\nu) < \frac{\varepsilon}{3M}$ et $\alpha > 0$ tel que $\alpha < \frac{\varepsilon}{3C}$ puis enfin κ tel que $\pi\big(\frac{C'}{\alpha^p}\kappa^p\big) < \frac{\varepsilon}{3Mc}$, alors

$$|\int_Q \varphi d\mu| \leq \varepsilon.$$

D'où le résultat de (i).
(ii) Prenons une suite $\mu_k \to \mu$ fortement dans $L_0^1(0,T; w^*-\mathcal{M}_b(\Omega))$ lorsque $k \to \infty$. Alors on a $\|\mu_k(t)\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} \to \|\mu(t)\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)}$ dans $L^1(0,T)$; $\tilde{\pi}$ peut donc être choisie commune pour tout k.
Montrons que la fonction π et l'ensemble K utilisés dans (i) peuvent également être choisis communs pour tous les $k \in \mathbb{N}$. En effet, d'après le théorème de Egorov, pour tout $\nu > 0$ il existe un compact $K_0 \subset (0,T)$ tel que $|(0,T) \setminus K_0| < \nu/4$

et $\|\mu_k(t)-\mu(t)\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} \to 0$ uniformément en $t \in K_0$.
Soit π_k la fonction continue définie sur $[0,1]$ (il suffit de prendre $\alpha \le 1$ et de raisonner sur $[0,1]$ au lieu de $[0,\mathrm{cap}(\Omega)]$) de limite nulle en zéro telle que $\mu_k(t)(E) \le \pi_k(\delta)$ pour tout $E \subset \Omega$ avec $\mathrm{cap}(E) < \delta$ et tout $t \in K_k$ avec $|(0,T)\setminus K_k| < \nu/2^{k+2}$.
On note π_∞ la fonction associée à μ, i.e. telle que $\mu(t)(E) \le \pi_\infty(\delta)$ pour tout $E \subset \Omega$ avec $\mathrm{cap}(E) < \delta$ et tout $t \in K_\infty$ avec $|(0,T)\setminus K_\infty| < \nu/4$. Soit $\theta > 0$, prenons δ_∞ satisfaisant $\pi_\infty(\delta_\infty) < \theta/2$. D'autre part, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $k > n$ et $t \in K_0$, $\|\mu_k(t)-\mu(t)\|_{\mathcal{M}_b(\Omega)} < \theta/2$, et $\delta_1,\dots,\delta_n$ tels que $\pi_k(\delta_k) < \theta$ pour $k = 1,\dots,n$. Finalement, en posant $\delta = \min\{\delta_\infty,\delta_1,\dots,\delta_n\}$, on a pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{\mathrm{cap}(E)<\delta} \mu_k(t)(E) \le \theta \qquad \text{pour tout } t \in K_0 \cap K_\infty \cap \big(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} K_k\big).$$

Il s'ensuit qu'il existe une fonction π sur $[0,1]$ telle que $\pi(\delta) \to 0$ lorsque $\delta \to 0$, et un ensemble $K \subset (0,T)$ tel que $|(0,T)\setminus K| < \nu$ de sorte que pour tout $t \in K$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sup_{\mathrm{cap}(E)<\delta} \mu_k(t)(E) \le \pi(\delta)$.
Maintenant on prend $\varphi \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q) \cap C(Q)$ de norme 1 et on raisonne comme ci-dessus pour trouver

$$\begin{aligned}
\Big|\int_Q \varphi\, d(\mu_k-\mu)\Big| &\le \int_{(0,T)/K}\int_\Omega |\varphi|\, d|\mu_k-\mu|(t)dt \\
&\quad + \int_K \int_{\{x;\ |\varphi(t,x)|\le\alpha\}} |\varphi|\, d|\mu_k-\mu|(t)dt \\
&\quad + \int_K \int_{\{x;\ |\varphi(t,x)|>\alpha\}} |\varphi|\, d|\mu_k-\mu|(t)dt \\
&\le 2\|\varphi\|_\infty \tilde{\pi}(\nu) + \alpha\|\mu_k-\mu\|_{L^1(0,T;\mathcal{M}_b(\Omega))} \\
&\quad + \|\varphi\|_\infty \int_K \int_{\{x;\ |\varphi(t,x)|>\alpha\}} d|\mu_k-\mu|(t)dt \\
&\le 2\tilde{\pi}(\nu) + \alpha\|\mu_k-\mu\|_{L^1(0,T;\mathcal{M}_b(\Omega))} + 2c\int_K \pi\Big(\frac{c}{\alpha^p}\int_\Omega |D\varphi(t)|^p\Big) \\
&\le 2\tilde{\pi}(\nu) + \alpha\|\mu_k-\mu\|_{L^1(0,T;\mathcal{M}_b(\Omega))} + 2c\pi\Big(\frac{c}{\alpha^p}\int_0^T\int_\Omega |D\varphi(t)|^p\Big) \\
&\le 2\tilde{\pi}(\nu) + \alpha\|\mu_k-\mu\|_{L^1(0,T;\mathcal{M}_b(\Omega))} + 2c\pi\Big(\frac{c}{\alpha^p}\Big).
\end{aligned}$$

Enfin on choisit ν assez petit, puis α assez grand, puis k assez grand pour conclure que

$$\int_Q \varphi d\mu_k \to \int_Q \varphi d\mu \quad \text{uniformément sur les bornés de } \ L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q).$$

■

Chapitre 4

Solution renormalisée d'un problème de Stefan non linéaire

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on se propose de donner un résultat d'existence de solutions renormalisées pour le problème de Stefan suivant :

$$(S)(b_0, f) \begin{cases} (\beta(u))_t - \text{div } a(u, Du) \ni f & \text{sur } Q := (0,T) \times \Omega \\ \beta(u)(t=0) \ni b_0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma := (0,T) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^N (N \geq 1)$, $T > 0$, β est un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R}^2$ contenant $(0,0)$, $f \in L^1(Q)$, $b_0 \in L^1(\Omega)$ et $a : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est un champ vérifiant les hypothèses du type Leray-Lions (H_1)-(H_4) énoncées à l'introduction générale.

L'existence de solutions dans L^1 pour le problème $(S)(b_0, f)$ lorsque β est une fonction continue et croissante a été établie par K. Ammar et P. Wittbold [5], l'unicité de la solution a été auparavant prouvée par J. Carrillo et P. Wittbold [37]. Lorsque $a(u, Du)$ est remplacé par $a(x, Du) - \phi(u)$, avec ϕ Lipschitz, ce problème été étudié par D. Blanchard et A. Porretta [25]. Ils montrent l'unicité de la solution renormalisée pour un graphe monotone quelconque et l'existence pour un graphe dont le graphe réciproque est une fonction continue. La principale nouveauté du travail que nous présentons ici vient du fait que, contrairement à D. Blanchard et A. Porretta [25], nous n'imposons aucune condition sur le graphe β pour montrer l'existence de solutions renormalisées. Nous combinerons pour cela les techniques de D. Blanchard et A. Porretta [25] et l'approche développée par K. Ammar et P. Wittbold [5].

Ce chapitre est organisé comme suit : dans la section suivante, en s'appuyant sur la théorie générale des semigroupes non linéaires, on montre pour des données bornées l'existence de solutions faibles pour le problème approché et perturbé suivant :

$$(S_k)(b_0^k, f, \psi) \begin{cases} (\beta_k(u))_t - \text{div } a(u, Du) + \psi(u) \ni f & \text{sur } Q \\ \beta_k(u)(t=0) \ni b_0^k & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

avec $\beta_k(r) = \beta(r) + \frac{1}{k}r,\ r \in \mathbb{R},\ k > 0,\ b_0^k \in \beta_k(u_0^k),\ u_0^k \to u_0$ dans $L^1(\Omega)$, où u_0 est une fonction mesurable telle que $u_0 \in \beta^{-1}(b_0)$, et ψ est une fonction continue strictement croissante.
On montre également que ces solutions faibles convergent lorsque k tend vers l'infini vers les solutions faibles du problème perturbé suivant :

$$(S)(b_0, f, \psi) \begin{cases} (\beta(u))_t - \text{div } a(u, Du) + \psi(u) \ni f & \text{sur } Q \\ \beta(u)(t=0) \ni b_0 & \text{sur } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma. \end{cases}$$

Ce passage à la limite est en partie assuré par la Proposition 4.2 ci-dessous, qui nous permet grâce à la perturbation ψ de récupérer la convergence presque partout de la suite de solutions du problème précédent.
Dans la Section 3, nous choisissons une suite de perturbations $(\psi_{m,n})_{m,n}$, croissante en m et décroissante en n, nous approchons également les données f et b_0 par des approximations bi-monotones et nous montrons que les solutions faibles du problème $(S)(b_0, f, \psi_{m,n})$ convergent lorsque $m, n \to \infty$ vers des solutions de $(S)(b_0, f)$, que l'on appellera renormalisées. Un lemme de comparaison de solutions (cf. Lemme 4.3.1) jouera un rôle clef lors de ce passage à la limite.

Avant d'entamer l'étude, il est utile de rappeler deux lemmes, que l'on invoquera à plusieurs reprises, fournissant une formule d'intégration par parties, généralisant les formules déjà prouvées (cf. H.W. Alt et S. Luckhaus [2], F. Otto [65] et J. Carrillo et P. Wittbold [37]).

Lemme 4.1.1. *[22] Soient β un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R}^2$ avec $0 \in \beta(0)$, $u \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$, $b \in L^1(Q)$ avec $b(t,x) \in \beta(u(t,x))$ p.p. $(t,x) \in Q$, $b_0, u_0 \in L^1(\Omega)$ avec $b_0(x) \in \beta(u_0(x))$ p.p. $x \in \Omega$. Soit $G \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega)) + L^1(Q)$. On suppose que*

$$\int_Q (b - b_0)\xi_t = \int_0^T \langle G, \xi \rangle dt \quad \forall \xi \in \mathcal{D}_+([0,T) \times \Omega).$$

Alors

$$\int_Q \xi_t \int_{b_0}^{b(t)} \left(p(\cdot - w) \circ \beta^{-1}\right)^0 (r) dr dx dt = \int_0^T \langle G, p(u-w)\xi \rangle dt$$

pour tout $p \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$, p croissante avec $p(0) = 0$, et pour tout $w \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap D(\beta)$.

Lemme 4.1.2. *[25, Lemma 2.1] Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lambda \mapsto F(\lambda, \mu)$ est croissante et lipschitzienne continue $\forall \mu \in \mathbb{R}$, et soit β un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R}^2$. On pose $G(\lambda, \mu) = \int^{\lambda} (\frac{\partial}{\partial r} F(r, \mu))\beta^0(r)dr$. Soient $w \in L^1(Q)$, $w_0 \in L^1(\Omega)$, $b \in L^1(Q)$ et $b_0 \in L^1(\Omega)$ telles que $b \in \beta(w)$ p.p. sur Q et $b_0 \in \beta(w_0)$ p.p. sur Ω.*
Alors pour tout z tel que $F(w, z) \in L^\infty(Q), G(w, z) \in L^1(Q), F(w_0, z) \in L^\infty(\Omega)$ et $G(w_0, z) \in L^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega (b - b_0) \frac{\partial}{\partial t} \big(\xi \frac{1}{h} \int_t^{t+h} F(w(x, \tau), z(x)) d\tau \big) dx dt \\ \leq & \int_0^T \int_\Omega \xi_t \big(b \frac{1}{h} \int_t^{t+h} F(w, z) d\tau - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} G(w, z) d\tau \big) dx dt \\ & + \int_\Omega \xi(0) \big(b_0 F(w_0, z) - G(w_0, z)\big) dx \end{aligned}$$

pour tout $\xi \in W^{1,\infty}(Q)$ avec $\xi \geq 0$ et $\xi(T) = 0$.

4.2 Existence de solutions faibles

En utilisant l'approche des semigroupes non linéaires, on montre dans cette section que, pour $f \in L^\infty(Q)$ et $b_0 \in L^\infty(\Omega)$, il existe des solutions faibles du problème approché et perturbé $(S_k)(b_0^k, f, \psi)$ et qu'elles convergent vers des solutions faibles du problème $(S)(b_0, f, \psi)$ que l'on définit comme suit :

Définition 4.2.1. *Soient $f \in L^\infty(Q)$ et $b_0 \in L^\infty(\Omega)$. Une fonction mesurable $u : Q \to \mathbb{R}$ est une solution faible de $(S)(b_0, f, \psi)$ si $u \in L^p(0, T, W_0^{1,p}(\Omega)) \cap L^\infty(Q)$, $b \in L^\infty(Q)$, $b \in \beta(u)$ et pour tout $\xi \in C_c^\infty([0, T) \times \Omega)$ on a*

$$- \int_Q (b - b_0)\xi_t + \int_Q a(u, Du) \cdot D\xi + \int_Q \psi(u)\xi = \int_Q f\xi.$$

Dans une première étape, on peut établir le résultat suivant dont la preuve découle en adaptant les mêmes arguments que K. Ammar et P. Wittbold [5] et Ph. Bénilan et P. Wittbold [21].

Proposition 4.2.1. *Soient β un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R}^2$ tel que $0 \in \beta(0)$ et $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante et surjective. Alors l'opérateur*

$$A_{\beta_k}^{\psi} := \left\{ (b_k, -\operatorname{div} a(u, Du) + \psi(u)); \begin{array}{l} u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega),\ b_k \in L^1(\Omega) \\ b_k \in \beta_k(u) \text{ et } \operatorname{div} a(u, Du) \in L^\infty(\Omega) \end{array} \right\}$$

satisfait les propriétés suivantes :
- *$A_{\beta_k}^{\psi}$ est m-accrétif dans $L^1(\Omega)$*

- $R(I + \alpha A^{\psi}_{\beta_k}) = L^\infty(\Omega) \quad \forall \alpha > 0$
- $\overline{D(A^{\psi}_{\beta_k})}^{\|\cdot\|_{L^1}} = \{u \in L^1(\Omega);\ u(x) \in \overline{R(\beta)}\ p.p.\ x \in \Omega\}.$

Comme $\overline{A^{\psi}_{\beta_k}}^{\|\cdot\|_{L^1}}$ est m-accrétif dans $L^1(\Omega)$ et $A^{\psi}_{\beta} \subset \liminf_{k\to 0} A^{\psi}_{\beta_k}$, où l'opérateur A^{ψ}_{β} est défini de la même manière que $A^{\psi}_{\beta_k}$ en remplaçant β_k par β, alors par la théorie générale des semigroupes non linéaires, on déduit grâce à la Proposition 4.2.1 l'existence d'une unique bonne solution $b_k \in C([0,T]; L^1(\Omega))$ du problème de Cauchy suivant :

$$(b_k)_t + A^{\psi}_{\beta_k}(b_k) \ni f,\ b_k(0) = b^k_0. \tag{4.1}$$

Si $b^k_0 \to b_0$ dans $L^1(\Omega)$, alors la bonne solution b_k de (4.1) converge dans $C([0,T]; L^1(\Omega))$ vers la bonne solution b du problème de Cauchy

$$b_t + A^{\psi}_{\beta}(b) \ni f,\ \beta(0) \ni b_0.$$

Le théorème suivant précise dans quel sens la bonne solution résout notre problème.

Théorème 4.2.1. *Soient $f \in L^\infty(Q)$ et $b_0 \in L^\infty(\Omega)$. Soit b_k la bonne solution du problème de Cauchy (4.1). Alors u_k est une solution faible du problème perturbé $(S_k)(b^k_0, f, \psi)$ et converge lorsque $k \to \infty$ vers une solution faible du problème $(S)(b_0, f, \psi)$.*

Avant de démontrer ce dernier théorème, énonçons le résultat suivant qui assure la convergence presque partout de la suite de solutions $(u_k)_k$ du problème $(S_k)(b^k_0, f, \psi)$ sans aucune hypothèse supplémentaire sur le graphe β.

Proposition 4.2.2. *Soient $f \in L^1(Q)$, $b^k_0, b^l_0 \in L^1(\Omega), k, l > 0$ et $u_k(t,x), u_l(s,x)$ $t, s \in [0,T]$ des solutions faibles des problèmes $(S_k)(b^k_0, f, \psi)$, $(S_l)(b^l_0, f, \psi)$, respectivement, et $b_k(t,x) \in \beta(u_k(t,x))$, $b_l(s,x) \in \beta(u_l(s,x))$ p.p. sur Q. On décompose $b_k = b_{k,1} + \frac{1}{k}u_k$, $b_{k,1} \in \beta(u_k)$ et $b_l = b_{l,1} + \frac{1}{l}u_l$, $b_{l,1} \in \beta(u_l)$. De même $b^k_0 = b^0_{k,1} + \frac{1}{k}u^k_0$, $b^l_0 = b^0_{l,1} + \frac{1}{l}u^l_0$, $b^0_{k,1} \in \beta(u^k_0)$, $b^0_{l,1} \in \beta(u^l_0)$ p.p. sur Ω. Alors*

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_Q \xi_t\big(|b_{k,1} - b_{l,1}| - |b^0_{k,1} - b_{l,1}|\big) - \int_0^T\int_Q \xi_s\big(|b_{l,1} - b_{k,1}| - |b^0_{l,1} - b_{k,1}|\big)\\
&-\int_0^T\int_Q \frac{1}{l}\xi_t\big(|u_k - u_l| - |u^k_0 - u_l|\big) - \int_0^T\int_Q \frac{1}{k}\xi_s\big(|u_k - u_l| - |u^l_0 - u_k|\big)\\
&+\int_0^T\int_Q (\chi_{\{u_k > u_l\}} - \chi_{\{u_k < u_l\}})(a(u_k, Du_k) - a(u_l, Du_l)) \cdot D\xi\\
&+\int_0^T\int_Q (\psi(u_k) - \psi(u_l))(\chi_{\{u_k > u_l\}} - \chi_{\{u_k > u_l\}})\xi
\end{aligned}$$

$$\leq \int_0^T \int_Q (f(t,x) - f(s,x))(\chi_{\{u_k>u_l\}} - \chi_{\{u_k<u_l\}} + \chi_{\{u_k=u_l\}})\xi$$

pour tout $\xi \in C_c^\infty([0,T)^2 \times \overline{\Omega})$ *telle que* $\xi \geq 0$.

La preuve de cette proposition s'appuie essentiellement sur les idées développées par D. Blanchard et A. Porretta [25, Proposition 4.2].

Preuve. Soit la fonction $\eta_\delta(r) = \frac{1}{\delta}T_\delta(r), \delta > 0$, qui est une approximation du $\text{sign}_0(\cdot)$. Soient $z \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et $\xi \in C_c^\infty([0,T) \times \overline{\Omega})$ telle que $\xi \geq 0$. Considérons la fonction

$$\varphi_h(t,x) = \frac{1}{h}\xi(t,x)\int_t^{t+h} \eta_\delta(u_k(\tau,x) - z(x))d\tau,$$

vérifiant en particulier $(\varphi_h)_t \in L^\infty(Q)$ et $\varphi_h \in L^\infty(Q) \cap L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, car $\eta_\delta(u_k - z) \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ et η'_δ est à support compact, et

$$\varphi_h \to \eta_\delta(u_k - z)\xi \ \text{ fortement dans } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$$

et

$$\varphi_h \overset{*}{\rightharpoonup} \eta_\delta(u_k - z)\xi \ \text{ faiblement } * \text{ dans } L^\infty(Q) \text{ lorsque } h \to 0.$$

Soit $u_k(t,x)$ une solution faible du problème $(S_k)(b_0^k, f, \psi)$, et considérons la fonction test $\varphi_h(t,x)$. On a

$$-\int_Q (b_k - b_0^k)(\varphi_h)_t + \int_Q a(u_k, Du_k)\cdot D\varphi_h + \int_Q \psi(u_k)\varphi_h \leq \int_Q f\varphi_h. \tag{4.2}$$

Grâce aux précédentes convergences de la suite $(\varphi_h)_h$, le seul problème lors du passage à la limite avec h dans l'inégalité précédente se pose dans le premier terme. Pour cela, appliquons le Lemme 4.1.2 :

$$\begin{aligned}
-\int_0^T \int_\Omega (b_k - b_0^k)(\varphi_h)_t \ \geq\ & -\int_0^T \int_\Omega \xi_t\Big[b_k \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \eta_\delta(u_k(\tau,x) - z(x))d\tau\Big] \\
& -\int_0^T \int_\Omega \xi_t\Big[-\frac{1}{h}\int_t^{t+h}\int_z^{u_k(\tau)} \beta_k(r)\eta'_\delta(r-z)dr\Big] \\
& -\int_\Omega \xi(0)\Big[b_0^k\eta_\delta(u_0^k - z) - \int_z^{u_0^k} \beta_k(r)\eta'_\delta(r-z)dr\Big].
\end{aligned}$$

En faisant tendre h vers zéro, on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} -\int_0^T \int_\Omega (b_k - b_0^k)\varphi_t \ \geq\ & -\int_0^T \int_\Omega \xi_t\Big[b_k\eta_\delta(u_k - z) - \int_z^{u_k(t)} \beta_k(r)\eta'_\delta(r-z)dr\Big] \\
& -\int_\Omega \xi(0)\Big[b_0^k\eta_\delta(u_0^k - z) - \int_z^{u_0^k} \beta_k(r)\eta'_\delta(r-z)dr\Big].
\end{aligned}$$

Du passage à la limite avec h dans l'inégalité (4.2) il vient

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_\Omega \xi_t\Big[b_k\eta_\delta(u_k-z)-\int_z^{u_k(t)}\beta_k(r)\eta'_\delta(r-z)dr\Big]\\
&-\int_\Omega \xi(0)\Big[b_0^k\eta_\delta(u_0^k-z)-\int_z^{u_0^k}\beta_k(r)\eta'_\delta(r-z)dr\Big]\\
&+\int_0^T\int_\Omega a(u_k,Du_k)\cdot D(\eta_\delta(u_k-z)\xi)+\int_0^T\int_\Omega\psi(u_k)\eta_\delta(u_k-z)\xi\\
\leq\ &\int_0^T\int_\Omega f\eta_\delta(u_k-z)\xi
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

pour tout $\xi\in C_c^\infty([0,T)\times\overline{\Omega})$ positive.
Soit $\zeta\in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $0\leq\zeta\leq1$. On remplace dans (4.3) z par $u_l(s,x)-\delta\zeta(x)$, on prend $\xi=\xi(t,s,x)$ et on intègre l'inégalité (4.3) par rapport à s. On refait les mêmes opérations pour la solution $u_l(s,x)$, on additionne les deux inégalités résultantes et on obtient après avoir fait les décompositions des fonctions b_k, b_l, b_0^k et b_0^l

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_Q \xi_t\big[b_{k,1}\eta_\delta(u_k-u_l+\delta\zeta)-\int_{u_l-\delta\zeta}^{u_k}\beta^0(r)\eta'_\delta(r-u_l+\delta\zeta)dr\big] && (=: I_1)\\
&-\int_0^T\int_Q \xi_t\big[\frac{1}{k}u_k\eta_\delta(u_k-u_l+\delta\zeta)-\int_{u_l-\delta\zeta}^{u_k}\frac{1}{k}r\eta'_\delta(r-u_l+\delta\zeta)dr\big] && (=: I_2)\\
&-\int_Q \xi_{|t=0}\big[b_{k,1}^0\eta_\delta(u_0^k-u_l+\delta\zeta)-\int_{u_k-\delta\zeta}^{u_0^k}\beta^0(r)\eta'_\delta(r-u_l+\delta\zeta)dr\big] && (=: I_3)\\
&-\int_Q \xi_{|t=0}\big[\frac{1}{k}u_0^k\eta_\delta(u_0^k-u_l+\delta\zeta)-\int_{u_l-\delta\zeta}^{u_0^k}\frac{1}{k}r\eta'_\delta(r-u_l+\delta\zeta)dr\big] && (=: I_4)\\
&-\int_0^T\int_Q \xi_s\big[-b_{l,1}\eta_\delta(u_k-u_l+\delta\zeta)+\int_{u_l}^{u_k+\delta\zeta}\beta^0(r)\eta'_\delta(u_k-r+\delta\zeta)dr\big] && (=: I_5)\\
&-\int_0^T\int_Q \xi_s\big[-\frac{1}{l}u_l\eta_\delta(u_k-u_l+\delta\zeta)+\int_{u_l}^{u_k+\delta\zeta}\frac{1}{l}r\eta'_\delta(u_k-r+\delta\zeta)dr\big] && (=: I_6)\\
&-\int_Q \xi_{|s=0}\big[-b_{l,1}^0\eta_\delta(u_k-u_0^l+\delta\zeta)+\int_{u_0^l}^{u_k+\delta\zeta}\beta^0(r)\eta'_\delta(u-r+\delta\zeta)dr\big] && (=: I_7)\\
&-\int_Q \xi_{|s=0}\big[-\frac{1}{l}u_0^l\eta_\delta(u_k-u_0^l+\delta\zeta)+\int_{u_0^l}^{u_k+\delta\zeta}\frac{1}{l}r\eta'_\delta(u_k-r+\delta\zeta)dr\big] && (=: I_8)\\
&+\int_0^T\int_Q(a(u_k,Du_k)-a(u_l,Du_l))\cdot D\eta_\delta(u_k-u_l+\delta\zeta)\xi && (=: I_9)\\
&+\int_0^T\int_Q(\psi(u_k)-\psi(u_l))\eta_\delta(u_k-u_l+\delta\zeta)\xi && (=: I_{10})
\end{aligned}
$$

$$\leq \int_0^T \int_Q (f(t,x) - f(s,x))\eta_\delta(u_k - u_l + \delta\zeta)\xi \qquad (=: I_{11}) \tag{4.4}$$

pour tout $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq \zeta \leq 1$, et pour tout $\xi \in C_c^\infty([0,T)^2 \times \Omega)$ positive.
Par la suite, on notera $c_i : i = 1, \cdots, p_n$, les points de $[-2n, 2n]$ dont l'image par β est un intervalle. Pour alléger l'écriture, on utilisera les notations

$$\int \chi_{\cap_{i=1}^{p_n}\{v \neq c_i\}}, \ \int \chi_{\cup_{i=1}^{p_n}\{v = c_i\}} \text{ au lieu de } \int \chi_{\{v\neq c_i, \forall i=1,\cdots,p_n\}}, \ \sum_{i=1}^{p_n} \int \chi_{\{v=c_i\}}.$$

Étudions le passage à la limite en δ vers zéro dans chaque terme de l'inégalité (4.4). Il est clair que

$$\eta_\delta(u_k - u_l + \delta\zeta) \to \chi_{\{u_k > u_l\}} - \chi_{\{u_k < u_l\}} + \zeta\chi_{\{u_k = u_l\}} \text{ lorsque } \delta \to 0 \tag{4.5}$$

et que

$$\left| b_k \eta_\delta(u_k - z) - \int_z^{u_k} \beta_k(r)\eta'_\delta(r - z)dr \right| \leq \sup_{r=2n} \beta(r) - \inf_{r=-2n} \beta(r). \tag{4.6}$$

Lors du passage à la limite avec δ dans les termes $I_1 - I_8$ on a besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2.1.

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0} \int_{u_l - \delta\zeta}^{u_k} \beta^0(r)\eta'_\delta(r - u_l + \delta\zeta)dr \\
= &\left[\beta(u_l)\zeta\chi_{\{u_k=u_l\}} - \beta(u_l)\chi_{\{u_k<u_l\}} + \beta(u_l)\chi_{\{u_k>u_l\}}\right]\chi_{\cap_{i=1}^{p_n}\{u_l\neq c_i\}} \\
&+ \left[\zeta\underline{b_i}\chi_{\{u_k=c_i\}} + (\zeta\underline{b_i} + (1-\zeta)\overline{b_i})\chi_{\{u_k>c_i\}} - \underline{b_i}\chi_{\{u_k<c_i\}}\right]\chi_{\cup_{i=1}^{p_n}}\{u_l = c_i\},
\end{aligned}$$

où $\beta(c_i) = [\underline{b_i}, \overline{b_i}]$, $i = 1, \cdots, p_n$.

Preuve. En effet lorsque $u_l \neq c_i$ $\forall i = 1, \cdots, p_n$, on a, en utilisant la formule de la moyenne

$$\begin{aligned}
&\int_{u_l-\delta\zeta}^{u_k} \beta(r)\eta'_\delta(r - u_l + \delta\zeta)dr \\
= &\left[\zeta\frac{1}{\delta\zeta}\int_{u_l-\delta\zeta}^{u_l} \beta(r)dr\right]\chi_{\{u_k=u_l\}} - \left[\int_{u_k}^{u_l-(1+\zeta)\delta} 0 + \int_{u_l-(1+\zeta)\delta}^{u_l-\delta\zeta} \frac{1}{\delta}\beta(r)dr\right]\chi_{\{u_k<u_l\}} \\
&+ \left[\int_{u_l-\delta\zeta}^{u_l} \frac{1}{\delta}\beta(r)dr + \int_{u_l}^{u_l+(1-\zeta)\delta} \frac{1}{\delta}\beta(r)dr + \int_{u_l+(1-\zeta)\delta}^{u_k} 0\right]\chi_{\{u_k>u_l\}}.
\end{aligned}$$

Lorsque $u_l = c_i,\ i = 1, \cdots, p_n$, on a $\beta(u_l) = [\underline{b_i}, \overline{b_i}]$ et

$$\begin{aligned}
&\int_{u_l-\delta\zeta}^{u_k} \beta^0(r)\eta'_\delta(r-u_l+\delta\zeta)dr \\
= &\Big[\frac{1}{\delta}\int_{c_i-\delta\zeta}^{c_i}\beta^0(r)dr\Big]\chi_{\{u_k=c_i\}} - \Big[\int_{u_k}^{c_i-\delta(1+\zeta)} 0 + \frac{1}{\delta}\int_{c_i-\delta(1+\zeta)}^{c_i-\delta\zeta}\beta^0(r)dr\Big]\chi_{\{u_k<c_i\}} \\
&+\Big[\frac{1}{\delta}\int_{c_i-\delta\zeta}^{c_i}\beta^0(r)dr + \frac{1}{\delta}\int_{c_i}^{c_i+\delta(1-\zeta)}\beta^0(r)dr + \frac{1}{\delta}\int_{c_i+\delta(1-\zeta)}^{u_k} 0\Big]\chi_{\{u_k>c_i\}}.
\end{aligned}$$

■

Revenons à la preuve de la Proposition 4.2.2. En utilisant (4.5), (4.6) et le lemme précédent, on obtient

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0} I_1 \\
= &-\int_0^T\int_Q \chi_{\cap_{i=1}^{p_n}\{u_l\neq c_i\}}\xi_t\Big[(b_{k,1}-\beta(u_l))\chi_{\{u_k>u_l\}} - (b_{k,1}-\beta(u_l))\chi_{\{u_k<u_l\}} \\
&\qquad\qquad +\zeta(b_{k,1}-\beta(u_l))\chi_{\{u_k=u_l\}}\Big] \\
&-\int_0^T\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{p_n}\{u_l=c_i\}}\xi_t\Big[(b_{k,1}-\zeta\underline{b_i}-(1-\zeta)\overline{b_i})\chi_{\{u_k>u_l\}} - (b_{k,1}-\underline{b_i})\chi_{\{u_k<u_l\}} \\
&\qquad\qquad +\zeta(b_{k,1}-\underline{b_i})\chi_{\{u_k=u_l\}}\Big].
\end{aligned}$$

Lorsque $u_l = c_i,\ i = 1, \cdots, p_n$, on peut montrer que

$$\begin{aligned}
&\big(b_{k,1}-\zeta\underline{b_i}-(1-\zeta)\overline{b_i})\chi_{\{u_k>u_l\}} + \zeta(b_{k,1}-\underline{b_i})\chi_{\{u_k=u_l\}} - (b_{k,1}-\underline{b_i}\big)\chi_{\{u_k<u_l\}} \\
= &(b_{k,1}-\underline{b_i})^+\zeta + (b_{k,1}-\overline{b_i})^+(1-\zeta) - (b_{k,1}-\underline{b_i})\chi_{\{u_k<u_l\}} \\
= &(b_{k,1}-\underline{b_i})^+\zeta + (b_{k,1}-\overline{b_i})^+(1-\zeta) + (b_{k,1}-\underline{b_i})^- \\
= &|b_{k,1}-\underline{b_i}|\zeta + (1-\zeta)\big[(b_{k,1}-\overline{b_i})^+ + (b_{k,1}-\underline{b_i})^-\big].
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} I_1 = &-\int_0^T\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{p_n}\{u_l=c_i\}}\xi_t\Big[|b_{k,1}-\underline{b_i}|\zeta + (1-\zeta)((b_{k,1}-\overline{b_i})^+ + (b_{k,1}-\underline{b_i})^-)\Big] \\
&-\int_0^T\int_Q \chi_{\cap_{i=1}^{p_n}\{u_l\neq c_i\}}\xi_t|b_{k,1}-b_{l,1}|
\end{aligned} \tag{4.8}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} I_3 = &-\int_0^T\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{p_n}\{u_l=c_i\}}\xi_{|t=0}\Big[|b^0_{k,1}-\underline{b_i}|\zeta + (1-\zeta)((b^0_{k,1}-\overline{b_i})^+ + (b^0_{k,1}-\underline{b_i})^-)\Big] \\
&-\int_Q \chi_{\cap_{i=1}^{p_n}\{u_l\neq c_i\}}\xi_{|t=0}|b^0_{k,1}-b_{l,1}|.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

En procédant de la même manière on obtient les limites suivantes :

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0} I_2 &= -\int_0^T\int_Q \xi_t\Big[\frac{1}{k}(u_k-u_l)(\chi_{\{u_k>u_l\}}-\chi_{\{u_k<u_l\}}+\zeta\chi_{\{u_k=u_l\}})\Big]\\ &= -\int_0^T\int_Q \xi_t\frac{1}{k}|u_k-u_l| \qquad (4.10)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0} I_4 &= -\int_Q \xi_{|t=0}\Big[\frac{1}{k}(u_0^k-u_l)(\chi_{\{u_0^k>u_l\}}-\chi_{\{u_0^k<u_l\}}+\zeta\chi_{\{u_0^k=u_l\}})\Big]\\ &= -\int_Q \xi_{|t=0}\frac{1}{k}|u_0^k-u_l|. \qquad (4.11)\end{aligned}$$

Des calculs analogues aux précédents impliquent les limites des termes $I_5 - I_8$:

$$\begin{aligned}&\lim_{\delta\to 0} I_5 =\\ &-\int_0^T\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_k=c_i\}}\xi_s\Big[(-b_{l,1}+\zeta\overline{b_i}+(1-\zeta)\underline{b_i})\chi_{\{u_k>u_l\}}+(b_{l,1}-\overline{b_i})\chi_{\{u_k<u_l\}}\Big]\\ &-\int_0^T\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_k=c_i\}}\xi_s\zeta(-b_{l,1}+\overline{b_i})\chi_{\{u_k=u_l\}}\\ &-\int_0^T\int_Q \chi_{\cap_{i=1}^{pn}\{u_k\neq c_i\}}\xi_s\Big[(-b_{l,1}+\beta(u_k))\chi_{\{u_k>u_l\}}+(b_{l,1}-\beta(u_k))\chi_{\{u_k<u_l\}}\Big]\\ &-\int_0^T\int_Q \chi_{\cap_{i=1}^{pn}\{u_k\neq c_i\}}\xi_s\zeta(-b_{l,1}+\beta(u_k))\chi_{\{u_k=u_l\}}\\ &=-\int_0^T\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_k=c_i\}}\xi_s\Big[|b_{l,1}-\overline{b_i}|\zeta+(1-\zeta)((\underline{b_i}-b_{l,1})^+ +(\overline{b_i}-b_{l,1})^-)\Big]\\ &-\int_0^T\int_Q \chi_{\cap_{i=1}^{pn}\{u_k\neq c_i\}}\xi_s|b_{l,1}-b_{k,1}|, \qquad (4.12)\end{aligned}$$

$$\lim_{\delta\to 0} I_6 = -\int_0^T\int_Q \xi_s\frac{1}{l}|u_k-u_l|, \qquad (4.13)$$

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0} I_7 = &-\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_k=c_i\}}\xi_{|s=0}\Big[|b_{l,1}^0-\overline{b_i}|\zeta+(1-\zeta)((\underline{b_i}-b_{l,1}^0)^+ +(\overline{b_i}-b_{l,1}^0)^-)\Big]\\ &-\int_Q \chi_{\cap_{i=1}^{pn}\{u_k\neq c_i\}}\xi_{|s=0}|b_{l,1}^0-b_{k,1}| \qquad (4.14)\end{aligned}$$

et

$$\lim_{\delta\to 0} I_8 = -\int_Q \xi_{|s=0}\frac{1}{l}|u_k-u_0^l|. \qquad (4.15)$$

Examinons maintenant la limite du terme I_9. Remarquons tout d'abord que ce terme peut être décomposé en somme de deux intégrales

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\delta}\int_0^T\int_0^T\int_{\{\delta\zeta<u_k-u_l<\delta(1-\zeta)\}}\xi(a(u_k,Du_k)-a(u_l,Du_l))\cdot D(u_k-u_l)\\
& +\int_0^T\int_0^T\int_\Omega \eta_\delta(u_k-u_l+\delta\zeta)(a(u_k,Du_l)-a(u_l,Du_l))\cdot D\xi\\
=: \; & I_9^1+I_9^2.
\end{aligned}$$

Les hypothèses (H_1) et (H_4) impliquent

$$\begin{aligned}
I_9^1 &= \frac{1}{\delta}\int_{[0,T]^2}\int_{\{\delta\zeta<u_k-u_l<\delta(1-\zeta)\}}\xi(a(u_k,Du_k)-a(u_l,Du_l))\cdot D(u_k-u_l)\\
&\geq \frac{1}{\delta}\int_{[0,T]^2}\int_{\{\delta\zeta<u_k-u_l<\delta(1-\zeta)\}}\xi(a(u_k,Du_l)-a(u_l,Du_l))\cdot D(u_k-u_l)\\
&\geq -\frac{1}{\delta}\int_{[0,T]^2}\int_{\{\delta\zeta<u_k-u_l<\delta(1-\zeta)\}}\xi C(u_k,u_l)|u_k-u_l|(1+|Du_l|^{p-1})|D(u_k-u_l)|\\
&\geq \frac{-\delta(1-\zeta)}{\delta}\int_{[0,T]^2}\int_{\{\delta\zeta<u_k-u_l<\delta(1-\zeta)\}}\xi C(u_k,u_l)(1+|Du_l|^{p-1})|D(u_k-u_l)|.
\end{aligned}$$

D'où $\lim\limits_{\delta\to 0} I_9^1\geq 0$. D'autre part

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} I_9^2 &= \int_0^T\int_Q(\chi_{\{u_k>u_l\}}-\chi_{\{u_k<u_l\}}+\zeta\chi_{\{u_k=u_l\}})(a(u_k,Du_k)-a(u_l,Du_l))\cdot D\xi\\
&= \int_0^T\int_Q(\chi_{\{u_k>u_l\}}-\chi_{\{u_k<u_l\}})(a(u_k,Du_k)-a(u_l,Du_l))\cdot D\xi.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\lim_{\delta\to 0} I_9\geq \int_0^T\int_Q(\chi_{\{u_k>u_l\}}-\chi_{\{u_k<u_l\}})(a(u_k,Du_k)-a(u_l,Du_l))\cdot D\xi. \tag{4.16}$$

Il est facile de voir que l'on a par le théorème de la convergence dominée

$$\lim_{\delta\to 0} I_{10} = \int_0^T\int_Q(\psi(u_k)-\psi(u_l))(\chi_{\{u_k>u_l\}}-\chi_{\{u_k<u_l\}})\xi \tag{4.17}$$

et

$$\lim_{\delta\to 0} I_{11} = \int_0^T\int_Q(f(t,x)-f(s,x))(\chi_{\{u_k>u_l\}}-\chi_{\{u_k<u_l\}}+\zeta\chi_{\{u_k=u_l\}})\xi. \tag{4.18}$$

En résumé, en combinant toutes les limites (4.8)-(4.18), on obtient, après passage à la limite avec $\delta \to 0$ dans l'inégalité (4.4), l'inégalité suivante, notée $I(\zeta, \xi)$

$$
\begin{aligned}
& -\int_0^T \int_Q \chi_{\cap_{i=1}^{pn}\{u_l \neq c_i\}} \xi_t |b_{k,1} - b_{l,1}| - \int_Q \chi_{\cap_{i=1}^{pn}\{u_l \neq c_i\}} \xi_{|t=0} |b^0_{k,1} - b_{l,1}| \\
& -\int_0^T \int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_l = c_i\}} \xi_t \Big[|b_{k,1} - \underline{b_i}|\zeta + (1-\zeta)((b_{k,1} - \overline{b_i})^+ + (b_{k,1} - \underline{b_i})^-) \Big] \\
& -\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_l = c_i\}} \xi_{|t=0} \Big[|b^0_{k,1} - \underline{b_i}|\zeta + (1-\zeta)((b^0_{k,1} - \overline{b_i})^+ + (b^0_{k,1} - \underline{b_i})^-) \Big] \\
& -\int_0^T \int_Q \xi_t \frac{1}{k} |u_k - u_l| - \int_0^T \int_\Omega \xi_{|t=0} \frac{1}{k} |u^k_0 - u_l| \\
& -\int_0^T \int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_k = c_i\}} \xi_s \Big[|b_{l,1} - \overline{b_i}|\zeta + (1-\zeta)((\underline{b_i} - b_{l,1})^+ + (\overline{b_i} - b_{l,1})^-) \Big] \\
& -\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_k = c_i\}} \xi_{|s=0} \Big[|b^0_{l,1} - \overline{b_i}|\zeta + (1-\zeta)((\underline{b_i} - b^0_{l,1})^+ + (\overline{b_i} - b^0_{l,1})^-) \Big] \\
& -\int_0^T \int_Q \chi_{\cap_{i=1}^{pn}\{u_k \neq c_i\}} \xi_s |b_{l,1} - b_{k,1}| - \int_0^T \int_\Omega \chi_{\{u_k \neq c_i\}} \xi_{|s=0} |b^0_{l,1} - b_{k,1}| \\
& -\int_0^T \int_Q \xi_s \frac{1}{l} |u_k - u_l| - \int_0^T \int_\Omega \xi_{|s=0} \frac{1}{l} |u_k - u^l_0| \\
& +\int_0^T \int_Q (\chi_{\{u_k > u_l\}} - \chi_{\{u_k < u_l\}})(a(u_k, Du_k) - a(u_l, Du_l)) \cdot D\xi \\
& +\int_0^T \int_Q (\psi(u_k) - \psi(u_l))(\chi_{\{u_k > u_l\}} - \chi_{\{u_k < u_l\}})\xi \\
\leq \; & \int_0^T \int_Q (f(t,x) - f(s,x))(\chi_{\{u_k > u_l\}} - \chi_{\{u_k < u_l\}} + \zeta \chi_{\{u_k = u_l\}})\xi \qquad I(\zeta,\xi)
\end{aligned}
$$

pour tout $\zeta \in C^\infty_c(\Omega)$ telle que $0 \leq \zeta \leq 1$ et tout $\xi \in C^\infty_c([0,T)^2 \times \overline{\Omega})$ positive. En prenant $\zeta = 0$, puis $\zeta = 1$ (en fait une suite dans $C^\infty_c(\Omega)$ qui l'approche), alors en considérant l'inégalité $I(1, \varphi\xi) + I(0, (1-\varphi)\xi)$, il vient

$$
\begin{aligned}
& -\int_0^T \int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_l = c_i\}} (\varphi\xi)_t \Big[(b_{k,1} - \underline{b_i})^+ - (b_{k,1} - \overline{b_i})^+ \Big] \\
& -\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_l = c_i\}} (\varphi\xi)_{|t=0} \Big[(b^0_{k,1} - \underline{b_i})^+ - (b^0_{k,1} - \overline{b_i})^+ \Big] \\
& -\int_0^T \int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_l = c_i\}} \xi_t \Big[(b_{k,1} - \overline{b_i})^+ + (b_{k,1} - \underline{b_i})^- \Big] \\
& -\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_l = c_i\}} \xi_{|t=0} \Big[(b^0_{k,1} - \overline{b_i})^+ + (b^0_{k,1} - \underline{b_i})^- \Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -\int_0^T \int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{p_n}\{u_k=c_i\}} (\varphi\xi)_s \Big[\big(\overline{b_i} - b_{l,1}\big)^+ - \big(\underline{b_i} - b_{l,1}\big)^+ \Big] \\
& -\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{p_n}\{u_k=c_i\}} (\varphi\xi)_{|s=0} \Big[\big(\overline{b_i} - b^0_{l,1}\big)^+ - \big(\underline{b_i} - b^0_{l,1}\big)^+ \Big] \\
& -\int_0^T \int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{p_n}\{u_k=c_i\}} \xi_s \Big[\big(\underline{b_i} - b_{l,1}\big)^+ + \big(\overline{b_i} - b_{l,1}\big)^- \Big] \\
& -\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{p_n}\{u_k=c_i\}} \xi_{|s=0} \Big[\big(\underline{b_i} - b^0_{l,1}\big)^+ + \big(\overline{b_i} - b^0_{l,1}\big)^- \Big] \\
& - \int_0^T \int_Q \chi_{\cap_{i=1}^{p_n}\{u_l\neq c_i\}} \xi_t |b_{k,1} - b_{l,1}| - \int_0^T \int_\Omega \chi_{\cap_{i=1}^{p_n}\{u_l\neq c_i\}} \xi_{|t=0} |b^0_{k,1} - b_{l,1}| \\
& -\int_0^T \int_Q \chi_{\cap_{i=1}^{p_n}\{u_l\neq c_i\}} \xi_s |b_{k,1} - b_{l,1}| - \int_0^T \int_\Omega \chi_{\cap_{i=1}^{p_n}\{u_l\neq c_i\}} \xi_{|s=0} |b_{k,1} - b^0_{l,1}| \\
& -\int_0^T \int_Q \xi_t \frac{1}{k} |u_k - u_l| - \int_0^T \int_\Omega \xi_{|t=0} \frac{1}{k} |u^k_0 - u_l| \\
& -\int_0^T \int_Q \xi_s \frac{1}{l} |u_k - u_l| - \int_Q \xi_{|s=0} \frac{1}{l} |u_k - u^l_0| \\
& +\int_0^T \int_Q (\chi_{\{u_k>u_l\}} - \chi_{\{u_k<u_l\}})(a(u_k,Du_k) - a(u_l,Du_l)) \cdot D\xi \\
& +\int_0^T \int_Q (\psi(u_k) - \psi(u_l))(\chi_{\{u_k>u_l\}} - \chi_{\{u_k<u_l\}})\xi \\
\leq \; & \int_0^T \int_Q (f(t,x) - f(s,x))(\chi_{\{u_k>u_l\}} - \chi_{\{u_k<u_l\}} + \chi_{\{u_k=u_l\}})\xi \qquad (4.19)
\end{aligned}
$$

pour tout $\xi, \varphi \in C_c^\infty([0,T) \times [0,T) \times \overline{\Omega})$ avec $\xi \geq 0$ et $0 \leq \varphi \leq 1$.
Notons que la fonction φ apparaît seulement dans les termes des dérivées en temps, alors un argument d'approximation nous incite à prendre dans l'inégalité (4.19) une fonction $\varphi(t,s,x) \in L^\infty((0,T)^2 \times \Omega)$ telle que $\varphi_t, \varphi_s \in L^\infty((0,T)^2 \times \Omega)$ avec $0 \leq \varphi \leq 1$. Soit la fonction

$$
\varphi_{h,\delta} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \frac{1}{h} \int_s^{s+h} T_1 \Big[\sum_{j=1}^{p_n} \eta_\delta \big(B_j(b_{k,1}(\tau,x)) - (\overline{b_j} - \underline{b_j}) + \tilde{B}_j(b_{l,1}(\theta,x)) \big) \Big] d\theta d\tau,
$$

où $B_i(r) = (r - \underline{b_i})^+ - (r - \overline{b_i})^+$ et $\tilde{B}_i(r) = (\overline{b_i} - r)^+ - (\underline{b_i} - r)^+$. Constatons que B_i est croissante, $\tilde{B}_i$ est décroissante, et que c'est les fonctions $B_i(b_{k,1})$ et $\tilde{B}_i(b_{l,1})$ qui apparaîssent dans les termes de dérivées en temps de l'inégalité (4.19). Le choix de la fonction $\varphi_{h,\delta}$ est motivé par le fait que

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_Q \chi_{\{u_l=c_i\}}\big(\mathrm{sign}(B_j(b_{k,1})-(\overline{b}_j-\underline{b}_j)+\tilde{B}_j(b_{l,1}))\xi\big)B_i(b_{k,1})dxdtds\\
&=\int_0^T\int_Q \chi_{\{u_l=c_i\}}B_i'(b_{k,1})\mathrm{sign}(B_j(b_{k,1})-(\overline{b}_j-\underline{b}_j)+\tilde{B}_j(b_{l,1}))(b_{k,1})_t\xi dxdtds
\end{aligned}
$$

et que sur l'ensemble $\{u_l(s,x)=c_i\}$ on a

$$
B_i'(r)\mathrm{sign}(B_j(r)-(\overline{b_j}-\underline{b_j})+\tilde{B}_j(b_{l,1}))=\delta_{ij}\mathrm{sign}(r-b_{l,1})\chi_{\{\underline{b_i}\le r\le\overline{b_i}\}},
$$

où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker. Plus précisément, ce choix de la fonction $\varphi_{h,\delta}$ nous permet de récupérer la fonction $|b_{k,1}-b_{l,1}|$ dans les termes en dérivées de l'inégalité (4.19) suivant le schéma suivant :

Remplaçons dans l'inégalité (4.19) φ par $\varphi_{h,\delta}$, et passons à la limite dans chacun des termes avec $h,\delta\to 0$. A nouveau le Lemme 4.1.2 est utilisable ici et on montre de la même manière que D. Blanchard et A. Porretta [25, Proof of Proposition 4.2, Step 3] que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0}\liminf_{h\to 0}\Big(-\int_0^T\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_l=c_i\}}(\varphi_{h,\delta}\xi)_t\big[(b_{k,1}-\underline{b_i})^+-(b_{k,1}-\overline{b_i})^+\big]\\
&\qquad -\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_l=c_i\}}(\varphi_{h,\delta}\xi)_{|t=0}\big[(b_{k,1}^0-\underline{b_i})^+-(b_{k,1}^0-\overline{b_i})^+\big]\Big)\\
&\ge -\int_0^T\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_l=c_i\}}\xi_t\int_{b_{l,1}}^{b_{k,1}}\mathrm{sign}(r-b_{l,1})\chi_{\{\underline{b_i}\le r\le\overline{b_i}\}}dr\\
&\quad -\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_l=c_i\}}\xi_{|t=0}\int_{b_{l,1}}^{b_{k,1}^0}\mathrm{sign}(r-b_{l,1})\chi_{\{\underline{b_i}\le r\le\overline{b_i}\}}dr.
\end{aligned}
$$

En tenant compte de cette dernière limite et du fait que

$$
\int_{b_{l,1}}^{b_{k,1}}\mathrm{sign}(r-b_{l,1})\chi_{\{\underline{b_i}\le r\le\overline{b_i}\}}dr+\big[(b_{k,1}-\overline{b_i})^++(b_{k,1}-\underline{b_i})^-\big]=|b_{k,1}-b_{l,1}|,
$$

il vient

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\delta\to 0}\liminf_{h\to 0}\Big(-\int_0^T\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_l=c_i\}}(\varphi_{h,\delta}\xi)_t\big[(b_{k,1}-\underline{b_i})^+-(b_{k,1}-\overline{b_i})^+\big]\\
&\qquad -\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_l=c_i\}}(\varphi_{h,\delta}\xi)_{|t=0}\big[(b_{k,1}^0-\underline{b_i})^+-(b_{k,1}^0-\overline{b_i})^+\big]\\
&\qquad -\int_0^T\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_l=c_i\}}\xi_t\Big[(b_{k,1}-\overline{b_i})^++(b_{k,1}-\underline{b_i})^-\Big]\\
&\qquad -\int_Q \chi_{\cup_{i=1}^{pn}\{u_l=c_i\}}\xi_{|t=0}\Big[(b_{k,1}^0-\overline{b_i})^++(b_{k,1}^0-\underline{b_i})^-\Big]\Big)\\
&\ge\ -\int_0^T\int_Q \xi_t\big[|b_{k,1}-b_{l,1}|-|b_{k,1}^0-b_{l,1}|\big].
\end{aligned}
$$

D'une manière analogue, on traite le terme avec la dérivée en s. Par conséquent, le passage à la limite avec $h, \delta \to 0$ dans l'inégalité (4.19) (φ étant remplacée par $\varphi_{h,\delta}$) implique

$$\begin{aligned}
&- \int_0^T \int_Q \xi_t \big[|b_{k,1} - b_{l,1}| - |b^0_{k,1} - b_{l,1}|\big] - \int_0^T \int_Q \xi_s \big[|b_{l,1} - b_{k,1}| - |b^0_{l,1} - b_{k,1}|\big] \\
&- \int_0^T \int_Q \frac{1}{l} \xi_t \big[|u_k - u_l| - |u^k_0 - u_l|\big] - \int_0^T \int_Q \frac{1}{k} \xi_s \big[|u_k - u_l| - |u^k_0 - u_l|\big] \\
&+ \int_0^T \int_Q (\chi_{\{u_k > u_l\}} - \chi_{\{u_k < u_l\}})(a(u_k, Du_k) - a(u_l, Du_l)) \cdot D\xi \\
&+ \int_0^T \int_Q (\psi(u_k) - \psi(u_l))(\chi_{\{u_k > u_l\}} - \chi_{\{u_k < u_l\}})\xi \\
\leq &\int_0^T \int_Q (f(t,x) - f(s,x))(\chi_{\{u_k > u_l\}} - \chi_{\{u_k < u_l\}} + \chi_{\{u_k = u_l\}})\xi \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

pour tout $\xi \in C^\infty_c([0,T)^2 \times \overline{\Omega})$ avec $\xi \geq 0$. Ce qui finit la preuve de la Proposition 4.2.2. ■

A présent, nous sommes en mesure de donner la preuve du Théorème 4.2.1.

Preuve du Théorème 4.2.1. Soient $\varepsilon > 0$, $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_\nu < T$, $t_i - t_{i-1} < \varepsilon, T - t_\nu < \varepsilon, f^\varepsilon_1, \cdots, f^\varepsilon_\nu \in L^\infty(\Omega)$ avec $\displaystyle\sum_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f(t) - f^\varepsilon_i\| dt < \varepsilon$ pour tout $i = 1, \cdots, \nu$. Par la Proposition 4.2.1, il existe $u_{k,i,\varepsilon} \in W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ solution du problème discrétisé

$$\frac{b_{k,i,\varepsilon} - b_{k,i-1,\varepsilon}}{t_i - t_{i-1}} - \text{div } a(u_{k,i,\varepsilon}, Du_{k,i,\varepsilon}) + \psi(u_{k,i,\varepsilon}) = f^\varepsilon_i \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \qquad (4.21)$$

On pose pour $t \in]t_{i-1}, t_i]$

$$\begin{cases} u_{k,\varepsilon}(t) &= u_{k,i,\varepsilon} \\ b_{k,\varepsilon}(t) &= b_{k,i,\varepsilon} \\ f^\varepsilon(t) &= f^\varepsilon_i, \end{cases}$$

et $u_{k,\varepsilon}(0) = u^k_0$, $b_{k,\varepsilon}(0) = b^k_0$ telle que $b^k_0 \in \beta_k(u^k_0)$.
Définissons la fonction

$$\phi^k_p(z) := \begin{cases} \displaystyle\int_0^z (p \circ \beta_k^{-1})^0(r) dr & \text{si } r \in \overline{R(\beta)} \\ \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $p \in \mathcal{P} = \{q \in C^\infty(\mathbb{R});\ 0 \leq q' \leq 1,\ \text{Supp}(q') \text{ compact}\}$. Notons que ϕ^k_p est convexe, semi continue inférieurement, propre et vérifie $\partial\phi^k_p = p \circ \beta_k^{-1}$, ce qui nous assure que $p(v) \in \partial\phi_p^k(b)$ pour tout $b \in \beta_k(v)$. Par les propriétés de la fonction ϕ_p^k on a

$$(b_{k,i,\varepsilon} - b_{k,i-1,\varepsilon})p(u_{k,i,\varepsilon}) \geq \phi_p^k(b_{k,i,\varepsilon}) - \phi_p^k(b_{k,i-1,\varepsilon}).$$

Multiplions maintenant l'équation (4.21) par la fonction $p(u_{k,i,\varepsilon})$, on obtient après avoir intégré sur $[t_{i-1}, t_i) \times \Omega$, sommé sur $i = 1, \cdots, \nu$ et utilisé l'hypothèse (H_2) et la formule de Gauss-Green

$$\int_\Omega \phi_p^k(b_{k,\varepsilon}(T)) + \lambda_0 \int_Q |Du_{k,\varepsilon}|^p + \int_Q \psi(u_{k,\varepsilon})p(u_{k,\varepsilon}) \leq \int_Q f^\varepsilon p(u_{k,\varepsilon}) + \int_\Omega \phi_p^k(b_0^k).$$

Or,

$$\phi_p^k(b_0^k) = \int_0^{b_0^k} (p \circ \beta_k^{-1})^0(r)dr \leq b_0^k p((\beta_k^{-1})^0(b_0^k)) \leq b_0^k p(u_0^k),$$

car les fonctions p et $(\beta_k^{-1})^0$ sont croissantes, d'où en choisissant $(p_l)_l \in \mathcal{P}$ telle que $p_l(r) \to p(\psi(r))$ lorsque $l \to \infty$, on obtient

$$\int_Q \psi(u_{k,\varepsilon})p(\psi(u_{k,\varepsilon})) \leq \int_Q f^\varepsilon p(\psi(u_{k,\varepsilon})) + \int_\Omega b_0^k p(\psi(u_0^k)).$$

Mais $\displaystyle\int_\Omega b_0^k p(\psi(u_0^k)) \leq \int_\Omega b_0 p(\psi(u_0))$, car $b_0^k \to b_0$ et $u_0^k \to u_0$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $k \to \infty$, d'où

$$\|\psi(u_{k,\varepsilon})\|_{L^\infty(Q)} \leq C \tag{4.22}$$

et

$$\|u_{k,\varepsilon}\|_{L^\infty(Q)} \leq C \quad \text{(uniformément en } \varepsilon \text{ et } k). \tag{4.23}$$

On pose maintenant $\displaystyle\phi_k(z) = \int_0^z (\beta_k^{-1})^0(r)dr$. Comme précédemment, par les propriétés du sous-différentiel,

$$(b_{k,i,\varepsilon} - b_{k,i-1,\varepsilon})u_{k,i,\varepsilon} \geq \phi_k(b_{k,i,\varepsilon}) - \phi_k(b_{k,i-1,\varepsilon})$$

pour tout $u_{k,i,\varepsilon} \in \partial\phi_k(b_{k,i,\varepsilon})$. En multipliant l'équation (4.21) par $u_{k,i,\varepsilon}$, on obtient après avoir intégré sur $[t_{i-1}, t_i) \times \Omega$, sommé sur $i = 1, \cdots, \nu$ et utilisé l'hypothèse (H_2) et la formule de Gauss-Green

$$\int_\Omega \phi_k(b_{k,\varepsilon}(T)) + \lambda_0 \int_Q |Du_{k,\varepsilon}|^p + \int_Q \psi(u_{k,\varepsilon})u_{k,\varepsilon} \leq \int_Q f^\varepsilon u_{k,\varepsilon} + \int_\Omega \phi_k(b_0^k).$$

En conséquence, par la monotonie de ψ,

$$\lambda_0 \int_Q |Du_{k,\varepsilon}|^p \leq \|f^\varepsilon\|_{L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))} \|u_{k,\varepsilon}\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} + \int_\Omega (|b_0| + 1)|u_0|.$$

Par suite

$$\|u_{k,\varepsilon}\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \leq C. \tag{4.24}$$

On peut extraire une sous-suite, notée encore $(u_{k,\varepsilon})_\varepsilon$, telle que $u_{k,\varepsilon} \rightharpoonup u_k$ faiblement dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Grâce à l'hypothèse (H_3), $(a(u_{k,\varepsilon}, Du_{k,\varepsilon}))_\varepsilon$ est bornée dans $(L^{p'}(Q))^N$, donc, quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, converge lorsque $\varepsilon \to 0$ vers χ_k et par l'argument de pseudo-monotonie, il est facile d'identifier div $a(u_k, Du_k)$ et div χ_k. Finalement, tous les éléments sont en notre possession pour montrer que u_k est une solution faible de $(S_k)(b_0^k, f, \psi)$.

La deuxième étape de la preuve consiste à passer à la limite en k vers l'infini dans le problème $(S_k)(b_0^k, f, \psi)$. Des estimations précédentes, on déduit en particulier que

$$\|u_k\|_{L^\infty(Q)} \leq C \tag{4.25}$$

et

$$\|u_k\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \leq C, \tag{4.26}$$

où C est une constante indépendante de k. Quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, que l'on notera $(u_k)_k$, on déduit de l'estimation (4.26)

$$u_k \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \text{ lorsque } k \to \infty.$$

Pour le passage à la limite dans le problème $(S_k)(b_0^k, f, \psi)$ avec $k \to \infty$, on aura besoin de la convergence forte de la suite de solutions $(u_k)_k$ dans $L^1(Q)$, qui s'établit à l'aide de la Proposition 4.2.2 ci-dessus. En effet, soit $\rho(r) \in C_c^\infty(-1,1)$ avec $0 \leq \rho \leq 1$, $\rho(r) = \rho(-r)$ et définissons $\rho_p(r) = p\rho(pr)$. En remplaçant dans l'inégalité (4.2) la fonction ξ par $\varphi(t)\rho_p(t-s)$, où $\varphi \in C_c^\infty([0,T))$ avec $\varphi \geq 0$, il vient

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_Q (\varphi\rho_p)_t \big(|b_{k,1} - b_{l,1}| - |b_{k,1}^0 - b_{l,1}|\big) && (=: J_1)\\
&-\int_0^T \int_Q (\varphi\rho_p)_s \big(|b_{l,1} - b_{k,1}| - |b_{l,1}^0 - b_{k,1}|\big) && (=: J_2)\\
&-\int_0^T \int_Q \frac{1}{l}(\varphi\rho_p)_t \big(|u_k - u_l| - |u_0^k - u_l|\big) && (=: J_3)\\
&-\int_0^T \int_Q \frac{1}{k}(\varphi\rho_p)_s \big(|u_k - u_l| - |u_0^l - u_k|\big) && (=: J_4)\\
&+\int_0^T \int_Q (\psi(u_k) - \psi(u_l))(\chi_{\{u_k > u_l\}} - \chi_{\{u_k > u_l\}})\varphi\rho_p && (=: J_5)\\
\leq &\int_0^T \int_Q (f(t,x) - f(s,x))(\chi_{\{u_k > u_l\}} - \chi_{\{u_k < u_l\}})\varphi\rho_p. && (=: J_6)
\end{aligned} \tag{4.27}$$

En tenant compte du fait que $\rho_p(t-s)_t = -\rho_p(t-s)_s$ on a

$$\begin{aligned} J_1 + J_2 &= -\int_0^T \int_Q \varphi_t |b_{k,1} - b_{l,1}| \rho_p(t-s) \\ &\quad - \int_Q \varphi(0)\rho_p(-s)|b_{k,1}^0 - b_{l,1}| - \int_Q \varphi(t)\rho_p(t)|b_{k,1} - b_{l,1}^0|. \end{aligned}$$

Par la théorie générale des semigroupes non linéaires, $b_{k,1}, b_{l,1} \to b$ dans $C([0,T];L^1(\Omega))$ lorsque $k, l \to \infty$, alors

$$\lim_{k,l\to\infty} \int_0^T \int_Q \varphi_t |b_{k,1} - b_{l,1}| \rho_p(t-s) = 0.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \int_Q \varphi(0)\rho_p(-s)|b_{k,1}^0 - b_{l,1}| &\leq \int_Q \varphi(0)\rho_p(-s)|b_{k,1}^0 - b_{l,1}^0| + \int_Q \varphi(0)\rho_p(-s)|b_{l,1}^0 - b_{l,1}| \\ &\to 0 \;\; \text{lorsque} \;\; k,l \to \infty \text{ et } p \to \infty. \end{aligned}$$

Le terme $\displaystyle\int_Q \varphi(t)\rho_p(t)|b_{k,1} - b_{l,1}^0|$ se traite de la même manière. Par conséquent,

$$\lim_{p\to\infty} \lim_{k,l\to\infty} J_1 + J_2 \geq 0. \tag{4.28}$$

Puisque $u_k, u_l \in L^\infty(Q)$, alors

$$\lim_{p\to\infty} \lim_{k,l\to\infty} J_3 + J_4 = 0. \tag{4.29}$$

Enfin, il est clair que

$$\lim_{p\to\infty} \lim_{k,l\to\infty} J_6 = 0. \tag{4.30}$$

En combinant les limites (4.28)-(4.30) dans l'inégalité (4.27), on aura

$$\lim_{p\to\infty} \lim_{k,l\to\infty} \int_0^T \int_Q |\psi(u_k(t,x)) - \psi(u_l(s,x))| \varphi\rho_p \leq 0.$$

En particulier, pour $k = l$, on a

$$\lim_{p\to\infty} \lim_{k,l\to\infty} \int_0^T \int_Q |\psi(u_l(t,x)) - \psi(u_l(s,x))| \varphi\rho_p \leq 0.$$

En considérant φ telle que $\varphi = 1$ sur $[\tau, \theta]$, où $0 < \tau < \theta < T$, on obtient

$$\begin{aligned}
&\lim_{k,l\to\infty} \int_\tau^\theta \int_\Omega |\psi(u_k(t,x)) - \psi(u_l(t,x))| \\
\leq\ & \lim_{p\to\infty} \lim_{k,l\to\infty} \int_0^T \int_Q |\psi(u_k(t,x)) - \psi(u_l(t,x))| \varphi\rho_p \\
\leq\ & \lim_{p\to\infty} \lim_{k,l\to\infty} \Big(\int_0^T \int_Q |\psi(u_k(t,x)) - \psi(u_l(s,x))| \varphi\rho_p \\
& \qquad\qquad + \int_0^T \int_Q |\psi(u_l(s,x)) - \psi(u_l(t,x))| \varphi\rho_p \Big) \\
\leq\ & 0.
\end{aligned}$$

En choisissant $\psi = \psi_{m,n}$, où $\psi_{m,n}(r) = \frac{1}{m} r^+ - \frac{1}{n} r^-$, m, n fixés (vérifiant $|\psi_{m,n}(r) - \psi_{m,n}(s)| \geq \frac{1}{\max(m,n)} |r - s|$) il s'ensuit

$$\lim_{k,l\to\infty} \int_\tau^\theta \int_\Omega |u_k - u_l| = 0 \quad \forall\ 0 < \tau < \theta < T.$$

Or $(u_k)_k$ est bornée dans $L^\infty(Q)$ et $u_k \rightharpoonup u$ faiblement dans $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, d'où

$$u_k \to u \ \text{ fortement dans } L^1(Q) \ \text{ lorsque } k \to \infty.$$

Grâce à l'hypothèse (H_3), $(a(u_k, Du_k))_k$ est bornée dans $\left(L^{p'}(Q)\right)^N$, donc, quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, converge faiblement dans $\left(L^{p'}(Q)\right)^N$ vers χ lorsque $k \to \infty$, et par l'argument de pseudo-monotonie à nouveau, il est facile d'identifier div χ et div $a(u, Du)$.
D'autre part, par la théorie générale des semigroupes non linéaires,

$$b_k \to b \ \text{ dans } C([0, T]; L^1(\Omega)).$$

Au final, on peut facilement passer à la limite dans le problème $(S_k)(b_0^k, f, \psi_{m,n})$ avec $k \to \infty$. En effet, en choisissant la fonction test $\xi \in C_c^\infty([0, T) \times \Omega)$, on a clairement, grâce aux convergences précédentes,

$$-\int_\Omega (b - b_0)\xi_t + \int_Q a(u, Du) \cdot D\xi + \int_Q \psi_{m,n}(u)\xi = \int_Q f\xi,$$

ce qui achève la preuve du Théorème 4.2.1. ■

4.3 Existence de solutions renormalisées

Cette section est consacrée à l'existence de solutions renormalisées du problème $(S)(b_0, f)$ pour des données $f \in L^1(Q)$ et $b_0 \in L^1(\Omega)$.

Définition 4.3.1. *Une fonction mesurable $u : Q \to \mathbb{R}$ est une solution renormalisée du problème $(S)(b_0, f)$ si*

$$T_k(u) \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \text{ pour tout } \ k > 0$$

et s'il existe $b \in L^1(Q)$ telle que $b \in \beta(u)$ p.p. dans Q, vérifiant

$$-\int_Q \varphi_t \int_0^b (S' \circ \beta^{-1})^0(r)drdxdt - \int_\Omega \varphi(0) \int_0^{b_0} (S' \circ \beta^{-1})^0(r)drdx$$
$$+\int_Q a(u, Du) \cdot D(\varphi S'(u))dxdt = \int_Q fS'(u)\varphi dxdt$$

pour tout $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ avec S' à support compact, et tout $\varphi \in C_c^\infty([0, T) \times \overline{\Omega})$ telle que $S'(u)\varphi \in L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, et, si de plus,

$$\lim_{l\to\infty} \int_{\{l\leq|u|\leq 2l\}} (a(u, Du) - a(u, 0)) \cdot Du = 0. \tag{4.31}$$

Remarque 4.3.1. *Notons que les intégrales ci-dessus sont bien définies. En effet, dans la première intégrale, on a $|\int_0^b (S' \circ \beta^{-1})^0(r)dr| \leq \|S'\|_\infty |b|$ et $b \in L^1(Q)$. Le même raisonnement est à appliquer pour la deuxième intégrale avec $b_0 \in L^1(\Omega)$. Le troisième terme doit être compris comme*

$$\int_{Q\cap\{|u|<k\}} a(u, DT_k(u)) \cdot D(\varphi S'(T_k(u))) \tag{4.32}$$

pour $k > 0$ tel que $Supp(S') \subset [-k, k]$. En effet, si $Supp(S') \subset [-k, k]$, alors $S'(u) = S'(T_k(u))$ et $S'(u) = 0$ p.p. sur $\{|u| \geq k\}$. Grâce à l'hypothèse (H_3), $a(u, DT_k(u))\chi_{\{|u|<k\}} \in \left(L^{p'}(Q)\right)^N$, ainsi l'intégrale (4.32) est bien définie. Notons aussi que l'intégrale (4.32) est indépendante du choix de k tel que $Supp(S') \subset [-k, k]$. En effet, on a $DT_k(u) = DT_h(u)$ p.p. sur $\{|u| < k \wedge h\}$. De la même manière, on montre que l'intégrale (4.31) est bien définie. ♢

A présent nous sommes en mesure d'énoncer le résultat principal de ce chapitre.

Théorème 4.3.1. *Soient $f \in L^1(Q)$ et $b_0 \in L^1(\Omega)$. Alors il existe une solution renormalisée du problème $(S)(b_0, f)$.*

Notons que l'unicité de $b \in \beta(u)$, où u est une solution renormalisée du problème $(S)(b_0, f)$, peut être prouvée de la même manière que D. Blanchard et A. Porretta [25, Theorem 4.1] sans aucune hypothèse supplémentaire sur le graphe β :

Théorème 4.3.2. *Pour $i = 1,2$ soient $f_i \in L^1(Q), b_{0i} \in L^1(\Omega)$. Soit u_i une solution renormalisée du problème $(S)(b_{0i}, f_i)$. Alors*

$$\int_\Omega (b_1(t) - b_2(t))^+ \leq \int_Q (f_1 - f_2)^+ + \int_\Omega (b_{01} - b_{02})^+$$

pour presque tout $t \in (0,T)$.

La preuve du Théorème 4.3.1 nécessite le lemme suivant :

Lemme 4.3.1. *Soient $b_0, \tilde{b}_0 \in L^\infty(\Omega), f, \tilde{f} \in L^\infty(Q), \psi, \tilde{\psi}$ des fonctions strictement croissantes, et $u, \tilde{u}$ des solutions faibles de $(S)(b_0, f, \psi), (S)(\tilde{b}_0, \tilde{f}, \tilde{\psi})$, respectivement.*
Si $b_0 \leq \tilde{b}_0$, p.p. sur Ω, $f \leq \tilde{f}$ p.p. sur Q, et $\tilde{\psi}(r) \leq \psi(r)$ pour tout $r \in \mathbb{R}$, alors

$$u \leq \tilde{u} \quad p.p.\ sur\ Q.$$

Preuve. Il suffit de calquer la démonstration de la Proposition 4.2.2 mais en considérant dès le début de la preuve la fonction test

$$\varphi_h(t,x) = \frac{1}{h}\xi(t,x)\int_t^{t+h} \eta_\delta^+(u(\tau,x) - z(x))d\tau,$$

où $\eta_\delta^+(\cdot)$ est une approximation du $\text{sign}^+(\cdot)$, au lieu de $\varphi_h(t,x) = \frac{1}{h}\xi(t,x)\int_t^{t+h}$ $\eta_\delta(u(\tau,x) - z(x))d\tau$. On obtient alors une inégalité analogue à (4.2), et en considérant comme dans (4.27) $\xi(t,s) = \rho_p(t-s)$, il en résulte

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{p\to\infty}\int_0^T\int_Q \left(\psi(u) - \tilde{\psi}(\tilde{u})\right)^+\rho_p \\ &\geq \lim_{p\to\infty}\int_0^T\int_Q \left(\psi(u) - \tilde{\psi}(u) + \tilde{\psi}(u) - \tilde{\psi}(\tilde{u})\right)^+\rho_p \\ &\geq \lim_{p\to\infty}\int_0^T\int_Q \left(\tilde{\psi}(u) - \tilde{\psi}(\tilde{u})\right)^+\rho_p. \end{aligned}$$

D'où

$$\int_Q \left(\tilde{\psi}(u) - \tilde{\psi}(\tilde{u})\right)^+ \leq 0.$$

Or $\tilde{\psi}$ est strictement croissante, d'où $u \leq \tilde{u}$ p.p. sur Q. ■

Preuve du Théorème 4.3.1.

La méthode employée pour montrer l'existence de solutions pour $f \in L^1(Q)$ et $b_0 \in L^1(\Omega)$ consiste à approcher les fonctions f et b_0 par les suites $f_{m,n} = f \wedge m \vee (-n) \in L^\infty(Q)$ et $b^0_{m,n} = b_0 \wedge m \vee (-n) \in L^\infty(\Omega)$, $m,n \in \mathbb{N}^*$, et

à considérer $\psi(r) = \psi_{m,n}(r) = \frac{1}{m}r^+ - \frac{1}{n}r^-$, ce qui donne une solution $u_{m,n}$ du problème $(S)(b^0_{m,n}, f_{m,n}, \psi_{m,n})$ (d'après le Théorème 4.2.1) puis à passer à la limite avec $m, n \to \infty$.
La solution $u_{m,n}$ vérifie alors l'équation suivante pour tout $\xi \in C_c^\infty([0,T) \times \Omega)$

$$-\int_Q (b_{m,n} - b^0_{m,n})\xi_t + \int_Q a(u_{m,n}, Du_{m,n}) \cdot D\xi + \int_Q \psi_{m,n}(u_{m,n})\xi = \int_Q f_{m,n}\xi. \quad (4.33)$$

Nous allons montrer que la limite presque partout de la suite $u_{m,n}$ est une solution renormalisée du problème $(S)(b_0, f)$. Fixons $k > 0$. Choisissons dans l'inégalité (4.33) la fonction test $T_k(u_{m,n})\varphi$, où $\varphi = \min(\frac{(T-\delta-t)^+}{\delta}, 1)$, $\delta > 0$. Sachant, par le Lemme 4.1.1, que l'on a

$$\begin{aligned} -\langle (b_{m,n})_t, T_k(u_{m,n})\varphi \rangle &= \int_Q \varphi_t \int_0^{b_{m,n}} (T_k \circ \beta^{-1})^0(r)drdxdt \\ &\quad + \int_\Omega \varphi(0) \int_0^{b^0_{m,n}} (T_k \circ \beta^{-1})^0(r)drdx, \end{aligned}$$

alors, grâce à la monotonie de la fonction $\psi_{m,n}$, on a

$$\begin{aligned} &\int_{T-2\delta}^{T-\delta} \int_\Omega \int_0^{b_{m,n}} (T_k \circ \beta^{-1})^0(r)drdxdt + \int_0^{T-2\delta} \int_\Omega a(u_{m,n}, Du_{m,n}) \cdot DT_k(u_{m,n}) \\ \leq\ & k\|f_{m,n}\|_{L^1(Q)} + k\|b^0_{m,n}\|_{L^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H_2) et le fait que $\displaystyle\int_0^{T-2\delta} \int_\Omega a(u_{m,n}, 0) \cdot DT_k(u_{m,n}) = 0$, par la formule de Gauss-Green, on déduit

$$\lambda_0 \int_0^T \int_\Omega |DT_k(u_{m,n})|^p = \lim_{\delta\to 0} \lambda_0 \int_0^{T-2\delta} \int_\Omega |DT_k(u_{m,n})|^p \leq k\|f\|_{L^1(Q)} + k\|b_0\|_{L^1(\Omega)}.$$

Quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, que l'on notera toujours $(u_{m,n})_{m,n}$, on déduit que

$$T_k(u_{m,n}) \rightharpoonup v_k \quad \text{faiblement dans } L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \text{ lorsque } m, n \to \infty.$$

D'autre part, le Lemme 4.3.1 nous assure que

$$u_{m,n} \leq u_{m+1,n} \text{ et } u_{m,n+1} \leq u_{m,n} \text{ p.p. sur } Q \text{ pour tout } m, n \in \mathbb{N}^*.$$

Par conséquent,

$$u_{m,n} \uparrow_{m\to\infty} u_n \downarrow_{n\to\infty} u \text{ p.p. sur } Q,$$

où $u_n, u : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ sont des fonctions mesurables, et de la même manière que K. Ammar et P. Wittbold [5] on montre que ces fonctions sont finies p.p. sur Q.

Il vient alors $v_k = T_k(u)$.
Par l'hypothèse (H_3), $(a(T_k(u_{m,n}), DT_k(u_{m,n})))_{m,n}$ est bornée dans $(L^{p'}(Q))^N$, et donc, quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, converge faiblement vers χ_k dans $(L^{p'}(Q))^N$ lorsque $m, n \to \infty$, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Identifions, par l'argument de pseudo-monotonie, div χ_k et div $a(T_k(u), DT_k(u))$. Pour ce faire, on utilise la méthode de régularisation de Landes (cf. R. Landes [52]).
Soient $\nu > 0$ et $(u^0_\nu)_\nu$ une suite telle que

$$\begin{cases} u^0_\nu \in W^{1,p}_0(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) \\ \|u^0_\nu\|_{L^\infty(\Omega)} \leq k \\ u^0_\nu \to T_k(u_0) \text{ p.p. sur } \Omega \text{ lorsque } \nu \to \infty \\ \frac{1}{\nu}\|u^0_\nu\|_{W^{1,p}_0(\Omega)} \to 0 \text{ lorsque } \nu \to \infty. \end{cases}$$

Alors, pour $k, \nu > 0$, la régularisée de Landes $(T_k(u))_\nu$ est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial (T_k(u))_\nu}{\partial t} = \nu(T_k(u) - (T_k(u))_\nu) & \text{sur} \quad Q \\ \\ (T_k(u))_\nu(0, \cdot) = u^0_\nu & \text{sur} \quad \Omega. \end{cases}$$

Elle vérifie

$$(T_k(u))_\nu \in L^p(0, T; W^{1,p}_0(\Omega)) \cap L^\infty(Q),$$
$$\frac{\partial (T_k(u))_\nu}{\partial t} \in L^p(0, T; W^{1,p}_0(\Omega)),$$

quitte à passer à une sous-suite si nécessaire, on peut montrer que

$$(T_k(u))_\nu \to T_k(u) \;\text{ fortement dans } L^p(0, T; W^{1,p}_0(\Omega)) \text{ et p.p. sur } \; Q$$

et

$$\|(T_k(u))_\nu\|_{L^\infty(Q)} \leq k \;\; \forall \nu > 0.$$

Introduisons la fonction $\varphi_h(z) = \int_0^z (h \circ \beta^{-1})^0(r)dr$, où $h \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ positive à support compact. On remarque que φ_h est lipschitzienne continue et monotone. On note $\beta_h := \varphi_h \circ \beta$ le graphe défini par

$$\beta_h(x) = \varphi_h \circ \beta(x) = \{\varphi_h(b), b \in \beta(x) \; x \in \Omega\}.$$

On a en particulier

$$\varphi_h(b_{m,n}) \in \beta_h(u_{m,n}) \text{ pour tout } b_{m,n} \in \beta(u_{m,n}).$$

Considérons dans $(S)(b^0_{m,n}, f_{m,n}, \psi_{m,n})$ la fonction test $\kappa h(u_{m,n})(T_k(u_{m,n}) - (T_k(u))_\nu)$, où $\kappa \in \mathcal{D}_+[0, T)$ et montrons que

$$\limsup_{\nu \to \infty} \limsup_{m,n \to \infty} \int_Q \kappa a(u_{m,n}, Du_{m,n}) \cdot D(h(u_{m,n})(T_k(u_{m,n}) - (T_k(u))_\nu)) \leq 0.$$

Il est clair que

$$\lim_{\nu\to\infty}\lim_{m,n\to\infty}\int_Q \kappa\psi_{m,n}(u_{m,n})h(u_{m,n})(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu)=0$$

et

$$\lim_{\nu\to\infty}\lim_{m,n\to\infty}\int_Q \kappa f_{m,n}h(u_{m,n})(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu)=0.$$

Montrons que

$$\liminf_{\nu\to\infty}\lim_{m,n\to\infty}\int_0^T \langle (b_{m,n})_t,\kappa h(u_{m,n})(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu)\rangle\geq 0. \tag{4.34}$$

On remarque que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle (b_{m,n})_t,\kappa h(u_{m,n})(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu)\rangle\\
=&\int_0^T \langle (\varphi_h(b_{m,n}))_t,\kappa(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu)\rangle,
\end{aligned}$$

et en appliquant le Lemme 4.1.1, on déduit

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle (b_{m,n})_t,\kappa h(u_{m,n})(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu)\rangle\\
=&\int_0^T \langle (\varphi_h(b_{m,n}))_t,\kappa T_k(u_{m,n})\rangle-\int_0^T \langle (\varphi_h(b_{m,n}))_t,\kappa(T_k(u))_\nu\rangle\\
=&-\int_Q\kappa_t\int_0^{\varphi_h(b_{m,n})}(T_k\circ\beta_h^{-1})^0(r)dr-\int_Q\kappa_t\int_0^{\varphi_h(b^0_{m,n})}(T_k\circ\beta_h^{-1})^0(r)dr\\
&+\int_Q\varphi_h(b_{m,n})(T_k(u))_\nu\kappa_t+\int_\Omega\varphi_h(b^0_{m,n})T_k(u^0_\nu)\kappa(0)\\
&+\int_Q\varphi_h(b_{m,n})\kappa\nu(T_k(u)-(T_k(u))_\nu)\\
\to&-\int_Q\kappa_t\int_0^{\varphi_h(b)}(T_k\circ\beta_h^{-1})^0(r)dr-\int_Q\kappa_t\int_0^{\varphi_h(b_0)}(T_k\circ\beta_h^{-1})^0(r)dr\\
&+\int_Q\varphi_h(b)(T_k(u))_\nu\kappa_t+\int_\Omega\varphi_h(b_0)T_k(u^0_\nu)\kappa(0)\\
&+\int_Q\varphi_h(b)\kappa\nu(T_k(u)-(T_k(u))_\nu)\ \text{ lorsque }\ m,n\to\infty
\end{aligned}$$

La principale difficulté pour passer à la limite dans l'équation précédente avec

$\nu \to \infty$ est le dernier terme, pour cela décomposons le comme suit :

$$\begin{aligned} I := \int_Q \varphi_h(b)\kappa\nu(T_k(u) - (T_k(u))_\nu) &= \int_Q (\varphi_h(b) - \varphi_h(b^k))\kappa\nu(T_k(u) - (T_k(u))_\nu) \\ &\quad + \int_Q (\varphi_h(b^k) - \varphi_h(b^k_\nu))\kappa\nu(T_k(u) - (T_k(u))_\nu) \\ &\quad + \int_Q \varphi_h(b^k_\nu)\kappa\nu(T_k(u) - (T_k(u))_\nu) \\ &=: I_1 + I_2 + I_3, \end{aligned}$$

où $b^k \in \beta(T_k(u))$ et $b^k_\nu \in \beta((T_k(u))_\nu)$.
Grâce à la monotonie de β_h et au fait que $|(T_k(u))_\nu| \leq k$, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\{u>k\}} \kappa\nu(k - (T_k(u))_\nu)[\varphi_h(b) - \varphi_h(b^k)] \\ &\quad + \int_{\{u<-k\}} \kappa\nu(-k - (T_k(u))_\nu)[\varphi_h(b) - \varphi_h(b^k)] \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

De la même manière, la monotonie de β_h nous assure que l'intégrale I_2 est positive ou nulle. D'autre part, en utilisant [32, Lemme 3.3] et le fait que $\varphi_h(b^k_\nu) \in \beta_h((T_k(u))_\nu)$ on déduit que

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_Q \frac{\partial}{\partial t}((T_k(u))_\nu)\varphi_h(b^k_\nu)\kappa \\ &= \int_Q \kappa\frac{\partial}{\partial t}\big[\int_{T_k(u^0_\nu)}^{(T_k(u))_\nu} \beta^0_h(r)dr\big] \\ &= -\int_Q \kappa_t \int_0^{(T_k(u))_\nu} \beta^0_h(r)dr - \int_\Omega \kappa(0)\int_0^{T_k(u^0_\nu)} \beta^0_h(r)dr \\ &\to -\int_Q \kappa_t \int_0^{T_k(u)} \beta^0_h(r)dr - \int_\Omega \kappa(0)\int_0^{T_k(u_0)} \beta^0_h(r)dr \quad \text{lorsque } \nu \to \infty. \end{aligned}$$

On aura finalement

$$\begin{aligned} \lim_{\nu\to\infty} I &\geq -\int_Q \kappa_t \int_0^{\varphi_h(b)} (T_k \circ \beta_h^{-1})^0(r)dr - \int_Q \kappa_t \int_0^{\varphi_h(b_0)} (T_k \circ \beta_h^{-1})^0(r)dr \\ &\quad + \int \varphi_h(b)T_k(u)\kappa_t + \int_\Omega \varphi_h(b_0)T_k(u_0)\kappa(0) \\ &\quad - \int_Q \kappa_t \int_0^{T_k(u)} \beta^0_h(r)dr - \int_\Omega \kappa(0)\int_0^{T_k(u_0)} \beta^0_h(r)dr. \end{aligned} \tag{4.35}$$

En injectant l'égalité suivante

$$T_k(u)\varphi_h(b) = \int_0^{T_k(u)} \beta_h(r)dr + \int_0^{\varphi_h(b)} (T_k \circ \beta_h^{-1})^0(r)dr \quad \forall \varphi_h(b) \in \beta_h(u)\ \forall k > 0,$$

dans (4.35) on déduit

$$\begin{aligned}\lim_{\nu\to\infty} I &\geq -\int_Q \kappa_t T_k(u)\varphi_h(b) - \int_\Omega \kappa(0)T_k(u_0)\varphi_h(b_0)\\ &\quad + \int_Q \kappa_t T_k(u)\varphi_h(b) + \int_\Omega \kappa(0)T_k(u_0)\varphi_h(b_0)\\ &= 0.\end{aligned}$$

D'où la limite (4.34). Par conséquent

$$\limsup_{\nu\to\infty}\limsup_{m,n\to\infty}\int_Q \kappa a(u_{m,n},Du_{m,n})\cdot D\big(h(u_{m,n})(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu)\big)\leq 0. \quad (4.36)$$

En considérant $h = h_l(r) = (l+1-|r|)^+ \wedge 1, l \in \mathbb{N}$ avec $l > k$ on déduit de la limite précédente que

$$\begin{aligned}&\limsup_{\nu\to\infty}\limsup_{m,n\to\infty}\Big(\int_Q \kappa h_l(u_{m,n})a(u_{m,n},Du_{m,n})\cdot D\big(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu\big)\\ &\qquad + \int_{\{l<|u_{m,n}|<l+1\}} \kappa h_l'(u_{m,n})(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu)a(u_{m,n},Du_{m,n})\cdot Du_{m,n}\Big)\\ &\leq 0.\end{aligned}$$

En choisissant dans $(S)(b^0_{m,n}, f_{m,n}, \psi_{m,n})$ la fonction test $\varphi_l(r) = \mathrm{sign}_0(r)(|r|-l)^+ \wedge 1$ et en tenant compte du fait que

$$\begin{aligned}&\limsup_{\nu\to\infty}\limsup_{m,n\to\infty}\int_{\{l<|u_{m,n}|<l+1\}} \kappa h_l'(u_{m,n})(T_k(u))_\nu a(u_{m,n},Du_{m,n})\cdot Du_{m,n}\\ &= 0 \;\; \text{(par Gauss-Green)}\end{aligned}$$

et que

$$\begin{aligned}&\limsup_{\nu\to\infty}\limsup_{m,n\to\infty}\int_{\{|u_{m,n}|\geq k\}} \kappa h_l(u_{m,n})a(u_{m,n},Du_{m,n})\cdot D(T_k(u))_\nu\\ &= \int_{\{|u|\geq k\}} \kappa h_l(u)\chi_{l+1}\cdot D(T_k(u))_\nu = 0,\end{aligned}$$

on déduit de la limite (4.36) que

$$\limsup_{\nu\to\infty}\limsup_{m,n\to\infty}\int_Q \kappa a(T_k(u_{m,n}),DT_k(u_{m,n}))\cdot D\big(T_k(u_{m,n})-(T_k(u))_\nu\big)\leq 0. \quad (4.37)$$

A l'aide de cette limite prouvons que div $a(T_k(u), DT_k(u)$ = div χ_k. Pour $\xi \in$

$\mathcal{D}_+(Q)$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
&\alpha \int_Q \kappa\chi_k \cdot D\xi \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_Q \alpha\kappa a(T_k(u_{m,n}), DT_k(u_{m,n})) \cdot D\xi \\
&\geq \limsup_{\nu\to\infty} \limsup_{m,n\to\infty} \int_Q \kappa a(T_k(u_{m,n}), DT_k(u_{m,n})) \cdot D\big(T_k(u_{m,n}) - (T_k(u))_\nu + \alpha\xi\big) \\
&\geq \limsup_{\nu\to\infty} \limsup_{m,n\to\infty} \int_Q \kappa a(T_k(u_{m,n}), D[(T_k(u))_\nu - \alpha\xi]) \cdot D\big(T_k(u_{m,n}) - (T_k(u))_\nu + \alpha\xi\big) \\
&\geq \int_Q \alpha\kappa a(T_k(u), D[T_k(u) - \alpha\xi]) \cdot D\xi.
\end{aligned}$$

En divisant par $\alpha > 0$, respectivement $\alpha < 0$, et en passant à la limite avec $\alpha \to 0$, on obtient

$$\operatorname{div} \chi_k = \operatorname{div} a(T_k(u), DT_k(u)) \quad \forall k > 0. \tag{4.38}$$

Une autre conséquence de l'inégalité (4.37) est

$$\lim_{\nu\to\infty} \lim_{m,n\to\infty}$$
$$\int_Q \big[a(T_k(u_{m,n}), DT_k(u_{m,n})) - a(T_k(u_{m,n}), D(T_k(u))_\nu)\big] \cdot D(T_k(u_{m,n}) - (T_k(u))_\nu) = 0.$$

Par le principe diagonale, il existe une sous-suite que l'on notera $u_{n(\nu)}$ telle que

$$\big[a(u_{n(\nu)}, DT_k(u_{n(\nu)})) - a(T_k(u_{n(\nu)}), D(T_k(u))_\nu)\big] \cdot D(T_k(u_{n(\nu)}) - (T_k(u))_\nu) \to 0$$

fortement dans $L^1(Q)$ lorsque $\nu \to \infty$. Par conséquent on a

$$a(u_{n(\nu)}, DT_k(u_{n(\nu)})) \cdot D(T_k(u_{n(\nu)}) - (T_k(u))_\nu) \rightharpoonup 0$$

faiblement dans $L^1(Q)$ lorsque $\nu \to \infty$, et en utilisant l'égalité (4.38), on a

$$a(u_{n(\nu)}, DT_k(u_{n(\nu)})) \cdot D(T_k(u))_\nu \rightharpoonup a(T_k(u), DT_k(u)) \cdot DT_k(u),$$

faiblement dans $L^1(Q)$ lorsque $\nu \to \infty$. En choisissant la fonction test $S'(u_{m,n})\varphi$, où $S \in W^{2,\infty}(\mathbb{R})$ et $\varphi \in C_c^\infty([0,T) \times \overline{\Omega})$ et en combinant les estimations établies, pour une certaine sous-suite bien choisie (notée simplement $u_{m,n}$), on peut passer à la limite dans le problème $(S)(b^0_{m,n}, f_{m,n}, \psi_{m,n})$ lorsque $m, n \to \infty$ et on obtient alors la formulation renormalisée désirée. Reste à montrer que u vérifie la limite (4.31). Pour ce faire, considérons dans $(S)(b^0_{m,n}, f_{m,n}, \psi_{m,n})$ la fonction test

$\varphi_l(u_{m,n})$, où $\varphi_l(r) = \mathrm{sign}_0(r)(|r|-l)^+ \wedge 1$, et utilisons la formule de Gauss-Green, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\{l \le |u_{m,n}| \le l+1\}} (a(u_{m,n}, Du_{m,n}) - a(u_{m,n}, 0)) \cdot Du_{m,n} \\ \le & \int_{\{l \le |u_{m,n}| \le l+1\}} |f_{m,n}| + \int_{\{l \le |u_{m,n}| \le l+1\}} |b^0_{m,n}|. \end{aligned}$$

Ceci implique la limite (4.31) grâce à l'hypothèse (H_2). Par conséquent, on a montré que u est solution renormalisée du problème $S(b_0, f)$, ce qui achève la preuve. ■

4.4 Remarques et extensions

- On a montré l'existence de solutions renormalisées sous la condition que le champ a vérifie l'hypothèse (H_4). Il est intéressant de voir ce qui se passe lorsque a satisfait la condition plus faible (H_5) suivante :

  $$(a(r,\xi)-a(s,\eta))\cdot(\xi-\eta)+C(r,s)(1+|\xi|^p+|\eta|^p)|r-s| \ge \Gamma(r,s)\cdot\xi+\tilde{\Gamma}(r,s)\cdot\eta,$$

  pour tout $r, s \in \mathbb{R}, \xi, \eta \in \mathbb{R}^N$ et où $C : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\Gamma, \tilde{\Gamma} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ sont deux fonctions continues. Un exemple d'application satisfaisant l'hypothèse (H_5) (mais pas (H_4)) est $a(r,\xi) = |\xi|^{p-2}\xi + F(r)$, où $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est continue.
  A ce propos, notons que l'existence et l'unicité de la solution renormalisée du problème $(S)(b_0, f)$ lorsque β est une fonction continue, croissante avec $b(0) = 0$ ont été démontrées par K. Ammar et P. Wittbold [5] et J. Carrillo et P. Wittbold [37] sous l'hypothèse (H_5). Leur preuve s'appuie sur un double dédoublement de variables (en temps et en espace).

- Il est possible de définir la notion de solutions entropiques au problème $(S)(b_0, f)$. En effet, on est tenté de donner la définition suivante : une fonction mesurable $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est une solution entropique du problème $(S)(b_0, f)$ si $T_k(u) \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$ pour tout $k > 0$, $b \in L^1(Q)$ telle que $b \in \beta(u)$ p.p. sur Q, et vérifiant

  $$-\int_Q \kappa_t \int_{b_0}^{b} T_k(r-\phi)dr + \int_Q \kappa a(u, Du) \cdot D(T_k(u-\phi)) = \int_Q \kappa f T_k(u-\phi)$$

  pour tout $\kappa \in \mathcal{D}_+[0,T)$ et $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.
  Se pose alors la question d'existence et d'unicité de solutions entropiques du problème $(S)(b_0, f)$ et aussi l'équivalence entre les deux concepts (renormalisée et entropiques).

- Enfin, l'étude de $(S)(b_0, f)$ en remplaçant la condition de Dirichlet sur le bord par la condition mixte $\langle -a(u, Du), \eta\rangle \in \gamma(x, u)$, où γ est un graphe monotone dans $\mathbb{R}^2$, est intéressante à entreprendre. Récemment, F. ANDREU *et al* [9] ont étudié le problème de Stefan avec des conditions dynamiques sur le bord :

$$\begin{cases} z_t - \text{div } a(u, Du) = f, \ z \in \beta(u) & \text{sur } Q \\ w_t + a(u, Du) \cdot \eta = g, \ w \in \gamma(u) & \text{sur } \Sigma \\ z(0) = z_0 & \text{sur } \Omega \\ w(0) = w_0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

  où β et γ sont des graphes dans $\mathbb{R}^2$. Sous des hypothèses supplémentaires sur les graphes, les auteurs prouvent l'existence et l'unicité de la solution faible et renormalisée.

Chapitre 5

Lois de conservation scalaires avec des conditions non linéaires sur le bord

5.1 Introduction

Le présent chapitre aborde l'existence et l'unicité de la solution entropique pour le problème de loi de conservation

$$u_t + \text{div } \varphi(u) = f \quad \text{sur} \quad Q := (0,T) \times \Omega \tag{5.1}$$

où u est assujettie à vérifier la condition initiale

$$u(0,\cdot) = u_0 \quad \text{sur} \quad \Omega \tag{5.2}$$

et la condition au bord

$$\varphi(u) \cdot \nu \in \beta(u) \quad \text{sur} \quad \Sigma := (0,T) \times \partial\Omega, \tag{5.3}$$

où Ω est un domaine de $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 1)$, ν est la normale unitaire extérieure à Ω, β est un graphe maximal monotone dans $\mathbb{R}^2$ vérifiant $0 \in \beta(0)$,

$$\varphi : u \in \mathbb{R} \to (\varphi_1(u), \varphi_2(u), \cdots, \varphi_N(u)) \in \mathbb{R}^N \text{ est un flux Lipschitz}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega), \; f \in L^1(Q) \;\text{ avec} \\ f(t,\cdot) \in L^\infty(\Omega) \text{ p.p. } t \in (0,T), \; \int_0^T \|f(t,\cdot)\|_\infty dt < \infty. \end{array} \right. \tag{5.4}$$

Notons que la condition au bord (5.3) englobe en particulier la condition de Dirichlet homogène ($\beta = \{0\} \times \mathbb{R}$) et la condition de Neumann ($\beta = \mathbb{R} \times \{0\}$). Le cas Dirichlet a été étudié par C. Bardos, A.Y. Le Roux et J.-C. Nédélec [13], qui ont défini une notion de solution entropique dans la classe $L^\infty(Q) \cap$

$BV(Q)$. En effet, imposer à la solution d'être BV permet de définir γu, trace de la solution entropique, et de donner un sens à la condition au bord de la façon suivante :

$$\mathrm{sign}(\gamma u)(\varphi(\gamma u) - \varphi(k)) \cdot \nu \geq 0 \ \forall k \in (0, \gamma u) \text{ p.p. sur } \Sigma.$$

Plus tard F. Otto [64] a introduit, sans que la donnée initiale soit BV, une nouvelle condition d'entropie au bord ne nécessitant pas l'existence de la trace forte de la fonction u. Récemment, R. Bürger, H. Frid et K.H. Karlsen [34] ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution entropique pour le problème (5.1)-(5.2) avec la condition de Neumann $\varphi(u) \cdot \nu = 0$ sur Σ. Toutefois ce résultat impose à φ d'être C^3 et à l'ensemble $\{\xi;\ \zeta + \eta\varphi'(\xi) = 0\}$ d'être de mesure nulle pour tout $(\zeta, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Ces conditions permettent en effet de définir la trace (au sens de A. Vasseur [75]) de la solution entropique et de définir la condition au bord comme suit :

$$\varphi(\gamma u) \cdot \nu = 0 \ \text{ p.p. sur } \ \Sigma.$$

Pour lever ces restrictions, on fait appel dans ce travail à un autre résultat d'existence de traces dû à E.Yu. Panov [68] démontré à ce jour pour $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}$ (cf. Proposition 5.2.1). Ainsi, à partir de maintenant nous supposerons que $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}$. Notons que la généralisation des résultats de E.Yu. Panov au cas d'une frontière courbée suffisamment régulière est en cours, aussi nous nous attendons à ce que la formulation de la condition au bord suggérée dans ce chapitre soit valable pour une classe plus générale de domaines (et aussi pour des conditions au bord du type $\beta(x, \cdot) + g$ avec $g \in L^\infty(\Sigma)$).
Venons-en à la description détaillée de ce chapitre. A la section qui suit, on introduit quelques outils nécessaires à notre présentation, notamment la notion de traces fortes et un résultat de leur existence dû à E.Yu Panov (cf. Proposition 5.2.1). A la Section 3, on montre l'existence et l'unicité de la solution entropique du problème stationnaire :

$$\begin{cases} u + \mathrm{div}\ \varphi(u) = f & \text{dans} \quad \Omega \\ \varphi(u) \cdot \nu \in \beta(u) & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

en lui associant un opérateur $\mathcal{A}$ dont la fermeture est m-T-accrétif dans $L^1(\Omega)$. L'idée pour prouver cela est d'approcher le problème stationnaire par des problèmes comportant un peu de diffusion, à savoir

$$(HS)(f) \begin{cases} u + \mathrm{div}\ \varphi(u) = f + \varepsilon\Delta u & \text{dans} \quad \Omega \\ (\varphi(u) - \varepsilon Du) \cdot \nu \in \beta_\varepsilon(u) & \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

où β_ε est une approximation lipschitzienne du graphe β. Nous arrivons ensuite à caractériser la condition au bord pour la fonction limite en terme d'un nouveau graphe $\tilde{\beta}$ obtenu comme une sorte de "projection" du graphe β sur celui de la fonction $\varphi \cdot \nu$ (cf. (5.9)). Le passage du graphe β au graphe $\tilde{\beta}$ est expliqué par le phénomène de couche limite, bien connu pour le problème de Dirichlet (voir C. Bardos, A.Y. Le Roux et J.-C. Nédélec [13] et D. Serre [72]). L'étude de ce problème stationnaire est motivée par l'usage de quelques outils de la théorie générale des semigroupes non linéaires qui nous assure l'existence d'une unique bonne solution du problème $u_t + \mathcal{A}u \ni f$. Cette dernière, nous le verrons à la Section 4, est en fait l'unique solution entropique du problème (5.1)-(5.3). La preuve de l'unicité de la solution entropique se déroule en deux étapes. Tout d'abord on compare deux solutions en dehors d'un compact puis, par passage à la limite sur les fonctions tests, en utilisant le résultat de E.Yu Panov sur l'existence de traces, une comparaison de deux solutions entropiques est déduite. Nous terminons ce chapitre par quelques remarques et extensions.

Notation : Dans la suite, on écrira φ_ν au lieu de $\varphi \cdot \nu$.

5.2 Hypothèses et résultats préliminaires

Dans cette section, on introduit les hypothèses et les outils nécessaires pour présenter la formulation adaptée de la solution du problème (5.1)-(5.3) et assurer son existence et unicité.
On suppose que $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est lipschitzienne de constante de Lipschitz L et vérifie $\varphi(0) = 0$. Pour assurer les estimations et les convergences nécessaires on est amené à supposer également

$$\text{Il existe une constante C telle que } |\beta(z)| \geq |\varphi_\nu(z)| \ \forall |z| > C, \tag{5.5}$$

$$\text{la fonction } \ \varphi_1 \text{ est monotone par morceaux} \tag{5.6}$$

et

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^N, \ \xi \neq 0, \ \text{la fonction } z \mapsto \xi \cdot \varphi(z) \text{ n'est constante sur aucun intervalle.} \tag{5.7}$$

Les hypothèses (5.6) et (5.7) ne sont pas dictées par le problème, nous avons eu besoin pour des raisons techniques, et on espère pouvoir s'en affranchir, tandis que l'hypothèse (5.5) assure une borne L^∞ sur la solution. En absence d'une telle borne, la notion de solutions entropiques renormalisées doit être considérée (voir par exemple Ph. Bénilan, J. Carrillo et P. Wittbold [18]).

Introduisons à présent la notion de couple entropie-flux, un outil omniprésent dans notre étude.

Définition 5.2.1. *Soit $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$. On dit que (η, q) est un couple entropie-flux si pour presque tout $z \in \mathbb{R}$*

$$\eta'(z)\varphi'(z) = q'(z).$$

La fonction $z \mapsto \eta(z)$ *est appelée entropie, et* q *est le flux entropique associé. Si* η *et* q *sont de classe* C^2*, on dit que* (η, q) *est un couple entropie-flux régulier.*

Exemple : Soit $k \in \mathbb{R}$. Les couples les plus utilisés sont les couples entropie-flux de Kruzhkov :

$$\begin{cases} \eta_k(z) = |z-k| \\ q_k(z) = \operatorname{sign}(z-k)(\varphi(z)-\varphi(k)) \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \eta_k^{\pm}(z) = \operatorname{sign}^{\pm}(z-k) \\ q_k^{\pm}(z) = \operatorname{sign}^{\pm}(z-k)(\varphi(z)-\varphi(k)). \end{cases}$$

Remarque 5.2.1. *Pour* $l \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{R}$*, le couple entropie-flux* $(\eta_{k,l}^{\pm}, q_{k,l}^{\pm})$*, où*

$$\eta_{k,l}^{\pm}(z) = \operatorname{sign}^{\pm}(z-k)\Big(\sqrt{(z-k)^2+\frac{1}{l^2}}-\frac{1}{l}\Big) \quad et \quad q_{k,l}^{\pm}(z) = \int_k^z \eta_{k,l}^{\pm}(r)\varphi'(r)dr,$$

converge uniformément lorsque $l \to \infty$ *vers le couple entropie-flux de Kruzhkov* $(\eta_k^{\pm}, q_k^{\pm})$*, et le couple* $(\eta_{k,l}, q_{k,l})$*, défini par*

$$\eta_{k,l}(z) = \sqrt{(z-k)^2+\frac{1}{l^2}}-\frac{1}{l} \quad et \quad q_{k,l}(z) = \int_k^z \eta_{k,l}(r)\varphi'(r)dr,$$

converge lorsque $l \to \infty$ *vers le couple entropie-flux de Kruzhkov* (η_k, q_k)*. De plus ces couples sont réguliers.* $\Diamond$

A présent, définissons une notion de trace forte sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}$. Dans toute la suite, $x \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}$ s'écrira $x = (x_1, x')$ avec $x_1 \in \mathbb{R}^+$ et $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$.

Définition 5.2.2. *Une fonction* $\tilde{v} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^{N-1})$ *est une trace forte de la fonction* $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1})$ *sur* $\{x_1 = 0\}$ *si pour tout* $\xi \in C_c(\mathbb{R}^{N-1}),\ \xi \geq 0$

$$ess\text{-}\lim_{x_1 \to 0} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \xi(x')|v(x_1, x') - \tilde{v}(x')|dx' = 0.$$

Remarque 5.2.2. *Soit* $v \in L^\infty(\Omega)$ *admettant une trace forte* $\tilde{v}$ *sur* $\partial\Omega$*. Alors pour toute fonction continue* $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et pour tout* $\xi \in C_c(\mathbb{R}^{N-1}),\ \xi \geq 0,$

$$ess\text{-}\lim_{x_1 \to 0} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \xi(x')|\Psi(v(x_1, x')) - \Psi(\tilde{v}(x'))|dx' = 0.$$

En effet, soient $M = \|v\|_\infty + \|\tilde{v}\|_\infty$ *et* $\overline{\omega}_{\Psi,M}$ *l'enveloppe concave sur* $[0, M]$ *de la* *fonction* $\omega_{\Psi,M}(r) = \sup_{|z|,|\tilde z|\le M, |z-\tilde z|\le r} |\Psi(z) - \Psi(\tilde z)|$. *Alors*

$$\begin{aligned}
& ess\text{-}\lim_{x_1\to 0} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \xi(\cdot)|\Psi(v(x_1,\cdot)) - \Psi(\tilde v(\cdot))| \\
\le\ & ess\text{-}\lim_{x_1\to 0} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \xi(\cdot)\overline{\omega}_{\Psi,M}(|v(x_1,\cdot) - \tilde v(\cdot)|) \\
\le\ & ess\text{-}\lim_{x_1\to 0} \Big(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \xi\Big)\overline{\omega}_{\Psi,M}\Big(\frac{1}{\int \xi}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |v(x_1,\cdot) - \tilde v(\cdot)|\xi(\cdot)\Big) \\
\le\ & \Big(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \xi\Big)\overline{\omega}_{\Psi,M}\Big(\lim_{x_1\to 0}\frac{1}{\int \xi}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |v(x_1,\cdot) - \tilde v(\cdot)|\xi(\cdot)\Big) \\
=\ & 0.
\end{aligned}$$

Notation : Par la suite $\gamma : L^1_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}) \to L^1_{loc}(\mathbb{R}^{N-1})$ désigne l'opérateur trace au sens de la Définition 5.2.2.

En vue d'énoncer un résultat de E.Yu. Panov [68] que l'on utilisera par la suite, on introduit d'abord la définition suivante :

Définition 5.2.3. *Une fonction $u \in L^\infty(\Omega)$ est une quasi-solution pour l'opérateur* div $\varphi(u)$ *si*

$$\forall k \in \mathbb{R},\ \operatorname{div} q_k^\pm(u) = -\lambda_k^\pm \ \textit{dans}\ \mathcal{D}'(\Omega).$$

Une fonction $u \in L^\infty(Q)$ est une quasi-solution pour l'opérateur $u_t +$ div $\varphi(u)$ si

$$\forall k \in \mathbb{R},\quad \eta_k^\pm(u)_t + \operatorname{div} q_k^\pm(u) = -\mu_k^\pm \ \textit{dans}\ \mathcal{D}'(Q),$$

où $(\eta_k^\pm, q_k^\pm)$ est le couple entropie-flux de Kruzhkov et $\lambda_k^\pm, \mu_k^\pm$ sont des mesures de Borel localement finies jusqu'au bord, i.e. des mesures finies sur $\Omega \cap K$, respectivement sur $Q \cap K$, pour tout compact K de $\mathbb{R}^N$, respectivement de $\mathbb{R}^{N+1}$.

Remarque 5.2.3. *Les solutions entropiques, sous-solutions et sur-solutions entropiques sont des quasi-solutions. On montre facilement que la classe des quasi-solutions est stable par le passage aux opérations sup et inf (cf.* E. Yu Panov *[68]).* ♢

Clairement γ est non borné. La proposition qui suit montre que la composante normale du flux d'une quasi-solution à l'intérieur de $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}$ est dans le domaine de l'opérateur γ.

Proposition 5.2.1. *[68] Supposons $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}$ et la condition (5.6) vérifiée. Soit u une quasi-solution de $u_t +$ div $\varphi(u)$ sur Q. Alors il existe une trace forte $\tilde v := \gamma V_{\varphi_\nu}(u)$ de la fonction $V_{\varphi_\nu}(u)$ définie par*

$$V_{\varphi_\nu}(z) = \operatorname{sign}(z)\operatorname{Var}_{[0\wedge z, 0\vee z]}(\varphi(\cdot)\cdot\nu)\ ^{\mathrm{a}}.$$

[a] Ici Var$(\cdot)$ désigne la variation totale d'une fonction.

En particulier, la fonction $q_k^{\pm}(u)\cdot\nu$ *coïncide avec la fonction*

$$Q^{\pm}(V_{\varphi_\nu}(u),V_{\varphi_\nu}(k)) := \operatorname{sign}^{\pm}(V_{\varphi_\nu}(u)-V_{\varphi_\nu}(k))(\varphi_\nu\circ V_{\varphi_\nu}^{-1}(V_{\varphi_\nu}(u))-\varphi_\nu\circ V_{\varphi_\nu}^{-1}(V_{\varphi_\nu}(k)))$$

et admet une trace forte $\gamma Q^{\pm}(V_{\varphi_\nu}(u),V_{\varphi_\nu}(k)) = Q^{\pm}(\tilde{v},V_{\varphi_\nu}(k))$ *sur* Σ.
Le résultat d'existence de trace forte de la fonction $V_{\varphi_\nu}(u)$ *est valable aussi si* u *est une quasi-solution de* div $\varphi(u)$ *sur* Ω.

Remarque 5.2.4. *Notez que la fonction* $Q^{\pm}(\cdot,\cdot)$ *est continue en ses deux variables, car la fonction* $\Psi_\nu := \varphi_\nu\circ V_{\varphi_\nu}^{-1}$ *l'est.* $\Diamond$

Preuve de la Proposition 5.2.1. Soient $(a_i,b_i)_{i\in I^{\pm}}, I^{\pm}\subset\mathbb{N}$, les intervalles de monotonie de la fonction φ_1 sur $\mathbb{R}^{\pm}$ (notons que $\varphi_\nu=-\varphi_1$). Posons $\pi_i(z)=(z\wedge b_i)\vee a_i$ et

$$\varphi_1^i(z)=\begin{cases}\varphi_1\circ\pi_i(z)-\varphi_1(a_i) & \text{si}\quad a_i\geq 0\\ \varphi_1\circ\pi_i(z)-\varphi_\nu(b_i) & \text{si}\quad b_i\leq 0.\end{cases}$$

Alors

$$V_{\varphi_1}(z)=\begin{cases}\sum_{i\in I^+}|\varphi_1^i(z)| & \text{si}\quad z\geq 0\\ -\sum_{i\in I^-}|\varphi_1^i(z)| & \text{si}\quad z\leq 0.\end{cases} \tag{5.8}$$

Comme u est une quasi-solution de $u_t+\operatorname{div}_x\varphi(u)$, u est une quasi-solution de l'opérateur $u_t+(\varphi_1(u))_{x_1}+\operatorname{div}_{x'}\varphi'(u)$, où $\varphi' : z\mapsto(\varphi_2(z),\cdots,\varphi_n(z))$. Posons $u_i=\pi_i(u)$, alors, d'après la Remarque 5.2.3, u_i est une quasi-solution de $u_t+(\varphi_1(u))_{x_1}+\operatorname{div}_{x'}\varphi'(u)$. De plus,

$$(u_i)_t+(\varphi_1(u_i))_{x_1}+\operatorname{div}_{x'}\varphi'(u_i)=(u_i)_t+(\varphi_1^i(u_i))_{x_1}+\operatorname{div}_{x'}\varphi'(u_i),$$

car $\varphi_1(u_i)=\varphi_1^i(u_i)+C$. Puisque la fonction φ_1^i est inversible sur l'intervalle $[a_i,b_i]$, alors en posant $w_i=\varphi_1^i(u_i)$ on a

$$u_i=\tilde{\varphi}_1^i(w_i),\quad \text{où } \tilde{\varphi}_1^i\equiv\left(\varphi^i_{1|[a_i,b_i]}\right)^{-1}.$$

Faisons le changement de variables $x_1=\hat{t}$ et $\hat{x}=(t,x')$, alors la fonction w_i ainsi définie est une quasi-solution de l'opérateur $(w_i)_{\hat{t}}+\operatorname{div}_{\hat{x}}\tilde{\varphi}^i(w_i)$ avec $\tilde{\varphi}^i=(\tilde{\varphi}_1^i,\varphi_2\circ\tilde{\varphi}_1^i,\cdots,\varphi_n\circ\tilde{\varphi}_1^i)$. Par [67, Theorem 1.2] il existe une fonction $\tilde{w}_i=\tilde{w}_i(\hat{x})\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ telle que pour tout $\xi\in C_c(\mathbb{R}^N),\xi\geq 0$

$$\textit{ess-}\lim_{x_1\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\xi(\hat{x})|w_i(x_1,\hat{x})-\tilde{w}_i(\hat{x})|=0.$$

De plus, l'égalité (5.8) assure également l'existence de la trace de la fonction $V_{\varphi_\nu}(u(x_1,\cdot))$ sur l'ensemble $\{x_1=0\}$. D'autre part, comme l'égalité $V_{\varphi_\nu}(z)=$

$V_{\varphi_\nu}(\hat{z})\ \forall z, \hat{z} \in \mathbb{R}$ entraîne que $q_k^\pm(z) = q_k^\pm(\hat{z})$ pour tout flux entropique de Kruzhkov $q_k^\pm$, alors la fonction $q_k^\pm(u) \cdot \nu$ coïncide avec la fonction

$$\begin{aligned} Q^\pm(V_{\varphi_\nu}(u), V_{\varphi_\nu}(k)) &:= \operatorname{sign}^\pm(V_{\varphi_\nu}(u) - V_{\varphi_\nu}(k))(\varphi_\nu \circ V_{\varphi_\nu}^{-1}(V_{\varphi_\nu}(u)) - \varphi_\nu \circ V_{\varphi_\nu}^{-1}(V_{\varphi_\nu}(k))) \\ &= \operatorname{sign}^\pm(V_{\varphi_\nu}(u) - V_{\varphi_\nu}(k))(\Psi_\nu(V_{\varphi_\nu}(u)) - \Psi_\nu(V_{\varphi_\nu}(k))), \end{aligned}$$

où $\Psi_\nu := \varphi_\nu \circ V_{\varphi_\nu}^{-1}$. Puisque la fonction $z \mapsto \operatorname{sign}^\pm(z - V_{\varphi_\nu}(k))(\Psi_\nu(z) - \Psi_\nu(V_{\varphi_\nu}(k)))$ est continue (car Ψ_ν est continue), alors d'après la Remarque 5.2.2

$$ess\text{-}\lim_{x_1 \to 0} \int_{\mathbb{R}^N} \xi(\hat{x}) |Q^\pm(V_{\varphi_\nu}(u(x_1, \hat{x})), V_{\varphi_\nu}(k)) - Q^\pm(\gamma V_{\varphi_\nu}(u(\hat{x})), V_{\varphi_\nu}(k))| d\hat{x} = 0$$

pour tout $\xi \in C_c(\mathbb{R}^N)$ telle que $\xi \geq 0$. D'où le résultat. ■

A présent, à partir du graphe β, définissons le graphe suivant :

$$\tilde{\beta} := \left\{ (z, \varphi_\nu(z));\ \begin{array}{c} \exists b \in R(\beta) \text{ tel que } \varphi_\nu(z) = b \text{ et} \\ \text{si } z < m := \inf \beta^{-1}(b), \text{ alors } \varphi_\nu(k) \geq b\ \forall k \in [z, m[\\ \text{si } z > M := \sup \beta^{-1}(b), \text{ alors } \varphi_\nu(k) \leq b\ \forall k \in]M, z] \end{array} \right\}. \tag{5.9}$$

Remarque 5.2.5. *Le graphe $\tilde{\beta}$ est univoque, car c'est une partie du graphe de la fonction φ_ν.* ♢

Lemme 5.2.1. *Le graphe $\tilde{\beta}$ est monotone, i.e.*

$$(\tilde{\beta}(z_1) - \tilde{\beta}(z_2))(z_1 - z_2) \geq 0 \quad \forall z_1, z_2 \in D(\tilde{\beta}).$$

Preuve. Soient z_1, z_2 tels que $\beta^{-1}(\varphi_\nu(z_1)) = [m_1, M_1]$ et $\beta^{-1}(\varphi_\nu(z_2)) = [m_2, M_2]$. Supposons $z_1 \geq z_2$. Trois cas sont à considérer :

• Si $m_1 \leq z_1 \leq M_1$. Alors $M_2 < z_2 \leq m_1$, ou $m_2 \leq z_2 \leq M_2 < m_1$, ou $z_2 < m_2 < m_1$, et par des choix particuliers de k dans la définition du graphe $\tilde{\beta}$, on a dans tous ces cas $\varphi_\nu(z_1) \geq \varphi_\nu(z_2)$.

• Si $z_1 < m_1$. Alors $M_2 < z_2 \leq z_1$, ou $m_2 \leq z_2 \leq M_2 < z_1$, ou $z_2 < m_2 \leq z_1$, et on a bien $\varphi_\nu(z_1) \geq \varphi_\nu(z_2)$.

• Si $z_1 > M_1$. Alors $M_2 < z_2 \leq M_1$, ou $m_2 \leq z_2 \leq M_2 < M_1$, ou $z_2 < m_2 < M_1 < z_1$, et on a aussi $\varphi_\nu(z_1) \geq \varphi_\nu(z_2)$.
Le cas où $z_1 \leq z_2$ se déduit par symétrie. ■

Remarque 5.2.6. *Comme $\tilde{\beta}$ est monotone et est un sous-graphe du graphe de la fonction φ_ν, et le graphe de φ_ν est constant sur les intervalles où V_{φ_ν} est constante, le graphe $\tilde{\beta} \circ V_{\varphi_\nu}^{-1}$ est monotone et univoque également.* ♢

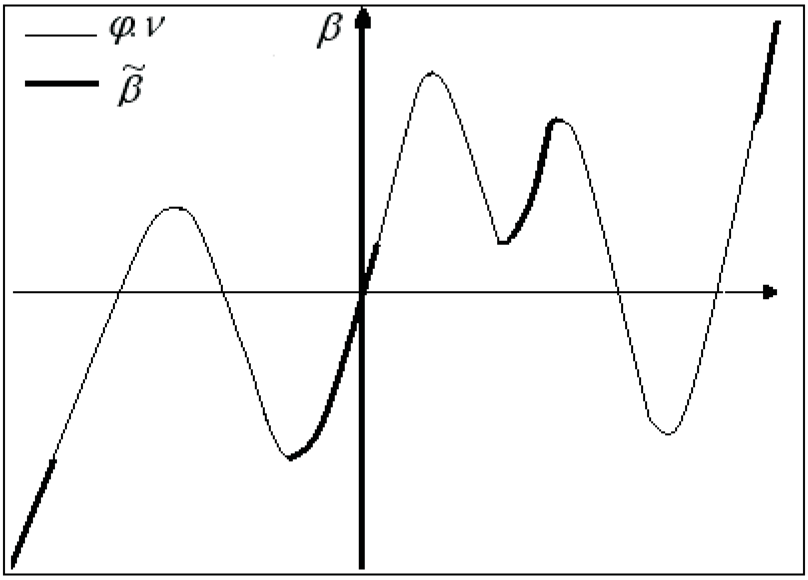

FIG. 5.1 – Cas de conditions de Dirichlet

Exemple 5.2.1. *Pour se familiariser avec la définition de $\tilde{\beta}$, donnons quelques exemples.*

• *Considérons le graphe β, modélisant la condition de Dirichlet homogène, défini par*

$$\beta(r) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } \; r = 0 \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors le graphe $\tilde{\beta}$ correspondant est (cf. FIG. *5.1)*

$$\tilde{\beta} := \left\{ (z, \varphi_\nu(z)); \begin{array}{l} \exists b \in R(\beta) \text{ tel que } b = \varphi_\nu(z) \ \textit{et} \\ \operatorname{sign}(z)(b - \varphi_\nu(k)) \geq 0 \quad \forall k \in [0 \wedge z, 0 \vee z] \end{array} \right\}.$$

• *La condition de Neumann est modélisée par le graphe*

$$\beta(r) = 0 \ \forall r \in \mathbb{R}.$$

Le graphe $\tilde{\beta}$ correspondant est (cf. FIG. *5.2)*

$$\tilde{\beta} := \{(z, \varphi_\nu(z)); \ \varphi_\nu(z) = 0\}.$$

• *Enfin la Figure 5.3 illustre le cas d'un graphe quelconque.*

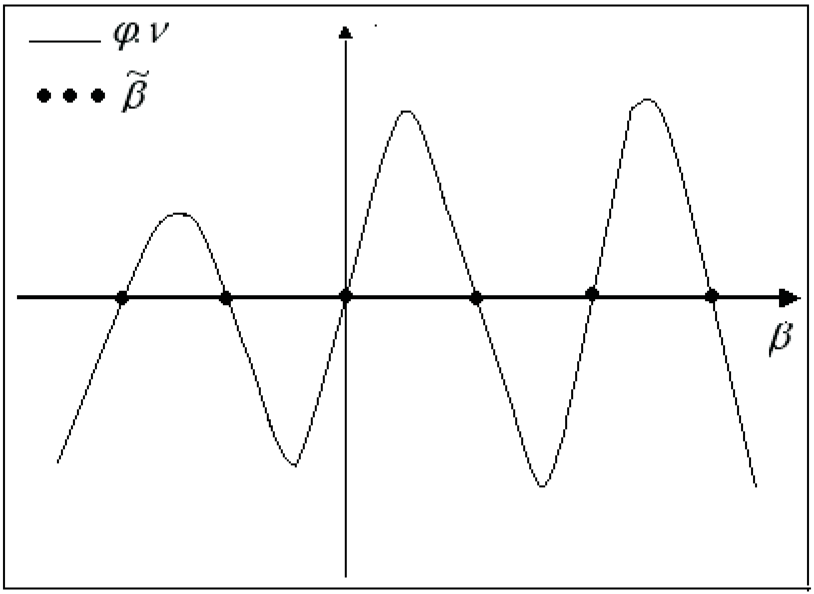

Fig. 5.2 – Cas de conditions de Neumann

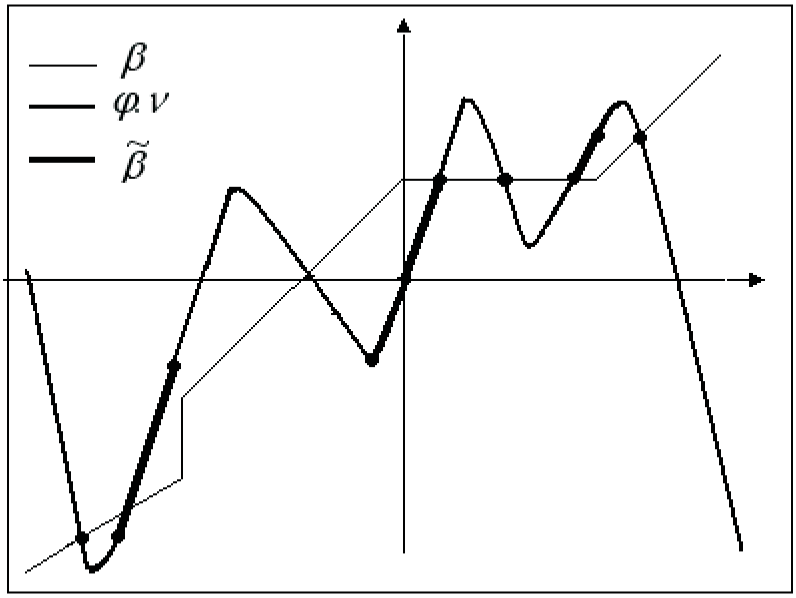

Fig. 5.3 – Cas de conditions plus générales

5.3 Solution entropique du problème stationnaire : existence et unicité

L'approche utilisée pour l'étude du problème (5.1)-(5.3) fait appel à certains outils de la théorie générale des semigroupes non linéaires (voir Ph. Bénilan, M.G. Crandall et A. Pazy [19]). Cela nous a amené à étudier en un premier lieu la version stationnaire du problème (5.1)-(5.3) :

$$(HS)(f) \left\{ \begin{array}{lll} u + \operatorname{div} \varphi(u) = f & \text{dans} & \Omega \\ \varphi(u) \cdot \nu \in \beta(u) & \text{sur} & \partial\Omega. \end{array} \right.$$

Pour ce dernier, on introduit le concept de solutions entropiques comme suit.

Définition 5.3.1. *Une fonction $u \in L^\infty(\Omega)$ est une solution entropique du problème $(HS)(f)$ si les conditions suivantes sont vérifiées*
• $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), \phi \geq 0$ *on a*

$$\int_\Omega \operatorname{sign}^\pm(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k)) \cdot D\phi + \int_\Omega \operatorname{sign}^\pm(u-k)(f-u)\phi \geq 0. \qquad (5.10)$$

• *Les traces fortes $\tilde{v}$ et $\tilde{w}$ sur $\partial\Omega$ des fonctions $V_{\varphi_\nu}(u)$ et $\varphi_\nu(u)$ existent et vérifient*

$$(\tilde{v}(x), \tilde{w}(x)) \in \tilde{\beta} \circ V_{\varphi_\nu}^{-1} \ \ \mathcal{H}^{N-1}\text{-p.p. } x \in \partial\Omega. \qquad (5.11)$$

Remarque 5.3.1. *En prenant $k \geq \|u\|_\infty$ puis $k \leq -\|u\|_\infty$ dans l'inégalité (5.10), il vient que $u + \operatorname{div} \varphi(u) = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.* ◊

Remarque 5.3.2. *Comme rappelé précédemment, dans le cas d'une condition de Dirichlet homogène, la condition au bord est formulée de façon forte :*

$$\operatorname{sign}(\gamma u)(\varphi_\nu(\gamma u) - \varphi_\nu(k)) \geq 0 \ \forall k \in [0 \wedge \gamma u, 0 \vee \gamma u] \ \ \text{p.p. sur } \partial\Omega.$$

En visualisant la Figure 5.1, on voit bien que cette condition coïncide avec (5.11). Dans le cas d'une condition de Neumann, sous une hypothèse de "non linéarité sur le flux", la condition au bord est formulée comme suit :

$$\varphi(\gamma u) \cdot \nu = 0 \ \ \text{p.p. sur } \partial\Omega.$$

En observant la Figure 5.2, il est clair que cette dernière formulation coïncide avec (5.11). Remarquons que dans ce cas, $\tilde{\beta} \subset \beta$. Cela signifie que, sous certaines hypothèses, la couche limite n'apparaît pas pour le problème de Neumann. ◊

La proposition qui suit apporte une autre formulation équivalente de la solution entropique du problème $(HS)(f)$.

Proposition 5.3.1. *Une fonction $u \in L^\infty(\Omega)$ telle que les traces fortes $\tilde{w} := \gamma\varphi_\nu(u), \tilde{v} := \gamma V_{\varphi_\nu}(u)$ existent dans $L^1_{loc}(\partial\Omega)$ et vérifient $(\tilde{v}(x), \tilde{w}(x)) \in \tilde{\beta} \circ V_{\varphi_\nu}^{-1}$ $\mathcal{H}^{N-1}$-p.p. $x \in \partial\Omega$ est une solution entropique de $(HS)(f)$ si, et seulement si elle satisfait $\forall k \in \mathbb{R}, \forall \xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ \xi \geq 0$*

$$\int_\Omega \operatorname{sign}^\pm(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot D\xi + \int_\Omega \operatorname{sign}^\pm(u-k)(f-u)\xi - \int_{\partial\Omega} Q^\pm(\tilde{v}, V_{\varphi_\nu}(k))\xi \geq 0.$$

Avant de commencer la preuve de cette proposition, on définit une suite de fonctions utile pour la démonstration qui suit et dont on se servira aussi aux preuves suivantes. Pour $\varepsilon > 0$, suffisamment petit, on définit

$$s(x) = \begin{cases} \min(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \varepsilon) & \text{pour } x \in \Omega \\ -\min(\operatorname{dist}(x, \partial\Omega), \varepsilon) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega. \end{cases}$$

Pour $\delta > 0$, on définit la suite $(\mu_\delta)_\delta$ par $\mu_\delta(x) = \zeta(\frac{s(x)}{\delta})$, avec $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}),\ \zeta \geq 0$ telle que $\zeta(0) = 0$ et $\zeta(z) = 1$ si $z \geq 1$. Remarquons tout de suite que $\mu_\delta = 0$ sur $\partial\Omega$, et pour toute fonction $g(x_1, x')$ admettant $\tilde{g}(x')$ comme trace forte sur $\partial\Omega$, on a pour tout $\xi \in C_c(\mathbb{R}^{N-1}),\ \xi \geq 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \int_\Omega \xi g \cdot D\mu_\delta = -\int_{\partial\Omega} \xi\tilde{g}\cdot\nu.$$

En effet,

$$\begin{aligned} \Big|\int_\Omega \xi g \cdot D\mu_\delta + \int_{\partial\Omega} \xi\tilde{g}\cdot\nu\Big| &\leq \int_\Omega |g(x_1, x') - \tilde{g}(x')||D\mu_\delta|\xi(x') \\ &\leq \frac{1}{\delta}\int_0^\delta \int_{\partial\Omega} \xi(x')|g(x_1, x') - \tilde{g}(x')|dx' \\ &\to 0 \text{ lorsque } \delta \to 0. \end{aligned}$$

Preuve de la Proposition 5.3.1. Pour établir l'implication directe de la proposition, considérons dans l'inégalité (5.10) la fonction test $\phi(x) = \mu_\delta(x)\xi(x)$, où $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ \xi \geq 0$, alors $\forall k \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} 0 \leq &\int_\Omega \mu_\delta \operatorname{sign}^\pm(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot D\xi + \int_\Omega (f-u)\operatorname{sign}^\pm(u-k)\xi\mu_\delta \\ &+ \int_\Omega \xi\operatorname{sign}^\pm(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot D\mu_\delta. \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés de la suite $(\mu_\delta)_\delta$, il vient, lorsque $\delta \to 0$,

$$\begin{aligned} 0 \leq &\int_\Omega \operatorname{sign}^\pm(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot D\xi + \int_\Omega (f-u)\operatorname{sign}^\pm(u-k)\xi \\ &- \int_{\partial\Omega} \gamma\big(\operatorname{sign}^\pm(u-k)(\varphi_\nu(u)-\varphi_\nu(k))\big)\xi. \end{aligned}$$

Mais la trace forte $\gamma\big(\mathrm{sign}^{\pm}(u-k)(\varphi_\nu(u)-\varphi_\nu(k))\big)$ coïncide avec la fonction $Q^{\pm}(\tilde{v}, V_{\varphi_\nu}(k))$ d'après la Proposition 5.2.1, d'où l'inégalité désirée. L'implication inverse de la proposition est évidente. ■

Pour prouver l'existence et l'unicité de la solution entropique du problème $(HS)(f)$, on associe à ce dernier un opérateur $\mathcal{A}$, défini par

$$(u, f) \in \mathcal{A} \Leftrightarrow u \text{ est solution entropique de } (HS)(f+u).$$

Le résultat principal de cette section s'énonce alors

Théorème 5.3.1. *Supposons les hypothèses (5.5), (5.6) et (5.7) vérifiées, alors l'opérateur $\mathcal{A}$ est T-accrétif à domaine dense dans $L^1(\Omega)$ et vérifie $\overline{R(I+\mathcal{A})}^{L^1} = L^1(\Omega)$. De plus, pour tout $(u_i, f_i) \in \mathcal{A},\ i = 1, 2$ on a*

$$\int_{\partial\Omega} |\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2| + \int_\Omega |u_1 - u_2| \leq \int_\Omega |f_1 - f_2|.$$

Comme conséquence immédiate

Corollaire 5.3.1. *Sous les hypothèses (5.5), (5.6) et (5.7), le problème $(HS)(f)$ admet une unique solution entropique.*

La preuve du Théorème 5.3.1 est divisée en trois propositions.

Proposition 5.3.2. *Pour tout $(u_i, f_i) \in \mathcal{A},\ i = 1, 2$ on a*

$$\int_{\partial\Omega} (\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)^+ + \int_\Omega (u_1 - u_2)^+ \leq \int_\Omega (f_1 - f_2)^+,$$

et a fortiori

$$\int_{\partial\Omega} |\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2| + \int_\Omega |u_1 - u_2| \leq \int_\Omega |f_1 - f_2|.$$

Preuve. La preuve est basée sur la méthode de dédoublement de variables de S.N. KRUZHKOV [51]. Considérons u_1, f_1 en fonction de x et u_2, f_2 en fonction de y. Soient $(\mu_\delta)_\delta$ la suite définie précédemment et $\rho_0 \in C_c^\infty([-1,1]; \mathbb{R}^+)$ une fonction paire telle que $\int_{\mathbb{R}} \rho_0(r)dr = 1$ et

$$\rho_n(z) = n^N \prod_{i=1}^N \rho_0(nz_i) \ \forall z = (z_1, \cdots, z_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Pour tout $\phi = \phi(x, y) \in C_c^\infty(\Omega \times \Omega), \phi \geq 0$ on a

$$\begin{aligned} 0 \ \leq \ & \int_{\Omega_x \times \Omega_y} \mathrm{sign}^+(u_1 - u_2)(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) \cdot (D_x\phi + D_y\phi) \\ & + \int_{\Omega_x \times \Omega_y} \mathrm{sign}^+(u_1 - u_2)(f_1 - u_1 - f_2 + u_2)\phi. \end{aligned} \tag{5.12}$$

En effet, pour montrer cette inégalité il suffit de remplacer k par $u_2(y)$, respectivement par $u_1(x)$, dans l'inégalité entropique que vérifie la solution $u_1(x)$, respectivement $u_2(y)$, d'intégrer sur $y \in \Omega$, respectivement sur $x \in \Omega$, et d'additionner les deux inégalités obtenues.
Soit $\xi \in C_c(\mathbb{R}^N), \xi \geq 0$, et considérons $\phi(x,y) = \mu_\delta(x)\mu_\eta(y)\rho_n(x-y)\xi(x)$ dans l'inégalité (5.12). Comme $D_x\rho_n(x-y) = -D_y\rho_n(x-y)$, il s'ensuit

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_x\times\Omega_y} \xi\rho_n\mu_\eta \mathrm{sign}^+(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot D_x\mu_\delta \\
&+\int_{\Omega_x\times\Omega_y} \xi\rho_n\mu_\delta \mathrm{sign}^+(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot D_y\mu_\eta \\
&+\int_{\Omega_x\times\Omega_y} \rho_n\mu_\delta\mu_\eta \mathrm{sign}^+(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot D_x\xi \\
&+\int_{\Omega_x\times\Omega_y} \xi\rho_n\mu_\delta\mu_\eta \mathrm{sign}^+(u_1-u_2)(f_1-u_1-f_2+u_2) \geq 0.
\end{aligned}$$

Il est clair que le passage à la limite avec $\delta,\eta \to 0$ dans l'inégalité précédente fournit

$$\begin{aligned}
&-\int_{\partial\Omega_x\times\Omega_y} Q^+(\tilde{v}_1, V_{\varphi_\nu}(u_2))\rho_n(x-y)\xi - \int_{\Omega_x\times\partial\Omega_y} Q^+(V_{\varphi_\nu}(u_1),\tilde{v}_2)\rho_n(x-y)\xi \\
&+\int_{\Omega_x\times\Omega_y} \rho_n(x-y)\mathrm{sign}^+(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot D_x\xi \\
&+\int_{\Omega_x\times\Omega_y} \xi\rho_n(x-y)\mathrm{sign}^+(u_1-u_2)(f_1-u_1-f_2+u_2) \geq 0.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Notons ces intégrales par $I_n^1, I_n^2, I_n^3, I_n^4$. Du passage à la limite avec $n \to \infty$ dans les deux dernières intégrales on a clairement

$$\lim_{n\to\infty} I_n^3 = \int_\Omega \mathrm{sign}^+(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot D\xi \tag{5.14}$$

et

$$\lim_{n\to\infty} I_n^4 = \int_\Omega \xi \mathrm{sign}^+(u_1-u_2)(f_1-u_1-f_2+u_2). \tag{5.15}$$

La principale difficulté est de passer à la limite dans les termes I_n^1 et I_n^2. Commençons par le premier. Posons dans I_n^1, $z' = n(x'-y')$ et $z_1 = ny_1$, où $x' \in \mathbb{R}^{N-1}, y = (y_1, y') \in \Omega$. Alors

$$I_n^1 = \int_{z'\in[-1,1]^{N-1}} \prod_{i=1}^{N-1} \rho_0(z_i') \int_{z_1\in[0,1]} \rho_0(z_1) \int_{\partial\Omega} Q^+(\tilde{v}_1(x'), v_2(\frac{z_1}{n}, x'-\frac{z'}{n}))\xi(x')dx'dz_1dz'.$$

On affirme que

$$\lim_{n\to\infty} I_n^1 = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} Q^+(\tilde{v}_1(x),\tilde{v}_2(x))\xi(x)dx =: I^1. \tag{5.16}$$

En effet, sachant que $\int_{z_1\in[0,1]} \rho_0(z_1)dz_1 = \frac{1}{2}$ et $\int_{z'\in[-1,1]^{N-1}} \prod_{i=1}^{N-1} \rho_0(z_i')dz' = 1$, on a

$$I^1 = \int_{z'\in[-1,1]^{N-1}} \prod_{i=1}^{N-1} \rho_0(z_i') \int_{z_1\in[0,1]} \rho_0(z_1) \int_{\partial\Omega} Q^+(\tilde{v}_1(x'), \tilde{v}_2(x'))\xi(x')dx',$$

ainsi le terme $|I_n^1 - I^1|$ peut être estimé comme suit :

$$\begin{aligned}
|I_n^1 - I^1| \;\; &\leq \;\; \int_{z'\in[-1,1]^{N-1}} \prod_{i=1}^{N-1} \rho_0(z_i') \int_{z_1\in[0,1]} \rho_0(z_1) \\
&\qquad \times \int_{\partial\Omega} \big|Q^+(\tilde{v}_1(x'), v_2(\frac{z_1}{n}, x' - \frac{z'}{n})) - Q^+(\tilde{v}_1(x'), \tilde{v}_2(x'))\big|\xi(x')dx'dz_1dz' \\
&\leq \;\; \frac{1}{2} \operatorname*{\mathit{ess}\,sup}_{0\leq h\leq \frac{1}{n}, |h'|\leq \frac{\sqrt{N-1}}{n}} \\
&\qquad\qquad \int_{\partial\Omega} \big|Q^+(\tilde{v}_1(x'), v_2(h, x'-h')) - Q^+(\tilde{v}_1(x'), \tilde{v}_2(x'))\big|\xi(x')dx'.
\end{aligned}$$

Notons ΔQ l'intégrande de l'intégrale précédente et remarquons que $\Delta Q = \Delta_1 Q + \Delta_2 Q$, où

$$\Delta_1 Q = Q^+(\tilde{v}_1(x'), v_2(h, x'-h')) - Q^+(\tilde{v}_1(x'), \tilde{v}_2(x'-h'))$$

et

$$\Delta_2 Q = Q^+(\tilde{v}_1(x'), \tilde{v}_2(x'-h')) - Q^+(\tilde{v}_1(x'), \tilde{v}_2(x')).$$

On désigne par $\overline{\omega}_{Q,M}$ l'enveloppe concave de la fonction $\omega_{Q,M}$, où $\omega_{Q,M}$ est le module de continuité de la fonction $Q^+(\cdot,\cdot)$ par rapport à la deuxième variable sur $[-M, M]$ avec $M = \max\{\|u_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty\}$. Alors

$$|\Delta_1 Q| \leq \overline{\omega}_{Q,M}(v_2(h, x'-h') - \tilde{v}_2(x'-h'))$$

et

$$|\Delta_2 Q| \leq \overline{\omega}_{Q,M}(\tilde{v}_2(x'-h') - \tilde{v}_2(x')).$$

En tenant compte de toutes ces informations il vient

$$\begin{aligned}
|I_n^1 - I^1| \;\; &\leq \;\; \frac{1}{2} \operatorname*{\mathit{ess}\,sup}_{0\leq h\leq \frac{1}{n}} \int_{\partial\Omega} \overline{\omega}_{Q,M}(v_2(h, x'-h') - \tilde{v}_2(x'-h'))\xi(x')dx' \\
&\quad + \frac{1}{2} \operatorname*{\mathit{ess}\,sup}_{|h'|\leq \frac{\sqrt{N-1}}{n}} \int_{\partial\Omega} \overline{\omega}_{Q,M}(\tilde{v}_2(x'-h') - \tilde{v}_2(x'))\xi(x')dx' \\
&=: \;\; I_{h,1} + I_{h',2}.
\end{aligned}$$

Grâce à la concavité de la fonction $\overline{\omega}_{Q,M}$ on a

$$\begin{aligned}
|I_{h,1}| &\leq \frac{1}{2}\Big(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \xi\Big)\overline{\omega}_{Q,M}\Big(\frac{1}{\int \xi} \operatorname*{ess\,sup}_{0\leq h\leq \frac{1}{n}} \int_{x'\in\mathbb{R}^{N-1}} |v_2(h,x'-h')-\tilde{v}_2(x'-h')|\xi(x')dx'\Big)\\
&= C\Big(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \xi\Big)\overline{\omega}_{Q,M}\Big(C \operatorname*{ess\,sup}_{0\leq h\leq \frac{1}{n}} \int_{z\in\mathbb{R}^{N-1}} |v_2(h,z)-\tilde{v}_2(z)|\overline{\xi}(z)dz\Big),
\end{aligned}$$

où $\overline{\xi}(z) = \sup\limits_{|h'|\leq \frac{\sqrt{N-1}}{n}} \xi(z+h'), \overline{\xi} \in C_c(\partial\Omega)$. Or $\tilde{v}_2$ est la trace, au sens de la Définition 5.2.2, de la fonction v_2, d'où $\lim\limits_{h\to 0} I_{h,1} = 0$. D'autre part,

$$|I_{h',2}| \leq C\overline{\omega}_{Q,M}\Big(C \operatorname*{ess\,sup}_{|h'|\leq \frac{\sqrt{N-1}}{n}} \int_{\partial\Omega} |\tilde{v}_2(x'-h')-\tilde{v}_2(x')|\xi(x')dx'\Big),$$

et donc tend, clairement, vers zéro lorsque $h' \to 0$. D'où la limite (5.16). Montrons que

$$\lim_{n\to\infty} I_n^2 = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega} Q^+(\tilde{v}_1(x),\tilde{v}_2(x))\xi(x)dx. \tag{5.17}$$

Pour cela, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}
I_n^2 &= \int_{\Omega_x\times\partial\Omega_y} Q^+(v_1(x),\tilde{v}_2(y))(\xi(x)-\xi(y))\rho_n(x-y)dxdy\\
&\quad -\int_{\Omega_x\times\partial\Omega_y} Q^+(v_1(x),\tilde{v}_2(y))\xi(y)\rho_n(x-y)dxdy\\
&=: I_n^{2,1} + I_n^{2,2}.
\end{aligned}$$

Le terme $I_n^{2,2}$ se traite de la même manière que I_n^1. Pour l'autre terme on a

$$\begin{aligned}
I_n^{2,1} &\leq \int_{z'\in[-1,1]^{N-1}} \prod_{i=1}^{N-1}\rho_0(z_i')\int_{z_1\in[0,1]}\rho_0(z_1)\\
&\qquad\qquad \times\int_{\partial\Omega}|\xi(\frac{z_1}{n},\frac{z'}{n}+y')-\xi(0,y')|\max_{[-M,M]^2} Q^+ dy'dz_1dz'\\
&\leq \frac{1}{2}C \operatorname*{ess\,sup}_{0\leq h\leq\frac{1}{n},|h'|\leq\frac{\sqrt{N-1}}{n}} \int_{y'\in\mathbb{R}^{N-1}} |\xi(h,h'+y')-\xi(0,y')|dy'
\end{aligned}$$

Clairement, cette intégrale tend vers zéro lorsque $h, h' \to 0$.
Les limites (5.14)-(5.17) permettent de conclure de l'inégalité (5.13) que pour tout $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N),\ \xi \geq 0$ on a

$$\begin{aligned}
&-\int_\Omega \operatorname{sign}^+(u_1-u_2)(u_1-u_2)\xi + \int_\Omega \operatorname{sign}^+(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot D\xi\\
&+\int_\Omega \operatorname{sign}^+(u_1-u_2)(f_1-f_2)\xi - \int_{\partial\Omega} Q^+(\tilde{v}_1,\tilde{v}_2)\xi \geq 0.
\end{aligned}$$

Choisissons $\xi = \xi_\alpha$ telle que $\xi_\alpha \to 1$ dans Ω, $|D\xi_\alpha| \leq C$ et $\mathrm{Supp}(D\xi_\alpha) \subset \{x;\ \alpha < |x| < \alpha + 1\}$. Alors le passage à la limite en α implique

$$\int_{\partial\Omega} (\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2)^+ + \int_\Omega (u_1 - u_2)^+ \leq \int_\Omega \mathrm{sign}^+(u_1 - u_2)(f_1 - f_2).$$

Par suite

$$\int_\Omega (u_1 - u_2)^+ \leq \int_\Omega (f_1 - f_2)^+,$$

c'est-à-dire l'opérateur $\mathcal{A}$ est T-accrétif. De plus, en intervertissant les rôles de u_1 et u_2, on déduit aussi

$$\int_{\partial\Omega} |\tilde{w}_1 - \tilde{w}_2| + \int_\Omega |u_1 - u_2| \leq \int_\Omega |f_1 - f_2|.$$

■

Proposition 5.3.3. *L'opérateur $\mathcal{A}$ vérifie $L^\infty(\Omega) \subset R(I + \mathcal{A})$.*

Preuve. L'idée pour prouver cette affirmation est la suivante : étant donnée $f \in L^\infty(\Omega)$, on approche le problème $(HS)(f)$ par un problème comportant un peu de diffusion, à savoir

$$(HS)_\varepsilon(f) \begin{cases} u + \mathrm{div}\ \varphi(u) = f + \varepsilon\Delta u & \text{dans} \quad \Omega \\ (\varphi(u) - \varepsilon Du) \cdot \nu \in \beta_\varepsilon(u) & \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

où β_ε est une approximation lipchitzienne du graphe β. Il existe une solution $u_\varepsilon \in W^{1,2}(\Omega)$ du problème $(HS)_\varepsilon(f)$. En se basant sur des estimations *a priori* et des passages à la limite, on va prouver que u_ε converge vers une solution entropique du problème $(HS)(f)$. La preuve de tout cela s'établira à l'aide de différents lemmes. Nous disons donc que le problème $(HS)_\varepsilon(f)$ admet une solution u_ε. Le lemme qui suit en dit davantage sur cette solution.

Lemme 5.3.1. *Les suites $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\beta_\varepsilon(u_\varepsilon))_\varepsilon$ vérifient*

– *Il existe des constantes M, C' (indépendantes de ε) telles que*

$$\|u_\varepsilon\|_\infty \leq M \tag{5.18}$$

et

$$\int_\Omega |u_\varepsilon| + \int_{\partial\Omega} |\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)| \leq C'. \tag{5.19}$$

– *Il existe des fonctions mesurables u et b telles que, pour des sous-suites encore notées $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\beta_\varepsilon(u_\varepsilon))_\varepsilon$ on ait*

$$u_\varepsilon \to u \text{ dans } L^1_{loc}(\Omega) \text{ lorsque } \varepsilon \to 0$$

et

$$\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \to b \text{ dans } L^1(\partial\Omega), \text{ et p.p. sur } \partial\Omega \text{ lorsque } \varepsilon \to 0.$$

Preuve. Commençons par prouver l'estimation L^∞ sur la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$. En effet, nous allons établir que $M = \max(C, \|f\|_\infty)$ convient à (5.18). Soit la fonction ϕ_δ définie par

$$\phi_\delta(z) = \begin{cases} \sqrt{(z-M)^2+\delta^2} - \delta & \text{si } z > M \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $u_\varepsilon \in W^{1,2}(\Omega)$ est solution de $(HS)_\varepsilon(f)$, elle vérifie aussi

$$u_\varepsilon + \operatorname{div}(\varphi(u_\varepsilon) - \varphi(M)) = f + \varepsilon\Delta u_\varepsilon \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

et en multipliant cette équation par $\phi'_\delta(u_\varepsilon)$ on a

$$\begin{aligned} & \int_\Omega u_\varepsilon \phi'_\delta(u_\varepsilon) - \int_\Omega (\varphi(u_\varepsilon) - \varphi(M)) \cdot Du_\varepsilon \phi''_\delta(u_\varepsilon) \\ \leq \; & \int_\Omega f\phi'_\delta(u_\varepsilon) - \varepsilon \int_\Omega |Du_\varepsilon|^2 \phi''_\delta(u_\varepsilon) - \int_{\partial\Omega} (\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) - \varphi_\nu(M))\phi'_\delta(u_\varepsilon). \end{aligned} \tag{5.20}$$

La continuité lipschitzienne de la fonction φ, l'inégalité de Young et le fait que $(z-M)^2\phi''_\delta(z) < \delta$, impliquent

$$\begin{aligned} & -(\varphi(u_\varepsilon) - \varphi(M)) \cdot Du_\varepsilon \phi''_\delta(u_\varepsilon) + \varepsilon |Du_\varepsilon|^2 \phi''_\delta(u_\varepsilon) \\ \geq \; & \big(-L|u_\varepsilon - M||Du_\varepsilon| + \varepsilon|Du_\varepsilon|^2\big)\phi''_\delta(u_\varepsilon) \\ \geq \; & -\frac{L^2}{4\varepsilon}(u_\varepsilon - M)^2 \phi''_\delta(u_\varepsilon) \\ \geq \; & -\frac{L^2}{4\varepsilon}\delta. \end{aligned}$$

D'autre part, grâce à la monotonie du graphe β et à l'hypothèse (5.5), on a

$$\int_{\partial\Omega} (\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) - \varphi_\nu(M))\phi'_\delta(u_\varepsilon) \geq \int_{\partial\Omega} (\beta_\varepsilon(M) - \varphi_\nu(M))\phi'_\delta(u_\varepsilon) \geq 0.$$

Ainsi, le passage à la limite avec $\delta \to 0$ dans l'inégalité (5.20) implique

$$\int_\Omega (u_\varepsilon - M)^+ \leq 0.$$

D'où $u_\varepsilon \leq M$ p.p. sur Ω. D'une manière analogue, on montre que $u_\varepsilon \geq -M$ p.p. sur Ω, d'où l'estimation (5.18).

Prouvons maintenant l'estimation (5.19). En considérant dans le problème $(HS)_\varepsilon(f)$ la fonction test $\phi'_\delta(u_\varepsilon)$, où $\phi_\delta(z) = \sqrt{z^2+\delta^2} - \delta$, $\delta > 0$, on a

$$\begin{aligned} & \int_\Omega u_\varepsilon \phi'_\delta(u_\varepsilon) - \int_\Omega \varphi(u_\varepsilon) \cdot Du_\varepsilon \phi''_\delta(u_\varepsilon) + \int_\Omega \varepsilon |Du_\varepsilon|^2 \phi''_\delta(u_\varepsilon) \\ \leq \; & \int_\Omega f\phi'_\delta(u_\varepsilon) - \int_{\partial\Omega} \beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\phi'_\delta(u_\varepsilon). \end{aligned} \tag{5.21}$$

Comme précédemment

$$-\varphi(u_\varepsilon)\cdot Du_\varepsilon \phi''_\delta(u_\varepsilon)+\varepsilon|Du_\varepsilon|^2\phi''_\delta(u_\varepsilon)\geq -\frac{L^2}{4\varepsilon}\delta,$$

ainsi le passage à la limite avec $\delta\to 0$ dans l'inégalité (5.21) fournit

$$\int_\Omega \operatorname{sign}(u_\varepsilon)u_\varepsilon+\int_{\partial\Omega}\operatorname{sign}(u_\varepsilon)\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\leq\int_\Omega |f|,$$

d'où l'inégalité (5.19). Montrons à présent la convergence des suites $(\beta_\varepsilon(u_\varepsilon))_\varepsilon$ et $(u_\varepsilon)_\varepsilon$. Le domaine, l'opérateur différentiel et la condition au bord (5.3) étant invariants dans les directions tangentielles à la frontière de $\Omega=\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^{N-1}$, il en découle que $u_\varepsilon(x_1,x')$ est solution de $(HS)_\varepsilon(f)$ et $u_\varepsilon(x_1,x'+h)$ est solution de $(HS)_\varepsilon(f(x_1,x'+h))$. Comme conséquence de la Proposition 5.3.2 on dispose de l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}&\int_{\partial\Omega}|\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x_1,x'+h))-\beta_\varepsilon(u_\varepsilon(x_1,x'))|+\int_\Omega|u_\varepsilon(x_1,x'+h)-u_\varepsilon(x_1,x')|\\ \leq\ &\int_\Omega|f(x_1,x'+h)-f(x_1,x')|\leq\omega(|h|),\end{aligned}$$

où $\omega(r)=\sup_{|k|<r}\int_\Omega|f(x+k)-f(x)|dx$ est le module de continuité L^1 de la fonction f. Puisque la suite $(\beta_\varepsilon(u_\varepsilon))_\varepsilon$ est bornée dans $L^1(\partial\Omega)$, par le théorème de Fréchet-Kolmogorov, la suite $(\beta_\varepsilon(u_\varepsilon))_\varepsilon$ est relativement compacte dans $L^1(\partial\Omega)$ et par suite il existe une fonction $b\in R(\beta)$ telle que, quitte à extraire une sous-suite si nécessaire, on ait

$$\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)\to b \text{ dans } L^1(\partial\Omega),\ \text{ et p.p. sur } \partial\Omega \text{ lorsque } \varepsilon\to 0.$$

D'autre part, puisque le flux φ vérifie la condition (5.7), alors d'après E.Yu Panov [66] la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est relativement compacte[b] dans $L^1_{loc}(\Omega)$, d'où, en passant à une sous-suite si nécessaire,

$$u_\varepsilon\to u \text{ dans } L^1_{loc}(\Omega) \text{ lorsque } \varepsilon\to 0.$$

■

Lemme 5.3.2. *La fonction u vérifie l'inégalité* (*5.10*).

Preuve. Soient $\phi\in C_c^\infty(\Omega),\ \phi\geq 0$ et $(\eta^\pm_{k,l},q^\pm_{k,l})$ le couple entropie-flux introduit dans la Remarque 5.2.1. En considérant la fonction test $(\eta^\pm_{k,l})'(u_\varepsilon)\phi$ dans le problème $(HS)_\varepsilon(f)$ et en utilisant le fait que

$$(\eta^\pm_{k,l})'(u_\varepsilon)\text{div }\varphi(u_\varepsilon)=(\eta^\pm_{k,l})'(u_\varepsilon)\varphi'(u_\varepsilon)\cdot Du_\varepsilon=(q^\pm_{k,l})'(u_\varepsilon)\cdot Du_\varepsilon=\text{div }q^\pm_{k,l}(u_\varepsilon)$$

[b]Voir aussi P.L. Lions, B. Perthame et E. Tadmor [55] pour un autre résultat de compacité de la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$, exigeant plus de régularité sur la fonction φ.

et que

$$(\eta_{k,l}^{\pm})'(u_\varepsilon)\Delta u_\varepsilon = \Delta\eta_{k,l}^{\pm}(u_\varepsilon) - (\eta_{k,l}^{\pm})''(u_\varepsilon)|Du_\varepsilon|^2 \le \Delta\eta_{k,l}^{\pm}(u_\varepsilon),$$

il vient

$$-\int_\Omega q_{k,l}^{\pm}(u_\varepsilon)\cdot D\phi \le \int_\Omega (f-u_\varepsilon)(\eta_{k,l}^{\pm})'(u_\varepsilon)\phi + \varepsilon\int_\Omega \eta_{k,l}^{\pm}(u_\varepsilon)\Delta\phi.$$

Passons à la limite avec $l\to\infty$, alors

$$-\int_\Omega \text{sign}^{\pm}(u_\varepsilon-k)(\varphi(u_\varepsilon)-\varphi(k))\cdot D\phi \le \int_\Omega \text{sign}^{\pm}(u_\varepsilon-k)(f-u_\varepsilon)\phi+\varepsilon\int_\Omega (u_\varepsilon-k)^{\pm}\Delta\phi. \tag{5.22}$$

Comme $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(\Omega)$,

$$\left|\varepsilon\int_\Omega (u_\varepsilon-k)^{\pm}\Delta\phi\right| \le \varepsilon C\|\Delta\phi\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \text{ lorsque } \varepsilon\to 0.$$

On peut alors passer à la limite avec $\varepsilon\to 0$ dans l'inégalité (5.22), en utilisant le théorème de la convergence dominée pour les autres termes, ce qui donne l'inégalité désirée. ■

Lemme 5.3.3. *Les fonctions $V_{\varphi_\nu}(u)$ et $\varphi_\nu(u)$ admettent des traces, au sens de la Définition 5.2.2, notées $\tilde v$ et $\tilde w$, respectivement, telles que*

$$(\tilde v(x),\tilde w(x)) \in \tilde\beta\circ V_{\varphi_\nu}^{-1} \quad \mathcal{H}^{N-1}\text{-}p.p.\ x\in\partial\Omega.$$

Preuve. Puisque u est une solution entropique de $u+\text{div}\,\varphi(u)=f$ dans Ω, elle est donc une quasi-solution de l'opérateur div $\varphi(u)$ dans Ω et les traces fortes $\tilde v$ et $\tilde w$ sur $\partial\Omega$ des fonctions $V_{\varphi_\nu}(u)$ et $\varphi_\nu(u)$ existent d'après la Proposition 5.2.1. Montrons que $(\tilde v(x),\tilde w(x))\in\tilde\beta\circ V_{\varphi_\nu}^{-1}$ $\mathcal{H}^{N-1}$-p.p. $x\in\partial\Omega$. Soit $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\phi\ge 0$. En considérant dans le problème $(HS)_\varepsilon(f)$ la fonction test $(\eta_{k,l}^{\pm})'(u_\varepsilon)(1-\mu_\delta)\phi$ il vient

$$\begin{aligned}\int_\Omega (\eta_{k,l}^{\pm})'(u_\varepsilon)(1-\mu_\delta)\phi u_\varepsilon - \int_\Omega (1-\mu_\delta)q_{k,l}^{\pm}(u_\varepsilon)\cdot D\phi + \int_\Omega \phi q_{k,l}^{\pm}(u_\varepsilon)\cdot D\mu_\delta\\ \le -\varepsilon\int_\Omega D\eta_{k,l}^{\pm}(u_\varepsilon)\cdot D((1-\mu_\delta)\phi) + \int_\Omega f(\eta_{k,l}^{\pm})'(u_\varepsilon)(1-\mu_\delta)\phi\\ -\int_{\partial\Omega}\big(\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)(\eta_{k,l}^{\pm})'(u_\varepsilon)+q_{k,l}^{\pm}(u_\varepsilon)\cdot\nu-(\eta_{k,l}^{\pm})'(u_\varepsilon)\varphi_\nu(u_\varepsilon)\big)\phi.\end{aligned} \tag{5.23}$$

Sachant que $(\eta_{k,l}^{\pm}(u_\varepsilon),q_{k,l}^{\pm}(u_\varepsilon))\to((u_\varepsilon-k)^{\pm},\text{sign}^{\pm}(u_\varepsilon-k)(\varphi(u_\varepsilon)-\varphi(k)))$ lorsque $l\to\infty$, alors pour tout $\phi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\phi\ge 0$

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \phi(1-\mu_\delta)\text{sign}^{\pm}(u_\varepsilon-k)(f-u_\varepsilon)+\int_\Omega(1-\mu_\delta)\text{sign}^{\pm}(u_\varepsilon-k)(\varphi(u_\varepsilon)-\varphi(k))\cdot D\phi\\ &-\int_\Omega \phi\,\text{sign}^{\pm}(u_\varepsilon-k)(\varphi(u_\varepsilon)-\varphi(k))\cdot D\mu_\delta+\varepsilon\int_\Omega(1-\mu_\delta)(u_\varepsilon-k)^{\pm}\Delta\phi\\ &-\int_{\partial\Omega}\text{sign}^{\pm}(u_\varepsilon-k)(\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)-\varphi_\nu(k))\phi\ge 0.\end{aligned}$$

Comme la suite $(\mathrm{sign}^{\pm}(u_\varepsilon - k))_\varepsilon$ est bornée dans $L^\infty(\partial\Omega)$, alors, quitte à passer à une sous-suite si nécessaire, on a

$$\theta^{\pm}_{k,\varepsilon} := \mathrm{sign}^{\pm}(u_\varepsilon - k) \overset{*}{\rightharpoonup} \theta^{\pm}_k \quad \text{faiblement } * \text{ dans } L^\infty(\partial\Omega) \text{ lorsque } \varepsilon \to 0.$$

Du passage à la limite avec $\varepsilon \to 0$, ensuite avec $\delta \to 0$ dans l'inégalité précédente, il vient, en tenant compte de la Proposition 5.2.1 et des convergences des suites $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ et $(\beta_\varepsilon(u_\varepsilon))_\varepsilon$, (cf. Lemme 5.3.1), que pour tout $\phi \in C^\infty_c(\mathbb{R}^N),\ \phi \geq 0$

$$\int_{\partial\Omega} Q^{\pm}(\tilde{v}, V_{\varphi_\nu}(k))\phi \geq \int_{\partial\Omega} (b - \varphi_\nu(k))\theta^{\pm}_k \phi.$$

D'où pour tout $k \in \mathbb{R}$

$$Q^{\pm}(\tilde{v}, V_{\varphi_\nu}(k)) \geq (b - \varphi_\nu(k))\theta^{\pm}_k \text{ p.p. sur } \partial\Omega,$$

ce qui est équivalent à

$$\mathrm{sign}^{\pm}(\tilde{v} - V_{\varphi_\nu}(k))\big(\Psi_\nu(\tilde{v}) - \Psi_\nu(V_{\varphi_\nu}(k))\big) \geq (b - \Psi_\nu(V_{\varphi_\nu}(k)))\theta^{\pm}_k \tag{5.24}$$

p.p. sur $\partial\Omega$, où l'on rappelle que $\Psi_\nu = \varphi_\nu \circ V^{-1}_{\varphi_\nu}$. Pour montrer que $(\tilde{v}(x), \tilde{w}(x)) \in \tilde{\beta} \circ V^{-1}_{\varphi_\nu}$ $\mathcal{H}^{N-1}$-p.p. $x \in \partial\Omega$ étudions cette dernière inégalité pour les différentes valeurs de k.
Supposons que $k \notin \beta^{-1}(b(x)) := [m, M]$ p.p. $x \in \partial\Omega$ et identifions d'abord $\theta^{\pm}_k(x)$ à $\mathrm{sign}^{\pm}(b(x) - b_k)$ p.p. $x \in \partial\Omega$, où $b_k \in \beta(k)$. Pour prouver cela, soit $k < m$, alors $u_\varepsilon(x) > k\ \forall \varepsilon < \varepsilon_0(x, k)$. En effet, supposons qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_n,\ \varepsilon_n \downarrow_{n\to\infty} 0$ telle que $u_{\varepsilon_n}(x) \leq k$, donc $\beta_{\varepsilon_n}(u_{\varepsilon_n}(x)) \leq \beta_{\varepsilon_n}(k)$. En passant à la limite avec n vers l'infini, il vient

$$\begin{cases} b \leq \beta^0(k) & \text{pour} \quad k \in D(\beta) \\ b \leq -\infty & \text{pour} \quad k \notin D(\beta), \end{cases}$$

ce qui est absurde. Par conséquent, sur l'ensemble $\{x;\ b_k < b(x)\}$ on a $\mathrm{sign}^+(u_\varepsilon(x) - k) \to 1$ et $\mathrm{sign}^-(u_\varepsilon(x) - k) \to 0$ lorsque $\varepsilon \to 0$. D'autre part, $\theta^{\pm}_{k,\varepsilon} \overset{*}{\rightharpoonup} \theta^{\pm}_k$ faiblement $*$ dans $L^\infty(\partial\Omega)$, alors pour toute fonction $\phi \in L^\infty(\partial\Omega)$ on a $\theta^{\pm}_{k,\varepsilon}\phi \overset{*}{\rightharpoonup} \theta^{\pm}_k\phi$ dans $L^\infty(\partial\Omega)$. Posons $\phi = \chi_{\{b_k < b(x)\}}$. Sachant que $\theta^{+}_{k,\varepsilon}\chi_{\{b_k < b(x)\}} \to 1\chi_{\{b_k < b(x)\}}$ et $\theta^{-}_{k,\varepsilon}\chi_{\{b_k < b(x)\}} \to 0\chi_{\{b_k < b(x)\}}$ p.p. $x \in \{y;\ b_k < b(y)\}$, et que la suite $(\theta^{\pm}_{k,\varepsilon}\chi)_\varepsilon$ est bornée, alors

$$\theta^{+}_{k,\varepsilon}\chi_{\{b_k < b\}} \to 1\chi_{\{b_k < b\}} \quad \text{et} \quad \theta^{-}_{k,\varepsilon}\chi_{\{b_k < b\}} \to 0\chi_{\{b_k < b\}} \quad \text{fortement dans } L^1(\partial\Omega).$$

Cela nous permet d'identifier $\theta^{\pm}_k(x)$ à $\mathrm{sign}^{\pm}(b(x) - b_k)$ p.p. $x \in \{y;\ b_k < b(y)\}$. De la même manière, si $k > M$, alors

$$\theta^{+}_{k,\varepsilon}\chi_{\{b < b_k\}} \to 0\chi_{\{b < b_k\}} \quad \text{et} \quad \theta^{-}_{k,\varepsilon}\chi_{\{b < b_k\}} \to -1\chi_{\{b < b_k\}} \quad \text{fortement dans } L^1(\partial\Omega).$$

Revenons à l'inégalité (5.24).

• Si $\tilde{v}(x) < m$ et $\tilde{v}(x) \leq V_{\varphi_\nu}(k)$ et $k < m$, alors $\theta_k^\pm(x) = \text{sign}^\pm(b(x) - b_k) = \text{sign}^\pm(m-k)$ p.p. $x \in \partial\Omega$, et on déduit de l'inégalité (5.24) que

$$b \leq \Psi_\nu(V_{\varphi_\nu}(k)) \ \text{ et } \ \Psi_\nu(\tilde{v}) \leq \Psi_\nu(V_{\varphi_\nu}(k)) \ \text{ p.p. sur } \partial\Omega.$$

Si $V_{\varphi_\nu}(k) \leq \tilde{v}(x)$ et $k < m$, alors $\Psi_\nu(\tilde{v}) \geq b$ p.p. sur $\partial\Omega$, et si $\tilde{v}(x) < V_{\varphi_\nu}(k)$ et $m < k$, alors $\Psi_\nu(\tilde{v}) \leq b$ p.p. sur $\partial\Omega$.

• Si $\tilde{v}(x) > M$ et $M < k$ et $V_{\varphi_\nu}(k) \leq \tilde{v}(x)$, alors $\theta_k^+(x) = \text{sign}^+(b(x) - b_k) = 0$ et $\theta_k^-(x) = \text{sign}^-(b(x) - b_k) = -1$ p.p. $x \in \partial\Omega$, et on déduit de l'inégalité (5.24) que

$$b \geq \Psi_\nu(V_{\varphi_\nu}(k)) \ \text{ et } \ \Psi_\nu(\tilde{v}) \geq \Psi_\nu(V_{\varphi_\nu}(k)) \ \text{ p.p. sur } \partial\Omega.$$

Si $\tilde{v}(x) \leq V_{\varphi_\nu}(k)$ et $M < k$, alors $\Psi_\nu(\tilde{v}) \leq b$ p.p. sur $\partial\Omega$, et si $V_{\varphi_\nu}(k) < \tilde{v}(x)$ et $k < M$, alors $\Psi_\nu(\tilde{v}) \geq b$ p.p. sur $\partial\Omega$.

• Si $m \leq \tilde{v}(x) \leq M$. Dans ce cas, on approche une fois k par une suite $(k_n)_n$ telle que $k_n \overset{>}{\to} m$, et on aura $\theta_k^\pm(x) = \text{sign}^\pm(m-k) = \text{sign}^\pm(\beta(m) - \beta(k))$ et l'inégalité (5.24) devient $b \leq \Psi_\nu(\tilde{v})$ p.p. sur $\partial\Omega$. En approchant k une autre fois par une suite $(k_n)_n$ telle que $k_n \overset{<}{\to} M$, on déduit que $b \geq \Psi_\nu(\tilde{v})$ p.p. sur $\partial\Omega$. D'où

$$b = \Psi_\nu(\tilde{v}) \ \text{ p.p. sur } \partial\Omega.$$

En combinant tous ces résultats et en les comparant avec la définition du graphe $\tilde{\beta}$ et le fait que $\Psi_\nu = \varphi_\nu \circ V_{\varphi_\nu}^{-1}$, il est vient que $(\tilde{v}(x), \tilde{w}(x)) \in \tilde{\beta} \circ V_{\varphi_\nu}^{-1}$ $\mathcal{H}^{N-1}$-p.p. $x \in \partial\Omega$. ∎

En mettant bout à bout les preuves des Lemmes 5.3.1, 5.3.2 et 5.3.3, la Proposition 5.3.3 s'ensuit. ∎

Proposition 5.3.4. *L'opérateur $\mathcal{A}$ est à domaine dense dans $L^1(\Omega)$.*

Preuve. Il suffit de prouver que $C_c^\infty(\Omega) \subset \overline{D(\mathcal{A})}^{L^1}$. Soient $f \in C_c^\infty(\Omega)$, $\alpha > 0$ et posons $u_\alpha := (I + \alpha\mathcal{A})^{-1} f$, alors $(u_\alpha, \frac{1}{\alpha}(f - u_\alpha)) \in \mathcal{A}$, i.e. il existe $\tilde{w}_\alpha \in \tilde{\beta} \circ V_{\varphi_\nu}^{-1}(\tilde{v}_\alpha)$ p.p. sur $\partial\Omega$ et u_α vérifie

$$u_\alpha + \alpha \text{ div } \varphi(u_\alpha) = f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega). \tag{5.25}$$

Montrons que $u_\alpha \to f$ dans $L^1(\Omega)$ lorsque $\alpha \to 0$. Pour cela, montrons en premier que $\|u_\alpha\|_\infty \leq M$, où $M \geq \|f\|_\infty + C$. Soit dans l'équation (5.25) la fonction test $\phi'_\delta(u_\alpha)$, où $\phi_\delta(z) = \sqrt{(z-M)^2 + \delta^2} - \delta$ si $z > M$, et 0 ailleurs. Alors

$$\int_\Omega u_\alpha \phi'_\delta(u_\alpha) - \alpha \int_\Omega \varphi(u_\alpha) \cdot Du_\alpha \phi''_\delta(u_\alpha) + \alpha \int_{\partial\Omega} \tilde{w}_\alpha \phi'_\delta(u_\alpha) = \int_\Omega f \phi'_\delta(u_\alpha). \tag{5.26}$$

Or

$$\begin{aligned}
\alpha \int_\Omega \varphi(u_\alpha) \cdot Du_\alpha \phi''_\delta(u_\alpha) &= \alpha \int_\Omega \mathrm{div} \int_0^{u_\alpha} \phi''_\delta(r)\varphi(r)dr \\
&= \alpha \int_{\partial\Omega} \int_0^{u_\alpha} \phi''_\delta(r)\varphi(r)dr \\
&\leq \alpha \int_{\partial\Omega} \sup_{[0,u_\alpha]} |\varphi \cdot \nu| \phi'_\delta(u_\alpha),
\end{aligned}$$

combinée avec l'hypothèse (5.5) implique

$$-\alpha \int_\Omega \varphi(u_\alpha) \cdot Du_\alpha \phi''_\delta(u_\alpha) + \alpha \int_{\partial\Omega} \tilde{w}_\alpha \phi'_\delta(u_\alpha) \geq 0.$$

En passant à la limite avec α vers 0 dans l'inégalité (5.26), il vient

$$\int_{\{u_\alpha > M\}} u_\alpha \leq \int_{\{u_\alpha > M\}} f.$$

D'où $u_\alpha \leq M$ p.p. sur Ω, et de la même manière, on montre que $u_\alpha \geq -M$ p.p. sur Ω. D'autre part,

$$\alpha \int_\Omega |\varphi(u)| \leq \alpha L \|u_\alpha\|_1 \to 0 \text{ lorsque } \alpha \to 0,$$

d'où $u_\alpha \to f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, et p.p. sur Ω lorsque $\alpha \to 0$, et par suite $|u_\alpha| \to |f|$ p.p. sur Ω. L'accrétivité de l'opérateur $\mathcal{A}$ donne $\int_\Omega |u_\alpha| \leq \int_\Omega |f|$. Par le lemme de Fatou on a aussi

$$\lim_{\alpha \to 0} \int_\Omega |u_\alpha| \geq \int_\Omega |f|.$$

D'où $\lim_{\alpha \to 0} \int_\Omega |u_\alpha| = \int_\Omega |f|$. D'autre part, comme $u_\alpha \to f$ p.p. sur Ω, le théorème de la convergence dominée entraîne $\int_{\mathrm{Supp}(f)} |u_\alpha - f| \to 0$ lorsque $\alpha \to 0$, et donc $\int_{\mathrm{Supp}(f)} |u_\alpha| \to \int_{\mathrm{Supp}(f)} |f|$. Or

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u_\alpha - f| &= \int_{\mathrm{Supp(f)}} |u_\alpha - f| + \int_{\Omega/\mathrm{Supp(f)}} |u_\alpha| \\
&= \int_{\mathrm{Supp(f)}} |u_\alpha - f| + \int_\Omega |u_\alpha| - \int_{\mathrm{Supp(f)}} |u_\alpha| \\
&\to 0 \text{ lorsque } \alpha \to 0.
\end{aligned}$$

D'où $u_\alpha \to f$ dans $L^1(\Omega)$. ∎

5.4 Étude du problème d'évolution

Dans cette section, on étudie l'existence et l'unicité de la solution entropique du problème (5.1)-(5.3) pour tout $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, $f \in L^1(Q)$ avec $f(t,\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ p.p. $t \in (0,T)$ et $\int_0^T \|f(t,\cdot)\|_\infty dt < \infty$.

5.4.1 Définition des solutions entropiques

Définition 5.4.1. *Une fonction $u \in L^\infty(Q)$ est une solution entropique du problème (5.1)-(5.3) si les conditions suivantes sont vérifiées*
• $\forall k \in \mathbb{R},\ \forall \phi \in C_c^\infty(Q),\ \phi \geq 0$

$$\int_Q (u-k)^\pm \phi_t + \int_Q \text{sign}^\pm(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot D\phi + \int_Q f\text{sign}^\pm(u-k)\phi \geq 0. \quad (5.27)$$

• *La condition initiale est vérifiée au sens suivant :*

$$ess\text{-}\lim_{t\to 0} \int_\Omega |u(t,x) - u_0(x)| = 0. \quad (5.28)$$

• *Les fonctions $\varphi_\nu(u)$ et $V_{\varphi_\nu}(u)$ admettent des traces sur Σ notées $\tilde{w} := \gamma\varphi_\nu(u)$ et $\tilde{v} := \gamma V_{\varphi_\nu}(u)$ telles que*

$$(\tilde{v}(t,x), \tilde{w}(t,x)) \in \tilde{\beta} \circ V_{\varphi_\nu}^{-1} \quad \mathcal{H}^N\text{-p.p. } (t,x) \in \Sigma. \quad (5.29)$$

Remarque 5.4.1. *En prenant $k \geq \|u\|_\infty$ puis $k \leq -\|u\|_\infty$ dans l'inégalité (5.27), il s'ensuit que $u_t + \text{div }\varphi(u) = f$ dans $\mathcal{D}'(Q)$.* $\Diamond$

On a la caractérisation suivante des solutions entropiques.

Proposition 5.4.1. *Une fonction $u \in L^\infty(Q)$ telle que les traces fortes $\tilde{w} = \gamma\varphi_\nu(u)$ et $\tilde{v} = \gamma V_{\varphi_\nu}(u)$ existent sur Σ et vérifient $(\tilde{v},\tilde{w}) \in \tilde{\beta} \circ V_{\varphi_\nu}^{-1}$ p.p. sur Σ est une solution entropique du problème (5.1)-(5.3) si, et seulement si elle satisfait $\forall k \in\ \mathbb{R}$, $\forall \xi \in C_c^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^N),\ \xi \geq 0$ l'inégalité suivante*

$$\int_Q (u-k)^\pm \xi_t + \int_\Omega (u_0-k)^\pm \xi(0) + \int_Q \text{sign}^\pm(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot D\xi$$
$$+ \int_Q f\text{sign}^\pm(u-k)\xi - \int_\Sigma Q^\pm(\tilde{v}, V_{\varphi_\nu}(k))\xi \geq 0. \quad (5.30)$$

Preuve. Pour établir l'implication directe, considérons dans l'inégalité (5.27) la fonction test $\phi(t,x) = \zeta_h(t)\mu_\delta(x)\xi(t,x)$, où $\zeta_h \in C_c[0,T), 0 \leq \zeta_h \leq 1,\ \zeta_h \to 1$

sur $[0,T)$ et $\xi \in C_c^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^N)$, $\xi \geq 0$. Alors $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\int_Q (u-k)^\pm \xi_t + \mathrm{sign}^\pm(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k)) \cdot D\xi + f\mathrm{sign}^\pm(u-k)\xi \\
&- \int_Q \Big((u-k)^\pm \xi_t + \mathrm{sign}^\pm(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k)) \cdot D\xi + f\mathrm{sign}^\pm(u-k)\xi\Big)(1-\zeta_h\mu_\delta) \\
&+ \int_Q (u-k)^\pm \zeta_h' \mu_\delta \xi + \int_Q \zeta_h \xi \mathrm{sign}^\pm(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k)) \cdot D\mu_\delta \geq 0.
\end{aligned}$$

En passant à la limite avec $h \to 0$ et en utilisant la condition (5.28) on obtient $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\int_Q (u-k)^\pm \xi_t + \mathrm{sign}^\pm(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k)) \cdot D\xi + f\mathrm{sign}^\pm(u-k)\xi \\
&- \int_Q \Big((u-k)^\pm \xi_t + \mathrm{sign}^\pm(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k)) \cdot D\xi + f\mathrm{sign}^\pm(u-k)\xi\Big)(1-\mu_\delta) \\
&+ \int_\Omega (u_0-k)^\pm \xi(0)\mu_\delta + \int_Q \xi \mathrm{sign}^\pm(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k)) \cdot D\mu_\delta \geq 0.
\end{aligned}$$

Enfin, en faisant tendre $\delta \to 0$, on aura

$$\begin{aligned}
&\int_Q (u-k)^\pm \xi_t + \mathrm{sign}^\pm(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k)) \cdot D\xi + f\mathrm{sign}^\pm(u-k)\xi \\
&+ \int_\Omega (u_0-k)^\pm \xi(0) - \int_\Sigma \gamma\big(\mathrm{sign}^\pm(u-k)(\varphi_\nu(u)-\varphi_\nu(k))\big)\xi \geq 0.
\end{aligned}$$

Mais la trace $\gamma\big(\mathrm{sign}^\pm(u-k)(\varphi_\nu(u)-\varphi_\nu(k))\big)$ coïncide avec la fonction $\gamma Q^\pm(V_{\varphi_\nu}(u), V_{\varphi_\nu}(k)) = Q^\pm(\tilde{v}, V_{\varphi_\nu}(k))$. D'où l'inégalité désirée.
Pour l'implication inverse, il est clair que l'inégalité (5.30) implique (5.27). Pour justifier la condition (5.28) on choisit dans l'inégalité (5.30) la fonction test $\xi(t,x) = \zeta(t)\phi(x)$, où $0 \leq \zeta \in C_c^\infty(-\infty,\alpha), 0 \leq \phi \in C_c^\infty(\Omega), \alpha \geq 0$, alors $\forall k \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\alpha \zeta'(t) \int_\Omega (u-k)^\pm \phi(x) + \int_\Omega (u_0-k)^\pm \phi(x) + C \int_0^\alpha \zeta(t) \geq 0.$$

Choisissons $\zeta(t)$ une certaine régularisation de la fonction $\chi_{(-\alpha,\alpha)}(t)$ et faisons tendre $\alpha \to 0$, on a

$$\mathit{ess}\text{-}\lim_{t\to 0} \int_\Omega (u-k)^\pm \phi(x) + \int_\Omega (u_0-k)^\pm \phi(x) \geq 0,$$

où la limite essentielle dans l'inégalité précédente est bien définie grâce au résultat de E. Yu Panov [67]. En choisissant $k \geq \|u\|_\infty$ puis $k \leq -\|u\|_\infty$, il s'ensuit que la trace faible de u est u_0 : $\mathit{ess}\text{-}\lim_{t\to 0} \int_\Omega u(t)\phi = \int_\Omega u_0\phi$ pour tout $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Puisque l'on sait que la trace forte existe et coïncide avec la faible, le résultat en découle. ∎

5.4.2 Existence des solutions entropiques

L'objet de cette partie est de montrer l'existence de solutions entropiques du problème (5.1)-(5.3). Par les résultats du Théorème 5.3.1, $\overline{\mathcal{A}}$ est m-T-accrétif dans $L^1(\Omega)$ et $\overline{D(\overline{\mathcal{A}})} = \overline{D(\mathcal{A})} = L^1(\Omega)$. Alors la théorie générale des semigroupes non linéaires fournit un bon candidat pour être une solution entropique.

Proposition 5.4.2. *Sous les hypothèses (5.5), (5.6) et (5.7), pour tout $f \in L^1(Q)$ et $u_0 \in \overline{D(\mathcal{A})}$ il existe une unique bonne solution du problème de Cauchy*

$$u_t + \mathcal{A}u \ni f,\ u(0) = u_0.$$

Théorème 5.4.1. *Supposons les hypothèses (5.5), (5.6) et (5.7) vérifiées. Pour tout (u_0, f) vérifiant l'hypothèse (5.4), l'unique bonne solution du problème de Cauchy $u_t + \mathcal{A}u \ni f,\ u(0) = u_0$ est une solution entropique du problème (5.1)-(5.3).*

Comme conséquence immédiate

Corollaire 5.4.1. *Sous les hypothèses (5.5), (5.6) et (5.7), le problème (5.1)-(5.3) admet au moins une solution entropique.*

Preuve du Théorème 5.4.1. Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on pose $\varepsilon = \frac{T}{m}$ et pour $i = 1, \cdots, m$, on pose $t_i = \varepsilon i$ et

$$f_i^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_{t_{i-1}}^{t_i} f(t,x)dt \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

alors

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{m} \|f_i^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \int_0^T \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}dt$$

et

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|f(t) - f_i^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} \to 0 \ \text{ lorsque } m \to \infty.$$

Pour $i = 1, \cdots, m$, soit u_i^ε vérifiant $\varepsilon f_i^\varepsilon + u_{i-1}^\varepsilon \in (I + \varepsilon\mathcal{A})(u_i^\varepsilon)$, i.e. il existe $\tilde{v}_i^\varepsilon = \gamma V_{\varphi_\nu}(u_i^\varepsilon)$ et $\tilde{w}_i^\varepsilon = \gamma\varphi_\nu(u_i^\varepsilon)$ telles que $(\tilde{v}_i^\varepsilon, \tilde{w}_i^\varepsilon) \in \tilde{\beta} \circ V_{\varphi_\nu}^{-1}$ p.p. sur $\partial\Omega$ et pour tout $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \phi \geq 0$ on a

$$\int_\Omega \operatorname{sign}(u_i^\varepsilon - k)\frac{u_i^\varepsilon - u_{i-1}^\varepsilon}{\varepsilon}\phi - \int_\Omega \operatorname{sign}(u_i^\varepsilon - k)(\varphi(u_i^\varepsilon) - \varphi(k)) \cdot D\phi$$
$$+ \int_{\partial\Omega} \operatorname{sign}(u_i^\varepsilon - k)\tilde{w}_i^\varepsilon\phi \leq \int_\Omega \operatorname{sign}(u_i^\varepsilon - k)f_i^\varepsilon\phi. \tag{5.31}$$

On définit $u^\varepsilon(t) = u_i^\varepsilon, f^\varepsilon(t) = f_i^\varepsilon, \tilde{v}^\varepsilon(t) = \tilde{v}_i^\varepsilon, \tilde{w}^\varepsilon(t) = \tilde{w}_i^\varepsilon$ si $t_{i-1} \leq t \leq t_i$ $(1 \leq i \leq m)$. Commençons par prouver les estimations L^∞ sur la suite $(u^\varepsilon)_\varepsilon$. Par la Proposition 5.3.3,

$$\begin{aligned}\|u_i\|_{L^\infty(\Omega)} &\leq \max(C, \|u_{i-1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \varepsilon\|f_i^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)})\\ &\leq \max(C, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \varepsilon\sum_{i=1}^m \|f_i^\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)})\\ &\leq \max(C, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} + \int_0^T \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega)}).\end{aligned}$$

D'autre part, par la théorie générale des semigroupes non linéaires, la suite $(u^\varepsilon)_\varepsilon$ est compacte dans $L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$, et puisque $u_0^\varepsilon \to u_0$ dans $L^1(\Omega)$, il existe une fonction $u \in C([0,T];L^1(\Omega))$ telle que (au moins pour une sous-suite)

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^\infty(0,T;L^1(\Omega))} \to 0 \quad \text{lorsque } \varepsilon \to 0.$$

La suite de la preuve est divisée en différents lemmes.

Lemme 5.4.1. *La suite $(\tilde{w}^\varepsilon)_\varepsilon$ est relativement compacte dans $L^1(\Sigma)$, et converge presque partout sur $\partial\Omega$ vers une fonction mesurable $\hat{w}$.*

Preuve. Soit $u_0^\varepsilon \in D(\mathcal{A})$ telle que $\|u_0 - u_0^\varepsilon\|_1 < \varepsilon$. On pose $u_{-i}^\varepsilon = u_0^\varepsilon, f_{-i}^\varepsilon = \mathcal{A}u_0^\varepsilon$ $\forall i$. Soit $l \in \mathbb{N}^*$. Comme $(u_i^\varepsilon, f_i^\varepsilon - \frac{u_i^\varepsilon - u_{i-1}^\varepsilon}{\varepsilon}) \in \mathcal{A}$ et $(u_{l+i}^\varepsilon, f_{l+i}^\varepsilon - \frac{u_{l+i}^\varepsilon - u_{l+i-1}^\varepsilon}{\varepsilon}) \in \mathcal{A}$, alors d'après la Proposition 5.3.2,

$$\|u_{l+i}^\varepsilon - u_i^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} + \varepsilon\|\tilde{w}_{l+i}^\varepsilon - \tilde{w}_i^\varepsilon\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq \varepsilon\|f_{l+i}^\varepsilon - f_i^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} + \|u_{l+i-1}^\varepsilon - u_{i-1}^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)}. \tag{5.32}$$

On va sommer cette inégalité sur $i = -l, \cdots, m-l$ pour estimer le terme $\varepsilon\sum_{i=-l}^{m-l}\|\tilde{w}_{l+i}^\varepsilon - \tilde{w}_i^\varepsilon\|_{L^1(\partial\Omega)}$. On a

$$\begin{aligned}\varepsilon\sum_{i=-l}^{m-l}\|f_{l+i}^\varepsilon - f_i^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} &= \sum_{i=-l}^{m-l}\|\frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon(i+l-1)}^{\varepsilon(i+l)} f(t)dt - \frac{1}{\varepsilon}\int_{\varepsilon(i-1)}^{\varepsilon i} f(t)dt\|_{L^1(\Omega)}\\ &= \sum_{i=-l}^{m-l}\|\int_{\varepsilon(i-1)}^{\varepsilon i}(f(t+l\varepsilon) - f(t))dt\|_{L^1(\Omega)}\\ &\leq \int_0^T \|f(t+l\varepsilon) - f(t)\|_{L^1(\Omega)}dt\\ &\leq \omega_f(l\varepsilon),\end{aligned}$$

où $\omega_f(\cdot)$ est le module de continuité L^1 de la fonction f prolongée par $\mathcal{A}u_0^\varepsilon$ pour $t < 0$, et

$$\sum_{i=-l}^{m-l}\Big(\|u_{l+i}^\varepsilon - u_i^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} - \|u_{l+i-1}^\varepsilon - u_{i-1}^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)}\Big) = \|u^\varepsilon(T-\varepsilon l) - u^\varepsilon(T)\|_{L^1(\Omega)}.$$

Ainsi, en sommant l'inégalité (5.32) sur $i = -l, \cdots, m-l$, il vient

$$\varepsilon \sum_{i=-l}^{m-l} \|\tilde{w}^\varepsilon_{l+i} - \tilde{w}^\varepsilon_i\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq \omega_f(l\varepsilon). \tag{5.33}$$

Montrons qu'il existe une fonction $\tilde{\psi}$ vérifiant $\tilde{\psi}(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$ telle que

$$I_\varepsilon := \int_0^{T-\Delta t} \|\tilde{w}^\varepsilon(t+\Delta t) - \tilde{w}^\varepsilon(t)\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq \tilde{\psi}(\Delta t). \tag{5.34}$$

Posons $\Delta t = (l-1)\varepsilon + \alpha\varepsilon,\ \alpha \in [0,1)$. On a $\Delta t \in [(l-1)\varepsilon, l\varepsilon[$. Soit $j > 0$. Alors

$$\tilde{w}^\varepsilon(t+\Delta t) - \tilde{w}^\varepsilon(t) = \left\{ \begin{array}{lll} \tilde{w}^\varepsilon_{l+j-1} - \tilde{w}^\varepsilon_j & \text{si} & t \in [(j-1)\varepsilon, (j-1)\varepsilon + (1-\alpha)\varepsilon[\\ \tilde{w}^\varepsilon_{l+j} - \tilde{w}^\varepsilon_j & \text{si} & t \in [(j-1)\varepsilon + (1-\alpha)\varepsilon, j\varepsilon[, \end{array} \right.$$

et on a

$$\int_{(j-1)\varepsilon}^{j\varepsilon} \|\tilde{w}^\varepsilon(t+\Delta t) - \tilde{w}^\varepsilon(t)\|_{L^1(\partial\Omega)} dt = (1-\alpha)\varepsilon \|\tilde{w}^\varepsilon_{l+j-1} - \tilde{w}^\varepsilon_j\|_{L^1(\partial\Omega)} + \alpha\varepsilon \|\tilde{w}^\varepsilon_{l+j} - \tilde{w}^\varepsilon_j\|_{L^1(\partial\Omega)}.$$

Par conséquent, grâce à l'inégalité (5.33) on a

$$I_\varepsilon = \sum_{j=-l}^{m-l} \int_{(j-1)\varepsilon}^{j\varepsilon} \|\tilde{w}^\varepsilon(t+\Delta t) - \tilde{w}^\varepsilon(t)\|_{L^1(\partial\Omega)} dt \leq \omega_f((l-1)\varepsilon) + \omega_f(l\varepsilon).$$

Distinguons deux cas :
• Cas où $\frac{\omega_f(\varepsilon)}{\varepsilon} \leq C$. Si $\Delta t \geq \varepsilon$, alors

$$I_\varepsilon \leq \omega_f(\Delta t) + \omega_f(\Delta t + \varepsilon) \leq 2\omega_f(2\Delta t).$$

Si $\Delta t < \varepsilon$, alors on a $l = 1$ et

$$I_\varepsilon \leq \alpha\omega_f(\varepsilon) = \frac{\Delta t}{\varepsilon}\omega_f(\varepsilon) \leq C\Delta t.$$

D'où

$$I_\varepsilon \leq \max\{2\omega_f(2\Delta t), C\Delta t\}.$$

• Cas où $\frac{\omega_f(\varepsilon)}{\varepsilon} \to +\infty$ lorsque $\varepsilon \to 0$. Introduisons la fonction $A(z) = \left(\frac{z}{\overline{\omega}_f(z)}\right)^2$, où $\overline{\omega}_f$ est l'enveloppe concave de la fonction ω_f. La fonction A est croissante et vérifie $A(0) = 0$ et $A^{-1}(z) \to 0$ lorsque $z \to 0$.
Si $\Delta t \geq \min(\varepsilon, A(\varepsilon))$, alors $\varepsilon \leq \max(\Delta t, A^{-1}(\Delta t)) \leq \Delta t + A^{-1}(\Delta t)$, et

$$I_\varepsilon \leq \omega_f(\Delta t) + \omega_f(\Delta t + \varepsilon) \leq 2\omega_f(2\Delta t + A^{-1}(\Delta t)).$$

Si $\Delta t < \min(\varepsilon, A(\varepsilon))$, alors

$$I_\varepsilon \leq \frac{\Delta t}{\varepsilon}\overline{\omega}_f(\varepsilon) \leq \sqrt{\Delta t}(\frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon}\overline{\omega}_f(\varepsilon)) \leq \sqrt{\Delta t}.$$

D'où

$$I_\varepsilon \leq \max\{2\omega_f(\Delta t + A^{-1}(\Delta t)), \sqrt{\Delta t}\}.$$

Par conséquent, l'estimation (5.34) est vérifiée. D'autre part, soient $f_i^\varepsilon(x+\Delta x) \in \mathcal{A}(u_i^\varepsilon(x+\Delta x))$ et $f_i^\varepsilon(x) \in \mathcal{A}(u_i^\varepsilon(x))$. Alors de la Proposition 5.3.2 il vient, en convenant de noter $\widehat{u_i^\varepsilon}, \widehat{f_i^\varepsilon}, \widehat{\tilde{w}_i^\varepsilon}$ les fonctions $u_i^\varepsilon(x+\Delta x), f_i^\varepsilon(x+\Delta x), \tilde{w}_i^\varepsilon(x+\Delta x)$,

$$\|\widehat{u_i^\varepsilon} - u_i^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} + \varepsilon\|\widehat{\tilde{w}_i^\varepsilon} - \tilde{w}_i^\varepsilon\|_{L^1(\partial\Omega)} \leq \varepsilon\|\widehat{f_i^\varepsilon} - f_i^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)} + \|\widehat{u_{i-1}^\varepsilon} - u_{i-1}^\varepsilon\|_{L^1(\Omega)}.$$

En sommant cette inégalité sur $i = 1, \cdots, m$ on déduit que

$$\|\tilde{w}^\varepsilon(t, x+\Delta x) - \tilde{w}^\varepsilon(t,x)\|_1 \leq \int_0^T \|f^\varepsilon(t, x+\Delta x) - f^\varepsilon(t,x)\|_{L^1(\Omega)}.$$

Dans le but d'appliquer le théorème de Fréchet-Kolmogorov, il nous reste à montrer que

$$\int_\Sigma |\tilde{w}^\varepsilon| \leq C \text{ unif. en } \varepsilon.$$

En considérant dans l'inégalité (5.31) $\phi = 1$ et $k = 0$ il vient, en sommant sur $i = 1, \cdots, m$,

$$\int_\Omega |u^\varepsilon(t)| + \int_\Sigma \text{sign}(u^\varepsilon(t))\tilde{w}^\varepsilon(t) \leq \int_Q \text{sign}(u^\varepsilon(t))f^\varepsilon(t).$$

D'où l'estimation désirée. Ainsi, par le théorème de Fréchet-Kolmogorov, la suite $(\tilde{w}^\varepsilon)_\varepsilon$ est relativement compacte dans $L^1(\Sigma)$ et pour une sous-suite encore notée $(\tilde{w}^\varepsilon)_\varepsilon$ on a

$$\tilde{w}^\varepsilon \to \hat{w} \text{ fortement dans } L^1(\Sigma), \text{ et p.p. sur } \partial\Omega \text{ lorsque } \varepsilon \to 0.$$

■

Lemme 5.4.2. *La fonction u vérifie l'inégalité (5.27).*

Preuve. D'après la définition de la solution u_i^ε, la fonction u^ε vérifie

$$\begin{aligned} 0 \leq &\int_Q \Big(\frac{1}{\varepsilon}(u^\varepsilon(t-\varepsilon) - u^\varepsilon(t)) + f^\varepsilon(t)\Big)\text{sign}^\pm(u^\varepsilon(t) - k)\phi(t) \\ &+ \int_Q \text{sign}^\pm(u^\varepsilon(t) - k)(\varphi(u^\varepsilon(t)) - \varphi(k)) \cdot D\phi(t) \end{aligned} \tag{5.35}$$

pour tout $\phi \in C_c^\infty(Q)$, $\phi \geq 0$ et $k \in \mathbb{R}$. En utilisant le fait que

$$\begin{aligned}\operatorname{sign}^\pm(u^\varepsilon(t)-k)(u^\varepsilon(t-\varepsilon)-u^\varepsilon(t)) &= \operatorname{sign}^\pm(u^\varepsilon(t)-k)(u^\varepsilon(t-\varepsilon)-k+k-u^\varepsilon(t))\\ &\leq (u^\varepsilon(t-\varepsilon)-k)^\pm-(u^\varepsilon(t)-k)^\pm,\end{aligned}$$

il vient de l'inégalité (5.35) que pour tout $\phi \in C_c^\infty(Q), \phi \geq 0$ et $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}0 \leq &\int_Q \frac{1}{\varepsilon}\big((u^\varepsilon(t-\varepsilon)-k)^\pm-(u^\varepsilon(t)-k)^\pm\big)\phi(t)\\ &+\int_Q \operatorname{sign}^\pm(u^\varepsilon(t)-k)(\varphi(u^\varepsilon(t))-\varphi(k))\cdot D\phi(t)+\int_Q \operatorname{sign}^\pm(u^\varepsilon(t)-k)f^\varepsilon(t)\phi(t).\end{aligned}$$

Le passage à la limite avec $\varepsilon \to 0$ implique pour tout $\phi \in C_c^\infty(Q), \phi \geq 0$ et $k \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}0 \leq &\int_Q (u-k)^\pm\phi_t+\int_Q \operatorname{sign}^\pm(u-k)(\varphi(u)-\varphi(k))\cdot D\phi\\ &+\int_Q \operatorname{sign}^\pm(u-k)f\phi.\end{aligned}$$

D'où l'inégalité (5.27). ■

Lemme 5.4.3. *La trace de la fonction u sur $\{t=0\}$ existe et les traces fortes sur Σ des fonctions $V_{\varphi_\nu}(u)$ et $\varphi_\nu(u)$ existent et sont notées $\tilde{v}=\gamma V_{\varphi_\nu}(u)$ et $\tilde{w}=\gamma\varphi_\nu(u)$. De plus, elles vérifient*

$$(\tilde{v}(t,x),\tilde{w}(t,x)) \in \tilde{\beta}\circ V_{\varphi_\nu}^{-1} \quad \mathcal{H}^N\text{-p.p. } (t,x)\in\Sigma.$$

Preuve. Puisque u est aussi solution entropique, d'après E. Yu Panov [67] la fonction u admet u_0 pour trace $L^1_{loc}(\Omega)$ forte sur $\{t=0\}$, d'où la limite (5.28), et d'après la Proposition 5.2.1 les traces L^1 fortes des fonctions $V_{\varphi_\nu}(u)$ et $\varphi_\nu(u)$ existent. Montrons que $(\tilde{v}(t,x),\tilde{w}(t,x)) \in \tilde{\beta}\circ V_{\varphi_\nu}^{-1}$ $\mathcal{H}^N$-p.p. $(t,x)\in\Sigma$.
Comme dans le Lemme 5.3.3, en choisissant dans l'inégalité (5.35) la fonction test $\phi(1-\mu_\delta)$ avec $\phi \in C_c^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^N), \phi \geq 0$ et en passant à la limite avec $\varepsilon \to 0$ puis $\delta \to 0$ il vient

$$\int_\Sigma Q^\pm(\tilde{v},V_{\varphi_\nu}(k))\phi \geq \int_\Sigma (\hat{w}-\Psi_\nu(V_{\varphi_\nu}(k)))\phi\theta_k^\pm.$$

Par conséquent,

$$Q^\pm(\tilde{v},V_{\varphi_\nu}(k)) \geq (\hat{w}-\Psi_\nu(V_{\varphi_\nu}(k)))\theta_k^\pm \quad \text{p.p. sur } \Sigma. \tag{5.36}$$

Comme dans le Lemme 5.3.3 l'étude de cette inégalité nous permet de conclure que

$$(\tilde{v}(t,x),\tilde{w}(t,x)) \in \tilde{\tilde{\beta}}\circ V_{\varphi_\nu}^{-1} \quad \mathcal{H}^N\text{-p.p. } (t,x)\in\Sigma,$$

où le graphe $\tilde{\tilde{\beta}}$ est défini par

$$\tilde{\tilde{\beta}} := \left\{ (z, \varphi_\nu(z)); \begin{array}{c} \exists \hat{w} \in R(\tilde{\beta}) \text{ tel que } \varphi_\nu(z) = \hat{w} \text{ et} \\ \text{si } z < \tilde{m} := \inf \tilde{\beta}^{-1}(\hat{w}), \text{ alors } \varphi_\nu(k) \geq \hat{w} \ \forall k \in [z, \tilde{m}[\\ \text{si } z > \tilde{M} := \sup \tilde{\beta}^{-1}(\hat{w}), \text{ alors } \varphi_\nu(k) \leq \hat{w} \ \forall k \in]\tilde{M}, z] \end{array} \right\}.$$

Pour finir la preuve il suffit d'établir que $\tilde{\beta} = \tilde{\tilde{\beta}}$. On a clairement l'inclusion directe. Pour l'inclusion inverse soit $(z, \varphi_\nu(z)) \in \tilde{\tilde{\beta}}$. Trois cas sont à distinguer : $z < \inf \tilde{\beta}^{-1}(\varphi_\nu(z))$ ou $z > \sup \tilde{\beta}^{-1}(\varphi_\nu(z))$ ou $\inf \tilde{\beta}^{-1}(\varphi_\nu(z)) \leq z \leq \sup \tilde{\beta}^{-1}(\varphi_\nu(z))$. Étudions le premier cas, les deux autres se déduisent d'une manière analogue. De nouveau trois situations peuvent se produire

• Si $z < \inf \beta^{-1}(\varphi_\nu(z)) \leq \inf \tilde{\beta}^{-1}(\varphi_\nu(z)) := \tilde{m}$. Comme $(z, \varphi_\nu(z)) \in \tilde{\tilde{\beta}}$, alors $\forall k \in [z, \tilde{m})$ on a $\varphi_\nu(k) \geq \varphi_\nu(z)$, en particulier pour tout $k \in [z, \inf \beta^{-1}(\varphi_\nu(z)))$.

• Si $z < \inf \tilde{\beta}^{-1}(\varphi_\nu(z)) \leq \inf \beta^{-1}(\varphi_\nu(z)) =: m$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe $k \in [z, m)$ tel que $\varphi_\nu(z) > \varphi_\nu(k)$. Comme $(\tilde{m}, \varphi_\nu(\tilde{m})) \in \tilde{\beta}$, alors $\forall k \in [\tilde{m}, m)$, $\varphi_\nu(k) \geq \varphi_\nu(\tilde{m}) = \varphi_\nu(z)$, ce qui est absurde.

• Si $\sup \beta^{-1}(\varphi_\nu(z)) \leq z < \inf \tilde{\beta}^{-1}(\varphi_\nu(z))$. On raisonne par l'absurde de la même manière. ■

La preuve alors du Théorème 5.4.1 découle des Lemmes 5.4.1, 5.4.2 et 5.4.3. ■

5.4.3 Comparaison et unicité des solutions entropiques

Nous avons vu dans la partie précédente l'existence de solutions entropiques du problème (5.1)-(5.3) sous certaines hypothèses, étudions maintenant ce qu'il en est de l'unicité.

Théorème 5.4.2. *Pour $i = 1, 2$, soit u_i une solution entropique du problème (5.1)-(5.3) avec des données (u_0^i, f_i) vérifiants l'hypothèse (5.4). Alors*

$$\int_Q (u_1 - u_2)^+ \xi_t + \int_Q \text{sign}^+(u_1 - u_2)(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) \cdot D\xi$$
$$+ \int_Q \text{sign}^+(u_1 - u_2)(f_1 - f_2)\xi \geq 0 \tag{5.37}$$

pour tout $\xi \in C_c^\infty([0, T) \times \mathbb{R}^N)$, $\xi \geq 0$.

La preuve de ce théorème suit les mêmes étapes que la preuve de la Proposition 5.3.2.

Preuve. Soient $t,s \in (0,T)$ et $x,y \in \Omega$. Considérons u_1, f_1 en fonction de (t,x) et u_2, f_2 en fonction de (s,y). Pour tout $\phi = \phi(t,s,x,y) \in C_c^\infty(Q\times Q)$ avec $\phi \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; & \int_{Q\times Q} (u_1-u_2)^+(\phi_t+\phi_s) + \mathrm{sign}^+(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot(D_x\phi + D_y\phi) \\ & + \int_{Q\times Q} \mathrm{sign}^+(u_1-u_2)(f_1-f_2). \end{aligned}$$

En effet, considérons dans l'inégalité entropique que vérifie la fonction $u_1(t,x)$ $k = u_2(s,y)$ et dans celle de $u_2(s,y)$, $k = u_1(t,x)$, choisissons la fonction test $\phi = \phi(t,s,x,y) \in C_c^\infty(Q\times Q)$, $\phi \geq 0$ dans chacune des deux inégalités, intégrons-les respectivement sur $(s,y) \in Q$ et $(t,x) \in Q$ et additionnons-les le résultat s'ensuit. En choisissant $\phi(t,x,s,y) = \mu_\delta(x)\mu_\eta(y)\rho_m(t-s)\rho_n(x-y)\xi(t,x)$, où $\xi \in C_c^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^N), \xi \geq 0$, $(\rho_m)_m$ et $(\rho_n)_n$ sont des suites régularisantes dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^N$, respectivement, et en passant à la limite avec $\delta, \eta \to 0$ il vient, en utilisant les propriétés de la suite $(\mu_\delta)_\delta$ et le fait que les traces fortes $\tilde{v}_i = \gamma V_{\varphi_\nu}(u_i), \tilde{w}_i = \gamma\varphi_\nu(u_i)$ $i = 1,2$ existent,

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; & \int_{Q\times Q} \rho_m\rho_n(u_1-u_2)^+\xi_t + \int_{Q\times Q} \rho_m\rho_n \mathrm{sign}^+(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot D_x\xi \\ & + \int_{Q\times Q} \mathrm{sign}^+(u_1-u_2)(f_1-f_2)\rho_m\rho_n\xi \\ & - \int_{\Sigma_x\times Q_y} Q^+(\tilde{v}_1, V_{\varphi_\nu}(u_2))\rho_m\rho_n\xi - \int_{Q_x\times\Sigma_y} Q^+(V_{\varphi_\nu}(u_1),\tilde{v}_2)\rho_m\rho_n\xi. \end{aligned} \tag{5.38}$$

Notons ces intégrales par $I^1_{m,n}, \cdots, I^5_{m,n}$. On veut passer à la limite avec $m,n \to \infty$ dans chacun de ces termes. Clairement

$$\lim_{m,n\to\infty} I^1_{m,n} = \int_Q (u_1-u_2)^+\xi_t,$$

$$\lim_{m,n\to\infty} I^2_{m,n} = \int_Q \mathrm{sign}^+(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot D\xi$$

et

$$\lim_{m,n\to\infty} I^3_{m,n} = \int_Q \mathrm{sign}^+(u_1-u_2)(f_1-f_2)\xi.$$

D'une manière analogue à la Proposition 5.3.2 on montre que

$$\lim_{m,n\to\infty} I^4_{m,n} = \frac{1}{2}\int_\Sigma Q^+(\tilde{v}_1(t,x),\tilde{v}_2(t,x))\xi(t,x)dxdt$$

et

$$\lim_{m,n\to\infty} I^5_{m,n} = \frac{1}{2}\int_\Sigma Q^+(\tilde{v}_1(t,x),\tilde{v}_2(t,x))\xi(t,x)dxdt.$$

Par suite, le passage à la limite avec m, n dans l'inégalité (5.38) fournit

$$\begin{aligned}&\int_Q (u_1-u_2)^+\xi_t+\int_Q \operatorname{sign}^+(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot D\xi\\&+\int_Q \operatorname{sign}^+(u_1-u_2)(f_1-f_2)\xi-\int_\Sigma Q^+(\tilde v_1,\tilde v_2)\xi\geq 0\end{aligned}$$

pour tout $\xi\in C_c^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^N),\ \xi\geq 0$. Or le graphe $\tilde\beta\circ V_{\varphi_\nu}^{-1}$ est monotone, d'où l'inégalité (5.37). ■

Corollaire 5.4.2. *Pour $i=1,2$ soit u_i une solution entropique du problème (5.1)-(5.3) avec des données (u_0^i,f_i) vérifiants (5.4). Alors pour tout $t\in(0,T)$*

$$\int_\Omega (u_1-u_2)^+(t)\leq\int_\Omega (u_0^1-u_0^2)^++\int_Q (f_1-f_2)^+.$$

En particulier, si $u_0^1\leq u_0^2$ p.p. sur Ω et $f_1\leq f_2$ p.p. sur Q, alors $u_1\leq u_2$ p.p. sur Q. De plus, il existe une unique solution entropique du problème (5.1)-(5.3).

Preuve. Considérons dans l'inégalité (5.37) $\xi(t,x)=\xi_\alpha(x)\kappa(t)$, où $\kappa\in C_c^\infty([0,T)),\kappa\geq 0,\ \xi_\alpha\to 1$ dans Ω, $|D\xi_\alpha|\leq C$ et $\operatorname{Supp}(D\xi_\alpha)\subset\{x;\alpha<|x|<\alpha+1\}$, alors la passage à la limite en α implique

$$\int_Q (u_1-u_2)^+\kappa_t+\int_Q \operatorname{sign}^+(u_1-u_2)(f_1-f_2)\kappa\geq 0.$$

D'où

$$\int_\Omega (u_1-u_2)^+(t)\leq\int_\Omega (u_0^1-u_0^2)^++\int_Q \operatorname{sign}^+(u_1-u_2)(f_1-f_2).$$

Par suite

$$\int_\Omega (u_1-u_2)^+(t)\leq\int_\Omega (u_0^1-u_0^2)^++\int_Q (f_1-f_2)^+.$$

■

L'existence et l'unicité de la solution entropique du problème (5.1)-(5.3) sont prouvées pour des données (u_0,f) satisfaisant l'hypothèse (5.4). Cependant ce résultat demeure vrai pour tout $(u_0,f)\in L^\infty(\Omega)\times L^\infty(Q)$. En effet

Théorème 5.4.3. *Pour tout $u_0\in L^\infty(\Omega)$ et $f\in L^\infty(Q)$, il existe une unique solution entropique du problème (5.1)-(5.3). En particulier, si u_i est une solution entropique du problème (5.1)-(5.3) avec des données $(u_0^i,f_i)\in L^\infty(\Omega)\times L^\infty(Q)$ $i=1,2$ alors pour tout $\xi\in C_c^\infty([0,T)\times\mathbb{R}^N),\xi\geq 0$*

$$\int_Q |u_1-u_2|\xi_t+\int_Q \operatorname{sign}(u_1-u_2)(\varphi(u_1)-\varphi(u_2))\cdot D\xi+\int_Q |f_1-f_2|\xi\geq 0.$$

De plus, si $u_0^1\leq u_0^2$ p.p. sur Ω et $f_1\leq f_2$ p.p. sur Q, alors $u_1\leq u_2$ p.p. sur Q.

Preuve. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et notons $B(0,r)$ la boule de $\mathbb{R}^N$ centrée en zéro et de rayon r. Posons $f_{m,n} = f^+\chi_{B(0,m)} - f^-\chi_{B(0,n)} \in L^1(Q)$ et $u^0_{m,n} = u_0^+\chi_{B(0,m)} - u_0^-\chi_{B(0,n)} \in L^1(\Omega)$. Il est prouvé au Théorème 5.4.1 que pour $(u_{m,n}, f_{m,n})$ il existe une solution entropique $u_{m,n}$ du problème (5.1)-(5.3) telle que les traces $\tilde{v}_{m,n}$ et $\tilde{w}_{m,n}$ des fonctions $V_{\varphi_\nu}(u_{m,n})$ et $\varphi_\nu(u_{m,n})$ existent et vérifient $(\tilde{v}_{m,n}, \tilde{w}_{m,n}) \in \tilde{\beta} \circ V_{\varphi_\nu}^{-1}$ p.p. sur Σ. On va montrer que $u_{m,n} \to u$, qui sera solution entropique du problème (5.1)-(5.3) avec des données (u_0, f).
Par le principe de comparaison des solutions entropiques, on a si $\tilde{m} > m$ et $n > \tilde{n}$

$$u_{m,\tilde{n}} \leq u_{m,n} \leq u_{\tilde{m},n} \ \text{ p.p. sur } Q.$$

D'où

$$u_{m,n} \uparrow_{m\to\infty} u_n \downarrow_{n\to\infty} u \text{ dans } L^1(Q).$$

A l'aide du théorème de la convergence dominée, on montre que u est solution entropique dans $\mathcal{D}'(Q)$, et grâce à la Proposition 5.2.1 les traces $\tilde{v} = \gamma V_{\varphi_\nu}(u)$ et $\tilde{w} = \gamma\varphi_\nu(u)$ existent. Pour prouver que u vérifie la condition (5.29), on montre d'abord par monotonie que $\tilde{w}_{m,n} \to w$ p.p. sur Σ lorsque $m, n \to \infty$, et en suivant les mêmes étapes de la preuve du Lemme 5.4.3 on arrive à $(\tilde{v}, \tilde{w}) \in \tilde{\beta}\circ V_{\varphi_\nu}^{-1}$ p.p. sur Σ. L'unicité se déduit en suivant les mêmes étapes que le Théorème 5.4.2. En effet, soient $u_1(t,x)$ et $u_2(s,y)$ deux solutions entropiques du problème (5.1)-(5.3) avec des données $(u_0^1(x), f_1(t,x))$ et $(u_0^2(y), f_2(s,y))$ respectivement. En choisissant la fonction test $\rho_m(t-s)\rho_n(x-y)\mu_\delta(x)\mu_\eta(y)\xi(t,x)$ dans les inégalités vérifiées par les deux solutions et en passant à la limite avec $m, n \to \infty$, ensuite avec $\delta, \eta \to 0$, il vient

$$\begin{aligned} &\int_Q (u_1 - u_2)^+\xi_t + \int_Q \operatorname{sign}^+(u_1 - u_2)(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) \cdot D\xi \\ &+ \int_Q \operatorname{sign}^+(u_1 - u_2)(f_1 - f_2)\xi - \int_\Sigma Q^+(\tilde{v}_1, \tilde{v}_2)\xi \geq 0 \end{aligned}$$

pour tout $\xi \in C_c^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^N),\ \xi \geq 0$. On a aussi

$$\int_Q |u_1 - u_2|\xi_t + \int_Q \operatorname{sign}(u_1 - u_2)(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) \cdot D\xi + \int_Q |f_1 - f_2|\xi \geq 0$$

pour tout $\xi \in C_c^\infty([0,T) \times \mathbb{R}^N),\ \xi \geq 0$. Considérons $\xi(t,x) = \kappa(t)\zeta(x)$, où $\kappa \in C_c^\infty([0,T)), \kappa \geq 0$ et $\zeta(x) = e^{-c|x|}$. Il vient, grâce à la condition de Lipschitz sur la fonction φ,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_\Omega |u_1 - u_2| e^{-c|x|}\kappa_t - \int_\Omega |u_0^1 - u_0^2| e^{-c|x|}\kappa(0) \\ &- \int_0^T \int_\Omega cL|u_1 - u_2| e^{-c|x|}\kappa + \int_0^T \int_\Omega |f_1 - f_2| e^{-c|x|}\kappa \geq 0. \end{aligned}$$

Si $u_0^1 \leq u_0^2$ p.p. sur Ω et $f_1 \leq f_2$ p.p. sur Q, alors

$$\frac{d}{dt}G(t) \leq -cLG(t) \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega),$$

où $G(t) = \displaystyle\int_\Omega |u_1(t,x) - u_2(t,x)| e^{-c|x|} dx$. Le lemme de Gronwall implique alors

$$u_1 \leq u_2 \text{ p.p. sur } Q.$$

■

5.5 Remarques et problèmes ouverts

1. Comme signalé plus-haut ; on a pu prouvé l'existence et l'unicité de la solution entropique du problème (5.1)-(5.3) que dans le cas où $\Omega = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{N-1}$. Cette restriction est imposée pour assurer l'existence de traces pour la fonction $V_{\varphi_\nu}(u)$, où u est une solution entropique dans $\mathcal{D}'(Q)$. Cependant, pour un domaine à frontière courbée suffisamment régulière, une généralisation de ce résultat est en cours.

2. L'étude du problème (5.1)-(5.3) était centrée autour du cadre L^∞. Il est souhaitable de généraliser cette étude afin de pouvoir envisager des solutions éventuellement simplement intégrables sur Q. C'est en effet possible : pour un problème posé dans un domaine non borné, Ph. Bénilan, J. Carrillo et P. Wittbold [18] ont montré l'existence et l'unicité de la solution entropique renormalisée qui coïncide avec celle fournit par la théorie des semigroupes et avec la solution entropique définie par Kruzhkov dans le cas où $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Suite à cela, dans le cas de domaines bornés et de conditions de Dirichlet non homogènes et $u_0 \in L^1(\Omega)$, A. Porretta et J. Vovelle [69] et K. Ammar [3] ont prouvé l'existence et l'unicité de la solution entropique renormalisée (qui coïncide avec la solution entropique d'Otto lorsque u_0 est bornée).

3. Un autre problème intéressant est l'étude du problème parabolique-hyperbolique dégénéré suivant

$$\begin{cases} u_t + \operatorname{div} \varphi(u) - \Delta\phi(u) = f & \text{sur } Q \\ u(0,\cdot) = u_0 & \text{sur } \Omega \\ (\varphi(u) - \nabla\phi(u)) \cdot \nu \in \beta(\cdot, u) & \text{sur } \Sigma, \end{cases}$$

où ϕ est supposée continue. Un grand pas en avant a déjà été fait par J. Carrillo [36] dans l'étude de ce problème dans le cadre de Dirichlet non homogène. L'auteur montre qu'il y a existence et unicité de la solution entropique. C. Mascia, A. Porretta et A. Terracina [59] ont apporté un autre résultat d'existence et d'unicité de la solution entropique dans le cas de conditions de Dirichlet non homogènes.

Bibliographie

[1] R.A. Adams, *Sobolev spaces*, Academic Press, Pure and Applied Mathematics, New York-London, vol. 65, 1975.

[2] H.W. Alt, S. Luckhaus, *Quasilinear Elliptic-Parabolic Differential Equations,* Math. Z. **183**(1983), no.3, 311-341.

[3] K. Ammar, *Solutions entropiques et renormalisées de quelques E.D.P. non linéaires dans L^1,* Thèse de Doctorat, Université Louis Pasteur, 2003.

[4] K. Ammar, F. Andreu, J. Toledo, *On a quasi-linear elliptic problem in L^1 with non homogeneous boundary conditions,* préprint.

[5] K. Ammar, P. Wittbold, *Existence of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **133**(2003), no.3, 477-496.

[6] K. Ammar, P. Wittbold, *Quasi-linear problems in L^1 with non homogeneous conditions on the boundary,* J. Evol. Equ. **5**(2005), no.1, 1-33.

[7] B. Andreianov, F. Bouhssis, *Uniqueness for an elliptic-parabolic problem with Neumann boundary condition*, J. Evol. Equ. **4**(2004), no.2, 273-295.

[8] F. Andreu, N. Igbida, J.M. Mazon, J. Toledo, *L^1 Existence and uniqueness results for quasi-linear elliptic equations with nonlinear boundary conditions*, à paraitre dans Ann. Inst. Henri Poincaré : Analyse Non Linéaire.

[9] F. Andreu, N. Igbida, J.M. Mazon, J. Toledo, *A degenerate elliptic-parabolic problem with nonlinear dynamical boundary conditions,* préprint.

[10] F. Andreu, J.M. Mazon, S. Segura de Léon, J. Toledo, *Quasi-linear elliptic and parabolic equations in L^1 with nonlinear boundary conditions*, Adv. Math. Sci. Appl. **7**(1997), no.1, 183-213.

[11] H. Attouch, C. Picard, *Problèmes variationnels et théorie du potentiel non linéaire*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.(5) **1**(1979), no.2, 89-136.

[12] V. Barbu, *Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces*, Noordhoff, Leyden, 1976.

[13] C. Bardos, A.Y. Le Roux, J.-C. Nédélec, *First order quasilinear equations with boundary conditions,* Comm. Partial Diff. Equ. **4**(1979), no.4, 1017-1034.

[14] L. Barthélemy, Ph. Bénilan, *Subsolutions for Abstract Evolution Equations*, Pot. Anal. **1**(1992), no.1, 93-113.

[15] Ph. Bénilan, *Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications*, Thèse d'état, Université de Orsay, 1972.

[16] Ph. Bénilan, L. Boccardo, T. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J.-L. Vazquez, *An L^1 theory of existence and uniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.(4) **22**(1995), no.2, 241-273.

[17] Ph. Bénilan, F. Bouhssis, *Une remarque sur l'unicité des solutions pour l'opérateur de Serrin,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325**(1997), no.6, 611-616.

[18] Ph. Bénilan, J. Carrillo, P. Wittbold, *Renormalised entropy solutions of scalar conservation laws*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.(4) **29**(2000), no.2, 313-327.

[19] Ph. Bénilan, M.G. Crandall, A. Pazy, *Evolutions equations governed by accretive operators*, préprint.

[20] Ph. Bénilan, M.G. Crandall, P. Sacks, *Some L^1 existence and dependance for semilinear elliptic equations under nonlinear boundary conditions*, App. Math. Optim. **17**(1988), no.3, 203-224.

[21] Ph. Bénilan, P. Wittbold, *On mild and weak solutions of elliptic-parabolic equations*, Adv. Diff. Equ. **1**(1996), no.6, 1053-1073.

[22] D. Berda, *Une approche semi-groupe d'un problème elliptique-parabolique de type Stefan,* Mémoire de D.E.A, Université de Franche-comté, 2000.

[23] M. Beye, *Perturbations des opérateurs m-accrétif,* Mémoire de D.E.A, Université Louis Pasteur, 2004.

[24] D. Blanchard, G. Francfort, *A few results on a class of degenerate parabolic equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.(4) **18**(1991), no.2, 213-249.

[25] D. Blanchard, A. Porretta, *Stefan problems with nonlinear diffusion and convection*, J. Diff. Equ. **210**(2005), no.2, 383-428.

[26] L. Boccardo, T. Gallouët, *On some nonlinear elliptic and parabolic equations involving measure data,* J. Func. Anal. **87**(1989), no.1, 149-169.

[27] L. Boccardo, T. Gallouët, L. Orsina, *Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data*, Ann. Inst. Henri Poincaré : Analyse Non Linéaire **13**(1996), no.5, 539-551.

[28] G. Bouchitté, *Calcul des variations en cadre non réflexif. Représentation et relaxation de fonctionnelles intégrales sur un espace de mesures. Applications en plasticité et homogéneisation,* Thèse d'état, Université de Perpignan, 1987.

[29] G. Bouchitté, *Conjuguée et sous-différentiel d'une fonctionnelle intégrale sur un espace de Sobolev*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **307**(1988), no.2, 79-82.

[30] A. Bressan, *Hyperbolic systems of conservation laws,* Oxford University Press, 2000.

[31] H. Brezis, *Equations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité,* Ann. Inst. Fourier **18**(1968), Fasc. 1, 115-175.

[32] H. Brezis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert,* Mathematics Studies, North-Holland, 1973.

[33] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications,* Masson, 1993.

[34] R. Bürger, H. Frid, K.H. Karlsen, *On the well-posedness of entropy solutions to conservation laws with a zero-flux boundary condition,* préprint, Universität Stuttgart.

[35] J. Carrillo, *On the uniqueness of the solution of the evolution dam problem,* Nonlinear Anal. **22**(1994), no.5, 573-607.

[36] J. Carrillo, *Entropy solutions for nonlinear degenerate problems*, Arch. Ration. Mech. Anal. **147**(1999), no.4, 269-361.

[37] J. Carrillo, P. Wittbold, *Uniqueness of renormalized solutions of degenerate elliptic-parabolic problems,* J. Diff. Equ. **156**(1999), no.1, 93-121.

[38] P. Cembranos, J. Mendoza, *Banach Spaces of Vectors-Valued Functions,* Lectures Notes in Mathematics 1676, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[39] A. Dall'Aglio, *Approximated solutions of equations with L^1 data. Application to the H-convergence of quasi-linear equations,* Ann. Math. Pura Appl.(4) **170**(1996), 207-240.

[40] J. Dieudonné, *Sur le théorème de Lebesgue-Nikodym V,* Canadian J. Math. **3**(1951), 129-139.

[41] R. DiPerna, P.L. Lions, *On the Cauchy problem for the Boltzman equation : global existence and stability*, Ann. Math. **130**(1989), no.2, 321-366.

[42] J. Droniou, *Intégration et Espaces de Sobolev à Valeurs Vectorielles,* http ://www-gm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-02/gm3-02.pdf.

[43] J. Droniou, *Quelques résultats sur les espaces de Sobolev,* http ://www-gm3.univ-mrs.fr/polys/gm3-03/gm3-03.pdf.

[44] L. Evans, R.F. Gariepy, *Measure Theory and Fine Properties of Functions,* Studies in Advanced Mathematics, 1992.

[45] J. Frehse, *Capacity Methods in the Theory of Partial Differential Equations,* Jber. d. Dt. Math. Verein **84**(1982), no.1, 1-44.

[46] G. Gagneux, M. Madaune-Tort, *Unicité des solutions faibles d'équations de diffusion-convection,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **318**(1994), 919-924.

[47] G. GAGNEUX, M. MADAUNE-TORT, *Analyse mathématique de modèles non linéaires de l'ingénierie pétrolière*, Mathématiques & Applications, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[48] N. IGBIDA, J.M. URBANO, *Uniqueness for Nonlinear Degenerate Problems*, Nonlinear Diff. Equ. Appl. **10**(2003), no.3, 287-307.

[49] N. IGBIDA, P. WITTBOLD, *Renormalized solution for Stefan type problem : existence and uniqueness*, préprint.

[50] O. KAVIAN, *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*, Mathématiques & Applications, Springer-Verlag, Paris, 1993.

[51] S.N. KRUZHKOV, *First order quasilinear equations with several independent variables*, Mat. Sb.(N.S) **81**(**123**)(1970), 228-255.

[52] R. LANDES, *On the existence of weak solutions for quasi-linear parabolic initial boundary-value problems*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **89**(1981), no.3-4, 217-237.

[53] J.L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

[54] J.L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Dunod, Paris, vol. 1 et 2, 1968.

[55] P.L. LIONS, B. PERTHAME, E. TADMOR, *A kinetic formulation of multidimensional scalar conservation laws and related equations,* J. Amer. Math. Soc. **7**(1994), no.1, 169-191.

[56] J. MÁLEK, J. NECĂS, M. ROKYTA, M. RUŽIČKA, *Weak and Measure-valued Solutions to Evolutionnary PDEs,* Applied Mathematics and Mathematical Computation 13, Chapman & Hall, 1996.

[57] J. MALY, W.P. ZIEMER, *Fine regularity of solutions of elliptic partial differential equations,* American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[58] O. MARTIO, *Capacity and measure densities,* Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math. **4**(1979), no.1, 109-118.

[59] C. MASCIA, A. PORRETTA, A. TERRACINA, *Nonhomogeneous Dirichlet problems for degenerate parabolic-hyperbolic equations,* Arch. Rat. Mech. Anal. **163**(2002), no.2, 87-124.

[60] C.B.JR. MORREY, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, New york, 1966.

[61] F. MURAT, *Soluciones renormalizadas de EDP elipticas no lineales,* Cours à l'Université de Séville, Publication 93023, Laboratoire d'Analyse Numérique de l'Université Paris VI, 1993.

[62] F. MURAT, *Equations elliptiques non linéaires avec second membre L^1 ou mesure,* Actes du 26ème Congrès National d'Analyse Numérique, Les Karellis, France, 1994, A12-A24.

[63] J. Nečas, *Les Méthodes Directes en Théorie des Equations Elliptiques*, Masson et Cie, Paris, 1967.

[64] F. Otto, *Initial-boundary value problem for a scalar conservation law,* C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **322**(1996), 729-734.

[65] F. Otto, *L^1-contraction and uniqueness for quasilinear elliptic-parabolic equations,* J. Diff. Equ. **131**(1996), no.1, 20-38.

[66] E.Yu. Panov, *On sequences of measure-valued solutions of a first-order quasilinear equation,* Mat. Sb. **185**(1994), no.2, 87-106 ; translation in Russian Acad. Sci. Sb. Math. **81**(1995), no.1, 211-227.

[67] E.Yu. Panov, *Existence of strong traces for generalized solutions of multidimensional scalar conservation laws,* J. Hyp. Diff. Equ. **2**(2005), no.4, 885-908.

[68] E.Yu. Panov, Communication personnelle.

[69] A. Porretta, J. Vovelle, *L^1 solution to first order hyperbolic equations in bounded domains,* Comm. Partial Diff. Equ. **28**(2003), no.1-2, 381-403.

[70] A. Prignet, *Remarks on existence and uniqueness of solutions of elliptic problems with right-hand-side measures,* Rendiconti di Mathematica **15**(1995), no.3, 321-337.

[71] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe,* Masson, Paris, 1995.

[72] D. Serre, *Systèmes de lois de conservation II,* Diderot Editeur, Paris, 1996.

[73] J. Serrin, *Pothological solution of elliptic differential equations,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.(3) **18**(1964), 385-387.

[74] F. Simondon, *Etude de l'équation $\partial_t b(u) - div\ a(b(u), Du) = 0$ par la méthode des semi-groupes dans $L^1(\Omega)$*, Publ. Math. Besançon, Analyse non linéaire **7**(1983).

[75] A. Vasseur, *Strong traces for weak solutions to multidimensional conservation laws,* Arch. Rat. Mech. Anal. **160**(2001), no.3, 181-193.

[76] C. Wagschal, *Dérivation, Intégration*, Hermann, Paris, 1999.

[77] P. Wittbold, *Absorptions non linéaires,* Thèse de Doctorat, Université de Franche-Comté, 1994.

[78] P. Wittbold, *Nonlinear diffusion with absorption*, Pot. Anal. **7**(1997), no.1, 437-465.

[79] X. Xu, *Existence and convergence theorems for doubly nonlinear partial differential equations of elliptic-parabolic type*, J. Math. Anal. and Appl. **150**(1990), no.1, 205-223.

[80] W.P. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions. Sobolev spaces and functions of bounded variation*, Springer-Verlag, New York, 1989.