

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de docteur de l'Université Louis Pasteur - Strasbourg I
(spécialité Acquisition et Traitement d'Images)

par

Jawad ELSAYED AHMAD

MISE AU POINT DE MÉTHODES POLARIMÉTRIQUES
POUR LA STÉRÉOVISION

Composition du jury :

<i>Président</i>	Pr. Marc-Philippe STOLL
<i>Rapporteurs externes</i>	Pr. Laurent BIGUÉ et Pr. Jack CARIOU
<i>Rapporteur interne</i>	Pr. Ernest HIRSCH
<i>Directeur de thèse</i>	Dr. Yoshitane TAKAKURA

Remerciements

En premier lieu, je voudrais remercier mon directeur de thèse, Monsieur Yoshitane Takakura, pour ses conseils pendant mes années d'étude. Il m'a donné l'occasion de m'engager dans un travail scientifique très motivant au sein du groupe TRIO à l'Université Louis Pasteur. Il a éveillé mon intérêt pour la Science.

Je voudrais également remercier Messieurs Ernest Hirsh, Marc-Philippe Stoll, Laurent Bigué et Jack Cariou pour avoir examiné mon travail doctoral.

Je tiens à remercier aussi les membres actuels de l'équipe TRIO : Jérôme Colin, Romain Roux, Céline Quentin et Qingfeng Shen. Je remercie aussi tous les anciens membres de l'équipe : Cheng Weng, Samia Ainouz et Geng-Ming Jiang. Je voudrais aussi remercier les doctorants de l'équipe MIV avec qui j'ai passé d'agréables moments durant et hors des périodes de travail.

Mes sincères remerciements sont adressés à Jihad Zallat, Françoise Nerry et Raphaël Luhaha pour leur disponibilité et leur soutien durant ces trois années. Je voudrais aussi remercier Marcel Raffy et Georges Najjar.

Merci enfin à toute ma famille qui n'a jamais hésité à m'adresser toute sorte d'aide.

Pour finir, je remercie Stéphanie pour son tendre soutien et pour tous les jolis moments que nous avons partagés ensemble.

JAWAD ELSAYED AHMAD
Strasbourg, France
21 février 2008

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Contexte du travail	1
1.2	Présentation du travail de thèse - Objectifs	3
1.3	Structure du mémoire	4
2	Polarimétrie imageante et stéréovision	7
2.1	Polarisation de la lumière	7
2.1.1	Description	7
2.1.2	Ellipse de polarisation	8
2.2	Formalismes de polarisation	11
2.2.1	Formalisme de Jones	11
2.2.2	Matrice de cohérence	12
2.2.3	Formalisme de Stokes	13
2.2.4	Matrice de Mueller	16
2.3	Représentation géométrique d'états de polarisation	17
2.3.1	Sphère de Poincaré	17
2.3.2	Planisphère de Poincaré	18
2.4	Propriétés optiques remarquables et éléments associés	20
2.4.1	Dichroïsme	20
2.4.2	Biréfringence, lame à retard	22
2.4.3	Pouvoir polarisant ou polarisance et le dépolariseur	23
2.5	Propriétés de la matrice de Mueller	24
2.5.1	Admissibilité physique	24
2.5.2	Décomposition polaire	25
2.5.3	Surfaces et cartes de polarisation	26
2.6	Matrice de Mueller expérimentale	26

2.6.1	Principe de mesure	26
2.6.2	Image de Mueller	30
2.6.3	Incertitudes	30
2.6.4	Des images en 3D	32
2.7	Stéréovision : éléments de modélisation	32
2.7.1	Modèle projectif linéaire	32
2.7.2	Géométrie épipolaire	34
2.7.3	Contrainte épipolaire	35
2.7.4	Matrice fondamentale	36
2.7.5	Stéréovision axiale et latérale	37
2.7.6	Système avec prises de vues quelconques	40
2.8	Limites	41
3	Étalonnage d'un système stéréo-polarimétrique	43
3.1	Problématique	43
3.2	Polarimètre expérimental	44
3.2.1	Modèles d'éléments optiques	44
3.3	Capteur CCD	45
3.3.1	Sources de bruit	46
3.4	Étalonnage optique	48
3.4.1	Matrice de Mueller du vide	48
3.4.2	Polariseurs	48
3.4.3	Lames à retard	49
3.5	Étalonnage stéréoscopique	50
3.5.1	Système stéréoscopique	50
3.5.2	Méthodes d'étalonnage	51
3.5.3	Correction des distorsions	52
3.6	Extraction de la matrice de Mueller	53
3.6.1	Maximisation du déterminant (méthode MI)	55
3.6.2	Méthode du Pseudo-Inverse (PI)	55
3.6.3	Méthode de Fourier (FT)	55
3.6.4	Choix des angles de mesure	56
3.6.5	Discussions	59
3.7	Discussions	62
3.8	Estimation de la matrice fondamentale	63
3.8.1	Méthode linéaire	63
3.8.2	Méthode de normalisation	64
3.8.3	Méthode non-linéaire	66
3.8.4	Méthodes robustes	66

3.8.5	Expérimentation	68
3.9	Conclusion	71
4	Estimation et segmentation des images de Mueller	73
4.1	Introduction	73
4.2	Expression de la matrice de Mueller	75
4.2.1	Méthode MI	75
4.2.2	Méthode FT	78
4.3	Bruit dans les images polarimétriques	80
4.3.1	Propagation du bruit dans l'image de Mueller	80
4.3.2	Amplification du bruit dans la décomposition polaire	82
4.4	Segmentation de l'image de Mueller	84
4.4.1	Formulation du problème	84
4.4.2	Choix des images pour la segmentation	85
4.4.3	Estimation des paramètres	86
4.4.4	Évaluations numériques	87
4.4.5	Segmentation multi-modale	90
4.5	Admissibilité physique	91
4.5.1	Formulation	91
4.5.2	Méthode SQP	93
4.5.3	Méthode CSA	94
4.5.4	Procédures de validation	96
4.6	Incertitudes sur la matrice fondamentale	104
4.7	Conclusion	104
5	Reconstruction 3D par images polarimétriques	107
5.1	Objectif	107
5.2	Descriptions	108
5.3	Aveuglement de la caméra	109
5.4	Algorithme de reconstruction	109
5.5	Reconstruction 3D	112
5.5.1	Méthode géométrique	112
5.5.2	Méthode analytique	113
5.5.3	Reconstruction de pièces industrielles	115
5.5.4	Reconstruction d'un cylindre	115
5.6	Évaluation géométrique	116
5.6.1	Reconstruction d'une pièce manufacturée	117
5.6.2	Estimation d'erreurs	119
5.7	Discussions	120

6	Conclusion	123
6.1	Travail accompli	123
6.2	Contributions	123
6.2.1	Méthodes d'inversion	123
6.2.2	Admissibilité physique	124
6.2.3	Distribution du bruit	125
6.2.4	Estimation-segmentation des images	125
6.2.5	Stéréo-polarimétrie	126
6.3	Perspectives	127
A	Annexes	129
A.1	Transformation en base elliptique : groupe $SU(2)$	129
A.2	Transformation en base elliptique : groupe O_4	130
A.3	Méthode d'estimation de la matrice de rotation	131
	Bibliographie	133

1.1 Contexte du travail

AU cours de ces dernières années, la vision par ordinateur [1] a suscité un intérêt grandissant, que ce soit dans le domaine civil pour des applications industrielles, d'urbanisme, dans le diagnostic médical ou dans la métrologie et la télédétection [2]. La raison principale en est l'émergence et le développement de systèmes de formation d'images (caméra, optique) de plus en plus pointus. Par ailleurs, la précision des détecteurs optiques et l'utilisation croissante des systèmes commandés par ordinateur ont permis d'atteindre des performances remarquables et cela, à des cadences proches du temps réel.

Certaines applications de la vision par ordinateur nécessitent de plus en plus une reconstruction tridimensionnelle précise de la scène. La représentation 3D repose sur la recherche de correspondances point-par-point entre deux images d'une scène [3]. En enregistrant de telles images, la fusion d'informations issue d'une multimodalité géométrique devient possible ; la carte en profondeur de la scène peut être déterminée, des changements de la scène peuvent être détectés, et des objets identifiés. Le principe conventionnel fait appel à des techniques d'acquisition variées, où la nature et le positionnement de la source d'illumination, le capteur ainsi que le modèle à évaluer font objets. Les techniques classiques associées aux problèmes de reconstruction tridimensionnelle, à savoir la stéréovision, la lumière structurée et le shape-from-shading consistent à représenter une scène 3D à partir d'images d'intensité.

Dans ce cadre, la stéréoscopie apparaît aujourd'hui comme une modalité maîtrisée de reconstruction tridimensionnelle d'objets par imagerie optique [4]. Le principe conventionnel repose sur l'acquisition d'une paire d'images issues d'un capteur dont la position aura été modifiée. L'aspect algorithmique lié au traitement est marqué par une étape délicate appelée appariement dont l'objectif est de trouver avec la plus grande précision permise les points communs aux deux images, recherche basée à la fois sur les propriétés géométriques des droites dites épipolaires et sur une procédure de minimisation de l'erreur de positionnement [5]. La précision de reconstruction dépend du nombre de points d'appariement choisis. Dans ce contexte, le problème de mise en correspondance peut profiter d'une approche multi-images dont l'objectif est de rendre robuste tout

algorithme de reconstruction 3D par traitement conjoint de plusieurs images. L'étape finale de la reconstruction, dont le but est d'extraire à partir des points appariés une représentation 3D de l'ensemble des nappes de surfaces formant la scène, fait appel à une méthode de triangulation.

La maîtrise des différentes étapes de la reconstruction tridimensionnelle par stéréovision laisse croire que l'on dispose d'un outil opérationnel. Il apparaît cependant que lorsqu'un objet est transparent ou lorsqu'il présente des arêtes vives devant le capteur, l'aveuglement de la caméra qui en résulte se traduit par une perte d'information de contour portée par les points invisibles ou saturés dans les images stéréoscopiques. Par ailleurs, les images dites d'intensité ne donnent pas accès aux propriétés physiques des objets constituant la scène. Deux objets ou deux zones ayant la même texture mais formés de deux matériaux différents peuvent être difficilement différenciés. Cette perte d'information, cet aveuglement ou cette transparence sont des inconvénients majeurs mettant en évidence une certaine vulnérabilité en termes de robustesse des méthodes de reconstruction classiques qui se basent sur des acquisitions d'images d'intensité. La question qui se pose est celle d'une éventuelle possibilité de pallier à ces insuffisances.

Comme toute onde électromagnétique, la lumière possède des caractéristiques fondamentales autres que l'intensité. Elle est polarisée, partiellement cohérente et dispose d'une certaine largeur spectrale. Il est certain qu'exploiter au moins une de ces caractéristiques permettrait de s'affranchir de la limite des informations portées par l'intensité.

Dans ce mémoire, l'effort nécessaire est consacré à l'étude de l'information fournie par l'état de polarisation d'une onde interagissant avec la scène qu'il appartient de représenter en 3D; il est question d'appliquer les modalités de l'imagerie polarimétrique, une représentation multimodale de l'interaction onde-matière, dont l'objectif est d'examiner la réponse d'une scène à différents états de polarisation incidents [6].

En imagerie optique dite active, la possibilité de modifier la polarisation de l'éclairage et d'observer une scène suivant certains états de polarisation permet de faire apparaître les contours transparents ou d'atténuer l'intensité des arêtes vives. Il s'agit d'exploiter la réponse de Fresnel des interfaces, couplée à la diffusion liée aux inhomogénéités surfaciques ou volumiques, en palliant ainsi aux insuffisances de la vision classique. Par ailleurs, la prise en compte de la nature vectorielle de la lumière donne la possibilité d'accéder non seulement à la représentation géométrique de la scène, mais aussi à la nature physique des objets qui y sont présents. Ainsi est-il possible de lever l'ambiguïté concernant deux objets de géométrie identique et ayant des réponses en intensité très voisines. Une telle modalité, l'imagerie polarimétrique, représente naturellement une solution aux contraintes physiques auxquelles est soumise la stéréoscopie conventionnelle.

1.2 Présentation du travail de thèse - Objectifs

Le travail de thèse concerne essentiellement le couplage entre la stéréovision et la polarisation. Sur le plan polarimétrique, c'est l'approche de Mueller qui est considérée : chaque scène ou objet est observé(e) suivant 16 canaux dont le premier n'est autre que l'image d'intensité conventionnelle. Quant à la reconstruction tridimensionnelle, elle est abordée suivant une approche de stéréovision, ce qui signifie que 16 autres acquisitions sont effectuées après repositionnement du capteur.

Le travail doctoral se décline en deux parties :

La première partie concerne l'optimisation d'un polarimètre. Une méthode pour minimiser les erreurs de mesure et réduire les effets du bruit polarimétrique est proposée. Cette méthode a donné des résultats plus satisfaisants que la méthode usuelle de l'inversion matricielle 4×4 et les images ainsi obtenues sont plus précises ; les zones ayant des propriétés polarimétriques différentes sont correctement estimées, segmentées et les niveaux de gris sont significatifs de propriétés polarisantes.

L'approche d'identification et de segmentation adoptée est une approche basée région qui prend en compte l'homogénéité des classes présentes dans une image de Mueller, ce qui permet d'estimer avec plus de robustesse la physique portée par chacune des classes ; l'aspect de la segmentation multimodale est pris en considération même si un niveau de bruit élevé est présent. La difficulté de la segmentation des images de Mueller réside dans la présence de 16 canaux différents. Pour cela, une technique de réduction de dimensionalité est nécessaire pour minimiser le temps de calcul qui peut devenir très grand. Il apparaît cependant que les méthodes classiques de réduction de dimensionalité comme l'analyse en composantes principales (ACP) ou l'analyse en composantes indépendantes (ACI) se sont avérées difficilement applicables pour l'imagerie de polarisation. Par ailleurs, la décomposition polaire pourrait être une solution au problème de la dimensionalité mais une telle décomposition a tendance à amplifier le bruit expérimental dans les 3 matrices-images liées à la dépolarisation, la diatténuation ou à la matrice de rotation.

Dans ce contexte, il apparaît que le meilleur compromis consiste à appliquer les méthodes usuelles de segmentation sur les images d'intensité brutes issues directement des acquisitions. Le critère de choix des images à segmenter parmi les canaux expérimentaux repose sur celui disposant du maximum de contraste porté par l'objet à étudier. Pour un bruit gaussien, une telle approche permet de limiter l'impact du bruit expérimental sur les images de Mueller, ce qui va permettre de procéder à une mise en correspondance et donc à une reconstruction 3D plus précise de la scène.

La deuxième partie tient compte du travail mené dans la première partie pour traiter de la stéréovision polarimétrique, c'est-à-dire la reconstruction d'un objet en 3D grâce à l'information portée par deux images polarimétriques de Mueller au lieu des images d'intensité usuelles. Dans une telle technique de prise de vue binoculaire, si la distance séparant l'objet et la caméra est suffisamment grande par rapport à la distance focale de l'optique, le modèle du sténopé peut être adopté pour décrire le processus de formation d'image. La relative simplicité de la stéréovision selon un tel modèle rend cette approche intéressante pour des applications industrielles, puisque la phase de mise en correspondance en est simplifiée.

En vision binoculaire passive, on distingue généralement deux modèles géométriques pour aborder le problème de la stéréovision : un système de stéréovision latéral et un système axial qui fournit deux paires d'images soit par une caméra munie d'un zoom ou qui se déplace le long d'une trajectoire confondue avec son axe optique. Concernant la mise au point de l'objectif, il subsiste toujours des problèmes mécaniques ne permettant pas un positionnement idéal de la caméra. Un système de stéréovision axial est beaucoup plus sensible aux erreurs de mise en correspondance et aux erreurs de calibrage qu'un système de stéréovision latéral. Une faible erreur de mise en correspondance ou de calibrage dans un système axial engendre des erreurs importantes lors de la triangulation surtout pour le calcul de la profondeur des points appariés proches du point principal (centre optique). En ce sens, le choix s'est porté vers un système de stéréovision latéral.

Les étapes expérimentales de la reconstruction 3D ont été abordées avec rigueur. En commençant par l'étalonnage de la caméra CCD, en passant par la correction des distorsions, par la rectification des images ou encore par la géométrie épipolaire et le calcul de la matrice fondamentale, une méthode d'appariement dense a été proposée et la reconstruction par triangulation, expérimentée. Ainsi a-t-il été possible de fournir une texture au voisinage des points appariés pour pouvoir reconstruire les objets avec une plus grande précision. Par ailleurs, une méthode de segmentation et d'estimation des images bruitées a été expérimentée, ce qui a conduit à résoudre correctement le problème posé par la tâche complexe de la segmentation d'images polarimétriques.

1.3 Structure du mémoire

Le mémoire de thèse se divise en quatre parties et présente les contributions essentielles du travail doctoral. Sur le plan conceptuel, l'apport de la polarimétrie à la stéréoscopie est mis en évidence par une analyse quantitative de la précision de reconstruction tridimensionnelle d'objets délicats. Par ailleurs, le concept physique de "zones de Mueller" résultant de la segmentation naturelle par polarisation est aussi introduit.

La première partie fait l'objet d'un état de l'art des modalités étudiées dans ce travail, à savoir l'imagerie de polarisation et la stéréovision. Après une présentation des formalismes usuels de la polarisation et des travaux courants en vision, la problématique de l'imagerie de polarisation est posée notamment par introduction de la notion d'admissibilité physique et de la méthode de décomposition polaire d'une matrice de Mueller, sujets qui sont abondamment traités dans la littérature.

Dans la deuxième partie, une étude avancée de l'étalonnage d'un imageur de Stokes-Muller est menée. Elle concerne un polarimètre à lames rotatives en éclairage incohérent. Il apparaît que, même si la procédure d'étalonnage est rigoureusement effectuée, l'inversion polarimétrique requiert la connaissance précise des états de polarisation accessibles et que ces états doivent être choisis de manière à rendre optimal le conditionnement des équations polarimétriques. Dans ce contexte, la propagation du bruit additif d'intensité est quantitativement analysée suivant une étude comparative portant sur trois méthodes : inversion matricielle, pseudo-inverse et analyse par transformée de Fourier discrète [7]. Enfin, sur le plan de la stéréovision, l'étalonnage du capteur a été soigneusement effectué et une procédure d'estimation de paramètres géométriques expérimentée : distance focale, point principal, géométrie épipolaire et calcul de la matrice fondamentale.

Après avoir traité les aspects liés à la précision polarimétrique et à la mise au point géométrique de l'outil de stéréovision, le travail de thèse se focalise sur l'aspect bidimensionnel de l'imagerie de Mueller : c'est l'objet de la troisième partie du mémoire de thèse. La segmentation d'images polarimétriques est un problème central dans l'analyse rigoureuse d'une région d'intérêt : elle consiste à localiser une structure d'intérêt dans une image et à isoler cette région de son voisinage. La complexité de la segmentation des images polarimétriques est liée à plusieurs facteurs : la taille des images, leur dimensionalité 4×4 , la présence d'un bruit inégalement réparti dans les 16 canaux, la forme parfois complexe des objets, ainsi que l'absence de vérité de terrain nécessaire pour valider toute méthode de segmentation. La profondeur de champ en est aussi un facteur limitant. Dans ce cadre, des approches de traitement d'images prenant en compte la globalité de l'image plutôt que des approches locales traitant l'image pixel par pixel ont été considérées [8]. La technique de segmentation a été validée sur des images synthétisées, et expérimentée sur des images réelles [9]. Cette technique repose essentiellement sur une étude traitant de la propagation du bruit expérimental dans les 16 canaux qui constituent l'image de Mueller [10]. Enfin, un travail expérimental sur l'admissibilité physique a aussi été accompli ; dans ce cadre, une étude comparative entre une méthode d'estimation de maximum *a posteriori* [11] et une méthode d'optimisation avec contrainte [12] a été finalisée.

La quatrième partie est une partie de synthèse où les aspects présentés dans les trois parties précédentes sont rassemblés et exploités. Il est question d'appliquer les modalités

de la stéréovision aux paires d'images de Mueller, ce qui définit les démarches à adopter lorsqu'il s'agit d'aborder la stéréovision polarimétrique [13]. Le résultat fondamental ici en est que pour pouvoir effectuer une reconstruction tridimensionnelle acceptable, la carte de segmentation fournie par la méthode décrite dans la troisième partie du mémoire se doit d'être suffisamment précise et que les niveaux de gris portés par chaque pixel des images de Mueller se doivent de satisfaire à la condition d'admissibilité physique.

Chapitre 2

Polarimétrie imageante et stéréovision

Résumé

Toute étude complète des interactions lumière-matière doit tenir compte de la polarisation. Dans ce chapitre, nous introduisons les éléments de polarimétrie qui seront manipulés par la suite à savoir : le vecteur de Jones, la matrice de cohérence, les paramètres de Stokes et la matrice-image de Mueller. Sur le volet de la reconstruction tridimensionnelle, le principe de la stéréovision est présenté et le choix volontaire des prises de vue latérale justifié.

2.1 Polarisation de la lumière

2.1.1 Description

LA polarisation est une propriété fondamentale de la lumière au même titre que l'intensité, la phase, la cohérence ou la longueur d'onde. Comme toute onde électromagnétique, la lumière admet une représentation vectorielle. Cette représentation porte sans équivoque l'empreinte des processus d'interaction onde-matière, interaction qui, en fonction des caractéristiques physiques et géométriques de la cible, peut produire un changement de l'état de polarisation de l'onde incidente : une onde électromagnétique se propage dans l'espace-temps ; dans ce parcours, elle peut rencontrer une cible particulière, interagir avec cette cible. Suite à cette interaction, une partie de l'énergie portée par l'onde incidente est absorbée, le reste est diffusé comme étant une nouvelle onde électromagnétique. Les propriétés polarimétriques de cette onde diffusée peuvent être différentes de celles de l'onde incidente : son état de polarisation peut avoir été modifié et la caractérisation du changement de cet état de polarisation est à la base de la polarimétrie. Dans le cadre d'une approche imageante, la prise en compte de cette nature vectorielle et de cette modification de l'état de polarisation permet, non seulement de pallier à un certain nombre de limitations inhérentes aux systèmes d'imagerie conventionnelle, mais également d'accéder à une caractéristique supplémentaire riche en information, aux retombées applicatives prometteuses.

La description moderne de la lumière polarisée fait appel à divers formalismes

géométriques ou algébriques. L'intérêt d'une représentation vectorielle de la polarisation est que les éléments optiques polarisants peuvent être représentés par des matrices : de Mueller, qui agissent sur les paramètres-vecteurs de Stokes, ou de Jones, qui agissent sur les vecteurs de Jones. Un choix parmi les outils mathématiques peut être établi pour décrire la polarisation : formalisme de Jones, matrice de cohérence/covariance ou formalisme de Stokes-Mueller. Ces outils possèdent tous des avantages et des inconvénients. Le formalisme de Jones donne accès à l'information sur la phase de l'onde et peut être utilisé dans les études traitant de la combinaison d'ondes cohérentes comme dans les systèmes interférentiels. Le formalisme de Stokes-Mueller permet d'étudier les états partiellement polarisés de lumière et présente l'avantage d'éliminer la phase de tous les calculs ; seules interviennent les intensités, ce qui facilite les validations expérimentales. Il est à noter que les vecteurs de Jones appartiennent à un espace vectoriel, ce qui n'est pas le cas des paramètres-vecteurs de Stokes.

Les intensités manipulées par le formalisme de Stokes-Mueller sont directement accessibles par l'instrumentation, au moyen de capteurs usuels ; c'est un formalisme particulièrement adapté à des approches imageantes. Il s'agit d'une représentation vecteur-matrice où la polarisation de l'onde est décrite par un vecteur réel 4×1 appelé vecteur de Stokes, et où l'action d'un système optique est représentée par une matrice (*opérateur*) réelle 4×4 dite de Mueller. Le vecteur de Stokes $S_{4 \times 1}$ décrit entièrement une onde électromagnétique avec ses quatre composantes ; la matrice de Mueller $\mathbf{M}_{4 \times 4}$ peut être interprétée comme étant une matrice de transfert entre les vecteurs de Stokes incident et émergent de l'interaction d'une onde électromagnétique avec une cible.

2.1.2 Ellipse de polarisation

Une onde électromagnétique dans le vide est une onde vectorielle transversale ; les vecteurs de champ électrique \vec{E} et magnétique \vec{H} sont orthogonaux entre eux et se trouvent dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation. Il est donc suffisant d'étudier le comportement d'un seul champ, le champ électrique, pour décrire la polarisation. L'état de polarisation est défini par la courbe décrite par l'extrémité du champ électrique en fonction du temps, projetée sur le plan orthogonal à la direction de la propagation. Cette courbe peut être linéaire, circulaire ou plus généralement, elliptique. Dans ce dernier cas, l'état de polarisation est déterminé par les paramètres de l'ellipse comme son orientation, son ellipticité ou son amplitude.

L'onde plane monochromatique ou quasi-monochromatique se propageant vers les z positifs¹ est une solution élémentaire de l'équation de propagation. Les valeurs instantanées

¹On considère la direction $+z$ comme la direction de propagation du vecteur de Poynting qui est également, pour un milieu homogène, la direction de la propagation de l'énergie.

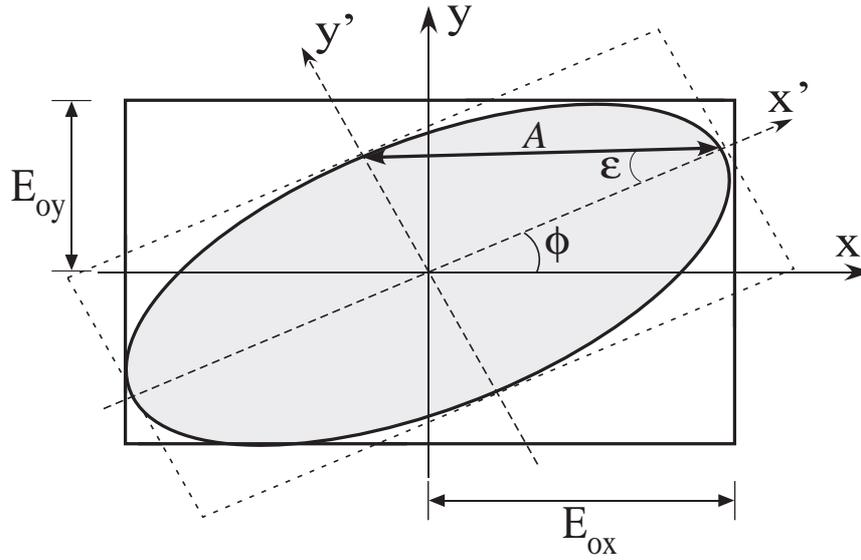


Figure 2.1 – Ellipse de polarisation définie par une orientation ϕ , une ellipticité ε et une amplitude A .

du champ électrique peuvent se décomposer en trois composantes orthogonales dans un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\vec{E}(z, t) = \begin{bmatrix} E_x = E_{ox} \cos(\omega t - kz - \delta_x) \\ E_y = E_{oy} \cos(\omega t - kz - \delta_y) \\ E_z = 0 \Rightarrow \text{onde plane} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

k est le vecteur d'onde qui définit la direction de propagation ; (E_{ox}, E_{oy}) et (δ_x, δ_y) sont les amplitudes et phases du champ électrique dans les directions x et y respectivement. Ces valeurs sont supposées être indépendantes du temps et l'onde est monochromatique. Dans le plan $z = z_0 = \text{constante}$, en éliminant la dépendance temporelle ωt entre E_x et E_y , on peut montrer que l'extrémité du champ électrique \vec{E} décrit la courbe suivante :

$$\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2 + \left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2 - 2\frac{E_x E_y}{E_{ox} E_{oy}} \cos \delta = \sin^2 \delta \quad (2.2)$$

où δ est la phase relative qui résulte de la différence de phase entre les composantes E_x et E_y : $\delta = (\delta_y - \delta_x)$. L'équation 2.2 représente une conique. Plus précisément, c'est l'équation d'une ellipse puisque son déterminant associé est positif [14]. Cette ellipse peut se dégénérer en un cercle, on a un état de polarisation circulaire ou en un segment de droite, l'état de polarisation est dit linéaire. De façon générale, une onde parfaitement monochromatique est totalement polarisée.

Pour un état de polarisation arbitraire, c'est-à-dire elliptique, d'ondes planes, la Figure 2.1 décrit les paramètres usuellement utilisés en polarimétrie : ϕ est l'angle

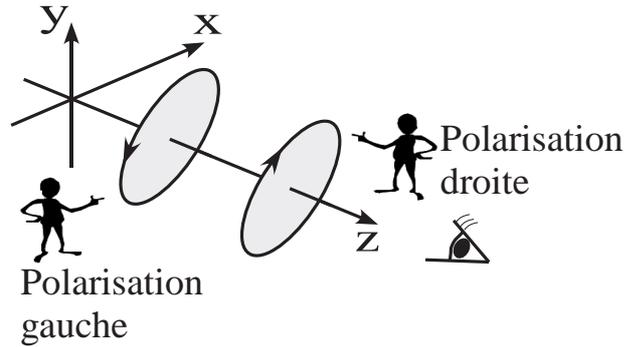


Figure 2.2 – Le sens de parcours de l’ellipse de polarisation est défini pour un observateur regardant dans la direction $-z$.

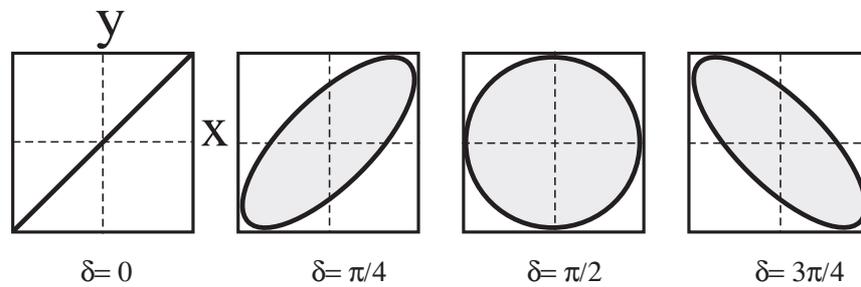


Figure 2.3 – Forme de l’ellipse de polarisation en fonction de la phase relative δ .

d’orientation qui détermine la rotation des axes principaux de l’ellipse par rapport aux axes de référence (x, y) : $(-\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2})$, et ε : $(-\frac{\pi}{4} \leq \varepsilon \leq \frac{\pi}{4})$ est l’ellipticité, un angle qui détermine le taux d’aplatissement de l’ellipse. Quant au sens de parcours, il est lié au signe de la phase relative δ . Par convention, il est déterminé par un observateur qui regarde en direction de la source lumineuse : c’est la convention FSA, voir Figure 2.2. Suivant cette convention : lorsque $\sin \delta < 0$, la polarisation est dite droite ou “right-handed polarization” (*RHP*) ; l’extrémité du vecteur de champ électrique suit le sens des aiguilles d’une montre. Quand $\sin \delta > 0$, on a une polarisation gauche ou “left-handed” (*LHP*) ; l’extrémité du vecteur \vec{E} parcourt dans le sens trigonométrique. Quand $\sin \delta = 0$, l’ellipse se dégenère en un segment de droite et l’onde est polarisée linéairement ou “linearly polarized” (*LP*). Pour $\sin \delta = \pm 1$, on a une polarisation circulaire ou “circularly polarized” (*CP*), gauche si $\delta = +1$, droite si $\delta = -1$.

Il est à souligner que le sens de parcours de l’ellipse de polarisation est aussi déterminé par ses paramètres géométriques. Lorsque l’ellipticité vérifie $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{4}$, on a une polarisation gauche (*LHP*) ; elle est droite (*RHP*) lorsque $-\frac{\pi}{4} < \varepsilon < 0$. Quand $\varepsilon = 0$,

on a un état de polarisation linéaire (LP) puisque l'ellipticité est nulle. Enfin, si $\varepsilon = \pm\frac{\pi}{4}$, l'état de polarisation est circulaire (CP) et l'ellipticité est maximale.

Les paramètres géométriques de l'ellipse peuvent être reliés aux composantes du champ électrique. L'orientation peut être exprimée par :

$$\tan 2\phi = 2 \frac{E_{ox}E_{oy}}{E_{ox}^2 - E_{oy}^2} \cos \delta \quad (2.3)$$

et l'ellipticité par :

$$\sin 2\varepsilon = 2 \frac{E_{ox}E_{oy}}{E_{ox}^2 + E_{oy}^2} \sin \delta \quad (2.4)$$

2.2 Formalismes de polarisation

2.2.1 Formalisme de Jones

L'interaction entre une onde plane électromagnétique et un matériau homogène peut être décrite par le formalisme de Jones. C'est une description vectorielle où toute action d'un élément polarisant est identifiée par une matrice 2×2 opérant sur le vecteur du champ électrique incident. R. C. Jones a utilisé la représentation complexe pour décrire la polarisation des ondes planes monochromatiques [15] et le vecteur de champ électrique est de la forme :

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_{ox}e^{i\delta_x} \\ E_{oy}e^{i\delta_y} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

De façon générale, le vecteur de Jones est formulé comme étant une fonction complexe bidimensionnelle liée aux caractéristiques géométriques d'ellipse de polarisation comme suit :

$$\vec{E} = Ae^{i\alpha} \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varepsilon \\ i \sin \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (2.6)$$

α est défini comme étant la phase absolue de l'onde, son interprétation géométrique est donnée dans l'annexe **A.1**.

Le formalisme de Jones traite des ondes totalement polarisées, c'est-à-dire définies par trois paramètres polarimétriques qui sont : soit les triplets (E_{ox}, E_{oy}, δ) ou (A, ϕ, ε) , soit les trois derniers éléments du vecteur de Stokes (s_1, s_2, s_3) que nous présenterons dans le cadre du formalisme de Stokes. Dans l'approche de Jones, tout système non dépolarisant est représenté par un opérateur 2×2 appelé matrice de Jones \mathbf{J} et le vecteur de Jones de toute onde ayant interagi avec un tel système s'écrit de la manière suivante :

$$E_e = \mathbf{J} E_i \quad (2.7)$$

E_i est le vecteur de Jones de l'onde incidente. Lorsqu'un système est constitué de plusieurs éléments non dépolarisants mis en cascade, sa matrice de Jones est le produit des matrices de Jones élémentaires formant le système :

$$E_e = \mathbf{J}_n \mathbf{J}_{n-1} \cdots \mathbf{J}_1 E_i \quad (2.8)$$

où \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_n représentent respectivement le premier et le dernier dispositif dans le parcours du faisceau lumineux.

Le calcul de Jones² permet de suivre l'évolution d'une onde polarisée à travers plusieurs éléments optiques. Cette description complexe ne doit pas cacher le fait qu'au final, seules les quantités réelles importent. Il est à retenir que ce calcul ne traite pas des optiques dépolarisantes, ce qui limite son application à une certaine catégorie de systèmes.

2.2.2 Matrice de cohérence

Jusqu'à présent, les amplitudes E_{ox}, E_{oy} et la phase δ ont été supposées indépendantes du temps, ce qui est suffisant pour décrire une onde plane monochromatique en régime stationnaire. Dans une approche plus réaliste, il n'est pas exclu que ces quantités fluctuent dans le temps si elles sont observées dans un intervalle de temps suffisamment petit, inférieur à un temps appelé temps de cohérence de la source. Ainsi, pour une source ayant une certaine largeur spectrale, le champ électromagnétique est-il *a priori* partiellement polarisé, ce qui signifie que le champ électrique fluctue autour d'un état de polarisation moyen. L'aspect quasi-aléatoire de la fluctuation requiert une étude statistique des variations et des corrélations entre les composantes ($E_x(t), E_y(t)$) du champ électrique, corrélations incorporées dans une matrice dite de cohérence/covariance qui introduit la notion de cohérence liée à la source.

La matrice de cohérence définie par Wolf est une matrice 2×2 obtenue par moyenne temporelle du produit direct du vecteur de Jones par son conjugué hermitien [16]. Elle s'écrit sous la forme suivante :

$$\Gamma = \langle E \otimes E^{\top*} \rangle = \begin{bmatrix} \langle E_x(t)E_x^*(t) \rangle & \langle E_x(t)E_y^*(t) \rangle \\ \langle E_y(t)E_x^*(t) \rangle & \langle E_y(t)E_y^*(t) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{xx} & \Gamma_{xy} \\ \Gamma_{yx} & \Gamma_{yy} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

où \otimes est le produit tensoriel ou de Kronecker, et la notation $\langle \cdot \rangle$ représente l'opérateur de moyenne temporelle. Les éléments de la matrice de cohérence sont des termes quadratiques homogènes à des intensités et peuvent être mesurés par un dispositif optique adapté. Sa trace n'est autre que l'intensité totale I_0 de l'onde :

$$\text{Tr}(\Gamma) = \Gamma_{xx} + \Gamma_{yy} = \langle |E_x(t)|^2 \rangle + \langle |E_y(t)|^2 \rangle = I_0 \quad (2.10)$$

²Nous avons présenté une description du formalisme de Jones dans une base cartésienne, elle peut néanmoins être généralisée pour une base elliptique quelconque (Annexe **A.1**).

Il est à noter que la matrice de cohérence est hermitienne par construction ; elle est diagonalisable et ses valeurs propres sont réelles et positives. La décomposition en valeurs propres est unique et s'écrit :

$$\Gamma = \mathbf{U} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \mathbf{U}^{\top*} = \lambda_1 u_1 u_1^{\top*} + \lambda_2 u_2 u_2^{\top*}. \quad (2.11)$$

La signification physique en est qu'une onde partiellement polarisée, caractérisée par une matrice de cohérence Γ résulte d'une superposition incohérente de deux ondes totalement polarisées, de vecteurs u_1 et u_2 , pondérés des poids λ_1 et λ_2 . Une décomposition alternative consiste à séparer la matrice de cohérence en deux composantes, l'une totalement polarisée (déterminant égal à zéro) et l'autre totalement dépolarisée (matrice identité à un facteur près) :

$$\Gamma = \Gamma_P + \Gamma_{NP} = \begin{bmatrix} b & d \\ d^* & c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} \quad a, b \text{ et } c \geq 0 \text{ et } bc - dd^* = 0. \quad (2.12)$$

Dans l'un ou l'autre des cas, l'opération d'addition correspond à une superposition incohérente d'ondes. La deuxième décomposition introduit naturellement la notion de "degré de polarisation" (*DoP*), c'est-à-dire la fraction d'intensité contenue dans la composante totalement polarisée. Le *DoP* permet de déterminer jusqu'à quelle mesure, l'onde est polarisée et est défini comme étant le rapport de l'intensité de la composante polarisée de l'onde sur son intensité totale. C'est une caractéristique intrinsèque puisqu'il est invariant par changement de repère ; il suffit de le vérifier avec la définition suivante :

$$DoP = \frac{I_{pol}}{I_{tot}} = \sqrt{1 - 4 \frac{\det(\Gamma)}{[\text{Tr}(\Gamma)]^2}} = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (2.13)$$

Le degré de polarisation est compris entre 0 et 1, c'est une mesure de la négentropie de polarisation de l'onde : $DoP = 1$ implique que $\det(\Gamma) = 0$ et que $\lambda_2 = 0$, ce qui correspond à une onde totalement polarisée. Par contre, $DoP = 0$ implique que $\lambda_1 = \lambda_2$ et que l'onde est non polarisée.

2.2.3 Formalisme de Stokes

Il a été mentionné que le formalisme de Jones traite des ondes totalement polarisées aux dimensions polarimétriques de 3. Un tel formalisme ne permet pas de décrire les ondes partiellement polarisées aux dimensions polarimétriques de 4 : $\langle |E_x|^2 \rangle$, $\langle |E_y|^2 \rangle$, $\langle E_x E_y^* \rangle$, $\langle E_y E_x^* \rangle$ qui sont les coefficients de la matrice de cohérence, avec lesquels il est néanmoins possible de définir un vecteur réel appelé vecteur de Stokes. Par construction, un tel vecteur peut représenter l'état de polarisation d'une onde plane totalement polarisée, partiellement polarisée ou totalement dépolarisée [17].

Le vecteur de Stokes est un vecteur 4×1 dont les quatre composantes sont définies par les relations suivantes :

$$S = \begin{bmatrix} \langle s_0 \rangle = \langle |E_{ox}|^2 \rangle + \langle |E_{oy}|^2 \rangle \\ \langle s_1 \rangle = \langle |E_{ox}|^2 \rangle - \langle |E_{oy}|^2 \rangle \\ \langle s_2 \rangle = 2\langle E_{ox}E_{oy} \cos \delta \rangle \\ \langle s_3 \rangle = 2\langle E_{ox}E_{oy} \sin \delta \rangle \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Ces composantes sont des quantités réelles, auxquelles il est possible de donner une signification physique en relation avec le protocole expérimental de mesure d'intensités : $\langle s_0 \rangle = I_x + I_y$ représente l'intensité totale de l'onde ; $\langle s_1 \rangle = I_x - I_y$ est lié à la différence d'intensités entre les composantes horizontale et verticale ; $\langle s_2 \rangle = I_{+45^\circ} - I_{-45^\circ}$ représente la différence d'intensités dans les directions $+45^\circ$ et -45° ; $\langle s_3 \rangle = I_G - I_D$ décrit la différence d'intensités entre les deux états de polarisation circulaire gauche et circulaire droite. Par ailleurs, le signe de la composante $\langle s_3 \rangle$ définit le sens d'orientation de l'état de polarisation. Sur le plan pratique, il n'est pas possible d'accéder directement aux paramètres de Stokes : une première méthode consiste à mesurer les intensités lumineuses suivant $(H, V, 45^\circ, 135^\circ, G, D)$ puis à calculer les quatres composantes $\langle s_0 \rangle, \langle s_1 \rangle, \langle s_2 \rangle, \langle s_3 \rangle$; une deuxième consiste à considérer quatre états de polarisation elliptiques puis à inférer les éléments de Stokes.

Le vecteur de Stokes peut s'écrire en fonction de l'angle d'orientation ϕ de l'ellipse de polarisation, de son ellipticité ε et de son amplitude A :

$$S = \begin{bmatrix} A^2 \\ A^2 \cos 2\phi \cos 2\varepsilon \\ A^2 \sin 2\phi \cos 2\varepsilon \\ A^2 \sin 2\varepsilon \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Pour une lumière totalement polarisée, seuls trois des paramètres de Stokes sont indépendants ; on a la relation suivante :

$$\langle s_0 \rangle^2 = \langle s_1 \rangle^2 + \langle s_2 \rangle^2 + \langle s_3 \rangle^2. \quad (2.16)$$

Pour des ondes partiellement polarisées, les quatre paramètres du vecteur de Stokes satisfont à l'inégalité :

$$\langle s_0 \rangle^2 \geq \langle s_1 \rangle^2 + \langle s_2 \rangle^2 + \langle s_3 \rangle^2, \quad \text{avec } \langle s_0 \rangle \geq 0 \quad (2.17)$$

Pour des ondes totalement dépolarisées, le champ électrique a un comportement arbitraire, sa moyenne temporelle est la même dans toutes les directions : $\langle |E_x|^2 \rangle = \langle |E_y|^2 \rangle$, et sa phase

est équi-répartie entre $-\pi$ et π : $\langle \cos \delta \rangle = \langle \sin \delta \rangle = 0$. Le vecteur de Stokes d'ondes planes totalement dépolarisées s'écrit finalement :

$$S = \langle s_0 \rangle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Le formalisme de Stokes fournit une description complète de l'état de polarisation d'une onde électromagnétique. Par exemple, les composantes du vecteur de Stokes sont liées aux paramètres géométriques de l'ellipse de polarisation suivant les relations :

$$\sin 2\varepsilon = \frac{\langle s_3 \rangle}{\sqrt{\langle s_1 \rangle^2 + \langle s_2 \rangle^2 + \langle s_3 \rangle^2}} \quad -\frac{\pi}{4} < \varepsilon \leq \frac{\pi}{4}, \quad (2.19)$$

$$\tan 2\phi = \frac{\langle s_2 \rangle / \langle s_1 \rangle}{\langle s_3 \rangle / \langle s_2 \rangle} \quad 0 \leq \phi < \pi, \quad (2.20)$$

$$\tan \delta = \frac{\langle s_3 \rangle / \langle s_2 \rangle}{\langle s_1 \rangle / \langle s_2 \rangle} \quad -\pi \leq \delta \leq \pi. \quad (2.21)$$

Elles s'obtiennent à partir des coefficients de la matrice de cohérence d'après l'égalité :

$$\begin{bmatrix} \langle s_0 \rangle \\ \langle s_1 \rangle \\ \langle s_2 \rangle \\ \langle s_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{xx} \\ \Gamma_{xy} \\ \Gamma_{yx} \\ \Gamma_{yy} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

En conséquence, de manière similaire à la matrice de cohérence, le vecteur de Stokes d'une onde arbitraire se décompose en deux ondes, l'une totalement polarisée, l'autre totalement dépolarisée. Cette décomposition est unique :

$$\begin{bmatrix} \langle s_0 \rangle \\ \langle s_1 \rangle \\ \langle s_2 \rangle \\ \langle s_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} DoP \cdot s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}_P + \begin{bmatrix} (1 - DoP) s_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{NP}. \quad (2.23)$$

Le degré de polarisation d'une onde dont on connaît le vecteur de Stokes S est défini par la relation :

$$DoP = \frac{\sqrt{\langle s_1 \rangle^2 + \langle s_2 \rangle^2 + \langle s_3 \rangle^2}}{\langle s_0 \rangle} \quad (2.24)$$

Sachant que le DoP est compris entre 0 et 1, il apparaît que tout vecteur réel 4×1 ne peut pas être de Stokes : un tel vecteur est de Stokes si et seulement si ses composantes obéissent à l'inégalité 2.17 et si son premier élément $\langle s_0 \rangle$ est positif.

Il est à souligner que si la représentation la plus courante d'une onde polarisée est faite dans un repère cartésien, rien n'en empêche d'exprimer un vecteur de Stokes dans une base elliptique, voir l'annexe **A.2** pour plus de détails.

2.2.4 Matrice de Mueller

Lorsqu'il s'agit d'étudier des systèmes pouvant dépolariser, le formalisme de Jones peut être remplacé par celui de Stokes-Mueller [18], qui est également un formalisme matriciel permettant de décrire l'évolution d'états de polarisation représentés par le vecteur réel qu'est le vecteur de Stokes.

Sous l'hypothèse de linéarité d'interaction, c'est-à-dire une interaction indépendante de l'intensité de la lumière, les vecteurs de Stokes incident S_i et émergent S_e sont liés par la relation matricielle, $S_e = \mathbf{M} S_i$, où \mathbf{M} est une matrice réelle 4×4 appelée matrice de Mueller qui regroupe les propriétés polarimétriques du dispositif optique :

$$\mathbf{M}_{DUT} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

À la manière de l'opérateur de Jones, la matrice de Mueller \mathbf{M} d'un système composé de n composants optiques pouvant cette fois-ci dépolariser et mis en cascade, s'écrit comme le produit des matrices de Mueller $\mathbf{M}_1, \dots, \mathbf{M}_n$ de chacun des éléments :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_n \mathbf{M}_{n-1} \cdots \mathbf{M}_1 \quad (2.26)$$

Matrice de Mueller-Jones

À une phase absolue près, une matrice de Jones possède 7 degrés de liberté. Une matrice de Mueller $\mathbf{M}_{4 \times 4}$ a au plus 16 paramètres indépendants et de fait, peut aussi décrire un système non dépolarisant comme le fait l'opérateur de Jones. Dans ce cas, elle est dite de Mueller-Jones \mathbf{M}_J et est liée à la matrice de Jones \mathbf{J} suivant la relation :

$$m_{ij} = \frac{1}{2} \text{Tr} (\mathbf{J} \sigma_j \mathbf{J}^{\top*} \sigma_i) \quad (2.27)$$

$$\mathbf{M}_J = \mathbb{A} (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*) \mathbb{A}^{-1} \quad (2.28)$$

σ_j représente les matrices 2×2 de Pauli et \mathbb{A} est la matrice de transfert qui permet de passer d'une représentation vectorielle de la matrice de cohérence au vecteur de Stokes :

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.29)$$

S'il est possible d'associer une matrice de Mueller à un opérateur de Jones, l'inverse n'est pas toujours possible. En revanche, toute matrice de Mueller \mathbf{M} admet une représentation

hermitienne \mathbf{H} qui peut être pratique lorsqu'il s'agit d'isoler les caractéristiques physiques d'une cible. Une telle représentation s'apparente à une décomposition sur la base de Pauli³ :

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 m_{ij} (\sigma_i \otimes \sigma_j^*). \quad (2.30)$$

2.3 Représentation géométrique d'états de polarisation

2.3.1 Sphère de Poincaré

Il existe une représentation géométrique d'états de polarisation qui peuvent être associés à des points d'un espace euclidien tridimensionnel construit avec les paramètres de Stokes : il s'agit de l'espace de Poincaré. Dans cet espace, une onde polarisée d'intensité totale s_0 est représentée par un point situé à l'intérieur d'une sphère de rayon s_0 appelée sphère de Poincaré [19]. C'est une représentation visuellement commode dans un espace borné, d'état totalement ou partiellement polarisé. Il existe en effet une correspondance biunivoque entre l'ensemble des états de polarisation et les points se trouvant dans la sphère de Poincaré : l'état de polarisation décrit par une ellipse d'orientation ϕ et d'ellipticité ε correspond au point p d'angles $(2\phi, 2\varepsilon)$ en coordonnées sphériques dans le repère (s_1, s_2, s_3) . Les états fondamentaux possèdent les caractéristiques géométriques suivantes :

- le centre de la sphère correspond à une onde totalement dépolarisée,
- le cercle équatorial représente les états d'ellipticité nulle $\varepsilon = 0$, c'est-à-dire les états de polarisation linéaire. Plus généralement, chaque cercle parallèle au plan (s_1, s_2) est un ensemble d'états de polarisation elliptique, d'ellipticité constante,
- le pôle nord a une ellipticité de $\pi/4$ d'orientation non définie. Il est associé à l'état de polarisation circulaire gauche tandis que le pôle sud correspond à une polarisation circulaire droite,
- sur un méridien, l'orientation est fixe mais l'ellipticité varie lorsqu'on se déplace le long de ce cercle ; l'ellipse de polarisation se déforme tout en maintenant son orientation.

Par ailleurs, deux états de polarisation orthogonaux E et E_\perp avec $(E)^\top \cdot (E_\perp) = 0$ correspondent à deux points diamétralement opposés (points antipodaux) sur la sphère de Poincaré. Cette propriété implique que pour de tels états : $\phi_\perp = \phi + \pi/2$ et $\varepsilon_\perp = -\varepsilon$. Il est à remarquer que la condition d'orthogonalité ainsi définie ne dépend pas de la phase absolue α ou α_\perp des ondes.

La représentation géométrique de Poincaré permet aussi de visualiser l'évolution d'un état de polarisation lorsqu'une onde électromagnétique traverse un système optique ; le

³Nous pouvons employer également la base lexicographique qui est liée aux propriétés observables du système, alors que la base de Pauli est plus en rapport avec ses propriétés physiques

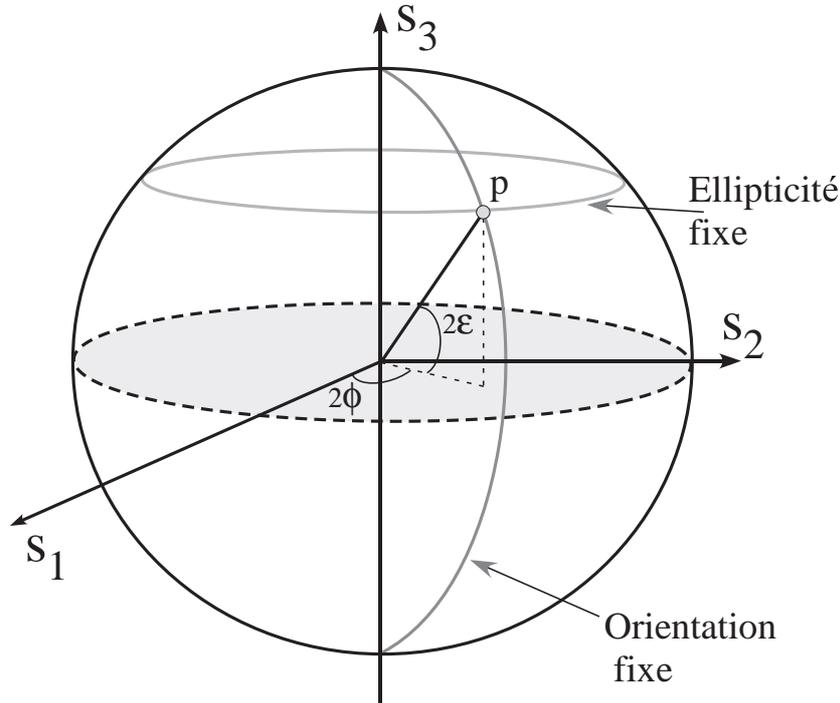


Figure 2.4 – *Sphère de Poincaré. Équateur : états linéaires ; pôle nord : état circulaire gauche ; pôle sud : état circulaire droit.*

point représentatif de l'état de polarisation décrit une trajectoire contenue dans la sphère de Poincaré, trajectoire qui permet d'identifier l'action effective des optiques sur la polarisation de l'onde incidente.

2.3.2 Planisphère de Poincaré

Il est possible d'obtenir une représentation bidimensionnelle d'états de polarisation grâce à une transformation dite gnomonique : on parle du planisphère de Poincaré. Il s'agit d'une projection cartographique de la sphère de Poincaré comme la projection elliptique d'Aitoff-Hammer, qui à tout point p de la sphère fait correspondre un point du cylindre qui l'entoure, voir Figure 2.5. Le cylindre est ensuite déplié pour former un plan repéré par les axes orthonormés (x, y) et le projeté d'un point $p(2\phi, 2\varepsilon)$ de la sphère de Poincaré a pour coordonnées, voir Figure 2.6 :

$$x_p = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\sin^2 \tau - \sin^2 2\varepsilon}}{\cos \frac{\tau}{2}} \quad (2.31)$$

$$y_p = \frac{\sin 2\varepsilon}{\sqrt{2} \cos \frac{\tau}{2}} \quad (2.32)$$

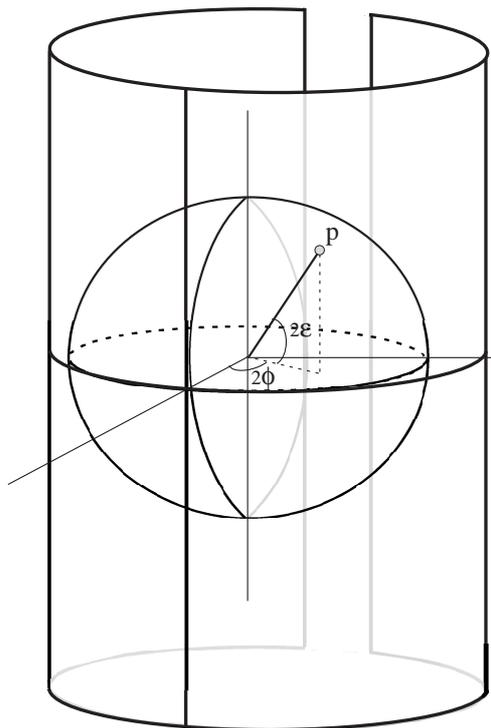


Figure 2.5 – Projection gnomonique d'Aitoff-Hammer sur un cylindre qui enrobe la sphère de Poincaré.

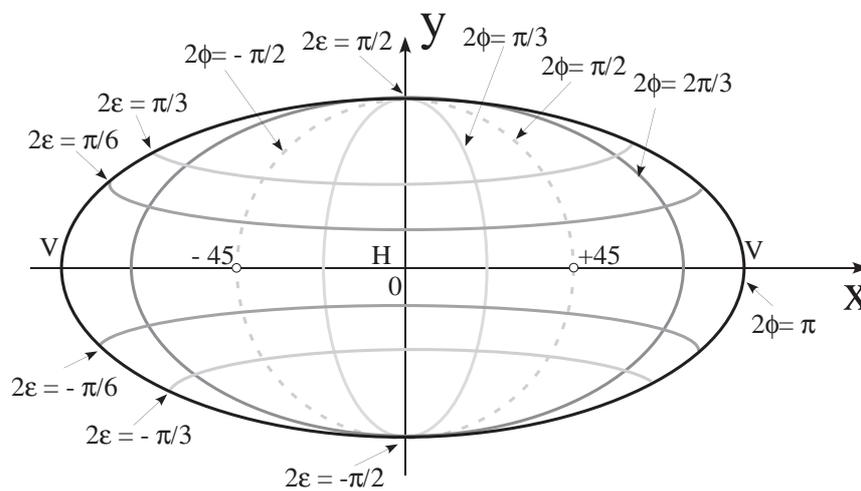


Figure 2.6 – Planisphère de Poincaré : visualisation d'états de polarisation dans un espace bidimensionnel.

avec $\cos \tau = \cos \phi \cos 2\varepsilon$.

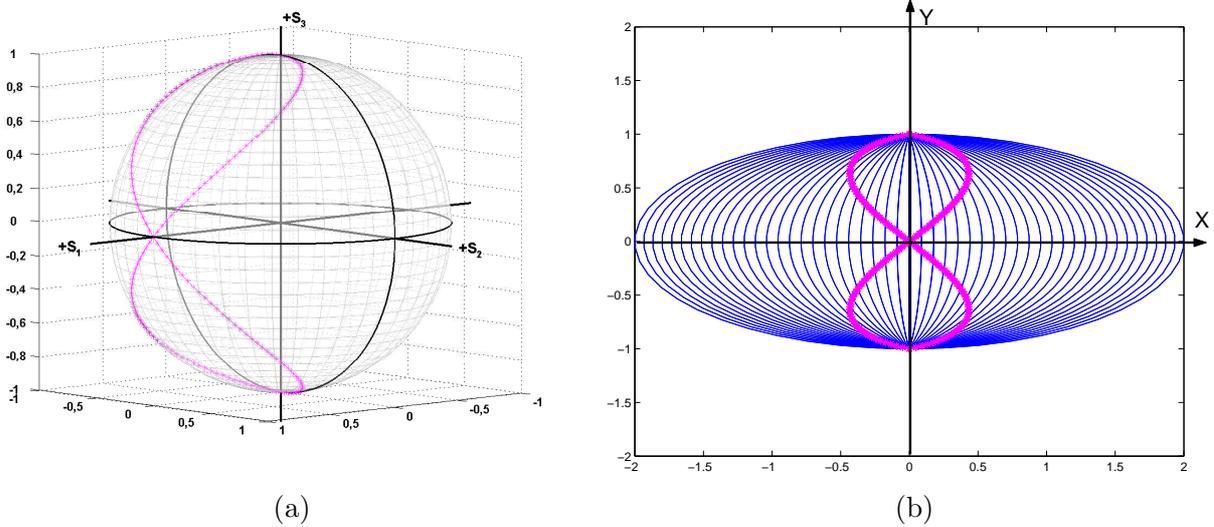


Figure 2.7 – États de polarisation d'une onde à la sortie d'un générateur d'états de polarisation. (a) Visualisation sur la sphère de Poincaré ; (b) visualisation sur le planisphère de Poincaré.

Exemple

Visualiser l'évolution d'états de polarisation peut permettre d'identifier les dispositifs optiques : dans l'exemple du système composé d'un polariseur horizontal suivi d'une lame quart-onde rotative, l'état de polarisation décrit une courbe de Lissajous dans le planisphère de Poincaré lorsque l'axe rapide de la lame fait un tour complet, voir Figure 2.7.

2.4 Propriétés optiques remarquables et éléments associés

2.4.1 Dichroïsme

Dans le contexte polarimétrique, un élément optique est dit dichroïque s'il présente une anisotropie spatiale d'absorption, c'est-à-dire si ses propriétés d'absorption dépendent de l'orientation de l'ellipse de polarisation. Un tel élément dichroïque ou *diatténuateur* ne modifiant pas la phase de l'onde électromagnétique incidente, peut être décrit par une matrice de Jones hermitienne. Sur le plan pratique, il est commode d'introduire les taux de transmission maximal T_{max} et minimal T_{min} par :

$$T_{max,min} = m_{00} \pm \sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2}. \quad (2.33)$$

où le signe + identifie T_{max} et le signe - T_{min} , ce qui permet de définir le dichroïsme scalaire ou diatténuation D :

$$D = \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max} + T_{min}}, \quad 0 \leq D \leq 1. \quad (2.34)$$

Il est à signaler qu'à un même dichroïsme scalaire D peuvent correspondre plusieurs éléments optiques comme les polariseurs horizontal et vertical. Pour les distinguer, il convient de disposer de degrés de liberté additionnels en introduisant par exemple des axes, appelés axes de diatténuation, définis par des vecteurs propres, les vecteurs de Stokes pour lesquels le maximum ou minimum de transmission est obtenu :

$$S_{max} = \begin{bmatrix} 1 \\ m_{01}/\sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2} \\ m_{02}/\sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2} \\ m_{03}/\sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2} \end{bmatrix}, \quad S_{min} = \begin{bmatrix} 1 \\ -m_{01}/\sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2} \\ -m_{02}/\sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2} \\ -m_{03}/\sqrt{m_{01}^2 + m_{02}^2 + m_{03}^2} \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

Ces vecteurs correspondent à des états totalement polarisés et orthogonaux. L'axe de diatténuation est alors défini comme étant l'axe porté par le vecteur S_{max} , ce qui correspond à une transmission maximale. La conséquence en est que la première ligne de la matrice de Mueller \mathbf{M} est proportionnelle au transposé de ce vecteur :

$$\vec{D}^\top = \frac{1}{m_{00}} [m_{01} m_{02} m_{03}]. \quad (2.36)$$

Cette première ligne caractérise entièrement la transmission en intensité. Avec des critères de symétrie, il est possible d'obtenir l'expression de la matrice de Mueller du diatténuateur :

$$\mathbf{M}_D = T_u \begin{bmatrix} 1 & \vec{D}^\top \\ \vec{D} & \mathbf{m}_D \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

$$\mathbf{m}_D = (1 - D^2)^{1/2} \mathbf{I} + (1 - (1 - D^2)^{1/2}) \hat{D} \hat{D}^\top, \quad (2.38)$$

où \mathbf{I} est la matrice identité 3×3 , $\hat{D} = \vec{D}/|\vec{D}|$ le vecteur unitaire selon la direction \vec{D} et $T_u = (T_{max} + T_{min})/2$ la transmittance moyenne pour une lumière non polarisée. Il est à remarquer qu'une telle matrice a au plus 4 degrés de liberté : le vecteur de diatténuation (3 degrés) et la transmittance (1 degré) de l'état totalement polarisé.

Polariseur

Un polariseur idéal est un diatténuateur parfait $D = 1$ qui, éclairé par une lumière naturelle non polarisée, délivre une onde totalement polarisée vibrant dans la direction définie par l'axe du polariseur. En pratique, le rapport d'intensités, appelé taux d'extinction, entre la

composante perpendiculaire et la composante parallèle à l'axe de polarisation, peut varier entre 1 : 100 et 1 : 1000000. Dans le cas général d'un polariseur linéaire \mathbf{P} dont l'axe de polarisation fait un angle θ avec l'axe des x , la matrice de Mueller s'écrit :

$$\mathbf{P}_\theta = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & C_\theta & S_\theta & 0 \\ C_\theta & C_\theta^2 & C_\theta S_\theta & 0 \\ S_\theta & C_\theta S_\theta & S_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{avec } C_\theta = \cos 2\theta \text{ et } S_\theta = \sin 2\theta. \quad (2.39)$$

2.4.2 Biréfringence, lame à retard

La biréfringence est un phénomène de double réfraction qui se traduit par la transformation d'un rayon incident en deux rayons lumineux, appelés rayons ordinaire et extraordinaire se distinguant l'un de l'autre par des vitesses de phase différentes. Le retard qui résulte du déphasage entre ces deux états de polarisation est déterminé par une quantité appelée retardance. La lame biréfringente ou lame à retard est un déphaseur qui introduit un retard fixe entre ces deux états propres, états représentés par des composantes qui sont orthogonales dans la base propre du déphaseur. Un tel élément modifie uniquement la phase d'une onde incidente et sa matrice de Jones est unitaire : $\mathbf{J} \mathbf{J}^{\top*} = \mathbf{I}$.

La matrice de Mueller \mathbf{L} d'un retardateur à transmittance unitaire s'écrit :

$$\mathbf{M}_R = \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{0} & \mathbf{m}_R \end{bmatrix}, \quad (2.40)$$

$$(\mathbf{m}_R)_{ij} = \delta_{ij} \cos R + a_i a_j (1 - \cos R) + \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} a_k \sin R, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.41)$$

où : $\vec{0}$ dénote le vecteur nul de dimension 3×1 , R la valeur de retardance ou différence de phase entre deux états propres ; $(1, a_1, a_2, a_3)^\top = (1, \hat{R}^\top)^\top$ est le vecteur de Stokes normalisé qui définit l'axe rapide, δ_{ij} le produit de Kronecker, ϵ_{ijk} le symbole de permutation de Levi-Civita et \mathbf{m}_R une matrice de rotation 3×3 . La matrice \mathbf{L} a 3 degrés de liberté qui sont ceux du vecteur retard $\vec{R} = R\hat{R}$. La retardance et le vecteur de Stokes correspondant à l'axe rapide de la lame à retard peuvent être extraits de la matrice de Mueller avec les relations :

$$R = \arccos \left[\frac{\text{Tr}(\mathbf{M}_R)}{2} - 1 \right], \quad (2.42)$$

$$a_i = \frac{1}{2 \sin R} \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} (\mathbf{m}_R)_{jk}. \quad (2.43)$$

Dans le cas le plus général d'une lame à retard de retardance (déphasage) R et dont l'axe rapide fait un angle θ avec l'axe des x , la matrice de Mueller \mathbf{L} s'écrit :

$$\mathbf{L}(\theta, R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_\theta^2 + S_\theta^2 \cos R & C_\theta S_\theta (1 - \cos R) & -S_\theta \sin R \\ 0 & C_\theta S_\theta (1 - \cos R) & C_\theta^2 + S_\theta^2 \cos R & C_\theta \sin R \\ 0 & S_\theta \sin R & -C_\theta \sin R & \cos R \end{bmatrix}. \quad (2.44)$$

2.4.3 Pouvoir polarisant ou polarisance et le dépolarisateur

Lorsque l'onde incidente est totalement dépolarisée, $DoP = 0$, le degré de polarisation de l'onde émergent d'un système optique peut être déterminé uniquement à l'aide de la première colonne de sa matrice de Mueller \mathbf{M} ; il s'agit du pouvoir de polarisation ou polarisance défini par :

$$P = \frac{1}{m_{00}} \sqrt{m_{10}^2 + m_{20}^2 + m_{30}^2}. \quad (2.45)$$

Sur le plan pratique, il est possible d'associer à ce vecteur un composant optique élémentaire, appelé dépolarisateur, en construisant la matrice de Mueller \mathbf{M}_Δ :

$$\mathbf{M}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^\top \\ \vec{P} & \mathbf{m}_\Delta \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

où \vec{P} appelé vecteur de polarisance correspond à la première colonne de \mathbf{M} , et \mathbf{m}_Δ est une matrice 3×3 symétrique semidéfinie positive ou négative obtenue à partir de \mathbf{M} (voir paragraphe sur la décomposition polaire). La matrice \mathbf{m}_Δ est diagonalisable; ses valeurs propres définissent trois facteurs de dépolarisation et ses vecteurs propres fournissent trois directions de dépolarisation orthogonales. La matrice de Mueller d'un dépolarisateur dispose donc de 9 degrés de liberté : 6 correspondant à la matrice \mathbf{m}_Δ , 3 au vecteur de polarisance \vec{P} .

Discussion

La matrice de Mueller d'un dépolarisateur anisotrope rapportée aux axes propres s'écrit :

$$\mathbf{M}_\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \quad |a|, |b|, |c| \leq 1. \quad (2.47)$$

La dépolarisation moyenne ou pouvoir de dépolarisation est définie comme étant :

$$\Delta = 1 - \frac{|a| + |b| + |c|}{3}, \quad 0 \leq \Delta \leq 1. \quad (2.48)$$

Quand $|a|$, $|b|$ et $|c|$ sont égaux, le dépolariseur est dit isotrope; quand $|a|$, $|b|$ et $|c|$ sont tous nuls, le dépolariseur est dit parfait : toute onde est transformée en onde totalement dépolarisée.

La notion de dépolarisation introduite pour les systèmes optiques correspond à une réduction du degré de polarisation d'états incidents; elle traduit comment et de combien, une onde totalement polarisée voit son degré de polarisation diminuer. Pour étudier la dépolarisation, il est commode d'introduire une quantité appelée indice de dépolarisation [20]. Cependant, il est à souligner qu'un critère unique ne permet pas de décrire un phénomène aussi complexe qu'est la dépolarisation. Par exemple, il est connu que si certains systèmes optiques dépolarisent tous les états de polarisation de manière identique, d'autres peuvent dépolariser partiellement certains états et laisser un ou deux états invariants. L'indice de polarisation peut être utile dans la mesure où il permet de quantifier l'action effective d'un système optique.

2.5 Propriétés de la matrice de Mueller

2.5.1 Admissibilité physique

Si sur le plan expérimental, le formalisme de Stokes-Mueller est parfaitement adapté à une approche imageante, la manipulation d'outils inhérents à un tel formalisme peut poser des difficultés d'ordre formel. Par exemple, les paramètres de Stokes ne définissent pas un espace vectoriel, ce qui rend difficile l'introduction d'une norme qui permette sans ambiguïté de définir une distance entre deux états de polarisation. Cette absence de vraie distance complique considérablement la mise au point de tests de validité des matrices de Mueller expérimentales, ainsi que celle d'une approche rigoureuse prenant en compte l'information polarimétrique dans les algorithmes de traitement d'images.

Comme toute grandeur physique, une grandeur polarimétrique est soumise à des contraintes qui résultent de la conservation d'énergie. À ce titre, toute matrice réelle 4×4 ne peut pas être toujours de Mueller. En effet, une matrice de Mueller transforme un vecteur de Stokes S_i qui satisfait à l'équation 2.17 en un autre vecteur de Stokes S_e qui doit obéir à la même équation, avec la contrainte supplémentaire que l'intensité $\langle s_0 \rangle_e$ de l'onde émergente doit être inférieure à l'intensité $\langle s_0 \rangle_i$ de l'onde incidente. Dans cette optique, plusieurs critères ont été formulés dans le but de vérifier si une matrice expérimentale est de Mueller. Suivant le critère de la décomposition spectrale de Huynen repris par Cloude, on vérifie si le spectre de la matrice hermitienne \mathbf{H} obtenue à partir de la matrice de Mueller est positif. Le critère de Givens et Kostinski concerne le spectre de la matrice $\mathbf{GM}^T \mathbf{GM}$ ainsi que le vecteur propre correspondant à la valeur propre la plus élevée. Il convient de souligner qu'à ce jour, un critère complet d'admissibilité des matrices de Mueller reste à

définir.

2.5.2 Décomposition polaire

La matrice de Mueller dispose d'au plus de 16 degrés de liberté ou "Degree of Freedom" (DoF); 7 DoF concernent les aspects non dépolarisants tels l'absorption, la diatténuation ou le retard; 9 DoF sont associés au mécanisme de dépolarisation.

S'agissant de mécanismes non dépolarisants, mécanismes pouvant être décrits par le formalisme de Jones, Hurwitz et Jones [21] ont montré qu'une matrice de Jones $\mathbf{J}_{2 \times 2}$ peut être décomposée en produit de 3 matrices décrivant : le pouvoir rotatoire (rotations), la biréfringence (déphaseurs) et les polariseurs partiel ou total. Ce travail a été mis à profit par Lu et Chipman pour obtenir une décomposition d'une matrice de Mueller arbitraire \mathbf{M} en produit de 3 matrices élémentaires : la matrice d'un déphaseur \mathbf{M}_R , celle d'un diatténuateur \mathbf{M}_D et la matrice d'un dépolariseur \mathbf{M}_Δ *comme matrice résiduelle*. Il s'agit de la décomposition polaire [22].

La décomposition polaire a été introduite dans l'espoir de fournir une interprétation physique aux matrices de Mueller expérimentales. Dans le cadre d'approches imageantes, une telle décomposition permet d'isoler les composantes telles la diatténuation, le retard ou la dépolarisation et correspond à une segmentation naturelle des images de Mueller, segmentation liée aux propriétés physiques des objets et non à leur géométrie apparente. Par exemple, si les diagonales sont prédominantes dans les images de Mueller, cela signifie qu'il y a peu de chance que l'on trouve des diatténuateurs dans la scène observée.

Le produit de matrices n'est pas commutatif et la décomposition polaire n'est pas unique. À une matrice de Mueller correspondent 6 représentations possibles, représentations qu'il est possible de regrouper en 2 familles :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_R \mathbf{M}_D \mathbf{M}_\Delta \quad , \quad \mathbf{M} = \mathbf{M}_R \mathbf{M}_\Delta \mathbf{M}_D \quad (2.49)$$

$$= \mathbf{M}_D \mathbf{M}_R \mathbf{M}_\Delta \quad , \quad = \mathbf{M}_\Delta \mathbf{M}_R \mathbf{M}_D \quad (2.50)$$

$$= \underbrace{\mathbf{M}_D \mathbf{M}_\Delta \mathbf{M}_R}_{\mathbf{F}_{D\Delta}} \quad , \quad = \underbrace{\mathbf{M}_\Delta \mathbf{M}_D \mathbf{M}_R}_{\mathbf{F}_{\Delta D}} \quad (2.51)$$

Ces familles se distinguent l'une de l'autre par l'ordre suivant lequel le diatténuateur et le dépolariseur interviennent dans la décomposition : diatténuateur devant dépolariseur pour la famille $\mathbf{F}_{\Delta D}$, dépolariseur devant diatténuateur pour la famille $\mathbf{F}_{D\Delta}$. Il est à signaler que les paramètres R , D et Δ sont communs à ces 6 représentations et que seule la famille $\mathbf{F}_{\Delta D}$ fournit des matrices de Mueller élémentaires, telles qu'elles ont été définies plus haut, admissibles [23].

2.5.3 Surfaces et cartes de polarisation

Il est possible d'analyser une matrice de Mueller en étudiant son action sur tout vecteur de Stokes correspondant à un état totalement polarisé, c'est-à-dire en étudiant l'image de la sphère de Poincaré par la transformation associée. Pour cela, on définit la surface du degré de polarisation comme étant l'ensemble des points dont la distance à l'origine représente le degré de polarisation de l'onde émergente, lorsque l'extrémité du vecteur de Stokes de l'onde incidente balaye toute la sphère de Poincaré. Si cette surface n'est pas entièrement contenue dans la sphère unitaire, cela signifie que la matrice de Mueller n'est pas admissible.

Les surfaces et cartes *DoP* sont des indicateurs visuels des propriétés de dépolarisation [24]. En effet, il est facile de repérer les extrema du degré de polarisation sur les surfaces *DoP* et d'en estimer les valeurs sur les cartes *DoP* qui ne sont autres que les lignes de contour du degré de polarisation.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1 & -0,226 & 0,069 & 0,196 \\ -0,03 & 0,052 & 0,357 & -0,336 \\ 0,069 & -0,454 & -0,266 & -0,194 \\ 0,196 & -0,336 & 0,194 & 0,584 \end{bmatrix}. \quad (2.52)$$

Dans l'exemple de la matrice \mathbf{M} , on peut constater que sa surface *DoP* est contenue dans la sphère unitaire, voir Figure 2.8 : la matrice apparaît comme admissible. On peut vérifier cette admissibilité soit à l'aide du critère de Givens et Kostinski, $GK = 0.8049$, soit en vérifiant que les valeurs propres de la matrice hermitienne \mathbf{H} sont toutes positives : $\lambda_1 = 0.711$, $\lambda_2 = 0.170$, $\lambda_3 = 0.108$, $\lambda_4 = 0.010$.

2.6 Matrice de Mueller expérimentale

2.6.1 Principe de mesure

Les détecteurs conventionnels sont sensibles aux intensités lumineuses qui, en présence d'éléments polarisants, peuvent s'écrire sur le plan formel comme des combinaisons linéaires des coefficients de la matrice de cohérence ou des paramètres de Stokes de l'onde observée. Cela signifie qu'il est possible de remonter aux paramètres de Stokes avec des mesures d'intensités obtenues avec un analyseur d'états de polarisation, analyseur construit autour d'un élément dont la biréfringence effective peut être pilotée, comme c'est le cas des lames à retard tournantes ou des modulateurs à cristaux liquides.

Plus concrètement, un analyseur d'états de polarisation conventionnel est composé d'une lame à retard \mathbf{L}_2 avec un axe rapide orientable par rapport à un axe de référence,

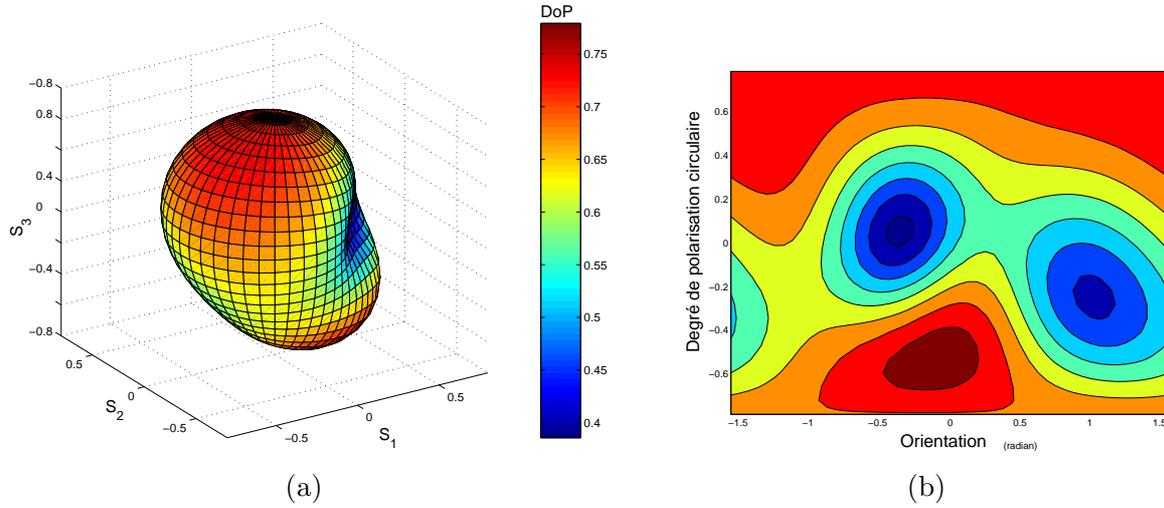


Figure 2.8 – Effet d’une matrice de Mueller sur la sphère de Poincaré. (a) Surface du degré de polarisation; (b) carte du degré de polarisation circulaire $DoCP = s_3/s_0$.

disons l’axe x , et derrière laquelle on a placé un polariseur \mathbf{P}_V dont l’axe peut être choisi vertical. En raison de sa réponse polarimétrique, un tel analyseur d’états de polarisation (PSA) est aussi appelé diatténuateur elliptique.

La matrice de Mueller caractérise la réponse d’un système optique à tout état de polarisation incident. Pour estimer une telle matrice, il apparaît nécessaire de disposer d’une source d’excitation lumineuse dont l’état de polarisation peut être modifié; un tel générateur d’états de polarisation (PSG) peut être construit avec les mêmes composants optiques que le PSA, dans une configuration inversée, c’est-à-dire un polariseur horizontal \mathbf{P}_H suivi d’une lame à retard rotative \mathbf{L}_1 .

Idéalement, si aucune source d’erreur n’est présente, le vecteur de Stokes S_e de l’onde émergent d’un polarimètre à lames rotatives est lié au vecteur de Stokes S_i de l’onde incidente par la relation :

$$S_e = \overbrace{\mathbf{P}_V \mathbf{L}_2[\frac{\lambda}{4}, \theta']}_{\text{PSA}} \mathbf{M}_{DUT} \overbrace{\mathbf{L}_1[\frac{\lambda}{4}, \theta] \mathbf{P}_H}_{\text{PSG}} S_i. \quad (2.53)$$

Les matrices de Mueller des composants optiques idéaux sont connues. Pour un axe de

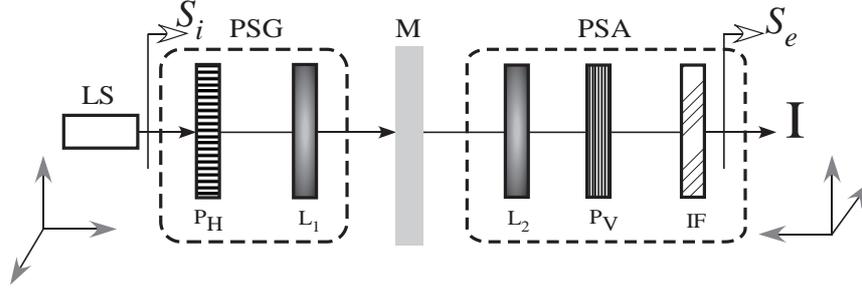


Figure 2.9 – Polarimètre à lames tournantes [25]. *LS* : source d'éclairage; $P_{H,V}$: polariseurs linéaires horizontal et vertical; $L_{1,2}$: lames quart d'onde rotatives; *IF* : filtre interférentiel. La combinaison d'un polariseur horizontal suivi d'une lame quart d'onde forme un générateur d'états de polarisation (*PSG*). La combinaison d'une lame quart d'onde suivie d'un polariseur vertical forme un analyseur d'états de polarisation (*PSA*).

référence x vertical et des lames quart d'onde (retard R de $\pi/2$), on a :

$$S_i = \begin{bmatrix} \langle s_0 \rangle \\ \langle s_1 \rangle \\ \langle s_2 \rangle \\ \langle s_3 \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.54)$$

$$\mathbf{P}_H = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.55)$$

$$\mathbf{L}_1\left(\frac{\lambda}{4}, \theta\right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_\theta^2 & C_\theta S_\theta & -S_\theta \\ 0 & C_\theta S_\theta & S_\theta^2 & C_\theta \\ 0 & S_\theta & -C_\theta & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.56)$$

$$\mathbf{M}_{DUT} = \begin{bmatrix} m_{00} & m_{01} & m_{02} & m_{03} \\ m_{10} & m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{20} & m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{30} & m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

$$\mathbf{L}_2\left(\frac{\lambda}{4}, \theta'\right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{\theta'}^2 & C_{\theta'} S_{\theta'} & -S_{\theta'} \\ 0 & C_{\theta'} S_{\theta'} & S_{\theta'}^2 & C_{\theta'} \\ 0 & S_{\theta'} & -C_{\theta'} & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.58)$$

$$\mathbf{P}_V = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.59)$$

où $C_\theta = \cos 2\theta$ et $S_\theta = \sin 2\theta$; $C_{\theta'} = \cos 2\theta'$ et $S_{\theta'} = \sin 2\theta'$.

La relation 2.53 est une relation qui dépend des angles θ et θ' que fait l'axe rapide des lames quart d'onde avec l'axe vertical, ce qui, sur le plan pratique, présuppose un positionnement angulaire rigoureux. En effet, sachant qu'il faut au moins 16 données expérimentales pour remonter aux 16 coefficients de la matrice de Mueller inconnue, les mesures d'intensité doivent être faites en positionnant précisément l'axe rapide de chacune des lames quart d'onde aux 4 positions correctement choisies. Idéalement, ces intensités mesurées $\mathbf{I}(\theta, \theta')$ sont liées au premier élément $\langle s_0 \rangle_e$ du vecteur de Stokes S_e de l'onde émergente :

$$\mathbf{I}(\theta, \theta') \propto \begin{bmatrix} 1 & C_{\theta'}^2 & C_{\theta'} S_{\theta'} & -S_{\theta'} \end{bmatrix}_{1 \times 4} \mathbf{M}_{DUT} \begin{bmatrix} 1 \\ -C_\theta^2 \\ -C_\theta S_\theta \\ -S_\theta \end{bmatrix}_{4 \times 1}. \quad (2.60)$$

Si l'on dispose de $k \times l$ mesures, il apparaît opportun de regrouper les intensités expérimentales dans une matrice :

$$\mathbf{I}_{k \times l}(\theta_1 \cdots \theta_k, \theta'_1 \cdots \theta'_l) = \mathbf{A}_{k \times 4} \mathbf{M}_{4 \times 4} \mathbf{G}_{4 \times l} \quad k, l \geq 4, \quad (2.61)$$

où \mathbf{A} est la matrice construite en rassemblant les états de polarisation suivant lesquels l'onde émergente a été analysée et \mathbf{G} contient les états générés par le PSG :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & \cos^2 2\theta'_1 & \frac{1}{2} \sin 4\theta'_1 & -\sin 2\theta'_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \cos^2 2\theta'_k & \frac{1}{2} \sin 4\theta'_k & -\sin 2\theta'_k \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ -\cos^2 2\theta_1 & \cdots & -\cos^2 2\theta_l \\ -\frac{1}{2} \sin 4\theta_1 & \cdots & -\frac{1}{2} \sin 4\theta_l \\ -\sin 2\theta_1 & \cdots & -\sin 2\theta_l \end{bmatrix}. \quad (2.63)$$

La matrice de Mueller inconnue est alors obtenue par inversion matricielle si les matrices \mathbf{A} et \mathbf{G} sont des matrices carrés 4×4 ou en recherchant leur pseudo-inverse au sens de Moore-Penrose si elles sont rectangulaires :

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{I} \mathbf{G}^{-1}, \quad k = 4, l = 4, \quad (2.64)$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^\# \mathbf{I} \mathbf{G}^\#, \quad k > 4, l > 4. \quad (2.65)$$

où le signe $\#$ correspond au pseudo-inverse de la matrice.

L'équation 2.61 peut s'écrire de manière plus compacte :

$$\mathbf{I}_{k \times 1} = \mathbf{B}_{k \times l} m_{l \times 1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathbf{M} \equiv m_{ij} \\ l = 4i + j = 0 \dots 15 \end{cases} \quad (2.66)$$

$$m_l = (\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top \mathbf{I}_k. \quad (2.67)$$

Les coefficients de la matrice de Mueller ont été rangés en colonne, ce qui correspond à l'opération appelée *vectorisation* et permet de réduire le temps de traitement si plusieurs centaines de matrices doivent être traitées en même temps. Par ailleurs, par identification avec l'équation 2.61, il est possible d'obtenir la relation : $\mathbf{B} = \mathbf{G}^\top \otimes \mathbf{A}$.

2.6.2 Image de Mueller

Une image de Mueller est une image à 16 composantes correspondant chacune à un élément de la matrice de Mueller. Elle s'obtient à l'aide de 16 acquisitions d'images conventionnelles, acquisitions faites en modifiant l'état de polarisation de la lumière éclairant la scène et en observant cette scène à travers différents états de polarisation. Les 16 niveaux de gris ainsi obtenus pour chaque pixel sont proportionnels aux intensités de l'équation 2.60, niveaux de gris auxquels on applique la procédure d'inversion polarimétrique présentée précédemment. On obtient alors une image pour chacun des coefficients m_{ij} de la matrice de Mueller \mathbf{M} dont l'ensemble forme l'image de Mueller.

La Figure 2.11 montre la richesse d'informations apportées par l'image de Mueller : un objet qui apparaît transparent en imagerie conventionnelle révèle des détails remarquables en imagerie polarimétrique.

2.6.3 Incertitudes

La précision d'un polarimètre imageur peut être estimée expérimentalement en ne plaçant aucun dispositif entre le PSA et le PSG, c'est-à-dire en mesurant la matrice de Mueller

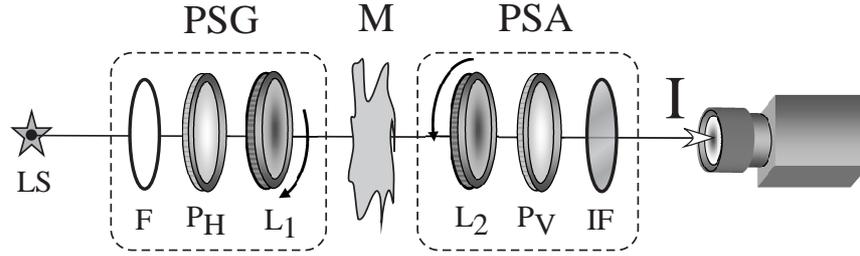


Figure 2.10 – Imageur polarimétrique actif. La caméra CCD doit acquérir au moins 16 images pour avoir des images de Mueller qui sont des images correspondant chacune à un élément de la matrice de Mueller.

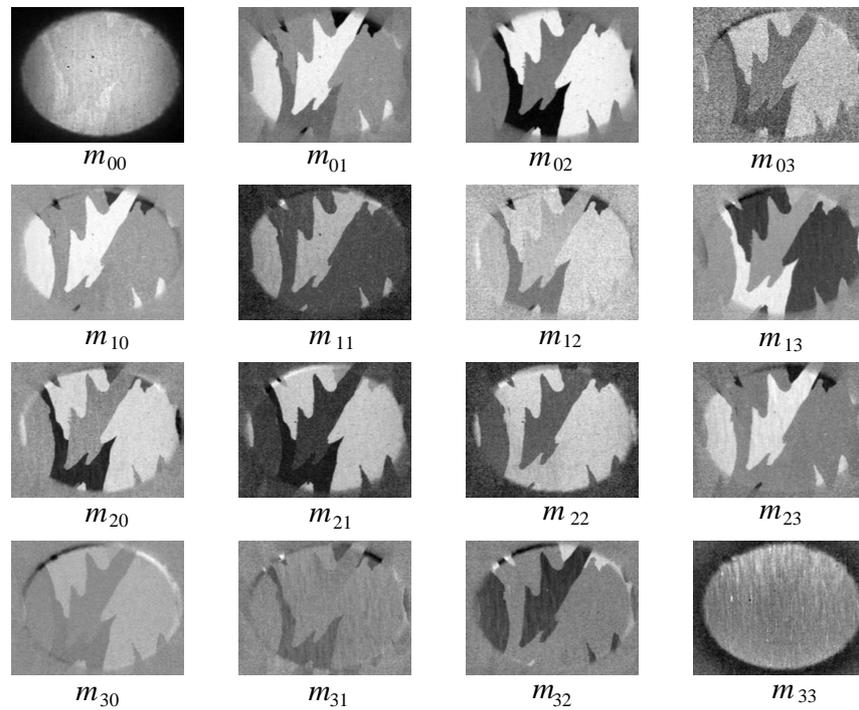


Figure 2.11 – Image de Mueller expérimentale composée de 16 canaux de 512×640 pixels chacun. m_{00} est l'image conventionnelle correspondant à la réponse à un éclairage naturel. Des détails plus fins apparaissent dans les autres canaux.

du vide. Dans le cas idéal, on peut s'attendre à obtenir la matrice identité 4×4 et l'écart $\Delta \mathbf{M} = \mathbf{M}_t - \mathbf{M}_e$ par rapport à cette matrice peut être évalué grâce à la norme de Frobenius : $\|\Delta F\|_{Frob} = (\text{Tr}(\Delta \mathbf{M} \Delta \mathbf{M}^T))^{1/2}$.

La précision polarimétrique est limitée par les imperfections optiques et électroniques qui constituent le bruit expérimental. Dans le cadre de l'imagerie polarimétrique, ce bruit peut être éventuellement amplifié, ce qui signifie qu'il est nécessaire de procéder à un

étalonnage méticuleux du polarimètre imageur de Stokes-Mueller ; cette rubrique sera traitée en détail dans le chapitre suivant.

2.6.4 Des images en 3D

Le polarimètre imageur de Stokes-Mueller est un système de vision dont une des vocations est d'extraire des paramètres physiques de l'information polarimétrique apportée par une approche multi-modale. Par ailleurs, s'agissant de vision par ordinateur, il est connu que des éléments perturbateurs comme des surfaces trop réfléchives orientées d'une certaine manière ou des arêtes trop vives, contribuent à aveugler la caméra d'observation ou à altérer les contours apparents d'un objet à identifier. Cette lumière parasite étant souvent polarisée, l'imagerie polarimétrique représente très certainement une modalité qu'il convient d'explorer afin de pallier ces limites de l'imagerie conventionnelle [26, 27]. Un exemple en est la stéréovision dont l'objectif est de déterminer, grâce à des prises de vues décalées, la forme et la position d'objets dans l'espace physique tridimensionnel et cela, de manière quantitative.

2.7 Stéréovision : éléments de modélisation

Dans le vocabulaire technique de la synthèse d'images, la caméra perspective correspond à une projection centrale sur une surface appelée surface rétinienne. De manière générale, la projection centrale sur une surface arbitraire correspond à une projection sur un plan suivie d'une transformation de coordonnées. Le modèle le plus simple de la caméra perspective consiste à choisir une transformation de coordonnées linéaire : c'est le modèle projectif linéaire ou modèle du sténopé.

2.7.1 Modèle projectif linéaire

Le processus complexe de formation d'images est décrit par différents modèles. Lorsque la distance entre l'objet et la caméra est suffisamment grande par rapport à la focale de l'optique, le modèle du sténopé ou *pinhole* peut correspondre à un modèle réaliste tout en étant relativement simple. Suivant un tel modèle, la caméra d'observation est représentée par un plan rétinien ou plan image et par un centre optique C qui est le centre de projection, c'est-à-dire le centre par lequel passent toutes les droites issues des points à projeter sur la surface rétinienne, voir Figure 2.12. La focale f est alors définie comme étant la distance CO du centre optique au plan rétinien ; il convient de souligner que le point principal O est le projeté orthogonal de C sur le plan image et ne correspond pas toujours au pixel localisé au centre de l'image.

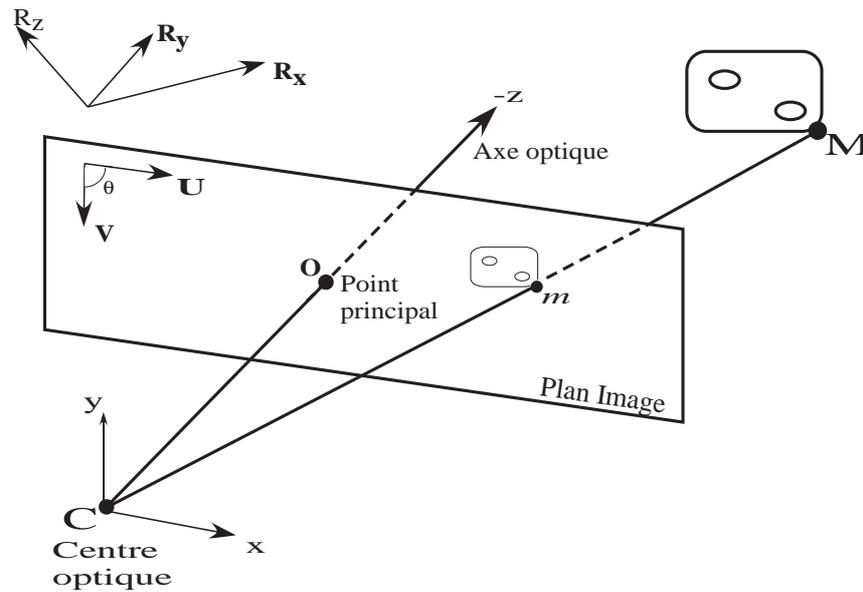


Figure 2.12 – Modèle projectif linéaire ou du sténopé.

Le projeté $m = [u, v]^T$ du point $M = [x, y, z]^T$ sur le plan image n'est autre que le point d'intersection de la droite de projection CM avec le plan rétinien. Suivant le modèle du sténopé et dans un système de coordonnées homogènes augmentées, on a la relation :

$$\omega \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \mathbf{P}_{3 \times 4} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}_{4 \times 1} . \quad (2.68)$$

où ω est un facteur d'échelle, \mathbf{P} une matrice rectangulaire 3×4 appelée matrice de projection en perspective. C'est une matrice de rang 3 dont le noyau est une variété de dimension 1 qui correspond au point focal. La matrice de projection \mathbf{P} doit toujours être bien conditionnée, ce qui signifie que son inverse doit toujours exister. Dans le cas échéant, le point focal serait projeté à l'infini et le modèle ne correspondrait plus à une projection en perspective. Par ailleurs, il est à signaler que le centre de projection C est le seul point satisfaisant à l'équation $\mathbf{P}C = 0$.

La matrice $\mathbf{P}_{3 \times 4}$ peut s'écrire comme le produit de 3 matrices associées à 3 transformations linéaires qui sont :

1. la transformation monde \mapsto caméra, un changement de repère permettant de passer du repère monde (R_x, R_y, R_z) à celui de la caméra (x, y, z) . C'est la composition d'une

rotation et d'une translation ; la matrice de passage $\mathbf{K}_{4 \times 4}$ est :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{t}_{3 \times 1} \\ \mathbf{0}_{1 \times 3} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.69)$$

2. la projection : $\mathbf{P}_0 = [\mathbf{I}_{3 \times 3} \quad \mathbf{0}_{3 \times 1}]$,

3. le changement de repère caméra \mapsto plan image, dont la matrice de passage $\mathbf{A}_{3 \times 3}$ s'écrit :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_u & \alpha_v \cot \theta & u_0 - v_0 \cot \theta \\ 0 & -\alpha_v / \sin \theta & v_0 / \sin \theta \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.70)$$

et appelée matrice intrinsèque. En pratique, θ est égal à $\pi/2$: c'est l'angle entre u et v . Les quantités α_u et α_v correspondent à des facteurs d'échelle dans les directions horizontale et verticale ; elles sont liées à la focale f . Le jeu de paramètres ainsi défini est associé au modèle choisi pour décrire les caractéristiques physiques de la caméra : ils identifient ses paramètres intrinsèques. Par opposition, sa position et son orientation constituent les paramètres extrinsèques, paramètres liés aux transformations qui permettent de passer du repère monde à celui de la caméra : il s'agit d'une rotation représentée par la matrice 3×3 \mathbf{R} et d'une translation associée au vecteur \mathbf{t} de dimension 3×1 .

La matrice de projection en perspective \mathbf{P} s'écrit finalement :

$$\mathbf{P} \cong \mathbf{A}\mathbf{P}_0\mathbf{K}. \quad (2.71)$$

et dispose de 11 degrés de liberté : $\mathbf{P} = \mathbf{A}_{3 \times 3} [\mathbf{R}_{3 \times 3} \quad \mathbf{t}_{3 \times 1}]$.

2.7.2 Géométrie épipolaire

La transformation objet/image opérée par une caméra sténopée suivant l'équation 2.68 n'est pas inversible : à un point du monde correspond un point unique du plan rétinien, alors qu'à un point du plan image correspond une droite de l'espace, la droite (Cm), contenant une infinité de candidats potentiels. Cet argument implique que l'usage de deux caméras perspectives est *a priori* nécessaire pour retrouver le point de l'espace qui correspond au point du plan image : il suffit en effet de considérer l'intersection des deux droites Cm associées à chacune des caméras.

La géométrie épipolaire est la configuration géométrique formée par un système de 2 caméras qui doivent chacune effectuer une prise de vue pour une reconstruction tridimensionnelle. En ce sens, elle est indépendante de la scène observée ; elle dépend des paramètres intrinsèques de chacune des caméras, ainsi que de leurs positions relatives. Les deux images acquises par les caméras sont alors liées par des contraintes qu'il est possible de traduire à l'aide d'une matrice singulière 3×3 appelée matrice fondamentale

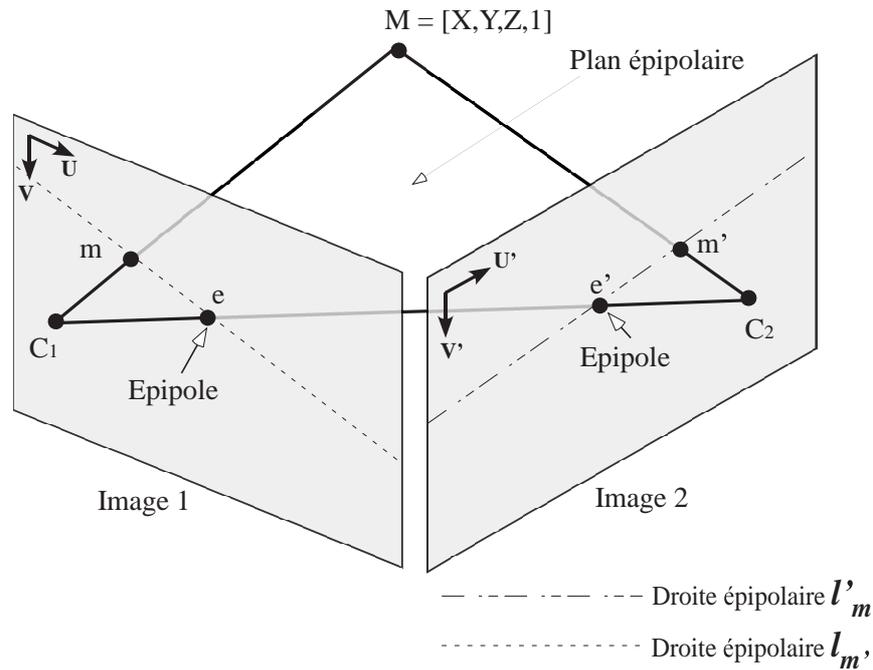


Figure 2.13 – Géométrie épipolaire. $C_{1,2}$: centre optique des caméras 1 et 2; e, e' : épipoles comme intersections de la droite (C_1C_2) avec les deux plans rétiniens. L'homologue dans l'image 2 du point m appartenant à l'image 1 se trouve sur la droite épipolaire l'_m qui passe par l'épipole e' .

F si les paramètres intrinsèques sont inconnus, ou matrice essentielle **E** si les paramètres sont connus.

2.7.3 Contrainte épipolaire

Un point M de l'espace tridimensionnel est projeté sur les plans image 1 (point m) et image 2 (point m') suivant les projections centrales de centre C_1 et C_2 . Les épipoles sont définis comme étant l'intersection de la droite joignant ces centres avec les plans rétiniens. La contrainte résultant de la géométrie épipolaire se traduit par le fait que les points $(M, m, m', C_1, C_2, e, e')$ appartiennent à un même plan, voir Figure 2.13. Cela signifie par exemple que la droite épipolaire l'_m de l'image de droite est la projection de la droite C_1M sur le plan image 2. Plus généralement, le point m' du plan image 2 qui correspond au point m du plan image 1 se trouve sur la droite qui doit passer par l'épipole e' de l'image 2. En raison des propriétés qui viennent d'être exposées, la contrainte épipolaire est aussi appelée contrainte de coplanarité.

2.7.4 Matrice fondamentale

La matrice dite fondamentale mentionnée précédemment n'est autre qu'une représentation algébrique de la contrainte de coplanarité des points $(M, m, m', C_1, C_2, e, e')$; elle permet de simplifier la phase de recherche des points de correspondance (m, m') des 2 images stéréoscopiques. En effet, étant donné un point m du plan image 1, il suffit de chercher son point de correspondance m' sur la droite épipolaire l'_m au lieu de scruter tous les points du plan image 2.

Pour un couple de points $m \leftrightarrow m'$ en correspondance, la contrainte de coplanarité se traduit mathématiquement par l'équation :

$$m'^T \mathbf{F}_{12} m = 0, \quad (2.72)$$

où \mathbf{F}_{12} est la matrice fondamentale qui permet de passer du plan image 1 au plan image 2. Il est à souligner que pour le passage inverse du plan image 2 au plan image 1, il suffit de transposer \mathbf{F}_{12} pour en obtenir la matrice fondamentale correspondante : $\mathbf{F}_{21} = \mathbf{F}_{12}^T$. Lorsque la position relative des caméras est connue, c'est-à-dire si la rotation et la translation qui permettent de passer de l'une à l'autre sont connues, la matrice \mathbf{F} peut être explicitée lorsque les paramètres intrinsèques et extrinsèques du système des 2 caméras sont connus :

$$\mathbf{F}_{12} = \mathbf{A}_2^{-T} [\mathbf{t}]_{3 \times 3} \mathbf{R} \mathbf{A}_1^{-1} \quad \text{avec } \mathbf{A}_2^{-T} = (\mathbf{A}_2^{-1})^T, \quad (2.73)$$

où $[\mathbf{t}]_{3 \times 3}$ est une matrice 3×3 anti-symétrique qui correspond au vecteur de translation \mathbf{t} :

$$[\mathbf{t}]_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & -t_z & t_y \\ t_z & 0 & -t_x \\ -t_y & t_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.74)$$

Degrés de liberté

La matrice fondamentale est une matrice singulière puisque $\det(\mathbf{F}) = 0$, ce qui est une conséquence du fait que la matrice antisymétrique $[\mathbf{t}]_{3 \times 3}$ est singulière. On peut prouver que la matrice \mathbf{F} est de rang 2 et a 7 degrés de liberté. En effet, \mathbf{F} est une matrice de passage qui relie 2 matrices 3×4 de projection, \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 , ayant chacune 11 degrés de liberté. Par ailleurs, les deux centres optiques C_1 et C_2 s'obtiennent l'un de l'autre par une transformation dont la matrice $\mathbb{H}_{4 \times 4}$ a 15 degrés de liberté :

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbb{H}_{4 \times 4} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

et on sait que les projections en question sont définies par rapport à ces centres optiques. Les 15 paramètres indépendants de $\mathbb{H}_{4 \times 4}$ sont liés à la rotation et à la translation qui permettent de passer d'une caméra à une autre, ils sont donc connus et déterminés par la géométrie du système constitué des 2 caméras. En conséquence, parmi les $2 \times 11 = 22$ degrés de liberté des projections \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 , 15 peuvent être levés et on dispose de $22 - 15 = 7$ *DoFs* pour la matrice \mathbf{F} qui relie ces projections.

2.7.5 Stéréovision axiale et latérale

Système axial

La figure 2.14 représente un dispositif de stéréovision axiale qui peut être assimilé à un système de 2 caméras fictives ayant leurs axes optiques confondus et leurs plans images parallèles, séparés d'une distance de ΔZ . Il est à souligner que suivant les conventions de ladite figure, les objets dans l'image 2 apparaîtront plus grands que dans l'image 1.

Par rapport à un système de stéréovision latérale, la stéréovision axiale présente l'avantage d'avoir peu de sources d'ambiguïté lorsqu'il s'agit de procéder à la phase d'appariement d'images stéréoscopiques. Par exemple, les problèmes liés à l'occlusion ou aux reflets parasites y sont moins nombreux. En revanche, l'approche axiale est beaucoup plus sensible aux erreurs de mise en correspondance et de calibrage. Un autre aspect concerne le changement de résolution : en raison du grossissement mentionné précédemment, un même point physique n'est pas représenté par le même nombre de pixels dans chaque image, ce qui doit être pris en compte pendant la phase d'appariement.

Afin de restreindre l'espace de recherche lors de la phase de mise en correspondance, les propriétés géométriques suivantes doivent être exploitées, voir Figure 2.14 :

(dans ce qui suit, $M = [X_0, Y_0, Z_0]$ est un point du monde se projetant en $m = [X_1, Y_1, 0]$ dans le plan image 1 et en $m' = [X_2, Y_2, \Delta Z]$ dans le plan image 2)

- O_2 , point principal de l'image 2, se projette orthogonalement en O_1 , point principal de l'image 1 et inversement ;
- tout point situé sur l'axe optique du système se projette en O_1 sur l'image 1 et en O_2 sur l'image 2 ;
- le plan $(M m m')$ est perpendiculaire aux plans image 1 et image 2, et contient les segments $[O_1 m]$ et $[O_2 m']$; ces segments sont parallèles et contenus dans le même quadrant des plans image 1 et image 2 ;
- la longueur du segment $[O_2 m']$ est au moins égale à celle du segment $[O_1 m]$. Ainsi, l'homologue de m' est-il situé sur le segment $[O_1 m'']$, m'' étant la projection orthogonale de m' sur le plan image 1 ;
- dans un système de stéréovision axiale, les droites épipolaires sont radiales et peuvent être déterminées directement à partir des points principaux. En effet, la droite

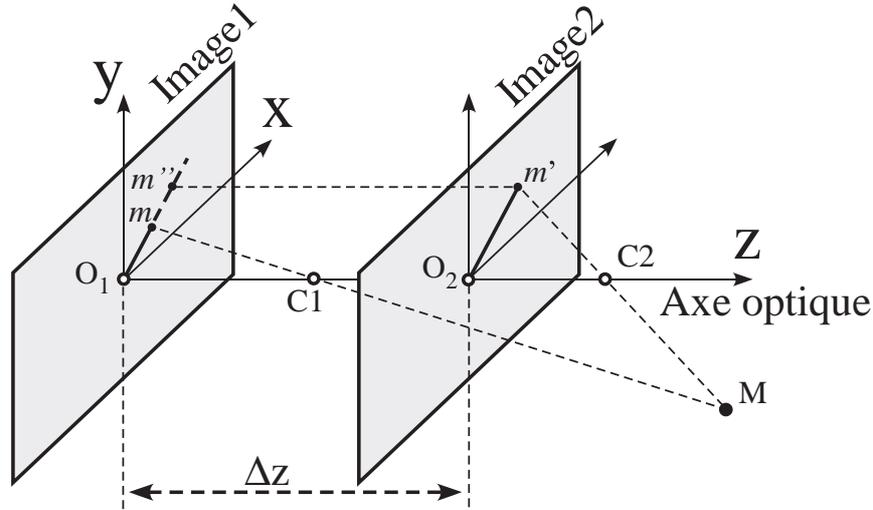


Figure 2.14 – Géométrie de stéréovision axiale. $C_{1,2}$: centres optiques des caméras 1 et 2; O_1, O_2 : points principaux des images 1 et 2; m, m' : projetés du point M dans image 1 et image 2. Les droites épipolaires dans une configuration de stéréovision axiale sont radiales : la droite (O_1m) est parallèle à la droite (O_2m') .

épipolaire $(O_1 m'')$, associée au point m' , a la même équation dans le repère local que la droite épipolaire $(O_2 m')$; la droite épipolaire associée à m a la même équation que la droite épipolaire associée à m' ;

- le champ de vision de la caméra 1 qui enregistre l'image 1 recouvre entièrement le champ de vision de la caméra 2 qui permet d'obtenir l'image 2. Ainsi, à quelques rares cas d'occlusion près, tout point de l'image 2 a un homologue sur l'image 1.

Reconstruction 3D

Afin d'éviter le renversement des images, il convient de choisir le modèle de caméra dont le plan image est placé entre le monde et le centre optique, voir Figure 2.15. Dans ce cas : si (X_1, Y_1) représentent les coordonnées dans le repère local 1 du projeté de M sur le plan image 1, (X_2, Y_2) les coordonnées dans le repère local 2 du projeté de M sur le plan image 2 et finalement (X_0, Y_0, Z_0) les coordonnées de M dans le repère défini par C_1 , les équations de triangulation sont données par :

$$Z_0 = \frac{X_2 f_1 \Delta C}{X_2 f_1 - X_1 f_2}, \quad (2.76)$$

$$X_0 = \frac{X_1 X_2 \Delta C}{X_2 f_1 - X_1 f_2} dx, \quad (2.77)$$

$$Y_0 = \frac{Y_1 Y_2 \Delta C}{Y_2 f_1 - Y_1 f_2} dy. \quad (2.78)$$

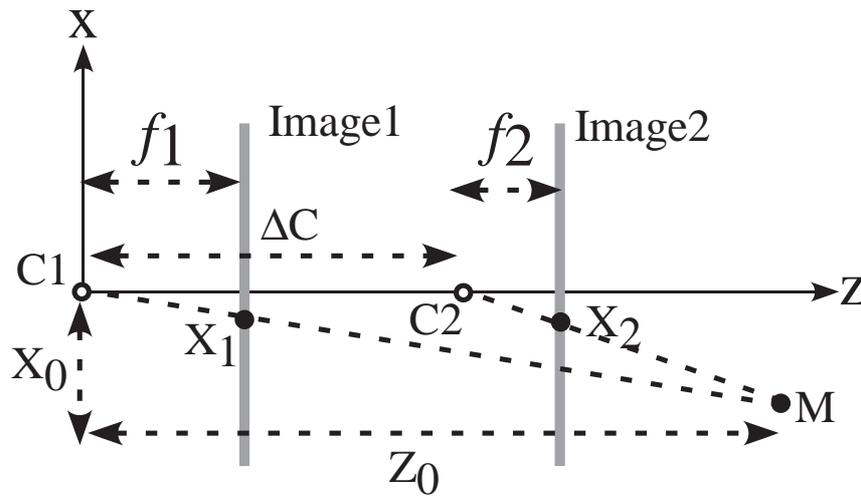


Figure 2.15 – *Modèle géométrique restreint au plan XZ. f_1, f_2 : focales ; ΔC : distance entre centres optiques.*

où dx et dy représentent les dimensions d'un pixel suivant les directions x et y , et X_1, Y_1, X_2, Y_2 sont exprimés en pixels. Il convient de souligner que Z_0 n'est pas défini pour les points situés sur l'axe optique et que la région en son voisinage est inexploitable en raison des erreurs de triangulation trop importantes.

Pour un système de stéréovision axiale, des études sur les erreurs de triangulation ont montré que [28] : plus un point se projette près du point principal du plan image, moins le positionnement de ce point est précis ; une erreur de mise en correspondance ou de calibrage faible engendre des erreurs importantes sur le calcul de la profondeur, surtout au voisinage du point principal.

La figure 2.16 représente l'erreur de triangulation pour des erreurs d'appariement e de 0,5 et 2 pixels respectivement. Cette erreur correspond à la distance entre le point initial $M = [X_0, Y_0, Z_0]$ et le point $M_c = [X_0 + \Delta X, Y_0 + \Delta Y, Z_0 + \Delta Z]$ reconstruit par triangulation avec les points appariés m et $m' + e$. L'erreur de mise en correspondance a été introduite sur la position du point m' et l'erreur de triangulation est définie comme étant la distance : $d = (\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2)^{1/2}$.

Il apparaît que plus l'objet est éloigné du point principal, plus la reconstruction est fidèle [29]. Cependant, sur le plan expérimental, il est connu que l'objectif d'une caméra n'a pas une réponse uniforme. Ici, c'est la distorsion radiale qui introduit des erreurs indésirables dans la phase de mise en correspondance, surtout lorsque les objets se trouvent aux quatre coins de l'image. En ce sens, la stéréovision axiale est moins fiable que la stéréovision latérale lorsqu'il s'agit de reconstruire un objet occupant tout le champ de vision de la caméra.

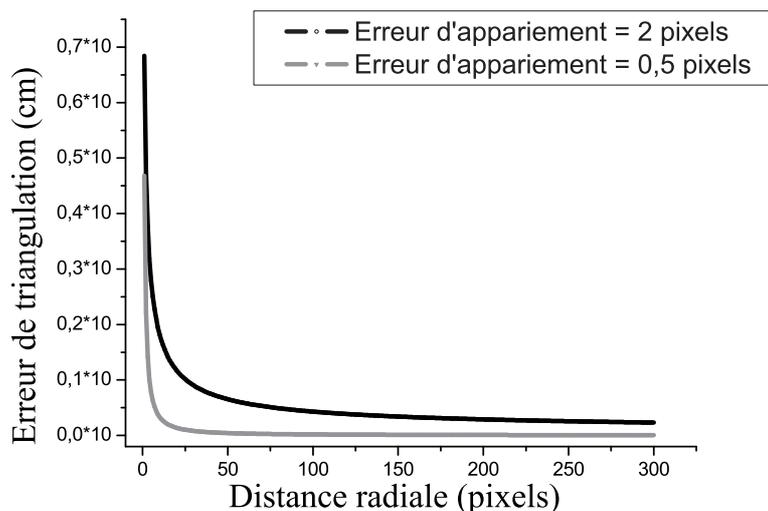


Figure 2.16 – Erreur de triangulation d'un système de stéréovision axiale. Les erreurs d'appariement sont exprimées en cm ; la distance radiale exprimée en pixels correspond à la position du point à appairer par rapport au point principal.

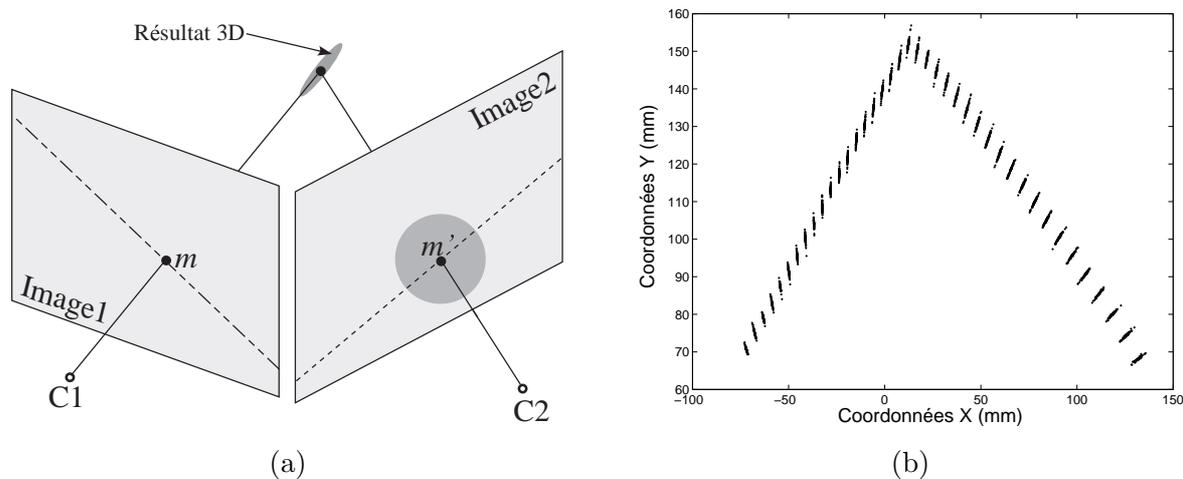


Figure 2.17 – Sensibilité de triangulation aux erreurs d'appariement dans le plan image 2 d'un système stéréoscopique. (a) Plan d'expérience ; (b) résultat des simulations pour un triangle : les points physiques se trouvent dans les zones délimitées par des ellipses certes très allongées. Il apparaît clairement que certaines directions sont plus sensibles au mauvais appariement que d'autres.

2.7.6 Système avec prises de vues quelconques

Dans la figure 2.17 se trouvent les résultats d'une reconstruction stéréoscopique d'un objet triangulaire. Des erreurs d'appariement comprises entre 0,1 et 5 pixels ont été

introduites sur l'image de droite (image 2). Il apparaît clairement que la reconstruction est plus sensible aux erreurs de mise en correspondance dans certaines directions que dans d'autres.

Les résultats de l'étude précédente laissent à penser que pour des erreurs d'appariement déterminées, il existe une ou plusieurs positions idéales pour les caméras perspectives, c'est-à-dire des positions pour lesquelles l'erreur de reconstruction est minimale. Nous pensons que ces positions dépendent de la géométrie de l'objet à reconstruire, ce qui nécessite la connaissance d'une information *a priori* et rend complexe la formulation mathématique du problème. Une approche bayésienne mérite certainement d'être initiée mais dépasse de loin les objectifs de ce travail doctoral.

2.8 Limites

Les méthodes traditionnelles de reconstruction 3D en lumière naturelle souffrent d'inconvénients majeurs de sous-exposition lorsque la scène contient des objets transparents, ou de saturation lorsque des arêtes vives métalliques y sont présentes. Cette présence se traduit par une perte d'information de contour portée par les points peu apparents ou saturés, ce qui limite la reconstruction des objets en question. Conformément aux lois de l'optique électromagnétique, la lumière qui a interagi avec ces objets a des propriétés polarimétriques particulières, de sorte qu'en observant la scène avec des éléments polarisants adaptés, il est possible de s'affranchir des limites d'un système de vision conventionnelle. Une description détaillée d'une telle modalité d'imagerie, l'imagerie polarimétrique, est exposée dans ce qui suit.

Chapitre 3

Étalonnage d'un système stéréo-polarimétrique

Résumé

L'acquisition des images polarimétriques est un processus sensible aux erreurs de mesure dont les effets dépendent de la précision d'étalonnage du système imageur. Dans le cadre de la stéréo-polarimétrie évoquée dans cette étude, deux matrices jouent un rôle essentiel dans la mise au point opérationnelle : la matrice de Mueller $\mathbf{M}_{4 \times 4}$ et la matrice fondamentale $\mathbf{F}_{3 \times 3}$. Les deux matrices sont entachées d'erreurs liées aux imperfections électroniques et optiques. Nous verrons ainsi que le résultat final de toute représentation polarimétrique précise d'un objet tridimensionnel passe nécessairement par une phase méticuleuse d'étalonnage et dépend du choix de la méthode utilisée pour estimer ces deux matrices à l'aide de mesures expérimentales.

3.1 Problématique

CALIBRER un polarimètre stéréoscopique n'est pas une tâche simple : cela nécessite une modélisation analytique ainsi que sa validation expérimentale, des composants optiques présents dans le système ; à savoir, les deux polariseurs, les deux lames à retard, ainsi que la réponse de la caméra CCD. Par ailleurs, la forme mathématique de la matrice de Mueller ne permet pas la mesure de ses paramètres d'une manière directe. Ses éléments sont inférés d'une série de mesures avec lesquelles, on construit un système d'équations linéaires et la matrice de Mueller est obtenue au sens des moindres-carrées impliquant ainsi une méthode d'inversion. Cette inversion matricielle doit être bien conditionnée car sinon, elle induit des erreurs incontrôlables. La phase de calibrage est aussi impliquée dans le choix d'une méthode idéale d'estimation qui permet de minimiser les erreurs d'inversion. Ce choix concerne le nombre d'acquisitions ainsi que la combinaison d'angles des deux lames à retard.

D'autre part, le calibrage de la tête stéréoscopique du système repose plus précisément sur le modèle projectif linéaire utilisé et consiste à déterminer de manière analytique la fonction qui associe à un point de l'espace tridimensionnel sa projection dans l'image donnée

par la caméra. Pour un étalonnage géométrique d'une caméra, l'objectif est de déterminer avec la plus grande précision l'ensemble des paramètres intrinsèques et extrinsèques du capteur qui décrivent la transformation entre les coordonnées de référence 3D et les coordonnées correspondantes dans le plan image. Dans la plupart des cas, la précision globale du système de vision par ordinateur dépend fortement de celle du procédé de calibrage.

Dans cette phase d'étalonnage stéréoscopique, le calcul des paramètres intrinsèques et extrinsèques de la caméra est nécessaire ; ce calcul est suivi d'une phase d'estimation de la matrice fondamentale nécessitant ainsi des points de correspondance entre les paires d'images. Si le système de prise de vue présente des particularités ou des défauts dont le modèle linéaire de sténopé ne peut rendre compte, par exemple si l'on utilise le modèle linéaire de type sténopé pour une caméra munie d'un objectif comportant de nombreuses distorsions non linéaires, alors les algorithmes reposant fortement sur le modèle de la caméra tels que ceux de stéréoscopie ne pourront pas être appliqués, ou les résultats comporteront de très nombreuses erreurs. Par conséquent, les résultats finals risquent d'être erronés. La modélisation de ces distorsions s'avère donc être essentielle pour la correction des images.

3.2 Polarimètre expérimental

3.2.1 Modèles d'éléments optiques

Au niveau expérimental, un polarimètre imageur contient toujours des sources d'erreurs qui diminuent sa précision et réduisent la pertinence des observations. Plusieurs types d'erreurs peuvent affecter un polarimètre actif : l'erreur d'alignement de tous les éléments optiques en relation avec le premier élément (le polariseur horizontal) considéré comme l'élément de référence, les erreurs résiduelles des lames quart-onde dont les valeurs de retardance s'écartent de $\pi/2$, et les imperfections de la caméra CCD (pixels froids, chauds ou saturés, erreur de quantification, *dark current*, fluctuation d'intensité). Il apparaît cependant que si les erreurs systématiques ont été éliminées des données expérimentales, les erreurs résiduelles tendent vers une distribution gaussienne, voir figure 3.1.

Afin d'effectuer les mesures les plus précises possibles, un étalonnage du capteur devra être réalisé avant l'étalonnage des éléments optiques. En fait, les images acquises avec une caméra CCD contiennent un bruit issu d'une variété de sources. Puisque le bruit est un phénomène stochastique, il ne peut y avoir de compensation directe, on cherche donc à les minimiser. Les sources du bruit qui jouent un rôle significatif dans les caméras scientifiques sont : le bruit de photons, le bruit thermique, les bruits *shot-noise* ou *read-out* et le bruit de quantification. Cette catégorie de bruit est liée à l'électronique ; elle est indépendante de l'objectif. Par contre la lentille de la caméra produit un bruit de toute autre nature,

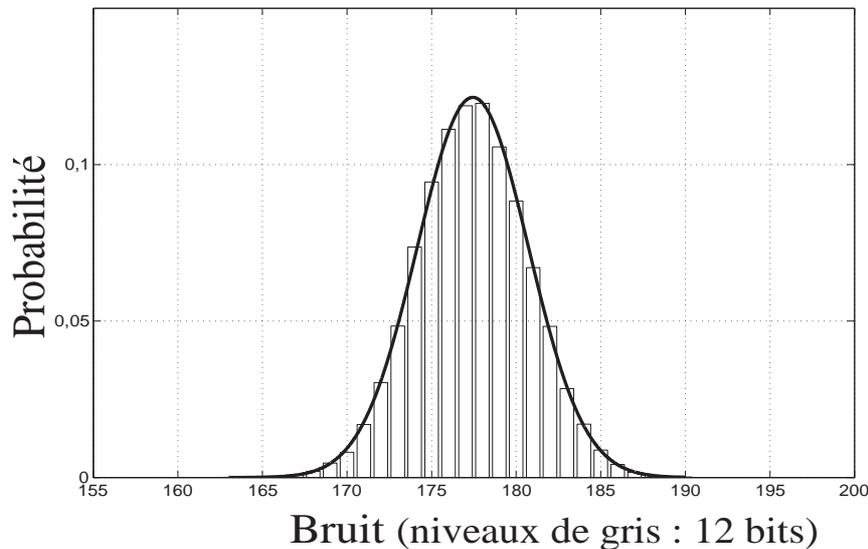


Figure 3.1 – Densité de probabilité du bruit expérimental. La fonction continue représente une gaussienne. Les barres représentent l’histogramme normalisé du bruit expérimental issu de la caméra de 12 bits (0 – 4095). La moyenne du bruit vaut 177 et sa variance est 11.

plus précisément on parle de distorsions dans les images.

Habituellement, le calibrage d’un système polarimétrique est un processus en deux étapes. D’abord, on oriente avec précision les éléments optiques, un procédé qui exige des dispositifs de précision élevée ainsi qu’un alignement soigneux. Dans une deuxième étape, le comportement des éléments optiques doit être décrit et caractérisé physiquement. Ainsi, on doit combiner plusieurs mesures dans différentes configurations pour déterminer les caractéristiques principales et les imperfections. Récemment, des études ont montré qu’il existe un choix optimal ou une combinaison de mesures qui peuvent maximiser le rapport signal/bruit dans les images de Mueller pour tous les polarimètres [30]. Les résultats de ces études indiquent que le rapport signal/bruit dépend aussi de la modalité des acquisitions, et pas simplement de la qualité du système optique ou de la précision du détecteur photoélectrique de la caméra [31, 32].

3.3 Capteur CCD

Une image brute est une image en niveaux de gris ou “gray-level” représentant typiquement l’intensité de la lumière intégrée sur une partie du spectre électromagnétique, rassemblée dans un seul canal. Une caméra CCD est fondamentalement un circuit intégré composé d’une matrice de photodétecteurs qui convertissent les photons incidents en charges électriques proportionnelles à la quantité de photons absorbés. Chacun de ces sites s’appelle

“picture element” ou “pixel” et stocke la charge accumulée durant le temps d’intégration dans un condensateur MOS; celui-ci s’appelle un puits potentiel ou *well depth*. Un *shutter* électronique commande le temps d’exposition. Les charges formant l’image sont évacuées suivant un procédé synchronisant une ligne à la fois, pour évacuer les paquets de charges dans un registre à décalage. Ce registre est alors lu et les données sont converties par un convertisseur analogique-numérique qui code l’intensité de chaque pixel en une représentation correspondante de n bits.

3.3.1 Sources de bruit

Hypothèses

La réponse de la caméra CCD n’est pas uniforme. Elle est affectée par le bruit de grenaille ou *shot-noise*, le bruit de quantification, le bruit thermique et le bruit lié à la différence entre le temps de décharge et les électrons accumulés dans la profondeur de puits. Ceci affectera directement les mesures, et causera des fluctuations d’intensité. Ces fluctuations varient en fonction de l’intensité de la lumière incidente. Dans le cas actuel, nous considérerons que le bruit de la caméra est l’addition du bruit *shot-noise*, de quantification et du bruit thermique sans prendre en compte le bruit spatial (bruit entre les pixels voisins). Cette démarche est adaptée à un éclairage en lumière incohérente.

Analyses

La sensibilité des caméras CCD est alors limitée : les intensités inférieures à quelques écarts-types de l’intensité du bruit seront masquées et ne seront pas détectables sauf en moyennant sur une plus longue période. Le bruit à considérer dans un capteur CCD résulte des contributions d’un certain nombre de sources : la première source du bruit la plus significative est le bruit produit par un CCD dans l’obscurité en raison de sa température, ce bruit est appelé *dark noise*. La deuxième source est le bruit lié à l’arrivée aléatoire d’électrons sur la surface plane du détecteur; elle est représentée par un bruit dit *shot-noise* et les niveaux encourus par ce type de bruit sont habituellement faibles. Le circuit électronique utilisé pour mesurer le photo-courant a également une contribution non-négligeable.

Le bruit thermique, *dark current*, est lié aux paires électron-trou créées par des vibrations thermiques internes au capteur au lieu des photons externes. La production d’électrons thermiques est une fonction de la température et suit une distribution de Poisson. Ce bruit peut être analysé en maintenant le shutter fermé et peut être réduit en refroidissant la caméra. Le bruit thermique n’est pas également réparti sur tous les pixels de la caméra mais il apparaît qu’il suit une distribution gaussienne, voir figure 3.1.

En raison d'impuretés dans le semi-conducteur, une minorité de pixels produisent des électrons thermiques à une vitesse beaucoup plus rapide que les autres. Ces pixels s'appellent les pixels *chauds* qu'un refroidissement de la caméra permet de réduire; puisque leur position est fixe, cette anomalie ne peut pas être décrite comme un processus stochastique. Par ailleurs, le bruit du *read-out* est un bruit électronique induit par le processus de transfert de charges. C'est un bruit additif qui suit une distribution gaussienne; il est indépendant du signal [33]. En revanche, il est plus ou moins lié au rapport entre le temps d'intégration et le taux d'armature.

Les intensités sont quantifiées par un convertisseur analogique-numérique. La conception électronique de la plupart des systèmes concerne la quantification linéaire suivant dans laquelle la plage est divisée en intervalles égaux. Le bruit de quantification est de l'ordre de $SNR = 6n + 11$ dB [34]. La caméra du laboratoire est une Hamamatsu-C4742-95 qui a une résolution de 12 bits, ce qui signifie que le bruit de quantification négligeable; le rapport signal à bruit de quantification étant de l'ordre de 83 dB.

Le bruit de photons est provoqué par le processus stochastique des photons percutant la surface du capteur. Ces photons arrivent à des instants purement aléatoires et obéissent à la statistique de Poisson. Un photon détecté crée dans le capteur un photo-électron qui s'accumule dans les puits de potentiel. Quand un puits de potentiel est en mode lecture, ces photo-électrons sont comptés.

Selon Mullikin [35], le rapport signal/bruit SNR maximal d'un capteur CCD est théoriquement égal à $10 \log(N_c)$, où N_c est la capacité de puits, appelée profondeur de puits ou *well depth*, des pixels. Ce maximum théorique peut être atteint seulement quand d'autres sources de bruit sont négligeables. Selon les spécifications de notre caméra Hamamatsu-C4742-95, la profondeur de puits est de $N_c = 13300$ électrons, ainsi le rapport signal/bruit maximal est de $SNR = 41$ dB. En pratique, le SNR n'atteindra jamais ce maximum théorique puisque le SNR de la caméra est limité par d'autres facteurs tels le *dark current*, le bruit du *read-out*¹, et le bruit de quantification.

Améliorations

Des améliorations peuvent être apportées à la caméra CCD par la détection des pixels *chauds* ou *froids* en observant une image uniforme. Ces pixels ont un comportement différent des pixels voisins et peuvent être aisément détectés en recherchant les pixels dont le niveau de gris s'écarte significativement d'une valeur moyenne de voisinage. Après détection, nous remplaçons ce niveau de gris par la valeur moyenne.

L'élimination du bruit de dark est également un aspect important pour les améliorations proposées. Le bruit de dark peut être défini comme le courant qui est présent dans le

¹Selon la notice de la caméra, le bruit du read-out a une valeur moyenne de l'ordre de $13 e^-$ RMS.

détecteur photoélectrique quand aucun rayonnement n'est incident sur le détecteur. Ainsi, nous pouvons mesurer une image dans l'obscurité totale et le bruit de dark sera équivalent à la valeur moyenne des intensités mesurées. En retranchant cette valeur moyenne des images brutes, le bruit de dark sera éliminé. Il en résulte une précision dans les mesures, voir les figures 3.2 et 3.3.

L'impact des fluctuations d'intensité peut être minimisé suivant deux méthodes : soit en augmentant le temps d'intégration sans saturer les pixels, soit pour un temps d'intégration fixe en enregistrant plusieurs images consécutives et en moyennant les valeurs des pixels.

3.4 Étalonnage optique

3.4.1 Matrice de Mueller du vide

Revenons au schéma classique d'un polarimètre de Stokes-Mueller à lames rotatives. Afin d'étalonner le polarimètre, nous réalisons une manipulation à vide. Le milieu ainsi étudié, l'air, a la particularité d'avoir une matrice de Mueller identique à la matrice identité 4×4 . L'avantage de cette approche est que la méthode d'étalonnage ne dépend d'aucun échantillon-test qui risque de contenir une impureté de fabrication, ajoutant ainsi une nouvelle source d'erreur au système total.

Pour effectuer la manipulation, huit positions angulaires des lames quart-onde d'entrée et de sortie sont choisies afin de surdéterminer le système, soit l'équivalent de 64 acquisitions d'images brutes au total. Les angles de mesures sont également répartis dans l'intervalle $[0, \pi[$. Le principe d'étalonnage consiste alors à comparer les 64 mesures expérimentales aux intensités théoriques. En minimisant les erreurs entre ces quantités, il est possible de remonter aux réponses des éléments optiques.

Nous verrons par la suite que chaque élément optique nécessite une procédure de calibrage spécifique, concernant le croisement des polariseurs linéaires, l'alignement des axes rapides des lames ainsi que la valeur du retard, et la modélisation des fluctuations d'intensité pour la caméra ainsi que le bruit photonique. Notons que l'intensité expérimentale maximale, codée en 12-bits, détectée durant la manipulation vaut 4000 et que la valeur moyenne du bruit I_{dark} est de l'ordre de 174 ; ce résultat est bien en accord avec le résultat présenté dans la figure 3.1.

3.4.2 Polariseurs

La première étape de l'étalonnage consiste à effectuer un croisement entre les deux polariseurs linéaires P_H et P_V . Cette étape est faite sans la présence des deux lames quart-onde, en fixant l'orientation de l'axe optique du premier polariseur et en effectuant une

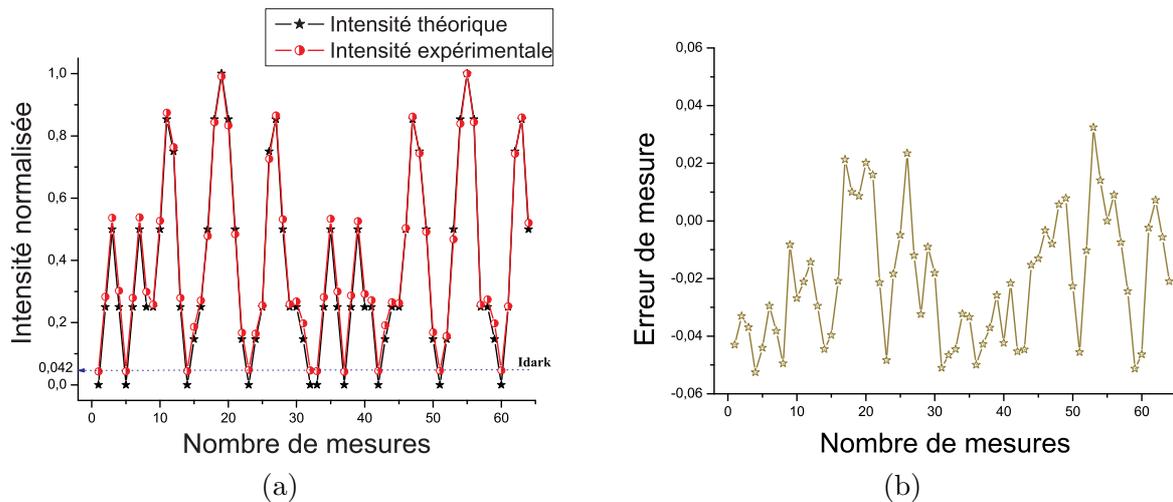


Figure 3.2 – Mesure expérimentale de l'intensité en sortie du polarimètre en fonction des 64 combinaisons d'angles θ et θ' . (a) Intensités théoriques et expérimentales normalisées. Il est clair que lorsque le PSG et le PSA sont croisés, le polarimètre fournit une intensité normalisée de 0,043 qui est équivalente à l'intensité du courant de dark; (b) erreur de mesure entre les intensités théoriques et expérimentales.

rotation continue du deuxième polariseur. Une fois qu'un minimum d'intensité est atteint à la sortie d'une telle configuration, les polariseurs seront ainsi croisés.

Une fois que le croisement des deux polariseurs est fait, pour une longueur d'onde donnée, on n'aura plus besoin de refaire la vérification de croisement si l'on change la longueur d'onde.

3.4.3 Lames à retard

Alignement des axes

En pratique, il n'existe pas de lame parfaitement achromatique dont les propriétés optiques (déphasage, axes neutres) sont les mêmes quelle que soit la longueur d'onde. On peut considérer trois types d'erreurs lors de l'étalonnage : le retard expérimental de la lame qui peut dévier de la valeur théorique, la précision des moteurs qui contrôlent la position d'orientation de l'axe rapide, ainsi que la localisation des axes neutres.

En effet, en faisant tourner une lame à retard entre deux polariseurs croisés, le minimum d'intensité est obtenu lorsque l'un des axes neutres de la lame est aligné avec le polariseur d'entrée, qui nous sert de référence. La première lame L_1 étant ainsi alignée avec la référence P_H , il ne reste plus qu'à répéter l'opération avec la deuxième lame. Par contre, cette étape

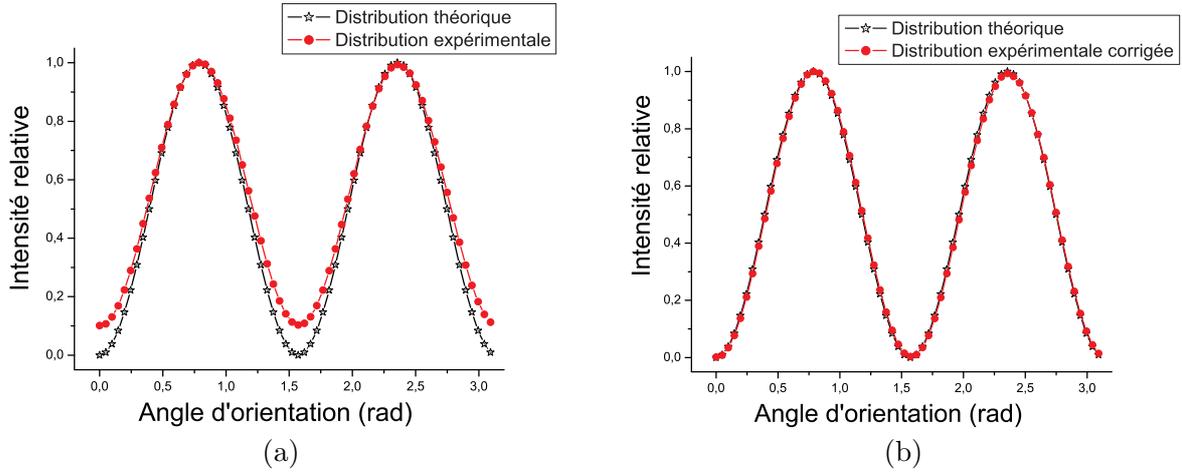


Figure 3.3 – Réponse expérimentale de la lame de retard de sortie. (a) Avant correction de la valeur du retard ; (b) après correction du retard et en retranchant le bruit du dark aux mesures d'intensité.

doit être réalisée pour chaque longueur d'onde puisque la position des lignes neutres en dépend.

Correction du retard

Dans cette étape, il convient de remplacer la matrice de Mueller décrivant une lame quart-onde parfaite par la matrice d'une lame ayant un retard R qui reste à déterminer. L'algorithme de recherche de la vraie valeur de retard va se concentrer aux alentours de la valeur théorique $\pi/2$.

En fait, la modélisation de la caméra est essentielle avant de procéder à l'étalonnage optique. Par exemple, nous constatons dans la figure 3.3 que la soustraction de la valeur moyenne du dark des intensités permet d'estimer le retard des lames.

3.5 Étalonnage stéréoscopique

3.5.1 Système stéréoscopique

Le cas qui nous intéresse plus particulièrement dans la suite de ce chapitre est celui du calibrage d'un système stéréoscopique, c'est-à-dire d'un ensemble de deux caméras rigidement liées observant la même scène, à partir de paires d'images stéréoscopiques. Un système stéréoscopique peut être considéré comme un ensemble de deux caméras indépendantes, et pour effectuer le calibrage du système on peut donc simplement appliquer pour chacune des deux caméras une méthode classique d'étalonnage en utilisant une ou

plusieurs images d'une mire ou d'un objet de calibrage de géométrie connue, ce qu'on appelle calibrage fort. Cependant, ce type de méthode utilisant un objet de calibrage ne peut s'appliquer au cas où l'on dispose d'aucune image d'objet de géométrie connue. Dans cette dernière situation, n'ayant aucune connaissance sur la scène observée à travers le système, il devient impossible de calibrer chaque caméra indépendamment de l'autre à partir d'une seule image, et il faut donc se résoudre à utiliser des méthodes tenant compte du fait qu'on doit calibrer non pas deux caméras indépendantes mais deux caméras rigidement liées en observant la même scène. On peut alors, à partir des points de mise en correspondance entre les deux vues, calibrer le système.

L'une de ces méthodes, appelée calibrage faible, permet de déterminer les paramètres ayant uniquement rapport à la structure stéréoscopique du système, appelée géométrie épipolaire. Dans le contexte du modèle de caméra de type sténopé, elle est aussi appelée calibrage projectif. Cette méthode possède un avantage important sur le calibrage fort et permet une détermination très précise de la géométrie épipolaire.

Le principe de calibrage dit fort est d'utiliser une grille ou tout autre objet de calibrage, pour lesquels les positions des points marqués sur l'objet, appelés points de contrôle, sont connus. Ces points de contrôle peuvent être des coins, des points, des intersections de droites ou toutes autres primitives pouvant être facilement extraites à partir d'images numériques mesurées.

Typiquement, le problème de calibrage devient alors : étant donné un ensemble de points de contrôle 3D de coordonnées connues, déterminer les paramètres de la fonction de projection associée au capteur pour que leur projection corresponde au mieux aux mêmes points extraits des images.

Le problème principal commun aux méthodes utilisant les points de contrôle est dû au fait qu'il existe un couplage entre les paramètres intrinsèques et extrinsèques, qui a pour conséquence des erreurs importantes sur l'estimation de ces paramètres, et surtout sur l'estimation des paramètres intrinsèques de la caméra.

3.5.2 Méthodes d'étalonnage

Il existe plusieurs techniques d'étalonnage. Les plus intéressantes sont celles de Tsai [36], Heikkilä [37] et Zhang [38]. Le principe d'étalonnage mené dans cette étude est basé sur la détection d'une mire plane représentant un damier dont les caractéristiques sont connues et mesurées. L'utilisation d'une mire plane simplifie sa fabrication et permet une simplification du modèle mathématique car comme la composante suivant l'axe Z est annulée, les points de correspondance entre les paires d'images seront liés par des homographies. Le modèle de Zhang est ensuite adopté pour l'estimation initiale des paramètres intrinsèques et extrinsèques du capteur. Ensuite, le modèle de Heikkilä est utilisé pour la correction des

distortions car il prend en compte les distortions tangentielles, ce qui n'est pas le cas dans le modèle de Zhang.

On a utilisé dans cette manipulation 20 images gauches et 20 droites d'un damier. Dans chaque paire d'images, l'extraction de 42 points de contrôle été faite pour l'estimation des homographies. La valeur finale de l'homographie est extraite par une minimisation non-linéaire en utilisant l'algorithme de Levenberg-Marquardt. Pour chaque paire d'images, une translation pure ne suffit pas pour l'estimation des homographies, il faut donc éviter cette situation.

3.5.3 Correction des distortions

Le modèle de sténopé idéal n'existe pas. On a toujours recours à un objectif pour observer une scène. Malheureusement, les lentilles possèdent des aberrations sphériques, des aberrations chromatiques, des distortions radiales, et leur profondeur de champ est limitée. Par conséquent, une modélisation non-linéaire s'avère être essentielle pour tout algorithme de reconstruction 3D visant des résultats avec la plus grande précision.

Le modèle que nous décrivons ici consiste à remplacer chaque pixel par une valeur corrigée, il est inspiré du modèle de Heikkilä et Silvén :

$$u_c = \left(u_d + v_d \sum_{i=3}^5 K_{i-2} r_d^{i-1} \right) + du, \quad (3.1)$$

$$v_c = \left(v_d + u_d \sum_{i=3}^5 K_{i-2} r_d^{i-1} \right) + dv, \quad (3.2)$$

$$du = 2K_4 u_d v_d + K_5 (r_d^2 + 2u_d^2), \quad (3.3)$$

$$dv = 2K_5 u_d v_d + K_4 (r_d^2 + 2v_d^2), \quad (3.4)$$

$$r_d = \sqrt{u_d^2 + v_d^2}. \quad (3.5)$$

(u_c, v_c) sont les coordonnées des points corrigés et (u_d, v_d) celles des points initiaux possédant des distortions, du et dv sont les valeurs de distortions tangentielles. La minimisation est faite tout en changeant les coefficients $K_{1...5}$ pour réduire au minimum la distance euclidienne entre les points formant une ligne droite précise et les points de la ligne dans l'image. Les trois premiers coefficients du vecteur K sont associés aux distortions radiales et les deux derniers aux distortions tangentielles.

La représentation peut être écrite en utilisant la norme de Hess pour des lignes :

$$\min_K \sum_{n=1}^{N_p} (\varepsilon_n)^2, \quad (3.6)$$

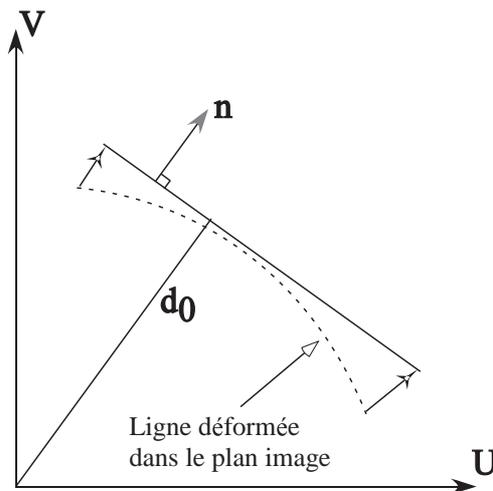


Figure 3.4 – Modèle utilisé pour la correction des distorsions dans le plan image.

N_p est le nombre de points ajustés à la ligne droite, et ε_n est définie par :

$$\varepsilon_n = \begin{pmatrix} n_u \\ n_v \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} u_{c,n} \\ v_{c,n} \end{pmatrix} - d_0. \quad (3.7)$$

Nous avons mené cette procédure pour calculer les distorsions présentes dans notre système d'observation. Les résultats sont illustrés dans figure 3.5. Il faut noter que si le premier coefficient K_1 est positif, la distorsion est de type coussinet, sinon la distorsion est de type barillet. Les coefficients de distorsions estimés dans notre système prennent les valeurs suivantes : $K = (-1.077, 1.076, 0, -0.012, 0.000)$. Ainsi nous avons des distorsions de type barillet.

3.6 Extraction de la matrice de Mueller

Les polarimètres imageurs sont conçus et optimisés en supposant que les propriétés optiques du système de polarisation sont idéales. Par exemple, nous supposons que les polariseurs linéaires ont un taux d'extinction infini. On suppose également que les éléments de retard des lames rotatives ont des retards fixes qui ne varient pas selon la longueur de l'onde d'observation [39].

Des articles récents ont montré qu'il y a un ou plusieurs choix optimaux des mesures qui peuvent maximiser le rapport signal/bruit, ou signal-to-noise ratio (SNR), pour les imageurs de Stokes-Mueller. Cette approche reste applicable pour tous les types de polarimètres, à savoir les polarimètres de Stokes ou de Mueller à lumière active cohérente/incohérente ou passive et pour des systèmes à lames rotatives ou cristaux

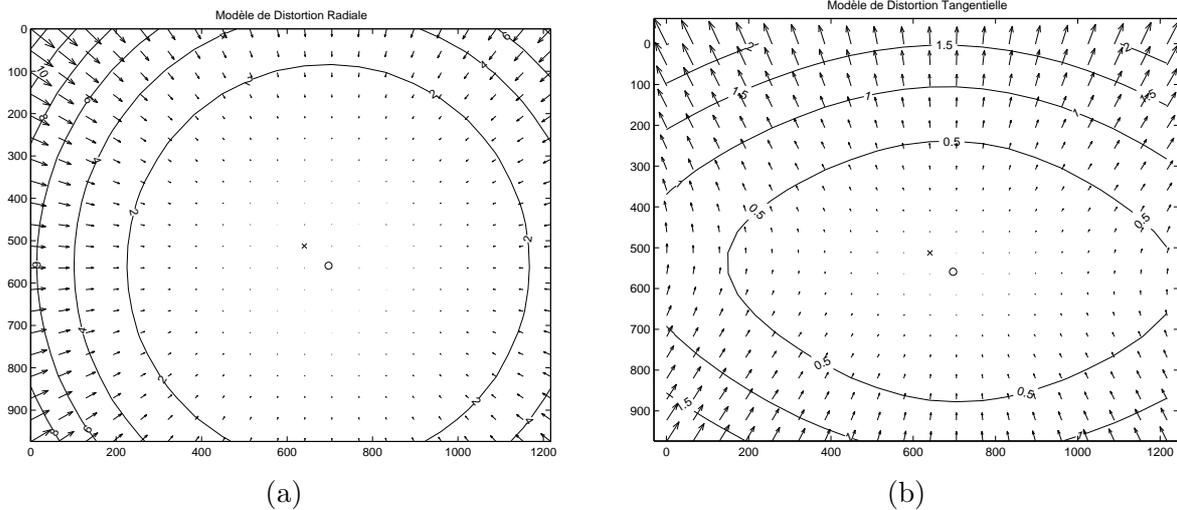


Figure 3.5 – Distortions (a) radiale et (b) tangentielle présentes dans le système de prise de vues. O représente le point principal et \times est le centre de l'image. La taille de l'image est de 1024×1280 . Il est clair que les coins de l'image subissent une forte distorsion.

liquides. Les résultats de ces études prévoient que le rapport SNR dépendra du choix des mesures et non seulement de la qualité du système optique et du rapport SNR du détecteur photoélectrique. Ces prévisions ont été vérifiées sur des images simulées et validées par des mesures expérimentales.

Certaines de ces études méritent d'être citées, comme par exemple celles qui ont exploré l'optimisation des polarimètres conçus pour mesurer les paramètres de Stokes. Ambirajan *et al.* [40], Sabatke et Tyo ont analysé les matrices de systèmes qui contrôlent l'opération du polarimètre et ont obtenu des configurations optimales en minimisant divers nombres de conditionnement traitant les matrices de polarisation suivant les normes : L^1 , L^2 , L^∞ et la norme de Frobenius. Ils ont déterminé que des configurations optimales sont obtenues quand les états de polarisation analysés pour déterminer le vecteur de Stokes sont équidistants dans toute la sphère de Poincaré.

Tyo a montré que les polarimètres optimaux ont leurs angles de mesures équidistants sur l'équateur de la sphère de Poincaré afin de maximiser le volume du tétraèdre régulier dont les sommets se trouvent aux quatre angles de mesures. L'effet de ces optimisations devrait maximiser le rapport signal/bruit et minimiser l'effet des erreurs systématiques, telles que les erreurs de calibrage dans les éléments optiques [41].

D'autres articles ont introduit le principe d'auto-étalonage d'un imageur de Stokes-Mueller, citons par exemple l'article de Compain *et al.* [42], concernant les modulateurs de polarisation, les polarimètres et les ellipsomètres de Mueller [43]. Cette méthode est basée sur une étude des valeurs propres de la matrice du générateur et de l'analyseur d'états

de polarisation. Cette analyse dépend fortement de la précision de l'échantillon dichroïque utilisé lors de la phase d'auto-étalonnage.

3.6.1 Maximisation du déterminant (méthode MI)

Pour des systèmes temps-réel ou de télédétection, le temps disponible pour acquérir les images d'intensité est limité. Une telle contrainte conduit à considérer le cas du nombre minimal de mesures pour obtenir l'image de Mueller.

La méthode de maximisation du déterminant (MI), nommée ici "Maximum Inversion", consiste à ne prendre que 16 acquisitions. Les angles d'orientation sont choisis de sorte à maximiser le conditionnement des matrices de mesures \mathbf{A} et \mathbf{G} , ce conditionnement est en rapport direct avec la précision de l'inversion. On définit donc le conditionnement d'une matrice \mathbf{A} comme suit :

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}\|^{-1}. \quad (3.8)$$

Le choix se porte alors sur la maximisation du déterminant de la matrice \mathbf{A} , ce qui va nous garantir que la matrice reste inversible. Pour des valeurs élevées du bruit la méthode MI reste limitée, il est nécessaire d'augmenter le nombre de mesures pour éviter la propagation du bruit expérimental et son amplification dans l'image de Mueller, figure 3.6.

3.6.2 Méthode du Pseudo-Inverse (PI)

Cette méthode consiste à faire plus de 16 acquisitions, en surdéterminant le système ; l'effet des fluctuations aléatoires sur l'image reconstruite de Mueller sera ainsi minimisé [44, 45].

En revanche, il y a toujours un choix optimal pour les angles d'orientation. C'est l'échantillonnage à pas constant entre $[0, \pi]$ qui est choisi. Pour 8×8 mesures, les différentes combinaisons d'angles sont décrites dans la figure 3.7.

Nous constatons dans la figure 3.8 que même pour 64 mesures la moyenne du bruit dans l'image de Mueller reste légèrement supérieure au bruit qui affecte les images brutes. Par ailleurs, dans le prochain chapitre nous menons une étude mathématique qui sera validée sur des simulations expérimentales pour identifier le nombre d'acquisitions nécessaires pour que l'impact du bruit dans l'image de Mueller soit plus petit que le bruit qui affecte les images d'intensité brutes.

3.6.3 Méthode de Fourier (FT)

Les polarimètres à lames à retard synchronisées, reposant sur le développement en série de Fourier du signal détecté (méthode de transformée de Fourier discrète) peuvent être considérés comme des dispositifs alternatifs aux précédents[46]. Pour N acquisitions, avec

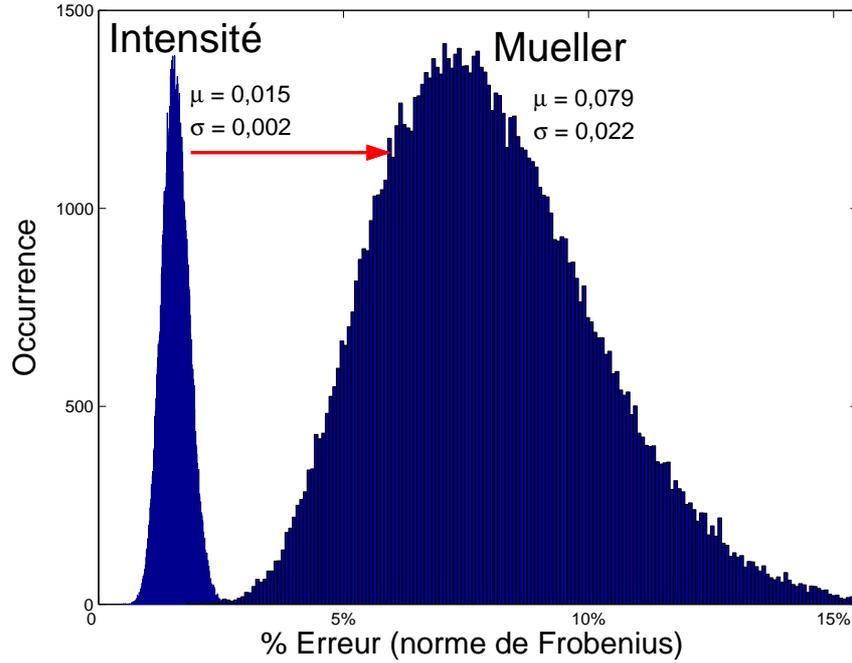


Figure 3.6 – Impact du bruit expérimental sur l'image de Mueller estimée avec 4×4 acquisitions. Le bruit gaussien additif présent dans les images brutes d'intensité est considérablement amplifié dans la matrice de Mueller.

des taux de rotation de 5 entre les deux lames, soit $\theta' = 5\theta$ ou $\theta' = 5\theta$ avec $\theta = [0 \ \dots \ N-1] 2\pi/N$, nous pouvons limiter le développement à 12 harmoniques [25] :

$$I(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{12} (a_n \cos 2n\theta + b_n \sin 2n\theta). \quad (3.9)$$

Sachant que la convolution du noyau $D_n(\cdot)$ de Dirichlet avec un signal périodique est l'approximation d'ordre n du signal, nous pouvons écrire la transformée de Fourier discrète du signal détecté, c'est la méthode dite FT :

$$I_k = a_0 N \delta_k + \sum_{n=1}^{12} \frac{N}{2} a_n \delta_{k-2n} - i \sum_{n=1}^{12} \frac{N}{2} b_n \delta_{k-2n}. \quad (3.10)$$

δ_k est le symbole de Kronecker qui est toujours égal à zéro sauf au point k . Avec les coefficients de Fourier a_0, a_n, b_n nous pouvons déterminer les éléments de Mueller [47].

3.6.4 Choix des angles de mesure

Un processus instable d'inversion aura lieu quand la matrice du PSG ou celle du PSA est mal-conditionnée. Cette situation se produit quand le rapport σ_1/σ_n entre la plus

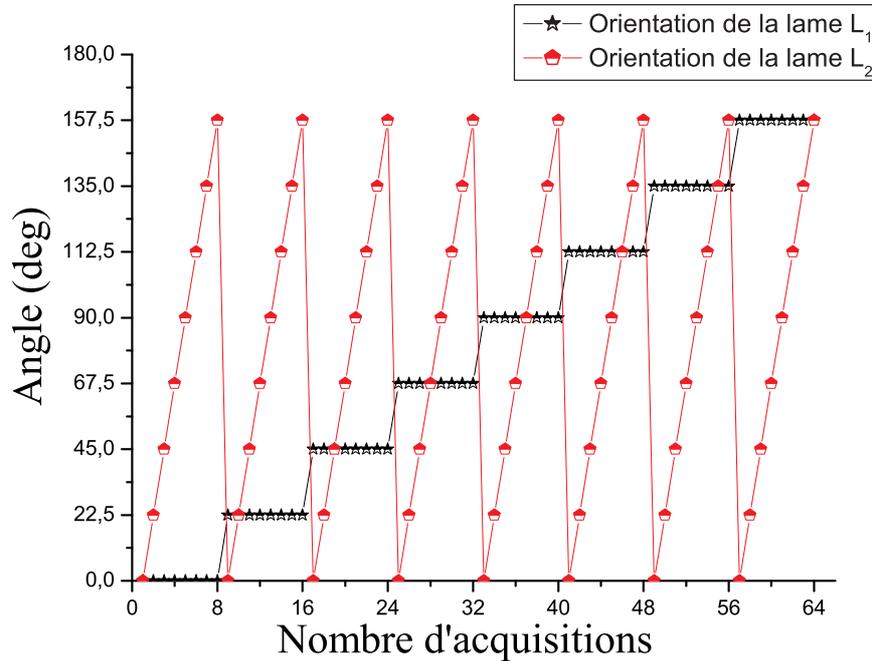


Figure 3.7 – Combinaison de l'orientation angulaire des lames à retard.

grande et plus petite valeur singulière (différente de zéro) est grand [48]. Une méthode pour réaliser le traitement approprié pour les matrices $\mathbf{G}(\theta, R)$ et $\mathbf{A}(\theta', R)$ est de pré-sélectionner les combinaisons d'angles qui minimisent la figure de mérite de la variance pondérée ou “equally weighted variance” (EWV). Le coefficient EWV pour la matrice $\mathbf{A}(\theta', R)$ est défini par :

$$EWV = \sum_{j=0}^3 \sum_{k=0}^{n-1} (\mathbf{A}^\#)_{j,k}^2, \quad (3.11)$$

$$= \text{Tr} [(\mathbf{A}^\#)^\top \mathbf{A}^\#] = \sum_{j=0}^{r-1} 1/\mu_j^2 \quad (3.12)$$

où n est le nombre de mesures, r est le rang de la matrice \mathbf{A} et μ_j sont ses valeurs singulières. Le signe $\#$ dénote la matrice de pseudo-inverse et \top sa transposée. Nous avons effectué la minimisation numérique pour le rapport EWV pour les 8×8 combinaisons d'angle et pour la valeur R de retard. Les résultats prouvent qu'une valeur du retard de 132° améliore le traitement de l'inversion. En présence d'un bruit gaussien indépendant et identiquement distribué, le problème est de trouver la valeur du retard qui maximisera le volume du polyèdre formé par les états de polarisation de mesures sur la sphère de Poincaré.

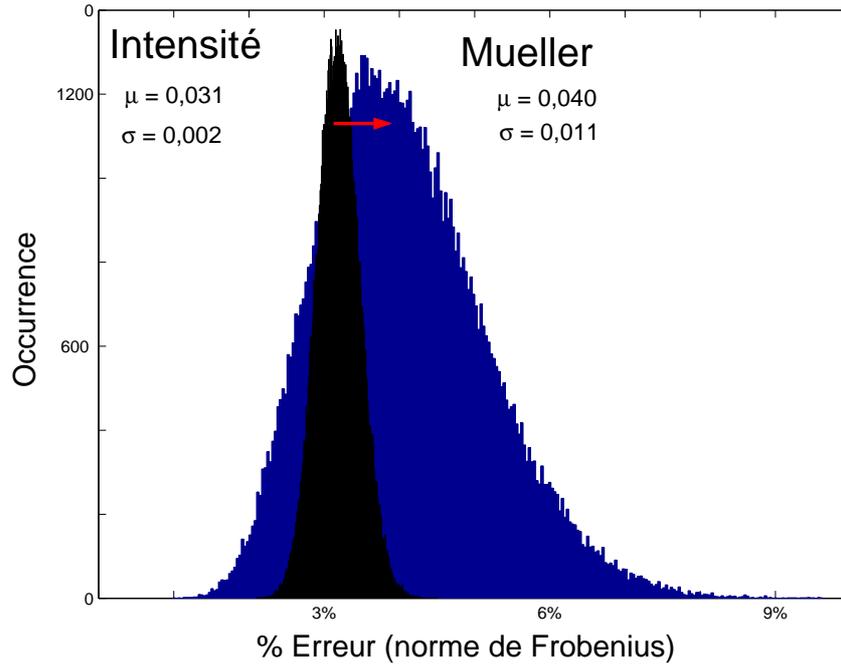


Figure 3.8 – Impact du bruit expérimental sur l'image de Mueller estimée avec 8×8 acquisitions. Nous constatons que le bruit est plus atténué que la méthode MI.

Pour une retardance R , la k -ième rangée de la matrice de mesure du PSA est proportionnelle à :

$$S(\theta'_k, R) \propto \left[1, \cos^2 2\theta'_k + \cos(R) \sin^2 2\theta'_k, \sin^2(R/2) \sin^2 4\theta'_k, -\sin(R) \sin 2\theta'_k \right]. \quad (3.13)$$

Un polarimètre optimal est composé de lames ayant un retard de $131,81^\circ$ et les angles pour lesquels on optimise le conditionnement pour 4×4 mesures sont $\pm 15,12$ et $\pm 51,69$, voir figure 3.10. Le choix de ces angles va maximiser le volume du tétraèdre inscrit dans la sphère de Poincaré. Ainsi le déterminant sera maximum et l'inversion matricielle sera bien conditionnée, limitant ainsi l'impact du bruit de mesures sur la matrice de Mueller. Pour un retard de 90° les angles qui maximisent le déterminant sont : $(-51,84; -14,40; 14,40; 51,84)$.

Par ailleurs, le choix optimal des angles (θ, θ') qui minimisent l'impact de bruit dans la méthode PI consiste à échantillonner à pas constant entre 0 et π . Pour 8×8 mesures, un pas de $\pi/8$ est optimal.

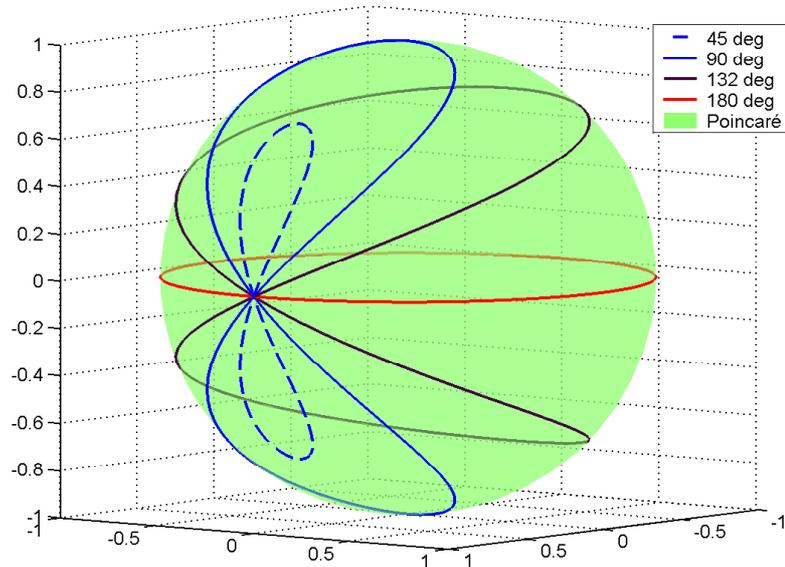


Figure 3.9 – États de polarisation PSA pour quatre valeurs différentes du retard. Chaque trajectoire permet de déterminer l'orientation θ' du retardateur pour un retard donné.

3.6.5 Discussions

La vectorisation des équations d'inversion matricielle permet de réduire le temps consacré au traitement de 4×4 , 5×5 , ..., 8×8 acquisitions ou même d'une plus grande quantité, et rend presque identique le temps nécessaire à la reconstruction de l'image de Mueller. En revanche, la contrainte qui reste présente dans les expériences est le temps d'acquisition. Un imageur à cristaux liquides pourrait être la solution.

La méthode MI est la plus rapide mais est sensible au bruit de mesure. Cette méthode doit être utilisée avec des systèmes polarimétriques parfaitement calibrés ou lorsque on souhaite avoir une image de Mueller sans exiger de précision. Pour des valeurs du bruit élevées la technique PI apporte une certaine satisfaction de réduction du bruit pour 8×8 acquisitions, mais le temps d'acquisitions est deux fois plus élevé que la méthode MI. Par ailleurs, le temps d'acquisition de la méthode de FT est presque au milieu entre les méthodes MI et PI, et en même temps cette méthode est précise et robuste au bruit. Il apparaît alors que la méthode FT est appropriée pour améliorer la qualité des images de Mueller extraites à partir des images d'intensité issues d'un polarimètre.

Pour savoir quel niveau de confiance peut être attribué aux méthodes précédemment mentionnées, nous avons étudié la robustesse de chaque méthode, par simulation des données, de la façon suivante : pour chaque combinaison (θ, θ') de la position angulaire

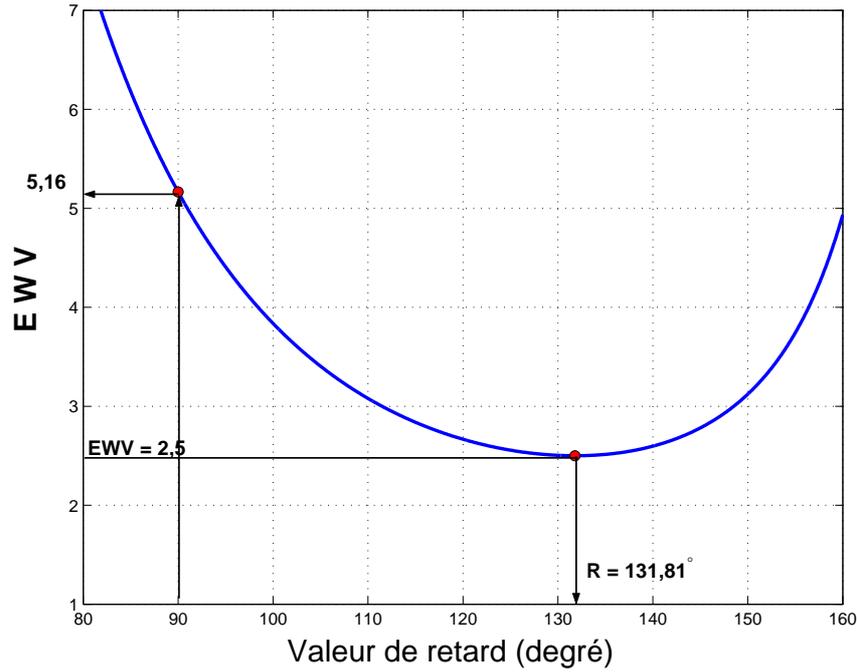


Figure 3.10 – Retard de la lame du PSA en fonction du critère EWW. Les angles de mesure sont $\pm 51,69$ et $\pm 15,12$ degrés.

des lames quart d'onde, l'intensité idéale est calculée et un bruit gaussien de moyenne égale à zéro et un écart-type σ variable, est ajouté. Les valeurs résultantes sont employées comme données ayant un rapport signal/bruit variable pour les algorithmes d'inversion, à savoir, les méthodes MI, PI et FT.

Dans le schéma 3.11 nous avons illustré le comportement des trois méthodes pour 3 valeurs de bruit gaussien additif et non-corrélé. On peut constater que la méthode MI est très sensible au bruit de mesure. En augmentant le nombre d'acquisitions, le niveau d'erreur est réduit. De plus, pour la méthode FT nous avons considéré le cas correspondant au niveau de bruit le plus élevé dans les simulations précédemment utilisées dans les méthodes MI et PI.

Il est évident d'après la figure 3.11 que la méthode FT est la plus stable et la plus robuste. Une explication simple peut être trouvée : en ce qui concerne des données expérimentales, un terme du bruit $\epsilon(\theta)$ devrait s'ajouter au côté droit de l'équation 3.9. Le processus d'inversion qui est le calcul des coefficients de Fourier a_0 , a_n , b_n de la même équation est effectué en utilisant une TFD appliquée aux N intensités acquises $I(\theta_p)$. En conséquence, le terme résiduel est également la TFD du bruit $\epsilon(\theta_p)$ soit :

$$\sum_{p=0}^{N-1} \epsilon(\theta_p) \exp(-2\pi i k p / N). \quad (3.14)$$

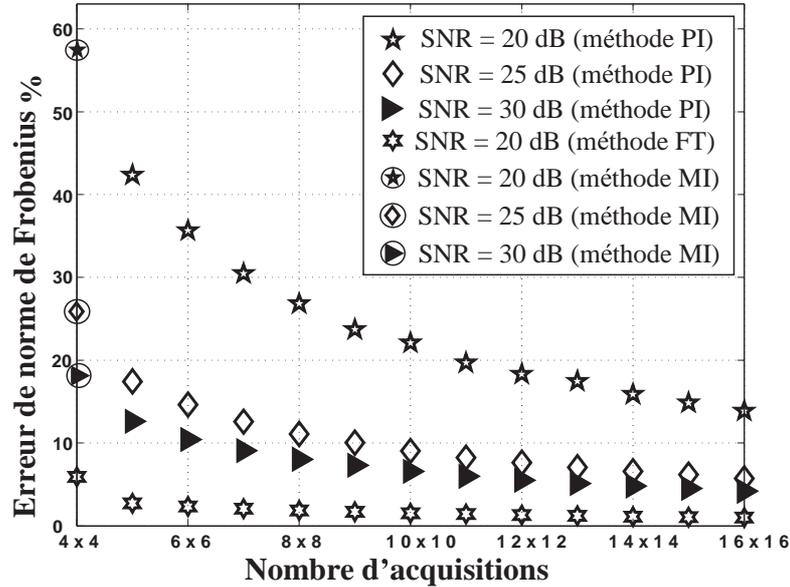


Figure 3.11 – Erreur en fonction du nombre de mesures. On peut constater que l'impact du bruit diminue quand on augmente le nombre d'acquisitions. La méthode FT apparaît comme la méthode la plus robuste pour différents niveaux de bruit.

Une telle expression peut être interprétée comme une moyenne des échantillons du bruit avec des poids complexes w_N^{kp} . Ils satisfont à la relation :

$$\sum_{p=0}^{N-1} w_N^{kp} = 0 \quad \text{for } k \neq 0, \quad (3.15)$$

et interviennent dans la réduction du bruit mentionnée ci-dessus. Le cas pour lequel $k = 0$ correspond à une moyenne classique traditionnelle.

Dans le cas représentatif où aucun échantillon n'est présent entre le PSG et le PSA, une recherche quantitative a été menée. À cet effet, afin d'atteindre des figures significatives avec 3 chiffres de précision pour un rapport signal/bruit de 20 dB : 1000000 de réalisations ont été considérées et les données bruitées ont été utilisées pour rechercher la matrice de Mueller. On devrait obtenir la matrice d'identité 4×4 . L'approche MI mène à :

$$\mathbf{M}_{MI} = \begin{bmatrix} 0,999(072) & 0,000(136) & 0,000(136) & 0,000(060) \\ 0,000(136) & 1,000(257) & 0,000(257) & 0,000(115) \\ 0,000(136) & 0,000(257) & 1,000(257) & 0,000(115) \\ 0,000(060) & 0,000(115) & 0,000(115) & 1,000(051) \end{bmatrix}.$$

Les chiffres entre parenthèses représentent les décimales de la valeur efficace du bruit

affectant chaque élément de la matrice. On peut noter que l'erreur MI est élevée et atteint 26%.

Pour la méthode PI avec 8×8 angles θ , θ' multiples de $\pi/8$, le résultat est :

$$\mathbf{M}_{PI} = \begin{bmatrix} 1,000(042) & 0,000(063) & 0,000(069) & 0,000(034) \\ 0,000(063) & 1,000(094) & 0,000(104) & 0,000(052) \\ 0,000(069) & 0,000(104) & 0,999(115) & 0,000(057) \\ 0,000(034) & 0,000(052) & 0,000(057) & 1,000(028) \end{bmatrix}.$$

Une amélioration est notée : l'erreur la plus élevée est de l'ordre de 12%.

Avec la méthode FT où $N = 36$ positions $\theta = [0 \dots (N - 1)] 2\pi/N$ ont été choisies, en conséquence $\theta' = 5\theta$, on obtient :

$$\mathbf{M}_{FT} = \begin{bmatrix} 1,000(007) & 0,000(011) & 0,000(012) & 0,000(006) \\ 0,000(011) & 1,000(018) & 0,000(019) & 0,000(009) \\ 0,000(012) & 0,000(019) & 1,000(020) & 0,000(010) \\ 0,000(006) & 0,000(009) & 0,000(010) & 1,000(005) \end{bmatrix}.$$

L'erreur la plus élevée est environ 2% ce qui est considérée comme une erreur très basse pour les polarimètres actifs opérationnels.

Il peut se produire des cas où des matrices de Mueller sont pas physiquement réalisables dans quelques régions étroites de la sphère de Poincaré. En modélisant l'effet du bruit sur chaque élément de la matrice de Mueller, nous pouvons toujours recalculer l'estimation physique correspondant à la matrice expérimentale. D'autre part, ce qui apparaît aussi intéressant est que les erreurs sont réparties d'une manière symétrique à l'intérieur de la matrice de Mueller. Nous discuterons de ces deux sujets plus en détails dans le prochain chapitre.

3.7 Discussions

Nous avons montré que la reconstruction de la matrice-image de Mueller à partir des mesures d'intensité est un processus sensible au bruit. En outre, le choix de la méthode employée pour extraire les éléments de la matrice de Mueller influence considérablement la précision des résultats finaux. Parmi les procédures disponibles, trois d'entre elles ont été examinées et leur robustesse analysée en ajoutant un bruit gaussien sur des données synthétisées par ordinateur et la validation finale a été vérifiée sur des données expérimentales. Comme prévu, les méthodes MI et PI basées sur l'inversion classique atteignent leur limite même si plus de données sont considérées. En revanche, la méthode FT basée sur une approche de transformée de Fourier discrète est d'une stabilité remarquable. La raison identifiée est que le procédé de calcul des éléments de Mueller correspond à un filtrage avec un noyau périodique.

3.8 Estimation de la matrice fondamentale

3.8.1 Méthode linéaire

Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédent, la matrice fondamentale est une matrice singulière de dimension 3×3 ayant 7 degrés de liberté. Pour déterminer cette matrice, il nous faut au moins 7 points de correspondance entre l'image droite et l'image gauche. Avoir 7 points de correspondance nous donne une équation algébrique du troisième ordre, la solution risque de ne pas être unique : il y a une possibilité d'avoir soit une, soit trois solutions. Pour lever cette ambiguïté, il faut une paire de points de correspondance de plus, c'est l'algorithme des huit-points.

En ayant au moins 8 points de correspondance, nous pouvons déterminer d'une manière unique la matrice fondamentale. Soient les points de correspondance qui s'écrivent sous la forme suivante :

$$m_i \begin{vmatrix} u_i \\ v_i \\ 1 \end{vmatrix} \leftrightarrow m'_i \begin{vmatrix} u'_i \\ v'_i \\ 1 \end{vmatrix} \quad (3.16)$$

On peut alors reformuler l'équation de coplanarité écrite dans le chapitre précédent, en vectorisant la matrice fondamentale \mathbf{F} . On obtient :

$$m'^T \mathbf{F}_{12} m = 0, \quad (3.17)$$

$$\mathbf{U}_i \mathbf{f} = 0. \quad (3.18)$$

La matrice \mathbf{U}_i et le vecteur \mathbf{f} sont définis comme :

$$\mathbf{U}_i = [u_i u'_i \quad u_i v'_i \quad u_i \quad v_i u'_i \quad v_i v'_i \quad v_i \quad u'_i \quad v'_i \quad 1], \quad (3.19)$$

$$\mathbf{f} = [F_{11} \quad F_{12} \quad F_{13} \quad F_{21} \quad F_{22} \quad F_{23} \quad F_{31} \quad F_{32} \quad F_{33}]^T. \quad (3.20)$$

L'équation 3.18 est une équation linéaire et homogène ayant les 9 éléments de la matrice fondamentale comme inconnus. Ils peuvent être déterminés, à un facteur d'échelle près, avec 8-points de correspondance, cette méthode est connue dans la littérature sous le nom d'algorithme des 8-points [58].

Dans la pratique, on a besoin de beaucoup plus que 8 points pour estimer la matrice fondamentale avec plus de précision. Cela est dû à la présence d'erreurs de mise en correspondance entre les points appariés. Un moyen de minimiser cette erreur d'appariement est de surdéterminer le système pour obtenir la solution au sens des moindres-carrés. Comme principe de base, pour déterminer avec précision une équation linéaire avec un niveau du bruit gaussien faible et ayant un nombre n de degrés de liberté, il faut avoir $5(n - 1) - 2$ équations. En ce qui concerne la matrice fondamentale ($n = 7$),

le nombre de points de correspondance nécessaire pour la détermination précise de cette matrice vaut 28 points. Mathématiquement on peut écrire :

$$\min_F \sum_i (m'^T \mathbf{F}_{12} m)^2 \implies \min_f \|\mathbf{U}_i \mathbf{f}\|^2. \quad (3.21)$$

Cette équation est sujette à la contrainte de norme : $\|\mathbf{f}\| = 1$. L'estimation de la matrice fondamentale se fait alors en décomposant la matrice $U_i^T U_i$ en valeurs singulières. La solution correspond au vecteur attaché à la plus petite valeur singulière.

Contrainte de rang 2

La méthode décrite ci-dessus fournit une matrice fondamentale sans prendre en compte le fait qu'une matrice fondamentale doit satisfaire la contrainte de rang 2. En imposant la contrainte du rang, cela va forcer toutes les droites épipolaires dans les images droite et gauche à passer par les épipoles, ce qui va rendre la démarche stéréoscopique plus cohérente avec la théorie. De plus, on peut constater que le fait d'imposer cette contrainte va diminuer l'erreur d'appariement. La solution est alors de forcer la matrice \mathbf{F} extraite précédemment d'avoir un rang 2. Cela est fait de la manière suivante :

1. Faire une décomposition en valeurs singulières *svd* pour la matrice fondamentale $\mathbf{F} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$, où $\mathbf{S} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ est une matrice diagonale telle que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, σ_i sont les valeurs singulières.
2. Forcer $\sigma_3 = 0$ pour obtenir la matrice $\hat{\mathbf{S}} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, 0)$.
3. Reconstruire la nouvelle matrice fondamentale $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{U}\hat{\mathbf{S}}\mathbf{V}^T$.

3.8.2 Méthode de normalisation

Dans la référence [5], il a été montré que la présence des termes numériquement non-homogènes, allant de 1 jusqu'à 10^n avec $n = \{7, 8, 9, \dots\}$, dans la matrice $\mathbf{X} \equiv \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i^T$ rend cette matrice mathématiquement mal-conditionnée. Cela va directement affecter la précision de la décomposition en valeurs singulières *svd*. La matrice fondamentale ainsi extraite ne sera pas assez précise même si l'appariement a été conduit d'une manière très fine.

La solution pour sortir de cette situation est de rendre la matrice \mathbf{X} numériquement stable, c'est-à-dire que tous les éléments de cette matrice soient du même ordre de grandeur. Par ailleurs, pour améliorer la technique d'algorithme des huit-points, une procédure de normalisation est recommandée : cette normalisation est faite en transférant l'origine de l'image au centre des points de correspondance, et en multipliant chaque point par un facteur d'échelle s de sorte que le point où se trouve la valeur moyenne est à une distance

de $\sqrt{2}$ de la nouvelle origine. Ceci peut être formulé comme une transformation de similarité qui prend la forme suivante :

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} s & 0 & -st_u \\ 0 & s & -st_v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.22)$$

où t_u et t_v représentent les coordonnées du centre des points de correspondance.

Pour un jeu de points de correspondance $m_i \leftrightarrow m'_i$ la technique de normalisation est résumée de la manière suivante :

1. Calculer les coordonnées (t_u, t_v) du centre des points m_i et (t'_u, t'_v) des points m'_i .
2. Calculer les coordonnées des points m_i par rapport à la nouvelle origine, idem pour les points m'_i .
3. Calculer la distance moyenne d entre les points ainsi déplacés et la nouvelle origine.
4. Calculer le facteur d'échelle s tel que : $s = \sqrt{2}/d$. Construire les matrices de normalisation \mathbf{T}_1 et \mathbf{T}_2 .
5. Normaliser le jeu initial des points de correspondance selon $\hat{m}_i = \mathbf{T}_1 m_i$ et $\hat{m}'_i = \mathbf{T}_2 m'_i$.
6. Rechercher la matrice fondamentale $\hat{\mathbf{F}}_{12}$ qui correspond aux nouveaux points appariés $\hat{m}_i \longleftrightarrow \hat{m}'_i$.
7. Calculer la matrice fondamentale originale par $\mathbf{F}_{12} = \mathbf{T}_2^\top \hat{\mathbf{F}}_{12} \mathbf{T}_1$.

La méthode de normalisation va certes déplacer les épipoles en dehors du plan image. Le procédé ci-dessus de normalisation augmentera la précision des résultats des méthodes linéaires mais ce n'est pas l'algorithme le plus adapté. Le critère linéaire tend à réduire au minimum une quantité qui n'a pas de vérification géométrique. Une bonne approche est de rechercher à minimiser une quantité qui puisse être interprétée géométriquement.

Une telle quantité est la distance séparant un point m'_i de sa ligne épipolaire correspondante $l'_i = \mathbf{F}_{12} m_i \equiv [l'_1, l'_2, l'_3]^\top$. Cette distance est :

$$d'(m'_i, l'_i) = \frac{1}{c'_i} m_i^\top \mathbf{F}_{12} m_i \quad (3.23)$$

où $c'_i = \sqrt{l'^2_1 + l'^2_2}$. En effet, le critère linéaire consiste à minimiser le critère suivant :

$$\min_F \sum_i c_i'^2 d'^2(m'_i, l'_i). \quad (3.24)$$

La présence du terme $c_i'^2$ dans la quantité à minimiser n'a pas de signification physique et dérangeante, cette méthode tend à rapprocher les épipoles aux centres des images. Dans ce cas, plus les épipoles des images sont proches du centre, moins la géométrie épipolaire sera précise [5]. Nous pouvons conclure que les méthodes linéaires minimisent une distance "algébrique" et pas une distance "géométrique" [59].

3.8.3 Méthode non-linéaire

Dans la méthode linéaire, nous avons déterminé les lignes épipolaires dans seulement une des deux images et ensuite nous avons lancé le procédé de minimisation avec la présence d'un terme dérangentant $c_i'^2$, voir équation 3.24. En pratique, cette méthode n'est pas très précise. Pour obtenir une géométrie épipolaire cohérente, il est nécessaire et suffisant qu'en échangeant les deux images, la matrice fondamentale soit changée en sa transposée. Ainsi nous devons inclure \mathbf{F}_{12} et \mathbf{F}_{21} dans le procédé de minimisation et trouver une manière d'exclure $c_i'^2$ de la minimisation. Ceci nous conduit au critère non-linéaire de minimisation qui peut être écrit sous la forme suivante :

$$\min_F \sum_i (d'^2(m'_i, \mathbf{F}_{12}m_i) + d^2(m_i, \mathbf{F}_{21}m'_i)). \quad (3.25)$$

Cette méthode minimise la distance "géométrique" entre les points de correspondance et les lignes épipolaires correspondantes. En raison de la complexité de cette minimisation, on doit commencer tout d'abord par calculer une valeur d'estimation initiale de la matrice fondamentale à partir d'une méthode linéaire puis ensuite exécuter l'algorithme de minimisation non-linéaire.

3.8.4 Méthodes robustes

Jusqu'à présent, nous supposons que les points de correspondance sont donnés, ils peuvent être obtenus par des techniques telles que la corrélation et la relaxation. Toutes ces techniques exploitent un caractère heuristique sous une forme ou une autre, par exemple, les similitudes d'intensité ou les transformations affines dans le plan d'image. Dans la pratique, l'erreur de localisation des points appariés est supposée avoir un comportement gaussien. Parmi les correspondances établies, nous pouvons trouver des points aberrants ou *outliers*, c'est-à-dire des paires de points totalement distinctes mais que l'algorithme d'appariement a identifiées par erreur comme des points homologues. Ceci va complètement influencer l'évaluation finale par les méthodes linéaires et la matrice fondamentale sera inutilisable. Un traitement robuste est nécessaire pour éliminer ces *outliers*. Parmi différentes méthodes robustes, nous allons étudier les deux les plus connues : la méthode des *M-Estimators* [60] et celle des *LMedS* [61].

M-Estimators

Comme on a vu précédemment, les méthodes linéaires estiment la matrice fondamentale en minimisant l'erreur résiduelle au sens des moindres carrés. Soit r_i l'erreur résiduelle d'une paire de correspondance, les méthodes linéaires minimisent la fonction : $\sum_i r_i^2$. La méthode des *M-Estimators* consiste à réduire l'effet des points aberrants en remplaçant la fonction

du résidu au carré r_i^2 par une fonction convexe ayant un minimum unique en zéro, qui varie plus lentement que la fonction des carrés. Cela consiste à pondérer les erreurs résiduelles par des poids $\omega(r_i)$ d'une manière itérative :

$$\min \sum_i \omega(r_i^{(k-1)}) r_i^2 \quad (3.26)$$

où l'indice supérieur k indique le nombre d'itérations.

Il existe dans la littérature scientifique un certain nombre de fonctions différentes pour les $M - Estimators$. Parmi eux nous pouvons utiliser la fonction de Tukey [62] :

$$r_i = \begin{cases} \frac{c^2}{6} \left(1 - [1 - (r_i/c\sigma)^2]^3\right) & \text{si } |r_i| \leq c\sigma \\ (c^2/6) & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.27)$$

où σ est une estimation de l'écart-type des erreurs et $c = 4,6851$ un facteur de réglage. La fonction de poids correspondante est :

$$\omega_i = \begin{cases} 1 & |r_i| \leq \sigma \\ \sigma/|r_i| & \sigma < |r_i| \leq 3\sigma \\ 0 & 3\sigma > |r_i| \end{cases} \quad (3.28)$$

La méthode des $M - Estimators$ conduit à un bon résultat en présence d'un bruit gaussien (3 à 5 pixels) pour les points de correspondance de l'image. Cette méthode est limitée dans sa capacité à prendre en compte des points aberrants car elle est dépendante des points de correspondance initiaux et elle ne peut pas totalement éliminer les paires de points aberrants. Ce qu'elle peut faire est de minimiser leurs impacts sur le résultat final.

Least Median of Squares ou LMedS

La méthode $LMedS$ estime les paramètres de la matrice fondamentale suivant le problème de minimisation non-linéaire :

$$\min \text{median}_i r_i^2 \quad (3.29)$$

La méthode des $LMedS$ calcule pour chaque estimation de \mathbf{F} la distance euclidienne entre les points de correspondance et les droites épipolaires. Ainsi le choix de la matrice fondamentale \mathbf{F} correspond à la minimisation de cette distance. Étant donné un jeu de n points de correspondance $m_i \leftrightarrow m'_i$, nous procédons de la manière suivante :

1. Une méthode de Monte-Carlo est utilisée pour choisir un sous-ensemble de 7 paires de correspondance.
2. Pour chaque sous-ensemble J , on utilise une méthode linéaire analytique pour estimer les trois solutions possibles de la matrice fondamentale \mathbf{F}_J .

Méthode	Localisation des épipoles		Temps de calcul
Calibration	$e' = (\infty)$	$e = (\infty)$	0,001 sec
Linéaire	$e' = (265, 306)$	$e = (296, 302)$	0,062 sec
Normalisation	$e' = (1798, 2545)$	$e = (1091, 1443)$	0,095 sec
Non-linéaire1	$e' = (-2493, -4192)$	$e = (4857, 6910)$	37 sec
Non-linéaire2	$e' = (-2487, -4182)$	$e = (4874, 6934)$	12 sec
M-Estimators	$e' = (6640, 8254)$	$e = (7435, 9221)$	7 sec
LMedS	$e' = (8924, 12014)$	$e = (7849, 11450)$	15 sec

Table 3.1 – Localisation des épipoles avec sept méthodes différentes.

3. Pour chaque matrice \mathbf{F}_J , on détermine la médiane M_J du carré de l'erreur résiduelle, par rapport à tous les points de correspondance.
4. On garde la matrice qui minimise M_J .
5. Répéter le calcul k fois et garder la matrice \mathbf{F}_J globale qui minimise M_J .
6. Affiner la matrice fondamentale ainsi choisie en filtrant tous les points à l'extérieur d'une zone de tolérance. Les *inliers* sont les points satisfaisants à : $r_i^2 \leq (2.5\hat{\sigma})^2$, $\hat{\sigma}$ est l'écart type *robuste* donné par :

$$\hat{\sigma} = 1.4826 (1 + 5/(n - p)) \sqrt{M_J} \quad (3.30)$$

où n est la taille des données d'appariement et p est la dimension du vecteur des paramètres [61]. Ici p vaut 7.

7. Recalculer la nouvelle matrice en éliminant les points aberrants.

Le point faible de cette méthode est qu'elle n'est pas très robuste pour de petites erreurs d'appariement, par contre elle est robuste pour des points très aberrants, elle peut donc les éliminer.

3.8.5 Expérimentation

Pour comparer les méthodes précédentes, nous avons choisi le même ensemble de points de correspondance et nous avons ajouté un bruit d'appariement couplé à des points aberrants. Les deux bruit ajouté sont, un bruit gaussien de moyenne égale à trois pixels et sans aucun *outlier* (3 pixel, 0%), et un bruit gaussien de moyenne de trois pixels et 20% des points sont des points aberrants (3 pixel, 20%). Ainsi nous avons comparé les résultats de chacune des méthodes, voir tableau 3.2.

- **Calibration** représente la matrice fondamentale calculée théoriquement pour une tête de stéréoscopie latérale.
- **Linéaire** est la méthode linéaire où l'on a imposé la contrainte de rang 2.

Méthode	$\ \Delta F\ $		Temps de calcul
Calibration	0	0	0,001 Sec
Linéaire	9%	69%	0,062 Sec
Normalisation	9,6%	57%	0,095 Sec
Non-linéaire 1	1,7%	43%	37 Sec
Non-linéaire 2	2,7%	50%	12 Sec
M-Estimators	0,98%	23%	7 Sec
LMedS	1,4%	5,6%	15 Sec

Table 3.2 – Erreur (norme de Frobenius) pour la méthode analytique avec deux niveaux de bruit (3 pixel, 0%) et (3 pixel, 20%).

- **Normalisation** est la méthode de la matrice fondamentale avec normalisation des points de correspondance.
- **Non-linéaire 1** représente la méthode de la matrice fondamentale obtenue par minimisation de l'équation 3.25 avec **Linéaire** comme valeur initiale.
- **Non-linéaire 2** représente méthode de la matrice fondamentale obtenue par minimisation de l'équation 3.25 avec **Normalisation** comme valeur initiale.
- **M-Estimators** et **LMedS** sont les deux méthodes robustes décrites précédemment.

Dans la minimisation non-linéaire, nous avons utilisé l'algorithme de Levenberg-Marquardt pour calculer la matrice fondamentale [63] par réduction de la distance géométrique.

Deux techniques de comparaison ont été utilisées pour évaluer les méthodes de calcul de la matrice fondamentale avec des mesures expérimentales. La première est une comparaison basée sur la norme de Frobenius. On constate que la norme de Frobenius n'est pas adaptée pour identifier la meilleure méthode. Elle donne seulement un ordre de grandeur pour les erreurs. On constate ici que la distance de Frobenius entre la méthode **Linéaire** et la matrice théorique est plus petite que celle de la méthode de **Normalisation**. De même d'après la norme de Frobenius, la méthode **Non-linéaire 1** semble plus précise que la méthode **Non-linéaire 2**. En réalité ce n'est pas le cas, il faut donc choisir une autre méthode pour comparer les résultats.

On va adopter la méthode proposée par Stéphane Laveau de l'INRIA Sophia-Antipolis pour mesurer la différence en pixels entre deux matrices fondamentales. C'est une mesure géométrique, donc directement interprétable [64]. Cette méthode consiste à calculer la distance géométrique dans les deux matrices fondamentales en échantillonnant tous les points des deux images. La distance est mesurée de la manière suivante, voir figure 3.12 :

1. Choisir un point quelconque m dans la première image.
2. Dessiner la ligne épipolaire $\mathbf{F}_1 m$ dans la deuxième image.
3. Choisir un point quelconque m' dans image 2 sur la droite $\mathbf{F}_1 m$.

Méthode	Distance en pixels	
	Calibration	0
Linéaire	121,03	232,12
Normalisation	28,2	108,32
Non-linéaire 1	4,17	58,15
Non-linéaire 2	2,82	46,49
M-Estimators	2,21	16,04
LMedS	1,16	4,12

Table 3.3 – Distance géométrique entre six méthodes et la méthode analytique, nommée calibration, pour un bruit gaussien d'appariement de 3 pixels combinés avec 0% et 20% des points aberrants.

4. Dessiner la ligne épipolaire $\mathbf{F}_2 m$ dans la deuxième image. Calculer la distance absolue d'_1 entre m' et $\mathbf{F}_2 m$.
5. Dessiner la ligne $\mathbf{F}_2^\top m'$ dans la première image puis calculer la distance absolue d_1 entre m et $\mathbf{F}_2^\top m'$.
6. Refaire le même calcul de (2) à (5) en renversant le rôle de \mathbf{F}_1 et \mathbf{F}_2 .
7. Calculer d'_2 et d_2 pour le dernier changement.

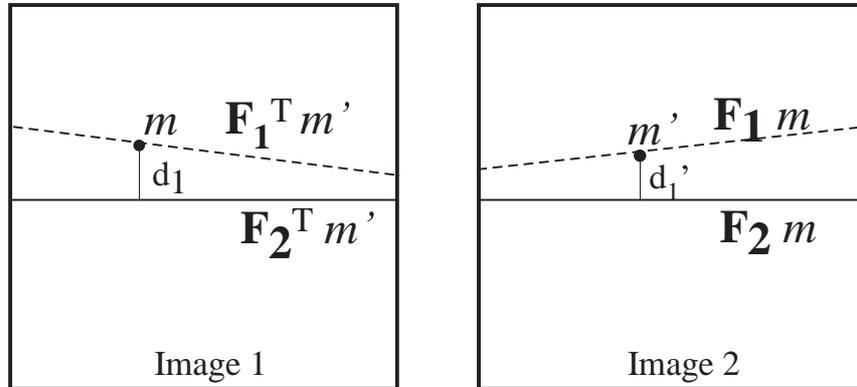


Figure 3.12 – Comparaison d'erreurs entre deux matrices fondamentales.

La méthode utilisée consiste à prendre 50000 points entre les deux images et calculer la distance moyenne entre les deux matrices fondamentales. Le temps de calcul est d'environ 60 secondes.

On voit que cette méthode est plus réaliste pour estimer les erreurs entre différentes matrices fondamentales car elle se base sur une distance géométrique.

3.9 Conclusion

Nous avons démontré qu'un étalonnage minutieux reste un facteur majeur pour la précision d'un polarimètre optique. Avec une tête de mesure stéréoscopique, la détermination des paramètres intrinsèques et extrinsèques du système stéréoscopique passe nécessairement par une étude fine de la géométrie épipolaire. La précision d'un tel polarimètre ne dépend pas seulement de l'élimination du bruit de mesure des images d'intensité mais aussi fortement de la méthode choisie pour estimer les paramètres de Mueller et du choix des angles de mesure des lames de retard. Pour un bruit de mesure gaussien, le choix des angles θ et θ' reste un facteur crucial pour minimiser l'impact ainsi que la propagation du bruit dans les canaux de l'image de Mueller. On a ainsi montré que les méthodes PI et FT produisent toujours des résultats nettement plus précis que la méthode MI mais le prix à payer est que ces deux méthodes ont besoin d'un temps de mesure et de calcul supérieur à celui de la méthode MI. Par ailleurs, la méthode de Pseudo-Inverse PI comporte une certaine limite pour la réduction du bruit qui ne peut pas être atteinte même si on utilise un grand nombre d'acquisitions. En revanche, la méthode de FT surpasse les méthodes MI et PI et peut ainsi produire des images de Mueller avec un bruit nettement réduit comparé aux techniques qui utilisent les inversions matricielles.

D'autre part, nous avons mené une étude comparative entre différentes méthodes de calcul de la matrice fondamentale. Les méthodes linéaires étant sensibles aux erreurs d'appariement, la matrice fondamentale est déterminée avec la plus grande précision par des méthodes non-linéaires ou des méthodes robustes qui possèdent l'avantage de réduire les erreurs de calcul causées par la présence des points aberrants lors de la phase d'appariement. Il faut noter aussi que la précision de la matrice fondamentale dépend du nombre de points de correspondance choisis.

Publications : J. E. Ahmad and Y. Takakura – “*Improving segmentation maps using polarization imaging*,” ICIP (2007).

J. E. Ahmad and Y. Takakura – “*Estimation of physically realizable Mueller matrices from experiments using global constrained optimization*,” Optics Express (2007).

Chapitre 4

Estimation et segmentation des images de Mueller

Résumé

Une étude analytique sur la propagation du bruit expérimental, sur sa répartition, ainsi que sur son amplification dans l'image de Mueller, sera détaillée et validée expérimentalement. En effet, un bruit amplifié dans l'image de Mueller complique l'interprétation physique et la segmentation des images polarimétriques. Plutôt que de traiter des quantités largement bruitées, les images de Mueller sont transformées en images d'intensité de sorte que des procédures robustes de segmentation sont appliquées. Pour les images simulées ou enregistrées, il s'avère que la méthode d'estimation des cartes de segmentation avec les images brutes d'intensité surpasse les approches basées sur la segmentation des images de Mueller.

4.1 Introduction

DANS le cadre du traitement des images polarimétriques, la segmentation d'une image 4×4 de Mueller consiste à isoler les objets qui ont différentes propriétés de polarisation. De tels objets sont : soit des polariseurs partiels, soit des rotateurs ou des déphaseurs. Ceci signifie qu'il y a 3 classes principales de polarisation à considérer. La difficulté dans la segmentation polarimétrique vient du fait que les relations entre chacune des classes mentionnées et les 16 éléments de la matrice de Mueller ne sont pas complètement identifiées. En présence d'un bruit expérimental, l'extraction de ces trois descriptifs physiques devient compliquée : d'une part, le bruit se propage et s'amplifie dans l'image de Mueller, compliquant ainsi la phase de la segmentation de la scène ; d'autre part, le critère de l'admissibilité physique ne tient plus. Cela est dû au fait que les techniques conventionnelles utilisées pour l'estimation de la matrice de Mueller à partir des mesures expérimentales sont souvent des algorithmes de reconstruction linéaire qui consistent à trouver la solution qui réduit au minimum l'erreur résiduelle suivant l'une des normes L^1 , L^2 , L^∞ ou la norme de Frobenius, sans prendre en compte la condition d'admissibilité physique.

En général, ces techniques linéaires conduisent à une solution optimale si chaque élément de la matrice de Mueller contient la même variance du bruit ce qui n'est pas le cas en général. De plus, ces méthodes conventionnelles ne garantissent pas la stabilité de la solution aux perturbations et aux erreurs systématiques. Par conséquent, en présence du bruit expérimental, la situation se dégrade et les matrices de Mueller reconstruites ne sont pas physiquement admissibles.

D'autre part, l'extraction des descriptifs précis de la scène nécessite une carte de segmentation fine. L'image de Mueller possédant 16 canaux est une image multi-modale. La réduction de dimensionnalité est une phase essentielle pour traiter ces images. Le problème d'une telle stratégie est que les informations polarimétriques sont réparties sur toutes les images de Mueller, ainsi le choix du canal n'est pas simple. En revanche, les techniques classiques de réduction de dimensionnalité telles que l'analyse en composante principale (ACP) et indépendantes (ACI) ne sont pas adaptées pour les images polarimétriques [65].

Récemment, dans le contexte d'imposer l'admissibilité physique d'une matrice de Mueller, un travail intéressant a été publié [66]. Les auteurs de cette publication ont inféré une matrice physique de Mueller par une méthode du maximum de vraisemblance couplée à la matrice hermitienne correspondante. Leur analyse repose sur le fait qu'une matrice de Mueller physiquement admissible a sa matrice hermitienne correspondante semi-définie positive. Dans ce chapitre, nous illustrerons par un exemple expérimental que cette condition d'admissibilité physique est suffisante mais qu'elle n'est pas nécessaire : une matrice physique de Mueller peut avoir une valeur propre négative dans sa matrice hermitienne correspondante, conformément à la référence [68].

Dans ce chapitre, nous visons à fournir des outils efficaces pour résoudre les problèmes ainsi mentionnés. Tout d'abord, nous allons étudier la propagation d'un bruit expérimental dans les composantes de la matrice-image de Mueller, pour proposer ensuite une méthode analytique qui décrit comment on peut extraire la matrice de Mueller sans passer par une inversion numérique. Deuxièmement, nous analyserons en détails la propagation du bruit dans l'image de Mueller, et avec une méthode robuste d'estimation des paramètres, nous estimerons la matrice de Mueller des images fortement bruitées et cela pour une précision inférieure à 1% d'erreur (norme de Frobenius). Finalement, une méthode d'estimation de la matrice de Mueller sous contrainte d'admissibilité physique sera détaillée pour obtenir une matrice-image de Mueller estimée avec la plus grande précision et physiquement admissible. Pour inclure les contraintes actives appropriées, le critère de Givens et Kostinski (GK) sera adopté comme contraintes actives dans l'optimisation. Des techniques globales d'optimisation avec contraintes seront utilisées pour assurer la convergence appropriée.

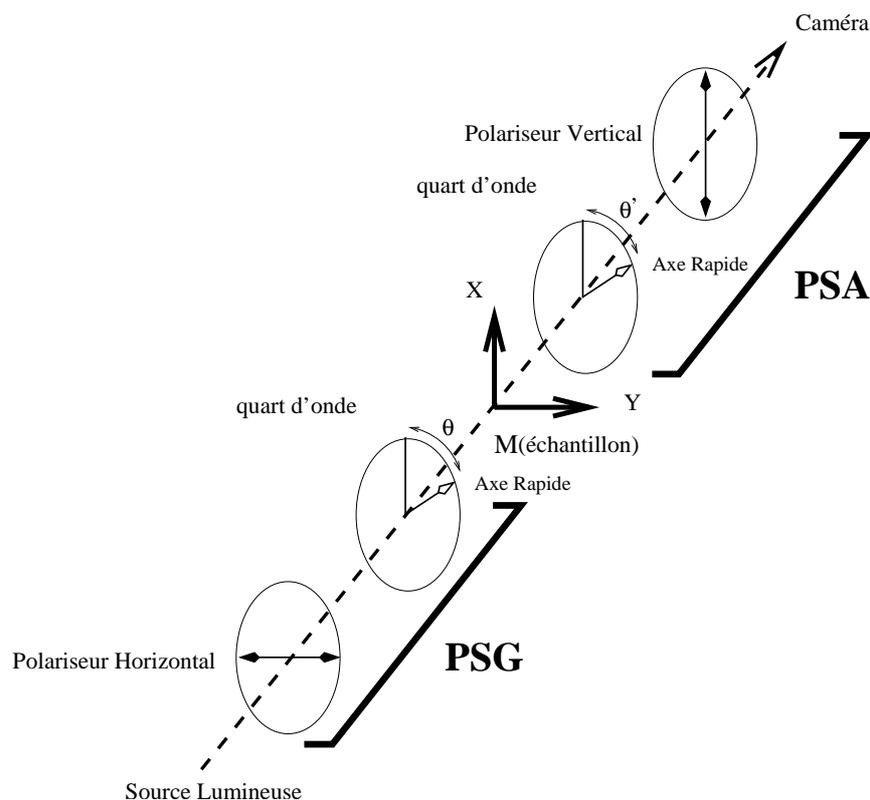


Figure 4.1 – Polarimètre à lames tournantes.

4.2 Expression de la matrice de Mueller

4.2.1 Méthode MI

Les polarimètres actifs sont habituellement construits de façon à faciliter les alignements géométriques et polarimétriques. Par alignement géométrique, il s'agit de placer correctement les composants optiques par rapport à un axe fictif qui correspond à la direction de propagation des fronts d'ondes. L'alignement polarimétrique est généralement plus difficile de réaliser. Cela consiste à vérifier que les axes des éléments de polarisation sont contenus dans un plan orthogonal à la direction mentionnée précédemment, et de positionner ces axes les uns par rapport aux autres. Afin d'éviter des erreurs systématiques non contrôlées, ces étapes devraient être considérées comme obligatoires avant tout calibrage polarimétrique. Par exemple, l'axe du polariseur du PSG peut être choisi horizontal par rapport aux coordonnées du laboratoire, alors que l'axe du polariseur du PSA est maintenu vertical. Dans ce cas, quand tous les axes des éléments de polarisation sont correctement alignés et quand aucun échantillon n'est présent entre le PSG et le PSA, les niveaux de gris dans l'image mesurée correspondent à ceux du bruit.

L'axe X (figure 4.1) est choisi comme origine de l'angle θ ou θ' qui sont les angles entre les axes rapides des lames quart-onde avec la verticale. Ainsi, avec des composants idéaux parfaitement alignés, le PSG délivre des fronts d'ondes caractérisés par les paramètres de Stokes :

$$\mathbf{S}_i(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\cos^2(2\theta) \\ -\frac{1}{2}\sin(4\theta) \\ -\sin(2\theta) \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

De même, le front d'onde diffusé par l'échantillon peut être analysé par le PSA dont le vecteur de Stokes est donné par :

$$\mathbf{S}_o^\top(\theta') = [1 \quad \cos^2(2\theta') \quad \frac{1}{2}\sin(4\theta') \quad -\sin(2\theta')] \quad (4.2)$$

Lorsque les axes du polariseur sont croisés, les paramètres de Stokes du PSG diffèrent des paramètres de Stokes du PSA par le signe de deux éléments. Il convient de noter que si le PSG produit des fronts d'onde possédant l'état de polarisation $\mathbf{S}_i(\theta)$, si le PSA analyse les mêmes fronts d'onde sous l'état de polarisation $\mathbf{S}_o(\theta + \pi/2)$ et quand aucun échantillon n'est présent, l'intensité mesurée est égale à $\mathbf{S}_o^\top(\theta + \pi/2)\mathbf{S}_i(\theta)$ ce qui correspond à zéro. Le résultat est vrai quel que soit l'angle θ .

Plusieurs approches peuvent être utilisées pour estimer la matrice de Mueller. Si on considère la méthode MI qui consiste à ne prendre que 4 angles d'orientation des lames de retard, l'intensité mesurée est proportionnelle à :

$$\mathbf{I} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{S}_o^\top(\theta'_1) \\ \mathbf{S}_o^\top(\theta'_2) \\ \mathbf{S}_o^\top(\theta'_3) \\ \mathbf{S}_o^\top(\theta'_4) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \mathbf{M} \underbrace{[\mathbf{S}_i(\theta_1) \quad \mathbf{S}_i(\theta_2) \quad \mathbf{S}_i(\theta_3) \quad \mathbf{S}_i(\theta_4)]}_{\mathbf{G}} \quad (4.3)$$

En raison de la similitude entre le PSG et le PSA, les angles obtenus à partir des problèmes numériques de maximisation du déterminant sont identiques pour θ' et θ . Ils sont approximativement -52, -15, +15, +52 degrés et sont les paramètres de base de la méthode d'inversion identifiée comme méthode d'inversion par maximisation (MI). Il convient de noter que l'ensemble des 4 angles qui maximisent le déterminant de \mathbf{G} sont antisymétriques par rapport à 0, $\theta_1 = -\theta_4$ et $\theta_2 = -\theta_3$. La conséquence immédiate est que les termes $-\sin(4\theta_k)/2$ et $-\sin(2\theta_k)$ obéissent à la même antisymétrie tandis que les autres termes $-\cos^2(2\theta_k)$ sont symétriques. Une telle observation nous encourage à rechercher la matrice \mathbf{G}^{-1} qui est l'inverse de \mathbf{G} d'une manière analytique, en évitant ainsi de passer par la phase

d'inversion numérique de matrice. La matrice \mathbf{G}^{-1} doit satisfaire la même symétrie que la matrice \mathbf{G} , elle est formulée de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -\cos^2(2\theta_1) & -\cos^2(2\theta_2) & -\cos^2(2\theta_2) & -\cos^2(2\theta_1) \\ -\frac{1}{2}\sin(4\theta_1) & -\frac{1}{2}\sin(4\theta_2) & +\frac{1}{2}\sin(4\theta_2) & +\frac{1}{2}\sin(4\theta_1) \\ -\sin(2\theta_1) & -\sin(2\theta_2) & +\sin(2\theta_2) & +\sin(2\theta_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 & y_2 \\ u_2 & v_2 & -x_2 & -y_2 \\ u_1 & v_1 & -x_1 & -y_1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{Id}} \quad (4.4)$$

Une autre conséquence de la symétrie est que les 4 familles de 2 inconnues (u_1, u_2) , (v_1, v_2) , (x_1, x_2) et (y_1, y_2) sont obtenues en prenant en compte seulement deux lignes de la matrice \mathbf{G} dans chaque calcul. Par exemple, (x_1, x_2) peut être calculé avec la ligne 3, $([-\frac{1}{2}\sin(4\theta_1) - \frac{1}{2}\sin(4\theta_2) + \frac{1}{2}\sin(4\theta_2) + \frac{1}{2}\sin(4\theta_1)])$ et la ligne 4, $([-\sin(2\theta_1) - \sin(2\theta_2) + \sin(2\theta_2) + \sin(2\theta_1)])$. Ces deux lignes sont les mêmes utilisées pour le calcul de (y_1, y_2) .

Avec ces considérations de symétrie, un procédé particulier d'inversion de matrice de 4×4 a été converti en quatre procédures d'inversion de matrices 2×2 . Ces inversions peuvent être faites sans ordinateur. En outre, les mêmes lignes de la matrice \mathbf{G} sont utilisées pour rechercher 2 familles de 2 inconnues, de sorte que seulement 2 déterminants soient nécessaires. Le résultat final est exprimé dans l'équation :

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} +\cos^2(2\theta_2)/(2\sin(2(\theta_1 - \theta_2))\sin(2(\theta_1 + \theta_2))) & +1/(2\sin(2(\theta_1 - \theta_2))\sin(2(\theta_1 + \theta_2))) \\ -\cos^2(2\theta_1)/(2\sin(2(\theta_1 - \theta_2))\sin(2(\theta_1 + \theta_2))) & -1/(2\sin(2(\theta_1 - \theta_2))\sin(2(\theta_1 + \theta_2))) \\ -\cos^2(2\theta_1)/(2\sin(2(\theta_1 - \theta_2))\sin(2(\theta_1 + \theta_2))) & -1/(2\sin(2(\theta_1 - \theta_2))\sin(2(\theta_1 + \theta_2))) \\ +\cos^2(2\theta_2)/(2\sin(2(\theta_1 - \theta_2))\sin(2(\theta_1 + \theta_2))) & +1/(2\sin(2(\theta_1 - \theta_2))\sin(2(\theta_1 + \theta_2))) \\ +1/(4\sin(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_1 + \theta_2)\sin(2\theta_1)) & -\cos(2\theta_2)/(4\sin(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_1 + \theta_2)\sin(2\theta_1)) \\ -1/(4\sin(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_1 + \theta_2)\sin(2\theta_2)) & +\cos(2\theta_1)/(4\sin(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_1 + \theta_2)\sin(2\theta_2)) \\ +1/(4\sin(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_1 + \theta_2)\sin(2\theta_2)) & -\cos(2\theta_1)/(4\sin(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_1 + \theta_2)\sin(2\theta_2)) \\ -1/(4\sin(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_1 + \theta_2)\sin(2\theta_1)) & +\cos(2\theta_2)/(4\sin(\theta_1 - \theta_2)\sin(\theta_1 + \theta_2)\sin(2\theta_1)) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

La similarité entre $\mathbf{S}_i(\theta_k)$ et $\mathbf{S}_o(\theta'_l)$ nous encourage aussi à utiliser les résultats de l'équation ci-dessus pour calculer d'une manière analytique la matrice inverse de \mathbf{A} . On peut noter que \mathbf{A} est la transposée de la matrice \mathbf{G} avec les signes négatifs des deux

colonnes du milieu remplacées par des signes positifs. Par conséquent, l'inverse \mathbf{A}^{-1} est égal à la transposée de \mathbf{G}^{-1} avec le signe de ses deux lignes du milieu inversées :

$$\mathbf{A}^{-1} = \underbrace{\begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{R}} \cdot [\mathbf{G}^{-1}]^{\top} \quad (4.6)$$

Finalement, la matrice de Mueller peut être extraite d'une manière analytique si on connaît les valeurs des mesures expérimentales \mathbf{I} :

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \cdot [\mathbf{G}^{-1}]^{\top} \mathbf{I} \mathbf{G}^{-1} \quad (4.7)$$

Les symétries mentionnées ci-dessus sont inhérentes au polarimètre à lames tournantes considéré, puisque le PSG et le PSA partagent la même architecture. En conséquence, seulement l'inverse de la matrice \mathbf{G} est exigé.

4.2.2 Méthode FT

Pour la méthode MI, il apparaît que 16 mesures représentent le nombre d'acquisitions minimal pour l'extraction de la matrice de Mueller. Quand plus de données sont disponibles, la méthode de maximisation du déterminant MI doit être remplacée par une méthode qui permet d'inverser une matrice qui n'est pas carrée. La matrice pseudo-inverse résultante est généralement désignée sous le nom de la matrice inverse de Moore-Penrose et elle est unique. Cependant, d'un point de vue pratique, la recherche des angles θ_k qui maximisent le conditionnement d'une matrice \mathbf{G} qui n'est pas carrée est un problème non-linéaire. On sait que pour de tels problèmes la convergence peut à peine être obtenue lorsque la taille de la matrice augmente. Une approche élégante consiste à noter que chaque paramètre de Stokes est une fonction harmonique pure. Par exemple le vecteur $\mathbf{S}_i(\theta)$ est construit avec les termes 1 , $-\cos^2(2\theta)$, $-\frac{1}{2}\sin(4\theta)$ et $-\sin(2\theta)$. Quand les positions angulaires sont uniformément échantillonnées, c'est-à-dire quand les valeurs θ_k sont des multiples d'un pas d'échantillonnage $\delta = \pi/N$, des propriétés remarquables peuvent être exploitées pour effectuer l'inversion de la matrice \mathbf{G} de dimension $4 \times N$. Par exemple, les vecteurs lignes $[-\frac{1}{2}\sin(4\theta_k)_{k=0\dots N-1}]$ et $[-\sin(2\theta_k)_{k=0\dots N-1}]$ sont orthogonaux entre eux et aux vecteurs lignes $[1 \dots 1]$ et $[-\cos^2(2\theta_k)_{k=0\dots N-1}]$. Ce sont les conséquences des relations

d'orthogonalité données par :

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin(4\theta_k) \sin(2\theta_k) = 0 \quad (4.8)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin(4\theta_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \sin(4\theta_k) \cos^2(2\theta_k) = 0 \quad (4.9)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin(2\theta_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \sin(2\theta_k) \cos^2(2\theta_k) = 0 \quad (4.10)$$

Des équations similaires peuvent être utilisées pour des procédures de normalisation :

$$\sum_{k=0}^{N-1} 1 = N \quad (4.11)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos^2(2\theta_k) \cos(4\theta_k) = N/4 \quad (4.12)$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin(4\theta_k) \sin(4\theta_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \sin(2\theta_k) \sin(2\theta_k) = N/2 \quad (4.13)$$

Ces égalités permettent d'utiliser la même famille de fonctions harmoniques pour l'inversion, à savoir 1 , $-\cos(4\theta)$, $-\sin(4\theta)$ et $-\sin(2\theta)$. Cependant en multipliant la matrice \mathbf{G} par une matrice $N \times 4$ notée \mathbf{W}_i , on n'obtient pas une matrice diagonale mais une matrice presque diagonale :

$$\mathbf{G} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\cos(4\theta_0) & -\sin(4\theta_0) & -\sin(2\theta_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & -\cos(4\theta_{N-1}) & -\sin(4\theta_{N-1}) & -\sin(2\theta_{N-1}) \end{bmatrix}}_{\mathbf{w}_i} = \frac{N}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Cette matrice peut se décomposer en 4 blocs de matrices 2×2 , dont 2 sont nulles. Un tel descriptif facilite la phase d'inversion analytique. On peut alors démontrer que l'inverse de la matrice 4×4 de l'équation précédente est donnée par :

$$\mathbf{P}_i = \frac{2}{N} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

L'inverse de la matrice \mathbf{G} est alors :

$$\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{W}_i \mathbf{P}_i \quad (4.16)$$

$$(4.17)$$

Nous avons obtenu l'inverse de la matrice du PSG de manière analytique. De même, on peut déterminer la matrice inverse du PSA. On obtient :

$$\mathbf{W}_i^\top \cdot \mathbf{A} = = \frac{N}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

La relation entre les composantes de la matrice du générateur et de l'analyseur des états de polarisation est donnée par :

$$\mathbf{P}_o = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_i^\top \quad (4.19)$$

L'inverse de la matrice \mathbf{A} est extrait suivant :

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{P}_i^\top \mathbf{W}_i^\top = \mathbf{P}_o \mathbf{W}_i^\top \quad (4.20)$$

Finalement, on obtient la matrice de Mueller d'une manière analytique :

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \cdot [\mathbf{W}_i \mathbf{P}_i]^\top \mathbf{I} \mathbf{W}_i \mathbf{P}_i \quad (4.21)$$

Avec ces expressions analytiques, nous pouvons étudier la propagation du bruit dans les composantes de la matrice de Mueller. Un sujet qui sera traité par la suite avec des validations expérimentales.

4.3 Bruit dans les images polarimétriques

4.3.1 Propagation du bruit dans l'image de Mueller

Mathématiquement, pour un bruit gaussien stationnaire et non-corrélé, les procédures d'inversion précédentes sont considérées comme une estimation au sens du maximum de vraisemblance ou "Maximum Likelihood" (ML) de la matrice de Mueller à partir des données expérimentales d'intensité. Les estimateurs ML ont tendance d'amplifier l'impact du bruit dans les matrices de Mueller reconstruites. Cette situation peut être critique particulièrement dans le cas où il faut analyser les propriétés physiques des composantes optiques qui sont habituellement représentées par des matrices admissibles de Mueller

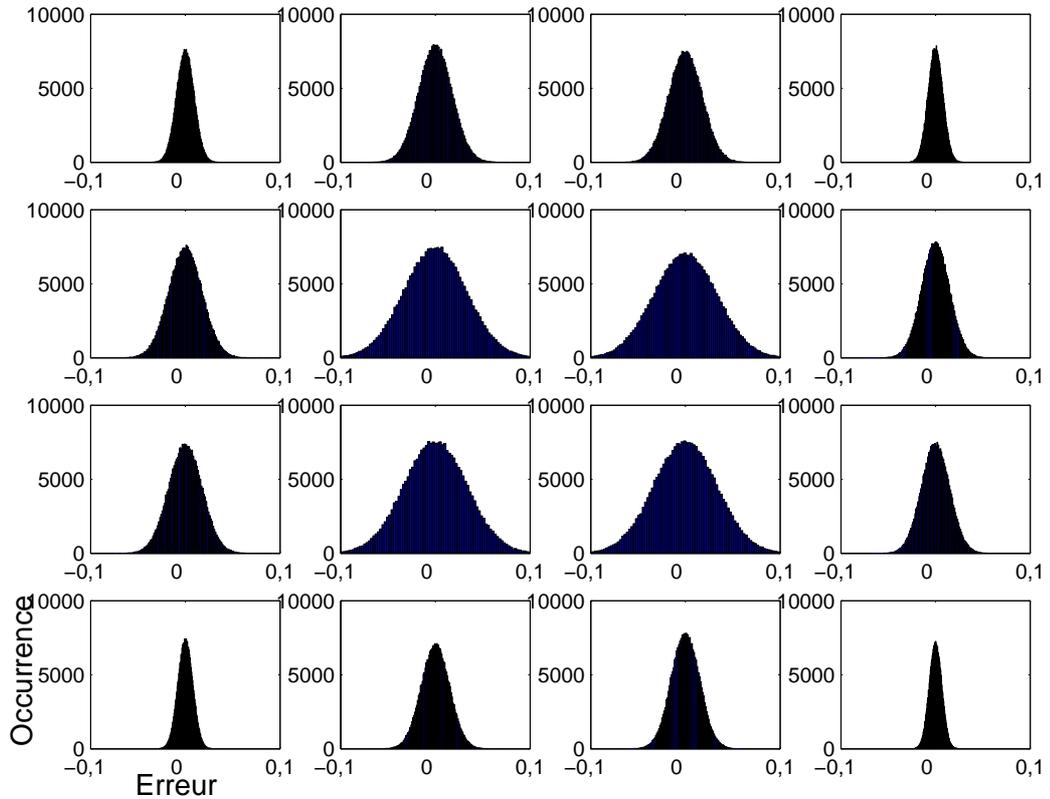


Figure 4.2 – Propagation du bruit dans les 16 éléments de l’image de Mueller estimée avec 16 acquisitions d’intensité. Le bruit sur le bloc 2×2 du centre est le plus élevé. Parmi les 16 canaux, le canal m_{33} est le moins affecté par le bruit.

pour des polarimètres idéaux. Les perturbations par des mesures expérimentales peuvent produire des résultats imprécis [69].

L’erreur sur la matrice de Mueller avec 16 acquisitions est élevée, figure 4.2. Pour la méthode MI, si le bruit est gaussien centré de variance σ^2 on obtient la matrice de variance, des 16 éléments de la matrices de Mueller, avec deux chiffres significatifs :

$$\text{var}\{\mathbf{M}\} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 11,16 & 39,87 & 40,51 & 7,93 \\ 39,87 & 142,61 & 142,36 & 28,39 \\ 40,51 & 144,63 & 143,24 & 28,43 \\ 7,93 & 28,39 & 28,43 & 5,58 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

La variance du bruit sur le bloc central 2×2 est bien la plus élevée et la plus petite variance concerne l’élément m_{33} .

On peut réduire la variance du bruit en augmentant les mesures. Cela n’empêche pas que les valeurs restent supérieures au bruit qui affecte les mesures d’intensité brutes. Pour

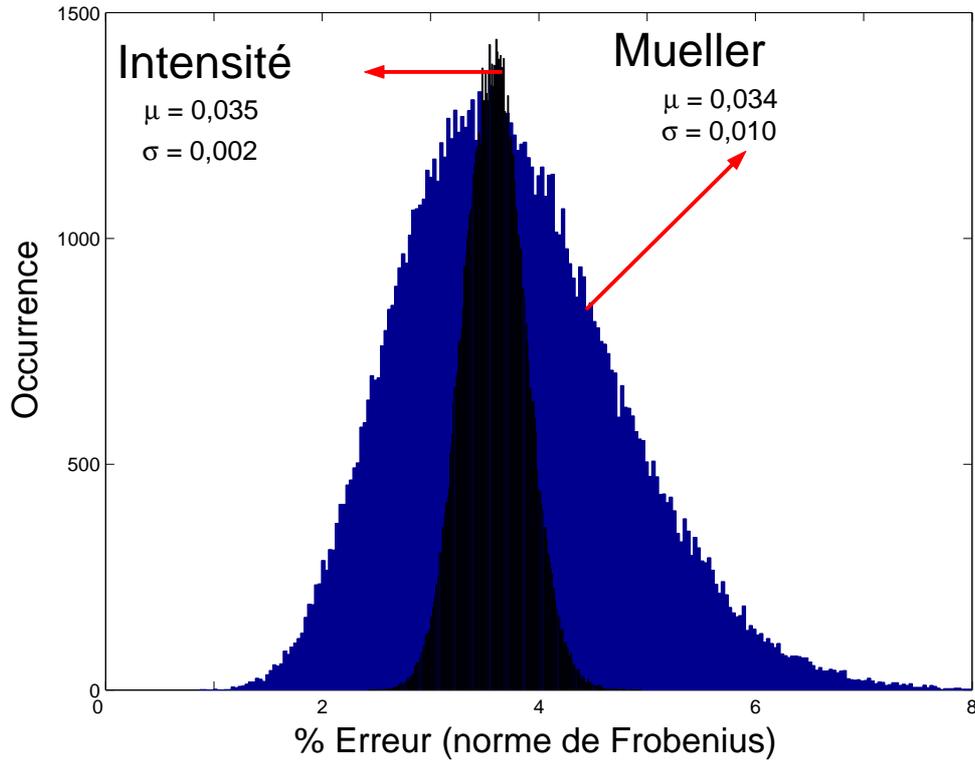


Figure 4.3 – Histogramme d’erreur (norme de Frobenius) pour l’image de Mueller et du bruit expérimental simulé. Pour 9×9 acquisitions, la moyenne du bruit sur la matrice de Mueller est plus petite que la moyenne du bruit expérimental.

81 acquisitions, la variance de l’erreur avec la méthode PI d’estimation de la matrice de Mueller est :

$$\text{var}\{\mathbf{M}\} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 4,25 & 9,58 & 11,82 & 2,94 \\ 9,58 & 21,60 & 26,23 & 6,62 \\ 11,82 & 26,49 & 31,33 & 8,04 \\ 2,94 & 6,62 & 8,04 & 2,02 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

On est bien évidemment en présence de valeurs du bruit bien élevées, voir figure 4.3.

4.3.2 Amplification du bruit dans la décomposition polaire

La décomposition polaire est une méthode physique de réduction de dimensionnalité des images de Mueller. Cette décomposition n’est pas unique, cela complique la phase d’interprétation physique. De plus, le bruit qui sera présent dans les trois images issues de cette décomposition est beaucoup plus élevé que le bruit expérimental [70]. Cela complique l’estimation et la séparation des différentes zones polarimétriques.

Le choix parmi les 6 décompositions différentes s’est porté sur la décomposition $\mathbf{M} =$

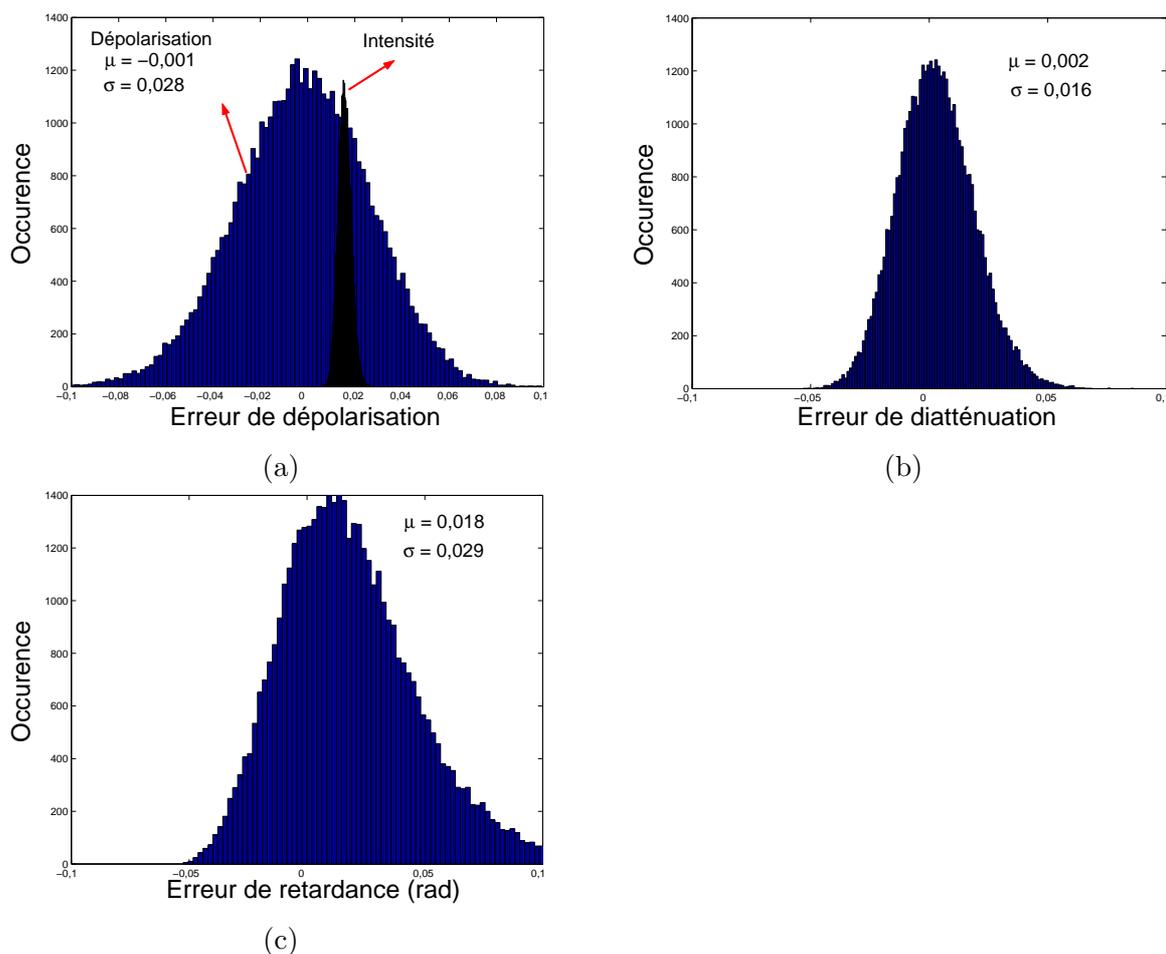


Figure 4.4 – Amplification du bruit expérimental : cas de la décomposition polaire.

$\mathbf{M}_\Delta \mathbf{M}_R \mathbf{M}_D$ car cette décomposition donne toujours une représentation de trois matrices physiquement admissibles si la matrice de Mueller est admissible. Nous montrons dans la figure 4.4 la nature du bruit présent dans les 3 images issues de la décomposition polaire.

Ainsi nous pouvons constater que les images polarimétriques de Mueller ou leurs variantes comme la décomposition polaire n'est pas un support robuste d'information surtout lorsqu'on a des images fortement bruitées. Une méthode adaptée aux images polarimétriques pour l'estimation et la segmentation des images de Mueller sera détaillée dans ce qui suit.

4.4 Segmentation de l'image de Mueller

4.4.1 Formulation du problème

Les algorithmes de segmentation jouent un rôle important en permettant de simplifier l'interprétation des scènes observées. La robustesse de toute technique de segmentation dépend de l'information incluse dans l'image acquise par le système de formation d'image. Classiquement, les systèmes conventionnels de formation d'images exploitent le principe suivant : une scène est illuminée par une source, un objectif optique rassemble la radiance de la scène et la projette sur une caméra CCD. Un algorithme de segmentation permet ensuite de regrouper différentes régions en se basant sur des critères de réflectivité d'intensité. Dans certains cas, la présence d'objets fortement réfléchissants peut causer un aveuglement de la caméra. Ainsi en présence d'objets transparents, les méthodes de segmentation conventionnelles peuvent être impuissantes.

En revanche, en modifiant la polarisation de la lumière nous pouvons surmonter de tels problèmes. Ainsi une carte plus précise de segmentation a pu être extraite en utilisant les mêmes algorithmes de segmentation, en remplaçant simplement des images conventionnelles d'intensité par des images de polarisation. Dans cette section, on illustre des résultats concrets qui mettent en évidence l'apport de la polarisation qui permet d'améliorer la carte de segmentation extraite d'une scène.

Plusieurs configurations expérimentales pour des polarimètres imageurs de Mueller. Nous pouvons les séparer en deux classes : les polarimètres à lumière cohérente ou incohérente. La distribution du bruit diffère pour chaque catégorie ; les polarimètres avec source cohérente sont principalement combinés avec des cristaux liquides. De tels systèmes introduisent du bruit du type speckle ; ce bruit est multiplicatif [71]. Les polarimètres à source lumineuse incohérente sont habituellement combinés avec les polariseurs linéaires en cascade avec des lames à retard tournantes. Le bruit affectant ces types de système est principalement additif.

Dans la pratique, le système optique de polarisation formant le polarimètre n'est jamais idéal. Par conséquent la mesure sera dégradée. Cette dégradation est due au bruit soit additif, soit multiplicatif selon la nature de la source d'illumination. Malheureusement à cause de l'inversion de matrice pour estimer l'image de Mueller, le niveau du bruit dans les 16 canaux de l'image de Mueller est amplifié. Ceci dépend du nombre d'acquisitions, du choix des angles des deux lames et du canal considéré parmi les 16 canaux. De plus, le modèle du bruit dans l'image de Mueller ne reflète pas le vrai modèle du bruit qui peut affecter le polarimètre. Néanmoins, le bruit dans le premier canal m_{00} de l'image de Mueller à la même forme que le bruit expérimental mais avec une amplification considérable. D'autre part, dans les éléments de Mueller a une distribution gaussienne indépendamment

du modèle du bruit additif qui affecte les mesures d'intensité. En outre, le bruit de l'image m_{33} correspond au bruit le plus faible par rapport aux 15 autres composantes de l'image de Mueller mais le bruit à l'intérieur de ce canal reste plus élevé que le bruit qui affecte les images brutes.

4.4.2 Choix des images pour la segmentation

Plusieurs publications ont couvert le problème de la segmentation effectuée sur l'image de Mueller sans considérer l'aspect physique lié à la nature du bruit de l'image de Mueller [72, 65]. En d'autres termes, la segmentation a été effectuée sur des images contenant des niveaux élevés de bruit plutôt que de segmenter directement des images d'intensité avec des valeurs plus basses du bruit. Pour segmenter correctement et estimer les différentes classes qui sont présentes dans une scène donnée, la carte de segmentation est extraite à partir des données d'intensité parce que l'impact du bruit est inférieur au bruit de l'image de Mueller. L'image d'intensité candidate qui sera choisie pour la segmentation doit avoir un contraste maximal parmi toutes les images d'intensité. Une fois la carte de segmentation obtenue, nous l'appliquerons aux 16 canaux de l'image de Mueller. À cet effet, nous illustrerons par un exemple de simulation que cette stratégie permet d'atteindre un niveau de satisfaction par rapport aux méthodes basées sur la segmentation directe des canaux de l'image de Mueller.

À ce stade, une image d'intensité doit être choisie pour l'évaluation du modèle du bruit et pour effectuer la segmentation. Cette image d'intensité sera choisie par le critère de contraste. C'est l'image d'intensité ayant un contraste maximal Γ défini par :

$$\Gamma = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}. \quad (4.24)$$

Un tel critère doit refléter la séparabilité inter-classe.

Sous l'hypothèse d'un bruit inconnu et un fond d'image composé de zones homogènes, l'évaluation du modèle du bruit peut être effectuée en trois étapes : premièrement, appliquer un filtre laplacien pour le masquage des données de l'image,

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Cela permet d'isoler le bruit de fond. Pour isoler le bruit totalement, il reste à supprimer les transitions (contours) qui séparent différentes régions [73]. Avec l'image résultante, il faut estimer une valeur initiale de la valeur moyenne du bruit $\bar{\sigma}_n$. Deuxièmement, il faut supprimer les contours avec un détecteur de bord de Canny [74]. Le filtre de Canny utilise un seuil avec hystérésis. La valeur de seuil la plus élevée du filtre de Canny est

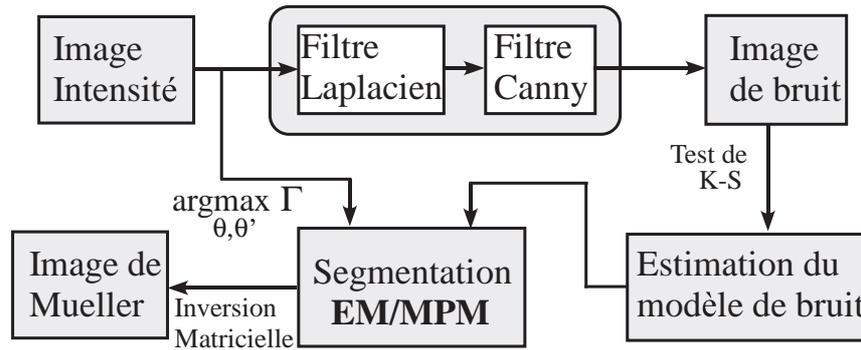


Figure 4.5 – Estimation du modèle de bruit suivie d’une segmentation de Maximum Posterior Mode. Le test de Kolmogorov-Smirnov est utilisé pour mesurer la fiabilité du modèle estimé.

supposée être $T_2 = 0,5\bar{\sigma}_n^2 + 2\bar{\sigma}_n + 0,1$. Le seuil inférieur T_1 est 0,4 fois la valeur de seuil la plus élevée [75]. Une fois le bruit isolé, un test de Kolmogorov-Smirnov est effectué avec différentes distributions de densités de probabilité ou “pdf”, à savoir : la distribution gaussienne, gamma et Beta I ou II [76, 77, 78]. À cet effet, le modèle du bruit de propagation affectant le polarimètre est ainsi estimé en analysant la distribution la plus adéquate.

4.4.3 Estimation des paramètres

Le modèle de bruit estimé sera utilisé dans un algorithme de segmentation adapté, figure 4.5. Ici, un “Expectation Maximization/Maximum Posterior Mode” (EM/MPM) est utilisé pour segmenter correctement l’image bruitée [79]. L’algorithme du MPM est régularisé par un modèle de chaînes de Markov cachées (HMC) qui prend en compte l’information de voisinage. Les paramètres sont estimés avec un algorithme EM [80]. La segmentation d’images par un modèle HMC doit manipuler un vecteur plutôt qu’une matrice-image 2D. Il faut donc transformer la matrice-image 2D en vecteur. Ceci peut être fait grâce à la courbe fractale de Hilbert-Peano [81]. L’avantage principal du modèle HMC pour la segmentation d’images réside en son coût de calcul inférieur aux champs de Markov. Contrairement aux champs de Markov, l’information de voisinage est partiellement conservée dans la chaîne : deux voisins dans la chaîne sont des voisins dans l’image mais l’inverse n’est pas vrai. Néanmoins, le parcours de Hilbert-Peano conserve aussi bien que possible l’information de voisinage [82].

Considérons maintenant deux séquences, une variable aléatoire $X = (X_n)_{n \in S}$ le processus caché et $Y = (Y_n)_{n \in S}$ l’observation, avec S les pixels correspondants dans une image. Chaque X_n prend une valeur dans un ensemble fini de K classes $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_K\}$. Chaque Y_n prend sa valeur dans l’ensemble des nombres réels \mathcal{R}^d , où d est le nombre de canaux utilisés. Quand d est supérieur à 1, la prise de décision sera prise

par rapport à d observations : la segmentation est dite multi-modale.

Par ailleurs, X est une chaîne de Markov d'ordre 1 si l'influence d'un pixel conditionnellement à son passé est réduite à l'influence de son prédécesseur. X peut être déterminé par deux paramètres : la distribution initiale $\pi_i = P(X_1 = \omega_i)$, et la matrice de transition entre chaque classe $a_{ij}^n = P(X_{n+1} = \omega_j | X_n = \omega_i)$. La chaîne sera supposée homogène, ce qui signifie que la matrice a_{ij}^n de transition entre différentes classes est indépendante de la position n dans la chaîne. Le problème de segmentation consiste ainsi à estimer les étiquettes cachées à partir de réalisations (observations).

Méthode de segmentation

Les paramètres *a priori* sont regroupés dans $\Phi_x = \{\pi_k, a_{kl}\}$, et les paramètres *data driven* sont rassemblés dans $\Phi_y = \{\mu_k, \sigma_k\}$. Le but consiste alors à trouver les étiquettes cachées X étant donné les observations Y . X peut être récupéré à partir du processus observé en utilisant un mode postérieur marginal (MPM) avec l'algorithme de forward-backward décrit par Baum et Welch [84]. Le but de l'algorithme de MPM est de réduire au minimum la valeur prévue du nombre de pixels mal classés. Nous avons basé notre travail sur l'algorithme de Baum et Welch modifié qui propose d'employer des probabilités conditionnelles au lieu des probabilités jointes [85].

Les probabilités *forward* et *backward* peuvent être calculées d'une manière récursive. Les probabilités *forward* $\alpha_n(k)$ sont obtenues à partir d'un calcul récursif qui parcourt la chaîne de $n = 1$ à N . Les probabilités *backward* $\beta_n(k)$ sont obtenues par balayage inverse de la chaîne. Ainsi le marginal *a posteriori* peut être directement calculé :

$$P(X_n = \omega_k | Y = y) = \alpha_n(k)\beta_n(k), \quad \forall n \in [1, \dots, N] \quad (4.25)$$

La segmentation de la chaîne par le critère MPM exige la maximisation de ces marginaux :

$$\hat{x}_n = \arg_{\omega_k} \max \alpha_n(k)\beta_n(k) \quad (4.26)$$

4.4.4 Évaluations numériques

Nous avons validé cette approche sur un fantôme simulé de Shepp-Logan pour une raison simple : les informations précises sur des données de vérité de terrain peuvent être facilement obtenues, figure 4.6. Ainsi une analyse d'erreur de l'algorithme de segmentation peut être correctement effectuée. Ce fantôme se compose de quatre classes différentes ; chacune a une propriété polarimétrique différente. Physiquement il peut être fabriqué avec des couches transparentes, ayant un dichroïsme différent. Cela veut dire qu'un algorithme de segmentation d'imagerie conventionnelle ne permet pas d'extraire chaque zone ainsi caractérisée. Le bruit ajouté est gaussien avec un rapport signal/bruit de $SNR \approx 10$ dB et la matrice de Mueller associée à chaque pixel s'écrit :

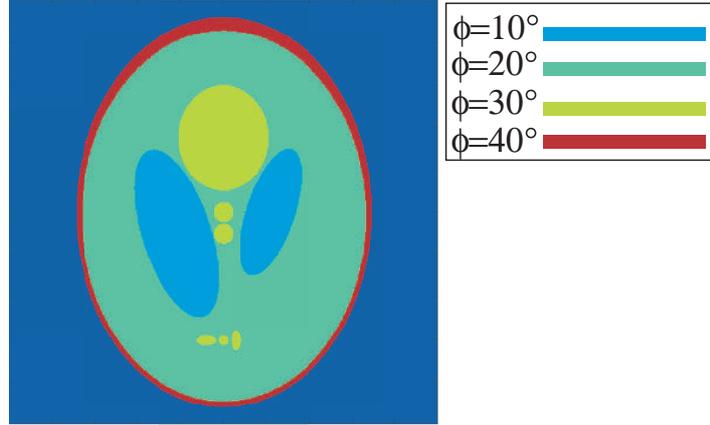


Figure 4.6 – Fantôme de Shepp-Logan. Chaque couleur correspond à un polariseur linéaire.

$$\mathbf{M}_\phi = \begin{bmatrix} 1 & \cos 2\phi & \sin 2\phi & 0 \\ \cos 2\phi & \cos^2 2\phi & \cos 2\phi \sin 2\phi & 0 \\ \sin 2\phi & \cos 2\phi \sin 2\phi & \sin^2 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.27)$$

Comme illustré dans la figure 4.8, l'algorithme EM/MPM ne pouvait pas segmenter correctement le canal bruité m_{03} de Mueller même si l'image de ce canal possède la meilleure séparabilité inter-classe comparée à tous les autres canaux. En revanche, le même algorithme a correctement segmenté l'image d'intensité ayant le contraste le plus élevé.

Avec l'inversion matricielle qui permet d'obtenir l'image de Mueller, une amplification du bruit a eu lieu. Cette amplification a réduit la séparabilité des classes. Ainsi, dans l'étape EM qui est principalement initialisée avec un algorithme des $K - means$, il n'a pas été possible d'estimer la moyenne et la variance de chaque classe pour le canal m_{03} . En revanche, quand le même algorithme a été exécuté avec l'image d'intensité, les quatre classes différentes sont suffisamment séparées pour que l'algorithme des $K - means$, avec l'algorithme EM, puisse estimer correctement la moyenne et la variance de chaque classe. L'étape MPM est exécutée plus soigneusement et la prise en compte du voisinage dans le HMC favorise l'homogénéité dans chaque classe.

La carte de segmentation ainsi obtenue est appliquée aux 16 canaux de l'image de Mueller. La matrice de Mueller associée à chaque classe peut être ainsi estimée. À cet effet, l'erreur de Frobenius entre chaque classe estimée avec sa matrice théorique prévue sera également calculée. Sur la figure 4.9(a) nous avons tracé l'histogramme du pourcentage d'erreur (norme de Frobenius) entre l'image simulée de Mueller et l'image bruitée. Le

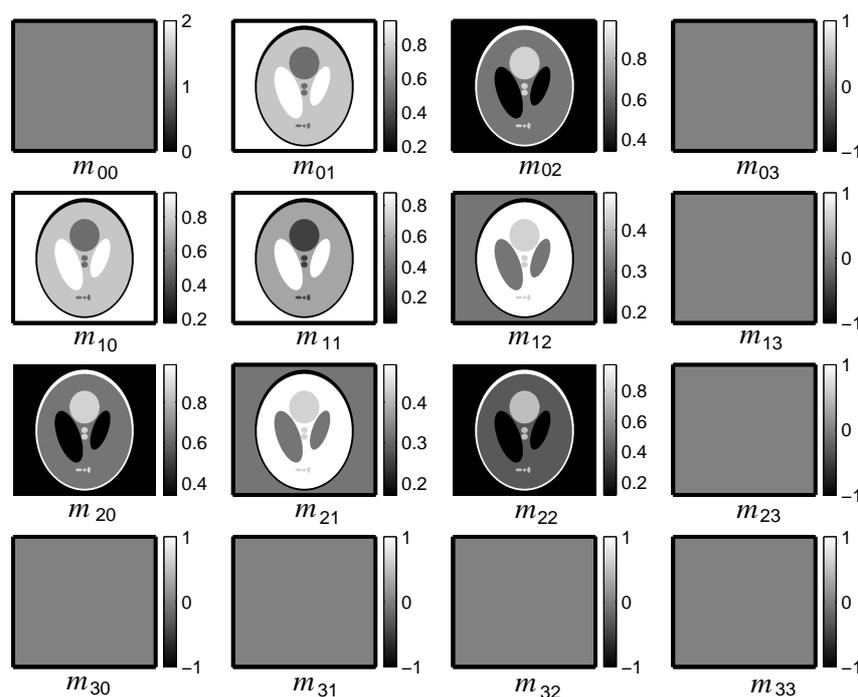


Figure 4.7 – Images polarimétriques (Mueller) du Shepp-Logan composé de quatre substrats dichroïques transparents. m_{00} correspond à l'image observée avec un système imageur conventionnel.

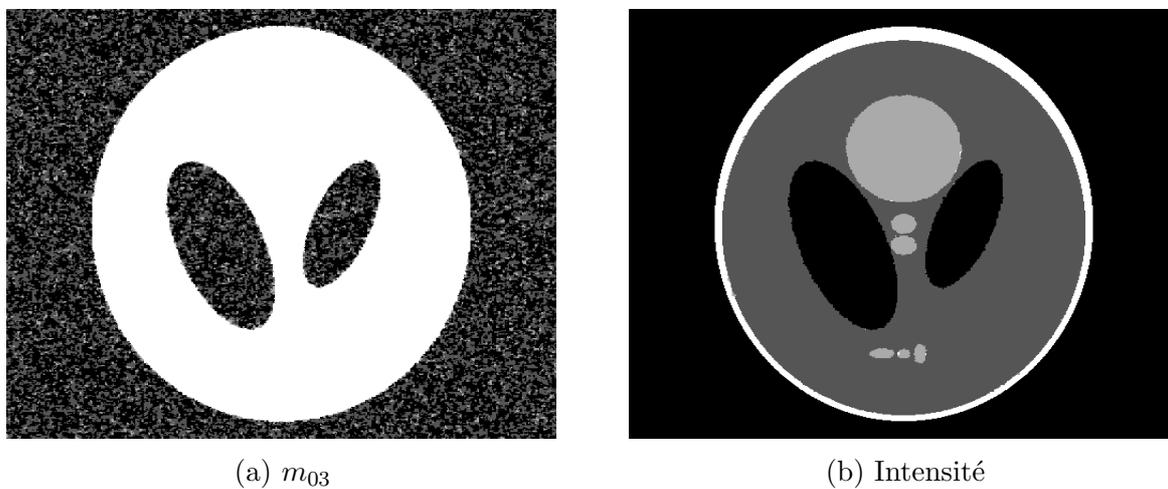


Figure 4.8 – Segmentation EM/MPM appliquée à (a) l'image m_{03} , (b) l'image d'intensité de contraste maximal.

bruit sur l'image de Mueller est élevé (erreur moyenne $\approx 80\%$). En revanche, l'algorithme EM/MPM appliqué à l'image d'intensité de contraste maximal a permis d'identifier ces quatre classes. En comparant la matrice théorique de chaque classe à son estimée, la propagation d'erreur, en norme de Frobenius, a été limitée à moins de 1,4% pour chaque

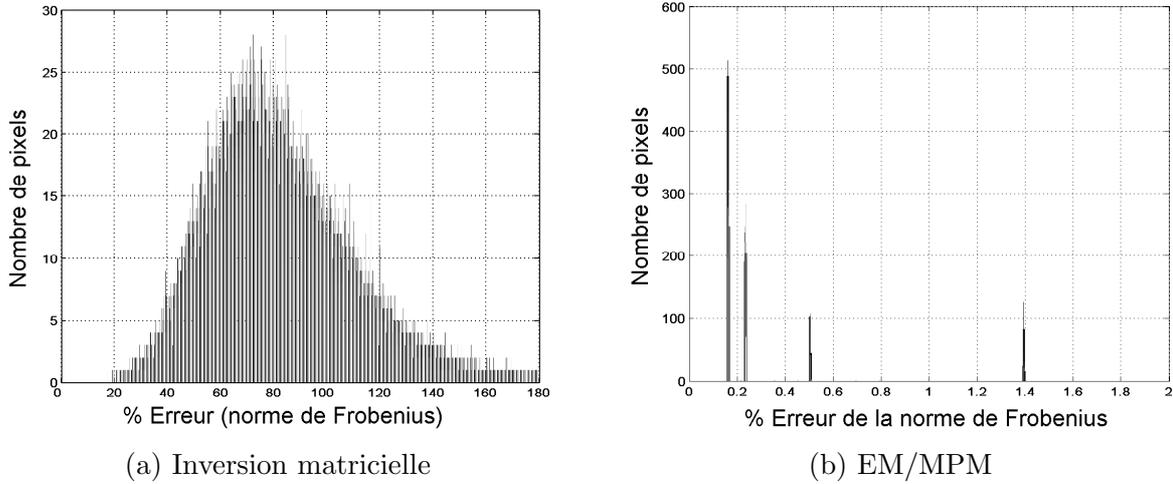


Figure 4.9 – Distribution de l'erreur (norme de Frobenius) pour l'image bruitée du Shepp-Logan. Résultats pour (a) l'inversion classique; (b) la méthode d'estimation et de segmentation EM/MPM appliquée à l'image d'intensité brute de contraste maximal.

classe estimée de l'image de Mueller, voir la figure 4.9(b).

Considérons la classe du polariseur $\phi = 30^\circ$. Une fois qu'on a obtenu la carte de segmentation avec l'image d'intensité, on l'applique sur toutes les images d'intensité. On estime la moyenne de chaque classe, et on calcule l'image de Mueller par une inversion matricielle ou une pseudo-inverse mais cette fois le bruit est considérablement réduit grâce à la régularisation de voisinage par le HMC couplée avec l'estimation des paramètres de la technique EM/MPM. La matrice de Mueller obtenue est :

$$\begin{bmatrix} 1,000 & 0,498 & 0,865 & 0,001 \\ 0,500 & 0,249 & 0,432 & 0,000 \\ 0,863 & 0,434 & 0,748 & -0,002 \\ -0,000 & -0,001 & -0,002 & 0,001 \end{bmatrix}.$$

L'erreur (norme de Frobenius) entre la matrice expérimentale et la matrice idéale est inférieur à 1% pour une valeur du bruit ajouté sur les images d'intensité qui conduisent à une erreur de 80% pour la méthode d'estimation classique.

4.4.5 Segmentation multi-modale

Dans l'exemple précédent, nous avons une image synthétisée ayant uniquement quatre classes séparables. Si le nombre de classes augmente et/ou si le bruit expérimental devient très grand, une image unique pour la segmentation ne suffit plus. Il faut avoir recours à une segmentation multi-modale. Les méthodes existantes permettent de segmenter soit les 16 images de la matrice de Mueller, soit les trois images issues de la décomposition polaire.

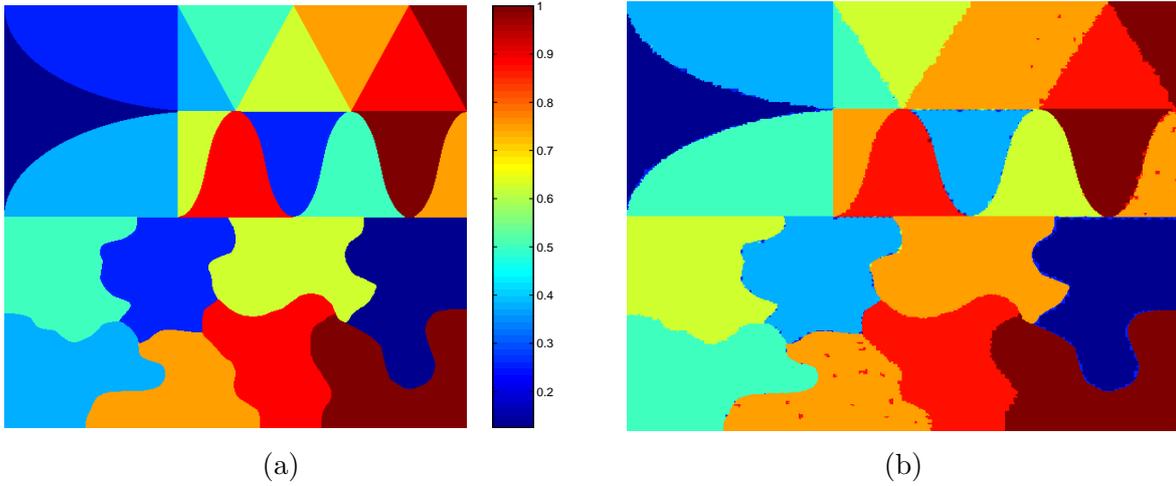


Figure 4.10 – Segmentation EM/MPM d’une image ayant 8 classes distinctes. (a) Scène à segmenter, chaque classe correspond à une propriété polarimétrique différente; (b) résultat de la segmentation sur l’image d’intensité bruitée de contraste maximal. Chaque couleur dans (b) correspond à une classe segmentée.

On a vu précédemment que les 16 images de Mueller et les 3 images de la décomposition polaire contiennent un bruit amplifié, ce qui complique l’approche de segmentation même en utilisant des méthodes robustes. Par ailleurs, la segmentation d’une seule image d’intensité n’est pas suffisante car cette image n’a pas toujours un contraste propre aux classes polarimétriques qui y sont présentes.

La solution naturelle consiste à augmenter le nombre d’images d’intensité à segmenter. Il apparaît que la segmentation de trois images d’intensité ayant toutes les trois des contrastes maximaux permet de détecter et de segmenter des scènes complexes bruitées.

Nous avons analysé dans cette partie, une méthode robuste d’estimation et de segmentation qui produit des résultats précis. Par contre, l’admissibilité physique des images ainsi obtenues n’est pas garantie : ce sujet sera traité dans les sections suivantes.

4.5 Admissibilité physique

4.5.1 Formulation

Les méthodes classiques d’inversion sont basées sur la minimisation d’une fonction d’erreur au sens des moindres carrés [86]. Soit ε l’erreur entre les mesures expérimentales et théoriques $\varepsilon = I_t - I_e = \mathbf{B} m_l - I_e$. La minimisation au sens des moindres carrés consiste

à calculer le vecteur m_l qui minimise la norme $\|\varepsilon\|^2 = \varepsilon^\top \varepsilon$. On peut alors écrire :

$$\varepsilon^\top \varepsilon = (\mathbf{B} m_l - I_e)^\top (\mathbf{B} m_l - I_e) \quad (4.28)$$

$$= m_l^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{B} m_l - 2m_l^\top \mathbf{B}^\top I_e + I_e^\top I_e. \quad (4.29)$$

En différenciant cette équation par rapport à m_l , nous obtenons : $\mathbf{B}^\top \mathbf{B} m_l - \mathbf{B}^\top I_e = 0$. Ainsi le vecteur qui réduit au minimum l'erreur des moindres carrés est :

$$m_l = (\mathbf{B}^\top \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^\top I_e = \mathbf{B}^\# I_e \quad (4.30)$$

où $\mathbf{B}^\#$ est le pseudo-inverse de la matrice de mesures \mathbf{B} . On peut remarquer que l'algorithme linéaire décrit ci-dessus permet d'obtenir la solution qui réduit au minimum la norme d'erreur résiduelle $\|\mathbf{B} m_l - I_e\|$. Cette approche conventionnelle ne garantit pas l'admissibilité de la solution parce que cette spécification n'a pas été intégrée dans l'optimisation.

La recherche d'une condition nécessaire et suffisante pour déterminer si une matrice donnée \mathbf{M} de Mueller est une matrice admissible a été traitée par beaucoup d'auteurs [87, 88, 89]. Le critère formulé par Givens et Kostinski stipule que la condition nécessaire et suffisante pour que la matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ soit une matrice de Mueller est que le spectre de $\mathbf{G} \mathbf{M}^\top \mathbf{G} \mathbf{M}$ soit réel et que le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre S_{σ_1} soit un vecteur de Stokes. La matrice \mathbf{G} décrit la métrique de Lorentz sous forme d'un tenseur unitaire de rotation dans l'espace-temps de Minkowski, et définie comme étant $\text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Posons :

$$[S, \Sigma_k] = \text{eig}(\mathbf{G} \mathbf{M}^\top \mathbf{G} \mathbf{M}), \quad (4.31)$$

$$\Sigma_{k=1\dots 4} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \quad (4.32)$$

où $\Sigma_{k=1\dots 4}$ est rangé dans l'ordre décroissant des valeurs propres. L'extraction rigoureuse d'une matrice de Mueller admissible peut être effectuée en appliquant une méthode d'optimisation non linéaire avec contrainte au lieu d'une inversion matricielle classique. Ce procédé de minimisation peut être formulé de la manière suivante :

$$\min_{m_l} \|\mathbf{B} m_l - I_e\|^2 \quad (4.33)$$

$$\text{subject to : } \begin{cases} \text{imag}(\Sigma_k)_{k=1\dots 4} = 0; \\ S_{\sigma_1}^\top \mathbf{G} S_{\sigma_1} \geq 0; \\ s_{0, \sigma_1} \geq 0. \end{cases} \quad (4.34)$$

La première égalité assure que toutes les valeurs propres sont réelles. Les deux autres inégalités permettent de garantir que le vecteur propre S_{σ_1} correspondant à la plus grande

valeur propre est un vecteur réel de Stokes. Dans le reste de ce chapitre, on dénotera par $h(\mathbf{M})$ la contrainte d'égalité et par $g_j(\mathbf{M})$ les deux contraintes d'inégalités avec $j = \{1, 2\}$.

Rechercher un minimum global de l'équation 4.33 est une tâche qui s'annonce difficile. D'abord, le nombre de variables liées à la matrice de Mueller ralentit la recherche du minimum global. D'ailleurs, les régions exploitables dans un espace à 16 dimensions peuvent être séparées et l'algorithme devra explorer plusieurs régions possibles avant de pouvoir trouver le minimum global. En outre, les points obtenus satisfaisant les contraintes ne sont pas nécessairement les minima globaux du problème original. Afin de réduire le temps de calcul, il est nécessaire de disposer d'une matrice initiale. Tout d'abord, on calcule la matrice hermitienne \mathbf{H} associée à la matrice de Mueller ; cette matrice est ensuite décomposée selon la méthode de *target decomposition* de Huynen suivant : $\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^\dagger$, où \mathbf{D} est une matrice diagonale où l'on a rangé les valeurs propres positives dans l'ordre décroissant, et \mathbf{U} est une matrice unitaire des vecteurs propres correspondants, \mathbf{U}^\dagger sa transposée conjuguée.

Si la matrice de Mueller n'est pas admissible, la décomposition en valeurs propres de sa matrice hermitienne correspondante introduit au moins une valeur propre négative dans \mathbf{D} . Nous suggérons d'annuler cette valeur, de recalculer la matrice \mathbf{H}_i et par conséquent, de recalculer la matrice \mathbf{M}_i de Mueller qui pourrait être utilisée comme la matrice d'initialisation.

4.5.2 Méthode SQP

Nous avons appliqué une méthode d'optimisation déterministe avec contrainte basée sur la méthode de programmation quadratique séquentielle (SQP) [90]. Dans cette méthode, c'est une approche de type quasi-Newton qui est employée entre les itérations consécutives et la formule de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS) est utilisée pour approximer le hessien. Une ligne recherche est établie en utilisant la fonction du mérite de Han afin de déterminer le pas à chaque itération [91].

Il y a deux inconvénients majeurs pour des méthodes de Newton ou des méthodes de SQP. Elles exigent les dérivées des fonctions objectif et de contraintes, ce qui les limite aux fonctions différentiables continues et de ce fait, le traitement des problèmes discrets repose sur la pertinence des formules de mise à jour (interpolations) qui permettent d'approximer les dérivées du premier et du second degré. Dans le cas de la matrice de Mueller, ces méthodes peuvent fréquemment être piégées dans des cuvettes de minima locaux.

Pour éviter ces minima locaux, des perturbations de nature gaussienne ont été ajoutées au minimum atteint. La nouvelle matrice est utilisée comme matrice initiale pour une autre itération SQP. Cette opération est réalisée jusqu'à convergence au même optimum pour plusieurs itérations consécutives. Malheureusement les résultats ne sont pas toujours

satisfaisants et la convergence a fréquemment lieu au minimum local : le minimum global satisfaisant la condition de réalisabilité a rarement été atteint. La raison identifiée est que le nombre d'optima locaux (pseudo-solutions) dans l'espace de Mueller est élevé et que les méthodes de recherche basées sur l'optimisation de montée locale deviennent peu efficaces. Cette technique suggérée de SQP itérative devient longue surtout qu'aucune condition d'arrêt précise commandant le programme n'existe.

4.5.3 Méthode CSA

Une nouvelle stratégie doit être adoptée à ce stade : il s'agit de considérer une méthode d'optimisation globale qui ne requiert pas le calcul de dérivées. Dans ce cadre, une approche stochastique basée sur la méthode de recuit simulée avec contrainte ou *constrained simulated annealing* (CSA) est un choix alternatif aux méthodes SQP [92].

L'algorithme CSA comporte deux étapes principales : produire des points d'essai et les accepter en se basant sur une certaine probabilité d'acceptation. Afin de trouver le minimum global, la technique CSA recherche un point selle, dans l'espace commun à la matrice de Mueller \mathbf{M} et à la fonction lagrangienne λ , en minimisant la fonction-objectif et en satisfaisant les contraintes. Le point de selle peut être atteint par des descentes probabilistes dans l'espace variable (coefficients de Mueller) et des montées locales probabilistes dans l'espace du multiplicateur de Lagrange.

Sans perte de généralité, l'algorithme CSA proposé dans **Algorithm 1** considère uniquement des contraintes d'égalité, sous forme de $h_i(\mathbf{M}) = 0$, avec la fonction lagrangienne augmentée suivante :

$$\mathcal{L}(\mathbf{M}, \lambda) = \text{Residual}(\mathbf{M}) + \lambda^T |h(\mathbf{M})| + \frac{1}{2} \|h(\mathbf{M})\|^2 \quad (4.35)$$

En effet, les contraintes d'inégalité sous la forme $g_j(\mathbf{M}) \leq 0$ peuvent toujours être transformées en contraintes d'égalité grâce à la fonction de maximum, $\tilde{g}_j(\mathbf{M}) = \max(0, g_j(\mathbf{M})) = 0$.

Algorithm 1 présente la méthode de recherche globale proposée pour résoudre l'équation (4.33). L'algorithme commence par regrouper tous les paramètres nécessaires à l'exécution. Un point de départ physique $X_i = (\mathbf{M}_i, \lambda)$ est choisi après calcul de \mathbf{M}_i avec la décomposition de Hyunen et $\lambda = 0$. Au début, la valeur optimale X_{opt} est considérée identique à X_i .

La température de commande T est initialisée avec une valeur assez grande afin de disposer de plusieurs directions de recherche acceptables. Dans cette configuration, la température initiale est obtenue en calculant \mathbf{M}_i , en générant aléatoirement 100 voisins correspondants \mathbf{M}'_i , puis en calculant la valeur maximale des fonctions lagrangiennes et

contraintes :

$$T_{ini} = \max (|\mathcal{L}(\mathbf{M}'_i, 1) - \mathcal{L}(\mathbf{M}_i, 1)|, |h(\mathbf{M}_i)|). \quad (4.36)$$

Notre raisonnement concernant l'évolution de la température est le suivant : tandis que l'algorithme évolue, la température est progressivement abaissée d'une quantité α . Si T est réduit très lentement, l'algorithme CSA convergera vers un minimum global qui satisfait les contraintes [93]. Malheureusement, une température très lentement abaissée ralentit l'algorithme et la durée nécessaire pour traiter un grand nombre de pixels inadmissibles peut devenir grande. Il s'avère que le choix d'une loi de refroidissement polynomial est en adéquation avec l'espace des 16 variables de Mueller [94].

Algorithm 1 *Algorithme de recuit simulé sous contraintes*

Require: Target decomposition : $\mathbf{M} \leftarrow \mathbf{M}_i$;

Cooling rate : $0 < \alpha < 1$; Starting Temperature : T_{ini} ;

Number of trials per temperature : N_T .

Define: Stopping condition \leftarrow Temperature $\ll 1$ **or**

optimum is unchanged for several successive iterations

Initiate: $X_{opt} = (\mathbf{M}, \lambda = 0)$ and $T = T_{ini}$

```

1: while Stopping condition is not satisfied do
2:   for k  $\leftarrow$  1 to  $N_T$  do
3:     generate trial points  $X' = \text{neighborhood}(X_{opt})$ 
4:     Ensure : feasible direction,  $X'$  is admissible
5:     if  $\mathcal{L}(X') < \mathcal{L}(X_{opt})$  then
6:       Accept  $X_{opt} = X'$ 
7:     else
8:       Accept  $X'$  if  $P_r(X_{opt}, X') > \text{rand}[0, 1]$ 
9:     end if
10:  end for
11:  update Temperature by  $T \leftarrow \alpha \times T$ 
12: end while

```

Après initialisation, **Algorithm 1** recherche une valeur optimale dans le voisinage admissible X_{opt} . Il considère d'abord un voisin dans l'espace variable en perturbant la matrice de Mueller. Si ces perturbations ne permettent pas de produire des points admissibles, on augmente la valeur de λ dans $\mathcal{L}(\mathbf{M}, \lambda)$ tout en maintenant \mathbf{M} fixe afin d'augmenter la pénalité des contraintes violées et de les forcer à satisfaction. Un examen local dans l'espace du lagrangien peut être vu comme une recherche globale dans l'espace des variables.

Nous considérons deux cas en produisant les points d'essai $X' = (\mathbf{M}', \lambda)$ ou $X' = (\mathbf{M}, \lambda')$. Dans le premier cas, nous utilisons la matrice $\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \alpha_\tau \odot \mathcal{N}(0, \sigma_i)$, où α_τ est

une matrice de graduation 4×4 d'une distribution dont la valeur de graine diminue avec le temps ; $\mathcal{N}(0, \sigma_i)$ est une distribution gaussienne variable avec une variance aléatoirement choisie, et \odot est le produit de Hadamard. La matrice de graduation α_τ permet de disposer d'un algorithme adaptatif basé sur l'observation expérimentale avec des pas de recherche élevés au début et progressivement lorsque l'algorithme s'approche d'une région près de l'optimum, ces pas de recherche sont progressivement réduits.

Pour le point d'essai $X' = (\mathbf{M}, \lambda')$, on applique ce qui suit : $\lambda' = \lambda + \beta\psi$, où β est une variable aléatoire uniformément répartie dans $[-1, 1]$ et ψ est la valeur maximale de violation de contraintes. Nous avons fixé le nombre de tirage des couples (\mathbf{M}', λ) et (\mathbf{M}, λ') dans un rapport de $20n/m$, où n est le nombre de variables et m est le nombre de contraintes [92], ce qui signifie que \mathbf{M} est mis à jour plus fréquemment que λ .

Une fois un voisinage admissible atteint, l'algorithme CSA évolue à la manière des routines classiques de recuit simulé mais ici la fonction de coût est remplacée par un lagrangien augmenté. L'algorithme CSA est basé sur le critère de choix de probabilités de Métropolis, commandé par la température et la fonction de coût, relation (4.37). La routine est comme suit : étant donné une valeur X_{opt} , on produit un candidat d'essai admissible X' à proximité de X_{opt} . Si $\mathcal{L}(X') < \mathcal{L}(X_{opt})$ alors X' est accepté avec une probabilité de 1 comme point de départ pour la prochaine itération. Autrement, X' est accepté avec la probabilité :

$$P_r(X_{opt}, X') = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\mathcal{L}(X') - \mathcal{L}(X_{opt})}{T}\right) & \text{si } X' = (\mathbf{M}', \lambda). \\ \exp\left(-\frac{\mathcal{L}(X_{opt}) - \mathcal{L}(X')}{T}\right) & \text{si } X' = (\mathbf{M}, \lambda') \end{cases} \quad (4.37)$$

suivant que \mathbf{M} ou λ est modifié. En d'autres termes, les conditions d'arrêt qui régissent l'algorithme se produisent quand la température devient très petite ou quand l'optimum est maintenu inchangé pour des itérations successives à la même température.

4.5.4 Procédures de validation

Simulation numérique

Dans le cadre de l'approche analytique détaillée dans la section précédente, un code numérique qui réduit au minimum la norme d'erreur résiduelle avec contraintes de réalisabilité physique, relation (4.34), a été développé. Une méthode pour valider les techniques SQP ou CSA est d'utiliser des images synthétiques de Mueller au lieu d'une simple matrice de Mueller. Ceci nous conduit à réitérer l'algorithme sur chaque pixel de l'image. Considérons un fantôme simulé composé de quatre régions différentes, chacune d'elles correspondent à un polariseur linéaire orienté de ϕ par rapport à l'axe optique vertical, voir figure 4.6.

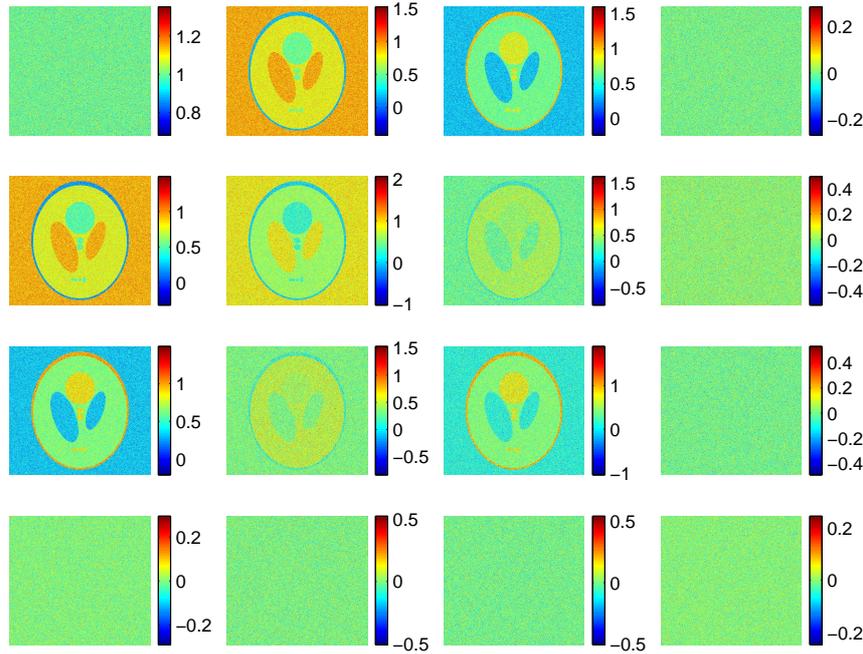


Figure 4.11 – Matrice de Mueller de l’image du Shepp-Logan simulée avec un bruit additif gaussien.

Avec cette image de Mueller, des intensités peuvent être synthétisées pour un choix d’angles des deux lames à retard du polarimètre. Un bruit gaussien avec un écart type σ et une moyenne nulle est ensuite ajouté. Les intensités bruitées sont utilisées pour estimer ensuite une image de Mueller en effectuant une inversion de matrice ou une pseudo-inversion si le nombre d’angles des deux lames quart-ondes dépasse 16 combinaisons. Par ailleurs, les états de polarisation lié à tous les pixels de l’image de Mueller affectés par le bruit sont représentés sur la sphère de Poincaré, figure 4.12(a).

Nous pouvons noter dans la figure 4.12 que le bruit gaussien ajouté transforme chaque point en une sphère centrée à l’endroit théorique donné par l’orientation des polariseurs. Le volume de chaque sphère est lié à la variance du bruit. La moitié de chaque sphère dépasse les frontières d’admissibilité physique de la sphère de Poincaré. Par conséquent, cette partie représente l’endroit des matrices inadmissibles. La figure 4.12(a) représente l’impact du bruit dans la première colonne de la matrice de Mueller. En fait, pour refléter l’impact du bruit sur tous les éléments de matrice de Mueller une représentation de surface de DoP est nécessaire [24]. Plus précisément, pour un bruit avec un rapport $SNR \approx 30$ dB qui est considéré comme très modeste, 84% des pixels de l’image simulée de Mueller (physiquement inadmissibles) sortent de la zone d’admissibilité (“outliers”). Parcourir l’algorithme CSA transformera tous ces *outliers* en pixels admissibles.

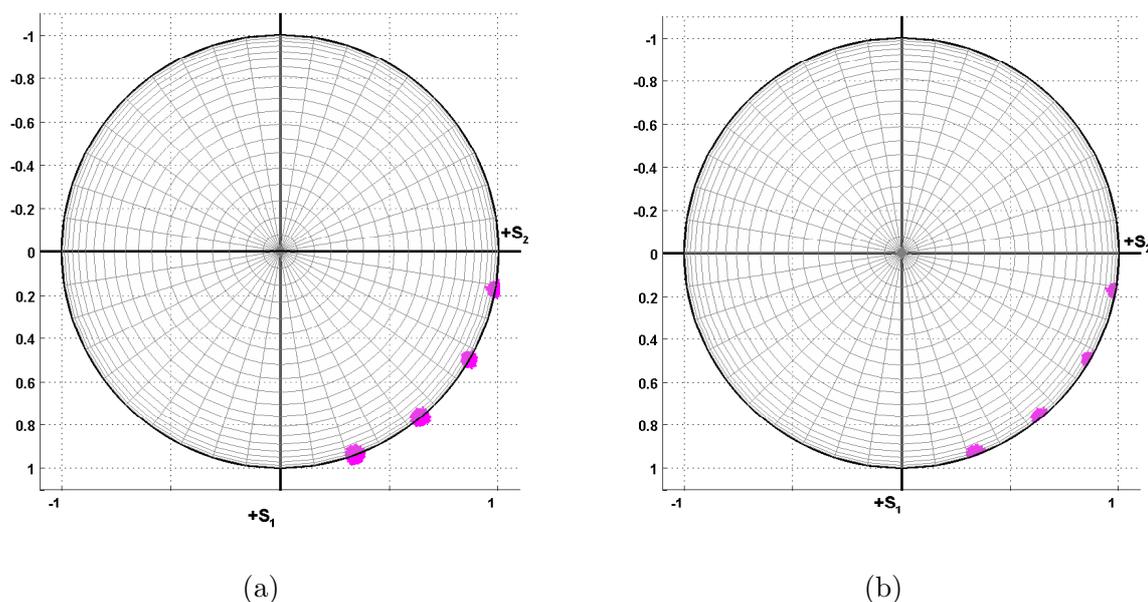


Figure 4.12 – *Sphère de Poincaré vue du dessus. Les quatre polariseurs linéaires sont représentés par de petites sphères colorées avec leurs centres situés à un angle de 2ϕ de l'axe de S_1 . Image de gauche : résultats sans optimisation. Image de droite : résultats en utilisant la technique CSA. Tous les points qui se trouvent à l'extérieur de la sphère de Poincaré sont transférés à l'intérieur.*

Interprétation

Nous pouvons noter que les sphères 3D, correspondant aux perturbations gaussiennes, sont transformées en hémisphères par l'algorithme CSA : tous les points inadmissibles se situant dans la partie externe de la sphère de Poincaré ont été ramenés à l'intérieur. Ceci a comme conséquence une réduction du volume d'erreur associé à chaque polariseur.

En ajoutant un bruit gaussien aux intensités idéales avec un rapport signal/bruit de 30 dB, l'erreur (norme de Frobenius) entre les données théoriques et synthétisées est de l'ordre de 8,30%. L'algorithme CSA ramène une telle erreur à 7,78% : une amélioration peut être notée.

L'interprétation de ce phénomène peut être faite en considérant deux cas extrêmes liés à la première colonne de la matrice de Mueller (fig. 4.13) : un point A se trouvant dans l'hémisphère externe et dû à un pourcentage élevé d'erreur (distance euclidienne $d1$) est déplacé au point A' à l'intérieur de l'hémisphère physique. Cette opération a comme conséquence une réduction des distances entre les matrices admissible et inadmissible de Mueller. Dans un autre cas de figure, l'algorithme CSA a transformé un point inadmissible B d'erreur modeste en un nouveau point B' admissible d'erreur plus élevée. Si nous résumons toutes les combinaisons possibles, nous pouvons espérer que l'algorithme de CSA n'augmentera pas le pourcentage d'erreur si 50% des points sont inadmissibles. En effet,

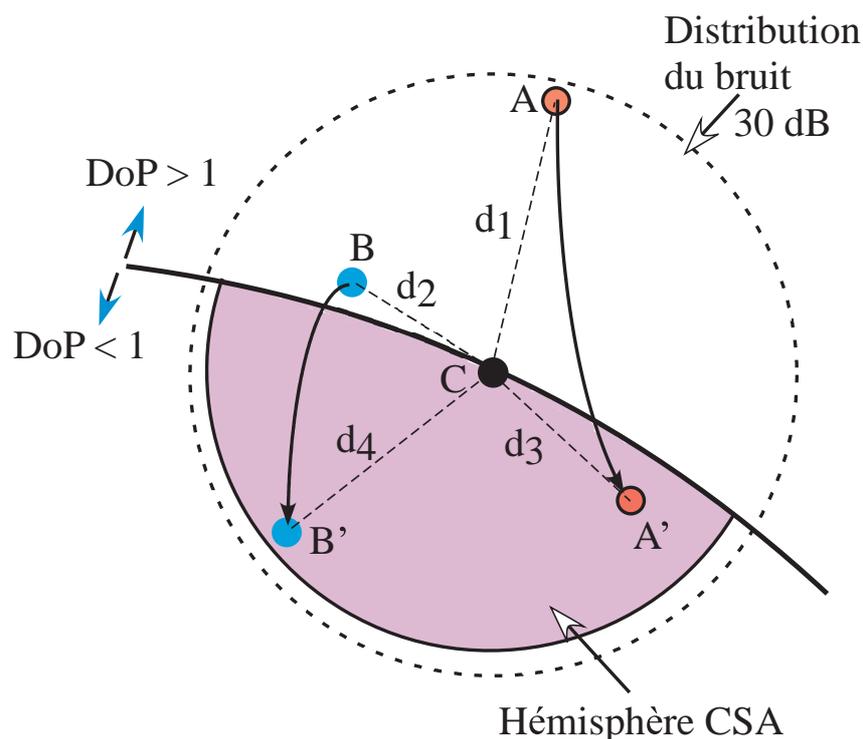


Figure 4.13 – Cas extrêmes de transitions possibles. Le point A est déplacé en A' qui se traduit par une réduction des erreurs. Le point B est déplacé en B' conduisant à une augmentation des erreurs.

nous avons obtenu 84% de points aberrants et ainsi quand ces *outliers* sont transformés en *inliers*, il est possible d'observer une diminution d'erreurs. La raison en est que le CSA transfère les points à l'extérieur de la sphère vers un hémisphère intérieur avec un plus petit rayon que celui de la sphère générée à l'aide d'une distribution gaussienne avec un rapport SNR de 30 dB.

Par ailleurs, la méthode SQP risque d'augmenter le pourcentage d'erreur parce qu'elle n'est pas aussi précise que le CSA. Il existe plusieurs cas où un point inadmissible est transféré à l'intérieur de la sphère de Poincaré à une position éloignée de sa classe initiale. L'accumulation consécutive de tels effets augmente le pourcentage d'erreur.

Test de convergence

Le point critique d'un algorithme itératif concerne sa convergence. Un tel critère permet de valider la robustesse de la méthode numérique proposée dans cette étude. Nous avons examiné la robustesse, ainsi que la convergence de l'algorithme CSA avec différentes valeurs de variance σ^2 du bruit additif. La vérification a été effectuée comme suit : tout d'abord, le fantôme modifié du Shepp-Logan est utilisé pour produire des données d'intensité. En

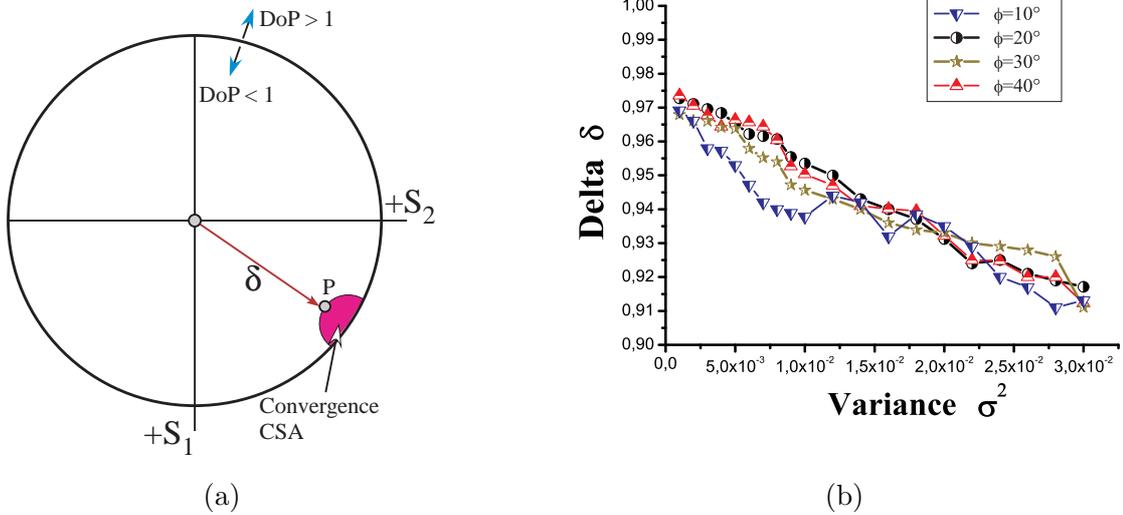


Figure 4.14 – Test de convergence de l’algorithme CSA appliqué au fantôme modifié de Shepp-Logan. (a) Définition géométrique de la distance δ : c’est la distance minimale du centre de la sphère de Poincaré à la région CSA. (b) Graphe de la variance σ^2 du bruit en fonction de la distance δ ; ce graphe prouve que l’algorithme CSA converge vers une solution physiquement admissible ($\delta \approx 1$) proche de la solution théorique pour différents niveaux de bruit ajouté.

second lieu, on ajoute à ces images d’intensité un bruit gaussien avec une variance contrôlée. Troisièmement, nous estimons l’image de Mueller avec ces intensité bruitées. Dans la phase finale, nous exécutons l’algorithme CSA pour chaque matrice de Mueller associée à chaque pixel de l’image de Mueller.

Pour illustrer la convergence de la méthode CSA, nous calculons pour chaque classe son degré de polarisation minimum, la distance δ qui est la distance la plus proche de chaque classe au centre de la sphère de Poincaré. Cette distance peut être interprétée comme le point de convergence de l’algorithme. Si cette distance est grande, $\delta \approx 1$, l’algorithme a atteint la convergence. Autrement, l’algorithme n’est pas convergent et la matrice estimée de Mueller est erronée.

La figure 4.14(b) décrit la variation de δ en fonction de différents niveaux de bruit. Pour une variance de $\sigma^2 = 2 \times 10^{-3}$, l’algorithme converge vers $\delta = 0,97$. Même pour de grandes valeurs du bruit, $\sigma^2 = 3 \times 10^{-2}$, l’algorithme CSA converge vers la solution (optimale) théorique, $\delta = 0,92$.

Résultats expérimentaux : matrice du vide

Nous avons expérimenté l’approche proposée avec des mesures expérimentales : des intensités ont été enregistrées en considérant 8×8 positions de la lame quart-onde du

PSG et du PSA respectivement.

Quand aucun échantillon n'est placé entre le PSG et le PSA, on devrait obtenir la matrice identité 4×4 : c'est la matrice théorique de l'air. Les méthodes PI classiques sans contrainte mènent à :

$$\mathbf{M}_{PI} = \begin{bmatrix} 1,000 & -0,000 & 0,019 & 0,001 \\ 0,004 & 0,996 & 0,018 & -0,001 \\ 0,001 & 0,016 & 0,995 & 0,000 \\ -0,002 & 0,006 & -0,003 & 0,992 \end{bmatrix}.$$

La matrice expérimentale est très proche de la matrice théorique. La distance (norme de Frobenius) entre ces deux matrices est de 3,34% mais cette matrice, \mathbf{M}_{PI} , n'est pas physiquement admissible : $\Sigma = \{1,021; 0,997; 0,985; 0,963\}$ et $S_{\sigma_1}^\top \mathbf{G} S_{\sigma_1} = -0,747$.

Maintenant, appliquons les techniques SQP et CSA et activons les contraintes de réalisabilité mentionnées dans l'équation (4.34), nous obtenons :

$$\mathbf{M}_{opt} = \begin{bmatrix} 1,004 & -0,002 & 0,017 & 0,001 \\ 0,006 & 0,985 & 0,010 & -0,002 \\ 0,003 & 0,012 & 0,980 & 0,001 \\ -0,002 & 0,005 & -0,002 & 0,980 \end{bmatrix}.$$

Les deux méthodes ont atteint la même solution optimale. La matrice est physiquement acceptable : $\Sigma = \{1,003; 0,988; 0,960; 0,947\}$ et $S_{\sigma_1}^\top \mathbf{G} S_{\sigma_1} = 0,817$. La distance relative (norme de Frobenius) $\|\mathbf{M}_{PI} - \mathbf{M}_{opt}\|/\|\mathbf{M}_{PI} + \mathbf{M}_{opt}\|$ entre la matrice physique et inadmissible est de 0,62%.

L'erreur dans la matrice physique est légèrement plus élevée que celle avec la matrice inadmissible. Ce résultat accentue le fait qu'il existe une pénalité d'augmentation des erreurs lorsqu'on applique une optimisation globale. Le polarimètre expérimental dont nous disposons est très précis, et les 8×8 mesures permettent d'avoir des matrices plus précises que celles basées sur 16 acquisitions. La réduction du bruit avec la méthode proposée sera plus appréciable si le rapport signal/bruit était inférieur au seuil de 30 dB mentionné dans la section précédente.

Résultats expérimentaux : matrice de Howell

Nous avons également effectué une minimisation sous contrainte avec la matrice de Mueller obtenue par Howell. Elle modélise un radiomètre-collimateur [67]. La matrice de Howell avec trois décimales est :

$$\mathbf{M}_H = \begin{bmatrix} 0,760 & -0,062 & 0,029 & 0,118 \\ -0,057 & 0,469 & -0,181 & -0,186 \\ 0,038 & -0,171 & 0,539 & 0,028 \\ 0,124 & -0,217 & -0,012 & 0,661 \end{bmatrix}.$$

Cette matrice a un spectre réel $\Sigma = \{0,669; 0,559; 0,335; 0,068\}$ mais le vecteur propre $S_{\sigma_1} = (0,116; 0,593; -0,370; -0,705)^\top$ associé à la plus grande valeur propre n'est pas un vecteur de Stokes réel, $S_{\sigma_1}^\top \mathbf{G} S_{\sigma_1} = -0,973$.

Afin de simuler l'expérience de Howell, des intensités ont été simulées en supposons que le système d'acquisition est un polarimètre à lames rotatives. Ces intensités sont ensuite utilisées pour estimer une matrice admissible en utilisant les routines SQP et CSA. Le procédé de récupération est comme suit : premièrement, un choix approprié des combinaisons d'angle des lames est fait pour que la relation $\mathbf{I} = \mathbf{A}\mathbf{M}\mathbf{G}$ soit bien conditionnée afin que les matrices \mathbf{A} et \mathbf{G} soient inversibles, c.-à-d., que \mathbf{B} est inversible [30]. Pour ce fait, on recherche une combinaison d'angles des lames à retard L_1 et L_2 qui réduit au minimum le critère EWV .

Deuxièmement, on calcule la matrice d'intensité effective, $I_e = \mathbf{B} m_h$. Après cela, les algorithmes de minimisation SQP ou CSA sont utilisés pour rechercher le vecteur m_l qui réduit au minimum l'erreur résiduelle $\|\mathbf{B} m_l - I_e\|$ sous condition que la solution ne doit pas violer les conditions d'admissibilité (équation 4.34). L'initialisation est effectuée en utilisant la décomposition de Huynen comme expliqué plus tôt dans ce chapitre.

Avec la méthode d'optimisation SQP, nous obtenons :

$$\mathbf{M}_{SQP} = \begin{bmatrix} 0,815 & -0,083 & 0,056 & 0,142 \\ -0,092 & 0,428 & -0,164 & -0,142 \\ 0,090 & -0,187 & 0,488 & 0,005 \\ 0,140 & -0,204 & -0,050 & 0,693 \end{bmatrix}.$$

Comme prévu, cette matrice est physiquement acceptable. Le spectre est réel $\Sigma = \{0,626; 0,602; 0,344; 0,054\}$, et $S_{\sigma_1} = (0,970; -0,159; 0,072; 0,167)^\top$ correspond à un vecteur de Stokes physique, $S_{\sigma_1}^\top \mathbf{G} S_{\sigma_1} = 0,883$. Il convient de noter que la distance relative (norme de Frobenius) entre \mathbf{M}_H et \mathbf{M}_{SQP} est de 5,2%.

Quand nous effectuons l'optimisation globale basée sur la méthode CSA sur la matrice de Howell, nous obtenons :

$$\mathbf{M}_{opt} = \begin{bmatrix} 0,815 & -0,093 & 0,039 & 0,123 \\ -0,063 & 0,447 & -0,181 & -0,180 \\ 0,047 & -0,160 & 0,492 & 0,030 \\ 0,127 & -0,210 & -0,009 & 0,647 \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons facilement prouver que cette matrice est physiquement acceptable, voir figure 4.15(b). Le spectre est réel $\Sigma = \{0,634; 0,626; 0,294; 0,059\}$ et $S_{\sigma_1}^\top \mathbf{G} S_{\sigma_1} = 0,327$. Une amélioration peut être notée par rapport à la méthode SQP : l'erreur relative entre cette matrice et la matrice originale \mathbf{M}_H est de 3,3%. Avec la technique CSA,

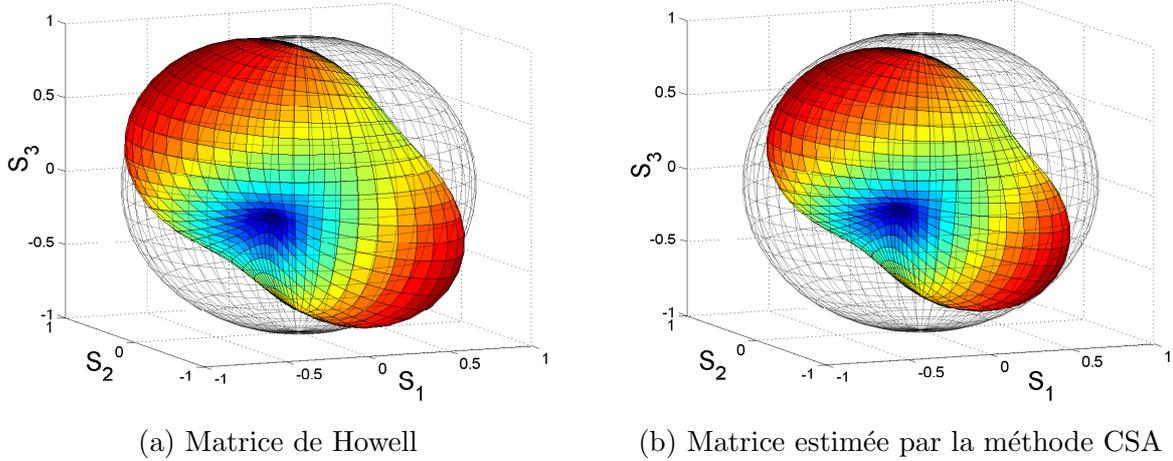


Figure 4.15 – Surfaces du degré de polarisation. (a) Résultats avec la matrice de Howell : cette matrice est physiquement inadmissible parce que la surface du DoP dépasse les limites de la sphère de Poincaré. (b) Matrice physique estimée avec une optimisation CSA. L’algorithme CSA a permis d’estimer une matrice physiquement admissible de l’expérience de Howell sans modifier fondamentalement les propriétés globales préservées dans la forme et l’orientation de la surface de DoP.

nous avons atteint un point de selle plus près du minimum global de la fonction-objectif que la méthode SQP. Par davantage de recherche sur les matrices ci-dessus nous pouvons considérer deux observations principales : les matrices \mathbf{M}_{SQP} et \mathbf{M}_{opt} sont physiquement acceptables suivant le critère de GK mais si nous analysons les matrices hermitiennes correspondantes, nous pouvons remarquer qu’elles contiennent des valeurs propres négatives. Les valeurs propres de \mathbf{H}_{SQP} et \mathbf{H}_{opt} sont respectivement $\{0, 6261; 0, 1790; 0, 0932; -0, 0834\}$ et $\{0, 6151; 0, 1938; 0, 0774; -0, 0714\}$. Cela signifie que le critère d’admissibilité proposé par les auteurs des références [51] et [88] est un critère suffisant mais pas nécessaire.

Il appartient de mentionner que le critère de GK a permis d’obtenir des contraintes faciles à programmer dans le cadre actuel. La raison en est que les procédures d’optimisation ont été conduites à l’aide d’un calculateur numérique et que le critère GK peut être facilement exprimé en termes de diagonalisation de matrice. Cependant, toutes les matrices de Mueller ne satisfont pas le critère de GK [68]. Par exemple, la matrice \mathbf{M}_{pr} :

$$\mathbf{M}_{pr} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

construite en combinant un polariseur et un rotateur ne satisfait pas le critère de GK mais

elle transforme tout vecteur de Stokes en vecteurs de Stokes (même nul), elle est donc physiquement réalisable. En fait, le critère de GK n'est pas une condition nécessaire et suffisante : il existe une classe entière de matrices de Mueller (dite de type II) qui n'obéit pas à ce critère [68]. Cependant, convertir les propriétés mathématiques d'une telle classe en algorithme simple n'est pas une tâche facile. Une approche plus globale est nécessaire. Le travail dans cette direction pourrait être intéressant.

4.6 Incertitudes sur la matrice fondamentale

La propagation d'erreur dans la matrice fondamentale dépend des points de correspondance choisis lors de la phase d'estimation de cette matrice. De même, les erreurs apparaissent lors de l'étape d'étalonnage du capteur optique afin de déterminer le point principal, de la distance focale et les transformations reliant les deux prises de vue.

L'impact des erreurs dans la matrice fondamentale est différent de celui de la matrice de Mueller. Ici, comme on a vu dans le chapitre précédent, la norme de Frobenius n'est pas la plus adaptée pour mesurer la différence entre deux matrices fondamentales. Prenons l'exemple suivant d'une matrice fondamentale extraite avec de 42 points de correspondance entre deux images stéréoscopiques ; il correspond à une expérience réelle que nous avons menée. Pour un déplacement horizontal, la matrice fondamentale théorique est donnée par :

$$\mathbf{F}_H = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

La matrice expérimentale que nous avons obtenue est :

$$\mathbf{F}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1,1633 \times 10^{-5} & -3,24 \times 10^{-3} \\ -3,48 \times 10^{-5} & 0 & -0,995 \\ 9,01 \times 10^{-3} & 1 & -4,386 \end{bmatrix}$$

La distance de Frobenius entre les deux matrices est très grande : 438%, ce qui ne reflète pas le fait que les deux matrices sont presque identiques ; la distance géométrique moyenne entre les deux matrices est de 1,15 pixels. En fait, le terme $\mathbf{F}_e(3,3)$ qui est grand ne correspond qu'à un petit déplacement vertical. Par contre, il introduit une erreur très grande au sens de Frobenius laissant croire que les deux matrices ne sont pas proches.

4.7 Conclusion

Deux méthodes pour extraire des matrices de Mueller des mesures d'intensité ont été présentées, les méthodes MI et FT. On a montré qu'avec des considérations de symétrie ou

d'orthogonalité, l'inversion numérique des équations polarimétriques ont pu être évitées. Avec les formules analytiques obtenues, la propagation du bruit a pu être analysée. Si le bruit d'intensité est un bruit blanc gaussien, le bruit dans les matrices de Mueller possède des propriétés remarquables. Les coefficients de Mueller sont mutuellement corrélés selon une configuration qui implique la décomposition en quatre blocs de matrices de 2×2 . Les variances sont distribuées de façon inégale : le bloc 2×2 du milieu a la variance la plus élevée, l'élément m_{33} a la variance la plus faible. Ces caractéristiques ont été validées sur des images expérimentales de Mueller de l'air.

Par ailleurs, cette étude analytique nous a permis de bien assimiler la notion du bruit dans les images de Mueller. Une solution adaptée a été proposée : elle consiste à éviter de segmenter les images de Mueller ou les images extraites de la décomposition polaire ; en revanche, la segmentation d'images brutes apparaît comme le moyen le plus fiable pour des scènes bruitées. Les images ainsi segmentées nous permettent de déterminer d'une manière précise l'image de Mueller qui reflète les propriétés polarimétriques de la scène observée. Cela n'empêche pas que les images ainsi obtenues risquent d'être physiquement inadmissibles. Pour cela, nous les avons traitées à l'aide d'une méthode d'estimation des matrices-images de Mueller en intégrant le critère d'admissibilité physique dans la solution. Les études que nous avons menées sur des images de synthèse ou des images expérimentales nous ont confirmé la validité de la technique.

Chapitre 5

Reconstruction 3D par images polarimétriques

Résumé

L'objet de ce chapitre est de montrer comment, très simplement, le dispositif d'imagerie de Stokes-Mueller à haute précision a été adapté à la stéréo-polarimétrie. Sur le plan conceptuel, l'apport de la polarimétrie à la stéréoscopie est mis en évidence par une analyse quantitative de la précision de reconstruction tridimensionnelle. Dans ce contexte, nous visons à faire le point sur les développements, les applications et les perspectives.

5.1 Objectif

CERTAINES applications de contrôle qualité requièrent la reconstruction 3D de l'objet observé. Un certain nombre de techniques ont été mises au point afin d'extraire efficacement des informations tridimensionnelles avec des images. Des approches comme la *shape from shading* ou la lumière structurée ne permettent pas d'accéder aux caractéristiques physiques de la scène. Par ailleurs, si certaines techniques d'obtention de descriptifs 3D comme la stéréoscopie sont anciennes dans leur principe, elles ont connu des évolutions surtout s'il y a exigence de rapidité. C'est le cas de la stéréoscopie : la géométrie épipolaire dispose d'un cadre théorique très clair et l'estimation des paramètres (mise en correspondance, position 3D, étalonnage) permet de proposer des approches relativement robustes. En revanche, la maturité et la maîtrise de la stéréovision dans le sens géométrique du terme peut laisser croire que le processus de reconstruction tridimensionnelle est maintenant complet. On est cependant loin du compte. La liste des configurations pour lesquelles la stéréovision classique donne des résultats médiocres est longue et sont souvent causés par la réponse optique des objets : zones de très forte réflexion, milieu transparent, zones encombrées ou peu contrastées. Il apparaît qu'un recours aux substituts de la stéréovision classique par imagerie polarimétrique permet de lever certaines ambiguïtés dans les scènes à reconstruire.

L'imagerie polarimétrique, en tant que mesure d'une image de Mueller, offre plusieurs approches pour calculer des descriptifs de processus physique d'interaction onde-matière.

Ses limitations résident parfois dans la dimensionalité de l'image et dans la propagation du bruit de mesure. Jusqu'aujourd'hui, les travaux concernant le cadre des images de Mueller étaient pour l'analyse des images en 2D. L'application des images de Mueller pour la reconstruction 3D des scènes est la démarche que nous avons développée dans ce travail doctoral. Nous proposons d'intégrer les images de polarisation comme supports fiables d'information dans le processus de reconstruction de scènes délicates.

5.2 Descriptions

L'obtention d'une image de Mueller fiable requiert une étape d'étalonnage du polarimètre qui consiste à la fois à disposer d'un modèle mathématique pour décrire l'interaction entre les éléments optiques et la source d'éclairage, et à estimer les paramètres intrinsèques et extrinsèques nécessaires dans la phase de reconstruction 3D de la scène. La problématique du choix de la méthode d'inversion consiste à trouver la méthode la plus adéquate pour extraire la matrice-image de Mueller tout en réduisant l'impact du bruit. La prise en compte du critère de l'admissibilité physique s'avère essentielle. Les étapes de réduction de dimensionalité et de segmentation permettent de rendre compte des informations pertinentes réparties dans l'image de Mueller et de séparer des zones selon leurs caractéristiques polarimétriques. Par ailleurs, la reconstruction d'information de profondeur obéit aux mêmes contraintes que celles des techniques d'inspection industrielles. Il s'agit de reconstruire une description scénique avec deux prises de vues distinctes du même objet. Pour obtenir cette représentation tridimensionnelle, chaque image est scrutée pour obtenir une liste des points de correspondances. Cela permet de calculer la matrice fondamentale qui décrit les transformations mathématique et géométrique liant les deux caméras. Ces informations permettent de trouver la position 3D des paires de points appariés dans les deux images.

Nous illustrerons les problèmes que l'on peut rencontrer lors d'une inspection industrielle comme l'aveuglement de la caméra par une arête vive, ou par une zone à forte réflectivité. D'autre part, la présence d'objets à transparence partielle ou totale ne permet pas une reconstruction complète de la scène avec des images classiques.

L'apport de la polarimétrie dans le cadre de la reconstruction et de l'inspection d'objets industriels sera mis en évidence dans ce chapitre sur plusieurs objets. La particularité de la plupart de ces objets manufacturés est qu'ils possèdent des contours bien définis et des surfaces homogènes. En revanche, leur réflectivité est telle que les méthodes conventionnelles de reconstruction 3D ne permettent pas d'obtenir des résultats satisfaisants.

Ainsi, un premier objectif est d'obtenir des contours nets dans les régions d'ambiguïtés ou peu contrastées, à l'aide des images polarimétriques. Ensuite, on va identifier les plans

sur l'objet requis par la triangulation de Delaunay-Voronoi. Pour chaque sommet du triangle dans l'image de gauche, son point homologue dans l'image de droite sera calculé. Cette mise en correspondance va nous permettre d'obtenir la forme de l'objet 3D grâce à la reconstruction tridimensionnelle de chaque triangle mis en correspondance. Une telle approche possède l'avantage de partager l'image selon plusieurs plans et cela va permettre d'utiliser la notion d'homographie qui existe entre deux plans (triangle) pour remonter après à l'estimation de la forme 3D.

5.3 Aveuglement de la caméra

Un objet ayant une surface spéculaire, figure 5.1, ou contenant une arête vive, figure 5.2(a), risque de causer un aveuglement de la caméra. Cet aveuglement est lié à la présence de points (régions) saturés qui encombrant la résolution dynamique du système d'acquisitions. Des zones d'ombres ou peu contrastées peuvent aussi apparaître. Généralement les méthodes classiques arrivent à partiellement résoudre ce problème soit par un changement de la position de l'objet et par un repositionnement des sources d'éclairage soit en modifiant les positions relatives entre les deux prises de vues. Ces procédures sont intégrées dans une étape de planification dynamique et peuvent être considérablement lentes surtout si la scène est complexe et contient toutes les problématiques mentionnées précédemment, c'est-à-dire si elle contient à la fois des objets à arêtes vives, des zones à forte réflectivité et des objets transparents. En revanche, les images de Mueller peuvent constituer une solution potentielle surtout que la cadence des nouveaux systèmes polarimétriques peut atteindre 40 images par seconde, ce qui permet d'introduire l'imagerie polarimétrique dans la phase de contrôle qualité. Le coût des polarimètres imageants rapides est la seule contrainte à ce stade.

Les exemples illustrés dans les figures 5.1 et 5.2 nous montrent quelques problèmes rencontrés lors de prises de vues conventionnelles. La saturation ou les zones peu contrastées causent, sans aucun doute, des pertes d'information de contours et ne permettent pas d'extraire ainsi une représentation complète de la scène.

5.4 Algorithme de reconstruction

L'étalonnage du capteur pour la reconstruction 3D est un problème d'estimation de paramètres. Les paramètres intrinsèques de la caméra dans l'espace image doivent être déterminés, comme toute position 3D de chaque couple de points de correspondance.

L'algorithme que nous adoptons contient une première étape qui est une phase d'étalonnage de la caméra suivie d'une procédure d'appariement. Ensuite, l'étape de réalisabilité physique est réalisée et la réduction de dimensionnalité effectuée dans le but

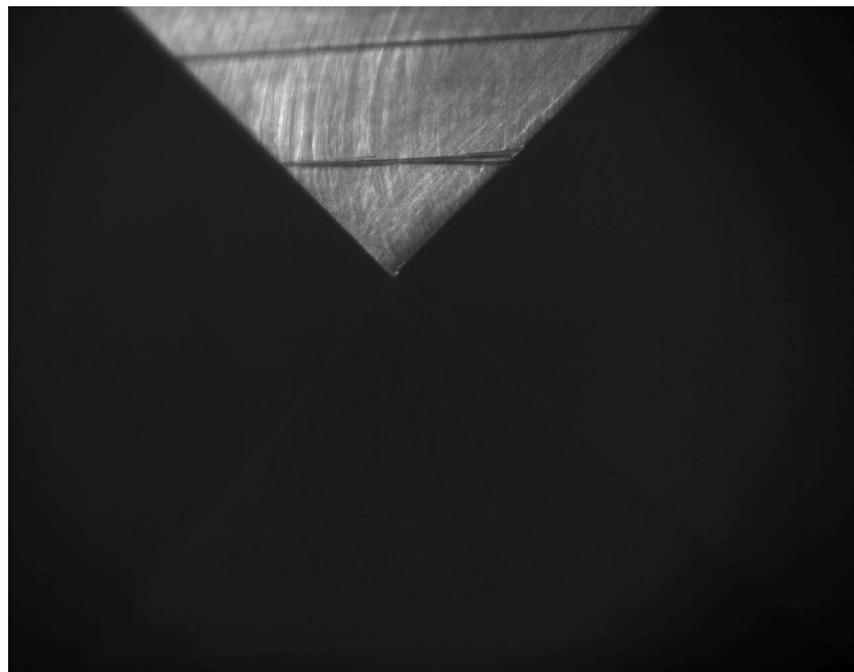
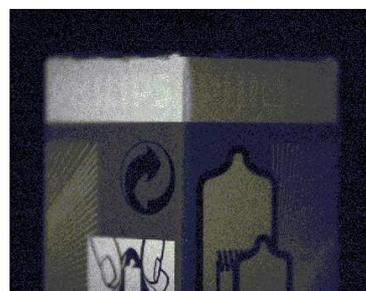


Figure 5.1 – Aveuglement de la caméra par une surface à forte réflectivité. Image conventionnelle d'une pyramide manufacturée (voir figure 5.9).



(a) Image conventionnelle



(b) Image de polarisation

Figure 5.2 – (a) Aveuglement de la caméra par une arête vive, (b) élimination de l'effet par modification des états de polarisation PSA et PSG.

d'obtenir la carte de segmentation la plus précise possible. La matrice fondamentale est obtenue en utilisant des points d'intérêt appariés en utilisant les méthodes robustes d'estimation pour arriver à la représentation tridimensionnelle de la scène.

Quand la scène est complexe ou lorsqu'une seule image de polarisation ne suffit pas, nous adopterons la méthode détaillée dans figure 5.4. Elle consiste à procéder à une identification des différentes zones naturellement segmentées dans chacun des éléments de la matrice de Mueller. Ensuite, il faudra faire une reconstruction partielle de chaque canal, pour arriver

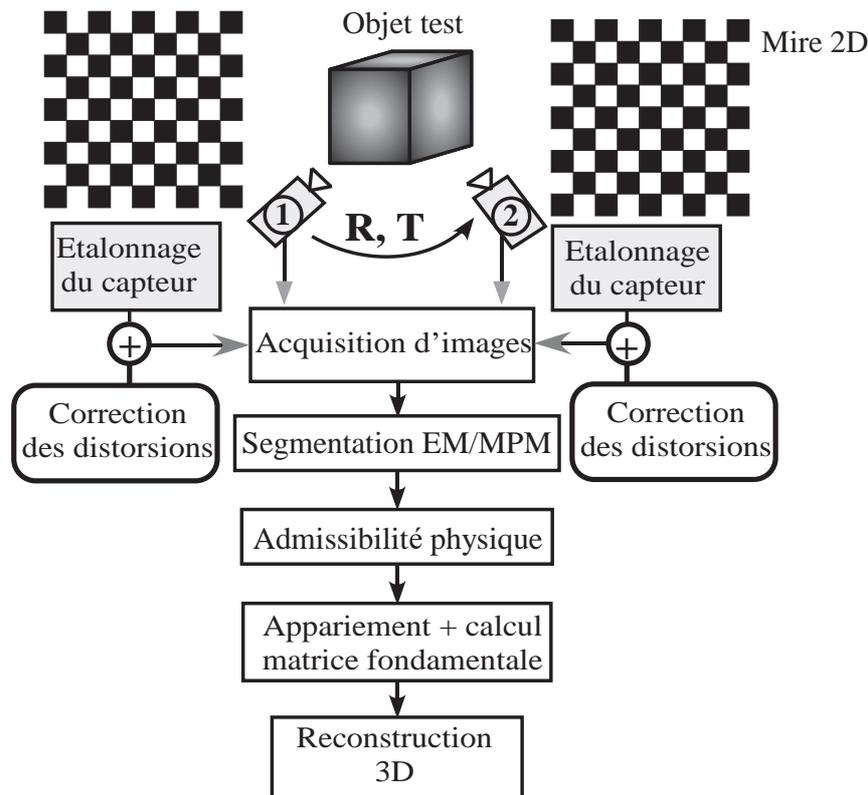


Figure 5.3 – Algorithme de reconstruction 3D.

à la fin à une reconstruction totale en combinant ces reconstructions partielles.

Appliquons maintenant l'algorithme de reconstruction 3D au parallélépipède qui a été correctement détecté avec des images polarimétriques.

L'architecture de notre système nous a imposé plusieurs contraintes sur le choix des objets utilisés. La première concerne les dimensions de l'objet qui ne doit pas dépasser 4 centimètres, en raison de limitation du champ de vue du système. La profondeur de champ est de l'ordre de 1,2 centimètres. Pour ces raisons, nous ne pouvons pas procéder à la phase d'exploitation et de validation de notre technique sur une scène plus conséquente. Les dimensions du champ de vue nous impose d'estimer la matrice fondamentale avec un nombre limité de points de correspondance. Dans le meilleurs des cas, les objets ont été reconstruits avec au maximum 20 points de correspondance. Néanmoins, grâce à la précision de la phase d'appariement (liée à la précision de la carte de segmentation), les 20 points de correspondance conduisent à des résultats acceptables.

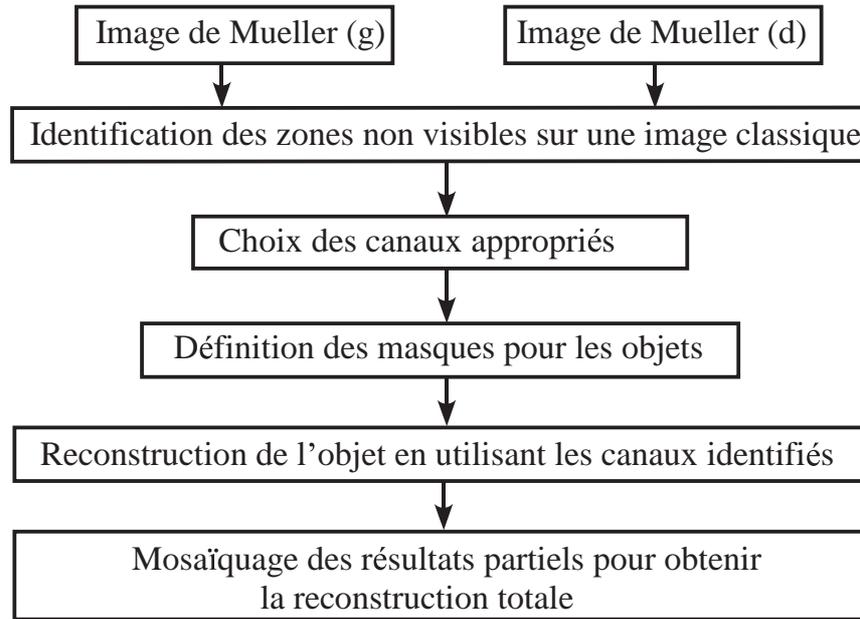


Figure 5.4 – Algorithme de reconstruction 3D polarimétrique.

5.5 Reconstruction 3D

5.5.1 Méthode géométrique

Considérons une caméra définie par son centre optique \vec{C} , et d'axe optique \vec{A} et de plan rétinien (plan image) défini par les deux axes orthogonaux \vec{U} et \vec{V} , voir figure 5.6. La projection d'un point spatial $M(x, y, z)$ sur le plan rétinien s'écrit :

$$P_u = \frac{(\vec{M} - \vec{C}) \cdot \vec{U}}{(\vec{M} - \vec{C}) \cdot \vec{A}} \quad P_v = \frac{(\vec{M} - \vec{C}) \cdot \vec{V}}{(\vec{M} - \vec{C}) \cdot \vec{A}} \quad (5.1)$$

M est le point d'intersection de deux lignes de vues. Si ces lignes sont inclinées, on considère la position spatiale située au point ayant la distance minimale entre les deux lignes de vues. On peut déterminer la direction d'une ligne de vue grâce à la relation :

$$\vec{S} = (\vec{A} \cdot \vec{P}_u - \vec{U}) \times (\vec{A} \cdot \vec{P}_v - \vec{V}) \quad (5.2)$$

Le vecteur \vec{M} qui relie ces deux lignes de vues à la position de distance minimale s'écrit :

$$\vec{M} = \vec{C}_R + \lambda \cdot \vec{S}_R - \vec{C}_L - \mu \cdot \vec{S}_L \quad (5.3)$$

On impose que \vec{M} est normale aux vecteurs \vec{S}_L et \vec{S}_R :

$$\vec{M} \cdot \vec{S}_L = 0 \quad \vec{M} \cdot \vec{S}_R = 0 \quad (5.4)$$

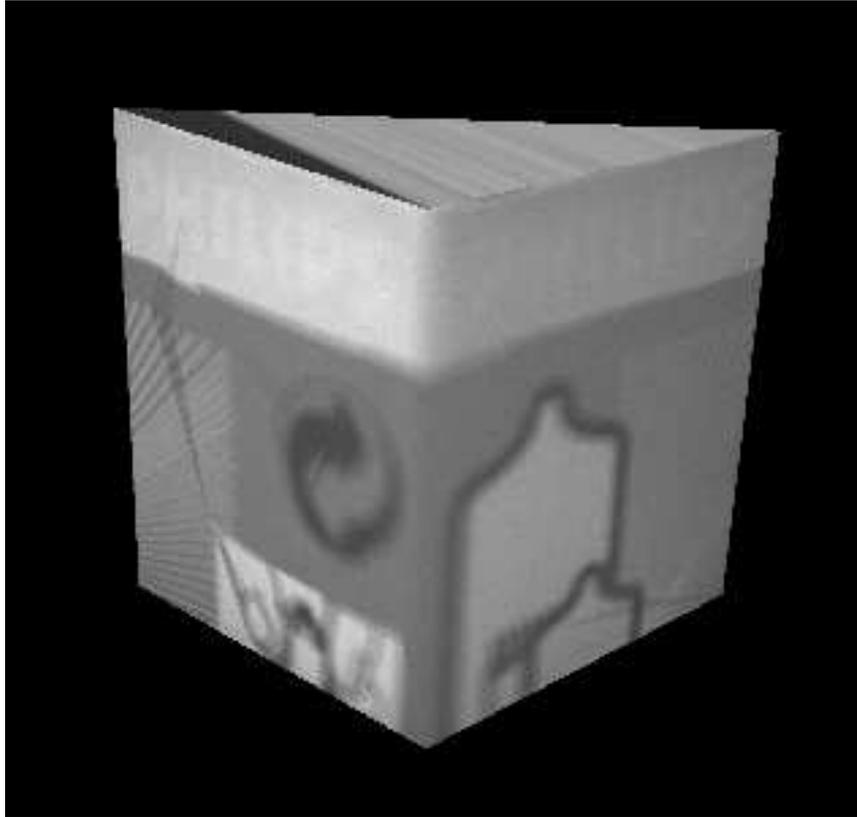


Figure 5.5 – Algorithme de reconstruction 3D appliqué à un parallélépipède.

D'après les équations ci-dessus, le calcul de λ et μ est fait d'une manière directe [103]. Finalement, la position spatiale du point recherché est donnée par :

$$\vec{\mathbf{M}} = 0.5 \cdot (\vec{\mathbf{C}}_R + \lambda \cdot \vec{\mathbf{S}}_R + \vec{\mathbf{C}}_L + \mu \cdot \vec{\mathbf{S}}_L) \quad (5.5)$$

5.5.2 Méthode analytique

Le même point $\mathbf{M}(x, y, z)$ de l'espace tridimensionnel est projeté sur les deux images stéréoscopiques. Dans le plan image 1, on écrit :

$$\omega \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_1 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

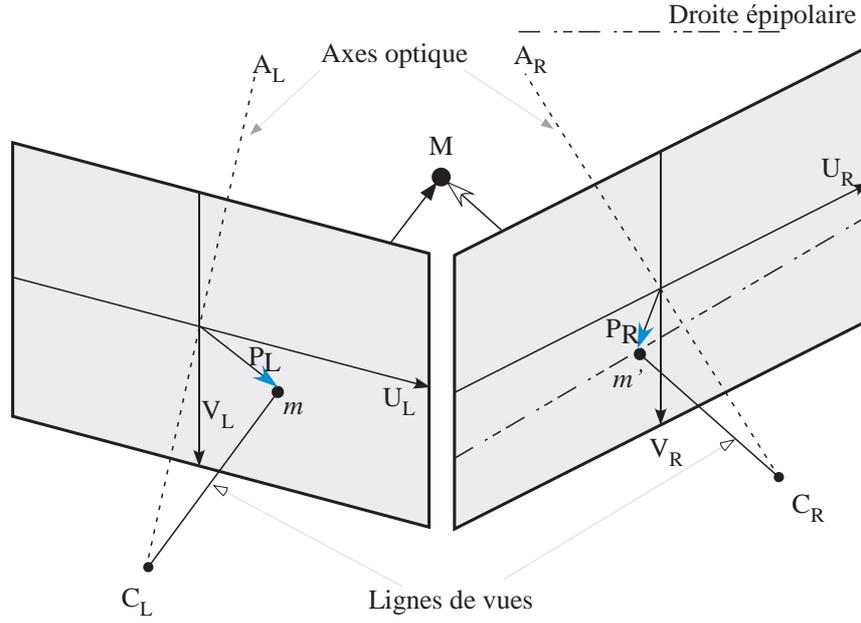


Figure 5.6 – Reconstruction d'un point dans l'espace 3D avec deux points de correspondance.

et dans le plan image 2 on a :

$$\omega' \begin{bmatrix} u' \\ v' \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{P}_2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Grâce aux points de correspondance $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ entre les deux images on peut obtenir les coordonnées 3D des points. Par convention, on suppose que le centre de l'image de gauche est la référence des coordonnées :

$$\mathbf{P}_{3 \times 4} = \mathbf{A}_1 \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$\mathbf{P}'_{3 \times 4} = \mathbf{A}_2 \begin{bmatrix} \mathbf{R}_{3 \times 3} & \mathbf{t}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

$$(5.10)$$

Ainsi, pour chaque point de correspondance, on obtient sa position 3D dans l'espace suivant :

$$\begin{bmatrix} p_{00} - p_{20}u_i & p_{01} - p_{21}u_i & p_{02} - p_{22}u_i \\ p_{10} - p_{20}v_i & p_{11} - p_{21}v_i & p_{12} - p_{22}v_i \\ p'_{00} - p'_{20}u'_i & p'_{01} - p'_{21}u'_i & p'_{02} - p'_{22}u'_i \\ p'_{10} - p'_{20}v'_i & p'_{11} - p'_{21}v'_i & p'_{12} - p'_{22}v'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{23}u_i - p_{03} \\ p_{23}v_i - p_{13} \\ p'_{23}u'_i - p'_{03} \\ p'_{23}v'_i - p'_{13} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

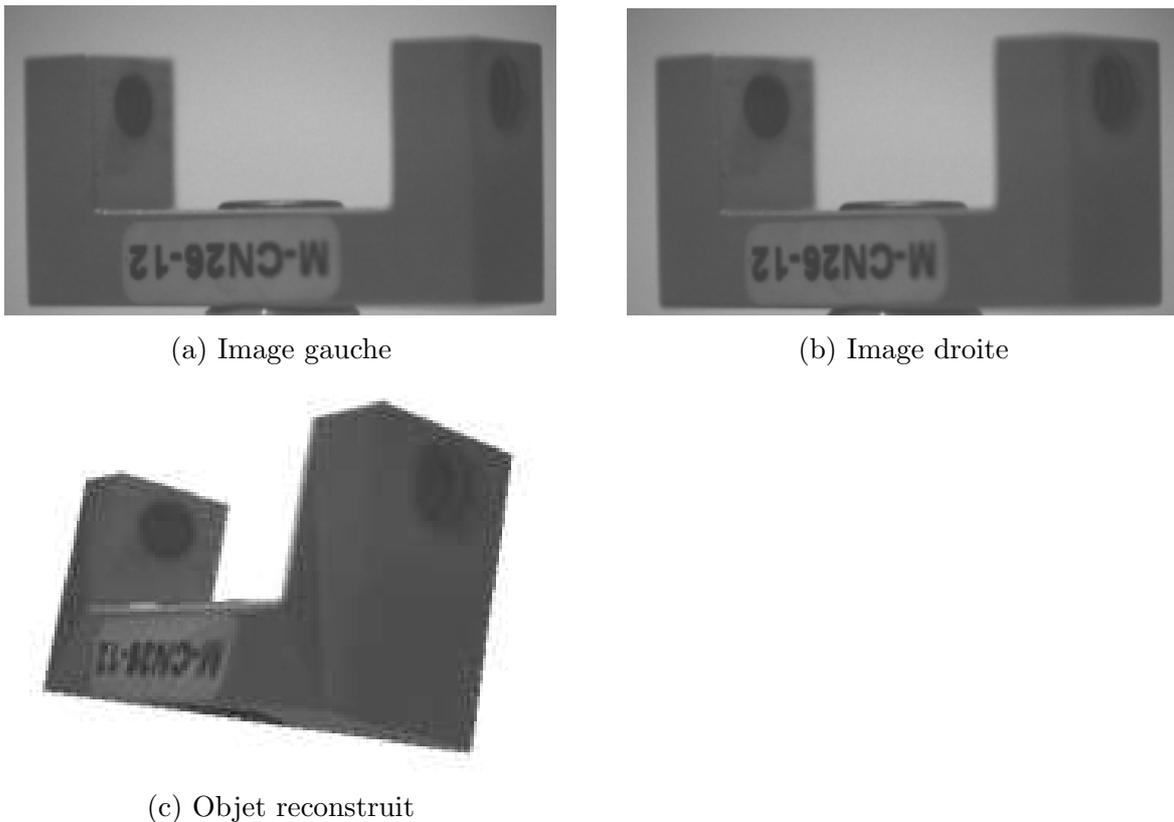


Figure 5.7 – *Reconstruction tridimensionnelle d'un objet métallique avec deux prises de vues stéréoscopiques.*

5.5.3 Reconstruction de pièces industrielles

La reconstruction 3D d'objets manufacturés requiert une phase de détection des contours et de segmentation des deux images stéréoscopiques. C'est le rôle de l'algorithme de segmentation introduit dans le chapitre précédent. Une fois les contours de l'objet définis, la recherche de la matrice fondamentale est obtenue avec des points d'intérêts appariés. La deuxième étape consiste à partager chaque zone en une combinaison de triangles de Delaunay-Voronoi. Ensuite, on cherche à définir et à imposer une relation d'homographie entre ces triangles dans les deux images. La reconstruction 3D est obtenue en reliant les sommets de ces triangles.

5.5.4 Reconstruction d'un cylindre

La reconstruction d'une surface lisse comme celle du cylindre a aussi été expérimentée. Les résultats ont montré que l'approche utilisée fournit une reconstruction précise des surfaces courbes. Dans cet exemple, la connaissance du modèle de cylindre est apportée par des mesures des points reconstruits.

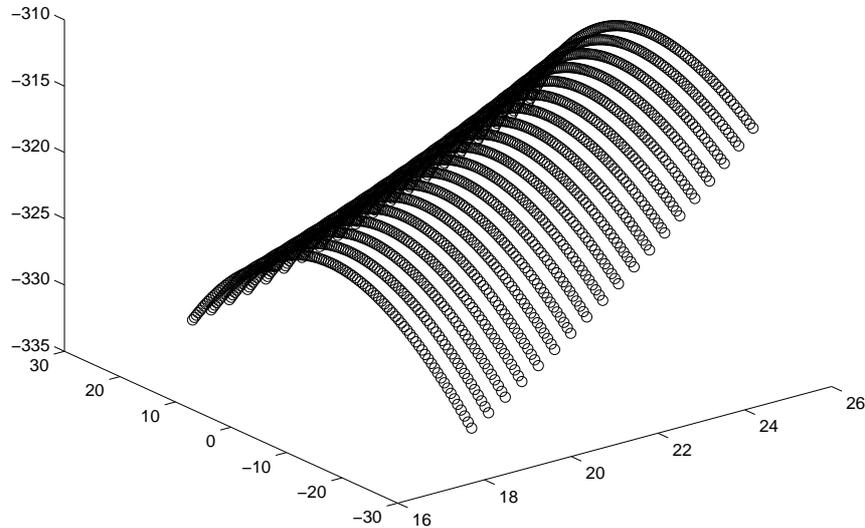


Figure 5.8 – *Reconstruction de la surface d'un cylindre. Les unités sont en millimètres.*

La mise en correspondance est effectuée en calculant la matrice fondamentale avec deux méthodes distinctes. La première consiste à estimer la matrice fondamentale en connaissant le déplacement géométrique d'une caméra par rapport à l'autre. Les paramètres intrinsèques sont introduits lors de l'étape d'étalonnage qui se fait indépendamment des prises de vues stéréoscopiques. La deuxième méthode consiste à calculer la matrice fondamentale avec des points appariés. Ainsi, pour chaque point dans l'image de gauche, le point correspondant dans l'image de droite n'est autre que l'intersection des deux droites épipolaires obtenues par deux méthodes différentes de calcul de la matrice fondamentale. Cette mise en correspondance permet ensuite de mener plus aisément la phase de reconstruction tridimensionnelle.

5.6 Évaluation géométrique

L'utilisation de la CAO est d'un intérêt capital pour l'inspection. Le modèle CAO utilisé pour une tâche d'inspection est considéré comme étant la description idéale de l'objet. En effet, les données CAO constituent une description analytique de l'objet incluant souvent une paramétrisation explicite de la forme des surfaces. Avec les spécifications de tolérance associées aux éléments géométriques de pièces quasi-polyédriques, il est possible de proposer une méthode de comparaison entre images réelles et représentations conceptuelles basée sur l'algorithme ICP. Une telle approche offre la possibilité d'évaluer avec précision les

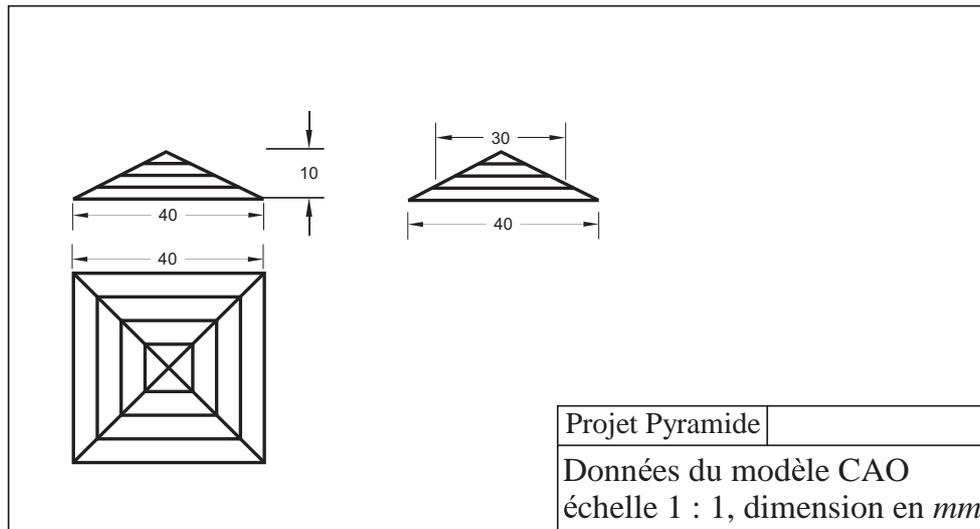


Figure 5.9 – *Modèle CAO de la pyramide manufacturée.*

pièces manufacturées et de vérifier si les tolérances prédéfinies sont respectées. Elle repose sur une comparaison entre les points de contour extraits de l’objet reconstruit et les points du modèle géométrique.

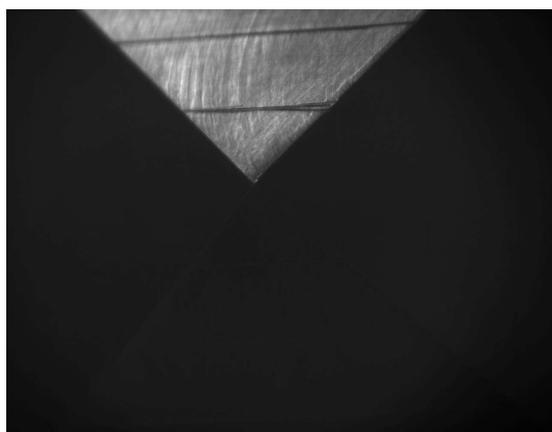
5.6.1 Reconstruction d’une pièce manufacturée

Une des applications possibles de la stéréo-polarimétrie est l’inspection de pièces industrielles. Pour cela, la validation quantitative de l’apport de la polarimétrie à la stéréovision conventionnelle a été effectuée par la fabrication d’une pyramide dont les dimensions réelles sont connues à 1/10 de millimètre et la comparaison du modèle ainsi reconstruit au modèle géométrique est faite par une technique de recalage et d’enregistrement des formes tridimensionnelles basée sur l’algorithme “Iterative Closest Point” ICP [104].

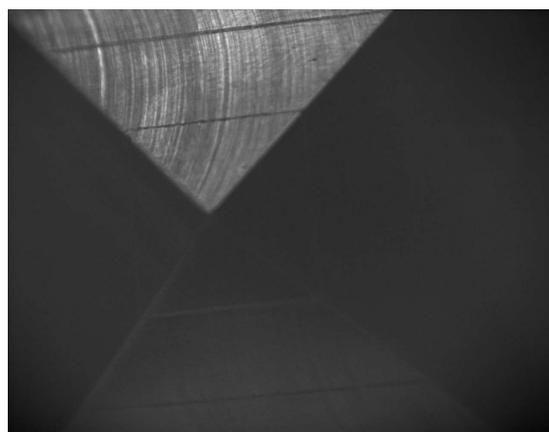
Usuellement, l’opération d’inspection dimensionnelle consiste à déterminer la conformité d’un produit usiné, tout en vérifiant s’il dévie d’une liste de spécifications imposées. Ainsi, l’inspection implique-t-elle la mesure de certaines caractéristiques comme les dimensions géométriques ou la finition de surfaces.

On vérifie la conformité de la pièce usinée en tenant compte des tolérances. La validité de la procédure d’inspection requiert une connaissance précise des erreurs induites par l’incertitude de mesure du capteur utilisé d’une part et, d’autre part, par la mise en correspondance du modèle et des points 3D décrivant la pièce à inspecter. Ces erreurs doivent être négligeables ou dans les limites de tolérance.

Dans la figure 5.10 (a) et (b), nous montrons deux prises de vues issues d’un système



(a) Image conventionnelle gauche



(b) Image conventionnelle droite



(c) Objet reconstruit par imagerie polarimétrique

Figure 5.10 – *Reconstruction tridimensionnelle d'une pièce manufacturée.*

d'acquisition classique : l'éclairage de la scène est une lumière blanche non polarisée. Avec des techniques de reconstruction usuelles, ces deux images ne permettent pas d'obtenir une représentation 3D précise. Ainsi, les mesures de précision de la pièce (scène) reconstruite ne seront jamais celles de l'objet réel. Par contre, en utilisant les images de polarisation et surtout l'image de Mueller, nous avons obtenu à une représentation précise de l'objet original, figure 5.10(c). Cela est dû à la pertinence des informations contenues dans l'image de Mueller. Par contre, la limitation de notre système nous a empêché d'avoir une vue complète de tout l'objet. Seule la moitié de la pyramide a été couverte par le système de prise de vue.

La figure 5.10(c) montre que l'imagerie de polarisation est un support riche en information qui permet de procéder à une reconstruction avec précision quand les approches d'imagerie conventionnelle échouent.

Dans la figure 5.11 se trouve la représentation de l'objet en modèle fil de fer reconstruit

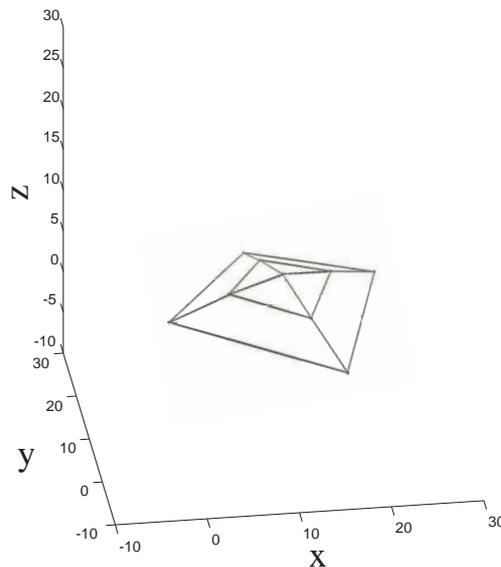


Figure 5.11 – *Modèle reconstruit en fil de fer avec deux prises de vues polarimétriques. Les axes sont gradués en millimètres.*

avec deux prises de vues stéréoscopiques de Mueller. Cet objet est utilisé dans la comparaison de l'objet reconstruit au modèle CAO de la pièce usinée.

Sur le plan applicatif, l'acquisition de 16 images demande un temps d'acquisition et de traitement d'images très élevé, surtout si on utilise des lames rotatives contrôlées par des moteurs mécaniques. L'utilisation de cristaux liquides peut considérablement réduire le temps d'acquisition et permettre des cadences du temps-réel.

5.6.2 Estimation d'erreurs

La méthode de recalage "Iterative Closest Point" ICP a été utilisée pour le recalage des formes géométriques. Elle consiste à extraire un nuage de points du modèle CAO et à recalculer les points reconstruits par l'algorithme 3D sur ces points. Ce recalage est rigide car il met en jeu une rotation et une translation. Lors de la phase d'initialisation le vecteur de translation entre le modèle (fixe) et les points reconstruits correspond à une translation simple entre les deux barycentres des points. Quant à la matrice de rotation initiale, elle correspond à la matrice identité 3×3 . L'algorithme ICP introduit ensuite des variations sur les angles de rotation 3D et sur le vecteur de translation de sorte à réduire la distance, au sens des moindres carrés, entre les points du modèle et les points reconstruits.

Dans notre expérimentation sur la pyramide, l'erreur entre les points du modèle et l'objet reconstruit varie entre $60 \mu m$ et $200 \mu m$. Nous rappelons qu'une reconstruction 3D

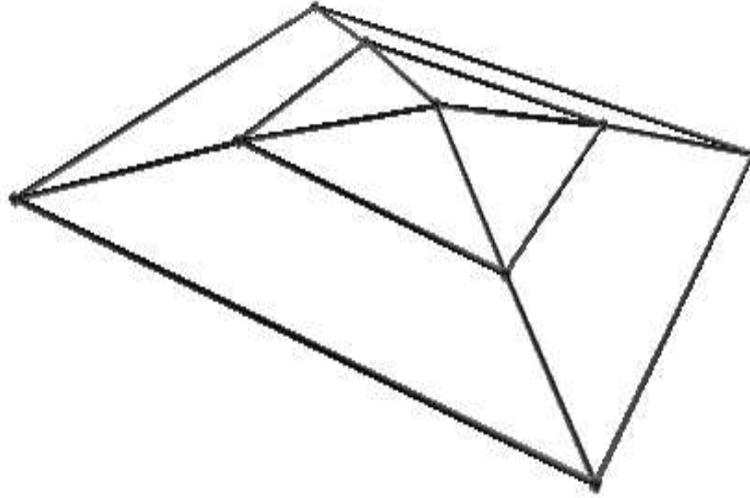


Figure 5.12 – Vue agrandie du modèle reconstruit en fil de fer.

de la pyramide à partir des images d'intensité classiques n'était pas possible, seule la reconstruction en utilisant l'image de Mueller nous a permis d'obtenir cette précision.

5.7 Discussions

La segmentation et la reconstruction tridimensionnelle peuvent être considérées comme un problème dual. Une carte de segmentation précise peut considérablement améliorer l'estimation de la matrice fondamentale ; une matrice fondamentale précise peut améliorer la carte de segmentation : un point dans l'image de gauche et son homologue dans l'image de droite appartiennent tous les deux à la même classe. Le traitement dual de cet approche nécessite un travail plus approfondi. Il faut bien adapter une technique de segmentation qui pourrait être exploitable et régularisée avec la matrice fondamentale ; la méthode de "Minimum Descriptor Length" ou *MDL* apparaît comme étant la mieux adaptée à traiter cette dualité. Elle consiste à séparer chaque région avec des lignes dont les équations géométriques sont connues, ce qui facilite la phase de régularisation des contours dans la paire d'images stéréoscopiques.

Un autre aspect qui s'avère intéressant à considérer est l'amélioration de la résolution des points d'appariement jusqu'au sous-pixel. Il apparaît qu'il est possible d'atteindre une résolution de l'ordre de 1/100 de pixel. Cela va permettre de diminuer les erreurs

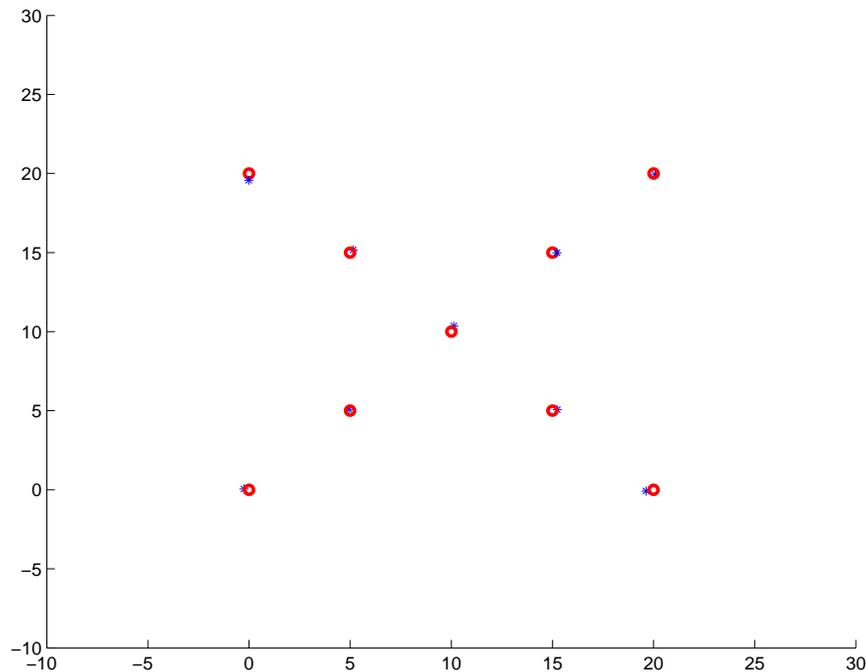


Figure 5.13 – *Comparaison entre l'objet reconstruit et le modèle géométrique. Les cercles représentent les positions idéales et les étoiles représentent les positions de l'objet reconstruit après recalage. Les axes sont gradués en millimètres.*

de reconstruction tridimensionnelle. Une étude de répétabilité est aussi nécessaire pour une validation de la méthode que nous avons étudiée. Elle consiste à effectuer la reconstruction de la même pièce des centaines de fois afin d'estimer les écarts entre différentes reconstructions.

Dans le cadre de l'imagerie de polarisation, la mise au point d'une approche multi-spectrale apparaît nécessaire pour des scènes complexes. Cette partie semble nécessaire surtout que le choix de la longueur d'onde reste un facteur important pour la visualisation des scènes complexes. Cette nécessité est d'autant plus justifiée que la réponse optique des objets dépend en général de la longueur d'onde.

6.1 Travail accompli

LA conception d'un système imageur polarimétriquement précis requiert une maîtrise des aspects expérimentaux allant de l'acquisition des paires d'images résolues en polarisation à la reconstruction d'objets (3D) de Mueller. Dans cette optique, les questions liées à l'admissibilité physique des matrices, au positionnement d'objets, à la profondeur de champ de l'optique, ainsi qu'à l'influence du bruit d'observation ont été abordées avec rigueur dans le cadre de ce travail doctoral.

Trois méthodes d'inversion polarimétriques ont été étudiées et leurs performances analysées. Cela signifie que suivant le cahier des charges imposé, la méthode la plus adéquate peut à même être sélectionnée. Par ailleurs, en termes de restitution d'images de Mueller admissibles, des techniques d'optimisation robustes ont été expérimentées avec succès. Sur le plan de la segmentation, les études sur la propagation et l'amplification du bruit de mesure ont permis de mettre au point une méthode de construction des cartes de segmentation où l'information polarimétrique y est préservée. Enfin, l'apport de la polarimétrie à la stéréovision a été mis en évidence dans l'exemple concret de la reconstruction 3D d'un échantillon-test manufacturé avec une précision sub-millimétrique.

6.2 Contributions

6.2.1 Méthodes d'inversion

La première contribution concerne l'inversion polarimétrique dont la finalité est d'estimer les images de Mueller à partir d'images brutes. Pour cela, une étude comparative de trois méthodes connues a été menée.

La première est la méthode d'inversion matricielle directe (MI) qui consiste à ne considérer que le nombre minimal d'acquisitions, c'est-à-dire 4×4 , pour extraire la matrice-image de Mueller. Cette méthode présente une sensibilité extrême au bruit de mesure mais possède l'avantage d'être la plus rapide.

La deuxième est la méthode du pseudo-inverse (PI) reposant sur une minimisation de l'erreur quadratique au sens des moindres carrés. Une telle méthode nécessite un temps de calcul élevé car il faut au moins 7×7 mesures pour obtenir une matrice de Mueller acceptable.

La dernière est la méthode par analyse de Fourier (FT) où les lames rotatives entrée-sortie sont synchrones dans un rapport de 1 : 5 et où les positions angulaires sont équidistantes. Les images de Mueller sont extraites des mesures expérimentales par une transformée de Fourier discrète, dont la version algorithmique, la transformée de Fourier rapide, permet de réduire considérablement le temps de calcul tout en maintenant une précision de restitution élevée.

Il a été montré, simulation et validation expérimentale à l'appui, que parmi les méthodes étudiées, la méthode FT reste la méthode la plus robuste. L'impact du bruit expérimental peut y être minimisé et le temps de restitution reste acceptable, c'est-à-dire plus élevé que la méthode MI mais plus faible que la méthode PI.

6.2.2 Admissibilité physique

Le critère d'admissibilité physique, c'est-à-dire la contrainte du degré de polarisation ou de passivité, est avant tout un critère de validation des mesures polarimétriques. L'originalité de l'approche adoptée ici est d'intégrer une telle contrainte comme contrainte active dans le processus d'inversion des équations polarimétriques. La deuxième partie de la thèse traite de cette contrainte en considérant deux approches différentes.

La première (MAP) consiste à s'inspirer des techniques utilisées pour résoudre des problèmes inverses mal posés. Ce sont des méthodes de régularisation et ici, le critère d'admissibilité physique est utilisé comme critère régularisant sur la norme des matrices intervenant dans la phase d'estimation des solutions. Sur le plan algorithmique, c'est l'approche au sens du maximum *a posteriori* qui a été retenue.

La deuxième approche (CSA) utilise le critère de Givens et Kostinski comme contrainte active lors de la recherche de la solution qui minimise une fonction de coût. Dans ce contexte, une méthode de recherche du minimum global par analyse stochastique a été proposée.

Les expérimentations sur des images de Mueller synthétiques (*phantom*) validées sur des images physiques (matrice de Mueller du vide) ont montré que la méthode CSA est plus efficace dans la recherche de matrices admissibles que la méthode de régularisation (MAP).

6.2.3 Distribution du bruit

Une matrice de Mueller expérimentale est en général obtenue par inversion des équations polarimétriques. Une des questions qui se pose est de savoir comment le bruit de mesure affecte chaque élément de la matrice de Mueller. Il apparaît qu'un tel bruit polarimétrique dépend de l'architecture du polarimètre et son influence sur la matrice de Mueller se fait suivant un schéma qui fait appel à une décomposition en quatre blocs disjoints de 2×2 . Pour un bruit d'intensité blanc et gaussien, les éléments dans chacun des blocs sont corrélés ou anti-corrélés entre eux et décorrés des éléments des autres blocs. Ces propriétés ont toutes été vérifiées sur des images expérimentales. Il est à signaler que le bruit dans le canal m_{00} de l'image de Mueller n'est autre que le bruit expérimental d'intensité.

L'étude du bruit polarimétrique a aussi révélé que le bruit d'intensité a tendance à être amplifié dans certains canaux de l'image de Mueller et que dans le cas d'un polarimètre à lames tournantes, il faut au moins 9×9 acquisitions pour que la variance du bruit dans tous les canaux de l'image de Mueller soit plus faible que la variance du bruit d'intensité.

6.2.4 Estimation-segmentation des images

Les outils qui ont été développés permettent d'obtenir des images précises sur le plan polarimétrique : il convient de savoir ce que l'on veut faire avec. Chaque objet de la scène de par sa nature physique est identifié par ses propriétés polarisantes. Disposant d'images résolues en polarisation, une de leurs utilisations naturelles est de segmenter, c'est-à-dire d'isoler, les régions en fonction de leurs propriétés polarimétriques.

À l'issue de divers expériences heuristiques sur ordinateur, il apparaît que les meilleurs résultats de segmentation ont été obtenus non pas sur des images de Mueller mais sur des images conventionnelles correctement choisies parmi celles qui ont été acquises pour inversion polarimétrique. Cela signifie que des techniques usuelles de segmentation peuvent être utilisées et que la carte de segmentation obtenue peut ensuite servir de masque dans l'étape d'extraction des propriétés de polarisation des images de Mueller.

Dans cette optique, une méthode robuste d'estimation-segmentation a été initiée. Elle repose sur l'évaluation des propriétés du bruit contenu dans l'image conventionnelle, suivant le test de Kolmogorov-Smirnov, information qui est ensuite intégrée dans une méthode d'inférence bayésienne EM/MPM dans le but d'estimer les paramètres de segmentation avec précision. Par préservation markovienne de connexions entre pixels voisins, il a ainsi été possible d'effectuer une segmentation de l'image de Mueller avec la carte de segmentation très précise obtenue sur des images brutes.

S'agissant de la reconstruction 3D par stéréovision, une telle carte s'avère indispensable lorsqu'il est question d'isoler une région polarimétriquement active, d'extraire puis de reconstruire des objets significatifs qui s'y trouvent.

6.2.5 Stéréo-polarimétrie

En stéréovision conventionnelle, c'est l'erreur de parallaxe entre deux prises de vue qui rend possible la reconstruction 3D d'un objet physique. Les paires d'images utilisées lors de la phase d'appariement sont des images conventionnelles qui correspondent au canal m_{00} de l'image de Mueller. La limitation de la méthode vient du fait que si ce canal est saturé, la reconstruction devient problématique.

Dans l'approche stéréo-polarimétrique, il s'agit de considérer tous les canaux des paires d'images de Mueller, d'en choisir certains ou des combinaisons de certains qui permettent de reconstruire les objets identifiés polarimétriquement. Par exemple, s'il faut extraire de la scène le profil 3D d'un diatténuateur, ce sera la première ligne de la matrice de Mueller qui devra être prise en compte. Par ailleurs, la possibilité de pouvoir disposer de 16 canaux dans chacune des images appariées permet certes d'éviter les canaux saturés mais introduit aussi une nouvelle problématique en ces termes : comment faut-il choisir ou combiner les canaux des paires d'images de Mueller afin de pouvoir prétendre à une reconstruction 3D optimale lorsqu'un cahier des charges est établi ?

À défaut d'avoir pu formuler une réponse suffisamment précise sur le plan formel, la démarche heuristique adoptée a été d'utiliser les cartes de segmentation obtenues sur des paires d'images brutes choisies suivant le critère du contraste maximal exhibé par l'objet à reconstruire. Ces cartes appariées constituent les masques à appliquer aux différents canaux des images de Mueller dans le but d'une reconstruction polarimétriquement dépendante, conjointement aux paramètres intrinsèques et extrinsèques usuels extraits par étalonnage.

Plusieurs méthodes d'estimation de la matrice fondamentale qui regroupe ces paramètres, ont été expérimentées. Les méthodes linéaires reposant sur l'algorithme des huit points ainsi que ses variantes comme la méthode de normalisation, sont très sensibles aux erreurs d'appariement et produisent des points aberrants. C'est pourquoi des méthodes non-linéaires ou des méthodes robustes comme la méthode des M-estimators ou la méthode des LMedS ont été adoptées dans le but d'éliminer ces points aberrants. Une matrice fondamentale plus fiable a ainsi pu être obtenue, ce qui a permis d'améliorer la reconstruction 3D subséquente. Il est à souligner que cette amélioration a été rendue possible notamment grâce à l'aspect polarimétrique. L'inconvénient de la chaîne de traitement présentée ici est que les algorithmes étant itératifs, il est nécessaire de disposer de calculateurs puissants si des cadences proches du temps réel sont requises pour une exploitation industrielle.

Sur le plan pratique néanmoins, il a été possible de procéder à une reconstruction 3D avec une précision sub-millimétrique, d'une pièce mécanique présentant des arêtes saillantes, au pouvoir réflecteur suffisamment élevé au point d'aveugler la caméra d'observation. Cette étape constitue la validation ultime de la démarche méthodologique adoptée tout au long de ce travail doctoral.

6.3 Perspectives

L'imagerie de polarisation stéréoscopique, par sa simplicité de mise en œuvre matérielle, dispose d'une potentialité d'applications allant du contrôle non-destructif à l'imagerie bio-médicale [107, 108]. Dans ce contexte, il apparaît nécessaire de disposer d'images physiquement fiables, c'est-à-dire des paires d'images de Mueller dont les niveaux de gris correspondent quantitativement à des propriétés polarimétriques bien identifiées et avec lesquelles, la reconstruction 3D peut être réalisée avec une précision sub-micronique et maîtrisée.

Sur le plan des retombées applicatives ou sociétales, la stéréovision polarimétrique est certainement adaptée au contrôle industriel non-destructif de certaines pièces mécaniques polies, disposant d'un fort pouvoir réflecteur ou d'un contour saillant. Par ailleurs, en procédant à une modification sommaire des dispositifs microscopiques de vision binoculaire, il apparaît possible d'initier une reconstruction tridimensionnelle de cellules vivantes grâce à la stéréoscopie polarimétrique, en exploitant ou en s'affranchissant de la réponse de Fresnel de la membrane cellulaire, afin de pouvoir observer le cytoplasme. Dans ce contexte, une approche multispectrale peut être nécessaire. Par ailleurs, la dynamique cellulaire impose le choix d'un matériel adapté comme les modulateurs spatiaux de lumière à base de cristaux liquides. Dans ce cadre, la recherche d'algorithmes d'inversion, d'analyse, d'extraction et de reconstruction polarimétriques rapides et fiables constitue la base d'un travail de recherches en perspective.

A.1 Transformation en base elliptique : groupe $SU(2)$

La représentation de Jones de l'Eq. 2.5 est écrite dans un repère cartésien (x, y) ; cette représentation peut être généralisée dans toute base orthogonale. Soit \mathbf{U} la matrice de dimension 2×2 qui permet de passer des vecteurs directeurs (\hat{x}, \hat{y}) aux vecteurs directeurs $(\hat{u}_A, \hat{u}_{A\perp})$ dans un repère orthogonal quelconque, on peut écrire :

$$(\hat{x}, \hat{y}) = \mathbf{U} \cdot (\hat{u}_A, \hat{u}_{A\perp}) \quad (\text{A.1})$$

Il est possible de relier les composantes du vecteur champ électrique dans toute base orthogonale aux composantes usuelles; cela est mathématiquement formulé par :

$$[E_A, E_{A\perp}] = \mathbf{U}_{A,A\perp}^{-1} \cdot [E_x, E_y]^\top \quad (\text{A.2})$$

Selon cette représentation, la matrice de changement de base $\mathbf{U}_{2 \times 2}$ doit satisfaire aux deux conditions suivantes :

1. $\mathbf{U}\mathbf{U}^{\top*} = \mathbf{I}_{2 \times 2}$ (matrice identité) \Rightarrow conservation de l'énergie de l'onde.
2. $\det(\mathbf{U}) = 1$ \Rightarrow assure la définition correcte et la préservation de la phase.

Si α est la phase absolue de l'onde définie dans Fig. A.1, et si (ϕ, ε) représentent l'orientation et l'ellipticité d'une onde monochromatique, la matrice \mathbf{U} peut s'écrire :

$$\mathbf{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix}}_{U_2(\phi)} \underbrace{\begin{bmatrix} \cos \varepsilon & i \sin \varepsilon \\ i \sin \varepsilon & \cos \varepsilon \end{bmatrix}}_{U_2(\varepsilon)} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{bmatrix}}_{U_2(\alpha)}. \quad (\text{A.3})$$

Pour un changement de repère entre deux bases orthogonales quelconques, on peut écrire :

$$[E_B, E_{B\perp}] = \mathbf{U}_{B,B\perp}^{-1} \mathbf{U}_{A,A\perp} \begin{bmatrix} E_A \\ E_{A\perp} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

où $\mathbf{U}_{B,B\perp}$ et $\mathbf{U}_{A,A\perp}$ sont deux matrices de changement de base par rapport au repère cartésien de référence (x, y) . Cette transformation entre deux bases elliptiques définit le groupe spécial unitaire $SU(2)$.

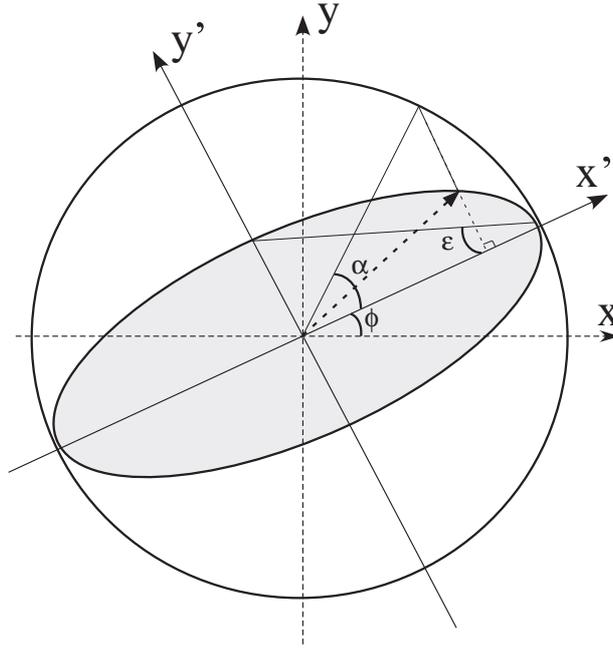


Figure A.1 – Représentation géométrique de la phase absolue α .

A.2 Transformation en base elliptique : groupe O_4

Il existe une relation d'homomorphisme entre le groupe $SU(2) \mapsto \mathbf{O}(3)$, la décomposition sur la base des matrices de Pauli prend la forme suivante :

$$[\mathbf{O}_3(2\theta)]_{i,j} = \frac{1}{2} \text{Tr} ([\mathbf{U}_2(\theta)]^{\text{T}*} \sigma_i [\mathbf{U}_2(\theta)] \sigma_j) \quad (\text{A.5})$$

où σ_i et σ_j sont les matrices de Pauli telles que :

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Nous pouvons noter que les matrices de Pauli correspondent à des retardateurs demi-onde horizontal (σ_1), linéaire 45^{deg} (σ_2) et circulaire droite (σ_3).

La transformation unitaire formant le groupe \mathbf{O}_4 s'écrit :

$$\mathbf{O}_4 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\phi & -\sin 2\phi & 0 \\ 0 & \sin 2\phi & \cos 2\phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{O_4(2\phi)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\varepsilon & 0 & -\sin 2\varepsilon \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin 2\varepsilon & 0 & \cos 2\varepsilon \end{bmatrix}}_{O_4(2\varepsilon)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ 0 & 0 & \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}}_{O_4(2\alpha)} \quad (\text{A.7})$$

Dans le cas d'une représentation de Stokes, le changement de repère entre deux bases orthogonales quelconques s'écrit :

$$S_{B,B^\perp} = \mathbf{O}_{B,B^\perp}^{-1} \mathbf{O}_{A,A^\perp} S_{A,A^\perp}. \quad (\text{A.8})$$

où \mathbf{O}_{B,B^\perp} et \mathbf{O}_{A,A^\perp} sont les deux matrices de changement de base \mathbf{O}_4 par rapport au repère cartésien de référence (x, y) .

A.3 Méthode d'estimation de la matrice de rotation

Soit une matrice \mathbf{Q} de dimension 3×3 : comment trouver à partir de $\mathbf{Q}_{3 \times 3}$ la meilleure approximation $\mathbf{R}_{3 \times 3}$ qui correspond à une matrice de rotation ?

Mathématiquement, on peut formuler le problème de la manière suivante :

$$\arg_{\mathbf{R}} \min \|\mathbf{R} - \mathbf{Q}\|_{Frobenius}^2 \quad \text{subjected to : } \mathbf{R}^\top \mathbf{R} = \mathbf{I}_{3 \times 3} \quad (\text{A.9})$$

En manipulant simplement l'équation précédente, nous arrivons à la forme suivante :

$$\|\mathbf{R} - \mathbf{Q}\|_F^2 = 3 + \text{Tr}(\mathbf{Q}^\top \mathbf{Q}) - 2\text{Tr}(\mathbf{R}^\top \mathbf{Q}) \quad (\text{A.10})$$

Ainsi, minimiser $\|\mathbf{R} - \mathbf{Q}\|_F^2$ revient à maximiser la trace de $\mathbf{R}^\top \mathbf{Q}$. Cela est fait de la manière suivante : soit la matrice \mathbf{Q} dont la décomposition en valeurs singulières est $\text{svd}(\mathbf{Q}) = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^\top$ où \mathbf{S} est la matrice diagonale de valeurs singulières rangées dans l'ordre décroissant, \mathbf{U} et \mathbf{V}^\top représentent les vecteurs propres de la matrice \mathbf{Q} . On peut démontrer que la matrice de rotation \mathbf{R} extraite de la matrice \mathbf{Q} prend la forme suivante :

$$\mathbf{R} = \mathbf{U}\mathbf{I}\mathbf{V}^\top = \mathbf{U}\mathbf{V}^\top \quad (\text{A.11})$$

Si \mathbf{Q} est une matrice de rotation, \mathbf{R} sera identique à \mathbf{Q} .

Bibliographie

- [1] O. Faugeras and Q. T. Luong , *The Geometry of Multiple Images* (MIT Press, 2001).
- [2] J. S. Tyo, D. L. Goldstein, D. B. Chenault and J. A. Shaw, “ Review of passive imaging polarimetry for remote sensing applications,” *Appl. Opt.* **45**, No. 22, 5453-5469 (2006).
- [3] H. C. Longuet-Higgins, “ A computer algorithm for reconstructing a scene from two projections,” *Nature* **293** (1981).
- [4] B. Albouy, S. Treuillet, Y. Lucas and D. Birov, “ Fundamental matrix estimation revisited through a global 3D reconstruction framework,” *Acivs*, 185-192 (2004).
- [5] Z. Zhang, “ Determining the fundamental matrix and its uncertainty : A review,” INRIA Report No. 2927 (1996).
- [6] J. L. Pezzaniti and R. A. Chipman, “ Mueller matrix imaging polarimetry,” *Opt. Eng.* **34**, 1558-1568 (1995).
- [7] J. E. Ahmad and Y. Takakura, “ Error analysis for rotating active Stokes-Mueller imaging polarimeters,” *Opt. Lett.* **31**, (2006).
- [8] J. E. Ahmad and Y. Takakura, “ Improving segmentation maps using polarization imaging,” *ICIP'07*, San Antonio, Texas (2007).
- [9] J. E. Ahmad and Y. Takakura, “ Segmentation-Estimation strategy applied to noisy Mueller images,” *EOS'07*, Lille (2007).
- [10] Y. Takakura and J. E. Ahmad, “ Noise distribution of Mueller matrices retrieved with active rotating polarimeters,” *soumis à Appl. Opt.* (2007).
- [11] J. E. Ahmad and Y. Takakura, “ Estimation of physically realizable Mueller matrices from regularized constraint optimization,” *PSIP'07*, Mulhouse (2007).
- [12] J. E. Ahmad and Y. Takakura, “ Estimation of physically realizable Mueller matrices from experiments using global constrained optimization,” *Opt. Express* **15** (2007).
- [13] J. E. Ahmad and Y. Takakura, “ Stereo-Polarimetric Measurement of pair of Mueller images for Three Dimensional Partial Reconstruction,” *EUSIPCO'06*, Florence (2006).

- [14] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 7th edition (Cambridge, 2001).
- [15] R. C. Jones, "New Calculus for the Treatment of Optical Systems I. Description and Discussion of the Calculus," *J. Opt. Soc. Am.*, **31** (1941).
- [16] E. Wolf, "Coherence Properties of Partially Polarized Electro-magnetic Radiation," *Il Nuovo Cimento* **13** (1959).
- [17] G. G. Stokes, "On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources," *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **9** (1852).
- [18] H. Mueller, "The foundations of optics", *J. Opt. Soc. Am.* **38**, (1948).
- [19] H. Poincaré, "Théorie mathématique de la lumière," (Gauthiers-Villars, 1892).
- [20] J. J. Gil and E. Bernabeu, "A depolarization criterion in Mueller matrices," *Opt. Acta.* **32** (1985).
- [21] H. Hurwitz Jr. and R. C. Jones, "A New Calculus for the Treatment of Optical Systems II. Proof of Three General Equivalence Theorems," *J. Opt. Soc. Am.*, **31** (1941).
- [22] S. Y. Lu and R. A. Chipman, "Interpretation of Mueller matrices based on polar decomposition," *J. Opt. Soc. Am. A* **13**, No.5, 1106-1113 (1996).
- [23] J. Morio and F. Goudail, "Influence of the order of diattenuator retarder and polarizer in polar decomposition of Mueller matrices," *Opt. Lett.* **29**, No.19, 2234-36 (2004).
- [24] B. DeBoo, J. Sasian and R. Chipman, "Degree of polarization surfaces and maps for analysis of depolarization," *Opt. Express*, **12**, No. 20, 4941-4958 (2004).
- [25] R. M. Azzam, "Photopolarimetric measurement of the Mueller matrix by Fourier analysis of a single detected signal," *Opt. Lett.* **2**, No.6, 148-150 (1978).
- [26] K. Koshikawa and Y. Shirai, "A model-based recognition of glossy objects using their polarimetric properties," *Advanced Robotics* **2**, No.2 (1987).
- [27] D. Miyazaki, K. Kagesawa and K. Ikeuchi, "Transparent Surface Modeling from a Pair of Polarization Images," *IEEE PAMI* **26**, No.1 (2004).
- [28] T. C. Nguyen and T. S. Huang, "Quantization error in axial motion stereo on rectangular-tessellated image sensors," *Intern. Conf. on Patt. Recog.* **1** (1992).
- [29] C. Carmona, A. Ayache and C. Krey, "Study of an axial stereovision system," *Intern. Conf. ARCV* **1** (1990).
- [30] D. S. Sabatke, M. R. Descour, E. Dereniak, W. C. Sweatt, S. A. Kemme and G. S. Phipps, "Optimization of retardance for complete Stokes polarimeter," *Opt. Lett.* **25**, 802-804 (2000).
- [31] M. Smith, "Optimization of a dual-rotating-retarder Mueller matrix polarimeter," *Appl. Opt.* **41** (2002).
- [32] J. S. Tyo, "Design of optimal polarimeters : maximization of signal-to-noise ratio and minimization of systematic error," *Appl. Opt.* **41**, No. 4, 619-630 (2002).
- [33] M. W. Burke, *Handbook of machine vision engineering* (Chapman & Hall, 1996).

- [34] L. J. van Vliet, F. R. Boddeke, D. Sudar, and I. T. Young. *Image detectors for digital image microscopy* (John Wiley & Sons, 1998).
- [35] J. C. Mullikin, L. J. van Vliet, H. Netten, F. R. Boddeke, G. van der Feltz, and I. T. Young, "Methods for CCD camera characterization," Proc. SPIE **2173**, Bellingham (1994).
- [36] R. Y. Tsai, "An Efficient and Accurate Camera Calibration Technique for 3D Machine Vision," Proceedings *IEEE CVPR* (1986).
- [37] J. Heikkilä and O. Silvén, "A four-step camera calibration procedure with implicit image correction," Proc. CVPR'97, *IEEE*, 1106-1112 (1997).
- [38] Z. Zhang, "A flexible new technique for camera calibration," Technical Report MSR-TR-98-71, Microsoft Research (1998).
- [39] M. P. Fetrow and J. K. Boger, "Instrument simulation for estimating uncertainties in imaging polarimeters," Opt. Eng. **45**, No. 6 (2006).
- [40] A. Ambirajan and D. C. Look, "Optimum angles for a polarimeter : part I & II," Opt. Eng. **34**, 1651-1658 (1995).
- [41] J. S. Tyo and H. Wei, "Optimizing imaging polarimeters constructed with imperfect optics," Appl. Opt. **45**, No. 22, 5497-5503 (2006).
- [42] E. Compain, S. Poirier and B. Drevillon, "General and self-consistent method for the calibration of polarization modulators, polarimeters, and Mueller-matrix ellipsometers," Appl. Optics, **38**, No. 16, 3490-3502 (1999).
- [43] A. De Martino, Y. K. Kim, E. Garcia-Caurel, B. Laude and B. Drévillon, "Optimized Mueller polarimeter with liquid crystals," Opt. Lett. **28**, No. 8, 616-618 (2003).
- [44] P. Elies, B. Le Jeune, F. Le Roy-Brehonnet, J. Cariou and J. Lotrian, "Experimental investigation of the speckle polarization for a polished aluminium sample," J. Phys. D : Appl. Phys. **30**, 29-39 (1997).
- [45] F. Boulvert, B. Boulbry, G. Le Brun, B. Le Jeune, S. Rivet and J. Cariou, "Analysis of depolarizing properties of irradiated pig skin," J. Opt.A : Pure Appl. Opt. **7**, 21-28, (2005).
- [46] D. Goldstein, "Mueller matrix dual-rotating retarder polarimeter," Appl. Opt. **31**, No.31, 6676-6683 (1992).
- [47] D. H. Goldstein and R. A. Chipman, "Error analysis of a Mueller matrix polarimeter," J. Opt. Soc. Am. A **7**, No.4, 693-700 (1990).
- [48] K. Brudzewski, "Static Stokes ellipsometer : general analysis and optimization", J. Mod. Opt. **38** (1991).
- [49] J. R. Huynen, *Phenomenological Theory of Radar Targets*, PhD. thesis, University of Technology, The Netherlands (1970).
- [50] S. R. Cloude and E. Pottier, "A Review of Target Decomposition Theorems in Radar Polarimetry," *IEEE Trans. On Geoscience and Remote Sensing* **34**, 498-518 (1996).
- [51] S. R. Cloude, "Conditions for the realisability of matrix operators in polarimetry," in *Polarization Considerations for Optical Systems II*, Proc. SPIE **1166**, 177-185 (1989).

- [52] C. Brosseau, C. R. Givens and A. B. Kostinski, "Generalized trace condition on the Mueller-Jones polarization matrix," *J. Opt. Soc. Am. A* **15**, 10, 2248-2251 (1993).
- [53] R. Simon, "The connection between Mueller and Jones matrices of polarization optics," *Opt. Comm.* **42**, 293-297 (1982).
- [54] K. Kim, L. Mandel and E. Wolf, "Relationship between Jones and Mueller matrices for random media," *J. Opt. Soc. Am. A* **4**, 433-437 (1987).
- [55] J. W. Hovenier, H. C. van de Hulst and C. V. M. van der Mee, "Conditions for the elements of the scattering matrix," *Astron. Astrophys.* **157**, 301-310 (1986).
- [56] J. W. Hovenier and C. V. M. van der Mee, "Testing scattering matrices : A compendium of recipes," *JQSRT* **55**, 649-661 (1996).
- [57] E. Landi Degl'Innocenti and J.C. del Toro Iniesta, "Physical significance of experimental Mueller matrices," *J. Opt. Soc. Am. A* **15**, No.2, 533-537 (1998).
- [58] R. Hartley, "In the defense of the Eight point Algorithm," *IEEE transaction on PAMI* **19**, No. 6, 580-593 (1997).
- [59] R. Hartley and A. Zisserman, *Multiple View Geometry*, (Cambridge U. Press, 2000).
- [60] P. E. Huber, *Robust statistics* (John Wiley & Sons, 1981).
- [61] R. J. Rousseeuw and A. M. Leroy, *Robust regression and outlier detection* (John Wiley & Sons, 1987).
- [62] J. W. Tukey, *Explortary Data Analysis* (Addison-Wesley, 1977).
- [63] D. Marquardt, "An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters," *SIAM J. Appl. Math.* **11** (1963).
- [64] S. Laveau, "Géométrie d'un système de N caméras. Théorie. Estimation. Applications.," Thèse de doctorat, école polytechnique (1996).
- [65] C. Collet, J. Zallat and Y. Takakura, "Clustering of Mueller matrix images for skeletonized structure detection," *Opt. Express* **12**, No. 7, 1271-1280 (2004).
- [66] A. Aiello, G. Puentes, D. Voigt and J. P. Woerdman, "Maximum-likelihood estimation of Mueller matrices," *Opt. Lett.* **31**, No.6, 817-819 (2006).
- [67] B. J. Howell, "Measurements of the polarization effects of an instrument using partially polarized light," *Appl. Opt.* **18**, No. 6, 808-812 (1979).
- [68] A. V. Gopala Rao, K. S. Mallesh and Sudha, "On the algebraic characterization of a Mueller matrix in polarization optics," *J. Mod. Opt.* **45**, No. 5, 955-987 (1998).
- [69] J. -F. Xing, "On the Deterministic and Non-deterministic Mueller Matrix," *J. Mod. Opt.* **39**, No. 3, 461-484 (1992).
- [70] D. M. Hayes, "Error propagation in decomposition of Mueller matrices," *SPIE* **3121**, 112-122 (1997).
- [71] F. Goudail and P. Réfrégier "Contrast definition for optical coherent polarimetric images," *IEEE Transactions PAMI* **28**, No. 7, 947-951 (2004).

- [72] J. Zallat, C. Collet and Y. Takakura, "Clustering of polarization-encoded images," *Appl. Opt.* **43**, No. 2, 283-292 (2004).
- [73] B. R. Corner, R. M. Narayanan and S. E. Reichenbach, "Noise estimation in remote sensing imagery using data masking," *Int. J. Remote Sensing* **24**, No. 4, 689-702 (2003).
- [74] J. F. Canny, "A computational approach to edge detection," *IEEE Transactions PAMI* **8**, No. 6, 679-698 (1986).
- [75] C. Liu, W. T. Freedman, R. Szeliski and S. B. Kang, "Noise estimation from a single image," *IEEE CVPR'06* (2006).
- [76] S. Chauvin, "Evaluation des performances du modèle Bayésien de fusion appliqué à l'image satellitaire," *Quinzième colloque GRETSI*, 949-952 (1995).
- [77] Y. Delignon, "Etude statistique d'image Radar de la surface de la mer," Thèse de Doctorat, Université de Rennes I (1993).
- [78] A. Maffet and C. Wackerman, "The modified Beta density function as a model for synthetic aperture Radar clutter statistics," *IEEE Transactions on Geoscience and remote sensing* **29**, No. 2, 277-283 (1991).
- [79] M. L. Comer and E. J. Delp, "The EM/MPM algorithm for segmentation of textured images : analysis and further experimental results," *IEEE Transactions on Image Processing*, **9**, No. 11, 1731-1744 (2000).
- [80] A. Dempster, N. Laird and D. Rubin, "Maximum Likelihood for incomplete data via the EM algorithm," *J. Royal Statistical Society, B.* **39**, 1-38 (1977).
- [81] T. Agui, T. Nagae and M. Nakajima, "Generalized Peano scans for arbitrarily-sized arrays," *IEICE Transactions E.* **74**, No. 5, 1337-1342 (1991).
- [82] F. Salzenstein and W. Pieczynski, "On the choice of statistical image segmentation method," *Traitement du signal* **15**, No. 2, 119-127 (1998).
- [83] B. Benmiloud and W. Pieczynski, "Estimation des paramètres dans les chaînes de Markov cachées et segmentation d'images," *Traitement du signal* **12**, No. 5, 433-454 (1995).
- [84] L. E. Baum, T. Petrie, G. Soules, and N. Weiss, "A maximization technique occurring in the statistical analysis of probabilistic functions of Markov chains," *Ann. Math. Statist.* **41**, No. 1, 164-171 (1970).
- [85] P. A. Devijver, "Baum's Forward-Backward algorithm revisited," *Pat. Recog. Let.* **3**, 369-373 (1985).
- [86] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis* (Cambridge U. Press, 1985).
- [87] C. R. Givens and A. B. Kostinski, "A simple necessary and sufficient condition on physically realizable Mueller matrices," *J. Mod. Opt.* **40**, 471-481 (1993).
- [88] D. Anderson and R. Barakat, "Necessary and sufficient conditions for a Mueller matrix to be derivable from a Jones matrix," *J. Opt. Soc. Am. A.* **11**, No.8, 2305-2319 (1994).
- [89] R. Barakat, "Bilinear constraints between elements of the 4×4 Mueller-Jones transfer matrix of polarization theory," *Opt. Comm.* **38**, 159-161 (1981).

- [90] P. Spellucci, "A SQP method for general nonlinear programs using only equality constrained subproblems," *Math. Prog.*, 413-448 (Springer, 1998).
- [91] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization* (Wiley, 1987).
- [92] B. W. Wah and T. Wang, in *Principles and Practice of Constraint Programming*, Vol. 461 (Springer, Heidelberg, 1999).
- [93] P. J. M. Laarhoven and E. H. L. Aarts, *Simulated annealing : theory and applications* (Kluwer Academic Publishers, 1987).
- [94] M. Lundy and A. Mees, in *Mathematical Programming* (Springer, 1986).
- [95] M. Reimer and D. Yevick, "Least-squares analysis of the Mueller matrix," *Opt. Lett.* **31**, No. 16, 2399-2401 (2006).
- [96] S. Y. Lu and R. A. Chipman, "Mueller matrices and the degree of polarization," *Opt. Comm.* **146**, 11-14 (1998).
- [97] C. Brosseau, *Fundamentals of polarized light* (Wiley, 1998).
- [98] P.Y. Gerligand, M. H. Smith and R. A. Chipman, "Polarimetric images of a cone," *Opt. Express* **4**, No. 10, 420-430 (1999).
- [99] R.A. Chipman, *Handbook of Optics*, vol. II, 2nd Ed. M. Bass ed. (McGraw-Hill, 1995).
- [100] R.A. Chipman, "Depolarization index and the average degree of polarization," *appl. Opt.* **44**, No.13, 2490-2495 (2005).
- [101] J. J. Gil, "Characteristic properties of Mueller matrices," *J. Opt. Soc. Am. A* **17**, No.2, 328-334 (2000).
- [102] F. Le Roy-Brehonnet and B. Le Jeune, "Utilization of Mueller matrix formalism to obtain optical targets depolarization and polarization properties," *Prog. Quant. Electr.* **21**, 109-151 (1997).
- [103] R. Koch, "Model-Based 3D scene Analysis from stereoscopic Image sequences", *Proc. Int. Soc. Photogram. Remote Sens.*, Washington, DC, 1992.
- [104] P. J. Besl and N. D. McKay, "A method for registration of 3-D shapes," *PAMI* **14** (1992).
- [105] J. M. Bueno and M. C. W. Campbell, "Confocal scanning laser ophthalmoscopy improvement by use of Mueller-matrix polarimetry," *Opt. Lett.* **27**, 830-832 (2002).
- [106] A. Weber, M. Cheney, Q. Smithwick and A. Elsner, "Polarimetric imaging and blood vessel quantification," *Opt. Express* **12**, 5178-5190 (2004).
- [107] G. C. Giakos, "Advanced multispectral, multifusion, polarimetric imaging : from biophotonics to semiconductor wafers inspection and monitoring," *IEEE International Workshop on Imaging Systems and Techniques* (2005).
- [108] V. V. Tuchin, "Coherent and polarization methods for biomedical imaging and spectroscopy," *Proc. SPIE Vol. 3904* (1999).

Résumé :

Les applications de vision par ordinateur nécessitent de plus en plus des outils efficaces pour le calcul des descriptifs scéniques des objets manufacturés. Dans ce cadre, la stéréoscopie apparaît aujourd'hui comme une modalité maîtrisée de reconstruction d'objets tridimensionnels par imagerie optique. Le principe conventionnel repose sur l'acquisition d'une paire d'images issues d'un capteur dont la position aura été modifiée. L'aspect algorithmique lié au traitement est marqué par une étape délicate appelée "appariement" dont l'objectif est de trouver avec la plus grande précision permise les points communs aux deux images, recherche basée à la fois sur les propriétés géométriques des droites dites épipolaires et sur une procédure de minimisation de l'erreur de positionnement. Lorsqu'un objet est transparent ou lorsqu'il présente des arêtes vives devant le capteur, l'aveuglement de la caméra qui en résulte se traduit par une perte d'information de contour portée par les points invisibles ou saturés dans les images stéréoscopiques. En revanche, en imagerie optique active, la possibilité de modifier la polarisation de l'éclairement et celle des états d'analyse permet de faire apparaître les contours transparents ou d'atténuer l'intensité des arêtes vives grâce notamment à la réponse de Fresnel des interfaces, couplée à la diffusion liées aux inhomogénéités surfaciques ou volumiques. Dans ce travail doctoral, nous avons développé une approche stéréoscopique avec les images de Mueller afin de lever les ambiguïtés rencontrées lors d'acquisitions d'images conventionnelles. Une telle modalité, l'imagerie polarimétrique, représente naturellement une solution aux contraintes physiques auxquelles est soumise la stéréoscopie conventionnelle.

Mots-clés : polarimétrie, imagerie de Mueller, géométrie épipolaire, stéréoscopie, reconstruction 3D.

Abstract :

Within the frame of industrial object inspection, the stereoscopic reconstruction technique seems to be an achieved method for three-dimensional objects reconstruction by optical imagery. The conventional technique rests on the acquisition of a pair of images resulting from a camera sensor which position has been modified. The algorithmic aspect related to the treatment is marked by a delicate stage called “matching” which objective is to find with the highest possible degree of accuracy the common points to both images, a search based at the same time on the geometrical properties of the lines known as epipolar and on a procedure of minimization of the error of positioning. When an object is transparent or when it has an active contour in front of the camera sensor, the blindness of the camera which results from it causes a loss of information of contours carried by the invisible or saturated points in the stereoscopic images. On the other hand, active optical imagery consists in modifying polarization states that are generated or analyzed by the illumination or the observation systems. This permits to reveal transparent contours or to attenuate the high reflecting intensities thanks in particular to the Fresnel response of the interfaces, coupled with the diffusion related to the surface or volumetric inhomogeneities. In this work, we have developed a stereoscopic approach based on Mueller images which allows to reduce ambiguities confronted with usual imaging techniques. Such a method, the polarimetric imagery, represents naturally a solution to the physical constraints to which is subjected conventional stereoscopy.

Keywords : polarimetry, Mueller imagery, image registration, epipolar geometry, stereoscopy, 3D reconstruction.