INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
Université Louis Pasteur et C.N.R.S. (UMR 7501)
7, Rue René Descartes

67084 STRASBOURG Cedex

Classification des objets galoisiens d'une algèbre de Hopf

par
Thomas Aubriot

15 Juin 2007

Mots-clé, Keywords : Algèbres de Hopf, Extensions galoisienne, Homotopie, Géométrie non commutative, Fibré principal, Groupe quantique de Drinfeld Jimbo, Fonctions quantiques sur $SL(2)$

Classification mathématique : 81R, 16W30, 17B37, 55R10, 58B34.

Remerciements

Mes premières pensées vont naturellement à Anne, ma famille et mes proches qui m'ont soutenu, encouragé et quelquefois subi durant ces années. Merci.

Je veux pour commencer remercier mon directeur, Christian KASSEL, qui a accepté de diriger mon travail et mon apprentissage durant ces années de thèse. J'ai beaucoup appris à son contact et je le remercie particulièrement de m'avoir appris l'intérêt de la relecture. Je le remercie encore pour l'attention constante et bienveillante qu'il a eue à mon égard.

Je remercie également mon codirecteur, Julien BICHON, pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée durant ces années dans ma réflexion et à travers les échanges stimulants que nous avons eus ainsi que pour sa grande disponibilité.

Je suis honoré par l'attention que Stefaan CAENEPEEL, Benjamin ENRIQUEZ et Hans-Jürgen SCHNEIDER ont portée à mon travail et je leur suis reconnaissant d'avoir accepté de faire un rapport sur ce travail.

Je remercie enfin tous ceux qui par leurs discussions, leurs questions et leurs réponses ont alimenté ma curiosité mathématique. Damien, Emmanuel, Benjamin et tous les autres, merci.

Cette thèse a été financée par une allocation du Ministère de l'Éducation Nationale, de la Recherche et de la Technologie ainsi qu'un monitorat et un poste d'ATER de l'Université Louis Pasteur. Je l'ai effectuée à l'Institut de Recherche Mathématique Avancée (Strasbourg).

Table des matières

Introduction

Cette thèse porte sur la classification des objets galoisiens d'une algèbre de Hopf. Le concept d'extension de Hopf-Galois, qui a été beaucoup étudié ces dernières années, est une généralisation du concept d'extension galoisienne de corps, mais aussi un analogue des fibrés principaux dans le cadre de la géométrie non commutative. Si H est une algèbre de Hopf, une algèbre H-comodule (Z, δ) est une H-extension de Hopf-Galois de l'algèbre B si les éléments coïnvariants de Z sont les éléments de B et si l'application canonique $\beta : Z \otimes_B Z \to Z \otimes H$ définie par

$$\beta(x \otimes y) = \delta(x)(y \otimes 1)$$

est une bijection. Les objets galoisiens forment une classe importante d'extensions de Hopf-Galois ; ce sont celles dont les coïnvariants sont réduits à l'anneau de base. Bien qu'une littérature abondande aie été consacrée aux extensions de Hopf-Galois, on a peu de résultats sur leur classification à isomorphisme près. Pour contourner la difficulté de classer les extensions de Hopf-Galois à isomorphisme près, Kassel a introduit et développé avec Schneider une relation d'équivalence sur les extensions de Hopf-Galois qu'il a appelée homotopie.

Cette thèse apporte des résultats de classification à homotopie et isomorphisme près et essaye de donner une approche de la classification des objets galoisiens autour de quatre axes.

a) La construction explicite de représentants des classes d'homotopie des objets galoisiens de l'algèbre $U_q(\mathfrak{g})$ associée par Drinfeld et Jimbo à une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, explicitant ainsi un théorème de Kassel et Schneider.

b) Une étude des objets galoisiens de l'algèbre quantique $\mathcal{O}_q(SL(2))$ des fonctions sur le groupe $SL(2)$; nous donnons la classification à isomorphisme près et des résultats partiels pour la classification à homotopie près.

c) Une étude systématique de la classification à isomorphisme et homotopie près pour les algèbres de Hopf de dimension ≤ 15 ; nous synthétisons des résultats éparpillés dans la littérature, portant sur des familles d'algèbres de Hopf pointés ou semisimples et complétons avec la classification des objets galoisiens de l'algèbre de Hopf ni semisimple ni pointée de dimension 8.

d) Une étude d'une famille d'algèbres de Hopf H_n qui ne sont ni semisimples ni pointées, pour lesquelles nous donnons une présentation des objets galoisiens. Pour $n = 2$, nous montrons que les objets galoisiens sont triviaux.

Un chapitre préliminaire introduit les concepts étudiés dans cette thèse. Les extensions de Hopf-Galois y sont notamment présentées ainsi que leur interprétation en terme de fibrés principaux quantiques, mais aussi de foncteurs fibres. L'homotopie pour les extensions de Hopf-Galois est définie ainsi que les différents cocycles associés aux extensions de Hopf-Galois et notamment les cocycles "paresseux" introduits par Bichon et Carnovale. Les systèmes de Hopf-Galois, introduits par Bichon, sont expliqués ; ils donnent une reconstruction de type tannakien éclairant la notion d'objet bigaloisien introduite par Schauenburg.

Soit $U_q(\mathfrak{g})$ l'algèbre quantique enveloppante associée par Drinfeld et Jimbo à une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ semisimple de matrice de Cartan symétrisable. Le chapitre 2 est consacré à la construction d'un représentant pour chaque classe d'homotopie des objets galoisiens de $U_q(\mathfrak{g})$. Kassel et Schneider ont montré que l'ensemble des objets galoisiens de $U_q(\mathfrak{g})$ à homotopie près est en bijection avec l'ensemble des classes d'homotopie des objets galoisiens de $k[G]$, où G est l'ensemble des éléments "group-like" de $U_q(\mathfrak{g})$. Ce dernier ensemble est lui-même paramétré par $t(t-1)/2$ éléments inversibles de l'anneau de base k, où t est le rang de $\mathfrak{g}$. Pour toute famille λ d'éléments inversibles de l'anneau k, nous définissons l'algèbre A_λ comme l'algèbre associative unitaire engendrée par des générateurs X_i, Y_i, Z_i, Z_i^{-1} pour $1 \leq i \leq t$ et les relations

$$Z_iZ_j = \lambda_{ij}^2 Z_jZ_i, \quad Z_iZ_i^{-1} = Z_i^{-1}Z_i = 1,$$

$$Z_iX_j = \lambda_{ij}^2 q^{d_ia_{ij}} X_jZ_i,$$

$$Z_iY_j = q^{-d_ia_{ij}} Y_jZ_i,$$

$$X_iY_j - Y_jX_i = \delta_{ij}\frac{Z_i}{q^{d_i} - q^{-d_i}},$$

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij}+2r-1} X_i^{1-a_{ij}-r} X_j X_i^r = 0,$$

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} Y_i^{1-a_{ij}-r} Y_j Y_i^r = 0,$$

pour $1 \leq i, j \leq t$ (les autres notations sont expliquées au chapitre 2).

Nous établissons dans le chapitre 2 le théorème suivant pour λ une famille de $t(t-1)/2$ éléments inversibles de k complétée en une famille multiplicativement antisymétrique.

Théorème.
a) L'algèbre A_λ possède une structure d'objet galoisien clivé de $U_q(\mathfrak{g})$.
b) Tout objet galoisien de $U_q(\mathfrak{g})$ est homotope à un objet galoisien de la forme A_λ.
c) Deux objets galoisiens A_λ et $A_{\lambda'}$ de $U_q(\mathfrak{g})$ sont homotopes si et seulement si $\lambda = \lambda'$.

Ce chapitre a donné lieu à un article [A1] intitulé "*Classification des objets galoisiens de $U_q(\mathfrak{g})$ à homotopie près*" à paraître dans "Communication in Algebra".

Le chapitre 3 est consacré à l'étude des objets galoisiens de l'algèbre quantique $\mathcal{O}_q(SL(2))$ des fonctions sur le groupe $SL(2)$. Il apporte une classification des objets galoisiens d'une algèbre de Hopf de dimension infinie et d'objets galoisiens non clivés. Nous considérons les algèbres de Hopf $\mathcal{B}(E)$, introduites par Dubois-Violette et Launer. Pour $E \in GL_n(k)$, l'algèbre $\mathcal{B}(E)$, est engendrée par $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et les relations

$$E^{-1}a^tEa = I_n = aE^{-1}a^tE,$$

où E^{-1} désigne l'inverse de E et a^t la transposée de a. Notons qu'il existe $E_q \in GL_2(k)$ telle que $\mathcal{O}_q(SL(2)) = \mathcal{B}(E_q)$. Suivant Bichon, si de plus $F \in GL_m(k)$, nous considérons l'algèbre $\mathcal{B}(E,F)$ engendrée par $(z_{ij})_{i=1\dots n, j=1\dots m}$ et définie par les relations matricielles

$$F^{-1}z^tEz = I_m \quad \text{et} \quad zF^{-1}z^tE = I_n.$$

En utilisant l'interprétation des objets galoisiens comme foncteurs fibres, nous donnons la classification des objets galoisiens des algèbres de Hopf $\mathcal{B}(E)$ et établissons les résultats suivants.

Théorème.

a) Soit k un anneau principal, $n \geq 2$ un entier, $E \in GL_n(k)$ et Z un objet galoisien de $\mathcal{B}(E)$. Alors il existe un entier $m \geq 2$ et une matrice $F \in GL_m(k)$ telle que $\mathrm{Tr}(F^{-1}F^t) = \mathrm{Tr}(E^{-1}E^t)$ et Z soit isomorphe à $\mathcal{B}(E,F)$ comme objet galoisien de $\mathcal{B}(E)$.

b) Soit k un anneau principal, n, m_1, m_2 des entiers ≥ 2 et $E \in GL_n(k)$, $F_1 \in GL_{m_1}(k)$, $F_2 \in GL_{m_2}(k)$ des matrices telles que les algèbres $\mathcal{B}(E,F_1)$ et $\mathcal{B}(E,F_2)$ soit k-fidèlement plates. Alors les objets galoisiens $\mathcal{B}(E,F_1)$ et $\mathcal{B}(E,F_2)$ de $\mathcal{B}(E)$ sont isomorphes si et seulement si $m_1 = m_2$ et s'il existe une matrice $P \in GL_{m_1}(k)$ telle que $F_1 = PF_2P^t$.

c) Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique nulle, des entiers $m_0, m_1 \geq 2$ et des matrices $F_0, F_1 \in GL_{m_0}(k) \times GL_{m_1}(k)$ telles que $\mathrm{Tr}(F_i^{-1}F_i^t) = -q - q^{-1}$ pour $i = 0, 1$. Si $m_0 = m_1$ et si $F_0^{-1}F_0^t$ et $F_1^{-1}F_1^t$ ont le même polynôme caractéristique, alors les deux objets galoisiens $\mathcal{B}(E_q, F_0)$ et $\mathcal{B}(E_q, F_1)$ de $\mathcal{O}_q(SL(2))$ sont homotopes.

Ce chapitre a donné lieu à un article [A2] intitulé "*On the classification of Galois objects over the quantum group of a nondegenerate bilinear form*", paru dans "Manuscripta Math".

Le chapitre 4 est une étude systématique des objets galoisiens lorsque l'algèbre de Hopf est de dimension ≤ 15 et l'anneau de base est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Nous faisons une synthèse de résultats de classification éparpillés dans la littérature. La méthode classique d'étude des objets galoisiens d'une algèbre de Hopf H de petite dimension a été donnée par Doi et Takeuchi pour l'algèbre de Sweedler et les algèbres de Taft, et utilise un isomorphisme de H-comodules entre l'algèbre de Hopf et l'objet galoisien. Nous reprenons aussi des résultats de classification de Masuoka sur des familles d'algèbres cosemisimples ainsi qu'un résultat de Davydov pour les objets galoisiens d'une algèbre de fonctions sur un groupe. La méthode de classification des objets bigaloisiens a été donnée par Schauenburg et repose la classification des objets galoisiens et le calcul des automorphismes de Hopf de l'algèbre de Hopf. La notion d'homotopie est aussi abordée. Nous synthétisons ces différents travaux pour donner une présentation complète et systématique de la classification des objets galoisiens d'une algèbre de Hopf de petite dimension et complétons avec les résultats concernant l'algèbre de Hopf de dimension 8 qui n'est ni semisimple ni pointée que nous étudions dans le chapitre suivant.

Le chapitre 5 aborde le problème de la classification pour une famille d'algèbres de Hopf H_n ni pointées ni semisimples pour $n \in \mathbb{N}$. Ces calculs reposent sur la méthode donnée par [DoT95] mais les scalaires intervenant dans la présentation de l'objet galoisien sont solutions d'un système non linéaire et non trivial car l'algèbre n'est pas seulement engendrée par des éléments group-like et primitifs. Ce chapitre fournit un premier exemple de calcul d'objets galoisiens lorsque l'algèbre de Hopf n'est ni semisimple ni pointée.

Les algèbres H_n sont les algèbres de Hopf duales des algèbres pointées P_n engendrées par g et x et les relations

$$g^{2n} = 1, \quad x^2 = 1 - g^2, \quad gx + xg = 0$$

et telles que g soit un élément group-like et x un élément g-primitif. Nous montrons que les algèbres H_n sont engendrées par deux éléments α et β et les relations

$$\alpha^{2n} = 1, \quad \beta^2 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha\beta = \xi\beta\alpha,$$

où ξ est une racine primitive $2n$-ième de l'unité dans k. La comultiplication $\Delta : H_n \to H_n \otimes H_n$ est donnée par

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \beta\alpha^n \quad \text{et} \quad \Delta(\beta) = \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha^{n+1}.$$

Quand $n = 2$, l'algèbre de Hopf H_2 est l'unique algèbre de Hopf de dimension 8 qui n'est ni semisimple, ni pointée. Nous montrons que cette algèbre est un quotient de l'algèbre $\mathcal{O}_q(SL(2))$ des fonctions quantiques sur le groupe $SL(2)$ lorsque $q = -i$. La classification des objets galoisiens de H_2 est traitée de manière analogue à celle des objets galoisiens de $\mathcal{O}_q(SL(2))$ (voir le chapitre 3) et nous montrons que les objets galoisiens de H_2 sont triviaux à isomorphisme près.

Chapitre 1

Définitions

Dans ce chapitre, nous définissons les notions que nous utiliserons dans le reste de cette thèse.

1.1 Algèbres, cogèbres et algèbres de Hopf

Soit k un anneau commutatif ; les objets considérés appartiennent à la catégorie monoïdale des k-modules dont le produit tensoriel sur k sera noté $\otimes$.

1.1.1 Algèbres et cogèbres

Donnons la définition d'une algèbre de telle sorte que nous puissons en donner une version "duale".

Une k-algèbre unitaire est un k-module A muni de deux applications k-linéaires, la multiplication $\mu : A \otimes A \to A$ et l'unité $u : k \to A$ telles que les diagrammes suivants commutent.

$a)$ associativité

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes A \arrow[r, "\mu \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \mu"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes A \arrow[r, "\mu"] & A
\end{tikzcd}$$

$b)$ unitarité

$$\begin{tikzcd}
 & A \otimes A \arrow[dd, "\mu"] & \\
A \otimes k \arrow[ur, "\mathrm{id} \otimes u"] \arrow[dr, "\cong"'] & & k \otimes A \arrow[ul, "u \otimes \mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
 & A &
\end{tikzcd}$$

Pour tous k-modules V et W, *la volte* $\tau : V \otimes W \to W \otimes V$ est définie par $\tau(v \otimes w) = w \otimes v$, pour tout $v \in V$, $w \in W$. Une algèbre (A, μ, u) est commutative si $\mu \circ \tau = \tau \circ \mu$.

Exemple 1. Soit G un groupe et $k[G]$ le k-module libre de base G. Les applications $\mu : k[G] \otimes k[G] \to k[G]$ définie sur la base par $\mu(g, h) = gh$ pour tout $g, h \in G$ et $u : k \to k[G]$ définie par $u(1_k) = 1_G$ munissent $k[G]$ d'une structure d'algèbre et $k[G]$ est *l'algèbre du groupe G*.

Nous définissons la notion de cogèbre comme la notion “duale” de celle d’algèbre. Une *cogèbre* unitaire est un k-module C muni de deux applications linéaires, la comultiplication $\Delta : C \to C \otimes C$ et la coünité $\varepsilon : k \to C$ telles que les diagrammes suivants commutent.

$a)$ coassociativité

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & A \otimes A \arrow[d, "\Delta\otimes \mathrm{id}"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\Delta"] & A \otimes A \otimes A \end{tikzcd}$$

$b)$ coünitarité

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\cong"'] \arrow[dr, "\cong"] \arrow[dd, "\Delta"'] & \\ A \otimes k & & k \otimes A \\ & A \otimes A \arrow[ul, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon"] \arrow[ur, "\varepsilon\otimes\mathrm{id}"'] & \end{tikzcd}$$

Une cogèbre (C, Δ, ε) est *cocommutative* si $\Delta = \tau \circ \Delta$, où τ est la volte. Si $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ et $(D, \Delta_D, \varepsilon_D)$ sont deux cogèbres, une application $f : C \to D$ est un *morphisme de cogèbres* si $\Delta_D \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta_C$ et $\varepsilon_C = \varepsilon_D \circ f$.

Remarque 2. Nous utiliserons la notation de Sweedler

$$\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}.$$

Les indices (1) et (2) sont symboliques et la notation $x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ doit être comprise comme une somme de produit tensoriels d’éléments de C. De manière analogue, nous écrivons $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta(x) = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)} \otimes x_{(3)}$, ce qui est licite par la coassociativité.

Exemples 3.

(a) Soit (C, Δ, ε) une cogèbre. La *cogèbre opposée* C^{op} est le k-module C muni de la même coünité ε et de la multiplication $\Delta^{\mathrm{op}} = \tau \circ \Delta$; on vérifie aisément que $(C^{\mathrm{op}}, \Delta^{\mathrm{op}}, \varepsilon)$ est une cogèbre.

(b) Soit $k[G]$ le k-module libre de base les éléments de G. Les applications linéaires $\Delta : k[G] \to k[G] \otimes k[G]$ définie sur la base par $\Delta(g) = g \otimes g$ et $\varepsilon : k[G] \to k$ définie sur la base par $\varepsilon(g) = 1$, pour tout $g \in G$, munissent $k[G]$ d’une structure de cogèbre.

(c) Soit $U(\mathfrak{g})$ l’algèbre universelle enveloppante d’une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Les applications $\Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ définie par $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ et $\varepsilon : U(\mathfrak{g}) \to k$ définie par $\varepsilon(x) = 0$, pour tout $x \in \mathfrak{g}$, munissent $U(\mathfrak{g})$ d’une structure de cogèbre.

1.1.2 Dualité entre algèbres et cogèbres

Nous supposons dans ce paragraphe que k est un corps. Pour tout k-espace vectoriel V, nous notons $V^* = \mathrm{Hom}_k(V, k)$ le dual linéaire de V. La dualité entre V et V^* définit une forme bilinéaire non dégénérée $<, >: V^* \otimes V \to k$ par $< f, v >= f(v)$. Si une application $\varphi : V \to W$ est linéaire, la *transposée* de φ est $\varphi^* : W^* \to V^*$, définie par

$$\varphi^*(f)(v) = f(\varphi(v))$$

pour tout $f \in W^*$ et $v \in V$.

Lemme 1. *Si C est une cogèbre, son dual linéaire C^* est canoniquement muni d'une structure de k-algèbre par $\mu = \Delta^*$ et $u = \varepsilon^*$.*

Démonstration. Comme $C^* \otimes C^* \subset (C \otimes C)^*$, les applications précédentes sont bien définies et on vérifie aisément que C^* est une algèbre. □

Exemple 4. Soit $(k[G], \Delta, \varepsilon)$ la cogèbre définie dans l'exemple 3. Alors, son dual $k^G = k[G]^*$, qui s'identifie aux fonctions du groupe G dans k, a une structure d'algèbre donnée par $\mu = \Delta^*$ et $u = \varepsilon^*$. Notons $(\delta_g)_{g\in G}$ la base duale de $(g)_{g\in G}$; le produit $\mu = \Delta^*$ de $k^G = k[G]^*$est donné dans la base $(\delta_g)_{g\in G}$ par

$$\delta_g \delta_h = \delta_{g,h}\ \delta_g \tag{1.1}$$

pour tout $g, h \in G$, où $\delta_{g,h}$ est le symbole de Kronecker.

Si nous considérons maintenant une algèbre A, l'image de la transposée de la multiplication $m^*(A^*)$ n'est pas forcément contenue dans $A^* \otimes A^*$. Nous définissons alors le *dual fini* A^o de A comme l'ensemble

$$A^o = \{f \in A^* |\ \text{il existe un idéal } I \text{ de } A \text{ tel que } f(I) = 0 \text{ et } \dim A/I < \infty\}.$$

Proposition 2. *Pour toute algèbre A, la comultiplication $\Delta = \mu^*$ et la coünité $\varepsilon = u^*$ munissent le dual fini de A d'une structure de cogèbre.*

Démonstration. Pour la preuve, on pourra consulter [Mo93]. □

Remarque 5. Si A est un espace vectoriel de dimension finie, alors son dual linéaire et son dual fini coïncident.

Exemple 6. Soit $k[G]$ l'algèbre d'un groupe fini G. Alors $k[G]$ est de dimension finie et $k^G = k[G]^*$ a une structure de cogèbre donnée par μ^*. Dans la base $(\delta_g)_{g\in G}$ de k^G, duale de la base $(g)_{g\in G}$ de $k[G]$, la comultiplication

$$\Delta = \mu^* : k^G \to k^G \otimes k^G$$

est donnée par

$$\Delta(\delta_g) = \mu^*(\delta_g) = \sum_{h\in G} \delta_{gh^{-1}} \otimes \delta_h, \tag{1.2}$$

pour tout $g \in G$. La coünité $\varepsilon : k[G] \to k$ est donnée par

$$\varepsilon(\delta_g) = \delta_{g,1} \tag{1.3}$$

pour tout $g \in G$.

1.1.3 Bigèbres

Nous combinons maintenant les notions d'algèbre et de cogèbre en la notion de bigèbre. Une *bigèbre* B est une k-algèbre (B, μ, u) qui est aussi une cogèbre (B, Δ, ε), telle que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vraie.

(1) Les applications Δ et ε sont des morphismes d'algèbres.

(2) Les applications μ et u sont des morphismes de cogèbres.

Un *morphisme de bigèbres* $f : B \to B'$ est une application linéaire entre deux bigèbres qui est à la fois un morphisme d'algèbres et de cogèbres.

Exemples 7.

(a) Soit $k[G]$ l'algèbre d'un groupe G. Alors la comultiplication et la coünité définies dans l'exemple 3 sont des morphismes d'algèbres et $k[G]$ est une bigèbre.

(b) Soit G un groupe fini. L'ensemble k^G des fonctions du groupe G a une structure de bigèbre donnée par la multiplication, l'unité, la comultiplication et la coünité définies par (1.1), (1.2) et (1.3)

(c) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et $U(\mathfrak{g})$ son algèbre universelle enveloppante munie de son produit canonique. La comultiplication et la coünité définies dans l'exemple 3 munissent $U(\mathfrak{g})$ d'une structure de bigèbre.

Considérons une bigèbre $(B, \mu, \Delta, u, \varepsilon)$. Un élément $g \in B$ est *group-like* si $\Delta(g) = g \otimes g$ et $\varepsilon(g) = 1$; un élément $x \in B$ est *primitif* si $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$ et $\varepsilon(x) = 0$. Si g, h sont *group-like*, un élément x est *(g,h)-primitif* (en anglais *(g,h)-skew primitive*) si $\Delta(x) = g \otimes x + x \otimes h$ et $\varepsilon(x) = 0$. Nous notons $G(B)$ le groupe des éléments *group-like*, $P(B)$ l'algèbre de Lie des éléments primitifs et $P_{g,h}(B)$ l'ensemble des éléments (g,h)-primitifs, si $g, h \in G(B)$.

1.1.4 Algèbres de Hopf

Si (C, Δ, ε) est une cogèbre et (A, μ, u) une algèbre, le *produit de convolution* défini par

$$f * g(x) = \mu \circ (f \otimes g) \circ \Delta(x)$$

pour tout $f, g \in \mathrm{Hom}(C, A)$ et $x \in C$, munit le k-module $\mathrm{Hom}_k(C, A)$ des applications k-linéaires de C vers A d'une structure d'algèbre ; l'élément unité est $u\varepsilon$.

Une bigèbre $(H, \mu, \Delta, u, \varepsilon)$ est une *algèbre de Hopf* s'il existe un *antipode* $S : H \to H$, inverse de l'identité pour le produit de convolution. Un *morphisme d'algèbres de Hopf* $f : H \to K$ est un morphisme de bigèbres entre deux algèbres de Hopf H et K tel que $f(S_H h) = S_K(f(h))$ pour tout $h \in H$, où S_H et S_K sont les antipodes de H et K respectivement.

Exemples 8.

(a) Soit $k[G]$ l'algèbre d'un groupe G. Alors l'application linéaire $S : k[G] \to k[G]$ définie par $S(g) = g^{-1}$ pour tout $g \in G$ est un antipode pour $k[G]$. Plus généralement, si $g \in G(H)$ est un élément *group-like* d'une algèbre de Hopf H, alors $S(g) = g^{-1}$ et, en particulier, tout élément *group-like* est inversible.

(b) Soit $H = U(\mathfrak{g})$ l'algèbre universelle enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Alors l'application $S : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ définie par $S(x) = -x$, pour tout $x \in \mathfrak{g}$ est un antipode pour $U(\mathfrak{g})$. Plus généralement, si $x \in P(H)$ est un élément primitif d'une algèbre de Hopf H, alors on a $S(x) = -x$.

(c) Si k est un corps et H est une algèbre de Hopf, alors le dual fini H^o de H est une algèbre de Hopf avec S^* comme antipode.

(d) L'algèbre de Hopf de Sweedler $\mathcal{S}_4$ est la k-algèbre engendrée par g, x, soumis aux relations

$$g^2 = 1, \quad x^2 = 0 \quad \text{et} \quad xg = -gx$$

munie de la comultiplication $\Delta : \mathcal{S}_4 \to \mathcal{S}_4 \otimes \mathcal{S}_4$ définie par

$$\Delta(g) = g \otimes g \quad \text{et} \quad \Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1.$$

La coünité $\varepsilon : \mathcal{S}_4 \to k$ est définie par $\varepsilon(g) = 1$ et $\varepsilon(x) = 0$ et l'antipode $S : \mathcal{S}_4 \to \mathcal{S}_4$ est défini par

$$S(g) = g^{-1} = g \quad \text{et} \quad S(x) = -gx.$$

L'algèbre de Hopf $\mathcal{S}_4$ est un k-module libre de rang 4 sur k, et est la plus petite algèbre de Hopf qui ne soit ni commutative ni cocommutative.

Nous utiliserons au chapitre 4 le résultat suivant.

Lemme 3. *Soit k^G l'algèbre de Hopf des fonctions sur un groupe fini G. Si $f : k^G \to k^G$ est un automorphisme de l'algèbre de Hopf k^G, alors il existe un automorphisme $\varphi : G \to G$ du groupe G tel que $f(\delta_g) = \delta_{\varphi(g)}$ pour tout $g \in G$.*

Démonstration. Soit δ_g un élément de base de k^G ; il existe $a_k^g \in k$ tels que $f(\delta_g) = \sum_{k \in G} a_k^g \delta_k$. Comme f est un automorphisme d'algèbre, on a

$$f(\delta_g \delta_h) = f(\delta_g) f(\delta_h)$$

et donc

$$\delta_{g,h} a_k^g = a_k^g a_k^h$$

pour tout $g, h, k \in G$. En particulier, si $g = h$ on obtient $a_k^g \in \{0, 1\}$ et s'il existe $g_0 \in G$ tel que $a_k^{g_0} \neq 0$, alors pour tout $h \neq g_0$ et tout $k \in G$, on obtient $a_l^h = 0$. Comme f est bijective, pour tout $g \in G$ il existe un unique $\varphi(g) \in G$ tel que $f(\delta_g) = \delta_{\varphi(g)}$. Comme f est un morphisme de cogèbres, on a

$$\sum_{g_1 g_2 = g} f(\delta_{g_1}) \otimes f(\delta_{g_2}) = \Delta(f(\delta_g)),$$

ce qui donne

$$\sum_{g_1 g_2 = g} \delta_{\varphi(g_1)} \otimes \delta_{\varphi(g_2)} = \sum_{h_1 h_2 = \varphi(g)} \delta_{h_1} \otimes \delta_{h_2},$$

c'est-à-dire $\varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)$ pour tout $g, h \in G$. De manière analogue, la relation $\varepsilon \circ f = \varepsilon$ implique $\varphi(1) = 1$ et la bijectivité de f implique celle de φ qui est donc un automorphisme du groupe G. □

1.1.5 Modules et comodules

Comme précédement, nous donnons la définition des modules de telle sorte que nous puissions la "dualiser".

Soit A une algèbre. Un A-*module* à gauche M est un k-module muni d'une application linéaire (appelée *action*) $\gamma : A \otimes M \to M$ telle que les diagrammes suivants commutent.

a) associativité

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes M \arrow[r, "\gamma\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mu_A\otimes\mathrm{id}"'] & A \otimes M \arrow[d, "\gamma"] \\ A \otimes M \arrow[r, "\gamma"] & M \end{tikzcd}$$

b) unitarité

$$\begin{tikzcd} k \otimes M \arrow[r, "u\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\cong"'] & A \otimes M \arrow[d, "\gamma"] \\ & M \end{tikzcd}$$

Les A-modules à droite se définissent de manière analogue et nous notons $\mathrm{Mod}^l(A)$ (ou $\mathrm{Mod}(A)$) la catégorie des A-modules à gauche et $\mathrm{Mod}^r(A)$ celle des A-modules à droite.

Exemples 9. Soit H une algèbre de Hopf.
(a) Soit M un k-module. Alors la coünité de H définit l'action triviale de H sur M par $h \rightharpoonup m = \varepsilon(h)m$ pour tout $h \in H$ et $m \in M$.
(b) L'action adjointe de H sur lui-même est définie pour tout $h, k \in H$ par $h \rightharpoonup k = h_{(1)}kS(h_{(2)})$.

Soit $(C, \Delta_C, \varepsilon_C)$ une cogèbre. Un C-*comodule à gauche* M est un k-module muni d'une application linéaire (appelée *coaction*) $\delta : M \to C \otimes M$ telle que les diagrammes suivants commutent.

a) coassiociativité

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"'] & M \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\Delta_C"] \\ M \otimes C \arrow[r, "\delta\otimes\mathrm{id}"] & M \otimes C \otimes C \end{tikzcd}$$

b) coünitarité

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\delta"] \arrow[dr] & M \otimes C \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\varepsilon_C"] \\ & M \otimes k \end{tikzcd}$$

La catégorie des C-comodules à gauche est notée $\mathrm{Comod}^{\mathrm{l}}(C)$ (ou $\mathrm{Comod}(C)$) et la catégorie des C-comodules à droite, définie de manière analogue, est notée $\mathrm{Comod}^{\mathrm{r}}(C)$.

Remarque 10. Nous utilisons encore la notation de Sweedler

$$\delta(m) = m_{(1)} \otimes m_{(2)}$$

pour désigner la coaction d'un élément m d'un C-comodule à gauche M.

Soit C une cogèbre et soit $(M, \delta_M), (N, \delta_N)$ deux C-comodules. Une application $f : M \to N$ est un *morphisme de C-comodules* si $\delta_N \circ f = (f \otimes \mathrm{id}) \circ \delta_M$. Nous avons le lemme de dualité suivant.

Lemme 4. *Supposons que k est un corps.*
(a) Soit C une cogèbre et M un C-comodule à droite. Alors M est un C^*-module à gauche.
(b) Soit A une algèbre et M un A-module à gauche. Alors M est un A^o-comodule à droite si et seulement si $A \cdot m$ est de dimension finie, comme k-espace vectoriel, pour tout $m \in M$.

Exemples 11.

(a) Soit (C, Δ) une cogèbre. Alors C est un C-comodule avec la comultiplication comme coaction.

(b) Considérons la cogèbre $C = k[G]$. Alors M est un $k[G]$-comodule à droite si et seulement si M est un k-module G-gradué (voir [Mo93]), c'est-à-dire $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$, où

$$M_g = \{m \in M | \delta(m) = m \otimes g\}. \tag{1.4}$$

(c) Soit $f : C \to C'$ un morphisme de cogèbres. Alors f induit une structure de C'-comodule sur C par $(f \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_C$.

1.1.6 Invariants et coïnvariants

Soit H une algèbre de Hopf et M un H-module à gauche. Le sous-module des *éléments invariants* de M sous H est

$$M^H = \{m \in M | h \cdot m = \varepsilon(h)m, \ \forall h \in H\}.$$

Soit M un H-comodule à droite. Le sous-modules des *éléments coïnvariants* de M pour H est défini par

$$M^{co\, H} = \{m \in M | \delta(m) = m \otimes 1\}.$$

De manière analogue, on définit les éléments invariants pour les H-modules à droite et les éléments coïnvariants pour les H-comodules à gauche et nous utiliserons les mêmes notations. On a le lemme suivant.

Lemme 5. *Supposons que k est un corps.*

(1) Soit M un H-comodule à droite ; considérons aussi la structure de H^*-module donnée par la dualité. Alors on a

$$M^{H^*} = M^{co\, H}$$

(2) Soit M un H-module à gauche tel que la dualité donne une structure de H^o-comodule à droite. Alors on a

$$M^H = M^{co\, H^o}.$$

Exemple 12. Considérons l'algèbre de Hopf $k[G]$ d'un groupe G et un $k[G]$-comodule à droite $M = \bigoplus_{g \in G} M_g$ avec les notations de l'exemple 1.4. Alors

$$M^{co\, H} = M_e,$$

où e est l'élément neutre de G.

1.1.7 Produits tensoriel et cotensoriel

Soit (H, μ, Δ) une algèbre de Hopf et soit V, W deux H-modules à gauche. Alors $V \otimes W$ est un H-module à gauche *via*

$$h \cdot (v \otimes w) = h_{(1)} \cdot v \otimes h_{(2)} \cdot w,$$

pour tout $h \in H$, $v \in V$ et $w \in W$.

Soit V, W deux H-comodules à droite de coactions δ_V, δ_W respectivement. Alors $V \otimes W$ est un H-comodule à droite *via*

$$\delta_{V \otimes W}(v \otimes w) = \sum v_{(1)} \otimes w_{(1)} \otimes v_{(2)} w_{(2)},$$

pour tout $v \in V$ et $w \in W$.

Soit V un H-comodule à gauche et W un H-comodule à droite. Le *produit cotensoriel* $V \square_H W$ est l'égalisateur des coactions de V et W, c'est-à-dire le noyau de l'application $\varphi : V \otimes W \to V \otimes H \otimes W$ définie par

$$\varphi = \delta_V \otimes \mathrm{id}_W - \mathrm{id}_V \otimes \delta_W.$$

Comme $V \square_H W \subset V \otimes W$, on notera les éléments de $V \square_H W$ par $v \otimes w$.

Soit $f : H \to K$ un morphisme d'algèbres de Hopf et V un K-comodule à droite. Nous munissons H de la structure de K-comodule à gauche donnée par $(f \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta_H$. Alors $V \square_K H$ est un H-comodule à droite via $\mathrm{id} \otimes \Delta_H$. Le produit cotensoriel au dessus de H induit donc un foncteur

$$\varphi : \mathrm{Comod}^{\mathrm{r}}(K) \to \mathrm{Comod}^{r}(H)$$

défini par $\varphi(U) = U \square_K H$, pour tout $U \in \mathrm{Comod}^{\mathrm{r}}(K)$. Si $H = K$, nous avons un isomorphisme de k-modules $\mathrm{id} \otimes \varepsilon : V \square_H H \xrightarrow{\cong} V$.

1.1.8 Algèbres modules et algèbres comodules

Une algèbre A est une *algèbre H-module* à gauche s'il existe $\rightharpoonup : H \otimes A \to A$ vérifiant les trois conditions suivantes :

(MA1) L'application $\rightharpoonup : H \otimes A \to A$ munit A d'une structure de H-module à gauche,

(MA2) $h \rightharpoonup (ab) = (h_{(1)} \rightharpoonup a)(h_{(2)} \rightharpoonup b)$ pour tout $h \in H$ et $a, b \in A$,

(MA3) $h \rightharpoonup 1 = \varepsilon(h)1$ pour tout $h \in H$.

Si l'action vérifie seulement (MA2) et (MA3), on dit que H *mesure* A. Une manière équivalente de donner les conditions (MA2) et (MA3) est de dire que la multiplication et l'unité de A sont des morphismes de H-modules. Nous pouvons alors "dualiser" cette définition.

Si k est un corps et si H est de dimension finie sur k, on a le lemme suivant.

Lemme 6. *Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie sur un corps k. A est une algèbre H-module à gauche si et seulement si A est une algèbre H^*-comodule à droite.*

Exemples 13.

(a) Soit $k[G]$ l'algèbre d'un groupe G et soit (A, δ) une algèbre H-comodule. D'après l'exemple 11, $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ est un k-module G-gradué, avec $\delta(a_g) = a_g \otimes g$, pour tout $a_g \in A_g$. Soit $a_g \in A_g$ et $b_h \in A_h$; on a $\delta(a_g b_h) = a_g b_h \otimes gh$ et donc $A_g A_h \subset A_{gh}$ et $1 \in A_1$. Ceci assure que A est une algèbre G-graduée.

(b) Soit $k[G]$ l'algèbre d'un groupe G et A une algèbre H-module. Comme $\Delta(g) = g \otimes g$, on a $g \cdot (ab) = (g \cdot a)(g \cdot b)$ pour tout $g \in G$ et $a, b \in A$ et donc g agit sur A par automorphisme. Nous avons donc un morphisme de groupes $G \to \mathrm{Aut}(A)$, où $\mathrm{Aut}(A)$ est le groupe des automorphismes d'algèbres de A. Réciproquement, tout morphisme $G \to \mathrm{Aut}(A)$ induit une structure d'algèbre $k[G]$-module sur A. De manière générale, si H est une algèbre de Hopf agissant sur un H-module A, on a un morphisme de groupe $G(H) \to \mathrm{Aut}(A)$.

(c) Soit $U(\mathfrak{g})$ l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Comme la comultiplication est définie par $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$, un élément $x \in U(\mathfrak{g})$ agit par dérivation sur A. Plus généralement si $x \in P(H)$ est un élément primitif d'une algèbre de Hopf H et A est une algèbre H-module, alors x agit par dérivation sur A et on a un morphisme d'algèbres de Lie $P(H) \to \mathrm{Der}(A)$, où $\mathrm{Der}(A)$ désigne l'algèbre de Lie des dérivations de A.

(d) Si k est un corps, si $k^G = (k[G])^*$ est le dual de l'algèbre d'un groupe fini G et si A est une algèbre H-comodule, alors A est une algèbre $k[G]$-module et on a un morphisme de groupes $G \to \mathrm{Aut}(A)$.

(e) Si k est un corps, si $k^G = (k[G])^*$ est le dual de l'algèbre d'un groupe fini G et si A est une algèbre H-module, alors A est une algèbre $k[G]$-comodule, c'est-à-dire une algèbre G-graduée.

L'action d'une algèbre de Hopf H sur une algèbre A est *intérieure* s'il existe une application inversible pour la convolution $u \in \mathrm{Hom}(H, A)$ telle que

$$h \rightharpoonup a = u(h_{(1)}) a u^{-1}(h_{(2)}),$$

pour tout $h \in H$ et $a \in A$, où u^{-1} désigne l'inverse de u pour la convolution.

Exemples 14.

(a) L'action triviale d'une algèbre de Hopf H sur une algèbre A est intérieure : il suffit de poser $u(h) = \varepsilon(h)1$.

(b) L'action adjointe d'une algèbre de Hopf H sur elle-même est intérieure : il suffit de poser $u(h) = h$ et $u^{-1}(h) = S(h)$.

(c) Si l'action de H sur A est intérieure, les éléments *group-like* agissent comme automorphismes intérieurs ; réciproquement, si un groupe G agit par automorphismes intérieurs, alors l'action de $k[G]$ est intérieure.

(d) Si l'action de H sur A est intérieure, alors les éléments primitifs de H agissent par dérivations intérieures : $x \rightharpoonup a = [u(x), a]$, pour tout $x \in H$ et $a \in A$. Réciproquement, si une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ agit par dérivation intérieure sur A, alors l'action de $U(\mathfrak{g})$ sur A est intérieure.

1.2 Produits croisés et extensions clivées

1.2.1 Cocycles

Soit H une algèbre de Hopf, A une k-algèbre et supposons que H mesure A *via* l'action à gauche $\rightharpoonup: H \otimes A \to A$. Une application $\sigma : H \otimes H \to A$ est un *cocycle normalisé à gauche* si σ est inversible pour la convolution, si

$$\sigma(h, 1) = \sigma(1, h) = \varepsilon(h)$$

et si

$$\big(h_{(1)} \rightharpoonup \sigma(k_{(1)}, m_{(1)})\big)\ \sigma(h_{(2)}, k_{(2)} m_{(2)}) = \sigma(h_{(1)}, k_{(1)})\ \sigma(h_{(2)} k_{(2)}, m) \qquad (1.5)$$

pour tout $h, k, m \in H$. On utilisera souvent le terme cocycle pour désigner un cocycle normalisé.

Exemples 15.

(a) Soit $k[G]$ l'algèbre d'un groupe fini G et $\sigma : k[G] \otimes k[G] \to k$ un cocycle à gauche associé à une action triviale. Alors la condition (1.5) s'écrit

$$\sigma(k, m)\, \sigma(h, km) = \sigma(h, k)\, \sigma(hk, m)$$

et le cocycle σ est un cocycle du groupe G au sens usuel.

(b) Soit H et K deux algèbres de Hopf, A une k-algèbre, $f : H \to K$ un morphisme d'algèbres de Hopf et $\sigma : K \otimes K \to A$ un cocycle normalisé à gauche. Alors, $\sigma' = \sigma \circ (f \otimes f)$ est un cocycle normalisé à gauche.

Remarque 16. Soit H une algèbre de Hopf, A une algèbre et $\sigma : H \otimes H \to A$ un cocycle. Supposons que $U = H^*$ est une algèbre de Hopf et notons $J = \sigma^* \in A \otimes U^{\otimes 2}$. Alors J satisfait l'équation de twist dynamique

$$J^{1,2,34} J^{12,3,4} = J^{1,23,4} J^{1,2,3}.$$

1.2.2 Produits croisés

Soit H une algèbre de Hopf, A une k-algèbre et supposons que H mesure A *via* l'action à gauche $\rightharpoonup: H \otimes A \to A$.

Soit $\sigma : H \otimes H \to A$ une application inversible pour la convolution. Le *produit croisé* $A \#_\sigma H$ de A et H est le k-module $A \otimes H$ muni de la multiplication

$$(a\#h)(b\#k) = a(h_{(1)} \rightharpoonup b)\ \sigma(h_{(2)}, k_{(1)}) \# h_{(3)} k_{(2)}$$

pour tout $h, k \in H$ et $a, b \in A$, où l'on a noté $a\#h$ les éléments de $A\#_\sigma H$.

Lemme 7. *Le produit croisé $A\#H$ est une algèbre associative d'unité $1\#1$ si et seulement si*

(a) l'algèbre A est munie d'une action $\rightharpoonup: H \otimes A \to A$ telle que $1 \rightharpoonup a = a$ et

$$h \rightharpoonup (k \rightharpoonup a) = \sigma(h_{(1)}, k_{(1)})\, (h_{(2)} k_{(2)} \rightharpoonup a)\, \sigma^{-1}(h_{(3)}, k_{(3)})$$

pour tout $a \in A$ et $h, k \in H$;

(b) l'application $\sigma : H \otimes H \to A$ est un cocycle normalisé à gauche.

Remarque 17. Si le cocycle σ est trivial, c'est-à-dire si $\sigma(h,k) = \varepsilon(h)\varepsilon(k)$, alors le produit croisé se réduit à $A\#H \cong A \otimes H$ avec la multiplication

$$(a\#h)(b\#k) = a(h_{(1)} \rightharpoonup b)\#h_{(2)}k,$$

pour tout $h, k \in H$ et $a, b \in A$.

Exemples 18.

(a) Soit l'algèbre $H = k[G]$ d'un groupe G, une algèbre A, une action $\rightharpoonup$ de H sur A et un cocycle $\sigma : H \otimes H \to A$. Alors le produit croisé $A\#_\sigma H$ est le produit croisé usuel d'algèbres de groupes.

(b) Soit H, K deux algèbres de Hopf, B une algèbre, $f : H \to K$ un morphisme d'algèbres de Hopf et $\sigma : K \otimes K \to B$ un cocycle. Notons

$$\sigma' = (f \otimes f) \circ \sigma : H \otimes H \to B.$$

Si K mesure B *via* $\rightharpoonup$, alors H mesure B *via* $\rightharpoonup \circ (f \otimes \mathrm{id}) : H \otimes B \to B$. Par conséquent, si $B\#_\sigma K$ est un produit croisé, il en est de même pour $B\#_{\sigma'} H$.

(c) Soit A une algèbre, $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie, $\tau : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to A$ un cocycle de Lie et $\delta : \mathfrak{g} \to \mathrm{Der}_k(A)$ une application linéaire tels que $A \times_\tau U(\mathfrak{g})$ soit le produit croisé de l'algèbre enveloppante au sens classique. Alors le cocycle $\sigma : U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \to A$ induit par τ et l'action induite par δ définissent un produit croisé $A\#_\sigma U(g)$ et les deux algèbres $A \times_\tau U(\mathfrak{g})$ et $A\#_\sigma U(g)$ sont isomorphes (voir [Mo93] pour les détails).

1.2.3 Extensions clivées

Soit $B \subset Z$ deux algèbres et H une algèbre de Hopf. On dit que $B \subset Z$ est une H-*extension* à droite si Z est une algèbre H-comodule à droite et si l'ensemble des éléments coïnvariant $Z^{\mathrm{co}\,H} = B$. Une extension $B \subset Z$ est une *extension clivée* s'il existe un morphisme de H-comodules $\gamma : H \to Z$ inversible pour la convolution et tel que $\gamma(1) = 1$; γ est appelée *l'application clivante*.

Les extensions clivées peuvent être caractérisées en terme de produit croisés.

Théorème 8. *Une H-extension $B \subset Z$ est clivée si et seulement s'il existe un cocycle $\sigma : H \otimes H \to B$ et une action $\rightharpoonup: H \otimes B \to B$ tels que Z soit isomorphe au produit croisé $B\#_\sigma H$.*

La preuve de ce théorème (voir [Mo93]) est basée sur les résultats suivants.

Proposition 9 ([DoTa86]). *Soit $B \subset Z$ une H-extension à droite, qui est clivée d'application clivante $\gamma : H \to Z$. Alors, il existe une action de produit croisé $\rightharpoonup: H \otimes B \to B$, donnée par*

$$h \rightharpoonup a = \gamma(h_{(1)})\, a\, \gamma^{-1}(h_{(2)})$$

pour tout $h \in H$ et $a \in A$, et un cocycle inversible $\sigma : H \otimes H \to B$ donné par

$$\sigma(h,k) = \gamma(h_{(1)})\, \gamma(k_{(1)})\, \gamma^{-1}(h_{(2)}k_{(2)})$$

pour tout $h, k \in H$, $a \in B$, *où* γ^{-1} *désigne l'inverse pour la convolution de* γ.

Ces données définissent un produit croisé $B\#_\sigma H$ *isomorphe à* Z *et le morphisme d'algèbres* $\Psi : B\#_\sigma H \to Z$ *donné par* $\Psi(a\#h) = a\gamma(h)$ *est un morphisme de* B*-modules à gauche et un morphisme de* H*-comodules à droite (avec la structure naturelle).*

Proposition 10 ([BM89]). *Soit* $B\#_\sigma H$ *un produit croisé ; considérons l'application clivante* $\gamma : H \to B\#_\sigma H$ *définie par* $\gamma(h) = 1\#h$. *Alors* γ *est inversible pour la convolution d'inverse* γ^{-1} *donné par*

$$\gamma^{-1}(h) = \sigma^{-1}(S(h_{(2)}), h_{(3)})\#S(h_{(1)})$$

et $B \subset B\#_\sigma H$ *est une* H*-extension clivée d'application clivante* γ.

Corollaire 11 ([BM89]). *Supposons que l'antipode de l'algèbre de Hopf* H *soit bijective. Alors tout produit croisé* $B\#_\sigma H$ *est isomorphe à* $B \otimes H$ *comme* B*-module à gauche.*

Si l'action de H est intérieure, nous avons le théorème suivant.

Théorème 12 ([BCM86]). *Soit* $B\#_\sigma H$ *un produit croisé tel que l'action de* H *sur* B *soit intérieure et donnée par une application inversible* $u \in \mathrm{Hom}(H, B)$. *Définissons* $\tau : H \otimes H \to B$ *par*

$$\tau(h, k) = u^{-1}(k_{(1)})\, u^{-1}(h_{(1)})\, \sigma(h_{(2)}, k_{(2)})\, u(h_{(3)}k_{(3)}).$$

Alors τ *est un cocycle et il existe un isomorphisme d'algèbres*

$$\varphi : B\#_\sigma H \xrightarrow{\cong} B\#_\tau H,$$

où l'action de H *sur* B *du produit croisé* $B\#_\tau H$ *est triviale. De plus, l'isomorphisme d'algèbres* φ *est aussi un morphisme de* B*-modules à gauche et un morphisme de* H*-comodules à droite.*

Nous avons aussi des conditions nécessaires et suffisantes pour que deux produits croisés soient isomorphes. Elles sont dues à Doi [Do89] d'une part et Blattner (dans un papier non publié, mais reformulé dans [Mo93]). Nous donnons le théorème de [Mo93].

Théorème 13 ([Mo93]). *Soit* B *une algèbre et* H *une algèbre de Hopf. Considérons deux actions de produits croisés* $\rightharpoonup, \rightharpoonup'$: $H \otimes B \to B$ *et deux cocycles* $\sigma, \sigma' : H \otimes H \to B$ *associés à* $\rightharpoonup, \rightharpoonup'$ *respectivement. Supposons que l'application*

$$\varphi : B\#_\sigma H \to B\#'_{\sigma'} H$$

est un isomorphisme d'algèbres, qui est aussi un morphisme de B*-modules à gauche et un morphisme de* H*-comodule à droite. Alors il existe une application* $u \in \mathrm{Hom}(H, B)$ *inversible pour la convolution telle que*

(1) $\varphi(a\#h) = a\, u(h_{(1)})\#' h_{(2)}$,

(2) $h \rightharpoonup' a = u^{-1}(h_{(1)})\, (h_{(2)} \rightharpoonup a)\, u(h_{(3)})$,

(3) $\sigma'(h,k) = u^{-1}(h_{(1)})\,\big(h_{(2)} \rightharpoonup u^{-1}(k_{(1)})\big)\,\sigma(h_{(3)},k_{(2)})\,u(h_{(4)}k_{(3)})$ *pour tout* $h,k \in H$ *et* $a \in B$.

Réciproquement, si $u \in Hom(H,B)$ *vérifie* (2) *et* (3)*, alors l'application* φ *définie par* (1) *est un isomorphisme.*

Dans ce cas, les deux produits croisés sont dits *équivalents*. Dans le language des extensions clivées, le théorème 13 se reformule comme suit.

Corollaire 14. *Soit* $B \subset Z$ *une* H*-extension clivée et supposons qu'il existe deux applications clivantes* $\gamma, \gamma' : H \to Z$*. Notons* $B\#_\sigma H$ *et* $B\#'_{\sigma'}H$ *les deux produits croisés isomorphes à* Z *correspondant à* γ, γ' *par la proposition 9 et posons* $u = \gamma * \gamma' \in \mathrm{Hom}(H,Z)$*. Alors les actions* $\rightharpoonup, \rightharpoonup'$ *et les cocycles* σ, σ' *vérifient les relations (1)–(3) du théorème 13.*

1.2.4 Algèbres H-comodule tordues

Nous considérons maintenant le cas où $B = k$. Alors les cocycles considérés sont à valeurs dans k, sur lequel H agit trivialement. L'application linéaire $\sigma : H \otimes H \to k$ est un cocycle à gauche si

$$\sigma(k_{(1)},m_{(1)})\,\sigma(h,k_{(2)}m_{(2)}) = \sigma(h_{(1)},k_{(1)})\,\sigma(h_{(2)}k_{(2)},m),$$

et si $\sigma(h,1) = \sigma(1,h) = \varepsilon(h)$ pour tout $h,k,m \in H$.

Soit A une algèbre H-comodule et $\sigma : H \otimes H \to k$ un cocycle à gauche. *L'algèbre* H*-comodule tordue* ${}_\sigma A$ *à gauche* est le H-comodule A muni du produit

$$a \cdot_\sigma b = \sigma(a_{(1)},b_{(1)})\,a_{(2)}b_{(2)}$$

pour tout $a,b \in A$.

De manière similaire, un cocycle à droite $\tau : H \otimes H \to k$ est une application linéaire vérifiant

$$\tau(k_{(2)},m_{(2)})\,\tau(h,k_{(1)}m_{(1)}) = \tau(h_{(2)},k_{(2)})\,\tau(h_{(1)}k_{(1)},m)$$

et $\tau(h,1) = \tau(1,h) = \varepsilon(h)$, pour tout $h,k,m \in H$. Alors *l'algèbre* H*-comodule tordue* A_τ *à droite* est le H-comodule A muni du produit

$$a \cdot_\tau b = a_{(1)}b_{(1)}\tau(a_{(2)}b_{(2)}) \tag{1.6}$$

pour tout $a,b \in A$.

Notons que si σ est un cocycle à gauche, alors σ^{-1} est un cocycle à droite.

Si H est une algèbre de Hopf et $\sigma : H \otimes H \to k$ un cocycle à gauche, alors *l'algèbre de Hopf tordue* H^σ est la cogèbre H munie du produit

$$h \cdot_\sigma k = \sigma(h_{(1)},k_{(1)})\;h_{(2)}k_{(2)}\;\sigma^{-1}(h_{(3)}k_{(3)})$$

pour tout $h,k \in H$.

Cette torsion par les cocycles est la version duale de la torsion par les twists de Drinfeld (voir par exemple [AEGN02]). Un élément inversible $J \in H \otimes H$ est un *twist de Drinfeld* s'il vérifie

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(J)(J \otimes 1) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(J)(1 \otimes J). \tag{1.7}$$

Soit H une algèbre de Hopf et J un twist de Drinfeld. On définit l'algèbre de Hopf H^J comme l'algèbre H munie de la comultiplication

$$\Delta^J(h) = J^{-1}\Delta(h)J$$

pour tout $h \in H$. La cogèbre H-module à droite ${}_JH$ est le module H muni de la comultiplication

$$\Delta(h)_J = \Delta(h)J$$

pour tout $h \in H$ et la cogèbre H-module à gauche H_J est le module H muni de la comultiplication

$${}_J\Delta(h) = J^{-1}\Delta(h)$$

pour tout $h \in H$.

Proposition 15. *Soit H une algèbre de Hopf de dimension finie sur un corps k. Si $\sigma : H \otimes H \to k$ est un cocycle à gauche et si $J = \sigma^*$ est l'application transposée de σ, alors J est un twist de Drinfeld et nous avons un isomorphisme d'algèbres de Hopf $(H^*)^J \cong (H^\sigma)^*$, un isomorphisme d'algèbre H-comodule à gauche ${}_J(H^*) \cong {}_\sigma(H)^*$ et un isomorphisme d'algèbres H-comodules à droite $(H^*)_J \cong (H_\sigma)^*$.*

1.3 Extensions de Hopf-Galois

Dans ce paragraphe, nous ne considérerons que les algèbres de Hopf H admettant une antipode bijective.

1.3.1 Définition

Si Z est une algèbre H-comodule (à gauche) et B une sous-algèbre de Z, alors $B \subset Z$ est une *H-extension galoisienne* si la sous-algèbre des éléments H-coïnvariants de Z est B et si *l'application canonique de Z*

$$\mathrm{can} : Z \otimes_B Z \to H \otimes Z,$$

définie par

$$\mathrm{can}(y \otimes z) = \delta(y)(z \otimes 1)$$

pour tout $y, z \in Z$, est un isomorphisme. On dira aussi que Z est une H-extension galoisienne de B (à gauche). Le terme "extension de Hopf-Galois" est aussi utilisé dans la littérature.

Les extensions galoisiennes à droite sont définies de manière analogue. Notons que si l'application canonique can est bijective, il en est de même pour l'application $\widetilde{\mathrm{can}} : Z \otimes_B Z \to H \otimes Z$ définie par

$$\widetilde{\mathrm{can}}(y \otimes z) = (y \otimes 1)\delta(z),$$

pour tout $y, z \in Z$.

Exemple 19. Soit $k \subset K$ une extension galoisienne de corps de groupe de Galois G fini. Soit k^G l'algèbre des fonctions sur G. Alors K est une k^G-extension galoisienne de k. La bijectivité de l'application canonique est une conséquence de l'indépendance des caractères ou de manière équivalente de la propriété de base normale.

Soit Z une H-extension galoisienne de B. Si Z est fidèlement plat comme B-module à droite, alors Z est fidèlement plat comme B-module à gauche et inversement (voir [Sn90] pour la preuve). Dans ce cas, on dit que Z est une H-extension *fidèlement plate* de B.

Un *morphisme d'extensions galoisiennes* entre deux H-extensions Z et Z' de B est un morphisme d'algèbres H-comodules qui est l'identité sur B. Si Z' est fidèlement plat, un tel morphisme est toujours un isomorphisme (voir [Sn90] pour la preuve). Nous notons $\mathrm{Gal}_B(H/k)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des H-extensions galoisiennes fidèlement plates de B et nous notons $[Z]$ la classe d'isomorphisme de $Z \in \mathrm{Gal}_B(H/k)$. Si k ou B est clair, il seront sous-entendus. On définit de manière analogue les H-extensions galoisiennes à droite et nous noterons $\mathrm{Gal}^{\mathrm{r}}_B(H/k)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions galoisiennes à droite fidèlement plates. Comme nous avons supposé que l'antipode de H était bijective, les ensembles $\mathrm{Gal}_B(H/k)$ et $\mathrm{Gal}^{\mathrm{r}}_B(H/k)$ sont en bijection.

Une première classe d'extensions galoisiennes est donnée par les produits croisés.

Proposition 16. *Soit $B\#_\sigma H$ un produit croisé, c'est-à-dire $B \subset B\#_\sigma H$ est une H-extension clivée. Alors $B \subset B\#_\sigma H$ est une H-extension galoisienne de B.*

Une H-extension galoisienne fidèlement plate de l'anneau de base k est appelée un *objet H-galoisien* ou un objet galoisien de H. Si k est un corps, nous avons la proposition suivante.

Proposition 17 ([CK76])**.** *Supposons que k soit un corps, H une algèbre de Hopf de dimension finie et Z un objet galoisien de H. Alors Z est une H-extension clivée.*

1.3.2 Fonctorialité de Gal

Pour une algèbre de Hopf H, un anneau de base k et un anneau B, nous avons défini l'objet $\mathrm{Gal}_B(H/k)$. Considérons maintenant le comportement de Gal par rapport à ces objets.

Montrons que Gal est fonctoriel par rapport à l'anneau de base.

Proposition 18 ([KaSn05])**.** *Soit H une algèbre de Hopf, B une algèbre et Z une H-extension fidèlement plate de B relativement à l'anneau commutatif k. Soit $\alpha : k \to R$ un morphisme d'anneaux commutatifs. Alors $R \otimes Z$ est une $R \otimes H$-extension galoisienne fidèlement plate de $R \otimes B$ relativement à l'anneau commutatif R.*

Tout morphisme d'anneaux $\alpha : k \to R$ induit donc une application

$$\alpha_* : \mathrm{Gal}_B(H, k) \to \mathrm{Gal}_{R\otimes B}(R \otimes H, R).$$

Cette procédure permet de réduire l'étude d'une large classe d'extensions galoisiennes à celle des objets galoisiens.

Proposition 19 ([KaSn05]). *Soit H une algèbre de Hopf, B un anneau commutatif et Z une H-extension galoisienne de B. Alors Z est un objet galoisien de $B \otimes H$ relativement à l'anneau commutatif B.*

Considérons maintenant le comportement de Gal vis-à-vis de l'algèbre de Hopf.

Proposition 20 ([Sn90]). *Soit $\varphi : K \to H$ un morphisme d'algèbres de Hopf, B une algèbre et Z une H-extension galoisienne à droite de B. Supposons que Z soit fidèlement plat sur B et que K soit fidèlement plat sur k. Alors $A \square_H K$ est une K-extension galoisienne à droite de B et est fidèlement plate sur B.*

Tout morphisme d'algèbres de Hopf $\varphi : K \to H$ induit une application

$$\varphi^* : \mathrm{Gal}^r_B(H, k) \to \mathrm{Gal}^r_B(K, k).$$

1.3.3 Torsion

Considérons maintenant le passage entre H et sa torsion H^σ par un cocycle σ.

Théorème 21 ([MS05]). *Soit $B \subset A$ une H-extension, $\sigma : H \otimes H \to B$ un cocycle de H. Alors ${}_\sigma B = B$ et on a*

1. *A est une H-extension galoisienne de B si et seulement si ${}_\sigma A$ est une H^σ-extension galoisienne de B.*
2. *A est une H-extension clivée de B si et seulement si ${}_\sigma A$ est une H^σ-extension clivée de B. De plus si $A \cong B \#_\rho H$, alors ${}_\sigma A \cong B \#_{\rho^\sigma} H^\sigma$, avec $\rho^\sigma = \rho * \sigma^{-1}$.*

Remarque 20. Notons que ${}_\sigma A$ n'est pas une H-extension galoisienne mais une H^σ-extension galoisienne. La composition $\rho * \sigma$ n'a pas de sens si ρ et σ sont deux cocycles à gauche. La composition de deux cocycles ρ et σ^{-1} ne se définit donc que si ρ est un cocycle à gauche et σ^{-1} un cocycle à droite, ou inversement ; nous ne pouvons donc pas définir de produit dans l'ensemble des cocycles d'une algèbre de Hopf H générale.

1.3.4 Homotopie pour les extensions de Hopf-Galois

Pour tout k-module V, notons $V[t] = V \otimes k[t]$ et pour $i = 0, 1$, notons $[i] : V[t] \to V$ l'application k-linéaire envoyant vt^n sur vi^n. Si H est une algèbre de Hopf et B une algèbre, ces deux applications induisent deux applications

$$[i]_* : \mathrm{Gal}_{B[t]}(H[t], k[t]) \to \mathrm{Gal}_B(H, k).$$

Deux H-extensions $Z_0, Z_1 \in \mathrm{Gal}_B(H/k)$ sont *homotopes* s'il existe une $H[t]$-extension $Z \in \mathrm{Gal}_{B[t]}(H[t]/k[t])$ telle que $[i]_*(Z) \cong Z_i$ pour $i \in \{0, 1\}$. Nous notons $\mathcal{H}_B(H)$ l'ensemble des classes d'homotopie des H-extensions fidèlement plates de B.

Remarque 21. D'après [KaSn05], il existe des extensions galoisiennes qui sont homotopes et non isomorphes.

Les propriétés de fonctorialité de Gal s'étendent à $\mathcal{H}$ et ont la conséquence suivante.

Proposition 22 ([KaSn05]). *Soit H une algèbre de Hopf et B une algèbre.*

a) Si $B = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} B(n)$ est une k-algèbre commutative $\mathbb{N}$-graduée commutative telle que $B(0) = k$, alors l'inclusion $\iota : k \to R$ induit une bijection

$$\iota_* : \mathcal{H}_B(H) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_{R\otimes B}(R \otimes H).$$

b) Si $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H(n)$ est une algèbre de Hopf $\mathbb{N}$-graduée et si $K = H(0)$, alors l'inclusion $\iota : K \to H$ induit une bijection

$$\iota^* : \mathcal{H}_B(H) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_B(K).$$

Si nous considérons un cocycle $\sigma : H \otimes H \to k$, la torsion par le cocycle σ induit une application entre les ensembles d'extensions galoisiennes à isomorphisme et homotopie près. En particulier, si l'algèbre de Hopf est $\mathbb{N}$-graduée, nous avons le résultat suivant.

Corollaire 23 ([KaSn05]). *Soit B une algèbre, $H = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H(n)$ une algèbre de Hopf $\mathbb{N}$-graduée. Notons $K = H(0)$. Soit $\sigma : H \otimes H \to K$ un cocycle inversible tel que $\sigma(x, y) = \varepsilon(x)\varepsilon(y)$, pour tout $x, y \in K$. Alors K est une sous-algèbre de Hopf de H^σ et l'inclusion $\iota : K \to H^\sigma$ induit une bijection*

$$\iota^* : \mathcal{H}_B(H^\sigma) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_B(K).$$

Ceci s'applique au cas des groupes quantiques de Drinfeld-Jimbo $U_q(\mathfrak{g})$, dont nous rappellerons la définition au chapitre 2, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 24 ([KaSn05]). *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple de matrice de Cartan symétrisable et $U_q(\mathfrak{g})$ le groupe quantique de Drinfeld-Jimbo associé. Soit $G = G(U_q(\mathfrak{g}))$ le groupe des éléments group-like de $U_q(\mathfrak{g})$. Alors, pour toute algèbre B, l'inclusion $\iota : k[G] \to U_q(\mathfrak{g})$ induit une bijection*

$$\mathcal{H}_B(U_q(\mathfrak{g})) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}_B(k[G]). \tag{1.8}$$

Nous construirons explicitement l'application (1.8) au chapitre 3 dans le cas où $B = k$.

1.4 Objets bigaloisiens

1.4.1 Structures monoïdales

Une *catégorie monoïdale* $(\mathcal{C}, \otimes, \psi, \mathbf{1}, \lambda, \mu)$ est une catégorie abélienne munie d'un bifoncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, d'un élément unité $\mathbf{1}$ et d'isomorphismes fonctoriels $\psi : (- \otimes -) \otimes - \to - \otimes (- \otimes -)$, $\lambda : \mathbf{1} \otimes - \to -$ et $\mu : - \otimes \mathbf{1} \to -$ tels que les deux diagrammes suivants commutent.

(1) Le pentagone :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (-\otimes(-\otimes-))\otimes- \arrow[r, "\psi^{1,23,4}"] & -\otimes((-\otimes-)\otimes-) \arrow[dd, "\mathrm{id}\otimes\psi^{2,3,4}"] \\
((-\otimes-)\otimes-)\otimes- \arrow[ur, "\psi^{1,2,3}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dr, "\psi^{12,3,4}"'] & & \\
 & (-\otimes-)\otimes(-\otimes-) \arrow[r, "\psi^{1,2,34}"] & -\otimes(-\otimes(-\otimes-))
\end{tikzcd}$$

(2) Le triangle :

$$\begin{tikzcd}
(-\otimes\mathbf{1})\otimes- \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\mu\otimes\mathrm{id}"'] & -\otimes(\mathbf{1}\otimes-) \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\lambda"] \\
 & -\otimes-
\end{tikzcd}$$

Un *foncteur monoïdal faible* $(F, \varphi_0, \varphi_2)$ est un foncteur

$$F : (\mathcal{C}, \otimes_C, \mathbf{1}_C) \to (\mathcal{D}, \otimes_D, \mathbf{1}_D)$$

entre deux catégories monoïdales muni de deux morphismes fonctoriels

$$\varphi_0 \ : \ F(\mathbf{1}_C) \to \ \mathbf{1}_D \quad \text{et} \quad \varphi_2 : F(-) \otimes_D F(-) \to F(- \otimes_C -).$$

Un foncteur monoïdal faible est dit *monoïdal* si φ_0 et φ_2 sont des isomorphismes. Une *équivalence de catégories monoïdales* est un foncteur monoïdal qui est aussi une équivalence de catégorie.

1.4.2 Objets bigaloisiens

Soit H une algèbre de Hopf et $\sigma : H \otimes H \to k$ un cocycle. Alors ${}_\sigma H$ est un objet galoisien de H à droite. On vérifie aisément que ${}_\sigma H$ est un objet galoisien de H^σ à gauche. Cette situation est en fait générale et on dira que ${}_\sigma H$ est un objet H^σ-H-bigaloisien.

Soit H et K deux algèbres de Hopf. Un *objet H-K-bigaloisien Z* est un H-K-bicomodule qui est à la fois un objet H-galoisien à gauche et K-galoisien à droite. Nous montrerons que tout objet galoisien est un objet bigaloisien.

1.4.3 Existence et unicité de la structure d'objet bigaloisien

Schauenburg [Sa96] a démontré le théorème suivant.

Théorème 25. *Soit H une algèbre de Hopf et Z un objet galoisien de H à droite. Alors il existe une algèbre de Hopf K et une structure d'algèbre K-comodule sur Z telle que Z soit un objet H-K-bigaloisien.*

De plus, si B est une bigèbre telle que Z soit une algèbre B-comodule et un objet H-B-bigaloisien, alors il existe un unique isomorphisme $f : K \xrightarrow{\cong} B$ tel que $\delta_B = (f \otimes \mathrm{id}_Z)\delta_K$, où δ_K et δ_B sont les coactions correspondant aux structures de K et B-comodules de Z respectivement.

La preuve de Schauenburg du théorème 25 donne une forme explicite pour l'algèbre de Hopf K. Nous donnerons par la suite une manière plus conceptuelle de considérer cette algèbre et de prouver son existence *via* une théorie de reconstruction de type tannakien.

Remarque 22. Si l'algèbre de Hopf H est cocommutative et si Z est fidèlement plat, alors Z est un objet H-H-bigaloisien.

Nous notons $\mathrm{BiGal}(H, K/k)$ (ou $\mathrm{BiGal}(H, K)$ si l'anneau de base k est clair) l'ensemble des classes d'isomorphisme des objets H-K-bigaloisiens fidèlement plats relativement à l'anneau k. Nous noterons aussi cet ensemble $\mathrm{BiGal}(H)$ si $K = H$. Définissons l'ensemble $\mathrm{CoInn}(H)$ des *automorphismes coïntérieurs de* H, c'est-à-dire l'ensemble des $f \in \mathrm{Aut}_H(H)$ tels qu'il existe un morphisme d'algèbres $\varphi : H \to k$ satisfaisant

$$f(h) = \varphi(h_{(1)})h_{(2)}\varphi^{-1}(h_{(3)}),$$

pour tout $h \in H$. Notons que tout morphisme d'algèbres $\varphi : H \to k$ d'une algèbre de Hopf H vers k est inversible pour la convolution et on a $\varphi^{-1} = S \circ \varphi$. L'ensemble des automorphismes coïntérieurs est un sous-groupe normal des automorphismes de H et on note $\mathrm{CoOut}(H)$ le groupe des *automorphismes coextérieurs* de H défini par

$$\mathrm{CoOut}(H) = \mathrm{Aut}_H(H)/\,\mathrm{CoInn}(H).$$

Si $f \in \mathrm{Aut}(H)$ et (Z, ρ) est un objet galoisien à gauche de H, on définit ${}^fZ$ comme l'algèbre Z muni de la coaction ${}^f\rho = (f \otimes \mathrm{id}) \circ \rho$. De la même manière, si Z est un objet galoisien à droite, on définit Z^f. Ces actions induisent des actions du groupe $\mathrm{CoOut}(H)$ sur $\mathrm{Gal}_k(H)$ et on a les propositions suivantes.

Proposition 26 ([Sa96])**.** *Soit H et K deux algèbres de Hopf telles que l'ensemble* $\mathrm{BiGal}(H, K)$ *soit non vide. Le groupe* $\mathrm{CoOut}(H)$ *agit librement à gauche sur* $\mathrm{BiGal}(H, K)$ *et l'orbite de la classe d'un objet H-K-bigaloisien Z consiste en les classes d'objets $A \in \mathrm{BiGal}(H, K)$ tels que $A \cong B$ comme objets galoisiens de K à droite.*

Proposition 27. *Soit H une algèbre de Hopf cocommutative. Alors le groupe des automorphismes* $\mathrm{Aut}(H)$ *de l'algèbre de Hopf H agit sur* $\mathrm{Gal}_k(H)$ *à gauche par $f \rightharpoonup Z = {}^fZ$ et on a l'isomorphisme de groupes*

$$\varphi : \mathrm{Aut}(H) \ltimes \mathrm{Gal}_k(H) \xrightarrow{\cong} \mathrm{BiGal}(H)$$

défini par $\varphi(f, Z) = {}^fZ$ pour tout $f \in \mathrm{Aut}(H)$ et $Z \in \mathrm{Gal}_k(H)$.

Corollaire 28. *Soit $k[G]$ une algèbre de groupe. Alors le groupe des objets bigaloisiens* $\mathrm{BiGal}(k[G])$ *est isomorphe au groupe* $\mathrm{Aut}(G) \ltimes H^2(G, k^*)$.

Considérons la catégorie $\underline{\mathrm{BiGal}}$ dont les objets sont les algèbres de Hopf k-plates et les morphismes de H vers K sont les classes d'isomorphisme des objets H-K-bigaloisiens. Soit H, K, L des algèbres de Hopf, Y un objet H-K-bigaloisien et Z un objet K-L-bigaloisien. Alors la composition des morphismes donnés par Y et Z est l'objet H-L-bigaloisien $Y \square_K Z$.

Considérons aussi la catégorie $\underline{\mathrm{MT-Hopf}}$ des algèbres de Hopf k-plates telle que les morphismes de H vers K soient les foncteurs monoïdaux de la catégorie des H-comodules vers celle des K-comodules. Deux algèbres de Hopf H et K telles qu'il existe une équivalence de catégories monoïdales entre $\mathrm{Comod}(H)$ et $\mathrm{Comod}(K)$ sont dites *Morita-Takeuchi equivalentes.*

Théorème 29 ([Sa04]).

1 *La catégorie* $\underline{\mathrm{BiGal}}$ *est un groupoïde : pour tout objet H-K-bigaloisien Z, il existe un objet K-H-bigaloisien Z^{-1} tel que $Z\square_K Z^{-1} \cong H$ comme algèbres H-H-bicomodules et $Z^{-1}\square_H Z \cong K$ comme algèbres K-K-bicomodules.*

2 *Les catégories* $\underline{\mathrm{MT-Hopf}}$ *et* $\underline{\mathrm{BiGal}}$ *sont équivalentes par le foncteur qui à un objet H-K-bigaloisien Z associe le foncteur monoïdal*

$$F_Z : \mathrm{Comod}^r(H) \to \mathrm{Comod}^r(K)$$

défini par $F_Z(U) = U\square_H Z$, pour tout $U \in \mathrm{Comod}^r(H)$.

Corollaire 30. *Pour toute algèbre de Hopf H, le produit cotensoriel munit l'ensemble* $\mathrm{BiGal}(H)$ *d'une structure de groupe.*

Remarque 23. Montrer l'existence d'un objet H-K-bigaloisien peut être une méthode pour prouver que deux algèbres de Hopf sont Morita-Takeuchi équivalentes, comme l'a fait Bichon [Bi103] dans le cas de $\mathcal{O}_q(SL(2))$ (voir aussi le chapitre 3). Il est en effet souvent techniquement plus facile de construire une algèbre-comodule avec des bonnes propriétés que de construire un cocycle ou une équivalence de catégories entre les catégories de coreprésentations.

Remarque 24. Notons que lorsque l'algèbre de Hopf H est cocommutative, tout objet galoisien est un objet H-H-bigaloisien et le produit cotensoriel munit l'ensemble des objets galoisiens de H d'une structure de groupe. On pourra voir [C98] pour une étude de ce groupe.

1.4.4 Reconstruction tannakienne

Foncteurs fibres

Ulbrich a prouvé dans [Ul87] et [Ul89] que les foncteurs monoïdaux, exacts et commutant avec les colimites de la catégorie des H-comodules de dimension finie (comme k-modules) vers celle des k-modules sont en bijection avec les objets galoisiens à isomorphisme près. Schauenburg [Sa04] a étendu ces résultats aux extensions galoisiennes d'un anneau arbitraire.

Soit H une algèbre de Hopf. Un H-comodule Z est dit *coplat* si le foncteur

$$F_Z : \mathrm{Comod}(H) \to \mathrm{Mod}(k)$$

défini par $F_Z(U) = U\square_H Z$ pour tout $U \in$ Comod (H) est exact.

Soit H une bigèbre et Z un H-comodule à gauche qui est coplat. Si Z est une algèbre H-comodule, on définit l'application

$$\xi : (Z\square_H V) \otimes (Z\square_H W) \to Z\square_H (V \otimes W)$$

par
$$\xi((x \otimes v) \otimes (y \otimes w)) = (xy) \otimes (v \otimes w),$$
pour tout $x, y \in Z$, $v \in V$ et $w \in W$ et l'application $\xi_0 : k \to Z\square_H k$, par $\xi_0(\alpha) = 1 \otimes \alpha$, pour tout $\alpha \in k$.

Proposition 31 ([Sa04]). *Soit H une bigèbre et Z un H-comodule qui est coplat. Si Z est une algèbre H-comodule, alors le foncteur*
$$(F_Z, \xi, \xi_0) : \mathrm{Comod}(H) \to \mathrm{Mod}(k)$$
est un foncteur monoïdal faible.

Réciproquement, tout structure monoïdale faible (ξ, ξ_0) sur le foncteur F_Z est de la forme précédente pour une unique structure d'algèbre H-comodule sur Z.

Précisons la seconde partie de la proposition précédente. Si ξ est une structure monoïdale faible, la multiplication $\mu_Z : Z \otimes Z \to Z$ est définie par la composition
$$\mu_Z : Z \otimes Z \cong (Z\square_H H) \otimes (Z\square_H H) \xrightarrow{\xi} Z\square_H(H \otimes H) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mu_H} Z\square_H H \cong Z.$$

Si B est une sous-algèbre de $Z^{\mathrm{co}H}$ *via* $\iota : B \to Z^{co\,H}$, alors, pour tout H-comodule V, $Z\square_H V$ a une structure naturelle de B-bimodule induite par ι et le foncteur F_Z est à valeur dans $\mathrm{Bimod}(B)$.

Proposition 32 ([Sa04]). *Supposons que H soit une bigèbre, Z une algèbre H-comodule à droite et $\iota : B \to Z^{co\,H}$ une sous-algèbre. Alors le foncteur*
$$F_Z : \mathrm{Comod}(H) \to \mathrm{Bimod}(B)$$
est un foncteur monoïdal faible. Si de plus, Z est un H-comodule (fidèlement) coplat, alors F_Z est (fidèlement) exact.

Réciproquement, tout foncteur exact, monoïdal faible de $\mathrm{Comod}(H)$ *vers* $\mathrm{Bimod}(B)$ *commutant avec les sommes directes est de cette forme.*

Idée de la preuve. La première partie de la proposition est une vérification facile.

Pour la réciproque, notons que la proposition 31 assure l'existence d'une algèbre H-comodule à droite en composant le foncteur avec le foncteur oubli $\mathrm{Bimod}(B) \to \mathrm{Mod}(k)$. Notons aussi que la structure monoïdale faible de F_Z donne $B = Z\square_H k = Z^{co\,H}$. Le second morphisme de structure monoïdale faible φ_2 donne en particulier
$$B \otimes_B (Z\square_H V) \cong (Z\square_H k) \otimes_B (Z\square_H V) \xrightarrow{\varphi_2} Z\square_H V$$
et donc une action de B et une structure de B-bimodule sur $Z\square_H V$ pour tout H-comodule V. □

Un *foncteur fibre* $\mathcal{F} : \mathrm{Comod}(H) \to \mathrm{Bimod}(B)$ est un foncteur monoïdal exact commutant avec les colimites.

Théorème 33 ([Sa04]). *Soit H une algèbre de Hopf qui est k-plate et B une k-algèbre.*

a) Tout foncteur fibre $\mathcal{F}:\mathrm{Comod}(H)\to\mathrm{Bimod}(B)$ *est de la forme*

$$\mathcal{F}(V)=Z\square_H V$$

pour une H-extension galoisienne à droite Z de B qui est coplate, et dont la structure monoïdale du foncteur $\mathcal{F}$ est donnée comme dans la proposition 32.

b) Supposons que Z est une H-extension galoisienne fidèlement plate de B. Alors le foncteur monoïdal faible $\mathcal{F}_Z:\mathrm{Comod}(H)\to\mathrm{Bimod}(B)$ *défini comme dans la proposition 32 est monoïdal.*

Idée de la preuve. Il suffit de noter que le morphisme de structure monoïdal

$$(Z\square_H-)\otimes_B(Z\square_H-)\to Z\square(-\otimes_k-)$$

est donné par la multiplication de Z et correspond à l'application canonique $Z\otimes_B Z\to Z\otimes_k H$ quand il est évalué en H. □

Remarque 25. Dans le cas où k est un corps et H a une antipode bijective, une H-extension galoisienne $B\subset Z$ est coplate comme H-comodule si et seulement si Z est fidèlement plat comme B-module (à droite ou à gauche). Si k est quelconque, alors un objet H-galoisien Z est coplat si et seulement si Z est fidèlement plat comme k-module.

Corollaire 34 ([Sa04]). *Soit H une algèbre de Hopf et B une k-algèbre. Supposons que l'une des conditions suivantes soit vérifiée.*

(1) k est un corps et H a une antipode bijective.

(2) $B=k$.

L'application qui, à une extension galoisienne Z, associe le foncteur $\mathcal{F}_Z$ défini dans le théorème 33 est une bijection entre l'ensemble des foncteurs fibres $\mathrm{Comod}(H)\to\mathrm{Bimod}(B)$ *et l'ensemble des H-extensions galoisiennes fidèlement plates de B.*

Systèmes de Hopf-Galois

Dans ce paragraphe, nous supposons que k est un corps. Suivant Bichon [Bi103], nous définissons les systèmes de Hopf-Galois qui expliquent par une reconstruction de type tannakien la bijection entre les foncteurs fibres et les objets galoisiens.

Un *système de Hopf-Galois* consiste en quatre algèbres (H,K,Z,T) non réduites à zéro et satisfaisant les quatre axiomes suivants.

(HG1) Les algèbres (H,μ_H,Δ_H) et (K,μ_K,Δ_K) sont des bigèbres.

(HG2) L'algèbre $(Z,\delta_{HZ},\delta_{ZK})$ est une algèbre H-K-bicomodule.

(HG3) Il existe deux morphismes d'algèbres $\gamma_H:H\to Z\otimes T$ et $\gamma_K:K\to T\otimes Z$

tels que les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\delta_{HZ}"] \arrow[d, "\delta_{ZK}"'] & H \otimes Z \arrow[d, "\gamma_H \otimes \mathrm{id}"] \\ Z \otimes K \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \gamma_K"] & Z \otimes T \otimes Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "\Delta_H"] \arrow[d, "\gamma_H"'] & H \otimes H \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \gamma_H"] \\ Z \otimes T \arrow[r, "\delta_{HZ}"] & H \otimes Z \otimes T \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\Delta_K"] \arrow[d, "\gamma_K"'] & K \otimes K \arrow[d, "\gamma_K \otimes \mathrm{id}"] \\ T \otimes Z \arrow[r, "\mathrm{id} \otimes \delta_{ZK}"] & T \otimes Z \otimes K \end{tikzcd}$$

(HG4) Il existe une application linéaire $S : T \to Z$ telle que les diagrammes suivants commutent.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\varepsilon_H"] \arrow[d, "\gamma_H"'] & k \arrow[r, "u_Z"] & Z \\ Z \otimes T \arrow[rr, "\mathrm{id} \otimes S"] & & Z \otimes Z \arrow[u, "\mu_Z"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K \arrow[r, "\varepsilon_K"] \arrow[d, "\gamma_K"'] & k \arrow[r, "u_Z"] & Z \\ T \otimes Z \arrow[rr, "S \otimes \mathrm{id}"] & & Z \otimes Z \arrow[u, "\mu_Z"'] \end{tikzcd}$$

Théorème 35 ([Bi103]). *Si (H, K, Z, T) est un système de Hopf-Galois, alors $(Z, \delta_{HZ}, \delta_{ZK})$ est un objet H-K-bigaloisien.*

Corollaire 36. *Si (H, K, Z, T) est un système de Hopf-Galois, alors les bigèbres H et K sont des algèbres de Hopf et nous avons l'équivalence monoïdale $\mathrm{Comod}(H) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Comod}(K)$ donnée par $U \mapsto U \square_H Z$.*

Expliquons maintenant rapidement les idées de [Bi103]. Soit $\mathcal{C}$ une petite catégorie et $F, G : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}_f(k)$ des foncteurs monoïdaux, où $\mathrm{Vect}_f(k)$ désigne la catégorie des k-espaces vectoriels de dimension finie. À une telle paire, nous associons l'espace vectoriel

$$\mathrm{Hom}^\vee(F, G) = \bigoplus_{x \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_k(G(X), F(X))/\mathcal{N},$$

où $\mathcal{N}$ est le sous-espace vectoriel de $\bigoplus_{x \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})} \mathrm{Hom}_k(G(X), F(X))$ engendré par les éléments $F(f) \circ u - u \circ G(f)$, avec $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ et $u \in \mathrm{Hom}_k(G(Y), F(X))$. La classe de $u \in \mathrm{Hom}_k(G(X), F(X))$ dans $\mathrm{Hom}^\vee(F, G)$ est notée $[X, u]$.

Soit $E : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}_f(k)$ un autre foncteur. Soit encore $X \in \mathcal{O}b(\mathcal{C})$, $x \in F(X)$, $\varphi \in G(X)^*$ et $(e_i)_{i=1,\dots,n}$ une base de $E(X)$. Alors la propriété universelle de $\mathrm{Hom}^\vee(F, G)$ peut s'exprimer comme suit. L'équation

$$\delta^E_{FG}([X, \varphi \otimes x]) = \sum_{i=1,\dots,n} [X, \varphi \otimes e_i] \otimes [X, e_i^* \otimes x]$$

induit une application linéaire

$$\delta^E_{FG} : \mathrm{Hom}^\vee(F, G) \to \mathrm{Hom}^\vee(E, G) \otimes \mathrm{Hom}^\vee(F, E),$$

qui est coassociative. En particulier, $\mathrm{End}^\vee(F) = \mathrm{Hom}^\vee(F, F)$ est une cogèbre.

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale, alors $\mathrm{Hom}^\vee(F,G)$ a une structure d'algèbre donnée par

$$[X,u].[Y,v] = [X \times Y, \widetilde{F}_{XY} \circ (u \otimes v) \circ \widetilde{G}_{XY}^{-1}],$$

où $\widetilde{F}_{XY} : F(X) \otimes F(Y) \to F(X \otimes Y)$ et $\widetilde{G}_{XY} : G(X) \otimes G(Y) \to G(X \otimes Y)$ sont les isomorphismes de la structure monoïdale. En particulier, $\mathrm{End}^\vee(F)$ est une algèbre pour tout foncteur F et la multiplication est un morphisme de cogèbres.

Si nous supposons maintenant que $\mathcal{C}$ est aussi une catégorie monoïdale rigide (tout objet a un dual), alors nous pouvons construire un système de Hopf-Galois.

Proposition 37 ([Bi103]). *Considérons une catégorie monoïdale rigide $\mathcal{C}$ et deux foncteurs monoïdaux $F, G : \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}_f(k)$. Alors*

$$(\mathrm{End}^\vee(F), \mathrm{End}^\vee(G), \mathrm{Hom}^\vee(F,G), \mathrm{Hom}^\vee(G,F))$$

est un système de Hopf-Galois.

Nous avons alors une interprétation en termes de reconstruction tannakienne des objets bigaloisiens. Soit Z un objet galoisien d'une algèbre de Hopf H et notons $\omega : \mathrm{Comod}_f(H) \to \mathrm{Vect}_f(k)$ le foncteur oubli de la catégorie des H-comodules de dimension finie (comme k-espaces vectoriels) vers celle des k-espaces vectoriels de dimension finie. Notons encore

$$\mathcal{F}_Z : \mathrm{Comod}_f(H) \to \mathrm{Vect}_f(k)$$

le foncteur monoïdal défini par $\mathcal{F}_Z(U) = U \square_H Z$ pour tout H-comodule U.

Corollaire 38 ([Bi103]). *Soit H une algèbre de Hopf et Z un objet galoisien de H, ω, F_Z les foncteurs définis ci-dessus. Alors*

$$(\mathrm{End}^\vee(\omega), \mathrm{End}^\vee(F_Z), \mathrm{Hom}^\vee(\omega, F_Z), \mathrm{Hom}^\vee(F_Z, \omega))$$

est un système de Hopf Galois équivalent à (H, K, Z, T), où K est l'algèbre de Hopf telle que Z soit un objet H-K-bigaloisien et T est une cogèbre.

1.4.5 Cohomologie paresseuse et cocycles

Si H est une algèbre de Hopf cocommutative, Sweedler [Sw68] a prouvé qu'il existe une bijection entre le second groupe de cohomologie $H^2(H, k^*)$ et les classes d'isomorphisme des objets H-galoisiens. Dans le cas où H n'est plus cocommutative, la convolution de deux cocycles n'est plus nécessairement un cocycle. Bichon et Carnovale [BiCa06] ont développé une théorie des cocycles qui possèdent un bon comportement pour la convolution.

Un *cocycle paresseux* $\sigma : H \otimes H \to k$ est un cocycle σ au sens de la définition 1.5 et qui satisfait la condition supplémentaire

$$\sigma(x_{(1)}, y_{(1)})\, x_{(2)} y_{(2)} = x_{(1)} y_{(1)}\, \sigma(x_{(2)}, y_{(2)}), \tag{1.9}$$

pour tout $x, y \in H$. On note $H^2_L(H)$ l'ensemble des cocycles paresseux de H.

Exemple 26. Si H est cocommutative, alors tout cocycle $\sigma : H \otimes H \to k$ est paresseux.

Si Z est un objet H-H-bigaloisien, Z est un *objet galoisien biclivé* s'il existe un isomorphisme de H-H-bicomodule $Z \cong H$; on note $\mathrm{BiCleft}(H)$ l'ensemble des objets galoisiens biclivé de H à isomorphisme près.

Théorème 39 ([BiCa06]). *Soit Z un objet H-galoisien. Alors les assertions suivantes sont équivalentes.*

(1) Z est biclivé.

(2) Il existe un cocycle paresseux $\sigma \in H^2_L(H)$ tel que $Z \cong {}_\sigma H$ comme algèbres H-bicomodules.

Supposons que H soit k-plat. Alors le produit cotensoriel au-dessus de H munit l'ensemble des objets H-H-bigaloisiens d'une structure de groupe (voir le corollaire 30).

Proposition 40 ([BiCa06]). *Soit H une algèbre de Hopf qui est k-plate. Alors* $\mathrm{BiCleft}(H)$ *est un sous-groupe normal du groupe* $\mathrm{BiGal}(H)$.

L'ensemble $H^2_L(H)$ est aussi muni d'une structure de groupe par la convolution des cocycles, notée $*$, et on a le théorème suivant.

Théorème 41 ([BiCa06]). *Soit H une algèbre de Hopf k-plate. Alors on a un isomorphisme de groupes*

$$(H^2_L(H), *) \cong (\mathrm{BiCleft}(H), \square_H).$$

Chapitre 2

Classification des objets galoisiens de $U_q(\mathfrak{g})$ à homotopie près

Résumé. – *Ce chapitre est une reproduction de l'article [Au1]. Pour toute algèbre enveloppante quantique* $U_q(\mathfrak{g})$ *de Drinfeld-Jimbo et toute famille* $\lambda = (\lambda_{ij})_{1\leq i<j\leq t} \in k^\star$ *d'éléments inversibles du corps de base, nous construisons explicitement par générateurs et relations un objet galoisien* A_λ *de* $U_q(\mathfrak{g})$ *et nous montrons que tout objet galoisien de* $U_q(\mathfrak{g})$ *est homotope à un unique objet de la forme* A_λ.

Introduction

Le concept d'extension Hopf-galoisienne qui a été beaucoup étudié ces dernières années est une généralisation naturelle du concept classique d'extension galoisienne de corps commutatifs. C'est aussi l'analogue algébrique de la notion de fibré principal dans le cadre de la géométrie non commutative.

Bien qu'une littérature abondante ait été consacrée aux extensions Hopf-galoisiennes (voir par exemple [Mo93], [Sn90] et les références données dans ces deux articles), on a peu de résultats sur leur classification à isomorphisme près. Pour contourner la difficulté — qui semble grande — de classer les extensions Hopf-galoisiennes à isomorphisme près, Kassel [Ka04] a introduit sur les extensions Hopf-galoisiennes une relation d'équivalence moins fine que l'isomorphie, relation qu'il a appelée homotopie. Dans [KaSn05] Kassel et Schneider en ont fait une étude systématique. Ils donnent notamment une application à la classification des extensions Hopf-galoisiennes lorsque l'algèbre de Hopf est l'algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{g})$ associée par Drinfeld et Jimbo à une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}$. L'une des conséquences des résultats de [KaSn05] porte sur l'ensemble $\mathcal{H}_k(U_q(\mathfrak{g}))$ des classes d'homotopie des extensions $U_q(\mathfrak{g})$-galoisiennes du corps de base k (ces objets sont également appelés objets galoisiens de $U_q(\mathfrak{g})$) : Kassel et Schneider démontrent que $\mathcal{H}_k(U_q(\mathfrak{g}))$ est en bijection avec le groupe de cohomologie $H^2(G, k^*)$, où G est le groupe des éléments "group-like" de $U_q(\mathfrak{g})$ opérant trivialement sur le groupe $k^\star$ des éléments inversibles de k. Le groupe G est un groupe abélien libre dont le rang t est égal à celui de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Il est bien connu que tout élément de $H^2(G, k^*)$ peut être représenté par une famille λ de $t(t-1)/2$ éléments non nuls du corps de base.

Le but de cet article est de construire explicitement par générateurs et relations un objet galoisien A_λ de $U_q(\mathfrak{g})$ pour toute famille λ de ce type et de montrer que tout objet galoisien de $U_q(\mathfrak{g})$ est homotope à un unique objet galoisien de la forme A_λ.

Au paragraphe 1, nous rappelons la définition des concepts d'extension Hopf-galoisienne et d'objet galoisien. Nous redonnons également la présentation standard de l'algèbre enveloppante quantique $U_q(\mathfrak{g})$.

Les objets galoisiens A_λ sont construits au paragraphe 2. Nous y énonçons aussi le théorème principal de l'article.

Le paragraphe 3 est entièrement consacré à la démonstration du théorème.

2.1 Rappels

2.1.1 Extensions galoisiennes et objets galoisiens

Soit k un corps commutatif. Tous les objets de cet article appartiennent à la catégorie tensorielle des k-espaces vectoriels et nous ne considérons que des algèbres de Hopf admettant une antipode bijective. Si H est une algèbre de Hopf et A est une algèbre H-comodule à droite dont la coaction est le morphisme d'algèbres $\delta : A \to A \otimes H$, nous définissons la sous-algèbre B des éléments H-covariants de A par

$$B = \{a \in A \mid \delta(a) = a \otimes 1\}. \tag{2.1}$$

L'application linéaire $\beta : A \otimes_B A \to A \otimes H$ définie par

$$\beta(a \otimes a') = (a \otimes 1)\delta(a'), \tag{2.2}$$

pour a, $a' \in A$, est appelée *l'application canonique* associée à A. Une algèbre H-comodule à droite A est une *extension H-galoisienne* de B si B est la sous-algèbre des éléments H-covariants de A, si l'application canonique $\beta : A \otimes_B A \to H \otimes A$ associée à A est un isomorphisme et si A est fidèlement plat en tant que B-module à droite ou à gauche.

Un *objet galoisien* d'une algèbre de Hopf H est une extension H-galoisienne du corps de base k.

Deux extensions H-galoisiennes A et A' de B sont dites *isomorphes* s'il existe un morphisme $f : A \to A'$ d'algèbres H-comodules qui soit un isomorphisme et qui soit l'identité sur B.

Nous notons $\mathrm{Gal}_B(H)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme d'extensions H-galoisiennes de B. L'ensemble $\mathrm{Gal}_B(H)$ peut être considéré comme un foncteur contravariant en H. En effet, soit $i : K \to H$ un morphisme d'algèbres de Hopf. Rappelons [EM66] que, étant donné une algèbre de Hopf H, un comodule A à droite de coaction δ_A et un comodule K à gauche de coaction δ_K, le produit cotensoriel $A\square_H K$ est défini comme le noyau de l'application

$$\mathrm{Id}_A \otimes \delta_K - \delta_A \otimes \mathrm{Id}_K : A \otimes K \to A \otimes H \otimes K, \tag{2.3}$$

(ou encore l'égalisateur des coactions de A et K). Si A est une extension H-galoisienne de B à droite, alors

$$i^\star(A) = A\square_H K \tag{2.4}$$

est une extension K-galoisienne de B à droite d'après [Sn90, Prop 3.11 (3)].

Kassel et Schneider [KaSn05] (voir aussi [Ka04]) ont défini une relation d'équivalence, notée $\sim$ et appelée ***homotopie***, sur l'ensemble $\mathrm{Gal}_B(H)$ (nous renvoyons à [KaSn05] pour la définition). Nous notons $\mathcal{H}_B(H)$ l'ensemble des classes d'homotopie d'extensions H-galoisiennes de B. L'application

$$i^* : \mathrm{Gal}_B(H) \to \mathrm{Gal}_B(K) \tag{2.5}$$

induite par un morphisme d'algèbres de Hopf $i : K \to H$ et définie plus haut, passe aux classes d'homotopie et définit une application

$$i^* : \mathcal{H}_B(H) \to \mathcal{H}_B(K). \tag{2.6}$$

2.1.2 Cocycles et extensions clivées

Suivant ([Mo93, Chapitre 7]), nous dirons qu'une application bilinéaire $\sigma : H \times H \to k$ est un *cocycle normalisé inversible* pour l'algèbre de Hopf H si σ est inversible pour la convolution et vérifie les relations

$$\sigma(x_{(1)}, y_{(1)})\sigma(x_{(2)}y_{(2)}, z) = \sigma(y_{(1)}, z_{(1)})\sigma(x, y_{(2)}z_{(2)}) \tag{2.7}$$

et

$$\sigma(1, x) = \sigma(x, 1) = \varepsilon(x), \tag{2.8}$$

pour $x, y, z \in H$ (ε est la coünité de H).

Nous avons utilisé ici la notation de Sweedler $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ pour la comultiplication Δ de H, notation que nous utiliserons dans la suite de l'article pour les différentes comultiplications et coactions.

Rappelons ([Mo93, Chapitre 7]) que si H est une algèbre de Hopf, $\sigma : H \otimes H \to k$ un cocycle inversible normalisé et B une algèbre, alors le *produit croisé* $B\#_\sigma H$ est l'espace vectoriel $B \otimes H$ muni du produit associatif et unifère

$$(a\#h)(b\#k) = \sigma(h_{(1)}, k_{(1)})ab\#h_{(2)}k_{(2)}, \tag{2.9}$$

pour tout $a, b \in B$ et $h, k \in H$. De plus, cette algèbre peut être munie d'une structure d'algèbre H-comodule à droite induite par la comultiplication de H, ce qui fait de $B\#_\sigma H$ une extension H-galoisienne de B. Les extensions H-galoisiennes de cette forme sont appelées *extensions clivées* (*cleft* en anglais). Lorsque $k = B$, le produit croisé $k\#_\sigma H$ s'identifie à H muni du produit

$$x \cdot_\sigma y = \sigma(x_{(1)}, y_{(1)})x_{(2)}y_{(2)}, \tag{2.10}$$

pour $x, y \in H$. Nous notons ${}_\sigma H$ l'espace vectoriel H muni de ce produit associatif dont l'unité est celle de H.

Si H est une algèbre de Hopf et ρ est un cocycle normalisé inversible, nous pouvons aussi définir l'algèbre de Hopf H^ρ comme la cogèbre H munie du produit associatif modifié

$$x \cdot_\rho y = \rho(x_{(1)}, y_{(1)}) x_{(2)} y_{(2)} \rho^{-1}(x_{(3)}, y_{(3)}), \tag{2.11}$$

pour $x, y \in H$. Nous définissons aussi pour toute H-comodule algèbre à droite A la H^ρ-comodule algèbre tordue à droite A_ρ qui est le H^ρ-comodule (ou H-comodule) A muni du produit

$$a \cdot_\rho b = a_{(1)} b_{(1)} \rho^{-1}(a_{(2)}, b_{(2)}), \tag{2.12}$$

pour $a, b \in A$. Alors il existe une bijection entre les extensions H-galoisiennes de B à droite et les extensions H^ρ-galoisiennes de B à droite $j : \mathrm{Gal}_B(H) \to \mathrm{Gal}_B(H^\rho)$ donnée par

$$j(A) = A_\rho. \tag{2.13}$$

Montgomery et Schneider [MS05, Théorème 5.3] ont montré que, si ${}_\sigma H$ est une extension clivée de H, alors son image $j({}_\sigma H) = ({}_\sigma H)_\rho$ dans $\mathrm{Gal}_k(H^\rho)$ est une extension clivée de H^ρ qui s'identifie à ${}_{\sigma * \rho^{-1}}(H^\rho)$.

Au paragraphe 3, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 42. *Soit H' une sous-algèbre de Hopf d'une algèbre de Hopf H et $\sigma' : H' \otimes H' \to k$ un cocycle de H', s'étendant en un cocycle $\sigma : H \otimes H \to k$ de H. Nous avons alors un isomorphisme d'algèbres*

$$ {}_\sigma H \square_H H' \cong {}_{\sigma'} H'. \tag{2.14}$$

Démonstration. Considérons les bijections linéaires (voir [EM66, Prop 2.1])

$$H' \xrightarrow{\mu} H \square_H H' \xrightarrow{\nu} H' \tag{2.15}$$

données par $\mu = (i \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta_{H'}$ et $\nu = \varepsilon \otimes \mathrm{Id}$. Les structures d'espaces vectoriels et de comodules de ${}_\sigma H$ et ${}_{\sigma'} H'$ étant par définition les mêmes que celles de H et H' respectivement, ces bijections valent aussi pour ${}_\sigma H$ et ${}_{\sigma'} H'$:

$${}_{\sigma'} H' \xrightarrow{\mu} {}_\sigma H \square_H H' \xrightarrow{\nu} {}_{\sigma'} H'. \tag{2.16}$$

Montrons maintenant que l'isomorphisme μ est aussi un morphisme d'algèbres de ${}_{\sigma'} H'$ sur ${}_\sigma H \square_H H$. Notons $g \cdot_{\sigma'} h$ le produit dans ${}_{\sigma'} H'$ de deux éléments g et h de H' ; nous gardons la notation gh pour leur produit dans H' et les notations g, h pour les éléments $g, h \in H'$ vu dans H. Nous notons aussi $g \cdot_\sigma h$ le produit dans ${}_\sigma H$ de deux éléménts g, h. Nous obtenons

$$\begin{array}{rcl} \mu(g \cdot_{\sigma'} h) & = & \sigma'(h_{(1)}, g_{(1)}) \mu(g_{(2)} h_{(2)}) \\ & = & \sigma'(h_{(1)}, g_{(1)}) (g_{(2)} h_{(2)} \otimes g_{(3)} h_{(3)}) \\ & = & (\sigma(h_{(1)}, g_{(1)}) g_{(2)} h_{(2)}) \otimes g_{(3)} h_{(3)} \\ & = & g_{(1)} \cdot_\sigma h_{(1)} \otimes g_{(2)} h_{(2)} \end{array} \tag{2.17}$$

pour tout $g, h \in G$, ce qui assure que

$$\mu : {}_{\sigma'} H' \to {}_\sigma H \square_H H' \tag{2.18}$$

est un isomorphisme d'algèbres.

□

2.1.3 Les algèbres enveloppantes quantiques de Drinfeld-Jimbo

Nous supposons désormais que k est un corps de caractéristique différente de 2 ou 3. Fixons la matrice de Cartan $(a_{ij})_{1\leq i,j\leq t}$ d'une algèbre de Lie semi-simple complexe $\mathfrak{g}$, des entiers $(d_i)_{1\leq i\leq t} \in \{1,2,3\}$ tels que $d_i a_{ij} = d_j a_{ji}$ pour tout $1 \leq\ i,j \leq\ t$ ainsi qu'un élément inversible $q \in k$ tel que $q^{2d_i} \neq 1$ pour tout $i = 1,\dots,t$.

L'algèbre de Drinfeld-Jimbo $U_q(\mathfrak{g})$ (voir [J95, Chapitre 4]) est l'algèbre associative unitaire engendrée par les générateurs E_i, F_i, K_i et K_i^{-1} pour $1 \leq i \leq t$ et les relations

$$K_iK_j = K_jK_i, \quad K_iK_i^{-1} = K_i^{-1}K_i = 1, \tag{2.19}$$

$$K_iE_j = q^{d_ia_{ij}}E_jK_i, \tag{2.20}$$

$$K_iF_j = q^{-d_ia_{ij}}F_jK_i, \tag{2.21}$$

$$E_iF_j - F_jE_i = \delta_{ij}\frac{K_i - K_i^{-1}}{q^{d_i} - q^{-d_i}}, \tag{2.22}$$

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} E_i^{1-a_{ij}-r}E_jE_i^r = 0, \tag{2.23}$$

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} F_i^{1-a_{ij}-r}F_jF_i^r = 0, \tag{2.24}$$

pour $1 \leq i,j \leq t$.

Il est bien connu ([J95, Chapitre 4]) que $U_q(\mathfrak{g})$ peut être munie d'une structure d'algèbre de Hopf avec la comultiplication Δ définie sur les générateurs par

$$\Delta(E_i) = E_i \otimes 1 + K_i \otimes E_i, \tag{2.25}$$

$$\Delta(F_i) = F_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i, \tag{2.26}$$

$$\Delta(K_i^{\pm 1}) = K_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1}, \tag{2.27}$$

la coünité ε définie par

$$\varepsilon(E_i) = 0, \quad \varepsilon(F_i) = 0, \quad \varepsilon(K_i^{\pm 1}) = 1, \tag{2.28}$$

et l'antipode S défini par

$$S(E_i) = -K_i^{-1}E_i, \quad S(F_i) = -F_iK_i, \quad S(K_i^{\pm 1}) = K_i^{\mp 1}, \tag{2.29}$$

pour tout $1 \leq i \leq t$.

Notons G le sous-groupe multiplicatif de $U_q(\mathfrak{g})$ engendré par $K_1, K_2, \dots, K_t$. C'est un sous-groupe abélien libre de rang t. Notons encore $U_q(\mathfrak{g})^+$ la sous-algèbre de $U_q(\mathfrak{g})$ engendrée par les générateurs K_i, K_i^{-1} et E_i, pour $1 \leq i\ \leq t$, et les relations (2.19), (2.20) et (2.23) et $U_q(\mathfrak{g})^-$ celle engendrée par les générateurs K_i, K_i^{-1} et F_i, pour $1 \leq i \leq t$, et les relations (2.19), (2.21) et (2.24). L'algèbre de Hopf $U_q(\mathfrak{g})$ est filtrée avec les générateurs $K_i^{\pm 1}$ en degré 0 et les générateurs E_i, F_i en degré 1. L'algèbre de Hopf graduée Gr $U_q(\mathfrak{g})$ associée à cette filtration est engendrée comme algèbre par E_i, F_i, K_i et K_i^{-1}, pour $1 \leq i \leq t$, soumis aux relations (2.19) - (2.21), (2.23), (2.24) ainsi qu'à la relation de commutation

$$E_iF_j - F_jE_i = 0, \tag{2.30}$$

pour $1 \leq i, j \leq t$. Notons aussi Gr $U_q(\mathfrak{g})^+$ la sous-algèbre de Gr $U_q(\mathfrak{g})$ engendrée par les générateurs K_i, K_i^{-1} et E_i, pour $1 \leq i \leq t$, et les relations (2.19), (2.20) et (2.23) et Gr $U_q(\mathfrak{g})^-$ celle engendrée par les générateurs K_i, K_i^{-1} et F_i, pour $1 \leq i \leq t$, et les relations (2.19), (2.21) et (2.24) et remarquons que nous pouvons identifier Gr $U_q(\mathfrak{g})^+ \cong U_q(\mathfrak{g})^+$ ainsi que Gr $U_q(\mathfrak{g})^- \cong U_q(\mathfrak{g})^-$.

Kassel et Schneider [KaSn05, Section 4] ont montré qu'il existe un unique cocycle normalisé ρ : Gr $U_q(\mathfrak{g}) \times$ Gr $U_q(\mathfrak{g}) \to k$ qui vérifie

$$\rho(K_i, K_j) = 1, \tag{2.31}$$

$$\rho(E_i, F_j) = -\frac{\delta_{ij}}{q^{d_i} - q^{-d_i}}, \tag{2.32}$$

pour $1 \leq i, j \leq t$ et

$$\rho(x, y) = 0, \tag{2.33}$$

pour tous les autres couples de générateurs x, y (en particulier ce cocycle n'est pas symétrique et $\rho(F_j, E_i) = 0$). De plus si x, y, z appartiennent à la même sous-algèbre Gr $U_q(\mathfrak{g})^+$ ou Gr $U_q(\mathfrak{g})^-$, on a

$$\rho(x, yz) = \rho(x_{(1)}, y)\rho(x_{(2)}, z), \tag{2.34}$$

$$\rho(xy, z) = \rho(x, z_{(2)})\rho(y, z_{(1)}). \tag{2.35}$$

La relation (2.34) est encore vraie si $x \in$ Gr $U_q(\mathfrak{g})^-$ et $y, z \in$ Gr $U_q(\mathfrak{g})^+$ et la relation (2.35) est vraie si $x, y \in$ Gr $U_q(\mathfrak{g})^-$ et $z \in$ Gr $U_q(\mathfrak{g})^+$. En particulier, ces relations impliquent

$$\rho(x, 1) = \rho(1, x) = \varepsilon(x), \tag{2.36}$$

pour tout $x \in$ Gr $U_q(\mathfrak{g})$. Kassel et Schneider [KaSn05, Section 4] ont établi qu'il existe un isomorphisme d'algèbres de Hopf $U_q(\mathfrak{g}) \cong (\text{Gr } U_q(\mathfrak{g}))^\rho$ qui est l'identité sur les générateurs.

2.2 Le résultat

Nous considérons une famille $(\lambda_{ij})_{1 \leq i < j \leq t}$ d'éléments inversibles de k. Par commodité, nous posons $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}^{-1}$ et $\lambda_{ii} = 1$ pour tout $1 \leq j \leq i \leq t$.

Nous définissons l'algèbre A_λ comme l'algèbre associative unitaire engendrée par des générateurs X_i, Y_i, Z_i, Z_i^{-1} pour $1 \leq i \leq t$ et les relations

$$Z_iZ_j = \lambda_{ij}^2 Z_jZ_i, \quad Z_iZ_i^{-1} = Z_i^{-1}Z_i = 1, \tag{2.37}$$

$$Z_iX_j = \lambda_{ij}^2 q^{d_i a_{ij}} X_j Z_i, \tag{2.38}$$

$$Z_iY_j = q^{-d_i a_{ij}} Y_j Z_i, \tag{2.39}$$

$$X_iY_j - Y_jX_i = \delta_{ij} \frac{Z_i}{q^{d_i} - q^{-d_i}}, \tag{2.40}$$

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij}+2r-1} X_i^{1-a_{ij}-r} X_j X_i^r = 0, \tag{2.41}$$

$$\sum_{r=0}^{1-a_{ij}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_i}} Y_i^{1-a_{ij}-r} Y_j Y_i^r = 0, \tag{2.42}$$

pour $1 \leq i, j \leq t$.

Posons

$$\delta(X_i) = X_i \otimes 1 + Z_i \otimes E_i, \tag{2.43}$$

$$\delta(Y_i) = Y_i \otimes K_i^{-1} + 1 \otimes F_i, \tag{2.44}$$

$$\delta(Z_i^{\pm 1}) = Z_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1}, \tag{2.45}$$

pour tout $1 \leq i \leq t$.

Nous énonçons maintenant notre résultat principal.

Théorème. *1) Les formules (2.43), (2.44) et (2.45) munissent A_λ d'une structure d'objet galoisien clivé sur $U_q(\mathfrak{g})$.*

2) Tout objet galoisien sur $U_q(\mathfrak{g})$ est homotope à un objet galoisien de la forme A_λ.

3) Deux objets $U_q(\mathfrak{g})$-galoisiens A_λ et $A_{\lambda'}$ sont homotopes si et seulement si les familles λ et λ' les définissant sont égales.

La suite de l'article est consacrée à la démonstration du théorème.

2.3 Démonstration du théorème

2.3.1 Cocycles sur Gr $U_q(\mathfrak{g})$ provenant d'une famille λ

Pour toute famille $\lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i < j \leq t}$ d'inversibles de k, nous notons encore $\lambda_{ij} = \lambda_{ji}^{-1}$ et $\lambda_{ii} = 1$ pour tout $1 \leq j \leq i \leq t$ et nous définissons un cocycle de Gr $U_q(\mathfrak{g})$ comme suit. Notons $\sigma_\lambda : k[G] \times k[G] \to k$ l'application bilinéaire déterminée par

$$\sigma_\lambda(K_i, K_j) = \lambda_{ij}, \tag{2.46}$$

pour $1 \leq i, j \leq t$, et par

$$\sigma_\lambda(g_1 g_2, h) = \sigma_\lambda(g_1, h)\sigma_\lambda(g_2, h), \tag{2.47}$$

et

$$\sigma_\lambda(h, g_1 g_2) = \sigma_\lambda(h, g_1)\sigma_\lambda(h, g_2), \tag{2.48}$$

pour $g_1, g_2, h \in G$. On a donc $\sigma_\lambda(1, g) = \sigma_\lambda(g, 1) = 1$ pour tout $g \in G$.

Soit $\pi : \mathrm{Gr}\ U_q(\mathfrak{g}) \to k[G]$ le morphisme d'algèbres de Hopf défini par

$$\pi(E_i) = \pi(F_i) = 0, \quad \pi(K_i^{\pm 1}) = K_i^{\pm 1}, \tag{2.49}$$

pour $i = 1, \ldots, t$. Posons $\widetilde{\sigma_\lambda} = \sigma_\lambda \circ (\pi \times \pi) : \mathrm{Gr}\ U_q(\mathfrak{g}) \times \mathrm{Gr}\ U_q(\mathfrak{g}) \to k$. On a le lemme immédiat suivant.

Lemme 43. *Les applications σ_λ et $\widetilde{\sigma_\lambda}$ sont des cocycles normalisés pour les algèbres de Hopf $k[G]$ et $\mathrm{Gr}\ U_q(\mathfrak{g})$, respectivement, inversibles pour la convolution, d'inverses respectifs $\sigma_{\lambda^{-1}}$ et $\widetilde{\sigma_{\lambda^{-1}}}$.*

2.3.2 L'algèbre comodule A_λ comme $U_q(\mathfrak{g})$-extension clivée

Considérons une famille $\lambda = (\lambda_{ij})_{1 \leq i,j \leq t}$ d'éléments inversibles de k et les cocycles (pour l'algèbre de Hopf $\mathrm{Gr}\ U_q(\mathfrak{g})$) $\widetilde{\sigma_\lambda}$, défini au paragraphe 1.3, et ρ^{-1} inverse (pour la convolution) du cocycle ρ, défini par Kassel et Schneider et rappelé au paragraphe 1.3. La convolution de ces deux cocycles définit un cocycle $\sigma_\rho = \widetilde{\sigma_\lambda} * \rho^{-1}$ pour l'algèbre de Hopf $\mathrm{Gr}\ U_q(\mathfrak{g})^\rho \cong U_q(\mathfrak{g})$ (voir [MS05, Théorème 5.3]).

Lemme 44. *Le cocycle inversible $\sigma_\rho = \sigma_\lambda * \rho^{-1} : U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g}) \to k$ vérifie les relations*

$$\sigma_\rho(1, x) = \varepsilon(x) = \sigma_\rho(x, 1), \tag{2.50}$$

et si x, y, z appartiennent à la même sous-algèbre $U_q(\mathfrak{g})^+$ ou $U_q(\mathfrak{g})^-$ ou si les termes dans le premier membre de σ_ρ appartiennent à $U_q(\mathfrak{g})^-$ et ceux du second membre appartiennent à $U_q(\mathfrak{g})^+$, nous avons

$$\sigma_\rho(x, yz) = \sigma_\rho(x_{(1)}, y)\sigma_\rho(x_{(2)}, z), \tag{2.51}$$

$$\sigma_\rho(xy, z) = \sigma_\rho(x, z_{(2)})\sigma_\rho(y, z_{(1)}). \tag{2.52}$$

De plus, nous avons

$$\sigma_\rho(K_i, K_j) = \lambda_{ij}, \tag{2.53}$$

$$\sigma_\rho(E_i, F_j) = \frac{\delta_{ij}}{q^{d_i} - q^{-d_i}}, \tag{2.54}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. Et pour les autres couples (x, y) de générateurs nous avons

$$\sigma_\rho(x, y) = 0. \tag{2.55}$$

Démonstration. La relation de normalisation (2.50) est vérifiée immédiatement à partir des conditions de normalisation pour $\widetilde{\sigma_\lambda}$ et ρ. Les relations (2.51) et (2.52) se déduisent de la définition de σ_λ comme bi-caractère et des relations (2.34) et (2.35). Ces relations ne sont donc vérifiées que pour des éléments de la même sous-algèbre $U_q(\mathfrak{g})^+$ ou $U_q(\mathfrak{g})^-$ ou si le premier terme appartient à $U_q(\mathfrak{g})^-$ et le second à $U_q(\mathfrak{g})^+$ comme pour les relations (2.34) et (2.35) de ρ.

La relation (2.53) est une conséquence des relations (2.27), (2.31) et (2.46). La relation (2.54) s'obtient à partir des relations (2.25), (2.26), (2.32), (2.33) et (2.49) comme suit :

$$\begin{aligned} \sigma_\rho(E_i, F_j) &= \sigma_\lambda(E_i, F_j)\rho^{-1}(1, K_j^{-1}) + \sigma_\lambda(E_i, 1)\rho^{-1}(1, F_j) \\ &\quad + \sigma_\lambda(K_i, F_j)\rho^{-1}(E_i, K_j^{-1}) + \sigma_\lambda(K_i, 1)\rho^{-1}(E_i, F_j) \\ &= \frac{\delta_{ij}}{q^{d_i} - q^{-d_i}}, \end{aligned} \tag{2.56}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. Pour les autres couples de générateurs le calcul se fait de facon similaire et chaque terme de la somme apparaissant est nul, ce qui implique la relation (2.55). □

Posons, pour $1 \leq i \leq t$,

$$\varphi_\lambda(X_i) = E_i, \quad \varphi_\lambda(Y_i) = F_i, \quad \varphi_\lambda(Z_i^{\pm 1}) = K_i^{\pm 1}. \tag{2.57}$$

Lemme 45. *Les formules* (2.57) *définissent un morphisme d'algèbres $U_q(\mathfrak{g})$-comodules à droite $\varphi_\lambda : A_\lambda \to {}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. a) Vérifions d'abord que A_λ est un morphisme d'algèbres. Il suffit d'établir que l'image des relations (2.37) – (2.42) est nulle dans ${}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g})$.

Considérons la relation (2.37) de commutation entre les Z_i. On a

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(Z_i Z_j) &= \varphi_\lambda(Z_i) \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(Z_j) \\ &= K_i \cdot_{\sigma_\rho} K_j \\ &= \sigma_\rho(K_i, K_j) K_i K_j \\ &= \lambda_{ij} K_i K_j \\ &= \lambda_{ij} K_j K_i \\ &= \lambda_{ij}^2 \sigma_\rho(K_j, K_i) K_j K_i \\ &= \lambda_{ij}^2 K_j \cdot_{\sigma_\rho} K_i \\ &= \lambda_{ij}^2 \varphi_\lambda(Z_j) \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(Z_i) \\ &= \varphi_\lambda(\lambda_{ij}^2 Z_j Z_i), \end{aligned} \tag{2.58}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. De la même façon on démontre

$$\varphi_\lambda(Z_i Z_i^{-1}) = \varphi_\lambda(Z_i^{-1} Z_i) = 1, \tag{2.59}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$.

Considérons la relation (2.38) de commutation entre Z_i et X_j. On a

$$\begin{aligned} \varphi_\lambda(Z_i X_j) &= \varphi_\lambda(Z_i) \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(X_j) \\ &= K_i \cdot_{\sigma_\rho} E_j \\ &= \sigma_\rho(K_i, E_j) K_i 1 + \sigma_\rho(K_i, K_j) K_i E_j \\ &= 0 + \lambda_{ij} K_i E_j \\ &= \lambda_{ij} q^{d_i a_{ij}} E_j K_i \\ &= \lambda_{ij} q^{d_i a_{ij}} (0 + \lambda_{ij} \sigma_\rho(K_j, K_i) E_j K_i) \\ &= \lambda_{ij}^2 q^{d_i a_{ij}} E_j \cdot_{\sigma_\rho} K_i \\ &= \lambda_{ij}^2 q^{d_i a_{ij}} \varphi_\lambda(X_j) \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(Z_i) \\ &= \varphi_\lambda(\lambda_{ij}^2 q^{d_i a_{ij}} X_j Z_i), \end{aligned} \tag{2.60}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$.

La relation (2.39) se démontre de façon similaire. Pour (2.40) on a

$$\begin{aligned}
\varphi_\lambda(X_iY_j - Y_jX_i) &= \varphi_\lambda(X_i) \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(Y_j) - \varphi_\lambda(Y_j) \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(X_i) \\
&= E_i \cdot_{\sigma_\rho} F_j - F_j \cdot_{\sigma_\rho} E_i \\
&= \Big(\sigma_\rho(E_i, F_j)1K_j^{-1} + \sigma_\rho(E_i, 1)1F_j + \sigma_\rho(K_i, F_j)E_iK_j^{-1} \\
&\quad +\sigma_\rho(K_i, 1)E_iF_j\Big) - \Big(\sigma_\rho(F_j, E_i)K_j^{-1}1 + \sigma_\rho(1, E_i)F_j1 \\
&\quad +\sigma_\rho(F_j, K_i)K_j^{-1}E_i + \sigma_\rho(1, K_i)F_jE_i\Big) \\
&= \frac{\delta_{ij}}{q^{d_i} - q^{-d_i}}K_j^{-1} + E_iF_j - F_jE_i \\
&= \delta_{ij}\frac{K_i}{q^{d_i} - q^{-d_i}} \\
&= \varphi_\lambda\left(\delta_{ij}\frac{Z_i}{q^{d_i} - q^{-d_i}}\right),
\end{aligned} \tag{2.61}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$.

Considérons la relation de Serre quantique (2.41) pour le générateur X_i. Notons que

$$\begin{aligned}
E_i \cdot_{\sigma_\rho} E_j &= \sigma_\rho(E_i, E_j)1 + \sigma_\rho(E_i, K_j)1E_j \\
&\quad +\sigma_\rho(K_i, E_j)E_i1 + \sigma_\rho(K_i, K_j)E_iE_j \\
&= \lambda_{ij}E_iE_j,
\end{aligned} \tag{2.62}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. Nous ne considérons que des éléments de $U_q(\mathfrak{g})^+$, nous pouvons donc utiliser les relations (2.51), (2.52), (2.55) et pour calculer les valeurs du cocycle σ_ρ, valeurs qui sont nulles dès que le générateur E_i apparait, et obtenir

$$\begin{aligned}
&E_i \cdot_{\sigma_\rho} E_j \cdot_{\sigma_\rho} E_j \\
&= \sigma_\rho((E_i)_{(1)}, (E_j)_{(1)})\sigma_\rho((E_i)_{(2)}(E_j)_{(2)}, (E_j)_{(1)})(E_i)_{(3)}(E_j)_{(3)}(E_j)_{(2)} \\
&= 0 + \sigma_\rho(K_i, K_j)\sigma_\rho(K_iK_j, K_j)E_iE_jE_j \\
&= \lambda_{ij}^2E_iE_j^2,
\end{aligned} \tag{2.63}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. De façon similaire, nous avons

$$E_i \cdot_{\sigma_\rho} E_i \cdot_{\sigma_\rho} E_j = \lambda_{ij}^2E_i^2E_j \tag{2.64}$$

et

$$E_i \cdot_{\sigma_\rho} E_j \cdot_{\sigma_\rho} E_i = E_iE_jE_i, \tag{2.65}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. Par récurence sur les entiers a, b et c, on montre facilement que le produit de a fois le générateur E_i, b fois le générateur E_j et c fois le générateur E_i vaut

$$\begin{aligned}
\underbrace{E_i \cdot_{\sigma_\rho} \cdots \cdot_{\sigma_\rho} E_i}_{a} \cdot_{\sigma_\rho} \underbrace{E_j \cdot_{\sigma_\rho} \cdots \cdot_{\sigma_\rho} E_j}_{b} \cdot_{\sigma_\rho} \underbrace{E_i \cdot_{\sigma_\rho} \cdots \cdot_{\sigma_\rho} E_i}_{c} &= E_i^a \cdot_{\sigma_\rho} E_j^b \cdot_{\sigma_\rho} E_i^c \\
&= \lambda_{ij}^{b(a-c)}E_i^aE_j^bE_i^c
\end{aligned} \tag{2.66}$$

dans ${}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g})$ pour tout $1 \leq i, j \leq t$. Remarquons en particulier que la puissance d'un élément E_i est la même pour le produit classique de $U_q(\mathfrak{g})$ ou pour celui de ${}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g})$, ce qui justifie la notation E_i^a.

Alors, en utilisant (2.66), on obtient

$$\begin{array}{l}
\varphi_\lambda\left(\sum_{r=0}^{1-a_{ij}}(-1)^r \left[\begin{array}{c} 1-a_{ij} \\ r \end{array}\right]_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij}+2r-1} X_i^{1-a_{ij}-r} X_j X_i^r\right) \\
= \sum_{r=0}^{1-a_{ij}}(-1)^r \left[\begin{array}{c} 1-a_{ij} \\ r \end{array}\right]_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij}+2r-1} \varphi_\lambda(X_i)^{1-a_{ij}-r} \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(X_j) \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(X_i)^r) \\
= \sum_{r=0}^{1-a_{ij}}(-1)^r \left[\begin{array}{c} 1-a_{ij} \\ r \end{array}\right]_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij}+2r-1} E_i^{1-a_{ij}-r} \cdot_{\sigma_\rho} E_j \cdot_{\sigma_\rho} E_i^r) \\
= \sum_{r=0}^{1-a_{ij}}(-1)^r \left[\begin{array}{c} 1-a_{ij} \\ r \end{array}\right]_{q^{d_i}} \lambda_{ij}^{a_{ij}+2r-1} \lambda_{ij}^{1-a_{ij}-r-r} E_i^{1-a_{ij}-r} E_j E_i^r \\
= \sum_{r=0}^{1-a_{ij}}(-1)^r \left[\begin{array}{c} 1-a_{ij} \\ r \end{array}\right]_{q^{d_i}} E_i^{1-a_{ij}-r} E_j E_i^r \\
= 0.
\end{array} \tag{2.67}$$

De manière similaire, pour les générateurs F_i dans $U_q(\mathfrak{g})^-$, nous avons

$$\begin{array}{rcl}
F_i \cdot_{\sigma_\rho} F_j & = & \sigma_\rho(F_i, F_j) K_i^{-1} K_j^{-1} + \sigma_\rho(F_i, 1) K_i^{-1} F_j \\
& & + \sigma_\rho(1, F_j) F_i K_j^{-1} + \sigma_\rho(1,1) F_i F_j \\
& = & F_i F_j
\end{array} \tag{2.68}$$

et par récurrence

$$F_i^a \cdot_{\sigma_\rho} F_j^b \cdot_{\sigma_\rho} F_i^c = F_i^a F_j^b F_i^c \tag{2.69}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$ et $a, b, c \in \mathbb{N}$. Le produit des éléments F_i est donc le même dans ${}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g})$ et dans $U_q(\mathfrak{g})$. La relation de Serre quantique (2.42) dans A_λ pour le générateur Y_i est alors une conséquence immédiate de la relation (2.24) pour le générateur F_i dans $U_q(\mathfrak{g})$.

b) Pour montrer que φ_λ est aussi un morphisme de comodules, il suffit, puisque la comultiplication de $U_q(\mathfrak{g})$ est un morphisme d'algèbres, de vérifier que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
A_\lambda & \xrightarrow{\varphi_\lambda} & {}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g}) \\
\downarrow_\delta & & \downarrow_\Delta \\
A_\lambda \otimes U_q(\mathfrak{g}) & \xrightarrow{\varphi_\lambda \otimes \mathrm{Id}} & {}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g}) \otimes U_q(\mathfrak{g})
\end{array} \tag{2.70}$$

commute pour une famille de générateurs de l'algèbre A_λ.

Pour les générateurs $Z_i^{\pm 1}$, on a

$$\begin{array}{rcl}
\Delta \circ \varphi_\lambda(Z_i^{\pm 1}) & = & \Delta(K_i^{\pm 1}) \\
& = & K_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1} \\
& = & (\varphi_\lambda \otimes \mathrm{Id})(Z_i^{\pm 1} \otimes K_i^{\pm 1}) \\
& = & (\varphi_\lambda \otimes \mathrm{Id}) \circ \delta(Z_i^{\pm 1});
\end{array} \tag{2.71}$$

pour les générateurs X_i, on a

$$\begin{array}{rcl}\Delta\circ\varphi_\lambda(X_i) & = & \Delta(E_i)\\ & = & E_i\otimes 1+K_i\otimes E_i\\ & = & (\varphi_\lambda\otimes\mathrm{Id})(X_i\otimes 1+Z_i\otimes E_i)\\ & = & (\varphi_\lambda\otimes\mathrm{Id})\circ\delta(X_i);\end{array}\qquad(2.72)$$

pour les générateurs Y_i, on a

$$\begin{array}{rcl}\Delta\circ\varphi_\lambda(Y_i) & = & \Delta(F_i)\\ & = & F_i\otimes K_i^{-1}+1\otimes F_i\\ & = & (\varphi_\lambda\otimes\mathrm{Id})(Y_i\otimes K_i^{-1}+1\otimes F_i)\\ & = & (\varphi_\lambda\otimes\mathrm{Id})\circ\delta(Y_i),\end{array}\qquad(2.73)$$

pour tout $1\leq i\leq t$. □

Lemme 46. *Le morphisme $\varphi_\lambda : A_\lambda \to_{\sigma_\rho} U_q(\mathfrak{g})$ est un isomorphisme.*

Démonstration. Avec [J95, Chapitre 4] introduisons l'algèbre de Hopf U engendrée par les générateurs E_i, F_i et $K_i^{\pm 1}$ soumis aux relations (2.19) - (2.22) de commutation de $U_q(\mathfrak{g})$. Cette algèbre peut être munie d'une structure d'algèbre de Hopf avec la comultiplication, la coünité et l'antipode définies par les mêmes relations (2.25) – (2.29) que pour $U_q(\mathfrak{g})$. L'algèbre $U_q(\mathfrak{g})$ est alors le quotient de l'algèbre U par l'idéal I engendré par les relations de Serre quantiques (2.23) et (2.24) ; notons P le morphisme d'algèbre de Hopf de projection de U sur $U_q(\mathfrak{g})$. La famille

$$F_{\underline{i}}^{\alpha_i}E_{\underline{j}}^{\beta_j}K_{\underline{l}}^{\gamma_l}=F_{i_1}^{\alpha_{i_1}}\cdots F_{i_n}^{\alpha_{i_n}}E_{j_1}^{\beta_{j_1}}\cdots E_{j_p}^{\beta_{j_p}}K_{l_1}^{\gamma_{l_1}}\cdots K_{l_t}^{\gamma_{l_t}},\qquad(2.74)$$

où $i_1,\ldots,i_n,j_1,\ldots,j_p,l_1,\ldots,l_t$ parcourent $\{1,\ldots,t\}$, $\alpha_{i_1},\ldots,\alpha_{i_n},\beta_{j_1},\ldots,\beta_{j_p}$ parcourent $\mathbb{N}$ et $\gamma_{l_1},\ldots,\gamma_{l_t}$ parcourent $\mathbb{Z}$, est une base de U (voir [J95]). L'algèbre de Hopf $k[G]$ est aussi la sous-algèbre engendrée par les éléments "group-like" de U. Considérons le cocycle (que nous noterons encore σ_ρ) $\sigma_\rho\circ(P\otimes P)$: $U\otimes U\to k$ et notons ${}_{\sigma_\rho}U$ l'algèbre obtenue de U à partir du cocycle σ_ρ en suivant le procédé décrit au paragraphe 1.2 et dont le produit est donné par la relation (2.10).

Cherchons maintenant une base de ${}_{\sigma_\rho}U$ adaptée au produit $\cdot_{\sigma_\rho}$. Remarquons que de la même manière que pour les relations (2.62) et (2.68), le produit d'un élément F_i avec un élément E_j vaut dans ${}_{\sigma_\rho}U$

$$\begin{array}{rcl}F_i\cdot_{\sigma_\rho}E_j & = & \sigma_\rho(F_i,E_j)K_i^{-1}+\sigma_\rho(F_i,K_j)K_i^{-1}E_j\\ & & +\sigma_\rho(1,E_j)F_i+\sigma_\rho(1,K_j)F_iE_j\\ & = & F_iE_j,\end{array}\qquad(2.75)$$

celui d'un élément E_i avec un élément K_j vaut

$$\begin{array}{rcl}E_i\cdot_{\sigma_\rho}K_j & = & \sigma_\rho(E_i,K_j)K_j+\sigma_\rho(K_i,K_j)E_iK_j\\ & = & \lambda_{ij}E_iK_j\end{array}\qquad(2.76)$$

et celui de deux éléments K_i et K_j vaut

$$\begin{array}{rcl} K_i \cdot_{\sigma_\rho} K_j & = & \sigma_\rho(K_iK_j)K_iK_j \\ & = & \lambda_{ij}K_iK_j, \end{array} \qquad (2.77)$$

pour tout $1 \leq i,j \leq t$. Si les indices $j_1,\dots,j_p,l_1,\dots,l_t$ parcourent $\{1,\dots,t\}$, notons J la suite d'indice $j_1,\dots,j_n,l_1,l_2,\dots,l_t$ et J_k la suite définie à partir de la précédente en ne gardant que les indices à partir de l'indice k (par exemple $J_{j_3} = j_3,\dots,j_n,l_1,\dots,l_t$ et $J_{l_5} = l_5,\dots,l_t$).

Nous devons calculer les produits dans ${}_{\sigma_\rho}U$ de produits des générateurs, et nous avons donc besoin des valeurs de σ_ρ sur ces produits. Précisément, nous devons calculer les valeurs du cocycle σ_ρ pour des produits des générateurs F_i, ce qui est possible avec les relations (2.51) et (2.52) car nous restons dans la même sous-algèbre ${}_{\sigma_\rho}U^-$ (définie de manière évidente comme pour $U_q(\mathfrak{g})^-$). De même, la valeur du cocycle σ_ρ sur les produits entre les générateurs E_j et K_l se calcule grâce à ces relations car ces éléments appartiennent à la même sous-algèbre ${}_{\sigma_\rho}U^+$. Enfin, les produits entre les générateurs F_i et E_j font intervenir le cocyle avec comme terme de gauche des éléments de ${}_{\sigma_\rho}U^-$ et comme terme de droite des éléments de ${}_{\sigma_\rho}U^+$, ce qui nous permet encore d'utiliser les relations (2.51) et (2.52). Alors, de façon similaire à (2.62) - (2.66), nous utilisons les relations (2.62), (2.68) et (2.75) - (2.77), exprimant les produits dans ${}_{\sigma_\rho}U$ des générateurs F_i, E_j et K_l sur la base $F_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}}E_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}}K_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}}$, de manière répétée grâce aux relations (2.51) et (2.52) de définition de σ_ρ, pour exprimer les éléments $F_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}}$ sur la base $F_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}}E_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}}K_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}}$:

$$\begin{array}{rcl} F_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}} & = & F_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdot_{\sigma_\rho} \cdots \cdot_{\sigma_\rho} F_{i_n}^{\alpha_{i_n}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{j_1}^{\beta_{j_1}} \cdot_{\sigma_\rho} \cdots \cdot_{\sigma_\rho} E_{j_p}^{\beta_{j_p}} \\ & & \cdot_{\sigma_\rho} K_{l_1}^{\gamma_{l_1}} \cdot_{\sigma_\rho} \cdots \cdot_{\sigma_\rho} K_{l_t}^{\gamma_{l_t}} \\ & = & \left(F_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots F_{i_n}^{\alpha_{i_n}}\right) \cdot_{\sigma_\rho} \left(\prod_{j_1 \leq j < j' \leq j_p} \beta_{jj'}^{\beta_j\beta_{j'}})E_{j_1}^{\beta_{j_1}} \cdots E_{j_p}^{\beta_{j_p}}\right) \\ & & \cdot_{\sigma_\rho} \left((\prod_{l_1 \leq l < l' \leq l_t} \lambda_{ll'}^{\gamma_l\gamma_{l'}})K_{l_1}^{\gamma_{l_1}} \cdots K_{l_t}^{\gamma_{l_t}}\right) \\ & = & \prod_{k \in J}\prod_{k' \in J_k} \lambda_{kk'}^{\kappa_k\kappa_{k'}} F_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}}E_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}}K_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}}, \end{array} \qquad (2.78)$$

où κ_k désigne β_k si k est un indice relatif à E (soit de la forme j_m) et désigne γ_k si k est un indice relatif à K (soit de la forme l_m). La famille $E_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}} \cdot_{\sigma_\rho} F_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}}$ forme une base de l'espace vectoriel $U = {}_{\sigma_\rho}U$ puisque les scalaires $\prod_{k \in J}\prod_{k' \in J_k} \lambda_{kk'}^{\kappa_k\kappa_{k'}}$ sont tous non nuls.

Notons $Y_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}}X_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}}Z_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}}$ le produit $Y_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \cdots Y_{i_n}^{\alpha_{i_n}} X_{j_1}^{\beta_{j_1}} \cdots X_{j_p}^{\beta_{j_p}} Z_{l_1}^{\gamma_{l_1}} \cdots {}_{l_t}^{\gamma_{l_t}}$ si $\underline{i}, \underline{\alpha_i}, \underline{j}, \underline{\beta_j}, \underline{l}, \underline{\gamma_l}$ sont les multi-indices correspondant à $i_1,\dots,i_n,\alpha_{i_1},\dots,\alpha_{i_n},j_1,\dots,j_p$, $\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_p},l_1,\dots,l_t,\gamma_{l_1},\dots,\gamma_{l_t}$ et définissons l'application linéaire $\psi : {}_{\sigma_\rho}U \to A_\lambda$ par sa donnée sur la base $F_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}}$:

$$\psi(F_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}}) = Y_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}}X_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}}Z_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}}. \qquad (2.79)$$

Démontrons que ψ est un morphisme d'algèbres. Les calculs (2.58) - (2.61) assurent aussi que

$$K_i \cdot_{\sigma_\rho} K_j = \lambda_{ij}^2 K_j \cdot_{\sigma_\rho} K_i, \tag{2.80}$$

$$K_i \cdot_{\sigma_\rho} E_j = \lambda_{ij}^2 q^{d_i a_{ij}} E_j \cdot_{\sigma_\rho} K_i, \tag{2.81}$$

$$K_i \cdot_{\sigma_\rho} F_j = q^{-d_i a_{ij}} F_j \cdot_{\sigma_\rho} K_i \tag{2.82}$$

et

$$E_i \cdot_{\sigma_\rho} F_j - F_j \cdot_{\sigma_\rho} E_i = \delta_{ij} \frac{K_i}{q^{d_i} - q^{-d_i}}, \tag{2.83}$$

pour tout $1 \leq i, j \leq t$. Alors pour écrire le produit de deux éléments de la base $F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}$ et $F_{\underline{i'}}^{\alpha'_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j'}}^{\beta'_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l'}}^{\gamma'_l}$, nous utilisons les relations de commutation (2.80) - (2.83) de manière répétée pour obtenir une écriture sur la base :

$$\left(F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}\right) \cdot_{\sigma_\rho} \left(F_{\underline{i'}}^{\alpha'_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j'}}^{\beta'_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l'}}^{\gamma'_l}\right) = \sum x_{\underline{i''}\underline{j''}\underline{l''}}^{\alpha_{i''}\beta_{j''}\gamma_{l''}} F_{\underline{i''}}^{\alpha_{i''}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j''}}^{\beta_{j''}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l''}}^{\gamma_{l''}}, \tag{2.84}$$

avec $x_{\underline{i''}\underline{j''}\underline{l''}}^{\alpha_{i''}\beta_{j''}\gamma_{l''}} \in k$. Remarquons que dans l'algèbre A_λ nous avons les mêmes relations de commutation (2.37) - (2.40) et donc le produit de deux éléments de la forme $Y_{\underline{i}}^{\alpha_i} X_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l}$ et $Y_{\underline{i'}}^{\alpha'_i} X_{\underline{j'}}^{\beta'_j} Z_{\underline{l'}}^{\gamma'_l}$ vaut de la même manière

$$\left(Y_{\underline{i}}^{\alpha_i} X_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l}\right)\left(Y_{\underline{i'}}^{\alpha'_i} X_{\underline{j'}}^{\beta'_j} Z_{\underline{l'}}^{\gamma'_l}\right) = \sum x_{\underline{i''}\underline{j''}\underline{l''}}^{\alpha_{i''}\beta_{j''}\gamma_{l''}} Y_{\underline{i''}}^{\alpha''_i} X_{\underline{j''}}^{\beta''_j} Z_{\underline{l''}}^{\gamma''_l}. \tag{2.85}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
&\psi(F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \cdot_{\sigma_\rho} F_{\underline{i'}}^{\alpha'_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j'}}^{\beta'_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l'}}^{\gamma'_l}) \\
= \;& \psi\left(\sum x_{\underline{i''}\underline{j''}\underline{l''}}^{\alpha_{i''}\beta_{j''}\gamma_{l''}} F_{\underline{i''}}^{\alpha''_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j''}}^{\beta''_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l''}}^{\gamma''_l}\right) \\
= \;& \sum x_{\underline{i''}\underline{j''}\underline{l''}}^{\alpha_{i''}\beta_{j''}\gamma_{l''}} Y_{\underline{i''}}^{\alpha''_i} X_{\underline{j''}}^{\beta''_j} Z_{\underline{l''}}^{\gamma''_l} \\
= \;& \left(Y_{\underline{i}}^{\alpha_i} X_{\underline{j}}^{\beta_j} Z_{\underline{l}}^{\gamma_l}\right)\left(Y_{\underline{i'}}^{\alpha'_i} X_{\underline{j'}}^{\beta'_j} Z_{\underline{l'}}^{\gamma'_l}\right) \\
= \;& \psi(F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l}) \cdot_{\sigma_\rho} \psi(F_{\underline{i'}}^{\alpha'_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j'}}^{\beta'_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l'}}^{\gamma'_l}),
\end{aligned} \tag{2.86}$$

ce qui établit que ψ est un morphisme d'algèbres. Par suite, comme les générateurs de l'algèbre A_λ appartiennent à l'image de ψ, celle-ci est surjective. Pour montrer que ψ se factorise à travers ${}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g})$, il suffit de montrer que le noyau de P est inclus dans le noyau de ψ. Soit u appartenant au noyau de P ; alors u appartient à l'idéal engendré par les relations de Serre quantiques (2.23) et (2.24). Donc u est une combinaison linéaire d'éléments de la forme

$$F_{\underline{i}}^{\alpha_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\beta_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\gamma_l} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \begin{bmatrix} 1 - a_{st} \\ r \end{bmatrix}_{q^{d_s}} E_s^{1-a_{st}-r} E_t E_s^r\right) F_{\underline{i'}}^{\alpha'_i} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j'}}^{\beta'_j} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l'}}^{\gamma'_l} \tag{2.87}$$

et de la forme

$$F_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \left[\begin{array}{c} 1-a_{st} \\ r \end{array} \right]_{q^{d_s}} F_s^{1-a_{st}-r} F_t F_s^r \right) F_{\underline{i'}}^{\underline{\alpha'_i}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j'}}^{\underline{\beta'_j}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l'}}^{\underline{\gamma'_l}}, \tag{2.88}$$

avec $\underline{i}, \underline{\alpha_i}, \underline{j}, \underline{\beta_j}, \underline{l}, \underline{\gamma_l}$ des multi-indices de la forme précédente et $s, t = 1, \ldots, t$. Par conséquent l'élément u est une combinaison linéaire d'éléments de la forme

$$F_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}} \cdot_{\sigma_\rho} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \left[\begin{array}{c} 1-a_{st} \\ r \end{array} \right]_{q^{d_s}} \lambda_{st}^{a_{st}+2r-1} E_s^{1-a_{st}-r} \cdot_{\sigma_\rho} E_t \cdot_{\sigma_\rho} E_s^r \right) \\ \cdot_{\sigma_\rho} F_{\underline{i'}}^{\underline{\alpha'_i}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j'}}^{\underline{\beta'_j}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l'}}^{\underline{\gamma'_l}} \tag{2.89}$$

et de la forme

$$F_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}} \cdot_{\sigma_\rho} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \left[\begin{array}{c} 1-a_{st} \\ r \end{array} \right]_{q^{d_s}} F_s^{1-a_{st}-r} \cdot_{\sigma_\rho} F_t \cdot_{\sigma_\rho} F_s^r \right) \\ \cdot_{\sigma_\rho} F_{\underline{i'}}^{\underline{\alpha'_i}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j'}}^{\underline{\beta'_j}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l'}}^{\underline{\gamma'_l}}, \tag{2.90}$$

Donc $\psi(u)$ est une combinaison linéaire d'éléments de la forme

$$\begin{aligned} &\psi \left(F_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}} \cdot_{\sigma_\rho} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \left[\begin{array}{c} 1-a_{st} \\ r \end{array} \right]_{q^{d_s}} \lambda_{st}^{a_{st}+2r-1} E_s^{1-a_{st}-r} \cdot_{\sigma_\rho} \right.\right. \\ &\left.\left. E_t \cdot_{\sigma_\rho} E_s^r \right) \cdot_{\sigma_\rho} F_{\underline{i'}}^{\underline{\alpha'_{i'}}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j'}}^{\underline{\beta'_{j'}}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l'}}^{\underline{\gamma'_{l'}}} \right) \\ = \ & \psi \left(F_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}} \right) \psi \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \left[\begin{array}{c} 1-a_{st} \\ r \end{array} \right]_{q^{d_s}} \lambda_{st}^{a_{st}+2r-1} \right. \\ &\left. E_s^{1-a_{st}-r} \cdot_{\sigma_\rho} E_t \cdot_{\sigma_\rho} E_s^r \right) \psi \left(F_{\underline{i'}}^{\underline{\alpha'_{i'}}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j'}}^{\underline{\beta'_{j'}}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l'}}^{\underline{\gamma'_{l'}}} \right) \\ = \ & Y_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}} X_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}} Z_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \left[\begin{array}{c} 1-a_{st} \\ r \end{array} \right]_{q^{d_s}} \lambda_{st}^{a_{st}+2r-1} X_s^{1-a_{st}-r} X_t X_s^r \right) Y_{\underline{i'}}^{\underline{\alpha'_{i'}}} \\ & X_{\underline{j'}}^{\underline{\beta'_{j'}}} Z_{\underline{l'}}^{\underline{\gamma'_{l'}}} \end{aligned} \tag{2.91}$$

et, de façon similaire, d'éléments de la forme

$$\begin{aligned} &\psi(F_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}} \cdot_{\sigma_\rho} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \left[\begin{array}{c} 1-a_{st} \\ r \end{array} \right]_{q^{d_s}} F_s^{1-a_{st}-r} \cdot_{\sigma_\rho} F_t \cdot_{\sigma_\rho} F_s^r \right) \\ &\cdot_{\sigma_\rho} F_{\underline{i'}}^{\underline{\alpha'_{i'}}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j'}}^{\underline{\beta'_{j'}}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l'}}^{\underline{\gamma'_{l'}}}) \\ &= Y_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}} X_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}} Z_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}} \left(\sum_{r=0}^{1-a_{st}} (-1)^r \left[\begin{array}{c} 1-a_{st} \\ r \end{array} \right]_{q^{d_s}} Y_s^{1-a_{st}-r} Y_t Y_s^r \right) Y_{\underline{i'}}^{\underline{\alpha'_{i'}}} X_{\underline{j'}}^{\underline{\beta'_{j'}}} Z_{\underline{l'}}^{\underline{\gamma'_{l'}}}. \end{aligned} \tag{2.92}$$

Les deux derniers membres de (2.91) et de (2.92) sont nuls en vertu de (2.41) et (2.42). Il en résulte que $\psi(u)$ est nul et que le morphisme ψ se factorise en un morphisme $\Psi : {}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g}) \to A_\lambda$.

Le morphisme Ψ est surjectif puisque ψ l'est. De plus nous avons la relation

$$\begin{aligned}(\varphi_\lambda \circ \Psi)(F_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}}) &= \varphi_\lambda(Y_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}} X_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}} Z_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}}) \\ &= \varphi_\lambda(Y_{\underline{i}})^{\underline{\alpha_i}} \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(X_{\underline{j}})^{\underline{\beta_j}} \cdot_{\sigma_\rho} \varphi_\lambda(Z_{\underline{l}})^{\underline{\gamma_l}} \\ &= F_{\underline{i}}^{\underline{\alpha_i}} \cdot_{\sigma_\rho} E_{\underline{j}}^{\underline{\beta_j}} \cdot_{\sigma_\rho} K_{\underline{l}}^{\underline{\gamma_l}},\end{aligned} \tag{2.93}$$

pour tout multi-indices $\underline{i}, \underline{\alpha_i}, \underline{j}, \underline{\beta_j}, \underline{j}, \underline{\gamma_l}$. Donc l'application $\varphi_\lambda \circ \Psi$ est égale à l'identité de ${}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g})$. En conséquence, Ψ est injective. Comme Ψ est surjective, elle est bijective d'inverse φ_λ. $\square$

2.3.3 Démonstration du théorème

Le point (1) est une conséquence du lemme 46.

Démontrons le point (2). Soit A un objet galoisien de $U_q(\mathfrak{g})$. Notons i le plongement naturel de $k[G]$ dans $U_q(\mathfrak{g})$; ce morphisme d'algèbres de Hopf nous permet en particulier de définir une structure d'algèbre $U_q(\mathfrak{g})$-comodule à gauche sur $k[G]$ par

$$k[G] \xrightarrow{\Delta_{k[G]}} k[G] \otimes k[G] \xrightarrow{i \otimes \mathrm{Id}} U_q(\mathfrak{g}) \otimes k[G]. \tag{2.94}$$

Comme nous l'avons expliqué au paragraphe 1.1, ce plongement $i : k[G] \to U_q(\mathfrak{g})$ induit une application

$$i^\star : \mathrm{Gal}_k(U_q(\mathfrak{g})) \to \mathrm{Gal}_k(k[G]). \tag{2.95}$$

Considérons l'image $i^\star(A)$ de A dans $\mathrm{Gal}_k(k[G])$. D'après [KaSn05, Prop. 3.2],

$$\mathrm{Gal}(k[G]) \cong \mathrm{H}^2(G, k^\star). \tag{2.96}$$

Il est bien connu que ce dernier groupe est isomorphe à $\mathrm{Hom}(\Lambda^2\mathbb{Z}^t, k^*)$ (voir par exemple [Br82, Théorème V.6.4 (iii)]). Par conséquent, il existe une famille λ telle que $i^*(A) \cong {}_{\sigma_\lambda}k[G]$.

Le lemme 42 assure que $i^*(A) \cong {}_{\sigma_\lambda}k[G]$ est isomorphe, comme algèbre, à ${}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g})\Box_{U_q(\mathfrak{g})}k[G]$ qui vaut, par définition de i^*, $i^*({}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g}))$. Les lemmes 45 et 46 assurent que ${}_{\sigma_\rho}U_q(\mathfrak{g})) \cong A_\lambda$ et par suite nous avons

$$i^\star(A) \cong i^\star(A_\lambda). \tag{2.97}$$

Or Kassel et Schneider [KaSn05, Théorème 4.5] ont montré que l'application $i^\star : \mathcal{H}_k(U_q(\mathfrak{g})) \to \mathcal{H}_k(k[G])$ est une bijection sur les classes d'homotopie d'extensions galoisiennes. Par conséquent, A et A_λ sont homotopes.

Démontrons le point (3). Supposons que A_λ et $A_{\lambda'}$ définissent le même élément de $\mathcal{H}(U_q(\mathfrak{g}))$. Alors $i^\star(A_\lambda) = i^\star(A_{\lambda'})$ dans $\mathcal{H}_k(k[G])$. D'après [KaSn05, Prop 3.2], on a $\mathcal{H}_k(k[G]) \cong \mathrm{Gal}_k(k[G])$. Il résulte de ceci et de la bijection (2.96) que $\lambda = \lambda'$.

Chapitre 3

On the classification of Galois objects over the quantum group of a nondegenerate bilinear form

Résumé. – *Ce chapitre est une reproduction de l'article [Au2]. Nous étudions les objets galoisiens et bigaloisiens du groupe quantique d'une forme bilinéaire non dégénérée, incluant le groupe quantique $\mathcal{O}_q(SL(2))$. Nous obtenons la classification de ces objets à isomorphisme près et des résultats partiels concernant la classification à homotopie près.*

Introduction

Hopf-Galois extensions and objects are quantum analogues of principal fibre bundles and torsors. It is in general a difficult problem to classify these objects. Several authors have already contributed to this problem, mainly in the finite dimensional case ([Ma94], [Ma00], [Sa04], [PO00], [Bi203]...). In this paper we study a very different class of infinite dimensional Hopf algebras, including the quantum group $\mathcal{O}_q(SL(2))$ of functions over $SL(2)$. We obtain the classification up to isomorphism and present some partial results for the classification up to homotopy. Homotopy for Hopf-Galois extensions was introduced by Kassel [Ka04] and developped with Schneider [KaSn05] in order to classify Galois extensions up to a coarser equivalence relation than isomorphism. This relation is very useful for pointed Hopf algebras but it appears that, when the Hopf algebra is the quantum group $\mathcal{O}_q(SL(2))$, the classification up to homotopy is harder to obtain than the one up to isomorphism.

We consider the Hopf algebras $\mathcal{B}(E)$ introduced by Dubois-Violette and Launer [DvL90] as the quantum groups of nondegenerate bilinear forms given by invertible matrices E over a field k. One simple and interesting example of such a Hopf algebra is the quantum group $\mathcal{O}_q(SL(2))$ of functions over $SL(2)$. Bichon [Bi203] has proved that the representation category of each Hopf algebra $\mathcal{B}(E)$ is monoidally equivalent to the one of $\mathcal{O}_q(SL(2))$, where q is a solution of the equation

$$q^2 + \mathrm{Tr}(E^{-1}E^t)q + 1 = 0.$$

The main ingredient of his proof is the construction of a $\mathcal{B}(E)$-$\mathcal{O}_q(SL(2))$-bi-Galois object $\mathcal{B}(E, E_q)$ for a well-chosen invertible matrix E_q. In fact, such Galois objects $\mathcal{B}(E, F)$ can be defined even when k is only assumed to be a commutative ring. They are generic in the following sense : if k is a PID (principal ideal domain), for any $\mathcal{B}(E)$-Galois object Z there exist an integer $m \geq 2$ and an invertible matrix $F \in GL_m(k)$ such that Z is isomorphic to $\mathcal{B}(E, F)$. Moreover, two such $\mathcal{B}(E)$-Galois objects $\mathcal{B}(E, F_1)$ and $\mathcal{B}(E, F_2)$ are isomorphic if and only if there exists $P \in GL_m(k)$ such that $F_1 = PF_2P^t$ (P^t denotes the transpose of P). In the case when k is a field, we obtain a full classification up to isomorphism of the Galois objects of $\mathcal{B}(E)$. As a consequence, the group of $\mathcal{B}(E)$-bi-Galois objects is trivial as well as the lazy cohomology group. Note that Ostrik [Os05] has recently classified module categories over representations of $\mathcal{O}_q(SL(2))$, which together with Ulbrich's and Schauenburg's work (see [Ul87], [Ul89] and [Sa04]) also yields a classification of Galois objects, but the tools used in [Os05] are very different from ours.

Concerning the classification up to homotopy, we prove a partial result. Namely, we show that two Galois objects $\mathcal{B}(E, F_1)$ and $\mathcal{B}(E, F_2)$ are homotopically equivalent if the matrices $F_1^{-1}F_1^t$ and $F_2^{-1}F_2^t$ have the same characteristic polynomial. In particular, any cleft $\mathcal{O}_q(SL(2))$-Galois object is homotopically trivial.

The paper is organized as follows. In Section 1 we recall some basic facts on Galois and bi-Galois extensions. Section 2 and 3 are devoted to the isomorphism problem for $\mathcal{B}(E)$-Galois objects, while Section 4 deals with the classification up to homotopy.

3.1 Hopf-Galois extensions and bi-Galois objects

Let k be a commutative ring. All objects in this paper belong to the tensor category of k-modules and the tensor product over k is denoted by $\otimes$. Let H be a Hopf algebra and Z be a left H-comodule algebra with coaction $\delta : Z \to H \otimes Z$. We define the subalgebra $R = Z^{coH}$ of *H-coinvariant elements* of Z by

$$R = \{z \in Z \mid \delta(z) = 1 \otimes z\}.$$

The linear application can : $Z \otimes_R Z \to H \otimes Z$ given by

$$\mathrm{can}(z \otimes z') = \delta(z)(1 \otimes z')$$

for all z, $z' \in Z$, is called the *canonical map* of Z.

If Z is a left H-comodule algebra and R is a subalgebra of Z, then we say that $R \subset Z$ is a *H-Galois extension* if the subalgebra of H-coinvariant elements is R and if the canonical map can : $Z \otimes_R Z \to H \otimes Z$ of Z is an isomorphism. In this case, we also say that Z is an H-Galois extension of R. A Galois extension Z of R is said to be *faithfully flat* if Z is faithfully flat as a right or left R-module. An *H-Galois object* is an H-Galois extension of k which is k-faithfully flat.

A *morphism of Galois extensions* between two H-Galois extensions Z and Z' of R is a morphism of H-comodule algebras which is the identity on R. If Z' is faithfully flat, it is always an isomorphism. We denote $\mathrm{Gal}_R(H/k)$ the set of isomorphism classes of faithfully flat H-Galois extensions of R. If Z is a faithfully flat H-Galois extension of R, its isomorphism class in $\mathrm{Gal}_R(H/k)$ is denoted by $[Z]$. If one of the objects R or k is clear, we will omit it from the notation. In the same way, one can define right H-Galois extensions of R and we denote $\mathrm{Gal}^r_R(H/k)$ the set of isomorphism classes of faithfully flat right H-Galois extensions. If H has a bijective antipode, then there is a bijection between the sets $\mathrm{Gal}_R(H/k)$ and $\mathrm{Gal}^r_R(H/k)$.

Recall that, if H is a Hopf algebra, U is a right H-comodule and V a left H-comodule, the *cotensor product* $U \square_H V$ is the kernel of the map

$$\delta_U \otimes \mathrm{id}_V - \mathrm{id}_U \otimes \delta_V : U \otimes V \to U \otimes H \otimes V,$$

(or the equalizer of the coactions of U and V).

A bilinear map $\sigma : H \times H \to k$ is a *right invertible cocycle* for the Hopf algebra H if σ is convolution-invertible and satisfies the relations

$$\sigma(x_{(1)}y_{(1)}, z)\sigma(x_{(2)}, y_{(2)}) = \sigma(x, y_{(1)}z_{(1)})\sigma(y_{(2)}, z_{(2)})$$

and

$$\sigma(1, x) = \sigma(x, 1) = \varepsilon(x),$$

for all $x, y, z \in H$. Here ε denotes the counit of H and we have used Sweedler's notation $x_{(1)} \otimes x_{(2)}$ for the comultiplication. Note that we use right cocycles whose definition is different from the one of left cocycles (see [Mo93]). We denote σ^{-1} the inverse of σ for the convolution ; σ^{-1} is a left cocycle.

Recall ([Mo93, Chapter 7]) that if H is a Hopf algebra, $\sigma : H \times H \to k$ an invertible cocycle, one can define the Hopf algebra H^σ as the coalgebra H with the twisted product

$$x \cdot_\sigma y = \sigma^{-1}(x_{(1)}, y_{(1)})x_{(2)}y_{(2)}\sigma(x_{(3)}, y_{(3)})$$

and the H-comodule algebra H_σ as the left H-comodule H with the twisted product

$$x \cdot_\sigma y = x_{(1)}y_{(1)}\sigma(x_{(2)}, y_{(2)}),$$

for any $x, y \in H$. The H-comodule algebra H_σ is an H-Galois extension of k and all such Galois extensions are called *cleft Galois extensions*. If H is k-faithfully flat, it is a *cleft Galois object*.

Kassel and Schneider [KaSn05] (see also [Ka04]) have defined an equivalence relation denoted $\sim$ and called *homotopy* on the class of faithfully flat Galois extensions of R. Two Hopf-Galois extensions are homotopy equivalent if there exists a polynomial path between these extensions. More precisely, let $k[t]$ be the algebra of polynomials with coefficients in the ground ring k. For any k-module V, we denote $V[t] = V \otimes k[t]$ and for $i \in \{0, 1\}$ we denote $[i] : V[t] \to V$ the k-linear map sending vt^n to vi^n. These two maps $[i]$ induce two maps

$$[i]_* : \mathrm{Gal}_{R[t]}(H[t], k[t]) \to \mathrm{Gal}_R(H, k),$$

for $i = 0, 1$. We say that two H-Galois extensions Z_0 and $Z_1 \in \mathrm{Gal}_R(H/k)$ are *homotopy equivalent* if there exists $Z \in \mathrm{Gal}_{R[t]}(H[t]/k[t])$ such that $[i]_*(Z) = Z_i$

for $i \in \{0, 1\}$. We denote $\mathcal{H}_R(H)$ the set of homotopy classes of faithfully flat left H-Galois extensions of R.

Kassel and Schneider [KaSn05, Proposition 1.6, Corollary 1.11] have proved that twists of homotopy equivalent Galois objects are still homotopy equivalent. In fact, the twist is a particular case of the cotensor product by a bi-Galois object. We generalize this result now.

Let H and K be Hopf algebras. An *H-K-bi-Galois object* is a H-K-bicomodule algebra Z which is a Galois object with respect to the right and the left coactions. By work of Schauenburg [Sa96] (see also [Sa04]), the set of bi-Galois objects is a groupoid with the multiplication given by the cotensor product. In particular, when $H = K$, the cotensor product over $H = K$ puts a structure of group on the set of isomorphism classes of H-H-bi-Galois objects. If Z is an H-K-bi-Galois object, the cotensor product yields a bijective map $\varphi_Z : \mathrm{Gal}_k(K) \to \mathrm{Gal}_k(H)$ defined by

$$\varphi_Z([A]) = [Z \Box_K A]$$

for any left K-Galois object A (see [Sa96] and [Sa04] for details).

Proposition 47. *For any H-K-bi-Galois object Z, the map φ_Z induces a bijective map $\overline{\varphi_Z} : \mathcal{H}_k(K) \to \mathcal{H}_k(H)$ between the homotopy classes of left K-Galois objects and of left H-Galois objects.*

Démonstration. Let A_0, A_1 be homotopically equivalent H-Galois objects via the $H[t]$-Galois object A. Then $Z[t] = Z \otimes k[t]$ is an $H[t]$-$K[t]$-bi-Galois object and $Z[t]\Box_{K[t]}A$ is an homotopy between $Z\Box_K A_0$ and $Z \Box_K A_1$. There exists a K-H-bi-Galois object Z^{-1} inverse of Z for the groupoid structure of bi-Galois objects and the map $\overline{\varphi_{Z^{-1}}} : \mathcal{H}(H) \to \mathcal{H}(K)$ induced by Z^{-1} is the inverse of the map $\overline{\varphi_Z} : \mathcal{H}(K) \to \mathcal{H}(H)$ induced by Z. □

3.2 The Hopf algebra $\mathcal{B}(E)$ and the comodule algebra $\mathcal{B}(E, F)$

Let k be a commutative ring, $n \geq 1$ an integer and $E = (E_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in GL_n(k)$. Following [DvL90], we define $\mathcal{B}_k(E)$ (or $\mathcal{B}(E)$ when the base ring is clear) as the k-algebra generated by n^2 variables a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$, submitted to the matrix relations

$$E^{-1}a^tEa = I_n = aE^{-1}a^tE,$$

where E^{-1} is the inverse matrix of E, a is the matrix (a_{ij}), I_n the identity matrix of size n and a^t denotes the transpose of the matrix a.

The algebra $\mathcal{B}(E)$ is a Hopf algebra with comultiplication Δ defined by

$$\Delta(a_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes a_{kj},$$

counit ε defined by $\varepsilon(a_{ij}) = \delta_{ij}$, for any $i, j = 1, \ldots, n$, where δ_{ij} is Kronecker's symbol, and antipode S defined by the matrix identity $S(a) = E^{-1}a^tE$.

Note that if $n = 1$, the Hopf algebra $\mathcal{B}(E)$ is isomorphic to $k[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$, whose Galois objects are $k[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]_\sigma$ for $\sigma \in H^2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, k^*)$. In the following, we will only consider the cases where $n \geq 2$. In this case, this Hopf algebra is the quantum group of the bilinear (but non necessarily symmetric) form defined by the matrix E, in the sense that $\mathcal{B}(E)$ is the universal Hopf algebra such that the bilinear form is a comodule map (for details see [DvL90]).

If $q \in k^*$ is an invertible element of the ring k, let $E_q \in GL_2(k)$ be the matrix defined by

$$E_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

The Hopf algebra $\mathcal{B}(E_q)$ is isomorphic to the Hopf algebra $\mathcal{O}_q(SL(2))$ (see the definition of $\mathcal{O}_q(SL(2))$ in [Ka95]).

Let $n, m \geq 1$ be integers and let $E \in GL_n(k)$, $F \in GL_m(k)$ be invertible scalar matrices. Following Bichon [Bi203], we define the algebra $\mathcal{B}(E,F)$ as the k-algebra generated by $n \times m$ variables $z_{ij}, i = 1, \ldots, n; j = 1, \ldots, m$, submitted to the matrix relations

$$F^{-1}z^tEz = I_m, \quad zF^{-1}z^tE = I_n,$$

where z is the matrix of generators z_{ij} and I_m, I_n are the identity matrices of size m, n respectively. We consider the k-algebra morphism $\delta : \mathcal{B}(E,F) \to \mathcal{B}(E) \otimes \mathcal{B}(E,F)$, defined by

$$\delta(z_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes z_{kj}, \tag{3.1}$$

for any $i = 1, \ldots, n$ and $j = 1, \ldots, m$, that endows $\mathcal{B}(E,F)$ with a left $\mathcal{B}(E)$-comodule algebra structure.

In the same way, we have a k-algebra map $\rho : \mathcal{B}(E,F) \to \mathcal{B}(E,F) \otimes \mathcal{B}(F)$ defined by

$$\rho(z_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} z_{ik} \otimes b_{kj},$$

where the b_{ij}'s stands for the canonical generators of $\mathcal{B}(F)$. The algebra morphism ρ endows $\mathcal{B}(E,F)$ with a right comodule algebra structure and $\mathcal{B}(E,F)$ is a $\mathcal{B}(E)$-$B(F)$-bicomodule algebra.

Bichon has proved [Bi203, Propositions 3.3, 3.4] that if k is a field and if $\mathrm{Tr}(E^{-1}E^t) = \mathrm{Tr}(F^{-1}F^t)$, then $\mathcal{B}(E,F)$ is a $\mathcal{B}(E)$-$\mathcal{B}(F)$-bi-Galois object. Note that the matrices of form $F^{-1}F^t$ appear in Riehm's work [Ri74] on the classification of bilinear form. Precisely, for any nondegenerate bilinear map $\beta : V \times V \to k$ given by an invertible matrix F, the matrix $\sigma = F^{-1}F^t$ is called the *asymmetry* of β. Over a commutative ring, Bichon's result extends to the following proposition.

Proposition 48. *The canonical map of $\mathcal{B}(E,F)$ considered as a left (resp right) $\mathcal{B}(E)$-comodule algebra (resp $\mathcal{B}(F)$-comodule algebra) is bijective.*

Moreover, if $\mathcal{B}(E,F)$ is k-faithfully flat, it is a $\mathcal{B}(E)$-$\mathcal{B}(F)$-bi-Galois object.

Démonstration. The proof is the same as for [Bi203, Propositions 3.3, 3.4]. □

Together with Proposition 47, this yields the following corollary.

Corollary 49. *Assume that k is a field. Let E be an invertible matrix and $q \in k^*$ such that $\mathrm{Tr}(E^{-1}E^t) = -q - q^{-1}$, then there is a bijection between $\mathcal{H}_k(\mathcal{B}(E))$ and $\mathcal{H}_k(\mathcal{O}_q(SL(2)))$.*

3.3 Classification up to isomorphism

The $\mathcal{B}(E)$-comodule algebras $\mathcal{B}(E, F)$ are generic in the following sense.

Theorem 50. *Let k be a PID, $n \geq 2$ an integer, $E \in GL_n(k)$ and Z be a $\mathcal{B}(E)$-Galois object. Then there exist an integer $m \geq 2$ and an invertible matrix $F \in GL_m(k)$ such that $\mathrm{Tr}(F^{-1}F^t) = \mathrm{Tr}(E^{-1}E^t)$ and such that Z is isomorphic to $\mathcal{B}(E, F)$ as a $\mathcal{B}(E)$-Galois object.*

Proof. Let Comod-$\mathcal{B}(E)$ be the monoidal category of right $\mathcal{B}(E)$-comodules, with the tensor product $\otimes$ over k, and $\mathrm{Mod}(k)$ be the monoidal category of k-modules. Following Ulbrich [Ul87], [Ul89] and Schauenburg [Sa04], to any $\mathcal{B}(E)$-Galois object Z, we associate the fibre functor ω_Z : Comod-$\mathcal{B}(E) \to \mathrm{Mod}(k)$ defined by

$$\omega_Z(V) = V \square_{\mathcal{B}(E)} Z$$

for any $V \in$ Comod-$\mathcal{B}(E)$. The map $Z \to \omega_Z$ defines a bijective correspondence between the left $\mathcal{B}(E)$-Galois objects (they are by definition faithfully flat) and the exact monoidal functors (= fibre functors) Comod-$B(E) \to \mathrm{Mod}(k)$. Moreover, the fibre functor ω_Z sends comodules that are finitely generated projective k-modules to finitely generated projective k-modules (the functor ω_Z preserves the duals). We denote by $\psi_2 : \omega_Z(V) \otimes \omega_Z(V) \to \omega_Z(V \otimes V)$ and $\psi_0 : \omega_Z(k) \to k$ the monoidal isomorphisms. Note that $\psi_2 : (V \square_{\mathcal{B}(E)} Z) \otimes (V \square_{\mathcal{B}(E)} Z) \to (V \otimes V) \square_{\mathcal{B}(E)} Z$ is induced by the multiplication of Z.

The *fundamental comodule of* $\mathcal{B}(E)$, denoted V_E, is the finite free k-module of rank n with basis $(v_1, \dots, v_n)$ and endowed with the $\mathcal{B}(E)$-comodule structure defined by $\delta(v_i) = \sum_{k=1}^n v_k \otimes a_{ki}$ for $1 \leq i \leq n$. The linear map $\beta_E : V_E \otimes V_E \to k$ defined by $\beta_E(v_i, v_j) = E_{ij}$ for $1 \leq i, j \leq n$ is a $\mathcal{B}(E)$-comodule morphism and induces a map

$$\overline{\beta_E} : W \otimes W \xrightarrow{\psi_2} \omega_Z(V_E \otimes V_E) \xrightarrow{\omega_Z(\beta_E)} \omega_Z(k) \xrightarrow{\psi_0} k,$$

where $W = \omega_Z(V_E)$. Since V_E is free of finite rank, W is a finitely generated projective k-module. The base ring k being principal, it implies that W is a free k-module of finite rank, say m.

Set $F_{ij} = \overline{\beta_E}(w_i \otimes w_j)$ for all $1 \leq i, j \leq m$. Writing the elements $(w_j)_{1 \leq j \leq m}$ as elements of $V_E \otimes Z$ and expanding them in the basis $(v_1, \dots, v_n)$ of V_E, we see that there exist $(t_{ij})_{i=1,\dots,n; j=1,\dots,m} \in Z$ such that $w_j = \sum_{i=1}^n v_i \otimes t_{ij}$ for any

$j = 1, \dots, m$. Since $(w_j)_{1\leq i\leq m}$ belong to the cotensor product $V_E \square_{\mathcal{B}(E_q)} Z$, the elements $(t_{ij})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$ satisfy the relations

$$\delta(t_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes t_{kj} \tag{3.2}$$

for all $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq j \leq m$.

Since the monoidal isomorphism ψ_2 is given by the multiplication of Z, the image of the base $(w_j)_{1\leq j\leq m}$ by the map $\overline{\beta_E}$ is equal to

$$\begin{array}{rcl} F_{ij} & = & \overline{\beta_E}(w_i \otimes w_j) \\ & = & \psi_0 \circ (\beta_E \otimes \mathrm{id}) \circ \psi_2((\sum_{k=1}^{n} v_k \otimes t_{ki}) \otimes (\sum_{l=1}^{n} v_l \otimes t_{lj})) \\ & = & \psi_0 \circ (\beta_E \otimes \mathrm{id})(\sum_{k,l=1}^{n} (v_k \otimes v_l) \otimes t_{ki} t_{lj}) \\ & = & \psi_0(\sum_{k,l=1}^{n} E_{kl} \otimes t_{ki} t_{lj}) \\ & = & \sum_{k,l=1}^{n} E_{kl} t_{ki} t_{lj} \end{array}$$

for any $1 \leq i, j \leq m$. Putting $T = (t_{ij})_{i=1,\dots,n;j=1,\dots,m}$ and $F = (F_{ij})_{1\leq i,j\leq m}$, we obtain

$$F = T^t E T. \tag{3.3}$$

Let us now consider the k-linear map $\nu : k \to V_E \otimes V_E$ defined by

$$\nu(1) = \sum_{i,j=1,\dots,n} E_{ij}^{-1} v_i \otimes v_j,$$

where E_{ij}^{-1} denotes the (i, j)-entry of the inverse matrix E^{-1}. Since this map is a $\mathcal{B}(E)$-comodule morphism, it induces a linear map

$$\bar{\nu} : k \xrightarrow{\psi_0^{-1}} \omega_Z(k) \xrightarrow{\omega_Z(\nu)} \omega_Z(V_E \otimes V_E) \xrightarrow{\psi_2^{-1}} \omega_Z(V_E) \otimes \omega_Z(V_E).$$

Let us compute $\bar{\nu}(1)$. We have

$$\begin{array}{rcl} \bar{\nu}(1) & = & \psi_2^{-1} \circ (\nu \otimes \mathrm{id}) \circ \psi_0^{-1}(1) \\ & = & \psi_2^{-1} \circ (\nu \otimes \mathrm{id})(1 \otimes 1) \\ & = & \psi_2^{-1}(\sum_{i,j=1}^{n} E_{ij}^{-1}(v_i \otimes v_j) \otimes 1 \\ & = & \sum_{k,l=1}^{n} E_{kl}^{-1}(v_k \otimes 1) \otimes (v_l \otimes 1). \end{array}$$

Expanding $\bar{\nu}(1)$ in the basis $(w_j)_{1\leq j\leq m}$ of $\omega_Z(V_E)$, we obtain a matrix $(G_{ij})_{1\leq i,j\leq m} \in M_m(k)$ such that

$$\bar{\nu}(1) = \sum_{i,j=1}^{m} G_{ij} w_i \otimes w_j = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{n} G_{ij}(v_k \otimes t_{ki}) \otimes (v_l \otimes t_{lj})$$

for all $1 \leq i, j \leq m$. Then we have

$$\sum_{k,l=1}^{n} E_{kl}^{-1}(v_k \otimes 1) \otimes (v_l \otimes 1) = \sum_{i,j=1}^{m} \sum_{k,l=1}^{n} G_{ij}(v_k \otimes t_{k,i}) \otimes (v_l \otimes t_{lj}),$$

and then

$$E_{kl}^{-1} = \sum_{i,j=1}^{m} G_{ij} t_{ki} t_{lj},$$

which we can rewrite as

$$E^{-1} = TGT^t. \tag{3.4}$$

We now prove $G = F^{-1}$. We have

$$(\beta_E \otimes \mathrm{id}_{V_E}) \circ (\mathrm{id}_{V_E} \otimes \nu) = \mathrm{id}_{V_E}$$

and

$$(\mathrm{id}_{V_E} \otimes \beta_E) \circ (\nu \otimes \mathrm{id}_{V_E}) = \mathrm{id}_{V_E}$$

for β_E and ν. Since ω_Z is monoidal, we obtain

$$(\overline{\beta_E} \otimes \mathrm{id}_W) \circ (\mathrm{id}_W \otimes \bar{\nu}) = \mathrm{id}_W$$

and

$$(\mathrm{id}_W \otimes \overline{\beta_E}) \circ (\bar{\nu} \otimes \mathrm{id}_W) = \mathrm{id}_W$$

for $\overline{\beta_E}$ and $\bar{\nu}$. That is for any basis vector w_i we have

$$\sum_{jk}^{m} F_{ij} G_{jk} w_k = w_i \quad \text{and} \quad \sum_{jk}^{m} G_{jk} F_{ki} w_j = w_i.$$

This implies that the matrix G is the inverse of F. Then Relations (3.3) and (3.4) yield the relations

$$F^{-1} T^t E T = \mathrm{I}_m \quad \text{and} \quad T F^{-1} T^t E = \mathrm{I}_n. \tag{3.5}$$

In the same way, we obtain

$$\beta_E \circ \nu(1) = \mathrm{Tr}(E^{-1} E^t).$$

Since ω_Z is monoidal,

$$\overline{\beta_E} \circ \bar{\nu}(1) = \mathrm{Tr}(F^{-1} F^t)$$

has to be equal to $\mathrm{Tr}(E^{-1}E^t)$. When $\bar{k}$ is a field, Bichon has proved in [Bi203, Section 4] that, under this condition, the algebra $\mathcal{B}_{\bar{k}}(E,F)$ is nonzero. Since our base ring k is a PID, it embeds into a field $\bar{k}$. It is clear that for any invertible matrices E, F, the algebras $\mathcal{B}_k(E,F) \otimes_k \bar{k}$ and $\mathcal{B}_{\bar{k}}(E,F)$ are isomorphic. Therefore, $\mathcal{B}_k(E,F)$ is nonzero provided $\mathrm{Tr}(E^{-1}E^t) = \mathrm{Tr}(F^{-1}F^t)$.

In view of (3.5) the map

$$\varphi(z_{ij}) = t_{ij},$$

defines an algebra morphism $\varphi : \mathcal{B}(E,F) \to Z$. We claim that φ is an isomorphism of $\mathcal{B}(E)$-Galois objects. First to see that φ is a $\mathcal{B}(E)$-comodule morphism, it is enough to check it on the generators (z_{ij}). The definition of the coaction (3.1) and relation (3.2) give

$$(\mathrm{Id} \otimes \varphi) \circ \delta_{\mathcal{B}(E,F)}(z_{ij}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes t_{kj} = \delta_Z \circ \varphi(z_{ij})$$

for any $1 \leq i \leq n$ and $1 \leq j \leq m$.

The morphism φ is a morphism of $\mathcal{B}(E)$-comodule algebras, is the identity on the coinvariants elements k of Z, and Proposition 48 ensures that the comodule algebra $\mathcal{B}(E,F)$ has a bijective canonical map. Moreover, Z is a faithfully flat Galois extension of k. Then by [Sn90, Remark 3.11] the morphism φ is an isomorphism, and Z and $\mathcal{B}(E,F)$ are isomorphic $\mathcal{B}(E)$-Galois objects.

It remains to prove that the size m of $F \geq 2$. First assume that $m = 1$. Then $W = \omega_Z(V_E) \cong k$. By [Sa96], [Sa04], there is an Hopf algebra K such that Z is a $\mathcal{B}(E)$-K-bi-Galois object. Since there exists an inverse Z^{-1} of Z for the groupoid structure of bi-Galois objects, we have

$$V_E \cong V_E \square_{\mathcal{B}(E)} Z \square_K Z^{-1} \cong k \square_K Z^{-1}.$$

Since Z^{-1} is a Galois object, the image $k \square_K Z^{-1}$ of the trivial comodule of dimension one is the algebra $k \cong (Z^{-1})^{coH}$ of coinvariants. Then the size m of F is equal to one only if the size n of E is one. The same argument proves that m cannot be zero. $\square$

We now turn to the classification of the Galois objects $\mathcal{B}(E,F)$. The following lemma, implicit in [Bi203], will be useful.

Lemma 51. *Let k be a PID, let $n, m \geq 2$ be integers, and $E \in GL_n(k)$ and $F \in GL_m(k)$ be invertible matrices. Assume that $\mathcal{B}(E,F)$ is a $\mathcal{B}(E)$-$\mathcal{B}(F)$-bi-Galois object and let φ : Comod-$\mathcal{B}(E) \to$ Comod-$\mathcal{B}(F)$ be the associated monoidal equivalence. Let V_E and V_F be the respective fundamental comodules of $\mathcal{B}(E)$ and $\mathcal{B}(F)$. Then $\varphi(V_E) \cong V_F$.*

Proof. Let $w_1, \ldots, w_m$ be the canonical basis of V_F. Then we have a $\mathcal{B}(F)$-colinear map $\theta_F : V_F \to \varphi(V_E)$ defined by

$$\theta_F(w_j) = \sum_{i=1}^{n} v_i \otimes z_{ij}.$$

Similarly, we have a $\mathcal{B}(E)$-colinear morphism $\theta_E : V_E \to \varphi^{-1}(V_F)$ defined by

$$\theta_E(v_i) = \sum_{j=1}^{m} w_j \otimes t_{ji},$$

where the t_{ji}'s are the generators of $\mathcal{B}(F,E)$. It is easy to see that $\varphi(\theta_E) \circ \theta_F$ is the canonical isomorphism $V_F \to \varphi(\varphi^{-1}(V_F))$. We deduce that θ_F and θ_E are monomorphisms and then that θ_F is an isomorphism. $\square$

As an immediate consequence of Lemma 51, we have the following necessary condition for $\mathcal{B}(E)$-Galois objects to be cleft.

Corollary 52. *Let k be a PID and $n, m \geq 2$ be integers, $E \in GL_n(k)$, $F \in GL_m(k)$ and $\mathcal{B}(E,F)$ be a cleft $\mathcal{B}(E)$-Galois object. Then $m = n$.*

Proof. If $\mathcal{B}(E,F)$ is a cleft Galois object, the associated fibre functor is isomorphic as a functor to the forgetful functor and in particular preserves the rank of finite free modules. $\square$

Let us now state our classification result for the extensions $\mathcal{B}(E,F)$.

Theorem 53. *Let k be a PID, n, m_1, m_2 be integers ≥ 2 and $E \in GL_n(k)$, $F_1 \in GL_{m_1}(k), F_2 \in GL_{m_2}(k)$ be invertible matrices such that the algebras $\mathcal{B}(E,F_1)$ and $\mathcal{B}(E,F_2)$ are k-faithfully flat. Then the $\mathcal{B}(E)$-Galois objects $\mathcal{B}(E,F_1)$ and $\mathcal{B}(E,F_2)$ are isomorphic if and only if $m_1 = m_2$ and there exists an invertible matrix $P \in GL_{m_1}(k)$ such that $F_1 = PF_2P^t$.*

Note that, by [Ri74] the bilinear forms associated to F_1 and F_2 are equivalent if and only if the asymmetries of F_1 and F_2 are similar.

Proof. As in the proof of [Bi203, Proposition 2.3], one shows that if $P \in GL_m(k)$, the $B(E)$-comodule algebras $\mathcal{B}(E,F)$ and $\mathcal{B}(E,PFP^t)$ are isomorphic.

Conversely assume that $\mathcal{B}(E,F_1)$ and $\mathcal{B}(E,F_2)$ are k-faithfully flat : then Proposition 48 ensures that $\mathcal{B}(E,F_1)$ and $\mathcal{B}(E,F_2)$ are Galois objects. Let V_E be the fundamental $\mathcal{B}(E)$-comodule and let $\beta_E : V_E \otimes V_E \to k$ be the linear map defined by E. Let $\omega_1 = -\Box_{\mathcal{B}(E)}\mathcal{B}(E,F_1)$ and $\omega_2 = -\Box_{\mathcal{B}(E)}\mathcal{B}(E,F_2)$ be the fibre functors associated to $\mathcal{B}(E,F_1)$ and $\mathcal{B}(E,F_2)$.

By Lemma 51, the vector space $\omega_1(V_E)$ has a basis $(w_1^1, \dots, w_{m_1}^1)$ and $\omega_2(V_E)$ has a basis $(w_1^2, \dots, w_{m_2}^2)$. The comodule algebra isomorphism $\varphi : \mathcal{B}(E,F_1) \to \mathcal{B}(E,F_2)$ induces an isomorphism $\mathrm{id} \otimes \varphi : \omega_1(V_E) \to \omega_2(V_E)$. Then in particular the rank of these two free k-modules is the same, that is $m_1 = m_2 = m$. Let $P \in GL_m(k)$ be the matrix of $\mathrm{id} \otimes \varphi$ in the bases $(w_1^1, \dots, w_{m_1}^1)$ and $(w_1^2, \dots, w_{m_2}^2)$. The matrices of the bilinear maps $\omega_1(\beta_E)$ and $\omega_2(\beta_E)$, in the bases $(w_1^1, \dots, w_m^1)$ and $(w_1^2, \dots, w_m^2)$, are F_1 and F_2 respectively. Moreover, the isomorphism φ gives the relation

$$\omega_1(\beta_E) = \omega_2(\beta_E) \circ ((\mathrm{id} \otimes \varphi) \otimes (\mathrm{id} \otimes \varphi)).$$

That is for any $i, j = 1, \dots, m$

$$\begin{array}{rcl} \omega_1(\beta_E)(w_i^1 \otimes w_j^1) & = & \omega_2(\beta_E)\left((\sum_{k=1}^m P_{ik} w_k^2) \otimes (\sum_{l=1}^m P_{jl} w_j^2)\right) \\ (F_1)_{ij} & = & \sum_{k,l=1}^m P_{ik} P_{jl} (F_2)_{kl}, \end{array}$$

or in matrix form $F_1 = PF_2P^t$. $\square$

Remark 27. As an application of Theorem 53, let us consider the case where the matrix F is symmetric. Let k be a PID, let $n, m, p \geq 2$ be integers, and $E \in GL_n(k)$, $F \in GL_m(k)$ and $G \in GL_p(k)$ be invertible matrices. Assume that F is symmetric and $\mathcal{B}(E,F)$ is a Galois object. Then the Galois objects $\mathcal{B}(E,F)$ and $\mathcal{B}(E,G)$ are isomorphic if and only if G is symmetric of size $p = m$.

We now consider the case when k is a field. For any integer $n \geq 2$, and any invertible matrix $E \in GL_n(k)$ we define

$$X_0(E) = \{F \in GL_m(k), m \geq 2, \mathrm{Tr}(F^{-1}F^t) = \mathrm{Tr}(E^{-1}E^t)\}.$$

Consider the equivalence relation $\sim$ defined by $F_1 \sim F_2$ if and only if there exists $P \in GL(k)$ such that $F_1 = PF_2P^t$ and put $X(E) = X_0(E)/\sim$.

Corollary 54. *Assume that k is a field. Then for any $n \geq 2$ and $E \in GL_n(k)$, there is a bijection $\psi : X(E) \to \mathrm{Gal}(\mathcal{B}(E))$ sending F onto $[\mathcal{B}(E,F)]$.*

Proof. Propositions 3.2, 3.3 and 3.4 in [Bi203] ensure that we have indeed this map ψ. Moreover, ψ is surjective by Theorem 50 and injective by Theorem 53. □

We also have the following result.

Corollary 55. *Assume that k is an algebraically closed field of characteristic zero. For any $n \geq 2$ and $E \in GL_n(k)$, the group of $\mathcal{B}(E)$-$\mathcal{B}(E)$-bi-Galois objects is trivial.*

Proof. Let Z be a $\mathcal{B}(E)$-$\mathcal{B}(E)$-bi-Galois object. By Theorem 50, there exist $m \geq 2$ and $F \in GL_m(k)$ such that Z is isomorphic to $\mathcal{B}(E,F)$ as a $\mathcal{B}(E)$-Galois object. Bichon [Bi203, Propositions 3.3, 3.4] has proved that $\mathcal{B}(E,F)$ is a $\mathcal{B}(E)$-$\mathcal{B}(F)$-bi-Galois object. Then by [Sa96, Theorem 3.5] the Hopf algebras $\mathcal{B}(E)$ and $\mathcal{B}(F)$ are isomorphic that is, by [Bi203, Theorem 5.3], there exists $P \in GL(k)$ such that $F = P^t EP$. The matrix P enables us to construct an isomorphism of left $\mathcal{B}(E)$-Galois objects $Z \cong \mathcal{B}(E,F) \cong \mathcal{B}(E)$. Now since Z is a $\mathcal{B}(E)$-bi-Galois object, we know from [Sa96, Theorem 3.5] that there exists $f \in \mathrm{Aut}(\mathcal{B}(E))$ such that $Z \cong \mathcal{B}(E)^f$ as $\mathcal{B}(E)$-bi-Galois objects. Such a bi-Galois object is trivial if and only if f is coinner. Since by [Bi203, Theorem 5.3] any Hopf automorphism of $\mathcal{B}(E)$ is coinner, we are done. □

The lazy cohomology group of a Hopf algebra was introduced in [BiCa06], where it was realized as a subgroup of the group of bi-Galois objects. Therefore, we have the following.

Corollary 56. *Assume that k is an algebraically closed field of characteristic zero. The lazy cohomology group of $\mathcal{B}(E)$ is trivial for any $E \in GL_n(k)$.*

3.4 Galois objects up to homotopy

In this section we study the homotopy theory of $\mathcal{B}(E)$-Galois objects. We assume that k is an algebraically closed field. For technical reasons we only consider $\mathcal{O}_q(SL(2))$-Galois objects (recall that $\mathcal{O}_q(SL(2)) = \mathcal{B}(E_q)$). Since for any $E \in GL_n(k)$ there exists a $\mathcal{B}(E)$-$\mathcal{B}(E_q)$-bi-Galois object, Proposition 47 ensures that $\mathcal{H}(\mathcal{B}(E)) \cong \mathcal{H}(\mathcal{B}(E_q))$ and then there is no loss of generality.

We begin, using Lemma 51, by giving a necessary condition for two $\mathcal{B}(E_q)$-Galois extensions to be homotopically equivalent.

Proposition 57. *Let $m_0, m_1 \geq 2$ be integers, let $F_0 \in GL_{m_0}(k)$, $F_1 \in GL_{m_1}(k)$ and assume that $\mathcal{B}(E_q, F_0)$ and $\mathcal{B}(E_q, F_1)$ are $\mathcal{B}(E_q)$-Galois objects. If $\mathcal{B}(E_q, F_0)$ and $\mathcal{B}(E_q, F_1)$ are homotopically equivalent, then the matrices F_0 and F_1 have the same size $m_0 = m_1$.*

Proof. Let us consider two $\mathcal{B}(E_q)$-Galois objects $\mathcal{B}(E_q, F_0)$ and $\mathcal{B}(E_q, F_1)$ with homotopy $\mathcal{B}_{k[t]}(E_q, F_t)$ (by Theorem 50, any $\mathcal{B}_{k[t]}(E_q)$-Galois object is of this form for some $F_t \in GL_m(k[t])$). Then $V_E \square_{\mathcal{B}_{k[t]}(E_q)} \mathcal{B}_{k[t]}(E_q, F_t)$ is a finite free $k[t]$-module of rank equal to the size of the matrix F_t, which does not depend on t. The evaluation at $t = 0, 1$ gives $m_0 = m_1$. □

Let us state a sufficient condition for two $\mathcal{B}(E)$-Galois objects to be homotopically equivalent.

Theorem 58. *Let k be an algebraically closed field, $m_0, m_1 \geq 2$ be integers and F_0, F_1 be invertible matrices of size m_0, m_1 such that $\mathrm{Tr}(F_i^{-1}F_i^t) = -q-q^{-1}$ for $i = 0, 1$.*

If $m_0 = m_1$ and if $F_0^{-1}F_0^t$ and $F_1^{-1}F_1^t$ have the same characteristic polynomial, then the two $\mathcal{O}_q(SL(2))$-Galois objects $\mathcal{B}(E_q, F_0)$ and $\mathcal{B}(E_q, F_1)$ are homotopically equivalent.

The rest of the section is devoted to the proof of the theorem. To this end, we construct a homotopy between the Galois objects, that is an $\mathcal{O}_q(SL(2))[t]$-Galois object over the polynomial ring $k[t]$. First, let us begin with some terminology. We will say that a matrix $F \in GL_m(k)$ (here k is an arbitrary commutative ring) is *manageable* if $F^{-1}_{mm} = 0$ and if the rightmost nonzero coefficient F^{-1}_{mv} in the bottom row is an invertible element of k. In the case of a manageable matrix, the proof of [Bi203, Proposition 3.4] still works and we obtain :

Proposition 59. *Assume that k is a commutative ring and let $F \in GL_m(k)$ be a manageable matrix such that $\mathrm{Tr}(F^{-1}F^t) = -q - q^{-1}$. Then $\mathcal{B}(E_q, F)$ is a free k-module.*

The problem for constructing an homotopy is the following one.

(P) *Let $F_0, F_1 \in GL_m(k)$ be manageable matrices such that $\mathrm{Tr}(F_0^{-1}F_0^t) = \mathrm{Tr}(F_1^{-1}F_1^t)$. Find a matrix $F(t) \in GL_m(k[t])$ such that*

1. $F(0) = F_0,\ F(1) = F_1$.
2. $\mathrm{Tr}(F(t)^{-1}F(t)^t) = \mathrm{Tr}(F_0^{-1}F_0^t) = \mathrm{Tr}(F_1^{-1}F_1^t)$.
3. *$F(t)$ is manageable.*

Now assume that F_0 and F_1 have diagonal block decompositions with the same size :

$$F_0 = \left(\begin{array}{c|c} (F_0)_{11} & 0 \\ \hline 0 & (F_0)_{22} \end{array}\right), \quad F_1 = \left(\begin{array}{c|c} (F_1)_{11} & 0 \\ \hline 0 & (F_1)_{22} \end{array}\right),$$

that

$$\mathrm{Tr}((F_0)_{11}^{-1}(F_0)_{11}^t) = \mathrm{Tr}((F_1)_{11}^{-1}(F_1)_{11}^t)$$

and

$$\mathrm{Tr}((F_0)_{22}^{-1}(F_0)_{22}^t) = \mathrm{Tr}((F_1)_{22}^{-1}(F_1)_{22}^t)$$

and finally that each block is manageable. Then clearly Problem (P) reduces to the same problem for each block. This simple remark, combined with Riehm's work [Ri74] on the structure of bilinear forms, will reduce our problem to the case of some "elementary" matrices.

We will use freely the following results of [Ri74]. For any nondegenerate bilinear map $\beta : V \times V \to k$ given by an invertible matrix F, and for any eigenvalue $p \neq \pm 1$ of its asymmetry σ, p^{-1} is also an eigenvalue of σ and the two characteristic spaces C_p and $C_{p^{-1}}$ associated to p and p^{-1} are isotropic (for the bilinear form β). The vector space V is the orthogonal sum of the subspaces C_1, C_{-1} and $C_p \oplus C_{p^{-1}}$, where p runs over all eigenvalues of σ different from ± 1. Then there exists a basis of V such that the matrix of σ is a block matrix made of Jordan blocks of odd dimension with eigenvalue 1, Jordan blocks of even dimension with eigenvalue -1 and pairs of blocks of eigenvalues p, p^{-1} and of the same dimension.

Assume that the asymmetries σ_0 and σ_1 associated to F_0 and F_1 have the same characteristic polynomial and that σ_1 is diagonal. Then by [Ri74], Problem (P) reduces to three cases.

A. σ_0 is a Jordan block of even dimension d with eigenvalue -1 (and $\sigma_1 = -\mathrm{I}_d$),

B. σ_0 is a Jordan block of odd dimension d with eigenvalue 1 (and $\sigma_1 = \mathrm{I}_d$),

C. σ_0 is a diagonal block matrix made of two Jordan blocks of eigenvalues p, p^{-1} and of the same size d (and σ_1 is diagonal with d diagonal coefficients equal to p and d equal to p^{-1}).

Let us now look at the possible forms of a matrix F such that $\sigma_0 = F^{-1}F^t$ for each of these three cases.

Lemma 60. *A) If σ_0 is a Jordan block of even dimension with eigenvalue equal to -1 and if there exists an invertible matrix F such that $F^{-1}F^t = \sigma_0$, then F has the lower anti-triangular form*

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & F_{1n} \\ \vdots & & \iddots & -F_{1n} & * \\ \vdots & \iddots & \iddots & * & * \\ 0 & F_{1n} & * & * & * \\ -F_{1n} & * & * & * & * \end{pmatrix}. \tag{3.6}$$

B) If σ_0 is a Jordan block of odd dimension with eigenvalue equal to 1 and there exists an invertible matrix F such that $F^{-1}F^t = \sigma_0$, then F has the lower anti-triangular form

$$F = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & F_{1n} \\ \vdots & & \iddots & -F_{1n} & * \\ \vdots & \iddots & \iddots & * & * \\ 0 & -F_{1n} & * & * & * \\ F_{1n} & * & * & * & * \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

C) If σ_0 is made of two Jordan blocks of eigenvalues p and p^{-1} and of size n, then the invertible matrix F defined by

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ J_p & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

where I_n is the identity of size n, J_p is a Jordan block of size n and eigenvalue p and 0 is the zero matrix, has an asymmetry similar to σ_0.

Proof. We say that the elements $a_{i,n+1-i}$, for $1 \le i \le n$ of a matrix $A \in \mathrm{M}_n(k)$ lies on the anti-diagonal and we use obvious notion of lower and upper anti-triangular matrices.

A) Assume that F is a matrix such that $F^{-1}F^t = \sigma_0$, that is $F^t = F\sigma_0$ or

$$\left\{ \begin{array}{lcll} F_{i1} & = & -F_{1i} & \forall i = 1, \ldots, n \\ F_{ji} & = & F_{i,j-1} - F_{ij} & \forall i = 1, \ldots, n; j = 2, \ldots, n \end{array} \right. \tag{3.9}$$

Let us consider the first row. The equation $F_{11} = -F_{11}$ implies $F_{11} = 0$. Then, for any $k = 2, \ldots, n$, we have from (3.9) the equations $F_{1k} = -F_{k1}$ and $F_{k1} = F_{1,k-1} - F_{1k}$ and then $F_{1,k-1} = 0$. Then the first row and the first column are equal to zero except the last terms F_{1n} and F_{n1}.

For the second row and column, we have from the previous computation $F_{12} = F_{21} = 0$ then $F_{22} = F_{21} - F_{22} = 0$. For any $k = 3, \ldots, n-1$ we have

$$\left\{ \begin{array}{lcl} F_{2k} & = & F_{k1} - F_{k2} \\ F_{k2} & = & F_{2,k-1} - F_{2k}. \end{array} \right.$$

Then $F_{2,k-1} = 0$ and, since $F_{2,k-1} = F_{k-1,1} - F_{k-1,2}$, we also have $F_{k-1,2} = 0$. Then for all $k \leq n-2$ the entries $F_{2,k}$ and $F_{k,2}$ are equal to zero. In the same way, any coefficient lying above the anti-diagonal is equal to zero.

The coefficient $F_{i,n+1-i}$ on the anti-diagonal satisfies the relation

$$F_{i,n+1-i} = F_{n+1-i,i-1} - F_{n+1-i,i} = -F_{n+1-i,i}.$$

We also have

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{i,n+2-i} = F_{n+2-i,i-1} - F_{n+2-i,i} \\ F_{n+2-i,i} = F_{i,n+1-i} - F_{i,n+2-i}, \end{array} \right. \tag{3.10}$$

then

$$F_{n+2-i,i} = F_{i,n+1-i} - F_{n+2-i,i-1} + F_{n+2-i,i} \tag{3.11}$$

that is

$$F_{i,n+1-i} = F_{n+1-(i-1),(i-1)}. \tag{3.12}$$

Then the determinant of F is $(F_{1n})^n$ and the matrix has the wanted form.

B) Let us now consider the case where σ_0 is a Jordan block of odd dimension and eigenvalue 1 and F is a matrix such that $F^{-1}F^t = \sigma_0$, that is $F^t = F\sigma_0$ or

$$\left\{ \begin{array}{lcll} F_{1i} & = & F_{i1} & \forall i = 1, \ldots, n \\ F_{ji} & = & F_{i,j-1} + F_{ij} & \forall i = 1, \ldots, n; j = 2, \ldots, n \end{array} \right. \tag{3.13}$$

Let us consider the first line. For any $k = 2, \ldots, n$ we have from (3.13) the equations $F_{1k} = F_{k1}$ and $F_{k1} = F_{1,k-1} + F_{1k}$ and then $F_{1,k-1} = 0$, since $F_{1,k-1} = F_{k-1,1}$, the first line and the first column are equal to zero except the last terms $F_{1n} = F_{n1}$. In the same way as for the previous case, we see that all the coefficients lying above the anti-diagonal must be zero. Moreover, in the same way as for (3.10) - (3.12), the anti-diagonal coefficient in position $(i, n-i+1)$ is $(-1)^{i+1}F_{1n}$; the determinant is $(F_{1n})^n$ and F has the wanted form.

C) Assume that σ_0 is made of two Jordan blocks of eigenvalues p and p^{-1} and of size n. We define F by the relation (3.8). Its asymmetry is the matrix

$$\begin{pmatrix} J_p^{-1} & 0 \\ 0 & J_p^t \end{pmatrix}$$

which is similar to σ_0. $\square$

Proof of Theorem 58. Let us construct the matrix $F(t)$ solution of the problem (P).

Cases A, B : Let us consider a Jordan block σ_0 with eigenvalue ± 1 and size more than two. By the previous lemma 60, the matrix F such that $F^{-1}F^t = \sigma_0$ is an anti-triangular matrix of form (3.6) or (3.7). Consider the matrix $F(t) \in GL_n(k[t])$ defined by

$$F(t)_{i,n+1-i} = F_{i,n+1-i}, \quad F(t)_{ij} = tF_{ij},$$

for any $1 \leq i, j \leq n$ such that $j \neq n+1-i$ (that is $F(t)$ is equal to F on the anti-diagonal and to tF on the other coefficients).

To compute $\mathrm{Tr}(F(t)^{-1}F(t)^t)$ we have to know the diagonal coefficients of the asymmetry of $F(t)$, which are equal to products of the anti-diagonal coefficients of $F(t)^{-1}$ and $F(t)^t$. Remark that if a matrix $F(t)$ is lower anti-triangular, its inverse $F(t)^{-1}$ is upper anti-triangular, and their anti-diagonal coefficients are related by

$$1 = (F(t)^{-1})_{i,n+1-i}(F(t))_{n+1-i,i},$$

for any $i = 1, \ldots, n$. Since the anti-diagonal coefficients of $F(t)$ do not depend on t, the ones of $F(t)^{-1}$ do not depend on t either and we have

$$\mathrm{Tr}(F(t)^{-1}F(t)^t) = \mathrm{Tr}(F_0^{-1}F_0^t) = \mathrm{Tr}(F_1^{-1}F_1^t).$$

From the definition of $F(t)$, we have $F(0) = F_0$ and $F(1)$ is a block matrix with anti-diagonal blocks. Then the asymmetry of $F(1)$ is diagonal and then equal to σ_1.

Since $F(t)^{-1}$ is upper anti-triangular and invertible, $F(t)$ is manageable. Finally, $F(t)$ is a solution of (P) in the cases A,B.

Case C : Let us now consider the case of two Jordan blocks of size n and eigenvalues p and p^{-1} and suppose that F has the form (3.8).

Consider the matrix $F(t) \in GL_{2n}(k[t])$ defined by

$$\begin{pmatrix} 0 & I_n \\ J_p(t) & 0 \end{pmatrix},$$

where $J_p(t)$ is the matrix with diagonal coefficients equal to p and upper diagonal coefficients $(i, i+1)$ equal to t. The inverse $F(t)^{-1}$ is

$$\begin{pmatrix} 0 & (J_p(t))^{-1} \\ I_n & 0 \end{pmatrix}$$

and then $F(t)$ is manageable and the trace of its asymmetry is constant. Finally $F(t)$ is a solution of (P) in the case C. □

Corollary 61. *All cleft $\mathcal{O}_q(SL(2))$-Galois objects are homotopically trivial.*

Proof. Let Z be a cleft Galois object of $\mathcal{O}_q(SL(2))$. Then by Theorem 50, the Galois object Z is isomorphic to $\mathcal{B}(E_q, F)$ and by Corollary 52 the matrix F is a 2×2 matrix with trace equal to $-q - q^{-1}$.

If $q \neq 1$, there exists $P \in GL(k)$ such that $F = PE_qP^t$. Then the Galois object $\mathcal{B}(E_q, F)$ is isomorphic to the trivial object $\mathcal{B}(E_q)$.

If $q = 1$, the two possible asymmetries are, up to similarity, a diagonal matrix σ_1 with eigenvalue -1 and multiplicity 2 associated to a matrix F_1 or a Jordan block matrix σ_2 of size 2 and eigenvalue -1 associated to a matrix F_2. The two associated Galois objects $\mathcal{B}(E_q, F_1)$ and $\mathcal{B}(E_q, F_2)$ are nonisomorphic as the asymmetries are nonsimilar, but they are homotopically equivalent by Theorem 58 as the asymmetries have the same characteristic polynomial. $\square$

Chapitre 4

Objets galoisiens d'une algèbre de Hopf de dimension ≤ 15

Dans ce chapitre, nous étudions systématiquement les objets galoisiens des algèbres de Hopf de dimension ≤ 15 sur un corps k algébriquement clos de caractéristique nulle. Les résultats sont pour la plupart connus mais éparpillés dans la littérature. L'étude des objets galoisiens de l'algèbre de Hopf de dimension 8 qui n'est ni semisimple ni pointée est nouvelle ; elle fera l'objet du chapitre 5.

4.1 Objets galoisiens d'une algèbre de Hopf de dimension p

Soit H une algèbre de Hopf dont la dimension sur k est un nombre p premier. Une telle algèbre est isomorphe par [Zh94] à une algèbre de groupe et donc à l'algèbre $k[C_p]$ du groupe cyclique d'ordre p.

À isomorphisme près, les objets galoisiens de l'algèbre de Hopf $k[G]$ d'un groupe fini G sur un corps k sont exactement les algèbres ${}_\sigma k[G]$, où $\sigma \in H^2(G)$ est un cocycle de groupe. À homotopie près, la classification des objets galoisiens de $k[G]$ est une conséquence de [KaSn05]. Si k est un corps algébriquement clos et G un groupe, alors

$$\mathrm{Gal}_k(k[G]) = \mathcal{H}_k(k[G]) = H^2(G, k^*), \tag{4.1}$$

où k^* désigne les éléments inversibles de k. Il suffit donc de calculer le second groupe de cohomologie de G agissant trivialement sur k^*. Pour tout groupe cyclique C_n, il est bien connu ([Br82] par exemple) que $H^2(C_n, k^*) \cong k^*/k^{*n}$ qui est lui-même trivial puisque k est algébriquement clos. Les objets galoisiens de l'algèbre d'un groupe cyclique sont donc triviaux à isomorphisme et homotopie près. Notons aussi que $k[C_n]$ est cocommutatif et donc les cocycles de $k[C_n]$ sont paresseux.

Par [Sa96, Lemme 4.7], le groupe des objets bigaloisiens d'une algèbre de groupe $k[G]$ est

$$\mathrm{BiGal}(k[G]) \cong \mathrm{Aut}(G) \ltimes H^2(G, k^*). \tag{4.2}$$

Si G est un groupe cyclique, un automorphisme $\varphi \in \mathrm{Aut}(C_n)$ est la multiplication par un élément inversible de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On a donc

$$\mathrm{BiGal}(k[C_p]) \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^* \tag{4.3}$$

qui est cyclique d'ordre $p-1$.

4.2 Objets galoisiens d'une algèbre de Hopf de dimension 4

Une algèbre de Hopf de dimension 4 est soit une algèbre d'un des groupes d'ordre 4, soit l'algèbre de Sweedler. Les algèbres duales des algèbres de groupes sont elle-mêmes des algèbres de groupes, car les groupes d'ordre 4 sont commutatifs.

4.2.1 Algèbres de groupes

Les groupes d'ordre 4 sont le groupe cyclique C_4 et le groupe de Klein $C_2 \times C_2$.

Algèbre du groupe cyclique C_4

Nous avons vu au paragraphe 4.1 que les objets galoisiens d'une algèbre d'un groupe cyclique étaient triviaux à isomorphisme et homotopie près. Nous avons aussi vu que les objets galoisiens étaient des objets bigaloisiens et on a

$$\mathrm{BiGal}(k[C_4]) \cong \mathrm{Aut}(C_4) \cong (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^* \cong C_2.$$

Algèbre du groupe $C_2 \times C_2$

Calculons le second groupe de cohomologie $H^2(C_2 \times C_2, k^*)$. Pour G un groupe, notons $H_1(G)$ et $H_2(G)$ les groupes d'homologie à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Le théorème des coefficients universels assure qu'on a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(H_1(C_2 \times C_2), k^*) \to H^2(C_2 \times C_2, k^*) \to \mathrm{Hom}(H_2(C_2 \times C_2), k^*) \to 0.$$

Comme k^* est divisible, $\mathrm{Ext}^1(H_1(C_2 \times C_2), k^*)$ est trivial. La formule de Künneth assure que la suite suivante est exacte :

$$0 \to \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} H_p(C_2) \otimes H_{2-p}(C_2) \to H_2(C_2 \times C_2) \to \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \mathrm{Tor}_1(H_p(C_2), H_{2-p-1}(C_2)) \to 0.$$

Comme C_2 est cyclique, nous pouvons calculer ces groupes et on a

$$0 \to H_2(C_2) \oplus H_2(C_2) \oplus H_1(C_2) \otimes H_1(C_2) \to H_2(C_2 \times C_2) \to 0 \to 0.$$

et donc

$$H^2(C_2 \times C_2, k^*) \cong \mathrm{Hom}(H_2(C_2) \oplus H_2(C_2) \oplus H_1(C_2) \otimes H_1(C_2), k^*)$$

Comme C_2 est cyclique, $H_2(C_2)$ est trivial et $H_1(C_2) \cong C_2$ et on a

$$H^2(C_2 \times C_2, k^*) \cong \mathrm{Hom}(C_2 \otimes C_2, k^*) \cong \mu_2,$$

où $\mu_2 = \{\pm 1\}$ désigne l'ensemble des racines carrés de 1 dans k. Alors on a

$$\mathrm{Gal}_k(k[C_2 \times C_2]) \cong \mathcal{H}_k(k[C_2 \times C_2]) \cong H^2(C_2 \times C_2, k^*) \cong \mu_2. \tag{4.4}$$

Comme $k[C_2 \times C_2]$ est cocommutatif, les objets galoisiens sont des objets bigaloisiens et le groupe des objets bigaloisiens est

$$\mathrm{BiGal}(k[C_2 \times C_2]) \cong \mathrm{Aut}(C_2 \times C_2) \ltimes H^2(k[C_2 \times C_2], k^*) \cong \mathfrak{S}_3 \ltimes \mu_2 \cong \mathfrak{S}_3 \times C_2,$$

car l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur C_2 est nécessairement triviale.

4.2.2 Algèbre de Sweedler

Masuoka [Ma94], puis Doi et Takeuchi [DoT95] (dans une version plus explicite) ont donné la classification des objets galoisiens de l'algèbre de Sweedler, que nous notons T_4. Nous reprenons ici les résultats de Doi et Takeuchi ainsi que leurs notations.

Rappelons que (prop. 17 et [CK76]), comme T_4 est de dimension finie, tous ses objets galoisiens sont clivés et isomorphes à des produits croisés pour lesquels l'action est triviale.

L'algèbre T_4 est isomorphe à l'algèbre engendrée par X et Y soumis aux relations

$$X^2 = 1, \quad Y^2 = 0 \quad \text{et} \quad XY + YX = 0.$$

La comultiplication $\Delta : T_4 \to T_4 \otimes T_4$ définie sur les générateurs par

$$\Delta(X) = X \otimes X \quad \text{et} \quad \Delta(y) = 1 \otimes Y + Y \otimes X,$$

la coünité $\varepsilon : T_4 \to k$ définie par $\varepsilon(X) = 1$ et $\varepsilon(Y) = 0$ et l'antipode $S : T_4 \to T_4$ défini par $S(X) = X$ et $S(Y) = XY$ munissent T_4 d'une structure d'algèbre de Hopf.

Soit $(Z, \rho : Z \to Z \otimes S_4)$ un objet galoisien de T_4.

(a) Il existe $x \in U(Z)$ et $y \in Z$ tels que

$$\rho(x) = x \otimes X \quad \text{et} \quad \rho(y) = 1 \otimes Y + y \otimes X.$$

(b) L'application $\varphi : T_4 \to Z$ définie par

$$\varphi(1) = 1, \quad \varphi(X) = x, \quad \varphi(Y) = y \quad \text{et} \quad \varphi(XY) = xy$$

est une application clivante et son inverse pour la convolution φ^{-1} est donnée par

$$\varphi^{-1}(1) = 1,\ \varphi^{-1}(X) = x^{-1},\ \varphi(Y) = -yx^{-1} \text{ et } \varphi(XY) = -y.$$

(c) Z est un k-module libre de base $\{1, x, y, xy\}$.

(d) Si on pose $\alpha = x^2$, $\beta = y^2$ et $\gamma = xy + yx$, alors $\alpha \in k^*$ et $\beta, \gamma \in k$.

(e) Les valeurs du cocycle $\sigma : T_4 \otimes T_4 \to k$ associé à $Z \cong {}_\sigma T_4$ peuvent être résumées dans le tableau

σ	X	Y	XY
X	α	0	0
Y	γ	β	$-\beta$
XY	γ	β	$-\alpha\beta$

(4.5)

Notons (α, β, γ) l'objet galoisien de T_4 associé au cocycle σ donné par (4.5). Considérons deux objets galoisiens (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ de T_4. D'après [DoT95], ces deux objets galoisiens sont isomorphes si et seulement s'il existe $s \in k^*$ et $t \in k$ tels que

$$\alpha' = s^2\alpha, \quad \beta' = \beta + t\gamma + t^2\alpha \quad \text{et} \quad \gamma' = s\gamma + 2ts\alpha.$$

Alors, comme $2 \in k$, tout objet galoisien (α, β, γ) est isomorphe à l'objet galoisien $\left(\alpha, \beta - \frac{\gamma^2}{4\alpha}, 0\right)$. Les objets galoisiens $(\alpha, \beta, 0)$ et $(\alpha', \beta', 0)$ sont isomorphes si et seulement si $\alpha'\alpha^{-1} \in (k^*)^2$ et $\beta = \beta'$.

Cette classification est la base de l'étude des cocycles paresseux, de l'homotopie et des objets bigaloisiens de T_4. Bichon et Carnovale [BiCa06] ont donné la classification des cocycles paresseux. On a

$$H^2_L(T_4) \cong k.$$

Kassel [Ka04] a construit une homotopie entre un objet galoisien et l'objet trivial :

$$\mathcal{H}_k(T_4) \cong \{1\}.$$

Schauenburg [Sa00] a montré que tout objet galoisien de T_4 est un objet T_4-T_4-bigaloisien et que l'application $\psi : k^* \ltimes k \to \mathrm{BiGal}(T_4)$ définie par

$$\psi(\alpha, \beta) = \left[\left(\frac{\alpha, \beta, 0}{k}\right)\right]$$

est un isomorphisme de groupes.

4.3 Dimension 6

Les algèbres de Hopf de dimension 6 sont les algèbres de groupes d'ordre 6 ainsi que l'algèbre des fonctions sur le groupe diédral D_3.

4.3.1 Algèbres de groupes

Les deux groupes d'ordre 6 sont le groupe cyclique C_6 et le groupe diédral D_3.

Algèbre du groupe cyclique C_6

Comme $H^2(C_6, k^*)$ est trivial, les objets galoisiens de $k[C_6]$ sont triviaux à isomorphisme et homotopie près. Alors, les objets bigaloisiens de C_6 sont donnés par les automorphismes de C_6 et on a

$$\mathrm{BiGal}(k[C_6]) \cong \mathrm{Aut}(C_6) \cong (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^* \cong C_2.$$

Algèbre du groupe diédral D_3

Considérons le groupe diédral. Par [Kr87, Table 8.1], le groupe $H^2(D_3, k^*)$ est trivial ; il en est donc de même pour les objets galoisiens à isomorphisme et homotopie près. Les objets bigaloisiens sont donnés par les automorphismes du groupe $D_3 = \mathfrak{S}_3$. Il est bien connu que le centre de $\mathfrak{S}_3$ est trivial et que les automorphismes de $\mathfrak{S}_3$ sont intérieurs ; on a donc $\mathrm{Aut}(\mathfrak{S}_3) \cong \mathfrak{S}_3 \cong D_3$ et

$$\mathrm{BiGal}(k[D_3]) \cong \mathrm{Aut}(D_3) \cong D_3.$$

4.3.2 Algèbre k^{D_3} des fonctions sur le groupe diédral

Masuoka [Ma00] a donné la classification des objets galoisiens de k^{D_3} (qu'il note $\hat{\mathcal{D}}_6$) et montré que tout objet galoisien de k^{D_3} est trivial à isomorphisme près :

$$\mathrm{Gal}(k^{D_3}) = \{1\}.$$

Les objets galoisiens sont donc des objets k^{D_3}-k^{D_3}-bigaloisiens et, par [Sa96, Lemme 3.11] (voir aussi le paragraphe 1.4.3), le groupe des objets bigaloisiens est

$$\mathrm{BiGal}(k^{D_3}) \cong \mathrm{CoOut}(k^{D_3}),$$

où $\mathrm{CoOut}(k^{D_3}) = \mathrm{Aut}(k^{D_3})/\,\mathrm{CoInn}(k^{D_3})$ et $\mathrm{CoInn}(k^{D_3})$ est le groupe des automorphismes coïntérieurs (voir 1.4.3 pour les définitions et notations).

Nous avons vu au lemme 3 que $\mathrm{CoOut}(k^{D_3}) \cong \mathrm{Out}(D_3)$. Or tout automorphisme de D_3 est intérieur, donc tout automorphisme de l'algèbre de Hopf k^{D_3} est coïntérieur et le groupe des objets bigaloisiens est trivial :

$$\mathrm{BiGal}(k^{D_3}) \cong \{1\}.$$

4.4 Dimension 8

Nous utilisons la classification des algèbres de Hopf de dimension 8 ainsi que les notations de [St99]. Les algèbres de Hopf de dimension 8 sont les algèbres des groupes d'ordre 8, les algèbres de fonctions sur les groupes non abéliens d'ordre 8, l'algèbre semisimple de Kac-Paljutkin, les algèbres pointées nonsemisimples $A_{C_2}, A_{C_2\times C_2}, A'_{C_4}, A''_{C_4}$ et A'''_{C_4} définies plus bas et une algèbre $H_2 = (A''_{C_4})^*$ qui n'est ni semisimple ni pointée.

4.4.1 Algèbres de Hopf semisimples

Algèbres de groupe

Les groupes d'ordre 8 sont le groupe cyclique C_8, le groupe $C_2 \times C_4$, le groupe $C_2 \times C_2 \times C_2$, le groupe diédral D_4 et le groupe quaternionien Q_8.

Algèbre du groupe cyclique C_8 Comme précédemment, les objets galoisiens de l'algèbre du groupe cyclique $k[C_8]$ sont triviaux et les objets bigaloisiens sont classifiés par les automorphismes de C_8 et on a

$$\mathrm{BiGal}(k[C_8]) \cong \mathrm{Aut}(C_8) \cong (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^* \cong C_4.$$

Algèbre du groupe $C_2 \times C_4$ En utilisant le théorème des coefficients universels et la formule de Künneth de manière analogue à 4.2.1, le second groupe de cohomologie $H^2(C_2 \times C_4, k^*)$ vaut

$$H^2(C_2 \times C_4, k^*) \cong \mathrm{Hom}(C_2 \otimes C_4, k^*) \cong \mu_2.$$

On a donc

$$\mathrm{Gal}_k(k[C_2 \times C_4]) \cong \mathcal{H}_k(k[C_2 \times C_4]) \cong H^2(C_2 \times C_4, k^*) \cong \mu_2.$$

Comme $k[C_2 \times C_4]$ est cocommutative et $\mathrm{Aut}(C_2 \times C_4) \cong D_4$, les objets galoisiens sont des objets bigaloisiens et on a

$$\mathrm{BiGal}(k[C_2 \times C_4]) \cong \mathrm{Aut}(C_2 \times C_4) \ltimes H^2(C_2 \times C_4, k^*) \cong D_4 \times C_2,$$

car l'action de D_4 sur C_2 est nécessairement triviale.

Algèbre du groupe $C_2 \times C_2 \times C_2$ La formule de Künneth appliquée deux fois donne

$$H_2(C_2 \times C_2 \times C_2, k^*) \cong ((C_2 \times C_2) \otimes C_2) \oplus (C_2 \otimes C_2) \cong C_2 \times C_2 \oplus C_2.$$

Le théorème des coefficients universels assure alors que

$$H^2(C_2 \times C_2 \times C_2, k^*) \cong \mathrm{Hom}(C_2 \times C_2 \oplus C_2, k^*) \cong \mu_2 \times \mu_2 \times \mu_2.$$

Les objets galoisiens sont donc donnés par

$$\mathrm{Gal}_k(k[C_2 \times C_2 \times C_2]) \cong \mathcal{H}_k(k[C_2 \times C_2 \times C_2]) \cong \mu_2 \times \mu_2 \times \mu_2.$$

Comme $k[C_2 \times C_2 \times C_2]$ est cocommutative, les objets galoisiens sont bigaloisiens et on a

$$\begin{aligned} \mathrm{BiGal}(k[C_2 \times C_2 \times C_2]) &\cong \mathrm{Aut}(C_2 \times C_2 \times C_2) \ltimes H^2(C_2 \times C_2 \times C_2, k^*) \\ &\cong GL_3(\mathbb{F}_2) \ltimes (\mu_2 \times \mu_2 \times \mu_2), \end{aligned}$$

où $GL_3(\mathbb{F}_2)$ agit naturellement sur $\mu_2 \times \mu_2 \times \mu_2 \cong \mathbb{F}_2^3$.

Algèbre du groupe diédral D_4 D'après [Kr87, Table 8.1], le second groupe de cohomologie $H^2(D_4, k^*) \cong C_2$. On a donc

$$\mathrm{Gal}_k(k[D_4]) \cong \mathcal{H}_k(k[D_4]) \cong C_2.$$

Comme $k[D_4]$ est cocommutatif, les objets galoisiens de $k[D_4]$ sont bigaloisiens. Le groupe des automorphismes du groupe D_4 est le produit semidirect $(\mathbb{Z}/4, +) \ltimes (\mathbb{Z}/4, \times)^* \cong D_4$ et on a donc

$$\mathrm{BiGal}(k[D_4]) \cong \mathrm{Aut}(D_4) \ltimes C_2 \cong D_4 \times C_2,$$

car l'action de D_4 sur C_2 est nécessairement triviale.

Algèbre du groupe Q_8 Le groupe quaternionien Q_8 est le groupe engendré par a et b soumis aux relations

$$a^4 = 1, \quad b^2 = a^2 \quad \text{et} \quad bab^{-1} = a^3.$$

D'après [Kr87, Table 8.1], $H^2(Q_8, k^*)$ est trivial et par suite les objets galoisiens de $k[Q_8]$ sont triviaux à isomorphisme et homotopie près. Notons que le groupe des automorphismes du groupe quaternionien est isomorphe au groupe des automorphismes du cube et donc $\mathrm{Aut}(Q_8) \cong \mathfrak{S}_4$. Par conséquent, le groupe des objets bigaloisiens est

$$\mathrm{BiGal}(k[Q_8]) \cong \mathfrak{S}_4.$$

Algèbres de fonctions sur un groupe non abélien

Les groupes non abéliens d'ordre 8 sont le groupe diédral D_4 et le groupe Q_8.

Algèbre k^{D_4} des fonctions sur le groupe diédral Masuoka [Ma00] a donné la classification des objets galoisiens de k^{D_4} et montré qu'il existe deux objets galoisiens k^{D_4} non triviaux à isomorphisme près qui sont des objets k^{D_4}-k^{D_4}-bigaloisiens et donc

$$\mathrm{Gal}_k(k^{D_4}) \cong \{0, 1, 2\}.$$

Cherchons alors les automorphismes d'algèbres de Hopf de k^{D_4}. Au vu du lemme 3, les automorphismes de l'algèbre de Hopf k^{D_4} sont donnés par les automorphismes de D_4 et nous avons déjà noté que $\mathrm{CoOut}(k^{D_4}) \cong \mathrm{Out}(D_4) \cong C_2$. et comme $\mathrm{Out}(D_4) \cong C_2$, le groupe des objets bigaloisiens de k^{D_4} est donc d'ordre 6.

Algèbre k^{Q_8} des fonctions sur le groupe Q_8 Masuoka [Ma00] a montré que les objets galoisiens de k^{Q_8}, qu'il note T_8, sont triviaux à isomorphisme et donc à homotopie près. Comme précédemment, les automorphismes de l'algèbre de Hopf k^{Q_8} sont donnés par les automorphismes du groupe Q_8 et les automorphismes coïntérieurs de k^{Q_8} sont en bijection avec les automorphismes intérieurs de Q_8. Le groupe des automorphismes intérieurs de Q_8 est $Q_8/Z(Q_8) \cong C_2 \times C_2$. Le groupe $\mathrm{CoOut}(k^{Q_8})$ vaut donc $\mathfrak{S}_4/(C_2 \times C_2) \cong \mathfrak{S}_3$ et on a

$$\mathrm{BiGal}(k^{Q_8}) \cong \mathfrak{S}_3.$$

Algèbre de Kac-Paljutkin

Considérons l'algèbre de Kac-Paljutkin $\mathcal{B}_8$ qui est l'unique algèbre de Hopf semisimple non commutative et non cocommutative de dimension 8. Masuoka [Ma00] a montré que les objets galoisiens de $\mathcal{B}_8$ sont triviaux à isomorphisme et donc à homotopie près. Les objets galoisiens sont donc $\mathcal{B}_8$-$\mathcal{B}_8$-bigaloisiens et on a

$$\mathrm{BiGal}(\mathcal{B}_8) \cong \mathrm{CoOut}(\mathcal{B}_8).$$

4.4.2 Algèbres de Hopf pointées non semisimples

Les algèbres de Hopf non semisimples pointées sont l'algèbre A_{C_2} et les algèbres monomiales $A_{C_2 \times C_2}, A'_{C_4}, A''_{C_4}$ et A'''_{C_4}.

Algèbre A_{C_2}

Panaïte et van Ostayen [PO00] (voir aussi l'article de Carnovale et Cuadra [CC04]) ont étudié l'algèbre A_{C_2} (qu'ils notent $E(2)$). Cette algèbre est engendrée par G, X_1 et X_2 soumis aux relations

$$G^2 = 1, \quad X_1^2 = X_2^2 = 0, \quad GX_1 + X_1G = 0,$$
$$GX_2 + X_2G = 0 \quad \text{et} \quad X_1X_2 + X_2X_1 = 0.$$

La comultiplication $\Delta : A_{C_2} \to A_{C_2} \otimes A_{C_2}$ est définie par

$$\Delta(G) = G \otimes G \quad \text{et} \quad \Delta(X_i) = 1 \otimes X_i + X_i \otimes G,$$

la coünité $\varepsilon : A_{C_2} \to k$ est définie par $\varepsilon(G) = 1$ et $\varepsilon(X_i) = 0$ et l'antipode $S : A_{C_2} \to A_{C_2}$ est défini par $S(G) = G$ et $S(X_i) = GX_i$, pour $i = 1, 2$. La classification des objets galoisiens donnée par [PO00] suit la méthode de [DoT95].

Les objets galoisiens Z de A_{C_2} sont de la forme ${}_\sigma A_{C_2}$ pour des cocycles $\sigma : A_{C_2} \times A_{C_2} \to k$ satisfaisant

$$\sigma(G, G) = \alpha \in k^*, \ \sigma(G, X_i) = 0, \ \sigma(X_i, G) = \gamma_i \in k \text{ et } \sigma(X_i, X_j) = t_{ij} \in k,$$

pour $i, j = 1, 2$ et où $T = (t_{ij})_{i,j=1,2}$ est une matrice triangulaire inférieure à coefficients dans k. Les valeurs du cocycle σ tel que $Z \cong {}_\sigma A_{C_2}$ sont résumées dans le tableau suivant.

σ	G	X_1	X_2	GX_1	GX_2	X_1X_2	GX_1X_2
G	α	0	0	0	0	0	0
X_1	γ_1	t_{11}	0	$-t_{11}$	0	0	0
X_2	γ_2	t_{21}	t_{22}	t_{21}	$-t_{22}$	0	0
GX_1	γ_1	t_{11}	0	$-\alpha t_{11}$	0	0	0
GX_2	γ_2	t_{21}	t_{22}	$-\alpha t_{21}$	$-\alpha t_{22}$	0	0
X_1X_2	0	0	0	$\alpha t_{22} - t_{21}\gamma_1$	0	$-t_{11}t_{22}$	$-t_{11}t_{22}$
GX_1X_2	0	0	0	$t_{11}\gamma_2 - \gamma_1 t_{21}$	$-\gamma_1 t_{22}$	$-t_{11}t_{22}$	$-\alpha t_{11}t_{22}$

Par [BiCa06] ou [CC04], les cocycles paresseux sont les cocycles précédents vérifiant $\alpha = 1$ et $\gamma_i = 0$ et on a donc

$$H_L^2(A_{C_2}) \cong k^3.$$

Algèbres monomiales

Nous reprenons dans ce paragraphe des résultats de Bichon [Bi06] sur les algèbres monomiales définies par Chen, Huang, Ye et Zhang [CHYZ04].

Notons $o(h)$ l'ordre d'un élément h d'un groupe et $Z^2(G, k^*)$ l'ensemble des cocycles du groupe G à valeurs dans k^*. Par [CHYZ04], la donnée d'un groupe G, d'un élément central g, d'un caractère $\chi : G \to k^*$ et d'un élément $\mu \in k^*$ tel que si $\mu = 0$, on a $o(g) = o(\chi(g))$ et si $\mu \neq 0$, on a $\chi^{o(\chi(g))} = 1$, est appelé *group-datum* et noté $\mathbb{G} = (G, g, \chi, \mu)$. Ces *group-data* sont classifiés en différents types.

(I) Un *group-datum* de type I est la donnée d'un quadruplet (G, g, χ, μ) avec $\mu = 0$, $d = o(\chi(g)) = o(g)$ et $\chi^d = 1$.

(II) Un *group-datum* de type II est la donnée de (G, g, χ, μ) avec $\mu = 0$, $d = o(\chi(g)) = o(g)$ et $\chi^d \neq 1$.

(III) Un *group-datum* de type III est la donnée de (G, g, χ, μ) avec $\mu = 0$, $d = o(\chi(g)) < o(g)$ et $\chi^d = 1$.

(IV) Un *group-datum* de type IV est la donnée de (G, g, χ, μ) avec $\mu = 0$, $d = o(\chi(g)) < o(g)$ et $\chi^d \neq 1$.

(V) Un *group-datum* de type V est la donnée de (G, g, χ, μ) avec $\mu = 0$, $d = o(\chi(g)) < o(g)$, $\chi^d \neq 1$ et tel que qu'il existe $\sigma \in Z^2(G, k^*)$ avec $\chi^d(h)\sigma(h, g^d) = \sigma(g^d, h)$ pour tout $h \in G$.

(VI) *Un group-datum* de type VI est la donnée de (G, g, χ, μ) avec $\mu \neq 0$ (et alors on a $d = o(\chi(g)) < o(g)$ et $\chi^d = 1$).

À un tel *group-datum* est associé l'algèbre de Hopf monomiale $A(\mathbb{G})$ définie comme le quotient du produit libre $k[x] * k[G]$ par l'idéal bilatère engendré par les relations

$$xh = \chi(h)hx \quad \text{et} \quad x^d = \mu(1 - g^d),$$

où $d = o(\chi(g))$ et $h \in G$. La structure d'algèbre de Hopf est donnée par

$$\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes g, \quad \varepsilon(x) = 0, \quad S(x) = -xg^{-1},$$
$$\Delta(h) = h \otimes h, \quad \varepsilon(h) = 1 \quad \text{et} \quad S(h) = h^{-1},$$

pour tout $h \in G$.

Suivant [Bi06], introduisons quelques notions de cohomologie qui vont nous permettre de décrire les objets galoisiens et bigaloisiens. Soit G un groupe et $g \in G$ un élément central. Notons

$$Z^2_g(G, k^*) = \{\sigma \in Z^2(G, k^*) |\ \sigma(g, h) = \sigma(h, g)\ \ \forall h \in H\}$$

et

$$B^2_g(G, k^*) = \{\partial(\mu) |\ \mu : G \to k^*, \mu(g) = 1 = \mu(1)\}.$$

Si $g_1, g_2 \in G$ sont des éléments centraux, $B^2_{g_2}(G, k^*)$ est un sous-groupe de $Z^2_{g_1}(G, k^*)$ et on note

$$H^2_{g_1,g_2}(G, k^*) = Z^2_{g_1}(G, k^*)/B^2_{g_2}(G, k^*).$$

Notons que $H^2_{1,1}(G, k^*) = H^2(G, k^*)$.

Si G est un groupe et $g \in G$ un élément central de ce groupe d'ordre n, le morphisme de groupe $\varepsilon_0 : Z^2(G, k^*) \to k^*$ défini par

$$\varepsilon_0(\sigma) = \sigma(g, g) \dots \sigma(g, g^{n-1})$$

induit un morphisme de groupes $\varepsilon : H^2_{1,g}(G, k^*) \to k^*$. L'action par multiplication de k^* sur $(k, +)$ induit une action par automorphismes de $H^2_{1,g}(G, k^*)$ sur $(k, +)$ et nous pouvons former le produit semi-direct $H^2_{1,g}(G, k^*) \ltimes k$.

Si $g \in G$ est central, considérons $\mathrm{Aut}_g(G)$ l'ensemble des automorphismes $u : G \to G$ tels que $u(g) = g$. Le groupe $\mathrm{Aut}_g(G)$ agit naturellement à droite par automorphismes sur $H^2_{1,g}(G, k^*)$, ce qui permet de définir le produit semi-direct $\mathrm{Aut}_g(G) \ltimes H^2_{1,g}(G, k^*)$. Soit $\Gamma(\mathbb{G})$ l'ensemble

$$\{(u, \overline{\sigma}) \in \mathrm{Aut}_g(G) \times H^2_{1,g}(G, k^*) | \chi \circ u(h) = \sigma(g, h)^{-1}\sigma(h, g)\chi(h)\ \forall h \in G\}.$$

Si $\mathbb{G} = (G, g, \chi, \mu)$ est un *group-datum*, l'ensemble $\Gamma(\mathbb{G})$ est un sous-groupe de $\mathrm{Aut}_g(G) \ltimes H^2_{1,g}(G, k^*)$. Le morphisme de groupe $H^2_{1,g}(G, k^*) \to k^*$ se prolonge naturellement à $\Gamma(\mathbb{G})$ et par conséquent, nous pouvons former le produit semi-direct $\Gamma(\mathbb{G}) \ltimes k$. Nous pouvons maintenant utiliser les résultats de [Bi06].

Algèbre $A_{C_2 \times C_2}$ Notons $A_{C_2 \times C_2}$ l'algèbre engendrée par G, H et X soumis aux relations

$$G^2 = H^2 = 1,\ X^2 = 0,\ GX + XG = 0,\ HX + XH = 0 \text{ et } GH = HG.$$

La comultiplication $\Delta : A_{C_2 \times C_2} \to A_{C_2 \times C_2} \otimes A_{C_2 \times C_2}$ est définie par

$$\Delta(G) = G \otimes H, \quad \Delta(H) = H \otimes H \quad \text{et} \quad \Delta(X) = G \otimes X + X \otimes 1,$$

la coünité $\varepsilon : A_{C_2 \times C_2} \to k$ est définie par $\varepsilon(G) = \varepsilon(H) = 1$ et $\varepsilon(X) = 0$ et l'antipode $S : A_{C_2 \times C_2} \to A_{C_2 \times C_2}$ est défini par $S(G) = G$, $S(H) = H$ et $S(X) = XG$. L'algèbre $A_{C_2 \times C_2}$ est monomiale de type I associé au *group-datum* $(C_2 \times C_2, G, \chi)$ où $\chi : C_2 \times C_2 \to k^*$ est défini par $\chi(G) = \chi(H) = -1$.

D'après [Bi06], l'ensemble des objets galoisiens de $A_{C_2 \times C_2}$ à isomorphisme près est

$$\mathrm{Gal}_k(A_{C_2 \times C_2}) \cong H^2(C_2 \times C_2, k^*) \times k \cong \mu_2 \times k$$

et, à homotopie près, on a

$$\mathcal{H}(A_{C_2 \times C_2}) \cong H^2(C_2 \times C_2, k^*) \cong \mu_2.$$

Les objets galoisiens de $A_{C_2 \times C_2}$ sont des objets $A_{C_2 \times C_2}$-$A_{C_2 \times C_2}$-bigaloisiens et par [Bi06, Théorème 4.5] l'ensemble des objets bigaloisiens est

$$\begin{aligned} \mathrm{BiGal}(A_{C_2 \times C_2}) &\cong \mathrm{Aut}(\{1\}) \ltimes ((k^* \ltimes k) \times H^2(\{1\}, k^*) \times \mathrm{Hom}(\{1\}, \mu_d)) \\ &\cong (k^* \ltimes k), \end{aligned}$$

avec l'action triviale de k^* sur k.

Par [BiCa06, Théorème 7.1], les cocycles paresseux sont

$$H^2_L(A_{C_2 \times C_2}) \cong H^2(C_2, k^*) \times k \cong k.$$

Algèbre A'_{C_4} Notons A'_{C_4} l'algèbre de Hopf engendrée par G et X soumis aux relations

$$G^4 = 1, \quad X^2 = 0 \quad \text{et} \quad GX + XG = 0.$$

La comultiplication $\Delta : A'_{C_4} \to A'_{C_4} \otimes A'_{C_4}$ est définie par

$$\Delta(G) = G \otimes G \quad \text{et} \quad \Delta(X) = G \otimes X + X \otimes 1,$$

la coünité $\varepsilon : A'_{C_4} \to k$ est définie par $\varepsilon(G) = 1$ et $\varepsilon(X) = 0$ et l'antipode $S : A'_{C_4} \to A'_{C_4}$ est défini par $S(G) = G$ et $S(X) = XG$. L'algèbre de Hopf A'_{C_4} est monomiale de type III associée au *group-datum* (C_4, G, χ) où $\chi : C_4 \to k^*$ est défini par $\chi(G) = -1$.

Notons $\amalg$ l'union disjointe de deux ensembles. Par [Bi06, Théorème 4.1], comme le *group-datum* est cyclique, l'ensemble des objets galoisiens de A'_{C_4} à isomorphisme près est

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}_k(A'_{C_4}) &\cong H^2(C_4, k^*) \amalg H^2_{G^2,G^2}(C_4, k^*) \\ &\cong k^*/k^{*4} \amalg (k^* \times k^*/k^{*2}) \\ &\cong \{1\} \amalg k^*. \end{aligned}$$

À homotopie près, cet ensemble est

$$\mathcal{H}(A'_{C_4}) \cong H^2(C_4, k^*) \cong \{1\}.$$

Par [Bi06, Corollaire 3.18], il existe un objet $A(C_4, G, \chi, 0)$-$A(C_4, G, \chi, 1)$-bigaloisien, c'est-à-dire un objet A'_{C_4}-A''_{C_4}-bigaloisien. Au vu de la classification des objets bigaloisiens des autres algèbres de Hopf de dimension 8, tout objet galoisien de A'_{C_4} est soit A'_{C_4}-A'_{C_4}-bigaloisien soit A'_{C_4}-A''_{C_4}-bigaloisien.

Si N est un entier et m un diviseur de N, notons

$$U(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})[m] = \{\overline{\beta} \in (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* | \beta \equiv 1 \mod m\}. \tag{4.6}$$

Par [Bi06, théorème 4.1], l'ensemble des objets bigaloisiens de A'_{C_4} est

$$\mathrm{BiGal}(A'_{C_4}) \cong \Gamma((C_4, G, \chi)) \cong U(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[2] \ltimes (k^* \times k^*/k^*) \cong C_2 \ltimes k^*.$$

Par [BiCa06, Théorème 7.1], les cocycles paresseux sont triviaux :

$$H^2_L(A'_{C_4}) \cong H^2(C_4/C_4, k^*) \cong \{1\}.$$

Algèbre A''_{C_4} Notons A''_{C_4} l'algèbre engendrée par G et X soumis aux relations

$$G^4 = 1, \quad X^2 = G^2 - 1 \quad \text{et} \quad GX + XG = 0.$$

La comultiplication $\Delta : A''_{C_4} \to A''_{C_4} \otimes A''_{C_4}$ est définie par

$$\Delta(G) = G \otimes G \quad \text{et} \quad \Delta(X) = G \otimes X + X \otimes 1,$$

la coünité $\varepsilon : A''_{C_4} \to k$ est définie par $\varepsilon(G) = 1$ et $\varepsilon(X) = 0$ et l'antipode $S : A''_{C_4} \to A''_{C_4}$ est défini par $S(G) = G$ et $S(X) = XG$. L'algèbre de Hopf A''_{C_4} est monomiale de type VI associé au *group-datum* $(C_4, G, \chi, 1)$ où $\chi : C_4 \to k^*$ est défini par $\chi(G) = -1$.

Par [Bi06, Théorème 4.1], l'ensemble des objets galoisiens de A''_{C_4} à isomorphisme près est

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}_k(A''_{C_4}) &\cong H^2(C_4, k^*) \amalg H^2_{G^2,G^2}(C_4, k^*) \\ &\cong \{1\} \amalg (k^* \times k^*/k^{*2}) \\ &\cong \{1\} \amalg k^*. \end{aligned}$$

À homotopie près, cet ensemble est

$$\mathcal{H}(A''_{C_4}) \cong H^2(C_4, k^*) \cong \{1\}.$$

Nous avons vu qu'il existait un objet A'_{C_4}-A''_{C_4}-bigaloisien et que tout objet galoisien de A''_{C_4} est soit A'_{C_4}-A''_{C_4}-bigaloisien soit A''_{C_4}-A''_{C_4}-bigaloisien. Comme il existe un objet A'_{C_4}-A''_{C_4}-bigaloisien, on a

$$\mathrm{BiGal}(A'_{C_4}) \cong \mathrm{BiGal}(A''_{C_4}) \cong C_2 \ltimes k^*$$

et les algèbres de Hopf A'_{C_4} et A''_{C_4} sont Morita-Takeuchi équivalentes (voir 1.4.3 pour la définition).

Par [BiCa06, Théorème 7.1], les cocycles paresseux sont triviaux :

$$H^2_L(A''_{C_4}) \cong H^2(C_4/C_4, k^*) \cong \{1\}.$$

Algèbre A'''_{C_4} Notons A'''_{C_4} l'algèbre engendrée par G et X soumis aux relations

$$G^4 = 1, \quad X^2 = 0 \quad \text{et} \quad GX = qXG,$$

où q est une racine primitive quatrième de l'unité dans k.

La comultiplication $\Delta : A'''_{C_4} \to A'''_{C_4} \otimes A'''_{C_4}$ est définie par

$$\Delta(G) = G \otimes G \quad \text{et} \quad \Delta(X) = G^2 \otimes X + X \otimes 1,$$

la coünité $\varepsilon : A'''_{C_4} \to k$ est définie par $\varepsilon(G) = 1$ et $\varepsilon(X) = 0$ et l'antipode $S : A'''_{C_4} \to A'''_{C_4}$ est défini par $S(G) = G^3$ et $S(X) = XG^2$. Définissons le caractère $\chi : C_4 \to k$ par $\chi(G) = q$ et posons $\mathbb{G} = (C_4, G^2, \chi, 0)$. Alors l'algèbre de Hopf monomiale définie par $\mathbb{G}$ est isomorphe à A'''_{C_4}. Cette algèbre est monomiale de type II.

D'après [Bi06], l'ensemble des objets galoisiens de A'''_{C_4} à isomorphisme près est

$$\mathrm{Gal}_k(A'''_{C_4}) \cong H^2(C_4, k^*) \cong \{1\}.$$

À homotopie près, cet ensemble est

$$\mathcal{H}(A'''_{C_4}) \cong H^2(C_4, k^*) \cong \{1\}.$$

Les objets galoisiens de A'''_{C_4} sont des objets A'''_{C_4}-A'''_{C_4}-bigaloisiens. Par [Bi06, Théorème 4.1], l'ensemble des objets bigaloisiens est

$$\mathrm{BiGal}(A'''_{C_4}) \cong \Gamma(\mathbb{G}) \cong U(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[4] \ltimes (k^* \times k^*/k^*) \cong k^*,$$

car la définition (4.6) de $U(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[4]$ implique immédiatement que $U(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})[4]$ est trivial.

Par [BiCa06, Théorème 7.1], les cocycles paresseux sont triviaux :

$$H^2_L(A'_{C_4}) \cong H^2(C_4/C_2, k^*) \cong \{1\}.$$

4.4.3 Algèbre de Hopf $(A''_{C_4})^*$ ni semisimple ni pointée

Dans ce paragraphe nous donnons les résultats qui seront prouvés au chapitre 5.2.

L'algèbre $H_2 = (A''_{C_4})^*$ est engendrée par α et β soumis aux relations

$$\alpha^4 = 1, \quad \beta^2 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha\beta = \xi\beta\alpha,$$

où ξ est une racine carrée de -1 dans k. La comultiplication $\Delta : H_2 \to H_2 \otimes H_2$ vaut sur les générateurs

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \beta\alpha^2 \quad \text{et} \quad \Delta(\beta) = \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha^3,$$

la coünité $\varepsilon : H_2 \to k$ vaut $\varepsilon(\alpha) = 1$ et $\varepsilon(\beta) = 0$ et l'antipode $S : H_2 \to H_2$ vaut $S(\alpha) = \alpha^{-1}$ et $S(\beta) = \xi\beta$.

Théorème. *Les objets galoisiens de H_2 sont triviaux à isomorphisme près.*

4.5 Dimension 9

Les algèbres de Hopf de dimension 9 sont les algèbres des groupes d'ordre 9, qui sont tous abéliens, et l'algèbre de Taft T_9.

4.5.1 Algèbres de groupes

Les groupes d'ordres 9 sont le groupe cyclique C_9 et le groupe $C_3 \times C_3$.

Algèbre du groupe cyclique C_9

Comme précédemment, les cocycles du groupe cyclique C_9 sont triviaux et donc les objets galoisiens de $k[C_9]$ sont triviaux à isomorphisme et homotopie près. Les objets bigaloisiens sont alors donnés par les automorphismes de C_9 et on a

$$\mathrm{BiGal}(k[C_9]) \cong C_6.$$

Algèbre du groupe $C_3 \times C_3$

Comme précédement, le théorème des coefficients universels et la formule de Künneth asurent que

$$H^2(C_3 \times C_3, k^*) \cong \mathrm{Hom}(H_2(C_3 \times C_3), k^*) \cong \mathrm{Hom}(C_3, k^*) \cong \mu_3,$$

où μ_3 est le groupe des racines troisièmes de 1 dans k. On a alors

$$\mathrm{Gal}_k(k[C_3 \times C_3]) \cong \mathcal{H}_k(k[C_3 \times C_3]) \cong \mu_3.$$

Les objets galoisiens de $k[C_3 \times C_3]$ sont des objets bigaloisiens et on a

$$\mathrm{BiGal}(k[C_3 \times C_3]) \cong \mathrm{Aut}(C_3 \times C_3) \ltimes \mu_3 \cong GL_2(\mathbb{F}_3) \ltimes C_3,$$

où $GL_2(\mathbb{F}_3)$ agit sur C_3 par le déterminant.

4.5.2 Algèbre de Taft T_9

L'algèbre de Taft T_9 a été notamment étudiée par Masuoka [Ma94] et par Doi et Takeuchi [DoT95] ; nous reprenons ici les résultats et la formulation de [DoT95].

L'algèbre de Taft T_9 est l'algèbre engendrée par X et Y soumis aux relations

$$X^3 = 1, \quad Y^3 = 0 \quad \text{et} \quad YX = qXY,$$

où q est une racine primitive troisième de l'unité.

La comultiplication $\Delta : T_9 \to T_9 \otimes T_9$ est définie par

$$\Delta(X) = X \otimes X \quad \text{et} \quad \Delta(Y) = 1 \otimes Y + Y \otimes X,$$

la coünité $\varepsilon : T_9 \to k$ est définie par $\varepsilon(X) = 1$ et $\varepsilon(Y) = 0$ et l'antipode $S : T_9 \to T_9$ est définie par $S(X) = X^2$ et $S(Y) = -YX^2$. Doi et Takeuchi [DoT95] ont donné une classification des objets galoisiens de l'algèbre de Taft T_9. Soit $(Z, \rho : Z \to Z \otimes T_9)$ un objet galoisien de T_9.

(a) Il existe des éléments $x \in U(Z)$ et $y \in Z$ tels que

$$\rho(x) = x \otimes X \quad \text{et} \quad \rho(y) = 1 \otimes Y + y \otimes X.$$

(b) L'application $\varphi : T_9 \to Z$ définie par

$$\varphi(X^i Y^J) = x^i y^j,$$

pour tout $i, j = 0, 1, 2$, est une application clivante dont l'inverse pour la convolution est donné par

$$\varphi^{-1}(X^i Y^j) = (-1)^j q^{\frac{j(j-1)}{2}} y^j (x^{-1})^{[i+j]_3},$$

où $[i+j]_3$ est le reste de la division euclidienne de $i+j$ par 3.

(c) Z est un k-module libre de base $\{x^i y^j, i, j = 0, \ldots, 2\}$.

(d) Si on pose $\alpha = x^3$, $\beta = y^3$ et $\gamma = (yx - qxy)x^{-2}$ alors $\alpha \in U(k), \beta \in k$ et $\gamma \in k$.

(e) Le cocycle σ associé à l'objet galoisien $Z \cong {}_\sigma T_9$ est donné par

σ	X	X^2	Y	Y^2	XY	XY^2	X^2Y	X^2Y^2
X	1	α	0	0	0	0	0	0
X^2	α	α	0	0	0	0	0	0
Y	γ	$(q+1)\gamma\alpha$	0	β	0	$q\beta$	0	$q^2\beta$
Y^2	$\gamma\alpha$	0	β	0	$q^2\beta$	$-\gamma\beta$	$q\beta$	$-q(q+1)\gamma\alpha\beta$
XY	$\gamma\alpha$	$(q+1)\gamma\alpha$	0	β	0	$q\beta$	0	$q^2\alpha\beta$
XY^2	$\gamma\alpha$	0	β	0	$q^2\beta$	$-\gamma\alpha\beta$	$q\alpha\beta$	$-q(q+1)\gamma\alpha\beta$
X^2Y	$\gamma\alpha$	$(q+1)\gamma\alpha$	0	β	0	$q\alpha\beta$	0	$q^2\alpha\beta$
X^2Y^2	$\gamma\alpha$	0	β	0	$q^2\alpha\beta$	$-\gamma\alpha\beta$	$q\alpha\beta$	$-q(q+1)\gamma\alpha\beta$

(4.7)

Soit Z et Z' deux objets galoisiens associés à (α, β, γ) et $(\alpha', \beta', \gamma')$ respectivement. Ces deux objets galoisiens sont isomorphes si et seulement s'il existe $s \in k^*$ et $t \in k$ tels que

$$\begin{aligned}
\alpha' &= s^3\alpha, \\
\beta' &= \beta + ((\gamma + t)((q+1)\gamma + t))\alpha, \\
\gamma' &= (\gamma + t - qt)s^{-1}.
\end{aligned}$$

En particulier, l'application $\varphi : k^* \ltimes k \to \mathrm{Gal}_k(T_9, k)$ définie par

$$\varphi(\alpha, \beta) = (\alpha, \beta, 0)$$

est une paramétrisation de l'ensemble des objets galoisiens de T_9.

Notons que l'algèbre de Taft T_9 est monomiale de type I associée au *group-datum* (C_3, X, χ) où $\chi : C_3 \to k$ est défini par $\chi(X) = -q$. Par [BiCa06, Théorème 7.1], les cocycles paresseux sont donc

$$H^2_L(T_9) \cong H^2(C_3/C_3, k^*) \times k \cong k.$$

Kassel [Ka04] a construit une homotopie entre un objet galoisien de T_9 et l'objet galoisien trivial et donc

$$\mathcal{H}_k(T_9) \cong \{1\}.$$

D'après [Sa00], tout objet galoisien de T_9 est un objet T_9-T_9-bigaloisien et l'application $\psi : k^* \ltimes k \to \mathrm{BiGal}(T_9)$ définie par

$$\psi(\alpha, \beta) = [(\alpha, \beta, 0)],$$

pour tout $\alpha \in k^*$ et $\beta \in k$ est un isomorphisme de groupes.

4.6 Dimension 10

Les algèbres de Hopf de dimension 10 sont les algèbres des groupes d'ordre 10 et l'algèbre des fonctions sur le groupe diédral d'ordre 10.

4.6.1 Algèbres de groupes

Les groupes d'ordre 10 sont le groupe cyclique C_{10} et le groupe diédral D_5.

Algèbre du groupe cyclique C_{10}

Comme précédemment, les objets galoisiens du groupe cyclique sont triviaux à isomorphisme et homotopie près ; les objets bigaloisiens sont donnés par les automorphismes de C_{10} et on a

$$\mathrm{BiGal}(k[C_{10}]) \cong C_4.$$

Algèbre du groupe diédral D_5

Le groupe $H^2(D_5, k^*)$ est trivial (voir [Kr87, table 8.1]) et, par conséquent, les objets galoisiens de $k[D_5]$ sont triviaux à isomorphisme et homotopie près ; les objets bigaloisiens sont donnés par les automorphismes de D_5. Le groupe des automorphismes du groupe diédral D_5 est $(\mathbb{Z}/5, \times)^* \ltimes (\mathbb{Z}/5, +) \cong C_4 \ltimes C_5$ et on a

$$\mathrm{BiGal}(k[D_5]) \cong C_4 \ltimes C_5.$$

4.6.2 Algèbres des fonctions sur le groupe dihédral D_5

Masuoka [Ma00] a montré que les objets galoisiens de k^{D_5} sont triviaux à isomorphisme près. Comme les automorphismes de l'algèbre de Hopf k^{D_5} sont donnés par les automorphismes de D_5, qui sont tous intérieurs, les automorphismes de k^{D_5} sont coïntérieurs et les objets bigaloisiens de k^{D_5} sont triviaux :

$$\mathrm{BiGal}(k^{D_5}) \cong \{1\}.$$

4.7 Dimension 12

La classification des algèbres de Hopf de dimension 12 est due à Natale [N02] dont nous reprenons les notations. Les algèbres de Hopf de dimension 12 sont les algèbres de groupes, les algèbres de fonctions sur un groupe non abélien, les algèbres semisimples A_+ et A_- définies plus bas, les algèbres monomiales $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{A}_1, \mathcal{B}_0$ et $\mathcal{B}_1$ et l'algèbre $H_3 = (\mathcal{A}_1)^*$ qui n'est ni semisimple ni pointée.

4.7.1 Algèbres de Hopf semisimples

Suivant [F97], une algèbre de Hopf semisimple de dimension 12 qui n'est ni une algèbre de groupe, ni une algèbre de fonctions sur un groupe non abélien est l'une des deux algèbres A_+, A_- définies comme suit.

Notons $\mathfrak{S}_3$ le groupe des permutations d'ordre 6, σ le cycle (123) et τ la permutation (12). Notons encore $i = \mathrm{inn}(\tau)$ la conjugaison par τ et sgn la signature de $\mathfrak{S}_3$.

Nous définissons A^+ comme la $k^{\mathfrak{S}_3}$-algèbre engendrée par z soumis aux relations

$$z^2 = 1 \quad \text{et} \quad zc = i^*(c)z$$

pour tout $c \in k^{\mathfrak{S}_3}$. On définit aussi A^- comme la $k^{\mathfrak{S}_3}$-algèbre engendrée par z soumis aux relations

$$z^2 = \mathrm{sgn} \quad \text{et} \quad zc = i^*(c)z$$

pour tout $c \in k^{\mathfrak{S}_3}$.

On munit ces deux algèbres d'une structure de bigèbre en demandant que $k^{\mathfrak{S}_3}$ soit une sous-cogèbre et z soit un élément *group-like*. L'antipode $S^+ : A^+ \to A^+$, défini par $S^+(z) = z$ et étendant l'antipode de $k^{\mathfrak{S}_3}$, munit A^+ d'une structure d'algèbre de Hopf. De même, l'antipode $S^- : A^- \to A^-$, défini par $S^-(z) = z$ et étendant celui de $k^{\mathfrak{S}_3}$, muni A^- d'une structure d'algèbre de Hopf.

D'après [F97], les deux algèbres A^+ et A^- sont semisimples, le groupe des éléments *group-like* de A^+ est isomorphe à $C_2 \times C_2$ et le groupe des éléments *group-like* de A^- est isomorphe à C_4. Les algèbres de Hopf A_+ et A_- sont autoduales et sont les seules algèbres de Hopf semisimples de dimension 12 dont le groupe des éléments *group-like* est d'ordre 4.

Algèbres de groupes

Les groupes d'ordre 12 sont le groupe cyclique C_{12}, le groupe $C_2 \times C_6$, le groupe $C_4 \times C_3$, le groupe diédral D_6, le groupe dicyclique noté G_{12} et le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.

Algèbre du groupe cyclique C_{12} Comme précédement, les objets galoisiens de l'algèbre du groupe cyclique C_{12} sont triviaux à isomorphisme et homotopie près ; les objets bigaloisiens sont donnés par les automorphismes de C_{12} et on a

$$\mathrm{BiGal}(k[C_{12}]) \cong \mathrm{Aut}(C_{12}) \cong C_4.$$

Algèbre du groupe $C_2 \times C_6$ Comme les groupes C_2 et C_6 sont cycliques, la formule de Künneth assure que $H^2(C_2 \times C_6, k^*) \cong \mu_2$ et donc

$$\mathrm{Gal}_k(k[C_2 \times C_6]) \cong \mathcal{H}_k(k[C_2 \times C_6]) \cong \mu_2.$$

Comme $k[C_2 \times C_6]$ est cocommutative, les objets galoisiens sont des objets bigaloisiens et on a

$$\mathrm{BiGal}(k[C_2 \times C_6]) \cong \mathrm{Aut}(C_2 \times C_6) \ltimes C_2 \cong C_6 \times C_2,$$

car l'action de C_6 sur C_2 est nécessairement triviale.

Algèbre d'un groupe non abélien Considérons le groupe diédral D_6. Il est bien connu (voir [Kr87, table 8.1]) que $H^2(D_6, k^*) \cong \mu_2$ et on a donc

$$\mathrm{Gal}_k(k[D_6]) \cong \mathcal{H}_k(k[D_6]) \cong \mu_2.$$

Comme $\mathrm{Aut}(D_6) \cong D_6$, le groupe des objets bigaloisiens est

$$\mathrm{BiGal}(k[D_6]) \cong D_6 \times C_2,$$

car l'action de D_6 sur C_2 est nécessairement triviale.

Notons G_{12} le groupe dicyclique engendré par a et b soumis aux relations

$$a^6 = 1, \quad b^2 = a^3 \quad \text{et} \quad bab^{-1} = a^5.$$

Le second groupe de cohomologie $H^2(G_{12}, k^*)$ est trivial par [Kr87, table 8.1] et donc les objets galoisiens de $k[G_{12}]$ sont triviaux à isomorphisme et homotopie près :

$$\mathrm{Gal}_k(k[G_{12}]) \cong \{1\}.$$

Cherchons les automorphismes du groupe G_{12}. Si f est un automorphisme du groupe G_{12}, alors $f(a)$ est d'ordre 6 donc $f(a) = a, a^5$ et $f(b)$ est d'ordre 4 donc $f(b) = ba^i$ pour $i = 0, \dots, 5$. Réciproquement, les morphismes définis de cette manière sont des automorphismes de G_{12} et l'ordre de $\mathrm{Aut}(G_{12})$ est donc 12. Notons $f : G_{12} \to G_{12}$ l'automorphisme défini par $f(a) = a^5$ et $f(b) = b$ et $g : G_{12} \to G_{12}$ l'automorphisme défini par $g(a) = a$ et $g(b) = ba$. Alors f est d'ordre 2, g est d'ordre 6 et $fgf^{-1} = g^{-1}$. On a donc $\mathrm{Aut}(G_{12}) \cong D_6$. Le groupe des objets bigaloisiens est alors

$$\mathrm{BiGal}(k[G_{12}]) \cong \mathrm{Aut}(G_{12}) \cong D_6.$$

Considérons le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$. Notons qu'il est isomorphe au groupe engendré par a, b et c et soumis aux relations

$$a^2 = b^2 = [a, b] = c^3 = 1, \quad cac^{-1} = b \quad \text{et} \quad cbc^{-1} = ab, \tag{4.8}$$

où $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$. Alors par [Kr87, Table 8.1], le second groupe de cohomologie $H^2(\mathfrak{A}_4, k^*) \cong \mu_2$ et on a

$$\mathrm{Gal}_k(k[\mathfrak{A}_4]) \cong \mathcal{H}_k(k[\mathfrak{A}_4]) \cong \mu_2.$$

Les automorphismes de $\mathfrak{A}_4$ sont en particulier des automorphismes de $\mathfrak{S}_4$; ces derniers sont des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{S}_4$. Réciproquement, tout automorphisme intérieur de $\mathfrak{S}_4$ est un automorphisme de $\mathfrak{A}_4$ et on a $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_4) \cong \mathfrak{S}_4$. Le groupe des objets bigaloisiens est alors

$$\mathrm{BiGal}(k[\mathfrak{A}_4]) \cong \mathrm{Aut}(\mathfrak{A}_4) \ltimes C_2 \cong \mathfrak{S}_4 \times C_2,$$

car l'action sur C_2 est nécessairement triviale.

Algèbres de fonctions sur un groupe

Il existe trois groupes non abéliens d'ordre 12, à savoir le groupe diédral D_6, le groupe dicyclique G_{12} et le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$.

Algèbre des fonctions sur le groupe diédral D_6 Masuoka [Ma00] a montré qu'il existe un unique objet galoisien Z de k^{D_6} à droite non trivial et donc

$$\mathrm{Gal}_k(k^{D_6}) \cong \mu_2.$$

Masuoka [Ma00] définit une algèbre de Hopf cosemisimple qu'il note $\mathcal{A}_{12}$. Par [LR88], comme cette algèbre de Hopf est cosemisimple et de dimension finie sur le corps k de caractéristique nulle, elle est semisimple. Les éléments *grouplike* de $\mathcal{A}_{12}$ forment le groupe $C_2 \times C_2$, l'algèbre $\mathcal{A}_{12}$ n'est ni commutative ni cocommutative. Par [F97] l'algèbre $\mathcal{A}_{12}$ est donc isomorphe à l'algèbre A_+.

Par [Ma00], l'objet galoisien non trivial de k^{D_6} est un objet A_+-k^{D_6}-bigaloisien. Comme $\mathrm{Out}(k^{D_6}) \cong C_2$, le groupe des objets bigaloisiens est

$$\mathrm{BiGal}(k^{D_6}) \cong C_2.$$

Notons que les algèbres de Hopf k^{D_6} et A_+ sont Morita-Takeuchi équivalentes (voir le paragraphe 1.4.3).

Algèbre des fonctions sur le groupe dicyclique G_{12} Masuoka [Ma00] a montré que les objets galoisiens de $k^{G_{12}}$, qu'il note T_{12}, sont triviaux.

Les automorphismes de l'algèbre de Hopf $k^{G_{12}}$ sont donnés par les automorphismes du groupe G_{12}. Notons que les automorphismes intérieurs de G_{12} sont engendrés par les conjugaisons par a et b et forment un groupe d'ordre 6. On a vu que le groupe des automorphismes de G_{12} est d'ordre 12. Par conséquent, le groupe $\mathrm{Aut}(k^{G_{12}})/\operatorname{CoInn}(k^{G_{12}})$ est d'ordre 2 et le groupe des objets bigaloisiens est

$$\mathrm{BiGal}(k^{G_{12}}) \cong C_2.$$

Algèbre des fonctions sur le groupe alterné $\mathfrak{A}_4$ D'après [Da01, Théorème 3.8], les objets galoisiens de $k^{\mathfrak{A}_4}$ sont en bijection avec les paires (G,σ) où G est un sous-groupe de $\mathfrak{A}_4$ et $\sigma \in H^2(G,k^*)$ un cocycle non dégénéré. Notons que ces résultats apparaissent aussi dans une série d'articles sur la classification des algèbres de Hopf triangulaires semisimples et cosemisimples se terminant par [EG] (voir aussi [G02]). Notons aussi que pour que le cocycle soit non dégénéré, il faut que l'ordre du groupe soit un carré.

Proposition 62. *Il existe un unique objet galoisien non trivial de $k^{\mathfrak{A}_4}$.*

Démonstration. Cherchons les sous-groupes de $\mathfrak{A}_4$ ainsi que les cocycles non dégénérés. Le seul sous-groupe non trivial de $\mathfrak{A}_4$ d'ordre carré est $C_2 \times C_2$. Comme il existe un unique cocycle non dégénéré de $C_2 \times C_2$, il existe un unique cocycle pour l'algèbre de Hopf $k^{\mathfrak{A}_4}$ et donc un unique objet galoisien non trivial. □

Donnons maintenant la classification des objets bigaloisiens de $k^{\mathfrak{A}_4}$. Les automorphismes du groupe $\mathfrak{A}_4$ sont les automorphismes intérieurs du groupe $\mathfrak{S}_4$ et le groupe des automorphismes intérieurs de $\mathfrak{A}_4$ est d'indice 2 dans le groupe des automorphismes de $\mathfrak{A}_4$. Donc le groupe $\mathrm{Aut}(k^{\mathfrak{A}_4})/\operatorname{CoInn}(k^{\mathfrak{A}_4})$ est isomorphe à C_2. Le groupe des objets bigaloisiens est donc d'ordre 4.

Autres algèbres de Hopf semisimples

D'après [F97], il existe deux algèbres de Hopf A_+ et A_- semisimples non commutative ni cocommutative de dimension 12.

On a vu que A_+ est isomorphe à l'algèbre que Masuoka note $\mathcal{A}_{12}$; de la même façon, l'algèbre noté $\mathcal{B}_{12}$ dans [Ma00] n'est ni commutative ni cocommutative, ses éléments *group-like* forment le groupe C_4 et elle est cosemisimple donc semisimple par [LR88]. L'algèbre $\mathcal{B}_{12}$ est donc isomorphe à A_-.

Notons Z l'unique objet A_+-k^{D_6}-bigaloisien non trivial (voir 4.7.1 et [Ma00]). L'application $\varphi : \mathrm{Gal}_k(k^{D_6}) \to \mathrm{Gal}_k(A_+)$, définie par

$$\varphi(A) = Z \square_{k^{D_6}} A$$

pour tout objet galoisien A à gauche de k^{D_6}, est une bijection entre les objets galoisiens à gauche de k^{D_6} et de A_+. Par suite, il existe un unique objet galoisien à gauche Y de A_+ non trivial. Cet objet galoisien non trivial de A_+ est un objet

A_+-k^{D_6}-bigaloisien et est l'inverse de Z pour la structure de groupoïde des objets A_+-k^{D_6}-bigaloisien (voir le paragraphe 1.4.3).

Le groupe des objets bigaloisiens de A_+ est aussi en bijection avec celui des objets bigaloisiens de k^{D_6}

$$\mathrm{BiGal}(A_+) \cong \mathrm{BiGal}(D_6) \cong C_2. \tag{4.9}$$

Masuoka [Ma00] a montré que les objets galoisiens de A_-, qu'il note $\mathcal{B}_{12}$, sont triviaux. Alors, les objets galoisiens de A_- sont des objets A_--A_--bigaloisiens et le groupe des objets bigaloisiens est

$$\mathrm{BiGal}(A_-) \cong \mathrm{CoOut}(A_-).$$

4.7.2 Algèbres de Hopf pointées non semisimples

Nous reprenons la classification et les notations de Natale [N02] pour les algèbres de Hopf de dimension 12. Les algèbres de Hopf pointées non semisimples sont des algèbres de Hopf monomiales qui ont été classifiées par Bichon [Bi06]. Nous utilisons encore les définitions et notations introduites dans le paragraphe 4.4.2.

Algèbre de Hopf $\mathcal{A}_0$

Considérons l'algèbre de Hopf $\mathcal{A}_0$ engendrée par g et x soumis aux relations

$$g^6 = 1, \quad x^2 = 0 \quad \text{et} \quad gx = -xg.$$

La comultiplication $\Delta : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0 \otimes \mathcal{A}_0$ est définie par

$$\Delta(g) = g \otimes g \quad \text{et} \quad \Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1,$$

la coünité $\varepsilon : \mathcal{A}_0 \to k$ est définie par $\varepsilon(g) = 1$ et $\varepsilon(x) = 0$ et l'antipode $S : \mathcal{A}_0 \to \mathcal{A}_0$ est défini par $S(g) = g^5$ et $S(x) = -g^5 x$. Si on considère le caractère $\chi : C_6 \to k$ défini par $\chi(g) = -1$, l'algèbre $\mathcal{A}_0$ est monomiale de type III associée à $(C_6, g, \chi, 0)$.

Par [Bi06, Théorème 4.1], l'ensemble des objets galoisiens de $\mathcal{A}_0$ à isomorphisme près est

$$\begin{aligned} \mathrm{Gal}_k(\mathcal{A}_0) &\cong H^2(C_6, k^*) \amalg H^2_{g^2,g^2}(C_6, k^*) \\ &\cong k^*/k^{*6} \amalg (k^* \times k^*)/k^{*2} \\ &\cong \{1\} \amalg k^*. \end{aligned}$$

À homotopie près, l'ensemble des objets galoisiens est

$$\mathcal{H}_k(\mathcal{A}_0) \cong H^2(C_6, k^*) \cong \{1\}.$$

L'ensemble des objets bigaloisiens de $\mathcal{A}_0$ est

$$\begin{aligned} \mathrm{BiGal}(\mathcal{A}_0) &\cong \Gamma(C_6, g, \chi, 0) \\ &\cong U(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[2] \ltimes (k^* \times k^*/k^*) \\ &\cong C_2 \ltimes k^*. \end{aligned}$$

Si on note $\mathcal{A}_1$ l'algèbre monomiale associée à $(C_6, g, \chi, 1)$, d'après [Bi06, Corollaire 3.18], il existe un objet $\mathcal{A}_0$-$\mathcal{A}_1$-bigaloisien. Les deux algèbres de Hopf $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$ sont donc Morita-Takeuchi équivalentes.

Par [BiCa06, Théorème 7.1], le groupe des cocycles paresseux est trivial :

$$H^2_L(\mathcal{A}_0) \cong H^2(C_6/C_6, k^*) \cong \{1\}.$$

Algèbre de Hopf $\mathcal{A}_1$

Considérons l'algèbre de Hopf $\mathcal{A}_1$ engendrée par g et x soumis aux relations

$$g^6 = 1, \quad x^2 = g^2 - 1 \quad \text{et} \quad xg = -gx.$$

La comultiplication $\Delta : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_1$ est définie par

$$\Delta(g) = g \otimes g \quad \text{et} \quad \Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1,$$

la coünité $\varepsilon : \mathcal{A}_1 \to k$ est définie par $\varepsilon(g) = 1$ et $\varepsilon(x) = 0$ et l'antipode $S : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_1$ est défini par $S(g) = g^5$ et $S(x) = -g^5 x$. L'algèbre $\mathcal{A}_1$ est monomiale de type VI associée à $(C_6, g, \chi, 1)$, où $\chi : C_6 \to k$ est donné par $\chi(g) = -1$.

Comme il existe un objet $\mathcal{A}_0$-$\mathcal{A}_1$-bigaloisien, les ensembles des objets galoisiens et bigaloisiens de $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$ sont en bijection. L'ensemble des objets galoisiens de $\mathcal{A}_1$ à isomorphisme près est

$$\mathrm{Gal}_k(\mathcal{A}_1) \cong \{1\} \amalg k^*.$$

À homotopie près, l'ensemble des objets galoisiens est

$$\mathcal{H}_k(\mathcal{A}_1) \cong \{1\}.$$

L'ensemble des objets bigaloisiens de $\mathcal{A}_1$ est

$$\mathrm{BiGal}(\mathcal{A}_1) \cong C_2 \ltimes k^*.$$

Par [BiCa06, Théorème 7.1], le groupe des cocycles paresseux est trivial :

$$H^2_L(\mathcal{A}_1) \cong H^2(C_6/C_6, k^*) \cong \{1\}.$$

Algèbre de Hopf $\mathcal{B}_0$

Considérons l'algèbre de Hopf $\mathcal{B}_0$ engendrée par g et x soumis aux relations

$$g^6 = 1, \quad x^2 = 0 \quad \text{et} \quad gx = -xg.$$

La comultiplication $\Delta : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{B}_0 \otimes \mathcal{B}_0$ est définie par

$$\Delta(g) = g \otimes g \quad \text{et} \quad \Delta(x) = g^3 \otimes x + x \otimes 1,$$

la coünité $\varepsilon : \mathcal{B}_0 \to k$ est définie par $\varepsilon(g) = 1$ et $\varepsilon(x) = 0$ et l'antipode $S : \mathcal{B}_0 \to \mathcal{A}_0$ est défini par $S(g) = g^5$ et $S(x) = -g^3 x$. L'algèbre de Hopf $\mathcal{B}_0$

est monomiale de type I associée à $(C_6, g^3, \chi, 0)$, où le caractère $\chi : C_6 \to k$ est donnée par $\chi(g) = -1$.

L'ensemble des objets galoisiens de $\mathcal{B}_0$ à isomorphisme près est

$$\mathrm{Gal}_k(\mathcal{B}_0) \cong \mathrm{H}^2(C_6, k^*) \times k \cong k.$$

À homotopie près l'ensemble des objets galoisiens est

$$\mathcal{H}_k(\mathcal{B}_0) = H^2(C_6, k^*) \cong \{1\}.$$

Montrons que tout objet galoisien de $\mathcal{B}_0$ est un objet $\mathcal{B}_0$-$\mathcal{B}_0$-bigaloisien. Soit H une algèbre de Hopf telle qu'il existe un objet H-$\mathcal{B}_0$-bigaloisien. D'après [Bi06], comme $\mathcal{B}_0$ est monomiale, H est aussi monomiale. Les algèbres $\mathcal{A}_0$ et $\mathcal{A}_1$ sont associées à un élément central g qui est générateur de C_6, alors que l'élément central de $\mathcal{B}_0$ est g^3 d'ordre 2. Nous allons voir au paragraphe suivant que $\mathcal{B}_1$ est de type II et donc ses objets galoisiens sont des objets $\mathcal{B}_1$-$\mathcal{B}_1$-bigaloisiens. En conséquence, $H \cong \mathcal{B}_0$ et l'ensemble des objets bigaloisiens de $\mathcal{B}_0$ est par [Bi06, Théorème 4.1]

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{BiGal}(\mathcal{B}_0) & \cong & \Gamma(C_6, g, \chi, 0) \\ & \cong & (\mathrm{Aut}(C_3) \ltimes (k^* \times k^*/k^{*3})) \ltimes k \\ & \cong & k^* \ltimes k. \end{array}$$

Par [BiCa06, Théorème 7.1], le groupe des cocycles paresseux est

$$H^2_L(\mathcal{B}_0) \cong H^2(C_6/C_2, k^*) \times k \cong k.$$

Algèbre de Hopf $\mathcal{B}_1$

Considérons l'algèbre de Hopf $\mathcal{B}_1$ engendrée par g et x soumis aux relations

$$g^6 = 1, \quad x^2 = 0 \quad \text{et} \quad gx = \omega x g,$$

où ω est une racine primitive sixième de l'unité.

La comultiplication $\Delta : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_1$ est définie par

$$\Delta(g) = g \otimes g \quad \text{et} \quad \Delta(x) = g^3 \otimes x + x \otimes 1,$$

la coünité $\varepsilon : \mathcal{B}_1 \to k$ est définie par $\varepsilon(g) = 1$ et $\varepsilon(x) = 0$ et l'antipode $S : \mathcal{B}_1 \to \mathcal{B}_1$ est défini par $S(g) = g^5$ et $S(x) = -g^3 x$. L'algèbre de Hopf $\mathcal{B}_1$ est monomiale de type II associée à $(C_6, g^3, \chi, 0)$, où $\chi : C_6 \to \mathbb{C}$ est donnée par $\chi(g) = \omega$.

L'ensemble des objets galoisiens de $\mathcal{B}_1$ à isomorphisme près est

$$\mathrm{Gal}_k(\mathcal{B}_1) \cong H^2(C_6, k^*) \cong \{1\}$$

et donc, à homotopie près, l'ensemble des objets galoisiens est

$$\mathcal{H}_k(\mathcal{B}_1) \cong \{1\}.$$

Les objets galoisiens de $\mathcal{B}_1$ sont des objets $\mathcal{B}_1$-$\mathcal{B}_1$-bigaloisiens et par [Bi06, Théorème 4.1], le groupe des objets bigaloisiens de $\mathcal{B}_1$ est

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{BiGal}(\mathcal{B}_1) & \cong & \Gamma(C_6, g, \chi, 0) \\ & \cong & U(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})[6] \ltimes (k^* \times k^*/k^*) \\ & \cong & k^*. \end{array}$$

Par [BiCa06, Théorème 7.1], le groupe des cocycles paresseux est trivial :

$$H^2_L(\mathcal{B}_1) \cong H^2(C_6/C_2, k^*) \cong \{1\}.$$

4.7.3 Algèbre de Hopf duale d'une algèbre pointée

Considérons l'algèbre $(\mathcal{A}_1)^*$ qui n'est ni semisimple ni pointée. Nous reprenons des résultats qui seront prouvés au chapitre 5 et avec les notations de ce chapitre, l'algèbre $(\mathcal{A}_1)^* = H_3$.

La proposition 63 assure que l'algèbre H_3 est engendrée par α et β soumis aux relations

$$\alpha^6 = 1, \quad \beta^2 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha\beta = \xi\beta\alpha$$

où ξ est une racine primitive sixième de l'unité dans k.

La proposition 64 assure que la comultiplication $\Delta : H_3 \to H_3 \otimes H_3$ est donnée par

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \beta\alpha^3 \quad \text{et} \quad \Delta(\beta) = \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha^4.$$

Soit Z un objet galoisien de H_3, alors le théorème 66 assure que l'algèbre Z est engendrée par A_i, B_j et G, pour $i, j = 0, \ldots, 2$, et les relations

$$\begin{array}{rcl} A_iG^{\varepsilon_1}A_jG^{\varepsilon_2} & = & m_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} A_{[i+j]_3} G^{[\{i+j\}_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2]_2} + \\ & & + n_{i,j}^{\varepsilon_2,\varepsilon_2} B_{[i+j-1]_3} G^{[\{i+j\}_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2}, \\ A_iG^{\varepsilon_1}B_jG^{\varepsilon_2} & = & r_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} A_{[i+j+1]_3} G^{[\{i+j+1\}_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2} + \\ & & + s_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} B_{[i+j]_3} G^{[\{i+j+1\}_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2]_2}, \\ B_iG^{\varepsilon_1}A_jG^{\varepsilon_2} & = & t_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} A_{[i+j+1]_3} G^{[\{i+j+1\}_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2} + \\ & & + u_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} B_{[i+j]_3} G^{[\{i+j\}_3+\varepsilon_1\varepsilon_2]_2}, \\ B_iG^{\varepsilon_1}B_jG^{\varepsilon_2} & = & v_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} A_{[i+j+2]_3} G^{[\{i+j+2\}_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2\}_3]_2} + \\ & & + w_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} B_{[i+j+1]_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2]_3} G^{[\{i+j+1\}_3+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2}, \end{array}$$

où $m_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $n_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $r_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $s_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $t_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $u_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $v_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $w_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ pour $i, j = 0, \ldots, 2$ sont des scalaires et $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1$.

4.8 Dimension 14

Les algèbres de Hopf de dimension 14 sont toutes des algèbres de groupe.

4.8.1 Algèbres de groupes

Les groupes d'ordre 14 sont le groupe cyclique C_{14} et le groupe diédral D_7 d'ordre 14.

Algèbre du groupe cyclique C_{14}

Comme précédemment, les objets galoisiens de $k[C_{14}]$ sont triviaux à isomorphisme et homotopie près ; les objets bigaloisiens sont donnés par les automorphismes de C_{14} et on a

$$\mathrm{BiGal}(k[C_{14}]) \cong \mathrm{Aut}(C_{14}) \cong C_6.$$

Algèbre du groupe D_7

D'après [Kr87, table 8.1], $H^2(D_7, k^*)$ est trivial et par suite les objets galoisiens de $k[D_7]$ sont triviaux à isomorphisme et homotopie près. Le groupe des automorphismes de D_7 est

$$\mathrm{Aut}(D_7) \cong (\mathbb{Z}/7, \times)^* \ltimes (\mathbb{Z}/7, +) \cong C_7 \ltimes C_6$$

et le groupe des objets bigaloisiens est donc

$$\mathrm{BiGal}(k[D_7]) \cong C_7 \ltimes C_6.$$

4.8.2 Algèbre de fonctions sur le groupe non abélien D_7

Masuoka [Ma00] a montré que les objets galoisiens de k^{D_7} sont triviaux à isomorphisme et donc à homotopie près. Comme précédemment, les automorphismes de k^{D_7} sont donnés par les automorphismes du groupe D_7, qui sont tous intérieurs. Les automorphismes de k^{D_7} sont donc coïntérieurs et les objets bigaloisiens de k^{D_7} sont triviaux :

$$\mathrm{BiGal}(k^{D_7}) \cong \{1\}.$$

4.9 Dimension 15

Par [AN01], la seule algèbre de Hopf de dimension 15 est l'algèbre du groupe cyclique C_{15}.

4.9.1 Algèbre du groupe cyclique C_{15}

Comme précédement, les objets galoisiens de $k[C_{15}]$ sont triviaux à isomorphisme et homotopie près ; les objets bigaloisiens sont donnés par les automorphismes de C_{15} et on a

$$\mathrm{BiGal}(k[C_{15}]) \cong \mathrm{Aut}(C_{15}) \cong (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z})^* \ltimes (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^* \cong C_4 \times C_2,$$

car l'action est nécessairement triviale.

Chapitre 5

Une famille d'algèbres de Hopf ni semisimples ni pointées

Dans ce chapitre, nous étudions les objets galoisiens d'une famille d'algèbres de Hopf H_n ni semisimples ni pointées sur un corps k algébriquement clos et de caractéristique nulle. Nous donnons la description des objets galoisiens par générateurs et relations en fonction d'éléments du corps de base k qui sont solutions d'un système non linéaire. Les algèbres de Hopf H_2 et H_3 sont de dimensions respectives 8 et 12 et sont les algèbres de Hopf ni semisimples ni pointées considérées au chapitre 4. Pour $n = 2$, nous montrons que l'algèbre de Hopf H_2 est un quotient de $\mathcal{O}_{-i}(SL(2))$ et déduisons du chapitre 3 que les objets galoisiens de H_2 sont triviaux.

5.1 Objets galoisiens de la famille H_n

Pour tout $n \geq 2$, considérons l'algèbre P_n engendrée par deux générateurs g et x soumis aux relations

$$g^{2n} = 1, \quad x^2 = 1 - g^2 \quad \text{et} \quad gx + xg = 0.$$

La comultiplication $\Delta : P_n \to P_n \otimes P_n$ est définie par

$$\Delta(g) = g \otimes g \quad \text{et} \quad \Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1,$$

la coünité $\varepsilon : P_n \to k$ par $\varepsilon(g) = 1$ et $\varepsilon(x) = 0$ et l'antipode $S : P_n \to P_n$ par $S(g) = g^{-1}$ et $S(x) = -g^{-1}x$.

Notons H_n l'algèbre de Hopf duale de P_n. Si $n = 2$, l'algèbre de Hopf H_2 est l'algèbre $(A''_{C_4})^*$ de dimension 8 définie au paragraphe 4.4.3 et, si $n = 3$, l'algèbre $H_3 = (\mathcal{A}_1)^*$ définie au paragraphe 4.7.3.

5.1.1 Présentation de H_n

Cherchons une présentation de l'algèbre H_n.

Proposition 63. *L'algèbre H_n est engendrée par α et β soumis aux relations*

$$\alpha^{2n} = 1, \quad \beta^2 = 0 \quad \textit{et} \quad \alpha\beta = \xi\beta\alpha,$$

où ξ est une racine primitive $2n$-ième de l'unité.

Démonstration. Considérons la base (g^ix^j) pour $i=0,\dots,2n-1$ et $j=0,1$ de P_n et sa base duale $(\delta_{g^ix^j})$ de H_n. Comme la multiplication de H_n est induite par la comultiplication de P_n, on a

$$\begin{cases} \delta_{g^i}\delta_{g^j} = \delta_{g^i} & \text{si } i=j, \\ \delta_{g^i}\delta_{g^jx} = \delta_{g^jx} & \text{si } i=j+1, \\ \delta_{g^ix}\delta_{g^j} = \delta_{g^ix} & \text{si } i=j, \\ \delta_{g^ix}\delta_{g^jx} = 0. \end{cases}$$

Posons $\alpha = \sum\limits_{i=0}^{2n-1} \xi^i\delta_{g^i}$ et $\gamma = \sum\limits_{i=0}^{2n-1} \xi^i\delta_{g^ix}$. Calculons

$$\gamma^2 = \sum_{i,j=0}^{2n-1} \xi^i\xi^j\delta_{g^ix}\delta_{g^jx} = 0.$$

On a

$$\gamma\alpha = \sum_{i,j=0}^{2n-1} \xi^i\xi^j\delta_{g^jx}\delta_{g^i} = \sum_{j=0}^{2n-1} \xi^{2j}\delta_{g^jx}$$

et

$$\alpha\gamma = \sum_{i,j=0}^{2n-1} \xi^i\xi^j\delta_{g^i}\delta_{g^jx} = \xi\sum_{j=0}^{2n-1} \xi^{2j}\delta_{g^jx} = \xi\gamma\alpha.$$

On a aussi

$$\alpha^{2n} = (\sum_{i=0}^{2n-1} \xi^i\delta_{g^i})^{2n} = \sum_{i=0}^{2n-1} \xi^{2ni}\delta_{g^i} = \sum_{i=0}^{2n-1} \delta_{g^i}$$

et, comme

$$\alpha^{2n}\alpha = \alpha\alpha^{2n} = \sum_{i=0}^{2n-1} \xi^i\delta_{g^i} = \alpha$$

et

$$\alpha^{2n}\gamma = \xi^{2n}\gamma\alpha^{2n} = \gamma\alpha^{2n} = \sum_{i,j=0}^{2n-1} \xi^i\delta_{g^ix}\delta_{g^j} = \sum_{i=0}^{2n-1} \xi^i\delta_{g^ix} = \gamma,$$

on obtient $\alpha^{2n}=1$. Il suffit maintenant de noter que si $\beta = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}\gamma$, on a encore

$$\alpha^{2n} = 1, \quad \beta^2 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha\beta = \xi\beta\alpha.$$

Notons A l'algèbre engendrée par α' et β' soumis aux relations

$$(\alpha')^{2n} = 1, \quad (\beta')^2 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha'\beta' = \xi\beta'\alpha'.$$

L'application $\varphi : A \to H_n$ définie par $\varphi(\alpha') = \alpha$ et $\varphi(\beta') = \beta$ est linéaire entre deux expaces vectoriels de même dimension. Montrons que cette application est injective. Soit $\lambda_i, \mu_i \in k$ tels que

$$\sum_{i=0}^{2n-1} \lambda_i\alpha^i + \mu_i\beta\alpha^i = 0.$$

Comme

$$\alpha^i = \sum_{i=0}^{2n-1} \xi^{ij}\delta_{g^i} \quad \text{et} \quad \beta\alpha^i = \sum_{i=0}^{2n-1} \xi^{(i+1)j}\delta_{g^ix},$$

on obtient

$$\sum_{i,j=0}^{2n-1} \lambda_i\xi^{ij}\delta_{g^i} + \mu_i\xi^{(i+1)j}\delta_{g^ix} = 0.$$

Comme $\{\delta_{g^i}, \delta_{g^ix}\}$ est une base, on a donc

$$\sum_{i=0}^{2n-1} \lambda_i\xi^{ij} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=0}^{2n-1} \mu_i\xi^{(i+1)j}$$

pour tout $j = 0, \dots, 2n-1$. Les déterminants correspondant à ces deux systèmes sont des déterminants de Vandermonde qui sont non nuls puisque les ξ^i sont tous distincts pour $i = 0, \dots, 2n-1$. Par conséquent, les éléments λ_i, μ_i sont nuls et l'application $\varphi : A \to H_n$ est injective, donc bijective et nous avons la présentation annoncée de H_n. □

Proposition 64. *La comultiplication $\Delta : H_n \to H_n \otimes H_n$ est donnée par*

$$\Delta(\alpha) = \alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \beta\alpha^n \quad \textit{et} \quad \Delta(\beta) = \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha^{n+1};$$

la coünité $\varepsilon : H_n \to k$ est donnée par $\varepsilon(\alpha) = 1$ et $\varepsilon(\beta) = 0$ et l'antipode $S : H_n \to H_n$ par $S(\alpha) = \alpha^{-1}$ et $S(\beta) = -\xi^{-1}\beta\alpha^{[n-2]_n}$, où $[k]_n$ désigne le reste de la division euclidienne de k par n.

Démonstration. Calculons la valeur de $\Delta(\alpha)$. La comultiplication de H_n est donnée pour les éléments $(\delta_{g^i})_{i=0,\dots,2n-1}$ par

$$\Delta(\delta_{g^i}) = \sum_{k=0}^{2n-1} \delta_{g^k} \otimes \delta_{g^{i-k}x} + \sum_{k=0}^{2n-1} \delta_{g^kx} \otimes ((-1)^{i-k}\delta_{g^{i-k}x} - (-1)^{i-k-2}\delta_{g^{i-k-2}x}).$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha) &= \sum_{i=0}^{2n-1} \xi^i \Bigg(\sum_{k=0}^{2n-1} \delta_{g^k} \otimes \otimes\delta_{g^{i-k}x} + \sum_{k=0}^{2n-1} \delta_{g^kx} \otimes \\
&\quad \otimes \left((-1)^{i-k}\delta_{g^{i-k}x} - (-1)^{i-k-2}\delta_{g^{i-k-2}x}\right)\Bigg) \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} \xi^k\delta_{g^k} \otimes \sum_{i=0}^{2n-1} \xi^{i-k}\delta_{g^{i-k}x} + \sum_{k=0}^{2n-1} \xi^k\delta_{g^kx} \otimes \\
&\quad \otimes \left(\sum_{i=0}^{2n-1} \xi^{i-k}(\xi)^{n(i-k)}\delta_{g^{i-k}x} - \xi^2 \sum_{i=0}^{2n-1} \xi^{i-k-2}(\xi)^{n(i-k-2)}\delta_{g^{i-k-2}x} \right) \\
&= \alpha \otimes \alpha + (1-\xi^2)\gamma \otimes \beta\alpha^n \\
&= \alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \beta\alpha^n.
\end{aligned}$$

Calculons la valeur de $\Delta(\beta)$. La comultiplication de H_n est donnée pour les éléments $(\delta_{g^ix})_{i=0,\dots,2n-1}$ par

$$\Delta(\delta_{g^ix}) = \sum_{k=0}^{2n-1} \delta_{g^k} \otimes \delta_{g^{i-k}x} + \sum_{k=0}^{2n-1} \delta_{g^kx} \otimes (-1)^{i-k}\delta_{g^{i-k}}.$$

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\Delta(\gamma) &= \sum_{i=0}^{2n-1} \xi^i \left(\sum_{k=0}^{2n-1} \delta_{g^k} \otimes \delta_{g^{i-k}x} + \sum_{k=0}^{2n-1} \delta_{g^k x} \otimes (-1)^{i-k} \delta_{g^{i-k}} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{2n-1} \xi^k \delta_{g^k} \otimes \sum_{i=0}^{2n-1} \xi^{i-k} \delta_{g^{i-k}x} + \\
&\quad + \sum_{k=0}^{2n-1} \xi^k \delta_{g^k x} \otimes \sum_{i=0}^{2n-1} (\xi)^{(n+1)(i-k)} \delta_{g^{i-k}} \\
&= \alpha \otimes \gamma + \gamma \otimes \alpha^{n+1}
\end{aligned}$$

et on obtient

$$\Delta(\beta) = \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha^{n+1}.$$

Dans la base $(\delta_{g^i x^j})$, la coünité vaut $\varepsilon(\delta_{g^i x^j}) = 1$ si $i = 1$ et $j = 0$ et vaut $\varepsilon(\delta_{g^i x^j}) = 0$ sinon. Par conséquent, on a $\varepsilon(\alpha) = 1$ et $\varepsilon(\beta) = 0$. On vérifie alors immédiatement que l'antipode est donnée par

$$S(\alpha) = \alpha^{-1} \quad \text{et} \quad S(\beta) = -\xi^{-1}\beta\alpha^{[n-2]}.$$

$\square$

5.1.2 Objets galoisiens de H_n

Considérons un objet galoisien Z de H_n. Comme H_n est de dimension finie, Z est clivé.

Lemme 65. *Soit Z un objet galoisien de H_n et $\psi : H_n \to Z$ une application clivante. Notons*

$$A_i = \psi(\alpha^i), \quad B_i = \psi(\beta\alpha^i) \quad \textit{et} \quad G = \psi(\alpha^n)$$

pour tout $i = 0, \ldots, 2n-1$. Alors l'application $\varphi : H_n \to Z$ définie par

$$\varphi(\alpha^i) = A_i, \quad \varphi(\alpha^{n+i}) = A_i G, \quad \varphi(\beta\alpha^i) = B_i \quad \textit{et} \quad \varphi(\beta\alpha^{n+i}) = B_i G$$

pour tout $i = 0, \ldots, n-1$ est une application clivante pour Z.

De plus, la coaction $\rho : Z \to Z \otimes H_n$ vaut sur ces éléments

$$\begin{aligned}
\rho(A_i G^j) &= A_i G^j \otimes \alpha^{i+jn} + (\sum_{k=0}^{i-1} \xi^{2k}) B_i G^j \otimes \beta\alpha^{n(1+j)+i-1}, \\
\rho(B_i G^j) &= A_{i+1} G^j \otimes \beta\alpha^{nj+i} + B_i G^j \otimes \beta\alpha^{n(1+j)+i+1}
\end{aligned}$$

pour tout $i = 0, \ldots, n-1$ et $j = 0, 1$.

Démonstration. Notons que l'on a

$$\begin{aligned}
\Delta(\alpha^n) &= (\alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \beta\alpha^n)^n \\
&= \alpha^n \otimes \alpha^n + \sum_{k=0}^{n-1} \xi^k \alpha^k \beta\alpha^{n-k-1} \otimes \beta\alpha^{n+n-1} \\
&= \alpha^n \otimes \alpha^n + (\sum_{k=0}^{n} (\xi^2)^k) \beta\alpha^{n-1} \otimes \beta\alpha^{2n-1} \\
&= \alpha^n \otimes \alpha^n
\end{aligned}$$

car ξ^2 est une racine n-ième de l'unité et donc $\sum_{k=0}^{n}(\xi^2)^k = 0$. Alors si $g = \varphi(\alpha^n)$, on a $\varphi(\alpha^n)\varphi(\alpha^n)^{-1} = \varphi(\alpha^n)^{-1}\varphi(\alpha^n) = 1$ et par suite G est inversible dans Z d'inverse g. On vérifie alors immédiatement que $\varphi : H_n \to Z$ est un morphisme de comodules et que $\Phi : H_n \to Z$ définie par

$$\begin{array}{ll}
\Phi(\alpha^i) = \psi^{-1}(\alpha^i) & \text{pour } i = 0, \dots, n-1, \\
\Phi(\alpha^n) = g, & \\
\Phi(\alpha^i) = \psi^{-1}(\alpha^i)g & \text{pour } i = n+1, \dots, 2n, \\
\Phi(\beta\alpha^i) = \psi^{-1}(\beta\alpha^i) & \text{pour } i = 0, \dots, n-1, \\
\Phi(\beta\alpha^n) = \psi^{-1}(\beta)g, & \\
\Phi(\beta\alpha^i) = \psi^{-1}(\beta\alpha^i)g & \text{pour } i = n+1, \dots, 2n,
\end{array}$$

est l'inverse de φ pour la convolution.

Calculons alors les valeurs de la coaction. On a

$$\begin{aligned}
\rho(A_i) &= (\varphi \otimes \mathrm{id})\Delta(\alpha^i) \\
&= (\varphi \otimes \mathrm{id}) \left(\alpha^i \otimes \alpha^i + (\sum_{k=0}^{i-1} \xi^{2k}) \beta\alpha^{i-1} \otimes \beta\alpha^{n+i-1} \right) \\
&= A_i \otimes \alpha^i + (\sum_{k=0}^{i-1} \xi^{2k}) B_{i-1} \otimes \beta\alpha^{n+i-1}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\rho(B_i) &= (\varphi \otimes \mathrm{id})\Delta(\beta\alpha^i) \\
&= (\varphi \otimes \mathrm{id}) \left((\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha^{n+1})(\alpha^i \otimes \alpha^i + (\sum_{k=0}^{i-1} \xi^{2k}) \beta\alpha^{i-1} \otimes \beta\alpha^{n+i-1}) \right) \\
&= (\varphi \otimes \mathrm{id}) \left(\alpha^{i+1} \otimes \beta\alpha^i + \beta\alpha^i \otimes \alpha^{n+i+1} + 0 \right) \\
&= A_{i+1} \otimes \beta\alpha^i + B_i \otimes \alpha^{n+i+1}.
\end{aligned}$$

Comme α^n est group-like, on en déduit immédiatement le résultat annoncé. □

Notons $[x]_k$ le reste et $\{x\}_k$ le dividende de la division euclidienne de x par k, c'est-à-dire les entiers tels que $x = \{x\}_k k + [x]_k$ et $0 \leq [x]_k < k$.

Théorème 66. *Soit Z un objet galoisien de H_n. Alors Z est engendré par A_i, B_j et G, pour $i, j = 0, \dots, n-1$, et les relations*

$$\begin{aligned}
A_iG^{\varepsilon_1}A_jG^{\varepsilon_2} &= m_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} A_{[i+j]_n} G^{[\{i+j\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2]_2} + \\
&\quad + n_{i,j}^{\varepsilon_2,\varepsilon_2} B_{[i+j-1]_n} G^{[\{i+j\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2}, \\
A_iG^{\varepsilon_1}B_jG^{\varepsilon_2} &= r_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} A_{[i+j+1]_n} G^{[\{i+j+1\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2} + \\
&\quad + s_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} B_{[i+j]_n} G^{[\{i+j+1\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2]_2}, \\
B_iG^{\varepsilon_1}A_jG^{\varepsilon_2} &= t_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} A_{[i+j+1]_n} G^{[\{i+j+1\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2} + \\
&\quad + u_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} B_{[i+j]_n} G^{[\{i+j\}_n+\varepsilon_1\varepsilon_2]_2}, \\
B_iG^{\varepsilon_1}B_jG^{\varepsilon_2} &= v_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} A_{[i+j+2]_n} G^{[\{i+j+2\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2\}_n]_2} + \\
&\quad + w_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2} B_{[i+j+1]_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2]_n} G^{[\{i+j+1\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2},
\end{aligned} \tag{5.1}$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = 0, 1$ et, pour $i, j = 0, \dots, n-1$, $m_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $n_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $r_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $s_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $t_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$,

$u_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $v_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $w_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ *sont des scalaires vérifiant*

$$\begin{aligned}&(\sum_{m=0}^{i-1}\xi^{2m})\left(B_{i-1}G^{\varepsilon_1}A_jG^{\varepsilon_2}+\xi^{j+\varepsilon_2 n}A_jG^{\varepsilon_2}B_{i-1}G^{\varepsilon_1}\right)=\\&=m_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\sum_{k=0}^{[i+j]_n-1}\xi^{2k})B_{[i+j]_n}G^{[\{i+j\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2]_2}+\\&+n_{i,j}^{\varepsilon_2,\varepsilon_2}B_{[i+j-1]_n}G^{[\{i+j\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2},\end{aligned}\tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}&(\sum_{k=0}^{i-1}\xi^{2k})B_{i-1}G^{\varepsilon_1}B_jG^{\varepsilon_2}+\xi^{i+n\varepsilon_1}A_iG^{\varepsilon_1}A_{j+1}G^{\varepsilon_2})=\\&=r_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}B_{[i+j]_n}G^{[\{i+j+1\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2}+s_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}A_{[i+j+1]_n}G^{[\{i+j+1\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2]_2},\end{aligned}\tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}&A_{i+1}G^{\varepsilon_1}A_jG^{\varepsilon_2}+\xi^{i+1+n(\varepsilon_1+1)}(\sum_{k=0}^{j-1}\xi^{2k})B_iG^{\varepsilon_1}B_{j-1}G^{\varepsilon_2}=\\&=t_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}B_{[i+j]_n}G^{[\{i+j+1\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2}+u_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}A_{[i+j+1]_n}G^{[\{i+j\}_n+\varepsilon_1\varepsilon_2]_2}\end{aligned}\tag{5.4}$$

et

$$\begin{aligned}&A_{i+1}G^{\varepsilon_1}B_jG^{\varepsilon_2}+\xi^{n(\varepsilon_1+1)+i+1}B_iG^{\varepsilon_1}A_{j+1}G^{\varepsilon_2}=\\&=v_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\sum_{k=0}^{[i+j+2]_n})A_{[i+j+1]_n}G^{[\{i+j+2\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2\}_n]_2}+\\&+w_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}A_{[i+j+2]_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2]_n}G^{[\{i+j+1\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2}\end{aligned}\tag{5.5}$$

Nous appellons les équations (5.2)-(5.5) les *relations de compatibilité de Z*. En utilisant les relations (5.1) de présentation de l'algèbre Z, les relations de compatibilité donnent un système non linéaire en les variables ($m_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $n_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $r_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $s_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $t_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $u_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $v_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$, $w_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$).

Démonstration. Considérons l'application clivante $\varphi : H_n \to Z$ définie par le lemme 65. Cherchons l'écriture des produits $(A_iG^j)(A_kG^l), (A_iG^j)(B_kG^l)$, $(B_iG^j)(A_kG^l)$ et $(B_iG^j)(B_kG^l))$, pour $i,k=0,\ldots,n-1$ et $j,l=0,1$, dans la base $\{A_iG^j, B_kG^l\}$.

Calculons l'image par ρ de $(A_iG^{\varepsilon_1})(A_jG^{\varepsilon_2})$. On a

$$\begin{aligned}&\rho((A_iG^{\varepsilon_1})(A_jG^{\varepsilon_2}))=\\&=\left(A_iG^{\varepsilon_1}\otimes\alpha^{i+\varepsilon_1 n}+(\sum_{k=0}^{i-1}\xi^{2k})B_{i-1}G^{\varepsilon_1}\otimes\beta\alpha^{n(1+\varepsilon_1)+i-1}\right)\times\\&\times\left(A_jG^{\varepsilon_2}\otimes\alpha^{j+\varepsilon_2 n}+(\sum_{m=0}^{j-1}\xi^{2m})B_{j-1}G^{\varepsilon_2}\otimes\beta\alpha^{n(1+\varepsilon_2)+j-1}\right)\\&=A_iG^{\varepsilon_1}A_jG^{\varepsilon_2}\otimes\alpha^{i+j+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)n}+\Bigg((\sum_{m=0}^{i-1}\xi^{2m})B_{i-1}G^{\varepsilon_1}A_jG^{\varepsilon_2}+\\&+\xi^{j+\varepsilon_2 n}A_jG^{\varepsilon_2}(\sum_{k=0}^{i-1}\xi^{2k})B_{i-1}G^{\varepsilon_1}\Bigg)\otimes\beta\alpha^{n(1+\varepsilon_1+\varepsilon_2)+i+j-1}.\end{aligned}$$

Il existe alors des scalaires $m_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}, n_{i,j}^{\varepsilon_2,\varepsilon_2}\in k$ tels que

$$A_iG^{\varepsilon_1}A_jG^{\varepsilon_2}=m_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}A_{[i+j]_n}G^{[\{i+j\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2]_2}+n_{i,j}^{\varepsilon_2,\varepsilon_2}B_{[i+j-1]_n}G^{[\{i+j\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2}$$

et on a la relation de compatibilité

$$\begin{aligned}
&(\sum_{m=0}^{i-1}\xi^{2m})\left(B_{i-1}G^{\varepsilon_1}A_jG^{\varepsilon_2}+\xi^{j+\varepsilon_2 n}A_jG^{\varepsilon_2}B_{i-1}G^{\varepsilon_1}\right)=\\
&=m_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\sum_{k=0}^{[i+j]_n-1}\xi^{2k})B_{[i+j]_n}G^{[\{i+j\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2]_2}+\\
&+n_{i,j}^{\varepsilon_2,\varepsilon_2}B_{[i+j-1]_n}G^{[\{i+j\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2}
\end{aligned}$$

Calculons

$$\begin{aligned}
&\rho(A_iG^{\varepsilon_1}B_jG^{\varepsilon_2})=A_iG^{\varepsilon_1}B_jG^{\varepsilon_2}\otimes\alpha^{i+j+1+n(\varepsilon_1+\varepsilon_2+1)}+\\
&+\left((\sum_{k=0}^{i-1}\xi^{2k})B_{i-1}G^{\varepsilon_1}B_jG^{\varepsilon_2}+\xi^{i+n\varepsilon_1}A_iG^{\varepsilon_1}A_{j+1}G^{\varepsilon_2})\right)\otimes\beta\alpha^{i+j+n(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}
\end{aligned}$$

Il existe donc des éléments $r_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}, s_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ tels que

$$\begin{aligned}
A_iG^{\varepsilon_1}B_jG^{\varepsilon_2} \quad = \quad & r_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}A_{[i+j+1]_n}G^{[\{i+j+1\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2}+\\
&+s_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}B_{[i+j]_n}G^{[\{i+j+1\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2]_2}.
\end{aligned}$$

Nous avons aussi la compatibilité

$$\begin{aligned}
&(\sum_{k=0}^{i-1}\xi^{2k})B_{i-1}G^{\varepsilon_1}B_jG^{\varepsilon_2}+\xi^{i+n\varepsilon_1}A_iG^{\varepsilon_1}A_{j+1}G^{\varepsilon_2})=\\
&=r_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}B_{[i+j]_n}G^{[\{i+j+1\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2}+s_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}A_{[i+j+1]_n}G^{[\{i+j+1\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2]_2}.
\end{aligned}$$

Calculons

$$\begin{aligned}
&\rho(B_iG^{\varepsilon_1}A_jG^{\varepsilon_2})=B_iG^{\varepsilon_1}A_jG^{\varepsilon_2}\otimes\alpha^{i+j+1+n(\varepsilon_1+\varepsilon_2+1)}+\Big(A_{i+1}G^{\varepsilon_1}A_jG^{\varepsilon_2}+\\
&+\xi^{i+1+n(\varepsilon_1+1)}(\sum_{k=0}^{j-1}\xi^{2k})B_iG^{\varepsilon_1}B_{j-1}G^{\varepsilon_2}\Big)\otimes\beta\alpha^{i+j+n(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}
\end{aligned}$$

Il existe donc des éléments $t_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}, u_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ tels que

$$\begin{aligned}
B_iG^{\varepsilon_1}A_jG^{\varepsilon_2} \quad = \quad & t_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}A_{[i+j+1]_n}G^{[\{i+j+1\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2}+\\
&+u_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}B_{[i+j]_n}G^{[\{i+j\}_n+\varepsilon_1\varepsilon_2]_2}.
\end{aligned}$$

Nous avons aussi la compatibilité

$$\begin{aligned}
&A_{i+1}G^{\varepsilon_1}A_jG^{\varepsilon_2}+\xi^{i+1+n(\varepsilon_1+1)}(\sum_{k=0}^{j-1}\xi^{2k})B_iG^{\varepsilon_1}B_{j-1}G^{\varepsilon_2}=\\
&=t_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}B_{[i+j]_n}G^{[\{i+j+1\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2}+u_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}A_{[i+j+1]_n}G^{[\{i+j\}_n+\varepsilon_1\varepsilon_2]_2}
\end{aligned}$$

Calculons

$$\begin{aligned}
&\rho(B_iG^{\varepsilon_1}B_jG^{\varepsilon_2})=B_iG^{\varepsilon_1}B_jG^{\varepsilon_2}\otimes\alpha^{i+j+2+n(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}+(A_{i+1}G^{\varepsilon_1}B_jG^{\varepsilon_2}+\\
&+\xi^{n(\varepsilon_1+1)+i+1}B_iG^{\varepsilon_1}A_{j+1}G^{\varepsilon_2}\big)\otimes\beta\alpha^{i+j+1+n(\varepsilon_1+\varepsilon_2+1)}
\end{aligned}$$

Il existe donc des éléments $v_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}, w_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ tels que

$$\begin{aligned}
B_iG^{\varepsilon_1}B_jG^{\varepsilon_2} \quad = \quad & v_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}A_{[i+j+2]_n}G^{[\{i+j+2\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2\}_n]_2}+\\
&w_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}B_{[i+j+1]_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2]_n}G^{[\{i+j+1\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2}.
\end{aligned}$$

Nous avons aussi la compatibilité

$$\begin{aligned}&A_{i+1}G^{\varepsilon_1}B_jG^{\varepsilon_2}+\xi^{n(\varepsilon_1+1)+i+1}B_iG^{\varepsilon_1}A_{j+1}G^{\varepsilon_2}=\\&=v_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}(\sum_{k=0}^{[i+j+2]_n})A_{[i+j+1]_n}G^{[\{i+j+2\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2\}_n]_2}+\\&+w_{i,j}^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}A_{[i+j+2]_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2]_n}G^{[\{i+j+1\}_n+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1]_2}.\end{aligned}$$

□

5.2 Objets galoisiens de H_2

Dans ce paragraphe, nous considérons le cas $n = 2$. L'algèbre H_2 est de dimension 8 sur le corps de base k et est l'unique algèbre de Hopf de dimension 8 ni semisimple ni pointée.

5.2.1 Présentation de H_2 et quotient de $\mathcal{O}_{-\xi}(SL(2))$

La proposition 63 implique en particulier que l'algèbre H_2 est engendrée par α et β soumis aux relations

$$\alpha^4 = 1, \quad \beta^2 = 0 \quad \text{et} \quad \alpha\beta = \xi\beta\alpha \tag{5.6}$$

où ξ est une racine carrée de -1 dans k. La comultiplication $\Delta_{H_2} : H_2 \to H_2 \otimes H_2$ est donnée par

$$\Delta_{H_2}(\alpha) = \alpha \otimes \alpha + \beta \otimes \beta\alpha^2 \quad \text{et} \quad \Delta_{H_2}(\beta) = \alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha^3,$$

la coünité $\varepsilon : H_2 \to k$ est donnée par $\varepsilon(\alpha) = 1$ et $\varepsilon(\beta) = 0$ et l'antipode $S_{H_2} : H_2 \to H_2$ par $S_{H_2}(\alpha) = \alpha^{-1}$ et $S_{H_2}(\beta) = -\xi^{-1}\beta$.

Notons E_ξ la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\xi & 0 \end{pmatrix},$$

où ξ est une racine carrée de -1 dans k. Reprenons les notations du chapitre 3 et notons $\mathcal{O}_{-\xi}(SL(2)) = \mathcal{B}(E_\xi)$ l'algèbre engendrée par a_{ij}, $1 \leq i, j \leq 2$, et les relations

$$E_\xi^{-1}a^tE_\xi a = I_2 = aE_\xi^{-1}a^tE_\xi, \tag{5.7}$$

où E_ξ^{-1} est la matrice inverse de E_ξ, a est la matrice (a_{ij}), I_2 la matrice identité de rang 2 et a^t la tranposée de a. La comultiplication

$$\Delta_{\mathcal{O}_{-\xi}(SL(2))} : \mathcal{O}_{-\xi}(SL(2)) \to \mathcal{O}_{-\xi}(SL(2)) \otimes \mathcal{O}_{-\xi}(SL(2))$$

est donnée par

$$\Delta_{\mathcal{O}_{-\xi}(SL(2))}(a_{ij}) = a_{i1} \otimes a_{1j} + a_{i2} \otimes a_{2j},$$

pour $i, j = 1, 2$. La coünité $\varepsilon : \mathcal{O}_{-\xi}(SL(2)) \to k$ est définie par $\varepsilon(a_{ij}) = \delta_{ij}$ pour tout $i, j = 1, 2$ où δ désigne le symbole de Kronecker. L'antipode

$$S_{\mathcal{O}_{-\xi}(SL(2))} : \mathcal{O}_{-\xi}(SL(2)) \to \mathcal{O}_{-\xi}(SL(2))$$

est défini par l'identité $S(a) = E_\xi^{-1} a^t E_\xi$.

Posons

$$\varphi(a_{11}) = \alpha, \quad \varphi(a_{12}) = \beta, \quad \varphi(a_{21}) = \beta\alpha^2 \quad \text{et} \quad \varphi(a_{22}) = \alpha^3. \tag{5.8}$$

Proposition 67. *La relation (5.8) définit un morphisme d'algèbres de Hopf surjectif $\varphi : \mathcal{O}_{-\xi}(SL(2)) \to H_2$.*

Démonstration. Montrons que φ est un morphisme d'algèbres. Pour cela il suffit de vérifier que les relations de définition de $\mathcal{O}_{-\xi}(SL(2))$ valent aussi dans H_2. On a

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} 0 & -\xi^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & \varphi(a_{21}) \\ \varphi(a_{12}) & \varphi(a_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & \varphi(a_{12}) \\ \varphi(a_{21}) & \varphi(a_{22}) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -\xi^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta\alpha^2 \\ \beta & \alpha^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta\alpha^2 & \alpha^3 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -\xi^{-1}\beta & -\xi^{-1}\alpha^3 \\ \alpha & \beta\alpha^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta\alpha^2 & \alpha^3 \\ -\xi\alpha & -\xi\beta \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} -\xi^{-1}\beta^2\alpha^2 + \alpha^4 & -\xi^{-1}\beta\alpha^3 + \alpha^3\beta \\ \alpha\beta\alpha^2 - \xi\beta\alpha^3 & \alpha^4 - \xi\beta^2\alpha^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Les relations (5.6) assurent alors que

$$\begin{pmatrix} 0 & -\xi^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & \varphi(a_{21}) \\ \varphi(a_{12}) & \varphi(a_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\xi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & \varphi(a_{12}) \\ \varphi(a_{21}) & \varphi(a_{22}) \end{pmatrix} = I_2.$$

De la même manière, on montre que

$$\begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & \varphi(a_{12}) \\ \varphi(a_{21}) & \varphi(a_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\xi^{-1} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(a_{11}) & \varphi(a_{21}) \\ \varphi(a_{12}) & \varphi(a_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\xi & 0 \end{pmatrix} = I_2.$$

Comme les générateurs α et β de l'algèbre H_2 sont dans l'image de φ, le morphisme d'algèbres φ est surjectif.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{-\xi}(SL(2)) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Delta_{\mathcal{O}_{-\xi}(SL(2))}"'] & H_2 \arrow[d, "\Delta_{H_2}"] \\
\mathcal{O}_{-\xi}(SL(2)) \otimes \mathcal{O}_{-\xi}(SL(2)) \arrow[r, "\varphi\otimes\varphi"] & H_2 \otimes H_2
\end{tikzcd}$$

est commutatif pour les générateurs a_{11}, a_{12}, a_{21} et a_{22} de l'algèbre $\mathcal{O}_{-\xi}(SL(2))$. Par conséquent, le morphisme d'algèbres $\varphi : \mathcal{O}_{-\xi}(SL(2)) \to H_2$ est un morphisme de cogèbres. De manière analogue, on vérifie sur les gńérateurs que l'on a la relation

$$\varphi \circ S_{\mathcal{O}_{-\xi}(SL(2))} = S_{H_2} \circ \varphi.$$

$\square$

5.2.2 Objets galoisiens de H_2

Nous reprenons une méthode analogue à celle utilisée pour classifier les objets galoisiens de $\mathcal{O}_q(SL(2))$.

Théorème 68. *Les objets galoisiens de H_2 sont triviaux.*

Démonstration. Notons V le comodule fondamental de dimension 2 de H_2, c'est-à-dire l'espace vectoriel k^2 de base (v_1, v_2) muni de la coaction $\delta : V \to V \otimes H_2$ définie par

$$\delta(v_1) = v_1 \otimes \alpha + v_2 \otimes \beta\alpha^2 \quad \text{et} \quad \delta(v_2) = v_1 \otimes \beta + v_2 \otimes \alpha^3.$$

Notons que ce comodule fondamental est l'unique comodule simple de dimension 2.

Définissons l'application linéaire $\beta_1 : V \otimes V \to k$ par

$$\beta_1(v_i \otimes v_j) = (E_\xi)_{ij},$$

pour $i, j = 1, 2$ et où $(E_\xi)_{ij}$ désigne l'élément ij de la matrice E_ξ. De manière analogue, notons $\nu_1 : k \to V \otimes V$ l'application définie par

$$\nu(1) = \sum_{i,j=1,2} (E_\xi^{-1})_{ij} v_i \otimes v_j,$$

où $(E_\xi^{-1})_{ij}$ désigne l'élément i, j de la matrice E_ξ^{-1}. Ces deux applications sont clairement des morphismes de H_2-comodules et on a les relations

$$(\beta_1 \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_V \otimes \nu_1) = \mathrm{id}_V = (\mathrm{id}_V \otimes \beta_1) \circ (\nu_1 \otimes \mathrm{id}_V). \tag{5.9}$$

Notons maintenant k_{α^2} le comodule associé à l'élément *group-like* α^2, c'est-à-dire l'espace vectoriel k de base e et de coaction $\delta_{\alpha^2} : k_{\alpha^2} \to k_{\alpha^2} \otimes H_2$ définie par

$$\delta_{\alpha^2}(e) = e \otimes \alpha^2.$$

Définissons l'application linéaire $\beta_2 : V \otimes V \to k_{\alpha^2}$ par

$$\beta_2(v_i \otimes v_j) = \Lambda_{ij} e,$$

pour $i, j = 1, 2$ et où Λ est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\xi \end{pmatrix}$. Définissons aussi l'application linéaire $\nu_2 : k_{\alpha^2} \to V \otimes V$ par

$$\nu_2(e) = \sum_{i,j=1,2} \Lambda_{ij} v_i \otimes v_j,$$

où Λ_{ij} désigne l'élément i, j de la matrice Λ. On vérifie aisément que β_2 et ν_2 sont des morphismes de H_2-comodules. Si on note $\tau : k_{\alpha^2} \otimes V \to V \otimes k_{\alpha^2}$ et $\tilde{\tau} : V \otimes k_{\alpha^2} \to k_{\alpha^2} \otimes V$ les morphismes de H_2-comodules définis par

$$\tau(e \otimes v_i) = \sum_{j=1,2} \Lambda_{ij} v_j \otimes e$$

et

$$\tilde{\tau}(v_i \otimes e) = \sum_{j=1,2} \Lambda_{ij} e \otimes v_j$$

pour $i = 1, 2$, on a les relations

$$\tau \circ (\beta_2 \otimes \mathrm{id}_V) \circ (\mathrm{id}_V \otimes \nu_2) = \mathrm{id}_{V \otimes k_{\alpha^2}} \tag{5.10}$$

et

$$\tilde{\tau} \circ (\mathrm{id}_V \otimes \beta_2) \circ (\nu_2 \otimes \mathrm{id}_V) = \mathrm{id}_{k_{\alpha^2} \otimes V} \tag{5.11}$$

ainsi que la relation

$$\tau \circ \tilde{\tau} = \mathrm{id}_{V \otimes k_{\alpha^2}} . \tag{5.12}$$

Soit Z un objet galoisien de H_2 à gauche. Notons $\omega_Z : \mathrm{Comod}(H_2) \to \mathrm{Vect}(k)$ le foncteur fibre associé à Z et notons $W = \omega_Z(V)$. Comme Z est un objet galoisien clivé, W est de même dimension que V et nous notons $(w_i)_{i=1,2}$ une base de W.

Notons F la matrice de l'application linéaire $\omega_Z(\beta_1)$ dans la base (w_i). Comme $W = V \square_{H_2} Z$, il existe des éléments $t_{ij} \in Z$ tels que

$$w_j = \sum_{i=1,2} v_i \otimes t_{ij} \tag{5.13}$$

pour tout $j = 1, 2$. Si on note $\psi_0 : k \square_{H_2} Z \to k$ et

$$\psi_2 : (V \square_{H_2} Z) \otimes (V \square_{H_2} Z) \to (V \otimes V) \square_{H_2} Z$$

les isomorphismes de structure monoïdale, on a

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \omega_Z(\beta_1)(w_i \otimes w_j) \\ &= \psi_0 \circ (\beta_1 \otimes \mathrm{id}) \circ \psi_2 \left((\sum_{k=1,2} v_k \otimes t_{ki}) \otimes (\sum_{l=1,2} v_l \otimes t_{lj}) \right) \\ &= \psi_0 \circ (\beta_1 \otimes \mathrm{id}) \left(\sum_{k=1,2} v_k \otimes v_l \otimes t_{ki} t_{lj} \right) \\ &= \psi_0 \left((\sum_{k=1,2} E_\xi)_{kl}) \otimes t_{ki} t_{lj} \right) \\ &= \sum_{k=1,2} (E_\xi)_{kl} t_{ki} t_{lj}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

De manière analogue, il existe une matrice $\tilde{F}$ définissant l'application $\omega_Z(\nu_1)$ dans la base (w_i) et un calcul similaire à (5.14) assure que

$$E_\xi^{-1} = T \tilde{F} T^t.$$

En considérant l'image par le foncteur monoïdal ω_Z des relations (5.9), on obtient $\tilde{F} = F^{-1}$ et, par conséquent, on a

$$F^{-1} T^t E_\xi T = I_2 = T F^{-1} T^t E_\xi.$$

La classification des objets bigaloisiens d'une algèbre de Hopf de dimension 8 (voir 4.4) assure que tout objet galoisien de H_2 est un objet H_2-H_2-bigaloisien ; le foncteur $\omega_Z : \mathrm{Comod}(H_2) \to \mathrm{Vect}(k)$ se factorise donc en une autoéquivalence de catégories

$$\omega_Z : \mathrm{Comod}(H_2) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Comod}(H_2).$$

L'application $\omega_Z(\beta_1) : W \otimes W \to k$ est donc un morphisme de H_2-comodule. Le H_2-comodule W est isomorphe à V car V est le seul comodule simple de dimension 2 de H_2 et, comme W est simple et autodual, on a

$$\mathrm{Hom}(W \otimes W, k) \cong k1_W.$$

Il existe donc $f \in k^*$ tel que $F = fE_\xi$ et on a

$$fE_\xi^{-1}T^tE_\xi T = I_2 = fTE_\xi^{-1}T^tE_\xi. \tag{5.15}$$

Considérons maintenant les morphismes β_2 et ν_2. Notons z un élément de Z tel que $\delta(z) = \alpha^2 \otimes z$. Comme $\delta(z^2) = 1 \otimes z^2$, on a $z^2 \in k^*$. Comme précédemment, il existe deux matrices $G, G' \in GL_2(k)$ telles que $\omega_Z(\beta_2) : W \otimes W \to k_{\alpha^2}$ et $\omega_Z(\nu_2) : k_{\alpha^2} \to W \otimes W$ soient données par G et G'. Comme Z est un objet H_2-bigaloisien, les deux applications $\omega_Z(\beta_2)$ et $\omega_Z(\nu_2)$ sont des morphismes de H_2-comodules. Notons que V est le seul comodule simple de dimension 2 et que

$$\mathrm{Hom}(V \otimes V, k_{\alpha^2}) \cong \mathrm{Hom}(V, V \otimes k_{\alpha^2}) \cong \mathrm{Hom}(V, V).$$

Alors il existe $g, \gamma \in k^*$ tels que $G = g\Lambda$ et $G' = \gamma\Lambda$. De manière analogue, il existe $x, \tilde{x} \in k^*$ tels que les morphismes de H_2-comodules $\omega_Z(\tau)$ et $\omega_Z(\tilde{\tau})$ soient donnés par les matrices $x\Lambda$ et $\tilde{x}\Lambda$ respectivement.

En considérant l'image par le foncteur monoïdal ω_Z de la relation (5.10), on a

$$\sum_{ijk=1,2} \gamma\Lambda_{ij} g\Lambda_{jk} x(\Lambda^2)_{kl} = 1$$

et donc $\gamma g x = 1$. De la même manière, en consiérant l'image de la relation (5.11), on obtient $\gamma g\tilde{x} = 1$ et, en considérant l'image de la relation (5.12), on a $\tilde{x}x = 1$. De ces relations, on obtient $x = \tilde{x} = x^{-1}$ et $\gamma = xg^{-1}$.

Comme $W = V\square_{H_2}Z$ et comme β_2 et ν_2 sont des morphismes de H_2-comodules, un calcul similaire à (5.14) donne

$$g\Lambda z = T^t\Lambda T \tag{5.16}$$

et

$$\Lambda z = \gamma T\Lambda T^t. \tag{5.17}$$

De manière analogue, comme τ est un morphisme de H_2-comodules, on a

$$xT\Lambda^2 z = z\Lambda^2 T.$$

et par conséquent, comme $\gamma = g^{-1}x$, la relation (5.17) se réduit à

$$gzI_2 = \Lambda^{-1}T^t\Lambda T$$

et est donc équivalente à (5.16). En choisissant z tel que $z^2 = g^{-1}f^{-1}$, on obtient la relation

$$zf\Lambda^{-1}T^t\Lambda T = I_2. \tag{5.18}$$

Notons A l'algèbre engendrée par y_{ij} pour $i, j = 1, 2$ et les relations

$$E_\xi^{-1}Y^tE_\xi Y = YE_\xi^{-1}Y^tE_\xi = I_2$$

et

$$y_{11}^2\Lambda^{-1}Y^t\Lambda Y = I_2, \tag{5.19}$$

où $Y = (y_{ij})$.

Notons encore $\delta : A \to H_2 \otimes A$ le morphisme d'algèbres défini par

$$\begin{cases} \delta(y_{1,i}) = \alpha \otimes y_{1,i} + \beta \otimes y_{2,i} \\ \delta(y_{2,i}) = \beta\alpha^2 \otimes y_{1,i} + \alpha^3 \otimes y_{2,i}, \end{cases}$$

pour $i = 1, 2$. On vérifie de manière analogue à [Bi203, Proposition 3.3] que (A, δ) est une algèbre H_2-comodule dont l'application canonique can : $A \otimes A \to H_2 \otimes A$ est bijective.

Posons

$$\varphi_1(Y) = \frac{1}{\sqrt{f}}T. \tag{5.20}$$

Les relations (5.15) et (5.18) assurent que l'application φ_1 définie par (5.20) est un morphisme d'algèbres, A est une algèbre H_2-comodule dont l'application canonique est bijective, Z est un objet galoisien de H_2 qui est fidèlement plat. Alors φ_1 est une bijection et, en particulier, l'algèbre Z est engendrée par les élément t_{ij} et les relations (5.15) et (5.18).

Posons

$$\varphi_2(T) = \sqrt{f}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta\alpha^2 & \alpha^3 \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

Comme précédement, l'application $\varphi_2 : Z \to H_2$ définie par (5.21) est un morphisme d'algèbres H_2-comodules entre deux objets galoisiens fidèlement plats et est donc un isomorphisme d'objets galoisiens. $\square$

Bibliographie

[AEGN02] Aljadeff, E. ; Etingof, P. ; Gelaki, S. ; Nikshych, D., On twisting in finite dimensional Hopf algebras. *J. Algebra*, **256**, (2002), 484–501.

[AN01] Andruskiewitsch, N. ; Natale, S., Counting arguments for Hopf algebras of low dimension. *Tsukuba J. Math.*, **25**, (2001), 187–201.

[Au1] Aubriot, T., Classification des objets Galoisiens de $U_q(\mathfrak{g})$ à homotopie près. to appear in *Comm. Algebra.*

[Au2] Aubriot, T., On the classification of Galois objects over the quantum group of a nondegenerate bilinear form. *Manuscripta Math.*, **122**, (2007), 119–135.

[Bi103] Bichon, J., Hopf-Galois systems. *J. Algebra*, **264**, (2003), 565–581.

[Bi203] Bichon, J., The representation category of the quantum group of a non-degenerate bilinear form. *Comm. Algebra*, **31**, (2003), 4831–4851.

[Bi06] Bichon, J., Galois and Bi-Galois objects over monomial non-semisimple Hopf algebras. *J. Algebra Appl.*, **5**, (2006), 653-680.

[BiCa06] Bichon, J. ; Carnovale, G., Lazy cohomology : an analogue of the Schur multiplier for arbitrary Hopf algebra. *J. Pure Appl. Algebra* **204**, (2006), 627–665.

[BCM86] Blattner, R. J. ; Cohen, M., Montgomery, S., A duality theorem for Hopf module algebras. J. Algebra, **95**, (1985), 153–172.

[Br82] Brown, K. S., Cohomology of groups. Graduate Texts in Mathematics, volume 87, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.

[BM89] Blattner, R. J. ; Montgomery, S., Crossed products and Galois extensions of Hopf algebras. *Pacific J. Math.*, **137**, (1989), 37–54.

[C98] Caenepeel, S., Brauer group, Hopf algebras and Galois theory. *K*-Monographs in Mathematics, **4**. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht, 1998.

[CC04] Carnovale, G. ; Cuadra, J., Cocycle twisting of $E(n)$-module algebras and applications to the Brauer group. *K-Theory*, **33**, (2004), 251–276.

[CHYZ04] Chen, X.-W. ; Huang, H.-L. ; Ye, Y. ; Zhang, P., Monomial Hopf algebras. *J. Algebra*, **275**, (2004), 212–232.

[CK76] Cook, P.M. ; Kreimer, H.F., Galois theory and normal bases. *J. Algebra*, **43**, (1976), 115–121.

[Da01] Davydov, A. ; Galois algebras and monoidal funtors between categories of representations of finite groups. *J. Algebra*, **244**, (2001), 273–301.

[Do89] Doi, Y., Equivalent crossed products for a Hopf algebra. *Comm. Alg.*, **17**, (1989), 3053–3085.

[DoTa86] Doi, Y. ; Takeuchi, M., Cleft comodule algebras for a bialgebra. *Comm. Alg.*, **14**, (1886), 801–818.

[DoT95] Doi, Y. ; Takeuchi, M., Quaternion algebras and Hopf crossed products. *Comm. Algebra* , **23**, (1995), 3291–3325.

[DvL90] Dubois-Violette, M. ; Launer, G., The quantum group of a nondegenerate bilinear form. *Phys. Lett. B*, **245**, (1990), 175–177.

[EG] Etingof, P. ; Gelaki, S., The classification of triangular semisimple and cosemisimple Hopf algebras over an algebraically closed field. *Internat. Math. Res. Notices*, **5** (2000), 223–234.

[EM66] Eilenberg, S. ; Moore, J. C., Homology and fibrations. I. Coalgebras, cotensor product and its derived functors. Comment. Math. Helv. **40** (1966) 199–236.

[F97] Fukuda, N., Semisimple Hopf algebras of dimension 12. *Tsukuba J. Math.*, **21** (1997), 43–54.

[G02] Gelaki, S., Semisimple triangular Hopf algebras and Tannakian categories. Proc. Sympos. Pure Math., **70**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2002).

[J95] Jantzen, J. C., Lectures on Quantum Groups. Graduate Studies in Mathematics, Volume 6, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1995).

[Kr87] Karpilovsky, G., The Schur multiplier. London Mathematical Society Monographs. Oxford University Press, New York, 1987.

[Ka95] Kassel, C., Quantum groups. Graduate Texts in Mathematics, **vol. 155**. Springer-Verlag, New York 1995.

[Ka04] Kassel, C., Quantum principal bundles up to homotopy equivalence. *The Legacy of Niels Henrik Abel*, 737–748, Springer-Verlag, Berlin (2004).

[KaSn05] Kassel, C. ; Schneider, H.-J., Homotopy theory of Hopf Galois extensions. *Annales Inst. Fourier (Grenoble)*, **55** (2005), 2521–2550.

[LR88] Larson, R. ; Radford, D., Finite-dimensional cosemisimple Hopf algebras in characteristic 0 are semisimple. *J. Algebra*, **117**, (1988), 267–289.

[Ma94] Masuoka, A., Cleft extensions for a Hopf algebra generated by a nearly primitive element. *Comm. Algebra*, **22**, (1994), 4537–5459.

[Ma00] Masuoka, A., Cocycle deformations and Galois objects for some Cosemisimple Hopf Algebras of finite dimension. New trends in Hopf algebra theory (La Falda, 1999), 195–214, Contemp. Math. **267**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2000.

[Mo93] Montgomery, S., Hopf algebras and their actions on rings. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 82, American Mathematical Society, Providence, RI, (1993).

[MS05] Montgomery, S. ; Schneider, H.-J., Krull relations in Hopf Galois extensions : lifting and twisting. *J. Algebra*, **288**, (2005), 364–383.

[Mv94] Movshev, M., Twisting in group algebras of finite groups. *Funct. Anal. Appl.*, **27**, (1993), 240–244.

[N02] Natale, S., Hopf algebras of dimension 12. *Algebr. Represent. Theory*, **5**, (2002), no. 5, 445–455.

[Os05] Ostrik, V., Module categories over representations of $SL_q(2)$ in the non-semisimple case. *Preprint arXiv :* math.QA/0509530.

[PO00] Panaite, F. ; Van Oystaeyen, F., Clifford type algebras as cleft extensions for some pointed Hopf algebras. *Comm. Algebra*, **28**, (2000), 585–600.

[Ri74] Riehm, C., The equivalence of bilinear forms. *Journal of Algebra*, **31**, (1974), 45–66.

[Sa96] Schauenburg, P., Hopf bi-Galois extensions. *Comm. Algebra*, **24**, (1996), 3797–3825.

[Sa00] Schauenburg, P., Bi-Galois objects over the Taft algebras. *Israel J. Math.*, **115**, (2000), 101–123.

[Sa04] Schauenburg, P., Hopf Galois and bi-Galois extensions. *Galois theory, Hopf algebras and semiabelian categories*, 469–515, Fields Inst. Commun., **43**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.

[Sn90] Schneider, H.-J., Principal homogeneous spaces for arbitrary Hopf algebras. *Israel J. Math.*, **72**, (1990), 167–195.

[St99] Ştefan, D., Hopf algebras of low dimension. *J. Algebra*, **211**, (1999), 343–361.

[Sw68] Sweedler, M. E., Cohomology of algebras over Hopf algebras. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **133**, (1968), 205–239.

[TY98] Tambara, D. ; Yamagami, S., Tensor categories with fusion rules of self-duality for finite abelian groups. *J. Algebra*, **209**, (1998), 692–707.

[Ul87] Ulbrich, K.-H., Galois extensions as functors of comodules. *Manuscripta Math.* **59**, (1987), 391–397.

[Ul89] Ulbrich, K.-H., Fibre functors of finite-dimensional comodules. *Manuscripta Math.*, **65**, (1989), 39–46.

[Zh94] Zhu, Y., Hopf algebras of prime dimension. *Internat. Math. Res. Notices*, (1994), 53–59.