

N° d'ordre : 5166

Ecole Doctorale Mathématiques, Sciences de l'Information et de l'Ingénieur

THESE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Louis Pasteur - Strasbourg I
Discipline : Electronique, Electrotechnique, Automatique
(spécialité : Traitement du signal)

par

Christophe VILLIEN

Prévision de trajectoires 3-D en temps réel

Soutenue publiquement le 27 septembre 2006

Membres du jury :

Directeur de thèse : M. Eric OSTERTAG, Professeur émérite, ULP, Strasbourg
Rapporteur interne : M. Fabrice HEITZ, Professeur, ULP, Strasbourg
Rapporteur externe : M. Marc LESTURGIE, Ingénieur de recherches, ONERA, Paris
Rapporteur externe : M. Michel PAINDAVOINE, Professeur, LE2I, Dijon
Examineur : M. Pierre RAYMOND, Docteur, ISL, Saint-Louis

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier l'Institut Franco-Allemand de Recherches de Saint-Louis (ISL) pour avoir financé cette thèse et m'avoir fait profiter de conditions de travail uniques. Je remercie tout particulièrement Christophe Tamisier, *Délégué français à la recherche de l'ISL* (années 2002-2004), qui m'a accordé sa confiance et son soutien dans un moment décisif et sans qui aucun radar n'aurait vu le jour.

Je remercie Monsieur Eric Ostertag, *Professeur émérite à l'Université Louis Pasteur de Strasbourg*, qui a accepté d'être mon directeur de thèse. Il a su m'enseigner toute la rigueur qui faisait parfois défaut dans mes travaux et m'a fait profiter de sa maîtrise des langues.

Je remercie également Monsieur Pierre Raymond, *responsable du groupe EMW de l'ISL*, pour m'avoir accueilli dans son groupe et soutenu en toutes circonstances, ainsi que Monsieur Volker Fleck, *chef de la division A de l'ISL*, pour m'avoir fait profiter de sa grande expérience de recherche.

Je tiens aussi à remercier Messieurs Fabrice Heitz, *Responsable de l'unité LSIIT de l'Université Louis-Pasteur*, Marc Lesturgie, *Responsable Technique du laboratoire SONDRRA et ingénieur de recherches à l'ONERA*, et Michel Paindavoine, *Professeur à l'Université de Dijon*, de m'avoir fait l'honneur d'être mes rapporteurs de thèse. Ils témoignent ainsi de la confiance qu'ils placent dans mes travaux et m'honorent de leur disponibilité.

Un grand merci à Monsieur Joseph Wey, *chercheur du groupe EMW*, pour ses précieux conseils et ces longues discussions, mais aussi et surtout, pour incarner cette image qui m'a fait aimer la recherche. Je n'oublie pas non plus tous les autres membres du groupe qui, grâce à leur sympathie, ont fait de ces quatre années de thèse, quatre années agréables.

Une pensée chaleureuse pour mes amis : Manu, Sabine, Thibaut, Nico, Delphine, Christelle et tous les autres, qui m'ont apporté tout ce qui ne se trouve pas dans les pages qui suivent.



Table des Matières

Introduction générale	1
1 Position du problème	5
1.1 Introduction	5
1.2 Contexte général de l'étude	5
1.2.1 Blindage actif	5
1.2.2 Détection de tireur embusqué	8
1.3 Modèles des trajectoires	8
1.3.1 Equations de la balistique extérieure	8
1.3.2 Les grandeurs caractéristiques	11
1.4 Les différentes configurations étudiées	12
1.4.1 Cas 1 : blindage actif - trajectoire rectiligne - 1 radar Doppler	12
1.4.2 Cas 2 : blindage actif - trajectoire rectiligne - 3 radars Doppler	13
1.4.3 Cas 3 : Détection de tireur embusqué - trajectoire balistique - 3 radars MFCW	14
1.5 Conclusion	16
2 Etude du radar de mesure	17
2.1 Introduction	17
2.2 Présentation générale	17
2.2.1 La naissance du radar	17
2.2.2 Le radar continu (CW radar)	19
2.2.2.1 Présentation	19
2.2.2.2 Caractéristiques	20
2.2.3 Le radar continu modulé en fréquence (FM-CW radar) [17]	21
2.2.3.1 Présentation	21
2.2.3.2 Caractéristiques	22
2.2.4 Le radar pulsé	23
2.2.4.1 Présentation	23
2.2.4.2 Caractéristiques	23
2.2.5 Choix d'une technologie radar	24
2.3 Quelques notions fondamentales	24
2.3.1 Equation radar	24
2.3.2 L'effet Doppler	25
2.3.3 Surface équivalente Radar (SER)	26
2.3.4 Fouillis (clutter)	29
2.3.5 Les trajets multiples (multi-paths)	30
2.3.6 Modèle de synthèse des signaux continus non modulés	31
2.3.6.1 Scintillement de la cible	32
2.3.6.2 Trajets multiples	33

2.3.6.3	Commentaires	33
2.4	Etude et réalisation d'un radar continu (CW radar)	35
2.4.1	Problématique	35
2.4.2	Description du radar BMDM 9550	35
2.4.3	Architecture du radar ISL	36
2.4.4	Source (1) - REMEC MDR6100	37
2.4.4.1	Oscillateur hyperfréquence PL-DRO	37
2.4.4.2	Synthétiseur de fréquence	38
2.4.5	Diviseur de puissance - MAC P8206-2	41
2.4.6	Amplificateur de puissance (3) - CIAO CA910-521	41
2.4.7	Antennes (4) et (5) - ATN 102-440-6	41
2.4.8	LNA (6) - (CIAO CA910-522)	45
2.4.9	Mélangeur (7) - (REMEC MO64PG)	46
2.4.10	AGC (8)	46
2.4.10.1	Mesures	50
2.4.11	Evaluation des performances et mesures	52
2.4.11.1	Puissances	52
2.4.11.2	Bruit thermique	53
2.4.11.3	Bruit de phase	53
2.4.11.4	Signaux parasites	54
2.4.11.5	Conclusion sur les performances du radar	56
2.4.12	Conclusion	58
2.5	Etude et réalisation d'un radar MFCW	58
2.5.1	Introduction	58
2.5.2	Principe	59
2.5.3	Architecture	61
2.5.4	Réalisation	63
2.5.5	Méthode de mesure	64
2.5.5.1	Principe de mesure par la méthode des rapports cycliques	64
2.5.5.2	Mesure par rapports cycliques	68
2.5.6	Essais et résultats	68
2.5.6.1	Puissances	68
2.5.7	Tests en chambre anéchoïque	69
2.5.7.1	Conclusion sur les tests en chambre anéchoïque	73
2.5.8	Tests avec projectile: radar bi-fréquence	73
2.5.8.1	Présentation	73
2.5.8.2	Dispositif expérimental	73
2.5.8.3	Résultats	74
2.5.9	Tests avec projectile: radar quadri-fréquence	75
2.5.9.1	Présentation	75
2.5.9.2	Dispositif expérimental du 2 novembre	76
2.5.9.3	Résultats	76
2.6	Conclusion	80
3	Modélisation & Analyse des précisions	83
3.1	Introduction	83
3.2	Modèle général	83
3.3	Modèle des observations	85
3.3.1	Signal Radar	85

3.3.2	Méthodes d'extraction de l'information utile	85
3.3.3	Statistiques des signaux utiles	86
3.3.3.1	Passages à zéro	87
3.3.3.2	Période Doppler	89
3.3.3.3	Fréquence Doppler	89
3.3.3.4	Phase Doppler à temps constant	90
3.3.3.5	Rapport cyclique	92
3.3.3.6	Mesure de distance	93
3.3.4	Synthèse des statistiques	93
3.4	Analyse des précisions	94
3.4.1	Estimateur	94
3.4.2	Cramér-Rao Lower Bound	95
3.4.2.1	Cas gaussien	95
3.4.2.2	Projection de la CRLB	96
3.5	Application	96
3.5.1	Cas 1 - trajectoire rectiligne - un radar Doppler	97
3.5.1.1	Calcul de la CRLB	97
3.5.1.2	Simulations	97
3.5.1.3	Conclusion	100
3.5.2	Cas 2 - 3 radars doppler - mesure de phase	101
3.5.2.1	Calcul du CRLB	101
3.5.2.2	Simulations	102
3.5.2.3	Conclusion	106
3.5.3	Cas 3: 3 radars MFCW - trajectoire balistique	107
3.5.3.1	Calcul de la CRLB	107
3.5.3.2	Simulations	109
3.5.3.3	Conclusion sur le cas 3	113

4 Traitement des signaux en temps réel 115

4.1	Introduction	115
4.2	Théorie de l'estimation paramétrique	116
4.2.1	Présentation	116
4.2.2	Estimation bayésienne	116
4.2.3	Estimation non bayésienne	119
4.2.4	Cas des distributions gaussiennes	121
4.3	Algorithmes d'estimation	122
4.3.1	Moindres carrés récursifs - RLS	123
4.3.2	Méthodes d'optimisation itératives	124
4.3.3	Le filtre de Kalman - KF	126
4.3.4	Le Filtre de Kalman Etendu - EKF	127
4.3.5	Le Filtre de Kalman non parfumé - UKF	128
4.3.6	Le Filtre particulaire - PF	130
4.3.7	Aperçu de quelques autres méthodes	132
4.4	Nouvelle approche pour l'estimation paramétrique en temps réel	133
4.4.1	Introduction	133
4.4.1.1	Description de l'algorithme	134
4.4.2	Notations	134
4.4.3	Position du problème	135
4.4.4	Classe de signaux considérés et ordre du polynôme	136

4.4.5	Lissage polynomial	137
4.4.5.1	Détermination du polynôme de lissage	137
4.4.5.2	Expression du polynôme de lissage	137
4.4.5.3	Statistiques des échantillons polynomiaux ([82] §3.2.1)	139
4.4.6	Les échantillons polynomiaux optimaux	142
4.4.7	Propriété des produits scalaires	143
4.4.8	Equivalence entre l'estimation standard et compressée	144
4.4.8.1	Fonctions de coût standard et compressée	145
4.4.8.2	Espérance des estimées standard et compressée	146
4.4.8.3	Matrice d'information de Fisher standard et compressée	146
4.4.9	Synthèse de l'algorithme PMDR	148
4.4.10	Conclusion sur la méthode PMDR	150
4.5	Application à la reconstruction de trajectoires	152
4.5.1	Le suivi de cibles	152
4.5.2	Simulations	153
4.5.3	Mise en oeuvre de la méthode PMDR	154
4.5.3.1	Détermination de l'ordre du polynôme	154
4.5.3.2	Détermination des temps d'échantillonnage et des poids des PS	155
4.5.3.3	Algorithme de lissage polynomial	157
4.5.4	Cas 1 : Une mesure de fréquence - trajectoire rectiligne	158
4.5.5	Cas 2 : 3 mesures de phase - trajectoire rectiligne	159
4.5.6	Cas 3 : 3 mesures de distance - trajectoire balistique	160
4.5.7	Complexité des algorithmes	162
4.6	Conclusion	164

5 Programmation 165

5.1	Introduction	165
5.2	Choix d'une plate-forme de traitement	165
5.3	Présentation du DSP TigerSHARC	167
5.3.1	présentation générale	167
5.3.2	Mémoire et registres	169
5.3.3	Blocs de traitement	171
5.3.4	Unité de traitement d'entiers IALU	172
5.3.5	Interruptions et Horloges	173
5.3.6	Le Cluster bus	174
5.3.7	Les autres fonctionnalités	175
5.4	Intégration de l'algorithme	175
5.4.1	Principe	175
5.5	Optimisation du code	177
5.5.1	Présentation	177
5.5.2	Le pipeline	177
5.5.2.1	Description	177
5.5.2.2	Les mauvaises prévisions	178
5.5.2.3	Les conflits de ressources	178
5.5.2.4	L'interdépendance	178
5.5.3	Calcul Matriciel	180
5.5.4	Stabilité numérique	180
5.5.5	Gestion du cluster bus	183
5.6	Résultats et performances	187

5.7 Conclusion.....	191
Conclusion	193
Annexes	197
Annexe I : Schémas.....	198
Annexe II : Etude du dispositif d'adaptation du synthétiseur.....	201
Annexe III : Etalonnage du radar MFCW.....	203
Annexe IV : Résultats des essais de Baldersheim du 20 avril.....	204
Annexe V : Résultats des essais de Baldersheim du 2 novembre 2005.....	208
Annexe VI : Compléments mathématiques.....	211
Bibliographie	217



Glossaire & Notations

Glossaire

AGC : *Automatic Gain Control* (Commande automatique de gain)
BOT : *Bearing Only Tracking* (Poursuite en direction uniquement)
CW : *Continuous Wave* (Onde Continue)
CRLB : *Cramér-Rao Lower Bound* (Limite inférieure de Cramér-Rao)
DRO : *Dielectric Resonator Oscillator* (Oscillateur diélectrique à résonance)
DSP : *Digital Signal Processor* (Processeur de signaux numériques)
EKF : *Extended Kalman Filter* (Filtre de Kalman étendu)
FIM : *Fisher Information Matrix* (Matrice d'information de Fisher)
IMM : *Interacting Multiple Models* (Modèles multiples à interactions)
KF : *Kalman Filter* (Filtre de Kalman)
LS : *Least Squares* (Moindres carrés)
LNA : *Low Noise Amplifier* (Amplificateur à faible bruit)
MAP : *Maximum A Posteriori Probability* (Maximum de la probabilité *a posteriori*)
ML : *Maximum Likelihood* (Maximum de vraisemblance)
MLE : *Maximum Likelihood Estimator* (Estimateur du maximum de vraisemblance)
MMAE : *Minimum Mean Absolute Error* (Erreur absolue moyenne minimale)
MMMH : *Multiple Models Multiple Hypothesis* (Modèles multiples, hypothèses multiples)
MMSE : *Minimum-Mean-Squared Error* (Erreur quadratique moyenne minimale)
MFCW : *Multiple Frequencies Continuous Wave* (à fréquences multiples et ondes continues)
PF : *Particle Filter* (Filtre particulière)
PL-DRO : *Phase Locked DRO* (DRO à verrouillage de phase)
PLL : *Phase Locked Loop* (Boucle à verrouillage de phase)
PMDR : *Polynomial Method for Dataset Reduction* (Méthode polynomiale pour la compression de données)
PS : *Polynomial Sample* (Echantillon polynomial)
RLS : *Recursive Least Squares* (Moindres carrés récursifs)
SER : Surface Equivalente Radar
UKF : *Unscented Kalman Filter* (Filtre de Kalman non parfumé)
UT : *Unscented Transform* (Transformation non parfumée)
v.a. : Variable Aléatoire
VCO : *Voltage Controlled Oscillator* (Oscillateur piloté par tension)

Notations

Général

$\mathcal{I} = [a, b] \subset \mathbb{R}$: domaine de définition continu
 $\text{Id} = \{t_i\}$: domaine de définition discret
 t : temps continu (sc)
 k : indice temps discret
 n : indice temps variable (échantillonnage à phase constante)
 N : nombre total d'observations
 \mathbb{R} : ensemble des nombres réels
 \mathbb{N} : ensemble des entiers naturels
 i : nombre imaginaire
 Id : matrice identité
 $\det(\mathbf{R})$: déterminant de \mathbf{R}
 $[\mathbf{R}]_{ij}$: coefficient i, j de la matrice \mathbf{R}
 \mathbf{R}^T : Transposée de la matrice \mathbf{R}
 $\mathbf{E}\{\mathbf{x}\}$: espérance de la variable aléatoire \mathbf{x}
 $\sigma_{\mathbf{x}}$: écart-type de la variable aléatoire scalaire \mathbf{x}
 $p(\mathbf{x})$: densité de probabilité de \mathbf{x}
 $\mathcal{N}(\theta_0, \mathbf{P})$: loi normale d'espérance θ_0 et de covariance \mathbf{P}
 $\hat{\theta}$: estimée de θ

Partie trajectoire

g : accélération de la pesanteur (9,81 m/s²)
 c : vitesse de la lumière (3×10^8 m/s)
 θ : pente de la trajectoire (rad)
 φ : azimut de la trajectoire (rad)
 C_x : coefficient de résistance aérodynamique
 C_{x0} : coefficient de résistance aérodynamique initial
 γ : constante aérodynamique du projectile
 ρ : densité de l'air (kg/m³)
 d : distance radar projectile (m)
 d_v : distance de vol du projectile (avant impact) (m)
 m : masse du projectile (kg)
 S : section du projectile (m²)
 t_r : temps de riposte (s)
 F : vecteur force (N)
 U : vecteur unitaire
 v : vitesse instantanée (m/s)
 v_0 : vitesse initiale (m/s)
 v_x, v_y, v_z : composantes du vecteur vitesse du projectile sur les axes x,y et z (m/s)
 x, y, z : coordonnées du projectile (m)
 x_0, y_0, z_0 : coordonnées initiales du projectile
 x_f, y_f, z_f : coordonnées du point d'impact du projectile (m)
 x_c, y_c, z_c : coordonnées du point d'interception (m)

Partie Radar

R : vecteur position du radar (m)
 R_x, R_y, R_z : coordonnées de position du radar (m)
 s : signal radar (V)
 S/N : rapport signal à bruit
 S/N_1 : rapport signal à bruit à 1 mètre
 A : amplitude du signal radar (V)
 A_1 : amplitude du signal radar à un mètre (V)
 v_t : composante de bruit thermique dans le signal radar (V)
 σ_t : écart-type du bruit thermique
 λ : longueur d'onde du radar (m)
 f_0 : fréquence porteuse du radar (Hz)
 ΔF : bande de modulation (Hz)
 k_r : constante radar (m^{-1})
 f : fréquence instantanée (Hz)
 ϕ : phase (rad)
 ϕ_0 : phase initiale (rad)
 f_D : fréquence Doppler (Hz)
 ϕ_D : phase Doppler (rad)
 T_D : période Doppler (s)
 ϕ_m : phase Doppler mesurée (rad)
 $\Delta\phi$: différence de phase (rad)
 Γ : coefficient de réflexion de l'onde radar par le sol
 P : puissance (W ou dBm)
 G : gain de l'antenne (dB)
 A : ouverture d'antenne (m^2)
 σ : surface équivalente radar d'une cible (m^2)
 σ^0 : surface équivalente radar du fouilli (m^2/m^2)
 L : distance entre les deux sphères (m)
 ρ : rapport de réflexion entre les deux sphères
 γ : angle sous lequel est vu le projectile flèche
 h : hauteur du radar par rapport au sol (m)
 n : numéro d'interférence
 α : rapport cyclique
 γ : position relative des zéros
 t_z : temps de passage à zéro du signal Doppler (s)
 t_0 : temps initial (s)

Partie traitement du signal

θ : vecteur paramètre
 θ_0 : espérance mathématique du vecteur paramètre
 \mathcal{D}_θ : domaine de définition du vecteur paramètre
 \mathbf{x}_k : vecteur d'état
 \mathcal{X} : domaine de définition des états
 q : dimension du vecteur paramètre et du vecteur d'état
 f_k : fonction d'état
 Φ_k : matrice d'état
 \mathbf{w}_k : vecteur de bruit d'état
 \mathbf{Q}_k : matrice de covariance du bruit d'état

\mathbf{y}_k : vecteur d'observation
 m : dimension du vecteur d'observation
 Ψ : ensemble des observations
 $\mathbf{Y}_k = [\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_k^T]^T$: vecteur des observations concaténées
 \mathbf{v}_k : vecteur de bruit de mesure
 \mathbf{R}_k : matrice de covariance du bruit de mesure
 h_k : fonction d'observation
 \mathcal{H}_k : matrice d'observation
 $\mathbf{H}_k = [h_1^T, \dots, h_k^T]^T$: vecteur des fonctions d'observation concaténées
 C : fonction de coût
 r : fonction de risque bayésien
 \mathcal{F} : fonction de projection
 \mathbf{Fp} : matrice de projection
 l : fonction likelihood
 Λ : fonction log-likelihood
 ω_k : poids scalaire du produit scalaire
 \mathcal{W}_k : matrice de poids vectoriel du produit scalaire
 $\mathbf{W} = \text{diag}(\mathcal{W})$: matrice des poids concaténés

Partie PMDR

Toutes les grandeurs étoilées se réfèrent au signal compressé.

n : degré du polynôme
 \mathcal{P}^n : ensemble des polynômes de degré au plus n
 $\langle F, G \rangle_\omega$: produit scalaire des signaux F et G relativement au poids ω
 p^i : polynôme de degré i
 b^i : polynôme de la base orthonormée de degré i
 p_1 : polynôme de lissage
 $\mathbf{P}_1 = [p_1(t_0), \dots, p_1(t_k)]^T$: vecteur du polynôme de lissage concaténé
 a^i : coefficient du polynôme de degré i
 $\mathbf{A} = [a^0, \dots, a^n]^T$: vecteur des coefficients du polynôme
 σ_k : écart-type des observations
 σ_0 : valeur maximale de l'écart-type du bruit des observations
 α_k : évolution du bruit d'observation
 $\mathcal{K}(t_i, t_j)$: noyau de Christoffel-Darboux
 \mathbf{K} : matrice du noyau de Christoffel-Darboux $[\mathbf{K}]_{ij} = \mathcal{K}(t_i, t_j)$
 $\lambda(t_i)$: nombre (ou fonction) de Christoffel
 $r(f)$: reste de la quadrature de f
 $R(f, g)$: restes des quadratures de la matrice de Gramm des dérivées partielles de f, g
 G : gain polynomial
 σ_{ps_i} : écart-type des échantillons polynomiaux
 Σ_{ps} : matrice de covariance des échantillons polynomiaux

Cause et effet. - Nous appelons « explication » ce qui nous distingue des degrés de connaissance et de science plus anciens, mais ceci n'est que « description ». Nous décrivons mieux, - nous expliquons tout aussi peu que tous nos prédécesseurs. Nous avons découvert de multiples successions, là où l'homme naïf et le savant de cultures plus anciennes ne voyaient que deux choses : ainsi que l'on dit généralement, la « cause » et l' « effet »; nous avons perfectionné l'image du devenir, mais nous n'avons pas dépassé l'image au-delà de l'image. La suite des « causes » se présente en tous les cas plus complète devant nous; nous déduisons : il faut que telle ou telle chose ait précédé pour que telle autre suive, - mais par cela nous n'avons rien compris.

Friedrich Nietzsche, *le Gai Savoir*.

A Joseph WEY,



Introduction générale

La prévision de trajectoires fait partie des facultés qu’acquièrent normalement tous les êtres humains et même certains animaux: lancez une balle à un chien et celui-ci saura l’attraper dans sa gueule; un joueur de volley se placera sans y réfléchir au bon endroit pour “défendre” l’attaque d’un adversaire. Cette lecture instinctive des trajectoires relève pourtant d’un mécanisme complexe d’observation et d’analyse. Ce que nous intégrons inconsciemment n’est rien de moins que ce que les physiciens nomment “les équations de la balistique extérieure” et dont les joueurs de tennis par exemple, maîtrisent les raffinements jusqu’à l’effet Magnus qui est en jeu dans la dynamique des effets donnés à une balle. On remarquera au passage que nos capacités se limitent aux trajectoires balistiques : il est plus facile d’attraper une balle en vol qui suit un mouvement “déterministe” qu’une souris qui court sur un tapis dont les changements de direction sont plus “aléatoires”.

Ce sont précisément ces réflexes ancestraux de pouvoir dévier du bras un projectile lancé contre nous ou la faculté de pouvoir repérer immédiatement l’auteur du méfait qui intéressent aujourd’hui les militaires pour leurs systèmes de défense les plus modernes. Les applications respectives s’appellent *blindage actif* et *détection de tireur embusqué*. La première concerne les véhicules blindés: on souhaite intercepter un projectile tiré dans la direction du véhicule avant que celui-ci ne le touche, la seconde a pour objectif de localiser un tireur embusqué. Comme c’est le cas pour les êtres humains, on s’intéresse uniquement à des trajectoires balistiques, c’est-à-dire répondant à un mouvement parfaitement déterminé par les lois de la mécanique du vol. Les trajectoires imprévisibles telles que celles des objets “manoeuvrés” (avions, missiles) font l’objet de techniques propres comme les filtres IMM (*Interacting Multiple Models*), où plusieurs descriptions possibles du mouvement sont envisagées *a priori*. A l’exception des vitesses extrêmes des projectiles considérés et du moyen d’observation qui est ici un radar, plus robuste pour des applications militaires qu’une caméra vidéo, notre problématique est en tous points identique à l’analyse d’une trajectoire faite par un être humain. Cependant, comme c’est souvent le cas lorsque l’homme souhaite copier la nature, les processus élémentaires d’une tâche d’apparence simple se révèlent être d’une grande complexité. Tout d’abord, les mesures doivent être d’une qualité suffisante pour pouvoir être exploitées. Bien que cet aspect n’ait pas fait partie au départ des points à étudier au cours de cette thèse, nous verrons que l’information délivrée par le radar s’avère être décisive pour atteindre les objectifs. Ensuite, l’analyse de la trajectoire, c’est-à-dire le traitement des signaux, doit extraire l’information de manière optimale pour réduire au minimum les erreurs de localisation. Cette recherche relève du domaine de la théorie de l’estimation et du filtrage optimal. Enfin, les traitements doivent s’effectuer dans des délais extrêmement brefs, du moins dans le cas du blindage actif, pour permettre une riposte efficace. Ce dernier point pèse à la fois sur le type

de traitement proposé, puisque celui-ci doit se faire en *temps réel* et sur le dispositif même de traitement qui définit en dernière analyse ce que l'on entend ici par *temps réel*.

A l'origine, le sujet de la thèse «Prévision de trajectoires 3D en temps réel» ne visait qu'une seule application: le blindage actif. La problématique du blindage actif, telle que (pro)posée par l'ISL, consiste à déterminer la trajectoire d'un projectile flèche volant à près de 1800 m/s en vue de son interception par une contre-munition, ceci en exploitant uniquement des mesures de vitesses radiales obtenues par un radar Doppler. Les vitesses très élevées des cibles, les faibles distances mises en jeu (quelques mètres), les grandes précisions souhaitées ainsi que la nature de l'information disponible constituent les conditions sévères et souvent antagonistes auxquelles cette étude est confrontée.

L'un des enjeux porte sur la vitesse d'exécution des algorithmes d'estimation, puisque les durées d'observation, de même que les délais de riposte, n'excèdent pas quelques millisecondes. Cette nécessité absolue réduit le spectre des algorithmes utilisables à celui des algorithmes très rapides, c'est-à-dire essentiellement aux algorithmes récursifs, les méthodes trop coûteuses en temps de calcul comme la plupart des méthodes itératives devant être écartées d'emblée.

Un autre enjeu est lié aux contraintes très fortes sur la précision, couplées à des mesures contenant très peu d'information. En effet, le radar Doppler préconisé pour cette application est réputé ne donner qu'une mesure de la vitesse radiale de la cible, sans aucune information sur la distance. Une pré-étude [1] a proposé un principe permettant d'estimer la trajectoire du projectile en exploitant des mesures de vitesse radiale uniquement. Ce principe s'appuie sur un modèle simple décrivant l'évolution de la vitesse radiale mesurée par le radar au cours du temps, mais dont les paramètres contiennent des informations sur la trajectoire. La question de la reconstruction de trajectoire se résume alors à un problème d'estimation paramétrique non linéaire. Si dans le cas linéaire ce genre de problèmes se règle de manière unique et optimale par le filtre de Kalman, dans le cas non linéaire plusieurs pistes sont ouvertes et doivent être explorées, dont chacune représente un compromis différent entre vitesse d'exécution et qualité de l'estimation. On peut citer notamment le filtre de Kalman étendu (EKF), le filtre de Kalman non parfumé (UKF), le filtre particulaire (PF) et ses nombreuses déclinaisons, mais également des méthodes d'optimisation (gradient, Newton, Levenberg-Maquardt) même si ces dernières ne sont en principe pas adaptées à un traitement temps réel.

Les approches traditionnelles ne donnant pas entière satisfaction, un nouvel algorithme mixte est proposé. Cet algorithme, baptisé PMDR (*Polynomial Method for Dataset Reduction*), est essentiellement un algorithme de compression du signal par approximation polynomiale. Le signal compressé peut ensuite être traité à l'aide d'une méthode conventionnelle d'optimisation. Les motivations qui sont à l'origine de cette démarche tiennent beaucoup au contexte initial de l'étude. En effet, avant même que les algorithmes standard aient été envisagés, une première solution de traitement fondée sur un lissage polynomial suivi d'une résolution analytique avait été proposée. L'algorithme PMDR est une évolution de l'algorithme originel où le lissage polynomial a été appréhendé comme une méthode de compression du signal et identifié comme tel, et la résolution analytique a été remplacée par une méthode d'optimisation plus efficace. Même si ce nouvel algorithme ne diffère pas fondamentalement du précédent, son étude approfondie ainsi que sa caractérisation théorique ont permis d'ajuster certains

points ce qui a considérablement augmenté ses performances.

Afin de démontrer la faisabilité d'une implantation des algorithmes sur des systèmes embarqués temps réel, la partie récursive de l'algorithme PMDR a été effectivement programmée sur une plate-forme de traitement bi-processeur. Un effort particulier a été consacré à l'étude de l'architecture des DSP TigerSHARC, dans le but d'exploiter pleinement les ressources du processeur.

Le radar faisait normalement partie des points d'ancrages de la thèse et ne devait *a priori* pas être étudié. Cependant, des enregistrements expérimentaux effectués en novembre 2003 ont révélé que le radar existant ne disposait pas d'une portée suffisante pour obtenir des signaux exploitables. Nous avons donc entrepris de concevoir et réaliser un nouveau radar fonctionnant sur le même principe (Doppler) que le précédent, mais avec une couverture plus importante. Parallèlement, l'étude de l'information contenue dans les observations Doppler au travers de l'analyse du CRLB (*Cramér-Rao Lower Bound*) a montré que les précisions maximales théoriques n'atteignaient pas les objectifs fixés. La concomitance de la réalisation d'un nouveau radar et de l'étude du CRLB nous a donc incité à revoir le type de radar utilisé, sans toutefois pouvoir changer radicalement de technologie. La solution retenue est un radar à fréquences multiples MFCW (de l'anglais *Multiple Frequencies Continuous Wave Radar*) qui est très proche du radar CW, mais avec en prime une mesure directe de distance. Cette idée étant intervenue pendant le développement du nouveau radar Doppler alors en cours de réalisation, ce sont donc deux radars bi-fréquences (MFCW) qui ont vu le jour. Les informations supplémentaires délivrées par ce type de radar ont notablement changé la problématique de la thèse puisque les capacités spécifiques de l'algorithme PMDR sont devenues superflues.

Une autre modification importante du cadre initial de la thèse est l'extension du champ d'application de l'étude à la détection de tireur embusqué, qui fait suite à l'arrêt du projet blindage actif par l'ISL au cours de la thèse. La détection de tireur embusqué comporte des enjeux qui lui sont propres, comme la possibilité de détecter une balle à l'aide d'un radar, mais aussi un assouplissement des contraintes initiales puisque l'aspect temps réel n'est plus primordial et que les précisions souhaitées sont moins drastiques. Quoiqu'il en soit, cette étude s'inscrit en grande partie dans le prolongement de la précédente, l'aspect essentiel qui est la reconstruction de trajectoires à partir de mesures radar étant commun aux deux applications.

Cette nouvelle problématique étant intervenue très tardivement dans la thèse, certains aspects importants n'ont pas été abordés, comme par exemple la possibilité de détecter une balle à plusieurs dizaines de mètres. L'étude se limite à des signaux simulés qui s'appuient sur les équations de la balistique d'une part et les caractéristiques du radar MFCW, obtenues avec des projectiles de calibre plus important, d'autre part.

Afin de préserver une certaine cohérence au sein des différentes approches, nous avons choisi de distinguer clairement deux applications: la première concerne le blindage actif et utilise des radars Doppler uniquement, la deuxième concerne la détection de tireur embusqué et utilise un radar MFCW. L'algorithme PMDR est lui présenté avec une certaine autonomie mais étant motivé au départ par la problématique du blindage actif, il sera utilisé dans ce contexte.

La thèse s'organise comme suit:

Chapitre 1

L'objet de ce chapitre est tout d'abord de situer les problématiques du blindage actif et de la détection de tireur embusqué dans un contexte général, mais aussi telles qu'elles sont abordées à l'ISL. Il s'agira ensuite d'établir un modèle général pour les trajectoires étudiées en appliquant les équations de la balistique, modèle qui sera ensuite décliné en fonction des différents cas traités.

Chapitre 2

Ce chapitre est consacré à la présentation de la problématique radar. Après une brève introduction historique suivie d'une présentation générale des grandes familles de radar, les principaux phénomènes associés au radar sont abordés. On donne ensuite des éléments de principe concernant le radar Doppler en général, ainsi qu'une description détaillée de celui réalisé au cours de la thèse. Le radar MFCW est à son tour à l'étude avec à nouveau un point sur le principe général suivi du cas particulier. Enfin, les principaux résultats expérimentaux obtenus sont présentés.

Chapitre 3

Dans ce chapitre nous procédons à l'analyse des précisions maximales qu'une configuration permet d'atteindre à travers l'étude du CRLB. Dans un premier temps, la théorie générale est présentée puis, dans un deuxième temps, la caractérisation théorique des mesures est effectuée. Pour finir, les résultats obtenus sont appliqués aux différents cas étudiés.

Chapitre 4

Ce chapitre est dédié à l'étude de la théorie du filtrage et de l'estimation paramétrique. Les méthodes classiques de filtrage et d'optimisation non linéaire sont tout d'abord présentées. Une large partie de ce chapitre est ensuite consacrée à l'étude et la description de la nouvelle méthode PMDR. Pour finir, les principaux algorithmes sont appliqués aux cas considérés dans cette étude.

Chapitre 5

Ce dernier chapitre détaille les possibilités d'intégration des algorithmes en temps réel, à travers l'exemple d'une intégration sur une plate-forme bi-processeur Tiger-SHARC¹. Nous procédons à une analyse avancée de l'architecture des processeurs et proposons des routines temps réel qui exploitent au mieux cette architecture.

1. Fabriqués par Analog Devices.

Chapitre 1

Position du problème

1.1 Introduction

Le blindage actif et la détection de tireur embusqué ont en commun, en plus d'être deux sujets brûlants d'actualité (test du premier système de protection active américain en 2006, développement du système *Boomerang* de détection de tireur embusqué pendant la seconde guerre en Iraq), de reposer sur la reconstruction de trajectoire d'un projectile balistique. Dans le premier cas, la connaissance de la trajectoire permet de prévoir la destination du projectile, c'est-à-dire le point d'impact, dans le second cas on se sert de la trajectoire pour remonter à l'origine du tir. Après une présentation générale des deux sujets, nous étudierons les équations de la balistique dans le cas du tir tendu pour établir un modèle général de trajectoire. Nous préciserons ensuite les différentes configurations de mesures et de trajectoires qui seront abordées dans cette thèse afin de dégager les modèles d'observation.

1.2 Contexte général de l'étude

1.2.1 Blindage actif

De la carapace des premiers dinosaures au char Leclerc, en passant par l'indestructible bouclier d'Achille, le blindage est l'histoire sans cesse répétée d'une protection en réponse à une menace. Les formes de blindage les plus modernes que sont les blindages dits «actifs» et «réactifs» n'échappent pas à cette règle. Aujourd'hui, le pouvoir de pénétration des projectiles est tel que le simple empilement de matériaux inertes ne suffit plus à protéger un véhicule, ou alors au prix d'un poids excessif. Le blindage *réactif* apporte une première amélioration par rapport à un blindage traditionnel en réagissant à l'impact d'un projectile, grâce au déclenchement d'explosifs par exemple. Le blindage *actif* lui, anticipe l'impact d'une menace et traite celle-ci avant qu'elle ne frappe le véhicule à protéger pour une efficacité encore plus grande. Ce principe implique donc nécessairement un moyen de détection et de localisation de la menace à distance, mais dont les besoins peuvent varier en fonction du type de menace et du type de riposte envisagées.

Sans entrer dans les détails, on peut distinguer deux catégories de cibles à traiter : les

vecteurs et les projectiles cinétiques. Les projectiles cinétiques, encore appelés projectiles flèches à cause de leur forme, sont complètement inertes et leur pouvoir de pénétration tient uniquement à leur énergie cinétique. Ces flèches utilisent donc des matériaux lourds tels que le tungstène, volent à des vitesses très élevées (1000 à 2000 m/s) et ont des longueurs comprises entre 20 cm et 1 m selon le calibre. Ces projectiles sont généralement utilisés dans des combats de char contre char et sont tirés à plusieurs milliers de mètres de distance, en tir tendu. Contrairement aux projectiles cinétiques, les vecteurs ne sont qu'un moyen de transport qui permet à une charge explosive d'atteindre sa cible et volent donc à des vitesses bien plus faibles (150 à 300 m/s). Parmi ces vecteurs, on trouve notamment les RPG (*Rocket Propelled Grenade*) et les ATGM (*Antitank Guided Missiles*). Ils s'appuient sur des technologies très variées allant du simple bazooka au missile à guidage laser et peuvent intégrer un système de propulsion. Les RPG sont des armes très répandues du fait de leur faible prix, elles constituèrent les principales menaces lors des récents conflits (Iraq, Kosovo, Afghanistan, Somalie etc.)

Face à ces menaces, deux types de ripostes sont possibles: une riposte de type *soft-kill* utilise des contre-mesures et une riposte de type *hard-kill* qui constitue le blindage actif proprement dit, l'ensemble formant ce que l'on appelle la *protection active*. Contrairement aux ripostes *soft-kill*, l'objectif du blindage actif est de détruire ou dégrader physiquement la menace selon différents concepts: une roquette qui explose à proximité du projectile assaillant, un jet d'éléments destructifs ou encore un barreau unique qui percute la cible.

Les besoins en précision et en rapidité dépendent donc du type de projectile (lent ou rapide) ainsi que du type de contre-munition utilisé (rayon d'action de quelques mètres ou nécessité d'un impact direct).

A titre d'exemple, le système ARENA développé par les russes qui était en 1998 encore le seul système opérationnel, utilise un radar de poursuite de cible qui analyse une portion de la trajectoire de la cible comprise entre 10,06 m et 7,8 m de distance avec le char, puis déclenche une riposte dont le rayon d'action est de 1,3 m à 3,9 m [2]. Plus récemment (17 février 2006), l'entreprise américaine *BAE systems* associée à *Northrop Grumman* a présenté un système de protection active testé avec succès pour un très large spectre de menaces, cependant peu d'informations techniques sont disponibles à ce sujet.

A l'ISL, le blindage actif fait partie des thèmes de recherche depuis la fin des années quatre-vingt mais la question de la détection est bien plus récente. C'est sur ce point que portent les recherches faisant l'objet de cette thèse. Le concept de riposte adopté se fonde sur un impact direct entre un élément inerte et un projectile cinétique qui est la seule menace considérée [3]. Du point de vue de la prévision de trajectoires, les contraintes sont maximales puisque l'on a affaire à la fois à la menace la plus rapide, donc aux délais de traitements les plus brefs, et au type de riposte le plus exigeant en termes de précisions (impact direct).

Le processus de riposte comporte cinq étapes clés, illustrées sur la figure 1-1, dont chacune d'elles correspond à un point précis de la trajectoire du projectile.

- Point de détection du projectile : le projectile est détecté par le radar, ce qui marque le début de l'analyse de la trajectoire. La distance de ce point dépend essentiellement de la portée du radar.
- Point de localisation : ce point marque la fin de l'analyse de la trajectoire et doit donc être le plus proche possible du véhicule pour obtenir

les précisions maximales. Pour cette raison, il précède immédiatement le point de riposte.

- Point de riposte : la distance de ce point est fixée par la vitesse du projectile et des éléments de riposte, ainsi que par la distance d'interception.
- Point d'interception : la position de ce point est définie par le type de riposte envisagée.
- Point d'impact : généralement, le projectile n'est pas complètement détruit par la riposte et poursuit sa trajectoire jusqu'à l'impact. Dans notre étude, il s'agit également du point de la trajectoire qui sera estimé.

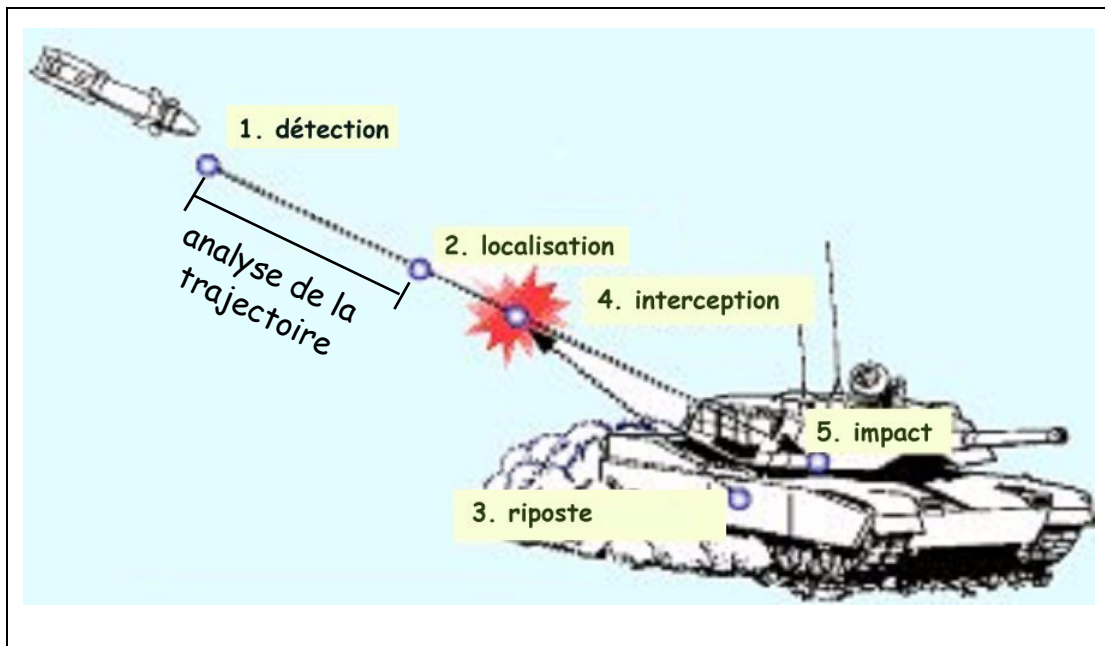


Figure 1-1 : Le principe du blindage actif

Le radar prévu pour les mesures est un radar Doppler (voir §2.2.2) dont le signal est échantillonné sur les passages à zéro pour une mesure de fréquence. Ces éléments permettent de chiffrer au moins grossièrement les objectifs à atteindre. En considérant que le projectile a une vitesse cinq fois supérieure à la riposte, une interception à deux mètres implique que le point de riposte se situe à une dizaine de mètres du char, ce qui conduit à un point de localisation à une distance comprise entre 10 m et 15 m ou plus, selon la portée du radar. Pour que l'interception d'un projectile de petit calibre soit efficace, les erreurs de prévision de la trajectoire ne peuvent pas excéder quelques centimètres au niveau du point de d'interception, cela sans même tenir compte des incertitudes propres au dispositif de riposte. En ce qui concerne les vitesses de traitement, la fréquence du signal Doppler d'un projectile cinétique produite par un radar en bande X se situe autour de 100 kHz, soit un échantillon à traiter (par radar) toutes les 10 micro-secondes. Ces données sont certes très approximatives, mais elles permettent de fixer un ordre de grandeur sur les objectifs à atteindre: une estimation, à une dizaine de mètres avec une précision de quelques centimètres, de la trajectoire au niveau du point d'interception et des temps de traitement de l'ordre de 10 microsecondes par échantillon.

1.2.2 Détection de tireur embusqué

Les récents conflits ont révélé des formes nouvelles d'affrontements, au coeur desquelles le tireur embusqué occupe une place très importante si bien que de nombreux programmes de recherches sont consacrés à la question de leur détection. Deux scénarios sont généralement avancés: un dispositif permettant la surveillance d'un poste de garde par exemple, ou un système individuel d'assistance au fantassin qui pourrait être intégré directement dans le casque. Plusieurs technologies peuvent être mises en oeuvre pour satisfaire au besoin: lumière visible, infra-rouge, radar etc. Mais la plus répandue s'appuie sur un principe acoustique qui mesure la direction d'arrivée du coup de feu par différence de phase entre une série de micros. Cette technique présente de nombreux avantages tels que sa simplicité, son faible coût, sa robustesse notamment par rapport aux techniques optiques, ainsi que sa capacité à être intégrée facilement dans le casque d'un soldat. La société *BBN technologies* a commercialisé le système *boomerang* fondé sur ce principe et qui fut notamment utilisé lors de la guerre en Iraq. Ce principe est également celui retenu à l'ISL qui travaille sur un concept très similaire à celui de *boomerang*.

Bien que des possibilités d'intégration d'un système radar dans un casque de soldat aient été étudiées et semblent être réalistes [4], cette technologie est intrinsèquement plus lourde, plus volumineuse et consomme plus qu'un dispositif acoustique passif. En contre-partie, elle peut potentiellement conduire à de meilleurs résultats en termes de précision et de robustesse. L'approche adoptée est identique à celle du blindage actif et se caractérise par le fait que seule une portion de la trajectoire est observée et que celle-ci respecte les équation de la balistique. Comme précédemment, la prévision de trajectoire repose alors sur l'estimation des paramètres du tir.

1.3 Modèles des trajectoires

1.3.1 Equations de la balistique extérieure

Nous considérerons dans toute notre étude des projectiles non propulsés, c'est-à-dire des projectiles dont la trajectoire est complètement déterminée par les conditions initiales du tir et les lois de la mécanique du vol dans l'atmosphère. Nous supposerons par ailleurs que le vol n'est pas perturbé par des actions extérieures telles que le vent ou une modification de la densité du milieu, causée par le changement d'altitude par exemple, et que le projectile est assimilable à un point, c'est-à-dire que nous négligerons les actions des moments aérodynamiques. Nous nous plaçons dans le repère illustré sur la figure 1-2. Les seules forces agissant sur le projectile sont la force de gravité portée par l'axe U_z et la force de résistance de l'air qui s'oppose au vecteur vitesse [5]

$$\begin{cases} F_g = -g \cdot m \cdot U_z \\ F_t = -\frac{1}{2} \rho S \cdot C_x(v) \cdot v^2 U_v \end{cases} \quad (1:1)$$

avec

F_g : force de gravitation	ρ : densité de l'air
g : champ de pesanteur	S : section du projectile
m : masse du projectile	C_x : coefficient de résistance du projectile
F_t : force de traînée	

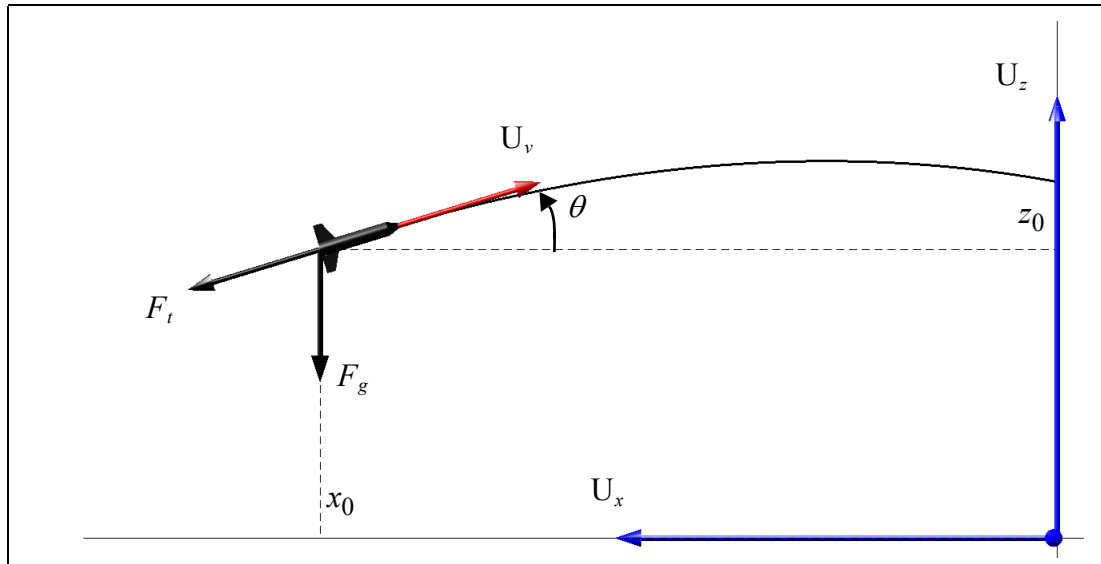


Figure 1-2: Repère de base

Les équations de la mécanique sur les deux axes donnent

$$\begin{cases} \dot{v}_x = -2k_a C_x(v) \cdot (v_x^2 + v_z^2) \cos \theta \\ \dot{v}_z = -2k_a C_x(v) \cdot (v_x^2 + v_z^2) \sin \theta - g \end{cases} \quad (1:2)$$

où l'on a introduit la constante aérodynamique

$$k_a = \frac{1}{4m} \rho S \quad (1:3)$$

Il s'agit de deux équations différentielles non linéaires couplées dont la résolution est impossible dans le cas général. Cependant il existe des solutions approchées pour le cas particulier du tir tendu, qui est précisément celui qui concerne nos applications. Le tir tendu signifie que l'angle θ , appelé *pente*, est très petit sur tout le vol, ce qui permet de faire les approximations suivantes

$$\left. \begin{array}{l} \sin \theta \approx \text{tg } \theta \\ \cos \theta \approx 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (v_x^2 + v_z^2) \sin \theta = v_x v_z \\ (v_x^2 + v_z^2) \cos \theta = v_x^2 \end{cases} \quad (1:4)$$

Ces simplifications permettent de découpler l'équation de l'axe x de celle de l'axe z, on obtient en effet

$$\begin{cases} \dot{v}_x \approx -2k_a C_x(v_x) v_x^2 \\ \dot{v}_z \approx -2k_a C_x(v_x) v_x v_z - g \end{cases} \quad (1:5)$$

Le coefficient C_x dépend de la vitesse du projectile mais on préfère en général le faire apparaître sous la forme d'une constante en factorisant la vitesse. On montre [5] que le coefficient de résistance peut s'écrire comme une fonction du type

$$C_x(v) = C_x(v_0) \left(\frac{v_0}{v} \right)^{2-n} = C_{x0} \cdot \left(\frac{v_0}{v} \right)^{2-n} \quad (1:6)$$

Le nombre n dépend de la plage de vitesse considérée. Pour des projectiles volant à des vitesses comprises entre 1,5 Mach et 3 Mach, comme par exemple des balles de fusil, nous aurons $n=3/2$. Les équations différentielles se simplifient alors en

$$\begin{cases} \dot{v}_x = -2\gamma\sqrt{v_0} \cdot v_x^{3/2} \\ \dot{v}_z = -2\gamma\sqrt{v_0}v_x \cdot v_z - g \end{cases} \quad (1:7)$$

avec

$$\gamma = k_a C_{x0} \quad (1:8)$$

une constante qui dépend du projectile utilisé.

En intégrant l'équation sur l'axe x on trouve la vitesse

$$\frac{\dot{v}_x}{v_x^{3/2}} = -2\gamma\sqrt{v_0} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{v_x}} = \gamma\sqrt{v_0}t + cst \quad (1:9)$$

soit finalement

$$v_x = \frac{v_0}{(\gamma v_0 t + 1)^2} \quad (1:10)$$

La coordonnée x en fonction du temps se trouve par intégration de la vitesse

$$x(t) = \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\gamma v_0 t + 1} \right) + x_0 \quad (1:11)$$

On peut maintenant utiliser la solution trouvée en (1:10) pour calculer v_z

$$\dot{v}_z = -2 \frac{\gamma v_0}{(\gamma v_0 t + 1)} (v_z - g) \quad (1:12)$$

On obtient pour la vitesse

$$v_z(t) = \frac{1}{(1 + \gamma v_0 t)^2} \left[v_0 \operatorname{tg} \theta_0 + \frac{g}{3\gamma v_0} (1 - (1 + \gamma v_0 t)^3) \right] \quad (1:13)$$

et pour la coordonnée z en fonction du temps

$$z(t) = \frac{t}{\gamma v_0 t + 1} \left(v_0 \theta - \frac{g t}{6} (3 + \gamma v_0 t) \right) + z_0 \quad (1:14)$$

La figure 1-3 montre la trajectoire d'un projectile obtenue d'une part grâce à une simulation qui résout numériquement les équations différentielles par une méthode d'éléments finis, d'autre part grâce à la solution analytique trouvée. On constate que les deux trajectoires coïncident parfaitement. En revanche, la trajectoire dite «idéale» qui

ne tient pas compte de la force de traînée s'écarte notablement de la trajectoire réelle et ne constitue donc pas un modèle valable sur des distances supérieures à la centaine de mètres. On peut également s'interroger sur la fiabilité du modèle intégrant la force de résistance par rapport à des vols réels car de nombreux paramètres ont été négligés comme l'effet du vent, la variation de la pression de l'air avec l'altitude etc. Cependant l'expérience montre que ces effets peuvent être négligés, sur de faibles distances (temps de vol courts) et pour des altitudes modestes, et d'une façon générale l'expression analytique de la trajectoire d'un tir tendu est fidèle au tir réel.

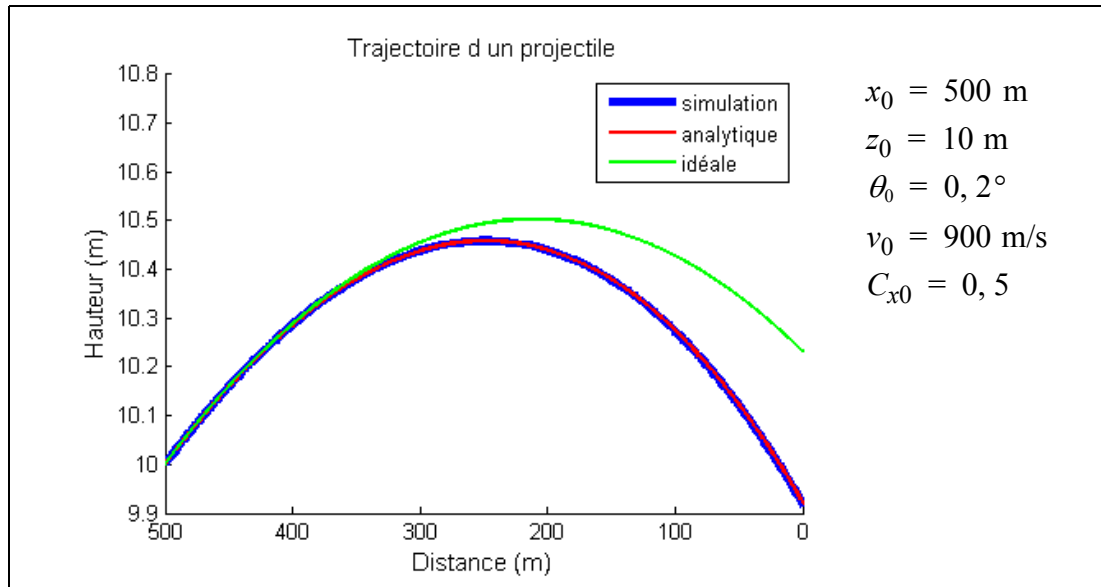


Figure 1-3: Comparaison des différents modèles de trajectoires

1.3.2 Les grandeurs caractéristiques

- Temps de vol

Le temps que met le projectile à parcourir une distance d est donné par:

$$T(d) = \frac{1}{v_0} \frac{d}{(1 - d\gamma)} \quad (1:15)$$

où v_0 et C_{x0} sont les paramètres de vol au début du parcours.

- Flèche

La perte de hauteur nette du projectile sur une distance d est donnée par:

$$z - z_0 = -\frac{g \cdot d}{3\gamma v_0^2} \left[\frac{2 - d\gamma}{2(1 - d\gamma)^2} - 1 \right] + d \operatorname{tg} \theta_0 \quad (1:16)$$

- Perte de vitesse (en x)

La perte de vitesse est donnée par:

$$\Delta v_x = v_0 [1 - (1 - d\gamma)^2] \quad (1:17)$$

- Exemples

Le tableau suivant donne quelques valeurs typiques pour différents types de projectiles¹.

Tableau 1-1 : Exemples de hauteur de flèche et perte de vitesse sur 10 mètres

Type de projectile	vitesse	distance	Cx	Δz	Δv
balle de volley (21cm, 270 g)	80 km/h	15 m	0,5	4,8 m	24 km/h
revolver (3,9 g, 7,65 mm)	300 m/s	100 m	0,3	65 cm	70 m/s
fusil d'assaut (51 g, 12,7 mm)	850 m/s	600 m	0,3	50 cm	190 m/s
cylindre (700 g, 40 mm)	1000 à 1800 m/s (v=1400 m/s)	10 m	2	<0,3 mm	25 m/s
projectile flèche (700 g, 40 mm)	1600 - 1800 m/s (v=1400 m/s)	10 m	0,2	<0,3 mm	4 m/s

On note que les projectiles flèches ne subissent quasiment aucune décélération sur la distance d'observation et que la perte de hauteur liée à l'effet de la gravité est également négligeable.

1.4 Les différentes configurations étudiées

Puisque l'étude porte sur deux applications différentes, il est important de préciser à ce niveau les configurations associées à chacune d'elles, à savoir quel est le modèle de trajectoire utilisé ainsi que le type et le nombre de radars mis en oeuvre.

Pour ce qui est du blindage actif, les projectiles flèches ne subissant quasiment aucune décélération ni courbure sur les portions de trajectoires observées, nous assimilerons ces dernières à des lignes droites parcourues à vitesse constante. Le ou les radars mis en oeuvre sont des radars Doppler qui mesurent la vitesse radiale du projectile ou, ce qui est équivalent, le déplacement du projectile obtenu par intégration de la vitesse (voir §2.3.2).

En ce qui concerne la détection de tireur embusqué, les trajectoires considérées étant beaucoup plus longues, de l'origine du tir jusqu'à la zone de couverture radar incluse, les approximations précédentes ne sont plus valables. Nous adopterons dans ce cas un modèle de trajectoire identique à celui décrit par les équations de la balistique du paragraphe §1.3. Les radars utilisés sont des radars MFCW (voir §2.5.2) qui délivrent à la fois une information sur la vitesse et sur la distance du projectile.

Les paragraphes suivants détaillent ces différents cas et donnent le modèle du signal de mesure à exploiter ainsi que le paramètre à estimer.

1.4.1 Cas 1 : blindage actif - trajectoire rectiligne - 1 radar Doppler

Dans cette configuration un seul radar Doppler est utilisé. Puisque le radar est supposé isotropique et que l'on néglige les effets de la gravité, aucune direction de l'espace en l'absence de projectile n'est à privilégier et le problème admet une symétrie centrale autour du radar. Les deux seules directions que l'on puisse définir de façon consistante

1. Les données ne correspondent pas nécessairement aux formules analytiques, celles-ci ayant été établies pour une plage de vitesse comprise entre Mach 1,5 et Mach 3.

sont donc données par le vecteur vitesse (X_1) du projectile ainsi que par sa composante normale dirigée vers le radar (Y_1). La figure 1-4 montre le repère de travail ($0, X_1, Y_1$) qui est lié à la trajectoire du projectile et dont l'orientation dans le repère de référence ($0, X, Y, Z$) est inconnue.

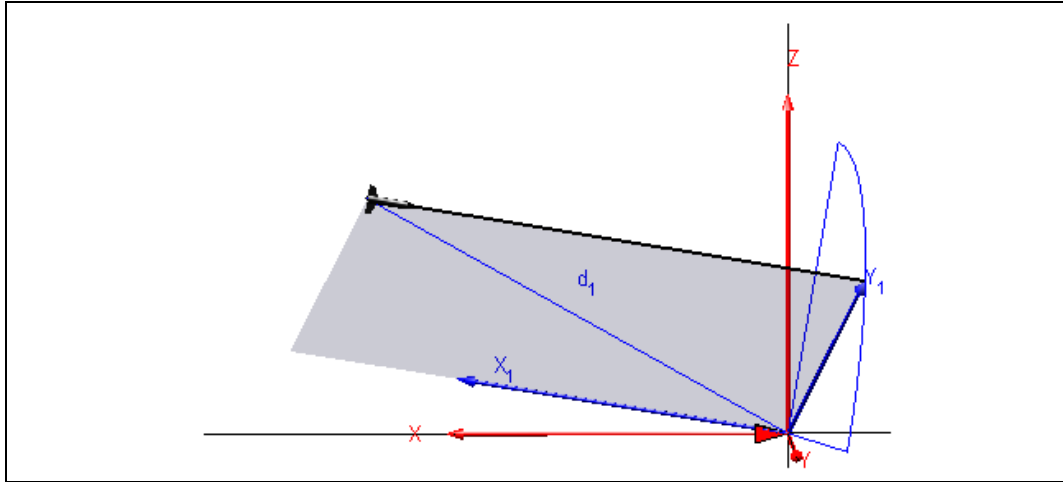


Figure 1-4: Repère cas 1: 1 seul radar Doppler

Dans ce cas nous utilisons un radar Doppler qui ne mesure que la vitesse radiale du projectile $v(t)$ au travers de la fréquence Doppler $f_D(t)$ d'après la relation $f_D(t) = k_r v(t)$, où k_r est la constante radar qui sera définie au paragraphe §2.3.2. En utilisant un modèle de trajectoire rectiligne et les coordonnées du projectile dans le repère de travail ($0, X_1, Y_1$), la vitesse radiale mesurée par le radar en fonction du temps peut se mettre sous la forme:

$$v(t) = v_0 \cdot \frac{x_0 - v_0 t}{\sqrt{(x_0 - v_0 t)^2 + y_0^2}} \quad (1:18)$$

Le paramètre à estimer est donc $\theta = [x_0, y_0, v_0]^T$.

Cette expression constituera le modèle du signal à exploiter par les algorithmes. On notera que cette configuration ne permet pas de déterminer ni les angles d'incidence de la trajectoire du projectile, ni même les trois coordonnées de la position initiale du projectile. Ce cas simple ne présente pas beaucoup d'intérêt pratique pour notre application mais il nous servira d'exemple et de référence pour illustrer et comparer les différents algorithmes d'estimation. Signalons que cette méthode de mesure à un seul radar Doppler a déjà été utilisée pour trouver la distance minimale entre un projectile et une cible (*closest approach* ou *miss-distance*) [6].

1.4.2 Cas 2 : blindage actif - trajectoire rectiligne - 3 radars Doppler

Ce deuxième cas s'intéresse à l'application concrète du blindage actif et prend en compte des trajectoires avec une incidence quelconque par rapport au plan des radars (surface du char). En revanche, l'hypothèse de trajectoire rectiligne est toujours valable puisque les projectiles sont observés sur de faibles distances.

Pour une détermination de tous les paramètres de la trajectoire, trois radars Doppler sont utilisés et sont disposés comme indiqué sur la figure 1-5. La position des trois radars permet d'orienter l'espace et donc de déterminer la position du projectile dans un repère fixe, indépendamment de la trajectoire.

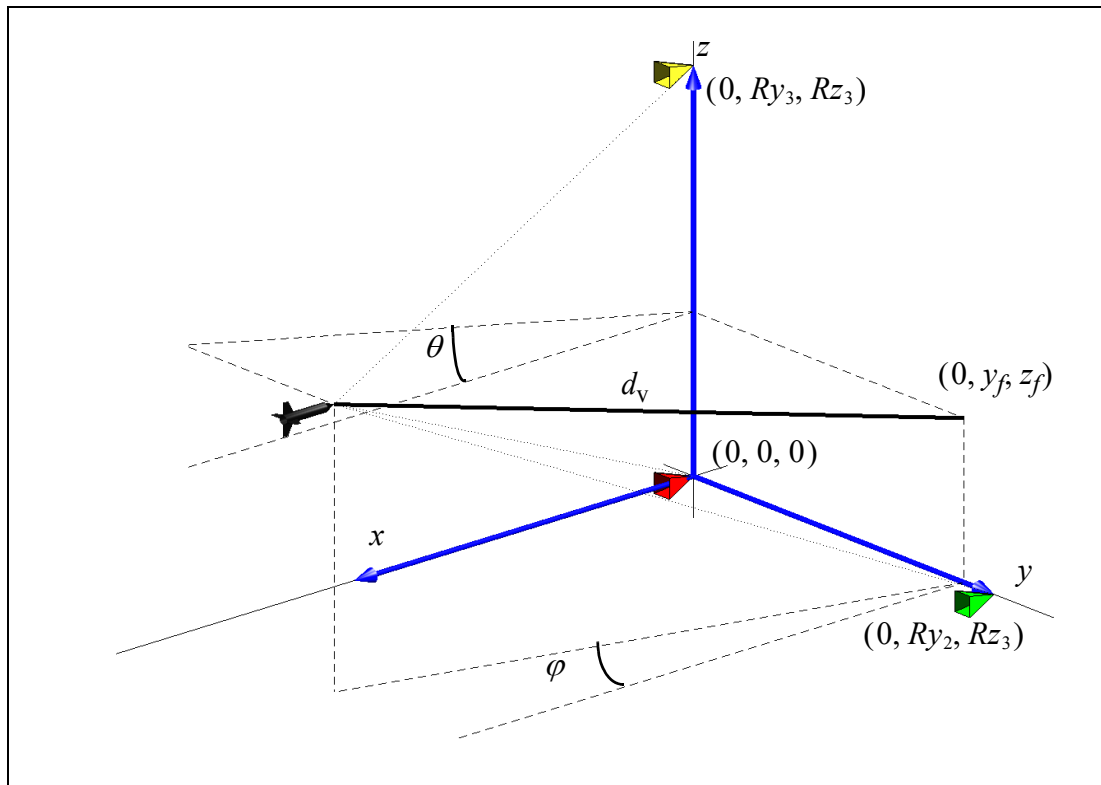


Figure 1-5: Repère dans le cas 2 - 3 radars Doppler

Nous choisirons dans ce cas d'exploiter la différence de phase Doppler $\Delta\phi_i(t)$, obtenue en intégrant la fréquence Doppler $f_D(t)$, qui est proportionnelle au déplacement radial du projectile donné par :

$$\Delta d_i(t) = d_i(0) - d_i(t) \quad (1:19)$$

où

$$d_i(t) = \sqrt{(x_f + (d_v - v_0 t) \cos(\varphi))^2 + (y_f + (d_v - v_0 t) \sin(\varphi) - R y_i)^2 + \dots} \quad (1:20)$$

$$\dots + (z_f + (d_v - v_0 t) \theta - R z_i)^2$$

Le vecteur $[x_f, y_f, z_f]^T$ contient les coordonnées du point d'impact, qui, par définition, correspond à $x_f = 0$. La distance d_v est celle parcourue par le projectile entre le point de détection et le point d'impact. Les angles φ et θ correspondent à l'azimut et à la pente de la trajectoire respectivement et v_0 à la norme de la vitesse du projectile. La trajectoire est donc paramétrée par le vecteur $\theta = [y_f, z_f, d_v, v_0, \varphi, \theta]^T$. Ce concept multi-radar Doppler a déjà été utilisé pour la protection active [8], comme radar anti-collision [7] ou encore pour la détection de tireur embusqué [9].

1.4.3 Cas 3 : Détection de tireur embusqué - trajectoire balistique - 3 radars MFCW

La détection de tireur embusqué s'intéresse à la reconstruction de trajectoires sur des distances plus importantes que celles du blindage actif, puisqu'il s'agit de remonter à l'origine du tir. Le principe adopté est similaire à celui du blindage actif, en ce sens que seule une portion de trajectoire est observée afin d'en identifier les paramètres. L'application étant plus délicate et sensible aux précisions des mesures, elle est envisagée

en association avec un radar plus performant que le radar Doppler, à savoir le radar MFCW qui sera décrit dans le paragraphe §2.5.2. Contrairement au radar Doppler qui ne permet qu'une mesure de vitesse, celui-ci délivre une mesure de distance avec une très bonne précision. En revanche, les angles d'azimut et d'élévation¹ ne peuvent être obtenus directement, il faut donc utiliser au moins trois radars pour déterminer complètement tous les paramètres de la trajectoire. Celle-ci est donnée par les équations de la balistique

$$\begin{cases} x(t) = \left[d_v - \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\gamma v_0 t + 1} \right) \right] \cos(\varphi) + x_f \\ y(t) = \left[d_v - \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\gamma v_0 t + 1} \right) \right] \sin(\varphi) + y_f \\ z(t) = \frac{t}{\gamma v_0 t + 1} \left(\left(v_0 \theta - \frac{gt}{6} \right) (3 + \gamma v_0 t) \right) + z_f - d_v \theta \end{cases}$$

où les coordonnées x_0, y_0 et z_0 ont été remplacées par

$$\begin{aligned} x_0 &= d_v \cos(\varphi) + x_f \\ y_0 &= d_v \sin(\varphi) + y_f \\ z_0 &= z_f - d_v \theta \end{aligned} \tag{1:21}$$

La configuration complète montrant le repère, la trajectoire et la position des radars est illustrée sur la figure 1-6.

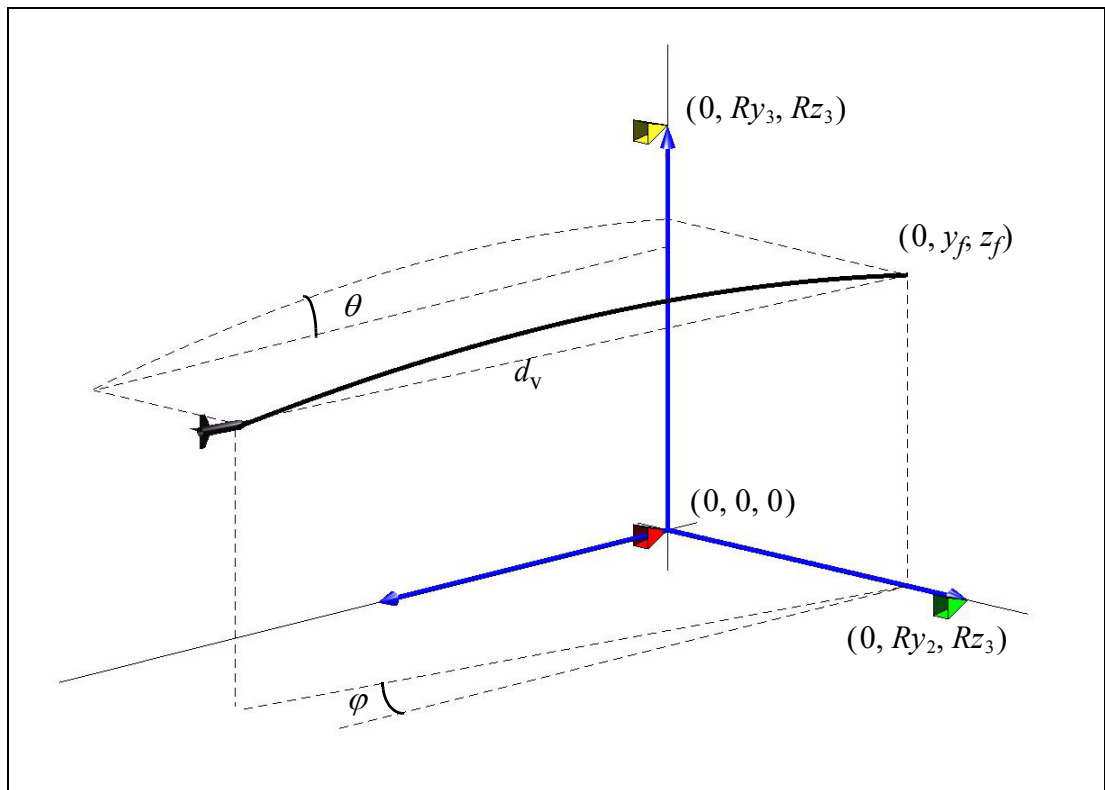


Figure 1-6: Repère dans le cas 3 - 3 radars MFCW

1. Il s'agit ici des angles définis par rapport au radar et non pas ceux définis par rapport au point d'impact.

L'information délivrée par le radar MFCW est la distance $d_i(t)$ entre le radar numéro i et le projectile

$$d_i(t) = \sqrt{(x(t) - Rx_i)^2 + (y(t) - Ry_i)^2 + (z(t) - Rz_i)^2} \quad (1:22)$$

Le vecteur paramètre à estimer contient un coefficient balistique supplémentaire par rapport à l'application du blindage actif, puisqu'il nous faut estimer la constante aérodynamique du projectile γ , ce qui donne $\theta = [y_f, z_f, d_v, v_0, \varphi, \theta, \gamma]^T$. La coordonnée x_f ne doit pas être estimée puisque par définition $x_f = 0$.

Les paramètres correspondent aux coordonnées du point d'impact et non pas à celles de l'origine du tir. Pour localiser exactement le tireur il faut donc une information supplémentaire, qui pourrait être obtenue grâce à une méthode acoustique par exemple, pour remonter à la position du tireur. Cependant, comme c'est généralement le cas pour ce type d'applications, nous nous contenterons de l'information de direction donnée par l'angle φ .

1.5 Conclusion

Les équations de la balistique, qui sont fiables pour des projectiles tels que des balles de fusil ou des projectiles flèches, permettent de reconstruire une trajectoire à partir de quelques paramètres. Les deux applications s'appuient sur cette hypothèse ainsi que sur des observations partielles de la trajectoire à l'aide de radars, pour en estimer les paramètres et permettre ainsi sa reconstruction. En dehors de l'exploitation qui est faite de la trajectoire, remonter à l'origine du tir pour la détection de tireur embusqué, recherche du point d'impact pour le blindage actif, d'autres différences distinguent les deux applications. Pour le blindage actif, les effets de la force de traînée et de la gravité sont supposés négligeables sur la portion de trajectoire observée, celle-ci se résumant à une ligne droite parcourue à vitesse constante. De plus, les radars utilisés sont de simples radars Doppler comme spécifié dans les données initiales du problème. Pour la détection de tireur embusqué, les approximations de trajectoire rectiligne ne sont plus valables puisque c'est la trajectoire complète qui est considérée. Dans ce cas le radar de mesure utilisé est un radar MFCW qui, contrairement au radar Doppler, permet une mesure directe de distance.

Chapitre 2

Etude du radar de mesure

2.1 Introduction

Le radar est un moyen de détection très apprécié par les militaires pour sa robustesse, sa fiabilité ainsi que sa capacité à observer des projectiles très rapides. Contrairement aux capteurs optiques, il n'est pas ou très peu perturbé par les conditions climatiques (précipitations, brouillard, soleil etc.) et est plus difficile à brouiller. De plus, il est très facile d'isoler des cibles en fonction de leurs vitesses grâce à l'effet Doppler (voir §2.3.2). Après avoir étudié les possibilités d'une détection optique [10] qui s'est avérée trop sensible aux perturbations extérieures, l'ISL s'est donc tourné vers une technologie radar pour assurer la détection de projectiles. Parmi le très large éventail des différents types de radars, l'ISL a retenu le principe du radar continu non modulé et s'est équipé d'un modèle commercial à très bas coût. Bien que l'étude devait s'appuyer sur ce dispositif, deux points nous ont contraint à entreprendre la réalisation de nouveaux radars.

Tout d'abord, il est apparu au cours de la thèse que le radar servant aux mesures n'avait pas une portée suffisante pour produire des signaux exploitables; il a donc fallu réaliser un radar du même type que le précédent mais avec une portée plus grande. Ensuite, la nature-même du radar choisi ne permettait pas d'atteindre les objectifs de localisation. Nous avons donc réalisé un deuxième radar, très similaire au premier, qui repose sur un principe à fréquences multiples (voir §2.5.2).

Après une présentation générale des radars nous nous intéresserons aux différents aspects physiques intervenant dans la propagation des ondes électromagnétiques et nous en déduirons un modèle de synthèse permettant de caractériser les signaux. Nous aborderons ensuite l'étude, le développement et la caractérisation des deux radars réalisés. Enfin, nous présenterons des mesures expérimentales effectuées en chambre anéchoïque ainsi que sur le terrain d'expérience de l'ISL.

2.2 Présentation générale

2.2.1 La naissance du radar

Le mot radar provient de l'acronyme anglais *Radio Detection And Ranging*, adopté par la marine américaine en 1940, mais son histoire débute bien des années auparavant. La

première trace généralement retenue dans la genèse du radar remonte à 1886, avec les expériences sur les ondes électromagnétiques du physicien Heinrich Hertz. En 1900, Nikola Tesla exprima l'idée d'utiliser des ondes électromagnétiques pour détecter et observer le mouvement d'objets lointains.

Si la paternité de la découverte des principes physiques et de leur application à ce qui deviendra plus tard le radar n'est généralement pas contestée, celle de l'invention elle-même est sujette à bien des controverses.

L'aventure du radar commença comme bien souvent par une observation fortuite: l'ingénieur allemand Christian Hülsmeier observa dès 1904 que le passage de bateaux sur le Rhin masquait les ondes électromagnétiques [11]. Il imagina ensuite un appareil baptisé «Telemobiloscope» qui utiliserait ce phénomène pour détecter les navires dans le but d'éviter les collisions. Un brevet fut déposé le 21 novembre 1904 sans toutefois que le Telemobiloscope ne fût réalisé [12].

Aux Etats-Unis, en 1922, A. H. Taylor et L.C. Young furent témoins du même type d'observations au passage des bateaux sur la Potomac River, mais ici non plus aucune réalisation concrète ne vit le jour. Cependant en 1930, alors que Young et son collègue L.A. Hyland étaient en train de tester un radiocompas, ils observèrent une corrélation très nette entre une perturbation (aujourd'hui connue sous le nom de *fading*) du radiocompas et le passage des avions. Ils eurent l'idée d'utiliser le phénomène pour détecter les aéronefs, comme l'allemand Hülsmeier quelques années plus tôt, mais, à la différence de ce dernier, les américains entreprirent la réalisation d'un dispositif qui comportait un émetteur continu de 500 W à 29 MHz et deux antennes séparées de 5,5 km. Le brevet fut déposé le 13 juin 1933 aux noms de Taylor, Young et Hyland [13].

En France, c'est en 1934 que Henri Gutton eut l'idée d'utiliser les ondes décimétriques pour détecter les obstacles, idée qui reposait sur des expériences faites avec MM. Camille Gutton et Pierret dans la cour de la Faculté des Sciences de Nancy, en 1927. Mais à l'instar de l'Allemagne, ces idées novatrices n'étaient pas toujours prises très au sérieux et les financements publics restèrent limités. En 1934, Pierre David du Laboratoire National de Radioélectricité obtint tout de même un financement pour réaliser un radar bi-statique continu de 50 W fonctionnant à une fréquence de 75 MHz. Parallèlement, la CSF-SFR dépose un brevet le 20 juillet 1934 pour un système baptisé «nouveau système de repérage d'obstacles et ses applications». Ce brevet déboucha sur le «détecteur d'obstacles» qui équipa le paquebot Normandie, dont les résultats furent d'ailleurs assez mitigés, notamment à cause des réflexions de l'onde par la surface de l'océan.

Bien qu'arrivés plus tard dans la course, les anglais ont sans doute été les plus grands contributeurs au développement du radar à cette période. En 1934, les anglais alors très inquiets de leur protection aérienne, organisèrent des essais de riposte anti-aérienne à grande échelle [14]. Les résultats furent déplorables et le premier ministre déclara que «les bombardiers allaient toujours passer au travers [du rideau de protection]». On envisagea alors un dispositif de détection des aéronefs par ondes sonores. De gigantesques paraboles acoustiques bardées de micros furent construites, mais le jour de la démonstration officielle devant le premier ministre le simple passage d'un livreur de lait dans les environs suffit à faire échouer toute l'expérience. Furieux de cet échec, le premier ministre chargea les responsables du ministère de l'air de trouver des scientifiques capables de proposer une solution à la protection aérienne. On contacta alors Mr. Watson-Watt, superintendant du *Radio Research Station*, pour qu'il évalue les possibilités de détruire des avions à l'aide de «rayons électromagnétiques»! Celui-ci répondit que si les ondes ne permettaient pas une destruction, il était sans doute possible de les utiliser pour détecter les avions, et retint d'emblée le principe du radar à impulsion

déjà étudié aux Etats-Unis. Une première démonstration expérimentale fut menée à Daventry le 26 février 1935, elle utilisait un émetteur de la BBC pour détecter un avion à une distance de 8 milles. Suite à ces essais concluants le gouvernement, toujours plus pressé par la menace d'une guerre imminente, offrit carte blanche à Watson-Watt pour mettre au point des systèmes opérationnels. Dès le mois de juillet de la même année, un radar pouvant détecter des avions jusqu'à une distance de 60 km fut construit sur les côtes anglaises. Le ministère de l'Air décida en décembre de construire cinq stations, de part et d'autre de la Tamise pour protéger la capitale. Ces cinq stations opérationnelles fin 1937, furent portées au nombre de 17 en 1939 et constituèrent la célèbre «*Chain Home*» qui joua un rôle essentiel dans la défense des alliés. Ces stations étaient formées de plusieurs dipôles supportés par des pylônes atteignant 110 m de hauteur. Les longueurs d'onde des radars étaient de 6 m et 12 m pour des puissances crêtes de 350 kW et 750 kW, les durées d'impulsions variaient de 4 à 45 μ s et les mesures se faisaient à l'aide de plusieurs goniomètres. Même si ces caractéristiques font sourire aujourd'hui, la *Chain Home* marquera sans doute longtemps l'avènement du radar.

2.2.2 Le radar continu (CW radar)

2.2.2.1 Présentation

Le radar continu (*Continuous Wave radar*) est, au moins dans son principe, le plus simple de tous les radars. C'est aussi le premier radar expérimenté par les pionniers dès 1904 (voir §2.2.1). Il consiste à émettre une onde électromagnétique de façon continue et à faire interférer celle-ci avec l'onde réfléchie. Ceci établit alors un système d'ondes stationnaires entre le radar et la cible, dont les noeuds et les ventres sont distants de $\lambda/2$, avec λ la longueur d'onde, comme le montre la figure 2-1.

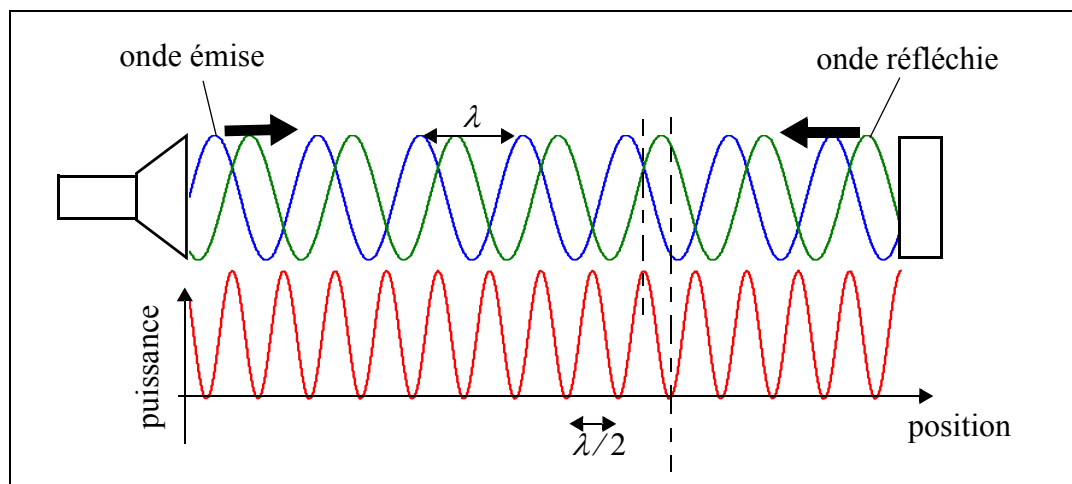


Figure 2-1 : principe du radar CW - système d'ondes stationnaires

Lorsque la distance entre le radar et la cible change, on observe en sortie du radar le défilement du système d'interférences : c'est l'effet Doppler. Puisque le système d'interférences est périodique, le radar CW ne permet pas de connaître la distance de la cible sauf si l'on connaît le numéro d'interférence. Il y a donc une ambiguïté en distance égale à $\lambda/2$. En revanche, la vitesse de défilement du système d'interférence, autrement dit la fréquence du signal, donne la vitesse radiale de la cible par rapport au radar selon l'effet Doppler (§2.3.2). Pour cette raison, le radar CW est également appelé ra-

dar Doppler et est généralement utilisé pour mesurer des vitesses.

On peut citer comme applications du radar CW (non modulé) la mesure de vitesses de véhicules (police, gendarmerie), les mesures météorologiques de la vitesse des vents (par leurs effets sur les particules liquides) ou encore les détecteurs de mouvements dans les systèmes d'alarme.

2.2.2.2 Caractéristiques

Les principaux avantages du radar CW tiennent essentiellement à sa simplicité et à sa dispersion spectrale limitée. Puisqu'il émet une onde continue à une fréquence fixe, son architecture est réduite à la forme la plus simple d'un émetteur/récepteur radio et n'est pas touchée par la complexité inhérente aux systèmes de modulation ou de génération d'impulsions. De plus, la dispersion spectrale d'un radar CW est donnée par le décalage Doppler, inférieur au mégahertz pour la majorité des applications. Cette bande passante étroite participe elle aussi à la simplicité de l'architecture en évitant les problèmes liés aux systèmes à large bande, faisant du radar Doppler le type de radar le plus simple mais aussi le meilleur marché.

En dehors des aspects technologiques, ce radar présente également plusieurs avantages fonctionnels.

Premièrement, il permet de mesurer à peu près toutes les vitesses concevables sans ambiguïtés, ce qui n'est pas le cas pour les autres types de radar pour lesquels un compromis doit être trouvé entre ambiguïté en distance et ambiguïté en vitesse. Il peut également traiter simultanément un nombre élevé de cibles, il suffit pour cela que celles-ci présentent des composantes spectrales différentes, c'est-à-dire n'évoluent pas à la même vitesse.

Deuxièmement, l'émission continue est idéale pour la détection et la poursuite de cibles car la mesure est permanente, et l'intégration du signal Doppler permet de connaître la distance parcourue par un projectile avec une très grande précision (de l'ordre de quelques centimètres à 10 GHz). Ce point est très important pour nos applications puisque d'une part les durées de visibilité des cibles étant extrêmement brèves le radar continu permet de collecter un maximum de mesures, d'autre part les précisions exigées sont très grandes¹.

Ces deux points font que le radar CW est également utilisé en tant que radar dit de «suivi de tirs» [15] pour mesurer la position d'un projectile, obtenue par intégration du signal Doppler à partir d'une position initiale (bouche d'un canon par exemple). Enfin, signalons que l'émission continue présente certains avantages du point de vue des applications militaires puisque, à énergie rayonnée équivalente, la puissance crête d'un radar continu est souvent de plusieurs ordres de grandeur inférieure à celle d'un radar pulsé, ce qui le rend plus difficilement détectable.

Un problème récurrent et propre à tous les radars continus (radars modulés compris) est lié à l'émission et la réception simultanée. En effet, ce mode de fonctionnement entraîne un couplage direct de parasites entre l'émission et la réception (*spillover*), et est à l'origine des principales limitations de ce type de radar.

L'autre grande faiblesse du radar CW (non modulé uniquement) est qu'il ne permet pas, du moins de façon directe, de mesurer des distances. Même si, comme nous le verrons, il existe dans certains cas particuliers des méthodes permettant d'estimer la dis-

1. Ceci ne signifie pourtant pas que le radar CW puisse mesurer une distance absolue avec une très grande précision, en revanche, si la position est connue à un moment donné, il peut suivre l'évolution de cette dernière avec une très grande précision.

tance de manière indirecte, cette insuffisance limite grandement le champ d'application des radars Doppler.

2.2.3 Le radar continu modulé en fréquence (FM-CW radar) [17]

2.2.3.1 Présentation

Le radar continu modulé en fréquence, ou FM-CW radar selon l'appellation anglaise *Frequency Modulated Continuous Wave Radar*, est un radar continu tel que celui décrit dans le paragraphe précédent, qui possède en plus la capacité de mesurer une distance. Son principe repose sur une modulation en fréquence de la porteuse, ce qui introduit un marquage temporel du signal nécessaire à la mesure de distance.

Pour comprendre le principe du radar FM-CW, considérons l'exemple du radar à modulation linéaire illustré sur la figure 2-2.

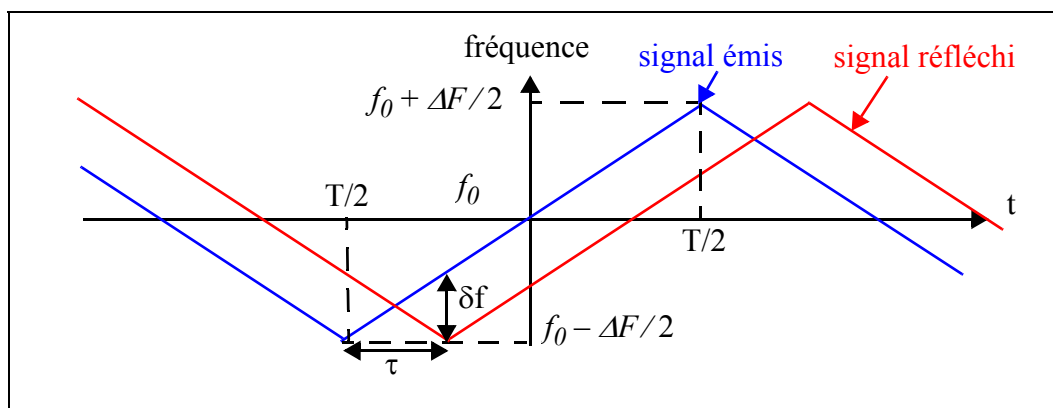


Figure 2-2: Exemple de modulation en dents de scie

Le fréquence instantanée du signal f peut être décomposée de la manière suivante:

$$f(t) = f_0 + f_m(t) \quad t \in [-T/2, T/2] \quad (2:1)$$

avec f_0 la fréquence porteuse fixe, $f_m(t)$ la composante modulée et T la durée du demi-cycle de modulation.

Le signal reçu par le radar est retardé d'une durée $\tau = 2d/c$, d étant la distance de la cible et c la vitesse de la lumière, causée par le temps de propagation de l'onde électromagnétique. On comprend aisément en observant la figure 2-2, que la différence de fréquence entre le signal émis et le signal réfléchi est proportionnelle au retard et par conséquent à la distance de la cible. Lorsque cette dernière est en mouvement un décalage Doppler s'ajoute à la différence de fréquence causée par le retard, il convient alors d'utiliser la partie descendante du cycle pour différencier la composante de vitesse de la composante de distance.

Il existe d'autres types de modulations, on peut citer par exemple les modulations sinusoïdales qui sont relativement simples à produire et conduisent à des bandes passantes relativement limitées (formule de Carson [18]), des modulations en escalier (*Stepped-FM*) qui donnent de bonnes résolutions avec de faibles interférences mutuelles [19], mais la modulation linéaire (symétrique, asymétrique etc.) est la plus utilisée notamment en raison de la consistance de sa fréquence instantanée et son étalement spectral minimal [17].

Un grand nombre de méthodes de traitement de signaux ont été développées, présentant des degrés de complexité très variables selon le type de modulation employée et

la qualité de traitement souhaité; on trouve par exemple des traitements fondés sur une simple mesure de fréquence instantanée par détection des passages à zéros [17], une mesure de phase [20] ou encore une transformée de Fourier qui permet de traiter plusieurs cibles [21].

Ces radars ont tout d'abord été utilisés en tant qu'altimètres embarqués dans les avions, avant de se diversifier [22] et d'être utilisés pour des applications aujourd'hui très variées comme les radars anti-collisions, très à la mode, ou même pour des applications à haute résolution de SAR (*Synthetic Aperture Radar*) [23].

2.2.3.2 Caractéristiques

Le radar FM-CW est un radar continu et est de ce fait concerné par les mêmes problèmes et avantages que le radar CW. Une difficulté supplémentaire est cependant posée par la modulation: en dehors de la complexité accrue de l'architecture, les défauts de linéarité en fréquence peuvent entraîner une distorsion spectrale et fausser les mesures [17].

En ce qui concerne les aspects fonctionnels, nous reprenons l'exemple de la modulation en dents de scie (figure 2-2) pour pousser plus loin l'analyse du radar modulé. Une méthode dite de traitement de phase [17] peut être appliquée pour extraire les informations des signaux. La méthode de traitement de phase révèle l'essentiel des propriétés du radar modulé et a de surcroît le mérite d'être simple à comprendre. Elle s'appuie sur des mesures de la phase du signal en sortie du radar $\phi_b(t)$, qui est elle-même donnée par la différence de phase entre la phase du signal émis $\phi_E(t)$ et la phase du signal réfléchi $\phi_R(t)$:

$$\phi_E(t) = 2\pi \int_{-T/2}^t [f_c + f_m(u)] du \quad \phi_R(t) = 2\pi \int_{-T/2}^t [f_c + f_m(u - \tau)] du \quad (2:2)$$

On a donc:

$$\phi_b(t) = \phi_E(t) - \phi_R(t) = 2\pi \int_{t-\tau}^t [f_c + f_m(u)] du = 2\pi f_c \tau + 2\pi \int_{t-\tau}^t f_m(u) du \quad (2:3)$$

Nous supposons que le projectile évolue en ligne droite (en direction du radar) et à vitesse constante, le retard peut alors se mettre sous la forme $\tau = 2(vt + d_0)/c$. Des trajectoires plus complexes peuvent être prises en compte, telles que des mouvements accélérés [24], mais la connaissance du mouvement pendant toute la durée de modulation est une condition nécessaire pour une exploitation correcte des signaux. La méthode de traitement de phase consiste à calculer la différence de phase entre le début et la fin de la rampe positive, on montre que celle-ci vaut:

$$\Delta \phi_{dp} = 2\pi \left[v \frac{2Tf_c}{c} + \frac{\Delta F}{c} (2d_0 + vT) \right] \quad (2:4)$$

Cette relation est valable à condition de pouvoir négliger le temps de propagation τ devant la durée du demi-cycle de modulation T . Le premier terme correspond au décalage Doppler du radar non modulé ce qui peut être mis en évidence en prenant $\Delta F = 0$, ce qui correspond au radar continu du paragraphe §2.2.2.

Le deuxième terme correspond à la mesure de distance propre au radar modulé. La rampe descendante est utilisée pour distinguer les composantes de vitesse et de distan-

ce, puisque le terme Doppler conserve le même signe tandis le signe du deuxième terme s'inverse. Les formules permettant de calculer la vitesse et la distance sont alors données par:

$$v = \frac{c}{4\pi T} \frac{(\Delta\phi_{dp} + \Delta\phi_{dn})}{2f_c - \Delta F} \approx \frac{\lambda}{4T} \frac{(\Delta\phi_{dp} + \Delta\phi_{dn})}{2\pi} \quad (2:5)$$

$$d_0 \approx \frac{\lambda_{eq}}{4} \frac{(\Delta\phi_{dp} - \Delta\phi_{dn})}{2\pi}$$

avec $\lambda = c/f_c$ et $\lambda_{eq} = c/\Delta F$.

Ces formules peuvent être utilisées pour mettre en évidence différents points. Tout d'abord, le temps d'intégration T doit être grand devant le temps de propagation ce qui n'est généralement pas un problème pour des radars de faibles portées. En revanche, il doit être suffisamment grand pour permettre la mesure de vitesse, ce qui peut se résumer par la relation $T \gg 1/f_D$ où f_D est la fréquence Doppler du signal. Si cette condition n'est pas respectée, les phases des deux demi-cycles seront à peu près identiques (de signe opposé) et ne permettront pas la mesure de vitesse.

Pour aborder ensuite la question de la précision des mesures, supposons que la phase puisse être connue à π près, ce qui constitue une hypothèse très raisonnable, que la profondeur de modulation est de $\Delta F = 500$ MHz et le temps d'intégration $T = 1$ ms. Dans ce cas, les précisions obtenues sont de l'ordre de $\lambda/(8T) \approx 4$ m/s environ pour la vitesse et de $\lambda_{eq}/8 \approx 8$ cm pour la distance. Les précisions sont proportionnelles à la longueur d'ondes de la porteuse et à la bande passante du radar [25], traduisant une propriété générale des radars qui est que la résolution en distance ainsi que la précision sont liées linéairement à la bande passante du système. Signalons pour finir que le processus de mesure, qui est par nature un processus intégré, ne s'effectue qu'une fois par cycle, la cadence de mesure est donc donnée par le temps de cycle.

2.2.4 Le radar pulsé

2.2.4.1 Présentation

Les radars pulsés sont sans doute les radars les mieux connus du grand public, bien qu'il en existe en réalité une grande variété. Ce sont par exemple des radars pulsés qui équipèrent la *Chain home* (voir §2.1) dès 1937. Le principe de base du radar pulsé est d'émettre une impulsion, puis de mesurer les temps de vol des différents échos. L'une des formes les plus répandues, répertoriée sous le nom de radar Doppler Pulsé (*Pulse Doppler Radar*), répète l'émission à une fréquence suffisamment élevée pour obtenir une lecture de vitesse par décalage Doppler [16]. D'autres radars, dits radars de poursuite, utilisent un faisceau très étroit pour n'éclairer qu'une seule cible et peuvent mesurer directement les angles (azimut et élévation) sous lesquels la cible est vue, afin d'asservir la position du faisceau.

Les radars pulsés sont généralement destinés à des applications de longue ou moyenne portée; c'est le cas par exemple des radars de surveillance que l'on retrouve dans les aéroports ou les bâtiments de la marine. Mais ils peuvent également être utilisés pour de nombreuses autres applications telles que la détection de mines, la vision à travers les murs (radars ULB - Ultra Large Bande), le guidage des missiles ou encore la cartographie.

2.2.4.2 Caractéristiques

Les radars pulsés ont une complexité et un coût généralement très supérieurs aux radars continus décrits dans les paragraphes précédents, qui peuvent s'expliquer par des exigences technologiques beaucoup plus pointues. Les radars pulsés émettent à des puissances crêtes qui sont souvent de plusieurs ordres de grandeur supérieures à celles des radars continus et utilisent de ce fait des composants (amplificateurs) beaucoup plus onéreux. Ils nécessitent en outre l'emploi d'un duplexeur pour protéger l'étage d'entrée de la réception pendant l'émission, ainsi que des systèmes d'acquisition rapides pour enregistrer les impulsions très brèves.

Sans entrer dans les détails de fonctionnement des radars pulsés, signalons deux aspects qui doivent être considérés dans nos applications. Tout d'abord, un radar pulsé doit «fermer» sa réception pendant l'émission, il existe donc une distance, qui dépend de la durée de l'impulsion, en-dessous de laquelle aucune cible ne peut être détectée. Par exemple, une impulsion de 100 ns conduit à des distances minimales de 15 m. Ensuite, la répétition des impulsions conduit à des ambiguïtés en distance et/ou en vitesse. Si l'on appelle f_R la fréquence de répétition du radar alors les distances et les vitesses maximales sans ambiguïtés sont données par les formules suivantes [26]

$$R_{max} = \frac{c}{2f_R} \quad v_{max} = \frac{\lambda f_R}{4} \quad (2:6)$$

De ce point de vue, une fréquence de répétition de 300 kHz permettrait de mesurer sans ambiguïté toutes les vitesses jusqu'à 2000 m/s et les distances jusqu'à 150 m sans ambiguïté.

2.2.5 Choix d'une technologie radar

La principale contrainte technologique imposée par l'ISL est en premier lieu le coût du dispositif radar, celui-ci étant destiné à être dupliqué sur un même véhicule. Cette exigence écarte d'entrée de jeu les radars pulsés qui sont d'ailleurs plutôt voués à des applications de plus longue portée. Un rapide dimensionnement fondé sur les grandeurs du paragraphe précédent, à savoir une fréquence de répétition de 300 kHz pour une durée d'impulsion de 100 ns, montrent que la puissance crête d'un radar pulsé doit être environ 40 fois supérieure à celle d'un radar continu pour parvenir à des puissances moyennes équivalentes.

La deuxième contrainte portant sur la précision de la mesure, un choix logique opérerait pour des radars FM-CW. C'est le choix fait par la société américaine Nothrop Grumman en matière de protection active [27]. Les radars non modulés ne permettent pas en effet une mesure précise et directe de la distance.

Cependant, les radars que possédait l'ISL étaient de simples radars CW et son approche initiale s'est donc fondée sur cette technologie. Il est à noter que, en dehors des circonstances matérielles particulières qui ont guidé ce choix, ces radars présentent des atouts majeurs pour nos applications (§2.2.2): ils n'ont aucune ambiguïté en vitesse, pas de zone aveugle et, dès lors que la position d'une cible est connue, ils peuvent la poursuivre avec une très grande précision. Les radars CW peuvent donc apparaître comme un très bon choix, à la condition impérative de pouvoir estimer la distance de la cible à un moment quelconque. Ceci sera effectivement réalisé avec l'amélioration que permet le radar MFCW, présenté dans le paragraphe §2.5.

2.3 Quelques notions fondamentales

2.3.1 Equation radar

L'équation radar a pour but d'estimer la portée d'un radar. Il existe plusieurs modèles de complexités différentes mais nous nous limiterons ici au plus simple d'entre eux. Pour établir l'équation radar, on calcule tout d'abord la densité de puissance rayonnée à une distance R :

$$P_1 = \frac{P_E G_E}{4\pi R^2} \quad (2:7)$$

P_E désigne la puissance du signal émis par le radar et G_E le gain de l'antenne en émission. On considère ensuite que la cible se comporte comme un émetteur secondaire de puissance $P_1 \cdot \sigma$, où σ est la surface équivalente radar de la cible (voir §2.3.3). Pour finir, on calcule la puissance réfléchie P_R captée par le radar:

$$P_R = \frac{P_E G_E}{4\pi R^2} \times \frac{\sigma}{4\pi R^2} \times A_R \quad (2:8)$$

A_R désigne l'ouverture de l'antenne de réception, qui est reliée au gain de l'antenne de réception G_R par la formule $G_R = 4\pi A_R / \lambda^2$, où λ est la longueur d'onde. Dans le cas où les antennes d'émission et de réception sont identiques on obtient:

$$P_R = P_E \frac{\lambda^2 G^2}{(4\pi)^3 R^4} \times \sigma \quad (2:9)$$

On note la décroissance très rapide de la puissance avec la distance selon une loi en R^4 . La portée du radar se déduit de (2:9):

$$R_{max} = \left(\frac{P_E}{P_{min}} \times \frac{\lambda^2}{(4\pi)^3} \times G^2 \times \sigma \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2:10)$$

En exprimant les grandeurs en dB et pour un radar en bande X ($\lambda \approx 3$ cm), on obtient

$$40 \log(R_{max}) = P_E|_{dBm} - P_{min}|_{dBm} - 63,4 + 2G|_{dB} + \sigma|_{dB} \quad (2:11)$$

avec P_{min} la puissance du plus petit signal détectable (sensibilité tangentielle) et est généralement fixée par rapport à la puissance équivalente du bruit ramenée à l'entrée du radar.

2.3.2 L'effet Doppler

L'effet Doppler a été proposé pour la première fois en 1842 par le mathématicien et physicien autrichien Christian Andreas Doppler (1803-1853) dans le but d'expliquer l'origine de la couleur des étoiles. L'hypothèse a ensuite été vérifiée par le physicien Danois Christoph Hendrik Diederik Buys Ballot en 1845 à la faveur du développement des voies ferrées, l'une des rares sources sonores suffisamment rapide à cette époque pour mettre en évidence le phénomène. Le français Hipolytte Fizeau a découvert le même phénomène indépendamment, en 1848, alors qu'il étudiait les ondes électromagnétiques, si bien que le décalage spectral porte parfois le nom d'effet Doppler-Fizeau. Pour expliciter le phénomène, considérons une source (sonore, électromagnétique etc.) produisant une onde de fréquence f_0 . La phase de l'onde au niveau de la source pourra s'écrire $\phi(t, 0) = 2\pi f_0 t$. Si cette onde se propage à une vitesse c , la phase de l'onde à une distance d de la source devient:

$$\phi(t, d) = 2\pi f_0 \left(t - \frac{d}{c} \right) \quad (2:12)$$

La fréquence mesurée par l'observateur f_{OBS} s'obtient en dérivant la phase (et en divisant par 2π):

$$f_{OBS} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\phi(t, d)) = f_0 \left(1 - \frac{v}{c} \right) \quad (2:13)$$

où v est, par définition, la dérivée par rapport au temps de la distance séparant la source de l'observateur, c'est-à-dire la vitesse radiale de la source vue par l'observateur. Le terme v/c traduit le décalage en fréquence ou «l'effet Doppler» puisque la fréquence mesurée par l'observateur n'est plus la même que celle mesurée à la source.

Un radar Doppler délivre un signal correspondant à la différence de phase entre l'onde émise et l'onde réfléchi, appelée phase Doppler ϕ_D , produite par le trajet radar-cible-radar, soit une distance $2d$:

$$\phi_D = \phi(t, 0) - \phi(t, 2d) = 2\pi f_0 \frac{2d}{c} \quad (2:14)$$

Si le projectile est en mouvement relatif par rapport au radar, la distance peut se mettre sous la forme $d = d_0 + vt$ et, dans ce cas, la fréquence du signal est donnée par

$$f_D = k_r \cdot v \quad (2:15)$$

où k_r désigne la constante du radar, qui vaut

$$k_r = \frac{2f_0}{c} = \frac{2}{\lambda} \quad (2:16)$$

Pour un radar à 10 GHz (bande X) cette constante vaut approximativement $66,6 \text{ m}^{-1}$.

2.3.3 Surface équivalente Radar (SER)

La Surface¹ Equivalente Radar (SER), ou *Radar Cross Section* (RCS) en anglais, est la propriété d'une cible à retro-diffuser l'énergie électromagnétique qui l'éclaire. La SER est homogène à une surface mais, bien qu'elle soit reliée à la section géométrique de la cible, elle dépend fortement de beaucoup d'autres paramètres tels que la forme et la fréquence, si bien qu'elle diffère en général de plusieurs ordres de grandeur de la surface géométrique. Seule une sphère de très grande taille devant la longueur d'onde a une SER égale à sa section géométrique. Ceci nous permet de donner une interprétation de la SER d'une cible quelconque en la présentant comme la section (géométrique) de la sphère qui renverrait le même écho que la cible.

La définition de la SER σ d'une cible est

$$\sigma = \lim_{R \rightarrow \infty} 4\pi R^2 \cdot \frac{|E_r(R)|^2}{|E_0|^2} \quad (2:17)$$

Dans cette expression σ est la SER (mono-statique) de la cible, exprimée en m^2 ou en dBm^2 ($0 \text{ dBm}^2 = 1 \text{ m}^2$), $|E_r(R)|$ est l'intensité du champ électrique rétro-diffusé par la

1. On trouve également Section Equivalente Radar, traduction littérale de *Radar Cross Section*.

cible au niveau du radar et $|E_0|$ l'intensité du champ électrique de l'onde plane incidente. En toute rigueur, la SER dépend de la polarisation des champs considérés et doit donc être exprimée sous forme matricielle

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{vv} & \sigma_{vh} \\ \sigma_{hv} & \sigma_{hh} \end{bmatrix} \quad (2:18)$$

Par exemple, σ_{vh} est obtenue en considérant la composante verticale de l'onde incidente et la composante horizontale de l'onde réfléchie. Cependant, nous supposons dans toute l'étude que la SER est identique quelle que soit la polarisation considérée. Le diagramme de SER complet est obtenu en calculant la SER pour toutes les orientations de la cible; à ne pas confondre donc avec le diagramme de rayonnement qui s'intéresse à l'énergie réfléchie dans toutes les directions, mais pour une orientation unique de la cible.

Les cibles que nous sommes amenés à traiter dans notre étude sont :

- les flèches de petit et moyen calibres (blindage actif),
- les charges creuses (blindage actif),
- les balles de fusil (détection de tireur embusqué).

L'aspect confidentiel lié à la nature militaire des cibles rend les données de SER difficilement accessibles. Nous avons donc entrepris d'évaluer les SER par simulation, sur la base d'une géométrie simple de flèche de petit calibre.

Les simulations ont consisté à modéliser une flèche de 210 mm à l'aide du logiciel *CST Microwave Studio* et à tracer les diagrammes de rayonnement¹, et non pas de SER, pour différentes orientations de la flèche. La figure 2-3 montre la propagation du champ électrique autour de la flèche et la figure 2-4 donne le diagramme de rayonnement. On obtient une SER comprise entre -22 dBm^2 et -28 dBm^2 selon l'orientation de la flèche, et d'environ -25 dBm^2 pour une incidence normale (la flèche est éclairée de face). L'étude de la propagation du champ électrique montre qu'une grande partie de l'énergie est réfléchie par l'empennage de la flèche. Ceci peut s'expliquer par le fait que le corps de la flèche, dont le diamètre est inférieur au centimètre, est de petite dimension devant la longueur d'onde (3 cm à 10 GHz), tandis que les ailettes ont des dimensions comparables à la longueur d'onde.

1. Le logiciel CST ne permettant pas de tracer directement des diagrammes de SER

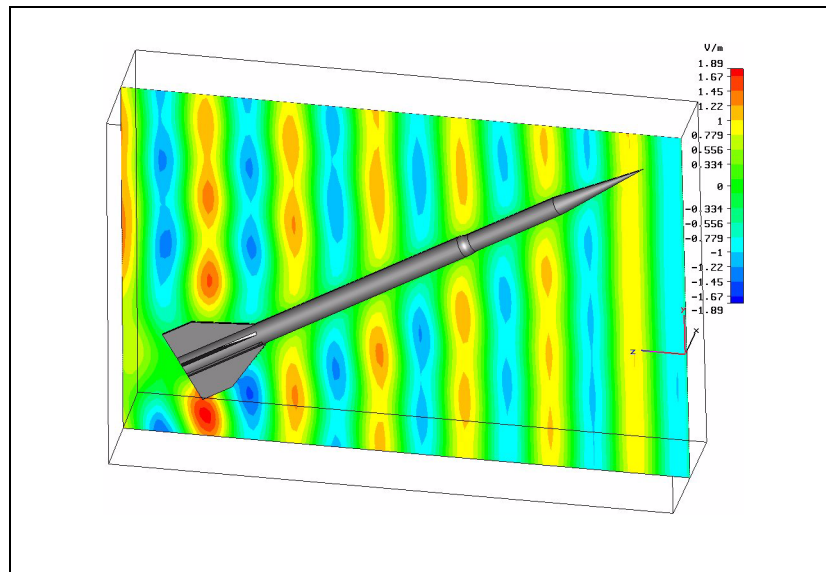


Figure 2-3 : Simulation de la SER d'une flèche de 210 mm inclinée de 60° - Propagation du champ électrique

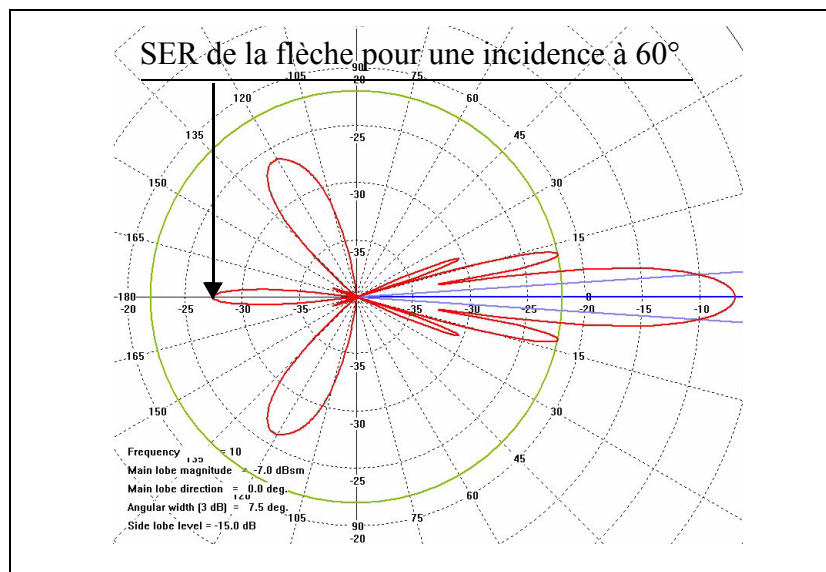


Figure 2-4 : Diagramme de rayonnement

En première approximation, la flèche peut donc être modélisée par un réflecteur ponctuel situé au niveau de l'empennage d'une SER de -25dBm^2 . Une amélioration du modèle consiste à introduire un second point réfléchissant situé vers le nez de la flèche, mais dont la SER est plus faible, traduisant les réflexions causées par le nez du projectile. Ce deuxième point réfléchissant permettra d'expliquer le phénomène dit de *scintillement* de la cible, observé dans les mesures expérimentales (voir §2.5.8.3).

Pour l'application de détection de tireur embusqué, les cibles étant beaucoup plus petites que les projectiles flèche, les SER sont naturellement beaucoup plus faibles. Des ordres de grandeurs sont donnés dans [4] et [28], on trouve par exemple une SER de -38dBm^2 à -48dBm^2 pour un projectile de calibre 7,52 mm à une fréquence de 10 GHz. Les radars développés visant essentiellement l'application du blindage actif, il ne permettent pas de «voir» des projectiles aussi petits que des balles sur des portées suffi-

santes. Nous limitons donc l'étude de la détection de tireur embusqué aux traitements des signaux sans nous soucier de la façon dont ils ont été obtenus.

2.3.4 Fouillis (*clutter*)

Dans un environnement réel d'utilisation, la cible n'est pas la seule source d'échos. De nombreux éléments du paysage tels que le sol, les bâtiments, les véhicules etc., produisent également des réflexions de l'onde radar. Ces réflexions indésirables provoquent un bruit de fond appelé fouillis, *clutter* en anglais, difficile à appréhender puisqu'il dépend fortement de l'environnement d'utilisation. Beaucoup d'approches du problème peuvent être trouvées dans la littérature (voir [29] par exemple), fondées soit sur des mesures ou des lois empiriques, soit sur des théories plus complexes, mais elles restent dans l'ensemble très liées à un environnement particulier.

Pour étudier le fouillis on considère que l'environnement est constitué d'un ensemble de réflecteurs indépendants, c'est-à-dire ne possédant pas de relation de phase, dont on additionne les puissances pour former le fouillis total. La puissance totale du fouillis peut donc se mettre sous la forme d'une intégrale qui somme toutes les contributions dans la tache d'éclairage :

$$P_c = \frac{P_t G_t A}{(4\pi)^2} \int_{tache} \frac{\sigma^0(\varphi, \theta)}{R^4} dS \quad (2:19)$$

où σ^0 désigne la SER d'un élément de surface exprimée en m^2/m^2 , qui dépend en toute rigueur de l'angle d'illumination, de la nature du milieu etc.

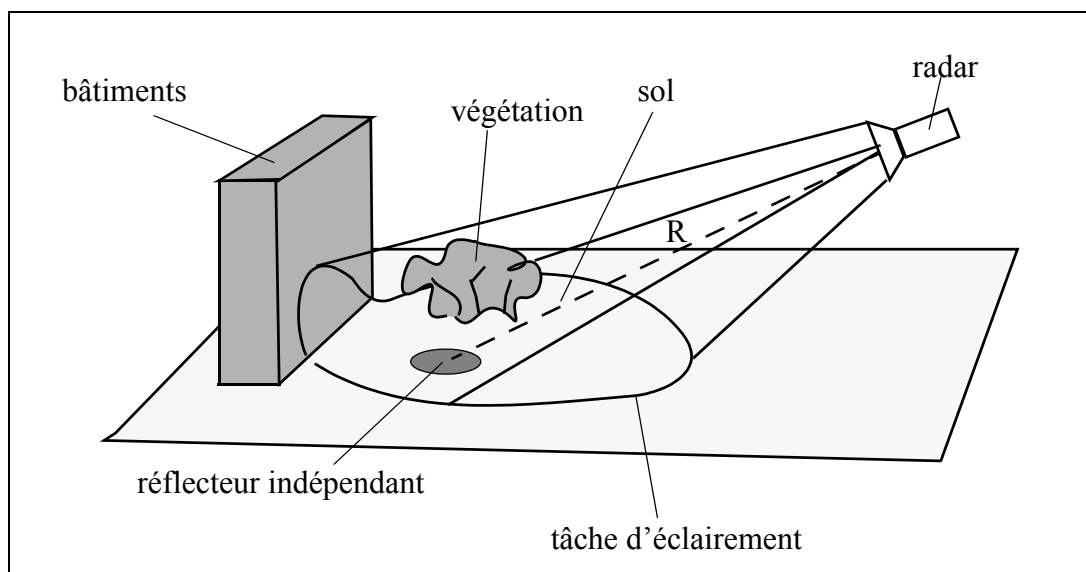


Figure 2-5: illustration du phénomène de fouillis

Cette expression n'est pas *a priori* d'une grande utilité pratique, mais elle permet d'introduire le σ^0 qui définit la propriété de fouillis d'un milieu et elle met en évidence le fait que le fouillis diminue en R^2 , puisque la tache croît en R^2 alors que la puissance décroît en R^4 .

On peut dégager deux caractéristiques importantes qui distinguent le fouillis de la cible :

- les échos du fouillis sont généralement beaucoup plus importants que ceux de la cible puisqu'ils correspondent à des surfaces très supérieures à celle de la

cible,

- les décalages Doppler du fouillis sont très faibles car le paysage est dans l'ensemble fixe par rapport au radar, à quelques exceptions près comme le mouvement de la végétation, des vagues ou du trafic routier par exemple, ou encore quand le radar est lui-même en mouvement par rapport à un paysage fixe.

Dans l'application qui nous intéresse, toutes les cibles considérées ont des vitesses très élevées, ce qui permet de distinguer clairement le spectre Doppler de la cible de celui du fouillis. En sélectionnant par filtrage la plage de vitesse correspondant aux cibles (500 m/s à 2000 m/s), on règle en principe le problème du fouillis sans difficulté. Cependant, le spectre du fouillis n'est pas uniquement limité aux mouvements du paysage qui donnent une contribution dans les basses fréquences. Il intervient aussi à plus haute fréquence par la réflexion du bruit de phase de l'oscillateur radar. Si la puissance de ce bruit est très inférieure à la puissance de la porteuse, les très larges surfaces de réflexion peuvent compenser ce déficit et limiter considérablement la portée du radar. Ce point essentiel sera traité dans le paragraphe §2.4.11.3.

2.3.5 Les trajets multiples (multi-paths)

On considère généralement dans les applications radar que l'onde éclairant la cible ainsi que celle réfléchi par elle suivent une trajectoire directe. Cependant, dans un environnement réel, les échos de la cible parvenant au radar peuvent avoir emprunté des trajets différents en se réfléchissant sur des éléments de l'environnement comme le sol ou les bâtiments. Si l'on considère que ces réflecteurs secondaires se comportent comme des miroirs électromagnétiques, les trajets multiples de l'onde, *multi-paths* en anglais, peuvent conduire à l'apparition de cibles images comme le montre la figure 2-6.

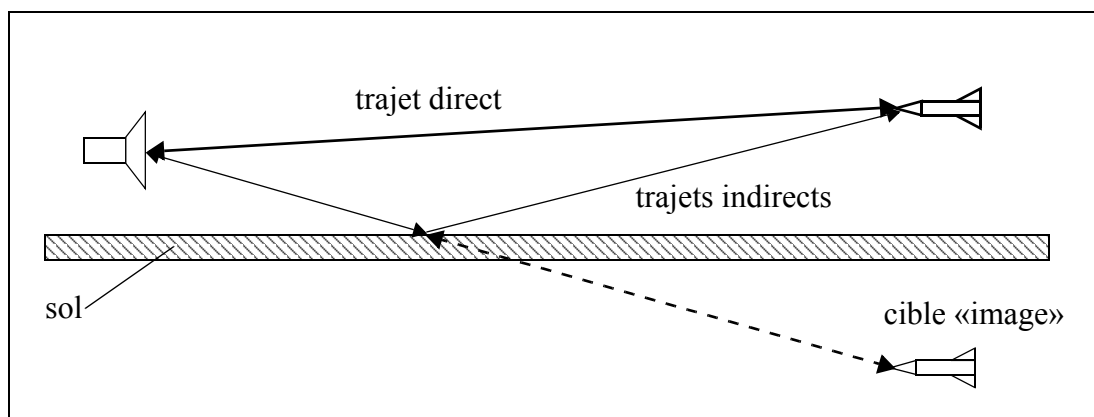


Figure 2-6: Illustration des trajets multiples

Bien que ces cibles images renvoient des échos beaucoup plus faibles que la cible réelle car l'onde est en partie absorbée par le réflecteur secondaire et car le trajet est plus long, il n'en demeure pas moins qu'elle interfère avec l'onde directe et dégrade ainsi la précision de localisation¹. De plus, la cible image évolue quasiment à la même vitesse que la cible réelle et ne peut donc pas être éliminée par filtrage doppler.

1. Ce phénomène de *fading* est le même que celui observé par les pionniers du radar (voir §2.2.1) lorsqu'un avion survolait une liaison radio-télégraphique: le trajet indirect *via* l'avion interférait avec la transmission directe pour créer un phénomène de battements.

2.3.6 Modèle de synthèse des signaux continus non modulés

Nous terminons cette présentation des phénomènes intervenant dans les applications radars en proposant un modèle qui reprend les différents points évoqués, avec pour objectif la compréhension des différents phénomènes observés expérimentalement. Les deux types de radars utilisés dans cette étude, à savoir les radars CW et MFCW, délivrent des signaux identiques. La seule différence entre le radar CW et le radar MFCW, est que ce dernier délivre plusieurs signaux correspondants à des fréquences porteuses différentes. Notre analyse se limitera donc au cas d'un signal unique.

Modèle standard

Pour établir ce modèle, nous supposons que l'écho radar est causé par une seule cible sphérique observée dans un espace vide, c'est-à-dire que nous négligerons les effets dus au scintillement de la cible et aux trajets multiples. Nous n'aborderons pas non plus la question du bruit qui sera traitée dans le paragraphe §3.3.

La phase du signal radar est alors donnée par la différence de phase entre l'onde émise et l'onde réfléchi (voir §2.3.2) à laquelle s'ajoute un terme de phase constant ϕ_0 propre au radar utilisé. L'amplitude du signal est donnée par l'équation radar (voir §2.3.1). On obtient donc l'expression suivante:

$$s(d) = \frac{A_I}{d^2} \sin\left(4\pi \frac{d}{\lambda} + \phi_0\right) \quad (2:20)$$

L'amplitude à un mètre A_I regroupe l'ensemble des paramètres constants qui interviennent dans l'équation radar, seule la dépendance en distance est laissée explicite. On note que l'amplitude diminue avec le carré de la distance (et non pas la puissance quatre) car il s'agit bel et bien de l'amplitude des signaux et non pas de leur puissance. Pour faire apparaître une dépendance temporelle, nous supposons que la distance évolue avec le temps selon la relation $d = d_0 + vt$, ce qui nous conduit à:

$$s(t) = \frac{A_I}{d^2} \sin\left(2\pi f_D t + \frac{4\pi d_0}{\lambda} + \phi_0\right) \quad (2:21)$$

avec f_D la fréquence Doppler introduite au paragraphe §2.3.2.

Extension du modèle standard

Les enregistrements expérimentaux montrent que le modèle standard ne permet pas toujours de caractériser le signal radar complètement. Pour affiner la description des mesures, nous introduisons le phénomène de scintillement de la cible (§2.3.3), au travers d'un modèle à deux sphères, et celui des trajets multiples (§2.3.5). Ces deux phénomènes étant très variables selon l'expérience considérée, ces extensions du modèle visent plus une interprétation qualitative des signaux qu'une caractérisation quantitative. Signalons enfin que ce modèle s'inspire d'une étude précédente que l'on pourra trouver dans [30].

On considère ici que la flèche de petit calibre est constituée de deux sphères réfléchissantes, séparées d'une distance L , matérialisant les deux points brillants évoqués au paragraphe §2.3.3. Le rapport des coefficients de réflexion entre les deux sphères est noté ρ .

Le sol est assimilé à un miroir électromagnétique (pas de diffusion), son coefficient de réflexion est noté Γ . On supposera qu'il existe en tout quatre chemins de propagation de l'onde entre le radar et le projectile, à savoir:

- radar - projectile - radar (direct)
- radar - sol - projectile - radar
- radar - projectile - sol - radar
- radar - sol - projectile - sol - radar

Les trajets 2 et 3 sont équivalents et peuvent être traités sans distinction. Le trajet 4 sera négligé car il comporte deux réflexions par le sol et conduit donc à des échos de faibles amplitudes par rapport aux autres chemins.

La figure 2-7 illustre le modèle retenu et détaille les différentes grandeurs impliquées.

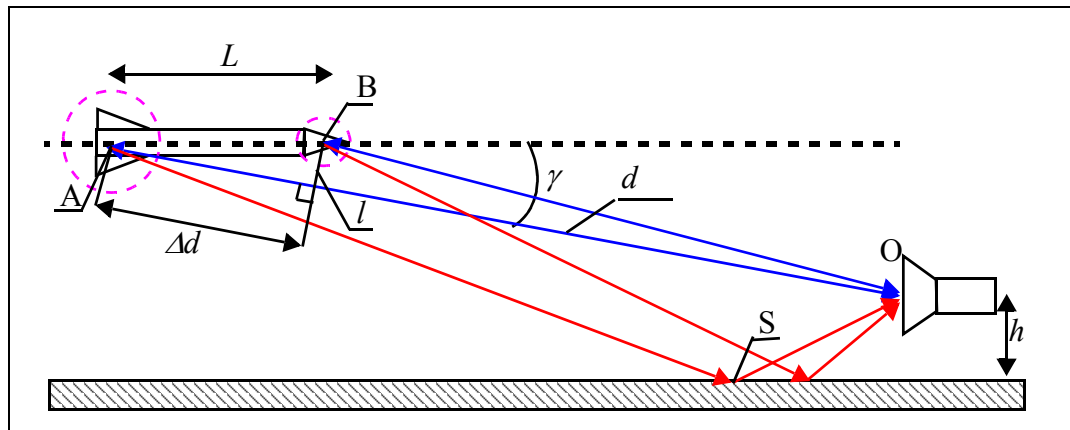


Figure 2-7: présentation du modèle

Le radar reçoit quatre échos au total : un écho direct et indirect pour chacune des deux sphères. Nous cherchons à analyser la manière dont se composent ces différents signaux au niveau du radar, afin d'étudier la perturbation engendrée sur les mesures de vitesses. On s'intéressera principalement au scintillement de la cible causé par l'interaction des deux sphères ainsi qu'au phénomène de trajets multiples.

2.3.6.1 Scintillement de la cible

On appelle $s_A(d)$ et $s_B(d)$ les signaux causés par les réflexions sur les sphères A et B respectivement. D'après l'équation (2:20) du modèle standard, on obtient

$$s_A(d) = \frac{A_I}{d^2} \cos\left(4\pi \cdot \frac{d}{\lambda} + \phi_0\right) \quad (2:22)$$

$$s_B(d) = \rho \frac{A_I}{d^2} \cos\left(4\pi \cdot \frac{d - \Delta d}{\lambda} + \phi_0\right)$$

On peut développer l'expression de Δd en faisant intervenir l'angle γ ce qui conduit à

$$s_B(d) = \rho \frac{A_I}{d^2} \cos\left(4\pi \cdot \frac{d - L \cos(\gamma)}{\lambda} + \phi_0\right) \quad (2:23)$$

Le signal résultant $s_{A+B}(d)$, est égal à la somme des deux signaux

$$\begin{aligned}
 s_{A+B}(d) &\approx \frac{A_I(1-\rho)}{d^2} \cos\left(4\pi \cdot \frac{d}{\lambda} + \phi_0\right) + \dots \\
 &\dots + \rho \cos\left(4\pi \cdot \frac{d - (L/2)\cos(\gamma)}{\lambda}\right) \cos\left(4\pi \cdot \frac{L\cos(\gamma)}{\lambda}\right)
 \end{aligned}
 \tag{2:24}$$

Le dernier terme de la formule (2:24) montre que la présence de deux points réfléchissants conduit à une modulation de l'amplitude du signal; la profondeur de modulation étant donnée par le coefficient ρ . La position des minima d'amplitude répond à la relation:

$$4 \frac{L \cos(\gamma)}{\lambda} = n + \frac{1}{2} \quad n \in \mathbb{N}
 \tag{2:25}$$

On doit donc s'attendre à observer des diminutions brutales de l'amplitude du signal pour certains angles γ .

2.3.6.2 Trajets multiples

Le phénomène des trajets multiples se traite de manière similaire à celui du scintillement. Pour des raisons de clarté, nous nous limiterons aux réflexions d'une seule sphère, la sphère A par exemple, et noterons $s_d(d)$ et $s_i(d)$ les signaux issus des trajets directs et indirects respectivement.

La longueur du trajet OSA (voir figure 2-7) vaut:

$$(OSA) = d \sqrt{1 + \left(\frac{2h}{d}\right)^2} + \frac{2h}{d} \sin(\gamma)
 \tag{2:26}$$

En supposant la distance grande devant la hauteur du radar, $d \gg 2h$, le terme quadratique peut être négligé et l'expression (2:26) se simplifie en :

$$(OSA) \approx d \sqrt{1 + \frac{2h}{d} \sin(\gamma)} \approx d + h \sin(\gamma)
 \tag{2:27}$$

La différence de marche entre les ondes directe et indirecte prend donc une expression tout à fait similaire à celle obtenue entre les deux sphères, ce qui conduit évidemment au même type de signal modulé:

$$\begin{aligned}
 s_{d+i}(d) &\approx \frac{A_I(1-\Gamma)}{d^2} \cos\left(4\pi \cdot \frac{d}{\lambda} + \phi_0\right) + \dots \\
 &\dots + \Gamma \cos\left(4\pi \cdot \frac{d + (h/4)\sin(\gamma)}{\lambda}\right) \cos\left(4\pi \cdot \frac{(h/2)\sin(\gamma)}{\lambda}\right)
 \end{aligned}
 \tag{2:28}$$

2.3.6.3 Commentaires

Le modèle proposé néglige beaucoup d'aspects qui sont d'ailleurs difficilement accessibles à une analyse théorique, mais il permet tout de même de progresser dans la compréhension des différents phénomènes qui interviennent dans les mesures. Au-delà du modèle le plus simple qui prévoit un seul réflecteur ponctuel dans un espace vide conduisant à un signal sinusoïdal avec une décroissance quadratique, nous avons pu mettre en évidence deux phénomènes qui créent une modulation du signal de base. Ces deux effets peuvent être distingués par la fréquence et la profondeur de la modulation. En

effet, la distance h est généralement beaucoup plus importante que la longueur L , ce qui conduit à une fréquence de modulation plus élevée qui permet de différencier clairement les deux effets.

Le modèle a été confronté à des enregistrements expérimentaux obtenus à l'aide du radar BMDM9550. Nous avons utilisé les paramètres suivants pour le modèle :

$$\begin{array}{llll} x_0 = 9,7 \text{ m} & y_0 = 1,8 \text{ m} & h = 1 \text{ m} & v_0 = 1,98 \text{ km/s} \\ L = 0,189 \text{ m} & \rho = 1,5 & \Gamma = 0,2 & \lambda = 0,0313 \text{ m} \end{array}$$

Le projectile utilisé pour le tir était un projectile flèche de 210 mm de long ce qui peut correspondre avec la longueur L utilisée. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 2-8 et la figure 2-9.

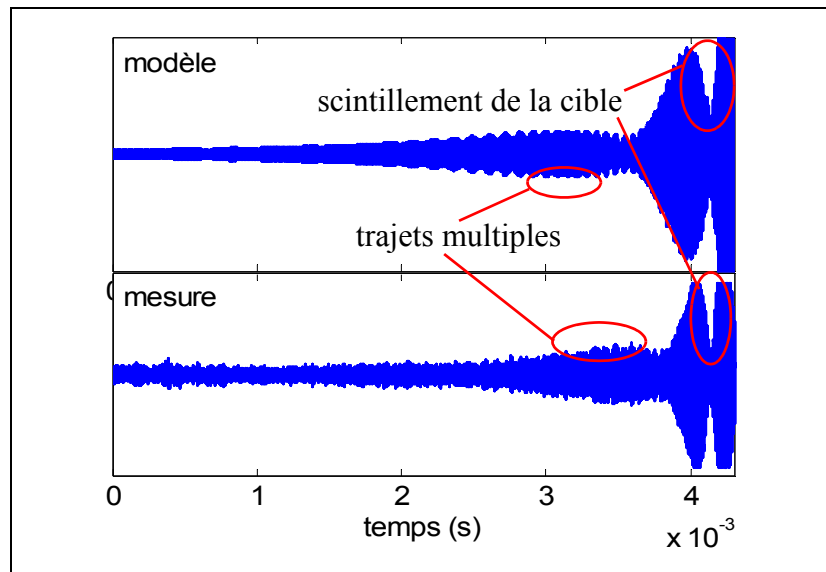


Figure 2-8 : Comparaison entre la mesure et le modèle - signaux bruts

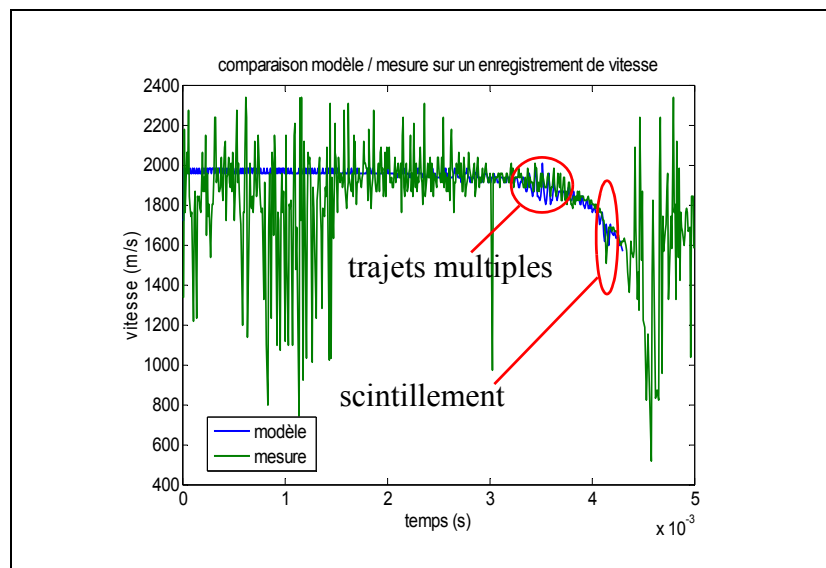


Figure 2-9 : Comparaison entre la mesure et le modèle - courbes de vitesses

On observe que le modèle et les enregistrements expérimentaux rendent, qualitativement, le même aspect aux courbes ce qui prouve que les phénomènes étudiés suffisent à décrire globalement les courbes. Bien que le modèle ne puisse pas, à ce niveau, dé-

crire les mesures avec suffisamment de précision pour quantifier les différentes grandeurs, il met en évidence de manière qualitative la présence des deux phénomènes que sont les trajets multiples et le scintillement de la cible. On peut en effet, à l'aide du modèle, aisément étudier l'influence des deux phénomènes en les supprimant tour à tour afin d'isoler leur influence sur l'allure des courbes. On trouve alors que le scintillement se traduit par de profondes modulations basses fréquences tandis que le phénomène des trajets multiples engendre des modulations plus rapides et de profondeurs plus faibles. On utilisera ces deux types de modulations comme des indicateurs de la présence des deux phénomènes.

2.4 Etude et réalisation d'un radar continu (CW radar)

2.4.1 Problématique

Initialement, la méthode de localisation des projectiles exploite le signal d'un radar Doppler continu. La plage de vitesse considérée pour des projectiles flèches s'étend de 700 m/s à 2000 m/s ce qui correspond à des fréquences Doppler de 50 kHz à 150 kHz pour un radar en bande X (voir §2.3.2). Afin de disposer de signaux exploitables et d'un temps de riposte suffisant, on souhaite observer le projectile à partir d'une distance de 30 m environ¹.

2.4.2 Description du radar BMDM 9550

Le radar BMDM 9550 repose sur une architecture des plus simples (voir figure 2-10). Le signal hyperfréquence est généré par une diode gunn (1) et est directement dirigé vers l'antenne d'émission/réception (3) par le circulateur (2). L'onde réfléchi est captée par la même antenne et est dirigée vers le détecteur (4) par le circulateur. Une partie du signal issu de l'oscillateur est transmise directement au détecteur en utilisant les défauts d'isolation du circulateur. En effet, les atténuations d'un circulateur dans le sens inverse (c'est-à-dire le couplage du port 1 vers le port 3 par exemple) sont de l'ordre de -20 dB, ce qui permet de coupler une puissance de -5 dBm environ du signal émis au niveau du détecteur. Le détecteur reçoit donc la somme du signal émis $s_e(t)$ et du signal réfléchi $s_r(t)$:

$$s_e(t) + s_r(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \phi_0) + \alpha A \cos(2\pi(f_0 + f_D)t + \phi_0 + \Delta\phi) \quad (2:29)$$

Le coefficient α indique la proportionnalité entre l'amplitude du signal émis A et l'amplitude du signal réfléchi αA . Le détecteur étant sensible à la puissance moyenne du signal, les composantes hyperfréquences sont rejetées et le signal en sortie du radar est donné par:

$$s(t) = KA^2[1 + \alpha^2 \cos(2\pi f_D t + \Delta\phi)] \quad (2:30)$$

Le facteur K est une caractéristique du détecteur dont l'ordre de grandeur est de 2000 mV/mW environ (ACSP-2523NC3).

1. Ils s'agit de contraintes *a minima* qui ne garantissent pas le bon fonctionnement de la méthode. Nous verrons en effet que cette approche par radar Doppler se révèle être inopérante par nature.

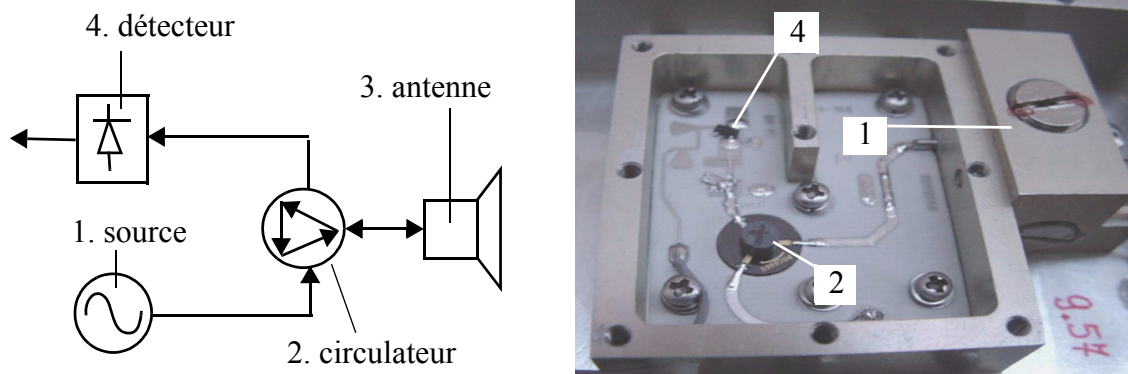


Figure 2-10 : Architecture du radar BMDM 9550

Comme son architecture le laisse supposer, l'inconvénient de ce radar est que ses performances sont très limitées. En s'appuyant sur les données du constructeur (tableau 2-1), on peut établir une estimation de la portée d'après l'équation radar en prenant :

$$\begin{aligned}
 P_E|_{dB} &= 17 \text{ dBm} & P_{min}|_{dB} &= -58 \text{ dBm} \\
 G|_{dB} &= 16 \text{ dB} & \sigma|_{dB} &= -25 \text{ dBm}^2
 \end{aligned}
 \tag{2.31}$$

La sensibilité tangentielle est calculée pour une bande vidéo de 100 kHz qui correspond à la plage utile de notre application et est de ce fait meilleure que la sensibilité tangentielle donnée par le constructeur, qui correspond à une bande vidéo de 1 MHz. L'application de l'équation (2:11) donne $R_{max} \approx 3 \text{ m}$ environ. Ce résultat concorde avec les mesures expérimentales qui montrent que le projectile est invisible pour des distances supérieures à quelques mètres (figure 2-49). La plage d'observation est donc très nettement insuffisante pour enregistrer des signaux exploitables. C'est pourquoi nous avons entrepris de réaliser un radar plus performant.

Tableau 2-1 : Caractéristiques techniques du radar BMDM9550

Fréquence	9.57 GHz
Stabilité en fréquence	400 ppm
Puissance de sortie	50 mW (17 dBm)
Sensibilité tangentielle	-48 dBm
Bande passante du signal vidéo	1 MHz
Gain d'antenne	16 dB
Polarisation d'antenne	linéaire

2.4.3 Architecture du radar ISL

L'architecture du radar apparaît figure 2-11. L'amélioration des performances du radar est principalement due à l'intégration de deux étages d'amplification hyperfréquence. Un premier amplificateur de puissance (3) porte la puissance d'émission à 1 W (30 dBm) environ. La chaîne de réception intègre un amplificateur faible bruit (6) d'un

gain de 30 dB. L'introduction de ces deux amplificateurs a pour effet d'augmenter le rapport puissance d'émission / sensibilité en réception, ce qui impose de séparer les antennes d'émission et de réception pour obtenir une isolation suffisante. En effet, dans la configuration utilisant une antenne unique, l'isolation entre l'émission et la réception est assurée par un circulateur. Or nous avons vu que cette isolation est de l'ordre de -20 dB environ, donc la puissance directement couplée vers le LNA (*Low Noise Amplifier*) est de l'ordre de 10 dBm, ce qui risque de provoquer une saturation de l'amplificateur. De plus, les composantes spectrales parasites de la source qui se situent dans la bande utile sont très peu atténuées et risquent donc de devenir prépondérantes devant le signal Doppler. Le problème de couplage entre l'émission et la réception, connu sous le nom de *spillover* en anglais, est l'un des principaux facteurs limitant des radars CW [16].

Contrairement au radar présenté au paragraphe §2.4.2, où la démodulation est effectuée par détection de puissance, on utilise ici une démodulation homodyne : le signal de réception est mélangé avec l'oscillateur(1) pour transposer le spectre hyperfréquence directement vers le continu. Cette solution a été préférée à une démodulation hétérodyne pour des raisons de simplicité et donc de coût.

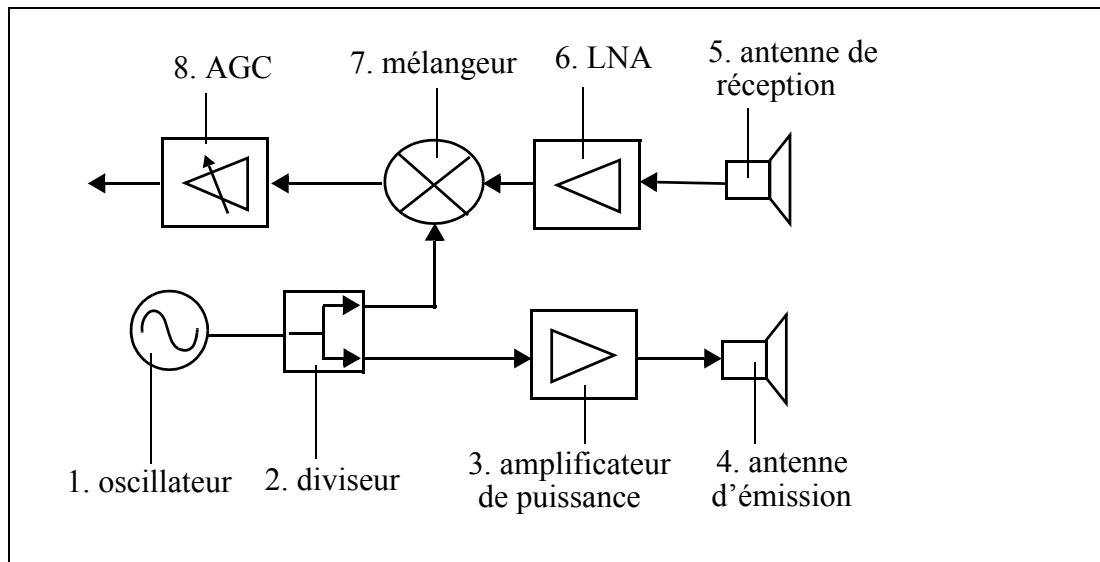


Figure 2-11: Architecture du radar ISL

2.4.4 Source (1) - REMEC MDR6100

2.4.4.1 Oscillateur hyperfréquence PL-DRO

La source utilisée est un PL-DRO (*Phase Locked Dielectric Resonator Oscillator*). Il s'agit d'une source DRO dont la fréquence d'oscillation est asservie sur une référence externe. L'intérêt de la technologie DRO pour notre application est lié au faible bruit de phase de l'oscillateur. En effet, la présence d'un couplage direct non négligeable entre l'émission et la réception nous oblige à considérer les flancs du spectre de la source, puisqu'ils apparaissent dans la bande utile (bande Doppler) comme indiqué sur la figure 2-12.

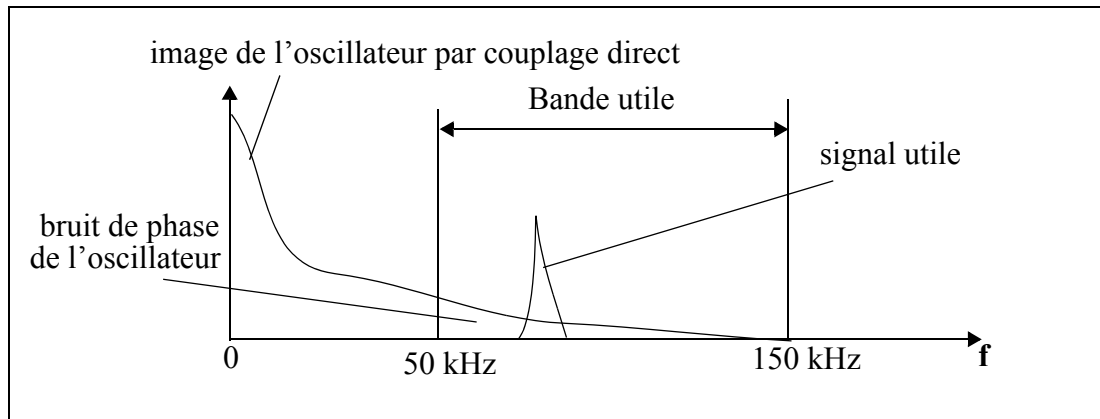


Figure 2-12: Spectre de la bande vidéo (après démodulation)

Le bruit de phase de la source utilisée est de -112 dBc/Hz à 50kHz et de -115 dBc/Hz à 150 kHz environ, où les dBc (*dB under Carrier*) expriment une puissance par rapport à celle de la porteuse. Nous verrons au paragraphe §2.4.11.3 que le bruit de phase constitue l'une des principales perturbations en cas de mauvaise isolation émission/réception.

Le choix d'une source asservie sur une référence externe peut sembler superflu a priori pour les besoins du radar Doppler, puisque les DRO ont intrinsèquement une bonne stabilité en fréquence (typiquement 4 ppm/°C) ainsi qu'une bonne précision (± 100 kHz à 500 kHz @10 GHz). Si ce choix est à l'origine simplement justifié par une offre de prix avantageuse du fournisseur des PL-DRO, nous verrons qu'il s'est révélé par la suite fort judicieux pour le développement du radar MFCW (§2.5).

Le deuxième point à considérer est la puissance de sortie de source, 13 dBm dans notre application, puisqu'elle alimente le mélangeur et définit de ce fait son niveau de saturation (voir §2.4.8 et §2.4.9).

2.4.4.2 Synthétiseur de fréquence

La source PL-DRO requiert une référence externe très stable pour asservir sa fréquence d'oscillation. La fréquence de référence doit être un sous-multiple (80 ou 84) de la fréquence du PL-DRO (voir tableau 2-2). Un réglage mécanique permet de faire varier la fréquence d'utilisation du PL-DRO à ± 20 MHz de sa fréquence nominale. Une fois le réglage mécanique effectué, la «plage d'accrochage» de la PL-DRO est de 10 MHz environ autour de la fréquence d'utilisation.

Tableau 2-2 : Caractéristiques des sources utilisées

Source et freq. nominale	fréq. utilisation	freq. référence	mul.
Source 1 (10,752 GHz)	10,77090 GHz	128,225 MHz	84
Source 2 (10,752 GHz)	10,72050 GHz	127,625 MHz	84
Source 3 (10,240 GHz)	10,24000 GHz	128,000 MHz	80
Source 4 (10,240 GHz)	10,25000 GHz	128,125 MHz	80

Afin de générer les signaux de référence servant à contrôler les sources, nous avons dé-

veloppé un synthétiseur de fréquence programmable. Ce synthétiseur est construit autour d'un composant intégré: le SPLL121SA de Synergy Microwave, qui permet de générer des fréquences de 121 à 176 MHz par pas de 12,5 kHz. L'architecture du synthétiseur est illustrée figure 2-13, le schéma complet est donné dans l'annexe I.

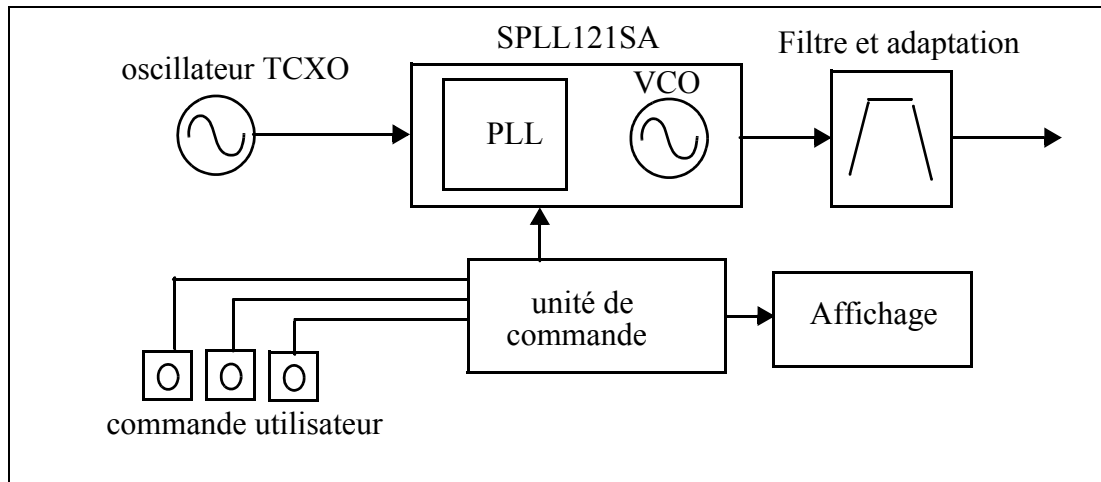


Figure 2-13 : Architecture du synthétiseur de fréquence

Une fréquence de référence de 10 MHz est produite par un quartz de haute précision compensé en température (TCXO). La stabilité en fréquence du radar est directement fixée par celle du quartz, qui est ici de 1 ppm. Le composant SPLL121SA intègre une PLL (*Phase Locked Loop*) programmable, qui est en fait le LMX2332A de National Semiconductors, ainsi qu'un VCO (*Voltage Controlled Oscillator*). L'architecture de la PLL est donnée figure 2-14. La programmation de la PLL consiste à affecter une valeur aux trois compteurs *R*, *N* et *P* via un protocole série. Ces trois compteurs définis-

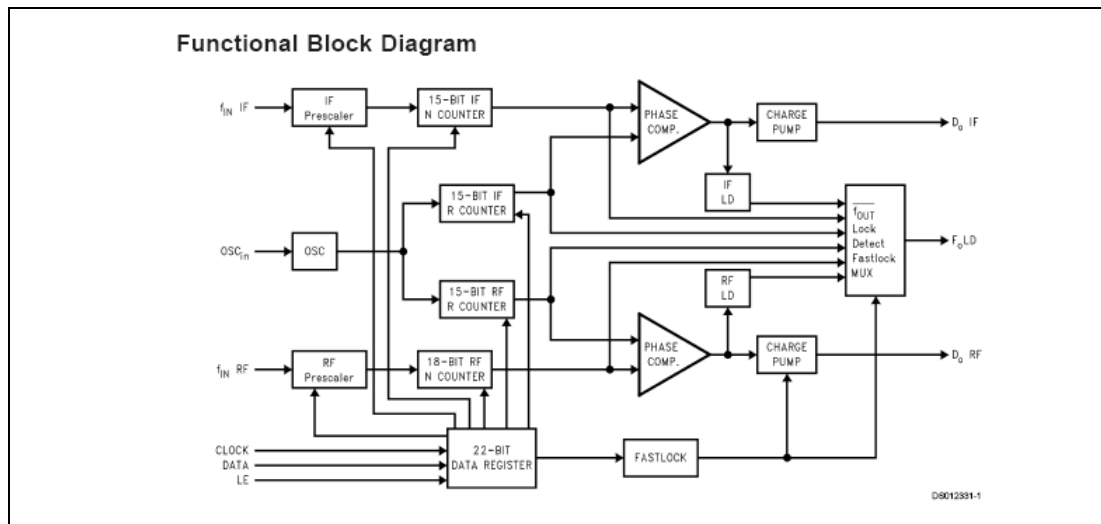


Figure 2-14 : Architecture de la PLL LMX2332

sent la fréquence d'oscillation du VCO selon la formule:

$$f_{VCO} = [P \times B + A] \cdot \frac{10 \text{ MHz}}{R} \quad (2:32)$$

La concaténation des compteurs *A* et *B* forme le compteur *N*. *A* comporte 5 bits (0 à

127), B 11 bits (3 à 2047), R 15 bits (3 à 32767) et P 1 bit dont la valeur dépend de la configuration utilisée. Les valeurs des compteurs pour chacune des sources sont données dans le tableau 2-3.

Tableau 2-3 : configuration des compteurs pour chacune des sources

Freq. ref	A	B	R	P
128,225 MHz	2	641	800	16
127,625 MHz	2	638	800	16
128,000 MHz	0	160	800	64
128,125 MHz	10	160	800	64

Le pas en fréquence ainsi obtenu est de $\Delta f = 10/800 = 12,5$ kHz pour la fréquence de référence. Le pas en fréquence de la source hyperfréquence est alors de 1 MHz et 1,05 MHz pour des facteurs multiplicatifs de 80 et 84 respectivement.

Un filtre a été ajouté en sortie du synthétiseur afin d'atténuer les harmoniques 2 et 3 du VCO ainsi qu'un diviseur de puissance pour adapter le niveau de sortie du synthétiseur au niveau d'entrée du PL-DRO. Les détails du dimensionnement du filtre sont donnés dans l'annexe II.

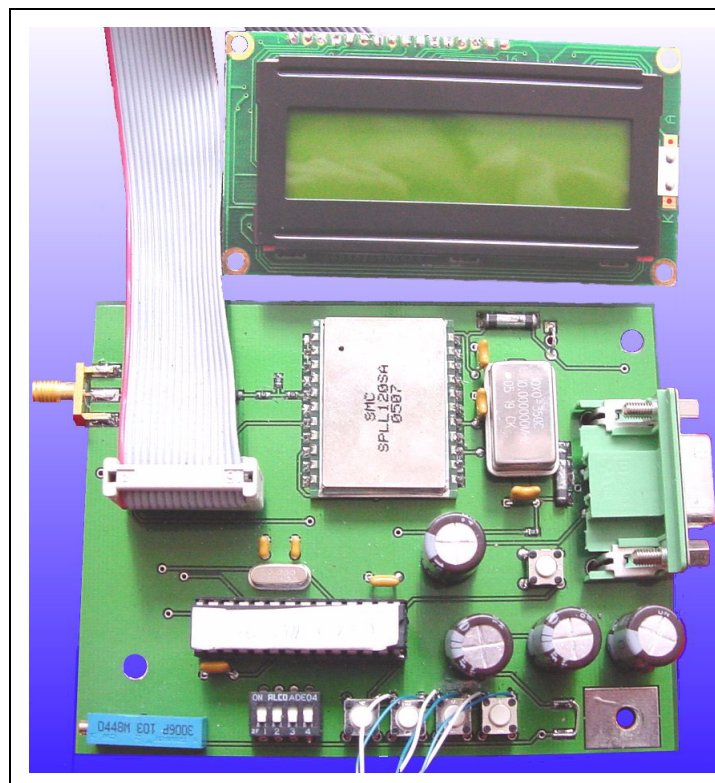


Figure 2-15 : Synthétiseur de fréquence

L'unité de commande est constituée d'un microcontrôleur PIC16F872 fabriqué par la société Microchip. Il s'agit d'un microcontrôleur 8 bits possédant 4 Kb de mémoire FLASH¹ ainsi que 3 ports d'E/S. Brièvement, ses tâches sont de scruter les boutons

1. La mémoire FLASH est une mémoire non-volatile reprogrammable.

servant à incrémenter et décrémenter la fréquence, gérer son affichage et programmer le SPL121SA. Le programme a été écrit en assembleur mais ne présente pas de réel intérêt et ne sera donc pas discuté ici.

2.4.5 Diviseur de puissance - MAC P8206-2

Le diviseur de puissance permet la séparation du signal vers l'émission d'une part et le mélangeur d'autre part. Le diviseur entraîne une perte de puissance¹ de -3dB par voie puisque le signal est divisé en deux. Un diviseur a été utilisé au lieu d'un coupleur, qui prélève une fraction beaucoup plus faible du signal, afin d'alimenter le mélangeur avec un maximum de puissance et augmenter ainsi le niveau de saturation de ce dernier. En effet, la puissance maximale admissible sur le port d'entrée du mélangeur est d'environ -7 dB par rapport à la puissance de l'oscillateur local.

2.4.6 Amplificateur de puissance (3) - CIAO CA910-521

L'amplificateur de puissance porte la puissance d'émission à +30 dBm (1 W). Nous avons volontairement limité la puissance à l'émission car les dB gagnés à cet endroit sont beaucoup plus onéreux que ceux gagnés en réception. De ce fait, la puissance retenue de +30 dBm constitue un compromis entre portée et prix de revient. Il faut également ajouter que les défauts d'isolation entre l'émission et la réception limitent le gain total de la chaîne d'amplification.

2.4.7 Antennes (4) et (5) - ATN 102-440-6

Les antennes constituent un élément déterminant pour les performances globales du radar puisqu'elles sont responsables du phénomène de couplage direct entre l'émission et la réception.

La première caractéristique à fixer est le gain de l'antenne. Il s'agit de trouver un compromis entre un gain élevé qui augmente la portée et diminue le couplage direct, et un gain plus modeste qui traduit une plus grande couverture (directivité plus faible). En effet, le gain exprime le pouvoir d'une antenne à concentrer la puissance dans une zone limitée de l'espace et est défini comme le rapport entre la densité de puissance de l'antenne considérée et la densité de puissance d'une antenne isotropique (omnidirectionnelle) qui vaut $P_0/4\pi$, quelle que soit la direction considérée. En supposant que la densité de puissance est homogène dans la zone de rayonnement et nulle en dehors, le gain est directement donné par un rapport d'angles solides² (voir figure 2-16).

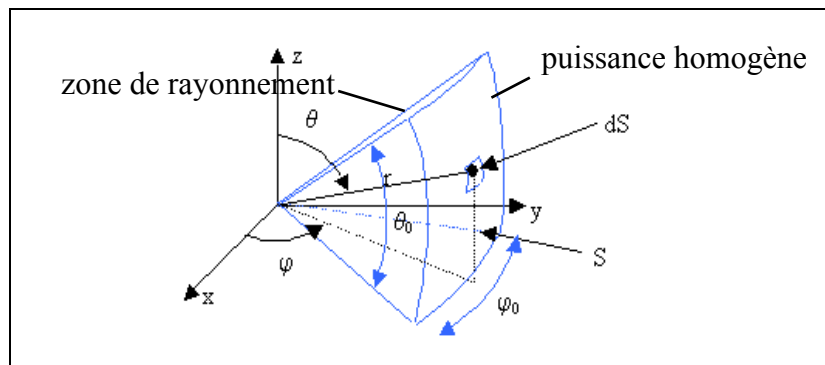


Figure 2-16 : Repère en coordonnées polaires pour l'expression du gain

1. En négligeant les pertes.

Le gain de l'antenne est donné par le rapport des angles solides de rayonnement entre une antenne isotropique et l'antenne considérée:

$$G = \frac{4\pi}{2\varphi_0 \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right)} \quad (2.33)$$

On utilise souvent l'approximation d'un angle θ_0 faible et dans ce cas (2.33) devient:

$$G = \frac{4\pi}{\varphi_0 \theta_0} \quad (2.34)$$

Dans l'application de localisation par mesure Doppler, il a été montré (voir §3.5.1) que le projectile devait être observé jusqu'à des distances très faibles (quelques mètres) pour obtenir des précisions suffisantes. Même si ces conditions sont vraisemblablement incompatibles avec une utilisation en conditions réelles, nous avons choisi pour le radar expérimental un cône de rayonnement très ouvert au détriment du gain et de l'isolation. L'antenne retenue est une antenne de type cornet ayant pour caractéristiques $\varphi_0 = 54,1^\circ$ et $\theta_0 = 55,5^\circ$ pour un gain effectif de 10 dB.

Le deuxième aspect à considérer est l'isolation entre l'émission et la réception. La méthode la plus efficace pour isoler l'émission de la réception consiste à éloigner les deux antennes l'une de l'autre. Nous avons effectué un certain nombre de simulations à l'aide du logiciel CST Microwave Studio afin d'évaluer le couplage entre les deux antennes en fonction de l'écartement. La figure 2-17 montre un exemple de simulation avec la représentation du champ électrique dans un plan.

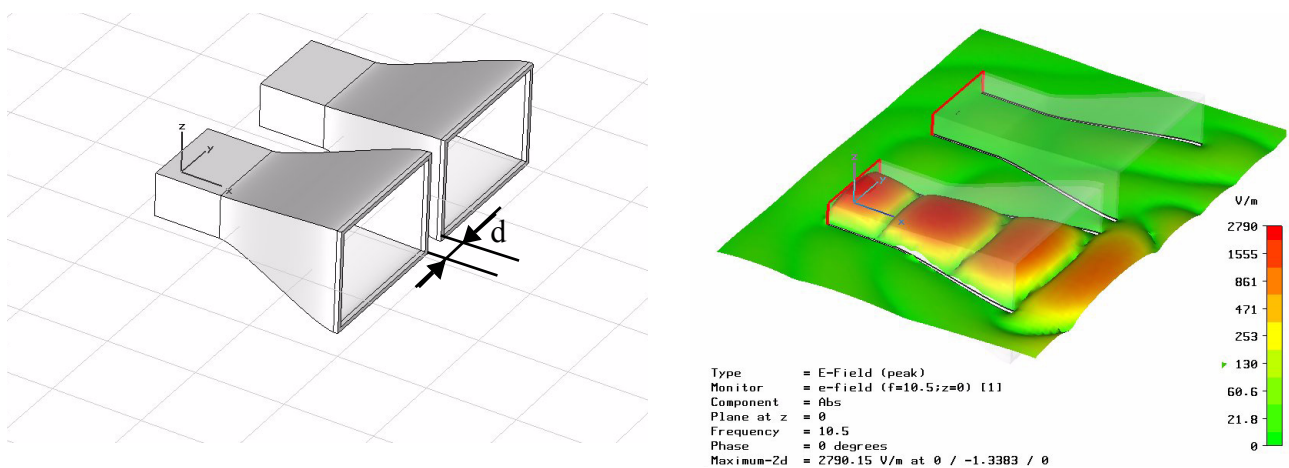


Figure 2-17 : Configuration des cornets (à gauche) et représentation du champ E (à droite)

On distingue aisément l'antenne d'émission de l'antenne de réception grâce à l'intensité du champ électrique dans l'antenne. Nous avons ensuite évalué le coefficient de couplage S21 pour différents écartements d'antenne. Les résultats de ces simulations sont donnés figure 2-18. On observe que le couplage est relativement important lorsque l'écartement est faible ($d=10$ mm) mais il décroît sensiblement lorsque la distance augmente jusqu'à la valeur maximale de -68 dB environ pour une distance de 250 mm.

2. Cette formulation du gain n'est pas rigoureuse car elle suppose une puissance homogène, néglige les pertes de l'antenne etc. Cependant elle est suffisante pour illustrer l'antagonisme entre gain et directivité, qui est le principal objet de notre discussion.

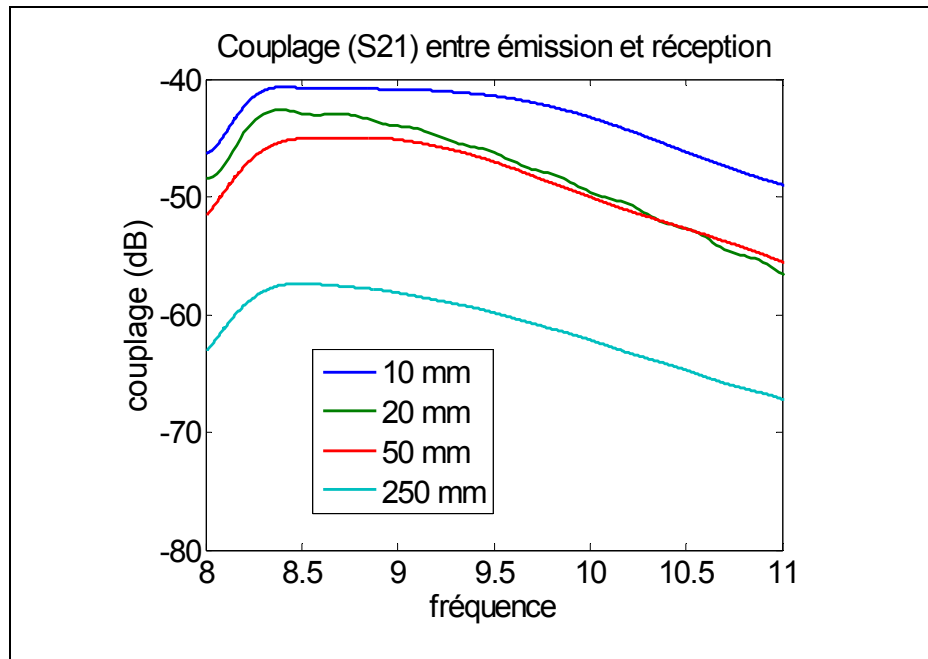


Figure 2-18: coefficient de couplage S21 pour différents écartements

Cette valeur pourrait être encore améliorée en ajoutant une plaque de séparation entre les antennes ou en utilisant des polarisations différentes pour l'émission et la réception. Cependant, il nous a semblé que l'isolation obtenue avec un écartement de 250 mm était suffisante pour les premiers tests.

Les valeurs obtenues en simulation ont ensuite été confrontées à des mesures en chambre anéchoïque réalisées selon le dispositif illustré figure 2-19.

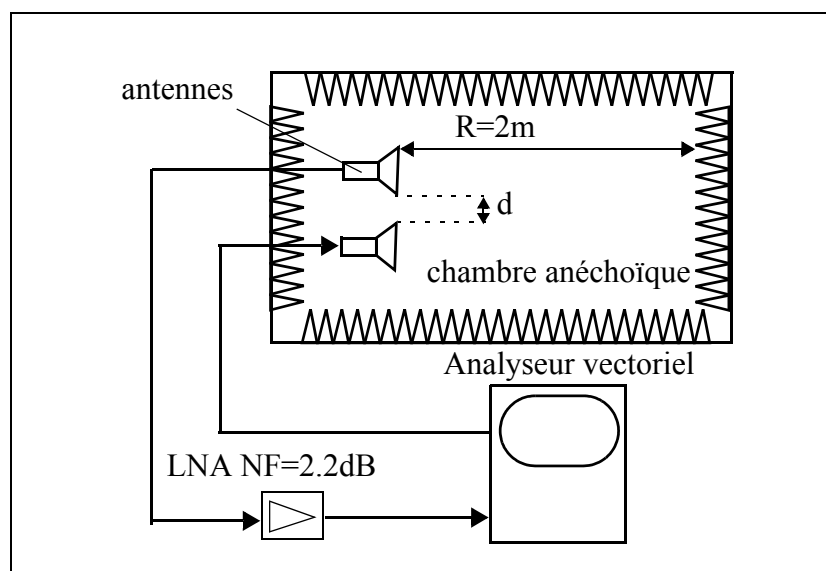


Figure 2-19 : Schéma de principe de la mesure de couplage en chambre anéchoïque

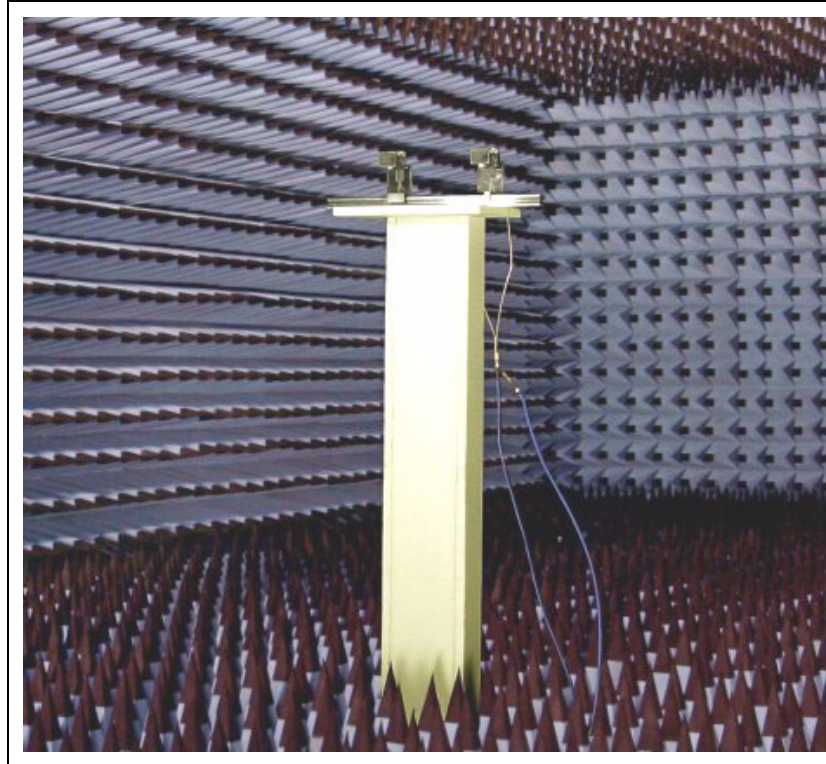


Figure 2-20 : Photographie du dispositif expérimental

Dans cette expérience il nous faut considérer les réflexions dues aux parois de la chambre. Pour cela on évalue la puissance transmise par réflexion en effectuant un bilan de liaison

$$P_R|_{dB} = P_O|_{dB} - 20\log(2R) + 2G|_{dB} - L|_{dB} - 63,4 \text{ dB} \quad (2:35)$$

où P_R est la puissance captée par l'antenne de réception, P_O la puissance d'émission, $R = 2 \text{ m}$ la distance séparant les antennes de la paroi éclairée, $G = 10 \text{ dB}$ le gain des antennes et enfin $L = -27 \text{ dB}$ le coefficient de réflexion¹ des parois donné par le constructeur de la chambre.

Cette équation est tout simplement un bilan de liaison directe puisque l'on considère que la totalité de l'énergie émise est réfléchiée vers l'antenne de réception par les parois de la chambre avec une atténuation L . Le bilan de liaison diffère de l'équation radar en ceci que la chambre ne représente pas un réflecteur ponctuel puisque la totalité de l'énergie émise est captée puis réfléchiée, ce qui résulte en une décroissance en $(2R)^2$ au lieu de R^4 . Pour ces mesures, la distance avec la paroi réfléchissante a été limitée à 2 m , afin d'éviter que les murs latéraux n'entrent dans le cône d'émission des antennes. L'ordre de grandeur du couplage par réflexion est donc donné par:

$$-20\log(2R) + 2G|_{dB} - L|_{dB} - 63,4 \text{ dB} \approx -82 \text{ dB} \quad (2:36)$$

En pratique, cette valeur peut varier de plusieurs dizaines de dB selon la taille de la tache de l'illumination sur les parois, l'angle d'éclairage, la valeur réelle de L etc. Les résultats des mesures sont donnés par le tableau 2-4. Les mesures coïncident assez bien avec les résultats de simulation pour des isolations assez faibles ($d=2 \text{ cm}$ et $d=5 \text{ cm}$). Lorsque l'écartement augmente le couplage devient très difficile à mesurer précisé-

1. Il s'agit de la valeur garantie par le constructeur, l'atténuation réelle peut être bien meilleure.

ment puisque le champ couplé directement devient du même ordre de grandeur que le champ réfléchi par les parois de la chambre.

Tableau 2-4 : Résultats des mesures de couplage en chambre anéchoïque

distance	2 cm	5 cm	10 cm	15 cm	20 cm	25 cm
S21@10,2400 GHz	-54 dB	-57,5 dB	-67dB	-63 dB	-72 dB	-75 dB
S21@10,5000 GHz	-56,4 dB	-61 dB	-62 dB	-65 dB	-78 dB	-70 dB
S21@10,7000 GHz	-59 dB	-57 dB	-62 dB	-69 dB	-72 dB	-90 dB

2.4.8 LNA (6) - (CIAO CA910-522)

Le LNA ou amplificateur à faible bruit, constitue le principal apport en gain dans la chaîne d'amplification. Contrairement à l'amplificateur de puissance, les dB gagnés à cet endroit sont très peu onéreux. Cependant, deux phénomènes interviennent à ce niveau et limitent le gain de l'amplificateur : il s'agit d'une part du facteur de bruit, d'autre part de la saturation de l'amplificateur.

Le facteur de bruit NF (*Noise Figure*) est défini comme le rapport entre le rapport signal-à-bruit en entrée S/N_E et celui à la sortie S/N_S de l'amplificateur [18]:

$$NF = \frac{S/N_E}{S/N_S} \quad (2:37)$$

En formulant (2:37) différemment on peut exprimer le bruit équivalent ramené à l'entrée de l'amplificateur:

$$N = \frac{N_S}{G} = NF \times N_E \quad (2:38)$$

où N est la puissance du bruit en sortie ramené à l'entrée, N_S la puissance du bruit en sortie de l'amplificateur, G le gain de l'amplificateur et N_E la puissance du bruit à l'entrée de l'amplificateur. Généralement, on considère que le bruit présent en entrée est le bruit thermique dont la puissance est donnée par

$$N_E = k_B T B \quad (2:39)$$

Avec:

$$k_B = 1,38 \times 10^{-23} \quad \text{constante de Boltzmann en (J/K)}$$

T Température en Kelvin

B Bande de fréquence en Hz

Le facteur de bruit de l'amplificateur utilisé est de $NF = 1,8$ dB, ce qui correspond à une puissance du bruit thermique ramenée en entrée de $N = -132$ dBm pour une température de 25°C et une bande utile de 100 kHz. L'utilisation d'un LNA hyperfréquence est plus intéressante qu'un amplificateur en bande vidéo car les facteurs de bruit augmentent généralement lorsque la fréquence diminue. En effet, les amplificateurs en bande vidéo sont affectés, en plus du bruit thermique, par le bruit dit «en 1/f». A titre d'exemple, la densité spectrale de bruit du LNA est de 0,55 nV/ $\sqrt{\text{Hz}}$ tandis

que la densité spectrale de bruit d'un amplificateur haut de gamme en bande vidéo atteint difficilement $1 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$. Nous verrons au paragraphe §2.4.11 que pour notre application le bruit thermique n'est pas le facteur limitant.

Le deuxième aspect à considérer est le phénomène de saturation de l'amplificateur. En effet, les applications radar sont confrontées à des très grandes dynamiques de signaux dues à la variation de puissance en $1/R^4$, ainsi qu'à une grande disparité dans la taille des cibles. Les faibles échos produits par une cible éloignée incitent à utiliser un fort gain au niveau du LNA, le risque alors encouru est que des obstacles plus proches ou de plus grandes tailles saturent l'étage d'entrée. En effet, à ce stade de l'amplification aucun filtrage n'a été effectué et tous les échos des réflecteurs environnants (bâtiments, sol, véhicules) sont donc amplifiés. Le point de compression à 1 dB [18] du LNA est donné à +10 dBm, cependant la puissance du signal de sortie du LNA doit être inférieure de 7 dB à celle de l'oscillateur local pour un fonctionnement correct du mélangeur. On limite donc le gain du LNA à +30 dB.

2.4.9 Mélangeur (7) - (REMEC MO64PG)

Le radar utilise une démodulation homodyne cohérente, c'est-à-dire que la source est directement utilisée comme oscillateur local. Dans cette configuration la fréquence intermédiaire est nulle (transposition vers le continu). Contrairement à la démodulation par détecteur, utilisée dans le radar BMDM 9550 (voir §2.4.2), on met ici en oeuvre un mélangeur double équilibré. Puisque la démodulation est homodyne, la bande image¹ est très proche de la bande utile et correspond en fait aux vitesses négatives (éloignement) qui produisent des décalages Doppler négatifs (voir figure 2-21). Il aurait été possible de distinguer les vitesses négatives des vitesses positives en utilisant un mélangeur I-Q, cependant cela n'est pas nécessaire dans notre application. Le mélangeur utilisé est spécifié pour un niveau d'oscillateur local à +10 dBm, qui conduit à un point de compression à 1 dB (saturation) à +3 dBm. Les pertes d'insertion sont de 6,5 dB.

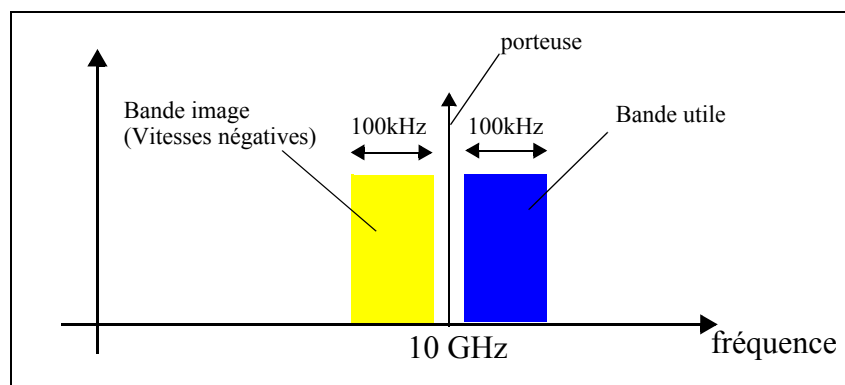


Figure 2-21: Bande image

2.4.10 AGC (8)

Le signal de sortie du mélangeur est de faible niveau et doit être mis en forme pour être exploitable par une platine DSP. Pour cela, nous avons développé une platine qui assure l'amplification du signal Doppler avec un contrôle automatique du gain (*Automatic Gain Control - AGC*), le filtrage des signaux pour sélectionner la bande utile et un

1. On trouvera une définition de la bande image dans [18] par exemple.

dispositif de mise en forme par détection de passages à zéro pour interfacer la platine DSP.

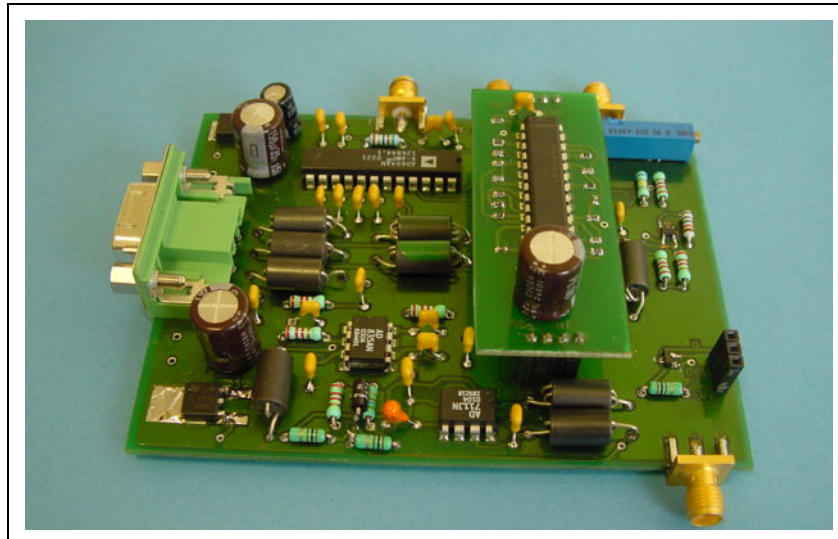


Figure 2-22: Platine AGC

Le coeur du système est un amplificateur à gain programmable: le AD604N fabriqué par Analog Devices. Ce composant de hautes performances est destiné aux applications sonar et radar, ou toute application confrontée simultanément à de très faibles amplitudes et une dynamique élevée. Il intègre deux blocs d'amplification identiques, comportant chacun un amplificateur à faible bruit ainsi qu'un amplificateur programmable (DSX ou X-AMP) lui-même composé d'un atténuateur programmable et d'un amplificateur à gain fixe (AFA - *Active Feddback Amplifier*). Le diagramme fonctionnel d'un bloc d'amplification du AD604N est donné figure 2-23.

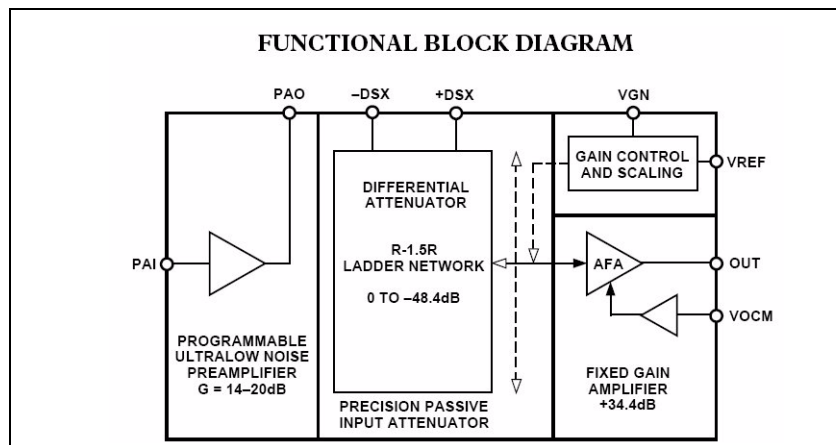


Figure 2-23 : Diagramme fonctionnel d'un bloc d'amplification du AD604N

Nous avons utilisé une configuration où les deux DSX sont en série de manière à obtenir une grande dynamique de gain. Le diagramme fonctionnel de la platine AGC est visible figure 2-24.

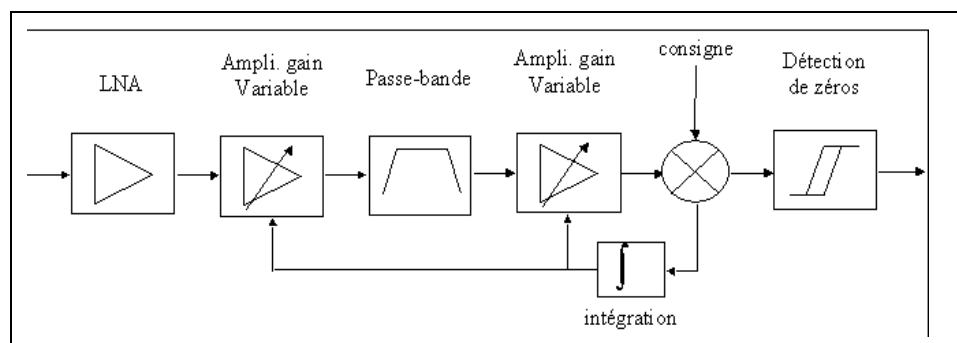


Figure 2-24 : Diagramme fonctionnel de la platine AGC

Le signal radar est tout d'abord amplifié par le LNA de manière à obtenir un rapport signal à bruit optimal. Le bruit du LNA dépend de beaucoup de facteurs tels la température, la fréquence considérée, la résistance source etc. Les courbes produites par le constructeur et présentées figure 2-25 montrent l'évolution du bruit en fonction de la fréquence ainsi que de la résistance source. On observe que le niveau de bruit général

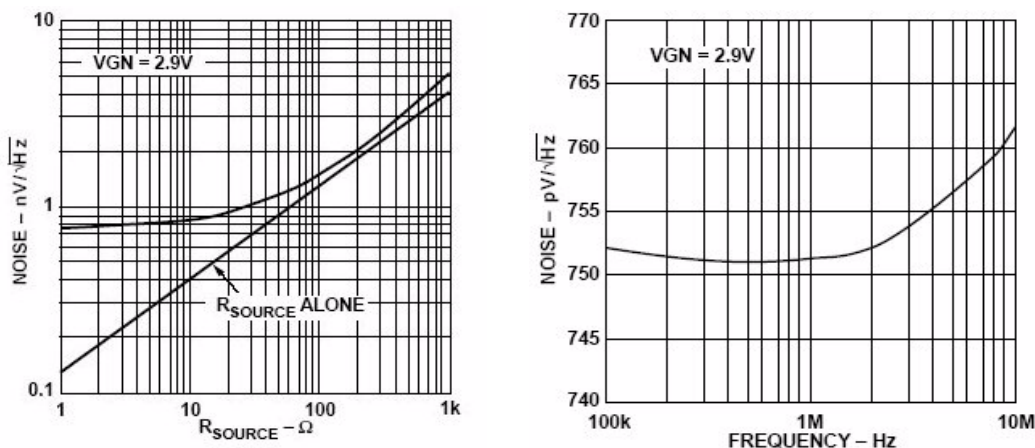


Figure 2-25 : Bruit ramené en entrée en fonction de la résistance source à $f=1\text{MHz}$ (à gauche) et en fonction de la fréquence pour $R_s=0$ (à droite)

est excellent. En particulier, pour une résistance source de $R_s = 50 \Omega$, il est d'environ $1,3 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$. La deuxième courbe indique l'évolution de la densité spectrale du bruit en fonction de la fréquence. Bien que la courbe ne corresponde pas aux conditions qui sont les nôtres ($R_s = 50 \Omega$) et ne donne pas les valeurs pour des fréquences inférieures à 100 kHz, elle montre une légère tendance à la hausse pour les basses fréquences due à la présence du bruit en $1/f$. On peut donc s'attendre à une densité spectrale de bruit légèrement supérieure à $1,3 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$ dans la plage 50 kHz-150 kHz : en prenant par exemple une densité de $1,5 \text{ nV}/\sqrt{\text{Hz}}$, on obtient une tension efficace de bruit en entrée de 581 nV pour une bande de 100 kHz.

Le gain du LNA est programmé par deux résistances externes à une valeur fixe de +20 dB.

Le signal en sortie du LNA est ensuite couplé vers les DSX via une cellule RC passe-haut, dont la fréquence de coupure est fixée à 9,1 kHz.

Le gain d'un seul DSX est commandé par les tensions VGN et VREF selon la relation:

$$G|_{dB} = \frac{2,5V \times 20 \text{ dB/V}}{VREF} \times VGN - 14 \quad (2:40)$$

VGN contrôle la valeur du gain tandis que VREF permet de fixer le facteur d'échelle comme le montre la figure 2-26.

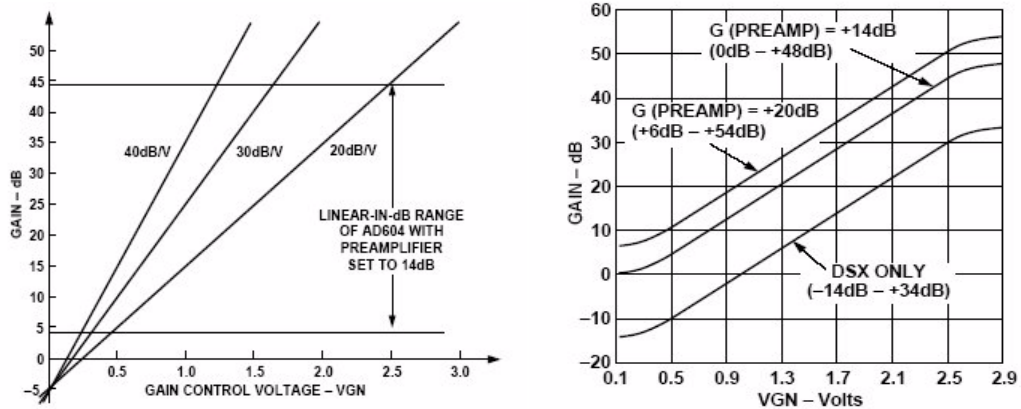


Figure 2-26 : Gain d'un DSX en fonction de VGN pour VREF=1.250 V (40 dB/V), VREF=1.6 (30 dB/V) et VREF=2.5 V (20 dB/V) (à gauche) et gain de la chaîne LNA+DSX avec la saturation (à droite).

La tension VREF est réglée à 2,5 V par un potentiomètre de manière à obtenir un facteur d'échelle de 20 dB/V. Selon la courbe de droite de la figure 2-26, la mise en cascade des deux DSX et du LNA permet d'obtenir un gain variant entre -8 dB et +88 dB. L'expression du gain pour l'ensemble de la chaîne devient donc :

$$G|_{dB} = 2 \times \left(\frac{2,5V \times 20 \text{ dB/V}}{VREF} \times VGN - 14 \right) + G_{LNA} = \frac{100}{VREF} \times VGN - 8 \quad (2:41)$$

Un filtre actif a été inséré entre les deux étages DSX afin de sélectionner la bande utile 50 kHz-150 kHz. Le filtre a été placé à cet endroit dans la chaîne d'amplification plutôt que directement après le LNA car son facteur de bruit est relativement important. La contrepartie est que le premier DSX risque d'être saturé par des signaux parasites puisque ceux-ci ne sont pas encore filtrés. Nous verrons que ce point est problématique, notamment pour le radar MFCW (§2.5). Ce filtre est bâti autour d'un filtre actif continu fabriqué par Maxim: le MAX275. Ce composant permet d'obtenir aisément un filtre de Tchebychev du 8^{ème} ordre, dont les fréquences de coupures sont programmées par de simples résistances.

Le gain des DSX est régulé automatiquement de manière à obtenir des signaux ayant une amplitude constante en sortie, quelle que soit la distance radar-projectile, ceci dans le but d'éviter la saturation des amplificateurs. Dans le cas où aucun projectile n'est présent, le gain sera maximal sans toutefois que la consigne d'amplitude puisse être satisfaite. La boucle de régulation comporte un étage permettant de mesurer la tension efficace des signaux, suivi d'un intégrateur qui réalise l'asservissement en ajustant la tension VGN.

La mesure de la tension efficace est réalisée par un multiplieur (AD835) qui élève le signal au carré :

$$s^2 = (A \cos(\omega t))^2 = \frac{A^2}{2}(1 + \cos(2\omega t)) \quad (2:42)$$

En filtrant le terme de pulsation 2ω on obtient un signal proportionnel à la puissance du signal. Le filtrage est assuré par une cellule RC ($R6 = 470 \Omega$ et $C21 = 100 nF$) passe-bas, dont la fréquence de coupure est fixée à $3,3 kHz$.

Le signal est ensuite comparé à une consigne de tension fixée à $0,7 V$ environ par la tension de seuil de la diode D1, puis intégré avec une constante de temps ($C22 = 1 \mu F$ et $R7 = 100 \Omega$) égale à $100 \mu s$. Ce signal pilote ensuite la tension VGN afin d'asservir le gain.

Pour finir, un trigger de Schmidt détecte les passages à zéro du signal sinusoïdal pour produire un signal carré ayant la même phase que le sinus. Ce signal pilote à son tour un transistor JFET (Q2) qui convertit les signaux $0-5 V$ en $0-3,3 V$ afin d'interfacer les DSP.

Tous les schémas de la platine AGC sont donnés dans l'annexe .

2.4.10.1 Mesures

Dans un premier temps, nous avons mesuré les diagrammes de Bode des 4 platines réalisées. Pour cela nous avons utilisé un analyseur vectoriel basse fréquence, auquel nous avons ajouté une série d'atténuateurs de manière à obtenir des signaux d'amplitudes suffisamment faibles pour que l'AGC ne puisse asservir son gain. Les courbes de gain sont données par la figure 2-27 et celles de phase par la figure 2-28. On observe que le gain n'est pas constant dans la bande utile des $50 kHz-150 kHz$ puisqu'il varie entre $82,7 dB$ et $90,6 dB$. Cette variation est liée à la fonction de transfert du filtre qui n'est pas plate.

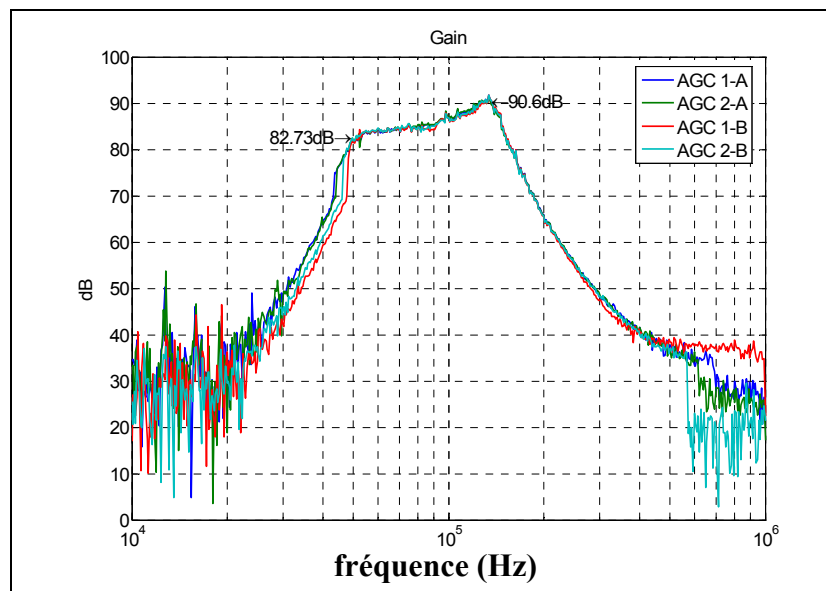


Figure 2-27 : Diagrammes de Bode des 4 AGC - gain

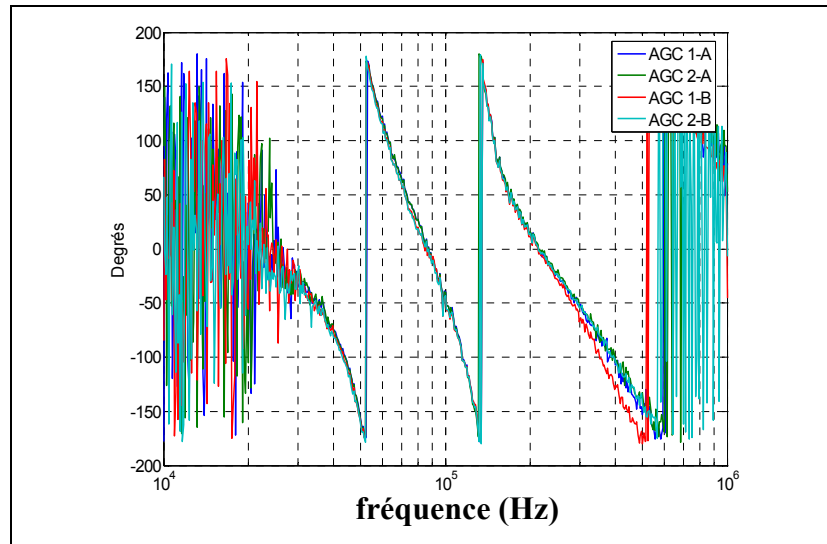


Figure 2-28 : Diagrammes de Bode des 4 AGC - phase

Nous avons également mesuré le bruit en sortie de l'AGC lorsque aucun signal n'est appliqué en entrée (impédance d'entrée de 50Ω). On trouve une valeur efficace de 21 mV environ en sortie. En prenant un gain moyen de 88 dB, soit 25119 environ, on obtient une valeur efficace de bruit rapportée à l'entrée de 836 nV, c'est-à-dire à peine supérieure à la valeur théorique de 581 nV calculée précédemment.

Pour finir, nous avons observé la réponse de l'asservissement à un échelon d'amplitude. Pour cela, nous avons visualisé le signal de sortie ainsi que la tension VGN lorsque l'amplitude du signal d'entrée passe instantanément de 50 mV à 0, 1 mV. L'amplitu-

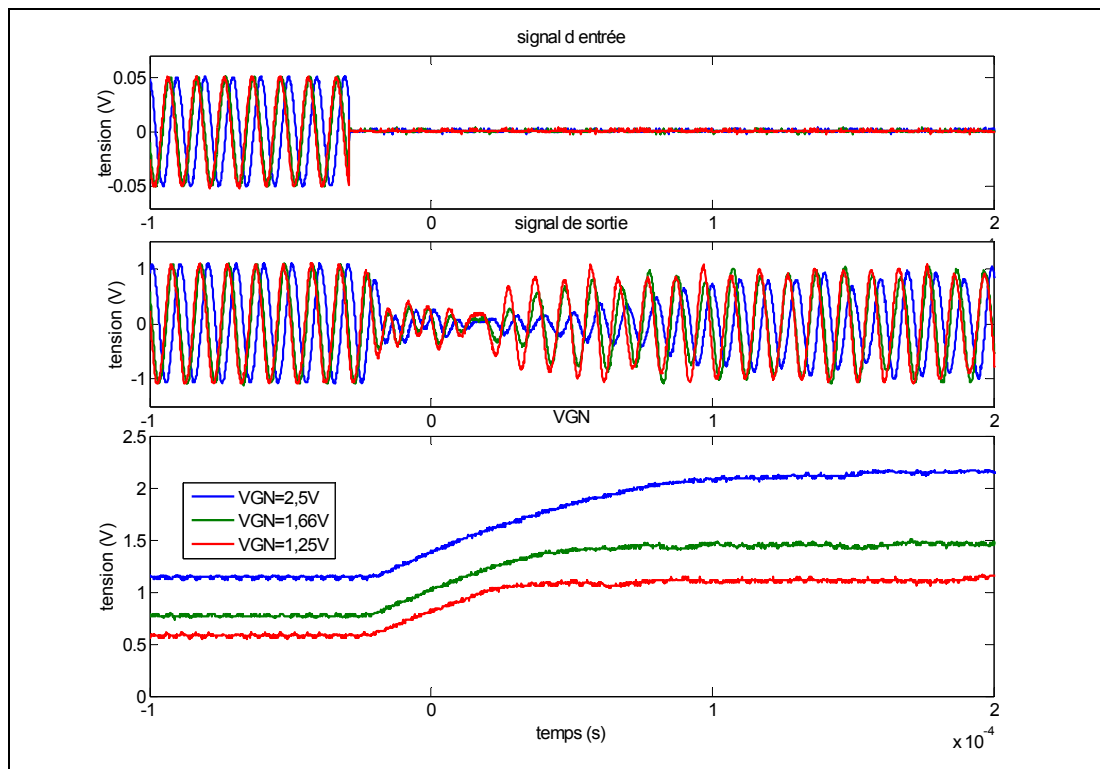


Figure 2-29 : Réponse de l'asservissement à un échelon d'amplitude

de du signal d'entrée réellement vue par l'AGC est la moitié de celle de la figure 2-29, car le générateur présente une impédance de sortie de 50Ω . Le plus long temps de réponse est évidemment celui pour lequel le facteur d'échelle VREF est le plus faible (VREF=2,5 V), mais ce dernier correspond également à la valeur pour laquelle l'asservissement est le plus stable. Les pentes des asservissements sont toutes identiques et sont données par la constante de temps de l'intégrateur.

2.4.11 Evaluation des performances et mesures

2.4.11.1 Puissances

Afin d'évaluer les performances du radar nous avons mesuré les puissances en différents points de la chaîne, ceci notamment afin d'évaluer les pertes dues à la connectique. Les mesures ont été effectuées à l'aide du «wattmètre» (*power meter*) Booton 4531. Les antennes ont été remplacées par un atténuateur guide d'onde de 50 dB (les transitions guide-coax sont conservées) afin de simuler un écho. Les résultats sont donnés figure 2-30, les puissances mesurées (en bleu) sont comparées aux puissances théoriques sans pertes (en rouge).

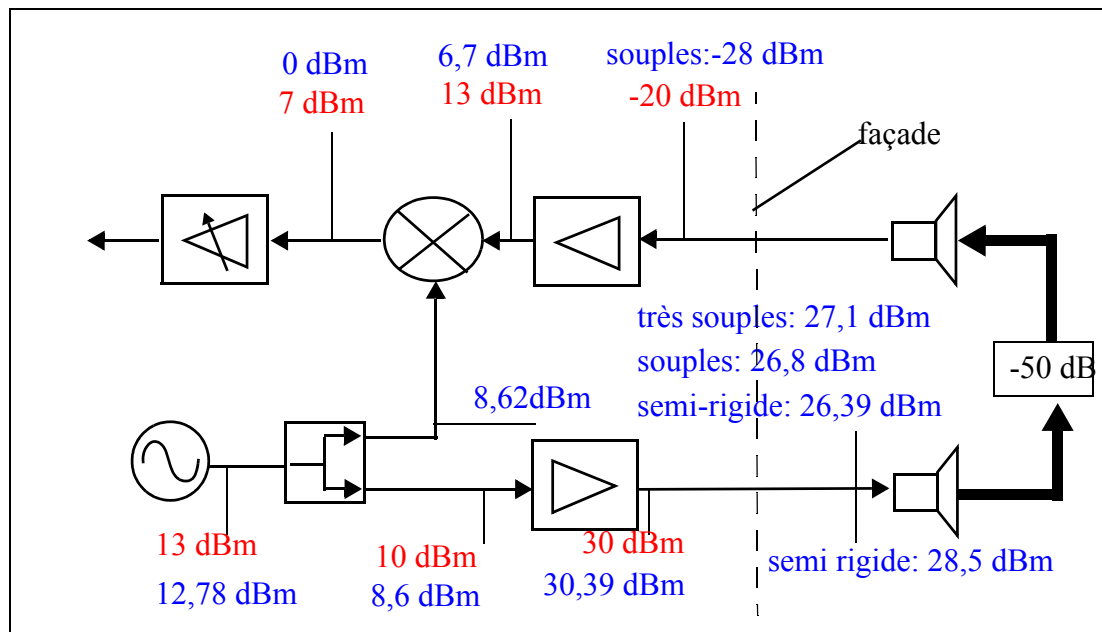


Figure 2-30 : puissances mesurées (en bleu) et puissances théoriques (en rouge)

On note que la puissance en sortie de l'amplificateur est conforme à la puissance attendue. En revanche, des pertes importantes sont causées par la connectique alimentant les antennes (*feeder*) et notamment par les câbles. Trois types de câbles ont été testés que l'on peut classer comme suit: semi-rigides, souples, très souples. Si les câbles ont des pertes sensiblement équivalentes, les câbles très souples ont un comportement étrange: les pertes d'un câble souple augmentent de 2 dB environ lorsque celui-ci est manipulé, puis diminuent lentement (1 à 2 minutes environ) lorsqu'ils sont laissés au repos jusqu'à atteindre leur valeur minimale. Ce phénomène a été mis en évidence de façon indiscutable en effectuant la même mesure avec plusieurs câbles très souples ainsi que des câbles souples et semi-rigides conduisant à chaque fois au même comportement. Ce phénomène s'explique sans doute par une relaxation mécanique des

conducteurs à des très petites échelles (aucune déformation du câble n'est visible à l'oeil nu pendant la phase de relaxation), mais mérite des investigations supplémentaires pour parvenir à une explication satisfaisante.

Le principal résultat des mesures est que les pertes sur l'ensemble de la chaîne sont de 7 dB environ par rapport aux valeurs théoriques. La puissance en sortie du mélangeur est +28 dB par rapport à celle à l'entrée du LNA.

Dans le cas où les antennes sont remplacées par un atténuateur de valeur L , on peut donner une formule de la puissance en sortie du mélangeur:

$$P_{mel}|_{dBm} = 50 \text{ dBm} - L \quad (2:43)$$

2.4.11.2 Bruit thermique

Le bruit thermique mesuré en sortie de l'AGC lorsqu'aucun signal n'est appliqué à l'entrée a une valeur efficace de 21 mV environ (voir §2.4.10.1). La tension de bruit ramenée à l'entrée est de 836 nV environ, ce qui correspond à une puissance de -108 dBm.

D'un autre coté, la chaîne radar induit un bruit au niveau de l'entrée de l'AGC d'une puissance égale à:

$$\begin{aligned} NE|_{dBm} + NF_{LNA}|_{dB} + G_{LNA}|_{LNA} - Loss|_{dB} &= \dots \\ &= -123 + 2,8 + 33 - 7 = -94,2 \text{ dBm} \end{aligned} \quad (2:44)$$

On vérifie bien que l'AGC ne dégrade pas les performances de la chaîne d'amplification pour ce qui concerne le bruit thermique, ce qui n'est pas évident *a priori* puisque les amplificateurs en bande vidéo à fort gain sont généralement médiocres de ce point de vue.

En ne considérant que le bruit thermique, la sensibilité tangentielle du radar est donc de:

$$TSS_{thermique} = NE|_{dBm} + NF_{LNA}|_{dB} + 6 \text{ dB} \approx -114 \text{ dBm} \quad (2:45)$$

où le terme de 6 dB indique qu'un signal est détecté lorsque le rapport signal à bruit atteint 6dB. Dans ces conditions, une cible de -25 dBm² peut être détectée à 75 mètres.

2.4.11.3 Bruit de phase

Le bruit thermique n'est pas la seule perturbation limitant les performances du radar. En effet, la plus grande contribution aux bruits parasites provient du bruit de phase. Ce problème constitue l'une des principales limitations des radars continus [16]. L'inconvénient du bruit de phase est qu'il est intrinsèquement lié à la source et sera donc présent dès lors qu'une partie du signal émis est couplée vers le récepteur. De plus, il ne peut être filtré puisqu'il est présent dans la bande utile. Afin de diminuer son effet, il faut agir au niveau de ses modes de propagation parasites, qui sont au moins au nombre de trois :

- couplage lié au défauts d'isolation du mélangeur
- couplage lié au défaut d'isolation des antennes (*spillover*)
- couplage par réflexion du signal, sur des bâtiments par exemple (fouillis)

Pour évaluer les puissances couplées nous considérons que la puissance du bruit de phase est constante et égale à -115 dBc/Hz sur toute la bande, la puissance totale est de $-110 + 10\log(100 \times 10^3) = -65 \text{ dBc}$ sous la porteuse, soit $N_\phi = -52 \text{ dBm}$ au ni-

veau de la source.

Nous considérons ensuite les 3 modes de transmission du bruit de phase en prenant pour l'évaluation:

- mélangeur: isolation = -37 dB (donnée constructeur)
- isolation des antennes = -70 dB
- fouillis: cible statique de 10 dBm² à 10 m.

Pour calculer les puissances du bruit de phase on s'appuie sur les mesures de puissances du paragraphe §2.4.11.1. Les détails sont donnés sur la figure 2-31.

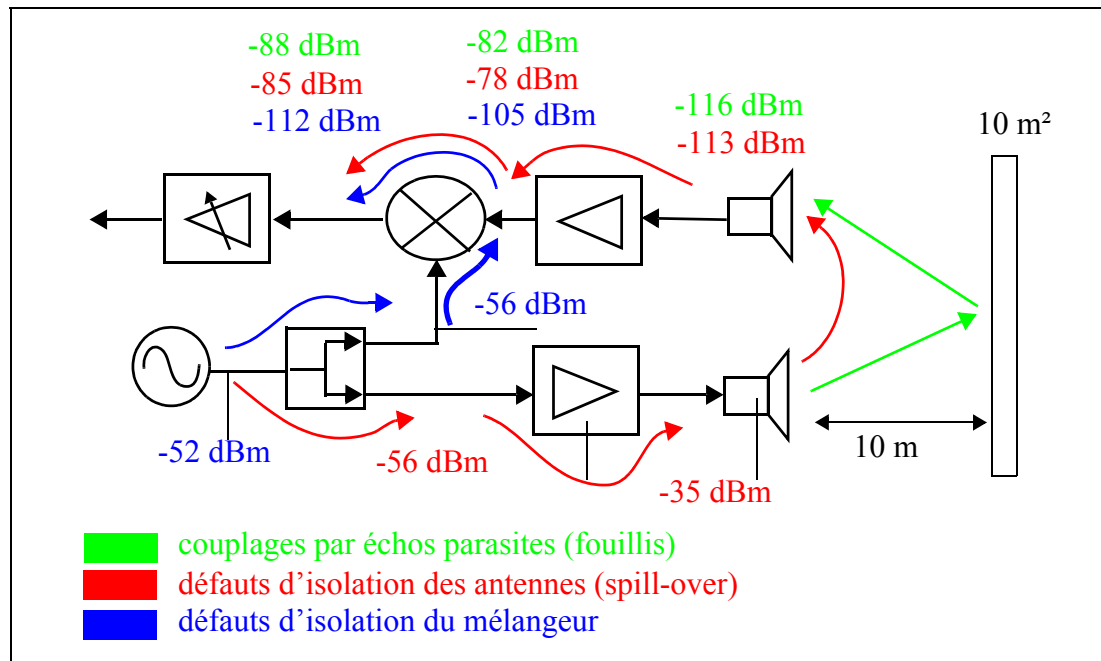


Figure 2-31 : trajets et puissances du bruit de phase, défaut d'isolation du mélangeur (en bleu), défaut d'isolation des antennes (en rouge), couplage par échos parasites (en vert)

On note en premier lieu que le défaut d'isolation du mélangeur n'est pas la cause principale de la propagation du bruit de phase, d'autant plus qu'il n'a pas été tenu compte de l'atténuation due à la corrélation des signaux (voir [16], §14.3) qui est très importante dans ce cas. Pour ce qui concerne les deux autres voies de propagation, leurs influences relatives dépendent de l'environnement dans lequel le radar est utilisé. La quantification de l'écho parasite par un réflecteur équivalent à une SER de 10 m² située à 10 m est surévaluée pour un environnement en champ libre ou sous-évaluée dans un environnement à très fort fouillis (milieu urbain par exemple). Dans tous les cas, on constate que la contribution du bruit de phase via les défauts d'isolations entre l'émission et la réception est bien plus gênante que le bruit thermique. On peut calculer la puissance du bruit de phase au niveau du mélangeur en utilisant la relation (2:43)

$$P_{\phi}|_{dBm} = 50 \text{ dBm} - L + B|_{dB} + N_{\phi}|_{dBc} \quad (2:46)$$

où B est la bande de fréquences considérée et N_{ϕ} la densité moyenne du bruit de phase dans cette bande exprimée en dBc.

2.4.11.4 Signaux parasites

En plus des parasites dont l'origine est liée à des phénomènes physiques inévitables,

un parasite supplémentaire, purement lié à la technologie des matériels utilisés dégrade, sérieusement les performances du radar. En effet, nous avons observé des raies parasites dans la bande Doppler dont l'origine est inconnue.

Plusieurs hypothèses ont été avancées pour expliquer ce phénomène : instabilité de l'AGC, couplage du champ magnétique créé par l'écran de l'oscilloscope, etc. Afin de mettre en évidence le phénomène, nous avons utilisé le même dispositif que celui décrit par la figure 2-30, c'est-à-dire que l'émission et la réception sont couplées à l'aide d'un atténuateur réglable (atténuation = -66 dB, puissance de sortie du LNA = -10 dBm). Pour localiser l'endroit où naît la perturbation nous avons enregistré les signaux temporels à l'aide d'un oscilloscope à l'entrée (post-mélangeur) et à la sortie de l'AGC. La figure 2-32 montre le spectre de ces signaux avant l'AGC, où les raies parasites apparaissent déjà clairement, notamment à la fréquence de 50 kHz, ce qui suggère que le parasite est contenu dans le signal hyperfréquence lui-même.

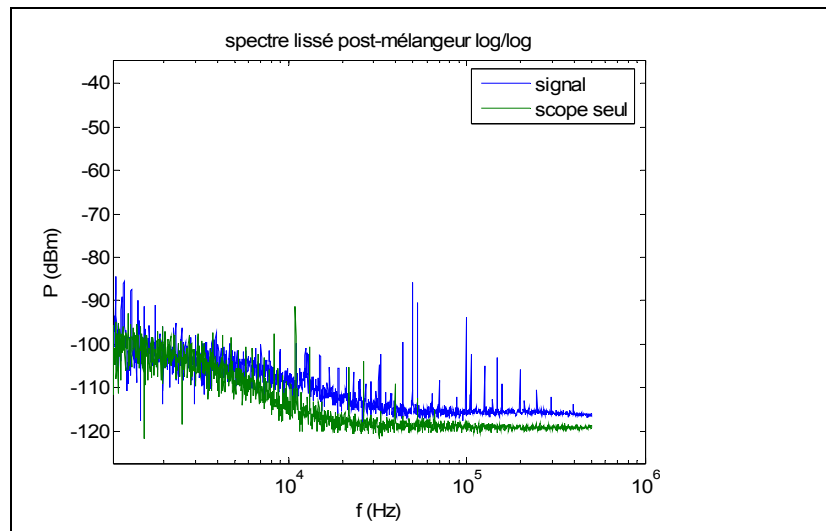


Figure 2-32 : Spectre du signal avant l'AGC

Nous avons alors émis l'hypothèse que ce parasite était causé par l'asservissement de la PL-DRO, puisque lui seul peut créer un parasite stable à quelques kilohertz d'une porteuse à 10 GHz. Afin de confirmer cette hypothèse, nous avons mesuré le signal de sortie de l'AGC avec et sans asservissement de la source hyperfréquence. Pour obtenir un signal sans asservissement, nous avons donné une consigne en fréquence hors de la plage de capture de la PL-DRO. Le résultat (figure 2-33) est tout-à-fait probant, puisque la tension efficace du parasite, qui est de 220 mV environ dans la plage de capture, n'est plus que de 90 mV dès que la PLL n'est plus asservie.

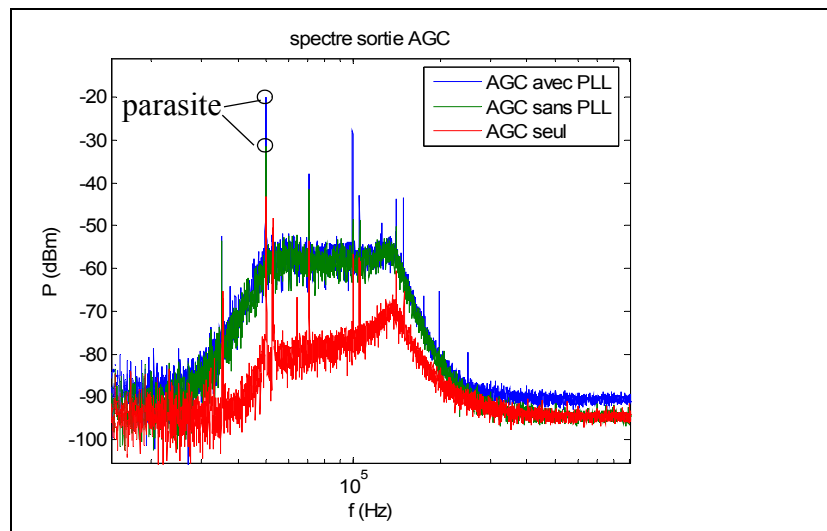


Figure 2-33 : Spectre du signal après l'AGC

D'après le spectre de la figure 2-32, la densité spectrale de la raie parasite est de -20 dBm sur une bande de 100 Hz, soit une puissance totale de 0 dBm tandis que le bruit (de phase) a une densité de puissance de -57 dBm sur une bande de 100 kHz, soit une puissance de -7 dBm. On constate donc que le parasite est prépondérant devant le bruit de phase.

Une autre confirmation a été obtenue visuellement en comparant le signal d'asservissement de la PLL de la PL-DRO au signal de sortie de l'AGC. On voit sur la figure 2-34 qu'il y a une corrélation évidente entre les deux signaux.

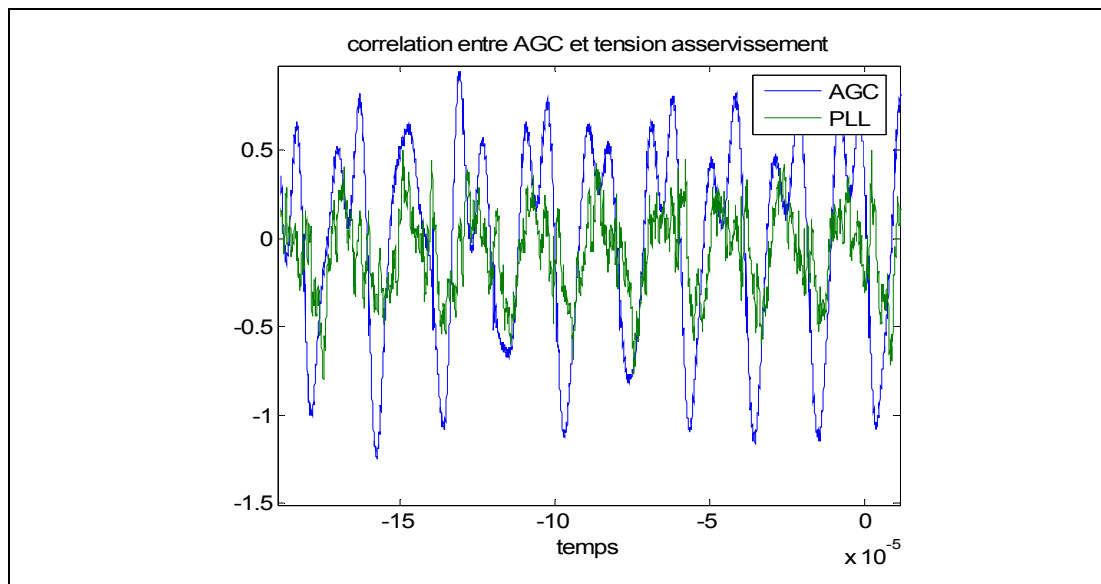


Figure 2-34 : comparaison entre le signal de sortie de l'AGC et le signal d'asservissement de la PLL

2.4.11.5 Conclusion sur les performances du radar

Nous avons établi que la puissance du signal à la sortie du mélangeur était de

$$P_{mel}|_{dBm} = 50 \text{ dBm} - L \quad (2:47)$$

où L désigne l'atténuation entre l'émission et la réception, matérialisée par un atténuateur dans nos expériences ou par l'écho radar de la cible dans une utilisation normale. Le terme de 50 dB représente la chaîne d'amplification du radar ainsi que les pertes (plus de 10 dB au total). Nous avons également évalué les différentes perturbations en sortie du mélangeur. La puissance du bruit thermique a été calculée en §2.4.11.2, et vaut -94 dBm environ. Le bruit de phase a été étudié en §2.4.11.3, on peut évaluer la puissance correspondant à l'atténuation utilisée pour la mesure de la figure 2-32 à l'aide de la formule (2:46). On trouve dans ce cas -81 dBm pour une isolation de 66 dB. La mesure de la figure 2-32 indique que la puissance du bruit de phase en sortie de l'AGC est de l'ordre de -7 dB, soit une puissance en sortie du mélangeur de l'ordre de -7 dBm - 85 dB ≈ -92 dBm environ, soit 11 dBm de mieux que la valeur prévue. Cet écart peut s'expliquer par une source de meilleure qualité que les spécifications du constructeur ou, plus vraisemblablement, par des imprécisions dans les mesures de puissances du paragraphe §2.4.11.1 conduisant à une formule (2:43) approximative.

Tableau 2-5 : Puissance des différents parasites à la sortie du mélangeur

origine	atténuation E/R	puissance en sortie du mélangeur
bruit thermique	indifférent	-94 dBm
bruit de phase	-66 dB	-92 dBm
PLL	-66 dB	-82 dBm

L'ensemble des perturbations est résumé par le tableau 2-5. On constate finalement que la principale limitation est due aux raies parasites causées par l'asservissement du PL-DRO. Pour une isolation de 66 dB, la tension efficace du parasite mesuré en sortie de l'AGC est de l'ordre de 220 mV à une fréquence proche de 50 kHz (raie principale). A cette fréquence, le gain de l'AGC est de 82 dB environ, ce qui signifie que la valeur efficace du parasite au niveau du mélangeur est de l'ordre de 17 μV ou -82 dBm. Tous ces résultats sont résumés par le tableau 2-5.

En considérant que l'isolation des antennes est équivalente à l'atténuation utilisée pour les mesures, soit 66 dB, la puissance totale du parasite à la sortie du mélangeur est donc de -82 dBm, ce qui correspond à une puissance ramenée en entrée de -110 dBm. En choisissant comme critère de détection un rapport signal à bruit de 6 dB, nous obtenons, pour le plus petit signal détectable par le radar, une valeur de -104 dBm. On peut alors calculer la portée théorique du radar pour une cible de -25 dBm² d'après l'équation radar (2:11):

$$\begin{aligned} 40 \log(R_{max}) &= P_E|_{dBm} - P_{min}|_{dBm} - 63,4 + 2G|_{dB} + \sigma|_{dB} \\ &= 30 + 104 - 63,4 + 20 - 25 \end{aligned} \quad (2:48)$$

On trouve $R_{max} \approx 47$ m. Les performances maximales du radar sont fixées par la puissance du bruit thermique puisqu'il s'agit là d'une limite physique sur laquelle on ne peut agir (dans les mêmes conditions et sans changer le LNA). Pour atteindre cette limite il faudrait une isolation de 80 dB au moins entre les antennes et dans ce cas la

portée du radar serait de $R_{max} \approx 87$ m .

2.4.12 Conclusion

Comme c'est souvent le cas pour les radars continus, les principales limitations proviennent du défaut d'isolation entre l'émission et la réception. Le choix d'antennes à grandes ouvertures n'est pas très judicieux de ce point de vue, mais il répond au besoin initial d'une grande couverture radar. Quoiqu'il en soit, les performances atteintes par le radar tel qu'il a été conçu sont tout à fait honorables et remplissent parfaitement les objectifs que nous nous étions fixés.

2.5 Etude et réalisation d'un radar MFCW

2.5.1 Introduction

L'étude des précisions maximales qui peuvent être atteintes à l'aide de mesures Doppler est présentée dans le paragraphe §3.5.2. Il ressort de cette analyse que de simples mesures de vitesses ne contiennent pas suffisamment d'information quant à la position de la cible pour que les précisions souhaitées soient atteintes. En d'autres termes, le radar Doppler est inadapté pour nos applications.

Cependant, les travaux de développement qui ont été menés nous ont guidé vers un autre type de radar, très similaire au radar Doppler, le radar à fréquences multiples ou MFCW radar (*Multiple Frequencies Continuous Wave*). Ce radar peut être vu comme un ensemble de radars Doppler classiques observant la cible à des fréquences différentes. Les éléments et la structure de base du radar Doppler sont donc conservés et l'analyse du paragraphe §2.4 peut donc s'étendre au radar MFCW. Le principal intérêt du radar MFCW par rapport au radar CW est qu'il permet une mesure directe de distance avec une très grande précision. Le principe des fréquences multiples, bien que peu répandu dans le domaine du radar, est déjà assez ancien et s'apparente clairement à des techniques d'interférométrie. La première application fut certainement le «telluromètre» qui date de 1958 [31], et qui est un appareil servant à la mesure de distances. Cet appareil n'est pas véritablement un radar puisqu'il n'utilise pas l'écho de l'onde électromagnétique mais son trajet direct entre deux stations de mesures distantes. Les très bonnes précisions de mesure avait déjà été reconnues et l'on peut d'ailleurs s'étonner que la technique à fréquences multiples n'ait pas fait plus d'émule dans le domaine du radar à proprement parler. En effet, ce principe est très peu répandu, on le trouve essentiellement dans des applications industrielles [32],[33],[34] en tant que système de mesure de niveau de liquide dans des cuves par exemple. Le faible développement du MFCW pour des applications radar classiques, en dépit de ses très bonnes précisions et des avantages que présente l'observation en continu, peut s'expliquer de plusieurs manières. En dehors de son principe de fonctionnement qui le limite à des applications de faible portée afin d'éviter une ambiguïté en distance, il y a notamment l'incapacité qui touche ce type de radar à traiter des cibles multiples ainsi que sa grande vulnérabilité au phénomène de trajets multiples (voir §2.3.5). Nous verrons que ce radar ne fonctionne correctement que dans une situation idéale où n'est présente qu'une seule cible (par cellule Doppler) et où les réflexions indirectes sont inexistantes. De plus, un radar MFCW véritable nécessite plusieurs sources qui, même si elles respectent une architecture élémentaire très simple, rendent l'ensemble du dispositif plus complexe et plus coûteux pour un bénéfice en précision superflu pour la majorité des applications. Signalons enfin que la multiplication du nombre de fréquences entraîne une perte de

puissance du signal en réception de 3 dB par voie, ce qui peut être un obstacle majeur dans les cas où la portée du radar est un élément critique. Toutes ces raisons font qu'on préfère généralement les radars modulés (radars FMCW) ou, encore plus proches du MFCW, les radars à pas de fréquence (radars SFCW) qui règlent les problèmes soulevés tout en affichant des performances en termes de précision presque équivalentes à celles du MFCW.

Toutefois, dans le contexte particulier du blindage actif ou de la détection de tireur embusqué, le cahier des charges de l'application donne l'avantage au radar MFCW par rapport au radar modulé pour plusieurs raisons. Tout d'abord la précision de la mesure est un point décisif qui ne supporte quasiment aucun compromis tant les exigences sont fortes à ce niveau. Ensuite, la vitesse des cibles et le faible temps d'observation qui en découle font que le processus de mesure doit être quasi-instantané comme c'est le cas pour le radar MFCW, tandis que les radars modulés ont des cycles de mesures (de modulation) qui peuvent durer plusieurs millisecondes. Enfin, les vitesses très élevées des projectiles les distinguent clairement des autres cibles qui peuvent être facilement éliminées par filtrage.

2.5.2 Principe

Afin de comprendre le principe du radar MFCW nous revenons sur l'effet Doppler (§2.3.2) et le radar continu pour mettre en évidence certains points. Le radar Doppler est généralement présenté comme un radar permettant la mesure de vitesse sans aucune information sur la position. En réalité, la phase du signal Doppler est directement proportionnelle à la distance radar-cible (voir §2.3.2):

$$\phi_d = 2\pi \cdot \frac{2d}{\lambda} \quad (2:49)$$

Le problème posé par la mesure de distance est lié au fait que la phase Doppler est connue modulo 2π puisque le signal de sortie est de la forme:

$$s(d) \propto \sin(\phi_d) = \sin\left(2\pi \cdot \frac{2d}{\lambda}\right) \quad (2:50)$$

et donc la phase mesurée $0 \leq \phi_m < 2\pi$ correspond à la phase Doppler à $n \cdot 2\pi$ près:

$$\phi_D = \phi_m + n \cdot 2\pi \quad (2:51)$$

Le numéro d'interférence n n'est pas accessible à la mesure et conduit donc à une ambiguïté en distance. Pour un radar à 10 GHz, la plage de mesure de distance sans ambiguïtés est de $\lambda/2 = 1,5$ cm seulement, ce qui ne permet pas d'envisager d'applications pratiques. En revanche, si le numéro d'interférence est connu, le radar Doppler permet une mesure extrêmement précise de la distance puisque des mesures de phase à 10° près correspondent à des erreurs de 0,4 mm seulement¹. A défaut de connaître n , on peut également envisager d'utiliser une longueur d'onde beaucoup plus grande pour diminuer l'ambiguïté du radar et ainsi augmenter sa plage de fonctionnement, mais l'on réduit dans le même temps la précision de la mesure. Pour reprendre l'exemple précédent, si la longueur d'onde vaut 15 m, une erreur de phase de 10° correspond à une erreur de distance de 40 cm.

1. Ces indications sont données à titre d'illustration uniquement. En réalité, beaucoup de phénomènes doivent être maîtrisés pour aboutir à de telles précisions, comme les déphasages intervenant dans les antennes ou lors de la réflexion.

L'idée du radar MFCW est d'utiliser plusieurs fréquences pour obtenir en même temps une faible ambiguïté et une grande précision. En considérant un système de plusieurs fréquences énumérées par ordre croissant: $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N$, la longueur d'onde λ_i sert à effectuer une mesure grossière de la position dans le but de déterminer le numéro d'interférence n_{i-1} de la phase à la longueur d'onde λ_{i-1} . Lorsque n_{i-1} est connu, on peut alors affiner la mesure et déterminer le numéro d'interférence de la phase à la longueur d'onde λ_{i-2} et ainsi de suite. La figure 2-35 illustre ce principe en présentant les dif-

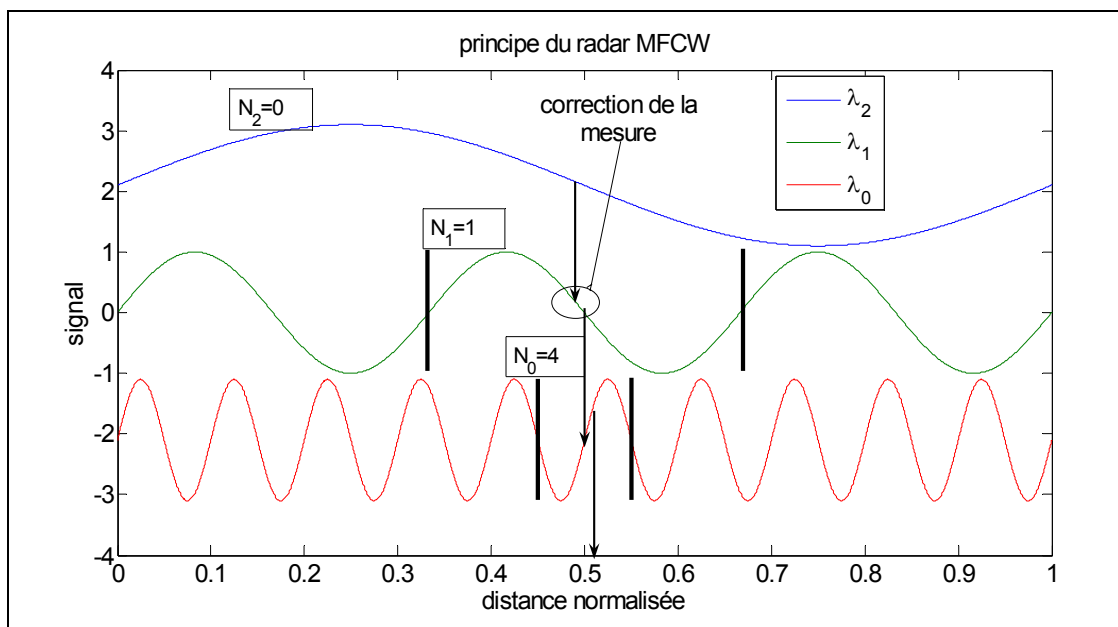


Figure 2-35: principe du radar MFCW

férents signaux en sortie d'un radar MFCW. Le signal correspondant à la plus grande longueur d'onde λ_2 définit la plage de fonctionnement du radar dans la mesure où l'on considère que la phase ϕ_{m_2} est comprise entre 0 et 2π sur toute la portée du radar. Ce premier signal permet d'effectuer une estimation grossière, mais sans ambiguïté, de la distance radar-projectile et ainsi de déterminer n_1 . Le numéro d'interférence étant connu on peut affiner la mesure de la position en exploitant la phase mesurée ϕ_{m_1} , et en déduire n_0 . La mesure de la phase ϕ_{m_0} donnera pour finir la meilleure précision sur la distance.

Pour réaliser ce principe à fréquences multiples, des ondes basses fréquences ne sont pas véritablement produites. En effet, d'une part cela poserait des problèmes insurmontables au niveau des antennes puisque celles-ci ont des dimensions commensurables avec la longueur d'onde, d'autre part des objets de petites dimensions seraient invisibles pour les grandes longueurs d'ondes. En pratique, les grandes longueurs d'ondes sont produites indirectement en générant deux signaux dont les fréquences sont légèrement décalées afin de former un battement dont la fréquence équivalente est égale à la différence de fréquence entre les deux signaux.

Nous appellerons maintenant les signaux effectivement générés par le radar *signaux primaires*, et les battements entre ces deux signaux les *signaux secondaires*.

Pour comprendre le principe des fréquences multiples, nous avons tracé (figure 2-36) les cercles équiphasse correspondant aux passages à zéro des signaux primaires d'un ra-

dar bi-fréquence, c'est-à-dire les lieux de l'espace pour lesquels la phase Doppler ϕ_D est un multiple entier de π .

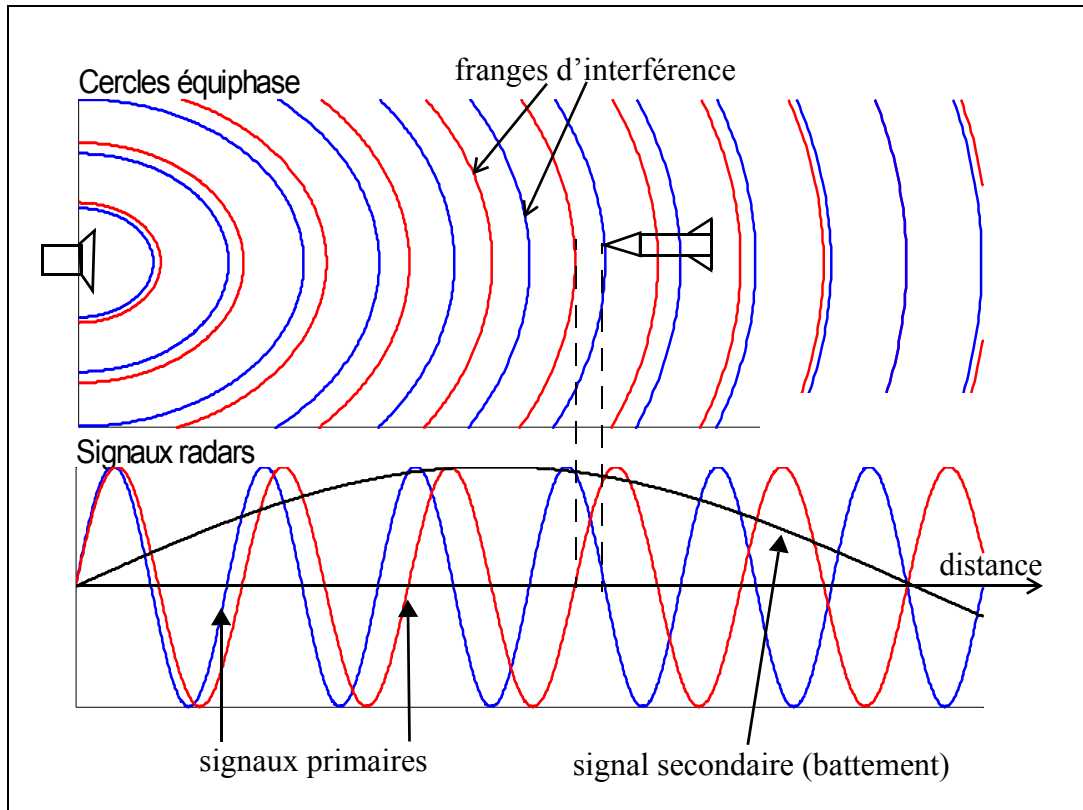


Figure 2-36 : représentation d'une cible dans le champ d'un radar bi-fréquence et des signaux correspondants

On appellera ces cercles les «franges d'interférences» puisqu'ils correspondent aux distances pour lesquelles l'onde émise et l'onde réfléchie sont en opposition de phase au niveau du radar.

Les deux fréquences différentes conduisent à des systèmes de franges d'interférences légèrement décalés. Lorsque le projectile se dirige en ligne droite dans la direction du radar, il traverse successivement chacune des franges d'interférence, produisant des signaux déphasés suivant le même décalage que les franges d'interférence. Le battement qui apparaît ainsi entre les deux signaux primaires est en tous points équivalent au signal qui aurait été produit par une onde de fréquence égale à la différence de fréquence des deux signaux primaires. On reconstruit de cette façon un système de fréquences équivalentes très étalé en n'utilisant que des ondes dans une bande de fréquence limitée.

2.5.3 Architecture

Le radar MFCW reprend l'architecture classique du radar Doppler en combinant simplement les sources au niveau de l'amplificateur. La figure 2-37 montre l'architecture

d'un radar bi-fréquence.

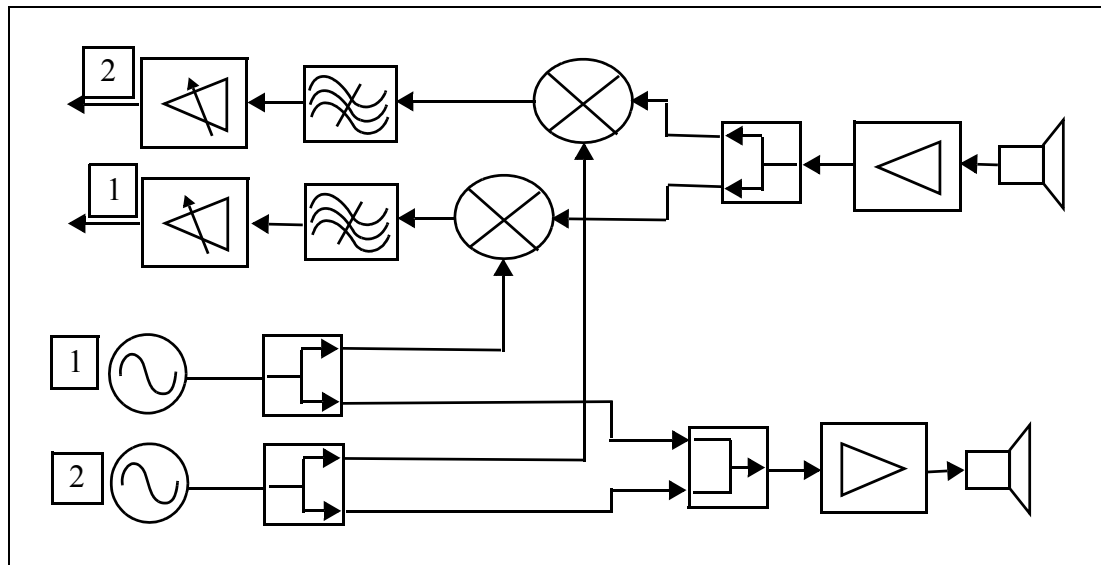


Figure 2-37: Architecture d'un radar bi-fréquence

Le couplage des sources à l'émission est assuré par un diviseur/combiner de puissance 2 vers 1. A la réception, le signal est séparé par un diviseur de puissance 1 vers 2. Le spectre vu à l'entrée de chacun des mélangeurs contient donc les échos des sources 1 et 2 (voir figure 2-38).

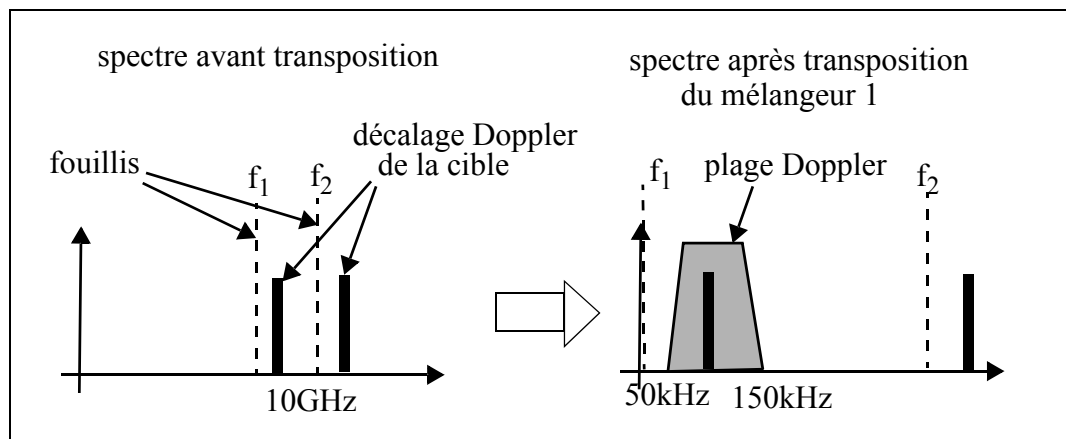


Figure 2-38: spectre à l'entrée et à la sortie du mélangeur 1

Ces échos comprennent évidemment les réflexions de la cible mais aussi les réflexions causées par les autres obstacles. Après transposition en fréquence, le filtre de l'AGC (voir §2.4.10) élimine les fréquences correspondant aux autres voies, à condition que celles-ci soient au-delà de la plage Doppler comme le montre la figure 2-38. On retrouve ici le problème d'ambiguïté distance/vitesse présent dans tous les radars qui mesurent simultanément ces deux grandeurs. Dans notre application l'écart fréquentiel entre deux voies doit être supérieur au décalage Doppler afin d'éviter un recouvrement spectral. La demi-longueur d'onde qui correspond à l'écart fréquentiel le plus faible entre deux voies donne la plus grande plage de fonctionnement du radar sans ambiguïtés. Dans notre cas les décalages Doppler sont inférieurs à 150 kHz, l'écart fréquentiel minimal entre deux voies doit être alors de 1 MHz environ pour assurer un rejet efficace des voies adjacentes, ce qui correspond à une distance sans ambiguïtés de 150 m.

Des filtres passifs doivent être également ajoutés en amont des AGC afin d'éviter que les voies adjacentes ne saturent les étages d'entrée des AGC. On choisira des filtres passifs sans résistance (cellules L-C) afin de ne pas introduire de bruit thermique supplémentaire.

L'extension de l'architecture à un nombre quelconque de fréquences suit la même logique.

2.5.4 Réalisation

Nous avons choisi de réaliser deux radars bi-fréquence pouvant se combiner en un radar quadri-fréquence en couplant les antennes des deux radars. Cette solution, plus souple qu'un unique radar quadri-fréquence, assure une compatibilité avec l'approche initiale (radar Doppler simple) en permettant notamment de faire des observations multi-radars (voir §1.4.2). Tous les composants utilisés pour le radar MFCW sont les mêmes que ceux décrits au paragraphe §2.4 à l'exception des filtres ajoutés à l'entrée des AGC.

Le filtre comprend deux cellules L-C en T, l'une passe-haut, l'autre passe-bas (voir annexe II). La fréquence de coupure basse est de 13 kHz environ ($L = 470 \mu\text{H}$ et $C = 220 \text{ nF}$) et la fréquence de coupure haute est de 150 kHz environ ($L = 100 \mu\text{H}$ et $C = 22 \text{ nF}$). L'un des deux radars bi-fréquence est visible figure 2-39.

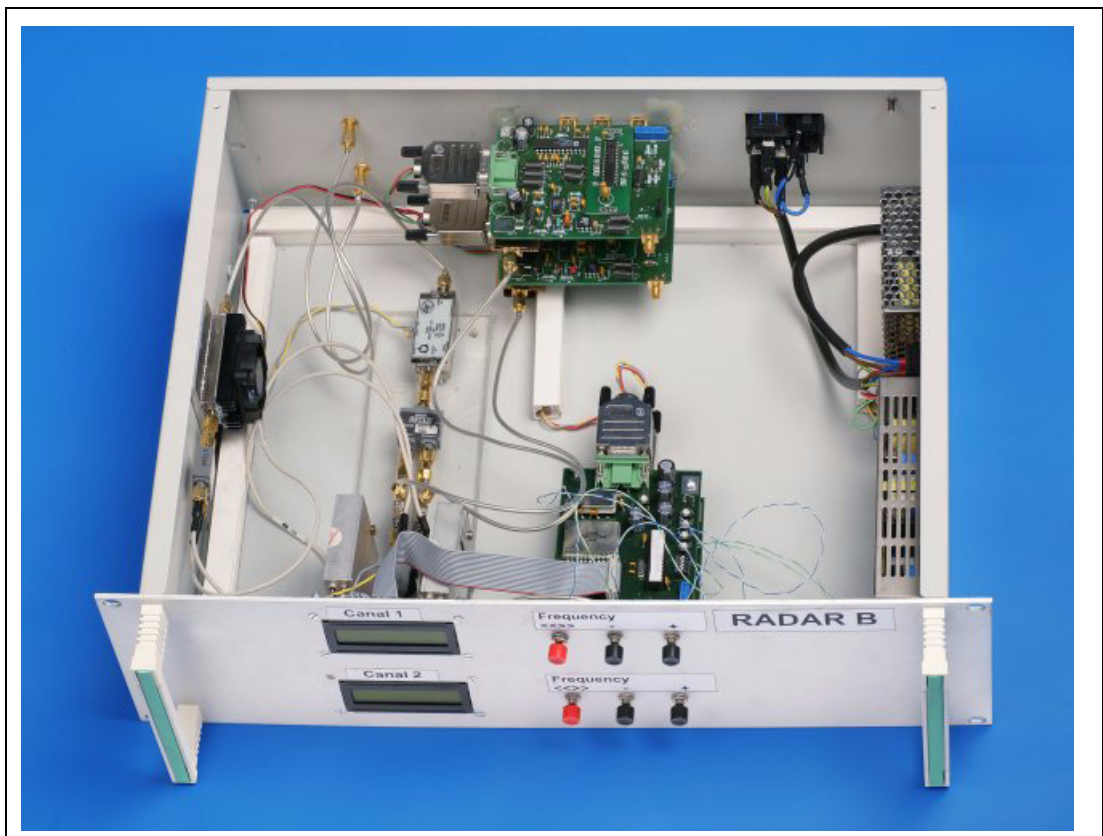


Figure 2-39: Radar bi-fréquence

Les fréquences ainsi que les longueurs d'ondes équivalentes du radar quadri-fréquence sont données par le tableau 2-6. Les quatre fréquences permettent d'élaborer six signaux secondaires au total, cependant seuls trois d'entre eux (notés en gras) présentent un réel intérêt.

Tableau 2-6 : Fréquences et longueurs d’ondes équivalentes du radar quadri-fréquences.

$\lambda/2$		radar A		radar B	
		f1=10,77090 GHz	f2=10,72050 GHz	f1=10,24000 GHz	f2=10,25000 GHz
A	f1	X	2,9762 m	0,2825 m	0,2880 m
	f2	2,9762 m	X	0,3122 m	0,3138 m
B	f1	0,2825 m	0,3122 m	X	15 m
	f2	0,2880 m	0,3138 m	15 m	X

Les quatre voies permettent ainsi de disposer des demi-longueurs d’ondes de 1,5 cm (signal primaire), 0,2825 m (1A-1B), 2,9762 m (1A-2A) et 15 m (1B-2B). La plage du radar (sans ambiguïté en distance) est donc de 15 mètres. Cette distance ne convient pas pour une application pratique mais est suffisante pour valider le principe expérimentalement. Dans une version opérationnelle, une voie supplémentaire peut être ajoutée pour allonger la plage de fonctionnement, on peut également tenir compte de l’amplitude des signaux ou utiliser une modulation (radar FMCW) pour obtenir une estimation grossière de la position.

2.5.5 Méthode de mesure

La mesure de la distance à partir d’un radar MFCW s’effectue par affinages successifs comme cela a été décrit dans le paragraphe §2.5.2. Elle débute par une mesure grossière de la distance à partir des deux signaux primaires formant la longueur d’onde équivalente la plus grande. Cette première mesure est supposée sans ambiguïté et sert à déterminer le numéro d’interférence de la longueur d’onde équivalente immédiatement inférieure. La mesure peut ensuite être répétée puisque les ambiguïtés sont levées successivement. On s’intéresse ici uniquement à la méthode permettant d’évaluer la distance en supposant le numéro d’interférence connu.

L’approche la plus naturelle consiste à mesurer directement la différence de phase entre les signaux primaires pour en déduire les phases des signaux secondaires. Cependant, la mesure de la phase des signaux nécessite l’utilisation de mélangeurs I/Q qui produisent deux sorties en quadratures, $A \sin(\varphi)$ et $A \cos(\varphi)$, ainsi que la numérisation de tous ces signaux. Le processus de mesure de la position peut pourtant être simplifié en exploitant les passages à zéro des signaux primaires et la mesure de rapports cycliques.

2.5.5.1 Principe de mesure par la méthode des rapports cycliques

Dans nos applications, on peut tirer parti du fait que les projectiles évoluent en ligne droite et à vitesse constante, tout au moins sur une demi-longueur d’onde primaire qui mesure 1,5 cm. On peut alors évaluer la distance du projectile en ne mesurant que le rapport cyclique entre deux signaux primaires.

Considérons en effet deux de ces signaux primaires s_1 et s_2 de longueurs d’ondes λ_1 et λ_2 respectivement. En ne tenant pas compte des amplitudes, ces signaux sont de la forme:

$$s_1 = \sin\left(2\pi\frac{2d}{\lambda_1}\right) \quad s_2 = \sin\left(2\pi\frac{2d}{\lambda_2} + \Delta\phi_{12}\right) \quad (2:52)$$

Le terme $\Delta\phi_{12}$ désigne un déphasage entre les deux signaux qui dépend du radar lui-même et qui doit être mesuré par une méthode d'étalonnage. On peut également faire intervenir ce déphasage sous la forme d'une distance en posant: $\Delta\phi_{12} = 4\pi d0_{12}/\lambda_2$. On obtient dans ce cas:

$$s_2 = \sin\left(2\pi\frac{2d + d0_{12}}{\lambda_2}\right) \quad (2:53)$$

La longueur $d0_{12}$ est à rapprocher de la différence de longueur des câbles entre les voies 1 et 2, mais dépend également de déphasages introduits par d'autres éléments (amplificateurs etc.).

Nous supposons que $\lambda_1 > \lambda_2$ et prendrons le signal s_1 comme référence pour la mesure du rapport cyclique qui est défini comme le rapport entre les temps t_a et T :

$$\alpha(d) = \frac{t_a}{T} \quad (2:54)$$

comme illustré sur la figure 2-40.

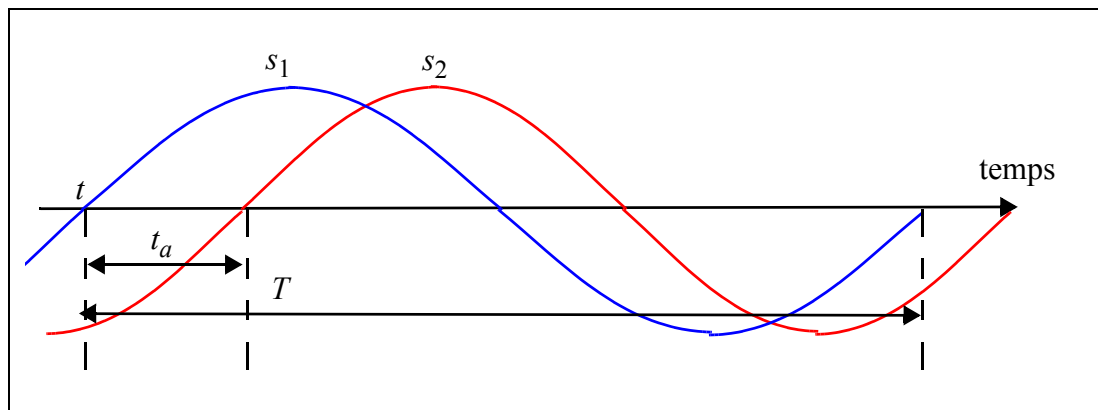


Figure 2-40 : Définition du rapport cyclique

On choisira de ne considérer que les passages à zéro correspondant à des fronts ascendants. Dans le cas où le signal s_2 présente deux passages à zéro entre deux passages à zéro de s_1 , le rapport cyclique est calculé par rapport au premier des deux passages à zéro de s_2 .

Conformément à l'expression des signaux (2:52), la position relative des zéros du signal 2 par rapport au signal 1, décrite par le rapport $\gamma(n) = a(n)/\lambda_1$, suit un motif périodique qui correspond à la longueur d'onde équivalente du signal secondaire comme le montre la figure 2-41. La détermination du rapport $\gamma(n)$ à un moment donné permet de déduire le numéro d'interférence n et de calculer ensuite la distance d'après la relation:

$$d = n \cdot \lambda_1 \quad (2:55)$$

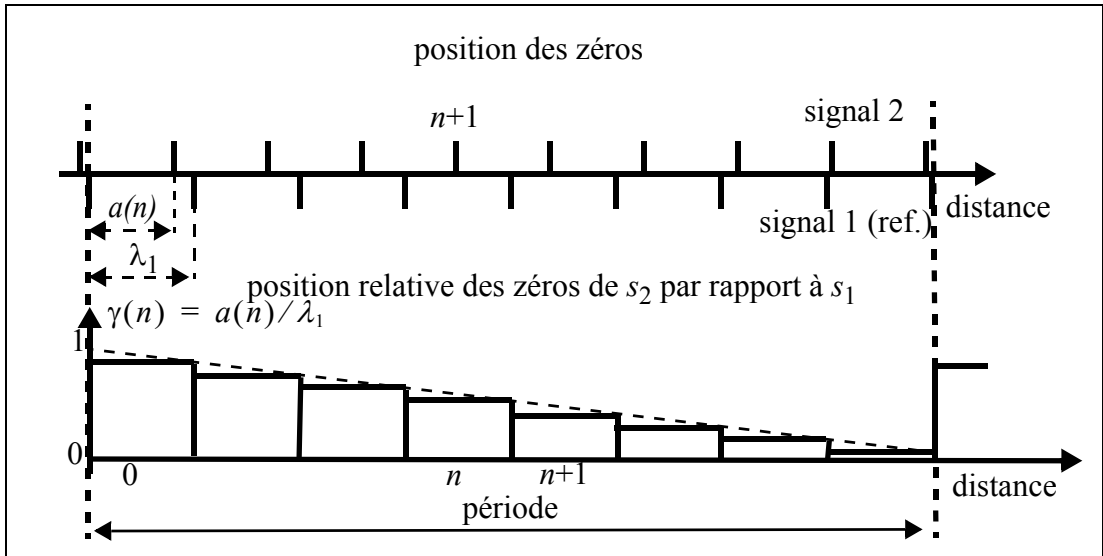


Figure 2-41 : Illustration de la position relative des zéros de deux signaux primaires et du rapport cyclique associé.

Nous supposons dans un premier temps que le projectile vole à vitesse constante exactement dans la direction du radar. Dans ce cas, la distance radar-cible répond à l'équation:

$$d = d_0 - vt \quad (2:56)$$

Le rapport cyclique lorsque le projectile se situe à une distance d est alors donné par:

$$\alpha(d) = \frac{t_a}{T} = \frac{(\lambda_1 - a(n))/v}{\lambda_1/v} = 1 - \gamma(n) \quad (2:57)$$

La mesure du rapport cyclique permet donc dans ce cas de déterminer immédiatement le numéro d'interférence du signal s_1 et de déduire la distance d d'après (2:55). On notera que l'expression (2:57) suppose la vitesse constante entre les deux passages à zéro. On s'intéresse maintenant au cas plus général où la trajectoire du projectile ne suit pas exactement la direction du radar. La relation entre le rapport cyclique et la position relative des zéros n'est plus triviale. Afin d'étudier cette relation, nous nous limiterons au cas 2D et nous supposerons que, à l'instant considéré, la trajectoire du projectile forme un angle β avec la direction du radar (voir figure 2-42). La formule (2:56) devient dans ce cas:

$$d = d_0 - vt \cdot \cos \beta \quad (2:58)$$

Le principal changement dans le cas d'une trajectoire oblique est qu'il faut tenir compte de la courbure des franges d'interférences comme le montre la figure 2-42. Cette courbure fait intervenir deux longueurs supplémentaires δa et δb dont il faut tenir compte¹. Le rapport cyclique vaut dans ce cas:

1. On omet provisoirement la dépendance des grandeurs en n , le numéro d'interférence, afin d'alléger les calculs.

$$\alpha(d) = \frac{\frac{b - \delta b}{v \cos \beta}}{\frac{b - \delta b + a + \delta a}{v \cos \beta}} = \frac{b - \delta b}{b - \delta b + a + \delta a} \quad (2:59)$$

La longueur δa est égale à:

$$\delta a = R - \sqrt{R^2 - a^2 \tan^2 \beta} \approx \frac{a^2}{R} \tan^2 \beta \quad (2:60)$$

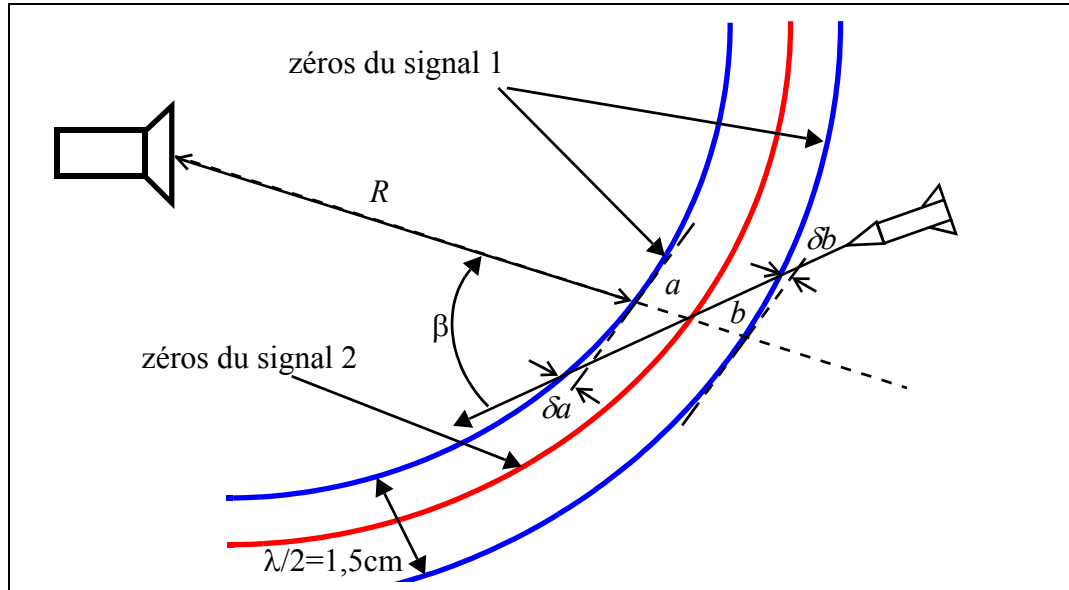


Figure 2-42: trajectoire du projectile dans les cercles équiphasés du radar

Lorsque le projectile est suffisamment éloigné du radar nous avons $a^2 / R \tan^2 \beta \ll a$, ce qui nous permet de négliger la longueur δa dans le rapport cyclique. Le même raisonnement peut être tenu au sujet de la longueur δb , le rapport cyclique retrouve alors la même expression que (2:57):

$$\alpha(d) = \frac{b}{a + b} = \frac{\lambda_1 - a}{\lambda_1} = 1 - \gamma(n) \quad (2:61)$$

Ceci montre que le rapport cyclique peut être aisément exploité pour déterminer la distance de la cible. L'avantage de cette méthode est qu'elle n'exploite que les passages à zéro des signaux et ne nécessite donc pas leur numérisation, ce qui simplifie beaucoup les traitements ainsi que le système d'échantillonnage. La faiblesse de cette méthode de mesure est qu'elle suppose le signal parfaitement pur et ne supporte, à l'exception du bruit bien entendu, la présence d'aucun autre signal. En effet, la présence d'une seconde cible résulterait en un signal composé de deux harmoniques dont les passages à zéro n'auraient plus aucune signification. Dans ce cas, la numérisation du signal suivie d'une analyse spectrale (FFT) pour la mesure des phases devient inévitable. Cependant, les plages de vitesses considérées dans nos applications associées à des filtres Doppler très sélectifs rendent l'hypothèse d'un signal unique tout à fait légitime. La méthode de mesure proposée est alors plus indiquée qu'une numérisation puisqu'elle répond parfaitement à une démarche à faible coût.

2.5.5.2 Mesure par rapports cycliques

La qualité de la mesure de distance décrite dans le paragraphe §2.5.5.1 peut être améliorée en exploitant plusieurs mesures de rapport cyclique. Pour cela, on numérote les mesures de rapport cycliques par rapport à un indice initial n_0 à déterminer. On obtient donc une collection de $N + 1$ mesures de rapports cycliques: $\{\alpha(n_0), \dots, \alpha(n_0 + N)\}$. Par ailleurs, on dispose d'un modèle de rapport cyclique donné par:

$$\alpha(n) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} (n \lambda_1) + \alpha_0 \quad (2:62)$$

avec

$$0 \leq n < \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \quad n \in \mathbb{N}$$

On peut alors estimer aisément l'indice n_0 en inversant la formule (2:62) et en calculant la valeur moyenne:

$$\hat{n}_0 = \frac{1}{N+1} \cdot \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \sum_{i=0}^N [(\alpha(i) - \alpha_0) - i] \quad (2:63)$$

En procédant ainsi l'estimation \hat{n}_0 prend une valeur non entière, on choisira donc la valeur entière la plus proche. Il n'est pas nécessaire de répéter cette mesure puisque, et c'est là l'un des avantages des radars CW, lorsque la distance est connue à un moment donné, le radar peut suivre son évolution avec une grande précision en intégrant simplement le signal Doppler. Cette technique est d'ailleurs très utilisée pour les radars de poursuite de tirs qui se contentent d'intégrer le signal Doppler à partir d'une position initiale (bouche du canon par exemple) qui est connue de l'expérimentateur. Les précisions atteintes sont excellentes puisqu'elles avoisinent la longueur d'onde du radar. Ceci souligne une particularité des radars MFCW qui se contentent d'une seule mesure de distance à un moment quelconque pour assurer un suivi de la position en continu.

2.5.6 Essais et résultats

Deux radars bi-fréquence ont été réalisés, nommément le «radar A» et le «radar B», qui peuvent être couplés pour former un radar quadri-fréquences.

2.5.6.1 Puissances

Nous avons mesuré les puissances en différents points d'un radar bi-fréquence (le radar B), dans le but d'affiner l'équation radar en tenant compte des pertes. La présence de deux fréquences entraîne des pertes supplémentaires inévitables par rapport au radar mono-fréquence. Tout d'abord au niveau de l'émission puisque le couplage des deux fréquences se fait avant l'amplificateur, la puissance de totale de l'amplificateur est donc partagée entre deux canaux. Ainsi, pour un point de compression à 1 dB de 30 dBm, la puissance disponible par voie n'est que de 27 dBm. Une solution serait de coupler les voies après amplification, mais il faut dans ce cas utiliser des coupleurs guide d'onde pour ne pas créer de pertes. Une autre perte intervient au niveau de la réception puisqu'un diviseur de puissance assure la séparation du signal. Cette perte peut cependant être compensée en augmentant le gain d'amplification du LNA, le facteur de bruit dû aux pertes du diviseur étant sans effet dans le calcul de la sensibilité de la

chaîne de réception.

Les résultats des mesures sont rapportés sur la figure 2-43, et permettent d'établir une formule similaire à (2:43) pour le radar bi-fréquence:

$$P_{mel} = 45 \text{ dBm} - L \quad (2:64)$$

où L représente l'atténuation entre l'antenne d'émission et de réception, ici matérialisée par un atténuateur variable. On constate que le bilan de puissance du radar bi-fréquence donné par la formule (2:64) intègre bien des pertes supplémentaires (5dB) par rapport au bilan de puissance du radar mono-fréquence, ce qui est en accord avec la discussion précédente.

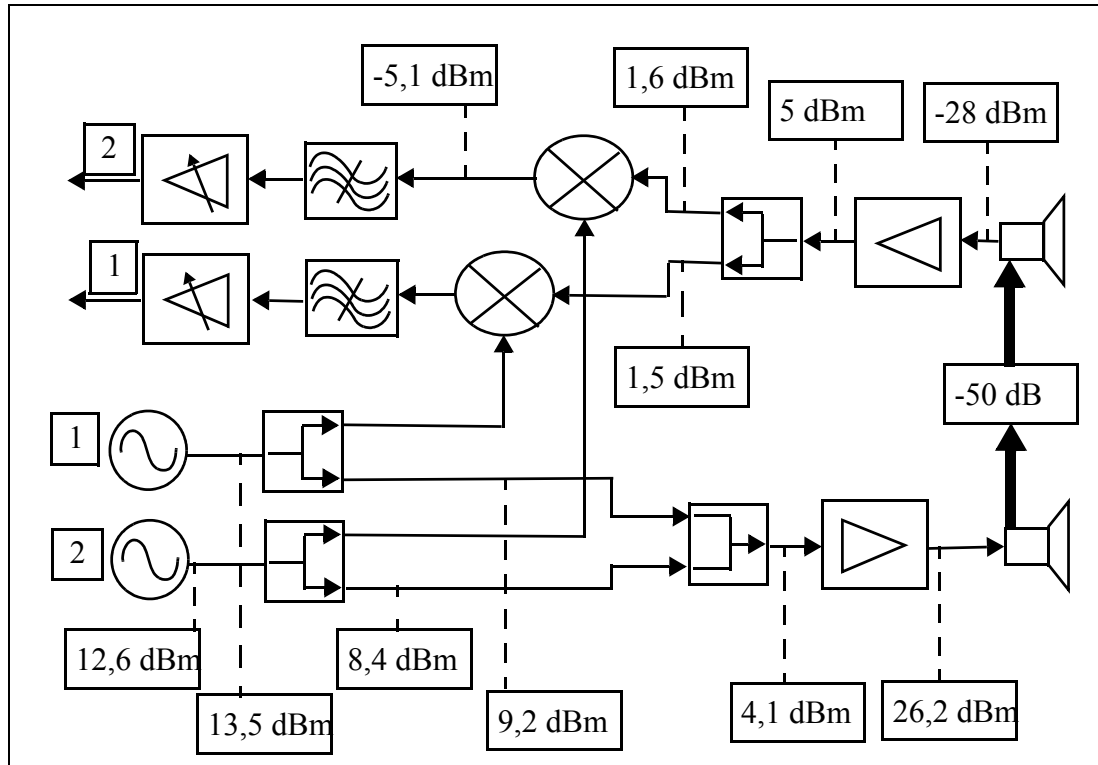


Figure 2-43: mesures de puissances sur le radar B

Malgré cette perte de puissance, la portée théorique du radar bi-fréquence ne change pas par rapport au radar mono-fréquence. En effet, nous avons vu au paragraphe §2.4.11.5 que la sensibilité globale du radar n'était pas limitée par le bruit thermique mais par le couplage d'un parasite entre l'émission et la réception. Or ce parasite suit le même parcours que les signaux utiles et est donc affecté par les mêmes pertes que ces derniers, laissant le rapport signal à bruit inchangé.

2.5.7 Tests en chambre anéchoïque

Nous avons dans un premier temps effectué des tests en chambre anéchoïque afin d'une part de valider le principe des fréquences multiples, d'autre part d'effectuer l'étalonnage du radar. En effet, la position exacte des zéros des signaux primaires et secondaires ne peut être connue que par une mesure directe. Si en théorie il est possible de calculer leur position à partir de l'endroit où les ondes d'émission et de réception interfèrent, c'est-à-dire le mélangeur, il nous faut tenir compte de la longueur des câbles mais aussi et surtout des déphasages introduits par les différents éléments du radar

tels que les antennes et les amplificateurs.

Cet étalonnage répond également à une question qui n'a pas encore été soulevée jusqu'à présent: quel sens donner à des précisions de quelques centimètres lorsque la dimension des antennes (précisément la distance entre les deux antennes) est de plusieurs dizaines de centimètres? En effet, si la mesure des phases ou des rapports cycliques permet de déterminer précisément une distance, encore faut-il savoir entre quels points est prise cette distance, le «centre» du radar n'étant pas forcément le «milieu» des antennes. L'étalonnage, en permettant la mesure directe de la position des zéros par rapport à un point quelconque du radar, permet d'étalonner le radar par rapport à un point référent choisi par l'utilisateur.

Un dernier problème subsiste lorsque l'on considère des cibles qui ne sont pas dans l'axe du radar, ou du moins dans l'axe utilisé pour l'étalonnage. En effet, les antennes ne rayonnent pas avec la même phase dans toutes les directions, ou, en d'autres termes, les «cercles équiphases» présentés dans la figure 2-36 ne sont pas véritablement des cercles.

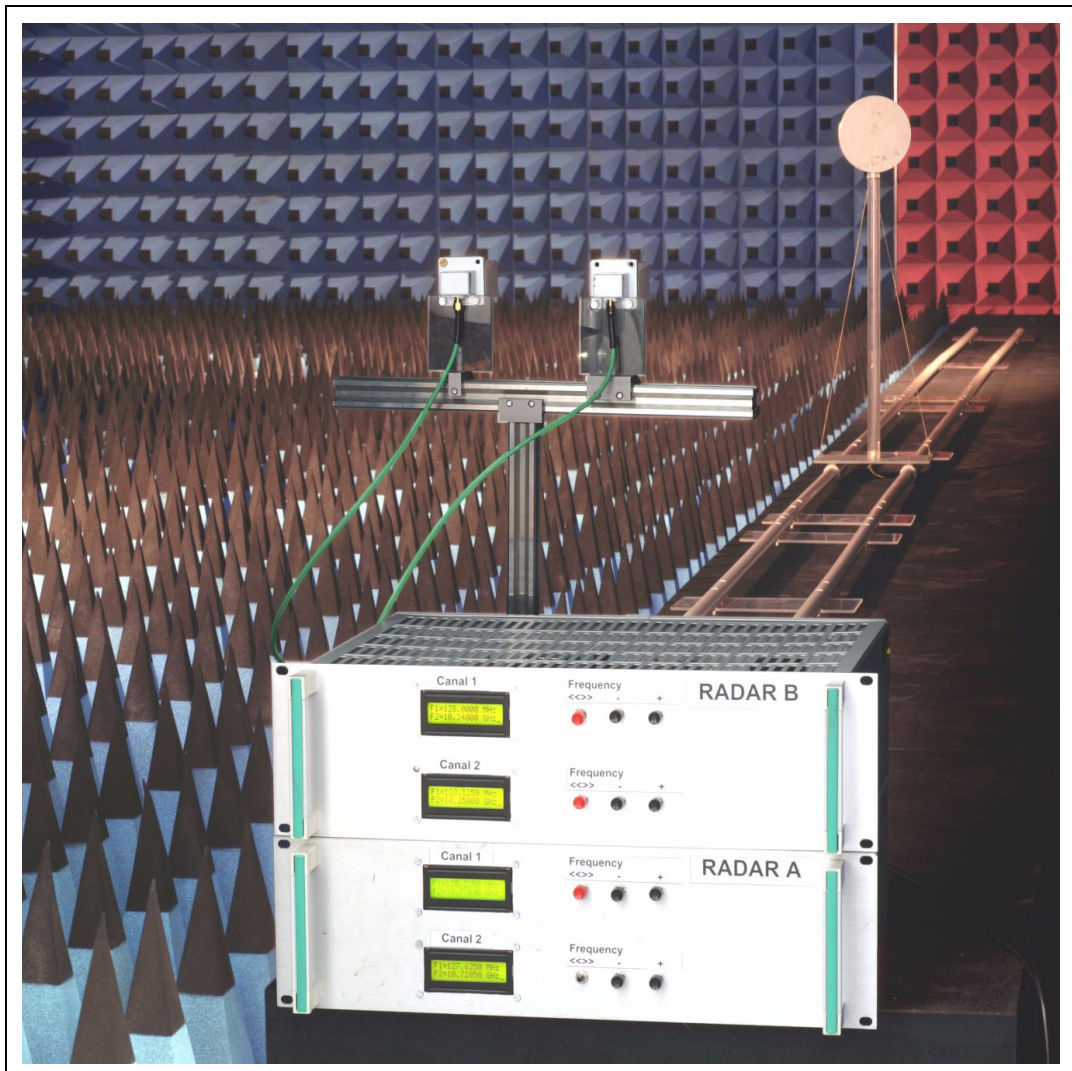


Figure 2-44 : Dispositif d'étalonnage en chambre anéchoïque

Il faudrait donc intégrer les angles dans l'étalonnage, mais cette opération étant fastidieuse et difficile à mener précisément, nous nous sommes contentés d'un étalonnage dans l'axe.

Pour réaliser l'étalonnage nous avons utilisé un réflecteur circulaire monté sur des rails qui est déplacé manuellement à l'aide d'une cordelette (voir figure 2-44). Nous avons enregistré les signaux radars en dynamique tandis que le réflecteur était tiré sur toute la longueur des rails. Des mesures dynamiques ont été préférées à des mesures statiques car elles permettent une lecture immédiate de la phase des signaux par détection des passages à zéros. La figure 2-45 (gauche) montre un exemple de courbe de vitesse mesurés sur chacune des voies pour l'un des tirs d'étalonnage. De ces courbes on déduit ensuite la distance parcourue (à droite) par intégration de la vitesse. On note tout d'abord que la vitesse du réflecteur n'est pas constante pendant le tir puisque celui-ci est tiré à la main. Cependant nous verrons que malgré les variations importantes de vitesses, la mesure des rapports cycliques demeure tout à fait correcte et la méthode décrite au paragraphe §2.5.5.2 s'applique parfaitement. On remarquera ensuite que les mesures indépendantes de vitesses et de distances sur chacune des voies coïncident parfaitement; les écarts maximaux de distances entre les différentes voies sont de l'ordre de 1 à 2 cm.

Les rapports cycliques sont ensuite calculés et rapportés à la position exacte du réflecteur qui est obtenue en ajoutant (ou retranchant) la distance parcourue à la position initiale du projectile. On obtient ainsi une mesure des rapports cycliques en fonction de la position de la cible comme illustré sur la figure 2-46.

Les rapports cycliques répondent à l'équation:

$$\alpha_i(d) = \frac{2}{\lambda_i}(d - d0_i) - n(d) \cdot \frac{\lambda_i}{2} \quad (2:65)$$

où $\alpha_i(d)$ désigne le rapport cyclique pour la longueur d'onde λ_i , d la distance de la cible et $n(d)$ un entier qui ramène le rapport cyclique dans l'intervalle $[0, 1]$.

Si la pente de la fonction $\alpha_i(d)$ est donnée par la longueur d'onde équivalente du signal secondaire et est donc parfaitement connue, l'origine $d0_i$ doit être déterminée par l'étalonnage. Ce paramètre peut être estimé très simplement à partir des mesures en uti-

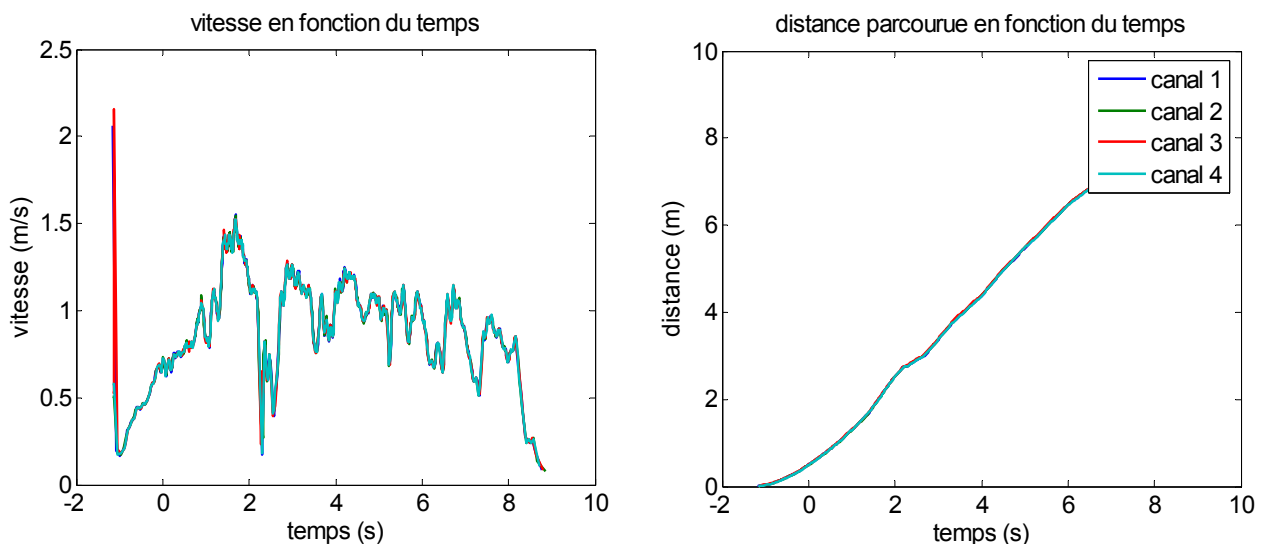


Figure 2-45: Vitesse du projectile (à gauche) et distance parcourue (à droite) du réflecteur d'étalonnage

lisant les techniques classiques d'estimation, qui reviennent dans ce cas à calculer une moyenne. Pour ceci une routine de traitement automatique a été développée qui effectue les tâches suivantes:

- prétraitement des signaux par moyenne glissante pour diminuer le bruit

- détection des passages à zéro des signaux
- calcul des courbes de vitesse et de position
- calcul des rapports cycliques
- calcul des origines $d0_i$

La figure 2-46 montre une superposition entre les courbes de références obtenues par la formule (2:65) après étalonnage et les courbes mesurées. Les erreurs commises n'excèdent pas quelques centimètres et peuvent être expliquées par la vibration du réflecteur pendant son mouvement.

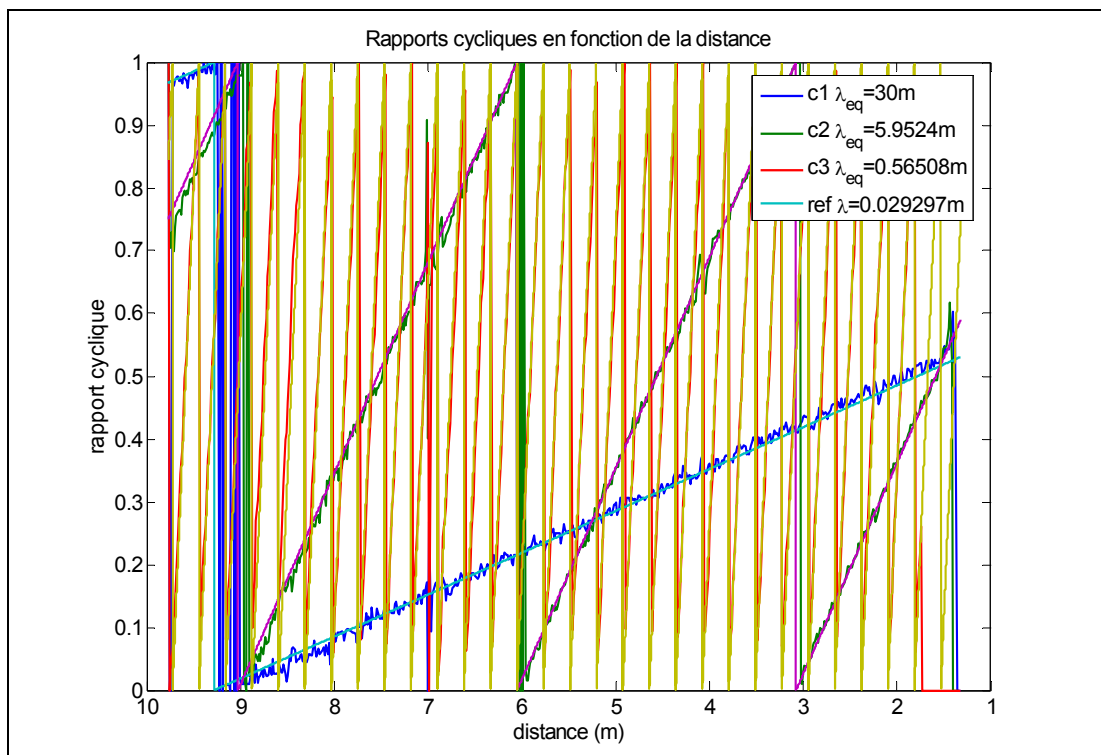


Figure 2-46: Rapports cycliques en fonction de la distance radar-cible

Pour affiner l'étalonnage nous avons procédé à une quinzaine de tirs dans différentes conditions. Nous avons notamment fait varier la course du réflecteur ainsi que sa direction (approche ou éloignement), l'objectif étant de vérifier la stabilité des origines $d0_i$. L'ensemble des détails expérimentaux est donné dans annexe III. Les mesures effectuées en approche (tirs 1 à 7) ne sont pas très fiables car la position de référence (position initiale) intègre la course du projectile qui ne peut être mesurée très précisément. En revanche, pour les tirs en éloignement la position de référence peut être mesurée avec une erreur de l'ordre du centimètre et conduit donc à des résultats de meilleures précision. Nous avons exploité les tirs n°8 à 15 pour estimer la valeur des origines ainsi

Tableau 2-7 : valeurs d'étalonnage

	$d0_1$ ($\lambda_1 = 30$ m)	$d0_2$ ($\lambda_2 = 5,9524$ m)	$d0_3$ ($\lambda_3 = 0,5650$ m)
moyenne	9,34 m	0,15 m	0,24 m
écart-type	7,41 cm	2,12 cm	1,69 cm

que la fluctuation autour des valeurs moyennes qui constitue un bon indicateur de la précision. Les résultats sont donnés dans le tableau 2-7. On notera surtout les faibles fluctuations des mesures, inférieures à 2 cm pour la plus petite longueur d'onde, qui donnent l'ordre de grandeur des précisions que l'on peut espérer atteindre avec un radar MFCW.

2.5.7.1 Conclusion sur les tests en chambre anéchoïque

Les tests effectués ont conduit à des résultats en accord parfait avec les prévisions théoriques. De ce point de vue, la figure 2-46 illustre bien la concordance entre les modèles théoriques et les mesures pratiques. Selon le principe du radar MFCW, il aurait également fallu s'intéresser aux signaux primaires qui donnent la précision ultime. Cependant, l'utilisation de ces signaux pour atteindre des précisions inférieures au centimètre soulève beaucoup de questions et réclame des moyens de mesures beaucoup plus fiables. En outre, ces précisions dépassent les objectifs et les attentes que l'on peut avoir d'un premier prototype et n'ont donc pas été étudiées.

Les valeurs trouvées grâce à la méthode d'étalonnage ne sont valables qu'à condition d'utiliser le radar dans une configuration strictement identique; le remplacement d'un câble par exemple, nécessite un nouvel étalonnage. Les expériences en champ de tir ayant été effectuées pour diverses raisons dans des configurations différentes, les valeurs trouvées n'ont pas été exploitées. Ce qui importe donc dans ces premiers tests est tout d'abord la validation expérimentale du principe à fréquence multiples. Les faibles fluctuations des mesures révèlent ensuite la bonne précision de ce type de radar.

2.5.8 Tests avec projectile: radar bi-fréquence

2.5.8.1 Présentation

Les premiers tests utilisant des projectiles réels ont été effectués le 20 avril 2005 au champ de tir de Baldersheim. Pour ces premiers tests, les objectifs visaient la vérification du fonctionnement des radars en conditions réelles, notamment l'augmentation de la portée par rapport au radar précédent.

2.5.8.2 Dispositif expérimental

Les expériences ont été menées sur une piste d'une quinzaine de mètres environ, équipées d'un canon de 40 mm. Un descriptif du dispositif expérimental est donné figure 2-47. Un dispositif de détection du projectile, placé derrière les radars, sert au déclenchement des oscilloscopes. Il est constitué de deux feuilles d'aluminium tendues par un cadre en bois, qui sont isolées l'une de l'autre par une feuille en papier. Lorsque le projectile traverse le cadre, il provoque un court-circuit entre les feuilles qui sert de signal de déclenchement. Un diaphragme est également utilisé lorsque les projectiles sont guidés par des sabots afin de bloquer ces derniers. Le diaphragme pose un certain nombre de problèmes pour les mesures radar, car sa grande surface métallique masque une partie de la trajectoire du projectile. Pour s'affranchir de ce problème il convient d'utiliser des projectiles cylindriques, qui de ce fait ne sont pas de véritables projectiles, puisqu'ils ne sont pas guidés par des sabots

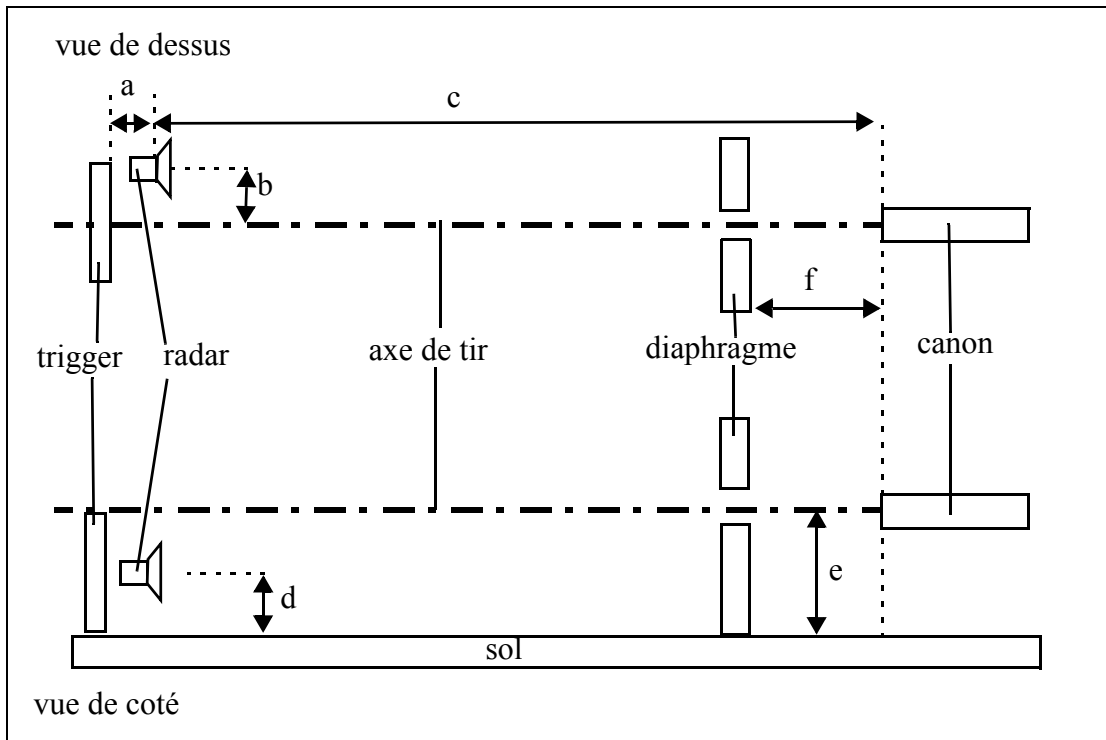


Figure 2-47: descriptif du dispositif expérimental

Une photographie du dispositif expérimental est visible sur la figure 2-48. Le projectile termine sa course dans une bute de sable située à l'intérieur d'un bunker, derrière le trigger. On distingue également la trace de l'impact des sabots sur le diaphragme causée lors d'expériences précédentes.

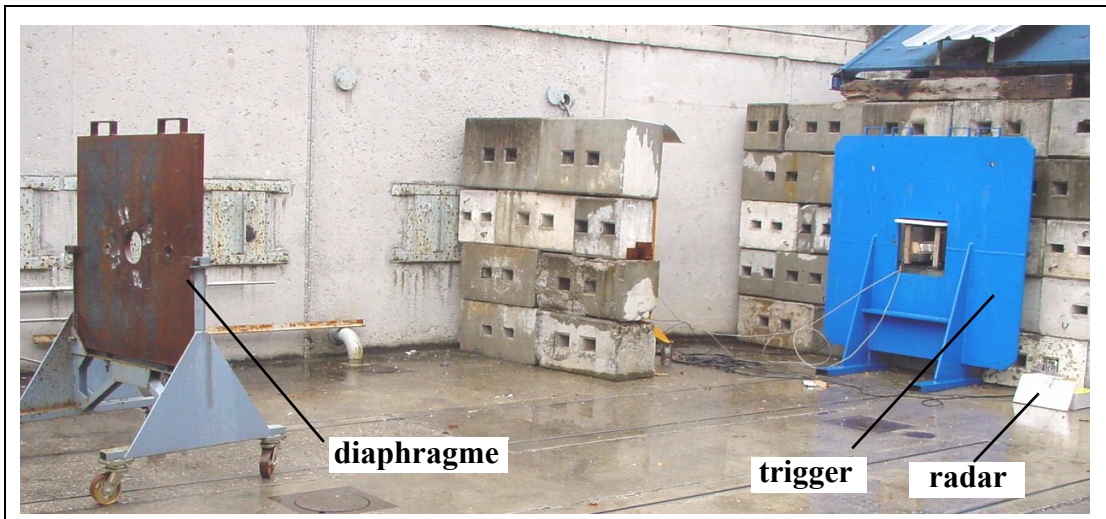


Figure 2-48: vue d'ensemble du dispositif expérimental

2.5.8.3 Résultats

Quatre tirs ont été effectués au total, dont l'ensemble des résultats et détails expérimentaux est donné dans annexe IV. Les deux premiers tirs utilisaient des projectiles flèche et nécessitaient donc la présence d'un diaphragme, tandis que les deux tirs suivants uti-

lisaient des cylindres ce qui a permis de retirer le diaphragme.

Le premier des objectifs consistait à valider l'augmentation de portée entre le radar initial (BMDM 9550) et le radar développé à l'ISL. Cette amélioration des performances était au départ la seule motivation au développement d'un nouveau radar. La figure 2-49 illustre l'amélioration de ces performances au travers de deux enregistrements de courbes de vitesse.

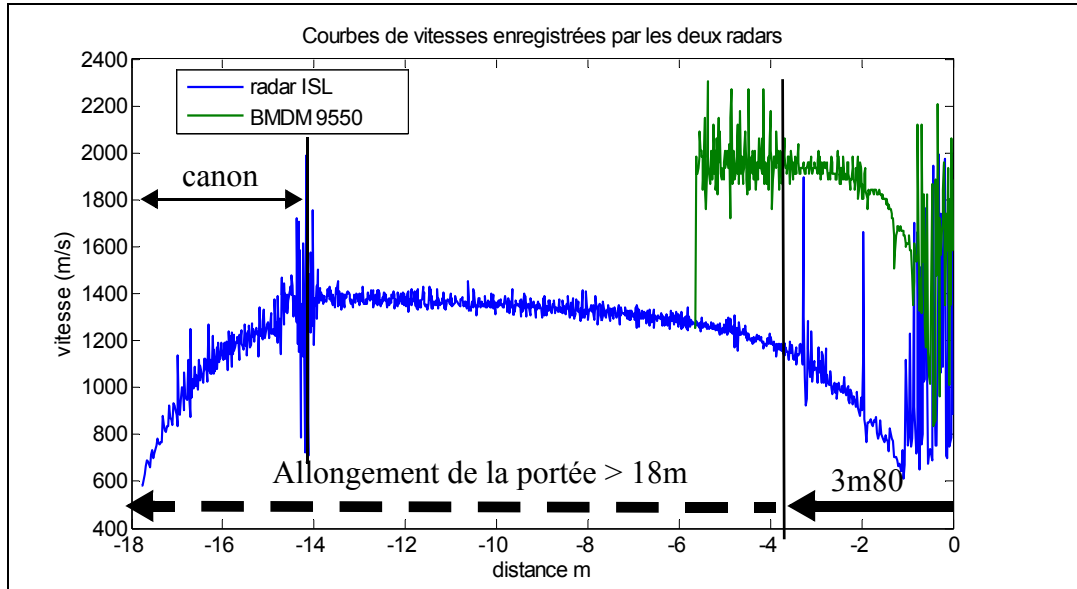


Figure 2-49: comparaison de la portée du radar BMDM 9550 et du radar ISL

La courbe verte est issue d'une ancienne mesure effectuée avec le radar BMDM 9550, tandis que la courbe bleue provient du tir 3 (voir annexe IV) de la campagne décrite ici. Les résultats dépassent toutes nos attentes puisque le projectile est non seulement visible sur toute sa trajectoire, mais il l'est également à l'intérieur même du canon dès qu'il a franchi la vitesse limite de 600 m/s¹. On observe qu'avec le précédent radar, pourtant situé dans l'axe de tir, la portée n'excédait pas 4 m environ.

Le deuxième point sur lequel des améliorations étaient attendues concerne l'ouverture du radar, c'est-à-dire son champ de vision. La réponse est implicitement contenue dans le résultat précédent puisque l'enregistrement présenté a été effectué avec un radar désaxé de 2,31 m par rapport à l'axe de tir alors que le précédent radar, de par sa faible ouverture d'antenne, ne permettait pas des écarts supérieurs à 40 cm environ.

2.5.9 Tests avec projectile: radar quadri-fréquence

2.5.9.1 Présentation

Ces derniers essais avaient pour objectif d'enregistrer des signatures à deux radars CW simples pour l'application du paragraphe §1.4.2 ainsi que des signatures utilisant un radar quadri-fréquence. Une première campagne de tirs a été menée le 18-19 octobre 2005 sur une piste de 200 m avec des projectiles de 40 mm. Malheureusement, les filtres d'entrée des AGC (voir §2.5.4) avaient été omis et aucun des enregistrements ne fut exploitable. Une deuxième campagne de mesure eut lieu le 2 novembre 2005, mais sur une distance de 50 m seulement et avec des projectiles de 105 mm. Cette campagne

1. C'est-à-dire dès que sa vitesse entre dans la plage utile.

qui ne comptait que trois tirs, permit toutefois d'obtenir deux enregistrements exploitables, les radars ayant été perturbés par des parasites lors du dernier tir. Par manque de chance, un connecteur SMA de l'une des quatre voies se dessouda lors du deuxième tir et seuls trois signaux purent être enregistrés. En fin de compte, seuls deux enregistrements furent exploitables, l'un avec deux radars bi-fréquence situés derrière le canon, l'autre avec un seul radar quadri-fréquence au niveau de la butte de tir et faisant face au canon mais avec trois signaux valables au lieu de quatre.

2.5.9.2 Dispositif expérimental du 2 novembre

Une barrière optique a été utilisée pour le déclenchement des enregistrements. La figure 2-50 montre une photographie du dispositif expérimental du 18-19 octobre, qui utilisait un canon de 40 mm sur la même piste, mais placé à une distance de 200 m. A l'exception de ces deux changements, la photographie donne un bon aperçu des conditions expérimentales du 2 novembre.

Le premier tir utilisait deux radars bi-fréquence disposés de part et d'autre du canon dans le but d'enregistrer deux signatures multi-radar Doppler. Les tirs 2 et 3 utilisaient eux un seul radar quadri-fréquence placé au niveau de la butte de tir et faisant face au canon. Les projectiles utilisés étaient des cylindres en aluminium.

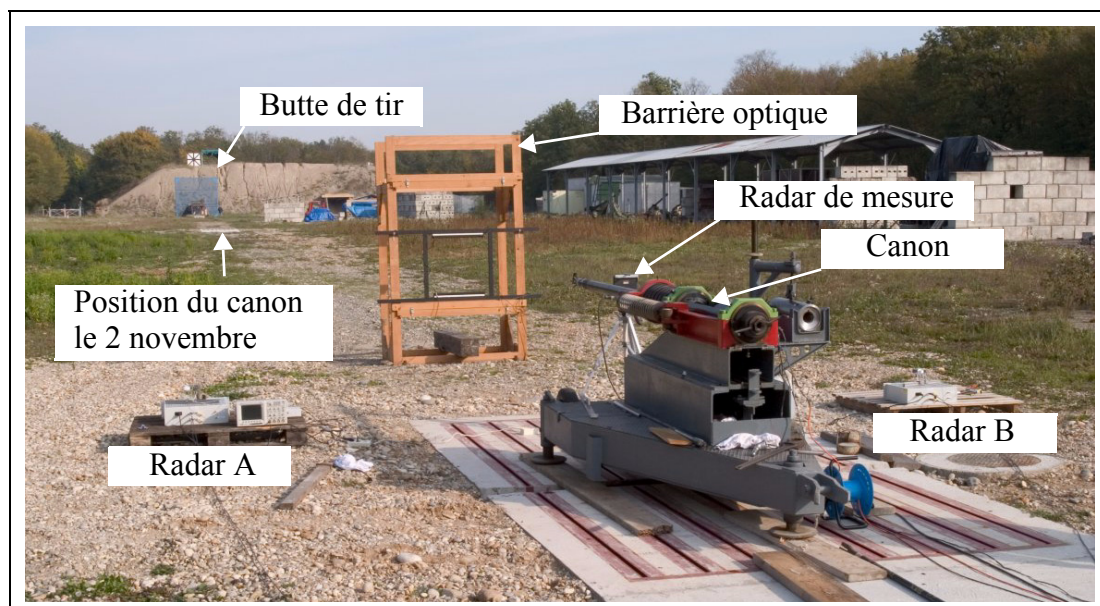


Figure 2-50: vue d'ensemble du dispositif expérimental du 18-19 octobre, le 2 novembre le calibre ainsi que la position du canon étaient différentes.

2.5.9.3 Résultats

Tir 1: deux radars bi-fréquence

Les enregistrements Doppler de chacun des deux radars sont donnés figure 2-51. On observe qu'une partie des enregistrements est masquée pour les deux radars et ce, quelle que soit la fréquence. La perte de signal est d'ailleurs plus marquée pour le radar B situé à droite du canon en regardant dans la direction du tir, que le radar A situé à gauche. A première vue, il peut sembler paradoxal que le signal disparaisse au début de l'enregistrement, c'est-à-dire lorsque le projectile est le plus proche du radar et que l'écho est donc maximal, tandis qu'il semble parfaitement net alors que le projectile est

beaucoup plus éloigné. Une première explication pourrait résider dans la saturation des amplificateurs, mais d'une part l'asservissement en gain de l'AGC doit justement éviter cela, d'autre part le radar A enregistre un début de signal qui correspond aux distances minimales avant de disparaître. La seconde explication serait que le projectile est masqué par le feu de bouche du canon. Ceci permet de répondre simplement à la question de savoir pourquoi le radar A ne subit pas le même sort que le radar B: le feu de bouche n'est pas symétrique et, visiblement sur ce tir, l'essentiel des projections s'est concentré du côté droit. Cette hypothèse a été confirmée par le deuxième tir où les radars faisaient face au canon et où aucun effet de masquage n'a été observé.

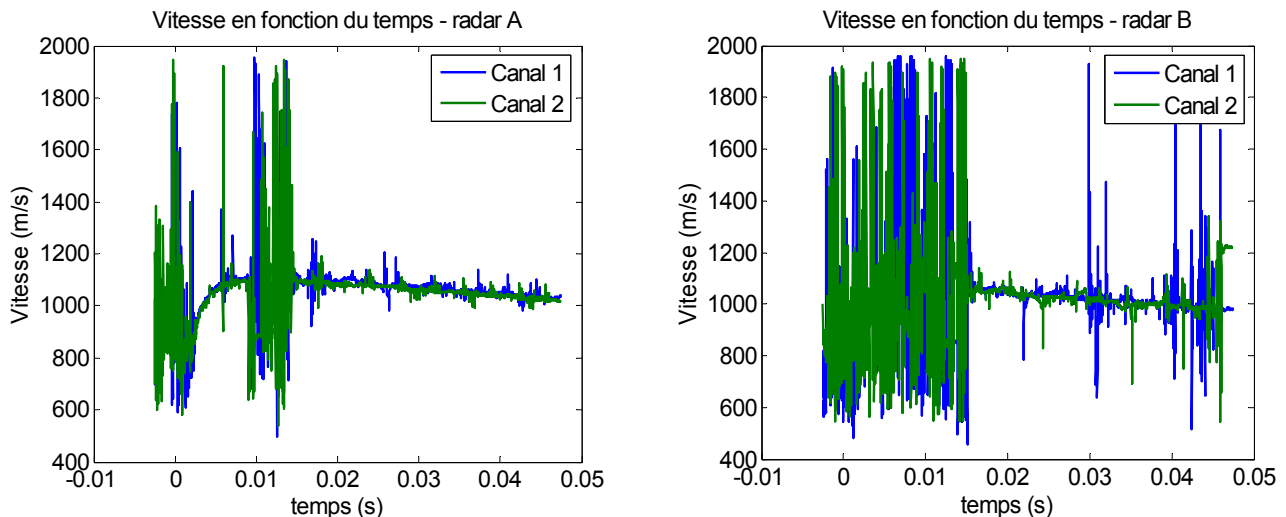


Figure 2-51: Enregistrements Doppler des radars A et B du tir 1

Ce phénomène est bien connu des expérimentateurs effectuant des mesures radar en champ de tir, qui ont d'ailleurs pour habitude d'éloigner le radar de la bouche du canon afin de limiter la durée du masquage. Cependant, certaines questions restent en suspens, notamment en ce qui concerne les propriétés électriques du feu de bouche. Il peut en effet sembler étrange que de simples fumées puissent masquer l'écho d'un projectile de 105 mm situé à quelques mètres du radar. On peut ainsi se demander si l'écho du feu de bouche est lié principalement à l'ionisation des gaz ou plutôt à la projection de particules métalliques. Cette question reste pour le moment sans réponse et mérite des investigations supplémentaires.

La courbe de vitesse affiche une pente négative, traduisant la décélération rapide du cylindre qui peut être jusqu'à 10 fois plus importante que celle d'un projectile profilé. Cette courbe présente également des «pics» assez marqués, qui sont en réalité un artefact lié au prétraitement des signaux. En effet, afin d'améliorer la qualité des enregistrements, notamment en supprimant les parasites (voir §2.4.11.4), les signaux sont prétraités à l'aide d'une transformée de Fourier glissante qui sélectionne le signal utile par un fenêtrage fréquentiel. Ceci a pour effet de créer des discontinuités de phase entre deux segments temporels, discontinuités qui sont à l'origine des pics dans la courbe de vitesse. Cet inconvénient pourrait être supprimé aisément en utilisant un prétraitement plus sophistiqué fondé sur des ondelettes par exemple, mais le besoin ne justifie pas pour le moment des recherches dans ce sens.

Tir 2: radar quadri-fréquence

Comme cela a été dit précédemment, le canal 2 du radar A ($f_{2A}=10,72050$ GHz) était

défectueux au moment du tir, par conséquent seuls 3 signaux primaires et deux signaux secondaires (1A - 1B et 1B - 2B) sont disponibles. Le radar quadri-fréquence a été configuré en plaçant simplement les deux jeux d'antennes des deux radars bi-fréquence côte à côte, au lieu d'utiliser un jeu d'antenne unique pour les quatre canaux, car ceci aurait nécessité l'emploi d'un diviseur résistif et aurait entraîné une perte de puissance. La figure 2-52 présente tout d'abord les enregistrements de vitesse pour les trois canaux opérationnels, ainsi que la distance parcourue obtenue par intégration de la vitesse ou plus simplement, en comptant le nombre de passages à zéro. On observe visuellement que, mis à part les pics sur la courbe de vitesse dus aux récolement de phase entre les segments d'analyse de la transformée de Fourier, les trois canaux se superposent parfaitement, ce qui traduit la bonne qualité des mesures. Un examen plus détaillé des courbes de distance montre que les canaux 1B et 2B conduisent exactement à la même distance parcourue (4 mm de différence à 40 m!), tandis que le canal 1A s'écarte légèrement de cette valeur avec 17 cm de différence à 40 m. Ceci peut s'expliquer par le fait que le radar A était plus perturbé par des parasites que le radar B lors des tirs (voir §2.4.11.4), ce qui peut conduire à des passages à zéro supplémentaires et fausser la mesure de distance. Dans tous les cas, les écarts enregistrés sont très faibles et démontrent une bonne fiabilité des mesures, surtout si l'on songe que l'emploi de deux jeux d'antennes séparés crée inévitablement des différences de distances entre les deux radars.

Du point de vue du modèle de synthèse décrit au paragraphe §2.3.6, l'allure des courbes de vitesse ne présente aucune manifestation ni de scintillement de la cible, ni trajets multiples (réflexions par le sol). Le premier point est lié à la forme relativement homogène du projectile car il s'agit d'un simple cylindre. En revanche, l'absence, du moins qualitative, de réflexions par le sol est un point intéressant puisque cela indique que le radar n'est pas perturbé par la cible image.

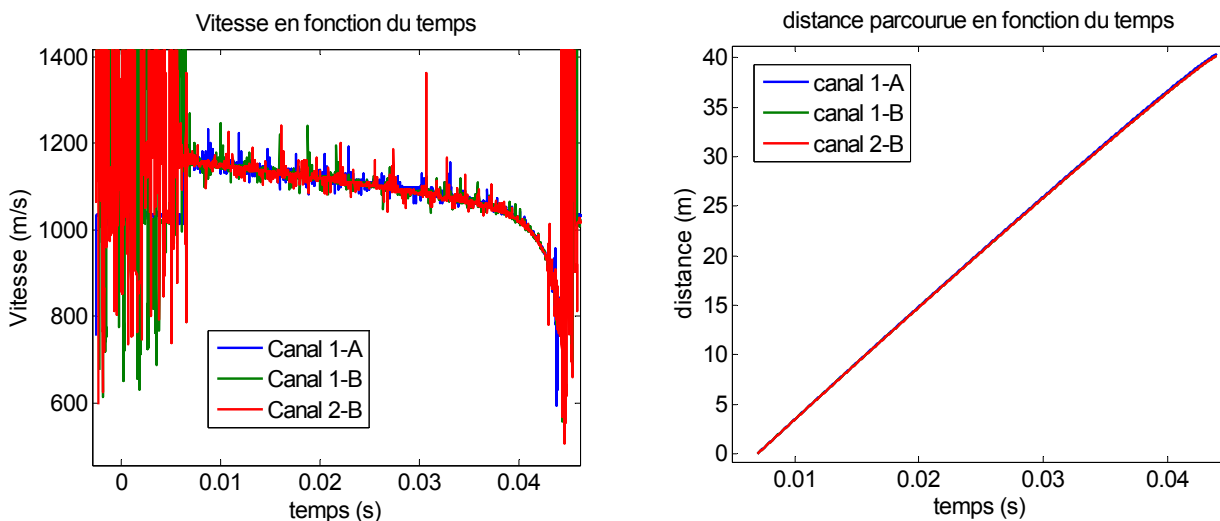


Figure 2-52: Tir 2: enregistrement de la vitesse et de la distance parcourue

L'aspect qui nous intéresse plus particulièrement dans ces mesures est la validation expérimentale du principe à fréquences multiples. Afin d'étudier ce point, nous avons calculé les rapports cycliques entre les signaux primaires pour obtenir la phase des signaux secondaires. La figure 2-53 montre les rapports cycliques mesurés ainsi que les rapports cycliques théoriques pour les deux signaux secondaires. Ne disposant pas de mesure exacte de la position du projectile au cours du temps et le radar n'ayant pas été calibré au préalable, les longueurs d'étalonnage d_{01} et d_{03} ont été estimées de manière

ad-hoc pour coller aux mesures.

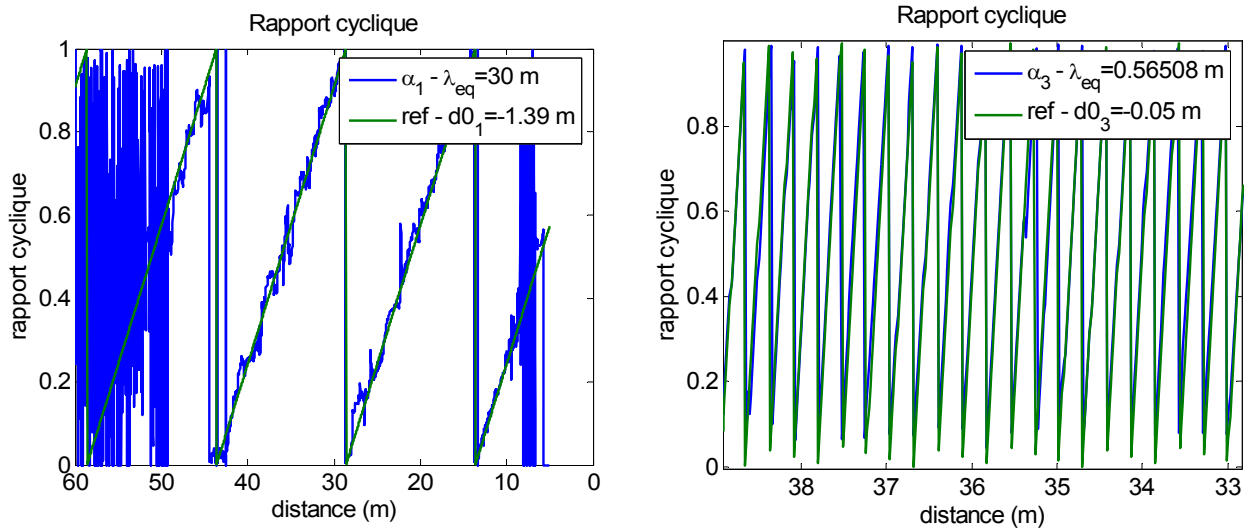


Figure 2-53: rapport cyclique pour $\lambda_{eq}=30$ m (à gauche) et $\lambda_{eq}=56$ cm (à droite)

On constate toutefois la très bonne correspondance entre les signaux mesurés et les gabarits théoriques, ce qui suggère que la description théorique du radar MFCW est valable et applicable. Il n'y a pas, par exemple, de dérive importante entre les signaux mesurés et les signaux théoriques, ce qui aurait pu se produire si un phénomène physique décisif avait été négligé.

La figure 2-54 montre l'écart entre les gabarits théoriques et les mesures pour les deux longueurs d'onde équivalentes $\lambda_{eq}=30$ m et $\lambda_{eq}=56$ cm. On observe sans surprise que les écarts sont plus importants pour la plus grande longueur d'onde et que dans ce cas ils décroissent lorsque la distance diminue. Ce comportement est conforme à une analyse simple où la précision est directement liée à l'amplitude du signal reçu. Pour cette longueur d'onde, la précision à 40 m est de l'ordre du mètre.

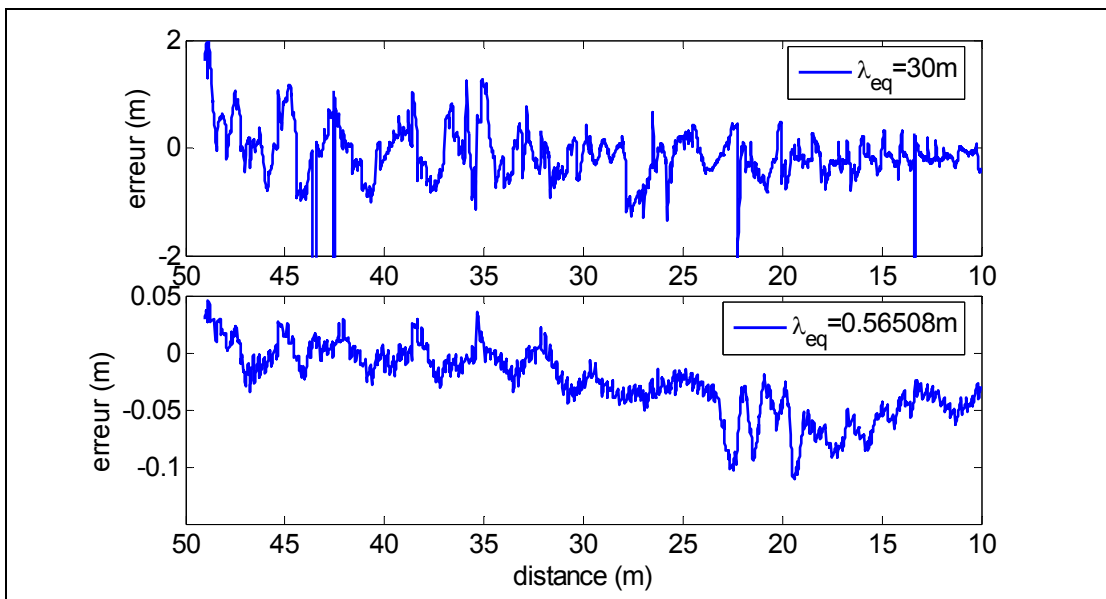


Figure 2-54: Comparaison des rapports cycliques mesurés avec les références

Pour la plus petite longueur d'onde, les écarts sont beaucoup plus faibles et se rappro-

chent des objectifs les plus exigeants. Toutefois, l'amplitude des écarts ne semble pas décroître sensiblement avec la distance, indiquant par là qu'à ce niveau de précision des phénomènes plus subtils deviennent déterminants. On remarquera notamment un comportement quasiment cyclique de l'erreur entre 45 m et 30 m ainsi qu'une brusque variation autour des 20 m. Les études menées jusqu'ici ne permettent pas de conclure de manière satisfaisante sur l'origine des ces perturbations. On peut toutefois avancer plusieurs hypothèses comme des dérives relatives en fréquence des sources les unes par rapport aux autres, le phénomène des trajets multiples ou même un parasite purement électronique. Ce phénomène met également en évidence une limitation des possibilités réelles du radar par rapport au principe théorique, puisque les variations observées laissent penser que des mesures exploitant directement les signaux primaires et conduisant à des précisions inférieures au centimètre seraient sans valeur.

Quoi qu'il en soit, les ordres de grandeurs des déviations sont très encourageants et soulignent le potentiel de ce type de radar même si une mesure réelle des performances requiert des mesures beaucoup plus rigoureuses, utilisant une mesure extérieure fiable de la position du projectile ainsi qu'un étalonnage préalable.

2.6 Conclusion

Nous avons vu dans le paragraphe §2.1 que différentes technologies radar pouvaient être mises en oeuvre pour assurer la localisation d'un projectile à faible distance et que parmi elles, les radars modulés en fréquence semblent les mieux adaptés à cette tâche. Les choix de l'ISL se sont pourtant tournés vers des radars CW simples qui présentent, il est vrai, des propriétés très intéressantes pour des applications balistiques en plus d'être peu onéreux, mais souffrent d'une lacune importante puisqu'ils ne permettent pas une mesure directe de la distance.

Dans un premier temps, un radar CW a été développé afin d'améliorer les performances du radar existant et de permettre ainsi de disposer des signaux exploitables. Les travaux de développement effectués ont mis en évidence un problème récurrent dans les radars continus, celui du couplage direct des antennes. Un facteur aggravant est la présence de raies parasites produites par la source elle-même, répertoriées par le fabricant sous l'appellation de «*spurious*», qui se situent dans la bande fréquentielle utile. Ces parasites limitent la portée du radar mais il est possible d'y remédier en utilisant par exemple une autre source ou mieux encore, en soignant le découplage des antennes. Malgré ces problèmes inévitables, les objectifs ont été pleinement atteints puisque la portée du radar est maintenant suffisante pour observer la trajectoire du projectile jusqu'à l'intérieur du canon et l'ouverture des antennes permet de couvrir une zone très large.

Ces études du radar CW ont débouché sur un concept de radar très proche mais avec en plus la capacité qui faisait défaut dans le cas précédent: celle de la mesure de distance. Le radar MFCW tire alors pleinement profit des avantages du radar CW avec un potentiel de poursuite accru par rapport au radar FMCW puisque aucune modulation n'est requise, ce qui rend la mesure instantanée¹. Il a été montré que le traitement des signaux pouvait s'effectuer d'une manière très simple en exploitant les rapports cycliques entre les différentes voies, ce qui est équivalent en dernière analyse à une mesure de phase des signaux secondaires, même si un pré-traitement spectral (filtrage FFT) est pour le moment toujours nécessaire pour obtenir des signaux exploitables. Un tel radar

1. le radar MFCW peut également être vu comme un radar à modulation passive, étant donné que c'est le mouvement de la cible qui produit les signaux

a été réalisé en dupliquant l'architecture du premier radar CW, pour aboutir à un radar quadri-fréquence.

Des expériences ont ensuite été conduites afin d'une part de valider le principe du MFCW et de déceler éventuellement les phénomènes physiques non pris en compte dans le modèle théorique, d'autre part d'évaluer les performances du radar MFCW. Bien qu'un nombre très réduit de tir ait pu être effectué, les premiers résultats sont très encourageants. Il ressort notamment que l'influence du phénomène des trajets multiples, très problématique pour ce type de radar, ne semble pas jouer un rôle important et que les signaux mesurés coïncident parfaitement avec la prévision théorique. Les écarts entre le modèle et les mesures sont de l'ordre de quelques centimètres, ce qui suggère que de telles précisions peuvent être effectivement atteintes. Cependant, seules des expériences supplémentaires employant des méthodes de mesures externes très fiables peuvent confirmer cette hypothèse.

Des travaux futurs devraient donc se concentrer sur l'isolation des antennes et éventuellement sur l'augmentation de leurs gains, mais également sur des méthodes expérimentales permettant de caractériser précisément les performances du radar.

Chapitre 3

Modélisation & Analyse des précisions

3.1 Introduction

Ce chapitre sera tout d'abord consacré à l'étude des modèles qui seront exploités ensuite par les algorithmes de traitement des signaux. Après une présentation du modèle général nous nous intéresserons plus particulièrement à la caractérisation de la mesure. L'objectif de ce deuxième point est la détermination des propriétés statistiques de la mesure en fonction de celles des signaux bruts issus des radars. En effet, bien que les signaux radars puissent être décrits par le modèle décrit au paragraphe §2.3.6 associé à un bruit blanc gaussien centré, ces signaux bruts ne correspondent pas directement aux grandeurs (phase, rapport cyclique) utilisées pour l'estimation. Ces dernières sont extraites par un processus de prétraitement qui induit des transformations, notamment au niveau de la distribution du bruit, qu'il s'agira de caractériser.

Les modèles obtenus serviront ensuite à l'analyse des précisions maximales qui peuvent être potentiellement atteintes pour chacun des cas étudiés. Notre approche sera fondée sur le calcul de la borne de Cramér-Rao qui permet de minorer la variance des estimations.

3.2 Modèle général

Nous avons vu dans le paragraphe §1.3 les modèles de trajectoires correspondant aux différentes applications. Les équations de la balistique étant réputées fiables pour les cas considérés, la reconstruction complète d'une trajectoire se résume à la détermination des paramètres qui interviennent dans ces modèles. Dans ce cas, notre problème est celui de l'estimation du vecteur paramètre $\theta \in \mathcal{D}_\theta \subset \mathbb{R}^q$ de dimension q , à partir d'une équation d'observation

$$\mathbf{y}_k = h_k(\theta) + \mathbf{v}_k \quad (3:1)$$

où $\mathbf{y}_k \in \Psi \subset \mathbb{R}^m$ et \mathbf{v}_k sont des vecteurs aléatoires de dimension m représentant respectivement la mesure et le bruit au temps t_k , et $h_k(\theta)$ la valeur de la fonction d'observation au même instant.

Les fonctions d'observation associées à chacun des cas étudiés sont celles du paragra-

phe §1.4, à l'exception du fait qu'elles sont ici explicitement dépendantes du paramètre θ et que la dépendance temporelle est maintenant traduite par l'indice k . Les propriétés du bruit de mesure seront discutées dans le paragraphe §3.3.

On introduit également

$$\mathbf{Y}_k^T = [\mathbf{y}_1^T, \dots, \mathbf{y}_k^T] \quad \mathbf{H}_k(\theta)^T = [h_1(\theta)^T, \dots, h_k(\theta)^T]$$

les vecteurs concaténés de dimension $k \cdot m \times 1$ ainsi que les matrices de covariance

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{E}\{\mathbf{v}_k \mathbf{v}_k^T\} \quad \Sigma_k = \mathbf{E}\{[\mathbf{Y}_k - \mathbf{H}_k(\theta)][\mathbf{Y}_k - \mathbf{H}_k(\theta)]^T\}$$

On peut également aborder le problème de l'estimation de la trajectoire à travers un modèle d'état. On adjoint alors au modèle (3:1) une équation d'évolution ou équation d'état

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= f_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= h_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (3:2)$$

La fonction f_k désigne la fonction d'état et \mathbf{w}_k le bruit d'état¹.

Bien que ce modèle semble beaucoup plus général que celui correspondant à l'estimation paramétrique, la différence se limite essentiellement à la composante aléatoire de la transition d'état. En effet, en supposant le bruit d'état nul, la trajectoire du vecteur d'état dans l'espace des états devient parfaitement déterministe et peut s'écrire $\mathbf{x}_k = f_k \bullet f_{k-1} \bullet \dots \bullet f_0(\mathbf{x}_0) = F_k(\mathbf{x}_0)$. On est ramené dans ce cas à l'estimation du paramètre \mathbf{x}_0 avec pour fonction d'observation $h_k(F_k(\mathbf{x}_0))$. Cette correspondance s'applique pleinement dans nos applications puisque le processus d'estimation peut viser soit la position actuelle du projectile (estimation d'état), soit la position initiale du projectile (estimation paramétrique), les équations de la trajectoire intervenant alors soit dans l'équation d'état, soit dans l'équation de mesure. Bien qu'une modélisation des trajectoires dans l'espace des états permette d'intégrer des perturbations de la trajectoire telles que le vent, ce raffinement s'avère superflu car les équations de la balistique décrivent le mouvement des projectiles avec une très grande précision en règle générale, et plus particulièrement pour les cas étudiés où les distances d'observations n'excèdent pas quelques dizaines de mètres. Si le modèle d'état est introduit ici, ce n'est donc pas pour les améliorations qu'il peut apporter par rapport au modèle paramétrique, mais simplement parce que la théorie de l'estimation d'état est plus riche en algorithmes récursifs.

Bien qu'il soit possible, avec ce type de modèle, de s'intéresser à la position actuelle du projectile dont l'évolution est régie par l'équation d'état, nous choisissons de conserver l'approche paramétrique où seule la position initiale est considérée. Dans ce cas, l'évolution de la position est intégrée à l'équation d'observation et l'équation d'état devient simplement

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k \quad (3:3)$$

c'est-à-dire que $f_k(\mathbf{x}_k) = \mathbf{x}_{k+1}$ et $\mathbf{w}_k = 0$.

En conclusion, le modèle paramétrique et le modèle d'état sont identiques dans notre approche, nous conservons cependant deux notations différentes afin de respecter les conventions habituelles.

1. Ici encore on se limite au cas d'un bruit additionnel

3.3 Modèle des observations

3.3.1 Signal Radar

Les radars CW et MFCW délivrent des signaux de même nature et qui obéissent à la même équation (voir paragraphe §2.3.6, équation (2:21)). Le signal effectivement mesuré en sortie du radar intègre en plus une composante de bruit ν_r

$$s(t) = \frac{A_I}{d^2} \sin\left(2\pi f_D t + \frac{4\pi d_v}{\lambda} + \phi_0\right) + \nu_r \quad (3:4)$$

avec

d_v : distance initiale de la cible	λ : longueur d onde
d : distance actuelle de la cible	ϕ_0 : phase initiale
A_I : amplitude du signal à un mètre	ν_r : bruit de mesure
f_D : fréquence Doppler	

Les termes de phase constants n'intervenant pas dans les développements qui suivent, ils sont omis dans la suite afin d'alléger les notations. Le signal se résume donc à

$$s(t) = A(d) \cdot \sin(2\pi f_D t) + \nu_r \quad (3:5)$$

avec $A(d) = A_I/d^2$. Le terme ν_r représente le bruit qui perturbe le signal. Ce bruit est dû notamment au bruit thermique mais inclut également d'autres sources comme le bruit de grenaille et le bruit de phase de la source radar. Quoiqu'il en soit, nous supposons que ce bruit est gaussien, centré et de variance σ_r^2 constante, mais nous verrons qu'il ne possède pas la propriété d'indépendance. Enfin, on définira le rapport signal à bruit S/N ainsi que le rapport signal à bruit à un mètre S/N_I

$$S/N = \left[\frac{A(d)}{\sigma_r}\right]^2 = \left[\frac{A_I}{\sigma_r d^2}\right]^2 = S/N_I \cdot \frac{1}{d^2} \quad (3:6)$$

3.3.2 Méthodes d'extraction de l'information utile

La mesure qui est effectivement exploitée par les algorithmes d'estimation n'est pas le signal brut issu du radar, mais est constituée de grandeurs extraites de ce dernier, telles que la fréquence, la phase (radar Doppler) ou encore le rapport cyclique entre deux signaux (MFCW). Notre approche est fondée sur une dichotomie du problème avec d'une part un prétraitement des données permettant de former les signaux utiles (phase, fréquence, distance), d'autre part l'algorithme d'estimation proprement dit. La question soulevée par le prétraitement des données trouve de nombreuses réponses dans la littérature dont on aura un bref aperçu dans [39]. Les méthodes permettant la détermination des caractéristiques d'un signal sinusoïdal (amplitude, fréquence, phase) sont généralement divisées en deux catégories : les méthodes paramétriques qui s'appuient sur un modèle du signal et les méthodes non paramétriques qui procèdent d'une transformation du signal ou d'un changement d'espace.

Parmi les méthodes non paramétriques on trouve des méthodes spectrales [40] telles que les algorithmes FFT (*Fast Fourier Transform*), MUSIC (*MULTiple Signal Classification*) et ESPRIT (*Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Tech-*

niques) par exemple [47], qui permettent d'isoler les différentes composantes d'un signal comportant plusieurs sources. Dans notre application, les signaux étant non stationnaires (la fréquence évolue au cours du temps), les estimations spectrales doivent se faire sur des intervalles de temps limités, à l'aide d'une fenêtre glissante par exemple. Lors des essais à longue portée effectués à Baldersheim, un prétraitement des signaux fondé sur une FFT glissante a été mis en oeuvre pour isoler l'écho de la cible et rejeter les raies parasites (voir §2.4.11.4). Ce filtrage plus fin permet également d'augmenter le rapport signal à bruit. Bien que ces méthodes permettent d'améliorer sensiblement la qualité des signaux, elles ne peuvent être envisagées pour l'application réelle pour plusieurs raisons. Tout d'abord, le filtre analogique présent dans la chaîne radar est censé isoler la source utile, la question des raies parasites relève dans notre cas plus d'un problème (mineur) de conception matérielle que d'un problème de traitement du signal. Ensuite, ces méthodes sont des méthodes *ensemblistes* qui sollicitent un segment complet de données et qui sont donc incompatibles avec un traitement temps réel. Enfin, leur utilisation nécessite une numérisation du signal ce qui implique la mise en oeuvre de dispositifs de numérisation complexes et donc coûteux.

En ce qui concerne les méthodes paramétriques, une technique très intéressante pour nos applications est fondée sur un modèle polynomial de la phase [41],[42]. Cette approche repose sur une modélisation de la phase du signal par un polynôme dont les coefficients doivent être estimés

$$s(t) = A \exp(i\phi) = A \exp \left[i \sum_{k=0}^n a_k t^k \right]$$

Ce type de modèle permet de caractériser une grande classe de signaux non stationnaires et non linéaires avec une bonne précision sur l'estimation de la phase et de la fréquence instantanée. De plus, nous verrons que l'algorithme d'estimation proposé au chapitre §4.4, est précisément fondé sur une approximation polynomiale. Mais ici encore une numérisation du signal est nécessaire et les algorithmes d'estimation des coefficients peuvent s'avérer prohibitifs en temps de calcul.

L'approche finalement retenue repose sur une simple détection des passages à zéros du signal. Cette méthode ne nécessite aucune numérisation puisqu'une électronique rudimentaire est suffisante pour détecter les passages à zéro du signal, qui sont ensuite signalés au DSP *via* une interruption (voir §5.4.1). Elle permet en outre de réduire considérablement le flot de données en limitant les transactions à deux échantillons par période¹. Les passages à zéro servant de mesure de la phase du signal, l'application de la méthode comporte certaines restrictions. Tout d'abord, pour que les passages à zéro du signal correspondent à une phase multiple de π il faut que le signal soit mono-fréquence (une seule composante spectrale). Ensuite, pour qu'il n'y ait pas de passages à zéro intempestif (non significatifs), il est nécessaire d'avoir un rapport signal à bruit élevé. Cependant, ces conditions sont normalement satisfaites grâce à l'utilisation d'un filtre analogique très sélectif (§2.4.10).

3.3.3 Statistiques des signaux utiles

L'élaboration des mesures utiles est effectuée grâce à de simples opérations algébri-

1. Etant donné qu'un sinus comporte deux passages à zéro par période.

ques portant sur les temps de passage à zéro. Nous cherchons maintenant à caractériser le bruit qui perturbe ces mesures, en examinant les effets des transformations algébriques sur le bruit du signal brut.

3.3.3.1 Passages à zéro

Lorsqu'un passage à zéro est détecté, une impulsion est envoyée à la carte de traitement provoquant une interruption et un enregistrement de la date du passage à zéro. C'est donc la grandeur *temps* qui est échantillonnée, et ceci à phase constante. Le bruit présent dans le signal entraîne bien évidemment une erreur sur la mesure de la date de passage à zéro comme le montre la figure 3-1. Il s'agit donc, dans un premier temps, de déterminer la distribution des dates des passages à zéros t_z en fonction de la distribution du bruit ν_T .

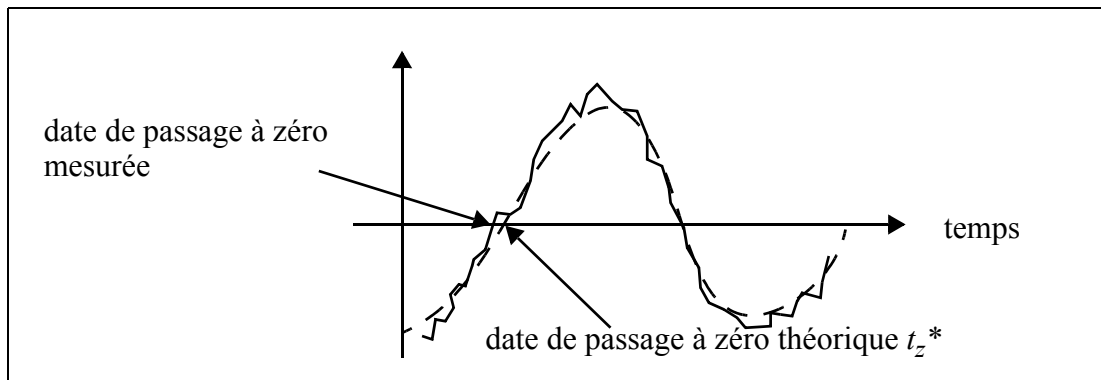


Figure 3-1: signal théorique et mesuré

La caractérisation de la distribution des passages à zéro est, dans le cas général, un problème très complexe qui dépend notamment de l'autocorrélation du bruit. Dans notre cas, deux propriétés permettent de simplifier le problème :

- le rapport signal à bruit est élevé
- le bruit est fortement corrélé car la bande passante du signal est très limitée (50 kHz à 150 kHz)

En considérant que le passage à zéro théorique a lieu pour $t_z^* = 0$, on obtient la relation suivante¹ :

$$s(t_z) = A(d) \cdot \sin(2\pi f_D t_z) + \nu_T = 0 \quad (3:7)$$

D'après la première propriété, qui stipule un rapport signal à bruit élevé $S/N \gg 1$, nous comprenons en observant la figure 3-1 que le (ou les) passages à zéro effectifs du signal seront mesurés au voisinage de zéro.

La deuxième propriété implique que dans ce même voisinage, il ne peut pas y avoir de deuxième passage à zéro. En effet, la bande passante du bruit est limitée par un filtre très raide, de fréquence centrale $f_0 = 100$ kHz et de bande passante $B = 100$ kHz. En supposant que le filtre est parfait (flancs infiniment raides), la fonction d'autocorrélation du bruit est donnée par la fonction de transfert du filtre (le bruit d'entrée étant supposé blanc) et s'écrit :

$$\mathcal{R}(\tau) = \sigma_T^2 \cos(2\pi f_0 \tau) \text{sinc}(\pi B \tau) \quad (3:8)$$

1. On utilisera la notion x^* pour désigner la valeur théorique de la grandeur x , c'est-à-dire la valeur en l'absence de bruit.

où sinc est le sinus cardinal.

La figure 3-2 montre la fonction d'autocorrélation normalisée du bruit en fonction du temps. On note que, pour la plage des périodes Doppler considérée, la corrélation entre deux passages à zéro est suffisamment faible pour pouvoir considérer les échantillons t_z comme indépendants.

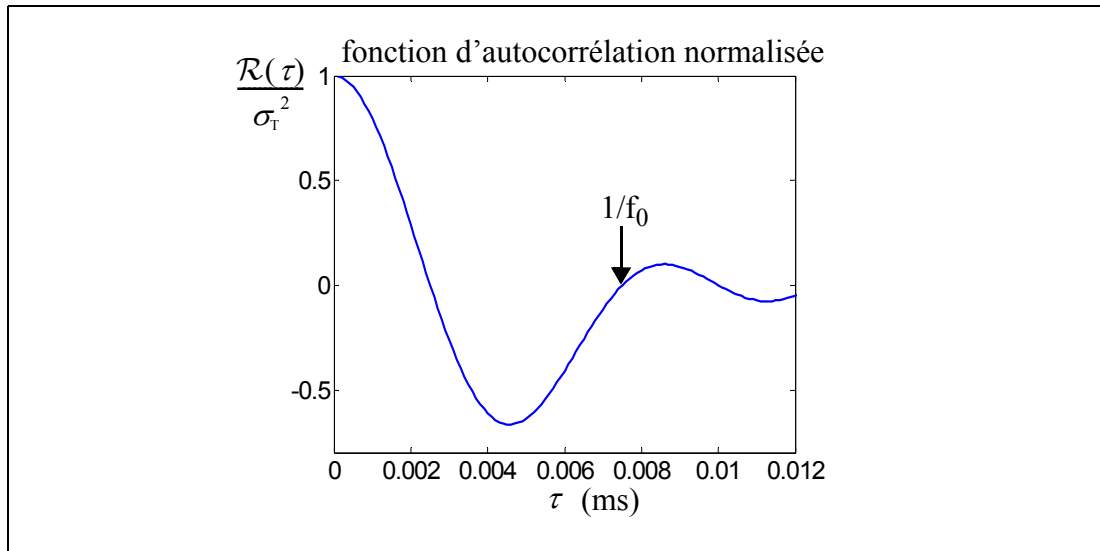


Figure 3-2: coefficient d'autocorrélation du bruit

En revanche, pour des échantillons très proches, comme par exemple $\tau = 0, 1/f_0$, la fonction d'autocorrélation vaut $\mathcal{R}(\tau) = 0,9\sigma_\tau^2$. Sur un petit voisinage le bruit est donc très fortement corrélé ce qui nous autorise à développer le processus stochastique v_τ

$$v_\tau(t) \approx v_\tau(0) + v_\tau'(0)t \quad (3:9)$$

avec v_τ' la dérivée du processus v_τ par rapport au temps dont la variance est donnée par [43]

$$\mathbf{E}\{v_\tau' v_\tau'\} = -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \mathcal{R}(\tau) \Big|_{\tau \rightarrow 0} \rightarrow \sigma_\tau^2 \pi^2 \left[\frac{B^2}{3} + 4f_0^2 \right] \quad (3:10)$$

Au voisinage de zéro, le processus v_τ se résume donc à une droite dont l'ordonnée à l'origine ainsi que la pente sont inconnues. Ceci assure également qu'il n'y a qu'un seul passage à zéro du signal au voisinage de zéro.

En développant le sinus au premier ordre l'équation (3:7) devient

$$A(d) \cdot 2\pi f_D t_z + v_\tau(0) + v_\tau'(0)t_z = 0 \quad (3:11)$$

On en déduit la date de passage à zéro

$$t_z = -\frac{v_\tau(0)}{2\pi A(d)f_D + v_\tau'(0)} \quad (3:12)$$

En considérant que la fréquence Doppler est environ égale à la fréquence centrale du filtre, elle même égale à la largeur de la bande, c'est-à-dire $f_D \approx f_0 = B$, nous avons

$$\frac{\mathbf{E}\{\nu_r' \nu_r'\}}{(2\pi A(d)f_D)^2} = \frac{\sigma_r^2 \pi^2 \left[\frac{B^2}{3} + 4f_0^2 \right]}{(2\pi A(d)f_D)^2} \approx \frac{\sigma_r^2 \pi^2 B^2 4}{\pi^2 A(d)^2 4B^2} \approx \frac{\sigma_r^2}{[A(d)]^2} \approx \frac{1}{S/N} \quad (3:13)$$

L'hypothèse d'un rapport signal à bruit élevé nous permet de négliger le terme $\nu_r'(0)$ devant $2\pi A(d)f_D$, l'équation (3:12) se simplifie en

$$t_z = -\frac{\nu_r(0)}{2\pi A(d)f_D} \quad (3:14)$$

On en déduit que t_z a une densité gaussienne avec les caractéristiques suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{t_z(n)\} &= t_z^*(n) \\ \sigma_{t_z}^2(n) &= \mathbf{E}\{[t_z(n)]^2\} \sim \frac{1}{(2\pi f_D)^2} \cdot \frac{1}{S/N} \\ \mathbf{E}\{[t_z(i) - \mathbf{E}\{t_z(i)\}][t_z(j) - \mathbf{E}\{t_z(j)\}]\} &= 0 \quad \forall i \neq j \end{aligned} \quad (3:15)$$

3.3.3.2 Période Doppler

Les caractéristiques de la période Doppler $T_D(n)$ se déduisent directement de celles des dates de passage à zéro d'après

$$T_D(n) = t_z(n+1) - t_z(n) \quad (3:16)$$

$T_D(n)$ est donc une variable aléatoire gaussienne avec

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{T_D(n)\} &= \frac{1}{f_D^*} \\ \sigma_{T_D}^2(n) &= \mathbf{E}\left\{\left(T_D(n) - \frac{1}{f_D^*}\right)^2\right\} = \frac{2}{(2\pi f_D)^2} \cdot \frac{1}{S/N} \end{aligned} \quad (3:17)$$

En revanche les variables aléatoires $T_D(n)$ et $T_D(n+1)$ sont corrélées puisqu'elles ont $t_z(n+1)$ en commun

$$\mathbf{E}\{[T_D(n+1) - \mathbf{E}\{T_D(n+1)\}][T_D(n) - \mathbf{E}\{T_D(n)\}]\} = \sigma_{t_z}^2(n+1) \quad (3:18)$$

3.3.3.3 Fréquence Doppler

La densité de la fréquence Doppler peut se calculer d'après

$$f_D(n) = \frac{1}{T_D(n)} \quad (3:19)$$

En notant p_{T_D} la densité de T_D et p_{f_D} la densité de f_D , nous avons la relation:

$$p_{f_D}(x) = \frac{1}{x^2} p_{T_D}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{\sigma_{T_D} \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{f_D^*}\right]^2}{2\sigma_{T_D}^2}\right\} \quad (3:20)$$

Cette distribution n'est clairement pas une gaussienne. Cependant, si nous considérons des écarts faibles, c'est-à-dire $\sigma_{T_D} \ll \mathbf{E}\{T_D(n)\}$, nous pouvons développer $1/x$ autour

de f_D

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{f_D^*} - \frac{x - f_D^*}{f_D^{*2}} + O(x - f_D^*)^2 \quad (3:21)$$

En remplaçant dans (3:20) et en négligeant le terme quadratique, nous obtenons

$$p_{f_D}(x) = \frac{1}{f_D^{*2}} \cdot \frac{1}{\sigma_{T_D} \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x - f_D^*)^2}{2\sigma_{T_D}^2 f_D^{*4}}\right] \quad (3:22)$$

ce qui donne à nouveau une distribution gaussienne avec

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{f_D(n)\} &= f_D^*(n) \\ \sigma_{f_D}^2 &= \sigma_{T_D}^2 f_D^{*4} \end{aligned} \quad (3:23)$$

Le résultat de l'approximation est illustré sur la figure 3-3, où nous avons utilisé un écart-type $\sigma_{T_D}(n)$ égal à 7 % de $\mathbf{E}\{T_D(n)\}$ et une fréquence centrale de 100 kHz.

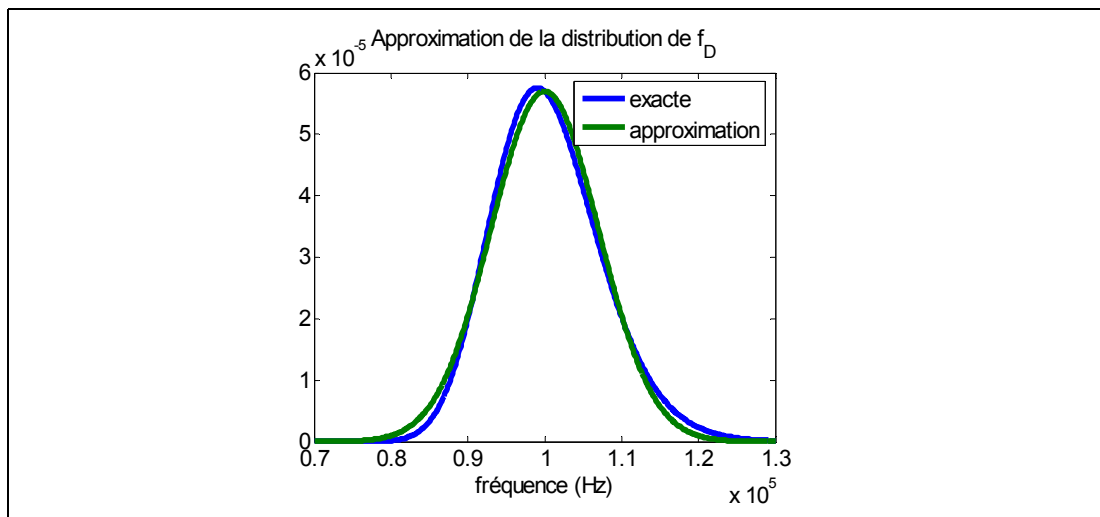


Figure 3-3: approximation de la distribution de f_D

Les échantillons $T_D(n)$ et $T_D(n+1)$ n'étant pas indépendants, les échantillons $f_D(n)$ et $f_D(n+1)$ ne le sont pas non plus. Cependant, il est toujours possible de calculer les périodes et fréquences au rang n à partir des instants $t_z(n)$ et $t_z(n+1)$, et ceux au rang $n+1$ avec les instants $t_z(n+2)$ et $t_z(n+3)$, de telle sorte qu'aucune date ne soit commune aux deux valeurs. Dans ce cas, tous les échantillons de fréquence et de période sont indépendants.

3.3.3.4 Phase Doppler à temps constant

S'il est plus commode sur le plan matériel de réaliser un échantillonnage à temps variable et phase constante, il est en revanche plus aisé au niveau algorithmique de travailler avec des échantillons à temps constant où c'est la phase qui est échantillonnée. Pour élaborer des mesures à temps constant, nous utilisons une interpolation linéaire de la phase comme le montre la figure 3-4. Nous ferons par ailleurs les deux hypothèses suivantes :

- la fréquence d'échantillonnage à temps constant est plus basse que celle à phase constante¹, de sorte que il n'y ait jamais deux points interpolés entre

- deux points mesurés,
- la fréquence d'échantillonnage à phase constante est suffisamment haute pour que l'on puisse faire l'approximation que la phase évolue linéairement entre deux échantillons.

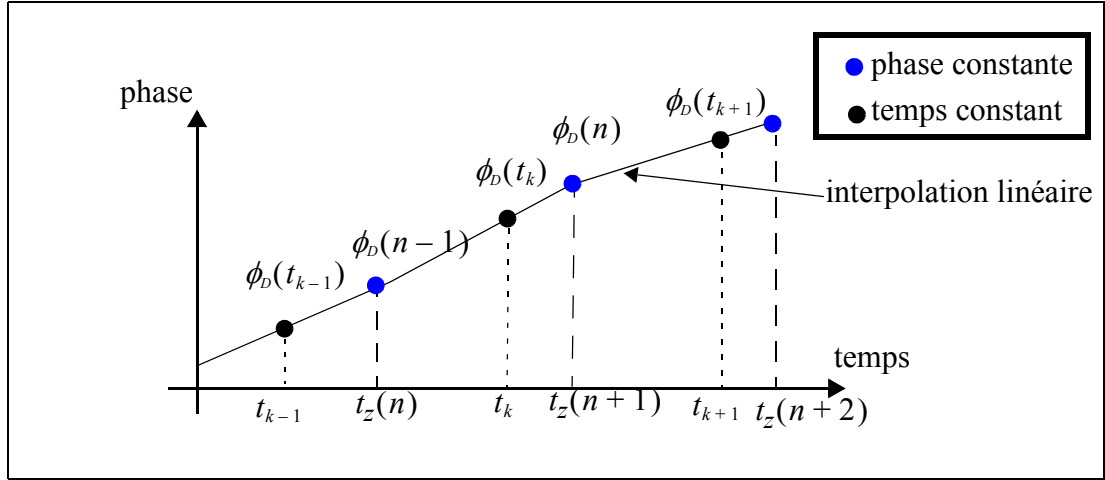


Figure 3-4: interpolation de la phase à temps constant

La phase interpolée à temps constant est donnée par:

$$\phi_D(t_k) = 2\pi \frac{t_k - t_z(n)}{t_z(n+1) - t_z(n)} + \phi_D(n-1) \quad (3:24)$$

Soulignons le fait que, puisque c'est le temps qui est mesuré, la phase $\phi_D(n-1) = 2\pi(n-1)$ n'est pas une v.a.

En posant

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{E}\{t_k - t_z(n)\} \\ b &= \mathbf{E}\{t_z(n+1) - t_z(n)\} = T_D(n) \end{aligned} \quad (3:25)$$

on se ramène au calcul de la densité de $z = (a+x)/(b+y)$, où x et y correspondent aux deux v.a. gaussiennes centrées $t_k - \mathbf{E}\{t_k\}$ et $T_D(n) - \mathbf{E}\{T_D(n)\}$ respectivement. Ce calcul est très complexe dans le cas général, mais nous nous placerons à nouveau dans l'hypothèse d'erreurs faibles, à savoir $\sigma_x \ll a$ et $\sigma_y \ll b$, ce qui permet de développer z au premier ordre

$$z = \frac{a}{b} + \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}y \quad (3:26)$$

Il est judicieux d'introduire le rapport cyclique

$$\alpha = \frac{t_k - t_z(n)}{T_D(n)} \quad (3:27)$$

La v.a. z est donc une v.a. gaussienne puisqu'elle est combinaison linéaire de v.a. gaussiennes. Nous avons

- La fréquence d'échantillonnage à phase constante est fixée par la fréquence des passages à zéros, c'est-à-dire la fréquence Doppler.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{z\} &= \alpha \\ \mathbf{E}\{z - \mathbf{E}\{z\}\}^2 &= \frac{1}{b^2} \cdot (\sigma_x^2 + \alpha^2 \sigma_y^2 - 2\alpha r \sigma_x \sigma_y) \end{aligned} \quad (3:28)$$

Dans notre cas le coefficient de corrélation r vaut :

$$r = \frac{|\mathbf{E}\{[t_z(n) - \mathbf{E}\{t_z(n)\}][t_z(n+1) - t_z(n) - \mathbf{E}\{T_D(n)\}]\}|}{\sigma_{t_z(n)} \sigma_{T_D(n)}} \quad (3:29)$$

On trouve :

$$r = \frac{\sigma_{t_z(n)}}{\sigma_{T_D(n)}} \quad (3:30)$$

Par substitution dans la v.a. $\phi_D(t_k)$ il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\phi_D(t_k)\} &= \phi_D^*(t_k) \\ \sigma_{\phi_D}^2(t_k) &= (2\pi)^2 f_D^2 (\sigma_{t_z}^2(n) + \alpha^2 \sigma_{T_D}^2(n) - 2\alpha r \sigma_{t_z}(n) \sigma_{T_D}(n)) \end{aligned} \quad (3:31)$$

Après quelques simplifications de la variance on arrive à l'expression suivante :

$$\sigma_{\phi_D}^2(t_k) = (2\pi)^2 f_D^2 \sigma_{t_z}^2(n) (1 + 2\alpha^2 - 2\alpha) \quad (3:32)$$

Etant donné que sur un temps d'observation relativement long on observe toutes les réalisations possibles des rapports cycliques, on peut interpréter α comme une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0,1]$. Pour éliminer la dépendance en α il suffit alors d'intégrer sur $[0,1]$, soit

$$\sigma_{\phi_D}(t_k) = 2\pi f_D \sigma_{t_z}(n) \sqrt{\int_0^1 (1 + 2\alpha^2 - 2\alpha) d\alpha} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \pi f_D \sigma_{t_z}(n) \quad (3:33)$$

On obtient finalement

$$\sigma_{\phi_D}(t_k) = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{S/N}} \quad (3:34)$$

On notera que l'élaboration du modèle de phase suppose implicitement qu'il n'y a aucun passage à zéro intempestif¹, ce qui signifie également que la condition $\sigma_{\phi_D}(t_k) \ll \pi$ doit être respectée. A nouveau, les mesures de phase ne sont pas indépendantes car les échantillons $\phi_D(t_k)$ et $\phi_D(t_{k+1})$ ont en commun la v.a. $t_z(n+1)$. Cependant, nous supposons comme précédemment que ces échantillons peuvent être rendus indépendants en n'exploitant pas les mesures de rangs impairs par exemple.

3.3.3.5 Rapport cyclique

Nous avons vu dans le paragraphe §2.5.5.2, que la mesure de distance du radar MFCW exploite le rapport cyclique - identique à celui défini en (3:25) - entre deux signaux issus de deux canaux différents. La densité du rapport cyclique peut donc se déduire de (3:25) en prenant un coefficient de corrélation nul. En effet, le numérateur et le dénominateur sont indépendants car les signaux correspondants sont issus de sources diffé-

1. Un passage à zéro intempestif entraînerait un biais dans la mesure de phase égal à π .

rentes. On obtient donc là aussi des v.a. gaussiennes avec pour caractéristiques :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\alpha(n)\} &= \alpha^*(n) \\ \sigma_\alpha^2(n) &= f_D^2 \sigma_{t_z}^2(n)(1 + \alpha^2) \end{aligned} \quad (3:35)$$

Comme précédemment, on supprime la dépendance en α par intégration

$$\sigma_\alpha(n) = \frac{2}{\sqrt{3}} f_D \sigma_{T_D}(n) \quad (3:36)$$

Les échantillons, ici encore, sont indépendants à condition que les calculs de deux rapports cycliques successifs utilisent des passages à zéro distincts.

3.3.3.6 Mesure de distance

Le méthode de mesure de la distance par rapport cyclique est constituée de plusieurs mesures de distances à différentes échelles. Chacune des distances est calculée à partir d'une mesure de rapport cyclique entre deux signaux selon la formule :

$$d = \frac{\lambda_{eq}}{2} \alpha \quad (3:37)$$

où λ_{eq} désigne la longueur d'onde équivalente du signal secondaire formé par les deux signaux primaires (§2.5.2). La v.a. d a donc une distribution gaussienne dont les caractéristiques sont données par :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{d(n)\} &= d^*(n) \\ \sigma_d(n) &= \sigma_\alpha(n) \frac{\lambda_{eq}}{2} \end{aligned} \quad (3:38)$$

Les mesures de distance sont donc indépendantes à condition que les rapports cycliques le soient.

3.3.4 Synthèse des statistiques

Le tableau 3-1 résume les caractéristiques de toutes les mesures secondaires et leur domaine d'application. Il donne également une comparaison entre les valeurs théoriques des écarts-types et les valeurs obtenues par une simulation qui reproduit exactement tous les mécanismes d'échantillonnage tels que : limitation de la bande passante, détection des passages à zéro, interpolation et calcul du rapport cyclique. La simulation utilise un signal primaire de 1 million de points, une bande passante de 100 kHz centrée sur 100 kHz, une fréquence constante de 100 kHz et un rapport signal à bruit de 10.

Tableau 3-1 : synthèse des statistiques des mesures

grandeur	E	écart-type	théorie	simul.	application
passage à zéro t_z	t_z^*	$\frac{1}{2\pi f_D} \cdot \frac{1}{\sqrt{S/N}}$	$1,59 \cdot 10^{-7}$	$1,61 \cdot 10^{-7}$	aucune
période Doppler T_D	T_D^*	$\sqrt{2} \left(\frac{1}{2\pi f_D} \cdot \frac{1}{\sqrt{S/N}} \right)$	$2,25 \cdot 10^{-7}$	$2,28 \cdot 10^{-7}$	aucune

Tableau 3-1 : synthèse des statistiques des mesures

grandeur	E	écart-type	théorie	simul.	application
fréquence Doppler f_D	f_D^*	$\sqrt{2} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{S/N}} \right) f_D + \sigma_{f_D}^0$	$2,25 \cdot 10^3$	$2,29 \cdot 10^3$	cas 1
phase Doppler ϕ_D	ϕ_D^*	$\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{1}{\sqrt{S/N}} + \sigma_{\phi_D}^0$	$8,16 \cdot 10^{-2}$	$8,32 \cdot 10^{-2}$	cas 2
rapport cyclique α	α^*	$\frac{1}{\pi \sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{S/N}}$	$1,84 \cdot 10^{-2}$	$2,05 \cdot 10^{-2}$	aucune
distance d	d^*	$\frac{1}{2\pi \sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{S/N}} \lambda_{eq} + \sigma_d^0$	$0,92 \cdot 10^{-2}$	$1,02 \cdot 10^{-2}$	cas 3

Commentaire

Nous avons montré que l'ensemble des mesures exploitées pouvaient être modélisées par des v.a. gaussiennes indépendantes - si toutefois les calculs de deux échantillons adjacents d'une grandeur n'ont aucun passage à zéro en commun - et sans biais. Dans le cadre du modèle (3:1)

$$\mathbf{y}_k = h_k(\theta) + \mathbf{v}_k$$

ceci signifie que les bruits de mesures \mathbf{v}_k sont des v.a. gaussiennes, indépendantes et centrées. De plus, les simulations montrent que, le cas échéant, les approximations par des distributions gaussiennes n'induisent pas d'erreurs significatives.

Cependant, la capacité de ces formules à décrire le signal mesuré avec fidélité doit être ici modérée. En effet, le modèle de bruit du signal radar correspond essentiellement au bruit thermique et au bruit de phase présents dans le signal. Or nous avons vu par exemple au paragraphe §2.4.11.4, que des parasites «déterministes» produits par la source hyperfréquence, peuvent également jouer un rôle important. Les caractéristiques de ces perturbations diffèrent grandement du modèle initial, notamment au niveau de l'indépendance des échantillons, et ne répondent plus aux statistiques du tableau 3-1. Les mesures de distance effectuées avec le radar MFCW illustrent clairement ce phénomène : alors que les erreurs diminuent avec la distance, conformément au modèle, elles atteignent une valeur minimale à partir de laquelle elles semblent demeurer constantes (§2.5.8.3). Ceci indique que, lorsque le rapport signal à bruit devient important, le bruit n'est plus la cause déterminante des erreurs de mesures, mais d'autres perturbations, telles que les parasites évoqués ci-dessus ou des défauts du modèle, deviennent prépondérantes.

Ainsi, pour tenir compte de ce phénomène, nous avons introduit dans les modèles de mesure des valeurs de saturation pour l'écart-type σ^0 , qui seront fixées d'après les mesures expérimentales.

3.4 Analyse des précisions

3.4.1 Estimateur

Nous considérons l'équation de mesure (3:1). L'objectif est de fournir une estimation

du paramètre θ en exploitant les mesures \mathbf{Y}_k et, le cas échéant, l'information disponible *a priori* sur le paramètre. Nous définissons pour cela une fonction, appelée estimateur, associant à chaque mesure une estimation de θ

$$\begin{aligned} \hat{\theta} : \Psi^k &\rightarrow \mathcal{D}_\theta \\ \mathbf{Y}_k &\rightarrow \hat{\theta}(\mathbf{Y}_k) \end{aligned} \quad (3:39)$$

On appelle estimée la v.a. $\hat{\theta}(\mathbf{Y}_k)$ que l'on notera plus simplement $\hat{\theta}_k$. Le choix d'un estimateur ainsi que l'étude de ses propriétés appartiennent au champ de la théorie de l'estimation et feront l'objet du chapitre 4. La précision d'un estimateur non biaisé est indiquée par la matrice de covariance des estimées \mathbf{P}_k et traduit la qualité avec laquelle sont exploitées les informations disponibles (distribution *a priori* du paramètre et observations). La matrice de covariance est définie par

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{E} \{ [\hat{\theta}_k - \theta][\hat{\theta}_k - \theta]^T \} \quad (3:40)$$

où l'espérance porte sur le paramètre θ ainsi que sur les mesures \mathbf{Y}_k .

3.4.2 Cramér-Rao Lower Bound

La borne de Cramér-Rao, dont l'acronyme anglais est CRLB¹ (*Cramér-Rao Lower Bound*), établit que pour un estimateur sans biais [44],[45],[46]

$$\mathbf{P}_k \geq \mathbf{J}_k^{-1} \quad (3:41)$$

\mathbf{J}_k est appelée la matrice d'information de Fisher ou FIM (*Fisher Information Matrix*) et est donnée par

$$\mathbf{J}_k = \mathbf{E} \{ [\nabla_\theta \ln p(\theta, \mathbf{Y}_k)][\nabla_\theta \ln p(\theta, \mathbf{Y}_k)]^T \} \quad (3:42)$$

L'espérance porte sur θ et \mathbf{Y} et les gradients sont évalués à la vraie valeur de θ .

En utilisant la relation $p(\theta, \mathbf{Y}_k) = p(\mathbf{Y}_k|\theta)p(\theta)$, nous obtenons

$$\mathbf{J}_k = \mathbf{E} \{ [\nabla_\theta(\Lambda(\theta, \mathbf{Y}_k) + \ln p(\theta))][\nabla_\theta(\Lambda(\theta, \mathbf{Y}_k) + \ln p(\theta))]^T \} \quad (3:43)$$

Le logarithme de la fonction de vraisemblance (*log likelihood function*) est défini par le logarithme de la distribution conditionnelle de \mathbf{Y}_k sachant θ

$$\Lambda(\theta, \mathbf{Y}_k) = \ln[p(\mathbf{Y}_k|\theta)] \quad (3:44)$$

Dans le cas où le paramètre est une simple inconnue déterministe, la distribution $p(\theta)$ n'est pas définie et la FIM devient

$$\mathbf{J}_k = \mathbf{E} \{ [\nabla_\theta \Lambda(\theta, \mathbf{Y}_k)][\nabla_\theta \Lambda(\theta, \mathbf{Y}_k)]^T \} \quad (3:45)$$

où l'espérance porte uniquement sur la v.a. \mathbf{Y}_k . On pourra trouver une démonstration générale du théorème dans [47].

3.4.2.1 Cas gaussien

Nous avons établi dans le paragraphe §3.3 que toutes les observations sont des v.a. gaussiennes vérifiant les propriétés suivantes

1. On trouve également PCRB pour *Posterior Cramér-Rao Bound* dans le cas où le paramètre est aléatoire [46].

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\mathbf{y}_k\} &= h_k(\theta) \\ \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{y}}_i\tilde{\mathbf{y}}_j^T\} &= \mathbf{R}_i\delta_{ij}\end{aligned}\quad (3:46)$$

où \mathbf{R}_i dépend du type de mesure considéré (voir §3.3.4) et $\tilde{\mathbf{y}}_k = \mathbf{y}_k - h_k(\theta) = \mathbf{v}_k$. On suppose également que lorsque la distribution $p(\theta)$ existe, il s'agit également d'une gaussienne avec

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\theta\} &= \theta_0 \\ \mathbf{E}\{[\theta - \theta_0][\theta - \theta_0]^T\} &= \mathbf{P}_0\end{aligned}\quad (3:47)$$

Dans ce cas, on montre [45] que la CRLB peut être calculée de manière récursive en utilisant la relation de récurrence

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_0 &= \mathbf{P}_0^{-1} \\ \mathbf{J}_k &= \mathbf{J}_{k-1} + \mathbf{E}\{\nabla_{\theta}h_k(\theta)\mathbf{R}_k^{-1}\nabla_{\theta}h_k(\theta)^T\}\end{aligned}\quad (3:48)$$

Cette relation est déduite d'une formule générale permettant de calculer la CRLB dans le cadre plus large de l'estimation d'état [46]. Pour établir cette formule nous avons supposé que les distributions sont des gaussiennes dont les statistiques sont données par (3:46) et (3:47), que le bruit d'état est nul et que la matrice d'évolution est l'identité. L'espérance de l'équation (3:48) ne porte plus que sur la variable θ , l'intégration selon \mathbf{y}_k ayant déjà été réalisée pour obtenir la formule. A l'exception du cas où la fonction d'observation est linéaire, le calcul de l'espérance n'est en général pas possible analytiquement. Par la suite, nous utiliserons une intégration de Monte-Carlo pour évaluer (3:48).

Dans le cas où aucune information *a priori* n'est disponible $\mathbf{P}_0^{-1} = 0$ et

$$\mathbf{E}\{\nabla_{\theta}h_k(\theta)\mathbf{R}_k^{-1}\nabla_{\theta}h_k(\theta)^T\} = \nabla_{\theta}h_k(\theta)\mathbf{R}_k^{-1}\nabla_{\theta}h_k(\theta)^T \quad (3:49)$$

car le paramètre θ est déterministe.

3.4.2.2 Projection de la CRLB

On s'intéresse à une quantité β qui est reliée au paramètre θ par une fonction $\beta = \mathcal{F}(\theta)$. Dans ce cas, la FIM de l'estimée de β , notée \mathbf{J}_k^{β} , est donnée par

$$(\mathbf{J}_k^{\beta})^{-1} = \mathbf{Fp} \cdot (\mathbf{J}_k^0)^{-1} \cdot \mathbf{Fp}^T \quad (3:50)$$

ou \mathbf{Fp} est le jacobien de $\mathcal{F}(\theta)$.

Cette relation nous permettra de déduire la CRLB du point d'interception en fonction de celle du point d'impact (§3.5.2.2).

3.5 Application

Nous exploitons maintenant les résultats précédents pour évaluer le potentiel de chacune des approches en termes de précision. Les caractéristiques des radars utilisées

sont les suivantes :

Tableau 3-2 : caractéristiques des radars

Radar	Niveau de bruit	Puissance @1 m (SER=-25dBm ²)	Rapport signal à bruit @1m
BMDM 9550	$\sigma_r^2 = -61$ dBm	$A_I^2 = -40$ dBm	$S/N_I = 21$ dB
ISL	$\sigma_r^2 = -82$ dBm	$A_I^2 = -18$ dBm	$S/N_I = 64$ dB

3.5.1 Cas 1 - trajectoire rectiligne - un radar Doppler

3.5.1.1 Calcul de la CRLB

Dans ce cas, un seul radar doppler est utilisé et délivre un signal dont la fréquence est proportionnelle à la vitesse radiale du projectile (§3.5.1). On rappelle que la mesure théorique est donnée par (§1.4.1, équation (1:18)) :

$$f_D = k_r v_0 \cdot \frac{x_0 - v_0 t}{\sqrt{(x_0 - v_0 t)^2 + y_0^2}} \quad (3:51)$$

où k_r est la constante radar qui vaut: $k_r = 2/\lambda$. L'écart-type de la mesure vaut

$$\sigma_{f_D} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{S/N} \right) f_D + \sigma_{f_D}^0 = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \cdot \frac{d^2}{S/N_I} f_D + \sigma_{f_D}^0 \quad (3:52)$$

Pour intégrer des erreurs de modèle non prises en compte nous fixons arbitrairement la valeur de saturation $\sigma_{f_D}^0 = 0,01 f_D$.

Le vecteur paramètre est $\theta = [x_0 \ y_0 \ v_0]^T$.

Le gradient de la mesure est donné par

$$\nabla h_k = \begin{bmatrix} k_r \cdot v_0 \cdot \frac{y_0^2}{((x_0 - v_0 t)^2 + y_0^2)^{3/2}} \\ -k_r \cdot v_0 \cdot \frac{y_0(x_0 - v_0 t)}{((x_0 - v_0 t)^2 + y_0^2)^{3/2}} \\ k_r \cdot \frac{(x_0 - v_0 t)^3 + (x_0 - 2v_0 t)y_0^2}{((x_0 - v_0 t)^2 + y_0^2)^{3/2}} \end{bmatrix} \quad (3:53)$$

3.5.1.2 Simulations

Nous considérons tout d'abord une localisation utilisant le radar BMDM9550 dont la portée est de 5 mètres environ pour un projectile flèche de petit calibre.

Les paramètres de simulation sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{x_0\} &= 5 \text{ m} & \sigma_{x_0} &= 3 \text{ m} \\ \mathbf{E}\{y_0\} &= 1 \text{ m} & \sigma_{y_0} &= 0,5 \text{ m} \\ \mathbf{E}\{v_0\} &= 1,8 \text{ km/s} & \sigma_{v_0} &= 0,5 \text{ km/s} \end{aligned}$$

Ces informations *a priori* sont déduites de la portée du radar, de son ouverture ainsi que des vitesses typiques des projectiles.

Contrairement à nos hypothèses, la distribution de y_0 n'est pas une gaussienne. En effet, au vu de la définition du repère, y_0 ne peut pas prendre de valeur négative puisqu'elle mesure la distance entre le point d'impact et le radar. Si l'on suppose que les impacts sont distribués normalement autour du radar, dans ce cas la distribution de y_0 est une distribution de Rayleigh [43]. Nous utiliserons donc cette distribution pour calculer l'intégrale (3:48), en revanche nous conserverons l'approximation d'une distribution gaussienne (plus «défavorable») pour la suite des développements.

On supposera également qu'un échantillon est produit tous les 1,5 cm ($\lambda/2$) conformément à la méthode d'échantillonnage par détection de passage à zéro. La figure 3-5 montre un exemple de signal simulé dont on vérifie qu'il correspond, visuellement au moins, aux signatures enregistrées avec ce radar.

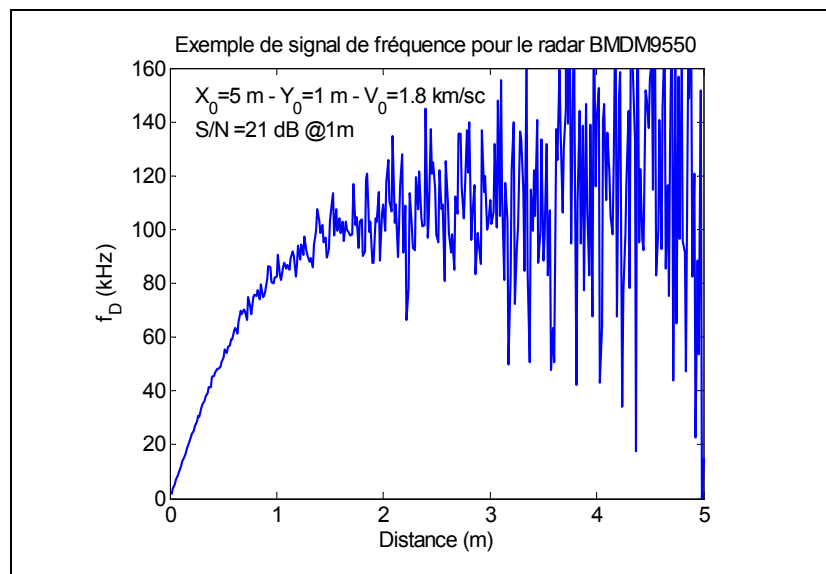


Figure 3-5 : Exemple de signal de fréquence pour le radar BMDM9550

L'évolution des écarts-types des coordonnées est présenté sur la figure 3-6. On a également représenté le seuil correspondant aux objectifs à atteindre, que nous avons fixé à 5 cm.

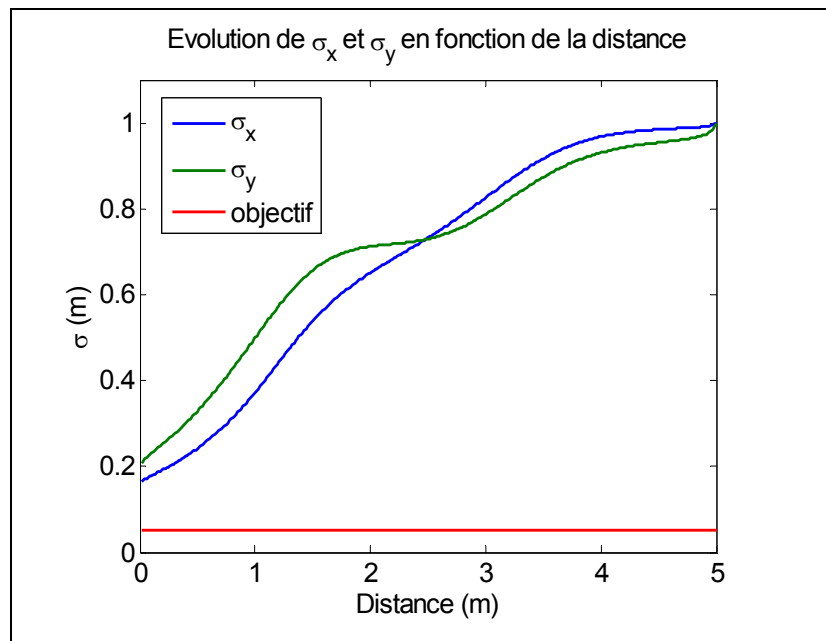


Figure 3-6 : Evolution des écarts-types de la position (BMDM 9550)

Les précisions quant à la mesure de vitesse sont données par la figure 3-6.

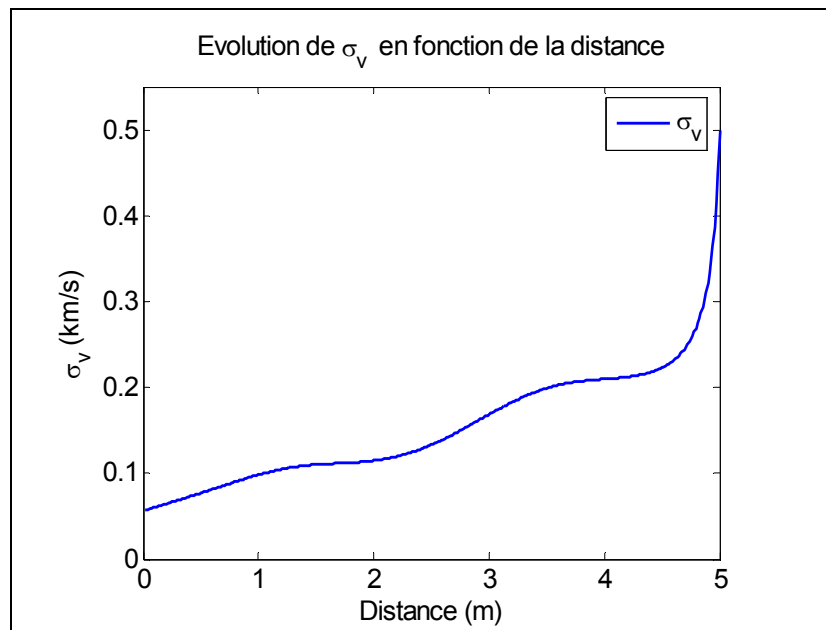


Figure 3-7 : Evolution de l'écart-type de la vitesse (radar BMDM 9550)

Ces courbes montrent que, lorsque le projectile est loin du radar, les mesures contiennent très peu d'information sur la position du projectile mais permettent une bonne évaluation de la vitesse absolue. Ce comportement n'est pas surprenant puisque toute l'information sur la position du projectile est contenue dans le parallaxe de la mesure : si le projectile est dans l'axe du radar ou alors très loin de celui-ci, la vitesse radiale coïncide avec la vitesse absolue du projectile. Dans ce cas, la vitesse peut être mesurée avec une grande précision tandis que la position n'est plus observable. En résumé, plus la courbure du signal de fréquence est importante, meilleure est la précision sur la po-

sition du projectile.

On constate également que les objectifs de précision ne sont atteints quasiment qu'au moment de l'impact (!), ce qui n'est pas d'un grand secours.

Nous avons ensuite évalué le même scénario en utilisant le radar ISL. Les paramètres de simulation sont

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{x_0\} &= 30 \text{ m} & \sigma_{x_0} &= 5 \text{ m} \\ \mathbf{E}\{y_0\} &= 3 \text{ m} & \sigma_{y_0} &= 2 \text{ m} \\ \mathbf{E}\{v_0\} &= 1,8 \text{ km/s} & \sigma_{v_0} &= 0,5 \text{ km/s} \end{aligned}$$

L'évolution des écarts-types est présentée figure 3-8. On observe une amélioration des précisions due à l'augmentation du rapport signal à bruit. Cependant, la distance pour laquelle les précisions deviennent acceptables est encore trop faible. On rappelle en effet que, pour permettre un riposte efficace, il faut que celle-ci soit déclenchée lorsque la cible se trouve au moins à une dizaine de mètres. De plus, les informations délivrées ne permettent pas de localiser le projectile dans un repère absolu (voir §1.4.1).

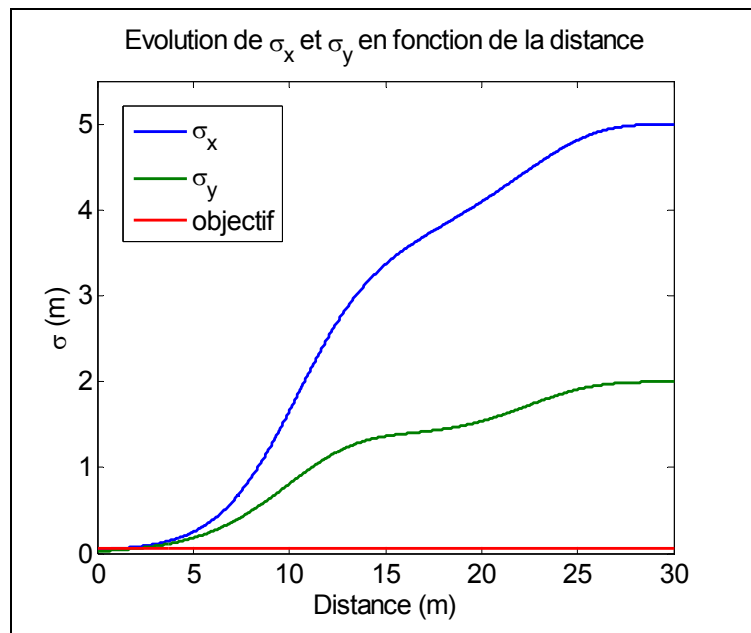


Figure 3-8 : évolution des écarts-types de la position (radar ISL)

3.5.1.3 Conclusion

Comme cela a déjà été dit, cette configuration ne présente pas de réel intérêt pour l'application du blindage actif, d'une part à cause de sa précision trop faible, d'autre part parce que les coordonnées sont liées à un repère relatif à la trajectoire dont l'orientation dans le repère de référence est inconnue. Cet exemple est présenté car il met en évidence la problématique de la localisation à partir d'une mesure de vitesse radiale, à savoir que l'information de position décroît très rapidement avec la distance. On peut toutefois envisager un tel dispositif dans le cadre d'un système de protection de type «missile anti-missile». En effet, certains scénarios de riposte utilisent une charge explosive envoyée à l'encontre de la menace et devant être déclenchée lorsque les deux projectiles se croisent. En embarquant un radar doppler à l'intérieur de la riposte, il est très

simple de déterminer l'instant où la distance entre les deux projectiles est minimale (point de croisement), puisqu'elle correspond à une annulation de la fréquence Doppler.

3.5.2 Cas 2 - 3 radars doppler - mesure de phase

3.5.2.1 Calcul du CRLB

On rappelle que dans cette application 3 radars Doppler sont utilisés, la trajectoire est supposée rectiligne et les signaux exploités sont les différences de phase Doppler $\Delta\phi_i(t)$ qui sont reliées au déplacement $\Delta d_i(t)$ par la relation (voir §1.4.2)

$$\Delta\phi_i(t) = k_r(\Delta d_i(t)) = k_r[d_i(0) - d_i(t)] \quad (3:54)$$

Le déplacement est décrit par l'équation (1:19) et k_r est la constante radar.

Le paramètre à estimer intègre les 6 paramètres de la trajectoire $\theta = [y_f, z_f, d_v, v_0, \varphi, \theta]^T$

Le gradient de la différence de phase $\Delta\phi_i$ vaut :

$$\nabla[\Delta\phi_i(t)] = k_r[\nabla d_i(0) - \nabla d_i(t)] \quad (3:55)$$

avec

$$\nabla d_i(t) = \begin{bmatrix} \frac{y_f - Ry_i + (d_v - v_0 t) \sin \varphi}{d_i(t)} \\ \frac{z_f - Rz_i + (d_v - v_0 t) \theta}{d_i(t)} \\ \frac{(d_v - v_0 t)(1 + \theta^2) + (z_f - Rz_i) \theta + (y_f - Ry_i) \sin \varphi}{d_i(t)} \\ \frac{(Rz_i - z_f) \theta + (Ry_i - y_f) \sin \varphi + (v_0 t - d_v)(1 + \theta^2)}{d_i(t)} \\ \frac{(y_f - Ry_i)(d_v - v_0 t) \cos \varphi}{d_i(t)} \\ \frac{(d_v - v_0 t)[z_f - Rz_i + (d_v - v_0 t) \theta]}{d_i(t)} \end{bmatrix} \quad (3:56)$$

ce qui nous donne, pour l'ensemble des mesures

$$\nabla h_k = [\Delta\phi_1(t_k) \quad \Delta\phi_2(t_k) \quad \Delta\phi_3(t_k)] \quad (3:57)$$

L'écart-type de la phase est

$$\sigma_{\phi_b} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{S/N} + \sigma_{\phi_b}^0 \quad (3:58)$$

Nous fixons $\sigma_{\phi_b}^0 = 0,001\pi$. Cette valeur est choisie de telle sorte que le signal de fréquence correspondant, qui met mieux en évidence la quantité de bruit que le signal de phase, ait visuellement le même aspect que les enregistrements expérimentaux. Bien que cette valeur soit très approximative, son influence sur l'ensemble des données reste très limitée mais elle permet toutefois d'éviter que les précisions ne tendent vers l'in-

fini pour des distances très faibles.

Les 3 mesures radar étant indépendantes, nous avons

$$\mathbf{R}_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{S/N_I} \begin{bmatrix} d_1^4 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^4 & 0 \\ 0 & 0 & d_3^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{\phi_1}^0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\phi_2}^0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\phi_3}^0 \end{bmatrix} \quad (3:59)$$

3.5.2.2 Simulations

Les simulations ont été effectuées en utilisant les caractéristiques du radar ISL. Dans le contexte d'une application réelle, les radars sont normalement disposés sur une même face du véhicule à protéger avec un éloignement maximal entre chacun d'eux.

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Les statistiques *a priori* sont

$$\begin{array}{llll} \mathbf{E}\{y_f\} = 2 \text{ m} & \sigma_{y_f} = 3 \text{ m} & \mathbf{E}\{v_0\} = 1,8 \text{ km/s} & \sigma_{v_0} = 0,5 \text{ km/s} \\ \mathbf{E}\{z_f\} = 1 \text{ m} & \sigma_{z_f} = 2 \text{ m} & \mathbf{E}\{\varphi\} = 0 & \sigma_{\varphi} = 30 \text{ deg} \\ \mathbf{E}\{d_v\} = 30 \text{ m} & \sigma_{d_v} = 5 \text{ m} & \mathbf{E}\{\theta\} = 0 & \sigma_{\theta} = 10 \text{ deg} \end{array}$$

Pour établir les statistiques du point d'impact (y_f, z_f) , nous supposons que le point visé est le centre de la face du véhicule avec un écart-type proportionnel aux dimensions de celle-ci. Le paramètre $\mathbf{E}\{d_v\}$ correspond approximativement à la distance de détection du projectile, c'est-à-dire la portée du radar, et $\mathbf{E}\{v_0\}$ est définie par les valeurs typiques des vitesses. Enfin, pour ce qui concerne les angles, nous privilégions les menaces dont la trajectoire est normale au radar, avec une couverture assez large en azimut mais plus réduite en élévation puisque nous considérons des tirs tendus.

La figure 3-9 montre les précisions sur la localisation du point d'impact.

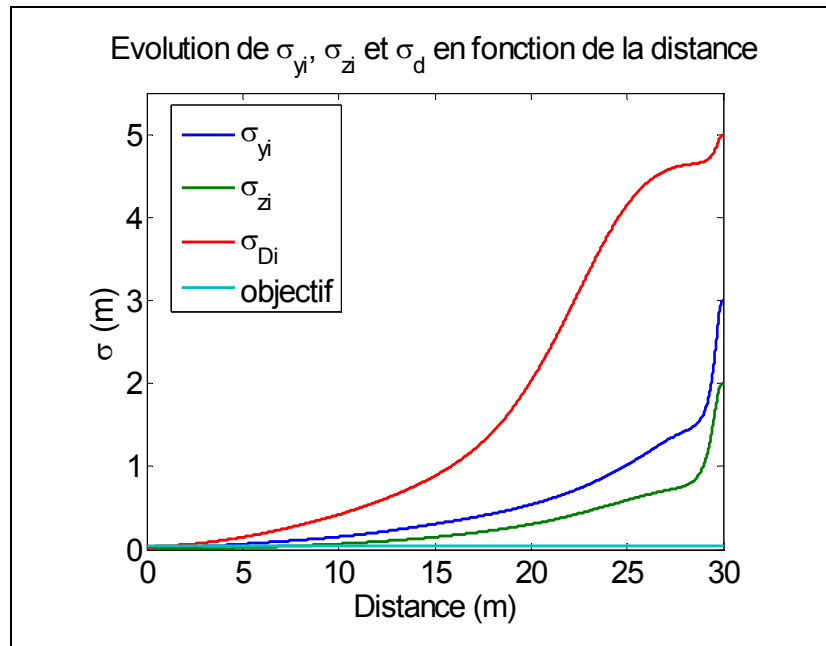


Figure 3-9 : évolution des écarts-types du point d'impact

On observe que la barrière des 5 cm n'est atteinte que dans les derniers mètres de la trajectoire. La figure 3-10 indique que, comme dans le cas 1, la vitesse est connue avec une grande précision dès les premières mesures. On note d'ailleurs que l'écart-type diminue plus rapidement que dans le cas précédent. Ceci s'explique notamment par le fait qu'au début de la mesure le projectile est très éloigné et la vitesse peut donc être mesurée précisément puisque la parallaxe est faible.

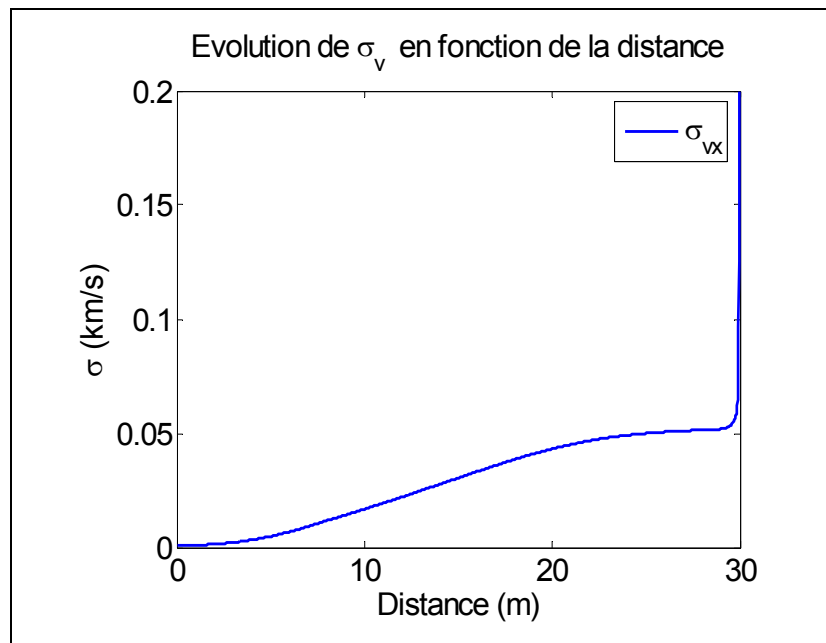


Figure 3-10 : évolution de l'écart-type de la vitesse

Ces résultats soulignent à nouveau la difficulté d'une localisation à partir de radar Doppler : les mesures ne contiennent quasiment aucune information sur la position à

longue distance.

La précision sur les angles est illustrée figure 3-11. Pour fixer un ordre de grandeur sur les précisions angulaires souhaitées, nous supposons que le point d'interception se situe à 2 m du véhicule. Pour qu'une précision de 5 cm soit atteinte à cette distance, il est nécessaire que les angles soient connus avec des précisions meilleures que 1 degré au niveau du point de localisation, soit à une dizaine de mètres environ. Les courbes montrent que, ici encore, les erreurs dépassent les besoins de l'application.

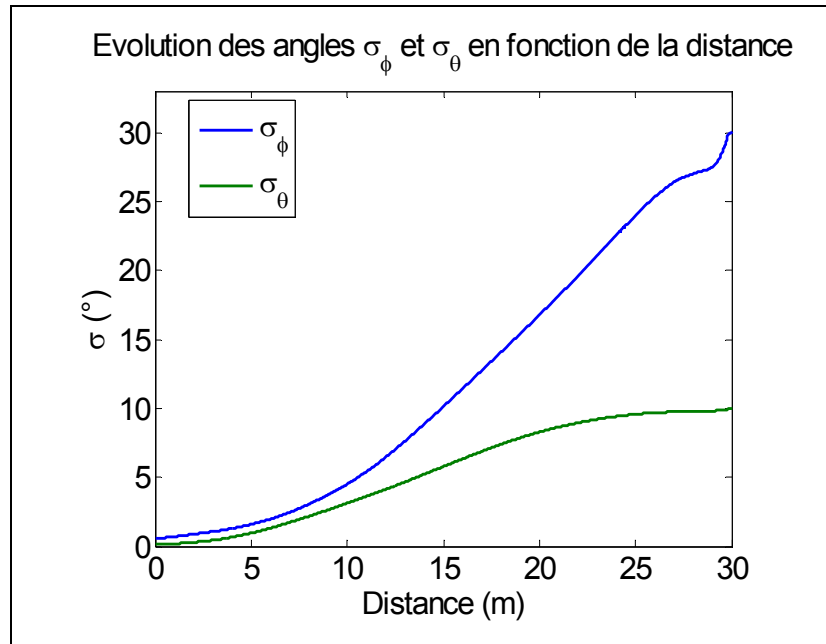


Figure 3-11 : évolution des écarts-types des angles

De plus, la précision effectivement obtenue au niveau du point d'interception doit intégrer les contributions de toutes les erreurs. Ceci peut être calculé précisément en utilisant la matrice de projection définie au paragraphe §3.4.2.2. Nous appelons $[x_c, y_c, z_c]^T$ les coordonnées du point d'interception. Nous supposons également que l'interception doit se faire à 2 m du véhicule à protéger, c'est-à-dire que nous fixons la coordonnée $x_c = 2$ m. Dans ce cas, les trois valeurs à estimer sont y_c, z_c et t_r , le temps de déclenchement de la riposte. Nous avons alors

$$\begin{bmatrix} y_c \\ z_c \\ t_r \end{bmatrix} = \mathcal{F}(\theta) = \begin{bmatrix} y_f + x_c \operatorname{tg} \varphi \\ z_f + x_c \frac{\theta}{\cos \varphi} \\ \frac{1}{v_0} \left[d_v - \frac{x_c}{\cos \varphi} \right] \end{bmatrix} \quad (3:60)$$

On en déduit le jacobien $\mathbf{Fp}(\theta)$

$$\mathbf{Fp}(\theta) = \left[\nabla y_c \quad \nabla z_c \quad \nabla t_r \right]^T \quad (3:61)$$

avec

$$\nabla y_c = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{x_c}{\cos \varphi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla z_c = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ x_c \theta \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\cos \varphi} \\ \frac{x_c}{\cos \varphi} \end{bmatrix} \quad \nabla t_r = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{v_0} \\ \frac{1}{v_0^2} \left[\frac{x_c}{\cos \varphi} - d_v \right] \\ \frac{x_c \operatorname{tg} \varphi}{v_0 \cos \varphi} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3:62)$$

On peut maintenant calculer les précisions sur le point d'interception, mais pour ramener le problème à trois distances nous utiliserons la matrice de projection

$$\mathbf{Fp}(\theta) = \left[\nabla y_c \quad \nabla z_c \quad v_0 \cos \varphi \nabla t_r \right]^T \quad (3:63)$$

Les résultats sont donnés par la figure 3-12 pour une interception à deux mètres.

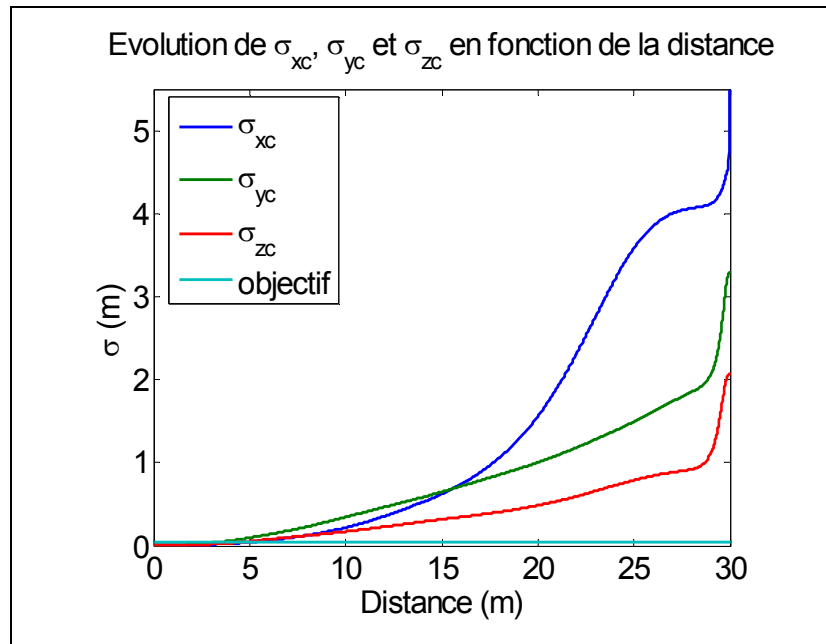


Figure 3-12 : évolution des écarts-types du point d'interception

On observe que les précisions sur l'estimation du point d'interception au moment de la localisation ne sont pas compatibles avec l'application du blindage actif. L'une des causes est que, outre le peu d'information disponible, l'estimation simultanée des six paramètres dégrade la précision sur chacun des paramètres. Nous proposons donc de limiter le vecteur paramètre à $\theta = [y_f, z_f, d_v, v]^T$, les angles devant alors être mesurés par une méthode différente. En réduisant le nombre de paramètres à estimer, nous améliorons sensiblement la précision des coordonnées comme le montre la figure 3-13.

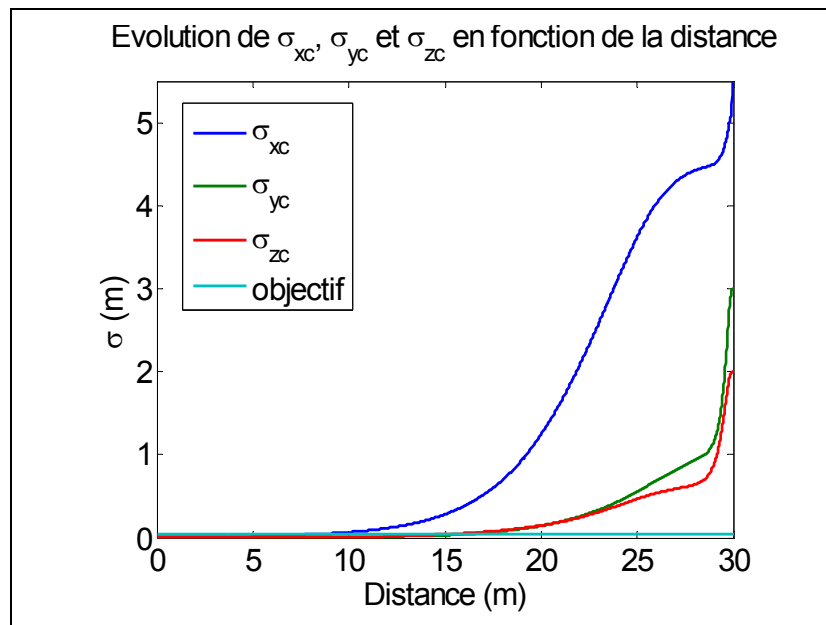


Figure 3-13 : évolution des écarts-types du point d'interception sans estimation des angles

Les objectifs de 5 cm à 10 m peuvent alors être atteints. Cependant, ces résultats supposent une erreur nulle sur la mesure des angles, ce qui n'est évidemment pas réaliste, mais certains radars ont des résolutions largement inférieures au degré. Il est donc envisageable, en utilisant le déphasage entre deux antennes par exemple, d'adjointre au radar Doppler une capacité de mesure d'angle qui pourrait satisfaire nos besoins.

3.5.2.3 Conclusion

Les premiers résultats montrent qu'une estimation complète de tous les paramètres de la trajectoire conduit à des incertitudes importantes, notamment à cause du nombre important d'élément à estimer ainsi que de leur faible observabilité.

En éliminant les angles des paramètres à estimer, nous montrons qu'il est possible d'améliorer sensiblement les précisions des coordonnées et d'atteindre ainsi, à une dizaine de mètres du véhicule à protéger, des écarts-types de 5 cm sur un point d'interception situé à deux mètres. Ces améliorations nécessitent toutefois des modifications du radar utilisé, ce qui a pour effet une augmentation du coût du dispositif et peut remettre en cause le choix d'une technologie Doppler *in fine*.

Bien que ces résultats n'aient qu'une valeur très relative, du fait que d'une part les distances de localisation, d'interception et les précisions souhaitées ne sont pas véritablement définies et que d'autre part le modèle utilisé peut être optimiste par rapport aux mesures réelles, ils permettent tout de même d'appréhender les performances générales d'une telle approche. En effet, la croissance «exponentielle» des précisions avec la distance indique que la méthode n'est fondamentalement pas adaptée à une localisation à longue ou moyenne distance, car la seule mesure de vitesse radiale ne contient plus d'information de position dès lors qu'elle se trouve confondue avec la vitesse absolue. Pour cette raison, nous avons développé une approche alternative utilisant le radar MFCW qui permet une mesure directe de la distance. Les performances obtenues avec un tel radar ne seront cependant pas présentées dans le cadre du blindage actif mais se limiteront à l'étude du cas 3 car celui-ci englobe l'application du blindage actif et qu'en

outre l'activité du blindage actif a été arrêtée en cours de thèse.

3.5.3 Cas 3: 3 radars MFCW - trajectoire balistique

3.5.3.1 Calcul de la CRLB

Ce troisième cas concerne la détection de tireurs embusqués en exploitant les signaux d'un radar MFCW (§1.4.3). Plusieurs différences par rapport aux cas étudiés précédemment sont à noter :

- les trajectoires ne sont plus assimilées à des lignes droites,
- les radars mesurent directement la distance avec une bonne précision,
- les trajectoires peuvent être observées jusqu'au point d'impact,
- la SER de la balle est plus faible que celle du projectile flèche.

En ce qui concerne le dernier point, les radars développés n'ont pas été conçus pour assurer la détection et la localisation d'une cible aussi petite qu'une balle dont la SER est inférieure à celle du projectile flèche de 15 à 20 dB environ (voir §2.3.3). Nous supposons donc qu'un radar plus performant, c'est-à-dire utilisant une fréquence plus élevée¹ ou des puissances plus importantes, est utilisé, de telle sorte que le rapport signal-à-bruit reste identique à celui des cas précédents.

Le signal mesuré par le radar est la distance du radar i au projectile

$$d_i(t) = \sqrt{(x(t) - Rx_i)^2 + (y(t) - Ry_i)^2 + (z(t) - Rz_i)^2} \quad (3:64)$$

où les coordonnées du projectile dans le repère de référence $[x(t), y(t), z(t)]$ sont données par les équations de la balistique

$$\begin{cases} x(t) = \left[d_v - \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\gamma v_0 t + 1} \right) \right] \cos(\varphi) \\ y(t) = \left[d_v - \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\gamma v_0 t + 1} \right) \right] \sin(\varphi) + y_f \\ z(t) = \frac{t}{\gamma v_0 t + 1} \left(v_0 \cdot \theta - \frac{gt}{6} (3 + \gamma v_0 t) \right) + z_f - d_v \theta \end{cases} \quad (3:65)$$

Les paramètres à estimer sont donc $\theta = [y_f, z_f, d_v, v_0, \varphi, \theta, \gamma]^T$.
Le gradient est donné par

1. Une fréquence plus élevée (bande K par exemple) conduit à une SER plus importante.

$$\nabla d_i(t) = \frac{x(t) - Rx_i}{d_i(t)} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial d_v} x(t) \\ \frac{\partial}{\partial v_0} x(t) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} x(t) \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} x(t) \end{bmatrix} + \frac{y(t) - Ry_i}{d_i(t)} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y_f} y(t) \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial d_v} y(t) \\ \frac{\partial}{\partial v_0} y(t) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} y(t) \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} y(t) \end{bmatrix} + \frac{z(t) - Rz_i}{d_i(t)} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial}{\partial z_f} z(t) \\ \frac{\partial}{\partial d_v} z(t) \\ \frac{\partial}{\partial v_0} z(t) \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} z(t) \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} z(t) \end{bmatrix} \quad (3:66)$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial d_v} x(t) &= \cos(\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial v_0} x(t) &= -\frac{t \cos(\varphi)}{(\gamma v_0 t + 1)^2} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} x(t) &= \frac{[v_0 t - d_v (\gamma v_0 t + 1)]}{(\gamma v_0 t + 1)} \sin(\varphi) \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} x(t) &= \frac{\cos(\varphi) v_0^2 t^2}{(\gamma v_0 t + 1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_0} y(t) &= 1 & \frac{\partial}{\partial z_0} z(t) &= 1 \\ \frac{\partial}{\partial d_v} y(t) &= \sin(\varphi) & \frac{\partial}{\partial d_v} z(t) &= -\theta \\ \frac{\partial}{\partial v_0} y(t) &= -\frac{t \sin(\varphi)}{(\gamma v_0 t + 1)^2} & \frac{\partial}{\partial v_0} z(t) &= \frac{\gamma g t^3 + 3 t \theta}{3(\gamma v_0 t + 1)^2} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} y(t) &= \frac{[d_v (\gamma v_0 t + 1) - v_0 t]}{(\gamma v_0 t + 1)} \cos(\varphi) & \frac{\partial}{\partial \theta} z(t) &= \frac{v_0 t}{(\gamma v_0 t + 1)} - d_v \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} y(t) &= \frac{v_0^2 t^2}{(\gamma v_0 t + 1)^2} \sin(\varphi) & \frac{\partial}{\partial \gamma} z(t) &= \frac{t^2 v_0 (g t - 3 v_0 \theta)}{3(\gamma v_0 t + 1)^2} \end{aligned}$$

La matrice de covariance du bruit pour les 3 radars vaut:

$$\mathbf{R}_k = \left(\frac{\lambda_{eq}}{2\pi\sqrt{3}} \right)^2 \cdot \frac{1}{S/N_I} \begin{bmatrix} d_1^4 & 0 & 0 \\ 0 & d_2^4 & 0 \\ 0 & 0 & d_3^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_d^0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_d^0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_d^0 \end{bmatrix} \quad (3:67)$$

avec $\lambda_{eq} = 60$ cm pour une bande passante de 500 MHz et $\sigma_d^0 = 5$ cm conformément aux mesures expérimentales (voir §2.5.9.3).

3.5.3.2 Simulations

Dans cette application les radars ne sont pas contraints à être embarqués et peuvent donc être écartés davantage que dans les cas précédents. Nous prenons

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} \quad R_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (3:68)$$

En ce qui concerne les connaissances *a priori* des paramètres à estimer nous choisissons

$$\begin{array}{llll} \mathbf{E}\{y_f\} = 2 \text{ m} & \sigma_{y_f} = 5 \text{ m} & \mathbf{E}\{\varphi\} = 0 & \sigma_\varphi = 30 \text{ deg} \\ \mathbf{E}\{z_f\} = 1 \text{ m} & \sigma_{z_f} = 2 \text{ m} & \mathbf{E}\{\theta\} = 0 & \sigma_\theta = 10 \text{ deg} \\ \mathbf{E}\{d_v\} = 30 \text{ m} & \sigma_{d_v} = 5 \text{ m} & \mathbf{E}\{\gamma\} = 0,001 \text{ m}^{-1} & \sigma_\gamma = 1 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1} \\ \mathbf{E}\{v_0\} = 900 \text{ m/s} & \sigma_{v_0} = 100 \text{ m/s} & & \end{array}$$

Les écarts-types σ_{y_f} et σ_{z_f} dépendent de la zone à protéger. En prenant $\sigma_{y_f} = 5 \text{ m}$, on couvre un petit poste de garde par exemple.

Les simulations ont été calculées en utilisant 100 points pour la trajectoire et 300 réalisations différentes du paramètre pour l'intégration de Monte-Carlo. Une trajectoire réelle sur une distance de 30 m produit $2d_v/\lambda$ échantillons, soit environ 1300. Si nous limitons volontairement à 100 le nombre d'échantillons, c'est pour tenir compte d'une éventuelle corrélation entre les points (voir §2.5.9.3). Ce cas est donc très défavorable par rapport à ce que l'on peut espérer obtenir dans une application réelle.

Contrairement à l'application du blindage actif, nous nous intéressons uniquement à la direction du tir, c'est-à-dire à l'angle φ . Pour que l'approche radar présente un intérêt par rapport aux méthodes acoustiques, nous visons l'amélioration des précisions de ces dernières, qui sont d'environ 5° .

Les précisions sur la localisation du point d'impact sont données par la figure 3-14 et celles concernant la vitesse par la figure 3-15. Ces courbes montrent les écarts-types en fonction de la distance de vol, c'est-à-dire la distance entre la position actuelle du projectile et son point d'impact.

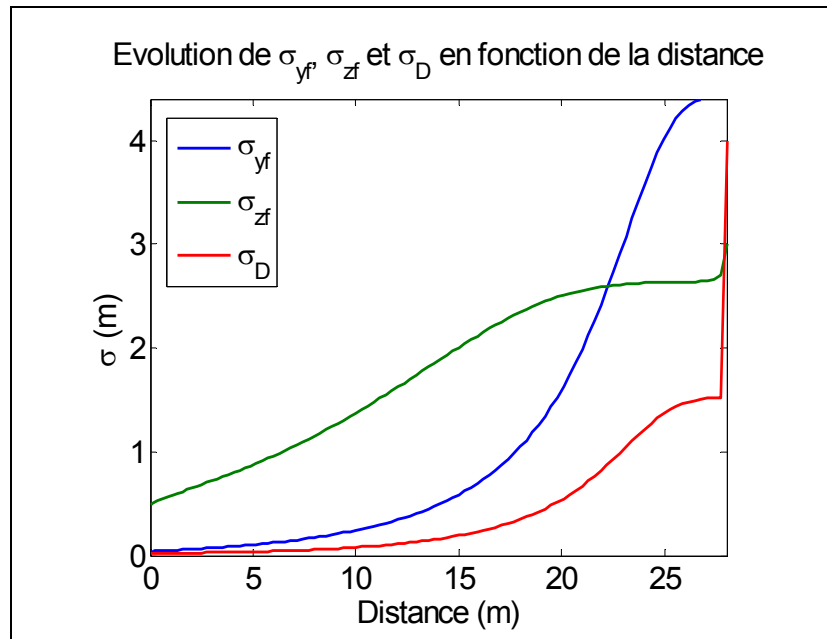


Figure 3-14 : Evolution des écarts-types du point d'impact

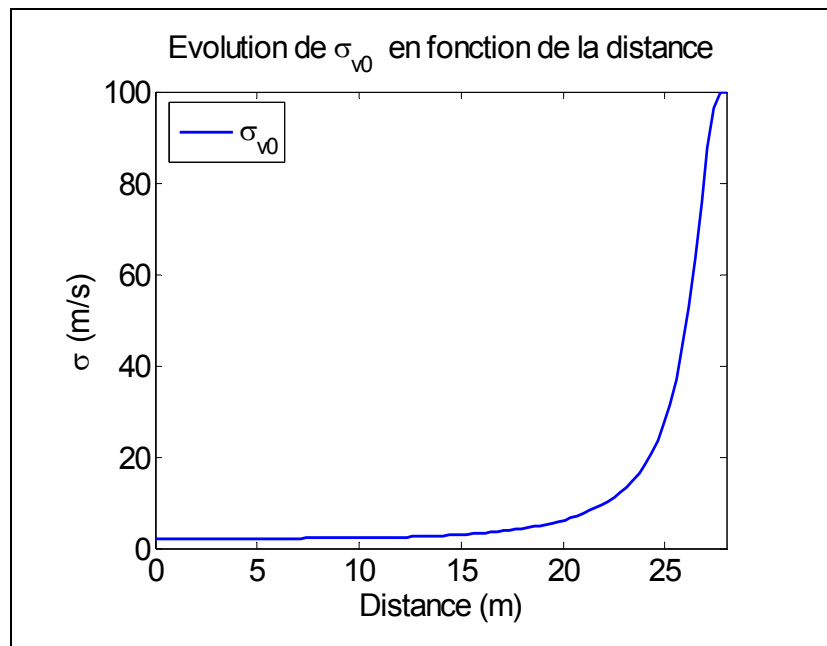


Figure 3-15 : Evolution de l'écart-type de la vitesse

Bien que ces données ne soient pas exploitées dans cette application, nous pouvons les interpréter dans le contexte du blindage actif. On note que le radar MFCW permet d'évaluer la distance d_v dès les premiers échantillons puisque celle-ci est mesurée directement par le radar. Les incertitudes sur les coordonnées de l'impact sont liées à celles des angles illustrées sur la figure 3-16. Pour la coordonnée z_f s'ajoute également l'incertitude sur la constante du projectile γ représentée sur la figure 3-17, puisqu'une constante élevée peut ralentir le projectile et augmenter la hauteur de la flèche. On note

que cette constante est difficilement évaluée puisque son observabilité tient essentiellement à la décélération du projectile, qui est très faible sur les distances considérées.

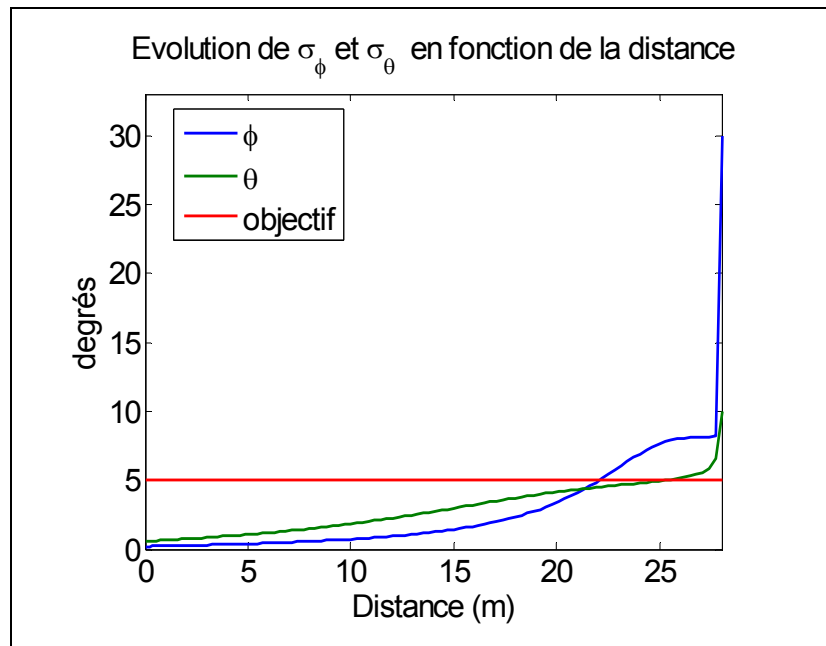


Figure 3-16 : Evolution de l'écart-type des angles

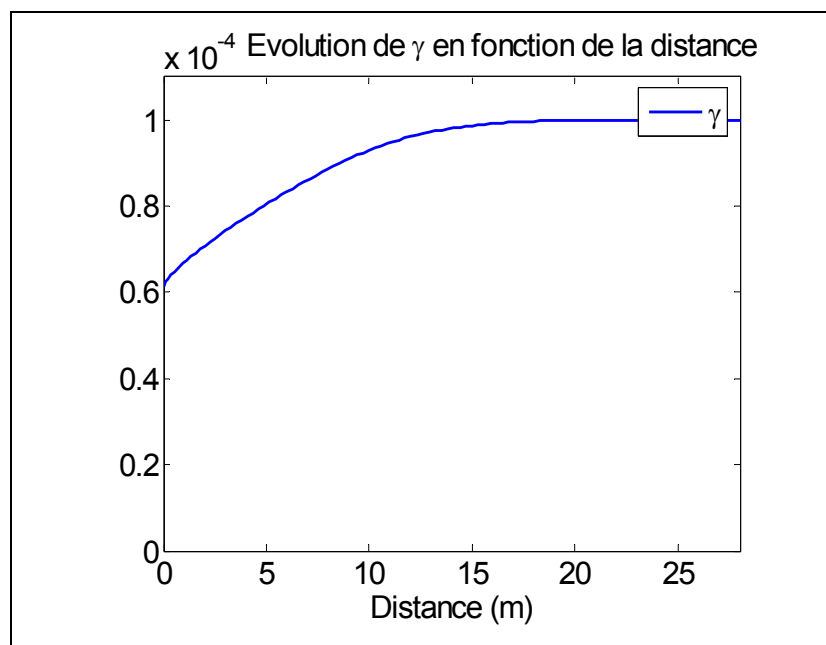


Figure 3-17 : Evolution de l'écart-type de la constante projectile

Le point important est que les angles, notamment l'angle φ , sont connus avec une bonne précision et ce, même pour des distances importantes. Ceci est primordial puisque, même si les contraintes de l'application permettent d'observer des trajectoires complètes jusqu'à l'impact, rien ne garantit que les derniers mètres de la trajectoires se trouvent encore dans le lobe du radar, spécialement dans le cas de tirs désaxés. On observe cependant que l'angle d'azimut est connu avec une précision d'environ 1° à une dizaine de mètres ce qui confère au dispositif une couverture assez large.

Les courbes précédentes intègrent l'ensemble des trajectoires possibles pour caractériser les performances globales de la méthode. On peut également s'intéresser aux performances locales en étudiant la CRLB d'une trajectoire donnée. Dans ce cas, le paramètre à estimer n'est plus une variable aléatoire mais simplement une grandeur inconnue. Cette approche nous permet d'identifier les zones pour lesquelles le système est le plus vulnérable. Nous avons représenté sur la figure 3-18 la précision angulaire en fonction de l'origine du tir. Pour effectuer ces simulations nous avons supposé que le tireur se trouve à une distance de 100 m du dispositif radar et que tous les tirs visent le même point comme le montre la figure. Seule la portion de trajectoire couverte par le radar (en rouge) est analysée, à raison d'une mesure tous les 15 cm. Les résultats

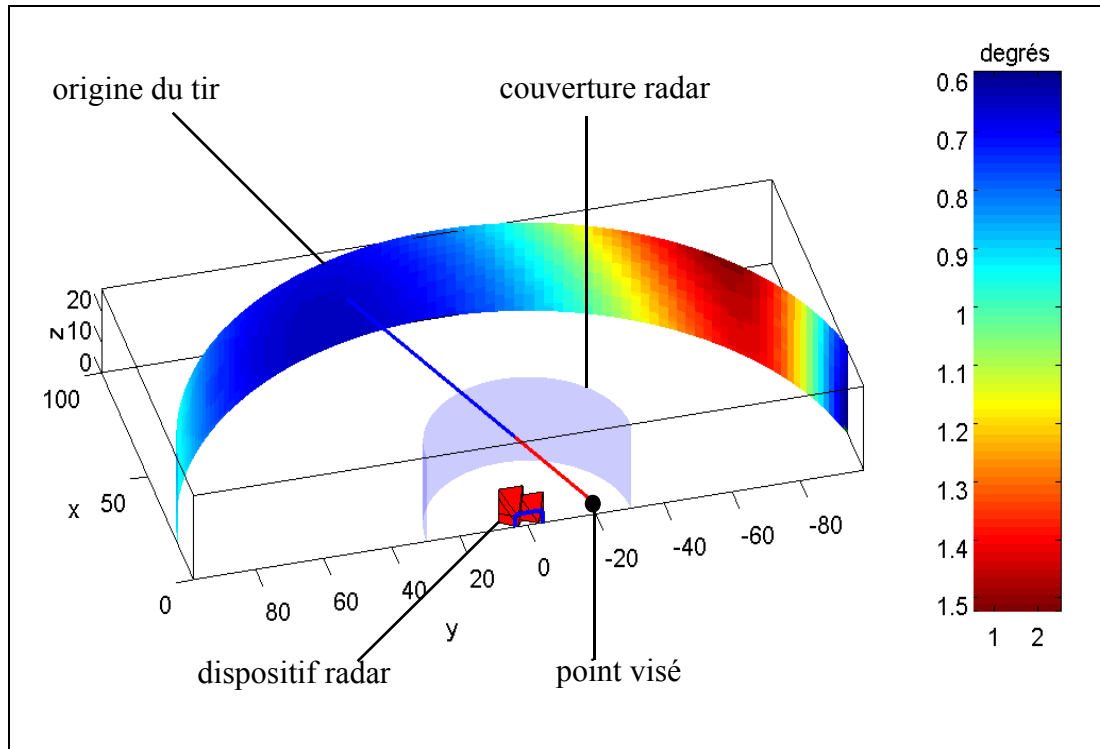


Figure 3-18: Précision angulaire en fonction de l'origine du tir.

montrent que les précisions sont globalement très bonnes, de l'ordre du degré d'erreur, avec un maximum du côté où la portion de trajectoire analysée est la plus courte. Ce scénario montre qu'un radar ayant une portée de 30 m permet une surveillance efficace d'une zone de 20 m de rayon au moins.

Pour finir, nous avons également étudié la précision de la localisation exacte du tireur embusqué, c'est-à-dire de ses trois coordonnées. Cette application suppose que le temps d'origine du coup est connu, mais celui-ci doit être mesuré par une autre méthode, acoustique par exemple, car les radars n'observent qu'une faible portion de la trajectoire.

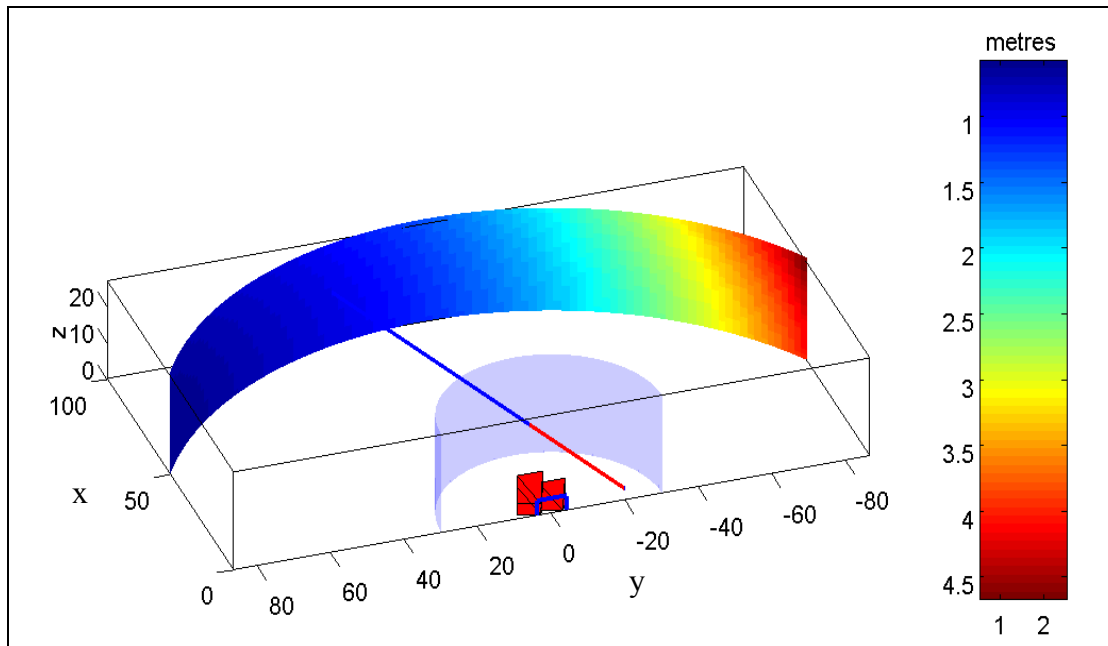


Figure 3-19 : précision des coordonnées en fonction de la position du tireur

Nous avons effectué les simulations en utilisant la même configuration que dans le cas d'une estimation angulaire. La figure 3-19 montre que la position d'un tireur situé à 100 m peut être connue avec une précision de 1 m environ pour la majorité des cas et avec une erreur inférieure à 5 m dans les cas les plus défavorables, où seuls 10 m de la trajectoire sont analysés, soit 66 échantillons seulement.

3.5.3.3 Conclusion sur le cas 3

Nous avons étudié la faisabilité d'une localisation de tireurs embusqués sur la base de 3 mesures radars MFCW. Les simulations ont montré que, pour une couverture radar de 30 m, le dispositif permet de surveiller une zone de 20 m avec des précisions sur la direction du tir meilleures que un degré. Les résultats indiquent également qu'il est possible de localiser un tireur situé à 100 m avec une précision de l'ordre du mètre. Dans un scénario urbain du type de celui rencontré à Sarajevo dans la fameuse «*Sniper Alley*» [28], les tireurs se trouvent typiquement à une distance de 300 m. On peut alors évaluer grossièrement les précisions que pourrait atteindre notre dispositif en multipliant celles obtenues par trois. On obtient donc des erreurs typiques de 3 m, ce qui permet d'identifier la fenêtre¹ d'où est parti le coup et répond au besoins opérationnels.

Nous rappelons cependant que les rapports signaux à bruit utilisés correspondent à une flèche de petit calibre pour le radar ISL (SER=-25 dBm²) tandis que les échos radars d'une petite balle peuvent être bien plus faibles (SER=-40 à -50 dBm², voir §2.3.3). Il conviendrait donc d'utiliser un radar plus puissant ou des fréquences plus élevées pour rejoindre les conditions de simulation.

1. Les tireurs embusqués étant généralement cachés dans des bâtiments.

Chapitre 4

Traitement des signaux en temps réel

4.1 Introduction

Nous avons caractérisé, dans le chapitre précédent, le modèle de mesure sur lequel s'appuie l'estimation des paramètres de la trajectoire

$$\mathbf{y}_k = h_k(\theta) + \mathbf{v}_k \quad (4:1)$$

où les bruits \mathbf{v}_k sont des v.a. gaussiennes, centrées et indépendantes (§3.3.4) et la fonction $h_k(\theta)$ est non linéaire. On rappelle que θ et \mathbf{y}_k sont de dimensions q et m respectivement. La question de l'estimation de trajectoire a également été présentée dans le cadre de l'estimation d'état, mais nous avons vu que, puisque les trajectoires sont purement déterministes, le modèle d'état est équivalent au modèle paramétrique.

Dans ce chapitre, on s'intéressera principalement aux algorithmes permettant l'estimation du paramètre θ en temps réel. Nous aborderons dans un premier temps les théories générales de l'estimation bayésienne et non bayésienne afin de présenter les principaux estimateurs. Nous retiendrons principalement deux estimateurs dont nous montrerons qu'il s'identifient avec un critère des moindres carrés. Dans un deuxième temps, nous présenterons les algorithmes standard permettant de réaliser des estimations non linéaires en temps réel. Ceux d'entre eux qui sont habituellement utilisés pour une estimation d'état seront présentés dans ce contexte.

Nous proposerons ensuite un nouvel algorithme d'estimation paramétrique non linéaire en temps réel, fondé sur une approche différente des algorithmes standard. En effet, le temps réel est généralement appréhendé par des structures algorithmiques récursives, qui permettent de limiter les calculs en réduisant les opérations aux mises à jour successives de l'estimée. L'inconvénient de ces méthodes est qu'elles reposent, dans le cas non linéaire, sur des approximations qui peuvent conduire à des résultats de mauvaise qualité ou bien même à une divergence des algorithmes. Par opposition, les méthodes itératives permettent de trouver asymptotiquement la solution exacte d'un estimateur, mais elles n'exploitent pas les résultats précédents et le nombre d'opérations augmente donc au fur et à mesure que de nouveaux échantillons s'accumulent. Notre approche repose sur un algorithme d'optimisation standard exploitant, non pas

le signal de mesure brut, mais une version compressée de celui-ci. La compression s'effectue de manière récursive et permet de réduire le signal à un nombre constant et très limité d'échantillons. Du fait du faible nombre de points à traiter, la phase d'optimisation peut s'effectuer en temps réel. Cette méthode procède donc également d'une approximation puisque le signal brut est remplacé par le signal compressé, mais à la différence des algorithmes standard qui utilisent des linéarisations *locales* des fonctions d'état et d'observation ou bien des approximation de la distribution *a posteriori*, la nouvelle méthode utilise une approximation *globale* du signal. Pour finir, les différents algorithmes seront appliqués aux cas étudiés. Les résultats des simulations mettront alors en évidence l'intérêt de la nouvelle méthode par rapport aux algorithmes conventionnels.

4.2 Théorie de l'estimation paramétrique

4.2.1 Présentation

Cette théorie traite du problème de l'estimation d'un paramètre à partir d'observations partielles de celui-ci. La difficulté du problème est qu'il n'existe pas de correspondance univoque entre les observations et les paramètres, ce qui entraîne que la réalisation d'une observation, au sens des probabilités, peut être associée à plusieurs paramètres différents. Le choix du paramètre, c'est-à-dire l'*estimée*, doit donc être fixé par une règle appelée *estimateur*, formulée comme une fonction des observations $\hat{\theta}(\mathbf{Y})$. L'objectif est alors de déterminer des estimateurs optimaux, où l'optimalité est définie par rapport à un critère (fonction de coût). On distingue principalement deux approches du problème : l'approche bayésienne, qui traite le paramètre comme une variable aléatoire dont la distribution *a priori* est supposée connue et l'approche non bayésienne, qui ne présuppose aucune connaissance *a priori* sur le paramètre, celui-ci étant alors déterministe mais inconnu.

4.2.2 Estimation bayésienne

L'une des caractéristiques essentielles de l'approche bayésienne est de considérer que le paramètre est une variable aléatoire et que sa distribution *a priori* est supposée connue. Cette connaissance préalable intervient dans la manière selon laquelle est définie la qualité d'un estimateur au travers de la fonction de risque bayésien qui accorde une importance différente à une erreur d'estimation commise pour une réalisation à faible probabilité (risque faible) par rapport à une réalisation à forte probabilité (risque élevé). Le risque bayésien est donc une fonction de coût pondérée par la probabilité des réalisations du paramètre.

Le point de départ est la fonction de coût $C[\hat{\theta}(\mathbf{Y}), \theta]$ définie par l'utilisateur, qui permet de qualifier une estimée par rapport à la valeur "vraie" du paramètre, c'est-à-dire une réalisation de θ .

Puisqu'une réalisation de θ peut conduire à plusieurs observations, on définit un coût moyen intégré sur l'ensemble des observations

$$R(\hat{\theta}, \theta) = \mathbf{E} \{ C[\hat{\theta}(\mathbf{Y}), \theta] \} = \int_{\Psi} C[\hat{\theta}(\mathbf{Y}), \theta] p_{\mathbf{Y}|\theta}(\mathbf{Y}|\theta) d\mathbf{Y} \quad (4:2)$$

On notera que le coût moyen est uniquement fonction de l'estimateur $\hat{\theta}$ et du paramètre θ , la dépendance en \mathbf{Y} étant supprimée par l'intégration sur les observations.

Nous pouvons ensuite définir la fonction de risque bayésien d'un estimateur en intégrant sur l'espace des paramètres

$$r(\hat{\theta}) = \mathbf{E}\{R(\hat{\theta}, \theta)\} = \int_{\mathcal{D}_\theta} R(\hat{\theta}, \theta) p_\theta(\theta) d\theta \quad (4:3)$$

où $p_\theta(\theta)$ est la distribution *a priori* du paramètre θ . L'objectif est alors de trouver l'estimateur minimisant le risque bayésien $r(\hat{\theta})$.

En admettant que l'on peut permuter l'ordre des intégrations, on obtient

$$r(\hat{\theta}) = \int_{\Psi} \left(\int_{\mathcal{D}_\theta} C[\hat{\theta}(\mathbf{Y}), \theta] p_{\theta|\mathbf{Y}}(\theta|\mathbf{Y}) d\theta \right) p_{\mathbf{Y}}(\mathbf{Y}) d\mathbf{Y} \quad (4:4)$$

La première intégration se fait sur les observations, suivie de l'intégration sur les paramètres. On constate alors que la minimisation du risque bayésien revient à minimiser $\mathbf{E}\{C(\hat{\theta}(\mathbf{Y}), \theta)|\mathbf{Y}\}$ pour chacune des observations, indépendamment.

- Estimateur *MMSE* (*Minimum Mean-Squared Error*¹)

L'une des fonctions de coût les plus utilisées est la fonction de coût quadratique définie par $C(\hat{\theta}(\mathbf{Y}), \theta) = (\hat{\theta}(\mathbf{Y}) - \theta)^2$. On montre (voir [49] par exemple) que l'estimateur associé à cette fonction de coût, appelé estimateur MMSE, est donné par l'espérance conditionnelle

$$\hat{\theta}_{MMSE}(\mathbf{Y}) = \mathbf{E}\{\theta|\mathbf{Y}\} \quad (4:5)$$

- Estimateur *MMAE* (*Minimum Mean Absolute Error*)

L'estimateur *MMAE* correspond à la fonction de coût $C(\hat{\theta}(\mathbf{Y}), \theta) = |\hat{\theta}(\mathbf{Y}) - \theta|$. On montre que l'estimateur *MMAE* est donné par la valeur médiane de la distribution conditionnelle de θ sachant \mathbf{Y} :

$$\hat{\theta}_{MMAE}(\mathbf{Y}) = \text{médiane}\{p_{\theta|\mathbf{Y}}(\theta)\} \quad (4:6)$$

- Estimateur *MAP* (*Maximum A Posteriori Probability*)

L'estimateur *MAP* est associé à la fonction de coût uniforme

$$C(\hat{\theta}(\mathbf{Y}), \theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\hat{\theta}(\mathbf{Y}) - \theta| > \kappa \\ 0 & \text{si } |\hat{\theta}(\mathbf{Y}) - \theta| < \kappa \end{cases}$$

On montre que pour le coût uniforme l'estimateur *MAP* est donné par le maximum (le mode) de la distribution de $p_{\theta|\mathbf{Y}}(\theta)$

$$\hat{\theta}_{MAP}(\mathbf{Y}) = \arg \max\{p_{\theta|\mathbf{Y}}(\theta)\} \quad (4:7)$$

Le logarithme étant une fonction monotone, l'estimateur *MAP* est également solution de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log(p_{\theta|\mathbf{Y}}(\theta)) = 0 \quad (4:8)$$

En utilisant la formule de Bayes la densité $p_{\theta|\mathbf{Y}}(\theta)$ peut être réécrite sous la forme

1. Egalement appelé *Minimum Mean Square Error* ou *Least Mean Square Estimator* (*LMSE*) [48]

$$p_{\theta|Y}(\theta) = \frac{p_{Y|\theta}(\theta)}{p_Y(Y)} p_{\theta}(\theta) \quad (4:9)$$

Le dénominateur étant indépendant de θ , l'équation (4:8) devient

$$\nabla_{\theta}[\log p_{\theta}(\theta)] + \nabla_{\theta}[\log p_{Y|\theta}(\theta)] = 0 \quad (4:10)$$

Cette équation est appelée l'équation *MAP* et sera rapprochée de l'équation du maximum de vraisemblance (*Maximum Likelihood Equation*)

Pour une même distribution $p_{\theta|Y}(\theta)$ les trois estimateurs peuvent conduire à des estimées différentes comme le montre la figure 4-1.

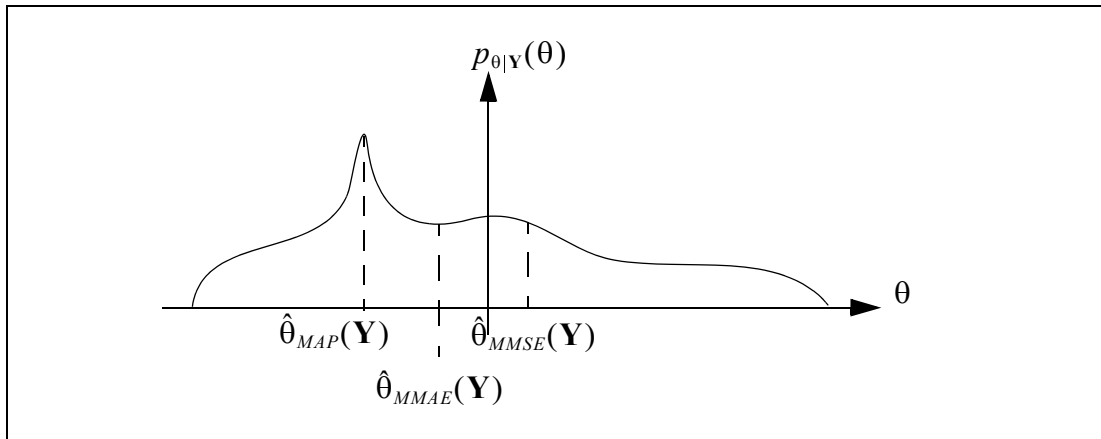


Figure 4-1: Illustration des trois estimateurs pour une même distribution

On constate que tous les estimateurs s'appuient sur la loi de distribution $p_{\theta|Y}(\theta)$, appelée parfois densité *a posteriori* de θ ou encore densité de filtrage. La question de l'estimation paramétrique est donc ramenée à celle du calcul de cette distribution. Cette tâche est généralement complexe et fera l'objet du paragraphe §4.3 qui traite des algorithmes d'estimation. Cependant, l'approche bayésienne offre une structure récursive qui permet de simplifier les calculs et ainsi de favoriser un traitement en temps réel.

Pour plus de généralité et afin d'introduire les filtres du §4.3, nous aborderons l'aspect récursif dans le cadre de l'estimation d'état décrite par le modèle (3:2) que nous rappelons ici pour mémoire

$$\mathbf{x}_{k+1} = f_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{w}_k$$

$$\mathbf{y}_k = h_k(\mathbf{x}_k) + \mathbf{v}_k$$

Nous noterons $\hat{\mathbf{x}}_{k|k}$ l'estimée de \mathbf{x}_k compte tenu des k premières mesures (au temps t_k), concaténées dans le vecteur \mathbf{Y}_k . On rappelle que

$$\mathbf{E}\{\mathbf{w}_i \mathbf{w}_j^T\} = \delta_{ij} \mathbf{Q}_i \quad (4:11)$$

$$\mathbf{E}\{\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^T\} = \delta_{ij} \mathbf{R}_i$$

Afin d'alléger les développements, nous simplifierons l'écriture des fonctions de densité $p_{\mathbf{x}_k|Y_k}(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k) \equiv p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$.

Nous supposerons que le processus aléatoire \mathbf{x}_k est un processus Markovien, c'est-à-

dire que pour toute variable aléatoire z nous avons:

$$p(z|\mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_0) = p(z|\mathbf{x}_k) \quad (4:12)$$

Nous supposons également que les mesures sont indépendantes

$$p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_{k-1}, \dots, \mathbf{y}_1) = p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k) \quad (4:13)$$

Le point de départ de l'estimation est la distribution *a priori* de l'état $p(\mathbf{x}_0)$ supposée connue dans le cadre de l'estimation bayésienne.

Pour mettre en évidence une récursivité, nous exprimons la densité $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_{k+1})$ en fonction de $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$ grâce à la formule de Bayes

$$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_{k+1}) = p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{y}_{k+1}, \mathbf{Y}_k) = \frac{p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{Y}_k)}{p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{Y}_k)} p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_k) \quad (4:14)$$

L'indépendance des mesures $p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{Y}_k) = p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1})$ conduit à

$$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_{k+1}) = \frac{p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1})}{p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{Y}_k)} p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_k) \quad (4:15)$$

avec la constante de normalisation, aussi appelée évidence bayésienne,

$$p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{Y}_k) = \int p(\mathbf{y}_{k+1}|\mathbf{x}_{k+1}) p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_k) d\mathbf{x}_{k+1} \quad (4:16)$$

Cette relation permet de mettre à jour l'estimation de \mathbf{x}_{k+1} en intégrant la dernière mesure \mathbf{y}_{k+1} et est généralement appelée «étape de mise à jour» (*update step*). Pour compléter la récursion il nous faut encore exprimer $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_k)$ en fonction de $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$, étape généralement appelée «étape de propagation» (*propagation step*).

Cette étape n'est cependant pas nécessaire dans le cadre d'une estimation paramétrique puisque nous avons $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_k) = p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$. Dans le cas où l'état est sujet à des évolutions aléatoires les distributions sont différentes mais liées par l'équation de Chapman-Kolmogorov [43]

$$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_k) = \int p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k) d\mathbf{x}_k \quad (4:17)$$

Dans le cas d'une évolution déterministe nous avons $p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{x}_k) = \delta(\|\mathbf{x}_{k+1} - f_k(\mathbf{x}_k)\|)$ ce qui entraîne que

$$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_k) = \int \delta(\|\mathbf{x}_{k+1} - f_k(\mathbf{x}_k)\|) p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k) d\mathbf{x}_k = p(f_k(\mathbf{x}_k)|\mathbf{Y}_k) \quad (4:18)$$

En composant avec la fonction d'évolution on trouve

$$p(\mathbf{x}_{k+1}|\mathbf{Y}_k) = p(F_k(\mathbf{x}_0)|\mathbf{Y}_k) \quad (4:19)$$

ce qui ramène à l'estimation d'un paramètre. Ceci justifie ce qui a été dit précédemment, à savoir que l'estimation d'état est équivalente à une estimation paramétrique lorsque la transition d'état est déterministe.

4.2.3 Estimation non bayésienne

Contrairement à l'estimation bayésienne, où le paramètre à estimer est une variable

aléatoire, aucune information n'est ici supposée et le paramètre est simplement inconnu.

- Estimateur *LS* (*Least Squares*)

L'une des approches les plus directes pour l'estimation d'un paramètre répondant au modèle (4:1) est le critère des moindres carrés qui vise à la minimisation d'une fonction de coût

$$C(\theta) = \sum_{i=1}^k [\mathbf{y}_i - h_i(\theta)] \mathcal{W}_i [\mathbf{y}_i - h_i(\theta)]^T \quad (4:20)$$

où $\mathcal{W}_i > 0$ est une matrice de poids définie positive. L'estimateur *LS*¹ est alors défini par

$$\hat{\theta}_{LS}(k) = \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} C(\theta) \quad (4:21)$$

Cet estimateur fut historiquement le premier à avoir été utilisé par Karl Friedrich Gauss en 1795 ainsi que par Legendre en 1806, tous deux pour étudier le mouvement des corps célestes [50]. Ce critère est avant tout intuitif, il ne repose sur aucune hypothèse quant à la distribution du paramètre ou celle du bruit, et peut, de ce fait, être appliqué à une grande variété de problèmes². L'absence de fondations véritables de l'estimateur *LS* peut laisser penser que cet estimateur conduit à des résultats suboptimaux, puisqu'il n'exploite aucun modèle de distribution. Cependant on peut montrer (voir par exemple [48] et [47]) que de nombreuses approches plus raffinées (filtre de Kalman, Maximum de vraisemblance gaussien), en particulier celles fondées sur des modèles gaussiens, se réduisent *in fine* à un estimateur *LS*.

De plus, dans le cadre d'une estimation linéaire (fonction d'observation linéaire par rapport au paramètre), le critère des moindres carrés peut être interprété comme une norme \mathcal{L}_2 dans un espace Hilbertien et, dans ce cas, la solution au problème est donnée par la projection orthogonale du signal $\{\mathbf{y}_k\}$ dans l'espace vectoriel engendré par les $\{h_k\}$. Il s'agit là du fameux principe d'orthogonalité, qui intervient dans presque tous les problèmes d'estimation linéaires (voir annexe VI.5).

- Estimateur *MLE* (*Maximum Likelihood Estimator*)

Contrairement à l'estimateur *LS*, l'estimateur du maximum de vraisemblance *MLE* exploite la distribution du bruit d'observation. La fonction dite de vraisemblance (*Likelihood function*) est la distribution des observations conditionnée par le paramètre

$$l(\theta, \mathbf{Y}) \equiv p(\mathbf{Y}|\theta) \quad (4:22)$$

Contrairement à l'approche bayésienne, où l'on établit la distribution *a posteriori* du paramètre conditionnée par les observations, aucun modèle de distribution du paramètre n'est supposé ici. Le principe du *MLE* consiste alors à déterminer quel paramètre rend l'observation effectivement mesurée la plus vraisemblable. Ceci se traduit par la recherche du maximum de la fonction de vraisemblance par rapport à θ , les observations \mathbf{Y} étant fixées (par les mesures réalisées). Il est cependant plus pratique pour de nombreuses applications de considérer le logarithme de la fonction de vraisemblance

1. L'estimateur *LS* pondéré est parfois appelé *WLS* (*Weighted Least Squares*)
 2. On trouve dans la littérature des estimateurs *LS* appliqués à des signaux modélisés par des processus aléatoires. En référence à [51], nous réservons l'appellation *LS* aux problèmes strictement déterministes, et l'appellation *MMSE* ou *LMSE* aux approches stochastiques.

(log-likelihood function)

$$\Lambda(\theta, \mathbf{Y}) = \log p(\mathbf{Y}|\theta) \quad (4:23)$$

L'estimateur MLE est alors donné par

$$\hat{\theta}_{MLE}(k) = \arg \max_{\theta} \{\Lambda(\theta, \mathbf{Y}_k)\} \quad (4:24)$$

ou est encore solution de l'équation du maximum de vraisemblance

$$\nabla_{\theta} \Lambda(\theta, \mathbf{Y}_k) = 0 \quad (4:25)$$

La comparaison des équations (4:25) et (4:10) montre une grande similitude entre l'estimateur MAP et MLE, la différence étant l'absence de la distribution *a priori* du paramètre dans l'équation (4:25). L'estimateur MLE est donc le pendant de l'estimateur MAP dans le cas où le paramètre est inconnu (déterministe). Il est d'ailleurs souvent présenté (voir [48] par exemple) comme le cas limite de la distribution *a priori* diffuse (ou non-informative), c'est-à-dire une distribution initiale uniforme couvrant l'ensemble des réels et qui n'apporte donc aucune information sur le paramètre.

L'estimateur MLE ayant une grande importance dans notre étude, on présente certaines de ses principales propriétés [47]. Pour l'énoncé des propriétés, une estimation reposant sur un vecteur de données contenant k échantillons sera notée simplement $\hat{\theta}_{MLE}(k) \equiv \hat{\theta}_{MLE}(\mathbf{Y}_k)$.

Propriété 4.1 : L'estimateur MLE est asymptotiquement non-biaisé :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E} \{ \hat{\theta}_{MLE}(k) \} = \theta \quad (4:26)$$

Propriété 4.2 : L'estimateur MLE est asymptotiquement efficace :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E} \{ [\hat{\theta}_{MLE}(k) - \theta]^2 \} = \mathbf{J}(\theta)^{-1} \quad (4:27)$$

La variance de l'estimée tend asymptotiquement vers la CRLB donnée par l'inverse de la matrice d'information de Fisher (FIM) $\mathbf{J}(\theta)$.

Propriété 4.3 : L'estimateur MLE est asymptotiquement normal :

$$\hat{\theta}_{MLE}(k) \sim \mathcal{N}(\theta, \mathbf{J}(\theta)^{-1}) \quad \text{pour } k \rightarrow \infty \quad (4:28)$$

La distribution de l'estimée $\hat{\theta}_{MLE}(k)$ tend *presque sûrement* vers une distribution gaussienne de moyenne θ et dont la variance est donnée par la CRLB.

4.2.4 Cas des distributions gaussiennes

Dans le cas particulier où le bruit de mesure est gaussien centré et indépendant, la fonction de vraisemblance s'écrit

$$p(\mathbf{Y}_k|\theta) = \prod_{i=1}^k \mathcal{N}(h_i(\theta), \mathbf{R}_i) \quad (4:29)$$

avec

$$N(h_i(\theta), \mathbf{R}_i) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \sqrt{\det(\mathbf{R}_i)}} \exp\left\{\left(-\frac{1}{2}[\mathbf{y}_i - h_i(\theta)]^T \mathbf{R}_i^{-1} [\mathbf{y}_i - h_i(\theta)]\right)\right\} \quad (4:30)$$

où \mathbf{R}_k est la matrice de covariance du bruit de mesure de dimension $m \times m$.
La fonction log-likelihood est alors

$$\Lambda(\theta, \mathbf{Y}_k) = K - \sum_{i=1}^k \frac{1}{2} \cdot [\mathbf{y}_i - h_i(\theta)]^T \mathbf{R}_i^{-1} [\mathbf{y}_i - h_i(\theta)] \quad (4:31)$$

où K est une constante qui ne dépend pas de θ . On constate que le maximum de vraisemblance est obtenu lorsque l'on minimise la somme, l'estimateur ML est alors équivalent à un estimateur LS pour lequel le poids est défini par $\mathcal{W}_k \equiv \mathbf{R}_k^{-1}$.
De plus, nous avons établi que l'estimateur MAP était caractérisé par l'équation (4:10).
En supposant que la distribution *a priori* de θ est gaussienne

$$p_\theta(\theta) = \frac{1}{(2\pi)^{q/2} \sqrt{\det(\mathbf{P}_0)}} \exp\left\{-\frac{1}{2} \cdot [\theta - \theta_0]^T \mathbf{P}_0^{-1} [\theta - \theta_0]\right\} \quad (4:32)$$

un raisonnement similaire au précédent montre que l'estimateur MAP est identique à un estimateur LS pour la fonction de coût suivante

$$C_{\theta_0}(\theta) = [\theta - \theta_0]^T \mathbf{P}_0^{-1} [\theta - \theta_0] + \sum_{i=1}^k [\mathbf{y}_i - h_i(\theta)]^T \mathbf{R}_i^{-1} [\mathbf{y}_i - h_i(\theta)] \quad (4:33)$$

On vérifie à nouveau que lorsque la covariance de la distribution *a priori* de θ tend vers l'infini, autrement dit lorsque cette dernière n'apporte plus d'information, l'estimateur MAP s'identifie à l'estimateur ML.

On déduit de cette discussion que, dans le cas où les bruits de mesure sont indépendants et les distributions $p(\mathbf{Y}_k|\theta)$ et $p_\theta(\theta)$ sont gaussiennes, une forme générale d'estimateur est donnée par l'estimateur LS, avec pour fonction de coût

$$C_{\theta_0}(\theta) = [\theta - \theta_0]^T \mathbf{P}_0^{-1} [\theta - \theta_0] + \sum_{i=1}^k [\mathbf{y}_i - h_i(\theta)]^T \mathcal{W}_k [\mathbf{y}_i - h_i(\theta)] \quad (4:34)$$

l'estimateur MAP correspondant au cas particulier où \mathbf{P}_0 et θ_0 sont la covariance et l'espérance de θ , respectivement, et où $\mathcal{W}_k \equiv \mathbf{R}_k^{-1}$.

L'estimateur ML correspondant au cas particulier où $\mathbf{P}_0^{-1} = 0$ et $\mathcal{W}_k \equiv \mathbf{R}_k^{-1}$.

4.3 Algorithmes d'estimation

Nous avons vu dans le chapitre précédent que la question de l'estimation paramétrique peut être abordée de plusieurs façons.

Dans le cadre d'une approche bayésienne, l'estimation implique le calcul et la mise à jour séquentielle des distributions dites de filtrage $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$, ainsi que le calcul des estimés à partir de ces distributions. Bien que les distributions de filtrage puissent être obtenues assez simplement sur le plan formel grâce à des formules récursives, leur évaluation ainsi que celle des estimées, qui nécessitent le calcul d'intégrales complexes, sont infaisables dans le cas général non linéaire et non gaussien.

Dans le cadre d'une approche non-bayésienne, l'estimation d'un paramètre repose là

aussi sur une équation dont la solution analytique n'existe pas dans le cas général. De très nombreux algorithmes et méthodes ont été développés pour déterminer des solutions, souvent approximatives, aux problèmes d'estimation non linéaire. Parmi les algorithmes présentés, seuls deux d'entre eux calculent l'estimée exacte mais uniquement dans le cas linéaire, il s'agit de l'algorithme des moindres carrés récursifs et du filtre de Kalman. Bien que notre problème soit non linéaire, ils sont tout de même présentés car ils sont à la base des filtres non linéaires et de plus, l'algorithme RLS sera utilisé dans le paragraphe §4.4.

4.3.1 Moindres carrés récursifs - RLS

L'algorithme RLS est l'un des algorithmes les mieux connus dans les domaines du filtrage adaptatif [52], de l'identification de systèmes [53] et de la commande adaptative [54]. L'algorithme RLS permet de calculer récursivement la solution exacte de l'estimateur LS (4:21) dans le cas où la fonction d'observation $h_k(\theta)$ est linéaire, c'est-à-dire lorsqu'elle peut se mettre sous la forme $h_k(\theta) = \mathcal{H}_k^T \theta$, où \mathcal{H}_k est une matrice de dimension $q \times m$. Bien que dans notre cas il ne puisse être appliqué car la fonction d'observation est non linéaire, il est tout de même présenté ici car il sera utilisé pour effectuer le lissage polynomial de données en temps réel (voir §4.4).

Posons la matrice $\mathcal{B}_k^T = [\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_k]$ de dimension $km \times q$, qui contient tous les vecteurs d'observation. L'estimateur LS peut alors s'écrire sous la forme suivante

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{LS}(k) &= \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} (\mathcal{B}_k \theta - \mathbf{Y}_k)^T \mathbf{W}_k (\mathcal{B}_k \theta - \mathbf{Y}_k) \\ &= \underset{\theta}{\operatorname{argmin}} \langle \mathcal{B}_k \theta - \mathbf{Y}_k, \mathcal{B}_k \theta - \mathbf{Y}_k \rangle_{\mathbf{W}_k} \end{aligned} \quad (4:35)$$

où \mathbf{W}_k est une matrice diagonale par blocs de dimension $km \times km$, dont les blocs sont $[\mathbf{W}_k]_{i,i} = \mathcal{W}_i$, et $\langle \dots, \dots \rangle_{\mathbf{W}_k}$ le produit scalaire défini par $\langle A, B \rangle_{\mathbf{W}_k} = A^T \mathbf{W}_k B$. On est alors ramené à la minimisation d'une norme dans un espace de Hilbert, formé par les q signaux que sont les colonnes de la matrice \mathcal{B}_k . On sait, d'après le principe d'orthogonalité, que le vecteur qui minimise la norme (4:35) est donné par la projection orthogonale du signal \mathbf{Y}_k dans l'espace engendré par les lignes de \mathcal{B}_k (annexe VI.5). La solution vérifie donc l'orthogonalité suivante:

$$\langle \mathcal{B}_k \hat{\theta}_{LS}(k) - \mathbf{Y}_k, \mathcal{B}_k \hat{\theta}_{LS}(k) \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \hat{\theta}_{LS}(k) = (\mathcal{B}_k^T \mathbf{W}_k \mathcal{B}_k)^{-1} \mathcal{B}_k^T \mathbf{W}_k \mathbf{Y}_k \quad (4:36)$$

Cette solution nécessite une inversion matricielle, très coûteuse en temps de calcul et sensible aux problèmes de précision des calculs numériques. De plus, cette forme de solution ne permet pas une mise à jour récursive de l'estimation. Ces deux problèmes peuvent être résolus simultanément en établissant une formule de récurrence pour la matrice

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{R}_k^{-1} = (\mathcal{B}_k^T \mathbf{W}_k \mathcal{B}_k)^{-1} \quad (4:37)$$

On montre, en utilisant le lemme d'inversion matricielle (voir [51] par exemple), que les matrices \mathbf{P}_k sont liées par la relation suivante:

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{P}_{k-1} \mathcal{H}_k (\mathcal{W}_k^{-1} + \mathcal{H}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathcal{H}_k)^{-1} \mathcal{H}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \quad (4:38)$$

Ceci permet de résoudre récursivement l'équation (4:35) et conduit à l'algorithme RLS

donné par les formules ci-dessous

Initialisation :

$$\mathbf{P}_0 = \infty \times Id$$

$$\hat{\theta}_{LS}(0) = \theta_0$$

Boucle :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k-1} \mathcal{H}_k (\mathcal{W}_k^{-1} + \mathcal{H}_k^T \mathbf{P}_{k-1} \mathcal{H}_k)^{-1}$$

$$\hat{\theta}_{LS}(k) = \hat{\theta}_{LS}(k-1) + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathcal{H}_k^T \hat{\theta}_{LS}(k-1))$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{k-1} - \mathbf{K}_k \mathcal{H}_k^T \mathbf{P}_{k-1}$$

Algorithme 4-1 : Algorithme RLS

Dans un cadre strictement déterministe, la question de l'initialisation de l'algorithme ne trouve pas de réponse unique puisqu'aucun critère pertinent ne permet de fixer les valeurs \mathbf{P}_0 et θ_0 . Il est cependant naturel d'initialiser le vecteur paramètre avec une valeur probable et d'affecter aux coefficients de \mathbf{P}_0 des valeurs très grandes puisque $\mathbf{P}_0^{-1} = R_0 = [0]$. Ce point sera éclairci avec l'étude du filtre de Kalman.

4.3.2 Méthodes d'optimisation itératives

Les méthodes d'optimisation couvrent un champ d'application très large. D'une manière générale, ces méthodes ont pour but d'optimiser une fonction $F(\theta)$, appelée parfois fonction objective (*Objective Function*), où l'optimisation concerne la recherche de zéros ou d'extrema par exemple. Dans notre cas, ces méthodes peuvent s'appliquer à l'estimation de paramètres en considérant la fonction de coût (4:34) dont il faut rechercher le minimum. Une présentation générale des méthodes est donnée dans [47], on trouvera une comparaison dans [55]. Lorsque ces méthodes convergent vers le minimum global de la fonction objective, elles conduisent au paramètre répondant exactement à l'estimateur. De plus, elles peuvent s'appliquer à des problèmes non linéaires et intégrer de fortes contraintes au niveau du paramètre. On trouve parmi elles des méthodes exploitant les dérivées de la fonction de mesure au premier ordre (gradient, gradient conjugué), ou au deuxième ordre¹ (Newton, Quasi-Newton, Levenberg-Marquardt), ou encore fondées sur des principes stochastiques comme la méthode dite du recuit simulé (*simulated annealing*).

L'inconvénient de ces méthodes est qu'elles sont itératives (non-récurrentes) et requièrent de ce fait un nombre d'opérations et une taille mémoire qui croissent avec le temps. Par exemple, la méthode du gradient, qui compte parmi les algorithmes les plus simples, a une complexité algorithmique de $\mathcal{O}(q \times k)$ ². Ces méthodes ne sont donc clairement pas destinées à des applications en temps réel.

Cependant, nous verrons que la méthode PMDR, présentée dans le paragraphe §4.4, permet de compresser le signal d'observation en un nombre constant et très limité d'échantillons, rendant possible la mise en oeuvre de méthodes d'optimisation itératives en temps réel. Mais même dans ce contexte, il est préférable d'utiliser une méthode itérative dont le coût algorithmique est limité.

1. Les méthodes Quasi-Newton et Levenberg-Marquardt n'utilisent que des dérivées du premier ordre mais sont assimilées à des méthodes du deuxième ordre.
2. Le symbole \mathcal{O} signifie *dominé par*.

La méthode du gradient semble être un bon choix de ce point de vue, mais sa faible complexité algorithmique est contre-balançée par sa vitesse de convergence médiocre. Parmi les méthodes du deuxième ordre on trouve la méthode de Newton qui converge très rapidement lorsque celle-ci est initialisée par une valeur proche de la solution, mais elle nécessite en contre-partie le calcul de la matrice hessienne de la fonction d'observation $h(\theta)$ ainsi que son inversion, ce qui est relativement coûteux en temps processeur [56].

Un bon compromis entre vitesse de convergence et complexité est trouvé dans une méthode dite Quasi-Newton, qui est une méthode de Newton utilisant une approximation de la matrice hessienne tout en conservant une vitesse de convergence équivalente à un algorithme du deuxième ordre. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle n'est pas très robuste et peut facilement diverger.

Finalement, l'algorithme qui semble être le plus approprié est celui de Levenberg-Marquardt [57]. Il s'agit d'une méthode heuristique qui exploite simultanément la méthode du gradient et une méthode Quasi-Newton, en pondérant leur importance relative par un facteur λ . L'ajout d'une descente de gradient à la méthode Quasi-Newton permet d'améliorer les propriétés de convergence de l'ensemble au prix d'un surcoût algorithmique très modeste. Bien que, là non plus, la convergence de la méthode ne soit garantie, il s'avère que cette méthode fonctionne très bien en pratique.

Nous considérons l'algorithme de Levenberg-Marquardt dans le cas où la fonction de coût est donnée par (4:34). Etant donné que cet algorithme itératif est présenté dans un contexte séquentiel, il nous faut donc distinguer le numéro de l'itération de celui du rang de la séquence. Lorsque cela est nécessaire nous adopterons la notation $\hat{\theta}_k^i$, où l'exposant i indique le numéro d'itération. Puisque l'algorithme permet en principe des estimations en temps réel, nous supposerons également que l'estimée $\hat{\theta}_{k-1}$ est disponible au rang k . Celle-ci nous permettra d'initialiser la phase itérative relativement proche de la solution.

L'approximation de la matrice hessienne utilisée est

$$\mathbf{J}_k = [\nabla_{\theta} H_k(\theta)]^T \mathbf{W}_k [\nabla_{\theta} H_k(\theta)] \quad (4:39)$$

avec $\nabla_{\theta} H_k(\theta)^T = [\nabla_{\theta} h_1(\theta)^T, \dots, \nabla_{\theta} h_k(\theta)^T]$.

Cette matrice correspond à la matrice d'information de Fisher introduite dans (3:42) avec pour \mathbf{W}_k l'inverse de la matrice de covariance des échantillons. Les coefficients $[\mathbf{J}_k]_{ij}$ de la matrice correspondent aux produits scalaires des signaux :

$$[\mathbf{J}_k]_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial [\theta]_i} H_k(\theta), \frac{\partial}{\partial [\theta]_j} H_k(\theta) \right\rangle_{\omega} \quad (4:40)$$

Afin d'obtenir une écriture synthétique, les produits scalaires sont présentés sous forme matricielle dans l'algorithme 4-2, mais pour une implantation temps réel ils seront calculés directement à l'aide de (4:40).

La condition d'arrêt de la boucle n'est pas donnée dans l'algorithme 4-2. On pourra selon le cas fixer un seuil sur la norme des résidus $\|H_k(\hat{\theta}_k) - \mathbf{Y}_k\|_{\omega}$, ou simplement fixer le nombre d'itérations, ce qui permet de limiter le temps d'exécution de la boucle

même en cas de non convergence.

Initialisation :

$$\hat{\theta}_k^0 = \hat{\theta}_{k-1}^0$$

$$\lambda = 1$$

Boucle

$$\mathbf{J}_k = [\nabla_{\theta} H_k(\hat{\theta}_k^{i-1})]^T \mathbf{W}_k [\nabla_{\theta} H_k(\hat{\theta}_k^{i-1})]$$

$$D = [\nabla_{\theta} H_k(\hat{\theta}_k^{i-1})]^T \mathbf{W}_k [H_k(\hat{\theta}_k^{i-1}) - \mathbf{Y}_k] + \mathbf{P}_0^{-1} [\hat{\theta}_k^{i-1} - \theta_0]$$

$$\Delta \hat{\theta} = (\mathbf{J}_k + \mathbf{P}_0^{-1} + \lambda \text{diag}[\mathbf{J}_k + \mathbf{P}_0^{-1}])^{-1} D$$

$$\text{Si } \|H_k(\hat{\theta}_k^{i-1} - \Delta \hat{\theta}) - \mathbf{Y}_k\|_{\omega} < \|H_k(\hat{\theta}_k^{i-1}) - \mathbf{Y}_k\|_{\omega}$$

$$\hat{\theta}_k^i = \hat{\theta}_k^{i-1} - \Delta \hat{\theta}$$

$$\lambda = \lambda / 10$$

sinon

$$\lambda = \lambda \times 10$$

fin du test

fin

Algorithme 4-2 : Algorithme de Levenberg-Marquardt

4.3.3 Le filtre de Kalman - KF

Le filtre de Kalman a été proposé par R. E. Kalman en 1960 dans [58] dans le cadre de l'estimation d'état bayésienne. Il permet le calcul exact des distributions (4:15) et (4:17) lorsque les fonctions $h_k(\mathbf{x}_k)$ et $f_k(\mathbf{x}_k)$ sont linéaires, c'est-à-dire peuvent se mettre sous la forme $h_k(\mathbf{x}_k) = \mathcal{H}_k \mathbf{x}_k$ et $f_k(\mathbf{x}_k) = \Phi_k \mathbf{x}_k$, et où les distributions $p(\mathbf{Y}_k | \theta)$ et $p_0(\theta)$ sont gaussiennes. La linéarité des fonctions d'état et d'observation entraîne que la normalité des distributions est conservée et que la densité de filtrage $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$ est elle-même une gaussienne. La caractérisation complète de la distribution $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$ se résume alors aux statistiques du premier et deuxième ordre

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\{\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k\} \\ \mathbf{P}_{k|k} = \text{cov}\{\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k\} \end{aligned} \quad (4:41)$$

De plus, les estimateurs MAP, MMSE et MMAE sont confondus (§4.2.4) et sont donnés par

$$\hat{\mathbf{x}}_{k|k} = \mathbf{E}\{\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k\} \quad (4:42)$$

Les notations $\hat{\mathbf{x}}_{i|j}$ et $\mathbf{P}_{i|j}$ indiquent qu'il s'agit des statistiques de l'état \mathbf{x}_i connaissant les observations \mathbf{Y}_j .

Le calcul des statistiques s'effectue récursivement comme le montre l'algorithme 4-3.

<p>Initialisation :</p> $\mathbf{P}_0 = \text{cov}\{\mathbf{x}_0\}$ $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{E}\{\mathbf{x}_0\}$ <p>Boucle :</p> $\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} = \Phi_k \hat{\mathbf{x}}_{k k}$ $\mathbf{P}_{k+1 k} = \Phi_k \mathbf{P}_{k k} \Phi_k^T + \mathbf{Q}_k$ $\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k} \mathcal{H}_{k+1}^T [\mathbf{R}_{k+1} + \mathcal{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1 k} \mathcal{H}_{k+1}^T]^{-1}$ $\hat{\mathbf{x}}_{k+1 k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \mathcal{H}_{k+1} \hat{\mathbf{x}}_{k+1 k})$ $\mathbf{P}_{k+1 k+1} = \mathbf{P}_{k+1 k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathcal{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1 k}$

Algorithme 4-3 : Filtre de Kalman

On note que, dans le cas de l'estimation paramétrique, $\Phi_k = Id$, on est alors ramené à un algorithme RLS avec $\mathcal{W}_k \equiv \mathbf{R}_k^{-1}$. Cette similitude trouve de nombreux commentaires dans la littérature (voir [47] par exemple), elle est à rapprocher de l'identité existant entre un critère LS et un critère MMSE dans le cas où les distributions sont gaussiennes. Bien que les deux algorithmes soient identiques, ils sont élaborés dans des cadres très différents et le filtre de Kalman permet entre autres de répondre à la question de l'initialisation des variables. Comme cela a été dit, le filtre de Kalman ne s'applique pas à notre étude puisque la fonction d'observation est non linéaire. S'il est présenté ici, c'est parce que certains filtres d'estimation non linéaire (*EKF* et *UKF*) sont construits par approximations autour du filtre de Kalman.

4.3.4 Le Filtre de Kalman Etendu - EKF

Le Filtre de Kalman Etendu, parfois appelé filtre de Kalman Etendu de Schmidt [51], est une extension du filtre de Kalman au cas des fonctions non linéaires [59],[45]. La non linéarité des fonctions d'observation et d'évolution entraîne que, contrairement au KF, la densité *a posteriori* $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$ ne peut être calculée explicitement et n'est généralement pas une gaussienne, quand bien même la distribution du bruit et la distribution *a priori* le sont. Le principe du filtre de Kalman étendu repose sur un développement au premier ordre des fonctions d'observation et d'évolution autour d'une trajectoire nominale notée $\{\mathbf{x}_k^0\}$, pour se ramener à un problème linéaire. En posant $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k^0 + d\mathbf{x}_k$, nous avons en effet

$$\begin{aligned} f_k(\mathbf{x}_k) &= f_k(\mathbf{x}_k^0 + d\mathbf{x}_k) \approx f_k(\mathbf{x}_k^0) + \Phi_k d\mathbf{x}_k \\ h_k(\mathbf{x}_k) &= h_k(\mathbf{x}_k^0 + d\mathbf{x}_k) \approx h_k(\mathbf{x}_k^0) + \mathcal{H}_k d\mathbf{x}_k \end{aligned} \quad (4:43)$$

avec

$$\Phi_k = \left. \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k^0} \quad \mathcal{H}_k = \left. \frac{\partial h_k}{\partial \mathbf{x}_k} \right|_{\mathbf{x}_k^0} \quad (4:44)$$

les matrices jacobiniennes (voir annexe VI.6) de f_k et h_k sont évaluées sur la trajectoire nominale \mathbf{x}_k^0 . En utilisant l'approximation (4:43) nous sommes donc ramenés à un mo-

dèle linéaire qui peut être traité par le KF.

Initialisation :

$$\mathbf{P}_0 = \text{cov}\{\mathbf{x}_0\}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{E}\{\mathbf{x}_0\}$$

Boucle :

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = f_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k})$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \Phi_k \mathbf{P}_{k|k} \Phi_k^T + \mathbf{Q}_k$$

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} \mathcal{H}_{k+1}^T [\mathbf{R}_{k+1} + \mathcal{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1|k} \mathcal{H}_{k+1}^T]^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} + \mathbf{K}_{k+1} [\mathbf{y}_{k+1} - h_{k+1}(\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k})]$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathcal{H}_{k+1}^T \mathbf{P}_{k+1|k}$$

Algorithme 4-4 : Algorithme du Filtre de Kalman Etendu

Cependant, deux remarques doivent être faites au sujet de la linéarisation. Tout d'abord, la trajectoire nominale $\{\mathbf{x}_k^0\}$ n'est en général pas disponible. La solution proposée par Schmidt et conduisant à l'EKF est de linéariser la trajectoire autour de l'estimée courante $\hat{\mathbf{x}}_k$. On comprend que, tant que l'estimée est proche de la solution réelle, la linéarisation reste valable, mais si les erreurs deviennent trop importantes l'approximation linéaire devient à son tour grossière et peut conduire à une divergence du filtre. Ensuite, le KF qui effectue la mise à jour de la densité $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$ suppose implicitement que celle-ci est une gaussienne puisque seuls les moments du premier et deuxième ordre sont calculés, et en effet, la propagation d'une distribution gaussienne au travers des fonctions linéarisées conduit à une nouvelle distribution gaussienne. Cependant, il est certain que l'approximation linéaire n'est pas toujours valable et la densité calculée par l'EKF est une approximation gaussienne de la densité $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$, mais dont les moments du premier et deuxième ordre ne sont pas nécessairement identiques aux moments réels.

Ces approximations peuvent donc conduire à des estimations de mauvaise qualité ou encore à la divergence du filtre, comme cela a été noté par de nombreux auteurs (voir [60],[61] par exemple)

4.3.5 Le Filtre de Kalman non parfumé - UKF

Nous avons vu que la linéarisation des fonctions dans le filtre de Kalman Etendu conduisait implicitement à la conservation du caractère gaussien. Cependant, la distribution gaussienne résultante, qui est une approximation de $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$, n'a pas nécessairement les mêmes moments au premier et deuxième ordre que la distribution réelle. Le filtre UKF proposé par S. J. Julier et J. K. Uhlmann en 1997 [62], utilise également une approximation gaussienne de la distribution *a posteriori*. Contrairement au filtre EKF, cette approximation n'est pas la conséquence d'une linéarisation des fonctions mais elle est présupposée au départ. La propagation de la distribution nécessite alors simplement le calcul de l'espérance et de la covariance, qui est effectué à l'aide d'une transformation dite «non parfumée», en anglais *Unscented Transform (UT)*. L'amélioration apportée par le filtre UKF par rapport à l'EKF est que les moments du premier et deuxième ordre sont calculés exactement [60][61]. L'UT repose sur la re-

présentation de la distribution par $2q + 1$ points (q est la dimension du vecteur d'état¹), appelés *sigma* points, qui capturent exactement l'espérance et la covariance de la distribution. Ces points sont ensuite propagés à travers les vraies fonctions d'évolution et d'observation, conduisant ainsi à un nouveau nuage de points dont les statistiques du premier et deuxième ordre sont exactes. L'algorithme 4-5 montre comment les moments de la v.a. $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$ sont calculés à partir de ceux de \mathbf{x} :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\{\mathbf{x}\} &= \bar{\mathbf{x}} \\ \mathbf{E}\{(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^T\} &= \mathbf{P}_{\mathbf{xx}}\end{aligned}$$

en utilisant l'UT.

Décomposition de la distribution en *sigma*-points

$$\{\mathcal{X}_i, \omega_i\}_{i=0\dots 2q} = UT(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{P}_{\mathbf{xx}})$$

avec :

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_0 &= \bar{\mathbf{x}} & \omega_0 &= \kappa / (q + \kappa) \\ \left. \begin{aligned}\mathcal{X}_i &= \bar{\mathbf{x}} + [\sqrt{(q + \kappa)\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}}]_i & \omega_i &= 1 / [2(q + \kappa)] \\ \mathcal{X}_{i+q} &= \bar{\mathbf{x}} - [\sqrt{(q + \kappa)\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}}]_i & \omega_{i+q} &= \kappa / [2(q + \kappa)]\end{aligned}\right\} i = 1 \dots q\end{aligned}$$

Propagation à travers la fonction :

$$\mathcal{Y}_i = f(\mathcal{X}_i)$$

Calcul des statistiques :

$$\bar{\mathbf{y}} = \sum_{i=0}^{2q} \mathcal{Y}_i \omega_i$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{yy}} = \sum_{i=0}^{2q} \omega_i [\mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}}][\mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}}]^T$$

Algorithme 4-5 : Transformation non parfumée "Unscented Transform"

La notation $[\sqrt{(q + \kappa)\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}}]_i$ désigne la $i^{\text{ème}}$ colonne de la racine carrée matricielle de $(q + \kappa)\mathbf{P}_{\mathbf{xx}}$, qui peut être calculée en utilisant une factorisation de Cholesky par exemple [63]. La constante κ permet de contrôler la dispersion des *sigma* points autour de l'espérance, la valeur de cette constante est discutée dans [61]. La génération de *sigma* points fait penser à une méthode de Monte Carlo, cependant la ressemblance reste très limitée puisque le choix des points ainsi que leur nombre est parfaitement déterminé. Le filtre complet est présenté par l'algorithme 4-6.

1. On utilise parfois le vecteur d'état augmenté qui intègre le bruit dans ses éléments, mais cela accroît le nombre d'opérations et n'apporte rien si le bruit d'état est décorrélié de l'état.

Initialisation :

$$\mathbf{P}_0 = \text{cov}\{\mathbf{x}_0\}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{E}\{\mathbf{x}_0\}$$

Boucle

Génération des *sigma*-points :

$$\{\mathcal{X}_i(k|k), \omega_i\}_{i=0\dots 2q} = UT(\hat{\mathbf{x}}_{k|k}, \mathbf{P}_{k|k})$$

Prédiction de l'état

$$\mathcal{X}_i(k+1|k) = f_{k+1}(\mathcal{X}_i(k|k))$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k} = \sum_{i=0}^{2q} \omega_i \mathcal{X}_i(k+1|k)$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k} = \mathbf{Q}_{k+1} + \sum_{i=0}^{2q} \omega_i [\mathcal{X}_i(k+1|k) - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] [\mathcal{X}_i(k+1|k) - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}]^T$$

Prédiction de la mesure

$$\mathcal{Y}_i = h_{k+1}(\mathcal{X}_i(k+1|k))$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{k+1} = \sum_{i=0}^{2q} \omega_i \mathcal{Y}_i$$

$$\mathbf{P}_{yy} = \mathbf{R}_k + \sum_{i=0}^{2q} \omega_i [\mathcal{Y}_i - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}] [\mathcal{Y}_i - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}]^T$$

Matrice d'intercorrélation

$$\mathbf{P}_{xy} = \sum_{i=0}^{2q} \omega_i [\mathcal{X}_i(k+1|k) - \hat{\mathbf{x}}_{k+1|k}] [\mathcal{Y}_i - \hat{\mathbf{y}}_{k+1}]^T$$

Mise à jour :

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{xy} \mathbf{P}_{yy}^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1|k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k|k} + \mathbf{K}_{k+1} (\mathbf{y}_{k+1} - \hat{\mathbf{y}}_{k+1})$$

$$\mathbf{P}_{k+1|k+1} = \mathbf{P}_{k+1|k} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{P}_{yy} \mathbf{K}_{k+1}^T$$

Algorithme 4-6 : Filtre UKF

On remarquera qu'il n'est fait usage à aucun moment des jacobiens et que, mis à part la propagation des *sigma* points dans les fonctions d'observation et d'évolution, ce filtre est parfaitement générique. L'un des inconvénients de l'UKF par rapport à l'EKF est qu'il nécessite un nombre plus important d'opérations, notamment pour le calcul de la racine carrée matricielle. Une version optimisée de l'algorithme, baptisée *Square-Root UKF*, a été proposée [63], mais le coût algorithmique reste relativement important et peut être un obstacle pour des applications temps réel où la fréquence d'échantillonnage est élevée.

4.3.6 Le Filtre particulaire - PF

Les filtres particuliers comptent parmi les techniques qui connaissent actuellement les

plus forts développements, notamment car elles permettent de traiter efficacement des problèmes non linéaires et/ou non gaussiens séquentiellement.

Le principe du PF est de calculer les intégrales (4:16) et (4:17) permettant d'obtenir la distribution *a posteriori* $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$, ainsi que, le cas échéant, l'espérance conditionnelle $\mathbf{E}\{\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k\}$, en utilisant une technique de Monte Carlo (voir annexe VI.7). Cette méthode consiste à remplacer les mesures de probabilité par des mesures empiriques, avec par exemple, pour la loi $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$

$$P_N(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^i\|) \quad (4:45)$$

où les échantillons $\{\mathbf{x}^i\}_{i=1\dots N}$ sont tirés aléatoirement selon $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$. La distribution $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$ est alors représentée par un nuage de points appelés particules. Le PF utilise une telle représentation de la densité $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$, qui est mise à jour séquentiellement conduisant à une méthode dite de Monte Carlo Séquentielle. Bien que les méthodes de Monte Carlo se soient développées dès le début des années cinquante [64], l'essor du PF est bien plus récent et est principalement dû à l'augmentation des puissances de calcul ainsi qu'à l'introduction de l'étape du rééchantillonnage discutée ci-dessous [45]. Une présentation générale du PF est proposée dans [65] et [66] par exemple.

Sans entrer dans les détails, nous signalons simplement deux étapes importantes qui caractérisent le PF :

- l'échantillonnage séquentiel d'importance (*Sequential Importance Sampling*),
- le rééchantillonnage (*Resampling*).

Le premier point est motivé par le fait qu'il est très difficile en général de simuler la loi $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$ pour le tirage des particules. On utilise alors une loi approchée $\pi(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$, appelée densité d'importance (*importance density* ou *proposal density*), plus facile à simuler pour réaliser le tirage. Dans ce cas on obtient

$$P_N(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i \delta(\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}^i\|) \quad (4:46)$$

où les poids ω_i «compensent» le fait que les particules ne sont pas tirées selon la loi exacte, et s'expriment par

$$\omega_i = \frac{p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)}{\pi(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)} \quad (4:47)$$

Ces poids peuvent être mis à jour de manière séquentielle, ce qui confère au PF une structure récursive et le rend attrayant, en particulier pour des applications temps réel. On impose également à $\pi(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$ d'être «similaire» à $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$. Par «similaire» on entend que

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k) > 0 \Rightarrow \pi(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k) > 0 \quad (4:48)$$

Cette condition permet d'assurer que toutes les réalisations de \mathbf{x}_k , c'est-à-dire le support de $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$, puissent être explorées par $\pi(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$. En d'autres termes, il faut que la densité d'importance puisse générer des particules partout où leur probabilité, conformément à $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$, est non nulle. En revanche, la similarité n'interdit pas à $\pi(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$ de générer un grand nombre de particules dont la probabilité est nulle ou très faible selon $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$. Dans ce cas, la densité d'importance est inefficace et il faut un grand

nombre de particules pour représenter correctement la loi $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$. Cette discussion montre que le choix de la densité d'importance constitue l'un des points clé du PF.

Le second point est une conséquence d'un phénomène appelé dégénérescence des particules. On observe que, après un certain temps, un très grand nombre de particules se voient assigner un poids nul tandis que seules quelques-unes conservent un poids non négligeable. Ceci signifie que l'échantillonnage initial ne permet plus une bonne représentation de la densité $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$. En effet, dans le cas optimal où $\pi(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k) = p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$ tous les poids ont la même valeur. Une grande disparité entre les poids indique que le support de la densité *a posteriori* est devenu beaucoup plus étroit que celui de la densité d'importance. Ce phénomène contraint donc à rééchantillonner des particules à partir de celles dont le poids est resté important.

De très nombreuses déclinaisons du PF sont apparues dans les dernières années, démontrant ainsi l'engouement suscité par ce nouveau type de filtre. On trouvera un bon nombre d'exemples dans [65] et [67]. En ce qui concerne nos applications, le PF a été utilisé aussi bien pour la détection radar [68] que pour la poursuite de cibles [45],[69]. Cependant, le nombre important de particules à traiter entre chaque mesure reste un obstacle majeur à l'utilisation d'un tel filtre. En supposant que 100 particules suffisent à représenter la distribution $p(\mathbf{x}_k|\mathbf{Y}_k)$, le temps alloué par particule entre chaque mesure est de 100 ns, soit une trentaine d'opérations élémentaires¹ seulement. Cette estimation est très largement optimiste par rapport à une intégration réelle de l'algorithme, mais elle montre déjà qu'il est impossible d'évaluer les fonctions d'observation, même dans les cas les plus simples (cas 1), puisque le calcul d'une racine carrée requiert à lui seul 13 opérations élémentaires.

4.3.7 Aperçu de quelques autres méthodes

La question de l'estimation d'un paramètre est extrêmement vaste et recoupe beaucoup de théories comme celle de l'estimation en général, de l'optimisation, du lissage etc. Bien qu'il soit absolument impossible d'être exhaustif sur le sujet, nous présentons ici quelques pistes qui n'ont pas été explorées.

On trouvera dans [70] un bon résumé des différentes théories du filtrage linéaire, depuis son commencement, dans les années 40, jusqu'aux années 70. Même si l'article ne concerne que les problèmes linéaires, il illustre bien les différentes approches du problème et en présente les fondements.

Le filtre de Kalman, comme nous l'avons déjà vu au travers des filtres EKF et UKF, a donné lieu à de nombreuses déclinaisons. Une variation intéressante est le filtre de Kalman Étendu Contraint (*Constrained EKF*), qui permet d'améliorer la stabilité de l'EKF [72] et a été utilisé pour des applications de poursuite de cibles [71]. Les problèmes de stabilité ont également été traités en utilisant une récurrence sur la racine carrée de la matrice de covariance [73], ce qui assure que celle-ci reste définie positive et permet d'accélérer les calculs [47].

Nombre d'algorithmes, regroupés sous la désignation de méthodes de gradient incrémentales, sont consacrés à l'identification récursive de paramètres [74],[75],[76]. Ces méthodes abordent la question de l'estimation paramétrique du point de vue de l'optimisation et proposent une approximation récursive des méthodes de gradient itératives. Cependant, elles présentent de grandes similitudes avec les méthodes fondées sur des

1. Pour un échantillon toutes les 10 μ s et une durée de cycle de 3ns

filtres de Kalman (EKF, EKF itératif etc.) [77], et ont donc des performances équivalentes.

Citons également pour finir des méthodes bayésiennes permettant le calcul de la distribution *a posteriori* dans le cas non linéaire et/ou non gaussien, en utilisant des approximations des distributions par des fonctions constantes par morceaux (étagées) [78] ou par des gaussiennes [79],[80]. Il s'agit donc d'une décomposition en série des distributions en utilisant des fonctions de base pouvant être mises à jour explicitement par les formules bayésiennes. L'inconvénient de ces méthodes est qu'une distribution complexe doit être représentée par un nombre de fonctions relativement important, et rend la mise à jour coûteuse en temps de calcul.

4.4 Nouvelle approche pour l'estimation paramétrique en temps réel

4.4.1 Introduction

Nous avons vu que l'estimation paramétrique pouvait être abordée de deux façons : soit par des méthodes itératives (optimisation), soit par des algorithmes récursifs (filtrage). La première approche permet de trouver numériquement les solutions exactes des estimateurs, mais elle utilise pour cela un processus itératif et n'est donc pas adaptée au temps réel. Les méthodes de filtrage sont, quant à elles, récursives, mais elles sont toutes fondées sur des approximations dans le cas non linéaire, et sont de ce fait des méthodes sub-optimales. Un autre inconvénient de ces méthodes est qu'elles nécessitent un calcul complet d'une nouvelle estimée pour chaque nouvelle mesure. Ce point peut être un handicap sévère dans le cas de fréquences d'échantillonnage élevées, puisque, la durée d'exécution d'une récursion ne pouvant dépasser la période d'échantillonnage, les algorithmes sont contraints à une relative simplicité. De plus, le calcul d'une estimée pour chaque échantillon ne présente en général pas d'intérêt pratique, les variations de l'estimée d'un échantillon à l'autre étant très faibles, et l'on se contente souvent d'une nouvelle estimation pour plusieurs mesures enregistrées.

Nous proposons une nouvelle approche qui se distingue nettement des techniques généralement mises en oeuvre pour l'estimation de paramètres en temps réel. En effet, celle-ci est fondée sur deux tâches parallèles :

- une compression récursive du signal brut
- une minimisation itérative exploitant le signal compressé

Notre méthode, baptisée PMDR pour *Polynomial Method for Dataset Reduction*, utilise donc une technique classique d'optimisation pour estimer le paramètre, mais, pour que celle-ci puisse être mise en oeuvre en temps réel, elle exploite un signal compressé qui est constitué d'un nombre très réduit d'échantillons. La compression du signal s'effectue, elle, en temps réel, et repose sur un lissage polynomial du signal. Le lissage polynomial est un problème linéaire et peut donc être traité efficacement par un algorithme RLS (§4.3.1). L'idée centrale est que le polynôme accumule toute l'information contenue dans le signal qu'il peut ensuite restituer à travers un nombre très réduit d'échantillons polynomiaux PS (*Polynomial Samples*), égal à son degré plus un, puisqu'il s'agit là de son degré de liberté. L'objectif de cette étude est d'une part de déterminer quels sont les PS optimaux, d'autre part de montrer qu'une estimation exploitant le signal compressé conduit au même résultat qu'une estimation exploitant le signal brut. L'intérêt de l'algorithme est double : il permet de prendre en charge des fréquences d'échantillonnage très élevées puisque le lissage polynomial est extrêmement rapide (voir §4.5.3.3), et il conduit à des résultats quasi-optimaux puisqu'il est

équivalent à un algorithme itératif hors-ligne.

Notons encore que nous avons utilisé une méthode de Levenberg-Marquardt pour nos applications, mais n'importe quel autre algorithme, éventuellement récursif, peut également être utilisé.

4.4.1.1 Description de l'algorithme

L'algorithme est constitué de deux tâches parallèles :

- le lissage du signal par un polynôme (temps réel)
- le calcul d'une estimation (temps différé).

La première tâche constitue le noyau temps réel de l'algorithme et doit s'exécuter à chaque nouvelle mesure. Le signal brut est lissé par un polynôme, appelé polynôme de lissage p_l , via un algorithme RLS (§4.3.1), en utilisant le poids $\mathcal{W}_k \equiv 1/\mathbf{R}_k$. Dans le cas où plusieurs signaux sont exploités (mesures vectorielles), chacun des signaux est lissé individuellement.

Le polynôme de lissage obtenu à l'instant t_k permet d'engendrer les PS par simple évaluation à des temps d'échantillonnages spécifiques t_0^*, \dots, t_n^* , qui seront déterminés dans le paragraphe §4.4.6. Dans le cas général d'un bruit stationnaire, les temps d'échantillonnages normalisés t_i^*/t_k sont indépendants de t_k , dans le cas contraire, ils doivent être recalculés pour chaque t_k .

La deuxième tâche est un algorithme de minimisation quelconque permettant trouver la solution d'un estimateur du type (4:34). Il exploite les PS $\{p_l^k(t_i^*(k))\}_{i=0\dots n}$ associés aux poids réduits $\{\mathcal{W}_i^*(k)\}_{i=0\dots n}$.

Le diagramme temporel de l'exécution des tâches est donné figure 4-2. Dans cet exemple on considère que la tâche 2 dure 3 périodes d'échantillonnage. Ainsi, l'estimation au temps t_{k+2} n'intègre que les données mesurées jusqu'au temps t_k .

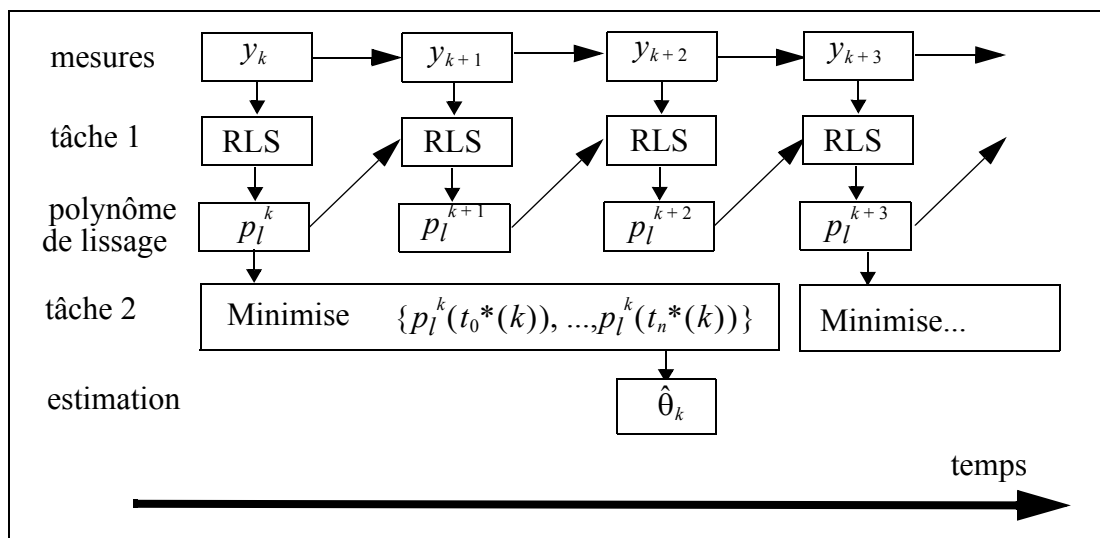


Figure 4-2: diagramme temporel de l'exécution des tâches

4.4.2 Notations

Afin d'alléger les développements, on supposera dans cette étude que toutes les observations sont des scalaires, l'extension au cas vectoriel pouvant se faire sans difficultés, à condition toutefois que les mesures soient indépendantes. La matrice de poids \mathcal{W}_k se réduit donc au scalaire ω_k .

Les signaux (collection de scalaires $\{s_0, \dots, s_k\}$) seront représentés par des vecteurs, par exemple $\mathbf{S}_k = [s_0, \dots, s_k]^T$.

La méthode PMDR permet de substituer à un signal $\mathbf{Y}_k = [y_0, \dots, y_k]^T$ observé jusqu'au temps t_k , un signal compressé comportant $(n+1) \ll (k+1)$ échantillons¹ $\mathbf{Y}_k^* = [y_0^*, \dots, y_n^*]^T$, obtenus par évaluation d'un polynôme de lissage p_l^k à des temps $\{t_i^*(k)\}_{i=0\dots n}$

$$y_i^* = p_l^k(t_i^*(k)) = [\mathbf{P}_1^k]_i \quad (4:49)$$

avec $\mathbf{P}_1^k = [p_l^k(t_0^*(k)), \dots, p_l^k(t_n^*(k))]^T$

Les temps d'évaluations ainsi que le polynôme p_l^k dépendent donc de l'instant t_k où a lieu la substitution. Cependant, nous considérerons pour toute la suite de l'étude que le signal a été observé jusqu'au temps t_k et nous omettrons l'indice k .

Nous notons $\text{Id} = \{t_i\}_{i=0\dots k}$ le domaine de définition des signaux et $\text{Id}^* = \{t_i^*\}_{i=0\dots n} \subset \text{Id}$ le domaine de définition des signaux compressés. Toutes les grandeurs étoilées se réfèrent au signal compressé.

On introduit les produits scalaires sur Id

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle_\omega = \mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{G} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \omega_i f_i g_i \quad (4:50)$$

ainsi que sur Id^*

$$\langle \mathbf{F}^*, \mathbf{G}^* \rangle_{\omega^*} = \mathbf{F}^{*T} \mathbf{W}^* \mathbf{G}^* = \sum_{i=0}^n \omega_i^* f_i^* g_i^* \quad (4:51)$$

avec

$$\mathbf{W} = \frac{1}{k+1} \begin{bmatrix} \omega_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_k \end{bmatrix} \quad \mathbf{W}^* = \begin{bmatrix} \omega_0^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_n^* \end{bmatrix} \quad (4:52)$$

La définition des poids ω_i et ω_i^* sera donnée ultérieurement. La norme induite est notée

$$\|\mathbf{F}\|_\omega^2 = \langle \mathbf{F}, \mathbf{F} \rangle_\omega \quad \|\mathbf{F}^*\|_{\omega^*}^2 = \langle \mathbf{F}^*, \mathbf{F}^* \rangle_{\omega^*} \quad (4:53)$$

On définit également $\mathcal{P}^n(\text{Id})$ l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus égal à n .

4.4.3 Position du problème

On se place dans le cadre du modèle (4:1) en se limitant à des mesures scalaires

1. Dans cette partie et contrairement aux chapitres précédents, les observations seront numérotées à partir de 0.

$$y_k = h_k(\theta) + v_k \quad (4:54)$$

Le bruit v_k est supposé blanc, gaussien et centré mais non stationnaire, avec une variance

$$\sigma_i^2 = \sigma_0^2 \alpha_i \quad \begin{cases} \alpha_i > 0 \\ \max(\alpha_i) = 1 \end{cases} \quad (4:55)$$

Nous considérons la forme générale de l'estimateur donnée en (4:34), dans le cas de mesures scalaires

$$C_{\theta_0}(\theta) = [\theta - \theta_0]^T \mathbf{P}_0^{-1} [\theta - \theta_0] + \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=0}^k \omega_i [y_i - h_i(\theta)]^2 \quad (4:56)$$

où l'on aura posé

$$\omega_i = \frac{1}{\alpha_i} \quad (4:57)$$

La fonction de coût s'exprime également par

$$C_{\theta_0}(\theta) = [\theta - \theta_0]^T \mathbf{P}_0^{-1} [\theta - \theta_0] + \frac{k+1}{\sigma_0^2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{H}(\theta)\|_{\omega}^2 \quad (4:58)$$

Si l'on s'intéresse simplement à l'estimateur MLE on prendra $\mathbf{P}_0^{-1} = 0$.

Notre objectif est de montrer que la minimisation du coût standard $C(\theta)$, est équivalente à la minimisation du coût compressé $C^*(\theta)$

$$C_{\theta_0}^*(\theta) = [\theta - \theta_0]^T \mathbf{P}_0^{-1} [\theta - \theta_0] + \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=0}^n \omega_i^* [y_i^* - h_i^*(\theta)]^2 \quad (4:59)$$

qui s'exprime encore

$$C_{\theta_0}^*(\theta) = [\theta - \theta_0]^T \mathbf{P}_0^{-1} [\theta - \theta_0] + \frac{1}{\sigma_0^2} \|\mathbf{Y}^* - \mathbf{H}^*(\theta)\|_{\omega^*}^2 \quad (4:60)$$

L'équivalence signifie que les estimées standard $\hat{\theta}$ et compressées $\hat{\theta}^*$ ont même espérance

$$\mathbf{E}\{\hat{\theta}^*\} \approx \mathbf{E}\{\hat{\theta}\} = \theta \quad (4:61)$$

et même CRLB

$$\mathbf{J}^{-1} \approx \mathbf{J}^{*-1} \quad (4:62)$$

Il nous faut tout d'abord préciser les caractéristiques du lissage polynomial, à savoir, comment est défini le polynôme et son degré n qui fixe le nombre de PS, ainsi que la détermination des temps d'évaluation $\{t_i^*\}$ et des poids compressés $\{\omega_i^*\}$.

4.4.4 Classe de signaux considérés et ordre du polynôme

La méthode PMDR repose sur l'idée que l'information d'un signal pouvant être représenté convenablement par un polynôme de degré n , peut être résumée en seulement

$n + 1$ valeurs du polynôme (PS).

Hypothèse 4.1 : Nous nous intéresserons donc aux fonctions d'observations, telles que pour toute réalisation du paramètre θ , on ait

$$\exists p \in \mathcal{P}^n(\text{Id}) \quad \forall t_i \in \text{Id} \quad p(t_i) \approx h_i \quad (4:63)$$

Hypothèse 4.2 : On suppose également que les dérivées partielles peuvent être représentées par des polynômes, c'est-à-dire, pour toute réalisation du paramètre θ

$$\forall j = 1 \dots q \quad \exists p \in \mathcal{P}^n(\text{Id}) \quad \forall t_i \in \text{Id} \quad p(t_i) \approx \frac{\partial}{\partial [\theta]_j} h_i(\theta) \quad (4:64)$$

Le degré du polynôme n est donc choisi de telle sorte que les hypothèses ci-dessus soient vérifiées. En effet, nous savons d'après le théorème de Weierstrass [81] que pour toute fonction suffisamment régulière il existe une suite de polynômes convergeant uniformément vers cette fonction. En choisissant un degré suffisamment élevé, les conditions (4:63) et (4:64) peuvent donc être remplies. On notera d'ailleurs qu'en choisissant $n = k$, la fonction d'observation ainsi que ses dérivées partielles peuvent être interpolées pour chaque t_i ce qui entraîne que les conditions sont vérifiées exactement (égalité stricte). Cependant, d'un point de vue pratique, nous devons nous restreindre à des fonctions pouvant être représentées par des polynômes de degrés modestes (10 à 15) pour éviter les problèmes de calcul numérique. De plus, un degré élevé signifie que beaucoup de PS doivent être traités ce qui affaiblit l'intérêt de la méthode.

4.4.5 Lissage polynomial

4.4.5.1 Détermination du polynôme de lissage

On note $\mathbf{B}^i = [b^i(t_0), \dots, b^i(t_k)]^T$ le vecteur contenant l'évaluation du polynôme de base b^i de degré i et $\{\mathbf{B}^0, \dots, \mathbf{B}^n\}$ la base orthonormale de $\mathcal{P}^n(\text{Id})$ relativement au produit scalaire (4:50), c'est-à-dire vérifiant

$$\forall i, j \in 0, \dots, n \quad \langle \mathbf{B}^i, \mathbf{B}^j \rangle_{\omega} = \delta_{ij} \quad (4:65)$$

Nous choisissons comme polynôme de lissage \mathbf{P}_1 le polynôme qui minimise le critère suivant

$$\mathbf{P}_1 = \arg \min_{p \in \mathcal{P}^n} \| \mathbf{Y} - \mathbf{P} \|_{\omega}^2 \quad (4:66)$$

4.4.5.2 Expression du polynôme de lissage

D'après le principe d'orthogonalité (annexe VI.5) nous savons que le polynôme de lissage est la projection orthogonale de \mathbf{Y} dans \mathcal{P}^n . Ce polynôme peut donc être exprimé par

$$\mathbf{P}_1 = \sum_{i=0}^n \langle \mathbf{B}^i, \mathbf{Y} \rangle_{\omega} \mathbf{B}^i \quad (4:67)$$

On pose alors la matrice représentant les éléments de la base

$$\mathcal{B} = [\mathbf{B}^0 \dots \mathbf{B}^n] = \begin{bmatrix} b^0(t_0) & \dots & b^n(t_0) \\ b^0(t_1) & \dots & b^n(t_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ b^0(t_k) & \dots & b^n(t_k) \end{bmatrix} \quad (4:68)$$

La matrice \mathcal{B} vérifie la propriété suivante:

$$\mathcal{B}^T \mathbf{W} \mathcal{B} = Id_{n+1} \quad (4:69)$$

En effet, les coefficients i, j du produit correspondent aux produits scalaires $\langle \mathbf{B}^i, \mathbf{B}^j \rangle_\omega$, et puisque les $\{\mathbf{B}^i\}_{i=0\dots n}$ forment une base orthonormée, on obtient bien le résultat souhaité.

Les n produits scalaires donnant les coefficients de la projection de \mathbf{Y} dans \mathcal{P}^n s'écrivent alors simplement $\mathbf{A} = \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{Y}$ et le polynôme de lissage devient

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{B} \mathbf{A} = \mathbf{B} (\mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{Y}) = \mathbf{B} \mathbf{B}^T \mathbf{W} \mathbf{Y} \quad (4:70)$$

La matrice carrée $\mathbf{B} \mathbf{B}^T$ de dimension $(k+1) \times (k+1)$ est la représentation matricielle du noyau de Christoffel-Darboux [81]

$$\mathbf{K} = \mathbf{B} \mathbf{B}^T \quad (4:71)$$

On pose $\mathcal{K}_n(t_i, t_j)$ le noyau de Christoffel-Darboux scalaire de degré n , qui est une fonction de deux variables. Il vient alors

$$\mathcal{K}_n(t_i, t_j) = [\mathbf{K}]_{ij} = \sum_{l=0}^n b^l(t_i) b^l(t_j) \quad (4:72)$$

La relation (4:70) n'est que la représentation matricielle d'une expression classique dans le cadre de l'estimation non paramétrique [82]

$$p_l(t_i) = \langle \mathcal{K}_n(t_i, t_j), y(t_j) \rangle_\omega \Leftrightarrow \mathbf{P}_1 = \mathbf{K} \mathbf{W} \mathbf{Y} \quad (4:73)$$

(la sommation se faisant sur les t_j). Le noyau de Christoffel-Darboux permet d'exprimer simplement le projecteur sur \mathcal{P}^n via le produit scalaire \mathbf{W} .

On notera que, la projection étant linéaire, le polynôme \mathbf{P}_1 est la somme d'un polynôme déterministe \mathbf{P}_1^d , correspondant à la projection de la fonction d'observation $H(\theta)$, ainsi que d'un polynôme aléatoire \mathbf{P}_1^a , correspondant à la projection du bruit \mathbf{V}

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{K} \mathbf{W} \mathbf{Y} = \mathbf{K} \mathbf{W} (H(\theta) + \mathbf{V}) = \mathbf{K} \mathbf{W} H(\theta) + \mathbf{K} \mathbf{W} \mathbf{V} = \mathbf{P}_1^d + \mathbf{P}_1^a \quad (4:74)$$

Quelques propriétés du noyau de Christoffel-Darboux

Propriété 4.4 : Le noyau de Christoffel-Darboux est symétrique $\mathbf{K}^T = \mathbf{K}$

En effet

$$\mathbf{K}^T = (\mathbf{B} \mathbf{B}^T)^T = \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \mathbf{K} \quad (4:75)$$

Ceci signifie également que $\mathcal{K}_n(t_i, t_j) = \mathcal{K}_n(t_j, t_i)$

Propriété 4.5 : Le noyau de Christoffel-Darboux est reproducteur

$$\forall \mathbf{P} \in \mathcal{P}^n, \mathbf{KWP} = \mathbf{P}$$

En effet, si l'on appelle \mathbf{A} le vecteur des coefficients de \mathbf{P} dans la base \mathbf{B} , c'est-à-dire que $\mathbf{P} = \mathbf{BA}$, nous avons alors

$$\mathbf{KWP} = \mathbf{BB}^T \mathbf{WBA} = \mathbf{BA} = \mathbf{P} \quad (4:76)$$

Ce résultat n'exprime rien d'autre que la projection d'un élément de \mathcal{P}^n dans \mathcal{P}^n est lui-même. On a en particulier :

$$\mathbf{KWB} = \mathbf{B} \quad (4:77)$$

4.4.5.3 Statistiques des échantillons polynomiaux ([82] §3.2.1)

On fera d'emblée l'observation suivante : puisque les PS sont obtenus par projection orthogonale d'un processus gaussien, c'est-à-dire par une application linéaire, la densité gaussienne est conservée.

Espérance

L'espérance se calcule aisément

$$\mathbf{E}\{\mathbf{P}_1\} = \mathbf{E}\{\mathbf{KWY}\} = \mathbf{E}\{\mathbf{KW}(\mathbf{V} + \mathbf{H}(\theta))\} = \mathbf{KWE}\{\mathbf{V}\} + \mathbf{KWH}(\theta) \quad (4:78)$$

par linéarité du projecteur.

Or, le bruit est centré donc $\mathbf{E}\{\mathbf{V}\} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ désigne le vecteur nul), ce qui conduit à

$$\mathbf{E}\{\mathbf{P}_1\} = \mathbf{KWH}(\theta) \quad (4:79)$$

Le polynôme $\mathbf{E}\{\mathbf{P}_1\}$ est donc la projection orthogonale de $\mathbf{H}(\theta)$ dans \mathcal{P}^n . Or, d'après l'hypothèse (4:63), la fonction d'observation est assimilée à un polynôme et est donc invariante par projection orthogonale $\mathbf{KWH}(\theta) \approx \mathbf{H}(\theta)$. Nous obtenons donc

$$\mathbf{E}\{\mathbf{P}_1\} = \mathbf{H}(\theta) = \mathbf{E}\{\mathbf{Y}\} \quad (4:80)$$

Les PS ont donc la même espérance que les échantillons bruts.

Covariance

La matrice de covariance des échantillons polynomiaux est donnée par:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ps} &= \mathbf{E}\{[\mathbf{P}_1 - \mathbf{E}\{\mathbf{P}_1\}][\mathbf{P}_1 - \mathbf{E}\{\mathbf{P}_1\}]^T\} = \mathbf{E}\{[\mathbf{KWV}][\mathbf{KWV}]^T\} \\ &= \mathbf{KWE}\{\mathbf{VV}^T\}\mathbf{W}^T\mathbf{K}^T \end{aligned} \quad (4:81)$$

Le bruit \mathbf{V} étant supposé indépendant, sa covariance est donc une matrice diagonale:

$$\mathbf{E}\{\mathbf{V}^T\mathbf{V}\} = \sigma_0^2 \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_k \end{bmatrix} = \sigma_0^2 \mathbf{A} \quad (4:82)$$

D'après les définitions (4:52) et (4:57) du poids \mathbf{W} , nous avons $\mathbf{A} = (k+1)\mathbf{W}^{-1}$, la covariance se simplifie en

$$\Sigma_{\text{ps}} = \sigma_0^2 \mathbf{K} \mathbf{W} \mathbf{A} \mathbf{W}^T \mathbf{K}^T = \frac{\sigma_0^2}{k+1} \mathbf{K} \mathbf{W} \mathbf{K} \quad (4:83)$$

(on a utilisé le fait que \mathbf{W} est une matrice diagonale et donc $\mathbf{W}^T = \mathbf{W}$)

En développant le noyau de droite et en utilisant la propriété 4.5 de reproductivité du noyau nous obtenons

$$\Sigma_{\text{ps}} = \frac{\sigma_0^2}{k+1} \mathbf{K} \mathbf{W} \mathbf{K}^T = \frac{\sigma_0^2}{k+1} \mathbf{K} \mathbf{W} \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \frac{\sigma_0^2}{k+1} \mathbf{B} \mathbf{B}^T = \frac{\sigma_0^2}{k+1} \mathbf{K} \quad (4:84)$$

La fonction d'autocorrélation des PS correspond aux lignes et aux colonnes de la matrice. La variance des PS est donnée par les coefficients diagonaux.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(t_i, t_j) &= \mathbf{E}\{p_l(t_i)(p_l(t_j))\} = \frac{\sigma_0^2}{k+1} [\mathbf{K}]_{ij} = \frac{\sigma_0^2}{k+1} \mathcal{K}_n(t_i, t_j) \\ \sigma_{\text{ps}}^2(t_i) &= \frac{\sigma_0^2}{k+1} [\mathbf{K}]_{ii} = \frac{\sigma_0^2}{k+1} \mathcal{K}_n(t_i, t_i) = \frac{\sigma_0^2}{k+1} \cdot \frac{1}{\lambda^n(t_i)} \end{aligned} \quad (4:85)$$

où l'a introduit les nombres de Christoffel

$$\lambda^n(t_i) = 1/\mathcal{K}_n(t_i, t_i) \quad (4:86)$$

Nous voyons que la variance d'un seul élément a été divisée par le nombre de points $k+1$ et que par ailleurs la matrice Σ_{ps} est de rang au plus $n+1$. En effet, par construction la matrice $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \mathbf{B}$ est le produit de deux matrices de rangs $n+1$. Cela signifie donc que les différents échantillons polynomiaux sont fortement corrélés et laisse supposer que le signal polynomial peut être réduit à $(n+1)$ PS.

Variance des échantillons polynomiaux

Nous avons vu que la variance des PS était donnée par

$$\sigma_{\text{ps}}^2(t_i) = \frac{\sigma_0^2}{k+1} \cdot \frac{1}{\lambda^n(t_i)} \quad (4:87)$$

Nous allons maintenant proposer une formule d'approximation de la variance en utilisant la propriété suivante :

Propriété 4.6 : Soit un poids $\omega > 0$ (appartenant à la classe des poids de Szego [83]) défini sur $[-1, 1]$ et $\mathcal{K}_n(t, t)$ le noyau de Christoffel-Darboux associé. La fonction de Christoffel $\lambda^n(t) = (\mathcal{K}_n(t, t))^{-1}$ a pour valeur asymptotique

$$\forall t \in [-1, 1], \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)\lambda^n(t) = \frac{\omega(t)}{\omega_u(t)} \quad (4:88)$$

où ω_u est le poids de Chebychev normé, défini sur $]-1, 1[$:

$$\omega_u(t) = \frac{2}{\pi \sqrt{1-t^2}} \quad (4:89)$$

La démonstration de cette limite est très technique et dépasse largement le cadre de cette étude. Elle peut être trouvée dans la publication originale [83].

On en déduit la formule asymptotique suivante

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{ps}^2(t_i) = \sigma_0^2 \frac{n+1}{k+1} \cdot \frac{\omega_i(t_i)}{\omega(t_i)} \quad (4:90)$$

en utilisant le poids de Chebychev défini sur $]0, t_k[$

$$\omega_i(t_i) = \frac{t_k}{\pi \sqrt{t_i \cdot (t_k - t_i)}} \quad (4:91)$$

La convergence de la limite étant très rapide, on pourra utiliser la formule (4:90) comme approximation de la variance.

Synthèse sur les statistiques des échantillons polynomiaux

Nous avons tout d'abord établi que les PS ont même espérance que les échantillons bruts, à condition que la fonction d'observation puisse être représentée par un polynôme de degré n .

Le principal résultat ensuite obtenu est que la covariance entre deux PS évalués aux temps t_i et t_j est proportionnelle à la fonction de Christoffel-Darboux $\mathcal{K}_n(t_i, t_j)$ qui est un polynôme de degré n . On notera par ailleurs que cette fonction ne dépend pas de la fonction d'observation, ceci en vertu de la linéarité du projecteur qui permet de décomposer le polynôme de lissage en un polynôme déterministe et un polynôme aléatoire. La fonction de Christoffel-Darboux occupe donc une place essentielle dans l'analyse des statistiques des PS, en particulier deux échantillons vérifiant $\mathcal{K}_n(t_i, t_j) = 0$ sont décorrélés et donc indépendants puisque leur distribution est gaussienne. De plus, la très forte corrélation entre les échantillons indique qu'il existe beaucoup d'information redondante.

La variance est exprimée par les nombres (ou la fonction) de Christoffel, dont nous avons donné une formule d'approximation (4:90). Le facteur $\sigma_0^2/(k+1)$ montre que la variance des PS est bien plus faible que celle des échantillons bruts, ce qui est un effet du lissage polynomial.

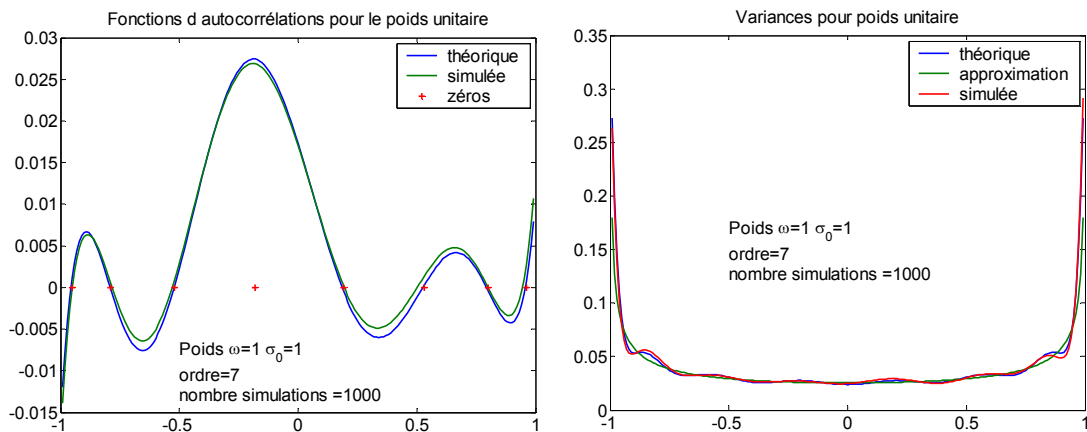


Figure 4-3: Fonctions d'autocorrélation (gauche) et variances (à droite)

La figure 4-3 illustre les fonctions d'autocorrélation et de variance des échantillons polynomiaux pour un ordre 7 et un poids constant, calculés en utilisant le noyau de Christoffel-Darboux. Elle montre également ces mêmes fonctions obtenues en simulant un grand nombre de signaux de bruits aléatoires, en les lissant individuellement avec des polynômes, puis en calculant les corrélations et variances échantillonnées. La correspondance entre les courbes théoriques et simulées valide expérimentalement les for-

mules. De plus, la figure de droite montre également la courbe d'approximation de la variance (4:90), qui est très proche des courbes expérimentales et simulées.

Pour éclairer le principe du lissage polynomial, il est intéressant de comparer le comportement des polynômes avec une structure mécanique contrainte à épouser une forme. En effet, le polynôme de lissage peut être vu comme un objet souple doté d'un rayon de courbure minimal, comme celui d'un câble électrique par exemple. Selon cette analogie, la fonction de Christoffel Darboux correspond aux modes de vibration du polynôme. En effet, celle-ci est obtenue en «stimulant» les polynômes avec des «formes» aléatoires (le bruit blanc). Il est bien connu en mécanique qu'un objet excité par une impulsion (spectre uniforme) va résonner selon ses modes ou fréquences propres. Le fait de fixer l'une des deux variables de la fonction de Christoffel-Darboux reviendrait alors à «clouer» le polynôme en un point et ainsi fixer des conditions aux limites. Les zéros de la fonction de Christoffel-Darboux se situeraient alors aux noeuds de vibration du polynôme.

Enfin, pour terminer l'analogie, on peut comparer la variance des PS à l'amplitude des vibrations. Il est d'ailleurs remarquable qu'en utilisant un poids uniforme (une «colle» uniforme) le polynôme se «décolle» davantage sur les bords, conformément au poids de Chebychev (4:91) qui décrit une loi dite semi-circulaire, à la manière d'un papier peint qui se décolle d'un mur en formant un arc de cercle.

4.4.6 Les échantillons polynomiaux optimaux

Les statistiques du paragraphe §4.4.5.3 ont mis en évidence une très forte corrélation entre les PS. Cette corrélation peut être interprétée comme une redondance de l'information et indique qu'il est possible de supprimer des points et donc de compresser le signal. Un critère naturel pour choisir les PS est d'imposer leur indépendance.

Théorème 4.7: pour un polynôme d'ordre n il existe $n + 1$ échantillons polynomiaux indépendants.

Preuve • Il s'agit de trouver une famille de $(n + 1)$ instants $\{t_i^*\}_{i=0\dots n}$, pour lesquels on a

$$\forall i \neq j \in \{0, \dots, n\}, \mathcal{K}_n(t_i^*, t_j^*) = 0 \quad (4:92)$$

Pour cela nous utilisons la formule de Christoffel-Darboux [84] qui permet d'écrire

$$\mathcal{K}_n(t_i, t_j) = \sum_{l=0}^n b^l(t_i)b^l(t_j) = \frac{a_n}{a_{n+1}} \cdot \frac{b^{n+1}(t_i)b^n(t_j) - b^n(t_i)b^{n+1}(t_j)}{t_i - t_j} \quad (4:93)$$

où les a_n, a_{n+1} sont les coefficients du terme de degré le plus élevé des polynômes b^n, b^{n+1} respectivement.

Une propriété classique des polynômes orthogonaux sur un intervalle $[a, b]$ est que le polynôme d'ordre n a exactement n zéros strictement compris dans l'intervalle, et interlacés avec ceux de b^n [81]. Soit donc $\{t_i^*\}_{i=0,\dots,n}$ les $(n + 1)$ zéros de b^{n+1} , on observe aisément qu'ils vérifient (4:92). On notera qu'il peut exister d'autres familles de points vérifiant (4:92), cependant on choisira les $\{t_i^*\}_{i=0,\dots,n}$ tels que

$$i = 0\dots n \quad b^{n+1}(t_i^*) = 0 \quad (4:94)$$

Les $\text{Id}^* = \{t_i^*\}_{i=0, \dots, n}$ ne sont en général pas des éléments de Id , cependant nous supposons que les échantillons de Id sont assez denses pour faire l'approximation $\text{Id}^* \subset \text{Id}$.

En restreignant le signal des PS à Id^* , nous obtenons une matrice de covariance carrée et diagonale

$$\Sigma_{\text{ps}}^* = \frac{\sigma_0^2}{k+1} \begin{bmatrix} \lambda^n(t_0^*)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^n(t_n^*)^{-1} \end{bmatrix} \approx \sigma_0^2 \frac{n+1}{k+1} \begin{bmatrix} \omega_0 \alpha_0^* & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \omega_n \alpha_n^* \end{bmatrix} \quad (4:95)$$

Nous posons le gain polynomial

$$G = \frac{k+1}{n+1}$$

Ce gain traduit le rapport de compression du signal, puisque les $k+1$ échantillons bruts sont remplacés par seulement $n+1$ PS indépendants de variance $\sigma_0^2 \omega_i \alpha_i^* / G$. L'intérêt de la compression est que la variance des échantillons indépendants est réduite en même temps que le nombre de points, ce qui permet de conserver l'effet de moyenne.

Par exemple, dans le cas de l'estimation du niveau d'un signal constant perturbé par un bruit stationnaire, l'estimation optimale du paramètre est donnée par la moyenne échantillonnée du signal. Si l'on utilise le signal brut, la variance de l'estimée est $\sigma_0^2 / (k+1)$. Si l'on utilise le signal compressé, la variance est donnée par

$$\frac{\sigma_0^2}{n+1} \sum_{i=0}^n \frac{\omega_i}{G} = \frac{\sigma_0^2}{k+1} \sum_{i=0}^n \omega_i \approx \frac{\sigma_0^2}{k+1}$$

On obtient donc le même résultat (on montre en fait que $\sum \lambda^n(t_i^*)^{-1} = 1$). Cet exemple n'est donné qu'à titre d'illustration, puisque rien ne garantit, pour une fonction d'observation plus complexe, que toute l'information du signal brut soit contenue dans les PS, d'autant plus que ceux-ci sont choisis indépendamment de la fonction d'observation. Cependant, il s'avère que l'hypothèse selon laquelle la fonction d'observation puisse être assimilée à un polynôme de degré n , induit que toute l'information est contenue dans les PS optimaux et l'estimation exploitant le signal compressé conduit au même résultat que l'estimation standard. Cette équivalence repose sur la bonne approximation que constitue la formule de quadrature de Gauss-Christoffel, qui permet d'établir une identité entre les produits scalaires standard et compressé.

4.4.7 Propriété des produits scalaires

Conformément à la définition de ω_i , où le poids est l'inverse de la variance des échantillons bruts normalisé par rapport à σ_0^2 , nous posons le poids

$$\omega_i^* = (k+1) \lambda^n(t_i^*) \quad (4:96)$$

égal à l'inverse de la variance normalisée des PS.

Propriété 4.8 : Soient F, G deux signaux définis sur Id et vérifiant l'hypothèse 4.1, nous avons la relation

$$\langle F, G \rangle_{\omega} \approx \frac{1}{k+1} \langle F^*, G^* \rangle_{\omega^*} \quad (4:97)$$

Preuve •

La preuve repose directement sur la formule de quadrature de Gauss-Christoffel [81],[84] détaillée dans l'annexe VI.8.

D'après la formule de quadrature de Gauss-Christoffel nous avons pour toute fonction intégrable γ sur un domaine \mathcal{I}

$$\frac{1}{\mathcal{I}} \cdot \int_{\mathcal{I}} \gamma(t) \omega(t) dt = \sum_{i=0}^n \lambda^n(t_i^*) \gamma(t_i^*) + r_n(\gamma) \quad (4:98)$$

où les t_i^* correspondent aux zéros de $b^{n+1}(t)$, c'est-à-dire aux temps d'évaluation des PS et les λ^n aux nombres de Christoffel définis par (4:86).

De plus nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(\gamma) = 0 \quad (4:99)$$

et la formule de quadrature a un degré d'exactitude de $2n+1$, c'est-à-dire que pour toute fonction $\gamma \in \mathcal{P}^{2n+1}(\mathcal{I})$ le reste est nul : $r_n(\gamma) = 0$. Cette formule est établie pour des fonctions et des produits scalaires continus, cependant en utilisant l'approximation

$$\frac{1}{\mathcal{I}} \cdot \int_{\mathcal{I}} \gamma(t) \omega(t) dt \approx \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \omega_i \gamma_i \quad (4:100)$$

et en posant $\gamma = f \cdot g$ nous obtenons

$$\frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \omega_i f_i g_i \approx \sum_{i=0}^n \lambda^n(t_i^*) f(t_i^*) g(t_i^*) + r_n(f \cdot g) \quad (4:101)$$

soit, d'après la définition des produits scalaires

$$\langle F, G \rangle_{\omega} \approx \frac{1}{k+1} \langle F^*, G^* \rangle_{\omega^*} + r_n(f \cdot g) \quad (4:102)$$

où F et G sont les représentations matricielles des fonctions f et g .

En supposant que les fonctions f et g sont assimilables à des polynômes de degré n conformément à l'hypothèse 4.1, dans ce cas $f \cdot g$ est de degré $2n$ et, d'après le degré d'exactitude de la formule de quadrature, nous avons $r_n(f \cdot g) \approx 0$, ce qui conduit au résultat souhaité

$$\langle F, G \rangle_{\omega} \approx \frac{1}{k+1} \langle F^*, G^* \rangle_{\omega^*} \quad (4:103)$$

Remarque : Il est important de noter que les temps d'évaluation et la variance des PS ont été élaborés pour assurer l'indépendance des échantillons et donc indépendamment de la formule de quadrature de Gauss-Christoffel. La coïncidence entre les temps d'évaluation et la variance des PS avec les noeuds et les poids d'intégration de la formule de quadrature, sans être un hasard, n'est donc pas triviale.

4.4.8 Equivalence entre l'estimation standard et compressée

Nous cherchons maintenant à montrer qu'une estimation exploitant le signal compressé conduit au même résultat qu'une estimation exploitant le signal brut. Pour cela nous allons établir que

$$\forall \theta_0, \theta \quad C_{\theta_0}^*(\theta) \approx C_{\theta_0}(\theta) \quad (4:104)$$

et en particulier, l'estimation PMDR est sans biais

$$\mathbf{E}\{\hat{\theta}^*\} \approx \mathbf{E}\{\hat{\theta}\} = \theta_0 \quad (4:105)$$

et conduit au même CRLB, c'est-à-dire

$$\mathbf{J}^{*-1} \approx \mathbf{J}^{-1} \quad (4:106)$$

Il est à noter qu'une égalité stricte dans l'équation (4:104) impliquerait nécessairement les égalités (4:105) et (4:106). Cependant, les deux fonctions de coût n'étant qu'approximativement égales, les deux propriétés doivent être démontrées individuellement. La relation (4:104) permet tout de même d'établir que les deux fonctions de coût ont approximativement les mêmes domaines de convergence, puisque les domaines d'attraction de θ_0 sont identiques, comme le montre la figure 4-4.

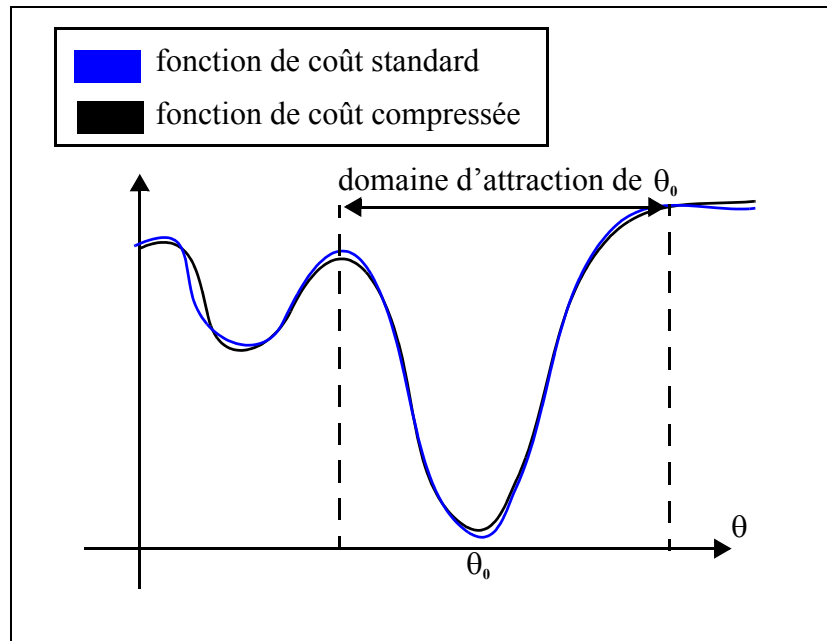


Figure 4-4 : Illustration des fonction de coût standard et compressée

4.4.8.1 Fonctions de coût standard et compressée

Nous avons les fonctions de coût standard

$$C_{\theta_0}(\theta) = [\theta - \theta_0]^T \mathbf{P}_0^{-1} [\theta - \theta_0] + \frac{k+1}{\sigma_0^2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{H}(\theta)\|_{\omega}^2 \quad (4:107)$$

et compressée

$$C_{\theta_0}^*(\theta) = [\theta - \theta_0]^T \mathbf{P}_0^{-1} [\theta - \theta_0] + \frac{1}{\sigma_0^2} \|\mathbf{Y}^* - \mathbf{H}(\theta)^*\|_{\omega^*}^2 \quad (4:108)$$

Or, d'après la propriété 4.8 des produits scalaires, nous avons directement

$$\begin{aligned}
 \frac{k+1}{\sigma_0^2} \|\mathbf{Y} - \mathbf{H}(\theta)\|_{\omega}^2 &= \frac{k+1}{\sigma_0^2} \langle \mathbf{Y} - \mathbf{H}(\theta), \mathbf{Y} - \mathbf{H}(\theta) \rangle_{\omega} \\
 &= \frac{1}{\sigma_0^2} \langle \mathbf{Y}^* - \mathbf{H}(\theta)^*, \mathbf{Y}^* - \mathbf{H}(\theta)^* \rangle_{\omega^*} \\
 &= \frac{1}{\sigma_0^2} \|\mathbf{Y}^* - \mathbf{H}(\theta)^*\|_{\omega^*}^2
 \end{aligned} \tag{4:109}$$

ce qui implique $C_{\theta_0}(\theta) \approx C_{\theta_0^*}(\theta)$

4.4.8.2 Espérance des estimées standard et compressée

Les estimées standard et compressée sont solutions des équations

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial \theta_i} C_{\theta_0}(\theta) = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{P}_0^{-1}[\theta - \theta_0] + \frac{k+1}{\sigma_0^2} \left\langle \frac{\partial}{\partial [\theta]_i} \mathbf{H}(\theta), \mathbf{Y} - \mathbf{H}(\theta) \right\rangle_{\omega} = 0 \\
 \frac{\partial}{\partial \theta_i} C_{\theta_0^*}(\theta) = 0 &\Leftrightarrow \mathbf{P}_0^{-1}[\theta - \theta_0] + \frac{1}{\sigma_0^2} \left\langle \frac{\partial}{\partial [\theta]_i} \mathbf{H}^*(\theta), \mathbf{Y}^* - \mathbf{H}^*(\theta) \right\rangle_{\omega^*} = 0
 \end{aligned} \tag{4:110}$$

D'après l'hypothèse (4:64), les dérivées partielles de la fonction d'observation sont également assimilées à des polynômes, ce qui permet d'appliquer l'identité des produits scalaires. Les estimées standard et compressée répondent donc à la même équation et sont, de ce fait, identiques.

4.4.8.3 Matrice d'information de Fisher standard et compressée

Pour des mesures gaussiennes indépendantes la matrice d'information de Fisher \mathbf{J} est donnée par (§3.4.2.1)

$$\mathbf{J} = \mathbf{P}_0^{-1} + \frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=0}^k \frac{1}{\alpha_i} \nabla h_i \nabla h_i^T \tag{4:111}$$

avec

$$\frac{1}{\sigma_0^2} \sum_{i=0}^k \frac{1}{\alpha_i} \nabla h_i \nabla h_i^T = \frac{k+1}{\sigma_0^2} \begin{bmatrix} \left\| \frac{\partial}{\partial [\theta]_1} \mathbf{H}(\theta) \right\|_{\omega}^2 & \dots & \left\langle \frac{\partial}{\partial [\theta]_1} \mathbf{H}(\theta), \frac{\partial}{\partial [\theta]_q} \mathbf{H}(\theta) \right\rangle_{\omega} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial [\theta]_q} \mathbf{H}(\theta), \frac{\partial}{\partial [\theta]_1} \mathbf{H}(\theta) \right\rangle_{\omega} & \dots & \left\| \frac{\partial}{\partial [\theta]_q} \mathbf{H}(\theta) \right\|_{\omega}^2 \end{bmatrix}$$

Exprimé sous cette forme, on obtient la matrice de Gramm des dérivées partielles de la fonction d'observation, chaque coefficient de la matrice est un produit scalaire

$$[\mathbf{J}]_{ij} = \frac{k+1}{\sigma_0^2} \left\langle \frac{\partial}{\partial [\theta]_i} \mathbf{H}(\theta), \frac{\partial}{\partial [\theta]_j} \mathbf{H}(\theta) \right\rangle_{\omega} \tag{4:112}$$

Par hypothèse, les dérivées partielles de la fonction d'observation sont assimilées à des polynômes de degré n , nous pouvons donc utiliser l'identité entre les produits scalaires standard et compressé pour obtenir

$$\mathbf{J} \approx \mathbf{J}^* \tag{4:113}$$

Cependant, la relation (4:113) ne permet pas de conclure puisque le CRLB porte sur l'inverse de la FIM. Or on sait que, si les matrices sont mal conditionnées, de très légères erreurs peuvent être considérablement amplifiées lors de l'inversion. Pour étudier les effets de l'inversion nous utilisons la relation exacte entre les produits scalaires, qui est donnée par la formule de quadrature de Gauss-Christoffel (4:102)

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^* + R_n(\theta) \quad (4:114)$$

où $R_n(\theta)$ est la matrice des restes de la quadrature

$$R_n(\theta) = \begin{bmatrix} r_n \left(\frac{\partial}{\partial [\theta]_1} H(\theta) \right)^2 & \dots & r_n \left(\frac{\partial}{\partial [\theta]_1} H(\theta) \frac{\partial}{\partial [\theta]_q} H(\theta) \right) \\ \dots & \dots & \dots \\ r_n \left(\frac{\partial}{\partial [\theta]_q} H(\theta) \frac{\partial}{\partial [\theta]_1} H(\theta) \right) & \dots & r_n \left(\frac{\partial}{\partial [\theta]_q} H(\theta) \right)^2 \end{bmatrix} \quad (4:115)$$

Cette matrice est symétrique et admet donc q valeurs propres réelles. Les coefficients de la matrice $R_n(\theta)$ sont très petits devant ceux de la matrice \mathbf{J} à cause de la très bonne approximation que permet la formule de quadrature. Nous allons donc étudier l'inversion de \mathbf{J} en considérant $R_n(\theta)$ comme une perturbation matricielle. De plus, nous faisons l'hypothèse suivante

Hypothèse 4.3 : On note λ_{min} la plus petite valeur propre de la matrice d'information de Fisher \mathbf{J} (4:111) et $R_n(\theta)$ la matrice des restes de la quadrature (4:115). Pour un ordre n fixé et quel que soit le paramètre $\theta \in \mathcal{D}_\theta$, $R_n(\theta)$ peut être négligée

$$\forall \theta \in \mathcal{D}_\theta \quad \|R_n(\theta)\|_F < q \varepsilon^2 \lambda_{min}^2 \quad (4:116)$$

Avec q la dimension du vecteur paramètre, $\|\cdot\|_F$ la norme de Frobenius et $\varepsilon \ll 1$.

La matrice d'information de Fisher est réelle et symétrique, et peut donc être diagonalisée par des matrices unitaires orthogonales [47]

$$\mathbf{J} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T \quad \|\mathbf{U}\| = \|\mathbf{U}^T\| = 1 \quad \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{Id} \quad (4:117)$$

où $\mathbf{\Lambda}$ est la matrice diagonale contenant les valeurs propres. Il suit que

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{U}^T \mathbf{J} \mathbf{U} \quad (4:118)$$

Les valeurs propres Λ^* de \mathbf{J}^* vérifient donc

$$\Lambda^* = \mathbf{U}^T (\mathbf{J}_k - R_n) \mathbf{U} \quad (4:119)$$

On en déduit l'erreur sur les valeurs propres

$$\delta \Lambda = \Lambda - \Lambda^* = \mathbf{U}^T R_n \mathbf{U} \quad (4:120)$$

que l'on peut majorer en norme d'après l'hypothèse 4.3

$$\|\delta \Lambda\|_F = \|R_n\|_F < q \varepsilon^2 \lambda_{min}^2 \quad (4:121)$$

Cette majoration fournit une borne pour la somme des carrés

$$\sum_{i=1}^q \delta \lambda_i^2 < q \varepsilon^2 \lambda_{min}^2 \quad (4:122)$$

en revanche elle ne dit pas comment est distribuée l'erreur. Pour cela étudions le comportement des valeurs propres individuelles.

Considérons le vecteur propre unitaire x_i associé à la valeur propre λ_i

$$\mathbf{J}x_i = \lambda_i x_i \quad (4:123)$$

et par symétrie

$$x_i^T \mathbf{J} = \lambda_i x_i^T \quad (4:124)$$

On considère ensuite que la perturbation (le reste de la quadrature) dépend d'un paramètre pour dériver la relation (4:123)

$$\dot{\mathbf{J}}x_i + \mathbf{J}\dot{x}_i = \dot{\lambda}_i x_i + \lambda_i \dot{x}_i \quad (4:125)$$

En multipliant à gauche par x_i^T nous obtenons:

$$x_i^T \dot{\mathbf{J}}x_i + x_i^T \mathbf{J}\dot{x}_i = \dot{\lambda}_i + x_i^T \lambda_i \dot{x}_i \Rightarrow \dot{x}_i^T \mathbf{J}x_i = \dot{\lambda}_i \quad (4:126)$$

Ceci permet de majorer l'erreur sur λ_i :

$$|\dot{\lambda}_i| < \|\dot{\mathbf{J}}(\theta)\| \quad (4:127)$$

Puisque l'erreur sur la valeur propre ne dépend plus du vecteur x_i considéré, on en déduit que toutes les valeurs propres sont affectées de la même façon. Il s'agit là d'une propriété classique des matrices symétriques, à savoir que leurs valeurs propres sont très bien conditionnées.

En reprenant la relation (4:122) on arrive finalement à l'approximation suivante

$$\delta \lambda_i < \varepsilon \lambda_{min} \quad (4:128)$$

Puisque la variance des paramètres est liée à l'inverse de la matrice d'information de Fisher, on s'intéresse à

$$\frac{|\delta \lambda_i^{-1}|}{|\lambda_i^{-1}|} = \frac{\left| \frac{1}{\lambda_i} - \frac{1}{\lambda_i + \delta \lambda_i} \right|}{\left| \frac{1}{\lambda_i} \right|} \sim \left| \frac{\delta \lambda_i}{\lambda_i} \right| < \varepsilon \cdot \left| \frac{\lambda_{min}}{\lambda_i} \right| \quad (4:129)$$

Les valeurs propres de l'inverse de $\mathbf{J}(\theta)$ sont donc très peu affectées par la perturbation, et ce d'autant moins qu'elles sont plus grandes. En conclusion nous obtenons

$$\mathbf{J}^{*-1} \approx \mathbf{J}^{-1} \quad (4:130)$$

4.4.9 Synthèse de l'algorithme PMDR

Du point de vue algorithmique, la méthode PMDR utilise un algorithme RLS pour le lissage polynomial et une méthode d'optimisation standard pour l'estimation du paramètre. La nouveauté réside dans l'utilisation particulière qui est faite des algorithmes et qui peut être essentiellement calculée hors ligne.

Il s'agit tout d'abord de déterminer le degré n du polynôme de lissage. Ceci peut être effectué de manière empirique en choisissant un degré arbitrairement et en testant si celui-ci convient. On pourra par exemple tester l'hypothèse 4.3 sur un grand nombre de paramètres à travers des simulations de Monte Carlo.

Il faut également calculer les temps d'évaluation des PS qui sont donnés par

$$\{t_i^*\}_{i=0,\dots,n} \Leftrightarrow b^{n+1}(t_i^*) = 0 \quad (4:131)$$

ainsi que les poids compressés

$$\omega_i^* = (k+1)\lambda^n(t_i^*) \quad (4:132)$$

pour lesquels on pourra également utiliser la formule d'approximation (4:90)

$$\omega_i^* \approx \frac{k+1}{n+1} \frac{\omega(t_i^*)}{\omega_i(t_i^*)} \quad (4:133)$$

Cependant, il est important de noter que le polynôme b^{n+1} est orthonormal pour un produit scalaire qui dépend du rang k , ceci signifie que les temps d'évaluation ainsi que les poids doivent être calculés pour chaque rang k où l'on effectue une minimisation. Les poids compressés peuvent être calculés en ligne grâce à la formule (4:133), en revanche, nous n'avons pas trouvé de telle formule pour les temps d'évaluation qui doivent donc être calculés hors ligne et stockés en mémoire.

Dans le cas particulier où le bruit est stationnaire, c'est-à-dire que le poids $\omega(t)$ est constant, il suffit de calculer une seule fois les $\{t_i^{nor*}\}_{i=0,\dots,n}$ normalisés sur $[0,1]$, les temps d'évaluations sont alors donnés par

$$t_i^* = t_i^{nor*} \cdot t_k \quad (4:134)$$

La méthode PMDR est donnée par l'algorithme 4-7. On utilise les notations suivantes :

$$\mathbf{T}_k^* = [t_0^*, \dots, t_n^*]^T$$

$$\mathbf{W}_k^* = [\omega_0^*, \dots, \omega_n^*]^T$$

où \mathbf{T}_k^* , \mathbf{W}_k^* désignent les $n+1$ instants et poids d'évaluation calculés en tenant compte des $k+1$ premières observations \mathbf{Y}_k .

La fonction $RLS(\mathbf{Y}_k)$ retourne le polynôme réalisant la meilleure approximation des observations \mathbf{Y}_k conformément à l'équation (4:66).

Les fonctions temps_évaluation(\mathbf{W}_k) et poids_compressés(\mathbf{W}_k) retournent les temps d'évaluation et les poids des PS respectivement. Dans le cas où ces valeurs ont été calculées hors-ligne, il s'agit simplement d'une lecture dans une table.

La fonction minimize(\mathbf{T}_k^* , \mathbf{Y}_k^* , \mathbf{W}_k^* , $\hat{\theta}_{k-1}$), retourne l'argument du minimum de la fonction de coût (4:60) exploitant les échantillons $\{\mathbf{T}_k^*, \mathbf{Y}_k^*\}$ associés aux poids \mathbf{W}_k^* , et initialisée à la valeur $\hat{\theta}_{k-1}$.

On notera que, lorsqu'aucune minimisation n'est effectuée, on conserve l'estimation précédente $\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1}$.

La fonction

```

Initialisation
 $\mathbf{P}_0 = cov\{\theta\}$ 
 $\hat{\theta}_0 = \mathbf{E}\{\theta\}$ 
Boucle
   $\mathbf{P}_1^k = RLS(\mathbf{Y}_k)$ 
  Si estimation
     $T_k^* = temps\_évaluation(\mathbf{W}_k)$ 
     $\mathbf{W}_k^* = poids\_compressés(\mathbf{W}_k)$ 
     $\mathbf{Y}_k^* = \mathbf{P}_1^k(T_k^*)$ 
     $\hat{\theta}_k = minimize(T_k^*, \mathbf{Y}_k^*, \mathbf{W}_k^*, \hat{\theta}_{k-1})$ 
  sinon
     $\hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1}$ 
  fin
fin

```

Algorithme 4-7 : Méthode PMDR

4.4.10 Conclusion sur la méthode PMDR

Nous avons présenté une méthode permettant de compresser un signal brut en temps réel en remplaçant celui-ci par un polynôme de degré n .

Il a été montré que le signal brut comportant $k + 1$ échantillons peut être remplacé par seulement $n + 1$ PS indépendants, soit un gain en termes du nombre de points à traiter de $G = (k + 1)/(n + 1)$. Il a également été montré que la variance des PS est également réduite du même facteur G .

Cette méthode repose sur l'idée que des signaux suffisamment réguliers peuvent être correctement représentés par des polynômes. Le lissage polynomial réalise en quelque sorte le "plus gros" du filtrage en projetant le signal dans un espace linéaire. La transition non linéaire de l'espace linéaire des polynômes vers l'espace des paramètres est alors réalisée par une méthode itérative. Ce processus est illustré sur la figure 4-5.

Les effets de la transition sur la qualité de l'estimation ont été étudiés dans le paragraphe §4.4.8. Il ressort de cette étude que l'estimation est très peu affectée par la réduction du nombre d'échantillons, à condition que la fonction d'observation puisse être assimilée à un polynôme de degré n . Cette propriété est due à la très bonne approximation que permet la formule de quadrature de Gauss-Christoffel ainsi qu'à la coïncidence entre les noeuds et les poids d'intégration avec les temps d'évaluation et la variance des PS.

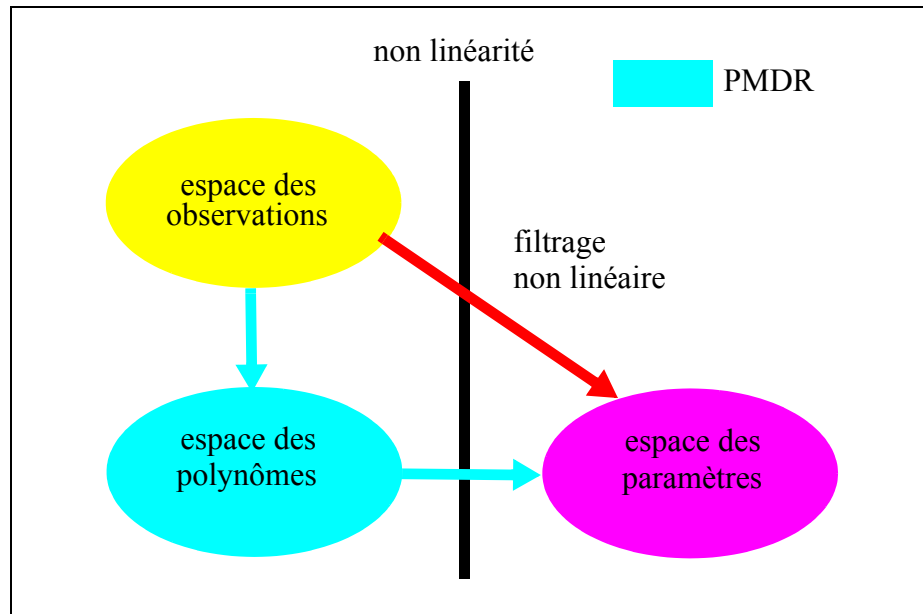


Figure 4-5 : Illustration du principe de la méthode PMDR

La méthode PMDR présente donc plusieurs avantages. Tout d'abord, l'estimation et le lissage sont deux tâches parallèles, dont seule la deuxième doit être effectuée dans l'intervalle de temps d'une période d'échantillonnage. Or cette tâche peut être programmée de manière très efficace comme nous le verrons dans le paragraphe §4.2, et permet donc à l'algorithme d'absorber des flots de données très importants. Ensuite, si l'hypothèse selon laquelle la fonction d'observation peut être assimilée à un polynôme est valable, l'optimisation permet de déterminer la solution exacte de l'estimateur. Ceci n'est jamais rigoureusement le cas (sauf si la fonction d'observation est linéaire), mais il s'avère que l'approximation polynomiale de fonctions relativement régulières est souvent excellente. De plus, l'approximation dans la méthode PMDR est globale, et, contrairement aux autres méthodes récursives suboptimales, les erreurs ne s'accumulent pas (voir §4.5.4). Enfin, l'utilisation d'une méthode d'optimisation itérative offre une grande souplesse dans le choix des estimateurs, on peut par exemple fixer des contraintes fortes sur le paramètre en utilisant des multiplicateurs de Lagrange [47].

Les limitations de la méthode portent essentiellement sur la régularité des fonctions d'observations. S'il est en théorie possible d'approcher uniformément toutes les fonctions continues par des polynômes en élevant le degré, la limitation des calculs numériques restreint le champ d'application à des degrés modestes. Cependant, la méthode PMDR peut également s'appliquer par morceaux, où les polynômes de lissage sont calculés sur des segments successifs. Dans ce cas, une fonction normalement assimilée à un polynôme de degré $3n$ par exemple, peut être assimilée à trois polynômes de degré n , définis sur trois segments contigus. Le nombre de PS reste identique dans les deux cas, mais en limitant le degré du polynôme on allège les problèmes de calcul numérique.

L'extension de la méthode à des approximations par morceaux présente un fort potentiel. Dans ce cas, les limitations proviennent de l'étape d'optimisation qui, si elle est itérative, ne pourra pas traiter un grand nombre de points. On peut alors songer à des algorithmes récursifs pour l'estimation du paramètre, tels que le filtre particulaire auquel la méthode PMDR offrirait plus de temps pour effectuer les mises à jour des

estimées en accumulant l'information pendant les calculs.

Notons pour finir que, dans le cadre d'une approximation par morceaux, la méthode PMDR se rapproche des techniques d'estimation non paramétrique à noyaux polynomiaux [82] qui utilisent également une régularisation polynomiale du signal. Cependant la méthode PMDR se démarque par deux points : d'une part la régularisation se fait par segments disjoints, d'autre part elle sélectionne des échantillons en choisissant les PS optimaux.

4.5 Application à la reconstruction de trajectoires

4.5.1 Le suivi de cibles

Approches générales

La reconstruction de trajectoires, telle qu'elle est abordée dans notre étude, appartient à la famille plus large des problèmes dits de suivi de cible, ou *target tracking* en anglais, très riche en méthodes de traitement du signal et dont on trouvera une présentation dans [48]. Dans le cas général, la trajectoire n'est pas déterministe et la cible est éventuellement manoeuvrante. Selon le type de mesures et de trajectoires considérées, la problématique de l'application porte sur un point particulier et sollicite donc une réponse adaptée.

Par exemple, le filtre α - β traite du cas simple d'un mouvement linéaire à vitesse constante où l'équation de mesure est linéaire [85], le cas non linéaire étant généralement traité par des filtres EKF, EKS (*Extended Kalman Smoother*) [86], UKF ou plus récemment par le filtre particulaire [45]. Des aménagements du filtre EKF ont également été proposés pour réduire les effets d'une mauvaise estimation initiale et augmenter la vitesse de convergence en contraignant les estimations [71], ou pour traiter des mesures dont les origines sont incertaines [87], c'est-à-dire lorsque plusieurs cibles peuvent potentiellement être à l'origine de la mesure effectuée.

Pour le suivi de cibles pouvant être manoeuvrées, une approche classique consiste à décrire la trajectoire de la cible par plusieurs modèles, chacun d'eux correspondant à une manoeuvre possible de la cible. L'un des filtres les plus connus s'appuyant sur cette approche est le filtre IMM (*Interacting Multiple Models*) [88], qui utilise des filtres standard (EKF, UKF, PF etc.) pour traiter chaque scénario, donnant lieu à des performances différentes selon le choix effectué [89]. Récemment une alternative plus souple et permettant de réduire le nombre d'hypothèses à tester dans les situations simples a été proposée, il s'agit du filtre MMMH (*Multiple Model Multiple Hypothesis*) [90]. Cependant, ces nombreuses approches ne répondent pas aux besoins de nos applications. Tout d'abord, parce que notre problématique porte sur des trajectoires parfaitement déterministes et ne tire aucun bénéfice d'un modèle aléatoire ou manoeuvré. Ensuite, les difficultés de nos traitements se situent au niveau de la mauvaise observabilité des paramètres liée aux mesures par radar Doppler, alors que les approches décrites ci-dessus exploitent en général des mesures radar très complètes, avec notamment une mesure de distance.

Ces conditions particulières, notamment la mauvaise observabilité des paramètres, recoupe en partie un problème classique du suivi de cibles, qui est celui du suivi à partir de mesures d'angles uniquement, répertorié sous l'appellation anglaise *Bearings Only Tracking (BOT)*. En effet, la principale caractéristique du BOT est la mauvaise observabilité des paramètres de position lorsque la cible a une vitesse angulaire faible. Diverses solutions ont été proposées, certaines sont fondées sur des approximations

permettant un calcul exact des densités *a posteriori* [91], sur une transformation des coordonnées cartésiennes en coordonnées polaires qui permet d'isoler les paramètres mal observés [92] ou encore sur l'utilisation d'un filtre particulière [69]. Cependant, les deux premières approches sont spécifiques à la problématique BOT et ne peuvent être transposées à notre problématique de "mesures Doppler uniquement", tandis que la troisième approche n'est pas applicable à cause de nos contraintes temps réel (voir §4.3.6). Dans le cas où la trajectoire est supposée déterministe, on retrouve des estimateurs ML calculés à l'aide de méthodes itératives telles que Gauss-Newton [93] ou encore Levenberg-Marquardt [94], dont il est démontré qu'elle offre une plus grande robustesse que la première méthode. Ces solutions sont motivées par le fait que dans le cas d'une mauvaise observabilité des paramètres et lorsque cela est possible, c'est-à-dire lorsque la trajectoire est déterministe et que l'estimation de la position peut être ramenée à une estimation paramétrique, les méthodes itératives conduisent à de meilleurs résultats que les filtres récursifs. C'est également l'approche que nous avons retenue pour la reconstruction de trajectoires, mais en rendant possible l'exécution d'un algorithme itératif en temps réel grâce à la méthode PMDR.

Approche ISL

Au commencement de la thèse, une première étude avait déjà été menée concernant le cas 1, proposant une localisation fondée sur des mesures Doppler et un traitement polynomial des signaux [1]. Cette première méthode utilisait un lissage polynomial mais exploitait alors seulement trois PS, choisis de manière arbitraire, pour déterminer analytiquement les trois inconnues x_0 , y_0 et v_0 . La résolution analytique directe posait un certain nombre de problèmes de robustesse et n'exploitait pas toute l'information du polynôme. Nous avons donc entrepris d'améliorer les performances de l'estimation en utilisant des méthodes plus classiques, telles que les filtres EKF et UKF qui n'avaient pas été testés jusqu'alors. Cependant, il s'avéra que les résultats proposés par la méthode polynomiale se révélèrent meilleurs que ceux des filtres EKF et UKF, qui avaient une nette tendance à diverger (§4.5.4). Nous avons donc poursuivi dans la voie polynomiale en essayant d'y apporter un certain nombre d'améliorations. La première d'entre elles consista à utiliser un nombre surabondant de PS et à déterminer l'estimée en utilisant une optimisation rapide. Cette technique conduisit à l'algorithme RTG (*Real Time Gradient*) [99]. Cependant, les PS étaient échantillonnés à des temps équirépartis et leur nombre était fixé de manière empirique. On observait que la qualité de l'estimation augmentait avec le nombre de PS, mais cela n'était pas satisfaisant sur le plan théorique puisque le nombre de PS devenait bien supérieur au degré du polynôme. La seconde amélioration consista donc à déterminer les PS et poids optimaux, dont nous avons découvert ensuite qu'ils correspondaient aux noeuds et aux poids d'intégration de la formule de quadrature de Gauss-Christoffel. La méthode ainsi obtenue fut baptisée méthode PMDR pour la distinguer de la méthode RTG.

4.5.2 Simulations

Les algorithmes d'estimation sont maintenant appliqués aux différents cas considérés dans notre étude. L'objectif visé est la comparaison des algorithmes standard EKF et UKF avec notre méthode PMDR en termes de précision et de vitesse d'exécution. Pour tester la précision, nous avons réalisé des simulations de Monte Carlo en utilisant des signaux simulés conformément aux modèles du chapitre 3, pour lesquels nous avons calculé la variance des estimées de chaque algorithme en chaque instant. Nous avons également confronté la méthode PMDR à l'algorithme de Levenberg-Marquardt

standard, c'est-à-dire celui exploitant l'ensemble des échantillons du signal brut, afin de tester l'équivalence entre les deux méthodes. Le nombre de points par signal test a été limité à 100, alors qu'un signal réel peut comporter de un à plusieurs milliers de mesures, afin que les temps de simulation restent raisonnables.

Pour ce qui est des temps d'exécution, nous avons utilisé les temps processeur MATLAB en utilisant des versions optimisées des algorithmes.

4.5.3 Mise en oeuvre de la méthode PMDR

4.5.3.1 Détermination de l'ordre du polynôme

Le premier point de la méthode PMDR est la détermination du degré du polynôme de lissage. Le degré du polynôme dépend de la complexité de la fonction d'observation, elle-même en relation avec le nombre de paramètres à estimer. On peut logiquement s'attendre à ce que le degré du polynôme soit supérieur au nombre de paramètres à déterminer. Dans le cas où une fonction d'observation peut être correctement approchée, quel que soit le paramètre, par un polynôme dont le degré est inférieur à la dimension du vecteur paramètre, cela signifie que certains paramètres sont inobservables. La figure 4-6 montre des exemples de fonctions d'observations correspondant aux différents cas étudiés, pour lesquelles le temps a été normalisé entre 0 et 1. On constate visuellement que ces fonctions sont très régulières et peuvent donc être assimilées à des polynômes de degrés relativement faibles. Nous fixons arbitrairement le degré du polynôme à $n = q + 2$, où l'on rappelle que q est la dimension du vecteur paramètre. Nous avons donc, pour les différents cas

- cas 1 : $n = 5$
- cas 2 : $n = 6$
- cas 3 : $n = 9$

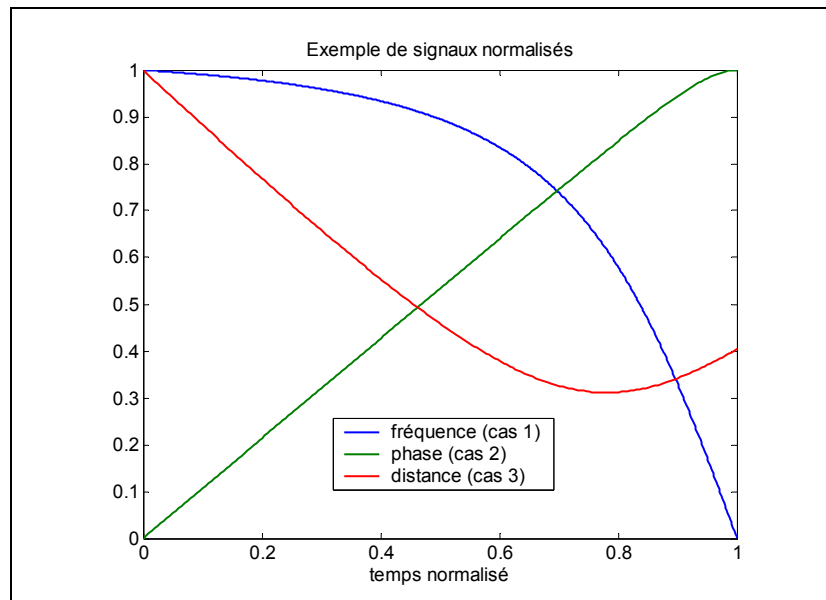


Figure 4-6 : Exemple de signaux pour les différents cas étudiés

Pour le cas 2, on ne considère que des trajectoires normales au plan des radars, c'est-à-dire que le vecteur paramètre se limite à $\theta = [y_f, z_f, d_v, v_0]^T$, les angles ne devant pas être déterminés. En effet, la très faible observabilité des angles entraîne d'une part

que les précisions sont insuffisantes pour tous les paramètres (§3.5.2) et conduit d'autre part à des divergences très fréquentes de l'ensemble des algorithmes qui faussent les simulations de Monte Carlo.

4.5.3.2 Détermination des temps d'échantillonnage et des poids des PS

Le deuxième point est le calcul des temps d'échantillonnages ainsi que des poids compressés

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_k^* &= [t_0^*, \dots, t_n^*]^T \\ \mathbf{W}_k^* &= [\omega_0^*, \dots, \omega_n^*]^T \end{aligned}$$

Ces valeurs dépendent de la fonction de poids ω_k qui est l'inverse de la variance normalisée des échantillons bruts. Dans notre étude, la variance normalisée est la même pour tous les cas étudiés et répond à l'équation radar

$$\alpha_k = \frac{\sigma_k^2}{\sigma_0^2} = \frac{(d_k)^4 + (\sigma^0)^2}{(d_v)^4 + (\sigma^0)^2} \approx \frac{(d_k)^4 + (\sigma^0)^2}{(d_v)^4} \quad (4:135)$$

où σ^0 désigne une très petite constante de saturation (voir §). Etant donné que $d_k \approx (d_v - v_0 t_k)$, la fonction de poids peut se mettre sous la forme

$$\omega_i = \frac{1}{(1 - t_i/T_{vol})^4 + \varepsilon} \quad (4:136)$$

avec $T_{vol} = d_v/v_0$ le temps de vol total du projectile et $\varepsilon = (\sigma^0)^2/(d_v)^4$ une très petite constante.

Pour calculer les T_k^* nous avons déterminé les zéros des polynômes $b_k^{n+1}(t_i)$ à l'aide d'une méthode numérique. Nous avons tout d'abord construit la base des polynômes orthonormaux pour le produit scalaire (4:50)

$$\langle \mathbf{F}, \mathbf{G} \rangle_\omega = \mathbf{F}^T \mathbf{W} \mathbf{G} = \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k \omega_i f_i g_i$$

Selon le nombre k d'échantillons considérés, les poids ω_i ont des importances relatives différentes, comme le montre la figure 4-7. De ce fait, même en normalisant le temps sur $[0, 1]$ par exemple, la famille de polynômes orthonormaux n'est pas constante avec le temps.

Seul le cas de la variance stationnaire, c'est-à-dire du poids constant, conduit à des polynômes indépendants de k . La figure 4-8 présente les polynômes $b_k^8(t_i)$ correspondant aux poids de la figure 4-7.

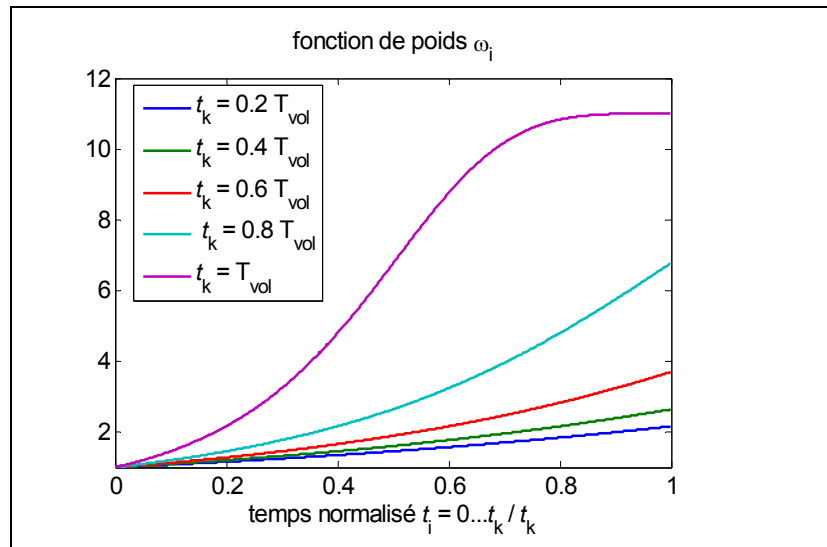


Figure 4-7 : Importance relative des poids

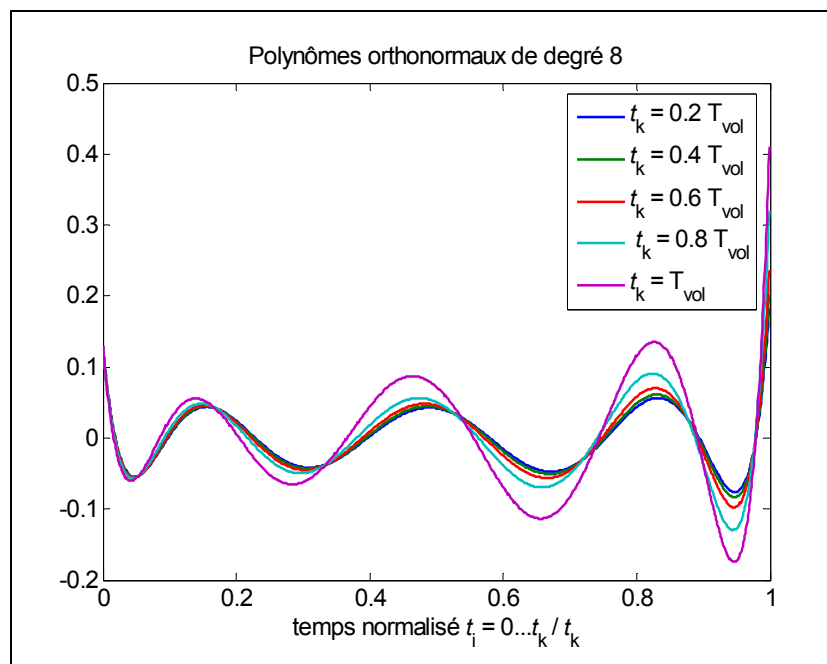


Figure 4-8 : exemple de polynômes orthonormaux

Les zéros de ces polynômes donnent alors les instants d'évaluation des PS. Les polynômes orthogonaux ont été obtenus en calculant la matrice de Gramm de la base canonique $\{t^i\}_{i=0\dots n+1}$

$$G = \begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle_{\omega} & \dots & \langle 1, t^{n+1} \rangle_{\omega} \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle 1, t^{n+1} \rangle_{\omega} & \dots & \langle t^{n+1}, t^{n+1} \rangle_{\omega} \end{bmatrix} = \mathcal{B}_c^T \mathbf{W} \mathcal{B}_c \quad (4:137)$$

$$\mathcal{B}_c = [\mathbf{B}_c^0 \dots \mathbf{B}_c^n] = \begin{bmatrix} 1 & \dots & t_0^{n+1} \\ 1 & \dots & t_1^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & t_k^{n+1} \end{bmatrix} \quad (4:138)$$

La matrice G étant auto-adjointe, elle admet la décomposition suivante (voir (4:117))

$$G = U\Lambda U^T$$

$$\mathcal{B}_c^T \mathbf{W} \mathcal{B}_c = U\Lambda U^T \Rightarrow U^T \mathcal{B}_c^T \mathbf{W} \mathcal{B}_c U = \Lambda \quad (4:139)$$

La matrice U^T peut donc être vue comme la matrice de passage de la base canonique à la base des polynômes orthogonaux. Les polynômes orthonormaux sont alors obtenus en normalisant les polynômes orthogonaux

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_c U / \sqrt{\Lambda} \quad (4:140)$$

avec $\sqrt{\Lambda}$ la matrice de normalisation diagonale dont les entrées sont $[\sqrt{\Lambda}]_{ij} = \sqrt{[\Lambda]_{ij}}$. Les zéros du polynôme sont ensuite obtenus en cherchant les coefficients successifs du vecteur \mathbf{B}^{n+1} de signes opposés, qui traduisent un changement de signe du polynôme. Cette méthode de calcul des zéros n'est pas très stable numériquement, car la matrice G est très mal conditionnée, mais donne des résultats acceptables pour des degrés peu élevés (<9). Des méthodes plus efficaces ont été proposées [95],[97] mais celles-ci n'ont pas été explorées par manque de temps.

Le calcul des poids peut ensuite se faire en utilisant soit la formule exacte (4:96) et (4:86), soit la formule approchée (4:90) qui ne nécessite pas le calcul des polynômes orthonormaux.

Toutes les valeurs calculées hors-ligne sont ensuite stockées dans une table en mémoire. En supposant que le projectile est détecté à une distance de 30 m, le nombre d'échantillons est d'environ $N \approx 30 \text{ m} / 1,5 \text{ cm} = 2000$. Pour un polynôme d'ordre 9, cela représente 20000 valeurs. Si celles-ci sont codées sur 32 bits, la taille mémoire nécessaire est de 80 ko, ce qui est largement accessible pour la plupart des plate-formes de calcul. De plus, ce dimensionnement suppose qu'une estimée est calculée pour chaque échantillon. En réalisant une estimation tous les dix échantillons par exemple, la capacité mémoire nécessaire se trouve réduite de la même valeur.

4.5.3.3 Algorithme de lissage polynomial

Le polynôme de lissage a été défini par (4:66) comme étant celui qui réalise la meilleure approximation du signal

$$\mathbf{P}_1 = \arg \min_{p \in \mathcal{P}^n} \|\mathbf{Y} - \mathbf{P}\|_{\omega}^2 \quad (4:141)$$

La solution de ce problème peut être calculée de manière récursive en utilisant l'algorithme RLS donné par l'algorithme 4-1, en prenant

$$\mathcal{H}_k = [b^0(t_k), \dots, b^n(t_k)]^T \quad (4:142)$$

où les polynômes $\{b^i\}_{i=0\dots n}$ constituent une base quelconque, non nécessairement or-

thogonale, de \mathcal{P}^n . Dans ce cas, le paramètre $\hat{\theta}_{LS}(k) = \mathbf{A}_k$ contient les coefficients de \mathbf{P}_{1k} dans la base $\{p^i\}_{i=0\dots n}$ et l'on a $\mathbf{P}_1(t_k) = \mathcal{H}_k^T \mathbf{A}_k$. Etant donné que le vecteur \mathbf{K}_k est indépendant des observations, il est possible de calculer les $\{\mathbf{K}_k\}_{k=1\dots N}$ en temps différé et de les stocker dans une table. En procédant de la sorte, la seule opération en temps réel est la mise à jour des coefficients \mathbf{A}_k

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k-1} + \mathbf{K}_k(\phi(t_k) - \mathcal{H}_k^T \mathbf{A}_{k-1})$$

ce qui permet de réduire considérablement le temps de calcul d'une récursion. Dans ce cas, seules $2mq$ additions et $2mq$ multiplications doivent être effectuées en temps réel (m =dimension de la mesure, q = dimension du vecteur paramètre).

4.5.4 Cas 1 : Une mesure de fréquence - trajectoire rectiligne

Les conditions de simulation correspondent en tous points à celles décrites dans le paragraphe §3.5.1, à l'exception du nombre d'échantillons qui est fixé à 100.

Les résultats des simulations sont donnés par la figure 4-9 pour les écarts-types de x_0 et y_0 et par la figure 4-10 pour l'écart-type de v_0 . On note tout d'abord la superposition presque parfaite des courbes de performances de la méthode d'optimisation standard et de la méthode PMDR, ce qui démontre expérimentalement l'équivalence des deux méthodes. On rappelle que, pour cette simulation, le polynôme de lissage est de degré 5 et les estimations exploitent donc six PS seulement!

On vérifie également que la méthode d'estimation standard, et avec elle la méthode PMDR, atteignent la CRLB et sont donc des algorithmes *efficaces*.

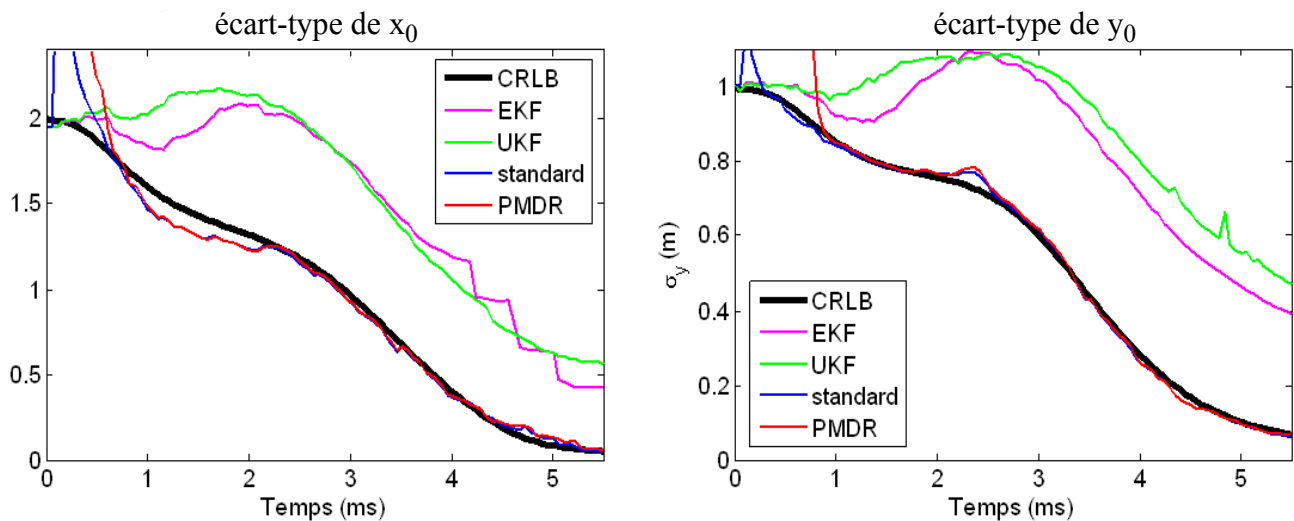


Figure 4-9 : Ecart-types de x_0 et y_0

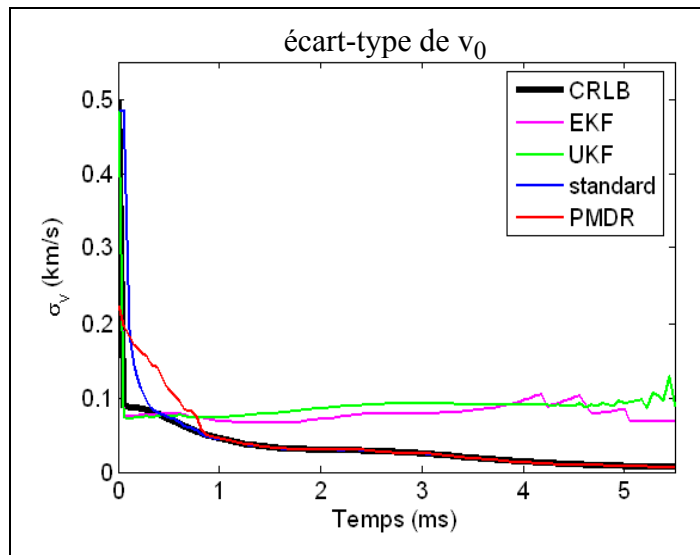


Figure 4-10 : Ecart-type de v_0

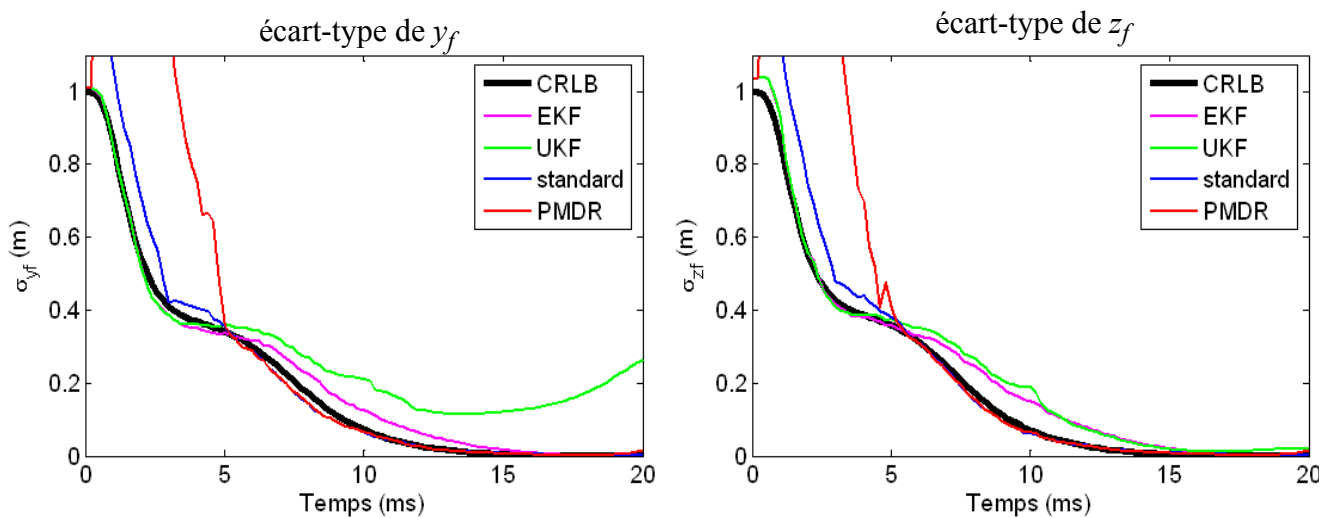
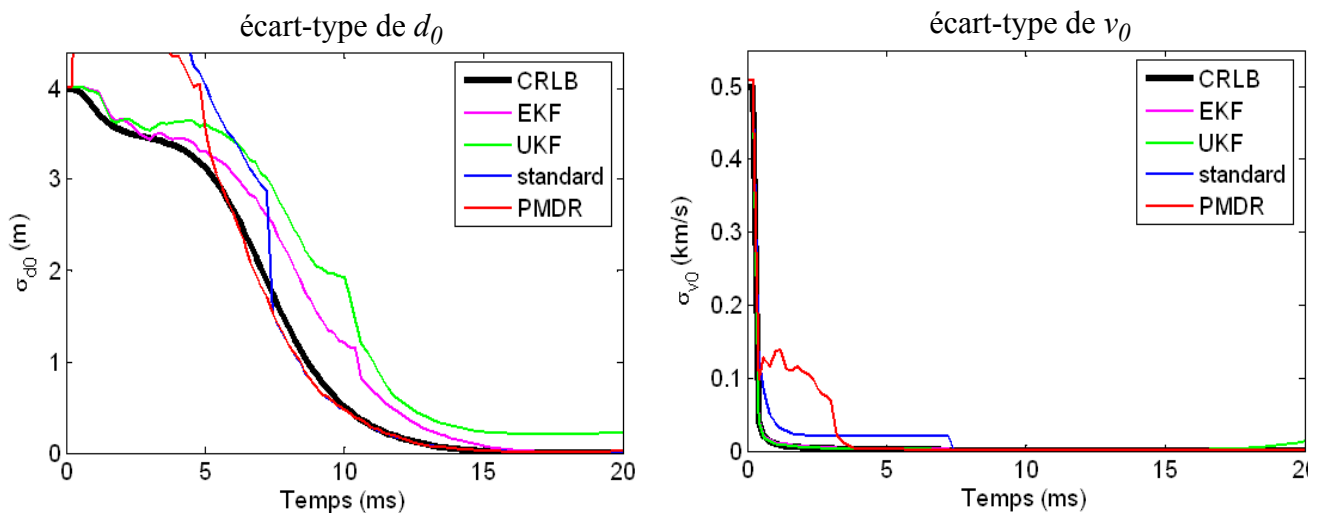
D'un autre coté, nous voyons que les filtres récursifs EKF et UKF ont des performances très médiocres. Ces erreurs importantes peuvent être expliquées par la très faible observabilité des paramètres x_0 et y_0 en début d'analyse. En effet, lorsque le projectile est éloigné du radar, les mesures contiennent très peu d'information concernant les deux paramètres (§3.5.1). Ce manque d'observabilité peut conduire à des erreurs initiales importantes et ce, quel que soit l'algorithme utilisé. Cependant une différence entre les algorithmes itératifs et récursifs intervient lorsque l'observabilité des paramètres augmente.

Dans le cas des filtres récursifs EKF et UKF, les erreurs initiales importantes ont pour effet «d'éloigner» les estimations de la trajectoire ou de la distribution nominale. La linéarisation se faisant autour d'une estimée entachée d'erreurs parfois très grandes, l'approximation devient à son tour très grossière ce qui conduit finalement à des résultats médiocres. Il y a donc un effet de mémoire pour ce type d'algorithmes puisque les erreurs importantes, mais néanmoins tout à fait normales, en début d'analyse peuvent avoir une incidence sur les estimations futures.

Dans le cas des algorithmes itératifs, c'est toujours la totalité du signal qui est considérée et les estimées successives n'ont pas de relation entre elles. En effet, l'estimée au temps $k-1$ ne sert qu'à l'initialisation de l'algorithme itératif au temps k . Ainsi, une mauvaise estimation signifiera simplement que l'algorithme est initialisé loin de la solution optimale et que donc un plus grand nombre d'itérations seront nécessaires pour trouver le résultat.

4.5.5 Cas 2 : 3 mesures de phase - trajectoire rectiligne

Le cas 2 correspond à l'application réelle du blindage actif (§3.5.2) et a pour objectif la détermination du vecteur paramètre $\theta = [y_f, z_f, d_v, v_0, \varphi, \theta]^T$. Cependant nous avons vu que l'estimation simultanée des six paramètres conduit à des précisions très médiocres, car les angles ont une très faible observabilité sur toute la trajectoire. Ceci entraîne une divergence très fréquente - sinon systématique - des algorithmes d'estimation et ne permet pas d'effectuer les simulations de Monte Carlo de manière satisfaisante. Nous avons donc choisi de limiter l'estimation au vecteur $\theta = [y_f, z_f, d_v, v_0]^T$, les angles étant supposés connus. Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 4-11 et la figure 4-12.


 Figure 4-11 : Cas 2 - Ecarts-types de y_f et z_f

 Figure 4-12 : Cas 2 - Ecarts-types de d_0 et v_0

Sur ce cas, plus complexe que le précédent, on observe à nouveau des performances équivalentes entre la méthode PMDR et l'algorithme d'optimisation standard (Levenberg-Marquardt), qui tous deux atteignent la CRLB. On note cependant quelques écarts en début d'analyse, qui sont vraisemblablement dus à la mauvaise observabilité des paramètres, ce qui entraîne que l'hypothèse 4.3 n'est pas vérifiée.

Les performances des filtres EKF et UKF ont été améliorées grâce à l'utilisation de plusieurs radars, ce qui augmente l'observabilité des paramètres de position. En revanche, ces filtres ont des précisions qui sont toujours légèrement inférieures à celles des méthodes itératives.

4.5.6 Cas 3 : 3 mesures de distance - trajectoire balistique

Dans ce dernier cas nous considérons la reconstruction de trajectoires balistiques à partir de trois mesures de distances (§3.5.3). Le vecteur paramètre à estimer est $\theta = [y_f, z_f, d_v, v_0, \varphi, \theta, \gamma]^T$.

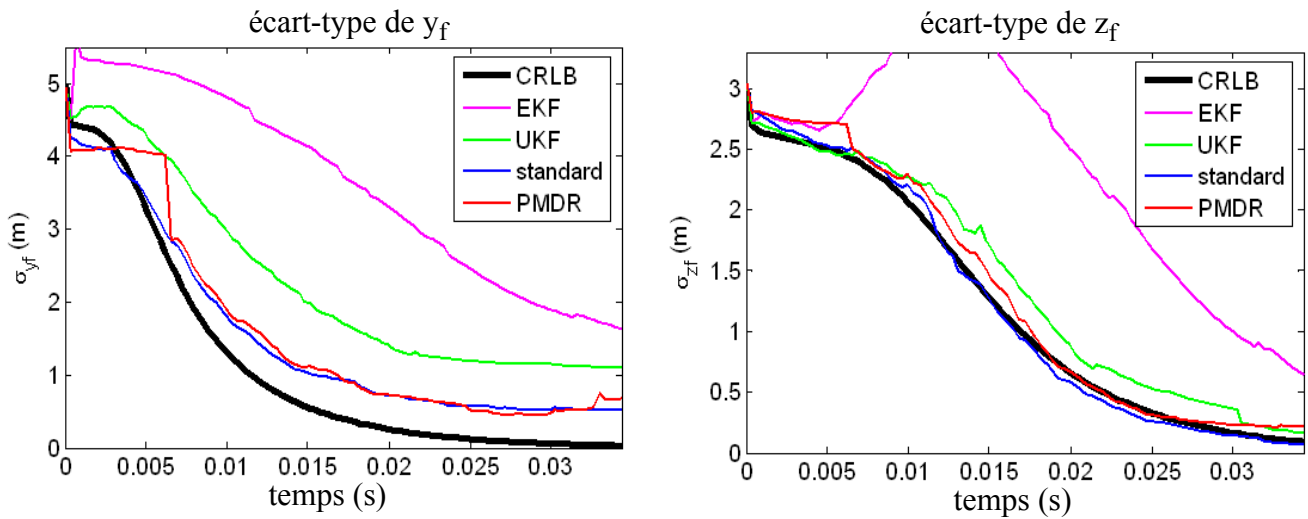


Figure 4-13 : Cas 3 - Ecarts-types des paramètres y_f et z_f

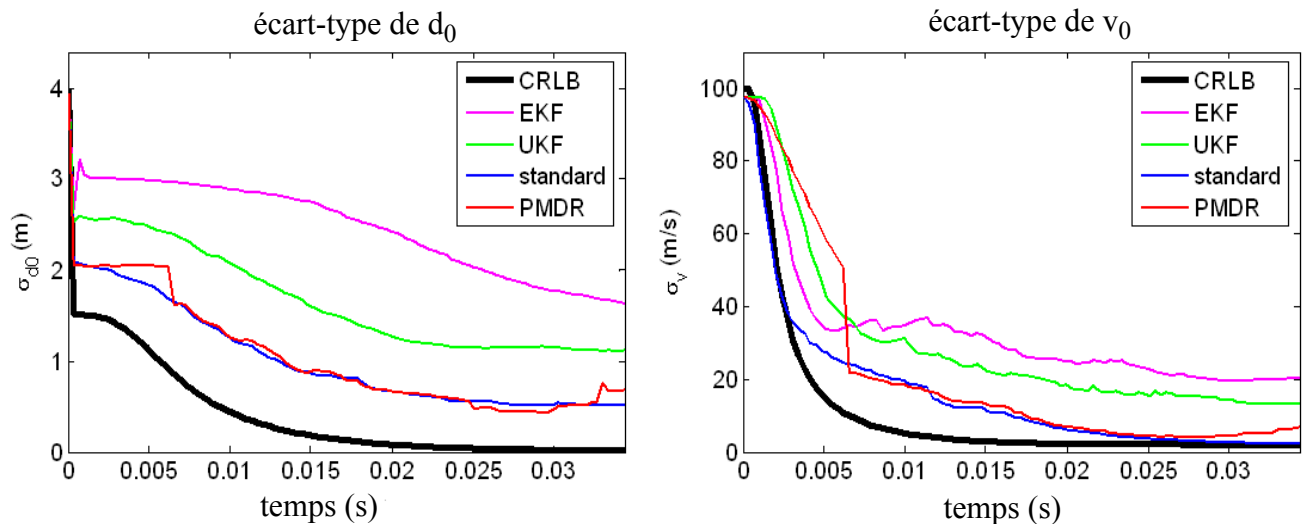


Figure 4-14 : Cas 3 - Ecarts-types de d_0 et v_0

Ce cas est le plus complexe parmi tous les cas traités, puisqu'il correspond au vecteur d'état de plus grande dimension (7 paramètres sont estimés). De plus, la constante du projectile (figure 4-16) est quasiment inobservable sur toute la durée du vol.

On constate à nouveau que les performances des méthodes itératives sont meilleures que celles des filtres récursifs et très proches de la CRLB.

De plus, la méthode PMDR conduit à des précisions équivalentes à celles de l'algorithme itératif standard, mais témoigne cependant d'un écart plus marqué avec ce dernier, en particulier lorsque l'observabilité des paramètres est mauvaise. Les résultats obtenus sont toutefois très satisfaisants et, bien que le temps réel ne soit pas exigé pour la localisation de tireurs embusqués, ils démontrent qu'il est possible d'appliquer la méthode PMDR sur des cas relativement complexes sans recourir à un nombre important de PS.

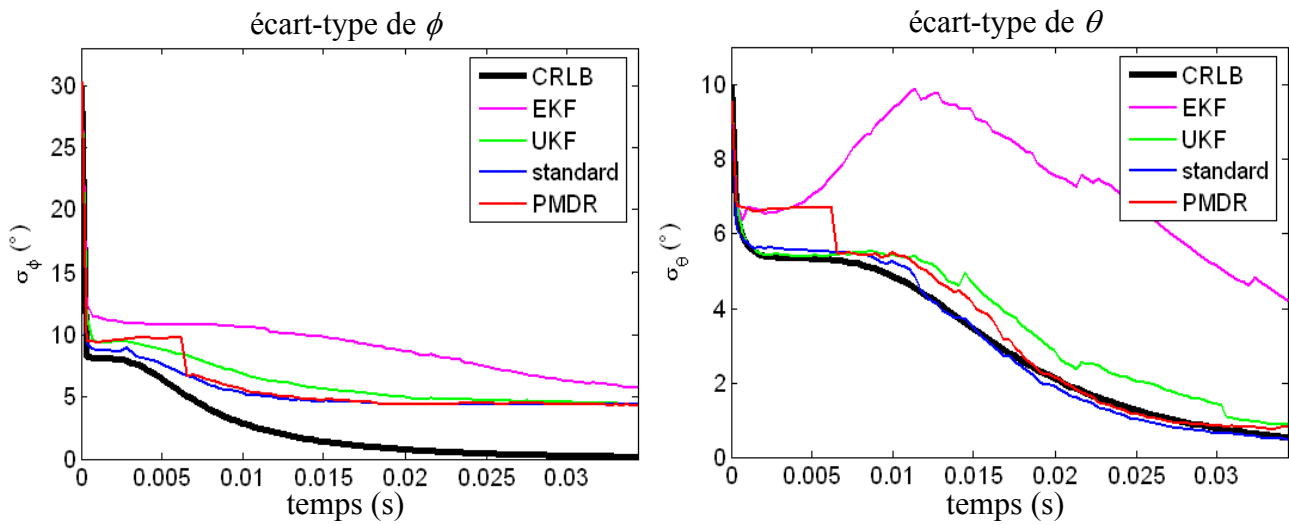


Figure 4-15 : Cas 3 - Ecarts-types de l'azimut et de la pente

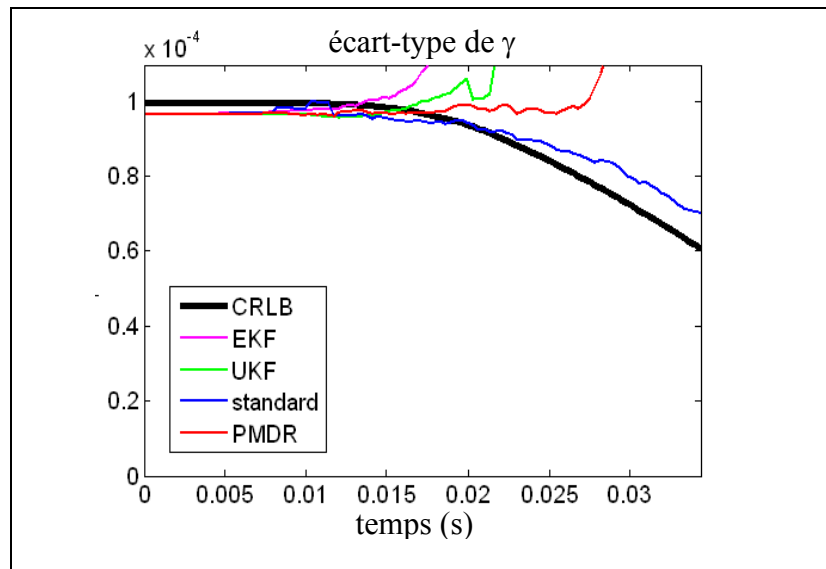


Figure 4-16 : Cas 3 - écart-type de la constante projectile

4.5.7 Complexité des algorithmes

Pour terminer cette comparaison, nous avons mesuré les temps de simulation de chaque algorithme. Pour cela, nous avons programmé des versions optimisées en temps de calcul des algorithmes en supprimant les calculs redondants, les variables de contrôle, etc. Les temps de simulation normalisés sont donnés par le tableau 4-1 et représentés sur la figure 4-17.

En ce qui concerne les algorithmes récursifs, à savoir l'algorithme RLS pour le lissage polynomial ainsi que les filtres EKF et UKF, les temps de simulations correspondent à une seule récursion. Pour l'algorithme de minimisation, le temps correspond à une itération, sachant qu'une estimation complète comporte généralement trois itérations ou plus.

Tableau 4-1 : Temps de simulation normalisés

	RLS	Minimisation (Levenberg-Marquardt)	EKF	UKF
Cas 1	1	109	12	138
Cas 2	3	408	53	153
Cas 3	3,5	890	131	321
tendance	$\mathcal{O}(q \times m)$	$\mathcal{O}(q^2 \times m)$	$\mathcal{O}(q^2 \times m)$	$\mathcal{O}(q^2 \times m)$

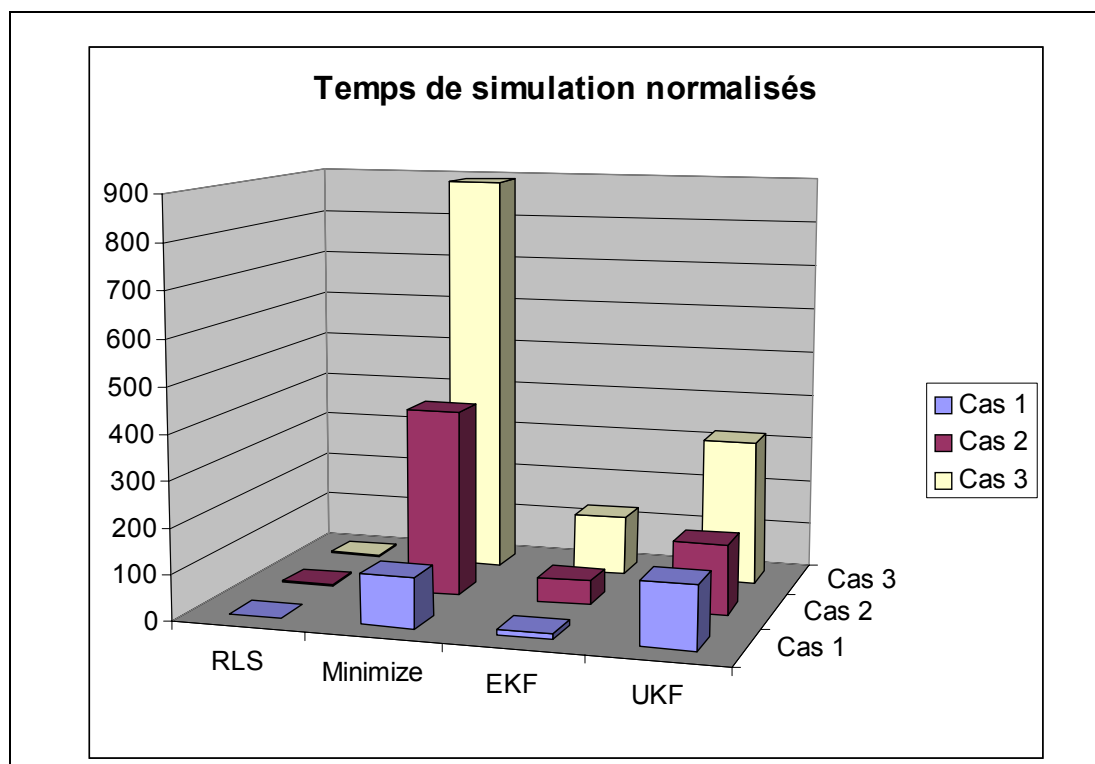


Figure 4-17 : Comparaison des temps de simulation normalisés

Nous voyons que la phase d'optimisation itérative est bien évidemment plus coûteuse en temps de calcul que les autres algorithmes récursifs, mais elle reste tout de même dans des ordres de grandeurs comparables avec ceux du filtre UKF. Quoiqu'il en soit, la tâche de minimisation pouvant s'étaler sur une dizaine voire une centaine de périodes d'échantillonnage, le coût par échantillon peut être rendu négligeable.

En revanche, et c'est là l'un des principaux intérêts de la méthode PMDR, en utilisant la programmation décrite au paragraphe §4.5.3.3 la tâche récursive est réduite à un nombre très faible d'opérations qui de plus, croît linéairement avec la dimension du vecteur paramètre. On obtient alors un algorithme temps réel extrêmement rapide, capable d'absorber des flots de données très importants. Nous verrons par exemple que cette formulation de l'algorithme RLS permet de réaliser un lissage polynomial en 600 ns/éch. (voir §5.6).

4.6 Conclusion

Nous avons présenté une nouvelle méthode d'estimation paramétrique fondée sur une compression polynomiale du signal suivie d'une étape d'optimisation. Nous avons montré que, sous réserve que les fonctions d'observations puissent être assimilées à des polynômes, cette approche est équivalente à un algorithme d'optimisation standard de type Levenberg-Marquardt ou autre.

La méthode présente un certain nombre d'avantages par rapport aux algorithmes récursifs habituellement utilisés comme les filtres EKF et UKF.

Tout d'abord, son noyau récursif peut être réduit à quelques opérations seulement (§4.5.3.3), ce qui permet de traiter des flots de données très importants.

Ensuite, l'approximation qui est utilisée dans la méthode PMDR est une approximation globale du signal, contrairement aux méthodes classiques qui utilisent des approximations locales. Les simulations ont montré que cette approche conduit à de meilleurs résultats dans le cas d'une mauvaise observabilité initiale des paramètres, puisque, le signal étant traité à chaque fois dans son ensemble, l'estimation actuelle est moins sensible aux mauvaises estimations antérieures. La méthode PMDR peut également être intéressante dans le cas de fréquences d'échantillonnages très basses. En effet, les approximations locales ne sont en général valables que sur de petits voisinages du point de linéarisation. Une fréquence d'échantillonnage trop basse peut donc conduire à des approximations très grossières. Cependant, cet effet n'a pas été vérifié par des simulations.

Enfin, l'utilisation d'une méthode d'optimisation quelconque offre une grande souplesse sur le choix des estimateurs et permet notamment d'intégrer des fortes contraintes sur le domaine du paramètre *via* des multiplicateurs de Lagrange par exemple.

Les principales limitations de la méthode se situent d'une part au niveau de la grande régularité des fonctions d'observations nécessaire à l'approximation polynomiale, d'autre part au niveau du temps d'exécution de la phase itérative, notamment dans le cas de paramètres de grande dimension. Ce second point est très lié à la contrainte de temps d'exécution de chaque application, de la méthode d'optimisation utilisée mais surtout de la fréquence des estimations souhaitée. En effet, la méthode PMDR vise l'estimation d'un paramètre statique pour lequel un suivi continu des estimées en fonction du temps présente souvent peu d'intérêt.

En ce qui concerne la régularité des fonctions d'observations, une extension intéressante de la méthode consisterait à utiliser des approximations polynomiales par morceaux. Cette procédure permettrait d'élargir considérablement la classe de signaux pouvant être traités par la méthode PMDR en conservant toutefois des polynômes de degrés relativement modestes. En revanche, une fonction d'observation plus complexe conduit inévitablement à un plus grand nombre de PS, qu'il devient difficile de traiter à l'aide d'un algorithme itératif en temps réel. Cependant, il est alors envisageable d'utiliser un algorithme récursif du type filtre particulaire qui n'aurait pas pu être intégré en temps réel s'il avait dû exploiter l'ensemble des échantillons bruts.

Signalons pour finir que la méthode PMDR est avant tout une méthode de compression du signal et peut, de ce fait, également être intéressante pour des applications hors-ligne, mais devant traiter des quantités de données très importantes.

Chapitre 5

Programmation

5.1 Introduction

Pour terminer notre étude, nous nous sommes intéressés aux possibilités d'intégration des algorithmes en temps réel sur une plate-forme de calcul. Les solutions technologiques étant très nombreuses, nous avons choisi d'étudier une architecture particulière sur laquelle ont été implantés les algorithmes, afin de démontrer la faisabilité du traitement en temps réel.

La question du choix de la technologie sera tout d'abord discutée. Nous présenterons la plate-forme de traitement retenue ainsi que certaines spécificités du processeur TigerSHARC qui seront mises à profit par la suite. Nous détaillerons ensuite le principe d'intégration du noyau temps réel de la méthode PMDR ainsi que le principe d'acquisition des signaux employé. Enfin, nous analyserons les différents problèmes rencontrés lors de l'intégration et étudierons les solutions pour y remédier.

5.2 Choix d'une plate-forme de traitement

Plusieurs solutions technologiques permettent l'intégration d'algorithmes en temps réel [100], le choix de l'une d'elles est conditionné par de nombreux facteurs, tels que l'adéquation algorithme/architecture, le coût de développement, le délai de mise sur le marché.

ASIC (Application Specific Integration Circuit)

Les ASIC sont des circuits dédiés à une application spécifique, c'est-à-dire que le silicium est fondu directement en fonction de la tâche à réaliser. Cette approche conduit aux meilleures performances en termes de vitesse d'exécution, de puissance consommée et de surface de silicium utilisée, mais le coût de développement est très élevé et, la fonctionnalité de ces circuits étant figée par nature, ils offrent très peu de souplesse de programmation. Les ASIC sont généralement destinés à une production en série ou à des applications pour lesquelles les approches alternatives ne permettent pas d'atteindre les performances requises.

FPGA (Field Programmable Gate Array)

Les FPGA sont des réseaux logiques programmables, constitués de blocs logiques ou

macro-cellules, de blocs d'entrées-sorties, de systèmes d'horloges et éventuellement de blocs de calcul et de mémoire, reliés entre eux par une matrice de connexion. La programmation des FPGA s'effectue au niveau matériel par une configuration des connexions entre les différents blocs de calculs. Contrairement aux architectures classiques de processeurs qui ne proposent qu'un nombre très réduit d'unités de calcul (rarement plus de deux), les FPGA offrent la possibilité d'utiliser un grand nombre d'unités de calcul, permettant ainsi un parallélisme massif du traitement. En revanche, lorsque les traitements ne se prêtent pas ou très peu au parallélisme, et en particulier lors de calculs complexes (nombre flottants, racines carrées, etc.), des processeurs classiques disposant d'un jeu d'instructions plus élaboré sont en général mieux adaptés. De plus, les langages de programmation des FPGA (VHDL, Verilog) sont moins souples et moins intuitifs que des langages évolués tels que le C/C++, utilisés pour la programmation de processeurs proprement dits.

Processeur généraux

Les processeurs généraux de type PentiumTM ou PowerPCTM bénéficient d'efforts de développement très importants, stimulés par leur forte diffusion auprès du grand public. Outre les fréquences d'horloges très élevées, ces processeurs disposent d'un jeu d'instructions très riche, d'une architecture évoluée ainsi que de très nombreuses fonctionnalités, les rendant à même d'effectuer des traitements complexes en des temps records. Cependant, n'étant pas optimisés pour le traitement du signal, ils sont largement surdimensionnés pour ce type d'applications et ne disposent pas des ressources adaptées aux tâches à effectuer, ce qui les rend moins efficaces que les processeurs de traitement du signal.

DSP (Digital Signal Processor)

Les processeurs de traitement de signaux numériques, ou DSP, fonctionnent sur le même principe que les processeurs généraux mais utilisent une architecture ainsi qu'un jeu d'instructions adaptés au traitement du signal. Typiquement, les DSP disposent de ressources démultipliées, qui permettent un certain degré de parallélisme dans l'exécution d'un programme. Ils présentent ainsi plusieurs unités de calcul identiques, plusieurs bus de données, plusieurs unités de mémoire interne. Parmi les architectures de traitement parallèle on trouve par exemple les architectures Superscalaires RISC (*Reduce Instruction Set Computer*) et CISC (*Complex Instruction Set Computer*) où le processeur a à charge de déterminer les instructions qui peuvent s'effectuer en parallèle, ou encore les architectures VLIW (*Very Long Instruction Word*) où le parallélisme est formalisé dans l'instruction [101]. Les DSP sont généralement programmés en langage évolué mais il est fréquent d'écrire certaines routines directement en assembleur afin de réduire le temps d'exécution.

Solutions mixtes SoC (System on a Chip)

Plus récemment, des solutions mixtes sont apparues, celles-ci permettent d'intégrer plusieurs types de processeurs sur un même circuit. Cette solution associe les avantages des différentes technologies, tout en conservant un circuit de petites dimensions et des transferts très rapides entre les différents composants, puisqu'ils se situent sur un même support. A titre d'exemple, le Virtex II, fabriqué par Xilinx, est un FPGA qui intègre un ou plusieurs processeurs PowerPCTM ainsi que de nombreuses autres fonctionnalités, telles que des Transceivers et des boucles à verrouillage de phase. Ce type de composant connaît actuellement un fort développement et devrait se généraliser dans les prochaines années.

La solution retenue par l'ISL est une plate-forme multi-processeur commercialisée par Analog Devices (voir figure 5-1), qui est une plate-forme d'évaluation du DSP TigerSHARC™ du même fabricant. La platine EZ-KIT Lite™ comporte deux DSP TigerSHARC (que nous appellerons DSPA et DSPB) cadencés à 250 MHz, 128 Mb de SRAM, un convertisseur numérique/analogique (CNA) et analogique numérique (CAN), une interface USB, ainsi que de nombreuses autres fonctionnalités. Elle dispose en outre d'un accès JTAG (*Joint Test Action Group*), qui permet l'émulation en temps réel des processeurs.

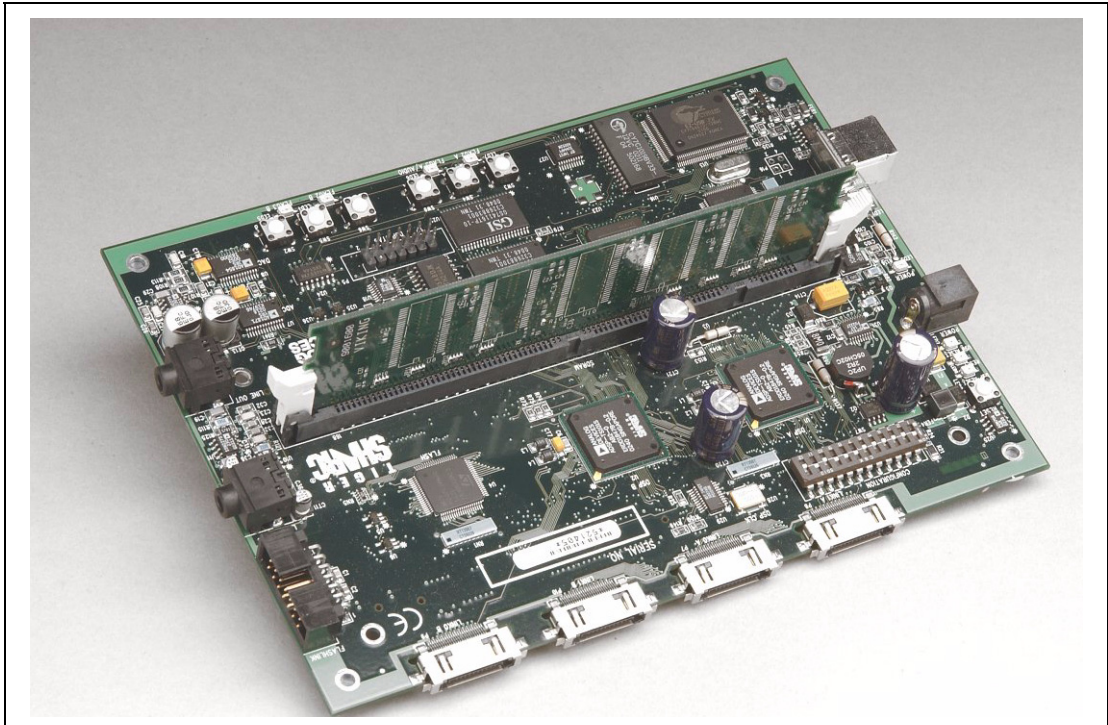


Figure 5-1 : Plate-forme d'évaluation DSP EZ-KIT Lite™

Ce choix, qui est antérieur à la thèse, résulte principalement d'une familiarité avec ce type de processeurs, puisque des DSPs SHARC™ avaient déjà été utilisés à l'ISL auparavant. Il n'en demeure pas moins judicieux puisque les capacités importantes du TigerSHARC™ sont tout à fait adaptées au traitement des signaux qui exploitent des opérations complexes en virgule flottante, telles que des divisions, racines carrées et du calcul matriciel. De plus, bien que la méthode PMDR puisse tirer parti du parallélisme offert par les FPGA, notamment pour le calcul des produits scalaires de la phase itérative, les solutions algorithmiques envisagées au début de l'étude visaient essentiellement des algorithmes récursifs, pour lesquels les possibilités de traitement parallèle sont relativement limitées.

5.3 Présentation du DSP TigerSHARC

5.3.1 présentation générale

Le TigerSHARC est un DSP de hautes performances, dernier né du fabricant Analog Devices, destiné principalement aux stations de base des téléphones 3G ainsi qu'aux applications militaires et industrielles. Il repose sur une architecture *Static Superscalar™*, légère variation de l'architecture VLIW, où le parallélisme est planifié de ma-

nière statique par le compilateur [101]. Il supporte également le mode SIMD (*Single-Instruction Multiple-Data*) qui permet d'accélérer l'exécution en utilisant une seule instruction pour plusieurs données. Le TigerSHARC peut également être utilisé dans un environnement multiprocesseur, notamment grâce à un système de mémoire et de registres partagés et une unité d'arbitrage du bus externe intégrée.

Le TigerSHARC comporte deux unités de traitement à usage général supportant plusieurs formats (1, 8, 16 et 32 bits en virgule fixe et 32 ou 40 bits en virgule flottante), deux unités de calcul d'entiers qui sont l'évolution des DAG (*Data Address Generator*) du SHARC, ainsi que trois blocs mémoire de 2M bits dont chacun est servi par un bus de données 128 bits (voir figure 5-2).

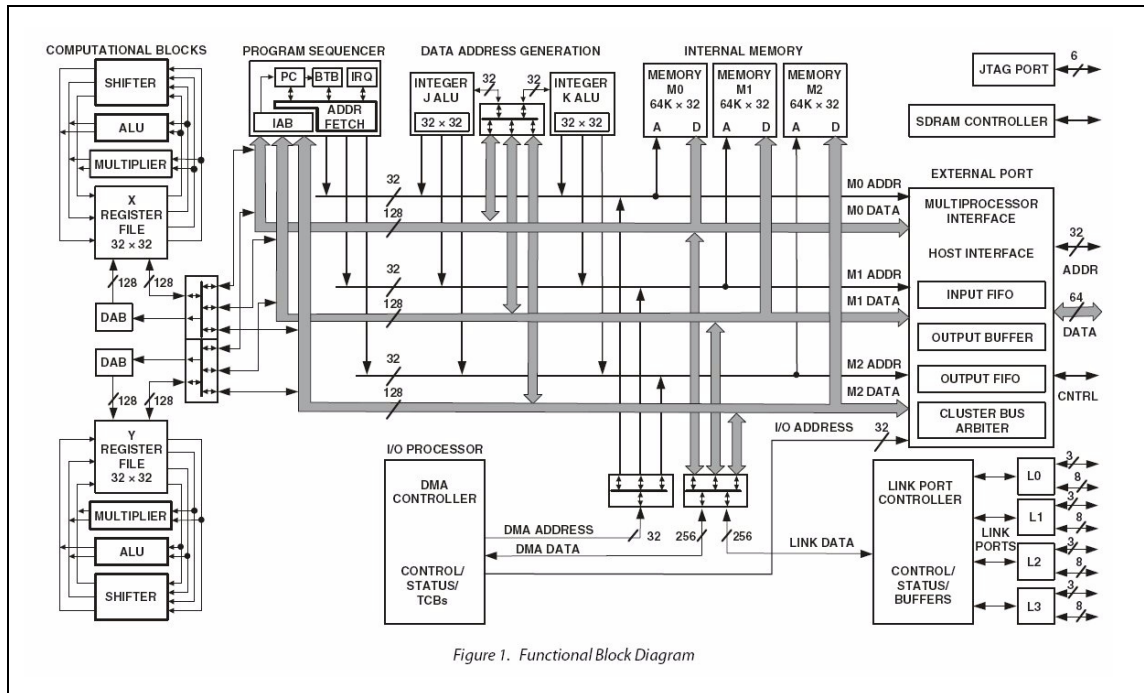


Figure 1. Functional Block Diagram

Figure 5-2 : Architecture de TigerSHARC TS101S

Cette architecture lui permet d'exécuter jusqu'à quatre instructions 32 bits par cycle. Ceci se traduit au niveau de la syntaxe assembleur par un groupement des instructions en *lignes d'instructions (instruction line)* terminées par « ; », comportant chacune quatre emplacements d'instruction (*instruction slots*) terminés par « ; », soit

instruction 1; instruction 2 ; instruction 3 ; instruction 4;;

Des instructions appartenant à la même ligne d'instructions seront exécutées simultanément, à condition toutefois qu'elle n'utilisent pas les mêmes ressources, auquel cas une erreur sera générée au moment de l'assemblage. Notons encore qu'il est évidemment possible d'effectuer moins de quatre instructions par cycle en laissant des emplacements d'instruction libres.

Le TigerSHARC dispose en plus d'un grand nombre de fonctionnalités telles qu'un bus externe pour l'adressage de la mémoire externe et l'utilisation en environnement multiprocesseurs (*multiprocessing*), un contrôleur DMA (*Direct Memory Access*), des ports de communications (*Link Port*), des gestionnaires d'interruptions et d'horloges (*timers*). Pour une description exhaustive, on se référera à la documentation du constructeur [104].

5.3.2 Mémoire et registres

Mémoire

La mémoire interne du TigerSHARC est divisée en trois blocs de 2M bits, configurés en 64 K mots de 32 bits de largeur, dont chacun est connecté à un bus de données de 128 bits, soit 4 mots de 32 bits. Généralement, un bloc mémoire est attribué au stockage des instructions et les deux blocs restants au stockage des données. Toutes les instructions étant stockées sur des mots de 32 bits, un cycle permet donc de transférer quatre instructions plus huit mots de 32 bits de données. De plus, un tampon d'alignement DAB (*Data Alignment Buffer*) permet d'effectuer des accès *quad-words* (quatre mots de données de 32-bits) sur des données non alignées en mémoire.

Le bus d'adresse 32 bits du TigerSHARC permet d'adresser un espace mémoire global de 4G mots subdivisé en trois régions :

- espace interne,
- espace multiprocesseur,
- espace externe.

L'espace interne contient les registres et la mémoire du processeur. On peut également accéder à chaque mémoire interne *via* une plage d'adresse dans l'espace multiprocesseur comme le montre la figure 5-3. En effet, dans une configuration multiprocesseur tous les DSP partagent le même bus et sont repérés par un identifiant (ID), codé sur 3 bits, qui leur attribue un emplacement unique dans l'espace mémoire global. Cet espace mémoire est donc identique pour tous les processeurs, à l'exception de la plage d'adresse correspondant à la mémoire interne qui leur est propre. Ce système permet d'échanger des données entre les DSP très simplement, puisque chacun d'eux peut accéder à sa mémoire interne ou à celle des autres DSP de la même façon. En revanche, si les transactions sont transparentes du point de vue de l'utilisateur, les accès externes peuvent être pénalisés par de longues latences si les ressources ne sont pas disponibles (voir §5.5.5).

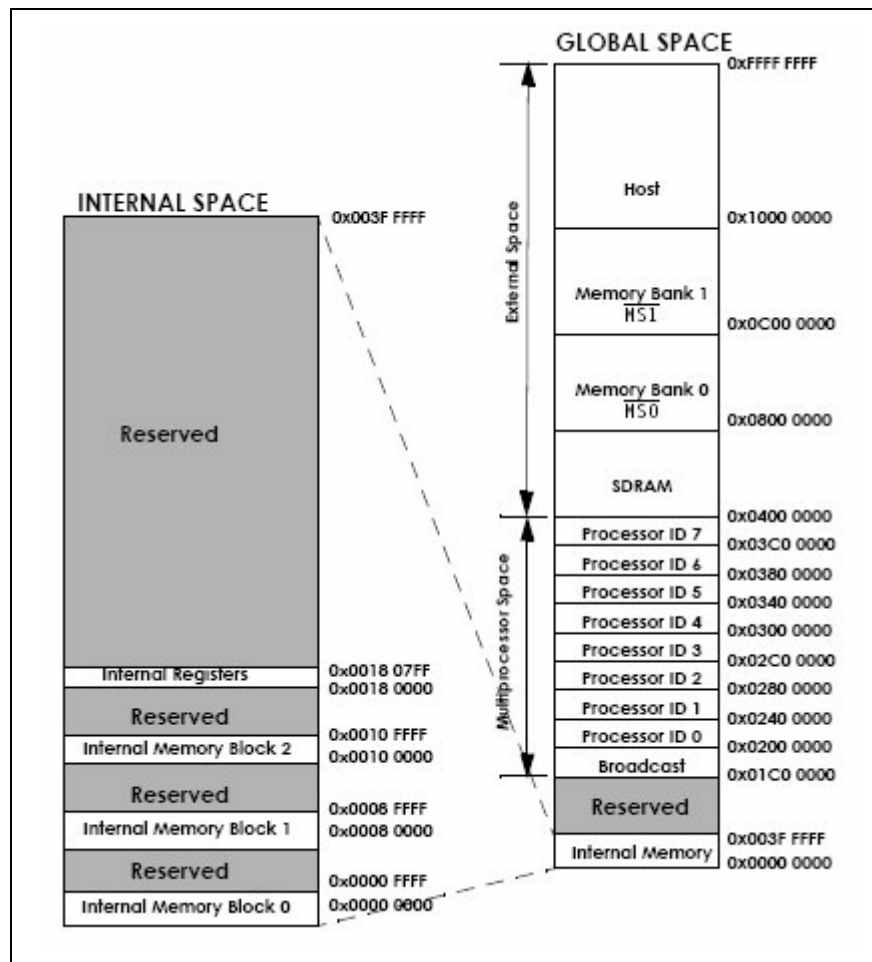


Figure 5-3 : Organisation de l'espace mémoire (source : TigerSHARC Processor Hardware Reference)

L'espace multiprocesseur contient également un accès *broadcast*, qui permet d'écrire dans tous les processeurs du groupe simultanément.

L'espace mémoire externe contient les périphériques et la mémoire externe. Il comprend notamment une plage d'adresse SDRAM, où l'on accède à la mémoire selon le protocole SDRAM *via* l'interface SDRAM, ainsi que deux plages d'adresses MS0 et MS1 pour les transactions avec des périphériques lents.

Registres

Les registres sont organisés par groupes pouvant compter jusqu'à 32 éléments. Les principaux groupes sont

- les fichiers de registres des blocs de traitement,
- les registres de l'unité de calcul d'entiers,
- les registres d'interruption et du séquenceur,
- les registres du *Branch Target Buffer* (BTB),
- les registres de débogage
- les registres contrôle et de statut
- les registres DMA.

La plupart de ces registres sont adressés en mémoire et on peut donc y accéder *via* l'espace multiprocesseur. Les groupes parmi les plus importants sont les fichiers de regis-

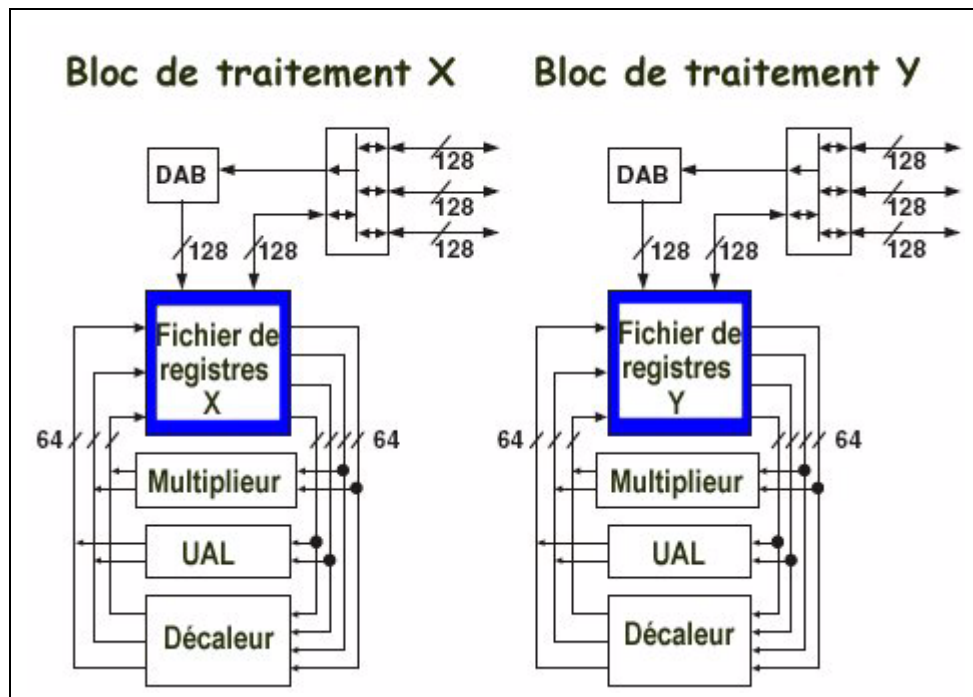


Figure 5-5 : Blocs de traitement

Ces blocs de traitement peuvent effectuer la plupart des opérations sur des formats allant de 1 à 64 bits en virgule fixe, et 32 ou 40 bits en virgule flottante.

5.3.4 Unité de traitement d'entiers IALU

Le TigerSHARC dispose de deux unités de traitement d'entiers IALU (*Integers Arithmetic and Logic Unit*), appelées J et K, comportant chacune un groupe de 32 registres de 32-bits. Ces unités sont normalement destinées à la génération des adresses mais peuvent également servir à des calculs généraux portant sur des entiers. Elles sont dotées des instructions suivantes :

- addition / soustraction,
- opérations logiques : ET, NON-ET, NON, OU, OU exclusif,
- opérations arithmétiques : décalage à droite, décalage à droite logique, rotation,
- fonctions : valeur absolue, min, max, comparaison.

Ces nombreuses instructions confèrent une grande flexibilité à la génération d'adresses.

Les registres J et K servent de pointeurs sur des adresses mémoire. Le nombre important de registres (64 au total) permet généralement d'en attribuer un par variable du programme, évitant ainsi la ré-affectation des registres pointeurs lorsque ceux-ci sont partagés entre plusieurs variables. Les modes d'adressage supportés sont :

- adressage direct et indirect,
- adressage circulaire,
- adressage *bit reverse*,
- transfert des registres universels (Ureg)
- génération de pointeur mémoire.

Les adressages direct et indirect offrent trois types d'accès à la mémoire et aux regis-

tres, il s'agit des accès lecture / écriture normaux, accès lecture / écriture distribués (*merged*) et accès lecture simultanée (*broadcast*). Les accès normaux supportent les trois formats : simple (pas de préfixe), long (préfixe L) et quad (préfixe Q). Par exemple, un adressage indirect quad-word s'écrit :

`XR0:3=Q[J1];; //transfert des 4 mots pointés par J1`

Cette instruction transfère simultanément quatre mots et utilise donc la totalité du bus comme illustré sur la figure 5-6.

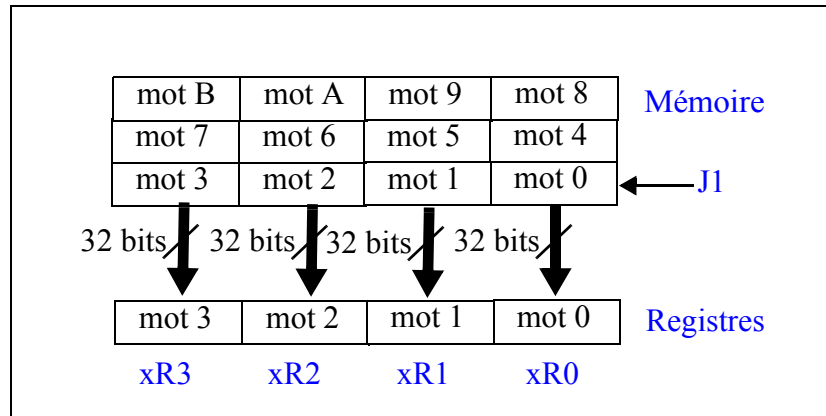


Figure 5-6 : Illustration d'un transfert mémoire Quad

Un autre type d'adressage très utile pour nos application est l'adressage circulaire spécifié par le suffixe CB. Ce mode permet d'adresser une plage mémoire définie par son adresse de base et sa longueur, de façon circulaire. Pour cela, les registres J0 à J3 et K0 à K3 sont tous associés à des registres JB# et JL# (KB# et KL#) qui décrivent respectivement l'adresse de base et la longueur de la plage mémoire à adresser. Si un pointeur, J0 par exemple, accède à une adresse en dehors de la plage mémoire définie par les descripteurs JB0 et JL0, l'IALU retranche ou additionne la longueur JL0 de telle sorte que J0 pointe à nouveau à l'intérieur de la plage mémoire spécifiée.

5.3.5 Interruptions et Horloges

Le TigerSHARC utilise plusieurs types d'interruptions internes et externes, assumant différentes fonctions :

- synchronisation entre le monde externe et le processeur
- détection d'erreurs
- débogage
- contrôle par une autre application.

Chacune des interruptions dispose d'une entrée dans la table d'interruptions (*Interrupt Vector Table*) et peut être masquée. Le service d'interruption ne procède pas à la sauvegarde automatique du contexte (à l'exception de l'adresse de retour), celle-ci devant être effectuée par l'utilisateur.

Notre application utilise deux interruptions : l'interruption IRQ0 et l'interruption de l'horloge *timer 1*.

L'interruption IRQ0 est asynchrone et est déclenchée par le front ou par le niveau d'un signal externe. Cette interruption sera utilisée pour détecter les passages à zéro du signal radar.

Le TigerSHARC dispose également de deux horloges (*timer 0 et timer 1*) à usage général, qui sont deux compteurs de 64 bits pouvant déclencher un événement (interruption ou impulsion) lorsqu'ils arrivent à expiration, c'est-à-dire à zéro. Ils sont alors

automatiquement rechargés à leur valeur initiale, contenue dans deux registres de 32 bits (un par horloge).

Dans notre application, une horloge (*timer 0*) sert de temps de référence et tourne librement, tandis que l'autre horloge (*timer 1*) est utilisée pour générer des interruptions à temps constant.

On signalera que les valeurs des compteurs sont codées en virgule fixe, elles doivent donc être d'abord converties en format flottant pour être utilisées par les algorithmes.

5.3.6 Le Cluster bus

L'espace mémoire global est obtenu en utilisant un bus unique, appelé *Cluster Bus*, partagé par tous les TigerSHARC du groupe. Ce bus supporte également l'ensemble des périphériques externes (*Host*) ainsi que la mémoire (SRAM). Il est très important de comprendre certains de ses mécanismes de fonctionnement, car, bien que son utilisation soit transparente, une mauvaise gestion des transferts peut entraîner un ralentissement de l'exécution très important.

Lorsque le *cluster bus* est sollicité, il se connecte à l'un des bus internes du TigerSHARC comme illustré sur la figure 5-7.

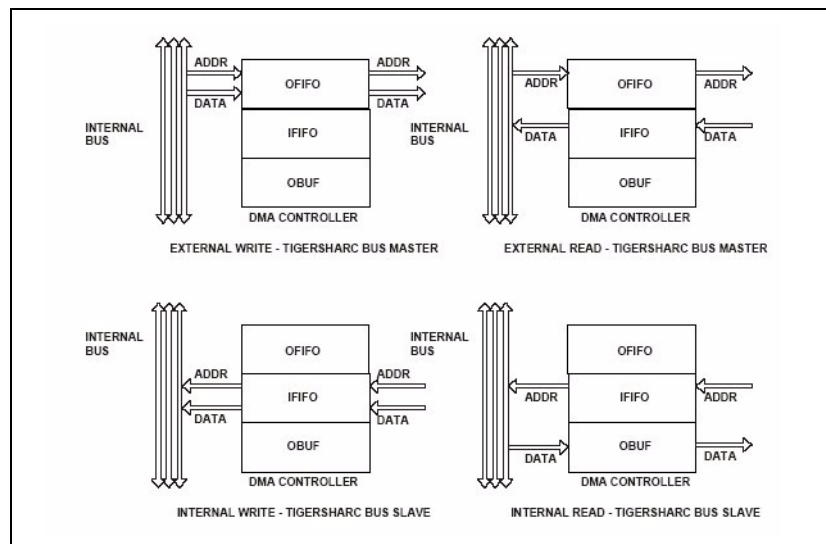


Figure 5-7 : Cluster Bus

Des mémoires FIFO (*First In First Out*) de sortie (OFIFO) et d'entrée (IFIFO) stockent les données à échanger pendant le temps du transfert. Dans le cas d'une écriture par un maître du bus (*bus master*), l'écriture ne dure que le temps de stocker les données en FIFO et est donc quasi-instantanée (1 à 2 cycles). Dans le cas d'une lecture par le maître du bus, il faut attendre que l'esclave réponde et l'opération est beaucoup plus longue (40 à 200 cycles selon les cas). Le programme ne s'interrompt cependant pas, mais les ressources restent indisponibles tant que l'opération de lecture ne s'est pas terminée (bus externe et registres cibles, tandis que les pointeurs d'adresse (IALU) sont, eux, libérés). Si une instruction ultérieure à l'opération de lecture utilise l'une des ressources indisponibles tandis que la lecture n'est pas terminée, le programme se trouve interrompu.

Ce problème est particulièrement gênant lorsque le programme utilise des interruptions. En effet, celles-ci sont généralement asynchrones et peuvent donc intervenir après une opération de lecture, dans ce cas il n'est pas possible de prévoir si les res-

sources sont disponibles ou non pour la routine d'interruption.

5.3.7 Les autres fonctionnalités

Le TigerSHARC dispose d'autres fonctionnalités telles que des canaux DMAs et des ports de communication (*Link Port*), mais elles ne seront pas discutées ici. Il propose également un certain nombre de ressources très utiles pour la mise au point des programmes. Il peut notamment fonctionner selon trois modes d'exécution :

- Le mode émulateur permet de tester le fonctionnement du circuit en conditions réelles grâce à un émulateur intégré ICE (*In Circuit Emulator*), connecté à un ordinateur *via* un port JTAG. C'est le mode que nous avons utilisé pour la mise au point des algorithmes.
- Le mode superviseur est destiné aux applications qui n'utilisent pas de système d'exploitation, il autorise l'accès à toutes les ressources du processeur.
- Le mode utilisateur est destiné aux applications s'appuyant sur un système d'exploitation, il permet notamment de restreindre l'accès aux ressources.

En plus du mode émulateur, des fonctionnalités spécifiques peuvent être utilisées pour la mise au point d'un programme. On trouve entre autres

- des points d'observation (*Watchpoints*),
- un historique des opérations stocké dans une FIFO interne,
- un compteur de cycle (CCNT), que nous avons utilisé pour optimiser le code,
- un moniteur de performances qui permet de surveiller les ressources de manière non-intrusive.

5.4 Intégration de l'algorithme

L'implantation de l'algorithme discutée ici concerne l'acquisition des signaux et le noyau récursif, mais n'inclut pas la tâche itérative de la méthode PMDR, qui a été introduite après cette étude. De plus, le noyau temps réel constitue la seule partie véritablement contrainte par le temps réel et est en outre commun à toutes les applications qui utilisent la méthode PMDR. Son optimisation présente donc un plus grand intérêt que celle de l'algorithme itératif.

5.4.1 Principe

L'algorithme est implanté sur la plate-forme bi-processeur et utilise les deux DSP, DSPA et DSPB, qui assurent chacun l'acquisition d'un signal radar. L'algorithme effectue les tâches suivantes :

- acquisition des temps de passage à zéro (échantillonnage à temps variable, DSPA et DSPB),
- interpolation linéaire de la phase à temps constant et lissage polynomial (DSPA),
- numérisation du signal de commande de l'AGC pour la détection de projectile (DSPA).

Bien qu'une application réelle nécessite au moins trois mesures de phase ou de distance, cette version de l'algorithme est limitée à deux signaux en raison des ressources disponibles¹, mais permet néanmoins d'étudier tous les mécanismes d'acquisition, de traitement et de transfert de données entre les processeurs.

1. Il est certain que deux DSP suffisent au traitement de trois signaux en termes de puissance de calcul, mais les ressources d'horloge et d'interruption étant plus limitées, cela obligerait à changer le principe de traitement.

Les trois tâches sont entièrement prises en charge par les interruptions, libérant ainsi le corps du programme pour l'intégration de la méthode itérative.

L'acquisition des passages à zéro est gérée par l'interruption IRQ0 (A & B), qui est déclenchée par les fronts du signal de sortie de la platine AGC. En effet, les signaux sinusoïdaux d'amplitude constante sont convertis en signaux carrés de niveaux 0-3 V, compatibles avec les tensions du DSP, grâce à l'utilisation d'un trigger de Schmidt (voir schéma de l'AGC, annexe I). La routine d'interruption capture alors la valeur de l'horloge *timer 0*, ce qui permet d'échantillonner le temps. Cette valeur est ensuite convertie en format flottant pour le calcul de la phase, de la fréquence ou encore de la distance, puis stockée dans un tableau *via* un adressage circulaire.

L'interpolation de la mesure à temps constant est assurée par la routine d'interruption de l'horloge *timer 1*. Celle-ci est configurée pour provoquer une interruption aux temps d'échantillonnages $t_k = kT_e$, où T_e est la période d'échantillonnage, égale à 10 μ s dans cet exemple.

L'interpolation de la phase au temps t_k est calculée d'après

$$\phi(t_k) = \phi(t_n) + (t_k - t_n)f(t_n) \quad (5:1)$$

où $\phi(t_n), f(t_n)$ sont les phases et fréquences échantillonnées à temps variable par l'interruption IRQ0 et t_n est l'instant d'acquisition du dernier échantillon par l'interruption IRQ0. La routine d'interruption procède ensuite à la mise à jour du polynôme de lissage de $\phi(t_k)$ en utilisant l'algorithme RLS. On rappelle que l'interpolation du signal à temps constant a pour objectif de simplifier l'algorithme RLS en le réduisant à l'étape de mise à jour (voir §4.5.3.3). Finalement, la disponibilité d'un nouvel échantillon et de la mise à jour du polynôme de lissage est signalée par un drapeau, afin d'indiquer au programme principal qu'une nouvelle optimisation est possible.

Dans le but de tirer pleinement profit des possibilités offertes par le TigerSHARC, les deux signaux sont traités par un seul DSP, le DSPA, grâce au mode SIMD. Ceci permet de libérer le DSPB sans pour autant augmenter la charge de travail du DSPA, puisque les deux signaux sont traités simultanément par les deux blocs de traitement.

La troisième tâche, traitée uniquement par le DSPA, a pour objectif de détecter la présence d'un projectile en surveillant le signal de commande de l'AGC. Celui-ci est numérisé par le CAN de la plate-forme EZ-KIT Lite et les données sont transmises au DSPA *via* un canal DMA. Lorsque la valeur du signal atteint un certain seuil, le traitement est initialisé et les interruptions IRQ0 et *timer 1* sont autorisées. L'ordre de démarrage du DSPB est transmis par le DSPA *via* le positionnement d'un drapeau dans l'espace multiprocesseur. Le DSPA écrit également en accès broadcast dans le registre contrôlant les horloges (SQCTL) du DSPB pour démarrer l'horloge timer 1, pré-chargée à la valeur 0x01. Ceci permet de synchroniser les horloges timer 1 des deux DSP puisque l'ordre de démarrage est reçu simultanément grâce à l'accès *broadcast*.

Les deux principale routines d'interruption IRQ0 et timer 1 sont détaillées sur la figure 5-8.

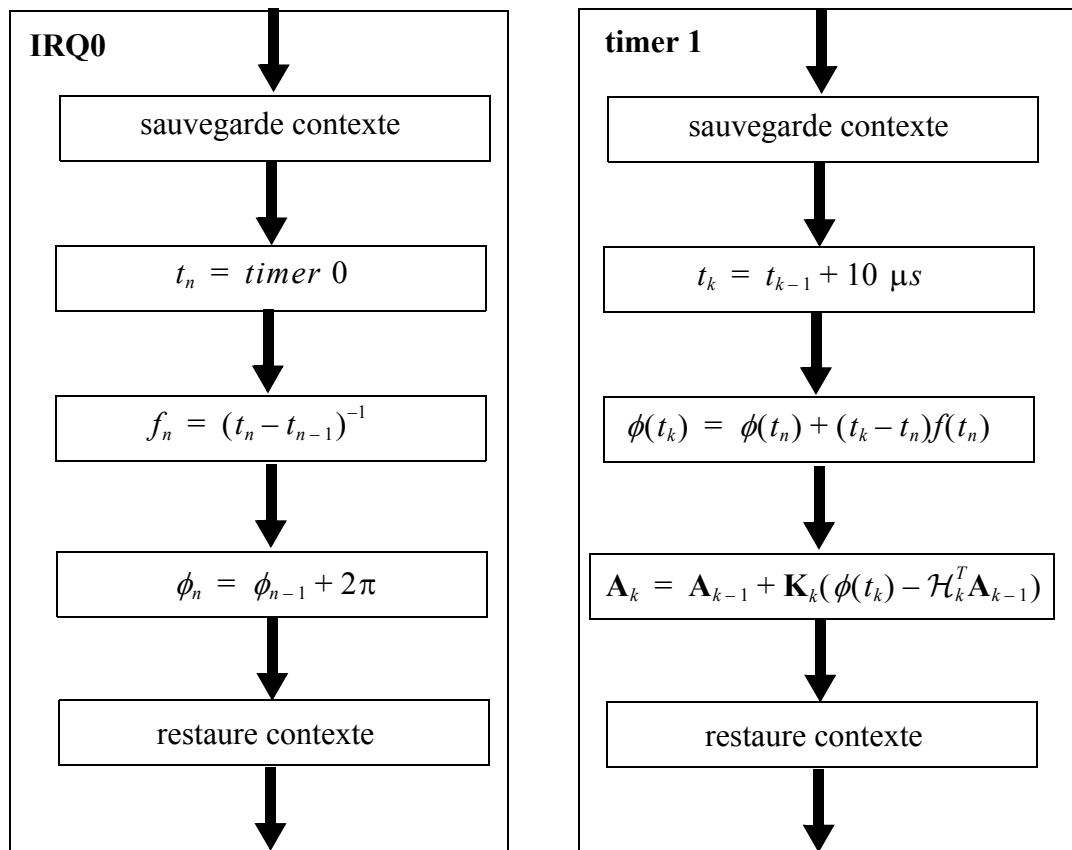


Figure 5-8 : Routines d'interruption IRQ0 et Timer1

5.5 Optimisation du code

5.5.1 Présentation

L'intégration de l'algorithme en temps réel soulève certaines difficultés, ou au contraire offre des possibilités d'optimisation, propres à l'architecture utilisée. Le programme a été entièrement écrit en assembleur et une attention particulière a été portée aux temps d'exécution des instructions, notamment lorsque celles-ci utilisent des ressources du TigerSHARC, de manière à obtenir des vitesses d'exécution maximales.

5.5.2 Le pipeline

Les instructions d'un processeur évolué sont d'une relative complexité et ne peuvent être exécutées en un cycle d'horloge. Pour maintenir une cadence apparente d'une instruction par cycle d'horloge, celles-ci sont décomposées en micro-instructions et sont traitées "à la chaîne" dans un pipeline, si bien qu'une instruction débute son traitement avant que la précédente n'ait terminé le sien. Cependant, il arrive que des périodes de latences soient insérées dans la chaîne de traitement, avec pour conséquence une exécution ralentie et de durée variable.

5.5.2.1 Description

Le pipeline du TigerSHARC comporte 8 niveaux :

- **F1- Fetch 1** : chargement des instructions.

- **F2** - *Fetch 2* : chargement des instructions.
- **F3** - *Fetch 3* : chargement des instructions.
- **Decode** - *Decode* : décodage de l'instruction et distribution aux unités.
- **Int** - *IALU stage* : Traitement dans l'unité d'entiers.
- **Access** - *access* : Chargement des opérandes si nécessaire.
- **EX1** - *execution 1* : Traitement arithmétique 1.
- **EX 2** - *execution 2* : Traitement arithmétique 2, et mise à jour des registres.

Les trois premiers niveaux servent à alimenter le pipeline en instructions. Le niveau de décodage interprète le code opération de l'instruction et la redirige vers l'unité de traitement appropriée. L'étage IALU prend en charge les manipulations sur les entiers ainsi que la génération d'adresses et les demandes d'accès au bus. Les chargements des registres sont ensuite effectués pendant la phase d'accès ('Access'), et les calculs dans les niveaux EX1 et EX2. Dans tous les cas, les registres ne peuvent être modifiés avant la dernière phase EX2 puisque certaines instructions peuvent être interrompues (cas des branchements conditionnels par exemple).

Le pipeline constitue un point critique pour la rapidité de l'exécution du programme, puisque c'est à cet endroit que peuvent apparaître des cycles de latence (*stalled*).

Trois causes majeures sont à l'origine de ces cycles de latence :

- les mauvaises prévisions,
- les conflits de ressources,
- l'interdépendance.

5.5.2.2 Les mauvaises prévisions

Les branchements conditionnels sont problématiques pour le fonctionnement du pipeline puisque l'on ne sait pas *a priori* quelle sera la prochaine instruction exécutée après un branchement conditionnel. Pour pallier au problème, le TigerSHARC est équipé d'un système de prévision élémentaire, appelé *Branch Target Buffer*, qui suppose que la décision qui va être prise au branchement sera la même que celle qui avait été prise précédemment au même endroit. Un moyen d'éviter les ruptures de pipeline dues à des branchement inattendus est donc de favoriser les décisions identiques, ou, plus simplement, d'éviter les branchements conditionnels le plus possible.

5.5.2.3 Les conflits de ressources

Les conflits de ressources apparaissent lorsqu'une instruction désire accéder à une ressource indisponible. C'est par exemple le cas lorsqu'une instruction arrive à l'étage INT et sollicite un accès au bus, mais que celui-ci est déjà utilisé par le séquenceur pour charger une instruction. Dans ce cas, l'instruction sera bloquée à l'étage INT jusqu'à ce que le bus soit libéré. Ce cas fera l'objet d'une étude particulière au paragraphe §5.5.5.

5.5.2.4 L'interdépendance

Les problèmes d'interdépendance sont de loin les plus fréquents et sont la conséquence même de l'utilisation d'un pipeline. Le phénomène concerne deux instructions consécutives où la deuxième utilise les résultats de la première. Dans ce cas, des cycles de latence seront insérés dans le traitement de la deuxième instruction jusqu'à ce que le résultat de la première soit disponible. Ce phénomène n'est pas du tout marginal dans un programme et peut considérablement dégrader les performances du traitement, jusqu'à un facteur deux ou plus encore.

Exemple : Ecriture non optimisée

Pour illustrer le problème des interdépendances, nous avons considéré le cas de la formation du vecteur d'observation pour un lissage polynomial de degré cinq, stocké dans la variable H

```

gener_H:XR0=dt;; //chargement de l'incrément temporel
XFR12=R12+R0;; //incrémentation du temps
J0=H+1;; //pointe sur le vecteur H[1]
xFR13=R12*R12; [J0+=1]=xR12;; // R13=T*T / H[1]=T
xFR14=R12*R13; [J0+=1]=xR13;; //R14=R13*T / H[2]=T2
xFR15=R12*R14; [J0+=1]=xR14;; //R15=R14*T / H[3]=T3
xFR16=R12*R15; [J0+=1]=xR15;; //R16=R15*T / H[4]=T4
[J0+=1]=xR16;; //H[5]=T5

```

La figure 5-9 montre une capture du pipeline correspondant à l'exemple ci-dessus, on constate que l'exécution utilise 16 cycles (lignes 8 à 23) au lieu des 8 nécessaires. Ce

8	xr0 = 0X3BA3D70A;;	nop;;	nop;;	nop;;	nop;;
9	xfr12 = r12 + r0;;	xr0 = 0X3BA3D70A;;	nop;;	nop;;	nop;;
10	j0 = 0X80001;;	xfr12 = r12 + r0;;	xr0 = 0X3BA3D70A;;	nop;;	nop;;
11	W j0 = 0X80001;;	xfr12 = r12 + r0;;	B xr0 = 0X3BA3D70A;;	xr0 = 0X3BA3D70A;;	nop;;
12	xfr13 = r12 * r12; ...	j0 = 0X80001;;	xfr12 = r12 + r0;;	B xr0 = 0X3BA3D70A;;	xr0 = 0X3BA3D70A;;
13	xfr13 = r12 * r12; ...	B j0 = 0X80001;;	j0 = 0X80001;;	xfr12 = r12 + r0;;	B xr0 = 0X3BA3D70A;;
14	xfr13 = r12 * r12; ...	B j0 = 0X80001;;	B j0 = 0X80001;;	j0 = 0X80001;;	xfr12 = r12 + r0;;
15	xfr13 = r12 * r12; ...	B j0 = 0X80001;;	B j0 = 0X80001;;	B j0 = 0X80001;;	j0 = 0X80001;;
16	xfr13 = r12 * r12; ...	B j0 = 0X80001;;	B j0 = 0X80001;;	B j0 = 0X80001;;	B j0 = 0X80001;;
17	xfr14 = r12 * r13; ...	xfr13 = r12 * r12; ...	B j0 = 0X80001;;	B j0 = 0X80001;;	B j0 = 0X80001;;
18	xfr15 = r12 * r14; ...	xfr14 = r12 * r13; ...	xfr13 = r12 * r12; ...	B j0 = 0X80001;;	B j0 = 0X80001;;
19	W xfr15 = r12 * r14; ...	xfr14 = r12 * r13; ...	B xfr13 = r12 * r12; ...	xfr13 = r12 * r12; ...	B j0 = 0X80001;;
20	xfr16 = r12 * r15; ...	xfr15 = r12 * r14; ...	xfr14 = r12 * r13; ...	B xfr13 = r12 * r12; ...	xfr13 = r12 * r12; ...
21	W xfr16 = r12 * r15; ...	xfr15 = r12 * r14; ...	B xfr14 = r12 * r13; ...	xfr14 = r12 * r13; ...	B xfr13 = r12 * r12; ...
22	[j0 += 0X1] = xfr16; ...	xfr16 = r12 * r15; ...	xfr15 = r12 * r14; ...	B xfr14 = r12 * r13; ...	xfr14 = r12 * r13; ...
23	W [j0 += 0X1] = xfr16; ...	xfr16 = r12 * r15; ...	B xfr15 = r12 * r14; ...	xfr15 = r12 * r14; ...	B xfr14 = r12 * r13; ...
24	IF true, JUMP gener...	[j0 += 0X1] = xfr16; ...	xfr16 = r12 * r15; ...	B xfr15 = r12 * r14; ...	xfr15 = r12 * r14; ...
25	nop;;	IF true, JUMP gener...	[j0 += 0X1] = xfr16; ...	xfr16 = r12 * r15; ...	B xfr15 = r12 * r14; ...
26	xr0 = 0X3BA3D70A;;	nop;;	IF true, JUMP gener...	[j0 += 0X1] = xfr16; ...	xfr16 = r12 * r15; ...
27	xfr12 = r12 + r0;;	xr0 = 0X3BA3D70A;;	nop;;	IF true, JUMP gener...	[j0 += 0X1] = xfr16; ...

Figure 5-9 : Capture du pipeline pour un programme non optimisé

ralentissement est dû à l'insertion de 8 cycles de latences, marqués par l'icône [S], dont les causes sont les suivantes :

- conflit d'accès à des ressources,
- problème d'interdépendances.

Le problème a été corrigé en appliquant les règles suivantes :

- espacer d'au moins un cycle deux instructions utilisant un registre du bloc de traitement comme destination et comme source successivement.,
- espacer d'au moins quatre cycles deux instructions utilisant un registre J/K comme destination et comme source successivement.

Nous obtenons alors le code suivant

```

gener_H: R6=dt;; //chargement de l'incrément temporel
J0=H+1;; //pointe sur le vecteur H[1]
FR10=R10+R6;; //incrémentation temporelle
K0=H2;; //
R1=R10;; //
R0=1.0;; //
FR2=R1*R1;; //R2=T*T
FR4=R2*R2 //R4=T4
FR3=R2*R1;; //R3=T3
FR5=R1*R4; Q[J0+=4]=xR3:0; Q[K0+=4]=yR3:0;; //R5=T5/
H[1:4]=R0:3 /

```

`L[J0+=2]=xR5:4;L[K0+=2]=yR5:4;; //nombre de cycles = 12`

Ce programme est légèrement différent du précédent car il réalise deux copies du vecteur H dans les deux mémoires de données, afin d'accélérer les traitements par la suite. Pour cela, nous effectuons les mêmes calculs dans les blocs X et Y en utilisant le mode SIMD. Cette démarche est plus rapide que de transférer deux fois le résultat d'un bloc dans les deux mémoires, car dans ce cas le premier transfert monopolise les ressources bus et retarde le deuxième transfert. Le nombre de cycles a ainsi pu être réduit à 12 pour 11 instructions comme le montre la figure 5-10.

<code>r1 = r10;;</code>	<code>k0 = 0X100000;;</code>	<code>fr10 = r10 + r6;;</code>	<code>j0 = 0X800000;;</code>	<code>r6 = 0X3BA3D70A;;</code>
<code>r0 = 0X3F800000;;</code>	<code>r1 = r10;;</code>	<code>k0 = 0X100000;;</code>	<code>fr10 = r10 + r6;;</code>	<code>j0 = 0X800000;;</code>
<code>fr2 = r1 * r1;;</code>	<code>r0 = 0X3F800000;;</code>	<code>r1 = r10;;</code>	<code>k0 = 0X100000;;</code>	<code>fr10 = r10 + r6;;</code>
<code>fr4 = r2 * r2;;</code>	<code>fr2 = r1 * r1;;</code>	<code>r0 = 0X3F800000;;</code>	<code>r1 = r10;;</code>	<code>k0 = 0X100000;;</code>
<code>fr3 = r2 * r1;;</code>	<code>fr4 = r2 * r2;;</code>	<code>fr2 = r1 * r1;;</code>	<code>r0 = 0X3F800000;;</code>	<code>r1 = r10;;</code>
W <code>fr3 = r2 * r1;;</code>	<code>fr4 = r2 * r2;;</code>	B <code>fr2 = r1 * r1;;</code>	<code>fr2 = r1 * r1;;</code>	<code>r0 = 0X3F800000;;</code>
<code>fr5 = r1 * r4; Q [...]</code>	<code>fr3 = r2 * r1;;</code>	<code>fr4 = r2 * r2;;</code>	B <code>fr2 = r1 * r1;;</code>	<code>fr2 = r1 * r1;;</code>
<code>L [j0 += 0X2] = xr5...</code>	<code>fr5 = r1 * r4; Q [...]</code>	<code>fr3 = r2 * r1;;</code>	<code>fr4 = r2 * r2;;</code>	B <code>fr2 = r1 * r1;;</code>
<code>j1 = 0X800000;;</code>	<code>L [j0 += 0X2] = xr5...</code>	<code>fr5 = r1 * r4; Q [...]</code>	<code>fr3 = r2 * r1;;</code>	<code>fr4 = r2 * r2;;</code>
<code>j0 = 0X800008;;</code>	<code>j1 = 0X800000;;</code>	<code>L [j0 += 0X2] = xr5...</code>	<code>fr5 = r1 * r4; Q [...]</code>	<code>fr3 = r2 * r1;;</code>
<code>k0 = 0X100008;;</code>	<code>j0 = 0X800008;;</code>	<code>j1 = 0X800000;;</code>	<code>L [j0 += 0X2] = xr5...</code>	<code>fr5 = r1 * r4; Q [...]</code>
<code>j2 = 0X8001A;;</code>	<code>k0 = 0X100008;;</code>	<code>j0 = 0X800008;;</code>	<code>j1 = 0X800000;;</code>	<code>L [j0 += 0X2] = xr5...</code>

Figure 5-10 : Capture du pipeline pour le code optimisé

On note que pour parvenir à ce résultat, l'ordre des calculs a été modifié dans le but de supprimer les latences liées à l'interdépendance.

5.5.3 Calcul Matriciel

Les calculs matriciels, tels que le produit scalaire de deux vecteurs, peuvent être optimisés en répartissant les opérations sur les deux blocs de traitement X et Y et en utilisant le mode SIMD [103]. Cette méthode implique de scinder les calculs, comme illustré sur la figure 5-11 pour le produit scalaire des vecteurs V et W. Cette technique

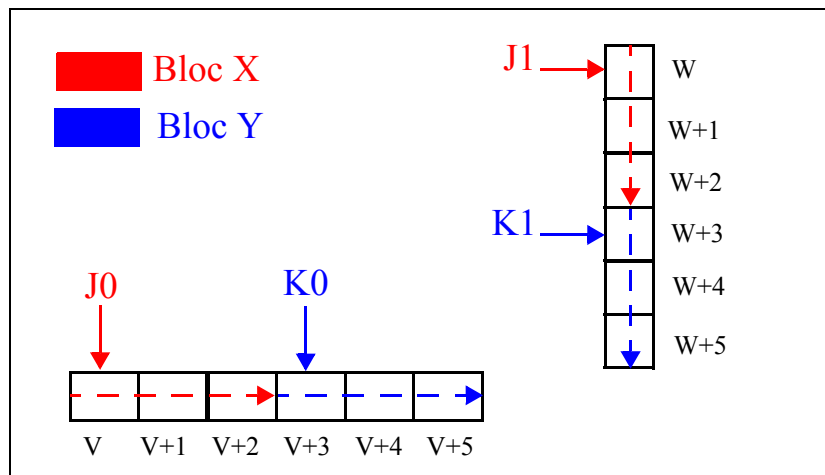


Figure 5-11 : Exemple de décomposition pour le calcul d'un produit scalaire.

a été utilisée dans un premier temps, puis abandonnée par la suite, car le mode SIMD a été mis à profit pour traiter simultanément deux signaux radar plutôt que pour accélérer le traitement d'un seul signal.

5.5.4 Stabilité numérique

L'un des problèmes affectant l'intégration de l'algorithme sur le TigerSHARC est celui de la précision numérique. En effet, le DSP utilise un format flottant à 32 bits tandis que le développement des algorithmes, effectué avec le logiciel MATLAB, s'appuyait sur un format flottant à 64 bits (format double). La réduction de la précision numérique entre la plate-forme de développement et celle du DSP a eu des conséquences au niveau de l'algorithme RLS. Dans sa forme la plus réduite, ce dernier se résume au calcul suivant :

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k-1} + \mathbf{K}_k(\phi(t_k) - \mathcal{H}_k^T \mathbf{A}_{k-1}) \quad (5:2)$$

On rappelle que dans ce cas les vecteurs \mathbf{K}_k sont stockés dans une table en mémoire et que le vecteur $\mathcal{H}_k = [b^0(t_k), \dots, b^n(t_k)]^T$ représente l'évaluation d'une base polynomiale à l'instant t_k (voir §4.5.3.3).

Pour des questions de simplicité et de vitesse de calcul, la base polynomiale initialement retenue était la base canonique $\{b^i(t_k) = t_k^i\}_{i=0\dots n}$. Cependant, lors de l'implantation de l'algorithme sur DSP, des tests mirent en évidence des problèmes de divergence numérique, comme le montre la figure 5-12.

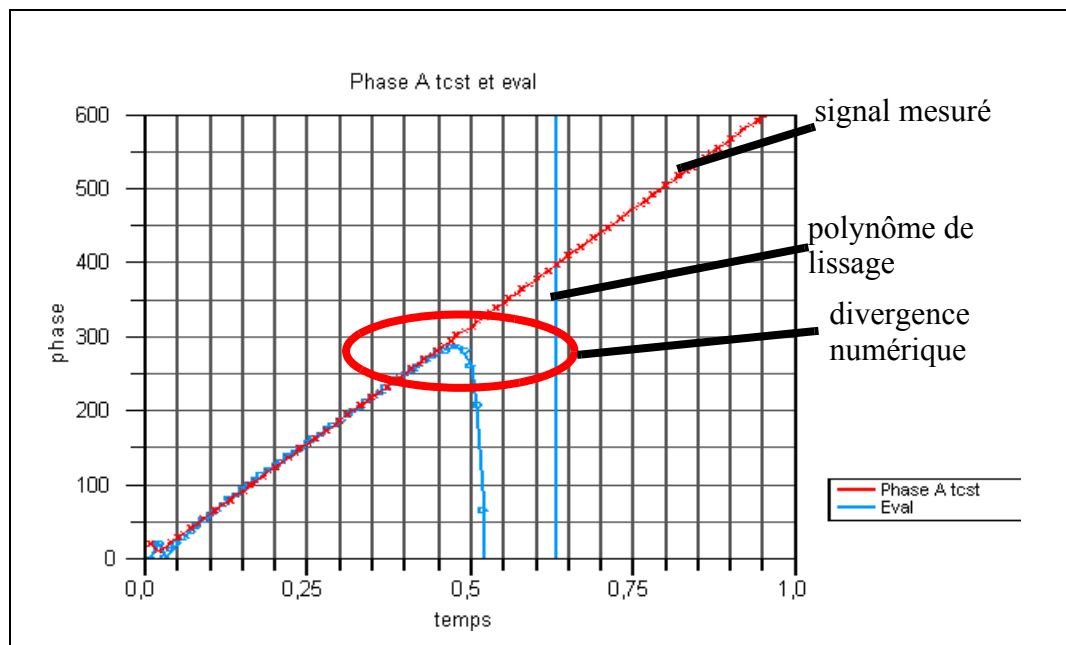


Figure 5-12 : Exemple de divergence numérique

Pour corriger le problème deux solutions sont envisageables :

- utiliser le format double (40 bits) du DSP,
- stabiliser numériquement l'algorithme.

Format double 40 bits

L'inconvénient du format double est qu'il utilise deux registres au lieu d'un seul pour effectuer un calcul et réduit ainsi le nombre de registres disponibles à 16. De plus, bien que cette solution fonctionne sur les cas testés, elle ne constitue pas une réponse satisfaisante au problème puisqu'une instabilité est susceptible de se manifester à nouveau pour un polynôme de degré plus élevé.

Stabilisation numérique

L'algorithme RLS calcule les coefficients \mathbf{A}_k récursivement d'après l'équation sui-

vante (voir §4.3.1)

$$\mathbf{A}_k = (\mathcal{B}_k^T \mathbf{W}_k \mathcal{B}_k)^{-1} \mathcal{B}_k^T \mathbf{W}_k \mathbf{Y}_k \quad (5:3)$$

Le calcul des coefficients est donc très sensible au conditionnement de la matrice $G = \mathcal{B}_k^T \mathbf{W}_k \mathcal{B}_k$ qui doit être inversée. En choisissant la base canonique, nous avons

$$G = \begin{bmatrix} \langle 1, 1 \rangle_\omega & \dots & \langle 1, t^{n+1} \rangle_\omega \\ \dots & \dots & \dots \\ \langle 1, t^{n+1} \rangle_\omega & \dots & \langle t^{n+1}, t^{n+1} \rangle_\omega \end{bmatrix} = \mathcal{B}_c^T \mathbf{W} \mathcal{B}_c$$

or cette matrice est notoirement connue pour son mauvais conditionnement [47]. Une solution consiste donc à choisir une base polynomiale pour laquelle la matrice G aura un meilleur conditionnement. Nous avons retenu la base formée par les polynômes de Legendre¹ [105], dont le conditionnement en fonction du temps est illustré sur la figure 5-13. On observe que celui-ci est très nettement inférieur à celui de la base canonique.

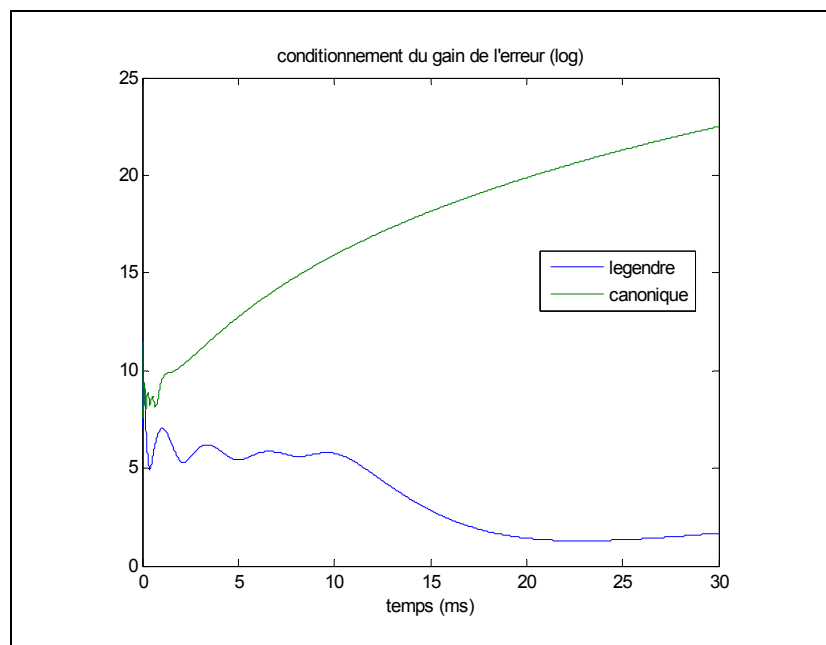


Figure 5-13 : conditionnement des matrices

Le problème posé par les polynômes de Legendre comparativement aux polynômes de la base canonique est celui de la complexité de leur calcul pour la formation du vecteur d'observation. En effet, l'évaluation d'un polynôme de Legendre de degré n nécessite le calcul de $n/2$ termes environ, contre un seul pour la base canonique. Pour contourner cette difficulté nous avons utilisé la formule de récurrence à trois termes qui caractérise tous les polynômes orthogonaux [109]

$$b^{i+1}(t) = (a_i t - b_i) b^i(t) - c_i b^{i-1}(t) \quad (5:4)$$

où les coefficients a_i , b_i et c_i sont calculés hors ligne. Cette relation permet donc de réduire l'évaluation des polynômes au calcul de deux termes par degré.

1. La plupart des polynômes orthogonaux classiques (Hermite, Tchebychev, Jacobi) vérifient également cette propriété.

5.5.5 Gestion du cluster bus

Nous avons vu au paragraphe §5.5.2 que dans certains cas la cadence de traitement des instructions pouvait être inférieure à une instruction par cycle d'horloge. Nous avons étudié au paragraphe §5.5.2.4 l'interdépendance des instructions qui constitue l'une des causes du ralentissement de l'exécution. Nous avons également évoqué au paragraphe §5.5.2.3 une autre cause possible due à un conflit de ressources. Nous nous intéressons maintenant plus particulièrement à l'utilisation du bus externe ou *cluster bus*. Les applications utilisant plusieurs radars peuvent tirer profit d'une plate-forme de traitement multiprocesseur, mais doivent pour cela assurer une bonne gestion des échanges de données entre les différents DSP et, éventuellement, la mémoire externe, qui transitent par le *cluster bus*. En effet, l'espace mémoire unifié rend toutes les opérations externes transparentes pour l'utilisateur, mais celles-ci peuvent considérablement allonger le temps d'exécution du programme.

Par exemple, nous avons considéré deux lectures successives de la mémoire du DSPB par le DSPA

```
YR0=[K5+=1];; //première lecture
YR1=[K5+=1];; //deuxième lecture
```

où le registre K5 pointe vers la mémoire du DSPB dans l'espace multiprocesseur.

Le nombre de cycles d'exécution de ces deux instructions est présenté sur la figure 5-14. On observe que le nombre de cycles est bien supérieur à deux instructions car la transaction externe est plus lente que le coeur du DSP, celui-ci doit donc «attendre» que la donnée soit disponible pour poursuivre son exécution.

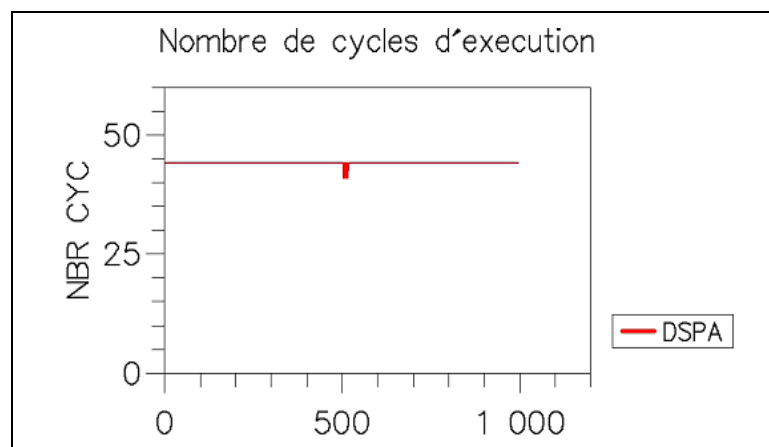


Figure 5-14 : Deux lectures de la mémoire du DSPB successives

Le problème des latences d'exécution, outre le fait de ralentir l'exécution du programme, pose un autre problème dans le cas de certaines applications critiques. Dans notre cas, l'interruption IRQ0 doit être prise en charge très rapidement car il faut capturer le *timer 0* le plus rapidement possible pour avoir une mesure fidèle de l'instant de passage à zéro du signal. Or, selon la disponibilité des ressources au moment de l'interruption, les délais de service de l'interruption peuvent être très variables. Ces aléas de temps d'exécution du code, que nous appellerons plus simplement *gigue* de code, engendre pour notre application des oscillations de la mesure de fréquence. En effet, si une interruption subit une latence, le *timer 0* sera capturé avec du retard et la fréquence correspondante paraîtra plus basse. De la même manière, l'interruption suivante qui ne connaîtra plus de latence, correspondra une période plus courte depuis la dernière cap-

ture qui était retardée, et la fréquence paraîtra plus élevée comme illustré sur la figure 5-15.

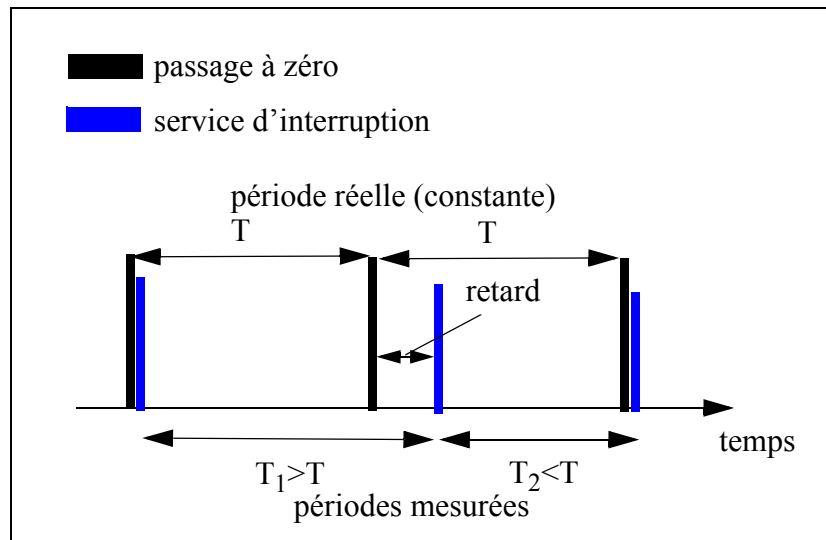


Figure 5-15 : Illustration du phénomène de gigue de code

Ce phénomène a été vérifié expérimentalement en mesurant la fréquence d'un sinus de fréquence constante égale à 150 kHz, à l'aide du DSP. La figure 5-16 montre les résultats obtenus, on observe très clairement l'apparition d'oscillations autour de la fréquence nominale. De plus, l'apparition des oscillations est un phénomène cyclique régulier qui se manifeste lorsque les interruptions IRQ0 sont en phase avec un autre processus qui mobilise des ressources utilisées par l'interruption, rendant ainsi sa prise en charge impossible.

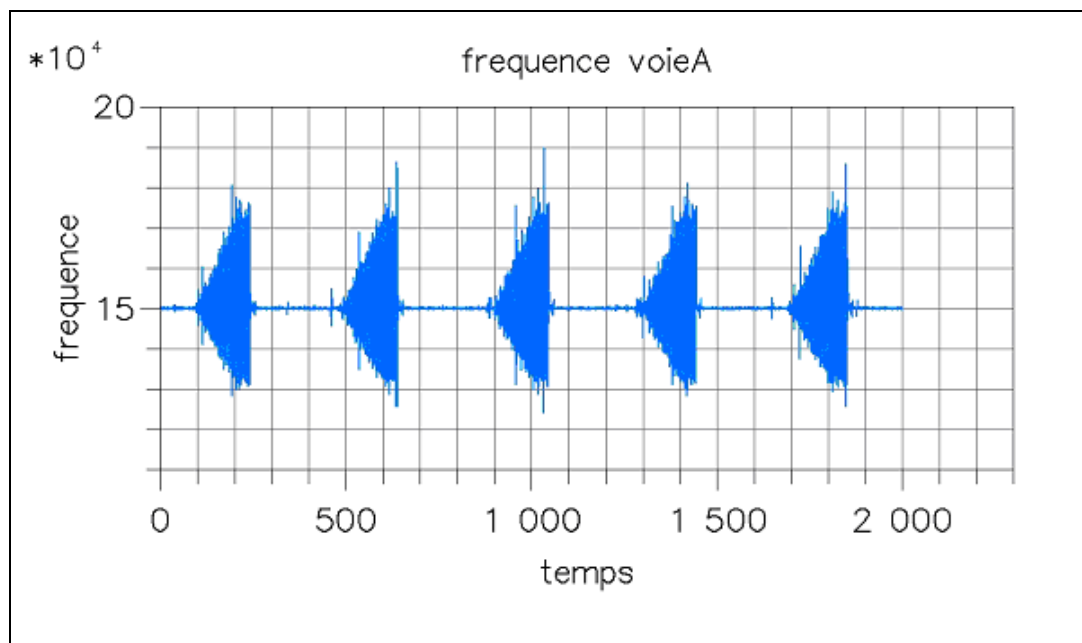


Figure 5-16 : Effets de la gigue de code sur la mesure de fréquence

Dans cet exemple, plusieurs causes sont à l'origine de la gigue de code. Celle-ci intervient lorsque l'interruption IRQ0, de priorité plus haute, interrompt l'interruption timer 1.

Extrait de *timer 1* :

```
J16=[K31+K1_LOC+DSPB_base];; // J16=temps B
J17=[K31+K2_LOC+DSPB_base];; //J17=fréquence B
J18=[K31+K3_LOC+DSPB_base];; //J18=phase DSPB
//lit le temps à la dernière interruption
xR4=[K1+K19];yR4=[J16+J19];; //
///lit la fréquence à la dernière interruption
xR3=[K2+K19];yR3=[J17+J19];;
// calcule PhiA et PhiB
//charge les phases des voies A et B
xR5=[K3+K19];; yR5=[J18+J19]; fR0=R0-R4;; //
fR7=R3*R7;; //
```

Extrait de *IRQ0* :

```
//sauvegarde contexte
nop;; nop;; nop;; //
xR29=Xstat;; //
xR28=CJMP;; //
J0=J31+Register_store_IRQ0x;; //
K0=K31+Register_store_IRQ0y;; //
q[J0+=4]=xR3:0; q[K0+=4]=yR3:0;; //
q[J0+=4]=xR7:4; q[K0+=4]=yR7:4;; //
q[J0+=4]=xR31:28; q[K0+=4]=yR31:28;; //
q[J0+=4]=K19:16;; //
```

La routine d'interruption *timer 1* du DSPA effectue des lectures de la mémoire du DSPB et mobilise pour cela les registres R4 et R5. D'un autre côté, nous voyons que la routine *IRQ0* utilise également ces registres, qui sont bien sûr sauvegardés au préalable. Cependant, si l'interruption *IRQ0* intervient au moment d'une opération de lecture de l'interruption *timer 1*, c'est-à-dire si l'instruction est déjà engagée dans le pipeline, le processeur doit attendre la fin de l'exécution de celle-ci pour préserver l'intégrité des données. Dans le cas normal où l'instruction en cours au moment de l'interruption n'utilise pas de ressource lente, l'interruption est servie en quelques cycles. Cependant, nous avons vu que des accès externes peuvent être relativement longs, ce qui explique le phénomène de gigue de code qui se manifeste dans cet exemple.

Solutions aux problèmes de latences et de gigue de code

La question de la gigue de code concerne particulièrement la gestion des interruptions, puisque celles-ci correspondent à des événements asynchrones.

Une première solution consiste à rendre les interruptions compatibles avec les lectures externes en :

- n'effectuant aucune opération bus (externe) pendant l'interruption,
- interdisant l'utilisation des registres cibles des opérations de lecture dans les interruptions.

Cependant, ces restrictions peuvent être très contraignantes lorsqu'il est nécessaire, comme c'est le cas ici, d'effectuer des échanges intensifs de données entre les deux DSP. En effet, lors de l'interruption *timer 0*, le DSPA doit disposer des dernières données enregistrées par le DSPB, et ceci nécessite un accès à la mémoire de ce dernier (lecture).

La solution retenue consiste à supprimer toutes les opérations de lecture externes et à les remplacer par des opérations d'écriture. Bien que ces-dernières utilisent également le *cluster bus*, et sont de ce fait affectées de la même façon par les délais de la transaction, le transfert n'interrompt pas l'exécution du programme. En effet, contrairement aux opérations de lecture pour lesquelles le processeur doit attendre que les registres de destination aient reçu la donnée pour poursuivre son exécution, les opérations d'écriture libèrent le processeur dès lors que la donnée est transférée à la FIFO de sortie (voir figure 5-7) puisque l'intégrité des données n'est pas menacée.

La méthode employée consiste à répliquer dans la mémoire interne de chaque processeur toutes les variables partagées des autres processeurs, une variable partagée désignant une variable pouvant être exploitée par les autres DSP. Ainsi, lorsque le DSPA doit lire une variable du DSPB par exemple, il lui suffit de lire en interne l'image de celle-ci sans accéder au *cluster bus*. La figure 5-17 illustre ce principe des variables images.

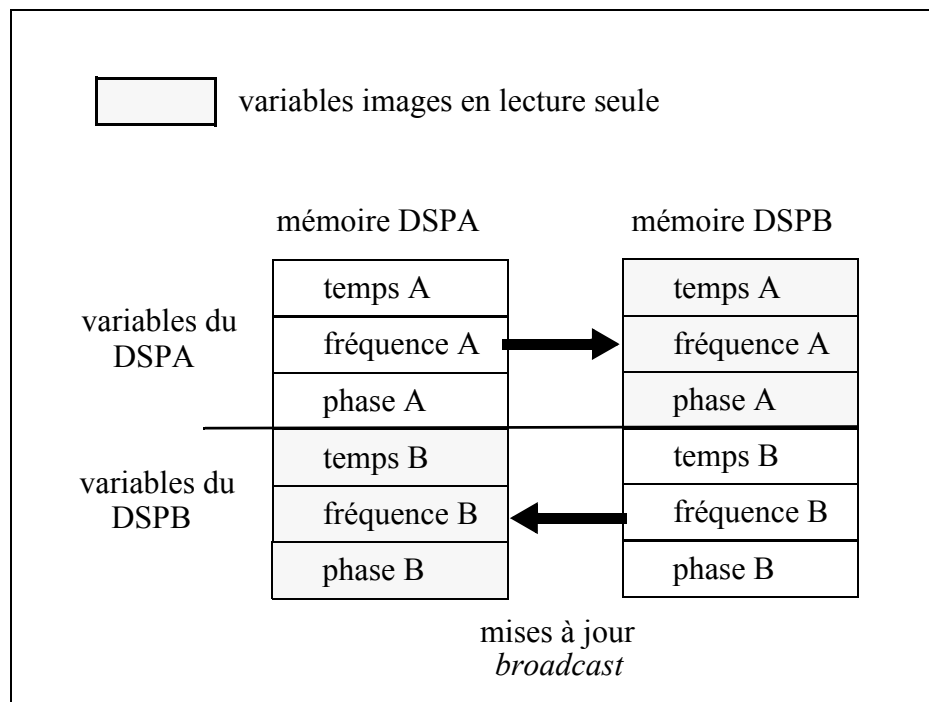


Figure 5-17 : Principe des variables images

Bien entendu, cette technique contraint chaque processeur à mettre à jour ses variables propres dans la mémoire interne des autres processeurs dès que celles-ci sont modifiées. Ceci s'effectue très simplement en affectant les variables *via* un accès broadcast (voir §5.3.2), qui permet d'écrire automatiquement dans les mémoires des autres DSP sans opération supplémentaire.

La figure 5-18 montre les résultats obtenus pour une mesure de fréquence utilisant ce principe.

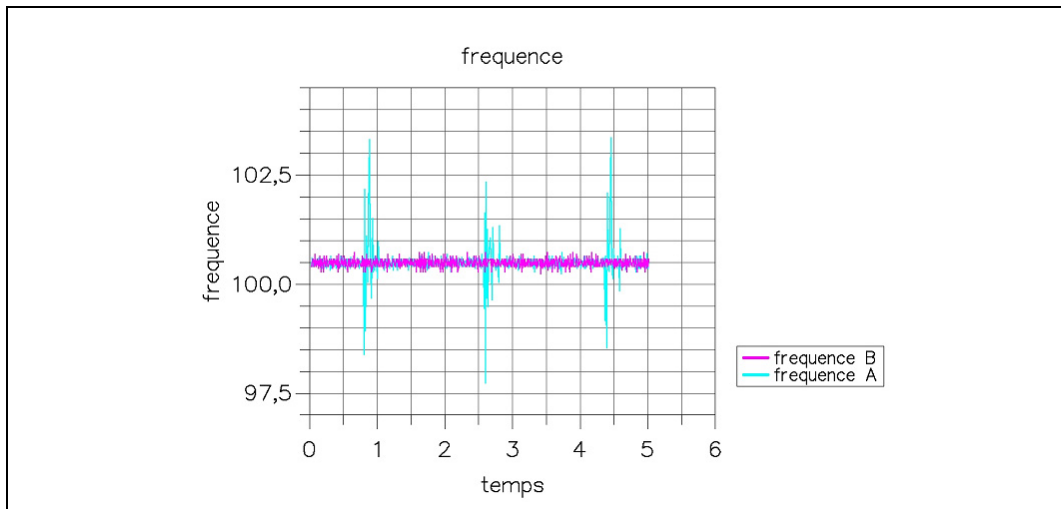


Figure 5-18 : mesure de fréquence avec variables image

On voit sur la figure les fréquences des deux voies A & B. La voie B est totalement exempte de phénomènes de gigue de code. La voie A est encore marquée par quelques oscillations très légères, mais l'excursion maximale est de 2,5 kHz seulement contre 25 kHz précédemment.

Signalons pour finir qu'une méthode très efficace pour enregistrer la date d'un événement sans être confronté à ce type de problème, consiste à utiliser une horloge qui capture automatiquement la valeur du compteur lors de l'interruption. Cependant, le TigerSHARC ne dispose pas de ce type de ressources et l'utilisation d'un périphérique externe réalisant cette fonction n'a pu être mise en oeuvre au cours de la thèse.

5.6 Résultats et performances

Afin de tester l'ensemble de la chaîne de traitement, nous avons réalisé le lissage polynomial d'un signal sinusoïdal modulé en fréquence, comme illustré sur la figure 5-19. Nous avons introduit une différence d'amplitude entre les deux voies de 40 dB pour

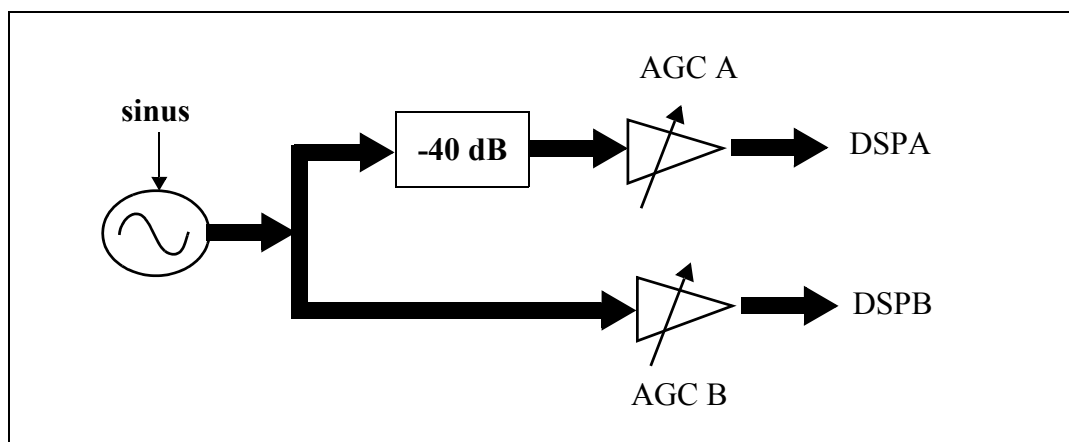


Figure 5-19 : Synoptique de la méthode de test

tester et comparer deux rapports signal-à-bruit différents.

La figure 5-20 montre la mesure de la phase à temps variable et son interpolation à

temps constant, lue directement dans la mémoire du DSP. On observe que l'interpola-

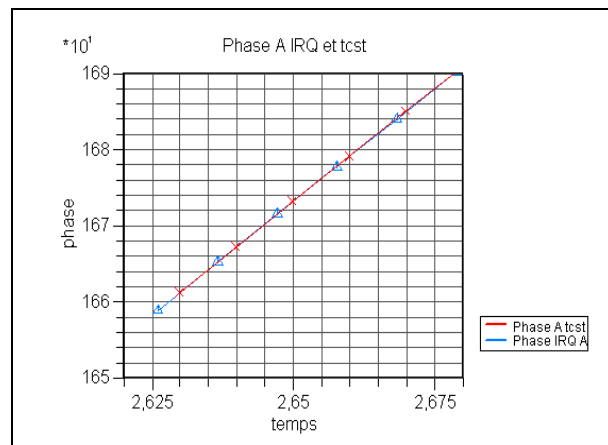


Figure 5-20 : Interpolation de la phase (zoom)

tion n'introduit pas d'erreur sensible. Les courbes de la figure 5-21 présentent les résultats du lissage de fréquence pour les voies A et B. La mesure de fréquence de la voie A est plus bruitée que celle de la voie B puisque son rapport signal-à-bruit est plus faible. En revanche, on ne constate aucune différence entre les polynômes de lissage des

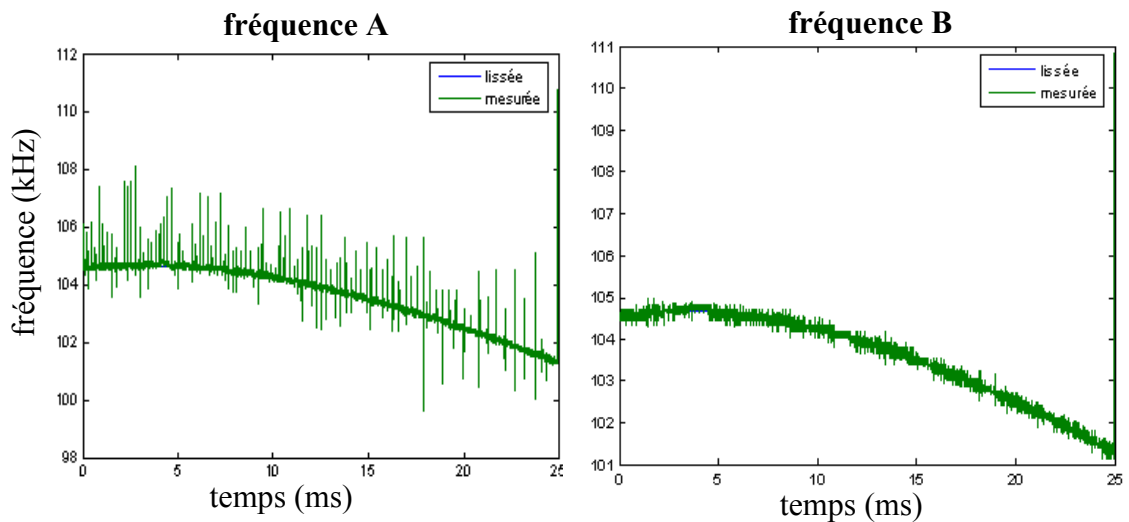


Figure 5-21 : polynôme de lissage des fréquences A (à gauche) et B (à droite)

deux voies, comme indiqué par la figure 5-21.

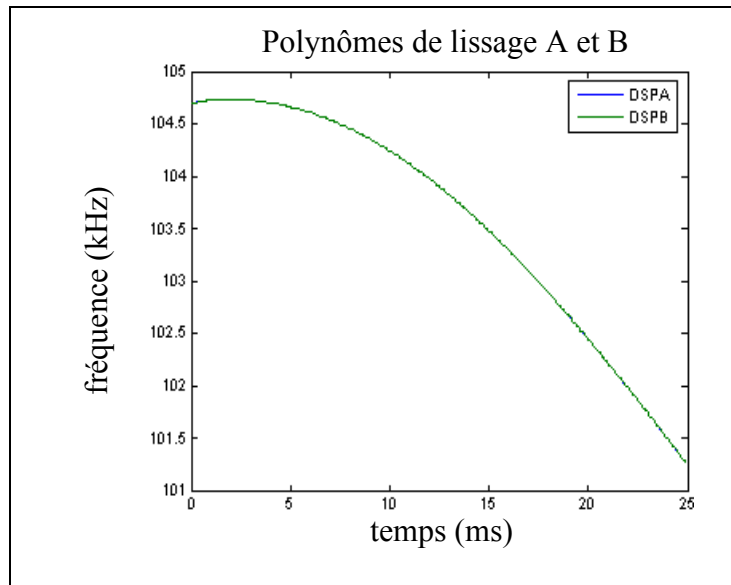


Figure 5-22 : Polynômes de lissage A et B

Ces résultats permettent de vérifier le bon fonctionnement de la chaîne de traitement, depuis l'acquisition des signaux jusqu'au lissage polynomial, et valident le bon fonctionnement de toutes les opérations.

Vitesse des algorithmes

Pour tester les performances de l'algorithme en termes de vitesse, nous avons mesuré les temps d'exécution des différentes routines à l'aide du compteur de cycles du TigerSHARC (CCNT0).

La figure 5-23 montre le nombre de cycles d'exécution de l'interruption IRQ0 qui a été mesurée 1000 fois.

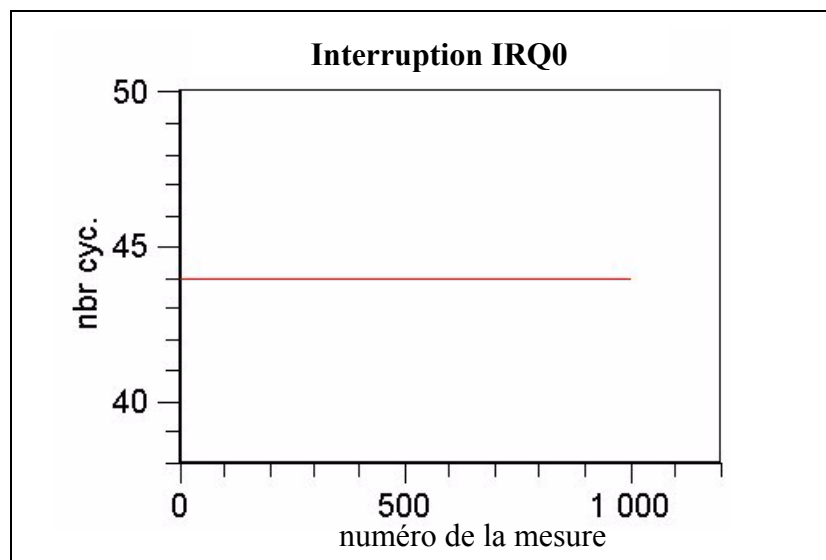


Figure 5-23 : nombre de cycles d'exécution de l'interruption IRQ0

On constate que celle-ci s'exécute toujours en 44 cycles, soit une durée de 176 ns, le

temps de cycle étant de 4 ns (250 MHz). La figure 5-24 montre le nombre de cycles d'exécution de l'interruption *timer 1* pour 1000 mesures. La valeur obtenue est de 61 cycles soit 244 ns.

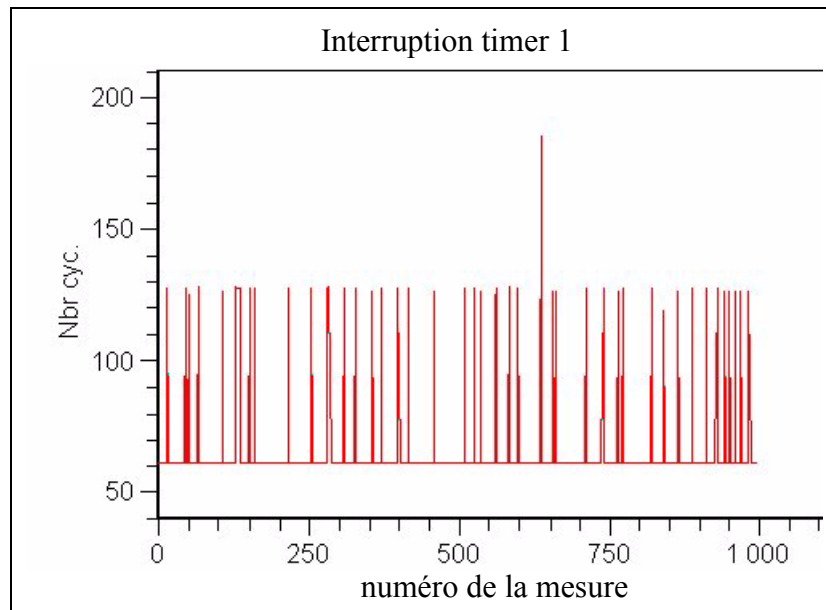


Figure 5-24 : Nombre de cycles d'exécution de l'interruption Timer 1

Cette routine est la plus lente puisqu'elle effectue le lissage polynomial. On note également des pics pouvant atteindre 128 cycles correspondant aux cas où l'interruption *timer 1* est interrompue par une interruption de priorité plus haute (IRQ0 et conversion A/N). Enfin, la figure 5-25 montre le nombre de cycles d'exécution de l'interruption chargée de la conversion numérique/analogique du signal de contrôle. Elle compte 44 cycles, soit 176 ns, avec là aussi des pics plus importants dûs aux interruptions de priorités plus hautes.

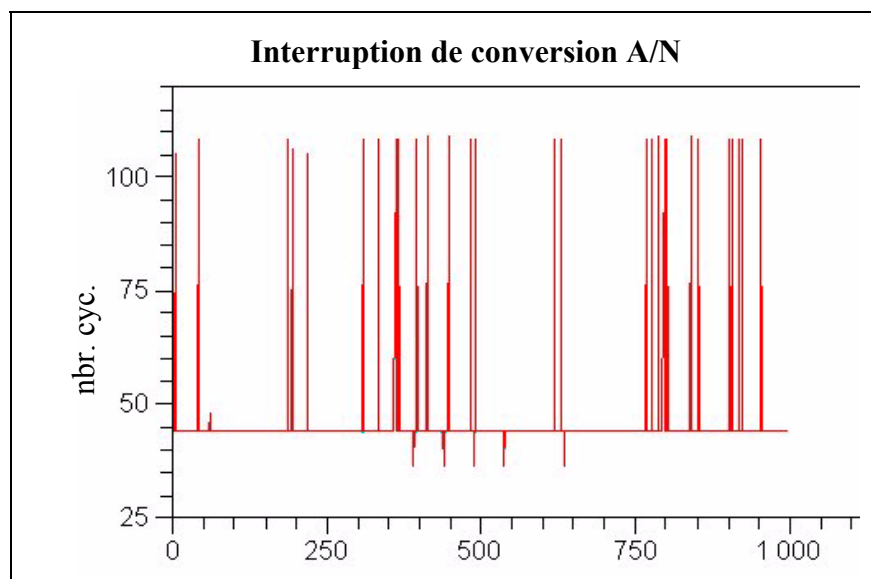


Figure 5-25 : Nombre de cycles d'exécution de l'interruption de conversion A/N

Le temps d'exécution du DSPA qui traite les trois interruptions est de

$$T_{exec} = 2 \times 176 \text{ ns} + 244 \text{ ns} = 596 \text{ ns}$$

La fréquence d'interruption de la routine de conversion analogique/numérique est de 96 kHz, celle de timer 1 est de 100 kHz et celle de IRQ0 dépend de la fréquence Doppler mesurée, mais celle-ci se situe également autour de 100 kHz. Nous pouvons donc supposer que les trois interruptions s'exécutent en moyenne une fois toutes les 10 μ s. La puissance de calcul consommée est donc de 6% environ. En masquant l'interruption de conversion analogique lorsque le projectile est détecté, on peut ramener cette valeur à 4,2%.

Le DSPB ne traite, lui, que l'interruption IRQ0, ce qui correspond à un temps d'exécution de 176 ns et une charge de 1,76%.

Le noyau temps réel pour le traitement des deux signaux radar représente donc une charge totale de 2,98% répartie sur deux DSP. En d'autres termes, la puissance disponible pour le corps du programme est de 4851 cycles par échantillon. Cette valeur relativement importante devrait donc permettre d'effectuer la tâche itérative en quelques périodes d'échantillonnage, voire même une seule, rendant la méthode PMDR compatible avec un traitement en temps réel.

5.7 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre les possibilités d'intégration du noyau temps réel de la méthode PMDR sur une plate-forme DSP TigerSHARC. Nous avons utilisé une architecture bi-processeur de manière à pouvoir éventuellement traiter plusieurs signaux radars.

Plusieurs facteurs susceptibles d'affecter l'intégration des algorithmes ont été mis en évidence.

Tout d'abord, la précision numérique limitée des dispositifs embarqués, par rapport aux plate-formes de calcul qui utilisent un format flottant à 64 bits, peut conduire à des divergences numériques de l'algorithme de lissage polynomial. Nous avons montré qu'il est possible de stabiliser numériquement l'algorithme en utilisant des bases mieux conditionnées, telle que la base des polynômes de Legendre.

Nous avons ensuite étudié l'influence de l'utilisation d'un pipeline présent sur la plupart des architectures complexes, et notamment celle des phénomènes d'interdépendance entre les instructions. Il est apparu qu'une mauvaise gestion du pipeline pouvait parfois allonger les durées d'exécution jusqu'à un facteur 2. Ces problèmes peuvent être corrigés en réorganisant l'ordre des instructions.

Enfin, nous nous sommes intéressés aux transactions externes qui sont inévitables dans une configuration multiprocesseur. Nous avons mis en évidence que les opérations de lecture externes peuvent considérablement pénaliser l'exécution d'un algorithme, contrairement aux opérations d'écriture qui ne ralentissent pratiquement pas le traitement. La solution retenue consiste à supprimer toutes les lectures externes en utilisant une réplique interne de toutes les variables partagées, celles-ci étant mises à jour *via* des accès *broadcast*.

Les différentes optimisations apportées à l'algorithme RLS ont permis de réduire le temps de traitement des deux signaux radar à 596 ns par échantillon, soit une charge de calcul totale d'environ 3%. Le paragraphe §4.5.7 du chapitre 4 indique un rapport de 250 environ entre les temps d'exécution MATLAB de l'algorithme RLS et ceux de la méthode de Levenberg-Marquardt. En s'appuyant sur ces données, une itération peut être effectuée toutes les 70 μ s, soit tous les 7 échantillons environ. Bien que très

approximatifs, l'ordre de grandeur de ces résultats indique qu'il est tout à fait possible d'utiliser la méthode PMDR en temps réel sur des systèmes embarqués, même pour des estimations relativement complexes.

Conclusion

Le travail de recherche présenté a principalement traité de la question de la localisation d'un projectile hypervélocé en temps réel à partir de mesures radar, en vue d'une application pour le blindage actif. La problématique de cette application est caractérisée par trois points. Tout d'abord, les vitesses très importantes des projectiles (1000 à 2000 m/s), couplées à des plages d'observation très réduites, conduisent à de très fortes contraintes sur les durées d'exécution des algorithmes. Ensuite, l'efficacité de la riposte étant directement liée à la précision de localisation du projectile, les erreurs ne doivent pas excéder quelques centimètres pour permettre une interception. Cette exigence pèse non seulement sur les algorithmes d'estimation qui sont tenus d'exploiter les mesures de manière quasi-optimale, mais aussi et surtout sur la qualité des mesures radars elles-mêmes, car celles-ci définissent les performances maximales pouvant être atteintes, à travers la borne de Cramér-Rao. Enfin, l'ISL a souhaité que l'ensemble du dispositif ait un coût très modeste, ce qui exclut d'emblée l'utilisation de radars sophistiqués.

L'approche initiale se fonde sur des mesures de vitesses radiales obtenues grâce à un ou plusieurs radars Doppler. Deux cas ont été étudiés : le cas 1, où un seul radar est utilisé pour une estimation 2-D, et le cas 2, où trois radars permettent une estimation de la position dans l'espace à trois dimensions. Bien que les besoins expérimentaux nous aient amené à concevoir un radar plus performant et donc plus onéreux que le dispositif initial, le type de radar utilisé est relativement bon marché et conduit à un système à faible coût. En revanche, l'analyse de la CRLB montre que les mesures contiennent, par nature, très peu d'informations quant à la position du projectile, ce qui nous a contraint à limiter l'étude à des trajectoires dont les angles d'incidence sont supposés connus. Ceci s'explique par le fait que la grandeur qui est effectivement exploitée pour l'estimation de la position est la *variation* de l'angle sous lequel le projectile est observé par le radar, grandeur qui devient rapidement nulle avec la distance. Ce problème peut être rapproché de ceux appartenant à la catégorie dite "de mesures d'angles et de Doppler", déjà caractérisés par la mauvaise observabilité des paramètres de position, si ce n'est qu'ici c'est la dérivée de l'angle qui est mesurée au lieu de l'angle lui-même, ce qui dégrade encore davantage les précisions de l'estimation. En plus de l'impact inévitable de la qualité des mesures sur les précisions maximales, nous avons mis en évidence que la mauvaise observabilité des paramètres affectait les algorithmes d'estimation standards, tels que les filtres EKF et UKF, de manière non négligeable. Pour répondre à ce problème, nous avons développé un nouveau type d'algorithme, fondé sur une compression du signal suivie d'une optimisation itérative, qui se révèle être moins sensible à la mauvaise observabilité des paramètres que les algorithmes purement récursifs, et permet quasiment d'atteindre la CRLB. Les possibilités de mise en oeuvre de la méthode PMDR en temps réel, pour une période d'échantillonnage de

10 μ s, ont été validées en réalisant une implantation sur une plate-forme multiprocesseur comportant deux DSP TigerSHARC. Cependant, les performances obtenues en simulation, qui sont d'environ 5 cm d'erreur pour une distance de localisation de 10 m, demeurent trop limitées pour le type de riposte adopté par l'ISL. En effet, d'une part ces valeurs supposent les angles connus exactement, d'autre part elles sont vraisemblablement optimistes par rapport à l'application réelle. De plus, les objectifs n'ont pas été clairement définis et la distance de localisation pourrait être supérieure à 10 m.

Nous avons alors proposé une seconde approche fondée sur un radar MFCW, qui fournit une mesure directe de la distance de la cible. Cependant, l'activité du blindage actif ayant été arrêtée en cours de thèse, nous avons envisagé cette étude dans le cadre de la détection de tireur embusqué. Cette application peut être vue comme une généralisation de la problématique du blindage actif puisque les trajectoires ne sont plus supposées rectilignes, mais intègrent plusieurs phénomènes balistiques tels que la décélération du projectile et les effets de la gravité terrestre. En revanche, l'aspect temps réel ne constitue plus une contrainte majeure puisque le résultat de la localisation peut être produit une ou plusieurs secondes après l'impact de la balle. Nous avons ainsi pu montrer que, sur la base des caractéristiques de précision du radar MFCW obtenues expérimentalement, les précisions maximales qui pouvaient être atteintes sur la direction du tir étaient inférieures au degré et sont donc équivalentes à celles des dispositifs acoustiques ou même meilleures. De plus, ces précisions maximales sont effectivement atteintes, aussi bien par un algorithme itératif standard que par la méthode PMDR.

En résumé, notre démarche s'est articulée autour de deux approches. La première, qui est celle préconisée par l'ISL, a été explorée entièrement puisque les trois volets que comporte l'étude, à savoir l'aspect radar, le traitement des signaux et l'intégration sur une plate-forme de calcul embarquée, ont été abordés. Les objectifs fixés par l'ISL, qui portaient essentiellement sur le traitement des signaux et l'intégration sur une plate-forme embarquée, ont été atteints grâce à la méthode PMDR. La réalisation d'un nouveau radar n'entraîne pas dans les objectifs fixés pour la thèse mais a été entreprise afin de disposer de signaux exploitables. La deuxième approche devait permettre de répondre aux limitations du principe de localisation par mesures Doppler, mais celle-ci n'a pu aboutir et a dû être reconvertie en détection de tireur embusqué. Cette réorientation tardive ne nous a malheureusement pas laissé le temps d'étudier cette nouvelle application de façon approfondie, mais une étude des performances et des algorithmes de traitement des signaux a tout de même pu être effectuée.

Dans les deux cas, on peut regretter l'absence de résultats de traitement portant sur des signaux expérimentaux obtenus dans les conditions réelles de l'application. La raison en est tout d'abord que le radar disponible au commencement de l'étude ne permettait pas d'effectuer des enregistrements dans de telles conditions. Ensuite, lorsque les nouveaux radars furent réalisés, seules trois campagnes de tirs purent être menées. La première avait pour objectif le test des performances du radar tandis que les deuxième et troisième campagnes connurent quelques problèmes techniques.

Quoi qu'il en soit, il ressort de cette étude deux résultats principaux, à savoir le radar MFCW et la méthode PMDR, qui présentent un intérêt au-delà des applications étudiées.

Le principe du radar MFCW est connu et utilisé depuis les années 1950 environ, tout d'abord sous la forme du Telluromètre, utilisé par les géomètres, puis comme radar de

contrôle de niveau de cuves par exemple. Cependant, en dépit de nombreuses recherches, nous n'avons trouvé, dans un premier temps, aucune application utilisant ce type de radar pour la localisation et le suivi de cibles. Ceci peut sembler assez étonnant puisque le radar MFCW présente d'excellentes caractéristiques de ce point de vue : d'une part, étant continu, il permet en effet une acquisition instantanée et une poursuite très efficace des cibles, d'autre part, son principe à fréquences multiples lui confère une précision optimale. De plus, il ne présente pas d'ambiguïté en vitesse. Selon nous, sa faible utilisation est principalement liée à la très grande difficulté dont souffre ce type de radar pour séparer deux cibles ayant la même fréquence Doppler. En effet, la mesure de phase fournit une information pertinente sur la distance à condition de correspondre à une cible unique. Cette limitation réduit le spectre d'application du radar MFCW aux cas où les cibles sont clairement isolées, soit par leur environnement comme pour la mesure de niveaux, soit par leur vitesse comme pour le blindage actif. De plus, les avantages propres exclusivement au radar MFCW, à savoir une mesure purement continue et une précision optimale, ne présentent pas toujours un intérêt évident par rapport au radar à pas de fréquences SFCW, pour lequel les fréquences sont transmises successivement. Cependant, nos applications ne sont pas concernées par ces contraintes puisque les cibles sont clairement différenciées par leurs vitesses très élevées et peuvent donc tirer pleinement profit des avantages du radar MFCW, notamment des précisions, de la mesure continue et de l'absence d'ambiguïté en vitesse. Ces différents points laissent penser que, si le radar MFCW est inadapté pour un grand nombre d'applications, il est en revanche un candidat idéal, sinon le meilleur, pour le suivi de cibles très rapides où une grande précision est exigée. Cet avis a été conforté très récemment par des données concernant le radar RR-2100 fabriqué par Weibel Scientific, leader mondial dans le domaine des radars de poursuite de cibles, données qui ont été rendues accessibles sur le Web [106]. Celles-ci révèlent que le radar RR-2100 utilise le principe à fréquences multiples, mais où les fréquences sont transmises deux par deux. Nous supposons que l'une des deux fréquences est transmise continûment tandis que la seconde varie en fonction de la précision et de la plage d'ambiguïté souhaitée. Cette technique très astucieuse permet d'augmenter les performances du radar en ne transmettant que deux voies simultanément et se rapproche du fonctionnement du radar SFCW. Un brevet de la société Hitachi paru en 2004 [107], affirme la possibilité de discriminer plusieurs cibles ayant le même spectre Doppler. La méthode exploite un traitement des phases pour un radar MFCW utilisant des signaux à des fréquences particulières. Si cette méthode s'avérait concluante, elle ouvrirait un gros potentiel applicatif au radar à fréquences multiples.

La méthode PMDR est avant tout une technique de compression polynomiale du signal. Son association avec une méthode itérative, mise en oeuvre avec succès pour les trois cas traités dans notre étude, doit être considérée comme un cas particulier d'utilisation. Ses principales caractéristiques sont : des performances, en termes de précision, comparables à celles des algorithmes d'optimisation hors-ligne, une plus grande robustesse aux estimations de paramètres à faible observabilité ainsi qu'une capacité à absorber des flots de données très importants. De plus, la structuration du traitement sous forme de deux tâches parallèles, l'une de compression du signal, l'autre d'estimation proprement dite, rend cette méthode parfaitement adaptée à un traitement parallèle. Ses limitations dépendent essentiellement de la capacité de la fonction d'observation à être représentée convenablement par un polynôme, dont le degré est de préférence relativement modeste afin d'éviter des problèmes de calcul numérique. Ces restrictions ne touchent pas nos applications puisque, comme nous l'avons vu, les fonctions

d'observations considérées sont très régulières. Dans un contexte plus général, ces hypothèses ne sont pas toujours vérifiées. Cependant, une extension possible de la méthode PMDR consiste à décomposer le domaine de définition de la fonction d'observation en segments contigus pour réaliser des approximations polynomiales par morceaux. Cette approche permet alors d'appliquer la méthode à presque toutes les fonctions d'observations envisageables. La contre-partie est la multiplication du nombre de PS par le nombre de segments, pouvant conduire à un nombre de données à traiter en temps réel trop important pour un algorithme itératif. Il est alors envisageable d'utiliser des algorithmes récursifs tels que les filtres particulaires, qui sont pour l'heure limités par le nombre important de particules devant être mises à jour à chaque échantillon. La méthode PMDR permet justement d'agir sur ce point en réduisant d'un certain facteur le nombre d'échantillons à traiter, ce qui a pour effet d'accélérer virtuellement le filtre particulaire du même facteur.

Annexes

Annexe I: Schémas

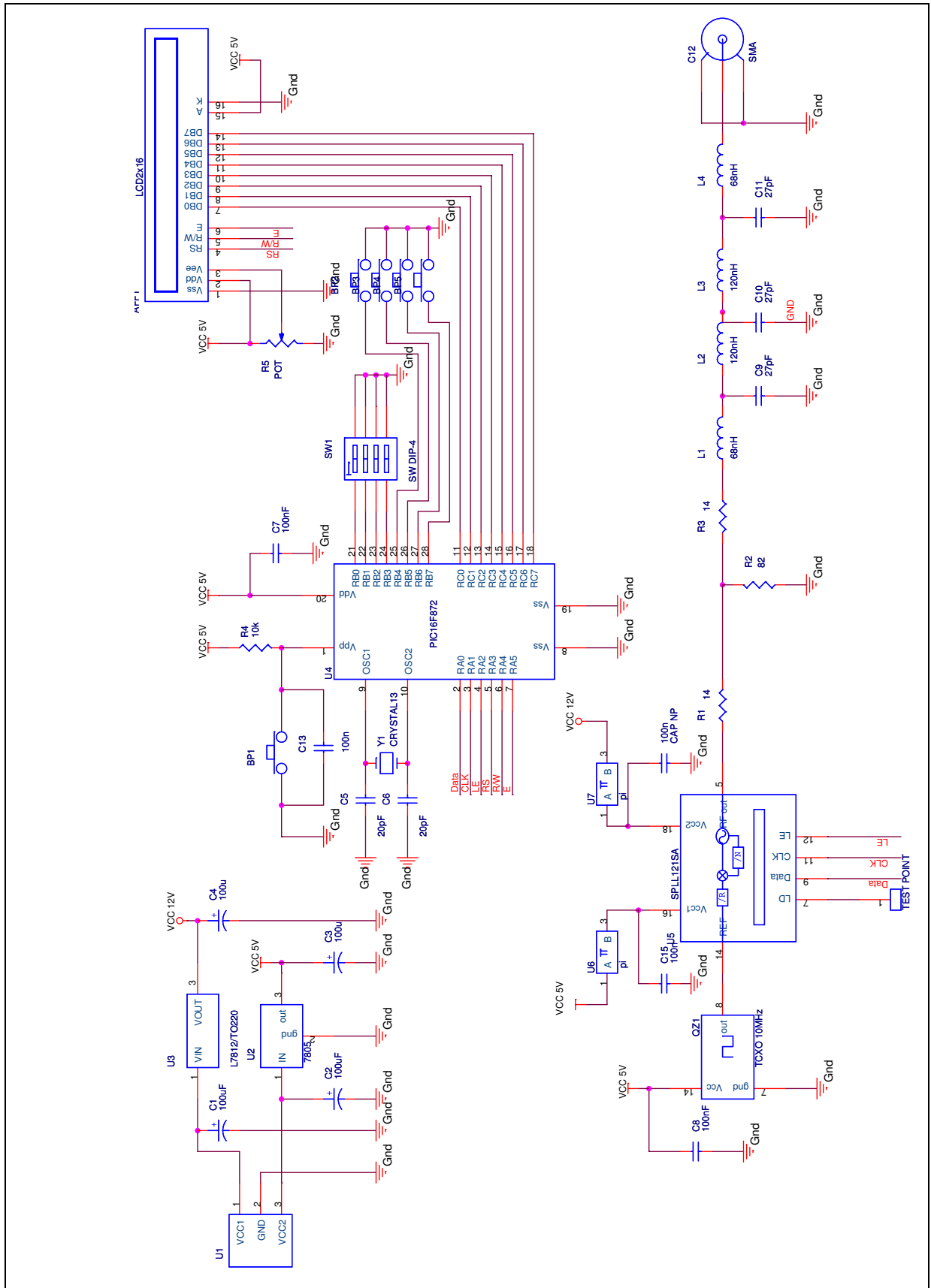


Figure A-1 : Schéma du synthétiseur de fréquences

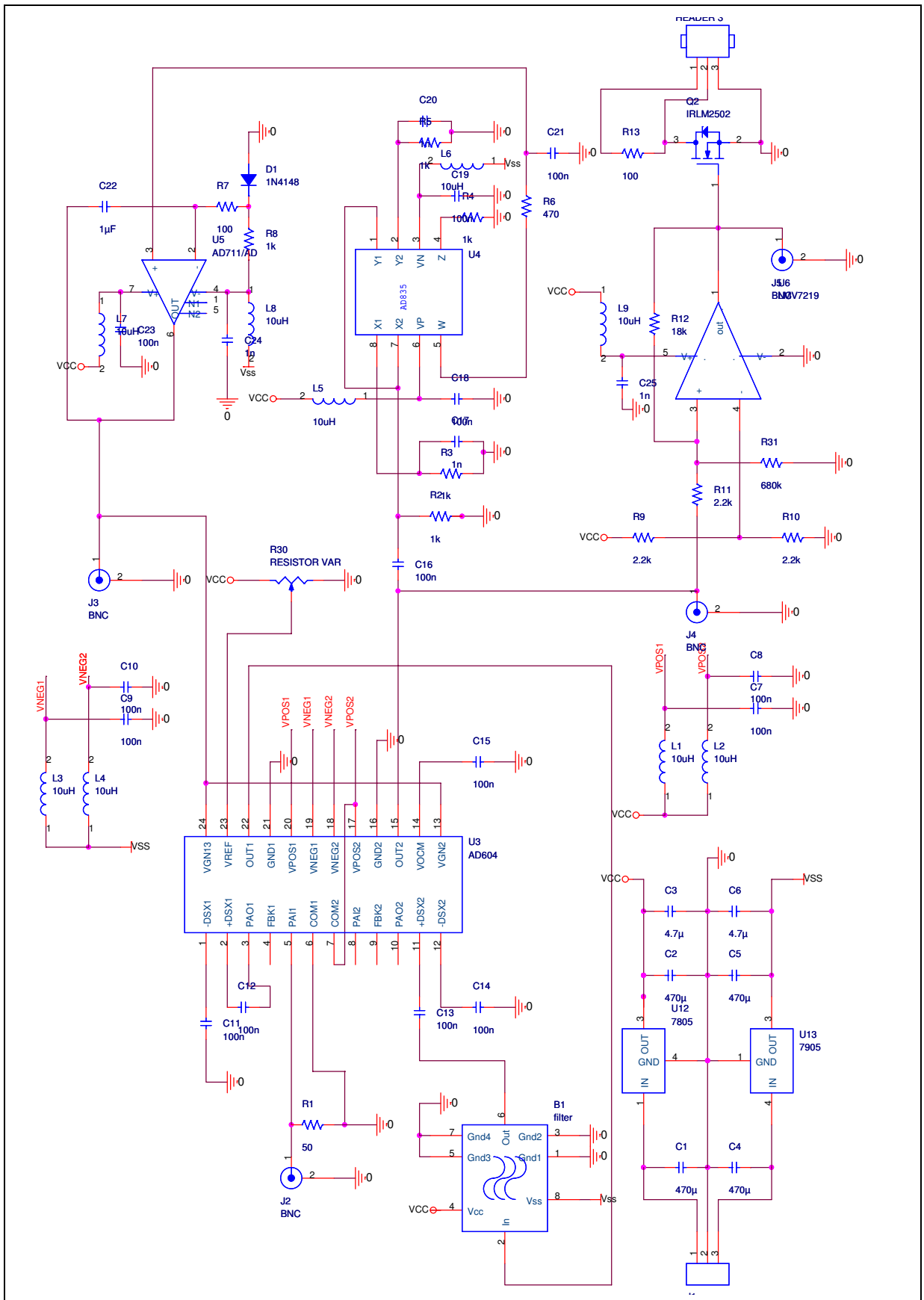


Figure A-2 : Schéma de l'AGC

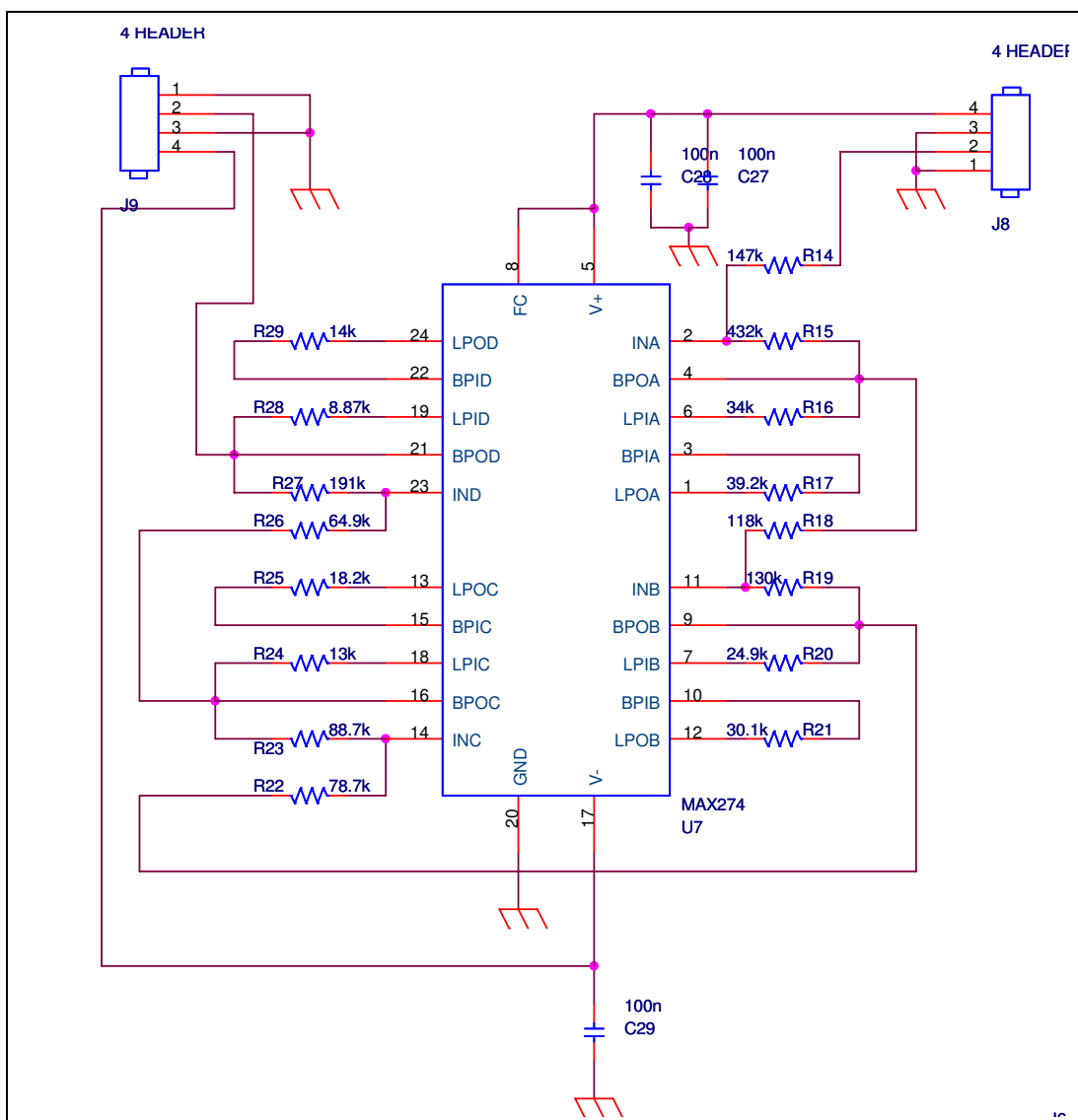


Figure A-3 : filtre de l'AGC

Annexe II: Etude du dispositif d'adaptation du synthétiseur

Une adaptation du signal de sortie du synthétiseur est nécessaire tout d'abord parce que le niveau de sortie est de 5dBm tandis que le niveau d'entrée du PL-DRO doit être de 0dBm, ensuite parce que le signal de sortie du VCO comporte des harmoniques 2 et 3 non négligeables (-15dBc) qu'il convient de supprimer afin d'améliorer la qualité du signal. Le schéma du dispositif d'adaptation du signal est donné figure A-4, il comporte un diviseur résistif suivi d'un filtre formé par 3 cellules en T.

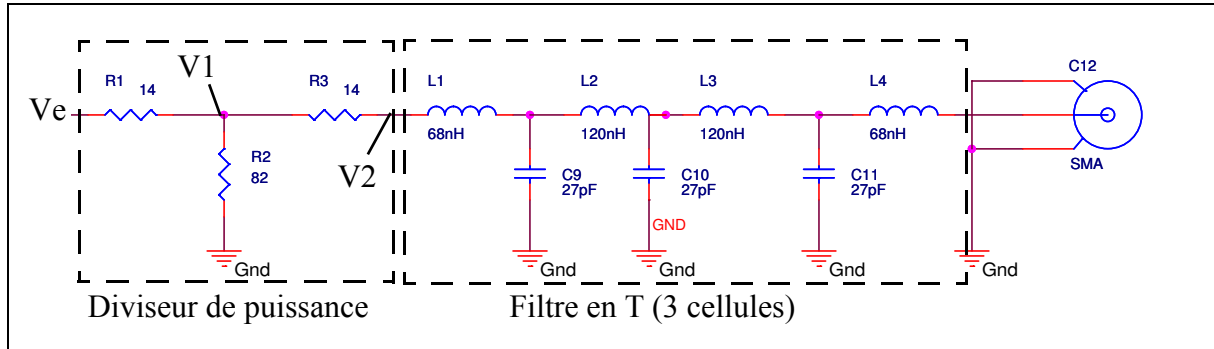


Figure A-4 : dispositif d'adaptation du synthétiseur

On fixe l'impédance d'entrée et l'impédance de sortie à $Z_0 = 50 \Omega$. On obtient immédiatement par symétrie que $R1 = R3$. L'impédance d'entrée et de sortie impose :

$$Z_0 = R1 + \frac{(R1 + Z_0)R2}{R1 + Z_0 + R2} \Rightarrow R2 = \frac{(Z_0 - R1)(Z_0 + R1)}{2R1} \quad (\text{A:1})$$

On calcule ensuite la tension V1 selon la formule de Millman, puis on remplace R2 d'après (A:1) pour obtenir

$$V1 = \frac{\frac{Ve}{Z_0 + R1}}{\frac{2}{R1 + Z_0} + \frac{1}{R2}} = Ve \frac{(Z_0 - R1)}{2 \cdot Z_0} \quad (\text{A:2})$$

D'où

$$V2 = Ve \frac{(Z_0 - R1)}{2 \cdot Z_0} \cdot \frac{Z_0}{R1 + Z_0} \quad (\text{A:3})$$

En notant le rapport de division $\alpha = 2 \cdot V2/Ve$ il vient finalement

$$R1 = Z_0 \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \quad (\text{A:4})$$

Ici $\alpha = 10^{-5/20} \approx 0,562$ ce qui donne $R1 = 14 \Omega$ et $R2 = 82 \Omega$.

Les 3 cellules en T composant le filtre correspondent au schéma de la figure A-5.

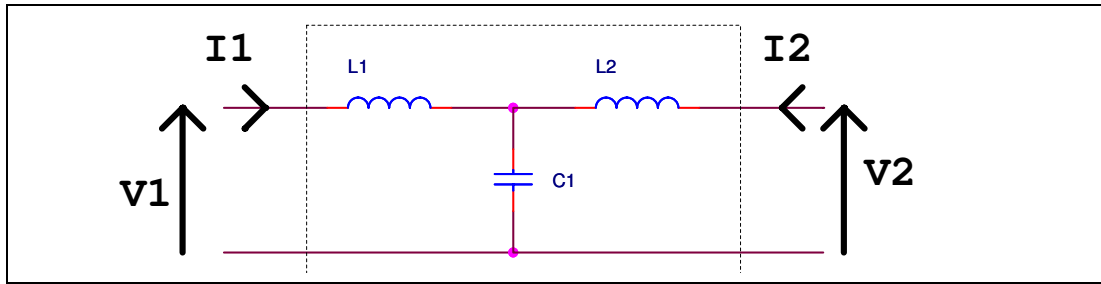


Figure A-5 : Cellule en T

La cellule étant symétrique on a $L1 = L2 = L$ et les paramètres Z sont donnés par

$$Z = \frac{1}{iC\omega} \cdot \begin{bmatrix} 1 - LC\omega^2 & 1 \\ 1 & 1 - LC\omega^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A:5})$$

Afin de déterminer les valeurs L et C , on impose que les impédances d'entrée et de sortie à la pulsation $\omega_0 = 2\pi \cdot 128$ rad/s soient égales à l'impédance de la ligne $V1/I1 = Z_0$ ainsi que $V2/I2 = -Z_0$. Ceci conduit à la relation suivante

$$Z_0^2 = Z_{11}^2 - Z_{12}^2 \Leftrightarrow Z_0^2 = \frac{1}{C^2\omega^2} [1 - (1 - LC\omega^2)^2] \quad (\text{A:6})$$

On en déduit les valeurs des composants:

$$\begin{aligned} LC\omega_0^2 &= 1 \\ C &= \frac{1}{Z_0\omega_0} \end{aligned} \quad (\text{A:7})$$

On trouve $C \approx 25$ pF et $L \approx 61$ nH, on choisit donc les valeurs normalisées les plus proches soit $C = 27$ pF et $L = 68$ nH.

Annexe III : Etalonnage du radar MFCW

Tests en chambre anéchoïque.

Tableau A-1 : fréquences du radar

$f_1=10,72050$ GHz	$f_2=10,77090$ GHz	$f_3=10,24000$ GHz	$f_3=10,25000$ GHz
--------------------	--------------------	--------------------	--------------------

Tableau A-2 : longueurs d'ondes équivalentes

$\lambda_{3-4}=30$ m	$\lambda_{1-2}=5,9524$ m	$\lambda_{2-3}=0,56508$ m	$\lambda_3=0,029297$ m
----------------------	--------------------------	---------------------------	------------------------

Tableau A-3 : Mesures pour l'étalonnage du MFCW-4 fréquences

N°	Sens	distance réf.	course	dr_{3-4}	dr_{1-2}	dr_{2-3}
1	approche	tests				
2	approche	1,78	2,635	9,43	0,13	0,16
3	approche	1,48	2,635	9,52	0,19	0,145
4	approche	1,48	5,56	9,42	0,20	0,16
5	approche	1,44	5,56	9,35	0,14	0,11
6	approche	1,37	8,40	9,28	0,1	0,09
7	approche	1,165	8,40	9,26	0,06	0,09
8	éloignement	1,29	8,03	9,36	0,15	0,25
9	éloignement	1,30	8,51	9,18	0,18	0,22
10	éloignement	1,355	8,425	9,35	0,13	0,25
11	éloignement	1,685	8,43	9,41	0,18	0,27
12	éloignement	1,49	8,43	9,41	0,14	0,23
13	éloignement	1,45	8,43	9,37	0,13	0,25
14	éloignement	1,50	8,43	9,335	0,13	0,26
15	éloignement	1,44	8,48	9,30	0,14	0,23
moyenne						

Annexe IV: Résultats des essais de Baldersheim du 20 avril

IV.1 Tir 1

Tableau A-4 : données expérimentales du tir 1

$f_1=10,72155$ GHz			vitesse=1403 m/s		
$f_2=10,77510$ GHz			projectile= gros projectile, diam=12 mm		
a=0,01 m	b=1,35 m	c=14,47 m	d=0,35 m	e=1,19 m	7,23 m
commentaire : le diaphragme masque le projectile sur une partie de la trajectoire					

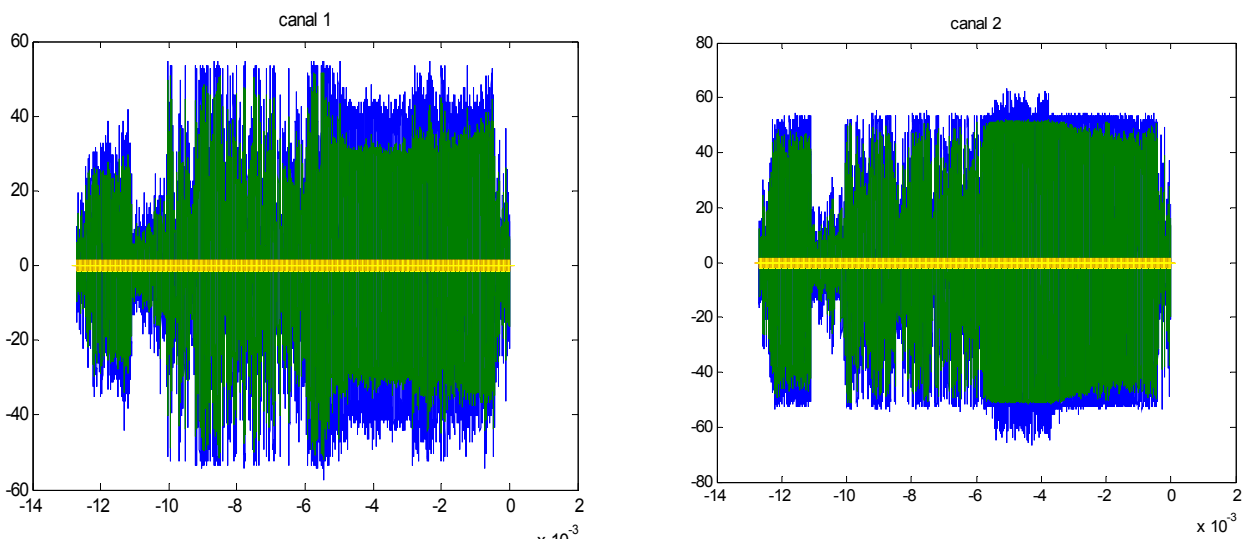


Figure A-6 : Tir 1 - signaux primaires bruts

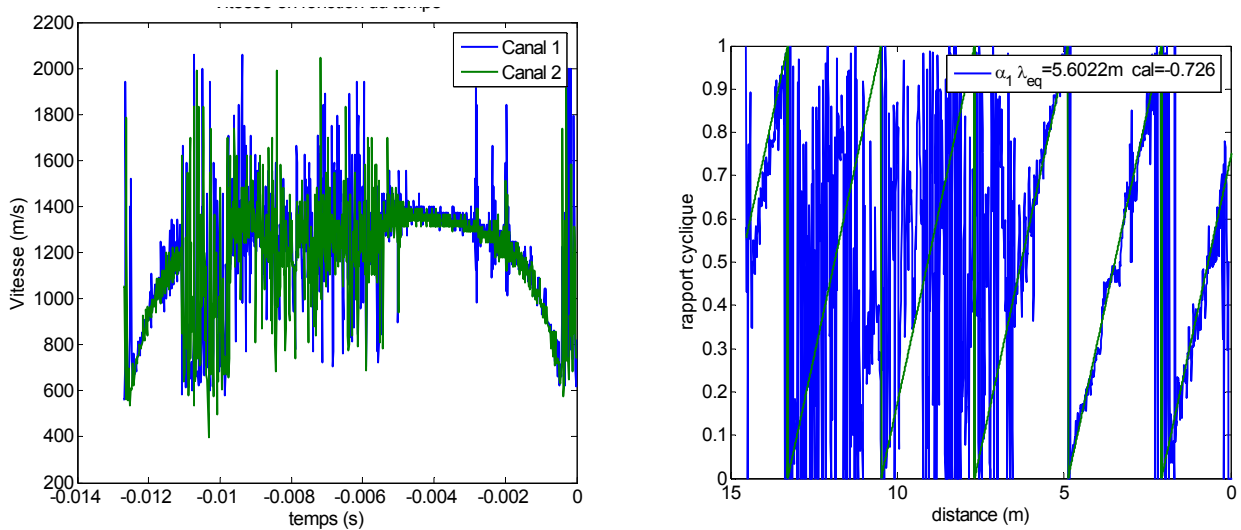


Figure A-7 : Tir 1 - vitesse et rapport cyclique

IV.2 Tir 2

Tableau A-5 : données expérimentales du tir 2

$f_1=10,7215$ GHz			vitesse= 1407 m/s		
$f_2=10,77510$ GHz			projectile= gros projectile, diam= 12 mm		
$a=0,01$ m	$b=1,35$ m	$c=14,47$ m	$d=0,35$ m	$e=1,19$ m	$7,23$ m
commentaire : Tir identique au premier tir.					

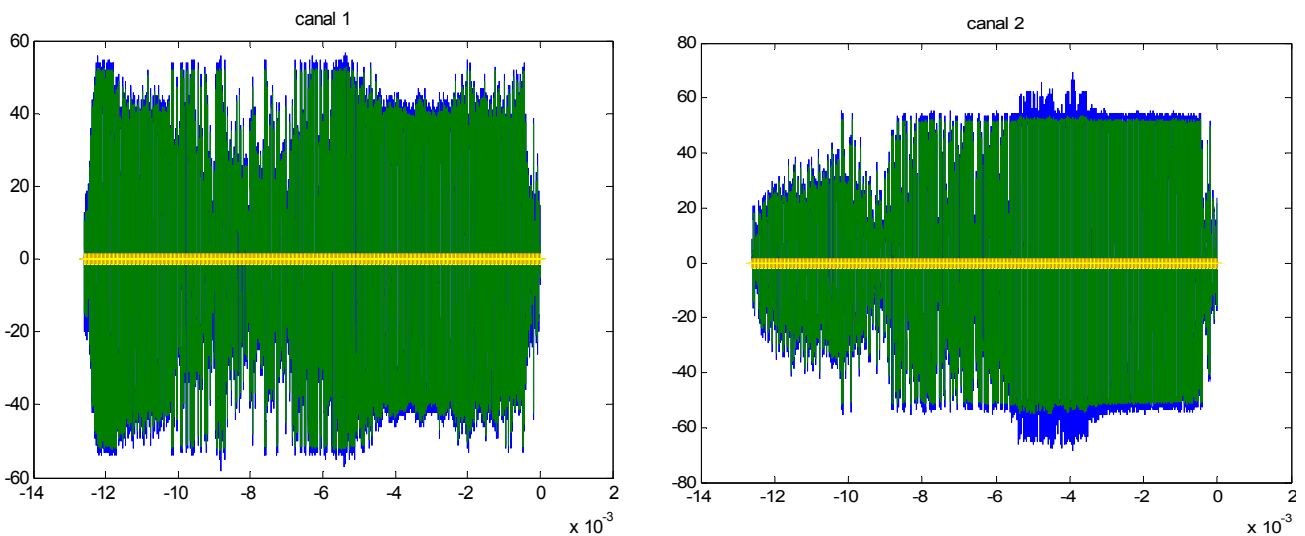


Figure A-8 : Tir 2 - signaux primaires bruts

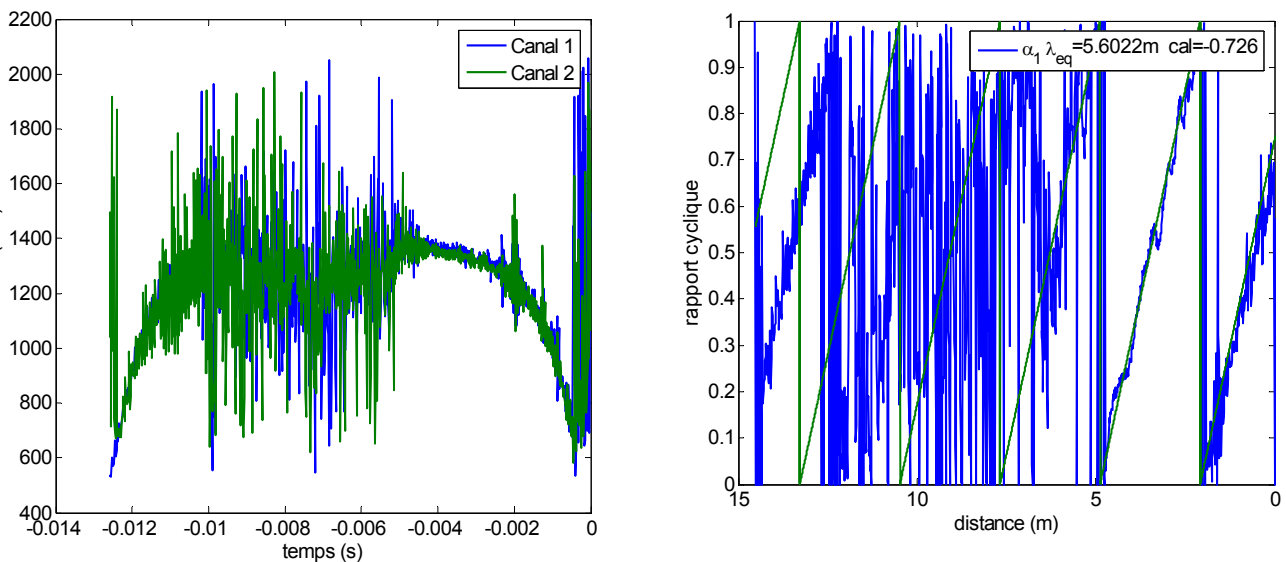


Figure A-9 : Tir 2 - vitesse et rapport cyclique

IV.3 Tir 3

Tableau A-6 : données expérimentales du tir 3

$f_1=10,72155$ GHz			vitesse=1347 m/s		
$f_2=10,77300$ GHz			projectile= gros projectile, diam=12 mm		
a=0,01 m	b=2,16 m	c=14,47 m	d=0,35 m	e=1,19 m	0 m
commentaire : Projectile sans sabots et donc pas de diaphragme, la fréquence 2 a été changée					

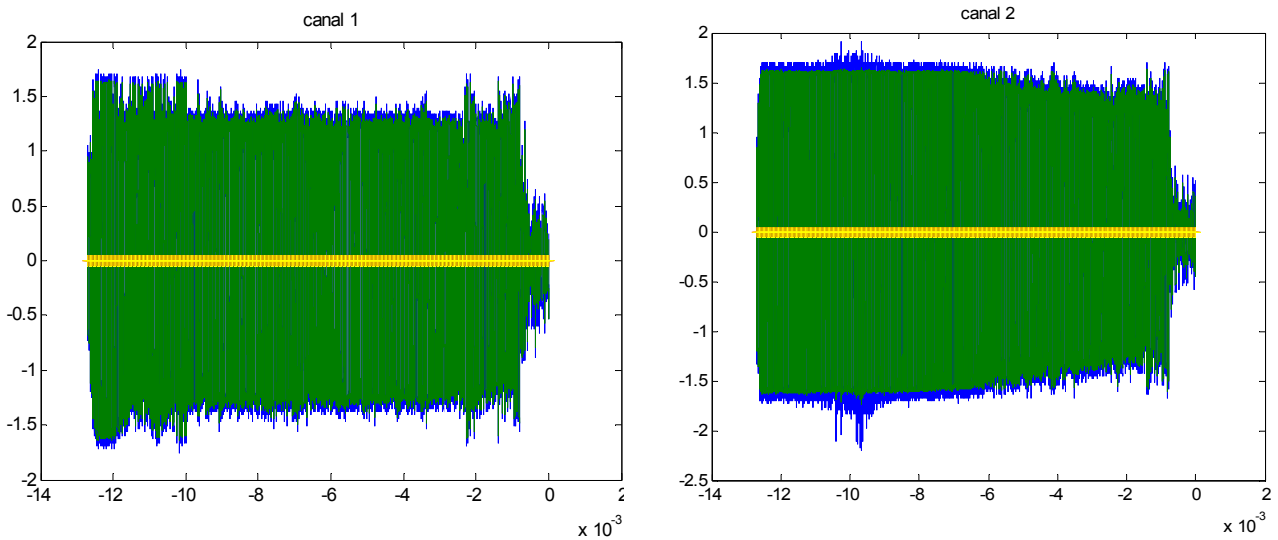


Figure A-10 : Tir 3 - signaux primaires bruts

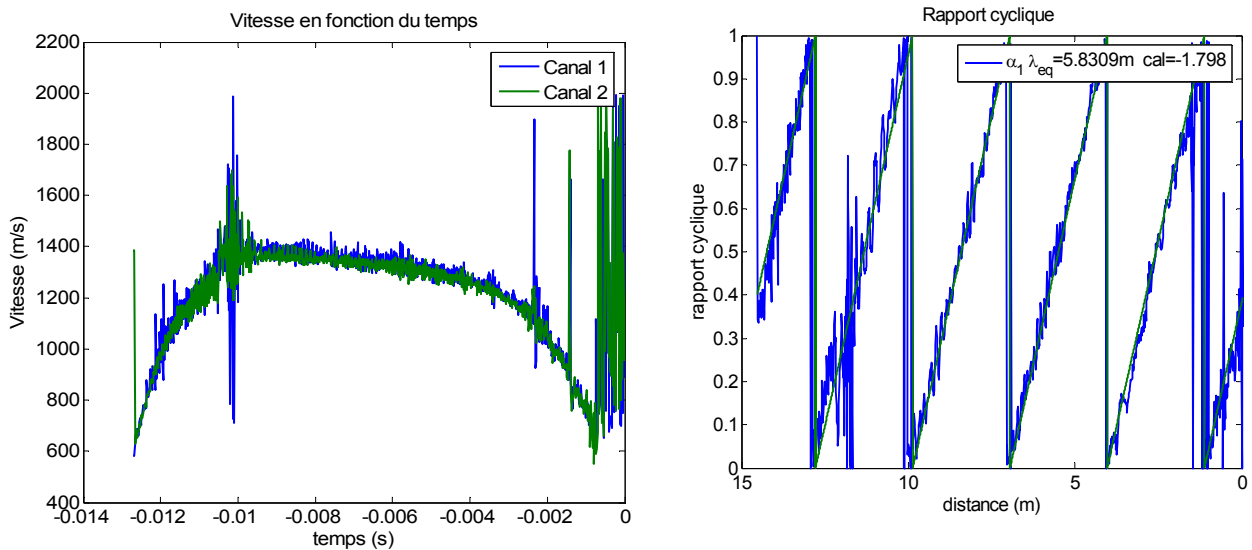


Figure A-11 : Tir 3 - vitesse et rapport cyclique

IV.4 Tir 4

Tableau A-7 : données expérimentales du tir 4

$f_1=10,72155$ GHz			vitesse=1341 m/s		
$f_2=10,77300$ GHz			projectile= cylindre de 40 mm		
a=0,22 m	b=0 m	c=14,47 m	d=1,09 m	e=1,19 m	0 m
commentaire : pas de sabots, pas de diaphragme, radar placé sous l'axe de tir					

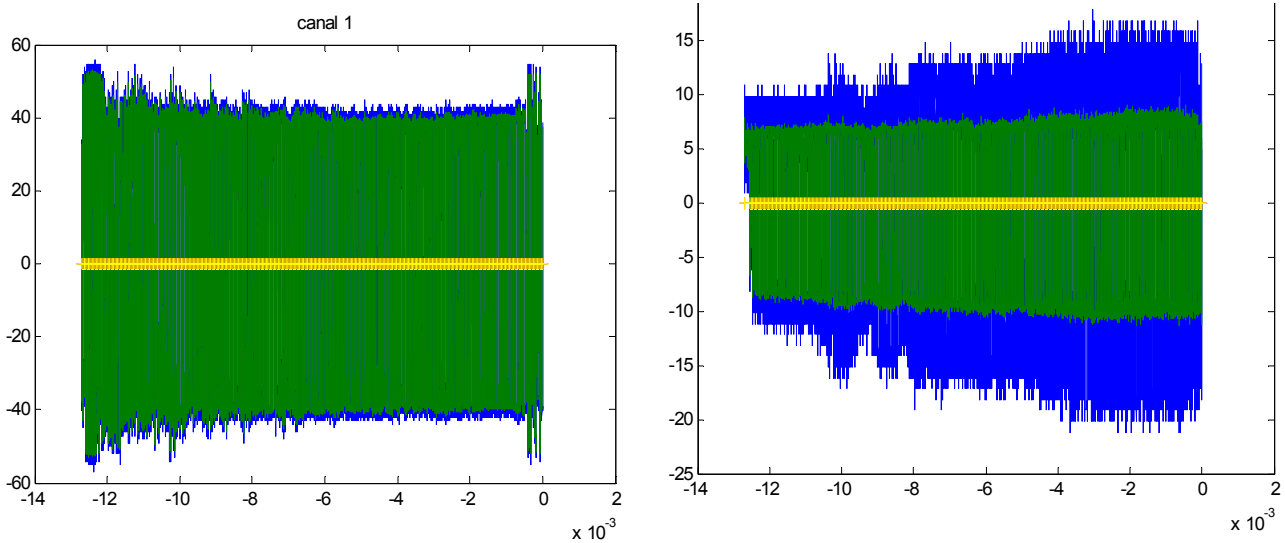


Figure A-12 : Tir 4 - signaux primaires bruts

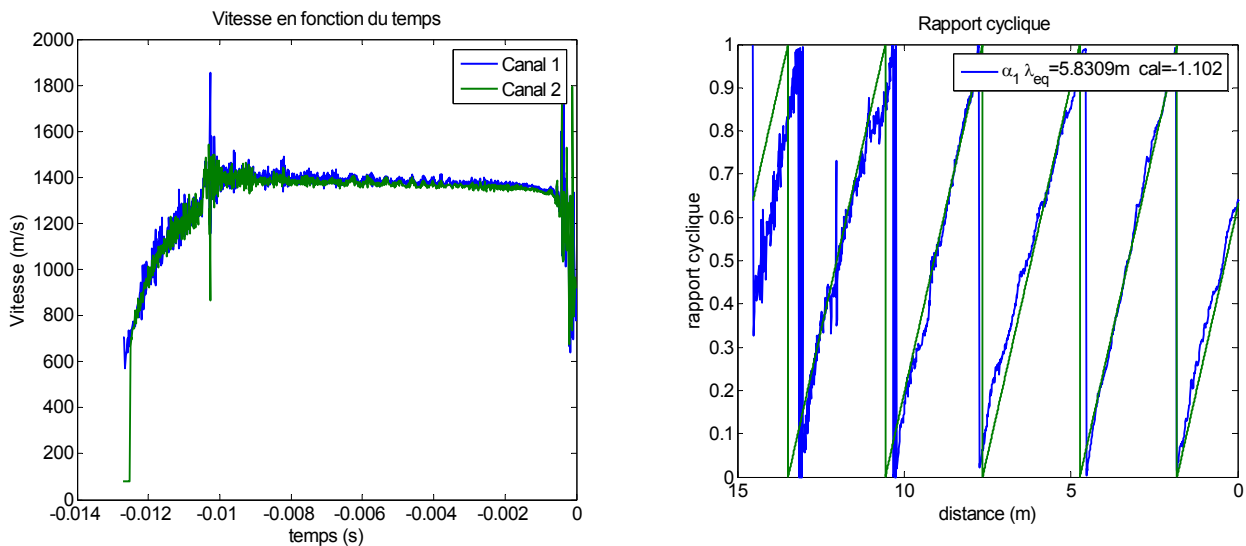


Figure A-13 : Tir 4 - vitesse et rapport cyclique

Annexe V: Résultats des essais de Baldersheim du 2 novembre 2005

V.1 Tir 1

Tableau A-8 : données expérimentales du tir 1

$f_{1A}=10,77090$ GHz	$f_{1B}=10,24000$ GHz	vitesse=1200 m/s
$f_{2A}=10,72050$ GHz	$f_{2B}=10,25000$ GHz	projectile = cylindre de 105 mm
commentaire : le feu de bouche masque le début du tir, le projectile est suivi sur toute la longueur de l'enregistrement (50 m).		

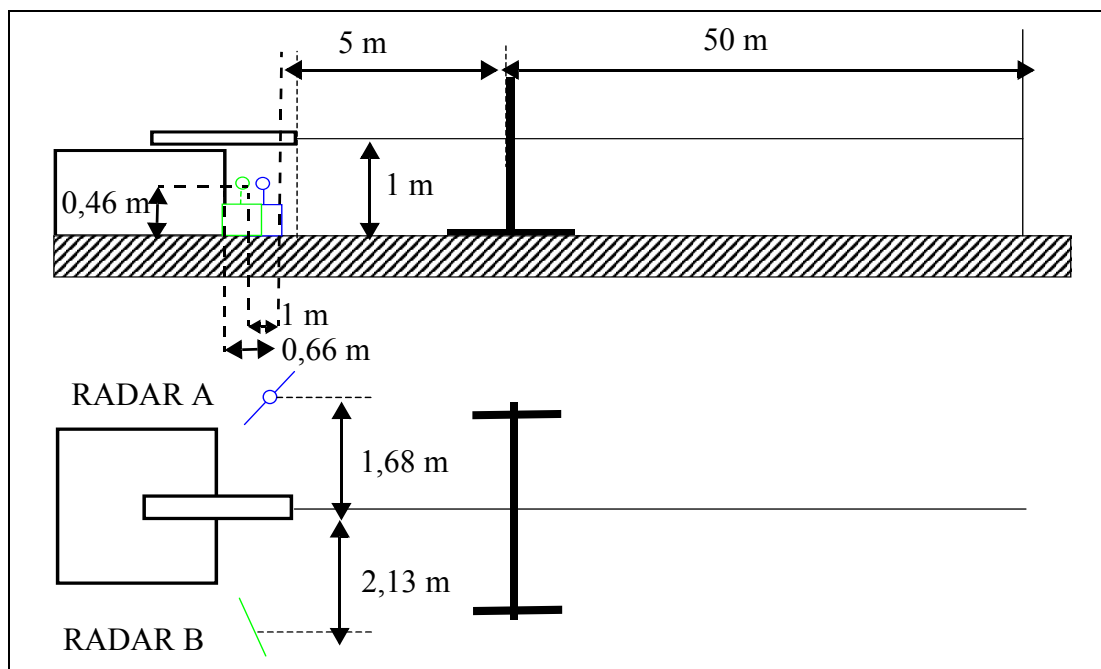


Figure A-14 : Descriptif du dispositif expérimental du tir 1

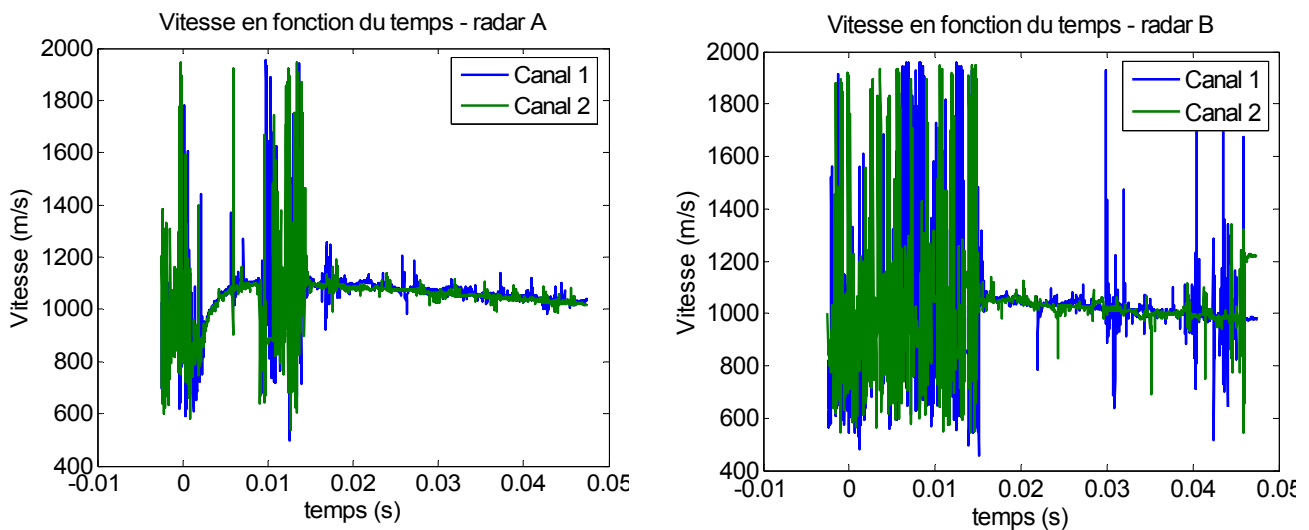


Figure A-15 : Tir 1 : Enregistrement des vitesses en fonction du temps des radars A et B

V.2 Tir 2

Tableau A-9 : données expérimentales du tir 2

$f_{1A}=10,77090$ GHz	$f_{1B}=10,24000$ GHz	vitesse=1200 m/s
$f_{2A}=10,72050$ GHz	$f_{2B}=10,25000$ GHz	projectile = cylindre de 105 mm
commentaire : Radar quadri-fréquence placé en face du canon - pas de mesure exacte de la distance du radar à l'axe de tir - canal 1-B défaillant!		

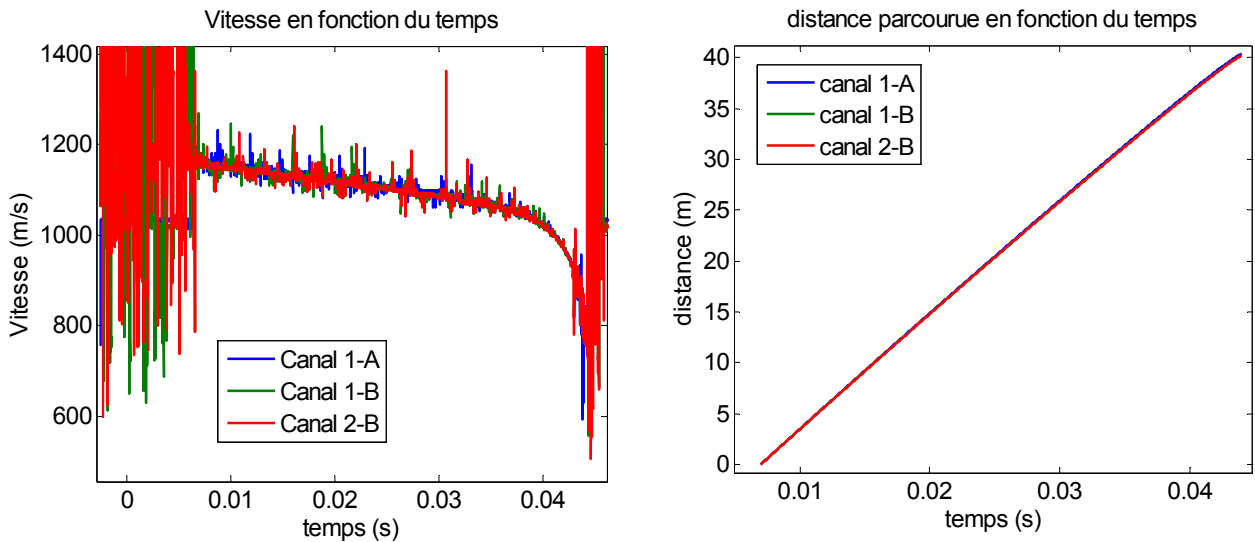


Figure A-16 : Tir 2 - vitesse et distance parcourue pour chacun des canaux, canal 1-B défaillant

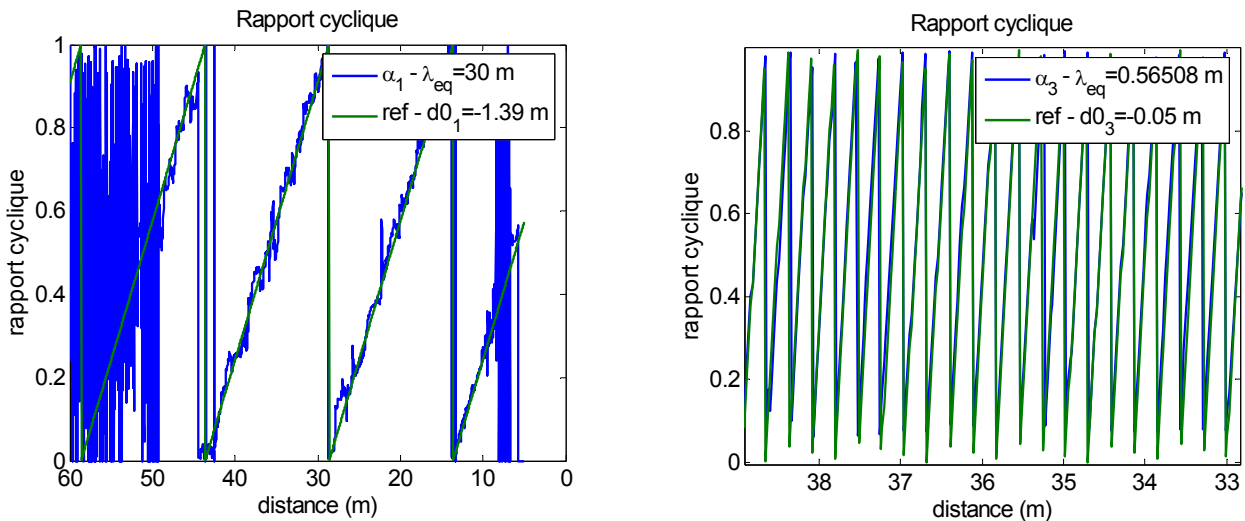


Figure A-17: Tir 2 - rapports cycliques $\lambda_{eq}=30$ m (à droite) et $\lambda_{eq}=56$ cm (à gauche)

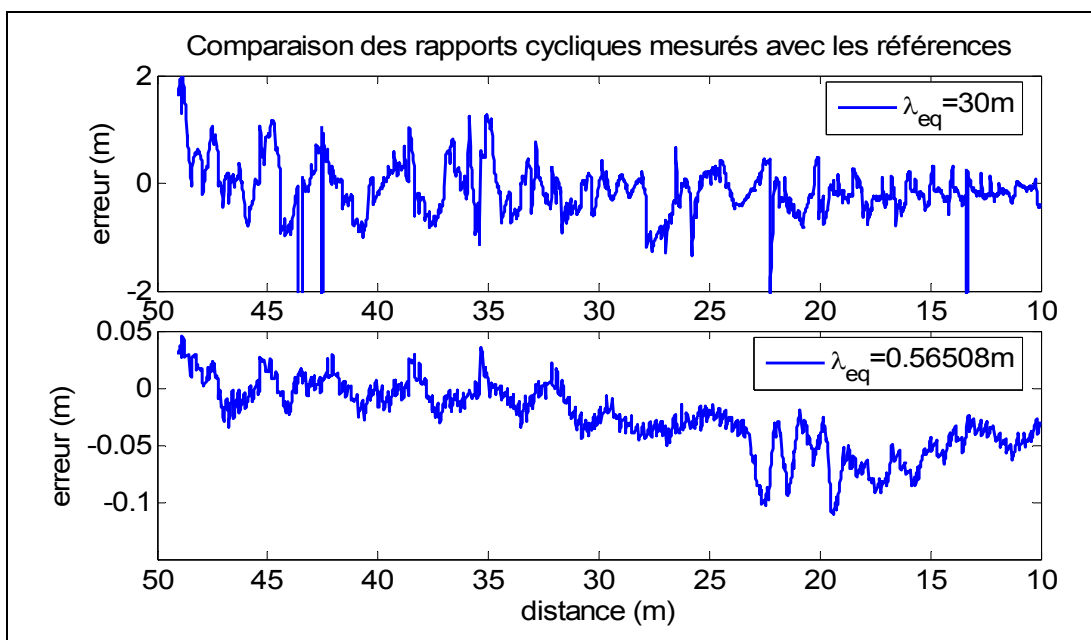


Figure A-18: Tir 2 : différence entre les rapports cycliques mesurés et les gabarits

Annexe VI: Compléments mathématiques

VI.1 Espace vectoriel

\mathcal{S} est un espace vectoriel sur \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) si il vérifie les propriétés suivantes

- $\forall x, y \in \mathcal{S} \quad x + y \in \mathcal{S}$
- $\forall x \in \mathcal{S} \quad x + 0 = 0 + x = x$
- $\forall x \in \mathcal{S}, \exists y \in \mathcal{S} \quad x + y = 0$
- $\forall x, y, z \in \mathcal{S} \quad (x + y) + z = x + (y + z)$

Les 3 dernières propriétés sont en générale facilement vérifiées, la dernière propriété doit en revanche être regardée avec plus d'attention.

De plus

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathcal{S} \quad \begin{cases} \alpha x \in \mathcal{S} \\ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \\ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \\ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \end{cases}$$

VI.2 Produit scalaire

Un produit scalaire est une forme bilinéaire de $\mathcal{S} \times \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vérifiant les propriétés suivantes:

- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle \quad (\overline{\langle y, x \rangle} \text{ dans le cas complexe})$
- $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- $\langle x, x \rangle > 0 \quad \forall x \neq 0 \quad \text{et} \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

VI.3 Normes

Une norme est une application de $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ notée $\| \cdot \|$ vérifiant les propriétés suivantes:

- $\forall x \in \mathcal{S}, \|x\| \geq 0$
- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
- $\forall x, y \in \mathcal{S}, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire)

On appellera les normes \mathcal{L}_p les normes de signaux de la forme suivante:

- dans le cas des fonctions continues:

$$\mathcal{L}_p(x) = \left(\frac{1}{(b-a)} \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

- dans le cas des suites discrètes:

$$\mathcal{L}_p(x) = \left(\frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N |x_k|^p \right)^{1/p}$$

On remarquera que l'application $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ forme une norme $\mathcal{L}_2(x)$. De telles normes sont appelées normes induites (par le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$)

VI.4 Complétude

Soit une suite d'éléments $x_n \in \mathcal{S}$ vérifiant,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, p > n_0 \quad \|x_n - x_p\| < \varepsilon$$

cette suite est dite suite de Cauchy. Un espace est dit complet si toute suite de Cauchy d'éléments de cet espace est convergente.

VI.5 Le principe d'orthogonalité

Le principe d'orthogonalité est un principe central pour tous les problèmes d'estimation dans des espaces hilbertiens. Il s'applique dès lors que le critère d'optimalité d'une estimation est défini par la norme induite d'un produit scalaire.

Théorème A.9: [108][47] Soit \mathcal{S} un espace Hilbertien muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ainsi que de la norme induite $\| \cdot \|$, et soit \mathcal{V} un sous-espace vectoriel de \mathcal{S} . Pour tous les vecteurs x de \mathcal{S} il existe un unique vecteur $v_0 \in \mathcal{V}$ minimisant la distance $\|x - v_0\|$, c'est-à-dire vérifiant: $\forall v \in \mathcal{V}, \|x - v_0\| \leq \|x - v\|$. De plus, le vecteur v_0 minimise la distance si et seulement si il est le projeté orthogonal de x dans \mathcal{V} .

Preuve •

1. Existence du minimiseur v_0 :

Preuve • Nous supposons que $x \notin \mathcal{V}$ (l'appartenance est triviale) et notons

$\delta = \inf_{v \in \mathcal{V}} \|x - v\|$, nous devons montrer qu'il existe un vecteur v_0 vérifiant $\|x - v_0\| = \delta$. Soit $\{v_i\}$ une suite de vecteurs telle que $\|x - v_i\| \rightarrow \delta$. Si cette suite est une suite de Cauchy alors elle converge (vers le minimiseur v_0) en vertu de la complétude de l'espace.

Nous avons:

$$\|(v_j - x) + (x - v_i)\|^2 + \|(v_j - x) - (x - v_i)\|^2 = 2\|v_j - x\|^2 + 2\|x - v_i\|^2 \quad (\text{A:8})$$

En passant le deuxième terme du membre de gauche de l'autre côté de l'égalité nous arrivons à:

$$\|v_j - v_i\|^2 = 2\|v_j - x\|^2 + 2\|x - v_i\|^2 - 4\|x - (v_j + v_i)/2\|^2 \quad (\text{A:9})$$

Puisque $(v_j + v_i)/2 \in \mathcal{V}$ car \mathcal{V} est un espace vectoriel, nous avons d'après notre hypothèse $\|x - (v_j + v_i)/2\| \geq \delta$, ce qui nous conduit à l'inégalité suivante:

$$\|v_j - v_i\|^2 \leq 2\|v_j - x\|^2 + 2\|x - v_i\|^2 - 4\delta^2 \quad (\text{A:10})$$

Or la suite des $\{v_i\}$ a été construite de telle sorte qu'elle converge vers δ , nous trouvons finalement $\|v_j - v_i\|^2 \rightarrow 0$ ce qui montre que la suite des $\{v_i\}$ est une suite de Cauchy. Or, comme l'espace est complet, les suites de Cauchy sont convergentes.

2. Montrons que si v_0 est le minimiseur de x dans \mathcal{V} alors $v_0 - x \in \mathcal{V}^\perp$:

Supposons qu'il existe un vecteur unitaire $v_1 \in \mathcal{V}$ tel que:

$$\langle v_1, v_0 - x \rangle = \alpha \neq 0 \quad (\text{A:11})$$

Posons alors $z = v_0 + \alpha v_1$, alors:

$$\|x - z\|^2 = \|x - v_0\|^2 - 2\alpha \langle v_1, v_0 - x \rangle + \|\alpha v_1\|^2 \quad (\text{A:12})$$

soit:

$$\|x - z\|^2 = \|x - v_0\|^2 - |\alpha|^2 < \|x - v_0\|^2 \quad (\text{A:13})$$

Ce qui contredit l'hypothèse que v_0 est le minimiseur.

3. Montrons que si $v_0 - x \in \mathcal{V}^\perp$ alors v_0 est le minimiseur:

Soit $v \in \mathcal{V}$, $v \neq v_0$, alors:

$$\|x - v\|^2 = \|x - v_0 + v_0 - v\|^2 = \|x - v_0\|^2 + \|v_0 - v\|^2 \geq \|v_0 - v\|^2 \quad (\text{A:14})$$

En utilisant l'orthogonalité: $\langle x - v_0, v_0 - v \rangle = 0$ car $v_0 - v \in \mathcal{V}$

4. Unicité du minimiseur

Supposons qu'il existe $x = v_1 + w_1$ et $x = v_2 + w_2$ avec $w_1, w_2 \in \mathcal{V}^\perp$, nous avons donc

$$v_1 + w_1 = v_2 + w_2 \Rightarrow v_1 - v_2 = w_1 - w_2 \quad (\text{A:15})$$

Puisque $v_1 - v_2 \in \mathcal{V}$ nous avons $w_1 - w_2 \in \mathcal{V}$ et comme $w_1, w_2 \in \mathcal{V}^\perp$ par hypothèse, cela entraîne que $w_1 - w_2 = 0 \Rightarrow v_1 = v_2$.

VI.6 Dérivées et gradient

Soit $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Soit $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction scalaire, son gradient est donné par le vecteur

$$\nabla_{\mathbf{x}} f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

Soit $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^q$ une fonction vectorielle,

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ \dots \\ f_q(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

sa matrice jacobienne est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_q}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_q}{\partial x_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{x}} f_1^T \\ \cdots \\ \nabla_{\mathbf{x}} f_q^T \end{bmatrix}$$

VI.7 Intégration de Monte Carlo

Nous considérons une intégrale du type

$$I = \int g(\mathbf{x})p(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

où $p(\mathbf{x})$ est interprétée comme une mesure de probabilité, c'est-à-dire une mesure de masse unitaire :

$$p(\mathbf{x}) \geq 0$$

$$\int p(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 1$$

La distribution $p(\mathbf{x})$ est remplacée par son approximation *empirique*

$$p(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta(\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^i\|)$$

où les échantillons test $\{\mathbf{x}^i\}_{i=1 \dots N}$ sont tirés aléatoirement d'après la distribution $p(\mathbf{x})$. On montre alors que l'on obtient la convergence suivante *presque sûrement*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(\mathbf{x}^i) \right) = I$$

L'intérêt de cette technique d'intégration est que, contrairement aux méthodes numériques, la vitesse de convergence ne dépend pas de la dimension du vecteur \mathbf{x}^i .

VI.8 Formule de quadrature de Gauss-Christoffel

Soit $\mathcal{I} = [a, b]$ $a, b \in \mathbb{R}$ et $\omega(t) > 0$ un poids strictement positif intégrable sur \mathcal{I} . On définit le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{\omega} = \frac{1}{\mathcal{I}} \int_{\mathcal{I}} \omega(t) f(t) g(t) dt$$

On note $\{b^i\}_{i=0 \dots n} \in \mathcal{P}^n(\mathcal{I})$ la famille des polynômes orthonormés relativement au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\omega}$.

Pour toute fonction intégrable sur \mathcal{I} nous avons la formule de quadrature de Gauss-Christoffel [81],[84]

$$\frac{1}{\mathcal{I}} \int_{\mathcal{I}} f(t) dt = \sum_{i=0}^n \lambda_i(t_i) f(t_i) + r_n(f) \quad (\text{A:16})$$

où les noeuds d'intégration t_i sont les zéros de b^{n+1} et les $\lambda(t_i)$ les nombres de Christ-offel définis par

$$\lambda(t_i)^{-1} = \sum_{l=0}^n (b^l(t_i))^2 \quad (\text{A:17})$$

Le reste de l'intégration s'exprime par:

$$r_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \cdot \frac{1}{2} \int_{\mathcal{I}} \left(\prod_{i=0}^n (t-t_i) \right)^2 \omega(t) dt \quad \xi \in \mathcal{I} \quad (\text{A:18})$$

En notant que:

$$\prod_{i=0}^n (t-t_i) = \frac{b^{n+1}}{a_{n+1}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\mathcal{I}} \int b^{n+1}(t)^2 \omega(t) dt = 1 \quad (\text{A:19})$$

on en déduit la formule réduite du reste

$$r_n(f) = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{a_{n+1}^2 (2n+2)!} \quad (\text{A:20})$$

Le reste ne peut pas être majoré dans le cas général car il dépend du comportement des coefficients a_{n+1}^2 . Cependant, pour de nombreux poids particuliers (Hermite, Tchebychev, Legendre, Jacobi, etc.) les polynômes associés sont parfaitement connus ainsi que les formules de quadrature qui portent le même nom que le polynôme. On citera simplement en exemple le cas particulier du poids constant pour lequel les polynômes orthogonaux sont les polynômes de Legendre

$$a_n^2 = (2n+1) \cdot \frac{(2n)!^2}{2^{2n}(n!)^4} \quad (\text{A:21})$$

soit pour le reste

$$r_n(f) = \frac{2^{2n+2}((n+1)!)^4}{(2n+2)(2n+2)!^3} f^{(2n+2)}(\xi) \quad (\text{A:22})$$

Des évaluations numériques montrent que ce reste décroît très rapidement (voir tableau A-10) indiquant par là que la formule de quadrature converge très vite et que les erreurs sont très faibles même pour des ordres réduits.

Tableau A-10 : Evolution du reste de Legendre avec l'ordre

ordre	reste
2	0,0037
4	$1,44 \times 10^{-7}$
6	$7,70 \times 10^{-13}$
8	$1,11 \times 10^{-18}$

Tableau A-10 : Evolution du reste de Legendre avec l'ordre

ordre	reste
10	$6,01 \times 10^{-25}$

Une propriété de la formule de quadrature est qu'elle a un degré d'exactitude égal à $2n + 1$, c'est-à-dire que pour tout polynôme de degré au plus égal à $2n + 1$ le reste de l'intégration est nul.

Bibliographie

- [1]V. Fleck. *Filtrage de Kalman de signaux périodiques - détermination de la trajectoire d'un target à partir de signaux Doppler*. Rapport Interne ISL, S-CR/RV-416-2003.
- [2]T. J. Meyer. *Active Protection Systems: Impregnable Armor or Simply Enhanced Survivability*. Armor Magazine. May-June 1998.
- [3]P. Chanteret, K. Sterzelmeier, P. Wey. *Le projet «protection active» à l'ISL, illustration du lien entre recherche et évaluation*. L'armement N°81. Mars 2003.
- [4]C. Callan, J. Goodman. *Sensors to support the Soldier*. Report NTIS. 3février 2005.
- [5]Volker Fleck. *«Introduction à la balistique extérieur avec exercices*. Cours EN-SIETA. 1999.
- [6]T. G. Thorne, L. I. Ruffe. *Measurement of the Closest Approach*. UK Patent No. 1 571 379. 16 juillet 1980.
- [7]F. Gensler. *Verfahren zur Kollisionserkennung*. Deutsches Patentamt No. DE1963887. 19 septembre 1996.
- [8]W. Schaller. *Sensorik für die aktive Panzerung*. Deutsches Patentamt No. DE4008395. 16 mars 1990.
- [9]M. R. Allen, R. B. Stoughton. *A Low-Cost Radar Concept for Bullet Direction Finding*. Proc. IEEE radar 1996. 1996.
- [10]C. Barras, D. Hassler. *Etude du système DIL face à l'obus-flèche de moyen calibre*. Rapport ISL S-RV-206/2004. 2004.
- [11]Girardeau E. *Souvenirs de longue vie - Création des détecteurs électromagnétiques*. URL=http://www.radar-france.net/Girardeau_memoire_radar.htm. 19/4/2005.
- [12]Hermann R. *Smart FM/CW Radar Systems for Automotive Applications*. Tutorial of IEEE 2005 International Radar Conference. 2005.
- [13]J. Darricau, Y. Blanchard. *La naissance du radar*. Revue de l'Electricité et de l'Electronique (REE) no. 1. Janvier 2003.
- [14]Penley. *Penley Radar Archives - Early Radar History*. document internet - URL=<http://www.penleyradararchives.org.uk/history/introduction>. 1996.
- [15]I. Chuckpaiwong. *A Data Fusion Technique for Continuous Wave Radar Sensor Using Kalman Filter*. Proc. of the 6th IASTED International Conf. on Signal and Image Processing, Honolulu, Hawaii. 23-25 Aout 2004.
- [16]M. Skolnik. *Radar Handbook second edition*. McGraw-Hill. 1990
- [17]I. V. Komarov, S. M. Smolski. *Fundamentals of Short-Range FM Radar*. Artech House. 2003.
- [18]F. De Dieuleveut. *Electronique appliquée aux hautes fréquences*. Dunod. 1999
- [19]A. Kajiwara. *Ranging for Stepped-FM Coded Radar*. Electronics and Communications in Japan, Part 3, Vol. 82, No. 8. 4 avril 1999.
- [20]T. Marukawa, I. Imai. *A Method of Phase Detection of the Beat Signal in FM-CW Radar*. Electronics and Communication in Japan, Vol. 54-C, No. 4. 1971.
- [21]B. Cantrell, H. Faust, A. Caul, A. O'Brien. *New Ranging Algorithm for FM/CW Radars*. Proceedings of IEEE 2001 Radar Conference. 2001
- [22]W. K. Saunders. *Post-War Developments in Continuous-Wave and Frequency-Modulated Radar*. IRE Transactions on Aerospace and Navigational Electronics. 1961.
- [23]A. Meta, P. Hoogeboom. *Development of Signal Processing Algorithms for High Resolution Airborne*. Proc. of IEEE Radar 2005. Mai 2005.

-
- [24]**R. Zhang, J. Yang, J. Xiong.** *Novel Method of Parameter Estimation for Moving Target in Millimeter-wave Short-Range Linear FMCW Radar.* ICSP'04 Proceedings. 2004.
- [25]**L. M. Tozzi.** *Resolution in Frequency-Modulated Radars.* University of Maryland, Ph. D. 1972.
- [26]**J. Colin.** *Le radar Théorie et pratique.* Ellipses. 2002
- [27]**J. H. Wehling.** *Multifunction Millimeter-Wave Systems for Armored Vehicle Applications.* IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques, Vol. 53, No. 3. Mars 2003.
- [28]**NIAG Sub-Group 70.** *Sniper Locating System.* NATO SLS NIAG SG/70 - Final Report. 22 novembre 2002.
- [29]**D. A. Shnidman.** *Generalized Radar Clutter Model.* IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 35, No. 3. July 1999.
- [30]**Himmelsbach R., Spahn E., Sterzelmeier K.** *Détection par radar bas coût: note descriptive de la méthode de traitement préconisée (System 1D).* Rapport interne ISL S-CR/RV-453/2003. 2003.
- [31]**T. L. Wadley.** *Electronic Principles of The Tellurometer.* The Transactions of the S.A. Institute of Electrical Engineers. May 1958.
- [32]**G. S. Woods, D. L. Maskell, M. V. Mahoney.** *A High Accuracy Microwave Ranging System for Industrial Applications.* IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement, vol. 42, No. 4. Aout 1993.
- [33]**A. Stelzer, C. G. Diskus, K. Lübke, H. W. Thim.** *A Microwave Position Sensor with Submillimeter Accuracy.* IEEE Transactions on Microwave and Techniques, Vol. 47, No. 12. Decembre 1999
- [34]**S. S. Stuchly, M. A. K. Hamid, A. Andres.** *Microwave Surface Level Monitor.* IEEE Transactions on Industrial Electronics and Control Instrumentation, Vol. 18, No. 3. Aout 1971.
- [35]**X. Li, R. Wu, M. Sheplak, J. Li.** *Multifrequency CW-based time-delay estimation for proximity ultrasonic sensors.* IEE Proc. Radar Sonar Navigation Vol. 149, No. 2. Avril 2002
- [36]**Z. Jun, Z. XiYuan.** *New Methods in the High Firing-Rate Muzzle Velocity Radar System.* Proc. of IEEE Radar 2003. 2003
- [37]**R. Manasse.** *Range and Velocity Accuracy from Radar Measurements.* Internal Report of Lincoln Laboratory. Inconnue
- [38]**A. S. El Sherif.** *Novel Approach for Solution of CW Radar Problems Using Double Modulation System.* Proceedings of EASCON'83 Conference. 1983.
- [39]**A. Le Duff.** *Contribution à l'estimation paramétrique de signaux à variation sinusoidale de la fréquence instantannée et à amplitude variable: application à l'anémométrie laser pour l'acoustique.* Thèse de doctorat de l'université du Maine, Académie de Nantes. 16 juillet 2003.
- [40]**G. Fleury.** *Analyse spectrale, Méthodes non-paramétriques et paramétriques.* Ellipses. 2001.
- [41]**C. Ioana, S. Stankovic, A. Quinquis.** *Estimation of Parameters of a Polynomial Phase Model Using the Warped Complex Time Distributions.* Proc. of EUSIPCO, Vienne. 6-10 septembre 2004.
- [42]**M. Farquharson, P. O'Shea, G. Ledwich.** *A Computationally Efficient Technique for Estimating the Parameters of Polynomial-Phase Signals From Noisy Observations.* IEEE Trans. on Signal Processing Vol. 53, No. 8. Aout 2005.
- [43]**A. Papoulis.** *Probability, Random Variables and Stochastic Processes.* McGraw-Hill - International Student Edition. 1965.

-
- [44] **Thomas H. Kerr.** *Status of CR-like Lower Bounds for Nonlinear Filtering.* IEEE Transactions on Aerospace And Electronic Systemss vol 2, No 5. *September 1989.*
- [45] **Branko R., Sanjeev A., Neil G.** *Beyond the Kalman Filter - Chapter 4.* Artech House. 2004.
- [46] **Petr Tichavski, Carlos H. Muravchik, Arye Nehorai.** *Posterior Cramer-Rao Bounds for Discrete Time Nonlinear Filtering.* IEEE Transactions On Signal Processing, Vol. 25, No. 5. *May 1998.*
- [47] **Todd K. Moon, Wynn C. Stirling.** *Mathematical Methods and Algorithms - chapter 12.* Prentice Hall. 2000.
- [48] **Y. Bar-Shalom, X. R. Li.** *Estimation and Tracking: Principles, Techniques and Software.* Norwood, MA: Artech House. 1993.
- [49] **H. Vincent Poor.** *An Introduction to Signal Detection and Estimation.* Springer. 1994.
- [50] **H. W. Sorenson.** *Least-squares estimation: from Gauss to Kalman.* IEEE spectrum. 1970.
- [51] **T. Kailath, A. H. Sayed, B. Hassibi.** *Linear Estimation.* Prentice Hall Information and System Sciences Series. 2000.
- [52] **S. Haykin.** *Adaptative Filter Theory.* Prentice Hall - Information and System Sciences Series. 1994.
- [53] **M. Campi.** *Performance of RLS Identificatin Algorithms with Forgetting Factor: A Φ -Mixing Approach.* Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control Vol.4, No. 3, pp. 1-25. 1994.
- [54] **X. Xu, H. Han-gen, H. Dewen.** *Efficient Reinforcement Learning Using Recursive Least-Squares Methods.* Journal of Artificial Intelligence Research 16 pp. 259-292. 2002.
- [55] **J. L. del Alamo.** *A Comparison Among Eight Different Techniques to Achieve an Optimum Estimation of Electrical Grounding Parameters in Two-Layerd Earth.* IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 8, No. 4. *Octobre 1993.*
- [56] **F. Sari.** *Newton Type Optimization for Maximum Likelihood Blur Identification and Restoration.* Proceedings of ICASSP'02 Conference. 2002.
- [57] **Y. Jianchao, C. T. Chern.** *Comparison of Newton-Gauss with Levenberg-Marquardt Algorithm for Space Resection.* Proc. of 22nd Asian Conf. on Remote Sensing, Singapore. 5-9 Nov. 2001.
- [58] **R. E. Kalman.** *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems.* Journal of Basic Engineering, pp. 35-45. *Mars 1960.*
- [59] **S. Kay.** *Fundamentals of Statistical Signal Processing.* Prentice Hall. 1993.
- [60] **E. A. Wan, R. van der Merwe, A. T. Nelson.** *Dual Estimation and the Unscented Transformation.* Neuronal Information Processing Systems 12, pp. 666-672, MIT Press. 2000.
- [61] **E. A. Wan, R. van der Merwe.** *The Unscented Kalman Filter for Nonlinear Estimation.* Proc. of IEEE Symp. 2000 (AS-SPCC), Lake-Louise, Canada. 2000.
- [62] **S. J. Julier, J. K. Uhlmann.** *A New Extension of the Kalman Filter to Nonlinear Systems.* Proc. of AeroSense. 1997.
- [63] **R. van der Merwe, E. A. Wan.** *The Square-Root Unscented Kalman Filter for State and Parameter-Estimation.* Proc. of ICASSP 2001. 2001.
- [64] **J. M. Hammersley, K. W. Morton.** *Poor Man's Monte Carlo.* Symposium on Monte Carlo Methods, pp. 23-38. *20 janvier 1954.*
- [65] **A. Doucet, N. de Freitas, N. Gordon.** *SSequential Monte Carlo Methods in Practice.* Springer Verlag. 2001.

-
- [66]P. M. Djuric, J. H. Kotecha, J. Zhang, T. Huang, T. Ghirmai, M. F. Bugallo, J. Miguez. *Particle Filtering*. IEEE Signal Processing Magazine pp. 19-38. *Septembre 2003*.
- [67]K. Dahia. *Nouvelles méthodes en filtrage particulaire - Application au recalage de navigation inertielle par mesures altimétriques*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier. *Janvier 2005*.
- [68]Y. Boers, J. N. Driessen. *Particle Filter Based Likelihood Ratio Testing*. RTO SET Symposium on Target Tracking and Sensor Data Fusion for Military Observation Systems, Budapest. *13-15 octobre 2003*.
- [69]T. Brehard, J. Le Cadre. *Initialization of Particle Filter and Posterior Cramér-Rao Bound for Bearings-Only Tracking in Modified Polar Coordinate System*. RTO SET Symposium on Target Tracking and Sensor Data Fusion for Military Observation Systems, Budapest. *13-15 Octobre 2003*.
- [70]T. Kailath. *A View of Three Decades of Linear Filtering Theory*. IEEE Transactions on Information Theory, Vol. IT-20, No. 2. *Mars 1974*.
- [71]A. E. Nordsjo. *A Constrained Extended Kalman Filter for Target Tracking*. Proc of IEEE Radar 2004. *2004*.
- [72]A. E. Nordsjo, L. H. Zetterberg. *Identification of Certain Time-Varying Nonlinear Wiener and Hammerstein Systems*. IEEE Transactions on Signal Processing Vol. 49, No. 3. *Mars 2001*.
- [73]G. J. Bierman, M. R. Beltzer, J. S. Vandergraft, D. W. Porter. *Maximum Likelihood Estimation Using Square Root Information Filters*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 35, No. 12. *Décembre 1990*
- [74]L. Ljung, T. Soderstrom. *Theory and Practice of Recursive Identification*. MIT Press: Cambridge, MA. *1982*.
- [75]D. P. Bertsekas. *A new Class of Incremental Gradient Methods for Least Squares Problems*. SIAM J. of Optimization, Vol. 7, No. 4, pp. 913-926. *Novembre 1997*.
- [76]D. P. Bertsekas. *Incremental Least Squares Methods and the Extended Kalman Filter*. SIAM J. of Optimization Vol. 6, No. 3, pp. 807-822. *Aout 1996*.
- [77]B. M. Bell. *The Iterated Kalman Smoother as a Gauss-Newton Method*. SIAM J. of Optimization Vol. 4, No. 3, pp. 626-636. *Aout 1994*.
- [78]S. C. Kramer, H. W. Sorenson. *Recursive Bayesian Estimation using Piece-Wise Constant Approximations*. Automatica, Vol. 24, No. 6, pp. 789-801. *1988*.
- [79]K. Ito, K. Xiong. *Gaussian Filters for Nonlinear Filtering Problems*. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 45, No. 5. *Mai 2000*.
- [80]H. W. Sorenson, D. L. Alspach. *Recursive Bayesian Estimation Using Gaussian Sums*. Automatica, Vol. 7, pp. 465-479. *1971*.
- [81]Gabor Szegő. *Orthogonal Polynomials*. American Mathematical Society Providence. *1989*
- [82]Fan J., Gijbels I. *Local Polynomial Modelling and its Applications*. Chapman & Hall. *1996*.
- [83]Attila Mate, Paul Nevai, Vilmos Totik. *Szegő's extremum problem on the unit circle*. Annals of Mathematics, 134. *1991*.
- [84]A. Ghizzetti, A. Ossicini. *Quadrature Formulae*. Birkhäuser Verlag. *1970*.
- [85]Y. Kosuge, M. Ito. *Variances of the Predicated State in the Steady State for a Three-Dimensional Radar Tracking Using a Linear Filter*. Electronics and Communications in Japan, Part 1, Vol. 87, No. 12. *2004*.
- [86] P. Forster, M. Lesturgie, *Passive Radar for Target Tracking and Classification*. Proceedings of IEEE Radar 2004 Conference. *2004*
- [87]Y. Bar-Shalom, A. G. Jaffer. *Adaptive Nonlinear Filtering with Measure-*

ments of Uncertain Origin. Proc of IEEE conf. on Decision and Control, New Orleans. Decembre 1972.

[88]J. J. Ford, P. G. Hunter. *Estimation of Manoeuvring Targets Using Hybrid Filters*. DSTO Systems Science Laboratory, report DSTO-TN-0488. April 2003.

[89]N. Cui, L. Hong, J. R. Layne. *A Comparison of Nonlinear Filtering Approaches with an Application to Ground Target Tracking*. Elsevier Journal of Signal Processing, No. 85, pp. 1469-1492. 2005.

[90]I. Boers, J. N. Driessen. *Some Recent Results in Target Tracking*. Proc. of Symposium on Target Tracking and Sensor Data Fusion for Military Observation Systems, Budapest, Hungary. 13-15 Octobre 2003.

[91]S. C. Nardone, M. L. Graham. *A Closed-Form Solution to Bearings-Only Target Motion Analysis*. IEEE Journal of Oceanic Engineering, Vol. 22, No. 1, pp. 168-178. Janvier 1997.

[92]S. N. Balakrishnan, J. L. Speyer. *Coordinate-Transformation-Based Filter for Improved Target Tracking*. Journal of Guidance, Vol. 9, No. 6. 1986

[93]X. Tao, C. Zou, Z. He. *Passive Target Tracking Using Maximum Likelihood Estimation*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 32, No. 4. Octobre 1996.

[94]M. Yeddanapudi, Y. Bar-Shalom, K. R. Pattipati, S. Deb. *Ballistic Missile Track Initiation From Satellite Observations*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. 31, No. 3. Juillet 1995.

[95]D. P. O'Leary, Z. Strakos. *On Sensitivity of Gauss-Christoffel Quadrature Estimates*. University of Maryland CS technical Reports. Octobre 2004

[96]D. Booley, G. H. Golub. *A survey of matrix inverse eigenvalues problems*. Inverse Problems 3,4 pp. 595-622. 1987.

[97]M. J. Gander, A. H. Karp. *Stable Computation of High Order Gauss-Quadrature Rules Using Discretization for Measures in Radiation Transfer*. ELSEVIER Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, Vol. 68, Iss. 2, pp. 213-223. 2001.

[98]Walter Gautschi. *Orthogonal Polynomials and Quadrature*. Electronic Transaction on Numerical Analysis, volume 9. 1999.

[99]C. Villien, V. Fleck, E. Ostertag, P. Raymond. *3-D Short Range Localization Device By Low-Cost CW-Doppler Radar*. Proc. of IEEE Radar 2005. 2005.

[100]S. Roux. *Adequation Algorithmes-Architecture pour le Traitement Multimedia Embarqué*. Thèse de doctorat, Institut National Polytechnique de Grenoble. 2002

[101]Philips Semiconductors. *An Introduction to VLIW Architecture*. www.semiconductors.philips.com/ acrobat/other/vliw-wp.pdf . 2005.

[102]D. Katz, T. Lukasiak, R. Gentile. *Understanding Advanced Processor Features Promotes Efficient Coding*. Analog Devices Website. 2005.

[103]J. Fridman, Z. Greenfield. *The TigerSHARC DSP Architecture*. IEEE Micro. january-february 2000, pp. 66-76. 2000.

[104]Analog Devices. *ADSP TS101 TigerSHARC Processor Hardware Reference*. Analog Devices web site : www.analog.com. [105]P. Nevai. *Orthogonal*

Polynomials : Theory and Practice. NATO ASI Series, Vol. 294. 1989.

[106]Weibel Scientific. *RR-2100 Ranging Radar for Optical Platform*. Site Web : http://www.spaceinformationlabs.org/Docs/radar_image/weibelradarspedwards.pdf. Decembre 2001.

[107]H. Kuroda, K. Takano, M. Nakamura. *Distance measuring Device*. US patent No. 69593. 9 mars 2004.

[108]Luenberger, David G. *Optimization by Vector Space Methods*. Wiley, New-

York. 1969

[109] **M. Schatzman.** *Analyse Numérique, Une approche mathématique.* DUNOD, Paris. 2001.