

Numéro d'ordre :

THÈSE

présentée à

l'Université Strasbourg I – Louis Pasteur – École doctorale MSII
Laboratoire des Sciences de l'Image, de l'Informatique et de la Télédétection
UMR 7005 CNRS/ULP

par

Mlle Dobrina BOLTCHÉVA

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR
DISCIPLINE : INFORMATIQUE

**MODÉLISATION GÉOMÉTRIQUE ET TOPOLOGIQUE
DES IMAGES DISCRÈTES**

soutenue publiquement le 22 Octobre 2007
devant le jury composé de :

M. Jacques-Olivier LACHAUD, Professeur, Univ. Savoie, (rapporteur externe)
M. Hervé DELINGETTE, Directeur de recherche INRIA, (rapporteur externe)
M. Mohamed TAJINE, Professeur, Univ. Strasbourg, (rapporteur interne)
M. Jean-Daniel BOISSONNAT, Directeur de recherche INRIA, (examinateur)
M. Luc SOLER, Professeur associé, IRCAD, (examinateur)
M. Sylvain THÉRY, Ingénieur de recherche, Univ. Strasbourg, (invité)
M. Jean FRANÇON, Professeur retraité, Univ. Strasbourg, (invité)
Mme. Dominique BECHMANN, Professeure, Univ. Strasbourg, (directrice de thèse)

Remerciements

Cette thèse s'est déroulée au sein de l'équipe IGG (Informatique Géométrique et Graphique) du laboratoire LSIIT (Laboratoire des Sciences de l'Images, de l'Informatique et de la Télédétection) à Strasbourg, en collaboration avec l'IRCAD (Institut de Recherche contre les Cancers de l'Appareil Digestif).

Je tiens ici à exprimer tous mes remerciements et ma plus grande gratitude à :

- Jean-Daniel Boissonnat, pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury,
- Jacques-Olivier Lachaud, Hervé Delingette et Mohamed Tajine, qui ont eu la gentillesse de rapporter cette thèse, avec tout le travail que cela représente, et qui ont su me donner commentaires, conseils et encouragements au moment où j'en avais le plus besoin,
- Jean Françon, pour avoir accepté de participer à mon jury, et dont les travaux ont profondément influencé ma thèse,
- Luc Soler, pour m'avoir accueillie dans son équipe à l'IRCAD, pour son enthousiasme et ses précieux conseils,
- Sylvain Théry, de m'avoir encadrée tout le long de cette thèse et pour ses conseils pertinents, sa disponibilité et sa patience.

Je tiens à remercier spécialement Dominique Bechmann, qui a su diriger mes recherches pendant ces quatre années avec une confiance en mes capacités constamment renouvelée. Elle a su me laisser une grande autonomie et, malgré un emploi du temps inhumain, me consacrer le temps nécessaire pour que ma thèse se déroule dans les meilleures conditions. Grâce à elle, j'ai découvert le monde de la recherche et les multiples facettes du métier d'enseignant-chercheur. Je la remercie pour tout cela, et plus encore pour tous les bons moments que nous avons eus et qui ont forgé une amitié et un respect mutuels.

J'adresse aussi ma plus vive gratitude aux gens que j'ai pu rencontrer dans le cadre des conférences et des écoles d'été auxquelles j'ai participé (je pense particulièrement à Guillaume Damiand, Damien Marchal et Laurent Provot).

Une thèse ne se faisant pas dans la solitude, je remercie également mes collègues de travail de l'équipe Virtuals pour leur accueil chaleureux et toute l'équipe IGG. Dans le désordre le plus total, je tiens donc à remercier Stéphane, Alex, Julien, Vincent, Anne-Blandine, Pamela, Pierre, Nicolas, Marc, Frédéric, Caroline, Benjamin, Guillaume. Cette thèse n'aurait pas été la même sans vous.

Je remercie aussi ma famille au grand complet pour leur constant soutien affectif, même lointain. Particulièrement, je remercie mes parents de m'avoir appris à aller toujours de l'avant.

Enfin, je remercie tous mes amis pour les nombreux moments de complicité que nous avons vécus en dehors du travail. Je tiens aussi à remercier tout spécialement Axel, qui a réussi l'exploit de me soutenir et de m'aimer pendant ces quatre années de doutes et d'euphories.

En bref, merci à toutes et à tous.

Table des matières

1	Introduction	7
1.1	Contexte	7
1.2	Problématique	8
1.3	Objectifs	11
1.4	Travaux réalisés	11
1.5	Organisation du manuscrit	13
2	Géométrie et topologie discrète	15
2.1	Introduction	15
2.2	Modélisation des images discrètes	16
2.2.1	Images discrètes	17
2.2.2	Structures de voisinage	19
2.2.2.1	Objets discrets	21
2.2.2.2	Problèmes des structures de voisinage	22
2.2.3	Modélisation par complexes cellulaires	26
2.3	Topologie des objets discrets	28
2.3.1	Cavité, trou et tunnel	29
2.3.2	Nombre de connexité et genre	29
2.3.3	Nombres topologiques	31
2.4	Frontières des objets discrets	32
2.4.1	Sous-ensemble de voxels	33
2.4.2	Sous-ensemble de surfels	35
2.4.3	Le bord du complexe cellulaire	37
2.5	Conclusion	39
3	Modélisation géométrique	41
3.1	Introduction	41
3.2	Variétés combinatoires	42
3.3	Modèles cellulaires	48
3.3.1	Les modèles topologiques	51
3.3.1.1	Les cartes généralisées	52
3.3.1.2	Plongement des cartes	57
3.4	Maillages	58

3.5	Conclusion	61
4	Reconstruction 2D et 3D	63
4.1	Introduction	63
4.2	Reconstruction surfacique : un état de l'art	64
4.2.1	Triangulation d'un nuage de points	67
4.2.2	Triangulation d'un ensemble de contours	71
4.2.3	Triangulation d'un volume binaire	72
4.2.4	Reconstruction d'images multicolours	86
4.2.5	Triangulation avec modèles déformables	88
4.2.6	Méthodes de polyédrisation discrète	89
4.3	Reconstruction volumique : approches et algorithmes	92
4.3.1	L'approche par octree	92
4.3.2	L'approche frontale	93
4.3.3	L'approche de type Delaunay	95
5	Vers une nouvelle approche de reconstruction : Delaunay Discret	97
5.1	Bilan de l'état de l'art	97
5.2	Positionnement du problème	100
5.3	Idée	102
5.4	Conclusion	103
6	Méthode I : Delaunay Discret sur les voxels	105
6.1	Introduction	105
6.2	Pré-traitements	106
6.2.1	Suppression des cavités	106
6.2.2	Détection des tunnels	106
6.3	Les étapes de la méthode	108
6.3.1	Définition de la surface discrète	108
6.3.2	Sélection des nœuds du maillage	112
6.3.3	Approximation discrète des régions de Voronoï	118
6.3.4	Définition du graphe de Voronoï	122
6.3.4.1	Les sommets	124
6.3.4.2	Les arêtes	128
6.3.5	Construction du modèle topologique	135
6.4	Résultats	142
6.5	Adaptation du rayon de résolution	152
6.6	Extension volumétrique	154
6.7	Bilan	155
6.8	Alternatives	158

7	Méthode II : Delaunay Discret sur les pointels	163
7.1	Introduction	163
7.2	Définition de la surface discrète	164
7.2.1	Objet 6-connexe sans replis	166
7.2.2	Objet 6-connexe avec replis	167
7.2.3	Objet 18-connexe	169
7.2.4	Objet 26-connexe	172
7.3	Les autres étapes	173
7.4	Résultats	177
7.5	Reconstruction d'images multicolours	182
	Bibliographie	197

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte

Depuis ses débuts, dans les années 1970, *l'informatique graphique* s'est imposée comme un domaine de recherche vaste et attrayant qui ouvre des perspectives pour une multitude d'applications. Les outils offerts par l'informatique graphique trouvent leurs usages dans des domaines très variés de l'industrie, de la santé et de l'art. Avec l'apparition des logiciels de modélisation 3D, l'informatique graphique a révolutionné le monde du cinéma et l'industrie du jeu vidéo. Les industries aéronautique et automobile ont aussi adoptés les logiciels de modélisation comme une partie intégrante de la chaîne de conception et de fabrication. Aujourd'hui, la création d'une voiture semble inimaginable sans la création préalable d'une maquette informatique. Depuis des années, les industriels investissent dans des modeleurs et des simulateurs de plus en plus performants, leur permettant de tester et valider, dans des conditions les plus proches du réel, les caractéristiques du modèle virtuel, avant même d'avoir construit un prototype. En médecine, les hôpitaux les plus progressistes utilisent déjà, en routine clinique, des logiciels offrant la possibilité de concevoir et valider une prothèse ou bien d'assister le praticien durant une intervention à l'aide de logiciels de réalité augmentée. Par ailleurs, les simulateurs de geste opératoire sont de plus en plus utilisés par les futurs chirurgiens comme un outil d'entraînement avec des instruments virtuels sur des modèles virtuels reflétant l'anatomie des patients.

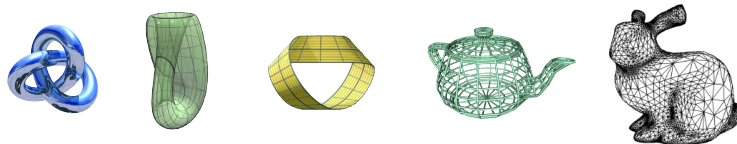


FIG. 1.1 – Différents modèles géométriques 3D.

Le principe de fonctionnement de tous ses logiciels est basé sur l'affichage et la manipulation des *modèles informatiques* issus de la *modélisation géométrique* (voir

Fig.1.1). La modélisation géométrique est une branche de l’informatique graphique qui globalement étudie les différentes manières de représenter un objet. Elle offre de nombreux modèles informatiques avec des propriétés connues, se charge d’en chercher des nouveaux et propose des algorithmes permettant d’obtenir ces modèles, de les modifier et de les manipuler. C’est grâce à ces représentations géométriques qu’il est possible de tourner les objets dans l’espace, de naviguer à l’intérieur, de simuler une découpe ou bien de calculer la déformation provoquée sous l’effet d’une interaction entre deux objets.

Le propos de ce manuscrit s’inscrit dans le contexte général de la modélisation géométrique.

1.2 Problématique

Plus concrètement, nous nous intéressons à la modélisation géométrique et topologique d’objets discrets représentés dans des images tridimensionnelles discrètes (3D).

Les images tridimensionnelles sont fournies par des appareils d’acquisition qui effectuent un échantillonnage d’une zone de l’espace. Des exemples typiques de ces appareils sont les *imageurs par résonance magnétique* et les *scanners par tomodynamométrie* (CT-scans) qui sont devenus incontournables en médecine moderne car ils permettent l’examen de structures internes de manière non invasive, souvent avec une totale innocuité. Les images tridimensionnelles IRM et TDM offrent une aide au diagnostic et la possibilité de détecter des pathologies avant même l’apparition de symptômes externes [SAN⁺04].

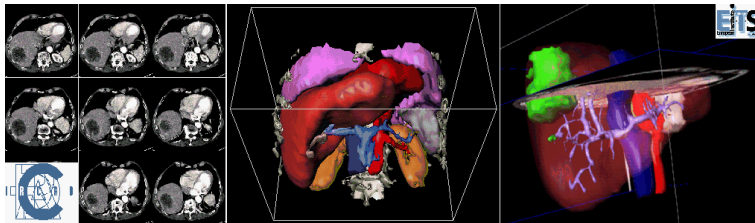


FIG. 1.2 – À gauche, image IRM d’un patient visualisée sous forme de coupes. À droite, les structures anatomiques et pathologiques du même patient après l’analyse de son image et la modélisation 3D des différentes structures.

Les images médicales 3D sont fournies généralement sous forme d’une série d’images 2D aux niveaux de gris (aussi appelées des coupes). Ces images discrètes peuvent être visualisées (Fig. 1.2), mais leur interprétation reste souvent un exercice difficile. De plus elles ne sont pas adaptées pour des analyses et des traitements plus pointus des informations contenues comme le calcul du volume d’une tumeur, par exemple. Ainsi, il est apparu l’intérêt d’analyser ces images et de modéliser les structures qu’elles représentent pour obtenir des modèles géométriques des différentes composantes d’une image [Aya04]. La première étape de cette transformation est habituellement la *segmentation* qui partitionne l’image en identifiant et délimitant les différentes composantes. Ensuite,

chaque composante est *reconstruite* sous la forme d'un *maillage*. Les maillages peuvent être surfaciques ou volumiques. Dans le premier cas, ils sont généralement composés de triangles est approximativement la *frontière* de l'objet. Les maillages volumiques sont composés de polyèdres (souvent des tétraèdres) représentant la surface et le volume de l'objet.

Les modèles 3D obtenus à partir des images TDM ou IRM des patients sont fréquemment utilisés en tant qu'aide au diagnostic, mais également, améliorent la planification chirurgicale ([DA05]) grâce à la réalité virtuelle [Nic04] (voir Fig.1.3). Par exemple, ils offrent la possibilité de développer des simulateurs chirurgicaux qui permettent de tester la chirurgie planifiée afin de vérifier sa faisabilité et de s'entraîner au geste chirurgical sur une copie exacte du patient avant de l'effectuer (voir Fig. 1.4). En radiothérapie, les modèles facilitent la détermination de la direction optimale pour irradier une zone tumorale en minimisant les dégâts sur les tissus sains. Une autre application des modèles est la mise au point de prothèses : celles-ci pouvant être validées virtuellement puis fabriquées simplement à partir du modèle informatique. Enfin, les modèles 3D sont aussi utilisés pour le suivi des patients dans le temps car ils facilitent, après recalage, la visualisation de l'efficacité d'une thérapie.



FIG. 1.3 – Utilisation clinique préopératoire du modèle 3D d'un patient dans un logiciel de planification chirurgicale.

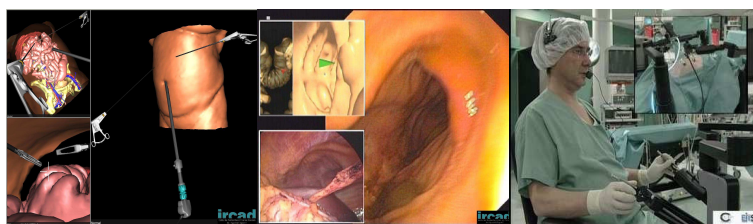


FIG. 1.4 – Positionnement d'outils laparoscopiques virtuels (gauche). Navigation dans le monde virtuel du modèle 3D du patient (centre). Utilisation du simulateur à l'aide d'un robot (droite).

Cependant, les transformations nécessaires à l'obtention des modèles géométriques 3D ne sont, en général, pas triviales, car les modalités d'acquisition des images ne fournissent qu'un *échantillonnage* du volume d'espace considéré et cet échantillonnage n'est représentatif que de certaines propriétés spécifiques des objets ou tissus observés. En conséquence, deux composantes distinctes mais de même nature seront indissociables sur l'image si elles se touchent dans la réalité. Plus problématique, deux tissus différents

pourront avoir des caractéristiques communes qui leur feront réagir identiquement sur certaines modalités d'acquisition.

Les progrès en technologie informatique ont contribué à résoudre une partie de ces difficultés et ont déjà permis de proposer des systèmes de segmentation et de modélisation 3D des organes à partir d'une image médicale. Cependant, le contexte médical impose aux modèles obtenus des contraintes d'intégrité importantes car dans le domaine médical, les maillages doivent être très précis, de bonne qualité et aussi fidèles que possible à la réalité anatomique humaine.

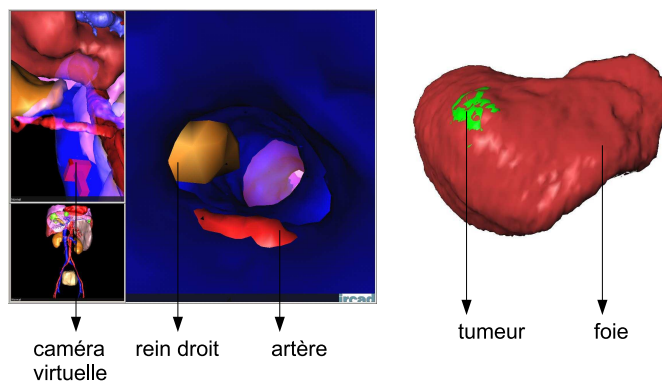


FIG. 1.5 – À gauche, navigation virtuelle dans la veine porte (en bleu) où la caméra est symbolisée par la flèche rouge et illustration des intersections des maillages du rein droit (en jaune) et d'une artère (en rouge) avec celui de la veine porte. À droite, le modèle 3D d'un foie humain et d'une tumeur hépatique dont le maillage dépasse les limites de l'organe.

La reconstruction est une tâche difficile dont les spécificités dépendent fortement des données et des applications. Le nombre important d'articles parus dans la littérature sur cette problématique, peut, à lui seul, témoigner de la diversité des approches mais aussi du fait qu'aujourd'hui, il est impossible de désigner une « méthode universelle » et que les méthodes existantes présentent des imperfections. Une étude plus approfondie des méthodes de reconstruction dans le cas d'objets segmentés à partir d'une image médicale montre des limitations gênantes, comme par exemple, des problèmes d'incohérence entre les maillages de deux structures anatomiques contiguës. Généralement, on observe des trous et des intersections entre les modèles si les objets ne sont pas reconstruits simultanément et si leurs relations de voisinage ne sont pas prises en compte. Force est de constater que l'apparition subite d'une partie du maillage du rein, lors d'une navigation virtuelle dans la veine porte, par exemple, présente une incohérence grossière car, en réalité, il est connu que ces deux structures sont adjacentes, mais ne peuvent pas se recouper (voir Fig. 1.5).

Ces problèmes d'intersections entre les maillages, aussi appelés des problèmes topologiques, sont gênants visuellement et peuvent introduire des instabilités dans les simulations. Mais de plus, ils rendent périlleuse une majorité de traitements informatiques qui requièrent la validité topologique du modèle comme précondition (le calcul

du volume, par exemple).

Les recherches menées dans le cadre de cette thèse concernent la modélisation géométrique et topologique d'objets discrets, obtenus après la segmentation d'une image 3D.

1.3 Objectifs

L'objectif initial de cette thèse était d'étudier les différentes approches existantes permettant la reconstruction d'un objet discret sous forme d'un modèle géométrique de sa surface ou de son volume. Cette étude devait résumer les avantages et les inconvénients des algorithmes existants afin d'aboutir à la conception d'une nouvelle méthode de reconstruction. Cette méthode devait être particulièrement adaptée aux données volumétriques de type médical, résoudre les imperfections des méthodes les plus répandues et permettre la construction d'un modèle géométrique cohérent (au sens topologique) de plusieurs structures anatomiques segmentées.

Ainsi, les travaux réalisés dans cette thèse se sont naturellement orientés pour atteindre plusieurs objectifs sous-jacents :

- Proposer une méthode de reconstruction d'un objet discret sous forme d'un maillage triangulaire régulier de sa surface.
- Garantir les propriétés topologiques du modèle obtenu (i.e. construire une variété topologique de dimension 2).
- Permettre à l'utilisateur de choisir la résolution du maillage (i.e. la taille des triangles du maillage).
- Compléter la méthode par la possibilité de générer un maillage qui s'adapte à la complexité des détails de la surface de l'objet.
- Utiliser cet algorithme de reconstruction pour proposer une méthode de reconstruction de plusieurs structures dépourvue d'incohérences topologiques entre les maillages.
- Généraliser l'algorithme pour obtenir des maillages volumiques (composés de tétraèdres) des objets discrets.

1.4 Travaux réalisés

Dans ce travail de thèse, nous nous sommes penchés sur la problématique de reconstruction de modèles géométriques à partir d'images discrètes 3D. Plus concrètement, nous nous sommes intéressés à la construction de maillages surfaciques à partir des frontières discrètes d'objets voxels.

Les recherches menées dans le cadre de cette thèse ont abouti à la conception d'une approche alternative de reconstruction d'objets voxels, appelée *Delaunay Discret*.

L'idée de base consiste à sélectionner un ensemble de nœuds sur la frontière discrète d'un objet voxel (en fonction d'une densité spécifiée par l'utilisateur), d'approcher les régions de Voronoï de ces nœuds sur la frontière discrète, de définir le graphe de Voronoï

euclidien correspondant et, finalement, de construire par dualité, à partir du graphe, un modèle topologique simplicial de la surface de l'objet.

Globalement, la méthode prend en entrée une image binaire et reconstruit un maillage triangulaire de la surface de l'objet. L'originalité de la méthode réside dans le fait qu'elle est purement discrète et qu'en se basant sur la topologie discrète de l'image, elle garantit l'extraction d'un modèle géométrique de propriétés topologiques connues et cohérentes.

Dans ce manuscrit nous présentons deux implémentations de cette approche qui se différencient essentiellement par la définition de la frontière discrète utilisée.

Dans sa première implémentation, cette méthode permet la génération de maillages quasi-réguliers et de bonne qualité, pour des objets relativement grands comme les organes vitaux, par exemple. Les maillages résultants sont bien adaptés pour des applications comme la simulation bio-mécanique. La figure 1.6 illustre trois des étapes critiques de la méthode pour un foie segmenté.

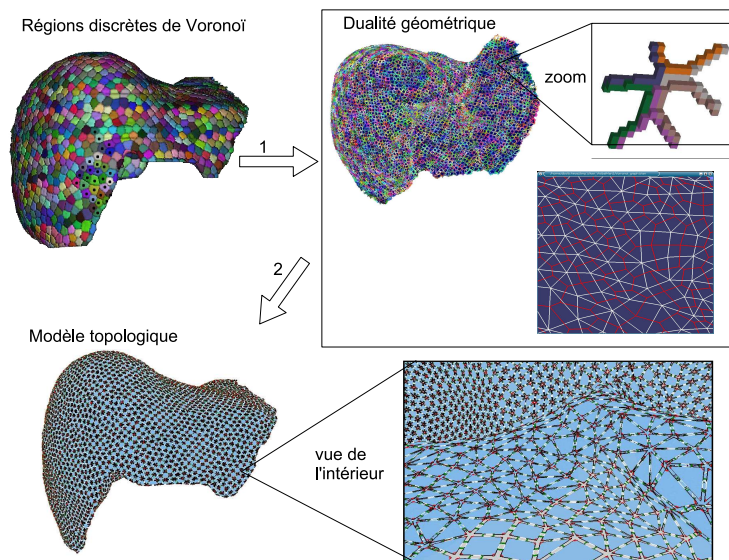


FIG. 1.6 – Approximation discrète des régions de Voronoï d'un ensemble de sommets choisis parmi les pointels de l'objet. Définition du graphe de Voronoï et extraction du graphe de Delaunay par dualité dans l'espace discret. Construction d'une 2-variété topologique représentant la surface de l'objet.

La première méthode n'étant pas exempte de défauts, nous avons développé une seconde méthode qui vise à améliorer les performances de la première méthode.

Cette deuxième méthode nous a permis de proposer un algorithme de *reconstruction simultanée* de plusieurs objets contenus dans une image tridimensionnelle bien-composée. Les maillages résultants sont dépourvus de trous et d'intersections. La figure 1.7 montre les maillages générés par la reconstruction simultanée du foie et du rein droit avec notre algorithme. Il est à noter que ces maillages ne présentent pas d'anomalies topologiques car ils *coïncident* à l'interface entre les deux objets. Plus concrètement,

dans la région d'interface entre les objets, les sommets et les arêtes des deux maillages sont les mêmes.

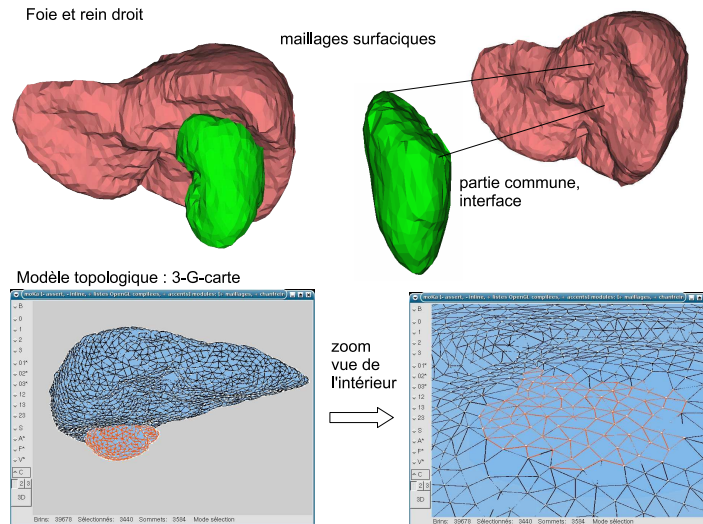


FIG. 1.7 – Résultats de la reconstruction simultanée de deux objets adjacents. Maillages surfaciques en rendu non lissé. Un modèle topologique de l'ensemble.

1.5 Organisation du manuscrit

Ce manuscrit de thèse est composé de huit chapitres en tout, dont l'introduction et la conclusion.

Le chapitre 2 est consacré aux notions de base en géométrie et topologie discrète. Dans un premier temps, nous rappelons les notions élémentaires liées aux images discrètes et parlerons de deux des manières de modéliser ces images. Ensuite, nous proposons un bref rappel concernant la topologie discrète. La dernière section de ce chapitre est finalement consacrée à la notion de frontière discrète, où nous rappelons trois des définitions usuelles pour les frontières d'objets discrets.

Le chapitre 3 sera pour nous l'occasion de rappeler d'abord les notions de variété combinatoire et de modèle cellulaire. Ensuite, nous présenterons brièvement le modèle topologique utilisé dans ce travail : les n -G-cartes. Finalement, nous ferons quelques rappels sur la notion de maillage.

Le chapitre 4 présente un tour d'horizon sur les méthodes de reconstruction surfacique et volumique. Le chapitre 5 présente le bilan de cette étude bibliographique et l'idée de base de notre approche.

Notre première méthode de reconstruction fait l'objet du chapitre 6 où nous présenterons en détails les différentes étapes de celle-ci et discuterons les résultats.

Le chapitre 7 est consacré à notre seconde méthode de reconstruction. En premier lieu, nous proposerons une série de règles permettant de transformer le 2-complexe cel-

lulaire modélisant le bord de tout objet voxel en une 2-variété combinatoire. Ensuite, nous discuterons les autres étapes de la méthode et montrerons certains résultats. Finalement, nous montrerons le potentiel de la méthode à reconstruire plusieurs objets d'une image multicolore avec une gestion efficace des interfaces entre les objets.

Pour terminer, le chapitre ?? conclut le manuscrit et présente certaines des perspectives envisageables du travail réalisé dans le cadre de cette thèse.

Chapitre 2

Géométrie et topologie discrète

Ce chapitre introduit quelques notions de base en géométrie et topologie discrète. Après un bref rappel sur les espaces discrets et les relations de voisinage entre les points, nous introduisons les deux approches classiques pour la modélisation des images discrètes : le modèle par structure de voisinage et le complexe cellulaire. Ensuite, nous donnons quelques éléments de topologie discrète, en particulier, les notions de cavité et de tunnel. Finalement, nous discutons les trois notions de frontières discrètes les plus couramment utilisées en imagerie.

2.1 Introduction

Dans le domaine de l'imagerie numérique qui nous intéresse ici, le processus d'acquisition des données fournit une version discrète d'un objet ou d'un ensemble d'objets à l'instar de la version continue que nous percevons. Aussi bien les appareils de photographie numérique que les scanners ou IRM médicaux échantillonnent le monde réel sur une grille par l'intermédiaire de capteurs. L'image obtenue est alors un ensemble de cellules de cette grille, appelées *pixels* dans le plan (2D) et *voxels* dans l'espace (3D), chaque cellule contenant une partie de l'information de l'image globale. C'est sur la base de cette représentation discrète que nous sommes amenés à travailler pour extraire les modèles géométriques des constituants de l'image.

Les années 1960 ont vu l'émergence de la *géométrie discrète* sous l'impulsion des travaux d'A. Rosenfeld. Dernièrement, avec le développement de l'imagerie numérique, la géométrie discrète a connu un regain d'intérêt considérable. Ce domaine vise à étudier des objets discrets, c'est-à-dire des objets constitués d'un ensemble dénombrable de points par opposition aux objets continus qui, eux, sont généralement composés d'un ensemble non dénombrable de points.

Même si les images discrètes sont des représentations discrètes de l'espace continu, nous avons une tendance spontanée à les interpréter comme dans l'espace continu et à concevoir des algorithmes à partir des propriétés continues, tout en les traduisant dans un espace discret. Cependant, cette approche rencontre des problèmes car il existe plusieurs propriétés fondamentales de l'espace continu qui ne sont pas respectées dans

l'espace discret.

La Fig. 2.1 illustre l'image discrète 3D d'un tore, face à sa représentation en tant qu'objet géométrique dans l'espace euclidien.

Les objets discrets ont souvent peu de propriétés communes avec leurs homologues continus. En effet, les résultats les plus élémentaires de la géométrie euclidienne ne sont pas vérifiées dans l'espace discret : les notions fondamentales telles que la continuité sont quelque peu bousculées (comment définir la continuité dans un espace où tout est à priori discontinu ?), la définition même des objets devient compliquée (comment définir, de façon canonique, une surface dans l'espace discret ? quelle est la frontière d'un objet discret ?).

La géométrie et la topologie discrètes tentent de répondre à toutes ces questions en développant des méthodes spécifiques à ce type d'espace et d'objets et tentent de transposer à ce contexte les notions familières de la géométrie euclidienne.

Ce chapitre, regroupe les notions élémentaires en géométrie discrète ainsi que quelques résultats fondamentaux en topologie discrète nécessaires pour la compréhension des algorithmes proposés dans ce manuscrit.

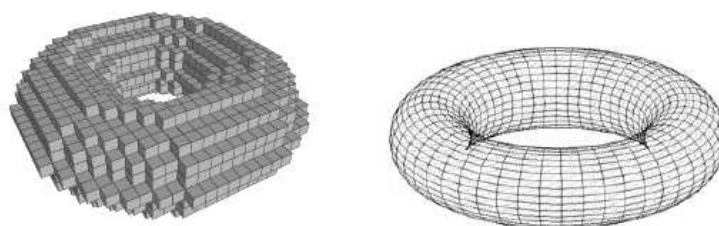


FIG. 2.1 – Un tore dans une image discrète et sa modélisation géométrique continue.

2.2 Modélisation des images discrètes

Les images discrètes ne sont qu'un modèle pratique pour représenter des « vues » de l'espace continu dans la mémoire d'un ordinateur. Les images « brutes », fabriquées par les appareils d'acquisition, peuvent être au plus visualisées (coupes, rendu volumique). Cependant, elles ne sont pas adaptées pour des traitements plus évolués (analyse, déformations, etc.). D'où apparaît l'intérêt de transformer les images et de reconstruire des modèles géométriques des constituants de l'image. Ces transformations font intervenir les « objets » du monde réel que représente l'image, ces objets étant définis par des zones d'intérêt dans l'image. Une première étape de traitement nécessaire des images est donc d'isoler ces zones d'intérêt qui correspondent à des objets du monde réel (il s'agit de l'opération de segmentation).

Beaucoup des transformations que nous souhaitons faire sur les images sont définies par leurs caractéristiques géométriques ou topologiques (déplacements, améliorations

d'image, opérations morphologiques). Il est donc souhaitable de pouvoir utiliser des propriétés topologiques et géométriques connues comme, par exemple, celles liées à la géométrie euclidienne. Cependant, compte tenu du caractère discret des images, les propriétés que nous connaissons ne sauraient être utilisées telles quelles. Aussi, il faut se donner donc des modèles qui permettent d'introduire les notions géométriques que nous souhaitons utiliser, par exemple définir un objet discret et sa surface discrète.

Parmi les modèles les plus classiques pour les images discrètes, nous distinguons la modélisation *par structure de voisinage* et la modélisation *par complexe cellulaire*. Nous proposons un bref rappel de ces modèles dans cette section. Ce sera pour nous l'occasion de définir le vocabulaire de base que nous utiliserons tout au long de ce manuscrit.

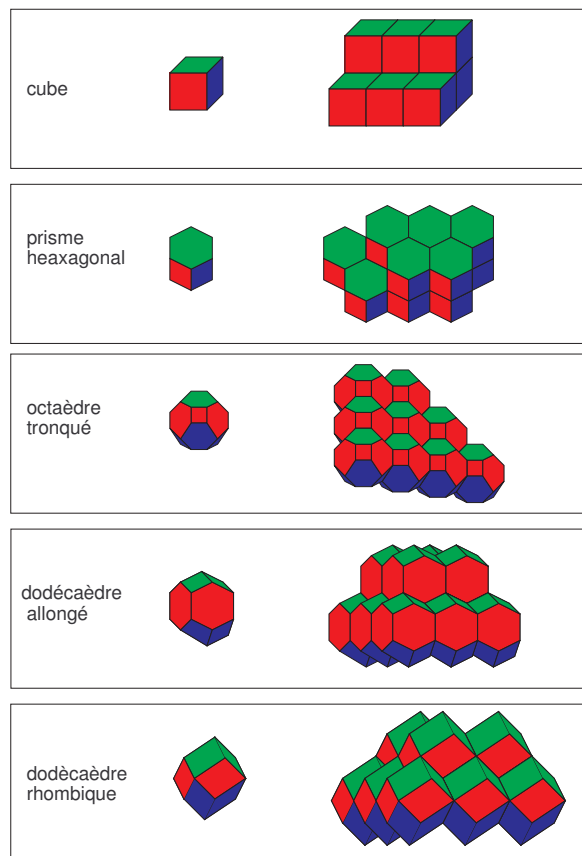


FIG. 2.2 – Les cinq polyèdres convexes qui pavent régulièrement l'espace \mathbb{R}^3 .

2.2.1 Images discrètes

Les images discrètes sont une représentation dénombrable de l'espace continu. Cette discrétisation est généralement faite dans deux domaines : une *discrétisation spatiale*,

communément appelée *échantillonnage* (pavage) et une *discrétisation spectrale*, communément appelée *quantification*. La discrétisation spatiale a pour but de représenter par un nombre fini d'éléments spatiaux une zone continue de l'espace, alors que la quantification associe à chaque élément du pavage une valeur représentative de la zone de l'espace continu correspondante. Sachant que le nombre de valeurs possibles est également fini, nous avons là une double discrétisation.

Ainsi, une *image discrète* peut être définie, de manière non formelle, comme une fonction qui associe une valeur à chaque élément d'une discrétisation de l'espace continu, qu'elle représente. L'ensemble des points de valeur nulle est appelé le *fond*, alors que les points de valeurs non nulles sont appelés points *objets*. Nous appelons une *image binaire* toute image qui ne contient que deux valeurs (le plus souvent 1 pour l'objet et 0 pour le fond). Une *image multicolore*, aussi appelée *image de label*, contient au moins trois valeurs qui représentent, par exemple, deux objets et le fond.

La notion de topologie dans une image discrète est assez éloignée de la notion de topologie que nous trouvons dans un espace euclidien (par exemple \mathbb{R}^3) : du fait du caractère discret de l'image, le voisinage ne peut pas être un ouvert infinitésimal, et les notions de voisin ainsi que de courbes ou de surfaces fermées doivent donc être redéfinies.

Nous considérons ici des images discrètes définies sur une grille cubique – donc d'images échantillonnées sur \mathbb{Z}^n . D'autres grilles d'échantillonnage peuvent être utilisées : il suffit que le bloc de base puisse paver l'espace. En dimension 2, il existe trois familles de pavages réguliers : pavage par des carrés, des hexagones réguliers ou des triangles équilatéraux. Un *point discret* est défini comme le centre de gravité d'une cellule d'un pavage. En dimension 3, il existe 5 polyèdres convexes qui pavent l'espace : le cube, le prisme hexagonal, l'octaèdre tronqué, le dodécaèdre allongé et le dodécaèdre rhombique (Fig.2.2). Cependant, pour des raisons d'affichage et d'organisation en mémoire dans les ordinateurs, les grilles cubiques sont – malgré les problèmes qui vont être évoqués ci-dessous – devenues le standard en traitement et analyse d'images. Les espaces discrets usuels sont donc : \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 (voir Fig.2.3).

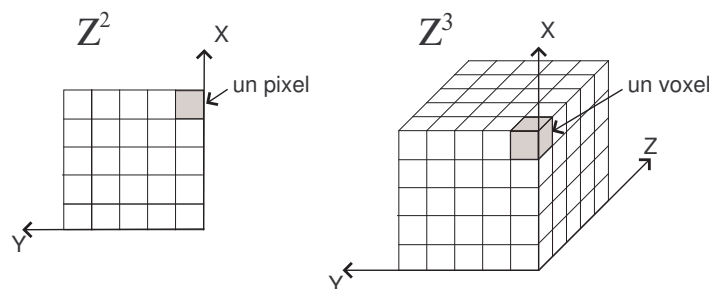


FIG. 2.3 – Les espaces discrets \mathbb{Z}^2 et \mathbb{Z}^3 .

Une image discrète de dimension n est donc une fonction sur un espace discret de dimension n qui associe à chaque point de cet espace une valeur caractéristique qui permet de différencier l'objet du fond (dans le cas d'une image binaire) ou les objets

entre eux (dans le cas d'une image multicolore).

La détermination de zones d'intérêts dans l'image comme agrégation de points partageant des propriétés similaires est liée à l'idée de proximité des points dans les images.

Dans la section suivante, nous introduisons la notion de proximité la plus classiquement utilisée en imagerie discrète, la *structure de voisinage*. Plus concrètement, nous présentons les relations qui permettent de modéliser la notion de proximité entre les points en dimension 2 et 3.

2.2.2 Structures de voisinage

Une *structure de voisinage* sur un ensemble P est une relation $N \subset P \times P$ irreflexive et symétrique. La relation N est dite *relation de voisinage* et son graphe est le *graphe de voisinage*. C'est le graphe induit par la relation de voisinage qui permet de voir les images comme des objets de la théorie des graphes plutôt que comme une simple modélisation géométrique discrète de l'espace continu. Le *N -voisinage* d'un point p de P est l'ensemble des points p' de P tels que $(p, p') \in N$.

La relation de voisinage ainsi définie est étendue par transitivité pour permettre de constituer par *connexion* des ensemble de points de taille plus large que le voisinage élémentaire du point.

Nous allons introduire maintenant les relations de voisinage classiquement proposées dans la littérature pour le cas particulier des images discrètes.

Les notions de voisinage ont été introduites pour positionner les éléments de l'espace discret les uns par rapport aux autres. Le voisinage est généralement dénommé à l'aide du nombre de voisins dont il est composé. En dimension 2, il existe deux types de voisinage entre les pixels :

- le 4-voisinage : deux pixels sont voisins s'ils partagent une arête. Un pixel a au plus 4 voisins dans ce voisinage.
- le 8-voisinage : deux pixels sont voisins s'ils partagent une arête ou un sommet. Un pixel a au plus 8 tels voisins.

Ces définitions peuvent être formulées en fonction de la distance.

Définition 2.1 (*k -voisinage et k -adjacence en dimension 2*) Soient 2 points $P_1(x_1, y_1)$ et $P_2(x_2, y_2)$ appartenant à \mathbb{Z}^2 tels que $|x_1 - x_2| \leq 1, |y_1 - y_2| \leq 1$. Soit $d = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ (distance de Manhattan).




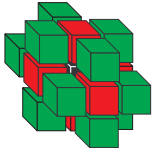
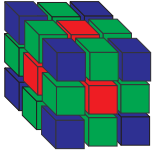
- si $d = 1$, alors P_1 et P_2 sont dits 4-voisins ou 4-adjacents ;
- si $d \leq 2$, alors P_1 et P_2 sont dits 8-voisins ou 8-adjacents ;

Les voisinages sont définis de la même manière en dimension 3 où il apparaît un voisinage supplémentaire dans le cas où deux voxels ont un sommet en commun.

Une manière de présenter le voisinage en dimension 3 est de dire que :

- si 2 voxels sont incidents à une même face, alors ils sont 6-voisins ;
- si 2 voxels sont incidents à une même arête, alors ils sont 18-voisins ;
- si 2 voxels sont incidents à un même sommet, alors ils sont 26-voisins ;

Ces définitions peuvent aussi être formulées en fonction de la distance.

illustration	nom	caractérisation
	4-voisinage	$d = 1$
	8-voisinage	$d \leq 2$
	6-voisinage	$d = 1$
	18-voisinage	$d \leq 2$
	26-voisinage	$d \leq 3$

TAB. 2.1 – Récapitulatif des voisinages en dimension 2 et 3.

Définition 2.2 (*k-voisinage et k-adjacence en dimension 3*) Soient 2 points $P_1(x_1, y_1, z_1)$ et $P_2(x_2, y_2, z_2)$ appartenant à \mathbb{Z}^3 tels que $|x_1 - x_2| \leq 1, |y_1 - y_2| \leq 1, |z_1 - z_2| \leq 1$. Soit $d = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|$.

- si $d = 1$, alors P_1 et P_2 sont dits 6-voisins ou 6-adjacents ;
- si $d \leq 2$, alors P_1 et P_2 sont dits 18-voisins ou 18-adjacents ;
- si $d \leq 3$, alors P_1 et P_2 sont dits 26-voisins ou 26-adjacents ;

2.2.2.1 Objets discrets

Nous allons maintenant nous intéresser aux objets discrets contenus dans une image, sur lesquels nous allons travailler par la suite. Un *objet discret* O dans l'espace discret \mathbb{Z}^3 d'une image I se définit naturellement comme un agrégat de cellules voisines de même nature de cet espace. L'ensemble complémentaire de O , noté $\bar{O} = \mathbb{Z}^3 \setminus O$, est appelé *fond* de l'image ou *complémentaire* de O .

Les relations d'adjacence, présentées dans la section précédente, entre les points de l'espace discret d'une image induisent une structure de voisinage sur l'image. Cependant, le rayon d'action de ces relations reste local car elles sont irreflexives et symétriques mais non transitives. La relation d'adjacence peut être étendue par transitivité à l'aide de la notion de *connexion*.

Ainsi, classiquement, les objets discrets sont caractérisés de manière topologique à l'aide des relations de voisinage et les définitions suivantes.

Définition 2.3 (*k-chemin*) Un *k-chemin* entre deux points P_1 et P_n d'une image I est une suite de points $(P_i \in \mathbb{Z}^3, 1 \leq i \leq n)$, telle que P_i et P_{i+1} sont *k-voisins*, pour tout i (avec $1 \leq i \leq n$). Si $P_1 = P_n$, alors P_1, \dots, P_n est appelé *k-chemin fermé*.

Définition 2.4 (*connexion*) Deux points P et P' d'un sous-ensemble S d'une image discrète I sont *k-connectés* dans S s'il existe un *k-chemin* de points de S entre P et P' .

Définition 2.5 (*ensemble k-connexe*) Un sous-ensemble $S \subset I$ est dit *k-connexe* si toute paire de points de S est *k-connectée*.

Définition 2.6 (*(k, k1)-connexité stricte*) Soient k et $k1$ deux relations de voisinages. Un sous-ensemble $S \subset I$ est dit *strictement k-connexe*, s'il est *k-connexe* mais pas *k1-connexe*.

En dimension 3, nous parlons de connexité stricte lorsque les deux points sont 26-connectés mais non 18-connectés ou bien lorsqu'ils sont 18-connectés mais non 6-connectés.

Nous parlerons également de points strictement *k-connexes* dans un ensemble S , lorsqu'ils sont *k-connectés* mais pas *k1-connectés*, avec $(k, k1) = (26, 18)$ ou $(18, 6)$.

Les ensembles maximaux de points de même valeur *k-connectés* sont appelés des *k-composantes connexes*. Ce sont des ensembles S de points tels que tout $v \in \bar{S}$ (le complémentaire de S) *k-adjacent* à un point $v \in S$ est de valeur différente. Nous parlerons simplement de *composante* lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la relation d'adjacence.

Par exemple, dans le cas des images binaires, nous parlons de *composante objet* et de *composante du fond*. Nous considérons un objet discret comme un ensemble de composantes. Remarquons qu'un objet connexe n'a qu'une seule composante.

Définition 2.7 (*objet discret k -connexe*) Un objet discret k -connexe est une composante k -connexe.

Un objet 6-connexe est, par conséquent, composé de voxels tous 6-connexes et organisés en une composante 6-connexe.

En topologie discrète, les composantes connexes d'une figure sont construites par croissance de région : on propage un point source dans l'objet suivant la connexité choisie. En appliquant cet algorithme en chaque point de l'image qui n'a pas encore été parcouru, on obtient l'ensemble des composantes connexes d'une image. Les algorithmes obtenus sont de complexité linéaire par rapport à la taille de l'image, celui de Suzuki [SHS03] étant parmi les plus efficaces.

Nous allons utiliser aussi la notion de *connexité locale* qui est liée à la notion de *boîte englobante*. La *boîte englobante* d'un ensemble de n points d'une image I se définit naturellement comme le plus petit ensemble de cellules de l'espace discret de l'image qui contient tous les n points.

Ainsi, nous dirons que deux points sont *localement k -connectés* dans un ensemble S s'il existe un k -chemin de points de S dans la boîte englobante de ces points.

Nous dirons aussi que deux points sont *strictement localement k -connectés* dans S s'ils sont localement k -connectés dans S et non $(k1)$ -connectés dans S , pour $k-$ et $k1-$ deux relations de voisinage. De même en 3D, cette définition s'applique pour les couples de connexité $(k, k1) = (26, 18)$ ou $(18, 6)$.

Définition 2.8 (*connexité locale d'un ensemble*) Un ensemble S de points d'une image I est *localement k -connexe* si toute paire de points de S adjacents est localement k -connectée.

La notion de connexité locale permet de notifier les points d'un objet qui sont la cause d'un changement de topologie lorsque l'objet est considéré avec des connexités différentes. Prenons le cas de deux voxels *strictement 26-adjacents*, ces voxels peuvent être *strictement localement 26-connectés*. Ce qui veut dire que ce sont des voxels dont la boîte englobante ne contient pas d'autres points objets qu'eux-mêmes.

Considérons le cas de l'objet représenté à la figure 2.4. Le nombre de composantes connexes de l'objet ne change pas s'il est interprété avec la 6-, la 18- ou la 26-connexité. Par contre, cet objet, bien que 6-connexe, est non localement 6-connexe, il est strictement localement 26-connexe. Sa topologie change suivant la connexité choisie.

Notons qu'il ne peut y avoir de paire de voxels strictement localement 26-connectés que dans un objet strictement localement 26-connexe.

2.2.2.2 Problèmes des structures de voisinage

Les structures de voisinage ont été les premières formalisations utilisées pour la modélisation géométrique des images discrètes. Cependant, les relations de voisinages

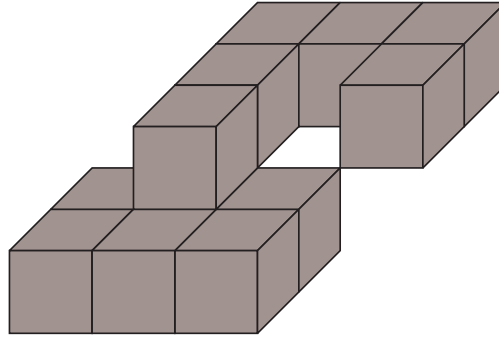


FIG. 2.4 – Objet dont la topologie change en fonction de la connexité choisie.

ainsi définies introduisent des paradoxes de connectivité, aussi appelés *paradoxe du théorème de Jordan*. Ces problèmes topologiques ont été relevés encore très tôt dans l'histoire de la topologie discrète [Ros79].

Ici, nous allons illustrer ces paradoxes en dimension 2, pour plus de simplicité, mais ils apparaissent également en dimension 3 ou supérieure.

Comme nous l'avons dit, la nature géométrique des images discrète pousse à appliquer les règles de la géométrie classique, c'est-à-dire euclidienne. Mais malheureusement l'application de ces règles, telles quelles, dans l'espace discret de l'image provoque certaines contradictions. L'exemple typique d'une telle contradiction apparaît avec la transposition du théorème de Jordan de l'espace continu. Rappelons que ce théorème stipule qu'une courbe fermée et simple doit séparer le plan en deux parties. Une courbe fermée C peut se définir intuitivement comme un chemin de points de l'image dont chaque point est adjacent à exactement deux autres points de C .

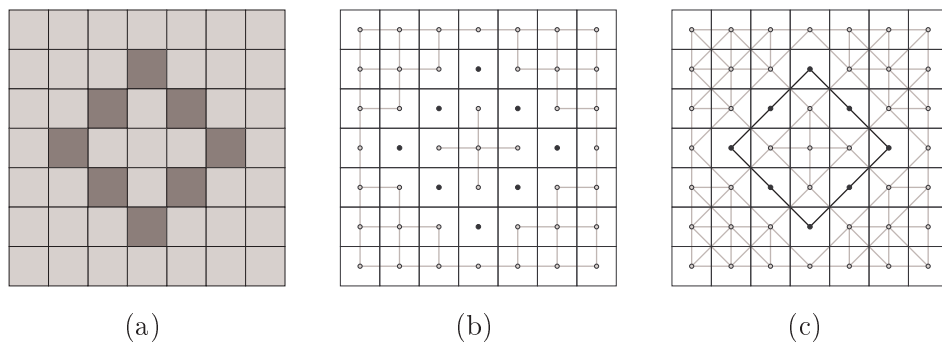


FIG. 2.5 – (a) Image dans laquelle, intuitivement, les pixels noirs forment une courbe. (b) Représentation sous forme de graphe en considérant la 4-adjacence pour tous les pixels. (c) Représentation sous forme de graphe en considérant la 8-adjacence pour tous les pixels.

Sur la figure 2.5, nous avons représenté une image binaire avec 8 pixels à 1, en noir, les autres pixels en gris étant les pixels du fond. Cette figure ne respecte pas le théorème de Jordan si nous prenons la même adjacence entre les pixels du fond et les pixels objet.

- Si la 4-connexité est considérée pour tous les points de la figure, les points de la courbe sont tous disjoints, alors que l'ensemble des points gris est séparé en deux composantes connexes et ce malgré l'absence de courbe (Fig.2.5(b)).
- Inversement, si la 8-connexité est utilisée pour tous les points de la figure, l'ensemble des points noirs dessine (ou du moins contient) bien une courbe simple fermée, pourtant l'ensemble des points gris se compose d'une unique composante connexe (Fig.2.5(c)).

D'où le « paradoxe de Jordan ».

La solution pour résoudre ce problème, pour des images binaires, a été proposée initialement par Rosenfeld dans [Ros79]. L'idée est d'utiliser différentes relations d'adjacence pour l'objet et pour le fond.

En 2D, il s'agit d'utiliser la 4-connexité pour l'objet et la 8-connexité pour le fond ou vice versa. Ainsi, pour que la courbe noire de la figure 2.5(a) soit interprétée comme telle, il faudrait utiliser la 8-adjacence pour les points noirs et la 4-adjacence pour les points gris (Fig.2.6(a)). Dans le cas inverse, la courbe sera interprétée comme un ensemble de points indépendants (Fig.2.6(b)).

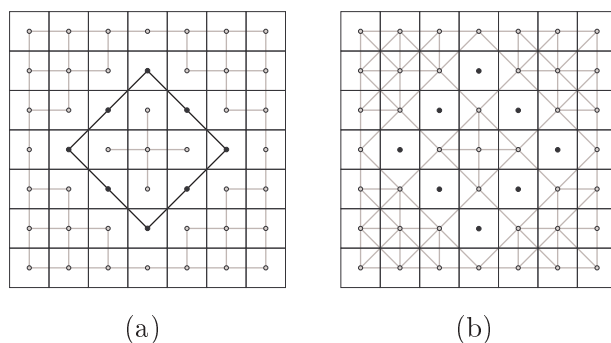


FIG. 2.6 – (a) Représentation sous forme de graphe en considérant la 8-adjacence pour tous les pixels noirs et la 4-adjacence pour les pixels gris. (b) Représentation sous forme de graphe en considérant la 4-adjacence pour tous les pixels noirs et la 8-adjacence pour les pixels gris.

Une courbe 4-connexe, est dite de Jordan, si elle contient au moins 8 points, autrement la définition d'un intérieur et d'un extérieur n'est pas possible ([Ros79]). De même, une courbe de Jordan 8-connexe doit être définie avec au moins 4 points, pour que les deux composantes connexes existent. Le tableau 2.2 donne quelques exemples de courbes et de non courbes. Remarquons que, dans le domaine de l'analyse d'image, pour certaines applications et sous certaines hypothèses, les non courbes peuvent être considérées comme du bruit.

Dans l'espace \mathbb{Z}^3 , le « paradoxe de Jordan » est résolu similairement mais, en 3D,

connexité	pas une courbe	courbe
4-connexité		
8-connexité		

TAB. 2.2 – Exemple de courbes et de non courbes en 2D.

seuls les couples de connexité $(6, 18)$, $(6, 26)$, $(18, 6)$ et $(26, 6)$ permettent de définir une séparation au sens du théorème de Jordan. Une surface 6- (resp. 18-, 26-) connexe doit avoir au moins 26 (resp. 18, 6) points. Autrement, la définition d’une composante connexe de l’intérieur n’est pas possible.

Notons que, la solution classique pour soulever le paradoxe de connectivité en choisissant des connexités différentes pour l’objet et pour le fond, n’est adaptée que dans le cas des images binaires. Cette solution ne marche pas dans le cas des images multicolores [Lat95, Lat97]. La figure 2.7 illustre le cas d’une image comportant deux types différents de points objets : noirs et gris, tandis que les points du fond sont les pixels blancs. Dans l’hypothèse de l’utilisation de la 8-connexité entre les points objets, les courbes se croisent mais ne se séparent pas, puisqu’elles sont toutes les deux 8-connectées.

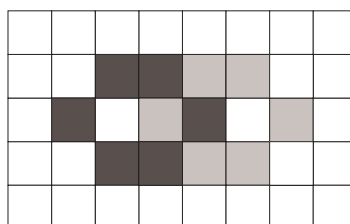


FIG. 2.7 – Paradoxe dû à l’utilisation de connexités différentes pour les points objet et pour les points du fond dans le cas d’une image non binaire.

Par ailleurs, la modélisation des images discrètes par structures de voisinage introduit d’autres anomalies. Prenons par exemple la notion de frontière. Nous pouvons définir la frontière d’un objet discret O , au sens topologique du terme, comme l’ensemble de ses points qui ont un voisin dans le fond. Avec les définitions d’adjacence que nous avons données, la frontière d’un objet diffère de la frontière de son complémentaire.

En résumé, la structure de voisinage utilisée classiquement pour modéliser une image

discrète n'est pas exempte de défauts. Cependant, elle présente des avantages pratiques indéniables car elle permet la mise en place d'algorithmes de traitement d'images simples et efficaces. En effet, les problèmes viennent essentiellement du fait que le modèle par structure de voisinage ne définit pas une topologie sur l'image. Rappelons la définition d'une topologie :

Définition 2.9 (topologie) Une topologie sur un ensemble E non vide est un ensemble O de sous-ensembles de E tel que l'union de toute famille de O soit dans O et l'intersection d'un nombre fini d'éléments de O soit également dans O .

Les éléments de O sont des *ouverts* et la difficulté majeure est de trouver une définition des ouverts dans l'espace discret qui soit consistante avec les propriétés de la topologie euclidienne.

Parmi les alternatives possibles, nous pouvons citer le *changement du pavage*. En effet, certains auteurs utilisent une décomposition de l'espace en octaèdres tronqués à la place des cubes (voir Fig.2.2). Il est connu dans la littérature anglaise sous le nom de *volume centered cubic lattice* [FB00]. Ce changement de pavage permet d'éviter certains paradoxes, mais il ne les élimine pas tous, car la structure de l'image est toujours une structure de voisinage et les problèmes liés à ce modèle demeurent.

Une autre solution est proposée par la *modélisation des images discrètes par complexes cellulaires*. Celle-ci fait l'objet de la section suivante.

2.2.3 Modélisation par complexes cellulaires

Dans cette section, nous présentons une autre approche de modélisation des images discrètes : *par complexes cellulaires* ([Kov89, Kov93, Vos93]). Les *complexes cellulaires abstraits* ont été introduits en topologie pour les images discrètes par Kovalevsky dans [Kov89] et représente une description purement combinatoire de la notion géométrique de complexe simplicial.

Définition 2.10 (complexe cellulaire) Un complexe cellulaire $C = (E, B, \dim)$ est un ensemble E d'éléments, appelés *cellules*, équipées avec une relation binaire irreflexive, antisymétrique et transitive $B \subset E \times E$, appelée *relation de frontière* ou *relation de bord*, ainsi qu'une fonction de dimension $\dim : E \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\dim(e) < \dim(e')$ pour tous $(e, e') \in B$.

Rappelons quelques termes de vocabulaire liés à la notion de complexe cellulaire :

Une cellule de dimension n est appelée une **n-cellule**. Un complexe cellulaire est dit de dimension n si la dimension de toutes ses cellules est inférieure à n . Lorsque $(e, e') \in B$, nous disons que e borne e' . Enfin, deux cellules sont dites incidentes si et seulement si $(e, e') \in B$ et $(e', e) \in B$.

La notion de complexe cellulaire offre un modèle très intéressant pour de nombreuses structures discrètes. Mais précisons à quoi correspondent les complexes cellulaires de dimension 0, 1, 2 et 3.

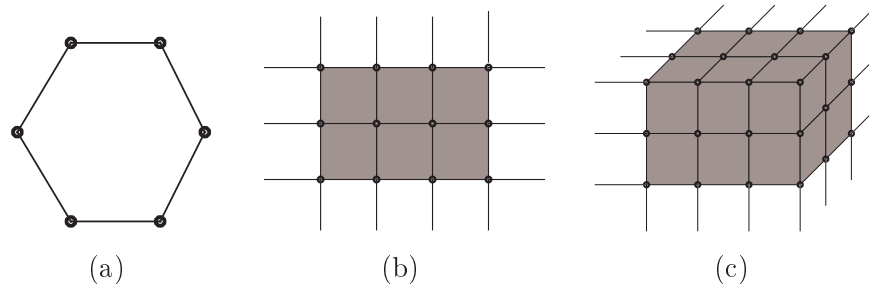


FIG. 2.8 – Complexes cellulaires de dimension 1 a), 2 b) et 3 c).

Les complexes cellulaires de dimension 0 ne contiennent qu'un seul type de cellules, les 0 -cellules, aussi appelées des *pointels*. Les seules opérations possibles sur ces complexes cellulaires sont les opérations ensemblistes.

Les complexes cellulaires de dimension 1 ne contiennent que deux types de cellules : des 0 -cellules et des 1 -cellules, aussi appelées des *lignels*. Ces complexes cellulaires peuvent être assimilés aux *graphes*.

Un complexe cellulaire de dimension 2 contient, en plus des pointels et des lignels, des 2 -cellules que nous appellerons des *surfels*.

Au final, un complexe cellulaire de dimension 3 contient aussi des 3 -cellules, appelées des *voxels*. La figure 2.9 montre une partie des cellules de différentes dimensions dans la décomposition cellulaire d'un voxel.

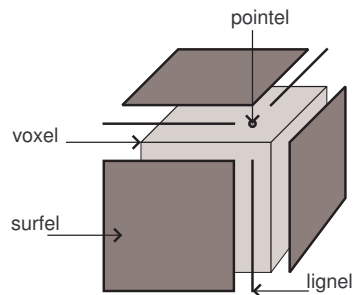


FIG. 2.9 – Décomposition cellulaire d'un voxel.

À partir de la dimension 2, les complexes cellulaires sont de très bons modèles d'images discrètes. Sur la figure 2.8, nous reconnaissons facilement une structure de base qu'il est possible de projeter intuitivement sur des images de dimension 2 ou 3. Mais, l'intérêt d'utiliser les complexes cellulaires pour modéliser les images discrètes réside dans la possibilité de définir une topologie cohérente sur ces images discrètes.

V. Kovalevsky propose une définition des ouverts [Kov93] liée au domaine de l'imagerie qui permet d'induire une topologie sur les images discrètes.


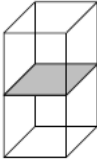
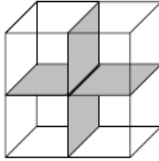
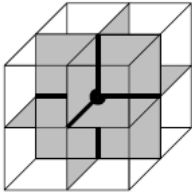


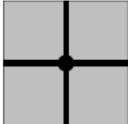


	e^3	e^2	e^1	e^0
C^3				
C^2				
C^1				

FIG. 2.10 – Différents ouverts des 0-, 1-, 2- et 3-cellules (e_0, e_1, e_2, e_3) dans des complexes cellulaires de dimension 1, 2 ou 3 (C_1, C_2, C_3).

Définition 2.11 (ouverts) Soit un complexe cellulaire $C = (E, B, \dim)$, un sous-ensemble $S \subset E$ est appelé ouvert de C , si pour tout élément $e \in S$, tous les éléments de S qui sont bornés par e sont dans C .

La figure 2.10 illustre la forme des ouverts de cellules élémentaires de dimension 0, 1, 2 et 3 dans des complexes cellulaires de dimension 1, 2 et 3. De façon générale, l'ouvert d'un sous-ensemble S d'un complexe cellulaire contient les cellules qui sont bornées par les cellules de S .

Cette définition des ouverts permet d'utiliser toutes les notions et propriétés de la topologie standard. Ainsi, par exemple, la frontière d'un objet est unique et la frontière de son complémentaire est égale à la frontière de l'objet. De plus, Kovalevsky a démontré que toute définition d'une topologie sur une image discrète est nécessairement un complexe cellulaire. Autrement dit, les complexes cellulaires sont la seule forme possible pour définir une topologie sur les images discrètes, d'où leur intérêt.

2.3 Topologie des objets discrets

Le nombre de composantes connexes d'un objet ne suffit pas pour décrire la topologie d'un objet multidimensionnel : un cube et un tore n'ont tous les deux qu'une seule composante connexe, mais le tore présente en son milieu un trou que le cube n'a pas.

Le nombre de connexité, ainsi que le genre, permettent de caractériser ces différences topologiques.

2.3.1 Cavité, trou et tunnel

Une *cavité* est définie comme une composante connexe finie du fond. Elle est donc construite comme une composante connexe de la figure, mais en propageant les points à partir du fond. Ainsi, une sphère creuse contient une cavité, une sphère pleine ou un tore plein n'en contiennent pas.

Une définition formelle du trou au milieu du tore est plus complexe : cette région ne peut pas être délimitée, contrairement à une composante connexe. Intuitivement, un trou est une structure qui empêche un objet d'être continûment déformable en un unique point. De façon plus formelle, un *trou* est une structure topologique qui empêche un objet d'être contractile, c'est-à-dire homéotope à un de ses points [Wei04] (voir Fig.2.11).

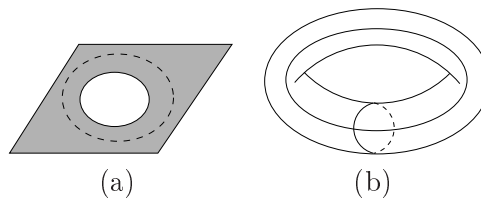


FIG. 2.11 – Exemples d'objets troués : (a) plan percé, (b) tore (creux).

Les *groupes d'homologie* permettent de mesurer les trous d'un objet. Ils sont constitués d'objets sans bord – plus précisément des classes d'équivalences de ces objets sans bord sous la relation d'homologie – et un groupe d'homologie de dimension n caractérise les trous de dimensions n d'un objet.

Dans le domaine de la modélisation topologique et du traitement d'image, le mot « trou » est généralement pris dans le sens de trou de dimension 1, caractérisé par un chemin non homotopique à un point. On retrouve donc la même définition que celle donnée par le groupe d'homologie de dimension 1.

Dans le cas d'une image de dimension 2, les notions de trou et de cavité sont confondues. Il est cependant important de faire la distinction en dimension 3. Dans la littérature, on trouvera parfois le mot *tunnel* à la place de trou, pour mieux le différencier de la notion de cavité.

2.3.2 Nombre de connexité et genre

Le nombre de connexité \mathcal{Z} d'une surface est défini comme le nombre maximal de courbes fermées simples (pouvant s'intersecter) que l'on peut dessiner sur une surface sans séparer celle-ci en deux parties distinctes (voir [RS97]). Pour une surface orientable, le genre g est alors défini par $\mathcal{Z} = 2g$.

Le nombre de connexité nous donne le nombre de trous de dimension 1 d'une surface orientable. Ainsi, pour un tore, en découpant le long des deux courbes fermées simples

de la figure 2.11(b), on obtient un plan. En ajoutant une troisième courbe fermée simple le long de laquelle on découperait, le tore serait séparé en deux parties. Le nombre de connexité d'un tore est donc 2, tandis que son genre est 1. Le genre (ou le nombre de connexité de façon équivalente) permet de classifier complètement les surfaces orientables. De plus, il est facilement calculable dans un espace discret, en se basant sur une décomposition cellulaire d'un objet, et présente donc un grand intérêt pour extraire la topologie d'informations uniquement géométriques.

Equation d'Euler-Schläfli

L'équation d'Euler-Schläfli permet de caractériser les surfaces simplement connexes. Selon cette équation, une surface de dimension n est simplement connexe si

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i N_i = 1 - (-1)^n,$$

où N_i représente le nombre de cellules de dimension i . Pour des surfaces de genre g , la formule a été adaptée par Poincaré :

$$S - A + F = \chi(g),$$

où S , A et F sont respectivement le nombre de sommets, d'arêtes et de faces et où $\chi(g)$ est la caractéristique d'Euler, soit $\chi(g) = 2 - 2g$. Cette caractérisation du genre donne une méthode assez simple pour pouvoir le calculer sur une image discrète.

Genre 2D

Le genre d'un objet bidimensionnel X est donné par

$$G(X) = C(X) - H(X),$$

où $C(X)$ et $H(X)$ sont respectivement le nombre de composantes connexes de l'objet X et le nombre de trous (la notation H vient ici de l'anglais *hole*) de X , c'est-à-dire le nombre de composantes connexes finies de \overline{X} . Ces deux quantités peuvent se calculer simplement par les méthodes mentionnées ci-dessus.

Genre 3D

De façon similaire, le genre en trois dimensions est donné par

$$G(X) = C(X) - H(X) + \text{Cav}(X),$$

où $H(X)$ et $\text{Cav}(X)$ sont respectivement le nombre de trous de dimension 1 de l'objet et le nombre de cavités (composantes non infinies du fond) de l'objet [Chr01].

Calcul local du genre

Park et Rosenfeld [PR71] ont proposé une méthode locale de calcul du genre sur image tridimensionnelle. Cette méthode consiste à compter le nombre de certaines configurations présentes dans l'image, chacune de ces configurations participant au genre de l'objet.

2.3.3 Nombres topologiques

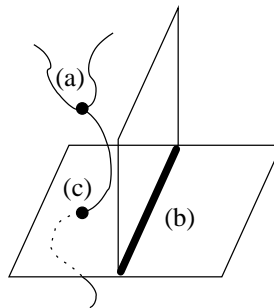


FIG. 2.12 – Jonctions entre (a) deux courbes, (b) deux surfaces et (c) une courbe et une surface.

Le concept des nombres topologiques à été proposé par Bertrand et Malandain [BM94] et permet de caractériser topologiquement les points de \mathbb{Z}^3 . Il existe 8 types de points topologiques : point intérieur au volume, point isolé, point sur le bord, point de courbe, point de surface, jonction de courbes, jonction de surfaces, jonction de courbe et de surface. Le principe de la méthode est de calculer le nombre de composantes connexes de l'objet et du fond uniquement dans le n -voisinage d'un point.

Prenons, par exemple, un point de surface. Dans \mathbb{R}^3 , ce point se caractérise par le fait qu'on peut trouver un voisinage de ce point dans lequel le fond (le complémentaire) est divisé en deux parties disjointes par l'objet. Considérons maintenant le couple de connexité (26, 6). Dans \mathbb{Z}^3 , un point de surface est caractérisé par deux nombres : le nombre de composantes 26-connexes de l'objet 26-adjacentes à ce point et le nombre de composantes 6-connexes du fond 6-adjacentes au point. Si le premier nombre est égal à 1 et le deuxième à 2, alors le point est un point de surface.

Plus formellement, en notant $C_k^p(X)$ le nombre de composantes k -connexes d'un objet X k -adjacentes à un point p , les nombres topologiques utilisant respectivement la 6- et la 26-connexité sont donnés par :

$$\begin{cases} T_6(p, X) = C_6^p(X \cap N_{18}^*(p)) \\ T_{26}(p, X) = C_{26}^p(X \cap N_{26}^*(p)) \end{cases} .$$

où $N_n^*(p)$ désigne le n -voisinage du point p privé de p .

Notons que, le nombre topologique en 6-connexité utilise le 18-voisinage : le voisinage $N_6^*(p)$ n'étant pas 6-connexe, on ne retrouve pas la notion topologique de voisinage. En utilisant ce critère, un point p est un point de surface si $T_n(p, X) = 1$ et $T_{\bar{n}}(p, \bar{X}) = 2$, où n et \bar{n} sont respectivement les connexités du devant et du fond.

Les nombres topologiques peuvent également servir à caractériser d'autres types de points, comme les jonctions entre courbes ou entre surfaces (voir Fig.2.12 et table 2.3 [MBA93]).

Nous utiliserons les nombres topologiques pour caractériser la surface discrète dans notre première méthode de reconstruction dans laquelle la frontière d'un objet discret est définie comme un sous-ensemble de voxels. Plus concrètement, la segmentation topologique de cette frontière nous permettra de spécifier la classe des objets discrets pouvant être reconstruits avec ladite méthode.

Type de point	$T_n(p, X)$	$T_{\bar{n}}(p, \bar{X})$
Point intérieur	non défini	0
Point isolé	0	non défini
Point sur le bord	1	1
Point de courbe	2	1
Point de surface	1	2
Jonction de courbes	> 2	1
Jonction de surfaces	1	> 2
Jonction de courbe et de surface	≥ 2	≥ 2

TAB. 2.3 – Caractérisation topologique d'un point par les nombres topologiques

2.4 Frontières des objets discrets

Maintenant, nous nous intéressons à la notion de frontière d'un objet discret. En effet, rappelons que notre objectif étant de construire un maillage cohérent de cette frontière, il nous semble primordial d'étudier les différentes définitions existantes dans l'espace discret.

La définition de *frontière* que nous trouvons classiquement en imagerie discrète découle directement de sa définition topologique où un point appartient à la frontière d'un objet si tout ouvert contenant ce point, c'est-à-dire tout voisinage de ce point, contient des points de l'objet lui-même et du fond.

Contrairement au monde continu, pour les objets discrets, il n'y a pas qu'une seule notion de frontière, il y en a plusieurs. Depuis les débuts de la géométrie discrète, de nombreuses définitions ont été introduites et discutées. Mais globalement, il existe trois types d'approches :

- les éléments de la frontière sont des voxels ;
- les éléments de la frontière sont les faces des voxels ;

- la frontière de l'objet est définie comme le bord du complexe cellulaire qui le modélise.

Toutes ces définitions cherchent à garantir un *théorème de Jordan discret* pour que la frontière de l'objet discret puisse être assimilée à la *surface* de l'objet euclidien correspondant.

Dans les trois sections suivantes, nous rappelons les trois approches et discutons certaines propriétés des frontières discrètes qui seront utilisées dans les algorithmes présentés dans ce manuscrit.

2.4.1 Sous-ensemble de voxels

Selon cette approche, la frontière d'un objet dans une image discrète est définie comme un sous-ensemble de voxels de l'image d'origine.

Rappelons que dans le cadre de la modélisation classique des images par structure de voisinage, il est nécessaire d'utiliser une adjacence différente dans les ensembles des points objets et dans le fond. Conformément à ceci, la transposition usuelle de la définition de frontière dans les images discrètes est la suivante :

Définition 2.12 (frontière interne) *Soit un objet O d'une image discrète I . La frontière interne de O , notée $Bi(O)$, est l'ensemble de points de O qui possèdent un voisin dans le complémentaire de O , au sens de l'adjacence du complémentaire de O .*

Il est possible de définir aussi la *frontière externe* comme suit :

Définition 2.13 (frontière externe) *Soit un objet O d'une image discrète I . La frontière externe de O , notée $Be(O)$, est l'ensemble de points du complémentaire de O qui possèdent un voisin dans O , au sens de l'adjacence de O .*

Pour préciser ces définitions, prenons l'exemple de l'objet 4-connexe O de la figure 2.13. Dans ce cas, le fond doit être considéré avec la 8-adjacence pour éviter les paradoxes. Ainsi, la frontière interne $Bi(O)$ est composée des pixels de l'objet qui possèdent un voisin du fond dans leur 8-voisinage (Fig.2.13(a)). La frontière externe $Be(O)$ est alors composée des pixels du fond ayant un voisin appartenant à l'objet dans leur 4-voisinage (Fig.2.13(b)). Nous avons remarqué que $Bi(O)$ est 4-connexe, alors que $Be(O)$ est 8-connexe.

La figure 2.14 résume toutes les possibilités cohérentes pour la définitions des frontières internes et externes en 2D. Les figures (a) et (b) illustrent respectivement la frontière interne et la frontière externe, pour la paire de Jordan (4, 8). Les figures (c) et (d) montrent les frontières respectives pour la paire de Jordan (8, 4).

En dimension 3, les frontières des objets sont définies de la même façon qu'en 2D, sauf qu'il est nécessaire d'utiliser les paires de connexité valides, à savoir (6, 26), (6, 18), (18, 6) ou (26, 6).

Un algorithme d'extraction des points frontières d'un objet dans un espace de dimension quelconque a été proposé par Udupa [USH82]. Une approche similaire est présentée dans [BB90].

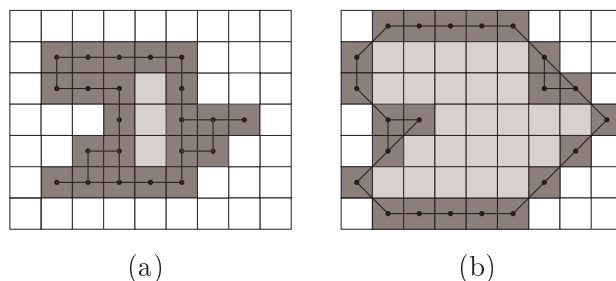


FIG. 2.13 – Objet discret 2D 4-connexe. (a) Frontière interne en pixels (pixels en gras). (b) Frontière externe en pixels (pixels en gras).

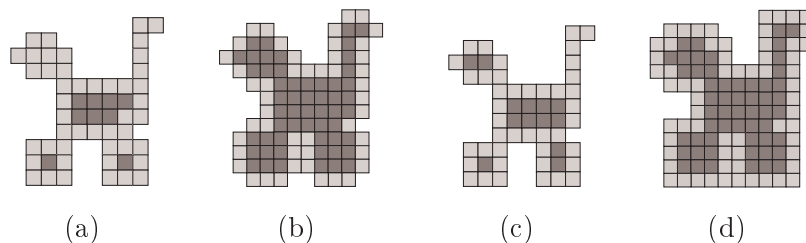


FIG. 2.14 – Objet discret 2D 4-connexe. (a) pour $(4, 8)$: frontière interne en pixels (pixels en gris clair). (b) pour $(4, 8)$: frontière externe en pixels (pixels en gris clair). (c) pour $(8, 4)$: frontière interne en pixels (pixels en gris clair). (d) pour $(8, 4)$: frontière externe en pixels (pixels en gris clair)

Mais rappelons l'inconvénient majeur de cette définition de la frontière que nous avons évoqué précédemment : les frontières de l'objet et de son complémentaire sont différentes, à moins de prendre des définitions différentes de la frontière selon que nous considérons l'objet ou son complémentaire. En effet, la frontière externe, que nous avons définie, n'est rien d'autre que la frontière du complémentaire de l'objet. La figure 2.13 montre clairement que les deux frontières sont différentes.

Un autre problème majeur de cette approche est le fait que les frontières des objets discrets ne sont pas forcément des surfaces discrètes : elles sont épaisses et dans certains cas ne possèdent pas la propriété de séparation de l'espace (propriété de Jordan). Notamment, pour certains objets possédant une cavité : il est possible que les deux surfaces que l'on aimerait obtenir (l'une séparant la cavité de l'objet, l'autre séparant l'objet du fond (la composante infinie du fond)) soient confondues ([Per94]).

Cependant, plusieurs travaux théoriques ont été menés pour proposer des définitions de *surfaces discrètes* à partir d'un ensemble de voxels [MR81, Ma194, Ma197]. Les premiers résultats connus, sur ce sujet, ont été obtenus par Morgenthaler et Rosenfeld en 1981. Mais, cette approche donne des surfaces dont la caractérisation n'est pas évidente. En effet, le problème de la caractérisation consiste à trouver une définition de ces

surfaces de préférence en exhibant un critère qui permet de reconnaître par des tests locaux si un voxel donné est un point d'une surface ou pas. La difficulté à donner une telle définition réside en partie dans le fait que la surface ainsi définie doit respecter certaines propriétés élémentaires comme le théorème de Jordan. En effet, il a été prouvé qu'il n'existe pas de caractérisation locale de ce type de surface dans \mathbb{Z}^3 [Mal96].

En résumé, les frontières discrètes définies comme un sous-ensemble de voxels de l'objet ne modélisent pas forcément les surfaces des objets discrets. Cependant, elles possèdent certains avantages pratiques. En particulier, les objets et les frontières étant représentés de la même façon, les structures de données sont très simples et permettent une implémentation très rapide des algorithmes du traitement de l'image.

2.4.2 Sous-ensemble de surfels

Cette approche considère les frontières des objets comme un ensemble d'éléments bidimensionnels de l'espace discret. Ces frontières sont qualifiées d'*hétérogènes* au sens qu'elles sont constituées d'éléments de dimension différente de celle de l'espace, c'est-à-dire d'éléments qui n'existent pas naturellement dans l'espace donné et que nous devons construire [Per94]. Ces éléments sont généralement appelés des *surfels* et peuvent être vus comme les faces des voxels de l'image discrète. Le choix du nom de surfel est justifié par le fait qu'il s'agit des 2-cellules du complexe cellulaire canonique de l'image 3D.

Définition 2.14 (surfel) Soit O un objet discret 3D et \bar{O} son complémentaire. Un surfel de O est la face commune $s = \{v_1, v_2\}$ de toute paire de voxels, tels que v_1 et v_2 sont 6-voisins et $v_1 \in O$, $v_2 \in \bar{O}$. (Fig.2.15(b))

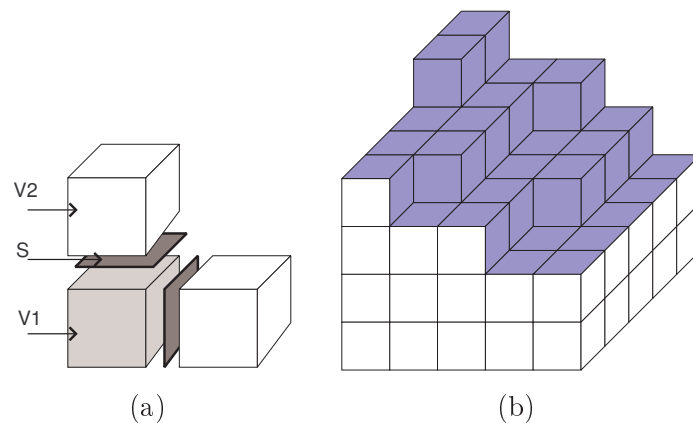


FIG. 2.15 – (a) Surfels définis entre un voxel de l'objet (en gris) et deux voxels 6-adjacents du complémentaire (en blanc). (b) La frontière discrète définie par l'ensemble des surfels.

Remarquons que, conformément à cette définition, les *surfels* peuvent être assimilés aux *arcs orientés* du graphe d'adjacence de l'image.

La *frontière en surfels* d'un objet discret est définie comme l'ensemble des *surfels* entre un voxel de l'objet et un voxel 6-adjacent de son complémentaire. C'est une notion identique du *contour en lignels* d'un objet en 2D (Fig.2.13(c)). Cette définition correspond à ce que nous nous représentons mentalement comme étant la frontière d'un ensemble de voxels, car elle est composée des faces « visibles » lors de l'affichage de l'ensemble discret (Fig.2.15).

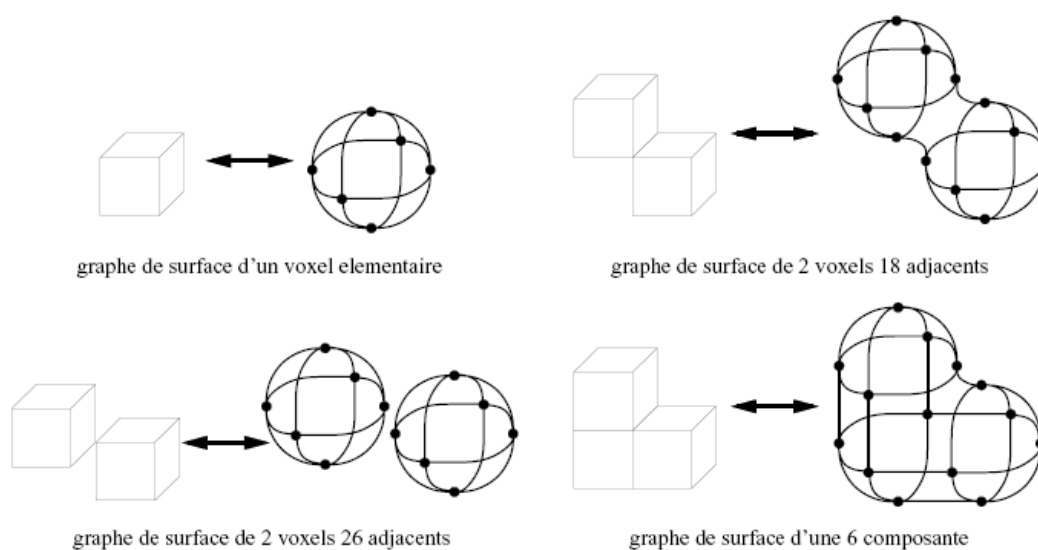


FIG. 2.16 – Exemples de graphes de surface (source [Lac98])

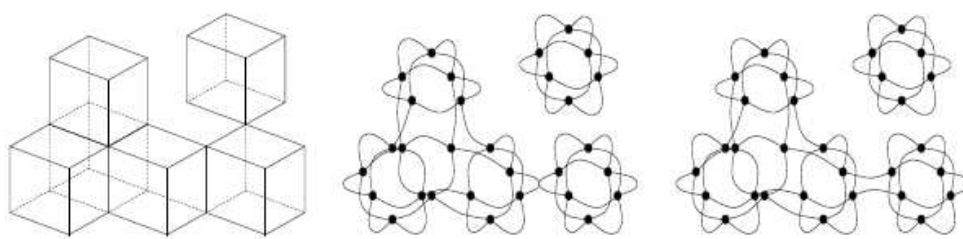


FIG. 2.17 – À gauche, objet voxel. Au milieu, le graphe de surface pour (6,18). À droite, le graphe de surface pour (18,6). (source [Lac98])

Le principal avantage de cette approche réside dans le fait qu'elle établit le lien entre les *frontières discrètes* et les *surfaces discrètes*. En effet, il a été prouvé que, pour les couples de connexités valides en 3D (les paires de Jordan), la frontière en surfels de l'objet discret est une *surface de Jordan*, c'est-à-dire, elle sépare l'espace discret en deux

composantes connexes [LM00]. De plus, la surface étant orientée, nous pouvons définir un *intérieur* et un *extérieur* à partir de ces deux composantes connexes.

Herman propose dans [Her92] une généralisation de cette définition en dimension quelconque. En introduisant des paires de connexités $\{\kappa\lambda\}$, analogues des connexités de séparation de Rosenfeld, il définit des $\kappa\lambda$ -surfaces qui sont des surfaces de Jordan : les surfels frontières entre une composante κ -connexe d'un objet discret et une composante λ -connexe du fond forment une $\kappa\lambda$ -surface séparant l'objet du fond.

Cette définition a été utilisée par de nombreux auteurs pour développer des algorithmes de *suiivi de surface* (*surface tracking*). Ces algorithmes explorent l'ensemble des surfels de la frontière d'un objet connexe, à partir d'un surfel de départ, et construisent un *graphe orienté de la surface*. Les sommets de ce graphe sont les surfels frontaliers, alors que les arcs sont définis par l'*adjacence entre les surfels*. Il est à noter qu'il existe trois *types d'adjacence* entre les surfels qui correspondent aux trois cas de figure : $(6, \lambda)$, $(18, 26)$ et $(26, 6)$, déterminés par les paires de Jordan en 3D. Ainsi, en fonction de la connexité choisie pour l'objet (6, 18 ou 26), nous avons des définitions différentes pour la 6-, la 18- et la 26-adjacence entre les surfels. Ces définitions influencent la connexité du graphe de la surface et la valence de ses sommets. Les figures 2.16 et 2.17 montre quelques exemples de graphe de surface pour des connexités différentes.

Artzy [AFH80] a proposé le premier algorithme de parcours pour les surfaces d'objets 18-connexes (avec un fond 6-connexe, la seule possibilité pour un objet 18-connexe). L'idée a été reprise et étendue au parcours des surfaces d'objets 6-connexes dans [GU89]. Plus tard, Perrotton [Per94] propose dans sa thèse un algorithme de parcours de la surface d'un objet 26-connexe.

En résumé, les frontières discrètes définies comme un ensemble de *surfels* respectent le théorème de Jordan, c'est-à-dire qu'elles ont la propriété de séparation et sont fines. De plus, elles contournent le problème évoqué précédemment, entre la frontière d'un objet et la frontière de son complémentaire. Mais surtout, elles offrent la possibilité, via les algorithmes de suivi de surface, de construire un *modèle topologique* de la surface d'un objet discret (*le graphe de surface*).

2.4.3 Le bord du complexe cellulaire

La dernière approche pour définir la frontière d'un objet discret découle directement de la modélisation d'une image discrète n D par un n -complexe cellulaire [Kov89]. La frontière est définie comme le *bord* du complexe cellulaire, lui-même défini à l'aide de la notion de *fermeture* du complexe cellulaire (voir Fig.2.18).

Définition 2.15 (*fermeture d'un n -complexe cellulaire*) *L'union de toutes les cellules de dimension inférieur ou égale à n*

Considérons l'objet 2D représenté sur la figure 2.18 (a). La fermeture du 2-complexe cellulaire qui modélise l'objet est composée de toutes les 2-cellules (les pixels) de l'objet ainsi que de toutes les 1- et 0-cellules qui *bornent* ces 2-cellules (2.18 (b)). Le bord de cet objet est, quant à lui, défini comme l'ensemble de toutes les 1- et 0-cellules (en rouge)

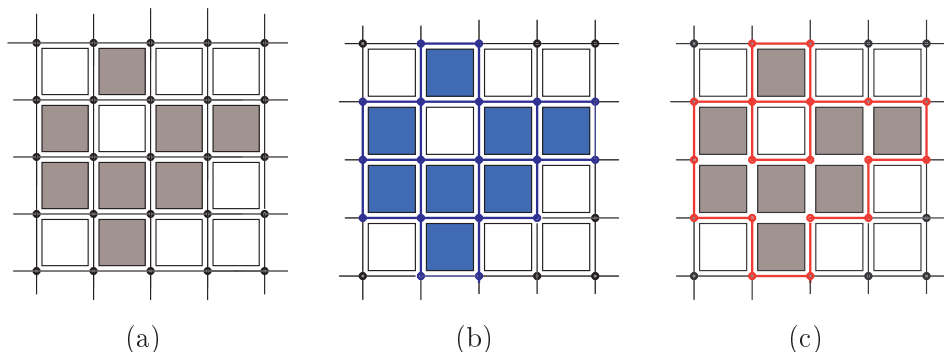


FIG. 2.18 – (a) Objet O . (b) Fermeture de O . (c) Bord de O .

de la fermeture, dont l'*ouvert* (voir Fig.2.10) touche le complémentaire de l'objet (voir Fig.2.18 (c)).

Définition 2.16 (*bord d'un n -complexe cellulaire*) *Le bord est l'ensemble de toutes les cellules de dimension strictement inférieure à n , de la fermeture du complexe et dont l'ouvert touche le complémentaire de l'objet.*

Conformément à cette définition, le bord d'un objet discret 3D est un *2-complexe fortement connexe*. C'est, en effet, l'ensemble des *surfels*, *lignels* et *pointels* de la frontière de l'objet (voir Fig.2.19).

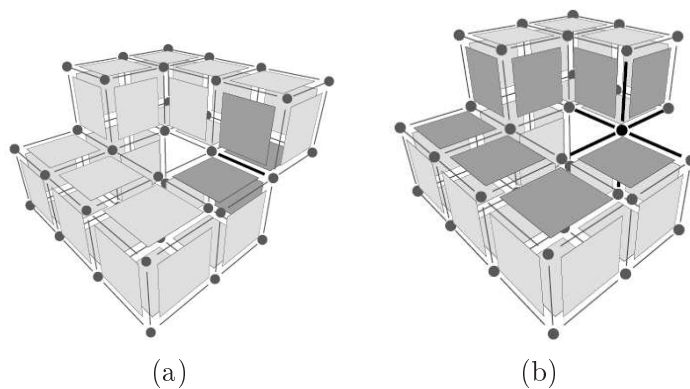


FIG. 2.19 – (a) Un lignel incident à 4 surfels. (b) Un pointel incident à 6 lignels. (source [Dam01])

L'intérêt majeur de cette approche réside dans le fait qu'elle établit le lien entre les frontières des objets discrets et les variétés combinatoires [Fra95] que nous introduisons dans le chapitre suivant. En effet, le 2-complexe fortement connexe, représentant la frontière de l'objet discret, est une variété combinatoire si tout 1-simplexe est incident à

exactement deux 2-simplexes. Par conséquent, cette frontière représente déjà un modèle géométrique et topologique de la *surface* de l'objet qui est fine, orientable et respecte le théorème de Jordan.

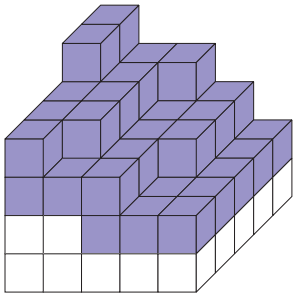
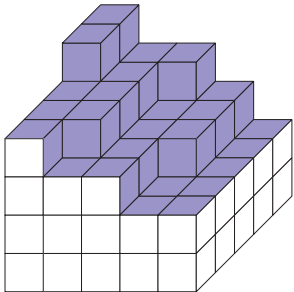
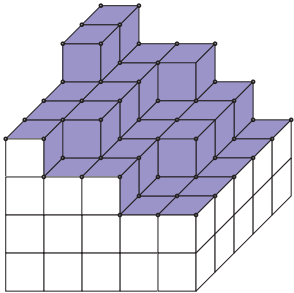
Cependant, dans l'espace discret des images 3D, il existe des configurations pour lesquelles la frontière d'un objet voxel n'est pas une 2-variété combinatoire. Comme illustré sur la Fig.2.19 (a), le 2-complexe cellulaire du bord de l'objet contient un *lignel incident* à quatre *surfels* et elle n'est pas une 2-variété. De même, sur la Fig.2.19 (b), nous avons une frontière qui contient un *pointel* qui est *incident* à six *lignels* et le bord n'est pas une 2-variété combinatoire.

L'avantage majeur de cette approche de modélisation des frontières discrètes réside dans le fait que la structure induite sur l'image se prête naturellement à un codage des structures topologiques. C'est-à-dire que nous pouvons utiliser des structures de haut niveau comme les *cartes topologiques* (que nous introduisons dans le chapitre suivant) pour construire un modèle géométrique et topologique des surfaces des objets discrets [Dam01, BDF00, BB98].

En résumé, la définition de la frontière d'un objet discret comme un 2-complexe cellulaire offre un premier modèle géométrique et topologique de la surface de l'objet euclidien correspondant. De plus, sous certaines conditions, cette frontière est même une 2-variété combinatoire. Nous revenons, plus en détails, sur ces propriétés et étudierons les cas où la frontière n'est pas une 2-variété dans le chapitre 7.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé les deux approches les plus remarquables pour la modélisation d'images discrètes, à savoir *les structures de voisinage* et *la modélisation par complexes cellulaires*. Ensuite, nous avons introduit quelques éléments de topologie discrète et nous avons présenté trois des notions de frontières discrètes existantes. Nous avons rappelé certains de leur défauts et avantages, en terme de modèle géométrique et topologique « de base » de la surface d'objets discrets. Plus tard, nous verrons que la nature de ce modèle « de base » aura un impact important sur l'algorithme de Delaunay discret que nous présenterons dans la suite de ce manuscrit. Le tableau 2.4 résume ces trois notions de frontières discrètes.

définition de frontière discrète	exemple
ensemble de voxels frontaliers	
ensemble de surfels frontaliers	
le bord du complexe cellulaire	

TAB. 2.4 – Récapitulatif des notions de frontières discrètes.

Chapitre 3

Modélisation géométrique

3.1 Introduction

Dans toutes les applications en informatique graphique, les traitements numériques effectués sur des objets géométriques modélisés informatiquement dépendent pour beaucoup de la manière dont les objets sont représentés. En particulier, la qualité, la robustesse ou la complexité des algorithmes d'informatique géométrique et graphique sont grandement influencées par le choix d'une représentation. Le choix d'une représentation - nous parlerons de modèle - détermine le type d'objets qu'il est possible de construire et de visualiser. Cela conditionne les formes, les structures, les propriétés (physiques ou visuelles) qu'il sera possible de manipuler dans une application. Le modèle utilisé influence également les possibilités du logiciel développé en termes d'interaction, d'édition ou d'efficacité des traitements.

Dans le domaine de la modélisation géométrique et de la reconstruction, les objets sont généralement représentés par leur bords, nous parlons de la B-rep (pour *Boundary representation*). Un solide, par exemple, est décrit par son bord, c'est-à-dire en décrivant la surface fermée et orientable qui enveloppe l'intérieur du solide. Cette surface est elle-même décrite par un ensemble de faces, d'arêtes et de sommets reliés par des contraintes topologiques fortes et bien définies.

Initialement, les modèles B-rep ont été limités aux solides mais ils ont été fortement complétés et étendus pour permettre de représenter une variété beaucoup plus grande d'objets. Aujourd'hui, nous parlons plus généralement de *modèles de représentation des subdivisions cellulaires*, aussi appelés *modèles cellulaires*.

Parmi les modèles les plus couramment utilisés en informatique graphique nous pouvons citer :

- **Les triangulations 2D et 3D** : les objets sont formés d'un ensemble de triangles ou de tétraèdres. Il existe deux principales raisons pour utiliser ce type de représentation. D'une part, elle accélère les traitements interactifs, notamment en ce qui concerne le rendu ou l'affichage, en permettant une utilisation intensive des cartes graphiques actuelles. D'autre part, les modèles triangulés sont nécessaires pour beaucoup de traitements (par exemple les calculs utilisant la méthode des

éléments finis).

- **Les modèles cellulaires** : un objet est construit par assemblage de cellules de différentes dimensions (sommets, arêtes, faces et volumes). Chaque cellule est décrite par son bord formé de cellules de dimension inférieure. Un objet est alors vu comme un ensemble structuré de cellules et un ensemble de relations topologiques entre celles-ci, en terme d'incidence, d'adjacence ou d'inclusion. Ces modèles permettent de réaliser simplement de nombreuses interactions entre l'utilisateur du logiciel et l'objet modélisé. Ils offrent aussi la possibilité d'édition fine et localisée et se prêtent également à la définition d'opérations ensembliste.

Notons que dans le cadre d'une reconstruction les modèles géométriques représentent une approximation de la frontière ou du volume de l'objet reconstruit.

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord un bref rappel des notions de base en géométrie combinatoire qui sera pour nous l'occasion d'introduire la définition des variétés combinatoires de dimension 1, 2 et 3. Puis, nous présentons les modèles cellulaires et faisons le parallèle avec la modélisation par complexe cellulaire des images discrètes. Ensuite, nous présentons un modèle topologique – la $n-G$ -carte – qui sera utilisé par nos algorithmes de reconstruction. Enfin, nous rappelons la définition usuelle d'un maillage ainsi que les conditions topologiques et géométriques qu'un maillage doit remplir.

3.2 Variétés combinatoires

L'objet typique de la géométrie combinatoire est le polyèdre. Dans le domaine de l'informatique géométrique, un polyèdre est défini par deux types d'information :

- une information de type combinatoire : un ensemble de sommets, d'arêtes et de faces vérifiant certaines relations d'adjacence et d'incidence ;
- une information de type numérique : les coordonnées des sommets dans un repère cartésien.

On distingue alors des propriétés purement combinatoires, comme l'orientabilité, et des propriétés métriques, qui dépendent d'un plongement.

Cette distinction, dite *séparation topologie-plongement* en modélisation géométrique a de nombreux vertus informatiques. D'une part, l'information combinatoire est facile à manipuler algorithmiquement. D'autre part, la topologie combinatoire est utilisable directement en géométrie discrète, donc en imagerie. De façon générale, la topologie combinatoire est un outil privilégié pour l'imagerie discrète, en analyse comme en synthèse. Par exemple, elle seule a permis de définir une notion de surface discrète à bord ayant des propriétés analogues à celles des surfaces à bord de la topologie classique [Fra95].

Dans la suite de cette section, nous introduisons les variétés combinatoires de dimensions 1, 2 et 3 qui sont les analogues combinatoires, respectivement, des courbes, des surfaces et des volumes de la géométrie classique.

Définition 3.1 (*variété combinatoire de dimension 0*) Une 0-variété est un ensemble dénombrable dont les éléments sont dits sommets ou 0-cellules.

Définition 3.2 (variété combinatoire de dimension 1) Une 1-variété fermée ou sans bord, (resp. ouverte ou à bord) est un graphe non-orienté dont tout sommet est de degré 2 (resp. 1 ou 2). Le bord de la variété est l'ensemble des sommets de degré 1. Les sommets (resp. arêtes) de la variété sont aussi dits 0-cellules (resp. 1-cellules ou arêtes).

Par exemple, l'ensemble \mathbb{Z} des entiers muni de la relation « entier le plus proche » est une 1-variété combinatoire sans bord, infinie et connexe.

Nous disons que dans un graphe deux cycles sont *adjacents* si et seulement s'ils ont une arête commune.

Définition 3.3 (variété combinatoire de dimension 2) Soit $G = (S, A)$ un graphe dans lequel on a distingué une famille F de sous-graphes qui sont des 1-variétés connexes finies sans bord (cycles simples). Une 2-variété fermée ou sans bord, est un triplet $V = (S, A, F)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- toute arête est incidente à exactement deux cycles de F ;
- tout sommet est incident à exactement une ombrelle de cycles de F , i.e. une permutation circulaire $(f_0, f_1, \dots, f_{k-1})$ de cycles distincts de F telle que, pour $i = 0, 1, \dots, k > 2$, f_i est adjacent à f_{i+1} , les indices étant pris modulo k . (voir Fig.3.1)

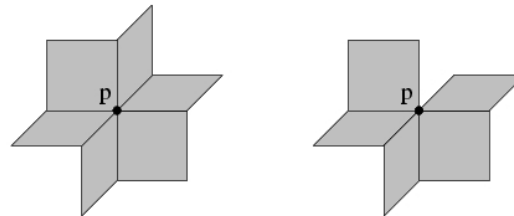


FIG. 3.1 – Une ombrelle autour du pointel p , à gauche. Un éventail autour de p , à droite.

Notons que, selon cette définition, deux faces adjacentes peuvent avoir plusieurs arêtes en commun, en particulier quand un sommet de degré 2 n'est pas incident au bord. Cette situation complique la théorie (notamment la dualité abordée infra). Ici nous posons l'hypothèse suivante :

- **Hypothèse d'absence d'adjacence multiple** : si deux faces d'une 2-variété sont adjacentes alors elles n'ont qu'une seule arête commune.

Sous cette hypothèse, une 2-variété connexe sans bord (resp. à bord) a au moins 4 faces, 4 sommets et 6 arêtes (resp. 1 face, 3 sommets et 3 arêtes) : c'est un tétraèdre (resp. triangle).

Définition 3.4 (2-variété combinatoire ouverte) Une 2-variété ouverte ou à bord, est un triplet $V = (S, A, F)$ vérifiant les propriétés suivantes :

- toute arête est incidente à soit un, soit deux, cycles de F ;

- tout sommet est incident à une seule ombrelle ou à un seul éventail de cycles de F , i.e. une suite (f_0, f_1, \dots, f_k) , au sens près, de cycles de F telle que, pour $i = 0, 1, \dots, k > 0$, f_i est adjacent à f_{i+1} , mais f_k n'est pas adjacente à f_0 (c'est une ombrelle dont une face a été supprimée, voir Fig.3.1).
- si deux faces sont adjacentes alors elles n'ont qu'une unique arête commune.

Les éléments de F sont dits *faces* ou *2-cellules* de V .

Le *bord* d'une 2-variété ouverte est composé des arêtes incidentes à une unique face.

Le graphe (S, A) est dit le *1-squelette* de V .

On dit que V est *connexe*, si et seulement si, son *1-squelette* l'est.

Le *degré* d'un sommet est le nombre d'arêtes incidentes, comme dans le 1-squelette.

Le *degré* d'une face est le nombre d'arêtes incidentes, qui est aussi égal au nombre de sommets incidents.

Si toutes les faces sont de degré 3, la 2-variété est dite *triangulée* ou *simpliciale*.

Le 1-squelette étant un graphe (sans boucle), le degré d'une face est au moins 3.

Le degré d'un sommet d'une 2-variété fermée (resp. ouverte) est au moins 3 (resp. 2) par définition.

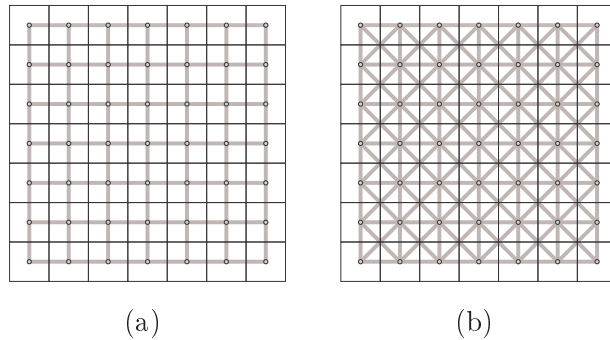


FIG. 3.2 – (a) le graphe de 4-connexité sur \mathbb{Z}^2 . (b) le graphe de 8-connexité sur \mathbb{Z}^2

Prenons, par exemple, l'espace discret de dimension 2 \mathbb{Z}^2 et considérons dans le graphe de 4-connexité sur \mathbb{Z}^2 la famille des cycles de longueur 4. Le graphe de 4-connexité muni de cette famille définit une 2-variété sans bord et connexe (voir Fig.3.2(a)). Par contre, si nous considérons dans le graphe de 8-connexité sur \mathbb{Z}^2 la famille des cycles de longueur 3, nous pouvons vérifier facilement que le graphe de 8-connexité muni de cette famille ne définit pas une 2-variété.

Considérons maintenant le bord en surfels, lignels et pointels d'un objet 6-connexe de \mathbb{Z}^3 . Si ce bord ne contient que les six ombrelles (aux rotations du cube près) représentées sur la figure 3.3, alors le bord est une 2-variété fermée.

Propriété 1 *Soit V une 2-variété à bord. Tout sommet de V appartenant au bord de V est incident à un éventail et à exactement deux arêtes du bord. Tout sommet de V n'appartenant pas au bord est incident à une ombrelle.*

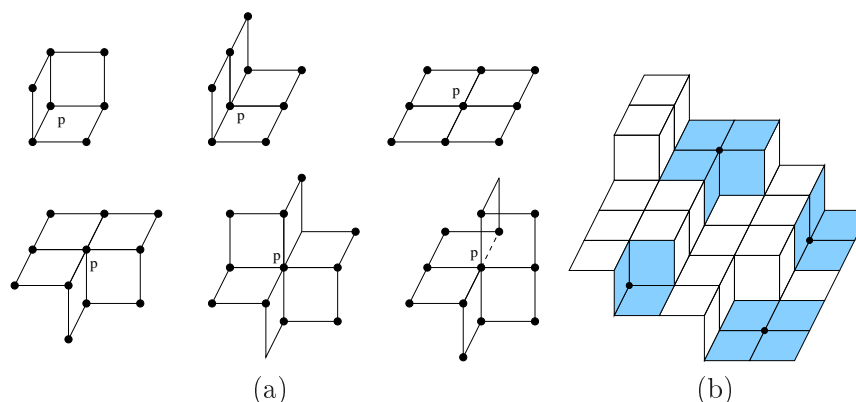


FIG. 3.3 – Ombrelles possibles (aux symétries près) dans une 2-variété sans bord de surfels.

Propriété 2 *Le bord d'une 2-variété à bord est une 1-variété sans bord.*

En application de cette propriété, une construction utile est celle de fermeture d'une 2-variété finie à bord :

Soit $V = (S, A, F)$ une 2-variété finie connexe à bord d'au moins deux faces. Chaque composante connexe du bord étant un cycle simple du 1-squelette (S, A) , quand on rajoute à F tous ces cycles, dits *couvercles*, on obtient une famille F' de cycles telle que $V' = (S, A, F')$ est une 2-variété sans bord. On dit alors que V' est obtenue par *fermeture* de V . Si on veut définir la fermeture par un couvercle d'une 2-variété d'une seule face il suffit d'admettre l'existence d'une 2-variété sans bord (S, A, F) , où (S, A) est un cycle et F est le multi-ensemble de deux fois ce cycle.

Soit V une 2-variété connexe. Si V a une seule face alors V est *orientable*. Sinon, soit f une face de V ; f étant orientable, choisissons une de ses orientations; soit a une arête de f n'appartenant pas au bord de V ; elle est orientée par l'orientation de f ; soit g la face de V autre que f incidente à a . Nous *orientons g par adjacence* à partir de f si nous choisissons pour g l'orientation qui induit sur a l'orientation opposée à celle induite par f . Nous *transportons l'orientation de f par adjacence* à une face h quelconque de V si et seulement si nous orientons de proche en proche, en partant de f et en allant jusqu'à h , les faces d'une suite de faces allant de f à h . V est dite *orientable* si et seulement si l'orientation de toutes les faces de V (f incluse) à partir de f est indépendante du chemin suivi dans le transport par adjacence, et ceci pour tout f et pour toute orientation choisie pour f . Par conséquent, orienter V c'est choisir l'orientation d'une de ses faces.

Par exemple, tous les polyèdres classiques, considérés comme 2-variétés, sont orientables. Cependant, l'exemple de la figure 3.4 est celui d'une 2-variété non orientable, bande de Moebius discrète. Nous pouvons noter que la variété obtenue par sa fermeture par un couvercle est aussi non orientable.

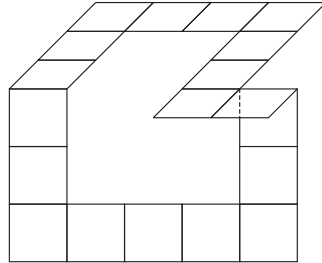


FIG. 3.4 – Une 2-variété à bord et non orientable dans l'espace discret canonique 3D : bande de Moebius

Propriété 3 *La fermeture par un couvercle conserve la connexité et l'orientabilité. Elle conserve le nombre de sommets et le nombre d'arêtes.*

Propriété 4 *L'orientation d'une 2-variété connexe orientable à bord induit une orientation sur chaque composante connexe de son bord.*

Définition 3.5 (2-variété duale) *Soit $V = (S, A, F)$ une 2-variété sans bord vérifiant l'hypothèse d'absence d'adjacence multiple. Associons à toute arête a de A incidente aux faces f et g de F la paire $a = \{f, g\}$. Nous définissons ainsi un nouvel ensemble d'arêtes A' et le couple (F, A') est un graphe, dit graphe d'adjacence des faces de V . A tout sommet de S associons la permutation circulaire, au signe près, des faces de F définie par son ombrelle ; soit F' la famille de ces cycles dans le graphe (F, A') ; F' est en bijection avec S . Alors le triplet $V = (F, A, F')$ est une 2-variété sans bord dite duale de V , qui est dite primale de sa duale.*

Si dans une 2-variété sans bord il existe une adjacence multiple alors la construction précédente ne définit pas un graphe mais un multigraphe. Cependant, la variété duale peut être définie dans tous les cas et elle vérifie les mêmes propriétés.

Une autre définition peut être donnée ainsi : un polyèdre P' est dit dual (combinatoirement) d'un polyèdre P s'il existe deux bijections de l'ensemble des sommets de l'un vers l'ensemble des faces de l'autre telles que deux sommets reliés par une arête de l'un aient pour images deux faces adjacentes de l'autre. P' a donc autant d'arêtes que P et les nombres de sommets et de faces s'échangent.

Propriété 5 *La dualité conserve la connexité et l'orientabilité et nous avons l'égalité $(V')' = V$.*

Considérons par exemple le pavage du plan réel par des hexagones et par des triangles réguliers. Ces deux 2-variétés sont duales l'une de l'autre.

Il est possible de définir une 2-variété sans bord orientable à partir d'un graphe en choisissant pour chaque sommet une permutation circulaire au signe près de ses arêtes incidentes. Ceci revient en quelque sorte à définir les faces orientées de la variété duale

(l'orientation des faces est telle que la variété est orientée par sa définition). Notons que cette définition peut s'avérer plus maniable, mathématiquement et algorithmiquement, que celle que nous avons présenté.

Lemme 3.1 (lemme fondamental) *Soit $V = (S, A, F)$ une 2-variété sans bord finie. Soit s_i (resp. f_i) le nombre des sommets (resp. faces) de degré i . Alors on a les égalités $\sum_i s_i = \text{Card}(S)$, $\sum_i i s_i = 2\text{Card}(A)$, $\sum_i f_i = \text{Card}(F)$ et $\sum_i i f_i = 2\text{Card}(A)$.*

Nous introduisons enfin la très remarquable caractéristique d'Euler :

Définition 3.6 (caractéristique d'Euler) *Soit $V = (S, A, F)$ une 2-variété finie connexe sans bord. La caractéristique d'Euler de V le nombre $\chi(V) = \text{Card}(S) - \text{Card}(A) + \text{Card}(F)$.*

Propriété 6 (théorème du genre ou formule d'Euler-Poincaré) *Soit V une 2-variété finie connexe sans bord orientable. Alors le nombre $g = (2 - \chi(V))/2$ est un entier positif ou nul, appelé genre de V .*

Propriété 7 (théorème du genre pour une 2-variété à bord) *Soit V une 2-variété finie connexe avec bord orientable. Alors le nombre $\chi(V) = \text{Card}(S) - \text{Card}(A) + \text{Card}(F) = 2c - 2g - b$ où c est le nombre de composantes connexes, g - le genre et b est le nombre de bords.*

Par exemple, tous les solides platoniciens sont de genre 0 et leurs caractéristiques d'Euler est 2. Ce sont les seules 2-variétés de genre 0 dont tous les sommets sont de même degré et toutes les faces sont de même degré.

Par ailleurs, si une 2-variété finie connexe sans bord orientable est de genre 0, alors elle a au moins une face ou un sommet de degré 3 ; si toutes ses faces sont de degré 4 (resp. 3, i.e. des triangles) alors on a l'égalité $\text{Card}(S) = 2 + \text{Card}(F)$ (resp. $\text{Card}(F) = 2 * \text{Card}(S) - 4$) ; si tous ses sommets sont de degré 3 alors elle a au moins une face de degré 3, 4 ou 5.

Définition 3.7 *On appelle opérateur d'Euler un opérateur sur une 2-variété finie qui ne modifie pas sa caractéristique d'Euler.*

Un opérateur d'Euler consiste par exemple à couper une face en deux nouvelles faces par rajout d'une arête. Par applications successives de cet opérateur nous pouvons trianguler une 2-variété. L'opérateur inverse consiste à supprimer une arête et à remplacer ses deux faces incidentes par une seule. La modélisation géométrique à base topologique utilise une grande variété d'opérateurs d'Euler.

Soit $G = (S, A)$ un graphe dans lequel on a distingué une famille F de 1-variétés finies connexes sans bord, dites *faces*, ainsi qu'une famille V de 2-variétés finies, connexes, sans bord, orientables, dites *volumes*, dont les faces sont dans F . Si v est un volume et f est une face de v on dit que v et f sont *incidentes*, et que v et toute arête, ainsi que tout sommet, incidente à f sont *incidents*.

Définition 3.8 (variété combinatoire de dimension 3) Une 3-variété fermée ou sans bord, est un quadruplet $W = (S, A, F, V)$ vérifiant les conditions suivantes :

- toute face est incidente à exactement deux volumes, qui sont alors dits adjacents ;
- (hypothèse d'absence d'adjacence multiple) deux volumes adjacents n'ont qu'une seule face commune ;
- l'ensemble des volumes incidents à une arête de A forment une seule ombrelle de volumes, i.e. une permutation circulaire, au signe près, $(v_0, v_1, \dots, v_{k-1})$ de $k > 2$ volumes distincts tels que v_i est adjacent à v_{i+1} , pour $i = 0, 1, \dots, k-1$, les indices étant pris modulo k ; cette permutation définit un sous-graphe de (V, A') qui est un cycle simple associé à l'arête donnée, dit face du dual de W ; soit F' l'ensemble de ces faces du dual ;
- pour tout sommet s de S , l'ensemble des faces du dual associées aux arêtes incidentes à s forme une unique 2-variété connexe, sans bord, orientable, dite volume du dual associé à s . Soit V' la famille des volumes du dual. Le quadruplet $W' = (V, A', F', V')$ est dit dual de W , qui est dit primal de son dual.

Les éléments de V sont dits *volumes* ou *3-cellules* de W .

Si tous les volumes sont des tétraèdres la 3-variété est dite *tétraédrique* ou *triangulée* ou *simpliciale*.

Le graphe (S, A) est dit le *1-squelette* de W . Le triplet (S, A, F) est dit *2-squelette* de W . On dit que W est connexe si et seulement si son 1-squelette l'est.

Une 3-variété connexe sans bord a au moins 5 volumes tétraédriques, 5 sommets, 10 arêtes et 10 faces.

La littérature suppose en général que, dans une 3-variété, les volumes du primal et du dual sont tous de genre 0. On a alors, pour les 3-variétés finies, l'extension de la formule d'Euler : $Card(S) - Card(A) + Card(F) - Card(V) = 0$. Pour le cas général voir [FB00].

3.3 Modèles cellulaires

En modélisation géométrique et en imagerie, nous rencontrons des objets qui ne sont pas forcément des variétés. Ces objets font partie de la vaste classe des ensembles cellulaires.

Les modèles cellulaires représentent des objets *subdivisés*, c'est-à-dire partitionnés en cellules de différentes dimensions : les sommets, les arêtes, les faces et les volumes. Plus concrètement, chaque cellule est représentée par son bord et les cellules des différentes dimensions sont en relation avec les cellules aux bords desquelles elle appartient.

Les objets modélisés peuvent être vus comme des assemblages de cellules reliées entre elles et ne représentent plus forcément des solides. La figure 3.5 illustre ce principe.

Définition 3.9 Un modèle cellulaire de dimension k est un ensemble de cellules de dimension maximale k qui, en même temps qu'une cellule, contient toutes les cellules de dimension inférieure qui lui sont incidentes. Son 0-squelette (resp. 1-squelette) est

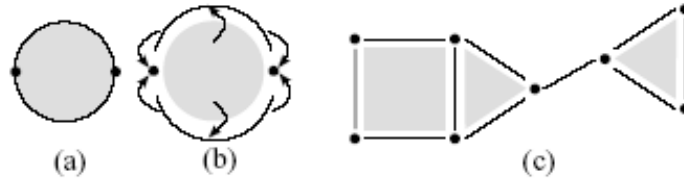


FIG. 3.5 – La sous-figure (a) montre la représentation par les bords d'un disque. La face (cellule de dimension 2) est associée à deux arêtes (cellules de dimension 1), elles-mêmes associées à deux sommets (cellules de dimension 0). La sous-figure (b) est une vue éclatée du même disque où les flèches représentent les relations d'incidence entre ces cellules. La sous-figure (c) montre un modèle cellulaire plus général comportant 3 faces, 10 arêtes et 8 sommets. Notez que l'arête reliant les 2 triangles ne fait partie du bord d'aucune face ou cellule de dimension 2. (Source [APF07])

l'ensemble de ses 0-cellules (resp. 0- et 1-cellules). Un ensemble cellulaire est connex si et seulement si son 1-squelette l'est.

De très nombreux modèles (et opérations associées) ont été proposés pour la représentation et la manipulation d'objets subdivisés. Il est possible de classer ces modèles suivant :

1. le *type de cellules* : les modèles se distinguent selon qu'ils permettent de représenter des assemblages de :
 - cellules *régulières* : simplexes (triangles, tétraèdres, etc.), simplexe cubiques (carrés, cubes, etc.), etc ;
 - cellules *quelconques* : le terme est choisi par opposition des modèles précédents. Les modèles cellulaires permettent une plus grande diversité que les modèles à cellules régulières même si les cellules ne sont pas totalement quelconques car généralement elles vérifient des propriétés topologiques assurées par la définition même du modèle.
2. le *type d'assemblage* : Le type d'assemblage peut permettre ou non l'existence de cellules incidentes plusieurs fois entre elles, dit *multi-incident*. Dans les deux cas, il est possible de distinguer différentes sous-classes d'objets :
 - les *variétés* : ici l'assemblage des cellules est fait selon les règles présentées dans la section précédente. Les variétés peuvent être orientables ou non, avec ou sans bord.
 - les *non variétés* : ici il s'agit d'un assemblage « quelconque » de cellules (une arête incidente à plus de deux faces en 2D ou deux faces collées par un sommet).

Prenons par exemple la frontière discrète d'un objet définie comme le 2-complexe cellulaire. Si l'objet est 6-connexe et s'il est *localement* 6-connexe, c'est-à-dire ne contient aucune occurrence de 18 et 26-adjacence stricte entre deux voxels (voir Fig.3.7), alors sa frontière discrète est une 2-variété combinatoire, telle que définie dans la section précédente.

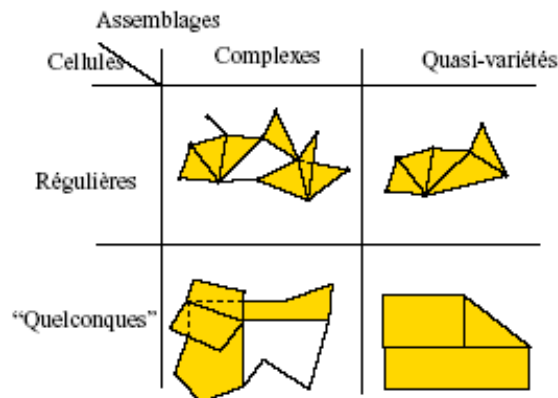


FIG. 3.6 – Différentes classes de subdivision. (Source [APF07])

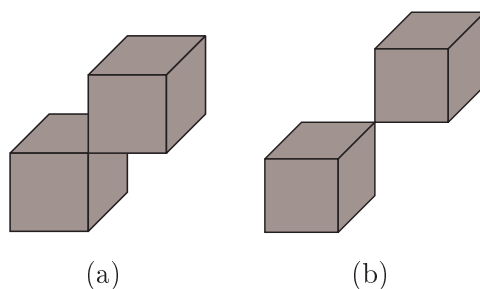


FIG. 3.7 – (a) Deux voxels strictement 18-adjacents. (b) Deux voxels strictement 26-adjacents.

En revanche, si l'objet contient au moins une configuration de 18 ou 26-adjacence stricte, le bord est, plus généralement, un 2-complexe cellulaire fortement connexe [KI06]. Nous dirons qu'il s'agit d'une *quasi-variété* si le bord de l'objet contient un lignel incident à plus de deux surfels. C'est, en effet, une arête singulière (voir Fig.3.8(a)). Par contre, si l'objet contient un pointel incident à plus d'une ombrelle, son bord en surfels est une *pseudo-variété* (voir Fig.3.8(b)).

L'une des vertus majeure de la modélisation par complexe cellulaire est le fait qu'elle permet de distinguer la géométrie de la topologie de l'objet. Cette séparation, dite *séparation topologie - plongement*, possède des avantages algorithmiques indéniables. Elle permet souvent de décomposer certaines opérations compliquées en opérations plus locales et plus atomiques. Ce principe de la distinction topologie-plongement est efficacement mise en œuvre dans les modèles topologiques cellulaires qui font l'objet de la section suivante.

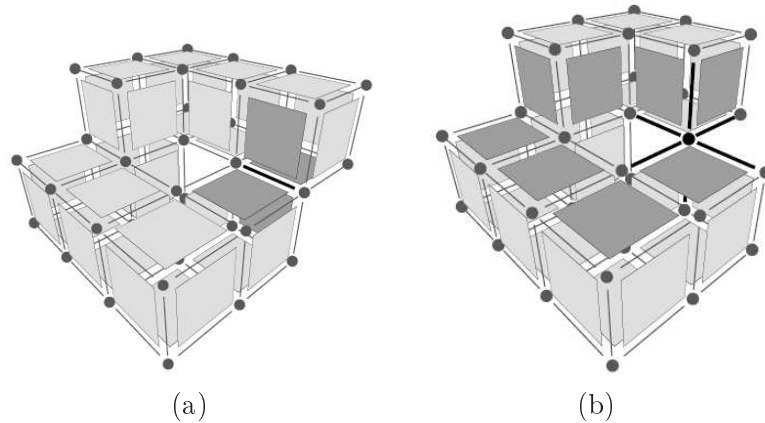


FIG. 3.8 – (a) Une quasi-variété : lignel incident à 4 surfels. (b) Une pseudo-variété : pointel incident à 2 ombrelles. (source [Dam01])

3.3.1 Les modèles topologiques

De nombreux travaux ont porté sur la définition de modèles topologiques cellulaires. Bien qu'ils aient été menés dans des domaines très différents (modélisation géométrique, analyse d'images), ces travaux ont abouti à des propositions relativement proches qui peuvent être divisées en deux grandes catégories d'implémentation : les modèles à base de graphes d'incidence et les modèles ordonnés.

La plupart de ces modèles classiques permettent la modélisation de variété de dimension 2. Selon la définition classique, une variété topologique de dimension n est un espace topologique tel que chaque point possède un voisinage topologiquement équivalent à un disque ouvert. Dans une variété topologique subdivisée, c'est-à-dire partitionnée en cellules de dimension 0 à n (sommets, arêtes, faces, ...) exactement deux cellules de dimension i sont adjacentes à une même cellule de dimension $(i - 1)$ (deux faces et pas plus sont collées par une arête, par exemple).

Avec les graphes d'incidence [Ede87], les cellules de différentes dimensions de la subdivision sont explicitement représentées par les nœuds du graphe. Les arcs du graphe modélisent les relations d'incidence entre les cellules de dimension i et $i + 1$, entre sommets et arêtes, arêtes et faces pour la dimension 2. Un autre type de graphe est le graphe d'adjacence des faces [AFF85]. C'est en fait un hypergraphe dont les nœuds sont des faces, les arcs modélisent les arêtes, et les sommets sont représentés par des hyperarcs. Les informations contenues dans ce type de modèles sont suffisantes à la définition de la topologie, mais leur représentation ne permet pas facilement le calcul de propriétés topologiques comme l'orientabilité, par exemple.

Les modèles topologiques ordonnés sont basés sur l'utilisation d'un seul élément de base, sur lequel on applique des fonctions. La structure de données appelée *arête ailée* [Bau72] permet la représentation de surfaces orientables sans bord. L'élément de base est ici une arête, avec deux pointeurs sur les faces adjacentes, deux pointeurs sur les

sommets, et quatre pointeurs (les ailes) sur les autres arêtes directement adjacentes. Pour représenter les surfaces orientables ou non sans bord, la structure "edge algebra" [GS85] utilise des arêtes *dirigées* et *orientées* sur lesquelles agissent trois fonctions. Les notions de n -carte ou n - G -carte [Lie89b, Lie91, LFB07] sont des extensions de la notions de carte définie en 1970, mais elles n'ont commencé à être étudiées dans le cadre de la modélisation géométrique que vers la fin des années 1980. P. Lienhardt compare ces modèles avec les arêtes ailées et « edge algebra » dans [Lie91], et montre leurs équivalences. Les n - G -cartes sont définies par des algèbres et permettent facilement le calcul des propriétés topologiques. Elles sont de plus définissables en toute dimension, ce qui permet une véritable modélisation volumique, dépassant le cadre de la modélisation *Brep*.

Nous présenterons ici uniquement les n - G -cartes qui est le modèle utilisé dans notre travail. Nous nous contenterons de présenter principalement une approche intuitive des ces modèles et des opérations que nous utilisons. Des définitions précises des opérations et propriétés sont présentées dans [Lie89a] pour les cartes généralisées.

3.3.1.1 Les cartes généralisées

Le modèle des cartes généralisées de dimension n , noté n - G -carte est un modèle topologique combinatoire. C'est aussi un modèle cellulaire car il représente une subdivision en cellules de dimensions différentes. En 3D une subdivision contient des sommets, des arêtes, des faces et des volumes. Ces cellules sont liées par des opérations de *couture*. Une n - G -carte est composée d'un ensemble d'entités élémentaires, appelées *brins* et de $n+1$ opérations, notées $\alpha_0, \dots, \alpha_n$. Intuitivement un brin peut être défini comme une arête orientée. Les α_i permettent de réaliser des coutures de dimension i , créant ainsi des arêtes, des surfaces et des volumes.

La définition formelle d'une n - G -carte est la suivante :

Définition 3.10 Soit $n \geq 0$. Une n - G -carte est définie par une algèbre $(B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ telle que :

- B est un ensemble fini de brins ;
- $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ sont des involutions sur B telles que :
 - $\forall i \in 0, \dots, n, \alpha_i$ est une involution, c'est-à-dire : $\forall b \in B, \alpha_i^2(b) = b$ (ou $\alpha_i(b) = \alpha_i^{-1}(b)$) ;
 - $\forall i \in 0, \dots, n-2, \forall j \in i+2, \dots, n : \alpha_i \alpha_j$ est une involution. Il y a dépendance entre les involutions : chaque involution α_j ($j \geq 2$) lie ensemble les composantes connexes de la $(j-2)$ - G -carte.

Définition 3.11 (orbite) Soient une n - G -carte $G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$, un brin quelconque $b \in B$, et P un ensemble de m permutations (p_1, \dots, p_m) sur B . L'orbite de b par rapport à P est l'ensemble de brins b' qui peuvent être atteints par une composée quelconque des permutations de P . L'orbite est notée : $\langle p_1, \dots, p_m \rangle (b)$.

Pour expliciter ces définitions formelles, nous donnerons d'abord les définitions des 0, 1, 2 et 3- G -cartes.

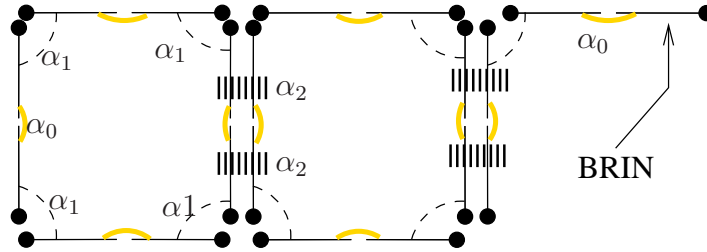


FIG. 3.9 – Exemple d’une 2-G-carte constituée de trois 1-G-cartes (deux faces fermées et une ouverte) liées par α_2 .

0-G-carte :

Une 0-G-carte est définie par une algèbre (B, α_0) telle que :

- B est un ensemble fini de brins ;
- α_0 est une involution, c’est-à-dire : $\forall b \in B, \alpha_0^2(b) = b$.
- une composante connexe de la 0-carte G incidente à un brin b est définie par : $\langle \alpha_0 \rangle (b)$.

Intuitivement α_0 est un lien qui assemble deux brins distincts pour définir une arête (voir Fig.3.10).

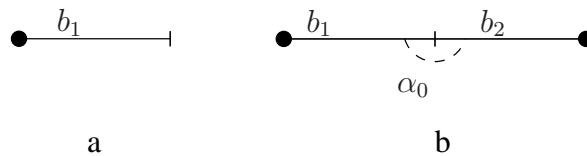


FIG. 3.10 – Exemples de 0-G-carte. En (a) un brin isolé et en (b) deux brins liés par α_0 .

1-G-carte :

Une 1-G-carte est définie par une algèbre (B, α_0, α_1) telle que :

- B est un ensemble fini de brins ;
- α_0 et α_1 sont des involutions ;
- pour tout brin de B , on a :
 - l’orbite $\langle \alpha_0 \rangle (b)$ est appelée une *arête* de la G-carte.
 - l’orbite $\langle \alpha_1 \rangle (b)$ est appelée un *sommet* de la G-carte.
 - si b est invariant par α_1 , c’est-à-dire $\alpha_1(b) = b$, alors b appartient au bord de la G-carte.
- une composante connexe de la 1-carte G incidente à un brin b est définie par : $\langle \alpha_0, \alpha_1 \rangle (b)$.
- si α_1 est avec un point fixe, c’est-à-dire s’il existe un brin b tel que $\alpha_1(b) = b$ alors la 1-G-carte est une G-carte à bord, sinon elle est dite sans bord ou fermée. Une cellule de dimension 2, appelée plus communément face, est définie comme une 1-G-carte connexe sans bord.

Intuitivement α_1 est un lien qui assemble des arêtes distinctes de la carte pour définir une face (voir Fig.3.11).

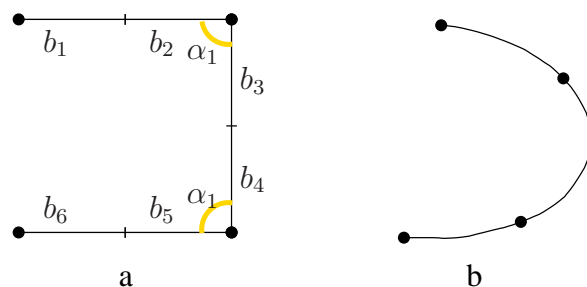


FIG. 3.11 – Exemples de 1-G-carte. En (a) une 1-G-carte $G = (B, \alpha_0, \alpha_1)$ composée de trois 0-G-cartes liées par α_1 , et en (b) un plongement de cette 1-G-carte.

2-G-carte : Une 2-G-carte est définie par une algèbre $(B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ telle que :

- B est un ensemble fini de brins ;
- α_0, α_1 et α_2 sont des involutions ;
- pour tout brin de B , on a :
 - l'orbite $\langle \alpha_0 \rangle (b)$ est appelée *arête* de la G-carte.
 - l'orbite $\langle \alpha_1 \rangle (b)$ est appelée *sommet* de la G-carte.
 - si b est invariant par α_2 , c'est-à-dire $\alpha_2(b) = b$, alors b appartient au bord de la G-carte.
- une composante connexe de la 2-carte G incidente à un brin b est définie par : $\langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \rangle (b)$.
- si α_2 est avec un point fixe, c'est-à-dire s'il existe un brin b tel que $\alpha_2(b) = b$ alors la 2-G-carte est une G-carte à bord, sinon elle est fermée.

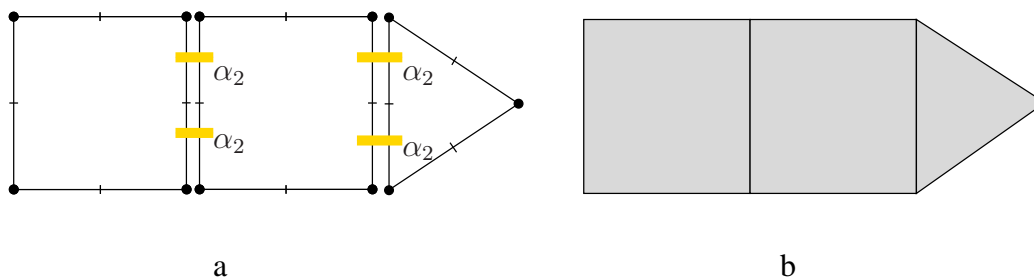


FIG. 3.12 – En (a) un exemple d'une 2-G-carte $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$ composée de trois composantes connexes d'une 1-G-carte. Elles sont liées par α_2 . En (b) un plongement de cette 2-G-carte.

Considérons une 1-G-carte sans bord. Chaque composante connexe de cette 1-G-carte définit le bord d'une face. Une 2-G-carte est définie en liant ensemble ces faces le

long de leur arêtes (voir Fig.3.12). Intuitivement, un lien α_2 coud deux arêtes en liant au plus deux brins distincts. Formellement α_2 est une involution sur l'ensemble des brins B . De plus, comme les arêtes sont liées par les $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ ne sont pas indépendants : $\alpha_0\alpha_2$ est aussi une involution.

Les 2-G-cartes permettent de représenter les 2-variétés combinatoires orientables ou non.

3-G-carte : De façon similaire, une 3-G-carte est obtenue en cousant ensemble des cellules de dimension 3, c'est-à-dire des 2-G-cartes sans bords. On colle les 2-G-cartes le long de leurs faces par une involution α_3 , qui lie les brins incidents aux faces (1-G-cartes sans bords). Comme les faces sont cousues ensemble, $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ne sont pas indépendants : $\alpha_0\alpha_2, \alpha_0\alpha_3, \alpha_1\alpha_3$ sont aussi des involutions (voir Fig.3.13).

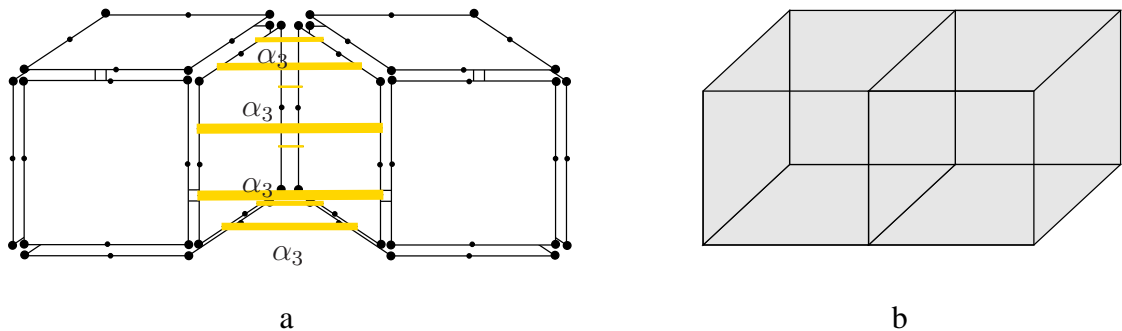


FIG. 3.13 – En (a) un exemple d'une 3-G-carte $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ composée de deux composantes connexes d'une 2-G-carte liées par α_3 . En (b) un plongement de cette 3-G-carte.

Définition 3.12 (composante connexe) Soit une n -G-carte $G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$. La composante connexe d'un brin b est donnée par l'ensemble des brins $B_b = \langle \alpha_0, \dots, \alpha_n \rangle$ et par l'ensemble des involutions $\alpha'_0, \dots, \alpha'_n$, restrictions de $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ à B_b .

Définition 3.13 (cellule) Pour définir les cellules de dimension i d'une n -G-carte $G = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_n)$ il suffit d'enlever α_i . Ainsi $G_i = (B, \alpha_0, \dots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_n)$ est une $n - 1$ -G-carte dont les composantes connexes sont les i -cellules de G .

Les cellules de dimension 0, 1 et 2, représentent respectivement les sommets, arêtes et faces de la G-carte. La figure 3.14 montre un exemple d'une 3-G-carte, avec les 2-G-cartes des faces, des arêtes et des sommets.

Définition 3.14 (bord) Toute n -G-carte peut être interprétée comme une $n + 1$ -G-carte dont tous les brins sont libres par α_{n+1} , c'est-à-dire $\alpha_{n+1}(b) = b$. La $n + 1$ -G-carte modélise un objet de dimension $n + 1$, alors que la n -G-carte modélise le bord de cet objet qui est de dimension n .

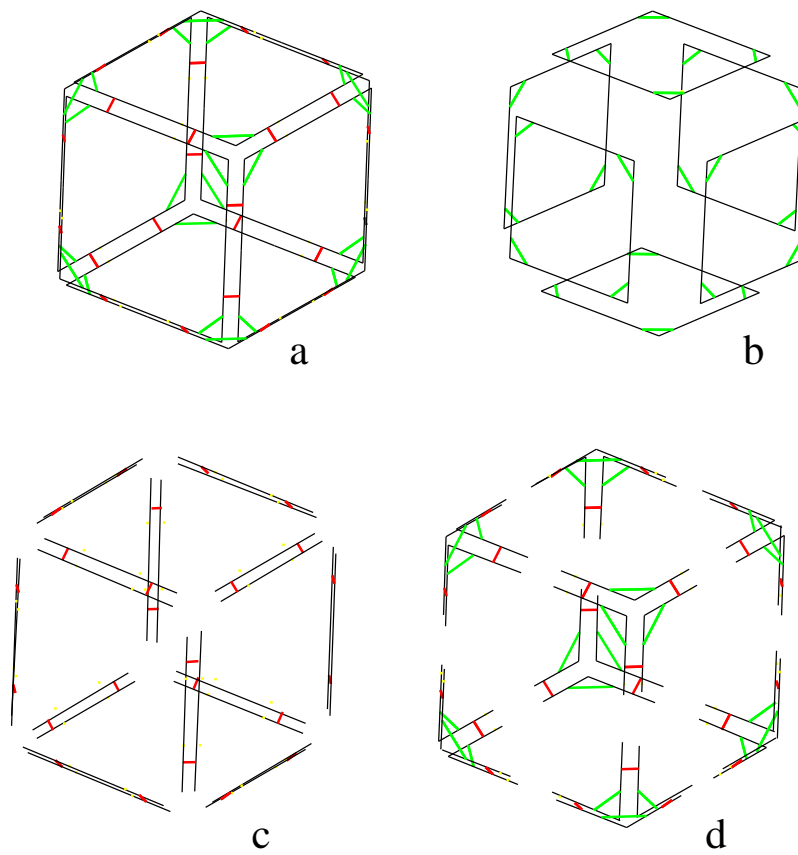


FIG. 3.14 – (a) Une 2-G-carte fermée modélisant le bord d'un cube. (b) La 1-G-carte des faces a 6 composantes connexes. (c) La 1-G-carte des arêtes a 12 composantes connexes. (d) La 1-G-carte des sommets a 8 composantes connexes.

Couture : La couture est l'opération constructive de base sur les n -G-cartes. Elle permet à partir de deux n -G-cartes d'en obtenir une seule. Pour avoir une définition précise de la couture, le lecteur pourra se référer à [LFB07]. Nous ne donnerons ici qu'une approche intuitive qui nous permet de construire les 2-G-cartes produites par notre algorithme de reconstruction. La couture d'arêtes permet de construire des faces fermées ou ouvertes, la couture des faces permet de construire des surfaces ou des volumes.

- couture d'arête : deux arêtes sont cousues en liant un de leur brin par α_1 . Les faces sont créées en cousant des arêtes, si aucun brin n'est libre par α_1 , alors c'est une face fermée, sinon elle est ouverte. La figure 3.15 montre un exemple de couture d'arêtes créant une face fermée.

Vide

FIG. 3.15 – En (a) quatre arêtes qui sont cousues en (b) par α_1 pour former une face quadrangulaire.

- couture de faces : de la même façon, nous pouvons coudre les faces par α_2 . Si aucun brin de la 2-G-carte résultante n'est libre par α_2 , celle-ci modélise le bord d'un volume fermé, sinon elle représente une surface ouverte. La figure 3.16 présente un exemple de couture de faces modélisant un volume.

Vide

FIG. 3.16 – En (a) six faces qui sont cousues en (b) par α_2 pour former un cube.

3.3.1.2 Plongement des cartes

Selon le concept de la *séparation topologie-plongement*, les cartes combinatoires représentent seulement la topologie des objets. Cependant la majorité des applications ont besoin également de représenter la géométrie de ces objets, par exemple pour les afficher, ou pour calculer des caractéristiques de forme et de taille. Par conséquent, usuellement nous associons un modèle géométrique aux cartes. Pour cela, nous pouvons associer un élément géométrique de dimension i à chaque i – cellule de la carte.

Nous appelons *plonger* l'opération qui consiste à associer un modèle géométrique à un modèle topologique, et nous parlons du *plongement* d'un modèle topologique pour désigner le modèle géométrique associé.

Par exemple, en dimension 2, nous pouvons associer à chaque sommet topologique (0-cellule) les coordonnées d'un sommet géométrique. Ce plongement peut suffire pour représenter totalement la géométrie des objets modélisés, si chaque arête de la carte est plongée par un segment de droite. Il est à noter que d'autres types de plongement peuvent être employés, comme par exemple plonger les arêtes par des courbes plutôt que par segments. Dans le contexte de la reconstruction, le plongement du modèle topologique de la surface peut être utilisé pour effectuer un lissage à la volée, par exemple.

3.4 Maillages

Intuitivement, un maillage surfacique est un modèle polygonal qui approxime la surface d'un objet. Plus formellement, la définition d'un maillage, telle qu'on la trouve dans le domaine de la géométrie algorithmique, fait introduire la notion de domaine :

Domaine. De manière très générale, le domaine Ω qui modélise l'objet étudié est inclus dans une variété de dimension m dans l'espace \mathbb{R}^d . En pratique, ce dernier espace est de dimension $d = 1, 2$ ou 3 et, selon la valeur de $m \leq d$, le domaine Ω pourra prendre l'une des formes suivantes :

- Si $m = 1$: segment de courbe dans $\mathbb{R}^{1, 2}$ ou 3 .
- Si $m = 2$: domaine surfacique dans \mathbb{R}^2 ou 3 .
- Si $m = 3$: domaine volumique dans \mathbb{R}^3 .

Par exemple, si $m = 2$ et $d = 3$, Ω sera une surface, c'est-à-dire, une variété de dimension 2 dans l'espace \mathbb{R}^3 .

Maillage. Le maillage $M(\Omega)$ d'un tel domaine Ω est composé d'éléments de dimension 0 à m :

- Si $m = 1$: le 1-maillage est composé de points (S) et d'arêtes (A).
- Si $m = 2$: le 2-maillage est composé de points (S), d'arêtes (A) et de faces (F) (triangles, quadrilatères).
- Si $m = 3$: le 3-maillage est composé de points (S), d'arêtes (A), de faces (F) et de volumes (V) (tétraèdres, prismes, pyramides, hexaèdres).

Un m -maillage peut donc être assimilé à un modèle de subdivision du domaine qui modélise l'objet.

Maillage consistant. Un m -maillage est dit *consistant* si et seulement s'il définit une variété combinatoire :

- Si $m = 1$: le maillage est une 1-variété combinatoire.
- Si $m = 2$: le maillage est une 2-variété combinatoire.
- Si $m = 3$: le maillage est une 3-variété combinatoire.

Maillage correct. Un 2-maillage est dit *correct* si et seulement s'il est homéomorphe à l'objet qu'il approxime.

Si la caractéristique d'Euler χ est connu pour l'objet, le maillage doit vérifier la relation :

$$S - A + F = \chi \quad (3.1)$$

où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F le nombre de faces. Poincaré a précisé la caractéristique d'Euler en posant :

$$\chi = 2(1 + T - G) + H \quad (3.2)$$

où T est le nombre de surfaces fermées variétés (nombre de vides enfermés dans le solide), G le nombre de trous qui traversent complètement le solide (le genre) et H le nombre de trous dans les faces.

Si le maillage est sans bord et s'il est formé exclusivement de triangles, on a $2A = 3F$.

Finesse. La *finesse* d'un m-maillage se définit en fonction de la finesse de ses m-éléments. Soit K un m-élément. La finesse h_K de K est donné par la relation :

$$h_K = \max_{P_1, P_2 \in K} \|P_2 - P_1\| \quad (3.3)$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle. Autrement dit, h_K est la plus grande distance euclidienne entre deux points de l'élément K . Pour un triangle, c'est aussi la longueur de son plus grand côté.

La finesse d'un maillage $M(\Omega)$ est alors caractérisée par le paramètre h suivant :

$$h = \max_{K \in M(\Omega)} h_K \quad (3.4)$$

Lorsque le maillage n'est pas fin, il est appelé maillage *grossier*.

Régularité. La *régularité* d'un m-maillage se définit en fonction de la régularité de ses m-éléments. Soit K un m-élément. Le paramètre σ_K , également appelé *aspect ratio*, est un réel positif qui peut être donné par la relation :

$$\sigma_K = \frac{h_K}{\rho_K} \quad (3.5)$$

Le paramètre σ_K est d'autant plus petit que l'élément est régulier. Dans le cas d'un élément triangulaire quelconque, ρ_K est le rayon du cercle inscrit dans le triangle K . Pour un triangle équilatéral, le paramètre σ_K prend sa valeur minimale $2\sqrt{3}$, et donc le triangle est le plus régulier possible. En revanche, pour un triangle aplati, ρ_K tend vers zéro et σ_K tend vers l'infini, et donc le triangle est le moins régulier possible.

Dans le cas où l'élément K est un quadrilatère ou un polygone quelconque ayant n sommets, $n \geq 4$, la définition de ρ_K est étendue par $\rho_K = \min_{i=1, \dots, n} \rho_i$, ρ_i étant le rayon du cercle inscrit dans le triangle contenant les deux arêtes issues du sommet i de K .

La régularité d'un maillage $M(\Omega)$ est alors caractérisée par le paramètre σ suivant :

$$\sigma = \max_{K \in M(\Omega)} \sigma_K \quad (3.6)$$

Qualité en forme. La *qualité* d'un maillage peut être définie de différentes manières. La *qualité en forme* est une fonction réelle continue minimale pour un triangle totalement aplati, maximale pour un triangle équilatéral, et généralement normalisée entre 0 et 1.

Dans une première définition possible, la qualité $Q_1(K)$ d'un élément K est simplement égale à l'inverse du paramètre σ_K , multiplié par un coefficient de normalisation :

$$Q_1(K) = 2\sqrt{3} \frac{1}{\sigma_K} = 2\sqrt{3} \frac{\rho_K}{h_K} \quad (3.7)$$

Dans une autre définition classique, la qualité $Q_2(K)$ d'un triangle K de sommets A, B, C est proportionnelle au rapport entre l'aire de ce triangle et la somme des carrés des longueurs de ses côtés :

$$Q_2(K) = Q_2(ABC) = 4\sqrt{3} \frac{\text{aire}(ABC)}{AB^2 + BC^2 + CA^2} \quad (3.8)$$

Pour un triangle aplati, l'aire est nulle et donc $Q_2(K) = 0$. Pour un triangle équilatéral, le rapport ci-dessus est égale à $\frac{\sqrt{3}}{12}$, d'où le coefficient multiplicateur donné $Q_2(K) = 1$.

De nombreuses autres définitions de la qualité d'un élément ont été proposées. L'utilisation de l'une ou l'autre de ces définitions n'a généralement pas d'influence significative sur les maillages générés.

En pratique, deux types de maillage peuvent se concevoir :

- les *maillages uniformes*, dans lesquels la taille des éléments est constante dans tout le domaine et
- les *maillages adaptatifs*, dans lesquels la taille des éléments est adaptée localement aux courbures de la surface.

Nous allons préciser ces notions dans le cas particulier de maillages plans et composés uniquement de triangles. Dans le cas d'un maillage uniforme et dans le cas idéal, tous les triangles sont équilatéraux et le paramètre $\sigma = 2\sqrt{3}$. Cependant, lorsque le domaine est de forme quelconque, un tel maillage est impossible à réaliser. À titre d'illustration, la figure 3.17 montre le cas très particulier où le domaine est lui-même un triangle équilatéral, ce qui permet effectivement de le mailler en triangles parfaitement équilatéraux. En revanche, lorsque le sommet supérieur du domaine a été légèrement décalé vers la droite, le maillage uniforme est composé de triangles *quasi-équilatéraux*.

Des définitions présentées ci-dessus découlent les défis majeurs que toute méthode de génération de maillage automatique doit soulever. En effet, pour qu'un maillage soit considéré comme satisfaisant il doit satisfaire plusieurs caractéristiques contradictoires :

- être correct et consistant,
- comporter un nombre raisonnable d'éléments,

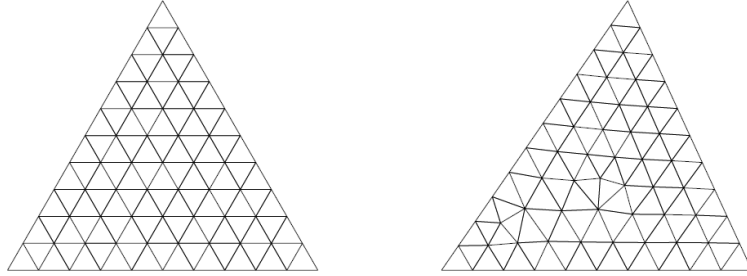


FIG. 3.17 – À gauche, maillage d'un domaine dont la frontière est un triangle équilatéral. À droite, maillage d'un domaine similaire au précédent, le sommet supérieur du triangle ayant été déplacé vers la droite. (source [Lau06])

- être suffisamment fin pour que la géométrie de la frontière soit convenablement respectée,
- contenir des éléments suffisamment réguliers.

En pratique, il est nécessaire de trouver un compromis entre la finesse et le nombre d'éléments : une taille h très proche de zéro garantirait une très bonne approximation de la frontière mais reste irréalisable puisque le nombre d'éléments serait démesuré. De plus, l'existence d'un *maillage régulier* (au sens strict du terme) n'est pas prouvée pour tout domaine Ω . Un maillage régulier est généralement considéré comme le *meilleur* maillage qu'il est possible de construire.

Rappelons enfin que, les maillages réguliers sont indispensables pour des applications informatiques basées sur les méthodes d'éléments finis. Ils sont aussi très utiles pour tout type de simulation ou déformation car la taille relativement fixe des triangles permet un pas de traitement régulier. Cependant, les maillages adaptatifs offrent la possibilité d'optimiser le nombre et la taille des triangles : les petits détails étant représentés avec plus d'éléments que les régions plutôt plates. Ces maillages sont généralement requis pour les méthodes graphiques de visualisation.

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons rappelé quelques notions de base en modélisation géométrique. En premier lieu, nous avons revu une définition combinatoire des variétés, basée sur la théorie des graphes. Ensuite, nous avons discuté les modèles cellulaires et avons fait le lien avec la modélisation des images discrètes, présenté dans le chapitre précédent. Nous avons aussi présenté les n -G-cartes qui sont les modèles topologiques utilisés dans ce travail. Finalement, nous avons rappelé la définition d'un maillage et certaines de ses caractéristiques comme la régularité et la qualité en forme.

Chapitre 4

Reconstruction 2D et 3D

4.1 Introduction

La génération de maillage est une problématique qui fait partie de la modélisation géométrique. Ses applications sont très variées et touchent différents domaines tels que l'analyse d'images, la simulation numérique ou encore l'analyse numérique.

Dans son sens le plus large, la génération de maillage peut se définir comme l'art de construire une représentation géométrique de la frontière (ou du volume) d'un objet (ou d'un domaine de calcul) à l'aide d'éléments de géométrie simple comme des triangles, des quadrilatères, des tétraèdres, etc. Ainsi, le terme *maillage* est un terme générique qui désigne toute représentation géométrique composée de tels éléments. Un *maillage surfacique* est généralement un ensemble de polygones orientés (le plus souvent des triangles), alors qu'un *maillage volumique* est composé de polyèdres (le plus souvent des tétraèdres ou des hexaèdres).

Dans le domaine d'analyse d'images, on utilise le terme de *reconstruction* dont la justification est portée par la nature discrète des données. Les techniques d'imagerie numérique actuelles sont capable de fournir des jeux de données précis et de grandes tailles sur à peu près tous les organes dans le domaine médical, par exemple. Les images numériques (ou les nuages de points) contiennent typiquement un ensemble d'échantillons de l'objet réel et ne sont généralement appropriées ni à l'affichage et au transfert, ni à la représentation d'une géométrie complexe en dimension 3, les modèles polygonaux leur étant largement préférés. Ainsi, depuis ses origines qui remontent à plus de quatre décennies, la génération automatique de maillage est un domaine de recherche qui ne cesse de progresser. Ces dernières années, de nombreux algorithmes de reconstruction ont été proposés dans le but d'extraire des approximations linéaires par morceaux (des triangulations) directement à partir des nuages de points ou des images discrètes qui interpolent la géométrie de la surface échantillonnée.

Les maillages polygonaux (ou polyédriques) sont indispensables pour les applications graphiques et les simulations numériques, en grande partie parce qu'ils permettent de représenter tout type de géométrie et de topologie pour des objets de complexité quelconque. Toutefois, les contraintes exercées sur ces maillages diffèrent largement d'un

domaine d'application à l'autre.

En rendu, par exemple, l'objectif est, en principe, d'afficher une scène complexe (composée d'une multitude d'objets polyédriques) aussi rapidement que possible (en temps réel), en fonction des capacités de la carte graphique, sans perte importante de précision (ou en contrôlant au mieux cette perte). Dans ce cas, le nombre de rafraîchissements d'écran par seconde dicte le nombre maximal de primitives (*i.e.* de triangles) utilisés pour représenter le modèle. Les différents objets peuvent être représentés avec des niveaux de détails (LOD) différents et leur complexité dépend alors de leur position relative par rapport à l'utilisateur (donc du point de vue). Ainsi, un objet donné peut être représenté, par exemple, avec 50 triangles selon un point de vue ou avec 5000 triangles selon un autre point de vue.

Dans le cadre d'une simulation, l'accent est mis sur la précision ainsi que sur le contrôle de la qualité des éléments des maillages. La simulation numérique d'un phénomène physique (en mécanique du solide, en mécanique des fluides, en modélisation de problèmes thermiques,...) suppose une modélisation de l'état et éventuellement de l'évolution de ce phénomène, en générale sous forme d'un système d'équations aux dérivées partielles (EDP). Elle nécessite également une modélisation de la forme géométrique de l'objet considéré ou de la zone d'espace qui l'entoure. Les méthodes de simulation par des éléments ou des volumes finis s'appuient sur une discrétisation du domaine de calcul sous forme d'un maillage et cherchent une solution approchée aux sommets de ce maillage. La solution en tout point du domaine est obtenue par interpolation. Ainsi, la précision, voire la validité, des solutions calculées est liée aux propriétés du maillage utilisé comme support. Ici, un compromis est cherché entre le nombre de sommets (*i.e.* le nombre de degrés de liberté) et la qualité de l'approximation géométrique de la surface (ou du volume).

Dans chaque domaine d'application, c'est l'utilisation finale qui guide les algorithmes de reconstruction en fonction des prérequis et des besoins des applications potentielles.

4.2 Reconstruction surfacique : un état de l'art

Comme nous avons vu précédemment, les modèles B-rep sont indispensables pour la majorité des applications graphiques. Parmi les modèles surfaciques d'un objet, la triangulation occupe une place particulière. Encore aujourd'hui, les triangulations sont largement préférées par rapports aux autres modèles polygonaux, grâce à leurs simple structure (elles sont souvent représentées comme un ensemble de points et une liste de triangles) et leur facilité de manipulation.

La reconstruction surfacique, et plus concrètement, la triangulation est un problème largement étudié. Proposer un état de l'art des méthodes de reconstruction (dites aussi, *méthodes de génération de maillages*, dans le cas des triangulations) au sens le plus large du terme est une tâche délicate, voir irréaliste. Le nombre d'articles parus dans la littérature durant les dernières décennies et ayant trait à ce domaine a probablement déjà dépassé le millier d'unités depuis ses débuts au milieu des années 70. Cette multiplicité des méthodes proposées s'explique non seulement par la diversité des données (nuage

de points, image 3D, volume binaire, modèles explicites ou implicites,...) mais aussi par les applications auxquelles les modèles obtenus sont destinés (visualisation réaliste, simulation temps réel, codage de données, compression,...).

Dans cette section, nous présentons donc, un état de l'art partiel sur les méthodes de reconstructions les plus populaires, pouvant être utilisées sur des données discrètes. N'y sont pas traitées les méthodes consacrées aux domaines continus définis à l'aide de modèles explicites ou implicites (surfaces paramétrées composites ou surfaces implicites issues de la CAO), qui, par ailleurs, nécessitent une discrétisation préalable de la frontière du domaine. Dans cet état de l'art, sont en revanche traitées les approches de reconstruction permettant d'obtenir des triangulations, ou plus généralement, des modèles polygonaux, des frontières d'objet discrets.

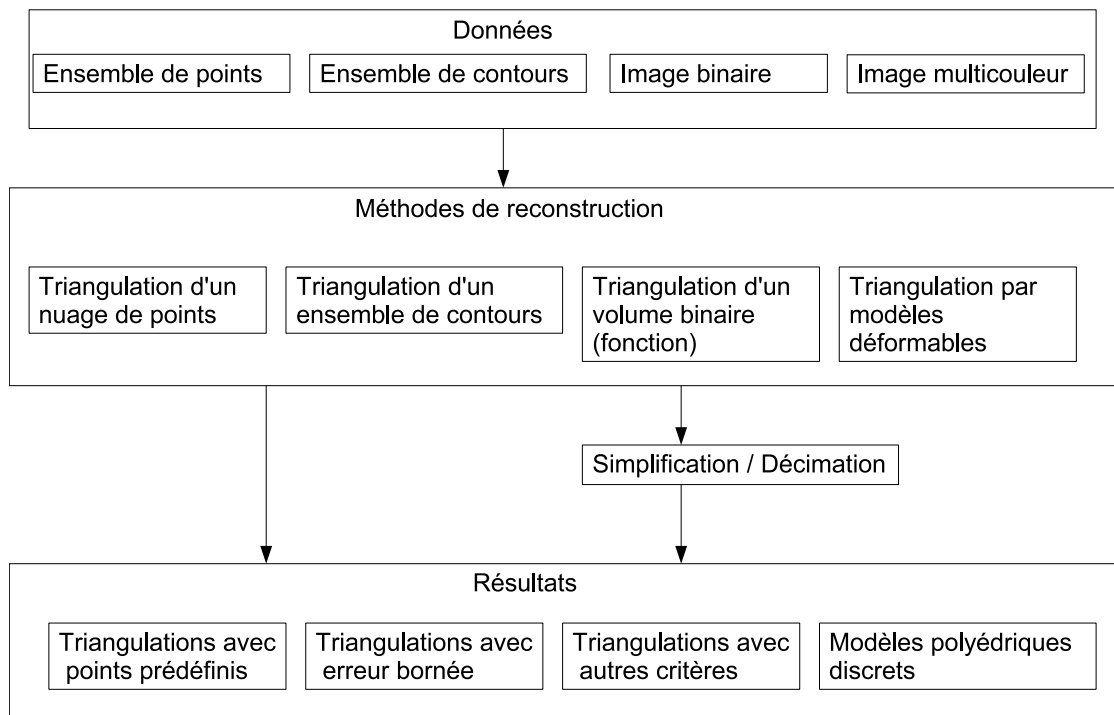


FIG. 4.1 – Schéma général du processus de reconstruction.

La figure 4.1 montre une classification possible des méthodes de reconstruction. Il est à noter que le type des données et le résultat souhaité restreignent le choix de la méthode adaptée pour la reconstruction.

Les données : Les données pour une méthode de reconstruction peuvent être grossièrement classifiées en quatre groupes en fonction du fait qu'elles soient structurées ou pas et combien d'objets elles représentent : *nuage de points*, *ensemble de contours*,

image binaire et image multicolore.

Généralement, un *contour* est défini comme une courbe fermée simple dans un plan. La différence majeure entre un ensemble de points et un ensemble de contours est que les points du nuage de points sont totalement désorganisés (pas de notion de voisinage), alors que dans le cas des contours, le voisinage entre points est connu sur un contour mais pas entre deux contours. Le groupe *image binaire* (aussi appelé *volume binaire*) englobe les données pour lesquelles une information complète de la surface d'un objet est disponible. Cette information peut être interprétée soit comme une fonction implicite (ou une *iso-surface*), soit comme un ensemble de faces discrètes. Un exemple typique de ce type de données est une image binaire obtenue après segmentation de données médicales. Les *images multicolore* peuvent être obtenues par addition d'images binaires, par exemple.

Les limites entre les trois premiers groupes de données ne sont pas toujours définies clairement. Par exemple, la représentation sous forme d'un *volume binaire* peut toujours être transformée en représentation sous forme d'un ensemble de contours ou d'un ensemble de points. Cependant, la reconstruction d'un volume binaire à partir d'un ensemble de contours ou de points n'est pas unique, en général. C'est un problème connu dans le domaine du traitement du signal : un signal analogique échantillonné peut être reconstruit correctement uniquement si la fréquence d'échantillonnage est deux fois supérieure de la fréquence la plus haute du signal (la loi de Nyquist). Autrement dit, la connaissance d'échantillons éparses d'une surface hautement courbe (sans autres informations *a priori*) ne permet pas de garantir la cohérence topologique et géométrique du résultat. Les termes denses ou épars s'appliquent aux données et dépendent de la complexité des objets à reconstruire et de la résolution souhaitée pour le modèle résultant.

Comme nous avons vu, les données médicales les plus répandues sont les ensembles de coupes scanner ou IRM dont la segmentation permet la génération soit d'ensembles de contours, soit de volumes binaires. Généralement, cette représentation volumique ne peut pas être considérée comme complète car les plus petits détails géométriques et topologiques de l'objet sont limités par la taille des voxels. Or la résolution des images ainsi que les propriétés topologiques des objets contenus dépendent essentiellement de la résolution des appareils d'acquisition. En pratique, il est nécessaire de faire certaines hypothèses et de supposer le fait que l'objet ne contient pas de détails importants, plus petits que la résolution de l'image. En particulier, dans la majorité des données médicales, la distance entre deux coupes est beaucoup plus grande que la distance entre deux pixels d'une coupe, c'est-à-dire que les coupes sont épaisses et qu'il existe des trous entre les coupes dès l'acquisition des données. En effet, en imagerie médicale, les images sont généralement *anisotropes*, c'est-à-dire leurs tailles en X et Y diffèrent de la taille en Z et les voxels sont des parallélépipèdes et non des cubes.

Les maillages : Les résultats des méthodes de reconstruction peuvent être divisées en trois groupes. Premièrement, nous distinguons les *triangulations avec des points prédéfinis* qui englobent les triangulations pour lesquelles les sommets sont définis par l'utilisateur. Deuxièmement, nous distinguons le groupe des *triangulations avec erreur bornée*. Dans ce type de triangulations l'accent est mis sur la cohérence géométrique et

topologique du modèle résultant plutôt que sur la distribution des sommets. Dans ce cas, l'erreur géométrique est bornée à l'aide d'un paramètre σ , spécifié par l'utilisateur. Le groupe des *triangulations avec d'autres critères* englobe tous les autres résultats, comme par exemple le cas des triangulations pour lesquelles seul le nombre de triangles est spécifié auparavant ou bien les modèles polyédriques discrets qui s'attachent plus particulièrement à la propriété de réversibilité du modèle.

Une autre classification possible des maillages peut être faite en fonction de la topologie du modèle. Ainsi les reconstructions peuvent être divisées en reconstructions *avec ou sans garanties topologiques*. Rappelons que les modèles géométriques doivent remplir les contraintes d'intégrité spécifiques à chaque domaine d'application pour être considérés comme corrects et acceptables (variétés homéomorphes à l'objet discret). Dans beaucoup de domaines et notamment dans le domaine médical, les triangulations des structures anatomiques et pathologiques doivent représenter des surfaces fermées et simples (2-variétés topologiques).

Dans les sections suivantes nous présentons certains aspects théoriques et pratiques des différentes approches de reconstruction surfacique et donnons les références d'une partie des méthodes de reconstruction existantes.

4.2.1 Triangulation d'un nuage de points

La *triangulation de Delaunay* est l'un des outils les plus répandus pour la génération de maillages non structurés à partir d'un nuage de points. Dans le plan, la triangulation de Delaunay est la triangulation optimale car elle maximise l'arête la plus petite et minimise le plus petit angle de chaque triangle. Les maillages résultants sont constitués d'éléments *réguliers* et présentent de très bons indices de qualité en forme. La triangulation de Delaunay un outil puissant qui repose sur des bases mathématiques démontrables et qui génère des maillages de propriétés garanties et intéressantes [Ede01].

Cadre théorique : La *triangulation de Delaunay* est définie comme le dual du *diagramme de Voronoï* d'un ensemble S de points (également appelés *nœuds*). Le diagramme de Voronoï associé aux n points p_i est l'ensemble des n régions de Voronoï $Vor(p_i)$ telles que chaque point de l'espace ait pour plus proche point p_i .

Définition 4.1 Soit S un ensemble de n points d'un espace métrique (E, d) . La région de Voronoï $Vor(p_i)$ d'un point p_i est un sous-ensemble de E , de la forme $\{x \in E \mid d(x, p_i) \leq d(x, p_j), \forall j \neq i\}$, où d est la distance euclidienne.

La cellule de Voronoï d'un point p_i est un polygone (polyèdre) convexe fermé qui contient les points de l'espace qui sont plus proche de p_i que de tout autre point de S . Ces cellules recouvrent l'espace sans se chevaucher (aussi connues comme *la tessellation de Dirichlet*).

Le dual géométrique du diagramme de Voronoï est donc connu comme la triangulation de Delaunay (voir Fig.4.2). Deux points sont liés par une arête dans la triangulation de Delaunay s'ils appartiennent à des régions de Voronoï adjacentes.

Définition 4.2 Soient p_1 et p_2 deux points de l'ensemble S . Ces points sont liés par une arête dans la triangulation de Delaunay si et seulement si $Vor(p_1)$ et $Vor(p_2)$ sont adjacentes.

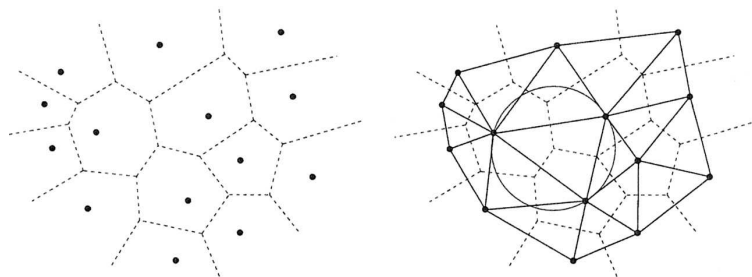


FIG. 4.2 – À gauche, le diagramme de Voronoï d'un ensemble de points. À droite, la triangulation de Delaunay de l'enveloppe convexe de l'ensemble des points obtenue par dualité (source [Ede98]).

La triangulation de Delaunay satisfait au *critère de la boule vide*, i.e. un triangle (tétraèdre) est valide si et seulement si sa boule ouverte circonscrite ne contient aucun autre point de l'ensemble S . Cette propriété implique la maximisation du plus petit angle du triangle en 2D et la connexion des plus proches voisins en dimension générale.

Pour un ensemble de points S , la triangulation de Delaunay représente donc un maillage triangulaire (tétraédrique en 3D) de son enveloppe convexe. Dans \mathbb{R}^2 , le dual du diagramme ne contient que des simplexes à condition qu'il n'y a pas 4 points cocycliques (critère de l'unicité du maillage). Sinon le dual contient des polygones qui peuvent être décomposé en simplexes pour obtenir une triangulation.

Le problème majeur de l'approche de Delaunay est que l'objet à mailler correspond rarement à l'enveloppe convexe de l'ensemble de ses points. Il faut donc d'abord construire un maillage de l'enveloppe convexe et le modifier ensuite pour obtenir un maillage conforme à la frontière de l'objet. C'est le problème du non respect du bord (*boundary recovery problem*) intrinsèque aux méthodes de type Delaunay. Ne considérant qu'un nuage de points, ces méthodes ne peuvent intrinsèquement pas tenir compte des contraintes topologiques comme le respect des bords ou des interfaces internes. Pour transformer le maillage initial de l'enveloppe convexe en un maillage respectant les bord de l'objet, les méthodes utilisent généralement un maillage d'arête (triangles en 3D) de la frontière de l'objet. Ces arêtes vont donc définir des contraintes topologiques que les méthodes de raffinement de Delaunay tentent de respecter au mieux. Deux approches peuvent être envisagées :

- Redéfinir les contraintes *a priori* en faisant en sorte qu'elles apparaissent naturellement dans la triangulation de Delaunay. C'est l'approche dite *boundary integrity*.
- Récupérer les contraintes *a posteriori*, ce qui revient à modifier la triangulation de Delaunay pour récupérer le bord. C'est l'approche dite *boundary recovery*.

Les algorithmes de ce type se différencient selon la stratégie mise en oeuvre. La première solution force le maillage initial à recouvrir le bord par des transformations locales, sans ajout de nouveau points. Dans ce cas on parle de triangulation de Delaunay Contrainte (*constrained boundary recovery*). La seconde reconstruit le bord en insérant des points de Steiner et en retriangulant (*conforming boundary recovery*).

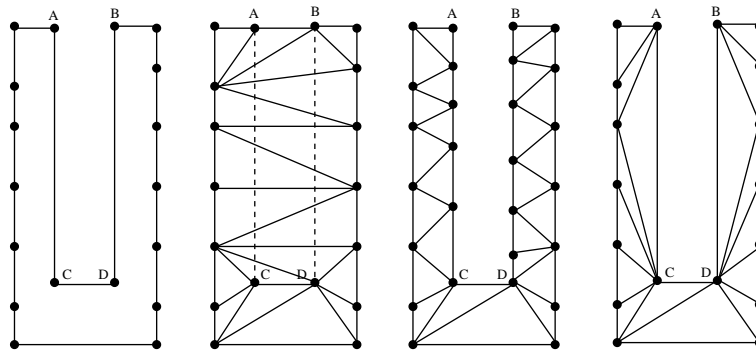


FIG. 4.3 – Illustration du problème du recouvrement du bord en 2D, de gauche à droite : (1) Discrétisation du bord de l'objet ; (2) Triangulation de Delaunay ; (3) Récupération du bord par ajout de points ; (4) Récupération du bord contrainte.

La Fig. 4.3 illustre les deux approches de récupération du bord. Notons que, d'un algorithme à l'autre, les maillages résultants de ces transformations ne sont pas forcément garantis de type Delaunay, c'est-à-dire que le critère de la boule vide n'est pas toujours satisfait ce qui peut s'avérer gênant pour les méthodes de simulation exigeant des garanties sur le type du maillage.

En dimension 2, il a été démontré que le bord de tout polygone (*piecewise linear polygon*) peut être reconstruit par une série de swaps des arêtes de la triangulation de Delaunay, sans ajouter des points de Steiner, ce qui garantit la convergence du processus [FG99]. Par conséquent, les méthodes de récupération du bord en 2D peuvent être considérées comme abouties [Wea90, BG97]. En revanche, en 3D, ces méthodes restent encore sous investigations.

Aspects techniques : Dans sa version mathématique, la théorie de Delaunay-Voronoi peut être qualifiée de « continue », dans le sens où elle est définie et prouvée dans l'espace \mathbb{R}^n et utilise les notions continues de droite, cercle et sphère ainsi que la distance euclidienne. Par conséquent, l'implémentation algorithmique de ces concepts continus dans le monde informatique qui, par essence, est discret, peut être plus ou moins réussie et fiable. En effet, la principale faiblesse des algorithmes géométriques s'avère être leur manque de robustesse dans les calculs en virgule flottante [DP02]. Plus concrètement, on parle d'inexactitude numérique lors de l'évaluation des *prédicats* qui sont des questions géométriques élémentaires, comme par exemple, étant donné un plan orienté et un point : « De quel côté du plan se trouve le point ? ».

L'implémentation algorithmique de la triangulation de Delaunay nécessite 2 prédicats bien connus :

- *test d'orientation* - décide de quel côté du plan orienté défini par 3 points non-colinéaires se trouve un quatrième point.
- *test de la sphère* - étant donnée la sphère circonscrite de 4 points, décide si un cinquième point est à l'intérieur de cette sphère ou pas.

En pratique, l'évaluation de ces deux prédicats peut être ramenée à l'évaluation du signe du déterminant d'une matrice 3×3 pour le premier prédicat et d'une matrice 4×4 pour le second. Cependant, une implémentation naïve des formules algébriques en C++, même en utilisant le type *double*, s'avère très sensible aux erreurs d'arrondi intrinsèques aux calculs en virgule flottante et peut générer des résultats erronés, voire échouer complètement. Une solution efficace à ces problèmes est *l'arithmétique exacte* [Yap97] mais, naturellement cette technique est très gourmande en terme de temps de calculs et rend les algorithmes extrêmement lents. Il est à noter que l'évaluation des prédicats peut représenter de 40% à presque 100% du temps de calcul d'une triangulation. Par conséquent, la solution courante pour améliorer les performances consiste à combiner une évaluation naïve (avec une erreur certifiée et bornée) pour les cas « faciles » avec une évaluation en arithmétique exacte uniquement pour les cas dégénérés. Cette approche est connue sous le nom de *filtrage arithmétique* et donne des résultats satisfaisants en pratique [BBP01, BFS98, FW96]. En effet, beaucoup de recherches ont été menées pour trouver le compromis idéal entre le temps d'exécution et la robustesse des algorithmes. Actuellement, on connaît une multitude de filtres arithmétiques et de types de codage qui possèdent des hypothèses plus ou moins fortes sur les données mais une discussion plus approfondie sur les avantages et les inconvénients de ces méthodes sortirait de notre propos. Ici, nous nous contenterons de dire que, mis à part les quelques problèmes techniques d'implémentation, la triangulation de Delaunay reste indéniablement un concept mathématique très élégant et attrayant.

Dans cette thèse, nous présenterons un point de vue discret sur la théorie de Voronoï-Delaunay. Nous nous sommes penchés sur la question de transposition de ce concept dans le monde discret, ce qui revient, en effet, à contourner ses problèmes classiques d'erreur de calcul, tout en exploitant au mieux ses avantages.

Algorithmes : Beaucoup de travaux ont été menés pour proposer des algorithmes de reconstruction d'une surface *lisse* et sans bord à partir d'un ensemble d'échantillons [ABK98, AB98, ABE98, ACK01a, ACK01b, ACDL02, DG03, CDRR04, BC00, BO03, ORY05]. Pour un état de l'art, le lecteur peut se référer à [CGY04].

En générale, ces méthodes de reconstruction donnent des garanties théoriques sur la validité des maillages sous des conditions d'échantillonnage des points d'entrée [ES97, AB98, AB02]. Par exemple, un ensemble de points S est dit ϵ -échantillonné [AB98], si et seulement si, pour tout point p de S , la distance euclidienne de p à son voisin échantillonné le plus proche est au plus ϵ fois la distance entre p et son plus proche point de l'*axe médian* de S . Ainsi, pour des points d'entrée ϵ -échantillonnés sur une surface lisse ($\epsilon \leq 0.06$), il a été prouvé que les algorithmes convergent et que la triangulation de Delaunay résultante est correcte et consistante.

Récemment, des algorithmes prouvés corrects ont été proposés pour la reconstruction de surface lisse [BO03] et des volumes bornés par ces surfaces [ORY05]. Il a été prouvé que ces deux algorithmes terminent et qu'ils produisent des maillages de bonne qualité, tout en offrant le contrôle sur la distance du maillage de la frontière originale et de sa taille. Un aspect notable de ces algorithmes est que la surface doit être connue *seulement* via un *oracle* qui, pour un segment de droite donné, détecte si le segment intersecte la surface, et si oui, retourne le point d'intersection. Ceci rend les algorithmes plus pratiques et utilisables pour une plus large classe de surfaces.

Cependant, assurer les conditions d'échantillonnage en pratique reste un problème complexe. En effet, il est très difficile d'estimer si un échantillonnage est suffisamment dense lorsque nous ne connaissons pas une expression analytique de l'objet à reconstruire. De plus, dans le cas où l'axe médian touche la surface de l'objet (situation très fréquente en imagerie médicale où les objets voxels sont très bruités), la théorie de l' ϵ -échantillonnage, stipule qu'à cet endroit, une infinité de points est nécessaire pour que la topologie de la surface reconstruite soit garantie.

En effet, la difficulté majeure des méthodes de reconstruction basées sur la triangulation de Delaunay vient du fait que les données, étant des points totalement désordonnés, ne portent, *a priori*, aucune information topologique de la surface sur laquelle ils sont échantillonnés.

Comme nous allons le voir dans les sections suivantes, cette difficulté s'estompe avec les autres types de données discrètes. Les *ensembles de contours* offrent déjà une meilleure connaissance de la surface sous-jacente et permettent certaines considérations topologiques, alors que les *volumes binaires* la définissent entièrement.

4.2.2 Triangulation d'un ensemble de contours

Les méthodes de triangulation d'un ensemble de contours sont très populaires en imagerie médicale où les données fournies par les scanners sont naturellement organisées en contours localisés sur des plans parallèles. Ces méthodes cherchent à connecter les contours par triangles.

En générale, la triangulation de contours est plus facile que la triangulation d'un ensemble de points totalement désordonnés parce que les relations de voisinage entre les points d'un contours sont connues. Ces méthodes cherchent à résoudre trois problèmes différents (comme stipulé par Bajaj [BCL96]) :

- *correspondance* : la correspondance définit la corrélation entre les contours de plans adjacents ;
- *branchement* : le problème de branchement apparaît lorsqu'un plan contient un unique contour alors que le plan suivant contient plus d'un contour, ce qui implique la nécessité de créer une « branche » entre les deux plans ;
- *triangulation* : la triangulation est chargée de reconstruire efficacement un maillage triangulaire entre les différents contours.

Initialement ces méthodes ont été limitées au cas où chaque plan contient un seul contour [Kep75, FKU77]. Ces méthodes utilisent typiquement la programmation dynamique pour optimiser certaines propriétés spécifiques de la triangulation comme, par

exemple, minimiser la surface de la triangulation ou maximiser le volume de la triangulation. Beaucoup d'autres méthodes ont été développées depuis ces débuts pour proposer des solutions plus ou moins heuristiques au problème des branchements [Boi88, BST00, BGLSS03, EPO91]. L'avantage de ces méthodes de reconstruction est qu'elles sont efficaces et faciles à implémenter. Cependant, les maillages obtenus sont rarement de bonne qualité car les triangles très fins ne peuvent pas être évités systématiquement.

4.2.3 Triangulation d'un volume binaire

Les algorithmes de ce groupe sont généralement utilisés sur une image tridimensionnelle binaire, même s'ils peuvent directement être appliqués sur des images de niveaux de gris avec une valeur de seuillage spécifiée. L'image est considérée comme une grille régulière dont les nœuds sont des valeurs d'échantillonnage d'un champ scalaire continu (qui peut être vu comme une fonction implicite). Ce champ est supposé être proche de l'interpolation trilineaire des valeurs données aux nœuds de la grille. L'utilisateur fournit un paramètre π , dit *iso-valeur*, qui permet de définir l'*iso-surface* π . C'est la raison pour laquelle dans la littérature, certains auteurs parlent de *triangulation d'une iso-surface* ou *triangulation d'une fonction implicite*.

Dans le cas d'une image binaire, le volume binaire est considéré comme une fonction de $f : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ où les voxels de l'objet ont pour valeur 1 alors que les voxels du fond ont pour valeur 0. Dans ce cas, la reconstruction cherchée correspond généralement à l'iso-surface correspondante à $f = 0.5$. Ceci revient à dire que les sommets de la triangulation sont positionnés aux milieux des arêtes de la grille.

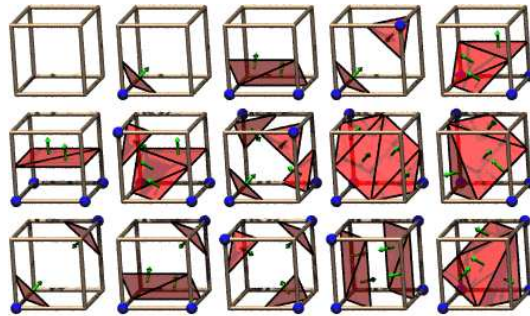


FIG. 4.4 – La table des 15 configurations standards de l'algorithme du Marching Cubes.

Dans cette catégorie, l'algorithme le plus répandu est certainement le *Marching Cubes*, développé par Lorensen et Cline [LC87]. Dans de nombreux domaines et notamment dans le domaine médical, l'idée préconçue selon laquelle le problème de la reconstruction des structures anatomiques segmentées à partir d'une image médicale est résolu depuis 1987 avec l'apparition de cet algorithme existe encore. Cependant, comme nous allons le voir dans ce qui suit, il présente de nombreux défauts dans sa version originale et malgré les améliorations considérables apportées par une multitude

de recherches portant sur le sujet, il ne peut pas être considéré comme un algorithme universel.

Le succès de cet algorithme est indéniablement dû à sa simplicité, rapidité et facilité d'implémentation. L'idée de base est de balayer l'image par blocs de 8 voxels (formant un cube virtuel) et à l'aide d'une *table* de configurations précalculées, d'extraire un ensemble de triangles de chaque cube virtuel qui intersecte la frontière de l'objet.

La table code les différentes répartitions possibles des sommets du cube virtuel entre les points appartenant à l'objet et les points appartenant au complémentaire. Les 256 configurations possibles peuvent être ramenées à 15 configurations par symétries, rotations et compléments (Fig.4.4). À chacune de ces répartitions, la table associe des éléments de surface (triangles) permettant de séparer les points de l'objet des points du fond dans un cube virtuel donné. L'union des facettes ainsi générées constitue la surface de l'objet.

Marching Cubes et 2-variétés : Dans sa version originelle, cet algorithme peut produire des surfaces triangulées non fermées [Dür88] ce qui contredit la définition de l'iso-surface dans un champ potentiel continu. C'est-à-dire qu'il n'est pas garanti que l'iso-surface obtenue soit une surface (nous entendons par là 2-variété combinatoire) [ZSK94, NH91]. En particulier, la figure 4.5 illustre une situation où la surface générée par le MC présente un trou. Ce problème pourrait sembler mineur dans le cas d'une large surface générée à seule fin de visualisation car il n'a quasiment aucune incidence sur le résultat affiché. En revanche, la correction de ce problème de fermeture devient nécessaire si nous souhaitons exploiter le modèle géométrique construit pour simuler un parcours dans l'espace délimité par une paroi (navigation virtuelle), ou pour le calcul de volume. De même, l'absence de garanties topologiques rend périlleuse l'utilisation d'un grand nombre d'algorithmes de simulation, de recalage ou de réalité augmentée dans le domaine médical.

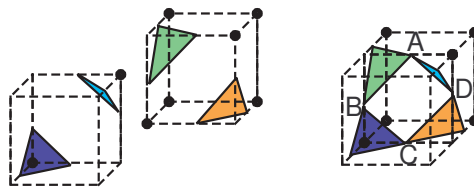


FIG. 4.5 – Le « problème du trou de type A » tel qu'il apparaît dans l'algorithme original du MC. Le trou est ABCD.

De nombreuses méthodes ont été proposées pour modifier l'algorithme du *Marching Cubes* de façon à ce que les surfaces construites soient fermées [Nie03, LLVT03, CGMS00, GMN01].

En réalité, les imperfections du *Marching Cubes* proviennent des ambiguïtés inhérentes au cube, un problème qui n'est pas sans rappeler la multiplicité des adjacences en

topologie discrète. En effet, s'il semble relativement évident que deux points situés sur l'arête d'un même cube virtuel sont adjacents, il est plus discutable que tel soit le cas de deux points sur la diagonale d'une face (dites *faces ambiguës*) ou encore opposés par rapport au centre du cube. La figure 4.6 illustre une face ambiguë et les trois manières possibles de séparer les points noirs des points blancs.

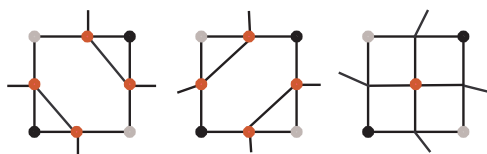


FIG. 4.6 – Ambiguïté dans l'algorithme du Marching Cubes et trois manières différentes de séparer les points de l'objet (en noir) des points du fond (en gris).

La figure 4.7(a) donne un exemple concret du trou que présente la surface générée par l'algorithme du Marching Cubes original. Supposons que le cube virtuel de la configuration 12 est adjacent au cube virtuel du complémentaire de la configuration 4. Ces cubes partagent une face ambiguë où les points noirs (de l'objet) sont diagonalement opposés. Il existe deux triangulations permettant de résoudre correctement ce problème 4.7(b,c). Ce qui distingue ces configurations est la connexité choisie pour les points noirs. Si l'objet est considéré comme 18-connexe (donc le fond est 6-connexe), les sommets noirs de la face ambiguë sont connectés de façon à assurer la continuité de la surface (les points sont voisins) 4.7(b). Dans le cas inverse (l'objet est 6-connexe et le fond 18-connexe), la continuité est assurée pour le fond 4.7(c).

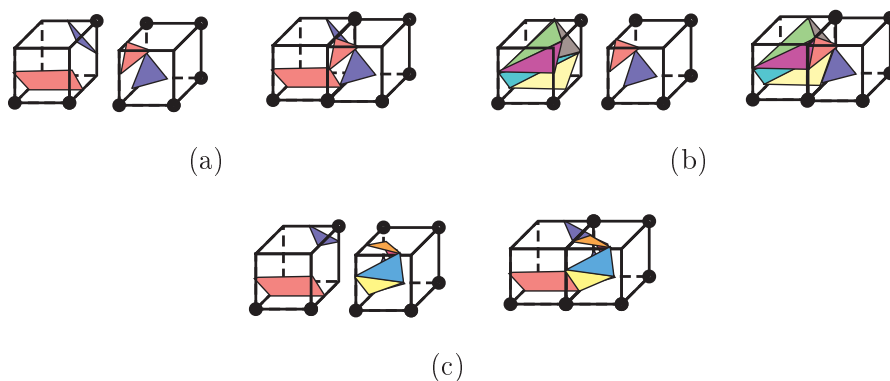


FIG. 4.7 – (a) Deux cubes virtuels adjacents à une face ambiguë. Le maillage présente des incohérences topologiques. (b) Une première solution possible au problème précédent. (c) Deuxième solution possible.

Beaucoup de solutions ont été apportées pour résoudre les ambiguïtés topologiques

de l'algorithme du Marching Cubes. Pour connecter les points, Wywill *et al.* [WMW86] ont suggérés d'utiliser la valeur de la fonction implicite (ou le champ continu) au centre de la face. Cette solution ne conduit pas toujours à un résultat correct [Mat94]. Nielson et Hamann [NH91] ont proposé d'utiliser une représentation bilinéaire de la fonction, la courbe décrivant l'intersection de l'iso-surface avec l'arête étant alors une courbe hyperbolique. En définissant la valeur de la fonction aux points d'intersection des asymptotes de l'hyperbole, il est possible de prédire la connexion exacte. Cependant, ces approches n'ont guère d'intérêt pratique dans le cas des données discrètes où les valeurs de la fonction ne sont connues qu'aux sommets des cellules.

D'autres auteurs [CP98, FB96] ont profité des propriétés des compositions simpliciales de l'espace pour proposer l'approche du *Marching Tetrahedra*. Ce sont des algorithmes d'extraction d'iso-surface basés sur le balayage de tous les tétraèdres de l'image car dans un tétraèdre, toute paire de sommets partage une arête commune, et il n'y a donc plus d'ambiguïtés concernant l'adjacence. Par suite, la question est de savoir comment partitionner l'espace en une série de tétraèdres, dont les sommets doivent, en général, être des points de \mathbb{Z}^n . Les critères retenus par la plupart des auteurs d'algorithmes de ce type pour comparer leur triangulation de l'espace sont le nombre de tétraèdres par cube unitaire de l'image, les proportions de ces tétraèdres et leur similitude. Une bonne triangulation, selon les critères les plus communément admis, doit contenir peu de tétraèdres par cube et les plus réguliers possibles. Pour obtenir des triangulations répondant à ces critères, les auteurs s'autorisent parfois à introduire des points intermédiaires, ou à alterner des triangulations différemment orientées de cubes unitaires.

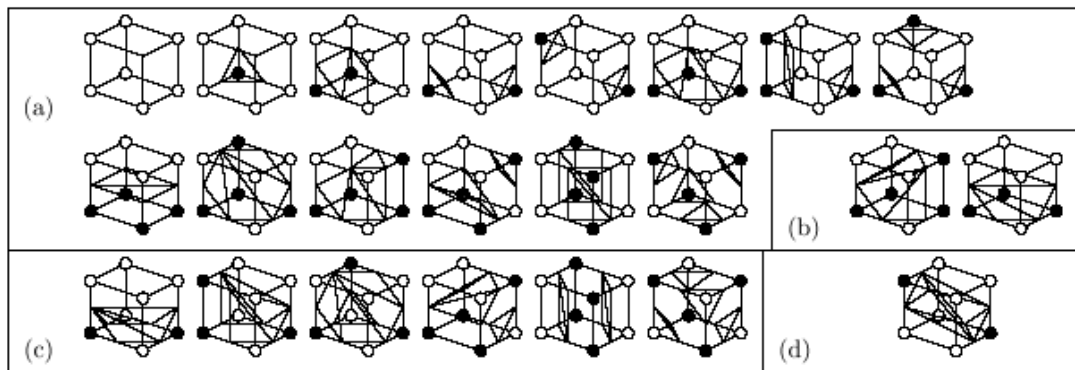


FIG. 4.8 – Configurations obtenues pour la table d'indirection du Marching Cubes en utilisant la théorie des analogues continus de frontières discrètes (source : [LM00]). (a) Table d'indirection utilisée dans le cas où la 6-adjacence est utilisée pour l'ensemble des points noirs. (b) Pour la 18-adjacence, ces configurations génèrent des polygones identiques à la 6-adjacence, mais présentent des subdivisions en triangles différents. (c) Configurations à modifier dans le cas où la 18-adjacence est utilisée pour l'ensemble des points noirs (auquel cas l'ensemble des points blancs est nécessairement 6-connexe). (d) Configuration supplémentaire à modifier dans le cas où la 26-adjacence est utilisée pour l'ensemble des points noirs.

À notre connaissance, Lachaud est le premier auteur qui lie la notion de topologie discrète à l'algorithme du Marching Cube. Dans [LM00], il propose un algorithme de type Marching Cube topologiquement correct en utilisant des analogues continus des surfaces discrètes en surfels. Pour ce faire, il considère les voxels de l'image comme des points à coordonnées dans \mathbb{Z}^n . Les points de support de la surface, situés sur les arêtes des cubes virtuels sont alors définis similairement aux surfaces discrètes (i.e. par le biais des paires de points adjacents). Ensuite, et c'est la grande différence avec le Marching Cubes, pour chaque composante connexe de l'objet dans le cube virtuel, un complexe polyédrique est défini représentant son extension continue. L'union des bords de ces complexes polyédriques compose l'analogue continu de la surface discrète. Plus récemment, X. Daragon [Dar05] s'appuie sur les travaux de Lachaud et propose un algorithme similaire en utilisant la théorie des *ordres frontières*. Dans les deux cas, il s'agit, grossièrement, d'une adaptation de la table des configurations du MC en fonction de la connexité choisie pour les objets (voir Fig.4.8). Lachaud a même prouvé que son algorithme permet d'obtenir des pseudo-variétés quelque soit la dimension de l'image, sous condition que les relations d'adjacence choisies pour l'objet et pour son complémentaire forment une paire de Jordan. Les travaux de Lachaud résolvent le problème posé dans le cadre de la topologie discrète : par le biais des surfaces en surfels d'Herman, il obtient une surface discrète vérifiant de bonnes propriétés topologiques et, par l'introduction des analogues continus, il fournit un plongement d'une telle surface dans \mathbb{R}^n vérifiant lui aussi de bonnes propriétés topologiques correspondant à celles de la surface discrète qu'il représente.

Simplification : Un défaut du Marching Cube est le fait que les maillages générés sont très denses et nécessitent une simplification. Pour un tour d'horizon des algorithmes de simplification, aussi connus comme algorithmes de décimation de maillages, le lecteur intéressé pourrait voir [CMS98, Lue01]. En effet, une configuration de la table du MC peut générer entre 1 et 5 triangles. En particulier, en imagerie médicale, on obtient des maillages très fins (de 1 000 à 350 000 faces par organe) qui nécessite souvent une simplification avant toute autre utilisation comme le plaquage de textures réalistes pour les besoins de la visualisation ou bien le calcul d'une déformation pour la simulation chirurgicale. Par ailleurs, la tendance est à la hausse avec les nouveaux appareils d'acquisition d'image médicale où les images ont une résolution accrue.

Marching Triangles : Une solution pour éviter les triangles de mauvaise qualité et pour réduire la taille des maillages a été proposée par les méthodes des *Marching Triangles*. Ces méthodes ont été introduites pour la reconstruction de surface implicite et procède par croissance du maillage à partir d'un élément de départ (triangle ou arête) selon le critère de Delaunay de la sphère vide. Il existe des *méthodes à pas fixe* qui produisent des maillages presque équilatéraux de bonnes qualité [HI97] et des *méthodes adaptatives* [AG01, KS01] qui adaptent le pas de croissance du maillage en fonction de la courbure et du gradient sous-jacent. Ces méthodes souffrent essentiellement de problèmes au niveau de la fermeture des maillages. En pratique, une étape de découverte des trous et de leur fermeture est généralement nécessaire si un maillage fermé est

attendu. Notons que cette approche pourrait être utilisée directement sur la frontière discrète des objets voxels, cependant nous ne connaissons pas de méthodes publiées sur ce sujet.

Lissage des bords : Considérons une image binaire 3D et un objet discret constitué des points discrets de valeur 1. Si l'iso-surface est extraite en utilisant un seuil de 0.5, alors il est facile de remarquer que les sommets de la surface du MC se trouvent exactement au milieu des arêtes de chaque cube virtuel, lorsqu'une extrémité de l'arête est dans l'objet et l'autre non.

Considérons maintenant que les points discrets sont interprétés par des voxels. Cette approche est connue aussi sous le nom d'*approche cuberille*. La figure 4.9 montre un cube virtuel (8 points de la grille 3D) et son interprétation cuberille (8 voxels centrés aux points de la grille). Il est facile de voir que si les points de l'objet discret sont interprétés par des voxels, les sommets de la surface triangulée du MC coïncident avec les centres des surfels de la surface en surfels de l'objet voxel (voir Fig.4.10). La figure 4.11 illustre la surface triangulée générée par l'algorithme du Marching Cubes pour la configuration 6 de la figure 4.8(a) où les points discrets sont considérés comme des voxels. Notons que les sommets de la surface triangulée étant aux milieux des surfels, la surface coupe à travers les voxels et, par conséquent, elle lisse le bord.

Remarquons, par ailleurs, qu'à chaque surfel de la surface de l'objet discret correspond exactement un sommet de la surface triangulée. En effet, ceci explique pourquoi le nombre de faces de la surface triangulée est très important et pourquoi elle nécessite une simplification pour augmenter le gain de stockage en mémoire par rapport au stockage de la surface en surfels de l'objet discret.

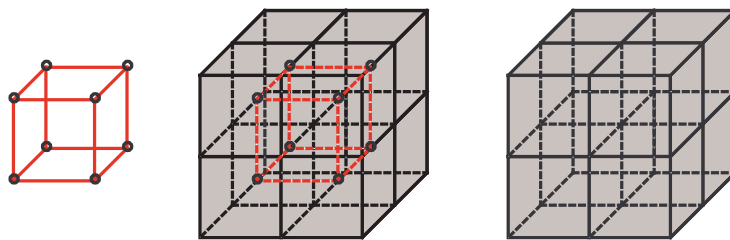


FIG. 4.9 – Un cube virtuel et son interprétation en voxels.

Le problème du lissage des bords est inhérent à l'algorithme du Marching Cube (voir Fig.4.12). Nous venons de voir que, par définition, l'algorithme ne peut pas préserver les arêtes vives ou les coins sur la surface de l'objet discret. Ce lissage s'avère très gênant dans beaucoup d'applications, et notamment dans le domaine médical où une précision aux bords est très souhaitable, voire requise.

Cet inconvénient est dû au fait que l'algorithme du Marching Cubes standard échantillonne la surface sur une grille uniforme qui, *a priori*, ne peut pas être alignée exactement aux éléments du bord de l'objet. Par conséquent, dans les endroits de forte cour-

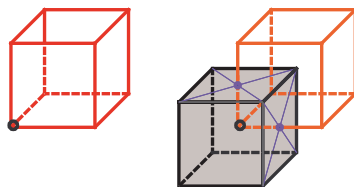


FIG. 4.10 – Les milieux des arêtes du cube virtuel coïncident avec les centres des surfels de la surface en surfels de l'objet discret.

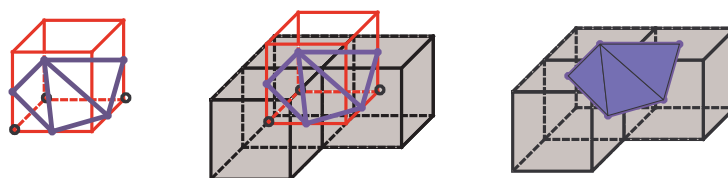


FIG. 4.11 – Exemple de surface triangulée obtenue sur la configuration 6 de la figure 4.8(a) où les points discrets sont remplacés par des voxels.

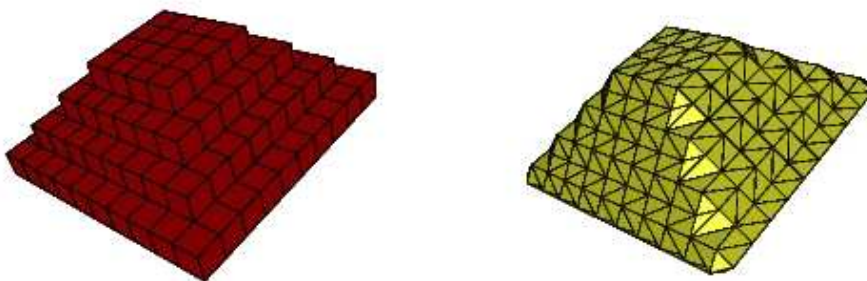


FIG. 4.12 – À gauche, un objet binaire 3D. À droite, la surface triangulée obtenue par l'algorithme du Marching Cubes. (source [CS04].)

bure, apparaissent des artefacts et l'erreur d'approximation de la surface sous-jacente augmente. Une solution à ce problème est de raffiner la grille pour diminuer l'erreur d'approximation. Cependant, même avec une grille excessivement fine, la normale de la surface extraite ne va jamais converger vers la normale de la surface continue sous-jacente sur les arêtes vives et les coins [KBSS01]. Une autre solution est d'adapter localement la grille en fonction de la courbure des éléments de la surface. Mais cette adaptation est difficile à gérer et implique la perte de certaines propriétés avantageuses du Marching Cubes classique comme la simplicité et l'efficacité.

Pour répondre à ce problème, Kobbelt et al. [KBSS01] proposent un nouvel algo-

rithme (*Extended Marching Cubes*) qui convertit un champ de distance continu en un modèle polygonal. L'algorithme est basé sur la notion de distance directionnelle en x, y et z (par opposition à la distance scalaire utilisée classiquement dans l'algorithme). L'Extended Marching Cubes détecte les cubes virtuels contenant des éléments de forte courbure (arêtes vives ou coins) et à l'aide de l'information locale de distance et du gradient, calcule un nouveau point d'échantillon et le rajoute dans le maillage initialement obtenu (voir Fig.4.13).

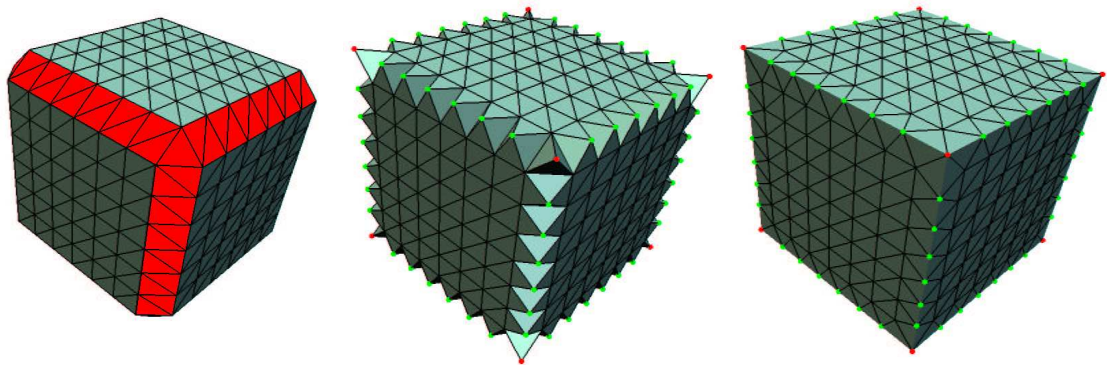


FIG. 4.13 – L'échantillonnage sensible à la courbure de la surface se fait en trois étapes. D'abord, l'algorithme détecte les cubes virtuels contenant des éléments de forte courbure (gauche). Ensuite, un nouveau point d'échantillonnage est ajouté dans le maillage : les points verts symbolisent les arêtes vives et les points rouges les coins (centre). Finalement, les arêtes autour des nouveaux points sont inversées (droite). Source : [KBSS01]

Les méthodes duales : Une autre solution possible pour résoudre les problèmes des artefacts sur la surface comme les arrondis des angles vifs ou l'aspect « marches d'escalier », typique pour les données binaires, consiste à utiliser une approche duale.

Cette approche a été proposée pour la première fois dans [Gib98], où les auteurs définissent les *Surface Nets élastiques* sur des données binaires segmentées. La construction du maillage commence par l'identification de tous les cubes virtuels (8 voxels adjacents : 4 voxels de 2 plans adjacents) qui contiennent une séparation de l'objet et du fond. Si au moins l'un des 8 voxels possède une valeur binaire différente de ces voisins, alors ce cube est considéré comme un *cube de surface*. Ensuite, le *surface net* est initialisé en plaçant un sommet au centre de tous les *cubes de surface* et en connectant les sommets qui appartiennent à des *surface cubes* adjacents. Chaque sommet peut avoir au maximum 6 voisins : devant, derrière, bas, haut, droite, gauche. La position de chaque sommet est ensuite relaxée (à l'intérieur du cube dont il est le centre) de façon à diminuer l'énergie calculée sur les arêtes (voir Fig.4.14). Ce déplacement des nœuds vise à projeter les sommets sur la surface sous-jacente et utilise généralement les directions du gradient, si cette information est disponible. Après la déformation élastique, le *surface net* est plus ou moins lisse en fonction du calcul d'énergie choisi et du nombre d'itérations effectuées. Il est important de noter que cette relaxation peut modifier la topologie de la surface

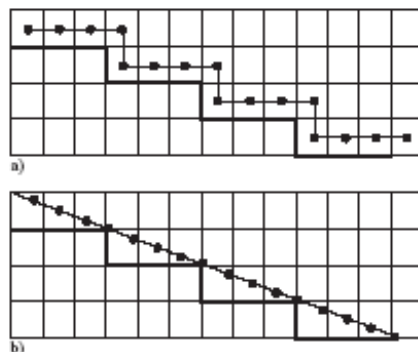


FIG. 4.14 – Artefacts sur la surface d'un objet discret. (a) Le *surface net* est initialisé avec des sommets situés au milieu de chaque *cube de surface*. (b) Relaxation élastique de la position de chaque sommet (le sommet reste à l'intérieur de son cube). Source : [Gib98]

initiale (voir Fig.4.15).

En pratique, cette construction duale revient à insérer un nœud pour chaque cube virtuel, c'est-à-dire pour chaque configuration du Marching Cubes. La figure 4.17 montre un *surface cube* où les voxels sont représentés par des points ainsi que le nœud du *surface net* (le point jaune au centre du cube). Notons que ce *surface cube* correspond à la configuration 6 de l'algorithme du Marching Cubes (voir. Fig.4.8(a)). Pour connecter les nœuds du *surface net* en faces, il faut détecter les arêtes du cube avec des extrémités différentes. Ce sont les arêtes vertes sur la figure 4.17. Chacune de ces arêtes étant incidente à exactement 4 *surfaces cubes*, les nœuds associés à ces cubes sont connectés pour former un quadrilatère. Les *surfaces nets* sont, par définition, des surfaces quadrilatères. Cependant, ils peuvent être triangulés efficacement en découpant les quadrilatères le long de leur plus petite diagonale.

Contrairement à ce que certains auteurs affirment [JLSW02], le *surface net* proposé par Gibson n'est pas le dual (« dans le sens standard ») de la surface générée par l'algorithme du Marching Cubes.

Rappelons que la dualité standard entre deux polyèdres P et P' implique l'existence de deux bijections de l'ensemble des sommets de l'un vers l'ensemble des faces de l'autre. Ainsi, le dual P' a autant d'arêtes que P et les nombres de sommets et de faces s'échangent. De plus, la dualité conserve la connexité et l'orientabilité de la surface.

En effet, le *surface net* dual a autant de faces que la surface du MC a de sommets, par construction. Rappelons que les sommets de la surface du MC se situent sur les arêtes des cubes virtuels et le *surface net* construit une face pour chacune de ces arêtes. Cependant, dans certaines configurations, la bijection entre les faces du MC et les sommets du *surface net* n'est pas assurée. En particulier, dans les configurations croisées du MC, le *surface net* ne préserve pas la topologie et la continuité de la surface.

À titre d'exemple, nous avons représenté sur la figure 4.18 la configuration 5 de l'algorithme du Marching Cubes (voir. Fig.4.8(a)). La surface générée par le MC est

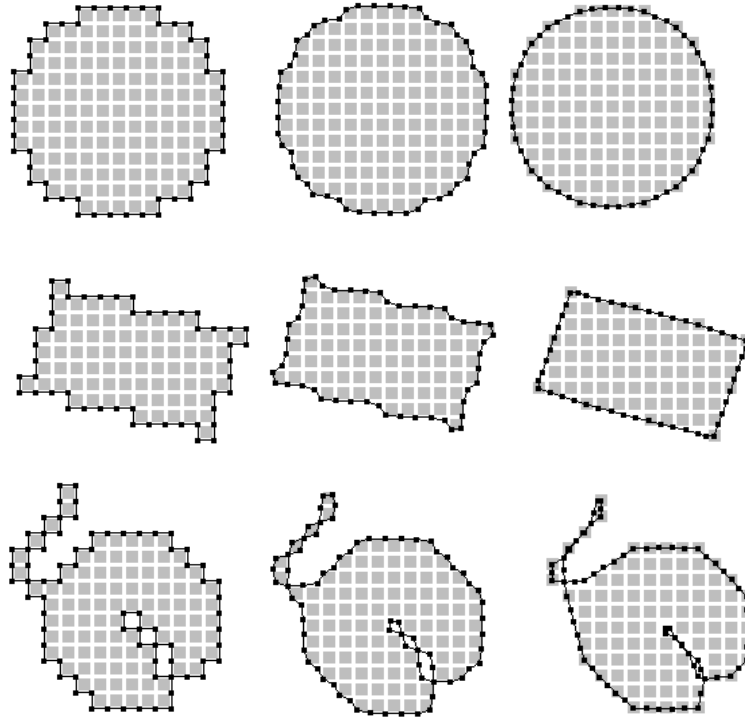


FIG. 4.15 – Exemples de *surface nets* obtenus à partir d'objets binaires 2D. Chaque ligne contient les *surface nets* superposés à l'objet initial pour des nombres de relaxation différents. La première ligne montre le *surface net* d'un cercle relaxé respectivement (de gauche à droite) 0, 1, et 10 fois. La deuxième ligne montre le cas d'un rectangle et les résultats après 0, 1 et 30 relaxations. Finalement, la troisième ligne donne l'exemple d'un objet plus complexe contenant des petits trous et des parties très fines. Son *surface net* a été relaxé 0,1, et 20 fois (de gauche à droite). Après les itérations les courbes ont un aspect plus lisse et les coins sont bien vifs. Source : [Gib98]

composée de deux morceaux de surface qui séparent les points de l'objet (en noir) lorsqu'ils sont considérés avec la 6-connexité. Notons que, dans cette configuration, le *surface net* dual présente un unique sommet singulier (où la surface est repliée sur elle-même). En effet, dans toutes les configurations où le Marching Cube génère plus d'un unique morceau de surface, nous n'avons pas une dualité au sens topologique standard entre le *surface net* et la surface du MC. Si le bord de l'objet discret présente ce type de configurations, le *surface net* dual n'est pas une 2-variété : il contient des arêtes et des sommets de singularité. C'est une quasi ou une pseudo 2-variété.

Il est important de noter ici que le *surface net*, avant les déplacements des nœuds, n'est rien d'autre que la surface en surfels de l'objet discret. Plus concrètement, c'est le 2-complexe cellulaire qui modélise la surface discrète : les nœuds, les arêtes et les faces du *surface net* correspondent, respectivement, aux pointels, aux lignels et aux surfels du complexe. Notons aussi que dans la littérature nous rencontrons le terme de *méthode cuberille* pour désigner les méthodes de reconstruction qui fournissent ce type de maillage [CHRU85, Kal92].

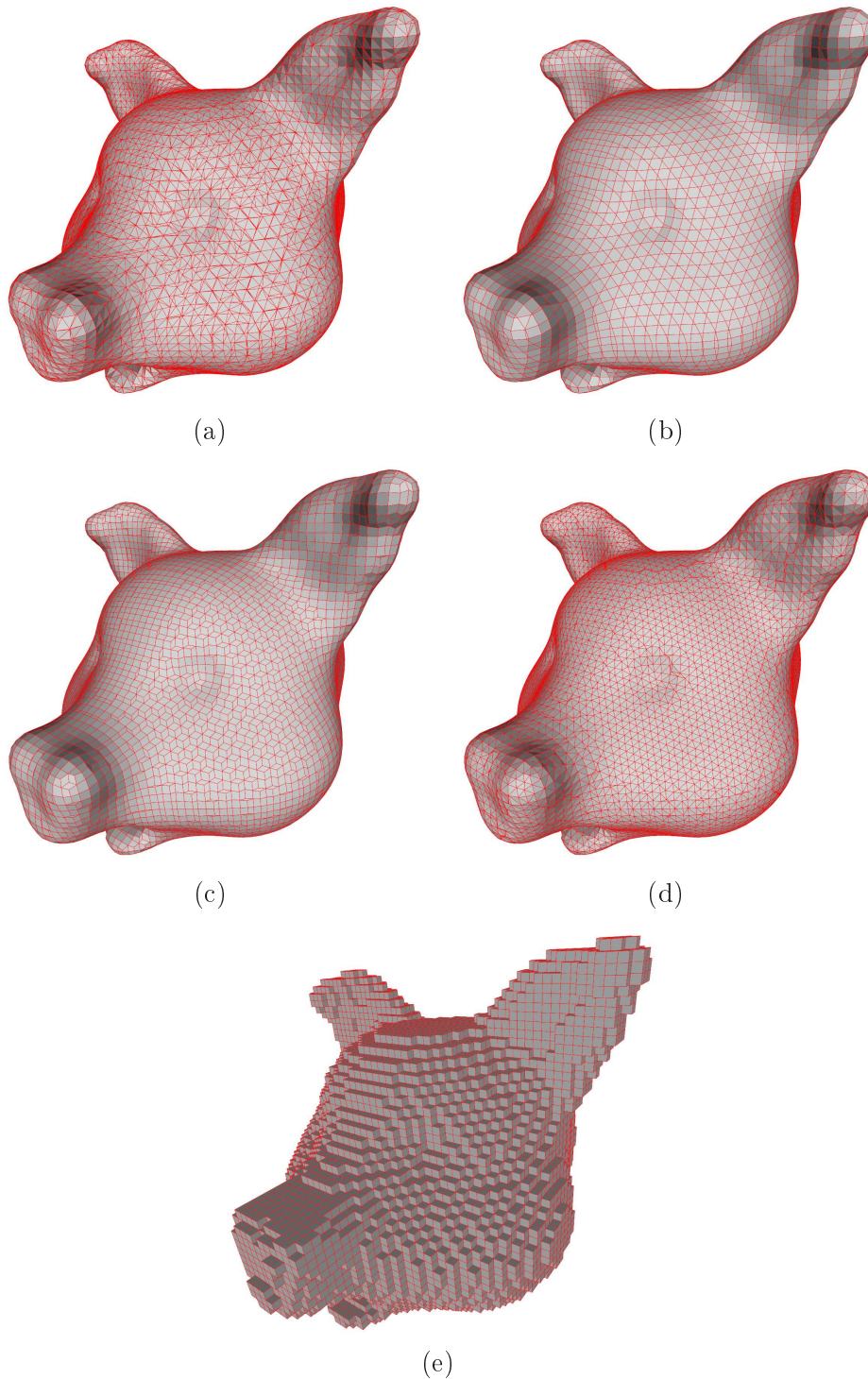


FIG. 4.16 – (a) La surface triangulée obtenue par le Marching Cubes. (b) La même surface qu'en (a), sauf que les polygones ne sont pas triangulés : c'est la surface à *carreaux de surface*. (c) Le *surface net* dual après déformation élastique. (d) Le *surface net* triangulé. (e) Le maillage selon l'*approche cuberille* : correspond au *surface net* initial et au 2-complexe cellulaire modélisant le bord discret.

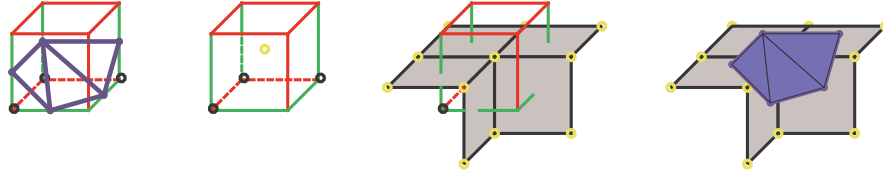


FIG. 4.17 – De gauche à droite : la configuration 6 de l’algorithme MC et le polygone généré ; le *surface cube* correspondant et le nœud du *surface net*, en jaune ; les faces du *surface net* ; dualité entre le polygone du MC et le *surface net*.

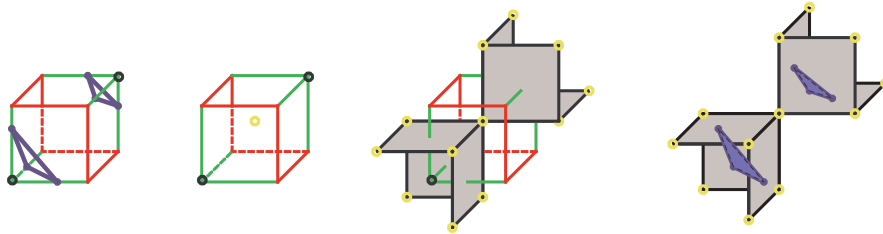


FIG. 4.18 – De gauche à droite : la configuration 5 de l’algorithme MC et les morceaux de surface générées ; le *surface cube* correspondant et le nœud du *surface net*, en jaune ; les faces du *surface net* ; pas de dualité entre la surface du MC et le *surface net*.

À notre connaissance, Nielson est le premier qui, en 2004, définit une vraie surface duale de la surface produite par le Marching Cubes, [Nie04]. Pour ce faire, il introduit la notion de *surface à carreaux* en éliminant les arêtes internes qui triangulent les polygones générés par le MC.

La figure 4.19 montre la table des 23 configurations du Marching Cubes sous forme de *carreaux de surface* pour un objet 6-connexe, proposée par Nielson. Cette table contient les 15 configurations classiques et leurs complémentaires et permet de retrouver toutes les 256 configurations entre les points de l’objet et les points du fond uniquement par les 24 rotations du cube, [Nie03].

La surface duale est quadrilatère comme les *surfaces nets*, elle est définie selon la table d’indirection représentée sur la figure 4.20. Par construction, cette surface possède les mêmes propriétés topologiques que la surface générée par l’algorithme du Marching Cubes pour un objet discret 6-connexe : c’est une 2-variété sans bords. Nous pouvons remarquer que les configurations croisées ne génèrent pas de sommets singuliers, contrairement aux *surfaces nets* : les différents carreaux de la surface du MC sont traduits par différents sommets dans le dual. Cependant, les objets 18- et 26-connexes ne sont pas traités dans ce travail. Nous reviendrons sur ce problème dans le chapitre 7, dans lequel nous montrerons comment construire les surfaces duales pour ces deux connexités.

Les méthodes duales ont bénéficié d’un intérêt important essentiellement puisqu’elles

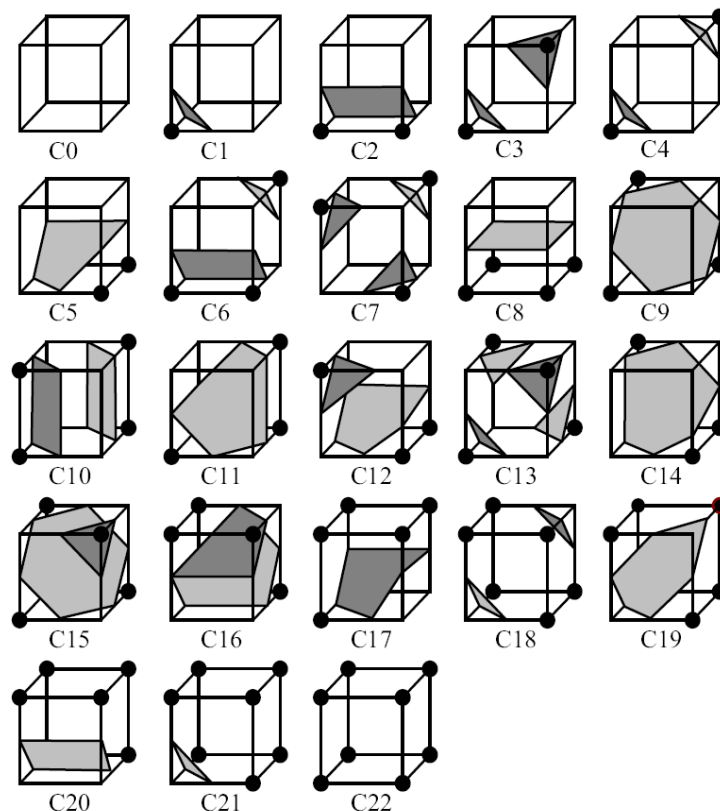


FIG. 4.19 – La surface générée par l’algorithme du Marching Cube sous forme de *carreaux de surface*. (source [Nie04]).

produisent des maillages de meilleur qualité que les maillages produits par le Marching Cubes. Grâce aux déplacements des nœuds, les maillages résultants sont, en particulier, beaucoup plus lisses. De plus, dans certains cas, les méthodes peuvent être adaptées pour fournir des maillages ne nécessitant pas simplification. Dans [JLSW02], les auteurs combinent les *Surface Nets* et l’*Extended Marching Cubes* pour proposer une méthode, basée sur un octree, qui permet de générer des maillages adaptatifs qui préservent les arêtes vives et les coins. De plus, ils étendent leur algorithme pour le cas des images multicolores. Cependant, les maillages résultants contiennent des triangles de très mauvaise qualité. Un autre algorithme de reconstruction duale d’une fonction implicite est proposé dans [SW04]. Cet algorithme (*Dual Marching Cubes*) est fondamentalement différent des autres car il utilise non seulement la grille cubique uniforme classique mais aussi une grille duale pour le processus d’extraction de la surface. Les modèles polygonaux résultants ne contiennent pas de trous, sont adaptés à la surface sous-jacente et reproduisent les endroits de forte courbure avec une erreur bornée (voir Fig.4.21).

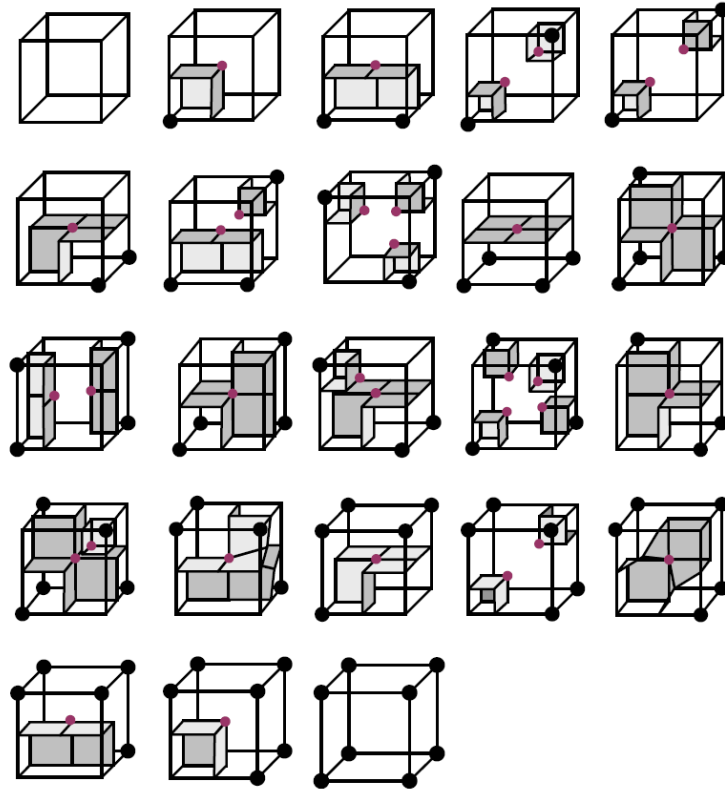


FIG. 4.20 – La surface duale de la surface générée par le Marching Cube, proposée par Nielson. (source [Nie04]).

Récapitulatif : La figure 4.16 propose un récapitulatif sur les maillages obtenus avec l'algorithme des Marching Cubes, les Surface Nets et les surfaces discrètes en surfels.

La surface triangulée calculée avec le MC à partir d'un objet discret est représentée sur la figure 4.16(a). Nous remarquerons que cette surface contient une multitude de triangles de mauvais aspect-ratio car les sommets des triangles sont contraints sur les arêtes du cube virtuel.

La figure 4.16(b) représente la même surface que précédemment, sauf que les polygones générés dans les cubes virtuels du MC ne sont pas triangulés. Cette surface correspond à la *surface à carreaux*, proposée par Nielson, où tous les sommets sont incidents à exactement quatre polygones non planaires.

Le dual de la *surface à carreaux* est montré sur la figure 4.16(c). C'est, en effet, une surface quadrilatère qui correspond au *surface net* de l'objet, obtenu après les déplacements des nœuds. Nous remarquerons que ce maillage respecte mieux le bord de l'objet que la surface du MC car ses sommets ne sont pas contraints sur les arêtes des cubes virtuels.

La figure 4.16(d) montre une triangulation du *surface net* où les quadrilatères sont

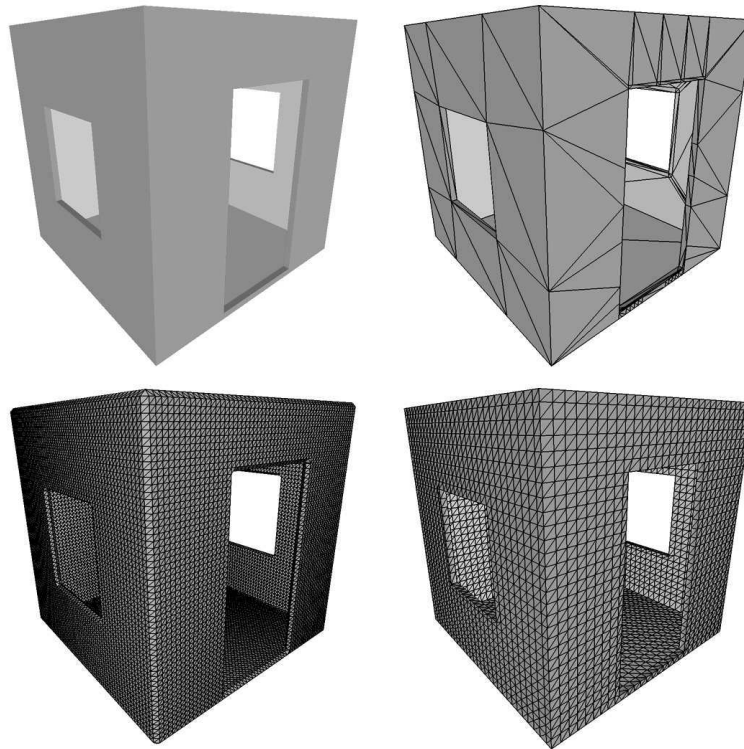


FIG. 4.21 – Exemple d'objet CSG (première ligne à gauche). Reconstruction avec le *Dual Marching Cubes* (première ligne à droite). Reconstruction avec le *Marching Cubes* classique (deuxième ligne à gauche). Reconstruction sous forme de *surface net* (deuxième ligne à droite). Source : [SW04]

découpés en triangles le long de leur plus petite diagonale.

Finalement, la figure 4.16(e) montre le maillage quadrilatère obtenu selon l'approche cuberille. Ce maillage correspond au *surface net* initial (avant la déformation élastique). C'est aussi le 2-complexe cellulaire modélisant le bord de l'objet voxel.

4.2.4 Reconstruction d'images multicolores

Le problème de la reconstruction de surface à partir d'une image multicolore a été adressé par plusieurs travaux. Rappelons qu'une image multilabel est, par exemple, une image médicale où les composantes connexes des différentes structures sont labellisées avec des valeurs différentes. Lorsque l'on s'intéresse à la reconstruction à partir de ce type d'image, nous souhaitons que les maillages résultants satisfassent les critères suivants :

- le maillage de chaque structure est une 2-variété ;
- les maillages de deux structures adjacentes doivent coïncider aux interfaces entre ces structures : ils ne doivent ni se recouper, ni se séparer, ni présenter d'autres artefacts comme des trous ou des T-jonctions.

Bloomenthal et Ferguson proposent dans [BF95] l'une des premières approches pour la génération de surfaces à partir de données multicolores. Cette approche est basée sur une représentation de plusieurs surfaces implicites avec la CSG. Les auteurs utilisent la décomposition de l'espace en tétraèdres et génèrent les triangulations algorithmiquement. Même si la décomposition en tétraèdres simplifie le problème de polygonisation, cette approche produit beaucoup de triangles dont une grande partie est de mauvaise qualité. De plus, les surfaces sont, par définition, des non-variétés car une arête peut être partagée par plus de deux triangles.

Dans [HSSZ97], Hege et al. proposent une approche différente pour la génération de surfaces non-variétés à partir de données multicolores. Dans ce travail, les auteurs utilisent des probabilités assignées à chaque voxel et subdivisent les cellules pour produire une multitude de triangles intermédiaires qui doivent être simplifiés. Dans cette approche, la table d'indirection du Marching Cubes est complétée et l'algorithme peut gérer au maximum trois labels différents dans un cube virtuel. Cette approche a été étendue dans [RBB05], où les auteurs proposent une solution pour gérer jusqu'à huit labels différents se rencontrant dans un cube.

Un autre algorithme pour reconstruire des surfaces à partir de données multicolores a été proposé dans [WS03]. Il s'agit, là aussi, d'une extension de la table des configurations du MC pour les cas où au maximum trois objets se rencontrent dans un cube virtuel. Dans ces cas, l'algorithme proposé assure que chaque objet est séparé de ses voisins par des patches triangulaires. Cependant, aucune garantie n'est donnée sur les propriétés topologiques des surfaces extraites. En particulier, les situations ambiguës où deux objets se rencontrent dans un cube virtuel et où leurs points sont diamétralement opposés sont résolues en fonction des connexités choisies. Bien que, cette approche soit classiquement utilisée par la plupart des algorithmes de type Marching Cubes pour lever les ambiguïtés, elle présente des limitations dans le cas d'une reconstruction à plusieurs objets. Pour décider quelle connexité utiliser pour les objets, dans [WS03], les auteurs proposent de se baser sur des labels attribués par l'utilisateur à chaque objet. Pour deux labels donnés, ils gardent la connexité pour le plus petit label.

Plus récemment, Bischoff et Kobbelt ont proposé une approche alternative pour la reconstruction des surfaces de plusieurs composantes connexes d'une image multilabel [BK06]. L'originalité de la méthode est, qu'à l'inverse des méthodes citées précédemment, leur algorithme supprime les ambiguïtés topologiques dans l'ensemble des voxels, avant d'extraire les surfaces. En effet, l'algorithme détecte d'abord toutes les *arêtes critiques* (lignels incidents à quatre surfels) et tous les *sommets critiques* (pointels incidents à plus d'une unique ombrelle) pour un label donné. Ensuite, la suppression de ces configurations pathologiques est faite via un sur-échantillonnage (au moins $5 \times 5 \times 5$) des voxels incidents aux points et aux arêtes critiques. Le maillage d'un objet est obtenu en triangulant les surfels de sa frontière discrète après le sur-échantillonnage. Cependant, la qualité de la première triangulation n'étant pas satisfaisante, la méthode requiert une étape de régularisation, raffinement et lissage avant de fournir le résultat final.

Une autre approche pour la reconstruction d'images multicolores a été proposée par Pons [PSB⁺07]. Cette méthode est basée sur la triangulation de Delaunay et résout le problème de la mauvaise qualité des maillages obtenus avec les autres méthodes de

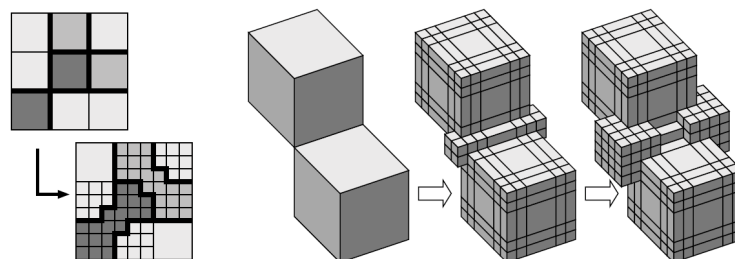


FIG. 4.22 – Suppression des éléments critiques par un sur-échantillonnage approprié et une re-labellisation. À gauche, exemple de sommets critiques sur une image à trois labels. À droite, une arête critique pour un seul label. En 2D, une subdivision 3×3 est suffisante, alors qu'en 3D il faut utiliser une subdivision d'au moins $5 \times 5 \times 5$. (Source [BK06])

reconstruction multilabel. Cette méthode est une extension des algorithmes [BO03] et [ORY05] pour le cas de la reconstruction multilabel. Les maillages fournis sont de très bonne qualité et sous les hypothèses classiques d'échantillonnage, les différents maillages sont corrects et consistants par construction.

4.2.5 Triangulation avec modèles déformables

Les modèles déformables, aussi connus dans la littérature comme les *snakes* et les *active contours/surfaces*, présentent une approche alternative de reconstruction. Ils sont très populaires dans le domaine du traitement et de l'analyse d'images. Pour une présentation complète des modèles déformables, le lecteur pourra se référer à l'ouvrage [STG98].

Les méthodes basées sur les modèles déformables réunissent généralement les opérations de segmentation et de reconstruction en un seul processus. Le modèle géométrique (par exemple, une triangulation) est d'abord initialisé au plus près de l'objet dans l'image. Ensuite le modèle se déforme pour épouser la surface de l'objet sous l'action de contraintes externes, issues de l'image, et internes, dérivées de sa structure géométrique [Del98, LM99, LT05]. La difficulté majeure dans ce type de méthodes reste la gestion des changements topologiques qui peuvent apparaître dans le maillage durant le processus de déformation. Les solutions consistent généralement à détecter les auto-intersections et à remailler ces régions selon un ensemble de règles. Récemment, une méthode alternative, basée sur les *modèles déformables de Delaunay*, a été proposée dans [PB07]. La méthode utilise la triangulation de Delaunay comme modèle de base. Le modèle est adapté itérativement en calculant la triangulation de Delaunay restreinte de l'objet déformé : ainsi, les changements topologiques sont détectés et pris en compte naturellement. De plus, la méthode permet la reconstruction simultanée de plusieurs objets dans une image médicale.

4.2.6 Méthodes de polyédrisation discrète

Le problème de la polyédrisation se définit comme le passage de la représentation d'un objet par un ensemble de points à une représentation par le bord : ensemble structuré de sommets, d'arêtes et de faces (un polyèdre au sens classique). Les méthodes s'attachant à ce problème sont basées sur une approche entièrement discrète (par opposition de l'approche euclidienne) et utilisent les propriétés de la géométrie discrète dont les avantages dans le domaine de l'imagerie tridimensionnelle ont été montrés dans de nombreux travaux. Ces méthodes rejoignent également assez souvent la modélisation géométrique à base topologique.

La grande majorité des travaux portant sur ce problème s'attachent à la notion de réversibilité de la reconstruction. C'est la possibilité de retrouver l'objet discret, dans son intégralité, par une discrétisation de la surface polyédrique. Notons que les méthodes de type *Marching Cubes* peuvent être assimilées à un lissage du bord discret de l'objet, ce sont donc des méthodes d'approximation et, avec aucune d'elles il n'est possible de recalculer exactement l'objet initial, sauf [LM00].

L'algorithme de polyédrisation proposé par Françon et Papier [FP99] s'appuie sur l'idée de reconnaître des morceaux de plan sur la surface de l'objet discret. Ils introduisent la notion de polyèdre discret : un polyèdre dont les sommets, arêtes et faces appartiennent à \mathbb{Z}^3 ; de plus les faces forment des disques topologiques (au sens des variétés combinatoires) et sont des morceaux de plans arithmétiques [Rév91]. La surface en surfels de l'objet discret est décomposée en morceaux de plan standard avec l'algorithme de Papier [Pap99]. Chaque face discrète, ainsi reconnue, est une variété combinatoire de dimension 2 avec bord et le bord des faces est le bord en pointels de la variété. La méthode est réversible car le polyèdre code exactement le bord discret de l'objet initial. Cependant, le passage des faces discrètes à des vraies faces polygonales (euclidiennes) n'est pas effectué dans ces travaux.

Plus récemment, une autre approche a été proposée dans [CS04]. Dans ce travail, Sivignon s'appuie sur la topologie discrète des surfaces pour reconnaître d'abord des plans discrets (Fig.4.23) qui sont ensuite utilisés pour simplifier la surface générée par l'algorithme du *Marching Cubes* sur des objets 6-connexes. Les surfaces polygonales ainsi calculées possèdent la propriété de réversibilité et sont prouvées être des variétés combinatoire de dimension 2 (fermées, orientables, sans auto intersections). Cependant, l'irrégularité des maillages obtenus diminue sensiblement leurs possibilités d'utilisation. Parmi les applications possibles, nous pouvons citer le codage des objets pour le stockage de données grâce à leur réversibilité. Mais une autre application comme la simulation d'un comportement bio-mécanique, par exemple, nous semble non recommandée avec des maillages aussi irréguliers. Force est de constater que les maillages des objets réguliers, présentant des faces planaires, sont plutôt acceptables, mais lorsque les objets sont plus courbes et lisses, on observe une multitude de plans discrets « cousus » par des « coutures » de plus en plus épaisses (Fig.4.24). Par conséquent, l'approche par reconnaissance de plans discrets nous paraît plus adaptée aux objets réguliers comme des pièces mécaniques qu'aux objets lisses et très courbes comme les organes et les vaisseaux du corps humains.

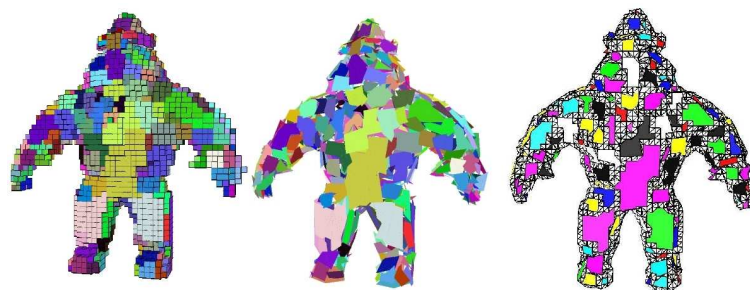


FIG. 4.23 – Résultats de la reconnaissance des plans discrets sur un objet 3D et le maillage obtenu.
Source : [Siv04]

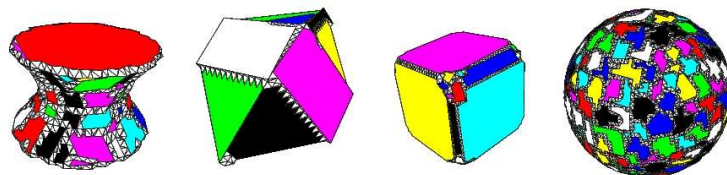


FIG. 4.24 – Maillages obtenus par simplification des résultats du MC à l'aide des plans discrets.
Source : [Siv04]

En 2000, Burguet et Malgouyres [BM00] ont proposé un algorithme d'approximation d'une surface discrète à partir d'un « diagramme de Voronoï topologique ». Ils présentent tout d'abord un algorithme de calcul du squelette d'une surface discrète (définie par le graphe d'adjacence des surfels) qu'ils utilisent par la suite sur une surface discrète dont certains surfels (appelé germes, par analogie avec les diagrammes de Voronoï) ont été supprimés. Le choix de ces germes se fait selon un critère de courbure maximale locale, et des régions sont ainsi délimitées sur la surface de l'objet. Une triangulation est alors effectuée à partir de ces faces, en considérant les surfels « intersections » entre plusieurs faces (ils ont plus de deux voisins sur le squelette) et les germes comme sommets de la surface triangulée. Ici, aucun critère de réversibilité n'est recherché, et c'est donc une approximation, plus qu'une polyédrisation qui est effectuée.

Récemment, Krahostrover a proposé une méthode discrète alternative dans [KL04]. Il s'agit d'une méthode basée sur la triangulation de Delaunay appliquée sur une image binaire. Le principe de base est de distribuer des nœuds sur la surface discrète de l'objet voxels (définie par le graphe d'adjacence des surfels) et d'obtenir la triangulation duale à partir du diagramme de Voronoï de ces nœuds.

Il est à noter que les deux méthodes ci-dessus sont très proches d'esprit de la méthode de Delaunay Discret que nous allons présenter dans ce manuscrit. La différence majeure réside dans la définition de la surface discrète. Les deux méthodes utilisent la surface discrète définie par le graphe d'adjacence des surfels, alors que nos méthodes opèrent sur la frontière définie comme un ensemble de voxels et le bord du complexe cellulaire. Par

ailleurs, ces méthodes ne donnent pas de garanties sur la validité des maillages obtenus. En particulier, comme nous allons le voir dans la suite, la définition d'un sommet de Voronoï comme une *composante connexe* de surfels, induit une borne inférieure pour le rayon de résolution du maillage. Ce qui veut dire que les méthodes ne sont pas utilisables pour la reconstruction de structures très fines qui requièrent des rayons de résolution très petits (proches de 0).

4.3 Reconstruction volumique : approches et algorithmes

La construction automatique d'un modèle polyédrique (le plus souvent subdivisé en tétraèdres) à partir des données d'un objet tridimensionnel est une tâche complexe. Schématiquement, il existe trois grandes familles de méthodes [Owe98] qui se distinguent historiquement par la façon d'aborder les difficultés. La première consiste à déterminer la position des nœuds : c'est l'aspect géométrique, la deuxième consiste à déterminer la connexion des nœuds : c'est l'aspect topologique.

La première approche repose sur la génération de la topologie du maillage et son adaptation à la géométrie du modèle. On y retrouve par exemple les méthodes de décomposition spatiale (aussi appelées les méthodes d'octree). La deuxième approche consiste à générer les nœuds avant de les connecter. Ces méthodes sont les méthodes dites de Delaunay-Voronoi. Leur principe est fondé sur l'insertion des nœuds un par un dans le maillage en respectant à chaque étape le critère de Delaunay. La dernière approche consiste à générer simultanément les nœuds et les mailles. Les méthodes frontales (encore appelés méthodes par avancée de front) entrent dans cette catégorie. Les mailles sont créées itérativement à partir d'un front, qui est initialisé à la frontière du domaine à mailler. Le processus s'arrête lorsque le front est vide.

4.3.1 L'approche par octree

Les techniques par octree ont été développées initialement par Mark Shephard dans les années 1980 [YS84, SGF⁺88, SG91].

Le principe de cette approche consiste à diviser le domaine (volume ou surface) à mailler en sous domaines de forme plus simple. La principale difficulté de cette méthode est de s'assurer de la cohérence du maillage aux interfaces entre les sous domaines : les maillages aux interfaces entre sous domaines doivent coïncider [HNF00].

En générale, les méthodes procèdent par division récursive de l'espace en un nombre fini de cellules cubiques, en ne gardant parmi elles que celles qui contiennent l'objet et ceci jusqu'à la résolution voulue. Ainsi deux types de cellules sont créées : des cellules régulières (dans le volume) et des cellules irrégulières (coupées par la surface de l'objet). Les éléments du maillage (hexaèdres) sont créés à partir des cellules structurées en un arbre hiérarchique tridimensionnel communément appelé octree. Cette structure arborescente permet de définir une subdivision adaptative de l'espace, c'est-à-dire une subdivision plus ou moins fine selon la zone dans laquelle on se trouve pour obtenir un maillage raffiné des zones comportant des détails et un maillage plus grossier des zones planes.

Les techniques par octree n'utilisent pas un maillage surfacique prédéfini contrairement aux deux autres approches de reconstruction volumique. Les facettes surfaciques sont créées lorsque la structure de l'octree intersecte le bord de l'objet. Le maillage résultant peut changer si l'orientation des cellules dans l'octree change. Par ailleurs, pour connecter correctement les faces des cellules de niveau de subdivision différent, le niveau de subdivision entre deux cellules adjacentes est souvent limité à deux. Par conséquent, la qualité du maillage est souvent améliorée par des opérations de post-

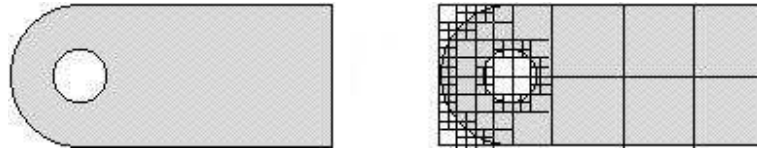


FIG. 4.25 – Exemple d'une décomposition en quadtree dans le plan ([Owe98]).

traitement comme le « cleanup » ou le lissage.

L'algorithme est basé sur les étapes suivantes :

1. Déterminer un octree adapté à la surface (par propagation d'une cellule de taille variable le long de la surface).
2. Échantillonner les sommets du maillage (les intersections des arêtes de l'octree avec la surface).
3. Calculer des arêtes principales du maillage.
4. Créer des polyèdres s'appuyant sur ces arêtes et construire les tétraèdres.

Dans cet algorithme, la procédure critique en terme de vitesse d'exécution est l'évaluation des intersections entre la surface de l'objet et les cellules cubiques des sous domaines. Le découpage des parties pleines du volume est résolu aisément mais les intersections avec la surface frontière conduisent à des nombreux cas particuliers. Ainsi, les éléments de moins bonne qualité sont créés près des frontières des objets, là où une plus grande précision est souvent souhaitée. Par ailleurs, on observe des problèmes lorsque plusieurs surfaces sont accolées ou lorsque celles-ci sont trop proches ce qui peut aboutir à un raffinement de maillage trop fin. Cette technique n'est donc pas optimale pour construire des maillages propres au niveau des interfaces. Néanmoins, la structure hiérarchique de l'octree est souvent utilisée pour guider les algorithmes par avancée de front et pour définir la taille des éléments du maillage générés [CNWC⁺01], ou pour définir la distribution initiale des nœuds [Ras98].

4.3.2 L'approche frontale

Le principe de l'approche frontale est de mailler le domaine par itérations successives en faisant propager vers l'intérieur un front initialisé sur la frontière du domaine, jusqu'à son recouvrement complet. Dans le plan, le front désigne un ensemble de segments, alors que dans l'espace, il est composé de faces triangulaires. En 3D, par exemple, pour chaque face triangulaire du front, les algorithmes calculent la position idéale du quatrième nœud pour former le meilleur tétraèdre en prenant en compte la forme de celui-ci ou une fonction de taille prédéfinie. Ensuite, ils recherchent le nœud du front le plus proche du nœud idéal pour construire la nouvelle maille (Fig. 4.26). Le problème majeur de cette approche survient lors de la rencontre du front avec lui-même ce qui peut créer des configurations bloquantes pour tout le processus. Dans l'espace, la convergence de l'algorithme itératif se révèle être la principale difficulté.

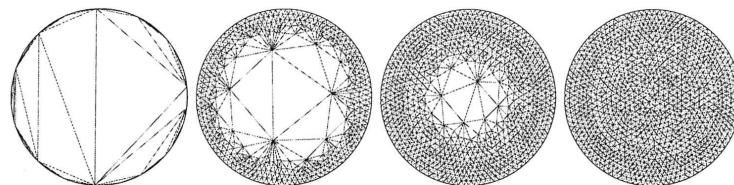


FIG. 4.26 – Exemple 2D de la méthode frontale. Quatre maillages différents d'un cercle. Le premier maillage est initialisé avec très peu d'arêtes du bord. Les trois autres maillages sont initialisés avec le même front mais diffèrent par la taille maximale autorisée d'un triangle.([FG99])

Dans le détail, l'algorithme peut se décrire simplement. Le front est initialisé sur la frontière de l'objet. Par la suite, le front désigne la frontière entre la zone maillée et la zone non maillée. L'algorithme fait appel aux étapes suivantes :

- Tant que le front n'est pas vide :
 1. Trier les éléments du front et choisir l'élément candidat.
 2. Calculer la position théorique du nœud idéal.
 3. Rechercher des nœuds proches de ce nœud idéal.
 4. Trier ces nœuds.
 5. Créer un élément avec le premier nœud qui satisfait aux tests de validité.
 6. Mettre à jour le front.

Dans l'espace, à notre connaissance, les premières références et solutions à ce problème sont apportées par Löhner et Parikh [LP88, Löh88] notamment au niveau de la détection des intersections et des structures de données qui permettent un adressage rapide d'objet dans l'espace.

Le principe même de l'approche fait qu'il n'existe pas une unique méthode frontale mais de nombreuses façons d'appréhender le problème. [Ras98, RO00, GM98, GM00, SLS00, YS03]. Les algorithmes diffèrent par la manière de trier les éléments du front (par exemple en fonction de la taille des éléments), mais aussi par les règles appliquées pour le calcul de la position du nœud idéal (selon que l'on cherche à obtenir un bon maillage régulier ou selon que l'on cherche une convergence certaine). Mais l'étape cruciale pour la convergence de l'algorithme est la phase de création d'un nouvel élément du maillage à partir d'un élément du front. Cette construction est toujours possible dans le plan. En revanche, dans l'espace, le respect des faces et les intersections rendent cette opération souvent impossible. L'algorithme cherche localement un nœud pour former un tétraèdre valide avec une face. Les faces du tétraèdre créé ne doivent pas couper d'autres faces existantes. Or, dans l'espace, il existe des polyèdres qui ne peuvent pas être découpés en tétraèdres sans l'ajout d'un nouveau point à l'intérieur[Len11]. L'exemple de la figure 4.27 illustre l'un des principaux points de blocage de la méthode frontale. L'objet à mailler est un prisme non tétraédrisable, aussi appelé polyèdre de Schönhardt [BE95].

Considérons le cas où f désigne la face courante du front. Pour former un tétraèdre avec cette face l'algorithme ne peut pas choisir le nœud 5 car le tétraèdre créé est aplati.

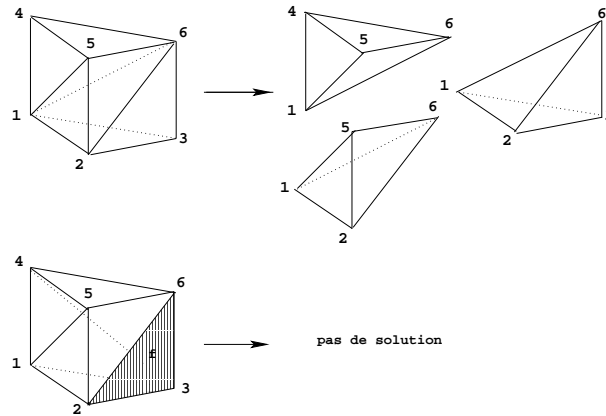


FIG. 4.27 – Le polyèdre de Schönhardt. Le polyèdre ne peut pas être décomposé en tétraèdres sans l'ajout d'un nouveau point.

Cependant, les nœuds 1 et 4 ne peuvent pas être choisis car les tétraèdres formés avec eux coupent des arêtes existantes. Ce polyèdre ne peut donc pas être tétraédrisé sans l'insertion d'un nouveau nœud à l'intérieur, aussi appelé point de Steiner.

Cette configuration est fréquemment rencontrée au cours du processus de maillage. Si le polyèdre à mailler n'est pas étoilé par rapport au nœud, un nouveau point doit être inséré. Mais si la coquille à mailler est aplatie, la génération d'un tel point donne naissance à des éléments de très mauvaise qualité. Une solution consiste à détruire les éléments qui empêchent la poursuite du processus de reconstruction [Löh92] ou encore à détruire les éléments qui ont causé le problème. Mais si au cours du processus de maillage, l'algorithme est contraint de générer un nouveau nœud pour débloquer une situation analogue à celle du prisme de Schönhardt de nouvelles faces sont créées et des nouveaux cas de blocage peuvent apparaître. Ainsi, les phénomènes de réduction de poches et la génération intempestive de points peuvent aboutir à la non convergence de l'algorithme.

4.3.3 L'approche de type Delaunay

Comme nous avons vu précédemment, la triangulation de Delaunay est un outil puissant de génération de maillages. La généralité de l'approche de Delaunay explique le fait qu'elle est également utilisée pour la construction de modèles polyédriques (composés de tétraèdres). Cependant, la très attrayante propriété de maximisation de l'angle n'est pas préservée dans l'espace [BE95] car la théorie assure uniquement la connexion des plus proches voisins dans \mathbb{R}^3 (et en dimension générale). Par conséquent, au problème du non respect du bord (présent aussi en dimension 3) s'ajoute le problème des éléments de mauvaise qualité, appelés des *slivers*, i.e. des tétraèdres avec un bon *aspect ratio* mais avec un volume négligeable (les quatre sommets du tétraèdre sont presque coplanaires). Les algorithmes doivent détecter et supprimer ces éléments connus comme indésirables pour la simulation [Li00].

Rappelons qu'il existe des méthodes de récupération du bord en 2D mais, en 3D, ces méthodes restent encore sous actives investigations [LB00, EG02, BO03, DW04].

Par ailleurs, les méthodes de Delaunay 3D rencontrent aussi la difficulté induite par l'existence des polyèdres de Schönhardt dans l'espace. Les solutions apportées à ce problème restent imparfaites. Une approche consiste à utiliser des heuristiques pour effectuer une série d'inversions d'arêtes et de faces, et à ajouter occasionnellement un point de Steiner [FG99]. Mais, à ce jour, il n'existe pas de méthode dont l'efficacité et la convergence soient prouvées dans tous les cas [CDRR04].

Les méthodes de type Delaunay reposent sur une base mathématique démontrable. Néanmoins, dès lors que l'on souhaite obtenir une triangulation qui respecte la frontière, force est de constater qu'il faut quitter cette théorie. Avec du recul, on s'aperçoit d'ailleurs que le problème de respect de frontière inhérent aux méthodes de type Delaunay en dimension 3 ressemble fortement aux problèmes de convergence rencontrés par les méthodes frontales.

Chapitre 5

Vers une nouvelle approche de reconstruction : Delaunay Discret

5.1 Bilan de l'état de l'art

Les approches de reconstruction et de modélisation, décrites dans le chapitre précédent, montrent qu'actuellement nous connaissons plusieurs concepts et outils permettant la construction de maillages surfaciques ou volumiques à partir d'une large variété de données. Cependant, toutes ces méthodes présentent aussi bien des avantages spécifiques que des défauts. En effet, l'état de l'art sur les méthodes de reconstruction existantes souligne la difficulté inhérente du domaine : trouver le compromis idéal entre efficacité, robustesse, complexité et rapidité des algorithmes. Comme il a été montré à plusieurs reprises dans le chapitre précédent, la qualité des résultats et la robustesse des méthodes de reconstruction dépendent essentiellement des concepts employés, de la manière de les combiner, mais aussi de celle de les traduire en outils informatiques.

Nous avons vu que, selon les applications visées, le processus de reconstruction doit être gouverné, de manière à tenir compte de prérequis spécifiques. Par exemple, une triangulation obtenue dans le cadre d'une application de visualisation graphique n'est généralement pas adaptée aux problèmes de simulation numérique de phénomènes physiques basés sur des équations aux dérivées partielles dont les solutions sont approchées par des méthodes d'éléments finis. Ainsi, les méthodes posent des hypothèses plus ou moins fortes sur le type de données pour lequel elles sont adaptées et fournissent des résultats dont les propriétés géométriques et topologiques dépendent fortement des applications visées.

En particulier, les méthodes basées sur *le concept de Delaunay* sont très bien adaptées pour la reconstruction d'objets lisses à partir d'un nuage de points. Les résultats sont fournis sous des hypothèses fortes d'échantillonnage mais les maillages possèdent des propriétés géométriques, ainsi que des garanties topologiques, qui les rendent incontournables pour les applications de simulation, notamment celles utilisant des calculs par éléments finis. Cependant, la traduction des résultats théoriques en outils et algorithmes informatiques rencontre certains problèmes pratiques. Notamment, pour des

données réelles, la condition sur la position générale des points n'est pas toujours vérifiée et dans ce cas il faut d'abord « perturber » les positions. De plus, bien souvent, la densité de l'échantillonnage n'est pas suffisante aux endroits de forte courbure et il faut, si c'est possible, rééchantillonner la surface pour garantir une reconstruction consistante. Par ailleurs, les méthodes rencontrent des problèmes liés à la convergence des algorithmes qui sont essentiellement dépendants des aspects techniques de l'implémentation choisie.

Les méthodes de reconstruction à partir d'un *ensemble de contours* sont particulièrement bien adaptées pour des données discrètes comme les images scanner segmentées mais elles rencontrent des problèmes théoriques et pratiques de branchements qui, actuellement n'ont pas trouvé une solution optimale.

Les méthodes dérivées de l'algorithme du *Marching Cubes* sont très populaires dans de nombreux domaines d'application. Comme nous avons vu dans le chapitre précédent, les différentes améliorations de l'algorithme originel présentent une approche efficace, rapide et robuste pour la construction de triangulations. Ces triangulations sont de plus des 2-variétés fermées et orientables sous conditions que les configurations ambiguës soient traitées convenablement, ce qui revient à choisir la « bonne » table d'indirection selon la connexité choisie dans les images discrètes. Les algorithmes de cette catégorie sont adaptés à la reconstruction surfacique aussi bien des surfaces implicites plongées dans une grille cubique que pour les objets discrets contenus dans les images discrètes. Cependant, ces méthodes présentent aussi certaines faiblesses. D'abord, comme il a été détaillé dans le chapitre précédent, les algorithmes basés sur ce concept lissent les bords des objets et les maillages contiennent beaucoup de triangles de mauvaise qualité. Deuxièmement, les maillages produits contiennent, en général, un grand nombre de triangles et nécessitent souvent une simplification (ou décimation) qui réduit ce nombre, tout en s'attachant à préserver la qualité de l'approximation géométrique. Enfin, de par leur nature, la majorité des algorithmes restent des routines binaires, et interdisent la reconstruction simultanée de plusieurs objets.

Les *méthodes duales* ont été proposées récemment pour palier de problème du lissage des bords. Cette approche permet une meilleure préservation des coins et des arêtes vives d'objets manufacturés, par exemple, car les sommets du maillage peuvent être projetés sur la surface réelle. De plus, cette approche permet de diminuer le bruit, les irrégularités et l'aspect de marches d'escalier dont souffrent les triangulations obtenues avec les *Marching Cubes*. Par ailleurs, comme nous avons vu dans le chapitre précédent, dans une de ses versions, l'approche duale permet même la génération de maillages adaptatifs grâce aux notions de grille duale et d'octree. Néanmoins, ces algorithmes semblent s'attacher plutôt à l'efficacité et à la qualité visuelle des maillages (dans la majorité des cas, ils ont été développés pour des moteurs graphiques de jeu vidéo qui nécessitent le remaillage de la scène en temps réel) qu'à la cohérence topologique des modèles obtenus. Ainsi, les algorithmes de notre connaissance donnent peu, voire aucune, garantie sur les propriétés topologiques des modèles.

Par ailleurs, l'état de l'art met en évidence le fait qu'il existe peu de travaux qui se penchent sur la problématique des *images multicolours* et la reconstruction simultanée de plusieurs objets concurrents. Cependant, comme nous avons souligné à plusieurs reprises, la prise en compte efficace des relations topologiques d'adjacence, inclusion

et intersection entre les objets semble indispensable aussi bien pour la cohérence géométrique générale de la scène mais aussi pour le réalisme des simulations, notamment médicales. Quelques méthodes ont été proposées récemment pour combler ce manque. Néanmoins, dans la majorité des cas, il s'agit d'une extension de la table de l'algorithme du Marching Cubes et les algorithmes permettent la reconstruction d'un nombre limité d'objets. Ces méthodes assurent une séparation consistante des objets qui se rencontrent dans un cube virtuel mais ne garantissent pas forcément que les différentes surfaces sont des 2-variétés fermées. De plus, les triangulations obtenues nécessitent une étape de simplification qui doit assurer la préservation des interfaces entre les objets.

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que *l'approche discrète* de polyédrisation est particulièrement bien adaptée aux ensembles de voxels. La plupart des travaux adopte une approche topologique et propose des méthodes basées sur la reconnaissance de plans discrets et leur traduction analytique. Par conséquent, les modèles polyédriques résultants possèdent des garanties topologiques et, dans certains cas, présentent même la propriété de réversibilité. Néanmoins, la cohérence topologique se fait au détriment des propriétés géométriques des modèles. Comme il a été souligné, la forme géométrique des représentations polyédriques les rend difficilement compatibles avec la plupart des applications graphiques (placage de textures, déformation).

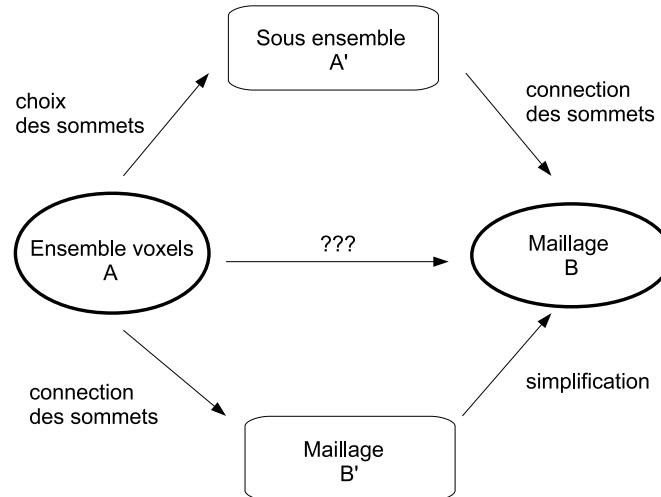


FIG. 5.1 – Approches de reconstruction.

Par ailleurs, le tour d'horizon des approches existantes de *reconstruction volumique* montre que la majorité des méthodes requiert un maillage surfacique de l'objet afin de garantir le respect de son bord. En particulier, les méthodes frontales s'appuient, par

définition, sur les triangles de la surface pour recouvrir le volume avec des tétraèdres. De même, les méthodes basées sur le concept de Delaunay nécessitent des indications provenant du maillage surfacique pour guider le processus de suppression des tétraèdres de l'enveloppe convexe du nuage de points. Par conséquent, la création et la robustesse de ces méthodes sont conditionnées par la qualité des maillages surfaciques et de la façon dont ils influencent la reconstruction volumique.

En résumé, l'état de l'art montre que la majorité des travaux concerne la reconstruction d'un unique objet (image binaire) et que peu de travaux se sont penchés sur les problèmes spécifiques des images multicolores. Cependant, cet état de l'art nous a permis de dégager deux grandes stratégies de reconstruction (voir Fig.5.1). La première stratégie consiste à travailler au plus près de l'image, en la considérant au niveau de sa structure élémentaire, c'est-à-dire comme un ensemble d'éléments discrets pavant l'espace et organisés selon une relation d'adjacence suivant une grille rectangulaire. Ces méthodes considèrent tous les points de données et construisent des maillages très denses. Les approximations géométriques sont généralement très précises mais, en pratique, nécessitent une étape de simplification pour réduire leurs tailles avant toute utilisation. À l'inverse, la seconde stratégie consiste à ne considérer qu'un sous-ensemble des données et de réduire la complexité géométrique dès le début de la reconstruction. Cette approche permet d'éviter l'étape de simplification et d'obtenir directement des maillages de taille contrôlée. Notons qu'actuellement, nous ne connaissons pas de méthode permettant la reconstruction d'un ensemble de voxels de façon qu'on pourrait qualifier de « plus directe ».

5.2 Positionnement du problème

Dans le cadre de ce travail de thèse, nous nous intéressons à la reconstruction et la modélisation d'objets discrets représentés dans des images multicolores 3D. Rappelons que ces images sont très fréquentes en imagerie médicale et sont obtenues après la segmentation de l'image scanner ou IRM du patient. L'image multicolore représente chacune des structures segmentées avec une valeur spécifique. Par conséquent, l'ensemble des voxels appartenant à un organe donné constitue déjà un modèle discret de celui-ci. Comme nous avons vu précédemment, pour certaines applications c'est un modèle suffisant, mais pour d'autres il est préférable (et même nécessaire) de transformer ce modèle discret en un modèle polyédrique de la surface de chaque structure.

Ainsi, plus concrètement, notre objectif premier était d'obtenir une modélisation topologiquement cohérente de l'ensemble des composantes anatomiques ou pathologiques d'une image médicale segmentée, résolvant ainsi les problèmes d'intersection entre les maillages.

Partant de cet objectif initial, nos travaux se sont naturellement orientés vers la recherche d'une approche de reconstruction alternative, remplissant les critères suivants :

1. Être adaptée aux images multicolores ;
2. Permettre la gestion efficace des interfaces de contact entre les objets, et de ce fait, autoriser la reconstruction simultanée de plusieurs structures ;

3. Offrir la possibilité d'adapter la taille des éléments du maillage, évitant ainsi l'étape de simplification (très fréquent dans le domaine médical où les images contiennent en moyenne 35 000 000 voxels) et permettant le contrôle de la géométrie ;
4. Au final, permettre la construction d'un modèle topologique global contenant les relations d'inclusion, intersection et adjacence entre les différentes structures contenues dans l'image.

Par ailleurs, nous souhaitons intégrer dans cette approche de reconstruction des connaissances spécifiques provenant du domaine d'application. En effet, nous partons du principe que les structures anatomiques et pathologiques, représentées dans une image médicale segmentée, doivent être des polyèdres (ces polyèdres correspondent aux organes et aux structures tumorales). Plus concrètement, pour une image discrète résultante d'une IRM, on peut considérer que chacun des points de cette image correspond à une boule élémentaire (un petit ouvert au sens topologique) de la zone de l'espace réel couverte par l'IRM. Par conséquent, l'objet que l'on va extraire correspondra à un sous ensemble de ses boules élémentaires. Ce qui revient à dire que l'on peut ramener tout objet extrait d'une image 3D à la représentation discrète d'une variété topologique à bord. Or le bord d'une variété topologique à bord de dimension 3 est une variété topologique de dimension 2. Ainsi, nous souhaitons proposer une nouvelle approche de reconstruction qui fournit un modèle polygonal, garanti 2-variété, de la surface des objets discrets.

Dans le cadre de la reconstruction, qui nous intéresse ici, les considérations topologiques sont indispensables. Rappelons que l'un de nos objectifs est de reconstruire les frontières des objets discrets sous forme de modèles polygonaux. Les maillages obtenus sont destinés à être utilisés comme unique représentation du bord d'un objet après la reconstruction. L'une des post-conditions que nous imposons sur l'algorithme de reconstruction est que la frontière obtenue pour tout objet soit une surface.

À la question « pourquoi vouloir que la frontière de tout objet soit une surface ? », il est possible de répondre de différentes façons. D'un point de vue « pragmatique », pour réaliser un rendu réaliste, par exemple, ou bien pour effectuer certains calculs, il est souhaitable, voire indispensable, de disposer d'une surface de bonne qualité, sans trous ou autres anomalies. En particulier, la présence de trous pourrait fausser irrémédiablement les calculs de volume [Coi99]. De plus, de nombreux algorithmes de simulation, de simplification et de lissage nécessitent de disposer, à la base, de *complexes simpliciaux* qui soient au moins des *pseudo-variétés*. D'un autre point de vue, que je qualifierais de « causal », il est préférable que les frontières des objets discrets reconstruits soient des surfaces car les objets réels auxquels on les assimile ont pour bordure une surface ou, plus exactement, une variété. Cette affirmation est d'autant plus vraie dans le domaine médical où l'on est amené à reconstruire les composantes de l'anatomie humaine.

5.3 Idée

Pour atteindre les objectifs énoncés précédemment, nous avons choisi d'explorer une nouvelle approche de reconstruction qui combine les résultats de la topologie discrète avec le concept de Delaunay Discret.

Nous adoptons la deuxième des approches de reconstruction, c'est-à-dire la stratégie par sélection préalable des sommets du maillage. En effet, cette stratégie offre plusieurs avantages et nous semble la mieux adaptée pour notre problématique :

- Les images médicales étant très volumineuses (quelques dizaines de millions de voxels organisés sur une grille rectangulaire [512 x 512 x 1024]), le choix des sommets permet d'éviter l'étape de la simplification (décimation) du maillage car la complexité du problème est réduite dès le début de la reconstruction.
- Une stratégie par sélection des sommets offre la possibilité de contrôler la régularité des maillages obtenus, c'est-à-dire, selon la distribution des sommets les modèles seront plus ou moins uniformes ou adaptatifs.
- Cette stratégie offre potentiellement la possibilité de gérer facilement les interfaces entre plusieurs objets dans le cas d'une image multicolore.

Puisque nous avons choisi une stratégie par sélection des sommets, la meilleure alternative pour obtenir un maillage, c'est-à-dire connecter ces sommets, nous semble être le concept de Delaunay. Nos justifications résident dans les faits suivants :

- C'est une approche globale qui possède des bases mathématiques solides et offre des garanties topologiques sur les maillages générés.
- Les maillages obtenus sont généralement de bonne qualité.
- De par sa nature, l'approche permet l'adaptation de la taille des éléments du maillage.
- Les méthodes basées sur le concept de Delaunay se prêtent à une généralisation 3D.

Partant de ces considérations, nous nous sommes penchés sur la question de la *transposition du concept de Delaunay dans le monde discret des images 3D*. En effet, nous avons cherché à élaborer une approche de reconstruction, *purement discrète*, qui tente d'exploiter les avantages connus du concept de Delaunay, tout en contournant ses inconvénients. En particulier, nous souhaitons utiliser la notion de frontière discrète pour résoudre le problème du non respect du bord. Par ailleurs, nous souhaitons contourner les erreurs d'arrondi dues aux calculs en virgule flottante en proposant une méthode basée sur les résultats de la topologie et de la géométrie discrète.

L'idée principale, pour un objet discret, consiste à sélectionner un sous ensemble de points sur sa frontière qui seront les sommets de la triangulation et d'obtenir un maillage par dualité, à partir de l'approximation discrète du diagramme de Voronoï de ces points (voir Fig.5.2).

La réalisation pratique de cette idée, pourtant simple, soulève cependant plusieurs questions critiques :

1. Comment définir le bord d'un objet discret ?
2. Comment choisir les sommets du maillage ?

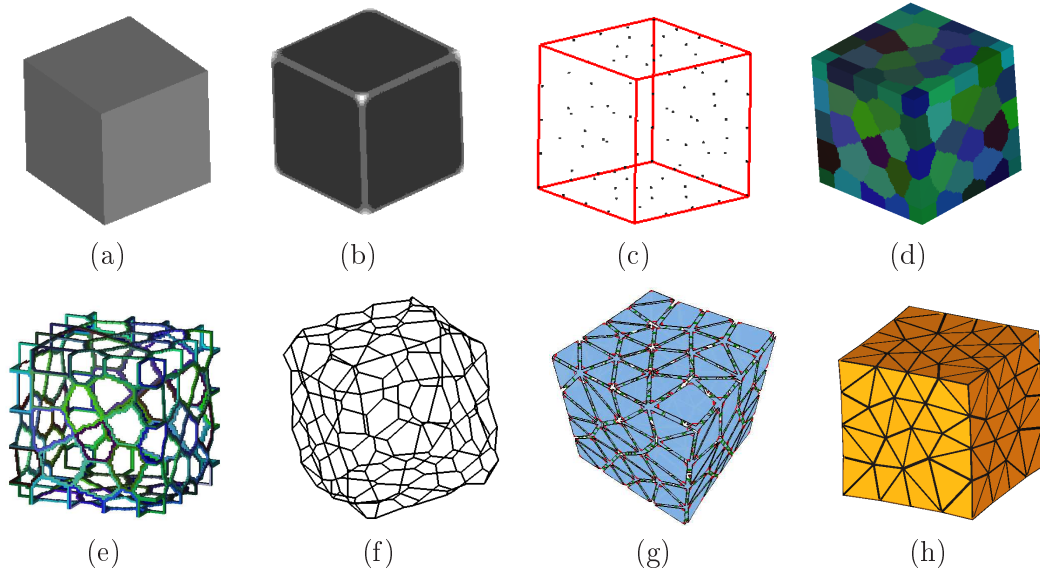


FIG. 5.2 – Vue d'ensemble de la méthode de Delaunay Discret. (b) Approximation de la courbure discrète. (c) Sélection ordonnée des nœuds du maillage. (d) Diagrammes de Voronoï discrètes. (e) Le SKIZ discret. (f) Le graphe de Voronoï euclidien. (g) Surface topologique obtenue par dualité. (h) Maillage triangulaire final.

3. Comment calculer l'approximation discrète des régions de Voronoï?
4. Comment construire le graphe de Voronoï?
5. Comment extraire le maillage par dualité?

Par conséquent, les travaux réalisés dans le cadre de cette thèse visent d'abord à étudier et démontrer la faisabilité d'une telle approche en répondant à chacune de ces questions dans le contexte d'une image binaire, pour ensuite montrer son potentiel à atteindre nos objectifs initiaux.

5.4 Conclusion

Dans les chapitres suivants, nous présentons les différentes expérimentations que nous avons réalisées pour transposer le concept de la dualité entre le graphe de Voronoï d'un ensemble de points et la triangulation de Delaunay dans l'espace discret des images 3D. Nous avons étudié le potentiel d'une telle approche à fournir des maillages polygonaux de topologie connue dans différents cas de figure (frontière discrète en voxels ou en surfels). Ainsi, nous présentons les étapes d'élaboration de l'algorithme du Delaunay Discret.

Dans un premier temps, nous avons expérimenté la stratégie sur la frontière d'un objet discret, définie comme un ensemble de voxels. Nous appelons cet méthode *Delaunay Discret sur les voxels* (DDV). Cette première étude nous a permis d'une part de prouver

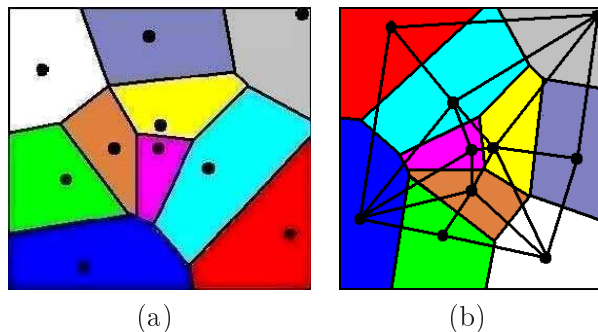


FIG. 5.3 – (a) Le diagramme de Voronoï des points noirs. (b) La triangulation duale.

la faisabilité de l'approche et d'autre part de proposer un premier algorithme de reconstruction. Nous verrons que c'est un algorithme simple et rapide mais qu'il n'est pas très robuste. Il est adapté pour la reconstruction d'objets relativement grands (comme le foie, les poumons, la rate, ...) mais présente des limitations lors de la reconstruction de structures très fines comme les veines et les os.

En deuxième lieu, nous avons utilisé la frontière discrète représentée par le 2-complexe cellulaire du bord. Nous appelons cette méthode *Delaunay Discret sur les pointels* (DDP). Elle améliore les performances et la robustesse des algorithmes et permet la reconstruction même des structures très fines. Les maillages résultants sont garantis 2-variétés combinatoires et ont des bonnes propriétés géométriques. Finalement, nous avons étudié le potentiel de la méthode à reconstruire simultanément plusieurs objets contenus dans une même image 3D.

Chapitre 6

Méthode I : Delaunay Discret sur les voxels

Dans ce chapitre, nous proposons une approche de modélisation géométrique et topologique basée sur le concept du Delaunay Discret. Le but de la méthode est de construire une 2-variété de la surface d'un objet 3D, à partir de la frontière discrète, définie comme un sous ensemble de voxels. Nous détaillons les différentes étapes clés de la méthode et nous discutons les résultats obtenus sur quelques objets de test.

6.1 Introduction

L'objectif de cette méthode de reconstruction est d'obtenir un modèle polygonal de la surface d'un objet discret, représenté dans une image binaire.

La méthode opère sur une image binaire 3D, où l'objet à trianguler est représenté par l'ensemble des voxels de label 1. Ce type d'image est obtenu, par exemple, après la segmentation d'une structure d'intérêt dans une image médicale.

L'algorithme s'appuie sur le principe de la dualité géométrique entre le diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points. L'idée de base consiste à sélectionner un sous ensemble d'éléments de la frontière discrète comme étant les *nœuds* de la triangulation, de calculer une *approximation discrète du diagramme de Voronoï* de ces nœuds et d'extraire le maillage surfacique par *dualité*. La méthode doit garantir que le modèle polygonal de la surface est une 2-variété topologique.

Cette méthode est appelée *Delaunay Discret sur les voxels* (DDV) car elle manipule la frontière de l'objet définie comme un sous-ensemble de voxels. L'originalité de l'approche réside essentiellement dans le fait que de par sa nature entièrement discrète, la méthode permet l'utilisation des opérateurs de morphologie mathématique (transformée en distance géodésique, croissance de régions simultanée, etc.). Par conséquent, la méthode ne requiert pas de structures de données plus évoluées que les images discrètes 3D. Elle procède par construction de différentes images, à partir de l'image binaire de départ, et tous les algorithmes, jusqu'à l'obtention du modèle par dualité, s'appliquent à ces images 3D.

6.2 Pré-traitements

Suite à des imprécisions dans le processus d'acquisition ou des erreurs de segmentation, les objets discrets sont généralement bruités. En trois dimensions, le bruit va faire apparaître des cavités et des petits tunnels. Une cavité simplement connexe est homotopique à une sphère et un tunnel est homotopique à une courbe fermée simple.

Pour beaucoup de traitements, et notamment pour la reconstruction surfacique, la simplification de la topologie est très utile. La correction des caractéristiques indésirables peut être faite plus simplement par des pré-traitements permettant de détecter et supprimer les cavités et les tunnels insignifiants.

6.2.1 Suppression des cavités

Souvent, les cavités n'ont pas de réalité anatomique – elles proviennent en général d'un voxel dont l'intensité diffère trop de celle de ses voisins – et leur suppression permettra de simplifier la topologie de l'objet. Nous avons donc choisi de les éliminer par un pré-traitement simple : la grille de l'image binaire du masque est agrandie d'un voxel dans chaque direction, puis inversée. Une extraction des composantes connexes est réalisée, et toutes les composantes ne touchant pas le bord de l'image sont supprimées. L'image est ensuite à nouveau inversée et remise à sa taille de départ. L'agrandissement de l'image permet de s'affranchir des cas où l'objet touche le bord de l'image : sans cette étape, le fond pourrait être fractionné en plusieurs composantes connexes, ce qui rend sa détection plus complexe. Un tel cas est présenté en deux dimensions dans la figure 6.1, où le fond de l'image est formé des composantes connexes 1 et 2. L'agrandissement permet de fusionner ces deux composantes.

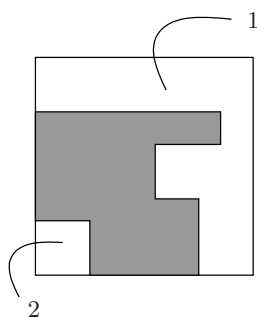


FIG. 6.1 – Figure touchant le bord

6.2.2 Détection des tunnels

Les cavités étant des composantes connexes du fond, elles sont donc facilement détectables et peuvent être remplies. Les tunnels n'ayant pas de contrepartie géométrique directement caractérisable, leur détection est plus complexe.

À notre connaissance, seul un algorithme existe : il s'agit de l'algorithme de l'enveloppe topologique d'Aktouf [AGL02]. Cet algorithme fonctionne de la façon suivante :

- calcul d'un sur-ensemble B de l'objet X sans tunnel ni cavité (par exemple sa boîte englobante) ;
- jusqu'à stabilité, supprimer itérativement les points de B qui n'appartiennent pas à X , qui ne font pas partie d'une surface et qui ne sont pas une jonction entre deux surfaces ou entre une courbe et une surface.

La non-appartenance à une surface, à une jonction entre deux surfaces ou à une jonction entre une courbe et une surface est caractérisée par les nombres topologiques (tableau 2.3) : un point p remplit cette condition si $T_{\bar{n}}(p, \overline{B}) = 1$. Le schéma de cet algorithme ressemble à celui d'un algorithme de squelettisation séquentiel et présente le même comportement : selon le choix du balayage, l'enveloppe peut être décalée par rapport à l'objet (figure 6.2). Le problème est résolu de la même façon que pour la squelettisation, en ordonnant le balayage selon la distance d'un point au bord de l'objet, les points les plus proches du bord étant plus prioritaires.

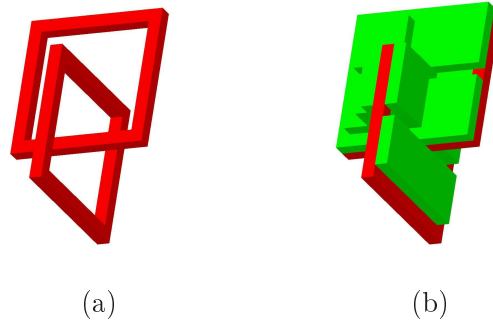


FIG. 6.2 – Un objet 3D (a) et son enveloppe topologique décalée(b)

La détection et la suppression des tunnels indésirables peuvent être faites avec l'algorithme suivant : Nous calculons d'abord l'enveloppe topologique $ET(O)$ de l'objet voxels O . Ensuite, la différence $D = ET(O) - O$ entre cette enveloppe et l'objet original est obtenue. L'image D contient un ensemble de composantes connexes (éventuellement vide). Chacune de ces composantes connexes correspond à un tunnel ; leur nombre indique le genre de l'objet. Pour simplifier la topologie, nous considérons qu'un tunnel correspondant à une composante connexe composée de moins de 10 voxels est dû au bruit et donc il est rempli par l'ajout de la composante connexe à l'objet original. Les tunnels de taille supérieure sont, quant à eux, utilisés pour détecter les courbes qui les caractérisent sur la surface de l'objet (voir Fig.6.3).

Notons que cet algorithme permet non seulement d'obtenir le genre d'un objet discret et de le réduire, mais permet aussi de localiser les tunnels. Les courbes des tunnels significatifs seront utilisées durant la sélection des nœuds du maillage.

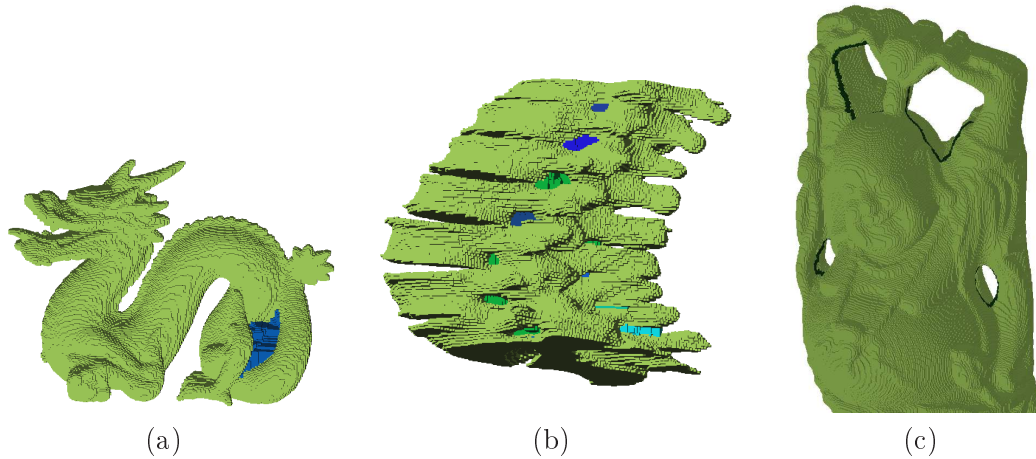


FIG. 6.3 – (a) Le dragon contient un tunnel significatif (en bleu). (b) Le genre simplifié des vertèbres est 26. (c) Exemples de courbes des tunnels (en noir).

6.3 Les étapes de la méthode

Dans cette section, nous allons détailler les différentes étapes clés du *Delaunay Discret sur les voxels*.

6.3.1 Définition de la surface discrète

Dans le chapitre 2, nous avons rappelé les trois approches les plus populaires pour la définition de la frontière discrète d'un ensemble de voxels. Nous avons vu également certaines des propriétés de ces frontières. En particulier, nous avons discuté leurs propriétés topologiques et leur capacité à représenter des surfaces discrètes. En effet, comme nous allons le voir tout au long de ce manuscrit, la définition de la frontière discrète influence grandement le potentiel de reconstruction de la méthode de Delaunay Discret.

Dans la méthode de *Delaunay Discret sur les voxels*, nous utilisons la première définition qui consiste à représenter la surface d'un objet 3D avec un sous ensemble de voxels : le bord interne.

Rappelons que dans l'espace discret des images 3D, il existe uniquement quatre paires de connexité (paires de Jordan), qui permettent de définir une séparation de l'espace en deux composantes connexes : l'une finie, appelée *intérieur* et l'autre infinie, appelée *extérieur*.

- (6, 26) : objet 6-connexe, fond 26-connexe ;
- (26, 6) : objet 26-connexe, fond 6-connexe ;
- (6, 18) : objet 6-connexe, fond 18-connexe ;
- (18, 6) : objet 18-connexe, fond 6-connexe ;

Pour chacune de ces configurations, nous avons vu comment définir le bord discret. Par exemple, pour un objet 6-connexe avec un fond 26-connexe, la 6-frontière interne

est définie comme l'ensemble des voxels objets ayant au moins un voisin du fond dans leur 26-voisinage. Inversement, pour un objet 26-connexe avec un fond 6-connexe, la 26-frontière interne est définie comme l'ensemble des voxels objets ayant au moins un voisin du fond dans leur 6-voisinage.

Par conséquent, l'algorithme d'extraction de la frontière discrète d'un objet doit utiliser les masques de voisinage adaptés aux couples de connexités choisis pour l'objet et pour le fond. Dans la suite de ce chapitre, nous présenterons la méthode de reconstruction pour un objet O 6-connexe avec un fond 26-connexe, dans un souci de clarté. Cependant, les algorithmes que nous proposons fonctionnent aussi dans les autres cas de figure, sous condition de changer les masques de voisinage.

L'algorithme de détection du bord interne prend en entrée l'image binaire avec le couple de connexité choisi et renvoie une image multicolore, où les voxels de la frontière et les voxels internes à l'objet sont étiquetés avec des valeurs différentes. La figure 6.4 montre l'image de la frontière discrète du lapin (en bleu). Les voxels internes (dans le volume) sont représentés en rose.

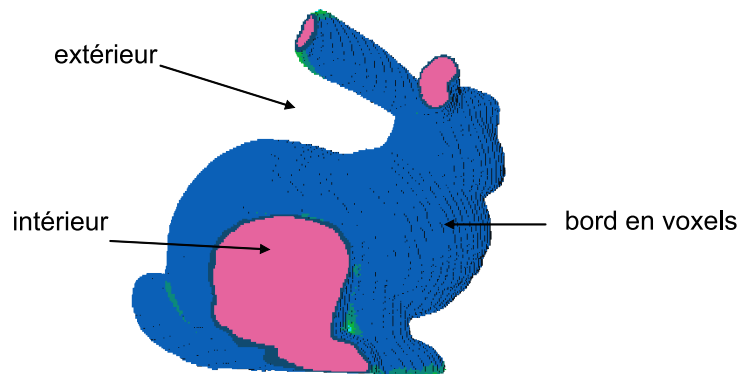


FIG. 6.4 – Le 6-bord interne du lapin.

Notons que le bord en voxels ne définit pas forcément une surface pour tout objet discret. Intuitivement, si l'objet présente des endroits très fins, c'est-à-dire d'épaisseur proche d'un voxel, le bord discret ne représente pas une surface séparante, au sens de Jordan, à ces endroits. Cependant, en pratique, il est possible de décider si le bord en voxels d'un objet définit bien une surface ou pas. Pour ce faire, nous réalisons une segmentation topologique du bord à l'aide des nombres topologiques (voir section 2.3.3).

Nous définissons la surface discrète FDV (pour Frontière Discrète en Voxel) d'un objet 6-connexe O comme l'ensemble des *points sur le bord* (PB), des *points de surface* (PS) et des *points de jonction de surfaces* (JS) du 6-bord interne de O (cf définitions présentées dans le chapitre 2).

Notons qu'accessoirement, il est possible d'amincir la surface discrète en supprimant les points sur les bords (simples) avec un algorithme séquentiel : l'objet est parcouru plusieurs fois jusqu'à ce qu'aucun point ne soit effacé lors d'un parcours. Cependant, ce

Type de point	PB	PS	JS	PC	JC	JCS
cube	0	38402	0	0	0	0
sphère	0	16154	0	0	0	0
tore	0	150072	0	0	0	0
haltère	32	9922	0	0	0	0
lapin	867	134901	327	0	0	4
poumon1	7	251403	12	0	0	1
poumon2	0	279147	32	0	0	0
rein1	0	12837	4	0	0	0
rein2	0	15343	2	0	0	0
rate1	0	13322	0	0	0	0
foie1	0	270551	3	0	0	1
foie2	2	277830	2	0	0	0
bouddha	25	582345	204	0	0	0
dragon	2209	125279	421	0	0	3
foie3	2874	349865	482	4	0	4
artère	6206	25870	909	27	0	20
vertèbres	11391	151069	2942	53	1	67

TAB. 6.1 – Caractérisation topologique des points des bords en voxels par les nombres topologiques. PB - points du bord, PS - points de surface, JS - points de jonction de surfaces, PC - points de courbes, JC - points de jonctions de courbes, JCS - points de jonction de courbes et de surfaces

traitement relativement coûteux ne nous semble pas nécessaire dans notre cas. D'abord, les bords 6-internes contiennent peu de *points simples* et leurs suppressions n'aura pas d'effet notable sur le temps de calcul de notre algorithme de reconstruction. De plus, la finesse de la surface n'est pas requise puisque tous les traitements opèrent sur les voxels. Enfin, ici nous utilisons la segmentation topologique en tant qu'indicateur qui nous permet de décider si le 6-bord interne définit bien une surface, au sens de Jordan. Les tests effectués sur une base de 25 objets discrets tendent à montrer que, si le bord en voxels ne contient pas de *points de courbes*, celui-ci définit bien une surface 6-connexe qui sépare l'espace de l'image en deux composantes 26-connexes du fond. Le tableau 6.1 résume le type et le nombre de points topologiques présents dans les bords 6-internes de quelques objets. Cette segmentation topologique nous permet donc de distinguer deux classes d'objets :

1. objets dont la surface peut être représentée par un ensemble de voxels 6-connexes ;
2. objets dont la surface ne peut pas être représentée par un ensemble de voxels.

En pratique, dans la première classe, nous retrouvons la majorité des organes vitaux (foie, poumons, reins, rate). En général, si ces objets sont correctement segmentés, la surface discrète définit correctement leur topologie et la méthode de *Delaunay Discret*

sur les voxels peut être utilisée pour obtenir un maillage surfacique. En revanche, la deuxième classe contient des objets fins (veines, os) et l'ensemble des voxels de la surface discrète ne permet pas de définir correctement leur topologie. La figure 6.5 montre la segmentation topologique du 6-bord interne d'un poumon et d'une artère segmentés. La surface discrète du poumon ne contient pas de *points de courbe* et donc elle peut être utilisée pour la reconstruction. En revanche, la surface discrète de l'artère contient des *points de courbe* et des *points de jonction de courbes*. Ce qui signifie qu'elle définit mal la surface de l'objet et, par conséquent, la reconstruction à partir de cet ensemble de voxels risque d'être périlleuse. En effet, pour cette classe d'objets, il est plus judicieux d'utiliser l'une des deux autres frontières discrètes (le graphe d'adjacence des surfels ou le bord du complexe cellulaire) qui permettent une définition beaucoup plus fine de la surface que le bord en voxels.

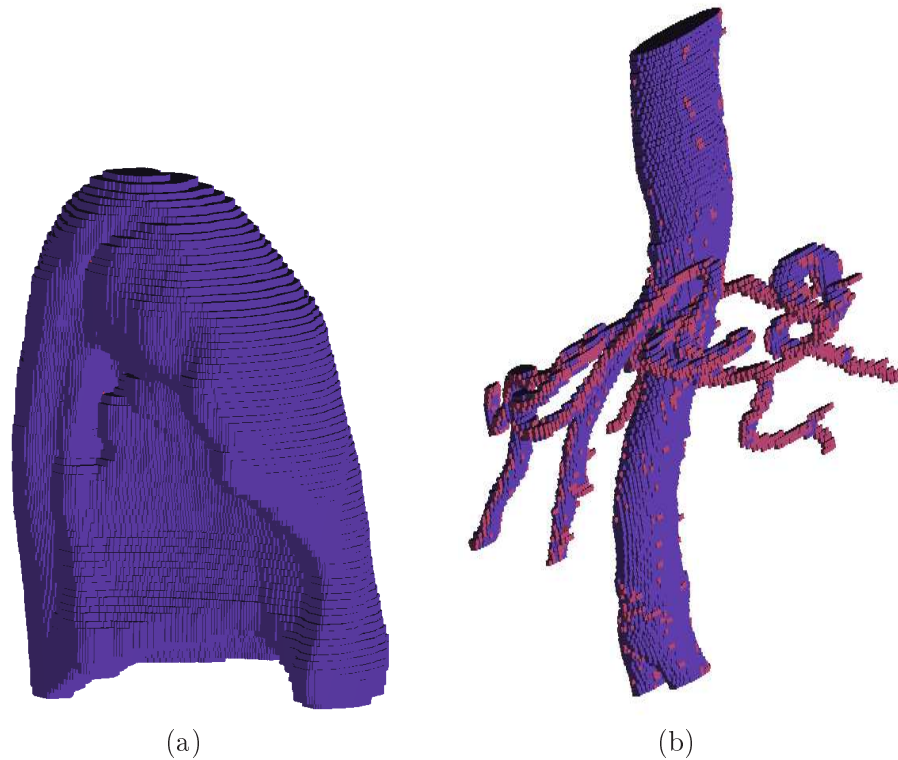


FIG. 6.5 – Segmentation topologique du 6-bord interne. Les *points de surface* apparaissent en bleu et les *points du bord* en rouge. (a) La surface discrète du poumon ne contient pas de *points de courbe*. (b) La surface discrète de l'artère contient des *points de courbe* et des *points de jonction de courbes*.

6.3.2 Sélection des nœuds du maillage

L'étape cruciale d'une approche telle que le Delaunay Discret, qui procède par choix préalable des nœuds du maillage, est clairement la sélection de ces nœuds. Comme nous avons le voir dans la suite, cette distribution influence grandement la qualité des approximations géométriques obtenues. En effet, dans cette approche, les propriétés du maillage résultant dépendent essentiellement du choix des nœuds.

Supposons, maintenant que nous souhaitons obtenir un *modèle polygonal régulier* de la frontière discrète *FDV* de l'objet *O*. Dans ce cas, les *nœuds* doivent être distribués de façon *quasi-uniforme* sur la frontière de l'objet. Pour obtenir une telle distribution, l'idée de base consiste à choisir parmi les voxels de la frontière discrète *FDV* un sous ensemble de voxels distribués uniformément en fonction d'une densité spécifiée par l'utilisateur. Pour ce faire, nous allons construire une *liste de nœuds candidats* avec tous les voxels de la frontière discrète. Ensuite, pour chaque *nœud candidat valide*, il suffit d'éliminer (marquer comme invalides) ces voisins, dans un rayon de voisinage constant *r*, et d'itérer le processus jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de candidats valides.

Cet algorithme très simple soulève cependant deux questions importantes : « quelle est la *distance* à utiliser entre les voxels ? » et « faut-il définir une *priorité* de sélection entre les nœuds candidats ? ».

Distance. La notion de distance euclidienne, bien qu'utilisée par la majorité des algorithmes de reconstruction, n'est pas adaptée pour une méthode de reconstruction discrète comme le Delaunay Discret. En effet, dans l'espace discret, nous utilisons généralement des distances discrètes. Ces distances, aussi appelées des *distances de chanfrein*, ont été proposées pour une meilleure approximation de la distance euclidienne dans l'espace discret [Bor84, Thi01]. Leur principe consiste à pondérer le 26-voisinage d'un voxel avec des coefficients différents. Le plus souvent, les distances de chanfrein se présentent sous forme de masque de $3 \times 3 \times 3$ voxels, où les 6, 18 et 26-voisins du voxel central sont marqués avec des valeurs différentes. Il est à noter que de nombreux travaux ont déjà été réalisés sur ce sujet, et actuellement, nous connaissons une multitude de masques de chanfrein en 3D. En fonction, de la pondération utilisée, ces masques approximent la distance euclidienne avec un taux d'erreur plus ou moins élevé. La figure 6.6 représente le masque $M = (16, 21, 28)$ qui approxime la distance euclidienne avec une erreur de l'ordre de 10%.

Par ailleurs, pour un algorithme de sélection des nœuds, il est important de considérer plutôt une *distance géodésique* qu'une distance 3D. La distance géodésique entre deux voxels est définie comme le plus petit 6-chemin le long de la frontière discrète (Fig.6.7). Cette distance s'avère mieux adaptée pour nos besoins car elle empêche d'éliminer les voxels qui sont proches d'un nœud candidat en terme de distance euclidienne mais qui se trouvent dans des régions différentes de l'objet, comme par exemple les nœuds des deux côtés d'un détail très fin d'un objet.

Tous les résultats présentés dans ce chapitre sont calculés avec une distance géodésique de chanfrein pour le masque 3D $M = (16, 21, 28)$.

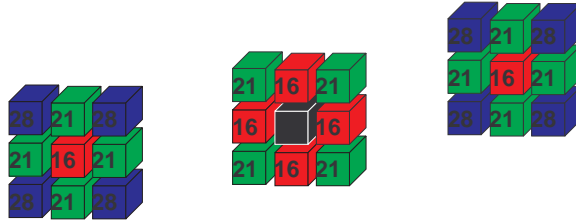


FIG. 6.6 – Masque de chanfrein $3 \times 3 \times 3$, $M = (16, 21, 28)$.

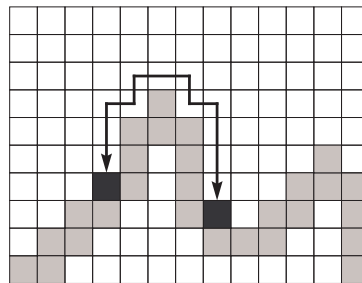


FIG. 6.7 – Distance géodésique entre deux voxels de la frontière discrète.

Priorité. Si la sélection des nœuds du maillage est faite de façon non ordonnée, la distribution résultante sera déterminée par le sens du parcours de l'image de la frontière. Or, il est évident qu'une telle distribution aveugle ne peut pas être optimale. Il existe le risque de « gommer » des petits détails de la surface de l'objet ou bien de lisser les bords. La figure 6.8, illustre la différence entre une *sélection aveugle* et une *sélection ordonnée*.

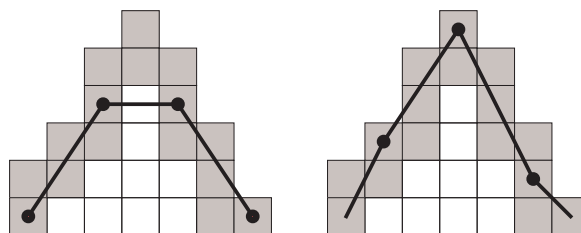


FIG. 6.8 – Différence entre une sélection aveugle et une sélection ordonnée.

L'utilisation d'une priorité de sélection pour le traitement des nœuds candidats peut améliorer sensiblement la distribution. De plus, si cette priorité est définie en fonction de la « courbure » de chaque voxel, le modèle polygonal résultant sera plus proche de la frontière discrète FDV, en terme de distance.

Par conséquent, nous avons choisi de calculer une approximation de la courbure de chaque voxel de la frontière FDV. Pour ce faire, nous pouvons utiliser tout algorithme existant, par exemple celui proposé par Lenoir [Len97]. Il est à noter que beaucoup de travaux ont déjà été réalisés sur ce sujet et ont abouti à plusieurs propositions qui diffèrent essentiellement par les concepts employés. Cependant, la majorité des algorithmes connus cherchent à calculer les « vraies » courbures (moyenne, principales) et, par conséquent, sont relativement complexes et pas très efficaces en terme de temps de calcul. Donc, nous avons utilisé une méthode numérique d'estimation de la courbure moyenne.

Cette approche statistique est basée sur le fait qu'il existe un lien de linéarité entre la courbure moyenne d'un point d'une surface lisse et la proportion du volume d'une petite sphère, centrée en ce point, situé à l'intérieur de la surface (voir Fig. 6.9). Dans [BGCF95], il a été démontré, de façon analytique, que

$$H = \frac{4V}{\pi b^4} - \frac{8}{3b} \quad (6.1)$$

où H est la courbure moyenne, b est le rayon de la sphère centrée au point et V le volume de la sphère situé à l'intérieur de la surface.

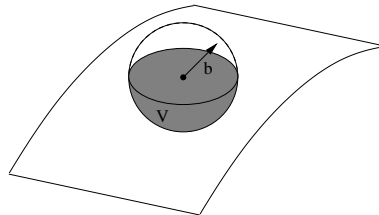


FIG. 6.9 – Volume du voisinage d'un point de la surface situé à l'intérieur de celle-ci. Ce volume V , est représenté en gris. Le rayon du voisinage sphérique est noté b .

Cette formule est correcte tant que le rayon de la sphère est plus petit que l'inverse de la courbure maximale au point considéré. Néanmoins, si on utilise des rayons de sphères suffisamment petits, ce résultat permet d'approximer une valeur de courbure moyenne, avec une précision moyenne de l'ordre de 10%. Même sur les points anguleux (arêtes, sommets), cette méthode permet d'obtenir une estimation de la courbure « apparente », bien que celle-ci ne soit pas explicitement définie en de tels points.

La principale difficulté de cet algorithme réside dans le choix du rayon de la sphère. Dans le cas discret, cette difficulté est accentuée. Un compromis doit être fait entre le choix d'un petit rayon pour garantir l'exactitude des résultats et le choix d'un grand rayon pour diminuer l'erreur due à la discrétisation de l'espace. Comme le montre le tableau 6.2 (a), cette erreur devient assez rapidement inférieure à 1% avec l'augmentation de la taille des sphères.

La complexité de la méthode est $O(d^2.r^3)$ où r est le rayon du voisinage sphérique et d est la dimension moyenne de l'objet, calculés en voxels. Dans la pratique, ses performances en temps sont de l'ordre de quelques secondes (tableau 6.2 (b)) et la méthode

rayon	volume		erreur
	réel	discret	
3	113.1	123	8.75%
4	268.1	257	-4.13%
5	523.6	515	-1.64%
10	4188.8	4169	-0.47%
15	14137.2	14147	0.06%
20	33510.3	33401	-0.32%
25	65449.8	65267	-0.27%

rayon de l'objet	rayon de la sphère			
	7	10	15	20
20	0'01	0'02	0'04	0'09
40	0'04	0'08	0'18	0'39
60	0'10	0'18	0'42	1'33
80	0'20	0'33	1'19	2'50
100	0'34	0'54	2'05	4'31
150	1'26	2'12	4'54	10'33
200	2'53	4'15	9'03	19'18

TAB. 6.2 – (a) Erreur de volume induite par la discrétisation d'une sphère. (b) Temps d'exécution de la méthode pour des objets de différents rayons, en considérant un voisinage de rayon fixe.

s'avère très efficace pour pouvoir différencier les endroits plutôt plats des endroits plutôt courbés sur les frontières discrètes d'objets lisses. Dans notre cas, cette distinction s'avère suffisante pour définir une priorité de traitement sur les nœuds.

L'algorithme statistique d'estimation de la courbure moyenne fournit une image à niveaux de gris de la frontière discrète FDV, les valeurs numériques fortes indiquent les endroits de forte courbure, alors que les valeurs faibles indiquent les endroits plus plats (voir Fig. 6.10).

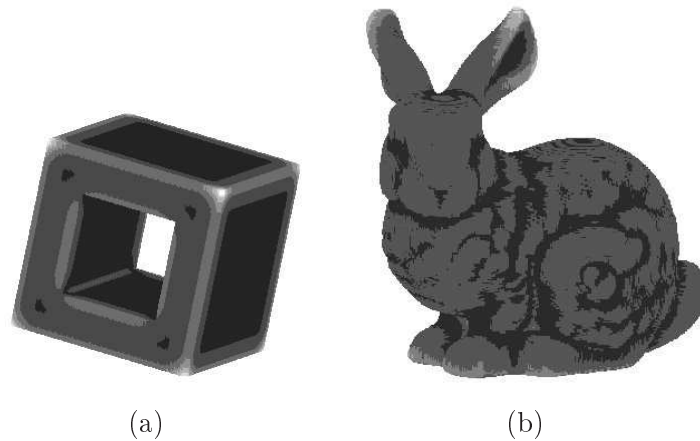


FIG. 6.10 – Deux résultats de l'algorithme statistique. Les endroits de forte courbure sont clairs. Les endroits plats sont plus foncés.

Notre algorithme de sélection des nœuds assigne donc une priorité plus élevée aux points de forte courbure « apparente » ainsi qu'aux points des courbes des tunnels détectés durant le pré-traitement (voir Fig.6.3(c)). Cette sélection ordonnée permet donc une meilleure distribution pour préserver la topologie de l'objet et pour diminuer

le risque d'arrondir les angles ou de gommer les petits détails. Notons cependant que ce risque n'est pas nul, car il est facile de voir que les détails de taille plus petite que le rayon de voisinage r ne pourront pas être « capturés » lors de la distribution des nœuds pour un tel rayon.

L'algorithme 6.1 prend en entrée l'image de la courbure approximée sur la frontière discrète et un rayon de résolution r , spécifié par l'utilisateur. En sortie, il produit une image 3D contenant l'ensemble des nœuds sélectionnés, étiquetés avec un label unique. Ces nœuds sont distribués de façon quasi-uniforme sur la frontière

La figure 6.11 montre quatre étapes de l'algorithme de sélection des nœuds sur un cube avec un rayon de résolution $r = 10$.

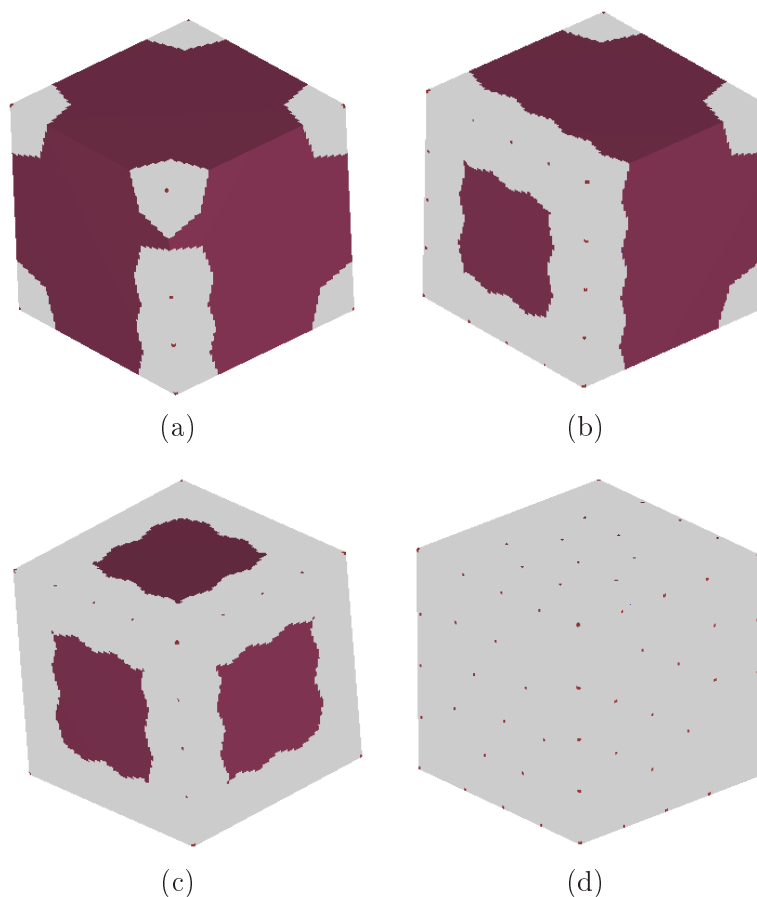


FIG. 6.11 – Sélection ordonnée des nœuds sur la frontière discrète d'un cube. Les nœuds sélectionnés apparaissent en rouge, au milieu des zones « érodées », en gris. (a) Après 10 itérations. (b) Après 20 itérations. (c) Après 50 itérations. (d) À la fin de l'algorithme.

Algorithme 6.1 Sélection ordonnée des nœuds du modèle

Require: $ImgC$ =Image de la courbure discrète, r = rayon de résolution**Ensure:** $ImgN$ =Image des nœuds quasi-uniformément distribués sur la frontière discrète

```

1: Initialisation :
2: file  $FC$ = la file des nœuds candidats = les offsets des voxels objet de  $ImgC$ .
3:  $ImgDist$ = image de la distance initialisée à 0.
4:  $M = in3D(16, 21, 28)$ =masque de chanfrein.
5:  $label = 0$  : une valeur pour chaque nœud
6: Trier  $FC$  selon la courbure.
7: Traitement :
8: while ( $FC \neq vide$ ) do
9:    $v = FC.pop()$ 
10:   $maxdist = 0$ 
11:  if ( $ImgDist(v) == 0$ ) then
12:     $label ++$ 
13:     $fv.push(0, v)$  : file hiérarchique des voisins dans le masque
14:    while ( $fv \neq vide$ ) do
15:       $off = fv.pop()$ 
16:      if ( $ImgDist(off) < 28 * r$ ) then
17:        for {tous les  $q \in M(off)$ } do
18:          if ( $ImgDist(q) == 0$ ) then
19:             $ImgDist(q) = ImgDist(off) + M(q).coef$ 
20:             $fv.push(ImgDist(q), off)$ 
21:             $maxdist = ImgDist(q)$ 
22:          end if
23:        end for
24:      end if
25:    end while
26:    if ( $maxdist == r$ ) then
27:       $ImgN(v) = label$ 
28:    end if
29:  end if
30: end while

```

6.3.3 Approximation discrète des régions de Voronoï

La distribution des nœuds du maillage étant terminée, l'étape suivante de la méthode est la construction du diagramme de Voronoï associé à ces nœuds. Rappelons que le diagramme de Voronoï est, en effet, un partitionnement (ou une tessellation) en régions telles que la région associée à chaque nœud, contient les points plus proches de ce nœud que de tout autre.

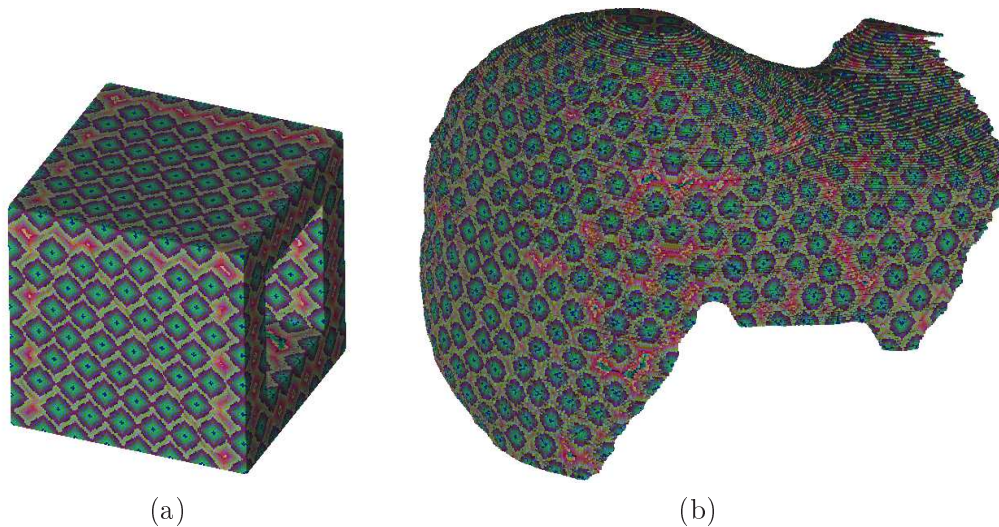


FIG. 6.12 – Vues 3D des transformées en distance géodésique de chanfrein des nœuds, calculées sur les frontières discrètes d'un cube percé (un tore topologique) et d'un foie.

Le calcul du diagramme de Voronoï peut être effectué de façon exacte par la géométrie algorithmique [Ber94], ou de façon approchée, en temps constant, avec une image de distance [Bor86].

Notre algorithme d'approximation discrète du diagramme de Voronoï effectue une croissance de régions simultanée à partir des nœuds selon distance géodésique (voir Algorithme 6.2 de la section ??). L'algorithme prend en entrée l'image des nœuds, où chaque nœud est étiqueté avec un label unique, et calcule deux images : une image de la transformée en distance géodésique des nœuds, pour la distance de chanfrein considérée, et une image des régions de Voronoï (les zones d'influence), où chaque région est étiquetée à la valeur de son nœud le plus proche.

Plus la distance discrète est proche de la distance euclidienne, meilleurs sont les résultats. Dans notre implémentation, nous avons utilisé le masque de chanfrein $3 \times 3 \times 3$, $M = (16, 21, 28)$, car il approxime la distance euclidienne avec une erreur de l'ordre de 10%. La figure 6.12 illustre les transformées de distance de chanfrein géodésique des nœuds calculées sur les frontières discrètes d'un cube percé et d'un foie segmenté.

La figure 6.13 montre six diagrammes de Voronoï Discret obtenus avec l'algorithme 6.2 sur les frontières discrètes de six objets discrets, à partir d'une distribution des

nœuds correspondant à la résolution r , spécifiée par l'utilisateur à l'étape précédente de la méthode. Les régions associées à chaque nœud sont représentées avec des couleurs différentes.

À la fin de cette deuxième étape, nous obtenons donc une approximation du diagramme de Voronoï Discret correspondant à la distribution des nœuds du maillage.

Algorithme 6.2 Construction du diagramme de Voronoï Discret

Require: $ImgN$ =Image des nœud, $ImgDom$ =Image du domaine (la frontière discrète)

Ensure: $ImgDist$ =Image de la transformé en distance géodésique des nœuds,

$ImgLabel$ =Image des zones d'influence des nœuds

- 1: **Initialisation :**
 - 2: $ImgDist$ = image de la distance initialisée à 0 pour tous les voxels allumés dans $ImgN$ et à $l'∞$ ailleurs.
 - 3: $ImgLabel$ = image des régions d'influence initialisée aux labels correspondant pour tous les voxels allumés dans $ImgN$.
 - 4: $M = in3D(16, 21, 28) =$ le masque de chanfrein.
 - 5: pile $P =$ la pile des voxels, initialisée avec les marqueurs contenus dans $ImgN$.
 - 6: **Traitement :**
 - 7: **while** ($P \neq vide$) **do**
 - 8: $v = P.front()$
 - 9: $P.pop(v)$
 - 10: **for** ($\{tous\ les\ q \in M(v)\}$) **do**
 - 11: **if** ($ImgDom(v) \neq 0$) et ($ImgDist(q) > ImgDist(v) + M(v).coeff$) **then**
 - 12: $ImgDist(q) = ImgDist(v) + M(v).coeff$
 - 13: $ImgLabel(q) = ImgLabel(v)$
 - 14: $P.push(q)$
 - 15: **end if**
 - 16: **end for**
 - 17: **end while**
-

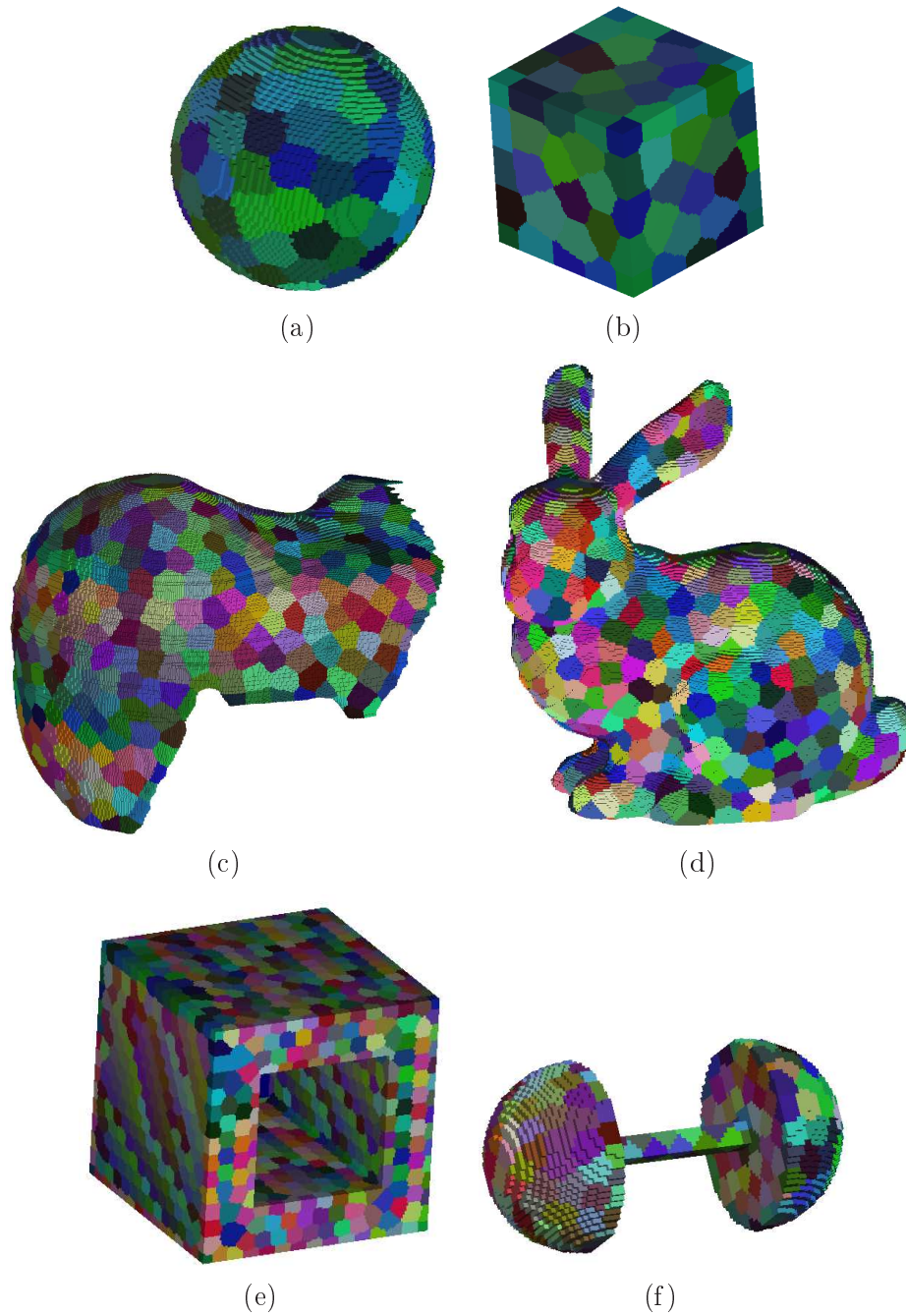


FIG. 6.13 – Diagrammes de Voronoï Discret calculés pour différents objets avec des rayons de résolution r différents. (a) Une sphère de rayon 30 voxels, $r = 5$ voxels. (b) Un cube de côté 80 voxels, $r = 10$ voxels. (c) Un foie segmenté, $r = 10$ voxels. (d) Un lapin discret, $r = 5$ voxels. (e) Un tore de côté 200 voxels, $r = 5$ voxels. (f) Une haltère, $r = 2$ voxels.

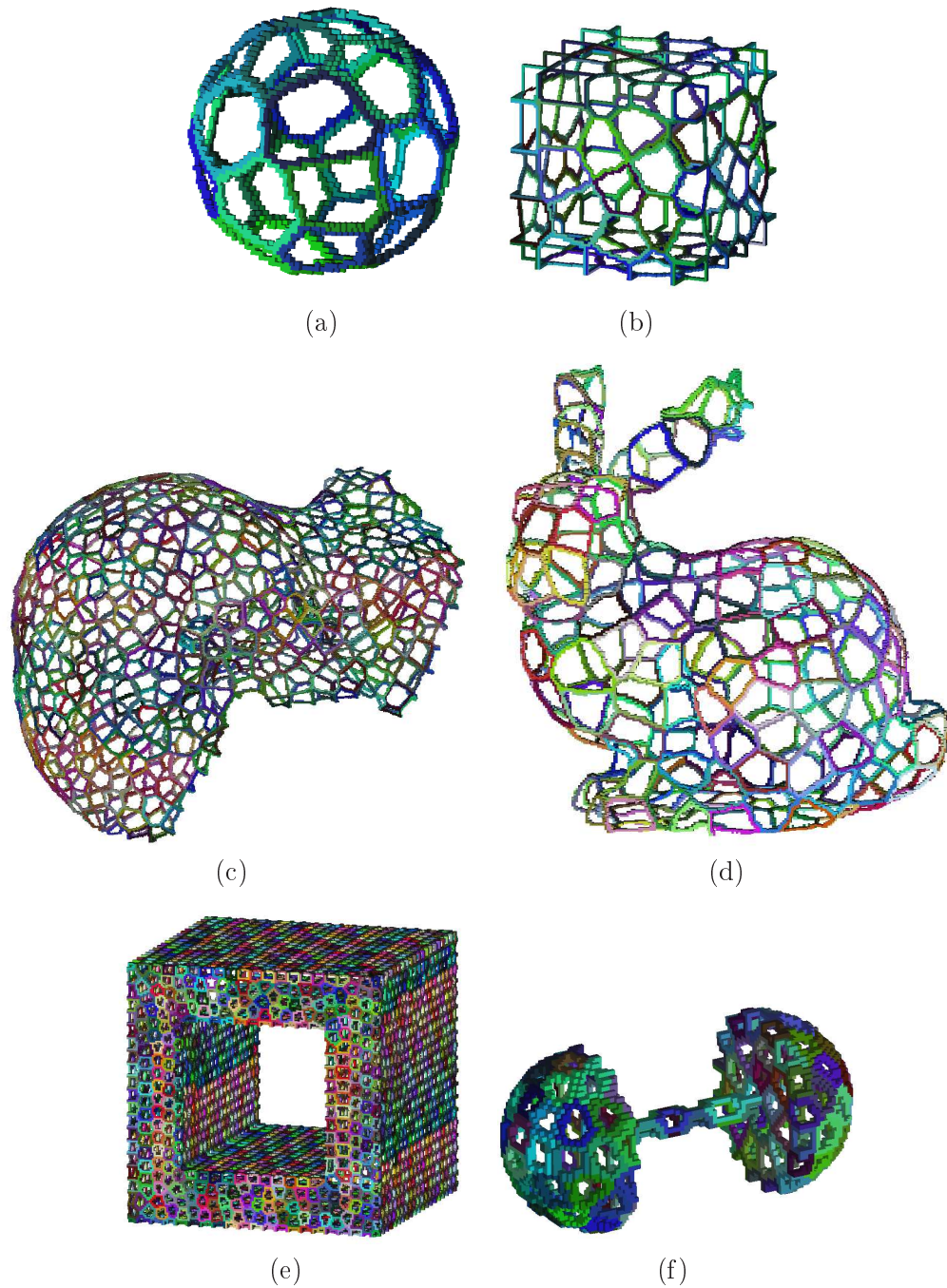


FIG. 6.14 – Les SKIZs extraits à partir des diagrammes de Voronoï calculés pour différents objets avec des rayons de résolution r différents. (a) La sphère, $r = 10$. (b) Le cube, $r = 10$. (c) Le foie, $r = 10$. (d) Le lapin, $r = 10$. (e) Le tore, $r = 3$. (f) L'haltère, $r = 3$.

6.3.4 Définition du graphe de Voronoï

L'étape suivante de la méthode de reconstruction est la définition d'un *graphe de Voronoï*, à partir du diagramme de Voronoï discret, adapté pour la transformation par dualité. Rappelons que les sommets de ce graphe doivent correspondre aux intersections des régions de Voronoï, alors que les arêtes doivent relier deux intersections qui partagent une frontière commune. Le dual géométrique du *graphe de Voronoï* est connu comme la *triangulation de Delaunay* (voir Fig.6.15).

Le premier graphe que nous pouvons extraire à partir du diagramme de Voronoï discret est le *squelette par zones d'influence* (*SKIZ, Skeleton by Influence Zones*). Rappelons que dans le diagramme de Voronoï Discret, chaque région est représentée par une valeur unique. De façon classique, le SKIZ est défini par l'ensemble des voxels ayant au moins 2 voisins de valeurs différentes.

La figure 6.14 montre quelques exemples de SKIZs. Notons que ces squelettes discrets ne sont pas utilisables directement pour la construction du maillage par dualité : les arêtes sont épaisses (voir Fig.6.17) et présentent des anomalies topologiques, classiques en imagerie, dues aux multiples approximations réalisées par les algorithmes. Donc, la question est comment transformer le SKIZ en un graphe de Voronoï adapté à la dualité.

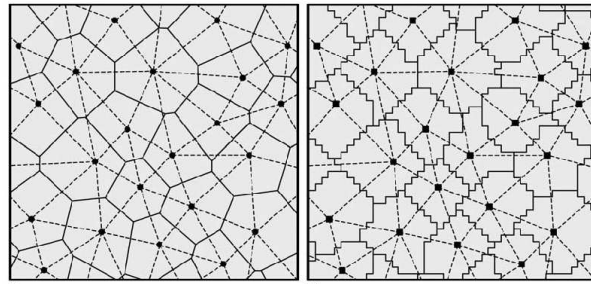


FIG. 6.15 – Le concept de dualité entre le diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay. À gauche, espace continu. À droite, espace discret.

Dans [EDD⁺95], Eck stipule les trois conditions que le diagramme de Voronoï Discret doit remplir pour que la triangulation de Delaunay existe.

Lemme 6.1 *Soit DV un diagramme de Voronoï Discret. Sa triangulation TD duale existe si :*

1. *Les régions de Voronoï se rencontrent toujours par trois ;*
2. *Deux régions de Voronoï n'ont qu'une unique frontière commune ;*
3. *Chaque région de Voronoï est homéomorphe à un disque.*

La première condition est la condition d'unicité de la triangulation. La deuxième et la troisième condition assurent que la triangulation est une surface fermée et orientable, c'est-à-dire une 2-variété sans bord.

La figure 6.15 illustre le concept de la dualité entre le graphe de Voronoï et la triangulation de Delaunay dans l'espace continu et dans l'espace discret. Cependant, il est assez facile de voir que, dans l'espace discret où les points sont ordonnés selon une grille, et où la distance discrète ne fait qu'approximer la distance euclidienne, le diagramme de Voronoï Discret ne remplit pas systématiquement ces trois conditions.

En pratique, la violation de la première condition n'est pas fortement gênante. Dans le cas où plus de trois régions de Voronoï se croisent en un *sommet du graphe de Voronoï*, la triangulation de Delaunay, dans le sens strict, n'est pas définie. Cependant, le dual de ce sommet est un polygone convexe et une triangulation non unique peut toujours être obtenue en découpant ce polygone en triangles. Ceci explique le fait que, depuis le début de cet exposé, nous avons utilisé le terme de *modèle polygonal* de la surface plutôt que celui d'une *triangulation* dans le sens strict du terme.

En revanche, la violation des deux autres conditions indique que la distribution des nœuds pour un rayon r n'est pas adaptée, c'est-à-dire que la densité des nœuds, dans une partie de l'objet, est trop faible par rapport à la courbure locale ou à la taille d'un détail. Pour remédier à ce problème, nous pouvons imaginer trois approches.

La première approche consiste à vérifier les conditions tout au long de la construction du diagramme de Voronoï et, au cas où l'une des conditions n'est pas satisfaite, à ajouter un nouveau nœud. Cette approche a été utilisée dans [EDD⁺95, Del98]. Cependant, elle implique l'utilisation de structures de données évoluées et complique sensiblement l'algorithme. Surtout, elle nécessite le recommencement des calculs de distance à chaque fois qu'un nouveau nœud est ajouté.

Une autre alternative pour contourner les problèmes est d'adapter le rayon de voisinage r à la courbure locale durant la sélection des nœuds. Ceci permettra de distribuer les nœuds de façon adaptative, de sorte que dans les endroits très incurvés, il y ait plus de nœuds, alors que dans les endroits plus plats, il y en ait moins. Nous allons discuter plus en détail cette approche dans la section 6.5 de ce chapitre, consacrée à la sélection adaptative.

La troisième alternative, que nous adoptons ici, consiste à continuer le traitement, même si le diagramme de Voronoï Discret présente des anomalies topologiques (deux régions ayant plus d'une frontière commune, des régions non homéomorphes aux disques). Nous allons transformer les SKIZs en graphes euclidiens et nous allons utiliser les caractéristiques de ces graphes pour détecter et corriger localement les problèmes topologiques du maillage dual.

Les graphes de Voronoï que nous souhaitons obtenir doivent remplir plusieurs conditions qui découlent du lemme d'Eck :

Propriété 8 *La triangulation duale d'un graphe de Voronoï $GV = (V, E)$ est une 2-variété combinatoire connexe sans bord si :*

1. GV est connexe ;
2. tous les sommets $v \in V$ sont de degré 3 ;
3. GV est un graphe simple (sans multi-arêtes).

Intuitivement, la première condition garantit que la surface ne contient pas de sommets isolés. La seconde condition, sur le nombre d'arêtes incidentes à un sommet (le degré), assure que le triangle dual de chaque sommet possède exactement trois triangles voisins (un pour chaque arête). La troisième condition assure qu'il n'y a pas d'adjacences multiples entre les faces duales, c'est-à-dire deux faces adjacentes n'ont qu'une unique arête en commun.

Par ailleurs, la propriété précédente découle directement de la définition d'une 2-variété fermée et triangulée. Le graphe de Voronoï peut être assimilé au graphe d'adjacence des faces de la triangulation. Sur la figure 6.16, nous avons représenté une partie d'une triangulation, que nous supposons sans bord, et son graphe d'adjacence des faces (en rouge). Chaque sommet du graphe correspond à un triangle et peut être interprété comme un *sommet de Voronoï* défini à l'intersection d'exactly 3 régions de Voronoï. Les arêtes du graphe sont les duaux des arêtes de la triangulation et peuvent être interprétées comme des *arêtes de Voronoï*. Elles traduisent le fait que, dans une 2-variété fermée, chaque triangle possède exactement 3 triangles voisins. Par conséquent, tous les sommets sont de degré 3. Le graphe est connexe car la 2-variété l'est aussi. De plus, le graphe est simple car par définition la variété ne présente pas d'adjacence multiples.

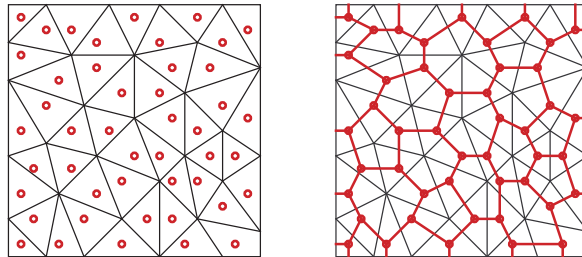


FIG. 6.16 – La dualité entre le diagramme de Voronoï et la triangulation de Delaunay.

Dans les deux sections suivantes, nous allons expliquer comment transformer les SKIZs discrets en graphes euclidiens.

6.3.4.1 Les sommets

La définition d'un sommet du graphe de Voronoï, c'est-à-dire le point d'intersection de plus de deux régions de Voronoï, n'est pas immédiate en discret. La difficulté majeure vient du fait que ces points d'intersection sont mal définis.

Les premiers sommets qu'il est possible de définir à partir du SKIZ sont les *sommets primaires* que nous définissons ainsi :

Définition 6.1 (sommet primaire du SKIZ) *Un sommet primaire est un voxel dont le 6-voisinage (le voxel inclu) contient au moins 3 voxels de valeurs différentes. Un tel sommet est représenté par le n -uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, où les λ_i sont les valeurs des n voxels qui définissent le sommet primaire. Le nombre n est appelé cardinalité du sommet, $n \in [3, 7]$.*

Dans l'espace discret, contrairement à l'espace continu, les régions de Voronoï peuvent se croiser en plusieurs *sommets primaires* identiques ou, pis encore, plusieurs *sommets primaires* différents. Intuitivement, cette redondance des intersections (et donc des sommets du graphe de Voronoï) va provoquer une redondance des faces construites par dualité à partir des sommets (voir Fig.6.17).

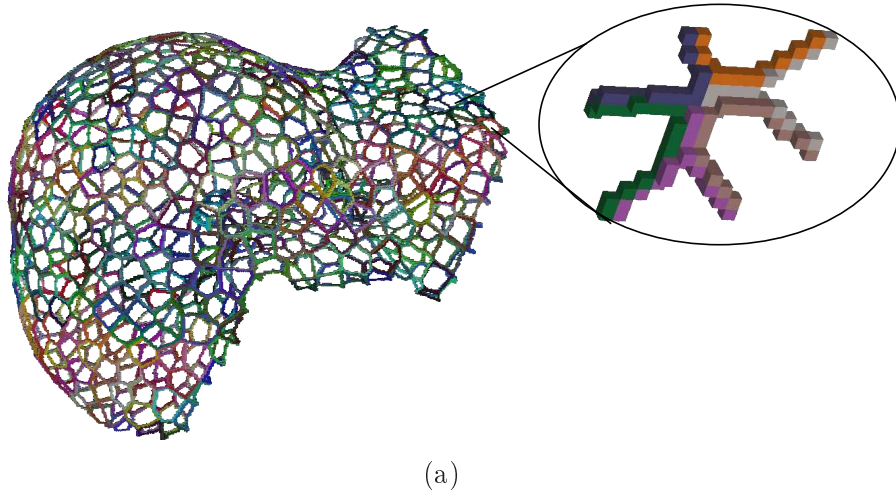


FIG. 6.17 – Le SKIZ d'un foie et un zoom sur l'endroit où six régions discrètes se croisent.

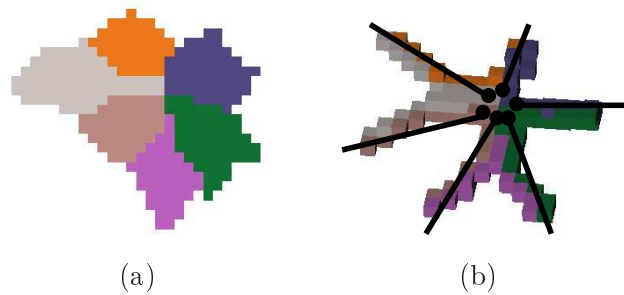


FIG. 6.18 – (a) Intersection de 6 régions discrète de Voronoï. (b) Le SKIZ correspondant.

Pour illustrer ce problème, nous avons représenté sur les figures 6.18(a) et (b), respectivement, 6 régions de Voronoï Discret et le graphe discret correspondant. La figure 6.19(a) représente un schéma 2D de cette configuration. Dans cet exemple, les 6 régions discrètes (A, B, C, D, E, F) se croisent en 6 sommets primaires, tous différents $sp1, sp2, sp3, sp4, sp5, sp6$.

- $sp1 = (\lambda A, \lambda B, \lambda E, \lambda F)$, Fig.6.19(b)
- $sp2 = (\lambda A, \lambda B, \lambda C, \lambda D)$, Fig.6.19(c)
- $sp3 = (\lambda A, \lambda E, \lambda F)$, Fig.6.19(d)

- $sp4 = (\lambda A, \lambda D, \lambda E, \lambda F)$, Fig.6.19(e)
- $sp5 = (\lambda B, \lambda C, \lambda D, \lambda E)$, Fig.6.19(f)
- $sp6 = (\lambda C, \lambda D, \lambda E)$, Fig.6.19(d)

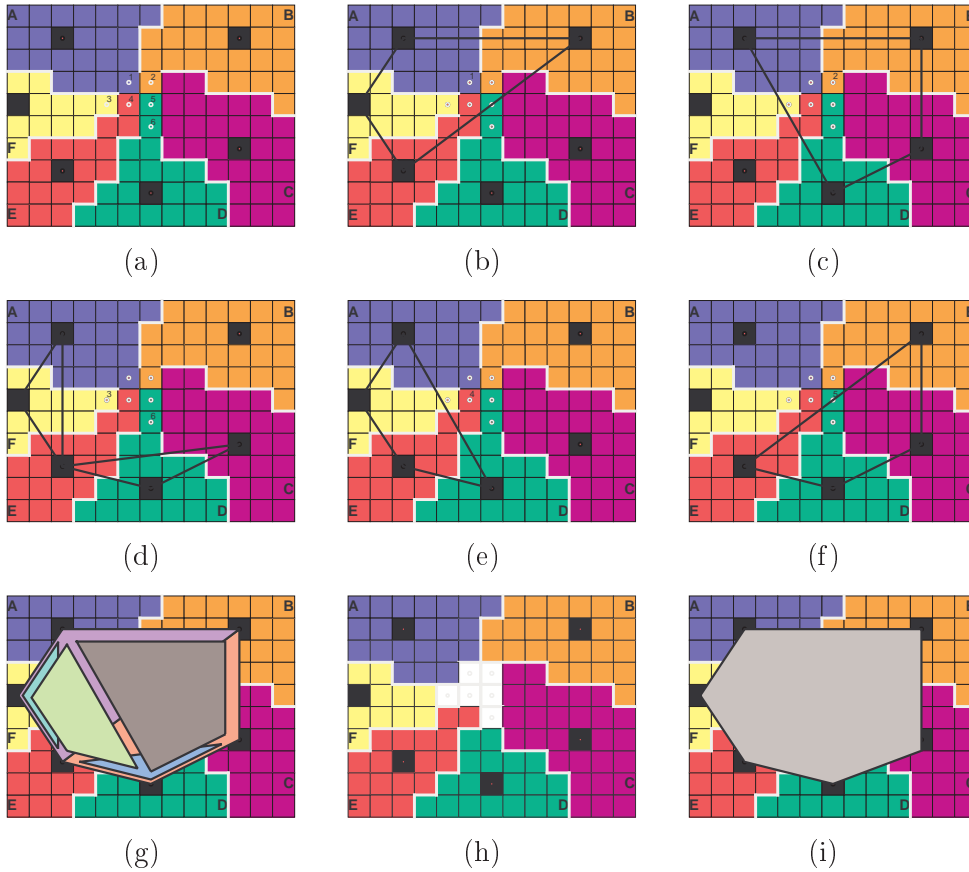


FIG. 6.19 – (a) Six régions de Voronoï construites autour des pixels en noir (les nœuds). Les sommets primaires du SKIZ sont représentés par les points blancs numérotés. Les arêtes du SKIZ sont schématisées aussi en blanc. (b) Le polygone dual du sommet $sp1$. (c) Le polygone dual du sommet $sp2$. (d) Le polygone dual du sommet $sp3$ et le polygone dual du sommet $sp6$. (e) Le polygone dual du sommet $sp4$. (f) Le polygone dual du sommet $sp5$. (g) Le maillage correspondant à l'ensemble des polygones duaux des sommets primaires. (h) La composante 4-connexe des sommets primaires. (i) Le maillage correspondant au sommet de Voronoï défini comme la composante 4-connexe des sommets primaires.

Dans cette configuration, il apparaît clairement que si nous construisons le maillage dual à partir de ces six sommets primaires, il contiendra des polygones *redondants*.

En effet, notons que dans cet exemple il y a deux sommets de cardinalité 3, strictement inclus dans deux sommets de cardinalité 4. Une première tentative pour résoudre le problème des polygones redondants consiste à ne pas construire les polygones duaux aux sommets primaires strictement inclus dans un autre sommet primaire de cardinalité supérieure. Mais, malheureusement, cette technique ne permet pas d'éliminer tous

les problèmes. Dans cet exemple, même si nous ne considérons que les quatre sommets $sp1$, $sp2$, $sp4$ et $s5$, il y aura toujours des polygones redondants dans le maillage dual. Ici, une solution consiste à construire les polygones duaux uniquement des sommets $sp1$ et $sp5$ (ou inversement, $sp2$ et $sp4$).

En pratique, les polygones redondants peuvent être éliminés plus tard dans le maillage dual avec un algorithme de *réparation de maillage*. Mais nous avons adopté une autre approche. Nous nous sommes basés sur l'observation que dans les configurations, comme celles de l'exemple donné, les sommets primaires qui provoquent des faces redondantes sont toujours connexes les uns aux autres. Dans l'exemple, si nous définissons un unique sommet de Voronoï à partir des sommets primaires du SKIZ, son dual sera un unique hexagone convexe ($SV = (\lambda A, \lambda B, \lambda C, \lambda D, \lambda E, \lambda F)$) (Fig.6.19(i)).

La discussion précédente justifie le fait que, pour transformer le SKIZ en un graphe adapté pour la dualité, nous avons choisi d'agglomérer les sommets de Voronoï primaires. Cette agrégation est nécessaire pour améliorer les propriétés du graphe et permettre une meilleure construction par dualité du maillage que nous cherchons. Par conséquent, nous définissons les sommets du graphe de Voronoï comme les composantes 6-connexes des sommets primaires dans le SKIZ.

Définition 6.2 (sommet du graphe de Voronoï) *Un sommet du graphe est défini par une composante 6-connexe de sommets primaires dans le SKIZ. Un tel sommet SV est représenté par le n -uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, obtenu par union d'ensembles à partir des sommets primaires qui le définissent. Le nombre n est appelé cardinalité du sommet, $n \in [3, \text{nombre total des noeuds}]$.*

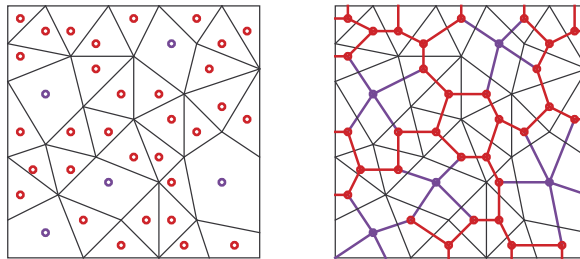


FIG. 6.20 – À gauche, un modèle polygonal et les sommets duaux des triangles (en rouge) et des polygones (en bleu) ; À droite, le graphe dual.

Avant de poursuivre avec la définition des arêtes du graphe de Voronoï, nous souhaitons revenir sur la propriété 8 et en donner une autre formulation en fonction des sommets du graphe de Voronoï que nous venons de définir.

En effet, dans l'espace discret, les sommets du graphe de Voronoï sont souvent de cardinalité supérieure à 3. Ceci est dû d'une part à la distance discrète et d'autre part au fait que les sommets sont obtenus par agglomération des sommets primaires. Par conséquent, dans le contexte discret, la méthode de Delaunay produit plutôt un modèle

polygonal de la surface qu'une triangulation au sens strict du terme. Nous proposons donc une reformulation de la propriété 8 qui relâche la condition sur le degré des sommets afin de pouvoir s'appliquer à une surface polygonale :

Propriété 9 *Le modèle polygonal dual d'un graphe de Voronoï $GV = (V, E)$ est une 2-variété combinatoire connexe sans bord, si et seulement si :*

1. *GV est connexe ;*
2. *tout sommet $v \in V$, de cardinalité n , est de degré n ;*
3. *GV est un graphe simple.*

Sur la figure 6.20, nous avons représenté une partie d'une surface polygonale, que nous supposons de nouveau sans bord, ainsi que son graphe dual (le graphe d'adjacence des faces). Les sommets rouges peuvent être interprétés comme des *sommets de Voronoï* de *cardinalité 3* car leurs duaux sont des triangles. Les sommets bleus correspondent aux polygones du modèle et peuvent être vus comme des *sommets de Voronoï* de *cardinalité supérieure à 3* (4 et 5, en occurrence). Les arêtes du graphe sont, de nouveau, interprétées comme des *arêtes de Voronoï*. Sur cet exemple, il est facile de voir que, les sommets de cardinalité 3 sont de degré 3, les sommets de cardinalité 4 sont de degré 4 et le sommet de cardinalité 5 est de degré 5. Cette dernière observation est vraie pour tout modèle polygonal 2-variété.

6.3.4.2 Les arêtes

Une arête du graphe de Voronoï doit relier deux sommets de Voronoï le long de la frontière commune de deux régions adjacentes.

Une telle arête peut être définie à partir du SKIZ avec la définition suivante :

Définition 6.3 (arête du SKIZ) *Une arête du SKIZ est définie par un ensemble de voxels dont le 6-voisinage (le voxel inclu) contient exactement 2 voxels de valeurs différentes. Une telle arête AV est représenté par une paire de valeurs (λ_1, λ_2) , où les λ_i sont les 2 valeurs des voxels qui définissent l'arête.*

Rappelons maintenant que nous avons choisi de ne pas vérifier les trois conditions sur le diagramme de Voronoï durant sa construction. Par conséquent, il peut présenter des anomalies topologiques qui rendent la connexion des sommets du graphe délicate. En effet, si le diagramme contient des régions non homéomorphes aux disques ou des régions ayant plus d'une unique frontière commune, les arêtes du SKIZ vont définir un multigraphe avec boucles au lieu d'un graphe simple (condition 3 du lemme 3).

À titre d'exemple, nous avons schématisé, sur la figure 6.21, une configuration pathologique où deux régions de Voronoï possèdent plus d'une unique frontière. Ce type de configurations apparaît essentiellement aux endroits de forte courbure comme les détails sur la surface de largeur proche d'un voxel. Ainsi, les dessins 2D doivent être interprétés comme une projection sur un plan d'un endroit pointu de la surface. La figure 6.21(a) représente une configuration $C1$ avec 7 sommets du graphe de Voronoï, obtenus après l'étape d'agglomération des sommets primaires et 7 arêtes de Voronoï.

Les définitions des sommets et des arêtes sont les suivantes :

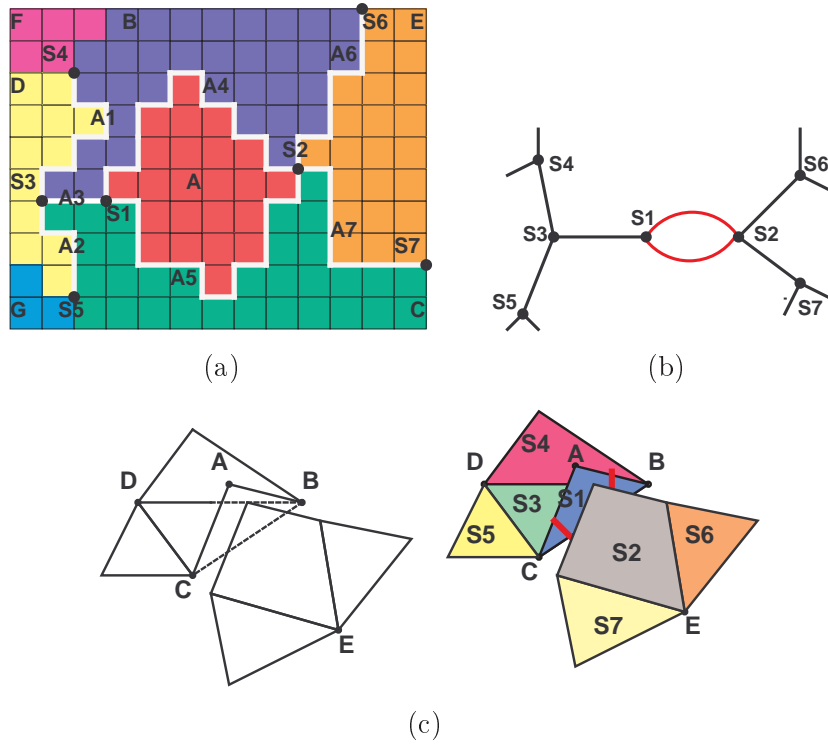


FIG. 6.21 – Exemple de configuration d’anomalie topologique. (a) Projection 2D de la configuration $C1$. (b) Le graphe de Voronoï $GV1$ de $C1$. (c) Les faces duales de $GV1$.

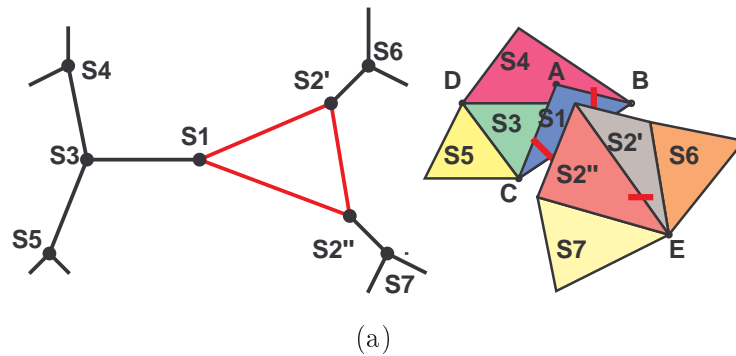


FIG. 6.22 – Correction locale du graphe de Voronoï $GV1$ de la configuration $C1$. Le dédoublement d’un sommet permet d’éviter les adjacences multiples entre les faces duales.

- $S1 = (\lambda A, \lambda B, \lambda C)$
- $S2 = (\lambda A, \lambda B, \lambda C, \lambda E)$

- $S3 = (\lambda B, \lambda C, \lambda D)$
- $S4 = (\lambda B, \lambda D, \lambda F)$
- $S5 = (\lambda C, \lambda D, \lambda G)$
- $S6 = (\lambda B, \lambda E, \lambda x)$
- $S7 = (\lambda C, \lambda E, \lambda y)$
- $A1 = (\lambda B, \lambda D)$
- $A2 = (\lambda C, \lambda D)$
- $A3 = (\lambda B, \lambda C)$
- $A4 = (\lambda A, \lambda B)$
- $A5 = (\lambda A, \lambda C)$
- $A6 = (\lambda B, \lambda E)$
- $A7 = (\lambda C, \lambda E)$

Dans cette configuration, les régions B et C ont une frontière et un sommet en commun (l'arête $A3$ et le sommet $S2$). Cette situation engendre un multigraphe $GV1$ montré sur la figure 6.21(b), dans lequel le sommet $S1$ est relié au sommet $S2$ par deux arêtes distinctes $A4$ et $A5$ (en rouge). Les arêtes multiples du graphe $GV1$ vont être traduites par une adjacence multiple entre les deux faces duales. C'est-à-dire que les faces auront plus d'une arête en commun. La figure 6.21(c) montre le maillage dual du graphe $GV1$. Le triangle ABC et le quadrilatère $ABEC$ possèdent deux arêtes en commun : AB et AC .

Remarquons maintenant que le maillage dual de cette configuration est topologiquement consistant même s'il présente des adjacences multiples. Cependant, ce n'est pas une 2-variété combinatoire, telle que nous l'avons définie dans le chapitre 3 et telle que nous souhaitons obtenir. Ainsi, pour éviter la multiadjacence entre les faces duales, il est nécessaire de transformer localement le graphe $GV1$. Une solution possible est montrée sur la figure 6.22, où le sommet $S2$ est dédoublé et connecté de sorte à ce que le quadrilatère $ABEC$ soit découpé en deux triangles (ABE et AEC).

La figure 6.23 illustre un autre type de configuration d'anomalies topologiques. Sur cet exemple nous avons 8 sommets et 8 arêtes de Voronoï dont les définitions sont les suivantes :

- $S1 = (\lambda A, \lambda B, \lambda C)$
- $S2 = (\lambda A, \lambda B, \lambda C)$
- $S3 = (\lambda B, \lambda C, \lambda D)$
- $S4 = (\lambda B, \lambda D, \lambda F)$
- $S5 = (\lambda C, \lambda D, \lambda G)$
- $S6 = (\lambda B, \lambda C, \lambda E)$
- $S7 = (\lambda C, \lambda E, \lambda y)$
- $S8 = (\lambda B, \lambda E, \lambda x)$
- $A1 = (\lambda B, \lambda D)$
- $A2 = (\lambda C, \lambda D)$
- $A3 = (\lambda B, \lambda C)$
- $A4 = (\lambda A, \lambda B)$
- $A5 = (\lambda A, \lambda C)$
- $A6 = (\lambda B, \lambda E)$

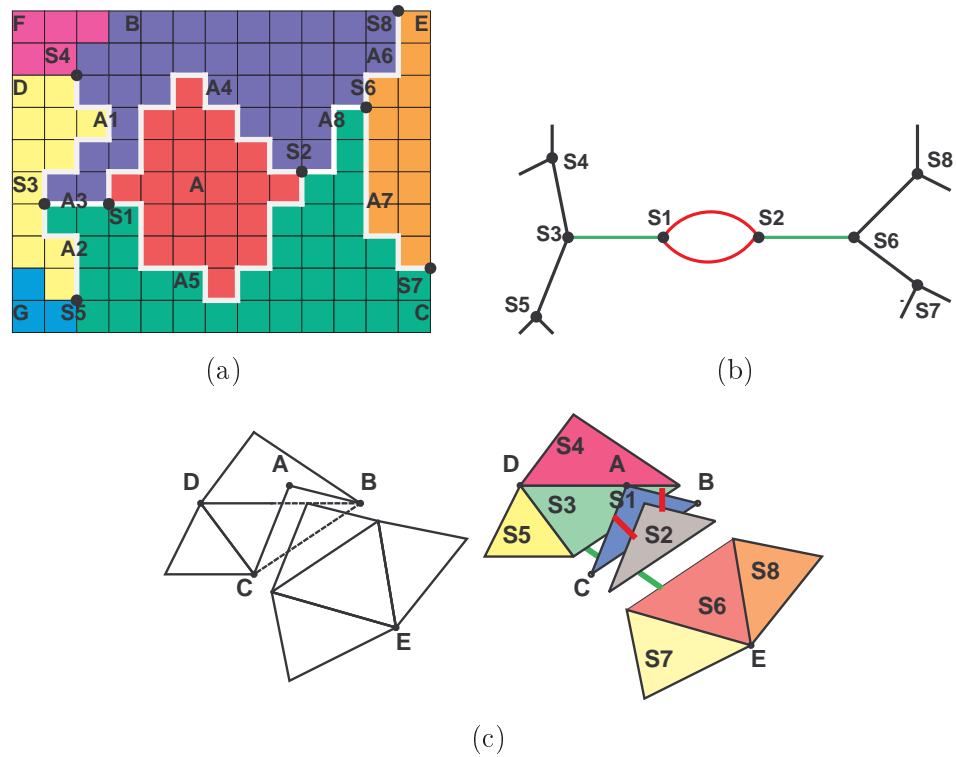


FIG. 6.23 – Exemple de configuration d’anomalie topologique. (a) Projection 2D de la configuration $C2$. (b) Le graphe de Voronoï $GV2$ de $C2$. (c) Les faces duales de $GV2$.

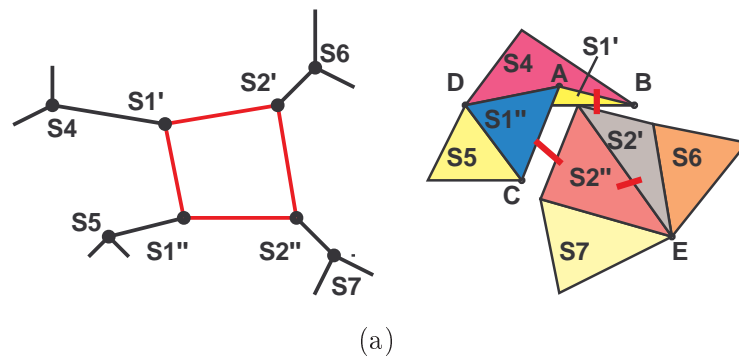


FIG. 6.24 – Transformation locale du graphe de Voronoï $GV2$ de la configuration $C2$ permettant d’améliorer la qualité d’approximation.

- $A7 = (\lambda C, \lambda E)$
- $A8 = (\lambda B, \lambda C)$

Dans ce cas, les régions B et C ont deux frontières en commun (les arêtes $A3$ et $A8$).

Le multigraphe induit par cette configuration ainsi que le maillage dual sont montrés respectivement sur la figure 6.23(b) et 6.23(c). Ici, le maillage dual est topologiquement consistant, même s'il y a un triangle en double (le triangle ABC est le dual du sommet $S1$ et du sommet $S2$). Le maillage correspondant est clairement de très mauvaise qualité d'approximation. Cependant, il est possible de trouver une solution en modifiant le graphe $GV2$ comme montré sur la figure 6.24. Le nombre de sommets de Voronoï reste le même, mais nous avons changé les définitions des sommets $S1$, $S2$, $S3$ et $S4$. Par exemple, le sommet $S1$ est d'abord virtuellement fusionné à $S3$, ce nouveau sommet virtuel est de cardinalité 4 et sa face duale est le quadrilatère $ABCD$. Ensuite, le sommet virtuel est transformé en deux sommets de cardinalité 3 en $S1'$ et $S1''$ (ce qui nous permet d'éviter les adjacences multiples). Le sommet $S2$ est transformé de façon symétrique avec le sommet $S6$.

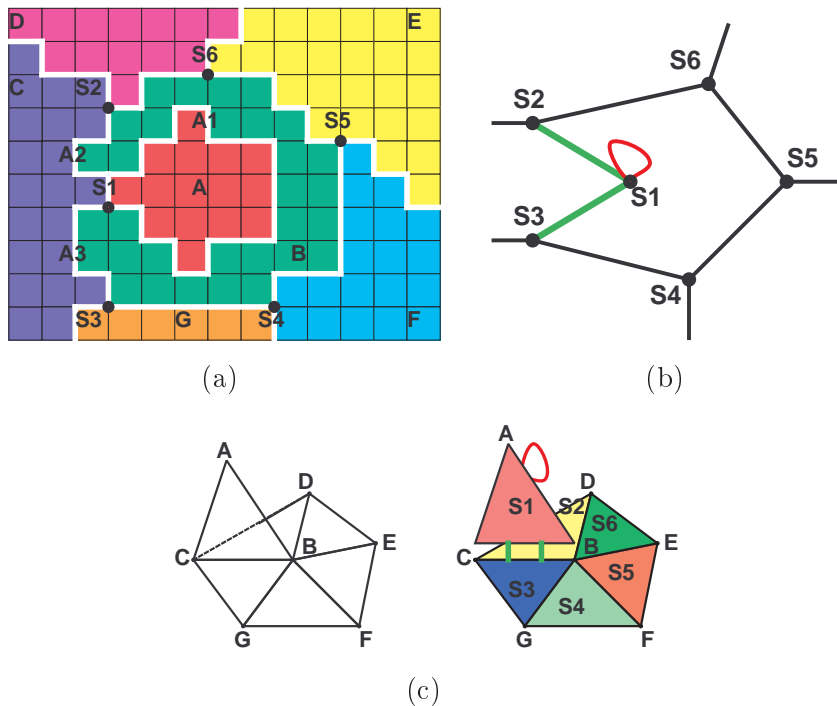


FIG. 6.25 – Exemple de configuration d'anomalie topologique. (a) Projection 2D de la configuration $C3$. (b) Le graphe de Voronoï $GV3$ de $C3$. (c) Les faces duales de $GV3$.

La figure 6.25 montre un dernier exemple d'anomalie topologique. Cette configuration apparaît lorsqu'une région de Voronoï n'est pas homéomorphe à un disque. La figure 6.25(a) représente 6 sommets et 12 arêtes. La région B , n'étant pas homéomorphe à un disque provoque une boucle (arête $A1 = (\lambda A, \lambda B)$) dans le graphe de Voronoï autour du sommet $S1$ et deux arêtes identiques $A2 = A3 = (\lambda B, \lambda C)$. Le multigraphe et le maillage dual sont montrés respectivement sur la figure 6.25(b) et 6.25(c). Le maillage n'est pas une 2-variété mais un complexe cellulaire car l'arête BC est incidente à trois

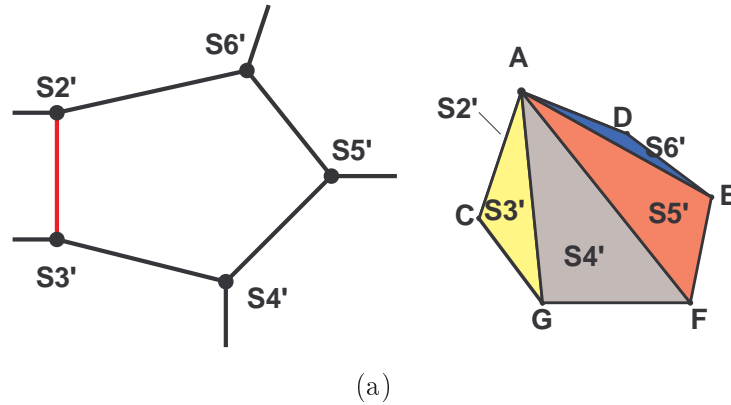


FIG. 6.26 – Transformation locale du graphe de Voronoï $GV3$ de la configuration $C3$ permettant d'obtenir une 2-variété au lieu d'un complexe cellulaire.

triangles différents. Pour éviter ce problème topologique, il est possible de transformer le graphe en redéfinissant les sommets voisins. La solution montrée sur la figure 6.26 consiste à supprimer le sommet $S1$ et redéfinir les sommets voisins afin que le maillage dual soit un cône de sommet A .

Les exemples présentés ci-dessus, nous montrent que la variabilité des configurations d'anomalies topologiques est très grande. En effet, il est facile de voir qu'en pratique il peut y avoir d'autres configurations pathologiques qui doivent être résolues différemment. Les incohérences topologiques dans le graphe peuvent provenir de deux raisons complémentaires : soit le bord discret en voxels définit mal la surface de l'objet ; soit le rayon de résolution choisi ne donne pas une densité des nœuds suffisante pour reconstruire correctement les petits détails.

Face à une telle diversité de configurations possibles, l'énumération de tous les cas avec les modifications topologiques requises nous semble une tâche irraisonnable. En d'autres termes, la transformation du SKIZ discret en un graphe de Voronoï remplissant les trois conditions du lemme 3, uniquement sur la base de considérations topologiques, semble compromise.

Par conséquent, nous avons choisi une solution qui consiste à résoudre ces problèmes topologiques dans le maillage dual, selon des critères géométriques. L'idée de base est de construire uniquement le *graphe simple maximal* inclu dans le multigraphe défini par le SKIZ. Ainsi, l'algorithme ne va garder que les arêtes reliant exactement 2 sommets de Voronoï différents et le graphe sera par construction un graphe simple. Si un sommet de Voronoï présente des arêtes multiples, c'est-à-dire soit voisin à lui-même, soit deux fois voisin à un autre sommet, l'algorithme supprime toutes les arêtes incidentes à ce sommet.

Ainsi une arête du graphe de Voronoï euclidien se définit comme suit :

Définition 6.4 (arête du graphe de Voronoï) Soit $AV = (\lambda_1, \lambda_2)$ une arête du SKIZ. AV est une arête du graphe de Voronoï si et seulement si elle relie deux sommets

de Voronoï distincts $SV1$ et $SV2$ et si aucun de ces sommets ne présente d'arêtes multiples.

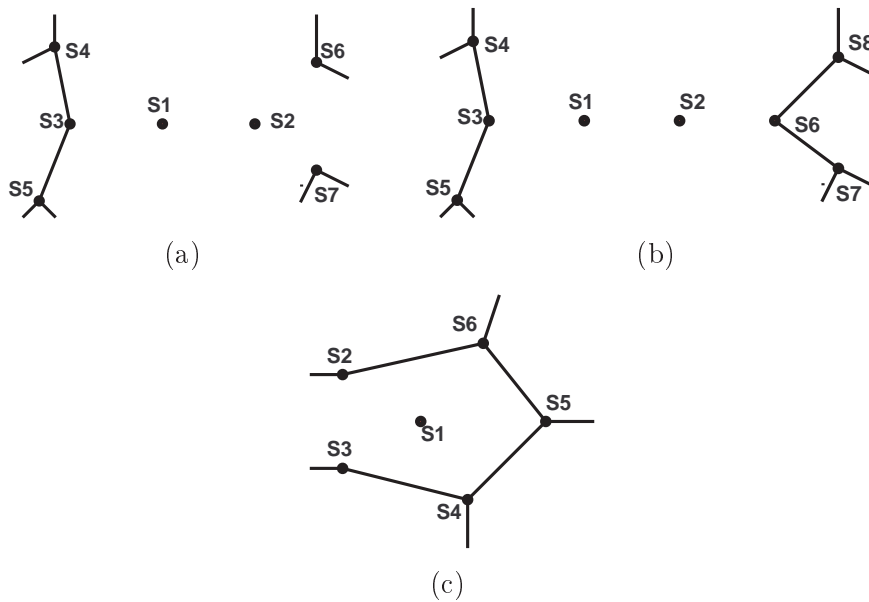


FIG. 6.27 – Les graphes de Voronoï simples des configurations d'exemples : (a) $C1$. (b) $C2$. (c) $C3$.

L'algorithme de construction du graphe de Voronoï que nous proposons (Algorithme 6.3) prend en entrée l'image du diagramme de Voronoï Discret, détecte les sommets et les arêtes en utilisant les définitions énoncées ci-dessus, et fournit un graphe $GV = (V, E)$. L'ensemble des sommets V représente les composantes connexes des sommets primaires et chaque sommet est étiqueté avec le n -uplet correspondant $(\lambda_i, \lambda_j, \dots, \lambda_n)$. Les arêtes de l'ensemble E sont étiquetées avec les paires (λ_i, λ_j) et relient deux sommets de Voronoï dont les labels contiennent les deux valeurs λ_i et λ_j . Si l'algorithme détecte une boucle ou des arêtes multiples pour un sommet de Voronoï, les arêtes incidentes à ce sommet ne sont pas construites. Cependant, l'algorithme met à jours une liste des *nœuds critiques* et enregistre les informations topologiques portées par les arêtes ignorées. Par exemple, pour une arête de Voronoï non construite $AV = (\lambda_A, \lambda_B)$, l'algorithme marque les nœuds A et B comme *critiques* et enregistre l'information qu'ils sont voisins. Cette information sera utilisée lors de la fermeture des bords du maillage dual.

La figure 6.27 montre les trois graphes de Voronoï correspondant aux exemples précédents $C1$, $C2$ et $C3$. Prenons, par exemple, la configuration $C2$. Lors de la construction du graphe de Voronoï il y a 4 arêtes ignorées car les sommets $S1$ et $S2$ présentent des arêtes multiples :

- $A3 = (\lambda_B, \lambda_C)$
- $A4 = (\lambda_A, \lambda_B)$

- $A5 = (\lambda A, \lambda C)$
- $A8 = (\lambda B, \lambda C)$

L'information topologique portée par ces arêtes est traduite au niveau des *nœuds critiques* du maillage. Pour chacun d'entre eux, l'algorithme construit une *liste des voisins critiques* :

- $A = \{B, C\}$
- $B = \{A, C\}$
- $C = \{A, B\}$

Cette information topologique peut être utilisée lors de la fermeture géométrique du maillage dual qui sera forcément à bord car le graphe de Voronoï n'est pas connexe.

Algorithme 6.3 Construction du graphe de Voronoï

Require: *ImgLabel* : Image des zones d'influence des nœuds

Ensure: $GV = (V, E)$: graphe de Voronoï sans boucles et arêtes-multiples

- 1: Parcourir *ImgLabel* et détecter les sommets primaires et les arêtes de Voronoï
 - 2: Construire les composantes 6-connexes des sommets primaires
 - 3: Chaque composante 6-connexes devient un sommet $v \in V$
 - 4: **for** (toute arête détectée $a = (\lambda i, \lambda j)$) **do**
 - 5: Chercher les sommets de Voronoï de la forme $(\lambda i, \lambda j, \lambda k, \dots)$
 - 6: **if** (il y a exactement 2 tels sommets $V1$ et $V2$) **then**
 - 7: Ajouter l'arête $e = (V1, V2) \in E$
 - 8: **else**
 - 9: Supprimer les multi-arêtes et les boucles
 - 10: Mettre à jours la table des *nœuds critiques*
 - 11: **end if**
 - 12: **end for**
-

La figure 6.28 montre les graphes de Voronoï que nous avons obtenus après la transformation des SKIZs de la figure 6.14. Ces graphes simples sont fins et ils sont mieux adaptés pour l'opération de dualité car ils résolvent les problèmes des faces redondantes.

6.3.5 Construction du modèle topologique

Le graphe de Voronoï obtenu précédemment est simple par construction. Cependant, pour que son maillage dual soit une 2-variété combinatoire il doit remplir aussi les deux autres conditions du lemme 3 : il doit être connexe et tout sommet de cardinalité n doit être de degré n .

Comme nous l'avons remarqué précédemment si le graphe n'est pas connexe, soit le bord en voxel définit mal la surface de l'objet, soit le rayon de résolution choisi n'est pas adapté à la taille des détails de la surface. Ainsi lorsque le graphe n'est pas connexe, nous avons deux possibilités : soit on recommence la reconstruction avec un rayon plus petit, soit on décide de continuer la reconstruction et de fermer les trous dans le maillage dual.

Pour pouvoir décider entre ces deux alternatives, nous allons compter les sommets

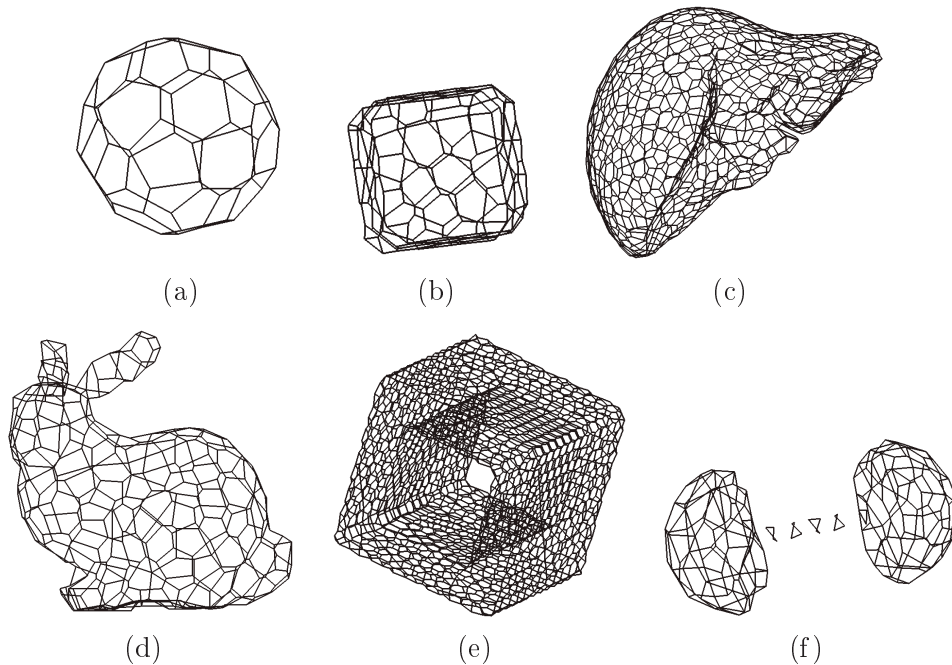


FIG. 6.28 – Graphes de Voronoï adaptés pour la dualité. (a) La sphère, $r = 10$. (b) Le cube, $r = 10$. (c) Le foie, $r = 10$. (d) Le lapin, $r = 10$. (e) Le tore, $r = 5$. (f) L'haltère, $r = 3$.

invalides dans le graphe. Un sommet est *invalide* si son degré est inférieur à sa cardinalité. On pourra remarquer qu'un graphe non connexe présente forcément des sommets invalides.

Définition 6.5 (critère de validité) *Un sommet d'un graphe de Voronoï est dit invalide si et seulement si son degré est inférieur à sa cardinalité. Si ces nombres sont égaux, le sommet est dit valide pour la dualité.*

Le nombre de sommets invalides dans le graphe de Voronoï nous permet de découvrir, à ce stade précoce (avant même la construction du maillage), laquelle des deux démarches il faut adopter. En pratique il existe trois cas :

- le graphe *n'a pas* de sommets invalides : dans ce cas, le graphe remplit les trois conditions du lemme 3 et son modèle polygonal dual est une 2-variété combinatoire.
- le graphe *a peu* de sommets invalides : si le graphe présente un faible pourcentage de sommets invalides ($< 0.1\%$), le maillage dual contient des petits trous.
- le graphe *a beaucoup* de sommets invalides : ceci indique que la densité des nœuds sélectionnés n'est pas suffisante et il est nécessaire de recommencer.

L'algorithme de la transformation duale que nous proposons construit un modèle topologique à partir du graphe de Voronoï. Nous avons choisi d'utiliser le modèle des

2-G-cartes qui nous permet de représenter des variétés sans ou avec bord. L'algorithme transforme successivement chaque sommet valide en une face polygonale et coud les faces adjacentes selon les arêtes du graphe.

Pour ce faire, il suffit de procéder comme suit :

- Tout sommet de Voronoï valide génère un polygone.

Considérons la figure 6.29. Soit $SV = (\lambda A, \lambda B, \lambda C)$ un sommet de Voronoï. Son polygone dual est $PD = (v1, v2, v3)$, où les vi sont les nœuds de labels λi . Le polygone PD est ajouté dans la 2-G-carte : les brins des sommets sont cousus par α_0 et α_1 .

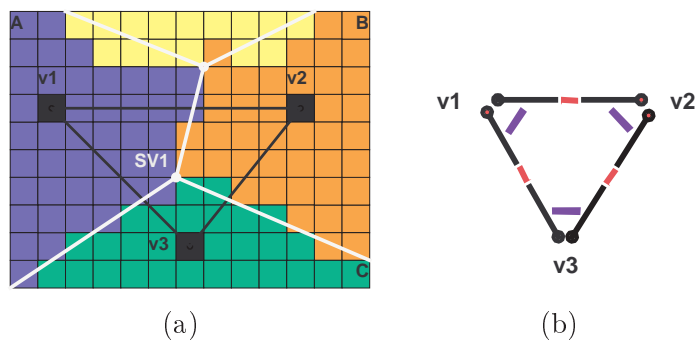


FIG. 6.29 – Construction d'une face dans la 2-G-carte. Les coutures α_0 et α_1 apparaissent, respectivement en rouge et en bleu.

- Une arête de Voronoï définit les α_2 des arêtes duales.

Considérons la figure 6.30. Soit $AV = (\lambda A, \lambda B)$ une arête de Voronoï entre deux sommets de Voronoï $SV1$ et $SV2$. Les polygones duaux $PD1$ et $PD2$ correspondants sont adjacents le long de l'arête duale $[v1, v2]$. Dans la 2-G-carte, l'arête $[v1, v2]$ de $PD1$ est cousue par α_2 avec l'arête $[v2, v1]$ du polygone $PD2$.

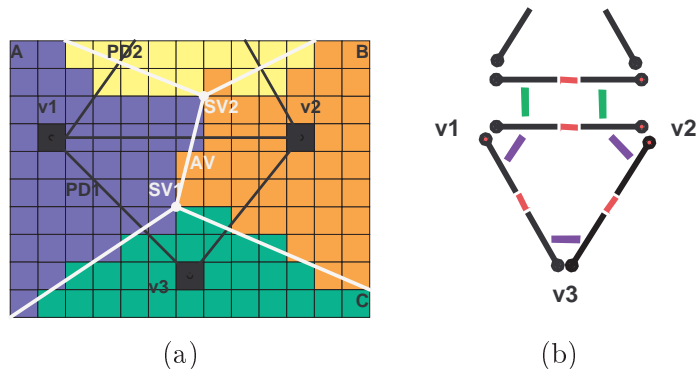


FIG. 6.30 – Couture de deux faces dans la 2-G-carte. Les α_2 apparaissent en vert.

L'algorithme 6.4 fournit un modèle polygonal de la surface garanti 2-variété. La figure 6.31 montre le modèle obtenu pour un foie segmenté avec un rayon $r = 5$ voxels.

Algorithme 6.4 Construction de la 2-G-carte**Require:** $GV = (V, E)$: graphe de Voronoï sans boucles et arêtes-multiples**Ensure:** $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$: 2-G-carte de la variété duale, éventuellement avec bords

- 1: **for** (tout sommet de Voronoï *valide* $v \in V$) **do**
- 2: Construire le polygone dual $p \in G$
- 3: Coudre p par α_2 selon les arêtes de Voronoï incidentes à v
- 4: **end for**

Si le graphe de Voronoï ne contient pas de sommets invalides, le modèle est une 2-variété fermée par construction. En revanche, la présence de sommets invalides va provoquer des trous dans le modèle qu'il faut fermer en préservant la topologie de l'objet.

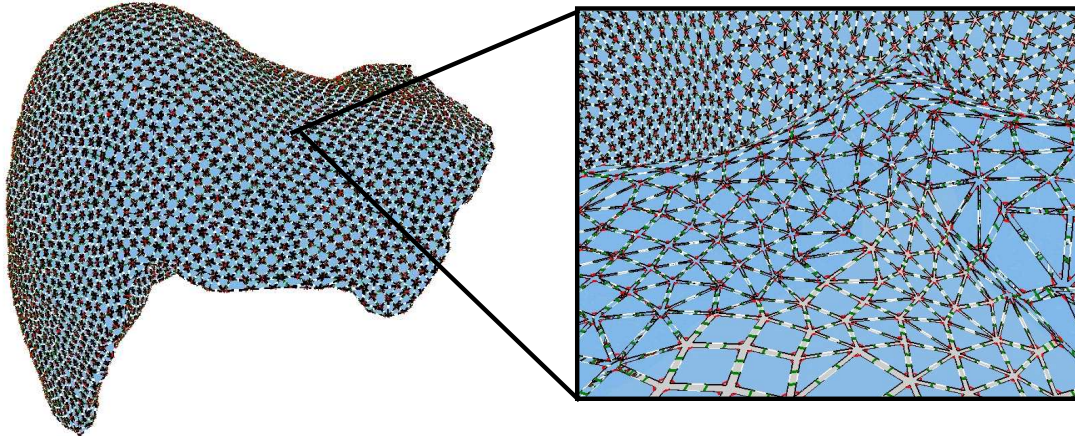


FIG. 6.31 – La 2-G-carte de la surface d'un foie obtenue par transformation duale à partir de son graphe de Voronoï euclidien (voir Fig.6.28(c)).

Une 2-variété à bord peut être :

- soit connexe : lorsqu'il y a peu de sommets invalides
- soit non connexe : lorsqu'il y a beaucoup de sommets invalides.

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, nous ne continuons pas la reconstruction si le graphe de Voronoï présente beaucoup de sommets invalides car ceci indique que la densité des nœuds choisi n'est pas suffisante pour obtenir une reconstruction correcte. De plus, proposer un algorithme de fermeture des bords d'une 2-variété non connexe, tout en garantissant que le maillage soit homéomorphe à l'objet de départ, semble une tâche ambitieuse.

En pratique donc, les modèles reconstruits sont des 2-variétés connexes à bord. Le modèle topologique de la 2-G-carte nous permet d'obtenir le nombre et la taille des bords en temps constant : il suffit de considérer tous les brins libres par α_2 .

Rappelons maintenant que les bords d'une 2-variété combinatoire sont des 1-variétés combinatoires fermées. Une 2-variété connexe peut donc être fermée topologiquement

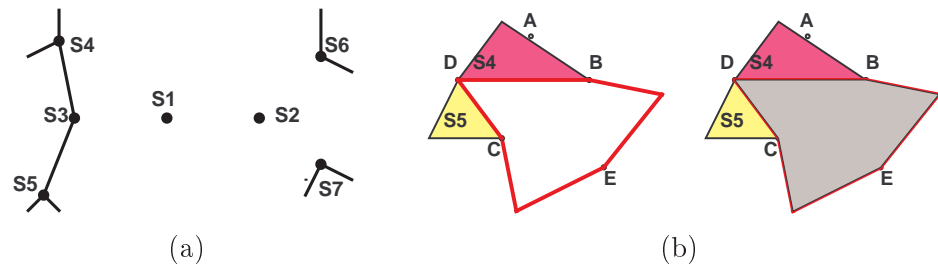


FIG. 6.32 – Configuration $C1$. (a) graphe de Voronoï (b) maillage dual avec trou (en rouge) et fermeture par un couvercle (en gris).

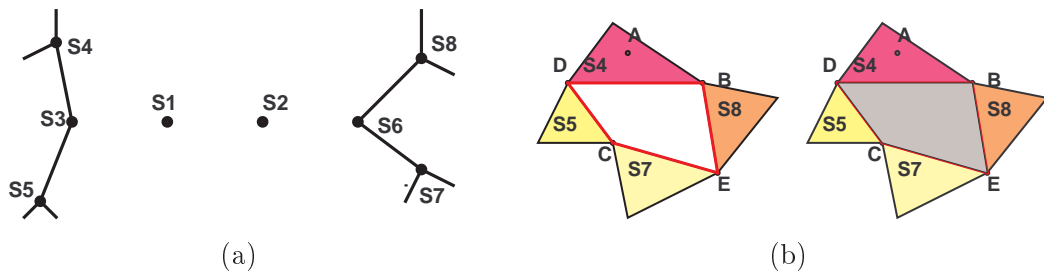


FIG. 6.33 – Configuration $C2$. (a) graphe de Voronoï (b) maillage dual avec trou (en rouge) et fermeture par un couvercle (en gris).

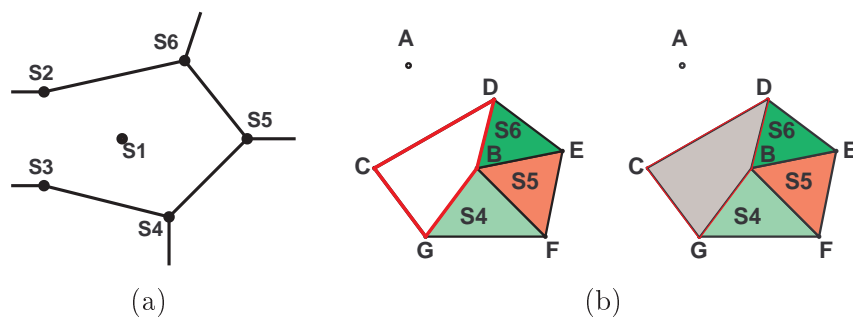


FIG. 6.34 – Configuration $C3$. (a) graphe de Voronoï (b) maillage dual avec trou (en rouge) et fermeture par un couvercle (en gris).

en ajoutant tous les *couvercles* définis par les 1-variétés des trous. Plus formellement, soit $V = (S, A, F)$ une 2-variété finie connexe à bord d'au moins deux faces. Chaque composante connexe du bord étant un cycle simple du 1-squelette (S, A) , quand on rajoute à F tous ces cycles, dits *couvercles*, on obtient une 2-variété $V' = (S, A, F')$ sans bord. De plus, la fermeture par un couvercle conserve la connexité et l'orientabilité. Elle

conserve le nombre de sommets et le nombre d'arêtes du maillage.

Ainsi, en pratique, nous pouvons toujours fermer topologiquement les modèles reconstruits par notre méthode afin d'obtenir des 2-variétés sans bord. À titre d'exemple, les figures 6.32, 6.33 et 6.34 illustrent les graphes de Voronoï, les trous dans les maillages et leurs fermetures par les couvercles topologiques des trois configurations pathologiques $C1$, $C2$ et $C3$. Nous pouvons remarquer que, dans les trois cas, le nœud A , situé sur la « pointe », n'est pas pris en compte et la fermeture par le couvercle a pour effet de « gommer » cette pointe. Cependant, pour améliorer la qualité d'approximation, il est possible soit de modifier le plongement du couvercle, soit d'utiliser la *liste des voisins critiques* construite précédemment.

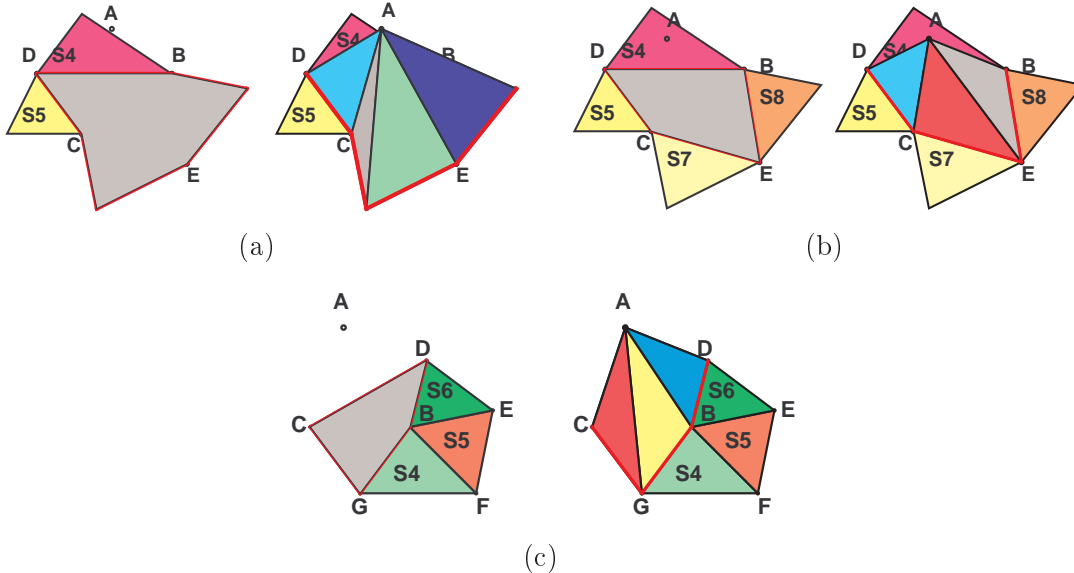


FIG. 6.35 – Modification des couvercles topologiques pour une meilleure approximation géométrique. (a) $C1$ (b) $C2$ (c) $C3$

Considérons, par exemple, la configuration $C2$, où le bord à fermer est $DBEC$. Au lieu de boucher ce trou directement en ajoutant le couvercle $DBEC$, il est possible de consulter les *listes des voisins critiques* de chacun des nœuds qui le compose. En l'occurrence, les nœuds B et C possèdent de telles listes : $B = \{A, C\}$, $C = \{A, B\}$. La présence du nœud A dans les deux listes indique que le bord $DBEC$ doit être fermé avec ce nœud pour une meilleure qualité d'approximation. Par conséquent, l'algorithme transforme le couvercle $DBEC$ en quatre triangles : ABE , AEC , ACD et ABD . La figure 6.35 illustre les modifications des couvercles dans les trois configurations d'exemple.

Parmi les *nœuds critiques* de chaque bord, l'algorithme de fermeture vérifie la présence de *nœuds critiques isolés* comme le nœud A ci-dessus. En pratique, il existe trois cas de figures :

- il n'y a pas de nœuds critiques isolés ;

- il y a un unique nœud critique isolé ;
- il y a plusieurs nœuds critiques isolés.

Si un bord ne présente pas de *nœuds critiques isolés*, le bord est fermé par ajout du couvercle défini par les nœuds du bord. Ce couvercle est éventuellement triangulé à partir de son isobarycentre. Si le bord présente un unique *nœud critique isolé*, il est fermé en construisant des triangles à partir de ce nœud avec les arêtes du bord. En revanche, la présence de plusieurs *nœuds critiques isolés* signifie que le bord est grand (composé de beaucoup d'arêtes). Dans ces cas, il est toujours possible de modifier le plongement du couvercle et de le découper en triangles cependant cette transformation n'est pas triviale et demande des traitements compliqués. En pratique, nous ne rencontrons pas souvent de bords composés de plus d'une dizaine d'arêtes et présentant plusieurs nœuds critiques. C'est pourquoi, dans son implémentation actuelle, l'algorithme 6.5 calcule l'isobarycentre des nœuds isolés et construit des triangles à partir de ce nouveau point.

Algorithme 6.5 Fermetures des bords dans la 2-G-carte

Require: $G = (B, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$: 2-G-carte avec 2-bords

Ensure: $G' = (B', \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2)$: 2-G-carte sans 2-bords

- 1: Construire la liste L des 2-bords de G
 - 2: **for** (tout 2-bord $b \in L$) **do**
 - 3: **if** (pas de nœuds critiques isolés) **then**
 - 4: Ajouter le couvercle de b
 - 5: **end if**
 - 6: **if** (un unique nœud critique isolé n) **then**
 - 7: Ajouter une ombrelle de triangles à partir de n et les arêtes de b
 - 8: **end if**
 - 9: **if** (plusieurs nœuds critiques isolés n_1, n_2, \dots) **then**
 - 10: Calculer $iso =$ l'isobarycentre de n_1, n_2, \dots
 - 11: Ajouter une ombrelle de triangles à partir de iso et les arêtes de b
 - 12: **end if**
 - 13: **end for**
-

6.4 Résultats

La méthode de reconstruction du *Delaunay Discret sur les voxels* présente notre première tentative de transposition du concept de la dualité Voronoï-Delaunay dans l'espace discret d'une image 3D. Cette méthode peut être utilisée pour reconstruire la surface d'un objet discret sous forme d'un modèle polygonal de topologie connue. En d'autres termes, lorsqu'elle réussit, la méthode fournit une modélisation de la surface avec une 2-variété fermée. Ce modèle est relativement régulier et peut être transformé en une triangulation de la surface, proche d'une triangulation de Delaunay. Par conséquent, les maillages résultants satisfont aux critères de validité, requis par la plupart des algorithmes de visualisation, d'analyse, de simulation ou de réalité virtuelle.

Nous avons appliqué la méthode sur différents types d'objets discrets 3D. Les tests ont été effectués sur des objets discrets dont le bord en voxels définit correctement la surface de l'objet. Parmi ces objets il y a des organes segmentés à partir d'une image médicale, mais également des objets manufacturés présentant des arêtes vives et des coins.

Le tableau 6.3 résume quelques résultats. Il indique la taille des objets, le rayon de résolution choisi r , le nombre de sommets invalides dans le graphe de Voronoï, le nombre de trous dans le modèle polygonal initial, le nombre de triangles du maillage final et le temps d'exécution en secondes sur un PC standard. Les résultats montrent que, pour des rayons bien adaptés ($r \in [4, 10]$), la méthode fournit soit directement une 2-variété fermée, soit une 2-variété connexe à bord.

Dans le cas où le graphe de Voronoï ne contient aucun sommet invalide, le modèle polygonal obtenu est une 2-variété sans bord.

La figure 6.36 montre trois 2-G-cartes modélisant la surface d'une sphère, d'un cube et d'un foie obtenues avec notre méthode pour un rayon de résolution $r = 10$. Nous pouvons remarquer que les bords du cube sont bien représentés et que les arêtes vives et les angles sont préservés.

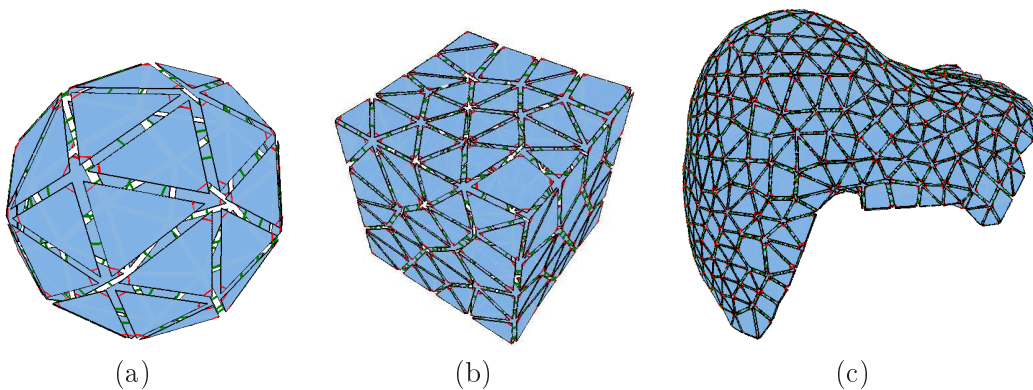


FIG. 6.36 – Les 2-G-cartes modélisant les surfaces de trois objets discrets. Les coutures α_1 et α_2 apparaissent, respectivement, en rouge et en vert. (a) la sphère, $r = 10$. (b) le cube, $r = 10$. (c) le foie, $r = 10$.

Résultats					
Objet	rayon	# SVorInv	# 2-bords	# triangles	T
Cube (531441 voxels)	10	0	0	192	2.13
	5	0	0	720	2.64
Sphère (112931 voxels)	10	0	0	60	0.11
	20	0	0	12	0.12
	30	0	0	4	0.09
Lapin (1623694 voxels)	10	0	0	447	2.46
	5	0	0	1560	4.43
Tore (1878120 voxels)	5	0	0	2971	11.4
	3	8	4	6644	29.5
Poumon gauche (2433918 v.)	5	4	3	3287	18.71
Poumon droit (2925408 v.)	5	2	2	3660	19.75
Rein gauche (470533 v.)	5	0	0	745	7.75
Rein droit (432837 v.)	5	0	0	737	7.72
Rate (655827 v.)	5	0	0	1103	8.32
Foie(a) (655827 v.)	5	7	3	3550	16.26
Foie(b) (6510362 v.)	5	1	1	4087	21.55
Foie(c) (4385588 v.)	5	0	0	3069	11.83
Foie(d) (5297070 v.)	5	0	0	4119	28.23
Foie(e) (6297070 v.)	5	1	2	5067	31.45
Foie(f) (632327 v.)	5	0	0	3538	17.28
Foie 1 (6222527 v.)	10	7	2	2536	23.42
	5	12	4	4530	33.79
Dragon	4	48	27	3118	29.23
Bouddha	4	9	6	15900	107.2
Haltère (35591 v.)	10	0	0	30	0.8
	5	9	2	100	0.16
	3	12	2	244	0.21
	2	39	11	362	0.27
	1	43	4	52	0.27

TAB. 6.3 – Tableau des résultats. Le rayon de résolution r est spécifié en voxels. La colonne #SVorInv indique le nombre de sommets de Voronoï *invalides*. La colonne #2 – bords indique le nombre de 2-bords dans la 2-G-carte résultante. La colonne #triangles indique le nombre de triangles du maillage final. La colonne T indique le temps d'exécution en secondes.

La figure 6.37 montre des exemples de maillages triangulaires obtenus à partir des modèles topologiques des 2-G-cartes après la triangulation des faces polygonales. Dans ces cas, comme illustré sur le tableau 6.3, les graphes de Voronoï ne contiennent pas de sommets invalides, et les modèles sont des 2-variétés fermées et orientables, par construction. Les trois premiers maillages modélisent la surface de la sphère, mais ils ont été obtenus avec des rayons de résolutions différents. Sur ces exemples, nous pouvons

remarquer l'impact du rayon de résolution r choisi pour la reconstruction sur le nombre de faces générées et la qualité de l'approximation.

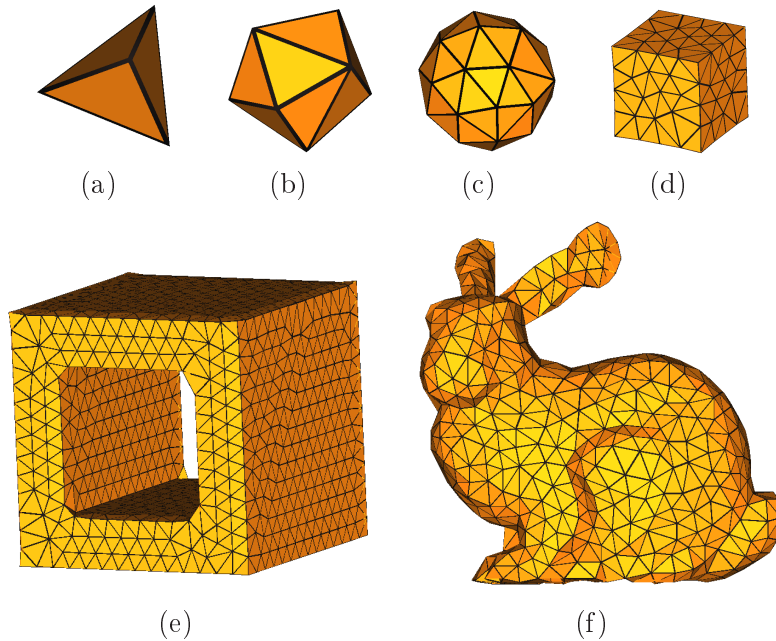


FIG. 6.37 – Des surfaces, 2-variétés triangulaires sans bords. (a) la sphère, $r = 30$. (b) la sphère, $r = 20$. (c) la sphère, $r = 10$. (d) le cube, $r = 10$. (e) le tore, $r = 5$. (f) le lapin, $r = 5$.

Nous avons appliqué la méthode sur une base d'organes comme des poumons, foies, reins et rates, segmentés à partir d'images scanners de patients réels. Il s'avère que, dans la majorité des cas, le bord en voxels de ces objets définit correctement leurs surfaces. Par conséquent, pour des rayons de résolution d'environ 5 voxels, la méthode permet d'obtenir des modèles topologiques de qualité. La figure 6.38 montre six maillages triangulaires obtenus pour six foies différents avec un rayon de résolution $r = 5$ voxels. Nous pouvons remarquer que pour la moitié des cas, la méthode fournit directement une 2-variété fermée de la surface, alors que, dans les autres cas, la 2-variété est connexe et les petits trous sont fermés facilement avec notre algorithme de fermeture des bords.

La figure 6.39 montre quatre histogrammes permettant d'apprécier la régularité des maillages reconstruits. Nous avons calculé l'aspect ratio σ_K d'un triangle K comme le rapport entre sa plus petite et plus grande arête. Le paramètre σ_K est d'autant plus proche de 1 que l'élément est régulier. Si le triangle est équilatéral, $\sigma_K = 1$. Les histogrammes 6.39(a) et (b) correspondent aux maillages du lapin avec respectivement $r = 10$ et $r = 5$ voxels. Les histogrammes 6.39(c) et (d) correspondent aux maillages d'un foie discret pour les mêmes rayons de résolution.

L'un des avantages majeurs de la méthode est qu'elle peut être utilisée telle quelle (sans aucune modification) afin de reconstruire simultanément plusieurs composantes connexes d'une image multicolore. La figure 6.40 montre les six maillages triangulaires

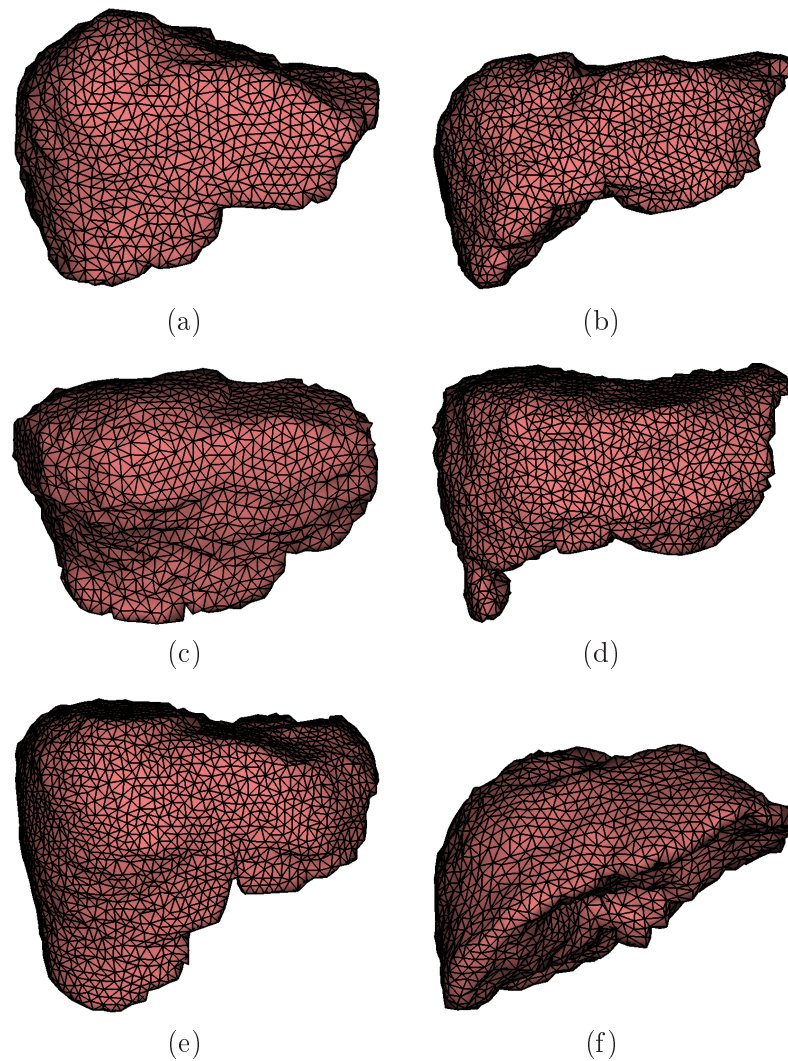


FIG. 6.38 – Des triangulations finales de six foies segmentés à partir d’images scanners. (a) $\#triangles = 3550$. (b) $\#triangles = 4087$. (c) $\#triangles = 3069$. (d) $\#triangles = 4119$. (e) $\#triangles = 5067$. (f) $\#triangles = 3538$.

obtenus avec la méthode à partir d’une image médicale segmentée. La figure 6.41 montre d’autres exemples en rendu lissé.

Dans les cas où le graphe de Voronoï contient quelques sommets invalides, les maillages reconstruits sont connexes mais présentent des petits trous. Comme nous l’avons expliqué précédemment, ces trous apparaissent à des endroits de la surface de l’objet de forte courbure. Considérons, par exemple, le foie représenté sur la figure 6.42. La figure 6.42(a) montre une vue agrandie sur le lobe gauche de ce foie. À cet endroit, la frontière discrète ($F DV$) définie comme un ensemble de voxels est épaisse, ce qui induit

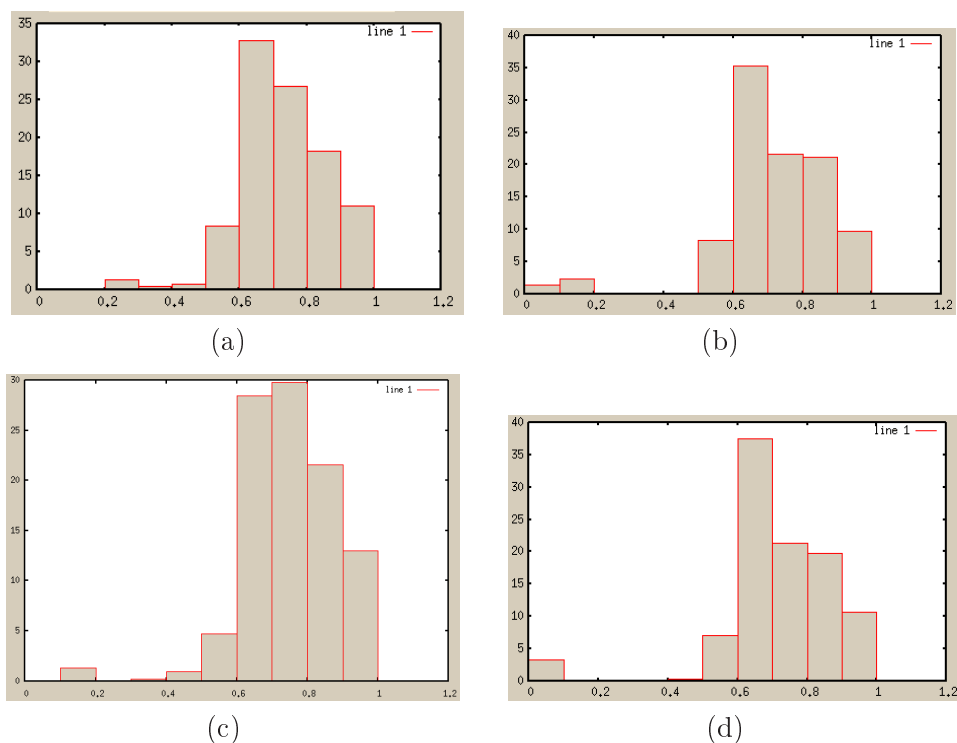


FIG. 6.39 – Histogrammes de qualité des maillages où l'abscisse indique l'aspect ratio σ_K alors que l'ordonnée montre le pourcentage de triangles pour chaque aspect ratio. (a) Maillage du lapin pour $r = 10$. (b) Maillage du lapin pour $r = 5$. (c) Maillage du foie pour $r = 10$. (d) Maillage du foie pour $r = 5$.

des sommets invalides dans le graphe de Voronoï. Les figures 6.42(b) et (c) montrent les trous présents dans les modèles topologiques reconstruits pour deux rayons de résolution différents. Nous pouvons remarquer que ces trous sont relativement petits et, sans surprise, ils se situent sur le bord du lobe gauche du foie. Cependant, ces trous peuvent être bouchés efficacement avec l'algorithme de fermeture des trous que nous avons présenté. La figure 6.42(d) illustre le maillage triangulaire obtenu après la fermeture des quatre 2-bords et la triangulation du modèle topologique pour $r = 5$.

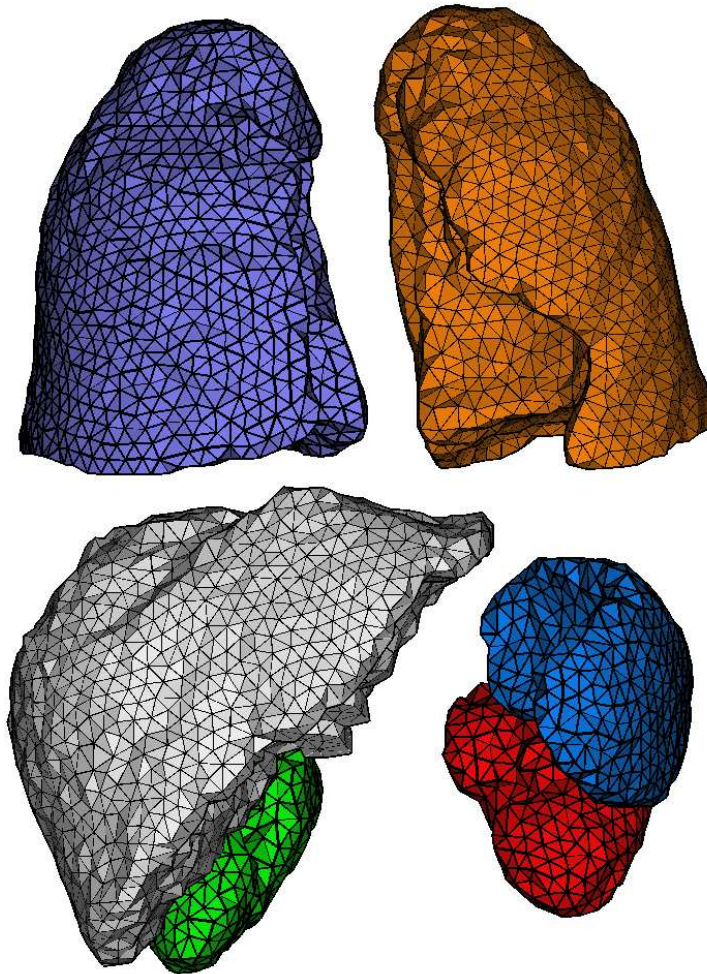


FIG. 6.40 – Modèles triangulaires obtenus avec la méthode de *Delaunay Discret sur les voxels* pour des organes segmentés, $r = 5$ voxels. Poumon droit : $\#triangles = 3660$. Poumon gauche : $\#triangles = 3287$. Foie : $\#triangles = 3538$. Rein droit : $\#triangles = 737$. Rein gauche : $\#triangles = 745$. Rate : $\#triangles = 1103$.

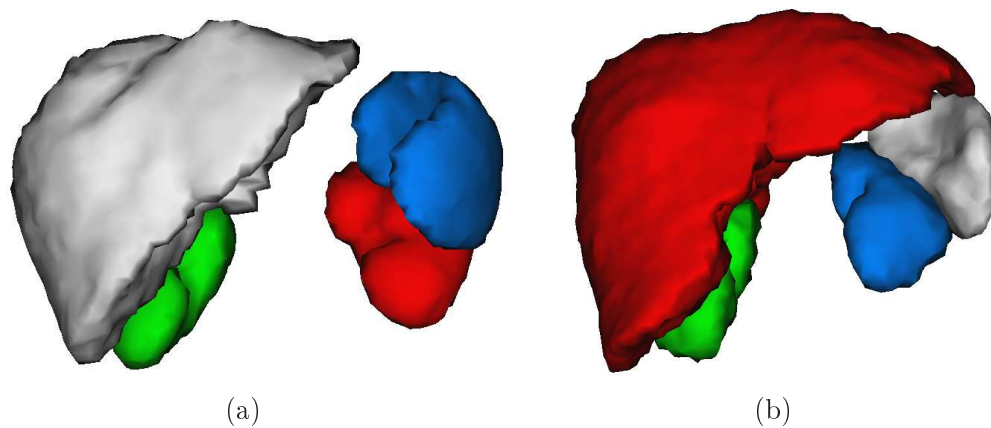


FIG. 6.41 – Reconstructions obtenues pour deux cas cliniques différents avec $r = 5$ voxels. Affichage lissé.

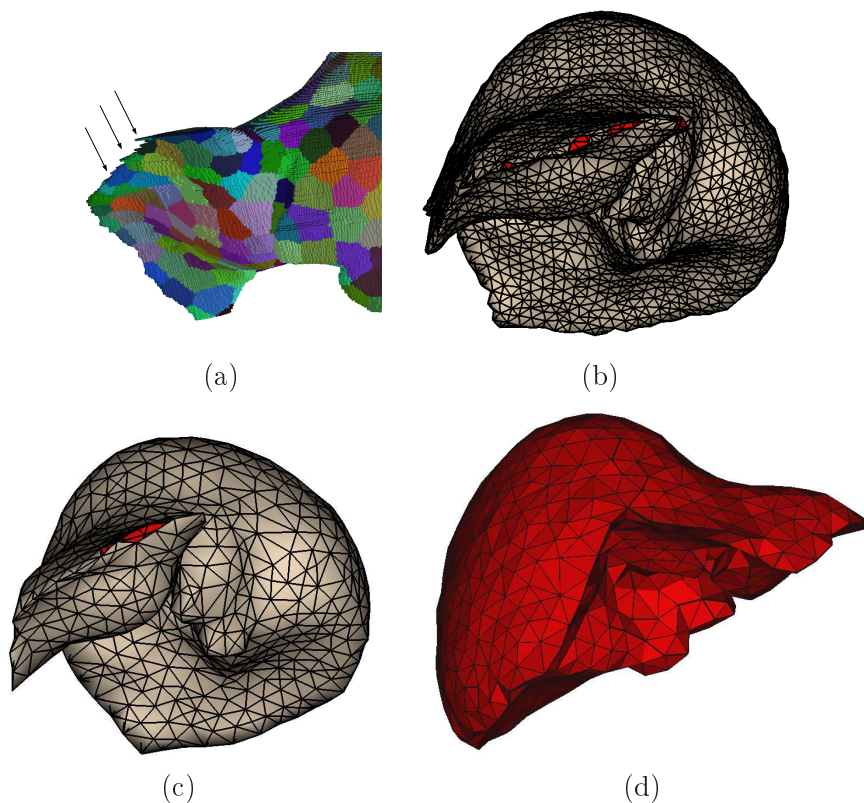


FIG. 6.42 – (a) Zoom sur le bord antérieur gauche du foie. (b) Avec $r = 5$ le modèle reconstruit présente quatre petits trous sur le bord antérieur (en rouge). (c) Avec $r = 10$ le modèle contient deux plus grands trous sur le même bord (en rouge). (d) Maillage triangulaire obtenu après la fermeture des quatre trous pour $r = 5$.

D'autres exemples de maillages obtenus avec la méthode *Delaunay Discret sur les voxels* sont montrés sur les figures 6.43 et 6.44. Le modèle initial du bouddha, reconstruit avec un rayon $r = 4$ voxels, est de genre $g = 6$ (c'est bien le genre que nous avons calculé durant les pré-traitements de découverte et simplification de la topologie). Cependant, le graphe de Voronoï présente 9 sommets invalides sur 7806 sommets de Voronoï en tout, c'est-à-dire 0,11%. Par conséquent, le maillage dual contient 6 trous de tailles 3, 6, 5, 4, 6 et 4 arêtes (en rouge sur la figure 6.43(a)). Ces trous sont fermés sans problème avec l'algorithme que nous avons présenté. Le maillage triangulaire final est donc une 2-variété sans bord de genre 6 et contient 159000 triangles (voir Fig.6.43(b)).

La figure 6.44 montre le maillage du dragon reconstruit avec un rayon de résolution $r = 4$ voxels. Ici, le graphe de Voronoï contient 3,1% de sommets invalides ce qui est traduit par la présence de 17 trous dans le modèle dual (en rouge sur la figure 6.44(a)). La taille de ces trous varie entre 3 et 10 arêtes. Dans ce cas, la 2-variété reconstruite est de genre 1 et connexe et donc nous pouvons toujours fermer ses 2-bords pour obtenir une 2-variété fermée de genre 1. Cependant, le maillage résultant est trop grossier et approxime mal la surface de l'objet (voir Fig.6.44(b)). En effet, notons que dans cet exemple, les problèmes topologiques viennent du fait que le rayon de résolution choisi r n'est pas suffisamment petit par rapport à la taille des détails fins de l'objet (au niveau des dents, des griffes et des oreilles).

Considérons maintenant l'haltère discrète. La figure 6.45 montre quelques reconstructions de cet objet, obtenues pour des rayons de résolution différents. Parmi nos exemples, c'est l'objet le plus compliqué à reconstruire. Il n'est pas homogène, c'est-à-dire qu'il contient des régions courbes et des régions plates, ainsi que des arêtes vives et des angles droits. De plus, la barre étant de largeur 5 voxels, alors que les hémisphères sont de rayon 30 voxels, l'objet fait « cohabiter » des détails de tailles très différentes. Par conséquent, pour ce type d'objet, le choix du rayon de résolution s'avère particulièrement critique pour la reconstruction. Comme nous pouvons nous convaincre sur la figure 6.45, aucun des cinq rayons de résolution ne permet de construire une 2-variété à bord connexe. En effet, cet exemple illustre clairement une limite de la méthode de *Delaunay Discret sur les voxels*. Pour que la reconstruction réussisse, le rayon de sélection des nœuds doit être suffisamment petit pour capturer correctement la barre. Or, comme nous allons le voir dans la section suivante, le rayon de résolution de la méthode possède une borne inférieure car la définition des sommets de Voronoï devient impossible pour des rayons plus petits que 3 voxels. Notons que cette limitation s'expliquent essentiellement en raison de la définition de la frontière discrète utilisée et va être résolue dans la méthode de *Delaunay Discret sur les pointels* qui est basée sur une autre approche de modélisation de la frontière discrète (voir Chapitre 7).

En conclusion, nous pouvons dire que, pour des rayons de résolution bien choisis par rapport à la taille et l'aspect général des objets discrets, la méthode fournit rapidement des maillages de propriétés géométriques acceptables (relativement réguliers) et de propriétés topologiques connues. Dans la majorité des cas, lorsque la méthode réussit, ces modèles sont, ou peuvent être ramenés à des 2-variétés fermées et orientables. En revanche, lorsque la méthode échoue, cela indique généralement que la distribution des nœuds n'est pas optimale pour une surface donnée. Une des alternatives possibles pour

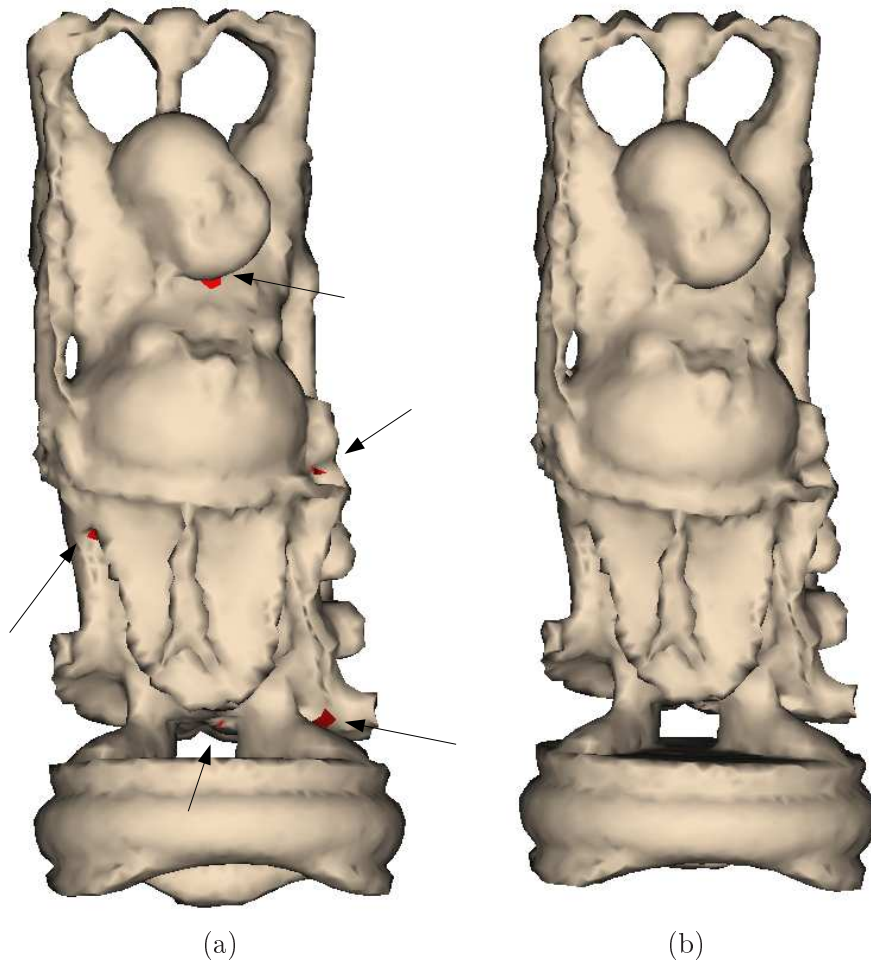


FIG. 6.43 – (a) Le maillage du bouddha contient 6 trous pour le rayon de résolution $r = 4$ (en rouge). (b) Maillage triangulaire obtenu après la fermeture de ces bords.

remédier à ce problème consiste à adapter le rayon r pour améliorer les résultats. Nous consacrons la section suivante à ce sujet.

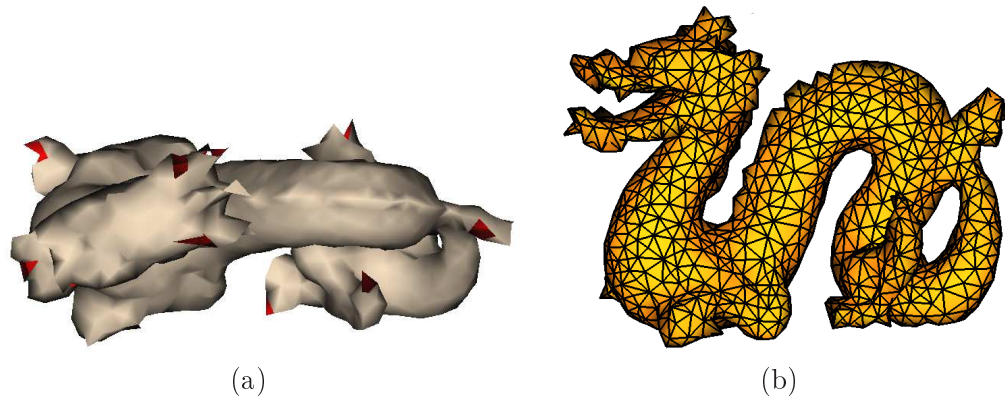


FIG. 6.44 – (a) Le maillage du dragon contient 17 trous pour le rayon de résolution $r = 4$ (en rouge). (b) Maillage triangulaire obtenu après la fermeture de ces bords.

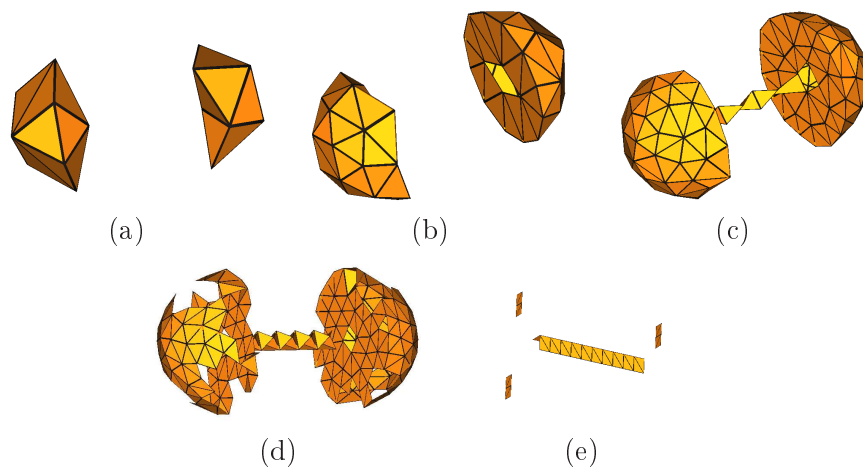


FIG. 6.45 – Les maillages surfaciques obtenus pour l'haltère discret. (a) $r = 10$ (b) $r = 5$. (c) $r = 3$. (d) $r = 2$. (e) $r = 1$.

6.5 Adaptation du rayon de résolution

Nous avons pu voir précédemment que, dans la méthode de Delaunay Discret, la distribution des nœuds influence grandement la qualité du modèle résultant.

En effet, obtenir une distribution « optimale » d'un ensemble de points sur la surface d'un objet 3D est un problème très complexe. Beaucoup de travaux ont été réalisés en algorithmique géométrique afin de trouver des critères d'échantillonnage optimal d'une surface continue [Ede01, BO03, ACK01a]. Les résultats théoriques sont basés sur la loi de Nyquist qui stipule qu'un signal continu ne peut être reconstruit correctement à partir de ses échantillons que s'il ne contient pas de fréquence supérieure à la moitié de la fréquence d'échantillonnage. En d'autres termes, ce théorème implique que la densité des échantillons doit être inversement proportionnelle à la distance des échantillons à l'axe médian d'un objet 3D. Par conséquent, dans le cadre théorique, aux endroits où l'axe médian « touche » la surface de l'objet, il faut une infinité de points échantillons pour que la reconstruction soit garantie.

En effet, ce résultat théorique implique, que dans la majorité des cas, il n'est pas possible de trouver une distribution « optimale », surtout dans l'espace discret où les axes médians sont très sensibles aux bruits, contiennent des barbules (branches indésirables) et touchent souvent la frontière de l'objet. Par conséquent, dans l'espace discret, un algorithme de sélection adaptative des nœuds doit être basé sur d'autres critères, de préférence locaux.

Le critère le plus populaire consiste à adapter la densité des nœuds en fonction de la courbure locale. Ceci revient à sélectionner plus de nœuds, à une distance plus proche, sur les endroits de la surface présentant une forte courbure et à sélectionner moins de nœuds, à une distance plus importante, sur les endroits plus plats. Une telle distribution adaptative des nœuds améliore la qualité de l'approximation géométrique. Le modèle résultant est plus proche de la surface discrète, en terme de distance.

En pratique, la sélection adaptative des nœuds revient à adapter le rayon r durant l'étape, en fonction de la courbure, c'est-à-dire « freiner » la sélection aux endroits courbes et l'« accélérer » aux endroits plutôt plats. À l'arrivée, il y aura plus de nœuds aux endroits de forte courbure et moins aux endroits plus plats.

Pour obtenir l'exemple représenté sur la figure 6.46, nous avons appliqué une pondération linéaire trouvée expérimentalement.

Mais avant de se lancer dans la recherche et l'étude de fonctions de pondération plus complexes et automatiques, il est important de remarquer que, dans tous les cas, le rayon r doit avoir une borne inférieure et une borne supérieure. La borne supérieure se justifie avec la nécessité de borner la taille des triangles et sert à éviter des rayons trop importants (voir infinis) aux endroits plats de la surface. En revanche, la borne inférieure est nécessaire, tout simplement, pour que cette méthode discrète marche.

En effet, pour le Delaunay Discret, tel que présenté jusqu'ici, plus le rayon r devint petit, plus la définition des sommets de Voronoï devient ambiguë. L'image 6.47 illustre les composantes connexes des sommets de Voronoï pour trois rayons r différents, calculées sur la surface d'un foie discret. Nous pouvons remarquer que plus le rayon baisse, plus grandes deviennent les composantes connexes des sommets primaires. Il est facile

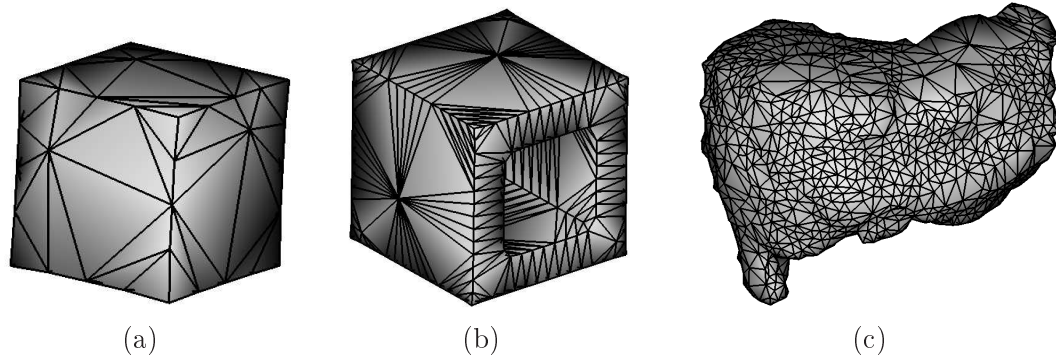


FIG. 6.46 – Maillages triangulaires adaptatifs (a) $r \in [3, 10]$. (b) $r \in [3, 20]$. (c) $r \in [4, 10]$.

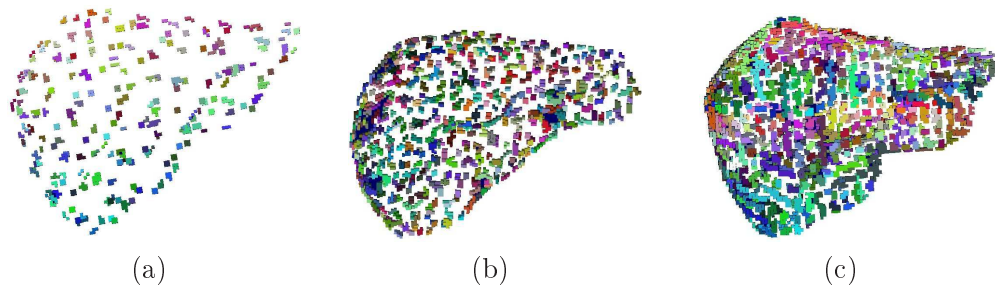


FIG. 6.47 – Sommets de Voronoï pour des rayons différents. (a) $r = 10$ voxels, (b) $r = 5$ voxels et (c) $r = 3$ voxels

de voir que pour $r = 0$, tous les voxels de la frontière discrète sont considérés comme les nœuds du modèle. Les régions de Voronoï sont confondues à ces nœuds et par conséquent, tous les voxels seront considérés comme sommets primaires dans le SKIZ. Ils définissent une seule composante 6-connexe et le graphe de Voronoï aura un seul sommet. Ainsi, le problème revient à sa case de départ, à savoir : comment connecter les nœuds pour obtenir un maillage polygonal de la surface.

Nos résultats expérimentaux ont indiqué que la définition des sommets du graphe de Voronoï comme les composantes connexes des sommets primaires est cohérente pour des rayons de résolution supérieurs à 3 voxels.

Cette borne inférieure du rayon de résolution explique les résultats obtenus sur le dragon et l'haltère que nous avons présentés dans la section précédente. En effet, le meilleur maillage que la méthode puisse reconstruire à partir du dragon discret est le maillage grossier obtenu avec $r = 4$ voxels (voir Fig.7.11(b)). Pour un rayon $r = 3$, le graphe de Voronoï présente 4% de sommets invalides, le modèle dual n'est pas connexe et contient 26 trous dont la taille varie entre 3 et 16 arêtes. Le même phénomène apparaît dans le cas de l'haltère. Les rayons $r = 10$ et $r = 5$ sont clairement trop grands pour « capter » la barre de 5 voxels, alors que les rayons inférieurs ou égaux à

3 voxels provoquent un pourcentage très élevé de sommets de Voronoï invalides, ce qui compromet la reconstruction.

Par conséquent, le rayon de résolution de la méthode de *Delaunay Discret sur les voxels* peut être adapté dans l'intervalle $[3, max]$. La borne supérieure dépend de l'objet à reconstruire, elle peut être calculée, par exemple, en fonction de la courbure maximale. Par ailleurs, la présence de cette borne inférieure explique le fait que la méthode de *Delaunay Discret sur les voxels* n'est pas capable de reconstruire des objets très fins comme des veines et des os, par exemple. Dans le chapitre suivant, nous verrons comment résoudre ces problèmes en utilisant une autre définition de la frontière discrète des objets voxels.

6.6 Extension volumétrique

L'une des vertus les plus remarquables de l'algorithme de *Delaunay Discret sur les voxels* réside dans le fait qu'il permet une généralisation de la méthode en 3D pour reconstruire un maillage volumique. En effet, la définition de la surface discrète comme un ensemble de voxels offre la possibilité d'étendre en 3D tous les algorithmes que nous avons proposés.

Cette extension est triviale pour les étapes de la sélection des nœuds et la construction des régions de Voronoï Discret. L'algorithme de sélection des nœuds doit être modifié afin de distribuer d'abord des nœuds sur la surface et ensuite dans le volume de l'objet 3D. Ensuite, pour obtenir les régions 3D de Voronoï de ces nœuds, il suffit de modifier l'algorithme pour qu'il propage les labels aussi dans le volume de l'objet et pas uniquement sur la surface.

Cependant, la définition du graphe de Voronoï 3D est une tâche beaucoup plus délicate et demande une étude approfondie que nous n'avons pas réalisée dans le cadre de ce travail. Nous avons effectué juste quelques tests préliminaires qui semblent plutôt encourageants.

La figure 6.48(a) montre le SKIZ 3D d'un cube (l'ensemble des voxels possédant au moins 2 voisins de couleurs différentes). Sur la figure on reconnaît facilement les faces des régions de Voronoï 3D. Les arêtes et les sommets de ce SKIZ sont montrés sur la figure 6.48(b) : ce sont les voxels possédant au moins 3 voisins de couleurs différentes.

Nous avons défini les sommets du graphe de Voronoï 3D comme les composantes 6-connexes des sommets primaires du SKIZ 3D (voxels ayant 4 ou plus voisins de couleur différente). Le maillage montré sur la figure 6.48(b) a été obtenu en construisant le polyèdre dual pour chaque sommet de Voronoï. Par contre, les arêtes de Voronoï n'étant pas définies, les polyèdres ne sont pas cousus le long de leurs faces communes. Le maillage contient des *slivers* et n'est pas une 3-variété topologique mais un complexe cellulaire car il y a des faces communes à trois polyèdres.

La figure 6.49 montre un autre exemple de maillage volumique obtenu à partir d'un foie segmenté.

Ces tests préliminaires tentent de montrer que l'extension de la méthode en 3D est, du moins, réalisable. Il est certain que les conditions sur le rayon de résolution et le

type des objets pouvant être reconstruits seront plus restrictives qu'en 2D. Néanmoins, la méthode 3D pourrait se révéler efficace pour la génération de maillage 3D à partir d'organes segmentés comme des foies, poumons, rates et reins.

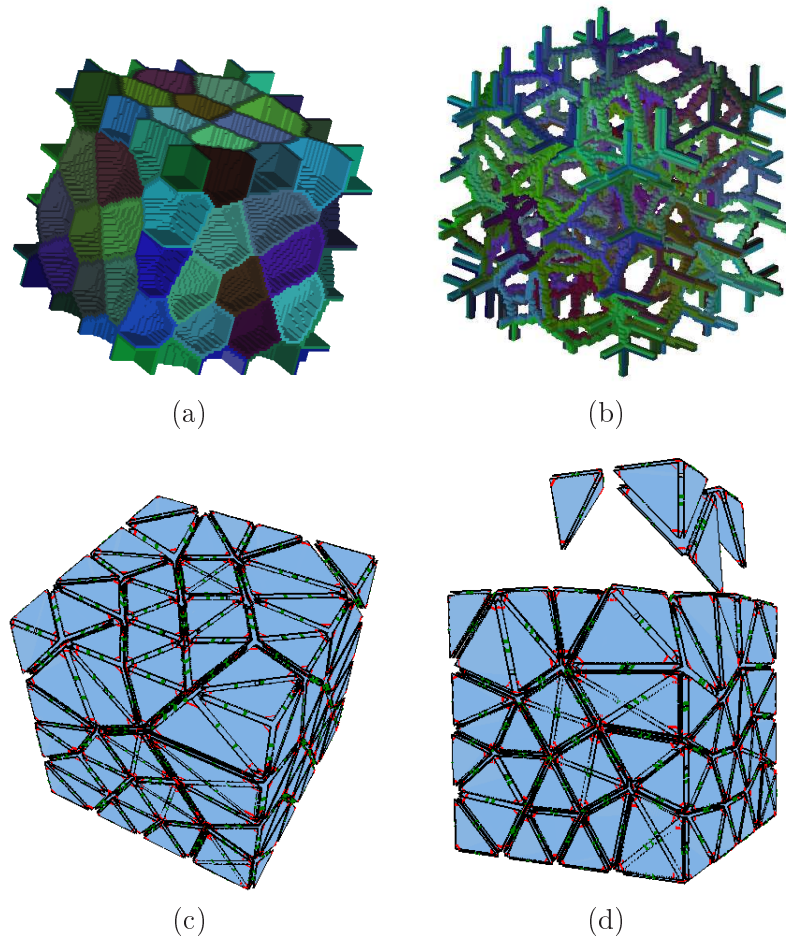


FIG. 6.48 – SKIZ 3D d'un cube.

6.7 Bilan

Dans ce chapitre, nous avons présenté un premier algorithme de reconstruction surfacique à partir d'images 3D. La méthode de *Delaunay Discret sur les voxels* permet de construire un maillage triangulaire, de résolution contrôlée, à partir de la frontière discrète d'objets voxels.

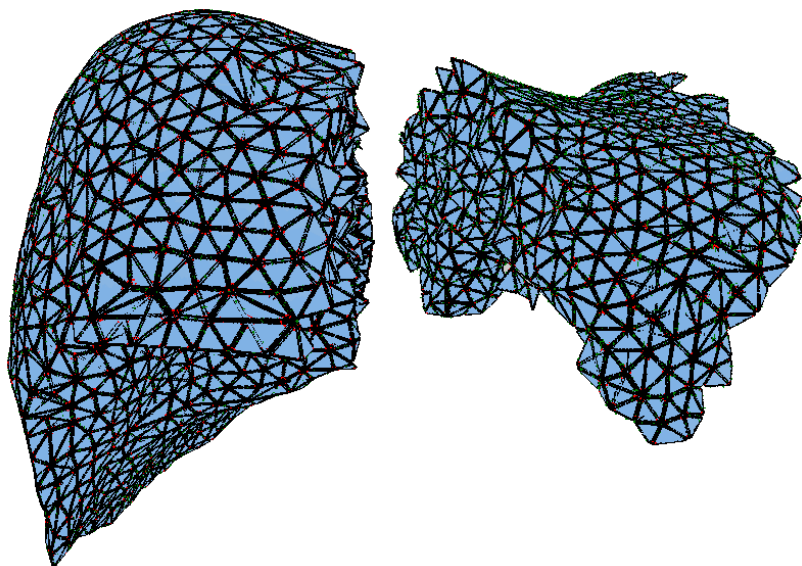


FIG. 6.49 – Maillage volumique d'un foie segmenté.

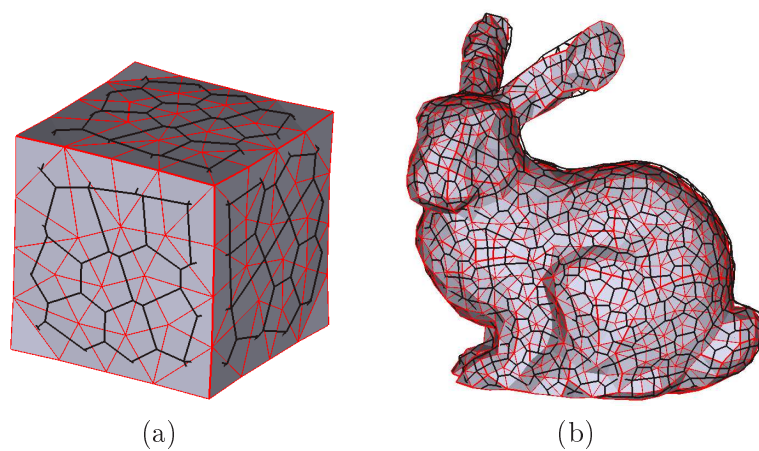


FIG. 6.50 – Le principe de la dualité entre le graphe de Voronoï Discret (en noir) et une triangulation de Delaunay (en rouge). (a) cube, $r = 10$. (b) lapin, $r = 5$.

Aspects positifs

La méthode de *Delaunay Discret sur les voxels* se caractérise par le fait qu'elle est entièrement discrète. Elle est composée d'un ensemble d'algorithmes discrets de morphologie mathématique. Tous les calculs sont effectués en nombres entiers et les algorithmes ne rencontrent pas de problèmes d'instabilités numériques. La méthode peut être utilisée pour reconstruire des objets de différentes connexités (6-, 18- ou 26-

connexe) sous condition de prendre les masques de voisinage adéquats. De plus, elle peut être intégrée directement dans des bibliothèques de traitement d'images comme *ITK*, par exemple.

Par ailleurs, la méthode se caractérise par sa modulabilité. Si nous désirons l'appliquer dans un contexte bien particulier, sur des objets bien précis, il est possible d'améliorer plusieurs étapes, en fonction des connaissances spécifiques du domaine : utiliser une meilleure approximation de la courbure ; mettre en place des algorithmes permettant de calculer automatiquement le meilleur rayon de résolution r pour un objet donné ; étudier en détails toutes les anomalies topologiques présentes dans le graphe de Voronoï et mettre en place toutes les règles de modifications topologiques nécessaires ; etc.

La méthode offre aussi la possibilité de contrôler la résolution du maillage ainsi que sa régularité. Pour des rayons de résolution constants, les maillages fournis sont relativement réguliers et proches d'une triangulation de Delaunay. De plus, la méthode construit un modèle topologique (une 2-G-carte) de la surface qui pourrait être plongé différemment que dans un maillage triangulaire. Par ailleurs, la méthode semble extensible en 3D pour reconstruire des maillages volumiques à partir des objets voxels. Finalement, la méthode offre la possibilité de reconstruire simultanément plusieurs composantes connexes d'une image multicolore.

Aspects négatifs

La majeure limitation de la méthode de *Delaunay Discret sur les voxels* est le fait qu'elle n'est pas adaptée pour la reconstruction de structures fines comme les veines et les os. Cette limitation est due, d'une part, à la définition de la frontière discrète et, d'autre part, à la borne inférieure du rayon de résolution.

Rappelons que pour des objets très fins, la surface discrète définie comme un sous-ensemble de voxels (le bord interne) n'est pas forcément une surface de Jordan. De plus, la segmentation topologique de cette surface à l'aide des nombres topologiques montre qu'elle contient, non seulement, des *points de surfaces*, des *points du bord* et des *points de jonction de surfaces* mais aussi des *points de courbes* et des *points de jonctions de courbes*. La présence des points de courbes induit une modélisation inadéquate de la surface de l'objet voxel et explique pourquoi notre algorithme de reconstruction peine à construire une surface cohérente à partir d'une « non-surface ».

Par ailleurs, nous avons vu que la définition des sommets du graphe de Voronoï comme les composantes connexes des sommets primaires induit une borne inférieure pour le rayon de résolution. Rappelons que pour des rayons plus petits que 3 voxels, la définition des sommets de Voronoï devient impossible. Cette borne inférieure sur le rayon de résolution donne une autre des raisons pour lesquelles la méthode échoue à reconstruire les surfaces d'objets fins qui requièrent des rayons proches de 0.

6.8 Alternatives

Comme nous avons vu précédemment, les problèmes topologiques de *Delaunay Discret sur les voxels* apparaissent soit parce que le bord en voxels définit mal la surface de l'objet discret, soit parce que le rayon de résolution n'est pas suffisamment petit pour capturer les petits détails.

Pour améliorer les performances de la reconstruction surfacique, il est possible d'utiliser une autre définition de la frontière discrète. Rappelons que la surface discrète d'un objet voxel peut être définie aussi par le *graphe d'adjacence des surfels* ou par le *bord du complexe cellulaire* (voir Chapitre 2).

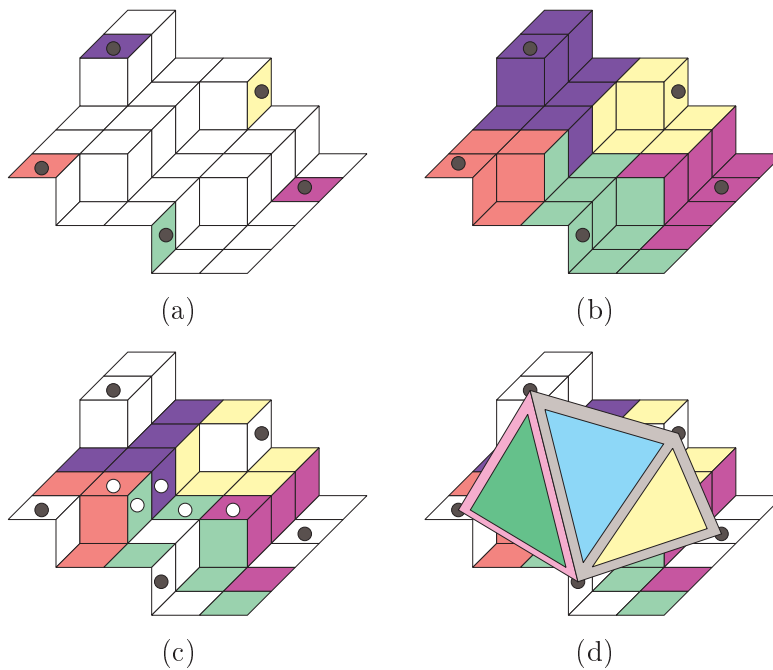


FIG. 6.51 – Delaunay Discret sur les surfels. (a) Surface en surfels et 5 nœuds choisis. (b) Régions de Voronoï Discret. (c) SKIZ de surfels et 5 sommets primaires du graphe de Voronoï (surfels indiqués par les points blancs) (d) Les faces duales des sommets primaires.

Delaunay Discret sur les surfels

L'une des alternatives envisageables consiste à modifier la méthode de Delaunay Discret pour qu'elle opère sur la surface en surfels des objets discrets.

En 3D, l'extraction du graphe d'adjacence des surfels peut être réalisée, à partir d'une image binaire, à l'aide d'un des algorithmes de suivi de surface connus : l'algorithme par parcours de l'image entière, l'algorithme de suivi en largeur, l'algorithme de

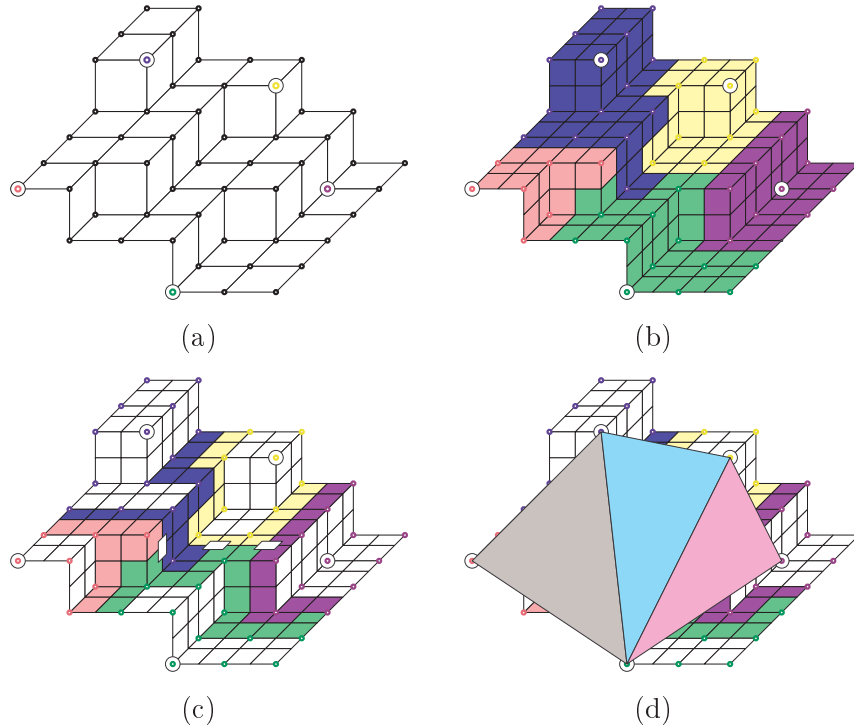


FIG. 6.52 – Delaunay Discret sur les pointels. (a) Surface discrète représentée par le 2-complexe cellulaire et 5 nœuds choisis. (b) Régions de Voronoï Discret. (c) SKIZ discret et 3 sommets primaires du graphe de Voronoï (surfels indiqués par les carrés blancs) (d) Les faces duales des sommets primaires.

suivi des arcs orientés proposé par Artzy [AFH80] ou l’algorithme de suivi de certaines arcs orientés proposé par Gordon [GU89]. Rappelons que pour des paires de connexités $\{\kappa, \lambda\}$ fortes, i.e. $(6, 26)$ et $(26, 6)$, toute surface frontière entre une composante κ -connexe de voxels de l’objet et une composante λ -connexe de voxels du fond est de Jordan. Ces surfaces discrètes sont donc fines et séparantes et, par conséquent, modélisent correctement les frontières d’objets très fins, à la différence du bord discret en voxels.

La méthode de *Delaunay Discret sur les surfels* doit construire d’abord le graphe d’adjacence des surfels en fonction des connexités choisies pour l’objet binaire et pour le fond. Cette surface discrète peut être assimilée à un premier maillage de la surface de l’objet. Ensuite, la méthode consiste à obtenir une simplification de ce maillage. Tous les algorithmes restent pratiquement les mêmes, sauf que dans ce cas un nœud du maillage sera un surfel de la surface discrète et pas un voxel du bord en voxel. Sur la figure 6.51(a), nous avons représenté un morceau de la surface discrète et cinq nœuds du maillage choisis. Les régions de Voronoï seront calculées avec un algorithme de croissance de régions simultanée à partir des nœuds selon l’adjacence adéquate entre les surfels. La

figure 6.51(b) montre les cinq régions de Voronoï calculées après un parcours en largeur du graphe de surface, à partir des nœuds et de la 4-adjacence entre les surfels. Le SKIZ de Voronoï sera défini, comme précédemment, par l'ensemble des surfels possédant plus des deux voisins de valeurs différentes. La figure 6.51(c) montre le SKIZ ainsi que les cinq *sommets primaires* du graphe de Voronoï (les surfels indiqués par les points blancs). Notons que, pour définir les sommets du graphe de Voronoï, adapté pour la transformation par dualité, nous devons, de nouveau, considérer les *composantes connexes des sommets primaires* pour éviter les faces redondantes (voir Fig.6.51(d)). Cette notion de composante connexe de surfels explique pourquoi le rayon de résolution sera toujours borné et pourquoi nous n'avons pas implémenté cette méthode. En effet, même si la méthode de *Delaunay Discret sur les surfels* résout le problème de la surface discrète d'un objet binaire très fin, elle va échouer à reconstruire correctement les surfaces d'objets requérant des rayons de résolution proche de 0.

Delaunay Discret sur les pointels

La seconde alternative envisageable pour améliorer les performances de la reconstruction surfacique consiste à considérer la surface discrète comme un 2-complexe cellulaire. Contrairement au graphe d'adjacence des surfels, cette notion de frontière discrète contient explicitement toutes les cellules de dimension 2, 1 et 0 (surfels, lignels et pointels). Par conséquent, elle offre la possibilité de modifier la méthode de Delaunay Discret pour que les nœuds du maillage soient choisis parmi les pointels (voir Fig.6.52(a)). Les régions de Voronoï peuvent être obtenues par propagation sur les pointels à partir des nœuds choisis. Les voisins d'un pointel sont donnés par l'ombrelle dont il est incident (voir Fig.6.52(b)). Ainsi, le SKIZ discret peut être défini comme l'ensemble des surfels dont les pointels présentent au moins deux valeurs différentes. Sur la figure 6.52(c), nous avons représenté un tel SKIZ ainsi que les trois sommets primaires du graphe de Voronoï, définis comme les surfels possédant au moins trois pointels de labels différents. Il est facile de voir que, dans cette approche, il y aura uniquement deux types de sommets de Voronoï primaires : de cardinalité 3 et de cardinalité 4, car les surfels sont des quadrilatères. Par conséquent, le problème des faces redondantes peut être résolu en prenant l'unique précaution de supprimer tous les sommets primaires de cardinalité 3 *inclus* dans un sommet primaire de cardinalité 4. Dans l'exemple de la figure 6.52, nous avons trois sommets primaires de cardinalité 3 dont les triangles duaux sont illustrés sur Fig.6.52(d). Remarquons que la suppression de la notion de composante connexe des sommets primaires pour la construction du graphe de Voronoï Euclidien à partir du SKIZ offre la possibilité de baisser le rayon de résolution autant que nécessaire : pour $r = 0$, la méthode de *Delaunay Discret sur les pointels* délivre la surface discrète en surfels de l'objet voxel. Pour des rayons supérieurs à 0, le maillage fourni est une simplification de cette surface.

Le chapitre 7 est consacré à cette méthode. Dans ce chapitre, nous allons d'abord montrer comment transformer la surface discrète de tout objet voxel (6, 18 ou 26-connexe) en une 2-variété combinatoire. Ensuite, nous allons détailler les étapes de la méthode. Finalement, nous allons illustrer son potentiel à reconstruire simultanément

plusieurs objets d'une image multicolore avec une gestion efficace des éventuelles interfaces entre ces objets.

Chapitre 7

Méthode II : Delaunay Discret sur les pointels

7.1 Introduction

La méthode de *Delaunay Discret sur les pointels* (DDP) est une méthode de reconstruction surfacique à partir d'image 3D. Elle peut être vue comme une amélioration de la méthode de *Delaunay Discret sur les voxels* (DDV) que nous avons présentée dans le chapitre précédent. La différence majeure entre ces deux méthodes réside dans la définition de la frontière discrète de l'objet en voxels.

Rappelons que DDV opère sur la surface discrète définie par un ensemble de voxels de l'objet : le bord 6-interne, par exemple. Nous avons vu que cette façon de procéder est très pratique car elle permet de développer une série d'algorithmes discrets simples qui fournissent un maillage polygonal de bonne qualité géométrique et de propriétés topologiques connues et garanties. Cependant, la méthode présente aussi certaines limitations. En particulier, nous avons vu que DDV est mis en défaut lorsque la frontière discrète de l'objet voxel n'est pas une surface de Jordan ou lorsque le rayon de résolution choisi doit être proche de 0. L'objectif de la méthode de *Delaunay Discret sur les pointels* est de résoudre ces problèmes pour améliorer les performances et la robustesse des algorithmes.

L'idée de base est sensiblement la même que pour DDV. Elle consiste à sélectionner un ensemble de *nœuds* sur la frontière discrète d'un objet voxel, à calculer le *diagramme* de Voronoï correspondant, à construire le *graphe* de Voronoï à partir du diagramme et, finalement, à extraire le maillage surfacique par *dualité*. De nouveau, la méthode doit garantir que le modèle résultant soit une 2-variété fermée.

La grande nouveauté ici est que la méthode opère sur la frontière discrète définie par le 2-complexe cellulaire modélisant le bord de l'objet voxel. En effet, la première étape de la méthode consiste à transformer, si nécessaire, le 2-complexe cellulaire du bord en une 2-variété combinatoire homéomorphe à l'objet. Cette transformation est réalisée par dédoublement des arêtes et des sommets de singularité dans le 2-complexe cellulaire. Par conséquent, DDP peut être assimilée à une méthode de simplification

de maillage qui permet de construire une triangulation de résolution contrôlée, appelée *macro-modèle*, à partir de la surface quadrilatère discrète, appelée *micro-modèle*.

Nous détaillerons dans ce chapitre la méthode de *Delaunay Discret sur les pointels*. Dans la section suivant nous discuterons d'abord la construction du *micro-modèle*, c'est-à-dire la transformation du 2-complexe cellulaire du bord de tout objet voxel (6, 18 ou 26-connexe) en une 2-variété combinatoire. Ensuite, nous présenterons les différentes étapes de la méthode de *Delaunay Discret sur les pointels*. Finalement, nous montrerons son potentiel à reconstruire de façon simultanée plusieurs objets concurrents dans une image multilabel.

7.2 Définition de la surface discrète

Dans la méthode de reconstruction de *Delaunay Discret sur les pointels*, la surface discrète d'un objet voxel est définie par le 2-complexe cellulaire modélisant le bord de cet objet.

Nous avons vu dans le chapitre 2, que le 2-complexe cellulaire n'est pas toujours une 2-variété : il peut être une *quasi-variété* ou une *pseudo-variété*. Dans cette section, nous allons étudier les propriétés topologiques du 2-complexe en fonction de la connexité choisie pour l'objet discret. En particulier, nous nous sommes intéressés à la question de comment transformer le 2-complexe en une 2-variété combinatoire. Nous appelons cette 2-variété le *micro-modèle* de la surface discrète. Notons que ce modèle de la surface discrète sera le modèle d'entrée de la méthode de *Delaunay Discret sur les pointels*.

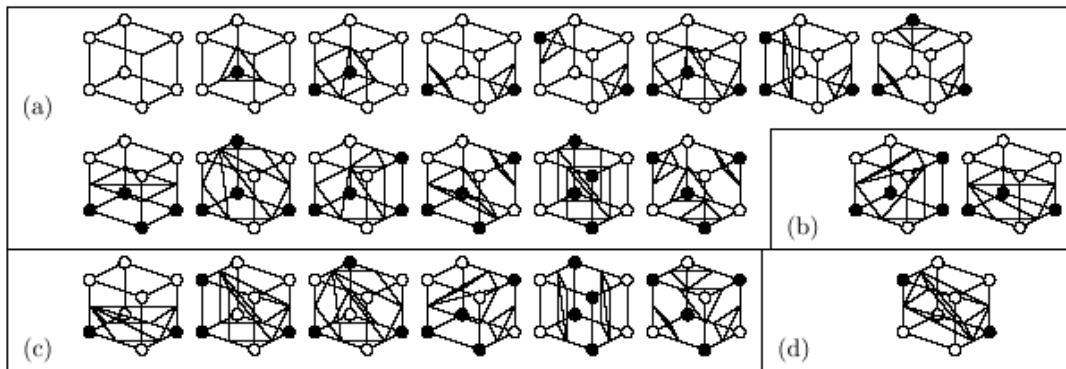


FIG. 7.1 – Table des configurations du Marching Cubes pour les trois connexités, proposées par Lachaud. (a) Configurations pour un objet 6-connexe. (b) Deux subdivisions en triangles différents pour un objet 18-connexe. (c) Configurations à modifier pour un objet 18-connexe. (d) Configuration à modifier pour un objet 26-connexe.(source [LM00])

Soit O un objet discret 3D et soit $FD = (S, A, F)$ le 2-complexe cellulaire modélisant

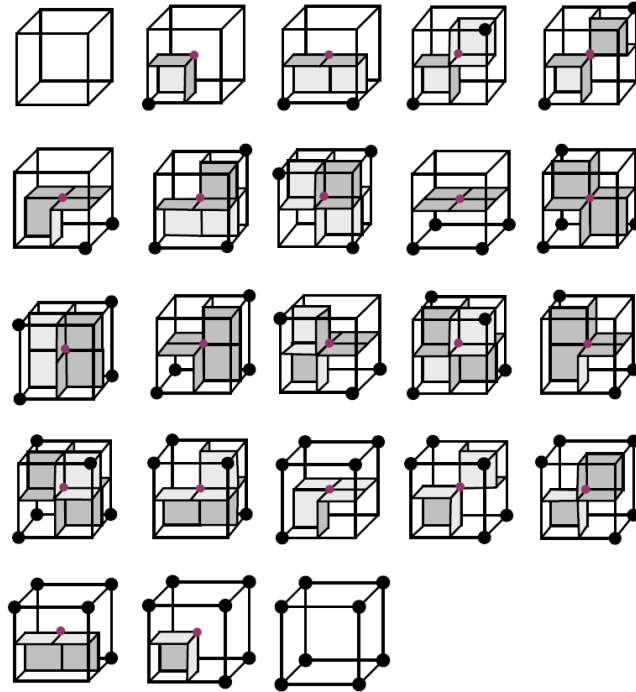


FIG. 7.2 – La table duale. Cette table exprime aussi toutes les configurations pouvant être rencontrées dans le 2-complexe cellulaire modélisant le bord d’un objet voxel. (source [Nie04]).

sa surface discrète. Les ensembles S , A et F sont, respectivement, les ensembles de pointels, de lignels et de surfels du bord de l’objet. Dans la section 4.2.3, nous avons vu que cette frontière discrète correspond au *pseudo-dual* de la surface polygonale générée par l’algorithme des Marching Cubes. Nous avons parlé de *pseudo-dualité* car la surface duale n’est pas toujours une 2-variété même si la surface du MC l’est.

Cependant, FD peut être transformée en une 2-variété en dédoublant les arêtes et les sommets présentant des incohérences topologiques. Pour savoir comment modifier la connectivité entre les surfels, nous allons utiliser les tables des Marching Cubes. Rappelons que Lachaud a proposé 3 tables de configurations, une pour chaque connexité, qui garantissent que la surface générée par les Marching Cubes soit une 2-variété fermée et orientable [LM00]. La figure 7.1(a) montre les 14 configurations classiques du MC et les triangles qui doivent être construits si nous désirons reconstruire la surface d’un objet 6-connexe. Sur la figure 7.1(b), nous avons deux configurations pour la 18-connexité où les polygones générés sont les mêmes que pour la 6-connexité sauf que leur subdivision en triangles est différente. La figure 7.1(c) montre encore 6 configurations dont la triangulation doit changer si l’objet discret est considéré comme 18-connexe. Finalement, la figure 7.1(d) montre une configuration supplémentaire qui doit être interprétée différemment pour un objet 26-connexe.

La figure 7.2 montre la table des configurations duales. Notons que cette table présente 23 configurations car elle contient, non seulement, les 14 configurations classiques, mais aussi leurs complémentaires. Aux 24 rotations du cube près, cette table exprime toutes les 256 configurations possibles que nous pouvons rencontrer sur les bords des objets discrets. Elle exprime aussi la connectivité entre les surfels dans le 2-complexe cellulaire du bord, c'est-à-dire dans la frontière discrète FD .

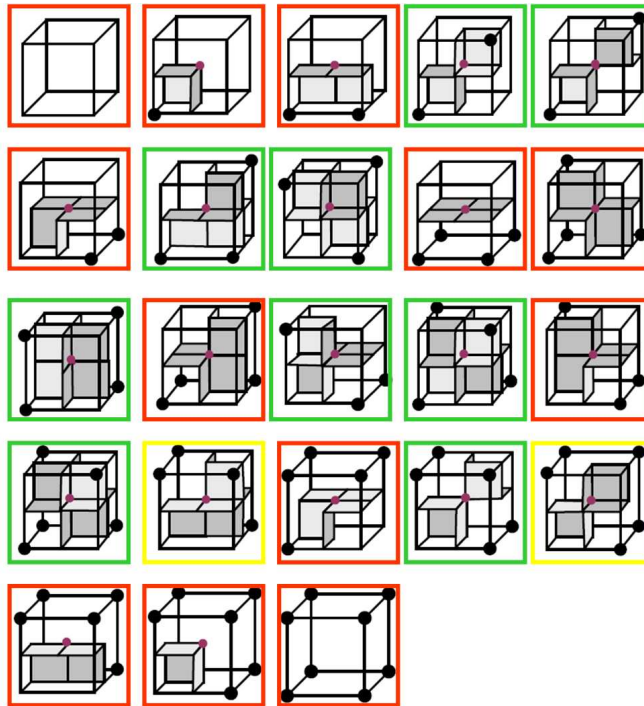


FIG. 7.3 – La table des 23 configurations possibles dans le 2-complexe cellulaire représentant le bord d'un objet discret 6-connexe. En rouge, les 12 configurations pour un objet 6-connexe sans replis. En vert, encore 9 configurations pour un objet 6-connexe avec des replis simples. En jaune, encore 2 configurations pour un objet 6-connexe présentant des replis compliqués.

7.2.1 Objet 6-connexe sans replis

Un objet 6-connexe est dit *sans replis* (ou *bien-composé*) s'il est 6-connexe et s'il ne contient aucune configuration de 18 et 26-adjacence stricte. Dans ce cas, le bord discret représenté par le 2-complexe cellulaire ne contient aucun lignel incident à quatre surfels, ni de pointels incidents à plusieurs ombrelles.

La table 7.3 montre les 12 configurations (aux rotations près) que nous pouvons rencontrer sur la frontière d'un tel objet. Il est facile de voir que ces configurations correspondent exactement aux surfaces combinatoires définies par Françon dans [Fra95].

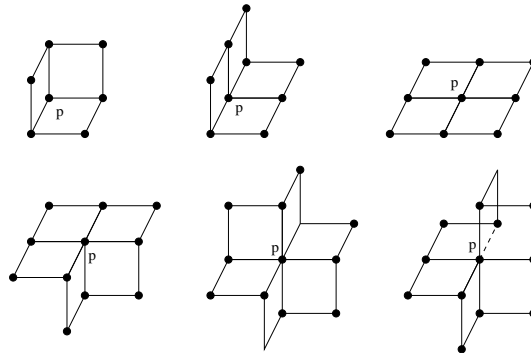


FIG. 7.4 – Les 6 ombrelles possibles (aux symétries près) dans une 2-variété combinatoire.

Sur la table, nous reconnaissons les 6 ombrelles possibles pour une telle surface, représentées sur la figure 7.4.

Dans ce cas précis, le dual de la surface générée par l’algorithme du Marching Cubes est bien une 2-variété combinatoire. Le *micro-modèle* d’un objet discret 6-connexe sans replis est une 2-variété.

7.2.2 Objet 6-connexe avec replis

Un objet 6-connexe est dit *avec replis* s’il est 6-connexe et s’il contient des configurations de 18 et/ou 26-adjacence stricte. Dans ce cas, le 2-complexe cellulaire représentant le bord discret contient au moins un lignel incident à quatre surfels, ou un pointel incident à deux ombrelles. Toutes les 23 configurations possibles sur la frontière de ce type d’objet sont représentées sur la figure 7.3. Nous pouvons remarquer que cette table contient les 12 configurations pour un objet 6-connexe sans replis (en rouge, sur la figure 7.3) et encore 11 configurations (en vert et en jaune) pour lesquelles apparaissent des singularités topologiques. Nous avons soit des lignels incidents à plus de 2 surfels, soit des pointels incidents à plus d’une unique ombrelle. Par conséquent, le 2-complexe cellulaire représentant le bord discret n’est pas une 2-variété pour ce type d’objets. Nous parlons d’une *quasi-variété* dans le premier cas et d’une *pseudo-variété* dans le second, [KI06].

Cependant, le 2-complexe cellulaire peut être transformé en une 2-variété, grâce à la notion de connexité. L’idée de base consiste à dédoubler les lignels et les pointels présentant des singularités topologiques.

Pour ce faire nous définissons deux types de replis : des *replis simples* et des *replis compliqués*.

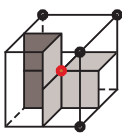
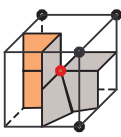
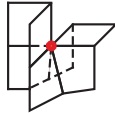
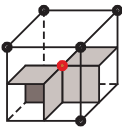
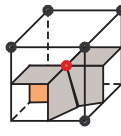
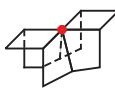
Les *replis simples* correspondent aux 9 configurations (en vert, sur la figure 7.3), où nous avons deux voxels de l’objet 18 ou 26-adjacents strictement mais qui ne sont pas *localement 6-connectés*. C’est-à-dire, leur *boite englobante* ne contient pas un 6-chemin reliant ces deux voxels. Rappelons que ces voxels indiquent les points sur l’objet qui

sont la cause d'un changement de topologie lorsque nous considérons l'objet avec des connexités différentes [Per94].

En pratique, les 9 configurations des *replis simples* peuvent être traitées de sorte à résoudre les problèmes topologiques en dédoublant les lignels et les pointels singuliers. Dit autrement, pour les *replis simples*, le dédoublement des lignels et des pointels est induit par la notion même de connexité entre les points de l'objet. La figure 7.5 montre ces 9 configurations et les surfaces quadrilatères discrètes obtenues par ce dédoublement. Nous pouvons remarquer que cette surface duale du Marching Cube, est toujours une 2-variété combinatoire, telle que définie par Françon, car nous avons toujours les mêmes ombrelles autour des pointels.

Les *replis compliqués* correspondent aux 2 configurations restantes (en jaune, sur la figure 7.3). Dans ces cas, nous avons deux voxels de l'objet 18-adjacents strictement, *localement 6-connectés*. À la différence des *replis simples*, ici le cube virtuel contient un 6-chemin reliant ces deux voxels. Dans ces cas, la notion de connexité ne permet pas de résoudre directement les singularités topologiques. En effet, il est nécessaire d'introduire 2 nouvelles ombrelles dans la surface combinatoire afin que celle-ci soit une 2-variété. Ces ombrelles correspondent à un dédoublement « partiel » de l'arête singulière qui apparaît dans ces configurations. Ce dédoublement doit être fait de sorte à ce que la continuité de la surface discrète soit assurée conformément à la continuité de la surface duale du Marching Cube. Les 2 nouvelles ombrelles que nous proposons, sont illustrées sur la table 7.1. Les ombrelles ainsi définies permettent un parcours circulaire autour du pointel. La surface résultante est une 2-variété quadrilatère.

Ainsi, le *micro-modèle* de la surface d'un objet 6-connexe avec replis peut être obtenue à partir du 2-complexe cellulaire du bord avec les règles de dédoublement que nous avons présentées dans la figure 7.5. Nous pouvons remarquer par ailleurs que cette surface correspond à la surface duale introduite par Nielson [Nie04].

surface discrète	interprétation topologique	ombrelles
		
		

TAB. 7.1 – Dédoublément des lignels présentant une singularité dans les 2 configurations de *replis compliqués*. Deux nouvelles ombrelles pour la surface discrète.

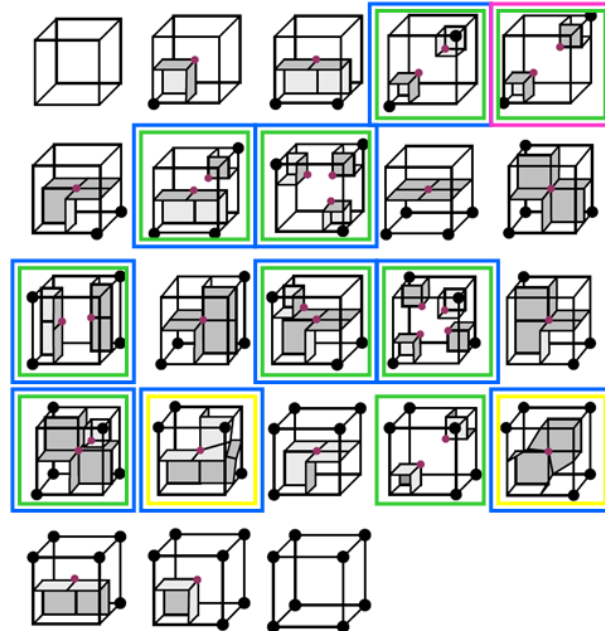


FIG. 7.5 – En vert, dédoublement des lignels et des pointels de singularité, induit par la connexité, sur le bord discret représenté par un 2-complexe cellulaire d’un objet 6-connexe avec *replis simples*. En jaune, dédoublement « partiel » pour les *replis compliqués*. En bleu, les configurations qui doivent changer pour un objet 18-connexe. En rose, la configuration qui doit changer pour un objet 26-connexe.

7.2.3 Objet 18-connexe

Le bord en 2-complexe cellulaire d’un objet 18-connexe n’est pas en général une 2-variété. C’est une *quasi-variété* ou une *pseudo-variété*. Dans ce paragraphe nous verrons comment transformer ce complexe cellulaire en une 2-variété topologique, fermée et orientable de la surface d’un tel objet.

Selon les résultats de la topologie discrète, nous savons que lorsqu’un objet discret est considéré comme 18-connexe au lieu de 6-connexe, toutes les configurations présentant deux voxels *18-adjacents stricts* et *non localement 6-connectés* indiquent un changement de la topologie de l’objet et de sa surface. Ces configurations correspondent, en réalité, aux 11 configurations de replis que nous avons définies précédemment. Parmi ces 11 configurations, il y a 2 qui sont des configurations de 26-connexité stricte et donc ne doivent pas changer pour un objet considéré avec la 18-connexité. Au final, nous avons exactement 9 configurations (en bleu sur la figure 7.5) qui doivent être interprétées différemment pour la 18-connexité.

La figure 7.1(c), montre les 6 configurations dans lesquelles la topologie de la surface générée par le Marching Cubes change si les points noirs sont considérés avec la 18-

connexité à la place de la 6-connexité. Il est facile de voir que ce sont les cas où la surface doit garder sa continuité pour les points objets et séparer les points du fond.

Notons que nous allons ajouter à ces 6 configurations encore 3 configurations complémentaires. Donc, nous avons exactement 9 configurations (aux rotations près) qui doivent être interprétées différemment pour la 18-adjacence. Comme pour un objet 6-connexe, il suffit d'assurer que le dual de la surface du Marching Cube, qui n'est rien d'autre que le 2-complexe du bord, garde les mêmes propriétés de séparation.

La table 7.2 montre comment les 9 configurations doivent être interprétées pour un objet 18-connexe. Nous remarquerons que, pour les 7 derniers cas, le dédoublement se fait de façon similaire que pour un objet 6-connexe et que la surface duale est toujours une 2-variété combinatoire car elle contient uniquement les ombrelles définies par Françon. En revanche, pour les 2 premières configurations, nous avons utilisé les nouvelles ombrelles, que nous avons proposées, dans le paragraphe précédent, pour les *replis compliqués*. La surface duale résultante est une 2-variété quadrangulaire.

Au final, nous venons de voir comment interpréter et transformer le bord d'un objet 18-connexe, représenté par le 2-complexe cellulaire, pour obtenir une 2-variété combinatoire modélisant la surface de l'objet, c'est-à-dire le *micro-modèle*.

#	surface MC	surface discrète	interprétation topologique	ombrelles
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				


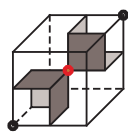
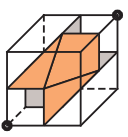
TAB. 7.2 – Dédoublage des ligneux et des pointeux présentant des singularités dans le bord discret d'un objet 18-connexe.

7.2.4 Objet 26-connexe

Le bord en 2-complexe cellulaire d'un objet discret 26-connexe n'est pas une 2-variété. C'est une *pseudo-variété* car il contient généralement des pointels incidents à plusieurs ombrelles.

De la topologie discrète, nous savons que lorsqu'un objet discret est considéré comme 26-connexe au lieu de 6-connexe, toutes les configurations présentant deux voxels *26-adjacents strictement et non localement 6-connectés* indiquent un changement de la topologie de l'objet et de sa surface. La figure 7.1(d), illustre l'unique configuration pour laquelle la topologie de la surface générée par le Marching Cubes change si les points noirs sont considérés avec la 26-adjacence à la place de la 6-adjacence. Donc, pour un objet discret considéré avec la 26-adjacence, nous avons exactement 1 configurations (en rose sur la figure 7.5) qui doit être interprétée différemment.

La table 7.3 illustre comment le 2-complexe cellulaire peut être modifié afin de permettre la continuité de la surface pour cette configuration. En effet, dans ce cas, un simple dédoublement du pointel présentant la singularité topologique n'est pas suffisant pour résoudre le problème. Ainsi, l'une des solutions possibles est de supprimer le pointel de singularité avec tous ses lignels incidents et de reconnecter les pointels voisins comme illustré sur la table 7.3 pour former des faces quadrilatères non planaires. Notons que suite à cette transformation le *micro-modèle* résultant est une 2-variété combinatoire.

#	surface MC	surface discrète	interprétation topologique
10			

TAB. 7.3 – Transformation du 2-complexe cellulaire pour la configuration de 26-adjacence stricte dans un objet 26-connexe.

7.3 Les autres étapes

La section précédente a été consacrée à la première étape de la méthode de reconstruction de *Delaunay Discret sur les pointels*. Durant cette étape, l'algorithme définit le maillage initial de la surface de l'objet voxel. Ce maillage quadrilatère, appelé le *micro-modèle*, est construit à partir du 2-complexe cellulaire du bord discret afin d'obtenir une 2-variété combinatoire. Nous avons vu que, selon la connexité choisie, les modifications nécessaires sont plus ou moins importantes. Rappelons, par exemple, que le 2-complexe cellulaire du bord d'un objet voxel 6-connexe *sans replis* est toujours une 2-variété combinatoire et, dans ce cas, le *micro-modèle* est construit directement à partir de la surface discrète, sans modifications.

Considérons maintenant un objet voxel O et son *micro-modèle* $FD = (P, L, S)$, où P , L et S sont, respectivement, les ensembles de pointels, de lignels et de surfels. La frontière discrète FD correspond à un maillage quadrilatère très dense de la surface de l'objet. Notons que ce maillage est aussi dense que le maillage de l'algorithme des Marching Cubes dont il est le dual. Ce sont, en effet, les deux maillages les plus détaillés pouvant être reconstruits à partir d'une image binaire 3D.

Les étapes suivantes de la méthode de *Delaunay Discret sur les pointels* consistent à simplifier le *micro-modèle* pour obtenir un maillage plus grossier, de résolution contrôlée, appelé le *macro-modèle*.

L'idée de base est la même que pour la méthode de *Delaunay Discret sur les voxels*. Il s'agit de sélectionner un ensemble de nœuds sur le *micro-modèle* et d'y approximer les régions de Voronoï des nœuds. Ensuite la méthode construit le graphe de Voronoï Euclidien et extrait le *macro-modèle* par dualité.

Dans la suite de cette section, nous allons rappeler les différentes étapes. Cependant, les algorithmes étant les mêmes que pour la première méthode, nous allons focaliser surtout sur les différences entre les deux méthodes.

Sélection des nœuds du maillage

Dans la méthode de *Delaunay Discret sur les pointels*, les nœuds du maillage résultant sont choisis parmi les *pointels* du *micro-modèle*. C'est, en effet, l'unique différence notable entre les deux algorithmes. Toutes les considérations concernant la distance géodésique, la priorité de sélection et la densité de distribution des nœuds sont toujours valables.

Pour une distribution quasi-uniforme, l'algorithme sélectionne les nœuds en fonction de leurs courbures et élimine les voisins du nœud dans un voisinage spécifié par le rayon de résolution r et la distance géodésique calculée sur le *micro-modèle*. La figure 7.6(a) montre un morceau d'un *micro-modèle* et cinq nœuds du maillage choisis parmi les pointels.

Approximation des régions de Voronoï

L'algorithme d'approximation discrète des régions de Voronoï est, comme précédemment, un algorithme de croissance de régions en parallèle, à partir des nœuds. La

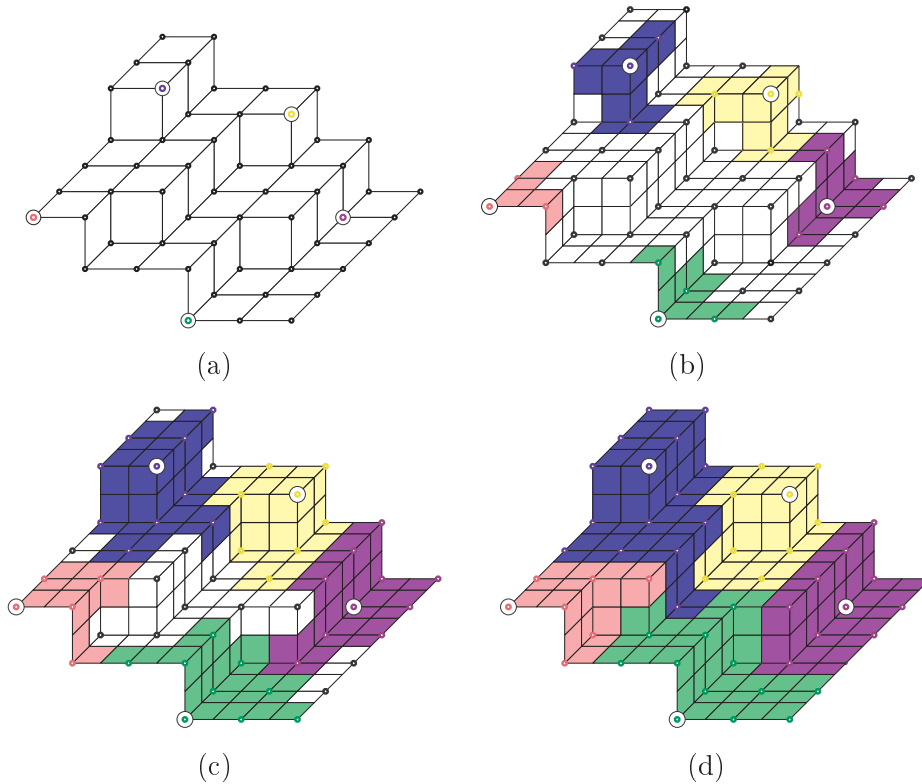


FIG. 7.6 – Algorithme d'approximation des régions de Voronoï Discret. (a) Les cinq nœuds sélectionnés. (b) Propagation des labels : Itération 1. (c) Itération 2. (d) Itération 3.

différence ici est que la propagation est effectuée sur les ombrelles incidentes aux pointels.

Contrairement à ce qui a été fait dans DDV, où les voisins des nœuds étaient définis par un masque 3D centré sur le voxel, ici les voisins d'un nœud sont ses pointels adjacents par un lignel dans le *micro-modèle*. La distance entre deux pointels est définie comme la longueur du plus petit chemin de lignels entre ces pointels.

La figure 7.6 donne un exemple concret de l'algorithme de croissance des régions. Les figures 7.6 (b), (c) et (d) montrent respectivement la première, la deuxième et la troisième itération de l'algorithme. En pratique, si la distance entre deux nœuds est impaire, c'est-à-dire lorsqu'il y a un « conflit » entre deux labels, l'algorithme traite avec priorité le plus petit label. Nous avons fait ce choix car les nœuds sont sélectionnés en fonction de la courbure et les nœuds présentant une forte courbure possèdent les petits labels.

Les régions de Voronoï résultantes sont homéomorphes à des disques topologiques tant que le rayon de résolution r n'excède pas le plus petit rayon de courbure sur la surface de l'objet. Sinon, nous retrouvons dans le diagramme de Voronoï Discret les

mêmes incohérences topologiques que précédemment : comme par exemple, des régions possédant plus d'une unique frontière commune.

Construction du graphe de Voronoï

Comme pour la méthode de DDV, le SKIZ discret est le premier graphe pouvant être extrait à partir du diagramme de Voronoï Discret. Ici, nous définissons ce SKIZ comme l'ensemble des *surfels* dont les pointels présentent au moins deux labels différents. La figure 7.7 illustre le SKIZ discret entre les cinq nœuds A, B, C, D et E de notre exemple.

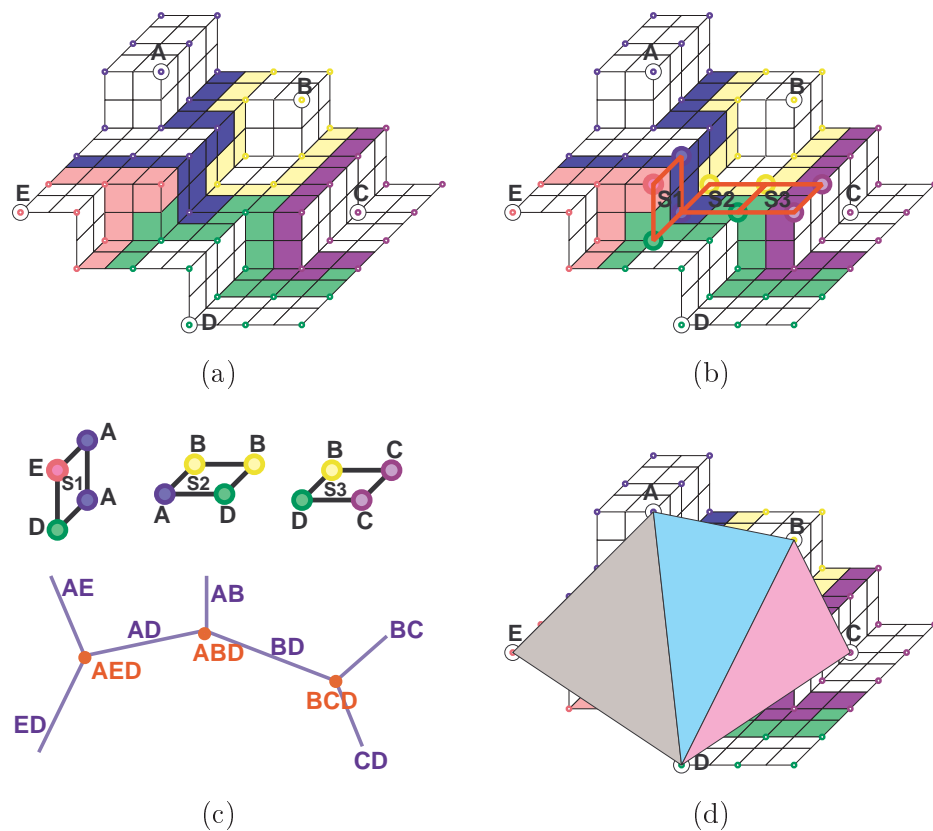


FIG. 7.7 – (a) SKIZ en surfels. (b) Sommets primaires. (c) Graphe de Voronoï. (d) Surface duale.

Le graphe de Voronoï euclidien que nous souhaitons construire à partir du SKIZ doit remplir les trois conditions du lemme 3. C'est-à-dire que le graphe doit être simple et connexe et le degré de chaque sommet doit être égal à la cardinalité du sommet. Rappelons que, sous ces conditions, le maillage polygonal dual au graphe est garanti une 2-variété fermée et orientable.

La méthode de *Delaunay Discret sur les pointels* offre la possibilité de définir ce graphe de Voronoï beaucoup plus finement que précédemment. En particulier, nous

pouvons éviter la notion de composante connexe des sommets primaires. Rappelons que dans la méthode sur les voxels, nous avons aggloméré les sommets primaires pour résoudre les problèmes des faces redondantes. En revanche, dans la méthode sur les pointels, les points d'intersection entre les régions de Voronoï sont sensiblement plus faciles à définir.

Considérons maintenant le SKIZ discret défini par les surfels du *micro-modèle*. Nous définissons les sommets primaires comme les surfels d'au moins 3 pointels de valeurs différentes.

Définition 7.1 (sommets primaire du SKIZ) *Un sommet primaire est un surfel dont les pointels incidents présentent au moins 3 labels différents. Un tel sommet est représenté par le n -uplet $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, où les λ_i sont les valeurs des n pointels différents. Le nombre n est appelé **cardinalité** du sommet, $n \in [3, 4]$.*

La figure 7.7(b) montre les points d'intersections des cinq régions de Voronoï de notre exemple. Remarquons qu'ici les régions de croisent toujours par trois et nous avons trois sommets primaires de cardinalité 3 :

- $S1 = (\lambda_A, \lambda_E, \lambda_D)$
- $S2 = (\lambda_A, \lambda_B, \lambda_D)$
- $S3 = (\lambda_B, \lambda_C, \lambda_D)$

Rappelons que le *micro-modèle* est une surface quadrilatère pour toute connexité. Ainsi, selon la définition précédente, il existe exactement deux types de sommets primaires : des sommets de cardinalité 3 et des sommets de cardinalité 4. Par conséquent, pour éviter les faces redondantes dans cette méthode, il suffit de supprimer tout sommet de cardinalité 3 inclus dans un sommet de cardinalité 4. Ainsi, l'algorithme de construction du graphe de Voronoï à partir du SKIZ discret procède selon la définition suivante :

Définition 7.2 (sommets du graphe de Voronoï) *Soit SP l'ensemble des sommets primaires du SKIZ, dépourvu des sommets de cardinalité 3 inclus dans des sommets de cardinalité 4. L'ensemble V des sommets du graphe de Voronoï euclidien $GV = (V, E)$ est égal à l'ensemble SP .*

Comme pour la première méthode, les sommets de Voronoï doivent être reliés par des arêtes le long des frontières communes entre les régions de Voronoï. Une telle arête peut être définie à partir du SKIZ avec la définition suivante :

Définition 7.3 (arête du SKIZ) *Une arête du SKIZ est définie par un ensemble de surfels dont les pointels incidents présentent exactement 2 labels différents. Une telle arête AV est représentée par une paire de valeurs (λ_1, λ_2) , où les λ_i sont les valeurs des 2 pointels qui définissent l'arête.*

Cependant, dans cette méthode, nous avons la possibilité d'optimiser l'algorithme. Au lieu de parcourir le SKIZ entier pour détecter les sommets et les arêtes du graphe de Voronoï, il suffit de considérer uniquement les surfels correspondants aux sommets. En

effet, les arêtes du graphe de Voronoï peuvent être obtenues directement des lignels des surfels des sommets. Sur la figure 7.7(c) nous avons représenté les surfels correspondants aux trois sommets $S1$, $S2$ et $S3$ de notre exemple. Notons que les lignels de ces surfels définissent complètement les arêtes de Voronoï duales. Ainsi, pour construire les arêtes de Voronoï, l'algorithme utilise la définition suivante :

Définition 7.4 (arête du graphe de Voronoï) *Soit SP l'ensemble des surfels correspondant aux sommets du graphe de Voronoï et soit A l'ensemble des lignels d'extrémités différentes de ces surfels. L'ensemble E des arêtes du graphe de Voronoï euclidien $GV = (V, E)$ est composé des arêtes duales aux lignels de A .*

Sur l'exemple, le surfel $S1$ possède trois lignels d'extrémités différentes : AE , AD et DE et donc l'algorithme peut construire directement les trois arêtes incidentes au sommet dans le graphe de Voronoï : $(\lambda A, \lambda E)$, $(\lambda A, \lambda D)$ et $(\lambda D, \lambda E)$. Les sommets $S2$ et $S3$ sont traités de la même façon. Le graphe de Voronoï résultant est représenté sur la figure 7.7(c). La figure 7.7(d) montre la surface duale à ce graphe.

Notons que, comme dans la première méthode, le SKIZ discret peut générer un multigraphe au lieu d'un graphe simple. En pratique, si le rayon de résolution choisi r n'est pas suffisamment petit, nous rencontrons les mêmes anomalies topologiques que précédemment. Rappelons que si deux régions de Voronoï partagent plus d'une unique frontière commune, le graphe possède des multi-arêtes ou des boucles. Dans ces cas, l'algorithme fournit le *graphe simple maximal* inclus dans le multigraphe.

Construction du modèle topologique

L'étape finale de l'extraction du maillage par dualité à partir du graphe de Voronoï utilise exactement le même algorithme que dans la première méthode. Rappelons qu'il s'agit de parcourir tous les *sommets valides* (dont la cardinalité est égale au degré du sommet dans le graphe) et de construire les faces duales dans une 2-G-carte. Si le *macro-modèle* résultant contient des petits trous, nous utilisons l'algorithme de fermeture des bords que nous avons présenté dans la première méthode.

7.4 Résultats

La méthode de reconstruction de *Delaunay Discret sur les pointels* permet d'obtenir une surface à partir d'une image binaire. Le méthode marche pour les trois connexités classiques (6, 18 et 26). Elle est plus robuste que DDV et permet de reconstruire aussi des objets très fins. Pour $r = 0$, elle fournit le *micro-modèle* de la surface discrète. Pour des rayons supérieurs à 0, elle fournit une simplification de cette surface, de résolution contrôlée. La figure 7.8 montre deux maillages obtenus pour l'haltère discrète pour des rayons de résolution $r1 = 0$ et $r2 = 3$.

Notons que la méthode fournit des maillages composés uniquement de triangles et de quadrilatères. Par conséquent, il est possible d'obtenir un maillage triangulaire directement à partir du modèle fourni en découpant les quadrilatères le long de leurs plus petites diagonales, sans ajout de nouveaux sommets.

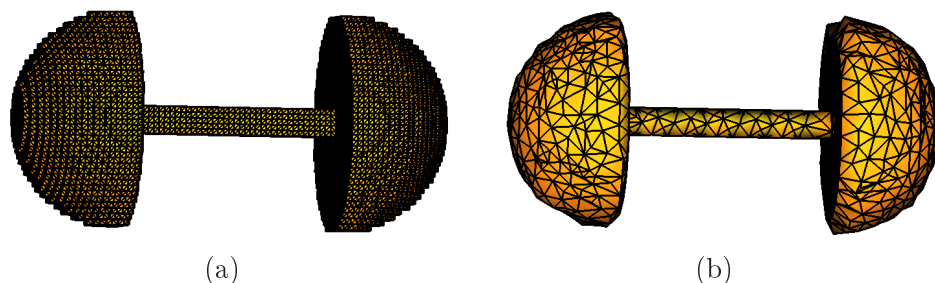


FIG. 7.8 – Maillages surfaciques de l’haltère discrète. (a) $r_1 = 0$; (b) $r_2 = 3$.

Les différentes expérimentations et tests effectués sur notre base d’objets discrets montrent que les maillages résultants contiennent rarement des trous. En fait, le peu de *sommets invalides* apparaît uniquement aux endroits où le rayon r est plus grand que le rayon de la courbure locale. Dit autrement, si le graphe de Voronoï contient des *sommets invalides*, alors le rayon de résolution est trop grand. Dans ces cas, nous pouvons soit fermer les trous comme précédemment, soit choisir un rayon plus petit pour résoudre les problèmes. Notons que, contrairement à la première méthode, le rayon peut être baissé jusqu’à 0, si c’est nécessaire. Ainsi, sous condition que le rayon r soit correctement choisi, la méthode délivre directement des 2-variétés fermées et orientables pour tous nos objets de test.

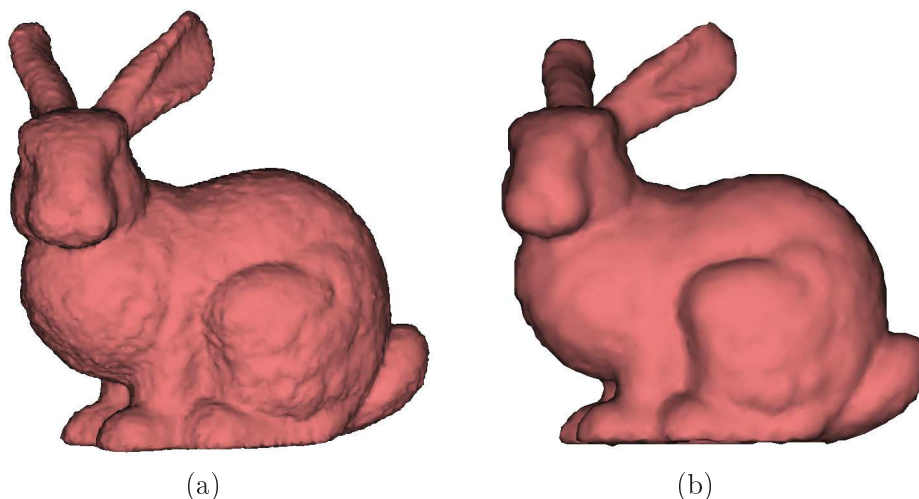


FIG. 7.9 – Maillages du lapin. (a) $r = 2$; (b) $r = 5$.

Sur les figures 7.9 et 7.12, nous pouvons observer l’impact que la résolution choisie a sur l’aspect du maillage résultant. Plus le rayon r est grand, plus le maillage est lisse.

La figure 7.11 montre l’influence de la distance discrète sur la distribution des nœuds

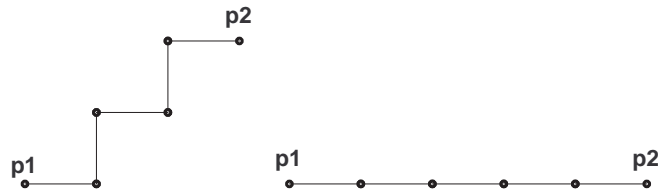


FIG. 7.10 – La distance discrète entre les pointels $p1$ et $p2$ est la même ($d = 5$) dans les deux cas.

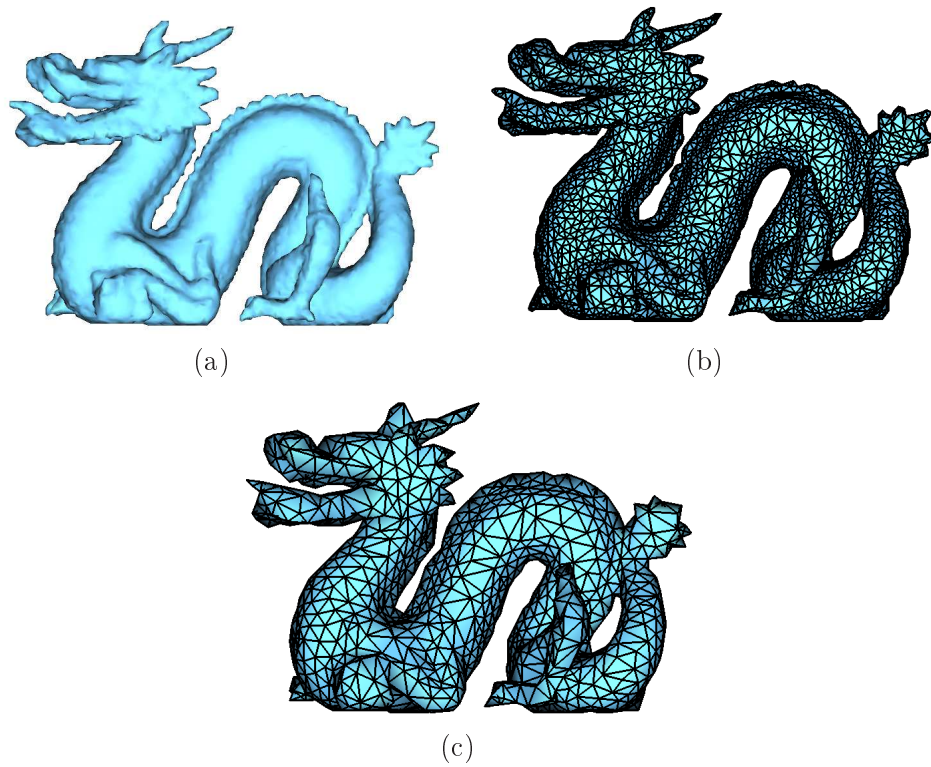


FIG. 7.11 – Maillages du dragon. (a) $r = 3$; (b) $r = 5$; (c) $r = 10$.

des maillages résultants. Rappelons que la distance entre deux pointels est définie comme le plus petit chemin de lignels entre ces deux pointels. Sur la figure 7.10 nous avons donné deux exemples de distance discrète. Remarquons que, même si la distance discrète entre les pointels $p1$ et $p2$ est la même dans les deux cas (égale à 5 lignels), la distance euclidienne entre les points ne l'est pas. Dans certains cas, cette approximation discrète de la distance peut s'avérer gênante, cependant, dans notre cas elle est plutôt bénéfique. En effet, plus la surface discrète est courbe, plus petite est la distance euclidienne. Par conséquent, la densité des nœuds aux endroits courbes est plus élevée que la densité

des nœuds aux endroits plutôt plats. Comme illustré sur les figures 7.11(b) et 7.11(c), les maillages du dragon sont composés de grands triangles sur les régions relativement plates (comme le corps, par exemple) et des plus petits triangles au niveau des détails (comme la crête, par exemple). Ainsi, même si le rayon de résolution est constant, la méthode adapte, de façon intrinsèque, la densité des nœuds sélectionnés. Dans un certain sens, les maillages résultants peuvent être vus comme des maillages adaptatifs.

Notons finalement que, contrairement à notre première méthode (DDV), dans le domaine médical, la méthode de *Delaunay Discret sur les pointels* permet non seulement la reconstruction des organes vitaux mais aussi des structures anatomiques très fines comme les veines et les os (voir Fig.7.13).

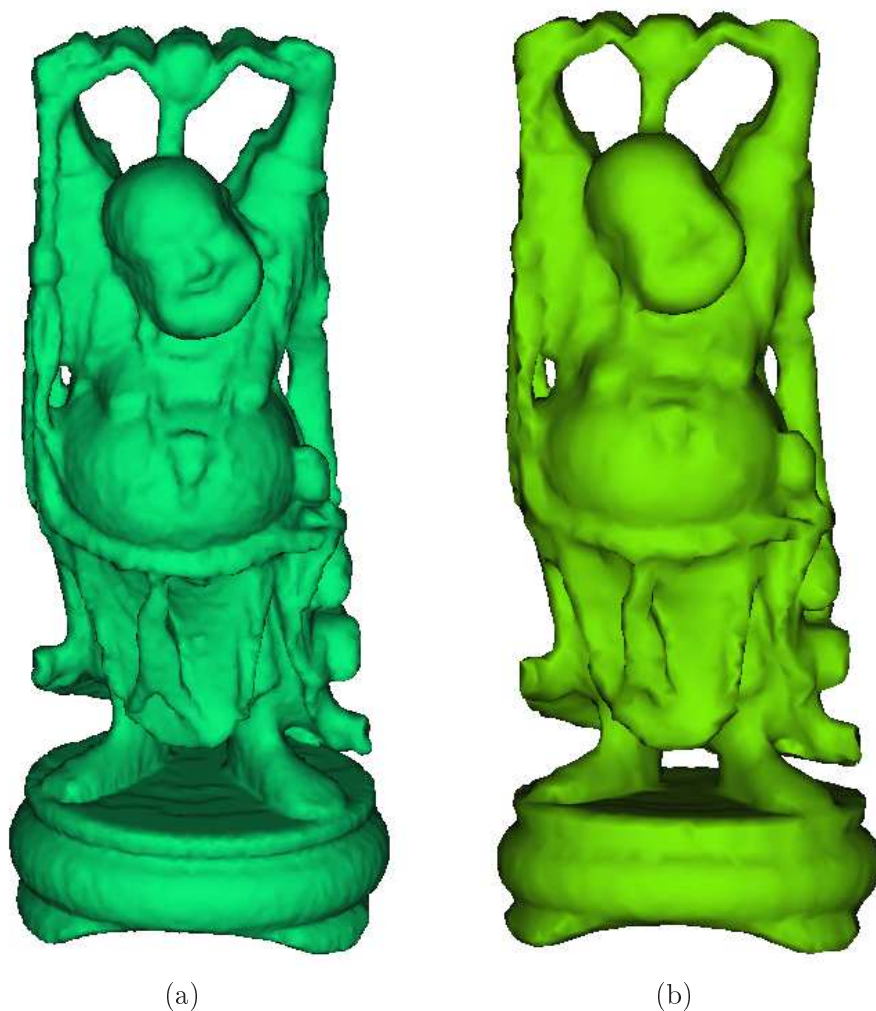
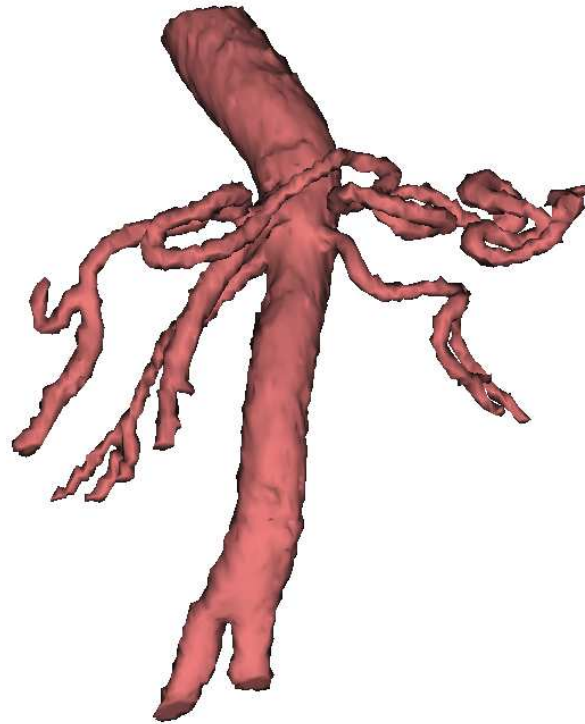
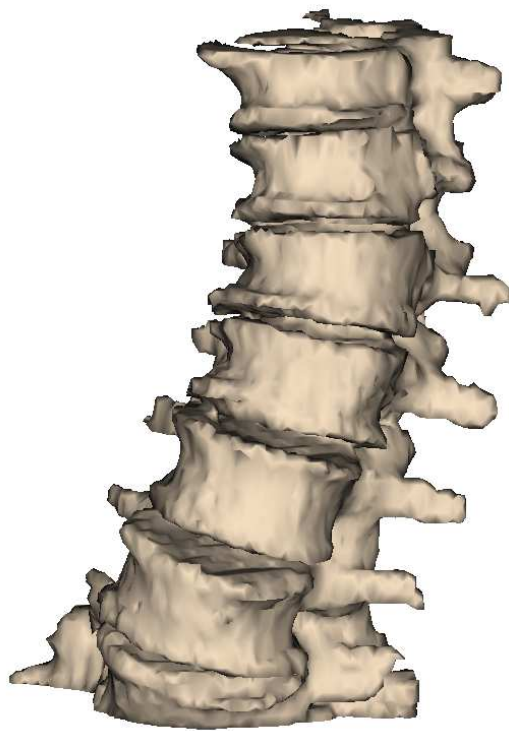


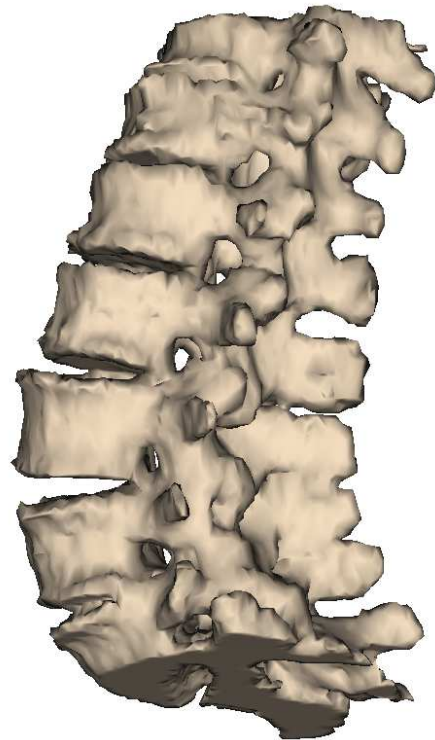
FIG. 7.12 – Maillages du boudhha. (a) $r = 5$; (b) $r = 10$.



(a)



(b)



(c)

FIG. 7.13 – (a) Reconstruction d'une artère avec $r = 2$. (b) et (c) Reconstruction des vertèbres avec $r = 3$.

7.5 Reconstruction d'images multicolores

Rappelons qu'une image multicolore est une image 3D dont les voxels ont plus de deux labels. Contrairement aux images binaires où les points ne peuvent posséder que deux valeurs : 1 pour les points de l'objet et 0 pour les points de son complémentaire, une image multicolore peut représenter plusieurs objets discrets. Un exemple typique d'image multicolore est une image médicale obtenue après la segmentation des différentes structures anatomiques, où les points du fond sont à 0 et les points de chaque objet ont un label unique.

Nous avons vu dans le chapitre précédent que, si les différents objets ne sont pas concurrents, c'est-à-dire s'ils ne « se touchent » pas, la méthode de *Delaunay Discret sur les voxels* peut être utilisée, sans aucune modification, pour reconstruire simultanément les surfaces de ces objets. En effet, la reconstruction simultanée se fait de façon naturelle car au niveau de l'algorithme, les différents objets sont considérés comme les composantes connexes d'un unique objet binaire. Pour un couple de connexité (6, 26), par exemple, tous les objets sont considérés 6-connexes alors que le fond est 26-connexe. Les bords discrets des différentes composantes connexes étant disjoints, la méthode reconstruit les différentes surfaces de façon « aveugle ». Cependant, si l'image contient deux objets qui se touchent (ils forment une unique composante connexe de voxels), la méthode de *Delaunay Discret sur les voxels*, dans sa version initiale, va reconstruire uniquement la surface extérieure (vers le fond), sans les interfaces internes. La figure 7.14 montre un exemple de deux cubes adjacents et leur surface d'interface.

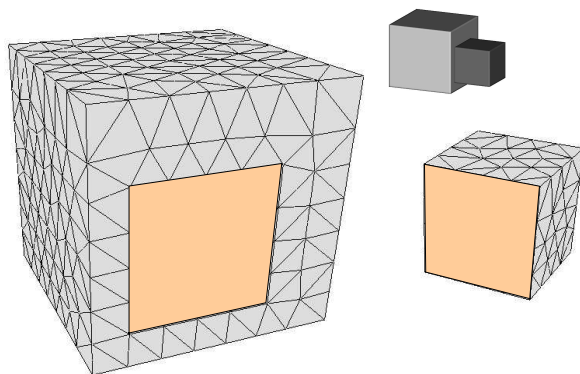


FIG. 7.14 – Deux cubes adjacents et leur interface en jaune.

Notons que notre approche de reconstruction permet de résoudre ce problème. Il s'agit tout simplement de détecter l'interface entre les objets et de choisir le même ensemble de nœuds pour les deux maillages, au niveau de cette interface. Au final, ceci revient à reconstruire deux maillages qui contiennent le même sous-ensemble de triangles le long de leur frontière commune. Notons que cette façon de procéder nous permet d'éviter tous les problèmes d'intersection et de trous qui apparaissent généralement entre les maillages de différents objets concurrents lorsqu'ils sont reconstruits séparément. La figure 7.15 illustre cette idée sur l'exemple des cubes adjacents. Nous pouvons remarquer

que les maillages des deux cubes contiennent la même surface d'interface, c'est-à-dire les sommets, les arêtes et les triangles le long de cette frontière commune sont dupliqués dans les deux maillages.

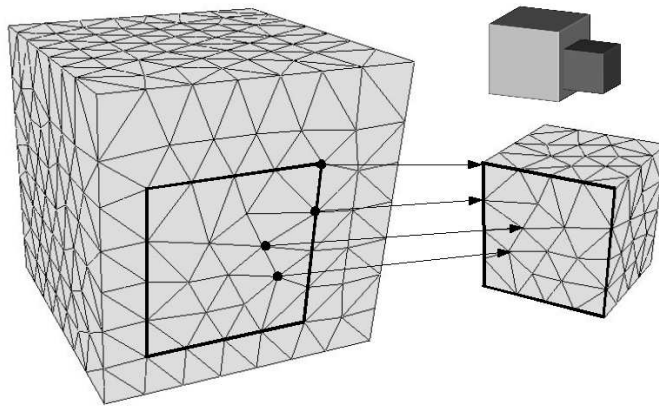


FIG. 7.15 – Reconstruction des deux cubes adjacents avec gestion de la frontière commune. Les deux maillages contiennent les mêmes éléments le long de l'interface.

Il est à noter que notre première méthode de reconstruction sur les voxels n'est pas adaptée pour une détection efficace des frontières entre objets concurrents. En effet, il y a plusieurs raisons pour cela. D'une part, le bord en voxel d'un objet est différent du bord en voxels de son complémentaire. Ceci implique que l'interface sera épaisse et différente pour chacun des objets. Mais surtout, rappelons que le bord discret en voxels est défini pour une paire de Jordan valide et unique pour tout l'objet. Or, si l'image 3D comporte trois labels, c'est-à-dire deux objets concurrents et un fond, il n'est pas possible de maintenir une paire de Jordan valide pour chaque constituant de l'image. Considérons par exemple les deux configurations schématisées sur la figure 7.16, où nous avons un fond A et deux objets B et C . Si le fond est considéré comme 26-connexe et les deux objets comme 6-connexes, le long de la frontière commune entre B et C nous avons le couple de connexité $(6, 6)$ qui n'est pas un couple valide. De la même manière, si A et B sont 6-connexes alors que C est 26-connexe, nous ne pouvons pas maintenir un couple de connexité valide le long de la frontière entre A et B .

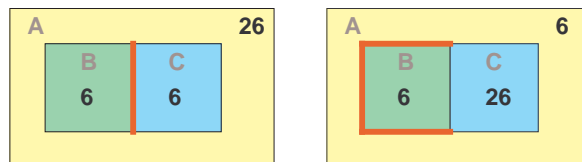


FIG. 7.16 – Configurations avec trois labels. En fonction des connexités choisies pour les trois constituants, les couples de connexité invalides apparaissent le long des frontières en rouge.

L'une des solutions pour résoudre les problèmes liés aux couples de connexités com-

plémentaires est de s'affranchir de la notion de connexité. L'idée a été proposée par Latecki [Lat97] qui introduit les images *bien-composées* dans lesquelles toutes les connexités sont équivalentes.

Une image 3D est *bien-composée* si et seulement si elle ne contient aucune des deux configurations critiques : deux voxels strictement 18-adjacents ou deux voxels strictement 26-adjacents. Sinon, l'image est appelée *mal-composée*. Dans ce type d'images on dit que les connexités (6, 18 et 26) sont équivalentes, car tous les constituants de l'image sont 6-connexes.

Dans [Lat95], Latecki a proposé un algorithme qui transforme une image multilabel 2D *mal-composée* en une image *bien-composée*. L'idée de base consiste à changer la valeur de certains pixels voisins aux configurations critiques. Récemment, Siqueira [Siq04, Siq06] a proposé le premier algorithme en 3D, mais il ne traite que les images binaires. L'algorithme ajoute itérativement à l'objet des voxels du fond, jusqu'à ce que l'objet de départ ne présente plus de configurations critiques. Siqueira a énuméré les différents cas possibles et propose une série de règles qui permettent de décider quels voxels du fond doivent changer de valeur. Ces règles visent aussi à minimiser le nombre de voxels ajoutés à l'objet original.

Pour obtenir des images multicolore bien-composés en 3D, nous avons développé un algorithme similaire à celui de Siqueira sauf que nous rajoutons tous les voxels voisins à une configuration critique. L'algorithme commence par traiter chaque objet de façon indépendante et supprime les configurations critiques entre l'objet et le fond. Ensuite, au niveau des interfaces communes entre deux objets, l'algorithme donne la priorité au plus petit label. Actuellement, nous ne pouvons pas donner une preuve théorique sur la validité et la terminaison de cet algorithme. Cependant, nos résultats expérimentaux sur des images médicales tentent de montrer que généralement, au bout d'une dizaine d'itérations, l'algorithme s'arrête et fournit une image multilabel bien-composée, où aucun des labels ne présente de configuration critique. Notons par ailleurs, qu'en pratique, les images médicales sont souvent *bien-composées* après la segmentation des structures d'intérêt.

Comme nous l'avons mentionné précédemment, les images *bien-composées* ont beaucoup de propriétés intéressantes. D'une part, toutes les connexités sont équivalentes, mais surtout, il a été prouvé que le 2-complexe cellulaire du bord de chaque constituant est une 2-variété combinatoire (telle que définie par Françon) [Lat97]. En effet, pour ce type d'images, les modifications à apporter à la méthode de *Delaunay Discret sur les pointels* afin que celle-ci puisse reconstruire simultanément les surfaces d'objets concurrents sont minimales. Notons que les *micro-modèles* des surfaces étant des 2-variétés, nous ne devons pas utiliser les règles de transformation que nous avons proposé dans la section 7.2. Autrement, nous devons revoir ces règles dans le cas des images à plusieurs labels. Nous définissons l'interface entre deux objets par l'ensemble de surfels du *micro-modèle* incidents à deux voxels de labels différents. Notons que cette interface est composée des mêmes surfels dans les deux surfaces discrètes. Ensuite, la seule modification remarquable dans l'algorithme est que les nœuds sélectionnés sur les interfaces sont dédoublés dans les maillages résultants. La figure 7.17 montre un foie et un rein droit qui ont une frontière commune. Nous pouvons remarquer que les deux maillages

obtenus avec la méthode de DDP pour un rayon de résolution $r = 5$ coïncident le long de cette frontière.

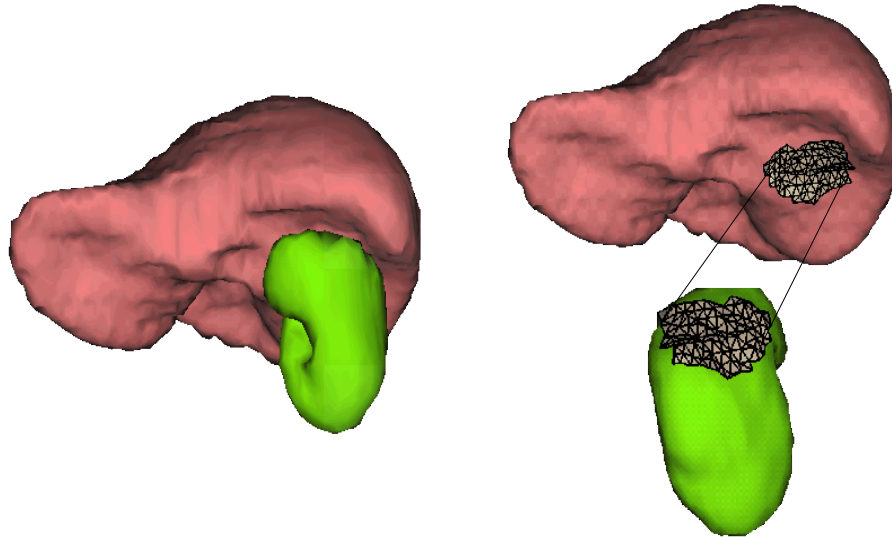


FIG. 7.17 – Reconstruction simultanée d'un foie et d'un rein collés. La surface d'interface est contenue dans les deux maillages.

Bibliographie

- [AB98] N. Amenta and M. Bern. Surface reconstruction by Voronoi filtering. In *Proceedings of the fourteenth annual symposium on Computational geometry*, pages 39–48. ACM Press, 1998.
- [AB02] D. Attali and J.-D. Boissonnat. A linear bound on the complexity of the delaunay triangulation of points on polyhedral surfaces. Technical Report RR-4453, INRIA, 2002.
- [ABE98] N. Amenta, M. Bern, and D. Eppstein. The crust and the β -skeleton : Combinatorial curve reconstruction. *Graphical models and image processing : GMIP*, 60(2) :125–135, 1998.
- [ABK98] N. Amenta, M. Bern, and M. Kamvysselis. A new Voronoi-based surface reconstruction algorithm. In *Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 415–421. ACM Press, 1998.
- [ACDL02] N. Amenta, S. Choi, T.K. Dey, and N. Leekha. A simple algorithm for homeomorphic surface reconstruction. *International Journal of Computational Geometry and Applications*, 12(1-2) :125–141, 2002.
- [ACK01a] N. Amenta, S. Choi, and R.K. Kolluri. The power crust. In *Proceedings of 6th ACM Symposium on Solid Modeling*, pages 249–260, 2001.
- [ACK01b] N. Amenta, S. Choi, and R.K. Kolluri. The power crust, unions of balls, and the medial axis transform. *Computational Geometry : Theory and Applications*, 19(2-3) :127–153, 2001.
- [AFF85] S. Ansal di, L. De Floriani, and B. Falcidieno. Geometric modeling of solid objects by using a face adjacency graph representation. In Pat Cole, Robert Heilman, and Brian A. Barsky, editors, *SIGGRAPH*, pages 131–139. ACM, 1985.
- [AFH80] E. Artzy, G. Frieder, and G.T. Herman. The theory, design, implementation and evaluation of a three-dimensional surface detection algorithm. In *SIGGRAPH '80 : Proceedings of the 7th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 2–9, New York, NY, USA, 1980. ACM Press.
- [AG01] S. Akkouche and E. Galin. Adaptive implicit surface polygonization using marching triangles. *Comput. Graph. Forum*, 20(2) :67–80, 2001.

- [AGL02] Z. Aktouf, B. Gilles, and P. Laurent. A three-dimensional holes closing algorithm. *Pattern Recognition Letters*, 23 :523–531, 2002.
- [APF07] M. Alexandre, D. Philippe, and N. Fabrice. *Informatique graphique et rendu (Traité IC2)*, chapter 8 représentations alternatives. traitement du signal et de l'image. HERMES SCIENCE PUBLICATIONS, mar 2007.
- [Aya04] N. Ayache, editor. *Computational Models for the Human Body*. Handbook of Numerical Analysis (Ph. Ciarlet series editor). Elsevier, 2004. 670 pages.
- [Bau72] B.G. Baumgart. Winged edge polyhedron representation. Technical report, Stanford University, Stanford, CA, USA, 1972.
- [BB90] A. Bryant and J. Bryant. Following boundaries of discrete binary objects in space. *Pattern Recogn.*, 23(6) :547–552, 1990.
- [BB98] J.-P. Braquelaire and L. Brun. Image segmentation with topological maps and interpixel representation. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 9(1) :62–79, mars 1998.
- [BBP01] H. Brönnimann, C. Burnikel, and S. Pion. Interval arithmetic yields efficient dynamic filters for computational geometry. *Discrete Applied Mathematics*, 109(1-2) :25–47, 2001.
- [BC00] J.-D. Boissonnat and F. Cazals. Smooth surface reconstruction via natural neighbour interpolation of distance functions. In *Proceedings of the sixteenth annual symposium on Computational geometry*, pages 223–232. ACM Press, 2000.
- [BCL96] C.L. Bajaj, E.J. Coyle, and K.-N. Lin. Arbitrary topology shape reconstruction from planar cross sections. *Graph. Models Image Process.*, 58(6) :524–543, 1996.
- [BDF00] Y. Bertrand, G. Damiand, and C. Fiorio. Topological encoding of 3d segmented images. In *DGCI '00 : Proceedings of the 9th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 311–324, London, UK, 2000. Springer-Verlag.
- [BE95] M. Bern and D. Eppstein. Mesh generation and optimal triangulation. In Ding-Zhu Du and Frank Kwang-Ming Hwang, editors, *Computing in Euclidean Geometry*, number 4 in Lecture Notes Series on Computing, pages 47–123. World Scientific, second edition, 1995.
- [Ber94] E. Bertin. *Diagrammes de Voronoï 2D et 3D : Applications en analyse d'images*. PhD thesis, Univeristé Joseph Fourier, Grenoble, Janvier 1994.
- [BF95] J. Bloomenthal and K. Ferguson. Polygonization of non-manifold implicit surfaces. In *SIGGRAPH '95 : Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 309–316, New York, NY, USA, 1995. ACM Press.
- [BFS98] C. Burnikel, S. Funke, and M. Seel. Exact geometric predicates using cascaded computation. In *SCG '98 : Proceedings of the fourteenth annual*

- symposium on Computational geometry*, pages 175–183, New York, NY, USA, 1998. ACM Press.
- [BG97] H. Borouchaki and P.L. George. Aspects of 2-d delaunay mesh generation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40 :1957–1975, 1997.
- [BGCF95] J.W. Bullard, E.J. Garboczi, W.C. Carter, and E.R. Fuller. Numerical methods for computing interfacial mean curvature. *Computational Materials Science*, 4(2) :103–116, 1995.
- [BGLSS03] G. Barequet, M.T. Goodrich, A. Levi-Steiner, and D. Steiner. Straight-skeleton based contour interpolation. In *SODA '03 : Proceedings of the fourteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 119–127, Philadelphia, PA, USA, 2003. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [BK06] S. Bischoff and L. Kobbelt. Extracting consistent and manifold interfaces from multi-valued volume data sets. In *Bildverarbeitung für die Medizin*, 2006.
- [BM94] G. Bertrand and G. Malandain. A new characterization of three-dimensional simple points. *Pattern Recognition Letters*, 15 :169–175, 1994.
- [BM00] J. Burguet and R. Malgouyres. Strong thinning and polyhedrization of the surface of a voxel object. In *DGCI '00 : Proceedings of the 9th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 222–234, London, UK, 2000. Springer-Verlag.
- [BO03] J. D. Boissonnat and S. Oudot. Provably good surface sampling and approximation. In *SGP '03 : Proceedings of the Eurographics/ACM SIG-GRAPH symposium on Geometry processing*, pages 9–18. Eurographics Association, 2003.
- [Boi88] J.-D. Boissonnat. Shape reconstruction from planar cross sections. *Comput. Vision Graph. Image Process.*, 44(1) :1–29, 1988.
- [Bor84] G. Borgefors. Distance transformations in arbitrary dimensions. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, 27 :321–345, 1984.
- [Bor86] G. Borgefors. Distance transformations in digital images. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, 34 :344–371, 1986.
- [BST00] G. Barequet, D. Shapiro, and A. Tal. Multilevel sensitive reconstruction of polyhedral surfaces from parallel slices. *The Visual Computer*, 16(2) :116–133, 2000.
- [CDRR04] S.-W. Cheng, T. K. Dey, E. A. Ramos, and T. Ray. Sampling and meshing a surface with guaranteed topology and geometry. In *SCG '04 : Proceedings of the twentieth annual symposium on Computational geometry*, pages 280–289. ACM Press, 2004.
- [CGMS00] P. Cignoni, F. Ganovelli, C. Montani, and R. Scopigno. Reconstruction of topologically correct and adaptive trilinear isosurfaces. *Computers & Graphics*, 24(3) :399–418, 2000.

- [CGY04] F. Cazals, J. Giesen, and M. Yvinec. Delaunay triangulation based surface reconstruction : a short survey. Technical Report RR-5394, INRIA, 2004.
- [Chr01] L. Christophe. *Contribution à l'analyse topologique des images : étude d'algorithmes de squelettisation pour images 2D et 3D, selon une approche topologie digitale ou topologie discrète*. Thèse de doctorat, Université de Marne-la-Vallée, 2001.
- [CHRU85] L.S. Chen, G.T. Herman, R.A. Reynolds, and J.K. Udupa. Surface shading in the cuberille environment. *CGA*, 5(12) :33–43, 1985.
- [CMS98] P. Cignoni, C. Montani, and R. Scopigno. A comparison of mesh simplification algorithms. *Computers & Graphics*, 22(1) :37–54, 1998.
- [CNWC⁺01] J. Cavalcante-Neto, P. Wawrzynek, M. Carvalho, L. Martha, and A. Ingraffea. An algorithm for three-dimensional mesh generation for arbitrary regions with cracks. *Engineering with Computers*, 17 :75–91, 2001.
- [Coi99] Y. Cointepas. *Modélisation homotopique et segmentation tridimensionnelles du cortex cérébral à partir d'IRM pour la résolution des problèmes directs et inverses en EEG et en MEG*. PhD thesis, ENST, Octobre 1999.
- [CP98] S. L. Chan and E. O. Purisima. A new tetrahedral tessellation scheme for isosurface generation. *Computers & Graphics*, 22(1) :83–90, 1998.
- [CS04] D. Coeurjolly and I. Sivignon. Reversible discrete volume polyhedrization using marching cubes. In *SPIE 2004, Vision Geometry XII*, pages 1–11, San Jose, USA, 2004. SPIE.
- [DA05] H. Delingette and N. Ayache. Hepatic surgery simulation. *Communications of the ACM*, 48(2) :31–36, February 2005.
- [Dam01] G. Damiand. *Définition et étude d'un modèle topologique minimal de représentation d'images 2D et 3D*. PhD thesis, Univeristé Montpellier II, Décembre 2001.
- [Dar05] X. A. Daragon. *Surfaces discrètes et frontières d'objets dans les ordres (Posets : discrete surfaces and objet boundaries)*. PhD thesis, Université de Marne-La-Vallée, Octobre 2005.
- [Del98] H. Delingette. Initialization of deformable models from 3d data. In *Proceedings of the Sixth Int. Conf. on Computer Vision (ICCV'98)*, pages 311–316, Bombay, India, January 1998.
- [DG03] T.K. Dey and S. Goswami. Tight cocone : a water-tight surface reconstructor. In *SM '03 : Proceedings of the eighth ACM symposium on Solid modeling and applications*, pages 127–134, New York, NY, USA, 2003. ACM Press.
- [DP02] O. Devillers and S. Pion. Efficient exact geometric predicates for delaunay triangulations. Technical Report 4351, INRIA, janvier 2002.
- [DW04] Q. Du and D. Wang. Constrained boundary recovery for three dimensional delaunay triangulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 61 :9 :1471–1500, 2004.

- [Dür88] M. J. Dürst. Additional reference to marching cubes. *SIGGRAPH Comput. Graph.*, 22(2) :72–73, 1988.
- [EDD⁺95] M. Eck, T. DeRose, T. Duchamp, H. Hoppe, M. Lounsbery, and W. Stuetzle. Multiresolution analysis of arbitrary meshes. In *SIGGRAPH '95 : Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 173–182. ACM Press, 1995.
- [Ede87] H. Edelsbrunner. *Algorithms in combinatorial geometry*. Springer-Verlag New York, Inc., New York, NY, USA, 1987.
- [Ede98] H. Edelsbrunner. Shape reconstruction with delaunay complex. In *LATIN '98 : Proceedings of the Third Latin American Symposium on Theoretical Informatics*, pages 119–132. Springer-Verlag, 1998.
- [Ede01] H. Edelsbrunner. *Geometry and topology for mesh generation*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2001.
- [EG02] A. Ern and J.L. Guermond. *Éléments finis : théorie, applications, mise en oeuvre*. Springer, 2002.
- [EPO91] A.B. Ekoule, F.C. Peyrin, and C.L. Odet. A triangulation algorithm from arbitrary shaped multiple planar contours. *ACM Trans. Graph.*, 10(2) :182–199, 1991.
- [ES97] H. Edelsbrunner and N. Shah. Triangulating topological spaces. *Int. J. Comput. Geometry Appl.*, 7(4) :365–378, 1997.
- [FB96] P. J. Frey and H. Borouchaki. Texel : triangulation de surfaces implicites. partie i : aspects théoriques. Technical Report 3066, INRIA - Rocquencourt, Décembre 1996.
- [FB00] J. Françon and Y. Bertrand. Topological 3d-manifolds : a statistical study of the cells. *Theoretical Computer Science*, pages 233–254, 2000.
- [FG99] P. Frey and P.-L. George. *Maillages - applications aux éléments finis*. Paris : Hermès, 1999.
- [FKU77] H. Fuchs, Z. M. Kedem, and S.P. Uselton. Optimal surface reconstruction from planar contours. *Commun. ACM*, 20(10) :693–702, 1977.
- [FP99] J. Françon and L. Papier. Polyhedrization of the boundary of a voxel object. In *DCGI '99 : Proceedings of the 8th International Conference on Discrete Geometry for Computer Imagery*, pages 425–434, London, UK, 1999. Springer-Verlag.
- [Fra95] J. Françon. Discrete combinatorial surfaces. *Graph. Models Image Process.*, 57(1) :20–26, 1995.
- [FW96] S. Fortune and C. J. Van Wyk. Static analysis yields efficient exact integer arithmetic for computational geometry. *ACM Trans. Graph.*, 15(3) :223–248, 1996.
- [Gib98] S. F. Frisken Gibson. Constrained elastic surface nets : Generating smooth surfaces from binary segmented data. In *MICCAI '98 : Proceedings of the First International Conference on Medical Image Computing*

- and Computer-Assisted Intervention*, pages 888–898, London, UK, 1998. Springer-Verlag.
- [GM98] R. Garimella and S. Mark. Boundary layer meshing for viscous flows in complex domains. In *Proceedings of 7th International Meshing Roundtable*, pages 107–118. Sandia National Laboratories Press, 1998.
- [GM00] R. Garimella and S. Mark. Boundary layer mesh generation for viscous flow simulation. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 49 : 1 :193–218, 2000.
- [GMN01] N. Mouravliansky G.K. Matsopoulos and K. Nikita. A novel and efficient implementation of the marching cubes algorithm. *Computerized Medical Imaging and Graphics*, 25(4) :343–352, 2001.
- [GS85] L. Guibas and J. Stolfi. Primitives for the manipulation of general subdivisions and the computation of voronoi. *ACM Trans. Graph.*, 4(2) :74–123, 1985.
- [GU89] D. Gordon and J. K. Udupa. Fast surface tracking in three-dimensional binary images. *Comput. Vision Graph. Image Process.*, 45(2) :196–214, 1989.
- [Her92] G. T. Herman. Discrete multidimensional jordan surfaces. *CVGIP : Graph. Models Image Process.*, 54(6) :507–515, 1992.
- [HI97] A. Hilton and J. Illingworth. Marching triangles : Delaunay implicit surface triangulation. In *Technical Report for CVSSP*, 1997.
- [HNF00] N. Hitschfeld, G. Navarro, and R. Farias. Tessellations of cuboids with steiner points. In *Proceedings of 9th International Meshing Roundtable*, pages 275–282. Sandia National Laboratories Press, 2000.
- [HSSZ97] H.-C. Hege, M. Seebab, D. Stalling, and M. Zöckler. A generalized marching cubes algorithm based on non-binary classification. Technical report, Konrad-Zuse-Zentrum, 1997.
- [JLSW02] T. Ju, F. Losasso, S. Schaefer, and J. Warren. Dual contouring of hermite data. In *SIGGRAPH '02 : Proceedings of the 29th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 339–346, New York, NY, USA, 2002. ACM Press.
- [Kal92] A. D. Kalvin. *Segmentation and surface-based modeling of objects in three-dimensional biomedical images*. PhD thesis, New York University, New York, NY, USA, 1992.
- [KBSS01] L. Kobbelt, M. Botsch, U. Schwanecke, and H.-P. Seidel. Feature sensitive surface extraction from volume data. In *SIGGRAPH '01 : Proceedings of the 28th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*, pages 57–66, New York, NY, USA, 2001. ACM Press.
- [Kep75] E. Keppel. Approximating complex surfaces by triangulation of contour lines. *IBM-JRD*, 19(1) :2–11, 1975.

- [KI06] Y. Kenmochi and A. Imiya. Combinatorial boundary of a 3d lattice point set. *Journal of Visual Communication and Image Representation*, 17(4) :738–766, August 2006.
- [KL04] N. Krahnstoever and C. Lorenz. Computing curvature adaptive surface triangulations of three dimensional image data. *The Visual Computer*, 20(1) :17–36, 2004.
- [Kov89] V. A. Kovalevsky. Finite topology as applied to image analysis. *Computer Vision Graphics and Image Processing*, 46(2) :141–161, 1989.
- [Kov93] V. A. Kovalevsky. Digital geometry based on the topology of abstract cell complexes. In *Proceedings of the Third International Colloquium "Discrete Geometry for Computer Imagery"*, pages 259–284, 1993.
- [KS01] T. Karkanis and A.J. Stewart. Curvature-dependent triangulation of implicit surfaces. *Comput. Graph. Appl.*, 21(2) :60–69, 2001.
- [Lac98] J.-O. Lachaud. *Extraction de surfaces à partir d'images tridimensionnelles : approche discrète et approche par modèle déformable*. PhD thesis, Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 1998. (en français).
- [Lat95] L. Latecki. Multicolor well-composed pictures. *Pattern Recogn. Lett.*, 16(4) :425–431, 1995.
- [Lat97] L. Latecki. 3d well-composed pictures. *Graph. Models Image Process.*, 59(3) :164–172, 1997.
- [Lau06] P. Laug. Contribution à la génération automatique de maillages de qualité pour la simulation numérique. Technical report, UPMC, Paris VI, mars 2006.
- [LB00] A. Liu and M. Baida. How far flipping can go towards 3d conforming/constrained triangulation. In *Proceedings of 9th International Meshing Roundtable*. Sandia National Laboratories Press, 2000.
- [LC87] W. E. Lorensen and H. E. Cline. Marching Cubes : A High Resolution 3D Surface Construction Algorithm. *Computer Graphics*, 21(4) :163–169, July 1987.
- [Len11] N.J. Lennes. Theorems on the simple finite polygon and polyhedron. *Americal Journal of Mathematics*, 33 :37–62, 1911.
- [Len97] A. Lenoir. Fast estimation of mean curvature on the surface of a 3d discrete object. In *DGCI*, pages 175–186, 1997.
- [LFB07] P. Lienhardt, L. Fuchs, and Y. Bertrand. *Informatique graphique, modélisation géométrique et animation.*, volume 1 of *Traitement du Signal et de l'Image*, chapter Modèles topologiques, pages 49–93. Hermès, 2007. sous la direction de D. Bechmann et B. Péroche.
- [Li00] X.-Y. Li. Spacing control and sliver-free delaunay mesh. In *Proceedings of 9th International Meshing Roundtable*, pages 295–306. Sandia National Laboratories Press, 2000.

- [Lie89a] P. Lienhardt. Subdivisions of n-dimensional spaces and n-dimensional generalized maps. In *ACM Symposium on Computational Geometry, Saarbrücken, Allemagne*, pp. 228-236, Juin 1989.
- [Lie89b] P. Lienhardt. Subdivisions of surfaces and generalized maps. In *Eurographics'89, Hambourg, Allemagne*, pp. 439-452, Septembre 1989.
- [Lie91] P. Lienhardt. Topological models for booundary representations : a comparison with n-dimensional generalized maps. *Computer-Aided Design*, 23(1) :59–82, 1991.
- [LLVT03] T. Lewiner, H. Lopes, A. W. Vieira, and G. Tavares. Efficient implementation of marching cubes' cases with topological guarantees. *Journal of Graphics Tools*, 8(2) :1–15, 2003.
- [LM99] J.-O. Lachaud and A. Montanvert. Deformable meshes with automated topology changes for coarse-to-fine 3D surface extraction. *Medical Image Analysis*, 3(2) :187–207, 1999.
- [LM00] J.-O. Lachaud and A. Montanvert. Continuous analogs of digital boundaries : A topological approach to iso-surfaces. *Graphical Models*, 62(3) :129–164, 2000.
- [LP88] R. Löhner and P. Parikh. Generation of three-dimensional unstructure grids by the advancing-front method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 8 :1135–1149, 1988.
- [LT05] J.-O. Lachaud and B. Taton. Deformable model with a complexity independent from image resolution. *Comput. Vis. Image Underst.*, 99(3) :453–475, 2005.
- [Lue01] D. P. Luebke. A developer's survey of polygonal simplification algorithms. *IEEE Comput. Graph. Appl.*, 21(3) :24–35, 2001.
- [Löh88] R. Löhner. Some useful data structure for generation of unstructured grid. *International Journal for Applied Numerical Methods*, 3 :123–135, 1988.
- [Löh92] R. Löhner. Finite elements in cfd : Grid generation, adaptivity and parallelization. In *Chapter 8 in AGARD Rep. 787, Proc. Special Course on Unstructured Grid Methods for Advection Dominated Flows VKI, Belgium*, pages –, 1992.
- [Mal94] R. Malgouyres. *Une définition des surfaces de \mathbb{Z}^3* . Thèse de doctorat. Université d'Auvergne, Clermont-Ferrand, France, 1994.
- [Mal96] R. Malgouyres. There is no local characterization of separating and thin objects in \mathbb{Z}^3 . *Theor. Comput. Sci.*, 163(1-2) :303–308, 1996.
- [Mal97] R. Malgouyres. A new definition of surfaces of \mathbb{Z}^3 . a new 3d jordan theorem. *Theoretical Computer Science*, 186 :1–41, 1997.
- [Mat94] S. V. Matveyev. Approximation of isosurface in the marching cube : ambiguity problem. In *VIS '94 : Proceedings of the conference on Visualization '94*, pages 288–292, Los Alamitos, CA, USA, 1994. IEEE Computer Society Press.

- [MBA93] G. Malandain, G. Bertrand, and N. Ayache. Topological segmentation of discrete surfaces. *International Journal of Computer Vision*, 10(2) :183–197, 1993.
- [MR81] D.G. Morgenthaler and A. Rosenfeld. Surfaces in three-dimensional digital images. *Information and Control*, 51(3) :227–247, 1981.
- [NH91] G. M. Nielson and B. Hamann. The asymptotic decider : resolving the ambiguity in marching cubes. In *VIS '91 : Proceedings of the 2nd conference on Visualization '91*, pages 83–91, Los Alamitos, CA, USA, 1991. IEEE Computer Society Press.
- [Nic04] S. Nicolau. *Un système de réalité augmentée pour guider les opérations du foie en radiologie interventionnelle*. PhD thesis, Université de Nice-Sophia Antipolis, November 2004.
- [Nie03] G.M. Nielson. On marching cubes. *Visualization and Computer Graphics, IEEE Transactions on*, 9(3) :283–297, 2003.
- [Nie04] G. M. Nielson. Dual marching cubes. In *VIS '04 : Proceedings of the conference on Visualization '04*, pages 489–496, Washington, DC, USA, 2004. IEEE Computer Society.
- [ORY05] S. Oudot, L. Rineau, and M. Yvinec. Meshing volumes bounded by smooth surfaces. In *Proc. 14th International Meshing Roundtable*, pages 203–219, 2005.
- [Owe98] J.S. Owen. A survey of unstructured mesh generation technology. In *Proceedings of 7th International Meshing Roundtable*, pages 239–267. Sandia National Laboratories Press, 1998.
- [Pap99] L. Papier. *Polyédrisation et visualisation d'objets discrets tridimensionnels*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, Octobre 1999.
- [PB07] J.-P. Pons and J.-D. Boissonnat. Delaunay deformable models : Topology-adaptive meshes based on the restricted delaunay triangulation. In *IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, Minneapolis, USA, Jun 2007.
- [Per94] L. Perroton. *Segmentation parallèle d'images volumiques*. Thèse de doctorat. Ecole Nationale Supérieure de Lyon, France, 1994.
- [PR71] C.-M. Park and A. Rosenfeld. Connectivity and genus in three dimensions. Technical Report TR-156, University of Maryland, 1971.
- [PSB⁺07] J.-P. Pons, F. Ségonne, J.-D. Boissonnat, Y. Rineau, L. Yvinec, and R. Keriven. High-quality consistent meshing of multi-label datasets. In *Proceedings of Information Processing in Medical Imaging, (IPMI), LNCS*, August 2007.
- [Ras98] A. Rassineux. Generation and optimization of tetrahedral meshes by advancing front technique. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 41 :651–674, 1998.

- [RBB05] B. Reitinger, A. Bornik, and R. Beichel. Constructing smooth non-manifold meshes of multi-labeled volumetric datasets. In *WSCG (Full Papers)*, pages 227–234, 2005.
- [RO00] R. Radovitzky and M. Ortiz. Tetrahedral mesh generation based on node insertion in crystal lattice arrangements and advancing-front-delaunay triangulation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 187 : 3–4 :543–569, 2000.
- [Ros79] A. Rosenfeld. Digital topology. *American Mathematical Monthly*, 86 :621–630, 1979.
- [RS97] F. Reinhardt and Heinrich S. *Atlas des mathématiques*. La Pochothèque, 1997.
- [Rév91] J.P. Réveillès. *Géométrie discrète, calcul en nombre entiers et algorithmique*. PhD thesis, Université Louis Pasteur, Strasbourg, Décembre 1991.
- [SAN⁺04] L. Soler, N. Ayache, S. Nicolau, X. Pennec, C. Forest, H. Delingette, D. Mutter, and J. Marescaux. Traitements d’images médicales pour la planification, la simulation et l’ aide intra-opératoire des actes chirurgicaux. In M. Faupel, P. Smigielski, and R. Grzymala, editors, *Imagerie et Photonique pour les sciences du vivant et la médecine*, pages 19–31. Edition Fontis Media, 2004. ISBN 2-88476-005-9.
- [SG91] M. S. Shephard and M.K. Georges. Three-dimensional mesh generation by finite octree technique. *International Journal of Numerical Methods Engineering*, 32 :709–749, 1991.
- [SGF⁺88] M. S. Shephard, F. Guerinoni, J. E. Flaherty, R. A. Ludwig, and P.L. Baehmann. Finite octree mesh generation for automated adaptive three-dimensional flow analysis. In *Proc. 2nd Int. Conf. Numer. Grid Generation in Computational Fluid Mechanics*, pages 709–718, 1988.
- [SHS03] K. Suzuki, I. Horiba, and N. Sugie. Linear-time connected-component labeling based on sequential local operations. *Comput. Vis. Image Underst.*, 89(1) :1–23, 2003.
- [Siq04] M. Siqueira. Making 3d binary digital images well-composed. Technical report, University of Pennsylvania, 2004.
- [Siq06] M. Siqueira. *Mesh generation from imaging data*. PhD thesis, University of Pennsylvania, USA, 2006.
- [Siv04] I. Sivignon. *De la caractérisation des primitives à la reconstruction polyédrique de surface en géométrie discrète*. PhD thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, Novembre 2004.
- [SLS00] S. Stokes, M. Leatham, and J. A. Shaw. Three dimensional hybrid mesh generation for viscous flows using the advancing-layer approach with automatic layer topology modification. *Numerical Grid Generation in Computational Field Simulations*, 57 :13 :1923–1942, 2000.

- [STG98] A. Singh, D. Terzopoulos, and D.B. Goldgof. *Deformable Models in Medical Image Analysis*. IEEE Computer Society Press, Los Alamitos, CA, USA, 1998.
- [SW04] S. Schaefer and J. Warren. Dual marching cubes : Primal contouring of dual grids. In *PG '04 : Proceedings of the Computer Graphics and Applications, 12th Pacific Conference*, pages 70–76, Washington, DC, USA, 2004. IEEE Computer Society.
- [Thi01] E. Thiel. Géométrie des distances de chanfrein. Technical report, Université de la Méditerranée, Aix-Marseille II, décembre 2001.
- [USH82] J.K. Udupa, S.N. Srihari, and G.T. Herman. Boundary detection in multidimensions. *PAMI*, 4(1) :41–50, January 1982.
- [Vos93] K. Voss. *Discrete Images, Objects, and Functions in \mathbb{Z}^n* . Springer-Verlag Berlin, 1993.
- [Wea90] N.P. Weatherill. The integrity of geometrical boundaries in two-dimensional delaunay triangulation. *Communications in Applied Numerical Methods*, 6 :101–109, 1990.
- [Wei04] E. Weisstein. *Mathworld* (<http://mathworld.wolfram.com>), chapter “Hole”. Wolfram Web, 2004.
- [WMW86] G. Wyvill, C. McPheeters, and B. Wyvill. Data structure for soft objects. *The Visual Computer*, 2(4) :227–234, 1986.
- [WS03] Z. Wu and J. M. Sullivan. Multiple material marching cubes algorithm. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, pages 189–207, 2003.
- [Yap97] C.-K. Yap. Towards exact geometric computation. *Comput. Geom. Theory Appl.*, 7(1-2) :3–23, 1997.
- [YS84] M. A. Yerry and M. S. Shephard. Automatic three-dimensional mesh generation by the modified-octree technique. *International Journal of Numerical Methods Engineering*, 20 :1965–1990, 1984.
- [YS03] S. Yamakawa and K. Shimada. Anisotropic tetrahedral meshing via bubble packing and advancing front. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, pages 233–242, 2003.
- [ZSK94] C. Zhou, R. Shu, and M. S. Kankanhalli. Handling small features in isosurface generation using marching cubes. *Computers & Graphics*, 18(6) :845–848, 1994.