

N° d'ordre : 5323

École Doctorale Mathématiques, Sciences de l'Information et de
l'Ingénieur

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université Louis Pasteur – Strasbourg I
Discipline : Electronique, Electrotechnique, Automatique
(Spécialité : Automatique)

par

Adlane Abdelkader BENLATRECHE

**Contribution à la commande robuste H_{∞} de systèmes à
grande échelle d'enroulement de bandes flexibles**

Soutenue publiquement le 26 janvier 2007

Membres du jury

Directeur de thèse : M. Dominique KNITTEL, Professeur, ULP, Strasbourg
Directeur de thèse : M. Eric OSTERTAG, Professeur émérite, ULP, Strasbourg
Rapporteur interne : M. Emmanuel CAILLAUD, Professeur, ULP, Strasbourg
Rapporteur externe : M. Patrick BOURGIN, Professeur, ECL, Lyon
Rapporteur externe : M. Luc DUGARD, Directeur de Recherche, INPG, Grenoble
Examineur : M. Alain BOUSCAYROL, Professeur, USTL, Lille

A ma très chère épouse Haoua

A mes chers parents

A mon cher grand père « papa el hadj »

A ma chère grand-mère

A Hakim Hamzaoui pour son amitié exemplaire

Et à toutes les personnes comptant à mes yeux

REMERCIEMENTS

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été effectués à l'Equipe de Recherche Technologique « Enroulement et transport à haute vitesse de bandes flexibles » (ERT N°08) et au Laboratoire des Sciences de l'Image de l'Informatique et de Télédétection (LSIIT, UMR 7005), au sein de l'équipe Automatique Vision et Robotique (AVR). Je remercie Monsieur Dominique KNITTEL, Directeur de l'ERT et Monsieur Michel de MATHELIN, Directeur de l'équipe AVR, pour m'avoir accueilli au sein de leurs groupes de recherche et pour avoir mis à ma disposition les moyens et conditions nécessaires pour le bon accomplissement de ce travail.

Je voudrais remercier Monsieur. Dominique KNITTEL, Professeur à l'Université Louis Pasteur et directeur de ma thèse, pour m'avoir soutenu et pour ses conseils constructifs qui ont permis la réalisation de ce travail. Un remerciement très particulier est adressé à Monsieur Eric OSTERTAG, Professeur émérite à l'Université Louis Pasteur, également directeur de ma thèse, pour son soutien constant, pour sa très grande disponibilité et sa contribution pédagogique et scientifique qui ont permis d'élever le niveau de mes travaux durant ces dernières années de thèse.

J'exprime ma gratitude envers Monsieur Ernest HIRSCH, Professeur à l'Université Louis Pasteur et Directeur de mon école doctorale.

Je remercie Monsieur Alain BOUSCAYROL, Professeur à l'Université des Sciences et Technologies de Lille d'avoir accepté de présider le jury de ma soutenance.

J'exprime ma vive reconnaissance à Messieurs Emmanuel CAILLAUD, Professeur à l'Université Louis Pasteur, Directeur de l'Institut Professionnel des Sciences et Technologies (IPST), Patrick BOURGIN, Professeur à l'Ecole Centrale de Lyon, Directeur de l'ECL et Luc DUGARD, Directeur de Recherche CNRS à l'Institut National Polytechnique de Grenoble d'avoir accepté d'être rapporteurs de ce travail.

Je remercie tous mes collègues de l'équipe AVR, pour leur sympathie et la bonne ambiance. Que Ali, Samia, Mohamed, Ahmed, Loïc, Edouard et Estelle trouvent ici le témoignage de mon amitié.

Je ne remercierai jamais assez tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à ce que je suis aujourd'hui. Merci, un grand merci, pour la famille, pour les amis et tous ceux que je porte dans mon cœur. Que ma femme, Haoua, trouve ici le témoignage de mon amour et mes remerciements les plus profonds pour sa patience, son soutien permanent et son amour.

TABLE DES MATIERES

Remerciements	6
Table des matières.....	7
Liste des figures et tableaux	11
Notations et acronymes.....	15
Chapitre 1 : Introduction générale.....	19
1.1. La chaîne de déroulement-transport-enroulement de bande	21
<i>1.1.1. Dérouleur</i>	<i>21</i>
<i>1.1.2. Enrouleur</i>	<i>21</i>
<i>1.1.3. Rouleau tracteur et rouleau libre</i>	<i>22</i>
<i>1.1.4. Rouleau danseur.....</i>	<i>23</i>
<i>1.1.5. Accumulateur</i>	<i>23</i>
1.2. Objectifs de la thèse	24
1.3. Organisation du manuscrit.....	24
Chapitre 2 : Modélisation et commandes industrielles de systèmes d'enroulement	27
2.1. Modélisation d'un système d'enroulement	28
<i>2.1.1. État de l'art des méthodes de modélisation d'un système d'enroulement</i>	<i>28</i>
<i>2.1.2. Modèle et propriétés du matériau</i>	<i>30</i>
2.1.2.1. La loi de Hooke	30
2.1.2.2. Le coefficient de Poisson.....	31
2.1.2.3. Modèle rhéologique.....	31
<i>2.1.3. Lois physiques utilisées pour la modélisation de systèmes d'enroulement</i>	<i>31</i>
2.1.3.1. Détermination de la tension de bande en mouvement	31
2.1.3.2. Détermination de la vitesse de la bande.....	34
<i>2.1.4. Modèle d'une chaîne complète d'enroulement.....</i>	<i>34</i>
2.1.4.1. Équations des éléments primitifs d'un système d'enroulement	35
2.1.4.2. Programmation du modèle non linéaire d'un système d'enroulement.....	36
2.1.4.3. Modèle linéaire du système d'enroulement à trois moteurs	36
<i>2.1.5. Autre type de modélisation : modèle décentralisé exact.....</i>	<i>37</i>
<i>2.1.6. Estimation des paramètres du modèle.....</i>	<i>39</i>
<i>2.1.7. Analyse du modèle linéaire en vue de la synthèse d'une loi de commande.....</i>	<i>40</i>
2.1.7.1. Influence de l'élasticité de la bande	40
2.1.7.2. Analyse des pôles du système.....	41
2.1.7.3. Influence de la variation des rayons : utilisation d'une commande avec « séquençement de gains »	41
2.2. Stratégies de commande industrielles des systèmes d'entraînement de bandes	46
2.2.1. <i>Commande décentralisée découplée</i>	<i>46</i>

2.2.2. Commande de tension de bande en boucle ouverte.....	47
2.2.3. Commande de tension de bande à vitesse flottante.....	48
2.3. Stratégie de commande avec précompensation basée sur le modèle phénoménologique (Model Based Feedforward).....	50
2.4. Optimisation de la tension d'enroulement.....	50
2.5. Conclusion du chapitre 2.....	51
Chapitre 3 : Commandes H_∞ centralisées.....	53
3.1. Commande H_∞ : de la formulation à la résolution.....	54
3.1.1. Principe de la synthèse H_∞	54
3.1.1.1. La forme standard.....	54
3.1.1.2. Le problème H_∞	55
3.1.1.3. Résolution du problème H_∞ fondée sur les équations de Riccati.....	56
3.1.1.4. Méthode de résolution du problème H_∞ fondée sur les LMIs.....	58
3.1.1.5. Une méthode alternative de synthèse H_∞ : synthèse par « facteurs premiers ».....	63
3.1.1.6. Synthèse H_∞ pondérée.....	64
3.1.1.7. Synthèse H_∞ pour des systèmes à paramètres variants.....	65
3.1.2. Commande H_∞ à un degré de liberté (1ddl).....	66
3.1.2.1. Fonctions de transfert en boucle fermée.....	66
3.1.2.2. Commande H_∞ à un degré de liberté (1ddl).....	66
3.1.2.3. Application aux systèmes d'enroulement.....	68
3.1.3. Commande H_∞ à deux degrés de liberté (2ddl).....	69
3.1.3.1. Motivation.....	69
3.1.3.2. Différentes techniques 2ddl.....	69
3.1.3.3. Application aux systèmes d'enroulement.....	75
3.1.4. Performances des correcteurs.....	79
3.2. Commande H_∞ avec utilisation des inégalités matricielles bilinéaires (BMI).....	80
3.2.1. L'optimisation BMI : état de l'art.....	80
3.2.1.1. Théorie de la complexité.....	81
3.2.1.2. Classification des problèmes BMI.....	83
3.2.2. Principes de bases pour la synthèse BMI de correcteurs par retour d'état.....	96
3.2.3. Commande par retour d'état avec action intégrale complète.....	98
3.2.4. Comparaison des retours d'état synthétisés par BMI sur le banc à trois moteurs.....	99
3.2.5. Problème des états non accessibles.....	100
3.2.5.1. Réflexion sur le problème des états non accessibles.....	102
3.3. Conclusion du chapitre 3.....	105
Chapitre 4 : Commandes H_∞ décentralisées.....	107
4.1. Systèmes complexes de grande dimension.....	108
4.1.1. Définitions.....	109
4.1.1.1. Systèmes complexes de grande dimension.....	109
4.1.1.2. Systèmes interconnectés, décentralisés.....	111
4.1.1.3. Systèmes structurés.....	112
4.1.2. Modélisation d'un système interconnecté décentralisé dans l'espace d'état.....	115
4.1.2.1. Modélisation par matrice de transfert.....	117
4.1.3. Problème d'appariement des entrées et des sorties.....	118

4.1.3.1. Le RGA	119
4.1.3.2. Cas de sous-systèmes MIMO	120
4.2. Structures de commande décentralisée	120
4.2.1. Problématique de la commande des systèmes complexes	121
4.2.2. Différentes étapes dans la résolution du problème de commande	121
4.2.2.1. Décomposition temporelle, dite verticale	121
4.2.3. Décomposition du système et structures de commande associées.....	122
4.2.3.1. Différentes méthodes de décomposition horizontale	123
4.2.3.2. Stratégies retenues pour les systèmes d'enroulement	129
4.2.4. Synthèse des correcteurs H_∞ décentralisés pour les systèmes d'enroulement.....	131
4.2.4.1. Commande H_∞ à 1ddl avec optimisation LMI.....	131
4.2.4.2. Commande H_∞ à 2ddl avec optimisation LMI.....	136
4.2.4.3. Commande H_∞ par retour d'état statique avec optimisation BMI	138
4.3. Outils d'analyse de stabilité des systèmes complexes de grande dimension.....	144
4.3.1. Problématique	144
4.3.2. Étude de la stabilité et de la stabilisabilité.....	145
4.3.2.1. Modes fixes	145
4.3.2.2. Stabilité connective.....	146
4.3.3. Mesure d'interactions par la μ -analyse : application aux systèmes d'enroulement	146
4.3.3.1. Analyse de stabilité pour un système d'enroulement décentralisé à neuf moteurs	148
4.4. Conclusion du chapitre 4	149
Chapitre 5 : Conclusion générale et perspectives.....	151
5.1. Perspectives à ce travail.....	154
Annexes	155
Annexe A : De la norme $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$ à la norme H_2/H_∞	157
A.1. Les normes de signal \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_∞	158
A.1.1. La norme \mathcal{L}_2	158
A.1.2. La norme \mathcal{L}_∞	159
A.2. Les normes de système H_2 et H_∞	159
A.2.1. La norme H_2	159
A.2.2. La norme H_∞	160
A.3. Discussion.....	162
Annexe B : Propriétés de la norme H_∞	163
Annexe C : Notion de stabilité au sens de Lyapunov	165
Annexe D : Paramètres du banc d'enroulement expérimental à trois moteurs.....	167
D.1. Le banc expérimental.....	168
D.2. Modélisation de la bobine de déroulement.....	169
D.2.1. Le dérouleur	169

<i>D.2.2. Modèle non linéaire du dérouleur</i>	169
<i>D.2.3. Modèle linéaire du dérouleur</i>	170
<i>D.2.4. Modélisation du moteur synchrone</i>	171
Annexe E : Publications personnelles	173
E.1. Revue Internationale avec comité de lecture	174
E.2. Conférences Internationales avec comité de lecture	174
E.3. Conférence Nationale avec comité de lecture	174
Bibliographie	175

LISTE DES FIGURES ET TABLEAUX

Figure 1.1-1. Enrouleur axial	22
Figure 1.1-2. Enrouleur de surface.....	22
Figure 1.1-3. Systèmes de traction de bande.....	22
Figure 1.1-4. Rouleau danseur	23
Figure 1.1-5. Schéma de principe d'une ligne industrielle comportant un accumulateur et un danseur	24
Figure 2.1-1. Représentation physique équivalente d'une chaîne de transport de bande viscoélastique	29
Figure 2.1-2. Volume d'analyse entre deux rouleaux	31
Figure 2.1-3. Visualisation des élongations de bande entre deux rouleaux entraînés	32
Figure 2.1-4. Schéma du banc à trois moteurs	35
Figure 2.1-5. Construction du simulateur non linéaire d'un système d'enroulement multi-moteurs	36
Figure 2.1-6. Décomposition en vue de la modélisation décentralisée exacte	39
Figure 2.1-7. Comparaison des résultats de mesures et de simulations du système à trois moteurs	40
Figure 2.1-8. Influence de l'élasticité de la bande sur les maxima des valeurs singulières.....	41
Figure 2.1-9. Commande du système avec séquençement de gains	42
Figure 2.1-10. Valeurs singulières du système à trois moteurs pour différents rayons : stratégie sans multiplication de rayons.....	43
Figure 2.1-11. Valeurs singulières du système à trois moteurs pour différents rayons : stratégie avec multiplication de rayons.....	43
Figure 2.1-12. Diagramme de Bode du système à trois moteurs G_0 pour différentes valeurs de rayons : stratégie sans multiplication de rayon.....	44
Figure 2.1-13. Diagramme de Bode du système à trois moteurs G_R pour différentes valeurs de rayons : stratégie avec multiplication de rayon	44
Figure 2.1-14. Variations des pôles et zéros du système à trois moteurs pour différentes valeurs de rayons : stratégie sans multiplication de rayons.....	45
Figure 2.1-15. Variations des pôles et zéros du système à trois moteurs pour différentes valeurs de rayons : stratégie avec multiplication de rayons	46
Figure 2.2-1. Commande décentralisée découplée industrielle.....	47
Figure 2.2-2. Stratégie de commande industrielle de tension de bande en boucle ouverte	47
Figure 2.2-3. Stratégie de commande industrielle « à vitesse flottante ».....	48
Figure 2.2-4. Principe de la commande décentralisée industrielle avec compensation des inerties et des frottements	48
Figure 2.2-5. Commande industrielle d'un enrouleur	49
Figure 2.2-6. Stratégie de commande décentralisée appliquée sur le banc expérimental à trois moteurs	49
Figure 2.3-1. Stratégie de commande avec précompensation non linéaire	50
Figure 2.3-2. Stratégie de commande avec mesures additives de vitesses et précompensation non linéaire	50
Figure 3.1-1. Forme standard LFT inférieure.....	54
Figure 3.1-2. Paramétrisation de la solution du problème sous-optimal	58
Figure 3.1-3. Ajout des pondérations dans la forme LFT	64
Figure 3.1-4. Schéma de principe de la synthèse LPV	65
Figure 3.1-5. Système en boucle fermée	66
Tableau 3.1-1. Fonctions de transfert en boucle fermée	66
Figure 3.1-6. Forme standard S/KS/T	67
Figure 3.1-7. Autre schéma de synthèse H_∞ du correcteur.....	68
Figure 3.1-8. Mesures en régime établi : comparaison PI - H_∞ 1ddl.....	69
Figure 3.1-9. Correcteur à deux degrés de liberté	70
Figure 3.1-10. Une méthode de pondération avec modèle de référence pour la synthèse du correcteur H_∞ d'anticipation	70
Figure 3.1-11. Synthèse du correcteur H_∞ à 2ddl par la méthode de pondération à la sortie S/KS/T	71
Figure 3.1-12. Synthèse en une étape d'un correcteur H_∞ à 2ddl fondée sur la méthode de pondération S/KS/T avec les filtres à l'entrée.....	72
Figure 3.1-13. Synthèse du correcteur H_∞ 2ddl par la méthode de pondération GS/T.....	73
Figure 3.1-14. Synthèse d'un correcteur H_∞ à 2ddl par la méthode de pondération S/KS/T avec les filtres à l'entrée, un modèle de référence et un intégrateur explicite	74
Figure 3.1-15. Comparaison entre tensions mesurée et simulée : correcteur 2ddl	76

Figure 3.1-16. Comparaison entre vitesses mesurée et simulée : correcteur 2ddl.....	76
Figure 3.1-17. Comparaison entre mesure et simulation.....	77
Figure 3.1-18. Comparaison entre mesure et simulation.....	77
Figure 3.1-19. Comparaison entre mesure et simulation.....	77
Figure 3.1-20. Comparaison entre mesure et simulation.....	77
Figure 3.1-21. Mesure et simulation (effet de patinage).....	78
Figure 3.1-22. Mesure et simulation (effet de patinage).....	78
Figure 3.1-23. Comparaison de la tension en régime établi.....	78
Figure 3.1-24. Comparaison de la vitesse en régime établi.....	78
Figure 3.1-25. Comparaison des correcteurs 2ddl avec et sans intégrateurs explicites et 1ddl.....	79
Tableau 3.1-2. Évaluation des performances en boucle fermée.....	80
Tableau 3.1-3. Marges de module en boucle fermée.....	80
Figure 3.2-1. Ordinogramme de l'algorithme d'homotopie.....	92
Figure 3.2-2. Valeurs singulières en boucle fermée : comparaison entre le correcteur centralisé et le nouveau correcteur décentralisé.....	95
Figure 3.2-3. Valeurs singulières en boucle fermée : comparaison entre le correcteur centralisé et le correcteur Ikeda.....	96
Figure 3.2-4. Structure de commande par retour d'état.....	98
Figure 3.2-5. Commande par retour d'état avec action intégrale.....	98
Figure 3.2-6. Commande par retour d'état avec et sans action intégrale.....	99
Figure 3.2-7. Synthèse d'un retour d'état modifié.....	101
Figure 3.2-8. Comparaison entre le retour d'état classique et modifié.....	102
Figure 3.2-9. Représentation LFT du système bouclé (3.115).....	105
Figure 4.1-1. Système pendule plus masse.....	113
Figure 4.1-2. Digraphe D du système de pendule S	114
Figure 4.2-1. Vue d'ensemble d'un grand système avec une commande hiérarchique.....	122
Figure 4.2-2. Décomposition horizontale du système S et du correcteur K	123
Figure 4.2-3. Stratégie de commande décentralisée pour un système de grande dimension.....	124
Figure 4.2-4. Stratégie de commande décentralisée avec recouvrement pondéré.....	125
Figure 4.2-5. Commande H_∞ décentralisée sans recouvrement.....	130
Figure 4.2-6. Correcteur H_∞ décentralisé avec recouvrement.....	131
Figure 4.2-7. Commande H_∞ 1ddl sans recouvrement.....	132
Figure 4.2-8. Tensions de bande de l'enrouleur et du dérouleur.....	132
Figure 4.2-9. Vitesse du tracteur central du 3ème sous-système.....	132
Figure 4.2-10. Tension de bande de l'enrouleur et du dérouleur : phase de démarrage.....	133
Figure 4.2-11. Vitesse du tracteur central du 3ème sous-système : phase de démarrage.....	133
Figure 4.2-12. Tension de bande de l'enrouleur et du dérouleur : régime établi.....	133
Figure 4.2-13. Vitesse du tracteur central du 3ème sous-système : régime établi.....	133
Figure 4.2-14. Commande H_∞ 1ddl décentralisée avec recouvrement sur le banc à trois moteurs.....	134
Figure 4.2-15. Mesures de l'application du correcteur H_∞ 1ddl avec recouvrement sur le banc expérimental à trois moteurs.....	134
Figure 4.2-16. Commande H_∞ 1ddl décentralisée avec recouvrement.....	135
Figure 4.2-17. Comparaison de la tension de dérouleur du modèle à neuf moteurs.....	135
Figure 4.2-18. Comparaison de la vitesse du dernier tracteur du modèle à neuf moteurs.....	135
Figure 4.2-19. Phase de démarrage (tension de dérouleur).....	136
Figure 4.2-20. Phase de démarrage (vitesse du dernier tracteur).....	136
Figure 4.2-21. Régime établi (tension dérouleur).....	136
Figure 4.2-22. Régime établi (vitesse du dernier tracteur).....	136
Figure 4.2-23. Commande H_∞ 2ddl décentralisée sans recouvrement.....	137
Figure 4.2-24. Correcteur H_∞ 2ddl décentralisé sans recouvrement avec intégrateur explicite appliqué au système non linéaire à neuf moteurs.....	137
Figure 4.2-25. Retour d'état statique H_∞ décentralisé sans recouvrement sur le système à neuf moteurs.....	139
Figure 4.2-26. Commande H_∞ par retour d'état décentralisé avec recouvrement.....	140
Figure 4.2-27. Retour d'état statique avec action intégrale partielle et matrice de compensation de gain.....	141
Figure 4.2-28. Commande par retour d'état décentralisée sans recouvrement avec et sans action intégrale partielle.....	144
Figure 4.3-1. Analyse de stabilité du système à neuf moteurs décentralisé par μ IM.....	148
Figure D-1. Image du banc expérimental d'enroulement à 3 moteurs de l'ERT Enroulement N°8.....	168
Tableau D-1. Valeurs nominales des différents composants du banc expérimental à 3 moteurs.....	168
Figure D-2. Dérouleur axial.....	169

Figure D-3. Modèle du moteur synchrone lorsque le courant $i_d = 0$, avec rétroaction de courant.....	172
--	-----

NOTATIONS ET ACRONYMES

NOTATIONS ET ACRONYMES LIES AUX SYSTEMES D'ENROULEMENT

C_{fs}	Couple de frottement sec.
E	Module d'Young.
ε	Allongement relatif.
f_v	Coefficient de frottement visqueux.
J_k	Inertie du rouleau k .
J_{arbre}	Inertie de l'arbre du moteur.
J_d, J_e, J_t	Respectivement, inertie totale du moteur dérouleur, enrouleur et tracteur.
h	Épaisseur de la bande.
l	Largeur de la bande.
L	Longueur de bande avec contrainte entre deux rouleaux.
L_0	Longueur de bande sans contrainte.
L_i	Longueur de bande dans la branche i .
ρ	Masse volumique de la bande.
S	Section de la bande.
μ	Coefficient de frottement ou de transmission.
ν	Coefficient de Poisson.
R_k	Rayon du $k^{\text{ème}}$ rouleau.
R_d, R_e	Respectivement, rayon de la bobine déroulée et enroulée.
R_t	Rayon du rouleau entraîné par le moteur tracteur.
ω	Pulsation (rad/s).
$\Omega_k(t), V_k(t)$	Respectivement, $k^{\text{ème}}$ vitesse angulaire et linéaire.
$T_k(t)$	$k^{\text{ème}}$ tension de bande.

AUTRES NOTATIONS ET ACRONYMES

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m \times n}$	Respectivement, ensemble des réels et ensemble des matrices de dimensions $m \times n$ à coefficients dans \mathbb{R} .
$\mathbb{R}_p^{m \times n}$	Ensemble des matrices de fonctions de transfert rationnelles propres à coefficients réels de dimension $m \times n$.
$\mathfrak{R}h_\infty$	Ensemble des matrices de fonctions de transfert rationnelles à coefficients réels strictement propres et stables.
$\ G(s)\ _\infty$	Norme H_∞ d'une fonction de transfert $G(s) \in \mathfrak{R}h_\infty$.
$\ G(s)\ _2$	Norme H_2 d'une fonction de transfert $G(s)$.
M^T	Transposée de M .
$I_r, 0_r, I, 0$	Respectivement, matrice identité et matrice nulle de dimension $r \times r$ ou de dimension définie par le contexte.
$\text{diag}(M_i)$	Matrice diagonale $\begin{bmatrix} M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & M_N \end{bmatrix}.$
$\text{tr}(M)$	Trace de M .
$\lambda_i(M)$	$i^{\text{ème}}$ valeur propre de M : $\lambda_i(M) = \lambda_i$.
$\rho(M)$	$= \max_i \lambda_i(M) $, rayon spectral de M .
$\Lambda(M)$	Ensemble des valeurs propres de M , encore appelé spectre de M .
$\sigma_i(M)$	$i^{\text{ème}}$ valeur singulière de M .
$\bar{\sigma}(\bullet), \underline{\sigma}(\bullet)$	Respectivement, valeur singulière maximale et minimale de \bullet .
$\mu(M)$	Valeur singulière structurée de M .
$\left[\begin{array}{c c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$	Matrice système associée à la matrice de transfert $C(sI - A)^{-1}B + D$.
$F_l(P, K)$	LFT, Transformation Linéaire Fractionnaire Inférieure.
T_{zw}	Fonction de transfert en boucle fermée de l'entrée exogène w vers la sortie à commander z .
$\left T_{z_j w_i} \right $	Gain de la fonction de transfert monovariante $T_{z_j w_i}$.
$S_{e,u}, T_{e,u}$	Respectivement, fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire.
$W(s)$	Filtre de pondération.
S^i, K^i	Respectivement, $i^{\text{ème}}$ sous-système et correcteur local.

$\text{Re}(\bullet)$, $\text{Im}(\bullet)$ Respectivement, partie réelle et imaginaire d'un nombre complexe.

$\text{rang}(M)$ Rang de la matrice M .

RGA, BRG Respectivement, matrice de gain relatif et de gain relatif décentralisé par bloc.

SISO Système monovariante.

MIMO Système multivariable.

LMI Inégalité matricielle linéaire.

BMI Inégalité matricielle bilinéaire.

PMI Inégalité matricielle polynomiale.

LPV Linéaire à paramètres variants.

LTI Linéaire invariant dans le temps.

$1ddl$, $2ddl$ Respectivement, un et deux degrés de liberté.

PI, PID Respectivement, Proportionnel et intégral et Proportionnel, intégral et dérivé.

BRL Lemme borné réel.

CHAPITRE 1 :
INTRODUCTION GENERALE

1. Introduction générale

Les produits à base de papier, métal, tissu ou polymère (comme par exemple le papier toilette, le papier essuie-tout, la feuille ménagère d'aluminium, la bobine de tissu, etc...) sont généralement conditionnés sous forme de bobines. La fabrication de ces bobines nécessite souvent plusieurs phases : un déroulement, un entraînement associé à un traitement ou une transformation de la bande et un enroulement. Cette fabrication est réalisée à des cadences très élevées et de façon continue. Il est clair que les arrêts de production, suite à une panne ou à une constatation de défauts sur les bobines en cours de formation ou tout juste réalisées, sont à éviter pour des raisons économiques évidentes. Aussi, une meilleure connaissance du processus de fabrication ainsi que du comportement du produit durant sa phase de réalisation est nécessaire.

Les exigences croissantes sur les performances de commande des systèmes d'enroulement et de transport de bande ainsi que l'emploi de matériaux de plus en plus minces ont conduit les industriels à rechercher des stratégies de commande de plus en plus sophistiquées. Un des objectifs dans ces systèmes industriels est d'augmenter la vitesse d'entraînement autant que possible, tout en maintenant constante la tension de bande tout au long de la chaîne de production. En effet, un asservissement précis de la tension de bande tout au long du processus déroulement-transport-enroulement conditionne grandement la qualité du produit final. Dans le cas de bandes élastiques ou viscoélastiques, une grande variation des tensions (ou une variation importante des vitesses entre rouleaux) provoque des elongations de bande importantes, ce qui peut endommager le matériau entraîné. Par ailleurs, une tension de bande trop faible peut occasionner le décollage de cette dernière du rouleau et conduire ainsi à un déport latéral de la bande. Ceci engendre souvent la formation de plis, ce qui nécessite un arrêt de la production. Il est donc important de réaliser un bon découplage entre tension et vitesse, de telle sorte que la tension puisse être maintenue constante même en présence de changements de vitesse de défilement, donc de la cadence de production.

Le réglage de la loi de commande en fonction de la variation des paramètres est un problème encore mal maîtrisé dans l'industrie d'enroulement et de transport de bandes flexibles. Les réglages empiriques basés sur le savoir-faire nécessitent, dans le cas de bandes polymères, d'être ajustés à la température et à l'hygrométrie ambiantes du lieu de production pour tenir compte des conditions météorologiques. Pour pallier cette difficulté, certains industriels ont recours à la climatisation de leurs lieux de productions [Tec99]. Cependant, le changement de type de matériau à entraîner nécessite une modification des réglages des correcteurs, ce qui ne se fait pas sans difficulté.

Une autre difficulté concerne la variation des rayons des bobines durant le processus déroulement-transport-enroulement. Cette variation confère au système un comportement dynamique différent entre le début et la fin du processus de déroulement-enroulement. Les correcteurs linéaires, par exemple les correcteurs de type PID, ne sont donc plus adaptés durant toute la durée du déroulement-enroulement d'une bobine. Une solution consiste à synthétiser un correcteur pour la phase de démarrage, puisque c'est la phase la plus critique. Ce correcteur est ensuite utilisé pour le démarrage du défilement d'autres bobines de même dimension. Cependant, un changement de rayon de cette bobine peut entraîner une instabilité du système dès cette phase et ceci peut nécessiter un arrêt de la production [RL93].

Une commande robuste vis-à-vis de ces variations de paramètres peut apporter une réponse bien adaptée à ces différents problèmes. Une telle commande, non seulement garantira de bonnes performances à l'ensemble du procédé industriel, mais en outre permettra le déroulement d'autres types de bande. Jusqu'à présent, beaucoup de systèmes industriels de transport de bandes utilisent des correcteurs décentralisés de type PI. Cependant, pour obtenir des performances plus élevées, des stratégies de commande plus efficaces devront être utilisées, comme par exemple des commandes du type LQ ou H_∞ .

La commande robuste a déjà été appliquée pour des systèmes d'enroulement de taille réduite, ne

contenant pas plus de 3 moteurs. Le correcteur utilisé est un correcteur centralisé de type H_∞ [KKM+02]. Pour remédier à la variation du comportement dynamique du système résultant de la variation des rayons du dérouleur et de l'enrouleur, un correcteur linéaire à paramètres variants (LPV) a été mis en œuvre [KKM+02]. De bonnes performances ont été obtenues avec cette stratégie. Néanmoins, les systèmes d'enroulement sont généralement de grande dimension (c'est-à-dire avec un nombre élevé de moteurs) et il n'est pas approprié d'utiliser un correcteur centralisé pour de tels processus. Ces systèmes constituent donc un terrain d'application idéal pour les théories de commande décentralisée [Si91]. Récemment, des stratégies de commandes décentralisées multivariables ont été proposées pour les systèmes industriels de transport de métal [GP98], [GH99], et pour la bande élastique avec des correcteurs H_∞ [KGL02].

La plupart des synthèses modernes de loi de commande nécessitent au préalable l'élaboration et la validation d'un modèle du procédé. Cette modélisation peut être élaborée soit à l'aide d'un modèle comportemental, du type boîte noire, soit par une analyse phénoménologique où les lois de la physique sont utilisées pour décrire les propriétés du système. C'est cette dernière stratégie qui est utilisée dans le cadre de cette thèse. Une modélisation du banc d'enroulement à trois moteurs ayant déjà fait l'objet d'études dans la thèse de H. Koç [Koç00], nous nous limiterons ici au rappel des lois fondamentales qui ont permis la réalisation de ce modèle. Ce modèle non linéaire, programmé dans l'environnement graphique Simulink[®] du logiciel Matlab[®] de MathWorks[™], a ensuite été identifié sur le banc expérimental puis linéarisé autour du point de fonctionnement correspondant à la phase de démarrage [Koç00].

Le simulateur d'un système d'entraînement à nombre élevé de moteurs a ensuite été construit par extrapolation [KGL02]. Ce simulateur est utilisé dans le cadre de ce travail pour valider nos différentes commandes synthétisées pour les systèmes d'enroulement à grande échelle.

1.1. La chaîne de déroulement-transport-enroulement de bande

Généralement, une ligne industrielle de déroulement-transport-enroulement est composée d'un dérouleur et d'un enrouleur, respectivement au début et à la fin de la chaîne, ainsi que d'un ou plusieurs rouleaux danseurs, de moteurs tracteurs, de rouleaux libres et d'un accumulateur. Ces derniers éléments, qui se trouvent au milieu de la chaîne, sont disposés dans un ordre qui dépend du procédé de transformation que doit subir la bande.

La construction d'un modèle global d'une ligne industrielle consiste alors à mettre en série des modèles des différents éléments la composant. Ces différents éléments sont définis ci-après.

1.1.1. Dérouleur

Cet élément est le premier élément d'une chaîne de déroulement-transport-enroulement de bande. Il peut cependant être absent sur certaines chaînes de fabrication de bande.

Il est important d'assurer un bon déroulement de la bobine pour éviter une instabilité de la chaîne. Effectivement, des perturbations de tensions et de vitesse ainsi que des vibrations de la bande sont causées par une bobine ovale, à la suite d'un mauvais conditionnement (stockage) ou d'un mauvais enroulement. Les industriels utilisent souvent un rouleau « danseur » en aval de cet élément pour remédier à ce type de problème.

1.1.2. Enrouleur

L'étape d'enroulement revêt une grande importance dans le procédé déroulement-transport-enroulement de bande, car c'est elle qui donne son aspect définitif au produit et qu'elle conditionne son acceptation ou son rejet éventuel.

Bien qu'il semble facile d'enrouler une bobine, par empilement de spires successives sur un mandrin, ceci est loin d'être le cas. Un mauvais conditionnement ou une commande mal optimisée peut entraîner des plis, des ondulations, des micros-flambages ou des poches d'air, et par conséquent compromettre l'utilisation ultérieure du produit. L'apparition de ces défauts est liée à différents facteurs.

Selon le type du matériau à enrouler, on trouve dans l'industrie deux technologies d'enroulement : l'enroulement axial (Figure 1.1-1) et l'enroulement de surface (Figure 1.1-2).

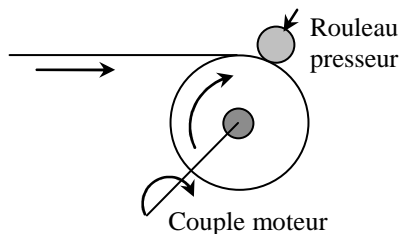


Figure 1.1-1. Enrouleur axial

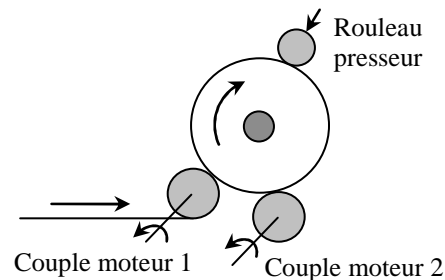


Figure 1.1-2. Enrouleur de surface

Le rôle du rouleau presseur dans les deux approches est l'évacuation de l'air entre les spires enroulées. La commande d'un système d'enroulement avec rouleau presseur motorisé est présentée dans [SKC97].

1.1.3. Rouleau tracteur et rouleau libre

Durant la phase de transport, la bande est véhiculée sur des rouleaux qui peuvent être motorisés ou libres. Différentes techniques de traction existent dans l'industrie, la Figure 1.1-3 illustre les trois principales.

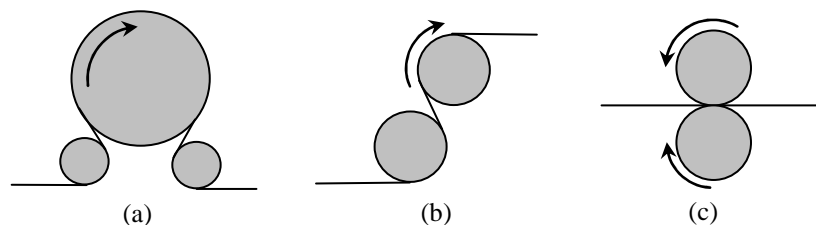


Figure 1.1-3. Systèmes de traction de bande

Le système en Ω , Figure 1.1-3 (a), vise à avoir un grand angle de contact entre la bande et le rouleau tracteur motorisé, en l'occurrence celui du milieu, par l'intermédiaire des deux autres rouleaux, symétriques, libres et de plus petites tailles.

Le système en S , Figure 1.1-3 (b), utilise deux rouleaux, motorisés tous les deux ou l'un motorisé et l'autre entraîné à l'aide d'une courroie crantée.

Spécialement conçu pour les systèmes de déroulement-transport-enroulement de « tôles », le tracteur de la Figure 1.1-3 (c) utilise un asservissement de pression entre les deux rouleaux permettant d'imposer l'épaisseur de la bande.

Ces trois rouleaux sont motorisés entièrement ou en partie. En l'absence de motorisation, un rouleau tracté, encore appelé rouleau libre ou rouleau passif, est un rouleau qui transporte la bande et est entraîné par celle-ci, permettant ainsi de :

- centrer la bande, en donnant une forme bombée au rouleau ; ce rouleau est appelé *rouleau banane* dans l'industrie ;
- mesurer la vitesse de défilement linéaire de la bande ;
- mesurer la tension de bande en utilisant des jauges de contraintes.

1.1.4. Rouleau danseur

Un cas particulier du rouleau libre est le rouleau danseur, du fait que lui aussi n'est pas motorisé mais possède la possibilité de se déplacer perpendiculairement au plan de la bande. Il permet d'imposer la tension de bande au dérouleur ou à l'enrouleur [LL93] selon qu'il est placé à côté de l'un ou de l'autre. Il permet également de filtrer mécaniquement les sauts de tension provoqués notamment par les défauts géométriques d'une bobine. Son schéma de principe est représenté à la Figure 1.1-4.

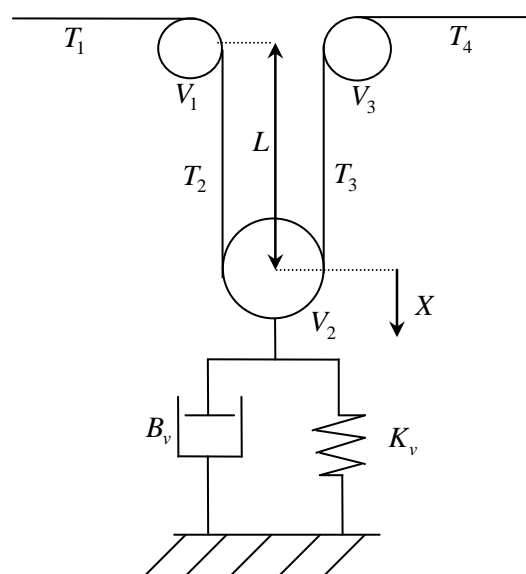


Figure 1.1-4. Rouleau danseur

B_v et K_v permettent de fixer le taux d'atténuation et la bande passante de ce filtre [RL93b]. La commande de la vitesse de rotation de la bobine entraînée par l'actionneur pneumatique asservit alors la position X du danseur.

Le choix de placer l'asservissement de la tension de bande près du dérouleur ou de l'enrouleur n'est pas aisé pour les industriels. Il impose en effet de choisir entre capteur de force et rouleau danseur. Dans le cadre de ce travail de thèse, on n'utilise pas de rouleau danseur.

1.1.5. Accumulateur

On trouve cet élément dans les grandes chaînes industrielles de déroulement-transport-enroulement de bande à défilement continu. Son principe consiste à stocker une quantité de bande pendant le fonctionnement normal et de la restituer pendant la phase délicate de changement de bobine au rouleau dérouleur ou enrouleur. Son schéma de principe est donné à la Figure 1.1-5.

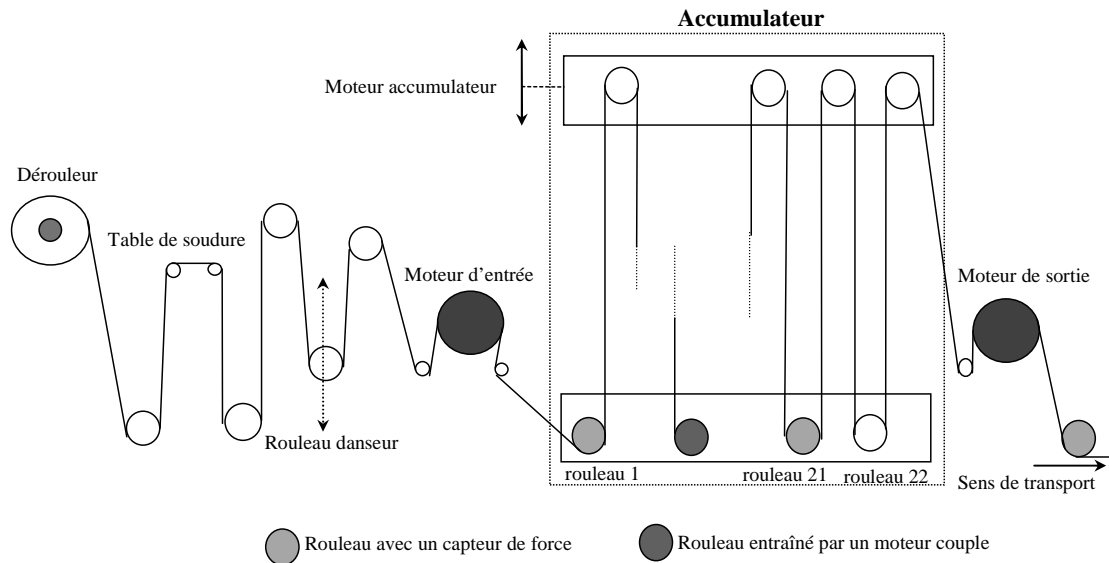


Figure 1.1-5. Schéma de principe d'une ligne industrielle comportant un accumulateur et un danseur

La partie supérieure de l'accumulateur est déplacée vers le haut dans la phase d'accumulation, pour stocker une certaine quantité de bande. Le contraire se produit pendant la phase de déstockage, le moteur d'entrée est à l'arrêt et la partie supérieure de l'accumulateur se rapproche de la partie inférieure afin de permettre le remplacement de la bobine de déroulement.

L'accumulateur peut être à déplacement horizontal ou vertical. Cependant, pour les lignes à vitesse de défilement élevée et qui nécessitent par conséquent une grande capacité de stockage, l'accumulateur vertical est privilégié [GP97].

1.2. Objectifs de la thèse

L'objectif de ce travail, qui a été effectué conjointement à l'ERT Enroulement (Équipe de Recherche Technologique d'Enroulement et transport à haute vitesse de bandes flexibles, ERT n°8) et au LSIT (Laboratoire des Sciences de l'Image, de l'Informatique et de la Télédétection, UMR CNRS/ULP 7005), consiste à développer des méthodes de synthèse de commandes robustes H_∞ pour des systèmes d'entraînement de bandes flexibles dans un contexte d'utilisation comparable à celui rencontré en production industrielle : bande mince, vitesse de défilement élevée.

Pour des systèmes de petite dimension, c'est-à-dire à faible nombre de moteurs et de capteurs, des stratégies de commandes multivariables centralisées sont étudiées. Cependant, pour les systèmes à grande échelle, seules des commandes décentralisées peuvent être synthétisées.

Les différentes commandes sont validées sur un simulateur qui a été identifié au préalable sur un banc expérimental. Ce simulateur reproduit les tensions et les vitesses d'une bande élastique en mouvement. Cependant, les phénomènes vibratoires et d'aérodynamisme ne sont pas considérés dans ce travail.

1.3. Organisation du manuscrit

Le manuscrit est divisé en quatre chapitres. Dans le deuxième chapitre, après un état de l'art des différentes stratégies de modélisation et de commande industrielle des systèmes de déroulement-transport-enroulement de bandes flexibles existantes, on présentera les différentes lois de la physique permettant la construction du modèle non linéaire dédié au simulateur du banc expérimental à trois moteurs de l'ERT Enroulement. On expliquera aussi l'expansion de ce modèle vers un simulateur non

linéaire de taille plus grande. La linéarisation de ces modèles est également présentée et sert à la synthèse des correcteurs. Une analyse du modèle à trois moteurs permet d'introduire la stratégie de « séquençement de gain », qui sera utilisée pour la synthèse de tous les correcteurs apportant ainsi une robustesse vis-à-vis de la variation des rayons des bobines au cours du processus.

Le chapitre 3 présente les différentes stratégies de commande H_∞ centralisées développées dans le cadre de cette thèse pour des systèmes d'entraînement de bande de petite dimension, en l'occurrence le système à trois moteurs. Deux stratégies de synthèses sont présentées, la première utilisant les inégalités matricielles affines (LMIs) pour le calcul de correcteurs à $1ddl$ puis à $2ddl$. Un correcteur $2ddl$ avec intégrateurs explicites est introduit dans le but d'éliminer l'erreur statique. Une deuxième stratégie de synthèse utilisant l'optimisation matricielle bilinéaire (BMI) est mise en œuvre pour le calcul de correcteurs H_∞ par retour d'état statique. Un état de l'art des différentes stratégies de synthèses utilisant l'optimisation BMI est présenté. Deux types de correcteur sont développés : l'un avec et l'autre sans action intégrale. L'action intégrale permet de remplacer la matrice de préfiltre utilisée dans le cas classique pour assurer l'annulation de l'erreur statique. Finalement, une analyse de l'influence de l'inaccessibilité des variables d'état correspondant aux tensions de bande est menée et quelques perspectives de recherche sont proposées.

Les différentes stratégies de commande développées dans le chapitre 3 sont adaptées dans le chapitre 4 au cas de systèmes d'enroulement de plus grande dimension. Pour cela, une décentralisation du système global en sous-systèmes s'avère nécessaire. Un état de l'art sur les stratégies de décentralisation et les outils d'aide au choix de variables d'entrées-sorties (appariement) est présenté. Deux stratégies de décentralisation ont été retenues : sans et avec recouvrement partiel des sous-systèmes. La taille des systèmes étudiés dans ce chapitre nous a conduit à synthétiser un nouveau correcteur, par retour d'état statique avec action intégrale partielle. Ce dernier utilise un compromis entre utilisation d'une matrice de préfiltre et d'une action intégrale afin d'assurer à la fois un bon suivi de consigne et un rejet de perturbations constantes. Enfin, un outil d'analyse de stabilité est utilisé pour mesurer les interactions entre les sous-systèmes et pour en déduire des conclusions sur la possibilité de stabiliser le système global au moyen de correcteurs décentralisés.

La conclusion fait une synthèse des différents résultats et propose quelques perspectives à ce travail de recherche.

CHAPITRE 2 : MODELISATION ET COMMANDES INDUSTRIELLES DE SYSTEMES D'ENROULEMENT

Sommaire :

Chapitre 2 : Modélisation et commandes industrielles de systèmes d'enroulement	27
2. <i>Préambule</i>	28
2.1. Modélisation d'un système d'enroulement	28
2.1.1. État de l'art des méthodes de modélisation d'un système d'enroulement	28
2.1.2. Modèle et propriétés du matériau	30
2.1.2.1. La loi de Hooke	30
2.1.2.2. Le coefficient de Poisson	31
2.1.2.3. Modèle rhéologique	31
2.1.3. Lois physiques utilisées pour la modélisation de systèmes d'enroulement	31
2.1.3.1. Détermination de la tension de bande en mouvement	31
2.1.3.2. Détermination de la vitesse de la bande	34
2.1.4. Modèle d'une chaîne complète d'enroulement	34
2.1.4.1. Équations des éléments primitifs d'un système d'enroulement	35
2.1.4.2. Programmation du modèle non linéaire d'un système d'enroulement	36
2.1.4.3. Modèle linéaire du système d'enroulement à trois moteurs	36
2.1.5. Autre type de modélisation : modèle décentralisé exact	37
2.1.6. Estimation des paramètres du modèle	39
2.1.7. Analyse du modèle linéaire en vue de la synthèse d'une loi de commande	40
2.1.7.1. Influence de l'élasticité de la bande	40
2.1.7.2. Analyse des pôles du système	41
2.1.7.3. Influence de la variation des rayons : utilisation d'une commande avec « séquencement de gains »	41
2.2. Stratégies de commande industrielles des systèmes d'entraînement de bandes	46
2.2.1. Commande décentralisée découplée	46
2.2.2. Commande de tension de bande en boucle ouverte	47
2.2.3. Commande de tension de bande à vitesse flottante	48
2.3. Stratégie de commande avec précompensation basée sur le modèle phénoménologique (Model Based Feedforward)	50
2.4. Optimisation de la tension d'enroulement	50
2.5. Conclusion du chapitre 2	51

2. Préambule

À l'inverse d'un modèle comportemental de type boîte noire identifié au préalable, une modélisation phénoménologique permet de connaître l'influence des variations des paramètres de réglage et par conséquent d'utiliser un éventail de stratégies de commande beaucoup plus large. Cette dernière approche a été utilisée dans le cadre de ce travail pour synthétiser des commandes H_∞ pour des systèmes d'enroulement de bandes flexibles. La modélisation a fait l'objet de travaux antérieurs, les détails sont donnés dans la thèse de H. Koç [Koç00]. C'est pourquoi seuls les traits importants de cette modélisation sont rappelés ici. Auparavant, nous présenterons un état de l'art en modélisation de systèmes d'entraînement de bandes élastiques. La modélisation phénoménologique a permis d'une part la construction d'un simulateur non linéaire dans l'environnement logiciel Matlab® de MathWorks™ à l'aide de son outil graphique de simulation Simulink® [Koç00], d'autre part la déduction d'un modèle linéaire autour d'un point de fonctionnement [Koç00] utile pour la synthèse de correcteurs. Les modèles linéaires et non linéaires et les simulateurs associés sont utilisés dans le cadre de ce travail.

Les commandes industrielles dans le domaine de l'entraînement de bandes flexibles utilisent essentiellement des correcteurs standard de type PI. Cependant, ces correcteurs ne permettent pas d'atteindre des performances optimales en découplage tension de bande/vitesse de défilement et en robustesse vis-à-vis des variations de paramètres et des conditions de production (température, hygrométrie). Différentes stratégies de commandes industrielles publiées dans la littérature seront présentées dans la deuxième partie de ce chapitre.

2.1. Modélisation d'un système d'enroulement

On présentera dans ce paragraphe l'état de l'art des méthodes de modélisation d'un système d'enroulement ainsi que les différentes lois de la physique utilisées dans la modélisation de tels systèmes.

2.1.1. État de l'art des méthodes de modélisation d'un système d'enroulement

Les systèmes multi-moteurs d'entraînement de bandes flexibles sont des systèmes multivariables à grande échelle, c'est-à-dire à nombre élevé d'actionneurs, de capteurs et de variables d'état. De tels systèmes sont appelés en anglais « large scale systems ». De plus, ces systèmes sont non linéaires et à paramètres variant dans le temps. Ils sont donc considérés comme étant des systèmes complexes.

Une ligne industrielle d'entraînement de bandes est composée de nombreux éléments qui assurent chacun une ou plusieurs fonctions bien définies. Ces éléments sont par exemple le dérouleur, l'enrouleur, le danseur, l'accumulateur. Le couplage entre eux est effectué par la bande elle-même. Une représentation physique équivalente d'une ligne composée d'un dérouleur, de tracteurs et de rouleaux libres est donnée à la Figure 2.1-1. Dans cette représentation le comportement dynamique de la bande est caractérisé par un coefficient d'élasticité et un coefficient de viscosité.

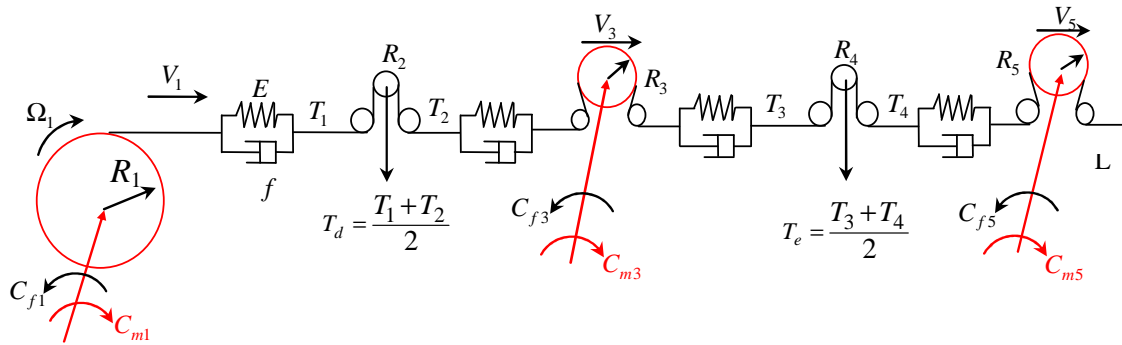


Figure 2.1-1. Représentation physique équivalente d'une chaîne de transport de bande viscoélastique

L'étude du comportement dynamique de la bande en mouvement nécessite l'élaboration d'un modèle de connaissance du système complet.

Les premiers modèles de systèmes d'entraînement de bandes flexibles ont été développés à l'Université de Munich et datent des années soixante [Kes61] et soixante-dix [Bra71] [Wol76]. Brandenburg [Bra71] [Bra73] a établi les équations de base permettant la construction d'un modèle dynamique d'un système industriel de transport de bande, à partir des lois générales de la mécanique. Il a en outre étudié en détails le glissement et l'adhérence entre la bande élastique et le rouleau sur toute la zone de contact, en supposant que le frottement obéit à la loi de Coulomb. Ses travaux font référence dans la communauté scientifique. Les équations établies par Brandenburg ont ensuite été reprises par Wolfermann qui les a associées aux modèles de contraintes dans une bobine [Wol76]. Des études plus récentes concernent la répartition de la tension de bande [ZJ95] dans un système d'entraînement. Les conditions d'application des différentes équations en enroulement ont ensuite été détaillées par H. Koç [Koç00] puis un modèle du comportement dynamique de la bande a été construit [Koç00] [KKM+02].

Ces différents modèles ne peuvent reproduire que des variations d'élongation d'une bande en mouvement sur un plan parfait. En réalité, l'imperfection géométrique de la bobine de déroulement (ou d'enroulement) ne génère pas uniquement des variations dans le sens du déplacement de la bande, mais également des déplacements perpendiculaires au niveau de la séparation de la bande avec la bobine. Ces derniers peuvent produire des vibrations transversales de la bande en mouvement et influencer les variations d'élongation. En réalité, une bande élastique et flexible en mouvement est également soumise à des vibrations longitudinales.

Les équations décrivant de tels mouvements et considérant le matériau comme une corde ou une poutre [CH01] sont déduites du principe de Hamilton étendu [McI72] et se composent de deux équations aux dérivées partielles, régissant la déviation longitudinale et transversale dans le cas d'une corde :

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial u}{\partial x} \right) - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\rho \dot{V} \quad (2.1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + 2V \frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + V^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dot{V} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - EA \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = p \quad (2.2)$$

où $v(x,t)$, $u(x,t)$, E , A , $\rho(x,t)$, ρ et V représentent respectivement le déplacement transversal, le déplacement longitudinal, le module d'Young, la section de la bande, la charge transversale par unité de longueur, la densité massique par unité de longueur et la vitesse de bande.

Différents modèles de matériaux élastiques en mouvement reposent sur ces deux équations aux dérivées partielles couplées, les plus connus étant les modèles de cordes ou de poutres vibrantes en mouvements [UM82], [WM88], [WM90], [NMc96], [RRW+98], [ÖP99], [SH03] et [CZW+04]. Une synthèse des différents travaux est publiée par Ulsay *et al.* [Uls84] et Lee et Mate [LM96]. Un traitement analytique de ces équations aux dérivées partielles, ainsi que leur implantation numérique, ont été développés dans les articles [Uls84], [Abr92], [LM96] et [Lau02].

Cependant, le comportement dynamique du matériau entraîné ne peut pas être modélisé par une corde vibrante en mouvement si une grande précision est recherchée, mais plutôt par une plaque ou une membrane en mouvement [BLD96], [KP97].

Une bande entraînée engendre des vibrations dans trois directions différentes :

- des vibrations longitudinales dans le plan de la bande et dans la direction de son mouvement ;
- des vibrations dans le plan de la bande mais perpendiculaires à la direction de son mouvement ;
- des vibrations perpendiculaires au plan de la bande encore appelées vibrations transversales (désignées en anglais par « out of plane vibrations »).

La modélisation des vibrations n'est pas incluse dans le simulateur utilisé dans le cadre de ce travail. Par conséquent, nous ne nous intéressons qu'aux variations d'élongation dans la direction du mouvement de la bande.

2.1.2. Modèle et propriétés du matériau

La vitesse de défilement de la bande ainsi que sa tension sont obtenues par l'action des rouleaux motorisés sur la bande. Une différence de vitesses des rouleaux provoque soit un allongement de la bande, soit un pli de celle-ci. L'allongement relatif ε est quantifié par la relation :

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (2.3)$$

où L et L_0 représentent respectivement les longueurs de la bande sous contrainte et au repos.

L'analyse dynamique du matériau en mouvement permet de connaître la relation entre la tension appliquée et son allongement relatif. Cette relation conditionne non seulement le réglage des correcteurs mais peut, dans certains cas, déterminer la structure-même de la commande.

2.1.2.1. La loi de Hooke

Le comportement d'un matériau est généralement caractérisé par le graphe contrainte-allongement. La zone linéaire de la courbe obtenue représente son comportement élastique et la pente correspond à son module d'Young E . Dans cette zone, la loi de Hooke exprime la relation de proportionnalité entre la contrainte et l'allongement [Oud94] :

$$\sigma = E\varepsilon . \quad (2.4)$$

Une forme plus complète de cette loi utilise des tenseurs. Elle est décrite dans [Wol76] et [Oud94]. Au-delà de la zone linéaire, on parle de zone de plasticité ou d'élasticité non linéaire. Le module d'Young est difficile à quantifier pour certains matériaux ayant des propriétés non linéaires de type hystérésis.

2.1.2.2. Le coefficient de Poisson

Lorsqu'une bande élastique est soumise à une traction unidirectionnelle, sa déformation longitudinale dans le sens de cette traction s'accompagne d'une déformation latérale, dans un rapport caractérisé par le coefficient de Poisson ν . La relation entre la tension appliquée T suivant l'axe x et l'allongement relatif ε_x dans cette même direction vaut [Shi91] :

$$T = ES\varepsilon_x = ES_0\varepsilon_x(1 - \nu\varepsilon_x)^2, \quad (2.5)$$

où S_0 et S sont respectivement la section de la bande en l'absence et en présence de cette traction. Pour les tissus élastiques déroulés dans le cadre de ce travail, le coefficient de Poisson peut être négligé en première approximation [Koç00].

2.1.2.3. Modèle rhéologique

Le modèle rhéologique décrit le comportement dynamique de tout matériau grâce à la combinaison d'éléments simples. Dans la majorité des cas, une représentation élastique du matériau est suffisante pour faire la synthèse de la commande. Cependant, la prise en compte du comportement viscoélastique peut aboutir à une modélisation plus précise et expliquer certains comportements dynamiques de la bande en mouvement qui ne peuvent être modélisés uniquement par l'élasticité.

Différents modèles rhéologiques phénoménologiques, comme par exemple les modèles de Maxwell et de Voigt, sont présentés dans [LC98].

Notre simulateur non linéaire complet utilise le modèle de Voigt.

2.1.3. Lois physiques utilisées pour la modélisation de systèmes d'enroulement

Le modèle complet d'un système d'entraînement de bandes est construit par l'assemblage des modèles des éléments primitifs. Une récurrence est ensuite établie entre les tensions de bande et les vitesses des rouleaux des éléments primitifs voisins.

2.1.3.1. Détermination de la tension de bande en mouvement

Considérons le tronçon de bande compris entre deux rouleaux consécutifs selon la Figure 2.1-2. Le défilement de la bande peut être vu comme un débit de matière entre deux points où il y a conservation de la masse [Wol76].

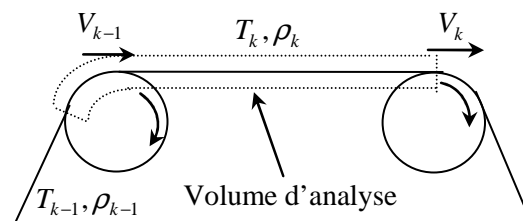


Figure 2.1-2. Volume d'analyse entre deux rouleaux

➤ Conditions d'adhérence et de glissement

Dans les systèmes d'entraînement de bandes, les conditions de glissement et d'adhérence dépendent de la tension et de la vitesse de la bande et du coefficient de frottement entre la bande et le rouleau. Pour éviter l'apparition de glissements, il faut en général une grande zone de contact entre la

bande et le rouleau.

La loi de Capstan, couramment utilisée dans les systèmes de transmission par courroie, permet de déterminer la relation en régime permanent entre les tensions T_{k-1} en amont et T_k en aval du rouleau pour les deux situations suivantes [ZJ95] :

$$\text{- dans le cas du glissement : } T_k = T_{k-1} e^{\pm \mu \theta}, \quad (2.6)$$

$$\text{- dans le cas de l'adhérence : } T_{k-1} e^{-\mu \theta} \leq T_k \leq T_{k-1} e^{+\mu \theta}, \quad (2.7)$$

où μ représente le coefficient de frottement et θ l'angle de contact entre la bande et le rouleau.

Pour obtenir à nouveau l'adhérence de la bande alors qu'elle est en train de glisser, il faut réaliser l'égalité des vitesses de la bande et du rouleau [LCM99], [KKM+02] et [BR02].

Dans un modèle de contact bande/rouleau plus complet, Brandenburg [Bra73] distingue une zone de glissement et une zone d'adhérence, de longueurs pouvant varier dans le temps et désignées respectivement par $g(t)$ et $a(t)$ sur la Figure 2.1-3.

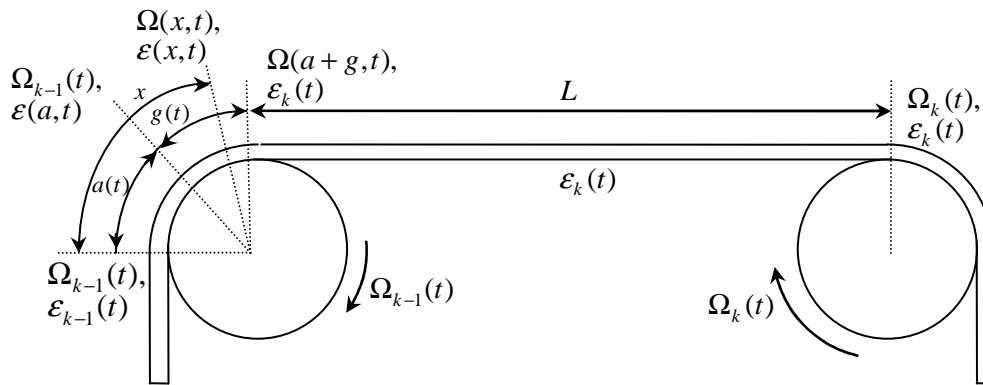


Figure 2.1-3. Visualisation des élongations de bande entre deux rouleaux entraînés

Une première étude du glissement, ou patinage, a été réalisée par Bastogne *et al.* [BR02] et Knittel *et al.* [KKM+02].

➤ Loi de conservation de masse

La masse de bande non étirée dans le volume d'analyse de la Figure 2.1-2 vaut :

$$M_0 = \rho_0 L_0 l_0 h_0, \quad (2.8)$$

où l'indice 0 indique que les paramètres sont à l'état de repos. ρ , L , l , h représentent respectivement la masse volumique, la longueur, la largeur et l'épaisseur de la bande. Lorsque la bande est soumise à une traction, elle s'allonge d'une valeur relative ε et sa masse volumique peut être approximée par [Shi91] :

$$\rho = \frac{\rho_0}{(1 + \varepsilon)}. \quad (2.9)$$

➤ **Tension de bande entre deux rouleaux consécutifs**

L'équation de continuité, issue de la mécanique des milieux continus, peut être appliquée à l'entraînement de bande entre deux rouleaux [Bra73] :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0. \quad (2.10)$$

Si l'on fait l'hypothèse que la bande n'est déformée que dans une seule direction, celle de son défilement, en négligeant par conséquent le coefficient de Poisson, la combinaison des équations (2.9) et (2.10) donne l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{1 + \varepsilon} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V}{1 + \varepsilon} \right) = 0. \quad (2.11)$$

Par intégration selon x entre les premiers points de contact des deux rouleaux, avec l'hypothèse que la longueur de la zone de contact bande/rouleau est négligeable devant la longueur L de bande entre les rouleaux, on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L}{1 + \varepsilon_k} \right) = -\frac{V_k}{1 + \varepsilon_k} + \frac{V_{k-1}}{1 + \varepsilon_{k-1}}, \quad (2.12)$$

où V_{k-1} et V_k sont les vitesses tangentielles des rouleaux $k-1$ et k . Cette relation, utilisée dans un grand nombre de travaux de modélisation des systèmes d'entraînement de bandes flexibles [Shi91] [SW95] [Wol95], relie l'allongement relatif de la bande entre deux rouleaux à celui de la bande en amont du premier rouleau et aux vitesses tangentielles des deux rouleaux. Le calcul de la dérivée conduit à :

$$-L \frac{\dot{\varepsilon}_k}{(1 + \varepsilon_k)^2} = -\frac{V_k}{1 + \varepsilon_k} + \frac{V_{k-1}}{1 + \varepsilon_{k-1}}, \quad (2.13)$$

$$-L \dot{\varepsilon}_k = -\frac{(1 + \varepsilon_k)^2}{1 + \varepsilon_k} V_k + \frac{(1 + \varepsilon_k)^2}{1 + \varepsilon_{k-1}} V_{k-1}. \quad (2.14)$$

En posant :

$$V_k = V_0 + v_k, \quad T_k = T_0 + t_k, \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_k = \varepsilon_0 + \Delta \varepsilon_k, \quad T_0 = ES \varepsilon_0, \quad t_k = ES \Delta \varepsilon_k, \quad (2.16)$$

et en faisant un développement limité de (2.14), on obtient [Koç00] :

$$L \frac{dt_k}{dt} = (ES + T_0)(v_k - v_{k-1}) + V_0(t_{k-1} - t_k). \quad (2.17)$$

En faisant le développement limité $\frac{1}{1 + \varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$ directement dans la relation (2.12) avant de calculer la dérivée, on obtient la relation classique [Bra73] [Koç00], [PKD+00] :

$$L \frac{dt_k}{dt} = (ES - T_0)(v_k - v_{k-1}) + V_0(t_{k-1} - t_k). \quad (2.18)$$

Bien que cette relation soit rencontrée dans la littérature plus couramment que (2.17), c'est cependant cette dernière que nous avons utilisé pour la synthèse de nos correcteurs. Dans le cas de nos études en simulation, par contre, la relation (2.12) est directement programmée dans le simulateur non linéaire.

2.1.3.2. Détermination de la vitesse de la bande

Par application du principe fondamental de la dynamique, la vitesse de rotation d'un rouleau ou d'une bobine est donnée par [Gol94] :

$$\frac{d}{dt}(J\Omega) = C_m - C_r - C_f, \quad (2.19)$$

où C_m , C_r et C_f sont respectivement les sommes des couples moteurs, des couples résistants autres que les frottements et des couples de frottements.

On a supposé qu'il n'y a pas de glissement entre le rouleau et la bande. On suppose en outre que la bande et le rouleau sont en permanence en contact et qu'il n'y a pas d'aéroplaning, phénomène qui se produit souvent aux vitesses de défilement élevées et qui a été étudié dans [BB93] [Bou98]. On peut donc déterminer la vitesse linéaire de la bande à partir de la mesure de la vitesse de rotation du rouleau.

Les seuls frottements intervenant dans (2.19) sont ceux produits par la rotation des rouleaux, c'est-à-dire les frottements des roulements. Différentes lois de frottements ont été élaborées ces derniers siècles et sont présentées dans [ADC94]. Coulomb introduit en 1785 la notion de frottement sec, appelé de ce fait frottement de Coulomb. C'est un frottement constant indépendant de la vitesse. Morin introduit en 1866 l'idée du frottement statique, qui correspond à l'excédent de frottement sec à vitesse nulle. Reynolds introduit la même année la notion de frottement visqueux, en écrivant les équations d'écoulement visqueux. D'autres lois ont été construites depuis pour des systèmes qui ne pouvaient être modélisés par une somme de frottements de Coulomb, statiques et visqueux. La notion de frottement visqueux négatif est introduite par Stribeck. Une variante de cette loi avec effet Stribeck est développée par Bo et Pavelescu en 1982 avec un terme exponentiel :

$$C_{fs} = C_{fsd} + (C_{fsa} - C_{fsd}) \left(1 - e^{-\left(\frac{\Omega}{\Omega_0}\right)^\delta}\right). \quad (2.20)$$

Dans notre cas, les frottements observés ont été décomposés en deux parties : le frottement sec modélisé selon l'équation (2.20) et un frottement visqueux approximé par un polynôme d'ordre 3 en Ω [Koç00].

2.1.4. Modèle d'une chaîne complète d'enroulement

Ce paragraphe présente le modèle complet d'une chaîne de transport de bande. On détaillera le cas du système d'enroulement à trois moteurs (voir Figure 2.1-4). Le modèle d'un système d'enroulement à nombre élevé de moteurs s'en déduit par une simple duplication d'éléments primitifs qui sont les moteurs de traction.

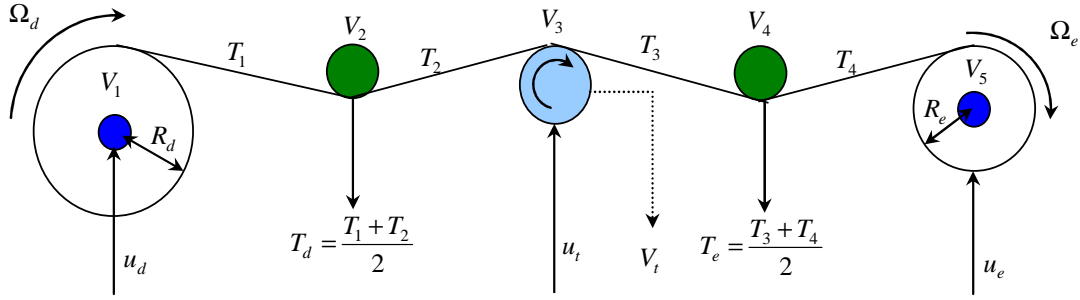


Figure 2.1-4. Schéma du banc à trois moteurs

La modélisation d'un système d'enroulement de bande passe obligatoirement par la modélisation de tous ses éléments primitifs. La modélisation phénoménologique ayant été effectuée dans le cadre de la thèse de H. Koç [Koç00], on n'en rappellera ici que les traits importants. À titre d'exemple, la méthodologie de modélisation de l'élément primitif « moteur et bobine de déroulement » est détaillée dans l'annexe D de ce manuscrit.

2.1.4.1. Équations des éléments primitifs d'un système d'enroulement

Les équations des différents composants de la chaîne d'entraînement de bandes sont présentées ci-après. Les détails sont donnés dans [Koç00].

Dérouleur :

$$\frac{d}{dt}(J_d \Omega_d) = T_d R_d - K_d U_d - (C_{d fs} + C_{d fv}), \quad (2.21)$$

$$L \frac{dT_1}{dt} = V_2 (ES + T_1) - V_1 (ES - T_b + 2T_1). \quad (2.22)$$

Capteur dérouleur :

$$J_2 \frac{dV_2}{dt} = R_2^2 (T_2 - T_1) - f_2 V_2, \quad (2.23)$$

$$L_2 \frac{dT_2}{dt} = V_3 (ES - T_2) - V_2 (ES + 2T_2 - T_1). \quad (2.24)$$

Tracteur :

$$J_t \frac{d\Omega_t}{dt} = R_t (T_3 - T_2) + K_t U_t - (C_{t fs} + C_{t fv}), \quad (2.25)$$

$$L_3 \frac{dT_3}{dt} = V_4 (ES - T_3) - V_3 (ES + 2T_3 - T_2). \quad (2.26)$$

Capteur enrouleur :

$$J_4 \frac{dV_4}{dt} = R_4^2 (T_4 - T_3) - f_4 V_4, \quad (2.27)$$

$$L_4 \frac{dT_4}{dt} = V_5(ES - T_4) - V_4(ES + 2T_4 - T_3). \quad (2.28)$$

Enrouleur :

$$\frac{d}{dt}(J_e \Omega_e) = -T_e R_e + K_e U_e - (C_{e fs} + C_{e fv}). \quad (2.29)$$

Ces équations sont utilisées pour la construction du simulateur non linéaire.

2.1.4.2. Programmation du modèle non linéaire d'un système d'enroulement

Le modèle d'un système d'entraînement de bandes de quelle que soit sa dimension a été programmé dans l'environnement Matlab®/Simulink® à partir des équations des différents éléments primitifs [Koç00]. L'assemblage par récurrence des différents éléments a permis de construire la chaîne complète d'un système déroulement-transport-enroulement de bandes flexibles. Le principe est illustré à la Figure 2.1-5.

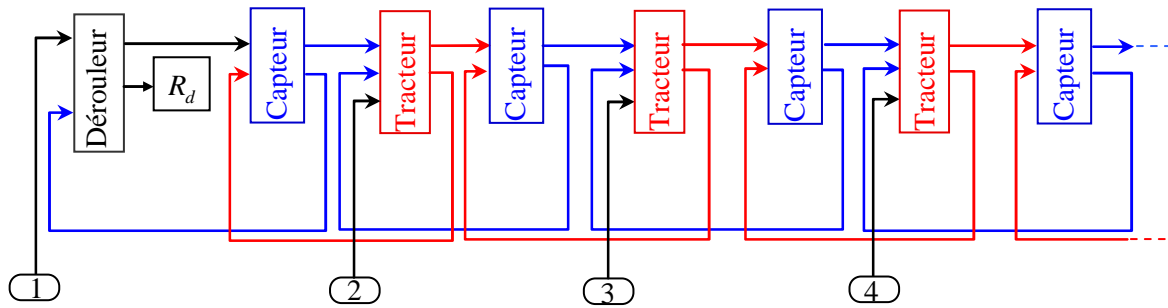


Figure 2.1-5. Construction du simulateur non linéaire d'un système d'enroulement multi-moteurs

2.1.4.3. Modèle linéaire du système d'enroulement à trois moteurs

La synthèse de commandes multivariables linéaires nécessite au préalable la construction d'un modèle linéaire de la machine à commander. Pour cela, on linéarise le modèle non linéaire autour d'un point de fonctionnement : la vitesse nominale V_0 de la bande et sa tension T_0 sont supposées constantes, les rayons des bobines ainsi que leurs inerties associées varient lentement (épaisseur de bande faible), les frottements secs sont négligés puisqu'ils sont compensés par l'ajout d'une constante appropriée aux signaux de commande. De plus le modèle est linéarisé pour la phase de démarrage afin de synthétiser les correcteurs pour cette phase. En effet, le démarrage en vitesse est crucial dans tout processus de déroulement-enroulement.

La Figure 2.1-4 montre les différentes variables du modèle linéaire d'un système d'entraînement de bandes à trois moteurs. Les entrées de ce système multivariable sont les signaux de commande en couple (u_d, u_t, u_e) tandis que les sorties correspondent aux mesures de la tension de déroulement T_d , de la vitesse linéaire du tracteur $V_t = V_3$ et de la tension d'enroulement T_e .

Le modèle linéaire de ce système peut être mis sous la forme de la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} E(t) \frac{dx}{dt} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= Cx, \end{aligned} \quad (2.30)$$

où $x = [V_1 \ T_1 \ V_2 \ T_2 \ V_3 \ T_3 \ V_4 \ T_4 \ V_5]^T$ est le vecteur d'état du système, $u = [u_d \ u_t \ u_e]^T$ contient les entrées du système (signaux de commande) et $y = [T_d \ V_t \ T_e]^T$ ses sorties.

Les matrices $A(t)$, $B(t)$, C et $E(t)$ sont données ci-après :

$$A(t) = \begin{bmatrix} -f_1(t) & R_d^2(t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -E_0 & -V_0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2^2 & -f_2 & R_2^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & V_0 & -E_0 & -V_0 & E_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_t^2 & -f_3 & R_t^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & V_0 & -E_0 & -V_0 & E_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_4^2 & -f_4 & R_4^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & V_0 & -E_0 & -V_0 & E_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -R_e^2(t) & -f_5(t) \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} K_d R_d(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_t R_t & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_e R_e(t) \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.32)$$

$$E(t) = \text{diag}[J_1(t), L_1, J_2, L_2, J_3, L_3, J_4, L_4, J_5(t)]. \quad (2.33)$$

V_i , R_i , J_i et f_i sont respectivement la vitesse tangentielle, le rayon, l'inertie et le coefficient de frottement visqueux du rouleau i . T_i et L_i sont les tensions de bande et la longueur de bande entre le rouleau i et le rouleau $i+1$. R_t désigne le rayon du rouleau tracteur, $R_d(t)$ et $R_e(t)$ ceux des rouleaux dérouleur et enrouleur qui sont nécessairement fonctions du temps. K_d , K_t et K_e sont les constantes de couple des trois moteurs. V_0 est la vitesse linéaire nominale de la bande. E_0 est un paramètre dépendant du module d'élasticité E , de la section de bande S et de la tension nominale T_0 : $E_0 = ES + T_0$. Tous les paramètres variant durant le processus de déroulement-enroulement sont exprimés en fonction du temps.

Les valeurs numériques de ces matrices sont données dans l'annexe D.

2.1.5. Autre type de modélisation : modèle décentralisé exact

Très récemment, un modèle décentralisé exact a été mis sous la forme d'une représentation d'état par D. Knittel *et al.* [KAV+06]. Pour cela, le modèle non linéaire a été décomposé en sous-systèmes ne comprenant chacun qu'un seul actionneur, en posant :

$$V_i = V_0 + v_i; \quad T_i = T_0 + t_i; \quad U_i = U_{s_{i_0}} + u_{s_i}, \quad (2.34)$$

où v_i, t_i et u_{s_i} sont les variations des signaux autour des valeurs de consigne.

Pour l'exemple du banc à trois moteurs, les sous-systèmes dynamiques issus de cette décomposition sont décrits comme suit :

Sous-système 1 : (avec $\underline{x}_1 = [v_1 \quad t_1 \quad v_2 \quad t_2]^T$)

$$E_1 \dot{\underline{x}}_1 = A_1 \underline{x}_1 + B_1 u_{s_1} + H_1 + A_{12} \underline{x}_2. \quad (2.35)$$

Sous-système 2 : (avec $\underline{x}_2 = [v_3]^T$)

$$E_2 \dot{\underline{x}}_2 = A_2 \underline{x}_2 + B_2 u_{s_2} + H_2 + A_{21} \underline{x}_1 + A_{23} \underline{x}_3. \quad (2.36)$$

Sous-système 3 : (avec $\underline{x}_3 = [t_3 \quad v_4 \quad t_4 \quad v_5]^T$)

$$E_3 \dot{\underline{x}}_3 = A_3 \underline{x}_3 + B_3 u_{s_3} + H_3 + A_{32} \underline{x}_2. \quad (2.37)$$

Une description détaillée est donnée dans [KAV+06]. À titre d'exemple, les matrices du sous-système 1 (dérouleur) sont données ci-après.

$$E_1 = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_2 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & R_1^2 & 0 & 0 \\ -(E_0 + T_0 + T_b) & -V_0 & -E_0 & 0 \\ 0 & -R_2^2 & -f_2 & R_2^2 \\ 0 & V_0 & -E_0 & -3V_0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -K_1 R_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.38)$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_0 - 2T_0 \end{bmatrix}, \quad (2.39)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} \left(\rho S R_1^2 - \frac{J_1 h}{2\pi R_1^2} + \frac{f_{v_{2d}}}{R_1} \right) V_0^2 - \frac{f_{v_{3d}}}{R_1^2} V_0^3 - R_1 C_{fs_d} - f_{v_{1d}} V_0 + R_1^2 T_0 - R_1 K_1 U_{s_{1_0}} + \\ + \left(\rho S R_1^2 + \frac{J_1 h}{2\pi R_1^2} + \frac{f_{v_{2d}}}{R_1} \right) v_1^2 - \frac{f_{v_{3d}}}{R_1^2} v_1^3 \\ V_0 T_b - V_0 T_0 + v_2 t_1 - 2v_1 t_1 \\ -f_2 V_0 \\ -2V_0 T_0 + t_1 v_2 - 2v_2 t_2 - v_3 t_2 \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$\text{où } a_1 = 2V_0 \left(\rho S R_d^2 - \frac{J_d h}{2\pi R_d^2} + \frac{f_{v_{2d}}}{R_d} \right) - 3 \frac{f_{v_{3d}}}{R_d^2} V_0^2 - f_{v_{1d}}.$$

La commande $U_{s_{1_0}}$ apparaît dans la première ligne de la matrice H_1 . Il sera donc intéressant d'annuler cette ligne par une commande par précompensation (feedforward).

Les termes H_i regroupent les termes non linéaires et les constantes du modèle. Les matrices A_{ij} décrivent l'effet de couplage du sous-système j sur le sous-système i . La Figure 2.1-6 illustre cette décomposition et les différentes variables entrant dans la nouvelle modélisation décentralisée du système.

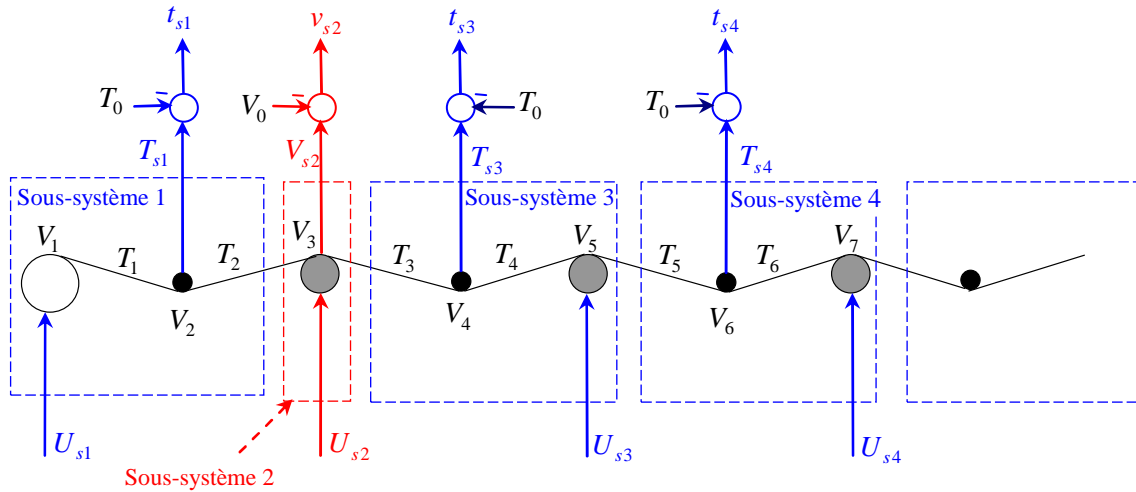


Figure 2.1-6. Décomposition en vue de la modélisation décentralisée exacte

2.1.6. Estimation des paramètres du modèle

L'estimation des paramètres du modèle non linéaire du banc expérimental à trois moteurs a été réalisée dans le cadre de la thèse de H. Koç [Koç00]. Les caractéristiques de la bande utilisée sont incluses dans le modèle. Le simulateur non linéaire construit peut être facilement adapté à tout autre type de bande flexible.

L'estimation des paramètres a été réalisée en plusieurs étapes. Tout d'abord les frottements secs et visqueux ont été identifiés par la méthode des moindres carrés. Ensuite, les paramètres des inerties des moteurs et capteurs de tension ainsi que les gains des variateurs ont été estimés par la méthode du modèle de référence [Ric91], en minimisant un critère quadratique tenant compte des erreurs sur la vitesse et les tensions de bande.

Comme l'illustre la Figure 2.1-7, le simulateur non linéaire reproduit fidèlement le comportement dynamique des tensions de bande et de la vitesse de défilement.

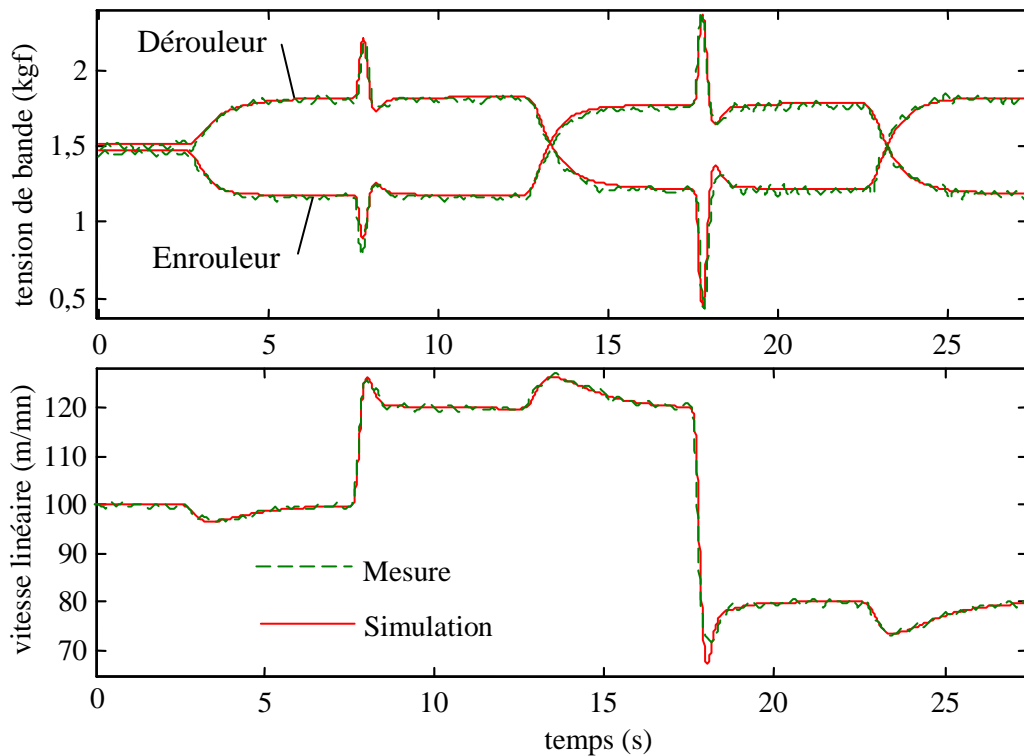


Figure 2.1-7. Comparaison des résultats de mesures et de simulations du système à trois moteurs

Le modèle suppose qu'il n'y ait pas de glissement entre la bande et les rouleaux. Aussi, le simulateur ne peut pas reproduire les effets de patinage. Cependant, la comparaison des résultats de simulation aux grandeurs mesurées permet de détecter les phénomènes de glissements.

2.1.7. Analyse du modèle linéaire en vue de la synthèse d'une loi de commande

Avant d'effectuer la synthèse des correcteurs, il est intéressant de déterminer l'influence des paramètres variants ou non variants sur le comportement dynamique du système.

Une analyse détaillée du modèle est donnée dans le mémoire de thèse de H. Koç [Koç00].

2.1.7.1. Influence de l'élasticité de la bande

L'élasticité de la bande a une grande influence sur le procédé de déroulement-transport-enroulement. Effectivement, les matériaux rigides sont plus faciles à entraîner, notamment pendant les phases transitoires. Une explication peut être donnée à partir des valeurs singulières de la matrice de transfert du système pour différentes valeurs du module d'Young.

La Figure 2.1-8 représente les maxima des valeurs singulières du système pour différentes valeurs du module d'Young. On observe sur cette figure que le pic de résonance se déplace vers la zone des basses fréquences quand le module d'Young diminue, c'est-à-dire lorsque la bande devient de plus en plus élastique. Cette diminution peut être due, dans le cas d'un film en polymère, à l'augmentation de température et/ou de l'humidité [Oud94]. Dès que le pic de résonance entre dans la bande passante du système asservi, ce pic peut créer des problèmes.

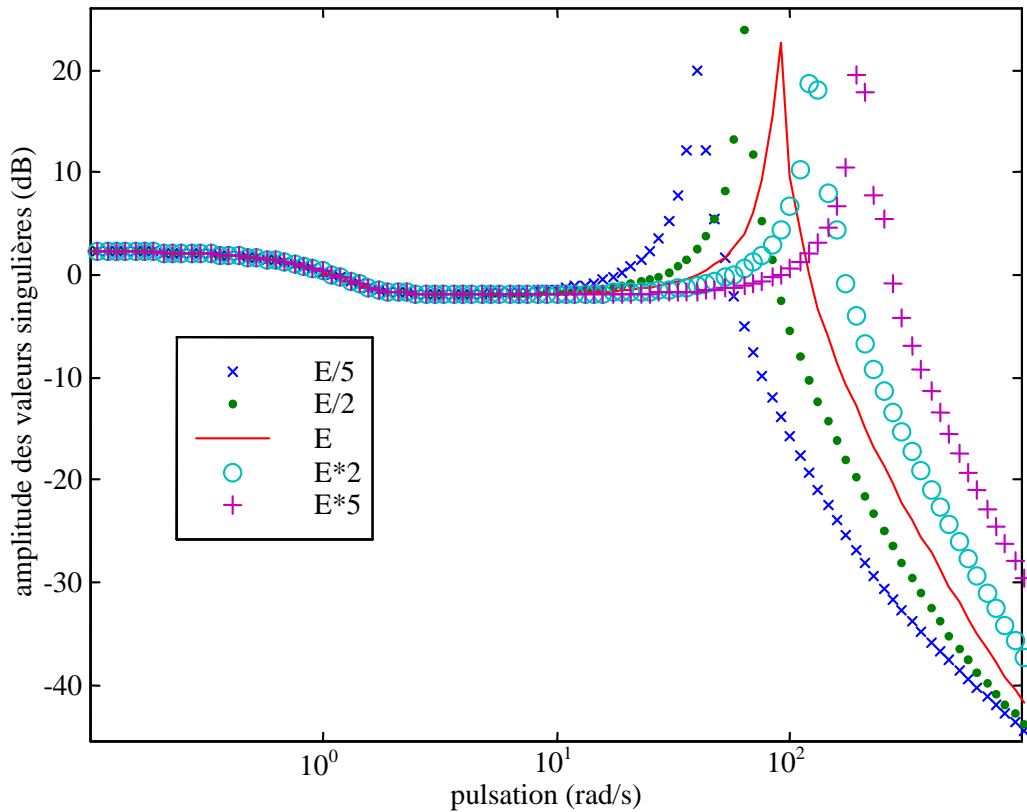


Figure 2.1-8. Influence de l'élasticité de la bande sur les maxima des valeurs singulières

2.1.7.2. Analyse des pôles du système

L'ajout de rouleaux motorisés (tracteurs) et de capteurs de tension supplémentaires introduit de nouveaux pôles et zéros à parties imaginaires très élevées, ce qui rend les pôles complexes conjugués dominants de plus en plus lents, et par conséquent le système plus difficile à commander [Koç00].

2.1.7.3. Influence de la variation des rayons : utilisation d'une commande avec « séquençement de gains »

La linéarisation du modèle non linéaire avait supposé constants les rayons des bobines d'enroulement et de déroulement. Cependant, lors d'un procédé d'enroulement-déroulement réel, ces rayons varient au cours du temps, ce qui provoque un déplacement du point de fonctionnement et par conséquent le modèle linéaire n'est plus adapté.

Considérons le dérouleur et l'enrouleur séparément. Dans l'hypothèse du régime permanent, les gains des fonctions de transfert des signaux de commandes u_d, u_e vers les signaux de sorties T_1 et T_4 sont inversement proportionnels aux rayons de la bobine du dérouleur et de l'enrouleur [Koç00] :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_1(s)}{u_d(s)} \cong \frac{K_d}{R_d}, \quad \lim_{s \rightarrow 0} \frac{T_4(s)}{u_e(s)} \cong \frac{K_e}{R_e}. \quad (2.41)$$

En se basant sur cette observation, un nouveau système G_R est construit en multipliant les signaux de commandes du correcteur par les rayons des bobines correspondantes. L'illustration de cette nouvelle stratégie de commande appliquée au système d'enroulement à trois moteurs est donnée à la Figure 2.1-9.

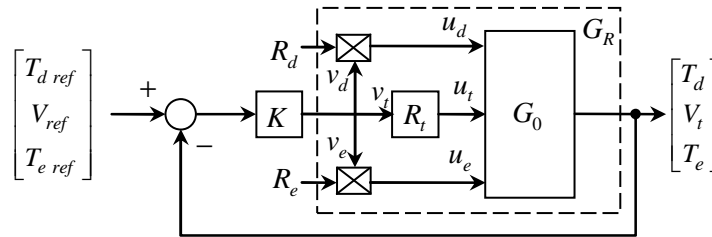


Figure 2.1-9. Commande du système avec séquençement de gains

Le bloc K représente le correcteur synthétisé sur la base du nouveau modèle linéaire G_R . G_0 désigne le modèle linéaire du système donné par les équations (2.31), (2.32) et (2.33). La réalisation d'état du nouveau modèle G_R se déduit de celle de G_0 : on garde les mêmes matrices systèmes $A(t)$, C et $E(t)$, et seule la matrice d'état $B(t)$ est modifiée, ses éléments diagonaux étant cette fois-ci multipliés respectivement par les rayons R_d , R_t et R_e :

$$B(t) = \begin{bmatrix} K_d R_d^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_t R_t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_e R_e^2(t) \end{bmatrix}. \quad (2.42)$$

Il est à noter ici que toutes les grandeurs mesurées sur le banc d'enroulement à trois moteurs sont filtrées par des passe-bas du premier ordre. Aussi, notre simulateur contient des filtres à la sortie du système, ces filtres étant regroupés dans une matrice appelée $H(s)$ et localisés dans la rétroaction du système bouclé.

Afin de visualiser l'utilité du séquençement de gain, on représente d'une part les valeurs singulières de G_0 et $G_0 + H$ (G_0 filtré) sur la Figure 2.1-10, d'autre part G_R et $G_R + H$ (G_R filtré) sur la Figure 2.1-11, et ceci pour différentes valeurs des rayons R_d et R_e .

Il apparaît clairement sur la deuxième figure que les valeurs singulières du système deviennent indépendantes de la variation des rayons dans la zone des basses fréquences. Le séquençement de gain garantit donc une meilleure robustesse en performances et en stabilité vis-à-vis des variations des rayons des bobines.

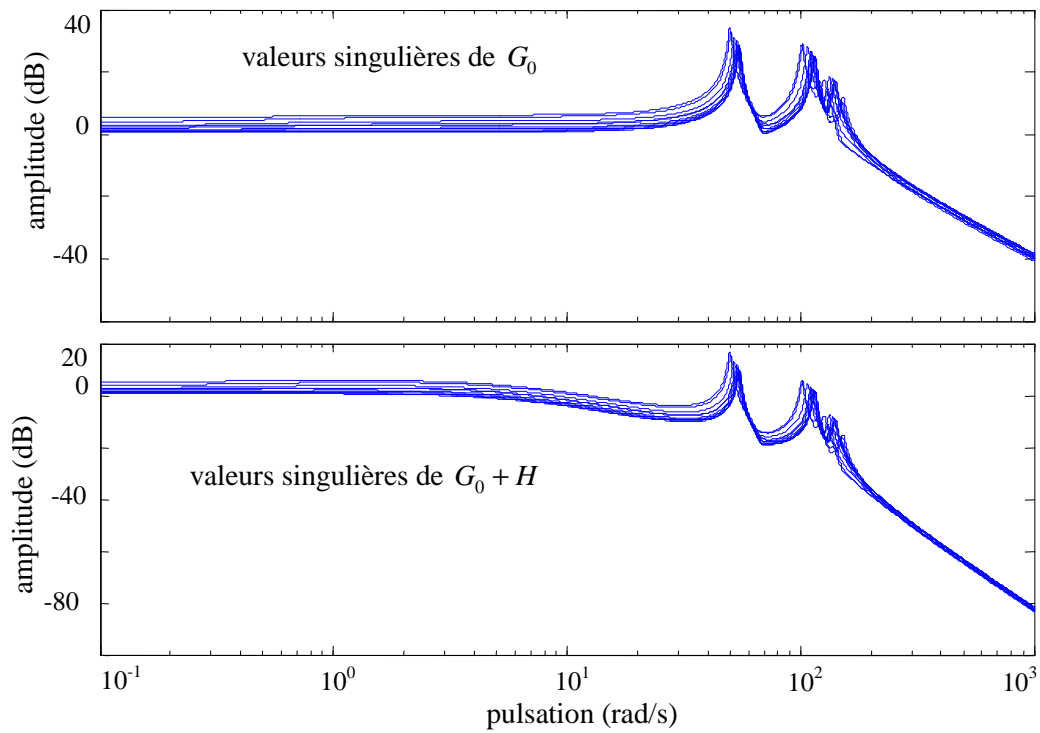


Figure 2.1-10. Valeurs singulières du système à trois moteurs pour différents rayons : stratégie sans multiplication de rayons

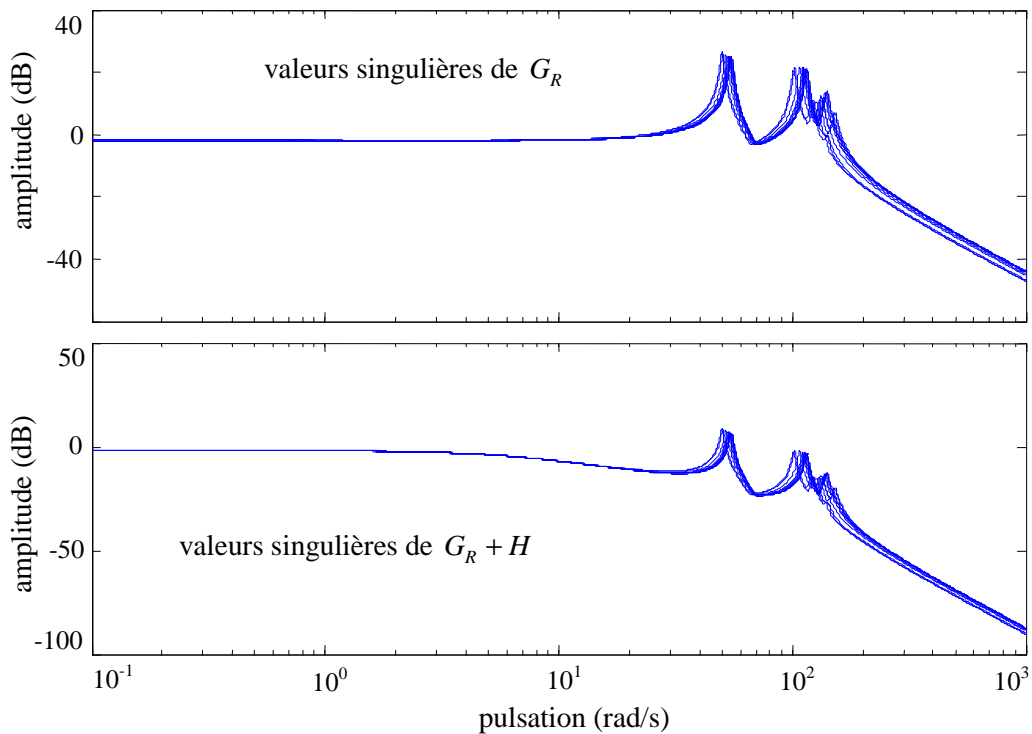


Figure 2.1-11. Valeurs singulières du système à trois moteurs pour différents rayons : stratégie avec multiplication de rayons

Les mêmes constatations peuvent être faites sur les diagrammes de Bode entrées-sorties (Figure 2.1-12 et Figure 2.1-13).

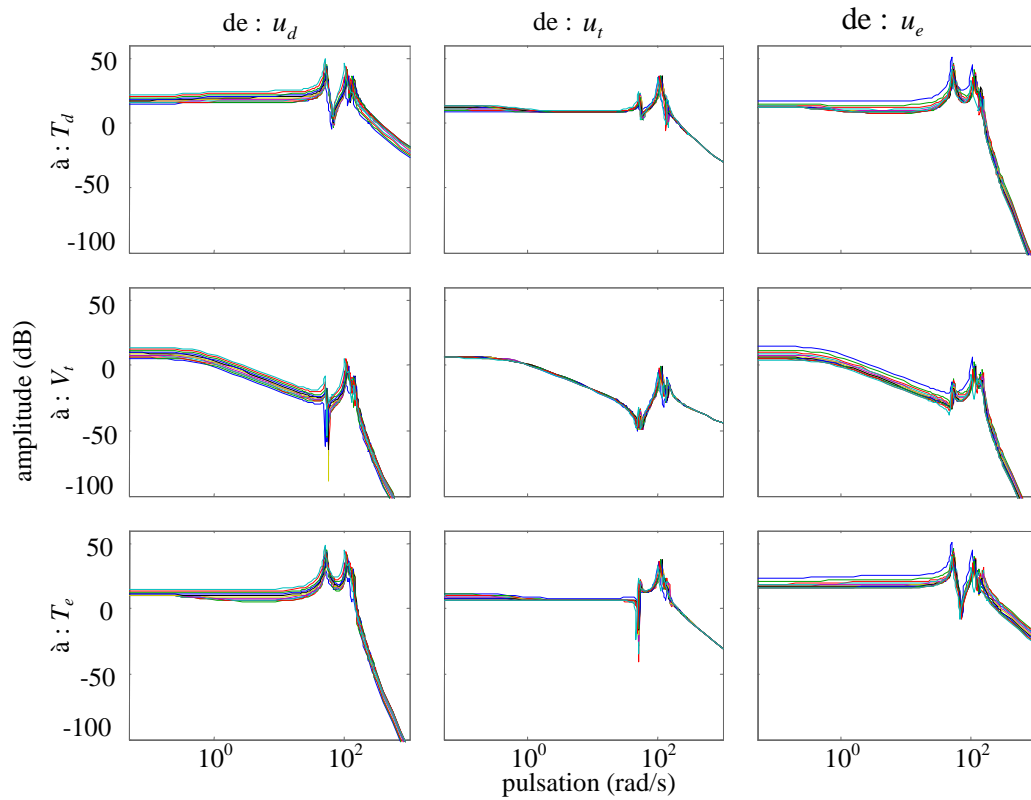


Figure 2.1-12. Diagramme de Bode du système à trois moteurs G_0 pour différentes valeurs de rayons : stratégie sans multiplication de rayon

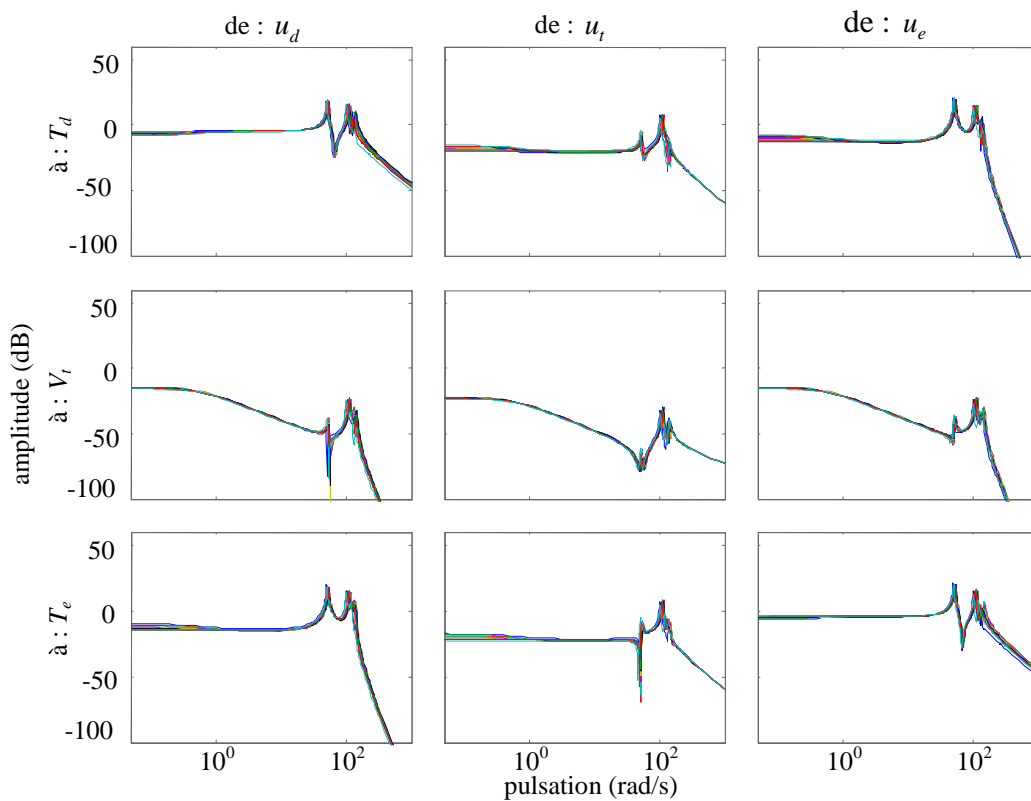


Figure 2.1-13. Diagramme de Bode du système à trois moteurs G_R pour différentes valeurs de rayons : stratégie avec multiplication de rayon

On remarque sur la Figure 2.1-13 que les gains en basse fréquence des fonctions de transferts SISO (mono-entrée, mono-sortie) sont pratiquement indépendants de la variation des rayons contrairement à la Figure 2.1-12.

Par ailleurs, on remarque sur les deux figures que les gains statiques des différentes fonctions de transfert sont tous de valeurs équivalentes. Il apparaît ainsi que le système est fortement couplé et qu'aucun couplage n'est à négliger.

Cependant, aux hautes fréquences, la tension du dérouleur est davantage influencée par une commande appliquée au tracteur qu'à l'enrouleur. À l'inverse, la tension de l'enrouleur est davantage influencée par une commande appliquée au tracteur qu'au dérouleur.

Les pôles et les zéros du système en boucle ouverte sans et avec séquençement de gains sont tracés respectivement sur la Figure 2.1-14 et la Figure 2.1-15. Dans ces deux figures, les zéros sont représentés par un rond tandis que les pôles sont visualisés par les autres symboles.

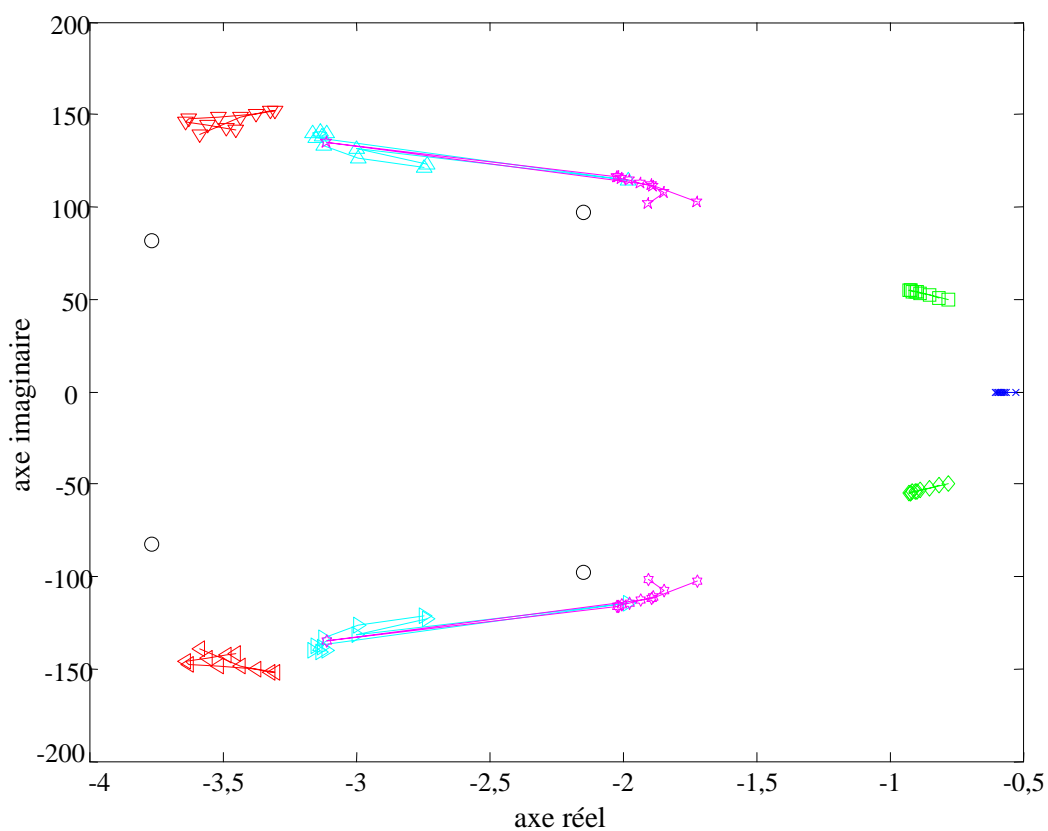


Figure 2.1-14. Variations des pôles et zéros du système à trois moteurs pour différentes valeurs de rayons : stratégie sans multiplication de rayons

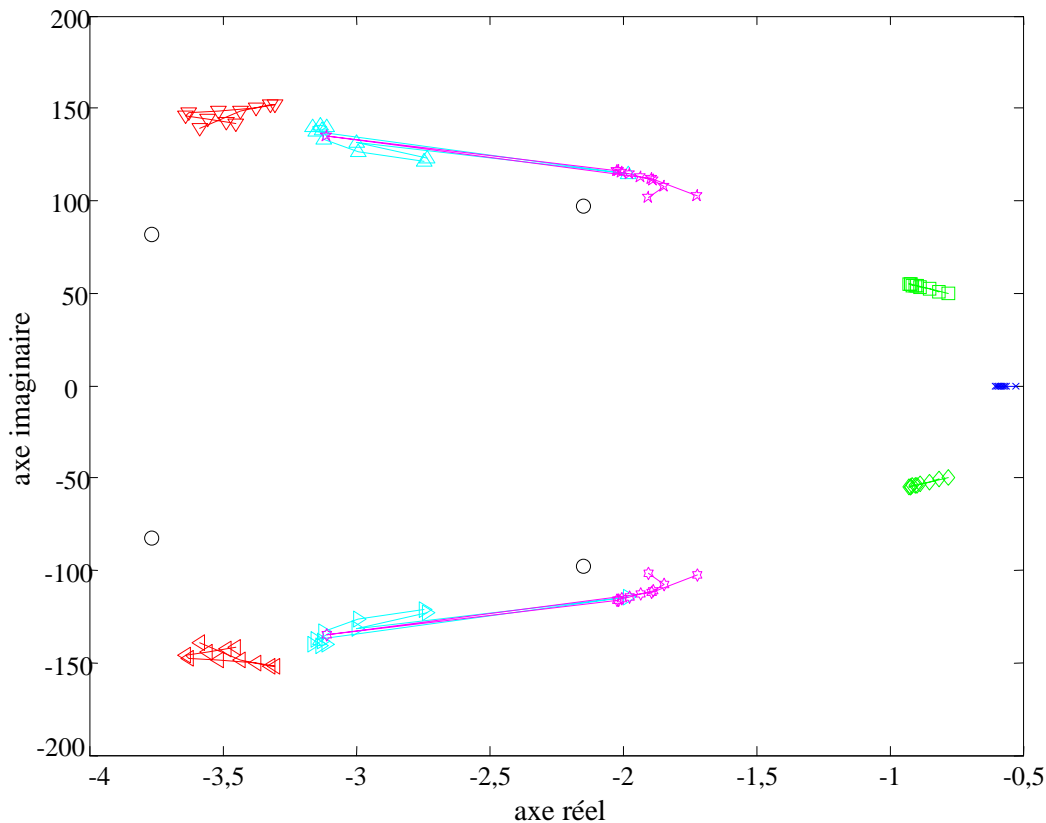


Figure 2.1-15. Variations des pôles et zéros du système à trois moteurs pour différentes valeurs de rayons : stratégie avec multiplication de rayons

La comparaison entre les deux figures montre que leurs localisations sont quasiment inchangées. Ainsi la multiplication par les rayons n'influence quasiment pas le comportement dynamique du système en boucle ouverte.

2.2. Stratégies de commande industrielles des systèmes d'entraînement de bandes

La commande des systèmes d'entraînement de bandes en papier ou de bandes métalliques est relativement bien maîtrisée dans l'industrie. Cependant, les systèmes d'entraînement de bandes élastiques ou viscoélastiques sont difficiles à commander puisque le comportement dynamique de la bande dépend d'une part des variations de tension et de vitesse de défilement, d'autre part des conditions de productions (température et hygrométrie). Aussi, nous nous intéressons, dans le cadre de ce travail, à l'entraînement de bandes élastiques. Il existe trois stratégies de commande industrielles que nous présenterons sommairement ci-après. Elles ont en commun d'être totalement décentralisées puisque les systèmes industriels sont généralement de grande dimension (nombre élevé d'actionneurs).

2.2.1. Commande décentralisée découplée

Le schéma de principe de la commande décentralisée « découplée » est donné à la Figure 2.2-1 :

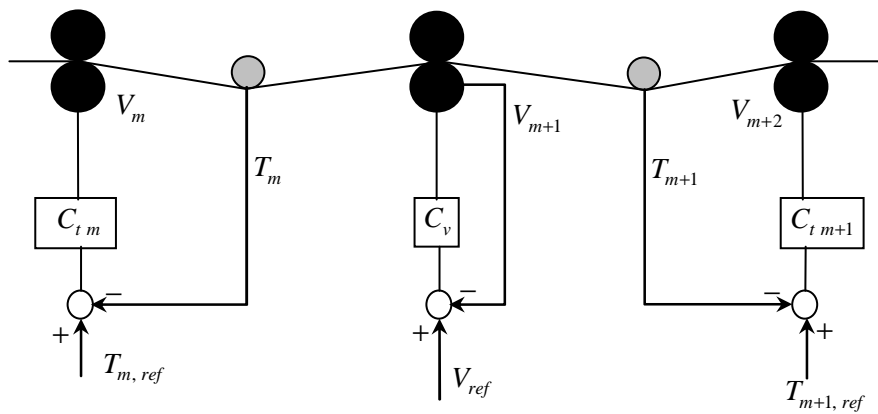


Figure 2.2-1. Commande décentralisée découplée industrielle

À l'image de la majorité des stratégies de commande des systèmes d'entraînement de bandes, cette stratégie impose la vitesse de défilement de la bande grâce à un asservissement de vitesse d'un seul moteur entraîneur appelé « *maître* », tandis qu'un asservissement en tension est appliqué à tous les autres moteurs. Cette stratégie de commande a l'inconvénient d'être difficile à régler. De plus, elle possède de faibles performances en rejet de perturbation et en découplage tension/vitesse de bande.

2.2.2. Commande de tension de bande en boucle ouverte

Une autre stratégie mise en œuvre dans l'industrie, utilise exclusivement des asservissements de vitesses appliqués aux rouleaux tracteurs pour régler les tensions de bande. Cette commande, qui est faite en boucle ouverte (« *open loop draw control* »), exploite la différence de vitesse entre deux rouleaux consécutifs pour commander la tension dans la branche correspondante. La Figure 2.2-2 illustre le principe de cette stratégie.

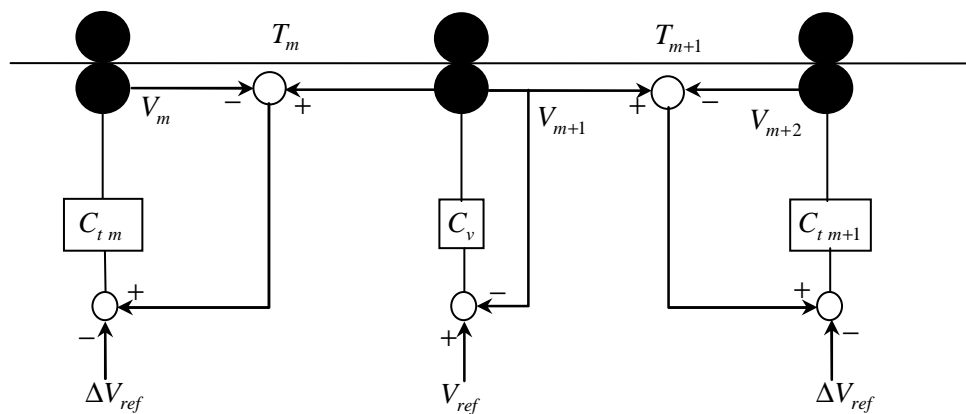


Figure 2.2-2. Stratégie de commande industrielle de tension de bande en boucle ouverte

La relation (2.12) entre la vitesse de défilement et l'élongation de la bande est utilisée pour l'élaboration de la loi de commande de cette stratégie. Il est clair qu'il sera difficile de maintenir constante la tension de bande avec une telle stratégie de commande lorsque le module d'Young varie. Si un glissement survient entre la bande et un rouleau tracteur, la vitesse mesurée n'est plus égale à la vitesse de défilement de la bande et la loi de commande n'est plus optimisée, ce qui rend cette stratégie très peu performante en rejet de perturbations. Ceci explique son utilisation dans les systèmes ayant une faible cadence de défilement [SRK95], [SW95].

2.2.3. Commande de tension de bande à vitesse flottante

Cette stratégie est la plus utilisée dans les chaînes industrielles. Son principe est donné à la Figure 2.2-3.

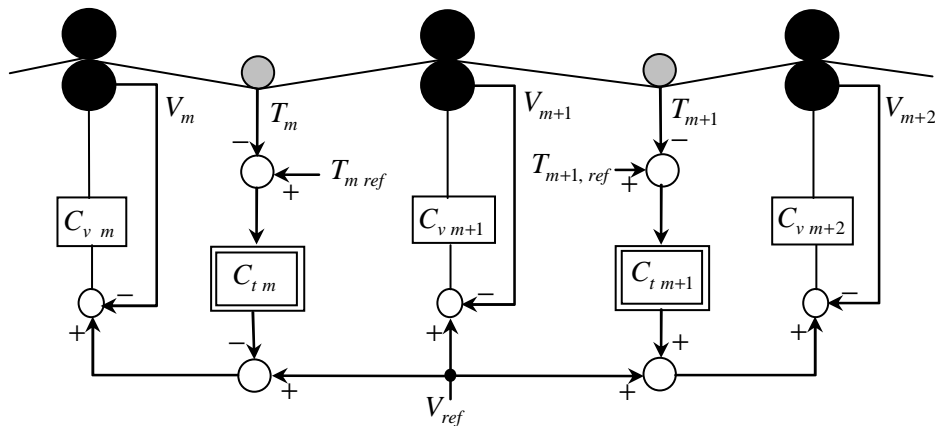


Figure 2.2-3. Stratégie de commande industrielle « à vitesse flottante »

Comme pour la première stratégie, ici également un seul moteur tracteur impose la vitesse de défilement via un asservissement de vitesse. Les autres moteurs ont un asservissement en vitesse et un asservissement en tension, ce qui réduit l'écart entre la tension de consigne et la tension mesurée, selon la Figure 2.2-4 ci-dessous.

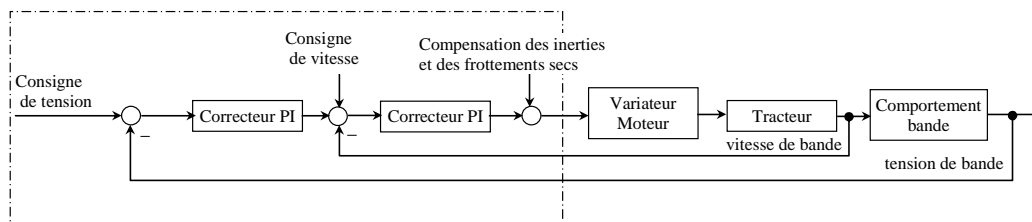


Figure 2.2-4. Principe de la commande décentralisée industrielle avec compensation des inerties et des frottements

La compensation des inerties et des frottements secs pour chaque sous-système (composé d'un rouleau tracteur et de rouleaux libres instrumentés ou non) permet de réduire les variations de tension de bande lors des phases de démarrage et d'arrêt.

La Figure 2.2-5 montre l'exemple de cette commande industrielle appliquée à l'enrouleur.

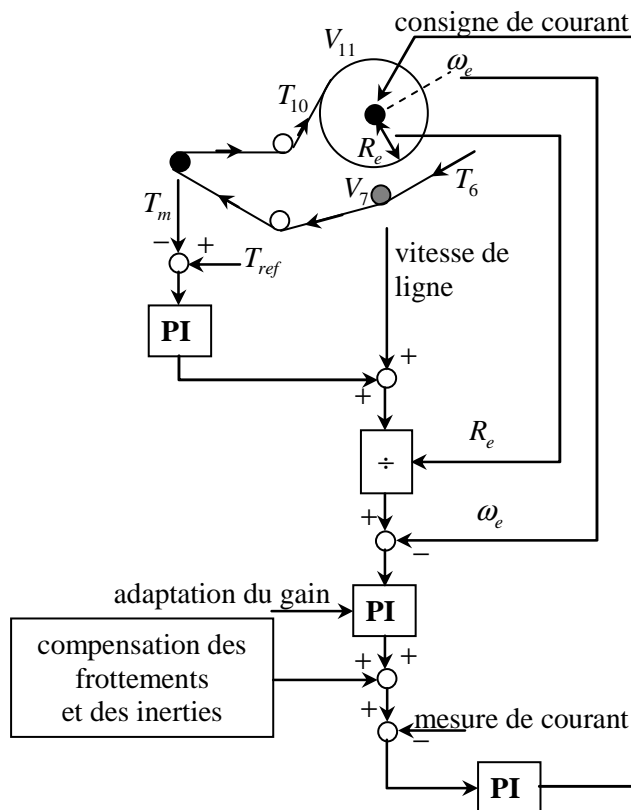


Figure 2.2-5. Commande industrielle d'un enrouleur

Cette stratégie de commande permet de changer rapidement la consigne de vitesse de défilement tout en limitant les variations de tensions de bande, réduisant ainsi le risque de cassure de la bande et de formation de plis. Des saturations sont introduites au niveau des correcteurs de tension de façon à éviter le dépassement de la vitesse nominale de défilement ainsi que de la tension nominale de la bande désirées.

Cette stratégie est particulièrement adaptée pour des systèmes à grande échelle. Elle a été utilisée sur notre banc expérimental à trois moteurs [Koç00]. Le schéma est donné à la Figure 2.2-6.

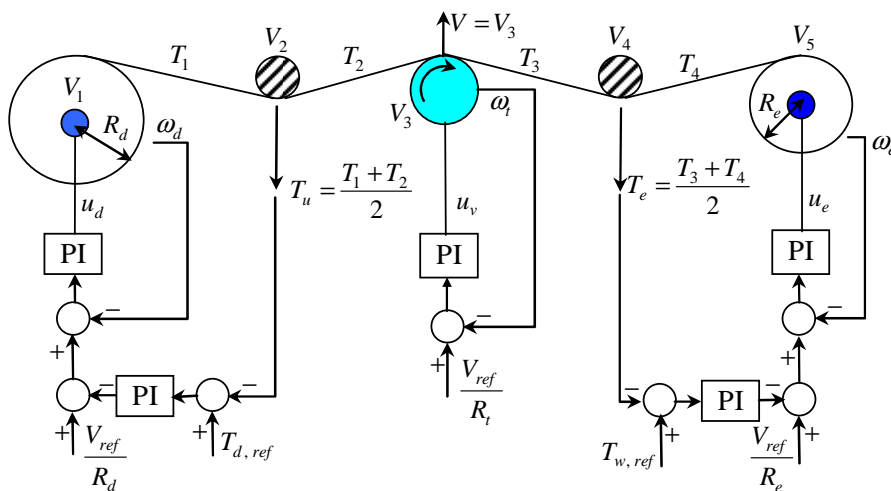


Figure 2.2-6. Stratégie de commande décentralisée appliquée sur le banc expérimental à trois moteurs

Les correcteurs PI ont été optimisés à partir de la simulation. Les résultats obtenus avec les paramètres optimum ont été comparés à ceux obtenus avec le correcteur robuste H_∞ à 1ddl dans le chapitre 3 de ce manuscrit.

2.3. Stratégie de commande avec précompensation basée sur le modèle phénoménologique (Model Based Feedforward)

La précompensation évoquée en paragraphe 2.2.3 a pu être améliorée grâce à la modélisation décentralisée exacte présentée au paragraphe 2.1.5 [KAV+06]. Pour cela, il faut annuler en temps réel les lignes de matrices H_i où les commandes $U_{s_{i0}}$ apparaissent. Ainsi, on ne compense pas uniquement les inerties et les frottements secs mais aussi les frottements visqueux et les non-linéarités. Le principe est représenté à la Figure 2.3-1. Par conséquent, le correcteur asservit un système quasi-linéaire.

Cette stratégie de commande avec précompensation non linéaire, basée sur le modèle phénoménologique et avec des correcteurs H_∞ , a été appliquée avec succès par Knittel *et al.* [KAV+06] aux systèmes d'enroulement à trois moteurs et à neuf moteurs.

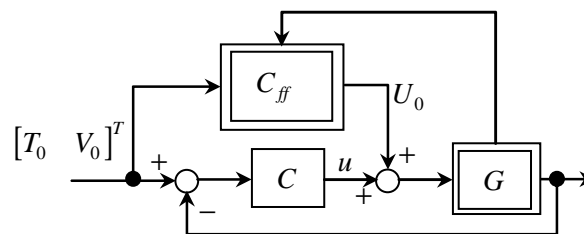


Figure 2.3-1. Stratégie de commande avec précompensation non linéaire

Les résultats ont encore pu être améliorés en insérant une boucle de vitesse [KAV+06] à l'instar de la stratégie donnée à la Figure 2.2-6. Le schéma de principe est illustré sur la Figure 2.3-2.

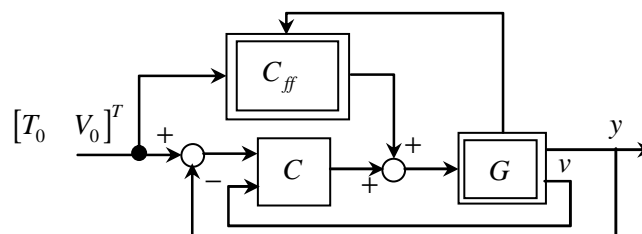


Figure 2.3-2. Stratégie de commande avec mesures additives de vitesses et précompensation non linéaire

2.4. Optimisation de la tension d'enroulement

Après le choix de la stratégie de commande et l'ajustement des correcteurs, il reste à optimiser les consignes de tension de bande pour la phase d'enroulement. En effet, la qualité de la bobine enroulée dépend directement des contraintes tangentielles et radiales en son sein, qui sont fonction de cette tension. Généralement, les consignes sont déterminées expérimentalement.

Différentes approches en modélisation de contraintes dans une bobine ont été publiées [Alt66], [Pf66], [CW84] et [Hak87]. Les effets aérodynamiques dus à l'entraînement et à l'évacuation de l'air entre les spires ont été analysés et modélisés par F. Boucquerel et P. Bourgin [BB93]. L'augmentation de la vitesse d'enroulement rend ces effets de plus en plus importants. Ces effets dépendent de la rugosité de la bande enroulée, comme en témoignent les travaux menés par P. Bourgin et M. Boutaus

[BB03]. La construction de modèles de contraintes permet ensuite d'optimiser la tension d'enroulement. Deux stratégies, l'une en ligne et l'autre en différé, sont présentées dans [BBK04] et [KBB05].

2.5. Conclusion du chapitre 2

Dans ce chapitre, un état de l'art des différentes stratégies de modélisation existant dans la littérature a été introduit. Les traits importants des lois physiques aidant à la construction de modèles non linéaires pour des systèmes de déroulement-transport-enroulement de bandes ont été présentés et une déduction de modèles non linéaires de systèmes de plus grande dimension a été discutée. Un modèle linéaire a été présenté. Ce modèle sert à l'analyse et à la synthèse de lois de commandes modernes linéaires. L'analyse du système d'enroulement à trois moteurs a montré que le gain statique du système dépend des rayons des bobines. Pour pallier ceci, une stratégie de multiplication par les rayons a été adoptée et discutée. Cette stratégie a montré une robustesse du système vis-à-vis de la variation des rayons. Cette stratégie sera adoptée conjointement avec tous les correcteurs qui seront développés dans les chapitres ultérieurs. Finalement, après avoir fait un tour d'horizon sur les différentes stratégies de commandes existant dans le monde industriel, une nouvelle commande basée sur une nouvelle méthodologie de modélisation récemment utilisée sur les systèmes d'enroulement a été discutée.

CHAPITRE 3 : COMMANDES H_∞ CENTRALISEES

Sommaire :

Chapitre 3 : Commandes H_∞ centralisées	53
3. <i>Préambule</i>	54
3.1. Commande H_∞ : de la formulation à la résolution	54
3.1.1. Principe de la synthèse H_∞	54
3.1.1.1. La forme standard	54
3.1.1.2. Le problème H_∞	55
3.1.1.3. Résolution du problème H_∞ fondée sur les équations de Riccati	56
3.1.1.4. Méthode de résolution du problème H_∞ fondée sur les LMIs	58
3.1.1.5. Une méthode alternative de synthèse H_∞ : synthèse par « facteurs premiers »	63
3.1.1.6. Synthèse H_∞ pondérée	64
3.1.1.7. Synthèse H_∞ pour des systèmes à paramètres variants	65
3.1.2. Commande H_∞ à un degré de liberté (1ddl)	66
3.1.2.1. Fonctions de transfert en boucle fermée	66
3.1.2.2. Commande H_∞ à un degré de liberté (1ddl)	66
3.1.2.3. Application aux systèmes d'enroulement	68
3.1.3. Commande H_∞ à deux degrés de liberté (2ddl)	69
3.1.3.1. Motivation	69
3.1.3.2. Différentes techniques 2ddl	69
3.1.3.3. Application aux systèmes d'enroulement	75
3.1.4. Performances des correcteurs	79
3.2. Commande H_∞ avec utilisation des inégalités matricielles bilinéaires (BMI)	80
3.2.1. L'optimisation BMI : état de l'art	80
3.2.1.1. Théorie de la complexité	81
3.2.1.2. Classification des problèmes BMI	83
3.2.2. Principes de bases pour la synthèse BMI de correcteurs par retour d'état	96
3.2.3. Commande par retour d'état avec action intégrale complète	98
3.2.4. Comparaison des retours d'état synthétisés par BMI sur le banc à trois moteurs	99
3.2.5. Problème des états non accessibles	100
3.2.5.1. Réflexion sur le problème des états non accessibles	102
3.3. Conclusion du chapitre 3	105

3. Préambule

Le problème H_∞ consiste à concevoir une commande assurant la stabilité asymptotique du système bouclé ainsi qu'un certain taux d'atténuation de l'influence des entrées exogènes sur les sorties du système augmenté; ce dernier étant composé du système lui-même et de filtres de pondération (weighting filters). Ces entrées sont constituées des signaux de consignes et éventuellement des perturbations liées à l'environnement du système. La synthèse H_∞ fournit une commande robuste vis-à-vis de ces perturbations. De plus, si les filtres de pondération ont pris en compte les incertitudes du modèle du système, la commande H_∞ est également robuste vis-à-vis de ces incertitudes.

Dans ce chapitre, on étudiera différentes stratégies de commande H_∞ centralisées et on les appliquera sur le simulateur non linéaire du système d'enroulement à trois moteurs ainsi que sur le banc expérimental à trois moteurs. On introduira alors des correcteurs *1ddl* et *2ddl* ainsi qu'un correcteur *2ddl* avec intégrateurs explicites. Ces correcteurs seront calculés par une optimisation LMI.

Une autre optimisation, BMI cette fois, sera utilisée dans le cadre d'une synthèse de correcteurs par retour d'état statique. L'ajout d'intégrateurs explicites sera également discuté.

Enfin, une commande par retour d'état plus réaliste sera introduite pour remédier à l'inaccessibilité des variables d'état correspondant aux tensions de bande du système d'enroulement dans le cas expérimental.

3.1. Commande H_∞ : de la formulation à la résolution

Ce paragraphe aborde la problématique de la synthèse de correcteurs H_∞ pour des systèmes multivariables déterministes et à paramètres constants. La formulation est basée essentiellement sur la résolution d'équation de Riccati ou d'inégalités matricielles linéaires (LMI en anglais). Cette dernière méthode de résolution, utilisée dans le cadre de ce travail, est décrite plus en détails dans ce paragraphe, où sont rappelés différents outils et théories utilisés dans la synthèse de telles commandes.

3.1.1. Principe de la synthèse H_∞

La synthèse H_∞ a été initiée par Zames au début des années 80 [Zam81] et développée, en particulier par Doyle, Glover, Khargonekar et Francis [Fra87] [DGK+89]. Cette méthode a connu des applications multiples dans des domaines très variés. Elle est devenue ces dernières années une des méthodes phares de la « commande robuste ». Sa présentation théorique est donnée dans de nombreux ouvrages pédagogiques [BGF+94] [ZDG95] [GL95] [SP96] [Lar96] [Toi98] [DF99] [CAS01].

3.1.1.1. La forme standard

Afin d'apporter une facilité méthodologique à la résolution des problèmes de type H_∞ , une représentation connue sous la dénomination « forme standard » a été introduite, qui apporte une certaine clarté de formulation puisqu'elle contient à la fois le système à commander et le cahier des charges associé caractérisé par des filtres de pondération. La représentation est donnée à la Figure 3.1-1.

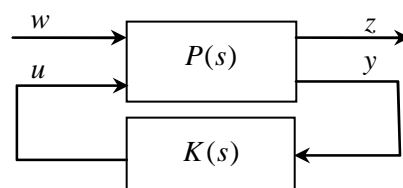


Figure 3.1-1. Forme standard LFT inférieure

Dans cette figure, $P(s)$ représente le « modèle augmenté », et $K(s)$ le correcteur. Le système $P(s)$ est formé des quatre transferts multivariables existant entre les entrées u (commande du système) et w (entrées exogènes : consignes, perturbations, ...) et les sorties y (mesures) et z (sorties régulées, ou grandeurs à surveiller) :

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = P(s) \cdot \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Cette représentation permet de calculer, avec les outils appropriés, le correcteur K de manière à optimiser, selon un critère donné, la fonction de transfert $T_{zw}(s)$ entre les entrées exogènes $w(t)$ et les sorties régulées $z(t)$.

Par ailleurs, pour une loi de commande $u = Ky$ connue, $T_{zw}(s)$ peut se calculer de la façon suivante :

$$T_{zw}(s) = F_l(P(s), K(s)) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s). \quad (3.2)$$

Cette expression, généralement notée $F_l(P, K)$, est appelée Transformation Fractionnaire Linéaire inférieure (LFT) [SP96] (en anglais : Linear Fractional Transform, LFT). Rappelons en outre, que $P_{22}(s) = G(s)$, où $G(s)$ est la fonction de transfert du système.

3.1.1.2. Le problème H_∞

➤ Rappel sur la norme H_∞

Soit $G(s)$ une fonction de transfert asymptotiquement stable (la définition d'une fonction de transfert asymptotiquement stable est donnée dans [Hah78], [Rug93]). La norme H_∞ de cette fonction de transfert est donnée par :

$$\|G(s)\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)) = \sup_{U(s) \neq 0 \in L_2} \frac{\|Y(s)\|_2}{\|U(s)\|_2}. \quad (3.3)$$

où $\bar{\sigma}$ représente la valeur singulière maximale.

À titre de comparaison, la norme H_2 de cette fonction de transfert est donnée par :

$$\|G(s)\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \text{tr}(G(-j\omega)^T G(j\omega)) d\omega \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.4)$$

Cette norme n'est pas utilisée dans le cadre de ce travail. Cependant, le lecteur intéressé pourra trouver différentes approches de synthèse de correcteurs H_2 appliquées à des systèmes d'enroulement dans [Cla05].

➤ Le problème H_∞

De manière générale, le calcul d'un correcteur H_∞ de la forme standard (Figure 3.1-1) peut se ramener d'une part à un problème de stabilisation du système bouclé et de rejet de perturbations, d'autre part à un problème de minimisation.

La norme H_∞ représente la valeur maximale du rapport entre l'énergie du signal de sortie $z(t)$ et l'énergie du signal d'entrée $w(t)$. Il est clair que la minimisation de cette norme est nécessaire pour optimiser le rejet de perturbations et le suivi de consignes.

Le problème H_∞ dit optimal consiste finalement à synthétiser une loi de commande $u = Ky$, qui, parmi l'ensemble des correcteurs K stabilisant le système de manière interne, minimise la norme H_∞ du transfert $F_l(P, K)$, c'est-à-dire $\|F_l(P, K)\|_\infty$, entre les entrées exogènes et les sorties régulées.

En résumé, le problème H_∞ consiste à :

Trouver K tel que :	(i) $F_l(P, K)$ soit stable, (ii) $\ F_l(P, K)\ _\infty$ soit minimale.	(3.5)
-----------------------	--	-------

3.1.1.3. Résolution du problème H_∞ fondée sur les équations de Riccati

Il existe plusieurs méthodes de résolution du problème H_∞ optimal [GD88], [DGK+89], [Gah92], [ZDG95]. Celle proposée dans [DGK+89], fondée sur une approche variable d'état, semble néanmoins être, à l'heure actuelle, une des mieux adaptées numériquement à la résolution de problèmes de grande taille.

➤ Représentation du système augmenté

La représentation d'état du système augmenté (Figure 3.1-1) est donnée classiquement sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Notations :

- m_1 le nombre d'entrées exogènes
- p_1 le nombre de sorties régulées
- m_2 le nombre de commandes
- p_2 le nombre de mesures.

➤ Hypothèses

La résolution du problème, par la méthode de [DGK+89] n'est possible que sous les cinq hypothèses suivantes :

- H_1 : (A, B_1) et (A, B_2) sont stabilisables,
- H_2 : (C_1, A) et (C_2, A) sont détectables,

$$\text{— } H_3 : D_{12}^T [C_1 \quad D_{12}] = [0 \quad I],$$

$$\text{— } H_4 : \begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix},$$

$$\text{— } H_5 : D_{11} = 0 \text{ et } D_{22} = 0.$$

Remarque : Dans [GA94] est proposée une méthode moins restrictive de résolution du problème H_∞ , qui ne rend nécessaire que les deux hypothèses suivantes :

— $i : (A, B_2, C_2)$ est stabilisable et détectable

— $ii : D_{22} = 0.$

Cependant, l'algorithme fondé sur une caractérisation LMI nécessite un temps de calcul important pour des systèmes d'ordre élevé.

➤ Résolution

La résolution du problème H_∞ dit sous-optimal consiste, pour un réel positif γ donné, à trouver un correcteur $K(s)$ stabilisant le système et vérifiant :

$$\|F_l(P, K)\|_\infty \leq \gamma. \quad (3.7)$$

Pour cela le résultat suivant est utilisé :

Théorème 3.1.1

Sous les cinq hypothèses « H_1 - H_5 » précédemment énoncées, il existe un correcteur $K(s)$ qui stabilise le système de manière interne et assure l'inégalité (3.7), si et seulement si :

1. les équations de Riccati (3.8) et (3.9) admettent respectivement pour solutions X_∞ et Y_∞ :

$$A^T X + X A + X (\gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 B_2^T) X + C_1^T C_1 = 0, \quad (3.8)$$

$$A Y + Y A^T + Y (\gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T C_2) Y + B_1 B_1^T = 0, \quad (3.9)$$

2. ces solutions vérifient :

$$X_\infty \geq 0 \quad Y_\infty \geq 0 \quad \rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2. \quad (3.10)$$

La recherche du γ optimal est effectuée par dichotomie en testant, à chaque itération, l'existence d'une solution $K(s)$ pour le γ défini. Les algorithmes couramment implantés fournissent une solution appelée « correcteur central ». Cependant, il existe une infinité de solutions au problème sous-optimal, pour un γ fixé. L'ensemble des correcteurs possibles peut être décrit grâce aux résultats présentés dans [NOS+95].

Théorème 3.1.2 [NOS+95]

Un correcteur $K_\infty(s)$ solution du problème H_∞ sous-optimal en γ est donné par

$$K_\infty(s) = F_1(K_a(s), \Phi(s)), \quad (3.11)$$

où $K_a(s)$ est déterminé par :

$$K_a(s) = \left[\begin{array}{c|cc} \hat{A} & \hat{B}_1 & \hat{B}_2 \\ \hline \hat{C}_1 & 0 & \hat{D}_{12} \\ \hat{C}_2 & \hat{D}_{21} & 0 \end{array} \right] \quad (3.12)$$

et :

$$\begin{aligned} \hat{A} &= A + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2, \\ \hat{B}_1 &= -Z_\infty L_\infty, \hat{B}_2 = Z_\infty B_2, \\ \hat{C}_1 &= F_\infty, \hat{C}_2 = -C_2, \\ \hat{D}_{12} &= I, \hat{D}_{21} = I, \\ F_\infty &= -B_2^T X_\infty, L_\infty = -Y_\infty C_2^T, Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty), \end{aligned} \quad (3.13)$$

$\Phi(s)$ désigne un paramètre libre satisfaisant $\Phi(s) \in \mathfrak{RH}_\infty$ et $\|\Phi\|_\infty < \gamma$.

Le schéma de principe du problème sous-optimal est donné à la Figure 3.1-2.

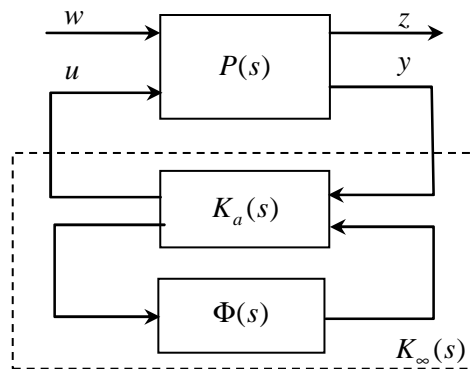


Figure 3.1-2. Paramétrisation de la solution du problème sous-optimal

Dans le cas où $\Phi(s) = 0$, $K_\infty(s)$ est appelé correcteur central. Cependant on peut envisager d'utiliser le paramètre libre $\Phi(s)$ pour changer les propriétés de K , en particulier dans le cas où l'on désire un correcteur $K_\infty(s)$ stable [NOS+95].

3.1.1.4. Méthode de résolution du problème H_∞ fondée sur les LMIs

L'approche LMI est fondée sur un outil d'analyse plus que sur un outil de synthèse, le lemme borné réel. Ce lemme est connu sous son appellation anglaise : Bounded Real Lemma (BRL) (voir ci-après). Dans [Sch90] Scherer utilisait le BRL pour résoudre le problème H_∞ fondé sur une inégalité de

Riccati. Plus récemment, Gahinet *et al.* [Gah94] [GA94] [GI94] ont publié des méthodes de résolution de problèmes H_∞ pour des systèmes à temps continu et discret utilisant des LMIs. Ces résolutions sont effectuées en deux étapes. En premier lieu, la faisabilité du correcteur H_∞ est testée par le BRL. En deuxième lieu, le correcteur est calculé, soit en s'appuyant de nouveau sur le BRL, soit en se basant sur des considérations algébriques menant à des algorithmes de calcul plus efficaces.

➤ **Le lemme borné réel (BRL)**

Le BRL offre une autre possibilité de calculer la norme H_∞ d'un système [Wil71] [AV73].

Pour un système $G = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$ le BRL est donné par :

Lemme 3.1.1. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

$$a) \left\| D + C(sI - A)^{-1} B \right\|_\infty < \gamma \text{ et } \operatorname{Re}(\lambda_i(A)) < 0,$$

b) *il existe une solution $X > 0$ pour l'inégalité matricielle linéaire (LMI) :*

$$\begin{bmatrix} A^T X + XA & XB & C^T \\ B^T X & -\gamma I & D^T \\ C & D & -\gamma I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.14)$$

Dans cette approche il est possible de calculer le γ minimum directement. En effet, au lieu de réduire itérativement la borne supérieure γ de la norme H_∞ du système bouclé, le γ minimum atteignable peut être trouvé directement.

➤ **La LMI de faisabilité [GA94]**

En supposant réalisée l'hypothèse H_5 (cf. *hypothèses nécessaires à la résolution du problème H_∞*), et en particulier que $D_{22} = 0$, la fonction de transfert en boucle fermée $T_{zw} = F_l(P, K)$ a pour représentation d'état :

$$T_{zw} : \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 D_K C_2 & B_2 C_K & B_1 + B_2 D_K D_{21} \\ \hline B_K C_2 & A_K & B_K D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_K C_2 & D_{12} C_K & D_{11} + D_{12} D_K D_{21} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right], \quad (3.15)$$

où

$$K : \left[\begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right] \quad (3.16)$$

désigne la représentation d'état du correcteur à synthétiser (Figure 3.1-1).

Afin de séparer les matrices du système de celles du correcteur, regroupons ces dernières dans une nouvelle matrice :

$$\Theta = \begin{bmatrix} A_K & B_K \\ C_K & D_K \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

La représentation d'état du système bouclé devient alors, k dénotant l'ordre du correcteur :

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right] &= \left[\begin{array}{c|c} A_0 & B_0 \\ \hline C_0 & D_0 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \tilde{B} \\ \hline \tilde{D}_{12} \end{array} \right] \Theta \left[\begin{array}{c|c} \tilde{C} & \tilde{D}_{21} \end{array} \right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c} A & 0 & B_1 \\ \hline 0 & 0_k & 0 \\ \hline C_1 & 0 & D_{11} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c|c} 0 & B_2 \\ \hline I_k & 0 \\ \hline 0 & D_{12} \end{array} \right] \Theta \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & I_k & 0 \\ \hline C_2 & 0 & D_{21} \end{array} \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

La relation (3.18) montre que les matrices de la boucle fermée dépendent de façon affine de la variable du correcteur, Θ . Toutes les autres matrices ne comportent que les données du système.

Comme conséquence du BRL, la stabilité de T_{zw} et la contrainte de la norme H_∞ peuvent se résumer à l'inégalité matricielle suivante :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} A_{cl}^T X_{cl} + X_{cl} A_{cl} & X_{cl} B_{cl} & C_{cl}^T & & & \\ B_{cl}^T X_{cl} & -\gamma I_{m_1} & D_{cl}^T & & & \\ C_{cl} & D_{cl} & -\gamma I_{p_1} & & & \end{array} \right] < 0, \quad (3.19)$$

où $X_{cl} \in \mathbb{R}^{(n+k) \times (n+k)}$ représente la matrice de Lyapunov définie positive $0 < X_{cl}$.

Les matrices inconnues de l'inégalité (3.19) sont X_{cl} et les matrices du correcteur. Par conséquent, (3.19) n'est pas une LMI, à cause du produit entre les deux variables inconnues. Une telle inégalité est une « inégalité matricielle bilinéaire », plus connue par l'abréviation de son appellation anglaise, BMI, pour « *Bilinear Matrix Inequality* ». Ce sont des inégalités difficiles à résoudre, qui conduisent à des problèmes d'optimisation « *NP-difficiles* ». Plus de détails concernant la résolution de ce type de problèmes BMI seront donnés dans la deuxième partie de ce chapitre.

L'inégalité (3.19) peut être transformée en une LMI. Pour cela le lemme suivant est nécessaire.

Lemme 3.1.2. [GA94] Soit une matrice symétrique $\Psi \in \mathbb{R}^{m \times m}$ et deux matrices P, Q de m colonnes. Il s'agit de trouver une matrice Θ d'une dimension compatible telle que :

$$\Psi + P^T \Theta Q + Q^T \Theta^T P < 0. \quad (3.20)$$

Si l'on désigne par W_P, W_Q toutes les matrices dont les colonnes forment des bases des espaces nuls de P et de Q respectivement, (3.20) est soluble si et seulement si :

$$W_P^T \Psi W_P < 0, \quad (3.21)$$

$$\text{et } W_Q^T \Psi W_Q < 0. \quad (3.22)$$

L'inégalité (3.19) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\Psi_X + D_X \tilde{P}^T \Theta \tilde{Q} + \tilde{Q}^T \Theta^T \tilde{P} D_X < 0, \quad (3.23)$$

avec :

$$\Psi_X = \begin{bmatrix} A_0^T X_{cl} + X_{cl} A_0 & X_{cl} B_0 & C_0^T \\ B_0^T X_{cl} & -\gamma I_{m_1} & D_0^T \\ C_0 & D_0 & -\gamma I_{p_1} \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

$$D_X = \text{diag}(X_{cl}, I_{m_1}, I_{p_1}), \quad (3.25)$$

$$\tilde{P} = \begin{bmatrix} \tilde{B}^T & 0 & \tilde{D}_{12}^T \end{bmatrix}, \tilde{Q} = \begin{bmatrix} \tilde{C} & \tilde{D}_{21}^T & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.26)$$

En utilisant le lemme 3.1.2, la variable représentant le correcteur Θ pourra être éliminée de l'inégalité (3.23). Supposons que les deux matrices $W_{\tilde{P}}$ et $W_{\tilde{Q}}$ couvrent les espaces nuls de \tilde{P} et \tilde{Q} , respectivement. Puisque l'espace nul de $\tilde{P} D_X$ est alors $D_X^{-1} W_{\tilde{P}}$, l'inégalité (3.23) est équivalente à l'existence de $X_{cl} > 0$ pour les LMIs suivantes :

$$\begin{aligned} W_{\tilde{P}}^T D_X^{-1} \Psi_X D_X^{-1} W_{\tilde{P}} &< 0, \\ W_{\tilde{Q}}^T \Psi_X W_{\tilde{Q}} &< 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Ces deux LMIs peuvent être encore simplifiées en partitionnant X_{cl} comme suit :

$$X_{cl} = \begin{bmatrix} S & N \\ N^T & * \end{bmatrix}, \quad X_{cl}^{-1} = \begin{bmatrix} R & M \\ M^T & * \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

avec $R, S \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $M, N \in \mathbb{R}^{n \times k}$. En introduisant

$$N_R = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

une base orthonormale de l'espace nul de $\begin{bmatrix} B_2^T & D_{12}^T \end{bmatrix}$, une base pour l'espace nul de \tilde{P} est donnée par :

$$W_{\tilde{P}} = \begin{bmatrix} W_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & I_{m_1} \\ W_2 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Par conséquent, la première LMI dans (3.27) pourra être simplifiée en :

$$\begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I_{m_1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_1^T & B_1 \\ C_1 R & -\gamma I_{p_1} & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I_{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I_{m_1} \end{bmatrix} < 0. \quad (3.31)$$

De façon similaire, la seconde inégalité pourra être simplifiée en une LMI impliquant seulement S .

Finalement, $X_{cl} > 0$ est équivalente à :

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0 \quad \text{rang}(I - RS) \leq k, \quad (3.32)$$

où la seconde condition, triviale, est vérifiée pour $k \geq n$.

Les résultats sont résumés dans le théorème suivant.

Théorème 3.1.3 : Faisabilité [GA94]

Soit G un système d'ordre n qui vérifie les hypothèses H_1 - H_5 relatives au problème H_∞ . Soient N_R et N_S des bases orthonormales de l'espace nul de $\begin{bmatrix} B_2^T & D_{12}^T \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} C_2 & D_{21} \end{bmatrix}$, respectivement.

a) Le problème H_∞

$$\min_K \|T_{zw}\|_\infty < \gamma, \quad (3.33)$$

est soluble si, et seulement si, il existe deux matrices symétriques R, S satisfaisant les LMIs suivantes :

$$\begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I_{m_1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} AR + RA^T & RC_1^T & B_1 \\ C_1 R & -\gamma I_{p_1} & D_{11} \\ B_1^T & D_{11}^T & -\gamma I_{m_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_R & 0 \\ 0 & I_{m_1} \end{bmatrix} < 0,$$

$$\begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I_{p_1} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T S + SA & SB_1 & C_1^T \\ B_1^T S & -\gamma I_{m_1} & D_{11}^T \\ C_1 & D_{11} & -\gamma I_{p_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_S & 0 \\ 0 & I_{p_1} \end{bmatrix} < 0, \quad (3.34)$$

$$\begin{bmatrix} R & I \\ I & S \end{bmatrix} \geq 0.$$

b) Par ailleurs, il existe un correcteur d'ordre $k < n$ si et seulement si (3.34) est vérifiée pour certaines valeurs de R et de S , qui en plus doivent satisfaire :

$$\text{rang}(I - RS) \leq k. \quad (3.35)$$

Pour l'existence d'un correcteur sous-optimal d'ordre $k \geq n$, les inégalités (3.34) deviennent des conditions nécessaires et suffisantes. L'ensemble décrit par les inégalités matricielles (3.34) est convexe en R, S et γ . Par conséquent, le plus petit γ faisable (γ_{opt}) et les solutions particulières R

et S peuvent être calculés par la « méthode du point intérieur » pour l'optimisation convexe [NG94]. Si, outre la faisabilité de (3.34), la condition d'ordre (3.35) est vérifiée pour un certain $k < n$, un correcteur « d'ordre réduit » existe. Cependant, le problème de synthèse avec réduction d'ordre est non convexe à cause du produit des deux variables R et S qui intervient dans la contrainte (3.35). C'est pourquoi nous ne considérerons pas ici le cas $k < n$.

➤ Réalisation du correcteur

Le théorème 3.1.3 vérifie l'existence du correcteur mais ne permet pas son calcul direct. En effet, seules les matrices R et S , telles que la condition $\text{rang}(I - RS) = k \leq n$ est vérifiée, sont calculées directement. Le calcul du correcteur nécessite la connaissance de la solution X_{cl} du BRL. X_{cl} est reliée à R et S par l'intermédiaire de l'équation (3.28) et peut être constituée en calculant en premier lieu les matrices de rang plein en colonne $M, N \in \mathbb{R}^{n \times k}$ satisfaisant :

$MN^T = I - RS$, (avec une décomposition en valeur singulière), puis en résolvant :

$$\begin{bmatrix} S & I \\ N^T & 0 \end{bmatrix} = X_{cl} \begin{bmatrix} I & R \\ 0 & M^T \end{bmatrix}, \quad (3.36)$$

pour X_{cl} . Maintenant, (3.23) est une LMI en la matrice de données du correcteur Θ , qui pourra être résolue avec la même méthode que les LMIs de faisabilité. Le choix particulier de M et de N est non pertinent dans la mesure où il détermine seulement les paramètres du correcteur.

Cette méthode de calcul du correcteur offre plus de flexibilité, mais demande un temps de calcul considérable, spécialement pour les systèmes de grandes dimensions. Dans ce cas, des méthodes algébriques dérivées seraient plus appropriées [GA94].

3.1.1.5. Une méthode alternative de synthèse H_∞ : synthèse par « facteurs premiers »

Une approche alternative de résolution du problème de synthèse H_∞ est publiée dans la littérature : elle est connue sous la dénomination « synthèse H_∞ par facteurs premiers » [HG93] [FM96]. Le but de cette synthèse est de maximiser la robustesse vis-à-vis des dynamiques négligées dans les facteurs premiers du système en boucle ouverte. Cette synthèse H_∞ est en fait un cas particulier de la synthèse H_∞ standard. Cette synthèse a été appliquée dans différents domaines. Une application récente en aéronautique porte sur la conception multi-objectifs de lois de pilotage pour un avion de transport civil [Puy05].

Il est à noter que la résolution de la synthèse par facteurs premiers est plus simple que celle de la synthèse H_∞ standard par sensibilités mixtes (la définition est donnée au paragraphe suivant). En effet, dans la première approche il existe une solution analytique au problème d'optimisation. De plus, il est possible de calculer directement la valeur minimale atteignable de la norme H_∞ . Enfin, le correcteur obtenu se met naturellement sous la forme d'un retour d'état associé à un observateur. Dans la deuxième approche par contre, la résolution est faite de façon itérative par dichotomie, appelée aussi « γ -itération ». Bien entendu, la résolution par LMI présente une alternative intéressante.

Nous utiliserons la résolution par LMI du problème de synthèse H_∞ standard. A ce titre, minimiser la norme H_∞ revient à satisfaire autant que possible les contraintes sur les transferts en boucle fermée.

La difficulté dans les deux approches, réside dans le choix des filtres de pondération. Rappelons que, pour la commande de systèmes $G(s)$ mono-entrée mono-sortie, il existe des techniques très

classiques pour modéliser le transfert en boucle ouverte $K(s)G(s)$, en particulier dans le plan de Bode. On a essayé au début des années 80 d'étendre ces techniques au cas de systèmes multi-entrées multi-sorties [DS81], en modélisant les valeurs singulières de $K(s)G(s)$ ou $G(s)K(s)$.

3.1.1.6. Synthèse H_∞ pondérée

Propriété 3.1.1 [DGK+89]

Soit $T_{zw}(s)$ le transfert multivariable entre le vecteur d'entrée $w = [w_i]_{i=1\dots m}$ et le vecteur de sortie $z = [z_j]_{j=1\dots p}$:

$$\text{si } \|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma, \text{ alors } \forall i \in [1; m] \text{ et } \forall j \in [1; p], \quad \|T_{z_j w_i}(s)\|_\infty \leq \gamma. \quad (3.37)$$

Remarque : la réciprocité de cette propriété n'est pas vraie.

Cette propriété traduit le fait qu'en imposant une borne supérieure γ à la norme H_∞ du transfert multivariable entre les entrées exogènes et les sorties régulées, on impose cette borne sur chacun des sous-transferts monovariables. A l'inverse, on remarque qu'il est important de faire en sorte que des transferts SISO « non utiles » ne contraignent pas l'optimisation de γ .

Propriété 3.1.2 [Puy05]

Soit

$$W_e(s) = \begin{bmatrix} W_{e_1}(s) & \emptyset \\ & \ddots \\ \emptyset & W_{e_m}(s) \end{bmatrix} \text{ et } W_s(s) = \begin{bmatrix} W_{s_1}(s) & \emptyset \\ & \ddots \\ \emptyset & W_{s_p}(s) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

deux matrices de pondération placées respectivement sur les entrées et les sorties du système $T_{zw}(s)$, comme le montre la Figure 3.1-3.

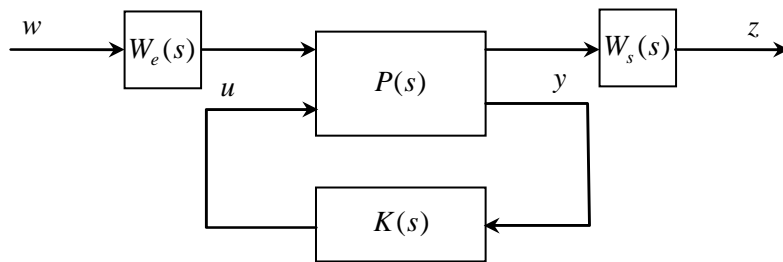


Figure 3.1-3. Ajout des pondérations dans la forme LFT

Si $\|W_s(s)T_{zw}(s)W_e(s)\|_\infty \leq \gamma$, alors :

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \forall i \in [1; m] \text{ et } \forall j \in [1; p], \quad |W_{s_j}(j\omega)T_{z_j w_i}(j\omega)W_{e_i}(j\omega)| \leq \gamma. \quad (3.39)$$

Cette propriété permet d'interpréter les pondérations d'entrée et de sortie comme des gabarits fréquentiels. En effet, on peut réécrire (3.39) comme suit :

$$\left| T_{z_j w_i}(j\omega) \right| \leq \frac{\gamma}{\left| W_{e_i}(j\omega) \cdot W_{s_j}(j\omega) \right|}. \quad (3.40)$$

L'inégalité (3.40) permet de définir le produit $W_{e_i}(s)W_{s_j}(s)$ comme le gabarit fréquentiel imposé sur le transfert SISO $T_{z_j w_i}(s)$ si $\gamma=1$.

Les fonctions de pondération peuvent bien entendu être placées à différents endroits à l'intérieur du système étendu $P(s)$, de manière à avoir une matrice de transfert pondérée entre les entrées exogènes $w(s)$ et les sorties à minimiser $z(s)$. Cette approche est appelée « synthèse H_∞ à sensibilité mixte ».

3.1.1.7. Synthèse H_∞ pour des systèmes à paramètres variants

Il existe une autre méthode de synthèse pour une catégorie particulière de systèmes, les systèmes linéaires qui possèdent des paramètres variant dans le temps (LPV).

Cette approche de commande consiste à utiliser le formalisme LMI afin de synthétiser un correcteur lui aussi linéaire à paramètres variants, robuste vis-à-vis de la variation des paramètres du système en stabilité et en performances. Cette commande a été implantée dans nombre de domaines, comme par l'aéronautique [ABG95] [Hir99].

On rappelle qu'est appelé système LPV tout système pouvant s'écrire sous la forme [DF99] :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ z(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\theta) & B_w(\theta) & B_u(\theta) \\ C_z(\theta) & D_{zw}(\theta) & D_{zu}(\theta) \\ C_y(\theta) & D_{yw}(\theta) & D_{yu}(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ w(t) \\ u(t) \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

où $\theta(t) = (\theta_1(t), \theta_2(t), \dots, \theta_n(t))^T$ est un vecteur de paramètres variant dans le temps. Le problème de synthèse H_∞ d'un correcteur LPV est résumé dans la Figure 3.1-4 ci-dessous

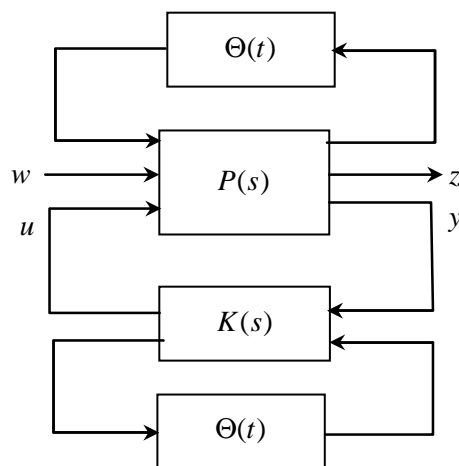


Figure 3.1-4. Schéma de principe de la synthèse LPV

Le principe de duplication du vecteur de paramètres $\Theta(t) = \text{diag}\{\theta_1(t)I_{n_1}, \theta_2(t)I_{n_2}, \dots, \theta_n(t)I_{n_n}\}$ revient à dire que le correcteur à synthétiser $K(s)$ s'adaptera de lui-même aux variations des paramètres du système. Cette synthèse se fera alors par l'intermédiaire de quatre LMIs [AG95] considérées comme

une généralisation du problème H_∞ standard.

3.1.2. Commande H_∞ à un degré de liberté (1ddl)

3.1.2.1. Fonctions de transfert en boucle fermée

Dans ce paragraphe, différentes fonctions de transfert en boucle fermée, représentées à la Figure 3.1-5, sont définies.

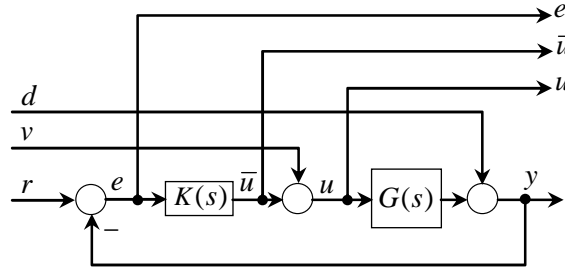


Figure 3.1-5. Système en boucle fermée

La liste de ces fonctions de transfert est donnée dans le tableau 3.1-1.

Tableau 3.1-1. Fonctions de transfert en boucle fermée

Nom de la fonction de transfert	Formule
Sensibilité à la sortie du système	$T_{er} = T_{yd} = (I + GK)^{-1} = S_e$
Sensibilité à l'entrée du système	$T_{uv} = (I + KG)^{-1} = S_u$
Sensibilité complémentaire à la sortie du système	$T_{yr} = GKS_e = I - S_e = T_e$
Sensibilité complémentaire à l'entrée du système	$-T_{\bar{u}v} = KGS_u = I - S_u = T_u$

3.1.2.2. Commande H_∞ à un degré de liberté (1ddl)

Dans la plupart des cas, la synthèse H_∞ effectuée directement à partir du modèle à asservir, c'est-à-dire sans l'utilisation de fonctions de pondération, ne permet pas d'atteindre des performances acceptables en suivi de consigne, rejet de perturbations et en robustesse vis-à-vis d'incertitudes du modèle.

L'automaticien fixe la forme désirée (ou plus exactement le gabarit) des valeurs singulières des différentes fonctions de transfert, comme par exemple la sensibilité, la sensibilité complémentaire, le transfert des perturbations vers les grandeurs de sorties. Pour que l'erreur statique soit nulle, la fonction de transfert « sensibilité » doit avoir un gain nul en régime statique et par conséquent le gain de la boucle doit être infini aux basses fréquences : c'est le rôle d'un effet intégrateur dans la boucle. En ce qui concerne le rejet de perturbations, celui-ci est effectué dans la bande de fréquences correspondant à celle des perturbations.

Généralement, dans le cadre de la synthèse H_∞ , les fonctions de transfert sont pondérées par des filtres dont les valeurs singulières sont choisies comme étant l'inverse des valeurs singulières des gabarits. Très souvent, les gabarits de la sensibilité et de la sensibilité complémentaire sont spécifiés. Cependant, il existe deux façons différentes de les spécifier, étant donné que pour les systèmes MIMO la sensibilité S_e calculée au point de connexion de boucle e est différente de la sensibilité S_u au

point de connexion de boucle u : $S_e = (I + GK)^{-1}$ alors que $S_u = (I + KG)^{-1}$. La même chose est vraie pour la sensibilité complémentaire qui est soit $T_e = GKS_e$, soit $T_u = KGS_u$. Ainsi, deux types de pondérations en résultent. Ces deux façons d'agir appartiennent tout de même à la même démarche de synthèse, appelée $S/KS/T$.

➤ **Pondération à la sortie du système [Kwa93] [SP96]**

Une des méthodes de pondération les plus connues est la méthode des sensibilités mixtes, appelée $S/KS/T$ et représentée à la Figure 3.1-6. Cette méthode permet de pondérer la sensibilité S_e , la sensibilité complémentaire T_e et la fonction de transfert KS_e de l'entrée r vers la sortie u . La sensibilité S_e , qui est la fonction de transfert T_{er} de l'entrée r vers la sortie e , et la sensibilité complémentaire $T_e = T_{yr}$ sont pondérées par W_p et W_t , respectivement. W_u peut être choisi comme constant, ou de manière à limiter la bande passante de la commande.

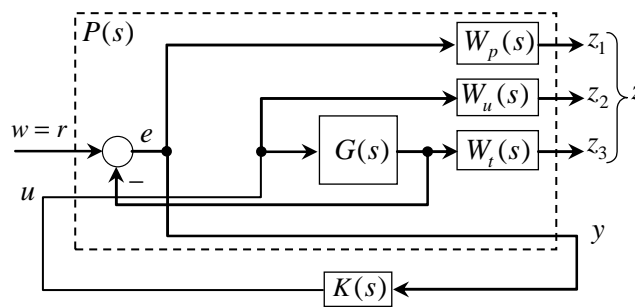


Figure 3.1-6. Forme standard $S/KS/T$

La fonction de transfert en boucle fermée T_{zw} vaut :

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} W_p S_e \\ W_u K S_e \\ W_t T_e \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

Pour pouvoir rejeter les perturbations de basses fréquences, W_p est généralement choisi avec un gain élevé dans cette zone de fréquences.

Pour réduire l'erreur statique, la forme classiquement utilisée pour W_p est donnée par [BWS96] :

$$W_p(s) = \frac{\frac{s}{M} + \omega_B}{s + \omega_B \cdot e_0}, \quad (3.43)$$

où M représente le maximum du pic de la fonction de sensibilité S_e (typiquement 3 dB), et où ω_B désigne la bande passante souhaitée. e_0 correspond à l'erreur statique autorisée.

Dans le cas où l'on souhaite avoir une erreur de traînage nulle, on choisit une fonction de pondération d'ordre 2 [SP96].

Le modelage de KS_e par W_u permet de limiter la bande passante du correcteur et évite d'avoir des

signaux de commande de grande amplitude. W_t peut être nécessaire pour accentuer la pente d'atténuation en haute fréquence ("roll off") de T_e .

Le schéma de synthèse $S/KS/T$ nécessite de modéliser séparément la sensibilité et la sensibilité complémentaire. Cependant, les deux étant liées par la relation $S + T = I$, il y a trop de contraintes imposées à cette synthèse.

➤ Autres types de pondération

La méthode des sensibilités mixtes permet de nombreuses configurations pour le choix de l'emplacement des fonctions de pondération [Chr96]. Un autre schéma de synthèse très classique est donné à la Figure 3.1-7 :

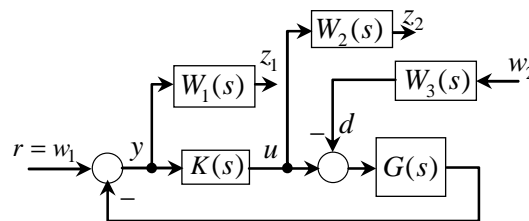


Figure 3.1-7. Autre schéma de synthèse H_∞ du correcteur

La fonction de transfert en boucle fermée T_{zw} de la Figure 3.1-7 est donnée par :

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} W_1 S & W_1 S G W_3 \\ W_2 K S & W_2 K S G W_3 \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

W_1 et W_2 prennent respectivement les mêmes allures que W_p et W_u du schéma de synthèse précédent. La fonction de pondération W_3 , quant à elle, spécifie le type de la perturbation d à rejeter.

Remarque : Souvent, il est inacceptable d'avoir l'inverse du modèle du procédé dans le correcteur, dans la mesure où cette inversion cause un temps de réponse plus lent si les pôles et zéros sont proches de l'axe imaginaire et où ces derniers sont imprécis en raison d'incertitudes présentes sur le système. Une solution à ce type de problèmes consiste à utiliser des pondérations à l'entrée du système (méthode appelée GS/T) [Chr96]. On n'utilisera pas cette méthode dans le cadre de cette thèse.

3.1.2.3. Application aux systèmes d'enroulement

Les correcteurs sont synthétisés à partir du modèle linéarisé autour du point de fonctionnement correspondant à la phase de démarrage. Ceci permet d'assurer un bon asservissement de la tension et de la vitesse de bande pendant cette phase cruciale. Dans le cadre de ce travail, les commandes au niveau du dérouleur et de l'enrouleur seront multipliées par les rayons respectifs (séquençement de gain) afin de pallier les variations de gain (cf. Chapitre 2, section 2.1.7.3). Par conséquent, les entrées du modèle linéarisé, utilisé pour la synthèse des correcteurs, sont multipliées par les rayons des rouleaux motorisés.

➤ Système d'enroulement de petite dimension (trois moteurs)

Les correcteurs H_∞ sont synthétisés à partir du modèle continu. Pour notre banc à trois moteurs, le correcteur H_∞ à 1ddl obtenu est d'ordre 15. Cet ordre n'a pas pu être réduit par la méthode de réduction équilibrée [ACA+99]. Le correcteur a ensuite été échantillonné à l'aide de la transformée

bilinéaire selon la méthode de Tustin [AW97]. Nous avons choisi un temps d'échantillonnage de 10 ms.

Les mesures réalisées sur le système à trois moteurs [Koç00] en régime établi sont présentées sur la Figure 3.1-8 pour des changements différés des consignes de tension et de vitesse. On observe un meilleur découplage de la vitesse vers les tensions pour le correcteur multivariable H_∞ .

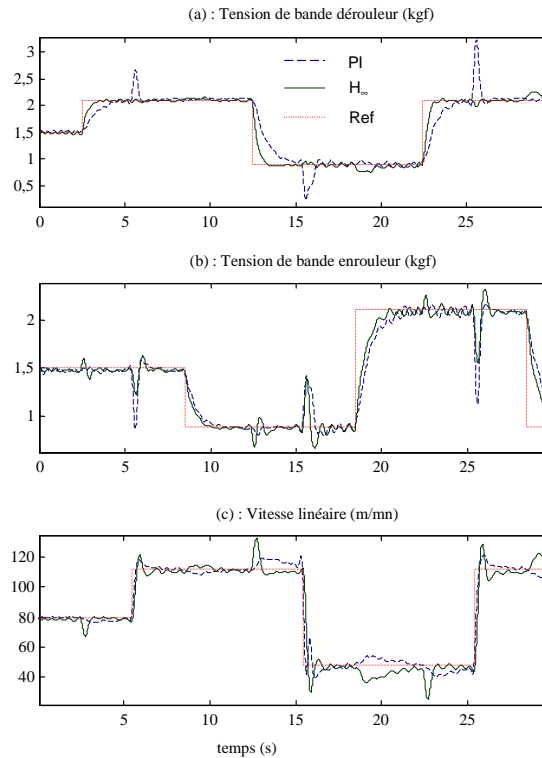


Figure 3.1-8. Mesures en régime établi : comparaison PI - H_∞ 1ddl

3.1.3. Commande H_∞ à deux degrés de liberté (2ddl)

3.1.3.1. Motivation

Pour les correcteurs 1ddl étudiés dans le paragraphe 3.1.2, il n'est pas possible de spécifier les performances en rejet de perturbations indépendamment de celles en suivi de consigne. Pour ce faire, on peut utiliser un correcteur 2ddl. Les deux parties d'un tel correcteur

$$K = \begin{bmatrix} K_f & K_b \end{bmatrix}^T \quad (3.45)$$

sont généralement synthétisées séparément. Tout d'abord, les différentes techniques de commande 2ddl décrites dans la littérature seront présentées.

3.1.3.2. Différentes techniques 2ddl

Pernebo dans [Per81] a montré que les propriétés de la fonction de sensibilité et de la fonction de transfert de la consigne vers le signal de sortie deviennent indépendantes l'une de l'autre, si un correcteur d'anticipation est utilisé pour le signal de consigne. Les entrées de ce correcteur, y et r , sont connectées respectivement au gain de retour K_b et au terme d'anticipation K_f , ces deux termes étant dynamiques. Le schéma du système bouclé est visualisé sur la Figure 3.1-9.

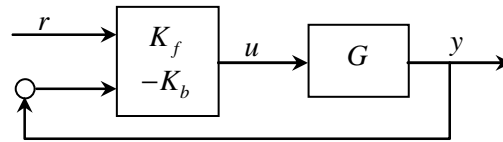


Figure 3.1-9. Correcteur à deux degrés de liberté

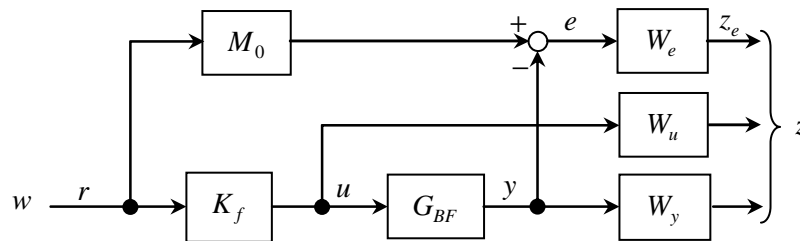
Les deux parties du correcteur sont typiquement synthétisées en deux étapes. En premier lieu, le comportement en boucle fermée est optimisé par K_b . Ensuite, les propriétés de suivi de consigne sont satisfaites à l'aide de la synthèse de K_f . Cependant, ces deux parties peuvent être calculées simultanément si la même méthode de synthèse est utilisée pour elles.

Plusieurs auteurs ont décrit des méthodes de pondération pour la synthèse H_∞ avec préfiltre : Chiang et Safonov [CS92] avaient proposé une procédure à deux étapes, fondée sur la méthode de pondération $S/KS/T$. Dans [LKP93], les auteurs ont introduit une méthode à une puis à deux étapes pour la synthèse de correcteurs avec anticipation/retour en utilisant la technique NLCF (factorisation copremière gauche normale). Des procédures en une étape incorporant la technique de pondération $S/KS/T$ ont été présentées indépendamment dans [Edm94] et [CWG94].

La section suivante présente des extensions des procédures en une et deux étapes décrites précédemment. Ces techniques sont principalement inspirées de la thèse de Christen [Chr96] et des améliorations sont ensuite apportées dans le cadre de ce travail.

➤ La procédure en deux étapes

On peut synthétiser un correcteur H_∞ d'anticipation K_f sans ou avec modèle de référence M_0 .

Figure 3.1-10. Une méthode de pondération avec modèle de référence pour la synthèse du correcteur H_∞ d'anticipation

Dans cette figure, le bloc G_{BF} représente la boucle fermée contenant le procédé G et la partie K_b du correcteur :

$$G_{BF} = GK_b(I + GK_b)^{-1} \quad (3.46)$$

Dans le premier cas, la fonction de transfert de r à z_e vaut :

$$W_e(I - G_{BF}K_f) = W_e(I - T_{yr}), \quad (3.47)$$

tandis que dans le deuxième cas, la même fonction de transfert est égale à :

$$W_e(M_0 - G_{BF}K_f) = W_e(M_0 - T_{yr}). \quad (3.48)$$

Ainsi, dans la gamme de fréquences où W_e est grand, T_{yr} est obligatoirement soit une matrice identité, soit une matrice égale au modèle de référence M_0 . Le système bouclé G_{BF} doit être asymptotiquement stable. Les filtres de pondération ont la même signification et les mêmes limitations que ceux décrits dans le cas du correcteur $1ddl$.

Le modèle de référence M_0 représente la fonction de transfert T_{yr} désirée, qui est la fonction de transfert traduisant la propriété de poursuite. M_0 est choisi usuellement diagonal, et, pour chaque élément, d'ordre réduit, c'est-à-dire du premier ou du deuxième ordre. Cependant, si le but de la synthèse est que le correcteur ne modifie pas certains des comportements du système en boucle ouverte pour lequel il est synthétisé, il est important d'inclure ces comportements dans M_0 , comme Roduner [Rod96] l'a montré pour les systèmes à retard.

Cette procédure à deux étapes a l'avantage que la synthèse du correcteur d'anticipation est complètement indépendante de la synthèse du retour de sortie. Ainsi, elle peut être appliquée sur n'importe quel système bouclé stabilisé. Le correcteur à deux degrés de liberté résultant consistant en les deux parties K_b et K_f possède par conséquent au moins trois fois autant de variables d'état que le système original si K_b contient également un observateur. L'ordre du correcteur $2ddl$ obtenu par cette procédure est donc élevé. Bien que cet ordre puisse être réduit par les méthodes de réduction d'ordre, il est préférable de ne pas introduire autant de variables d'état. A cette fin, des approches en une seule étape sont proposées dans la section suivante.

➤ Une procédure en une seule étape pour la méthode de pondération $S/KS/T$

La procédure en une seule étape (Figure 3.1-11) est une combinaison de la méthode de pondération $S/KS/T$ et de la synthèse de correcteur d'anticipation avec modèle de référence présentée dans la section précédente.

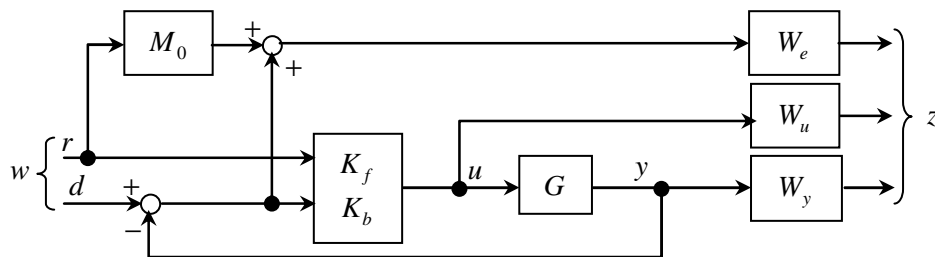


Figure 3.1-11. Synthèse du correcteur H_∞ à 2ddl par la méthode de pondération à la sortie $S/KS/T$

La matrice de transfert T_{zw} est donnée par :

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} W_e(M_0 - T_{yr}) & W_e S_e \\ W_u S_u K_f & W_u S_u K_b \\ W_y T_{yr} & W_y T_e \end{bmatrix}, \quad (3.49)$$

avec les sensibilités :

$$S_e = (I + GK_b)^{-1}, \quad T_e = S_e GK_b, \quad T_{yr} = S_e GK_f, \quad \text{et} \quad S_u = (I + K_b G)^{-1}. \quad (3.50)$$

La deuxième colonne de T_{zw} est la même que dans le cas de la synthèse du seul retour de sortie. Le

premier et le troisième élément de la première colonne définissent les propriétés de poursuite, T_{yr} étant la fonction de transfert de poursuite. L'élément du milieu (le deuxième) n'a pas de contribution importante tant que W_u est petit, comme c'est le cas habituellement.

Ici, le compensateur complet (3.45) a le même ordre que le système augmenté qui est composé du système étudié G et des différents filtres de pondération. Comparé au correcteur de retour de sortie $1ddl$, l'ordre de ce correcteur $2ddl$ est augmenté par le seul ordre du modèle de référence M_0 .

Une méthode similaire, qui consiste cette fois à utiliser la méthode de pondération $S/KS/T$ en pondérant S_e et T_e et en utilisant des pondérations à l'entrée, est illustrée sur la Figure 3.1-12.

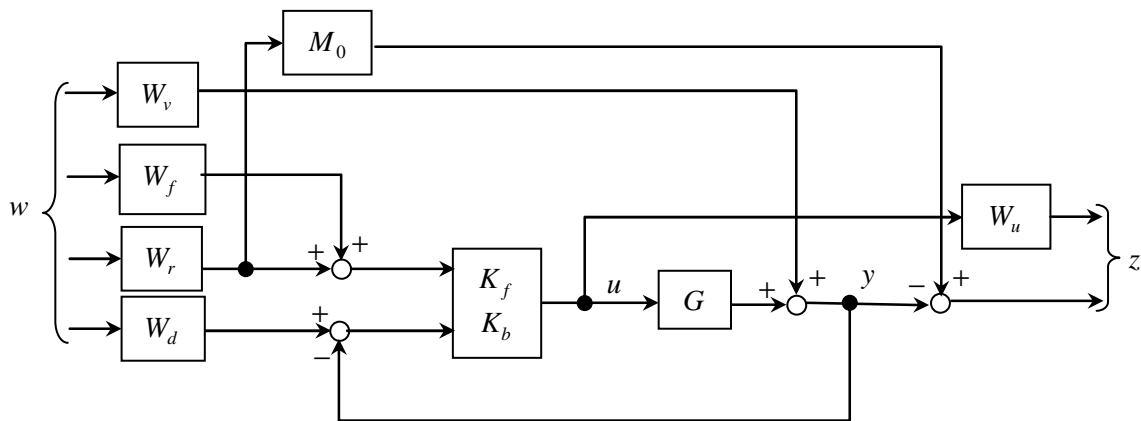


Figure 3.1-12. Synthèse en une étape d'un correcteur H_∞ à 2ddl fondée sur la méthode de pondération $S/KS/T$ avec les filtres à l'entrée

Dans cette approche, il est encore plus facile d'assigner différentes largeurs de bande pour l'anticipation et le retour de sortie, comme le montre l'expression suivante :

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} -W_u T_u W_v & W_u S_u K_f W_f & W_u S_u K_f W_r & W_u S_u K_b W_d \\ -S_e W_v & -T_{yr} W_f & (M_0 - T_{yr}) W_r & -T_e W_d \end{bmatrix}, \quad (3.51)$$

avec :

$$S_e = (I + GK_b)^{-1}, \quad T_e = S_e GK_b, \quad T_{yr} = S_e GK_f, \quad S_u = (I + K_b G)^{-1}, \quad T_u = S_u K_b. \quad (3.52)$$

Les pondérations W_v et W_d délimitent le gabarit fréquentiel de la sensibilité et de la sensibilité complémentaire de la boucle, tandis que W_r et W_f combinés avec le modèle M_0 spécifient le gabarit des fonctions de transfert relevant de la propriété de poursuite. Dans cette approche également, W_u est choisi petit de façon à ce que la ligne supérieure de T_{zw} n'influence pas sa norme H_∞ .

Le filtre de pondération W_f influence T_{yr} qui peut être interprétée comme « la fonction de sensibilité complémentaire de poursuite ». W_f prescrit la largeur de bande maximale de T_{yr} . W_r pondère la « sensibilité de poursuite » ($M_0 - T_{yr}$) ou $(I - T_{yr})$ — car M_0 pourra être choisi égal à la matrice identité. A cette fin, W_r peut être utilisé pour spécifier la largeur de bande minimale de T_{yr} .

Le correcteur $K = [K_f \quad K_b]^T$ est calculé en utilisant la méthode « γ - itération » de manière à minimiser la norme H_∞ de la matrice de transfert T_{zw} .

➤ **Une procédure en une étape pour la méthode de pondération GS/T**

Une autre méthode consiste à pondérer $S_e G$ et T_e par les filtres de pondération W_v, W_f, W_r et W_d disposés aux entrées comme visualisé à la Figure 3.1-13. Cette figure illustre la procédure de synthèse en une seule étape du correcteur à 2ddl. Encore une fois, la largeur de bande minimale des parties anticipation et retour de sortie du correcteur peut être imposée indépendamment par W_r et W_v , respectivement, comme il peut être vu sur la fonction de transfert de w vers z donnée par :

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} -W_u T_u W_v & W_u S_u K_f W_f & W_u S_u K_f W_r & W_u S_u K_b W_d \\ -S_e G W_v & -T_{yr} W_f & (M_0 - T_{yr}) W_r & -T_e W_d \end{bmatrix}. \quad (3.53)$$

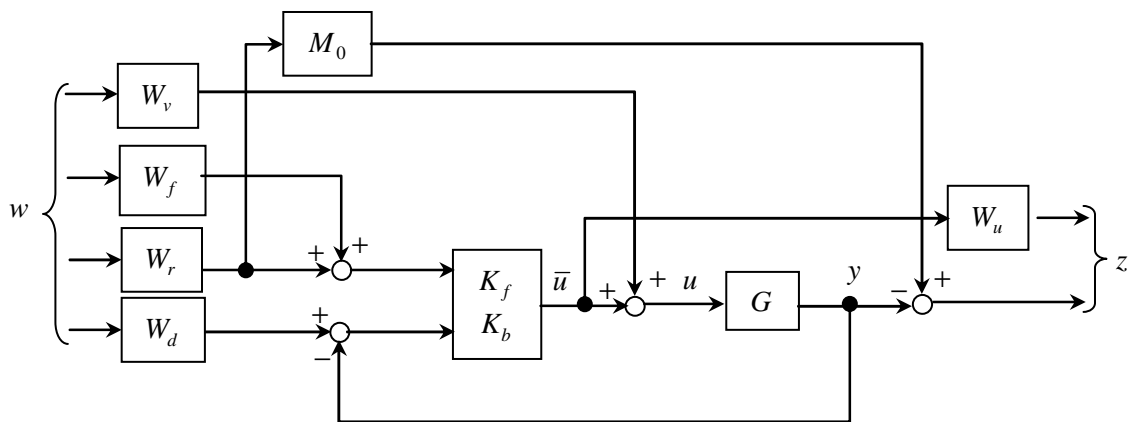


Figure 3.1-13. Synthèse du correcteur H_∞ 2ddl par la méthode de pondération GS/T

Notons que :

$$S_u = (I + K_b G)^{-1}, \quad T_u = S_u K_b G, \quad S_e = (I + G K_b)^{-1}, \quad T_{yr} = S_e G K_f, \quad \text{et} \quad T_e = S_e G K_b. \quad (3.54)$$

W_d et W_f spécifient la largeur de bande maximale du retour de sortie et de l'anticipation. W_u doit être petit comme auparavant.

➤ **Commande H_∞ à deux degrés de liberté avec intégrateur explicite (2ddl + intégrateur)**

La simulation effectuée sur le modèle non linéaire pour la stratégie de commande à 2ddl (voir le paragraphe des résultats plus loin) fait apparaître des erreurs statiques, en particulier sur la vitesse. Ces erreurs résultent de la variation des rayons, étant donné que les correcteurs sont calculés pour un point de fonctionnement, celui de la phase de démarrage, et que durant le processus « déroulement-enroulement » on s'en éloigne. Ces erreurs statiques sont bien sûr inexistantes dans le cas de simulations avec le modèle linéaire.

Dans le but de renforcer le rejet de perturbations, une extension de la structure de commande 2ddl S/KS/T, illustrée par la Figure 3.1-12, est introduite dans ce paragraphe, en ajoutant un intégrateur explicite à la boucle de retour de sortie. Cette technique a été inspirée en partie de celle présentée dans l'ouvrage [CD02] pour les systèmes à temps discret. Cette nouvelle technique est illustrée sur la Figure 3.1-14.

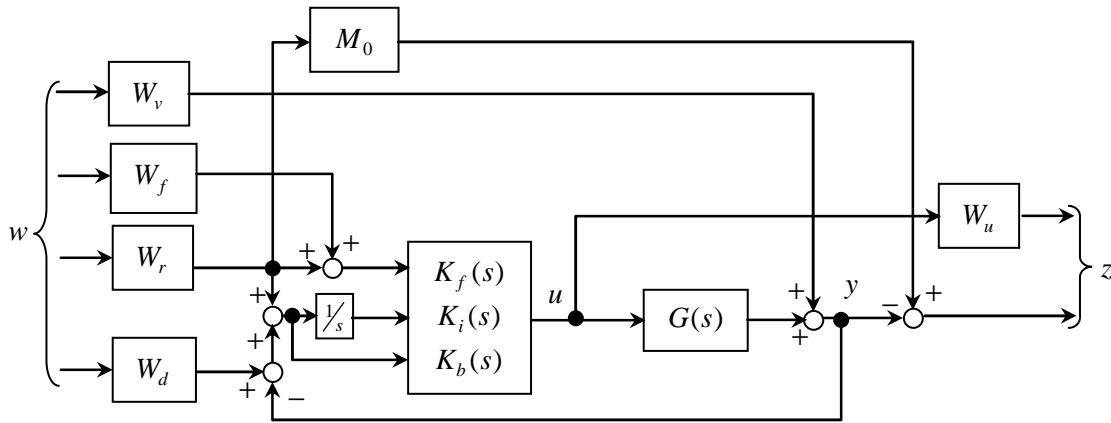


Figure 3.1-14. Synthèse d'un correcteur H_∞ à 2ddl par la méthode de pondération S/KS/T avec les filtres à l'entrée, un modèle de référence et un intégrateur explicite

Même si, à première vue, la ressemblance avec la stratégie de commande *2ddl* de la Figure 3.1-12 tend à faire croire que la seule différence avec la nouvelle stratégie *2ddl* de la Figure 3.1-14 est l'intégrateur rajouté explicitement à la boucle de retour de sortie, il y a en fait une deuxième différence. Dans la nouvelle stratégie de commande *2ddl* avec intégrateur explicite, l'entrée appliquée à la partie K_b du correcteur à synthétiser est cette fois " $r - y$ " au lieu de " $-y$ " précédemment.

La nouvelle partie K_i du correcteur

$$K = [K_f \quad K_i \quad K_b]^T \quad (3.55)$$

a pour rôle de renforcer la suppression de l'erreur statique. La nouvelle fonction de transfert en boucle fermée incluant les filtres de pondération devient alors :

$$T_{zw} = \begin{bmatrix} -W_u T_u W_v & W_u S_u K_f W_f & W_u S_u (K_f + K_b^*) W_r & W_u S_u K_b^* W_d \\ -S_e W_v & -T_{yr} W_f & (M_0 - T_{yr} - T_e) W_r & -T_e W_d \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

avec :

$$K_b^* = K_b + K_i/s, \quad S_e = (I + GK_b^*)^{-1}, \quad T_e = S_e GK_b^*, \quad T_{yr} = S_e GK_f, \quad S_u = (I + K_b^* G)^{-1}, \quad (3.57)$$

$$\text{et } T_u = S_u K_b^*. \quad (3.58)$$

Ici également le correcteur K est synthétisé en utilisant la méthode « γ - itération » de manière à minimiser la norme H_∞ de la matrice de transfert T_{zw} . Aussi, dans ce cas, les fonctions de pondération W_v , W_f , W_r , W_d et W_u déterminent les gabarits fréquentiels des fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire S_e , T_e , T_{yr} , S_u et T_u de la manière décrite précédemment dans le cas de la synthèse du correcteur *2ddl* sans intégrateur explicite avec la technique de pondération S/KS/T. Ceci dit, ils permettent cette fois, en plus du calcul des parties K_f et K_b du correcteur K , le calcul de la nouvelle partie K_i . Comme nous pouvons le remarquer sur l'équation (3.56), toutes les expressions des sensibilités incluent cette nouvelle partie K_i/s du correcteur. L'annulation de l'erreur statique est donc assurée par cet ajout explicite d'intégrateurs dans le cas de modèles linéaires et pour des consignes constantes. Dans le cas de modèles non linéaires, l'erreur statique devrait être diminuée.

Dans la prochaine section nous illustrerons la performance obtenue sur notre banc d'enroulement et sur nos modèles de simulation.

3.1.3.3. Application aux systèmes d'enroulement

Comme dans le cas du correcteur à un degré de liberté, les correcteurs sont synthétisés à partir du modèle linéarisé autour du point de fonctionnement correspondant à la phase de démarrage, afin d'assurer un bon asservissement de la tension et de la vitesse de bande pendant cette phase cruciale.

Nous présenterons ici les résultats d'application de deux stratégies de commande à deux degrés de liberté, à savoir : la stratégie de commande fondée sur la technique de pondération $S/KS/T$ (Figure 3.1-12) et celle fondée sur la technique de pondération $S/KS/T$ avec intégrateur explicite (Figure 3.1-14). Ces deux stratégies seront comparées chacune à la stratégie de commande $1ddl$ en les appliquant toutes les trois sur le banc d'enroulement expérimental à trois moteurs disponible à l'ERT Enroulement (ERT n°08) de Strasbourg, puis en les appliquant au modèle de simulation du système d'enroulement à trois moteurs puis à neuf moteurs (*cf.* chapitre 4). Les simulateurs ont été construits dans l'environnement Matlab[®]/Simulink[®], dans le cadre d'autres travaux.

➤ Système d'enroulement à faible nombre de moteurs (trois moteurs)

Nous procéderons ici en deux étapes. Nous présenterons d'abord l'apport de la stratégie de commande $2ddl$ par rapport à celle à $1ddl$. Pour cela, nous n'introduirons pas d'intégrateur. Dans une deuxième étape, nous présenterons l'apport des intégrateurs.

Le choix des filtres de pondération conditionne directement les performances du correcteur. Par souci de comparaison, nous avons choisi dans le cas du correcteur $2ddl$, avec et sans intégrateurs explicites, de prendre les mêmes filtres de pondération. Ceci revient en réalité à voir si les deux correcteurs satisfont le cahier des charges en termes de gabarit fréquentiel. Nous aurons ainsi imposé en quelque sorte à ces correcteurs les mêmes performances à atteindre. Pour cela, nous avons choisi pour les filtres $W_r(s)$ et $W_v(s)$ la forme :

$$W_r(s) = W_v(s) = \text{diag} \left(\frac{\frac{s}{m} + \omega_{B1}}{s + \omega_{B1}\varepsilon_0}, \frac{\frac{s}{m} + \omega_{B2}}{s + \omega_{B2}\varepsilon_0}, \frac{\frac{s}{m} + \omega_{B3}}{s + \omega_{B3}\varepsilon_0} \right), \quad (3.59)$$

où m est la borne supérieure des valeurs singulières des fonctions de transfert, ω_{Bi} la largeur de bande désirée et ε_0 l'erreur statique permise ou jugée tolérable, qui doit être non nulle car la méthode de calcul des correcteurs n'autorise pas la présence d'intégrateur pur. En termes de valeurs numériques, nous avons choisi :

$$m = 2, \quad \varepsilon_0 = 0.01, \quad \omega_{B1} = \omega_{B3} = 11 \text{ rad/s}, \quad \omega_{B2} = 9 \text{ rad/s}, \quad (3.60)$$

$$W_f(s) = W_d(s) = \frac{5,2s + 0,005}{0,001s + 29} I_{3 \times 3} \quad \text{et} \quad W_u = 0,01 I_{3 \times 3}. \quad (3.61)$$

Notons que ω_{B1} et ω_{B3} sont associés aux tensions de bande du dérouleur et de l'enrouleur, tandis qu'à la vitesse est associée la bande passante ω_{B2} .

▪ Apport de la stratégie de commande à $2ddl$

La synthèse des correcteurs H_∞ est réalisée à partir du modèle continu. Pour notre banc d'essai à trois moteurs, le correcteur H_∞ $2ddl$ obtenu est d'ordre 27. Cette valeur provient de différentes

contributions :

- le procédé G incluant les filtres situés au niveau des capteurs est d'ordre 12 ;

- l'ordre cumulé des filtres de pondération et du modèle de référence permettant de constituer le système augmenté P est égal à 15. En effet, $W_d, W_{\bar{d}}, W_u$ et M_0 , sont chacun d'ordre 3 et la réunion de $W_{\bar{r}}$ et de W_r , tous deux appliqués à la même entrée du correcteur (partie K_f de K), est d'ordre 3.

On notera aussi que le correcteur est de dimension 6×3 étant donné qu'il a 6 entrées (trois consignes et trois retours de mesures) et trois sorties de commandes. Ce correcteur a ensuite été échantillonné à l'aide de la transformée bilinéaire selon la méthode de « Tustin » [AW97]. Nous avons opté pour un temps d'échantillonnage de 10 ms, imposé par le programme temps réel. Nous avons effectué deux essais différents, le premier consistant à dérouler une bande flexible à une vitesse linéaire (vitesse du tracteur) égale à

$$V_l = 100 \text{ m / mn} \quad (3.62)$$

et avec une consigne de tension

$$T_d = T_e = \frac{(T_1 + T_2)}{2} = 1 \text{ kgf (kilogramme-force)}. \quad (3.63)$$

Des sauts de consignes de vitesse et de tension de $\pm 20\%$ ont été introduits à des instants différents.

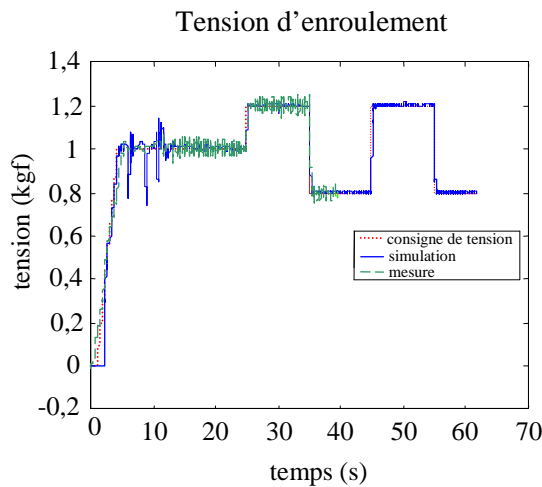


Figure 3.1-15. Comparaison entre tensions mesurée et simulée : correcteur 2ddl

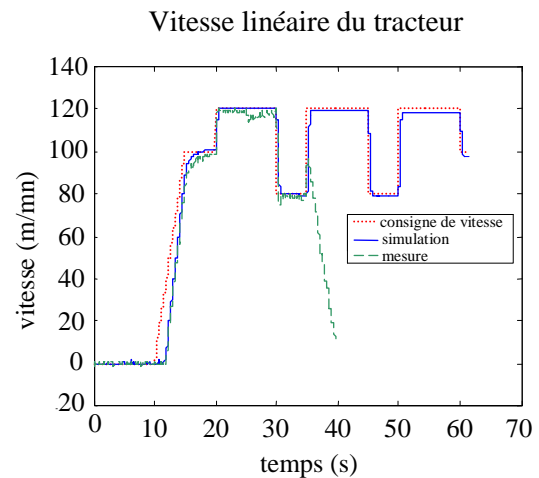


Figure 3.1-16. Comparaison entre vitesses mesurée et simulée : correcteur 2ddl

Le diamètre de la bobine impose une durée de déroulement expérimental assez courte, ce qui n'est pas le cas en simulation. La superposition des mesures et des simulations dans les mêmes figures permet de comparer les résultats entre eux.

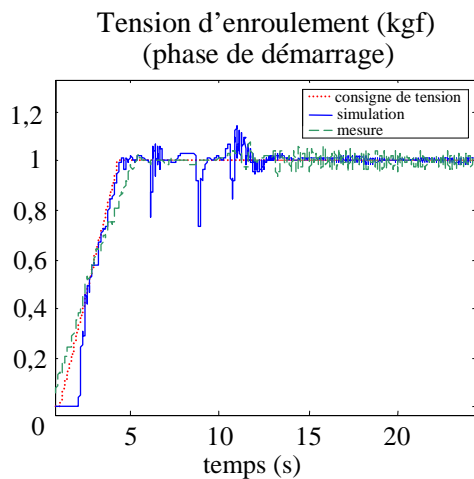


Figure 3.1-17. Comparaison entre mesure et simulation

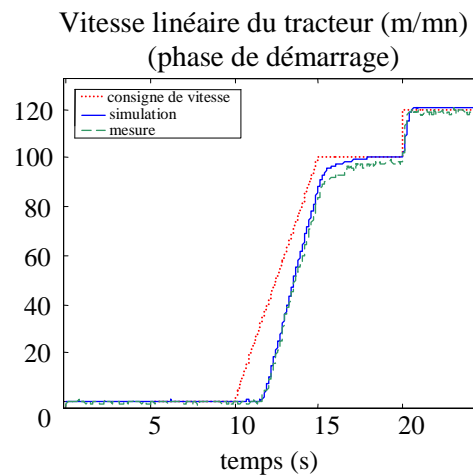


Figure 3.1-18. Comparaison entre mesure et simulation

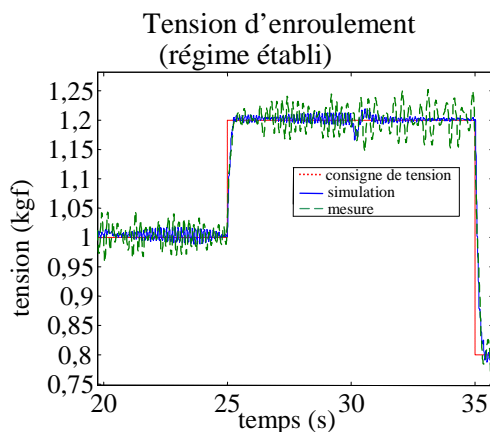


Figure 3.1-19. Comparaison entre mesure et simulation

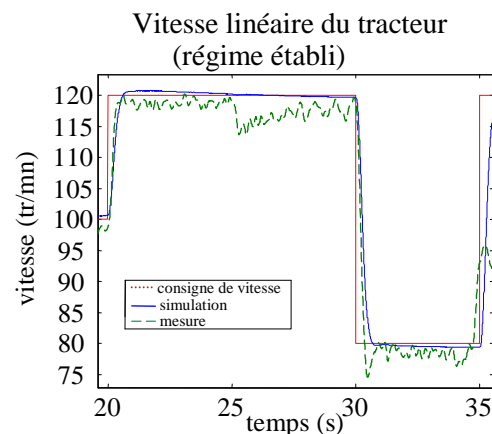


Figure 3.1-20. Comparaison entre mesure et simulation

On déduit de ces six figures que la stratégie de commande H_∞ à $2ddl$ apporte de bonnes performances, tant en phase de démarrage qu'en régime permanent, en termes de poursuite de trajectoire, d'annulation presque complète de l'erreur statique et surtout de découplage de la vitesse vers la tension. On notera aussi que le correcteur donne des performances similaires en simulation et sur le banc expérimental. On notera, cependant, que les performances de découplage de la tension vers la vitesse sont moins bonnes sur le banc réel. Ceci semble provenir du patinage entre la bande et le rouleau tracteur.

Un deuxième essai a été effectué dans le but d'illustrer cet effet de patinage. Pour cela, on a gardé constante la consigne de tension et appliqué des sauts de $\pm 50\%$ à la consigne de vitesse.

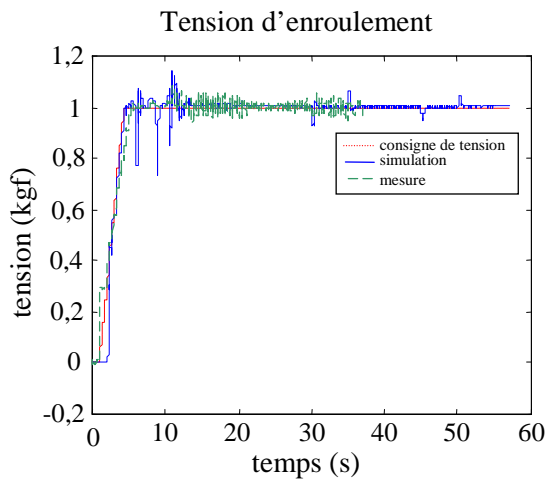


Figure 3.1-21. Mesure et simulation (effet de patinage)

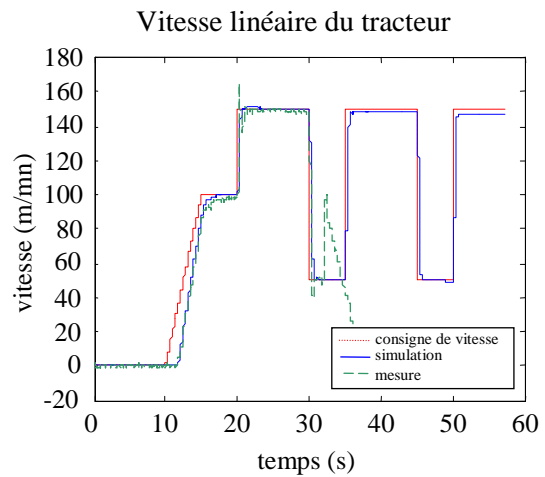


Figure 3.1-22. Mesure et simulation (effet de patinage)

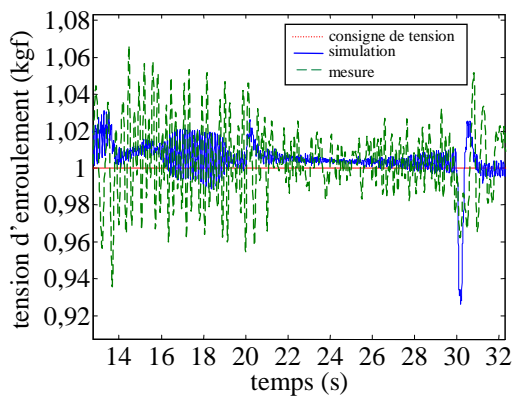


Figure 3.1-23. Comparaison de la tension en régime établi

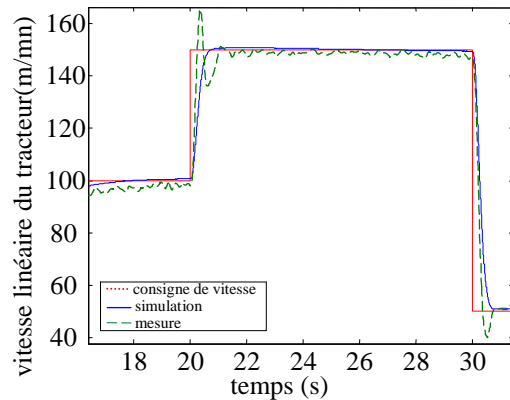


Figure 3.1-24. Comparaison de la vitesse en régime établi

On peut remarquer sur ces quatre figures qu'aux instants 20 s et 30 s un dépassement a lieu pour la vitesse mesurée mais pas pour celle simulée. Ceci provient du glissement entre la bande et le rouleau tracteur.

▪ Stratégie de commande *2ddl* avec intégrateur explicite

Dans cette section nous appliquerons les correcteurs à *2ddl* au simulateur non linéaire du banc à trois moteurs. La comparaison des correcteurs *2ddl* et *1ddl* est illustrée par la Figure 3.1-25.

Cette figure montre que les deux stratégies de commandes *2ddl* fournissent de bonnes performances en termes de poursuite de trajectoire, d'erreur statique et de découplage entre la vitesse et la tension de bande. La commande *1ddl*, quant à elle, a une dynamique plus lente en suivi de consignes. On remarque également qu'il n'y a guère de différence entre les deux techniques de commandes *2ddl*. Ceci est dû au fait que l'on a demandé aux deux correcteurs de satisfaire les mêmes exigences en termes de gabarit fréquentiel. Il est utile de noter que le réglage des filtres de pondération est une tâche très difficile et qu'il n'y a pas de méthode universelle, valable pour tous les processus, pour ce réglage. Cela relève surtout d'une bonne connaissance *a priori* du système étudié.

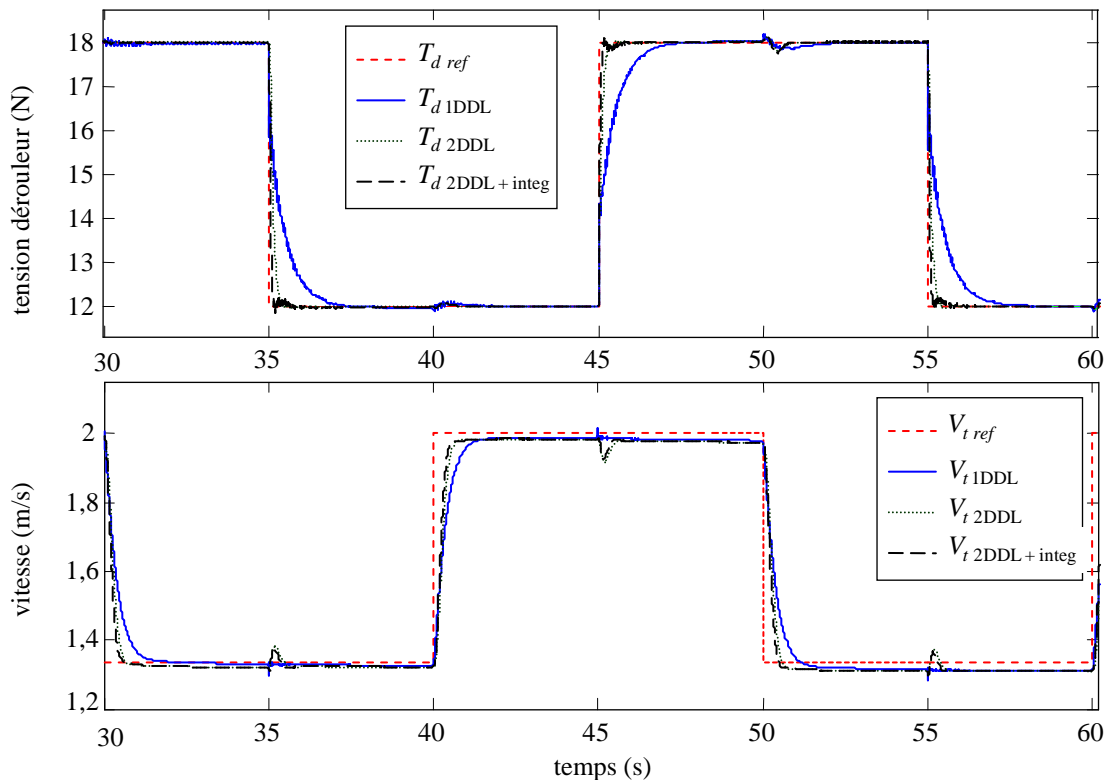


Figure 3.1-25. Comparaison des correcteurs 2ddl avec et sans intégrateurs explicites et 1ddl

3.1.4. Performances des correcteurs

On distingue deux façons d'évaluer les performances en boucle fermée. La première est temporelle : il s'agit d'évaluer la rapidité, le dépassement et l'erreur statique à partir de la réponse temporelle en boucle fermée. Une deuxième façon d'évaluer les performances en boucle fermée est fréquentielle. On mesure dans ce cadre les performances du système bouclé soit en utilisant des diagrammes fréquentiels comme les diagrammes de Nyquist, de Black-Nichols ou encore de Bode, soit à l'aide des normes H_∞ des différentes fonctions de sensibilité et de sensibilité complémentaire.

Dans ce paragraphe, seront comparées les performances en boucle fermée des trois correcteurs H_∞ présentés jusqu'ici. On notera que le modèle augmenté, servant à la synthèse du correcteur 1ddl, contient un modèle de référence M_0 identique à celui appliqué pour les deux autres synthèses, c'est-à-dire, 2ddl et 2ddl avec intégrateurs explicites. On rappelle que les trois correcteurs ont été synthétisés avec une stratégie de pondération $S/KS/T$.

Dans le tableau 3.1-2 sont regroupées les normes H_∞ des différentes fonctions de sensibilité $\|S_e\|_\infty$, $\|T_e\|_\infty$, $\|T_{yr}\|_\infty$ et $\|M_0 - T_{yr}\|_\infty$, ainsi que la norme H_∞ de $\|T_{zv}\|_\infty$.

Tableau 3.1-2. Évaluation des performances en boucle fermée

	Correcteur H_∞ <i>1ddl</i>	Correcteur H_∞ <i>2ddl</i>	Correcteur H_∞ <i>2ddl avec intégrateur</i>
$\ T_{zw}\ _\infty$	3,71	634	694
$\ S_e\ _\infty$	1,16	1,47	1,47
$\ T_e\ _\infty$	1	1	1
$\ T_{yr}\ _\infty$	1	1	1
$\ M_0 - T_{yr}\ _\infty$	0,53	0,74	0,70

On remarque, à partir de ce tableau, que la norme $\|T_{zw}\|_\infty$ augmente avec l'accroissement des performances exigées des correcteurs. Effectivement, il n'y a que trois filtres de pondération et un modèle de référence qui sont appliqués au correcteur à *1ddl*, de telle sorte que la norme $\|T_{zw}\|_\infty$ reste assez petite. Pour les deux correcteurs *2ddl*, par contre, l'exigence est plus importante ce qui rend le problème numérique plus difficile et le temps de convergence de l'algorithme de synthèse plus long. Ceci a aussi pour effet d'accroître la norme $\|T_{zw}\|_\infty$ pour ces deux correcteurs. L'ajout des intégrateurs a également participé à l'augmentation de cette dernière. Une autre remarque concerne l'égalité de $\|T_e\|_\infty$ et de $\|T_{yr}\|_\infty$ pour chacun des trois correcteurs, ce qui confirme l'égalité $T_e = T_{yr}$ dans le tableau 3.1-1.

Il est également facile de déduire les marges de module M_o^{sp} et la marge de module complémentaire M_o^{gpc} en sortie du système, à partir de l'analyse d'un système MIMO, en sachant que :

$$M_o^{sp} = \frac{1}{\|S_e\|_\infty}, \quad M_o^{gpc} = \frac{1}{\|T_e\|_\infty}. \quad (3.64)$$

Tableau 3.1-3. Marges de module en boucle fermée

	Correcteur H_∞ <i>1ddl</i>	Correcteur H_∞ <i>2ddl</i>	Correcteur H_∞ <i>2ddl avec intégrateur</i>
M_o^{sp}	0,86	0,68	0,68
M_o^{gpc}	1	1	1

3.2. Commande H_∞ avec utilisation des inégalités matricielles bilinéaires (BMI)

3.2.1. L'optimisation BMI : état de l'art

Le problème du retour de sortie statique et celui de la synthèse de correcteurs à ordre et/ou à structure fixés ne peuvent pas s'exprimer sous forme de LMI. Safonov a introduit le concept de BMI [IS93] [SGL94] [GTSP94] [GSP94] [MSP00], qui peut être vu comme une généralisation de la notion de LMI.

Définition : inégalité matricielle bilinéaire

Le problème de faisabilité BMI est défini par [Cle01] :

Trouver x sous la contrainte BMI :

$$F(x) = F_0 + \sum_{i=1}^m x_i F_i + \sum_{j,k=1,1}^{m,m} x_j x_k F_{jk} \geq 0, \quad (3.65)$$

avec des matrices symétriques données :

$$\begin{aligned} F_i &= F_i^T \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ F_{jk} &= F_{jk}^T \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

En se basant sur les résultats des articles [IS93] et [SGL94], les BMIs semblent être un outil performant pour la formulation de problèmes de commande très importants. Cependant, il n'existe pas aujourd'hui de méthode exacte pour résoudre ce genre de problèmes mais des heuristiques qui ont été mises en place dans différents cadres. Une classification des différents problèmes et des approches adaptées est aujourd'hui une préoccupation conjointe de l'automatique et de l'analyse numérique. De plus, ce type d'inégalité matricielle permet de formuler d'une façon élégante différents problèmes de commande robuste. Cependant, contrairement à l'inégalité matricielle linéaire (LMI) qui peut être résolue par des algorithmes performants, comme l'algorithme du point intérieur, la BMI est un problème de calcul difficile tant sur le plan théorique que pratique. Dans ce paragraphe, nous commencerons par donner quelques explications concernant l'optimisation NP-difficile, puis nous donnerons un état de l'art sur les problèmes de commande traités par des BMIs ainsi que les différentes méthodes proposées ces dernières années pour la résolution de ce type de problèmes.

3.2.1.1. Théorie de la complexité

La théorie de la complexité [GJ79] s'intéresse à l'étude formelle de la difficulté des problèmes en informatique. Elle se distingue de la théorie de calculabilité qui s'attache à savoir si un problème peut être résolu par un ordinateur. La théorie de la complexité se concentre sur les problèmes qui peuvent effectivement être résolus, la question étant de savoir s'ils peuvent être résolus efficacement ou pas en se basant sur une estimation (théorique) des temps de calcul et des besoins en mémoire informatique.

➤ Généralités

Dans la théorie de la complexité, un problème est formalisé de la manière suivante : on se donne un ensemble de données ou instance, en entrée, et on pose une question sur ces données, pouvant demander éventuellement un calcul. La théorie de la complexité ne traite que des problèmes de décision binaire, c'est-à-dire posant une question dont la réponse est "oui" ou "non". Cependant, on étend la notion de complexité aux problèmes d'optimisation. En effet, il est facile de transformer un problème d'optimisation en un problème de décision. Si par exemple on cherche à optimiser une valeur « n » on traite le problème de décision qui consiste à comparer « n » à un certain « k ». En traitant plusieurs valeurs de « k », on peut déterminer une valeur optimale. On confond souvent un problème d'optimisation et son problème de décision associé.

La théorie de la complexité repose sur la définition de classes de complexité qui permettent de classer les problèmes en fonction de la complexité des algorithmes qui existent pour les résoudre. Parmi les classes les plus courantes, on distingue :

▪ Classe L

Un problème de décision qui peut être résolu par un algorithme déterministe en espace logarithmique par rapport à la taille de l'instance est dans L .

- **Classe NL**

Cette classe correspond à la précédente mais pour un algorithme non déterministe.

- **Classe P**

Un problème est dans P s'il peut être résolu sur une machine déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance. On qualifie alors l'algorithme de polynomial.

- **Classe NP**

C'est la classe des problèmes de décision pour lesquels la réponse « oui » peut être déterminée sur une machine non déterministe en un temps polynomial par rapport à la taille de l'instance.

- **Classe Co-NP**

Nom parfois donné pour l'équivalent de la classe NP pour la réponse « non ».

- **Classe PSPACE**

Cette classe contient les problèmes décidables par un algorithme déterministe en espace polynomial par rapport à la taille de son instance.

- **Classe NSPACE ou NPSPACE**

C'est la classe des problèmes décidables par un algorithme non déterministe en espace polynomial par rapport à la taille de son instance.

- **Classe EXPTIME**

Cette classe contient les problèmes décidables par un algorithme déterministe en temps exponentiel par rapport à la taille de son instance.

On a les inclusions : $P \subset NP$ et $Co-NP \subset PSPACE = NPSPACE$.

➤ **Problème NP-difficile (en anglais, NP-hard) ; problème NP-complet**

Un problème « NP-difficile » est un problème de décision intrinsèquement plus difficile que ceux qui peuvent être résolus par une machine non déterministe en temps polynomial (NP). En fait, un problème est NP-difficile si un algorithme permettant de le résoudre peut être traduit en un algorithme qui permet de résoudre tout autre problème NP. Un problème qui est à la fois NP et NP-difficile est appelé problème « NP-complet ».

Dans le domaine de la commande, les auteurs de [TÖ95] ont été les premiers à faire un point historique sur les problèmes de commandes approchés par des BMIs et donc NP-difficiles. Il est montré dans cette communication que tout problème de faisabilité de type BMI est NP-difficile. Dans le même article il est montré que la stabilisation simultanée par un retour de sortie statique est un problème NP-difficile. Plus précisément, pour « n » procédés donnés, le problème qui consiste à trouver une matrice de gain statique K qui stabilise les « n » procédés est NP-difficile.

Plus de détails concernant les classes de complexité et les différents algorithmes de résolution associés à ces problèmes de décision peuvent être trouvés dans l'ouvrage [GJ79].

3.2.1.2. Classification des problèmes BMI

Dans le domaine de la commande, on rencontre les BMIs dans plusieurs problèmes comme le retour d'état statique, la stabilisation avec des contraintes d'incertitudes, la synthèse d'un correcteur avec contraintes d'ordre et/ou de structure, la stabilisation simultanée de plusieurs systèmes et la synthèse de correcteurs décentralisés avec des contraintes sur le gain [AP02] [BGF+94] [CSS+93] [HHB99] [WBC94]. L'article [SGL94] est le premier dans son genre à avoir traité les BMIs comme un outil simple et flexible pour formuler et résoudre les problèmes de synthèse de correcteurs robustes. Les auteurs présentent dans cet article les différents problèmes pouvant être formulés facilement par des BMIs, mais n'y proposent pas d'algorithme de résolution de ces problèmes.

La formulation BMI des problèmes de commande est devenue populaire dans les années 90 [IS93] [IS94] [SGL94] [GSP94] [GTS+94] [TÖ95] [IZF96] [XCC96] [BVB97]. Les BMIs étant non convexes, il n'y avait pas à cette époque de méthode de calcul ni d'algorithme pour les résoudre, contrairement aux problèmes LMI, qui eux sont convexes, pour lesquels des algorithmes de point intérieur très performants étaient disponibles.

Durant la dernière décennie, plusieurs chercheurs ont essayé d'élaborer des algorithmes d'optimisation globale et/ou non linéaire afin de résoudre ces problèmes BMIs non convexes, mais sans grand succès ou avec un « succès limité ».

On distingue dans la littérature deux grandes familles pour la résolution des BMIs non convexes : « *la résolution globale* » [XCC96] [BV97] [BVB97] [KSK97] [FK99] [TA99] [Fuj99] [BWK03] [AK04] et « *la résolution locale* » [IS94] [WBC94] [IZF96] [TS97] [SC98] [IF99] [HHB99] [Mat00] [HLK+05]. Dans ce qui suit, on détaillera ces deux grandes familles sur les deux aspects respectifs de sujets de commande traités et d'algorithmes de résolution choisis.

➤ Résolution des problèmes BMIs par optimisation globale

La résolution des problèmes BMIs par optimisation globale n'a pas attiré beaucoup de chercheurs, automaticiens ou informaticiens. En la matière, trois types d'approche ont été adoptés pour construire des algorithmes de résolution. En l'occurrence, on cite l'approche dite de séparation et d'évaluation, plus communément désignée par son terme anglais « *branch and bound* », l'approche « *branch and cut* » et les approches fondées sur des méthodes dérivées de relaxation.

Le rapport [XCC96] est une bonne référence qui fait un rappel historique des différentes applications dans le domaine de la commande robuste nécessitant une formulation BMI. Dans cet article, les BMIs sont résolues en les remplaçant par des problèmes d'optimisation conique.

Les auteurs de [BVB97] proposent un nouvel algorithme de résolution globale du problème d'optimisation utilisant les BMIs. La méthode est basée sur une technique connue dans le domaine de l'optimisation globale et de grande dimension sous la dénomination anglaise de « *generalized benders decomposition* ». Cette dernière est basée sur la relaxation par la méthode du Lagrangien.

Boyd et Vandenberghe dans [BV97] ont mis au point les différentes connexions entre les applications de la programmation semi-définie (SDP) dans les deux domaines de la commande et de l'optimisation combinatoire. Cet article a le mérite de recenser toutes les méthodes et algorithmes de résolution existant pour les problèmes d'optimisation BMIs basés sur l'approche de relaxation. Il est aussi, à notre point de vue, un bon outil pédagogique pour la compréhension des SDP et des problèmes d'optimisation BMIs.

Les auteurs de [KSK97] traitent de l'optimisation globale du problème BMI par valeurs propres (BMI Eigenvalue Problem, ou BMIEP). Ils exploitent quelques propriétés graphiques du minimum local du problème d'optimisation BMI, puis, en se basant sur ce résultat, ils proposent un algorithme

Branch-and-Bound modifié pour l'optimisation globale de la BMI. Cependant, aucune garantie de convergence au minimum global n'est donnée, et seule une application sur un exemple numérique de petite taille a été fournie. On ne connaît pas non plus l'ordre de grandeur du temps de calcul de cet algorithme.

Une amélioration de l'algorithme Branch-and-Bound a été proposée par Fukuda et Kojima [FK99] en introduisant une meilleure relaxation au problème BMIEP. Dans le même article les auteurs proposent une comparaison avec l'algorithme Branch-and-Cut.

Apkarian et Tuan [TA99] proposent un nouvel algorithme Branch-and-Bound pour la résolution d'une classe générale de problèmes BMIs. En phase initiale, des contraintes LMIs sont incorporées sous forme de contraintes BMIs pour prendre avantage de la facilité de formulation et des informations contenues dans les termes non convexes. Après cela, la non-convexité de la BMI est centralisée en des contraintes de couples, de telle manière que, quand ces dernières sont négligées, on obtient un problème LMI relaxé pour l'obtention d'une borne inférieure. L'idée de base du nouvel algorithme consistait alors à réduire l'espace pour les variables additionnelles. La méthode a permis, pour la première fois, l'application d'un algorithme d'optimisation globale à des problèmes de commande de grandes dimensions. Toutefois, un certain conservatisme est à noter.

Un peu dans la même logique, l'auteur de [Fuj99] propose un algorithme de résolution globale de type Branch-and-Bound pour la résolution des problèmes d'optimisations de type BMI. Cet algorithme est basé sur une relaxation LMI dont la borne supérieure est déduite de sa performance « pire cas ». Le problème BMI considéré est celui des valeurs propres généralisées (Generalized BMI Eigenvalue Problem, ou GBMIEP).

Dans l'article [BWK03] un algorithme Branch-and-Bound est utilisé pour synthétiser un correcteur structuré qui minimise un critère de modèle assorti (Matching Model Criteria). Ce problème d'optimisation non convexe est formulé par une BMI avec des variables additionnelles permettant l'estimation des bornes inférieures et supérieures des sous-problèmes LMIs. Pour réduire le temps de calcul, les auteurs proposent de réduire les variables additionnelles. Cette méthode globale a été utilisée pour le réglage des paramètres d'un correcteur de type PID.

La motivation des auteurs de l'article [AK04] partait d'un constat pratique concernant les procédés chimiques. En effet, ces derniers sont régulés dans 80 à 90% des cas par des correcteurs PID, vu leur simplicité d'implantation étant donné qu'il n'y a que trois paramètres à régler. Mais comme les procédés chimiques sont des systèmes à paramètres variant dans le temps, le but des auteurs était de synthétiser des correcteurs PID qui soient robustes vis-à-vis des variations du procédé tout en assurant des propriétés de poursuite. Le choix d'un correcteur à deux degrés de liberté s'imposait donc naturellement, d'où le correcteur *2ddl*-PID. Comme les auteurs n'ont que trois paramètres à régler, ils ont opté pour une synthèse utilisant l'optimisation BMI, qui est d'autant plus efficace que le nombre de paramètres à optimiser est faible. Pour la même raison, ils ont utilisé l'algorithme Branch-and-Bound afin d'obtenir une solution exacte à leur problème. Il est à noter que les auteurs considéraient un système discret à retard. Une relaxation SDP de leur problème était nécessaire pour l'obtention des deux bornes, inférieure et supérieure, de la solution calculée par l'algorithme.

La relaxation SDP des problèmes d'optimisation non convexe est décrite plus en détails dans les articles [FK97] et [FH97].

Il apparaît dans ce qui précède que la plupart des algorithmes globaux sont des variantes de l'algorithme de Branch-and-Bound. Cependant, l'inconvénient majeur de tous les algorithmes globaux de résolution de BMIs est leur complexité numérique, due aux variables de décision additionnelles, encore appelées les variables difficiles, et qu'ils ne peuvent pas être résolus en un temps polynomial : la durée de calcul est très grande et difficilement estimable. C'est la raison pour laquelle nous nous intéressons dans notre cas aux algorithmes d'optimisation locale. Tout d'abord un état de l'art sur la

résolution des problèmes BMIs par ce type d'algorithme est présenté au paragraphe suivant.

➤ Résolution des problèmes BMIs par optimisation locale

La deuxième grande famille de l'optimisation BMI, en l'occurrence « l'optimisation locale », a attiré un grand nombre de chercheurs durant la dernière décennie. Contrairement aux approches globales, la plupart des approches locales sont moins exigeantes sur le plan numérique, mais dépendent de la (ou des) condition(s) initiale(s) et peuvent ne pas converger vers le minimum global. Nous avons essayé de classer les différentes méthodes de cette grande famille par type d'algorithme choisi. Ensuite, dans une même classe, nous mentionnerons les articles qui nous ont paru les plus intéressants, tout en détaillant le type de problème de commande qu'ils ont traité.

▪ Algorithmes itératifs

L'approche la plus simple dans cette famille d'optimisation locale est celle qui utilise le fait qu'en fixant certaines variables " x " le problème BMI devient convexe en les variables restantes " y " et vice-versa, et itère entre les deux [TS97], [SC98], [Iwa99], [LMG01], [PA01], [AP02], [APA02], [KSV+03].

L'article [TS97] traite du problème de la synthèse simultanée des paramètres de plan restructuré (composants passifs) et de correcteurs (composants actifs) dans le but d'atteindre une performance optimale du système. Un cadre général pour le problème de synthèse simultanée basée sur les LFTs est proposé dans cet article. Le problème est réduit à un problème BMI à l'aide du lemme borné réel (BRL). De la même manière, la résolution de cette BMI repose sur une simple récursivité en fixant les composants passifs et les composants actifs itérativement, une fois sur deux, pour se retrouver alors avec des LMIs très simples à résoudre par des algorithmes standard de type point intérieur. Tous les articles décrits ci-dessous reposent sur le même principe d'itération.

L'article [SC98] propose une approche générale de résolution de problèmes de commande sous-optimale H_∞ avec structure imposée, c'est-à-dire les problèmes incluant une commande par retour de sortie statique, décentralisée, et des correcteurs fixes pour les différents points de fonctionnement. L'approche s'inspire d'une formulation duale de la synthèse d'un retour d'état H_∞ et utilise alors la même paramétrisation du correcteur. La condition utilisée est sous forme de BMI.

Les auteurs de l'article [LMG01] présentent un nouvel algorithme de calcul de retour statique de sortie par synthèse H_∞ . L'algorithme appelé « K-itération » consiste à itérer la synthèse de correcteurs. L'algorithme est dédié à un type précis de problème de commande. Il s'agit de la synthèse de correcteur PID robuste. Pour pallier la difficulté de la résolution du problème BMI, les auteurs le ramènent à un problème de synthèse de retour statique de sortie. Pour cela, ils ont défini deux nouvelles mesures fictives, l'intégrale et la dérivée de l'erreur. Les auteurs transforment tout d'abord le problème BMI en 2 LMIs à l'aide du lemme d'élimination, du BRL et du lemme de Schur.

L'article [PA01] traite le problème de synthèse d'un retour de sortie statique avec optimisation H_2 . Les auteurs montrent que le problème bilinéaire qui consiste à trouver un gain de retour de sortie K et une matrice de Lyapunov P est équivalent à un problème BMI utilisant de nouvelles variables, représentant une combinaison des anciennes variables du problème initial, et un gain de retour d'état. Le problème BMI devient alors un problème BMI de synthèse de retour d'état.

Les auteurs de [APA02] et [AP02] proposent en 2002 une nouvelle condition « suffisante » pour la synthèse mixte H_2/H_∞ par retour de sortie statique. Cette condition suffisante repose sur l'introduction de variables additionnelles permettant l'utilisation de fonctions de Lyapunov différentes pour l'expression du critère H_2 et de la contrainte H_∞ , réduisant ainsi le conservatisme des conditions habituellement utilisées.

Dans [KSV+03] une nouvelle approche est proposée pour synthétiser localement un correcteur de retour de sortie optimale robuste. L'algorithme commence avec n'importe quel correcteur initial rendant le problème faisable, donc satisfaisant les conditions du problème d'optimisation, et résulte en une « optimisation locale » au long d'une fonction non-convexe définie à chaque itération. L'approche a montré des propriétés de calcul efficaces, garantit une convergence vers un minimum « local » et est applicable à une large palette de problèmes. Le point de départ initial est obtenu à partir d'une procédure utilisant des LMIs. Les objectifs de synthèse considérés sont des conditions de norme H_2 et H_∞ ainsi que des contraintes de placement de pôles. La robotique a été choisie comme un cadre d'application de cette approche.

L'idée de l'approche itérative n'est pas nouvelle dans le milieu de la commande robuste. C'est aussi l'idée de la « D-K itération » très connue pour la μ -synthèse. Cependant, les algorithmes de ce type, appelés « méthode du même rang de descente » (Coordinate descent method) [Iwa99], « méthode d'alternance SDP » (alternating SDP method) [FK01] ou « itération duale » (dual iteration) dans [Iwa99], ne garantissent pas la convergence vers un minimum local [GSP94] [FK01] [YH98].

▪ *D'autres algorithmes alternatifs*

Une autre approche locale est la « méthode de minimisation de rang » (rank-minimization method) [IT01]. Bien que la convergence soit établie pour un problème modifié, il n'y a aucune garantie que la solution de ce problème BMI modifié satisfasse la BMI originale.

L'algorithme de « centrage XY » (the XY-centering algorithm) proposé dans [IS95] est aussi une approche locale alternative, qui traite des sous-classes de problèmes BMIs dans lesquels la non convexité peut être exprimée sous la forme $X = Y^{-1}$. Cette approche est par conséquent applicable à une classe réduite de problèmes de synthèse de correcteurs.

Finalement, la « méthode des centres » (method of centers) garantit une convergence locale après qu'une condition initiale faisable lui soit fournie [GSP94]. Cette approche est cependant la plus difficile numériquement, et pose en particulier des problèmes numériques aux dernières itérations [FK01].

▪ *Algorithmes basés sur des transformations vers des problèmes convexes (convexification)*

L'article [IS94] était l'un des premiers à avoir traité le problème de synthèse de correcteurs avec ordre imposé. Les auteurs proposent une approche unifiée permettant la résolution de différents types de problèmes de synthèse, tels que la synthèse robuste, optimale, linéaire, etc. Leur méthode consiste à unifier la formulation de ces problèmes en introduisant un changement de variable permettant de les réécrire sous forme LMI. La résolution est ensuite assurée par tout algorithme de point intérieur.

Les deux auteurs de l'article [IF99] traitent le problème de synthèse d'un correcteur H_∞ d'ordre imposé basée sur des BMIs. Le problème BMI est converti en problème différentiable en utilisant des paramètres de décalage (shift parameters). Cette conversion, combinée avec la méthode du « quasi Newton », donnera naissance à une nouvelle technique numérique pour résoudre les problèmes BMIs de ce genre.

La note [Mat00] traite le même problème que précédemment. Le problème BMI est converti en un problème LMI de faisabilité à l'aide d'une condition « suffisante ». L'idée est de transformer le problème en un problème de synthèse de retour de sortie statique. Deux conditions suffisantes permettent de transformer ce problème (de fait BMI) en deux LMIs de faisabilité. Le reproche qu'on peut faire à cette approche est le conservatisme introduit par les conditions suffisantes.

L'article [FL03] propose une procédure pour l'optimisation de correcteurs H_∞ d'ordre réduit

fixé à l'avance. Des mesures H_∞ des propriétés de la boucle fermée pour les basses, moyennes et hautes fréquences sont formulées, fournissant ainsi un problème d'optimisation avec des contraintes sur les paramètres du correcteur, ce dernier étant inconnu. Par l'intermédiaire du BRL, le problème d'optimisation est réécrit pour devenir un problème de forme BMI avec une fonction de Lyapunov pour chaque mesure de performance. Cette fonction de Lyapunov est une inconnue supplémentaire. Les fonctions de Lyapunov ont été imposées identiques pour que le problème BMI se transforme en un problème LMI convexe. Or les auteurs remarquent, par la suite, que cette condition introduit sur le problème d'optimisation un certain conservatisme. Ils comparent ensuite leur résultat à ceux obtenus par l'algorithme Penbmi[®] (V 2.0) de Tomlab[®] [HEG03]. Ce dernier leur permettra d'atteindre une robustesse et de bonnes performances en boucle fermée tout en laissant les fonctions de Lyapunov différentes.

▪ *Utilisation des inégalités matricielles polynomiales (PMI)*

Dans l'article [KH00] le problème standard de commande H_2 optimale est interprété comme une synthèse par placement de pôles. Les auteurs utilisent la résolution par matrice polynomiale au lieu de la résolution par BMI/LMI, réduisant ainsi la taille du problème d'optimisation grâce à l'absence des variables additionnelles (fonctions de Lyapunov).

Les auteurs de l'article [SC02] proposent une nouvelle solution algorithmique au problème de la stabilisation simultanée par un retour de sortie statique décentralisée. Le problème est formulé en termes de faisabilité d'une BMI. Il est ensuite transformé en une série de problèmes quadratiques dérivés, qui vont être résolus par des méthodes standard, tels que la méthode du Lagrangien et la méthode du point intérieur. Les auteurs ont constaté que leur méthode a tendance à placer les pôles près de l'axe imaginaire. Ils ont alors rajouté une contrainte de placement de pôle (decay rate).

Très récemment, dans l'article [HLK+05], une formulation algébrique du problème de retour de sortie statique a été proposée. Le critère de stabilité d'Hermité est appliqué au polynôme caractéristique en boucle fermée, donnant ainsi naissance à un problème BMI non convexe. Seuls les systèmes multi-entrées mono-sortie ($p=1$) ou mono-entrée ($m=1$) multi-sorties sont considérés. La non-convexité résultant des termes BMI est directement reportée sur le correcteur sans variable de Lyapunov additionnelle. Les auteurs utilisent alors le logiciel Penbmi[®] (V 2.0) [KS04] de Penopt[®] [KS03] par l'intermédiaire de l'interface Yalmip[®] (V 3.0) [Löf04] pour résoudre le problème BMI appliqué à un banc de test. Les auteurs utilisent en réalité des inégalités matricielles polynomiales (PMI), qui conduisent à des inégalités matricielles quadratiques. Penbmi[®] est cité dans cet article comme un outil très performant pour la résolution des BMIs, qui sont dans le cas présent des PMIs, mais sensible au choix du point initial, étant donné qu'il s'agit d'un algorithme d'optimisation local.

▪ *Algorithmes basés sur la méthode de l'homotopie*

Une autre approche locale est celle appelée « méthode du suivi du chemin » (Path-Following Method) ou encore « méthode d'homotopie » (Homotopy Method) [HHB99]. C'est principalement une méthode de linéarisation du problème bilinéaire. L'idée de base est que, sous l'hypothèse d'un petit nombre de pas, le problème BMI peut être approximé par un problème LMI en utilisant une perturbation du premier ordre. En pratique, cette méthode pourra être utilisée pour les problèmes où les performances en boucle fermée ne sont pas fondamentalement meilleures que celle en boucle ouverte, comme par exemple pour le placement d'actionneurs et de capteurs ou la synthèse topologique du correcteur (imposition d'une structure particulière, par exemple PID, ou d'un ordre donné) [HHB99].

Dans le but de remédier au moins à la perte de robustesse suite à la réduction a posteriori d'ordre de correcteurs synthétisés par la synthèse H_∞ , les auteurs de [WBC94] ont été les premiers à avoir proposé un algorithme utilisant la méthode d'homotopie avec un formalisme BMI pour synthétiser un correcteur d'ordre fixé à l'avance. Ceci dit, les auteurs reconnaissent que le problème

devient très difficile numériquement. Cet article considère les deux cas de synthèse H_2 et H_∞ .

Les auteurs des articles [IZF96], [ZIF01] et [MG03] traitent le problème de commande décentralisée pour des systèmes à grande dimension. Le système de grande dimension est composé de sous-systèmes interconnectés. Le problème de commande H_∞ est réduit à un problème de faisabilité BMI. La BMI est résolue en utilisant un algorithme basé sur la méthode de l'homotopie. L'idée est donc d'augmenter graduellement l'interconnexion entre les sous-systèmes depuis zéro jusqu'à un gain d'amplitude donnée. Le cas de présence de perturbations polytopiques entre les interconnexions est aussi considéré dans l'article [IZF96]. Cependant, comme on va le revoir plus loin, les auteurs attestent que cette méthode, bien que destinée en théorie aux systèmes de grandes dimensions, présente d'énormes difficultés de programmation et de calcul numérique, du fait de la présence d'un grand nombre de variables additionnelles, empêchant ainsi la convergence en un temps acceptable.

La méthode d'homotopie, présentée dans l'article [HHB99] mentionné plus haut, consiste à utiliser une perturbation du premier ordre pour linéariser le problème BMI et calculer ensuite, à partir d'un correcteur initial, un correcteur amélioré d'itération en itération, en résolvant au passage des SDPs. Toutefois, les auteurs soulignent ici encore l'importance du choix du point initial.

Nous avons essayé, dans un premier temps, d'utiliser cette approche, étant donné ses avantages, tout en ayant rencontré des difficultés numériques liées à la convergence. De plus, nous avons confirmé la sensibilité très forte de cette méthode au choix du point initial. Un organigramme inspiré de l'algorithme d'homotopie de l'article [ZIF01] est donné ci-dessous.

SYSTEMES LTI A N SOUS-SYSTEMES INTERCONNECTES

Considérons un système LTI, à N interconnexions, décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1 w + \sum_{i=1}^N B_{2i} u_i, \\ z &= C_1 x + D_{11} w + \sum_{i=1}^N D_{12i} u_i, \\ y_i &= C_{2i} x + D_{2i} w, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{3.67}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système, $w \in \mathbb{R}^r$ l'entrée de perturbation, $z \in \mathbb{R}^p$ la sortie à minimiser, et $u_i \in \mathbb{R}^{m_i}$ et $y_i \in \mathbb{R}^{q_i}$ respectivement l'entrée de commande et la sortie mesurée du sous-système i ($i = 1, \dots, N$). Toutes les matrices sont constantes et de dimensions appropriées.

Pour le système (3.67), considérons le correcteur de retour de sortie décentralisé suivant :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}_i &= \hat{A}_i \hat{x}_i + \hat{B}_i y_i, \\ u_i &= \hat{C}_i \hat{x}_i + \hat{D}_i y_i, \quad i = 1, \dots, N, \end{aligned} \tag{3.68}$$

où $\hat{x}_i \in \mathbb{R}^{\hat{n}_i}$ est l'état du $i^{\text{ème}}$ correcteur, \hat{n}_i est une dimension imposée au correcteur à synthétiser et les matrices $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i$, $i = 1, \dots, N$, sont constantes et de dimensions appropriées. Par $T_{zw}(s)$ on dénote la matrice de transfert de w vers z résultant de l'application du correcteur décentralisé (3.68) au système (3.67). Le problème de commande H_∞ est énoncé comme suit :

PROBLEME DE COMMANDE H_∞ DECENTRALISEE

Pour un niveau d'atténuation de perturbations spécifié $\gamma > 0$, on veut synthétiser un correcteur décentralisé (3.68) pour le système (3.67), tel que le système global résultant en boucle fermée soit

stable et vérifie $\|T_{zw}(s)\|_\infty < \gamma$.

On suppose au début que, pour le même système (3.67), il existe un correcteur H_∞ centralisé qui le stabilise et qui atteint le même niveau d'atténuation de perturbation. La dimension de ce correcteur centralisé est égale ou supérieure à $\sum_{i=1}^N \hat{n}_i$. Cette supposition est raisonnable car, de manière générale, les correcteurs décentralisés ne peuvent pas atteindre de meilleures performances que les correcteurs centralisés. Ce correcteur centralisé sera considéré comme le point initial de l'algorithme d'homotopie détaillé plus loin.

CONDITION D'EXISTENCE D'UN CORRECTEUR DECENTRALISE H_∞

Le système en boucle fermée, obtenu en appliquant un correcteur global composé des correcteurs locaux (3.68) au système (3.67), est décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \left(A + \sum_{i=1}^N B_{2i} \hat{D}_i C_{2i} \right) x + \sum_{i=1}^N B_{2i} \hat{C}_i \hat{x}_i + \left(B_1 + \sum_{i=1}^N B_{2i} \hat{D}_i D_{21i} \right) w, \\ \dot{\hat{x}}_i &= \hat{B}_i C_{2i} x + \hat{A}_i \hat{x}_i + \hat{B}_i D_{21i} w, \quad i = 1, 2, \dots, N, \\ z &= \left(C_1 + \sum_{i=1}^N D_{12i} \hat{D}_i C_{2i} \right) x + \sum_{i=1}^N D_{12i} \hat{C}_i \hat{x}_i + \left(D_{11} + \sum_{i=1}^N D_{12i} \hat{D}_i D_{21i} \right) w. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Pour simplifier l'écriture on regroupera les états \hat{x}_i du correcteur et les coefficients des matrices $\hat{A}_i, \hat{B}_i, \hat{C}_i, \hat{D}_i$ comme suit :

$$\begin{aligned} \hat{x} &= [\hat{x}_1^T \quad \hat{x}_2^T \quad \dots \quad \hat{x}_N^T]^T, \\ \hat{A}_D &= \text{diag} \{ \hat{A}_1, \hat{A}_2, \dots, \hat{A}_N \}, \\ \hat{B}_D &= \text{diag} \{ \hat{B}_1, \hat{B}_2, \dots, \hat{B}_N \}, \\ \hat{C}_D &= \text{diag} \{ \hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots, \hat{C}_N \}, \\ \hat{D}_D &= \text{diag} \{ \hat{D}_1, \hat{D}_2, \dots, \hat{D}_N \}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Définissons en outre les matrices :

$$\begin{aligned} B_2 &= [B_{21} \quad B_{22} \quad \dots \quad B_{2N}], \\ C_2 &= [C_{21}^T \quad C_{22}^T \quad \dots \quad C_{2N}^T]^T, \\ D_{12} &= [D_{121} \quad D_{122} \quad \dots \quad D_{12N}], \\ D_{21} &= [D_{211}^T \quad D_{212}^T \quad \dots \quad D_{21N}^T]^T. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Le système bouclé (3.69) est alors décrit par la représentation d'état suivante :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + B_2 \hat{D}_D C_2) x + B_2 \hat{C}_D \hat{x} + (B_1 + B_2 \hat{D}_D D_{21}) w, \\ \dot{\hat{x}} &= \hat{B}_D C_2 x + \hat{A}_D \hat{x} + \hat{B}_D D_{21} w, \\ z &= (C_1 + D_{12} \hat{D}_D C_2) x + D_{12} \hat{C}_D \hat{x} + (D_{11} + D_{12} \hat{D}_D D_{21}) w. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Regroupons les matrices $\hat{A}_D, \hat{B}_D, \hat{C}_D$ et \hat{D}_D en une seule matrice

$$G_D = \begin{bmatrix} \hat{A}_D & \hat{B}_D \\ \hat{C}_D & \hat{D}_D \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

et introduisons les notations :

$$\begin{bmatrix} \tilde{A} & \tilde{B}_1 & \tilde{B}_2 \\ \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{11} & \tilde{D}_{12} \\ \tilde{C}_2 & \tilde{D}_{21} & \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc|c} A & 0_{n \times \hat{n}} & B_1 & 0_{n \times \hat{n}} & B_2 \\ 0_{\hat{n} \times n} & 0_{\hat{n} \times \hat{n}} & 0_{\hat{n} \times r} & I_{\hat{n}} & 0_{\hat{n} \times m} \\ \hline C_1 & 0_{p \times \hat{n}} & D_{11} & 0_{p \times \hat{n}} & D_{12} \\ \hline 0_{\hat{n} \times n} & I_{\hat{n}} & 0_{\hat{n} \times r} & & \\ C_2 & 0_{q \times \hat{n}} & D_{21} & & \end{array} \right], \quad (3.74)$$

$$\text{où } \hat{n} = \sum_{i=1}^N \hat{n}_i, \quad m = \sum_{i=1}^N m_i, \quad q = \sum_{i=1}^N q_i.$$

Le système bouclé (3.72) se réécrit sous forme plus compacte :

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}} &= (\tilde{A} + \tilde{B}_2 G_D \tilde{C}_2) \tilde{x} + (\tilde{B}_1 + \tilde{B}_2 G_D \tilde{D}_{21}) w \\ z &= (\tilde{C}_1 + \tilde{D}_{12} G_D \tilde{C}_2) \tilde{x} + (\tilde{D}_{11} + \tilde{D}_{12} G_D \tilde{D}_{21}) w, \end{aligned} \quad (3.75)$$

où $\tilde{x} = \begin{bmatrix} x^T & \hat{x}^T \end{bmatrix}^T$. Dans cette description (3.75), seuls les coefficients de la matrice du correcteur décentralisé G_D sont inconnus, tandis que les autres paramètres sont donnés par le système initial (3.67). De plus, la dimension spécifique du correcteur local est définie pour chaque sous-système i .

Pour appliquer le lemme borné réel (BRL) au système (3.75), on définit :

$$\begin{aligned} F(G, \tilde{X}) &= \begin{bmatrix} \tilde{A}^T \tilde{X} + \tilde{X} \tilde{A} & \tilde{X} \tilde{B}_1 & \tilde{C}_1^T \\ \tilde{B}_1^T \tilde{X} & -\gamma I_r & \tilde{D}_{11}^T \\ \tilde{C}_1 & \tilde{D}_{11} & -\gamma I_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{X} \tilde{B}_2 \\ 0_{r \times (m+\hat{n})} \\ \tilde{D}_{12} \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & \tilde{D}_{21} & 0_{(q+\hat{n}) \times p} \end{bmatrix} \\ &+ \left\{ \begin{bmatrix} \tilde{X} \tilde{B}_2 \\ 0_{r \times (m+\hat{n})} \\ \tilde{D}_{12} \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} \tilde{C}_2 & \tilde{D}_{21} & 0_{(q+\hat{n}) \times p} \end{bmatrix} \right\}^T. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Théorème 3.2.1 [ZIF01]

Le système (3.67) est stabilisable avec un niveau d'atténuation γ via un correcteur décentralisé composé de correcteurs locaux (3.68) de dimensions \hat{n}_i si et seulement si il existe une matrice G_D (cf. (3.73)) et une matrice définie positive \tilde{X} telles que :

$$F(G_D, \tilde{X}) < 0. \quad (3.77)$$

La difficulté de résolution de l'inégalité (3.77) ne réside pas seulement dans le fait qu'elle est bilinéaire mais surtout dans la structure particulière de la matrice G_D . Dans la prochaine section nous

détaillerons l'algorithme d'homotopie [ZIF01] que nous avons programmé, dans le cadre de ce travail, dans l'environnement Matlab[®] pour résoudre ce problème.

ALGORITHME D'HOMOTOPIE

On constate que la BMI (3.77) peut être traitée comme une double LMI. Effectivement, si G_D est fixé, trouver \tilde{X} qui satisfait (3.77) devient une LMI de faisabilité, pour laquelle des algorithmes de point intérieur existent. La même chose est vraie si on fixe \tilde{X} . Cependant, même si la BMI est faisable à l'origine, cela n'empêchera pas de pouvoir trouver des LMIs en G_D ou \tilde{X} qui ne soient pas faisables. Ceci est dû au choix non approprié de \tilde{X} , respectivement de G_D . Le problème est alors de trouver G_D ou \tilde{X} appropriés qui réduisent la BMI à une LMI faisable. C'est dans cette optique que la méthode d'homotopie est proposée. Introduisons un nombre réel λ , variant de 0 à 1, et considérons la fonction matricielle :

$$H(G_D, \tilde{X}, \lambda) = F((1-\lambda)G_F + \lambda G_D, \tilde{X}), \quad (3.78)$$

où

$$G_F = \begin{bmatrix} A_F & B_F \\ C_F & D_F \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

est une matrice constante, de même dimension que G_D , et composée des coefficients des matrices A_F, B_F, C_F, D_F du correcteur H_∞ centralisé de dimension \hat{n} et assurant le niveau d'atténuation γ . Le terme $(1-\lambda)G_F + \lambda G_D$ dans (3.78) définit une interpolation entre le correcteur centralisé G_F , calculé par une méthode de synthèse standard, et le correcteur décentralisé désiré G_D . A titre d'exemple :

$$H(G_D, \tilde{X}, \lambda) = \begin{cases} F(G_F, \tilde{X}), & \text{si } \lambda = 0, \\ F(G_D, \tilde{X}), & \text{si } \lambda = 1. \end{cases} \quad (3.80)$$

Le problème de la recherche d'une solution pour (3.77) est donc inclus dans la famille des problèmes

$$H(G_D, \tilde{X}, \lambda) < 0, \quad \lambda \in [0, 1]. \quad (3.81)$$

Le point initial G_{D_0} est choisi arbitrairement égal à zéro.

Notre problème consiste maintenant à trouver le chemin pour aller de (G_{D_0}, \tilde{X}_0) , au point $\lambda = 0$, à (G_D, \tilde{X}) , au point $\lambda = 1$. Pour cela, considérons un entier M positif et prenons $(M+1)$ points $\lambda_k = k/M$, $k = 0, 1, \dots, M$, dans l'intervalle $[0, 1]$ pour engendrer une famille de problèmes :

$$H(G_D, \tilde{X}, \lambda_k) < 0, \quad k = 0, 1, \dots, M. \quad (3.82)$$

Si le problème au point k est faisable, on notera la solution obtenue (G_{D_k}, \tilde{X}_k) . On calculera ensuite la solution $(G_{D_{(k+1)}}, \tilde{X}_{k+1})$ de $H(G_D, \tilde{X}, \lambda_{k+1}) < 0$ en résolvant cette inégalité matricielle comme une LMI avec l'une des deux variables fixée, $G_D = G_{D_k}$ ou $\tilde{X} = \tilde{X}_k$. Si les problèmes de la famille (3.82) sont tous faisables, la solution pour la BMI (3.77) est obtenue au point $k = M$ correspondant à $\lambda = 1$.

Si ce n'est pas le cas, c'est-à-dire si $H(G_D, \tilde{X}_k, \lambda_{k+1}) < 0$ n'est pas faisable pour une valeur de k donnée, après qu'ait été fixé $G_D = G_{Dk}$ ou $\tilde{X} = \tilde{X}_k$, nous considérerons davantage de points dans l'intervalle $[\lambda_k, 1]$ en augmentant le nombre M . La procédure sera alors répétée à partir de la solution (G_{Dk}, \tilde{X}_k) au point $\lambda = \lambda_k$. Cette idée est illustrée par l'ordinogramme de la Figure 3.2-1 pour le calcul d'un correcteur décentralisé H_∞ .

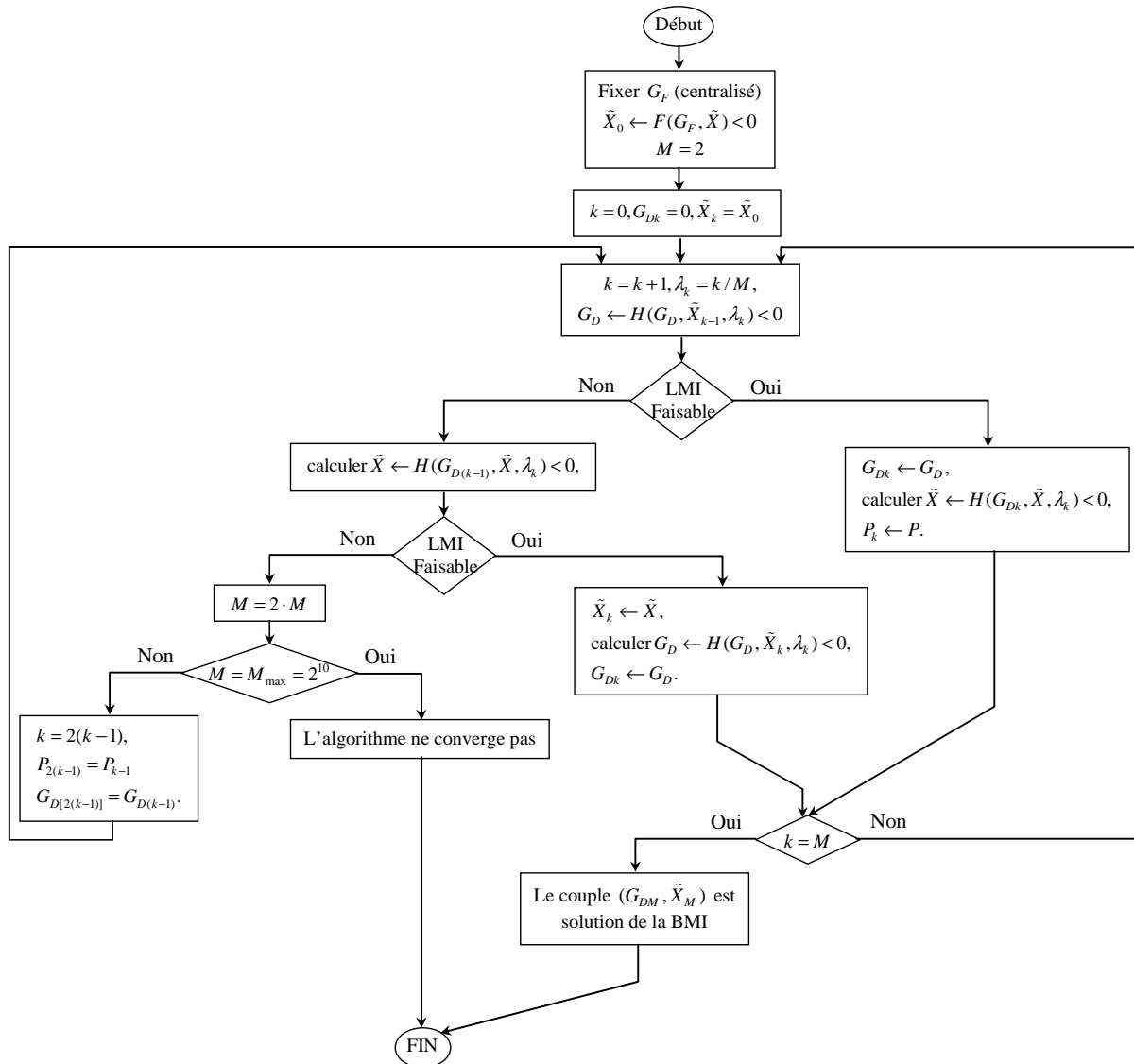


Figure 3.2-1. Ordinogramme de l'algorithme d'homotopie

EXEMPLE D'APPLICATION

L'algorithme d'homotopie a été programmé par nos soins à l'aide de l'ordinogramme précédent. Il a ensuite été appliqué à l'exemple publié dans [ZIF01] pour vérifier que l'on retrouve les résultats donnés dans cet article.

Cet exemple considère un système (3.67) de dimension 2×2 dont les matrices sont définies ci-dessous :

$$A = \begin{bmatrix} 1,0 & -1,0 & -2,2 & -1,0 & 2,0 & 2,0 & 0,2 & -2,0 \\ 2,1 & -5,1 & -1,2 & 0,0 & 1,1 & 1,0 & 0,1 & -0,7 \\ 2,1 & -1,0 & -3,2 & -0,9 & 2,0 & 2,0 & 0,2 & -2,0 \\ 8,3 & -10,4 & -7,4 & -1,0 & 7,4 & 7,0 & 0,1 & -6,5 \\ 2,2 & -4,0 & -1,3 & 0,0 & 0,2 & 1,1 & 0,1 & 0,2 \\ -2,2 & 7,8 & 3,2 & 0,3 & -7,2 & -2,3 & -0,9 & 1,3 \\ 2,4 & 5,1 & -0,2 & -0,9 & -4,0 & 2,0 & -2,8 & -2,0 \\ -1,2 & 6,0 & 2,2 & 0,2 & -6,2 & -0,2 & -1,0 & 0,2 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{21} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C_{21} = [1 \ 0 \ -1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ -1], \quad C_{22} = [-2 \ 1 \ 3 \ 0 \ -1 \ 0 \ -1 \ 4], \quad D_{11} = 0_{4 \times 4},$$

$$D_{121} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{122} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{211} = [0 \ 1 \ 0 \ 0], \quad D_{212} = [0 \ 0 \ -1 \ 0].$$

Pour ce système les auteurs proposent un correcteur centralisé qui assure un niveau d'atténuation H_∞ de perturbation minimal égal à $\gamma_{initial} = 2,23$. Le correcteur centralisé proposé est donné par l'équation (3.86).

Construisons alors un correcteur H_∞ décentralisé composé de deux correcteurs locaux (3.68) de dimensions $\hat{n}_1 = 2$ et $\hat{n}_2 = 3$. Notons que la dimension totale du correcteur décentralisé vaut $\hat{n}_1 + \hat{n}_2 = 5$ qui est inférieure à la dimension globale du système $n = 8$. Dans ce but, il faut adapter le problème de décentralisation en y ajoutant une contrainte d'ordre, en plus de la contrainte de structure. En effet, l'algorithme présenté dans le paragraphe précédent est applicable lorsque le correcteur centralisé est d'ordre égal à la dimension globale du correcteur décentralisé désiré, soit $\hat{n} = \sum_{i=1}^N \hat{n}_i$.

Cependant, il n'est pas facile de calculer un tel correcteur H_∞ centralisé dans le cas où $\hat{n} < n$ (synthèse d'un correcteur d'ordre réduit fixé). Dans cette section on a prévu d'utiliser un correcteur H_∞ centralisé d'ordre n , qui est facile à calculer, pour obtenir un correcteur H_∞ décentralisé de dimension $\hat{n} < n$. Ceci est possible en augmentant la matrice G_D comme suit :

$$\hat{G}_D = \left[\begin{array}{cc|cc} \hat{A}_D & 0_{\hat{n} \times \ell} & \hat{B}_D & \\ * & -I_\ell & ** & \\ \hline \hat{C}_D & 0_{m \times \ell} & \hat{D}_D & \end{array} \right], \quad (3.83)$$

où $\ell = n - \hat{n}$, les notations $*, **$ sont des sous-matrices quelconques, qu'on a prises nulles, et les matrices $\hat{A}_D, \hat{B}_D, \hat{C}_D, \hat{D}_D$ sont les mêmes que celles définies en (3.70). Notons que le correcteur défini par \hat{G}_D dans (3.83) est équivalent à G_D de (3.73) si nous extrayons leurs parties observables et commandables.

De la même façon que dans (3.78), nous considérons une fonction matricielle :

$$\hat{H}(\hat{G}_D, \tilde{P}, \lambda) = \hat{F}((1 - \lambda)\hat{G}_F + \lambda\hat{G}_D, \tilde{P}), \quad (3.84)$$

où \hat{F} est définie comme F donné par (3.76) avec les matrices définies par (3.74) et (3.79), \hat{n} étant remplacé par n . Après cela, on pourra appliquer l'algorithme de la section précédente en utilisant pour \hat{G}_F un correcteur centralisé H_∞ standard (Riccati ou LMI). Dans ce cas, on affecte la valeur 0 à \hat{G}_D au point $\lambda = 0$, excepté le bloc $-I_\ell$ de (3.83). Si l'algorithme réussit à converger, les matrices $\hat{A}_D, \hat{B}_D, \hat{C}_D, \hat{D}_D$ tirées de \hat{G}_D obtenu au point $\lambda = 1$ correspondent au correcteur H_∞ décentralisé.

On peut à présent appliquer l'algorithme de la section précédente à l'exemple. Le problème revient alors à résoudre la BMI :

$$\hat{H}(\hat{G}_D, \tilde{P}, \lambda) < 0 \quad (3.85)$$

définie par (3.84) et la matrice \hat{G}_D de (3.83). La matrice \hat{G}_F dans (3.84) est créée aléatoirement dans l'ensemble paramétrique constitué par huit sommets de correcteurs centralisés H_∞ , calculés en utilisant le résultat de [SLC89], pour donner enfin :

$$\hat{G}_F = \begin{bmatrix} -2,56 & -0,26 & -0,66 & -0,56 & -0,46 & -0,94 & 0,07 & 0,81 & | & 0,54 & -0,11 \\ 0,05 & -1,92 & -0,94 & -0,70 & -0,23 & -1,09 & -0,89 & 0,72 & | & 1,16 & 0,36 \\ -0,04 & -2,55 & -9,99 & -3,90 & -5,97 & -7,10 & 5,34 & 7,57 & | & 3,60 & 2,20 \\ -0,33 & 1,28 & 2,59 & 0,91 & 3,83 & 4,43 & -3,65 & -4,48 & | & -2,82 & -0,78 \\ 0,32 & -0,67 & -2,05 & -1,96 & -2,62 & -0,63 & 0,63 & 0,70 & | & 1,03 & 0,40 \\ -0,34 & 0,38 & -1,22 & -1,30 & -0,67 & -2,99 & -1,02 & 2,61 & | & -2,09 & 0,32 \\ -0,18 & 0,08 & -0,76 & -0,83 & -1,09 & 0,00 & -2,40 & 1,17 & | & -1,03 & 0,23 \\ -0,12 & 0,60 & 1,58 & 1,43 & 0,94 & 1,53 & -2,02 & -3,76 & | & -0,77 & -0,46 \\ -0,89 & -2,02 & 0,01 & -0,63 & 0,55 & -0,77 & -2,08 & 0,15 & | & 0,30 & 0,12 \\ -0,13 & -1,36 & -4,18 & -2,40 & -3,00 & -4,20 & 2,84 & 4,34 & | & 1,74 & 0,93 \end{bmatrix}. \quad (3.86)$$

Les auteurs de l'article [ZIF01] utilisent pour la résolution de leur algorithme d'homotopie le logiciel « *LMI Control Toolbox*® » de Matlab®. En utilisant les données précisées plus haut, ils obtiennent avec $M = 128$ une convergence de leur algorithme donnant ainsi le correcteur décentralisé H_∞ décrit par les matrices :

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} 0,17 & -0,47 \\ 2,45 & -1,71 \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} 0,54 \\ 1,84 \end{bmatrix}, \quad \hat{C}_1 = [3,75 \quad -1,91], \quad \hat{D}_1 = 1,48. \quad (3.87)$$

$$\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} 2,37 & -11,78 & -16,81 \\ 2,72 & -3,58 & -3,63 \\ 0,96 & -5,44 & -9,13 \end{bmatrix}, \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} 0,36 \\ 0,12 \\ 0,10 \end{bmatrix}, \hat{C}_2 = [-1,61 \quad -0,12 \quad 0,96], \hat{D}_2 = -0,01. \quad (3.88)$$

La norme H_∞ de la boucle fermée obtenue à l'aide ce correcteur, norme que nous désignerons par γ_{ikeda} en référence à l'un des auteurs, Ikeda, de l'article [ZIF01], est $\gamma_{ikeda} = 2,373$.

Nous avons reprogrammé l'algorithme d'homotopie de la section précédente en utilisant l'interface Yalmip[®] de programmation sous Matlab[®], et comme solveur SeDuMi[®] (Version 1.05R5) sous Matlab[®] également. Il est à noter que les auteurs ont utilisé une contrainte sur la norme H_∞ en boucle fermée, chose que nous n'avons pas pu faire à cause de la difficulté de convergence. Ceci dit, toutes les autres contraintes sur l'ordre et la structure du correcteur ont été respectées. Nous avons obtenu une convergence pour M petit ($M = 2$) en un temps $t_{convergence} = 15$ s sur un processeur Pentium IV à 2.4 GHz. Le correcteur H_∞ décentralisé obtenu vaut :

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} -3,6461 & -0,9019 \\ 1,5228 & -0,8910 \end{bmatrix}, \hat{B}_1 = \begin{bmatrix} 0,8955 \\ 0,9371 \end{bmatrix}, \hat{C}_1 = [1,2838 \quad -0,9019], \hat{D}_1 = 0,4201. \quad (3.89)$$

$$\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} -1,4175 & 1,2646 & 1,2494 \\ -0,2127 & -4,3459 & -2,1638 \\ -0,3548 & -1,8577 & -3,0936 \end{bmatrix}, \hat{B}_2 = \begin{bmatrix} -0,0319 \\ -0,0173 \\ -0,0337 \end{bmatrix}, \hat{C}_2 = [-0,5046 \quad 0,2901 \quad 0,5725], \\ \hat{D}_2 = -0,0949. \quad (3.90)$$

La norme H_∞ de la nouvelle boucle fermée issue de ce nouveau correcteur décentralisé est $\gamma_{nouveau} = 3,0912$. Le fait que $\gamma_{nouveau} > \gamma_{ikeda}$ résulte de ce que nous n'avons imposé aucune contrainte sur la norme H_∞ de la boucle fermée, contrairement aux travaux exposés dans [ZIF01].

Une comparaison entre les valeurs singulières des boucles fermées issues du correcteur décentralisé décrit par (3.87), (3.88), et du correcteur décentralisé décrit par (3.89), (3.90), est donnée ci-dessous.

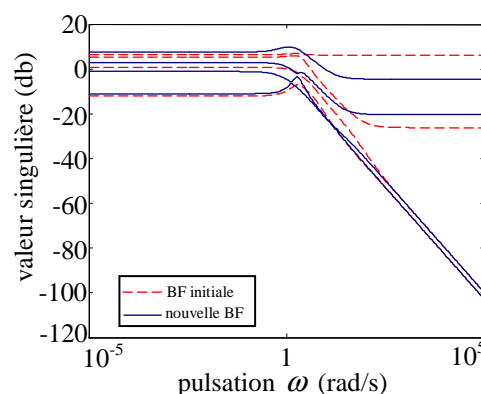


Figure 3.2-2. Valeurs singulières en boucle fermée : comparaison entre le correcteur centralisé et le nouveau correcteur décentralisé

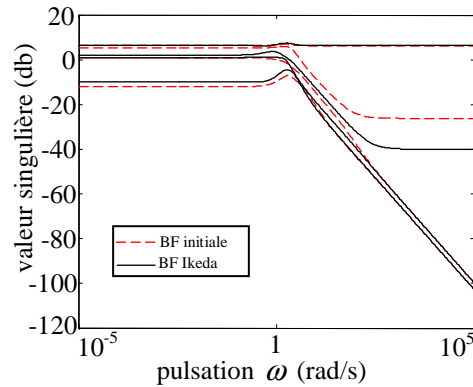


Figure 3.2-3. Valeurs singulières en boucle fermée : comparaison entre le correcteur centralisé et le correcteur Ikeda

Comme attendu, on remarque sur la Figure 3.2-2 et sur la Figure 3.2-3. que le correcteur décentralisé synthétisé par notre logiciel assure des performances très proches de celles obtenues par le correcteur décentralisé synthétisé par les auteurs de [ZIF01]. En outre, nous remarquons que ces performances restent proches de celles obtenues par le correcteur centralisé initial.

APPLICATION SUR UN SYSTEME D'ENROULEMENT A TROIS MOTEURS

Le but est de synthétiser un correcteur décentralisé par blocs, à structure et ordre fixes. Pour cela, il faut résoudre le problème d'optimisation BMI qui est non convexe. Pour le résoudre on a opté pour la méthode d'homotopie décrite au début de cette section. Malheureusement, nous avons eu beaucoup de difficultés à obtenir une solution, le problème restant souvent infaisable, et ce malgré le choix de plusieurs correcteurs centralisés comme point de départ.

Ceci montre combien la résolution de problèmes d'optimisation non convexe par la méthode d'homotopie est dépendante du point initial.

3.2.2. Principes de bases pour la synthèse BMI de correcteurs par retour d'état

Ce paragraphe concerne la recherche de correcteurs par retour d'état

$$u = -Kx, \quad (3.91)$$

minimisant une norme H_∞ . On suposera tout d'abord que toutes les variables d'état du système étudié sont mesurables.

Nous nous limiterons dans ce chapitre à expliquer les détails de la méthode relatifs à la synthèse de ce type de correcteurs pour les systèmes à faible nombre d'actionneurs, dans notre cas ne comportant pas plus de trois moteurs. On pourra envisager aussi que ces systèmes puissent être des sous-systèmes de petite taille d'un plus grand système.

Soient A , B et C les matrices d'évolution, d'entrée et de sortie, respectivement, représentant le modèle à trois moteurs ou l'un des sous-systèmes, considérés chacun séparément, dans le cas d'un système à neuf moteurs, par exemple.

Deux buts sont à satisfaire, le premier étant d'imposer une limite supérieure à la partie réelle du pôle le plus lent, et le deuxième étant d'imposer une borne supérieure aux gains des retours de rétroaction du correcteur statique K . Ce dernier, devra donc satisfaire la BMI suivante [HHB99] :

tester l'existence de K tel que :

$$\begin{aligned} |K_{ij}| &\leq K_{ij,\max} \\ (A - BK)^T P + P(A - BK) &< -2\alpha P \\ P &> 0, \end{aligned} \quad (3.92)$$

La limitation du gain du correcteur est directement liée à la limitation d'énergie des actionneurs à l'entrée du système. La partie réelle α délimite la région d' α -stabilité des pôles de la boucle fermée, et est encore désignée en anglais de « *decay rate* ».

La synthèse proposée devra satisfaire une deuxième contrainte : la loi de commande devra être calculée de façon à minimiser le gain L_2 de u vers y , c'est-à-dire à assurer que la norme H_∞ de la matrice de transfert en boucle fermée soit inférieure ou égale à γ .

Du lemme borné réel (BRL) [BGF+94], cette nouvelle contrainte pourra être formulée par la BMI :

min γ , tel que :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} (A - BK)^T P + P(A - BK) + C^T C & PB \\ B^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} &< 0 \\ P &> 0. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Le correcteur K est ensuite calculé en résolvant simultanément les deux BMIs (3.92) et (3.93).

Dans [HHB99], la BMI (3.92) est appliquée pour la stabilisation simultanée par le même correcteur K de trois systèmes différents. Les auteurs de cet article utilisent la méthode d'homotopie pour la résolution de la BMI. Notre expérience a montré que, bien que cette méthode de résolution donne de bonnes performances en termes de résultat et de temps de calcul dans le cas de système académiques simples, donc de petites dimensions, elle n'est toutefois pas applicable sur des systèmes de moyenne dimension, tels que notre banc d'enroulement à trois moteurs, ou des systèmes de grande dimension.

Dans notre cas, le correcteur K est calculé en une seule étape, en utilisant le logiciel commercial de résolution de BMIs « Penbmi[®] » de Tomlab[®]. Ce logiciel (acquis durant la deuxième moitié de ce travail de thèse) est bien adapté pour la résolution des problèmes d'optimisation sous Matlab[®], et plus particulièrement pour les systèmes de grande dimension et les systèmes linéaires incertains avec des contraintes linéaires.

Il est important de signaler que la résolution du problème BMI décrit par les deux inégalités (3.92) et (3.93) nécessite une valeur d'initialisation. Nous avons choisi pour cela un correcteur LQ simple, garantissant la stabilité du système.

Pour une meilleure clarté et facilité de programmation, nous avons fait appel également au logiciel d'interface de programmation Yalmip[®], sous Matlab[®].

Le gain unitaire de la boucle fermée est assuré par la matrice de compensation de gain M , qui est égale à l'inverse du gain statique de la boucle fermée :

$$M = [C(BK - A)^{-1}B]^{-1}. \quad (3.94)$$

La structure de commande à appliquer à un système d'enroulement de petite ou de moyenne

dimension et comportant un correcteur centralisé est illustrée sur la Figure 3.2-4.

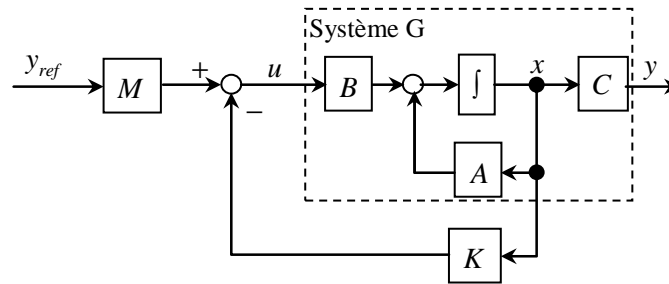


Figure 3.2-4. Structure de commande par retour d'état

3.2.3. Commande par retour d'état avec action intégrale complète

Une alternative à l'utilisation de la matrice de compensation de gain M pour l'obtention d'un gain statique unité consiste à introduire un ou plusieurs intégrateurs à la boucle de retour de sortie. Ceci est très important dans le cas d'un système non linéaire. Le nouveau correcteur à synthétiser se compose donc de deux parties, K_1 et K_2 , comme illustré sur la Figure 3.2-5.

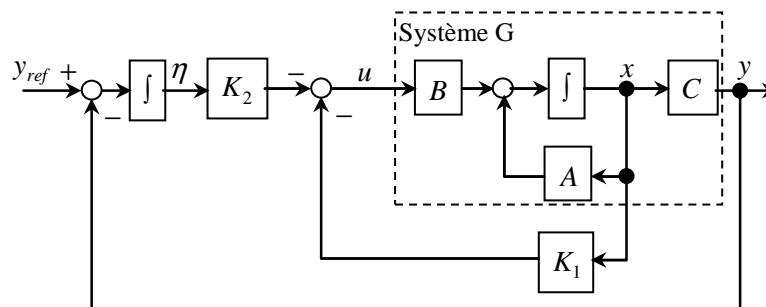


Figure 3.2-5. Commande par retour d'état avec action intégrale

Les matrices de retour du correcteur, K_1 et K_2 , peuvent être calculées, entre autres méthodes, par la synthèse d'une commande optimale LQ ([AM90], [ZDG95]). Cependant, notre désir de limiter les gains de retours et d'assigner les pôles de la boucle fermée dans une région donnée rend le problème non convexe ([KH00], [PA01], [AP02]). La commande par retour d'état avec action intégrale est une méthode assez connue dans la théorie de commande, mais son utilisation avec la synthèse BMI du retour d'état est nouvelle à notre connaissance.

La boucle fermée est donc modifiée par l'addition de cette action intégrale, mono- ou multivariable. La nouvelle représentation d'état de la boucle fermée aura la forme :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A - BK_1 & -BK_2 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} y_{ref}, \\ y &= [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ \eta \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Rappelons que le but est de calculer un retour d'état linéaire avec action intégrale sur les retours de sortie, afin d'assurer une erreur statique nulle tout en contraignant les gains de retour et la région des pôles de la boucle fermée. Pour ce faire, les deux BMIs (3.92) et (3.93) seront réutilisées et appliquées cette fois non plus au système A, B, C , mais au système augmenté $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ suivant :

$$\begin{aligned}\tilde{A} &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{C} &= [C \quad 0], \quad \tilde{K} = [K_1 \quad K_2].\end{aligned}\tag{3.96}$$

Le problème revient cette fois à calculer le correcteur $\tilde{K} = [K_1 \quad K_2]$, qui comprend à la fois le retour d'état et celui en provenance des variables d'état supplémentaires, les actions intégrales.

L'avantage d'une telle mise en équation du problème, par comparaison avec la synthèse LQ, est que les deux parties K_1 et K_2 sont calculées en une seule étape au lieu de deux. Comme on l'a dit précédemment, la résolution des deux nouvelles BMIs modifiées est connue pour être NP-difficile. Initialement ce problème a été résolu en utilisant la méthode de suivi de chemin [HHB99] pour le cas du retour d'état sans action intégrale. Dans le cas présent, ce problème a été résolu à l'aide du logiciel Penbmi[®] de Tomlab[®].

3.2.4. Comparaison des retours d'état synthétisés par BMI sur le banc à trois moteurs

Des simulations ont été réalisées sur le modèle non linéaire à trois moteurs, avec comme objectif l'évaluation des performances données par les deux approches de commande exposées plus haut.

Les correcteurs par retour d'état, avec et sans actions intégrales, synthétisés à l'aide de l'optimisation BMI, sont comparés ici. Dans la Figure 3.2-6 sont montrées les réponses temporelles de la tension de bande dérouleur et de la vitesse linéaire de bande, avec et sans action intégrale.

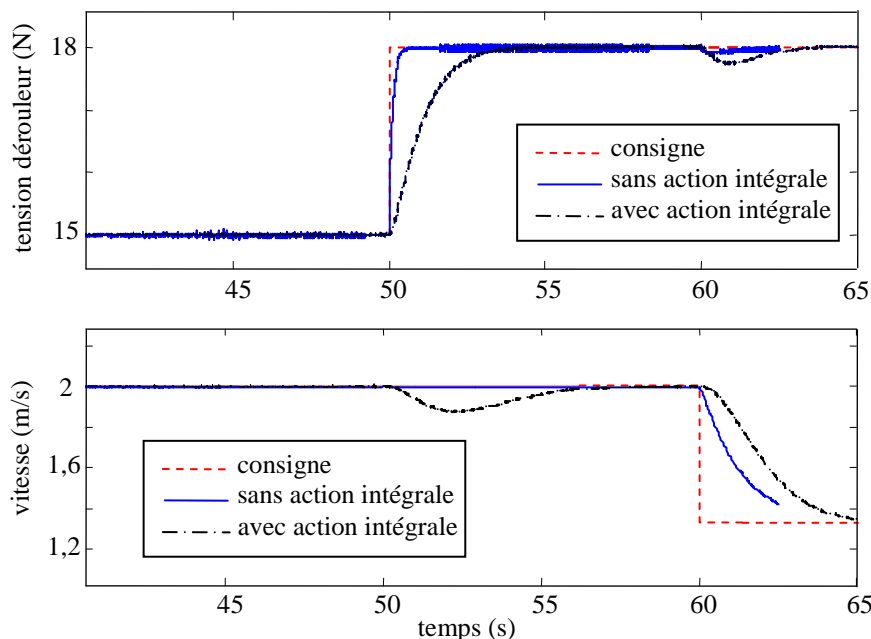


Figure 3.2-6. Commande par retour d'état avec et sans action intégrale

On rappelle que, dans le cas du retour d'état sans action intégrale, c'est la matrice de compensation de gain calculée *a posteriori* qui se charge de l'élimination de l'erreur statique. On constate sur la Figure 3.2-6 que l'utilisation de la matrice de compensation comme celle de l'action intégrale fournissent toutes deux d'excellents résultats en termes de rejet quasi-total d'erreur statique, que ce soit sur la vitesse ou sur la tension de bande. Cependant, dans le cas du rajout d'action intégrale, une petite réponse transitoire est observée sur la vitesse lors d'un saut de tension, ou sur la

tension lors d'un saut de vitesse, due très certainement aux pôles ajoutés à la boucle fermée par les intégrateurs. Ce couplage entre tension et vitesse de bande est le résultat de la boucle additionnelle de sortie pour permettre le rajout du terme intégral, en fait trois boucles dans le cas présent où trois intégrateurs ont été rajoutés (voir Figure 3.2-5). La démonstration théorique de ce point sera donnée dans le prochain chapitre.

3.2.5. Problème des états non accessibles

Dans les deux applications décrites précédemment les variables d'état ont été supposées directement accessibles. Dans le cas pratique, celui du banc d'enroulement à trois moteurs dont nous disposons, ceci est vrai pour les vitesses linéaires de V_1 à V_5 , étant donné qu'elles peuvent être déduites directement des vitesses angulaires correspondantes sous l'hypothèse qu'il n'y a pas de glissement entre la bande et les différents rouleaux. Cependant, les tensions de bande, telles que T_d et T_e , sont mesurées par l'intermédiaire de capteurs de force à jauges de contrainte qui donnent seulement la moyenne des deux tensions de bande à gauche et à droite du rouleau concerné. Dans notre cas : $T_d = \frac{T_1 + T_2}{2}$ et $T_e = \frac{T_3 + T_4}{2}$.

Dans le but d'étudier la sensibilité de la réponse indicielle à cet écart par rapport à un retour d'état entièrement mesurable, on a répété les procédures de synthèses précédentes pour notre modèle à trois moteurs en utilisant un vecteur d'état *modifié*,

$$x_F = T_F x, \quad (3.97)$$

pour le calcul du retour d'état. Dans ce nouveau vecteur d'état, chaque valeur inconnue (la valeur réelle) de tension de bande, T_1 et T_2 , respectivement T_3 et T_4 , est remplacée par sa valeur moyenne approximative donnée par le capteur de force correspondant au rouleau auquel il est connecté, à savoir T_d respectivement T_e . Le nouveau vecteur d'état devient donc :

$$x_F = \left(V_1 \quad \frac{T_1 + T_2}{2} \quad V_2 \quad \frac{T_1 + T_2}{2} \quad V_3 \quad \frac{T_3 + T_4}{2} \quad V_4 \quad \frac{T_3 + T_4}{2} \quad V_5 \right), \quad (3.98)$$

par conséquent :

$$T_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.99)$$

On est donc ramené à un cas où toutes les variables d'état sont à nouveau mesurables, structure apparentée à un retour de sortie statique dont le nombre de sorties est égal à celui des variables d'état.

Avec ce choix de x_F (3.98), la matrice T_F (3.99) est carrée, et l'algorithme de minimisation pourra être appliqué avec un correcteur initial synthétisé facilement par une autre méthode, par exemple un

correcteur LQ. Pour des raisons de simplicité, nous considérons ici, pour une meilleure illustration du résultat, un retour d'état statique sans aucune action intégrale.

Comme illustré sur la Figure 3.2-7, le système en boucle fermée a maintenant l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = (A - BKT_F)x + BM y_{ref}. \quad (3.100)$$

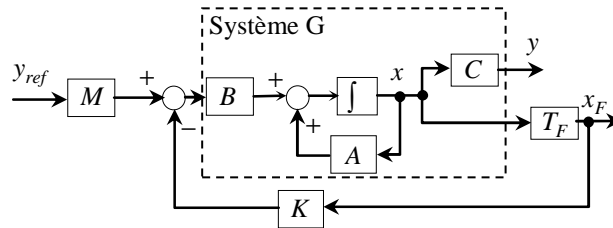


Figure 3.2-7. Synthèse d'un retour d'état modifié

La synthèse du gain de retour K est de nouveau assurée par la résolution des deux BMIs (3.92) et (3.93), qui seront réécrites de la façon suivante :

tester l'existence de K tel que :

$$|K_{ij}| \leq K_{ij, \max} \quad (3.101)$$

$$(A - BKT_F)^T P + P(A - BKT_F) < -2\alpha P$$

$$P > 0,$$

pour la limitation des gains et la délimitation de la région pour les pôles de la boucle fermée, ainsi que :

min γ , tel que :

$$\begin{bmatrix} (A - BKT_F)^T P + P(A - BKT_F) + C^T C & PB \\ B^T P & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.102)$$

$$P > 0,$$

pour la condition H_∞ imposée au correcteur.

De la même manière que dans la section 3.2.2., il est facile de déduire que la matrice de compensation de gain responsable de l'élimination de l'erreur statique est égale à :

$$M = [C(BKT_F - A)^{-1} B]^{-1}. \quad (3.103)$$

Sur la Figure 3.2-8 est illustrée une comparaison entre les résultats de simulation obtenus par le retour d'état initial de la section 3.2.2 et le retour d'état modifié présenté dans cette section. Les deux correcteurs sont appliqués sur le modèle non linéaire de notre banc à trois moteurs avec comme modification principale par rapport aux autres simulations le remplacement des états correspondant aux tensions par leurs valeurs moyennes, tel qu'expliqué précédemment. En d'autres termes, on a modélisé, dans le schéma de simulation, la situation réelle qui se produit dans l'expérimentation pratique, à savoir l'absence de mesures directes des tensions de bandes et leur remplacement par la mesure de tensions moyennes par l'intermédiaire des capteurs de force.

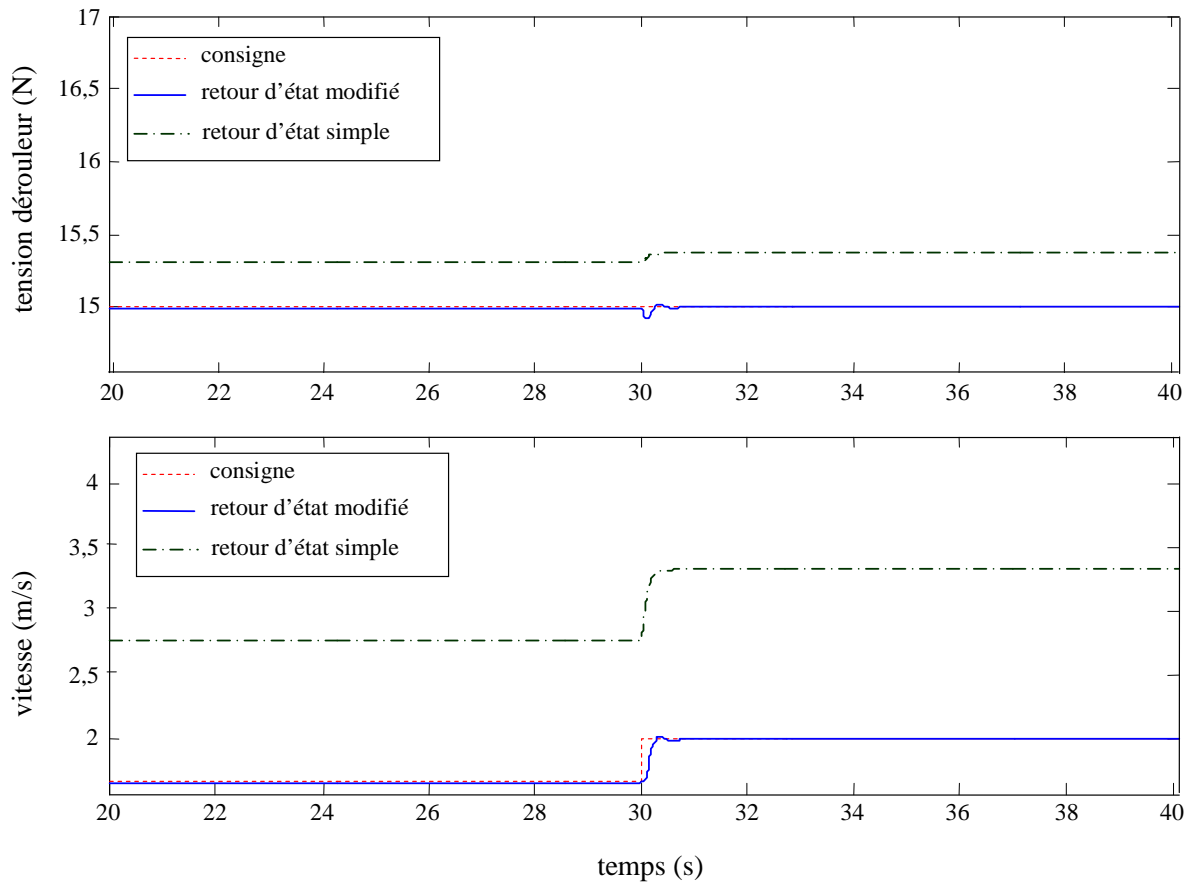


Figure 3.2-8. Comparaison entre le retour d'état classique et modifié

Il apparaît clairement sur cette figure que de meilleurs résultats sont obtenus en termes d'annulation d'erreur statique et de propriétés de poursuite dans le cas de la commande par retour d'état modifié. Ceci était attendu, car on a introduit de cette manière une information plus exacte sur les états du système dans le cas réel.

3.2.5.1. Réflexion sur le problème des états non accessibles

Ainsi, l'hypothèse faite au début de la synthèse du retour d'état, à savoir que les états sont tous mesurables, conduit à une erreur statique importante. Nous allons essayer de formaliser dans ce paragraphe les conséquences de cette hypothèse et de donner quelques perspectives pour poursuivre notre travail. Nous considérerons dans ce but le cas d'un retour d'état statique standard, sans action intégrale. Deux cas sont étudiés ici. Le premier concerne l'évaluation de l'erreur statique lorsqu'on applique un gain de retour calculé avec cette hypothèse erronée au modèle réel. Dans le deuxième, une piste sur l'analyse de stabilité est donnée dans le cas d'une incertitude sur la mesure de la tension moyenne.

➤ Évaluation de l'erreur statique dans le cas d'une erreur sur le gain de retour

Soient (K_F, M_F) et (K_I, M_I) la matrice de gain et la matrice de compensation de gain, calculées respectivement pour le cas du retour d'état plus réaliste, c'est-à-dire le cas où le vecteur d'état x_F est considéré, et pour le cas du retour d'état idéal, respectivement. Rappelons ci-dessous les équations de la boucle fermée dans les deux cas précédents :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK_I)x + BM_I y_{ref}, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (3.104)$$

pour le cas du retour d'état idéal, avec M_I donnée par (3.94) et

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK_F T_F)x + BM_F y_{ref}, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (3.105)$$

dans le deuxième cas, avec M_F donnée par (3.103).

La question qui se pose est celle de l'erreur statique dans le cas réel, c'est-à-dire lorsqu'on utilise (K_I, M_I) à la place de (K_F, M_F) dans (3.105), qui s'écrira de ce fait comme suit :

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BK_I T_F)x + BM_I y_{ref}, \\ y = Cx. \end{cases} \quad (3.106)$$

En régime permanent ($\dot{x} = 0$), la moitié supérieure de (3.106) s'écrit

$$x_\infty = -(A - BK_I T_F)^{-1} BM_I y_{ref}, \quad (3.107)$$

soit

$$y_\infty = -C(A - BK_I T_F)^{-1} BM_I y_{ref}. \quad (3.108)$$

L'erreur statique s'exprime alors par

$$y_{ref} - y_\infty = \left[I - C(BK_I T_F - A)^{-1} BM_I \right] y_{ref}. \quad (3.109)$$

Notons au passage que, dans le cas où (K_I, M_I) sont remplacés par (K_F, M_F) , le second membre de (3.109) s'annule.

▪ *Application numérique*

L'application de l'équation (3.109) permet de calculer l'erreur relative e_r telle que :

$$e_r = \text{diag} \left[I - C(BK_I T_F - A)^{-1} BM_I \right]. \quad (3.110)$$

Nous avons calculé cette erreur pour comparer l'erreur relative commise sur les mesures de tensions de bandes dérouleur T_d et enrouleur T_e et sur la mesure de vitesse du rouleau tracteur V_t (voir Figure 3.2-8.) en appliquant, sur le modèle non linéaire du banc expérimental à trois moteurs, au lieu du retour d'état réaliste (modifié) le retour d'état idéal (celui qui suppose que tous les états sont directement accessibles à la mesure). Après calcul, on obtient le vecteur

$$e_r = \begin{pmatrix} 0,0001 \\ -0,6632 \\ -0,0001 \end{pmatrix} \quad (3.111)$$

des erreurs relatives respectivement sur la tension dérouleur et enrouleur $e_r(T_d) = e_r(T_e) = 0,01\%$, et sur la vitesse $e_r(V_t) = 66,32\%$. On remarque par ailleurs, à partir de la Figure 3.2-8, que ces erreurs relevées sur les mesures à partir du simulateur non linéaire valent :

$$e_{r,\text{exp}} = \begin{pmatrix} e_{r,\text{exp}}(T_d) \\ e_{r,\text{exp}}(V_t) \\ e_{r,\text{exp}}(T_e) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,9\% \\ 40\% \\ 1,9\% \end{pmatrix}. \quad (3.112)$$

On notera alors que, bien qu'il existe une différence notable entre ces deux valeurs, la prévision théorique de l'erreur est du même ordre de grandeur que celle obtenue par la simulation. Cette différence est due au fait que les calculs (3.111) sont obtenus sur la base du modèle linéaire et ne prennent donc pas en compte la non-linéarité du modèle ce qui est au contraire le cas du résultat (3.112) obtenu sur le simulateur non linéaire, comme mentionné plus haut.

Ces calculs ont été réalisés pour le cas du retour d'état plus réaliste (K_F, M_F) et ont confirmé l'annulation de l'erreur relative et donc évidemment de l'erreur absolue en régime permanent.

➤ Analyse de stabilité dans le cas d'une incertitude sur la mesure de la tension moyenne

Cette fois, on suppose que les tensions non mesurées directement ne sont pas exactement égales aux moyennes T_d et T_e , mais qu'elles possèdent une valeur comprise respectivement entre T_1 et T_2 et entre T_3 et T_4 . Si l'on détermine ces valeurs par interpolation linéaire, à savoir

$$T_d = \alpha_d T_1 + (1 - \alpha_d) T_2 \quad \text{et} \quad T_e = \alpha_e T_3 + (1 - \alpha_e) T_4 \quad (3.113)$$

avec $0 \leq \alpha_d \leq 1$ et $0 \leq \alpha_e \leq 1$, la nouvelle matrice de transformation T_R , telle que $x_R = T_R x$, est dans ce cas fonction de α_d et α_e et égale à

$$T_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_d & 0 & (1 - \alpha_d) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_d & 0 & (1 - \alpha_d) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_e & 0 & (1 - \alpha_e) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_e & 0 & (1 - \alpha_e) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.114)$$

En réalité α_d et α_e dépendent de la position géométrique des jauges de contraintes. Sur le banc expérimental à trois moteurs, α_d et α_e sont supposés égaux à 0,5. Cependant leur valeur précise n'est pas connue.

Le système bouclé ayant pour représentation d'état

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - BKT_R)x + BMy_{ref} \\ y = Cx, \end{cases} \quad (3.115)$$

les erreurs statiques peuvent aisément être calculées par (3.109) pour différentes valeurs de α_d et α_e pour en déduire leurs valeurs maximales.

La stabilité en boucle fermée peut, quant à elle, être analysée en traçant le lieu des pôles pour différentes valeurs de α_d et α_e .

Une analyse rigoureuse consiste cependant à mettre le système bouclé (3.115) sous une forme LFT en isolant α_d et α_e , comme indiqué à la Figure 3.2-9, et à faire une μ -analyse.

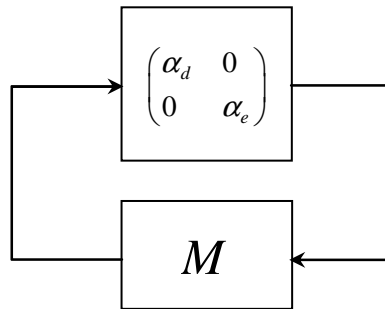


Figure 3.2-9. Représentation LFT du système bouclé (3.115)

La difficulté réside néanmoins dans le calcul de la matrice M . Ce calcul ne peut être réalisé qu'à l'aide d'un logiciel de décomposition en LFT.

3.3. Conclusion du chapitre 3

Ce chapitre fait un rappel des notions de base ainsi que des différents formalismes H_∞ . Ensuite, deux stratégies de commandes H_∞ à $1ddl$ et à $2ddl$ ont été introduites. Dans le but d'éliminer l'erreur statique, des intégrateurs explicites ont été introduits dans la structure du correcteur $2ddl$ et une nouvelle synthèse a été effectuée avec le même cahier des charges que les deux synthèses précédentes. Cette dernière stratégie a montré d'excellents résultats en termes de rapidité de la réponse indicielle, d'élimination presque parfaite de l'erreur statique et de découplage tension-vitesse. Une implantation de la commande à $2ddl$ et de celle à $1ddl$ a été faite sur le banc expérimental à trois moteurs. Les performances des trois correcteurs présentés ont également été comparées et discutées.

Nous avons également présenté une stratégie de commande H_∞ par retour d'état statique avec synthèse par optimisation BMI. L'erreur statique a été éliminée par une matrice de compensation de gain dans le cas de la poursuite de consignes constantes. Une solution alternative a consisté à remplacer cette matrice par une action intégrale sur les mesures du système, afin d'assurer le rejet de perturbations additives constantes. De bonnes performances ont été obtenues par cette dernière stratégie sur le simulateur non linéaire à trois moteurs. De surcroît, un retour d'état plus réaliste a été introduit dans l'optique d'une application sur le banc expérimental, où uniquement les moyennes des tensions de bande sont accessibles.

Enfin, une analyse des erreurs statiques a été menée dans le cas de variables d'états non accessibles et dans le cas d'une erreur de calcul sur le gain de retour d'état statique.

Une première perspective de ce travail serait la synthèse H_∞ d'un correcteur avec ordre et structure fixés par l'intermédiaire d'un algorithme de résolution BMI, ceci dans le but de réduire l'ordre des correcteurs et de s'approcher le plus possible des structures de commandes industrielles.

L'optimisation des filtres de pondération est une tâche difficile. Il serait donc intéressant d'affiner un cahier des charges fréquentiel pour l'obtention de ces filtres.

Dans un proche avenir, il est prévu d'adapter les différentes stratégies de commandes développées dans le cadre de ce travail au nouveau modèle décentralisé exact présenté au chapitre 2. En parallèle, l'analyse de la robustesse en stabilité et en performances vis-à-vis des incertitudes sur les mesures de tensions de bande est à mener.

Il est à souligner que l'implantation du correcteur par retour d'état statique plus réaliste sur le banc d'enroulement à trois moteurs est programmée.

Il serait également intéressant de comparer nos stratégies de commandes avec celles élaborées par A. Bouscayrol [BDF+03] [BDG05].

CHAPITRE 4 : COMMANDES H_∞ DECENTRALISEES

Sommaire :

Chapitre 4 : Commandes H_∞ décentralisées	107
4. <i>Problématique</i>	108
4.1. Systèmes complexes de grande dimension	108
4.1.1. Définitions	109
4.1.1.1. Systèmes complexes de grande dimension	109
4.1.1.2. Systèmes interconnectés, décentralisés	111
4.1.1.3. Systèmes structurés	112
4.1.2. Modélisation d'un système interconnecté décentralisé dans l'espace d'état	115
4.1.2.1. Modélisation par matrice de transfert	117
4.1.3. Problème d'appariement des entrées et des sorties	118
4.1.3.1. Le RGA	119
4.1.3.2. Cas de sous-systèmes MIMO	120
4.2. Structures de commande décentralisée	120
4.2.1. Problématique de la commande des systèmes complexes	121
4.2.2. Différentes étapes dans la résolution du problème de commande	121
4.2.2.1. Décomposition temporelle, dite verticale	121
4.2.3. Décomposition du système et structures de commande associées	122
4.2.3.1. Différentes méthodes de décomposition horizontale	123
4.2.3.2. Stratégies retenues pour les systèmes d'enroulement	129
4.2.4. Synthèse des correcteurs H_∞ décentralisés pour les systèmes d'enroulement	131
4.2.4.1. Commande H_∞ à <i>1ddl</i> avec optimisation LMI	131
4.2.4.2. Commande H_∞ à <i>2ddl</i> avec optimisation LMI	136
4.2.4.3. Commande H_∞ par retour d'état statique avec optimisation BMI	138
4.3. Outils d'analyse de stabilité des systèmes complexes de grande dimension	144
4.3.1. Problématique	144
4.3.2. Étude de la stabilité et de la stabilisabilité	145
4.3.2.1. Modes fixes	145
4.3.2.2. Stabilité connective	146
4.3.3. Mesure d'interactions par la μ -analyse : application aux systèmes d'enroulement	146
4.3.3.1. Analyse de stabilité pour un système d'enroulement décentralisé à neuf moteurs	148
4.4. Conclusion du chapitre 4	149

4. Problématique

En commande, la complexité des systèmes prend une place centrale. En effet, une tendance consiste à vouloir commander, à l'aide d'un seul calculateur, des systèmes de plus en plus complexes, afin d'optimiser les performances de la machine.

Cependant, la recherche de commandes décentralisées et délocalisées constitue une tendance inverse fortement ancrée dans le milieu industriel, particulièrement pour la commande des systèmes électro-mécaniques. En effet, de plus en plus de variateurs de vitesse contiennent un calculateur avec des correcteurs locaux, le correcteur global (avec son superviseur) étant quant à lui localisé dans un calculateur central relié via un réseau temps réel à ces correcteurs locaux. Il s'en dégage ainsi une hiérarchisation des commandes. Pour ces deux stratégies, seule la compréhension de la complexité du système permet de donner des indications sur l'amélioration à apporter aux structures de commandes.

Bien que la définition diffère d'un auteur à l'autre, on retrouve trois caractéristiques fondamentales de cette complexité dans les publications scientifiques :

- la dimension
- les incertitudes et/ou perturbations
- les informations sur les contraintes structurelles.

Les systèmes dynamiques complexes peuvent être vus comme des interconnexions de sous-systèmes. Ces derniers devront être connus soit comme des entités physiques, soit comme des sous-ensembles mathématiques à identifier par un algorithme de partitionnement. De nombreuses configurations d'interconnexion existent. D'un côté, ces interconnexions peuvent être absentes ou en nombre réduit et facilement identifiables (au sens repérable), comme par exemple le cas du télescope de grande dimension constitué d'une multitude de miroirs actionnés individuellement. À l'opposé, il existe des systèmes complexes composés d'un enchevêtrement de sous-systèmes complexes, ceci rendant l'isolement physique de sous-systèmes difficile, voire impossible. Entre ces deux configurations extrêmes, toute la panoplie d'interconnexions existe. L'algorithme de partitionnement mathématique pourra être un outil utile pour trouver une bonne combinaison d'entités de type entrées-sorties ou représentation d'état permettant d'isoler des sous-systèmes afin de faciliter l'étape de synthèse de correcteurs ou d'analyser les performances en boucle fermée.

Dans le cas d'un système global dont les sous-systèmes peuvent être facilement isolés, comme c'est le cas des systèmes d'entraînement de bandes flexibles étudiés dans le cadre de ce travail, il est intéressant tout d'abord de synthétiser individuellement une commande pour chaque sous-système. Ces commandes peuvent ensuite interagir, ou être combinées, de manière à trouver une commande performante pour le système global.

Cette approche est présentée dans ce chapitre. Elle fait l'objet d'une analyse critique quant à son application aux systèmes d'entraînement de bandes.

4.1. Systèmes complexes de grande dimension

Nous nous intéresserons dans ce paragraphe à l'étude, l'analyse et la commande des systèmes complexes de grande dimension. Plusieurs caractéristiques pouvant définir un tel système, nous avons voulu commencer ce chapitre par un exposé des différentes définitions concernant un système complexe de grande dimension.

4.1.1. Définitions

Il existe différentes définitions décrivant les systèmes complexes de grande dimension. Nous essaierons dans ce paragraphe de regrouper les différentes définitions trouvées dans la littérature du domaine qui nous concerne.

4.1.1.1. Systèmes complexes de grande dimension

Un des premiers termes qu'on retrouve dans la littérature est la notion de « grand système » (large scale system). Selon D.D. Šiljak [Sil78], c'est un système susceptible de se décomposer en un certain nombre de sous-systèmes reliés par des interconnexions. Pour J. Bernussou et A. Titli [BT82], il s'agit plutôt de systèmes pouvant être représentés par des modèles mathématiques, souvent linéaires et de grande taille, mettant en jeu, dans le cas de descriptions d'état, un grand nombre de variables d'état, supérieur à la centaine. Fréquemment aussi, ils se caractérisent par une grande étendue dans l'espace. Ces deux éléments, leur grande dimension comme leur grande étendue spatiale, créent des difficultés tant pour les commander que pour les gérer.

De nombreux systèmes sont constitués d'un grand nombre d'entités en interaction. On les qualifie de *complexes* lorsqu'un observateur ne peut prévoir le comportement ou l'évolution d'un tel système par un algorithme de calcul. Ainsi une réaction chimique, comme la dissolution d'un grain de sucre dans du café, est *simple* car on connaît à l'avance le résultat : quelques équations permettent de décrire exactement l'évolution, sans avoir besoin d'attendre la fin de l'expérience. Au contraire, les cellules nerveuses de notre cerveau, une colonie de fourmis ou les agents qui peuplent un marché économique sont autant de systèmes complexes car le seul moyen de connaître l'évolution du système est de faire l'expérience, éventuellement sur un modèle réduit.

De par la diversité des systèmes complexes, leur étude est interdisciplinaire. Deux approches complémentaires sont utilisées : certains scientifiques aux prises avec un système complexe particulier cherchent à le comprendre, d'autres cherchent des méthodes et définitions générales applicables à de nombreux systèmes différents.

Les systèmes complexes sont donc un contre-exemple au réductionnisme : malgré une connaissance parfaite des composants élémentaires d'un système, il est impossible de prévoir son comportement autrement que par l'expérience ou la simulation. Cet écueil ne vient pas seulement de nos limites de calcul, mais plus généralement de l'impossibilité de mettre le système en équations. Contrairement au cas d'un système chaotique, ce n'est pas tant la *précision* de ses paramètres qui est primordiale, mais le *nombre* de paramètres et le fait que chacun d'entre eux peut avoir une influence essentielle sur le comportement du système. Pour prévoir ce comportement, il est nécessaire de les prendre tous en compte, ce qui revient à effectuer une simulation du système étudié.

Étymologiquement, *compliqué* (du latin *cumplificare*, empiler avec) signifie qu'il faut du temps et du talent pour comprendre l'objet d'étude ; *complexe* (du latin *complexus*, qui réunit plusieurs éléments) signifie qu'il y a beaucoup d'imbrications, que tout est lié et que l'on ne peut étudier une petite partie du système de façon isolée. Les systèmes complexes sont généralement compliqués, mais l'inverse n'est pas vrai.

Pour essayer de définir un système complexe, on exige le plus souvent qu'il présente la majorité des caractéristiques suivantes, ce qui montre au passage qu'il n'en existe pas de définition formelle largement acceptée :

- le graphe d'interaction est non trivial : il n'est pas constitué simplement d'interactions de toutes ses entités avec toutes ses entités, il y a au moins des liens privilégiés ;
- les interactions sont locales, de même que la plupart des informations, il y a peu

d'organisation centrale ;

- il y a des boucles de rétroaction : l'état d'une entité a une influence sur son état futur via l'état d'autres entités ;
- les entités peuvent être elles-mêmes des systèmes complexes : une société est composée d'humains eux-mêmes composés de cellules ;
- le système est ouvert et soumis à un environnement extérieur, il y a des flux d'énergie et d'information sur la frontière, cette dernière pouvant être floue.

À titre d'exemple, on peut trouver dans la vie courante des exemples très familiers de systèmes complexes :

- une colonie de fourmis échange des phéromones et bâtit une fourmilière, mais aucune fourmi n'a conscience de la fourmilière ;
- un réseau de gènes interagit par activations et inhibitions, un ensemble de gènes activés définit un tissu : les gènes activés et inhibés ne sont pas les mêmes dans les cellules de la peau que dans celles d'un muscle ;
- la dynamique d'une cellule est constituée de protéines en réactions chimiques, son évolution permet une adaptation au milieu ;
- le cerveau est un ensemble de neurones qui se transmettent des impulsions électriques ;
- la bourse voit des courtiers effectuer des transactions, qui créent des phénomènes globaux tels que bulles ou krachs.

Dans le domaine de l'automatique, nous avons remarqué que la notion de grand système est souvent confondue par les automaticiens avec la notion de système complexe. Pourtant, comme on va l'expliquer ci-dessous, il y'a bien une différence entre ces deux notions.

J. Bernussou et A. Titli [BT82] appellent un système « complexe » lorsqu'il est difficile à décrire à l'aide d'un modèle mathématique classique. Leurs modèles comportent souvent des équations aux dérivées partielles, des équations fortement non linéaires, ou encore, en l'absence de relations mathématiques, des équations qui s'appuient sur la logique floue.

D.D. Šiljak [Sil91] appelle système complexe un système qui est de grande dimension (nombre d'entrées/sorties/états) et qui comporte des incertitudes et des contraintes sur la structure des flux d'information, propriétés qui compliquent à la fois son analyse et sa commande.

Un système complexe présente la plupart des comportements suivants. Il est à noter qu'il est inhabituel de définir une classe d'objets à étudier à partir de leur comportement plutôt qu'à partir de leur constitution.

- Robustesse locale et fragilité (ou contrôlabilité) à moyenne échelle : puisqu'il y a de nombreux liens, éventuellement créés ou remaniés par le système lui même, si un élément est affecté par un événement extérieur, ses voisins le seront aussi. Il s'ensuit que le système est souvent plus robuste à une petite perturbation locale qu'il ne le serait sans les liens. Mais du même coup, modifier globalement le système, et donc potentiellement le piloter, peut être fait grâce à une perturbation moins grande que dans le système sans lien. Bien cibler cette perturbation est cependant très difficile. Les virus, issus d'une longue sélection naturelle, sont

un bon exemple : avec une dizaine de gènes, un virus est capable de modifier profondément un organisme de plusieurs dizaines de milliers de gènes, et ce en ne s'attaquant au départ qu'à une minorité de cellules.

- Brisure de symétrie : la connaissance d'une partie du système ne permet pas d'affirmer que le reste du système est en moyenne dans le même état. Plusieurs comportements possibles sont en compétition, certains sont simples, d'autres chaotiques ou désordonnés. Le système est souvent à la frontière entre les deux et alterne entre ces deux types de comportement.
- Plusieurs échelles temporelles et spatiales apparaissent, il y a ainsi une hiérarchie de structures.

4.1.1.2. Systèmes interconnectés, décentralisés

Une première définition d'un "système interconnecté" est un système pouvant être décomposé en un ensemble de N systèmes élémentaires S_i , $i = 1, \dots, N$ et une interconnexion I .

Dans la modélisation mathématique de systèmes physiques, on est souvent confronté au dilemme :

- utiliser un modèle plus précis, difficile à gérer,
- ou, travailler avec un modèle plus simple, plus facile à manipuler mais moins fiable.

De ce fait, une hiérarchie de modèles, qui ont été augmentés pour des raisons de complexité et de fiabilité, n'est souvent pas la meilleure approche. Effectivement, quand le nombre de variables est grand, il est prudent, sinon impératif, de commencer l'analyse avec des structures de modèles simples qui offrent des chemins relativement simples pour identifier les configurations de systèmes qui ne conviennent pas, en raison de l'absence de propriétés désirées.

D.D. Šiljak dans [Sil91] propose l'utilisation de la théorie des graphes orientés, ou digraphes, pour préciser graphiquement la structure du système complexe à étudier. Dans cet ouvrage, l'auteur a développé une théorie des graphes et une base de résultats permettant la modélisation, l'analyse et la commande des systèmes à structures complexes.

Nous avons choisi volontairement de ne pas détailler cette théorie et de ne présenter que son principe de base et quelques résultats. Pour plus de détails, il est possible de se référer à l'ouvrage [Sil91].

L'idée de base consiste à associer à un système linéaire un graphe orienté, c'est-à-dire possédant une orientation ou direction, ce qui a donné en anglais le terme de *digraph*, abréviation de *directed graph*, traduit en français par certains auteurs par *digraphe*. A chaque variable est associé un sommet du digraphe. Une ligne, généralement un arc orienté qui relie deux variables, est présente chaque fois que le coefficient correspondant dans la matrice de la représentation d'état du système est différent de zéro. Une fois déterminés tous les sommets et lignes, le problème central revient à déterminer si :

- il existe un chemin menant à tous les sommets d'états à partir d'au moins un sommet d'entrée ; on parlera alors d'atteignabilité en entrée (input detectability) ;
- il existe un chemin depuis tous les sommets d'états vers au moins un sommet de sortie ; c'est le concept dual du précédent, celui de détectabilité en sortie (output reachability).

Ces deux derniers concepts ont été formulés comme les structures basiques nécessaires pour la commandabilité et l'observabilité. Ils s'appliquent de la même façon aux systèmes linéaires et aux

systèmes non linéaires. Ils sont des paramètres indépendants et il existe des algorithmes très efficaces pour les calculer. L'avantage offert par ces concepts est leur pouvoir de manipulation qui peut être utilisé dans les décompositions de grands systèmes dynamiques.

Quand la propriété du rang générique est ajoutée à l'atteignabilité en entrée, on arrive à la commandabilité structurelle. Cette notion est une théorie de graphes, meilleure pour estimer la commandabilité que l'atteignabilité, mais est contrainte par la liaison aux paramètres de dépendances issues des conditions de rang générique.

Afin de mieux comprendre le principe, nous allons présenter ci-après quelques traits mathématiques de la méthode employée, afin de caractériser les systèmes dynamiques, les interconnexions et les structures des systèmes et des correcteurs.

Soit le système linéaire décrit par les équations :

$$S : \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \end{cases} \quad (4.1)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ représente les états, $u(t) \in \mathbb{R}^m$ les entrées et $y(t) \in \mathbb{R}^p$ les sorties du système S à l'instant t . De plus, les matrices

$$A = (a_{ij}), \quad B = (b_{ij}), \quad C = (c_{ij}), \quad (4.2)$$

sont des matrices constantes, de dimensions respectives $(n \times n)$, $(n \times m)$ et $(p \times n)$.

4.1.1.3. Systèmes structurés

Une manière plus précise de représenter la structure de S est d'utiliser la matrice d'interconnexion, spécifiée ci-dessous :

Définition 4.1.1

La matrice d'interconnexion de S est une matrice binaire de dimension $(n+m+p) \times (n+m+p)$, notée $E = (e_{ij})$ et définie comme suit :

$$E = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{C} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

où : $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$, $\bar{B} = (\bar{b}_{ij})$ et $\bar{C} = (\bar{c}_{ij})$ comportent les éléments :

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } a_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{si } a_{ij} = 0, \end{cases} \quad \bar{b}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } b_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{si } b_{ij} = 0, \end{cases} \quad \bar{c}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } c_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{si } c_{ij} = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Les sous-matrices $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ de E sont des représentations booléennes du système matriciel original A, B, C . Cette conversion des éléments des matrices décrivant le système en des valeurs binaires rend la matrice d'interconnexion E un simple outil de modélisation pour étudier les propriétés qualitatives du système S , qui sont indépendantes de la valeur numérique de ses

paramètres.

Dans ce cadre, on peut aussi tenir compte des incertitudes paramétriques causées par les erreurs de modélisation ou les erreurs opérationnelles dans le système.

Tant que E facilite le calcul des propriétés structurelles de S , le concept équivalent de digraphe est souvent préféré.

Rappelons que le digraphe est la paire ordonnée $D=(V,E)$ où V est l'ensemble non vide et fini de points (nœuds) et E est un ensemble de paires (v_j,v_i) qui sont les lignes orientées (arcs) reliant les nœuds de V .

Définition 4.1.2

Le digraphe $D=(V,E)$ du système S comprend l'ensemble des sommets :

$$V=U\cup X\cup Y, \quad (4.5)$$

où $U=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$, $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ et $Y=\{y_1,y_2,\dots,y_p\}$ sont les ensembles non vides des entrées, des états et des sorties, et E est l'ensemble des lignes telles que $(v_j,v_i)\in E$ si et seulement si $e_{ij}=1$.

Il convient de noter que le digraphe D de S contient seulement les lignes (u_j,x_i) , (x_j,x_i) et (x_j,y_i) qui reflètent nos hypothèses de causalité sur le système S : il n'existe pas de connexion entre les entrées, entre les sorties, ni directement entre les entrées et les sorties.

Exemple :

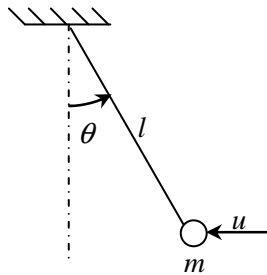


Figure 4.1-1. Système pendule plus masse

Illustrons ce qui précède grâce à l'exemple de la Figure 4.1-1.

Le principe fondamental de la dynamique stipule que :

$$ml\ddot{\theta} - mg\theta = u, \quad (4.6)$$

avec les notations de la Figure 4.1-1, si l'angle de déviation θ est supposé petit. Choisissons $x=(x_1,x_2)^T$, avec $x_1(t)=\theta(t)$ et $x_2(t)=\dot{\theta}(t)$, et $y(t)=\theta(t)$. Le système S représentant le pendule aura alors la description d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{ml}u + \frac{g}{l}x_1, \end{cases} \quad (4.7)$$

soit

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix} u = Ax + Bu, \\ y = [1 \ 0]x = Cx \end{cases} \quad (4.8)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad \alpha = \frac{g}{l} \text{ et } \beta = \frac{1}{ml}. \quad (4.9)$$

La matrice d'interconnexion a pour expression

$$E = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{C} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.10)$$

dont les colonnes, respectivement les lignes, correspondent aux sommets x_1 , x_2 , u et y , dans cet ordre. On construit alors aisément le digraphe $D = (V, E)$, où $V = U \cup X \cup Y = \{u\} \cup \{x_1, x_2\} \cup \{y\}$:
Figure 4.1-2

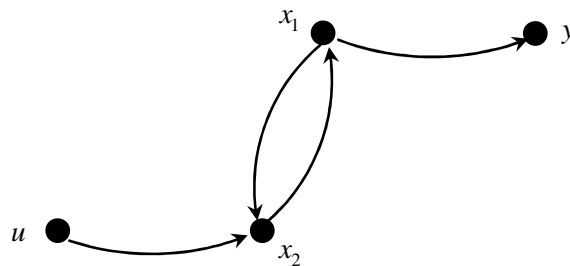


Figure 4.1-2. Digraphe D du système de pendule S

On remarquera que, si les paramètres du système, m ou l , varient, la matrice d'interconnexion E et son digraphe correspondant D restent inchangés.

Deux systèmes, tels que le système S précédent et le système S_1 qui correspondrait à des nouvelles valeurs m_1 et l_1 de ses paramètres, sont dits « structurellement équivalents ».

Comme on l'a précisé plus haut, il existe plusieurs définitions de la notion de système complexe, on retiendra ici la définition qui consiste à dire que tout système est composé de sous-systèmes interconnectés. On distinguera alors deux types d'interconnexions :

physique : basé sur l'identification par parties des systèmes complexes ;

mathématique : elle ne prend pas en compte les limites physiques — gain de temps et d'espace mémoire pour l'outil informatique.

Une autre définition d'un système *structuré* [Cla05] concerne le cas d'une modélisation par représentation d'état. Dans ce cas, un système structuré est représenté par un quadruplet (A, B, C, D) dont certains coefficients sont strictement nuls, c'est-à-dire indépendamment des incertitudes. La *structure* du système est donc définie par la disposition des coefficients invariablement nuls dans les quatre matrices de la représentation d'état. La représentation par matrice de transfert dont certains coefficients sont des zéros fixes peut également être considérée.

F. Claveau a présenté dans sa thèse [Cla05] une synthèse des différentes définitions existant dans la littérature pour les notions de grand système, de système complexe, de système interconnecté et de système structuré. Il présente aussi une critique de ces définitions, et montre la difficulté d'en tirer une définition commune, en raison de leurs contradictions et de leurs subjectivités. Il finit donc par adopter des représentations mathématiques et des définitions caractérisant les différentes classes de systèmes complexes. En y regardant de plus près, les définitions mathématiques adoptées sont similaires à celles présentées dans l'ouvrage de D.D. Šiljak.

Dans ce qui suit on présentera, dans le cadre des représentations d'état, les définitions mathématiques du système interconnecté décentralisé que nous adopterons dans ce mémoire.

4.1.2. Modélisation d'un système interconnecté décentralisé dans l'espace d'état

Les outils et méthodes de synthèse de loi de commande présentés par la suite s'appuient principalement sur une modélisation linéaire des systèmes. Nous nous limitons donc dans tout le document au contexte des systèmes linéaires, invariants dans le temps. On se placera dans l'hypothèse de systèmes strictement propres afin de simplifier les notations. Sans hypothèse particulière sur l'organisation interne de ce système, celui-ci sera représenté par les équations (4.1).

Si l'on considère une décomposition des vecteurs d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ en N composantes, c'est-à-dire $u^T \triangleq [u_1^T \ u_2^T \ \cdots \ u_N^T]$, avec $u_i(t) \in \mathbb{R}^{m_i}$, $m = \sum_{i=1}^N m_i$ et $y^T = [y_1^T \ y_2^T \ \cdots \ y_N^T]$, avec $y_i(t) \in \mathbb{R}^{p_i}$, $p = \sum_{i=1}^N p_i$, on peut réécrire (4.1) comme suit :

$$S : \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + \sum_{j=1}^N B_j u_j(t) \\ y_i(t) = C_i x(t), \end{cases} \quad (4.11)$$

avec $B = [B_1 \ B_2 \ \cdots \ B_N]$ et $C^T = [C_1^T \ C_2^T \ \cdots \ C_N^T]$.

La décomposition du vecteur d'état $x(t)$ en N composantes, $x^T = [x_1^T \ x_2^T \ \cdots \ x_N^T]$, avec $x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $n = \sum_{i=1}^N n_i$, mène alors à la représentation suivante de S :

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_{ii}x_i(t) + B_{ii}u_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\bar{e}_{ij}^{xx} A_{ij}x_j(t) + \bar{e}_{ij}^{xu} B_{ij}u_j(t)) \\ y_i(t) = C_{ii}x_i(t) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (\bar{e}_{ij}^{yx} C_{ij}x_j(t)), \quad 1 \leq i \leq N, \end{cases} \quad (4.12)$$

qui peut être décrite sous la forme compacte suivante :

$$S : \begin{cases} \dot{x} = (A_D + A_C(\bar{E}))x + (B_D + B_C(\bar{E}))u \\ y = (C_D + C_C(\bar{E}))x, \end{cases} \quad (4.13)$$

où

$$\begin{aligned} A_D &= \text{diag}\{A_{11}, A_{22}, \dots, A_{NN}\}, A_C(\bar{E}) = (\bar{e}_{ij}^{xx} A_{ij})_{\substack{1 \leq i, j \leq N \\ j \neq i}} \\ B_D &= \text{diag}\{B_{11}, B_{22}, \dots, B_{NN}\}, B_C(\bar{E}) = (\bar{e}_{ij}^{xu} B_{ij})_{\substack{1 \leq i, j \leq N \\ j \neq i}} \\ C_D &= \text{diag}\{C_{11}, C_{22}, \dots, C_{NN}\}, C_C(\bar{E}) = (\bar{e}_{ij}^{yx} C_{ij})_{\substack{1 \leq i, j \leq N \\ j \neq i}} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$A_C(\bar{E}), B_C(\bar{E}), C_C(\bar{E})$ sont les matrices de couplage.

Les éléments $\bar{e}_{ij}^{xx}, \bar{e}_{ij}^{xu}, \bar{e}_{ij}^{yx}$ sont les éléments de la matrice fondamentale d'interconnexion « macroscopique » [Cla05] :

$$\bar{E} = (\bar{e}_{ij}) = \begin{bmatrix} \bar{e}^{xx} & \bar{e}^{xu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \bar{e}^{yx} & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \{0,1\}^{3N \times 3N}, \quad (4.15)$$

avec $\bar{e}^{xx} = (\bar{e}_{ij}^{xx})_{1 \leq i, j \leq N}$, $\bar{e}^{xu} = (\bar{e}_{ij}^{xu})_{1 \leq i, j \leq N}$, $\bar{e}^{yx} = (\bar{e}_{ij}^{yx})_{1 \leq i, j \leq N}$ et :

$$\begin{aligned} \bar{e}_{ij}^{xx} &= \begin{cases} 1: & x_j \text{ influe sur } \dot{x}_i, \\ 0: & x_j \text{ n'influe pas sur } \dot{x}_i, \end{cases} \\ \bar{e}_{ij}^{xu} &= \begin{cases} 1: & u_j \text{ influe sur } \dot{x}_i, \\ 0: & u_j \text{ n'influe pas sur } \dot{x}_i, \end{cases} \\ \bar{e}_{ij}^{yx} &= \begin{cases} 1: & x_j \text{ influe sur } y_i, \\ 0: & x_j \text{ n'influe pas sur } y_i. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.16)$$

Remarque : il est nécessaire de faire la différence entre les deux matrices d'interconnexion présentées jusqu'ici. La première, équation (4.10), est appelée matrice fondamentale d'interconnexion « microscopique » [Cla05] et retranscrit la structure interne du système, tandis que la deuxième, équation (4.15), appelée matrice fondamentale d'interconnexion « macroscopique », met le trait sur la structure des interconnexions entre les différents sous-systèmes après décomposition.

Remarque : il convient de remarquer que la réalisation du modèle proposée en (4.11) n'est autre qu'une partition du système « Entrée/Sortie » (E/S), et que celle associée à l'équation (4.12) est une réalisation partitionnée « Entrée/état/Sortie » (E/Et/S).

On rappelle ici que le partitionnement peut résulter de considérations physiques ou mathématiques.

Un système représenté par une réalisation partitionnée E/Et/S (4.12) sera alors appelé « système interconnecté ». Celui-ci est donc composé de N sous-systèmes définis comme suit :

$$S^i : \begin{cases} \dot{x}_i(t) = A_{ii}x_i(t) + B_{ii}u_i(t) \\ y_i(t) = C_{ii}x_i(t), \quad i = 1, \dots, N. \end{cases} \quad (4.17)$$

4.1.2.1. Modélisation par matrice de transfert

Le système représenté par (4.1) est linéaire, et pourra par conséquent être représenté par la matrice de transfert

$$G(s) = \left(g_{\varphi\psi}(s) \right)_{1 \leq \varphi \leq p, 1 \leq \psi \leq m} = C(sI - A)^{-1}B. \quad (4.18)$$

On suppose que G est une matrice de transfert de dimension $p \times m$, dont les éléments g sont des fonctions de transfert scalaires, rationnelles, strictement propres et à coefficients réels. On peut associer, également, aux équations (4.11) et (4.12) la décomposition de la matrice de transfert G (4.18) en $N \times N$ blocs :

$$G(s) = \begin{bmatrix} \bar{e}_{11}^G G^{11}(s) & \bar{e}_{12}^G G^{12}(s) & \cdots & \bar{e}_{1N}^G G^{1N}(s) \\ \bar{e}_{21}^G G^{21}(s) & \bar{e}_{22}^G G^{22}(s) & \cdots & \bar{e}_{2N}^G G^{2N}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \bar{e}_{N1}^G G^{N1}(s) & \bar{e}_{N2}^G G^{N2}(s) & \cdots & \bar{e}_{NN}^G G^{NN}(s) \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

On rappelle que

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

G^{ij} est la matrice de transfert entre l'entrée u_j et la sortie y_i , et est définie par

$$G^{ij}(s) = C_i(sI - A)^{-1}B_j. \quad (4.21)$$

On définit la matrice « fondamentale d'interconnexion macroscopique » associée à la matrice de transfert G de (4.19) comme suit

$$\bar{E}^G = \left(\bar{e}_{ij}^G \right)_{1 \leq i, j \leq N} \in \{0, 1\}^{N \times N}. \quad (4.22)$$

Par analogie au cas de la représentation d'état, on définit, la « matrice fondamentale

d'interconnexion microscopique » \bar{E}_m^G , qui est une matrice binaire de dimension $p \times m$. Plus précisément, le coefficient (i, j) de \bar{E}_m^G est nul si $g^{ij} = 0$, et vaut 1 sinon.

4.1.3. Problème d'appariement des entrées et des sorties

Une des approches les plus connues et les plus utilisées dans la littérature pour la méthodologie de commande qui utilise la structuration des systèmes est l'approche « entrée/sortie ». Dans l'ouvrage de S. Skogestad et I. Postlethwaite [SP96], ce point est abordé sous le nom de « structuration de la commande » (en anglais, control structure design).

Rappelons, (chapitre 3, section 3.1.1.1), que tout système augmenté sous la forme standard $P(s)$ s'écrit

$$P(s) : \begin{cases} z = P^{11}(s)w + P^{12}(s)u, \\ y = P^{21}(s)w + P^{22}(s)u. \end{cases} \quad (4.23)$$

On rappelle que $P^{22}(s) = G(s)$, où $G(s)$ est la matrice de transfert associée au système S considéré.

La structuration de la commande s'effectue alors selon les étapes suivantes : [Cla05]

1. sélection des sorties à minimiser z ,
2. sélection des sorties mesurées y et des signaux de commande u ,
3. sélection de la configuration de la loi de commande,
4. sélection du type de régulateur (PID, LQ, H_2 , H_∞ etc.).

La troisième étape « configuration de la commande » n'est autre, en réalité, qu'un « appariement entrées/sorties » (en anglais, input/output pairing). Elle consiste à partitionner les vecteurs d'entrées u et de sorties y en N sous-vecteurs

$$\begin{aligned} u^T &\triangleq [u_1^T \quad u_2^T \quad \cdots \quad u_N^T], \\ y^T &\triangleq [y_1^T \quad y_2^T \quad \cdots \quad y_N^T], \end{aligned} \quad (4.24)$$

puis à associer selon certaines règles tous les sous-vecteurs u_j , et y_i afin de constituer des paires (u_j, y_i) .

On comprend alors que l'appariement des « entrées/sorties » du système est associé à un essai de structure de commande décentralisée, dans le but d'une synthèse indépendante des différents correcteurs K^i des sous-systèmes. L'appariement pourra alors concerner un système « centralisé » pour construire un système décentralisé, mais aussi un système décentralisé pour construire un autre système décentralisé, dans le but de minimiser le plus possible les interconnexions entre les différents sous-systèmes.

H. Schmidt [Sch02] présente une bibliographie complète sur les différents outils d'appariement existants. On tentera dans ce qui suit d'en résumer quelques uns.

4.1.3.1. Le RGA

Proposé pour la première fois en 1966 par E.H. Bristol [Bri66], cet outil d'aide à la décision pour le problème d'appariement s'applique exclusivement aux systèmes strictement décentralisés (sous-systèmes mono-entrée mono-sortie). Aussi le système étudié doit-il être carré : $m = p = N$. Son principe repose sur deux contextes extrêmes :

- les autres boucles locales sont ouvertes : $u_k = 0, \forall k \neq j$,
- les autres boucles locales sont régulées de manière parfaite : $y_l = 0, \forall l \neq i$.

Régulation « parfaite » veut dire la mise en place d'une commande à grand gain dans la boucle concernée.

Dans les deux contextes, l'influence de u_j sur la sortie y_i est donnée par la proposition suivante.

Proposition 4.1.1 : RGA

L'influence de u_j sur la sortie y_i est donnée par l'une des deux relations suivantes :

dans le cas où les autres boucles locales sont ouvertes, par :

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_{u_k=0, k \neq j} = g^{ij} = [G]^{ij} ; \quad (4.25)$$

dans le cas où les autres boucles locales sont régulées parfaitement, par :

$$\left(\frac{\partial y_i}{\partial u_j} \right)_{y_l=0, l \neq i} \triangleq \hat{g}^{ij} = \frac{1}{[G^{-1}]^{ji}} . \quad (4.26)$$

Définition 4.1.3 : RGA

E.H. Bristol propose alors d'utiliser le « gain relatif », ou rapport entre les deux gains définis par les équations (4.25) et (4.26), comme un moyen de mesurer les interactions. Le « gain relatif » caractérisant la paire (u_j, y_i) à la fréquence ω donnée vaut

$$\Lambda_{ij} \triangleq \frac{g^{ij}}{\hat{g}^{ij}} = [G(\omega)]^{ij} [G^{-1}(\omega)]^{ji} . \quad (4.27)$$

En regroupant les Λ_{ij} dans une même matrice Λ de dimension $N \times N$, on obtient la matrice de gain relative appelée RGA (Relative Gain Array). Elle peut être calculée à la fréquence ω par

$$\Lambda(G) = G(\omega) \times (G^{-1}(\omega))^T , \quad (4.28)$$

où \times représente le produit élément par élément.

Théorème 4.1.1 : RGA [SP96]

Soient un système carré stable de modèle $G(s)$ et un correcteur modélisé par une matrice de transfert diagonale $K(s)$, comportant une action intégrale au sein de chacun de ses régulateurs locaux. On suppose le transfert de boucle résultant GK strictement propre.

Si au moins une paire (u_j, y_i) est caractérisée par un gain relatif, RGA, négatif à la pulsation nulle, alors le système en boucle fermée vérifie au moins l'une des propriétés suivantes :

- la boucle fermée globale est instable,
- la boucle locale caractérisée par le gain relatif négatif est instable en régime autonome,
- la boucle fermée globale est instable si la boucle locale associée au gain relatif négatif est ouverte.

À partir du résultat de ce théorème, le RGA permet de prédire « *a priori* », donc sans avoir à calculer de commande ni à décentraliser le système, les combinaisons d'entrées/sorties à choisir pour la décentralisation de la commande. Il suffirait alors d'éliminer les combinaisons correspondant aux gains relatifs négatifs. On peut rajouter que, dans le cas de choix multiples possibles, on choisit sur la même ligne la combinaison correspondant au gain relatif la plus proche de la valeur 1 [SP96].

4.1.3.2. Cas de sous-systèmes MIMO

V. Manousiouthakis, R. Savage et Y. Arkun ont proposé dans [MSA86] une extension du RGA pour le cas d'un système décomposé en sous-systèmes MIMO. Ils définissent ainsi le « gain relatif par bloc » BRG (en anglais, Block Relative Gain), qui, au lieu d'être basé sur le rapport entre les gains scalaires, s'appuie sur le rapport entre matrices de gains. Le BRG est donc défini comme suit,

$$BRG_i = G^{ii}(\omega) \left[G^{ii}(\omega) \right]^{-1}. \quad (4.29)$$

Ainsi, BRG_i caractérise le $i^{\text{ème}}$ sous-système. L'objectif est d'avoir pour chaque sous-système un BRG_i le plus proche possible de l'unité.

Les outils RGA et BRG sont des outils d'évaluation « *a priori* » de l'appariement d'entrées/sorties.

Remarques :

1. Il existe d'autres méthodes d'évaluation « *a priori* » citées dans la littérature [SM88] [BMF02].

2. Il existe également des méthodes d'évaluation « *a posteriori* » de l'appariement « entrées/sorties ». Une méthode particulière de cette famille sera détaillée à la fin de ce chapitre, parce qu'elle nécessite le calcul des correcteurs locaux, ce qui n'a pas encore été fait jusqu'à présent.

4.2. Structures de commande décentralisée

Dans ce paragraphe nous allons aborder le problème de la commande des systèmes complexes, de grande dimension. Nous rappelons ici que les systèmes considérés sont des systèmes linéaires, et que les correcteurs qui y sont synthétisés sont des correcteurs basés sur l'optimisation H_∞ . Après un bref rappel théorique sur les techniques de décentralisation de commande, on présentera les deux

techniques de décentralisation retenues dans ce travail, à savoir les techniques de décentralisation avec et sans recouvrement de sous-systèmes. Les correcteurs sont des correcteurs H_∞ synthétisés par les méthodes présentées dans le chapitre 3, c'est-à-dire la synthèse par LMI *1ddl* et *2ddl* du retour de sortie dynamique et la synthèse par BMI du retour d'état statique.

4.2.1. Problématique de la commande des systèmes complexes

La synthèse d'un correcteur pour un système complexe est connue pour être difficile. Effectivement, un correcteur pour un tel système doit satisfaire non pas un seul objectif de commande, mais plusieurs sous-objectifs, puisqu'il nécessite par nature une décomposition (physique ou mathématique) en plusieurs sous-systèmes. Jusqu'à ce jour, aucun critère d'optimisation unique, satisfaisant une synthèse globale d'un correcteur pour un système complexe, n'a été formalisé.

D'autres difficultés viennent s'ajouter à la précédente, à savoir :

- la difficulté de trouver une modélisation parfaite du système complexe, à cause, entre autres, de la présence d'interconnexions incertaines ;
- la synthèse d'une loi de commande pour des systèmes complexes débouche sur un problème numérique de grande taille, confronté par conséquent à des limitations d'espace mémoire, de capacité de calcul et de précision ;
- finalement, la grande taille à la fois du système et du problème numérique, combinée aux performances exigées, impose à l'automaticien le choix d'un « correcteur décentralisé » avec une certaine structure particulière (comportant un intégrateur par exemple) ce qui rend le problème de synthèse NP-difficile.

Ces difficultés d'ordre conceptuel et numérique posent des problèmes à la commande des systèmes complexes.

Le premier est au niveau de l'optimisation à choisir (Riccati, LMI, BMI, etc.). Le second se situe au niveau des simplifications à imposer au problème de commande, généralement au système, dans le but de simplifier la synthèse du correcteur : « simplification dynamique » comme par exemple la réduction d'ordre ou « simplification structurelle ». Un troisième problème sous-jacent à ces difficultés provient des méthodologies de synthèse de correcteurs adaptées à la manipulation de modèles de dimensions élevées et/ou aux contraintes structurelles sur le correcteur recherché.

4.2.2. Différentes étapes dans la résolution du problème de commande

Malgré la grande avancée des nouvelles techniques d'optimisation (LMI, BMI) et de synthèse (H_2, H_∞), la synthèse d'un correcteur à structure et ordre fixés *a priori* est une tâche difficile et très rarement satisfaite pour un système complexe. C'est pour cela, que nous avons choisi de traiter le problème en le décomposant en plusieurs sous-systèmes. Ceci dit, plusieurs approches existent dans le domaine de la décomposition de systèmes complexes.

4.2.2.1. Décomposition temporelle, dite verticale

La décomposition concerne ici la difficulté de synthèse. La première apparition de cette technique de décomposition a eu lieu en 1980 [FBB+80] sous le nom de « multi-couches » (en anglais, multilayer). Un schéma classique de commande « hiérarchisée » est donné dans la Figure 4.2-1. [Sch02].

Comme on peut le voir, c'est bien la commande qui est hiérarchisée dans cette stratégie. Le système de pilotage se compose de quatre niveaux hiérarchiques qui communiquent entre eux. Le

niveau le plus bas est celui de la « régulation » qui est l'organe en contact direct avec le procédé, dont il reçoit les mesures $y(t)$ et à qui il envoie la commande $u(t)$ permettant de satisfaire le cahier des charges imposé. Le niveau d'optimisation fournit quant à lui au régulateur les consignes permettant d'optimiser un certain nombre de critères de performances, en se basant sur un modèle dynamique ou statique, ou sur plusieurs modèles de référence dans le cas d'une commande multi-modèles ou d'une gestion de situations d'urgence (commande fiable, détection de pannes, diagnostic de commande). Le niveau d'adaptation a pour rôle d'adapter les paramètres des modèles de référence et/ou du régulateur. Le niveau d'organisation, enfin, fait intervenir directement l'opérateur et consiste à choisir les différentes méthodes et à les traduire en algorithmes transmis aux niveaux inférieurs.

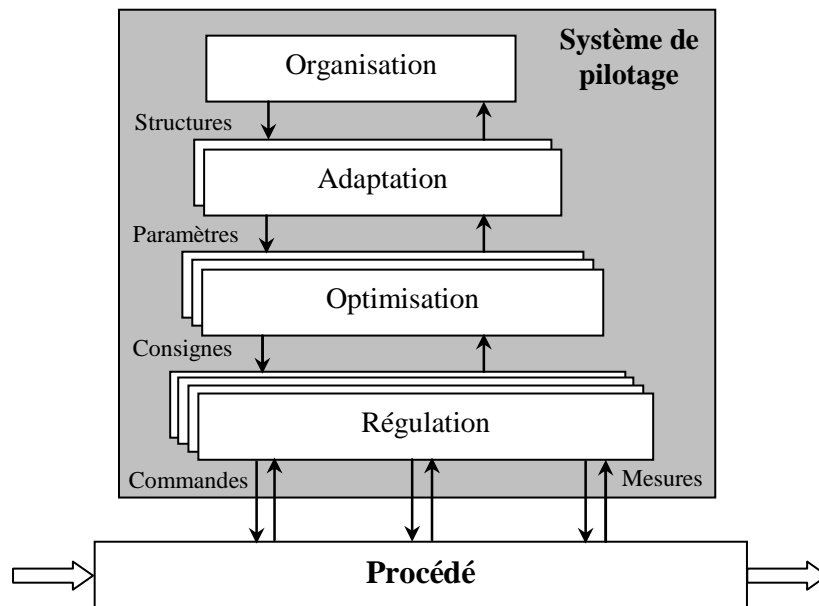


Figure 4.2-1. Vue d'ensemble d'un grand système avec une commande hiérarchique

Cette démarche de décomposition de la commande dans son aspect général ne traite pas le cas des systèmes complexes. Pour l'adapter à ce cas, il faudrait rajouter une décomposition horizontale du système et de l'organe de commande (niveau 1), ce qui rend le problème beaucoup plus difficile. Un autre inconvénient de cette méthode est l'absence d'une formulation mathématique.

Il existe une autre manière de décomposer le problème de commande dans le cas d'un système de grande dimension, méthode qui sera exposée au paragraphe suivant.

4.2.3. Décomposition du système et structures de commande associées

Une méthode de décomposition particulièrement adaptée au cas des systèmes complexes de grande dimension est la décomposition dite « horizontale ». Elle consiste tout d'abord à décomposer le système selon des considérations physiques et/ou mathématiques (en utilisant les outils RGA, BRG, etc.), puis à imposer la même structure de décomposition aux correcteurs. On se trouve alors en présence d'un système décomposé en sous-systèmes et d'un correcteur décomposé en sous-correcteurs, associés chacun à un sous-système.

Il existe cependant deux façons de synthétiser ces sous-correcteurs. La première inclut la décomposition du correcteur dans la synthèse (BMI). Elle consiste à calculer en une seule étape un correcteur global ayant une structure imposée préalablement et qui correspond à la structure de décentralisation du système. Cependant, cette méthode (voir chapitre 3, section 3.2.1) présente plusieurs inconvénients, dont celui de la difficulté numérique. Pour cette raison, c'est la deuxième façon de synthétiser les sous-correcteurs qui a été choisie dans ce travail. Cette fois-ci, chaque sous-

correcteur est calculé séparément pour chaque sous-système. La Figure 4.2-2 illustre la procédure à suivre.

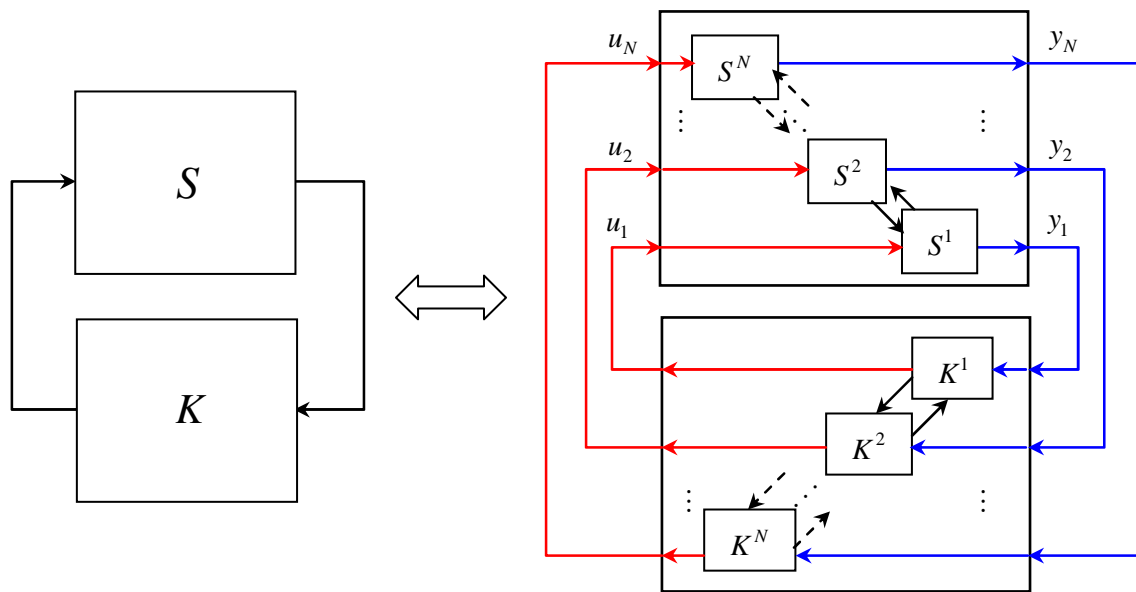


Figure 4.2-2. Décomposition horizontale du système S et du correcteur K

On remarque sur la Figure 4.2-2 que les sous-systèmes communiquent entre eux, grâce aux interconnexions plus ou moins fortes. Il est important de noter que ces mêmes interconnexions, si elles existent, peuvent être prises en compte dans la décomposition du correcteur. Ce point sera abordé dans la prochaine section de ce mémoire.

4.2.3.1. Différentes méthodes de décomposition horizontale

Dans les procédés industriels comportant un grand nombre d'actionneurs et/ou de capteurs, il peut être préférable d'employer des correcteurs décentralisés [KLG+03] plutôt qu'un correcteur multivariable centralisé, ou global.

On distingue deux méthodes de décomposition horizontale, également appelée décomposition spatiale [Cla05]. La première méthode est la méthode dite « sans recouvrement » et la deuxième méthode est appelée « avec recouvrement » [IS86] [SSS00] (en anglais, overlapping control). La première ne prend pas en compte les interconnexions entre les sous-systèmes, à la différence de la deuxième.

Dans ce qui suit on présentera le principe de ces deux méthodes et leur application sur des systèmes d'enroulement de bandes.

➤ Méthode sans recouvrement

Les stratégies de commande H_∞ , présentées dans le chapitre 3, ont permis d'obtenir de bonnes performances en suivi de consignes et en découplage entre les tensions et la vitesse de bande pour des systèmes comportant peu de moteurs. Elles ne sont toutefois pas applicables aux systèmes industriels constitués d'un nombre élevé d'actionneurs. Pour ces derniers, seules des stratégies de commande décentralisée peuvent être envisagées. Bien que celles actuellement utilisées dans l'industrie ne remplissent pas les critères de performances exigés, elles présentent l'avantage de la simplicité de réglage et de maintenance. Une méthode appartenant à la première catégorie, donc sans recouvrement, est présentée dans la Figure 4.2-3.

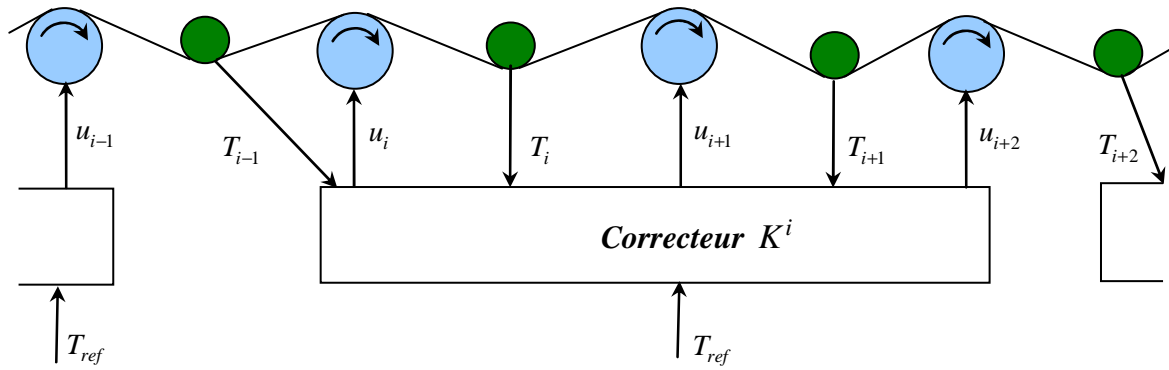


Figure 4.2-3. Stratégie de commande décentralisée pour un système de grande dimension

Dans cet exemple, on construit un sous-système comportant trois moteurs, commandés chacun par une composante u_i du correcteur multivariable désigné par K^i en référence au sous-système S^i . Il s'agit donc d'une décentralisation par blocs. On pourra alors appliquer à chacun des sous-systèmes les techniques de synthèse multivariables basées sur la forme standard abordée en section 3.1 du chapitre 3, ou toute autre méthode de synthèse multivariable.

Le choix de la taille des sous-systèmes résulte d'un compromis entre leur taille et leur nombre : un petit nombre de sous-systèmes diminue par voie de conséquence le nombre des correcteurs, ce qui garantit une bonne performance du système global en termes de poursuite de trajectoire et de rejet de perturbation. À l'inverse un grand nombre de sous-systèmes, augmente le nombre de correcteurs, ce qui rend le système plus robuste face aux éventuelles défaillances de capteurs ou d'actionneurs. C'est d'ailleurs une commande strictement décentralisée qui est le plus souvent utilisée dans l'industrie, ainsi que dans les travaux des chercheurs travaillant sur la fiabilité des systèmes de grande dimension.

Bien entendu, en dehors de ces considérations, on peut toujours s'appuyer sur les résultats des outils mathématiques, comme la matrice RGA, dans le cas d'une structure strictement décentralisée, ou le BRG, dans le cas d'une structure décentralisée par blocs, pour choisir la bonne combinaison d'appariement entrées/sorties.

➤ Méthode avec recouvrement

La méconnaissance des couplages existant entre les divers sous-systèmes et négligés au sous-paragraphe précédent, peut conduire, dans le cas de couplages forts, à l'instabilité du système bouclé. La prise en compte des couplages entre sous-systèmes adjacents a été réalisée par la méthode du recouvrement de sous-systèmes [Sil91] : l'idée est que deux correcteurs consécutifs partagent quelques entrées et sorties. À titre d'exemple, les signaux d'entrée des tracteurs situés à la frontière de deux sous-systèmes proviennent de deux correcteurs consécutifs (Figure 4.2-4). Une telle stratégie de décentralisation avec recouvrement de commandes a déjà donné de bons résultats dans le cas d'un peloton de véhicules [SSS00].

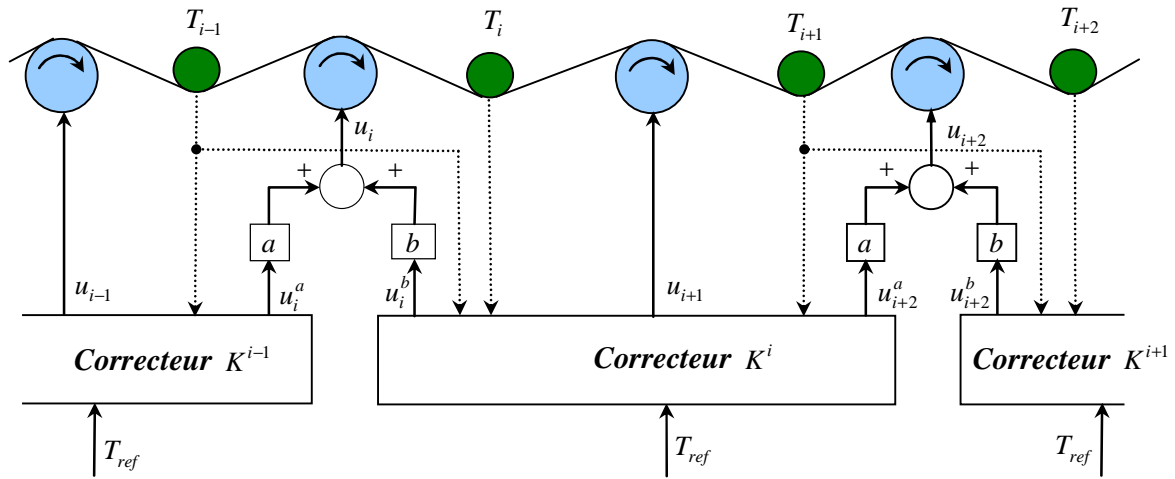


Figure 4.2-4. Stratégie de commande décentralisée avec recouvrement pondéré

On observe sur cette figure que le recouvrement consiste à commander un certain nombre d'actionneurs communs des sous-systèmes, ici les tracteurs i et $i+2$, par deux correcteurs successifs. On retient de cette figure les propriétés suivantes :

$$u_i = au_i^a + bu_i^b, \quad (4.30)$$

$$u_{i+2} = au_{i+2}^a + bu_{i+2}^b. \quad (4.31)$$

D. Knittel a montré [Kni03] que le signal de commande issu du recouvrement, par exemple u_i, u_{i+2} , n'est ni la somme ni la moyenne des signaux à la sortie des correcteurs participant au recouvrement. En réalité il faudrait un échange d'information entre les correcteurs. Cependant, il a montré que la somme obtenue avec les coefficients $a=b=1$ est une bonne approximation pour la stratégie de recouvrement de la Figure 4.2-4.

Mathématiquement, la stratégie de recouvrement (ou overlapping en anglais) se présente comme suit. Pour illustrer la méthode de décentralisation avec recouvrement, on considère dans cet exemple un système linéaire sans les entrées et les sorties. On se limite également au cas de recouvrement entre deux sous-systèmes.

Soit alors le système [Sil91]

$$S : \dot{x} = Ax, \quad (4.32)$$

où $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système S . Nous supposons que x est composé de trois composantes, $x = (x_1^T, x_2^T, x_3^T)^T$, choisies par des considérations physiques ou mathématiques. Les dimensions des trois composantes vectorielles sont respectivement n_1 , n_2 et n_3 telles que $n = n_1 + n_2 + n_3$. Cette partition du vecteur d'état induit une partition de la matrice de système A , de dimension $n \times n$, comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

où les sous-matrices ont des dimensions appropriées.

À présent, on construit les deux vecteurs suivants en vue d'un recouvrement,

$$\begin{cases} \tilde{x}_1 = (x_1^T, x_2^T)^T, \tilde{x}_2 = (x_2^T, x_3^T)^T, \\ \tilde{x} = (\tilde{x}_1^T, \tilde{x}_2^T)^T. \end{cases} \quad (4.34)$$

Cette décomposition du vecteur d'état induit alors sur la matrice A une décomposition avec recouvrement. Cette décomposition n'est autre qu'une transformation matricielle donnée par la relation suivante :

$$\tilde{\dot{x}} = V\dot{x}, \quad (4.35)$$

où V est la matrice de dimension $\tilde{n} \times n$

$$V = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

et $\tilde{n} = n_1 + 2n_2 + n_3$. Dans (4.36) I_1, I_2 et I_3 sont des matrices identités de dimensions correspondant aux vecteurs x_1, x_2 et x_3 contenus dans le vecteur x . La transformation (4.35) définit alors le système « expansé » (expanded en anglais) :

$$\tilde{S} : \dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x}, \quad (4.37)$$

avec l'état $\tilde{x}(t) \in \mathbb{R}^{\tilde{n}}$ et la matrice $\tilde{n} \times \tilde{n}$

$$\tilde{A} = VAU + M. \quad (4.38)$$

La matrice $U = (V^T V)^{-1} V^T$ est la pseudo inverse de V , et vaut

$$U = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}I_2 & \frac{1}{2}I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

qui satisfait donc $UV = I_n$. La matrice M appelée « matrice complémentaire » est choisie comme suit :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}A_{12} & -\frac{1}{2}A_{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}A_{22} & -\frac{1}{2}A_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{22} & \frac{1}{2}A_{22} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}A_{32} & \frac{1}{2}A_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.40)$$

produisant une matrice \tilde{A} de la forme

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & A_{23} \\ \hline A_{21} & 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & 0 & A_{32} & A_{33} \end{array} \right]. \quad (4.41)$$

Notons par x_0 et \tilde{x}_0 les états des systèmes S et \tilde{S} à l'instant $t=0$, respectivement. On observe aisément que $\tilde{x}_0 = Vx_0$, ce qui implique que $x(t; x_0) = U \tilde{x}(t; \tilde{x}_0)$, $\forall t \geq 0$. Ceci signifie que U est une projection de l'espace d'état de S dans l'espace d'état de \tilde{S} . On dit alors que \tilde{S} inclut S ou que S est inclus dans \tilde{S} ; c'est le principe d'inclusion [ISW84].

Il est clair également que la stabilité de \tilde{S} implique la stabilité de S . En revanche, ce qui l'est moins, c'est que la stabilité de \tilde{S} est plus facile à prouver que celle de S .

Définissons à présent le principe d'inclusion, condition principale pour qu'une décentralisation avec recouvrement puisse être effectuée.

Définition 4.2.1 : Le principe d'inclusion

On dit qu'un système \tilde{S} inclut un système S s'il existe une paire de matrices (U, V) telle que $UV = I$ et que, pour n'importe quel état initial $x_0 \in \chi$ de S et pour n'importe quelle entrée fixe $u(t)$, on ait :

$$\begin{aligned} x(t; x_0, u) &= U \tilde{x}(t; Vx_0, u), \\ y[x(t)] &= y[\tilde{x}(t)], \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

Les conditions (4.42) signifient que le système \tilde{S} contient toutes les informations nécessaires sur le système S . Plus important encore, elles signifient que l'on peut extraire n'importe quelle propriété concernant S de \tilde{S} et que l'on peut évaluer \tilde{S} en utilisant S comme un modèle réduit. On dit également [Sil91] que le système \tilde{S} est une « expansion » de S et que ce dernier est une « contraction » de \tilde{S} .

Finalement, on peut présenter le principe de recouvrement sur un système comme suit. Considérons pour cela le système S de (4.32) et son expansion \tilde{S} de (4.37), en présence cette fois d'entrées de commande. Pour les mêmes vecteurs de recouvrement (4.34) on obtient :

$$S : \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Et en choisissant V, U et M selon (4.36), (4.39) et (4.40) respectivement, on obtient :

$$\tilde{S} : \begin{bmatrix} \dot{\tilde{x}}_1 \\ \dot{\tilde{x}}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} A_{11} & A_{12} & 0 & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & 0 & A_{23} \\ \hline A_{21} & 0 & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & 0 & A_{32} & A_{33} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} B_{11} & B_{12} \\ \hline B_{21} & B_{22} \\ B_{31} & B_{32} \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

Le système expansé \tilde{S} peut être représenté par ses deux sous-systèmes disjoints :

$$\tilde{S} : \begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{A}_1 \tilde{x}_1 + \tilde{B}_1 u_1 + \tilde{A}_{12} \tilde{x}_2 + \tilde{B}_{12} u_2, \\ \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{A}_2 \tilde{x}_2 + \tilde{B}_2 u_2 + \tilde{A}_{21} \tilde{x}_1 + \tilde{B}_{21} u_1, \end{aligned} \quad (4.45)$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{A}_1 &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}, & \tilde{A}_2 &= \begin{bmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_1 &= \begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{bmatrix}, & \tilde{B}_2 &= \begin{bmatrix} B_{22} \\ B_{32} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.46)$$

sont les matrices décrivant les deux sous-systèmes « découplés »

$$\begin{aligned} \tilde{S}_1 : \dot{\tilde{x}}_1 &= \tilde{A}_1 \tilde{x}_1 + \tilde{B}_1 u_1, \\ \tilde{S}_2 : \dot{\tilde{x}}_2 &= \tilde{A}_2 \tilde{x}_2 + \tilde{B}_2 u_2, \end{aligned} \quad (4.47)$$

et où

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & A_{13} \\ 0 & A_{23} \end{bmatrix}, & \tilde{A}_{21} &= \begin{bmatrix} A_{21} & 0 \\ A_{31} & 0 \end{bmatrix}, \\ \tilde{B}_{12} &= \begin{bmatrix} B_{12} \\ B_{22} \end{bmatrix}, & \tilde{B}_{21} &= \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{31} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.48)$$

sont les matrices d'interconnexions entre les deux sous-systèmes expansés \tilde{S}_1 et \tilde{S}_2 .

Ainsi, pour calculer la commande du système en utilisant la structure de décentralisation avec recouvrement, il suffirait de calculer des correcteurs locaux pour ces deux sous-systèmes. La loi de commande dépendra alors du type de synthèse et de l'optimisation choisie. On prendra comme exemple le cas d'un retour d'état statique,

$$\begin{aligned} u_1 &= -\tilde{K}_1 \tilde{x}_1, \\ u_2 &= -\tilde{K}_2 \tilde{x}_2, \end{aligned} \quad (4.49)$$

pour chacun des sous-systèmes \tilde{S}_1 et \tilde{S}_2 respectivement. La matrice de gain résultante est diagonale par blocs :

$$\tilde{K}_D = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{K}_1 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{K}_2 \end{array} \right]. \quad (4.50)$$

La loi de commande décentralisée du système expansé \tilde{S} est

$$u_D = -\tilde{K}_D \tilde{x}. \quad (4.51)$$

Cependant, on rappelle que le but est d'implanter une loi de commande sur le système initial S

$$u_D = -K_D x, \quad (4.52)$$

de performance identique à celle de la loi de commande décrite dans (4.51).

On réécrit alors la matrice de gain \tilde{K}_D de la façon suivante

$$\tilde{K}_D = \left[\begin{array}{cc|cc} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \tilde{K}_{23} & \tilde{K}_{24} \end{array} \right] \quad (4.53)$$

afin qu'elle soit conforme à la représentation du système \tilde{S} de (4.44). Du principe d'inclusion découle alors le correcteur décentralisé souhaité K_D , qui est une contraction dans le système initial S du correcteur \tilde{K}_D . Ainsi, à partir de la matrice (4.53) on obtient donc,

$$K_D = \left[\begin{array}{ccc} \tilde{K}_{11} & \tilde{K}_{12} & 0 \\ 0 & \tilde{K}_{23} & \tilde{K}_{24} \end{array} \right], \quad (4.54)$$

pour la loi de commande finale décentralisée avec recouvrement.

4.2.3.2. Stratégies retenues pour les systèmes d'enroulement

Après avoir présenté les principes fondamentaux des deux méthodes de décentralisation horizontale d'un système de grande dimension, on présente dans ce qui suit les structures candidates retenues pour l'étude de notre système d'enroulement de grande dimension, à savoir le banc à neuf moteurs. Bien que nous ayons fait la synthèse d'un correcteur *centralisé* pour le banc expérimental à trois moteurs, nous procédons à l'implantation de commandes *décentralisées* sur ce dernier. Ceci, afin de nous rapprocher le plus possible du cas pratique industriel. Bien entendu, il est prévu d'appliquer ces méthodes de commande décentralisée sur le nouveau banc expérimental de grande vitesse, le banc à sept moteurs, dès que sa réalisation sera achevée.

➤ Système d'enroulement de grande dimension à neuf moteurs

Nous appelons, dans notre étude, système d'enroulement de grande dimension un système comportant plus de trois moteurs. Nous avons choisi comme application un système d'enroulement comportant neuf moteurs, le simulateur non linéaire étant construit comme indiqué dans la 2.1.4.2 du chapitre 2. Ici encore, les correcteurs H_∞ sont synthétisés à partir du modèle linéaire continu, linéarisé autour du point de fonctionnement correspondant à la phase de démarrage. Comme nous l'avons expliqué plus haut, nous ne pouvons pas envisager l'application d'une commande multivariable

centralisée sur ce système de grande dimension. C'est pourquoi nous appliquons les différentes méthodes de décentralisation en utilisant les mêmes méthodes de synthèses abordées au chapitre 3. Cette section se subdivise en deux paragraphes : le premier traite de l'application de la structure décentralisée sans aucun recouvrement, tandis que le deuxième décrit l'application avec recouvrement.

➤ Structure décentralisée sans recouvrement pour un système d'enroulement à neuf moteurs

Dans ce paragraphe, nous appliquons une décomposition du système étudié en trois sous-systèmes disjoints, comportant chacun trois moteurs. Les termes de couplage existant entre deux sous-systèmes consécutifs sont donc volontairement négligés dans cette partie. Un correcteur H_∞ est calculé séparément pour chaque sous-système. L'architecture de la commande est illustrée sur la Figure 4.2-5.

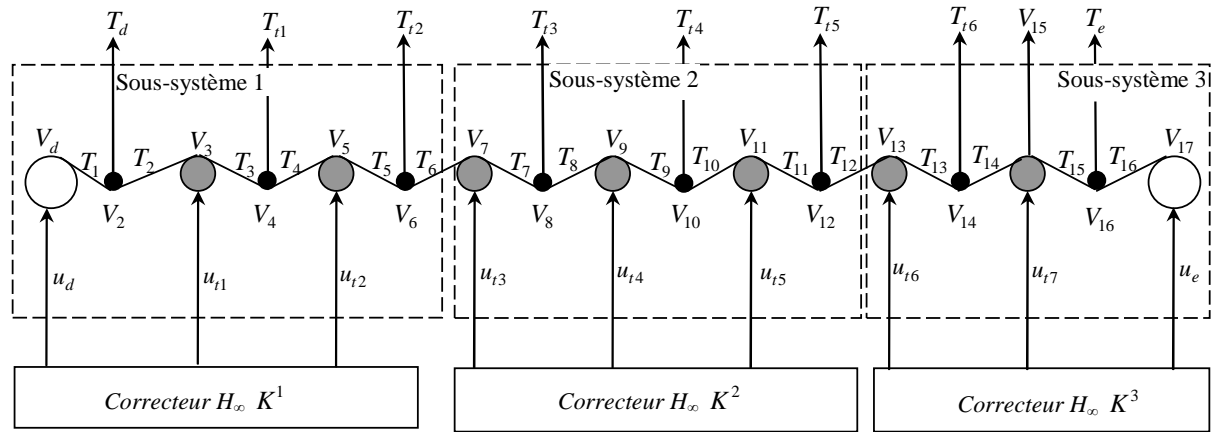


Figure 4.2-5. Commande H_∞ décentralisée sans recouvrement

Rappelons ci-dessous les équations d'état des trois sous-systèmes :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Les vecteurs d'état sont respectivement $x_1 = [V_d \ (T_i \ V_{i+1})_{i=1,\dots,6}]^T$, $x_2 = [(V_i \ T_i)_{i=7,\dots,12}]^T$ et $x_3 = [(V_i \ T_i)_{i=13,\dots,16} \ V_{17}]^T$, et les vecteurs de commande sont :

$$u_1 = \begin{bmatrix} u_d \\ u_{t1} \\ u_{t2} \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} u_{t3} \\ u_{t4} \\ u_{t5} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad u_3 = \begin{bmatrix} u_{t6} \\ u_{t7} \\ u_{t8} \end{bmatrix}.$$

Dans le cas présent d'une commande décentralisée sans recouvrement, les sous-matrices A_{12} , A_{21} , A_{23} et A_{32} qui correspondent aux couplages entre les sous-systèmes sont négligées. En regardant de plus près, on constate que ces matrices ne contiennent en réalité qu'un élément non nul, comme par exemple :

$$A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline E_0/l_i & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{12 \times 12}. \quad (4.56)$$

En outre, la Figure 4.2-5 montre que tous les asservissements sont des asservissements en tension, sauf celui du dernier tracteur qui est en vitesse. Bien entendu, on pourrait envisager d'appliquer cette même structure de commande avec le placement de l'asservissement de vitesse à un autre endroit. On notera que les trois correcteurs n'échangent pas d'information et sont indépendants l'un de l'autre.

➤ Structure décentralisée avec recouvrement pour un système d'enroulement à neuf moteurs

Les résultats du paragraphe précédent ont montré combien la commande décentralisée en l'absence de recouvrement est limitée. C'est pour cette raison que nous introduisons ici la commande décentralisée avec recouvrement. L'architecture de cette commande est illustrée sur la Figure 4.2-6.

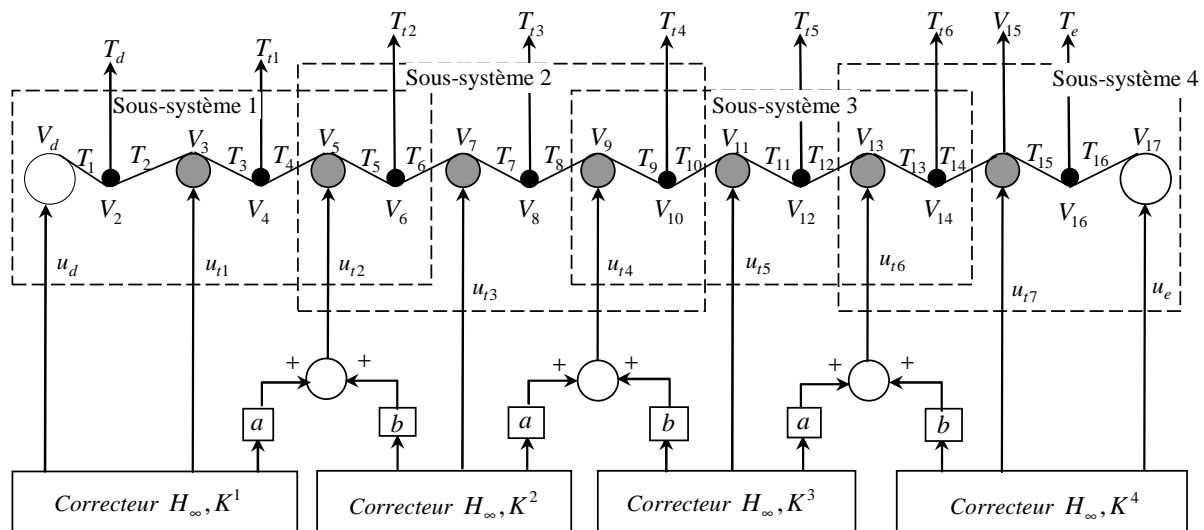


Figure 4.2-6. Correcteur H_∞ décentralisé avec recouvrement

La structure de décentralisation de la Figure 4.2-6 comporte cette fois-ci quatre sous-systèmes au lieu de trois et donc aussi quatre correcteurs. Pour mieux illustrer la différence entre les deux architectures de commande étudiées, nous avons gardé le même appariement des variables d'entrée et de sortie : tous les asservissements sont en tension sauf celui du dernier tracteur qui est en vitesse. Bien entendu, on garde également les mêmes exigences de performances fréquentielles. Pour cela on utilise les mêmes filtres de pondération.

4.2.4. Synthèse des correcteurs H_∞ décentralisés pour les systèmes d'enroulement

Dans ce paragraphe les différentes stratégies de synthèses développées au chapitre 3 seront appliquées sur le système d'enroulement, en utilisant les stratégies de décentralisation avec et sans recouvrement.

4.2.4.1. Commande H_∞ à $1ddl$ avec optimisation LMI

La stratégie de décentralisation sans recouvrement sera appliquée directement sur le système à neuf moteurs. Celle avec recouvrement, quant à elle, sera non seulement appliquée sur le système à

neuf moteurs mais encore implantée sur le banc expérimental à trois moteurs de l'ERT Enroulement.

➤ Commande 1ddl décentralisée sans recouvrement

Les sous-systèmes considérés comportent tous trois moteurs. Les filtres de pondération sont choisis identiques à ceux proposés dans la thèse de H. Koç [Koç00]. Le schéma de commande global est présenté sur la Figure 4.2-7.

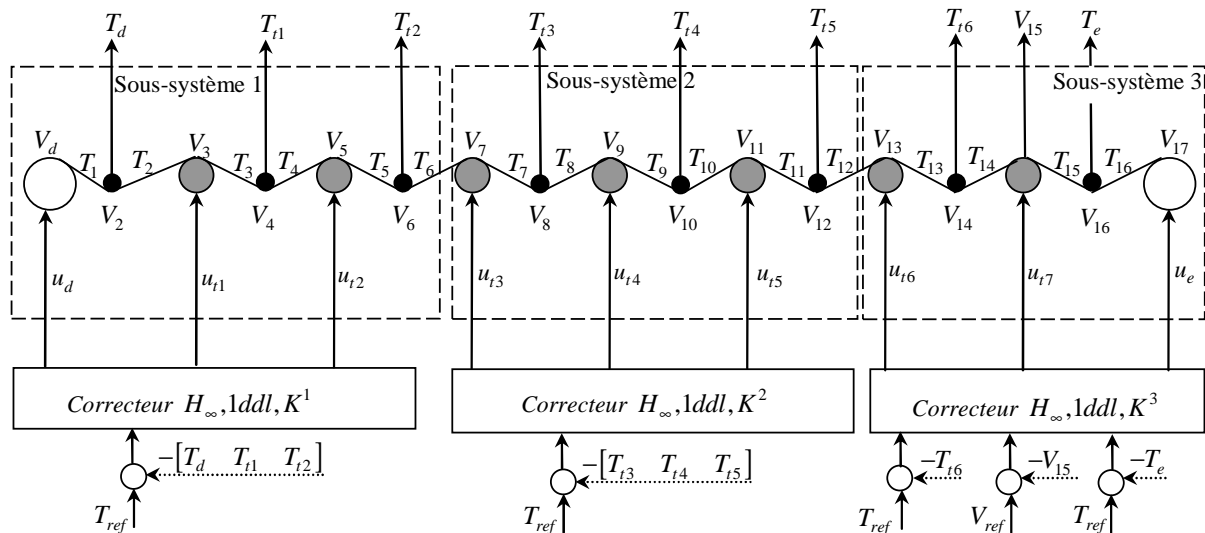


Figure 4.2-7. Commande H_∞ 1ddl sans recouvrement

La simulation de cette stratégie de commande appliquée au modèle non linéaire à neuf moteurs a fourni les résultats résumés dans les figures ci-après. Dans ces essais, un saut de vitesse est appliqué toutes les 50 secondes, la consigne de tension restant constante. Ceci permet de visualiser le couplage entre vitesse et tensions de bande.

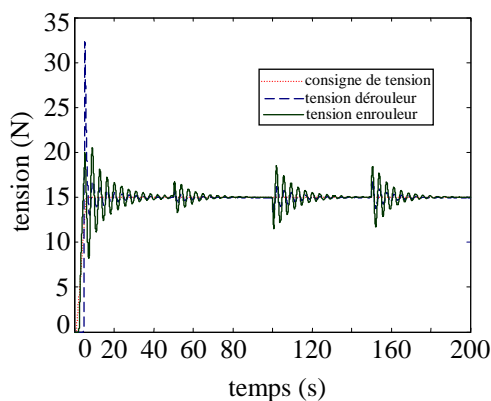


Figure 4.2-8. Tensions de bande de l'enrouleur et du dérouleur

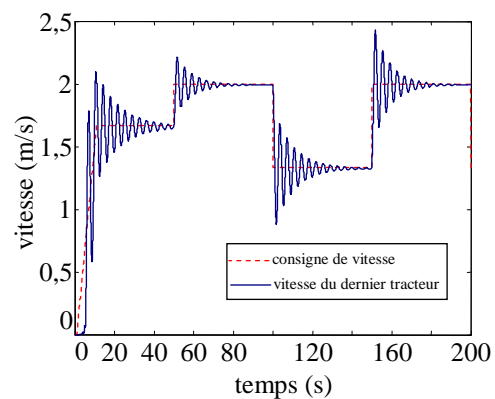


Figure 4.2-9. Vitesse du tracteur central du 3ème sous-système

L'agrandissement de la phase de démarrage de la Figure 4.2-8 et de la Figure 4.2-9 est représenté sur la Figure 4.2-10 et la Figure 4.2-11, respectivement.

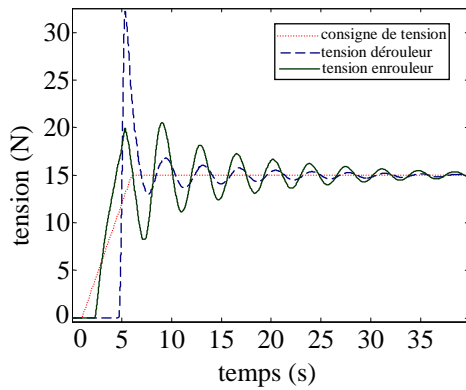


Figure 4.2-10. Tension de bande de l'enrouleur et du dérouleur : phase de démarrage

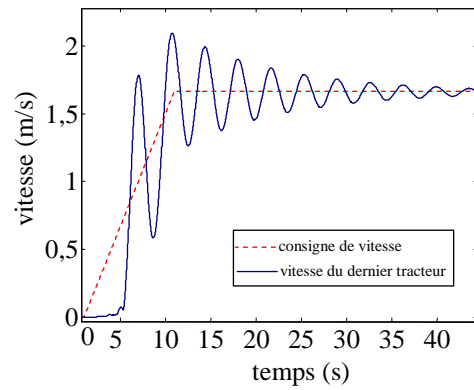


Figure 4.2-11. Vitesse du tracteur central du 3ème sous-système : phase de démarrage

Les variations autour du régime établi sont représentées sur la Figure 4.2-12 et la Figure 4.2-13.

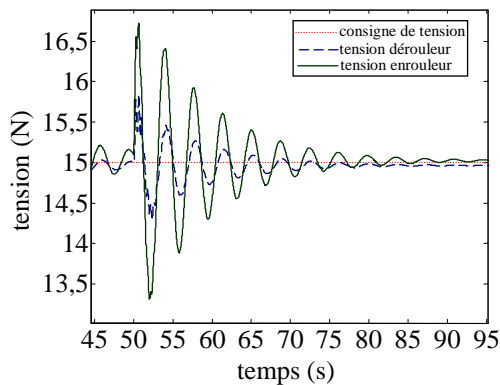


Figure 4.2-12. Tension de bande de l'enrouleur et du dérouleur : régime établi

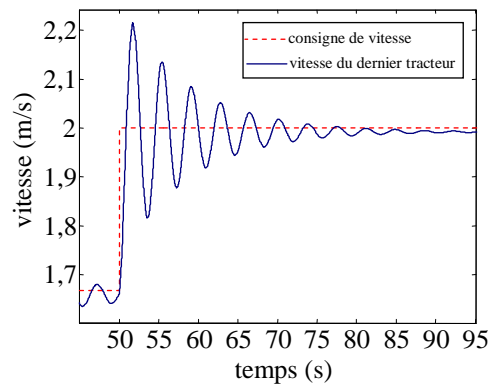


Figure 4.2-13. Vitesse du tracteur central du 3ème sous-système : régime établi

Les différentes figures précédentes mettent en évidence l'effet d'un saut de consigne de vitesse sur la tension de déroulement et d'enroulement de bande. Les interactions de la vitesse vers la tension sont plus grandes au niveau de l'enrouleur. Ceci est dû au fait que la commande de vitesse est appliquée au dernier sous-système contenant l'enrouleur. Il apparaît ainsi qu'en régime établi un sous-système situé beaucoup plus en amont a une interaction moindre de la vitesse sur la tension.

Par ailleurs, la phase de démarrage fait également apparaître un fort couplage entre la vitesse et la tension de bande.

Ainsi, conformément à notre attente, cette stratégie de commande n'est pas appropriée si on désire avoir des faibles variations de tension lors de changements de vitesse. Une amélioration des résultats est escomptée par l'emploi d'une commande décentralisée avec recouvrement. L'application de cette stratégie est décrite au paragraphe suivant.

➤ Commande $1ddl$ décentralisée avec recouvrement

Une implantation du correcteur H_∞ $1ddl$ décentralisé avec recouvrement a été réalisée sur le banc expérimental d'enroulement à trois moteurs selon la Figure 4.2-14.

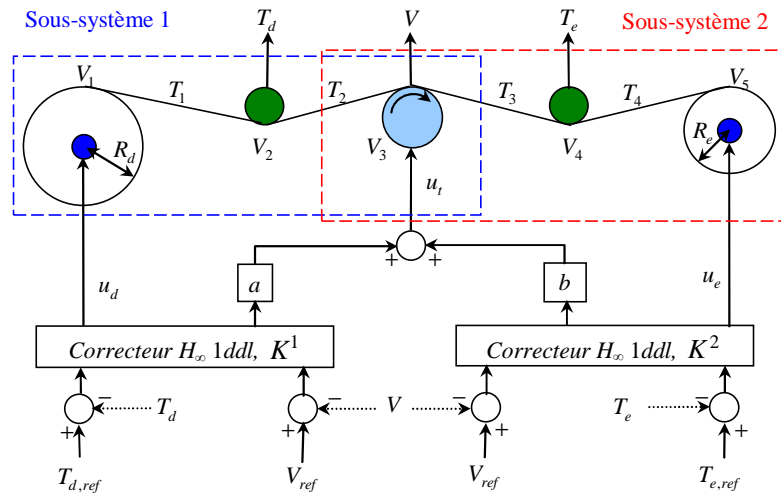


Figure 4.2-14. Commande H_∞ 1ddl décentralisée avec recouvrement sur le banc à trois moteurs

Les mesures obtenues à partir du banc expérimental sont données sur la Figure 4.2-15.

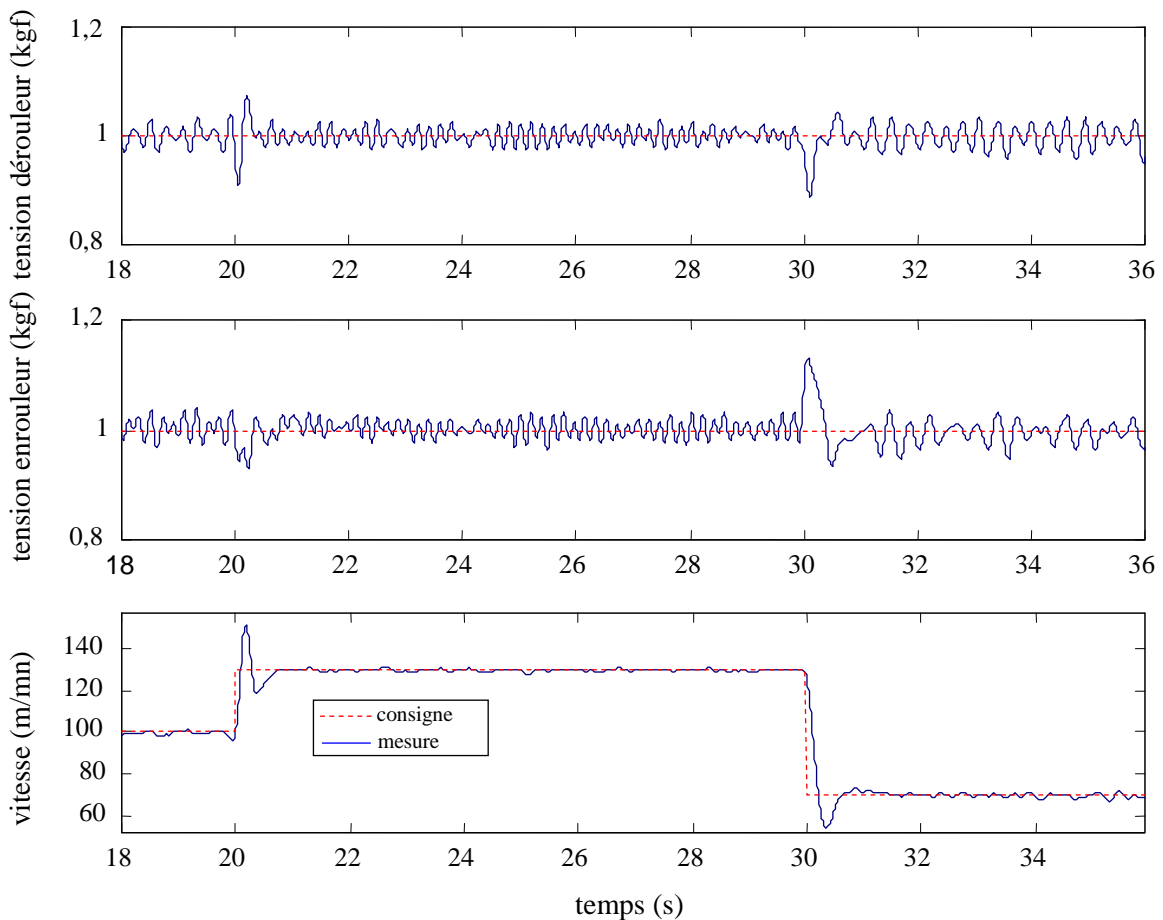


Figure 4.2-15. Mesures de l'application du correcteur H_∞ 1ddl avec recouvrement sur le banc expérimental à trois moteurs

Il apparaît clairement sur la Figure 4.2-15 que l'erreur statique est éliminée sur les mesures des tensions et de la vitesse. On observe également l'existence d'un dépassement au niveau des sauts de vitesse, causé par le patinage de la bande sur le rouleau tracteur. Cependant, un bon découplage entre

la vitesse et la tension est réalisé sur le banc à trois moteurs grâce à la technique du recouvrement.

Pour le système à neuf moteurs, uniquement des simulations ont été réalisées jusqu'à présent, puisque le nouveau banc expérimental de l'ERT Enroulement n'est pas encore disponible. Le schéma de commande d'un correcteur H_∞ à 1ddl pour un tel système, avec une structure décentralisée avec recouvrement, est illustré sur la Figure 4.2-16.

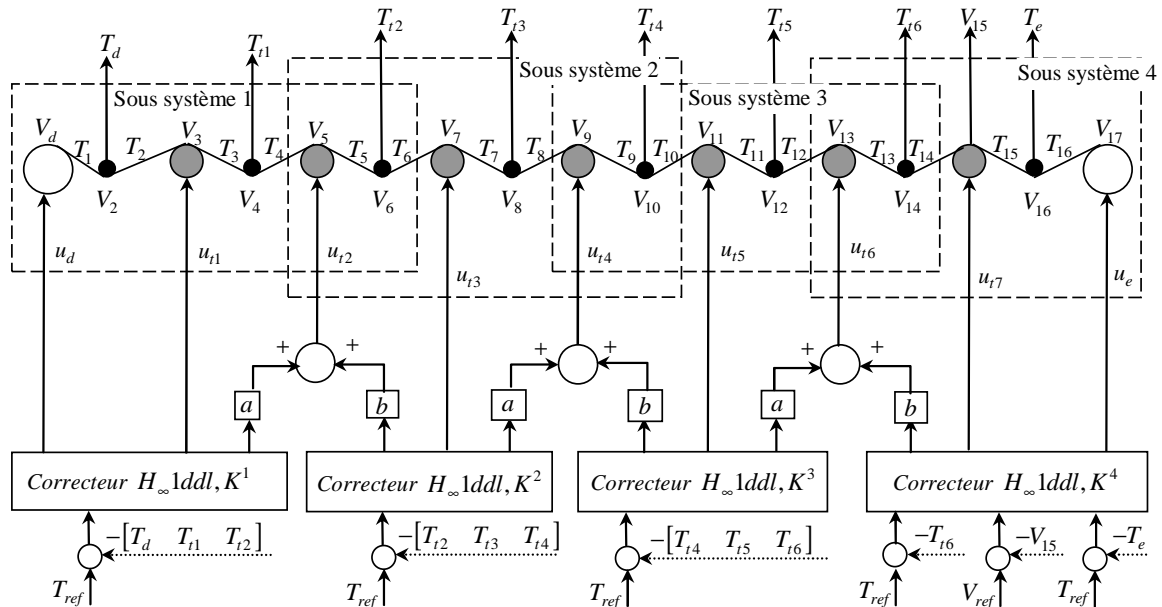


Figure 4.2-16. Commande H_∞ 1ddl décentralisée avec recouvrement

La comparaison entre les deux méthodes de commande, avec et sans recouvrement, est présentée sur les figures ci-dessous.

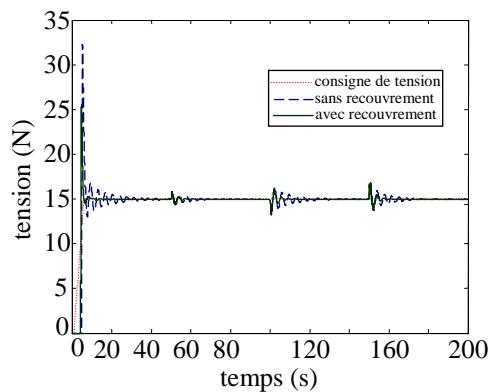


Figure 4.2-17. Comparaison de la tension de dérouleur du modèle à neuf moteurs

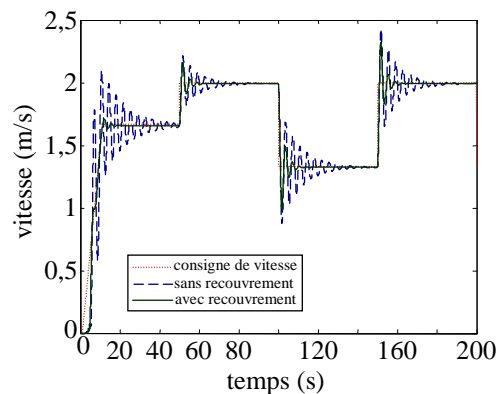


Figure 4.2-18. Comparaison de la vitesse du dernier tracteur du modèle à neuf moteurs

Un agrandissement de la phase de démarrage de la Figure 4.2-17 et de la Figure 4.2-18 est illustré respectivement sur la Figure 4.2-19 et la Figure 4.2-20 ci-dessous.

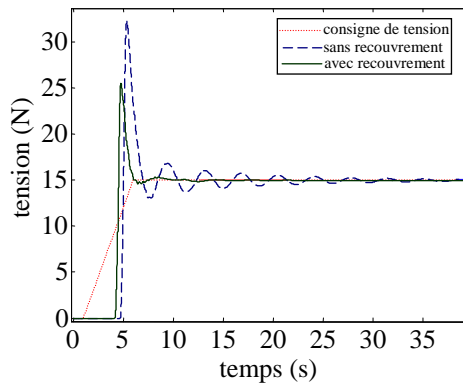


Figure 4.2-19. Phase de démarrage (tension de dérouleur)

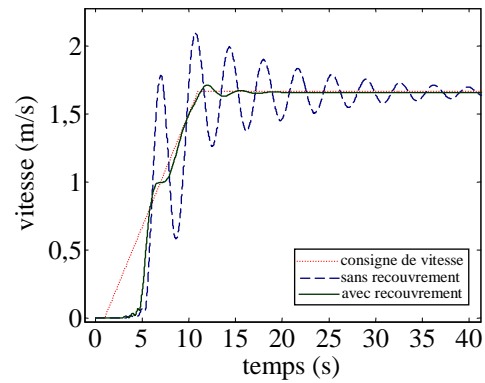


Figure 4.2-20. Phase de démarrage (vitesse du dernier tracteur)

Le régime établi est illustré quant à lui sur la Figure 4.2-21 et la Figure 4.2-22 ci-après.

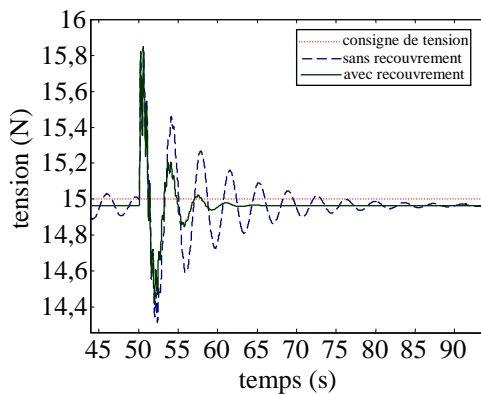


Figure 4.2-21. Régime établi (tension dérouleur)

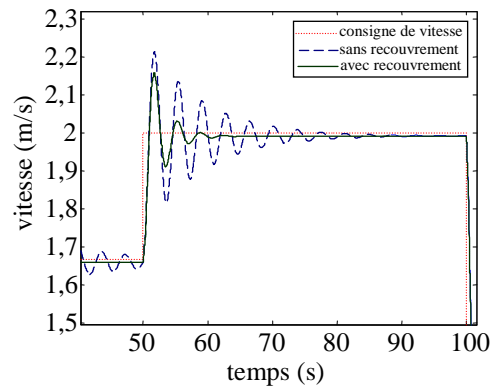


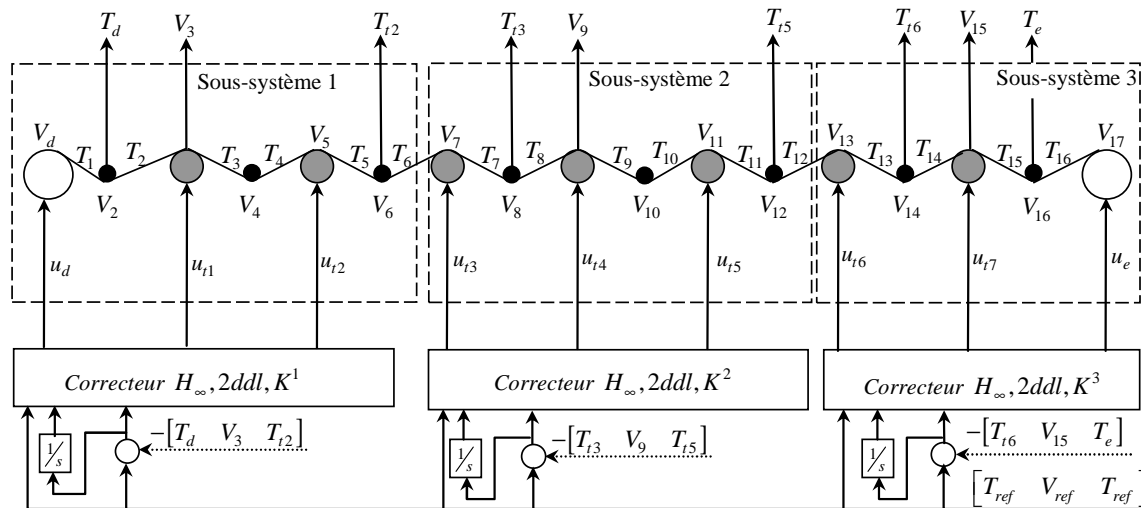
Figure 4.2-22. Régime établi (vitesse du dernier tracteur)

Que ce soit en vitesse ou en tension, ces figures montrent clairement que l'architecture de commande décentralisée avec recouvrement apporte des avantages par comparaison avec la commande décentralisée sans recouvrement. En effet, dans le cas de la commande décentralisée avec recouvrement, on observe une vitesse et une tension de bande plus lisses, avec une erreur de traînage presque nulle, un meilleur suivi en phase de démarrage, une erreur statique nulle en régime permanent, un temps d'établissement du régime permanent inférieur à celui de la commande décentralisée sans recouvrement, et, point primordial, une diminution notable du couplage vitesse-tension. Ceci illustre donc les avantages apportés (et attendus) par la commande décentralisée avec recouvrement dans le cadre de l'application à un système de grande dimension.

4.2.4.2. Commande H_∞ à $2ddl$ avec optimisation LMI

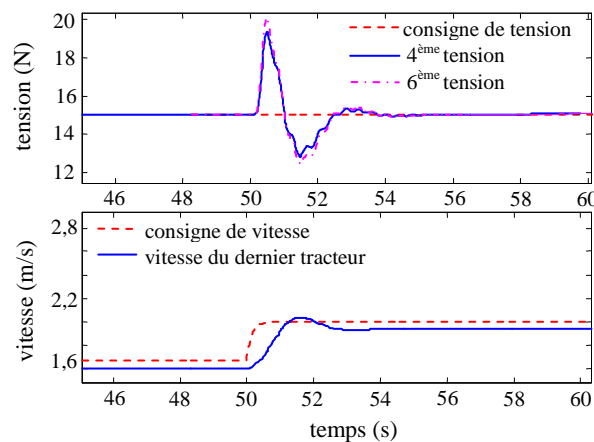
Dans cette section, on présentera les résultats de l'application du correcteur $2ddl$ avec intégrateur explicite au système d'enroulement à neuf moteurs. Les schémas de synthèses ainsi que le choix des filtres de pondération sont décrits au chapitre 3.

Un correcteur H_∞ $2ddl$ avec intégrateur explicite (cf. chapitre 3, section 3.1.3.2, figure 3.1-13) est appliqué dans cette section au système à neuf moteurs avec structure décentralisée sans recouvrement, comme présenté sur la Figure 4.2-23.

Figure 4.2-23. Commande H_∞ 2ddl décentralisée sans recouvrement

On remarque ici que, parmi plusieurs configurations d'appariement d'entrées/sorties, seule la configuration présentée sur la Figure 4.2-23 a permis de synthétiser un correcteur H_∞ 2ddl avec intégrateur explicite. Dans cette configuration le deuxième moteur (moteur tracteur) de chaque sous-système est « commandé en vitesse » (c'est-à-dire qu'on réalise l'asservissement en vitesse de ce moteur) tandis que les deux autres sont « commandés en tension ».

Les résultats de simulation du correcteur H_∞ 2ddl appliqué sur le système non linéaire d'enroulement à neuf moteurs sont présentés sur la Figure 4.2-24.

Figure 4.2-24. Correcteur H_∞ 2ddl décentralisé sans recouvrement avec intégrateur explicite appliqué au système non linéaire à neuf moteurs

Nous observons sur la Figure 4.2-24 l'existence d'une erreur statique, malgré la présence des intégrateurs explicites dans le correcteur. Nous observons également un couplage vitesse-tension, de la vitesse vers la tension à l'instant 50 s suite à un saut de vitesse. Ces deux observations s'expliquent par le fait que la stratégie de décentralisation sans recouvrement néglige les termes d'interconnexions entre les trois sous-systèmes.

Nous n'avons pas pu réaliser de correcteur H_∞ 2ddl, avec ou sans intégrateur explicite, pour le cas de la structure décentralisée avec recouvrement, et ce malgré la présence de correcteurs locaux 2ddl satisfaisant les cahiers des charges des boucles fermées locales. Effectivement, comme nous allons le voir dans le dernier paragraphe de ce chapitre, la stabilité des boucles fermées locales ne permet pas

d'en tirer des conclusions quant à la stabilité de la boucle fermée globale.

4.2.4.3. Commande H_∞ par retour d'état statique avec optimisation BMI

Des correcteurs par retour d'état avec et sans intégrateur sont appliqués sur le système d'enroulement à trois et à neuf moteurs avec les stratégies de décentralisation. Tout d'abord le principe de la commande par retour d'état utilisant la synthèse BMI est rappelé, puis adapté au cas des systèmes décentralisés. La synthèse est effectuée en local, c'est-à-dire séparément pour chacun des sous-systèmes. Ensuite sera appliquée la stratégie de décentralisation choisie.

➤ Adaptation du problème de synthèse

Rappelons que cette synthèse consiste à calculer une loi de commande $u = -Kx$. Les étapes de synthèse d'un correcteur pour un sous-système restent les mêmes que celles expliquées dans le cas du système global à trois moteurs. Les sous-systèmes S^i considérés sont représentés par les équations (4.17).

L'objectif de la commande est d'imposer d'une part une limite supérieure α à la partie réelle du pôle le plus lent de la boucle fermée, d'autre part une borne supérieure aux gains des retours de rétroaction du correcteur statique $(K^i)_{i=1,\dots,N}$, où N désigne le nombre de sous-systèmes. Les deux exigences se traduisent donc par les BMI suivantes [HHB99] :

tester l'existence de K^i tel que :

$$\begin{aligned} \left| K_{qj}^i \right| &\leq K_{qj,\max}^i \\ (A_{ii} - B_{ii}K^i)^T P_i + P_i(A_{ii} - B_{ii}K^i) &< -2\alpha P_i \\ P_i &> 0, \end{aligned} \quad (4.57)$$

où K_{qj}^i est le $(q, j)^{\text{ème}}$ élément du $i^{\text{ème}}$ correcteur K^i . La limitation du gain du correcteur est directement liée à la limitation d'énergie des actionneurs à l'entrée du système. La partie réelle α délimite la région d' α -stabilité des pôles de la boucle fermée, et est encore désignée en anglais « *decay rate* ».

La synthèse proposée devra satisfaire une deuxième contrainte : la loi de commande devra être calculée de façon à minimiser le gain \mathcal{L}_2 du vecteur d'entrée u_i vers le vecteur de sortie y_i , c'est-à-dire à assurer que la norme H_∞ de la matrice de transfert en boucle fermée soit inférieure ou égale à γ .

Par application du lemme borné réel (BRL) [BGF+94], cette nouvelle contrainte pourra être formulée par la BMI suivante :

$$\begin{aligned} \min \gamma, \text{ tel que :} \\ \begin{bmatrix} (A_{ii} - B_{ii}K^i)^T P_i + P_i(A_{ii} - B_{ii}K^i) + C_{ii}^T C_{ii} & P_i B_{ii} \\ B_{ii}^T P_i & -\gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \\ P_i > 0. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Le correcteur K^i recherché est calculé en résolvant simultanément les deux BMIs (3.92) et (4.58).

➤ **Commande H_∞ par retour d'état statique (approche classique)**

Le correcteur K^i calculé dans la section précédente constitue l'approche classique du retour d'état statique H_∞ . Ce correcteur fait partie intégrante du correcteur global K qui se calculera selon la méthode de décentralisation choisie. Rappelons en revanche que ce correcteur a besoin d'une matrice M , dite de préfiltre ou d'anticipation (*feedforward*) ou encore de compensation de gain, afin d'assurer un gain statique unitaire. Pour chacun des sous-systèmes considérés individuellement, cette matrice de compensation de gain est égale à :

$$M = [C_{ii}(B_{ii}K^i - A_{ii})^{-1}B_{ii}]^{-1}. \quad (4.59)$$

Cependant, au lieu de considérer les sous-systèmes séparément, il faudra les traiter tous en même temps, comme il va être expliqué plus loin.

▪ **Structure de commande pour le cas d'une méthode décentralisée**

Un exemple d'une structure de commande décentralisée avec retour d'état statique est illustré sur la Figure 4.2-25.

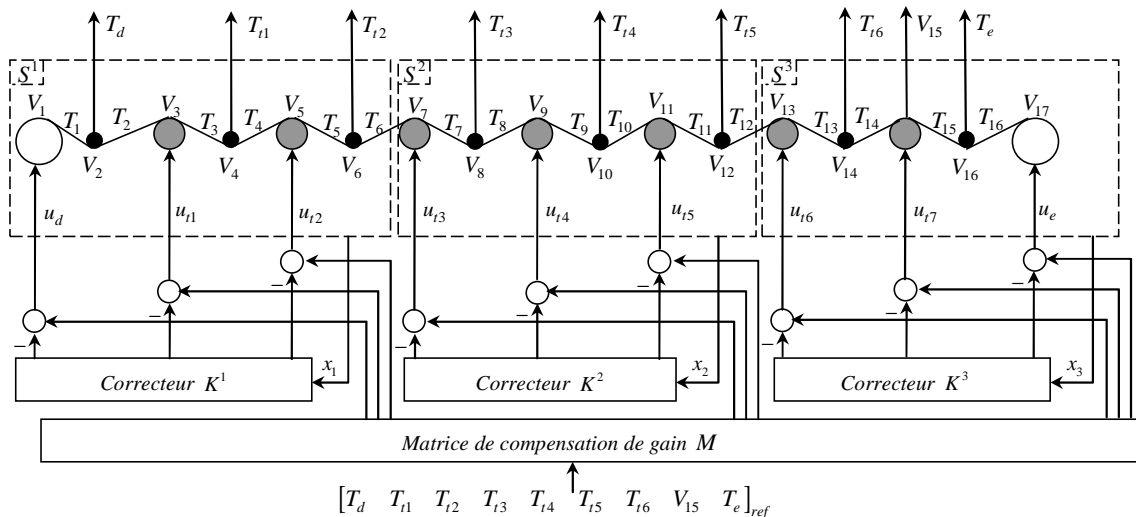


Figure 4.2-25. Retour d'état statique H_∞ décentralisé sans recouvrement sur le système à neuf moteurs

Dans le cas du système à neuf moteurs de la Figure 4.2-25 le correcteur K est calculé localement pour chacun des sous-systèmes S^1, S^2 et S^3 . Les correcteurs locaux K^1, K^2 et K^3 sont appliqués sur cette structure décentralisée, sans recouvrement. Ceci revient à appliquer un correcteur diagonal par blocs $K = \text{diag}(K^1, K^2, K^3)$ au vecteur d'état global $x = [x_1^T \ x_2^T \ x_3^T]^T$.

L'annulation de l'erreur statique est assurée par la matrice de compensation de gain M de la Figure 4.2-25. Cette matrice est obtenue en remplaçant respectivement dans (4.59) les matrices locales A_{ii}, B_{ii} et C_{ii} par les matrices A, B et C du système global, prenant ainsi en compte les interconnexions des sous-systèmes. De plus, le correcteur local K^i est remplacé par le correcteur global K . On obtient ainsi la formule :

$$M = [C(BK - A)^{-1}B]^{-1}. \quad (4.60)$$

Rappelons que la matrice de système A possède la structure suivante

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & * & 0 \\ * & A_{22} & * \\ 0 & * & A_{33} \end{pmatrix}, \quad (4.61)$$

où les blocs matriciels désignés par « * » contiennent dans leurs coins supérieurs ou inférieurs des termes non nuls dus aux couplages entre les sous-systèmes. La non prise en compte de ces termes dans le calcul de la matrice M dans (4.60) constitue une erreur, conduisant à une élimination imparfaite de l'erreur statique.

Étant donné que le résultat du retour d'état classique a déjà été donné pour le système à trois moteurs, on présentera ci-après des résultats de simulation sur le système à neuf moteurs, mais cette fois avec une structure décentralisée avec recouvrement de commandes. Le principe est le même que précédemment, moyennant une adaptation afin de se ramener à la Figure 4.2-4. Le résultat de la commande décentralisée sans recouvrement avec retour d'état statique sera présenté dans la prochaine section dans un but comparatif.

Dans la Figure 4.2-26 sont présentées les réponses temporelles de la tension d'enrouleur et de la vitesse linéaire du tracteur du dernier sous-système, le seul commandé en vitesse. Le système non linéaire à neuf moteurs est muni d'une commande décentralisée selon la méthode avec recouvrement. Tous les sous-systèmes sont commandés par des retours d'état statiques, calculés grâce à une synthèse BMI à l'aide du logiciel Penbmi[®] de Tomlab[®], dans l'environnement Matlab[®]. Les algorithmes sont écrits avec l'interface Yalmip[®].

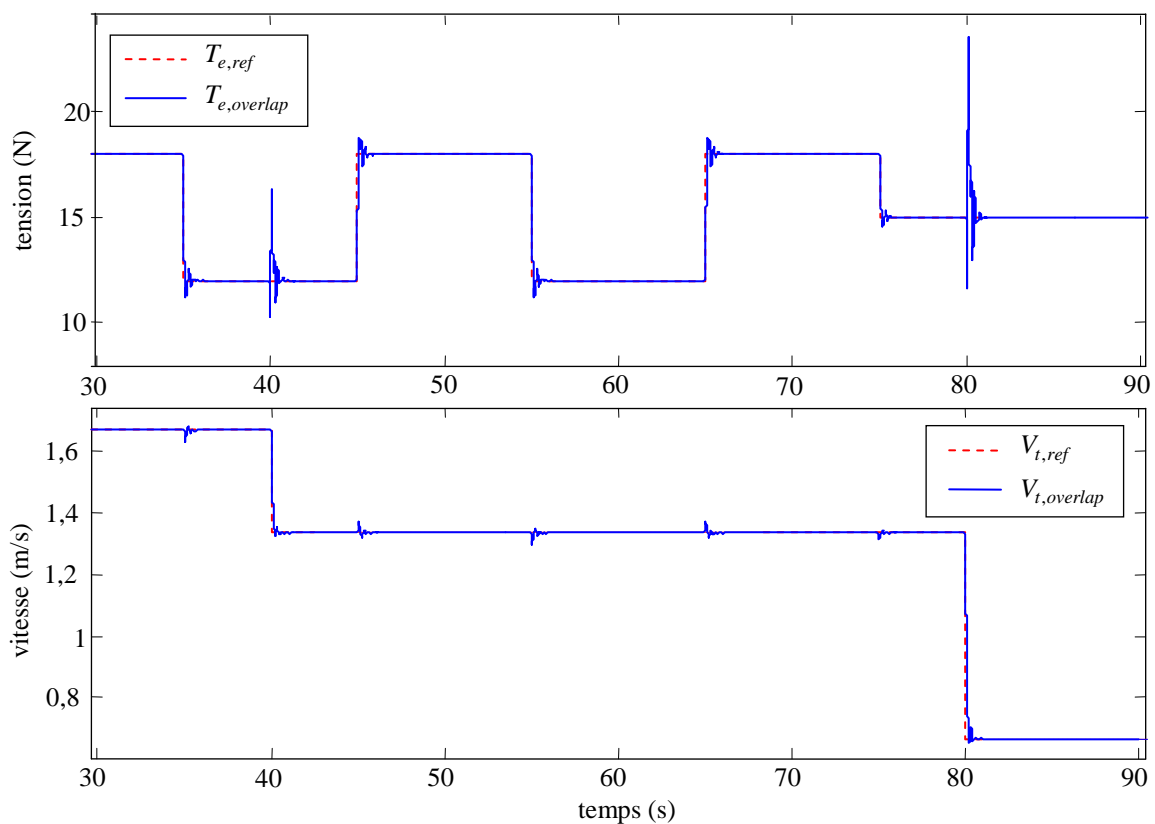


Figure 4.2-26. Commande H_∞ par retour d'état décentralisé avec recouvrement

La Figure 4.2-26 montre clairement que la commande par retour d'état décentralisée avec

recouvrement assure de bonnes performances, notamment une bonne poursuite de trajectoire, un temps de réponse très faible, une absence de dépassement, une erreur statique nulle, et surtout un très faible couplage tension-vitesse et vitesse-tension. Ceci est dû, en grande partie, aux bonnes performances obtenues par le retour d'état statique résultant de la synthèse BMI. D'aussi bons résultats n'avaient pas été obtenus auparavant sur un banc d'enroulement à neuf moteurs avec une structure H_∞ classique [KLG+03].

➤ Commande par retour d'état avec action intégrale partielle

▪ Motivations

Une alternative à la matrice de compensation de gain M , pour éliminer l'erreur statique des réponses indicielles et celles résultant de l'application de perturbations additives constantes, consiste à introduire un ou de plusieurs intégrateurs dans la boucle de correction. Une façon classique de procéder consiste à ajouter autant d'intégrateurs que de sorties mesurées. Mais cette méthode augmente considérablement le nombre d'états du système à commander. Étant donné que le système étudié est déjà de grande dimension, donc à grand nombre de variables d'état, un tel ajout augmenterait encore de façon excessive la dimension de la matrice de Lyapunov P , compliquant par conséquent la résolution du problème de synthèse BMI, dont on connaît la sensibilité à la dimension des matrices. L'idée est alors de limiter l'ajout d'intégrateurs aux seules sorties mesurées qui ont une importance critique pour le procédé. Comme il a été mentionné tout au long de ce mémoire, la variable que nous considérons la plus critique dans ce travail est la vitesse linéaire, mesurée à partir des variateurs reliés aux tracteurs. C'est en se basant sur ce raisonnement que nous avons développé une nouvelle technique de commande, qui sera présentée dans la prochaine section.

▪ Ajout d'une action intégrale partielle

La structure du retour d'état avec « action intégrale partielle » est illustrée sur la Figure 4.2-27 dans le cas général d'un système représenté par les matrices (A, B, C) .

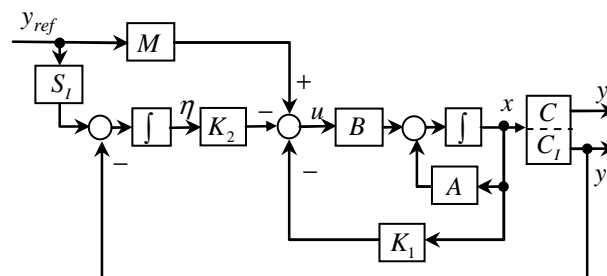


Figure 4.2-27. Retour d'état statique avec action intégrale partielle et matrice de compensation de gain

À la différence d'une action intégrale complète, la matrice de compensation M , qui représente dans cette figure un terme de compensation, est toujours nécessaire, dans le but d'assurer un gain en boucle fermée unitaire entre les sorties mesurées qui n'ont pas été rebouclées par intégrateur et leurs consignes respectives. Une matrice de sélection S_I est introduite pour sélectionner dans le vecteur de sortie les composantes qui seront, elles, rebouclées par le biais d'un intégrateur ainsi que décrit dans l'ouvrage de É. Ostertag [Ost06] :

$$y_I = S_I y, \quad (4.62)$$

donnant lieu ainsi, à une sous-matrice de C :

$$C_I = S_I C. \quad (4.63)$$

On construit ainsi un système augmenté, correspondant aux équations :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ -C_I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ S_I \end{pmatrix} y_{ref} = \tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} + \tilde{B} u + \begin{pmatrix} 0 \\ S_I \end{pmatrix} y_{ref} \\ y = (C \ 0) \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} = \tilde{C} \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (4.64)$$

La loi de commande, déduite directement de la Figure 4.2-27, devient :

$$u = -(K_1 \ K_2) \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} + M y_{ref} = -\tilde{K} \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} + M y_{ref}, \quad (4.65)$$

et l'équation de la boucle fermée s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A - BK_1 & -BK_2 \\ -C_I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} BM \\ S_I \end{pmatrix} y_{ref} \\ &= (\tilde{A} - \tilde{B}\tilde{K}) \begin{pmatrix} x \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} BM \\ S_I \end{pmatrix} y_{ref}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

La matrice de compensation de gain M est calculée en réécrivant la moitié supérieure de l'équation (4.66) dans le cas du régime permanent :

$$0 = (A - BK_1)x_\infty - BK_2\eta_\infty + BM y_{ref}, \quad (4.67)$$

où x_∞ et η_∞ désignent l'état et sa partie augmentée en régime permanent. De (4.67) on déduit que

$$x_\infty = (BK_1 - A)^{-1} B (-K_2\eta_\infty + M y_{ref}), \quad (4.68)$$

ce qui correspond à la sortie en régime permanent suivante :

$$y_\infty = -[C(BK_1 - A)^{-1}B] K_2\eta_\infty + [C(BK_1 - A)^{-1}B] M y_{ref}. \quad (4.69)$$

Si l'on supprime l'action intégrale de l'équation (4.69), on choisit alors $M = [C(BK_1 - A)^{-1}B]^{-1}$ comme dans (4.60), dans le but de compenser le gain de la boucle fermée, sous l'hypothèse que la matrice $[C(BK_1 - A)^{-1}B]$ est inversible, donc nécessairement carrée (même nombre d'entrées que de sorties). Posons alors

$$M = \rho [C(BK_1 - A)^{-1}B]^{-1}, \quad (4.70)$$

où ρ est un coefficient scalaire, $0 \leq \rho \leq 1$. Dû à la présence d'intégrateurs, η_∞ s'ajuste de manière à vérifier $y_{I,\infty} = S_I y_{ref}$. Deux situations peuvent se présenter :

Première situation : si l'on fait $\rho = 1$ dans (4.70), les égalités $y_\infty = y_{ref}$ et $y_{I,\infty} = S_I y_{ref}$ qui découle de la précédente sont satisfaites pour $\eta_\infty = 0$. Le terme d'anticipation M fournit alors la

totalité du signal de commande nécessaire pour éliminer l'erreur statique de la boucle fermée, de telle sorte que les intégrateurs n'apportent plus aucune contribution, pour autant qu'il s'agisse de la poursuite de consignes, constantes bien entendu. Le temps de réponse à des sauts de consignes peut être rallongé par l'introduction dans la boucle fermée des pôles supplémentaires correspondant à l'ajout des intégrateurs. Comme le terme de compensation agit immédiatement après l'application de tels sauts, il accélère cette réponse, éventuellement au prix de signaux de commande plus forts, provoquant ainsi des dépassements de la sortie du système bouclé. Ceci s'explique analytiquement par les zéros introduits par ce terme de compensation dans la fonction de transfert de la boucle fermée. Notons également que, comme M est alors précisément égal à l'inverse du gain statique de la boucle interne, le suivi de consignes constantes par les sorties qui ne sont pas rebouclées par un intégrateur dépendra fortement de l'exactitude du modèle du procédé.

Deuxième situation : le fait de choisir au contraire $\rho < 1$ dans (4.70) et (4.69) peut diminuer l'excès de commande et par conséquent le dépassement de la boucle fermée en réponse aux sauts de consigne. Mais dans ce cas l'égalité $y_\infty = y_{ref}$ ne peut plus être pleinement satisfaite que si $C_I = C$, soit si $S_I = I$, c'est-à-dire si une action intégrale complète et non seulement partielle est appliquée. Dans ce cas, η dans (4.69) ne s'annulera pas en régime permanent, sa valeur dérivée de l'équation (4.70) satisfaisant alors la relation

$$K_2 \eta_\infty = \frac{\rho - 1}{\rho} M y_{ref} . \quad (4.71)$$

▪ *Application au système à neuf moteurs*

Nous considérons le cas de la structure décentralisée sans recouvrement de la Figure 4.2-25. On illustrera ici l'efficacité de l'intégrateur pour l'annulation de l'erreur statique en présence de perturbations constantes. Pour cela on a expérimenté sur le système non linéaire à neuf moteurs un retour d'état statique avec action intégrale partielle appliquée à la mesure de vitesse du dernier sous-système. Les autres sous-systèmes sont commandés par des retours d'état classiques avec matrice de compensation de gain. Les correcteurs locaux sont tous calculés par synthèse BMI, à l'aide des relations (3.92) et (4.58). Dans le cas du retour d'état avec action intégrale partielle, ici le correcteur K^3 dans la Figure 4.2-25, les BMIs sont résolues en remplaçant en elles les matrices A_{ii}, B_{ii} et C_{ii} par les matrices $\tilde{A}_{ii}, \tilde{B}_{ii}$ et respectivement \tilde{C}_{ii} . Le correcteur obtenu \tilde{K}^i sera alors composé de deux parties (K_1, K_2), l'une correspondant au retour d'état et l'autre au terme intégral. La matrice de compensation de gain M est calculée conformément aux explications de la section précédente en utilisant l'équation (4.70) pour $\rho = 1$.

Les résultats de simulation pour un système non linéaire à neuf moteurs, avec une commande décentralisée sans recouvrement, sont donnés sur la Figure 4.2-28. On compare dans la même figure, les résultats obtenus dans le cas de la commande par retour d'état entièrement classique (sans intégrateur) avec ceux de la commande avec action intégrale partielle.

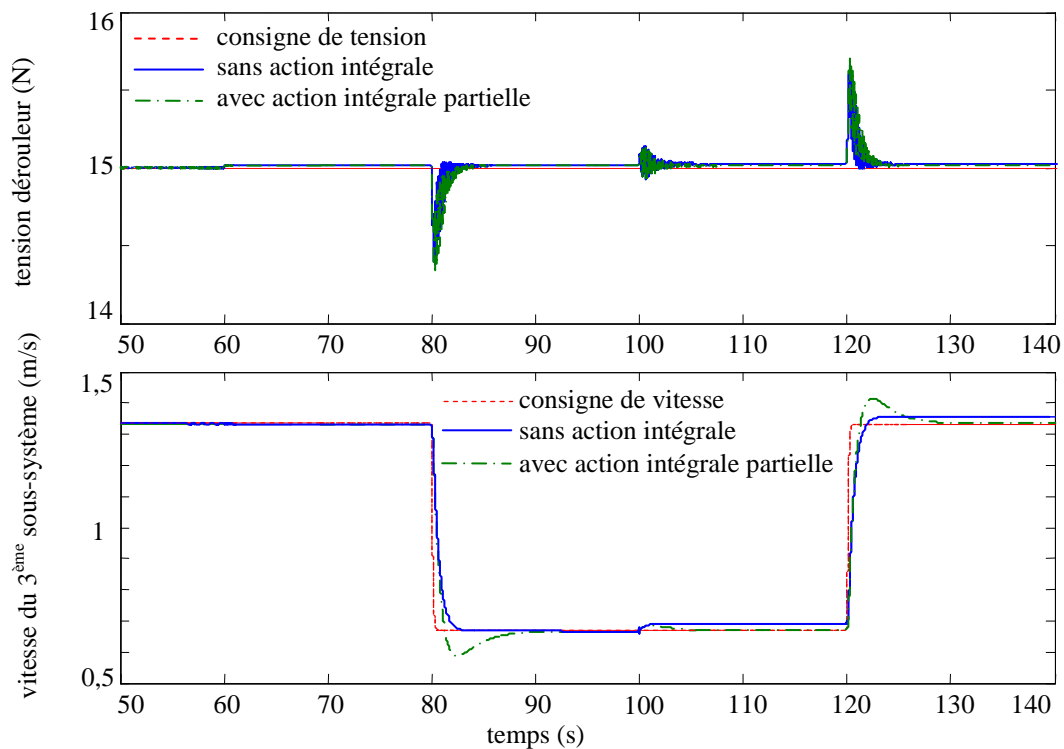


Figure 4.2-28. Commande par retour d'état décentralisée sans recouvrement avec et sans action intégrale partielle

Outre les sauts de consignes, des perturbations additives constantes ont volontairement été rajoutées à deux entrées du procédé, respectivement à $t = 60$ s à l'entrée commandant la tension dérouleur dans le sous-système S^1 et à $t = 100$ s à l'entrée commandant la vitesse de tracteur du sous-système S^3 .

Il est clair que les perturbations sont rejetées seulement sur la mesure de vitesse, qui est la seule à avoir bénéficié de l'ajout d'un intégrateur dans le cas de l'action intégrale partielle. Une erreur statique causée par ces perturbations reste visible sur toutes les autres mesures, que ce soit dans le cas du retour d'état classique ou du retour d'état avec action intégrale partielle. Ceci est normal, car aucune d'entre elles ne bénéficie d'une action intégrale. Cependant, la matrice de compensation de gain M assure sa fonction de gain statique unitaire et donc de poursuite de consigne constante, en l'absence de perturbations additives, avant l'instant 60 s. Un dépassement est également observé à chaque saut de consigne, dû au terme de compensation de gain et à ce qu'il engendre d'excès de signal de commande comme prévu.

4.3. Outils d'analyse de stabilité des systèmes complexes de grande dimension

Dans ce paragraphe, trois outils d'analyse vont être présentés. L'un d'entre eux sera appliqué au système à neuf moteurs, dans le but d'analyser sa stabilité globale et d'évaluer les performances de la structuration choisie pour sa commande.

4.3.1. Problématique

La stabilisation des systèmes asservis de grande dimension avec contraintes structurelles de décentralisation est un point fondamental dans la thématique de la commande décentralisée. On distingue deux types d'outils d'analyse de systèmes complexes. Le premier consiste à mettre en lumière *a priori* les caractéristiques internes (microscopique et/ou macroscopique) du système et à déterminer si celles-ci peuvent limiter les performances de la loi de commande, ou plus exactement de la structure de la loi de commande choisie. Le deuxième type d'outils d'analyse consiste à évaluer les

performances du système en boucle fermée, une fois le correcteur synthétisé implanté, donc *a posteriori*, et d'en tirer les conséquences du choix de la structure. Dans la famille des outils d'analyse *a priori* nous présenterons deux outils, à savoir les modes fixes et la mesure d'interaction par la μ -analyse. Dans la deuxième famille nous présenterons l'outil de la stabilité connective.

4.3.2. Étude de la stabilité et de la stabilisabilité

Cette notion est présentée ici par deux outils, celui des modes fixes et celui de la stabilité connective.

4.3.2.1. Modes fixes

S.H. Wang et E.J. Davidson ont été les premiers à introduire la notion de mode fixe [WD73]. Cette notion est décrite ci-après.

Reprenons la définition du système S par l'équation (4.1) et sa décomposition « entrée-sortie » en $N \times N$ blocs décrite par l'équation (4.11).

Considérons également un retour de sortie statique

$$u = -Ky, \quad (4.72)$$

et notons par $K = \{K \in \mathbb{R}^{m \times p}\}$ la matrice de l'ensemble des correcteurs $K = (k_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq p}$ ayant la même structure et stabilisant le système S . Les éléments de la matrice d'interconnexion $\bar{K} = (\bar{k}_{ij})_{1 \leq i \leq m; 1 \leq j \leq p}$ du correcteur K sont définis par

$$\bar{k}_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } k_{ij} \neq 0, \\ 0, & \text{si } k_{ij} = 0. \end{cases} \quad (4.73)$$

On définit également la matrice d'interconnexion du système bouclé par

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{K} \\ \bar{C} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.74)$$

où les matrices booléennes \bar{A}, \bar{B} et \bar{C} sont données dans (4.4).

Notons au passage, que, si un correcteur par retour de sortie dynamique est considéré, on définit pour chaque entrée u_i de S de (4.1) un ensemble d'indices

$$J_i = \left\{ j : \bar{k}_{ij} = 1 \right\}_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq p}}. \quad (4.75)$$

Enfin, notons par $\Lambda(\bullet)$ l'ensemble des valeurs propres d'une matrice donnée.

Définition 4.3.1

L'ensemble

$$\mathcal{L}_{\bar{K}} = \bigcap_{K \in \bar{K}} \Lambda(A - BKC), \quad (4.76)$$

est l'ensemble des modes fixes du système S décrit par (A, B, C) qui correspond à une structure de commande \bar{K} .

On remarquera que cet ensemble ne dépend pas du correcteur directement, mais de sa structure, ce qui signifie qu'on pourra évaluer les modes fixes d'un système correspondant à telle ou telle structure de commande *a priori* sans avoir à calculer le correcteur.

La notion de *modes fixes structurés* existe également dans la littérature [SM88] [Sil91] [Cla05].

Théorème 4.3.1 [Sil91]

Le système S décrit par (A, B, C) peut être stabilisé par le correcteur K si et seulement si l'ensemble des modes fixes $\mathcal{L}_{\bar{K}}$ ne contient aucun élément à partie réelle positive ou nulle.

4.3.2.2. Stabilité connective

L'outil d'analyse par modes fixes, même s'il paraît simple, est très difficile à mettre en œuvre étant donné le nombre important de variables à manipuler. Il est d'autant plus difficile à utiliser que l'on traite de la stabilité d'un système structuré, c'est-à-dire d'un système décomposé en sous-systèmes interconnectés entre eux. Il faudrait en effet assurer dans ce cas la stabilité du système global au moyen des modes fixes, en considérant la structure globale de décentralisation du système, et donc celle du correcteur, ainsi que la stabilité des sous-systèmes eux-mêmes.

Dans le cadre des systèmes complexes composés de N sous-systèmes, il est important d'assurer une stabilité « robuste » vis-à-vis de variations non linéaires des interconnexions entre les sous-systèmes. Cette stabilité robuste est communément appelée « stabilité connective » [Sil91], en référence aux connexions entre les sous-systèmes. Cette stabilité exploite la théorie de Lyapunov. En effet, la variable de Lyapunov sera composée de blocs associés aux sous-systèmes et à leurs interconnexions. Une fois la stabilité du système global assurée, celle de tous les sous-systèmes est assurée également par voie de conséquence.

Définition 4.3.2 : Stabilité connective

Un système S vérifie la propriété de la stabilité connective si chacun des sous-systèmes S^i est stable et s'il est lui-même stable au sens de Lyapunov (stabilité asymptotique) pour tout $E \in \bar{E}$, c'est-à-dire pour toute perturbation structurelle définie par \bar{E} .

Plus de détails concernant la stabilité connective peuvent être trouvés dans l'ouvrage [Sil91].

4.3.3. Mesure d'interactions par la μ -analyse : application aux systèmes d'enroulement

La commande décentralisée consiste à synthétiser un correcteur pour chaque sous-système. Il est donc clair que négliger les termes d'interconnexions peut conduire à une perte de performances et de stabilité du système global en boucle fermée.

Considérons la matrice de transfert de l'équation (4.19). Dans le cas de la structure décentralisée sans recouvrement appliquée au système d'entraînement de bande à neuf moteurs, la matrice de transfert décentralisée résultante aura la forme suivante :

$$G_D(s) = \left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc} g^{11}(s) & g^{12}(s) & g^{13}(s) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ g^{21}(s) & g^{22}(s) & g^{23}(s) & \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ g^{31}(s) & g^{32}(s) & g^{33}(s) & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & g^{44}(s) & g^{45}(s) & g^{46}(s) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & g^{54}(s) & g^{55}(s) & g^{56}(s) & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & g^{64}(s) & g^{65}(s) & g^{66}(s) & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & g^{77}(s) & g^{78}(s) & g^{79}(s) \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots & g^{87}(s) & g^{88}(s) & g^{89}(s) \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & g^{97}(s) & g^{98}(s) & g^{99}(s) \end{array} \right] \quad (4.77)$$

où les couplages entre deux sous-systèmes consécutifs ont été négligés, comme par exemple $g^{34}(s)$ et $g^{43}(s)$. C'est pour ce système $G_D(s)$ qu'un correcteur

$$K(s) = \begin{bmatrix} K^1(s) & 0 & 0 \\ 0 & K^2(s) & 0 \\ 0 & 0 & K^3(s) \end{bmatrix} \quad (4.78)$$

est calculé. $K(s)$ garantit la stabilité de $G_D(s)$, mais en aucun cas celle de $G(s)$.

Pour que ce correcteur garantisse également la stabilité du système global S caractérisé par $G(s)$, un test supplémentaire est nécessaire. Comme le modèle du système d'enroulement considéré, c'est-à-dire $G(s)$, est linéaire à paramètres invariants dans le temps, une méthode possible consiste à faire une « mesure d'interaction » en appliquant le critère de stabilité de Nyquist et le théorème du petit gain.

Notons par

$$E(s) = (G(s) - G_D(s))G_D^{-1}(s) \quad (4.79)$$

l'erreur relative entre le système décentralisé et le système global [SM89].

Pour vérifier si le correcteur décentralisé (4.78) stabilise la matrice de transfert globale en boucle fermée,

$$T(s) = (I + G(s)K(s))^{-1}G(s)K(s), \quad (4.80)$$

il est suffisant de calculer la mesure d'interaction nommée μ_{IM} (en anglais, μ -Interaction Measure),

$$\mu_{IM} = \mu^{-1}[E(j\omega)], \quad (4.81)$$

et de vérifier la condition suivante [SM89] [GM86] :

$T(s)$ est stable si

$$\bar{\sigma}[T_D(j\omega)] < \mu_{IM}, \quad \forall \omega, \quad (4.82)$$

où

$$T_D(s) = [I + G_D(s)K(s)]^{-1} G_D(s)K(s), \quad (4.83)$$

est la matrice de transfert du système décentralisé bouclé, résultant de l'application du correcteur décentralisé $K(s)$ au système représenté par la matrice de transfert décentralisée $G_D(s)$, et où $\bar{\sigma}(\bullet)$ et $\mu(\bullet)$ dénotent respectivement la valeur singulière maximale et la valeur singulière structurée d'une matrice de transfert donnée. La valeur singulière structurée $\mu[E(j\omega)]$ est calculée, en respectant la structure du correcteur décentralisé comme illustré dans (4.78), dans l'environnement de programmation Matlab® en utilisant la boîte à outils μ -Analysis and Synthesis Toolbox®.

Il est important d'observer que la conclusion de stabilité du système global en boucle fermée représenté par la matrice de transfert $T(s)$ est déduite d'un calcul utilisant la matrice de transfert $T_D(s)$ qui fait appel à $G_D(s)$.

L'outil de mesure d'interaction μ_{IM} utilisé dans ce paragraphe est très utile pour analyser la faisabilité des structures de commandes décentralisées sur un système de grande dimension. Cet outil a été utilisé par Asano et Morari dans [AM98] pour calculer les interactions entre les tensions inter-cages et la régulation d'épaisseur dans le laminage à froid, afin de déterminer une structure de commande décentralisée adéquate pour ce type de procédé. Le même outil a été utilisé par Sakamoto et Tanaka dans [ST00] pour l'analyse de stabilité d'un système d'enroulement commandé en tension.

4.3.3.1. Analyse de stabilité pour un système d'enroulement décentralisé à neuf moteurs

La Figure 4.3-1 illustre l'application de la mesure d'interaction au système d'enroulement à neuf moteurs : il s'agit d'analyser la stabilité de la boucle fermée dans le cas de l'application d'un correcteur décentralisé $H_v 2ddl$ sans intégrateur explicite.

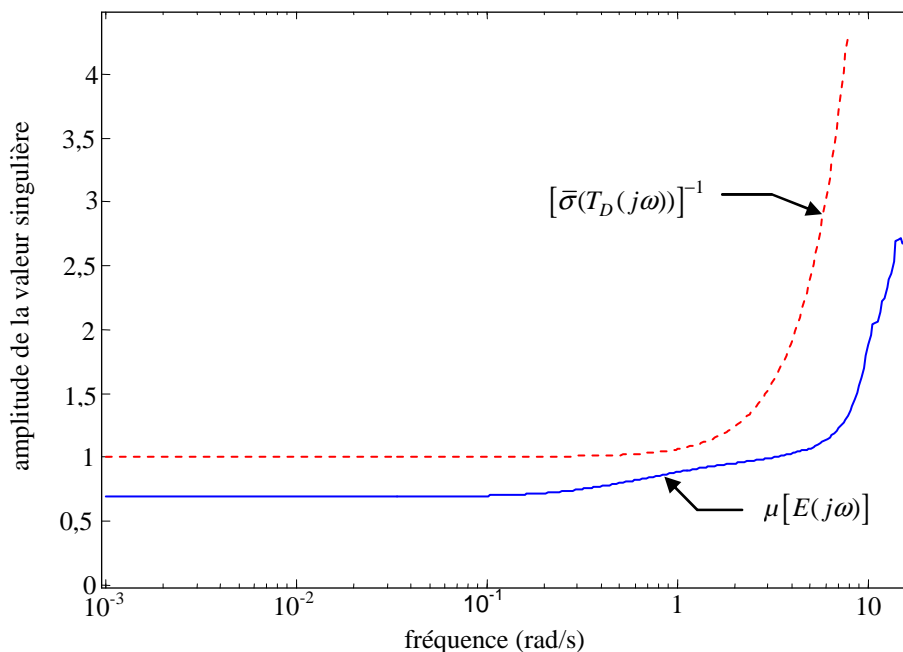


Figure 4.3-1. Analyse de stabilité du système à neuf moteurs décentralisé par μ IM

Il est clair sur cette figure que la propriété

$$\left[\bar{\sigma}(T_D(j\omega))\right]^{-1} > \mu(E(j\omega)), \quad \forall \omega \quad (4.84)$$

est vérifiée et que, par conséquent, on peut en conclure que le système global en boucle fermée utilisant le correcteur H_∞ *2ddl* est stable. Ceci a été vérifié par simulation.

4.4. Conclusion du chapitre 4

Dans ce chapitre, différentes définitions concernant les systèmes complexes et les systèmes de grande dimension ont été introduites. Deux méthodes de modélisation d'un système de grande dimension, dans l'espace d'état et avec matrice de transfert, ont également été présentées ainsi que des outils (RGA et BRG) permettant le choix de la structure de commande.

La méthode de décentralisation horizontale a été choisie pour la décomposition de notre système d'enroulement de grande dimension. Deux stratégies ont ensuite été adoptées, avec et sans recouvrement partiel de sous-systèmes (et donc de commandes). La stratégie avec recouvrement a montré de bonnes performances en termes d'élimination des effets de couplage entre tensions et vitesse de bande. Les méthodes de synthèses développées dans le chapitre 3 ont été appliquées sur les deux stratégies de décentralisation.

Une adaptation de la synthèse par optimisation BMI d'une loi de commande décentralisée par retour d'état statique, appliqué au système de grande dimension, a été nécessaire. Une nouvelle commande par retour d'état avec action intégrale partielle a été introduite dans le but de compenser l'erreur statique produite par les perturbations additives sur les variables les plus sensibles, en l'occurrence la vitesse linéaire du tracteur du dernier sous-système. Un développement mathématique a fait apparaître l'importance du compromis à faire entre action intégrale et matrice d'anticipation.

Enfin, pour le cas de commandes décentralisées, différents outils d'analyse de stabilité de systèmes de grande dimension ont été introduits. La mesure d'interaction s'est avérée un outil très adapté à l'analyse de retour de sortie dynamique décentralisé.

Différentes perspectives, décrites ci-après, peuvent être envisagées.

La matrice de compensation de gain calculée dans le cas d'une stratégie de commande décentralisée par (4.60) n'est pas réalisable en implantation sur un système industriel de très grande dimension (de l'ordre de plusieurs dizaines de moteurs). Il est donc indispensable de décentraliser cette matrice de compensation et d'analyser l'influence de cette décentralisation sur l'erreur statique, en présence ou non de recouvrement.

Il est intéressant d'appliquer les outils d'aide à la décision *a priori* et *a posteriori* présentés dans ce chapitre pour essayer d'expliquer pourquoi certaines configurations de commandes décentralisées ne conviennent pas.

Une autre perspective intéressante consiste à analyser l'influence de l'incertitude sur la mesure des tensions de déroulement et d'enroulement dans le cas d'un système de grande dimension tel qu'on l'a décrit à la fin du chapitre 3.

Enfin, il serait intéressant de synthétiser en une seule étape, à l'aide d'une optimisation BMI, un correcteur décentralisé. Il s'agirait de calculer un correcteur dans un problème qui inclurait à la fois tous les sous-correcteurs des différents sous-systèmes et l'information sur la structure de correcteur choisie. Une méthode de résolution du type PMI serait à envisager.

Certains correcteurs développés dans le cadre de ce travail seront validés sur le grand banc de l'ERT Enroulement.

CHAPITRE 5 :

CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES

5. Conclusion générale

Les systèmes industriels actuels de production de bandes flexibles sont soumis à des contraintes de plus en plus sévères, telles que l'augmentation de la vitesse de défilement associée à une diminution de l'épaisseur des bandes élastiques. Les couplages entre la vitesse et la tension de bande font que les phases d'augmentation ou de réduction de vitesse, surtout au démarrage et à l'arrêt de la production, deviennent des phases critiques. En effet, une légère variation de la vitesse peut induire une grande variation de la tension de bande si la commande du processus n'est pas optimisée et ainsi causer des dommages à la bande.

Les travaux de recherche effectués par la communauté scientifique portent essentiellement sur la modélisation et la commande de systèmes composés d'un nombre réduit d'éléments, comme par exemple : un dérouleur, un nombre réduit de tracteurs et un enrouleur. Ces systèmes sont non linéaires et à paramètres variant dans le temps et constituent à ce titre des systèmes complexes. Des modélisations phénoménologiques très détaillées du processus déroulement–transport–enroulement de bandes flexibles ont déjà été publiées et des stratégies de commande multivariable robuste par rapport aux variations du procédé (rayons des bobines, propriétés mécaniques du film, ...) ont été développées et validées sur des bancs expérimentaux à faible nombre de moteurs. Cependant, la plupart des systèmes industriels de transport de bandes sont des systèmes « à grande échelle ». Les stratégies de commandes décentralisées, actuellement utilisées dans l'industrie, ne remplissent pas les critères de performance exigés mais présentent l'avantage de la simplicité de réglage et de maintenance. À l'opposé, la majorité des commandes multivariables globales développées par la communauté scientifique présentent les propriétés inverses et ne peuvent pas être appliquées à un système industriel équipé de nombreux moteurs. Il était donc intéressant de rechercher des stratégies de commande décentralisée, c'est-à-dire des stratégies basées sur un découpage du système global en un nombre optimal de sous-systèmes, chacun étant asservi par son propre correcteur.

L'objectif de ce travail a consisté à développer des méthodes d'analyse et de synthèse de commandes robustes semi-décentralisées pour des systèmes d'entraînement de bandes flexibles à nombreux moteurs dans un contexte d'utilisation comparable à celui rencontré en production industrielle : bande mince, vitesse de défilement élevée.

La conception de commandes modernes nécessite tout d'abord l'élaboration d'un modèle de connaissances qui reproduit avec une grande précision le comportement dynamique du système. Aussi, le modèle phénoménologique non linéaire d'un système à trois moteurs, identifié sur le banc de l'ERT, a été extrapolé à un système d'entraînement de bandes composé cette fois d'un nombre élevé de moteurs d'entraînement. Ce modèle de grande dimension a ensuite été programmé dans l'environnement logiciel Matlab/Simulink afin de disposer d'un simulateur utile pour la validation des performances des différentes stratégies de commande élaborées dans ce travail. En parallèle, la linéarisation du modèle autour d'un point de fonctionnement (tension et vitesse de bande fixées à l'avance) a permis de construire un modèle linéaire à paramètres variants, utile pour la synthèse des correcteurs H_{∞} .

La conception de lois de commande pour des systèmes de grande dimension requiert la décomposition du modèle global en sous-systèmes, disjoints ou non, pour permettre une approche séquentielle ou indépendante. Dans le cas idéal, le système global se décompose naturellement en sous-systèmes pouvant être pilotés avec une relative autonomie. Dans la plupart des systèmes cependant, et notamment dans les systèmes d'entraînement de bandes, une décomposition n'est possible qu'au prix d'une simplification structurelle du modèle du système. Dans notre cas, cette simplification a consisté à apparier certaines entrées/sorties et à éliminer des interactions entre sous-systèmes. L'absence de prise en compte de ces interactions dans le calcul des correcteurs peut conduire à l'instabilité du système global en boucle fermée. L'analyse de stabilité pour des systèmes de grande taille a été effectuée par une approche publiée dans la littérature sous la dénomination « *Interaction Measure* », qui fait appel à un outil connu en analyse des performances et de robustesse

des systèmes, à savoir la μ -Analyse. Nous avons adapté cette approche à notre problème d'entraînement de bandes pour sélectionner d'une part les appariements entrées/sorties, d'autre part les structures des commandes décentralisées, ceci afin de garantir la stabilité du système bouclé. La stratégie de commande avec recouvrement partiel des sous-systèmes a apporté, comme attendu, une amélioration des performances d'élimination des effets de couplage entre tension et vitesse, dans les deux sens de ces interactions.

La décomposition en sous-systèmes une fois effectuée, l'étape suivante a consisté à synthétiser le correcteur pour chaque sous-système, dans le cadre de l'approche indépendante. Cependant, les correcteurs à un seul degré de liberté, couramment utilisés, ne permettent pas de spécifier indépendamment les performances en rejet de perturbations de celles en suivi de consignes. Pour ce faire, nous avons utilisé des correcteurs à deux degrés de liberté. Les deux parties de tels correcteurs sont généralement calculées séparément. Néanmoins, afin de réduire l'ordre des correcteurs H_∞ , le calcul est effectué en une seule étape. Le schéma de synthèse de sensibilité mixte $S/KS/T$ a été retenu pour le calcul des correcteurs. Par cette approche, les performances du comportement dynamique et statique d'un système d'entraînement de bandes à neuf moteurs ont été fortement améliorées. Cependant, une faible erreur statique a subsisté au niveau de certaines grandeurs de sorties pour le système non linéaire, bien qu'elle soit inexistante pour le modèle linéaire. La sélection d'autres filtres de pondération n'a malheureusement pas permis de remédier à ce défaut. Aussi, nous avons modifié la structure du schéma de synthèse en y incorporant un intégrateur explicite. Avec cette nouvelle stratégie, les erreurs statiques ont pu être considérablement réduites pour le système non linéaire. Les correcteurs ont ensuite été discrétisés avec un temps d'échantillonnage de 10 ms. L'implantation d'un correcteur à deux degrés de liberté et son test sur le banc expérimental de l'ERT ont montré l'amélioration des performances en suivi de consignes et rejet de perturbations.

Une commande par retour d'état a constitué une autre piste de recherche intéressante à explorer. Nous avons par conséquent essayé de synthétiser des correcteurs H_∞ par retour d'état avec sélection de la région des pôles en boucle fermée afin de spécifier les performances dynamiques du système bouclé. De plus, l'ajout de la contrainte de limitation des gains du correcteur permet de ne pas dépasser les limites des grandeurs de commande imposées par les spécifications technologiques du banc expérimental. Avec ces contraintes, le correcteur ne peut être calculé que par une résolution d'*Inégalités Matricielles Bilinéaires* (BMI). Cette résolution non convexe est réputée difficile, comme attesté dans de nombreuses publications. La méthode de résolution par *homotopie*, que nous avons programmée dans l'environnement Matlab, n'a cependant pas procuré de résultat, même après un temps de calcul relativement long (plusieurs heures sur un Pentium IV 2,41 GHz et 512 Mo de RAM). Néanmoins, l'apparition durant ces deux dernières années de nouveaux logiciels généralisés d'optimisation, couplée à des outils de programmation performante de BMI, nous a permis de trouver des solutions en un temps raisonnable.

A l'aide de ces outils logiciels, nous avons pu calculer un correcteur par retour d'état simple avec matrice d'anticipation. Le rôle de la matrice d'anticipation est l'élimination des erreurs statiques. L'application de cette de commande au système d'enroulement de grande dimension a nécessité une adaptation de la synthèse par optimisation BMI. La matrice d'anticipation répond au besoin de l'élimination des erreurs statiques en suivi de consignes. Cependant, pour assurer cette élimination en présence de perturbations additives à l'entrée ou à la sortie du système, une ou plusieurs actions intégrales sont nécessaires. Ainsi, l'ajout d'une action intégrale sur chaque grandeur de sortie permet d'annuler les erreurs statiques du système non linéaire dues aux perturbations additives d'ordre 0. Cet ajout a cependant l'inconvénient d'augmenter le nombre d'états additionnels et par conséquent la taille des inégalités matricielles, ce qui rend le problème difficile à résoudre même avec les logiciels d'optimisation les plus performants actuellement disponibles. Aussi, nous sommes-nous orientés vers une stratégie de commande par retour d'état avec action intégrale partielle : cette fois l'action intégrale agit uniquement sur un nombre très réduit de grandeurs de sorties, celles pour lesquelles l'erreur statique doit être nulle. Un développement mathématique a fait apparaître l'importance du compromis à faire entre action intégrale et matrice d'anticipation. Cette dernière technique de commande s'est

avérée très efficace dans le cas d'une application sur un système d'entraînement de bandes comportant un nombre élevé d'actionneurs : les erreurs statiques sur les grandeurs de sorties sélectionnées ont pu être annulées.

Cependant, la synthèse des différents correcteurs par retour d'état suppose que tous les états soient accessibles, c'est-à-dire mesurés directement par des capteurs ou estimés à l'aide d'algorithmes. Ceci n'est malheureusement pas le cas pour les systèmes réels d'entraînement de bandes. En effet, les capteurs de tension de bande, constitués de jauges de contraintes, ne peuvent mesurer que les tensions moyennes entre deux brins consécutifs. Pour prendre en compte cette limitation expérimentale, un nouveau vecteur de retour de sortie, appelé vecteur de retour d'état réaliste, est construit et introduit dans une nouvelle structure de commande. Pour la première fois, la synthèse de la commande en enroulement tient compte des limitations des capteurs de tensions. Aussi, comme attendu, la nouvelle commande ainsi calculée a encore pu améliorer les performances obtenues en simulation. C'est cette dernière approche qui sera appliquée sur le banc d'enroulement multi-moteurs de l'ERT.

Enfin une évaluation de l'erreur statique dans le cas d'une erreur sur le gain de retour d'état a été faite. Plus concrètement, l'erreur statique commise en calculant le retour d'état sous l'hypothèse de la mesurabilité totale des états du système a été évaluée.

5.1. Perspectives à ce travail

Très récemment dans le cadre de travaux menés dans l'ERT Enroulement une nouvelle technique de modélisation (modèle décentralisé exact) des systèmes d'enroulement de bandes flexibles a vu le jour. Il serait alors intéressant de l'utiliser pour la synthèse des différents correcteurs synthétisés dans le cadre de ce travail. Ce nouveau modèle présente l'avantage de rendre le système décentralisé, ce qui a permis le calcul d'une commande « Model Based Feedforward » pour les systèmes d'enroulement. De plus, ce nouveau modèle devrait permettre la synthèse de lois de commande décentralisées avec ordre et structure fixés, même avec des correcteurs aussi simples que des PI, en utilisant des algorithmes d'optimisation BMI.

D'autre part, nous avons rencontré beaucoup de problèmes lors de la synthèse H_∞ des correcteurs par retour de sortie dynamique concernant le choix des filtres de pondération. Il serait intéressant d'automatiser cette procédure en développant un algorithme automatique qui adapterait les filtres de pondération en fonction du cahier des charges et du système à étudier.

Dans un futur proche, une analyse de robustesse en stabilité (RS) et en performance (RP) vis-à-vis des incertitudes sur les mesures de tensions de bandes, appliquées aux différentes stratégies de commande synthétisées, devra être menée.

Les stratégies de commandes décentralisées développées dans le cadre de ce travail ont reposé sur une approche indépendante, c'est-à-dire que les correcteurs des différents sous-systèmes ont été calculés indépendamment l'un de l'autre, et ce n'est que par la suite que le correcteur global a été construit, en regroupant les différents sous-correcteurs et en respectant la structure de décentralisation du système choisie. Une autre approche, consisterait à synthétiser les différents sous-correcteurs en une seule étape en incorporant dans la synthèse l'information liée à la structure de décentralisation choisie, à savoir avec ou sans recouvrement. Nous avons essayé dans un premier temps d'aborder ce problème à l'aide de l'algorithme d'homotopie introduit au chapitre 3, mais n'avons pas réussi à trouver une solution dans un temps raisonnable. Il faudrait alors diriger la recherche vers de nouvelles stratégies de résolution de problèmes d'optimisations BMI, comme par exemple la résolution par des inégalités polynomiales affines (PMI).

ANNEXES

Sommaire :

Annexes	155
Annexe A : De la norme $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$ à la norme H_2/H_∞	157
<i>A. Comparaison entre les normes H_2 et H_∞.....</i>	<i>158</i>
A.1. Les normes de signal \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_∞	158
A.1.1. La norme \mathcal{L}_2	158
A.1.2. La norme \mathcal{L}_∞	159
A.2. Les normes de système H_2 et H_∞	159
A.2.1. La norme H_2	159
A.2.2. La norme H_∞	160
A.3. Discussion.....	162
Annexe B : Propriétés de la norme H_∞	163
<i>B. Propriétés de la norme H_∞.....</i>	<i>164</i>
Annexe C : Notion de stabilité au sens de Lyapunov	165
<i>C. Stabilité et stabilité asymptotique au sens de Lyapunov.....</i>	<i>166</i>
Annexe D : Paramètres du banc d'enroulement expérimental à trois moteurs.....	167
<i>D. Paramètres du banc d'enroulement expérimental de l'ERT Enroulement N°8.....</i>	<i>168</i>
D.1. Le banc expérimental.....	168
D.2. Modélisation de la bobine de déroulement	169
D.2.1. Le dérouleur	169
D.2.2. Modèle non linéaire du dérouleur	169
D.2.3. Modèle linéaire du dérouleur	170
D.2.4. Modélisation du moteur synchrone.....	171
Annexe E : Publications personnelles.....	173
<i>E. Publications personnelles</i>	<i>174</i>
E.1. Revue Internationale avec comité de lecture.....	174
E.2. Conférences Internationales avec comité de lecture	174
E.3. Conférence Nationale avec comité de lecture	174

ANNEXE A :
DE LA NORME $\mathcal{L}_2/\mathcal{L}_\infty$ A LA NORME H_2/H_∞

A. Comparaison entre les normes H_2 et H_∞

A.1. Les normes de signal \mathcal{L}_2 et \mathcal{L}_∞

A.1.1. La norme \mathcal{L}_2

Pour un signal scalaire $v(t)$ défini pour tout $t \geq 0$, la norme \mathcal{L}_2 est définie comme la racine carrée de l'intégral de $v(t)^2$,

$$\|v\|_2 = \left(\int_0^\infty v(t)^2 dt \right)^{1/2}. \quad (\text{A.1})$$

L'interprétation physique de cette norme revient à dire que, si $v(t)$ est un signal de courant ou de tension, $\|v\|_2^2$ est proportionnel à l'énergie totale associée à ce signal. Dans le cas où le signal $v(t)$ est un vecteur $v(t) = [v_1(t) \ \cdots \ v_m(t)]^T$, la norme \mathcal{L}_2 devient égale à

$$\begin{aligned} \|v\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^m \|v_i\|_2^2 \right)^{1/2} = \left(\int_0^\infty \sum_{i=1}^m v_i(t)^2 dt \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^\infty v(t)^T v(t) dt \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Rappelons en outre, que la transformée de Laplace du signal $v(t)$ est égale à :

$$V(s) = \int_0^\infty v(t) e^{-st} dt, \quad (\text{A.3})$$

où s est la variable complexe de Laplace. Par analogie avec (A.1), on définit la norme \mathcal{L}_2 pour cette transformée de Laplace sur l'axe imaginaire par

$$\|V\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |v(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}. \quad (\text{A.4})$$

D'après le théorème de Parseval, les normes \mathcal{L}_2 dans le domaine temporel et fréquentiel sont égales :

$$\|v\|_2 = \|V\|_2. \quad (\text{A.5})$$

Dans le cas d'un signal vectoriel $v(t) = [v_1(t) \ \cdots \ v_m(t)]^T$, la norme \mathcal{L}_2 de la transformée de Laplace $V(s) = [V_1(s) \ \cdots \ V_m(s)]$ de ce signal devient:

$$\begin{aligned}
\|V\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^m \|V_i\|_2^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m |V_i(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{i=1}^m V_i(-j\omega)V_i(j\omega) d\omega \right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(-j\omega)^T V(j\omega) d\omega \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{A.6}$$

A.1.2. La norme \mathcal{L}_∞

La norme \mathcal{L}_∞ d'un signal $v(t)$ est définie par :

$$\|v\|_\infty = \max_t |v(t)|, \tag{A.7}$$

en supposant que le maximum de ce signal existe. Comme ceci n'est pas garanti dans le cas général, la norme \mathcal{L}_∞ est définie, de façon plus correcte, par la plus petite borne supérieure, ou *supremum*, de la valeur absolue du signal :

$$\|v\|_\infty = \sup_t |v(t)|. \tag{A.8}$$

A.2. Les normes de système \mathbf{H}_2 et \mathbf{H}_∞

A.2.1. La norme \mathbf{H}_2

Pour un système multivariable stable ayant pour matrice de transfert $G(s) = [g_{ij}(s)]$, la définition de la norme \mathbf{H}_2 est :

$$\begin{aligned}
\|G\|_2 &= \left(\sum_{ij} \|g_{ij}\|_2^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{ij} |g_{ij}(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{ij} g_{ij}(-j\omega)g_{ij}(j\omega) d\omega \right)^{1/2} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} [G(-j\omega)^T G(j\omega)] d\omega \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Il est facile d'interpréter la norme \mathbf{H}_2 d'un système de matrice de transfert G à partir des normes \mathcal{L}_2 de ses signaux d'entrée et de sortie. En effet, en considérant les entrées du système l'une après l'autre égales à l'impulsion de Dirac d'amplitude unité, les autres entrées étant nulles, ce qui correspond à une transformée de Laplace du vecteur d'entrée $V(s) = e_k = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$ dans le cas d'une $k^{\text{ème}}$ entrée mise à 1, la sortie du système

$$Z(s) = G(s)e_k \tag{A.10}$$

correspondra au carré de la norme \mathcal{L}_2 suivant:

$$\begin{aligned}
\|Z\|_2^2 &= \|Ge_k\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left[e_k^T G(-j\omega)^T G(j\omega) e_k \right] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left[G(-j\omega) e_k e_k^T G(j\omega)^T \right] d\omega.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Si maintenant toutes les entrées du système sont des impulsions de Dirac, la somme des carrés des normes \mathcal{L}_2 des sorties résultantes est égale à :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^m \left[\|Z\|_2^2 : V(s) = e_k \right] &= \sum_{k=1}^m \|Ge_k\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left[G(-j\omega) e_k e_k^T G(j\omega)^T \right] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left[G(-j\omega) \sum_{k=1}^m (e_k e_k^T) G(j\omega)^T \right] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left[G(-j\omega) I G(j\omega)^T \right] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left[G(-j\omega)^T G(j\omega) \right] d\omega \\
&= \|G\|_2^2.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Dans le cas d'un système monovarié, de fonction de transfert $G(s)$, la norme \mathcal{L}_2 de sa sortie, en réponse à une impulsion de Dirac unité appliquée à son entrée, est donnée par :

$$\|Z\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \left[G(-j\omega)^T G(j\omega) \right] d\omega \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2} = \|G\|_2, \tag{A.13}$$

expression similaire à (A.4). $\|G\|_2$ peut donc être interprété ici comme le gain du système, moyenné sur toutes les fréquences.

A.2.2. La norme H_∞

Considérons d'abord le cas d'un système monovarié, de fonction de transfert $G(s)$. Contrairement à la norme H_2 qui fournit le gain moyen du système, la norme H_∞ est définie par :

$$\|G\|_\infty = \max_{\omega} |G(j\omega)|, \tag{A.14}$$

ou encore, dans le cas où le maximum n'existe pas,

$$\|G\|_\infty = \sup_{\omega} |G(j\omega)|. \tag{A.15}$$

La norme H_∞ est donc simplement le plus grand facteur par lequel le système amplifie tout signal sinusoïdal appliqué à son entrée.

Une relation entre la norme H_∞ et les normes \mathcal{L}_2 des signaux d'entrée-sortie du système peut être trouvée. Considérons pour cela un signal $v(t)$ de transformée de Laplace $V(s)$ ayant une norme \mathcal{L}_2 bornée. La sortie du système $Z(s) = G(s)V(s)$ possède une norme \mathcal{L}_2 bornée par $\|G\|_\infty \|V\|_2$ parce que :

$$\begin{aligned}
\|GV\|_2 &= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)V(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 |V(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sup_{\omega} |G(j\omega)| \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |V(j\omega)|^2 d\omega \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|G\|_{\infty} \|V\|_2.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

Par conséquent, $\|G\|_{\infty} \geq \frac{\|GV\|_2}{\|V\|_2}$, pour tout $v \neq 0$.

On montre en fait que la norme H_∞ peut être caractérisée par :

$$\|G\|_{\infty} = \sup \left\{ \frac{\|GV\|_2}{\|V\|_2} : V \neq 0 \right\}. \tag{A.17}$$

La norme H_∞ fournit donc le facteur maximum dont le système amplifie la norme \mathcal{L}_2 de tout signal d'entrée. C'est pourquoi $\|G\|_{\infty}$ est aussi appelé « gain » du système.

Dans le cas d'un système multivariable, la norme H_∞ est définie d'une manière analogue.

Pour une matrice de transfert $G(s)$ on définit :

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\omega} \|G(j\omega)\|. \tag{A.18}$$

La norme matricielle $\|G(j\omega)\|$ est égale à la valeur singulière maximale $\bar{\sigma}(G(j\omega))$ de la matrice $G(j\omega)$. D'où :

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\omega} \bar{\sigma}(G(j\omega)). \tag{A.19}$$

Cette norme est interprétée physiquement de la manière suivante. On sait que si l'on applique à l'entrée du système G un signal sinusoïdal vectoriel, composé de sinusoïdes de même pulsation mais d'amplitudes et de phases différentes, sa sortie est un signal sinusoïdal vectoriel de même pulsation, mais dont les composantes ont des amplitudes et des phases modifiées par G . La norme H_∞ est donc le facteur maximum dont le système amplifie toute entrée sinusoïdale vectorielle.

Dans le cas d'un signal d'entrée d'énergie \mathcal{L}_2 bornée, par analogie au cas d'un système monovariable la norme H_∞ est donnée par:

$$\|G\|_{\infty} = \sup \left\{ \frac{\|GV\|_2}{\|V\|_2} : V \neq 0 \right\}. \tag{A.20}$$

Enfin, notons que dans le domaine temporel, si la sortie du système est $z(t)$,

$$\|G\|_{\infty} = \sup \left\{ \frac{\|z\|_2}{\|v\|_2} : v \neq 0 \right\}. \quad (\text{A.21})$$

A.3. Discussion

On déduit de ce paragraphe que la minimisation d'une norme H_{∞} correspond à la minimisation du plus grand pic de la valeur singulière, tandis que celle d'une norme H_2 minimise la somme des carrés de toutes les valeurs singulières pour toutes les fréquences possibles. C'est en partie la raison pour laquelle la norme H_{∞} intervient en commande robuste, outre le fait qu'elle est un outil pratique pour la représentation des incertitudes du modèle et qu'elle satisfait la propriété multiplicative. Cette dernière propriété, en revanche, n'est pas vérifiée par la norme H_2 . Cependant, la norme H_2 reste un outil mathématique offrant de nombreuses utilités et trouve des applications intéressantes dans le domaine de l'ingénierie.

ANNEXE B :
PROPRIETES DE LA NORME H_∞

B. Propriétés de la norme H_∞

Considérons le cas d'un système LTI tel que :

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (\text{B.1})$$

où u, y sont respectivement l'entrée et la sortie du système et $G(s)$ est sa matrice de transfert. La norme H_∞ de ce système est définie par l'équation (A.19).

La norme H_∞ possède deux propriétés :

1. la norme H_∞ de la mise en série de deux systèmes, représentés respectivement par les matrices de transfert $G(s)$ et $H(s)$, c'est-à-dire la norme H_∞ du produit des deux matrices de transfert, est inférieure ou égale au produit de leurs deux normes H_∞ :

$$\|G(s)H(s)\|_\infty \leq \|G(s)\|_\infty \|H(s)\|_\infty, \quad (\text{B.2})$$

2. la norme H_∞ de la matrice de transfert de la mise en parallèle de deux systèmes $G(s)$ et $H(s)$ avec soit une entrée commune, soit une sortie commune, est supérieure ou égale à la plus grande des normes H_∞ de ces deux systèmes :

$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} G(s) \\ H(s) \end{pmatrix} \right\|_\infty &\geq \sup(\|G(s)\|_\infty, \|H(s)\|_\infty), \\ \|(G(s) \quad H(s))\|_\infty &\geq \sup(\|G(s)\|_\infty, \|H(s)\|_\infty), \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Dans le cas d'une synthèse H_∞ , on déduit de (B.3) que, si la norme H_∞ de la matrice de transfert en boucle fermée $T_{zw}(s)$ satisfait l'inégalité $\|T_{zw}(s)\|_\infty \leq \gamma$, cette inégalité est également satisfaite par toutes les sous-matrices éventuelles de cette matrice de transfert.

ANNEXE C :
NOTION DE STABILITE AU SENS DE LYAPUNOV

C. Stabilité et stabilité asymptotique au sens de Lyapunov

Un système ayant une énergie finie à l'entrée est dit stable, au sens de Lyapunov, s'il fournit à sa sortie une énergie finie, qui décroît vers une valeur minimale finie quand t tend vers l'infini. Il est dit asymptotiquement stable, au sens de Lyapunov, si cette énergie tend vers zéro.

Une définition alternative de la stabilité au sens de Lyapunov est donnée dans l'espace d'état. Par raison de simplification, cette stabilité sera définie au voisinage du point d'équilibre $x=0$, l'origine, sachant que tout autre point d'équilibre $x=\bar{x}$ peut y être ramené par un changement de variable $y = x - \bar{x}$. Le point d'équilibre $x=0$ est dit *stable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que $\|x(0)\| < \delta$ implique que $\|x(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \geq 0$. Il est dit *asymptotiquement stable*, s'il est stable et si δ peut être choisi tel que $\|x(0)\| < \delta$ implique que $x(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$. En 1890, Lyapunov a montré que le système décrit par l'équation différentielle :

$$\frac{d}{dt}x(t) = Ax(t) \quad (\text{C.1})$$

est stable, respectivement asymptotiquement stable, si et seulement si il existe une matrice définie positive P telle que :

$$A^T P + PA \leq 0, \text{ respectivement } A^T P + PA < 0. \quad (\text{C.2})$$

L'inégalité (C.2) est connue sous le nom d'inégalité de Lyapunov en P , qui est une inégalité matricielle linéaire (LMI) particulière.

Cette LMI est largement utilisée dans la théorie de la commande pour l'analyse de la stabilité des systèmes au sens de Lyapunov.

Cette théorie est aussi utilisée en commande robuste. Elle entraîne cependant également quelques difficultés. En effet, quand on s'intéresse à des problèmes comme la réduction d'ordre et/ou la synthèse de correcteur structuré, la LMI (C.2) devient une inégalité matricielle bilinéaire (BMI), non convexe et difficile à résoudre. La difficulté réside dans le fait que la variable de Lyapunov P est multipliée par la matrice A , qui est dans ce cas la matrice d'évolution du système bouclé contenant le correcteur de structure fixée, ce qui rend, dans le cas de la synthèse H_∞ par exemple, cette inégalité d'une dimension importante.

ANNEXE D :
PARAMETRES DU BANC D'ENROULEMENT
EXPERIMENTAL A TROIS MOTEURS

$$E^{-1}B = \begin{pmatrix} -1,0267 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2204 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,9822 \end{pmatrix}.$$

D.2. Modélisation de la bobine de déroulement

La construction du modèle non linéaire complet d'une chaîne de transport de bande passe par la modélisation de chacun de ses éléments primitifs. La démarche suivie, depuis la construction d'un modèle non linéaire jusqu'à sa linéarisation, pour l'un des éléments primitifs, à savoir le dérouleur, est détaillée ci-après. Dans ce paragraphe sera donnée également la modélisation simplifiée d'un moteur synchrone.

D.2.1. Le dérouleur

Un dérouleur axial est présenté sur la Figure D-2. L'objectif de la modélisation de cet élément est l'expression de sa vitesse tangentielle V_d et de sa tension de bande T_d en fonction du couple K_d appliqué à la bobine, des contraintes dans la bobine et de la vitesse V_p en aval.

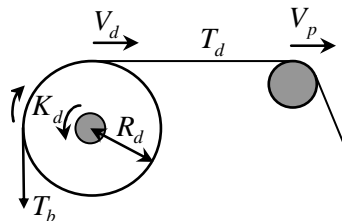


Figure D-2. Dérouleur axial

D.2.2. Modèle non linéaire du dérouleur

Le modèle non linéaire du dérouleur est déduit des lois de la physique décrites au chapitre 2. L'équation différentielle donnant la vitesse est :

$$\frac{d}{dt}(J_d \Omega_d) = T_d R_d - K_d U_d - (C_{d fs} + C_{d fv}). \quad (D.1)$$

On rappelle que, dans notre cas, le frottement sec $C_{d fs}$ est modélisé selon la loi de l'effet Stribeck et que le frottement visqueux $C_{d fv}$ est approximé par un polynôme d'ordre 3 en Ω_d .

Le moteur du dérouleur est lié à un variateur industriel configuré en asservissement de tension, la commande étant, quant à elle, en courant. Le couple moteur $C_m = -K_d U_d$ est proportionnel à la consigne de couple U_d appliquée au variateur. En régime établi, C_m produit le couple de traction de la bande $T_d R_d$. Le signe "-" introduit dans C_m permet d'avoir une consigne U_d positive.

Il reste à déterminer dans l'équation (D.1) le rayon de la bobine R_d et son inertie J_d . En supposant l'épaisseur de la bande h constante, le rayon peut être déduit par décrémentation :

$$\frac{dR_d}{dt} = -\frac{h}{2\pi} \Omega_d. \quad (\text{D.2})$$

Une autre façon de déduire le rayon de la bobine consiste à mesurer les vitesses de rotation de la bobine dérouleur et d'un rouleau proche (rouleau de rayon fixe entraîné par la bande). Quant à l'inertie J_d , elle est égale à la somme de l'inertie de l'arbre du moteur J_a et de l'inertie de la bobine (bande enroulée sur le rouleau) :

$$J_d = J_a + \frac{\pi \rho l}{2} (R_d^4 - R_a^4), \quad (\text{D.3})$$

où ρ représente la masse volumique de la bande et l sa largeur.

L'allongement relatif de la bande entre les deux rouleaux en rotation, à savoir le rouleau dérouleur et le rouleau en aval, est exprimé par l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{L}{1 + \varepsilon_d} \right) = -\frac{V_p}{1 + \varepsilon_d} + \frac{V_d}{1 + \varepsilon_b}. \quad (\text{D.4})$$

De la tension de bande T_b de la dernière spire de la bobine, on déduit l'allongement relatif correspondant ε_b . On distingue deux façons pour déterminer cette tension de bande. La première, proposée par Reil *et al.* dans [RL93], consiste à prendre $T_b = \frac{K_d U_d}{R_d}$. La deuxième, proposée par Voos *et al.* dans [VHS99], consiste à approcher cette valeur par la mesure de la tension d'enroulement lors de la fabrication de la bobine. Cependant les deux approches ne tiennent pas compte du mode d'enroulement de la bobine ni des différents frottements entre les spires de la bobine ou de poches d'air. Dans notre cas, on a choisi la tension T_b égale à la tension nominale de la tension T_d . Ce choix résulte de la constatation sur le simulateur non linéaire du peu d'influence de la méthode d'approximation sur T_d et V_d . Par ailleurs, ce choix permet de simplifier le modèle linéaire.

D.2.3. Modèle linéaire du dérouleur

Un modèle linéaire est indispensable pour la synthèse de correcteurs. La linéarisation du modèle non linéaire est généralement effectuée autour d'un ou plusieurs points de fonctionnements. Pour cela, il a fallu simplifier auparavant la relation (D.4). L'approximation classiquement utilisée [Bra73] [Shi91] [RL93] pour cette équation consiste à utiliser un développement limité avant la dérivation. L'approximation utilisée dans le cas présent consiste à linéariser l'équation (D.4) après la dérivation. En introduisant les tensions de bande $T_d = ES\varepsilon_d$ et $T_b = ES\varepsilon_b$ dans (D.4), nous obtenons l'équation non linéaire (D.5) suivante :

$$L \frac{dT_d}{dt} = V_p (ES + T_d) - V_d (ES - T_b + 2T_d). \quad (\text{D.5})$$

La linéarisation du modèle non linéaire de l'élément primitif dérouleur consiste alors à linéariser les deux équations (D.1) et (D.5). On considère pour cela que la bande se déplace à vitesse V_0 et à la tension T_0 , toutes deux constantes. (V_0, T_0) sont alors les composantes du point de fonctionnement considéré. De plus, on suppose que le rayon et l'inertie de la bobine varient très peu, ce qui nous

permet d'écrire : $T_d = T_0 + t_d$, $V_p = V_0 + v_p$, $V_d = V_0 + v_d$ et $U_d = U_0 + u_d$. On réécrit les équations (D.1) et (D.5) en ne gardant que les termes du premier ordre :

$$J \frac{dv_d}{dt} = t_d R_d^2 - K_d R_d u_d - f_d v_d, \quad (\text{D.6})$$

$$L \frac{dt_d}{dt} = -V_0 t_d + (v_p - v_d)(ES + T_0), \quad (\text{D.7})$$

où f_d correspond à la dérivée de la relation du frottement visqueux par rapport à la vitesse linéaire pour le rayon R_d .

L'équation (D.7) montre que l'influence de la vitesse de perturbation v_p augmente avec le module d'Young E . De plus, on déduit de la relation (D.6) ce qui suit :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{t_d(s)}{u_d(s)} = \frac{K_d R_d E_0}{f_d V_0 + R_d^2 E_0} \approx \frac{K_d}{R_d}. \quad (\text{D.8})$$

Ceci indique que le gain statique entre la commande u_d et la tension t_d est inversement proportionnel au rayon de la bobine R_d . Ce résultat a été utilisé dans la partie commande dans la stratégie de multiplications de rayons (Chapitre 2).

D.2.4. Modélisation du moteur synchrone

Le dérouleur, tout comme le tracteur et l'enrouleur, sont entraînés par des moteurs qui, dans le cas du banc expérimental à trois moteurs de l'ERT Enroulement, sont des moteurs synchrones à aimants permanents appelés « brushless ». Les avantages et inconvénients des moteurs alternatifs et des moteurs à courant continu dans une application de transport de bande sont énumérés dans [GP97].

Le comportement dynamique d'une machine à aimants permanents à P paires de pôles est décrit selon le modèle de Park et est exprimé par les équations suivantes [GC97] :

$$\begin{pmatrix} U_d \\ U_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_a + L_d s & -L_q P \Omega \\ L_d P \Omega & R_a + L_q s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_d \\ i_q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ K_T \Omega \end{pmatrix}, \quad (\text{D.9})$$

$$C_m = K_T i_q + P(L_d - L_q) i_d i_q, \quad (\text{D.10})$$

où R_a représente la résistance des phases de l'induit, Ω est la vitesse mécanique du rotor, K_T est le coefficient de la force contre-électromotrice (f.c.é.m), C_m est le couple électromagnétique, L_d et L_q sont respectivement les inductances d'axe d et q , i_d et i_q sont respectivement les courants d'axe d et q . U_d et U_q sont les tensions d'axe d et q .

Dans la même application, celle du banc d'enroulement à trois moteurs de l'ERT Enroulement, la régulation est effectuée pour le courant i_q tout en maintenant $i_d = 0$. D'autres stratégies de régulation sont décrites dans [GC97]. Cette régulation de courant est illustrée dans la Figure D-3.

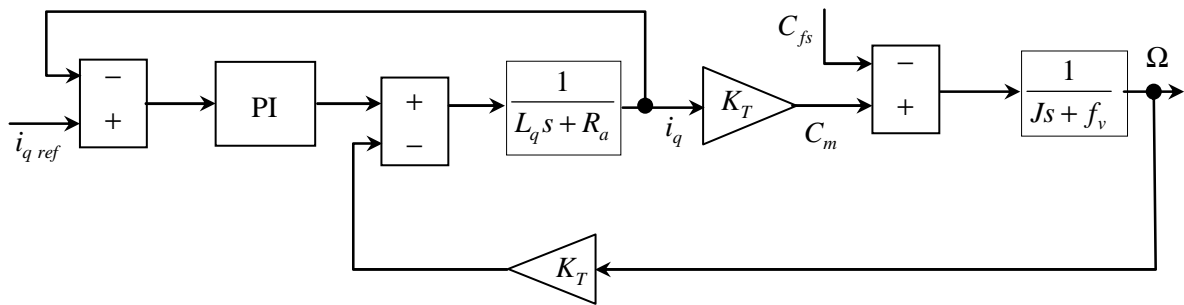


Figure D-3. Modèle du moteur synchrone lorsque le courant $i_d = 0$, avec rétroaction de courant

La fonction de transfert couple/courant pourra être approximée par un premier ordre si l'asservissement de courant est plus rapide que la contre-réaction de vitesse. Cette fonction de transfert peut encore être approximée par un simple gain si le temps d'établissement est inférieur au temps d'échantillonnage de la consigne de courant. C'est d'ailleurs ce dernier cas qui est considéré avec un temps d'échantillonnage choisi égal à 10 ms.

ANNEXE E :
PUBLICATIONS PERSONNELLES

E. Publications personnelles

Ce travail de thèse a donné lieu à une publication dans une revue internationale avec comité de lecture, à quatre publications dans des conférences internationales avec comité de lecture dont une dans une session invitée et à une publication dans une conférence nationale avec comité de lecture.

E.1. Revue Internationale avec comité de lecture

- [BKO06] A. Benlatreche, D. Knittel et E. Ostertag. Robust decentralised control strategies for large scale web handling systems. *IFAC Journal of Control Engineering Practice*, 2006, doi : 10.1016/j.conengprac.2006.03.003. (Accepté le 20 Mars 2006)

E.2. Conférences Internationales avec comité de lecture

- [BOK06] A. Benlatreche, E. Ostertag et D. Knittel. H_∞ -feedback decentralized control by BMI optimization for large scale web handling systems. *IEEE American Control Conference ACC06*, Minneapolis, USA, June 2006.
- [BKO05a] A. Benlatreche, D. Knittel et E. Ostertag. State feedback control with full or partial integral action for large scale winding systems. In proceedings of the *IEEE IAS 2005: Industry Applications Society, 40th Annual General Meeting*, pp. 973-978, Hong Kong, China, October 2005.
- [BKO05b] A. Benlatreche, D. Knittel, et E. Ostertag. State feedback controllers synthesis using BMI optimisation for large scale web handling systems. *16th World Congress IFAC*, Prague, Czech Republic, July 2005.
- Session invitée :*
- [BKO04] A. Benlatreche, D. Knittel, et E. Ostertag. Robust decentralized control strategies for large scale web handling systems. *10th IFAC Symposium on Large Scale Systems*, Osaka, Japan, July 2004. (Article recommandé pour la revue [BKO06])

E.3. Conférence Nationale avec comité de lecture

- [BKO05c] A. Benlatreche, D. Knittel et E. Ostertag. Stratégies de commandes décentralisées pour les systèmes d'enroulement de grande dimension. Présenté dans les *Journées Doctorales et Nationales du GDR MACS du CNRS, JDMACS-JNMACS*, Lyon, France, Septembre 2005.

BIBLIOGRAPHIE

- [ABG95] P. Apkarian, J.M. Biannic & P. Gahinet. Self scheduled H_∞ control of missile via linear matrix inequalities. *Journal of Guid. Contr. And Dyn.*, vol. 18, pp. 532-538, 1995
- [Abr92] S. Abrate. Vibrations of belts and belt drives. *Mechanism and Machine Theory*, vol. 27, issue n°6, pp. 645-659, 1992.
- [ACA+99] D. Alazard, C. Cumer, P. Apkarian, M Gauvrit & G. Ferreres. Robustesse et commande optimale. *Cépaduès-Editions*, Toulouse, 1999.
- [ADC94] B.H. Armstrong, P. Dupont & C. de W. Canudas. A survey of models, analysis tools and compensation methods for the control of machines with friction. *Automatica*, vol. 30, pp. 1083-1134, 1994.
- [AG95] P. Apkarian & P. Gahinet. A convex characterization of gain-scheduled H_∞ controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 40, pp. 853-864, 1995.
- [AK04] J. Aouyama & K. Konishi. A BMI based design for robust PID controllers with two-degrees-of-freedom structure. *In the proceedings of the American control Conference*, pp. 4879-4884, Boston, Massachusetts, 2004.
- [Alt66] H.C. Altmann. Formulas for computing the stresses in center wound rolls. *Tech. Assoc. Pulp and Paper Ind. Journal*, vol. 46, pp. 347-362, 1966.
- [AM90] B.D.O. Anderson & J.B. Moore. *Optimal Control: Linear quadratic techniques*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice Hall; 1990.
- [AM98] K. Asano & M. Morari. Interaction measure of tension-thickness control in tandem cold rolling. *Control Engineering Practice*, vol. 6, pp. 1021-1027, 1998.
- [AP02] D. Arzelier & D. Peaucelle. An iterative method for mixed H_2/H_∞ synthesis via static output feedback. *In Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control*, Las Vegas, pp. 3464 – 3469, 2002.
- [APA02] D. Arzelier, D. Peaucelle & R. Ariza. Une méthode itérative pour la synthèse mixte H_2/H_∞ par retour de sortie statique. *Conférence Internationale Francophone d'Automatique (CIFA)*, Nantes, 2002.
- [AV73] B.D.O. Anderson & S. Vongpanitlerd. *Network analysis and Synthesis*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1973.
- [AW97] K.J. Åström & B. Wittenmark. *Computer controlled systems: theory and design* (3rd ed.), Prentice-Hall, 1997
- [BB93] F. Boucquerel & P. Bourgin. Winding flexible media. A global approach. *Adv. Info. Storage Systems, ASME Transactions*, vol. 5, pp. 493-511, 1993.
- [BB03] P. Bourgin & M. Boutaous. Macroscopic effects of surface roughness in confined air-flow, *Proceedings of the International Conference on Web Handling, IWEB'2003*, Stillwater, Oklahoma, juin 2003.
- [BBK04] M. Boutaous, P. Bourgin & D. Knittel. Optimization of the online tension control in winding systems. *IFAC Symposium MMM'2004*, Nancy, France, 2004.
- [BGF+94] S. Boyd, L. El-Ghaoui, E. Feron & V. Balakrishnan. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. SIAM, Philadelphia, USA, 1994.

- [BLD96] N.S. Bardell, R.S. Langley & J.M. Dunsdon. On the free in plan vibration of isotropic rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 191, pp. 459-467, 1996.
- [BMF02] J. Bao, P.J. McLellan & J.F. Forbes. A passivity-based analysis for decentralized integral controllability. *Automatica*, vol. 38, pp. 243-247, 2002.
- [Bou98] M. Boutaous. Influence de l'état de surface des matériaux flexibles sur leur comportement mécanique. *Thèse de doctorat*, Université Louis Pasteur Strasbourg, 1998.
- [Bouq93] F. Bouquerel. Etude théorique et expérimentale de l'enroulement d'un film plastique mince: rôle des effets aérodynamiques. *Thèse de Doctorat*, Ecole Centrale de Lyon, 1993.
- [BR02] T. Bastogne & A. Richard. Modélisation et simulation d'un système d'entraînement de bande en présence de glissement. *Congrès International Francophone d'Automatique CIFA'2002*, Nantes, Juillet 2002.
- [BDF+03] A. Bouscayrol, B. Davat, B. de Fornel, B. François, J.P. Hautier, F. Meibody-Tabar, E. Monmasson, M. Pietrzak-David, H. Razik, E. Semail & F. Benkhoris. Control structures for multi-machine multi-converter systems with upstream coupling. *Mathematics and Computers in Simulation*, vol. 63, pp. 261-270, 2003.
- [BDG05] A. Bouscayrol, Ph. Delarue & X. Guillaud. Power strategies for maximum control structure of a wind energy conversion system with a synchronous machine. *Renewable Energy*, vol. 30, pp. 2273-2288, 2005.
- [Bra71] G. Brandenburg. Über das dynamische Verhalten durchlaufender elastischer Stoffbahnen bei Kraftübertragung durch Coulomb'sche Reibung in einem System angetriebener, umschlungener Walzen. *Thèse de doctorat*, Université de Munich, Allemagne, 1971.
- [Bra73] G. Brandenburg. Ein mathematisches Modell für eine durchlaufende elastische Stoffbahn in einem System angetriebener, umschlungener Walzen. *Regelungstechnik und Prozess-Datenverarbeitung*, vol. 3, pp. 69-162, 1973.
- [Bri66] E.H. Bristol. On a new measure of interactions for multivariable process control. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, issue n°12, 1966.
- [BT82] J. Bernussou & A. Titli, *Interconnected dynamical systems: stability, decomposition and decentralisation*. North-Holland, 1982.
- [BV97] S. Boyd & L. Vandenberghe. Semidefinite programming relaxations of non-convex problems in control and combinatorial optimization. In *communications, computation, control and signal processing: a tribute to Thomas Kailath*. A. Paulray, V. Roy Chowdhuri and C. Schaper, editors, Klurwer, Chapter 15, pp. 279-288, 1997.
- [BVB97] E. Beran, L. Vandenberghe & S. Boyd. A global BMI algorithm based on the generalized benders decomposition. In *proc. of the European Control Conference*, Belgium, 1997.
- [BWK03] P. Bigras, T. Wong & K. Khayati. Structured optimal controller design using BMI formulation. *CESA'2003: IMACS multiconference computational engineering in systems applications*, Lille, France, July 9-11, 2003.
- [BWS96] R.W. Beaven, M.T. Wright & D.R. Seaward. Weighting function selection in the H_∞ design process. *Control Engineering Practice*, vol 4, issue n°5, pp. 625-633, 1996.
- [CAS01] S.T. Clausen, P. Andersen & J. Stoustrup. Robust control. *Course in robust and optimal control*, Aalborg University, Denmark, April 2001.
- [CD02] B. Clément & G. Duc. Synthèse multicritère par retour de sortie : utilisation de la paramétrisation de Youla et de l'optimisation LMI. Dans : Bernussou J, Oustaloup A. *Conception de commandes robustes*, Hermès. pp. 228-268, 2002.
- [CH01] J. Chung & C.S. Han. Vibration of an axially moving string with geometric non-linearity and translating acceleration. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 240, issue n°4, pp. 733-746, 2001.

- [Chr96] U. Christen. Engineering aspects of H_∞ control. *Thèse de doctorat*, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 1996.
- [Cla05] F. Claveau. Contribution à l'analyse et la commande des grands systèmes. *Thèse de doctorat*, Ecole centrale de Nantes et Université de Nantes, 02 Décembre 2005.
- [Cle01] B. Clément. Synthèse multiobjectifs et séquençement de gains : Application au pilotage d'un lanceur spatial. *Thèse de doctorat*, Université PARIS XI ORSAY, 21/09/2001.
- [CS92] R.Y. Chiang & M.G. Safonov. Real K_m -synthesis via generalized Popov multipliers. *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2417-2418, 1992.
- [CSS+93] B.M. Chen, A. Saberi, P. Sannuti & Y. Shamash. Construction and parametrization of all static and dynamic H_2 optimal state feedback solutions, optimal fixed modes and fixed decoupling zeros. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 38, issue n°2, pp. 248-261, February 1993.
- [CW84] D. Connolly & D. Winarsky. Stress analysis of wound magnetic tape. *Proceeding of the ASLE – International Conference*, San Diego, USA, vol. 16, pp. 172-182, 1984.
- [CWG94] U. Christen, M.F. Weilenmann & H.P. Geering. Design of H_2 and H_∞ controllers with two degrees of freedom. *Proc. of the American Control Conference*, pp. 2391-2395, 1994.
- [CZW+04] L.Q. Chen, J.W. Zu, J. Wu & X.D. Yang. Transverse vibrations of an axially accelerating viscoelastic string with geometric nonlinearity. *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 48, issue n°2, pp. 117-182, 2004.
- [DF99] G. Duc & S. Font. *Commande H_∞ et μ -analyse*. Hermès, Paris, 1999.
- [DGK+89] J.C. Doyle, K. Glover, P.P. Khargonekar & B.A. Francis. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 34, issue n°8, pp. 831-847, 1989.
- [DS81] J.C. Doyle & G. Stein. Multivariable feedback design: concepts for a classical/modern synthesis. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, issue n°1, pp. 4-16, 1981.
- [Edm94] J.M. Edmunds. Output response tuning of one- and two-degree of freedom controllers using an H_∞ approach. *International Journal of Control*, vol. 59, pp. 1119-1126, 1994.
- [FBB+80] W. Findeisen, F.N. Bailey, M. Bardys, K. Malinowski & A. Wozniak, *Control and coordination in hierarchical systems*. Collec. Wiley International Institute for Applied Systems Analysis, International Series on Applied Systems Analysis, John Wiley and Sons, 1980.
- [FH97] H. Fujioka & K. Hoshijima. Bounds for the bmi eigenvalues problem. *Transactions of SICE*, vol. 33, issue n°7, pp. 616-621, 1997.
- [FK01] M. Fukuda & M. Kojima. Branch and cut algorithms for the bilinear matrix inequality eigenvalue problem. *Computational Optimization Applications*, vol. 19, pp. 79-105, 2001.
- [FK97] T. Fujita & M. Kojima. Semidefinite relaxation for nonconvex programs. *Journal of Global Optimization*, vol. 10, pp. 367-380, 1997.
- [FK99] M. Fukuda & M. Kojima. Branch-and-cut algorithms for the bilinear matrix inequality eigenvalue problem. *Research reports on mathematical and computing sciences Series B: Operations research*, B-351, Tokyo Institute of Technology, Japan, April 1999.
- [FL03] C.M. Fransson & B. Lennarston. Low order multicriteria H_∞ design via bilinear matrix inequalities. In *proceedings of the 42nd Conference on decision and Control*, Maui, Hawaii, USA, December 2003.
- [FM96] G. Ferreres & M. M'Saad. Parametric robustness analysis of a multivariable H_∞ missile autopilote. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 19, issue n°3, pp. 621-627, May-June 1996.

- [Fra87] B.A. Francis. A course in H_∞ control theory. *Lecture notes in control and information sciences*, vol. 88, 1987.
- [Fuj99] H. Fujioka. A Branch-and-Bound algorithm for solving BMIs tacking account of activities of relaxed LMIs. In *proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, pp. 1007-1008, Phoenix, Arizona, USA, December 1999.
- [Gah92] P. Gahinet. On the same Riccati equations arising in H_∞ control problems. *Rapports de recherche N° 1643*. INRIA, Rocquencourt, Mars 1992.
- [Gah94] P. Gahinet. Explicit controller formulas for LMI-based H_∞ synthesis. *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2396-2400, 1994.
- [GC97] G. Grellet & G. Clerc. *Actionneurs Electriques, Principes Modèle-Commande*. Eyrolles, Paris, 1997.
- [GD88] K. Glover & J.C. Doyle. State-space formulae for all stabilizing controllers that satisfy an H_∞ -norm bound and relations to risk sensitivity. *Systems and Control Letters*, vol. 11, pp. 167-172, 1988.
- [GH99] M.J. Grimble & G. Hearn. *Advanced control for Hot Rolling Mills*. In: *Advances in control: Highlights of ECC'99*, Springer, pp. 135-169, 1999.
- [GI94] P. Gahinet & A. Ignat. Low-order H_∞ synthesis via LMIs. *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 1499-1500, 1994.
- [GJ79] R.M. Garey & D.S. Johnson, *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness*, W.H. Freeman & Company, 1979.
- [GL95] M. Green & D.J. Limebeer. *Linear Robust Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New-Jersey, 1995.
- [GM86] P. Grosdidier & M. Morari. Interaction measures for systems under decentralized control, *Automatica*, vol. 22, pp. 309-319, 1986.
- [GP97] A. Gabagnou & V. Pringalle. Applications métallurgiques de process et de finition. *Document du groupe Schneider*, 1997.
- [GP98] J.E. Geddes & M. Postlethwaite. Improvements in Product Quality in Tandem Cold Rolling Using Robust Multivariable Control. *IEEE Transactions on Control Systems*, vol. 6, issue n°2, 1998.
- [GSP94] K.G. Goh, M.G. Safonov & G.P. Papavassilopoulos. A global optimization approach for the BMI problem. In *proceedings of the 33rd conference on decision and control*, pp. 2009-2014, 1994.
- [GTS+94] K.C. Goh, L. Turan, M.G. Safonov & G.P. Papavassilopoulos. Biaffine matrix inequalities properties and computational methods. *American Control Conference*, pp. 850-855, Baltimore, 1994.
- [Hah78] W. Hahn. *Theory and Applications of Lyapunov's Direct Method*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1978.
- [Hak87] Z. Hakiel. Non linear model for wound roll stress. *Tech. Assoc. Pulp and Paper Ind. Journal*, vol. 70, pp. 113-117, 1987.
- [HEG03] K. Holmstrom, M. Edvall & A. Göran. TOMLAB for large-scale robust optimization. In *proceedings Nordic MATLAB Conference*, October 2003.
- [HG93] R.A. Hyde & K. Glover. The application of scheduled H_∞ controllers to a VSTOL aircraft. *IEEE Trans. on Automatic control*, vol. 38, issue n°7, pp. 1021-1039, 1993.
- [HHB99] A. Hassibi, J. How & S. Boyd. A path-following method for solving BMI problems in control. In *Proceedings of the IEEE Conference on Decision and Control*, Arizona, 1999.

- [Hir99] A. Hired. Pilotage robuste d'un missile sur un large domaine de vol ; synthèse et analyse dans le cadre H_∞ et LPV. *Thèse de doctorat*, Université Paris XI Orsay, 1999.
- [HLK+05] D. Henrion, J. Löfberg, M. Kočvara & M. Sting. Solving polynomial static output feedback problems with PENBMI. *In the proceedings of the joint 44th IEEE Conference on Decision and Control & the European Control Conference 2005*, pp. 7581-7586. Seville, Spain, Decembre 12-15, 2005.
- [IF99] J. Imae & T. Furudate. A design method for fixed-order H_∞ controllers via bilinear matrix inequalities. *In proceedings of the American Control Conference*, pp. 1876-1880, San Diego, California, June 1999.
- [IS86] M. Ikeda & D.D. Siljak. Overlapping decentralized control with input, state and output inclusion. *Control Theory & Advanced Technology*, vol. 2, issue n°2, pp. 155-172, 1986.
- [IS93] T. Iwasaki & R.E. Skelton. A complete solution to the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas. *Proc. American Control Conference*, 1993.
- [IS94] T. Iwasaki & R.E. Skelton. A unified approach to fixed order controller design via linear matrix inequalities. *In proc. American Control Conference*, pp. 35-39, Baltimore, 1994.
- [IS95] T. Iwasaki & R.E. Skelton. The XY-centring algorithm for the dual LMI problem: A new approach to fixed order control design. *International Journal of Ccontrol*, vol. 62, issue n°6, pp. 1257-1272, 1995.
- [ISW84] M. Ikeda, D.D. Siljak & D.E. White. An inclusion principle for dynamic systems. *IEEE Transactions, AC-29*, pp. 244-249, 1984.
- [IT01] S. Ibaraki & M. Tomizuka. Rank minimization approach for solving BMI problems with random search. *In proceedings of the American Control Conference*, pp. 1870-1875, Arlington, VA, 2001.
- [Iwa99] T. Iwasaki. The dual iteration for fixed order control. *IEEE Transaction on Automatic Control*, vol. 44, issue n°4, pp. 783-788, 1999.
- [IZF96] M. Ikeda, G. Zhai & Y. Fujisaka. Decentralized H_∞ controller design for large-scale systems: A matrix inequality approach using a homotopy method. *In proceedings of the 35th Conference on Decision and Control*, pp. 1-6, Kobe, Japan, December 1996.
- [KAV+06] D. Knittel, A. Arbogast, M. Vedrines & P. Pagilla. Decentralized robust control strategies with model based feedforward for elastic web winding systems. *American Control Conference*, Minnesota, 2006.
- [KBB05] D. Knittel, P. Bourgin & M. Boutaous. Control and online tension reference optimization in winding systems: application to an identified three-motor simulator. *IWEB'2008*, Stillwater, Oklahoma, USA, juin 2005.
- [Kes61] G. Kessler. Das zeitliche Verhalten einer kontinuierlichen elastischen Bahn zwischen zwei aufeinanderfolgenden Walzenpaaren. *Regelungstechnik*, vol. 9, pp. 154-159, 1961.
- [KGL02] D. Knittel, D. Gigan & E. Laroche. Robust decentralized overlapping control of large scale winding systems. *American Control Conference*, Anchorage, USA, 2002.
- [KH00] V. Kucera & D. Henrion. H_2 optimal control via pole placement. *In Proceedings of the 3rd IFAC Symposium On Robust Control Design (ROCOND)*, Prague, 2000.
- [KKM+02] H. Koç, D. Knittel, M. de Mathelin & G. Abba. Modeling and robust control of winding systems for elastic webs. *IEEE Transactions on control Systems Technology*, vol. 10, issue n°2, pp. 197-208, 2002.
- [KLG+03] D. Knittel, E. Laroche, D. Gigan & H. Koç. Tension control for winding systems with two degrees of freedom H_∞ controller. *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 39, issue n°1, pp. 113-120, 2003.

- [Kni03] D. Knittel. Robust control design using H_∞ methods in large scale web handling systems. *7th International Conference on web handling, IWEB'7*, Stillwater, Oklahoma, 2003.
- [Koç00] H. Koç. Modélisation et commande robuste d'un système d'entraînement de bande flexible. *Thèse de doctorat*, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 2000.
- [KP97] H. Koivurova & A. Pramila. Nonlinear vibration of axially moving membrane by finite element method. *Computational Mechanics*, vol. 20, pp. 573-581, 1997.
- [KS03] M. Kočvara & M. Stingl. PENNON: A code for convex nonlinear and semi definite programming. *Optimization Methods and Software*, vol. 18, issue n°3, pp. 317-333, 2003.
- [KS04] M. Kočvara & M. Stingl. PENBMI, *version 2.0*, 2004. See: <http://www.penopt.com> for a free developer version.
- [KSK97] M. Kawanishi, T. Sugie & H. Kanki. BMI global optimization based on branch and bound method taking account of the property of local minima. *In proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, pp. 781-786, San Diego, December 1997.
- [KSV+03] S. Kanev, C. Scherer, M. Verhaegen & B. de Schutter. A BMI optimization approach to robust output-feedback control. *In proceedings of the 42nd IEEE Conference on decision and Control*, pp. 851-856, Maui, Hawaii USA, December 2003.
- [Kwa93] H. Kwakernaak. Robust control and H_∞ optimization—a tutorial paper. *Automatica*, vol. 29, pp. 255-273, 1993.
- [Lar96] P. De Larminat. *Commande des systèmes linéaires*. Hermès, Paris, 1996.
- [Lau02] J. Laukkanen. FEM analysis of a travelling web. *Computer and Structures*, vol. 80, pp. 1827-1842, 2002.
- [LC98] J. Lemaitre et J-L. Chaboche. *Mécanique des matériaux solides*. Dunod, Paris, 1998.
- [LCM99] P. Lischinsky, C. de W. Canudas & G. Morel. Friction compensation for an industrial hydraulic robot. *IEEE Control Systems*, vol. 19, pp. 25-32, 1999.
- [LKP93] D.J.N. Limebeer, E.M. Kasenally & J.D. Perkins. On the design of robust two degrees of freedom controllers. *Automatica*, vol. 29, issue n°1, pp. 157-168, 1993.
- [LL93] P. Lin & M.S. Lan. Effects of PID gains for controller with dancer mechanism on web tension. *Proceedings of the International Conference on Web Handling, IWEB'2*, Oklahoma, pp. 66-76, 1993.
- [LM96] S.Y. Lee & C.D.Jr. Mote. Vibration control of an axially moving string by boundary control. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 118, pp. 66-74, 1996.
- [LMG01] F. Le Mauff & G. Duc. Un nouvel algorithme de calcul de retour statique de sortie : Algorithme de K-itération. *Journées doctorales d'automatique*, Toulouse, France, 2001.
- [Löf04] J. Löfberg. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. *In IEEE Int. Symp. on Computer Aided Control Systems Design*, pp. 284-289, Taipei, 2004.
- [Mat00] M. Mattei. A note on the solution of class of BMIs for H_∞ problems. *In proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 2746-2747. Sydney, 12/2000.
- [McI72] D.B. McIver. Hamilton's principle for systems of changing mass, *Journal of Engineering Mathematics*, vol. 7, pp. 249-261, 1972.
- [MG03] C.S. Mehendale & K.M. Grigoriadis. A homotopy method for decentralized control design. *In proceedings of the American Control Conference*, pp. 5023-5027, Denver, Colorado, June 4-6, 2003.
- [Mir60] W.L. Miranker. The wave equation in a medium in motion. *IBM Journal*, pp. 36-42, 1960.

- [MSA86] V. Manousiouthakis, R. Savage & Y. Arkun. Synthesis of decentralized process control structures using the concept of block relative gain. *AIChE Journal*, 1986.
- [MSP00] M. Mesbahi, M.G. Safonov & G.P. Papavassilopoulos. *Bilinearity and complementarity in robust control*. In L. Ghaoui & S. Niculescau editors, *Advances in linear matrix inequality methods in control*, pp. 269-292. SIAM, Philadelphia, PA, 2000.
- [NG94] A. Nemirovski & P. Gahinet. The projective method for solving LMIs. *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 840-844, 1994.
- [NMc96] L. Le Ngoc & H. McCaillon. Transverse vibration of a moving string: a physical overview. *Journal of Systems Engineering*, vol. 6, pp. 61-71, 1996.
- [NOS+95] T. Nakayama, H. Ohmori, A. Sano, & H. Ito. A design of H_∞ stable controller. *Proceedings of the European Control Conference*, 1995.
- [ÖP99] H.R. Öz & M. Pakdemirli. Stability analysis of an axially accelerating string. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 227, issue n°2, pp. 239-257, 1999.
- [Ost06] Eric Ostertag. *Commande et estimation multivariables*. Chapitre I, pp. 56-57, édition Ellipses, Collection Technosup, Paris, Février 2006.
- [Oud94] C. Oudet. *Polymères, Structures et Propriétés : Introduction*. Masson, Paris, 1994.
- [PA01] D. Peaucelle & D. Arzelier. An efficient numerical solution for H_2 static output feedback synthesis. *In Proceedings of European Control Conference*, Porto, pp. 3800-3805, 2001.
- [Pak94] M. Pakdemirli. Transverse vibration of an axially accelerating web. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 169, pp. 179-196, 1994.
- [Per81] L. Pernebo. An algebraic theory for the design of controllers for linear multivariable systems—part II: Feedback realizations and feedback design. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, pp. 183-194, 1981.
- [Pfe66] J.D. Pfeiffer. Internal pressures in wound roll of paper. *Tech. Assoc. Pulp and Paper Ind. Journal*, vol. 49, pp. 342-347, 1966.
- [PKD+00] P.R. Pagilla, E.O. King, L.H. Dreinhoffer & S.S. Garimella. Robust observer-based control of an aluminum strip processing line. *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 36, issue no. 3, pp. 865-870, May/June 2000.
- [PU97] M. Pakdemirli & A.G. Ulsoy. Stability analysis of an axially accelerating web. *Journal of Sound and Vibrations*, vol. 203, pp. 815-832, 1997.
- [Puy05] G. Puyou. Conception multi-objectifs de lois de pilotage pour un avion de transport civil. *Thèse de doctorat*, ENSAE Toulouse, 06/12/2005.
- [RL93] K.N. Reid & K.C. Lin. Control of longitudinal tension in multi-span web transport systems during start up. *Proceedings of the International Conference on Web Handling, IWEB'2*, Oklahoma, USA, pp. 77-95, 1993.
- [RL93b] K.N. Reid & K.C. Lin. Dynamic behaviour of dancer subsystems in web transport systems. *Proceedings of the International Conference on Web Handling, IWEB'2*, Oklahoma, pp. 135-146, 1993.
- [Rod96] C.A. Roduner. H_∞ -Regelung linearer systeme mit Totzeiten. *Thèse de doctorat*, Swiss Federal Institute of Technology, Zurich, 1997.
- [RRW+98] A. Renshaw, C. Rahn, J. Wickert & Jr.C.D. Mote. Energy and conserved functionals for axially moving materials. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 120, issue n°2, pp. 634-636, 1998.
- [Rug93] W.J. Rugh. *Linear Systems Theory*, Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1993.
- [SC02] D.M. Sales & G.O. Corrêta. On the simultaneous stabilisation by static output feedback

- problem. *In proceedings of the IEEE International symposium on computer aided control system design*, pp. 86-91, Glasgow, Scotlan, U.K, September 18-20, 2002.
- [SC98] J.K. Shiau & J.H. Chow. Structurally constrained H_∞ suboptimal control design using an iterative linear matrix inequality algorithm based on dual design formulation. *In Tamkang Journal of Science and Engineering*, vol. 1, issue n°2, pp. 133-143, 1998.
- [Sch02] H. Schmidt. Model based design of decentralized control configurations. *Thèse de doctorat*, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden, 2002.
- [Sch90] C. Scherer. The Riccati inequality and state-space H_∞ -optimal control. *Thèse de doctorat*, Universität Würzburg, 1990.
- [SCK05] C. Shin, J. Chung & W. Kim. Dynamic characteristics of the out-of-plane vibration for an axially moving membrane. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 286, issues n°4-5, pp. 1019-1031, 2005.
- [SGL94] M.G. Safonov, K.C. Goh & J.H. Ly. Control system synthesis via bilinear matrix inequalities. In *Proc. of American Control Conference*, pp. 45-49, Baltimore, 1994.
- [SH03] G. Suweken & W.T. van Horssen. On the transversal vibrations of a conveyor belt with a low and time-varying velocity. Part I: the string-like case. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 264, pp. 117-133, 2003.
- [Shi91] K.H. Shin. Distributed control of the tension in multi-span web transport systems. *Thèse de doctorat*, Oklahoma State University (Oklahoma), May 1991.
- [Sil91] D.D. Siljak. *Decentralized control of complex systems*. Academic Press, New York, 1991.
- [SKC04] C. Shin, W. Kim & J. Chung. Free in-plane vibration of an axially moving membrane. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 272, pp. 137-154, 2004.
- [SKC97] K.H. Shin, K.T. Kim & S.M. Cheon. Non-linear tension control in winding process by using the contact roll. *Proceedings of the International Conference on Web Handling, IWEB'4*, Oklahoma, USA, 1997.
- [SLC89] M.G. Safonov, D.J. Limebeer & R.Y. Chiang. Simplifying the H_∞ theory via loop shifting, matrix pencil and descriptor concepts. *International Journal of Control*, vol. 50, 2467-2488, 1989.
- [SM88] S. Skogestad & M. Morari. Variable selection for decentralized control. *AICHE Annual Meeting*, Washington DC, November 1988.
- [SM89] S. Skogestad & M. Morari. Robust performance of decentralized control systems by independent designs. *Automatica*, vol. 25, issue n°1, pp. 119-125, 1989.
- [SP96] S. Skogestad & I. Postlethwaite. *Multivariable feedback control*. Addison-Wesley, Canada, 1996.
- [SRK95] K.H. Shin, K.N. Reid & S.O. Kwon. Non-interacting tension control in a multispan web transport system. *Proceedings of the International Conference on Web Handling, IWEB'3*, Oklahoma, pp. 312-326, 1995.
- [SSS00] S.S. Stankovic, M.J. Stanojevic & D.D. Siljak. Decentralized overlapping control of a platoon of vehicles. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 8, issue n°8, pp. 816-832, September 2000.
- [ST00] T. Sakamoto & S. Tanaka. Interaction measures for decentralized tension control system. *ISIE*, Mexico, 2000.
- [SW95] T.M. Spielbauer & T.J. Walker. Theory and application of draw control for elastic webs with nipped pull rollers. *Proceedings of the International Conference on Web Handling, IWEB'3*, Oklahoma, USA, pp. 46-65, 1995.
- [TA99] H.D. Tuan & P. Apkarian. Low nonconvex rank bilinear matrix inequalities: algorithms

- and applications. *In proceedings of the 38th Conference on Decision and Control*, pp. 1001-1006, Phoenix, Arizona, USA, December 1999.
- [Tec99] Fabrication de films alimentaires sous atmosphères contrôlée. *Techniques de l'Ingénieur*, vol. 5, pp. 5, Septembre 1999.
- [TÖ95] O. Tokar & H. Özbay. On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback. *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2525-2526, Seattle, Washington, June 1995.
- [Toi98] T.H. Toivonen. Robust control methods. *Lecture notes*, Abo Akademi University, Finland, 1998.
- [TS97] H. Tanaka & T. Sugie. General framework and BMI formulae for simultaneous design of structure and control systems. *In proceedings of the 36th Conference on Decision and Control*, pp. 773-778, San Diego, California, USA, December 1997.
- [Uls84] A.G. Ulsoy. Vibration control in rotating or translating elastic systems. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, vol. 106, issue n°1, pp. 6-14, 1994.
- [UM82] A.G. Ulsoy & C.D. Mote. Vibration of wide band saw blades. *Journal of Engineering for Industry*, vol. 104, pp. 71-78, 1982.
- [VHS99] H. Voos, H. Hartel & P. Schmitt. Optimierung der Wickelgüte in der Spinnvliesproduktion mit Fuzzy control. *ATP Journal*, heft 6, pp. 48-54, 1999.
- [WBC94] M.S. Whorton, H. Buschek & A.J. Calise. Homothopy algorithms for fixed order H_2 and H_∞ design. *In Proceedings of AIAA Guidance Navigation and Control Conference*, 1994.
- [WD73] S.H. Wang & E.J. Davison. On stabilization of decentralized control systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-18, pp. 473-478, 1973.
- [Wil71] J.C. Willems. Least squares stationary optimal control and the algebraic Riccati equation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 16, pp. 621-634, 1971. Correction in: *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 19, pp. 592f, 1974.
- [WM88] J.A. Wickert & C.D.Jr. Mote. Current research on the vibration and stability of axially moving materials. *Shock and Vibration Digest*, vol. 20, pp. 3-13, 1988.
- [WM90] G.A. Wickert & C.D.Jr. Mote. Classical vibration analysis of axially moving continua. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 57, pp. 738-744, 1990.
- [Wol76] W. Wolfermann. Mathematischer Zusammenhang zwischen Bahnzugkraft und inneren Spannungen beim Wickeln von elastischen Stoffbahnen. *Thèse de doctorat*, Université de Munich, Allemagne, 1976.
- [Wol95] W. Wolfermann. Tension control of webs: A review of the problems and solutions in the present and future. *Proceedings of the International Conference on Web Handling, IWEB'3*, Oklahoma, USA, pp. 198-229, 1995.
- [XCC96] Y. Xiao, F. Crusa & E.K.W. CHU. Bilinear matrix inequalities in robust control: phase I, problem formulation. *Technical Report TR-96-3*, Monash University, Australia, 1996.
- [YH98] Y. Yamada & S. Hara. Global optimization for the H_∞ control with constant diagonal scaling. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, issue n°2, pp. 191-203, 1998.
- [Zam81] G. Zames. Feedback and optimal sensitivity: Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximations. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, issue n°4, 1981.
- [ZDG95] K. Zhou, J. Doyle & K. Glover. *Robust and optimal control*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1995
- [ZIF01] G. Zhai, M. Ikeda & Y. Fujisaki. Decentralized H_∞ controller design: a matrix inequality approach using homotopy method. *Automatica*, vol. 37, pp. 565-572, 2001.

- [ZJ95] N. Zahlan & D.P. Jones. Modelling web traction on rollers. *Proceedings of the International Conference on Web Handling IWEB'3*, pp. 156-171, Oklahoma, 1995.

Résumé : Les contraintes actuelles de production de bandes flexibles, telles que l'augmentation de la vitesse de défilement associée à une diminution de l'épaisseur des bandes élastiques et l'absence de connaissances académiques du comportement matériau –procédé, placent les industriels dans des situations difficiles. Ils ont besoin de connaître les lois de réglage des machines pour éviter de générer dans l'entraînement de bande des perturbations qui occasionnent des défauts d'enroulement ou des arrêts de production. L'objectif de ce travail a consisté à développer des méthodes d'analyse et de synthèse de commandes robustes décentralisées pour des systèmes d'entraînement de bandes flexibles à nombreux moteurs dans un contexte d'utilisation comparable à celui rencontré en production industrielle : bande mince, vitesse de défilement élevée. Dans ce but, nous présentons dans ce manuscrit des correcteurs H_∞ multivariables avec un ou deux degrés de liberté (*ddl*), avec et sans intégrateur explicite, appliqués aux systèmes d'enroulement. Différentes structures de correcteurs sont considérées : un correcteur centralisé et des correcteurs décentralisés, avec ou sans recouvrement. Une méthode de conception d'une commande par retour d'état, appliquée aux systèmes d'enroulement et utilisant une résolution d'inégalité matricielle bilinéaire (BMI), est proposée et discutée. Des résultats de simulation sont donnés basés sur un modèle non linéaire identifié sur un banc expérimental. Des résultats expérimentaux sont également donnés sur ce même banc expérimental.

Mot clefs : systèmes d'enroulement, systèmes de grande dimension, commande H_∞ à *2ddl*, commande décentralisée, commande avec ou sans recouvrement, commande par retour d'état, optimisation LMI et BMI.

Abstract: In web transport systems, the main concern is to control independently speed and tension in spite of perturbations such as radius variations and changes of set point. Nevertheless, in these control techniques, tracking properties and perturbation rejection are interdependent and cannot be specified separately. In this thesis, we first present multivariable decentralised H_∞ controllers with one or two degrees of freedom (DOF), with and without explicit integrator, applied to winding systems. Different controller structures are then considered: centralised and semi-decentralised controllers with or without overlapping. The 2DOF approach improves significantly the disturbance rejection while reducing the coupling between tension and velocity. The use of decentralised control leads to performance deterioration as compared to centralised control. The off-diagonal elements of the plant are represented as uncertainties. This enables to analyse the stability of a decentralised control structure. Finally, multivariable H_∞ controllers are presented, with and without integrator, applied to winding systems and determined by a bilinear matrix inequality (BMI) approach. This method consists in designing state feedback control with the use of BMI optimisation. Insertion of full or partial integral action is discussed. Simulation results are given based on a nonlinear model identified on a 3-motor winding test bench. Experimental results have also been obtained on this setup.

Keywords: winding systems, large scale systems, two degrees of freedom H_∞ control, decentralized control, overlapping control, state feedback control, LMI and BMI optimisation.