



Thèse présentée pour obtenir le grade de  
Docteur de l'Université Louis Pasteur  
Strasbourg I



Discipline : Mécanique des Fluides  
par **Miroslav Kotouč**

## **Transition à la turbulence du sillage d'une sphère fixe ou libre en convection mixte**

Soutenue publiquement le 25 septembre 2008

### **Membres du jury**

Directeur de thèse : M. J. Dušek, Professeur, ULP Strasbourg

Rapporteur interne : M. Ph. Helluy, Professeur, ULP Strasbourg

Rapporteur externe : M. Th. Leweke, CR CNRS, IRPHE Marseille

Rapporteur externe : M. E. Arquis, Professeur, ENSCPB Bordeaux

Examineur : M. J. Magnaudet, DR CNRS, IMFT Toulouse

Membre invité : M. G. Bouchet, CR CNRS, IMFS Strasbourg

Je tiens tout d'abord à remercier toute l'équipe "Instabilités, turbulence, diphasique" de m'avoir accueilli et de m'avoir permis de travailler pendant trois belles années sur un sujet exceptionnellement intéressant et passionnant.

Je remercie, avant tout, Jan Dušek, directeur de ma thèse, qui était disponible à n'importe quel moment et qui, avec une très grande patience, répondait à mes nombreuses questions. C'est surtout grâce à ses vastes connaissances et à son expérience que cette thèse aboutit en un travail aussi riche en résultats et en nouvelles découvertes. J'ai pris un énorme plaisir à être guidé, durant ma thèse, par Jan Dušek et, si ma carrière de chercheur est bien lancée, c'est grâce à cette thèse qu'il a tellement bien réussi à diriger.

Je remercie très chaleureusement Gilles Bouchet, co-directeur de ma thèse, d'avoir été également disponible chaque fois que j'en avais besoin et qui, par ses explications très claires et lucides, m'a aidé à comprendre les nombreuses particularités de mon sujet. Je le remercie également pour son aide précieuse dépassant parfois le cadre de la thèse et pour sa bonne humeur, même pendant des moments très chargés en travail.

Je tiens à remercier Yannick Hoarau, qui m'a initié à Linux et qui m'a aidé chaque fois que j'avais un souci concernant l'informatique ou la programmation. Ces explications concernant les écoulements diphasiques, les écoulements turbulents et différents moyens de visualisations m'ont également été très précieuses.

Je remercie Daniel Huilier, qui m'a aidé à préparer mon cours en mettant à ma disposition les supports indispensables.

Je tiens aussi à remercier tous les doctorants et stagiaires qui, pendant la durée de ma thèse, sont passés par l'IMFS et qui, avec leur bonne humeur, contribuaient à l'ambiance très chaleureuse et détendue au sein de l'équipe ITD. Ces grâce à vous, Frédéric Muller, Vimal Singh, Juliane Havas, Jean-Sébastien Kroll-Rabotin, Thibaut Deloze, Cyril Loux, Tanvir Akbar, Vít Nováček et Monicha Mridha, que j'ai pris un tel plaisir à venir tous les jours au laboratoire!

J'adresse mes remerciements, en langue maternelle, à ma famille pour son soutien : Chtěl bych také poděkovat mé rodině, Soně Šťastné, Soně Semonské, Mirku Kotoučovi, Petru Šťastnému, Stáně Kotoučové, Kristýně Šťastné a Anežce Šťastné, že jste mi umožnili dojet se tak daleko v mých studiích a že jste mi vždy byli oporou a nablízku, a to i přes velkou vzdálenost mezi Prahou a Štrasbourgem.

Last but not least, je veux remercier, de tout mon cœur, Heshmitchka Rewitchka, qui m'a toujours soutenu pendant les moments où j'étais débordé par le travail.



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Nomenclature</b>	<b>v</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Sphère fixe sans effet thermique . . . . .	3
1.2 Sphère fixe avec effets thermiques . . . . .	7
1.2.1 Convection naturelle . . . . .	9
1.2.2 Convection mixte – Ecoulement croisé . . . . .	11
1.2.3 Convection mixte – Ecoulement assistant . . . . .	11
1.2.4 Convection mixte – Ecoulement opposant . . . . .	13
1.3 Sphère libre sans effet thermique . . . . .	16
1.4 Particule en convection mixte et en fusion . . . . .	19
1.5 Objectifs et organisation du travail . . . . .	23
<b>2 Formulation mathématique</b>	<b>25</b>
2.1 Sphère fixe sans effet thermique . . . . .	25
2.2 Sphère fixe avec effets thermiques . . . . .	26
2.3 Sphère libre sans effet thermique . . . . .	29
2.4 Modélisation d’un glaçon dans de l’eau . . . . .	31
2.4.1 Caractéristiques physiques de l’eau . . . . .	31
2.4.2 Formulation mathématique exacte . . . . .	33
2.4.3 Modèle considéré . . . . .	34
2.4.4 Adimensionnalisation des équations . . . . .	35
2.4.5 Fonte sphérique du glaçon . . . . .	38
<b>3 Méthode numérique</b>	<b>39</b>
3.1 Résumé de la méthode . . . . .	39
3.2 Etat de développement de la méthode numérique avant le début de la thèse . . . . .	42
3.3 Apports de la thèse au développement algorithmique . . . . .	42
<b>4 Résultats – sphère fixe</b>	<b>45</b>
4.1 Convection naturelle . . . . .	45
4.2 Ecoulement assistant . . . . .	48

4.2.1	Ecoulement axisymétrique . . . . .	48
4.2.2	Perte d'axisymétrie . . . . .	49
4.2.3	Modèle faiblement non-linéaire pour les régimes tridimensionnels . . .	54
4.2.4	Régimes tridimensionnels . . . . .	57
4.2.5	Coefficient de traînée et de portance, nombre de Nusselt . . . . .	73
4.3	Ecoulement opposant . . . . .	84
4.3.1	Ecoulement axisymétrique . . . . .	84
4.3.2	Perte d'axisymétrie . . . . .	86
4.3.3	Modèle faiblement non-linéaire pour les régimes tridimensionnels . . .	89
4.3.4	Régimes tridimensionnels . . . . .	91
4.3.5	Coefficient de traînée et de portance, nombre de Nusselt . . . . .	108
4.4	Ecoulement opposant – grands $ Ri $ . . . . .	115
4.4.1	$Re = 1$ . . . . .	115
4.4.2	$Re = 10$ . . . . .	120
4.4.3	$Re = 100$ . . . . .	125
<b>5</b>	<b>Résultats – sphère libre</b>	<b>137</b>
5.1	Glaçon sans fusion immergé dans de l'eau ambiante . . . . .	138
5.1.1	Glaçon sans fusion immergé dans de l'eau à 20°C . . . . .	138
5.1.2	Glaçon sans fusion immergé dans de l'eau à 4°C . . . . .	152
5.1.3	Caractéristiques du transfert de chaleur . . . . .	154
5.2	Glaçon en fusion immergé dans de l'eau ambiante . . . . .	155
5.2.1	Glaçon en fusion immergé dans de l'eau à 20°C . . . . .	156
5.2.2	Glaçon en fusion immergé dans de l'eau à 4°C . . . . .	162
<b>6</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>175</b>
<b>A</b>	<b>Test d'indépendance du maillage</b>	<b>179</b>
<b>B</b>	<b>Détails de la méthode numérique</b>	<b>181</b>
B.1	Décomposition azimutale . . . . .	181
B.2	Discrétisation temporelle . . . . .	184
B.3	Discrétisation dans le plan axial-radial par él. spectraux . . . . .	185
B.3.1	Éléments spectraux . . . . .	185
B.3.2	Discrétisation des opérateurs différentiels . . . . .	188
B.3.3	Inversion directe de la matrice de pression . . . . .	195
B.4	Traitement numérique du glaçon en fusion . . . . .	197
B.4.1	Dépendance de la température sur la viscosité, la diffusivité thermique et le terme de flottabilité . . . . .	197
B.4.2	Prise en compte du diamètre variable de la sphère . . . . .	198
B.4.3	Modification du traitement implicite des équations du mouvement de la sphère . . . . .	199
	<b>Bibliographie</b>	<b>201</b>

**Lettres latines :**

$c_p$	[J/kg.K]	Chaleur spécifique
$d$	[m]	Diamètre de la sphère
$f$	[s <sup>-1</sup> ]	Fréquence des oscillations principales
$\mathbf{F}_D$	[N]	Force de traînée
$\mathbf{F}_L$	[N]	Force de portance
$\mathbf{g}$	[m/s <sup>2</sup> ]	Accélération de la pesanteur
$L_r$	[m]	Longueur de recirculation
$\ell$	[J/kg]	Chaleur latente
$m$	[-]	Mode azimutal
$p$	[Pa]	Pression dynamique
$\tilde{p}$	[Pa]	Pression totale
$\dot{Q}$	[W]	Flux de chaleur total numérique
$\dot{Q}_{cond,th}$	[W]	Flux de chaleur conductif théorique
$t$	[s]	Temps
$T$	[K]	Champ de température du fluide
$T_s$	[K]	Température de la sphère
$T_f$	[K]	Température du fluide (sphère libre)
$T_\infty$	[K]	Température de l'écoulement extérieur (sphère fixe)
$u_x, u_y, u_z$	[m/s]	Composantes de la vitesse de la sphère
$\mathbf{v}$	[m/s]	Champ de vitesse du fluide
$v_\infty$	[m/s]	Vitesse de l'écoulement extérieur
$x, y, z$	[m]	Composantes de la position de la sphère libre
$x, y, z$	[m]	Système de coordonnées cartésiennes attaché à la sphère (sphère fixe)
$z, r, \theta$	[m,-]	Système de coordonnées cylindriques attaché à la sphère

**Lettres grecques :**

$\alpha$	[W/m <sup>2</sup> .K]	Coefficient de transfert de chaleur
$\beta$	[K <sup>-1</sup> ]	Coefficient d'expansion thermique
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Masse volumique du fluide
$\rho_s$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Masse volumique de la sphère
$\rho_f$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Masse volumique du fluide
$\rho_2$	[K <sup>-1</sup> ]	Paramètre du modèle de la dépendance $\rho(T)$
$\kappa_1$	[K <sup>-1</sup> ]	Paramètre du modèle de la dépendance $\kappa(T)$
$\nu_1$	[K <sup>-1</sup> ]	Paramètre du modèle de la dépendance $\nu(T)$
$\kappa$	[m <sup>2</sup> /s]	Diffusivité thermique
$\lambda$	[W/m.K]	Conductivité thermique
$\mu$	[Pa.s]	Viscosité dynamique du fluide
$\nu$	[m <sup>2</sup> /s]	Viscosité cinématique du fluide

$\omega$	$[\text{s}^{-1}]$	Vorticité axiale
$\Omega$	$[\text{s}^{-1}]$	Vitesse de rotation de la sphère autour de son centre de masse
$\Phi_s$	$[\text{°}]$	Angle de séparation de la couche limite

**Nombres adimensionnels :**

$Ar$	Nombre d'Archimède, $ \rho_s/\rho_f - 1 gd^3/\nu^2$
$C_D$	Coefficient de traînée, $F_D/(\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 \frac{\pi d^2}{4})$
$C_L$	Coefficient de portance, $F_L/(\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 \frac{\pi d^2}{4})$
$G$	Nombre de Galilée, $\sqrt{Ar}$
$Gr$	Nombre de Grashof, $\beta g(T_s - T_\infty)d^3/\nu^2$
$Nu$	Nombre de Nusselt, $\alpha d/\lambda$
$Pr$	Nombre de Prandtl, $\nu/\kappa$
$Re$	Nombre de Reynolds, $v_\infty d/\nu$
$Ri$	Nombre de Richardson, $\beta g(T_s - T_\infty)d/v_\infty^2$
$St$	Nombre de Strouhal, $fd/v_\infty$

# Chapitre 1

## Introduction

Dans la nature aussi bien qu'à travers les applications industrielles, les écoulements de fluides ne transportant aucun objet ou ne contenant aucune inclusion sont plutôt rares. Les phénomènes de transport de particules solides, de gouttelettes ou de bulles par des fluides et celui de l'interaction fluide/solide sont en effet omniprésents. Qui plus est, dans de nombreux cas, ces phénomènes sont accompagnés par un transfert de chaleur auquel s'ajoute parfois un transfert de masse. Parmi les nombreux exemples de l'industrie ou de la nature illustrant le phénomène d'interaction entre des particules et un fluide dans des conditions anisothermes, on peut citer le cas des particules de combustible dans les moteurs thermiques, le cas des particules dans les réacteurs chimiques, les phénomènes de condensation, le séchage, l'absorption et l'évaporation, ainsi que la fusion (transport de particules solubles dans des milieux liquides).

Cette multiplicité de situations et leur importance scientifique et industrielle explique l'intérêt des études portant sur la trajectoire et le sillage des corps solides en mouvement dans un fluide newtonien initialement au repos, avec un échange thermique et massique. Bien que ce travail de thèse se limite à l'étude des corps sphériques, sa portée reste grande : en effet, on peut constater que la plupart des particules faisant l'objet des exemples cités ci-dessus ont une forme sphérique ou quasi-sphérique. Nous pouvons même aller jusqu'à dire que, la géométrie sphérique étant un cas à la fois général et omniprésent dans la nature et l'industrie, elle occupe une place particulière dans la physique des fluides.

L'approche théorique ne peut être utilisée que dans des cas d'une extrême simplicité, bien souvent trop éloignés des vraies situations industrielles ou des phénomènes complexes de la nature.

L'approche expérimentale permet plus souvent de s'approcher des situations industrielles, mais pas toujours des phénomènes naturels ou académiques. Le cas de l'étude du sillage d'une sphère fixe placée dans un écoulement infini est par exemple académiquement simple à définir, mais très difficile à reproduire fidèlement à travers une expérience. Parmi les problèmes que suscite une telle étude expérimentale, on peut citer celui de la fixation de la sphère (qui peut perturber l'écoulement), celui des conditions aux limites (l'écoulement doit en effet être nécessairement confiné), celui de la mesure des grandeurs physiques (il est en effet très difficile et souvent coûteux d'accéder à la mesure de toutes les grandeurs physiques en tout point de

l'espace, à tout instant, et ceci de façon non-intrusive) *etc.* Dans d'autres cas, il peut être difficile de respecter les échelles ou les nombres sans dimension gouvernant la physique du problème réel étudié.

L'approche numérique, même si elle présente également un certain nombre d'inconvénients (conditions aux limites, effets d'échelles, discrétisation) nous a semblé la mieux adaptée à l'étude du sillage d'une sphère chauffée. En effet, les écoulements dans ou autour de géométries axisymétriques peuvent être analysés dans un contexte bidimensionnel grâce à l'invariance de l'opérateur aux rotations autour de l'axe. L'efficacité exceptionnelle de la méthode numérique développée, inspirée par la théorie non-linéaire de la brisure de l'axisymétrie, permet alors, sur des stations de travail courantes, d'obtenir une précision inégalée et un outil d'analyse numérique particulièrement bien adapté à l'étude des phénomènes aussi complexes qu'un déplacement des particules sphériques en convection mixte et en fusion dans un fluide newtonien. Il nous a donc été possible de mener aisément de larges études paramétriques et d'étudier l'effet de chaque paramètre (plus de 6000 simulations, parmi lesquelles plus d'une moitié de simulations pleinement tridimensionnelles et instationnaires, ont été effectuées dans le courant cette thèse).

L'étude du transfert de chaleur et de masse d'une sphère avec 6 degrés de liberté étant un sujet d'une extrême complexité, nous avons décidé de procéder par étape.

Le point de départ de ce travail a été une thèse réalisée au laboratoire sur l'étude de la transition au chaos du sillage d'une sphère fixe, sans effet thermique. Nous sommes donc partis d'un problème à un seul paramètre de contrôle et 0 degré de liberté.

La première étape de cette thèse a donc consisté à prendre en compte des effets thermiques dans l'écoulement autour d'une sphère fixe. Nous verrons par la suite que la convection naturelle, engendrée par les effets de flottabilité, ainsi que la convection forcée, influencent d'une manière essentielle le sillage de la sphère. Ce problème de sphère fixe en convection naturelle et forcée comporte 2 (convection naturelle) ou 3 (convection mixte) paramètres de contrôle.

En libérant la sphère sans effet thermique, on ajoute 6 degrés de liberté, et on passe à l'étude de la trajectoire et de la transition du sillage d'une sphère libre dans un fluide. Ce problème, qui comporte 2 paramètres de contrôle et 6 degrés de liberté, a lui aussi donné lieu à une thèse réalisée au laboratoire.

Il nous a permis de passer à la seconde étape de ce travail de thèse : l'étude de la trajectoire et de la transition du sillage d'une sphère en convection naturelle et forcée. Ce problème comporte alors, au minimum, 4 paramètres de contrôle et 6 degrés de liberté. L'étude a très vite montré que la dynamique d'une particule immergée dans de l'eau est très significativement influencée par la variation de la viscosité en fonction de la température. Une meilleure prise en compte des propriétés du fluide porteur allant au delà de l'approximation de Boussinesq finit par porter le nombre de paramètres à 8. Une étude paramétrique devenant ainsi impossible, le travail se concentre au cas spécifique de l'eau.

Enfin, nous avons terminé ce travail de thèse en prenant en compte un transfert de masse et un changement de taille de la particule initialement sphérique.

Les objectifs détaillés de la thèse et l'organisation du travail sont présentés à la fin du chapitre, après une synthèse et une mise au point des résultats bibliographiques.

## 1.1 Transition au chaos du sillage d'une sphère fixe sans effet thermique

Bien que la transition du sillage d'une sphère fixe sans effets thermiques ne soit pas l'objet de ce travail de thèse, sa connaissance permet de se faire une idée, au-moins qualitativement, de la forme que peuvent prendre les trajectoires d'une sphère libre, avec ou sans effet thermique, en fonction des différents régimes de transition.

Les premières étapes du scénario de transition du sillage d'une sphère fixe font à présent l'objet d'un large consensus au sein de la communauté scientifique, grâce aux nombreux travaux qui ont contribué à le préciser. Un seul paramètre sans dimension, le nombre de Reynolds ( $Re$ ), provenant de l'adimensionnalisation des équations de Navier–Stokes, suffit à la description du problème. Il est défini par

$$Re = \frac{v_\infty d}{\nu}, \quad (1.1)$$

où  $v_\infty$  est la vitesse de l'écoulement extérieur uniforme,  $d$  est le diamètre de la sphère et  $\nu$  est la viscosité cinématique du fluide. A bas nombres de Reynolds, le sillage est axisymétrique, comme la géométrie le suggère intuitivement, et l'action du fluide sur la sphère se limite alors à une force de traînée. Alors que pour  $Re \leq 20$  (voir Bouchet *et al.*, 2006), l'écoulement ne présente aucun détachement de la couche limite, une zone de recirculation axisymétrique ayant la forme d'un tore apparaît en aval de la sphère à partir de  $Re = 20$ . Puis, au-delà d'une certaine valeur critique du nombre de Reynolds  $Re_1$ , des observations expérimentales (voir Goldburg & Florsheim, 1966; Achenbach, 1974; Nakamura, 1976; Ormières, 1999, par exemple) montrent que le sillage change de forme. En effet, l'axisymétrie est brisée et tout en restant stationnaire, le sillage admet un plan de symétrie sélectionné au hasard des perturbations initiales à l'origine de l'instabilité (voir Provansal & Ormières, 1997).

Les premières étapes du scénario de transition du sillage de la sphère fixe ont été étudiées à partir des observations expérimentales de la chute libre d'objets sphériques comme des gouttes (voir Magarvey & Bishop, 1961*b*) ou des sphères rigides (voir Magarvey & MacLachy, 1965). Achenbach (1974) et Sakamoto & Haniu (1990) fixent la sphère dans l'écoulement par une tige placée dans la direction de la vitesse amont. Ormières (1999), qui utilise plusieurs types d'attaches pour fixer la sphère (tige, câbles), montre que les attaches de la sphère influent significativement sur les résultats expérimentaux. Cela explique sans doute en grande partie la dispersion des résultats expérimentaux.

Les premières observations (voir Magarvey & Bishop, 1961*a*) ont conduit à une classification des différents régimes rencontrés (voir Levi, 1980). Le régime axisymétrique disparaît à partir d'une valeur critique du nombre de Reynolds  $Re_1$ , au-delà duquel le sillage axisymétrique devient asymétrique, mais reste tout de même stationnaire, comme le montrent d'autres études (voir Magarvey & Bishop, 1961*a*; Provansal & Ormières, 1997, par exemple). Il présente en outre deux filaments, visibles en injectant un colorant, qui apparaissent au-dessus du seuil  $Re_1$ . Magarvey & Bishop (1961*a*) trouvent un seuil  $Re_1 = 210$ , mais ne l'interprètent pas comme une brisure d'axisymétrie. La valeur de ce seuil est estimée expérimentalement dans un intervalle compris entre 150 (voir Provansal & Ormières, 1997;

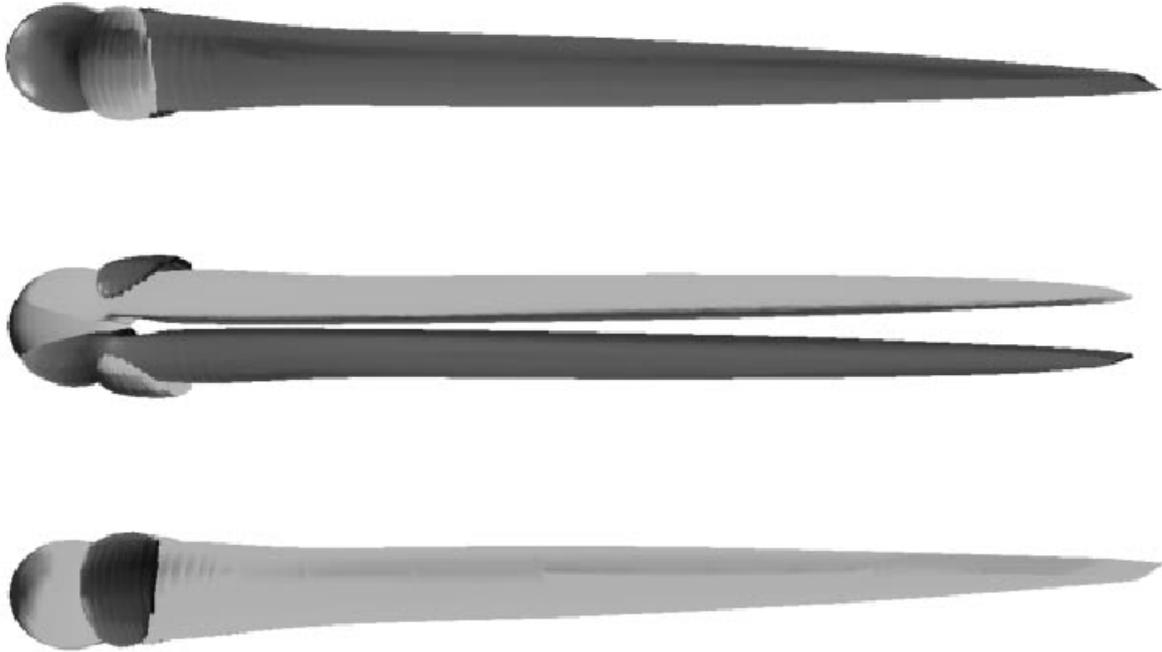


FIG. 1.1 – Isosurfaces de la vorticité axiale à  $Re = 250$ , mettant en évidence deux filaments contrarotatifs dans le sillage d’une sphère avec une symétrie plane. Simulation numérique directe de Tomboulides & Orszag (2000).

Ormières & Provansal, 1999) et 190 (voir Nakamura, 1976). Ormières & Provansal (1999) donnent l’intervalle  $180 < Re_1 < 200$ . Les observations expérimentales permettent donc de montrer l’existence d’un seuil  $Re_1$ , au-delà duquel l’axisymétrie du sillage est remplacée par une symétrie plane, le sillage restant stationnaire. L’instabilité primaire brise donc la symétrie axiale du sillage; l’aspect du sillage tridimensionnel stationnaire est montré dans Fig. 1.1.

A cause des perturbations expérimentales, la valeur du seuil de l’instabilité primaire ne peut être que située dans un intervalle assez large de nombres de Reynolds. La simulation numérique permet de s’affranchir des perturbations dues aux fixations de la sphère, responsables de la sous-estimation de la valeur du nombre de Reynolds critique. Natarajan & Acrivos (1993), qui sont les premiers à élucider la nature de la bifurcation régulière, responsable de la brisure de l’axisymétrie, et à déterminer numériquement avec précision la valeur critique du nombre de Reynolds correspondant, donnent  $Re_1 = 210$ . Cette valeur est retrouvée plus tard par Johnson & Patel (1999). La valeur du seuil communément admise aujourd’hui,  $Re_1 = 212$ , se retrouve à travers un panel de simulations numériques Tomboulides *et al.* (1993); Ghidersa & Dušek (2000); Tomboulides & Orszag (2000). La faible différence, de l’ordre de 1%, avec la valeur précédente est imputable à la précision des schémas numériques utilisés, confortant ainsi la valeur admise.

A partir de ce seuil, la sphère est soumise, en plus de la force de traînée, à une force de

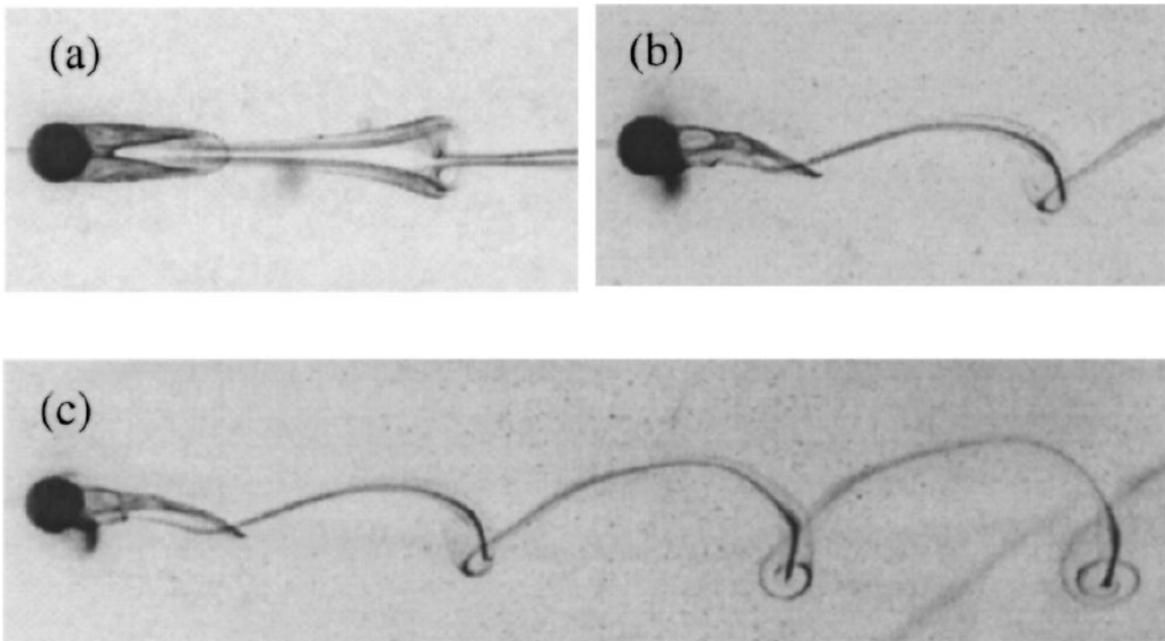


FIG. 1.2 – Allée des tourbillons à fer à cheval dans le sillage d’une sphère à  $Re = 345$ . (a) Vu du haut, (b) et (c) vu du côté. Reproduction d’une visualisation de Schouveiler & Provansal (2002).

portance et à un moment. Les forces s’exercent dans le plan de symétrie et l’axe du moment est perpendiculaire au plan. On imagine alors assez bien que si la sphère est rendue libre et si le nombre de Reynolds basé sur sa vitesse de chute dépasse le seuil de la bifurcation primaire, la trajectoire ne peut plus être rectiligne et verticale. Elle devrait être déviée dans le plan de symétrie du sillage, c’est-à-dire dans une direction sélectionnée au hasard des perturbations initiales. De plus, le moment devrait mettre en rotation la sphère, mais sans pour autant faire sortir la trajectoire du plan de symétrie.

Par la suite, le sillage de la sphère fixe devient instationnaire mais conserve son plan de symétrie comme l’observent déjà Magarvey & Bishop (1961*b*) sur des photographies. D’autres travaux, expérimentaux et numériques, viennent confirmer cette constatation (voir Achenbach, 1974; Sakamoto & Haniu, 1990; Provansal & Ormières, 1998; Ghidersa & Dušek, 2000). Dans les visualisations expérimentales, les filaments du sillage se mettent d’abord à osciller à une seule fréquence avant de faire apparaître une allée de tourbillons en forme de fer à cheval (voir Levi, 1980; Schouveiler & Provansal, 2002, par exemple). Une représentation de cette allée est montrée dans Fig. 1.2. Pour caractériser la fréquence  $f$ , il est classique d’utiliser le nombre de Strouhal ( $St$ ), défini par

$$St = \frac{fd}{v_\infty}, \quad (1.2)$$

où  $f$  est la fréquence du détachement tourbillonnaire dans le sillage. Avec des valeurs du

nombre de Strouhal comprises entre 0.07 et 0.15 pour  $Re = 300$  (légèrement au-dessus du seuil d'instationnarité), les travaux expérimentaux s'accordent qualitativement sur le même ordre de grandeur Ormières (1999); Sakamoto & Haniu (1990); Magarvey & Bishop (1961*b*). Les études numériques ont permis d'affiner la valeur du nombre de Strouhal, leurs résultats étant très proches les uns des autres. Tomboulides *et al.* (1993) obtiennent numériquement la valeur  $St = 0.136$ , Johnson & Patel (1999)  $St = 0.137$  et Ghidersa & Dušek (2000)  $St = 0.135$ . Il est donc possible de prendre ces valeurs comme une référence fiable, d'autant que les résultats expérimentaux sont parfaitement compatibles avec ces nombres de Strouhal obtenus par simulation numérique.

Le seuil de la bifurcation de Hopf, responsable de l'instationnarité du sillage de la sphère fixe, ne peut plus se déterminer à l'aide d'une analyse de stabilité linéaire prenant pour écoulement de base le sillage axisymétrique, comme cela a été fait par exemple dans Natarajan & Acrivos (1993). L'instabilité instationnaire se développe en effet alors que l'instabilité primaire est pleinement développée (le seuil de la bifurcation de Hopf obtenu à partir de l'écoulement de base axisymétrique se trouve légèrement supérieur à celui obtenu à partir de l'écoulement non-axisymétrique). Natarajan & Acrivos (1993) prévoient une valeur propre complexe instable à partir de  $Re_2 = 277.5$  en utilisant une analyse linéaire. Ce seuil est très proche de celui,  $Re_2 = 273$ , obtenu expérimentalement (voir Provansal & Ormières, 1997) ou numériquement (voir Ghidersa & Dušek, 2000). Cette dernière valeur, qui peut être considérée comme la plus exacte, est en parfait accord avec les simulations en différences finies de Johnson & Patel (1999) qui situent le seuil dans l'intervalle  $270 < Re_2 < 280$  et la méthode spectrale de Tomboulides *et al.* (1993) qui fournit  $250 < Re_2 < 285$ . La valeur du nombre de Strouhal au seuil de la bifurcation de Hopf, responsable de l'instationnarité, est  $St = 0.127$  (voir Ghidersa & Dušek, 2000).

L'apparition de la bifurcation de Hopf dans le sillage d'une sphère fixe suggère que la trajectoire d'une sphère libre, après avoir été déviée de la verticale par la bifurcation régulière, devienne oscillante. Cependant, l'extrapolation des résultats de la sphère fixe sur la sphère libre n'est pas aussi triviale, à cause notamment du couplage entre le sillage de la sphère et sa trajectoire.

La suite du scénario de transition au chaos du sillage de la sphère fixe n'est plus aussi bien établie. Une instabilité tertiaire a été observée dans les simulations numériques de Mittal (1999) et Ghidersa & Dušek (2000) au-delà de  $Re = 300$  et dans le travail expérimental de Ormières (1999) à  $Re \approx 390$ . Elle correspond à une perte de périodicité accompagnée, selon Mittal (1999), d'une perte de symétrie plane et une transition au chaos. Néanmoins, Bouchet *et al.* (2006) ont montré que cette instabilité tertiaire, qui s'installe à  $Re_3 \approx 325$  et qui correspond à une bifurcation de Hopf, rend certes l'écoulement apériodique, mais toujours plan. La nouvelle fréquence sous-harmonique est environ trois fois moins élevée que celle de l'instabilité secondaire. Sakamoto & Haniu (1990); Ormières (1999) considèrent que le sillage devient turbulent vers  $Re = 800$ . Cependant, les récents travaux numériques effectués à l'IMFS de Strasbourg et portant sur le comportement du sillage de la sphère fixe au-delà de  $Re = 325$ , ont permis de montrer qu'une série de bifurcations de Hopf apparaissait entre  $Re = 325$  et  $Re = 363$ , et rendait le sillage chaotique déjà à partir de  $Re = 363$ .

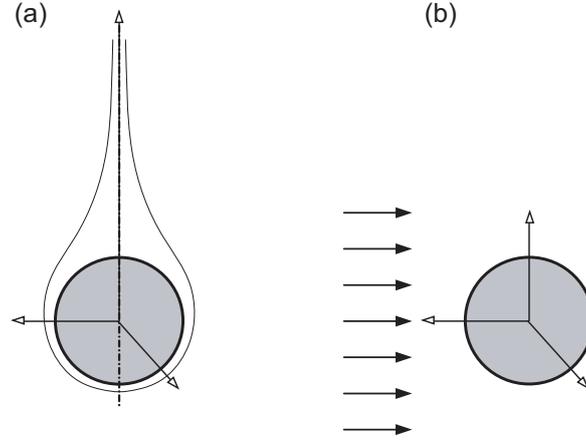


FIG. 1.3 – Schéma de la convection purement naturelle (a) et de la convection purement forcée (b).

## 1.2 Écoulement autour d'une sphère fixe avec convection naturelle ou mixte

La *convection naturelle* désigne un écoulement engendré par les forces de flottabilité pour lesquelles le changement de masse volumique au sein du fluide est dû à une différence de température. Un schéma d'écoulement engendré par une convection naturelle pure est montré dans Fig.,1.3a. La *convection forcée* désigne un écoulement où les forces de flottabilité sont inexistantes ou négligeables (Fig.,1.3b). Finalement, la *convection mixte* désigne un écoulement où les deux types de convection sont présents. Dans le dernier cas, l'angle entre le vecteur de la vitesse de l'écoulement extérieur et le vecteur gravité est d'une grande importance pour la dynamique du système. Dans la littérature, trois configurations sont distinguées : *écoulement assistant* ("assisting flow", "co-flow" ou "aiding flow"), pour lequel les deux vecteurs sont parallèles, mais pointent dans des directions opposées (Fig.,1.4b); *écoulement opposant* ("opposing flow", "opposed flow" ou "counter flow"), pour lequel les deux vecteurs sont parallèles et pointent dans la même direction (Fig.,1.4c); *écoulement croisé* ("cross flow"), pour lequel les deux vecteurs sont perpendiculaires (Fig.,1.4a).

La formulation mathématique la plus courante du problème de la convection naturelle est basée sur l'approximation de Boussinesq Gray & Giorgini (1976). Elle comporte deux paramètres sans dimension : le nombre de Grashof ( $Gr$ ) et le nombre de Prandtl ( $Pr$ ). Le nombre de Grashof, représentant le rapport entre les forces de flottabilité et les forces visqueuses, est défini par

$$Gr = \frac{\beta g (T_S - T_\infty) d^3}{\nu^2}, \quad (1.3)$$

où  $\beta$  est le coefficient d'expansion volumique du fluide,  $g$  la valeur de l'accélération gravitationnelle,  $T_S - T_\infty$  la différence de température entre la sphère et le fluide,  $d$  le diamètre

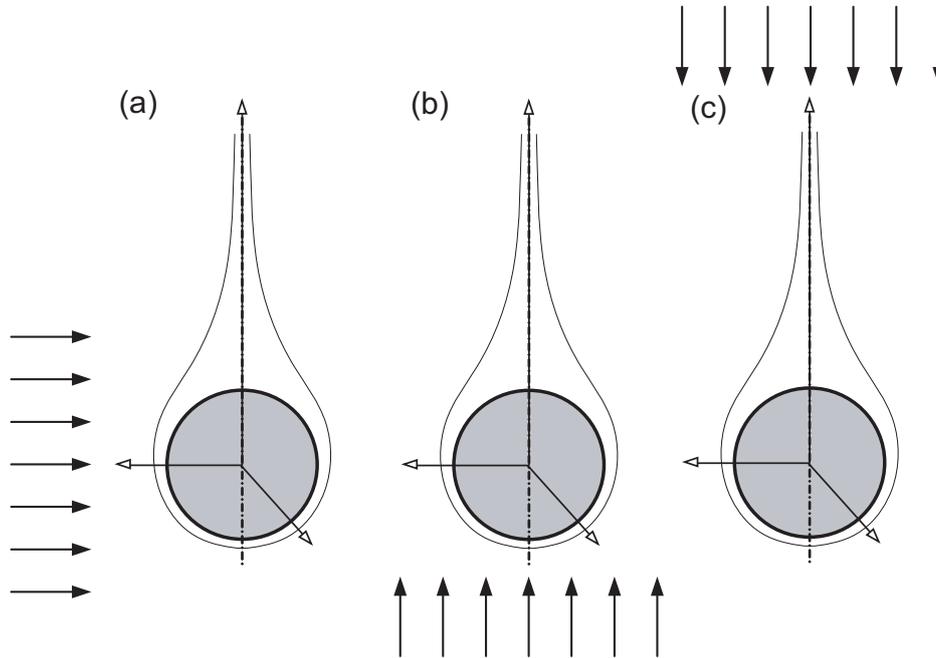


FIG. 1.4 – Schéma de la convection mixte en écoulement (a) croisé, (b) assistant et (c) opposant.

de la sphère et  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. Le nombre de Prandtl, représentant le rapport entre la diffusion visqueuse et la diffusion thermique, est défini par

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} = \frac{\nu \rho c_p}{\lambda}, \quad (1.4)$$

où  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $c_p$  la chaleur spécifique et  $\lambda$  la conductivité thermique. Dans la littérature, une importance particulière est donnée à deux valeurs du nombre de Prandtl :  $Pr \approx 0.7$  – valeur approximative correspondant à l’air à  $0^\circ\text{C}$  sous pression atmosphérique, et  $Pr \approx 7$  – valeur approximative correspondant à l’eau à  $20^\circ\text{C}$ .

Le problème de la convection mixte comporte un paramètre supplémentaire traduisant l’importance de la convection forcée, i.e. de l’inertie de l’écoulement extérieur. Ce paramètre est le nombre de Reynolds, défini dans la section précédente. En combinant le nombre de Grashof et le nombre de Reynolds, on obtient un nouveau paramètre, le nombre de Richardson, défini par

$$Ri = \frac{\beta g (T_S - T_\infty) d}{v_\infty^2}. \quad (1.5)$$

Ce paramètre est très courant dans les études de convection mixte et caractérise le rapport entre les forces de flottabilité (correspondant à la convection naturelle) et les forces d’inertie (correspondant à la convection forcée). Dans la littérature, par convention, le cas de l’écoulement assistant est représenté par le signe ‘+’ devant le nombre de Richardson et le cas

de l'écoulement opposant par le signe  $'-'$ . La combinaison la plus souvent utilisée dans la littérature parmi les 4 paramètres ( $Re, Gr, Ri$  et  $Pr$ ), dont seulement 3 sont indépendants, est constituée du nombre de Reynolds, du nombre de Richardson et du nombre de Prandtl.

Avant de commencer la synthèse de la littérature portant sur le sillage d'une sphère en convection mixte, il est nécessaire de faire deux remarques essentielles concernant les simulations numériques effectuées et présentées dans les différents articles évoqués dans la présente section.

Premièrement, toutes les simulations ont été menées de façon axisymétrique. Or, si l'on tient compte des conclusions des travaux présentés dans la section 1.1, il est fort probable que certains résultats de la littérature se trouvent en dehors de la limite de stabilité de l'écoulement axisymétrique. Ainsi, malgré le fait que tous les travaux portant sur l'écoulement assistant rapportent un effet stabilisant de la convection naturelle (en terme de stabilisation de la couche limite et de diminution de la zone de recirculation lorsque le  $Ri$  augmente), impliquant une augmentation du seuil de la transition à la tridimensionalité par rapport au cas d'une sphère non-chauffée ( $Re_1 = 212$ ), il nous a semblé nécessaire en premier lieu d'établir les limites de stabilité de l'écoulement axisymétrique en fonction de  $Ri$  afin de pouvoir valider les résultats obtenus dans la littérature en écoulement axisymétrique. Cette nécessité est encore plus forte en écoulement opposant, qui, contrairement à l'écoulement assistant, a un effet déstabilisant. A notre connaissance, il n'existe aucune étude dans la littérature portant sur la stabilité de l'écoulement autour d'une sphère fixe en convection mixte. L'approche par analyse de stabilité linéaire, utilisant l'hypothèse d'écoulements parallèles (voir Riley & Tveitereid, 1984) ou faisant l'hypothèse d'une source de chaleur ponctuelle (voir Wakitani, 1985, 1980) n'est pas adaptée aux écoulements fortement non-parallèles, tels que le sillage d'une sphère. Aussi, établir les limites de la stabilité des écoulements axisymétriques en fonction du nombre de Richardson a été le premier objectif de la présente thèse.

Deuxièmement, toutes les simulations de la littérature utilisent l'approximation de Boussinesq, prenant ainsi en compte une variation linéaire de la masse volumique du fluide avec la température dans le membre des forces volumiques des équations de Navier-Stokes, et considérant les autres propriétés du fluide ( $\nu, \lambda, c_p, \beta$ ) constantes. Les limites de validité d'un tel modèle sont discutées dans le Chapitre 2.

### 1.2.1 Convection naturelle

Le premier à mener des expériences dans de l'air avec des particules sphériques chauffées a été Yuge (1960). Il a étudié la convection naturelle jusqu'à  $Gr = 10^5$  et a présenté la courbe de dépendance du nombre de Nusselt total ( $Nu$ ) en fonction du nombre de Grashof, le nombre de Nusselt total étant défini (la définition s'applique à tous les ( $Nu$ ) de la synthèse bibliographique) par

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda}, \quad (1.6)$$

où  $\alpha$  est le coefficient de transfert de chaleur,  $d$  le diamètre de la sphère et  $\lambda$  la conductivité thermique du fluide. Il a observé une croissance du transfert convectif de la chaleur avec  $Gr$

et a également fourni une expression empirique correspondante.

Les premiers travaux numériques sur la convection naturelle ont tiré l'avantage des équations simplifiées de la couche limite (voir Brown & Simpson, 1982; Kurdyumov & Liñán, 1999). Dans leur travail, Brown & Simpson (1982) ont étudié la singularité au pôle nord de la sphère en convection naturelle, où la couche limite thermique se détache en un panache thermique. Kurdyumov & Liñán (1999) ont décrit la convection naturelle d'une source de chaleur ponctuelle et autour d'une sphère pour de très faibles  $Gr$ , le nombre de Prandtl étant considéré égal à 0.72 et 7. Néanmoins, comme pour les sillages, l'approche par les équations parabolisées n'est pas adaptée à l'étude des écoulements près du point d'arrêt aval ni à l'obtention des caractéristiques globales, comme le coefficient de traînée et le nombre de Nusselt.

Potter & Riley (1980) ont étudié l'écoulement autour d'une sphère fixe en convection naturelle pour des  $Gr$  élevés et  $Pr = 0.72$ , en résolvant numériquement les équations de Navier-Stokes parabolisées. Ils ont obtenu une solution de la couche limite entre les points d'arrêt amont et aval de la sphère. En aval de la sphère, où les équations de la couche limite ne sont pas valides, ils ont résolu l'écoulement d'un panache thermique généré par une source de chaleur ponctuelle. Ils ont présenté les profils de vitesse en fonction de la distance au point d'arrêt aval. Ces profils comportent une accélération du fluide près de la surface de la sphère typique pour la plupart des travaux portant sur la convection naturelle due à l'accélération du fluide chaud par les forces de flottabilité.

Les premiers à résoudre numériquement les équations de Navier-Stokes non-parabolisées (néanmoins stationnaires) couplées à l'équation de la chaleur sont Geoola & Cornish (1981). Ils ont présenté des valeurs de la force de traînée adimensionnée ( $C_D$ ), défini par

$$C_D = \frac{\rho F_{nat}}{\mu^2}, \quad (1.7)$$

où  $F_{nat}$  est une force de traînée induite par la convection naturelle,  $\rho$  la masse volumique et  $\mu$  la viscosité dynamique du fluide; ils ont également présenté des valeurs du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Grashof entre 0.05 et 50 ( $Gr$  étant basé cette fois-ci sur le rayon de la sphère  $R$ ). Les nombres de Prandtl considérés étaient 0.72, 10 et 100. Dans leur papier suivant (voir Geoola & Cornish, 1982), ils ont présenté des résultats montrant le développement de l'écoulement pour des  $Gr$  allant jusqu'à 12500 pour les mêmes nombres de Prandtl. Ils ont constaté que le coefficient de traînée, ainsi que le nombre de Nusselt, croissent avec le nombre de Grashof et que les profils de vitesse présentent un "overshoot", similaire à celui observé par Potter & Riley (1980).

Dudek *et al.* (1988) ont présenté des résultats à la fois numériques et expérimentaux (en utilisant une balance électrodynamique) pour de faibles nombres de Grashof (basé sur le rayon  $R$ ),  $4 \times 10^{-4} \leq Gr \leq 0.5$  et pour  $Pr = 0.72$ . Leurs observations sont quasi-identiques à celles de Geoola & Cornish (1981) et Geoola & Cornish (1982).

Jia & Gogos (1996) ont mené une vaste étude pour un grand intervalle de nombres de Grashof ( $10^1 \leq Gr \leq 10^8$ ) et pour  $Pr = 0.72$  et  $Pr = 7$ . Ils ont observé une zone de recirculation en aval de la sphère à partir de  $Gr = 10^7$  pour  $Pr = 0.72$ . Cette zone de recirculation a été rapportée comme s'élargissant avec le nombre de Grashof.

### 1.2.2 Convection mixte – Écoulement croisé

Une attention particulière a été portée dans la littérature à l'étude de l'effet de la convection mixte sur la dynamique d'un cylindre horizontal placé dans un écoulement croisé. Même si au premier abord l'étude d'un cylindre en convection mixte peut paraître éloignée du cas d'une sphère en convection mixte, la ressemblance des géométries des deux problèmes, en particulier si l'on s'arrête au cas axisymétrique de l'écoulement autour de la sphère, implique que certaines conclusions issues du cylindre peuvent être étendues à la sphère.

La plupart des travaux de la littérature sont expérimentaux (voir Lecordier *et al.*, 1991; Michaux-Leblond & Bélorgey, 1997; Wang *et al.*, 2000; Wu & Wang, 2007). Tous les auteurs rapportent un effet stabilisant du chauffage du cylindre, ce qui se traduit par une augmentation du nombre de Reynolds critique de l'apparition de l'allée de Von Kármán dans le sillage du cylindre avec le nombre de Grashof. Le nombre de Prandtl est en général fixé à 0.72 ou 7 – les expériences se faisant dans l'eau ou l'air. Des travaux à la fois expérimentaux et numériques ont été effectués par Ren *et al.* (2004). Ils ont constaté que, pour  $Ri \approx 1$  (effets de la convection naturelle comparables à ceux de la convection forcée), un panache thermique vertical, dû à la convection naturelle, apparaît et modifie de façon drastique la dynamique du sillage du cylindre.

Des expériences avec des sphères en écoulement croisé ont été effectuées par Yuge (1960). Dans son travail, une augmentation du nombre de Nusselt avec le nombre de Richardson pour un  $Re$  constant a été constaté.

Ziskind *et al.* (2001) ont effectué des expériences avec de petites particules ( $Re \leq 0.5$  et  $Gr \leq 0.01$ ), chauffées par un laser, maintenues en place par une force électrique dans une chambre électrodynamique, et placées dans un écoulement croisé. Ils ont étudié la dynamique de l'écoulement autour de la sphère pour  $Ri \ll 1$  (suppression du panache thermique de la convection naturelle),  $Ri \approx 1$  (le panache thermique coexistant avec l'écoulement extérieur) et  $Ri \gg 1$  (le panache thermique dominant l'écoulement autour de la sphère).

### 1.2.3 Convection mixte – Écoulement assistant

Parmi les premiers à étudier l'effet conjugué de la convection naturelle et de la convection forcée dans la configuration d'un écoulement assistant autour d'une sphère, on trouve Hieber & Gebhart (1969). Ils ont employé la méthode de développement asymptotique, en se plaçant dans le cas d'une convection mixte dominée par la convection forcée ( $Ri \ll 1$ ) pour de petites valeurs de  $Gr$  et  $Re$ ,  $Pr$  étant de l'ordre de 1. Ils ont fait une constatation que l'on retrouve dans la plupart des travaux portant sur l'écoulement assistant : l'effet de la convection naturelle, même négligeable, superposée à la convection forcée est d'augmenter la force de traînée s'exerçant sur la sphère.

Les premières expériences avec des particules sphériques dans de l'air ( $Pr \approx 0.7$ ) ont été menées par Yuge (1960). Il a présenté des graphes du nombre de Nusselt en fonction de  $Re$  pour différents  $Gr$ . Il a trouvé que, pour un  $Re$  constant, le transfert de chaleur dû à la convection croît avec le nombre de Grashof. Néanmoins, pour des  $Re$  élevés (petits  $Ri$ ), les courbes des différents  $Gr$  se superposent – la convection forcée domine.

Dans de récentes expériences sur les sphères en écoulement assistant (voir Katoshevski

*et al.*, 2001; Bar-Ziv *et al.*, 2002; Mograbi *et al.*, 2002; Mograbi & Bar-Ziv, 2005a), une chambre électrodynamique a été utilisée. De très petites particules ( $\approx 100\mu m$ ) sont maintenues en lévitation en soufflant par le bas, compensant ainsi la force de pesanteur. La particule est ensuite chauffée par un faisceau de laser et un champ électrique additionnel est utilisé pour maintenir la particule en équilibre dynamique. La charge nécessaire pour maintenir la particule en lévitation diminue avec la puissance du laser (chauffage de la particule) pour un flux constant, ce qui indique une augmentation de la force de traînée avec le nombre de Richardson. Un papier consécutif à celui de Mograbi & Bar-Ziv (2005a) a porté sur une analyse paramétrique de la contribution de la convection naturelle et de la convection forcée sur la force de traînée (voir Mograbi & Bar-Ziv, 2005b).

Les premiers à étudier numériquement (par la méthode des différences finies) l'écoulement assistant autour d'une sphère en convection mixte ont été Chen & Mucoglu (1977). Ils ont utilisé l'approximation de la couche limite (valable pour de grands  $Gr$  et  $Re$ ) et ont imposé une température superficielle constante. Ils ont mené une étude pour  $Pr = 0.7$  et pour des nombres de Richardson allant de 0 (convection purement forcée) à l'infini (convection purement naturelle). Ils ont trouvé que les effets dus à la convection naturelle deviennent prédominants à partir de  $Ri = 1.67$ . Pour un  $Re$  constant, le nombre de Nusselt et le coefficient de traînée, défini par

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 \frac{\pi d^2}{4}}, \quad (1.8)$$

avec  $F_D$  la force de traînée,  $\rho$  la masse volumique du fluide,  $v_\infty$  la vitesse de l'écoulement extérieur uniforme et  $d$  le diamètre de la sphère, ont été rapportés comme augmentant avec  $Ri$ , le point de décollement se rapprochant du point d'arrêt aval – l'effet de la convection naturelle a été ainsi trouvé stabilisant. Ceci a été expliqué par l'effet favorable des forces d'Archimède près de la sphère et du gradient de pression sur l'axe de l'écoulement. Ils ont constaté également que les profils de vitesse présentent un "overshoot" près de la paroi de la sphère, ce qui n'est pas le cas des écoulements sans effet de flottabilité. Qualitativement, les mêmes résultats ont été retrouvés dans leur papier suivant (voir Mucoglu & Chen, 1978), où la condition de température constante sur la surface de la sphère a été remplacée par un flux de chaleur constant.

L'étude numérique d'une gouttelette d'eau sphérique avec un flux de chaleur constant, placée dans de l'air ( $Pr \approx 0.7$ ), a été présentée par Antar & El-Shaarawi (2002) pour  $Gr = 0$  et  $Gr = 10^7$ ,  $Re \leq 5000$  et pour trois valeurs du rapport entre la viscosité dynamique de l'air et celle de l'eau ( $\mu_{air}/\mu_{eau}$ ). Les conclusions sont très similaires à celles de Chen & Mucoglu (1977).

Wong *et al.* (1986) ont résolu les équations de Navier-Stokes complètes, couplées avec l'équation de l'énergie par la méthode des éléments finis pour  $Pr = 0.7$ ,  $0 \leq Gr \leq 80000$  et  $0 \leq Re \leq 100$  ( $0 \leq Ri \leq 10$ ). Ils ont trouvé que l'augmentation de  $Ri$  maintient l'écoulement attaché pour des nombres de Reynolds plus élevés que pour une sphère non-chauffée; de plus, à partir de  $Ri \geq 2$ , le détachement de la couche limite n'existe plus quel que soit  $Re$ .

Nguyen *et al.* (1993) ont élargi les résultats numériques précédents par une prise en compte de la résistance thermique à l'intérieur de la sphère (problème conjugué) et en trai-

tant le problème instationnaire. Ils sont arrivés à la conclusion que, pour que la convection naturelle affecte soit le  $Nu$  soit le  $C_D$ , la valeur absolue du nombre de Richardson (pour l'écoulement assistant et opposant) doit être supérieure à 10.

Nazar *et al.* (2002) ont mené une étude très similaire à celles de Chen & Mucoglu (1977) et de Mucoglu & Chen (1978), mais ont étendu les résultats à un autre nombre de Prandtl –  $Pr = 6.8$ . Ils ont rapporté qu'à même  $Ri$  et même  $Re$ , le nombre de Nusselt est plus élevé au nombre de Prandtl 6.8 qu'au nombre de Prandtl 0.7 et que l'écoulement correspondant à l'eau ( $Pr = 6.8$ ) est plus instable en terme de séparation de la couche limite.

Mograbi & Bar-Ziv (2005a) ont mené une étude très détaillée, à la fois numérique et expérimentale (chambre électrodynamique) pour de faibles  $Re$  et  $Gr$ , présentant des régimes avec la convection naturelle dominante ( $Ri \gg 1$ ), la convection forcée dominante ( $Ri \ll 1$ ) et la convection avec les deux effets comparables ( $Ri = O(1)$ ). Ils ont présenté des résultats sous la forme de courbes du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds. Ils ont rapporté que le  $C_D$  augmente avec  $Gr$  pour un  $Re$  constant, mais que les courbes se superposent aux grands  $Re$  (petits  $Ri$ ). Ils ont également proposé une expression qualitative du coefficient de traînée, où une fonction  $\Phi(Ri)$  contrôle la contribution de la convection naturelle et de la convection forcée au coefficient de traînée.

Dans un papier récent, Bhattacharyya & Singh (2008) ont étudié l'écoulement autour d'une sphère dans la configuration d'un écoulement assistant pour un intervalle  $1 \leq Re \leq 200$  et  $0 \leq Ri \leq 1.5$ . Ils ont observé une diminution de la taille de la zone de recirculation, accompagnée par un rapprochement du point de décollement de la couche limite vers le point d'arrêt aval lorsque le  $Gr$  augmente pour un  $Re$  constant, avec une éventuelle suppression totale du tore de recirculation et l'apparition d'un panache thermique. Ils ont observé, conformément aux autres travaux cités ci-dessus, une augmentation du nombre de Nusselt et du coefficient de traînée avec le  $Gr$  pour un  $Re$  constant.

#### 1.2.4 Convection mixte – Ecoulement opposant

La plupart des auteurs cités dans la section 1.2.3 ont également étudié l'écoulement opposant. C'est pour cette raison que certains détails de leurs travaux, déjà cités dans la partie précédente, seront omis dans cette section et seuls les résultats concernant l'écoulement opposant seront cités.

Dans leur travail analytique, Hieber & Gebhart (1969) ont trouvé que dans la configuration de l'écoulement assistant, la superposition de la convection naturelle à la convection forcée fait augmenter le coefficient de traînée. En écoulement opposant, c'est l'inverse qui se produit. Néanmoins, pour de faibles  $Ri$  ( $Re^2 \gg Gr$ ), ils ont constaté que la convection naturelle est totalement supprimée par la convection forcée.

Dans ses expériences avec des sphères chauffées dans de l'air en écoulement opposant, Yuge (1960) a observé un comportement différent de celui observé en écoulement assistant – les courbes représentant la variation du  $Nu$  en fonction du  $Re$  à  $Gr$  constants, présentent un minimum local pour  $Ri \approx -2.5$ . Néanmoins, à l'instar de l'écoulement assistant, pour des  $Ri$  assez petits (convection forcée dominante), l'effet de la convection naturelle n'est guère visible et les courbes pour différents  $Gr$  se superposent.

Koizumi (2004) a effectué des expériences avec des sphères isothermiquement chauffées

( $Gr = 3.3 \times 10^5$ ) placées dans un courant d'air ( $Pr \approx 0.7$ ) vertical, allant du haut vers le bas ( $Re \leq 1800$ ). Trois différents types d'écoulement ont été observés : l'écoulement chaotique pour  $Ri \leq -5.7$ , l'écoulement stationnaire et axisymétrique pour  $-5.7 < Ri < -1.32$  et l'écoulement tridimensionnel et périodiquement oscillant pour  $Ri \geq -1.32$ . L'écoulement chaotique a été supposé être dû au fort panache thermique qui rencontre un écoulement extérieur beaucoup plus faible. Cet écoulement ne présente pas de point de décollement et prend la forme, près de la sphère, d'un écoulement purement dû à la convection naturelle. En diminuant la valeur absolue du nombre de Richardson (autrement dit en augmentant le  $Re$  pour un  $Gr$  constant), l'écoulement se stabilise et un point de décollement apparaît au pôle nord de la sphère. Ce point se déplace vers le bas sur la surface de la sphère au fur et à mesure que le nombre de Reynolds augmente. L'écoulement est stationnaire et axisymétrique. Finalement, pour  $Ri \geq -1.32$ , la convection forcée domine la convection naturelle et l'écoulement oscille.

Chen & Mucoglu (1977) ont étudié l'écoulement opposant dans l'intervalle  $-3 \leq Ri \leq 0$  et pour  $Pr = 0.7$ . Ils ont constaté que les profils de vitesse présentent une forme en "S" (contrairement à l'"overshoot" trouvé en écoulement assistant), ce qui est dû à la décélération de l'écoulement près de la sphère chauffée à cause de l'effet opposant de la convection naturelle. Le point de décollement de la couche limite s'éloigne du point d'arrêt aval de la sphère lorsque le  $Gr$  augmente pour un  $Re$  constant, ce qui indique un effet déstabilisant de la convection naturelle dans cette configuration. Contrairement à l'écoulement assistant, le  $C_D$  et le  $Nu$  décroissent avec  $Gr$  pour un  $Re$  constant. De la même façon que pour l'écoulement assistant, un seuil, en terme de  $Ri$ , a été fixé pour délimiter la région d'influence prédominante de la convection naturelle :  $Ri \leq -1.33$ . Ce seuil, en valeur absolue, est inférieur à celui de l'écoulement assistant ( $Ri = 1.67$ ), ce qui montre que, en écoulement opposant, la convection naturelle doit être plus faible que la convection forcée pour qu'un panache thermique apparaisse.

Leur papier suivant (voir Mucoglu & Chen, 1978), où la condition de température constante sur la surface de la sphère a été remplacée par un flux de chaleur constant, a montré des résultats qualitativement très similaires à ceux de Antar & El-Shaarawi (2002), qui ont étudié une gouttelette d'eau sphérique avec un flux de chaleur constant, placée dans de l'air ( $Pr \approx 0.7$ ) pour  $Gr = 0$  et  $Gr = -10^7$ ,  $Re \leq 5000$  et trois valeurs du rapport des viscosités  $\mu_{air}/\mu_{eau}$ .

Dans une étude de Nazar *et al.* (2002), très similaire à celle de Chen & Mucoglu (1977), un deuxième nombre de Prandtl –  $Pr = 6.8$  a été introduit. À part des conclusions similaires à celles de Chen & Mucoglu (1977), Nazar *et al.* (2002) ont montré que pour les deux valeurs du nombre de Prandtl, il existe un  $Ri$  limite en dessous duquel apparaît un panache thermique qui va dans la direction opposée à celle de l'écoulement forcé. Les valeurs du nombre de Richardson critique sont, respectivement,  $Ri = -9$  pour  $Pr = 0.7$  et  $Ri = -16$  pour  $Pr = 6.8$ . Néanmoins, aucune étude de stabilité de l'écoulement inversé n'a été établie, ce qui laisse planer des doutes sur le sens physique des simulations axisymétriques d'un tel écoulement, sans doute fortement instable.

Dans le travail expérimental et numérique de Mograbi & Bar-Ziv (2005a), il a été montré, pour de grands nombres de  $|Ri|$  et faibles nombre de Reynolds, que la convection naturelle domine la convection forcée, ce qui se traduit par une force de traînée opposée à l'écoulement

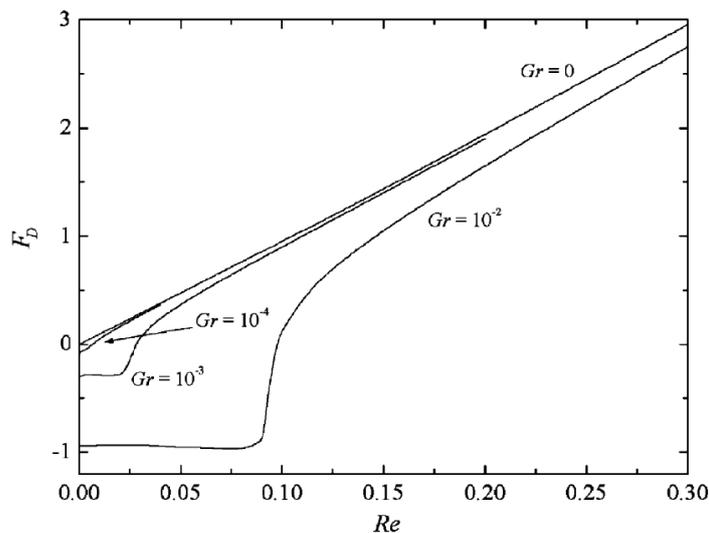


FIG. 1.5 – Chute de la force de traînée qui devient négative (signe d’un panache thermique inversé) pour  $Ri \approx -1$  – la courbe de  $Gr = 10^{-2}$ . Une augmentation de l’importance de la convection naturelle – augmentation de  $|Ri|$  – se traduit par une diminution de  $Re$  à  $Gr$  constant. Résultat d’une simulation numérique de Mograbi & Bar-Ziv (2005a).

forcé – la particule est entraînée par le panache thermique inversé qui se forme près de la sphère et qui transperce l’écoulement extérieur du fluide froid. Ils ont montré que, en augmentant l’écoulement extérieur, ce panache thermique est supprimé et l’écoulement autour de la sphère s’approche de celui d’une sphère non-chauffée. Ces observations ont été confirmées par des simulations numériques et une situation, particulièrement intéressante, a été observée : quand le nombre de Richardson dépasse légèrement  $Ri = -1$  lorsqu’on augmente la convection naturelle, la valeur de la force de traînée chute brusquement vers des valeurs négatives (voir Fig. 1.5), indiquant ainsi un panache thermique inversé. Ce phénomène est accompagné par l’apparition d’une immense zone de recirculation en aval de la sphère, dont le rayon à  $Ri = -1.23$  atteint déjà 200 diamètres de la sphère (contre  $\approx 0.3$  diamètre à  $Ri = -1.05$ ). L’évolution de la taille de la zone de recirculation est montrée dans Fig. 1.6. Pour  $Ri < -1.05$ , la sphère est totalement noyée dans la zone de recirculation. Ce résultat montre également la nécessité d’utiliser d’énormes domaines de calcul. La présente thèse vise, entre autres, à démontrer que, pour  $Re \geq 1$ , une telle recirculation ne peut exister qu’en forçant l’axisymétrie de l’écoulement et en empêchant le panache thermique de se retourner d’une manière tridimensionnelle.

Les mêmes conclusions que dans la partie expérimentale de l’article de Mograbi & Bar-Ziv (2005a) ont été trouvées dans les travaux expérimentaux de Mograbi *et al.* (2002) et Bar-Ziv *et al.* (2002).

Tang & Johnson (1990) ont mené des expériences avec une sphère chauffée ( $Gr = 9 \times 10^5$ ), placée dans un écoulement d’air vertical, allant du haut vers le bas, et saturé avec de la fumée afin de réaliser des visualisations. Les nombres de Reynolds considérés ont atteint

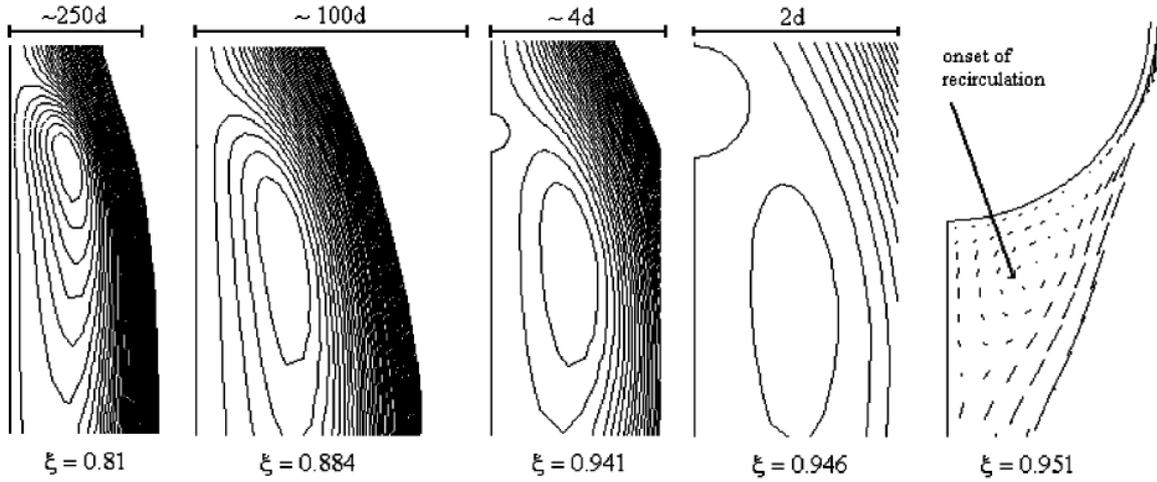


FIG. 1.6 – Evolution de la taille d’une zone de recirculation en aval de la sphère (l’écoulement allant du haut vers le bas) d’après Mograbi & Bar-Ziv (2005a).  $\zeta$  est un paramètre de la convection mixte, introduit par Mograbi & Bar-Ziv (2005a), et défini par  $\zeta = 1/|Ri|$ .

$Re = 1100$ . Il ont montré que les forces d’inertie l’emportent sur les forces d’Archimède pour  $Ri > -0.74$ , où l’écoulement est très similaire à celui de la convection forcée (Fig. 1.7a). A un autre extrême, pour  $Ri < -140$ , le panache thermique est si fort que l’écoulement forcé n’atteint même pas la surface de la sphère et l’écoulement est celui de la convection purement naturelle (Fig. 1.7c). Finalement, pour  $Ri \approx -10$ , les effets des deux types de convection s’équilibrent et une région de fluide stagnant autour de la sphère (Fig. 1.7b) a été observée. Ce régime correspond au minimum sur la courbe  $Nu = f(Re)$  pour un  $Gr$  constant. La même constatation a déjà été faite par Yuge (1960).

En conclusion, on note une extrême disparité de régimes régimes considérés ainsi que de données présentées ce qui rend les connaissances sur la convection mixte très fragmentées.

### 1.3 Transition au chaos de la trajectoire d’une sphère libre sans effet thermique

Les configurations “sphère fixe” et “sphère libre” ne se rejoignent que lorsque l’état asymptotique de la chute d’une sphère libre correspond au sillage axisymétrique d’une sphère fixe. La brisure de l’axisymétrie du sillage d’une sphère fixe permet de conclure que la trajectoire d’une sphère libre ne peut plus suivre une droite verticale lorsque sa vitesse de chute lui fait dépasser le seuil à partir duquel la symétrie axiale se brise. Pour décrire le comportement d’une sphère libre, on ne peut donc pas se baser sur le comportement d’une sphère fixe : il faut observer directement une particule sphérique en chute ou ascension libre.

Puisque la vitesse de chute ou d’ascension d’une sphère libre n’est uniforme que dans le cas particulier d’un sillage axisymétrique (la vitesse asymptotique ne devant pas dépasser la

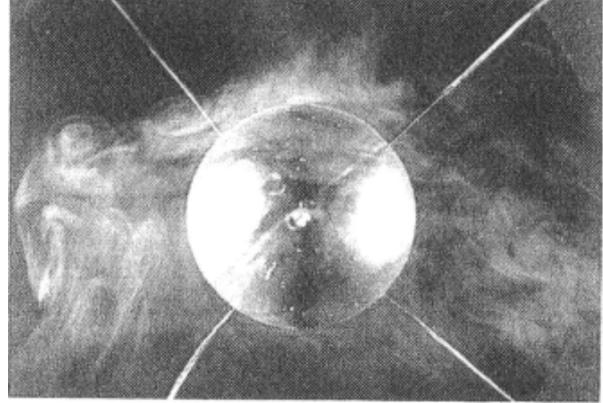
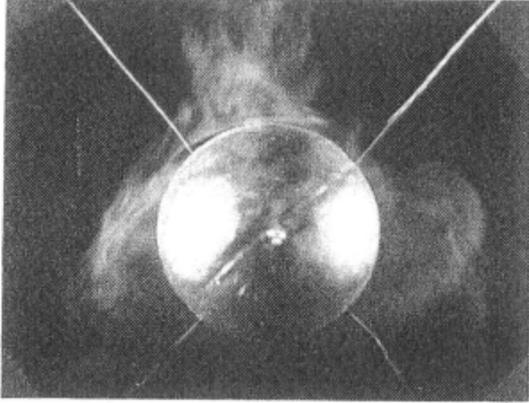
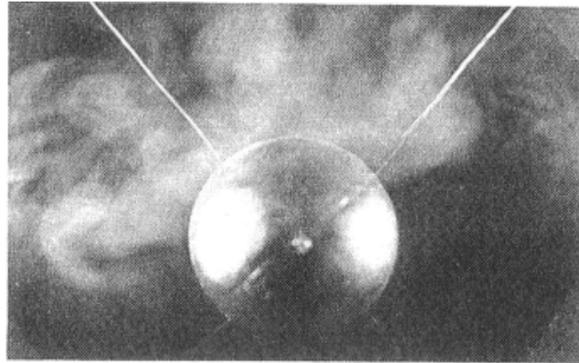
(a)  $Gr = 9 \times 10^5$ ,  $Re = 1100$  ( $Ri = -0.74$ )(b)  $Gr = 9 \times 10^5$ ,  $Re = 300$  ( $Ri = -10$ )(c)  $Gr = 9 \times 10^5$ ,  $Re = 80$  ( $Ri = -140$ )

FIG. 1.7 – Visualisation de l'écoulement autour d'une sphère chauffée dans de l'air, saturé avec de la fumée (le courant allant du haut vers le bas). (a) La convection forcée domine et supprime le panache thermique, (b) la convection forcée est en équilibre avec la convection naturelle, (c) le panache thermique domine l'écoulement. Images reproduites de l'étude de Tang & Johnson (1990).

vitesse critique déclenchant l'instabilité primaire), un paramètre sans dimension autre que le nombre de Reynolds doit être défini pour caractériser les états asymptotiques de la sphère libre. En utilisant pour échelle de vitesse  $\sqrt{|\rho_s/\rho_f - 1|gd}$ , où  $\rho_s$  et  $\rho_f$  sont, respectivement, la masse volumique de la sphère et celle du fluide,  $g$  l'accélération gravitationnelle et  $d$  le diamètre de la sphère, on obtient, après avoir adimensionné les équations de Navier-Stokes, un nouveau paramètre sans dimension, appelé nombre de Galilée ( $G$ ) et défini par

$$G = \frac{\sqrt{|\rho_s/\rho_f - 1|gd^3}}{\nu} \quad (1.9)$$

avec  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide. On peut écrire une expression reliant le nombre de Galilée au nombre de Reynolds, applicable dans le cas d'un régime asymptotique stationnaire de la sphère

$$C_D(Re) = \frac{4G^2}{3Re^2\nu}. \quad (1.10)$$

Le deuxième paramètre sans dimension, décrivant avec le nombre de Galilée un unique état asymptotique de chute ou d'ascension d'une sphère libre, est le rapport des masses volumiques du solide et du fluide ( $\rho_s/\rho_f$ ).

Les travaux portant sur une sphère libre sont bien plus rares que ceux portant sur une sphère fixe. Il en existe tout de même quelques uns. Pour des raisons pratiques et afin d'étudier le sillage d'une sphère qui se déplace à vitesse constante, Magarvey & Bishop (1961*b*) étudient l'allée tourbillonnaire qui se développe en aval d'inclusions liquides tombant dans un autre liquide non-miscible avec un nombre de Reynolds limite  $Re = 350$ , soit  $G = \sqrt{Ar} \approx 250$  et  $1 < \rho_s/\rho_f < 1.6$  (où  $Ar$  est le nombre d'Archimède). Ils observent un nombre de Strouhal  $St = 0.12$  très proche de celui d'une sphère fixe. Le parallèle avec une sphère rigide n'est plus possible dès que l'inclusion est trop grande et qu'elle se déforme. De plus, la condition limite de non-glissement à la surface de l'inclusion n'est pas garantie. Des expériences similaires sont réalisées avec des sphères solides ( $\rho_s/\rho_f = 1.12$ ) par Goldburg & Florsheim (1966) qui concluent qu'à  $Re = 300$ , c'est-à-dire  $\sqrt{Ar} \approx 220$ , le sillage instationnaire admet une basse fréquence  $St \approx 0.07$ . De même, Magarvey & MacLachy (1965) lâchent des sphères pour observer leur sillage et ils constatent que la sphère est déviée de la direction verticale quand le sillage est supercritique. Une bulle dont la surface est contaminée, ce qui est généralement le cas, peut être considérée, si elle ne se déforme pas, comme une sphère solide (voir Duineveld, 1995). Lunde & Perkins (1997) observent une bulle sphérique qui suit une trajectoire en zigzag (dans un plan) puis hélicoïdale. Wu & Gharib (2002) observent expérimentalement deux types de bulle. Le premier type est une bulle sphérique et, dans ce cas, la trajectoire suit un zigzag plan. La trajectoire hélicoïdale n'est observée par Wu & Gharib (2002) que quand la bulle se déforme en ellipsoïde. Les simulations numériques effectuées par Mougin & Magnaudet (2002*b,a*) montrent qu'une bulle rigide avec un rapport de forme (rapport entre le grand diamètre et le petit)  $\chi = 2.5$  suit une trajectoire en zigzag qui se transforme en spirale, caractérisée par une basse fréquence lorsque le nombre de Galilée augmente, l'état asymptotique étant alors comparable à celui qu'observent Wu & Gharib (2002). Dans un travail récent de Bonometti & Magnaudet (2007), des simulations numériques, utilisant la méthode de la capture de l'interface, ont été effectuées sur l'étude d'une bulle avec évolution de sa forme et sur l'interaction entre deux bulles et leur éventuelle fusion. Les informations apportées par ces travaux sont trop lacunaires pour compléter un scénario de transition mais elles montrent, tout de même, l'importance du couplage entre le sillage d'une sphère fixe ou d'une bulle et la trajectographie d'une sphère libre.

De récents travaux numériques (voir Jenny, 2003; Jenny *et al.*, 2003, 2004; Jenny & Dušek, 2004), utilisant un code spectral-éléments spectraux couplé avec un maillage mobile, ont permis de balayer le plan des paramètres et de mettre en évidence différents régimes pour un grand nombre de combinaisons du rapport des masses volumiques ( $0 < \rho_s/\rho_f < \infty$ ) et du nombre de Galilée ( $150 < G < 350$ ). Un diagramme des états asymptotiques, dont la

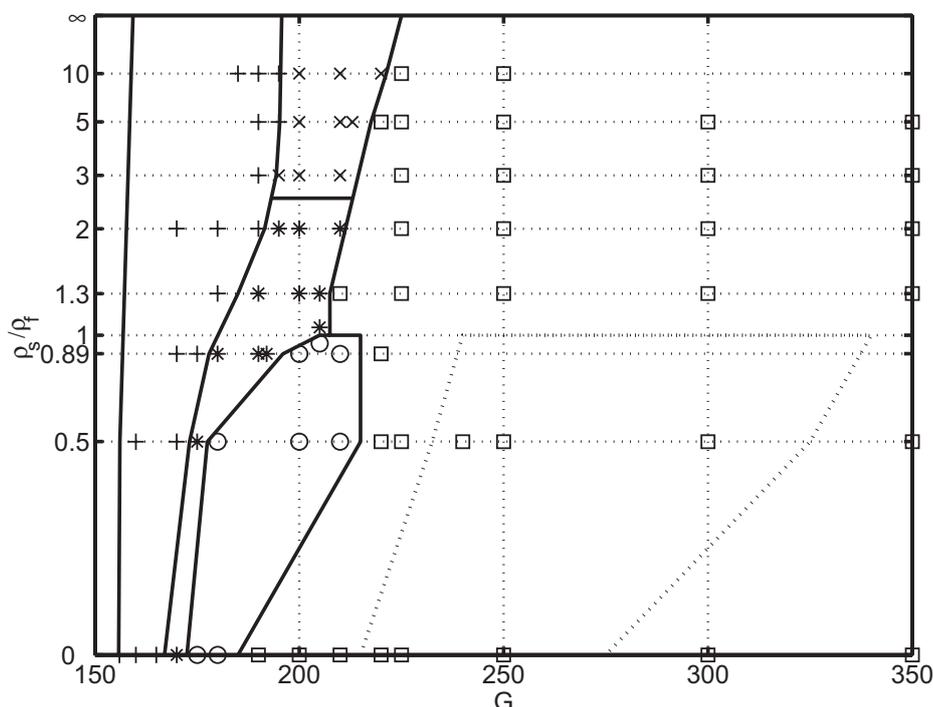


FIG. 1.8 – Diagramme des états asymptotiques (Jenny, 2003). Chaque symbole indique une simulation : + régime oblique et stationnaire, \* régime oblique et oscillant à basse fréquence ( $0.045 \leq f \leq 0.068$ ), x régime oblique et oscillant à haute fréquence ( $f \approx 0.180$ ), O régime périodique en zigzag ( $0.023 \leq f \leq 0.35$ ) et  $\square$  régime 3D chaotique. Le domaine de coexistence de deux solutions distinctes, l'une périodique et l'autre chaotique, est délimité par une ligne en pointillé.

reproduction est montrée dans Fig. 1.8, a été établi.

#### 1.4 Problème d'une particule (sphérique ou non-sphérique) avec transfert de chaleur et de masse

La plupart des études portant sur le problème conjugué du transfert de chaleur et de masse, sont des travaux expérimentaux dans lesquels les auteurs s'intéressent à la convection naturelle ou mixte autour d'un solide fixe (initialement sphérique ou cubique) dans des conditions anisothermiques. Le solide est souvent un glaçon, plongé dans de l'eau (ou éventuellement dans un autre fluide), où l'expansion anormale de l'eau s'ajoute à la complexité du problème. Les travaux utilisant la simulation numérique sont assez rares et très souvent simplifiés (géométrie 2D, aucun transfert de masse, convection purement naturelle...), s'éloignant ainsi du problème initial assez complexe. A notre connaissance, aucun résultat sur une sphère libre en convection mixte avec ou sans transfert de masse n'a encore été publié.

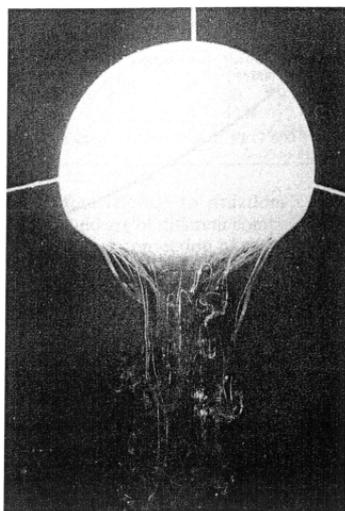


FIG. 1.9 – Aspect d’une sphère solide en cire en fusion dans de l’eau chaude, d’après McLeod *et al.* (1996).

Dans le travail de Schenk & Schenkels (1968), des expériences sur la fonte d’une surface sphérique glacée (constituée par une couche de 3 mm d’eau gelée sur une sphère en cuivre d’un diamètre de 3.2 cm, fixée sur une tige) ont été menées dans de l’eau de température comprise entre 0°C et 10°C, c’est-à-dire pour  $0 < Gr < 2 \times 10^5$  et  $Pr \approx 10$ . Grâce à l’expansion anormale de l’eau (la masse volumique de l’eau croît entre 0 et 4°C et décroît pour  $t > 4^\circ\text{C}$ ), trois régimes d’écoulement qualitativement différents ont été observés autour de la sphère. Pour une température ambiante de l’eau comprise entre 0 et 4°C, un écoulement vers le haut du fluide moins dense situé au voisinage de la sphère est observé. Le nombre de Nusselt local ( $Nu_l$ ) est plus élevé au pôle sud de la sphère, là où l’épaisseur de la couche limite est plus petite, et décroît de façon monotone en se rapprochant du pôle nord. Pour des températures de l’eau supérieures à 6°C, l’écoulement descend vers le bas, grâce au coefficient d’expansion volumique ( $\beta$ ) de l’eau qui est positif presque partout dans la cuve. Cette fois-ci, le nombre de Nusselt local décroît avec la distance angulaire mesurée à partir du pôle nord de la sphère. Enfin, l’intervalle le plus intéressant est celui des températures comprises entre 4° et 6°C, où deux types d’écoulement ont été observés : un écoulement vers le haut du fluide très proche de la sphère ( $\beta$  étant négatif pour  $0 < t < 4^\circ\text{C}$ ) et un écoulement vers le bas plus loin de la sphère. Pour une température de 5.3°C, une région de fluide stagnant a été trouvée autour de la sphère, ce qui correspond au minimum sur la courbe du nombre de Nusselt total ( $Nu$ ) en fonction de la température ambiante de l’eau.

McLeod *et al.* (1996) ont mené des expériences avec des sphères fixes en cire, immergées dans de l’eau chaude. Ils ont observé deux types de fonte qualitativement différents : sur l’hémisphère nord de la sphère, une couche uniforme de liquide froid fondu a été observée et la forme sphérique (à part un léger aplatissement au pôle nord indiquant un nombre de Nusselt local plus élevé) est conservée. Un aspect différent a été observé sur l’hémisphère sud

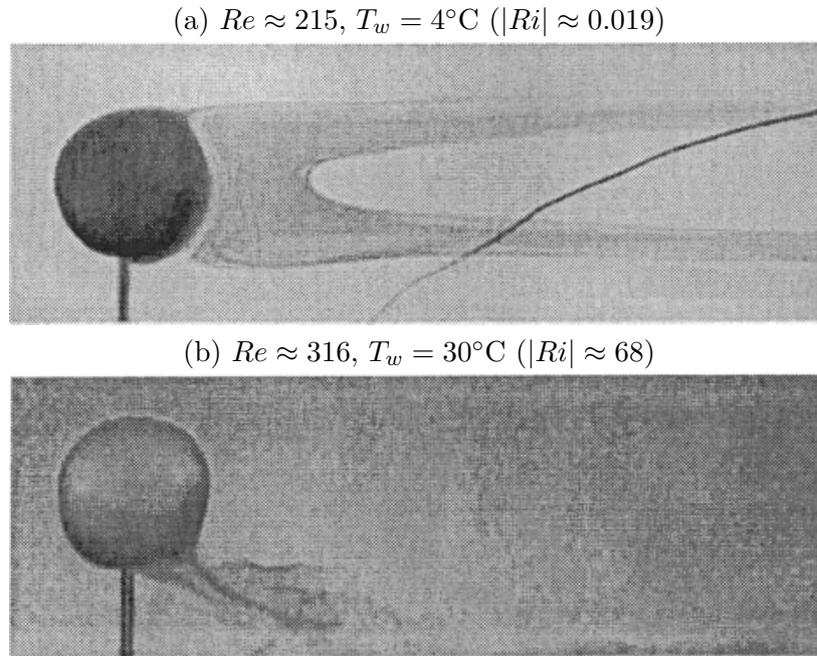


FIG. 1.10 – Écoulement autour d'un glaçon dans de l'eau à différentes températures. Visualisation de Hao & Tao (2001).

de la sphère – le fluide fondu ne forme plus une couche uniforme et se détache de la surface de la sphère sous la forme des filaments, créant ainsi une surface rugueuse et aplatie. Dans cette région, le transfert de chaleur est favorisé. Les filaments présentent un aspect laminaire près de la surface, mais deviennent turbulents en s'éloignant de la sphère. L'aspect de la fusion est montré dans Fig. 1.9.

Des expériences avec un glaçon sphérique soumis à un écoulement horizontal ont été menées par Hao & Tao (2001) dans de l'eau à  $4^\circ\text{C}$  et à  $30^\circ\text{C}$ . La température  $T_w = 4^\circ\text{C}$  a été choisie afin d'éliminer les effets de flottabilité (à cette température, la masse volumique de l'eau atteint son maximum –  $\rho = 1000\text{ kg/m}^3$ ); la température  $T_w = 30^\circ\text{C}$  a été choisie afin de favoriser les effets de la convection naturelle et d'étudier ainsi la convection mixte. Des résultats quantitatifs, acquis à l'aide d'un système de PIV, ont été complétés par des résultats qualitatifs obtenus en utilisant un glaçon coloré afin de visualiser l'aspect du sillage. Malgré une géométrie légèrement modifiée par la fonte non-sphérique du glaçon, le régime stationnaire non-axisymétrique, présentant 2 filaments de vorticité et une symétrie plane, a été observé    $Re \approx 215$  et, puisque la température de l'eau a été fixée    $4^\circ\text{C}$ ,   un nombre de Richardson négligeable (voir Fig. 1.10a). Des visualisations ont été poursuivies jusqu'   $Re \approx 2150$ , où le sillage est déjà clairement turbulent. Des expériences menées dans l'eau    $T_w = 30^\circ\text{C}$  ont montré un écoulement    $Re \approx 316$  dominé par la convection naturelle ( $|Ri| \approx 68$ ) et entraînant le sillage vers le bas, où il est brisé en rencontrant la paroi de la cuve (Fig. 1.10b). L'effet de la convection naturelle a été rapporté comme étant non-négligeable

pour  $|Ri| > 0.682$ , son effet étant de raccourcir ou, éventuellement, faire disparaître la zone de recirculation. La fonte du glaçon a été observée comme étant non-sphérique – en aval, où, dans la zone de recirculation turbulente, le glaçon fond plus vite qu'en amont où la couche limite reste attachée. Le glaçon acquiert ainsi une forme aplatie (Fig. 1.10).

Dans un autre de leurs papiers (Hao & Tao, 2002), l'attention a été focalisée sur les caractéristiques du transfert de chaleur et de masse, en se plaçant dans les mêmes conditions expérimentales que Hao & Tao (2001). Les mêmes tendances ont été trouvées pour le taux de transfert de chaleur et de masse – en aval de la sphère, dans la zone de recirculation, où le nombre de Nusselt local présente un pic, le glaçon fond plus rapidement, acquérant ainsi une forme aplatie. Le changement de forme (par rapport à la forme initialement sphérique) est de plus en plus marqué au fur et à mesure que la taille du glaçon diminue, ce qui s'explique par l'apparition de vortex, générés à l'endroit où la forme du glaçon cesse d'être sphérique. La conduction de chaleur à l'intérieur de la sphère a été notée comme négligeable, sauf sur une période très courte au début de la fonte.

Quarini & Chang (2002) ont étudié expérimentalement et numériquement la convection naturelle d'un cube de glace, soit flottant, soit immergé dans de l'eau ou dans une solution saline. Des temps de fonte très différents ont été relevés lorsqu'on laisse le cube flotter, soit à la surface de l'eau, soit à la surface de la solution saline, et lorsqu'on l'immerge, soit dans de l'eau, soit dans une solution saline, ce qui a été expliqué par l'action des forces de flottabilité : dans le cas du glaçon flottant à la surface de l'eau, le fluide fondu est plus dense ; il descend donc dans l'eau et le glaçon est toujours entouré par un fluide chaud. Dans le cas d'un glaçon flottant à la surface d'une solution saline, le fluide fondu est moins dense que la solution et il reste donc à la surface, entourant ainsi le glaçon d'un fluide froid. Un glaçon flottant dans de l'eau fond alors plus vite qu'un glaçon flottant dans la solution saline. L'inverse a été constaté pour un glaçon immergé dans de l'eau et dans la solution saline, respectivement. L'observation expérimentale a été vérifiée par une simulation numérique, utilisant, néanmoins, une approximation de Boussinesq.

Kahraman (2002) a étudié expérimentalement et numériquement la fonte d'un glaçon rectangulaire chauffé par une plaque de cuivre en contact avec sa surface supérieure. La simulation numérique, effectuée en 2D et prenant en compte l'expansion anormale de l'eau, a été en bon accord avec l'expérience et a souligné la nécessité d'utiliser la dépendance réelle de la masse volumique de l'eau en fonction de la température pour étudier les problèmes de convection naturelle.

Gan *et al.* (2003a) ont effectué des simulations numériques bidimensionnelles sur la sédimentation de particules cylindriques chaudes (écoulement assistant) ou froides (écoulement opposant) dans un fluide avec une approximation de Boussinesq. Les valeurs absolues du nombre de Grashof considéré ont été variées entre 0 (effets de flottabilité non pris en compte) et  $10^4$ , le rapport des masses volumiques solide/fluide ( $\rho_s/\rho_f$ ) a été pris légèrement supérieur à 1 et le nombre de Prandtl a été fixé à  $Pr = 0.7$ . Les résultats ont été présentés en termes de nombre de Reynolds asymptotique, variant entre 0 (la convection naturelle d'une particule chauffée induisant un écoulement vers le haut, compensant ainsi le poids de la sphère et la maintenant en lévitation (écoulement assistant)) et 30 (la convection naturelle d'une sphère froide induisant un écoulement vers le bas et accélérant ainsi le mouvement de la particule (écoulement opposant)). Dans les deux configurations de la convection mixte, il a été trouvé

que le régime rectiligne, existant aux bas nombres de Reynolds, fait place à un régime oscillant. Le seuil de l'instabilité instationnaire a été trouvé plus bas pour l'écoulement opposant, confirmant l'observation générale qu'un écoulement opposant est déstabilisant. Une interaction entre deux particules a également été simulée, et il a été montré que leur comportement dépend du nombre de Grashof. Dans un papier suivant (voir Gan *et al.*, 2003b), un changement de forme a été pris en compte pour simuler la fusion. Néanmoins, l'aplatissement des cylindres (puisque'il s'agit de simulations 2D) a été mentionnée comme ayant peu d'incidence sur les régimes asymptotiques trouvés.

## 1.5 Objectifs et organisation du travail

La présente thèse vise en premier lieu à étudier numériquement la transition au chaos du sillage d'une sphère fixe en convection mixte, dans les configurations de l'écoulement assistant et de l'écoulement opposant. Cela consiste donc, avant tout, à déterminer les seuils des bifurcations primaire ( $Re_1$ ), secondaire ( $Re_2$ ) et tertiaire ( $Re_3$ ) en fonction du nombre de Richardson ou, éventuellement, à mettre en évidence un autre type de transition que celui observé dans le cas de la sphère fixe sans effet thermique.

En second lieu, les connaissances acquises en étudiant la dynamique du sillage d'une sphère fixe en convection mixte seront utilisées afin de décrire le comportement d'une particule sphérique libre, sous l'effet conjugué de la convection naturelle et de la convection forcée. Une comparaison entre quelques régimes asymptotiques de la sphère libre sans et avec effets thermiques sera faite.

Enfin, les trajectoires d'un glaçon de température homogène  $0^\circ\text{C}$  et de différents diamètres initiaux, plongé dans de l'eau à  $4^\circ$  et à  $20^\circ\text{C}$  seront calculées, en considérant la fonte comme sphérique et en modélisant les propriétés réelles de l'eau.

Les chapitres de ce mémoire de thèse sont organisés de la façon suivante : la formulation mathématique des différents problèmes est présentée dans Chapitre 2, la méthode numérique et le code de calcul sont décrits dans Chapitre 3, Chapitre 4 porte sur la sphère fixe en convection mixte, Chapitre 5 sur la sphère libre en convection mixte et sur un glaçon en fusion. Les conclusions sont tirées dans Chapitre 6.



## Chapitre 2

# Formulation mathématique

### 2.1 Sphère fixe sans effet thermique

On considère une sphère fixe de diamètre  $d$  placée dans l'écoulement d'un fluide newtonien de vitesse uniforme  $\mathbf{v}_\infty$  (voir Fig. 2.1). L'écoulement du fluide incompressible autour de la sphère est décrit par le système d'équations de continuité et de Navier–Stokes

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2.2)$$

Le champ de pression dynamique est noté  $p$  (la pression hydrostatique est soustraite à la pression totale  $\tilde{p} = p + \rho g z$ ),  $\rho$  est la masse volumique du fluide et  $\nu$  représente la viscosité cinématique. L'opérateur  $\nabla$  est défini dans un système de coordonnées cartésiennes par  $\nabla = [\partial./\partial x, \partial./\partial y, \partial./\partial z]$ , où  $(x, y, z)$  sont les coordonnées cartésiennes de l'espace.

Les équations de Navier-Stokes peuvent être adimensionnalisées pour mettre en évidence les paramètres indépendants qui gouvernent l'écoulement autour d'une sphère fixe. Pour cela, la valeur de la vitesse de l'écoulement extérieur  $v_\infty$  est prise comme vitesse de référence, le diamètre de la sphère  $d$  comme longueur de référence,  $\rho v_\infty^2$  comme pression de référence et le rapport  $d/v_\infty$  comme temps de référence. Après avoir adimensionnalisé les quantités des équations (2.2) par les échelles de référence, les équations de Navier-Stokes adimensionnées s'écrivent (en omettant le symbol \* qui désigne habituellement les quantités sans dimension)

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2.3)$$

où  $Re$  est le rapport entre les forces d'inertie et les forces de viscosité, appelé nombre de Reynolds et défini par

$$Re = \frac{v_\infty d}{\nu}. \quad (2.4)$$

Le problème de l'écoulement d'un fluide incompressible autour d'une sphère fixe comporte donc un seul paramètre sans dimension, le nombre de Reynolds ( $Re$ ).

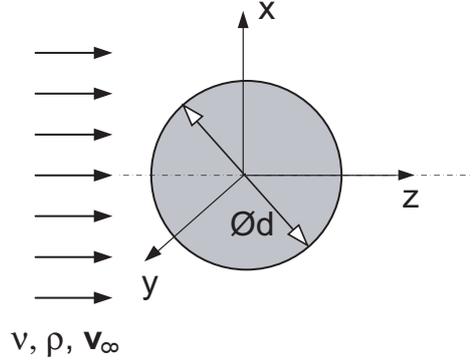


FIG. 2.1 – Schéma de l'écoulement autour d'une sphère fixe sans effet thermique.

## 2.2 Sphère fixe avec effets thermiques

On considère ici une sphère fixe de température de surface constante, immergée dans un écoulement de fluide newtonien incompressible froid, le tout soumis à un champ de pesanteur. Les schémas des deux situations de convection mixte que nous avons traitées (“assisting flow” ou écoulement assistant et “opposing flow” ou écoulement opposant) sont présentés respectivement dans Fig. 2.2a et b. Afin de réduire la dimension de l'espace des paramètres, les effets de flottabilité sont pris en compte, en accord avec tous les travaux numériques de la section 1.2, par l'approximation de Boussinesq. Cette dernière consiste à supposer que toutes les propriétés du fluide sont constantes à l'exception de la masse volumique qui varie linéairement en fonction de la température. Cette situation est mathématiquement décrite par un système d'équations de continuité et de Navier–Stokes, couplées à l'équation de l'énergie :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} + \mathbf{g}, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T. \quad (2.7)$$

La masse volumique s'écrit

$$\rho \approx \left( \rho_0 + \frac{d\rho}{dT} \Delta T \right), \quad (2.8)$$

où  $\rho_0$  est la masse volumique du fluide à une température de référence  $T_{ref}$  et  $\Delta T$  est la variation locale de la température par rapport à  $T_{ref}$  ( $\Delta T = T - T_{ref}$ ). Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, le coefficient d'expansion thermique

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \frac{d\rho}{dT} \quad (2.9)$$

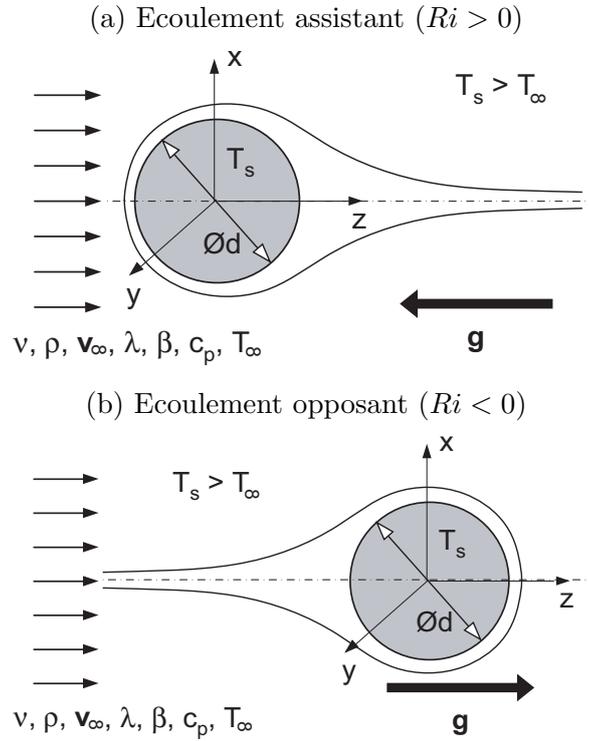


FIG. 2.2 – Schéma de l'écoulement autour d'une sphère fixe en convection mixte. (a) Écoulement assistant (les forces d'Archimède étant superposés à l'écoulement extérieur), (b) Écoulement opposant (les forces d'Archimède étant opposés à l'écoulement extérieur).

est supposé constant et le produit  $\beta \Delta T$  petit devant l'unité. Ainsi,  $1/\rho \approx (1 + \beta \Delta T)/\rho_0$ . Nous pouvons maintenant réécrire l'équation (2.6) sous la forme

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v} - \beta(T - T_\infty) \mathbf{g}, \quad (2.10)$$

où nous avons pris pour température de référence la température  $T_\infty$  du fluide loin de la sphère chauffée. On peut noter que l'équation (2.10) permet de prendre en compte aussi bien les écoulements assistants que les écoulements opposants.

Si l'on considère des fluides tels que l'air ou l'eau, l'approximation de Boussinesq reste suffisamment précise tant que la différence de température (typiquement entre la sphère et le fluide), responsable de la convection naturelle, ne dépasse pas quelques degrés. Ferziger & Perić (1997)[p. 15] donnent une erreur acceptable (inférieure à 1%) pour une différence de température de moins de 2°C dans l'eau et de moins de 15°C dans l'air. De leur côté, Gray & Giorgini (1976) limitent l'utilisation de l'approximation de Boussinesq dans des conditions normales (température ambiante de 15°C, pression atmosphérique) à une différence de température de 1.25°C pour l'eau et 28.6°C pour l'air. De façon pratique, et à l'extrême, de très petites particules ou, pour le même nombre de Richardson, des particules très chaudes,

ne seront pas couvertes par cette approximation. Mais de façon générale, on peut noter que dans le cas de l'eau et de l'air, l'approximation de Boussinesq peut être utilisée assez largement, c'est-à-dire pour des conditions expérimentales très raisonnables. Ainsi, dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes limités à des nombres de Reynolds inférieurs à 1500 et des nombres de Richardson inférieurs à 0.7, ce qui correspond, à titre d'exemple, à une sphère de diamètre 11 cm placée dans un courant d'air d'une différence de température de 8°C et d'une vitesse 0.2 m.s<sup>-1</sup>.

Comme nous allons le voir juste après, l'approximation de Boussinesq permet donc de réduire la dimension de l'espace des paramètres à trois nombres sans dimension, chacun des nombres dépendant des propriétés du fluide (la masse volumique  $\rho$ , la viscosité cinématique  $\nu$ , la conductivité thermique  $\lambda$ , la chaleur spécifique  $c_p$  et le coefficient d'expansion thermique  $\beta$ ) et des caractéristiques de l'écoulement (vitesse uniforme de l'écoulement extérieur  $v_\infty$ , température du fluide à l'infini  $T_\infty$  et température de la surface de la sphère  $T_s$ ). Les équations (2.6) et (2.7) peuvent être adimensionnalisées en utilisant les quantités de référence suivantes : le diamètre de la sphère pour la longueur, la vitesse  $v_\infty$  pour la vitesse, le rapport  $d/v_\infty$  pour le temps et  $\rho v_\infty^2$  pour la pression. La température sans dimension est définie par  $T^* = (T - T_\infty)/(T_s - T_\infty)$ . En omettant le symbol \* pour désigner les quantités sans dimension, les équations (2.5), (2.6) et (2.7) s'écrivent alors

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v} + Ri T \mathbf{i}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Re.Pr} \nabla^2 T, \quad (2.13)$$

où  $\mathbf{i} = -\mathbf{g}/|\mathbf{g}|$  désigne un vecteur unité, orienté vers le haut (la gravité pointant vers le bas). Les trois paramètres sans dimension sont le nombre de Reynolds ( $Re$ ), le nombre de Richardson ( $Ri$ ) et le nombre de Prandtl ( $Pr$ ), définis respectivement par

$$Re = \frac{v_\infty d}{\nu}, \quad (2.14)$$

$$Ri = \frac{\beta g (T_s - T_\infty) d}{v_\infty^2}, \quad (2.15)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa} = \frac{\nu \rho c_p}{\lambda}. \quad (2.16)$$

Comme on peut le trouver de façon classique dans la littérature, le cas de l'écoulement assistant correspond à  $Ri > 0$ , celui de l'écoulement opposant à  $Ri < 0$ .

La combinaison des deux premiers nombres aboutit au nombre de Grashof ( $Gr$ ) défini par

$$Gr = Ri.Re^2 = \frac{\beta g (T_s - T_\infty) d^3}{\nu^2}. \quad (2.17)$$

qui caractérise une convection naturelle pure.

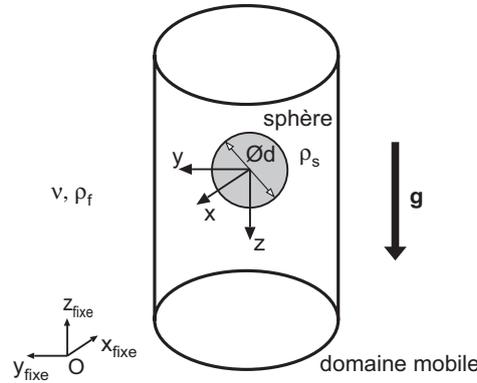


FIG. 2.3 – Schéma d'une sphère libre sans effet thermique dans un repère en translation par rapport au repère fixe.

## 2.3 Sphère libre sans effet thermique

Une sphère plongée dans un milieu infini de fluide newtonien dans un champ de gravité est soumise à la poussée d'Archimède et à la réaction du fluide au déplacement de la sphère. L'écoulement du fluide incompressible autour de la sphère est décrit par les équations de continuité et de Navier–Stokes que l'on écrit en considérant la vitesse absolue  $\mathbf{v}$  du fluide projetée dans un repère en translation (voir Fig. 2.3) avec le centre de masse de la sphère qui se déplace à la vitesse  $\mathbf{u}$  (ici en grandeurs dimensionnelles) :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \nabla] \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_f} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}. \quad (2.19)$$

Le champ de pression est noté  $p$ ,  $\rho_f$  est la masse volumique du fluide et  $\nu$  représente la viscosité cinématique. Le choix de projeter les vecteurs sur un repère en translation est justifié par l'objectif de conserver un domaine inchangé dans les simulations numériques. De plus, les vitesses projetées étant absolues, elles tendent vers zéro à grande distance de la sphère. Les vitesses du fluide sont donc quasiment nulles au bord du domaine numérique utilisé, ce qui simplifie le traitement des conditions limites dans la partie numérique et facilite l'interprétation des résultats.

Le mouvement de la sphère est déterminé par les équations du mouvement d'un corps solide écrites au centre de masse :

$$\rho_s \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{6}{\pi d^3} \mathbf{F}_{fl}(\mathbf{v}, p) + (\rho_s - \rho_f) \mathbf{g} \quad (2.20)$$

$$\rho_s \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \frac{60}{\pi d^5} \mathbf{M}_{fl}(\mathbf{v}, p) \quad (2.21)$$

où  $\rho_s$  est la masse volumique de la sphère de diamètre  $d$ ,  $\mathbf{F}_{fl}$  la force globale qu'exerce le fluide environnant sur la sphère et  $\mathbf{M}_{fl}$  le moment par rapport au centre de la sphère induit par les contraintes du fluide sur la surface de la particule sphérique. La force et le moment exercés par le fluide dépendent de l'écoulement autour de la sphère ce qui implique un couplage entre les équations du mouvement (2.20) et (2.21) et les équations de Navier–Stokes (2.19) et (2.18). La force  $\mathbf{F}_{fl}$  et le moment  $\mathbf{M}_{fl}$  sont le résultat de l'intégration des contraintes élémentaires  $\mathbf{f}$  du fluide sur la surface  $S$  de la sphère (2.22) et (2.23).

$$\mathbf{F}_{fl}(\mathbf{v}, p) = \int_S \mathbf{f} dS \quad (2.22)$$

$$\mathbf{M}_{fl}(\mathbf{v}, p) = \int_S \mathbf{r}_s \times \mathbf{f} dS. \quad (2.23)$$

Les composantes  $f_i$  des contraintes élémentaires dépendent directement de l'écoulement du fluide :

$$f_i = 2\mu S_{ij} n_j - p n_i, \quad (2.24)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur unitaire normal à la surface de la sphère au point courant et  $[S_{ij}]$  est le tenseur des contraintes défini par :

$$S_{ij} = \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.25)$$

Le problème est donc entièrement décrit par l'ensemble des relations (2.18)–(2.25) qui doivent encore être adimensionnalisées pour mettre en évidence les paramètres indépendants qui définissent le mouvement d'une sphère libre. Il existe de nombreuses adimensionnalisations possibles, mais elles ne sont pas toutes pertinentes. Le nombre de Reynolds  $Re$ , défini grâce à la vitesse limite de chute (ou d'ascension), pourrait être un paramètre sans dimension du problème si cette vitesse limite était connue. Cette dernière étant cependant inconnue a priori, une autre échelle de vitesse doit être définie. Les équations du mouvement (2.20) et (2.21) font apparaître une accélération de référence  $(\rho_s/\rho_f - 1)g$  qui permet de définir une vitesse et un temps de référence :

$$U = \sqrt{\left| \frac{\rho_s}{\rho_f} - 1 \right| g d} \quad (2.26)$$

$$\tau = \sqrt{\frac{d}{|\rho_s/\rho_f - 1| g}} \quad (2.27)$$

En utilisant ces grandeurs pour unités de vitesse et de temps, les équations sans dimension du problème obtenues à partir des équations (2.18) et (2.19) s'écrivent :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \nabla] \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{G} \nabla^2 \mathbf{v} \quad (2.29)$$

Tous les termes étant adimensionnés, les équations de Navier–Stokes font ainsi apparaître un paramètre sans dimension, le nombre de Galilée ( $G$ ), qui fait office de nombre de Reynolds. Son expression est :

$$G = \frac{\sqrt{|\rho_s/\rho_f - 1| g d^3}}{\nu}. \quad (2.30)$$

Le nombre de Galilée est la racine carrée du nombre d'Archimède, défini par Karamanev *et al.* (1996). Il représente le rapport entre la poussée d'Archimède qui met la sphère en mouvement et les forces visqueuses qui s'opposent à son déplacement.  $G$  représente une caractéristique équivalente au nombre de Reynolds si le mouvement n'est pas accéléré ; en effet, le terme de gauche des équations du mouvement de la sphère étant nul, seules subsistent les équations de Navier–Stokes. Dans ce cas, une relation bijective entre les deux paramètres, uniquement valable dans le cas d'un régime asymptotique ( $t \rightarrow \infty$ ) stationnaire, peut être établie :

$$C_D(Re_\infty) = \frac{4G^2}{3Re_\infty^2} \quad (2.31)$$

L'adimensionnalisation des équations du mouvement (2.32) et (2.33) fait apparaître le rapport des masses volumiques de la sphère et du fluide  $\rho_s/\rho_f$  en tant que second paramètre du problème :

$$\frac{\rho_s}{\rho_f} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{6}{\pi} \mathbf{F}_{fl}(\mathbf{v}, p) + \mathbf{k}_{fix}, \quad (2.32)$$

$$\frac{\rho_s}{\rho_f} \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \frac{60}{\pi} \mathbf{M}_{fl}(\mathbf{v}, p) \quad (2.33)$$

avec  $\mathbf{k}_{fix} = \text{sign}(\rho_s/\rho_f - 1)\mathbf{g}/|\mathbf{g}|$  le vecteur unité vertical qui pointe dans la direction de l'accélération résultante de la gravité et de la poussée d'Archimède (vers le haut si  $\rho_s/\rho_f < 1$  et vers le bas si  $\rho_s/\rho_f > 1$ , le vecteur gravité pointant vers le bas).

Il apparaît donc que deux paramètres sans dimension indépendants sont nécessaires à la description de la chute libre d'une sphère. Ces paramètres, le nombre de Galilée ( $G$ ) et la densité de la particule ( $\rho_s/\rho_f$ ), sont entièrement définis par des grandeurs connues et ajustables avant l'observation du mouvement, soit par une simulation numérique, soit par un essai expérimental. Ainsi, l'étude de la trajectoire d'une sphère libre sans effet thermique se fait dans l'espace bidimensionnel formé par  $G$  et ( $\rho_s/\rho_f$ ).

## 2.4 Glaçon sphérique en ascension libre et en fusion dans de l'eau à température ambiante

### 2.4.1 Caractéristiques physiques de l'eau

On se propose de modéliser la fonte d'un glaçon initialement sphérique au cours de son ascension dans de l'eau initialement au repos.

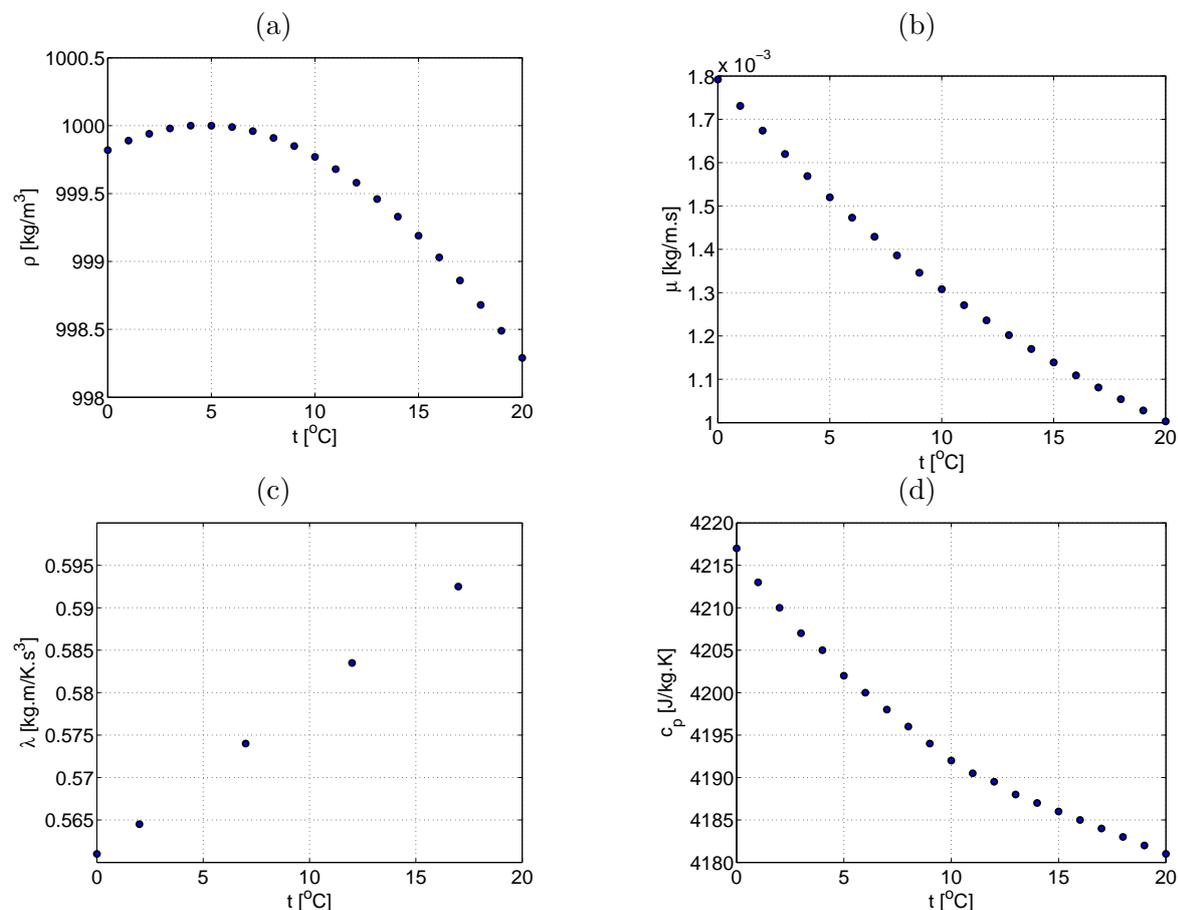


FIG. 2.4 – Représentation graphique des caractéristiques physiques de l’eau en fonction de la température : (a) masse volumique  $\rho$ , (b) viscosité dynamique  $\mu$ , (c) conductivité thermique  $\lambda$ , (d) chaleur spécifique  $c_p$ .

La dépendance de la température sur la masse volumique  $\rho$ , la viscosité dynamique  $\mu$ , la conductivité thermique  $\lambda$  et la chaleur spécifique  $c_p$  est représentée dans Fig. 2.4.

On peut constater, d’une part, que la masse volumique est approximativement une fonction quadratique de la température, et que, d’autre part, la viscosité dynamique diminue presque de moitié entre 0 et  $20^{\circ}\text{C}$ .

Ainsi, compte tenu de la dilatation thermique anormale de l’eau ainsi que de la forte dépendance de sa viscosité en fonction de la température, l’approximation de Boussinesq ne peut être utilisée pour modéliser de façon réaliste les lois de comportement de l’eau dans un intervalle de température s’étendant de 0 à  $20^{\circ}\text{C}$ . Il faut donc proposer une approximation adaptée à l’eau pour une telle gamme de températures.

Dans la suite de l’étude, la température du glaçon  $T_s$  ( $s$  – sphère) sera supposée être celle de sa fusion ( $T_s = 0^{\circ}\text{C}$ ). Si  $T_f$  est la température de l’eau loin du glaçon, on considèrera comme température de référence la température  $T_{ref} = (T_f + T_s)/2$ .

### 2.4.2 Formulation mathématique exacte

Le modèle couplant le mouvement d'une sphère immergée dans un fluide newtonien avec celui du fluide ambiant, développé au cours de la thèse de Mathieu Jenny, est brièvement décrit dans la section 2.3 (voir Jenny, 2003; Jenny & Dušek, 2004, pour plus de détails). Nous avons gardé le même principe de modélisation du couplage sphère – fluide mais nous avons été amenés à généraliser la description au cas d'un fluide ayant des propriétés dépendant de la température. De plus, nous avons bien entendu enrichi la modélisation en ajoutant l'équation de transport de la chaleur.

Le modèle résultant comporte ainsi les équations de continuité et de Navier–Stokes, l'équation d'advection et de diffusion de la température et les équations du mouvement de la sphère. La masse volumique  $\rho$ , la viscosité dynamique  $\mu$  et la conductivité thermique  $\lambda$  dépendent, à travers la température, de la position spatiale  $\mathbf{x}$ , ce dont il faut tenir compte dans la formulation exacte des équations. La vitesse du fluide est mesurée dans un référentiel au repos : la vitesse asymptotique du fluide est donc supposée nulle à l'infini  $\mathbf{v}_\infty \rightarrow 0$ . Le vecteur position  $\mathbf{x}$  est en revanche rapporté à un référentiel mobile lié à la sphère. Le maillage, également lié à la sphère, est donc mobile. Ce formalisme engendre une vitesse d'entraînement  $\mathbf{u}$  égale à la valeur de la vitesse du maillage au point  $\mathbf{x}$  par rapport au référentiel fixe. Les équations ont alors la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (2.34)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \nabla] \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{v}) + \mathbf{g}, \quad (2.35)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + [(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \nabla] T = \frac{1}{c_p \rho} \nabla \cdot (\lambda \nabla T), \quad (2.36)$$

où  $\mathbf{g}$  est le vecteur d'accélération gravitationnelle. La condition d'adhérence du fluide à la paroi se traduit par la condition aux limites sur la surface de la sphère

$$\mathbf{v}|_s = \mathbf{u}_s + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}|_s \quad (2.37)$$

qui transmet le mouvement de la sphère vers le fluide. Le mouvement de la sphère elle-même est décrit dans le référentiel fixe par les équations :

$$\rho_s \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{6}{\pi d^3} \mathbf{F}_{fl}(\mathbf{v}, p, \mu) + \rho_s \mathbf{g}, \quad (2.38)$$

$$\rho_s \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \frac{60}{\pi d^5} \mathbf{M}_{fl}(\mathbf{v}, p, \mu), \quad (2.39)$$

où  $d$  est le diamètre de la sphère et  $V = \pi d^3/6$  est son volume. Dans le cas présent, la force comporte également la poussée d'Archimède (les effets hydrostatiques).

$\Delta\rho/\rho$	$\Delta\mu/\mu$	$\Delta\lambda/\lambda$	$\Delta c_p/c_p$
0.0017	0.56	0.064	0.0083

TAB. 2.1 – Variations relatives des propriétés de l'eau sur l'intervalle  $[0, 20]^\circ\text{C}$ . Les variations sont obtenues en divisant la différence par la moyenne des valeurs extrêmes (par exemple :  $\Delta\rho/\rho = 2|\rho(20^\circ) - \rho(0^\circ)|/(\rho(20^\circ) + \rho(0^\circ))$ ).

### 2.4.3 Modèle considéré

Pour une représentation fiable de la situation envisagée, il n'est pas nécessaire de considérer les équations (2.35, 2.36) telles quelles. Il suffit d'adopter un bon compromis entre l'approximation de Boussinesq et la formulation exacte. On remarque que les variations relatives des 4 propriétés physiques de l'eau, figurant dans les équations, sont très disparates (cf. Tab. 2.1).

Si nous nous fixons l'objectif d'une erreur maximale de 1%, nous pouvons considérer la chaleur spécifique  $c_p$  constante, égale à  $c_{p,ref} \equiv c_p(T_{ref})$ . De même, la masse volumique  $\rho$  peut être considérée constante ( $\rho = \rho_{ref} \equiv \rho_{ref}$ ) sauf dans le terme de pression où sa variation rend compte des effets de flottabilité. Une fois approximé par une constante, le facteur  $1/\rho$  peut être commuté avec l'opérateur divergence dans le terme visqueux de l'équation (2.35). On peut faire de même pour le facteur  $1/(c_p\rho)$ . En ce qui concerne le terme de pression, nous poserons

$$\rho(T) = \rho_{ref} (1 + \gamma(T)) \quad (2.40)$$

$$\frac{1}{\rho} \approx \frac{1}{\rho_{ref}} (1 - \gamma(T)) \quad (2.41)$$

car  $\gamma(T)$  est petit devant l'unité. Dans le même temps, en retirant de la pression totale

$$p = \rho_{ref} \mathbf{g} \cdot \mathbf{x} + \tilde{p} \quad (2.42)$$

sa partie hydrostatique et isotherme  $p_s = \rho_{ref} \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}$ , nous obtenons

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \approx -\frac{1}{\rho_{ref}} \nabla \tilde{p} + \gamma(T) \mathbf{g}. \quad (2.43)$$

Les équations (2.35) et (2.36) s'écrivent alors :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \nabla] \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho_{ref}} \nabla \tilde{p} + \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{v}) + \gamma(T) \mathbf{g}, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + [(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \nabla] T = \nabla \cdot (\kappa \nabla T), \quad (2.45)$$

où nous avons introduit la viscosité cinématique  $\nu$  et la diffusivité thermique  $\kappa$ , définies par

$$\nu = \frac{\mu}{\rho_{ref}}, \quad (2.46)$$

$$\kappa = \frac{\lambda}{c_{p,ref} \rho_{ref}}. \quad (2.47)$$

Nous extrayons, de plus, la pression hydrostatique de la force hydrodynamique de l'équation (2.38) qui sera calculée à l'aide de l'équation :

$$(F_{fl})_i(\mathbf{v}, p, \mu) = \int_S \left( 2\mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) n_j - \tilde{p} n_i \right) dS, \quad (2.48)$$

où l'indice  $i$  désigne la  $i$ -ième composante cartésienne. L'équation (2.38) comportera alors le terme d'Archimède :

$$\rho_s \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{6}{\pi d^3} \mathbf{F}_{fl}(\mathbf{v}, p, \mu) + (\rho_s - \rho_{ref}) \mathbf{g}. \quad (2.49)$$

En limitant la modélisation mathématique des lois de comportement à l'essentiel, nous pouvons écrire :

$$\gamma(T) = \frac{1}{\rho_{ref}} \left( \frac{d\rho}{dT}(T_{ref})(T - T_{ref}) + \frac{1}{2} \frac{d^2\rho}{dT^2}(T_{ref})(T - T_{ref})^2 \right) \quad (2.50)$$

$$\nu(T) = \nu_{ref} \left( 1 + \frac{1}{\nu_{ref}} \frac{d\nu}{dT}(T_{ref})(T - T_{ref}) \right) \quad (2.51)$$

$$\kappa(T) = \kappa_{ref} \left( 1 + \frac{1}{\kappa_{ref}} \frac{d\kappa}{dT}(T_{ref})(T - T_{ref}) \right) \quad (2.52)$$

Les valeurs des constantes contenues dans ces équations sont données dans Tab 2.2 pour deux températures de référence : 10°C et 2°C.

Nous avons également pris en compte le changement de phase glace/eau. La masse volumique de la glace  $\rho_s$  (à 0°C) et la chaleur latente  $\ell$  (à la pression de 1 bar) sont reportées dans Tab 2.2.

#### 2.4.4 Adimensionnalisation des équations

L'adimensionnalisation suivra la démarche adoptée pour une sphère libre. L'échelle de vitesse utilisée pour la sphère fixe sera remplacée par l'échelle de vitesse liée à l'accélération due à la gravité et à la poussée d'Archimède. Les autres échelles seront reprises du cas de la sphère fixe. Le résumé des échelles d'adimensionnalisation est donné dans Tab. 2.3.

Les équations adimensionnées prennent alors la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + [(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \nabla] \mathbf{v} = -\nabla \tilde{p} + \nabla \cdot (\nu(T) \nabla \mathbf{v}) + \gamma(T) \mathbf{i} \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + [(\mathbf{v} - \mathbf{u}) \cdot \nabla] T = \nabla \cdot (\kappa(T) \nabla T), \quad (2.55)$$

$T_{ref}=10^{\circ}\text{C}$			$T_{ref}=2^{\circ}\text{C}$		
coefficient	[unité SI]	valeur	coefficient	[unité SI]	valeur
$\rho_{ref}$	[kg/m <sup>3</sup> ]	999.772	$\rho_{ref}$	[kg/m <sup>3</sup> ]	999.94
$\frac{d\rho}{dT}(T_{ref})$	[kg/m <sup>3</sup> .K]	-0.0788	$\frac{d\rho}{dT}(T_{ref})$	[kg/m <sup>3</sup> .K]	0.045
$\frac{1}{2}\frac{d^2\rho}{dT^2}(T_{ref})$	[kg/m <sup>3</sup> .K <sup>2</sup> ]	-0.0072	$\frac{1}{2}\frac{d^2\rho}{dT^2}(T_{ref})$	[kg/m <sup>3</sup> .K <sup>2</sup> ]	-0.0079
$\nu_{ref}$	[m <sup>2</sup> /s]	1.31e-06	$\nu_{ref}$	[m <sup>2</sup> /s]	1.68e-06
$\frac{d\nu}{dT}(T_{ref})$	[m <sup>2</sup> /s.K]	-4e-08	$\frac{d\nu}{dT}(T_{ref})$	[m <sup>2</sup> /s.K]	-5.6e-08
$\kappa_{ref}$	[m <sup>2</sup> /s]	1.38e-07	$\kappa_{ref}$	[m <sup>2</sup> /s]	1.34e-07
$\frac{d\kappa}{dT}(T_{ref})$	[m <sup>2</sup> /s.K]	4e-10	$\frac{d\kappa}{dT}(T_{ref})$	[m <sup>2</sup> /s.K]	4e-10

Changement de phase		
coefficient	[unité SI]	valeur
$\rho_s$	[kg/m <sup>3</sup> ]	916.7
$\ell$	[J/kg]	3.34e05

TAB. 2.2 – Caractéristiques physiques de l'eau.

grandeur	adimensionnalisation
accélération	$\mathbf{a}^* = \mathbf{a}/( \rho_s/\rho_{ref} - 1 g)$
vitesse	$\mathbf{v}^* = \mathbf{v}/( \rho_s/\rho_{ref} - 1 gd)^{1/2}$
pression	$p^* = \tilde{p}/(\rho_{ref} \rho_s/\rho_{ref} - 1 gd)$
température	$T^* = (T - T_f)/(T_s - T_f)$
force	$\mathbf{F}_{fl}^* = \mathbf{F}_{fl}/(\rho_{ref}V \rho_s/\rho_{ref} - 1 g)$
moment de force	$\mathbf{M}_{fl}^* = \mathbf{M}_{fl}/(\rho_{ref}V \rho_s/\rho_{ref} - 1 gd)$

TAB. 2.3 – L'adimensionnalisation (les grandeurs adimensionnées sont notées avec un astérisque).

$$\frac{\rho_s}{\rho_{ref}} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{6}{\pi} \mathbf{F}_{fl}(\mathbf{v}, p, \nu(T)) + \mathbf{k}_{fix} \quad (2.56)$$

$$\frac{\rho_s}{\rho_{ref}} \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = \frac{60}{\pi} \mathbf{M}_{fl}(\mathbf{v}, p, \nu(T)). \quad (2.57)$$

où nous avons omis les astérisques. Le vecteur unité  $\mathbf{i} = \mathbf{g}/|\mathbf{g}|$  pointe dans la direction du sillage.  $\mathbf{k}_{fix} = -\mathbf{i}$  est le vecteur unité de l'axe vertical dans le référentiel fixe. Les fonctions adimensionnées  $\gamma(T)$ ,  $\nu(T)$  et  $\kappa(T)$  s'écrivent :

$T_f = 20^\circ\text{C}$		$T_f = 4^\circ\text{C}$	
paramètre	valeur	paramètre	valeur
$Pr$	9.4928	$Pr$	12.54
$Ri$	1.8972e-02	$Ri$	-2.16e-03
$\rho_S/\rho_{ref}$	0.91691	$\rho_S/\rho_{ref}$	0.91676
$[\frac{1}{2} \frac{d^2\rho}{dT^2}(T_{ref})/\frac{d\rho}{dT}(T_{ref})](T_s - T_\infty)$	-1.8274	$[\frac{1}{2} \frac{d^2\rho}{dT^2}(T_{ref})/\frac{d\rho}{dT}(T_{ref})](T_s - T_\infty)$	0.702
$\frac{1}{\nu_{ref}} \frac{d\nu}{dT}(T_{ref})(T_s - T_\infty)$	0.61069	$\frac{1}{\nu_{ref}} \frac{d\nu}{dT}(T_{ref})(T_s - T_\infty)$	0.1333
$\frac{1}{\kappa_{ref}} \frac{d\kappa}{dT}(T_{ref})(T_s - T_\infty)$	-0.072464	$\frac{1}{\kappa_{ref}} \frac{d\kappa}{dT}(T_{ref})(T_s - T_\infty)$	-0.01194
$\ell/(c_{p,ref}(T_s - T_\infty))$	-3.976	$\ell/(c_{p,ref}(T_s - T_\infty))$	-19.83

TAB. 2.4 – Valeurs des 7 paramètres pour le problème du glaçon dans de l'eau à  $4^\circ\text{C}$  et  $20^\circ\text{C}$ , respectivement.

$$\gamma(T) = Ri \left(T - \frac{1}{2}\right) \left[ 1 + \frac{1}{2} \frac{\frac{d^2\rho}{dT^2}(T_{ref})}{\frac{d\rho}{dT}(T_{ref})} (T_s - T_\infty) \left(T - \frac{1}{2}\right) \right] \quad (2.58)$$

$$\nu(T) = \frac{1}{G} \left( 1 + \frac{1}{\nu_{ref}} \frac{d\nu}{dT}(T_{ref}) (T_s - T_\infty) \left(T - \frac{1}{2}\right) \right) \quad (2.59)$$

$$\kappa(T) = \frac{1}{G Pr} \left( 1 + \frac{1}{\kappa_{ref}} \frac{d\kappa}{dT}(T_{ref}) (T_s - T_\infty) \left(T - \frac{1}{2}\right) \right) \quad (2.60)$$

où le nombre de Galilée  $G$ , le nombre de Prandtl ( $Pr$ ) et le nombre de Richardson (modifié)  $Ri$  sont définis comme suit :

$$G = \frac{\sqrt{\left(\left|\frac{\rho_s}{\rho_{ref}} - 1\right| g d^3\right)}}{\nu_{ref}} \quad (2.61)$$

$$Pr = \frac{\nu_{ref}}{\kappa_{ref}} \quad (2.62)$$

$$Ri = \frac{\frac{d\rho}{dT}(T_{ref}) (T_s - T_f)}{\rho_{ref} \left|\frac{\rho_s}{\rho_{ref}} - 1\right|} \quad (2.63)$$

Le modèle obtenu présente 7 paramètres ( $G, Pr, Ri, \rho_s/\rho_{ref}$  et les 3 constantes sans dimension des équations (2.58), (2.59) et (2.60)). Une étude paramétrique complète n'est donc pas envisageable. Dans la suite de la thèse, nous n'avons gardé qu'un seul paramètre ( $G$ ) que nous avons fait varier pour tenir compte des différents diamètres de la sphère (glaçon). Tab. 2.4 résume les valeurs des autres paramètres maintenus fixes.

### 2.4.5 Fonte sphérique du glaçon

La fonte du glaçon est modélisée en faisant l'hypothèse que la forme sphérique initiale est conservée ce qui permet de réduire la modélisation du transfert de masse au bilan global. Le flux de chaleur à travers la surface de la sphère est donné par l'intégrale

$$\dot{Q} = - \int_S \lambda \frac{dT}{dn} dS, \quad (2.64)$$

$\mathbf{n}$  étant la normale extérieure de la sphère. Ce flux a donc une valeur négative. Il entraîne une diminution de masse par unité de temps  $dm/dt = \dot{Q}/\ell$ , où  $\ell$  est la chaleur latente de fusion de la glace. Il en résulte une diminution du diamètre  $d$  de la sphère

$$\frac{dd}{dt} = \frac{2}{\pi \rho_{ref} d^2 \ell} \dot{Q}. \quad (2.65)$$

En grandeurs adimensionnées, le flux  $\dot{Q}^*$  s'exprime par

$$\dot{Q}^* = - \int_{S^*} \kappa^* \frac{dT^*}{dn^*} dS^*, \quad (2.66)$$

où nous avons temporairement réintroduit le symbole  $*$  pour désigner les grandeurs sans dimension. La surface  $S^*$  est une sphère de rayon  $1/2$ . Ce flux adimensionné est positif, compte tenu de la formule de l'adimensionnalisation de la température reportée dans Tab. 2.3. En comparant les équations (2.64) et (2.66), nous obtenons

$$\dot{Q} = c_{p,ref} \rho_{ref} (T_s - T_f) d^{5/2} \sqrt{|1 - \rho_s/\rho_{ref}|g} \dot{Q}^*. \quad (2.67)$$

sachant que  $\kappa = \sqrt{|1 - \rho_s/\rho_{ref}|g} d^3 \kappa^*$ .

Compte tenu de l'adimensionnalisation du temps  $t = t^* \sqrt{d/(|1 - \rho_s/\rho_{ref}|g)}$ , on obtient la dérivée logarithmique du diamètre de la sphère par rapport au temps adimensionné  $t^*$  :

$$\frac{1}{d} \frac{dd}{dt^*} = \frac{2}{\pi} \frac{c_{p,ref} (T_s - T_f)}{\ell} \dot{Q}^*. \quad (2.68)$$

La constante  $\ell^* = \ell/(c_{p,ref}(T_s - T_f))$  peut être considérée comme une chaleur latente adimensionnée. Sa valeur est incluse dans Tab. 2.4 et représente le 8-ième paramètre.

## Chapitre 3

# Méthode numérique

### 3.1 Résumé de la méthode

La méthode de discrétisation spatiale utilisée est basée sur une décomposition en éléments spectraux dans le plan  $(z, r)$  (plan contenant l'axe de l'écoulement, voir Fig. 3.1) et sur une décomposition spectrale dans la direction azimutale  $\theta$  afin de pouvoir traiter les écoulements tridimensionnels. L'intérêt de la décomposition azimutale est de pouvoir effectuer de façon très directe des tests de stabilité linéaire, et de fournir une discrétisation spatiale très efficace pour des problèmes à géométrie axisymétrique tels que le sillage d'une sphère. L'efficacité de cette méthode pour des écoulements en régimes transitoires a été vérifiée dans le cas de l'étude du sillage d'une sphère tout d'abord fixe (voir Ghidersa & Dušek, 2000) puis libre (voir Jenny *et al.*, 2004).

L'espace physique infini est représenté par un domaine cylindrique (voir Fig. 3.1). La taille de celui-ci ainsi que l'ordre des polynômes dans chaque maille ont été systématiquement testés. Nous avons en particulier vérifié qu'une extension de la distance en amont de la sphère, en aval et radialement n'avait plus d'incidence sur l'écoulement (notamment sur la valeur de la force de traînée et le nombre de Nusselt, ainsi que sur le seuil de l'instabilité primaire). Un exemple d'un tel test, effectué à un nombre de Prandtl 0.72 et à grands nombres de Reynolds et de Richardson dans un écoulement assistant (régime nécessitant un maillage très raffiné), est montré en annexe A.

Chaque régime d'écoulement étant spécifique par ses paramètres (nombre de Reynolds, nombre de Richardson, nombre de Prandtl, écoulement assistant ou opposant), nous avons dû utiliser (et donc valider) différents types de maillages afin d'optimiser pour chaque régime la discrétisation spatiale.

Par exemple, les simulations en écoulement assistant à  $Pr = 7$ , pour lequel la couche limite thermique est très fine, ont nécessité un raffinement du maillage dans le voisinage de la sphère, faisant ainsi augmenter dans une forte proportion le nombre total d'éléments dans le maillage. C'est en particulier pour cette raison que nous avons dû restreindre le domaine des paramètres étudiés à  $Pr = 7$  ( $0 \leq Ri \leq 0.3$  et  $0 \leq Re \leq 600$ ) par rapport au domaine à  $Pr = 0.72$  ( $0 \leq Ri \leq 0.7$  et  $0 \leq Re \leq 1400$ ).

Les simulations en écoulement opposant ont dû tenir compte du fait que la transition

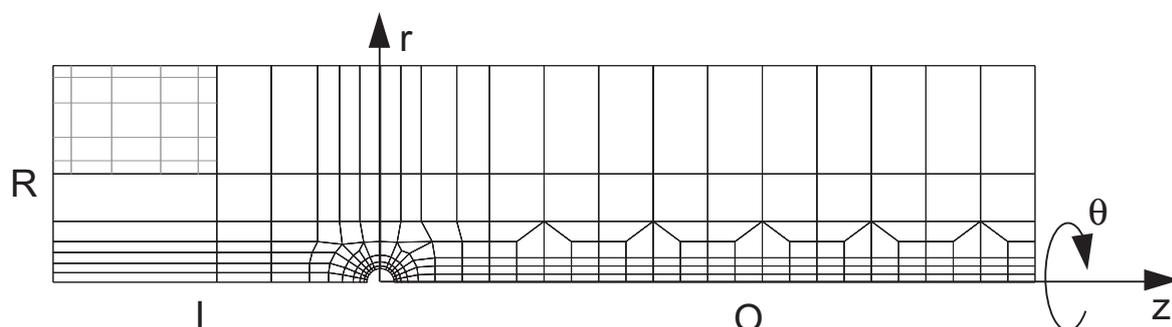


FIG. 3.1 – Exemple d’un maillage typique de 230 éléments avec une définition du système de coordonnées du domaine cylindrique. Une division d’une maille en  $6 \times 6$  points de collocation est schématiquement représentée en haut à gauche.

intervient à des nombres de Reynolds plus bas qu’en écoulement assistant. De plus, pour des nombres de Richardson élevés ( $Ri < -1$ ), nous verrons plus tard qu’un panache thermique se forme subitement de l’aval vers l’amont, nous obligeant ainsi à étendre le domaine et à améliorer la discrétisation spatiale en amont de la sphère (par rapport aux situations où la couche limite reste collée sur la face amont de la sphère, ce qui est le cas pour les écoulements assistants et les écoulements opposants à faible nombre de Richardson). Ces deux aspects nous ont donc conduit à utiliser des domaines plus vastes avec néanmoins une possibilité de limiter en partie les coûts de calcul par un relâchement du maillage dans la couche limite.

En conséquence, une grande variété de domaines de calcul a été mise en oeuvre et testée. Tab. 3.1 *a-f* somment les paramètres pertinents de tous les domaines utilisés dans la présente thèse. Les critères du choix d’un maillage pour un écoulement autour d’une sphère fixe chauffée sont le nombre de Prandtl, le nombre de Reynolds et, éventuellement, le nombre de Richardson. Le critère du choix d’un maillage pour la sphère libre est, dans le cadre de cette thèse, le nombre de Galilée.

La plupart des simulations a été effectuée avec 4 modes azimutaux (modes 0 – 3), ce qui s’est avéré être un choix suffisant pour des écoulements à bas nombres de Reynolds (pour tous les régimes de l’écoulement opposant) et à nombres de Reynolds modérés (pour les régimes de l’écoulement assistant jusqu’à  $Re \approx 400$ ). Cependant, pour des régimes avec une dynamique riche (les régimes à grands  $Ri$  et  $Re$  en écoulement assistant), le nombre de modes azimutaux a dû être augmenté à 7 (modes 0 – 6). En effet, les tests effectués sur le nombre de modes azimutaux ont montré qu’un nombre de modes supérieur à 7 n’avait plus d’incidence sur l’écoulement. Dans le cas d’une sphère libre, et pour tous les nombres de Galilée étudiés, nous avons montré qu’il était nécessaire d’utiliser systématiquement 7 modes azimutaux.

Le choix des conditions aux limites du domaine de calcul a été fait de façon à rendre les simulations indépendantes du maillage.

Dans toutes les simulations de la sphère fixe avec effets thermiques, des conditions de Dirichlet  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty$  et  $T = T_\infty$  ont été imposées sur la face amont et sur la surface latérale du domaine de calcul cylindrique. A la sortie du domaine (sur la face aval), des conditions

(a) Écoulement assistant ( $Pr = 0.72$ )

$Re$	$\frac{I}{d}$	$\frac{O}{d}$	$\frac{R}{d}$	NE	NP
[50, 100[	50	60	52	230	6
[100, 200[	25	60	25	212	7
[200, 400[	12	25	8	169	8
[400, 1000[	12	25	8	169	10
[1000, 1400]	12	24	8	230	12

(b) Écoulement assistant ( $Pr = 7$ )

$Re$	$\frac{I}{d}$	$\frac{O}{d}$	$\frac{R}{d}$	NE	NP
[50, 100[	50	60	52	312	7
[100, 200[	25	60	25	270	8
[200, 400[	12	24	8	295	8
[400, 600]	12	24	8	295	10

(c) Écoulement opposant ( $Pr = 0.72$ )

$Re$	$\frac{I}{d}$	$\frac{O}{d}$	$\frac{R}{d}$	NE	NP
[50, 100[	25	64	25	270	6
[100, 200[	12	25	8	169	7
[200, 350]	12	25	8	169	8

(d) Écoulement opposant ( $Pr = 7$ )

$Re$	$\frac{I}{d}$	$\frac{O}{d}$	$\frac{R}{d}$	NE	NP
[50, 100[	25	64	25	270	7
[100, 200[	12	25	8	169	8
[200, 350]	12	24	8	295	8

(e) Écoulement opposant ( $Re = 100$ ,  $Pr = 0.72$ )

$ Ri $	$\frac{I}{d}$	$\frac{O}{d}$	$\frac{R}{d}$	NE	NP
[0, 0.4[	12	25	8	169	7
[0.4, 1.5[	25	64	25	270	8
[1.5, 3]	49	30	25	282	8

(f) Sphère libre

$G$	$\frac{I}{d}$	$\frac{O}{d}$	$\frac{R}{d}$	NE	NP
[140, 200[	12	25	8	169	6
[200, 400[	12	25	8	169	8
[400, 500]	12	25	8	169	10

TAB. 3.1 – Paramètres du domaine de calcul pour différents régimes d'écoulement en fonction de  $Re$ ,  $Ri$ ,  $Pr$  et  $G$  : étendue en amont ( $I/d$ ), en aval ( $O/d$ ) et latéralement ( $R/d$ ), nombre total d'éléments dans le maillage (NE) et ordre des polynômes d'approximation dans les mailles (NP).

de Neumann  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} = 0$  et  $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$  ont été imposées dans le sens faible afin de permettre l'évacuation de la vorticité et du panache thermique produits par le sillage de la sphère chauffée. Ces conditions nous permettent de maintenir les bords du domaine de calcul   une distance raisonnable de la sphère, sans influencer la solution de l'écoulement. A la surface de la sphère, la condition de non-glisserment  $\mathbf{v} = 0$  et celle d'une température constante  $T = T_s$  ont été imposées.

Concernant la sphère libre avec effets thermiques, des conditions de Dirichlet  $\mathbf{v} = 0$  (fluide stagnant) et  $T = T_\infty$  ont été imposées sur la face amont du domaine de calcul cylindrique. Sur la surface latérale et   la sortie du domaine, des conditions de Neumann  $\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{n}} = 0$  et  $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$  ont été imposées dans le sens faible. La condition de non-glisserment sur la surface de la sphère s'écrit, dans le cas d'une sphère libre (système de coordonnées fixe),  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}|_s$ .

Dans le cas de la sphère fixe (respectivement libre) sans effet thermique, nous avons utilisé les mêmes conditions aux limites sur les vitesses que dans le cas de la sphère fixe

(respectivement libre) avec effets thermiques.

## 3.2 Etat de développement de la méthode numérique avant le début de la thèse

Le code de calcul a été développé progressivement au cours des thèses précédentes, notamment celles de Bradut Ghidersa et de Mathieu Jenny, en fonction des thématiques étudiées. Lors de la thèse de Bradut Ghidersa (Ghidersa & Dušek (2000)), la version bi-dimensionnelle de la méthode de discrétisation par éléments spectraux a été extraite du code Nekton (Patera (1984)) pour mettre en place une version tridimensionnelle adaptée à la simulation d'écoulements dans des configurations géométriquement axisymétriques. Parmi plusieurs versions de discrétisations temporelles proposées par le code, le choix s'est porté sur la méthode de pas de temps fractionné (time splitting) globalement de l'ordre de précision 1 mais traitant les termes non-linéaires (advection) explicitement à l'ordre 3 par la méthode d'Adams-Bashforth. Il s'avère que pour des rapports nombre de Reynolds/pas de temps adimensionnés grands, c'est de loin la précision du traitement des termes advection qui est décisive, alors que la précision au premier ordre de la méthode implicite du traitement des termes diffusifs ne dégrade en rien la précision finale. Or, ce rapport dépasse toujours un millier et atteint  $10^6$  dans nos simulations. Ceci s'explique, d'une part, par le critère de stabilité CFL qui devient très contraignant dès que la discrétisation spatiale devient fine (ce qui est toujours le cas en présence de couches limites nécessitant une finesse de résolution proportionnelle au nombre de Reynolds) et, d'autre part, par des nombres de Reynolds relativement élevés.

La méthode de discrétisation spatiale combine une discrétisation par développement de Fourier dans la direction azimutale avec la discrétisation par éléments spectraux dans le plan axial-radial. La technique de la décomposition azimutale s'appuie sur des travaux d'Orszag, Patera, Tomboulides et Karniadakis (S.A. Orszag (1983); Tomboulides *et al.* (1993)) ayant résolu d'une manière rigoureuse le traitement de la singularité géométrique à l'axe. La pertinence de la décomposition azimutale pour la simulation des écoulements subissant une brisure de l'axisymétrie a été démontrée dans Ghidersa & Dušek (2000). La réflexion théorique de l'article Ghidersa & Dušek (2000) permet de comprendre l'efficacité numérique de la méthode dans ce contexte.

La thèse de Mathieu Jenny a eu pour objectif principal de simuler l'interaction du sillage de la sphère avec les degrés de liberté d'une sphère libre afin de représenter le mouvement d'une sphère en chute ou en ascension libre dans un milieu fluide infini. Le développement numérique a porté essentiellement sur la prise en compte des degrés de liberté de la sphère. Les détails de la méthode sont décrits dans l'article Jenny & Dušek (2004).

## 3.3 Apports de la thèse au développement algorithmique

L'objectif fixé par le sujet de la thèse consistant à effectuer une étude paramétrique des effets convectifs sur la transition dans les sillages, le développement numérique s'est porté dans un premier temps sur l'ajout de l'équation de la température à la méthode de

décomposition azimutale. De plus, l'expérience de l'exploitation de la version précédente au cours de la thèse de Mathieu Jenny a montré deux faiblesses du code.

La divergence du champ de vitesse présentait des pics importants à l'interface d'éléments spectraux de grande taille. Cette imprécision était, certes, maintenue sous contrôle par des tests numériques de sorte que, par un raffinement local du maillage, on obtenait toujours une bonne convergence numérique des solutions. Néanmoins, hormis la nécessité de raffiner le maillage et donc d'augmenter les coûts de calcul, la divergence non nulle avait pour effet d'exciter des instabilités numériques dues au traitement explicite des termes non-linéaires.

Le temps CPU essentiel était consommé à la résolution de l'équation de la pression (équation de Poisson) résolue par la méthode des gradients conjugués. Or, l'équation de Poisson est notoirement caractérisée, quelle que soit la discrétisation, par une matrice mal conditionnée. Le préconditionnement utilisé compensait, certes, les défauts de conditionnement dus à un maillage très inhomogène, néanmoins, plus le nombre de degrés de liberté de la discrétisation devenait grand, plus le coût relatif de la résolution de l'équation de pression devenait important.

Compte tenu de la perspective d'une nécessité de mener un très grand nombre de simulations en vue d'une étude paramétrique, il était indispensable d'éliminer ces deux défauts. Le premier limitait la robustesse des calculs entraînant des pertes de temps CPU en cas de divergence numérique intempestive et des pertes de temps humain dépensé aux modifications du maillage. Le second risquait d'être un facteur limitant non seulement pour le nombre de simulations pratiquement réalisables mais également du point de vue des nombres de Reynolds atteignables au cours du travail numérique prévu.

Une analyse détaillée (dont les lignes principales sont données dans l'annexe B) a permis de remonter à l'origine des défauts de résolution de l'équation de continuité. Il s'est avéré que la matrice de discrétisation de l'équation de pression ne tenait pas correctement compte du fait que, dans le cadre de la formulation variationnelle sur laquelle la méthode des éléments spectraux est basée, cette matrice doit être construite comme un produit de matrices discrétisant la divergence et le gradient. Une fois ce défaut corrigé, une amélioration spectaculaire de la précision de la résolution de l'équation de continuité a été obtenue. Nous avons même testé une version de l'algorithme de pas de temps fractionné garantissant une divergence discrétisée exactement nulle mais, compte tenu des nombres de Reynolds élevés pris en considération, l'apport de cette modification sur la qualité des résultats était imperceptible. Par contre, la matrice de discrétisation ainsi obtenue s'est avérée encore moins bien conditionnée et moins creuse, ce qui a très considérablement aggravé les coûts de la méthode itérative utilisée pour son inversion.

En conséquence, nous avons opté pour une méthode d'inversion directe. Compte tenu de la symétrie de la matrice, la méthode LDL (voir Cuthill & McKee, 1969; Gibbs *et al.*, 1976; Ng & Peyton, 1993; Esposito *et al.*, 1998) a été retenue. La matrice à inverser est générée explicitement sous la forme d'une matrice creuse. La méthode de sa génération n'ayant pas été optimisée, nous profitons du fait que la matrice ne dépende que du maillage. Ainsi, il suffit de la générer et de la stocker une seule fois pour un maillage donné. La décomposition LDL ne s'effectue qu'une seule fois au début de la simulation. Elle est optimisée, ne prend que quelques secondes au maximum et fournit une décomposition minimale en terme de nombre d'éléments de la matrice triangulaire L de la décomposition. L'inversion—même, effectuée à

chaque pas de temps, présente un coût inférieur à celui de la résolution des équations des vitesses. A l'état actuel du développement du code, la combinaison des gradients conjugués pour la résolution des équations des vitesses avec le solveur direct de l'équation de pression semble répartir de manière optimale les exigences sur la rapidité du processeur et la capacité RAM disponible. L'accélération par rapport à la version initiale comportant le solveur de pression inexact utilisant l'inversion par gradients conjugués préconditionnés atteinte dans les conditions des maillages et des nombre de Reynolds de la thèse de Mathieu Jenny représente un facteur 10 environ. dues à la méthode C'est ainsi que le nombre de simulations effectuées (comprenant également de nombreux tests et essais en partie infructueux) est de l'ordre de plusieurs milliers (6000 – 7000) alors que la rapidité des processeurs disponibles au cours des 4 dernières années n'a été multipliée que par un facteur 2.

Enfin, les modifications du code actuel dues au traitement du problème du glaçon en fusion dans de l'eau initialement au repos avec des propriétés variables sont également détaillées dans l'annexe B.

## Chapitre 4

# Résultats – sphère fixe

Ce chapitre présente les résultats sur la transition au chaos du sillage d'une sphère fixe chauffée, soumise à l'écoulement extérieur froid d'un fluide newtonien (avec une vitesse uniforme) dans deux configurations de convection mixte – écoulement assistant et opposant. Dans les deux cas, le nombre de Prandtl a été fixé à  $Pr = 0.72$  (valeur approximative de l'air) et à  $Pr = 7$  (valeur approximative de l'eau), limitant ainsi l'espace des paramètres indépendants au plan nombre de Richardson–nombre de Reynolds ( $Ri - Re$ ). La même attention a été portée au cas de l'air et de l'eau ; néanmoins, pour des raisons discutées dans le Chapitre 3, le plan des paramètres à  $Pr = 7$  est plus restreint qu'à  $Pr = 0.72$ .

L'investigation des différents régimes d'écoulement dans les plans ( $Ri - Re$ ) a été poursuivie de la manière suivante : pour un nombre de Richardson fixé (c'est-à-dire pour un rapport donné entre les forces d'Archimède et les forces d'inertie), des simulations axisymétriques avec un nombre de Reynolds systématiquement croissant ont été effectuées jusqu'à ce qu'on tombe sur le seuil de l'instabilité primaire (transition à la tridimensionalité de l'écoulement). Le seuil de l'instabilité primaire,  $Re_1$ , a été trouvé en effectuant des analyses de stabilité linéaire sur l'écoulement de base (axisymétrique et stationnaire). Ensuite, au-dessus du seuil de la tridimensionalité, des simulations pleinement tridimensionnelles ont été effectuées et différents régimes d'écoulement ont été observés. Le nombre de Reynolds a été augmenté jusqu'à ce qu'on trouve un régime chaotique ou jusqu'à ce que les exigences de raffinement du maillage deviennent excessives ( $Re = 1400$  à  $Pr = 0.72$  et  $Re = 600$  à  $Pr = 7$ ).

### 4.1 Convection naturelle

En début de thèse, nous avons effectué des simulations de convection naturelle autour d'une sphère chauffée. Il s'est avéré qu'un tel type d'écoulement était extrêmement dépendant du domaine de calcul et que chaque changement, soit de dimension, soit de précision sous-maille du maillage, changeait de façon drastique les résultats. En conséquence, beaucoup de temps CPU et de temps humain a été dépensé à concevoir d'immenses maillages et à tester différentes conditions aux limites. Initialement, en fonction de ces paramètres, la valeur la plus basse du seuil de l'instabilité primaire a été trouvée à  $Gr_1 = 10$ . Cependant, des études plus profondes ont montré que cette instabilité était d'origine numérique. En effet, plus nous

raffinions le maillage (au-delà de ce qui nous semblait raisonnable en ce début de thèse), plus le seuil apparaissait à des  $Gr$  élevés. Finalement, nous avons conclu que, à l’instar de certains jets, le panache axisymétrique de la convection naturelle autour d’une sphère ne présente pas d’instabilité linéaire et que sa turbulence éventuelle est due à la réceptivité aux perturbations. A notre connaissance, il n’existe dans la littérature aucune autre étude de stabilité d’un écoulement en convection naturelle autour d’une sphère, ni expérimentale ni numérique.

Les résultats des simulations axisymétriques de convection naturelle à  $Pr = 0.72$  ont servi à la validation du code modifié par l’ajout de la partie thermique. Afin de traiter le cas de la convection naturelle, quelques modifications supplémentaires ont été apportées à la formulation mathématique du cas de la sphère fixe en convection mixte (cf. section 2.2). Nous avons choisi de ne les présenter qu’ici (et non dans la section 2.2) car le sujet principal de la thèse était l’étude de l’écoulement en convection mixte. Pour adimensionnaliser les équations (2.5), (2.7) et (2.6), une vitesse définie par  $\sqrt{\beta g(T_s - T_\infty)d}$  a été choisie comme échelle de vitesse. En conséquence, le nombre de Reynolds  $Re$  est remplacé par la racine carrée du nombre de Grashof  $\sqrt{Gr}$  dans les équations (2.12) et (2.13). Les conditions aux limites étaient celles de la sphère fixe en convection mixte. Néanmoins, la condition de Dirichlet à l’entrée du domaine et sur la surface latérale prend dans ce cas la forme  $\mathbf{v} = 0$  (à la place de  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty$ ). La taille du domaine de calcul était celle du Tab. 3.1a, où, pour le nombre de Reynolds, il faut considérer le nombre de Reynolds effectif, défini par  $Re_{eff} = \sqrt{Gr}$  pour la convection naturelle.

Fig. 4.1a montre la dépendance du nombre de Grashof sur le coefficient de traînée  $C_D$ . Les résultats obtenus par notre code sont comparés aux résultats des travaux numériques de Dudek *et al.* (1988); Geoola & Cornish (1981); Jia & Gogos (1996). Pour la définition du coefficient de traînée, celle de Dudek *et al.* (1988) et Geoola & Cornish (1981) a été retenue. Elle suit

$$C_D^{Dud} = \frac{F_D}{\rho \nu^2}, \quad (4.1)$$

où  $F_D$  est la force de traînée,  $\rho$  la masse volumique et  $\nu$  la viscosité du fluide. On peut noter ici que Jia & Gogos (1996) utilisent une autre définition du coefficient de traînée

$$C_D^{Jia} = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho v_{char}^2 \frac{\pi d^2}{4}}, \quad (4.2)$$

où  $F_D$  est la force de traînée,  $\rho$  la masse volumique,  $d$  le diamètre de la sphère et  $v_{char}$  la vitesse caractéristique de la convection naturelle ( $v_{char} = \sqrt{\beta g(T_s - T_\infty)d}$ ). Les deux coefficients sont alors liés par la formule

$$C_D^{Dud} = C_D^{Jia} \frac{\pi Gr}{8}. \quad (4.3)$$

Pour les faibles nombres de Grashof ( $Gr \leq 10$ ), la dispersion des résultats est assez significative. Ceci peut s’expliquer par la forte dépendance de la taille du domaine numérique sur l’écoulement. Pour  $Gr > 10$ , nous obtenons un parfait accord avec les résultats de Jia &

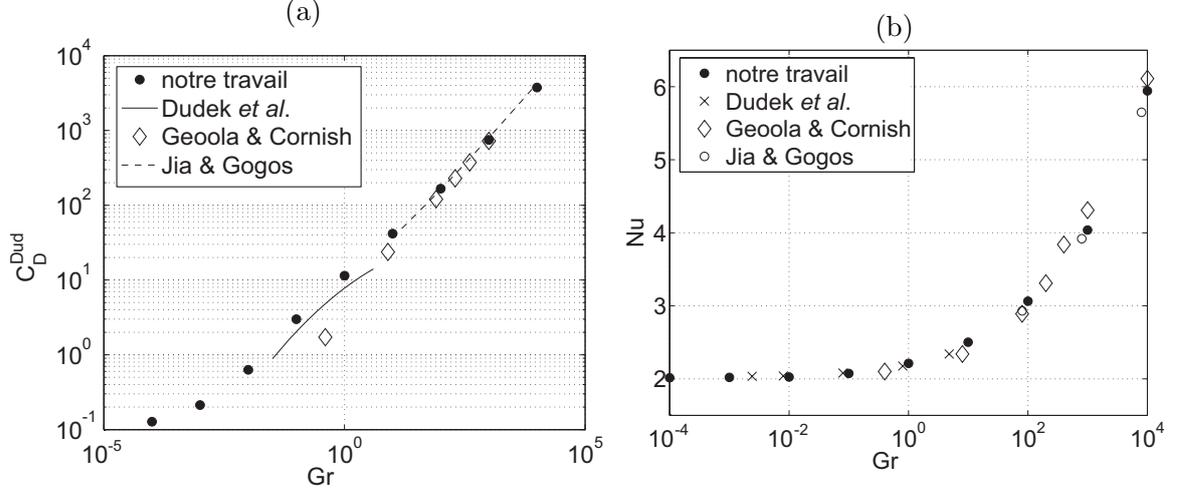


FIG. 4.1 – (a) Coefficient de traînée et (b) nombre de Nusselt pour le cas de la convection naturelle pure. Les résultats sont comparés aux travaux numériques d'autres auteurs.

Gogos (1996). Ceux de Geoola & Cornish (1981) semblent sous-estimer le  $C_D$  pour les faibles  $Gr$ , mais sont en accord avec ceux de Jia & Gogos (1996) à  $Gr = 10^3$ .

Une des caractéristiques importantes de la convection naturelle est le nombre de Nusselt ( $Nu$ ), mesurant l'efficacité du transfert de chaleur par convection. Le nombre de Nusselt est défini comme le rapport entre le flux de chaleur total  $\dot{Q}$  et le flux de chaleur par conduction  $\dot{Q}_{cond,th}$ . Pour une sphère dans un domaine fluide infini, le flux de chaleur par conduction s'écrit

$$\dot{Q}_{cond,th} = 2\pi\lambda(T_S - T_\infty)d. \quad (4.4)$$

Dans la plupart des papiers de la littérature, la définition du nombre de Nusselt suit

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} = \frac{\dot{Q}}{\pi\lambda(T_S - T_\infty)d} = 2 \frac{\dot{Q}}{\dot{Q}_{cond,th}}. \quad (4.5)$$

Nous retiendrons par la suite le facteur 2 pour faciliter les comparaisons. Il faut noter que, en raison de la taille finie du domaine numérique, le flux de chaleur conductif numérique  $\dot{Q}_{cond}$  est différent du flux de chaleur conductif théorique  $\dot{Q}_{cond,th}$ . Par exemple, dans un domaine optimisé pour des  $Gr$  élevés, nous obtenons dans la limite  $Gr = 0$ ,  $\dot{Q}_{cond} = 0.809 \dot{Q}_{cond,th}$ , alors que, dans un domaine élargi optimisé pour les faibles  $Gr$ , le rapport  $\dot{Q}_{cond}/\dot{Q}_{cond,th}$  est de 0.985. Afin d'obtenir une valeur asymptotique égale à 2 pour  $Gr = 0$  et afin d'être cohérent avec la définition fondamentale, nous avons utilisé le flux conductif numérique à la place du flux conductif théorique pour les très faibles nombres de Grashof ( $Gr \leq 1$ ).

Fig. 4.1b montre la dépendance du nombre de Grashof sur le nombre de Nusselt et fait la comparaison entre nos résultats et les résultats de Dudek *et al.* (1988); Geoola & Cornish (1981); Jia & Gogos (1996). Nous avons obtenu un accord parfait avec les résultats de Dudek

*et al.* (1988) ( $Gr \leq 5$ ) et Jia & Gogos (1996) ( $Gr \geq 80$ ), les valeurs de  $Nu$  de Geoola & Cornish (1981) étant sous-estimées pour les faibles  $Gr$  et sur-estimées pour les grands  $Gr$ .

On peut conclure que le bon accord trouvé entre nos résultats et les résultats numériques les plus récents de Jia & Gogos (1996) signifie que notre méthode numérique est précise et fiable.

## 4.2 Écoulement assistant

Le cas de l'écoulement assistant est schématiquement décrit dans Fig. 2.2a du Chapitre 2. Le plan des paramètres est restreint à  $0 \leq Ri \leq 0.7$  et  $50 \leq Re \leq 1400$  pour  $Pr = 0.72$  et à  $0 \leq Ri \leq 0.3$  et  $50 \leq Re \leq 600$  pour  $Pr = 7$ .

### 4.2.1 Écoulement axisymétrique

Dans le cas des sillages sans effet de flottabilité, l'apparition d'une zone de recirculation est considérée comme étant un signe précurseur de la transition (voir Yang & Zebib, 1989, le cas du sillage d'un cylindre). Dans le cas d'une sphère fixe non-chauffée, le détachement de la couche limite apparaît relativement tôt ( $Re_{rec} = 20$ , (voir Bouchet *et al.*, 2006)), tandis que la transition à la tridimensionalité (via une bifurcation régulière) n'arrive qu'à  $Re = 212$ . À  $Re = 20$ , une recirculation en forme de tore apparaît en aval de la sphère, sur l'axe de l'écoulement, et croît avec le nombre de Reynolds, l'écoulement restant axisymétrique jusqu'à  $Re_1 = 212$ .

Dans le cas d'une sphère chauffée en écoulement assistant, le panache thermique généré sur la partie aval de la sphère et autour de l'axe de l'écoulement a tendance à accélérer l'écoulement extérieur et à repousser ainsi l'apparition de la séparation de la couche limite à des  $Re$  plus élevés. Dans les diagrammes d'état de la Fig. 4.3, l'écoulement avec une couche limite attachée (sans zone de recirculation en aval de sphère) est représenté par le symbole “\*”. Le nombre de Reynolds minimal des simulations étant  $Re = 50$ , le symbole “\*” n'apparaît qu'à partir de  $Ri = 0.4$  ( $Pr = 0.72$ ) et  $Ri = 0.2$  ( $Pr = 7$ ). Néanmoins, nous avons représenté par des traits noirs fins la tendance de l'évolution du seuil d'apparition du décollement de la couche limite dès  $Ri = 0$ , ces traits noirs délimitant la région de l'écoulement attaché. On peut ainsi constater que l'écoulement se détache à un nombre de Reynolds qui croît avec le nombre de Richardson, à partir de la valeur  $Re_{rec} = 20$  pour  $Ri = 0$  (à  $Pr = 0.72$ , mais également à  $Pr = 7$  – le nombre de Prandtl ne jouant aucun rôle dans la dynamique du sillage pour  $Ri = 0$ ). Par exemple, pour les  $Ri$  élevés, la couche limite reste encore attachée à la surface de la sphère à  $Re = 700$  et  $Ri = 0.7$  ( $Pr = 0.72$ ) et à  $Re = 150$  et  $Ri = 0.3$  ( $Pr = 7$ ). On peut donc conclure que, plus le rapport “effets d'Archimède/effets d'inertie” est grand, plus longtemps, en terme de  $Re$ , l'écoulement reste attaché à la surface de la sphère. Si l'on considère que l'apparition de la zone de recirculation est un signe précurseur de la transition, on peut donc affirmer que le chauffage de la sphère en écoulement assistant a un effet stabilisant sur l'écoulement. L'exemple d'un écoulement attaché est montré dans Fig. 4.2a. Tous les écoulements se trouvant en-dessous des traits noirs fins délimitant les régimes de l'écoulement attaché dans Fig. 4.3 et représentés par le symbole “\*” ont qualitativement le même aspect.

Les écoulements présentant une zone de recirculation en aval de la sphère et sur l'axe de l'écoulement sont représentés par le symbole “+” dans les diagrammes de la Fig. 4.3. Ce tore axisymétrique apparaît à  $Re \geq 20$  pour  $Ri = 0$  et existe pour  $Ri \leq 0.55$  à  $Pr = 0.72$  et pour  $Ri$  au-moins égal à 0.3 à  $Pr = 7$ . Ce régime est délimité par le bas (en terme de  $Re$ ) à l'aide d'un trait fin et par le haut à l'aide d'un trait gras. Fig. 4.2*b* montre l'aspect typique d'un écoulement avec un tore en aval de la sphère sur l'axe de l'écoulement. Tous les régimes de la Fig. 4.3 représentés par le symbole “+” ont le même aspect, seule la longueur de la recirculation et l'angle de décollement de la couche limite changeant : à  $Ri = \text{const.}$  (y compris pour une sphère non-chauffée), la longueur de la zone de recirculation croît avec  $Re$ , ainsi que l'angle de détachement de la couche limite, mesuré à partir du point d'arrêt aval. Pour un  $Re = \text{const.}$  et  $Ri$  croissant, on observe le contraire.

Un nouveau régime d'écoulement présentant une recirculation en forme de tore hors de l'axe de l'écoulement (correspondant à un détachement de la couche limite puis à son recollement avant d'atteindre le point de stagnation arrière) a été observé à  $Pr = 0.72$  pour  $Ri > 0.4$ . Ce régime est représenté par le symbole “×” dans le diagramme de la Fig. 4.3 (uniquement pour  $Pr = 0.72$ ) et l'aspect typique pour ce régime est montré dans Fig. 4.2*c*. Dans ce régime, une compétition entre les forces d'inertie déstabilisantes (un nombre de Reynolds élevé) et les forces d'Archimède stabilisantes (un nombre de Richardson relativement élevé) se traduit par l'apparition d'une zone de recirculation qui ne touche pas l'axe de l'écoulement, créant ainsi un “anneau” axisymétrique de fluide recirculant en aval de la sphère. Ce phénomène est clairement dû au panache thermique ; en effet, l'écoulement étant accéléré par le panache en aval de la sphère et autour de l'axe, il empêche le fluide recirculant d'approcher l'axe.

#### 4.2.2 Perte d'axisymétrie

Des analyses de stabilité linéaire ont été effectuées afin de trouver le seuil d'apparition de l'instabilité primaire  $Re_1$  en fonction de  $Ri$  pour les deux nombres de Prandtl considérés. L'implémentation de la théorie de stabilité linéaire dans le code de calcul, ainsi que l'arrière plan théorique ont déjà été largement expliqués dans la thèse de Bradut Ghidersa et peuvent être trouvés dans (Ghidersa & Dušek, 2000, par exemple). Cependant, un rappel très succinct est donné ici.

La solution axisymétrique du champ d'écoulement  $(\mathbf{V}, P)$  qui vérifie les équations de Navier–Stokes (2.5), (2.6) et (2.7) écrites en coordonnées cylindriques  $(z, r, \theta)$  est indépendante de  $\theta$ . On considère alors le champ perturbé :

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + \mathbf{v}', \quad (4.6)$$

$$p = P + p', \quad (4.7)$$

$$t = T + t', \quad (4.8)$$

où  $\mathbf{V} \equiv (V_z, V_r, V_\theta)^T$  et  $t$  désigne la température (la température a été noté  $T$  jusqu'à présent ; cependant, pour des raisons de notations, on va momentanément la noter en minuscule).  $\mathbf{v}'$ ,  $p'$  et  $t'$  étant des perturbations infinitésimales, on peut les exprimer à partir des fonctions

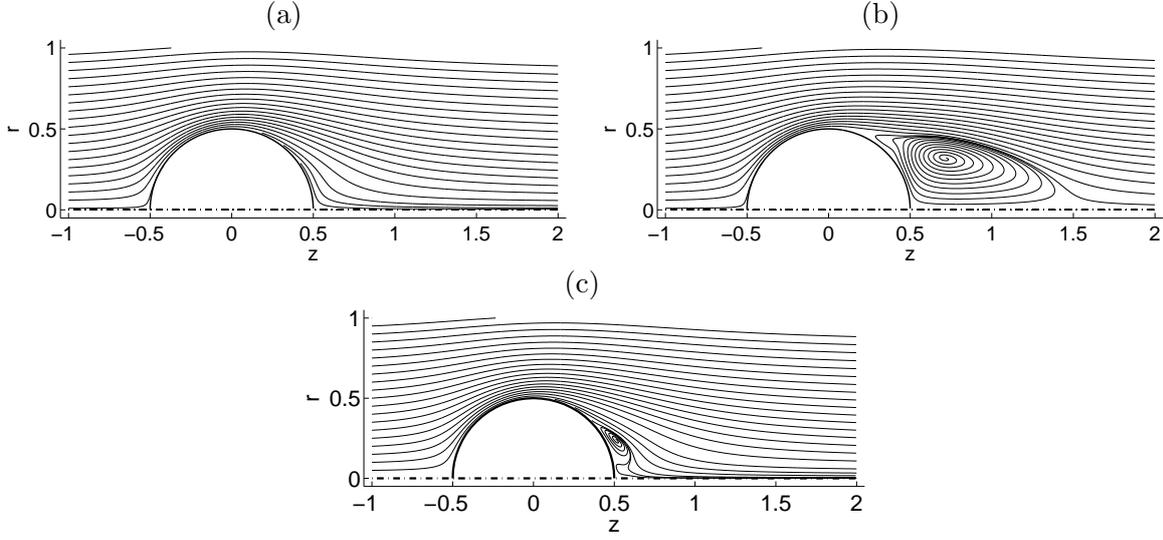


FIG. 4.2 – Différents aspects de l'écoulement axisymétrique à  $Pr = 0.72$ . Lignes de courant à (a)  $Ri = 0.5$ ,  $Re = 200$  – écoulement attaché, (b)  $Ri = 0.5$ ,  $Re = 600$  – zone de recirculation sur l'axe de l'écoulement, (c)  $Ri = 0.5$ ,  $Re = 400$  – tore hors de l'axe.

propres complexes  $\Phi$ ,  $\Pi$  et  $\Theta$ , associées à la valeur propre  $\lambda$  :

$$\mathbf{v}' = \alpha e^{\lambda\tau} \Phi + c.c., \quad (4.9)$$

$$p' = \alpha e^{\lambda\tau} \Pi + c.c., \quad (4.10)$$

$$t' = \alpha e^{\lambda\tau} \Theta + c.c. \quad (4.11)$$

où  $\tau$  désigne le temps et  $\alpha$  est une constante complexe arbitraire de petite amplitude. Le complexe conjugué est noté *c.c.* (la solution est réelle). La perturbation est donc amplifiée ou, au contraire, atténuée suivant le signe de la partie réelle de  $\lambda$  qui dépend du problème aux valeurs propres :

$$\nabla \cdot \Phi = 0, \quad (4.12)$$

$$\lambda \begin{bmatrix} \Phi \\ \Theta \end{bmatrix} + \mathcal{L}_\nu[\mathbf{V}, T] \begin{bmatrix} \Phi \\ \Theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla \Pi \\ 0 \end{bmatrix} = 0, \quad (4.13)$$

qui est obtenu par linéarisation des équations de Navier–Stokes et de l'énergie par rapport au champ axisymétrique. Ainsi, on fait apparaître l'opérateur linéaire  $\mathcal{L}_\nu[\mathbf{V}, T]$  et qui commute avec  $\partial./\partial\theta$  car les champs  $\mathbf{V}$  et  $T$  sont indépendants de  $\theta$ . Les fonctions propres de ces deux opérateurs sont alors de la forme :

$$\Phi(z, r, \theta) = \sigma(m) \phi_m(z, r) e^{-im\theta}, \quad (4.14)$$

$$\Pi(z, r, \theta) = \pi_m(z, r) e^{-im\theta}, \quad (4.15)$$

$$\Theta(z, r, \theta) = \theta_m(z, r) e^{-im\theta}, \quad (4.16)$$

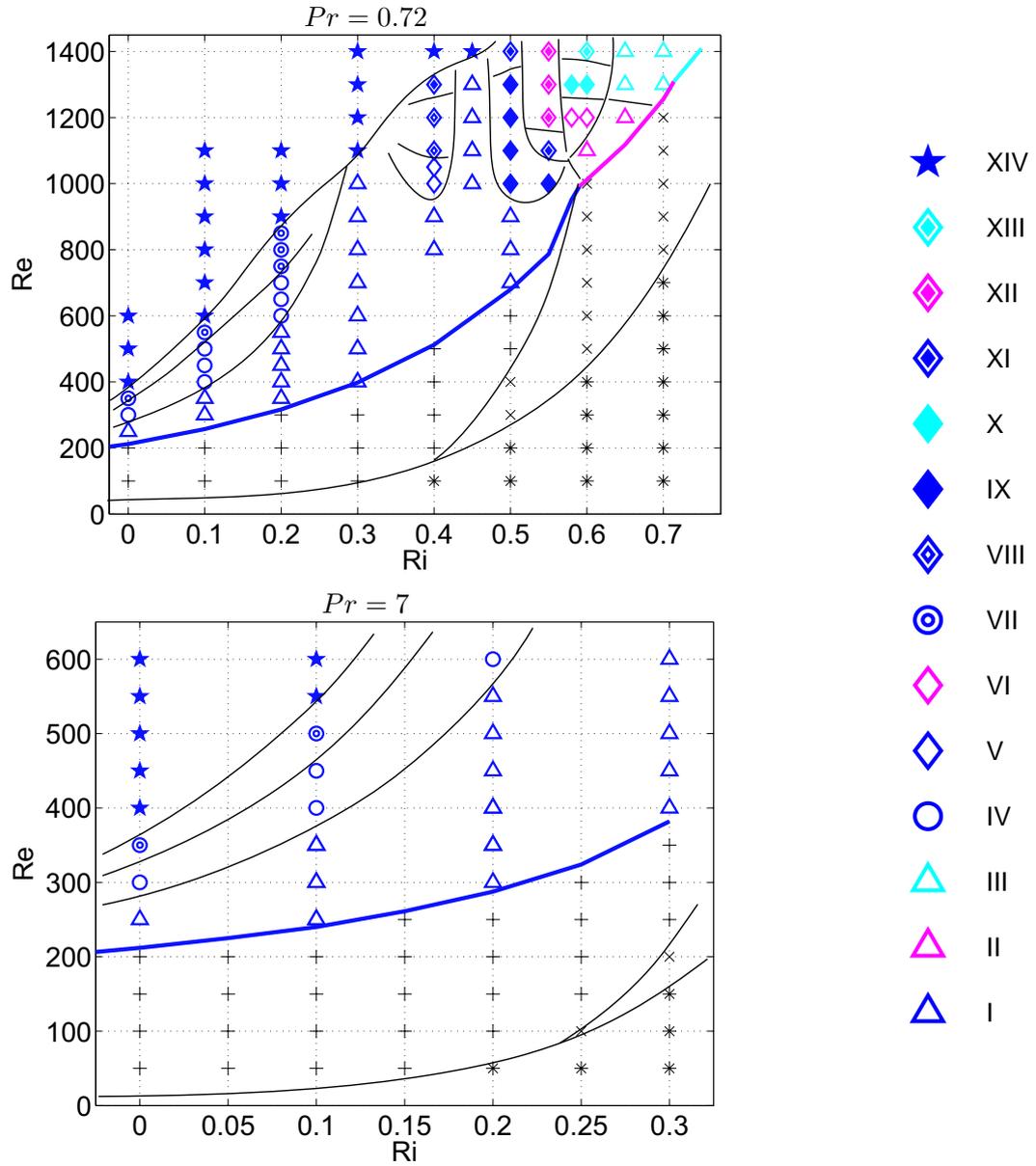


FIG. 4.3 – Diagrammes d’état pour les deux nombres de Prandtl considérés. Le trait en gras représente le seuil de l’instabilité primaire (bifurcation régulière) et correspond, respectivement, au mode le plus instable dans le sous-espace  $m = 1$  (trait bleu),  $m = 2$  (trait turquoise) et  $m = 3$  (trait violet). Dans le domaine plus restreint des paramètres à  $Pr = 7$ , le mode le plus instable correspond toujours au sous-espace  $m = 1$ . Les symboles se trouvant en-dessous de ces traits représentent des régimes axisymétriques (“\*” écoulement attaché, “+” zone de recirculation sur l’axe et “x” tore de recirculation hors de l’axe). Les différents symboles se trouvant au-dessus des traits gras représentent qualitativement différents régimes tridimensionnels, décrits en détail dans section 4.2.4. Les traits fins représentent des frontières approximatives entre différents régimes.

où  $\sigma(m) = \text{diag}(1, 1, -i\text{sgn}(m))$ ,  $m$  est un entier qui représente le nombre d'onde azimutal et  $\phi_m(z, r) \equiv (\phi_{m,z}, \phi_{m,r}, \phi_{m,\theta})^T$  est le tableau des composantes azimutales de la vitesse du fluide suivant les directions axiale, radiale et azimutale. Le problème aux valeurs propres (4.12) et (4.13) se décompose alors en une séquence de problèmes indépendants dans les sous-espaces azimutaux :

$$\nabla_{|m|} \cdot \phi_m = 0, \quad (4.17)$$

$$\lambda_m \begin{bmatrix} \phi_m \\ \theta_m \end{bmatrix} + \Lambda_{\nu,m}[\mathbf{V}, T] \begin{bmatrix} \phi_m \\ \theta_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nabla_{|m|} \pi_m \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (4.18)$$

Les valeurs propres  $\lambda_m$  dépendent de  $m$  et l'instabilité primaire correspond alors à la première valeur propre qui traverse l'axe imaginaire.

Les investigations entreprises sur la stabilité des écoulements de base ont montré que la transition à la tridimensionalité se passe via une bifurcation régulière ( $\text{Im}(\lambda) = 0$ ) pour les deux  $Pr$  considérés et pour tous les  $Ri$  investigués. Néanmoins, pour  $Pr = 0.72$ , une différence essentielle dans la façon dont l'écoulement devient instable a été observée. Pour  $Ri < 0.6$ , le premier mode à devenir instable correspond au nombre d'onde azimutal  $m = 1$ , alors que pour  $0.6 \leq Ri \leq 0.7$  et  $Ri > 0.7$ , le premier mode instable apparaît, respectivement, dans le sous-espace  $m = 2$  et  $m = 3$ . Plus précisément, les modes avec les nombres d'onde azimutaux correspondant à  $m = 1$  et  $m = 2$  deviennent simultanément instables à  $Ri = 0.59$  et  $Re = 991.4$ , les modes avec les nombres d'onde azimutaux correspondant à  $m = 2$  et  $m = 3$  deviennent simultanément instables à  $Ri = 0.714$  et  $Re = 1309$ . Il est probable que le nombre d'onde azimutal du premier mode instable continue à augmenter avec  $Ri$  au-delà de  $Ri = 0.75$ . Cependant, faute de moyens informatiques suffisants, nos simulations ne dépassent pas  $Ri = 0.75$ .

La raison de l'augmentation du nombre d'onde azimutal de l'instabilité primaire est le changement de l'aspect de l'écoulement de base au seuil de l'instabilité primaire lorsque  $Ri$  augmente. Le tore de recirculation hors de l'axe, qui apparaît pour la première fois à  $Ri \approx 0.4$  et  $Re \approx 180$ , disparaît à un  $Re$  légèrement supérieur – le point de recollement de la couche limite atteignant le point d'arrêt aval, l'écoulement prend alors l'aspect du régime avec la zone de recirculation sur l'axe de l'écoulement. La plage d'existence du tore hors de l'axe, en terme de  $Re$ , augmente avec  $Ri$ . Néanmoins, pour  $Ri \approx 0.6$ , le point de recollement atteint le point d'arrêt aval (créant ainsi une zone de recirculation sur l'axe) avant  $Re_1$  (seuil qui correspond à la brisure de l'axisymétrie). Le mécanisme de brisure de l'axisymétrie est donc, dans ce cas, qualitativement le même que celui du cas d'une sphère non-chauffée. Cependant, pour  $Ri \geq 0.6$ , le tore hors de l'axe n'atteint pas le point d'arrêt aval avant que l'écoulement devienne tridimensionnel. Ainsi, on peut dire que, pour  $Ri < 0.6$ , où l'écoulement de base au seuil de l'instabilité présente une zone de recirculation dont le diamètre est comparable au diamètre de la sphère, l'écoulement est plus réceptif aux perturbations avec un nombre d'onde azimutal  $m = 1$ , tandis que, pour  $Ri \geq 0.6$ , où l'écoulement de base au seuil de l'instabilité présente un tore de recirculation hors de l'axe dont la taille est plus petite que celle de la sphère, l'écoulement est plus réceptif aux perturbations avec un nombre d'onde azimutal supérieur à  $m = 1$ . Le tore hors de l'axe devenant de plus en plus fin au seuil de l'instabilité pour un  $Ri$  croissant, c'est la perturbation appartenant au sous-espace  $m = 3$  qui

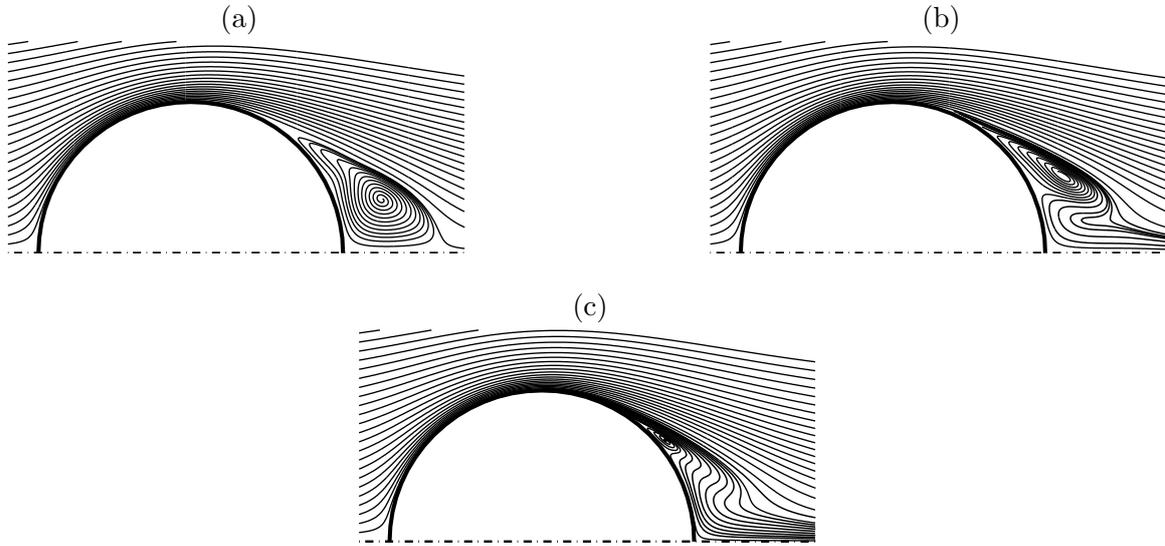


FIG. 4.4 – Différents aspects de l'écoulement axisymétrique à  $Pr = 0.72$ , juste au-dessus du seuil de l'instabilité primaire. Lignes de courant à (a)  $Ri = 0.55$ ,  $Re = 800$  – recirculation sur l'axe de l'écoulement, le premier mode instable correspond à  $m = 1$ , (b)  $Ri = 0.6$ ,  $Re = 1020$  – tore hors de l'axe, le premier mode instable correspond à  $m = 2$  et (c)  $Ri = 0.75$ ,  $Re = 1420$  – très fin tore hors de l'axe, le premier mode instable correspond à  $m = 3$ .

devient instable en premier à partir de  $Ri = 0.7$ . Fig. 4.4 montre des aspects de l'écoulement juste au-dessus du seuil de l'instabilité primaire à différents  $Ri$ , où le premier mode instable correspond à un nombre d'onde azimutal, respectivement,  $m = 1$ ,  $m = 2$  et  $m = 3$ .

A  $Pr = 7$ , à cause du domaine limité des paramètres, nous n'avons pas trouvé de régime présentant un tore hors de l'axe. Ainsi, l'écoulement de base au seuil de l'instabilité primaire présentant toujours une zone de recirculation sur l'axe de l'écoulement, le mode responsable de la brisure de l'axisymétrie est toujours le mode appartenant au sous-espace  $m = 1$  (pour  $Ri \leq 0.3$  et  $Re \leq 600$ ).

Le seuil de l'instabilité primaire,  $Re_1$ , est représenté dans les diagrammes d'état de Fig. 4.3 par le trait gras qui connecte les points pour lesquels le seuil de l'instabilité primaire a été investigué. Les différentes couleurs correspondent au nombre d'onde azimutal le plus instable : bleu –  $m = 1$ , turquoise –  $m = 2$  et violet –  $m = 3$ . Les régimes se trouvant en-dessous des traits gras sont des régimes axisymétriques stationnaires, les régimes au-dessus sont des régimes tridimensionnels et seront décrits dans la section 4.2.4. Les valeurs de  $Re_1$  (avec le nombre d'onde correspondant au mode azimutal le plus instable) en fonction de  $Ri$  sont rappelées dans Tab. 4.1.

A la lecture des diagrammes de la Fig. 4.3 et de Tab. 4.1, on remarque que le nombre de Prandtl influence relativement peu le seuil de l'instabilité. On peut noter, néanmoins, une différence, en terme de stabilité, entre un écoulement à  $Pr = 0.72$  et à  $Pr = 7$  : pour un  $Ri = \text{const.}$ , l'instabilité primaire s'installe à un  $Re$  moins élevé à  $Pr = 7$  qu'à  $Pr = 0.72$ .

$Pr = 0.72$

$Ri$	$Re_1$	$m$
0	212.0	1
0.1	257.1	1
0.2	316.4	1
0.3	397.7	1
0.4	512.0	1
0.5	679.4	1
0.55	786.9	1
0.59	991.4	1,2
0.6	1012	2
0.65	1118	2
0.7	1272	2
0.714	1309	2,3
0.75	786.9	3

$Pr = 7$

$Ri$	$Re_1$	$m$
0	212.0	1
0.05	225.1	1
0.1	240.0	1
0.15	261.3	1
0.2	287.5	1
0.25	324.1	1
0.3	382.3	1

TAB. 4.1 – Seuils de l’instabilité primaire (bifurcation régulière)  $Re_1$  et mode le plus instable  $m$  en fonction du nombre de Richardson pour  $Pr = 0.72$  et  $Pr = 7$ . Deux valeurs du mode azimutal le plus instable signifient que ces deux modes deviennent instables en même temps (à ce  $Ri$  et ce  $Re$  (cas limites)).

Aurement dit, pour un  $Re = \text{const.}$ , l’instabilité primaire disparaît plus tôt (en terme de  $Ri$ ) à  $Pr = 0.72$  qu’à  $Pr = 7$ .

### 4.2.3 Modèle faiblement non-linéaire pour les régimes tridimensionnels

Dans les prochaines sections, différents régimes tridimensionnels, caractérisant la transition au chaos du sillage d’une sphère chauffée fixe en écoulement assistant, vont être présentés. Afin de bien comprendre la dynamique de la transition, une théorie faiblement non-linéaire de l’axisymétrie a été développée pour modéliser de façon mathématique le comportement de certains régimes (en fait, cette modélisation n’est applicable qu’aux régimes à bas et moyens nombres de Richardson et de Reynolds). Comme nous le verrons par la suite, la plupart des régimes intervenant dans la transition sont fortement non-linéaires, rendant toute modélisation mathématique, même qualitative, très compliquée, voire impossible. Néanmoins, comme nous allons le voir, la modélisation faiblement non-linéaire permet de comprendre en partie la dynamique compliquée des régimes fortement non-linéaires.

Un développement faiblement non-linéaire a été utilisé par (Herbert (1983); Dušek *et al.* (1994)) afin d’obtenir la forme normale de la bifurcation de Hopf (modèle de Landau) sous la forme d’un développement à l’ordre 3, considérant la perturbation comme une fonction analytique de l’amplitude de l’instabilité. La même approche a été utilisée afin d’obtenir une forme normale de 3ème ordre, faiblement non-linéaire, d’une bifurcation régulière, caractérisant la brisure de l’axisymétrie du sillage d’une sphère (voir Ghidersa & Dušek, 2000) et

de 5ème ordre, aidant à éclaircir le scénario de la brisure de l’axisymétrie via une bifurcation de Hopf (voir I. Danaila, 1998). Dans le cas de la brisure de l’axisymétrie du sillage d’une sphère, un effet conjugué de la bifurcation régulière et de celle de Hopf est observé, même si les nombres critiques de leurs apparitions respectives,  $Re_1$  et  $Re_2$ , sont plutôt éloignés ( $Re_1 = 212$  et  $Re_2 = 274$ ). La dynamique des premières étapes de la transition – sillage tridimensionnel stationnaire avec une symétrie plane, puis sillage périodique – peut être modélisée en supposant qu’une valeur propre réelle et une paire de valeurs propres complexes deviennent simultanément instables et que l’interaction entre la bifurcation régulière et celle de Hopf obéit à la théorie de bifurcation de Golubitsky & Stewart (1988). Récemment, cette approximation a été appliquée avec succès aux sillages des disques et des sphères (voir Fabre *et al.*, 2008).

Dans le contexte d’une sphère en convection mixte, où, en raison de la présence des effets thermiques, la dynamique devient encore plus compliquée que celle d’une sphère non-chauffée, un modèle considérant une interaction entre une valeur propre réelle et deux paires de valeurs propres complexes doit être considéré. Il est évident qu’en introduisant d’avantage de valeurs propres, le modèle, d’une complexité plus grande, permettrait de décrire d’avantage de régimes, à la dynamique extrêmement complexe. Cependant, il est également évident que ce modèle deviendrait rapidement trop compliqué et nous nous sommes abstenus de nous y égarer au cours de la présente thèse.

Ghidra & Dušek (2000) ont montré que l’axisymétrie d’un écoulement en transition permet d’exprimer le problème aux valeurs propres en tant que somme des problèmes dans des sous-espaces azimutaux de nombre d’onde  $m$ . Dans la section précédente, il a été montré que c’est toujours un mode correspondant à un sous-espace  $m$  donné qui est responsable de la brisure de l’axisymétrie du sillage. Cependant, afin de pouvoir modéliser l’interaction entre plusieurs valeurs propres à l’aide d’un modèle faiblement non-linéaire, il est nécessaire de considérer que plusieurs valeurs propres sont responsables du comportement dynamique du sillage. En considérant que toutes les valeurs propres sont au seuil de l’instabilité, on peut écrire l’approximation linéaire de la brisure de l’axisymétrie sous la forme

$$\Psi = \sum_{i=1}^{n_r} A_i \Phi_i + \sum_{j=1}^{n_c} (B_{j,+} \Phi_j + \bar{B}_{j,-} \bar{\Phi}_j) + c.c., \quad (4.19)$$

où la première expression du membre de droite est la somme des modes propres  $\Phi_i$ ,  $i = 1, \dots, n_r$  associés aux valeurs propres réelles  $\gamma_1, \dots, \gamma_{n_r}$  et la deuxième expression du membre droite est la somme des modes propres  $\Phi_j$ ,  $j = 1, \dots, n_c$  associés aux valeurs propres complexes  $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \dots, \lambda_{n_c}, \bar{\lambda}_{n_c}$ . En général, différentes valeurs propres peuvent appartenir aux différents sous-espaces  $m$ . Les coefficients complexes  $A_i$  définissent les amplitudes des modes stationnaires, alors que les coefficients  $B_{j,\pm}$  sont les amplitudes des modes hélicoïdaux avec différentes hélicités (voir I. Danaila, 1998, par exemple, pour une représentation spatiale de tels modes). “*c.c.*” désigne le complexe conjugué. Il faut rappeler que même les modes propres associés aux valeurs propres réelles sont complexes, car, si nous considérons l’approximation linéaire en tant que termes principaux des séries de Fourier, le mode propre  $\Phi_i$  associé à un sous-espace  $m$  et correspondant à une valeur propre  $\gamma_i$  contient le facteur  $e^{-im\theta}$ .

Aucune littérature portant sur le couplage non-linéaire des modes associés aux différents

nombres d'onde azimutaux n'étant disponible, nous avons dû nous contenter d'assimiler le modèle de Fabre *et al.* (2008), légèrement généralisé, à notre problème. Dans ce modèle, nous considérons le couplage, dans un même sous-espace  $m$ , entre une valeur propre réelle d'amplitude  $A$  et deux paires de modes complexes d'amplitude  $B_{j,\pm}, j = 1, 2$ . Le modèle s'écrit

$$\frac{dA}{dt} = \gamma A - (c|A|^2 + B'_+ \mathbf{d}B_+ + B'_- \mathbf{d}B_-) A + (B'_- \mathbf{h}B_+) \bar{A} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB_{j,+}}{dt} &= \lambda_j B_{j,+} - (G_j |A|^2 + B'_+ \mathbf{E}_j B_+ + B'_- \mathbf{F}_j B_-) B_{j,+} + \\ &\quad (K_j A^2 + B'_- \mathbf{L}_j B_+) B_- \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{dB_{j,-}}{dt} &= \lambda_j B_{j,-} - (G_j |A|^2 + B'_- \mathbf{E}_j B_- + B'_+ \mathbf{F}_j B_+) B_{j,-} + \\ &\quad (\bar{K}_j \bar{A}^2 + B'_+ \mathbf{L}_j B_-) B_+ \end{aligned} \quad (4.22)$$

où  $B_{\pm}$  représente le vecteur  $(B_{1,\pm}, B_{2,\pm})^T$ ,  $c, G_j$  et  $K_j$  sont, respectivement, une constante réelle et des constantes complexes,  $\mathbf{d}, \mathbf{h}$  sont des matrices diagonales réelles et  $\mathbf{E}_j, \mathbf{F}_j, \mathbf{L}_j$  sont des matrices diagonales  $(2 \times 2)$  complexes,  $\mathbf{L}_1$  ayant seulement le deuxième élément diagonal non-nul (et vice versa pour  $\mathbf{L}_2$ ). “ $'$ ” désigne la transposée et conjuguée complexe.

Des exemples de solutions des équations (4.20), (4.21) et (4.22) pour un choix *ad hoc* des constantes sont montrés dans Fig. 4.5 (le choix des constantes n'est pas totalement arbitraire, mais vise à reproduire certains régimes observés dans les simulations). La solution est représentée dans le plan complexe

$$z(t) = A(t) + \sum_{j=1,2} (B_{j,+} + \bar{B}_{j,-}), \quad (4.23)$$

en traçant, soit une dépendance  $real(z)$  v.s.  $t$ , soit la fonction  $z(t)$  dans un plan complexe. Qualitativement, les tracés représentent la projection de la force de portance sur le plan perpendiculaire à l'axe de l'écoulement.

La première ligne montre l'importance des termes de couplage entre les modes (réécrits seulement pour une paire de modes propres)  $h\bar{B}_- B_+ \bar{A}$ ,  $K_j A^2 B_-$  et  $\bar{K}_j \bar{A}^2 B_+$ . Sans ces termes de couplage, la direction de la déviation stationnaire ainsi que la direction des oscillations seraient arbitraires et indépendantes (déterminées par les conditions initiales) alors qu'en réalité les oscillations se font toujours dans un plan sélectionné par le mode réel.

Dans la ligne du milieu, où les constantes de couplage ne sont pas nulles (elles sont choisies en fonction de la stabilité des oscillations dans un plan contenant l'axe de l'écoulement), on obtient une solution observée dans le sillage d'une sphère non-chauffée et d'une sphère chauffée à faibles  $Ri$  – les oscillations périodiques restent dans le plan sélectionné par l'instabilité primaire. Un couplage faiblement non-linéaire entre une valeur propre réelle et une paire de valeurs propres complexes ne modélise pas les autres régimes de la section suivante, à part celui caractérisé par des oscillations planes.

L'étape suivante de la transition d'une sphère sans effet thermique, ou à bas et moyens nombres de Richardson (bifurcation régulière, suivie d'une bifurcation de Hopf), est l'ap-

parition d'une deuxième fréquence dans les oscillations planes du sillage – une fréquence sous-harmonique. On a constaté que le seul moyen de faire intervenir la fréquence sous-harmonique est d'ajouter une deuxième paire de valeurs propres complexes au couplage, même si nous n'avons pas trouvé de rapport direct entre les deux fréquences et les fréquences des valeurs propres les plus instables obtenues par analyse de stabilité linéaire. Ce décalage de fréquence est certainement dû aux effets fortement non-linéaires. La dynamique quasi-périodique est montrée sur la troisième ligne de la Fig. 4.5.

Malgré l'extension du modèle du 3ème ordre à deux paires des valeurs propres complexes, il prédit que les oscillations de la force de portance se font systématiquement dans un plan contenant l'axe de l'écoulement. Or, il a été observé que la symétrie plane est à son tour brisée à un autre stade de la transition. Il semble que cette brisure de symétrie soit due à un déséquilibre entre deux modes hélicoïdaux. L'explication selon laquelle deux modes hélicoïdaux avec des amplitudes différentes peuvent apparaître est donnée par I. Danaila (1998). Un tel modèle permettant la brisure de la symétrie comporte nécessairement des termes du 5ème ordre. Afin de modéliser fidèlement la brisure du plan de symétrie sans compliquer le modèle davantage, nous avons donc entrepris d'imposer différentes valeurs aux constantes  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}$  dans les équations (4.21) et (4.22) pour que les amplitudes à la saturation soient différentes. Les constantes qui fixent le plan de symétrie restent inchangées. L'effet de la dissymétrisation des constantes  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{F}$  est visible dans Fig. 4.6, où les tracés sont réalisés dans le plan complexe.

Malgré le fait que cette modélisation d'ordre élevé ne réussisse pas à reproduire fidèlement certaines simulations réalisées en écoulement assistant et opposant sans plan de symétrie, elle permet néanmoins de prouver que la brisure de la symétrie est associée à des effets non-linéaires d'ordre élevé. La rotation lente (voir la section suivante) du plan de symétrie est un résultat du couplage entre des termes de liaison qui, dans un modèle de 3ème ordre, assurent la symétrie plane.

Il n'est pas non plus possible de trouver des constantes permettant de décrire les transitoires car, malgré un accord qualitatif entre le modèle et certains régimes asymptotiques, les effets non-linéaires sont tellement forts que les 'constantes' ne sont pas, en réalité, tout à fait constantes.

#### 4.2.4 Régimes tridimensionnels

La classification des différents régimes de la Fig. 4.3 a été inspirée par le modèle faiblement non-linéaire de la section précédente. Les trois critères pour le choix des symboles identiques regroupant des régimes qualitativement ressemblants ont été (a) le nombre d'onde azimutal du mode le plus amplifié, (b) le nombre de valeurs propres instables qui dominent la dynamique du sillage et (c) l'ordre maximal du modèle faiblement non-linéaire pouvant reproduire (qualitativement) les résultats observés dans les simulations. Le dernier critère est lié à la présence ou à l'absence du plan de symétrie. Le comportement chaotique du sillage est toujours coûteux à obtenir, en terme de CPU, car l'état asymptotique d'un régime chaotique nécessite des simulations très longues. L'état chaotique du sillage est représenté par le symbole “★” dans Fig. 4.3.

Les trois couleurs différentes des régimes tridimensionnels (les régimes axisymétriques

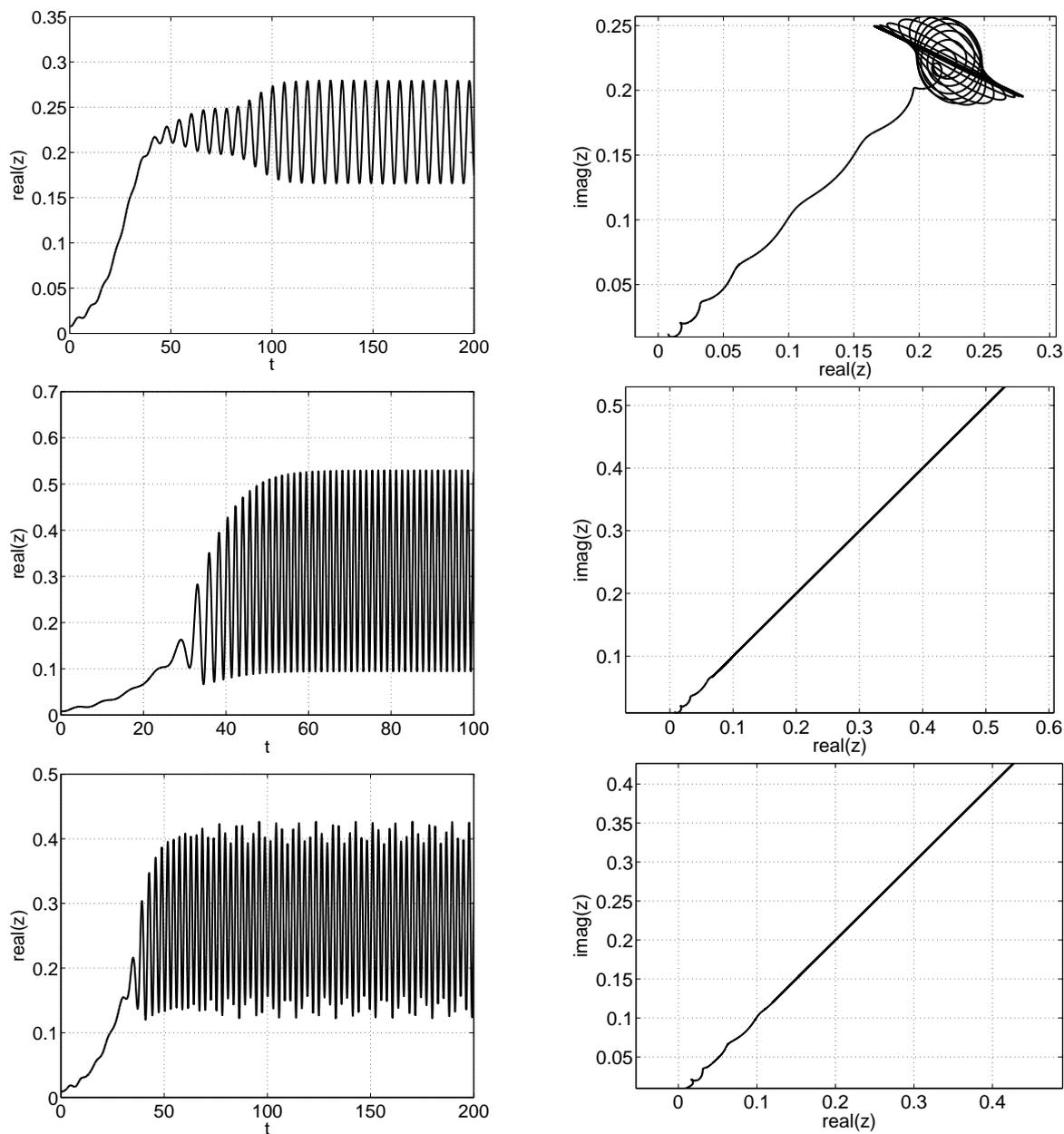


FIG. 4.5 – Exemples des trajectoires du modèle faiblement non-linéaire de 3ème ordre.  $\text{real}(z)$  vs.  $t$  (colonne de gauche), tracé dans un plan complexe (colonne droite). Ligne du haut : solution périodique sans symétrie plane ( $j = 1, h = K_1 = 0$ ). Ligne du milieu : solution périodique avec un plan de symétrie arbitraire ( $j = 1, h > 0, K_1$  réelle positive). Ligne du bas : deux paires de modes propres complexes ( $j = 1, 2$ ).

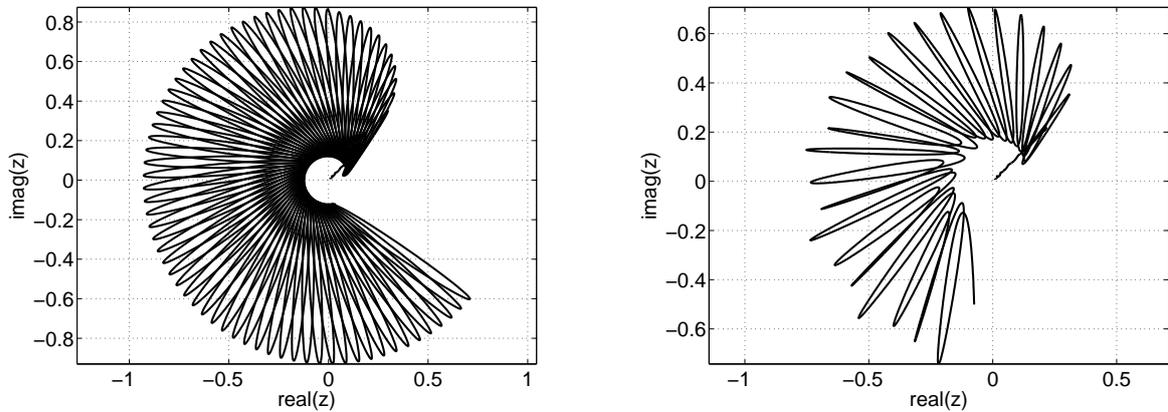


FIG. 4.6 – Trajectoires hypothétiques d'un modèle d'ordre élevé. A gauche : une paire de valeurs propres complexes. A droite : deux paires de valeurs propres complexes.

étant marqués par la couleur noire) déterminent le nombre d'onde du mode azimutal dominant dans l'écoulement. Ce critère n'est pas limité aux régimes ayant un mode azimutal dominant  $m$  accompagné de ses harmoniques (ce qui limiterait l'application du critère seulement aux régimes stationnaires), mais s'applique également aux régimes oscillants, où plusieurs modes azimutaux sont présents, mais où, néanmoins, le mode  $m$  reste dominant : de tels régimes sont ainsi colorés avec la même couleur. Les couleurs utilisées sont le bleu (le nombre d'onde azimutal dominant étant  $m = 1$ , équivalant à la périodicité de  $2\pi$  dans la direction azimutale  $\theta$ ), le turquoise ( $m = 2$ , périodicité  $\pi$ ) et le violet ( $m = 3$ , périodicité  $2\pi/3$ ).

Les différents symboles de la Fig. 4.3 divisent les régimes en fonction du nombre de valeurs propres dominant l'écoulement. Il faut remarquer que ce critère ne peut pas être mis en liaison directe avec le nombre de valeurs propres instables trouvées par analyse de stabilité linéaire effectuée à partir de l'écoulement de base (axisymétrique stationnaire). Natarajan & Acrivos (1993) ont trouvé que, dans le cas d'une sphère non-chauffée, la première paire de valeurs propres complexes devient instable à  $Re = 277.5$ , alors qu'il est généralement admis que la bifurcation secondaire (de Hopf) s'installe plus tôt (à  $Re < 275$ ) – le calcul précis donne, respectivement,  $Re = 279.3$  et  $Re = 273$ . Ce décalage devient encore plus marquant lorsqu'une fréquence secondaire s'installe dans un écoulement déjà instationnaire, où les effets non-linéaires sont déjà significatifs. Les symboles (I), (II) et (III) désignent des régimes en-dessous du seuil de la bifurcation secondaire (de Hopf), i.e. des régimes tridimensionnels et stationnaires. Les symboles (IV), (V) et (VI) désignent des écoulements au-dessus de la bifurcation secondaire. La dynamique de ces régimes peut être modélisée par la version tri-dimensionnelle ( $j = 1$ ) du modèle (4.20), (4.21) et (4.22). Les symboles (VII) et (VIII) désignent des régimes dont la dynamique est due à l'interaction entre une valeur propre réelle et deux paires de valeurs propres complexes, i.e. des écoulements qui ont subi une bifurcation de Hopf tertiaire et présentent ainsi une dynamique quasi-périodique ( $j = 1, 2$  dans les équations (4.20), (4.21) et (4.22)). Les symboles (IX) et (X) désignent des

régimes périodiques sans symétrie plane (des régimes tournants). Les symboles (XI), (XII) et (XIII) sont utilisés pour des régimes non-périodiques, sans symétrie plane et qui n'ont pas encore été identifiés en tant que chaotiques. Finalement, le symbole (XIV) représente un régime chaotique. Dans ce qui suit, nous décrivons les régimes plus en détail.

### Régimes tridimensionnels stationnaires

Dans la section 4.2.2, il a déjà été constaté qu'à  $Pr = 0.72$ , le nombre d'onde du mode azimutal le plus instable au seuil de l'instabilité primaire (brisure de l'axisymétrie par une bifurcation régulière) varie en fonction de  $Ri$  entre  $m = 1$  et  $m = 3$ . Au-dessus du seuil de l'instabilité primaire et en avançant dans la région des régimes tridimensionnels, d'autres modes azimutaux deviennent significatifs (en plus de celui qui a brisé l'axisymétrie) et la distinction entre le mode dominant et les autres modes devient de plus en plus délicate à faire. Comme le couplage intrinsèque entre plusieurs modes azimutaux n'a été observé qu'à  $Pr = 0.72$ , la présente section porte essentiellement sur le nombre de Prandtl correspondant à l'air.

**(I) – Écoulement stationnaire avec deux filaments de vorticité contrarotatifs et un plan de symétrie** A l'instar de la sphère non-chauffée, un sillage avec deux filaments de vorticité contrarotatifs, décalés par rapport à l'axe de l'écoulement et ayant un plan de symétrie est le premier aspect que présente l'écoulement après la brisure de l'axisymétrie. L'allure du sillage présentant deux tourbillons est due au nombre d'onde azimutal  $m = 1$  du mode le plus instable au seuil de l'instabilité, car le changement de signe de la vorticité axiale est la conséquence d'une périodicité  $2\pi$ . Le sous-espace  $m = 1$  est le plus instable jusqu'à  $Ri = 0.59$  pour  $Pr = 0.72$  et pour tous les  $Ri \leq 0.3$  à  $Pr = 7$ . Un tel écoulement présente un coefficient de portance non-nul, défini par

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 \frac{\pi d^2}{4}}, \quad (4.24)$$

où  $F_L$  désigne la force de portance. L'aspect de l'écoulement est montré dans Fig. 4.7a (isosurfaces de la vorticité axiale) pour  $Ri = 0.2$ ,  $Re = 400$  et  $Pr = 0.72$ . La vorticité axiale étant nulle dans les écoulements axisymétriques, cette quantité convient bien pour détecter la brisure de l'axisymétrie du sillage. Une isosurface de la température de l'écoulement aux mêmes paramètres est montrée dans Fig. 4.7b : le décalage du sillage dans la plan de symétrie  $y$  est bien visible.

**(II) – Écoulement stationnaire avec quatre filaments de vorticité et deux plans de symétrie perpendiculaires ( $Pr = 0.72$ )** Si le nombre d'onde du mode azimutale le plus instable est  $m = 2$  ( $0.590 \leq Ri \leq 0.714$ ), l'écoulement présente alors 4 filaments de vorticité et deux plans de symétrie perpendiculaires. La périodicité de l'écoulement dans la direction  $\theta$  est  $\pi$ , ce qui impose à la force de portance d'être, cette fois-ci, nulle (la force de portance résulte de l'intégrale du mode  $m = 1$  (voir Jenny & Dušek, 2004)). L'aspect d'un tel écoulement est montré dans Fig. 4.8 pour  $Ri = 0.6$  et  $Re = 1100$ . Le mode instable étant très faible, il n'affecte presque pas la distribution de température dans le sillage. De la même

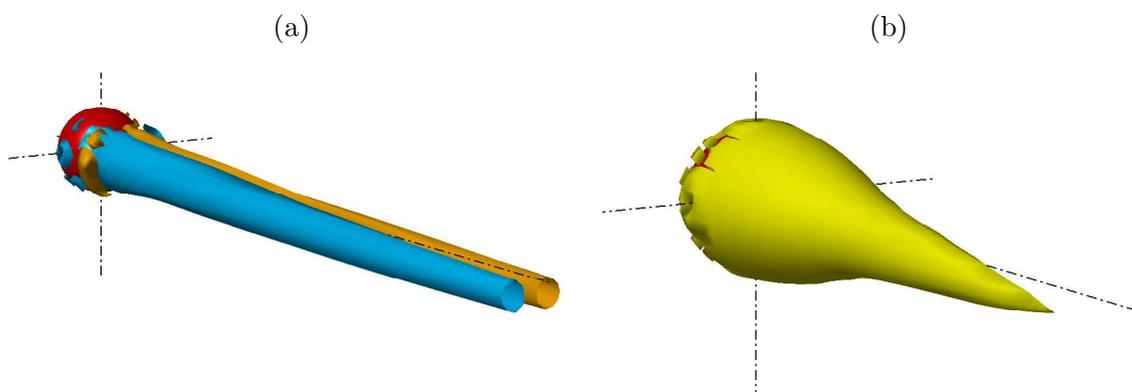


FIG. 4.7 – (a) Isosurfaces de la vorticité axiale ( $\omega_z = \pm 0.1$ ), (b) isosurface de la température ( $T = 0.3$ ) à  $Ri = 0.2$ ,  $Re = 400$  et  $Pr = 0.72$ . Le sillage présente deux tourbillons contrarotatifs, décalés par rapport à l’axe et ayant un plan de symétrie.

manière, la vorticité axiale est très faible (le niveau dans Fig.4.8a est dix fois moins élevé que dans Fig. 4.7a).

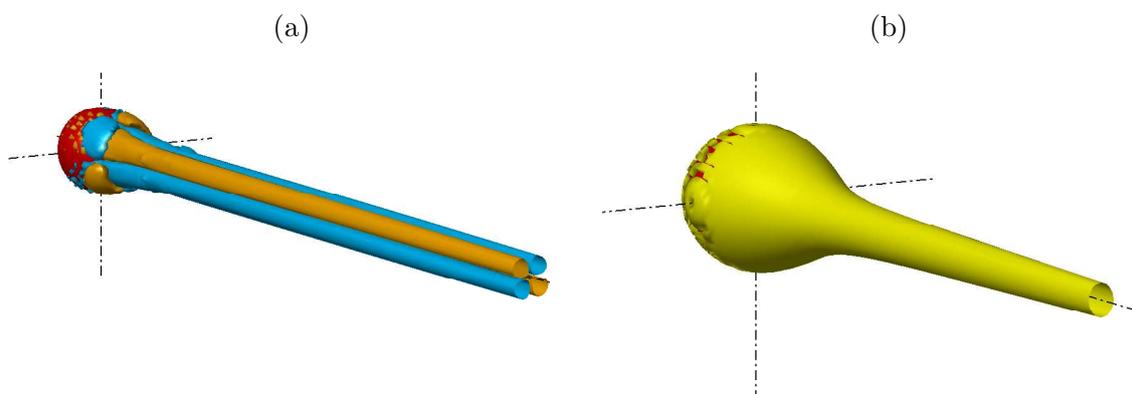


FIG. 4.8 – (a) Isosurfaces de la vorticité axiale ( $\omega_z = \pm 0.01$ ), (b) isosurface de la température ( $T = 0.3$ ) à  $Ri = 0.6$ ,  $Re = 1100$  et  $Pr = 0.72$ . Le sillage présente quatre tourbillons et deux plans de symétrie perpendiculaires ; néanmoins, le mode instable est assez faible.

**(III) – Ecoulement stationnaire avec six filaments de vorticité et trois plans de symétrie ( $Pr = 0.72$ )** L’instabilité dans un sous-espace  $m = 3$  ( $Ri \geq 0.714$ ) a pour conséquence l’apparition d’un sillage avec six tourbillons et trois plans de symétrie. Les régimes pour lesquels les modes azimutaux  $m = 2$  ou  $m = 3$  dominant s’étendent dans une direction parallèle à l’axe  $Ri$ . Ainsi, il a été observé qu’en augmentant le  $Re$  pour un  $Ri = \text{const.}$ , le régime avec 4 filaments de vorticité (mode  $m = 2$  dominant) fait place à un régime avec 6 filaments (mode  $m = 3$  dominant). L’écoulement est périodique de périodicité

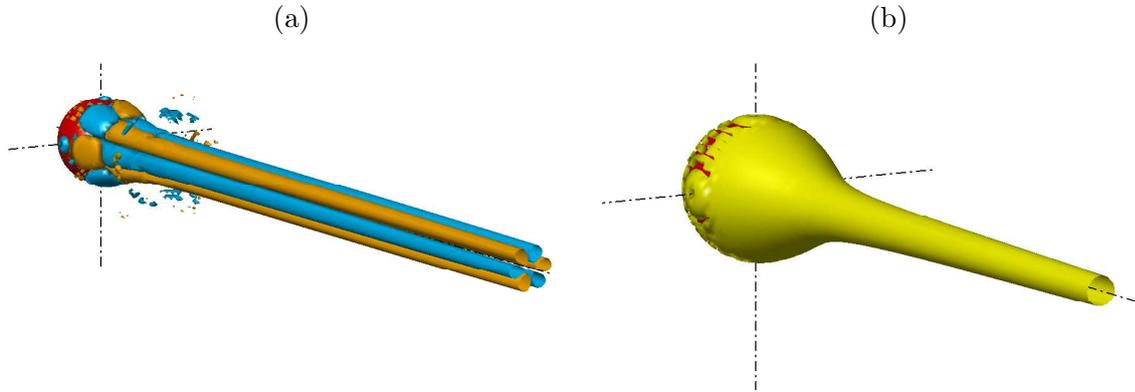


FIG. 4.9 – (a) Isosurfaces de la vorticité axiale ( $\omega_z = \pm 0.001$ ), (b) isosurface de la température ( $T = 0.3$ ) à  $Ri = 0.7$ ,  $Re = 1300$  et  $Pr = 0.72$ . Le mode azimutal de nombre d’onde  $m = 3$  présente six tourbillons et trois plans de symétrie ; néanmoins, il est très faible.

$2\pi/3$  dans la direction azimutale et la force de portance résultante est encore nulle. Un sillage avec 6 filaments de vorticité à  $Ri = 0.7$  et  $Re = 1300$  est montré dans Fig. 4.9a. Le mode instable avec un nombre d’onde azimutal  $m = 3$  étant encore plus faible que le mode instable avec un nombre d’onde azimutal  $m = 2$ , le niveau de la vorticité axiale dans Fig. 4.9a a encore baissé d’un facteur dix par rapport au niveau de la Fig. 4.8a.

**Régimes stationnaires tridimensionnels fortement supercritiques** Les régimes représentés dans Figs. 4.7, 4.8 et 4.9 sont des cas typiques, présentant 1 seul mode instable accompagné de faibles modes harmoniques. Par exemple, l’écoulement à  $Ri = 0.6$  et  $Re = 1100$  à  $Pr = 0.72$  (Fig. 4.8) ne contient aucun mode impair, seuls les modes  $m = 2$  et leurs harmoniques sont présents. De façon similaire, l’écoulement à  $Ri = 0.2$  et  $Re = 400$  à  $Pr = 0.72$  (Fig. 4.7) ne contient que de faibles harmoniques du mode azimutal  $m = 1$  (ces harmoniques, dont l’existence n’est due qu’à des couplages non-linéaires avec le mode  $m = 1$ , ne présentent pas de dynamique propre). Même si l’on tente de les représenter avec un niveau de vorticité axiale plus bas, les modes  $m > 1$  sont invisibles dans Fig. 4.10a, alors qu’un écoulement fortement supercritique à  $Ri = 0.3$  et  $Re = 1000$  à  $Pr = 0.72$  présente plusieurs tourbillons (Fig. 4.10b).

Les difficultés de compréhension du comportement des modes tridimensionnels fortement supercritiques (mais tout de même stationnaires) proviennent du fait qu’il n’existe pas de distinction claire entre les harmoniques d’un mode instable du sous-espace  $m = 1$  et les interactions de ce mode avec les modes (presque) instables des sous-espaces  $m > 1$ . Le seul cas où cette interaction est évidente est celui d’un écoulement présentant seulement des multiples du mode  $m > 1$  et qui subit une bifurcation (spatiale) sous-critique, déclenchant ainsi l’apparition des modes manquants. Ce type de bifurcation a été observé à  $Pr = 0.72$  pour  $Ri = 0.6$  en passant de  $Re = 1100$  à  $Re = 1200$  et pour  $Re = 1300$  en passant de  $Ri = 0.65$  à  $Ri = 0.6$ . Dans ces deux cas, l’installation des nombres d’onde azimutaux inférieurs dans l’écoulement est accompagnée par l’apparition d’oscillations. Par exemple,

si on ne considère pas les modes impairs dans la décomposition de Fourier à  $Ri = 0.6$  et  $Re = 1200$ , les oscillations n'apparaissent pas.

Afin d'étudier plus en détail les couplages non-linéaires entre le mode instable dominant et d'autres modes azimutaux, des tests ont été effectués en ne considérant que des modes pairs ( $m = 0, 2, \dots$ , cas 1) ou les modes  $m = 0, 1$  (cas 2) dans la décomposition azimutale. Dans les deux cas, les équations réduites restent non-linéaires. Dans le cas 1, seules les perturbations du sous-espace azimutal  $m = 2$  (et leurs harmoniques) sont autorisées, tandis que, dans le cas 2, seule la perturbation  $m = 1$  est autorisée. Ces tests ont été effectués sur les points du plan de paramètres ( $Ri - Re$ ) correspondant aux régimes stationnaires ((0.2, 550), (0.3, 500), (0.3, 1000) et (0.45, 1300)) et aux régimes instationnaires ((0.2, 700), (0.4, 1050) et (0.5, 1100)).

Cas	$Ri = 0.2,$ $Re = 550$	$Ri = 0.3,$ $Re = 500$	$Ri = 0.3,$ $Re = 1000$	$Ri = 0.45,$ $Re = 1300$
1	axisym.	axisym.	oscillations périodiques avec un plan de sym.	oscillations périodiques avec un plan de sym.
2	stationnaire non-axisym.	stationnaire non-axisym.	stationnaire non-axisym.	oscillations périodiques sans plan de sym.

TAB. 4.2 – Résultats des tests sur l'influence du tronquage de la décomposition azimutale sur 4 régimes tridimensionnels et stationnaires. Cas 1 – seuls les modes pairs sont retenus. Cas 2 – les modes azimutaux sont tronqués à  $m = 1$ .

Les résultats des 4 régimes stationnaires sont montrés dans Tab. 4.2. Les régimes tridimensionnels stationnaires à  $Ri = 0.2$ ,  $Re = 550$  et  $Ri = 0.3$ ,  $Re = 500$  disparaissent lorsque que seuls les modes azimutaux pairs sont retenus, et sont très légèrement modifiés lorsque les modes azimutaux sont tronqués à  $m = 0$  et  $m = 1$ . Ce résultat confirme que ces deux régimes sont des régimes correspondant à un mode instable du sous-espace  $m = 1$ , prédits par le modèle de la section 4.2.3. La stabilité du régime stationnaire à  $Ri = 0.45$ ,  $Re = 1300$  peut-être

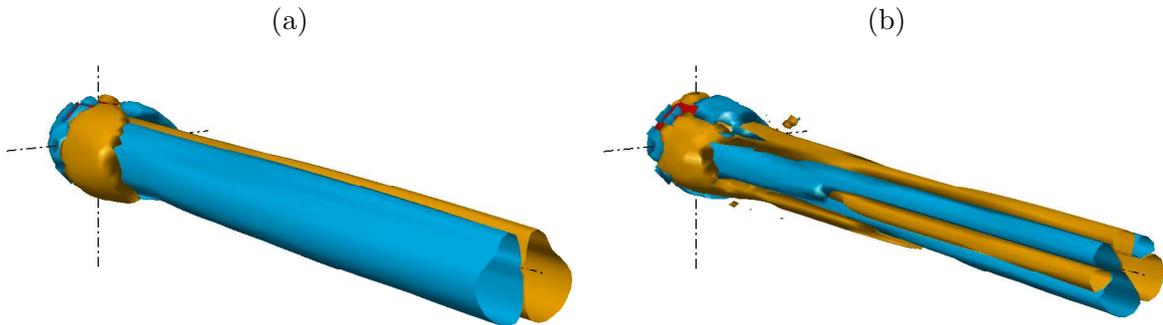


FIG. 4.10 – Isosurfaces de la vorticité axiale ( $\omega_z = \pm 0.01$ ) à  $Pr = 0.72$ . (a)  $Ri = 0.2$ ,  $Re = 400$  – seul le mode azimutal  $m = 1$  est visible (avec ses harmoniques), (b)  $Ri = 0.3$ ,  $Re = 1000$  – des tourbillons correspondant aux modes  $m > 1$  sont clairement distingués.

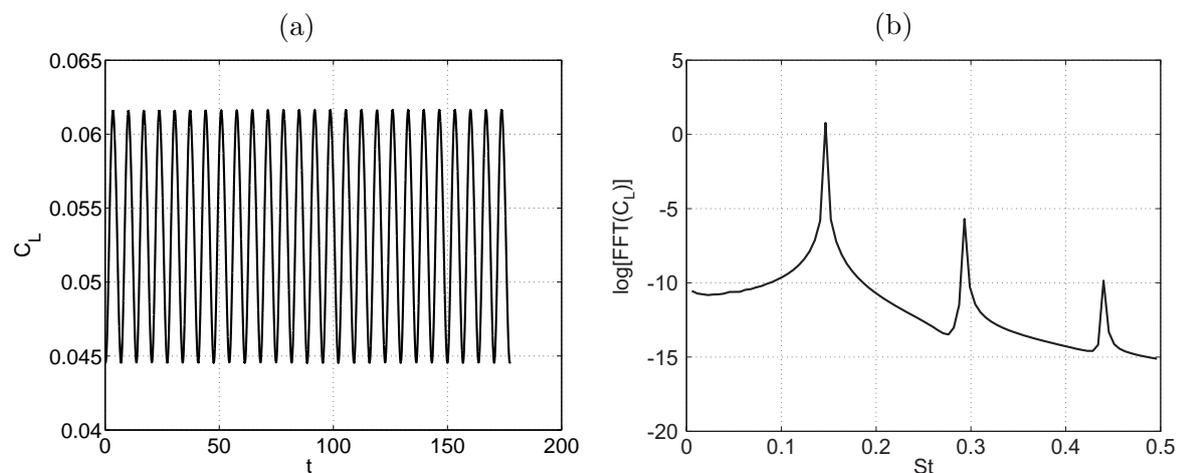


FIG. 4.11 – (a) Evolution temporelle du coefficient de portance des oscillations périodiques planes à  $Ri = 0.1$ ,  $Re = 400$  et  $Pr = 7$ , (b) transformation de Fourier correspondante. Le pic dominant correspond au nombre de Strouhal  $St = 0.142$ , les pics secondaires correspondent aux fréquences supérieures des harmoniques.

expliquée par un équilibre entre les modes instables correspondant aux sous-espaces  $m = 1$  et  $m = 2$  : si la décomposition azimutale contient seulement les modes pairs, les oscillations correspondant au mode instable du sous-espace  $m = 2$  (oscillations des 4 filaments de vorticité dans un plan avec une valeur moyenne de la force de portance nulle) sont retrouvées, alors que si on ne retient que les modes  $m = 0$  et  $m = 1$ , des oscillations non-physiques sans plan de symétrie sont trouvées. A  $Ri = 0.3$ ,  $Re = 1000$ , l'écoulement n'est pas affecté par la présence des modes pairs en considérant les 7 premiers modes azimutaux, malgré le fait que seuls les modes pairs soient instables et oscillants – le couplage entre le mode instable stationnaire appartenant au sous-espace  $m = 1$  et les modes pairs instables instationnaires stabilise l'écoulement et le rend stationnaire.

### Régimes périodiques avec plan de symétrie

A  $Pr = 0.72$ , nous avons observé trois types de régime avec des oscillations périodiques dans un plan de symétrie, alors qu'   $Pr = 7$ , seul le détachement tourbillonnaire, caractéristique du sillage d'une sphère non-chauffée pour des nombres de Reynolds compris entre 273 et 325, a été observé du fait des nombres de Richardson restreint    $Ri \leq 0.3$ . A  $Pr = 0.72$ , le détachement tourbillonnaire caractéristique d'une sphère non-chauffée existe pour  $Ri < 0.3$ . A  $Ri = 0.3$ , le régime tridimensionnel stationnaire    $Re = 1000$  devient directement chaotique lorsque le nombre de Reynolds atteint la valeur  $Re = 1100$ . Les deux autres types d'oscillations planes n'existent que sur des " les" dans le plan ( $Ri - Re$ ) :    $Ri = 0.4$ ,  $Ri = 0.58$ , et  $Ri = 0.6$ . Ils présentent des caractéristiques fondamentalement différentes.

**(IV) – Détachement tourbillonnaire périodique à haute fréquence avec plan de symétrie** Pour de faibles nombres de Richardson ( $Ri < 0.3$ ), le scénario de la transition est similaire à celui d’une sphère non-chauffée pour les deux nombres de Prandtl considérés. La bifurcation secondaire, de type Hopf, s’installe à  $Re_2$  et rend l’écoulement périodique, tout en conservant le plan de symétrie sélectionné au moment de la brisure de l’axisymétrie. Ce comportement peut être très bien décrit par le modèle faiblement non-linéaire de la section 4.2.3, ce qui indique que l’instabilité a son unique origine dans le sous-espace azimutale  $m = 1$ . Cette hypothèse est confirmée par les tests de la section précédente. Le détachement tourbillonnaire (allée de Von-Kármán) est caractérisé par une alternance du signe de la vorticité axiale dans les deux filaments. Les filaments stationnaires étant décalés par rapport   l’axe de l’écoulement dans le régime stationnaire, ces derniers oscillent également autour d’une position moyenne qui ne se trouve pas sur l’axe de l’écoulement. Ceci induit que la valeur moyenne de la force de portance n’est pas nulle. L’évolution temporelle du coefficient de portance, défini par l’équation 4.24, est montrée dans Fig. 4.11a. Elle présente, tout comme d’autres quantités dans le sillage, le comportement caractéristique d’un cycle limite. La transformation de Fourier correspondante est tracée dans Fig. 4.11b : elle présente l’aspect typique d’un signal périodique avec une décroissance exponentielle des harmoniques. L’aspect de l’écoulement est montrée dans Fig. 4.11, où les isosurfaces de la vorticité axiale (Fig. 4.11a et b) et les structures tourbillonnaires obtenues par la méthode de visualisation de Jeong & Hussain (1995) (généralement connue sous le nom de  $Q$ -définition, Fig. 4.11c et d) sont affichées   deux instants qui diff rent d’une demi-période pour  $Ri = 0.1$  et  $Re = 400$     $Pr = 7$ .

La valeur du nombre de Strouhal, défini par

$$St = \frac{fd}{v_\infty}, \quad (4.25)$$

où  $f$  est la fréquence des oscillations périodiques du sillage, croît avec  $Re$    un  $Ri = \text{const.}$  et  $Pr = \text{const.}$  et, de façon similaire, croît avec  $Ri$    un  $Re = \text{const.}$  et  $Pr = \text{const.}$ .    $Ri = \text{const.}$  et  $Re = \text{const.}$ ,  $St$  décroît avec  $Pr$ . Tab. 4.3 montre les nombres de Strouhal pour tous les régimes périodiques et quasi-périodiques (dans le cas des régimes quasi-périodiques, on considère le pic le plus haut). Il est utile de rappeler que, au seuil de l’instabilité secondaire d’une sphère non-chauffée,    $Re_2 = 272$ , la valeur du nombre de Strouhal est de 0.127 (voir Johnson & Patel, 1999; Bouchet *et al.*, 2006).

Des tests numériques consistant   ne considérer, soit que des modes azimutaux impairs, soit que les modes  $m = 0, 1$ , effectués sur le régime    $Ri = 0.2$ ,  $Re = 700$  et  $Pr = 0.72$ , montrent que le tronquage des mode azimutaux    $m = 1$  ne modifie que très peu la dynamique du sillage. L’écoulement avec des modes azimutaux  $m = 0$  et  $m = 1$  oscille également dans un plan de symétrie, mais avec une amplitude plus petite et une valeur moyenne du coefficient de portance plus élevée. Ceci explique le bon accord entre les simulations et le modèle faiblement non-l n aire appliqué au sous-espace azimutal  $m = 1$ .

L’effet de la convection naturelle ( $Ri$  croissant) n’est pas seulement d’augmenter le seuil de l’instabilité secondaire, mais d’élargir également, en terme de  $Re$ , l’existence du régime avec des oscillations périodiques planes, avant que celui-ci ne disparaisse brusquement    $Ri = 0.3$ .

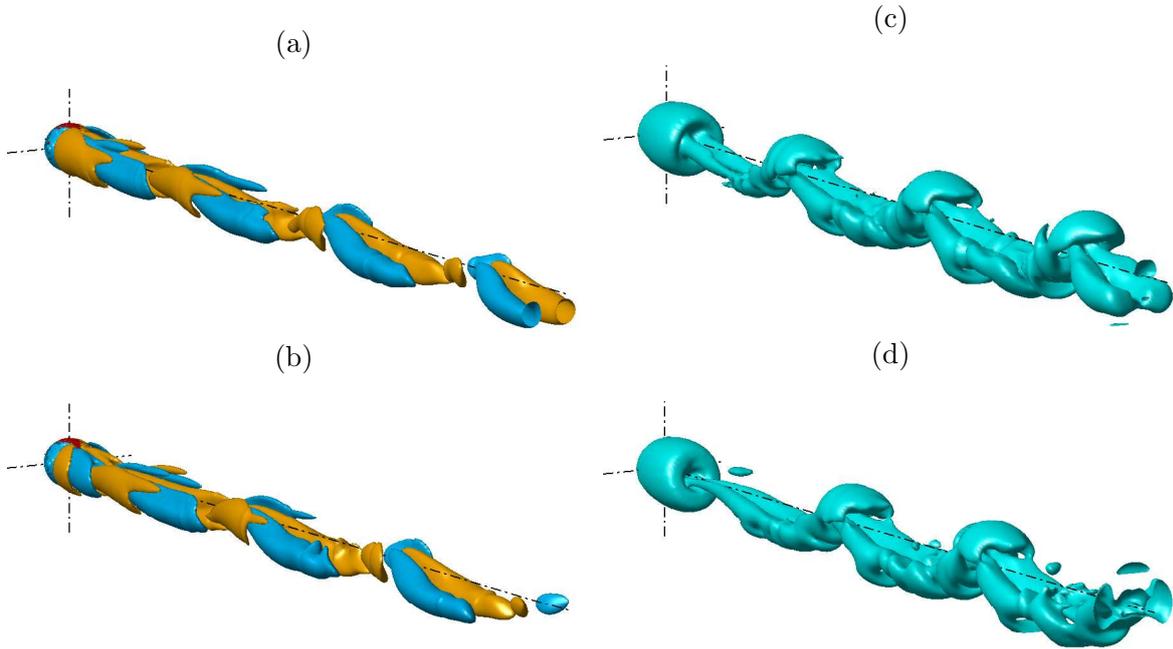


FIG. 4.12 – Aspect de l'écoulement à deux instants qui diffèrent d'une demi-période à  $Ri = 0.1$ ,  $Re = 400$  et  $Pr = 7$ . (a,b) Isosurfaces de la vorticité axiale ( $\omega_z = \pm 0.1$ ), (c,d) structures tourbillonnaires ( $Q$ -définition au niveau  $Q = 0.001$ ). Le sillage présente un plan de symétrie et une allée de Von-K rman avec une alternance du signe de la vorticité dans chacun des filaments.

**(V) – Oscillations périodiques   basse fréquence de deux filaments de vorticité dans un plan de symétrie ( $Pr = 0.72$ )** Les signes majeurs qui distinguent les régimes oscillants    $Ri = 0.4$  des régimes avec un détachement tourbillonnaire périodique, décrits dans la section précédente, sont la vorticité axiale qui ne change pas périodiquement de signe (l'allée de Von-K rman n'est pas établie) et la période des oscillations qui est environ 4 fois plus grande que celle du régime périodique    $Ri < 3$ . L'aspect de l'écoulement (isosurfaces de la vorticité axiale) est montré dans Fig. 4.13, où deux images de l'écoulement   deux instants qui diff rent d'une demi-période sont représentées. Les tourbillons présentent une très légère ondulation,   peine visible dans la figure. L'amplitude des oscillations du coefficient de portance est environ deux fois plus petite qu'   $Ri = 0.2$  et  $Re = 700$  ( $C_{L,a;0.4,1000} = 5.8 \times 10^{-3}$  contre  $C_{L,a;0.2,700} = 9.3 \times 10^{-3}$ ). La valeur moyenne du coefficient de portance est également plus petite ( $C_{L,m;0.4,1000} = 3.3 \times 10^{-2}$  contre  $C_{L,m;0.2,700} = 4.8 \times 10^{-2}$ ). Le nombre de Strouhal est beaucoup plus petit que celui mesuré aux régimes présentant un détachement tourbillonnaire (voir Tab. 4.3).

Une autre caractéristique de ce régime est la présence de relativement forts filaments de vorticité, correspondant au sous-espace azimutale  $m = 2$ . Des tests numériques de la présence de différents modes azimutaux ont révélé que, étonnamment, une solution stationnaire axisymétrique est retrouvée si seuls les modes pairs sont retenus dans la décomposition azi-

$Pr$	$Ri$	$Re$	$St$	$Pr$	$Ri$	$Re$	$St$	$Pr$	$Ri$	$Re$	$St$
0.72	0	300	0.135	0.72	0.2	850	<i>0.218</i>	0.72	0.55	1000	7.26e-3
0.72	0	350	<i>0.130</i>	0.72	0.4	1000	0.058	0.72	0.58	1200	0.038
0.72	0.1	400	0.163	0.72	0.4	1050	0.060	0.72	0.58	1300	0.043
0.72	0.1	450	0.167	0.72	0.4	1000	0.058	0.72	0.6	1200	0.037
0.72	0.1	500	0.168	0.72	0.4	1050	0.060	0.72	0.6	1300	0.044
0.72	0.1	550	<i>0.164</i>	0.72	0.4	1100	<i>0.059</i>	7	0	300	0.135
0.72	0.2	600	0.201	0.72	0.4	1200	<i>0.058</i>	7	0	350	<i>0.130</i>
0.72	0.2	650	0.202	0.72	0.5	1000	7.98e-3	7	0.1	400	0.149
0.72	0.2	700	0.206	0.72	0.5	1100	8.02e-3	7	0.1	450	0.149
0.72	0.2	750	<i>0.207</i>	0.72	0.5	1200	8.19e-3	7	0.1	500	<i>0.141</i>
0.72	0.2	800	<i>0.208</i>	0.72	0.5	1300	8.35e-3	7	0.2	600	0.169

TAB. 4.3 – Nombres de Strouhal pour les régimes périodique (en régulier) et quasi-périodique (en italique) pour les deux nombres de Prandtl considérés.

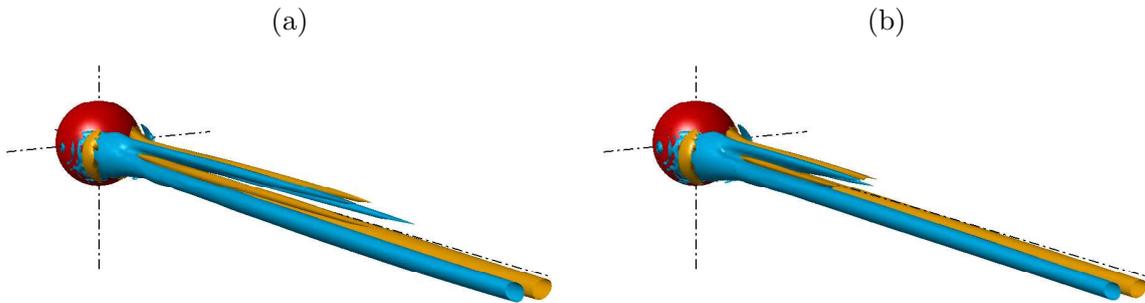


FIG. 4.13 – Isosurfaces de la vorticité axiale ( $\omega_z = \pm 0.3$ ) à deux instants qui diffèrent d’une demi-période à  $Ri = 0.4$ ,  $Re = 1000$  et  $Pr = 0.72$ . Les deux tourbillons oscillent lentement avec une petite amplitude et la vorticité ne change pas de signe – l’écoulement ne présente pas d’allée de Von-Kármán. Le mode instable du sous-espace  $m = 2$  commence à être bien visible.

mutale. Si seuls les modes  $m = 0$  et  $m = 1$  sont retenus, une rotation lente des filaments de vorticité (décrite en tant que nouveau régime dans le paragraphe (IX)) est observée. Les résultats des tests confirment la nécessité du couplage entre les modes  $m = 1$  et  $m = 2$  pour l’apparition des oscillations. Le mode  $m = 1$  reste tout de même dominant dans l’écoulement. Contrairement aux régimes faisant apparaître un détachement tourbillonnaire, la bifurcation de Hopf dans le présent cas se développe à partir d’un écoulement pleinement tridimensionnel et non-linéaire et n’a aucun rapport avec les valeurs propres de l’écoulement de base (axisymétrique stationnaire).

**(VI) – Oscillations périodiques à basse fréquence de quatre filaments de vorticité dans un plan de symétrie ( $Pr = 0.72$ )** Contrairement aux oscillations observées à  $Ri = 0.4$ , les régimes périodiques observés à  $Re = 1200$  et  $Ri = 0.58$  et  $0.6$  présentent une

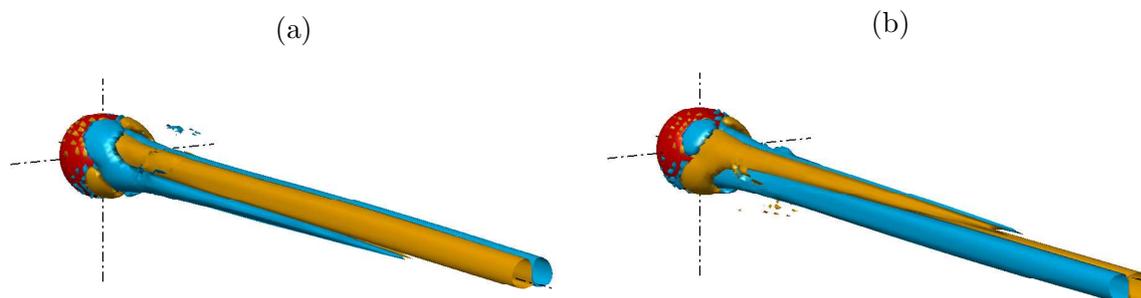


FIG. 4.14 – Isosurfaces de la vorticité axiale ( $\omega_z = \pm 0.02$ ) à deux instants qui diffèrent d'une demi-période à  $Ri = 0.6$ ,  $Re = 1200$  et  $Pr = 0.72$ . Les deux paires de tourbillons oscillent dans un plan et perpendiculairement à l'autre plan de symétrie, tous deux créés au seuil de l'instabilité primaire.

valeur moyenne de la force de portance nulle. La force de portance, elle-même, n'est pas nulle et oscille autour de la valeur moyenne dans un des deux plans de symétrie créé lors la brisure de l'axisymétrie via le mode azimutal  $m = 2$ . Une paire de tourbillons devient plus forte que l'autre durant une demi-période, les deux paires étant égales en moyenne. L'aspect de l'écoulement (isosurfaces de la vorticité axiale) est montré dans Fig. 4.14 à deux instants qui diffèrent d'une demi-période. Des tests numériques ont montré que l'allure du mode  $m = 2$  n'est pas affectée par l'absence des modes impairs, à part la disparition des oscillations. Un tronquage aux modes  $m = 0, 1$  et  $2$  n'affecte pas l'écoulement, ce qui signifie que le mode  $m = 2$  est dominant dans l'écoulement mais que, néanmoins, une interaction avec le mode  $m = 1$  est nécessaire pour l'apparition des oscillations. L'interaction avec le sous-espace  $m = 3$  a un effet négligeable. L'amplitude des oscillations est comparable à celle du régime (V) ( $C_{L,a;0.6,1200} = 6.4 \times 10^{-3}$ ) et le nombre de Strouhal est plus petit que celui du régime (V) ( $St_{0.6,1200} = 0.037$ ).

### Régimes quasi-périodiques avec plan de symétrie

Deux types de régimes quasi-périodiques qualitativement différents avec une symétrie plane ont été observés – ils sont le prolongement des régimes (IV) et (V) après l'installation d'une deuxième fréquence (sous-harmonique) via une deuxième bifurcation de Hopf (instabilité tertiaire).

**(VII) – Détachement tourbillonnaire quasi-périodique à haute fréquence avec plan de symétrie** Nous avons systématiquement observé que les régimes faisant apparaître un détachement tourbillonnaire périodique pour  $Ri < 0.3$  et les deux nombres de Prandtl considérés subissaient une deuxième bifurcation de Hopf, imposant ainsi une fréquence sous-harmonique dans l'écoulement, caractéristique d'une dynamique de tore limite (le domaine des paramètres n'étant pas assez étendu à  $Pr = 7$ , le régime avec détachement tourbillonnaire quasi-périodique à  $Ri = 0.2$  n'a pas été observé). Le plan de symétrie reste conservé et le modèle faiblement non-linéaire (4.20), (4.21) et (4.22) étendu à  $j = 1, 2$  peut

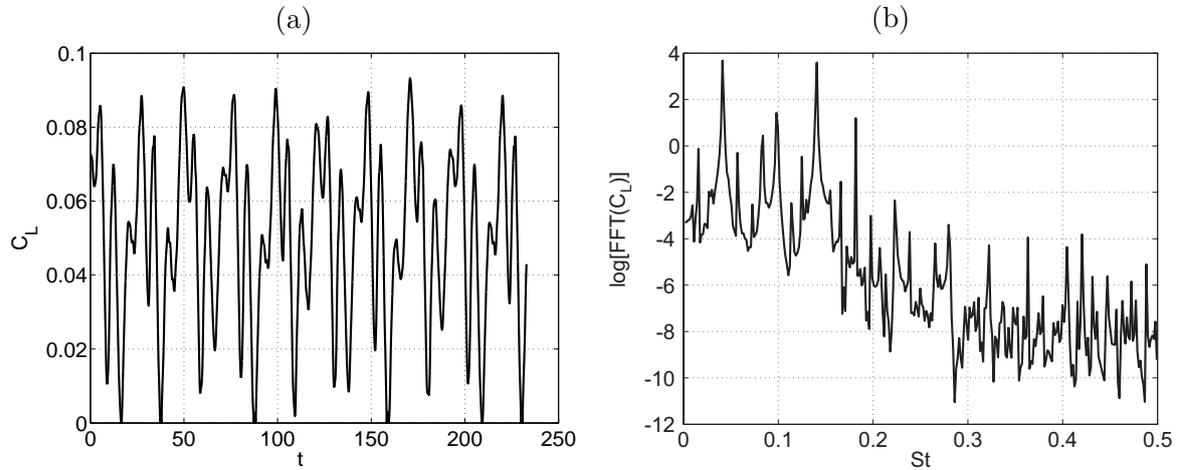


FIG. 4.15 – (a) Evolution temporelle du coefficient de portance d’un régime quasi-périodique à  $Ri = 0.1$ ,  $Re = 500$  et  $Pr = 7$ , (b) spectre correspondant. Le nombre de Strouhal dominant est 0.141, la fréquence sous-harmonique la plus importante correspond à  $St = 0.041$ .

être qualitativement appliqué. Fig. 4.15a montre une évolution temporelle du coefficient de portance, Fig. 4.15b son spectre à  $Ri = 0.1$ ,  $Re = 500$  et  $Pr = 7$ . Fig. 4.16 montre l’aspect de l’écoulement correspondant, où le domaine de calcul a été élargi à  $O/d = 60$  afin de contenir l’échelle de longueur la plus grande de l’écoulement. Une extinction des tourbillons peut être observée vers  $z/d = 25$  en aval de la sphère, ce qui est le résultat de l’extinction du coefficient de portance visible dans Fig. 4.15a avec une périodicité de  $\approx 50$  unités de temps.

**(VIII) – Oscillations quasi-périodiques à basse fréquence de deux filaments de vorticité dans un plan de symétrie ( $Pr = 0.72$ )** La différence entre ces régimes et les régimes périodiques    $Ri = 0.4$  et aux nombres de Reynolds plus bas est la présence d’une deuxième fréquence, sous-harmonique, correspondant   une bifurcation de Hopf secondaire. L’aspect de l’écoulement est très similaire   celui de la Fig. 4.13, seule l’ondulation des tourbillons étant amplifiée. Néanmoins, l’alternance du signe de la vorticité n’est toujours pas présente. Une propriété commune aux régimes quasi-périodiques avec plan de symétrie est que la fréquence principale des oscillations quasi-périodiques est celle des régimes périodiques, la fréquence sous-harmonique étant environ trois fois plus petite.

### Régimes ordonnés sans plan de symétrie

Dans la section 4.2.3, il a été montré que des effets non-linéaires d’ordre élevé ont tendance   briser la symétrie plane qui résulte de l’instabilité primaire et est conservée après l’apparition des instabilités secondaire et tertiaire. Cette brisure de symétrie est très rapide en terme de  $Re$  pour de faibles  $Ri$  et se traduit par une transition directe au chaos, visible dans les diagrammes de la Fig. 4.3 (sur une grille grossière dans la direction  $Re$ ).    $Pr = 0.72$ , une riche variété de régimes, plus ou moins ordonnés, a été observée pour  $Ri \geq 0.4$ .    $Ri = 0.5$

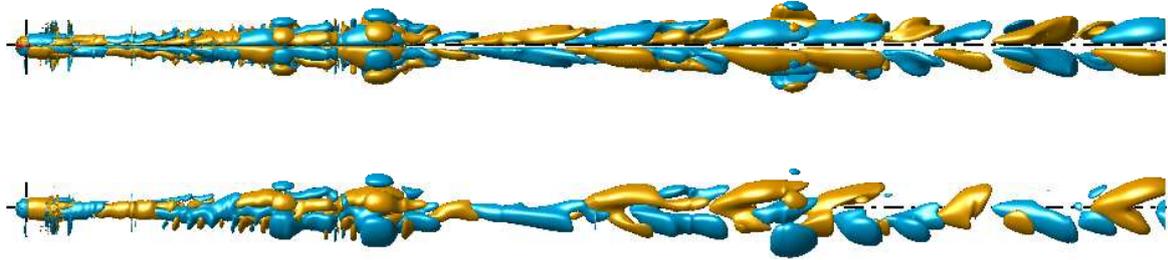


FIG. 4.16 – Isosurfaces de vorticité axiale ( $\omega_z = \pm 0.02$ ) vues du haut (parallèlement au plan de symétrie) et de côté (perpendiculairement au plan de symétrie) à  $Ri = 0.1$ ,  $Re = 500$  et  $Pr = 7$ . Le plan de symétrie est conservé par rapport au régime à plus bas  $Re$  (régime périodique), mais l'écoulement présente cette fois-ci des extinctions de la vorticité, qui correspondent aux extinctions visibles dans Fig. 4.15*a*.

et 0.55, une rotation lente du sillage autour de l'axe de l'écoulement a été trouvée pour des nombres de Reynolds entre 1000 et 1300 et un autre régime oscillant, dominé par le mode azimutal  $m = 3$ , a été observé à  $Ri = 0.58$  et 0.6 et à  $Re = 1300$ . D'autres régimes présentant une dynamique plus ou moins compliquée définissent la dernière étape de la transition au chaos.

**(IX) – Rotation lente de deux filaments de vorticité ( $Pr = 0.72$ )** A  $Ri = 0.5$  et  $1000 \leq Re \leq 1300$  et à  $Ri = 0.55$  et  $Re = 1000$ , les deux filaments de vorticité tournent très lentement autour de l'axe de l'écoulement, formant ainsi une spirale qui correspond aux rotations lentes du plan de symétrie initial. En conséquence, la projection du coefficient de portance sur le plan perpendiculaire à l'axe de l'écoulement fait apparaître des cercles coaxiaux (voir Fig. 4.17*a*). Le cercle est parfait juste au-dessus du seuil d'apparition des rotations à  $Re = 1000$ ; néanmoins, à  $Re$  plus élevés, sa forme commence à être modulée par des harmoniques (à  $Re = 1200$ ). Le nombre de Strouhal est extrêmement faible (voir Tab. 4.3) – la période (un tour complet) est 25 fois plus grande que la période des régimes avec détachement tourbillonnaire et 6 fois plus grande que la période des régimes périodiques sans détachement tourbillonnaire. Pendant longtemps, nous n'avons pas eu d'explication claire de ce comportement. Un indice a été découvert en effectuant des tests numériques (en tronquant les modes azimutaux) à  $Ri = 0.4$  et  $Re = 1050$ . Le régime de rotation obtenu en tronquant l'expansion azimutale à  $m = 0$  et  $m = 1$  présente absolument les mêmes caractéristiques que les régimes dont un exemple est montré dans Fig. 4.17*a* (pour une comparaison entre un régime avec 7 modes azimutaux (0 – 6) à  $Ri = 0.5$  et  $Re = 1100$  et un régime avec les modes azimutaux  $m = 0$  et  $m = 1$  à  $Ri = 0.4$  et  $Re = 1050$ , voir Fig. 4.18). Cette observation implique que la rotation lente a pour origine le sous-espace  $m = 1$  et qu'un tel comportement

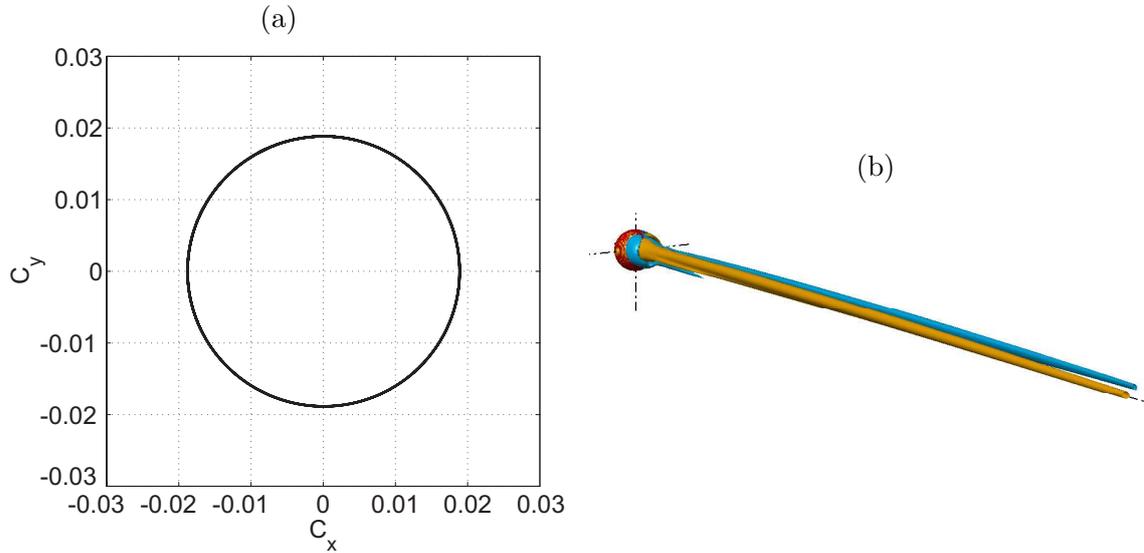


FIG. 4.17 – (a) Projection du coefficient de portance sur le plan perpendiculaire à l'axe de l'écoulement à  $Pr = 0.72$ ,  $Ri = 0.5$  et  $Re = 1100$ , (b) isosurfaces de la vorticité axiale ( $\omega_z = \pm 0.1$ ) pour les mêmes paramètres. Les deux filaments sont tordus en raison de leur rotation.

devrait pouvoir être modélisé en utilisant le modèle faiblement non-linéaire d'ordre élevé de la section 4.2.3. Malheureusement, une telle version du modèle n'a pas encore été trouvée. La rotation lente ressemble à la rotation de l'ellipse de la Fig. 4.6, due au couplage d'ordre élevé entre les modes stationnaires et instationnaires. On peut donc conclure que le couplage entre les modes  $m = 1$  et  $m = 2$  a pour effet de repousser l'apparition du régime de rotation vers les  $Ri$  plus élevés.

**(X) – Régime périodique avec le mode  $m = 3$  dominant ( $Pr = 0.72$ )** Ce régime, observé à  $Ri = 0.58$  et  $Ri = 0.6$  à  $Re = 1300$ , est le résultat du couplage entre le régime périodique avec 4 filaments de vorticité et symétrie plane et le mode instable du sous-espace  $m = 3$ . Le régime présente 6 tourbillons de différentes intensités. Durant une période, les filaments ne tournent pas autour de l'axe de l'écoulement (comme le sillage dans le paragraphe précédent), mais l'intensité de la vorticité dans les tourbillons est modulée par une fréquence qui est proche de celle des oscillations périodiques du sillage plan ( $St_{0.6,1200} = 0.037$  – régime périodique avec 4 filaments oscillants dans un plan de symétrie,  $St_{0.6,1300} = 0.044$  – régime présent; la fréquence croissante avec  $Re$  est consistante avec les observations générales). Ce régime est représenté dans Fig. 4.19a par un cycle limite (projection du coefficient de portance sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'écoulement) et dans Fig. 4.19b,c et d, où une séquence de l'écoulement pendant une période est illustrée (isosurfaces de la vorticité axiale à trois instants qui diffèrent de  $T/3$ ).

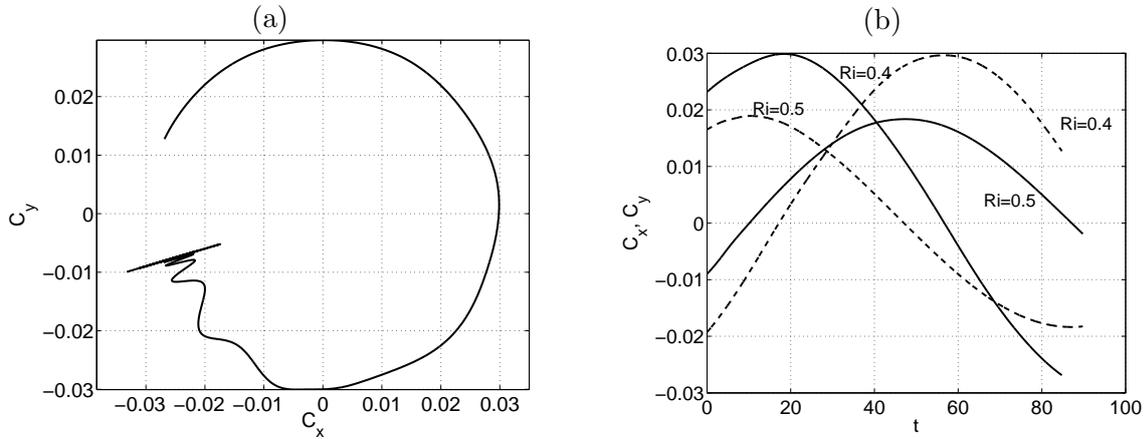


FIG. 4.18 – (a) Projection du coefficient de portance sur le plan perpendiculaire à l'axe de l'écoulement obtenu à partir d'une simulation à  $Pr = 0.72$ ,  $Ri = 0.4$  et  $Re = 1050$  tronquée aux modes  $m = 0$  et  $m = 1$ ; la phase transitoire (avant d'atteindre un état asymptotique) est également représentée. (b) Comparaison de la période de rotation du régime de la Fig. 4.17a avec celui du cas (a) de la présente figure. Ligne pleine :  $C_x$ , ligne interrompue :  $C_y$ . Les cas sont notés  $Ri = 0.4$  (simulation tronquée) et  $Ri = 0.5$  (simulation complète – 7 modes).

**(XI, XII et XIII) – Régimes non-périodiques en rotation ( $Pr = 0.72$ )** Ces régimes représentent la dernière étape de la transition au chaos. Ils se distinguent des régimes chaotiques par l'absence de structures chaotiques dans le sillage (jusqu'à la distance  $O/d = 25$  en aval de la sphère, où la plupart des domaines numériques s'arrêtent) et par la présence de la quasi-périodicité dans le sillage (visible sur l'évolution temporelle du coefficient de portance). On observe plusieurs tourbillons dans le sillage, dont la dynamique est déterminée par celle du régime ordonné stable le plus proche. Là où le plan de symétrie existait, il n'existe plus; là où un comportement périodique était présent, la périodicité est brisée. Par exemple, le régime à  $Ri = 0.4$  et  $Re = 1300$  (Fig. 4.20a) présente un sillage quasi-périodique dont le plan de symétrie tourne lentement autour de l'axe de l'écoulement, alors que le régime à un  $Re$  plus bas ( $Re = 1200$ ), à  $Ri = 0.4$ , présente un sillage quasi-périodique avec un plan de symétrie fixe. Les régimes dans Fig. 4.20b,c et d ont pour origine des régimes ayant déjà perdu leur plan de symétrie, la distinction se faisant au niveau de la disparition de la périodicité.

#### (XIV) – Régimes chaotiques

Les régimes chaotiques présentent à la fois des structures chaotiques dans le sillage et une projection désordonnée du coefficient de portance sur un plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement. L'exemple d'un écoulement chaotique se trouvant à environ 400 unités de  $Re$  au-dessus du seuil de la transition au chaos (à  $Ri = 0.1$ ) est montré dans Figs. 4.21a,b et c. L'investigation exhaustive des régimes chaotiques est difficile et très coûteuse en terme de CPU, particulièrement juste au-dessus du seuil de la transition au chaos. Figs. 4.21d,e et f montrent un écoulement chaotique à environ 50 unités de  $Re$  au-dessus du

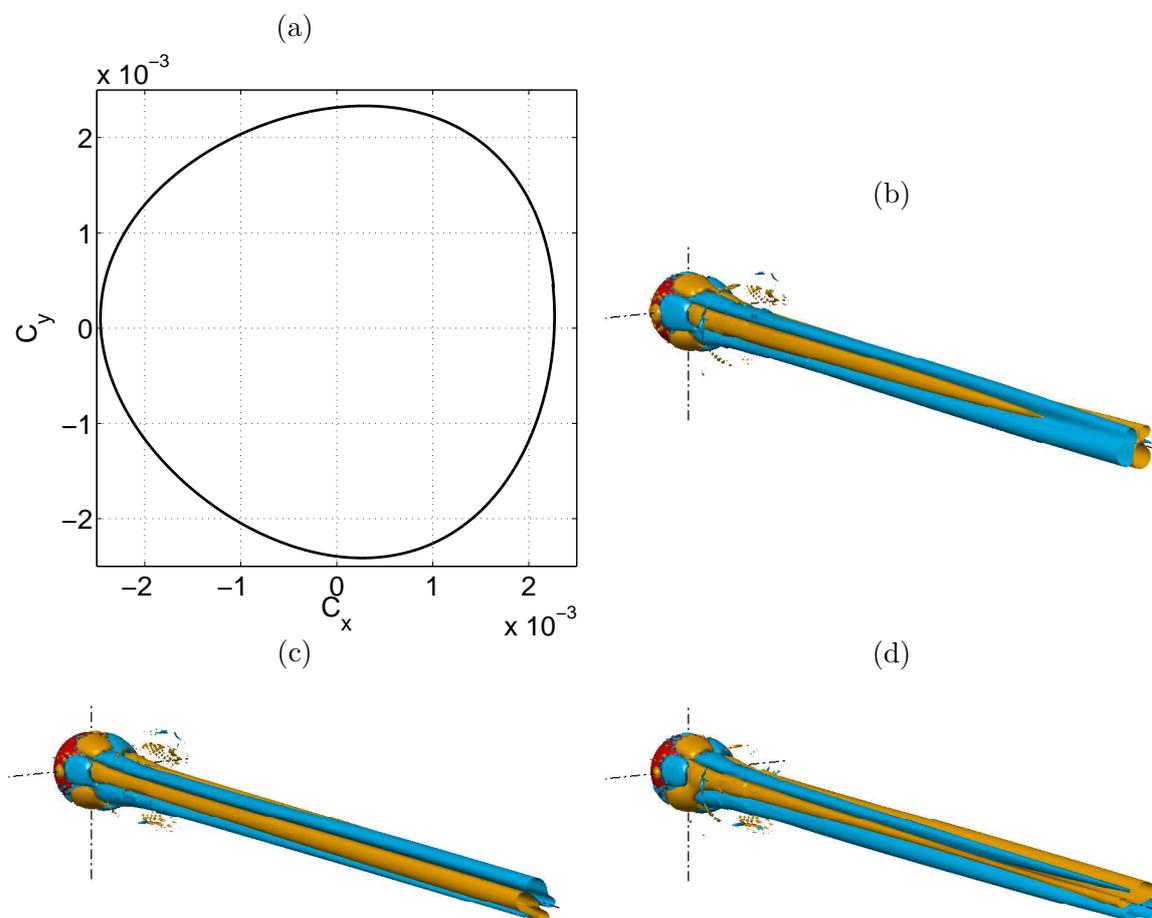


FIG. 4.19 – (a) Projection du coefficient de portance sur un plan perpendiculaire à l’axe de l’écoulement à  $Pr = 0.72$ ,  $Ri = 0.6$  et  $Re = 1300$ . (b),(c),(d) Isosurfaces de vorticité axiale ( $\omega_z = \pm 0.01$ ) à trois instants d’une période qui diffèrent de  $T/3$ .

seuil de la transition au chaos. Cette simulation correspond à environ 160 périodes du régime périodique (au même  $Ri$  et à  $600 \leq Re \leq 700$ ) La projection du coefficient de portance montre que la dynamique de ce régime comporte de très grandes échelles de temps. Malgré cette difficulté, tous les régimes (XIV) ont été systématiquement testés. Un scénario inverse pourrait éventuellement se produire – quelques régimes limites parmi les régimes considérés comme ordonnés (XI, XII et XIII) peuvent finir par devenir chaotiques. Comme le panache thermique pousse très certainement l’apparition du chaos vers les nombres de Reynolds très élevés, aucun régime chaotique n’a été observé pour  $Ri > 0.3$ .

#### 4.2.5 Coefficient de traînée et de portance, nombre de Nusselt

Le coefficient de traînée et le coefficient de portance (caractérisant la dynamique de la sphère chauffée en écoulement assistant), ainsi que le nombre de Nusselt (caractérisant les

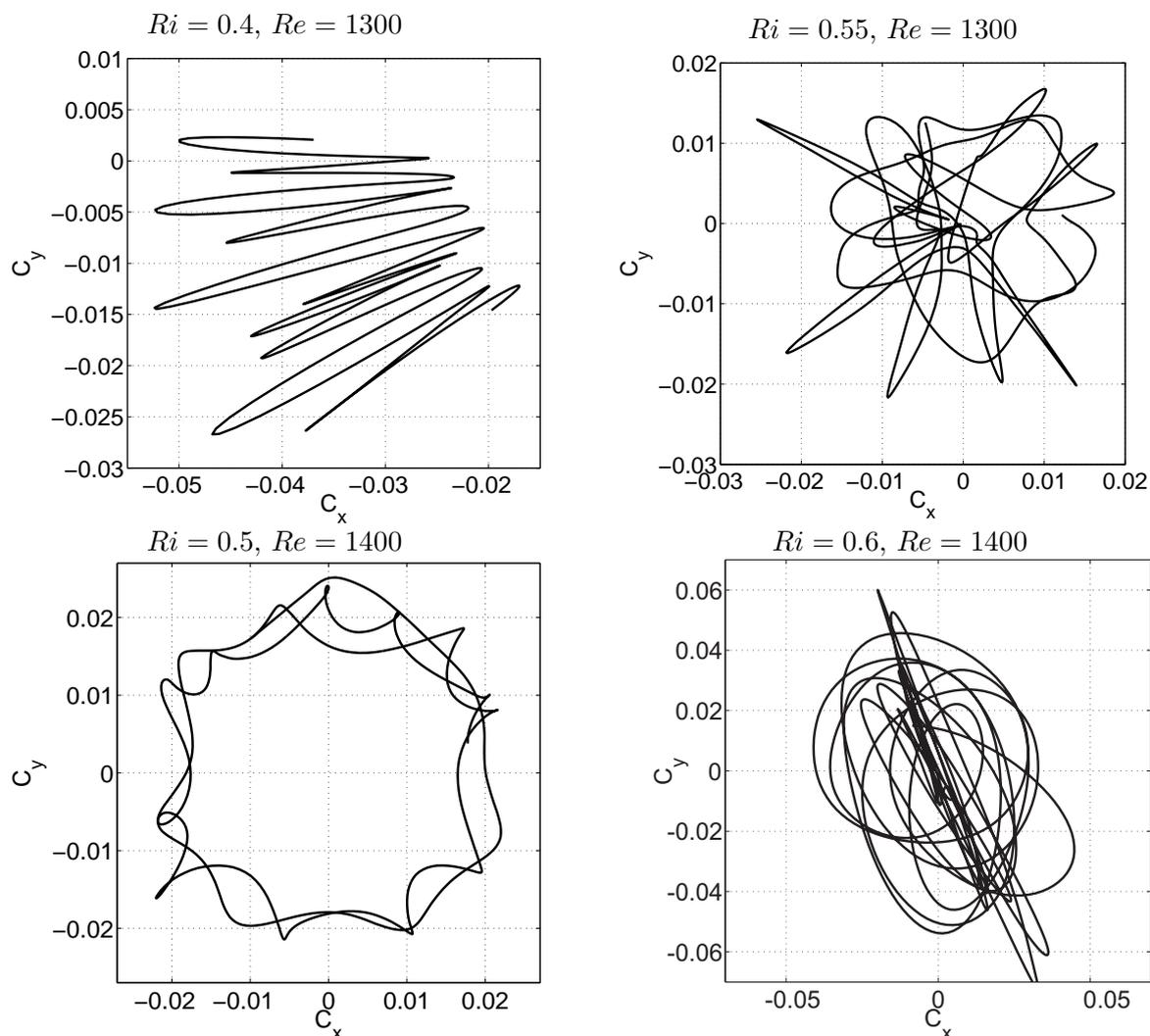


FIG. 4.20 – Projection du coefficient de portance sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'écoulement à  $Pr = 0.72$ .

performances thermiques) sont des caractéristiques de grande importance dans l'ingénierie mécanique et thermique. Les valeurs de ces coefficients en fonction du  $Ri$ , du  $Re$  et du  $Pr$  sont présentées dans cette section. Une question essentielle peut se poser : comment les régimes tridimensionnels, stationnaires ou instationnaires, modifient les courbes de  $C_D$ , de  $C_L$  et de  $Nu$ ? La présente section apporte une réponse à cette question.

### Coefficient de traînée

Fig. 4.22 montre les courbes du coefficient de traînée  $C_D$ , défini par

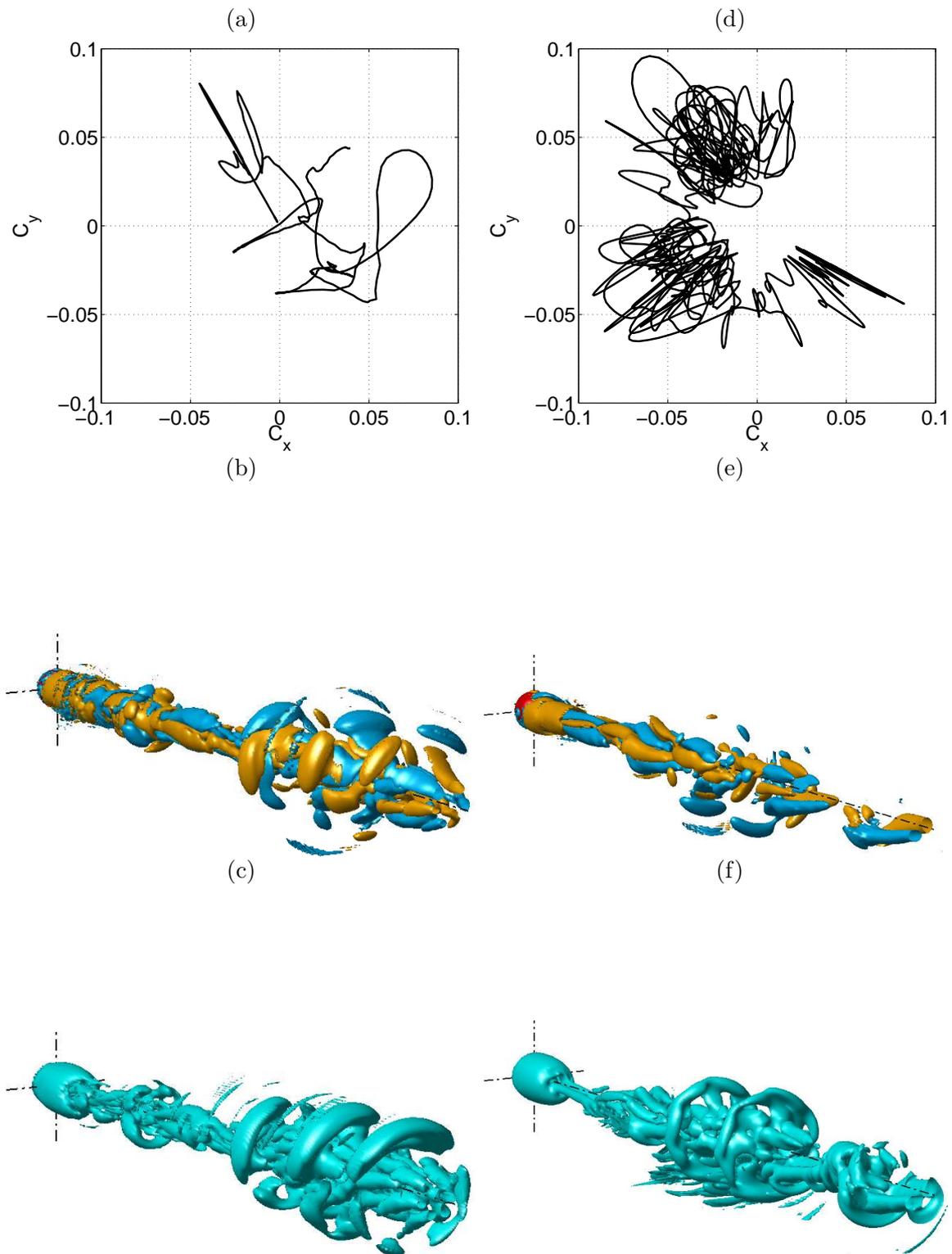


FIG. 4.21 – (a,d) Projection du coefficient de portance sur un plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement à  $Pr = 0.72$ ,  $Ri = 0.1$  et  $Re = 1000$  (colonne de gauche) et à  $Pr = 0.72$ ,  $Ri = 0.2$  et  $Re = 900$  (colonne de droite), (b,e) isosurfaces de vorticité axiale ( $\omega_z = \pm 0.15$ ) et (c,f) structures tourbillonnaires ( $Q = 0.001$ ).

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho v_\infty^2 \frac{\pi d^2}{4}}, \quad (4.26)$$

où  $F_D$  est la force de traînée, en fonction de  $Re$  à  $Pr = 0.72$  et  $7$  pour plusieurs  $Ri$ . Pour les régimes instationnaires, nous avons considéré la valeur moyenne du coefficient. Aucun changement de pente n'est visible sur les courbes de la Fig. 4.22 lorsque l'on passe des régimes axisymétriques aux régimes tridimensionnels, alors que Bouchet *et al.* (2006) constatent un changement de pente à chaque bifurcation dans le cas d'une sphère non-chauffée. L'écart RMS de la force de traînée étant dans toutes nos simulations inférieur à 1%, nous n'avons pas tracé sa dépendance en fonction du  $Re$ .

En comparant les mêmes régimes d'écoulement aux mêmes paramètres  $Ri$  et  $Re$  pour les deux nombres de Prandtl considérés, il s'avère que le coefficient de traînée à  $Pr = 0.72$  est légèrement supérieur à celui à  $Pr = 7$  (par exemple, à  $Ri = 0.3$  et  $Re = 500$ , les coefficients de traînée sont, respectivement,  $C_D = 0.6934$  et  $0.667$  à  $Pr = 0.72$  et  $7$ ).

### Coefficient de portance

Dans Fig. 4.23, la valeur moyenne du coefficient de portance, définie par

$$C_L = \sqrt{\langle C_x \rangle^2 + \langle C_y \rangle^2}, \quad (4.27)$$

où  $\langle C_x \rangle$  et  $\langle C_y \rangle$  sont, respectivement, les moyennes temporelles de la projection du coefficient de portance  $C_L$  (4.24) sur l'axe  $x$ - et  $y$ -, est tracée en fonction de  $Re$  pour tous les  $Ri$ . Seuls les régimes où une telle valeur n'est pas nulle sont considérés. Le coefficient de portance moyenne des régimes chaotiques (XIV) et des régimes non-périodiques en rotation (XI, XII et XIII), où le plan de symétrie a déjà été brisé, est nul et n'est donc pas tracé dans les graphes de la Fig. 4.23. Deux aspects typiques d'une projection du coefficient de portance sur un plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement d'un régime chaotique sont montrés dans Fig. 4.21a. Cette figure nous permet de conclure que, même si la valeur moyenne semble ne pas être nulle sur de courtes échelles temporelles, elle est nulle aux échelles temporelles suffisamment longues. La valeur moyenne de  $C_L$  est également nulle aux régimes stationnaires avec 4 (II) et 6 (III) filaments de vorticité, ainsi qu'aux régimes instationnaires périodiques avec un plan de symétrie (régime VI – 4 filaments oscillants) et sans plan de symétrie (régime IX – sillage avec deux tourbillons tournants et régime X – sillage de 6 tourbillons tournants). Contrairement au coefficient de traînée, les courbes de  $C_L$  (correspondant    $Ri = \text{const.}$ ) présentent un changement de pente significatif   chaque changement de régime. La tendance globale est que la valeur moyenne de  $C_L$  diminue avec  $Ri$ .

Il est difficile de comparer les valeurs moyennes de  $C_L$  pour les deux nombres de Prandtl considérés, le nombre de régimes identiques étant insuffisant. Néanmoins, pour les mêmes paramètres de  $Ri$  et de  $Re$  et pour le même régime d'écoulement, la moyenne du coefficient de portance    $Pr = 7$  paraît être légèrement inférieure   celle    $Pr = 0.72$  (par exemple,    $Ri = 0.3$  et  $Re = 500$ , les valeurs moyennes du coefficient de portance sont, respectivement,  $C_L = 3.24 \times 10^{-2}$  et  $2.53 \times 10^{-2}$     $Pr = 0.72$  et  $7$ ).

La description du coefficient de portance serait incomplète si les valeurs indiquant l'amplitude des oscillations n'étaient pas fournies. L'écart type RMS, défini par

$$\text{RMS}(C_L) = \sqrt{\langle (C_x - \langle C_x \rangle)^2 \rangle + \langle (C_y - \langle C_y \rangle)^2 \rangle}, \quad (4.28)$$

où  $\langle \rangle$  signifie là aussi une moyenne temporelle, est tracé dans Fig. 4.24 pour tous les régimes tridimensionnels instationnaires, à l'exception des régimes chaotiques (XIV) et des régimes ordonnés non-périodiques (XI, XII et XIII), ces derniers n'étant pas inclus dans la Fig. 4.24 faute de simulations suffisamment longues (statistiquement convergées). Une tendance globale est que les fluctuations croissent avec  $Re$  pour un  $Ri$  constant. Un changement de pente des courbes est visible lorsqu'une fréquence sous-harmonique s'installe – les fluctuations sont amplifiées. Contrairement à cette observation, les fluctuations s'atténuent avec  $Ri$  pour un  $Re = \text{const}$ .

A l'instar de la valeur moyenne de  $C_L$ , il apparaît que les fluctuations du coefficient de portance sont plus importantes à  $Pr = 0.72$  qu'à  $Pr = 7$  (par exemple, à  $Ri = 0.2$  et  $Re = 600$ , les RMS du coefficient de portance sont, respectivement,  $\text{RMS}(C_L) = 3.66 \times 10^{-3}$  et  $2.38 \times 10^{-3}$  à  $Pr = 0.72$  et 7).

### Nombre de Nusselt

Pour finir cette section présentant l'écoulement assistant, la variation du nombre de Nusselt (défini par l'équation (4.5)) en fonction du nombre de Reynolds est tracée dans Fig. 4.25 pour quelques  $Ri$  sélectionnés. Aucun changement de pente sur les courbes n'est visible pour  $Pr = 0.72$ . Le  $Nu$  croît avec  $Ri$  pour un  $Re$  constant et vice versa. Néanmoins, les courbes ne se croisent pas.

La situation est différente à  $Pr = 7$  où, comme il a déjà été montré dans Kotouč *et al.* (2008), la valeur du nombre de Nusselt est sensible au régime d'écoulement. En conséquence, avant l'apparition de la recirculation en aval de la sphère, les dépendances du  $Re$  sur le  $Nu$  sont également des fonctions de  $Ri$  – pour un  $Re$  constant,  $Nu$  croît avec  $Ri$ , comme à  $Pr = 0.72$ . Après l'apparition de la zone de recirculation en aval de la sphère et lorsque l'écoulement est axisymétrique, les courbes du  $Nu$  ne sont plus fonctions que du  $Re$ , et non du  $Ri$  – les courbes à différents  $Ri$  se superposent. Cependant, la transition à la tridimensionalité change la pente des courbes – elle devient moins raide. Ceci explique l'allure des courbes dans Fig. 4.25 à  $Pr = 7$ , où seuls les  $Ri$  extrêmes ( $Ri = 0$  et  $Ri = 0.3$ ) ont été considérés. Les deux courbes tendent à se superposer quand, à  $Ri = 0.3$  et  $Re = 200$ , la recirculation en aval de la sphère apparaît (cette zone existe déjà sur la courbe de  $Ri = 0$ ), en accord avec l'observation donnée précédemment. Cependant, à cet instant, un régime tridimensionnel apparaît sur la courbe de  $Ri = 0$ , ce qui diminue la pente de la courbe et éloigne les deux courbes qui se croisent seulement à un  $Re$  plus élevé (à l'instant où la tridimensionalité apparaît sur la courbe de  $Ri = 0.3$ ).

La différence entre les deux nombres de Prandtl, en terme de transfert convectif de chaleur, est fondamentale : à  $Pr = 7$ , les nombres de Nusselt sont environ deux fois plus élevés qu'à  $Pr = 0.72$ .

### Variation extrême du nombre de Prandtl

Afin d'étudier l'effet d'une variation extrême du nombre de Prandtl sur le coefficient de traînée et sur le nombre de Nusselt, des simulations entre  $Pr = 0.1$  et  $Pr = 100$  à  $Re = 1$  et  $Re = 100$  ont été effectuées. Le régime à bas  $Re$  et  $Re$  relativement élevé a été choisi afin d'être sûr que le régime (écoulement axisymétrique sans détachement de la couche limite) reste inchangé pour tous les  $Pr$ .

Fig. 4.26a montre le coefficient de traînée en fonction du  $Pr$ . La force de traînée est pratiquement constante à partir de  $Pr \approx 20$ , mais ne tend pas vers la valeur  $C_D = 1.1$  d'une sphère sans effet thermique. Ceci est très probablement dû à une résolution spatiale insuffisante (les épaisseurs des couches limites à  $Pr$  élevés sont extrêmement faibles).

Fig. 4.26b montre la variation du  $Nu$  en fonction du  $Pr$ . Il a été constaté que le flux de chaleur totale décroît asymptotiquement vers zéro comme  $Pr^{-1}$ . Plus précisément, la dépendance de  $1/\dot{Q}$  ( $\dot{Q}$  étant le flux de chaleur adimensionné) vs.  $Pr$  pour  $Pr \geq 40$  suit la loi

$$\frac{1}{\dot{Q}} = 18.90 + 0.72 Pr, \quad (4.29)$$

ce qui signifie que le nombre de Nusselt suit

$$Nu = \frac{Re}{\pi} \frac{Pr}{18.90 + 0.72 Pr} \quad (4.30)$$

aux grands nombres de Prandtl.

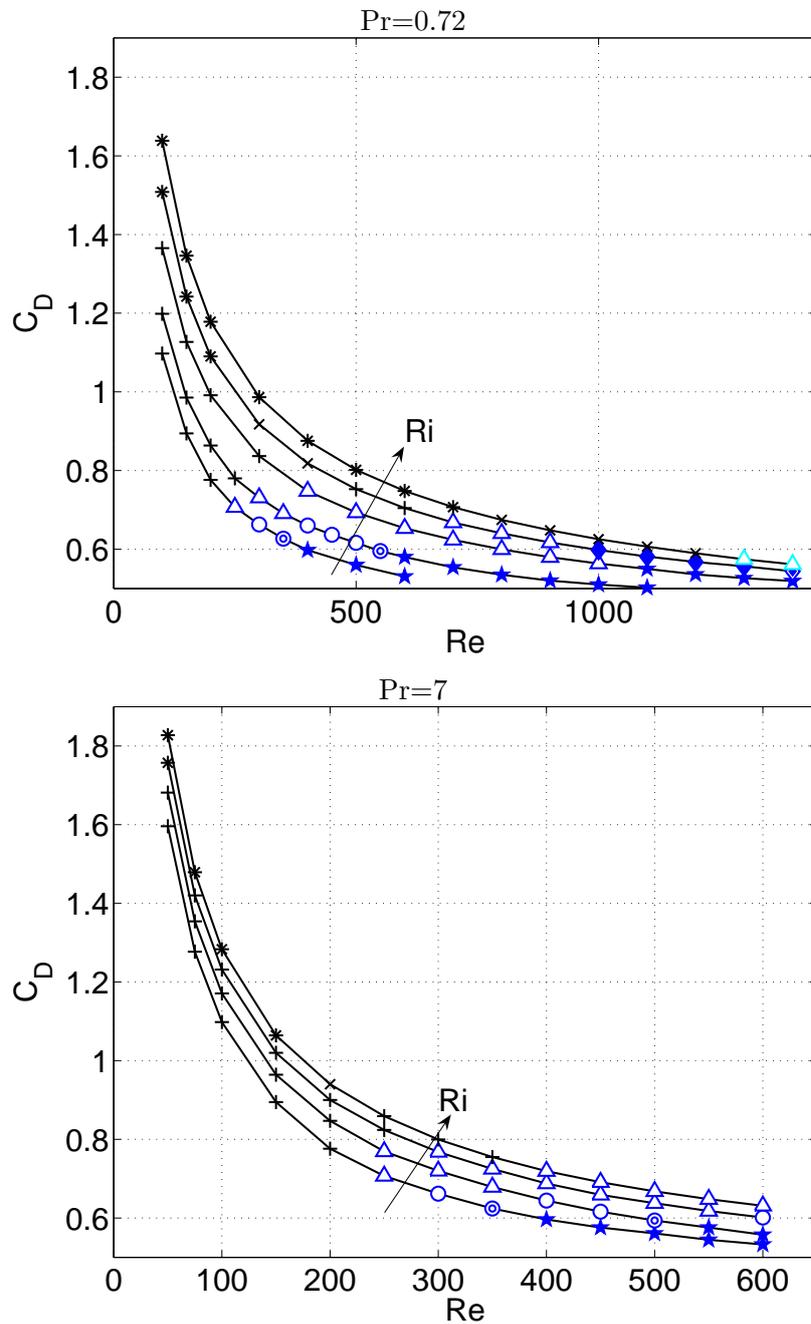


FIG. 4.22 – Valeurs du coefficient de traînée en fonction de  $Re$  à  $Ri = 0, 0.1, 0.3, 0.5$  et  $0.7$  ( $Pr = 0.72$ ) et à  $Ri = 0, 0.1, 0.2$  et  $0.3$  ( $Pr = 7$ ). Les symboles différents, utilisés également dans Figs. 4.23, 4.24 et 4.25, représentent les points où les valeurs de  $C_D$  ont été calculées et correspondent aux régimes définis dans la légende de la Fig. 4.3. Les valeurs de  $C_D$  sont connectées par un trait noir afin de faciliter l'association des différents points correspondant à  $Ri = \text{const.}$

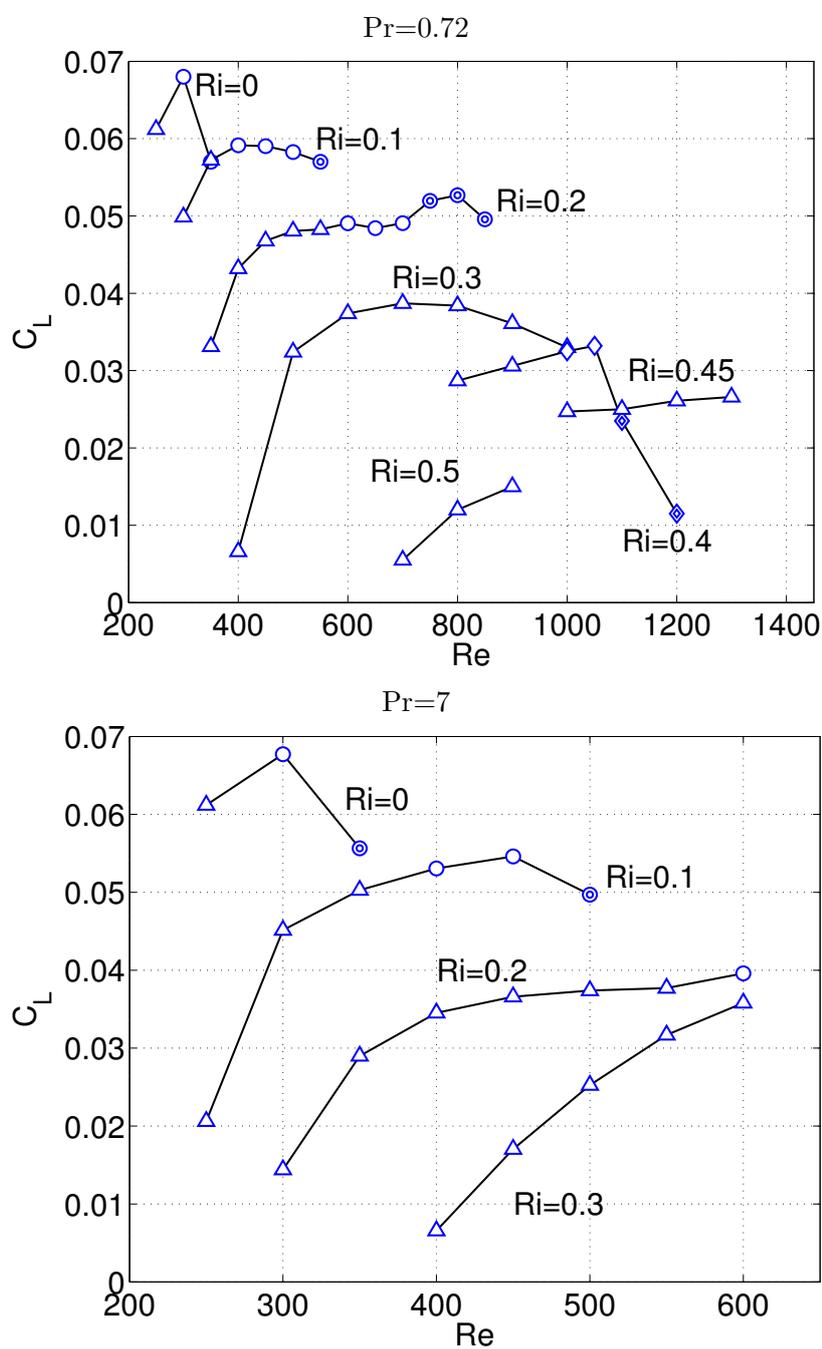


FIG. 4.23 – Valeurs moyennes du coefficient de portance en fonction de  $Re$  à tous les  $Ri$  considérés (à l'exception des régimes ayant une valeur moyenne de  $C_L$  nulle).

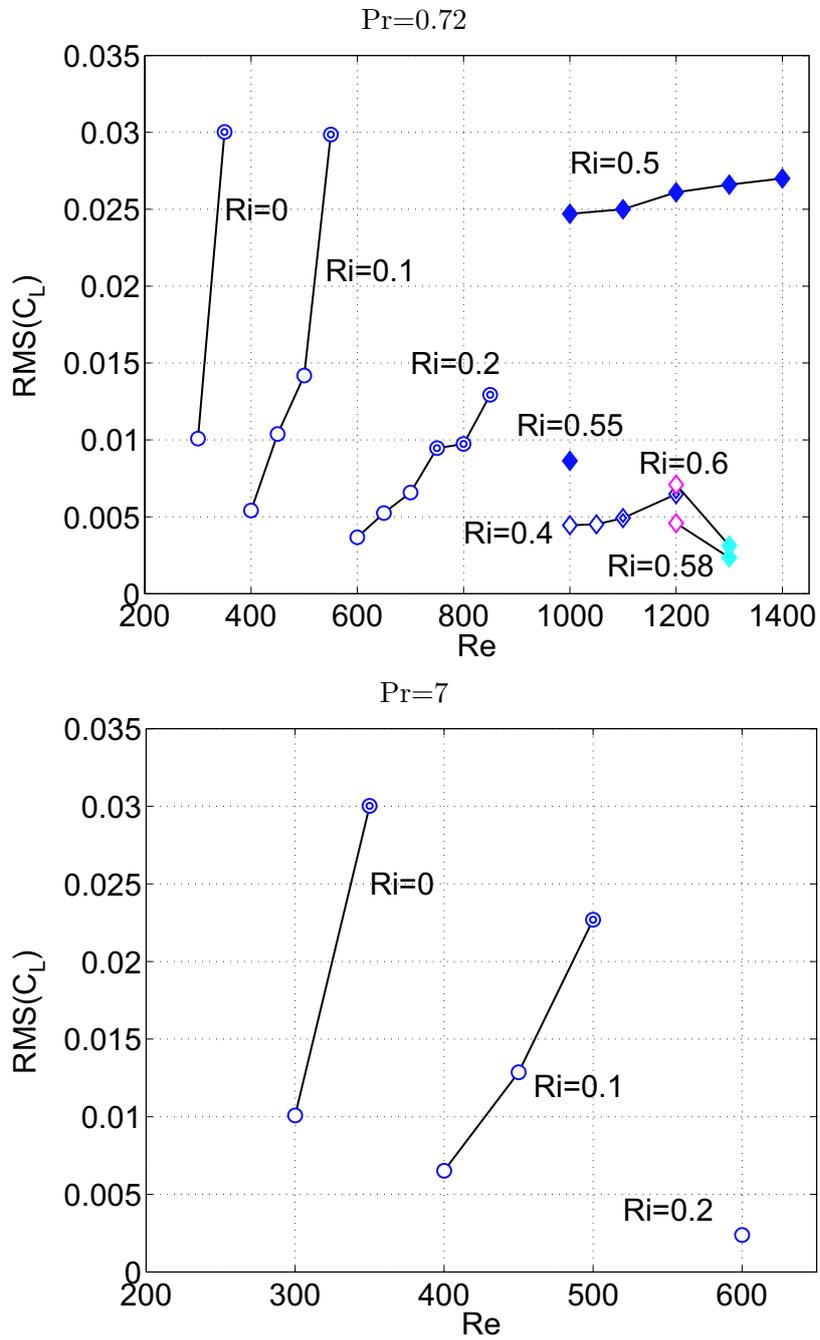


FIG. 4.24 – Ecart type RMS de tous les régimes tridimensionnels instationnaires (à part X, XI, XII et XIII).

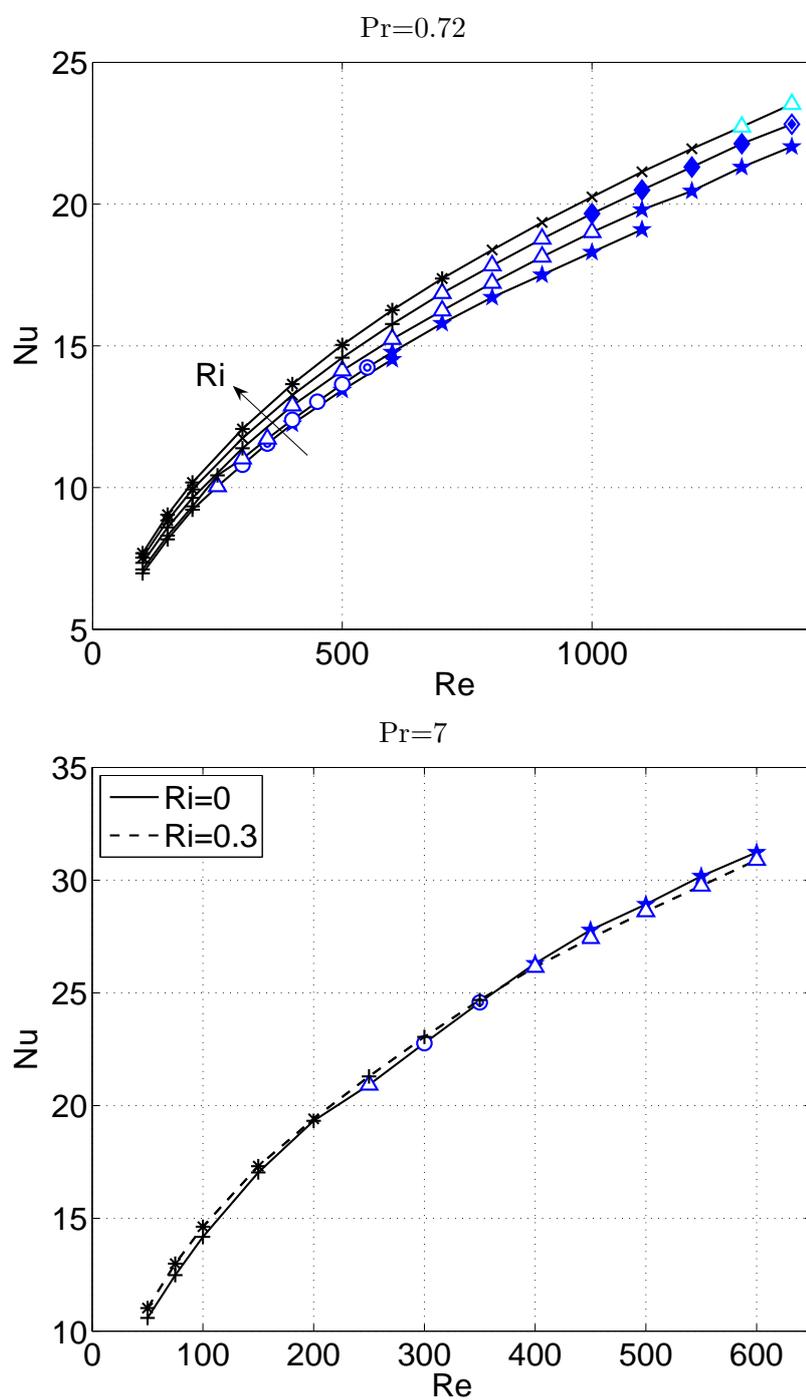


FIG. 4.25 – Nombre de Nusselt (valeur moyenne en régimes instationnaires) en fonction de  $Re$  pour  $Ri = 0, 0.1, 0.3, 0.5$  et  $0.7$  à  $Pr = 0.72$  et pour  $Ri = 0$  et  $0.3$  à  $Pr = 7$ .

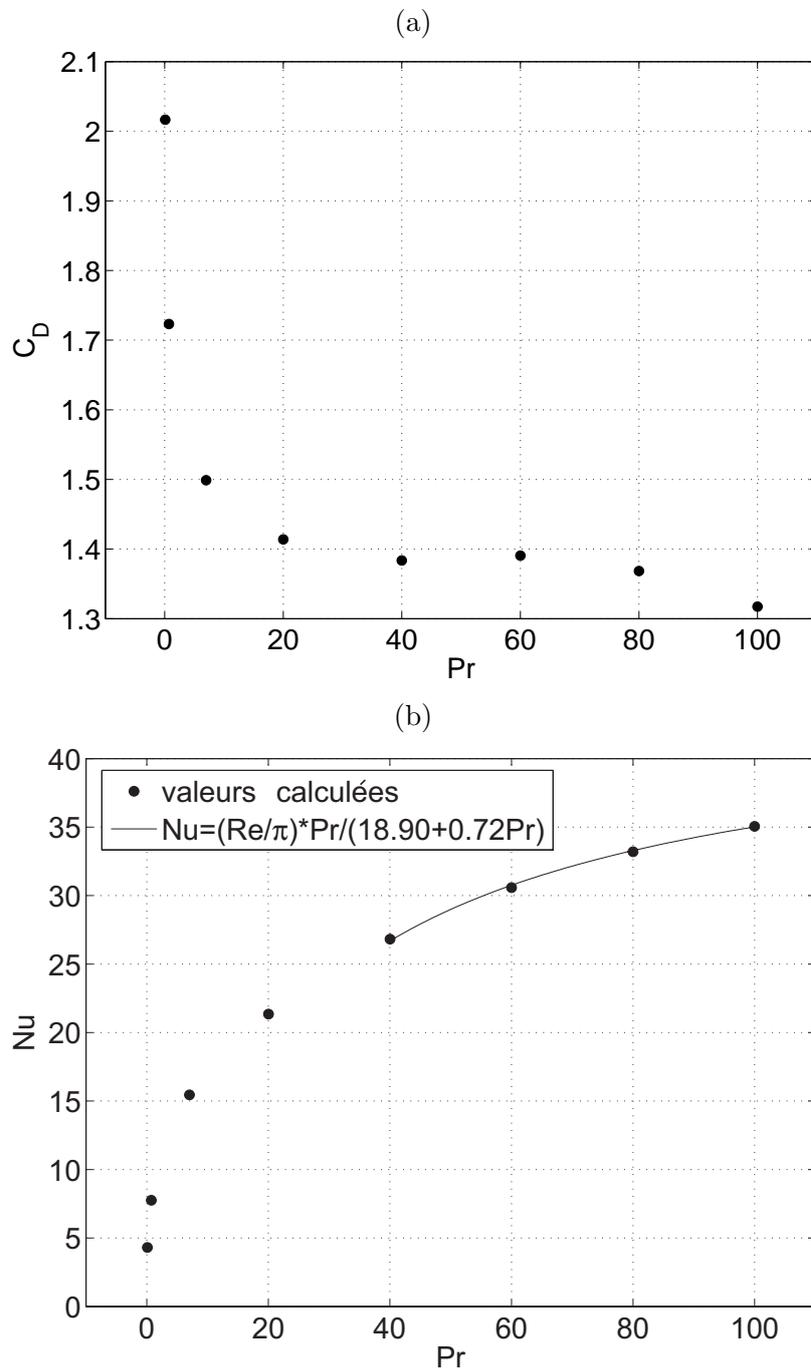


FIG. 4.26 – (a) Coefficient de traînée, (b) nombre de Nusselt en fonction de  $Pr$  ( $0.1 \leq Pr \leq 100$ );  $Ri = 1$  et  $Re = 100$ .

### 4.3 Écoulement opposant

Le cas de l'écoulement opposant est schématiquement décrit dans Fig. 2.2*b* du Chapitre 2. Les nombres de Richardson et de Reynolds varient entre  $-0.25 \leq Ri \leq 0$  et  $50 \leq Re \leq 350$  pour les deux nombres de Prandtl considérés (0.72 et 7).

#### 4.3.1 Écoulement axisymétrique

Contrairement à l'effet stabilisant du panache thermique en écoulement assistant, ce qui se traduit par l'augmentation du nombre de Reynolds critique  $Re_{rec}$  de l'apparition de la zone de recirculation axisymétrique en aval de la sphère, la convection thermique en écoulement opposant a un effet déstabilisant. L'exemple d'un écoulement axisymétrique avec une longue zone de recirculation en aval de la sphère est montré dans Fig. 4.27 à  $Ri = -0.1$ ,  $Re = 175$  et  $Pr = 0.72$ . L'apparition du tore axisymétrique en aval de la sphère sur l'axe de l'écoulement a été trouvé à  $Re_{rec} = 20$  par Bouchet *et al.* (2006) pour une sphère non-chauffée. Cette valeur décroît avec l'augmentation de la valeur absolue de  $Ri$  en écoulement opposant. Néanmoins, une étude détaillée de l'influence du  $Ri$  sur le  $Re_{rec}$  pour un  $Pr$  fixé n'a pas été faite, en raison des exigences trop élevées sur les dimensions du domaine de calcul (les faibles  $Re$  nécessitent un domaine élargi). Cependant, on a trouvé que la zone de recirculation en aval de la sphère, à  $Pr = 0.72$ , existe dès  $Re = 10$ , 5 et 1 respectivement à  $Ri = -0.3$ ,  $-0.6$  et  $-0.9$ . Il a été également trouvé que, pour ces faibles nombres de Reynolds et ces  $|Ri|$  relativement élevés, si l'on continuait à diminuer le nombre de Richardson pour un  $Re = \text{const.}$ , l'écoulement devenait soudainement à la fois tridimensionnel et chaotique. Cette transition est accompagnée d'un renversement du panache thermique (et donc d'une disparition du point de décollement à la surface de la sphère – ce point se situe alors dans l'écoulement en amont de la sphère). L'étude de ce comportement à bas  $Re$  et bas  $Ri$  est le sujet de la section 4.4.

A part la grande zone de recirculation en aval de la sphère, aucun autre type de recirculation (comme, par exemple, le tore hors de l'axe mis en évidence en aval de la sphère en écoulement assistant) n'a été observé en écoulement opposant. L'effet d'une augmentation de  $|Ri|$  sur la taille de la zone de recirculation pour un  $Re = \text{const.}$  ( $Re = 50$ ) est montré dans

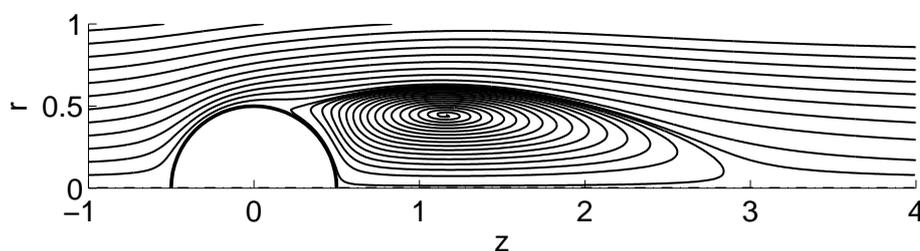


FIG. 4.27 – Aspect de l'écoulement à  $Ri = -0.1$ ,  $Re = 175$  et  $Pr = 0.72$ , présentant une zone de recirculation axisymétrique sur l'axe de l'écoulement en aval de la sphère.

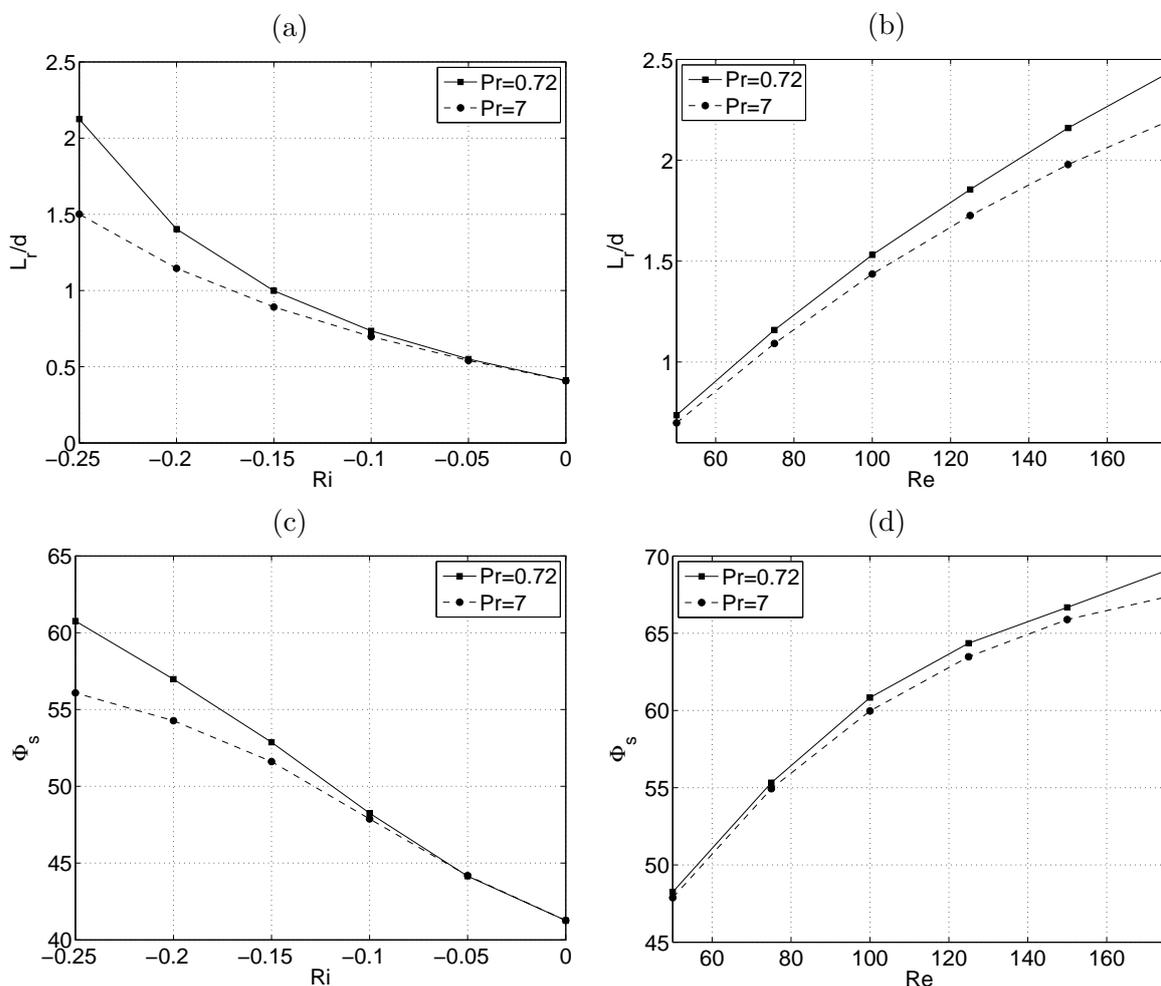


FIG. 4.28 – (a) et (c) – Influence du nombre de Richardson sur la longueur de la zone de recirculation ( $L_r/d$ ) et sur l’angle de séparation de la couche limite ( $\Phi_s$  est mesuré à partir du point d’arrêt aval) à  $Re = 50$ ; (b) et (d) – les mêmes quantités en fonction du nombre de Reynolds à  $Ri = -0.1$ . L’écoulement à  $Pr = 0.72$  présente, en général, une zone de recirculation plus grande qu’à  $Pr = 7$ .

Fig.4.28a et c. De façon similaire, l’effet d’une augmentation de  $Re$  pour un  $Ri = \text{const.}$  ( $Ri = -0.1$ ) est montré dans Fig.4.28b et d. L’écoulement à  $Pr = 7$  présente, pour tous les paramètres, une zone de recirculation plus petite que l’écoulement à  $Pr = 0.72$ . Cette observation confirme le fait que l’apparition d’une zone de recirculation est un signe précurseur de la transition – le seuil de l’instabilité primaire à  $Pr = 0.72$  se trouve à un  $Re$  plus petit qu’à  $Pr = 7$  pour un  $Ri = \text{const.}$  ou, de façon similaire, à un  $|Ri|$  plus petit pour un  $Re = \text{const.}$

Un régime axisymétrique présentant une zone de recirculation en aval de la sphère sur l’axe de l’écoulement est représenté par le symbole “+” (comme pour l’écoulement assistant)

$Pr = 0.72$			$Pr = 7$		
$Ri$	$Re_1$	$St$	$Ri$	$Re_1$	$St$
0	212.0	0	0	212.0	0
-0.1	180.1	0	-0.05	201.2	0
-0.119	175.2	0	-0.098	185.4	0
-0.133	171.6	0, 8.42e-2	-0.1	183.6	4.33e-3
-0.153	160.4	7.99e-2	-0.13	173.6	5.03e-3
-0.172	149.9	7.61e-2	-0.15	167.8	5.57e-3
-0.2	127.2	7.28e-2	-0.156	166.3	5.92e-3, 8.79e-2
-0.3	75.72	5.16e-2	-0.2	144.2	8.58e-2
-0.4	46.33	2.48e-2	-0.3	92.04	8.12e-2
-0.5	29.40	1.54e-2	-0.4	61.61	7.64e-2

TAB. 4.4 – Seuils de l’instabilité primaire et nombres de Strouhal correspondants ( $\equiv$  la partie imaginaire des valeurs propres instables est divisée par  $2\pi$ .)

dans les deux diagrammes d’état de Fig. 4.29.

Il est important de remarquer ici que l’écoulement axisymétrique ne présente aucun changement qualitatif à  $Ri \approx -0.13$ , où l’instabilité primaire change de type (la bifurcation régulière fait place à une bifurcation de Hopf pour  $Ri \geq -0.13$ , c.f. la section suivante).

### 4.3.2 Perte d’axisymétrie

Dans la section 4.2, il a été montré que, jusqu’au nombre de Richardson  $Ri = 0.59$ , la première valeur propre instable d’une sphère en écoulement assistant faisait partie du sous-espace azimutal  $m = 1$  (comme pour une sphère non-chauffée). Pour des  $Ri$  supérieurs à 0.59, la première valeur propre à devenir instable appartient au sous-espace azimutal  $m = 2$  et, à partir de  $Ri = 0.714$ , c’est le mode azimutal de nombre d’onde  $m = 3$  qui est le plus instable. Ce comportement est dû à l’effet du panache thermique qui modifie, d’une manière essentielle, la zone de recirculation en aval de la sphère dans les régimes axisymétriques. La zone de recirculation des écoulements de base aux seuils de l’instabilité primaire a la forme d’un tore sur l’axe de l’écoulement jusqu’à  $Ri \approx 0.7$ , mais, à partir de ce  $Ri$ , le tore se détache de l’axe et forme ainsi un anneau axisymétrique en aval de la sphère. Un tel écoulement est plus réceptif aux modes azimutaux avec un nombre d’onde  $m > 1$ . Lorsque ce tore hors de l’axe devient encore plus fin (avec  $Ri$ ), l’écoulement de base voit son axisymétrie brisée par le mode azimutal  $m = 3$ .

Dans la section précédente, il a été montré qu’un seul type de recirculation existait en écoulement opposant pour les deux nombres de Prandtl considérés – une zone de recirculation sur l’axe de l’écoulement en aval de la sphère. Il faut donc s’attendre à ce que le mode le plus instable provienne toujours du sous-espace azimutal  $m = 1$ . Une autre supposition peut être faite : l’apparition d’une recirculation étant un signe précurseur de la transition, l’effet déstabilisant (en terme d’élargissement de la zone de recirculation) du  $|Ri|$  en écoulement

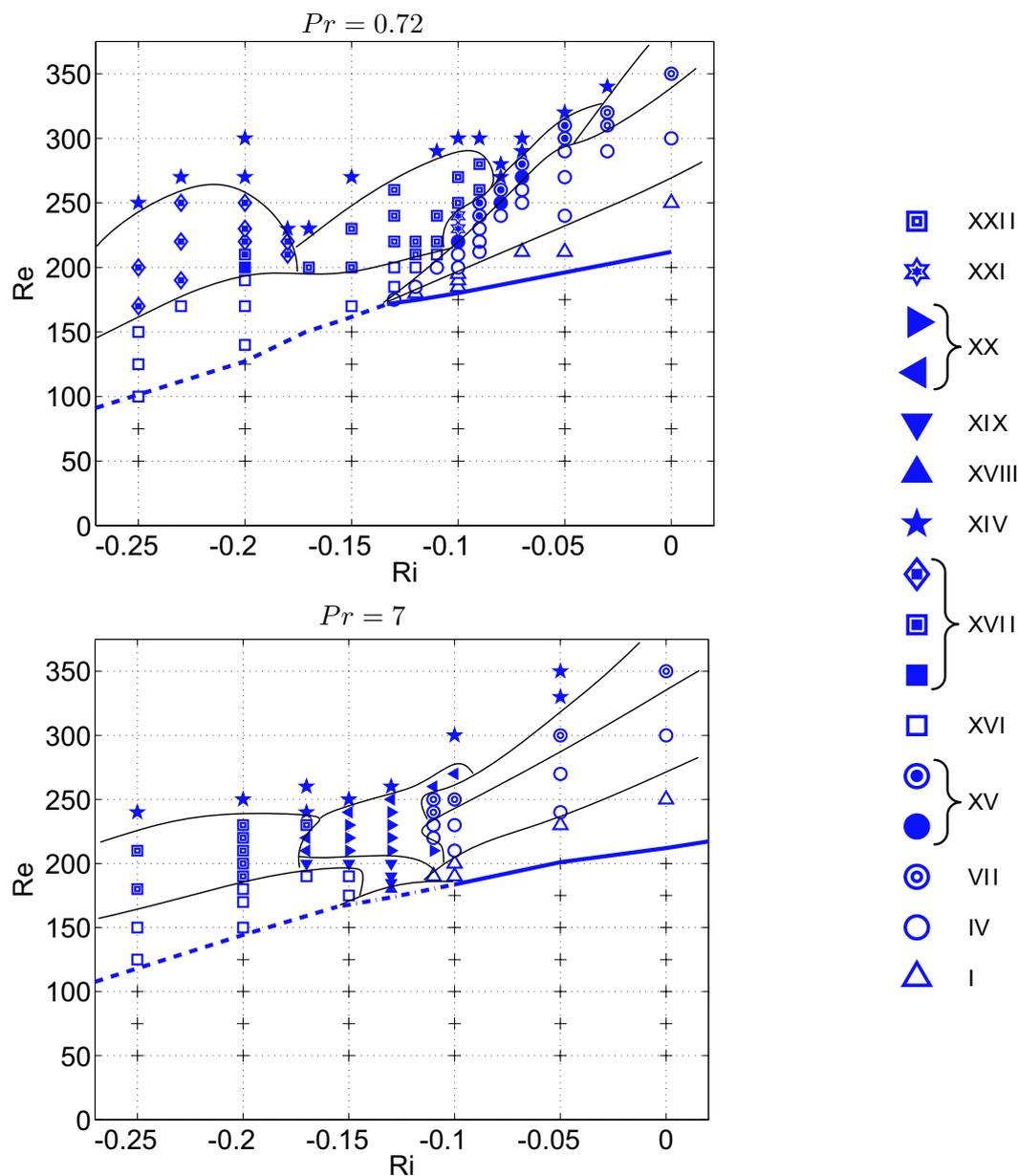


FIG. 4.29 – Diagrammes d'état pour les deux nombres de Prandtl considérés. Le trait en gras représente le seuil de l'instabilité primaire, correspondant à une valeur propre instable du sous-espace  $m = 1$ . La valeur propre est réelle (trait continu), complexe, à haute fréquence (trait interrompu) ou complexe, à une basse fréquence (trait “.-”, seulement à  $Pr = 7$ ). Les symboles “+” se trouvant en dessous de ces traits représentent des régimes axisymétriques avec une zone de recirculation sur l'axe de l'écoulement. Les différents symboles se trouvant au-dessus des traits en gras représentent qualitativement différents régimes tridimensionnels, décrits en détail dans section 4.3.4. Les traits fins représentent les frontières approximatives séparant les différents régimes.

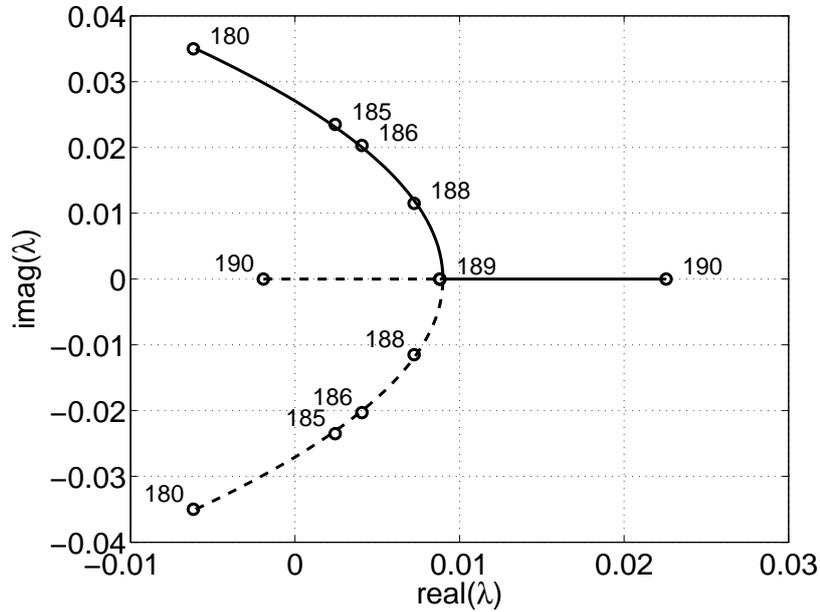


FIG. 4.30 – Evolution d’une paire de valeurs propres complexes se transformant en une paire de valeurs propres réelles après collision. Les paramètres du tracé sont  $Ri = -0.1$  et  $Re \in [180, 190]$ . Les points obtenus par analyse de stabilité linéaire sont représentés par des cercles avec le nombre de Reynolds correspondant.

opposant va accélérer la transition.

Les seuils de l’instabilité primaire sont indiqués dans Tab.4.4 et, de façon similaire à l’écoulement assistant, sont représentés dans les diagrammes d’état de la Fig.4.29 par des traits gras.

A  $Pr = 0.72$ , il a été trouvé qu’à  $Ri = -0.133$ , la valeur propre la plus instable n’est plus réelle, mais complexe. Cela signifie que la bifurcation régulière fait place à une bifurcation de Hopf. Ce changement de type d’instabilité primaire a des conséquences sur les régimes de la transition, ce qui est illustré dans la section 4.3.4. Le trait gras continu dans le diagramme concernant  $Pr = 0.72$  de la Fig.4.29 connecte les points où l’instabilité primaire est une bifurcation régulière, tandis que le trait gras interrompu dans le diagramme concernant  $Pr = 7$  connecte les points où l’instabilité primaire est une bifurcation de Hopf.

Une situation encore plus intéressante a été observé à  $Pr = 7$ . Lorsque le nombre de Reynolds est progressivement augmenté à partir d’une certaine valeur sous-critique à un nombre de Richardson fixe ( $-0.156 \leq Ri \leq -0.098$ ), une paire de valeurs propres conjuguées traverse l’axe imaginaire, donnant la naissance à une bifurcation de Hopf. Néanmoins, lorsqu’on augmente encore légèrement le  $Re$ , cette paire entre en collision et se transforme en une paire de valeurs propres réelles. En conséquence, cette bifurcation de Hopf, caractérisée par un très faible nombre de Strouhal, est liée à la même valeur propre que la bifurcation régulière, la valeur propre réelle devenant complexe en entrant en collision avec une deuxième valeur

propre réelle, plus stable. Fig. 4.30 illustre les détails de cette collision de valeurs propres à  $Ri = -0.1$  et pour  $Re \in [180, 190]$ , obtenus en effectuant l'analyse de stabilité linéaire. A  $Re = 180$ , une paire de valeurs propres complexes conjuguée existe. Ces valeurs propres sont stables (le point  $Ri = -0.1$ ,  $Re = 180$  se trouve en dessous du seuil de l'instabilité primaire). Le seuil de l'instabilité primaire à  $Ri = -0.1$  se trouve à  $Re_1 = 183.5$ , i.e. les deux paires croisent l'axe imaginaire entre  $Re = 180$  et  $Re = 185$ . L'instabilité primaire correspond alors à une bifurcation de Hopf. A  $Re = 189$ , les deux paires entrent en collision dans le demi-plan  $\text{real}(\lambda) > 0$ . Le produit de cette collision est une paire de valeurs propres réelles, initialement instables, dont une se déplace vers la gauche et une vers la droite lorsque  $Re$  augmente. A  $Re = 190$ , la valeur propre réelle de gauche est déjà stable. La paire des valeurs propres complexes conjuguées a une partie imaginaire nulle au moment de la collision. Au seuil de l'instabilité primaire, la partie imaginaire vaut environ  $0.0027$ , ce qui correspond au nombre de Strouhal  $4.33e - 3$ . Cette fréquence est de plus d'un ordre de grandeur plus petite que la fréquence caractéristique de la bifurcation de Hopf à  $Pr = 0.72$ .

Si l'on se déplace le long de la ligne en gras de la Fig. 4.29 représentant le seuil de l'instabilité primaire pour un  $|Ri|$  croissant à partir de 0, pour  $Ri > -0.1$ , la valeur propre la moins stable est une valeur propre réelle, accompagnée d'une deuxième valeur propre réelle, plus stable. A  $Ri = -0.1$ , les deux valeurs propres réelles se rencontrent et se transforment en une paire de valeurs propres complexes, correspondant à la valeur propre la plus instable pour  $Ri < -0.1$ . Cette valeur propre de basse fréquence correspond à la lente bifurcation de Hopf pour  $-0.156 \leq Ri \leq -0.098$ . A  $Ri = -0.156$ , la valeur propre de haute fréquence ( $St \approx 0.1$ ) devient plus instable que celle de basse fréquence et une bifurcation de Hopf du même type qu'à  $Pr = 0.72$  pour  $Ri < -0.13$  s'installe. La paire de valeurs complexes de basse fréquence est directement visible dans le scénario de transition, mais seulement sur une plage de paramètres très étroite juste au-dessus de la ligne “-” de la Fig. 4.29.

Les valeurs du seuil de l'instabilité primaire ne dépendent que très légèrement du nombre de Prandtl, ce qui s'applique également aux frontières entre les différents régimes observés sauf au voisinage du contact entre les deux types de bifurcations primaires.

### 4.3.3 Modèle faiblement non-linéaire pour les régimes tridimensionnels

Dans la section 4.2.3, un modèle faiblement non-linéaire d'ordre 3 (équations (4.20), (4.21) et (4.22)) a été utilisé en prenant en compte une valeur propre réelle avec une amplitude  $A$  et deux paires de valeurs propres complexes avec des amplitudes complexes  $(B_{1,\pm}, B_{2,\pm})^T$ . Il a été démontré qu'un tel modèle représente fidèlement des oscillations à la fois périodiques mais également quasi-périodiques, dans un plan de symétrie (déterminé par l'instabilité primaire) autour d'une valeur moyenne non-nulle du coefficient de portance (Fig. 4.5). De tels comportements ont été modélisés en considérant trois valeurs propres, couplées avec des constantes.

Si, comme c'est le cas en écoulement opposant à  $Ri < -0.133$  pour  $Pr = 0.72$  et à  $Ri < -0.098$  pour  $Pr = 7$ , la bifurcation de Hopf s'installe avant la bifurcation régulière, le mode correspondant à la valeur propre réelle peut être négligé. Si, seule une paire de valeurs propres complexes conjuguées est retenue, on retrouve le modèle bidimensionnel du type de, par exemple, I. Danaila (1998). La seule différence serait que dans le présent cas, les modes

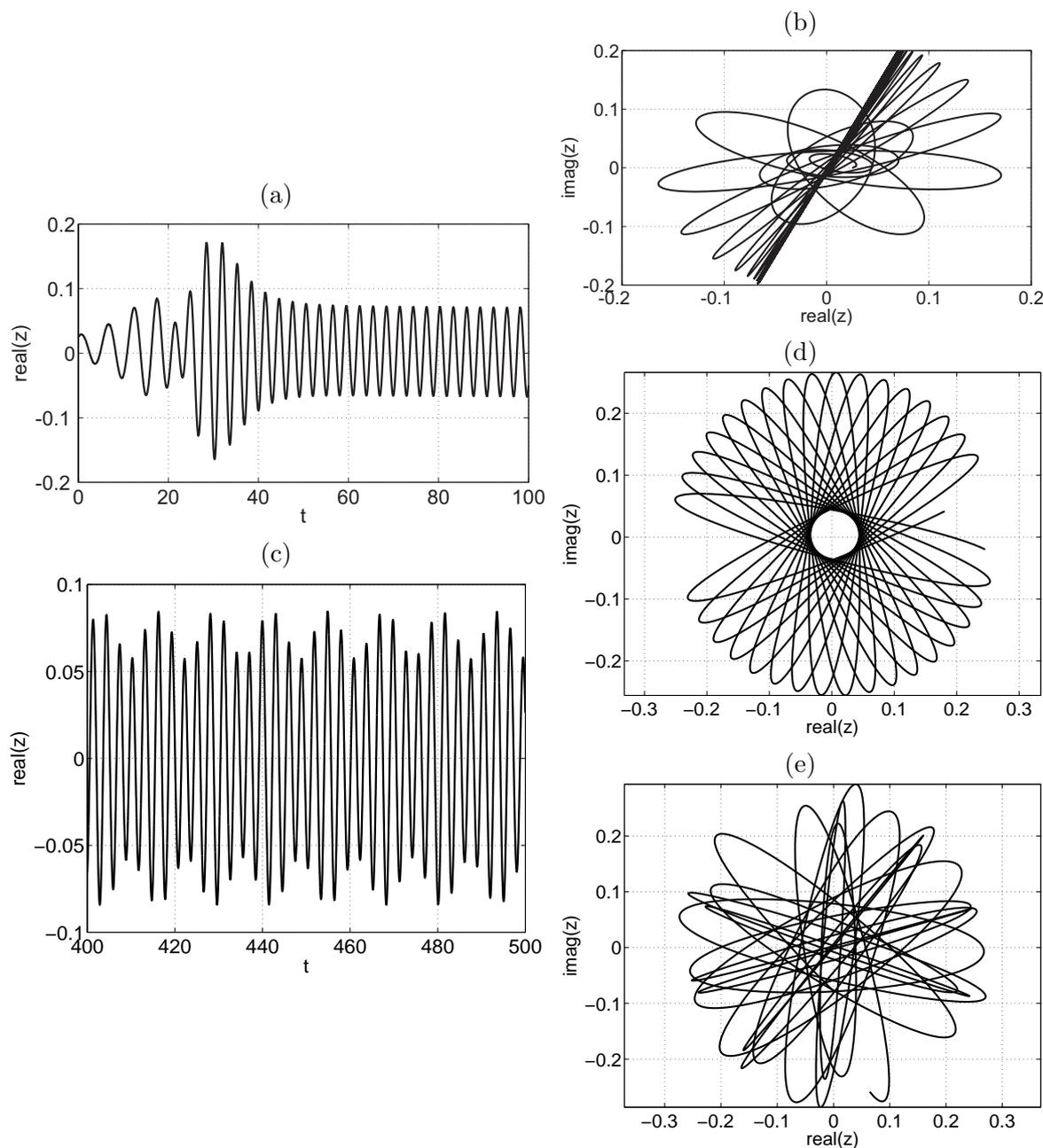


FIG. 4.31 – Trajectoires obtenues par le modèle faiblement non-linéaire. (a) Oscillations planes (avec un transitoire) avec une valeur moyenne de  $F_L$  nulle, (b) tracé dans le plan complexe (perpendiculaire à l'axe de l'écoulement) pour le même régime. (c) Oscillations planes quasi-périodiques avec la valeur moyenne de  $F_L$  nulle, (d) modélisation d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées présentant deux modes hélicoïdaux inégaux contrarotatifs, (e) modélisation de deux paires de valeurs propres complexes conjuguées avec deux modes hélicoïdaux inégaux contrarotatifs.

hélicoïdaux sont en équilibre ( $|B_+| = |B_-|$ ). Dans le modèle, l'équilibre des modes hélicoïdaux est assuré par le choix approprié, basé sur un calcul analytique de stabilité des modes, des constantes de couplage. Une solution transitoire, où le mode associé à la valeur propre réelle disparaît exponentiellement, est montré dans Fig. 4.31*a* (évolution temporelle de la force de portance) et Fig. 4.31*b* (projection de la force de portance sur un plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement). L'état asymptotique présente des oscillations périodiques avec une valeur moyenne de la force de portance nulle. En modélisant une bifurcation de Hopf secondaire par un l'ajout d'une deuxième paire de valeurs propres complexes conjuguées, on obtient une solution quasi-périodique, toujours avec une valeur moyenne nulle (Fig. 4.31*c*). Un état asymptotique avec des modes hélicoïdaux de différentes amplitudes aboutit à une disparition du plan de symétrie et à une hélicité non-nulle. Un modèle bidimensionnel de type Landau (équations (4.21) et (4.22), avec  $A = 0$  et  $j = 1$ ) peut être facilement résolu afin de démontrer que des amplitudes inégales ont pour conséquence des fréquences d'oscillations différentes, ce qui se traduit par une ellipse en rotation, montrée dans (Fig. 4.31*d*). Finalement, si on prend en compte une deuxième paire de valeurs propres complexes conjuguées, chaque paire ayant une rotation différente, on obtient le tracé plutôt compliqué de la Fig. 4.31*e*. Malgré la complexité apparente, une telle solution n'est pas encore chaotique.

#### 4.3.4 Régimes tridimensionnels

Les diagrammes de la Fig. 4.29 représentent la continuité des diagrammes d'état de l'écoulement assistant (Fig. 4.3). Comme dans le cas de l'écoulement assistant, l'investigation des différents régimes (par augmentation de  $Re$  à un  $Ri$  constant) a été arrêtée lorsqu'un régime chaotique a été trouvé. Compte tenu de l'effet déstabilisant de l'écoulement opposant, les régimes chaotiques sont observés pour des nombres de Reynolds de moins en moins élevés. La limite supérieure du nombre de Reynolds dans les deux diagrammes de la Fig. 4.29 est donné par l'apparition d'un régime chaotique à  $Ri = 0$  pour  $Re > 350$  (à  $Re = 350$ , le régime étant encore quasi-périodique avec un plan de symétrie, le régime chaotique à  $Ri = 0$  n'est pas montré dans les diagrammes d'état). Il résulte de ceci une différence importante entre les échelles des diagrammes d'état des Figs. 4.3 et 4.29 ; c'est la raison pour laquelle ces diagrammes sont montrés séparément, même si la continuité entre eux existe réellement.

4 régimes tridimensionnels parmi ceux de la configuration de l'écoulement assistant ont été retrouvés en écoulement opposant et ont gardé (sur les diagrammes d'état) la même numérotation. Le dernier régime (écoulement chaotique) dans Fig. 4.3 ayant le numéro XIV, les nouveaux régimes en écoulement opposant sont numérotés à partir du chiffre XV. Malgré le grand effort que nous avons tenté de faire pour classer les régimes le plus simplement possible, 7 nouveaux régimes sont apparus, portant ainsi le nombre total de régimes en écoulement assistant et opposant à 22 (!).

#### Régimes de faibles $|Ri|$

Dans cette section, nous décrivons les régimes de la transition apparaissant dans l'intervalle de  $Ri$  où la bifurcation est toujours de type régulière. Le régime chaotique est décrit dans une section se trouvant un peu plus loin dans le texte, là où tous les régimes chaotiques

sont rassemblés.

**(I), (IV) et (VII) – Régimes de la sphère non-chauffée** Les régimes 'écoulement tridimensionnel stationnaire avec plan de symétrie et deux filaments de vorticité contrarotatifs' (I), 'écoulement périodique avec détachement tourbillonnaire et plan de symétrie' (IV) et 'écoulement quasi-périodique avec détachement tourbillonnaire et plan de symétrie' (VII) ont été retrouvés dans la région des faibles  $Ri$  négatifs. A  $Pr = 0.72$ , ces régimes existent dans un triangle presque parfait, dont le premier coin est déterminé par l'intersection de la bifurcation régulière avec celle de Hopf    $Ri = -0.133$  et  $Re = 171.6$ . Le deuxième coin est déterminé par le seuil de la bifurcation régulière    $Ri = 0$  et  $Re = 212$  et le troisième par le seuil de la transition au chaos    $Ri = 0$  et  $Re \approx 370$ . A  $Pr = 7$ , la forme de cette région est plus compliquée en raison de l'apparition d'une paire de valeurs propres complexes conjuguées surgissant après la collision de deux valeurs propres réelles, comme décrit dans la section 4.3.2. Ces trois régimes sont qualitativement les mêmes que ceux observés pour une sphère non-chauffée et pour des nombres de Richardson modérés en écoulement assistant. De faibles évolutions de certains paramètres, notamment du nombre de Strouhal et des coefficients de traînée et de portance, sont néanmoins observées en passant des  $Ri$  positifs aux  $Ri$  négatifs pour un  $Re = \text{const.}$  (tout en étant dans le même régime d'écoulement). Il apparaît que le nombre de Strouhal diminue avec la diminution de  $Ri$ . Tab. 4.5 donne les valeurs de  $St$  pour tous les régimes périodiques plans observés en écoulement opposant. Le coefficient de traînée diminue avec la diminution de  $Ri$ , contrairement   la fluctuation du coefficient de portance (c.f. section 4.3.5).

Malgré le fait que ces trois régimes soient qualitativement identiques   ceux précédemment décrits dans la section 4.2, leurs aspects sont montrés dans Fig. 4.32.

**(XV) – Régimes oscillants avec un plan de symétrie lentement tournant ( $Pr = 0.72$ )**

En écoulement opposant, la perte du plan de symétrie apparaît   des nombres de Reynolds moins élevés qu'   $Ri = 0$  (sphère non-chauffée). A un nombre de Prandtl modéré ( $Pr = 0.72$ ), le plan de symétrie est brisé (par des effets d'ordre élevé) avant l'installation de la bifurcation de Hopf secondaire. A  $Pr = 7$ , le plan de symétrie est plus robuste et le régime quasi-périodique avec un plan de symétrie existe tout le long de la limite supérieure du régime périodique plan.

Fig. 4.6a montre la solution obtenue par une modélisation de 3 me ordre de l'interaction entre un mode correspondant   une valeur propre réelle et deux modes hélicoïdaux contrarotatifs correspondant   une paire de valeurs propres complexes conjuguées. Cette solution a été obtenue par une dissymétrisation artificielle des équations (4.20), (4.21) et (4.22), afin d'éviter une prise ne compte du modèle d'ordre 5 et de ses constantes. En écoulement assistant, aucun régime ayant ce type de comportement n'a été trouvé. En écoulement opposant et    $Pr = 0.72$ , trois exemplaires d'un tel régime ont été trouvés juste au-dessus de la limite supérieure du régime périodique plan IV –    $Ri = -0.07$  et  $Re = 270$ ,  $Ri = -0.08$  et  $Re = 250$  et    $Ri = -0.1$  et  $Re = 220$ , ce qui prouve que cette combinaison pure entre une valeur propre réelle et seulement une paire de valeurs propres complexes conjuguées est difficile   trouver. Une projection du coefficient de portance sur un plan perpendiculaire   la

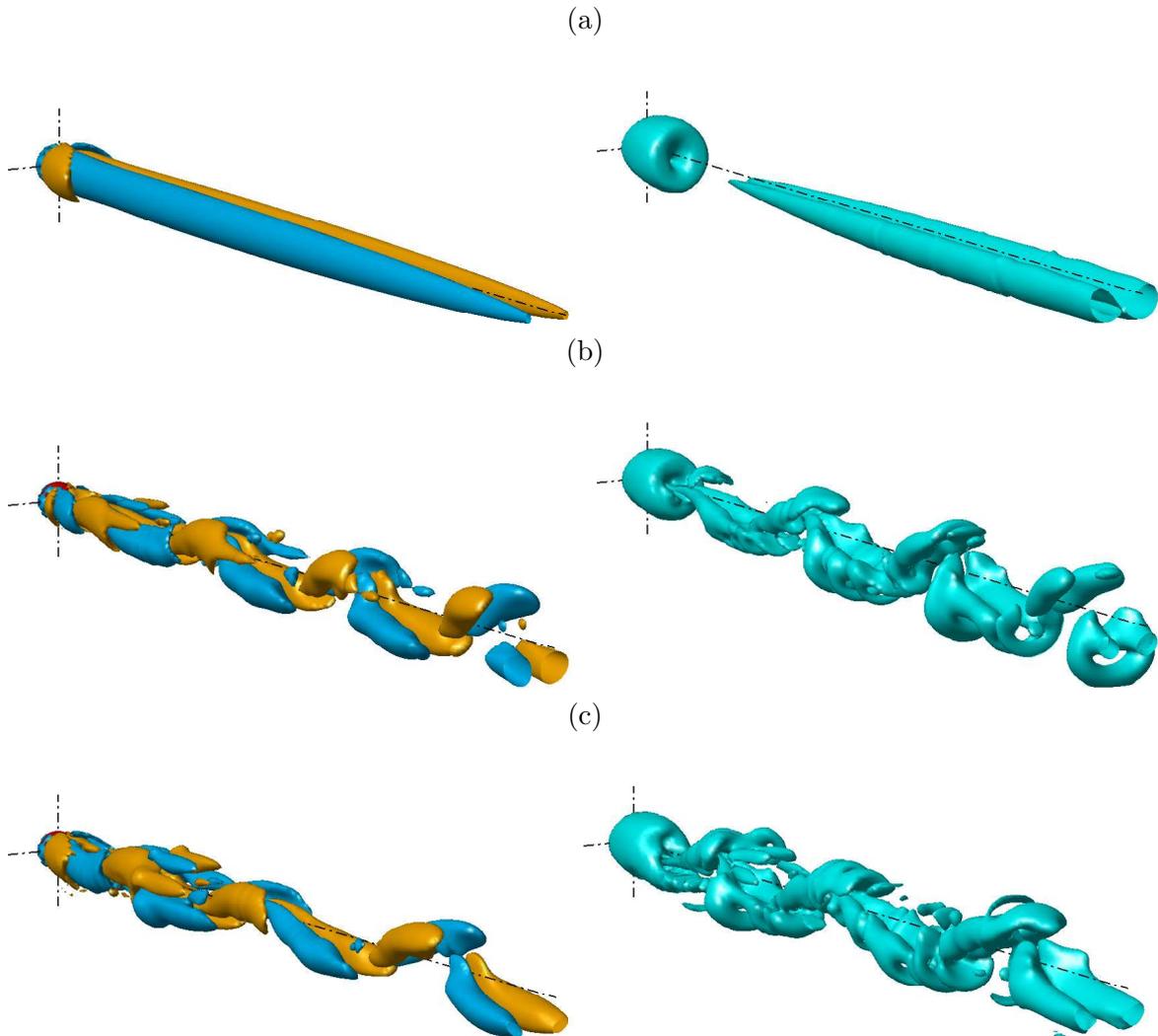


FIG. 4.32 – Isosurfaces de vorticité axiale (colonne de gauche),  $Q$ -définition (colonne de droite). (a) Régime stationnaire avec deux filaments de vorticité contrarotatifs et plan de symétrie à  $Ri = -0.05$ ,  $Re = 212$  et  $Pr = 0.72$  ( $\omega_z = \pm 0.015$ ,  $Q = 1 \times 10^{-5}$ ). Les tourbillons présentent une faible vorticité car ce régime se trouve juste au-dessus du seuil de l'instabilité primaire. (b) Régime périodique avec deux filaments de vorticité qui changent de signe (allée de Von-Kármán) et un plan de symétrie à  $Ri = -0.05$ ,  $Re = 270$  et  $Pr = 7$  ( $\omega_z = \pm 0.1$ ,  $Q = 0.005$ ). (c) Régime quasi-périodique avec un détachement tourbillonnaire et un plan de symétrie à  $Ri = -0.05$ ,  $Re = 300$  et  $Pr = 7$  ( $\omega_z = \pm 0.1$ ,  $Q = 0.001$ ).

$Pr$	$Ri$	$Re$	$St$	$Pr$	$Ri$	$Re$	$St$	$Pr$	$Ri$	$Re$	$St$
0.72	0	300	0.135	0.72	-0.11	210	9.33e-2	7	0	300	0.135
0.72	-0.03	290	0.126	0.72	-0.12	185	8.82e-2	7	-0.05	240	0.119
0.72	-0.05	240	0.115	0.72	-0.12	200	9.05e-2	7	-0.05	270	0.127
0.72	-0.05	270	0.119	0.72	-0.13	175	8.48e-2	7	-0.1	210	0.105
0.72	-0.05	290	0.115	0.72	-0.13	185	8.77e-2	7	-0.1	230	0.113
0.72	-0.07	250	0.109	0.72	-0.13	200	8.96e-2	7	-0.11	220	0.108
0.72	-0.07	260	0.107	0.72	-0.15	170	8.40e-2	7	-0.11	230	0.112
0.72	-0.08	240	0.106	0.72	-0.15	170	8.40e-2	7	-0.15	175	9.38e-2
0.72	-0.08	240	0.106	0.72	-0.2	140	7.90e-2	7	-0.15	190	0.100
0.72	-0.09	212	0.102	0.72	-0.2	170	7.98e-2	7	-0.15	190	9.69e-2
0.72	-0.09	220	0.103	0.72	-0.2	190	9.37e-2	7	-0.17	190	9.69e-2
0.72	-0.09	230	0.102	0.72	-0.23	170	9.17e-2	7	-0.2	150	8.90e-2
0.72	-0.09	230	0.102	0.72	-0.23	170	9.17e-2	7	-0.2	170	9.47e-2
0.72	-0.1	200	9.41e-2	0.72	-0.25	100	6.84e-2	7	-0.2	170	9.47e-2
0.72	-0.1	210	9.83e-2	0.72	-0.25	100	6.84e-2	7	-0.2	180	9.54e-2
0.72	-0.1	210	9.83e-2	0.72	-0.25	125	7.99e-2	7	-0.2	180	9.54e-2
0.72	-0.11	200	9.33e-2	0.72	-0.25	125	7.99e-2	7	-0.25	125	8.43e-2
0.72	-0.11	200	9.33e-2	0.72	-0.25	150	8.79e-2	7	-0.25	125	8.43e-2
0.72	-0.11	200	9.33e-2	0.72	-0.25	150	8.79e-2	7	-0.25	150	9.22e-2

TAB. 4.5 – Nombres de Strouhal de tous les régimes périodiques pour les deux nombres de Prandtl considérés. Les nombres de Strouhal des régimes plans quasi-périodiques et tri-dimensionnels sont proches des valeurs des régimes périodiques plans se trouvant dans le voisinage de ces régimes dans le plan ( $Ri - Re$ ) de la Fig. 4.3.

direction de l'écoulement est montrée dans Fig. 4.33a. Si une deuxième fréquence s'installe, ce qui correspond à une interaction entre une valeur propre réelle et deux paires de valeurs propres complexes conjuguées (c.f. Fig. 4.6b), la projection du coefficient de portance a l'aspect montré dans Fig. 4.33b. Figs. 4.33c et d montrent des isosurfaces de vorticité axiale des régimes des Figs. 4.33a et b, où une perte du plan de symétrie est visible, ainsi que la torsion des structures due   la rotation du sillage. Le régime combinant une valeur propre réelle   une paire de valeurs propres complexes est représenté par un cercle plein dans Fig. 4.3 (   $Pr = 0.72$ ); le régime avec une deuxième paire de valeurs propres complexes est représenté par un cercle blanc avec un cercle plus petit plein   l'intérieur.

### Régimes de $|Ri|$ élevés

   $Pr = 0.72$  et pour  $Ri \leq -0.2$ , les scénarios de transition au chaos ne varient plus avec  $Ri$  (l'écoulement présente toujours les mêmes régimes lorsqu'on augmente le  $Re$  pour un  $Ri = \text{const.}$ ). Une observation similaire a été faite    $Pr = 7$  pour  $Ri \leq -0.5$ . Une description des différents régimes d'écoulement    $Ri = -0.2$  et    $Pr = 0.72$  est présentée dans les deux paragraphes suivants.

**(XVI) – Détachement tourbillonnaire périodique avec un plan de symétrie et une valeur moyenne de  $C_L$  nulle** Dans un sous-espace du plan de paramètres ( $Ri - Re$ ) juste au-dessus du seuil de l'instabilité primaire correspond   une bifurcation de Hopf rapide, la valeur propre réelle (ou la paire des valeurs propres complexes conjuguées provenant de la

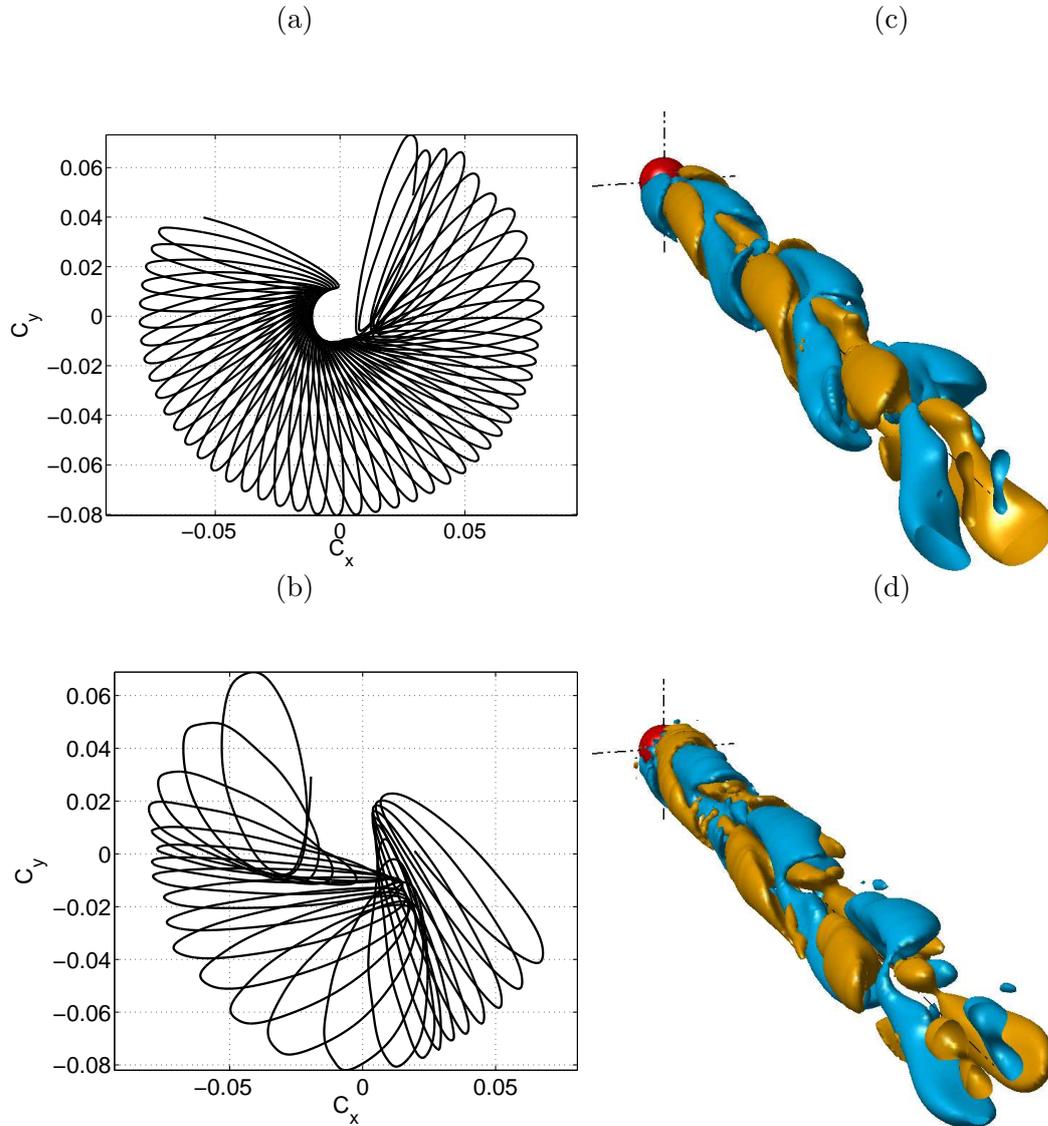


FIG. 4.33 – Colonne de gauche : projection du coefficient de portance sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'écoulement ; colonne de droite : aspect de l'écoulement (isosurfaces de vorticité axiale à  $\omega_z = \pm 0.2$ ). (a,c)  $Ri = -0.1$ ,  $Re = 220$ ,  $Pr = 0.72$ , (b,d)  $Ri = -0.08$ ,  $Re = 260$ ,  $Pr = 0.72$ .

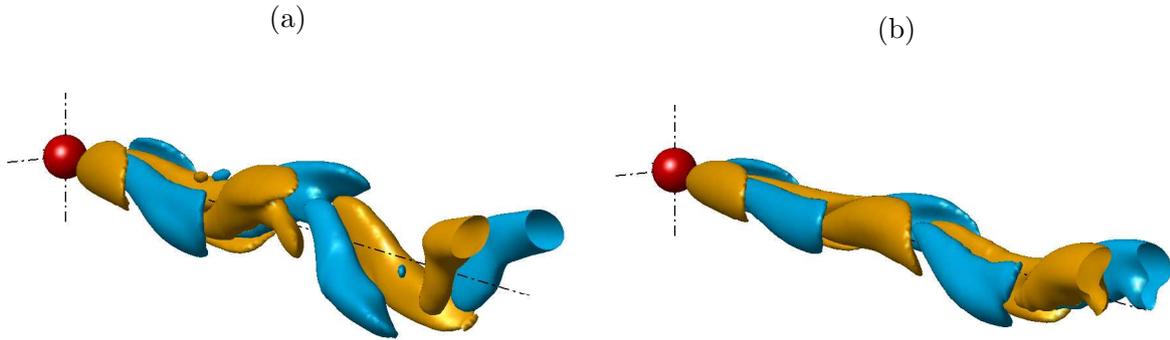


FIG. 4.34 – Détachement tourbillonnaire périodique avec un plan de symétrie et une valeur moyenne de  $C_L$  nulle. (a)  $Ri = -0.25$ ,  $Re = 125$  et  $Pr = 0.72$  ( $\omega_z = \pm 0.3$ ), (b)  $Ri = -0.2$ ,  $Re = 150$  et  $Pr = 7$  ( $\omega_z = \pm 0.1$ ).

collision de deux valeurs propres réelles) n'a plus d'influence sur la dynamique du sillage. Le modèle (4.20), (4.21) et (4.22) décrit parfaitement cette situation lorsqu'une seule paire de valeurs propres complexes conjuguées de même amplitude  $B_{1,\pm}$  est retenue. L'écoulement présente des oscillations périodiques avec un détachement tourbillonnaire dans un plan de symétrie, déterminé par les conditions initiales. Puisque la valeur propre réelle est absente, la valeur moyenne de la force de portance est nulle, contrairement au régime IV. Deux aspects d'un tel écoulement sont présentés dans Fig. 4.34. Les nombres de Strouhal sont donnés dans Tab. 4.5. En général, le nombre de Strouhal ne varie que très peu. Alors que la valeur du  $St$  est d'environ 0.1 dans les régimes périodiques avec la force de portance non-nulle, elle est d'environ 0.08 dans les présents régimes.

**(XVII) – Détachement tourbillonnaire avec un plan de symétrie tournant et une valeur moyenne de  $C_L$  nulle ( $Pr = 0.72$ )** A  $Pr = 0.72$ , le scénario détaillé de la transition entre un régime périodique plan (XVI) et le chaos (XIV) à un nombre de Richardson constant ( $Ri = -0.2$ ) est illustré dans Fig. 4.35 (à  $Pr = 7$ , le scénario qualitativement identique de la transition au chaos d'un plan périodique via des régimes tournants a été retrouvé pour  $Ri \leq -0.5$ ). En augmentant le  $Re$ , la projection du coefficient de portance sur le plan ( $C_x, C_y$ ) évolue d'une dynamique similaire à celle de la Fig. 4.31d à  $Re = 200$  (une ellipse en rotation lente) vers une dynamique très légèrement modulée par l'apparition d'une deuxième fréquence à  $Re = 210$ . A l'étape suivante ( $Re = 220$ ), l'ellipse, caractérisée par un nombre de Strouhal basique  $St \approx 0.1$ , se met à osciller (au lieu de tourner). A  $Re = 230$ , l'ellipse recommence à tourner et la projection ressemble alors à la solution de la Fig. 4.31e. Les deux dernières figures présentent des ellipses en rotation de plus en plus désordonnées. Elles ne permettent pas de trancher de façon irréfutable entre état ordonné et état chaotique.

Afin de déterminer l'endroit où placer la frontière entre régimes ordonnés et régimes chaotiques, des simulations de très longue durée ont été effectuées. Dans Fig. 4.36, la colonne de gauche montre les évolutions temporelles de la projection du coefficient de portance sur l'axe  $x$  ( $C_x$ ), la colonne de droite représente les transformations de Fourier correspondantes.

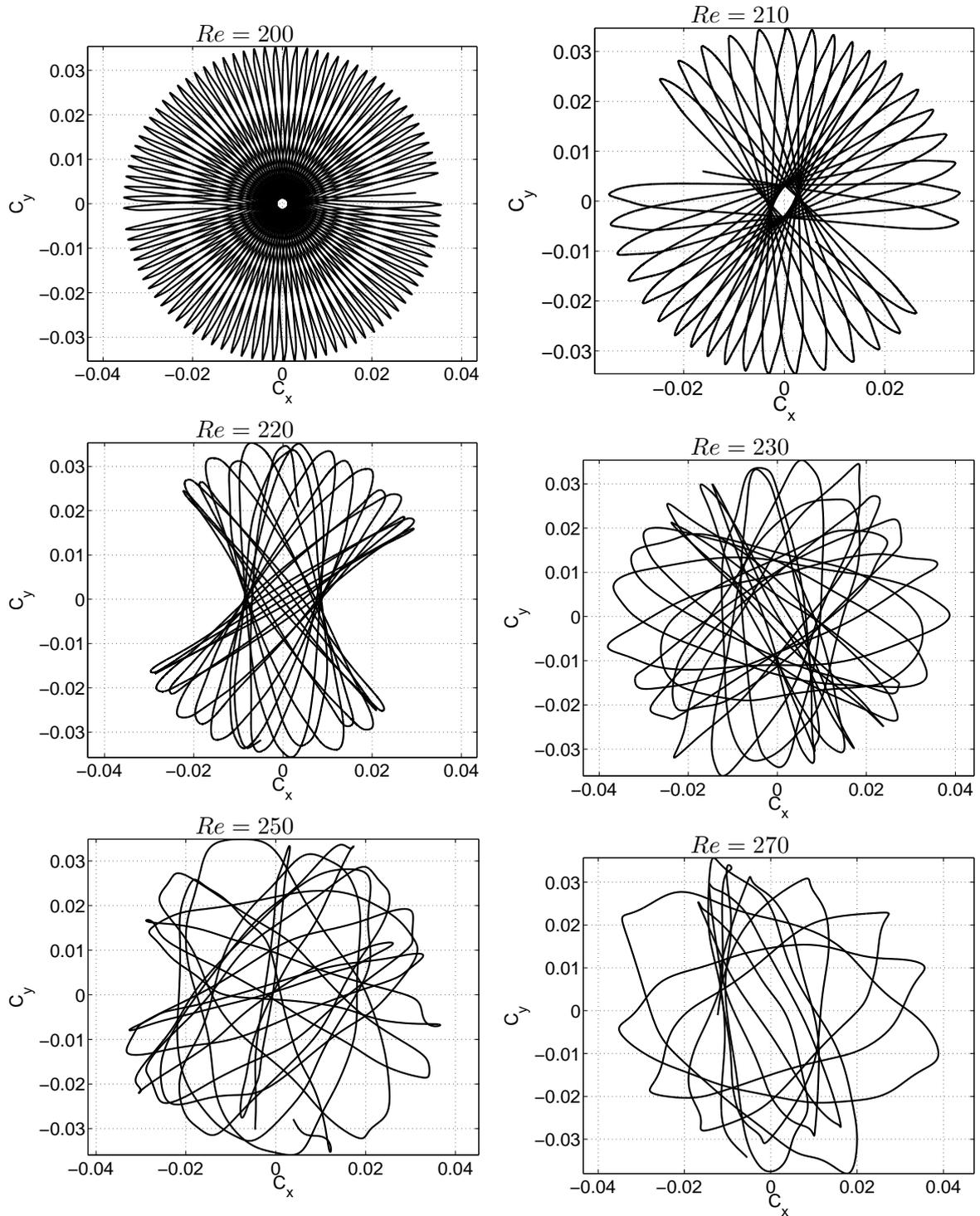


FIG. 4.35 –  $Pr = 0.72$ ,  $Ri = -0.2$  : projections du coefficient de portance sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'écoulement aux nombres de Reynolds indiqués au-dessus des figures.

La première ligne ( $Re = 200$ ) aide à interpréter les résultats de l'analyse spectrale. Le mouvement du sillage est contrôlé par deux fréquences dont une correspond aux oscillations sur une ellipse (le pic dominant dans le spectre –  $St = 0.1$ ) et l'autre correspond à la rotation lente des ellipses (période d'environ 500 unités de temps, ce qui correspond à  $St = 0.002$  – distance entre les deux pics). A  $Re = 250$  (la deuxième ligne), le pic dominant est situé à  $St = 0.104$  et il est entouré de pics secondaires. La distance entre eux est  $St = 0.006$ , ce qui correspond, à nouveau, à la rotation du plan de symétrie instantané autour de l'axe de l'écoulement. Cette rotation est visible dans le tracé temporel de  $C_x$  par des atténuations vers  $t = 730$  et  $t = 900$ , ce qui correspond à la position verticale de l'ellipse de la figure à  $Re = 250$  dans Fig. 4.35. Le changement le plus important entre le spectre à  $Re = 200$  et  $Re = 250$  est le nombre de pics secondaires, lié à la modulation du signal. Si les pics secondaires sont isolés et bien distincts, la dynamique peut être considérée comme quasi-périodique, voire périodique. A  $Re = 270$ , la partie du spectre vers les basses fréquences n'est plus composée de pics distants de  $St = 0.006$  (ce qui est toujours la distance entre les deux plus grands pics du spectre). Ceci peut être expliqué par une absence de répétition de motif dans le tracé de  $C_x$  vs.  $t$  de la troisième ligne de la Fig. 4.36, qui correspondrait normalement à une période  $T \approx 170$ . Il est évident que la distinction entre un régime ordonné et un régime chaotique est coûteuse en terme de CPU et que la transition est plutôt progressive. Néanmoins, on peut conclure qu'un régime chaotique s'installe entre  $Re = 250$  et  $270$  à ce nombre de Richardson ( $Ri = -0.2$ ) et de Prandtl ( $Pr = 0.72$ ). La nature chaotique d'un écoulement est alors le résultat d'une perte de périodicité sur des échelles temporelles très grandes, ce qui fait qu'aucune différence n'est visible sur la Fig. 4.35 entre la projection du coefficient de portance sur le plan ( $C_x, C_y$ ) à  $Re = 250$  et  $Re = 270$ .

Représenté en 3D, l'aspect de l'écoulement sans plan de symétrie à  $Re = 200$  est indiscernable de celui à  $Re = 190$ , où le plan de symétrie est présent. Ceci peut être expliqué par une faible hélicité du sillage à  $Re = 200$ , ce qui est mis en évidence sur la Fig. 4.35 – l'ellipse oscille beaucoup plus vite qu'elle ne tourne. Il semble alors que l'écoulement garde son plan de symétrie fixe (voir Fig. 4.37a), même si, en réalité, ce dernier tourne lentement autour de l'axe de l'écoulement (ce qui est bien visible sur une animation de l'écoulement). A  $Re = 270$  (Fig. 4.37b), l'hélicité est déjà pleinement développée et aucun reste du plan de symétrie n'est visible sur la figure en 3D. De petites structures tourbillonnaires commencent également à apparaître dans le sillage lointain, malgré le niveau de vorticité élevé dans la figure ( $\omega_z = \pm 0.3$ ).

On peut donc conclure que, à  $|Ri|$  élevé, la transition au chaos commence par une perte de symétrie plane du régime avec des oscillations périodiques et une valeur moyenne de  $C_L$  nulle. Cette rotation est accélérée et une deuxième fréquence s'installe. Finalement, l'écoulement finit par perdre toute périodicité sur de grandes échelles temporelles. A  $Pr = 7$ , le même scénario a été trouvé pour  $Ri = -0.5$ . Enfin, pour les deux nombres de Prandtl considérés, le même scénario a été observé à  $Re = 100$  en diminuant le  $Ri$  de  $-0.25$  à  $Ri \leq -1$ .

#### (XIV) – Régimes chaotiques

Les régimes chaotiques, malgré leur complexité, sont similaires pour tous les nombres de Richardson et les deux nombres de Prandtl considérés. Figs. 4.38 et 4.39 montrent quatre

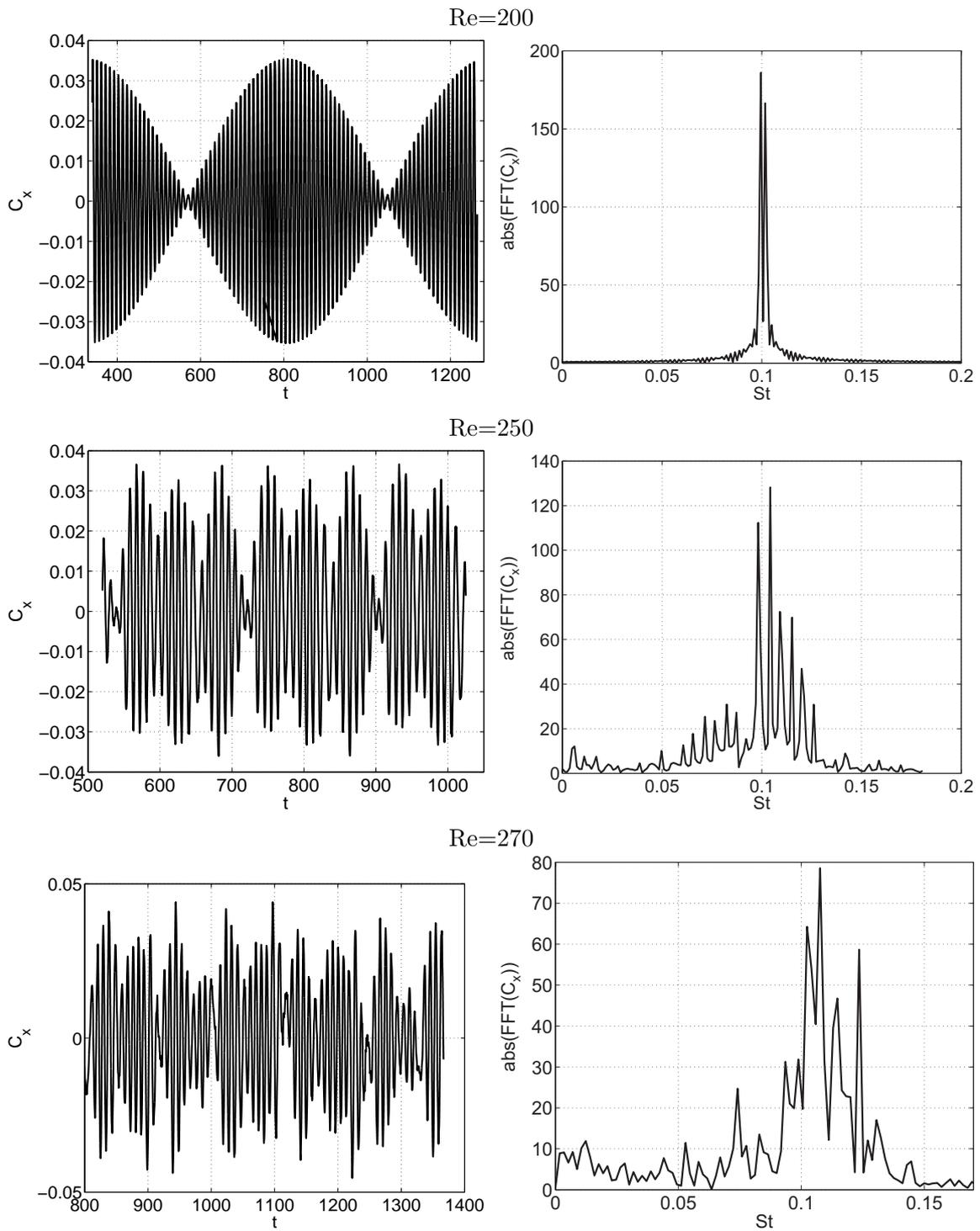


FIG. 4.36 – Evolution temporelle de la projection du coefficient de portance sur l'axe  $x$  (colonne de gauche), et transformée de Fourier correspondante (colonne de droite);  $Pr = 0.72$ ,  $Ri = -0.2$ , les nombres de Reynolds sont indiqués sur la figure.

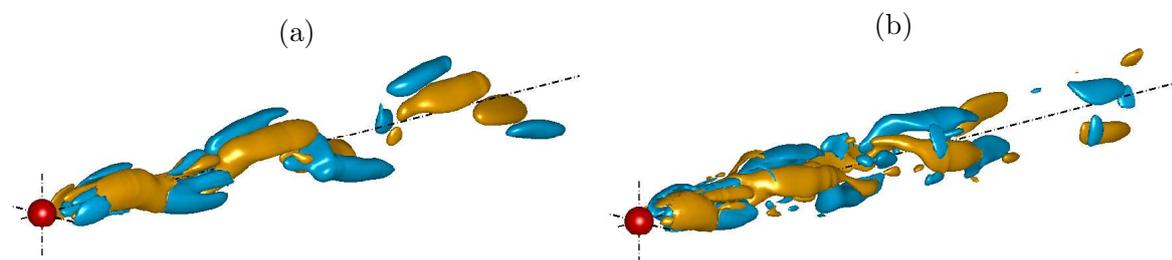


FIG. 4.37 – Isosurfaces de la vorticité axiale ( $\omega_z = \pm 0.3$ ) à  $Pr = 0.72$ ,  $Ri = -0.2$  et (a)  $Re = 200$  (faible hélicité), (b)  $Re = 270$  (hélicité importante).

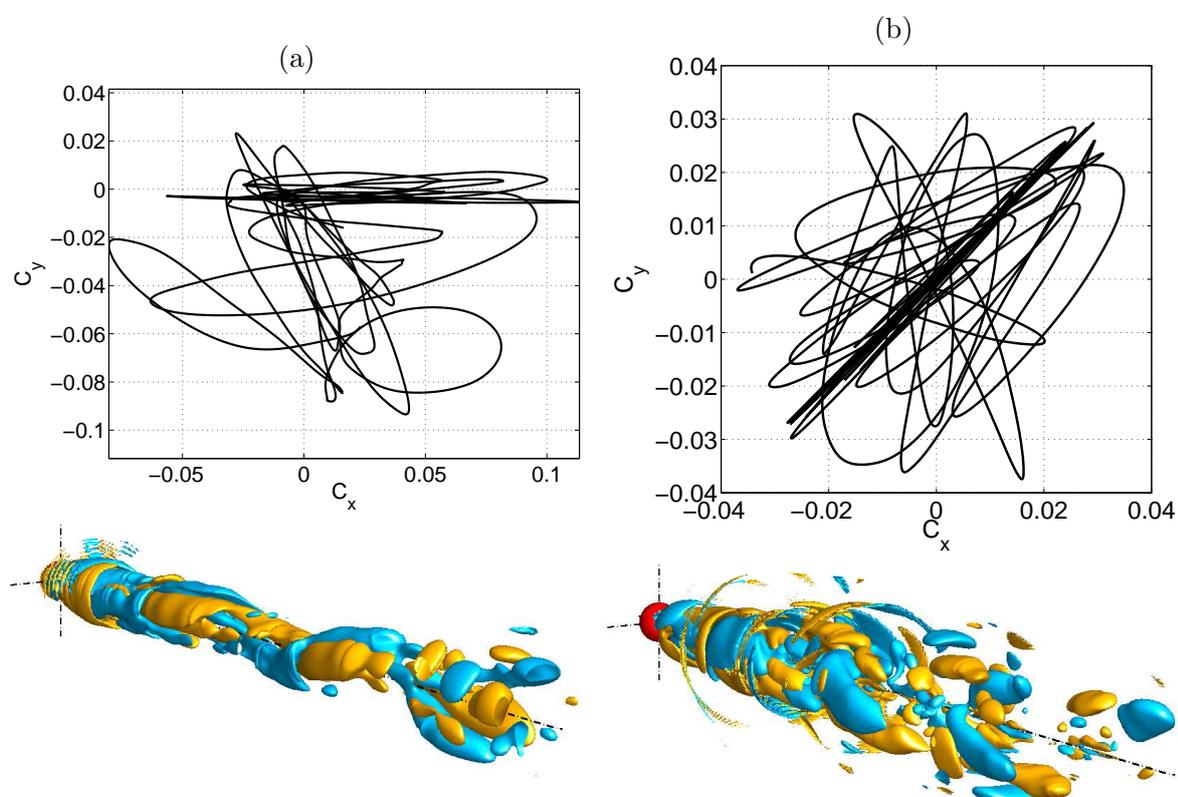


FIG. 4.38 – Projections du coefficient de portance sur le plan  $(C_x, C_y)$  (ligne du haut) et structures tridimensionnelles (isosurfaces de vorticité axiale, ligne du bas) à  $Pr = 0.72$  et (a)  $Ri = -0.03$ ,  $Re = 340$  ( $\omega_z = \pm 0.1$ ), (b)  $Ri = -0.2$ ,  $Re = 300$  ( $\omega_z = \pm 0.3$ ).

projections de  $C_L$  sur le plan  $(C_x, C_y)$  et les aspects 3D correspondants. La première figure correspond à deux simulations dans l'air ( $Pr = 0.72$ ), la seconde à deux simulations dans l'eau ( $Pr = 7$ ), avec, dans les deux cas, les nombres de Richardson correspondant aux extrémités de l'intervalle investigué. Puisque le seuil de l'apparition du comportement chaotique décroît

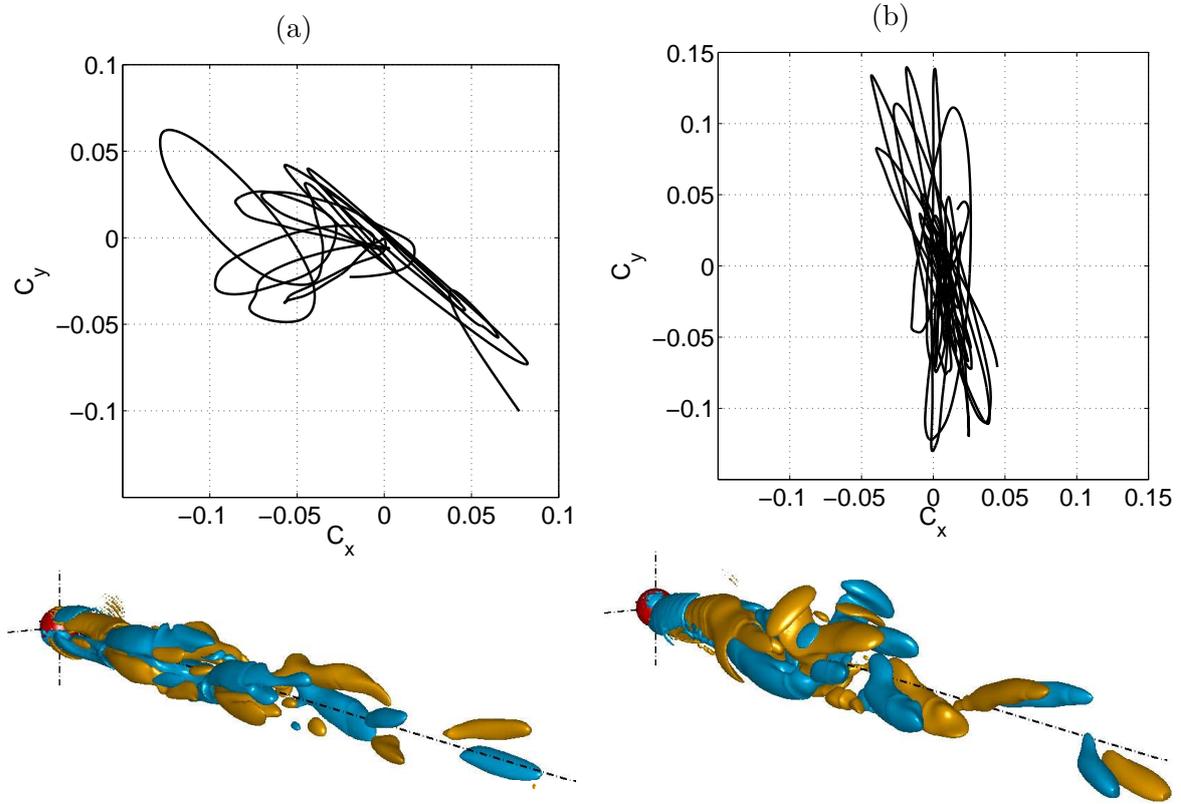


FIG. 4.39 – Projections du coefficient de portance sur le plan  $(C_x, C_y)$  (ligne du haut) et les structures tridimensionnelles (isosurfaces de vorticité axiale au niveau  $(\omega_z = \pm 0.2)$ ), ligne du bas) à  $Pr = 7$  et (a)  $Ri = -0.05$ ,  $Re = 330$  et (b)  $Ri = -0.2$ ,  $Re = 300$ .

avec  $|Ri|$ , les nombres de Reynolds sont moins élevés vers la limite  $Ri = -0.25$  que vers la limite  $Ri = 0$ . Malgré le fait que les régimes ordonnés les plus proches de chacun des quatre cas soient qualitativement très différents, aucune différence fondamentale n'est pas visible dans ces figures. Les 4 cas présentent tous un plan de symétrie brisé, la valeur moyenne du coefficient de portance presque nulle et des structures hélicoïdales. Ceci dit, en regardant d'un peu plus près, certains motifs des régimes ordonnés les plus proches peuvent être observés.

### Régimes de transition à $|Ri|$ modérés

Plusieurs phénomènes intéressants ont été observés dans la région des nombres de Richardson modérés, où l'instabilité primaire change de type – la bifurcation régulière est remplacée par une bifurcation de Hopf. A  $Pr = 0.72$ , le régime des oscillations périodiques planes avec une valeur moyenne de  $C_L$  nulle (XVI) pénètre profondément (en terme de  $Ri$ ) dans la région où l'instabilité primaire est du type régulière. Par exemple, pour un  $Ri > -0.13$  ( $Ri = -0.11$ ), et lorsque l'on augmente le  $Re$ , le sillage passe tout d'abord par deux étapes faisant partie de la transition caractéristique d'une sphère non-chauffée (écoulement tridi-

mensionnel stationnaire avec deux filaments de vorticit e contrarotatifs et un plan de sym etrie (I), et oscillations p eriodiques dans le m eme plan (IV)); par la suite, la valeur moyenne non-nulle du  $C_L$  dispara ıt et le r egime XVI, caract eristique des  $|Ri|$  plus  elev es, appara ıt. Ceci s'explique par l'observation d ej a mentionn ee que le couplage entre le sous-espace associée  a la valeur propre r eelle et celui associée aux valeurs propres complexes conjugu ees a tendance  a att enuer l'amplitude du mode propre stationnaire et  a amplifier celle des modes h elico ıdaux. Dans le mod ele faiblement non-lin eaire ((4.20), (4.21) et (4.22)), r eduit  a une seule paire de valeurs propres complexes ( $j = 1$ ), la constante de couplage  $d_1$  est positive et  $G_1$  a sa partie r eelle n egative. Pour une sph ere non-chauff ee, ce type de couplage explique le fait que la bifurcation de Hopf s'installe  a un  $Re$  moins  elev e que celui pr edit par l'analyse de stabilit e lin eaire effectu ee sur l' ecoulement de base. Pr es du point de changement de type de bifurcation, le couplage stabilise le mode stationnaire et seuls les modes oscillants restent visibles. L' etape suivante (oscillations quasi-p eriodiques avec une valeur moyenne de  $C_L$  nulle) sera d ecrite ult erieurement; elle a  et e trouv ee pour les deux  $Pr$ , mais  a des param etres  $Ri$  et  $Re$  diff erents. Comme il a  et e constatée dans la section 4.3.2,  a  $Pr = 7$ , une bifurcation de Hopf, qui fait suite  a une bifurcation r eguli ere et qui appara ıt apr es collision entre deux valeurs propres r eelles moins stables, existe dans la plage de  $Ri$  entre  $-0.098$  et  $-0.156$ . Cette bifurcation de Hopf est caract eris ee par une faible valeur de la partie imaginaire de la valeur propre instable (inf erieure  a  $0.003$ ), ce qui correspond  a des oscillations de p eriodes sup erieures  a 300 unit es de temps (c.f. Tab. 4.4). Malgr e le fait que des oscillations avec une telle p eriodes ne soient stables que dans une r egion tr es  etroite se trouvant juste au-dessus du seuil de l'instabilit e primaire, la dynamique des r egimes plus lointains est  egalement influenc ee par cette bifurcation de Hopf lente. Etonnamment, des r egimes similaires ont  et e trouvées  a  $Pr = 0.72$ .

**(XVIII) – R egimes liées  a la bifurcation de Hopf lente ( $Pr = 7$ )** Dans Fig. 4.40, le r esultat d'une simulation effectu ee  a  $Ri = -0.13$  et  $Re = 180$  prouve la stabilit e du r egime associée  a la valeur propre complexe  a partie imaginaire tr es faible. Deux simulations avec des conditions initiales diff erentes ont  et e lanc ees  a  $Ri = -0.13$  et  $Re = 180$ : une simulation d emarrant d'un r egime asymptotique  a  $Ri = -0.13$  et  $Re = 190$ , o u des oscillations rapides coexistent avec des rotations lentes du plan de sym etrie (r egime XIX, c.f. le paragraphe suivant), et une simulation d emarrant d'un r egime asymptotique  a  $Ri = -0.15$  et  $Re = 190$ , o u des tourbillons se d etachent p eriodiquement (et sym etriquement par rapport  a l'axe de l' ecoulement) dans un plan de sym etrie (r egime XVI). Dans les deux cas, les oscillations rapides ( $St \approx 0.1$ ) tendent  a dispara ıtre. Dans le premier cas (montrée dans Fig. 4.40), la force de portance tourne autour de l'axe de l' ecoulement, d ecrivant ainsi des cercles presque parfaits, prouvant ainsi l'existence d'un seul mode h elico ıdal associée  a la paire de valeurs propres complexes conjugu ees lente et instable. Dans le deuxi eme cas, la solution contient deux modes h elico ıdaux lents de m eme amplitude, ce qui fait appara ıtre des oscillations tr es lentes dans le plan de sym etrie d ej a existant. La th eorie faiblement non-lin eaire n'autorise pas l'existence que d'une seule solution si le couplage non-lin eaire entre les modes h elico ıdaux est pr esent. Pr es du seuil, ce couplage est tr es faible et une simulation extr emement longue serait n ecessaire pour faire dispara ıtre les conditions initiales instables et arriver  a l' etat

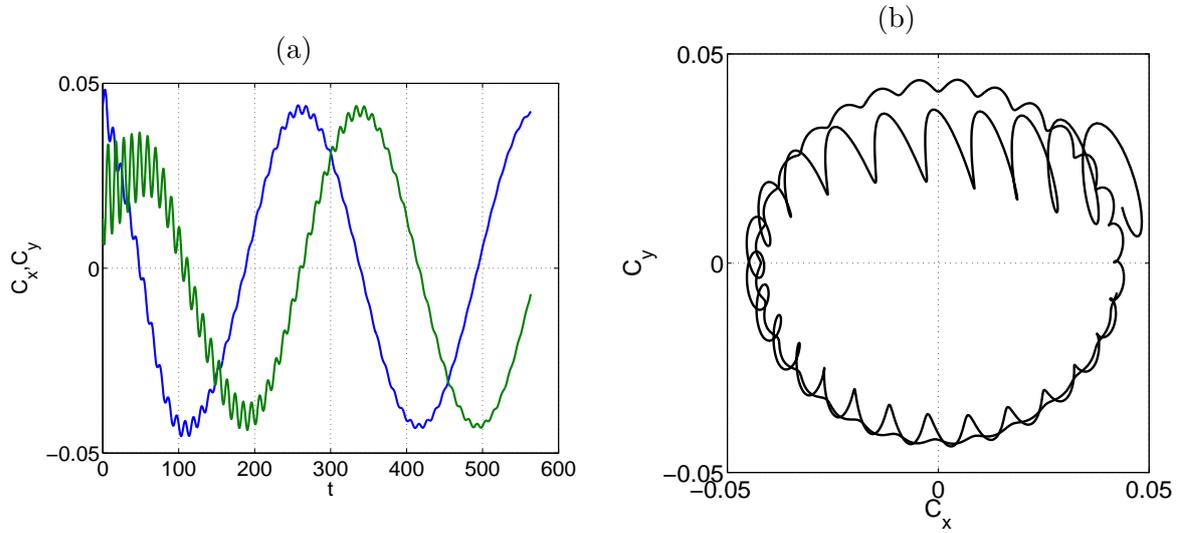


FIG. 4.40 – Simulation à  $Pr = 7$ ,  $Ri = -0.13$  et  $Re = 180$ , démarrant d'un régime avec des oscillations rapides et une rotation lente du sillage à  $Ri = -0.13$  et  $Re = 190$ . (a) Evolution temporelle des composantes du coefficient de portance  $C_x$  (bleu) et  $C_y$  (vert), (b) projection du  $C_L$  sur le plan  $(C_x, C_y)$ .

asymptotique de la Fig. 4.40. Néanmoins, la simulation présente des oscillations de la force de portance dans un plan perpendiculaire au plan de symétrie initial, qui croissent très vite, prouvant ainsi l'instabilité de la solution plane.

Une visualisation en 3D n'a pas d'intérêt pour le présent régime en raison des oscillations très lentes – le sillage ressemblerait à celui du régime I (la faible hélicité ne serait pas visible dans un domaine numérique d'une longueur de  $25d$  en aval de la sphère).

**(XIX) – Sillage avec oscillations rapides et plan de symétrie tournant ( $Pr = 7$ )**  
 Très près du seuil de la bifurcation de Hopf lente, entre  $Re = 180$  et  $185$  à  $Ri = -0.13$ , les oscillations rapides qui décroissent dans Fig. 4.40 deviennent instables et atteignent un état saturé, créant ainsi un nouveau régime montré dans Fig. 4.41. Ce régime est le résultat de la superposition de deux modes hélicoïdaux, un lent (provenant de la valeur propre complexe lente, décrite dans la section précédente) et un rapide (qui correspond à la valeur propre complexe rapide qui apparaît au seuil de l'instabilité primaire pour  $Ri < -0.156$ ). Le nombre de Strouhal des oscillations rapides est environ  $St = 0.1$ , la période des oscillations lentes est d'environ 400 unités de temps ( $St = 0.0025$ ). L'aspect hélicoïdal du mode lié à la valeur propre rapide est visible dans Fig. 4.41c, où des structures de vorticité, ayant la forme d'une hélice, sont montrés. Il faut remarquer que malgré une ressemblance entre les Figs. 4.33a et Fig. 4.41b, les origines des régimes XV et XIX sont différentes. Dans le régime XV, les rotations du plan de symétrie résultent du couplage entre les modes stationnaires et oscillants, ce qui se confirme par le fait que dans le modèle faiblement non-linéaire, aucune valeur propre lente n'a été envisagée. De plus, en comparant les structures des représentations

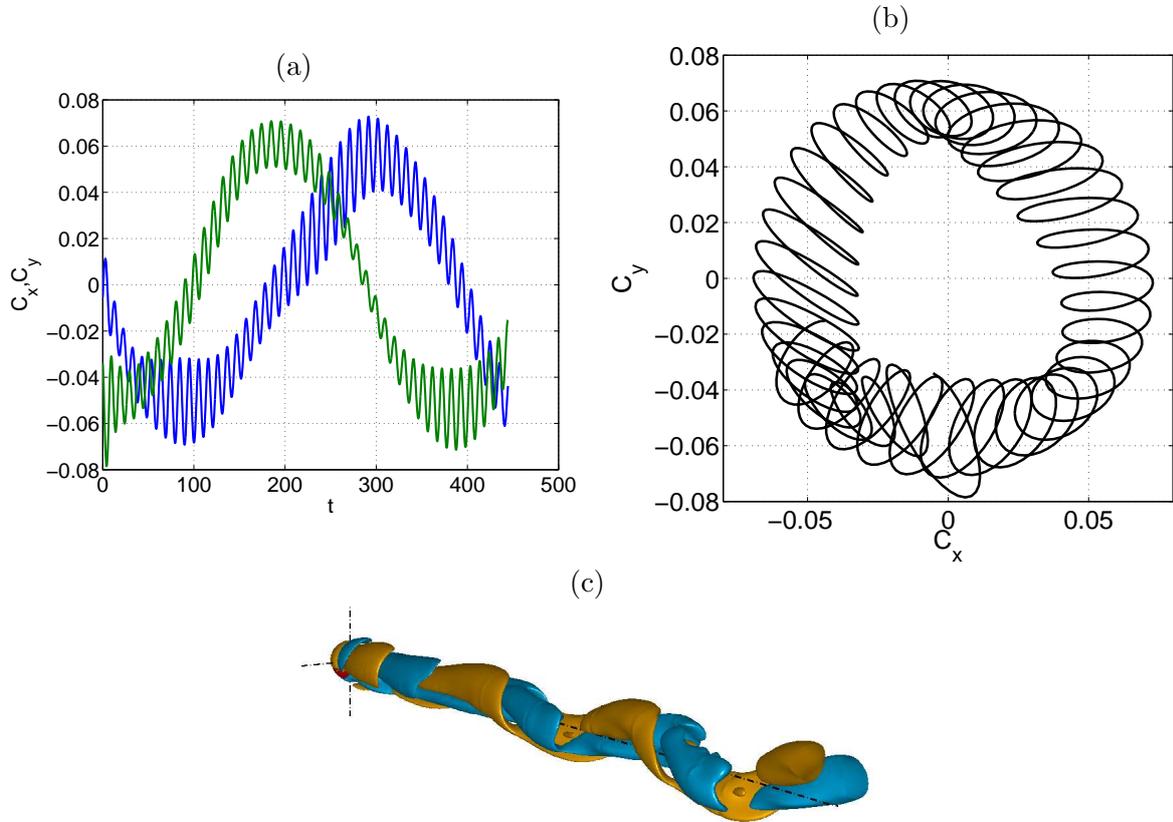


FIG. 4.41 – Régime avec deux modes hélicoïdaux (rapide et lent) à  $Ri = -0.13$ ,  $Re = 190$  et  $Pr = 7$ . (a) Evolution temporelle des composantes du coefficient de portance  $C_x$  (bleu) et  $C_y$  (vert), (b) projection du  $C_L$  sur le plan  $(C_x, C_y)$  et (c) isosurfaces de vorticité axiale ( $\omega_z = \pm 0.1$ ).

tridimensionnelles de la Fig. 4.33*c,d* et de la Fig. 4.41*c*, le régime XV présente un plan de symétrie (qui tourne lentement), alors que le régime XIX est clairement hélicoïdal.

**(XX) – Sillage oscillant latéralement ( $Pr = 7$ )** Ce régime assure la transition entre le régime plan avec détachement tourbillonnaire et valeur moyenne de  $C_L$  nulle (existant dans les  $Ri$  plus négatifs) et le régime oscillant autour d’une valeur moyenne de  $C_L$  non-nulle (existant dans les  $Ri$  moins négatifs). Dans le plan  $(C_x, C_y)$ , la projection du coefficient de portance a la forme d’ellipses (voir Fig. 4.42*b*), caractérisées par la fréquence rapide ( $St \approx 0.1$ ), ellipses dont le rapport d’aspect des deux axes principaux change et qui oscillent latéralement dans une plage de certains angles (elles ne font plus de rotations complètes autour de l’axe de l’écoulement). Aux moments où l’ellipse est “mince” (un grand rapport d’aspect des deux axes principaux), le sillage présente un plan de symétrie approximatif (voir Figs. 4.42*c*).

La fréquence lente dans le sillage évolue entre la fréquence de la bifurcation de Hopf lente

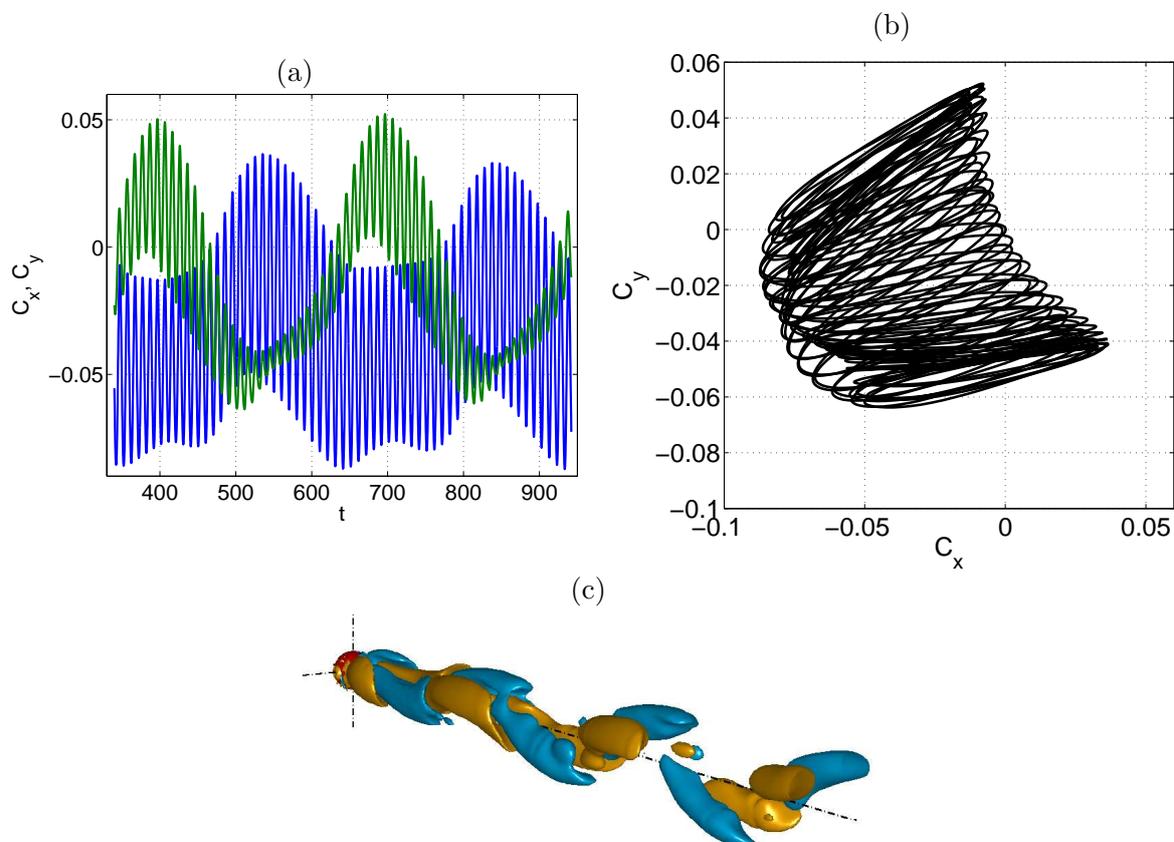


FIG. 4.42 – Simulation à  $Ri = -0.15$ ,  $Re = 210$  et  $Pr = 7$ . (a) Evolution temporelle des composantes du coefficient de portance  $C_x$  (bleu) et  $C_y$  (vert), donnant une idée de la période longue dans l'écoulement (deux périodes sont affichées), (b) projection du  $C_L$  sur le plan  $(C_x, C_y)$  et (c) isosurfaces de vorticité axiale ( $\omega_z = \pm 0.15$ ) présentant une symétrie plane temporelle.

(la fréquence de  $St \approx 0.003$  dans les régimes XVIII et XIX), visible dans Fig. 4.42a, et une fréquence de  $St \approx 0.01$  (une période trois fois plus courte), visible dans Fig. 4.43a à droite. Pour certains paramètres  $Ri$  et  $Re$ , les projections du  $C_L$  sur le plan  $(C_x, C_y)$  ressemblent aux motifs des figures de Lissajous (c.f. Fig. 4.43b à droite).

Sur le bord situé en haut et à gauche du sous-domaine d'existence du régime XX, une deuxième fréquence, se trouvant entre celle de la bifurcation de Hopf lente et celle des oscillations rapides, apparaît et la projection du coefficient de portance se remet à tourner (voir Fig. 4.44b). Ceci est clairement la dernière étape avant le régime chaotique. Néanmoins, l'aspect quasi-périodique de l'évolution temporelle de  $C_x$  et  $C_y$  de la Fig. 4.44a nous empêche de classer ce régime en tant que chaotique. La nouvelle fréquence est visiblement comparable à la fréquence sous-harmonique observée dans les régimes VII et XXII (voir la section suivante).

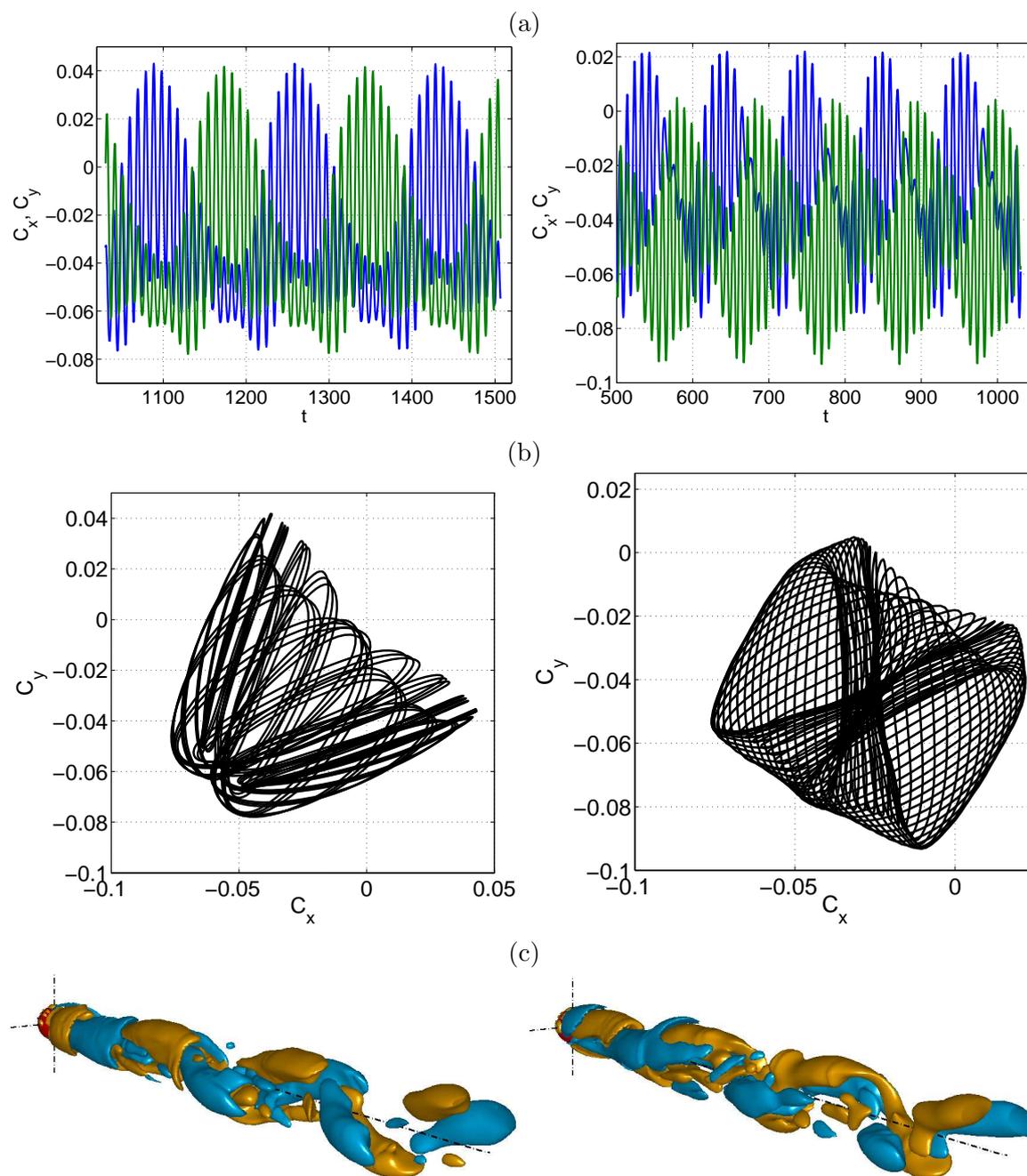


FIG. 4.43 – Simulation à  $Pr = 7$  et  $Ri = -0.15$ ,  $Re = 220$  (colonne de gauche),  $Ri = -0.13$ ,  $Re = 240$  (colonne de droite). (a) Evolution temporelle des composantes du coefficient de portance  $C_x$  (bleu) et  $C_y$  (vert), (b) projection du  $C_L$  sur le plan  $(C_x, C_y)$  et (c) isosurfaces de vorticité axiale ( $\omega_z = \pm 0.1$ ).

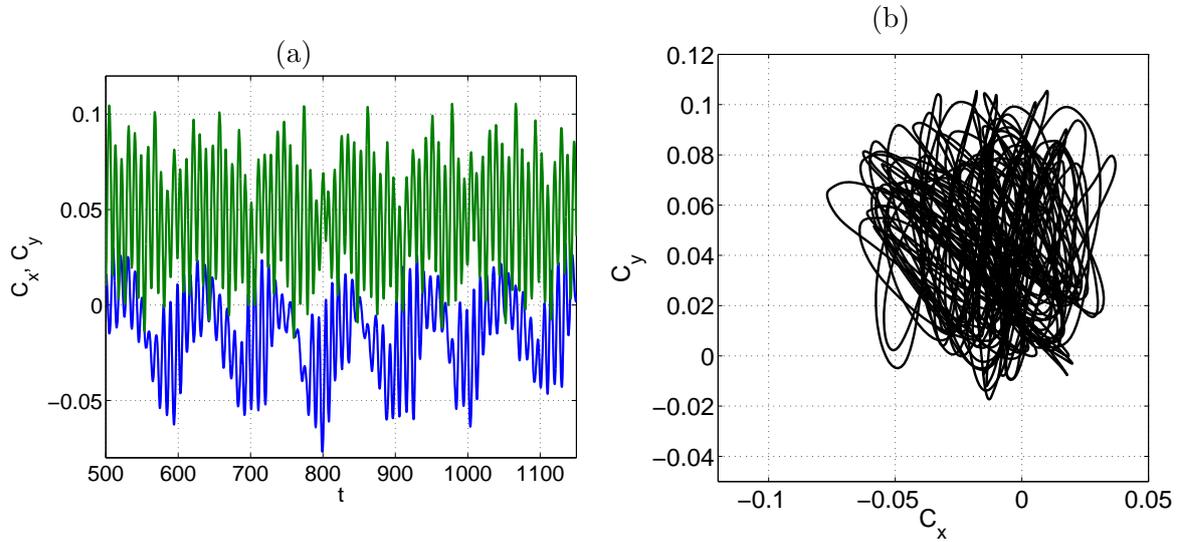


FIG. 4.44 – Simulation à  $Ri = -0.1$ ,  $Re = 270$  et  $Pr = 7$ . (a) Evolution temporelle des composantes du coefficient de portance  $C_x$  (bleu) et  $C_y$  (vert), (b) projection du  $C_L$  sur le plan  $(C_x, C_y)$ .

**(XXI) – Sillage oscillant latéralement ( $Pr = 0.72$ )** A  $Pr = 0.72$ , des régimes similaires aux régimes XX (régimes caractérisés par une période extrêmement longue) ont été trouvés dans une région restreinte du plan  $Ri - Re$  (notamment, à  $Ri = -0.1$  et  $Re = 230$  et  $240$ ). A  $Re = 230$ , la période atteint 1100 unités de temps en raison du basculement du coefficient de traînée entre les demi-plans  $C_x > 0$  et  $C_x < 0$  (voir Fig. 4.45). A  $Re = 240$ , ce changement de demi-plan prédominant n'existe plus, la période s'établit alors à environ 550 unités de temps. Malgré une ressemblance marquante avec les régimes XX à  $Pr = 7$ , il n'est pas évident que l'origine des deux dynamiques soit la même.

**(XXII) – Détachement tourbillonnaire quasi-périodique avec un plan de symétrie et une valeur moyenne de  $C_L$  nulle** A  $Pr = 0.72$ , ce régime n'a été trouvé que dans une région de  $Ri$  modérés, entre  $Ri = -0.09$  et  $Ri = -0.17$ , tandis que, à  $Pr = 7$ , la région d'existence d'un tel régime est décalée vers les nombres de Richardson plus négatifs (entre  $Ri = -0.17$  et  $Ri = -0.4$ ). Ce régime est similaire au régime périodique avec une symétrie plane et une valeur moyenne de  $C_L$  non-nulle (VII). L'aspect de l'écoulement est montré pour les deux nombres de Prandtl dans Fig. 4.46 (à comparer avec la Fig. 4.32b), l'évolution temporelle du coefficient de portance avec le spectre correspondant sont montrés dans Fig. 4.47a et b, respectivement. La fréquence rapide est celle du régime périodique ( $St \approx 0.1$ ); la première fréquence sous-harmonique correspond à  $St \approx 0.03$  et une deuxième fréquence sous-harmonique, visible dans le spectre de la Fig. 4.47b et correspondant à une période de 70 unités de temps (c.f. Fig. 4.47a), est caractérisée par un  $St = 0.012$ .

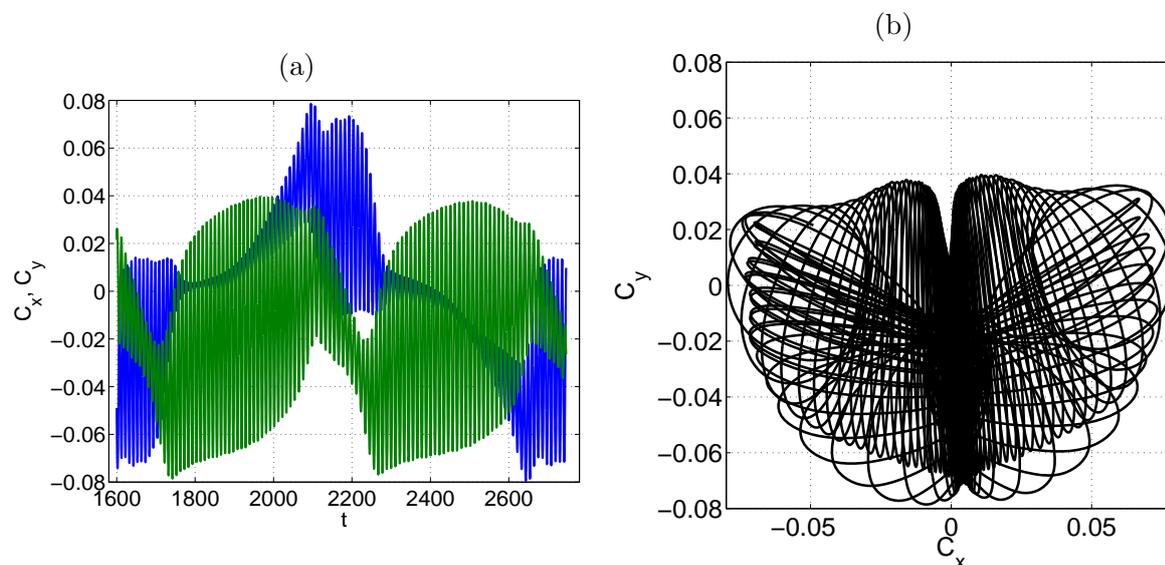


FIG. 4.45 – Simulation à  $Ri = -0.1$ ,  $Re = 230$  et  $Pr = 0.72$ . (a) Evolution temporelle des composantes du coefficient de portance  $C_x$  (bleu) et  $C_y$  (vert), (b) projection du  $C_L$  sur le plan  $(C_x, C_y)$ .

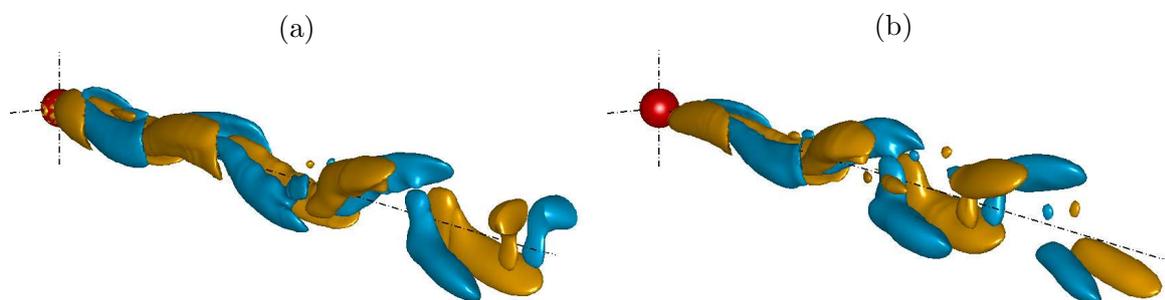


FIG. 4.46 – Détachement tourbillonnaire quasi-périodique avec une valeur moyenne de  $C_L$  nulle à (a)  $Ri = -0.15$ ,  $Re = 200$  et  $Pr = 0.72$ , (b)  $Ri = -0.2$ ,  $Re = 200$  et  $Pr = 7$ , représenté en terme d'isosurfaces de vorticité axiale   un niveau  $\omega_z = \pm 0.2$ .

### 4.3.5 Coefficient de tra nee et de portance, nombre de Nusselt

Comme dans la section 4.2.5, concernant l'écoulement assistant, la présente section porte sur les caractéristiques dynamiques de l'écoulement (coefficients de tra nee et de portance) et thermiques (nombre de Nusselt).

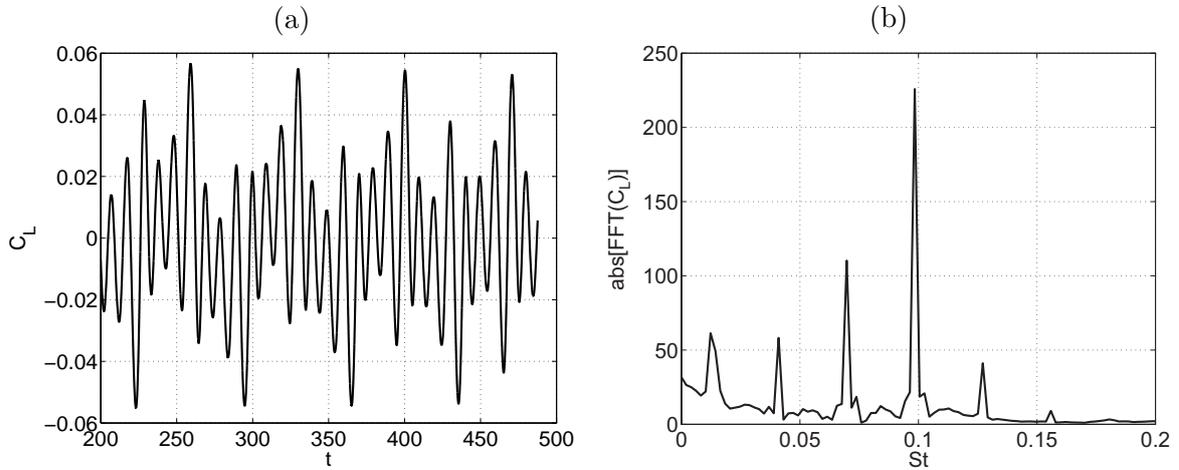


FIG. 4.47 – (a) Coefficient de portance (dans le plan des oscillations) vs. temps à  $Pr = 0.7$ ,  $Ri = -0.2$  et  $Re = 200$ , (b) transformation de Fourier correspondante.

### Coefficient de traînée

Fig. 4.48 montre l'influence du nombre de Reynolds sur le coefficient de traînée  $C_D$ , défini par l'équation (4.26), pour certaines valeurs de  $Ri$ . Contrairement au cas de l'écoulement assistant, le  $C_D$  décroît avec  $|Ri|$  pour un  $Re$  constant en écoulement opposant. Ce comportement est dû aux forces de flottabilité près de la sphère qui ont tendance à compenser les forces d'inertie et à diminuer ainsi la chute de pression, responsable de la traînée. Aux mêmes paramètres  $Ri$  et  $Re$ , le coefficient de traînée est plus faible à  $Pr = 0.72$  qu'à  $Pr = 7$ . Le changement de pente sur les courbes lorsqu'un écoulement subit une bifurcation régulière (au seuil de l'instabilité primaire) est presque invisible, contrairement au cas où c'est une bifurcation de Hopf qui brise l'axisymétrie – le coefficient de traînée est renforcé par rapport au régime axisymétrique. Au seuil de la bifurcation de Hopf secondaire, le changement de pente est à nouveau presque négligeable. Les changements de pente sont visibles dans les détails des deux graphes de la Fig. 4.48.

### Coefficient de portance

Fig. 4.49 montre l'influence du nombre de Reynolds sur la valeur moyenne du coefficient de portance pour certaines valeurs de  $Ri$ . Le coefficient de portance est défini par l'équation (4.27). Par cette définition, la valeur moyenne de  $C_L$  des régimes XVI et XX est nulle, ainsi que celle des régimes chaotiques et tournants (ces régimes ne sont donc pas tracés dans Fig. 4.49). Tandis qu'à  $Pr = 0.72$ , la valeur moyenne de  $C_L$  décroît avec  $|Ri|$ , le contraire est observé à  $Pr = 7$ . Le maximum est atteint, pour les deux nombres de Prandtl, à un  $Re$  légèrement supérieur à  $Re_2$  (seuil de la bifurcation de Hopf).

Afin de compléter les caractéristiques de la portance, la valeur de l'écart RMS du coefficient de portance, défini par l'équation (4.28), est montrée dans Fig. 4.50. La tendance

globale est que la valeur de l'écart RMS de  $C_L$  croît avec le  $Re$  pour un  $Ri$  constant.

### Nombre de Nusselt

L'influence du nombre de Reynolds sur le nombre de Nusselt (défini par l'équation (4.5)) pour certains  $Ri$  sélectionnés est tracée dans Fig. 4.51. Par souci de clarté, seuls deux cas extrêmes ont été tracés dans les graphes ( $Ri = 0$  et  $Ri = -0.2$ ). On peut remarquer que la variation du  $Nu$  en fonction du  $Ri$  pour un  $Re = \text{const.}$  est plus importante à  $Pr = 0.72$  qu'à  $Pr = 7$ . À  $Pr = 7$ , le transfert de chaleur par advection est beaucoup plus important qu'à  $Pr = 0.72$ , où la diffusion de la chaleur joue un rôle non-négligeable. À  $Pr = 0.72$ , le nombre de Nusselt dépend du régime d'écoulement – d'un régime à l'autre, l'épaisseur de la couche limite change et influence ainsi la conduction de la chaleur. Contrairement au cas de l'écoulement assistant, le nombre de Nusselt décroît avec  $|Ri|$  pour un  $Re$  constant, la raison étant que les forces de flottabilité ont tendance à augmenter l'épaisseur la couche limite et à défavoriser ainsi le transfert thermique par conduction (ce comportement est juste mentionné ici car il n'est visible qu'à  $Pr = 0.72$ ). Aucun changement important de pente n'est visible près de la frontière entre les régimes axisymétriques et tridimensionnels (une très légère baisse de la pente du nombre de Nusselt pour un  $Re > Re_1$  est néanmoins perceptible dans les graphes).

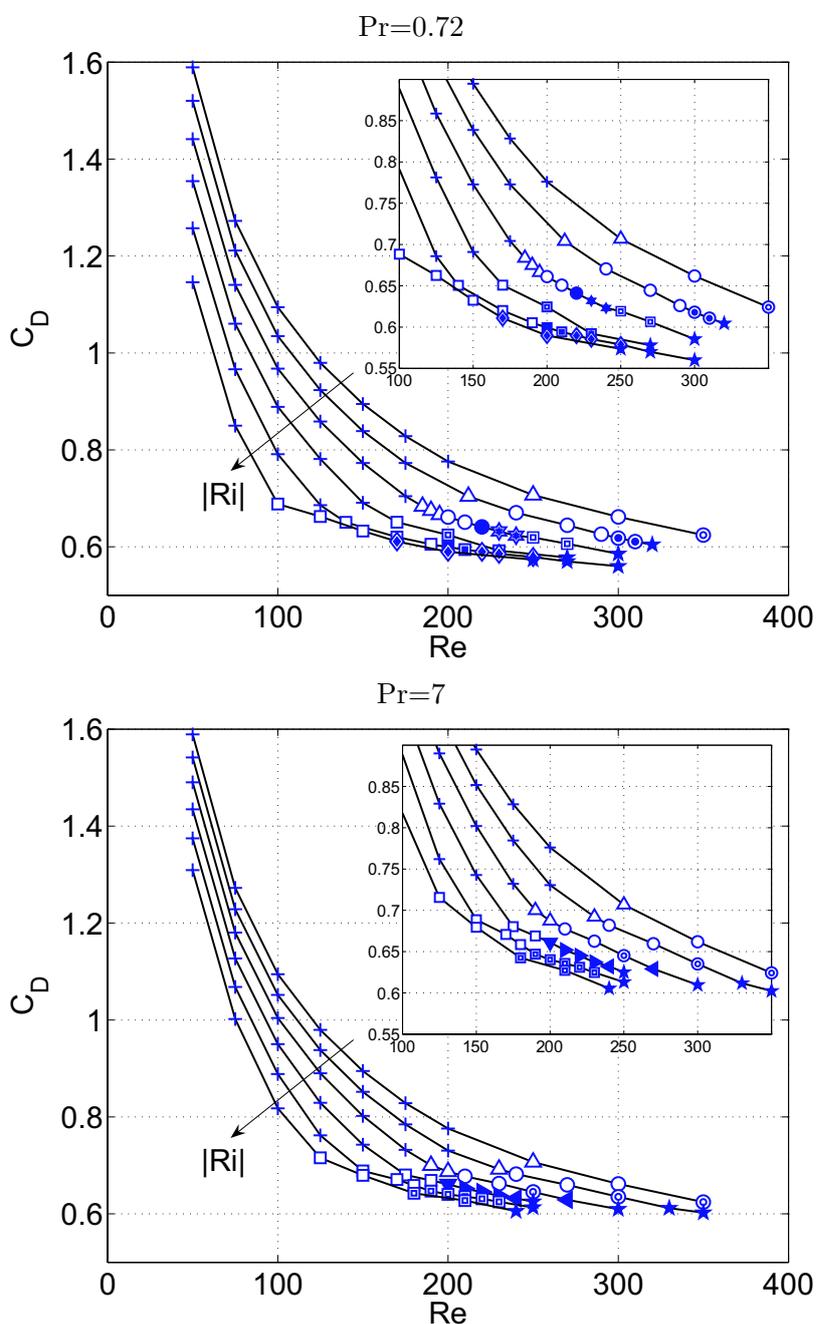


FIG. 4.48 – Valeurs du coefficient de traînée en fonction de  $Re$  à  $Ri = 0, -0.05, -0.1, -0.15, -0.2$  et  $-0.25$  pour les deux nombres de Prandtl considérés. Les détails dans le coin en haut à droite montrent le changement de pente lorsqu’une instabilité primaire de type bifurcation de Hopf s’installe. Les flèches indiquent un  $|Ri|$  croissant.

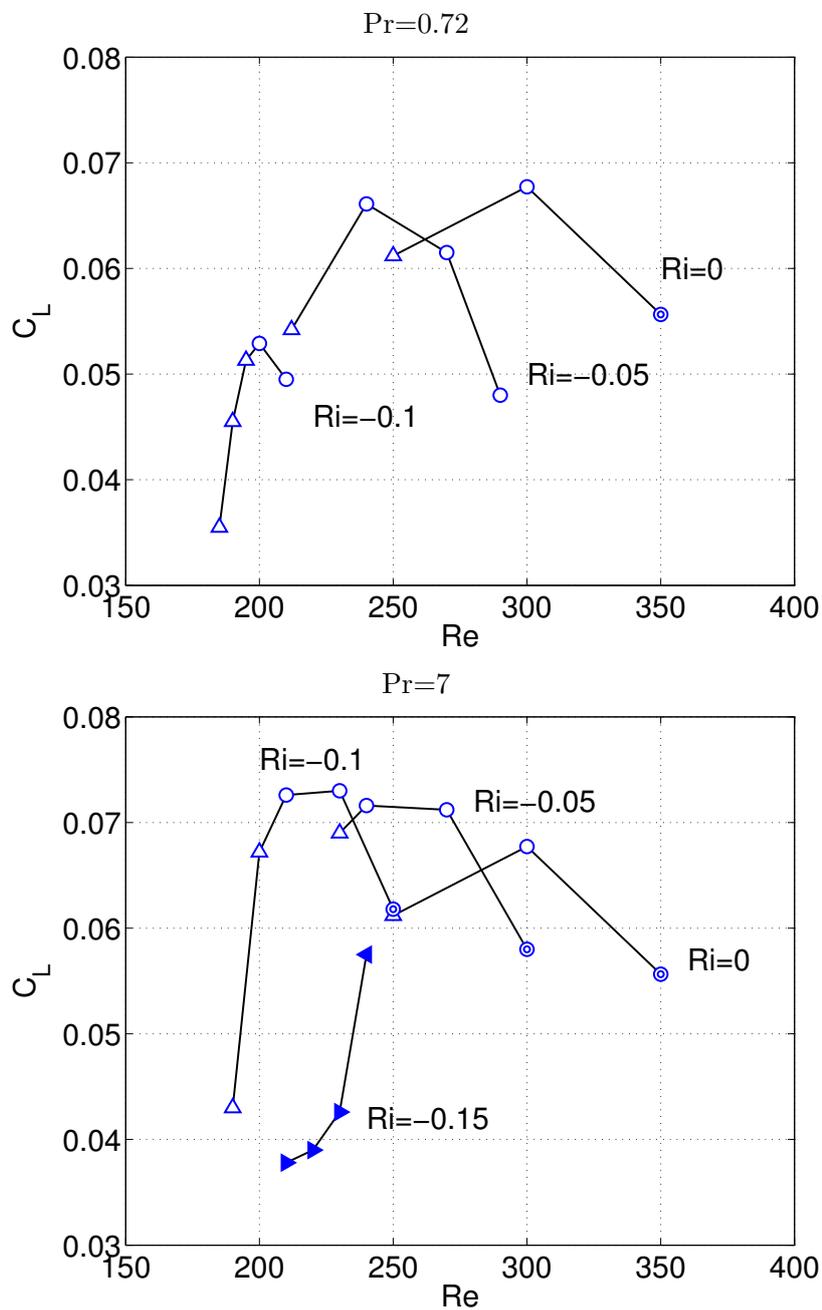


FIG. 4.49 – Valeurs moyennes du coefficient de portance en fonction de  $Re$  aux nombres de  $Ri$  sélectionnés.

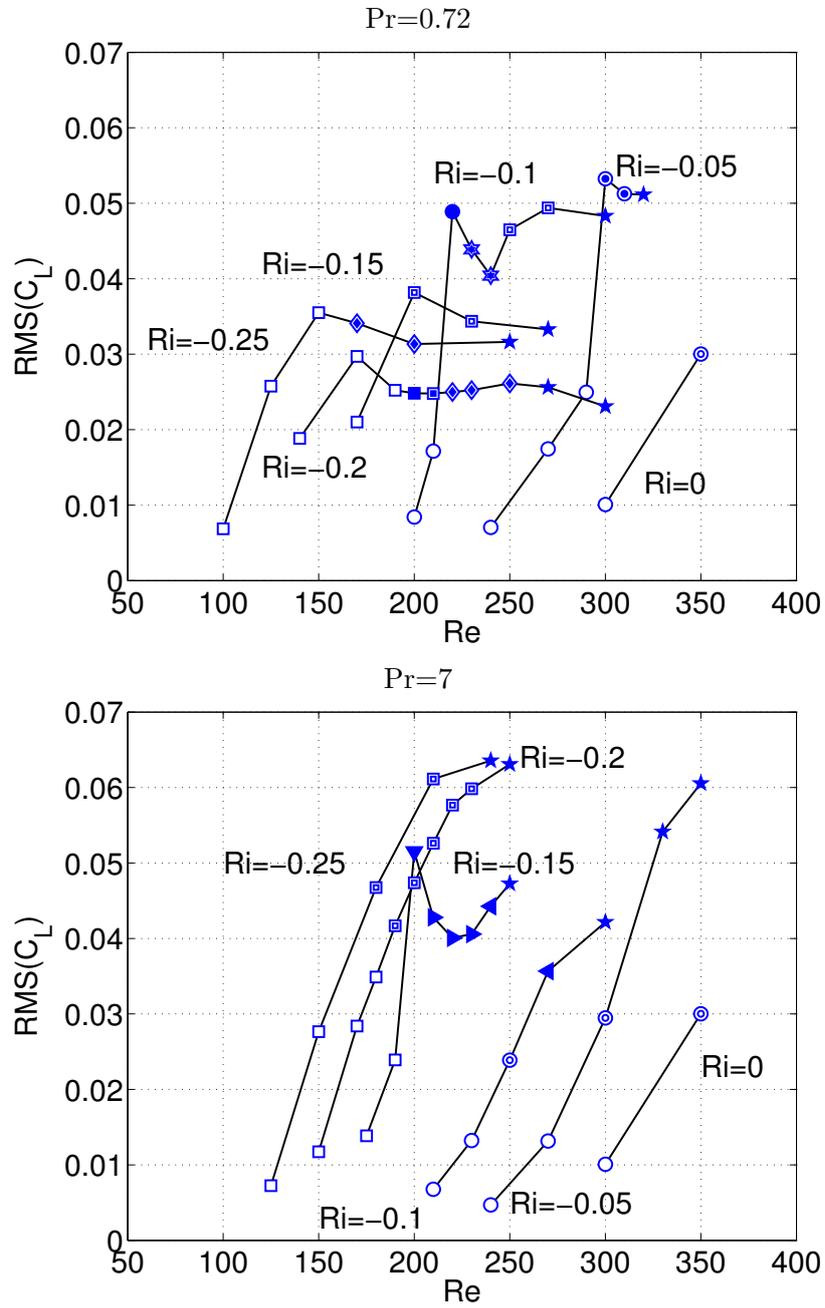


FIG. 4.50 – Valeurs RMS du coefficient de portance.

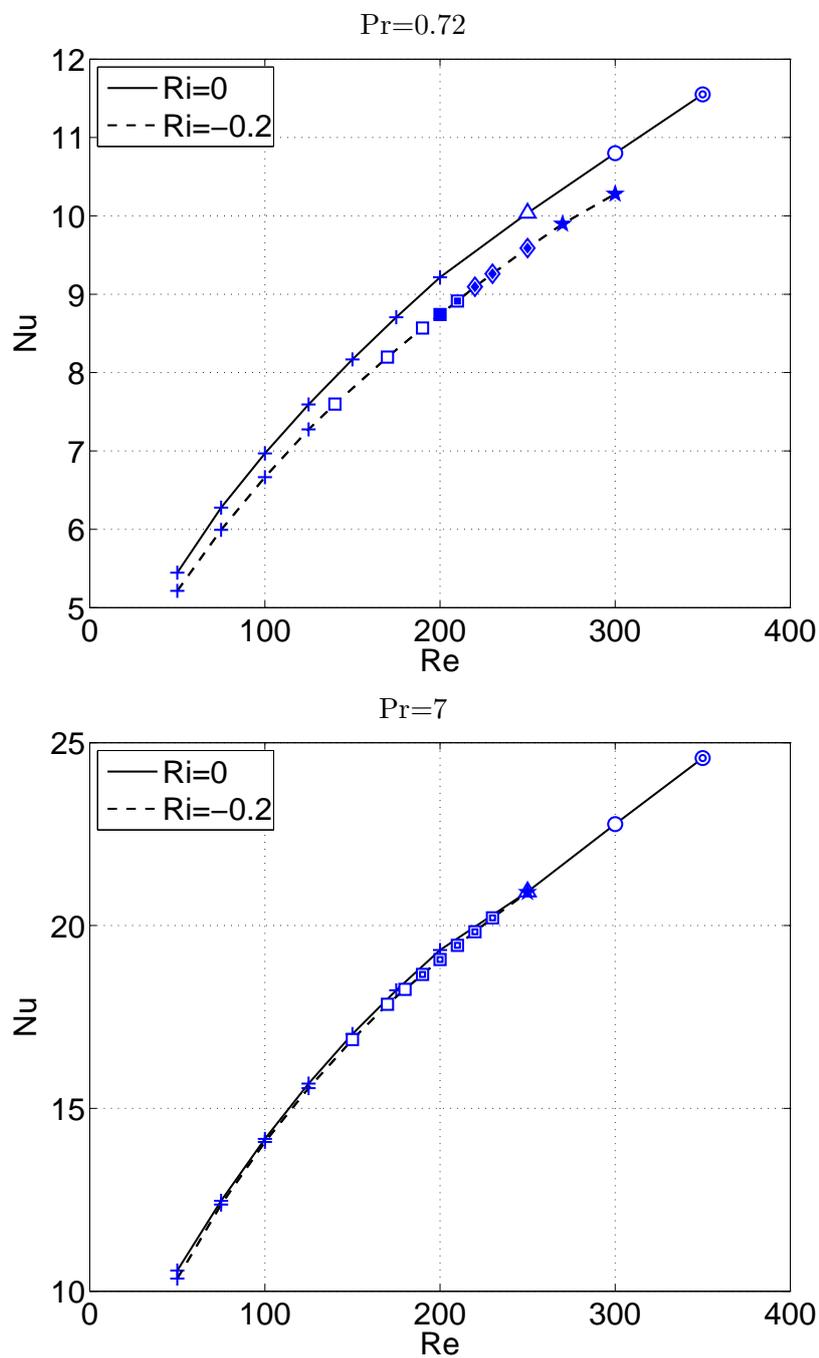


FIG. 4.51 – Nombre de Nusselt en fonction de  $Re$  pour  $Ri = 0$  et  $-0.2$  pour les deux nombres de Prandtl.

## 4.4 Ecoulement opposant – grands $|Ri|$

Dans une investigation numérique récente, Mograbi & Bar-Ziv (2005a) ont étudié l'écoulement autour d'une sphère fixe chauffée en écoulement opposant pour de très faibles nombres de Reynolds et des nombres de Richardson inférieurs à  $-1$ . Les simulations axisymétriques ont révélé une zone de recirculation en amont de la sphère (c.f. Fig. 1.6) qui, semble-t-il, remplit tout le domaine numérique, indépendamment de sa taille. L'écoulement près de la sphère est un écoulement de convection naturelle pure (la direction des forces de flottabilité étant opposée à celle de l'écoulement forcé); le panache thermique étant renversé, la force de traînée devient négative.

Dans la présente section, nous présentons des simulations pleinement tridimensionnelles réalisées à  $Re = 1$  et  $Ri < -1$  afin de démontrer qu'en abandonnant l'hypothèse restrictive de l'axisymétrie, l'écoulement devient tridimensionnel et présente une zone de recirculation de taille physique. Le phénomène du retournement de l'écoulement près de la sphère est également étudié pour d'autres nombres de Reynolds, la méthode utilisée consistant à se placer à un  $Re$  constant (correspondant à une vitesse d'écoulement extérieur constante) et à augmenter progressivement le chauffage (ce qui se traduit par une augmentation de la valeur absolue du nombre de Richardson). Les nombres de Reynolds considérés sont  $Re = 1, 10$  et  $100$ , le nombre de Prandtl était celui de l'air ( $Pr = 0.72$ ).

### 4.4.1 $Re = 1$

Malgré la valeur extrêmement faible du nombre de Reynolds, il a été montré qu'en augmentant le nombre de Richardson vers  $|Ri| > 1$ , l'écoulement devient tridimensionnel (via une bifurcation de Hopf) lorsque le panache thermique inverse le sens de l'écoulement près de la sphère. La valeur du coefficient de traînée devient brusquement négative. Néanmoins, comme la chute du  $C_D$  a été observée alors que l'écoulement était encore axisymétrique, le changement de signe du coefficient de traînée et l'apparition d'un panache thermique inversé par rapport à la direction de l'écoulement extérieur, sont donc deux phénomènes indépendants.

Afin de capter le moment où le  $C_D$  devient négatif, une plage de  $Ri$  entre  $Ri = -0.9$  et  $Ri = -1$  a été balayée avec un pas  $\Delta Ri = 0.01$ . Pour mettre en évidence un éventuel phénomène d'hystérésis, la plage de  $Ri$  a été balayée dans les deux sens – de  $Ri = -1$  vers  $Ri = -0.9$  et *vice versa*. L'évolution du  $C_D$  en fonction de  $|Ri|$  est tracée dans Fig. 4.52a (aucun phénomène d'hystérésis n'a été observé ici). Le changement de signe du  $C_D$  est brusque, apparaît alors que l'écoulement est encore axisymétrique et est accompagné par la formation d'une zone de recirculation en aval de la sphère, dont la longueur  $L_r/d$  en fonction de  $|Ri|$  est tracée dans Fig. 4.52b. Fig. 4.52c montre l'évolution de l'angle de séparation  $\Phi_s$ , mesuré à partir du point d'arrêt aval. A  $Ri = -1$ , la longueur de la zone de recirculation atteint déjà plus de 20 diamètres de la sphère; c'est à ce moment que la couche limite commence à se détacher de la surface amont de la sphère (à  $Ri = -0.99$ , l'angle de séparation vaut encore  $178.7^\circ$ , alors que, à  $Ri = -1$ , le panache inverse existe déjà. Fig. 4.53a et b montrent, respectivement, un profil de vitesse axiale adimensionnée  $u$  et de pression adimensionnée  $p$  sur l'axe de l'écoulement pour  $Ri = -0.9$  et  $Ri = -1$ . A  $Ri = -0.9$ , la couche limite est

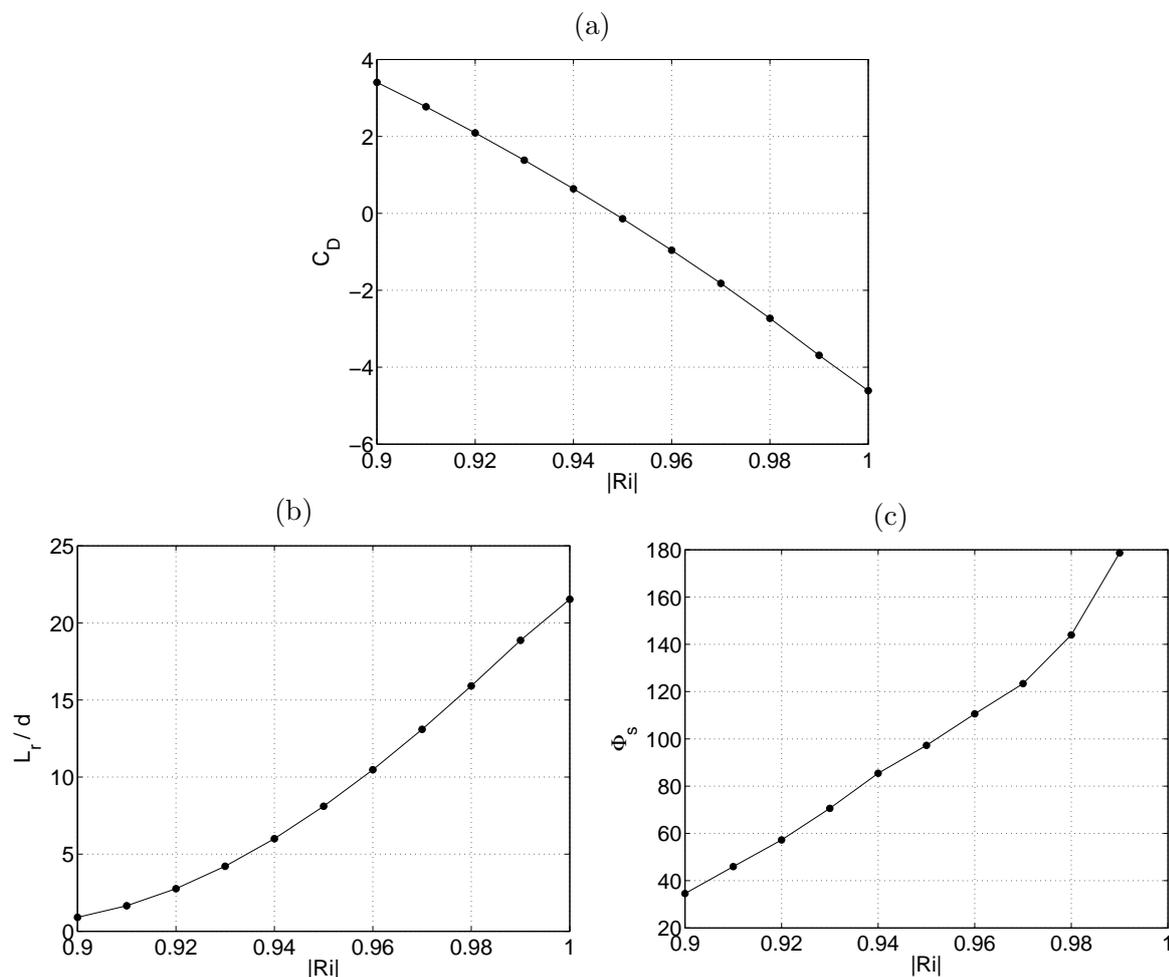


FIG. 4.52 – (a) Coefficient de traînée en fonction de la valeur absolue du nombre de Richardson, (b) évolution de la longueur de recirculation en aval de la sphère et (c) évolution de l'angle de séparation de la couche limite en fonction de  $|Ri|$ . Dans toutes les simulations,  $Re = 1$ .

encore attachée et une petite zone de recirculation en aval de la sphère apparaît. À  $Ri = -1$ , la vitesse axiale devient négative même en amont de la sphère, ce qui signifie que la sphère est noyée entièrement dans la zone de recirculation. La pression sur la face aval de la sphère est élevée à cause du fluide recirculant et le gradient négatif de la pression est responsable du coefficient de traînée négatif.

La taille de la zone de recirculation en amont de la sphère croît rapidement avec  $|Ri|$  et, à  $Ri = -1.2$ , sa longueur atteint déjà 78 diamètres. Le maximum de la vitesse axiale est de  $1.46 v_\infty$  sur l'axe de l'écoulement (la vitesse ayant la direction opposée à celle de la vitesse uniforme extérieure  $v_\infty$ ). Le coefficient de traînée aux mêmes paramètres vaut  $C_D = -35$ . L'écoulement axisymétrique à  $Ri = -1.2$  est toujours stable; néanmoins, à  $Ri \approx -1.35$ ,

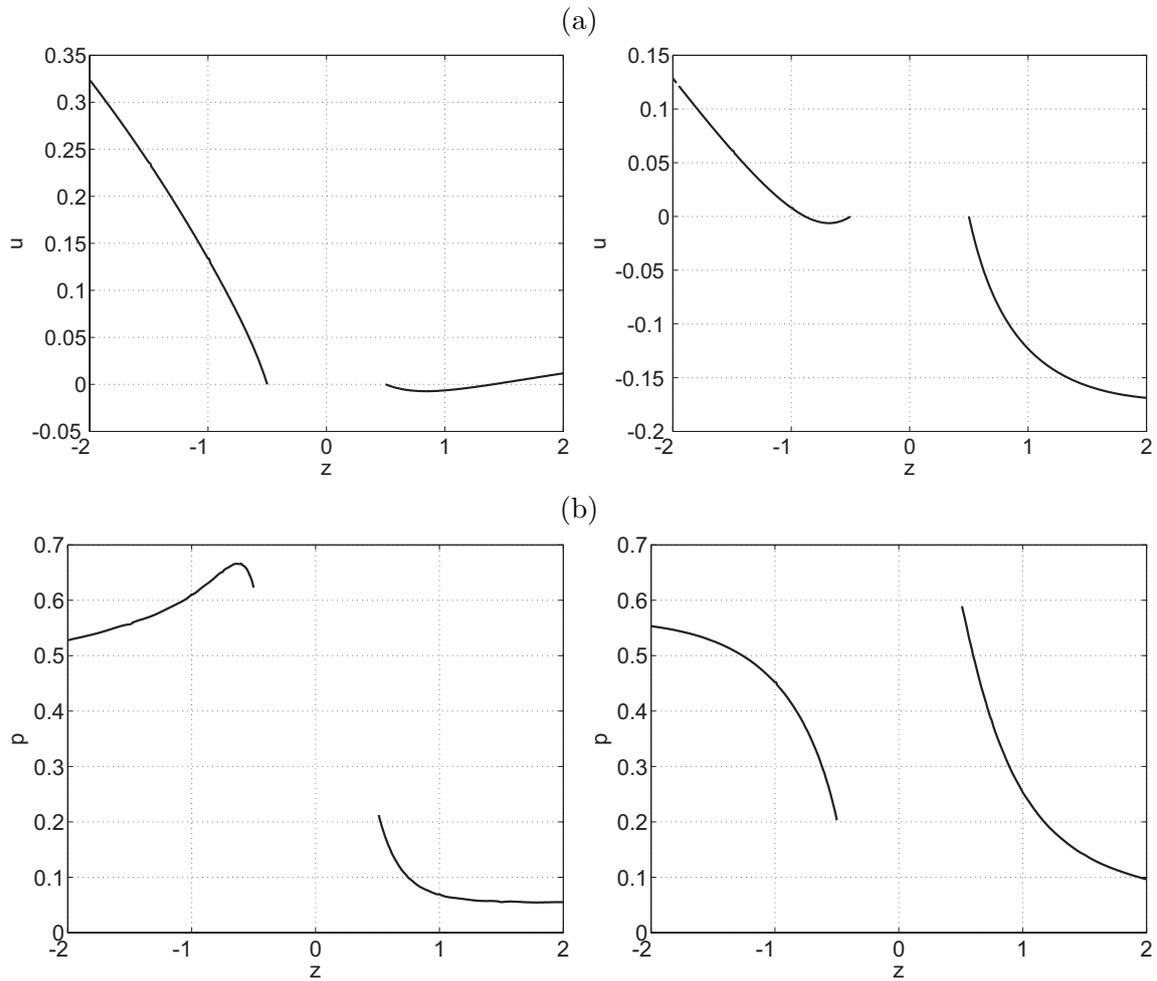


FIG. 4.53 – Profils de vitesse axiale (a) et de pression (b) sur l'axe de l'écoulement à  $Ri = -0.9$  (à gauche) et à  $Ri = -1$  (à droite).

l'écoulement subit une bifurcation de Hopf (celle de l'instabilité primaire pour  $Ri < -0.133$  à  $Pr = 0.72$  et pour  $Ri < -0.098$  à  $Pr = 7$ ). Les évolutions temporelles des composantes du coefficient de portance  $C_x$  et  $C_y$  sont montrées dans Fig. 4.54a, celle du coefficient de traînée est montrée dans Fig. 4.54b. Les oscillations du  $C_L$  sont quasi-planes; néanmoins, une composante très faible du coefficient de portance perpendiculaire au plan de symétrie (approximativement) est présente et ne s'atténue pas avec le temps. La valeur moyenne du  $C_D$  est supérieure à celle de l'écoulement axisymétrique (marqué par un trait interrompu dans Fig. 4.54b). A part une symétrie plane imparfaite, la différence principale entre la bifurcation de Hopf décrite dans les sections 4.2.2 et 4.3.2 et celle à  $Ri \approx -1.35$  et  $Re = 1$  concerne le nombre de Strouhal qui est très faible (la période de l'écoulement de la Fig. 4.54 est de 327 unités de temps, ce qui correspond à  $St = 0.0031$ ).

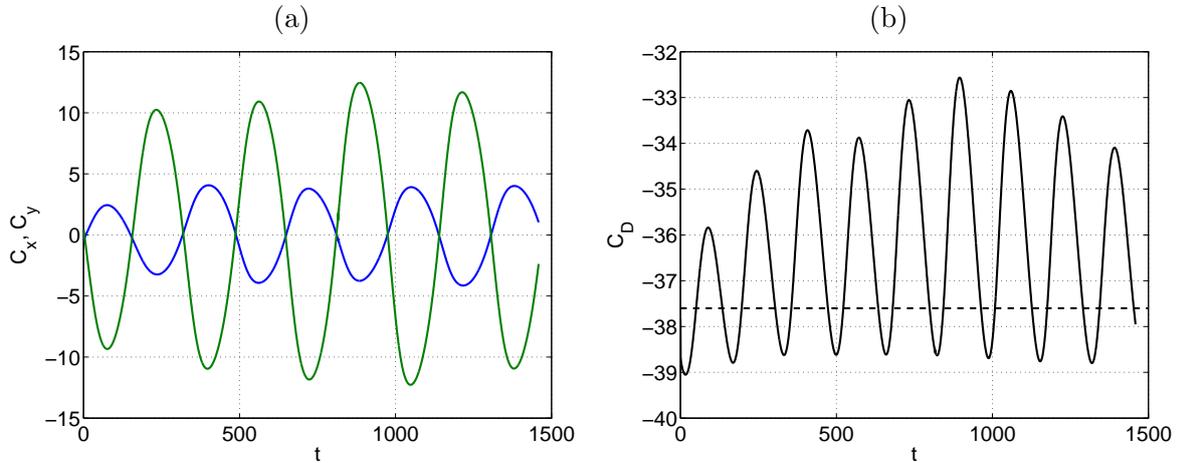


FIG. 4.54 – Evolution temporelle de  $C_x$  et  $C_y$  (a) et de  $C_D$  (b) à  $Ri = -1.5$  et  $Re = 1$ . La ligne interrompue représente le coefficient de traînée d’une simulation axisymétrique.

En traçant l’isosurface de vitesse axiale  $u = 0$  en régime axisymétrique et en régime tridimensionnel, Figs. 4.55a et b représentent la taille de la recirculation autour de la sphère, respectivement, à  $Ri = -1.5$  et  $Re = 1$ . La taille de la zone de recirculation en amont a été divisée approximativement par 2 en passant d’une simulation axisymétrique à une simulation tridimensionnelle. Les dimensions de la sphère sont négligeables par rapport à la taille de la zone de recirculation : la sphère joue donc le rôle d’une simple source de chaleur ponctuelle. Une observation intéressante a été faite : si l’on multiplie le nombre de Strouhal ( $St = 0.0031$ ) par 50, ce qui est la taille transversale de la zone de recirculation, on obtient le nombre de Strouhal  $St = 0.155$  qui est du même ordre que le nombre de Strouhal au seuil de l’instabilité primaire à  $Ri = -0.15$  et  $Re = 170$  (brisure de l’axisymétrie due à l’inertie de l’écoulement extérieur). Comme il a déjà été constaté dans les sections précédentes, la présence de vorticité axiale est un bon indicateur de la tridimensionalité de l’écoulement. Fig. 4.56 montre des isosurfaces de la vorticité axiale à  $Ri = -0.15$  et  $Re = 170$ . L’écoulement présente, avec ces paramètres, un détachement tourbillonnaire   très grande échelle spatiale.

À  $Ri = -1.5$ , l’extension de la zone de recirculation en amont de la sphère dans les simulations tridimensionnelles est pratiquement constante (c.f. Figs. 4.55b). À  $Ri = -2$ , la recirculation s’étend plus loin en amont de la sphère mais, cette fois-ci, elle oscille entre les valeurs  $-120d$  et  $-60d$ .

À un nombre de Reynolds aussi bas, la diffusivité thermique est importante et la chaleur est transférée principalement par conduction. Le nombre de Nusselt est donc indépendant du régime d’écoulement et reste proche de  $Nu = 2.1$  dans toutes les simulations    $Re = 1$  et  $Ri$  entre  $-0.9$  et  $-2$ . La forme des isosurfaces de la température est donc sphérique avec le centre qui co incide avec celui de la sphère.

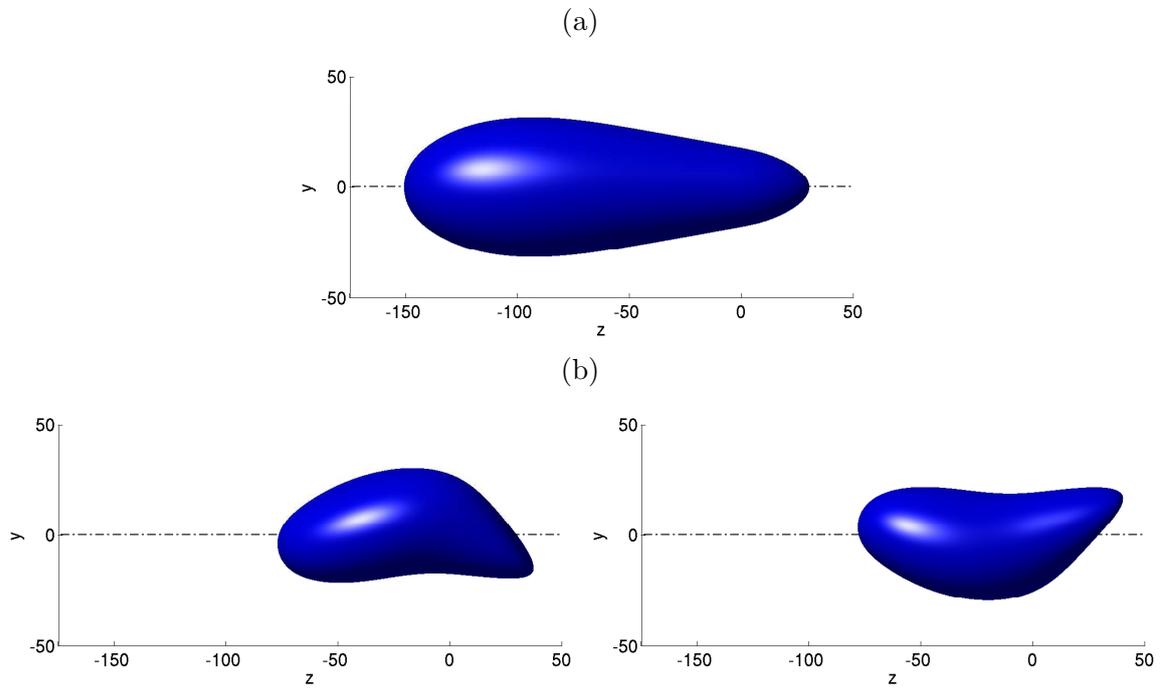


FIG. 4.55 – Isosurface de vitesse axiale au niveau  $u = 0$  à  $Ri = -1.5$  et  $Re = 1$ . (a) Ecoulement axisymétrique, (b) deux figures distantes d'une demi-période d'une simulation tridimensionnelle.

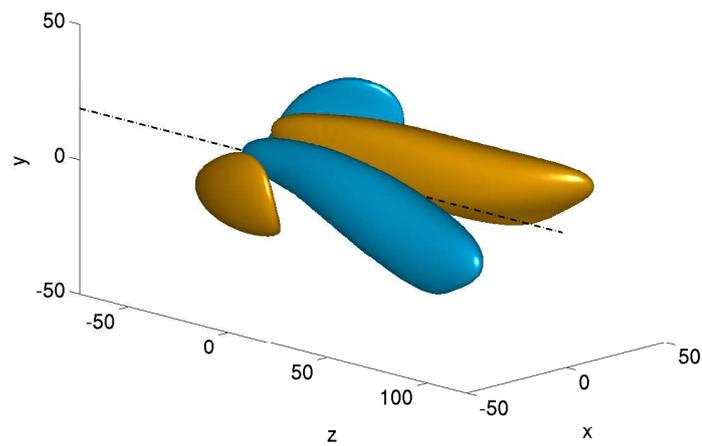


FIG. 4.56 – Isosurfaces de la vorticité axiale au niveau  $\omega_z = \pm 0.02$  à  $Ri = -1.5$  et  $Re = 1$ .

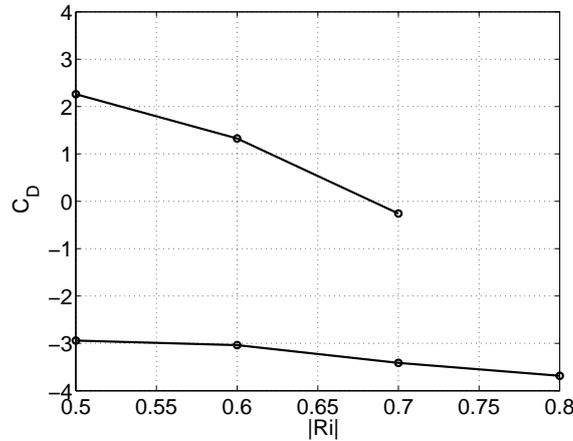


FIG. 4.57 – Deux branches de la solution axisymétrique stable à  $Re = 10$ .

#### 4.4.2 $Re = 10$

A  $Re = 10$ , l'investigation du changement de signe du coefficient de traînée et du retournement du panache est effectuée entre  $Ri = -0.5$  et  $Ri = -1$ . La solution axisymétrique a été obtenue pour des nombres de Richardson entre  $-0.5$  et  $-0.8$  avec un pas  $\Delta Ri = 0.1$ . Un phénomène d'hystérésis a été observé, ce qui se traduit par la coexistence de deux solutions axisymétriques stables à  $Ri = -0.5$ ,  $-0.6$  et  $-0.7$  (voir Fig. 4.57). La branche du haut cesse d'être stable entre  $Ri = -0.7$  et  $Ri = -0.8$ , i.e. la solution, instable même en forçant l'axisymétrie du problème, rejoint la solution axisymétrique de la branche du bas. L'analyse de stabilité linéaire montre que les solutions se trouvant sur la branche du haut sont toutes stables, même par rapport aux perturbations du sous-espace azimutal  $m = 1$ . La branche du bas a été trouvée stable jusqu'à  $Ri = -0.8$ , où une analyse de stabilité linéaire donne une valeur propre complexe instable dans le sous-espace  $m = 1$ . Les solutions se trouvant sur la branche du haut sont caractérisées par l'existence d'une zone de recirculation en aval de la sphère et par une couche limite attachée (le coefficient de traînée étant alors positif), alors que les solutions sur la branche du bas présentent un détachement de la couche limite avant même le point d'arrêt amont et une large zone de recirculation allant jusqu'à 84 diamètres en amont de la sphère à  $Ri = -0.5$  et 114 diamètres à  $Ri = -0.8$ . Le coefficient de traînée est négatif sur la branche de bas. Le phénomène d'hystérésis dans le sous-espace  $m = 0$  peut être décrit de la façon suivante. Si, pour une solution démarrant de la branche du haut (par exemple à  $Ri = -0.5$ ), la valeur absolue du nombre de Richardson est augmentée, la solution reste stable jusqu'à un certain  $Ri$  qui se trouve dans l'intervalle  $(-0.8, -0.7)$ . A ce  $Ri$ , la solution rejoint la solution de la branche du bas. De la même manière, une solution démarrant de la branche du bas restera stable en diminuant le  $|Ri|$  jusqu'à un certain  $Ri$ , légèrement supérieur à  $Ri = -0.5$ . A partir de ce moment, la solution rejoint la branche du haut. La transition entre les deux branches se passe d'une manière très rapide et est caractérisée par un front de  $u = 0$  se déplaçant rapidement suivant l'axe  $z$ .

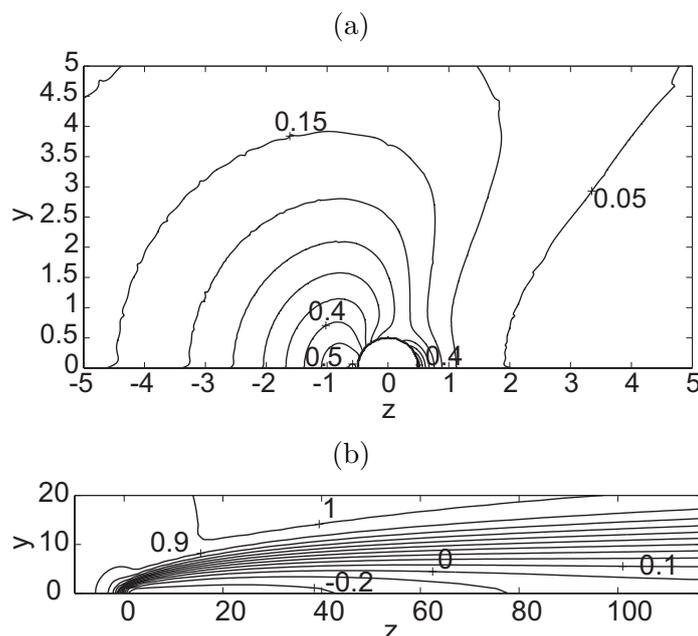


FIG. 4.58 – Isocontours de la pression (a) et de la vitesse axiale dans le plan radial-axial à  $Ri = -0.7$  et  $Re = 10$ .

Cependant, en raison des effets tridimensionnels, ni le phénomène d'hystérésis, ni la grande zone de recirculation remontant jusqu'à 114 diamètres en amont de la sphère ne sont physiques. En effet, en effectuant des simulations tridimensionnelles, il s'avère que la solution de la branche du haut reste axisymétrique jusqu'à  $Ri = -0.7$ . A ce nombre de Richardson, le coefficient de traînée commence à être négatif, ce qui est dû (comme dans le cas de  $Re = 1$ ) à la grande zone de recirculation, où le fluide recirculant augmente la pression sur la face aval de la sphère. A  $Ri = -0.7$ , l'écoulement est tout de même attaché à la surface amont de la sphère. Des isocontours de la pression ainsi que de la vitesse axiale juste avant la transition à la tridimensionnalité sont montrés dans Fig. 4.58. Avec une nouvelle augmentation de  $|Ri|$  (à  $Ri = -0.8$ , par exemple), la solution de la branche du haut à tendance à rejoindre la solution du bas, présentant une grosse recirculation en amont de la sphère. Cette solution étant, néanmoins, instable, la zone de recirculation croît tout d'abord vers l'amont, mais avant d'atteindre la distance de 114 diamètres, elle est défléchie d'une manière tridimensionnelle de l'axe de l'écoulement et finit par être advectée vers l'aval. Cette action se répète périodiquement et, à  $Re = 10$  et  $Ri = -0.8$ , on obtient un écoulement avec une alternance presque parfaitement périodique entre une solution axisymétrique avec une croissance de la zone de recirculation et une solution tridimensionnelle d'advection de cette zone vers l'aval de la sphère. Un tel cycle est représenté sous forme d'une séquence de 6 figures tridimensionnelles (isosurface de  $u = 0$ ) dans Fig. 4.59, les instants correspondant aux figures étant indiqués sur les tracés de l'évolution temporelle du coefficient de traînée (Fig. 4.60a) et du coefficient de portance (Fig. 4.60b).

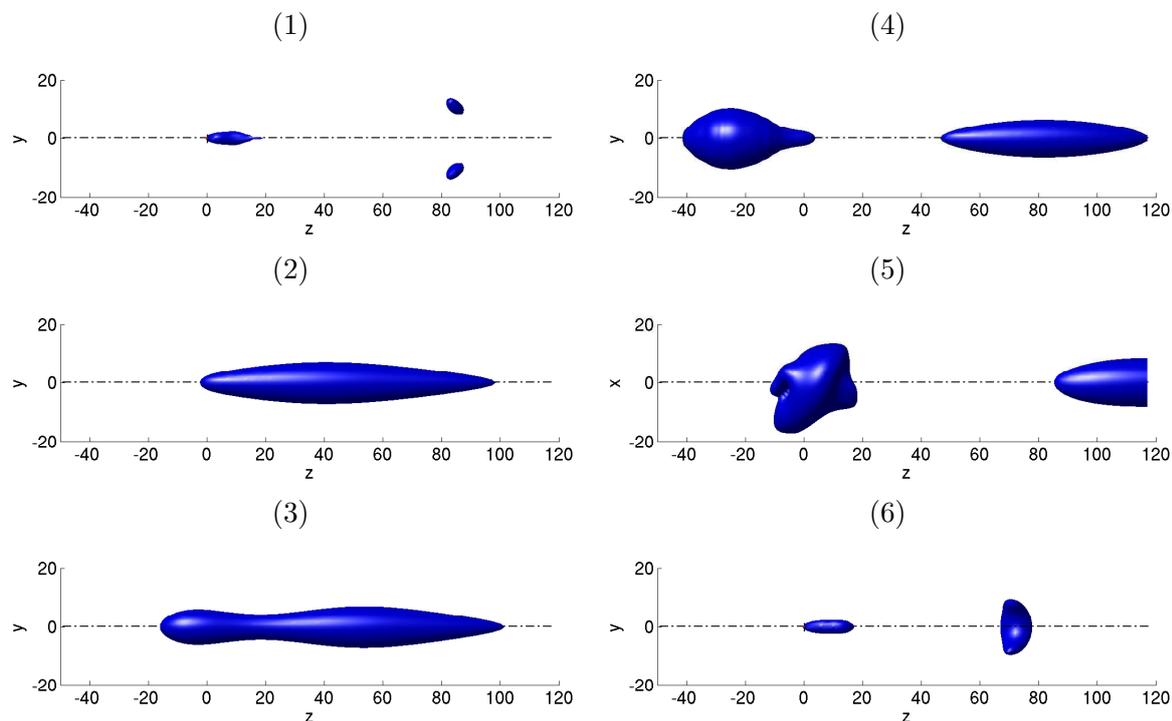


FIG. 4.59 – Cycle représentant le développement axisymétrique de la zone de recirculation et son advection tridimensionnelle en terme d'isosurfaces de la vitesse axiale nulle à  $Ri = -0.8$  et  $Re = 10$ . Les figures 1 à 6 correspondent aux instants représentés dans Fig. 4.60, i.e. à  $t = 1164, 2160, 2316, 2513, 2678$  et  $2802$ , respectivement.

Sur la figure (1), le sillage vient d'être advecté vers l'aval (des restes sont encore visibles vers la sortie du domaine) et une recirculation en aval de la sphère commence à se développer. La solution est proche de la branche du haut de la solution axisymétrique et le coefficient de traînée est relativement faible. Durant cette phase du développement de la zone de recirculation, l'écoulement est axisymétrique et le coefficient de portance est donc nul. Au point (2), la recirculation atteint presque la sortie du domaine et la recirculation en amont de la sphère commence à se développer à son tour (point 3). Le coefficient de traînée atteint son maximum (en valeur absolue). Au point (4), la recirculation en aval de la sphère se détache de la sphère et est advectée vers la sortie du domaine. La recirculation en amont atteint sa distance maximale d'environ 40 diamètres. Jusqu'à ce point, l'écoulement reste axisymétrique. Entre les points (4) et (5), la recirculation en amont de la sphère commence à se défléchir de façon tridimensionnelle, les fluctuations dans la direction radiale atteignant leurs maxima au point (5). La zone de recirculation amont s'éloigne de l'axe de l'écoulement (où elle se trouvait maintenue en place par le panache thermique du fluide chaud remontant vers l'amont) avant d'être advectée vers l'aval (6). Ensuite, le cycle recommence.

La répétition des "éclats" tridimensionnels n'est pas exactement périodique, comme le montre la Fig. 4.61a où plusieurs éclats sont affichés au cours d'une longue simulation. Le

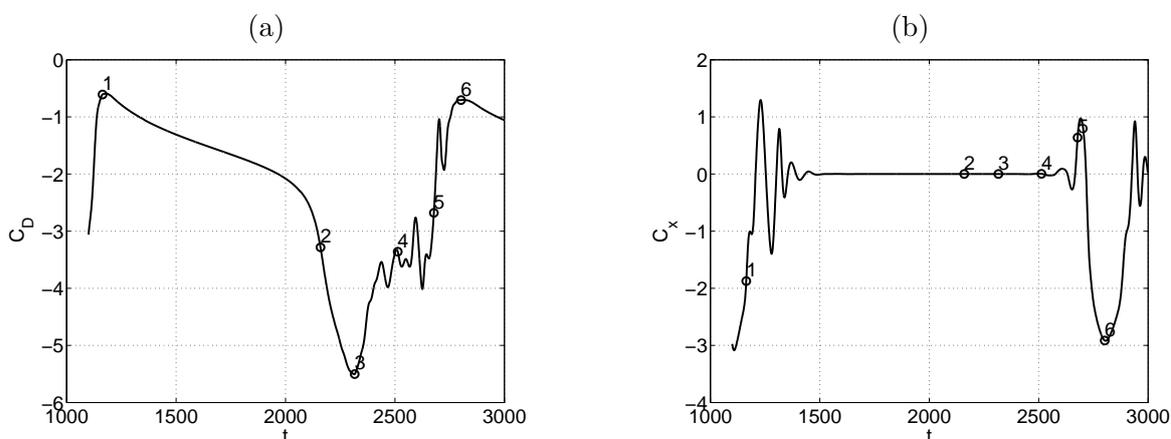


FIG. 4.60 – Coefficient de traînée (a) et coefficient de portance (b) tracés dans un intervalle de  $t$  correspondant à l'intervalle de la Fig. 4.59. Les instants où les clichés de la Fig. 4.59 ont été pris sont marqués par des cercles numérotés de 1 à 6.

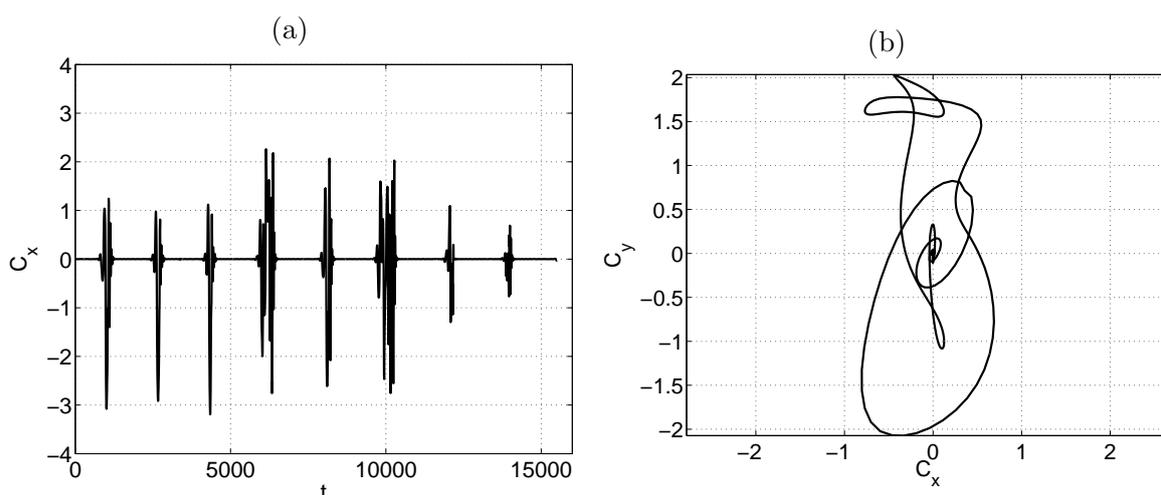


FIG. 4.61 –  $Ri = -0.8$ ,  $Re = 10$ . (a) Evolution temporelle de la composante  $C_x$  du coefficient de portance, (b) projection de  $C_L$  sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'écoulement pendant la durée du dernier éclat de (a). La simulation commençant avec une perturbation symétrique par rapport au plan  $zOy$ , seule la composante  $C_x$  du coefficient de portance est visible au début de la simulation. Néanmoins, progressivement, le plan de symétrie devient instable et la force de portance évolue librement dans un plan perpendiculaire à la direction de l'écoulement.

temps entre deux éclats varie légèrement, ainsi que la forme même des éclats. Pendant un éclat, l'écoulement ne présente aucun plan de symétrie (voir Fig. 4.61b où la projection du coefficient de portance sur le plan  $(C_x, C_y)$  est tracée pour le dernier éclat de la Fig. 4.61a).

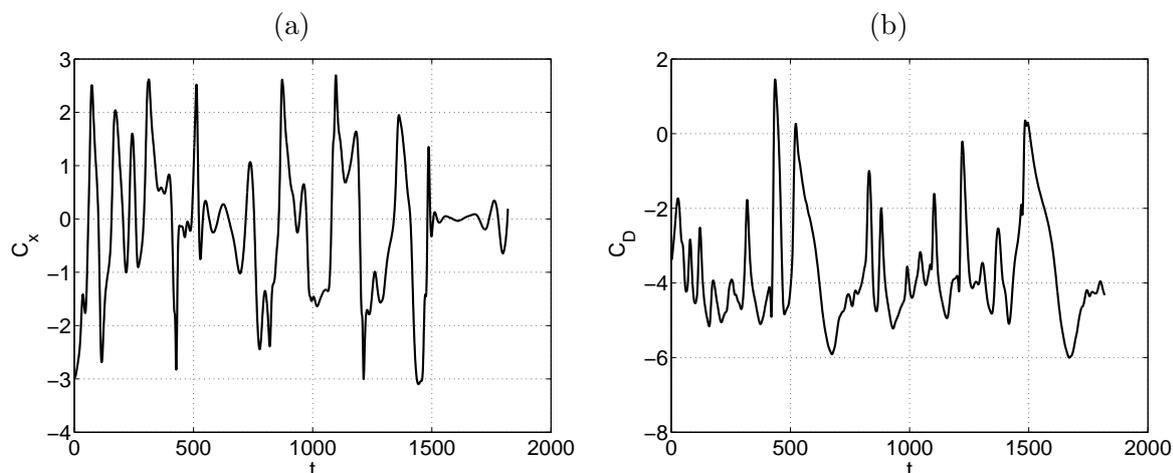


FIG. 4.62 – (a) Evolution temporelle de la composante  $C_x$  du coefficient de portance, (b) celle du coefficient de traînée à  $Ri = -1$  et  $Re = 10$ .

Finalement, une simulation a été effectuée à  $Ri = -1$ . Malgré des forces de flottabilité plus importantes (par rapport à  $Ri = -0.8$ ), la recirculation en amont de la sphère atteint une distance maximale de seulement 30 diamètres environ. L'écoulement est déjà clairement chaotique et tridimensionnel en permanence, comme le montrent les évolutions temporelles du coefficient de traînée et de portance dans Fig. 4.62. Fig. 4.63 montre l'aspect tridimensionnel de l'écoulement au moment où la recirculation en amont de la sphère est advectée vers l'aval.

Les longues échelles temporelles et spatiales dans l'écoulement prouvent que la sphère continue à jouer le rôle d'une source de chaleur ponctuelle.

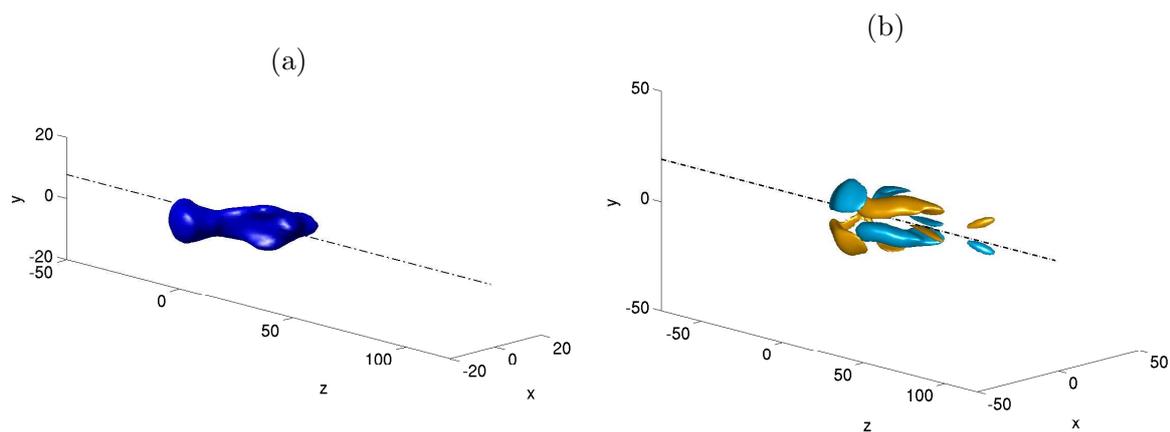


FIG. 4.63 – (a) Isosurface de vitesse axiale au niveau  $u = 0$ , (b) isosurfaces de vorticité axiale au niveau  $\omega_z = \pm 0.06$  à l'instant  $t = 1481$  de la Fig. 4.62.

### 4.4.3 $Re = 100$

Contrairement aux cas  $Re = 1$  et  $Re = 10$ , les premières étapes de la transition à  $Re = 100$  sont dues à l’inertie de l’écoulement extérieur. Cependant, les effets de flottabilité continuent à influencer de manière significative le scénario de transition. A  $Re = 100$ , l’axisymétrie est brisée via une bifurcation de Hopf à  $Ri \approx -0.25$ , le nombre de Strouhal au seuil de l’instabilité primaire valant  $St \approx 0.07$ . Entre  $Ri = -0.25$  et  $Ri = -0.6$ , l’écoulement oscille périodiquement avec un plan de symétrie, déterminé par les conditions initiales, et présente un détachement tourbillonnaire (une allée de Von-Kármán est établie). A  $Ri = -0.4$ , le sillage est dominé par une fréquence correspondant au nombre de Strouhal 0.0732. L’écoulement étant devenu tridimensionnel via une bifurcation de Hopf, la valeur moyenne de la force de portance est nulle. Ce régime correspond qualitativement à celui décrit dans la section 4.3.4 et numéroté IV. A  $Ri = -0.6$ , le plan de symétrie est brisé et une deuxième fréquence, 5.5 fois plus petite que celle des oscillations primaires ( $St = 0.063$  à  $Ri = -0.6$ ), s’installe dans l’écoulement. Ce régime a été numéroté XVII dans la section 4.3.4 et a été caractérisé comme étant la dernière étape avant que l’écoulement ne devienne chaotique. Fig. 4.64 montre la dépendance de certaines quantités, caractérisant la dynamique du sillage (la valeur moyenne et la valeur RMS du coefficient de traînée, la valeur RMS du coefficient de portance), en fonction de  $|Ri|$ .

A  $Ri = -0.8$ , l’écoulement devient chaotique. Le coefficient de portance est toujours dominé par la fréquence correspondant à  $St \approx 0.07$ ; cependant, la projection de  $C_L$  sur un plan perpendiculaire à l’axe de l’écoulement révèle un comportement chaotique sans aucune périodicité (c.f. Fig. 4.65a). Les fluctuations du coefficient de traînée augmentent et une périodicité d’environ 300 unités de temps commence à être visible sur l’évolution temporelle de  $C_D$  (c.f. Fig. 4.65b), ce qui indique un effet croissant de la convection naturelle. L’écoulement reste néanmoins attaché à la surface de la sphère (c.f. Fig. 4.66a) et le sillage présente des structures chaotiques, amplifiées par la convection naturelle (Fig. 4.66b).

A  $Ri = -1.1$ , les fluctuations du coefficient de portance ont légèrement diminué par rapport à  $Ri = -0.8$  (c.f. Fig. 4.64c), alors que les fluctuations du coefficient de traînée ont considérablement augmenté (c.f. Fig. 4.64b). L’échelle de temps caractéristique des fluctuations de  $C_D$  a diminué à 120 unités de temps, environ. La projection du coefficient de portance sur le plan  $(C_x, C_y)$  est montrée dans Fig. 4.67a, et l’évolution temporelle du coefficient de traînée est montrée dans Fig. 4.67b. Le coefficient de traînée, grâce aux grandes fluctuations, franchit parfois légèrement l’axe  $C_D = 0$ ; néanmoins, sa valeur moyenne reste positive (c.f. Fig. 4.64a). Ce comportement est dû aux forces de flottabilité qui deviennent de plus en plus grandes et induisent une grande zone de recirculation en aval de la sphère. Le fluide recirculant dans cette zone “tape” la face aval de la sphère, ce qui a pour conséquence de diminuer la traînée. L’écoulement reste toujours attaché à la surface de la sphère, même pendant les “excursions” du  $C_D$  vers les valeurs négatives (voir Fig. 4.68).

A  $Ri = -1.2$ , la valeur moyenne du coefficient de traînée devient enfin négative, ce qui est accompagné par un changement important au sein de l’écoulement – les forces de flottabilité sont suffisamment fortes pour inverser le sens de l’écoulement près de la sphère et un panache thermique en amont de la sphère apparaît (la couche limite n’est plus attachée à la surface de la sphère). Néanmoins, ce panache thermique est très instable vis-à-vis de l’écou-

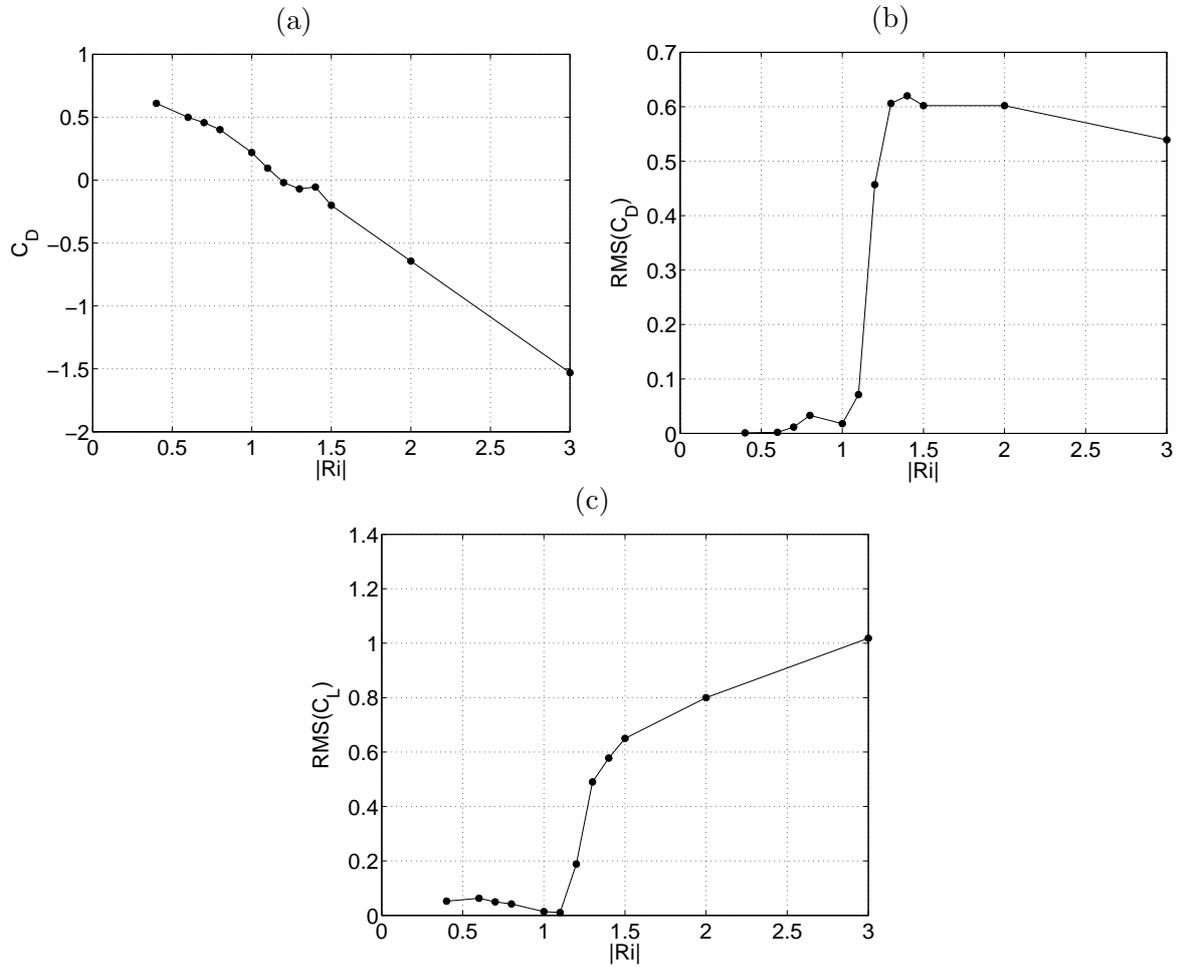


FIG. 4.64 – (a) Valeur moyenne du coefficient de traînée, (b) valeur RMS du coefficient de traînée et (c) valeur RMS du coefficient de portance en fonction de  $|Ri|$  pour  $Re = 100$ .

lement extérieur et est périodiquement advecté vers l'aval, ce qui est accompagné par une nette augmentation des fluctuations des coefficients de traînée et de portance (c.f. Figs. 4.64b et 4.64c). Fig. 4.69a montre la projection du coefficient de portance sur le plan  $(C_x, C_y)$ , Fig. 4.69b l'évolution temporelle du coefficient de traînée. On observe de longues périodes de faibles fluctuations d'une amplitude comparable aux cas des  $|Ri|$  inférieurs déjà présentés interrompues, d'une manière irrégulière et assez rarement, par des pics de valeurs significativement négatives. Fig. 4.70 montre l'isosurface de la vitesse axiale nulle à deux instants correspondant aux fluctuations extrêmes du coefficient de traînée. Le régime à  $Re = 100$  et  $Ri = -1.2$  peut être alors considéré comme une transition entre les régimes ne présentant pas de détachement de la couche limite et les régimes avec un panache thermique en amont de la sphère (qui peut, néanmoins, être advecté vers l'aval, c.f. le prochain paragraphe). Le caractère intermédiaire est également visible sur les courbes de la Fig. 4.64.

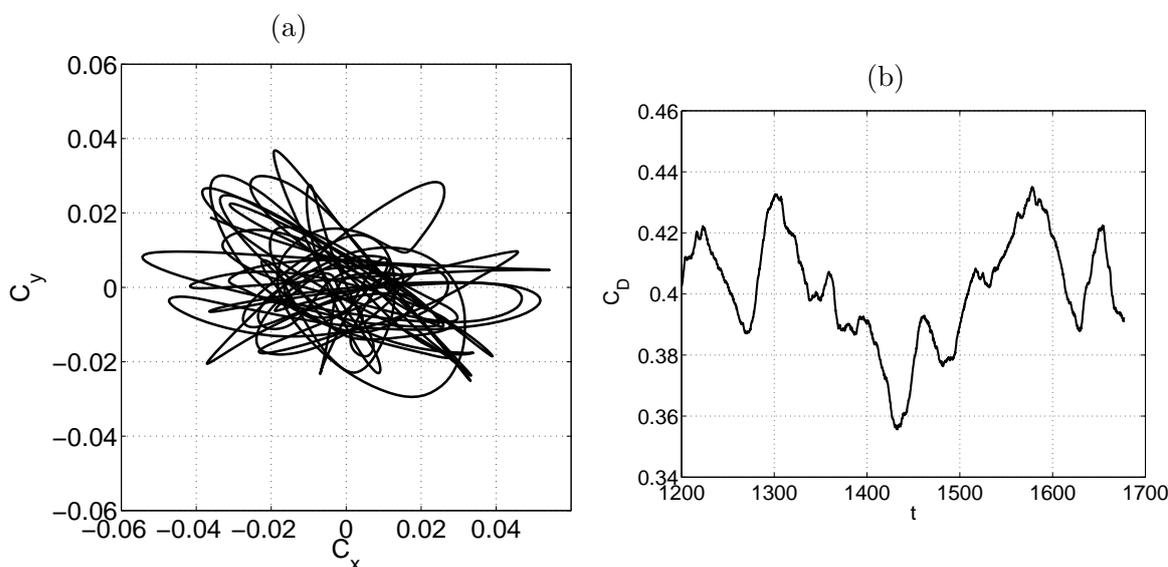


FIG. 4.65 – (a) Projection du coefficient de portance sur le plan  $(C_x, C_y)$ , (b) évolution temporelle du coefficient de traînée à  $Ri = -0.8$  et  $Re = 100$ .

A  $Ri = -1.4$ , la formation périodique de la zone de recirculation en amont de la sphère est déjà bien fréquente. Les fluctuations du coefficient de traînée atteignent leur maximum et les amplitudes des fluctuations du coefficient de portance sont comparables à celles de  $C_D$  (voir Fig. 4.71). La périodicité des grandes fluctuations du coefficient de traînée a diminué pour atteindre environ 100 unités de temps. Afin de décrire en détail le cycle de formation du panache thermique en amont de la sphère et son advection en aval, une séquence de figures avec des isosurfaces de vitesse axiale nulle prises à différents instants de la simulation à  $Ri = -1.4$  est montrée dans Fig. 4.72. Cette séquence correspond à la dernière grande fluctuation du coefficient de traînée de la Fig. 4.71b. Les numéros des figures sont affichés également dans Figs. 4.73a et b aux instants  $t$  appropriés.

La première étape de la séquence (entre le début de l'animation et le point (1) dans Fig. 4.73) correspond à une diminution rapide du coefficient de portance et à une augmentation du coefficient de traînée pendant une durée de 2.3 unités de temps. Dans la figure (1), le coefficient de traînée est maximal et les structures de vitesse axiale négative sont en train d'être advectées vers la sortie du domaine (la sphère est presque entièrement visible). La figure (2) montre une étape de décroissance continue de  $C_D$ , la force de portance étant quasi-nulle à cet instant (l'écoulement est presque axisymétrique près de la sphère). Une zone de recirculation est en train de se former en aval de la sphère, la face amont de la sphère étant toujours visible, ce qui indique une absence de recirculation en amont. La dernière est en train de se développer dans la figure (3), ce qui induit une forte décroissance du coefficient de traînée entre les points (3) et (4). Simultanément, le panache thermique est dévié de la direction axiale, ce qui induit une augmentation du coefficient de portance. Dans la figure (4), la recirculation atteint sa distance maximale en amont de la sphère. Cette distance est

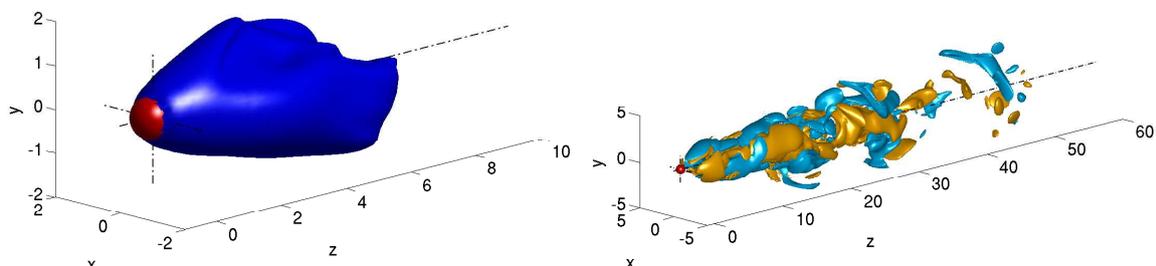


FIG. 4.66 – (a) Isosurface de la vitesse axiale au niveau  $u = 0$ , (b) isosurfaces de vorticité axiale au niveau  $\omega_z = \pm 0.15$  à l’instant  $t = 1667$  de la Fig 4.65.

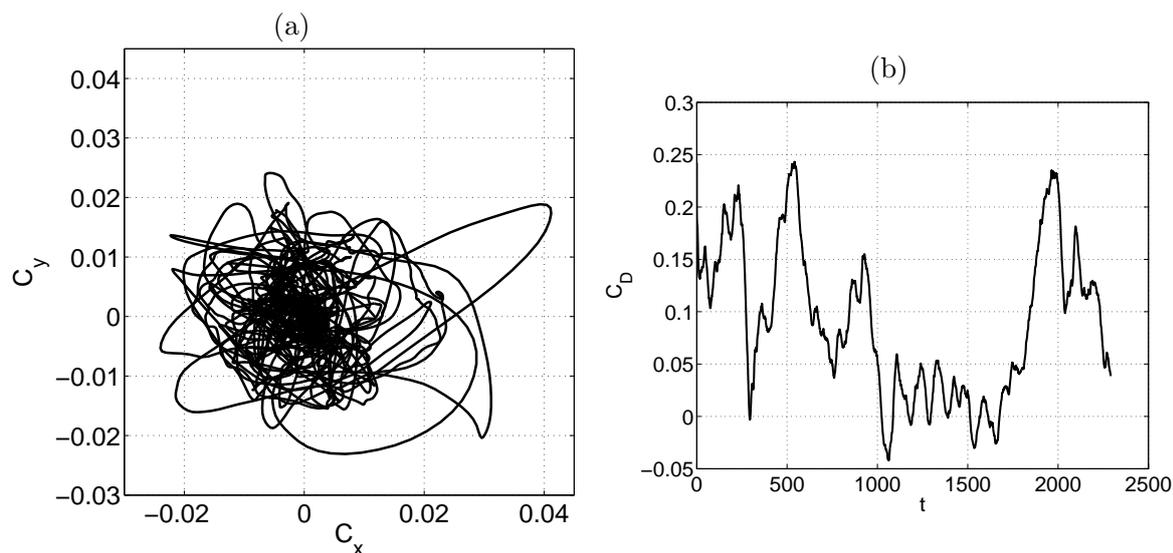


FIG. 4.67 – (a) Projection du coefficient de portance sur le plan  $(C_x, C_y)$ , (b) évolution temporelle du coefficient de traînée à  $Ri = -1.1$  et  $Re = 100$ .

néanmoins assez modérée (2 diamètres approximativement). Le coefficient de traînée atteint son minimum. Dans la figure (5), la bulle de recirculation se trouvant à l’aval de la sphère est advectée, ce qui correspond à une augmentation momentanée de  $C_D$  dans Fig. 4.73b. Néanmoins, une autre recirculation est en train de se former (plus petite que la première) autour de la sphère et le coefficient de traînée rechute(6). Cette bulle de recirculation secondaire finit également par être advectée vers la sortie. Figure (7) montre les restes des structures de vitesse axiale négative advectées vers la sortie du domaine et le cycle (non-périodique) recommence dans la figure (8), où une zone de recirculation en aval de la sphère, presque

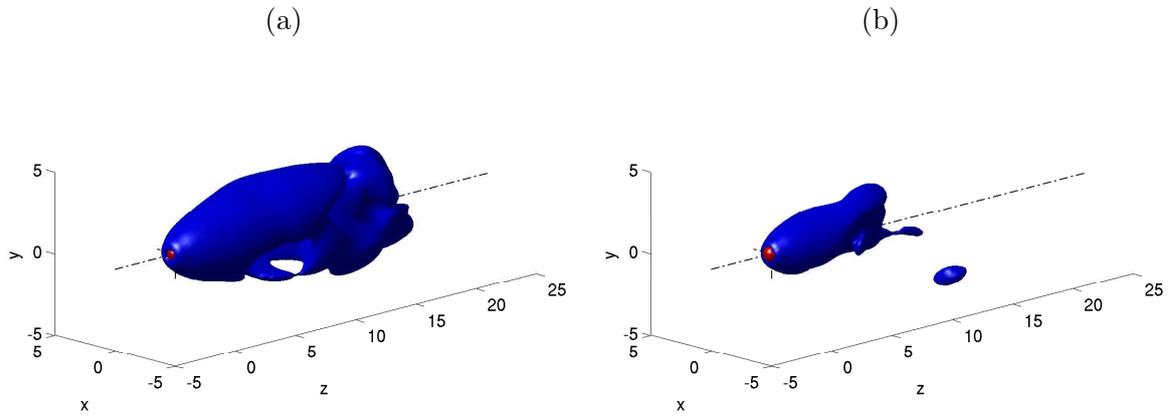


FIG. 4.68 – Isosurface de vitesse axiale nulle à l'instant (a)  $t = 1063$  ( $C_D$  minimal), (b)  $t = 1964$  ( $C_D$  maximal) de la simulation de la Fig. 4.67b.

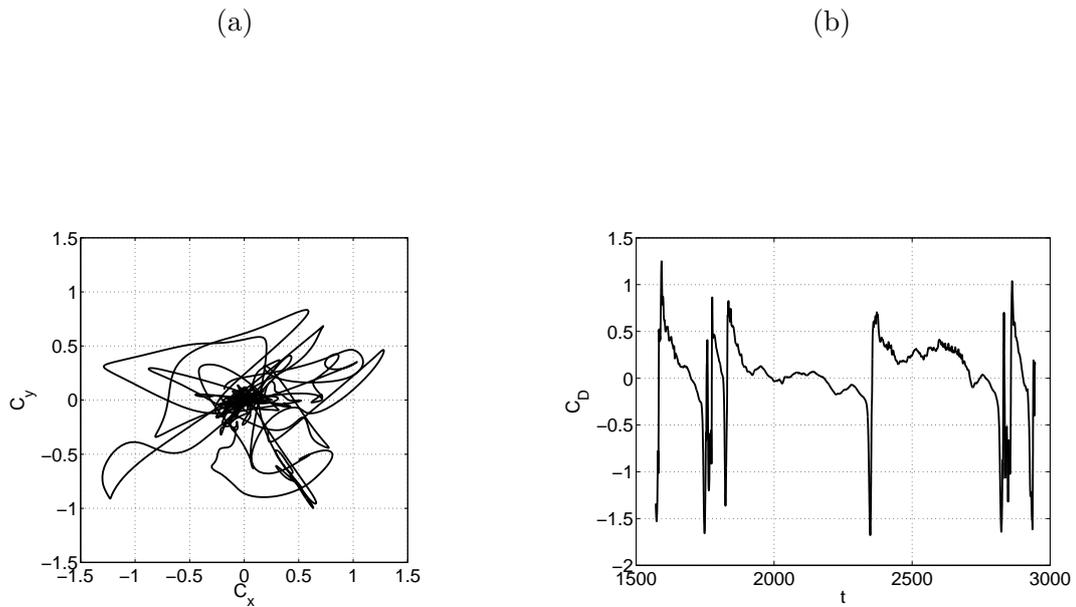


FIG. 4.69 – (a) Projection du coefficient de portance sur le plan  $(C_x, C_y)$ , (b) évolution temporelle du coefficient de traînée à  $Ri = -1.2$  et  $Re = 100$ .

axisymétrique, est en train de se former.

Fig.4.74 aide à interpréter les structures de la Fig. 4.72 délimitées par l'isovaleur de la

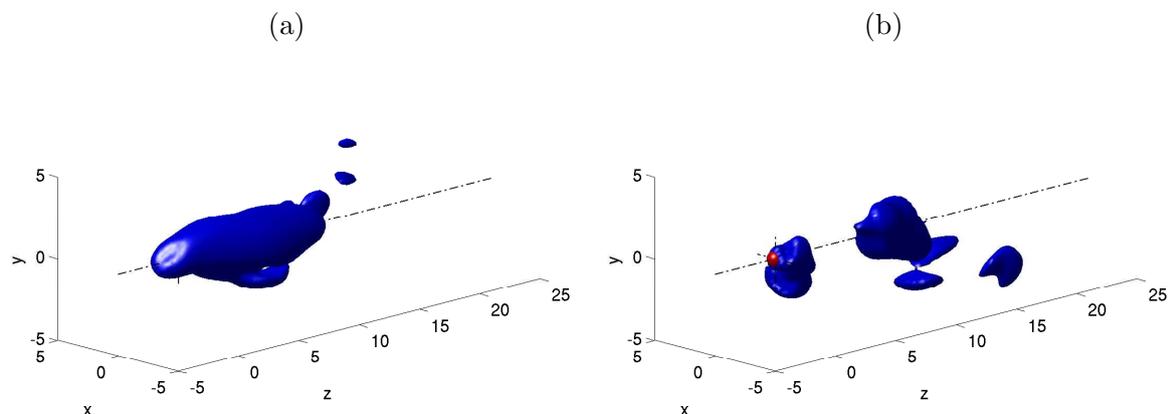


FIG. 4.70 – Isosurface de vitesse axiale nulle à l’instant (a) où  $C_D$  est minimal (négatif), (b) où  $C_D$  est maximal (positive) dans la simulation de la Fig. 4.69b.

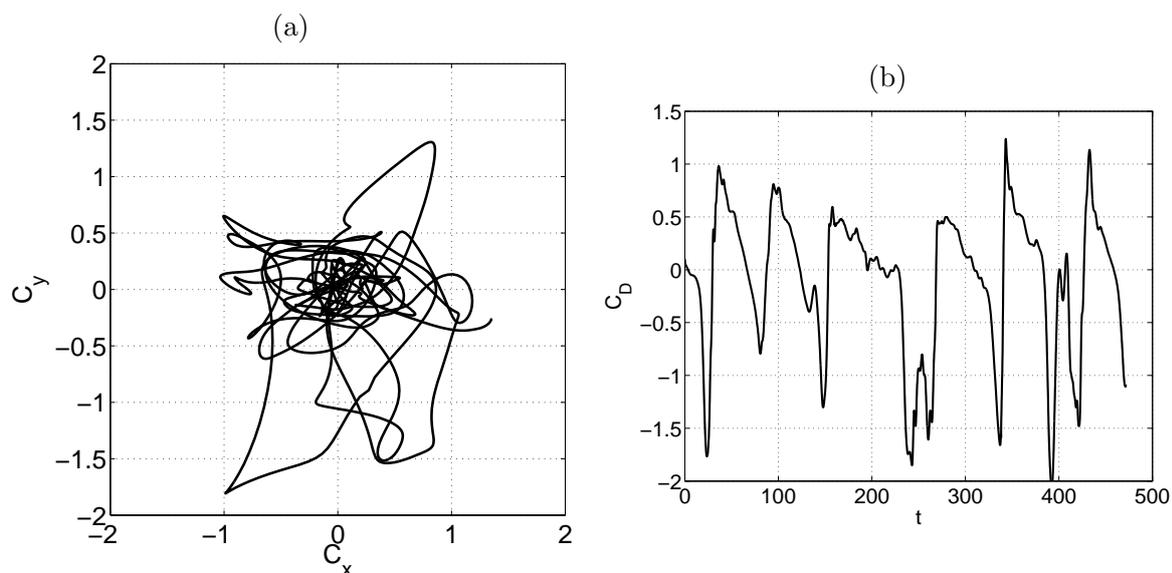


FIG. 4.71 – (a) Projection du coefficient de portance sur le plan  $(C_x, C_y)$ , (b) évolution temporelle du coefficient de traînée à  $Ri = -1.4$  et  $Re = 100$ .

vitesse axiale nulle. Dans Fig.4.74, une isosurface de  $u = 0$  (a) est montrée à côté de l’isosurface de température  $T = 0.03$  (b), ce qui correspond à 3% de la valeur de la température sur la surface de la sphère. Les structures dans les deux figures se ressemblent, ce qui indique que l’isosurface de vitesse axiale nulle délimite, approximativement, la région du fluide chaud (un panache thermique).

La dynamique du panache thermique à  $Ri = -1.4$  est chaotique et relativement compliquée; néanmoins, l’extension des régions de vitesse axiale négative ne dépasse jamais 2

diamètres en amont de la sphère et 3 diamètres dans la direction radiale. Dans ce cas, un domaine s'étendant à 25 diamètres en amont de la sphère et 25 diamètres latéralement est largement suffisant, ce qui est prouvé dans Fig. 4.75 par l'affichage de l'isosurface  $u = 0.9$  (correspondant à 90% de la vitesse à l'entrée du domaine).

A  $Ri = -3$ , la valeur moyenne du coefficient de traînée est déjà négative et ses fluctuations sont moins importantes qu'à  $Ri \approx -1.5$ . L'écoulement est plus chaotique qu'à  $Ri = -1.4$  et la répétition du cycle, illustrée dans Fig. 4.77, est moins évidente (voir Fig. 4.76). Une séquence de figures avec des isosurfaces de vitesse axiale nulle durant un intervalle qui correspond approximativement à un cycle de formation–advection d'un panache thermique est montrée dans Figs. 4.77 et 4.78.

Les effets turbulents empêchent la formation du panache thermique sur l'axe de l'écoulement et ce dernier s'étend alors latéralement jusqu'à une distance de 6 diamètres de l'axe de l'écoulement. A cette distance, les effets convectifs n'ont plus d'influence et les structures de recirculation isolées sont facilement advectées vers l'aval. En raison de cette dispersion spatiale des structures convectives, le panache thermique remonte à seulement 8 diamètres en amont de la sphère malgré le fait que, à  $Ri = -3$ , les effets dus à la convection naturelle soient trois fois plus importants que ceux liés à l'inertie de l'écoulement extérieur. En comparant le cliché (4) de la Fig. 4.77 avec la Fig. 4.79, on remarque que le front de la convection thermique est très raide. I.e., la distance séparant les isosurfaces de vitesse axiale  $u$  aux niveaux 0.9 et 0 est seulement de 3 diamètres sur l'axe en amont de la sphère. En conséquence, les structures convectives atteignent au maximum une distance de 10 diamètres en amont de la sphère.

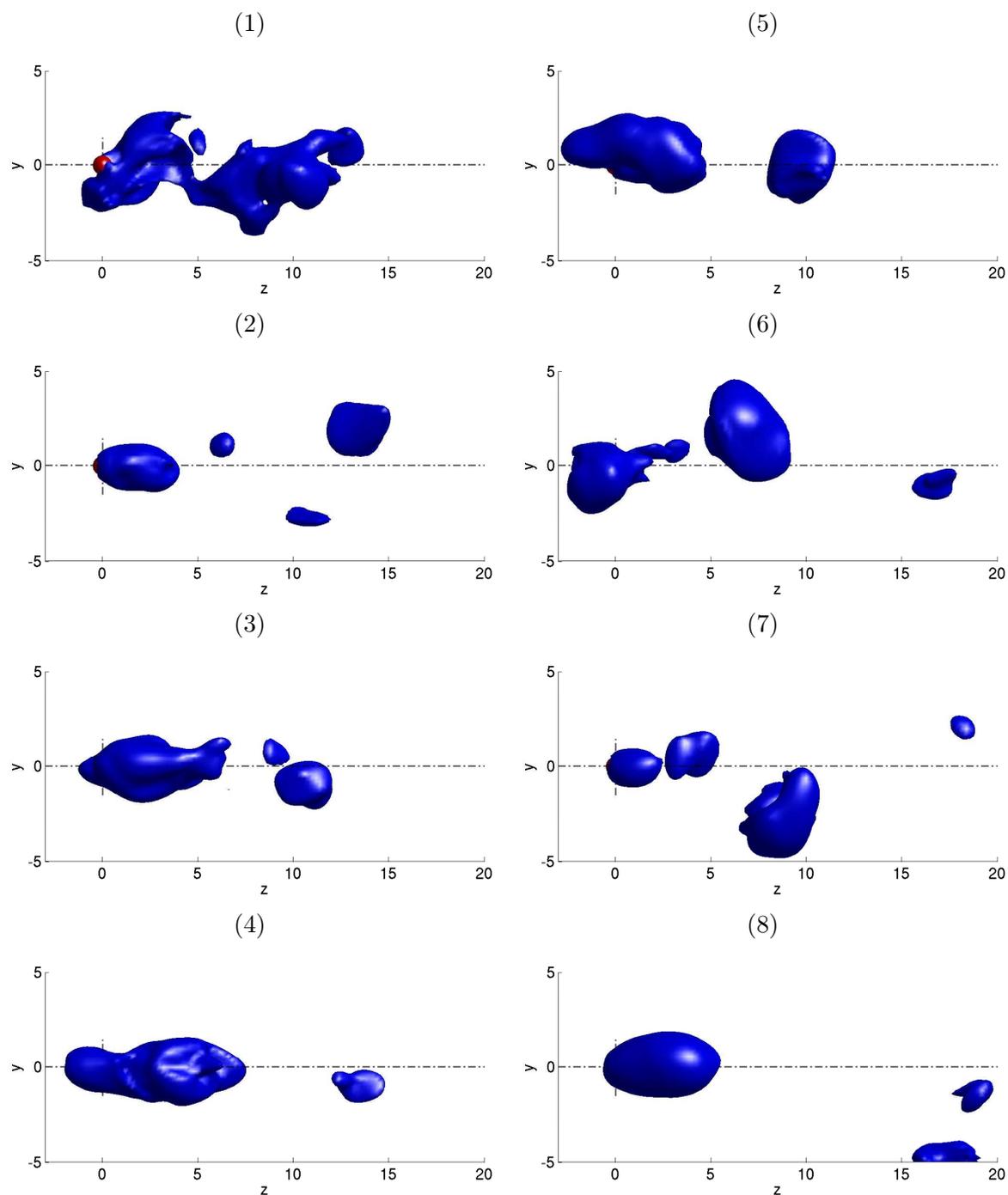


FIG. 4.72 – Isosurfaces de vitesse axiale nulle aux instants  $t = 343, 363, 386, 392, 405, 419, 442$  et  $459$  de la simulation à  $Ri = -1.4, Re = 100$ . Ces instants sont numérotés et représentés dans Fig. 4.73.

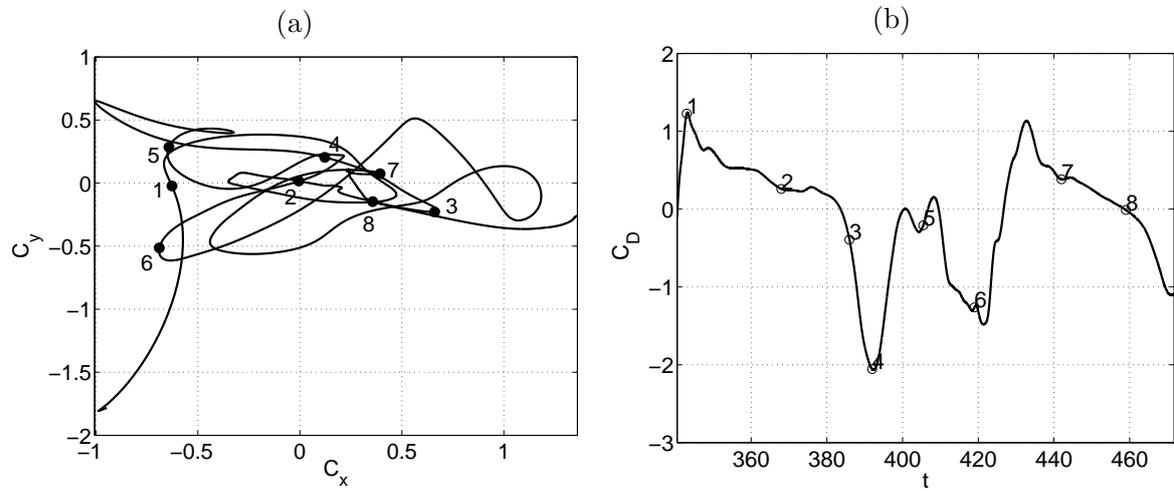


FIG. 4.73 – (a) Projection du coefficient de portance sur le plan  $(C_x, C_y)$ , (b) évolution temporelle du coefficient de traînée à  $Ri = -1.4$  et  $Re = 100$ . Les numéros correspondent aux instants où les clichés de la Fig. 4.72 ont été pris.

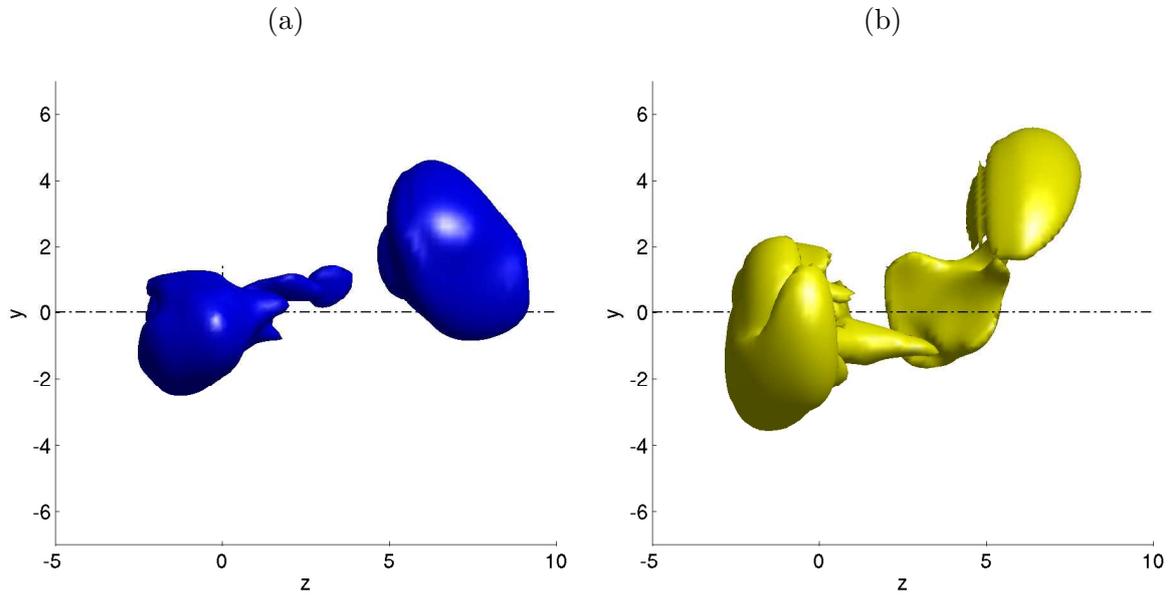


FIG. 4.74 – (a) Isosurface de vitesse axiale nulle, (b) isosurface de température  $T = 0.03$  (3% au-dessus de la température du fluide extérieur) à  $Ri = -1.4$  et  $Re = 100$  à l'instant  $t = 419$ .

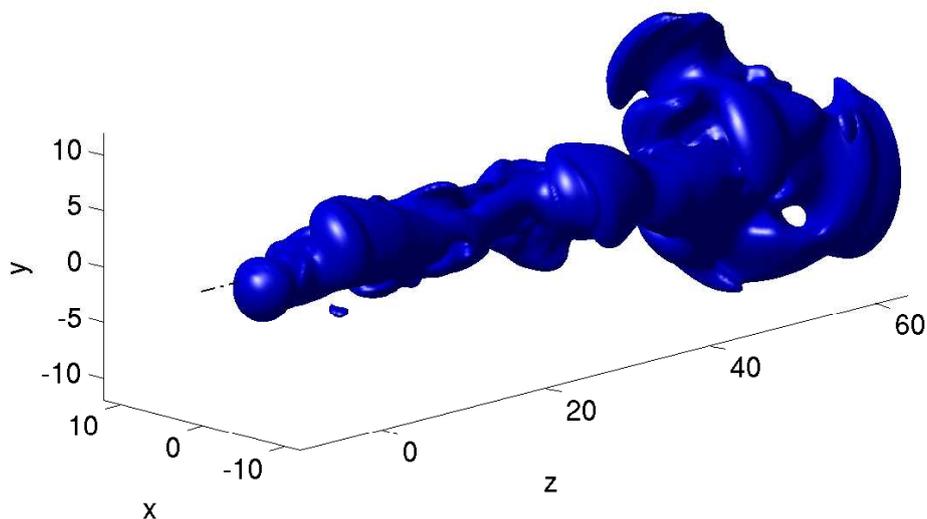


FIG. 4.75 – Isosurface de vitesse axiale au niveau  $u = 0.9$  à  $Ri = -1.4$  et  $Re = 100$  à l'instant  $t = 419$ .

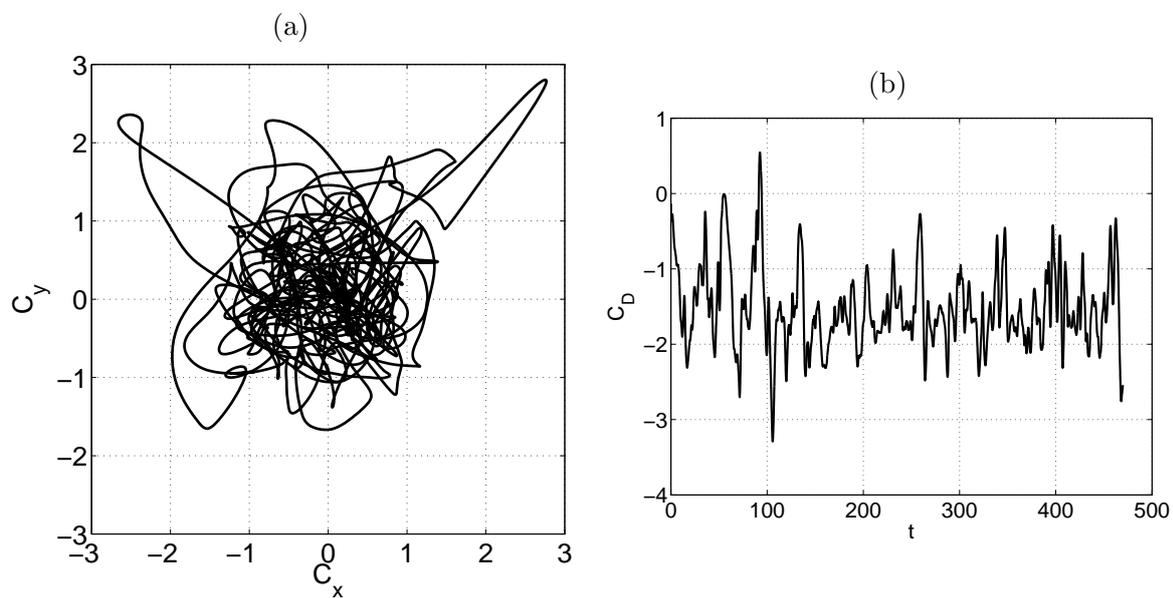


FIG. 4.76 – (a) Projection du coefficient de portance sur le plan  $(C_x, C_y)$ , (b) évolution temporelle du coefficient de traînée à  $Ri = -3$  et  $Re = 100$ .

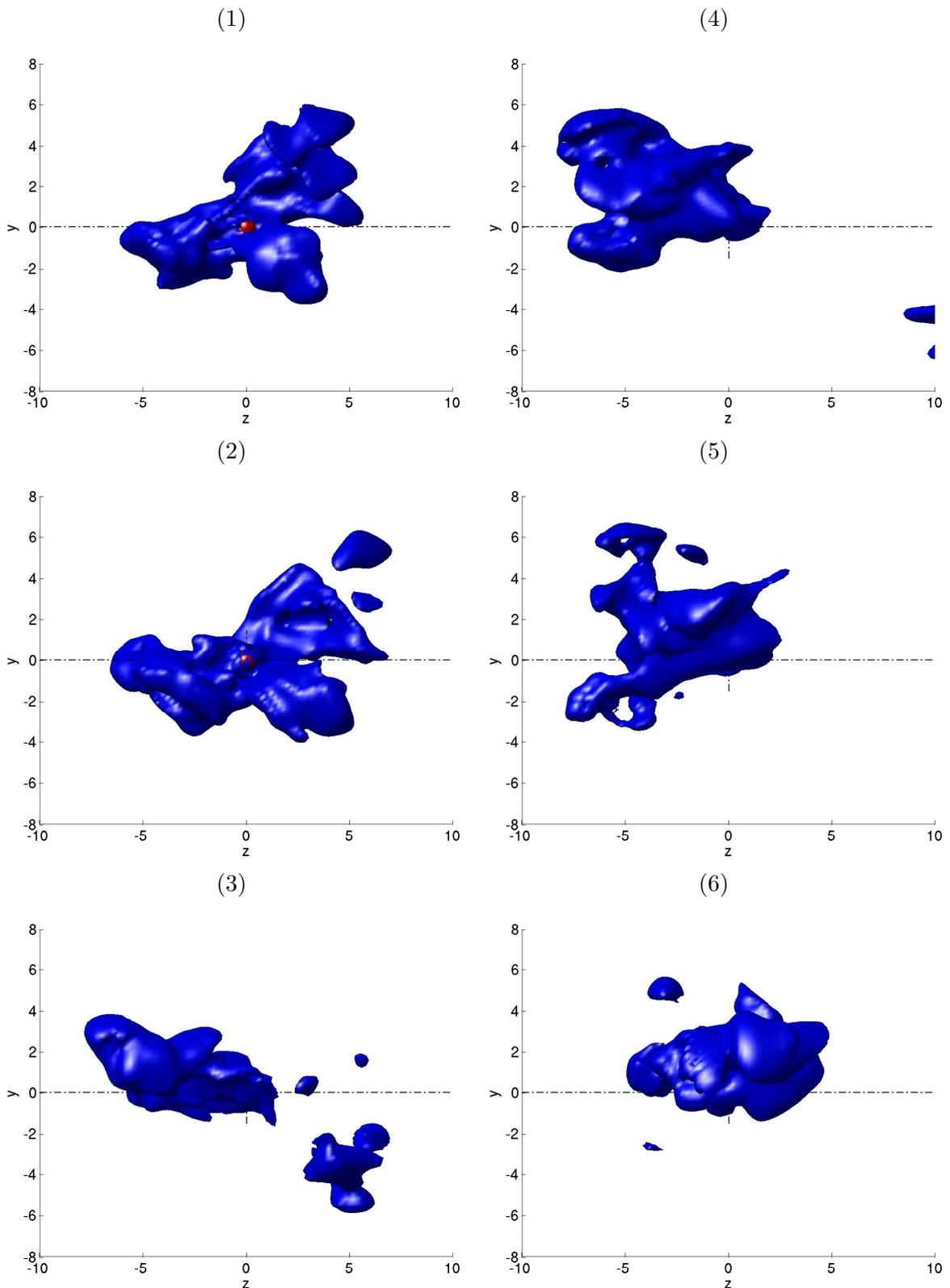


FIG. 4.77 – Isosurfaces de vitesse axiale nulle aux instants  $t = 203, 206, 219, 230, 234$  et  $241$  de la simulation à  $Ri = -3$ ,  $Re = 100$ . Ces instants sont numérotés et représentés dans Fig. 4.78.

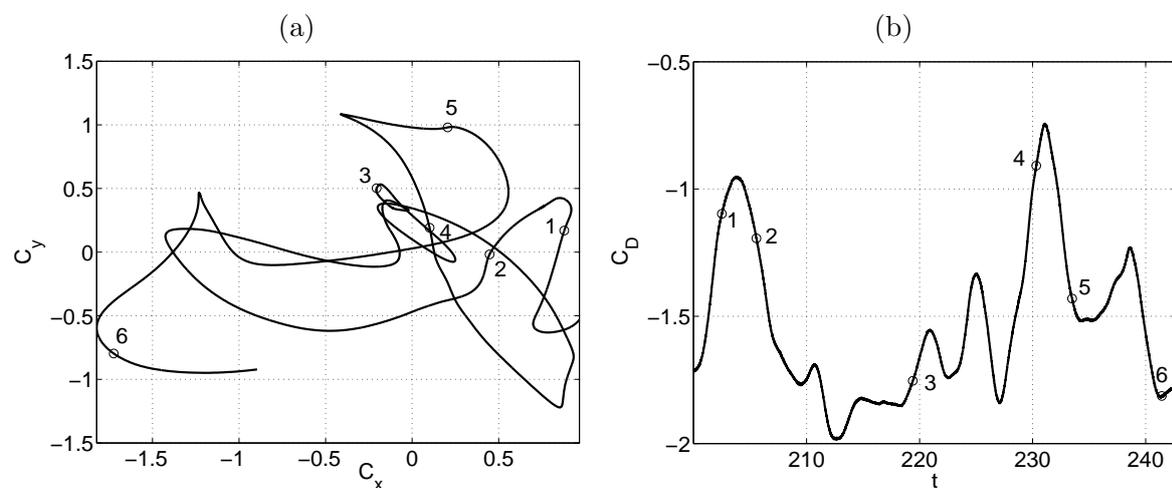


FIG. 4.78 – (a) Projection du coefficient de portance sur le plan  $(C_x, C_y)$ , (b) évolution temporelle du coefficient de traînée à  $Ri = -3$  et  $Re = 100$ . Les numéros correspondent aux instants où les clichés de la Fig. 4.77 ont été pris.

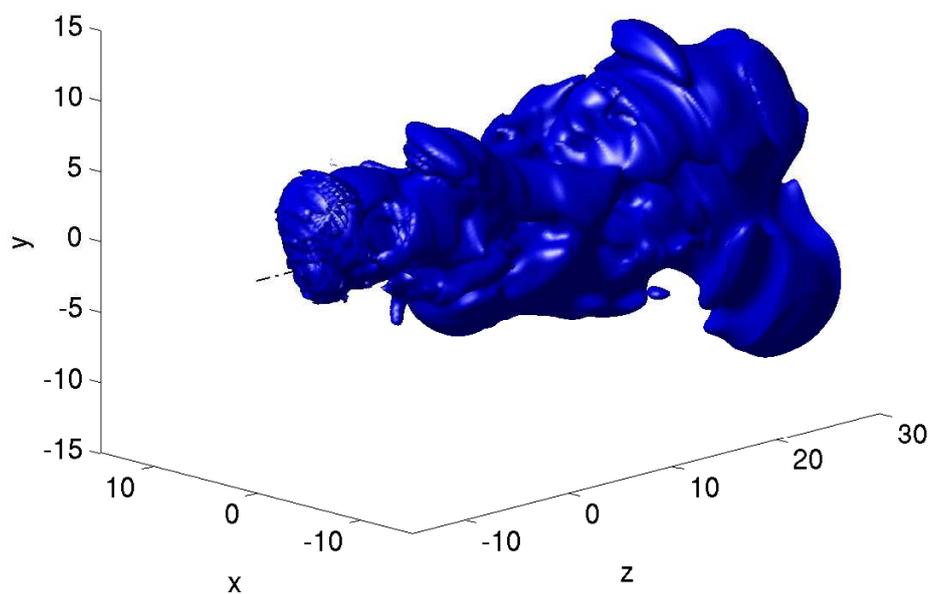


FIG. 4.79 – Isosurface de vitesse axiale au niveau  $u = 0.9$  à  $Ri = -3$  et  $Re = 100$  à l'instant  $t = 230$ .

## Chapitre 5

# Résultats – sphère libre

Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, le problème d'une sphère libre de température  $T_s \neq T_f$  est régi, sous l'approximation de Boussinesq, par 4 paramètres indépendants : le nombre de Galilée ( $G$ ), le nombre de Richardson ( $Ri$ ), le nombre de Prandtl ( $Pr$ ) et le rapport des masses volumiques  $\rho_s/\rho_f$ . Les moyens de calcul nécessaires à une étude dans un espace de paramètres à 4 dimensions étant hors de notre portée, nous avons consacré nos efforts à l'étude d'un cas particulier, à la fois atypique, par les propriétés du milieu considéré, et présent dans la vie de 'presque' tous les jours : la trajectoire et la fonte d'un glaçon immergé dans de l'eau. Section 2.4 a montré l'existence d'une difficulté supplémentaire lorsque l'on veut modéliser le déplacement d'une sphère de température  $T = 0^\circ\text{C}$  dans de l'eau à température ambiante : la forte dépendance de la température sur les propriétés de l'eau. Nous avons donc été conduits à introduire un modèle prenant en compte la dépendance non-linéaire de la température sur la masse volumique de l'eau  $\rho$ , et les dépendances linéaires de la température sur la viscosité cinématique  $\nu$  et la diffusivité thermique  $\kappa$ , faisant ainsi passer le nombre de paramètres indépendants de 4 à 7. Enfin, la prise en compte de la fonte sphérique du glaçon introduit un 8ième paramètre : une constante liée à la chaleur latente  $\ell$  de la glace.

Les deux sections suivantes présentent le comportement d'un glaçon de température uniforme  $T_s = 0^\circ\text{C}$  immergé dans de l'eau à  $T_f = 20^\circ$  et à  $T_f = 4^\circ\text{C}$ , tout d'abord sans fusion, puis avec une fonte qui, pour des raisons pratiques, a été maintenue sphérique. La section concernant la sphère sans fusion a pour but d'évaluer l'effet des paramètres individuels de la modélisation des propriétés réelles de l'eau et de voir en quoi les effets thermiques modifient la trajectoire et la transition d'une sphère libre. La section concernant la sphère en fusion présente les temps de fonte et les trajectoires suivies par un glaçon en fonction de son diamètre initial.

Comme nous nous intéressons à présent à un cas concret (glaçon plongé dans de l'eau), les résultats sont présentés dans la suite avec des grandeurs physiques dimensionnées ( $^\circ\text{C}$  pour la température, m et mm pour les distances et les longueurs et cm/s pour la vitesse).

## 5.1 Glaçon sans fusion immergé dans de l'eau ambiante

Nous nous intéressons ici à la trajectoire et à la transition d'une sphère libre de température uniforme  $T_s = 0^\circ\text{C}$ , sans fusion, immergée dans de l'eau ambiante pour laquelle nous avons considéré deux températures différentes : une température élevée de  $T_f = 20^\circ\text{C}$  et une température basse de  $T_f = 4^\circ\text{C}$ . En effet, en raison de l'expansion anormale de l'eau, nous verrons que ces deux températures haute et basse changent de façon essentielle le régime d'écoulement autour de la sphère.

Une sphère de glace à température  $T_s = 0^\circ\text{C}$  est plus légère que l'eau de température  $T_f = 20^\circ\text{C}$  dans laquelle elle est immergée : elle a donc un mouvement ascendant tout en étant soumise à un écoulement assistant. En effet, le fluide à  $0^\circ\text{C}$  environnant la sphère étant plus dense que le fluide ambiant à  $20^\circ\text{C}$  (voir Fig. 2.4a), il descend vers le bas. Ceci dit, dans la région comprise entre la surface de la sphère et une isosurface de température  $T_f = 4^\circ\text{C}$ , la situation est un peu plus compliquée. En effet, à  $T = 4^\circ\text{C}$ , la masse volumique de l'eau atteint son maximum. Ainsi, le fluide se trouvant entre cette isosurface et la sphère est plus léger et se déplace vers le haut. Néanmoins, cette région (dans laquelle l'écoulement est du type opposant) est négligeable par rapport à la configuration entière, et le cas d'une sphère à  $T_s = 0^\circ\text{C}$  immergée dans de l'eau à  $T_f = 20^\circ\text{C}$  peut ainsi être considéré comme un écoulement assistant.

La situation est différente dans le cas d'une sphère à  $T_s = 0^\circ\text{C}$  immergée dans de l'eau à  $T_f = 4^\circ\text{C}$ . L'eau ambiante est plus dense que l'eau se trouvant au voisinage de la sphère et dont la température est comprise entre 0 et  $4^\circ\text{C}$ . Ainsi, au voisinage de la sphère, le fluide est en ascension et la configuration est donc celle d'un écoulement opposant.

### 5.1.1 Glaçon sans fusion immergé dans de l'eau à $20^\circ\text{C}$

Le seul paramètre indépendant sur lequel nous pouvons agir dans le cas d'un glaçon sans fusion immergé dans de l'eau est le nombre de Galilée. Le faire varier revient à faire varier le diamètre de la sphère. Tab. 2.4 montre les valeurs des 6 autres paramètres.

Afin d'évaluer l'influence de la convection mixte sur la trajectoire d'une sphère libre sans effet thermique, différents tests ont été effectués à  $G = 200$  (ce qui correspond à  $d = 4.38$  mm). Nous avons commencé par simuler la trajectoire d'une sphère sans effet thermique. Dans une seconde étape, les effets de flottabilité ont été modélisés par une approximation de Boussinesq. Enfin, la dépendance de la température sur les trois propriétés de l'eau a été prise en compte. Pour ce chapitre, afin d'alléger la notation nous introduisons les symboles suivants pour les constantes introduites au chapitre 2 (section 2.4) afin de représenter la dépendance de la densité de la viscosité et de la conductivité thermique en fonction de la température.

$$\rho_2 = \frac{1}{2} \frac{d^2\rho}{dT^2}(T_{ref})(T_s - T_f) \quad (5.1)$$

$$\nu_1 = \frac{1}{\nu_{ref}} \frac{d\nu}{dT}(T_{ref})(T_s - T_f) \quad (5.2)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{\kappa_{ref}} \frac{d\kappa}{dT}(T_{ref})(T_s - T_f) \quad (5.3)$$

Chacun des paramètres  $\rho_2$ ,  $\nu_1$  et  $\kappa_1$  a été introduit séparément afin d'en évaluer l'impact sur l'écoulement. Dans le cas de la viscosité cinématique, sa dépendance en fonction de la température a été augmentée progressivement. Finalement, une simulation complète, prenant en compte simultanément les trois propriétés non-constantes de l'eau, a été effectuée.

Toutes les simulations ont été réalisées à  $G = 200$  avec les paramètres correspondants ( $Pr = 9.4928$ ,  $Ri = 1.8972 \times 10^{-2}$  et  $\rho_s/\rho_f = 0.91691$ ). La condition initiale utilisée a été dans tous les cas le régime en zig-zag établi d'une sphère sans effet thermique (voir Fig. 5.2).

### Sphère sans effet thermique

A  $G = 200$  et  $\rho_s/\rho_f = 0.89$ , Jenny (2003) rapporte un régime en zig-zag dont la trajectoire moyenne est une ligne verticale et dont le sillage oscille périodiquement dans un plan (voir le diagramme de la Fig. 1.8). Notre simulation à  $G = 200$ ,  $\rho_s/\rho_f = 0.91691$  sans effet thermique a permis de retrouver le même régime. Les vitesses horizontales de la sphère  $u_x$  et  $u_y$  oscillent périodiquement autour d'une valeur moyenne nulle (voir Fig. 5.1a), la vitesse d'ascension  $u_z$  oscille légèrement autour d'une valeur moyenne non-nulle (voir Fig. 5.1b), ce qui se traduit par la trajectoire montrée dans Fig. 5.2. La trajectoire moyenne est donc une droite verticale. Lorsque la sphère traverse cette ligne imaginaire, ses vitesses  $u_x$  et  $u_y$  sont maximales et la vitesse d'ascension  $u_z$  est minimale. La situation s'inverse aux extrémités de la trajectoire, où la sphère monte avec une vitesse maximale et où les vitesses transversales sont nulles.

La séquence des 4 figures de Fig. 5.3 présente l'écoulement au cours d'une période, le numéro des figures correspondant aux numéros inscrits à l'aide de petits cercles dans Figs. 5.2 et 5.1a. L'aspect de l'écoulement sur le cliché (1) correspond au moment où la sphère monte verticalement – l'absence de vorticité axiale près de la sphère signifie que l'écoulement est momentanément axisymétrique. Le cliché (2) correspond   l'instant où la vitesse transversale est maximale, ce qui est dû au sillage tridimensionnel asymétrique. Le sillage de la sphère montant verticalement est montré sur le cliché (3) (absence de structures tourbillonnaires près de la sphère, les structures en aval de la sphère étant des restes de la vorticité advectée vers la sortie). Le cliché (4) ressemble au cliché (2) : la direction du mouvement de la sphère y est néanmoins opposée.

### Approximation de Boussinesq

En considérant un nombre de Richardson  $Ri = 1.8972 \times 10^{-2}$  (correspondant   un glaçon dans de l'eau   20 C) et en modélisant les effets de flottabilité par l'approximation de Boussinesq faisant intervenir le coefficient de dilatation de l'eau   10 C, on obtient une évolution

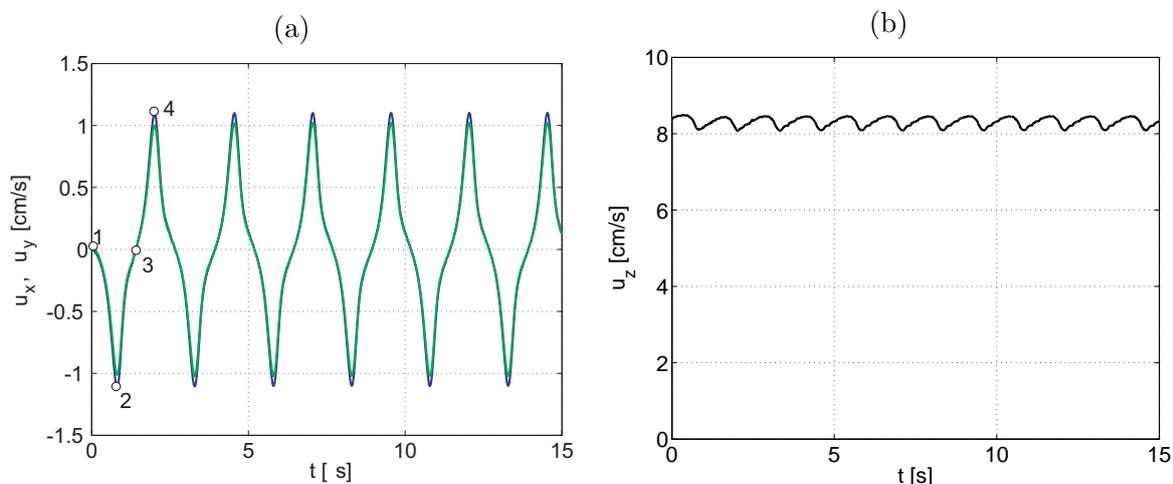


FIG. 5.1 – (a) Vitesses horizontales  $u_x$  (bleu) et  $u_y$  (vert) vs.  $t$ , (b) vitesse d'ascension  $u_z$  vs.  $t$  à  $G = 200$  et pour  $\rho_s/\rho_f = 0.91691$ , en ne considérant aucun effet thermique.

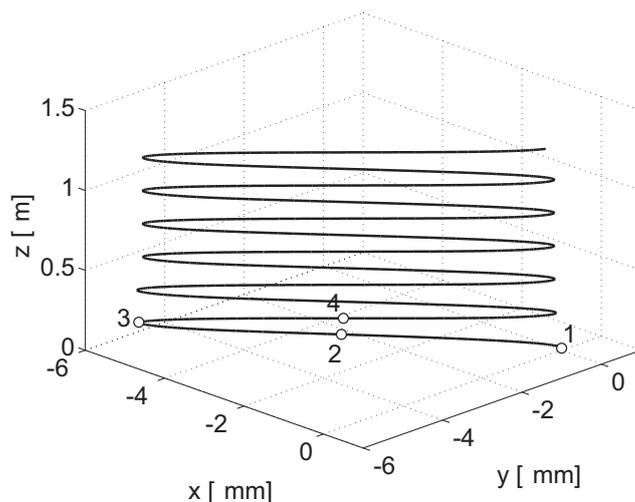


FIG. 5.2 – Trajectoire en zig-zag.

temporelle des vitesses de la sphère comme le montre Fig. 5.4a,b et c. La trajectoire correspondante est montrée dans Fig. 5.4d. L'effet de la modélisation de l'expansion volumique de l'eau par une droite est ainsi stabilisant, car la trajectoire – en zig-zag inclinée – présente une amplitude légèrement plus petite que la trajectoire en zig-zag verticale d'une sphère non-chauffée. Par comparaison au régime 'zig-zag', la particularité du comportement observé consiste dans le fait que la vitesse n'oscille pas dans un plan fixe. Tout se passe comme si, pendant la phase où l'écoulement redevient temporellement axisymétrique et la trajectoire verticale, le système perdait la mémoire du plan de symétrie. En conséquence, la vitesse ho-

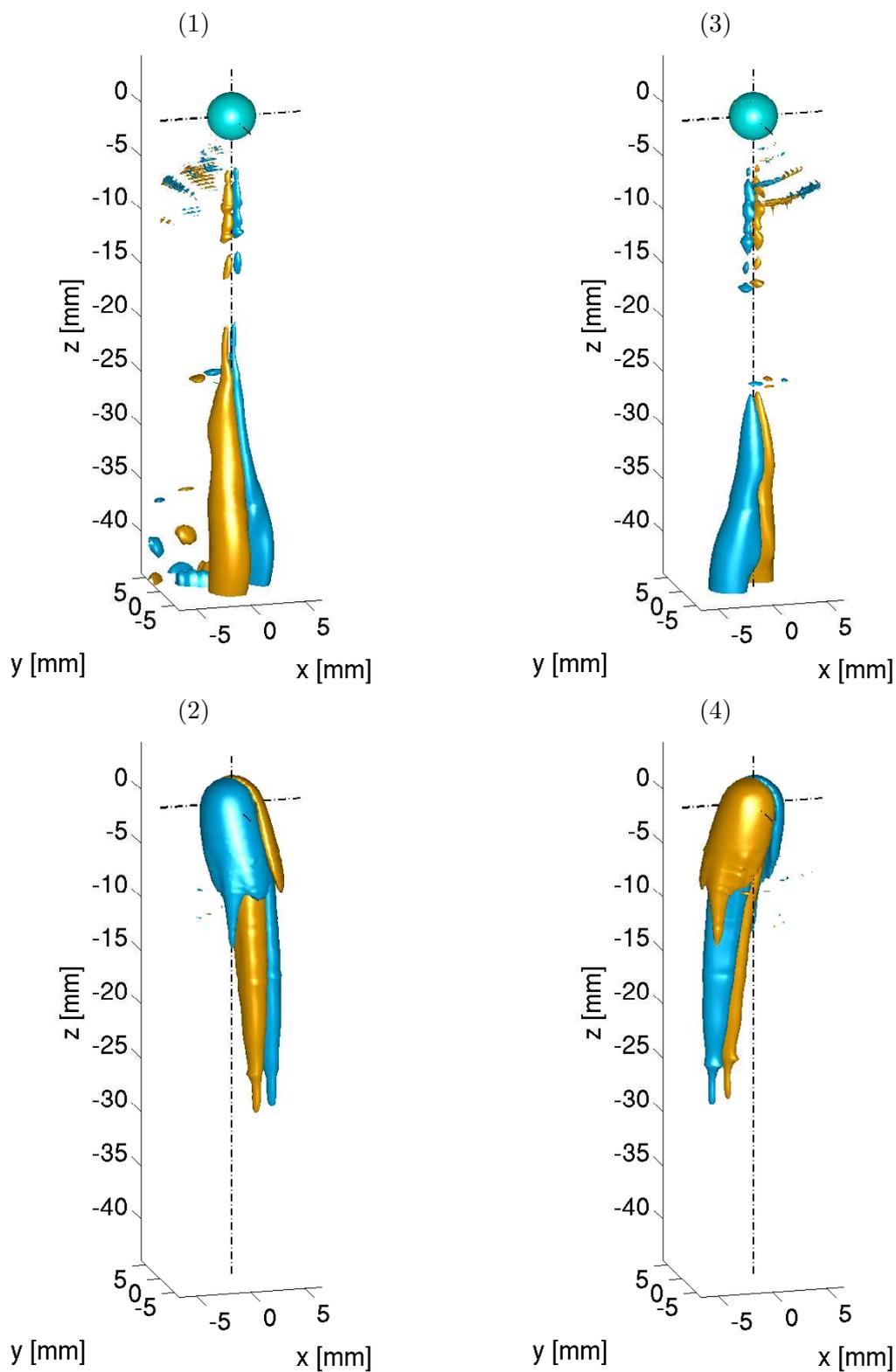


FIG. 5.3 – Séquence illustrant l'écoulement dans le sillage d'une sphère non-chauffée (iso-surfaces de vorticité axiale au niveau  $\omega_z = \pm 0.2$ ). Les clichés sont pris aux instants indiqués dans Figs. 5.2 et 5.1a.  $G = 200$  et  $\rho_s/\rho_f = 0.91691$ .

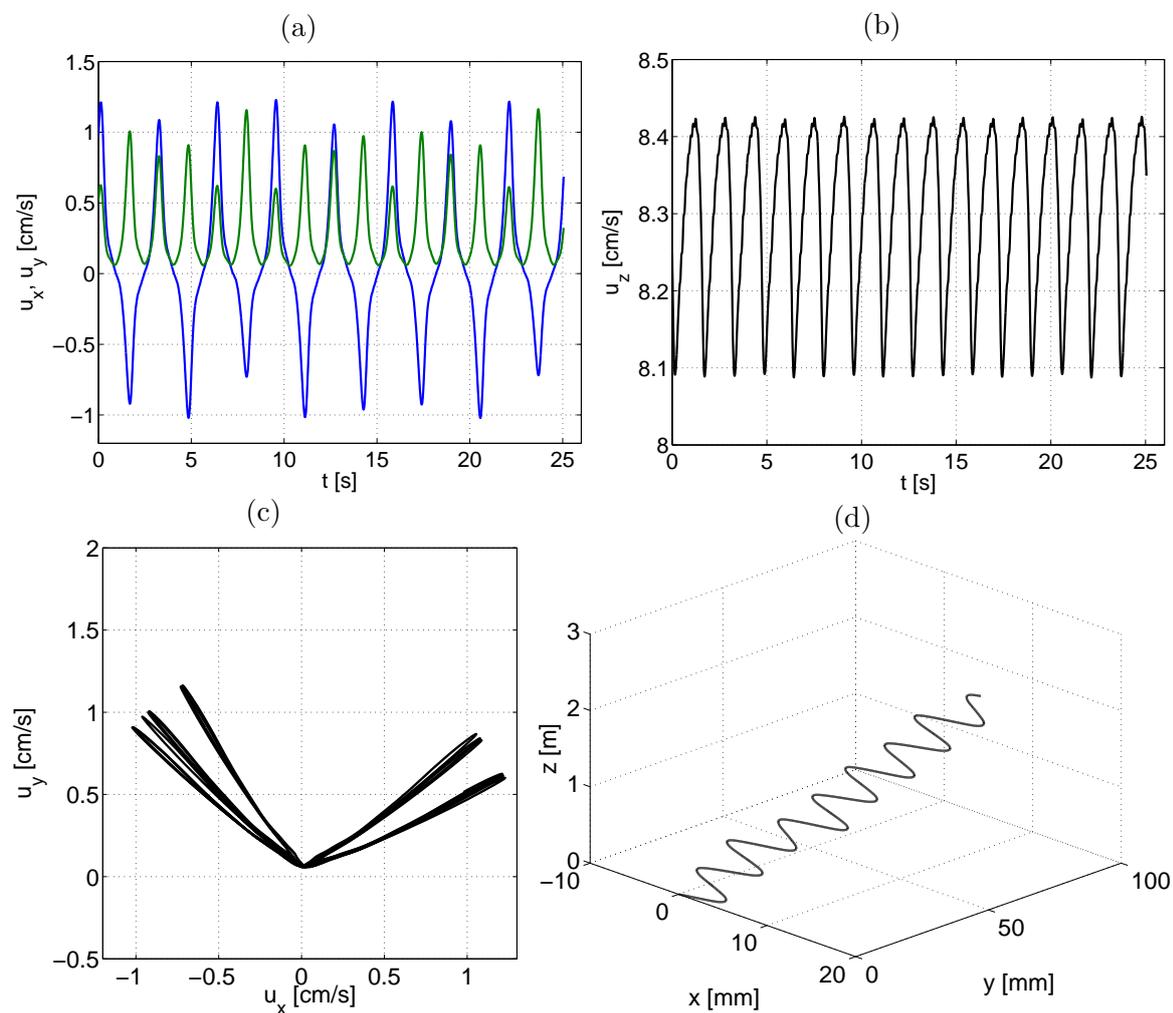


FIG. 5.4 – (a) Vitesses horizontales  $u_x$  (bleu) et  $u_y$  (vert) vs.  $t$ , (b) vitesse d'ascension  $u_z$  vs.  $t$ , (c) projection des vitesses transversales sur un plan horizontal et (d) trajectoire correspondante à  $G = 200$ . Les effets de flottabilité sont modélisés par une approximation de Boussinesq, le coefficient d'expansion volumique  $\beta$  étant une tangente à la fonction de la Fig. 2.4a à  $T_{ref} = 10^\circ\text{C}$ .  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ .

horizontale forme un angle inférieur à 180 degrés ce qui fait que la trajectoire, tout en restant en 'zig-zag' présente une dérive horizontale. L'effet stabilisant sur l'écoulement en utilisant l'approximation de Boussinesq est en accord avec la constatation que, pour une évolution linéaire de la masse volumique de l'eau avec la température (une décroissance), l'écoulement est assistant. Or, dans le cas d'une sphère fixe, nous avons constaté que l'écoulement assistant avait un effet stabilisant.

**Effet de la modélisation de  $\rho(T)$** 

En modélisant la dépendance de la température sur la masse volumique de l'eau par une parabole, on obtient une différence de masse volumique entre  $T_f = 0^\circ$  et  $T_f = 20^\circ\text{C}$  inférieure à celle que l'on obtenait en utilisant l'approximation de Boussinesq (l'approximation de Boussinesq ne tient pas compte de l'expansion anormale de l'eau; ainsi, à  $T_f = 0^\circ\text{C}$ , elle prévoit une masse volumique supérieure à celle du modèle parabolique). Les effets de flottabilité ont ainsi encore moins d'incidence sur l'écoulement autour d'une sphère qu'en utilisant l'approximation de Boussinesq. Un effet déstabilisant aurait pu éventuellement être observé du fait que, près de la sphère, l'écoulement est du type opposant alors que, plus loin, il est du type assistant. Néanmoins, pour une variation de  $\rho$  aussi petite ( $\Delta\rho/\rho = (999.82 - 998.29)/999.82 = 1.53 \times 10^{-3}$ ), ces effets ne sont pas visibles.

**Effet de la modélisation de  $\kappa(T)$** 

La situation est différente lorsqu'on modélise, par une fonction linéaire, l'influence de la variation de la température sur la diffusivité thermique (non prise en compte par l'approximation de Boussinesq). En effet, cette dernière change d'environ 10% dans l'intervalle de températures  $0 \leq T_f \leq 20^\circ\text{C}$ . Figs. 5.5a et b montrent, respectivement, les isosurfaces de température  $T = 10^\circ\text{C}$  et  $T = 16^\circ\text{C}$ . A l'extérieur de ces régions, le fluide a une température supérieure à  $10^\circ$  et  $16^\circ\text{C}$ , respectivement. La région de fluide froid est visiblement très confinée au voisinage immédiat de la sphère. Dans cette région le nombre de Prandtl local est plus élevé que la valeur de référence prise à  $10^\circ\text{C}$  alors qu'à l'extérieur elle est moins élevée. Compte tenu de la sensibilité de la transition au nombre de Prandtl et d'une variation non-négligeable de la valeur locale de ce dernier on peut s'attendre à un effet perceptible de l'enlèvement du paramètre  $\kappa_1$  auquel on impose directement la valeur réelle  $\kappa_1 = -0.072464$ . Fig. 5.7 montre la trajectoire correspondante. Au début de la simulation, la trajectoire est en zig-zag mais, cette trajectoire, caractéristique de la sphère sans effet thermique, est assez rapidement significativement modifiée. On remarque un zig-zag oblique assez proche des observations expérimentales de Jenny *et al.* (2003) qui ont été attribuées à une imperfection des sphères utilisées dans l'expérience.

Nous concluons, pour ce paragraphe, que l'effet de la conductivité variable est non-négligeable.

**Effet de la modélisation de  $\nu(T)$** 

Puisque la viscosité de l'eau est le paramètre qui change le plus dans l'intervalle de températures  $0 \leq T_f \leq 20^\circ\text{C}$ , la valeur du paramètre  $\nu_1$  a été augmentée progressivement – la valeur physique de 0.61069 a été atteinte en 5 étapes ( $\nu_1 = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4$  et 0.61069). Fig. 5.8 montre l'évolution temporelle des vitesses horizontales de la sphère pour les 5 valeurs de  $\nu_1$  et Fig. 5.9 montre la projection des vitesses transversales de la sphère sur un plan horizontal. Les trajectoires correspondantes sont montrées dans Fig. 5.10. (Les conditions initiales correspondent à une calcul préliminaire avec seulement 4 modes azimutaux, elle ne présentent donc plus de trace du régime 'zig-zag' de la sphère sans effets thermiques.)

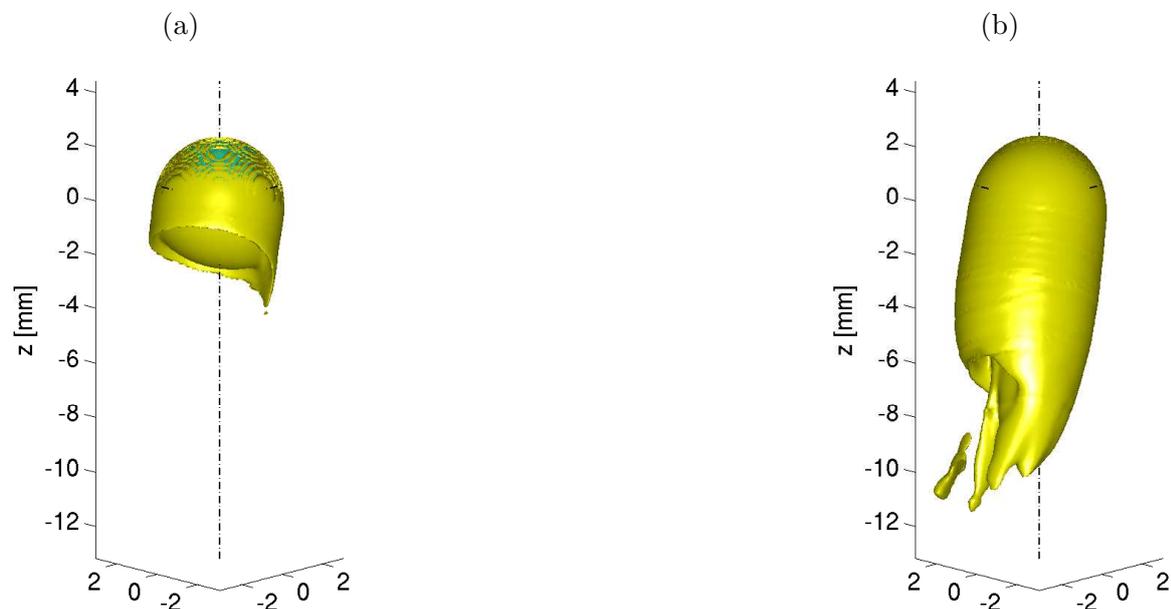


FIG. 5.5 – Isosurface de température au niveau (a)  $T = 10^\circ\text{C}$  et (b)  $T = 16^\circ\text{C}$ . L'aspect de l'écoulement correspond à la fin de la simulation de la Fig. 5.7. Les deux isosurfaces montrent la région de température basse, très confinée autour de la sphère.

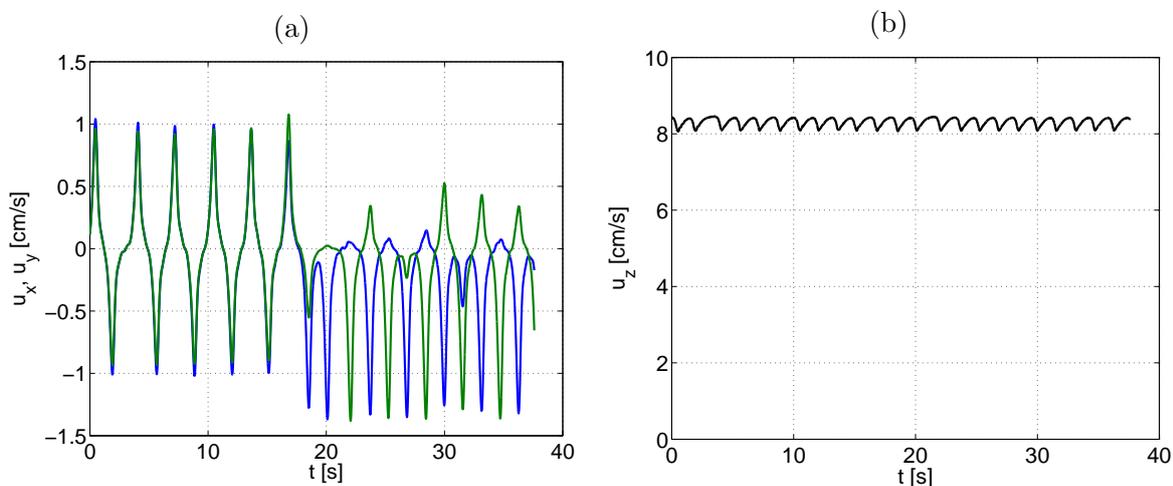


FIG. 5.6 – (a) Vitesses horizontales  $u_x$  (bleu) et  $u_y$  (vert) vs.  $t$ , (b) vitesse d'ascension  $u_z$  vs.  $t$  à  $G = 200$ . Le paramètre prenant en compte la dépendance linéaire de la température sur la diffusivité thermique vaut  $\kappa_1 = -0.072464$ .  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ .

Les figures en haut et à gauche dans Figs. 5.8, 5.9 et 5.10 montrent les vitesses et la trajectoire de la sphère lorsqu'on impose une légère variation de la viscosité cinématique

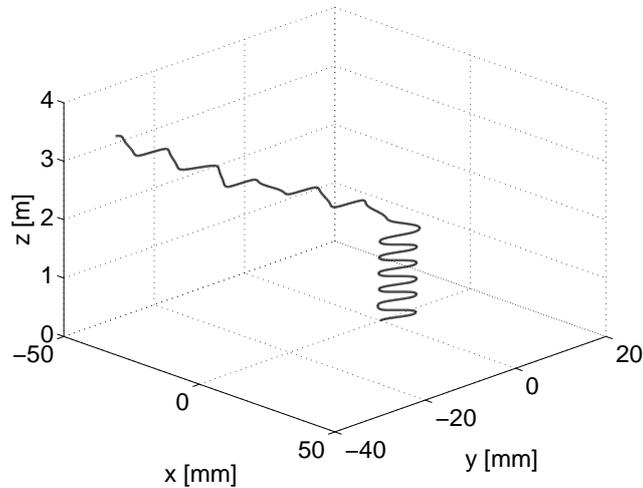


FIG. 5.7 – Trajectoire en zig-zag (la moyenne est une droite verticale) jusqu'à  $t = 18$  s, puis trajectoire oblique avec des restes du motif zig-zag. La condition initiale est le régime asymptotique d'une sphère sans effet thermique ; ce régime est instable.

avec la température ( $\nu_1 = 0.05$ ). On constate que même une valeur aussi faible suffit à changer complètement l'allure de la trajectoire par rapport à celle d'une sphère sans effet thermique – une trajectoire en zigzag, dont la moyenne est une droite verticale, se transforme en une trajectoire oblique oscillante. Imposer  $\nu_1 = 0.05$  revient à augmenter légèrement la viscosité du fluide à  $T < 10^\circ\text{C}$ , et à diminuer légèrement celle du fluide à  $T > 10^\circ\text{C}$  par rapport à la viscosité  $\nu_{ref}$  à  $T_{ref} = 10^\circ\text{C}$  ( $\nu_{ref} = 1.31 \times 10^{-6}$ ). En augmentant la viscosité près de la sphère, cette faible valeur du paramètre  $\nu_1$  a un effet stabilisant. A  $G = 200$ , on trouve ainsi un régime qui existait à des valeurs moins élevées du nombre de Galilée dans le diagramme d'état d'une sphère sans effet thermique. Néanmoins, en continuant à augmenter  $\nu_1$ , le mouvement de la sphère devient de moins en moins périodique et la trajectoire cesse d'être plane (voir Fig. 5.9e). Pour  $\nu_1 = 0.4$ , une deuxième fréquence s'installe dans le sillage (voir Fig. 5.8d) et à  $\nu_1 = 0.61069$ , la trajectoire devient complètement tridimensionnelle et chaotique. L'explication de ce comportement provient encore de la Fig. 5.5. Le fluide qui a une viscosité supérieure à  $\nu_{ref}$  se trouve à l'intérieur de la région de la Fig. 5.5a. Cette région de viscosité élevée (correspondant à un nombre de Galilée plus petit) est fortement non-axisymétrique et amplifie la perte d'axisymétrie de l'écoulement.

#### Modélisation de $\rho(T)$ , $\kappa(T)$ et $\nu(T)$

Fig. 5.11 montre les résultats (évolution temporelle des vitesses de la sphère, projection des vitesses transversales sur un plan horizontal et trajectoire de la sphère) d'une simulation à  $G = 200$  avec prise en compte des trois propriétés réelles de l'eau. L'écoulement autour de la sphère est chaotique, ce qui se traduit par une trajectoire chaotique. Compte tenu des résultats précédents, on peut dire que la variation thermique de la viscosité et de la

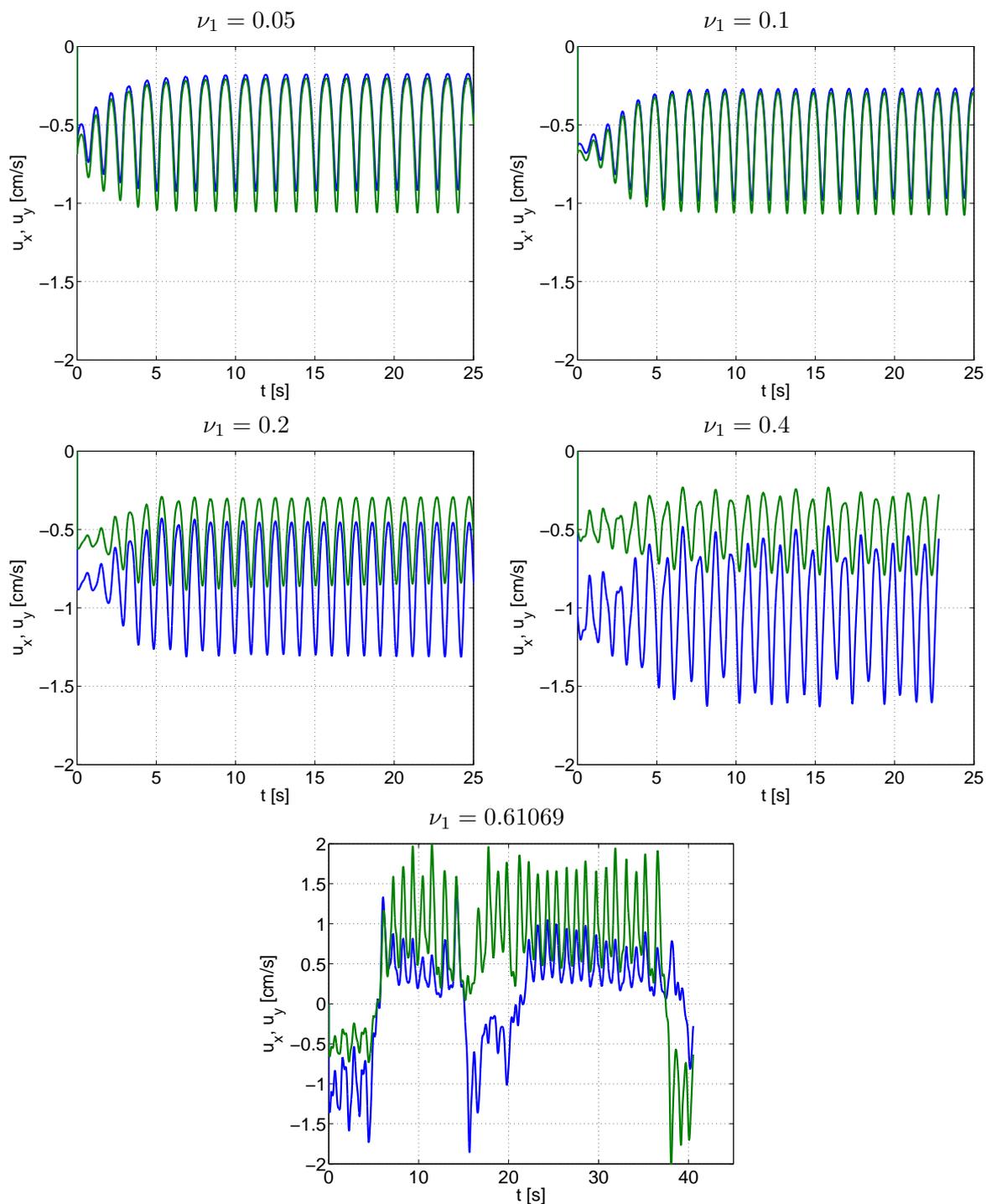


FIG. 5.8 – Vitesses horizontales  $u_x$  (bleu) et  $u_y$  (vert) vs.  $t$  pour différentes valeurs du paramètre  $\nu_1$ , indiquées au-dessus des figures.  $G = 200$ ,  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ .

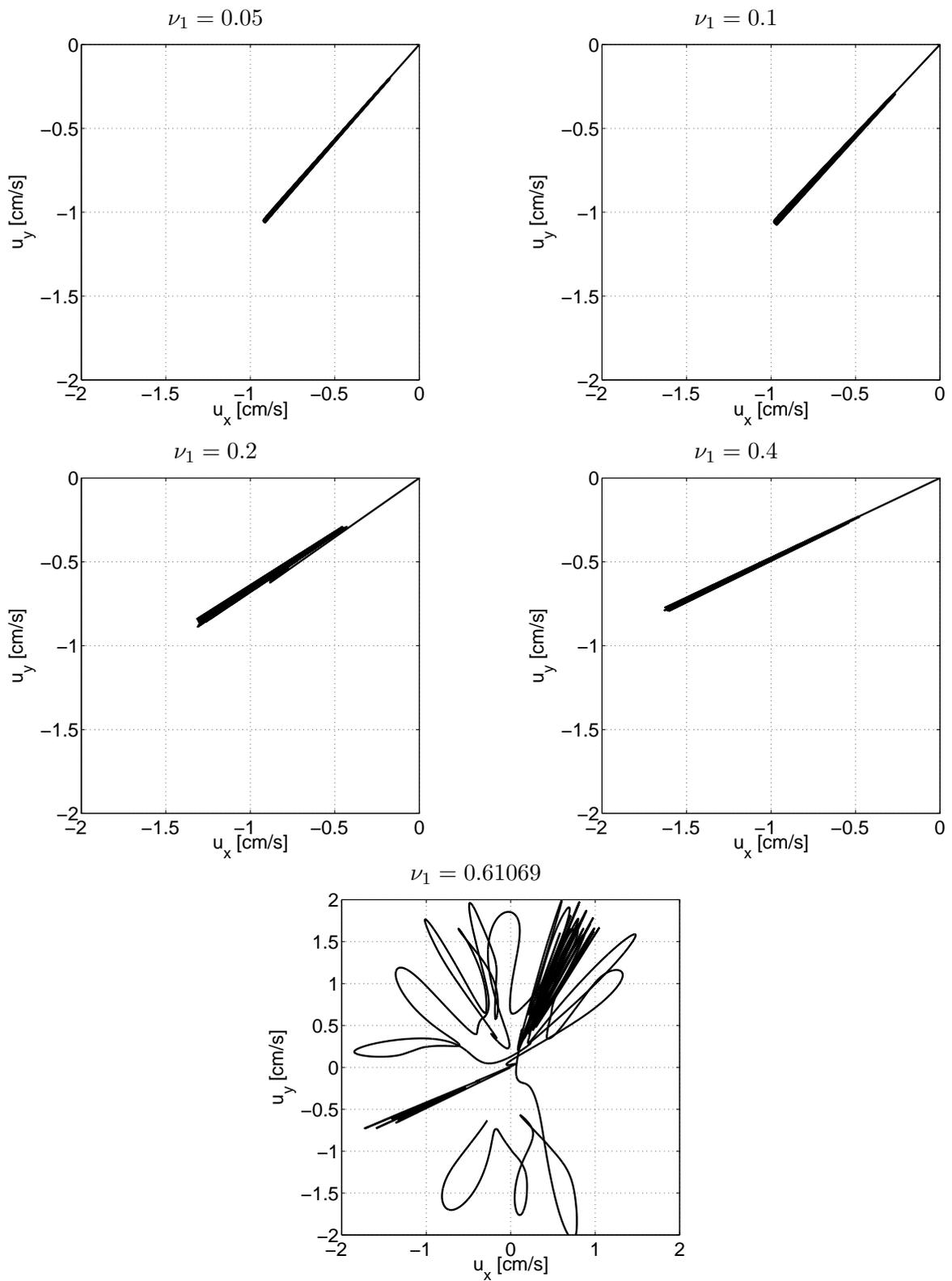


FIG. 5.9 – Projection des vitesses transversales sur un plan horizontal pour différentes valeurs du paramètre  $\nu_1$ .  $G = 200$ ,  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ .

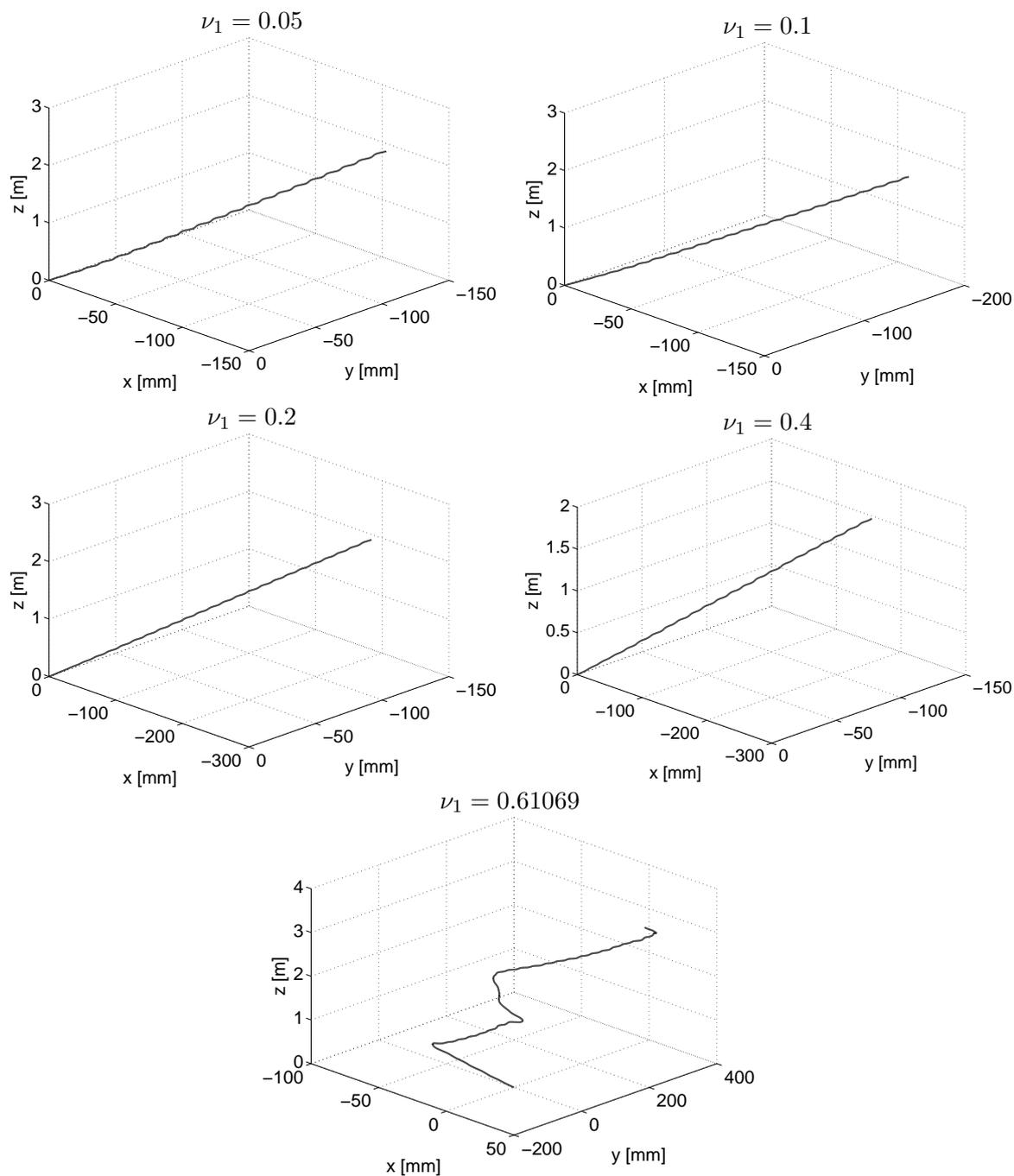


FIG. 5.10 – Trajectoires correspondant aux différentes valeurs du paramètre  $\nu_1$ .  $G = 200$ ,  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ .

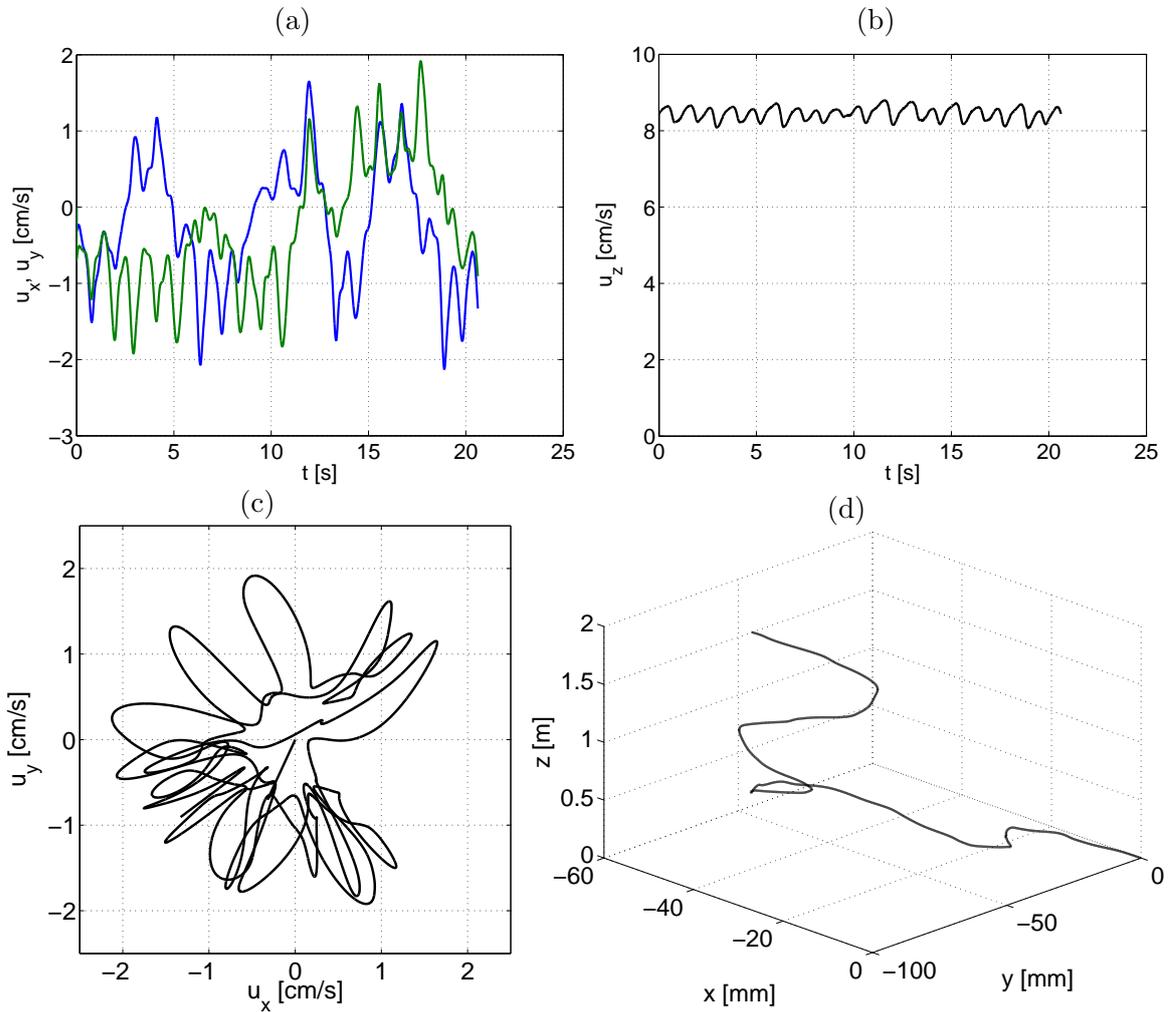


FIG. 5.11 – (a) Vitesses horizontales  $u_x$  (bleu) et  $u_y$  (vert) vs.  $t$ , (b) vitesse d'ascension  $u_z$  vs.  $t$ , (c) projection des vitesses transversales sur un plan horizontal et (d) trajectoire correspondante à  $G = 200$ ,  $\rho_2 = -1.8274$ ,  $\kappa_1 = -0.072464$  et  $\nu_1 = 0.61069$ .  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ .

conductivité sont des paramètres incontournables pour obtenir ce comportement à ce nombre de Galilée.

### Simulations à $G = 120, 140, 160, 180, 190, 200$ et $240$ en tenant compte des valeurs physiques de $\rho_2$ , $\kappa_1$ et $\nu_1$

La présente section présente les résultats des simulations qui tiennent compte de tous les paramètres du Tab. 2.4 (colonne de gauche –  $T_f = 20^\circ\text{C}$ ) à l'exception de la chaleur latente (la fusion n'étant toujours pas prise en compte).

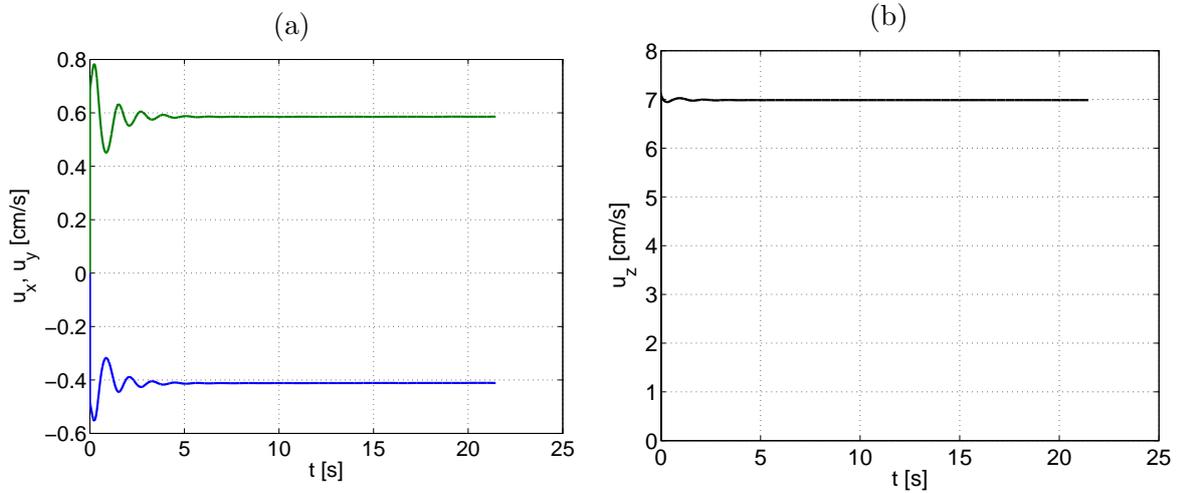


FIG. 5.12 – (a) Vitesses horizontales  $u_x$  (bleu) et  $u_y$  (vert) vs.  $t$ , (b) vitesse d’ascension  $u_z$  vs.  $t$  d’une sphère dans de l’eau aux propriétés réelles,  $G = 140$ ,  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ .

$G = 120$  ( $d = 3.12$  mm) À  $G = 120$ , l’écoulement est encore axisymétrique et la trajectoire est une droite verticale. Ce régime d’écoulement autour d’une sphère libre correspond au régime d’écoulement autour d’une sphère fixe pour  $Re < Re_1$  (avant l’apparition de l’instabilité primaire). Ce n’est que pour ce régime asymptotique que l’équation (1.10) est applicable.

$G = 140$  ( $d = 3.46$  mm) Entre  $G = 120$  et  $G = 140$ , l’écoulement subit une bifurcation régulière, ce qui se traduit par l’apparition d’une force de portance constante. Cette dernière pousse la sphère à s’écarter de la trajectoire rectiligne verticale, pour adopter une trajectoire rectiligne inclinée. Fig. 5.12 montre les vitesses transversales et la vitesse d’ascension, toutes trois asymptotiquement constantes (au début, la simulation ayant été lancée à partir d’un régime oscillant, on observe un transitoire avec une atténuation rapide des oscillations); Fig. 5.13 montre la trajectoire correspondante. L’aspect de l’écoulement est montré dans Fig. 5.14. Le sillage présente deux filaments de vorticité contrarotatifs stationnaires. Leur position, hors de l’axe vertical, est responsable de l’apparition d’une force de portance.

$G = 160$  ( $d = 3.78$  mm) Comme dans le cas du sillage d’une sphère fixe, le sillage d’une sphère libre subit une deuxième bifurcation (de type Hopf). Cette instabilité secondaire s’installe entre  $G = 140$  et  $G = 160$ . Fig. 5.15 montre les oscillations périodiques des vitesses transversales et de la vitesse d’ascension, Fig. 5.16 montre la trajectoire correspondante qui est une ligne oblique avec des oscillations (la trajectoire se trouve dans un plan vertical). Fig. 5.14 montre l’aspect de l’écoulement   deux instants distants d’une demi-période – le détachement périodique a pour conséquence une ondulation de la trajectoire. La fréquence des oscillations est  $f = 0.986$ .

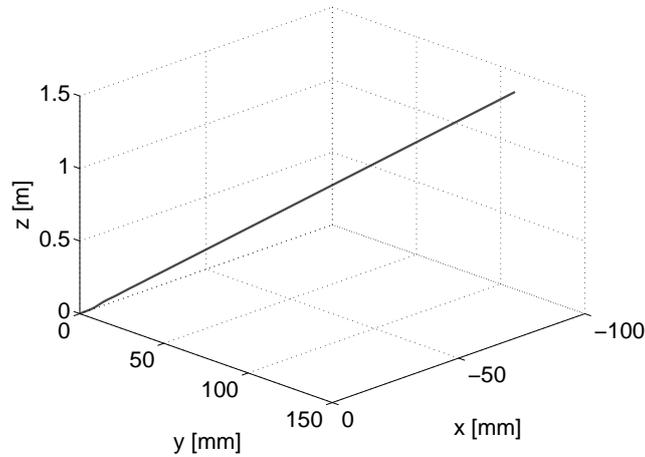


FIG. 5.13 – Trajectoire rectiligne inclinée d’une sphère dans de l’eau aux propriétés réelles,  $G = 140$ ,  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ .

$G = 180$  ( $d = 4.09 \text{ mm}$ ) A  $G = 180$ , la trajectoire est toujours oblique oscillante et ressemble beaucoup à celle de la Fig. 5.16. Néanmoins, en traçant l’évolution temporelle des vitesses de la sphère (voir Fig. 5.18), on voit apparaître une fréquence sous-harmonique d’une période environ deux fois plus longue que celle des oscillations de base. Une telle fréquence a déjà été observée à  $G = 200$  en imposant la valeur  $\nu_1 = 0.4$  à la constante qui modélise la dépendance linéaire de la température sur la viscosité de l’eau (la valeur physique réelle étant  $\nu_1 = 0.61069$ ). Cette observation indique que le fait de ne pas imposer la valeur de  $\nu_1$  à  $0.61069$  mais à une valeur inférieure revient qualitativement à faire une simulation à un nombre de Galilée moins élevé. Ceci confirme l’observation que le paramètre  $\nu_1$  est déstabilisant.

$G = 190$  ( $d = 4.24 \text{ mm}$ ) A  $G = 190$ , la trajectoire est toujours plane mais la dynamique du sillage ne présente plus de comportement quasi-périodique (voir Fig. 5.19). Le sillage plan avec une dynamique complexe est la dernière étape avant la transition au chaos.

$G = 200$  ( $d = 4.38 \text{ mm}$ ) La simulation à  $G = 200$  a déjà été présentée dans cette section 5.1.1 à la fin du paragraphe portant sur la modélisation de  $\rho_2$ ,  $\kappa_1$  et  $\nu_1$  et l’influence de la convection mixte sur la trajectoire de la sphère. Les résultats de ce régime chaotique ont été présentés dans Fig. 5.11.

$G = 240$  ( $d = 4.95 \text{ mm}$ ) A  $G = 240$ , la trajectoire de la sphère est déjà complètement chaotique (voir Fig. 5.20). La simulation de la Fig. 5.20 a été lancée à partir d’un régime établi avec un sillage plan, ce qui explique la trajectoire plane du début de la simulation à  $G = 240$ . Fig. 5.21 montre l’aspect de l’écoulement à la fin de la simulation de Fig. 5.20.

Nous concluons que la dépendance de la viscosité et de la conductivité de la température change complètement le scénario de transition en comparaison avec une sphère ayant la même

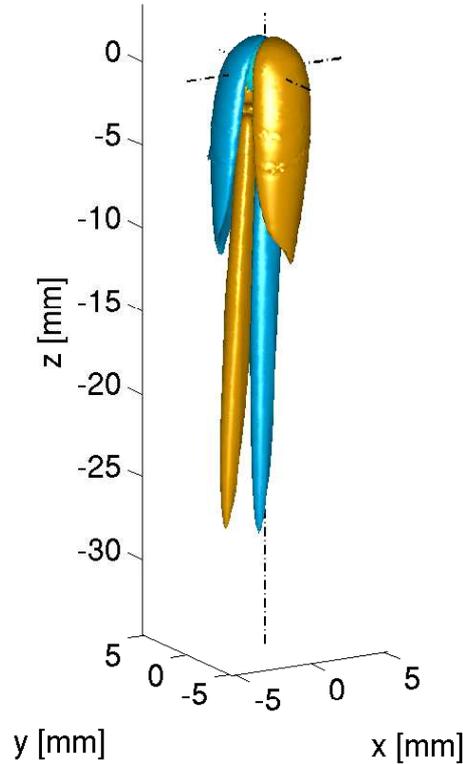


FIG. 5.14 – Aspect du sillage (isosurfaces de vorticité axiale au niveau  $\omega_z = \pm 0.1$ ) présentant deux filaments de vorticité stationnaires. Sphère libre dans de l'eau aux propriétés réelles,  $G = 140$ ,  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ .

température que le fluide ambiant. En particulier, le régime présentant une trajectoire en zig-zag est totalement absent.

### 5.1.2 Glaçon sans fusion immergé dans de l'eau à $4^\circ\text{C}$

Comme nous l'avons déjà constaté, l'écoulement autour d'une sphère à  $T_s = 0^\circ\text{C}$  moins dense que l'eau, immergée dans de l'eau à température  $T_f = 4^\circ\text{C}$ , est du type écoulement opposant. Cependant, le nombre de Richardson correspondant ne dépasse pas  $Ri = -2.16^{-3}$  (voir Tab.2.4), ce qui représente une valeur négligeable. Pour cette différence de températures, on s'attend donc à ce que l'écoulement ne soit que très faiblement influencé par les effets de flottabilité. De plus, la viscosité entre  $T = 0^\circ\text{C}$  et  $T = 4^\circ\text{C}$  change beaucoup moins que dans l'intervalle de températures  $0 \leq T \leq 20^\circ\text{C}$  de la section précédente. L'effet déstabilisant de la viscosité décroissante est donc supposé inférieur au cas  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ . Les trajectoires de la sphère aux mêmes nombres de Galilée sont donc attendues plus stables pour  $\Delta T = 4^\circ\text{C}$  que pour  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ .

Pour cette différence de températures, nous n'avons pas effectué les tests d'influence de

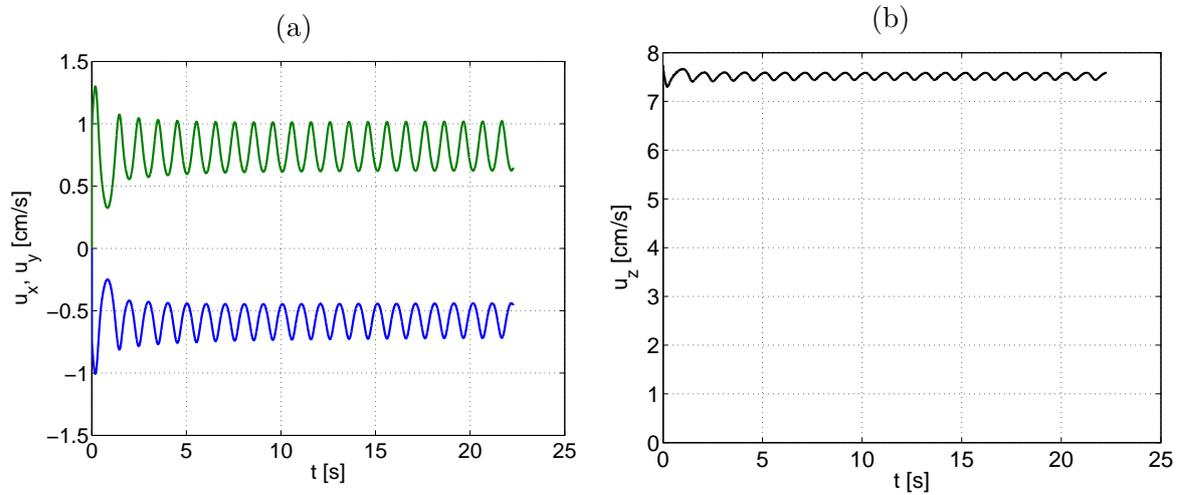


FIG. 5.15 – (a) Vitesses horizontales  $u_x$  (bleu) et  $u_y$  (vert) vs.  $t$ , (b) vitesse d'ascension  $u_z$  vs.  $t$  d'une sphère dans de l'eau aux propriétés réelles,  $G = 160$ ,  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ .

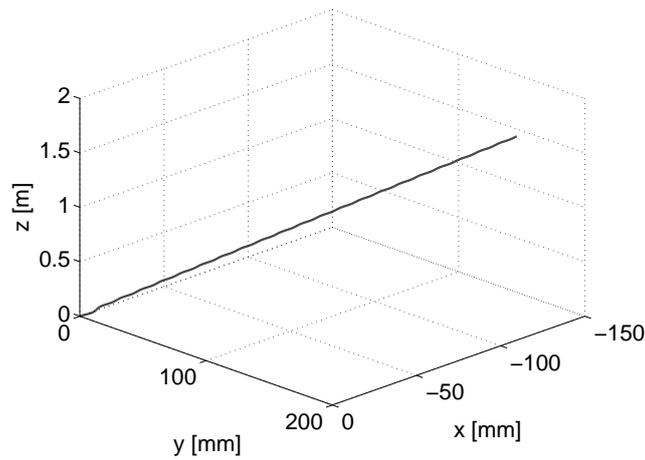


FIG. 5.16 – Trajectoire oblique oscillante d'une sphère dans de l'eau aux propriétés réelles,  $G = 160$ ,  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ .

chacun des paramètres  $\rho_2$ ,  $\kappa_1$  et  $\nu_1$  étant donné que l'étude précédente a démontré leurs rôles respectives. Toutes les simulations ont été lancées avec les 7 valeurs appropriées des paramètres indépendants (voir Tab. 2.4, colonne de droite).

A  $G = 140$ , l'écoulement est encore axisymétrique (pour  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$  et au même nombre de Galilée, le sillage de la sphère était déjà tridimensionnel et stationnaire). L'écoulement subit une bifurcation régulière entre  $G = 140$  et  $G = 160$  et une bifurcation de Hopf entre  $G = 160$  et  $G = 180$ . A  $G = 200$ , la trajectoire est toujours plane mais oscillante (au même nombre de Galilée, l'écoulement était déjà chaotique pour  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ ). L'écoulement devient

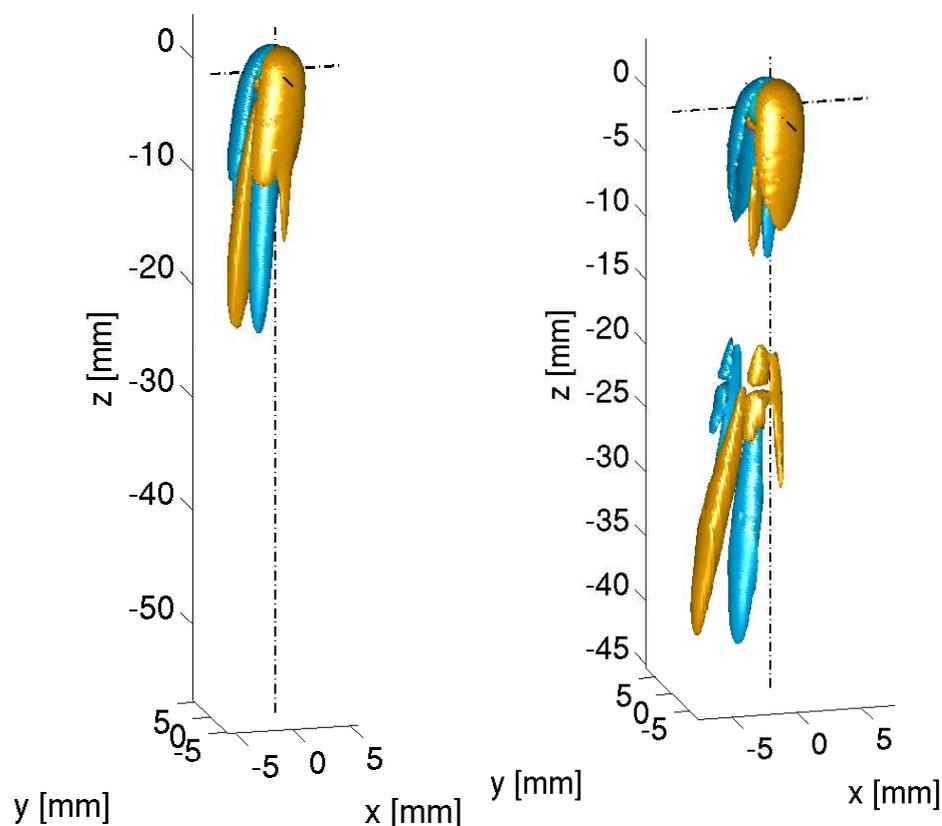


FIG. 5.17 – Aspect du sillage oscillant (isosurfaces de vorticité axiale au niveau  $\omega_z = \pm 0.2$ ) à deux instants distants d'une demi-période. Tourbillons attachés (à gauche), tourbillons détachés (à droite). Sphère dans de l'eau aux propriétés réelles,  $G = 160$ ,  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ .

chaotique entre  $G = 200$  et  $G = 220$ . Figs. 5.22, 5.23 et 5.24 montrent l'évolution temporelle des vitesses transversales, de la vitesse d'ascension et des trajectoires aux nombres de Galilée  $160 \leq G \leq 260$ .

### 5.1.3 Caractéristiques du transfert de chaleur

Fig. 5.25 trace la dépendance du nombre de Galilée sur le nombre de Nusselt, obtenu par la définition (4.5), pour les deux différences de températures considérées. L'échange thermique par convection est plus prédominant dans le cas d'une sphère immergée dans de l'eau à  $4^\circ\text{C}$ , ce qui est dû au nombre de Prandtl plus élevé (12.54 pour  $\Delta T = 4^\circ\text{C}$  contre 9.49 pour  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ ). Les changements de régime de l'écoulement autour de la sphère sont quasi-invisibles sur les courbes. Néanmoins, il semble que pour  $\Delta T = 4^\circ\text{C}$ , l'apparition du régime oscillant favorise l'échange thermique par convection. Pour  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ , le nombre de Nusselt ne croît pas aussi vite à partir de  $G = 240$ .

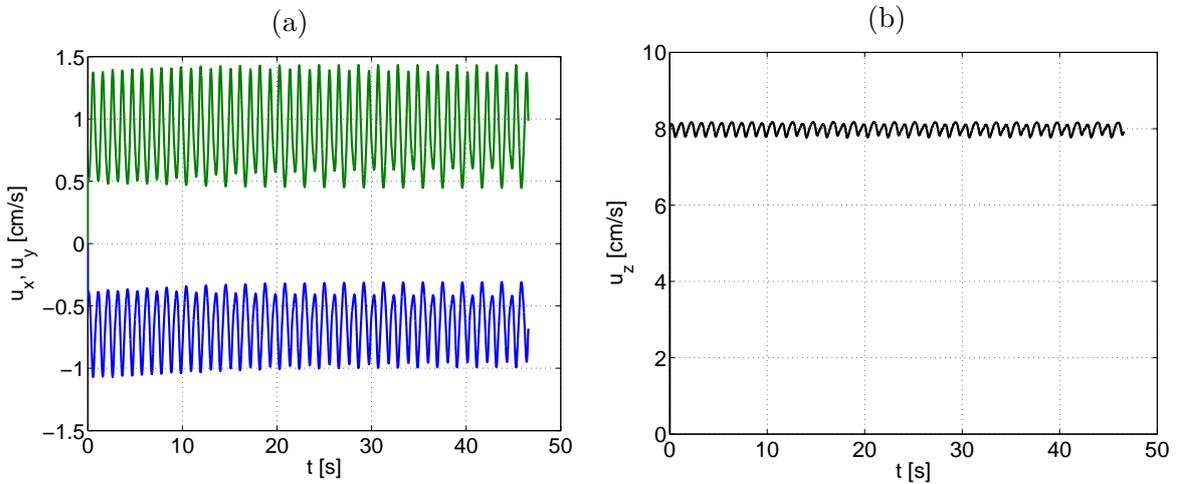


FIG. 5.18 – (a) Vitesses horizontales  $u_x$  (bleu) et  $u_y$  (vert) vs.  $t$ , (b) vitesse d'ascension  $u_z$  vs.  $t$  d'une sphère dans de l'eau aux propriétés réelles,  $G = 180$ ,  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ . Une fréquence sous-harmonique apparaît dans le sillage de la sphère.

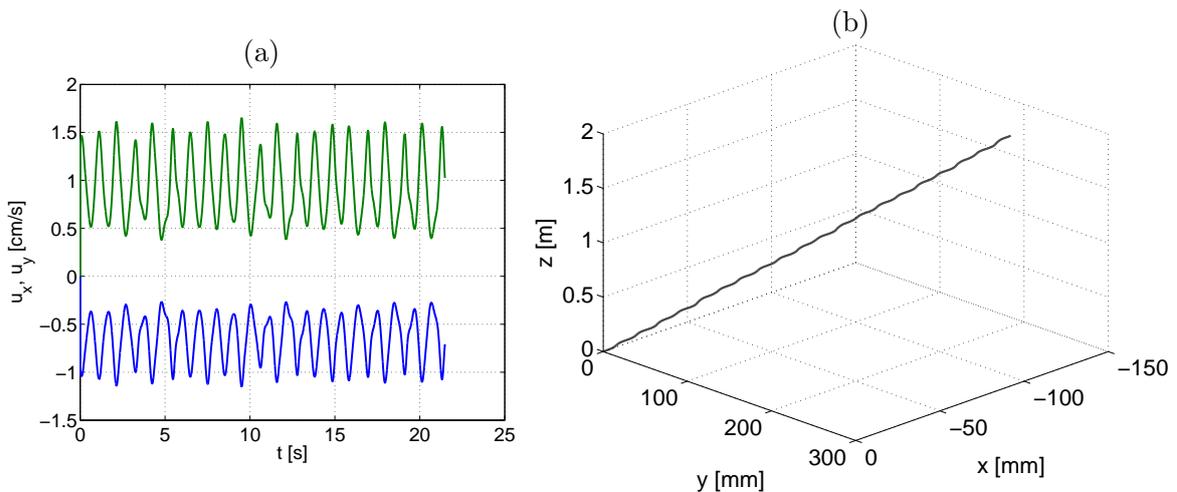


FIG. 5.19 – (a) Vitesses horizontales  $u_x$  (bleu) et  $u_y$  (vert) vs.  $t$ , (b) trajectoire plane oblique oscillante,  $G = 190$ ,  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ .

## 5.2 Glaçon en fusion immergé dans de l'eau ambiante

En modélisant la fonte sphérique d'un glaçon, le nombre de Galilée (qui, rappelons-le, est le seul paramètre de contrôle ajustable), n'est plus constant mais évolue avec le temps au cours de la simulation, au fur et à mesure que le glaçon fond. Nous pouvons donc juste imposer le nombre de Galilée initial  $G_{init}$  ou, ce qui revient au même, le diamètre initial du glaçon  $d_{init}$ . Toutes les simulations ont été lancées avec, comme condition initiale, le fluide

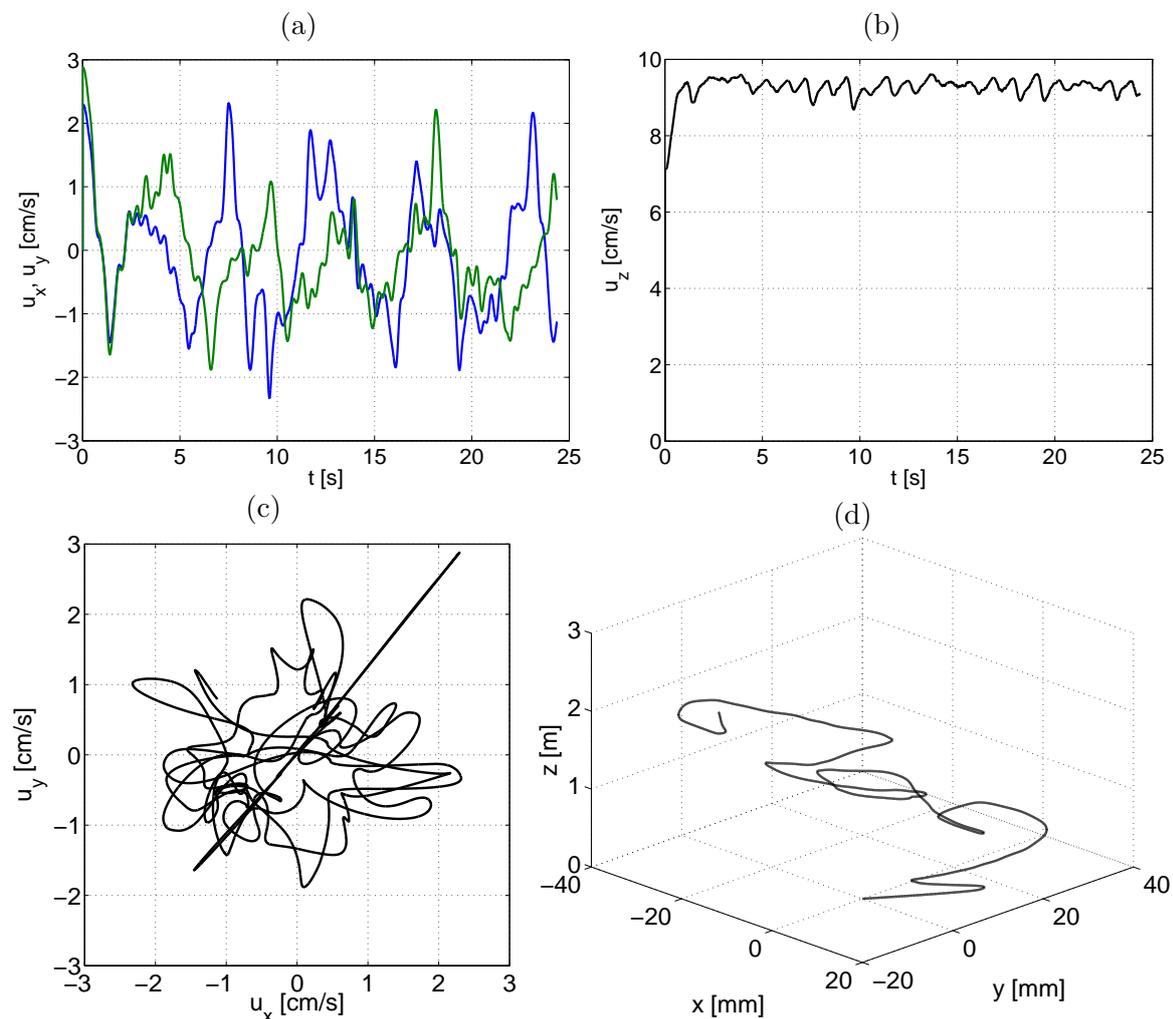


FIG. 5.20 – (a) Vitesses horizontales  $u_x$  (bleu) et  $u_y$  (vert) vs.  $t$ , (b) vitesse d’ascension  $u_z$  vs.  $t$ , (c) projection des vitesses transversales sur un plan horizontal et (d) trajectoire correspondante,  $G = 240$ ,  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ .

au repos (ce qui correspond à un glaçon lâché dans de l’eau initialement au repos) et ont été stopées lorsque le diamètre du glaçon avait diminué d’un facteur 4 par rapport au diamètre initial. Deux cas ont été considérés : un glaçon dans de l’eau chaude ( $T_f = 20^\circ\text{C}$ ) et un glaçon dans de l’eau froide ( $T_f = 4^\circ\text{C}$ ).

### 5.2.1 Glaçon en fusion immergé dans de l’eau à $20^\circ\text{C}$

Les simulations ont été effectuées à  $G_{init} = 200, 300, 400$  et  $500$ , ce qui correspond, respectivement, à  $d_{init} = 4.38, 5.74, 6.96$  et  $8.07$  mm. Les 7 paramètres de la colonne de gauche du Tab. 2.4, parmi lesquels figure un nouveau paramètre – la chaleur latente de fusion

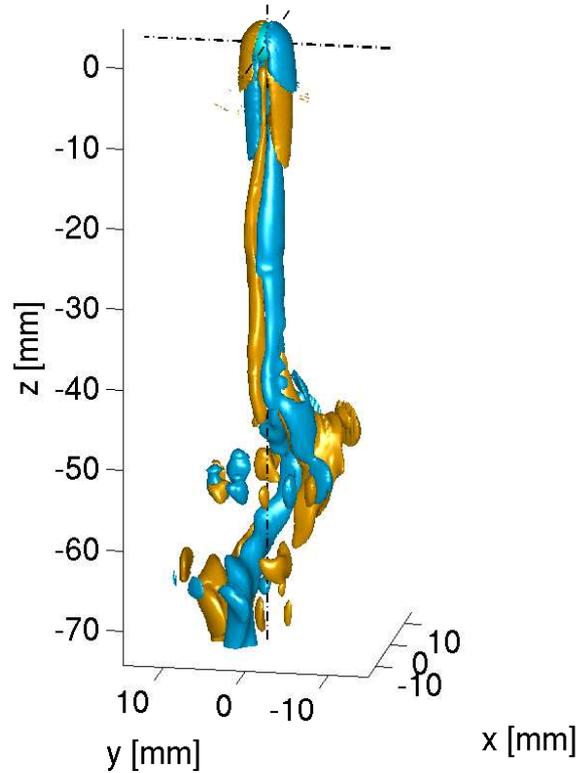


FIG. 5.21 – Aspect du sillage (isosurfaces de vorticité axiale au niveau  $\omega_z = \pm 0.3$ ) à la fin de la simulation à  $G = 240$  et  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ . Le sillage présente des extinctions correspondant aux parties droites de la trajectoire et des lâchés tourbillonnaires correspondant aux changements de direction de la trajectoire.

adimensionnalisée  $\ell^* = -3.976$ , ont été imposés dans toutes les simulations. Figs. 5.26, 5.27, 5.28 et 5.29 montrent, respectivement, l'évolution du diamètre du glaçon (et du nombre de Galilée), de la vitesse d'ascension et des vitesses transversales au cours des simulations, ainsi que la trajectoire parcourue par le glaçon.

La caractéristique commune aux 4 simulations est le fait que la trajectoire, au début de la simulation ainsi qu'à sa fin, est une ligne droite verticale (l'écoulement étant axisymétrique, ce qui est confirmé par les vitesses transversales nulles au début et à la fin des simulations). Ceci est dû aux faibles vitesses d'ascension au départ des simulations (le glaçon étant lâché à partir d'une vitesse initiale nulle) et aux faibles nombres de Galilée à la fin de toutes les simulations (le régime asymptotique à ces valeurs de  $G$  étant un écoulement axisymétrique). En raison de l'évolution rapide du nombre de Galilée au cours des simulations, le glaçon n'atteint les régimes, présentés dans les sections précédentes, que pour de très courtes durées. Les trajectoires, à part celles pour  $G_{init} = 200$  (une trajectoire plane et quasi-droite) et  $G_{init} = 300$  (une trajectoire quasi-plane et oblique oscillante dans la partie du milieu),

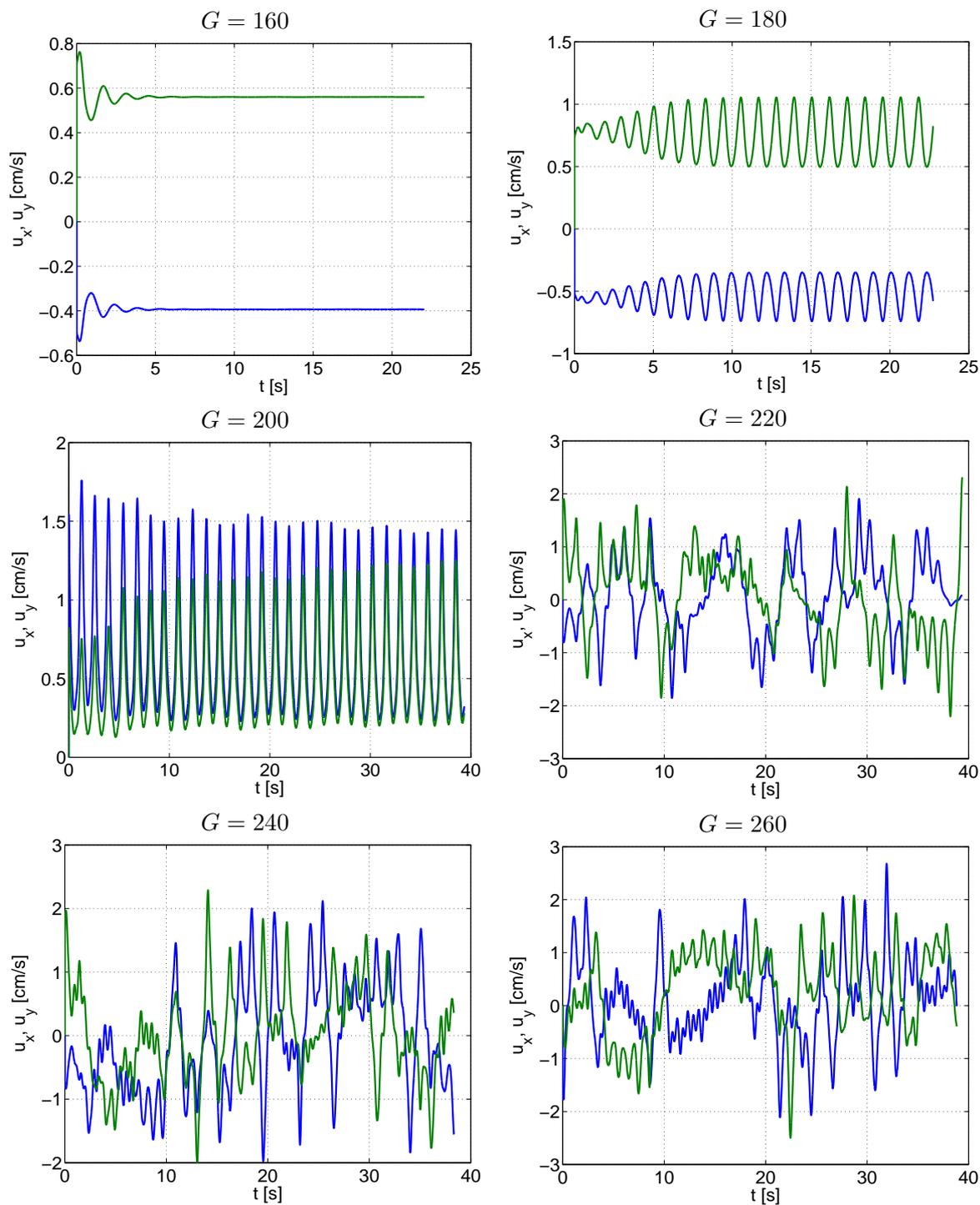
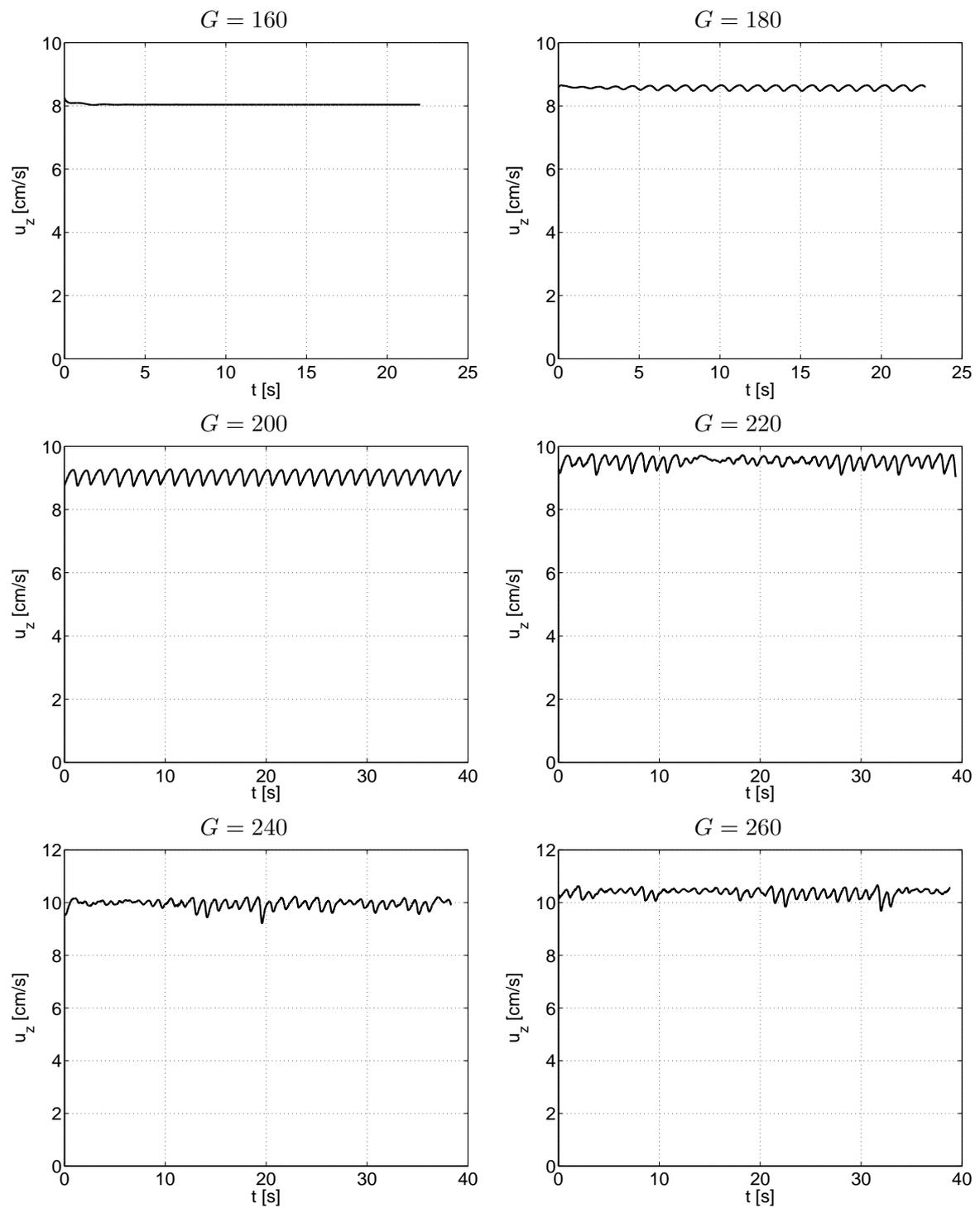


FIG. 5.22 – Vitesses horizontales  $u_x$  (bleu) et  $u_y$  (vert) vs.  $t$  pour différents nombres de Galilée. Sphère à  $T_s = 0^\circ\text{C}$  immergée dans de l'eau à  $T_f = 4^\circ\text{C}$ . Modélisation correcte de  $\rho_2$ ,  $\kappa_1$  et  $\nu_1$ .

FIG. 5.23 – Vitesse verticale  $u_z$  vs.  $t$  pour différents nombres de Galilée.  $\Delta T = 4^\circ\text{C}$ .

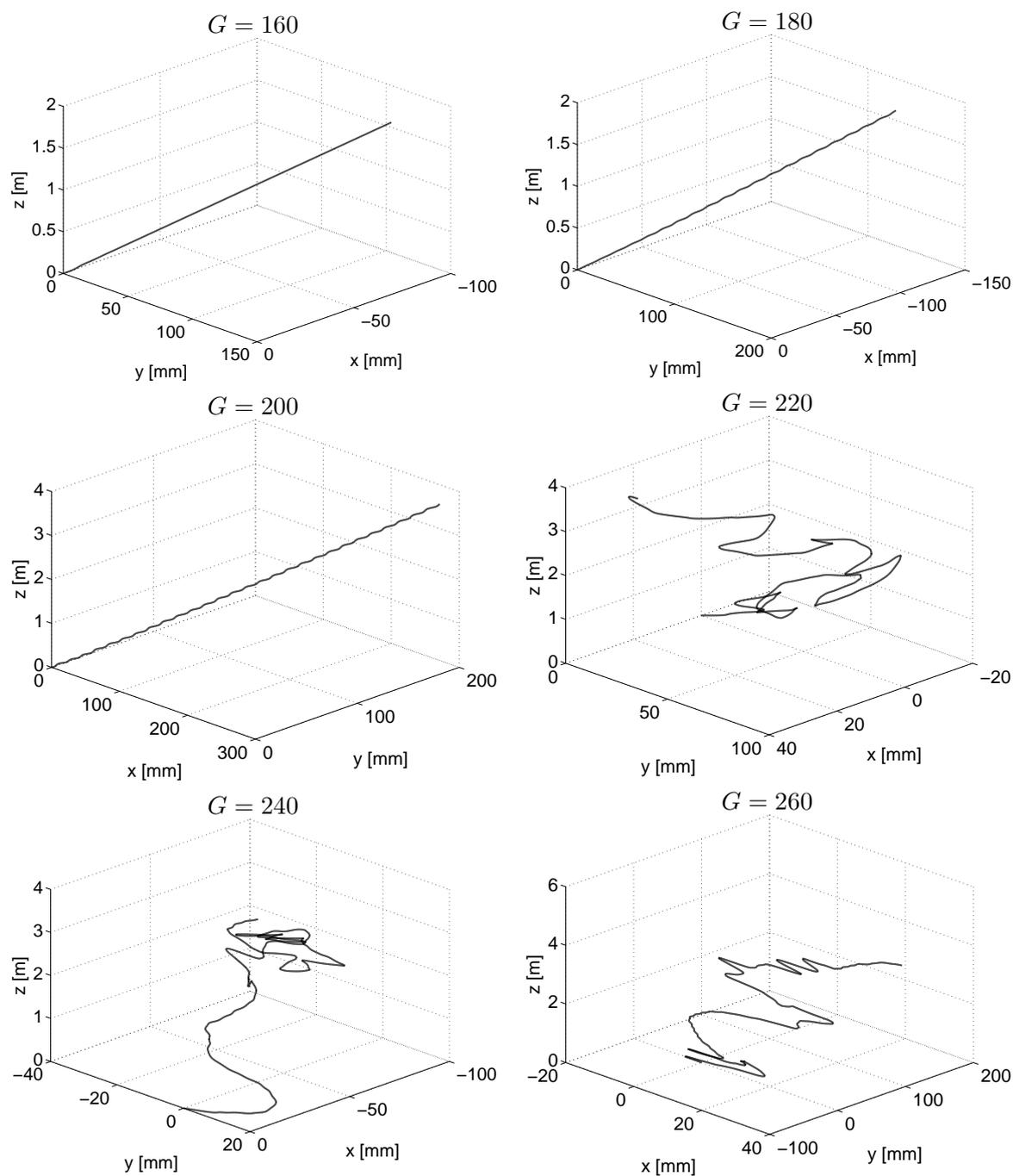


FIG. 5.24 – Trajectoire oblique droite ( $G = 160$ ), oblique oscillante ( $G = 180$  et  $200$ ) et chaotique ( $G = 220, 240$  et  $260$ ). Sphère à  $T_s = 0^\circ\text{C}$  immergée dans de l'eau à  $T_f = 4^\circ\text{C}$ . Modélisation correcte de  $\rho_2$ ,  $\kappa_1$  et  $\nu_1$ .

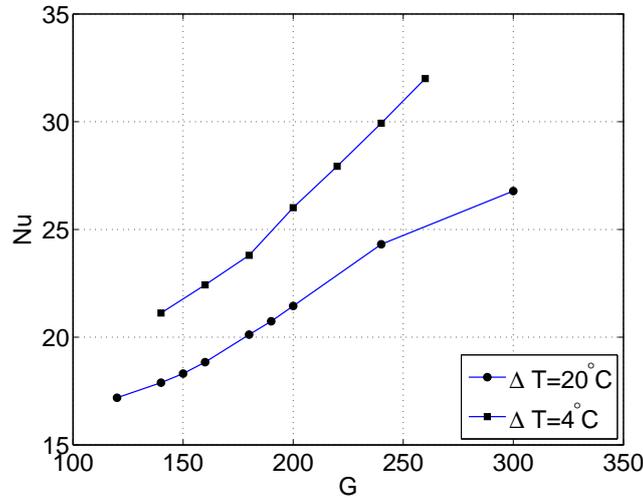


FIG. 5.25 – Nombre de Nusselt en fonction du nombre de Galilée pour les deux différences de températures considérées.

ont un aspect chaotique. Ceci est dû à l'existence des régimes asymptotiques chaotiques à  $G > 200$ . La mise en mouvement du glaçon est très rapide : la vitesse d'ascension atteint son maximum entre 1 et 2 s après le lâché du glaçon dans toutes les simulations. L'évolution de l'écoulement autour du glaçon est décrite en détail pour les deux cas extrêmes ( $G_{init} = 200$  et  $G_{init} = 500$ ) dans les deux paragraphes suivants.

À  $G = 200$ , le régime asymptotique de l'écoulement autour d'une sphère de température  $T_s = 0^\circ\text{C}$  plongée dans de l'eau à  $T_f = 20^\circ\text{C}$  est déjà chaotique, comme cela a été montré dans la section 5.1.1. Néanmoins, un glaçon à  $G_{init} = 200$ , lâché du repos dans de l'eau, a une vitesse d'ascension initiale nulle et il ne peut donc pas atteindre immédiatement le régime chaotique. De plus, en raison de sa fonte, le glaçon perd rapidement de la masse et le nombre de Galilée diminue. La trajectoire du glaçon ne peut alors être que faiblement défléchie de sa direction verticale avant d'atteindre le régime d'écoulement axisymétrique ( $G \leq 120$ ). Les vitesses horizontales, qui existent au moment où l'écoulement est tridimensionnel ( $2 \leq t \leq 6$  s), sont très faibles et ont pour conséquence un déplacement transversal du glaçon de l'ordre de seulement quelques dixièmes de millimètres (à noter les unités des axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans Fig. 5.26*d*). La séquence des trois figures de Fig. 5.30 montre le glaçon au début de la simulation ( $d_{init} = 4.38$  mm), pendant le mouvement transversal (deux très faibles filaments de vorticit e hors de l'axe  $z$ , responsables d'une force de portance et du déplacement transversal du glaçon, sont visibles) et à la fin de la simulation ( $d = 1.10$  mm). Les numéros au-dessus des figures correspondent aux points notés dans la Fig. 5.26*d*.

À  $G_{init} = 500$ , le glaçon parcourt une distance beaucoup plus importante qu'à  $G_{init} = 200$  (la fonte dure également deux fois plus longtemps) et la trajectoire ressemble, par endroits, à celle en zig-zag, oblique oscillante et chaotique (voir Fig. 5.29*d*). Les numéros dans la même figure correspondent aux instants où l'aspect de l'écoulement autour du glaçon est montré

dans Fig. 5.29*d*. Le glaçon est défléchi de son ascension verticale au moment qui correspond au numéro (1) – la vorticité axiale, signe de la tridimensionnalité de l'écoulement, apparaît dans le sillage. La trajectoire du glaçon devient pour un moment en zig-zag, avant que l'écoulement dans le sillage du glaçon ne devienne chaotique pour  $5 \leq t \leq 10$  s. Deux aspects de l'écoulement, aux points (2) et (3), montrent un sillage avec des structures hélicoïdales –   cet endroit, où la trajectoire change brusquement de direction, le sillage tourne autour de l'axe de l'écoulement. La rotation des filaments de vorticité est accompagnée par un grand lâché de tourbillons (bien visible sur le cliché (3)). La trajectoire devient ensuite oblique oscillante. Le cliché (4) montre un lâché tourbillonnaire ; néanmoins, le niveau de vorticité est déjà très faible. Finalement,   partir du moment où le sillage redevient axisymétrique, la trajectoire est une droite verticale.

Les caractéristiques de la fonte des glaçons pour les 4 diamètres initiaux testés, telles que le temps de fonte, la distance parcourue, la vitesse d'ascension maximale, sont rassemblées dans Tab. 5.1.

### 5.2.2 Glaçon en fusion immergé dans de l'eau   4 C

Comme pour  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ , les simulations ont été réalisées    $G_{init} = 200, 300, 400$  et  $500$  (correspondant, respectivement,    $d_{init} = 5.17, 6.78, 8.21$  et  $9.52$  mm) avec les 7 paramètres de la colonne de droite du Tab. 2.4. Les mêmes caractéristiques que pour  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$  (l'évolution du diamètre du glaçon (et du nombre de Galilée), de la vitesse d'ascension et des vitesses transversales ainsi que la trajectoire parcourue par le glaçon) sont présentées, respectivement, dans Figs. 5.32, 5.33, 5.34 et 5.35. Les résultats sont également présentés sous la forme d'un tableau (voir Tab. 5.2). Seules les simulations    $G_{init} = 200$  et  $300$  ont finis après avoir atteint le critère que le diamètre de la sphère doit diminuer de trois quarts au moment du dépôt du mémoire pour diffusion.

La différence principale par rapport aux simulations avec un  $\Delta T = 20^\circ$  est le fait que le glaçon fond beaucoup plus lentement (le gradient de température étant moins élevé, l'échange thermique est réduit dans le cas  $\Delta T = 4^\circ$ ). En conséquence, le glaçon passe plus de temps dans les plages de  $G$  correspondant aux régimes asymptotiques étudiés dans la section précédentes. Ces régimes peuvent donc être distingués sur la trajectoire du glaçon en fusion.   partir de  $G_{init} = 400$ , le glaçon parcourt une longue trajectoire chaotique.

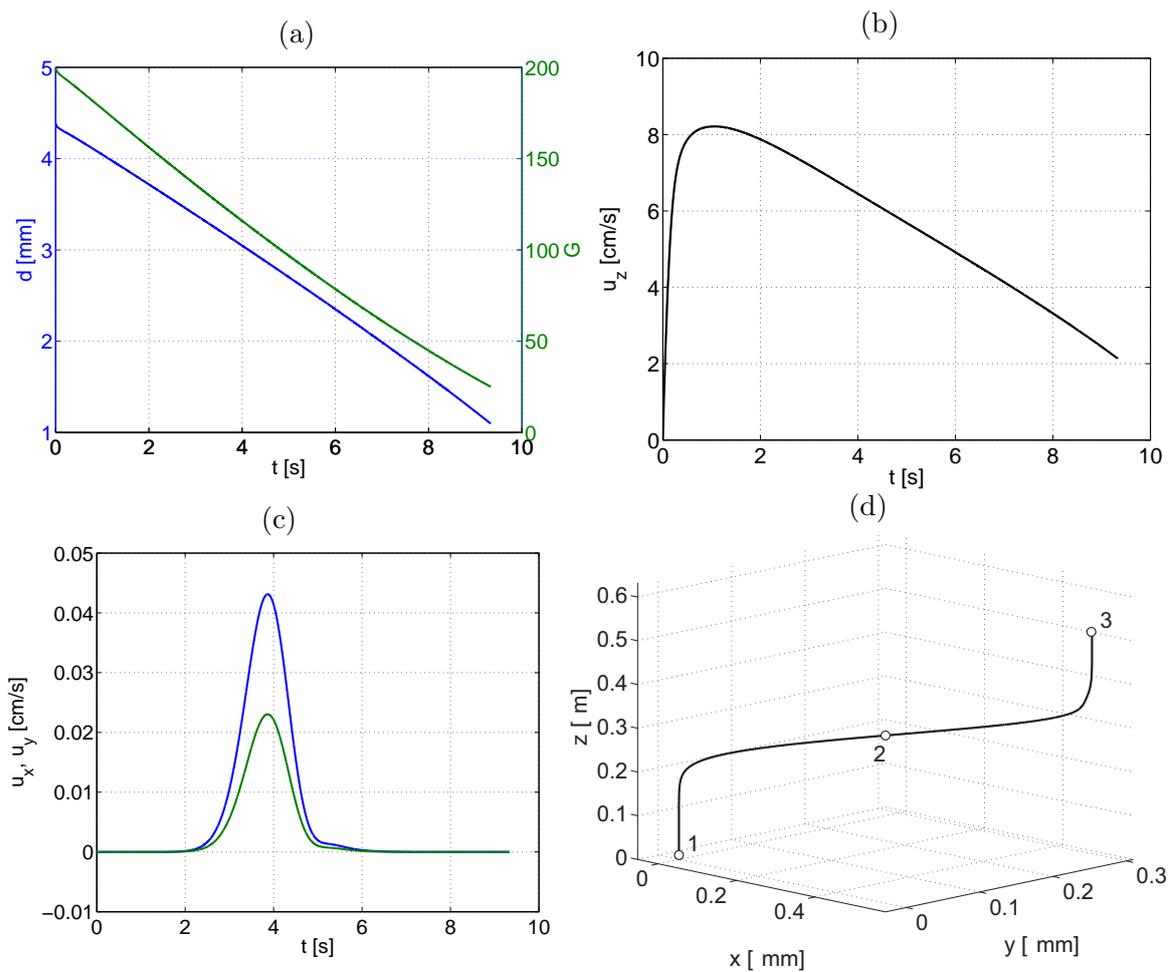


FIG. 5.26 –  $G_{init} = 200$  ( $d_{init} = 4.38$  mm),  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ . (a) Evolution du diamètre du glaçon et du nombre de Galilée, (b) évolution de la vitesse d'ascension, (c) évolution des vitesses transversales et (d) trajectoire parcourue par le glaçon.

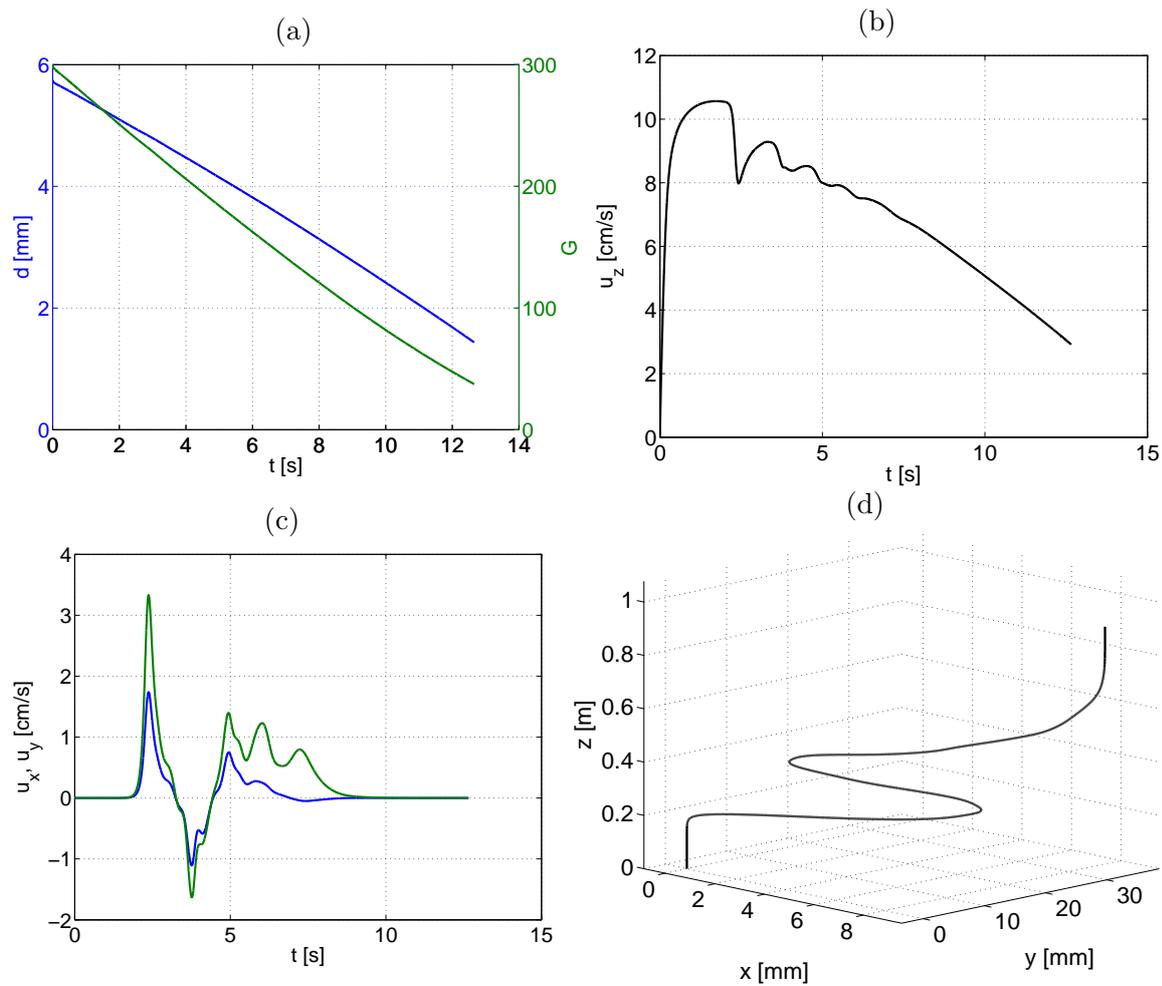


FIG. 5.27 –  $G_{init} = 300$  ( $d_{init} = 5.74$  mm),  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ . (a) Evolution du diamètre du glaçon et du nombre de Galilée, (b) évolution de la vitesse d'ascension, (c) évolution des vitesses transversales et (d) trajectoire parcourue par le glaçon.

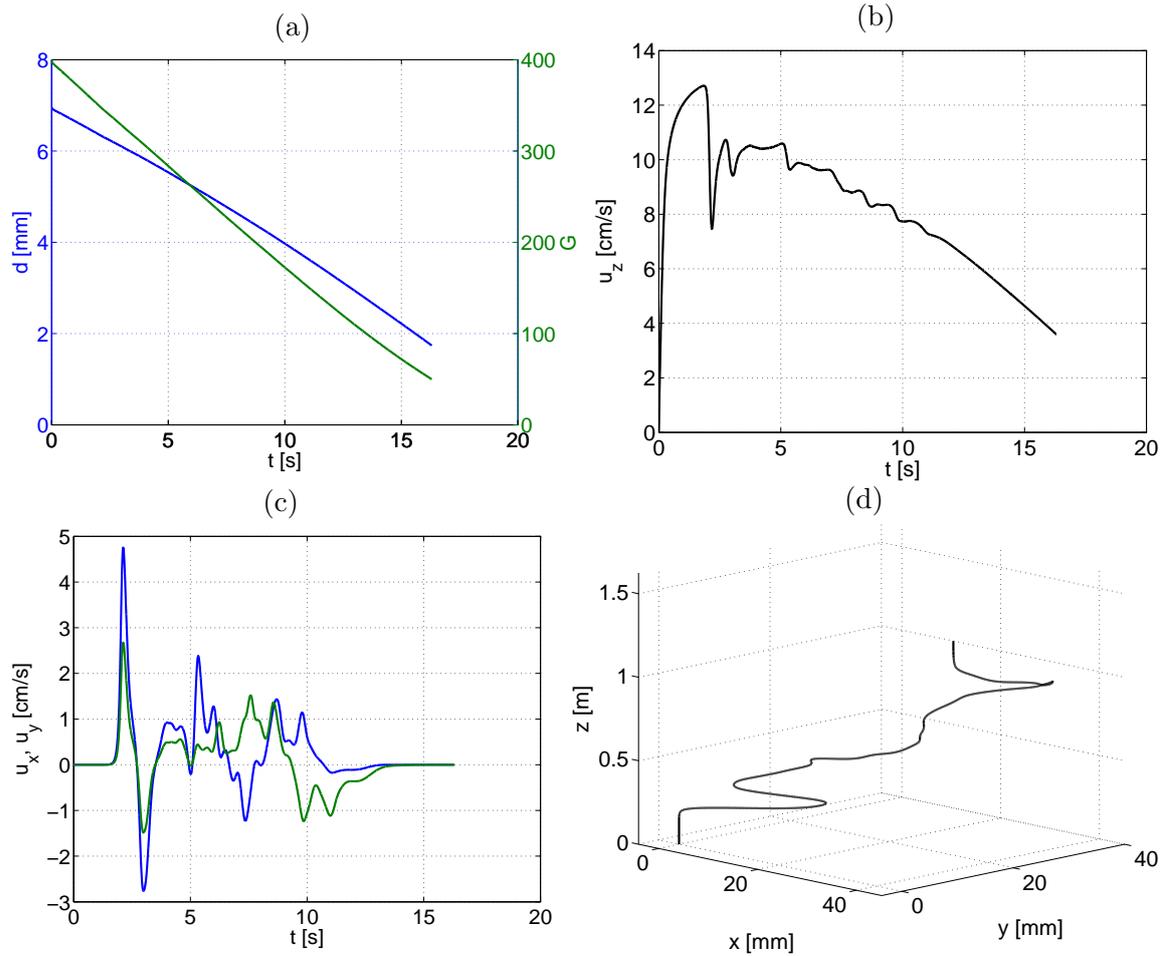


FIG. 5.28 –  $G_{init} = 400$  ( $d_{init} = 6.96$  mm),  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ . (a) Evolution du diamètre du glaçon et du nombre de Galilée, (b) évolution de la vitesse d'ascension, (c) évolution des vitesses transversales et (d) trajectoire parcourue par le glaçon.

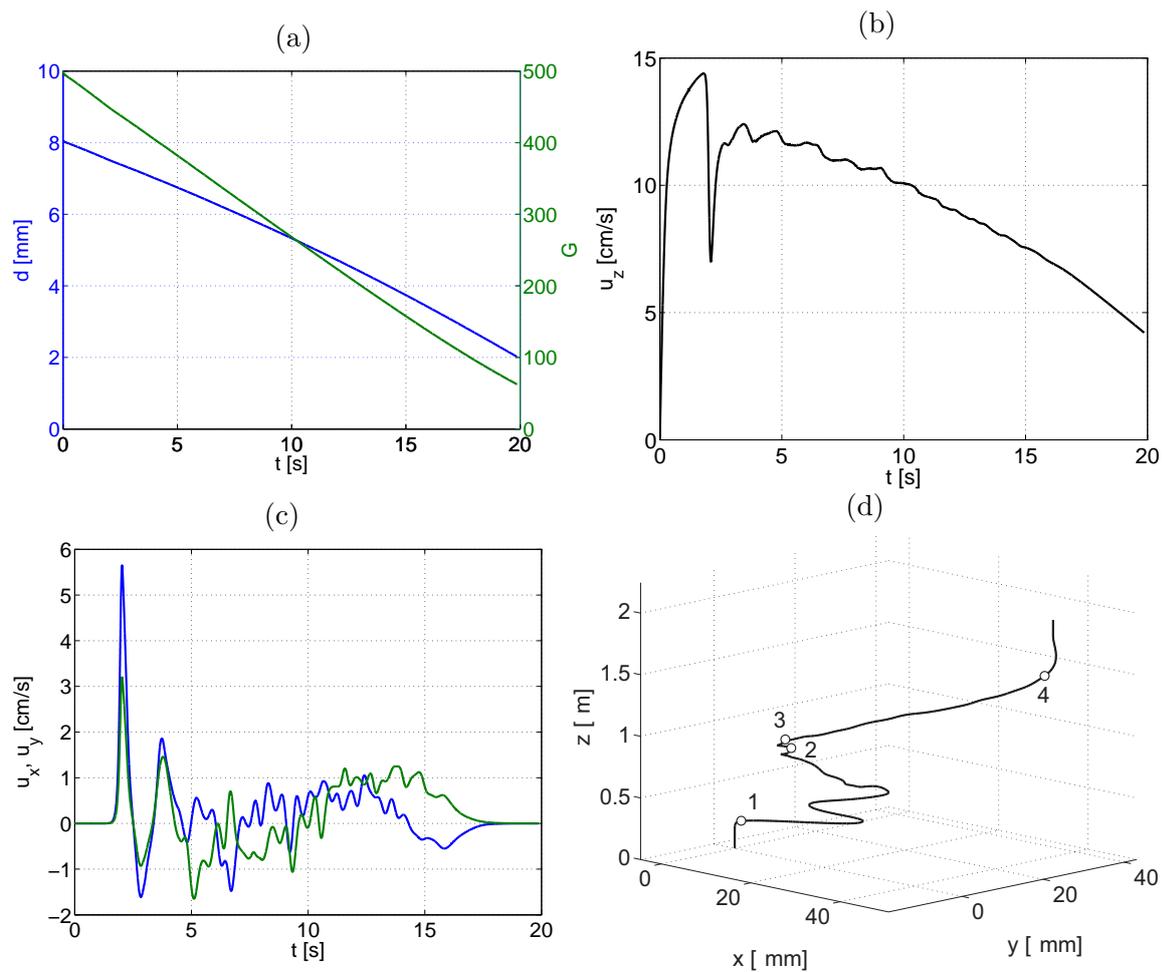


FIG. 5.29 –  $G_{init} = 500$  ( $d_{init} = 8.07$  mm),  $\Delta T = 20^\circ\text{C}$ . (a) Evolution du diamètre du glaçon et du nombre de Galilée, (b) évolution de la vitesse d'ascension, (c) évolution des vitesses transversales et (d) trajectoire parcourue par le glaçon.

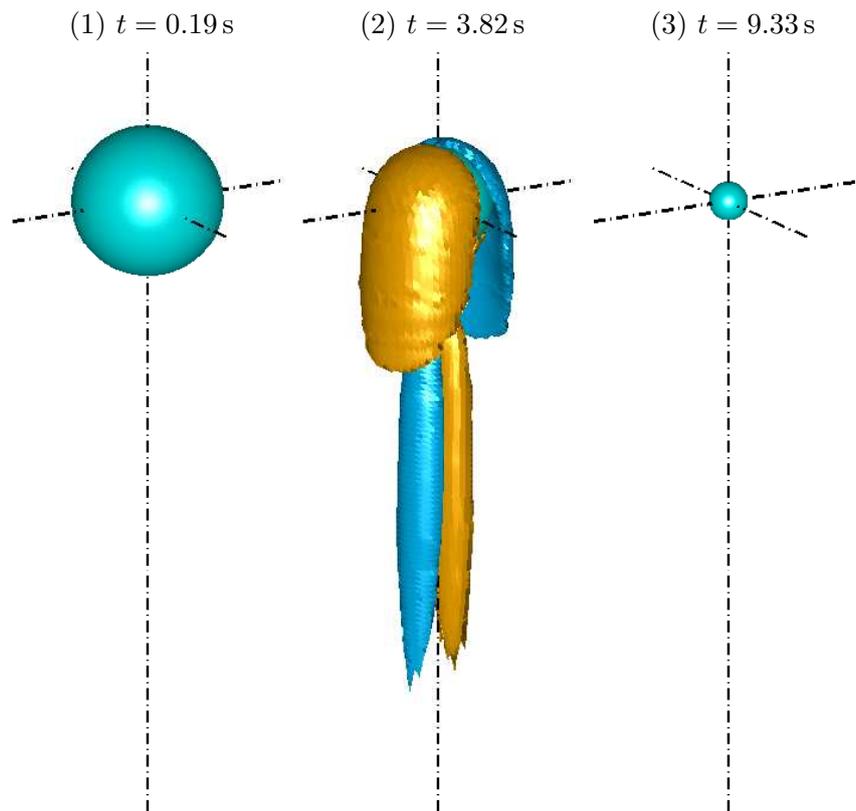


FIG. 5.30 – Simulation de la fonte d'un glaçon à  $G_{init} = 200$  ( $d_{init} = 4.38$  mm) et pour  $T_f = 20^\circ\text{C}$ . Isosurfaces de vorticité axiale au niveau  $\omega_z = \pm 0.02$  aux instants correspondant aux points (1), (2) et (3) de la Fig. 5.26d.

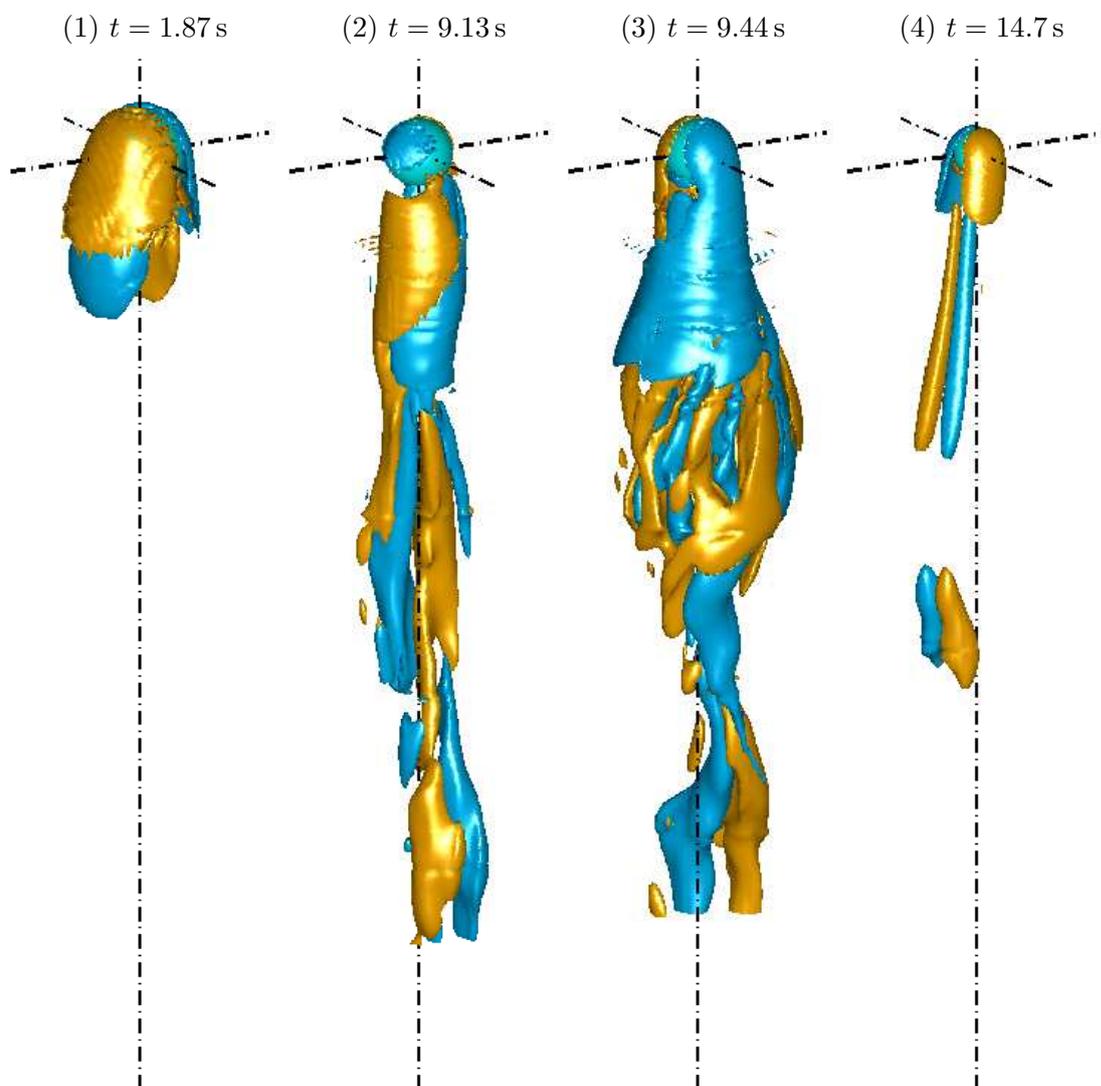


FIG. 5.31 – Simulation de la fonte d'un glaçon à  $G_{init} = 500$  ( $d_{init} = 8.07$  mm) et pour  $T_f = 20^\circ\text{C}$ . Isosurfaces de vorticité axiale au niveau  $\omega_z = \pm 0.5$  aux instants correspondant aux points (1), (2), (3) et (4) de la Fig. 5.29d.

$G_{init}$	[-]	200	300	400	500
$d_{init}$	[mm]	4.38	5.74	6.96	8.07
$G_{fin}$	[-]	25.0	37.5	50.0	62.5
$d_{fin}$	[mm]	1.10	1.44	1.74	2.02
$t_{0.25d}$	[s]	9.33	12.7	16.3	19.9
$z_{0.25d}$	[m]	0.527	0.898	1.35	1.87
$x_{0.25d}$	[mm]	0.527	8.68	41.0	46.3
$y_{0.25d}$	[mm]	0.281	35.1	36.4	38.0
$u_{z,max}$	[cm/s]	8.21	10.6	12.7	14.4

TAB. 5.1 – Caractéristiques de la fonte des glaçons à 4 différents nombres de Galilée initiaux  $G_{init}$  : le diamètre initial  $d_{init}$ , le nombre de Galilée à la fin de la simulation  $G_{fin}$ , le diamètre à la fin de la simulation  $d_{fin}$ , le temps qu'il a fallu pour faire diminuer le diamètre du glaçon d'un facteur 4  $t_{0.25d}$ , la distance verticale parcourue  $z_{0.25d}$ , les distances horizontales parcourues  $x_{0.25d}$  et  $y_{0.25d}$  et la vitesse d'ascension maximale  $u_{z,max}$ . Glaçon de température  $T_s = 0^\circ\text{C}$  dans de l'eau de température  $T_f = 20^\circ\text{C}$ .

$G_{init}$	[-]	200	300
$d_{init}$	[mm]	5.17	6.78
$G_{fin}$	[-]	25.0	37.5
$d_{fin}$	[mm]	1.29	1.69
$t_{0.25d}$	[s]	54.3	74.6
$z_{0.25d}$	[m]	3.23	5.70
$x_{0.25d}$	[mm]	60.1	87.3
$y_{0.25d}$	[mm]	37.2	75.9
$u_{z,max}$	[cm/s]	9.18	12.0

$G_{init}$	[-]	400	500
$d_{init}$	[mm]	8.21	9.52
$G_{fin}$	[-]	163	262
$d_{fin}$	[mm]	4.51	6.18
$d_{init}/d_{fin}$	[-]	1.82	1.54
$t_{fin}$	[s]	61.2	56.0
$z_{fin}$	[m]	6.54	7.04
$x_{fin}$	[mm]	45.8	60.8
$y_{fin}$	[mm]	117.5	32.6
$u_{z,max}$	[cm/s]	14.3	16.0

TAB. 5.2 – Caractéristiques de la fonte des glaçons à 4 différents nombres de Galilée initiaux  $G_{init}$ ,  $T_f = 4^\circ\text{C}$ . Seuls les simulations à  $G_{init} = 200$  et  $300$  ont finis après avoir atteint un diamètre qui fait 25% du diamètre initial. Les caractéristiques des simulations à  $G_{init} = 400$  et  $500$  sont donnés à la fin de ces simulations, mais avant que le diamètre du glaçon diminue de 75%.

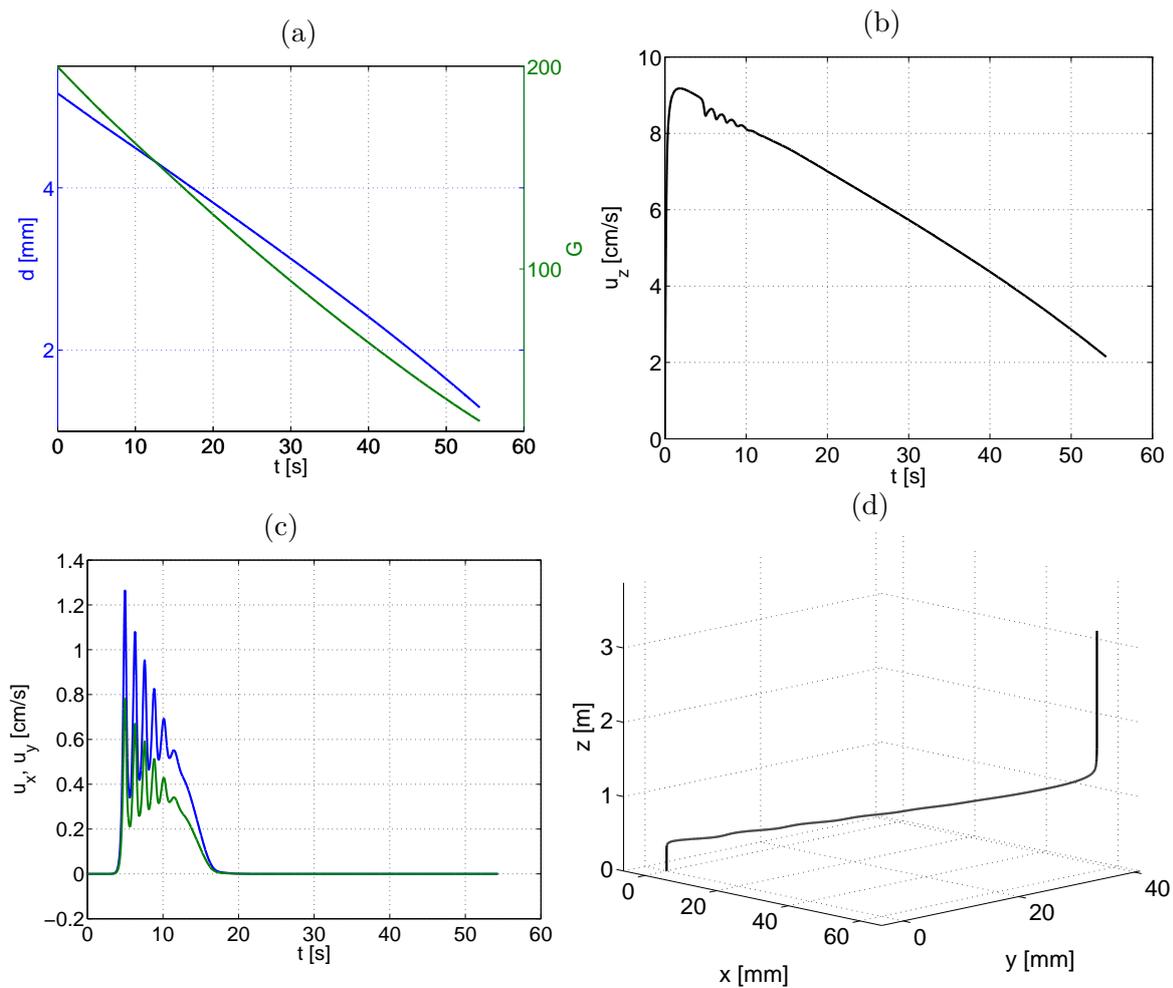


FIG. 5.32 –  $G_{init} = 200$  ( $d_{init} = 5.17$  mm),  $\Delta T = 4^\circ\text{C}$ . (a) Evolution du diamètre du glaçon et du nombre de Galilée, (b) évolution de la vitesse d'ascension, (c) évolution des vitesses transversales et (d) trajectoire parcourue par le glaçon.

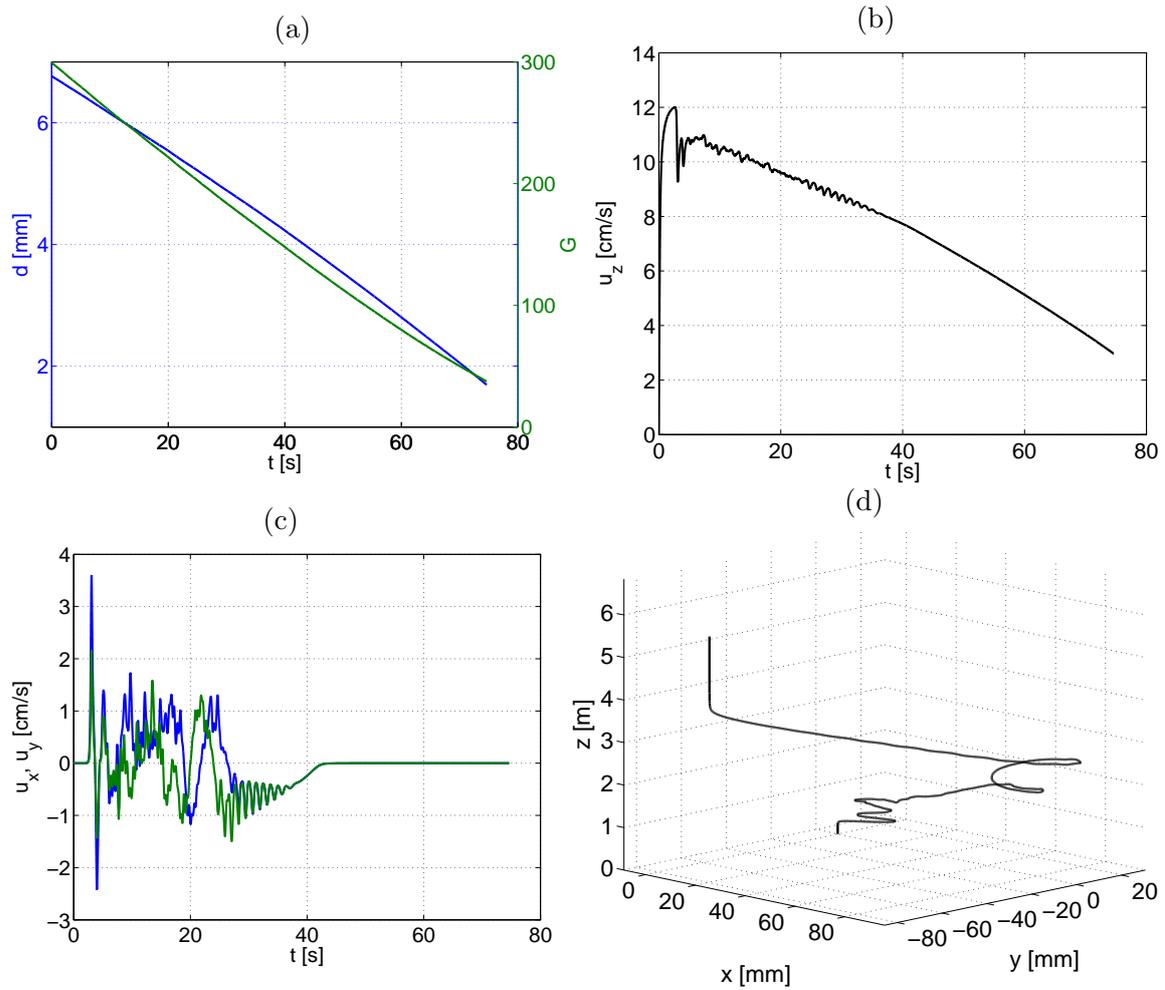


FIG. 5.33 –  $G_{init} = 300$  ( $d_{init} = 6.78$  mm),  $\Delta T = 4^\circ\text{C}$ . (a) Evolution du diamètre du glaçon et du nombre de Galilée, (b) évolution de la vitesse d'ascension, (c) évolution des vitesses transversales et (d) trajectoire parcourue par le glaçon.

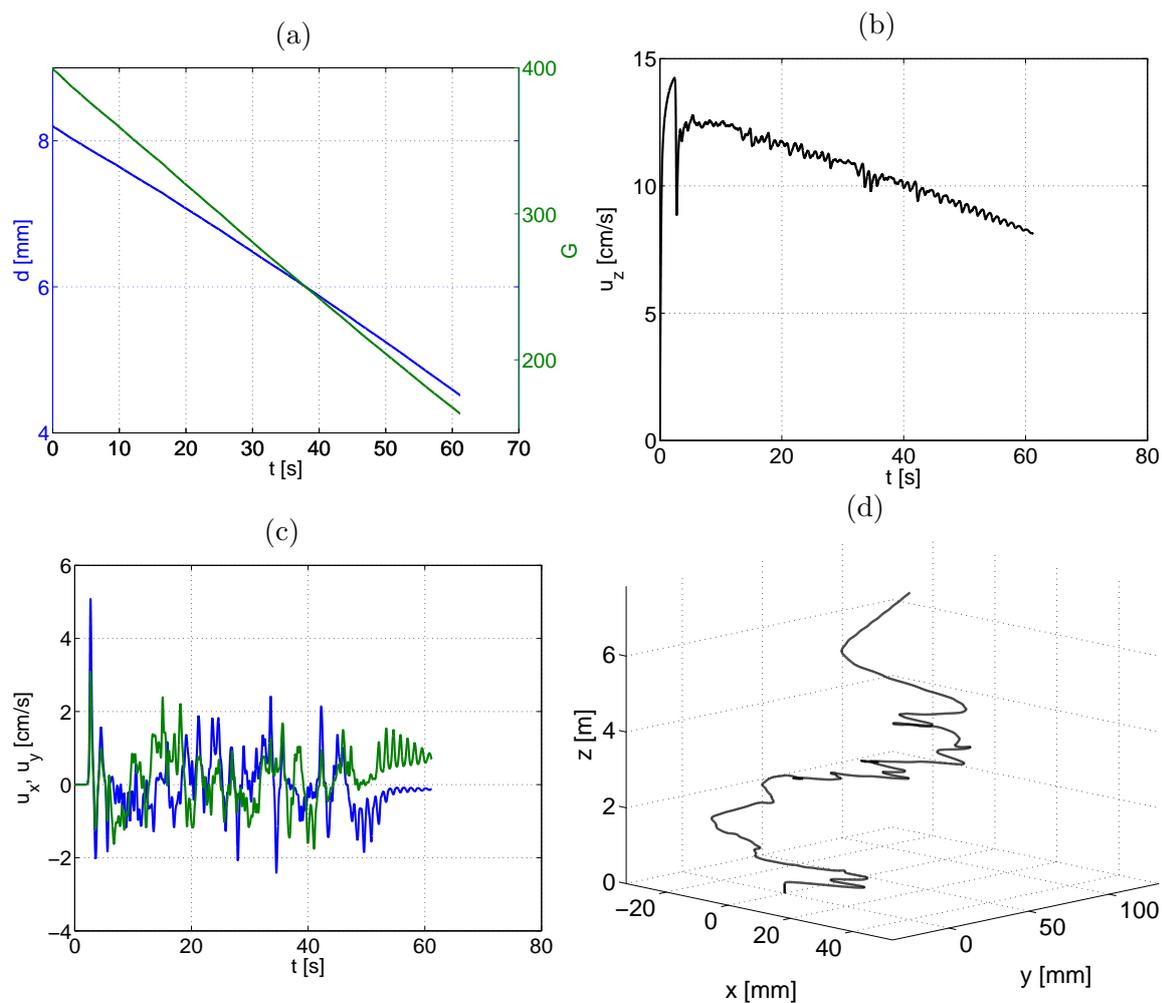


FIG. 5.34 –  $G_{init} = 400$  ( $d_{init} = 8.21$  mm),  $\Delta T = 4^\circ\text{C}$ . (a) Evolution du diamètre du glaçon et du nombre de Galilée, (b) évolution de la vitesse d'ascension, (c) évolution des vitesses transversales et (d) trajectoire parcourue par le glaçon.

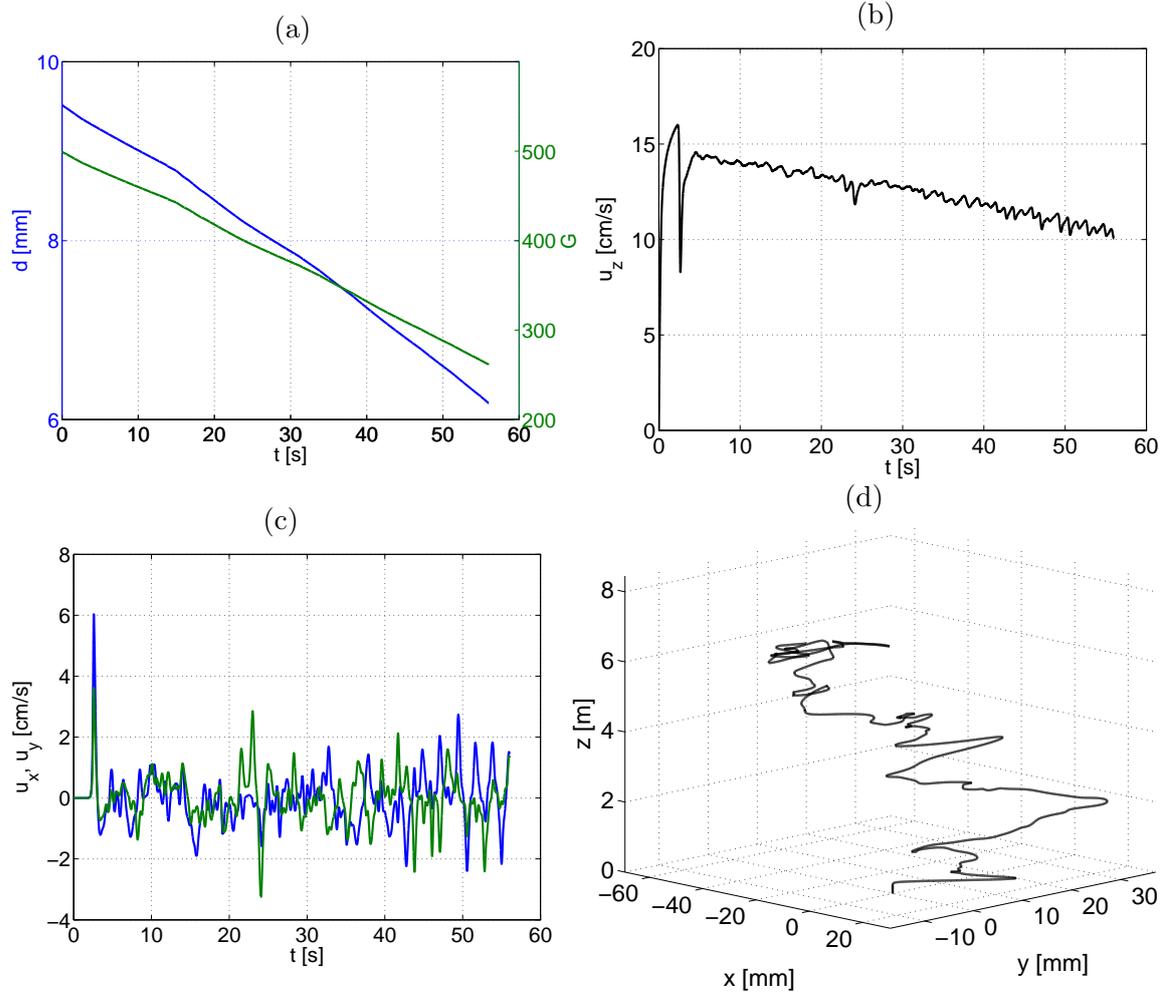


FIG. 5.35 –  $G_{init} = 500$  ( $d_{init} = 9.52$  mm),  $\Delta T = 4^\circ\text{C}$ . (a) Evolution du diamètre du glaçon et du nombre de Galilée, (b) évolution de la vitesse d'ascension, (c) évolution des vitesses transversales et (d) trajectoire parcourue par le glaçon.



## Chapitre 6

# Conclusion et perspectives

Ce travail de thèse a exploré un domaine mal connu de la transition au chaos du sillage d'une sphère fixe chauffée soumise à un écoulement extérieur froid en configuration d'écoulement assistant et d'écoulement opposant. Une étude paramétrique, très riche en résultats (22 régimes différents d'écoulements tridimensionnels ont été explorés), a été menée dans le plan de paramètres "nombre de Richardson – nombre de Reynolds" ( $Ri - Re$ ) pour deux valeurs du nombre de Prandtl ( $Pr = 0.72$  et  $7$ ). Une attention particulière a été portée au cas  $Re = 100$ ,  $Pr = 0.72$  et de grandes valeurs de  $|Ri|$  en écoulement opposant, où un retournement du panache thermique, accompagné par des effets tridimensionnels et chaotiques, a été observé. Les mêmes investigations du retournement du panache thermique ont été effectuées pour deux autres valeurs du nombre de Reynolds –  $Re = 10$  et  $Re = 1$ . L'expérience acquise et les résultats obtenus au cours de plus de 6 mille simulations numériques de l'écoulement autour d'une sphère fixe nous ont permis de libérer la sphère et d'étudier sa trajectoire. Le cas d'une sphère libre avec effets thermiques présentant un nombre de paramètres indépendants trop élevé pour effectuer une étude paramétrique complète, nous avons pris la décision de nous intéresser au cas concret d'un glaçon immergé dans de l'eau. Afin de coller le plus possible à la réalité physique, la dépendance de la température sur la masse volumique, sur la viscosité cinématique et sur la conductivité thermique de l'eau a été fidèlement modélisée. Les trajectoires d'un glaçon à  $0^\circ\text{C}$  plongé dans de l'eau à  $4^\circ$  et à  $20^\circ\text{C}$ , tout d'abord sans prendre en compte la fusion, puis en supposant une fonte sphérique, ont été étudiées pour quelques nombres de Galilée ( $G$ ) choisis.

Pour le cas d'une sphère fixe en écoulement assistant, nous avons mené des simulations jusqu'à  $Ri = 0.7$  et  $Re = 1400$  pour le fluide correspondant à l'air ( $Pr = 0.72$ ) et jusqu'à  $Ri = 0.3$  et  $Re = 600$  pour le fluide correspondant à l'eau ( $Pr = 7$ ). Pour ces deux nombres de Prandtl, l'effet de la coexistence de la convection naturelle et de la convection forcée en écoulement assistant est de stabiliser l'écoulement, ce qui se traduit par un recul de l'apparition de la recirculation axisymétrique en aval de la sphère et de la transition à la tridimensionalité. Une zone de recirculation axisymétrique en aval de la sphère, différente de celle qui apparaît dans le sillage d'une sphère fixe sans effet thermique à  $Re = 20$ , a été observée pour  $Ri \geq 0.4$  à  $Pr = 0.72$  et pour  $Ri \geq 0.25$  à  $Pr = 7$ . La couche limite se détache de la surface de la sphère et s'y rattache avant d'atteindre le point d'arrêt aval, créant ainsi

une zone de recirculation hors de l'axe. Cette zone de recirculation est due à un fort panache thermique se formant à partir de la face aval de la sphère, autour de l'axe, et qui empêche la zone de recirculation d'approcher l'axe. A  $Pr = 7$  et  $Ri \leq 0.2$ , le scénario de la transition du sillage vers une dynamique chaotique est qualitativement le même que celui d'une sphère non-chauffée. Les premières étapes de la transition ont été modélisées avec succès par un modèle faiblement non-linéaire du troisième ordre en prenant en compte une valeur propre réelle et deux paires de valeurs propres complexes conjuguées. A  $Pr = 0.72$  nous avons pu explorer le cas des nombres de Richardson plus élevés. La situation y est alors différente. Le scénario de transition est celui d'une sphère non-chauffée seulement pour  $Ri \leq 0.2$ . Pour des nombres de Richardson supérieurs, la dynamique du sillage de la sphère est contrôlée non seulement par des valeurs propres instables provenant du sous-espace azimutal  $m = 1$ , mais également par des valeurs propres instables provenant des sous-espaces  $m > 1$ . Cette observation est soutenue par le fait qu'à partir de  $Ri = 0.59$ , la valeur propre la plus instable, tout en étant réelle, fait partie du sous-espace azimutal  $m = 2$  et, à partir de  $Ri = 0.714$ , du sous-espace azimutal  $m = 3$ . Cette augmentation de la longueur d'onde azimutal de la valeur la plus instable avec  $Ri$  est due à la zone de recirculation hors de l'axe (la zone de recirculation étant un signe précurseur de la transition), qui devient de plus en plus mince (et donc de plus en plus réceptive aux longueurs d'onde azimutales élevées) au seuil de l'instabilité primaire.

En écoulement opposant, nous avons présenté des simulations jusqu'à  $Ri = -0.25$  et  $Re = 350$  pour les deux nombres de Prandtl considérés. Contrairement à l'écoulement assistant, la convection naturelle a un effet déstabilisant sur le sillage, ce qui se traduit par une baisse du seuil d'apparition de l'instabilité primaire. L'effet d'une augmentation du  $|Ri|$  sur un écoulement axisymétrique est d'élargir la zone de recirculation, cette recirculation ayant la forme classique de "tore sur l'axe" observée dans le cas de la sphère sans effet thermique (une recirculation sous forme d'un tore hors de l'axe n'ayant pas été observée en écoulement opposant). L'écoulement étant plus réceptif aux perturbations de nombre d'onde azimutal  $m = 1$  en présence d'une zone de recirculation sur l'axe, la valeur propre la plus instable en écoulement opposant provient toujours du mode azimutal  $m = 1$ . Néanmoins, à  $Pr = 0.72$ , la bifurcation change de type – au seuil de l'instabilité primaire, une valeur propre complexe devient plus instable que la valeur propre réelle la plus instable. Pour  $Ri < -0.133$ , l'axisymétrie de l'écoulement est alors brisée via une bifurcation de Hopf. A  $Pr = 7$ , la situation est encore plus intéressante. Pour  $-0.156 < Ri < -0.098$ , au seuil de l'instabilité primaire, la valeur propre la plus instable est complexe, mais avec une partie imaginaire d'un ordre de grandeur plus petite que celle de la valeur propre complexe la plus instable à  $Ri < -0.156$ . Cette valeur propre complexe "lente" est le résultat d'une collision entre les deux valeurs propres réelles les plus instables à  $Ri = -0.098$ . La dynamique des régimes de transition qui se trouvent près de l'intersection de la branche de la bifurcation régulière avec celle de Hopf dans les diagrammes  $Ri - Re$  est contrôlée, dans le cas  $Pr = 7$ , par une interaction entre la valeur propre réelle, la valeur propre complexe rapide et la valeur propre complexe lente. Cette interaction non-linéaire entre 3 valeurs propres a été modélisée par un modèle faiblement non-linéaire et des régimes plans périodiques ou quasi-périodiques, ainsi que certains régimes tridimensionnels, ont ainsi été reproduits. Dans la région des nombres de Richardson proches de 0, le scénario de transition ressemble à celui

d'une sphère non-chauffée. Les régimes de transition pour les nombres de Richardson les plus négatifs sont caractérisés par les oscillations planes de deux filaments de vorticit e avec la valeur moyenne de la force de portance nulle, ce qui est le premier r egime tridimensionnel apr es la brisure d'axisym etrie. Les r egimes qui suivent sont un r egime plan quasi-p eriodique ( $Pr = 7$ ) et des r egimes tridimensionnels tournants p eriodiques, quasi-p eriodiques ou non-p eriodiques ( $Pr = 0.72$ ).

La comp etition entre les forces d'inertie et les forces de flottabilit e aux nombres de Richardson de l'ordre de  $-1$ , se traduisant par un retournement du panache thermique accompagnée par une chute du coefficient de tra ın ee dans des valeurs n egatives, a  et e  etudi ee pour  $Pr = 0.72$  et trois ordres de grandeur du nombre de Reynolds  $-Re = 1, 10$  et  $100$ . Pour toutes ces trois valeurs du nombre de Reynolds, m eme celle  egale  a l'unit e, les effets tridimensionnels appara issent d'une importance fondamentale. A  $Re = 1$ , le seuil de l'instabilit e primaire a  et e trouvée  a  $Ri \approx -1.35$ . A  $Ri = -1.5$ , une grande zone de recirculation constitu ee d'un fluide chaud, s' etendant en amont et en aval de la sph ere, oscille autour de l'axe de l' ecoulement avec une longue p eriodicit e ( $T \approx 330$  unit es de temps). La longueur maximale de la zone de recirculation en amont de la sph ere, obtenue par une simulation tridimensionnelle, est environ deux fois plus courte que celle obtenue par une simulation axisym etrique. N eanmoins, elle atteint une valeur d'environ  $60$  diam etres de la sph ere, ce qui signifie qu' a un tel nombre de Reynolds, la sph ere joue le r ole d'une source de chaleur ponctuelle. A  $Re = 10$ , la formation du panache thermique en amont de la sph ere est accompagn ee par un effet d'hyst eresis si uniquement le mod ele axisym etrique est retenu. Cependant, la branche des coefficients de tra ın ee n egatifs, correspondant  a un panache thermique en amont de la sph ere, n'est pas lin eairement stable. Dans les simulations tridimensionnelles, une intermit-tence entre la formation axisym etrique du panache thermique en amont de la sph ere et son advection tridimensionnelle vers l'aval est observ ee  a  $Ri = -0.8$ . La taille de la zone de recirculation demeure sans commune mesure avec la dimension de la sph ere mais reste limit ee. A  $Re = 100$ , le sillage devient chaotique  a  $Ri \approx -0.8$  (pour  $-0.25 > Ri > -0.8$ , l' ecoulement est tridimensionnel p eriodique avec un plan de sym etrie et une valeur moyenne de la force de portance nulle). En augmentant le  $|Ri|$ , les fluctuations du coefficient de tra ın ee augmentent et le  $C_D$  devient momentan ement n egatif. A  $Ri = -1.2$ , un d etachement de la couche limite en amont de la sph ere appara ıt pour la premi ere fois. En continuant  a augmenter le  $|Ri|$ , on constate que le coefficient de tra ın ee fluctue avec une grande amplitude entre des valeurs positives et n egatives. Les fluctuations du coefficient de tra ın ee et celle de la portance deviennent comparables. A ce nombre de Reynolds, la taille de la zone de recirculation redevient du m eme ordre de grandeur que la taille de la sph ere. En raison de la faible diffusivit e, les structures de vitesse axiale n egative sont tr es instables vis- a-vis de l' ecoulement ext erieur et sont facilement advect ees vers l'aval de la sph ere. Ainsi, la distance maximale du panache thermique en amont de la sph ere ne d epasse jamais  $10$  diam etres de la sph ere m eme pour le nombre de Richardson de  $-3$ . Le chaos rend la cr eation d'un panache adverse permanent impossible.

La trajectoire d'une sph ere libre en convection mixte a  et e  etudi ee pour certaines valeurs du nombre de Galil ee ( $120 \leq G \leq 500$ ), les autres param etres ind ependants  etant fixées par le choix de mod eliser un gla con d'eau de temp erature  $T_s = 0^\circ\text{C}$  immergée dans de l'eau  a  $T_f = 4^\circ$  et  a  $T_f = 20^\circ\text{C}$ . Les tests effectuées  a  $G = 200$  (ce qui correspond  a une sph ere

de diamètre  $d = 4.38$  mm) en modélisant un glaçon sans fusion se déplaçant dans de l'eau à  $20^\circ\text{C}$  ont montré que, en raison d'une faible valeur du nombre de Richardson (de l'ordre  $O(10^{-2})$ ), le changement de masse volumique avec la température n'influencait pas les régimes d'écoulement par rapport au cas d'une sphère sans effet thermique (la dépendance  $\rho(T)$  a été approximée tout d'abord par une fonction linéaire (approximation de Boussinesq) puis par une parabole reproduisant fidèlement l'expansion anormale de l'eau). L'effet de l'influence de la température sur  $\kappa(T)$  est de déstabiliser l'écoulement, la trajectoire en zig-zag, originellement plane, devenant oblique et présentant un changement de direction aléatoire. La modélisation de la variation de la viscosité cinématique en fonction de la température est apparue essentielle à la trajectoire de la sphère, car  $\nu$  est le paramètre qui varie le plus dans l'intervalle de températures  $0 \leq T_f \leq 20^\circ\text{C}$  (rapport environ égal à 2). L'impact de la modélisation de  $\nu(T)$  sur la dynamique du sillage est déstabilisant, car la viscosité, en raison d'une température élevée, est faible presque partout sauf dans une région très confinée près de la sphère. Des trajectoires rectilignes verticales, obliques rectilignes, obliques oscillantes et chaotiques ont été observées pour le glaçon aux différents nombres de Galilée, la trajectoire en zig-zag, dont la moyenne est une droite verticale, n'a pas été observée en modélisant la dépendance des trois paramètres de l'eau en fonction de la température. En raison de la variation moindre des paramètres  $\rho$ ,  $\kappa$  et  $\nu$  dans l'intervalle de températures  $0 \leq T_f \leq 4^\circ\text{C}$  que dans l'intervalle  $0 \leq T_f \leq 20^\circ\text{C}$ , la trajectoire du glaçon plongé dans de l'eau à  $T_f = 4^\circ\text{C}$  est plus stable que celle du glaçon plongé dans de l'eau à  $T_f = 20^\circ\text{C}$  aux mêmes nombres de Galilée, cependant, le scénario reste essentiellement le même.

Des simulations faites dans l'hypothèse d'une fonte sphérique du glaçon ont montré que, indépendamment du nombre de Galilée initial, la trajectoire d'un glaçon lâché depuis une position au repos commence et finit par une droite verticale, correspondant à un sillage axisymétrique. L'écoulement axisymétrique au début des simulations est dû à la faible vitesse d'ascension et, à la fin des simulations, au faible diamètre du glaçon fondu, plaçant le nombre de Galilée à des valeurs sous-critiques. En raison de l'évolution rapide du nombre de Galilée pendant les simulations, le glaçon ne reste pas assez longtemps dans les plages du nombre de Galilée correspondant aux régimes ordonnés et présente une trajectoire aléatoire, correspondant au régime chaotique. La différence de vitesse de fusion du glaçon avec le même diamètre initial est très importante entre un glaçon immergé dans de l'eau à  $T_f = 4^\circ$  et à  $T_f = 20^\circ\text{C}$ .

Une étude numérique de la convection mixte autour d'une sphère fixe et libre (avec un diamètre constant ou en fusion sphérique) a montré une richesse extraordinaire de régimes d'écoulement, constituant des scénarios de transition au chaos parfois beaucoup plus complexes que celui d'une sphère non-chauffée. Une possible amélioration des simulations du glaçon en fusion dans de l'eau consisterait à considérer une fonte non-sphérique (maillage déformable) du glaçon et à prendre en compte la conduction de chaleur à l'intérieur du glaçon. Le montage d'un dispositif expérimental (sans aucun doute complexe) permettrait de valider les résultats, pour la plupart originaux, de cette étude numérique. La difficulté de réalisation d'une telle expérience consisterait à fixer de façon non-intrusive la sphère, à contrôler la température de la sphère, à accéder à la mesure des paramètres de l'écoulement (vitesse, pression, température, traînée, portance, Nusselt...), à fabriquer un glaçon d'une sphéricité parfaite et d'une température uniforme de  $0^\circ\text{C}$  – de quoi offrir du travail pour encore quelques années.

## Annexe A

# Test d'indépendance du maillage

Tab. A.1*a,b,c* et *d* présentent l'exemple d'un test d'indépendance numérique du maillage. Chaque régime d'écoulement ayant des exigences particulières en terme de taille de domaine et de raffinement de maillage, nous avons dû effectuer de tels tests pour systématiquement tous les régimes étudiés.

Par exemple, pour des nombres de Reynolds élevés, une résolution fine de la couche limite est primordiale et les points dans le maillage doivent ainsi être concentrés près de la paroi de la sphère et dans le proche sillage en aval, alors que les dimensions du maillage peuvent être réduites en amont et en aval ; en revanche, à bas nombres de Reynolds, les dimensions du domaine en amont, en aval et latéralement sont des paramètres qui sont susceptibles de confiner l'écoulement et d'influencer les résultats.

Nous présentons ici des tests sur la taille et la finesse du maillage pour un régime à grand nombre de Reynolds ( $Re \approx 1500$ ) et à grand nombre de Richardson ( $Ri = 0.7$ ), ce qui correspond à un régime très exigeant au niveau de la finesse du maillage. Le nombre de points de collocation dans chaque maille, ainsi que l'étendue du domaine en amont, en aval et latéralement sont variés et les résultats, en terme de coefficient de traînée, de nombre de Nusselt et de seuil pour la bifurcation primaire sont rassemblés dans Tab. A.1. Le maillage typique de 230 éléments de la Fig. 3.1 a été utilisé en tant que maillage de base. Pour l'extension de ses dimensions, des rangées d'éléments ont été ajoutées de manière régulière. Les valeurs présentées dans les tableaux permettent de se faire une idée de l'importance des différents paramètres et des efforts qu'il faut consentir à faire pour atteindre l'indépendance numérique du maillage. Pour l'obtention de la valeur du seuil de la bifurcation régulière, une analyse de stabilité linéaire a été effectuée dans le sous-espace azimutal  $m = 1$  ( $m$  étant le mode azimutal). En réalité, nous nous sommes aperçu après-coup qu'à  $Ri = 0.7$ , le mode azimutal le plus instable lorsqu'on augmente le  $Re$  n'appartient pas au sous-espace  $m = 1$  mais au sous-espace  $m = 2$ . Cependant, l'évolution du résultat obtenu pour  $m = 1$  en changeant le maillage a été vérifiée pour  $m = 2$ .

(a) Effet du nombre de points de collocation

NP	8	10	12	14
$C_D$	0.55424	0.55521	0.55546	0.55516
$Nu$	23.330	24.243	24.056	24.028
$Re_1$	1479.3	1473.8	1470.6	1470.3

(b) Effet de la dimension en amont

$I/d$	8	12	16	24
$C_D$	0.55564	0.55546	0.55536	0.55539
$Nu$	24.056	24.056	24.055	24.055
$Re_1$	1469.1	1470.6	1472.6	1472.3

(c) Effet de la dimension en aval

$O/d$	16	24	32	48
$C_D$	0.55539	0.55546	0.55539	0.55539
$Nu$	24.055	24.056	24.055	24.055
$Re_1$	1472.4	1470.6	1471.9	1472.1

(d) Effet de la dimension latérale

$R/d$	4	8	12	20
$C_D$	0.55646	0.555546	0.55544	0.55554
$Nu$	24.063	24.056	24.055	24.056
$Re_1$	1452.3	1470.6	1472.4	1471.4

TAB. A.1 – Tests de la dépendance des résultats (en terme de  $C_D$ ,  $Nu$  et  $Re_1$ ) en fonction des propriétés du maillage : (a) nombre de points de collocation  $NP$ , (b) taille en amont  $I/d$ , (c) taille en aval  $O/d$  et (d) taille latérale  $R/d$ . Les différents maillages sont une extension (ou un raccourci) du maillage de base de 230 éléments avec  $I/d = 12$ ,  $O/d = 24$  et  $R/d = 8$ , représenté dans Fig. 3.1. Le régime se trouve à l'extrémité droite et en haut du plan de paramètres  $Ri - Re$  ( $Ri = 0.7$ ,  $Re = 1470$ ) pour  $Pr = 0.72$  (voir Fig. 4.3). Les seuils de l'instabilité primaire  $Re_1$  ont été calculés en interpolant (ou, dans deux cas, en extrapolant) entre deux valeurs du taux de croissance  $\gamma$  (à  $Re = 1470$  et à  $Re = 1490$ ).

## Annexe B

# Détails de la méthode numérique

### B.1 Décomposition azimutale

Les équations de continuité et de Navier-Stokes (2.11) et (2.12) couplées avec l'équation d'advection et de diffusion de la température (2.13) s'écrivent en coordonnées cylindriques  $(z, r, \theta)$  de la manière suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0, \quad (\text{B.1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \\ &+ \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right\} + Ri T, \end{aligned} \quad (\text{B.2a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \\ &+ \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} - \frac{v}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.2b})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial z} + v \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{wv}{r} &= -\frac{\partial p}{r \partial \theta} + \\ &+ \frac{1}{Re} \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{w}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{B.2c})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial z} + v \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{w}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} &= \\ &+ \frac{1}{RePr} \left\{ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

où  $z$  est l'abscisse sur l'axe de l'écoulement infini amont,  $r$  la distance radiale et  $\theta$  l'angle azimutale.

Les composantes  $u, v, w$  de la vitesse de l'écoulement sont les composantes cylindriques standard,  $u$  représentant la composante axiale,  $v$  la composante radiale et  $w$  la composante azimutale. Le terme de Boussinesq est supposé parallèle à l'axe  $O$  ; les équations (B.1), (B.2) et (B.3) décrivent ainsi le cas spécifique des écoulements assistant ( $Ri > 0$ ) et opposant ( $Ri < 0$ ).

Les équations (B.1), (B.2) et (B.3) ont l'inconvénient de présenter un problème de singularité lorsque  $r \rightarrow 0$ . De plus, pour la discrétisation spatiale, on perd le découplage commode des composantes dans les termes diffusifs permettant, en coordonnées cartésiennes, de réduire le calcul des vitesses à la résolution d'un problème elliptique scalaire. De nombreuses astuces approximatives (voir Verzicco & Orlandi, 1996, par exemple) ont été proposées. S.A. Orszag (1983) a développé une méthode permettant de réduire les singularités à des singularités apparentes faciles à éliminer. Cette méthode, qui s'appuie sur une décomposition azimutale, nous a paru être la méthode de discrétisation la plus naturelle dans le contexte des coordonnées cylindriques.

Le découplage des composantes de vitesses dans les termes diffusifs et un comportement au voisinage de l'axe des modes azimutaux bien défini s'obtiennent en introduisant les composantes complexes des vitesses :

$$\tilde{v}_{\pm} = v \pm iw \quad (\text{B.4})$$

correspondant au passage de la représentation  $O(2)$  du groupe des rotations à la représentation  $U(1)$  (cf. Jenny & Dušek, 2004). Tant que les composantes  $v, w$  sont réelles, il suffit de retenir une seule des deux composantes  $v_+$  ou  $v_-$ . En le faisant, nous serions cependant contraints à utiliser une décomposition azimutale complexe comportant tous les modes  $m$  entiers relatifs. Au lieu de cela, nous allons nous limiter à  $m \geq 0$ , quitte à garder les deux composantes  $v_{\pm}$ . Pour une notation vectorielle compacte, nous allons utiliser le symbole

$$\mathbf{v} = (u, v_-, v_+)^T. \quad (\text{B.5})$$

La décomposition azimutale des champs intervenant dans les équations (B.1), (B.2) et (B.3) sera définie par

$$p(z, r, \theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p_m(z, r, t) e^{-im\theta}, \quad (\text{B.6})$$

$$\mathbf{v}(z, r, \theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathbf{v}_m(z, r, t) e^{-im\theta}, \quad (\text{B.7})$$

$$T(z, r, \theta, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} T_m(z, r, t) e^{-im\theta}, \quad (\text{B.8})$$

Etant donné que les grandeurs  $p, T, u, v, w$  sont réelles, on a :

$$p_{-m} = \overline{p_m}, \quad v_{z,-m} = \overline{v_{z,m}}, \quad v_{\pm,-m} = \overline{v_{\mp,m}}, \quad T_{-m} = \overline{T_m}, \quad (\text{B.9})$$

ce qui permet de limiter le calcul des modes à ceux qui correspondent à  $m \geq 0$ . Selon S.A. Orszag (1983), les modes des scalaires pour la rotation autour de l'axe ont le comportement :

$$u_m |_{r=0} \sim r^m, \quad p_m |_{r=0} \sim r^m, \quad T_m |_{r=0} \sim r^m, \quad (\text{B.10})$$

alors que les composantes  $v_{\pm, m}$  se comportent comme :

$$v_{-, m} |_{r=0} \sim r^{m+1}, \quad (\text{B.11})$$

$$v_{+, m} |_{r=0} \sim r^{|m-1|}. \quad (\text{B.12})$$

Décomposées en modes de Fourier, les équations (B.1), (B.2) et (B.3) prennent la forme :

$$\nabla_m^\dagger \cdot \mathbf{v}_m = 0 \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \hat{\mathcal{F}}_{m,z} = -\frac{\partial p_m}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla_m^2 u_m, \quad (\text{B.14a})$$

$$\frac{\partial v_{-, m}}{\partial t} + \hat{\mathcal{F}}_{m,-} = -\left( \frac{\partial p_m}{\partial r} - m \frac{p_m}{r} \right) + \frac{1}{Re} \nabla_{(m+1)^2}^2 v_{-, m} \quad (\text{B.14b})$$

$$\frac{\partial v_{+, m}}{\partial t} + \hat{\mathcal{F}}_{m,+} = -\left( \frac{\partial p_m}{\partial r} + m \frac{p_m}{r} \right) + \frac{1}{Re} \nabla_{(m-1)^2}^2 v_{+, m} \quad (\text{B.14c})$$

$$\frac{\partial T_{z,m}}{\partial t} + \hat{\mathcal{F}}_{m,T} = \frac{1}{Re Pr} \nabla_m^2 T_m, \quad (\text{B.15})$$

où  $\nabla_m^\dagger \cdot$  est l'opposé de l'opérateur de divergence dans le sous-espace  $m$ . Le signe "produit scalaire" ("·") dans l'équation (B.13) tient compte du fait qu'en composantes  $U(1)$  (B.5), on écrit

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv \bar{A}_z B_z + (\bar{A}_+ B_+ + \bar{A}_- B_-) / 2 \equiv \mathbf{A}^\dagger \mathbf{D} \mathbf{B} \quad (\text{B.16})$$

où  $\dagger$  signifie "conjugué complexe et transposé" et où  $\mathbf{D} = \text{diag}(1, 1/2, 1/2)$ . Ainsi, conformément à cette notation :

$$\nabla_m^\dagger \cdot \mathbf{v}_m = \frac{\partial u_m}{\partial z} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r + \frac{m}{r} \right) v_{-, m} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r - \frac{m}{r} \right) v_{+, m}. \quad (\text{B.17})$$

$\nabla_m$  représente l'opérateur gradient agissant sur la pression dans les équations (B.14)

$$\nabla_m = \left( \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m}{r}, \frac{\partial}{\partial r} + \frac{m}{r} \right)^T. \quad (\text{B.18})$$

Compte tenu de la définition du produit scalaire  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  ci-dessus, l'opérateur laplacien s'écrit aussi :

$$\nabla_{m^2}^2 = \nabla_m^\dagger \cdot \nabla_m. \quad (\text{B.19})$$

Les termes  $\hat{\mathcal{F}}_m, \dots$  représentent les modes azimutaux des termes non-linéaires (et, dans l'équation (B.14a), le terme  $\hat{\mathcal{F}}_{m,z}$  inclue aussi le mode  $m$  du terme de Boussinesq). Ils sont calculés directement dans l'espace spectral :

$$\mathcal{F}_{m,z} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\hat{\mathbf{v}}_k \cdot \hat{\nabla}_{m-k}) u_{m-k} - Ri T_m \quad (\text{B.20a})$$

$$\mathcal{F}_{m,-} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\hat{\mathbf{v}}_k \cdot \hat{\nabla}_{m-k+1}) v_{-,m-k} \quad (\text{B.20b})$$

$$\mathcal{F}_{m,+} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\hat{\mathbf{v}}_k \cdot \hat{\nabla}_{m-k-1}) v_{+,m-k} \quad (\text{B.20c})$$

$$\mathcal{F}_{m,T} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\hat{\mathbf{v}}_k \cdot \hat{\nabla}_{m-k}) T_{m-k} \quad (\text{B.20d})$$

Dans les équations (B.20), les produits scalaires  $(\hat{\mathbf{v}}_k \cdot \hat{\nabla}_{m-k})$  sont considérés en coordonnées standard  $O(2)$  :

$$(\hat{\mathbf{v}}_k \cdot \hat{\nabla}_\ell) = u_k \frac{\partial}{\partial z} + v_k \frac{\partial}{\partial r} - i \frac{\ell}{r} w_k. \quad (\text{B.21})$$

L'approximation consiste à tronquer les sommes et à ne prendre en compte que les modes  $m = 0, \dots, M_{max}$ . Les sommes finies obtenues sont calculées suivant la procédure décrite dans l'appendix de l'article Ghidersa & Dušek (2000).

## B.2 Discrétisation temporelle

Les valeurs des termes non-linéaires (et du terme de Boussinesq) sont extrapolées à partir des valeurs calculées aux pas précédents par la méthode explicite d'Adams-Bashforth du 3<sup>eme</sup> ordre. Les équations (B.14a) à (B.15), auxquelles nous donnerons une forme plus générale afin de tenir compte d'une viscosité et d'une diffusivité qui peuvent être variables dans l'espace tout en restant axisymétriques, sont discrétisées schématiquement :

$$\frac{\mathbf{v}_m^{(n+1)} - \mathbf{v}_m^{(n)}}{\Delta t} = -\nabla_m p_m^{(n+1)} - L_m \mathbf{v}_m^{(n+1)} + \mathbf{F}_m^{(n)}, \quad (\text{B.22})$$

$$\nabla_m^\dagger \cdot \mathbf{v}_m^{(n+1)} = 0, \quad (\text{B.23})$$

$$\frac{T_m^{(n+1)} - T_m^{(n)}}{\Delta t} = -\nabla_m^\dagger \cdot \kappa \nabla_m T_m^{(n+1)} + \mathcal{F}_{m,T}^{(n)}, \quad (\text{B.24})$$

où  $\mathbf{F}_m^{(n)}$  représente les termes pris en compte explicitement (désignés par  $(n)$  car connus au pas de temps  $n+1$ )  $\mathbf{F}_m^{(n)} = (\mathcal{F}_{m,z}^{(n)}, \mathcal{F}_{m,-}^{(n)}, \mathcal{F}_{m,+}^{(n)})^T$ .  $L_m$  désigne l'opérateur des termes visqueux

$$L_m = \text{diag}(\nabla_m^\dagger \cdot \nu \nabla_m, \nabla_{m+1}^\dagger \cdot \nu \nabla_{m+1}, \nabla_{m-1}^\dagger \cdot \nu \nabla_{m-1}). \quad (\text{B.25})$$

Il s'agit d'une discrétisation implicite au premier ordre des termes diffusifs. Ce choix assure un maximum de stabilité numérique. Le premier ordre n'influe pas sur la précision effective, compte tenu des grands nombres de Reynolds et d'un pas de temps très court imposé par le critère CFL du traitement explicite des termes advectifs.

## B.3 Discrétisation dans le plan axial–radial par éléments spectraux

### B.3.1 Éléments spectraux

Le calcul des champs  $\mathbf{v}_m^{(n+1)}$ ,  $p_m^{(n+1)}$  et  $T_m^{(n+1)}$  revient à résoudre le système (pour alléger la notation, l'indice  $m$  indiquant le sous-espace azimutal est omis dans la notation) :

$$\frac{\mathbf{v}}{\Delta t} = -\nabla_m p - L_m \mathbf{v} + \mathbf{f}, \quad (\text{B.26})$$

$$\nabla_m \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (\text{B.27})$$

$$\frac{T_m}{\Delta t} = -\nabla_m^\dagger \cdot \kappa \nabla_m T_m + h, \quad (\text{B.28})$$

avec  $\mathbf{v} = (u, v_-, v_+)^T$ . Ce problème peut être reformulé sous la forme variationnelle en tant que recherche du minimum de la fonctionnelle, écrite, pour simplifier, dans l'hypothèse de conditions aux limites de Dirichlet

$$\mathbf{v}|_{\partial\Omega} = \mathbf{w}. \quad (\text{B.29})$$

$$\begin{aligned} J(\mathbf{v}, p, T) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{\Delta t} + \right. \\ &+ \left( (\nabla_m u) \cdot \nu \nabla_m u + \frac{1}{2} (\nabla_{m+1} v_-) \cdot \nu \nabla_{m+1} v_- + \frac{1}{2} (\nabla_{m-1} v_+) \cdot \nu \nabla_{m-1} v_+ \right) + \\ &+ (\nabla_m T) \cdot \kappa \nabla_m T \Big] d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \nabla_m p) d\Omega - \int_{\Omega} (T h) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{f} d\Omega - \int_{\partial\Omega} (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n}) p dS, \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

avec  $\Omega$  un domaine du plan  $(z, r)$  du type représenté dans Fig. 3.1 et  $d\Omega = r dr dz$ .

La discrétisation revient à choisir une intégration approchée des intégrales figurant dans la fonctionnelle (B.30). La méthode des éléments spectraux consiste à décomposer le domaine en  $N$  éléments  $\Omega_k$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $\Omega = \cup_{k=1}^N \Omega_k$ . Les éléments  $\Omega_k$  ont la topologie des carrés et

sont paramétrés par deux variables locales  $(q, s) \in [-1, 1]^2$ . La transformation locale s'écrit sur chaque élément :

$$z^{(k)} = z^{(k)}(q, s), \quad (\text{B.31})$$

$$r^{(k)} = r^{(k)}(q, s). \quad (\text{B.32})$$

Chaque point  $P^{(k)}(i, j)$  de coordonnées  $z$  et  $r$  situé dans l'élément  $(k)$  sera numéroté par des indices locaux  $(i, j)$  et par celui de l'élément  $(k)$ . Les coordonnées du point s'écrivent donc

$$\begin{aligned} z_{i,j}^{(k)} &= z^{(k)}(q_i, s_j), \\ r_{i,j}^{(k)} &= r^{(k)}(q_i, s_j). \end{aligned} \quad (\text{B.33})$$

En conséquence, par exemple, l'intégrale  $\int_{\Omega} (Th) d\Omega$  s'écrit :

$$\int_{\Omega} Th d\Omega = \sum_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Th r J dq ds + \sum_{k'} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 Th \frac{r}{(s+1)} J dq (s+1) ds. \quad (\text{B.34})$$

On distingue les éléments touchant l'axe en les numérotant par l'indice  $k'$ . La paramétrisation locale de ces éléments se fait de sorte que l'intersection de l'axe avec l'élément soit paramétrée par  $s = -1$ . On remarque également que le facteur  $\frac{r}{(s+1)}$  est non-singulier. Les fonctions  $T, h$  sont maintenant considérées comme fonctions des variables locales et  $J$  est le jacobien de la transformation locale :

$$J^{(k)}(r, s) = \left| \frac{D(z^{(k)}, r^{(k)})}{D(q, s)} \right| = \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial z^{(k)}}{\partial q} & \frac{\partial z^{(k)}}{\partial s} \\ \frac{\partial r^{(k)}}{\partial q} & \frac{\partial r^{(k)}}{\partial s} \end{array} \right|. \quad (\text{B.35})$$

La paramétrisation est construite de sorte que  $J^{(k)}(r, s) > 0$ .

Sur chaque élément spectral ne touchant pas l'axe de symétrie, les intégrations sur l'intervalle  $[-1, 1]$  sont approchées par la formule de Gauss-Lobatto-Legendre :

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \cong \sum_{i=1}^n f(x_i) w_i, \quad (\text{B.36})$$

où  $x_1 = -1, x_n = 1$  et  $x_i, i = 2, \dots, n-1$  sont racines des dérivées des polynômes de Legendre de degré  $n-1$  :  $P'_{n-1}(x_i) = 0, x_i, i = 2, \dots, n-1$ . Ce choix permet le raccordement aux interfaces des éléments spectraux.

L'approximation (B.36) revient à approcher la fonction  $f(x)$  par la formule d'interpolation :

$$f(x) \cong \hat{f}(x) = \sum_{i=1}^n f(x_i) h_i(x), \quad (\text{B.37})$$

où

$$h_i(x) = \frac{p_n(x)}{(x - x_i)p'_n(x_i)}, \quad (\text{B.38})$$

avec

$$p_n(x) = \prod_{i=1}^n (x - x_i). \quad (\text{B.39})$$

En conséquence :

$$h_i(x_j) = \delta_{i,j}. \quad (\text{B.40})$$

Sur les éléments touchant l'axe, la quadrature de Gauss-Lobatto-Jacobi tient mieux compte de la présence du facteur  $s + 1$  s'annulant sur l'axe. La formule (B.36) est alors remplacée par

$$\int_{-1}^1 f(s)(s+1)ds \cong \sum_{i=1}^n f(s_i^{(J)}) w_i^{(J)}, \quad (\text{B.41})$$

les noeuds à l'intérieur de l'intervalle  $i = 2, \dots, n-1$  étant maintenant racines de  $P_{n-1}^{(1,0)'}(s_i^{(J)}) = 0$ ,  $P^{(1,0)}$  étant les polynômes de Jacobi  $P^{(\alpha,\beta)}$  avec  $\alpha = 1$  et  $\beta = 0$ . Au final, l'intégrale (B.34) prend la forme

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} Thd\Omega &= \\ &= \sum_k \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 T^{(k)}(z^{(k)}(q,s), r^{(k)}(q,s)) h^{(k)}(z^{(k)}(q,s), r^{(k)}(q,s)) \hat{J}^{(k)}(q,s) dq ds = \\ &= \sum_k \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n T_{ij}^{(k)} h_{ij}^{(k)} w_i^{(k)} w_j^{(k)} \hat{J}_{ij}^{(k)}, \end{aligned} \quad (\text{B.42})$$

où  $\hat{J} = rJ$  dans les éléments ne touchant pas l'axe et  $\hat{J} = r/(s+1)J$  dans les éléments touchant l'axe. Les indices  $i, j$  désignent les valeurs des fonctions concernées aux noeuds de l'élément, par exemple  $T_{ij}^{(k)} \equiv T^{(k)}(z^{(k)}(q_i, s_j), r^{(k)}(q_i, s_j))$ . La somme discrète (B.42) s'écrit sous forme matricielle :

$$\int_{\Omega} Thd\Omega = \tilde{T}^T M \tilde{h}, \quad (\text{B.43})$$

où  $\tilde{T}$  et  $\tilde{h}$  sont les vecteurs – colonnes arrangés de la manière suivante :

$$\tilde{T} = \left\{ T_{ij}^{(k)} \right\}_{i,j=1\dots n}^{k=1\dots N} \left\{ \begin{array}{c} T_{11}^{(1)} \\ \vdots \\ T_{nn}^{(1)} \\ T_{11}^{(2)} \\ \vdots \\ T_{nn}^{(2)} \\ \vdots \\ T_{11}^{(N)} \\ \vdots \\ T_{nn}^{(N)} \end{array} \right\}. \quad (\text{B.44})$$

La matrice des masses  $M$  est diagonale

$$M = \text{diag} \left( \left\{ w_i^{(k)} w_j^{(k)} J_{ij}^{(k)} \right\}_{i,j=1\dots n}^{k=1\dots N} \right) = \left[ \begin{array}{cccc} w_1^{(1)} w_1^{(1)} J_{11}^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & w_2^{(1)} w_1^{(1)} J_{21}^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & w_n^{(N)} w_n^{(N)} J_{nn}^{(N)} \end{array} \right]. \quad (\text{B.45})$$

### B.3.2 Discrétisation des opérateurs différentiels

#### Dérivées partielles

Les champs étant tous, au départ, fonctions des variables  $z, r$ , il faut d'abord exprimer leurs dérivées en fonction des variables locales avant d'introduire la formule d'interpolation de Lagrange (B.37). Par exemple, la dérivée d'un champ scalaire  $u$  par rapport à  $z$  s'écrit :

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial z}. \quad (\text{B.46})$$

Sur l'élément  $\Omega_k$ , la fonction  $u^{(k)}(r, s)$  s'exprime

$$u|_{\Omega_k} = u^{(k)}(q, s) \approx \sum_{ij} u_{ij}^{(k)} h_i(q) h_j(s). \quad (\text{B.47})$$

Sa dérivée par rapport à  $q$  au point d'indices  $[o, p]$  s'écrit

$$\left( \frac{\partial u}{\partial q} \right)_{o,p}^{(k)} \approx \frac{\partial}{\partial q} \left( \sum_{ij} u_{ij}^{(k)} h_i(q) h_j(s) \right) \Big|_{q=q_o, s=s_p} = \sum_{ij} u_{ip}^{(k)} h'_i(r_o). \quad (\text{B.48})$$

$h'_i(r_o)$  est une matrice  $n \times n$  que nous allons noter :

$$h'_j(r_i) = D_{i,j}, \quad \{D_{i,j}\}_{i,j=1,\dots,n} = \begin{bmatrix} h'_1(r_1) & h'_2(r_1) & \dots & h'_n(r_1) \\ h'_1(r_2) & h'_2(r_2) & \dots & h'_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h'_1(r_n) & h'_2(r_n) & \dots & h'_n(r_n) \end{bmatrix}. \quad (\text{B.49})$$

D'une manière similaire, on exprime la dérivée par rapport à  $s$ . La matrice qui intervient dans l'expression pour la dérivée par rapport à  $s$  est la même, sauf dans les éléments touchant l'axe. Pour ne pas compliquer la notation, nous ne faisons pas apparaître cette distinction. De plus, les matrices locales  $D$  sont les mêmes dans tous les éléments. Eq. (B.48) devient

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{o,p}^{(k)} \approx \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)_{o,p} D_{o,i} u_{i,p}^{(k)} + \left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)_{o,p} u_{oj}^{(k)} D_{j,p}^T. \quad (\text{B.50})$$

Dans la formule B.50, nous avons introduit la convention d'Einstein (sommation sur l'indice qui se répète) et nous avons fait apparaître les multiplications matricielles sous la forme intervenant dans le code. En notation matricielle globale (B.44), l'opérateur différentiel  $\partial/\partial z$  est ainsi remplacé par la multiplication matricielle :

$$\left(\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\}_{o,p}^{(k)}\right)_{o,p=1\dots n}^{k=1\dots N} \approx D_z \cdot \tilde{u}. \quad (\text{B.51})$$

D'une manière similaire, on obtient la matrice  $D_r$  approchant l'opérateur  $\partial/\partial r$ .

### Opérateur gradient $\nabla_m$

Pour obtenir la version approchée de la fonctionnelle (B.30), il suffit, en principe, d'écrire l'approximation matricielle de l'opérateur gradient (B.18). La composante  $z$  se réduit à la multiplication matricielle par la matrice  $D_z$ . Les composantes  $+$  et  $-$  comportent la multiplication par la matrice  $D_r$  à laquelle se rajoute le terme exigeant le traitement de la singularité dans l'axe  $r \rightarrow 0$ . Les relations (B.10,B.11,B.12) permettent de voir que les seuls cas où les champs auxquels on applique l'opérateur gradient ne s'annulent pas dans l'axe correspondent à l'absence du terme singulier. Ainsi, les singularités sont toutes apparentes. Le principe de leur suppression repose sur le remplacement de la valeur de la fraction  $f(r)/r$  par la dérivée en  $r = 0$ .

L'approximation des composantes  $-$  et  $+$  du gradient d'un champ  $u$  supposé s'annuler sur l'axe dans le sous-espace  $m > 0$  ( $\frac{\partial u}{\partial r} \pm \frac{mu}{r}$ ) se fait donc de deux façons suivant que le point se trouve ou non sur l'axe :

$$r_{ij} \neq 0 \implies \left(\frac{\partial u}{\partial r} \pm \frac{mu}{r}\right)_{ij}^{(k)} = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{ij}^{(k)} \pm \frac{m}{r_{ij}} (u)_{ij}^{(k)}, \quad (\text{B.52})$$

$$r_{ij} \rightarrow 0 \implies \left(\frac{\partial u}{\partial r} \pm \frac{mu}{y}\right)_{ij}^{(k)} = (1 \pm m) \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{ij}^{(k)}. \quad (\text{B.53})$$

En notation matricielle, on aura :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} \pm \frac{mu}{r}\right)_{ij}^{(k)} \approx (D_{\mp,m}\tilde{u})_{ij}^{(k)} \equiv (D_r\tilde{u})_{ij}^{(k)} \pm \frac{m}{r_{ij}}(u)_{ij}^{(k)}, \quad (r_{ij} \neq 0), \quad (\text{B.54})$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} \pm \frac{mu}{r}\right)_{ij}^{(k)} \approx (D_{\mp,m}\tilde{u})_{ij}^{(k)} \equiv (1 \pm m)\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{ij}^{(k)}, \quad (r_{ij} = 0). \quad (\text{B.55})$$

Les trois matrices  $D_z$  et  $D_{\mp,m}$  définissent la matrice du gradient

$$\mathbf{G}_m = \begin{pmatrix} D_z \\ D_{-,m} \\ D_{+,m} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.56})$$

associant à l'opérateur  $\nabla_m$  la multiplication matricielle

$$\nabla_m u \rightarrow \mathbf{G}_m \tilde{u}. \quad (\text{B.57})$$

### Approximation de la fonctionnelle $J$

La version discrète du gradient (B.57) et l'intégration approchée (B.43) permettent d'écrire la version discrète de la fonctionnelle (B.30) sous la forme

$$\begin{aligned} J(\mathbf{v}, p, T) &\approx \tilde{J}(\tilde{\mathbf{v}}, p, T) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\tilde{\mathbf{v}}^\dagger \mathbf{M} \tilde{\mathbf{v}}}{\Delta t} + \right. \\ &+ \tilde{u}^\dagger \mathbf{G}_m^\dagger \mathbf{M} \tilde{\nu} \mathbf{G}_m \tilde{u} + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \tilde{v}_-^\dagger \mathbf{G}_{m+1}^\dagger \mathbf{M} \tilde{\nu} \mathbf{G}_{m+1} \tilde{v}_- + \tilde{v}_+^\dagger \mathbf{G}_{m-1}^\dagger \mathbf{M} \tilde{\nu} \mathbf{G}_{m-1} \tilde{v}_+ \right) + \\ &+ \tilde{T}^\dagger \mathbf{G}_m^\dagger \mathbf{M} \tilde{\kappa} \mathbf{G}_m \tilde{T} \left. \right] + \\ &+ \tilde{\mathbf{v}}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{G}_m \tilde{p} - \tilde{T}^\dagger M \tilde{h} - \tilde{\mathbf{v}}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{f} - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega}^\dagger \mathcal{A} \tilde{p}|_{\partial\Omega} \end{aligned} \quad (\text{B.58})$$

où  $\mathbf{M}$  est la matrice de masse vectorielle

$$\mathbf{M} = \text{diag} \left( M, \frac{1}{2}M, \frac{1}{2}M \right), \quad (\text{B.59})$$

les “ $\tilde{\cdot}$ ” désignent les tableaux discrets de valeurs aux points du maillage et  $\mathcal{A}$  est la matrice des masses (diagonale et réelle, de même que la matrice  $M$ ) à la surface où les conditions de Dirichlet sur les vitesses sont imposées. La viscosité  $\tilde{\nu}$  et la diffusivité thermique  $\tilde{\kappa}$  représentent une multiplication de chaque composante du gradient par le même champ de valeurs prises aux points de collocation du maillage. Il s'agit donc, en toute rigueur, de la multiplication par la matrice diagonale  $\tilde{\nu} \equiv \text{diag}(\tilde{\nu}, \tilde{\nu}, \tilde{\nu})$ . Les matrices notées en gras agissent sur les trois composantes discrétisées des vitesses. Introduisons, de plus, la matrice

$$\mathbf{L}_m = \text{diag}(\mathbf{G}_m^\dagger \mathbf{M} \tilde{\nu} \mathbf{G}_m, \frac{1}{2} \mathbf{G}_{m+1}^\dagger \mathbf{M} \tilde{\nu} \mathbf{G}_{m+1}, \frac{1}{2} \mathbf{G}_{m-1}^\dagger \mathbf{M} \tilde{\nu} \mathbf{G}_{m-1}) \quad (\text{B.60})$$

et la matrice

$$K_m = \mathbf{G}_m^\dagger \mathbf{M} \tilde{\kappa} \mathbf{G}_m. \quad (\text{B.61})$$

Cela permet de simplifier d'avantage l'écriture de la fonctionnelle discrétisée :

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\tilde{\mathbf{v}}, p, T) &= \frac{1}{2} \left( \frac{\tilde{\mathbf{v}}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{v}}{\Delta t} + \tilde{\mathbf{v}}^\dagger \mathbf{L}_m \tilde{\mathbf{v}} + \tilde{T}^\dagger \mathbf{K}_m \tilde{T} \right) \\ &+ \tilde{\mathbf{v}}^\dagger \mathbf{M} \mathbf{G}_m \tilde{p} - \tilde{T}^\dagger M \tilde{h} - \tilde{\mathbf{v}}^\dagger \mathbf{M} \tilde{\mathbf{f}} - (\tilde{\mathbf{w}} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega}^\dagger \mathcal{A} \tilde{p}|_{\partial\Omega}. \end{aligned} \quad (\text{B.62})$$

Les champs discrétisés étant complexes, ce sont les adjoints au sens d'Hermité ( $\dagger$ ) qui interviennent. Nous utilisons cependant le même symbole pour les matrices réelles telles que  $\mathbf{G}$  où il s'agit d'une simple transposition.

### Equations discrétisées

La continuité des champs discrétisés à l'interface des éléments exige que les valeurs discrètes aux points physiquement identiques représentent une seule variable indépendante. Par exemple, si le maillage n'est constitué que de deux éléments ayant chacun  $6 \times 6$  points de collocation, il y a 6 points communs de multiplicité 2 à l'interface des deux éléments. Le code n'introduisant pas de numérotation globale, la multiplicité des points du maillage est prise en compte par des contraintes supplémentaires du type  $u_{i,j}^{(k)} = u_{i',j'}^{(k')}$  exprimant le fait que le point d'indices locaux  $i, j$  de l'élément  $k$  est identique au point d'indices locaux  $i', j'$  de l'élément  $k'$  (la multiplicité maximale des points du maillage dans Fig. 3.1 est 6). Le minimum de la fonctionnelle discrétisée (B.62) correspond alors aux conditions :

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{u}} \tilde{J} = 0, \quad \tilde{\nabla}_{\tilde{p}} \tilde{J} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\nabla}_{\tilde{T}} \tilde{J} = 0, \quad (\text{B.63})$$

où  $\tilde{\nabla}_{\tilde{u}}$  est le gradient par rapport aux variables indépendantes du tableau  $\tilde{u}$ . Si deux points sont physiquement identiques, i.e.  $u_{i,j}^{(k)} = u_{i',j'}^{(k')}$ , c'est-à-dire, après une renumérotation avec un seul indice  $\ell$  parcourant la totalité des points de collocation du tableau  $u$ ,  $u_\ell = u_{\ell'}$ , on a alors

$$\frac{\partial}{\partial u_\ell} = \frac{\partial}{\partial u_\ell} + \frac{\partial}{\partial u_{\ell'}}. \quad (\text{B.64})$$

En pratique, on calcule donc le gradient  $\nabla_{\tilde{u}}$  en ne tenant pas compte des multiplicités et on remplit les valeurs du champ  $u$  aux points à multiplicité supérieure à 1 par la somme des valeurs obtenues dans les éléments différents mais associés au même point physique. Cette opération est appelée 'direct stiffness sum' dans le formalisme des éléments finis. Elle correspond à la multiplication du tableau  $\nabla_{\tilde{u}} \tilde{J}$  par une matrice de la forme (en cas de multiplicité 2) :





(B.73) et (B.74). La version discrète des équations (B.72) et (B.73) est représentée par l'équation matricielle (cf. Eqs. (B.69)) :

$$\mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{v}}}\mathbf{S}\left(\frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}\tilde{\mathbf{v}}^* + \mathbf{M}\mathbf{G}_m\tilde{\mathbf{p}}\right) = \mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{v}}}\mathbf{S}\mathbf{M}\tilde{\mathbf{f}} \quad (\text{B.76})$$

complétée par l'équation de continuité discrétisée (B.70) :

$$I_{\tilde{p}}\mathbf{S}\mathbf{G}_m^\dagger\mathbf{M}\tilde{\mathbf{v}}^* = I_{\tilde{p}}\mathcal{S}\mathcal{A}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega}. \quad (\text{B.77})$$

L'équation permettant de calculer le tableau  $\tilde{p}$  s'obtient de la manière suivante. Tout d'abord, on remarque que le champ  $\tilde{\mathbf{v}}^*$  doit satisfaire la condition de continuité à l'interface des éléments. Ainsi, si  $u$  est une de ces composantes vectorielles,  $k$  et  $\ell$  deux indices aux points physiquement identiques, alors  $u_k = u_\ell$ . Par contre, la matrice diagonale des masses  $M$  est constituée d'éléments diagonaux tenant compte de la géométrie des éléments distincts auxquels appartiennent les points  $k$  et  $\ell$ . En conséquence, si  $m_\ell$  sont ces éléments diagonaux,  $m_k \neq m_\ell$ . On a, pour une composante  $\tilde{u}$  du champ vectoriel  $\tilde{\mathbf{v}}^*$  :

$$(SM\tilde{u})_k = (SM\tilde{u})_\ell = (m_\ell + m_k)u_k = (m_\ell + m_k)u_\ell, \quad (\text{B.78})$$

donc

$$SM\tilde{u} = \text{diag}(Sm)\tilde{u} = \tilde{M}\tilde{u}, \quad (\text{B.79})$$

où nous avons noté  $\tilde{M}$  la matrice des masses ayant subi la 'direct stiffness sum'. On notera, en accord avec (B.59)  $\tilde{\mathbf{M}} = \text{diag}(\tilde{M}, \frac{1}{2}\tilde{M}, \frac{1}{2}\tilde{M})$ . Le terme  $\mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{v}}}\mathbf{S}\mathbf{M}\tilde{\mathbf{v}}^*$  s'écrit donc d'une manière équivalente :

$$\mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{v}}}\mathbf{S}\mathbf{M}\tilde{\mathbf{v}}^* = \tilde{\mathbf{M}}\mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{\mathbf{v}}^* = \tilde{\mathbf{M}}\tilde{\mathbf{v}}^*, \quad (\text{B.80})$$

étant donné que les deux matrices (diagonales)  $\mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{v}}}$  et  $\tilde{\mathbf{M}}$  commutent et que le champ  $\tilde{\mathbf{v}}^*$  est déjà supposé nul aux points où les conditions de Dirichlet sont imposées  $\mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{v}}}\tilde{\mathbf{v}}^* = \tilde{\mathbf{v}}^*$ . L'équation (B.76) peut donc être mise sous la forme :

$$\frac{\tilde{\mathbf{v}}^*}{\Delta t} + \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{v}}}\mathbf{S}\mathbf{M}\mathbf{G}_m\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{v}}}\mathbf{S}\mathbf{M}\tilde{\mathbf{f}}. \quad (\text{B.81})$$

En multipliant l'équation (B.81) par la matrice  $I_{\tilde{p}}\mathbf{S}\mathbf{G}_m^\dagger\mathbf{M}$ , nous obtenons, compte tenu de l'équation de continuité (B.77)

$$I_{\tilde{p}}\mathbf{S}\mathbf{G}_m^\dagger\mathbf{M}\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{v}}}\mathbf{S}\mathbf{M}\mathbf{G}_m\tilde{\mathbf{p}} = I_{\tilde{p}}\mathbf{S}\mathbf{G}_m^\dagger\mathbf{M}\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{v}}}\mathbf{S}\mathbf{M}\tilde{\mathbf{f}} + \frac{1}{\Delta t}I_{\tilde{p}}\mathcal{S}\mathcal{A}(\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})|_{\partial\Omega}. \quad (\text{B.82})$$

Il s'agit du système linéaire

$$B_m\tilde{\mathbf{p}} = \tilde{\mathbf{r}}, \quad (\text{B.83})$$

$$B_m = I_{\tilde{p}}\mathbf{S}\mathbf{G}_m^\dagger\mathbf{M}\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{v}}}\mathbf{S}\mathbf{M}\mathbf{G}_mSI_{\tilde{p}} \quad (\text{B.84})$$

Mode $m$	Taille de matrice	Nombre d'éléments non-nuls
0	8469	1267844
1	8307	1231617
2	8307	1231629
3	8307	1231633

TAB. B.1 – Tailles et nombre d'éléments non-nuls dans le triangle supérieur de la matrice pour les matrices de pression  $m = 0, 1, 2, 3$  du maillage à 169 éléments avec 8 points de collocation par direction spatiale.

dont la matrice est manifestement symétrique et définie positive car la matrice  $\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{v}}}\mathbf{S}$  l'est aussi. Par contre, la matrice  $B_m$  est loin d'être la matrice de discrétisation du laplacien scalaire  $\nabla_{m^2}$  qu'on obtiendrait en résolvant formellement le problème continu (B.72) et (B.73), cette dernière étant égale à  $C_m = I_{\tilde{p}}\mathbf{S}\mathbf{G}_m^\dagger\mathbf{M}\mathbf{G}_m\mathbf{S}I_{\tilde{p}}$ . L'introduction de ce traitement exact de l'équation de la pression a permis d'obtenir un champ à divergence nulle avec une précision machine. Le reste du calcul consiste à résoudre les versions discrétisées des équations de la vitesse et de la température (B.74) et (B.75) :

$$\mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{v}}}\mathbf{S} \left( \frac{1}{\Delta t}\mathbf{M}\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{L}_m\tilde{\mathbf{v}} \right) = -\mathbf{M}\mathbf{G}_m\tilde{\mathbf{p}} + \mathbf{I}_{\tilde{\mathbf{v}}}\mathbf{S}\mathbf{M}\tilde{\mathbf{f}}, \quad (\text{B.85})$$

$$I_{\tilde{T}}\mathbf{S} \left( \frac{1}{\Delta t}M\tilde{T} + K\tilde{T} \right) = I_{\tilde{T}}\mathbf{S}M\tilde{h}, \quad (\text{B.86})$$

qui sont définies par des matrices symétriques très bien conditionnées. Leur résolution par la méthode des gradients conjugués ne nécessite que quelques itérations et reste peu coûteuse même si on souhaite réduire le résidu par un facteur correspondant à la précision machine.

### B.3.3 Inversion directe de la matrice de pression

La matrice (B.84) s'avère être très mal conditionnée. Par exemple, pour des maillages fins, avec des éléments comportant au-moins 8 points de collocation par direction spatiale, le nombre d'itérations de la méthode des gradients conjugués atteint plusieurs milliers (au lieu de centaines pour la matrice  $C$ ). Nous avons donc eu recours à une méthode d'inversion directe. La matrice  $B_m$  est alors générée dans un format de matrice creuse en numérotation globale, c'est-à-dire en prenant des points physiquement identiques aux interfaces des éléments pour un seul point dans chaque sous-espace  $m$  utilisé dans calcul. I.e., si la décomposition azimutale comporte  $M_{max} + 1$  modes, on génère et stocke  $M_{max} + 1$  matrices. Comme le nombre de différents maillages est relativement réduit, on stocke les matrices avec les maillages. Au lancement d'une simulation, les matrices  $B_m$  ( $m = 0, \dots, M_{max}$ ) sont lues à partir d'un fichier. Une idée de la taille des matrices et du nombre de leurs éléments non-nuls peut être obtenue à partir du Tab. B.1. La structure de la matrice  $B_m$  pour  $m = 1$  est représentée dans Fig. B.1.

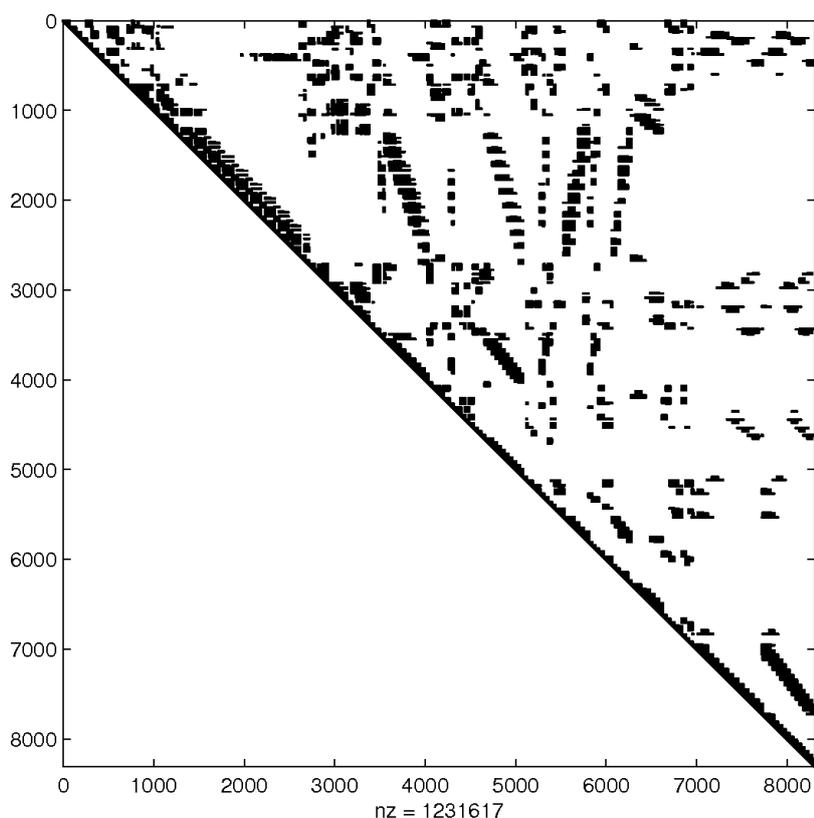


FIG. B.1 – Structure de la matrice de pression pour le maillage Tab. B.1 et le mode  $m = 1$ . Un point représente une valeur non-nulle. Uniquement la moitié supérieure de la matrice est stockée.

Au lancement de la simulation, les matrices lues sont décomposées par la décomposition LDL (voir Cuthill & McKee, 1969; Gibbs *et al.*, 1976; Ng & Peyton, 1993; Esposito *et al.*, 1998). Elle permet d'obtenir une factorisation  $B_m = L_m^T D_m L_m$  où  $L_m$  est triangulaire inférieure, avec des éléments diagonaux unité, et  $D_m$  est diagonale. L'algorithme utilisé limite considérablement le nombre d'éléments non-nuls du facteur  $L_m$ . Le nombre de ses éléments est, dans nos calculs, de l'ordre de 3 fois le nombre d'éléments non-nuls de la matrice de départ. La décomposition dure quelques secondes au maximum et n'est effectuée qu'au début du calcul. Le temps CPU de résolution du problème factorisé  $L_m^T D_m L_m x = f$  est inférieur au temps des itérations par gradients conjugués des équations (B.85) et (B.86).

## B.4 Traitement numérique du glaçon en fusion

### B.4.1 Dépendance de la température sur la viscosité, la diffusivité thermique et le terme de flottabilité

Les coefficients  $\nu$  et  $\kappa$  dans les équations (2.54) et (2.55) ne permettent pas l'application directe de la décomposition azimutale à ces équations car ils dépendent de la température dont le champ est lui-même non-axisymétrique. Pour retrouver la décomposition azimutale (B.14) et (B.15), nous décomposerons  $\nu$  et  $\mu$  en leur partie axisymétrique

$$\nu_0 = \nu(T_0), \quad (\text{B.87})$$

$$\kappa_0 = \kappa(T_0) \quad (\text{B.88})$$

et leur partie non-axisymétrique

$$\nu_1 = \nu(T'), \quad (\text{B.89})$$

$$\kappa_1 = \kappa(T'), \quad (\text{B.90})$$

où  $T_0$  est le mode  $m = 0$  (valeur moyenne azimutale) de  $T$  et

$$T' = \sum_{m=1}^{M_{max}} T_m e^{-im\theta} + \text{c.c.}, \quad (\text{B.91})$$

'c.c.' désignant les termes conjugués complexes. Les termes contenant les parties non-axisymétriques seront rajoutés aux termes traités explicitement. De plus, on tient compte de la non-linéarité du terme (2.58) remplaçant celui de Boussinesq dans l'équation (B.20)a. Les équations (B.20) deviennent :

$$\mathcal{F}_{m,z} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\hat{\mathbf{v}}_k \cdot \hat{\nabla}_{m-k}) u_{m-k} - (\gamma(T))_m - (\nabla \cdot \nu_1 \nabla u)_m \quad (\text{B.92a})$$

$$\mathcal{F}_{m,-} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\hat{\mathbf{v}}_k \cdot \hat{\nabla}_{m-k+1}) v_{-,m-k} - (\nabla \cdot \nu_1 \nabla u)_{-,m} \quad (\text{B.92b})$$

$$\mathcal{F}_{m,+} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\hat{\mathbf{v}}_k \cdot \hat{\nabla}_{m-k-1}) v_{+,m-k} - (\nabla \cdot \nu_1 \nabla u)_{+,m} \quad (\text{B.92c})$$

$$\mathcal{F}_{m,T} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (\hat{\mathbf{v}}_k \cdot \hat{\nabla}_{m-k}) T_{m-k} - (\nabla \cdot \kappa_1 \nabla T)_m \quad (\text{B.92d})$$

alors que les équations (B.14) et (B.15) ne changent que pour tenir compte de la dépendance des parties axisymétriques des coefficients de la position dans le plan axial-radial :

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \hat{\mathcal{F}}_{m,z} = -\frac{\partial p_m}{\partial z} - \nabla_m^\dagger \cdot \nu_0 \nabla_m u_m, \quad (\text{B.93a})$$

$$\frac{\partial v_{-,m}}{\partial t} + \hat{\mathcal{F}}_{m,-} = -\left(\frac{\partial p_m}{\partial r} - m \frac{p_m}{r}\right) - \nabla_{m+1}^\dagger \cdot \nu_0 \nabla_{m+1} v_{-,m}, \quad (\text{B.93b})$$

$$\frac{\partial v_{+,m}}{\partial t} + \hat{\mathcal{F}}_{m,+} = -\left(\frac{\partial p_m}{\partial r} + m \frac{p_m}{r}\right) - \nabla_{m-1}^\dagger \cdot \nu_0 \nabla_{m-1} v_{+,m}, \quad (\text{B.93c})$$

$$\frac{\partial T_{z,m}}{\partial t} + \hat{\mathcal{F}}_{m,T} + \nabla_m^\dagger \cdot \kappa_0 \nabla_m v_{z,m} = 0. \quad (\text{B.94})$$

Les termes additionnels au second membre des équations (B.92) sont calculés en passant de l'espace spectral dans l'espace physique et de retour. A cet effet, nous introduisons un maillage virtuel (car uniquement utilisé pour le calcul des termes non-linéaires) de  $2M_{max} + 1$  points en direction azimutale  $\theta_j = 2\pi j / (2M_{max} + 1)$ ,  $j = 0, \dots, 2M_{max}$ . Le terme  $(\nabla \cdot \nu_1 \nabla u)_m$ , par exemple, est calculé en effectuant l'opération différentielle  $\nabla_m u_m$  dans l'espace spectral pour  $m = 0, \dots, M_{max}$ . Les modes azimutaux du gradient  $\nabla u$  ainsi obtenus sont recomposés dans l'espace physique (aux points  $\theta_j$ ) (cf. Eq. B.7) et donnent les valeurs réelles du gradient. Le résultat est multiplié par la partie non-axisymétrique de viscosité cinématique  $\nu_1$  calculée à partir de la partie non-axisymétrique du champ de température (B.91). Le produit ainsi obtenu est décomposé en modes azimutaux et l'opération  $-\nabla \cdot$  est appliquée aux modes azimutaux ainsi obtenus sous la forme de l'opérateur  $\nabla_m^\dagger$ . Le calcul du terme  $(\nabla \cdot \kappa_1 \nabla T)_m$  est exactement identique. En ce qui concerne les termes analogues apparaissant dans les équations (B.92b et c), on utilise la décomposition complexe complète en modes  $m = -M_{max}, \dots, M_{max}$  de la composante complexe  $v_+$ , sachant que  $v_{+,m} = \overline{v_{-,-m}}$ . Le terme de Boussinesq généralisé  $(\gamma(T))_m$  est calculé d'abord dans l'espace physique à partir du champ de température recomposé à l'aide de la formule (2.58) avant d'être décomposé en modes azimutaux à son tour. Le passage de l'espace spectral dans l'espace physique se fait sur les tableaux entiers obtenus par la discrétisation dans le plan axial-radial et sa vectorisation est parfaite. La mémoire utilisée est immédiatement libérée après le calcul. En conséquence, l'opération demande peu de ressources. Quant aux équations (B.93) et (B.94), elles se ramènent, après la discrétisation temporelle, aux équations (B.22), (B.23) et (B.24), dont le traitement a été expliqué dans la section B.2.

#### B.4.2 Prise en compte du diamètre variable de la sphère

Les équations du mouvement de la sphère adimensionnées par le diamètre de la sphère gardent leur forme quel que soit le diamètre réel. La variation du diamètre se répercute dans le calcul de deux manières :

- 1) Le nombre de Galilée devient variable. Sa variation relative à chaque pas de temps  $\Delta t^*$  s'écrit :

$$\frac{\Delta G}{G} = \frac{3}{2} \frac{\Delta d}{d} = \frac{3}{\pi} \frac{c_{p,ref}(T_s - T_\infty)}{\ell} \dot{Q}^* \Delta t^*. \quad (\text{B.95})$$

- 2) Le maillage se déplace non seulement en translation en suivant le mouvement du centre de la sphère, mais il se rétrécit en fonction de la diminution de l'échelle  $d$ . La vitesse (adimensionnée) normale à la surface de la sphère est

$$v_n^* = \frac{1}{d} \frac{\Delta d}{\Delta t^*} = \frac{2}{\pi} \frac{c_{p,ref}(T_s - T_\infty)}{\ell} \dot{Q}^*. \quad (\text{B.96})$$

Pour que le maillage garde sa forme, il faut déplacer chaque point du plan  $(z, r)$  à la vitesse  $\mathbf{v}^{(m)}$  représentant un champ axisymétrique avec les composantes (l'indice zéro indique le mode  $m = 0$ ) :

$$v_{z,0}^{(m)} = v_n^* z, \quad (\text{B.97})$$

$$v_{+,0}^{(m)} = v_{-,0}^{(m)} = v_n^* r. \quad (\text{B.98})$$

La vitesse d'entraînement du maillage  $\mathbf{u}$  dans l'équation (2.12) est donc égale à la somme de la vitesse de la sphère  $\mathbf{u}_s$  et de la vitesse de déformation locale  $\mathbf{v}^{(m)}$  :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_s + \mathbf{v}^{(m)}. \quad (\text{B.99})$$

### B.4.3 Modification du traitement implicite des équations du mouvement de la sphère

Le traitement pleinement implicite des équations de mouvement de la sphère (2.56) et (2.57) ne peut plus être maintenu tel quel sous peine d'une augmentation drastique des coûts de calcul. Ce traitement, décrit dans l'article Jenny & Dušek (2004), profite d'une manière astucieuse du fait que la viscosité est constante en temps et uniforme dans l'espace. Ni l'une ni l'autre de ces propriétés n'est plus vérifiée dans le cas présent. La méthode de Jenny & Dušek (2004) consiste à évaluer la matrice  $\mathbf{A}$  (cf. la formule (64) de l'article Jenny & Dušek (2004)) liant la force et le moment agissant sur la sphère suite à une accélération en translation et en rotation. Il s'agit donc (à un facteur près) d'une matrice de masses et moments d'inerties 'ajoutés' qui tient compte, de façon exacte, du maillage numérique (en particulier, puisque le domaine n'est ni infini ni sphérique, les masses ajoutées correspondant aux accélérations suivant deux directions différentes, par exemple suivant l'axe  $Oz$  et l'axe  $Ox$  perpendiculaire à l'écoulement, ne valent pas exactement 0.5 et ne sont pas égales). La matrice  $\mathbf{A}$ , permettant de calculer directement la correction des vitesses de la sphère à partir du résidu des équations du mouvement, peut être calculée avec une bonne approximation (assurant la stabilité du calcul) avec une viscosité uniforme dans l'espace égale à valeur  $1/G \equiv \nu^*(T = 1/2)$ . La correction tenant compte de la valeur exacte de la viscosité est prise en compte sous forme de termes explicites. De plus, afin de ne pas recalculer la matrice  $\mathbf{A}$  à chaque pas de temps, la valeur de  $G$  est maintenue fixée à une valeur  $G_0$  tant qu'elle ne s'écarte pas d'un certain pourcentage de la valeur exacte. Une mise à jour espacée à chaque fois que l'écart atteint 1% représente un événement rare au cours d'une simulation tout en conservant la stabilité et la précision de l'algorithme. La discrétisation des équations (2.56) et (2.57) peut être résumée comme suit :

$$\frac{\rho_s}{\rho_{ref}} \frac{\mathbf{u}_S^{(n+1)} - \mathbf{u}_S^{(n)}}{dt} = \frac{6}{\pi} \mathbf{F}_{fl}(\mathbf{v}^{(n+1)}, p^{(n+1)}, 1/G_0) + \mathbf{k}_{fix} + \frac{6}{\pi} \Delta \mathbf{F}_{fl}^{(n)}, \quad (\text{B.100})$$

$$\frac{\rho_s}{\rho_{ref}} \frac{\boldsymbol{\Omega}^{(n+1)} - \boldsymbol{\Omega}^{(n)}}{dt} = \frac{60}{\pi} \mathbf{M}_{fl}(\mathbf{v}^{(n+1)}, p^{(n+1)}, 1/G_0) + \frac{60}{\pi} \Delta \mathbf{M}_{fl}^{(n)}, \quad (\text{B.101})$$

les termes correcteurs étant calculés à la fin du pas de temps précédent :

$$\Delta \mathbf{F}_{fl}^{(n)} = \mathbf{F}_{fl}(\mathbf{v}^{(n)}, p^{(n)}, \nu(T^{(n)})) - \mathbf{F}_{fl}(\mathbf{v}^{(n)}, p^{(n)}, 1/G_0), \quad (\text{B.102})$$

$$\Delta \mathbf{M}_{fl}^{(n)} = \mathbf{M}_{fl}(\mathbf{v}^{(n)}, p^{(n)}, \nu(T^{(n)})) - \mathbf{M}_{fl}(\mathbf{v}^{(n)}, p^{(n)}, 1/G_0). \quad (\text{B.103})$$

# Bibliographie

- ACHENBACH, E. 1974 Vortex shedding from spheres. *J. Fluid Mech.* **62**, 209–221.
- ANTAR, M. A. & EL-SHAARAWI, M. A. I. 2002 Mixed convection around a liquid sphere in an air stream. *Heat and Mass Transfer* **38**, 419–424.
- BAR-ZIV, E., ZHAO, B., MOGRABI, E., KATOSHEVSKI, D. & ZISKIND, G. 2002 Experimental validation of the Stokes law at nonisothermal conditions. *Phys. Fluids* **14**, 2015–2018.
- BHATTACHARYYA, S. & SINGH, A. 2008 Mixed convection from an isolated spherical particle. *Int. J. Heat Mass Transfer* **51**, 1034–1048.
- BONOMETTI, T. & MAGNAUDET, J. 2007 An interface-capturing method for incompressible two-phase flows. validation and application to bubble dynamics. *Int. J. Multiphase Flow* **33**, 109–133.
- BOUCHET, G., MEBAREK, M. & DUŠEK, J. 2006 Hydrodynamic forces acting on a rigid fixed sphere in early transitional regimes. *European Journal of Mechanics, B/Fluids* **25**, 321–336.
- BROWN, S.N. & SIMPSON, C.J. 1982 Collision phenomena in free-convective flow over a sphere. *J. Fluid Mech.* **124**, 123–137.
- CHEN, T. S. & MUCOGLU, A. 1977 Analysis of mixed forced and free convection about a sphere. *Int. J. Heat Mass Transfer* **20**, 867–875.
- CUTHILL, E. & MCKEE, J. 1969 Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices. pp. 157–172. ACM 24th Nat Conf., New York.
- DUDEK, D. R., FLETCHER, T. H., LONGWELL, J. P. & SAROFIM, A. F. 1988 Natural convection induced drag forces on spheres at low Grashof numbers : comparison of theory with experiment. *Int. J. Heat Mass Transfer* **31**, 863–873.
- DUINEVELD, P.C. 1995 The rise velocity and shape of bubbles in pure water at high reynolds number. *J. Fluid Mech.* **292**, 325–332.
- DUŠEK, J., GAL, P. LE & FRAUNIÉ, P. 1994 A numerical and theoretical study of the first Hopf bifurcation in a cylinder wake. *J. Fluid Mech.* **264**, 59–80.

- ESPOSTIO, A., CATALANO, M. S. FIORENZO, MALUCELLI, F. & TARRICONE, L. 1998 A new matrix bandwidth reduction algorithm. *Operations Research Letters* **23**, 99–107.
- FABRE, D., AUGUSTE, F. & MAGNAUDET, J. 2008 Bifurcations and symmetry breaking in the wake of axisymmetric bodies. *Phys. Fluids* **20**, 051702.
- FERZIGER, J. H. & PERIĆ, M. 1997 *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer.
- GAN, H., CHANG, J., FENG, J. J. & HU, H. H. 2003a Direct numerical simulation of the sedimentation of solid particles with thermal convection. *J. Fluid Mech.* **481**, 385–411.
- GAN, H., FENG, J. J. & HU, H. H. 2003b Simulation of the sedimentation of melting solid particles. *Int. J. Multiphase Flow* **29**, 751–769.
- GEOOLA, F. & CORNISH, A. R. H. 1981 Numerical solution of steady-state free convective heat transfer from a solid sphere. *Int. J. Heat Mass Transfer* **24**, 1369–1379.
- GEOOLA, F. & CORNISH, A. R. H. 1982 Numerical simulation of free convective heat transfer from a sphere. *Int. J. Heat Mass Transfer* **25**, 1677–1687.
- GHIDERSA, B. & DUŠEK, J. 2000 Breaking of axisymmetry and onset of unsteadiness in the wake of a sphere. *J. Fluid Mech.* **423**, 33–69.
- GIBBS, N. E., POOLE, W. G. & STOCKMEYER, P. K. 1976 A comparison of several bandwidth and profile reduction algorithms. *ACM Trans. Math. Software* **2** (4), 322–330.
- GOLDBURG, A. & FLORSHEIM, B.H. 1966 Transition and strouhal number for the incompressible wake of various bodies. *Phys. Fluids* **9**, 45–50.
- GOLUBITSKY, M. & STEWART, I. 1988 *Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Applied Mathematical Sciences vol. 69*, vol. II. Springer New York.
- GRAY, D.D. & GIORGINI, A. 1976 The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases. *Int. J. Heat Mass Transfer* **19**, 545–551.
- HAO, Y. L. & TAO, Y.-X. 2001 Heat transfer characteristics of melting ice spheres under forced and mixed convection. *Journal of Heat Transfer* **123**, 937–950.
- HAO, Y. L. & TAO, Y.-X. 2002 Melting of a solid sphere under forced and mixed convection : Flow characteristics. *Journal of Heat Transfer* **124**, 891–903.
- HERBERT, T. 1983 On perturbation methods in nonlinear stability theory. *J. Fluid Mech.* **126**, 167–186.
- HIEBER, C. A. & GEBHART, B. 1969 Mixed convection from a sphere at small Reynolds and Grashof numbers. *J. Fluid Mech.* **38**, 137–159.
- I. DANAILA, J. DUŠEK & F. ANSELMET 1998 Nonlinear dynamics at a Hopf bifurcation with axisymmetry breaking in a jet. *Physical Review E* **57**, 3695–3698.

- JENNY, M. 2003 Etude de la transition au chaos d'une sphère en ascension ou en chute libre dans un fluide newtonien. PhD thesis, Université Louis Pasteur.
- JENNY, M., BOUCHET, G. & DUŠEK, J. 2003 Nonvertical ascension or fall of a free sphere in a Newtonian fluid. *Phys. Fluids* **15**, L9–L12.
- JENNY, M. & DUŠEK, J. 2004 Efficient numerical method for the direct numerical simulation of the flow past a single light moving spherical body in transitional regimes. *Journal of Computational Physics* **194**, 215–232.
- JENNY, M., DUŠEK, J. & BOUCHET, G. 2004 Instabilities and transition of a sphere falling or ascending freely in a Newtonian fluid. *J. Fluid Mech.* **508**, 201–239.
- JEONG, J. & HUSSAIN, F. 1995 On the identification of a vortex. *J. Fluid Mech.* **285**, 69–94.
- JIA, H. & GOGOS, G. 1996 Laminar natural convection heat transfer from isothermal spheres. *Int. J. Heat Mass Transfer* **39**, 1603–1615.
- JOHNSON, T.A. & PATEL, V.C. 1999 Flow past a sphere up to a Reynolds number of 300. *J. Fluid Mech.* **378**, 19–70.
- KAHRAMAN, R. 2002 Numerical and experimental investigation of melting of ice involving natural convection. *International journal of energy research* **26**, 347–354.
- KARAMANEV, D.G., CHAVARIE, C. & MAYER, R.C. 1996 Dynamics of the free rise of a light solid sphere in liquid. *AIChE Journal* **42** (6), 1789–1792.
- KATOSHEVSKI, D., ZHAO, B., ZISKIND, G. & BAR-ZIV, E. 2001 Experimental study of the drag force acting on a heated particle. *Journal of Aerosol Science* **32**, 73–86.
- KOIZUMI, H. 2004 Time and spatial heat transfer performance around an isothermally heated sphere placed in a uniform, downwardly directed flow (in relation to the enhancement of latent heat storage rate in a spherical capsule). *Applied Thermal Engineering* **24**, 2583–2600.
- KOTOUČ, M., BOUCHET, G. & DUŠEK, J. 2008 Loss of axisymmetry in flow past a heated sphere – assisting flow. *Int. J. Heat Mass Transfer* **51**, 2686–2700.
- KURDYUMOV, V.N. & LIÑÁN, A. 1999 Free convection from a point source of heat, and heat transfer from spheres at small Grashof numbers. *Int. J. Heat Mass Transfer* **42**, 3849–3860.
- LECORDIER, J. C., HAMMA, L. & PARANTHOEN, P. 1991 The control of vortex shedding behind heated circular cylinders at low Reynolds numbers. *Exp. Fluids* **10**, 224–229.
- LEVI, E. 1980 Three-dimensional wakes : origin and evolution. *Journal of the engineering division* pp. 659–676.

- LUNDE, K. & PERKINS, R. J. 1997 Observations on wakes behind spheroidal bubbles and particules. *ASME Fluids Engineering Division Summer Meeting FEDSM'97* (FEDSM97-3530).
- MAGARVEY, R.H. & BISHOP, R.L. 1961*a* Transition ranges for three-dimensional wakes. *Can. J. Phys.* **39**, 1418–1422.
- MAGARVEY, R.H. & BISHOP, R.L. 1961*b* Wakes in liquid-liquid systems. *Phys. Fluids* **4** (7), 800–804.
- MAGARVEY, R.H. & MACLATCHY, C.S. 1965 Vortices in sphere wakes. *Can. J. Phys.* **43**, 1649–1656.
- MCLEOD, P., RILEY, D. S. & SPARKS, R. S. J. 1996 Melting of a sphere in hot fluid. *J. Fluid Mech.* **327**, 393–409.
- MICHAUX-LEBLOND, N. & BÉLORGEY, M. 1997 Near-wake behavior of a heated circular cylinder : Viscosity-buoyancy duality. *Experimental Thermal and Fluid Science* **15**, 91–100.
- MITTAL, R. 1999 Planar symmetry in the unsteady wake of a sphere. *AIAA Journal* **37**, 388–390.
- MOGRABI, E. & BAR-ZIV, E. 2005*a* Dynamics of a spherical particle in mixed convection flow field. *Journal of Aerosol Science* **36**, 387–409.
- MOGRABI, E. & BAR-ZIV, E. 2005*b* On the mixed convection hydrodynamic force on a sphere. *Journal of Aerosol Science* **36**, 1177–1181.
- MOGRABI, E., ZISKIND, G., KATOSHEVSKI, D. & BAR-ZIV, E. 2002 Experimental study of the forces associated with mixed convection from a heated sphere at small Reynolds and Grashof numbers. part II : assisting and opposing flows. *Int. J. Heat Mass Transfer* **45**, 2423–2430.
- MOUGIN, G. & MAGNAUDET, J. 2002*a* The generalized Kirchhoff equations and their application to the interaction between a rigid body and an arbitrary time-dependent viscous flow. *Int. J. Multiphase Flow* **28**, 1837–1851.
- MOUGIN, G. & MAGNAUDET, J. 2002*b* Path instability of a rising bubble. *Phys. Rev. Lett.* **88**, 014502.
- MUCOGLU, A. & CHEN, T. S. 1978 Mixed convection about a sphere with uniform surface heat flux. *Journal of Heat Transfer* **100**, 542–544.
- NAKAMURA, I. 1976 Steady wake behind a sphere. *Phys. Fluids* **19** (1), 5–8.
- NATARAJAN, R. & ACRIVOS, A. 1993 The instability of the steady flow past spheres and disks. *J. Fluid Mech.* **254**, 323–344.

- NAZAR, R., AMIN, N. & POP, I. 2002 On the mixed convection boundary-layer flow about a solid sphere with constant surface temperature. *The Arabian Journal for Science and Engineering* **27**, 117–135.
- NG, E. G. & PEYTON, B. W. 1993 Block sparse Cholesky algorithms on advanced uniprocessor computers. *SIAM J. Sci. Comput.* **14** (5), 1034–1056.
- NGUYEN, H. D., PAIK, S. & CHUNG, J. N. 1993 Unsteady mixed convection heat transfer from a solid sphere : the conjugate problem. *Int. J. Heat Mass Transfer* **36**, 4443–4453.
- ORMIÈRES, D. 1999 Etude expérimentale et modélisation du sillage d'une sphère à bas nombre de Reynolds. PhD thesis, Université de Provence.
- ORMIÈRES, D. & PROVANSAL, M. 1999 Transition to turbulence in the wake of a sphere. *Phys. Rev. Lett.* **83**, 80–83.
- PATERA, A. 1984 A spectral element method for fluid dynamics : laminar flow in a channel expansion. *Journal of Computational Physics* **54** (3), 468–488.
- POTTER, J. M. & RILEY, N. 1980 Free convection from a heated sphere at large Grashof number. *J. Fluid Mech.* **100**, 769–783.
- PROVANSAL, M. & ORMIÈRES, D. 1997 Transition to turbulence in the wakes of axisymmetrical objects. *Eleventh Symposium on Turbulent Shear Flows, Septembre, Grenoble, France* pp. 7–11.
- PROVANSAL, M. & ORMIÈRES, D. 1998 Etude expérimentale de l'instabilité du sillage d'une sphère. *C.R. Acad. Sci. Paris t. 326* (Série II b), 489–494.
- QUARINI, G. L. & CHANG, Y. C. 2002 Heat transfer characteristics of ice melting in water and salt solutions. *Trans IChemE* **80**, 320–324.
- REN, M., RINDT, C. C. M. & STEENHOVEN, A. A. VAN 2004 Experimental and numerical investigation of the vortex formation process behind a heated cylinder. *Phys. Fluids* **16**, 3103–3114.
- RILEY, D. S. & TVEITEREID, M. 1984 On the stability of an axisymmetric plume in a uniform stream. *J. Fluid Mech.* **142**, 171–186.
- S.A. ORSZAG, A.T. PATERA 1983 Secondary instability of wall bounded shear flows. *J. Fluid Mech.* **128**, 347–385.
- SAKAMOTO, H. & HANIU, H. 1990 A study on vortex shedding from spheres in a uniform flow. *Transactions of the ASME* **112**, 386–392.
- SCHENK, J. & SCHENKELS, F. A. M. 1968 Thermal free convection from an ice sphere in water. *Appl. Sci. Res.* **19**, 465–476.
- SCHOUVEILER, L. & PROVANSAL, M. 2002 Self-sustained oscillations in the wake of a sphere. *phyOf* **14**, 3846–3854.

- TANG, L. & JOHNSON, A. T. 1990 Flow visualization of mixed convection about a sphere. *Int. Comm. Heat Mass Transfer* **17**, 67–77.
- TOMBOULIDES, A.G. & ORSZAG, S.A. 2000 Numerical investigation of transitional and weak turbulent flow past a sphere. *J. Fluid Mech.* pp. 45–73.
- TOMBOULIDES, A.G., ORSZAG, S.A. & KARNIADAKIS, G.E. 1993 Direct and large-eddy simulation of axisymmetric wakes. *AIAA - 31st Aerospace Sciences Meeting & Exhibit* pp. 1–12.
- VERZICCO, R. & ORLANDI, P. 1996 A finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates. *Journal of Computational Physics* **123**, 402–414.
- WAKITANI, S. 1980 The Stability of a Natural Convection Flow above a Point Heat Source. *Journal of the Physical Society of Japan* **49**, 2392–2399.
- WAKITANI, S. 1985 Non-parallel-flow stability of a two-dimensional buoyant plume. *J. Fluid Mech.* **159**, 241–258.
- WANG, A.-B., TRÁVNÍČEK, Z. & CHIA, K.-C. 2000 On the relationship of effective Reynolds number and Strouhal number for the laminar vortex shedding of a heated circular cylinder. *Phys. Fluids* **12**, 1401–1410.
- WONG, K. L., LEE, S. C. & CHEN, C. K. 1986 Finite element solution of laminar combined convection from a sphere. *Journal of Heat Transfer* **108**, 860–865.
- WU, MINGMING & GHARIB, MORTEZA 2002 Experimental studies on the shape and path of small air bubbles rising in clean water. *Phys. Fluids* **14** (7), L49–L52.
- WU, M.-H. & WANG, A.-B. 2007 On the transitional wake behind a heated circular cylinder. *Phys. Fluids* **19**, 084102–1–9.
- YANG, X. & ZEBIB, A. 1989 Absolute and convective instability of a cylinder wake. *Phys. Fluids A* **1**, 689–696.
- YUGE, T. 1960 Experiments on heat transfer from spheres including combined natural and forced convection. *Journal of Heat Transfer* **C82**, 214–220.
- ZISKIND, G., ZHAO, B., KATOSHEVSKI, D. & BAR-ZIV, E. 2001 Experimental study of the forces associated with mixed convection from a heated sphere at small Reynolds and Grashof numbers. part I : cross-flow. *Int. J. Heat Mass Transfer* **44**, 4381–4389.