

Université Louis Pasteur Strasbourg I  
Faculté des Sciences Économiques et de Gestion

---

**Thèse**  
**De Doctorat de Sciences de Gestion**

---

**THEORIE COMPORTEMENTALE DU PORTEFEUILLE.**  
**UNE ANALYSE CRITIQUE.**

Présentée et soutenue publiquement par

**BOURACHNIKOVA Olga**

**Jury**

Directeur de Thèse	<b>Patrick Roger</b> Université Louis Pasteur – Strasbourg I
Rapporteurs Externes	<b>Jean-François Gajewski</b> Université de Savoie <b>Franck Moraux</b> Université Rennes I
Rapporteur Interne	<b>Maxime Merli</b> Université Louis Pasteur – Strasbourg I
Invité	<b>Jacques Thépot</b> Université Louis Pasteur – Strasbourg I

- 20 Février 2009 -



*La Faculté n'entend donner aucune  
approbation ou improbation  
aux opinions émises dans les thèses.  
Ces opinions doivent être considérées  
comme propres à leurs auteurs.*



*à mon petit frère Nicolas...*



# Remerciements

J'adresse mes premiers remerciements à mon directeur de thèse, M. le Professeur Patrick ROGER. Je vous suis profondément reconnaissante pour votre rigueur, votre sens pédagogique, votre grande disponibilité et vos compétences dont j'ai pu bénéficier tout au long de ce travail. Vous avez trouvé la juste façon de m'encadrer, qui m'a permis d'évaluer et, surtout, de découvrir le monde passionnant de la recherche. Vous m'avez appris l'importance de la rigueur et fourni les outils nécessaires pour l'explorer. Je vous remercie aussi d'avoir été patient et de ne m'avoir laissé le choix durant les moments difficiles que j'ai vécu lors de ces années. Je suis consciente que ce n'était pas une thèse facile à diriger.

Je remercie MM les Professeurs Jean-François Gajewski, Franck Moraux, Maxime Merli et Jacques Thépot de m'avoir fait l'honneur de composer mon jury. La soutenance de thèse est un moment que j'attends avec beaucoup d'impatience. Il s'agit pour moi d'un débat important et très enrichissant du fait que vous avez consacré votre temps et vos compétences à mon travail. Je vous en suis très reconnaissante.

Je remercie toute l'équipe du LARGE d'avoir créé l'ambiance et les conditions de travail exceptionnelles dont j'ai pu bénéficier. En particulier, je tiens à remercier M le Professeur Maxime Merli de m'avoir dirigé vers Patrick ROGER tout au début de cette aventure; M le Professeur Laurent Weil pour son incroyable énergie positive et nos discussions qui m'ont permis d'avoir une meilleure visibilité de mon futur incertain; Mme la Professeur Marie-Hélène Broihanne qui avez toujours une idée me permettant d'avancer dans mon travail; Christophe Godlewski, pour sa réactivité et son aide très précieuse dans la rédaction d'un de mes chapitres.

Je ne serais pas arrivée jusqu'à la fin si Marie Pfiffelmann n'avait pas été à mes côtés. Ma chère amie, je te remercie pour ton aide, pour ton soutien, pour tes

conseils pointus, pour tes critiques franches, pour nos discussions qui m'ont donné pleins d'idées, pour ta disponibilité, mais surtout, pour ton amitié.

Je tiens à remercier l'ESC- Rennes School of Business et, en particulier, Olivier Aptel et Mickael Ward de m'avoir fait confiance et de m'avoir laissé le temps pour finir ce travail.

Aussi, mes amis et mes collègues Rozenn Perrigot, Servane Delanoë, Shaneera Boolell Gunesh, Stéphanie Morin, Abdelkader Sbihi, Ismaël Sene, Taran et Chirag Patel, je vous remercie pour les discussions très enrichissantes concernant mon travail et la recherche en général.

Je remercie Sophie Lestang d'avoir eu le courage de lire toute cette thèse en entier.

Afin, je remercie ma famille, mes parents Alexandra et Anatole, ma sœur Véronik, mes beaux-parents Valentine et Anatole, ainsi que ma tante Anton et mon grand-père Nikolay. Chacun d'eux a contribué, à sa manière..., à l'avancement de ce travail.

Mes plus chaleureux remerciements vont pour mon époux Dmitry, qui a eu une idée de partir en France, il y a maintenant neuf ans, et qui m'a embarqué dans cette aventure. C'est toi, mon cher Dmitry, qui m'a appris à aller jusqu'au bout de mes rêves.



# Table des matières

<b>Introduction générale .....</b>	<b>14</b>
<b>Revue de la littérature .....</b>	<b>22</b>
Introduction.....	24
I. Comportement face au risque .....	28
I.1. La théorie de l'utilité espérée .....	28
I.2. Approches alternatives .....	32
I.2.1. A la recherche d'une forme plus adéquate de la fonction d'utilité .....	34
I.2.2. Modèles non linéaires.....	42
I.2.3. <i>Cumulative Prospect Theory</i> .....	50
I.2.3.1. Présentation du modèle .....	50
I.2.3.2. Quelques critiques de la théorie des perspectives .....	53
II Choix de portefeuille.....	57
II.1. Approche traditionnelle : la gestion du portefeuille à la Markowitz .....	58
II.2. Modèle « <i>safety first</i> ».....	61
II.2.1 Modèle d'Arzac et Bawa.....	62
II.2.2 La mesure de VaR.....	64
II.2.3 Modèle SP/A de Lopes (1987) .....	67
II.2.3. Théorie comportementale du portefeuille .....	71
II.2.3.1. Présentation du modèle BPT-SA .....	72
II.2.3.2. Comptabilité Mentale.....	77

II.2.3.3. Présentation du modèle BPT-MA .....	81
Conclusion.....	84
<b>Déformation des probabilités objectives dans la théorie comportementale du portefeuille .....</b>	<b>88</b>
1. Introduction.....	90
2. Cas de deux actifs purs.....	93
2.1. Le problème de mise en œuvre opérationnelle.....	93
2.2. Le choix de l'agent VNM. Rappel des résultats.....	96
2.3. Le choix de l'agent du type BPT.....	99
2.4. Approche graphique.....	103
2.5. Approche analytique .....	108
3. Cas de trois actifs purs : $n=3$ .....	111
3.1 Approche Analytique .....	112
3.2. Approche graphique. Condition nécessaire et suffisante.....	116
4. Discussion.....	124
5. Conclusion.....	127
<b>La théorie comportementale du portefeuille et l'équilibre du marché .....</b>	<b>130</b>
1. Introduction.....	132
2. La contrainte de sécurité .....	134
3. Les prix d'équilibre .....	147
4. Une nouvelle version du modèle BPT.....	164
4. Discussion.....	174
5. Conclusion.....	176
<b>La théorie comportementale du portefeuille vs. le modèle « moyenne – variance ».</b>	
<b>Étude empirique .....</b>	<b>178</b>
1. Introduction.....	180
2. Données et méthodologie.....	181
2.1. Données .....	181
2.1.1. Présentation de l'échantillon .....	181

2.1.2 Description des données .....	185
2.2. Méthodologie .....	187
2.2.1. Environnement de l'individu .....	188
2.2.2 Modélisation de l'incertitude : Approche par scénarii générés par la méthode bootstrap .....	193
2.2.3. Construction du portefeuille optimal de Shefrin et Statman (2000) .....	195
2.2.4. Comparaison avec l'agent suivant le principe moyenne - variance .....	202
2.2.5. Récapitulatif des étapes .....	203
3. Résultats.....	204
4. Discussion.....	216
5. Conclusion.....	218
<b>Conclusion générale .....</b>	<b>222</b>
<b>Bibliographie.....</b>	<b>228</b>
<b>Annexes du chapitre 2 .....</b>	<b>238</b>
A.1. Cas $n = 3$ . Les plans d'indifférence, sont- ils parallèles ? .....	238
A.2. Cas $n = 2$ Le choix de l'agent BPT .....	240
A.3. Cas $n = 2$ . Le problème d'optimisation de l'agent BPT. Approche analytique .....	242
A.4. Maximisation de l'espérance sous les probabilités déformées. Cas $n = 3$ .....	244
A.5. Le choix optimal de l'agent du type VNM. Approche graphique. Cas $n = 3$ .....	246
A.6. Condition nécessaire et suffisante .....	248
A.7. Transformation du système (13) .....	250
<b>Annexe du chapitre 3 .....</b>	<b>252</b>
B.1. La condition d'équilibre du marché en présence de deux agents du type BPT.....	252

B.2. <i>Cas 1.</i> $CI_{W_0} \cap S_{12} \neq \emptyset; W_0 \notin S_1$ et $W_0 \notin S_2$ .....	254
<b>Annexe du chapitre 4</b> .....	<b>256</b>
C.1. Les données .....	256
C.2. Analyse des données.....	270
C.3. L'effet de la diversification.....	273
C.4. Modélisation de l'incertitude.....	275
C.5. Rangement des portefeuilles de P.....	275
C.6. Construction du portefeuille optimal de Shefrin et Statman (2000) .....	280
C.7. Quelques illustrations .....	285



# Introduction générale

En fonction de ses expériences passées et de l'information actuellement disponible, l'agent économique forme ses anticipations sur un futur incertain. Dans le domaine de la finance, celles-ci concernent, en particulier, les prix des titres qui s'établissent sur le marché. Dans cet environnement risqué, l'agent économique prend des décisions d'investissement en fonction de ses critères de choix. De cette façon, en décidant d'acheter ou de vendre un portefeuille d'actifs, l'investisseur devient lui-même un acteur du marché, en participant au processus de formation des prix. Ce processus est très complexe du fait du nombre important de critères de choix différents retenus par les participants. Pour cette raison, afin de développer un modèle permettant de comprendre le processus de formation des prix, il est nécessaire de poser des hypothèses restrictives quant aux préférences des investisseurs. D'une manière évidente, ces hypothèses conditionneront les résultats en limitant la capacité du modèle à appréhender le processus réellement observé.

Dans la théorie moderne du choix de portefeuille, les préférences des investisseurs sont définies en termes de rentabilité et de risque. Afin de modéliser le comportement de l'agent économique il est nécessaire, dans un premier temps, de quantifier ces deux valeurs. Dans un second temps, l'ensemble des investissements "efficients", c'est-à-dire ceux procurant le niveau de risque minimal pour un niveau de rentabilité fixé, sera déterminé. Ensuite, la décision d'investissement est prise en fonction du degré de tolérance au risque de l'individu. Pour cela, le choix des mesures de risque et de rentabilité devient un élément déterminant dans le domaine de gestion de portefeuille.

Le critère de la rentabilité espérée ou, plus généralement, de l'utilité espérée a été proposé par Bernoulli (1738) et développé par Von Neumann et Morgenstern (1947). Depuis, il figure parmi les grands classiques de la microéconomie, et par conséquent, de la théorie financière.

En ce qui concerne le choix de la mesure de risque, plusieurs alternatives se présentent. Par exemple, dans le modèle de gestion de portefeuille de Markowitz (1952a) le risque du portefeuille est déterminé par sa variance. Ainsi, tous les écarts négatifs, aussi bien que positifs, de la rentabilité par rapport à la rentabilité espérée sont pris en compte. Le résultat principal de ce modèle stipule qu'à l'optimum, le portefeuille détenu par l'investisseur doit être parfaitement diversifié. Dominant depuis un demi-siècle, le modèle de Markowitz (1952a) reste l'un des plus utilisés par les praticiens. Toutefois, de nombreuses études (Blume et Friend, 1975; Barber et Odean, 2000; Kumar et Goetzmann 2003; Polkovnichenko, 2005) montrent que les portefeuilles individuels sont très peu diversifiés.

Une approche alternative, fondée sur le concept *safety first*, (Roy, 1952; Baumol, 1963; Arzac et Bawa, 1977) suggère de ne prendre en compte que le *downside risk* (Bawa, 1975; Menezes, Geiss, Tressler, 1980). Dans ce cas, seuls les écarts négatifs par rapport à un certain niveau de rentabilité souhaité sont mesurés. Les mesures considérant uniquement le *downside risk* sont devenues très populaires ces dernières années (Jorion, 2000; Hull, 2008). La théorie comportementale du portefeuille de Shefrin et Statman (2000) appartient à cette catégorie de modèles. Dans le cadre de cette théorie, le risque est pris en compte par le biais d'une contrainte de sécurité. L'investisseur construit son portefeuille en maximisant son espérance de rentabilité sur l'ensemble de portefeuilles vérifiant cette contrainte.

En plus de mesurer le risque différemment, l'agent économique décrit par Shefrin et Statman (2000) déforme les probabilités objectives des événements. Concrètement, les probabilités objectives sont d'abord transformées en poids par l'intermédiaire d'une fonction de pondération (Quiggin, 1993). Ensuite, les probabilités objectives sont remplacées par les poids dans le calcul de la rentabilité espérée. La déformation des probabilités objectives par les individus a été révélée à travers de nombreuses études expérimentales menées par les psychologues et les économistes (Edwards 1953, 1954; Kahneman, Slovic et Tversky, 1982). Afin d'en tenir compte, les modèles dits "non linéaires" se sont développés (Quiggin, 1982; Lopes 1987; Yaari, 1987; Tversky et Kahneman, 1992). D'une façon plus générale, ces

modèles s'inscrivent dans le cadre d'une nouvelle approche de la théorie financière appelée "Finance Comportementale". Celle-ci doit son apparition à de nombreuses critiques émises à l'encontre de l'approche classique (Allais, 1953; Ellsberg, 1961; Friedman et Savage, 1948; Kahneman et Tversky, 1979).

Contrairement à l'approche moyenne-variance, Shefrin et Statman (2000) montrent que les investisseurs ne se tournent pas forcément vers la diversification optimale. Au contraire, ils peuvent investir une partie non négligeable de leur richesse dans un titre ayant les caractéristiques d'une loterie. Ainsi, le portefeuille optimal en termes de la théorie comportementale du portefeuille a la forme d'une pyramide qui peut contenir plusieurs couches superposées. La couche inférieure est composée de titres peu risqués, par exemple les obligations d'État et procure une rentabilité faible. Cette couche est créée afin de procurer à l'investisseur un certain niveau de richesse minimal. La couche supérieure, quant à elle, est composée de titres à forte exposition au risque et une rentabilité élevée, par exemple des actions. Ainsi, elle est destinée à donner une chance à l'investisseur de s'enrichir d'une manière conséquente. En d'autres termes, les différentes couches sont gérées différemment et indépendamment l'une de l'autre, l'investisseur ne tenant pas compte de la corrélation entre les couches.

Cette façon de gérer le portefeuille est compatible avec celle exercée par les grandes institutions financières comme les banques, les sociétés de gestion de fonds d'investissement et les caisses d'épargne. Elle correspond par ailleurs au conseil donné par les banquiers pour le compte de leurs clients (Fisher et Statman, 1997). En outre, elle est compatible avec l'observation de Friedman et Savage (1948) selon laquelle les individus qui achètent des contrats d'assurance achètent aussi des billets de loterie.



# Problématique

La théorie comportementale du portefeuille induit des choix d'investissement différents de ceux proposés par les modèles classiques comme la théorie de l'utilité espérée ou le modèle moyenne – variance de Markowitz (1952a). Aussi, la théorie comportementale du portefeuille semble être plus appropriée que le modèle de Markowitz (1952a) pour décrire le comportement réellement observé. Pour cette raison, cette théorie est considérée comme une véritable alternative à l'approche traditionnelle dominante depuis un demi-siècle dans la théorie financière.

Cependant les études récentes (Harlow, 1991; Alexander et Baptista, 2002; Broihanne, Merli et Roger, 2006) montrent que les frontières efficientes issues de cette théorie et celle obtenue dans le cadre du modèle moyenne – variance, coïncident lorsque les rentabilités des actifs sont normalement distribuées. Même si l'hypothèse de normalité est souvent admise dans la littérature, elle est loin d'être vérifiée sur les marchés réels (Fama, 1976; Walter, 2003). Ainsi, nous pouvons nous demander dans quelle mesure et sous quelles conditions l'approche proposée par Shefrin et Statman (2000) est différente des concepts classiques.

Pour le moment, la question de l'équilibre de marché dans le cadre de cette nouvelle théorie de gestion du portefeuille n'a pas été étudiée. Aussi, aucune étude empirique n'a encore été réalisée pour la théorie comportementale du portefeuille. Or, ce sont deux étapes importantes et même indispensables pour tout modèle ayant la prétention de décrire le comportement des individus. En effet, d'un point de vue pratique, il s'agit du premier test sur la capacité du modèle à produire des résultats proches de ceux observés sur les marchés réels. Aussi, d'un point de vue théorique, ces étapes permettent d'établir dans quelle mesure les résultats issus de ce modèle sont différents par rapport à ceux obtenus par les autres théories existantes.

Toutefois, notre objectif ne se limite pas qu'à cette problématique. D'une façon générale, la théorie de Shefrin et Statman (2000) est un modèle de gestion de portefeuille qui appartient à la catégorie des modèles issus de l'approche

comportementale. Faisant l'objet de nombreuses études théoriques et empiriques, cette partie de la finance définit les préférences à partir du comportement réellement observé, plutôt que de se fonder sur des hypothèses du comportement rationnel. Dans le cadre d'un modèle de gestion de portefeuille, la question qui se pose est de savoir quel impact les éléments comportementaux peuvent avoir sur le choix des investisseurs et, par conséquent, sur les prix des actifs financiers.

Parallèlement, dans la théorie comportementale du portefeuille l'investisseur mesure le *downside risk*. Largement utilisé par les professionnels, ce concept est devenu très populaire ces dernières années. Cependant, les travaux empiriques portant sur les mesures du type *downside risk* sont peu nombreux (Harlow, 1991). Pour cela, notre étude permettra aussi d'apporter des éléments explicatifs quant à ces modèles.

## Plan et Contributions

Afin d'aborder cette problématique, nous commençons par une revue de la littérature montrant le parcours complexe et enrichissant effectué par les chercheurs dans le domaine de la prise de décision face aux choix risqués. En particulier, en mettant l'accent sur les modèles considérant le *downside risk*, nous présentons différentes approches qui se sont développées dans le domaine de gestion de portefeuille.

Par la suite, nous proposons trois axes de recherche. Dans un premier temps, nous étudions la déformation des probabilités objectives et, plus précisément, l'impact de ce biais psychologique sur le choix de portefeuille. Dans un second temps, nous nous intéressons à l'équilibre établi sur un marché où tous les agents suivent la théorie comportementale du portefeuille. Pour compléter notre démarche, nous proposons une étude empirique permettant de confronter cette théorie au modèle moyenne – variance de Markowitz (1952a) sur les données réelles.

Dans le chapitre 2, nous étudions l'impact de la déformation des probabilités objectives sur le choix de portefeuille. Pour cela, nous considérons deux types d'agents économiques. Le premier fait son choix d'investissement en maximisant l'espérance de sa richesse finale sous les probabilités objectives. Il se comporte ainsi conformément à la théorie classique. Le second applique le même critère de choix mais en déformant au préalable les probabilités objectives. Dans le cas de deux et de trois actifs purs nous montrons qu'il n'y a pas de différences significatives dans le comportement des deux individus dans la mesure où chacun investit toute sa richesse dans un seul titre. Ainsi, nous constatons que l'introduction d'une fonction de pondération dans le problème de maximisation de l'agent, ne joue pas sur la forme du portefeuille optimal, à condition de maximiser l'espérance de la richesse finale. En d'autres termes, l'agent caractérisé par une fonction d'utilité linéaire se comporte de la même manière indépendamment qu'il déforme ou non les probabilités objectives. Contrairement au critère de l'utilité espérée, ce résultat laisse penser que le critère de l'espérance ne suffira pas pour amener à des choix de portefeuille significativement différents de ceux obtenus dans le cadre de la théorie classique. De cette façon, notre résultat s'inscrit dans le contexte des travaux défendant l'application jointe de la fonction de pondération et de la fonction d'utilité (Yaari, 1987; Tversky et Kahneman, 1992; Wakker, 2003) qui considèrent un agent économique traitant les probabilités ainsi que les conséquences d'une manière non linéaire.

L'objet du chapitre 3 est d'étudier l'équilibre du marché dans le cadre de la théorie comportementale du portefeuille. Nous considérons une économie à deux états de la nature en présence de deux agents suivant cette théorie. L'objectif de chacun consiste à construire un portefeuille à l'espérance maximale vérifiant la contrainte de sécurité. Nous constatons, que sous certaines conditions, l'équilibre établi coïncide avec celui obtenu dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée. Cependant, nous montrons que dans le cas général, la solution d'équilibre n'est pas possible à trouver. Nous mettons en évidence que ceci est dû à la façon dont le concept *safety first* est introduit dans le modèle de Shefrin et Statman (2000). Pour

pallier cet inconvénient, nous proposons une fonction d'utilité qui à son tour traduit le comportement d'un agent du type *safety first*. En appliquant cette nouvelle fonction, nous montrons qu'il est possible d'aboutir à des cas d'équilibre intéressants dans la mesure où ils diffèrent de l'équilibre établi dans le contexte de la théorie de l'utilité espérée.

Par le biais d'une étude empirique, nous testons dans le chapitre 4 la théorie comportementale du portefeuille sur le marché réel. Sans faire aucune hypothèse sur les lois de rentabilité des titres, nous constatons qu'un investisseur suivant cette théorie choisit systématiquement un portefeuille situé sur la frontière efficiente de Markowitz (1952a). Ce résultat est conforme aux études (Harlow, 1991; Alexander et Baptista, 2002; Levy et Levy, 2004; Broihanne et *al.*, 2006) réalisées dans le cas particulier où les rentabilités des actifs suivent une loi normale.

A travers ce travail nous considérons d'une part, la déformation des probabilités objectives issue de l'approche comportementale. D'autre part, nous étudions la mesure du type *downside risk* au travers du concept *safety first*. Notre analyse permet d'étudier ces trois phénomènes dans le contexte d'un modèle de gestion de portefeuille. Chacun d'eux correspond aux comportements réellement observés. Pour cette raison, leur introduction dans la modélisation du comportement de l'investisseur a un impact sur son choix final et, par conséquent, sur la compréhension du processus de formation des prix des titres. Toutefois, sur un exemple de la théorie de Shefrin et Statman (2000), nous mettons en évidence certaines limites liées à l'introduction de ces phénomènes dans un modèle de gestion de portefeuille. En effet, en dépit de la complexité apparente, il semblerait que la combinaison des différents éléments ne suffit pas pour amener à des résultats significativement différents. En particulier, notre travail met en doute le positionnement de la théorie comportementale du portefeuille comme une alternative à l'approche classique. Précisons qu'il ne s'agit pas de remettre en cause les concepts sur lesquels cette théorie est fondée, mais plutôt de souligner l'importance de la façon dont ils doivent être pris en compte.



# Chapitre 1

## Revue de la littérature



# Introduction

Les modèles alternatifs à la théorie de l'espérance d'utilité et en particulier la théorie des perspectives de Kahneman et Tversky (1979, 1992) semblent induire des choix de portefeuille différents de ceux préconisés par une approche classique comme celle de Markowitz (1952a). En effet, ce dernier suggère que les investisseurs cherchent à diminuer le risque, mesuré par la variance, en détenant un portefeuille parfaitement diversifié. Or, Shefrin et Statman (2000) ou encore Barberis et Huang (2001) montrent que les investisseurs ne se tournent pas forcément vers la diversification optimale. Selon eux, les investisseurs peuvent choisir d'investir une partie non négligeable de leur richesse dans un titre présentant une asymétrie positive importante, ayant les caractéristiques d'une loterie. Plus précisément, les investisseurs cherchent dans un premier temps à assurer un niveau de subsistance puis sont prêts à prendre des risques importants avec la richesse restante.

Ce type de comportement est le résultat principal de la théorie comportementale du portefeuille (*Behavioral Portfolio Theory*, BPT dans la suite) développée par Shefrin et Statman (2000). Le modèle s'appuie sur le concept *safety first* (Roy, 1952) et prend en considération deux phénomènes psychologiques révélés par les études empiriques et expérimentales. Tout d'abord, les études montrent que les individus ont tendance à déformer les probabilités objectives (Allais, 1953; Kahneman et Tversky, 1979). Le deuxième phénomène qui entre en ligne de compte dans la gestion de portefeuille porte le nom de comptabilité mentale (Thaler, 1980).

Le concept *safety first*, développé par Roy (1952) puis par Arzac et Bawa (1977), est à l'origine du modèle de Shefrin et Statman (2000). Roy (1952) propose une mesure de risque différente de celle de Markowitz (1952a). Alors que ce dernier considère que le risque est mesuré par la variance, l'investisseur *safety first* ne prend en compte que le *downside risk*, c'est-à-dire la probabilité de se retrouver au-deçà de son seuil de subsistance. Cette mesure de risque présente un avantage par rapport à la variance qui attribue les mêmes poids aux écarts de rentabilité positifs et négatifs.



Un autre point important qui intervient dans le modèle de Shefrin et Statman (2000) est la déformation des probabilités objectives par les individus. La théorie de l'utilité espérée, longtemps considérée comme un standard pour décrire les choix des individus en situation de risque, suppose les préférences linéaires dans les probabilités. Cependant, de nombreuses études expérimentales menées par les psychologues et les économistes démontrent que les individus ont tendance à déformer les probabilités objectives des événements (Edwards 1953, 1954 ; Ali, 1977; Kahneman, Slovic et Tversky, 1982). Afin de tenir compte de ce phénomène, les modèles alternatifs à la théorie de l'utilité espérée proposent de transformer les probabilités objectives en poids (Quiggin, 1982; Yaari, 1987; Tversky et Kahneman, 1992).

L'application de la déformation des probabilités au concept *safety first* a permis à Lopes (1987) de développer un modèle qui a contribué, lui aussi, au développement de la théorie comportementale du portefeuille de Shefrin et Statman (2000). Dans le modèle de Lopes (1987), l'investisseur est guidé par la crainte de perdre et par l'espoir d'atteindre un niveau de richesse élevé. Les deux sentiments vont entraîner une déformation des probabilités objectives.

La comptabilité mentale (Thaler, 1980) est le troisième point focal qui a déterminé le succès de la théorie BPT. L'idée majeure consiste à remarquer que les investisseurs traitent leur richesse différemment selon son origine et son affectation. Plus précisément, les individus ont tendance à diviser leur richesse en plusieurs tranches, appelées comptes mentaux. Chaque compte est destiné à un but bien précis. Ainsi, les différents comptes sont gérés de manières différentes. De plus, les individus négligent les corrélations entre les comptes, ce comportement allant à l'encontre de l'approche de Markowitz (1952a).

D'une façon plus générale, les modèles de Lopes (1987) et de Shefrin et Statman (2000) ainsi que la théorie de perspectives de Tversky et Kahneman (1992) font partie des modèles dits descriptifs, contrairement à la théorie de l'utilité espérée qui est un exemple d'un modèle normatif. Dans ce dernier, les préférences définissent l'individu rationnel sans se poser la question de savoir si les individus se

comportent ainsi dans la vie réelle. Or, diverses observations ont mis en évidence l'écart important entre le comportement observé et le comportement d'un individu parfaitement rationnel décrit par la théorie de l'utilité espérée. Ceci a motivé l'apparition des modèles descriptifs. Souvent fondés sur des observations ou des études expérimentales, les modèles descriptifs essaient de tenir compte de certains biais psychologiques révélés par ces observations sans se pencher sur la question de la rationalité d'un tel comportement. Certes, le nom « descriptif » est dû au fait que ces modèles tentent de décrire le comportement d'un individu. Or, cela ne signifie pourtant pas que les préférences décrites par un modèle descriptif ne peuvent pas être présentées sous une forme axiomatique comme elles le sont traditionnellement dans les modèles normatifs (voir par exemple Yaari, 1987). Plus généralement, ces modèles s'appuient sur un appareil mathématique solide et s'inscrivent dans le cadre d'une nouvelle approche dans la théorie financière appelée Finance Comportementale. Faisant l'objet de nombreuses études théoriques et empiriques, cette partie de la finance définit les préférences à partir du comportement réellement observé, révélé notamment par l'intermédiaire de l'économie expérimentale.

Dans cette revue de la littérature nous avons pour objectif de décrire l'évolution de différentes approches destinées à expliquer le comportement de l'individu dans un environnement risqué ainsi que les conséquences de ce comportement sur la gestion de portefeuille. Nous présentons les travaux qui, à notre avis, sont essentiels dans le cadre de cette problématique.

Cette revue contient deux parties. Dans la première partie nous commençons par résumer les apports de la théorie de l'utilité espérée et certaines critiques émises quant à celle-ci. La deuxième section de cette partie est consacrée aux approches alternatives à la théorie de l'utilité espérée. Nous analysons dans un premier temps les travaux de Friedman et Savage (1948), Markowitz (1952b) et Kahneman et Tversky (1979) sur l'attitude face au risque des investisseurs et la forme de la fonction d'utilité. Dans un second temps, nous passons en revue les modèles non linéaires de Quiggin (1982) et Tversky et Kahneman (1992).

La deuxième partie est consacrée aux modèles de gestion de portefeuille. Dans la première section, nous présentons brièvement les résultats du modèle de Markowitz (1952a) et ceux du modèle d'équilibre des actifs financiers de Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966). Les modèles alternatifs de type *safety first* font l'objet d'une discussion dans la deuxième section. Nous étudions les travaux de Roy (1952) et d'Arzac et Bawa (1977) ainsi que le modèle SP/A de Lopes (1987). La troisième section est consacrée à la comptabilité mentale. Nous terminons par la théorie comportementale de portefeuille de Shefrin et Statman (2000).

# I. Comportement face au risque

Acheter des actifs financiers est une décision prise dans un environnement risqué puisque les rentabilités futures ne sont pas connues au moment où l'individu prend cette décision. Ainsi, en choisissant délibérément de céder une partie de sa richesse actuelle pour acquérir un actif, l'individu accepte de courir un risque. De ce fait, la compréhension du processus de choix de portefeuille ainsi que de la formation des prix sur les marchés financiers est étroitement liée à la compréhension du processus de prise de décision face à des choix risqués. Pour cette raison, nous avons jugé indispensable de commencer cette revue de la littérature par l'analyse des travaux mettant en lumière certains aspects du comportement des individus dans un environnement risqué<sup>1</sup>.

Dans cette section, nous présentons d'abord les résultats essentiels de la théorie de l'utilité espérée – approche considérée comme standard en théorie financière pour la description du choix des individus dans un environnement risqué. Ensuite, après avoir évoqué certaines critiques émises à propos de cette approche traditionnelle, nous étudions le développement des concepts alternatifs. Pour cela, nous explorons deux voies de recherches. D'une part, nous discutons de l'attitude face au risque des investisseurs et de la forme de la fonction d'utilité. D'autre part, nous passons en revue les modèles qualifiés de non linéaires.

## I.1. La théorie de l'utilité espérée

La théorie de l'utilité espérée est incontestablement l'un des grands paradigmes de la microéconomie, et par conséquent, de la théorie financière. Dominante pendant un demi-siècle, son objectif consiste à formuler les décisions de

---

<sup>1</sup> Pour une revue plus complète lecteur peut se référer à Bernstein (1996).

l'individu face à des choix risqués. Les conséquences d'un choix risqué sont généralement représentées par une variable aléatoire (ou une loterie). Dans notre contexte les valeurs prises par cette variable aléatoire sont les paiements possibles d'un actif financier ou un portefeuille. Chaque paiement est conditionné par l'état de l'économie ou par un événement futur qui a lieu avec une probabilité connue<sup>2</sup>.

Etant donné une loterie  $L$  définie par les paiements potentiels  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , dont les probabilités sont respectivement  $p_1, p_2, \dots, p_n$ , quel critère l'individu applique-t-il pour évaluer  $L$ ? Combien est-il prêt à payer pour l'acquérir? La première idée qui vient à l'esprit est de définir la valeur de la loterie par son espérance mathématique :

$$E(L) = \sum_{i=1}^n x_i p_i .$$

Or, le paradoxe de Saint-Petersbourg proposé par Nicolas Bernoulli en 1713 montre que ce critère d'évaluation n'est pas satisfaisant. En effet, imaginons un jeu de pile ou face suivant : une pièce de monnaie équilibrée est lancée jusqu'à l'obtention de l'événement « la pièce tombe sur le côté pile ». Le gain du joueur s'élève à  $2^k$  où  $k$  est le nombre de jets effectués. En appliquant le critère de l'espérance afin d'évaluer l'attractivité de ce jeu nous obtenons :

$$E(L) = \frac{1}{2} \times 2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2^n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty .$$

Cela signifie que le joueur est prêt à payer une somme infiniment grande pour pouvoir participer à ce jeu. Or, ceci paraît irréaliste.

Afin de résoudre ce paradoxe, Daniel Bernoulli (1738) propose de transformer les paiements de la loterie  $L$  par une fonction croissante et concave. Le résultat de la transformation d'un gain monétaire  $x_i$  représente la satisfaction (ou l'utilité)

---

<sup>2</sup>Du point de vue théorique, la situation risquée, contrairement à celle d'incertitude, est caractérisée par la capacité de l'investisseur à affecter des probabilités d'occurrence aux événements futurs. Cette définition du risque a été proposée par Knight (1921) qui fait le point sur les deux concepts.

éprouvée par l'individu ayant acquis ce gain. La fonction  $U$  qui associe à un gain la satisfaction éprouvée s'appelle fonction d'utilité.

Le concept de fonction d'utilité est au cœur de la théorie de l'utilité espérée. Son principe majeur consiste à évaluer toute loterie  $L$  par l'espérance de l'utilité des gains engendrés par cette loterie :

$$E(U(L)) = \sum_{i=1}^n U(x_i) p_i .$$

$E(U(L))$  traduit la satisfaction d'un individu (dont les préférences sont caractérisées par la fonction d'utilité  $U$ ) liée à la détention de la loterie  $L$ . Ainsi, si un individu a le choix entre deux loteries, il retiendra celle qui offre l'espérance d'utilité la plus élevée.

La démonstration rigoureuse de cette idée a été proposée par Von Neumann et Morgenstern (1947). Ces auteurs ont mis en place un certain nombre d'axiomes concernant la relation de préférences «  $\succ$  » définie sur l'ensemble des loteries. Ces axiomes sont résumés comme suit :

**Axiome de comparabilité** : considérons deux loteries quelconques  $L^a$  et  $L^b$  ; l'individu est toujours capable d'indiquer celle qu'il préfère. Autrement dit, il peut toujours affirmer qu'il préfère  $L^a$  à  $L^b$  (noté  $L^a \succ L^b$ ), ou bien qu'il préfère  $L^b$  à  $L^a$  (noté  $L^b \succ L^a$ ) ou qu'il est indifférent entre les deux (noté  $L^a \square L^b$ ).

**Axiome de transitivité** : considérons trois loteries quelconques  $L^a$ ,  $L^b$  et  $L^c$  telles que  $L^a$  est préférée à  $L^b$  et  $L^b$  est préférée à  $L^c$  alors  $L^a$  sera préférée à  $L^c$ . De façon formelle : si  $L^a \succ L^b$  et  $L^b \succ L^c$  on a  $L^a \succ L^c$ .

**Axiome de continuité** : cet axiome indique que l'ordre de préférences ne peut pas être perturbé par un changement mineur de probabilité d'occurrence. Il peut être

formulé comme suit : étant donné trois loteries quelconques  $L^a$ ,  $L^b$  et  $L^c$  telles que  $L^a \succ L^b \succ L^c$  il existe un nombre réel  $\alpha \in [0,1]$  tel que  $L^b \sqsupseteq \alpha L^a + (1-\alpha)L^c$ <sup>3</sup>.

**Axiome d'indépendance** : étant données trois loteries quelconques  $L^a$ ,  $L^b$  et  $L^c$  et un scalaire  $\alpha \in [0,1]$  la relation de préférence «  $\succ$  » est telle que  $L^a \succ L^b \Leftrightarrow \alpha L^a + (1-\alpha)L^c \succ \alpha L^b + (1-\alpha)L^c$ . Cet axiome stipule que si chacune des deux loteries  $L^a$  et  $L^b$  est combinée avec une troisième loterie  $L^c$  quelconque alors l'ordre de préférence entre les loteries combinées est le même que celui entre  $L^a$  et  $L^b$ .

En s'appuyant sur les axiomes ci-dessus, Von Neumann et Morgenstern (1947) ont démontré le théorème suivant.

#### **Théorème**<sup>4</sup> (dit de l'utilité espérée)

*Supposons que la relation de préférence  $\succ$  définie sur l'ensemble des loteries satisfait les axiomes de continuité et d'indépendance. Dans ce cas, cette relation  $\succ$  peut être représentée par une fonction de préférence linéaire par rapport aux probabilités : il existe un scalaire  $u_i$  associé à tout gain monétaire  $x_i$ ,  $i=1\dots n$ ; tel que pour toute loterie  $L^a = (x_1^a, p_1^a; \dots; x_n^a, p_n^a)$  et  $L^b = (x_1^b, p_1^b; \dots; x_n^b, p_n^b)$  on a*

$$L^a \succ L^b \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n u(x_i^a) p_i^a \geq \sum_{i=1}^n u(x_i^b) p_i^b.$$

Ce théorème affirme qu'à chaque loterie  $L = (x_1, p_1; \dots; x_n, p_n)$ , l'individu attribue une valeur nommée espérance d'utilité  $E(U(L)) = \sum_{i=1}^n u_i p_i$  qui traduit sa satisfaction

---

<sup>3</sup>  $\alpha L^a + (1-\alpha)L^c$  est une loterie composée de deux loteries  $L^a$  et  $L^c$ . La loterie  $L^a$  a lieu avec la probabilité  $\alpha$  et  $L^c$  avec la probabilité  $1-\alpha$ . Si  $L^a$  et  $L^c$  sont définies respectivement par  $(x_1^a, p_1^a; \dots; x_n^a, p_n^a)$  et  $(x_1^c, p_1^c; \dots; x_n^c, p_n^c)$  alors la loterie composée est définie par  $(x_1^a, \alpha p_1^a; \dots; x_n^a, \alpha p_n^a; x_1^c, (1-\alpha)p_1^c; \dots; x_n^c, (1-\alpha)p_n^c)$ .

<sup>4</sup> Pour la démonstration voir par exemple Gollier (2001).

résultant de la participation à la loterie  $L$ . Remarquons que par construction  $E(U(L))$  est une fonction linéaire par rapport aux probabilités. De cette façon, le théorème de l'utilité espérée permet de spécifier le processus de prise de décision face aux choix risqués : entre deux loteries  $L^a$  et  $L^b$  l'individu préfère celle dont l'utilité espérée est la plus grande. Ce théorème peut aussi s'appliquer dans le contexte où une variable aléatoire (ou une loterie) représente les paiements d'un actif financier. Dans ce cas, en investissant sur le marché l'individu choisit le portefeuille (une combinaison de loteries) qui lui procure la plus grande satisfaction. Il s'agit donc d'un résultat fondamental permettant de définir le comportement optimal des individus sur les marchés financiers.

Par ailleurs, un individu qui fait son choix conformément à la théorie de l'utilité espérée est qualifié de rationnel (en termes de prise de décision) dans la littérature financière. Plus précisément, la rationalité sous entend deux aspects du comportement : 1) la capacité d'agir de façon à optimiser la satisfaction espérée et 2) la révision des croyances selon la règle de Bayes<sup>5</sup>. Ainsi, la théorie de Von Neumann et Morgenstern (1947) clarifie le premier point de la définition d'un individu «parfaitement rationnel». La règle de Bayes, quant à elle, précise de quelle façon l'individu rationnel révisé ses anticipations (en termes de probabilité affectée à l'événement) en fonction de l'arrivée de la nouvelle information.

## I.2. Approches alternatives

Le développement des approches alternatives à la théorie de l'utilité espérée a beaucoup contribué à la compréhension du processus de prise de décision dans les situations risquées. Ces approches sont apparues en réponse à certaines critiques faites à la théorie classique. Comme nous l'avons déjà évoqué, la théorie de l'utilité espérée est fondée sur des axiomes portant sur les préférences des investisseurs. Au

---

<sup>5</sup> Voir par exemple Eckhoudt et Gollier (1992).



premier abord, cette axiomatique semble correspondre au comportement observé. Néanmoins, les études expérimentales<sup>6</sup> ont permis de mettre en évidence des situations dans lesquelles le comportement observé n'est pas cohérent avec celui décrit par Von Neumann et Morgenstern (1947). Les exemples les plus connus sont le paradoxe d'Allais (1953) et celui d'Ellsberg (1961). Ces auteurs ont montré expérimentalement la violation des axiomes d'indépendance et de continuité. Par la suite, Tversky (1969) a proposé une expérience montrant que les préférences des individus face aux choix risqués ne sont pas toujours transitives. Les résultats de ces études expérimentales mettent en évidence l'existence de situations risquées dans lesquelles la théorie de l'utilité espérée n'est pas applicable.

D'autres critiques peuvent être faites quant à cette théorie classique. Premièrement, ces critiques concernent la forme de la fonction d'utilité qui est supposée concave (Friedman et Savage, 1948; Markowitz, 1952b; Williams, 1966; Kahneman et Tversky, 1979; Rabin, 2000). Deuxièmement, la linéarité de l'utilité espérée dans les probabilités peut être mise en doute (par exemple Edwards, 1953, 1954; Quiggin, 1982; Yarri, 1987, Tversky et Kahneman, 1992). De cette manière, le développement des approches alternatives, peut être perçu comme l'évolution de deux branches parallèles. La première est consacrée à la recherche d'une forme plus adéquate de la fonction d'utilité. Celle-ci fait l'objet d'une discussion dans la première sous-section. La deuxième branche réunit des modèles alternatifs dits « non linéaires » proposant de remplacer les probabilités objectives par des poids dans le calcul de l'utilité espérée. Nous en proposons une brève revue dans la deuxième sous-section. Finalement, les deux voies se réunissent pour donner, en particulier, naissance à la théorie des perspectives de Tversky et Kahneman (1992) qui, à ce jour, semble le mieux décrire les comportements réellement observés. Cette théorie est présentée dans la troisième sous-section.

---

<sup>6</sup> Par exemple Lidman, 1971 ; Lichtenstein et Slovic, 1971.

## I.2.1. A la recherche d'une forme plus adéquate de la fonction d'utilité

Le comportement riscophobe des individus est généralement admis dans la littérature financière. Effectivement, le succès des compagnies d'assurance constitue un argument incontestable en sa faveur. Pour cette raison, l'hypothèse d'une fonction d'utilité concave et celle d'aversion au risque en toutes circonstances ont été acceptées dans la plupart des modélisations. Cependant, de nombreuses observations montrent que les individus ne cherchent pas toujours à éviter le risque. Les loteries (au sens des jeux de hasard), connaissent un succès considérable depuis des siècles<sup>7</sup>. Les prix de ces loteries dépassent largement l'espérance des gains et ceci est incompatible avec l'hypothèse d'aversion au risque<sup>8</sup>. En outre, nous constatons que la plupart des individus qui achètent des contrats d'assurance achètent en même temps des billets de loterie. Ce paradoxe (la coexistence des deux aspects contradictoires : l'aversion et le goût pour le risque) dans le comportement d'un même individu, a été évoqué par Friedman et Savage (1948). Pour résoudre ce paradoxe, les auteurs proposent de remplacer une fonction d'utilité traditionnellement concave par une fonction d'utilité contenant deux morceaux concaves (afin d'exprimer un comportement riscophobe) et un morceau convexe (afin d'exprimer un comportement riscophile). Plus précisément, il s'agit d'une fonction à deux points d'inflexion, concave pour des richesses faibles et élevées et convexe pour des richesses intermédiaires (figure 1.1). Les morceaux concaves correspondent à deux niveaux qualitativement différents – deux « classes sociales ». Ainsi, à l'intérieur de sa classe, l'individu est riscophobe, il ne prend pas de risque et cherche à maintenir son niveau de richesse actuel. Mais, s'il veut augmenter sa richesse d'une manière conséquente, en d'autres termes s'il veut passer d'une classe à

---

<sup>7</sup> Leonnet, 1936; Guillen et Tschogl, 2002; Pfiffelmann et Roger, 2005;

<sup>8</sup> Un individu étant prêt à payer un prix supérieur à l'espérance des gains est qualifié de riscophile car dans ce cas l'équivalent certain de la loterie est supérieur à son espérance.

l'autre, il doit prendre des risques. Pour cette raison, les deux morceaux concaves sont liés par un morceau convexe, exprimant la riscophilie de l'individu pour des niveaux intermédiaires de richesse.

Cependant, l'explication de Friedman et Savage (1948) n'est valable que pour un individu dont la richesse initiale se trouve dans la première classe ( $I_0$  sur la figure 1.1). Dans les autres cas, cette logique ne peut pas être appliquée. En effet, dans ce contexte, un individu dont la richesse initiale se trouve au niveau intermédiaire (morceau convexe de la fonction d'utilité) est obligatoirement riscophile. En outre, tant qu'il n'y a que deux classes sociales, un individu de la seconde classe sera toujours riscophobe.

### Fonction d'Utilité de Friedman et Savage (1948)

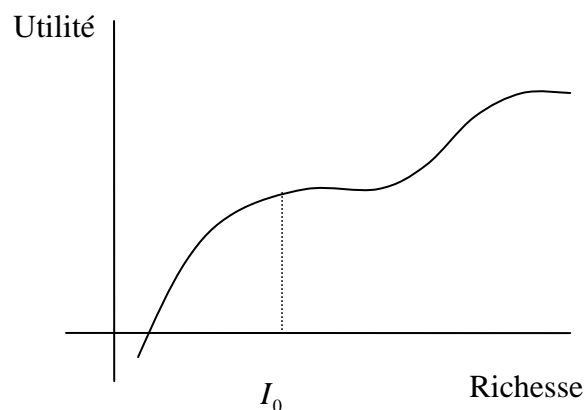


Figure 1.1.

Plus tard, Markowitz (1952b) propose une fonction à trois points d'inflexion. Cette idée est le résultat d'une étude expérimentale menée au préalable par l'auteur. Onze questions ont été posées aux participants de l'enquête. Le premier groupe composé de six questions (tableau 1.1) propose le choix entre la somme de  $x$  \$ d'une façon certaine et une chance sur dix de gagner une somme dix fois plus élevée, soit  $10 \cdot x$  \$. La valeur de  $x$  dans la première question est égale à 10 cents, et elle est multipliée par 10 dans la question suivante

**Tableau 1.1.**  
**Expérience de Markowitz (1952b)**

*Que préférez – vous ?*

- (1) Recevoir 10 cents d'une façon certaine ou avoir une chance sur dix de gagner 1 \$ ?*
- (2) Recevoir 1 \$ d'une façon certaine ou avoir une chance sur dix de gagner 10 \$ ?*
- (3) Recevoir 10 \$ d'une façon certaine ou avoir une chance sur dix de gagner 100 \$ ?*
- (4) Recevoir 100 \$ d'une façon certaine ou avoir une chance sur dix de gagner 1000 \$ ?*
- (5) Recevoir 1000 \$ d'une façon certaine ou avoir une chance sur dix de gagner 10000 \$ ?*
- (6) Recevoir 1 000 000 \$ d'une façon certaine ou avoir une chance sur dix de gagner 10 000 000 \$ ?*

Ainsi, à partir de la quatrième question (le choix entre 100 \$ d'une façon certaine ou une chance sur 10 de gagner 1000 \$) les enjeux deviennent importants. Alors que dans les trois premières questions, la plupart des participants choisissent de jouer, à partir de la quatrième question presque tout le monde préfère recevoir la somme certaine. On en conclut donc que les individus ont tendance à prendre des risques jusqu'à un certain seuil de gain. Ensuite, pour des richesses supérieures à ce seuil les individus deviennent riscophobes. Ce fait se traduit par l'existence d'un point d'inflexion sur la courbe de la fonction d'utilité qui relie un morceau convexe et concave.

Dans le deuxième groupe de questions, le participant est mis dans la situation opposée : maintenant il doit choisir entre payer la somme de  $x$  \$ d'une façon certaine ou avoir une chance sur dix de payer une somme dix fois plus grande, soit  $10 \cdot x$  \$. La valeur de  $x$  varie comme précédemment (tableau 1.2).

## Tableau 1.2.

### Expérience de Markowitz (1952b), la suite.

*Que préférez – vous ?*

- (7) Payer 10 cents d'une façon certaine ou avoir une chance sur dix de payer 1 \$ ?*
- (8) Payer 1 \$ d'une façon certaine ou avoir une chance sur dix de payer 10 \$ ?*
- (9) Payer 10 \$ d'une façon certaine ou avoir une chance sur dix de payer 100 \$ ?*
- (10) Payer 100 \$ d'une façon certaine ou avoir une chance sur dix de payer 1000 \$ ?*
- (11) Payer 1 000 000 \$ d'une façon certaine ou avoir une chance sur dix de payer 10 000 000 \$ ?*

On constate qu'en répondant aux premières questions, les individus préfèrent payer une somme certaine plutôt que prendre des risques. En revanche, pour des montants de pertes importantes, ils deviennent riscophiles et choisissent de jouer. Ainsi, quand l'individu est confronté aux pertes, nous observons une situation inverse à celle constatée dans la première expérience où il a le choix entre différentes possibilités de gains.

Enfin, sur la base de ces deux expériences, Markowitz (1952b) construit une fonction d'utilité à trois points d'inflexion (figure 1.2).

## Fonction d'Utilité de Markowitz (1952b)

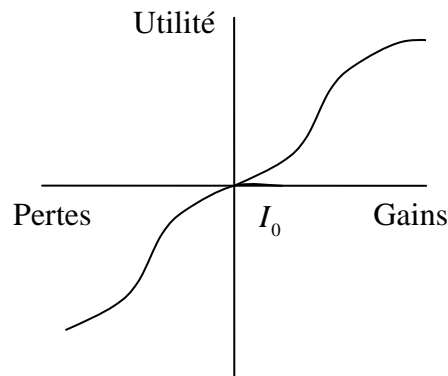


Figure 1.2.

Le point intermédiaire correspond à la richesse initiale  $I_0$  et sert à distinguer les pertes (des niveaux de richesses inférieurs à  $I_0$ ) et des gains (des niveaux de richesses supérieurs à  $I_0$ ). Pour des niveaux de richesses supérieurs à  $I_0$ , la fonction est convexe pour les richesses faibles jusqu'à la valeur correspondant au point d'inflexion et concave pour les richesses élevées. Ceci est le résultat de la première expérience. A l'inverse, pour les niveaux de richesse inférieurs à  $I_0$ , la fonction est concave pour des richesses faibles et convexe pour des richesses élevées.

De cette façon, on constate que la fonction d'utilité de Markowitz (1952b) admet deux caractéristiques fondamentalement différentes d'une fonction d'utilité classique. Tout d'abord, un rôle inédit est attribué à la richesse initiale  $I_0$  de l'individu. Elle sert de point de référence avec lequel l'individu compare son niveau de richesse futur. Un niveau de richesse inférieur à ce point de référence est considéré comme une perte, et un niveau de richesse supérieur à ce point est considéré comme un gain.

Un autre aspect important consiste à remarquer que les individus ne se comportent pas de la même façon du côté des pertes que du côté des gains. Plus précisément, pour des richesses relativement faibles, les individus préfèrent prendre des risques en cas de gains et les éviter en cas de pertes. En même temps, ils sont

riscophiles du côté des gains et riscophobes du côté des pertes pour des niveaux de richesse relativement élevés. Ainsi, l'attitude de l'individu face au risque lorsqu'il est confronté à une perte est en quelque sorte l'image inversée de son attitude en cas de gain.

Il n'est pas inutile de souligner que ces deux concepts - la notion du point de référence et la différence du comportement du côté des pertes et des gains - qui sont apparus pour la première fois dans les travaux de Markowitz (1952b), ont été intégrés, comme nous allons le voir plus loin, dans les nouveaux modèles alternatifs à la théorie de l'utilité espérée.

Les recherches dans cette direction ont été poursuivies par Kahneman et Tversky (1979). Dans leur article, ils publient une série d'expériences de laboratoire permettant de mieux comprendre le comportement des individus dans les situations risquées. A travers ces études expérimentales, on retrouve les idées déjà évoquées en particulier par Allais (1953), Markowitz (1952b) et d'autres chercheurs<sup>9</sup>. Ils étudient notamment l'attitude face au risque des individus. Pour illustrer ce point, Kahneman et Tversky (1979) proposent une expérience composée des deux problèmes suivants :

**Problème 1 : choisir entre les loteries A et B**

A : 4000 avec probabilité 0,8	B : 3000 avec probabilité 1
0 avec probabilité 0,2	
[ 20%]	[80%]

**Problème 1' : choisir entre les loteries C et D**

C : - 4000 avec probabilité 0,8	D : - 3000 avec probabilité 1
0 avec probabilité 0,2	
[92%]	[8%]

---

<sup>9</sup> Par exemple Fishburn et Kochenberger, 1978; Williams, 1966.

Les pourcentages entre crochets donnent la répartition des choix des participants à l'expérience.

Le problème 1 propose le choix entre le gain certain de 3000\$ et 80% de chance de gagner 4000\$. Nous constatons qu'entre les deux loteries, la majorité [80%] des participants a choisi la loterie B. Ce choix pour le gain certain traduit un comportement riscophobe dans la mesure où l'équivalent certain est inférieur à l'espérance de la loterie ( $3000 < 3200$ ).

Les loteries proposées dans le problème 1' sont identiques à celles du problème 1 avec la seule différence qu'il s'agit cette fois de pertes. Contrairement aux résultats du problème 1, les individus sont prêts à prendre des risques du côté des pertes. En effet, 92% de participants préfèrent C à la perte certaine. Nous constatons donc un comportement riscophobe du côté des gains et une recherche du risque du côté des pertes.

L'exemple de l'étude présentée ci-dessus fait partie des nombreuses expérimentations ayant pour but d'évoquer différents aspects du comportement face au risque. Ces aspects se résument en quatre points fondamentaux. Les trois premiers concernent la forme de la fonction d'utilité et le quatrième se rapporte aux probabilités d'occurrence. Dans cette section, nous proposons la discussion sur les résultats liés à la fonction d'utilité. Le quatrième point est développé dans la section suivante.

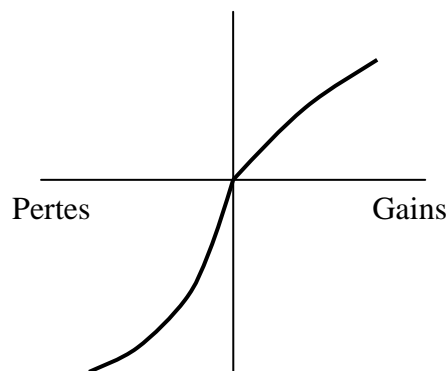
Premièrement, Kahneman et Tversky (1979) proposent de calculer la satisfaction en fonction des variations de richesse et non en fonction d'un niveau absolu de richesse. Ce choix suppose l'existence d'un point de référence par rapport auquel les gains et les pertes sont calculés. Deuxièmement, le résultat de l'expérience décrite précédemment, évoque la riscophobie des individus pour des richesses supérieures au point de référence (gains) et la riscophilie pour des richesses inférieures à ce point (pertes). Finalement, la troisième observation fondamentale



souligne que la peine éprouvée lors de la perte d'un montant donné est plus importante que le plaisir entraîné par le gain d'un même montant<sup>10</sup>.

A partir de ces trois observations, Kahneman et Tversky (1979) ont construit une fonction de valeur qui est, en quelque sorte, l'équivalent de la fonction d'utilité. Cette fonction, notée  $v$ , est représentée dans le repère gains - pertes par rapport à l'origine qui sert de point de référence sur la figure 1.3. Elle est concave du côté des gains et convexe du côté des pertes. De plus, elle est plus pentue du côté des pertes que du côté des gains, ce qui permet de traduire l'asymétrie dans la perception des gains et des pertes par les individus.

### *Value Fonction de Kahneman et Tversky (1979)*



**Figure 1.3.**

En conclusion, notons que les deux premiers points fondamentaux évoqués par Kahneman et Tversky (1979) vont dans le même sens que les constats de Markowitz (1952b), à savoir les auteurs évoquent l'existence d'un point de référence et constatent la différence de comportement dans les domaines des gains et des pertes. Cependant, Kahneman et Tversky (1979) ne spécifient pas la nature du point de référence. En particulier, ce rôle n'est pas forcément attribué à la richesse initiale. De même, en ce qui concerne les différences dans le comportement des individus

---

<sup>10</sup> Par exemple, l'individu est plus affecté par la peine éprouvée suite à une perte de 100 euros que par le contentement dû au gain de 100 euros. Par exemple, Haigh et List (2005) mettent en évidence la présence de l'aversion aux pertes dans le comportement des investisseurs professionnels.

dans le domaine des gains et des pertes, les observations de Markowitz (1952b) diffèrent de celles de Kahneman et Tversky (1979). Dans les expériences de ces derniers, les montants très proches de zéro (10 cents ou 1\$) n'ont pas été considérés. Ainsi, en comparant les figures 1 et 2, la fonction de valeur peut être considérée comme un prototype de la fonction proposée par Markowitz (1952b) sans le morceau intermédiaire compris entre les deux points d'inflexion externes.

Ajoutons, cependant, que la perception asymétrique des gains et des pertes, illustrée par les expériences de Kahneman et Tversky (1979) et évoquée comme le troisième point déterminant, est une caractéristique nouvelle qui se traduit par une fonction non dérivable au point de référence.

## I.2.2. Modèles non linéaires

Dans la section précédente, nous avons étudié le comportement des individus dans un environnement risqué en termes de changement de richesse. A présent, nous passons à la discussion du quatrième point fondamental de l'étude de Kahneman et Tversky (1979) consacrée à l'attitude face aux changements des probabilités.

D'après le théorème de Von Neumann et Morgenstern (1947) (voir section I.1.) l'utilité espérée est une fonction linéaire par rapport aux probabilités :

$E(U(L)) = \sum_{i=1}^n u(x_i) \cdot p_i$  . Cette propriété était préservée dans les premières approches alternatives. Mais, il était remarqué que les individus ont tendance à déformer les probabilités objectives. Pour illustrer ce point, reprenons les expérimentations réalisées par Kahneman et Tversky (1979). Ces auteurs ont posé aux participants les deux problèmes suivants :

**Problème 1 : choisir entre loteries A et B**

A : 2500 avec probabilité 0,33	B : 2400 avec probabilité 1
2400 avec probabilité 0,66	
0 avec probabilité 0,01	
[18%]	[82%]

**Problème 2 : choisir entre loteries C et D**

C : 2500 avec probabilité 0,33	D : 2400 avec probabilité 0,34
0 avec probabilité 0,67	0 avec probabilité 0,66
[83%]	[17%]

Dans le problème 1, la probabilité de 0,01 du gain nul de la loterie A semble jouer un rôle crucial dans le choix des individus. En effet, la loterie A est rejetée par 82% des participants en faveur du gain certain de 2400\$. Dans le problème 2, un écart de probabilité de 0,01 également fait la différence entre le gain de 2500\$ de la loterie C et le gain de 2400\$ de D. Pourtant, dans ce cas, celle-ci ne semble pas prise en considération. En effet, 83% des personnes interrogées ont choisi la loterie C alors que la probabilité de gagner est plus faible de 1%. Une explication probable de ce phénomène réside dans le fait que l'attention des individus est attirée par la différence des montants des gains (2500 contre 2400). Ainsi, un écart de 0,01 dans les probabilités n'est pas perçu de la même façon suivant qu'il s'agisse d'un écart entre 0 et 0,01 ou d'un écart entre 0,33 et 0,34. Cet exemple est une illustration d'un traitement non linéaire des probabilités. Il évoque l'intuition selon laquelle les individus peuvent déformer les probabilités objectives.

L'expérience de Kahneman et Tversky (1979) présentée ci-dessus est fondée sur le fameux paradoxe d'Allais (1953) (voir section I.2.). Afin de tenir compte de ce

phénomène, Allais (1953) propose de remplacer les probabilités objectives  $p_i$ ,  $i = 1 \dots n$ ; par des poids  $q_i$  dans le calcul de l'utilité espérée :

$$E(U(L)) = \sum_{i=1}^n u(x_i) \cdot q_i$$

Le poids  $q_i$  peut être interprété comme la perception personnelle de l'individu de la probabilité de réalisation du résultat  $x_i$ . La question est alors : comment calculer les  $q_i$ ? De toute évidence,  $q_i$  dépend de  $p_i$  et on peut écrire  $q_i = w(p_i)$  où  $w$  est une fonction quelconque définie sur  $[0,1]$ . Mais,  $w$  dépend-t-il seulement de  $p_i$  ou d'autres paramètres doivent-ils intervenir ? Et quelle est la forme de la fonction  $w$  ?

Les études empiriques menées par les psychologues et les économistes<sup>11</sup> ont révélé que les individus ont tendance à surestimer les faibles probabilités des événements extrêmes et sous-estimer celles des événements de probabilité intermédiaire. Cette observation permet d'expliquer la préférence pour la loterie B dans le problème 1 de l'expérience réalisée par Kahneman et Tversky (1979) : la probabilité de 0,01 du gain nul dans la loterie A semble être très importante aux yeux des joueurs. De même, ce concept apporte une explication au paradoxe de Friedman et Savage (1948) : un billet de loterie promettant un gain extrêmement élevé avec une chance minime peut paraître très attirant sous l'hypothèse de la surestimation de la « vraie » probabilité du gain.

Les premiers modèles non linéaires<sup>12</sup> sont apparus dans les années soixante<sup>13</sup>. Dans un premier temps, on a supposé que la fonction de pondération  $w$  transforme directement la probabilité d'occurrence  $p_i$  en une probabilité dite subjective  $q_i$ . De cette manière,  $w$  est une fonction continue de  $[0,1]$  dans  $[0,1]$  telle que  $\sum_{i=1}^n w(p_i) = 1$ .

---

<sup>11</sup> Edwards, 1953; 1954; Slovic et Lichtenstein, 1968; Ali, 1977.

<sup>12</sup> Pour une revue plus détaillée des modèles non linéaires voir Fishburn, 1988.

<sup>13</sup> Edwards, 1962.

Ainsi, il s'agit d'une généralisation directe du modèle de l'utilité espérée qui constitue le cas particulier dans lequel  $w(p_i) = p_i$ .

Cependant, cette approche sous-entend que le poids attribué à un événement ne dépend que de sa probabilité objective et ne tient pas compte de la valeur de sa réalisation. En d'autres termes, deux événements ayant la même probabilité d'occurrence doivent forcément avoir le même poids. Or, cette hypothèse ne peut pas être acceptée. En effet, comparons les deux loteries suivantes :

**Loterie A :**

30 avec probabilité 0,33

20 avec probabilité 0,66

10 avec probabilité 0,01

**Loterie B :**

15 avec probabilité 0,33

10 avec probabilité 0,01

5 avec probabilité 0,66

Si  $q_i = w(p_i)$  le poids  $q_3^A$  attribué au gain 10 de la loterie A doit être égal au poids  $q_2^B$  correspondant au même gain de la loterie B. Cependant, dans la loterie A, 10 intervient comme l'événement extrême (le gain le plus petit) et dans la loterie B, 10 est la valeur intermédiaire. En suivant la logique de sous et surestimation,  $q_3^A$  doit être supérieur à  $q_2^B$ .

En outre, les premiers modèles non linéaires, y compris la version de la théorie des perspectives de Kahneman et Tversky de 1979, ne respectent pas toujours la dominance stochastique d'ordre 1. Plus précisément, la dominance stochastique n'est respectée que si  $w$  est la fonction identité, c'est-à-dire  $q_i = w(p_i) = p_i$ <sup>14</sup>. Ce cas particulier n'a évidemment pas d'intérêt dans le sens où il correspond à la théorie de l'utilité espérée.

Dans ce contexte, Quiggin (1982) propose d'appliquer  $w$  non pas à la probabilité d'occurrence d'un événement mais à la fonction de répartition associée à la loterie. Cette approche porte le nom de la théorie de l'utilité espérée dépendant du

---

<sup>14</sup> Pour la démonstration voir Fishburn, 1978.

rang (RDEU)<sup>15</sup>. Soit  $L$  une loterie dont les réalisations sont classées dans l'ordre croissant  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  et les  $p_1, \dots, p_n$  sont les probabilités objectives correspondantes. D'après le modèle RDEU, la loterie  $L$  est évaluée par :

$$\sum_{i=1}^n U(x_i) \cdot q_i$$

avec

$$q_1 = w(p_1),$$

$$q_i = w(p_1 + p_2 + \dots + p_i) - w(p_1 + p_2 + \dots + p_{i-1}) =$$

$$= w(F(x_i)) - w(F(x_{i-1})) \text{ pour } i \geq 2$$

où  $F(x_i) = P(L \leq x_i)$  est la fonction de répartition de la variable aléatoire  $L$ . De cette façon, le poids associé à un gain dépend de toutes les probabilités qui interviennent dans la définition de la loterie. Cela signifie que deux gains ayant la même probabilité objective peuvent avoir deux poids différents. Cette propriété permet aussi de préserver la dominance stochastique d'ordre 1, à condition que  $w$  et  $U$  soient des fonctions croissantes. Parmi d'autres propriétés intéressantes du modèle RDEU, il faut noter la transitivité des préférences et la possibilité d'appliquer cette théorie aux distributions de probabilité continues.

En plus de ces propriétés remarquables, le modèle RDEU permet de caractériser différemment l'attitude face au risque des individus. En effet, dans la théorie de l'utilité espérée un agent est riscophobe si et seulement si sa fonction d'utilité est concave. Cela sous-entend que l'attitude face au risque de l'agent n'est caractérisée que par la forme de sa fonction d'utilité. Dans le cadre du modèle RDEU interviennent deux aspects. L'attitude face au risque des agents est déterminée de manière jointe par la fonction d'utilité et par la fonction de pondération  $w$ .

La façon de déformer les probabilités objectives caractérise l'individu pessimiste ou optimiste. De manière intuitive, un individu est qualifié de pessimiste

---

<sup>15</sup> Voir aussi les travaux sur les modèles non linéaires qui proposent de transformer la totalité de la distribution de la probabilité Handa, 1977; Allais, 1988;

s'il attribue aux résultats les plus défavorables d'une loterie des poids plus élevés que les probabilités objectives correspondantes et s'il attribue aux résultats favorables des poids plus faibles que les probabilités objectives. En termes de fonction de pondération, nous définissons un agent pessimiste comme un agent caractérisé par une fonction de pondération telle que l'espérance d'une loterie calculée sous  $w$  est inférieure à l'espérance de cette loterie calculée sous les probabilités objectives. Au contraire, pour un agent optimiste l'espérance d'utilité calculée sous  $w$  est plus importante que l'espérance d'utilité de la loterie calculée sous  $p$  (Yaari, 1984).

Ainsi, dans le cadre du modèle RDEU, l'attitude face au risque est prise en compte d'une part par la fonction d'utilité et, d'autre part, par la fonction de pondération. Forcément, un individu ayant une fonction d'utilité concave et une fonction de pondération pessimiste est qualifié d'agent riscophobe. De même, un individu caractérisé par une fonction d'utilité convexe et par une fonction de pondération optimiste est riscophile. Toutefois, les deux aspects peuvent jouer dans le sens opposé. Par exemple, un individu peut être caractérisé par une fonction d'utilité convexe et, en même temps, par une fonction de pondération pessimiste. Dans ce cas, il est délicat de définir son attitude face au risque. Nous retiendrons qu'un tel individu est qualifié de riscophobe si sa fonction de pondération est « suffisamment » pessimiste pour compenser l'effet de la convexité de la fonction<sup>16</sup>.

En particulier, cela signifie qu'un individu éprouvant une aversion pour le risque n'est pas forcément caractérisé par une fonction d'utilité concave<sup>17</sup>. En d'autres termes, dans le cadre du modèle RDEU, le comportement riscophobe n'est pas obligatoirement associé à une fonction d'utilité concave, ce qui est le cas dans la théorie d'utilité espérée. Or, rappelons qu'une fonction d'utilité concave caractérise aussi une utilité marginale décroissante. Ainsi, cette propriété de la fonction d'utilité sert à traduire deux aspects du comportement à priori différents. Le modèle RDEU

---

<sup>16</sup> Pour plus de détails voir Chateauneuf et Cohen, 1994; Starmer et Chris, 2000; Luce 2000.

<sup>17</sup> Yaari (1984, 1987) étudie le cas particulier d'un agent qualifié de riscophobe dans le cadre de RDEU, qui a une fonction d'utilité linéaire (fonction qui caractérise un agent neutre au risque dans le cadre de la théorie d'utilité espérée).

apporte une solution à ce problème puisqu'il permet de modéliser l'aversion ou le goût pour le risque en termes de probabilités. En particulier, pour traduire le comportement riscophile il est possible de choisir une fonction de pondération  $w$  « suffisamment » optimiste plutôt que d'introduire des morceaux convexes dans la fonction d'utilité comme l'avaient proposé Friedman et Savage (1948) (voir I.2.1).

Plusieurs types de fonctions de pondération ont été proposés. Nous pouvons citer, par exemple, la fonction puissance  $w(p) = p^\gamma$  où  $\gamma$  est un nombre positif. Elle est concave si  $\gamma < 1$  et convexe si  $\gamma > 1$ . Le cas  $\gamma = 1$  correspond à la théorie de l'utilité espérée. L'individu caractérisé par cette fonction surpondère ou souspondère l'ensemble de la distribution des probabilités (figure 1.4). Deux autres fonctions de pondération ont été proposées par Quiggin (1982) :

$$w(p) = \frac{p^\delta}{p^\delta + (1-p)^\delta}$$

et par Tversky et Kahneman (1992) :

$$w(p) = \frac{p^\delta}{(p^\delta + (1-p)^\delta)^{1/\delta}}$$

Elles présentent la forme d'un S inversé si  $\delta \in (0,1)$  (figure 1.4). Cette forme particulière découle du principe de sensibilité. Dans le cas de la fonction de valeur (I.2.1) ce principe stipule que l'impact d'un niveau donné du changement sur les résultats d'une loterie est d'autant moins important que ces résultats sont plus éloignés du point de référence<sup>18</sup>. Ce principe induit la concavité de la fonction de valeur du côté des gains et la convexité du côté des pertes. Tversky et Kahneman

---

<sup>18</sup> La différence entre un gain de 100 euros et un gain de 200 euros paraît plus importante pour les individus que la différence entre un gain de 1100 et de 1200. De même, la différence entre une perte de 100 et de 200 semble plus grande que la différence entre une perte de 1100 et 1200 (Kahneman et Tversky, 1979).



(1992) appliquent le même raisonnement pour la fonction de pondération. Pour évaluer l'incertitude il y a deux points extrêmes : la certitude et l'impossibilité, qui correspondent aux probabilités 1 et 0 respectivement. Dans ce contexte, le principe de sensibilité stipule que l'impact d'un niveau donné du changement sur les probabilités d'occurrence est d'autant plus important que ces probabilités sont proches des points extrêmes. Par exemple, une augmentation de 0,1 de la probabilité de gagner a plus d'impact lorsque la probabilité de gain augmente de 0 à 0,1 ou de 0,9 à 1 que lorsqu'elle augmente de 0,3 à 0,4<sup>19</sup>. De ce fait, la fonction de pondération est concave près de 0 et convexe près de 1.

### Fonctions de Pondération

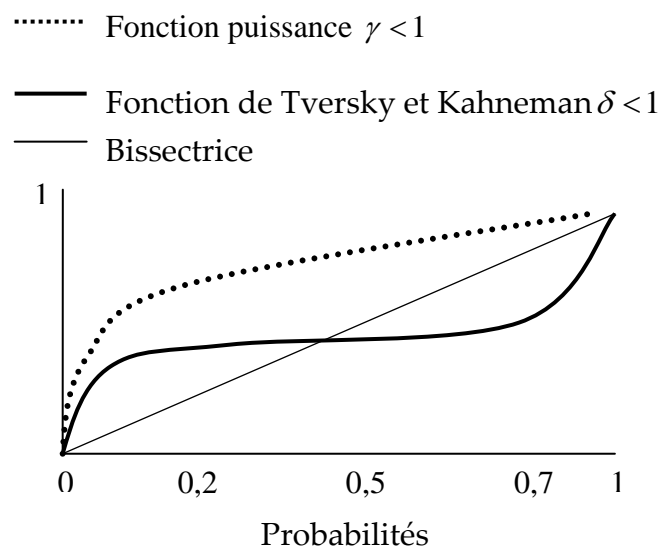


Figure 1.4.

Les travaux de Kahneman et Tversky de 1979 sur la forme de la fonction de valeur complétés par le modèle de Quiggin (1982) sur la fonction de transformation des probabilités sont à l'origine de la *Cumulative Prospect Theory* (ou la théorie des perspectives) de Tversky et Kahneman publiée en 1992. Nous présentons ce modèle dans la sous-section suivante.

<sup>19</sup> Nous avons déjà illustré cette observation par une expérience présentée à la page 42.

### I.2.3. *Cumulative Prospect Theory*

La théorie des perspectives de Tversky et Kahneman (1992) est un modèle alternatif à la théorie de l'utilité espérée de Von Neumann et Morgenstern (1947). Son objectif consiste à décrire le comportement observé des individus dans un environnement risqué plutôt que de définir le processus de prise de décision d'un agent parfaitement rationnel. La théorie des perspectives s'appuie sur les observations et les études empiriques qui ont mis en évidence l'insuffisance de la théorie classique. Dans les sections précédentes, nous avons proposé une analyse détaillée de certaines de ces observations. Concrètement, nous avons étudié la forme de la fonction d'utilité (ou la fonction de valeur) et l'attitude face au risque des individus en termes de changements de richesse (section I.2.1). Ensuite (section I.2.2), nous avons clarifié l'attitude des individus face aux probabilités. Ainsi, nous avons évoqué différents aspects du comportement à partir desquels la théorie des perspectives a été développée. L'objectif de cette section est de réunir ces résultats dans la théorie des perspectives proposée par Tversky et Kahneman (1992).

#### I.2.3.1. Présentation du modèle

Comme précédemment, il s'agit d'évaluer une loterie  $L = (x_i; p_i) \quad -m \leq i \leq n$  où les  $m$  premiers résultats sont négatifs et les  $n$  suivants sont positifs. En fait, ici, le point 0 est le point de référence. Ainsi les conséquences positives représentent les gains et les conséquences négatives sont des pertes. Pour cela, nous distinguons les réalisations positives et négatives car ces deux types de résultats sont traités différemment par la théorie des perspectives. Par analogie avec le modèle de Quiggin (1982), il est convenu de ranger les réalisations dans l'ordre croissant :

$$x_{-m} < x_{-m+1} < \dots < x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$$

De cette façon, la fonction de valeur  $V$  est décomposée en deux parties :

$$V(L) = V(L^+) + V(L^-)$$

où  $L^+ = \max(L; 0)$  et  $L^- = -\max(-L; 0)$ .

La première composante sert à évaluer les résultats positifs de  $L$  et la deuxième les résultats négatifs de la loterie.  $V(L^+)$  et  $V(L^-)$  sont définis par :

$$V(L^+) = \sum_{i=0}^n q_i^+ v(x_i)$$

$$V(L^-) = \sum_{i=-m}^0 q_i^- v(x_i).$$

La fonction de valeur  $v$  définie dans la section I.2.2 peut avoir plusieurs formes paramétriques. La plus courante est la suivante :

$$v(x) = \begin{cases} (x - x^*)^\alpha & \text{si } x \geq x^* \\ -\lambda(x^* - x)^\beta & \text{si } x < x^* \end{cases}$$

Dans notre cas,  $x^* = 0$ . Plus généralement,  $x^*$  est la richesse de référence par rapport à laquelle les gains et les pertes sont définis. Ainsi, la satisfaction de l'agent est calculée en fonction des variations de richesse et non en fonction d'un niveau absolu. Quand les résultats d'une loterie sont connus immédiatement, la richesse initiale de l'individu lui sert de richesse de référence. Cependant, quand le temps intervient, s'il s'agit par exemple d'investir sur les marchés financiers, le choix du point de référence devient un problème délicat. En effet, dans ce cas, il faut tenir compte des possibilités en investissements alternatifs. Très souvent, la richesse initiale capitalisée au taux sans risque joue le rôle de richesse de référence (Barberis, Huang et Santos, 2001). D'autres études (Grinblatt et Keloharju, 2000) montrent que les investisseurs fixent leur point de référence en fonction des derniers cours cotés. Nous allons

revenir sur cette discussion dans la seconde partie consacrée aux stratégies du choix de portefeuille.

La fonction  $v$  est concave du côté des gains et convexe du côté des pertes. Ceci traduit le fait que les individus préfèrent éviter le risque dans le domaine des gains et deviennent riscophiles quand il s'agit des pertes. Les valeurs des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$ , estimées par Tversky et Kahneman (1992) sont égales à  $\alpha = \beta = 0,88$ . Le coefficient  $\lambda$  est appelé l'indice d'aversion aux pertes (Köbberling et Wakker, 2005), il est estimé à 2,25. Pour simplifier les calculs, on suppose parfois  $\alpha = \beta = 1$ . Néanmoins,  $\lambda$  doit rester strictement supérieur à 1 afin de traduire l'aversion aux pertes. Autrement dit,  $\lambda > 1$  signifie que la peine éprouvée lors de la perte d'un montant donné est plus importante que le plaisir entraîné par le gain de même montant. Ainsi, la fonction  $v$  est plus pentue du côté des pertes que du côté des gains (figure 1.3).

Par analogie avec le modèle RDEU, les poids  $q_i^+$  et  $q_i^-$  sont définis par :

$$q_n^+ = w(p_n) ;$$

$$q_i^+ = w^+(p_i + p_{i+1} + \dots + p_n) - w^+(p_{i+1} + \dots + p_n) \text{ pour } 0 \leq i \leq n-1,$$

et

$$q_i^- = w^-(p_{-m} + p_{-m+1} + \dots + p_i) - w^-(p_{-m} + \dots + p_{i-1}) \text{ pour } 1-m \leq i \leq 0 ;$$

$$q_{-m}^- = w^-(p_{-m})$$

où les fonctions de pondération  $w^+$  et  $w^-$  dépendent respectivement des paramètres  $\delta^+$  et  $\delta^-$  qui peuvent prendre des valeurs différentes :

$$w^+(p) = \frac{p^{\delta^+}}{(p^{\delta^+} + (1-p)^{\delta^+})^{1/\delta^+}} \quad \text{et} \quad w^-(p) = \frac{p^{\delta^-}}{(p^{\delta^-} + (1-p)^{\delta^-})^{1/\delta^-}}.$$

D'après les estimations de Tversky et Kahneman (1992) faites à partir des expériences en laboratoire,  $\delta^+ = 0,61$  et  $\delta^- = 0,69$ . Les deux fonctions sont très proches et ont la forme d'un S inversé (section I.2.2). Cependant,  $w^+$  a une courbure plus forte que  $w^-$  car  $\delta^+ < \delta^-$ . Cela traduit le fait que l'aversion au risque dans le domaine des gains est

plus prononcée que le goût pour le risque dans le domaine des pertes<sup>20</sup>. En plus, nous pouvons remarquer que si  $F_L$  désigne la fonction de répartition de  $L$ ,  $w^+$  est appliqué à la fonction décumulative  $1 - F_L$  tandis que  $w^-$  s'applique à  $F_L$ . En d'autres termes, le poids  $q_i^+$  correspondant au résultat positif (gain) est défini comme la différence entre le poids de l'événement au moins aussi favorable que  $x_i$  et le poids de l'événement strictement plus favorable que  $x_i$ . Au contraire, le poids  $q_i^-$  correspondant au résultat négatif (perte) est défini comme la différence entre le poids de l'événement au moins aussi défavorable que  $x_i$  et le poids de l'événement strictement plus défavorable que  $x_i$ . Autrement dit, le poids attribué au résultat positif est une fonction des probabilités des résultats au moins aussi bons que lui-même. Et le poids attribué au résultat négatif dépend des probabilités des événements pires que lui-même. De cette façon, un gain est comparé aux autres gains possibles, meilleurs que lui. Au contraire, une perte est comparée avec des pertes qui sont encore plus importantes. Nous constatons ainsi que les poids associés aux résultats positifs ne sont pas définis de la même manière que ceux associés aux résultats négatifs. C'est là que réside la différence essentielle entre la théorie des perspectives et le modèle RDEU de Quiggin (1982). Quiggin ne fait pas la différence entre les gains et les pertes. Pour calculer les poids il utilise toujours la fonction de répartition (la fonction cumulative  $F_L$ ).

### I.2.3.2. Quelques critiques de la théorie des perspectives

La théorie des perspectives connaît aujourd'hui un grand succès. Ses nombreuses applications apportent des explications satisfaisantes à des phénomènes qui sont considérés comme des « puzzles » par la théorie de l'utilité espérée<sup>21</sup>.

---

<sup>20</sup> Ce phénomène a été révélé lors des expériences menées par Tversky et Kahneman, 1992.

<sup>21</sup> Par exemple, l'énigme de prime de risque des actions (*equity premium puzzle*) ou celle de volatilité excessive (*volatility puzzle*), Mehra et Prescott, 1985; Barberis et al., 2001; Benartzi et Thaler, 1995;

Toutefois, certains inconvénients de cette approche doivent être cités<sup>22</sup>. Notamment, des critiques dues à la forme de la fonction de valeur. Levy et Levy (2002) remarquent que dans la plupart des expériences menées par Kahneman et Tversky (1979) les loteries proposées ne concernent que des gains ou que des pertes. Les auteurs qualifient cette situation d'irréaliste et proposent une série d'expériences avec des loteries mixtes. Leur objectif est de montrer que les individus ne sont pas caractérisés par une fonction de valeur qui présente la forme d'un S, mais par une fonction d'une forme en S inversé comme celle proposée par Markowitz (1952b)<sup>23</sup>. Pour comparer des loteries, les auteurs utilisent une méthode récemment développée appelée *prospect stochastic dominance* (PSD). Une loterie F est dominée par une loterie G au sens de PSD ( $F \prec_{PSD} G$ ) si pour toute fonction de valeur  $v$  ayant la forme d'un S, nous avons  $v(F) < v(G)$ . En même temps, Levy et Levy (2002) introduisent une méthode appelée *Markowitz stochastic dominance* (MSD). Par analogie, ce critère permet entre deux loteries de définir celle qui est préférée pour tout individu caractérisé par une fonction de Markowitz (1952b). Parmi d'autres problèmes, les participants de l'expérience doivent choisir entre deux loteries F et G telles que :

$$F \text{ p}_{PSD} G \prec_{MSD} F .$$

La loterie  $F$  est dominée par  $G$  au sens de PSD et  $F$  domine  $G$  au sens de MSD<sup>24</sup>. Les probabilités d'occurrence des réalisations des loteries ne sont proches ni de 0 ni de 1 pour que le résultat ne soit pas perturbé par la déformation des probabilités objectives. Les auteurs constatent alors que dans le cas des loteries mixtes la majorité

---

Shiller, 1981. Voir aussi Shefrin et Statman (1985) qui utilisent la théorie des perspectives pour expliquer l'effet de disposition (*dispositon effect*).

<sup>22</sup> Ici nous présentons que quelques articles qui nous semblent les plus intéressants dans le cadre de notre problématique. Concernant d'autres critiques le lecteur peut se référer par exemple aux Loewenstein, 1988; Sebor et Corwall, 1995; Fennema et Van Assen, 1999; Stracca, 2004; Bleichrodt, Abellan-Perpinan, Pinto-Prades et Mendez-Martinez, 2007.

<sup>23</sup> Levy et Levy ne considèrent qu'une partie de la fonction de Markowitz (1952b), située entre deux points d'inflexion extrêmes (cette fonction a été décrite d'une façon détaillée dans la section I.2.1).

<sup>24</sup> Remarquons que ces deux types de dominance ne sont toujours pas opposés :  $F \prec_{PSD} G$  n'implique pas forcément  $G \prec_{MSD} F$ .

des participants (les chiffres varient entre 62% et 76 % selon l'expérience) préfèrent la loterie  $F$  à la loterie  $G$ . Ce résultat va à l'encontre de l'hypothèse selon laquelle les individus agissent conformément à la théorie des perspectives.

Une réponse à cette critique a été apportée par Wakker (2003). L'auteur pointe l'erreur de Levy et Levy (2002) qui négligent l'importance de la fonction de pondération dans la théorie des perspectives. En fait, dans les expériences proposées par Levy et Levy (2002) les probabilités des événements sont relativement élevées ( $p \geq 0,25$ ). Pour cela, les auteurs prétendent que la déformation des probabilités ne doit pas jouer un rôle important. Ainsi, ils n'utilisent que la fonction de valeur sans transformer les probabilités. Wakker (2003) réalise les mêmes expériences, mais cette fois-ci en appliquant complètement la fonction de Tversky et Kahneman (1992). Il montre que le résultat de Levy et Levy (2002) non seulement ne contredit pas la théorie des perspectives, mais, au contraire, est en accord avec celle-ci.

Par la suite, les résultats de Wakker (2003) ont été confirmés par Baucells et Heukamp (2006) qui rejettent la forme en S inversé de la fonction de valeur. Nous pouvons aussi remarquer que Levy et Levy (2002) prennent une partie de la fonction de Markowitz (1952b) qui a été construite pour des montants relativement faibles (de 10 cents à 100 \$). Or, les auteurs appliquent cette fonction aux loteries avec des montants élevés, allant de 800 \$ jusqu'à 6000\$. Pour ces montants, la fonction de Markowitz (1952b) coïncide avec celle de Kahneman et Tversky (1979). Toutefois, d'autres auteurs (Baltussen, Post, et Van Vliet, 2006) allant dans le même sens que Levy et Levy (2002), proposent des loteries mixtes à des probabilités modérées qui ont été choisies par la plupart des participants mais qui ne devraient pas l'être d'après la théorie des perspectives.

Par ailleurs, du point de vue technique, l'application de la théorie des perspectives peut s'avérer problématique. En effet, avant de calculer les poids  $q_i^+$  et  $q_i^-$ , il faut au préalable classer les réalisations dans l'ordre croissant. Or, pour la gestion d'un portefeuille comptant un grand nombre de titres, cette opération exige des moyens de calcul assez puissants. Nous allons revenir sur ce point plus en détail dans le chapitre suivant mais dans un contexte légèrement différent.

Après avoir passé en revue des travaux mettant en lumière certains aspects du comportement des individus dans une situation de risque, nous allons analyser dans la partie suivante comment ces aspects se manifestent dans le choix du portefeuille.



## II Choix de portefeuille

La formation des prix des titres financiers est étroitement liée aux stratégies de gestion de portefeuille suivies par les participants au marché. A leur tour, les stratégies dépendent de l'attitude face au risque et des exigences (en termes de rentabilité) des agents aussi bien que de la façon de percevoir et d'évaluer le risque. Ces différents aspects expliquent la diversité des approches dans la gestion de portefeuille. Dans ce contexte, la détermination des prix des actifs s'avère une tâche difficile. Néanmoins, à condition de rester dans le cadre d'un modèle précis (c'est-à-dire de considérer les agents ayant tel ou tel comportement bien défini), il est possible de déterminer les portefeuilles optimaux et les prix d'équilibre. Pour cette raison, la deuxième partie de ce chapitre est consacrée aux modèles de gestion de portefeuille.

Nous commençons par une brève présentation des résultats devenus « classiques », à savoir la théorie du portefeuille de Markowitz (1952a) et le Modèle d'Equilibre des Actifs Financiers de Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966). Nous évoquons aussi les difficultés liées à certaines hypothèses initiales et à certains résultats de ces modèles. La deuxième section est consacrée à une approche alternative nommée *safety first*. Dans un premier temps, nous présentons les modèles de Roy (1952) et d'Arzac et Bawa (1977) ainsi que le modèle SP/A de Lopes (1987). Ce dernier relie le concept *safety first* avec certains éléments des modèles « non linéaires »<sup>25</sup>. Dans un second temps, nous discutons l'un des nombreux biais psychologiques<sup>26</sup> appelé comptabilité mentale (Thaler, 1980, 1985) et son impact sur la gestion de portefeuille. Nous terminons par une présentation du modèle de Shefrin et Statman (2000). En tenant compte de la comptabilité mentale, ce modèle définit un portefeuille optimal qui peut différer de celui retenu dans le cadre de la théorie de Markowitz (1952a).

---

<sup>25</sup> Que nous avons présentés dans la section I.2.2

<sup>26</sup> Pour une revue des différents biais psychologiques voir par exemple Tversky et Kahneman, 1974.

## II.1. Approche traditionnelle : la gestion du portefeuille à la Markowitz

La théorie du portefeuille de Markowitz (1952a) est le modèle de gestion de portefeuille le plus connu. Couramment utilisé par un grand nombre d'institutions financières ce modèle suggère que les investisseurs font leur choix en fonction de l'espérance de rentabilité et de la variance de rentabilité. La variance a pour rôle de mesurer le risque. Le portefeuille optimal est défini comme celui ayant la variance minimale pour un niveau de rentabilité donné<sup>27</sup>. Le résultat essentiel du modèle de Markowitz (1952a) est le concept de diversification. L'auteur montre qu'en diversifiant son portefeuille et en jouant sur la corrélation entre les titres individuels, l'investisseur peut diminuer son risque global.

La théorie de Markowitz (1952a), appelée aussi « modèle moyenne – variance », est compatible avec la théorie de l'utilité espérée sous certaines hypothèses. C'est le cas, par exemple, quand les rentabilités des titres suivent une loi caractérisée uniquement par ses deux premiers moments. Souvent, on fait l'hypothèse que les rendements suivent une loi normale. Cependant, en étudiant les taux de rentabilité passés, on constate que les distributions réelles ne sont pas gaussiennes. Plus précisément, les queues de distributions sont plus «épaisses» que celles d'une loi normale. Ce phénomène appelé «leptokurticité» est reconnu depuis longtemps (Fama, 1976; Walter, 2003). Une hypothèse alternative pour rester dans l'univers de l'utilité espérée concerne le choix de la fonction d'utilité. Concrètement, si tous les investisseurs sont caractérisés par une fonction d'utilité quadratique, l'utilité espérée ne dépend que des deux premiers moments de la richesse finale. Cette hypothèse est évidemment très restrictive. En effet, supposer la fonction d'utilité quadratique revient à admettre que l'investisseur est riscophobe et ceci quelle que soit sa richesse et indépendamment du risque en question. De plus, cette

---

<sup>27</sup> Une autre façon de déterminer le portefeuille optimal consiste à maximiser la rentabilité pour un niveau de risque donné.

fonction d'utilité est caractérisée par une aversion absolue au risque croissante avec la richesse. En d'autres termes, plus la richesse de l'individu augmente, plus il présente de l'aversion au risque, ce qui n'est pas conforme à l'intuition économique (Pratt, 1964; Feldstein, 1969; Levy, 1974).

Plus généralement, le choix du critère espérance – variance suppose que tous les moments d'ordre supérieur à deux de la distribution jointe des rentabilités ne sont pas pris en compte. Ainsi, la définition du portefeuille optimal est basée sur une information considérablement réduite. En outre, le choix de la variance comme mesure du risque est largement discutable. Même si elle est fréquemment utilisée en pratique cette mesure a un inconvénient incontestable : les écarts positifs par rapport à la moyenne de richesse espérée ont autant d'importance que les écarts négatifs. Or, le risque est plus souvent associé avec le risque de perdre qu'avec le risque de gagner (Libby et Fishburn, 1977). D'ailleurs, Markowitz (1952a) admet lui-même cet inconvénient et propose comme alternative la semi - variance, qui tient uniquement compte des réalisations inférieures à la moyenne. Nous reviendrons sur ce point dans la section suivante.

La théorie du portefeuille de Markowitz (1952a) a donné naissance au Modèle d'Equilibre des Actifs Financiers développé par Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966). Ce modèle suggère que les fluctuations des cours des actifs sont dues aux fluctuations du marché d'une part, et aux éléments spécifiques à chaque actif d'autre part. Ainsi, le risque total d'un titre se décompose en deux parties : le risque causé par le marché, appelé risque systématique ou non diversifiable, et le risque dû aux caractéristiques mêmes du titre, nommé risque diversifiable ou spécifique. Le MEDAF stipule que tous les agents optent pour le même portefeuille d'actifs risqués qu'on nomme portefeuille du marché. Ce dernier regroupe l'ensemble des actifs risqués négociés en fonction de leur capitalisation boursière. En d'autres termes, l'objectif majeur de chaque agent est de réduire le risque autant que le marché le permet, c'est-à-dire de construire un portefeuille diversifié en éliminant le risque spécifique. Ainsi, en investissant une part de sa richesse dans le portefeuille de marché l'individu élimine complètement le risque spécifique pour ne garder que le

risque non diversifiable attaché au marché lui-même. La richesse restante est investie dans l'actif sans risque. La décision de l'investisseur consiste donc à définir la part de la richesse initiale destinée au placement dans l'actif sans risque. L'importance de ce montant dépend de l'aversion au risque de l'individu. De cette façon, à l'équilibre, tous les agents détiennent le portefeuille de marché et l'actif sans risque, mais en proportions éventuellement différentes<sup>28</sup>.

Le concept de diversification est le résultat principal de ce modèle devenu classique. Il suggère que le portefeuille parfaitement diversifié est composé de tous les titres négociés sur le marché. Cependant, de nombreuses études empiriques mettent en évidence que les portefeuilles réellement détenus ne sont pas suffisamment diversifiés par rapport à ce que prédit le modèle (Blume, Crockett et Friend, 1974; Blume et Friend, 1975; Coval et Moskowitz, 1999; Barber et Odean, 2000; Benartzi, 2001; Benartzi et Thaler, 2001; Kumar et Goetzmann, 2003; Strong et Xu, 2003; Polkovnichenko, 2005). Par exemple, Blume et *al.*, (1974) montrent que près de 50% des ménages détiennent des portefeuilles composés au moins à 90% d'un seul titre. Ou encore, Polkovnichenko (2005) a observé que les portefeuilles de 14 millions de ménages américains contenaient seulement entre un et cinq titres. Or, d'après Statman (1987), un investisseur atteint un niveau de performance optimal au sens de la théorie moyenne - variance s'il détient un portefeuille composé d'au moins 30 titres. On remarque aussi que les salariés préfèrent investir leurs économies dans les titres de l'entreprise dans laquelle ils travaillent (Holden et VanDerhei, 2001). Ou bien, les investisseurs privilégient les actions des sociétés implantées dans leur région (Huberman, 2001). Ces exemples sont des cas particuliers illustrant le biais de familiarité (*home bias*) – une observation d'après laquelle les individus investissent en plus forte proportion dans les titres qui leur sont familiers (Kilka et Weber, 2000). Concrètement, Heath et Tversky (1991) montrent qu'entre deux paris offrant la même probabilité de gain, les individus préfèrent celui qu'ils connaissent le plus<sup>29</sup>.

---

<sup>28</sup> Ce résultat obtenu par Tobin (1958) s'appelle le théorème de séparation en deux fonds.

<sup>29</sup> Pour une revue de différents biais observés de comportement se référer à Mangot (2005).

De façon plus générale, les portefeuilles individuels ne sont pas optimaux au sens moyenne - variance. Les investisseurs ont plutôt tendance à adopter des stratégies qui tiennent compte de l'aversion aux pertes et de la déformation des probabilités objectives (Leggio et Lien, 2002; Haigh et List, 2005) mettant en doute l'applicabilité en pratique du principe de diversification<sup>30</sup>.

Afin de tenir compte de ces phénomènes psychologiques des modèles alternatifs se sont développés. C'est en particulier l'approche *safety first* que nous présentons dans la section suivante.

## II.2. Modèle « *safety first* »

Le concept *safety first* a été proposé la même année (Roy, 1952) que le modèle de Markowitz (1952a). Selon ce concept, chaque individu est caractérisé par un seuil qualifié de seuil de subsistance, noté  $s$ , qui représente le niveau de richesse minimal en deçà duquel il ne souhaite pas tomber. La réalisation de l'aléa est perçue comme une perte par l'individu si elle conduit à une richesse inférieure à son seuil de subsistance. Le souci majeur de l'investisseur est de s'assurer contre ces pertes. Son objectif consiste donc à minimiser la probabilité  $P$  de se retrouver au-dessous de  $s$  :  $P = \Pr(W \leq s)$  où  $W$  est une variable aléatoire représentant la richesse finale de l'individu ou les paiements d'un portefeuille de titres financiers.  $P$  joue le rôle de la mesure du risque dans les modèles *safety first*. Ainsi, il s'agit d'une approche alternative à celle de Markowitz (1952a).

---

<sup>30</sup> Plus loin nous discutons d'un autre biais appelé « comptabilité mentale » qui va aussi à l'encontre avec le principe de diversification.

## II.2.1 Modèle d'Arzac et Bawa

Roy (1952) a été le premier à envisager ce type de critère<sup>31</sup>. Cependant, Roy (1952) ne précise pas la manière dont la richesse restant après avoir acquis un portefeuille assurant le seuil de subsistance doit être répartie. Afin de combler cette insuffisance, Arzac et Bawa (1977) ont ajouté un critère de choix supplémentaire : l'espérance de richesse finale ou l'espérance de rentabilité. En même temps, les auteurs utilisent la notion de probabilité de faillite admissible par l'investisseur, introduite par Telser (1955). Il s'agit de la probabilité (éventuellement très faible) que le seuil de subsistance ne soit pas atteint. De cette façon, le choix d'investissement d'un agent d'Arzac et Bawa (1977) se fait en fonction de deux paramètres :  $P = \Pr(W \leq s) \leq \alpha$  et  $\mu = E(W)$  où  $\alpha$  désigne la probabilité de faillite admissible. Les deux critères sont appliqués dans l'ordre lexicographique.

Concrètement, le programme de l'agent s'écrit :

$$\text{Max}(\pi, \mu)$$

où

$$\pi = \begin{cases} 1, & \text{si } P = \Pr(W \leq s) \leq \alpha \\ 1 - P, & \text{sinon} \end{cases} \quad (*)$$

et  $\mu = E(W)$

D'après l'ordre lexicographique, entre deux portefeuilles, l'investisseur choisit celui qui a la valeur de  $\pi$  la plus élevée, c'est-à-dire le portefeuille qui procure plus de sécurité en termes de probabilité. Si  $\pi$  est le même pour deux portefeuilles, le choix se fait selon  $\mu$ . Ainsi, entre deux portefeuilles procurant le même niveau de sécurité, l'investisseur choisit celui qui a la plus grande espérance. En d'autres termes, l'agent maximise la rentabilité espérée sous la contrainte que la probabilité de se retrouver en-deçà du seuil de subsistance ne dépasse pas le niveau critique. Le critère de

---

<sup>31</sup> Voir aussi Baumol, 1963; Arzac, 1976.

l'espérance de rentabilité est en fait appliqué au sous-ensemble des portefeuilles réalisant le minimum admissible.

Le choix du critère de l'espérance de rentabilité dans le modèle *safety first* a été fait par Arzac et Bawa (1977) par analogie avec le modèle de Markowitz (1952a). Ce critère constitue donc un point commun à ces deux modèles. Cependant, nous pouvons constater que le choix du portefeuille d'un investisseur se comportant conformément au modèle moyenne – variance ne coïncide pas avec le choix fait par un investisseur *safety first*. L'exemple suivant illustre ce point. Considérons une économie composée d'un seul actif risqué  $X$  et d'un actif sans risque  $Y$  de taux de rentabilité  $r_f$ . Supposons que l'agent possède une unité de richesse initiale et que son seuil de subsistance  $s$  soit inférieur à  $1+r_f$ . De cette manière, l'actif sans risque satisfait le critère de sécurité  $\Pr(Y \leq s) = 1 \leq \alpha$ . Supposons de plus que  $X$  est tel que  $\Pr(X \leq s) \leq \alpha$  et  $E(X) = 1+r_f$ . Ainsi  $X$  satisfait lui aussi le critère de sécurité et les deux actifs procurent la même espérance de rentabilité :  $\pi_X = \pi_Y = 1$  et  $E(X) = E(Y) = 1+r_f$ . Dans ce cas, l'agent qui suit la logique *safety first* sera indifférent entre l'actif risqué  $X$  et l'actif sans risque  $Y$ . Au contraire, un agent se comportant à la Markowitz (1952a) préférera  $Y$  à  $X$  car  $V(Y) = 0 < V(X)$ .

La différence essentielle du modèle d'Arzac et Bawa (1977) par rapport à celui de Markowitz (1952a) réside dans le choix de la mesure du risque. Pour Arzac et Bawa (1977), un actif  $X$  est risqué s'il ne satisfait pas la condition de sécurité  $\Pr(X \leq s) \leq \alpha$ . Pour cette raison, leur agent économique est indifférent entre deux actifs  $X$  et  $Y$ . Alors qu'un agent se comportant comme le prédit le modèle de Markowitz (1952a) ne fait pas la distinction entre les écarts positifs et négatifs de la moyenne de richesse espérée, un investisseur *safety first* ne prend en compte que le *downside risk* (Bawa, 1975; Menezes et al., 1980), c'est-à-dire la probabilité de se retrouver en-deçà de son seuil minimal.

## II.2.2 La mesure de VaR

Plusieurs mesures considérant uniquement le *downside risk* ont été développées (Bawa et Lindenberg, 1977; Fishburn, 1977). Parmi elles la VaR (*Value at Risk*) est devenue très populaire ces dernières années (Duffie et Pan, 1997; Jorion, 2000; Linsmeier et Pearson, 2000; Hull, 2008). Proposée par Baumol (1963), la mesure de VaR correspond au montant de la perte qui ne devrait être dépassée qu'au seuil de confiance  $t\%$ , sur un horizon temporel de  $N$  jours. Par exemple, si  $N = 10$  jours et  $t = 0,99\%$ , la VaR est le niveau de la perte maximal qui ne peut être dépassé qu'avec 1% de chance, compte tenu de la distribution  $W$  de la richesse finale dans dix jours. Ainsi, dans cet exemple, la VaR est le premier centile de la distribution  $W$ .

Cependant, afin de faire le lien avec le modèle d'Arzac et Bawa (1977), nous pouvons définir la VaR par l'équation suivante<sup>32</sup> :

$$\Pr (W < VaR) = 1 - t$$

Remarquons que la VaR est définie pour une seule valeur de la probabilité  $1-t$ , contrairement à la contrainte dans les modèles *safety first*, qui suppose que la probabilité de ne pas atteindre  $s$  doit être inférieure ou égale à  $\alpha$ . Certes, dans le cas de l'égalité stricte, les calculs sont plus faciles à mettre en place, un argument non négligeable quand il s'agit d'appliquer la VaR en pratique. Cependant, ceci met en évidence l'un des inconvénients de cette mesure de risque. En effet, nous constatons que les pertes qui surviennent avec une probabilité strictement inférieure à  $1-t$  ne sont pas prises en compte. Même si la probabilité que ces pertes surviennent est extrêmement faible, leur montant peut s'avérer tellement important que le risque devient non acceptable.

---

<sup>32</sup>  $W$  peut aussi désigner la distribution de la variation de la richesse finale. Dans ce cas la VaR apparaît avec un signe négatif afin de souligner qu'il s'agit d'une perte (Alexander et Baptista, 2004).



En outre, la VaR fait partie des mesures de risque qui sont utilisées afin de déterminer le capital requis<sup>33</sup>. C'est-à-dire, le montant de capitale nécessaire pour rendre le risque encouru acceptable du point de vue du régulateur. Dans ce contexte, Artzner, Delbaen, Eber et Heath (1999) proposent quatre propriétés qu'une mesure de risque doit satisfaire pour être qualifiée de « cohérente ». Une de ces propriétés, appelée « sous-additivité », stipule que la mesure de deux risques agrégés doit soit diminuer suite à l'effet de diversification, soit être égale à la somme des mesures des risques. Or, la VaR ne satisfait pas cette propriété.

En dépit de ces inconvénients, la mesure de VaR est utilisée sur le plan de la régulation par le Comité de Bâle pour mesurer le risque de marché et de crédit<sup>34</sup>. Mais surtout, la VaR est largement utilisée par les gestionnaires de fonds, les trésoriers d'entreprises, les banques (Jorion, 2000; Dowd, 1998; Saunders, 1999) et d'autres institutions financières ou non financières (Bodnar, Hayt et Marston, 1998).

Étant devenue très populaire dans les années quatre-vingt dix, cette mesure de risque est confrontée depuis aux nombreux tests de conformité et de comparaison avec d'autres mesures de risque. Les travaux consacrés au modèle moyenne – VaR occupent une place particulière. Différentes approches ont été proposées (Harlow, 1991; Basak et Shapiro, 2001; Alexander et Baptista, 2002; Alexander et Baptista, 2004; Yiu, 2004). Par exemple, Basak et Shapiro (2001) développent un modèle monopériodique où l'investisseur maximise l'utilité espérée sous contrainte que la perte maximale ne dépasse pas un certain niveau de richesse fixé. Ainsi, le portefeuille est construit à la date 0 et vendu à la fin de la période. Les variations de la richesse entre les deux dates n'ont pas d'impact sur la composition du portefeuille. Les auteurs montrent que le portefeuille optimal d'un tel agent peut présenter une plus grande exposition au risque qu'un portefeuille d'un agent qui ne tient pas

---

<sup>33</sup> Voir *Regulation S-K, Item 305* accessible sur <http://www.sec.gov/divisions/corpfin/ecfrlinks.shtml>.

<sup>34</sup> L'amendement de 1996 impose aux institutions financières de détenir des fonds propres pour couvrir le risque du marché. Pour calculer la charge de capital, la mesure de VaR est utilisée avec les paramètres  $N = 10$  jours et  $t = 0,99\%$ . Le capital requis est défini selon la formule  $k \times VaR + SRC$  où  $SRC$  désigne la charge de risque spécifique et  $k$  est déterminé par le régulateur au cas par cas avec une valeur minimale égale à 3 (Hull, 2006). Pour le risque du crédit voir Servigny et Renault (2004).

compte de la contrainte. Au contraire, dans le modèle dynamique de Yiu (2004), l'investisseur vérifie à tout moment que les pertes attendues ne dépassent pas la VaR calculée à la date  $t$ <sup>35</sup>. L'auteur montre que l'investissement en actifs risqués diminue si la contrainte est prise en compte.

Aussi, Alexander et Baptista (2002) comparent les portefeuilles obtenus dans le cadre d'un modèle moyenne – VaR avec ceux issus du modèle de Markowitz (1952a). Concrètement, leur modèle moyenne – VaR consiste à minimiser la perte maximale définie par la VaR sous contrainte d'un niveau de rentabilité constant. Premièrement, les auteurs trouvent que les deux frontières efficaces coïncident si les rentabilités suivent une loi normale<sup>36</sup>. Deuxièmement, par rapport au portefeuille optimal de Markowitz (1952a), ils prouvent que l'écart-type de portefeuille d'un agent averse au risque peut accroître si l'investisseur suit le modèle moyenne – VaR.

Soulignons qu'Alexander et Baptista (2002) représentent le portefeuille optimal du modèle moyenne – VaR dans le repère moyenne – écart-type. Une approche différente est utilisée par Harlow (1991) qui compare plusieurs mesures de risque (notamment la variance, la semi-variance, la probabilité de perte) et analyse leur impact sur le choix de portefeuille. Moyennant une étude empirique, l'auteur montre que le portefeuille optimal issu d'un modèle fondé sur le *downside risk* est moins risqué (en termes de *downside risk*) que celui obtenu en minimisant la variance. Harlow (1991) conclut que, pour le niveau de rentabilité au moins aussi important, les approches fondées sur le *downside risk* permettent de construire des portefeuilles offrant une meilleure protection contre des variations de rentabilité négatives. Aussi, l'auteur calcule les parts de la richesse investies dans des titres peu risqués comme les bons du trésor et celles investies dans les actions. Il trouve que ce rapport est plus important avec les approches du type *downside risk* que quand le portefeuille est construit en utilisant des mesures de risque traditionnelles.

---

<sup>35</sup> Cette technique est similaire au *back-testing* appliqué par les banques afin de vérifier *ex post* si le capital requis calculé en utilisant la mesure de VaR était suffisant pour couvrir le risque encouru.

<sup>36</sup> Voir aussi Harlow (1991) et Broihanne et al., (2006) qui aboutissent au même résultat dans un contexte légèrement différent.

Au fur et à mesure que nous avançons dans notre recherche, nous allons comparer nos résultats avec ceux obtenus par ces auteurs.

En revenant aux modèles *safety first* présentés précédemment, nous remarquons que l'espérance de rentabilité est calculée sous les probabilités objectives. Ainsi, les effets concernant la déformation des probabilités ne sont pas pris en compte. Les travaux de Lopes (1987) ont pour objectif de pallier cet inconvénient.

### II.2.3 Modèle SP/A de Lopes (1987)

Comme nous l'avons déjà mentionné dans le chapitre précédent, un individu habituellement riscophobe peut se montrer riscophile dans d'autres circonstances. Lopes (1987) a cherché à comprendre les motivations qui pourraient expliquer ce comportement contradictoire. D'après cet auteur, l'investisseur est guidé par deux sentiments : la crainte et l'espoir. La crainte (de perdre) induit une envie de sécurité et explique la composante riscophobe du comportement. Guidé par la crainte, l'individu a tendance à se concentrer essentiellement sur les événements défavorables. L'espoir, au contraire, engendre le souhait d'atteindre des niveaux de richesse élevés par rapport au niveau actuel. Par conséquent, l'espoir incite l'individu à attribuer plus d'attention aux événements favorables. De cette façon, dans les travaux de Lopes (1987), on retrouve les idées de Quiggin (1982) et d'autres auteurs sur la déformation des probabilités objectives.

## Présentation du modèle SP/A

La lettre **S** signifie la sécurité, **P** désigne le potentiel et **A** traduit l'aspiration. Lopes (1987) définit l'aspiration comme l'envie d'atteindre un certain niveau de richesse « raisonnable ». La sécurité reflète la peur des pertes et le potentiel s'apparente à l'espoir d'enrichissement.

Considérons une économie à  $n$  états de la nature  $\omega_1, \dots, \omega_n$ . Soit  $p_i$   $i = 1 \dots n$ , la probabilité d'occurrence de l'état  $\omega_i$ . L'économie fonctionne sur une période entre les dates 0 et  $T$ .  $W$  désigne la richesse finale de l'agent ou la valeur finale d'un portefeuille de titres financiers. Ainsi,  $W$  est une variable aléatoire qui prend la valeur  $W_i$  si l'état  $\omega_i$  se réalise. En d'autres termes, les  $W_i$  désignent les paiements éventuels du portefeuille  $W$  en date  $T$  que nous supposons rangés dans l'ordre croissant  $W_1 \leq W_2 \leq \dots \leq W_n$ . Nous avons  $p_i = \Pr(W = W_i)$ .

Notons  $A$  le niveau d'aspiration de l'agent.  $A$  est une caractéristique propre à chaque investisseur qui correspond à un niveau de richesse souhaitable (et non minimal comme dans le modèle d'Arzac et Bawa, 1977) que l'agent cherche à atteindre. Posons  $D_i = \Pr(W \geq W_i)$ . Avec ces notations, la richesse finale espérée peut s'écrire :

$$E(W) = D_1 W_1 + \sum_{i=2}^n D_i \cdot (W_i - W_{i-1}).$$

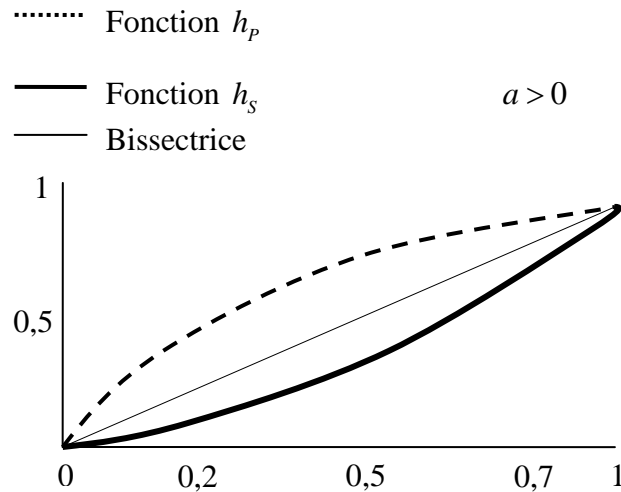
Cette expression de  $E(W)$  a une interprétation intuitive. En effet,  $W_1$  - la richesse minimale atteignable - apparaît avec la probabilité  $D_1 = \Pr(W \geq W_1) = 1$ , l'individu la reçoit donc d'une façon certaine. Ensuite, les accroissements successifs de richesse  $W_2 - W_1, W_3 - W_2, \dots, W_n - W_{n-1}$  sont pondérés par les probabilités de plus en plus faibles respectivement  $D_2, D_3, \dots, D_n = p_n$ . Pour introduire les sentiments de crainte et d'espoir Lopes (1987) propose de transformer les probabilités des accroissements successifs  $D_i$ . Cette transformation conduit à la déformation des probabilités

objectives  $p_1, p_2 \dots p_n$ . Plus précisément, deux fonctions de transformation sont introduites :

$$h_s(D_i) = D_i^{1+a} \quad \text{et} \quad h_p(D_i) = 1 - (1 - D_i)^{1+a}$$

où  $a$  est une constante positive.  $h_s$  (S pour la sécurité) est une fonction convexe et  $h_p$  (P comme potentiel) est une fonction concave (figure 1.5).

### Fonctions de Déformation de Lopes (1987)



**Figure 1.5.**

Dans un premier temps, nous définissons les poids  $p_i^*$  attribués aux états après l'application de  $h_s$  :

$$p_i^* = h_s(D_i) - h_s(D_{i+1}).$$

Puisque la suite de  $D_i$  est décroissante en  $i$  et que  $h_s$  est convexe, nous avons

$$h_s(D_i) - h_s(D_{i+1}) < h_s(D_{i-1}) - h_s(D_i)$$

Cela signifie que les poids vérifient

$$p_i^* < p_{i-1}^*.$$

En d'autres termes, les états correspondants aux richesses faibles sont pondérés plus fortement. Cela veut dire que l'agent dirigé par la crainte a tendance à surpondérer les événements défavorables.

Puisque  $a > 0$  et  $D_i \leq 1$ , nous avons  $h_s(D_i) = D_i^{1+a} \leq D_i$  et

$$\begin{aligned} E^*(W) &= \sum p_i^* W_i = \sum (h_s(D_i) - h_s(D_{i+1})) W_i = \\ &= \sum h_s(D_i) (W_i - W_{i-1}) \leq \sum D_i (W_i - W_{i-1}) = E(W) \end{aligned}$$

L'espérance de richesse calculée sous la probabilité  $p_i^*$  est inférieure à l'espérance de la richesse réelle. Rappelons, par ailleurs, que c'est exactement de cette façon que Yaari (1984) définit un individu pessimiste (voir I.2.2). Ainsi, la fonction de transformation  $h_s$  conduit l'agent à privilégier des portefeuilles permettant de maintenir le niveau d'aspiration dans tous les états.

Au contraire, la fonction  $h_p$  transforme les probabilités objectives en poids  $p_i^{**}$  vérifiant  $p_{i-1}^{**} < p_i^{**}$ . En d'autres termes, l'agent a tendance à surpondérer les événements favorables, traduisant ainsi un comportement optimiste :  $E^{**}(W) \geq E(W)$ .

Lopes (1987) affirme que le comportement de tout individu peut être caractérisé par une combinaison convexe de ces deux transformations :

$$h(D_i) = \delta h_s(D_i) + (1 - \delta) h_p(D_i)$$

où  $\delta \in [0, 1]$  est le degré de pessimisme de l'individu.

Finalement, le choix d'investissement se fait en maximisant  $E_h(W)$  où  $h$  indique que l'agent déforme au préalable les probabilités objectives en fonction de

son niveau d'optimisme. Puisque  $E_h(W)$  est une fonction croissante de  $D_h(A) = \Pr_h(W \geq A)$ , le bien-être de l'agent varie dans le même sens que ces valeurs.

D'une part, la théorie SP/A de Lopes (1987) est une généralisation de la théorie *safety first* d'Arzac et Bawa (1977) : si  $a=0$  on a  $h_s = h_p = Id$ <sup>37</sup> et  $E_h(W) = E(W)$ . En outre, le niveau d'aspiration remplace le seuil de subsistance qui est en quelque sorte un cas particulier (Lopes et Oden, 1999). D'autre part, le modèle de Lopes (1987) a des points communs avec la théorie des perspectives de Tversky et Kahneman (1992). En effet, ces deux modèles attribuent un rôle très important à un niveau de richesse particulier, significatif pour l'individu. Dans la théorie des perspectives, il s'agit du point de référence de la fonction de valeur  $v$ . Dans le modèle SP/A, le niveau d'aspiration  $A$  joue ce rôle particulier. L'autre point commun réside dans le fait que les deux approches suggèrent une déformation des probabilités objectives par les individus.

Cette analyse a conduit Shefrin et Statman (2000) à proposer un modèle de gestion de portefeuille qui s'appuie d'une part sur le concept *safety first*, et d'autre part, intègre la déformation des probabilités objectives. Ce modèle, présenté dans le paragraphe suivant, nous servira de point de départ pour notre étude.

### II.2.3. Théorie comportementale du portefeuille

Shefrin et Statman (2000) proposent deux versions de la théorie comportementale du portefeuille. La version, appelée BPT-SA (*single mental account version*), applique le concept *safety first* aux idées de Lopes (1987). Ainsi, BPT-SA tient compte de l'aversion aux pertes des individus et permet d'intégrer la déformation des probabilités objectives. La deuxième version, appelée BPT-MA (*multiple mental*

---

<sup>37</sup>  $Id$  désigne la fonction d'identité :  $Id(x) = x$

*account version*), introduit aussi un autre biais psychologique connu sous le nom de comptabilité mentale (*mental accounting*). Nous présentons dans un premier temps la version BPT-SA. Nous discutons ensuite de la comptabilité mentale et de son impact sur la gestion du portefeuille. Finalement, nous montrons, au travers du modèle BPT-MA, de quelle façon ce biais peut être pris en compte.

### II.2.3.1. Présentation du modèle BPT-SA

Considérons une économie à  $n$  états de la nature  $\omega_1, \dots, \omega_n$  et à une période entre deux dates 0 et  $T$ . Notons  $p_i, i=1..n$ ; la probabilité d'occurrence de l'état  $\omega_i$ . Soient  $n$  actifs purs  $e_1, \dots, e_n$  échangés sur le marché. L'actif  $e_i$  paye 1 si l'état  $\omega_i$  se réalise et 0 dans d'autres états. L'agent dispose d'une richesse initiale  $W_0$ . Le prix de l'actif  $e_i$  en date 0 est noté  $\pi_i$ . Comme précédemment, la variable aléatoire  $W$  prend les valeurs  $W_1, \dots, W_n$  et désigne la richesse finale de l'agent. Dans le monde des actifs purs, nous pouvons identifier la quantité de titres avec la richesse<sup>38</sup>. Par exemple, si l'état 1 se réalise, l'investisseur recevra la somme  $W_1$  s'il a acheté l'actif  $e_1$  en quantité  $W_1$ . Ainsi, la contrainte budgétaire de l'agent s'écrit  $\sum_{i=1}^n \pi_i W_i = W_0$  où  $W_i$  désigne la quantité achetée du titre  $e_i$ . Le programme de l'optimisation est :

$$\begin{aligned} & \text{Max } E_h(W) & (1) \\ & \text{s. c } P(W \leq A) \leq \alpha \end{aligned}$$

L'espérance  $E_h$  est calculée sous les probabilités obtenues par la transformation  $h$  évoquée au paragraphe précédent. Rappelons que  $h$  déforme les probabilités objectives de façon à tenir compte du degré de pessimisme de l'agent.  $A$  caractérise

---

<sup>38</sup> Roger, 1996.



le niveau d'aspiration de l'agent et  $\alpha$  est la borne supérieure de la probabilité que  $A$  ne soit pas atteint.

Afin de mieux comprendre le fonctionnement du modèle, considérons dans un premier temps un cas très simplifié. Supposons que  $h = Id$ , c'est-à-dire l'agent ne déforme pas les probabilités objectives; les états sont équiprobables :  $p_1 = \dots = p_n$  et les prix sont rangés en ordre décroissant :  $\pi_1 \geq \pi_2 \geq \dots \geq \pi_n$ . La maximisation de l'espérance  $E_h(W)$  se fait sur le sous-ensemble de portefeuilles vérifiant la contrainte de sécurité  $P(W \leq A) \leq \alpha$ . Afin de respecter cette contrainte, tout en gardant le coût le plus faible possible, l'agent commence par investir le montant  $A$  dans les actifs les moins chers. Nous avons donc  $W_n = A, W_{n-1} = A, \dots, W_c = A$  où  $c$  est l'indice le plus faible tel que  $p_1 + p_2 + \dots + p_{c-1} \leq \alpha$ . En effet, si l'agent n'investit que dans  $e_n, e_{n-1} \dots e_c$ , et rien dans d'autres actifs, la contrainte est satisfaite :  $P(W \leq A) = p_1 + p_2 + \dots + p_{c-1} \leq \alpha$ . La richesse restante est ensuite investie d'une façon à maximiser  $E_h(W)$  à savoir dans l'actif le moins cher, c'est-à-dire l'actif  $e_n$ .

Dans le cas général, l'agent suit le même chemin après avoir rangé les actifs de manière à ce que la suite  $\frac{\pi_i}{p_i^h}$  soit décroissante ( $p_i^h$  est le résultat de la transformation de  $p_i$  par  $h$ ). Ainsi la partie de la richesse restante sera investie dans l'actif qui a  $\frac{\pi_{i^*}}{h(p_{i^*})}$  le plus faible.

### ***Théorème<sup>39</sup>***

*Soit  $v$  la permutation de  $\{1, 2, \dots, n\}$  tel que les  $v(i)$  soient rangés de manière à ce que les  $\frac{\pi_{v(i)}}{p_{v(i)}^h}$  soient décroissants en  $i$ . Soit  $W_1, \dots, W_n$  une solution du problème d'optimisation (1).*

*Alors il existe un sous-ensemble  $B$  d'états de la nature contenant l'état  $v(n)$  tel que*

---

<sup>39</sup> Pour la démonstration voir Shefrin et Statman (2000).

$$W_i = 0 \quad \text{si } i \notin B$$

$$W_i = A \quad \text{si } i \in B \setminus \{v(n)\}$$

$$W_{v(n)} = \frac{W_0 - A \sum_{i \in B \setminus \{v(n)\}} \pi_i}{\pi_{v(n)}}.$$

Le portefeuille obtenu a un design très particulier. On constate immédiatement un rôle particulier de l'état  $v(n)$  : l'actif pur  $e_{v(n)}$  est le moins cher par unité de probabilité. Plus précisément, le portefeuille final contient deux composantes. La première est un actif « peu risqué » (voire sans risque) permettant d'assurer le niveau d'aspiration  $A$  de l'individu avec la probabilité de faillite qui ne dépasse pas  $\alpha$ . La deuxième composante est un actif ayant les caractéristiques d'une loterie.

Remarquons néanmoins que la transformation  $h$  des probabilités objectives ne s'applique pas dans le calcul de la probabilité de faillite. Cela signifie que l'investisseur traite les probabilités d'une façon différente : il calcule la probabilité de faillite sous les probabilités objectives, mais il déforme ces probabilités dans le calcul de l'espérance de richesse. En d'autres termes, l'investisseur de Shefrin et Statman (2000) peut être rationnel et non à la fois. Dans leur article, les auteurs ne mettent pas d'accent sur ce point. D'une part, il peut être considéré comme un inconvénient de la théorie comportementale du portefeuille. D'autre part, cette ambiguïté ne semble pas être gênante dans le contexte de l'approche comportementale. En effet, nous pouvons envisager que l'individu se conduit d'une façon différente selon la situation dans laquelle il se trouve. Précisons que la stratégie de l'agent suivant le modèle BPT peut être divisée en deux étapes. Tout d'abord, il choisit un portefeuille qui lui procure le niveau de sécurité souhaité. Ensuite, la richesse restante est investie dans un seul titre. Ainsi, il semblerait naturel que le comportement et les anticipations de l'agent

pendant la construction d'un portefeuille sécurisé peuvent différer de ceux qui le caractérisent lors de sa deuxième étape<sup>40</sup>.

Afin d'illustrer le choix de l'investisseur suivant la théorie comportementale du portefeuille considérons l'exemple suivant :

### Exemple

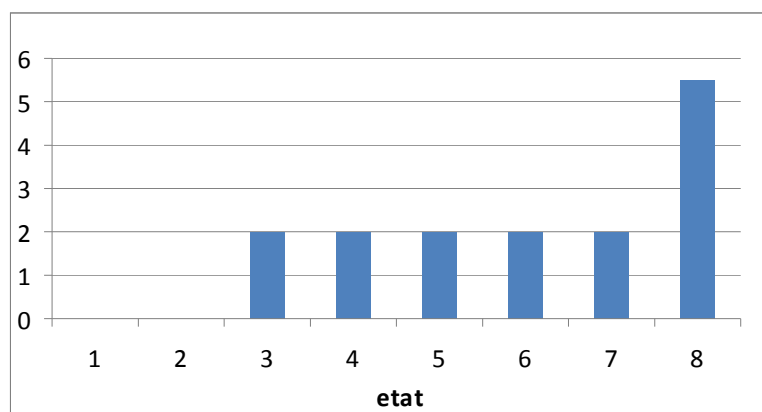
Considérons un agent caractérisé par le niveau d'aspiration  $A=2$ , la probabilité de faillite admissible  $\alpha=0,25$  et doté d'une richesse initiale  $W_0=1$ . Supposons que les états de la nature soient équiprobables  $p_1 = p_2 \dots = p_8$  et  $h = Id$ , l'individu ne déforme pas les probabilités objectives. Les prix  $\pi_1, \dots, \pi_8$  des 8 actifs purs  $e_1, \dots, e_8$  sont rangés dans l'ordre décroissant dans le tableau suivant.

$\pi_1$	$\pi_2$	$\pi_3$	$\pi_4$	$\pi_5$	$\pi_6$	$\pi_7$	$\pi_8$
0,37	0,19	0,12	0,09	0,07	0,06	0,05	0,04

Même si les probabilités des états sont égales, nous pouvons supposer que l'offre des actifs purs n'est pas la même, ce qui peut expliquer la différence des prix.

La figure 1.6 illustre le portefeuille optimal de l'agent :

**Les paiements du portefeuille optimal BPT-SA**



**Figure 1.6.**

<sup>40</sup> Gollier et Muermann (2006).

L'axe des ordonnées représente les paiements du portefeuille dans chaque état. Nous constatons que dans six états sur huit le niveau d'aspiration  $A$  est atteint :  $P(W < A) = 0,25 = \alpha$ . La richesse restante  $W_0 - A \sum_{i=3}^8 \pi_i$  est investie dans l'actif le moins cher  $e_8$ . Ainsi, nous constatons que le portefeuille optimal de l'agent lui procure la sécurité souhaitée et permet en même temps, à condition que l'état 8 se réalise, d'attendre un niveau de richesse beaucoup plus important que le seuil de subsistance  $A$ .

Le degré de riscophobie de l'agent est caractérisé par les valeurs que vont prendre  $A$  et  $\alpha$ . Le portefeuille optimal reflète ce comportement. Par exemple, si le niveau d'aspiration  $A$  est faible,  $W_{v(n)}$  peut devenir très important par rapport à  $A$ . Les paiements d'un tel portefeuille sont très asymétriques. Pour cela, ces paramètres peuvent caractériser un agent ayant du goût pour le risque. En même temps pour de très faibles valeurs de  $\alpha$  la répartition du portefeuille entre les états peut être proche d'une loi uniforme. Il s'agit donc d'un agent riscophobe.

Remarquons aussi que si  $A$  est assez grand ou/et  $\alpha$  est assez petit, l'investisseur peut ne pas arriver à construire le portefeuille optimal. Dans ce cas, le problème (1) n'a pas de solution. En effet, supposons que le niveau d'aspiration passe de 2 à 3 dans notre exemple :  $A = 3$ . Nous avons alors  $1 = W_0 < A \sum_{i=3}^8 \pi_i = 1,29$ . En d'autres termes, l'investisseur n'a pas de moyen pour acquérir un portefeuille qui lui procure le niveau de sécurité espéré. Ainsi, le problème n'a pas de solution car la contrainte  $P(W < A) \leq \alpha$  ne peut pas être satisfaite. D'une manière générale, entre deux portefeuilles qui satisfont la contrainte  $P(W < A) \leq \alpha$ , l'investisseur préfère celui qui a l'espérance  $E_h(W)$  maximale. Par contre, si les portefeuilles ne satisfont pas la contrainte, l'agent ne sait pas choisir celui qu'il préfère. De cette façon, les préférences de l'individu ne vérifient pas l'axiome de comparabilité. En outre, cette théorie pose un problème de mise en œuvre opérationnelle qui sera traduite dans les chapitres suivants.

Shefrin et Statman (2000) suggèrent que le portefeuille optimal défini par le théorème ci-dessus diffère de celui calculé dans le repère espérance - variance. En effet, le portefeuille optimal obtenu par un individu qui respecte le CAPM est composé d'un actif sans risque et du portefeuille de marché, tandis que le portefeuille optimal d'un investisseur du type BPT-SA combine un billet de loterie avec un titre risqué (par exemple une obligation). Cependant, les études récentes (Broihanne et *al.*, 2006) montrent que les frontières efficientes obtenues dans le cadre de ces deux modèles coïncident dans le cas des actifs à rentabilités normales<sup>41</sup>. Ce résultat est dû au fait que les rentabilités des titres considérés ne sont caractérisées que par leurs deux premiers moments. Dans ce contexte, il n'est pas possible de construire des portefeuilles qui peuvent ressembler à ceux obtenus dans le cadre du modèle BPT, à savoir des portefeuilles combinant la sécurité avec le pari sur un état. Tout de même, si une telle éventualité se présente, un agent BPT choisira un portefeuille avec une loterie, alors qu'un agent de Markowitz (1952a) va tenter de répartir sa richesse entre différents états.

La sous-section suivante est consacrée à la discussion sur la comptabilité mentale. Ce phénomène comportemental joue un rôle important en gestion de portefeuille. Notons que la comptabilité mentale est une notion très large qui comprend plusieurs types de biais psychologiques (Thaler, 1999). Nous n'abordons ici qu'une seule branche consacrée à la création des comptes mentaux.

### II.2.3.2. Comptabilité Mentale

La notion de la comptabilité mentale a été introduite par Thaler (1980, 1985). L'idée majeure consiste à remarquer que les individus traitent leur richesse différemment selon son origine et son affectation. Ils ont tendance à créer des

---

<sup>41</sup> Voir aussi Levy et Levy (2004). En utilisant la méthode de dominance stochastique ces auteurs montrent que l'ensemble des portefeuilles efficientes au sens de la théorie des perspectives coïncide avec celui obtenu dans le cadre du modèle de Markowitz (1952a).

« comptes mentaux » qui sont gérés séparément et d'une façon différente. Par exemple<sup>42</sup>, d'après Shefrin et Thaler (1992), le foyer type répartit ses finances en trois comptes : les ressources financières prêtes à être dépensées (les revenus), les biens acquis et les revenus futurs. Le compte « revenus » est destiné à la consommation actuelle, il est donc caractérisé par une tentation de dépense très élevée. Au contraire, le compte « biens acquis » est associé à une tentation de dépense faible : "les individus ont tendance à ne pas toucher à leur patrimoine"<sup>43</sup>.

Ce biais psychologique apparaît clairement en gestion de portefeuille. Plus précisément, il a été constaté dans de nombreuses études que les corrélations entre différents types de titres financiers sont négligées dans le choix de portefeuille. A titre d'exemple<sup>44</sup>, considérons un agent qui détient un portefeuille constitué d'un actif sans risque, d'actions et d'obligations. Supposons que cet agent décide d'accroître le risque de son portefeuille. Dans ce cas, il augmente seulement la partie de son portefeuille investie en actions. Rappelons que d'après le CAPM, les parts de tous les titres risqués (les actions et les obligations) doivent rester inchangées. En d'autres termes, l'investisseur souhaitant augmenter le risque devrait investir dans les actions aussi bien que dans les obligations de façon à garder la même proportion dans son portefeuille risqué.

Certaines études expérimentales et statistiques apportent des résultats qui viennent confirmer cette observation. Par exemple, Kroll, Levy et Rapoport (1988) ont mené l'expérience suivante. Les participants divisés en trois groupes doivent construire un portefeuille composé de trois titres A, B et C dont les rentabilités ainsi que la matrice de variance – covariance sont données. Pour chacun des trois groupes, les corrélations entre A et B et entre A et C sont nulles. La corrélation entre B et C est nulle pour le premier groupe de participants; elle s'élève à 0,8 pour le deuxième groupe et est égale à -0,8 pour le troisième. Dans le cas où les participants tiennent compte de la corrélation quand ils construisent un portefeuille, étant donné la différence importante entre les corrélations en groupes, les portefeuilles construits

---

<sup>42</sup> Voir aussi O'Curry, 1997 ; Kooreman, 1997.

<sup>43</sup> Shefrin et Thaler, 1992; p 321.

<sup>44</sup> Cet exemple a été tiré de Broihanne, Merli et Roger, 2004; p 166. Voir aussi Bernartzi et Thaler, 2001.

devraient être différents. Plus précisément, la proportion des actifs A, B et C ne devrait pas être la même dans les portefeuilles de chaque groupe. Or les auteurs n'ont pas constaté de différence significative. Ils en ont déduit que les participants n'avaient pas tenu compte de la corrélation lors de la construction du portefeuille<sup>45</sup>.

Cette négligence des corrélations entre différents types d'investissements peut être expliquée par la création de différents comptes mentaux. Chaque compte est créé dans un but bien précis. En revenant à l'exemple évoqué précédemment, nous pouvons supposer que l'agent a créé trois comptes mentaux. Le compte « sécurité » composé d'un actif sans risque est destiné à assurer le niveau de richesse minimal. Le compte « intermédiaire » contenant des obligations qui sert pour atteindre des niveaux de richesse « raisonnables ». Et le compte « spéculatif » composé d'actions qui permettrait à l'agent de s'enrichir d'une manière conséquente. En utilisant le langage de la théorie SP/A de Lopes (1987), chaque compte est caractérisé par un niveau d'aspiration  $A$ . Des comptes différents sont associés aux niveaux d'aspiration différents. Dans notre exemple, le  $A$  du compte « sécurité » doit être très faible par rapport à celui du compte « spéculatif ».

Cette approche est aussi en accord avec l'observation de Friedman et Savage (1948) selon laquelle les individus achètent des contrats d'assurance, et simultanément des billets de loterie. Ainsi, un contrat d'assurance fait partie du compte « sécurité » et un billet de loterie est attribué au compte « spéculatif ». D'ailleurs, Fisher et Statman (1997) constatent que souvent les managers recommandent de construire le portefeuille sous forme d'une pyramide composée de trois couches : la première couche contient l'argent liquide, la deuxième est composée des obligations et la troisième des actions.

Les pertes issues du compte mental « spéculatif », qui sont en quelque sorte attendues par l'investisseur, ne lui apportent pas autant de peine que les pertes

---

<sup>45</sup> Voir aussi Jorion (1994) qui en se fondant sur les données statistiques analyse les performances des portefeuilles composés de titres financiers et de devises. Il compare des portefeuilles où la corrélation entre les deux composantes est négligée par le manager avec des portefeuilles qui sont traités en totalité. L'auteur montre que sur la période 1978-1991 les portefeuilles qui sont traités en totalité sont plus performants que ceux où la corrélation entre les deux composantes est négligée

associées au compte « sécurité ». Cette intuition peut servir d'explication à la raison de la création des comptes mentaux. Chaque événement est perçu par l'individu comme positif ou négatif. Un événement est considéré comme positif s'il apporte un bénéfice psychologique à l'individu. Au contraire, un événement négatif est la cause d'un coût psychologique. Les individus combinent les coûts et les bénéfices psychologiques à l'intérieur de comptes afin de minimiser la pénibilité de ces coûts et profiter pleinement des bénéfices. Les études expérimentales de Thaler (1985), Thaler et Johnson (1990) et de Linville et Fischer (1991) permettent d'éclaircir ce point. La question-clé est de savoir si les individus préfèrent avoir deux événements négatifs le même jour ou sur deux jours différents. La même question se pose aussi à propos de deux événements positifs et à propos d'un événement négatif et un positif. Thaler et Jonson (1990) affirment que les individus combinent (séparent) deux événements dans un compte mental s'ils préfèrent les voir se produire le même jour (deux jours différents). De cette manière, les deux événements sont mis ensemble s'ils apportent plus de satisfaction que quand ils sont séparés<sup>46</sup>. La comptabilité mentale est donc une stratégie mise en place par l'individu qui permet d'augmenter sa satisfaction (Brendl, Markman, Higgins, 2000). .

La création des comptes mentaux permet aussi de décomposer le problème de gestion de portefeuille en plusieurs « petits problèmes » plus facilement abordables. Dans ce contexte, le choix du portefeuille devient délicat. Shefrin et Statman (2000) proposent le modèle BPT-MA qui semble compatible avec le comportement d'un investisseur suivant le concept de comptabilité mentale, à savoir, la gestion de portefeuille « en couches superposées ». Nous présentons ce modèle dans la sous-section suivante.

---

<sup>46</sup> Il a été constaté par exemple que les individus préfèrent séparer deux événements positifs ainsi que deux négatifs; par contre, ils ont tendance à regrouper des événements opposés (Linville et Fischer, 1991).



### II.2.3.3. Présentation du modèle BPT-MA

L'idée majeure de la version BPT-MA de la théorie comportementale du portefeuille consiste à introduire différents niveaux d'aspiration dans le modèle SP/A de Lopes (1987). La version BPT-SA ne considère qu'une seule couche (un compte mental). De cette façon, le modèle BPT-MA peut être considéré comme une extension du modèle BPT-SA à plusieurs comptes mentaux.

Le modèle BPT-MA est basé sur les postulats suivants :

- à chaque couche est associé un niveau d'aspiration particulier
- la covariance entre les couches est négligée

Nous traitons ici le cas de deux comptes mentaux.

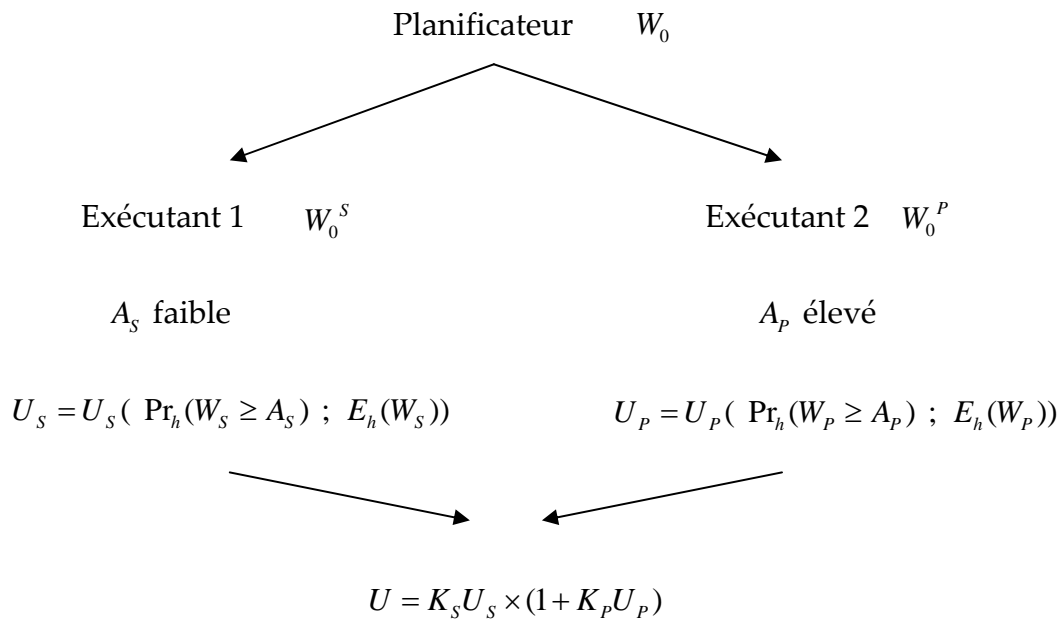
Imaginons un investisseur incarnant trois rôles distincts. Le premier est celui du « planificateur » et les deux autres sont respectivement « exécutant 1 » et « exécutant 2 ». Chaque exécutant est associé à un compte mental, et par conséquent, admet un niveau d'aspiration différent de l'autre. Ainsi, les objectifs des deux diffèrent. « Exécutant 1 » cherche à assurer la sécurité de l'investisseur. Notons  $A_s$  son niveau d'aspiration. L'objectif du deuxième est d'enrichir l'investisseur. Si  $A_p$  désigne le niveau d'aspiration de l'exécutant 2, nous avons  $A_s < A_p$ . Le rôle du planificateur consiste à répartir la richesse initiale  $W_0$  entre les exécutants de façon à maximiser l'utilité générale  $U$  de l'investisseur.  $U$  dépend positivement des utilités  $U_s$  et  $U_p$  des exécutants 1 et 2 respectivement. Avec les notations ci-dessous :

$W_0^s$  et  $W_0^p$  sont les parts de  $W_0$  désignées par le planificateur :  $W_0^s + W_0^p = W_0$  ;

$W_s$  et  $W_p$  les richesses finales des exécutants;

$K_s$  et  $K_p$  - des constantes positives;

nous pouvons présenter le modèle BPT-MA d'une façon schématique :



La fonction d'utilité de chaque exécutant dépend positivement de deux paramètres. Le premier est la rentabilité espérée de l'exécutant et le deuxième est la probabilité que sa richesse finale soit supérieure à son niveau d'aspiration. L'indice  $h$  indique que les deux exécutants déforment les probabilités objectives. Nous pouvons éventuellement supposer que cette déformation ne se fasse pas de la même manière par les deux exécutants puisque leurs objectifs diffèrent. Dans leur article, Shefrin et Statman (2000) ne développent guère ce point. Pour les auteurs, la différence essentielle entre l'exécutant 1 et 2 réside dans leurs niveaux d'aspiration différents<sup>47</sup>.

La fonction de l'utilité  $U$  de l'investisseur est définie par  $U = K_s U_s \times (1 + K_p U_p)$ . Remarquons que  $U_s = 0$  implique  $U = 0$ . Cela signifie que si l'exécutant 1 a échoué, autrement dit le programme de sécurité n'est pas accompli, l'utilité de la richesse finale de l'investisseur est nulle; même si l'exécutant 2 a rempli son contrat. Au contraire, en cas d'échec du deuxième exécutant :  $U_p = 0$ , l'utilité de l'investisseur reste positive  $U = K_s U_s$ . Autrement dit, les pertes issues du compte mental

<sup>47</sup> Remarquons aussi que, par rapport au modèle BPT-SA, la probabilité de faillite admissible ne fait pas partie des paramètres de décision. Pour cela, ce modèle est considéré plutôt comme une extension du modèle de Lopes (1987).

« sécurité » ont un impact beaucoup plus important sur l'utilité de l'investisseur que les pertes associées au compte « spéculatif ».

Ainsi, la comptabilité mentale est bien prise en compte dans le modèle BPT-MA. Premièrement, chaque compte mental est destiné à une tâche précise : assurer la sécurité de l'investisseur (exécutant 1) ou bien lui donner une chance de s'enrichir d'une manière conséquente (exécutant 2). Deuxièmement, comme chaque exécutant agit indépendamment de l'autre, la corrélation entre les deux comptes est négligée. Finalement, la forme de la fonction d'utilité du planificateur traduit l'idée selon laquelle les pertes associées au compte mental « spéculatif » n'apportent pas autant de peine que les pertes issues du compte « sécurité ».

La théorie comportementale de portefeuille de Shefrin et Statman (2000) peut être considérée comme un modèle de gestion de portefeuille alternatif à celui de Markowitz (1952a). En effet, elle est issue du concept *safety first* et ne prend en compte que le *downside risk* au lieu de considérer la variance comme la mesure du risque. Or, nous avons déjà évoqué que le risque est généralement perçu comme un risque de perdre et pas comme un risque de gagner. De ce point de vue, la variance qui attribue le même poids aux écarts positifs de la moyenne qu'aux écarts négatifs, n'est pas une mesure du risque appropriée. A part l'aversion aux pertes, la BPT permet d'intégrer d'autres biais psychologiques tels que la comptabilité mentale et la déformation des probabilités objectives qui ne sont pas prises en compte dans l'approche de Markowitz (1952a). En effet, celui-ci considère un individu rationnel. De cette façon, la BPT fait partie des modèles dits « comportementaux » qui s'opposent en général à l'approche classique de Markowitz (1952a).

# Conclusion

Dans la première partie de cette revue de la littérature, nous avons essayé de montrer le parcours complexe et enrichissant effectué par les chercheurs dans le domaine de la prise de décision face aux choix risqués. Notre point de départ a été la théorie de l'utilité espérée. Ce modèle normatif dominant pendant un demi-siècle définit les préférences des individus par l'axiomatique proposée par Von Neumann et Morgenstern (1947). Ainsi, l'individu parfaitement rationnel (en termes de prise de décision) reste encore le modèle de l'agent économique dans l'esprit de nombreux chercheurs.

Cependant, les diverses observations et les études expérimentales ont mis en évidence l'écart important entre le comportement réellement observé et le comportement d'un individu parfaitement rationnel. Notamment, Friedman et Savage (1948) ont remarqué que les individus qui achètent des contrats d'assurance achètent aussi des billets de loterie. Cette observation ne peut pas être expliquée dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée qui suppose un comportement risco-phobe en toutes circonstances.

Le paradoxe de Friedman et Savage (1948), ainsi que d'autres observations répétées sont à l'origine des approches différentes du paradigme de l'utilité espérée. Nous avons présenté ces approches en deux voies de recherche. Premièrement, nous avons étudié l'attitude face au risque en termes de changement de richesse. Plus précisément, nous avons discuté de différentes formes de la fonction d'utilité. Afin de tenir compte des deux aspects du comportement (l'aversion et le goût pour le risque), certains auteurs ont proposé des fonctions d'utilité contenant des morceaux concaves et convexes. La contribution incontestable dans le domaine de la prise de décision a été faite par Markowitz (1952b), le premier qui a évoqué l'existence d'un point de référence. Depuis, les raisonnements en termes de « gain » et de « perte » ont été intégrés dans le langage des chercheurs d'une manière naturelle. Les travaux de Markowitz (1952b) ont été repris par Kahneman et Tversky (1979). Par le biais

d'expérimentations, ces auteurs mettent en évidence une fois de plus l'insuffisance de la théorie de l'utilité espérée et proposent une fonction de valeur concave pour des richesses supérieures au point de référence et convexe pour des richesses inférieures à ce point. Ceci traduit le fait que les individus préfèrent éviter le risque dans le domaine des gains et éprouvent du goût pour le risque dans le domaine des pertes. Aussi, afin de prendre en compte l'aversion aux pertes des individus, la pente de la fonction de valeur est plus importante du côté des pertes que du côté des gains.

Dans un second temps, nous avons étudié le comportement face aux changements des probabilités. Les études empiriques ont mis en évidence la tendance des individus à déformer les probabilités objectives. Ce phénomène a donné naissance aux modèles non linéaires dans lesquels les probabilités sont remplacées par des poids (Edwards, 1953, 1954; Quiggin, 1982; Yarri, 1987; Tversky et Kahneman, 1992). La façon de déformer les probabilités permet de caractériser un individu pessimiste ou optimiste. Ainsi apparaît une vision différente de l'attitude face au risque et la possibilité de modéliser le comportement d'une manière jointe en termes de probabilité et en termes de richesse. Cette possibilité a permis d'expliquer les comportements qui étaient jusqu'à présent considérés comme « non rationnels », comme par exemple, celui évoqué par Friedman et Savage (1948).

Finalement, nous avons présenté la théorie des perspectives de Tversky et Kahneman (1992) qui, en quelque sorte, réunit les fruits des recherches des cinquante dernières années et qui aujourd'hui semble décrire de manière satisfaisante le comportement des individus face au risque.

Dans la deuxième partie, nous avons passé en revue les modèles de gestion de portefeuille (Arzac et Bawa, 1977; Lopes, 1987; Harlow, 1991; Basak et Shapiro, 2001; Alexander et Baptista, 2002; Yiu, 2004) fondés sur le concept de *downside risk*. Certains de ces modèles (Arzac et Bawa, 1977; Lopes, 1987) combinés avec quelques éléments de la théorie de perspectives de Tversky et Kahneman (1979,1992), ont abouti à la théorie comportementale du portefeuille de Shefrin et Statman (2000). Ces auteurs ont montré que les investisseurs ne cherchent pas forcément une diversification optimale et peuvent choisir d'investir une partie non négligeable de

leur richesse dans des actifs ayant les caractéristiques d'une loterie. Plus précisément, un investisseur cherche tout d'abord à assurer un niveau de subsistance. Puis, avec la richesse restante, il est prêt à prendre des risques importants.

Ce type de comportement peut être justifié en termes de comptabilité mentale (Thaler 1980, 1985) - un des nombreux biais psychologiques mis en évidence par les études expérimentales. Parallèlement, les études récentes (Harlow, 1991; Alexander et Baptista, 2002; Levy et Levy, 2004; Broihanne et *al.*, 2006) montrent que les frontières efficientes obtenues dans le cadre de ces deux modèles coïncident dans le cas des actifs à rentabilité normale. Ainsi, d'une façon plus générale, nous pouvons nous demander sous quelles conditions le choix d'un individu agissant selon la théorie comportementale du portefeuille est différent de celui déterminé par l'approche classique.

Afin de répondre à cette question, nous proposons trois axes de recherche. Dans le chapitre suivant, nous étudions la déformation des probabilités objectives et l'impact de ce biais psychologique sur le choix de portefeuille. Ensuite, nous nous intéressons à l'équilibre établi sur un marché où tous les agents suivent le modèle BPT. Ceci fait l'objet du chapitre 3. Une étude empirique, proposée dans le chapitre 4 complète notre démarche.



## Chapitre 2

# Déformation des probabilités objectives dans la théorie comportementale du portefeuille





# 1. Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons présenté le développement des modèles non linéaires dans le contexte de la prise de décision dans un environnement risqué. Ces modèles supposent que l'attitude face au risque de l'individu est prise en compte, d'une part par une fonction d'utilité (ou une fonction de valeur) et, d'autre part, par une fonction de pondération<sup>48</sup>. Celle-ci s'applique à la fonction de distribution d'une loterie, supposée connue, ou d'une variable aléatoire dont les valeurs sont les paiements futurs d'un actif financier. Ainsi, la déformation des probabilités objectives, observée dans le comportement des individus, est intégrée dans les modèles de prise de décision par l'intermédiaire d'une fonction de pondération. Rappelons que la forme de cette dernière décrit le caractère pessimiste ou optimiste de l'agent individuel. Un individu pessimiste a tendance à surévaluer l'occurrence des événements défavorables et à leur attribuer des poids plus importants que les probabilités objectives correspondantes. En même temps, cet individu sous-évalue l'occurrence des événements favorables. Au contraire, un individu optimiste attribue des poids plus élevés que les vraies probabilités aux événements favorables et sous-évalue l'occurrence des événements défavorables.

Nous avons constaté dans le chapitre précédent que la déformation des probabilités objectives est de plus en plus souvent intégrée dans les modèles de gestion de portefeuille, notamment dans la théorie comportementale du portefeuille (BPT par la suite) de Shefrin et Statman (2000). Cependant, l'impact de ce phénomène sur le choix d'investissement des individus mérite d'être étudié plus précisément. En effet, il semblerait logique que le pessimisme pousse les individus à être prudents et à choisir les stratégies de sécurité, par exemple, l'achat de contrats d'assurance. Au contraire, un individu optimiste qui attribue à l'événement favorable un poids plus

---

<sup>48</sup> Sous l'hypothèse d'une fonction d'utilité linéaire, c'est-à-dire neutralité au risque dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée, l'attitude face au risque est entièrement caractérisée par la fonction de pondération.

important par rapport à sa vraie probabilité, semble attiré par des titres risqués comme des billets de loterie. En même temps, pouvons-nous affirmer que cet individu n'investirait jamais dans des contrats d'assurance ? De même, pouvons-nous affirmer qu'un individu pessimiste n'achèterait jamais des billets de loterie ? D'autant plus que d'après l'observation de Friedman et Savage (1948) les individus achètent parallèlement à leurs contrats d'assurance des billets de loterie. Ainsi, il semble délicat de définir d'une manière plus ou moins précise le comportement d'un individu optimiste (ou pessimiste) du point de vue de la gestion de portefeuille. Des études supplémentaires, notamment par le biais de l'économie expérimentale, sont nécessaires pour éclaircir ce point.

Dans ce contexte, le rôle de la déformation des probabilités dans la construction du portefeuille mérite, lui aussi, d'être précisé. Par exemple, le portefeuille optimal obtenu dans le modèle BPT de Shefrin et Statman (2000) est composé d'un titre peu risqué (voire sans risque) et d'un billet de loterie. Dans quelle mesure cette forme particulière du portefeuille optimal peut-elle être due au fait que l'individu déforme les probabilités objectives ? En fait, le résultat de Shefrin et Statman (2000) est valable pour toute fonction de pondération, y compris pour la fonction identité. Cela signifie que même si l'individu ne déforme pas les probabilités objectives, son portefeuille a tout de même cette forme particulière. Cependant, dans le chapitre précédent nous avons constaté que, toutes choses égales par ailleurs, la transformation des probabilités peut amener à des résultats différents de ceux obtenus sous les probabilités objectives. Pour cela, il semblerait ainsi que le véritable impact de la fonction de pondération sur le choix de l'investissement de l'individu ne soit pas facile à cerner. Dans ce chapitre, nous cherchons à étudier de quelle façon la déformation des probabilités influence le choix de portefeuille. Le modèle de Shefrin et Statman (2000) nous sert de point de départ.

Rappelons que dans le modèle BPT l'individu maximise l'espérance de la richesse finale, sa fonction d'utilité étant linéaire. En fait, l'attitude face au risque dans ce modèle est prise en compte par la fonction de pondération, mais aussi par la

contrainte de sécurité. La contrainte de sécurité  $P(W < A) \leq \alpha$ <sup>49</sup>, héritée de l'approche *safety first*, détermine l'ensemble des portefeuilles de sécurité, et traduit ainsi l'aversion aux pertes de l'individu. De cette manière, l'investisseur maximise l'espérance de sa richesse finale sous les probabilités déformées sur un sous-ensemble restreint de portefeuilles. Dans ce chapitre, nous supposons que le seuil de faillite admissible de l'agent est égal à 1 :  $\alpha = 1$ . Formellement, cette hypothèse permet d'éliminer l'effet de la contrainte dans le choix du portefeuille, car l'inégalité  $P(W < A) \leq 1$  est toujours vérifiée. Ainsi, l'attitude face au risque de l'agent est uniquement déterminée par la fonction de transformation des probabilités. Dans le chapitre suivant, nous reviendrons sur cette hypothèse et nous montrerons de quelle façon le portefeuille optimal est affecté par différentes valeurs de  $A$  et  $\alpha$ . Pour le moment, nous nous intéressons au choix de portefeuille d'un agent qui déforme les probabilités objectives par rapport à un agent qui ne les déforme pas. Concrètement, notre objectif consiste à comparer les portefeuilles optimaux de ces deux agents dans le cadre du modèle BPT. Ainsi, nous utilisons l'appellation « l'agent du type BPT » quand il s'agit d'un individu qui maximise l'espérance de sa richesse finale sous les probabilités transformées selon la règle de Quiggin (1993). Et nous utilisons l'appellation « l'agent du type VNM » quand il s'agit d'un agent qui maximise l'espérance de sa richesse finale sous les probabilités objectives<sup>50</sup>. D'une façon schématique, il s'agit de comparer les portefeuilles optimaux d'un agent maximisant  $E(W)$  avec celui qui maximise  $E_h(W)$ <sup>51</sup>.

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté certains travaux (Tversky et Kahneman, 1992; Levy et Levy, 2002; Wakker, 2003)<sup>52</sup> qui vont dans le même sens que notre étude. Cependant, ces auteurs se placent dans le contexte d'une théorie de prise de décision face aux choix risqués et discutent de l'importance de prendre en

---

<sup>49</sup>  $A$  désigne le niveau d'aspiration de l'individu (le niveau de la richesse souhaité) et  $\alpha$  est le seuil de faillite admissible (la probabilité de ne pas atteindre  $A$  ne doit pas dépasser  $\alpha$ ).

<sup>50</sup> Nous utilisons l'abréviation VNM de Von Neumann et Morgenstern (1947) car il s'agit ici d'un cas particulier de la théorie de l'utilité espérée où l'individu est caractérisé par une fonction d'utilité linéaire.

<sup>51</sup>  $h$  signifie que l'espérance est calculée sous les probabilités déformées selon la règle de Quiggin (1993).

<sup>52</sup> Voir aussi Yaari, 1987; Lauriola et Levin, 2001.

compte de manière jointe la fonction de pondération et la fonction d'utilité (ou la fonction de valeur). Dans notre cas, nous considérons un modèle de gestion de portefeuille particulier et nous cherchons à établir le véritable impact de la déformation des probabilités sur le choix d'investissement.

Le chapitre est organisé de la manière suivante. Nous commençons la section 2 en évoquant certaines difficultés opérationnelles qui apparaissent quand ce phénomène doit être mise en place dans les modèles de gestion du portefeuille. La suite de cette section est consacrée à l'étude du cas des deux actifs purs. En premier lieu, nous rappelons la forme du portefeuille optimal de l'agent du type VNM. Nous comparons ensuite ce résultat avec celui obtenu dans le cas d'un agent déformant les probabilités objectives. Cette analyse nous permettra de mettre en exergue un cas particulier – l'investissement dans l'actif sans risque – qui distingue les deux agents. Dans la section 3, nous vérifions ce résultat dans le cas de trois actifs. Une discussion est proposée à la section 4. La section 5 conclut ce chapitre.

## 2. Cas de deux actifs purs

Avant d'étudier en détail la déformation des probabilités objectives, nous mettons en évidence certaines difficultés opérationnelles qui apparaissent quand ce phénomène doit être intégré dans les modèles de gestion du portefeuille.

### 2.1. Le problème de mise en œuvre opérationnelle

Dans la littérature consacrée aux modèles non linéaires, un individu est qualifié de pessimiste s'il attribue aux résultats les plus défavorables (respectivement favorables) d'une loterie des poids plus élevés (respectivement plus faibles) que les

probabilités objectives correspondantes (Quiggin, 1993). Ce raisonnement suppose que l'agent se trouve confronté à une loterie dont les paiements et les probabilités sont connus. A titre d'exemple, considérons un jeu de pile et face avec une pièce de monnaie équilibrée. Supposons que l'agent ne gagne rien si la pièce tombe sur le côté pile et gagne 100 euros si elle tombe sur le côté face. Si l'agent est pessimiste il va croire qu'il a plus de chance de ne rien gagner que de gagner 100 euros. En d'autres termes, cet agent va attribuer un poids supérieur à  $\frac{1}{2}$  à l'événement « la pièce tombe sur le côté pile ». Au contraire, un agent optimiste a tendance à se concentrer sur l'événement favorable. Celui-là va croire qu'il a plus de chance de gagner 100 euros. Ainsi, cet individu attribue un poids plus important à l'événement « la pièce tombe sur le côté face ». Plus généralement, selon la règle de Quiggin (1993), l'individu ordonne tout d'abord les paiements futurs d'une loterie dans l'ordre croissant. Il attribue ensuite des poids à chaque paiement avant de calculer l'espérance ou l'utilité espérée de la loterie.

Cependant, ce raisonnement ne peut pas toujours s'appliquer dans un modèle de gestion de portefeuille. Afin d'illustrer ce point, considérons le modèle de Shefrin et Statman (2000). Les prix de  $n$  actifs purs, notés  $\pi_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , ainsi que les probabilités d'occurrence, notées  $p_k$ , sont supposés connus. Rappelons que l'investisseur fait son choix en maximisant l'espérance de la richesse finale  $W$  sous la contrainte de sécurité :

$$\begin{aligned} & \text{Max } E_h(W) \\ \text{s.c } & P(W < A) \leq \alpha \end{aligned}$$

où  $A$  désigne le niveau d'aspiration et  $\alpha$  est la probabilité de faillite admissible ; les deux paramètres sont propres à chaque individu. L'indice  $h$  indique qu'avant de calculer l'espérance l'agent déforme les probabilités objectives en fonction de son degré de pessimisme (ou d'optimisme). Notons  $p_k^h$ ,  $k = 1, \dots, n$  le poids qui remplace la probabilité objective  $p_k$  après cette transformation.

Le choix du portefeuille en tenant compte de la déformation des probabilités est effectué selon le schéma suivant. Shefrin et Statman (2000) supposent<sup>53</sup> qu'avant de choisir son portefeuille l'agent range les valeurs  $\frac{\pi_k}{p_k^h}$  dans l'ordre croissant, où  $\pi_k$  désigne le prix du k-ème actif pur et  $p_k^h$  est le poids attribué à l'événement « le k-ème état se réalise ». Puisque l'agent est capable de ranger les valeurs  $\frac{\pi_k}{p_k^h}$ , il doit aussi être capable de ranger les valeurs  $p_k^h$  car les prix des actifs sont connus. Or, les valeurs  $p_k^h$  dépendent du portefeuille en question que l'agent cherche à construire. En effet, comme nous venons de le rappeler, avant de transformer les probabilités en poids de décision, chaque individu classe les conséquences par ordre croissant. Il est ainsi nécessaire de connaître la valeur des conséquences de manière à pouvoir les ordonner. Or, celles-ci vont dépendre du portefeuille choisi par l'investisseur. Ainsi, pour pouvoir calculer les poids, il faut connaître l'ordre des paiements qui *a priori* n'est pas connu car le portefeuille n'est pas encore construit. Cette démarche est tout à fait légitime quand un individu est confronté à une loterie dont les résultats sont connus. Cependant, elle ne peut pas être mise en place de la même manière dans un modèle de gestion de portefeuille. En réalité, le procédé qui permettrait d'intégrer la déformation des probabilités objectives dans le choix de portefeuille est beaucoup plus compliqué. En s'appuyant sur la règle de Quiggin (1993), il est indispensable de ranger les paiements du portefeuille dans l'ordre croissant avant de calculer les poids correspondants. Ce procédé doit être effectué pour chaque portefeuille potentiel existant. Effectivement, du point de vue opérationnel, ce processus exige des moyens de calcul puissants.

De cette façon, la déformation des probabilités semble cohérente et même naturelle dans les modèles décrivant le comportement des individus face au risque car elle permet de tenir compte du degré de pessimisme de l'individu. Cependant, nous constatons qu'il s'agit d'un phénomène compliqué et, en tout cas, difficile à

---

<sup>53</sup> Voir la démonstration de Shefrin et Statman (2000), page 134.

mettre en œuvre quand il s'agit de l'intégrer dans un modèle de gestion de portefeuille.

Par ailleurs, son réel impact sur le choix de portefeuille reste à déterminer. Ceci est l'objet de la suite de ce chapitre. A travers le modèle BPT nous étudions plus précisément de quelle façon ce phénomène peut se manifester dans la gestion de portefeuille. Pour pouvoir comparer les portefeuilles optimaux des deux agents, nous commençons par rappeler les résultats de la maximisation de l'espérance de l'agent VNM.

## 2.2. Le choix de l'agent VNM. Rappel des résultats

Considérons une économie à 2 états de la nature  $\omega_1$  et  $\omega_2$  dont les probabilités d'occurrence sont respectivement notées  $p_1$  et  $p_2$ <sup>54</sup>. L'économie fonctionne sur une période entre deux dates 0 et  $T$ . Deux actifs purs  $e_1$  et  $e_2$  sont négociés sur le marché. En date  $T$  l'actif  $e_1$  paye 1 si l'état  $\omega_1$  se réalise et 0 dans l'état  $\omega_2$ . L'actif  $e_2$  ne paye rien si l'état  $\omega_1$  se réalise et 1 dans l'état  $\omega_2$ . L'offre des actifs  $n_i$   $i=1,2$  et les prix en date 0, notés  $\pi_i$ , sont supposés connus.

L'agent possède une dotation initiale uniquement en actifs purs; son portefeuille en date 0 est noté  $W_0 = (x_{01}, x_{02})$ . En fait, dans le monde des actifs purs la quantité de titres peut être identifiée avec la richesse. L'individu qui possède l'actif  $e_1$  en quantité  $x$  recevra la somme  $x$  si l'état 1 se réalise.

Nous supposons que l'investisseur fait son choix de portefeuille en maximisant l'espérance de la richesse finale, notée  $W = (x_1, x_2)$ , sous la contrainte budgétaire. Nous supposons aussi que les ventes à découvert ne sont pas autorisées. Plus précisément, le programme s'écrit :

---

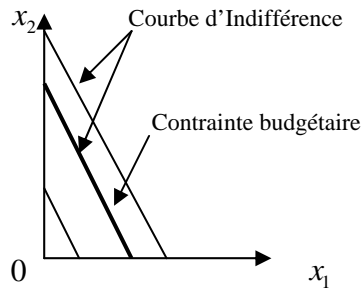
<sup>54</sup> Afin d'éviter le cas trivial nous supposons  $p_1 \neq p_2$ . Plus loin, dans le cas d'un plus grand nombre d'actifs nous supposerons que la distribution des probabilités n'est pas uniforme.



$$\begin{aligned}
& \text{Max } (x_1 p_1 + x_2 p_2) \\
& \text{s.c } (x_1 - x_{01})\pi_1 + (x_2 - x_{02})\pi_2 = 0 \quad (1) \\
& \quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

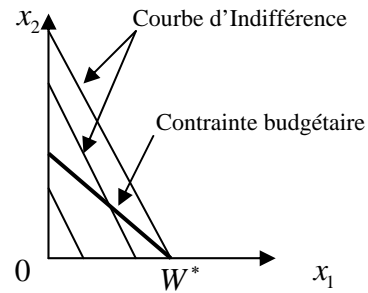
Il s'agit ici d'un agent neutre au risque dont les courbes d'indifférence sont des droites parallèles de pente  $-\frac{p_1}{p_2}$ . La contrainte du budget est la droite de pente  $-\frac{\pi_1}{\pi_2}$  passant par le point  $W_0$ . De cette façon, trois cas de figures sont possibles : les deux pentes sont égales (cas 1) ou l'une est plus grande que l'autre (cas 2 et 3). Si les deux pentes sont égales  $\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2}$ , (figure 2.1, cas1), la droite du budget coïncide avec une courbe d'indifférence. Dans ce cas l'agent est indifférent entre tous les portefeuilles qui se trouvent sur la droite budgétaire. Il peut donc investir dans un portefeuille sans risque ( $x_1 = x_2$ ) aussi bien que dans un portefeuille risqué, par exemple dans un portefeuille de la forme  $(x_1, 0)$  ou  $(0, x_2)$ , car tout portefeuille vérifiant la contrainte budgétaire lui procure la même satisfaction.

## Le choix de l'agent VNM



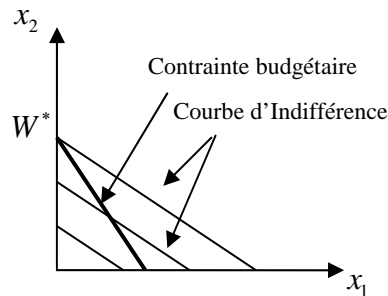
$$\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2}$$

**Cas 1.**



$$\frac{\pi_1}{\pi_2} < \frac{p_1}{p_2}$$

**Cas 2.**



$$\frac{\pi_1}{\pi_2} > \frac{p_1}{p_2}$$

**Cas 3.**

**Figure 2.1.**

Dans les deux autres cas  $\frac{\pi_1}{\pi_2} < \frac{p_1}{p_2}$  et  $\frac{\pi_1}{\pi_2} > \frac{p_1}{p_2}$ , l'agent préfère investir dans un seul

actif. Sur la figure 2.1, cas 2 et 3,  $W^*$  indique le portefeuille optimal. Plus

précisément, le portefeuille optimal est de la forme  $(x_1, 0)$  si  $\frac{\pi_1}{\pi_2} < \frac{p_1}{p_2}$  et de la forme

$(0, x_2)$  dans le cas inverse  $\frac{\pi_1}{\pi_2} > \frac{p_1}{p_2}$ . En d'autres termes, il est optimal d'investir dans

un actif dont le rapport du prix sur la probabilité d'occurrence  $\frac{\pi_i}{p_i}$  est minimal.

Concrètement, l'agent du type VNM investit toute sa richesse dans l'actif  $e_1$  si

$\frac{\pi_1}{p_1} < \frac{\pi_2}{p_2}$  (cas 2) et toute sa richesse dans l'actif  $e_2$  si  $\frac{\pi_1}{p_1} > \frac{\pi_2}{p_2}$  (cas 3).

$\square_+^2$  est l'ensemble de tous les portefeuilles disponibles<sup>55</sup>. Nous avons constaté que dans les cas 2 et 3 le portefeuille optimal de l'agent VNM se trouve à la frontière de l'ensemble  $\square_+^2$ . Le cas 1 est très particulier, l'individu est indifférent entre tout portefeuille qui satisfait la contrainte budgétaire. Dans ce cas nous constatons que parmi les portefeuilles optimaux il en existe deux qui appartiennent à la frontière de l'ensemble  $\square_+^2$ .

## 2.3. Le choix de l'agent du type BPT

Supposons maintenant qu'avant d'appliquer le critère d'espérance de la richesse, l'agent déforme les probabilités objectives selon la règle de Quiggin (1993). Ainsi, nous prenons en compte le degré du pessimisme (ou de l'optimisme) de l'individu. Nous cherchons à savoir de quelle façon ce phénomène psychologique influence le choix de l'agent. Cette fois-ci, le programme s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{Max } x_1 q_1 + x_2 q_2 \\ & \text{s.c } (x_1 - x_{01})\pi_1 + (x_2 - x_{02})\pi_2 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

où  $q_1$  et  $q_2$  sont des poids remplaçant les probabilités d'occurrence  $p_1$  et  $p_2$ . Les poids  $q_1$  et  $q_2$  sont définis différemment selon que  $x_1$  soit plus petit ou plus grand que  $x_2$ . Notons  $S_1 = \{(x_1, x_2) / x_1 \leq x_2\}$  et  $S_2 = \{(x_1, x_2) / x_2 \leq x_1\}$ . Nous soulignons qu'a

---

<sup>55</sup>  $\square_+^2 = \{(x_1, x_2) / x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$

*priori* les poids ne sont pas définis de la même façon sur ces deux sous-ensembles. En effet,

$$q_1 = w(p_1) \text{ et } q_2 = w(p_1 + p_2) - w(p_1) = 1 - w(p_1) \text{ si } x_1 < x_2$$

et

$$q_2 = w(p_2) \text{ et } q_1 = w(p_2 + p_1) - w(p_2) = 1 - w(p_2) \text{ si } x_2 < x_1^{56}$$

où  $w$  est une fonction de pondération telle que  $w(0) = 0$  et  $w(1) = 1$  qui traduit le degré de pessimisme ou d'optimisme de l'individu. Précisons qu'il ne s'agit pas d'une fonction de pondération particulière,  $w$  désigne toute fonction de pondération, nous sommes donc dans un cas général.

Nous constatons que la déformation des probabilités objectives induit la division de l'ensemble  $\square_+^2$  des portefeuilles disponibles en deux sous-ensembles  $S_1$  et  $S_2$ . La pente des courbes d'indifférence  $-\frac{q_1}{q_2}$  est égale à  $-\frac{w(p_1)}{1-w(p_1)}$  dans le domaine  $S_1$  et à  $-\frac{1-w(p_2)}{w(p_2)}$  dans  $S_2$ . Cependant, à cause de l'égalité  $w(p_1) + w(p_2) = 1$ , nous montrons que les deux pentes sont égales :

$$\frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} = \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)}.$$

En effet,

$$\begin{aligned} w(p_1)w(p_2) &= (1-w(p_2))(1-w(p_1)) \\ w(p_1)w(p_2) &= 1-w(p_1)-w(p_2)+w(p_1)w(p_2) \\ w(p_1)+w(p_2) &= 1. \end{aligned}$$

Puisque les pentes des courbes d'indifférence sont les mêmes dans les sous-ensembles  $S_1$  et  $S_2$ , cela signifie que les courbes d'indifférence d'un individu

---

<sup>56</sup> Dans le cas particulier où  $x_1 = x_2$ , la seule solution du système 2 consiste à acheter  $\frac{W_0}{\pi_1 + \pi_2}$  de chaque actif. La question du système des poids ne se pose pas puisqu'il s'agit ici d'un événement certain.

déformant les probabilités sont des droites parallèles de pente  $-\frac{q_1}{q_2} = -\frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} = \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)}$ . Ainsi, le portefeuille optimal de cet agent a la même structure que le portefeuille optimal de l'agent VNM; c'est-à-dire un portefeuille sur la frontière de l'ensemble  $\square_+^2$ . Précisons néanmoins que les deux agents ne vont pas forcément choisir le même portefeuille car, *a priori*, les pentes des courbes d'indifférence ne coïncident pas :  $-\frac{q_1}{q_2} \neq -\frac{p_1}{p_2}$ . Par exemple, si  $\frac{p_1}{p_2} < \frac{\pi_1}{\pi_2} < \frac{q_1}{q_2}$ , l'agent VNM investit toute sa richesse dans l'actif  $e_2$  car ses courbes d'indifférence sont moins pentues que la contrainte budgétaire (point  $W$  sur la figure 2.2). Au contraire, l'agent du type BPT place toute sa richesse dans l'actif  $e_1$  pour les mêmes raisons (point  $W^h$  sur la figure 2.2).

### Agent VNM vs. Agent BPT

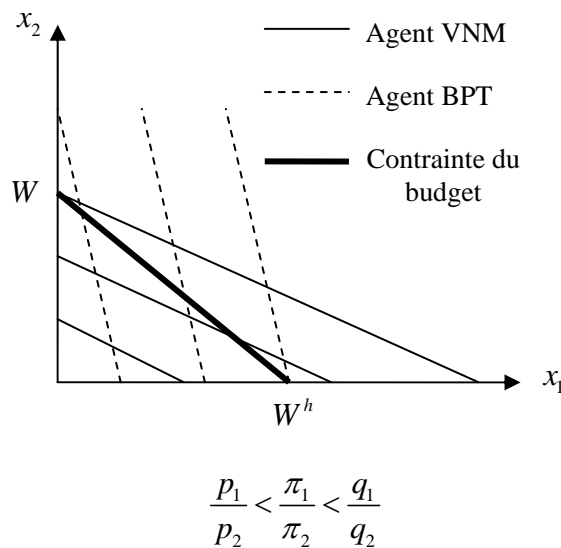


Figure 2.2.

Cependant, il n'y a pas de différences significatives dans la structure des portefeuilles de ces deux individus; tous les deux investissent dans un seul actif.

Nous avons abouti à cette conclusion en nous appuyant sur l'égalité  $w(p_1) + w(p_2) = 1$ . D'ailleurs, une égalité identique est vérifiée dans le cas de plus grand nombre d'états. En effet, pour tout  $n$  nous avons<sup>57</sup> :

$$w(p_1) + w(p_2) + \dots + w(p_n) = 1 \quad (3)$$

Or, si  $n > 2$  la signification de (3) n'est plus la même. Par exemple, si  $n = 3$ , l'ensemble des portefeuilles accessibles est divisé cette fois-ci sur six sous-ensembles, chacun étant caractérisé par son propre système de poids. A l'intérieur de chacun des sous-ensembles les plans d'indifférence sont parallèles entre eux car ils sont définis en fonction du même système de poids. Par contre, deux plans d'indifférence appartenant à deux sous-ensembles différents ne sont pas parallèles (comme dans le cas de deux actifs). Ainsi, même si l'égalité (3) est vérifiée, nous ne pouvons plus en déduire que les plans d'indifférence correspondants aux différents sous-ensembles sont parallèles<sup>58</sup>. Or, nous allons montrer que ce fait peut jouer un rôle déterminant en termes de choix de portefeuille. Plus précisément, ce constat peut amener à des choix de portefeuilles très particuliers, en tout cas différents des choix de l'agent du type VNM.

Puisque cette démonstration nécessite une analyse graphique, nous préférons, pour des raisons de clarté, considérer le cas de deux actifs. En supposant  $w(p_1) + w(p_2) \neq 1$ , nous traitons le cas où les deux pentes des courbes d'indifférence  $-\frac{w(p_1)}{1-w(p_1)}$  et  $-\frac{1-w(p_2)}{w(p_2)}$ , correspondantes aux sous-ensembles  $S_1$  et  $S_2$  respectivement, ne sont pas égales. Cela implique que les courbes d'indifférence appartenant aux différents sous-ensembles ne sont pas parallèles. Ainsi, nous avons créé une situation artificielle qui ne peut pas avoir lieu (puisque dans le cas de deux actifs l'égalité  $w(p_1) + w(p_2) = 1$  implique que les courbes d'indifférences sont parallèles), mais qui nous permettra de détecter les conséquences du phénomène apparu dans le cas de trois actifs sur le choix du portefeuille. Tout d'abord, nous

---

<sup>57</sup> Quiggin (1982).

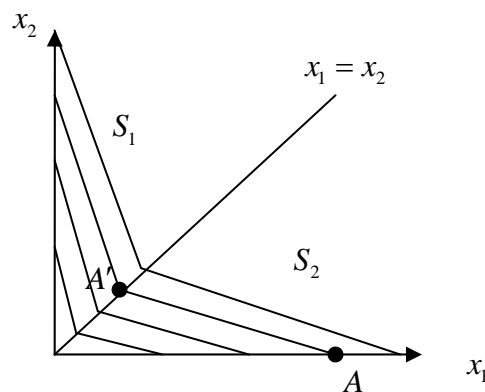
<sup>58</sup> Les calculs sont présentés en annexe A.1.

allons utiliser une approche graphique qui nous semble plus pédagogique dans ce cas. Ensuite, nous proposons une approche analytique afin de confirmer nos résultats.

## 2.4. Approche graphique

Si  $w(p_1) + w(p_2) \neq 1$ , deux possibilités se présentent en fonction que les courbes d'indifférence dans le domaine  $S_1$  soient plus pentues ou moins pentues que celles dans le domaine  $S_2$ .

Considérons d'abord le cas représenté sur la figure 2.3 où les courbes d'indifférence dans  $S_1$  sont plus pentues que celles dans  $S_2$  :



$$\frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} > \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)}$$

**Figure 2.3.**

Rappelons que le programme de l'agent maximisant l'espérance de sa richesse future est un cas particulier de la théorie de l'utilité espérée où la fonction d'utilité est de forme linéaire. Il est donc important de mentionner que la forme des courbes d'indifférence représentées sur la figure 2.3 est due à la déformation des probabilités objectives et pas à la fonction d'utilité. Ces courbes, qui sont convexes,

caractériseraient un agent riscophobe dans le contexte standard. En effet, comparons le portefeuille risqué  $A$  et le portefeuille sans risque  $A'$  qui se trouvent sur la même courbe d'indifférence. Pour que l'agent soit indifférent entre  $A$  et  $A'$  il faut que la quantité en actif  $e_1$  dans le portefeuille risqué  $A$  soit très élevée par rapport à celle du portefeuille sans risque  $A'$ .

Afin de trouver le portefeuille optimal, comparons les pentes des courbes d'indifférence avec la pente de la droite budgétaire respectivement dans  $S_1$  et  $S_2$ . Les trois cas sont représentés sur la figure 2.4.

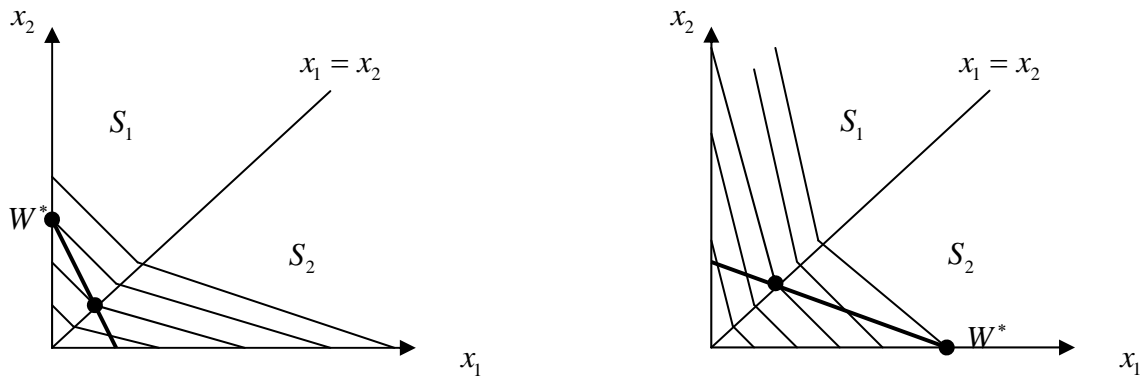
**Cas 1.** La droite de budget est plus pentue que les courbes d'indifférence dans  $S_1$  (de même que dans  $S_2$ ) :

$$\frac{\pi_1}{\pi_2} > \frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} > \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)}$$

Dans ce cas la solution optimale dans  $S_1$  est un portefeuille de la forme  $(0, x_2)$ . En même temps, dans  $S_2$  le portefeuille optimal se trouve sur la bissectrice. Finalement, le portefeuille optimal (dans  $\square_+^2$ ) est de la forme  $(0, x_2)$ . En d'autres termes, l'agent préfère investir dans un seul actif  $e_2$ .



## Le choix de l'agent BPT

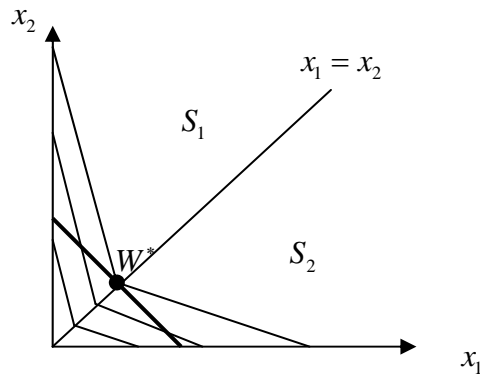


$$\frac{\pi_1}{\pi_2} > \frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} > \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)}$$

**Cas 1**

$$\frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} > \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)} > \frac{\pi_1}{\pi_2}$$

**Cas 2**



$$\frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} > \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)} > \frac{\pi_1}{\pi_2}$$

**Cas 3**

**Figure 2.4.**

*Cas 2.* La droite de budget est moins pentue que les courbes d'indifférence dans \$S\_1\$ et elle est moins pentue que les courbes d'indifférence dans \$S\_2\$ :

$$\frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} > \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)} > \frac{\pi_1}{\pi_2}$$

Dans ce cas, la solution optimale dans  $S_1$  se trouve sur la bissectrice et celle dans  $S_2$  est de la forme  $(x_1, 0)$ . Finalement le portefeuille optimal est aussi de la forme  $(x_1, 0)$ . L'agent investit toute sa richesse dans l'actif  $e_1$ .

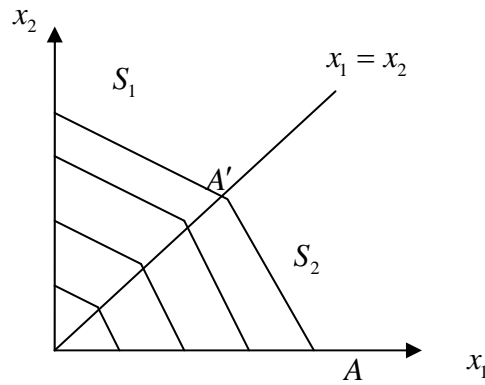
**Cas 3.** La droite de budget est moins pentue que les courbes d'indifférence dans  $S_1$  et est plus pentue que les courbes d'indifférence dans  $S_2$  :

$$\frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} > \frac{\pi_1}{\pi_2} > \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)}$$

Dans ce cas, un point sur la bissectrice est à la fois la solution optimale dans  $S_1$  et dans  $S_2$ . Ainsi, le portefeuille optimal (dans  $\square_+^2$ ) est un portefeuille sans risque.

Nous constatons que les portefeuilles optimaux obtenus dans les cas 1 et 2 sont identiques à ceux dans la théorie de l'utilité espérée d'un agent neutre au risque. En effet, l'agent investit toute sa richesse dans un seul actif, celui qui est caractérisé par le rapport du prix sur le poids  $\frac{\pi_i}{q_i}$  minimal. Nous avons donc  $\frac{\pi_2}{q_2} < \frac{\pi_1}{q_1}$  dans le cas 1 et l'inégalité inverse dans le cas 2. Par contre, le résultat obtenu dans le cas 3 est plus intéressant : le portefeuille optimal est un actif sans risque. Cela signifie qu'un agent neutre au risque et qui déforme les probabilités objectives de la façon représentée sur la figure 3 peut choisir d'investir dans un portefeuille sans risque au lieu d'allouer toute sa richesse dans un seul actif comme il le ferait s'il ne déformait pas les probabilités.

Considérons maintenant le cas représenté sur la figure 2.5, où les courbes d'indifférence dans  $S_1$  sont moins pentues que celles dans  $S_2$  :



$$\frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} < \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)}$$

**Figure 2.5.**

Cette fois-ci, les courbes d'indifférence sont concaves et elles caractériseraient un agent ayant du goût pour le risque dans le contexte de la théorie standard (alors qu'ici sa fonction d'utilité est linéaire).

Nous montrons que dans ce cas le choix optimal de l'agent consiste à investir toute sa richesse dans un seul actif comme dans le cas de l'agent VNM. Pour cela, nous utilisons la même technique en comparant les pentes des courbes d'indifférence avec la pente de la droite budgétaire dans  $S_1$  et  $S_2$  séparément<sup>59</sup>.

Après avoir analysé toutes les possibilités nous constatons que les solutions optimales possibles pour un agent BPT peuvent être des portefeuilles de deux types. Premièrement, à l'optimum cet agent peut se comporter de la même façon que l'agent VNM, c'est-à-dire investir toute sa richesse dans un des actifs. La deuxième possibilité consiste à choisir un actif sans risque. Dans le paragraphe suivant nous proposons une méthode générale de résolution des problèmes de maximisation. Ceci nous permet de mettre en évidence certaines difficultés de raisonnement analytique qui peuvent amener à des conclusions erronées.

<sup>59</sup> Les calculs sont donnés en annexe A.2.

## 2.5. Approche analytique

Dans un contexte où les prix des actifs purs et les probabilités d'occurrence sont connus il est optimal d'investir dans un titre (ou des titres) caractérisé par le « rapport prix sur probabilité » minimal. En effet, chaque titre paye le même montant égal à 1 si l'état correspondant se réalise. Supposons un instant que les probabilités des états soient égales. Dans ce cas simplifié le critère de choix mentionné signifie qu'il est optimal d'investir dans le titre le moins cher. Par ailleurs, nous avons utilisé ce critère quand nous avons rappelé les résultats classiques, à savoir le choix optimal de l'agent VNM<sup>60</sup>.

Dans le modèle BPT l'agent déforme les probabilités objectives en les remplaçant par des poids. Ainsi, Shefrin et Statman (2000) suggèrent qu'il est optimal d'investir dans un titre dont le rapport prix sur poids est minimal. Nous avons constaté au début de ce chapitre les difficultés opérationnelles qui apparaissent quand le critère « rapport prix sur poids » doit être mis en place. Dans ce paragraphe nous montrons que ce critère peut amener à des conclusions incorrectes.

Considérons un agent qui maximise l'espérance de sa richesse finale en remplaçant les probabilités objectives par des poids selon la règle de Quiggin (1993). Nous cherchons à résoudre le problème de maximisation sur le sous-ensemble  $S_1$ . Le raisonnement analogue peut être établi sur le sous-ensemble  $S_2$ ; il suffit pour cela de remplacer  $x_1$  par  $x_2$  et de recalculer les poids correspondants.

Le programme de l'agent s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{Max } x_1 q_1 + x_2 q_2 \\ & \text{s.c } (x_1 - x_{01})\pi_1 + (x_2 - x_{02})\pi_2 = 0 \\ & x_1 \geq 0, x_1 \leq x_2 \end{aligned} \quad (4)$$

---

<sup>60</sup> Voir I.1.1.

où  $q_1$  et  $q_2$  sont définis par :

$$q_1 = w(p_1) \text{ et } q_2 = w(p_1 + p_2) - w(p_1) = 1 - w(p_1).$$

Le lagrangien  $L$  du programme (4) est :

$$L = x_1 q_1 + x_2 q_2 - \lambda[(x_1 - x_{01})\pi_1 + (x_2 - x_{02})\pi_2] + \mu_1 x_1 - \mu_2 (x_1 - x_2)$$

où  $\lambda$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont des constantes. Nous cherchons à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = q_1 - \lambda\pi_1 + \mu_1 - \mu_2 = 0 & 4.1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_2} = q_2 - \lambda\pi_2 + \mu_2 = 0 & 4.2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x_1 - x_{01})\pi_1 + (x_2 - x_{02})\pi_2 = 0 & 4.3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_1 x_1 = 0; \quad \mu_2 (x_1 - x_2) = 0; & 4.4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_1 \geq 0; \quad \mu_2 \geq 0; & 4.5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 \geq 0; \quad x_1 - x_2 \leq 0. & 4.6 \end{cases}$$

Quatre cas de figures sont possibles selon que les constantes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  soient strictement positives ou nulles. Les calculs sont donnés en annexe A.3. Ici, nous présentons un des 4 cas possibles qui nous intéresse en particulier.

Si  $\mu_1 = 0$  et  $\mu_2 > 0$  nous avons  $x_1 = x_2$  d'après 4.4. Ainsi, le portefeuille optimal est l'actif sans risque. En même temps,  $q_1 - \lambda\pi_1 > 0$  et  $q_2 - \lambda\pi_2 < 0$  d'après 4.1 et 4.2. Nous en déduisons  $\frac{\pi_1}{q_1} < \frac{\pi_2}{q_2}$ .

D'une part, nous constatons que l'inégalité  $\frac{\pi_1}{q_1} < \frac{\pi_2}{q_2}$  est la condition nécessaire pour que l'agent investisse dans l'actif sans risque. D'autre part, si cette condition est établie, il serait optimal d'investir toute la richesse dans l'actif  $e_1$  car celui-ci correspond au rapport « prix sur poids » minimal. De ce fait, le portefeuille optimal

doit être de la forme  $(x_1, 0)$ , qui n'est pas le portefeuille sans risque. Cette contradiction est due au fait que l'investisseur cherche un portefeuille d'une forme particulière, à savoir  $x_1 \leq x_2$ . La condition  $\frac{\pi_1}{q_1} < \frac{\pi_2}{q_2}$  pousse l'agent à investir le maximum dans l'actif  $e_1$ . Mais, puisque l'investissement dans  $e_1$  doit rester inférieur à celui dans  $e_2$ , l'agent choisit l'actif sans risque. Nous illustrons ce point sur la figure 2.6.

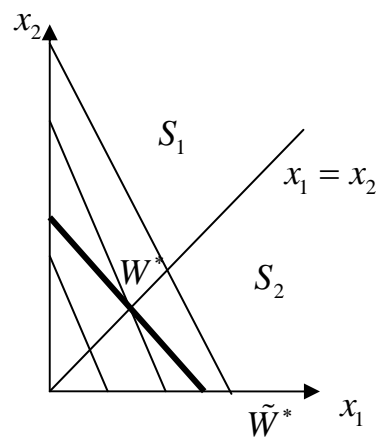


Figure 2.6.

Les courbes d'indifférence sont moins pentues que la droite budgétaire. Nous avons bien  $\frac{\pi_1}{q_1} < \frac{\pi_2}{q_2}$ . Si nous cherchons une solution dans l'ensemble  $S_1$  le portefeuille doit satisfaire la condition  $x_1 \leq x_2$ . Ainsi, il est optimal d'investir dans l'actif sans risque  $W^*$ . Par contre, en l'absence de cette hypothèse, c'est-à-dire sur l'ensemble  $\square_+^2$ , le portefeuille optimal  $\tilde{W}^*$  est de la forme  $(x_1, 0)$ . Cette fois-ci l'agent mise toute sa richesse sur l'actif dont le rapport du prix sur le poids est minimal.

De cette façon, l'utilisation du critère « rapport prix sur poids » dans le cas d'un investisseur déformant les probabilités objectives peut amener à des conclusions incorrectes. Ainsi, nous soulignons qu'il faut rester vigilant quand il s'agit d'appliquer aux probabilités déformées un raisonnement établi dans un contexte des probabilités objectives.

L'étude de cas de 2 actifs nous a permis d'avoir une intuition sur un résultat général qui peut éventuellement être établi dans le cas d'un plus grand nombre d'actifs. Pour le moment, il semble que la déformation des probabilités peut pousser un agent neutre au risque en termes de la théorie de l'utilité espérée à choisir l'actif sans risque à l'optimum. En outre, cela signifie que l'attitude face au risque d'un investisseur peut être captée uniquement par sa fonction de pondération. En effet, dans le cas considéré, le même agent peut opter pour deux types de solutions selon les conditions sur  $w$  : un portefeuille risqué ou le portefeuille sans risque. Toutefois, dans le premier chapitre nous avons évoqué de nombreux travaux (Yaari, 1987; Tversky et Kahneman, 1992; Lauriola et Levin, 2001; Wakker, 2003) qui soulignent l'importance de tenir compte de deux composantes, la fonction de valeur et la fonction de pondération, dans le comportement d'un seul individu.

Certes, la supposition  $w(p_1) + w(p_2) \neq 1$  qui a rendu possible notre analyse n'est *a priori* pas vérifiée. Cette étude nous a permis d'avoir une idée sur un résultat général. En nous fondant sur cette analyse, nous pouvons supposer que si  $n \geq 3$ , un agent déformant les probabilités objectives peut choisir un actif sans risque à l'optimum. Si notre hypothèse est confirmée, elle va à l'encontre des résultats connus. Notre objectif à présent est d'étudier le cas de trois actifs et d'établir si notre hypothèse est vérifiée et sous quelles conditions.

### 3. Cas de trois actifs purs : $n=3$

Concrètement, nous cherchons à établir, si l'investissement dans l'actif sans risque peut être optimal pour un agent du type BPT dans le cas de trois actifs purs. Au premier abord, le raisonnement graphique semble difficile à appliquer si  $n \geq 3$ . Pour cette raison, nous avons essayé de résoudre ce problème en utilisant la méthode générale de résolution des problèmes de maximisation.

### 3.1 Approche Analytique

Considérons un agent qui déforme les probabilités objectives. Son programme s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } x_1 q_1 + x_2 q_2 + x_3 q_3 \\
 & \text{s.c } (x_1 - x_{01})\pi_1 + (x_2 - x_{02})\pi_2 + (x_3 - x_{03})\pi_3 = 0 \\
 & x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0
 \end{aligned} \tag{5}$$

où  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  sont des poids remplaçant les probabilités d'occurrence  $p_1$ ,  $p_2$  et  $p_3$  respectivement. Les valeurs des poids dépendent de l'ordre des paiements du portefeuille. Comme nous l'avons déjà constaté l'ensemble de tous les portefeuilles disponibles est divisé en 6 sous-ensembles notés  $S_{ijk}$  :

$$S_{ijk} = \{W / 0 \leq x_i < x_j < x_k; i, j, l = 1, 2, 3 \text{ et } i \neq j \neq k\}.$$

A chacun de ces sous-ensembles correspond le système de poids  $q_i$ ,  $q_j$  et  $q_k$ , *a priori* différents, définit selon la règle de Quiggin (1993) :

$$\begin{aligned}
 q_i &= w(p_i), \\
 q_j &= w(p_i + p_j) - w(p_i), \\
 q_k &= w(p_i + p_j + p_k) - w(p_i + p_j) = 1 - w(p_i + p_j).
 \end{aligned}$$

Par exemple, dans le cas où  $x_2 < x_1 < x_3$  nous avons :

$$\begin{aligned}
 q_2 &= w(p_2), \\
 q_1 &= w(p_2 + p_1) - w(p_2), \\
 q_3 &= w(p_2 + p_1 + p_3) - w(p_2 + p_1) = 1 - w(p_2 + p_1).
 \end{aligned}$$



Cet ensemble de portefeuilles est noté  $S_{213}$ . Les poids ne sont pas définis de la même façon si l'ordre des paiements est modifié. Si  $W \in S_{123}$ , où  $S_{123} = \{(x_1, x_2, x_3) / 0 < x_1 < x_2 < x_3\}$ , les poids  $q_1$ ,  $q_2$  et  $q_3$  sont définis par :

$$\begin{aligned} q_1 &= w(p_1), \\ q_2 &= w(p_1 + p_2) - w(p_1), \\ q_3 &= w(p_1 + p_2 + p_3) - w(p_1 + p_2) = 1 - w(p_1 + p_2). \end{aligned}$$

Ainsi, le programme 5 doit être résolu sur chaque  $\bar{S}_{ijk}$ <sup>61</sup> :

$$\begin{aligned} & \text{Max } x_i q_i + x_j q_j + x_k q_k \\ \text{s.c } & (x_i - x_{0i})\pi_i + (x_j - x_{0j})\pi_j + (x_k - x_{0k})\pi_k = 0 \\ & x_i \geq 0; \quad x_i \leq x_j; \quad x_j \leq x_k. \end{aligned}$$

Le lagrangien  $L_{ijk}$  est défini par :

$$\begin{aligned} L_{ijk} &= x_i q_i + x_j q_j + x_k q_k - \lambda((x_i - x_{0i})\pi_i + (x_j - x_{0j})\pi_j + (x_k - x_{0k})\pi_k) \\ & \quad + \mu_1 x_i - \mu_2(x_i - x_j) - \mu_3(x_j - x_k) \end{aligned}$$

où  $\mu_1 \geq 0$ ,  $\mu_2 \geq 0$  et  $\mu_3 \geq 0$ . Nous cherchons les solutions du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i - \lambda \pi_i + \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ q_j - \lambda \pi_j + \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ q_k - \lambda \pi_k + \mu_3 = 0 \\ c.b \\ \mu_1 x_i = 0; \quad \mu_2(x_i - x_j) = 0; \quad \mu_3(x_j - x_k) = 0; \\ x_i \geq 0; \quad x_i \leq x_j; \quad x_j \leq x_k. \end{array} \right. \quad (6)$$

---

<sup>61</sup> L'ensemble  $\bar{S}_{ijk} = \{W / 0 \leq x_i \leq x_j \leq x_k; \quad i, j, l = 1, 2, 3 \text{ et } i \neq j \neq k\}$  et la fermeture de  $S_{ijk}$  dans  $\square^3$ .

Remarquons tout d'abord que dans les cas où les contraintes  $x_i \leq x_j$  et  $x_j \leq x_k$  ne sont pas saturées nous sommes dans un cas similaire à celui de l'agent VNM<sup>62</sup>. Par contre, si au moins une de ces contraintes est saturée, par exemple  $\mu_2 > 0$ , le système (6) ne correspond pas tout à fait au programme de maximisation de l'agent. En effet, supposer  $\mu_2 > 0$  revient à chercher une solution sous forme  $x_i = x_j$ . Or, sur le plan  $x_i = x_j$  le système de poids n'est plus la même que dans l'ensemble  $S_{ijk}$  où  $x_i$  est strictement inférieur à  $x_j$ . Nous illustrons ce changement de poids dans l'exemple suivant :

### *Exemple illustratif*

Nous considérons un marché composé de 4 actifs purs  $e_1, \dots, e_4$ . Les probabilités d'occurrence sont notées  $p_1, p_2, p_3, p_4$ . Soit un portefeuille  $P$  composé de 5 unités de l'actif  $e_2$ , de 5 unités de l'actif  $e_3$  et de 10 unités de l'actif  $e_4$ .

$$P = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 0 & 5 & 5 & 10 \end{pmatrix}$$

Avant de calculer les poids correspondants, l'individu agrège les probabilités associées aux événements identiques. Concrètement, les états de la nature 2 et 3 sont perçus par l'individu comme un seul état associé à l'événement « recevoir 5 ». Le portefeuille  $P$ , du point de vue de l'investisseur est de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ p_1 & p_2 + p_3 & p_4 \end{pmatrix}.$$

Ce portefeuille regroupe les mêmes paiements et somme des probabilités correspondantes. Dans les travaux de Kahneman et Tversky (1979) ce processus fait partie de la phase préliminaire appelée *editing phase* qui précède l'évaluation du portefeuille.

---

<sup>62</sup>Les calculs sont donnés en annexe A.4.

Les poids seront alors définis par :

$$\begin{aligned}q_1 &= \omega(p_1), \\q_{23} &= \omega(p_1 + p_2 + p_3) - \omega(p_1) \\q_4 &= 1 - \omega(p_1 + p_2 + p_3).\end{aligned}$$

Ainsi, ce procédé tout à fait légitime réduit la dimension du portefeuille. Dans cet exemple un portefeuille à 4 résultats possibles devient un portefeuille à 3 résultats possibles.

En revenant à la discussion sur les solutions du système (6), nous constatons que si  $\mu_2 > 0$ , c'est-à-dire que le portefeuille optimal est tel que  $x_i = x_j$ , le programme de maximisation de l'agent doit être réécrit. Une autre question concerne le cas où les deux contraintes  $x_i \leq x_j$  et  $x_j \leq x_k$  sont simultanément saturées. Cela revient à supposer  $\mu_2 > 0$  et  $\mu_3 > 0$  dans le système (6) et donc  $x_i = x_j = x_k$ . D'une part, ce cas particulier est le plus intéressant car la solution correspondante est l'actif sans risque. D'autre part, supposer que les deux contraintes sont saturées amène le problème de maximisation de l'agent à une dimension.

Finalement, en essayant de résoudre ce système nous nous sommes heurtés aux mêmes types de difficultés que celles présentées dans le paragraphe précédent. En fait, la méthode analytique ne permet pas d'établir des conditions sur les poids conduisant l'individu à investir dans un actif sans risque<sup>63</sup>.

D'une façon générale, nous constatons une fois de plus, que la démarche qui consiste à transformer des probabilités objectives en poids, exige beaucoup de précautions dans un contexte de gestion de portefeuille où les paiements finaux des titres ne sont pas connus.

Dans le paragraphe suivant, nous utilisons une autre méthode, fondée sur la représentation graphique. Cette méthode nous permettra d'établir une condition

---

<sup>63</sup> Les calculs détaillés avec les explications sont présentées en annexe A.4.

nécessaire et suffisante pour que l'actif sans risque soit le choix optimal pour un agent déformant les probabilités objectives.

## 3.2. Approche graphique. Condition nécessaire et suffisante

Nous utilisons une approche graphique pour trouver tout d'abord une condition suffisante (que nous prouvons par la suite) pour que l'actif sans risque soit la solution du système (6). Nous montrons que cette condition est aussi nécessaire.

D'après les trois dernières équations de (6) nous cherchons une solution dans l'ensemble  $S_{ijk}$ . A l'intérieur de  $S_{ijk}$  les plans d'indifférence définis par les équations :

$$x_i q_i + x_j q_j + x_k q_k = \text{const}$$

sont des plans parallèles. Formellement, on se retrouve ainsi dans un cas de l'agent VNM qui cherche un portefeuille maximisant l'espérance non pas dans  $\square_+^3$ , mais dans  $S_{ijk}$  et avec la distribution de probabilité définie par  $(q_i, q_j, q_k)$ <sup>64</sup>.

Nous allons ainsi établir d'une façon intuitive les conditions sur les poids  $q_i$ ,  $q_j$  et  $q_k$ , mais nous montrons ensuite, d'une manière rigoureuse, que ces conditions sont nécessaires et suffisantes pour que l'agent BPT investisse dans un actif sans risque.

$S_{ijk}$  est un sous-ensemble de  $\square_+^3$  borné par les plans  $x_i = x_j$  et  $x_j = x_k$ . La droite  $x_i = x_j = x_k$  est l'intersection de ces deux plans. La forme du portefeuille optimal dans  $S_{ijk}$  est définie par la disposition du plan de budget :

---

<sup>64</sup> Une méthode graphique analogue pour un agent VNM est présentée en annexe A.5.

$$x_i \pi_i + x_j \pi_j + x_k \pi_k - W_0 = 0$$

par rapport aux plans d'indifférence. Les intersections de ces plans avec les plans  $x_i = x_j$  et  $x_j = x_k$  permettent de visualiser cette disposition. Le portefeuille optimal se trouve forcément sur la frontière de  $S_{ijk}$  puisqu'il s'agit de maximiser une fonction linéaire. Pour que l'actif sans risque soit le portefeuille optimal il faut que les courbes d'indifférence soient plus pentues que la droite budgétaire dans les plans  $x_i = x_j$  et  $x_j = x_k$ . Dans ce cas, l'intersection du plan de budget avec le plan d'indifférence le plus élevé dans  $S_{ijk}$  est un point sur la droite  $x_i = x_j = x_k$ . Concrètement, si  $x_i = x_j$  nous avons :

$$x_i (q_i + q_j) + x_k q_k = \text{const}$$

$$x_i (\pi_i + \pi_j) + x_k \pi_k - W_0 = 0$$

Le fait que la pente des courbes d'indifférence est plus grande que celle de la contrainte budgétaire se traduit par :

$$\frac{q_i + q_j}{q_k} > \frac{\pi_i + \pi_j}{\pi_k} \quad (7)$$

De même, si  $x_j = x_k$  nous avons :

$$x_i q_i + x_j (q_j + q_k) = \text{const}$$

$$x_i \pi_i + x_j (\pi_j + \pi_k) - W_0 = 0$$

et la condition sur les pentes devient :

$$\frac{q_i}{q_j + q_k} > \frac{\pi_i}{\pi_j + \pi_k} \quad (8)$$

Remarquons qu'en cas d'égalité dans les équations (7) et (8) l'actif sans risque est aussi le portefeuille optimal. Dans ce cas particulier l'agent est indifférent entre l'actif sans risque et d'autres portefeuilles situés sur  $x_i = x_j$  (équation 6) ou sur  $x_j = x_k$  (équation 8). Or, par analogie avec le cas des deux actifs, nous nous intéressons à la situation dans laquelle l'actif sans risque est le seul choix possible, c'est-à-dire il est le seul portefeuille optimal. Nous considérons donc les inégalités strictes dans (7) et (8).

Montrons d'abord que les conditions (7) et (8) forment *une condition suffisante* pour que l'actif sans risque soit une solution du système (6). Supposons que l'équation (7) soit vérifiée. D'après les trois premières équations du système (6) nous avons :

$$\frac{q_i + q_j}{q_k} = \frac{\lambda(\pi_i + \pi_j) - \mu_1 + \mu_3}{\lambda\pi_k - \mu_3} > \frac{\pi_i + \pi_j}{\pi_k}.$$

Ou

$$\lambda(\pi_i + \pi_j)\pi_k - \mu_1\pi_k + \mu_3\pi_k > \lambda(\pi_i + \pi_j)\pi_k - \mu_3(\pi_i + \pi_j).$$

D'où

$$\mu_3(\pi_i + \pi_j + \pi_k) > \mu_1\pi_k \geq 0$$

puisque  $\mu_1 \geq 0$ . Nous en déduisons que  $\mu_3 > 0$ , ce qui implique  $x_j = x_k$ . De cette façon, si (7) est vérifié nous avons  $x_j = x_k$ .

Supposons maintenant que l'équation (8) est vérifiée. D'après les équations du système (6), nous avons :

$$\frac{q_i}{q_j + q_k} = \frac{\lambda\pi_i - \mu_1 + \mu_2}{\lambda(\pi_j + \pi_k) - \mu_2} > \frac{\pi_i}{\pi_j + \pi_k}$$

Ou

$$\mu_2(\pi_i + \pi_j + \pi_k) > \mu_1(\pi_j + \pi_k) \geq 0.$$

D'où  $\mu_2 > 0$  et donc  $x_i = x_j$ .

Ainsi, si les conditions (7) et (8) sont toutes les deux satisfaites, l'actif sans risque est la solution du système (6).

Montrons que les deux équations 7 et 8 forment aussi *une condition nécessaire* pour que l'actif sans risque soit la solution du système (6). Avant d'aborder ce problème, précisons que les équations (7) et (8) sont exprimées en termes de poids associés aux portefeuilles de dimension 3. Or, dans ce qui suit, nous allons aussi considérer les portefeuilles de dimension 2, plus précisément les portefeuilles se situant sur les plans  $x_i = x_j$  ou  $x_j = x_k$ . Les poids de dimension 3 sont définis par :

$$q_i^3 = w(p_i), \quad q_j^3 = w(p_i + p_j) - w(p_i) \quad \text{et} \quad q_k^3 = 1 - w(p_i + p_j).$$

Et pour la dimension 2 nous avons :

$$q_{ij}^2 = w(p_i + p_j) \quad \text{et} \quad q_k^2 = 1 - w(p_i + p_j) \quad \text{si} \quad x_i = x_j$$

$$q_i^2 = w(p_i) \quad \text{et} \quad q_{jk}^2 = 1 - w(p_i) \quad \text{si} \quad x_j = x_k.$$

Ainsi, sur le plan  $x_i = x_j$  nous avons  $q_i^3 + q_j^3 = w(p_i + p_j) = q_{ij}^2$  et les poids pour l'événement le plus favorable sont les mêmes pour les deux dimensions :  $q_k^3 = q_k^2$ .

Avec cette remarque, sur le plan  $x_i = x_j$  l'équation 6 devient :

$$\frac{q_{ij}}{q_k} > \frac{\pi_i + \pi_j}{\pi_k} \quad (9)$$

De même, sur le plan  $x_j = x_k$  nous avons  $q_i^3 = q_i^2$  et  $q_j^3 + q_k^3 = 1 - w(p_i) = q_{jk}^2$ . Sur ce plan l'équation 8 devient :

$$\frac{q_i}{q_{kj}} > \frac{\pi_i}{\pi_j + \pi_k} \quad (10)$$

Montrons dans un premier temps que l'équation (7) est une condition nécessaire pour que l'actif sans risque soit la solution du système (6). Pour cela, supposons qu'elle n'est pas vérifiée :

$$\text{Hypothèse : } \quad \frac{q_i + q_j}{q_k} \leq \frac{\pi_i + \pi_j}{\pi_k} \quad \text{ou bien} \quad \frac{q_{ij}}{q_k} \leq \frac{\pi_i + \pi_j}{\pi_k} \quad \text{si } x_i = x_j \quad (11)$$

Dans ce cas, il existe un portefeuille risqué qui apporte à l'individu plus de satisfaction que l'actif sans risque. La représentation graphique permet d'identifier ce portefeuille. Sur le plan  $x_i = x_j$  l'hypothèse (11) signifie que les courbes d'indifférence sont moins pentues que la contrainte de budget. Nous représentons cette situation sur la figure 2.7 :

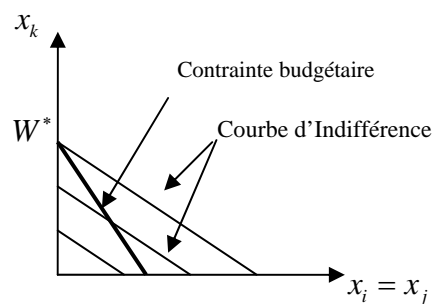


Figure 2.7.

De cette façon, l'individu investit toute sa richesse dans l'actif  $e_k$ . Soit un portefeuille  $P$  de la forme  $x_i = x_j = 0$  et  $x_k = \frac{W_0}{\pi_k}$ . Ainsi, nous sommes dans le cas de la dimension

2.  $E_h(P) = \frac{q_k W_0}{\pi_k}$  où l'indice  $h$  signifie que l'agent remplace les probabilités objectives

par les poids dans le calcul de l'espérance. Montrons que  $E_h(P) \geq \frac{W_0}{\pi_i + \pi_j + \pi_k}$ . Le

terme de droite est l'espérance de l'actif sans risque. D'après la relation (11) nous avons :

$$q_{ij}\pi_k - (\pi_i + \pi_j)q_k \leq 0$$



d'où

$$(1 - q_k)\pi_k - (\pi_i + \pi_j)q_k \leq 0$$

car  $q_{ij} + q_k = 1$ . Et donc

$$\pi_k \leq (\pi_i + \pi_j + \pi_k)q_k$$

$$\frac{q_k W_0}{\pi_k} \geq \frac{W_0}{(\pi_i + \pi_j + \pi_k)}.$$

De cette façon, si l'inégalité 7 n'est pas vérifiée il existe un portefeuille risqué qui apporte à l'individu plus de satisfaction que le portefeuille sans risque. Rappelons que le cas d'égalité dans la condition 11 correspond à la situation où l'individu est indifférent entre le portefeuille  $P$  et l'actif sans risque. En d'autres termes, la condition 7 est une condition nécessaire pour que l'actif sans risque et lui seul soit le portefeuille optimal.

Nous utilisons la même démarche afin de montrer que la condition 8 est aussi une condition nécessaire pour que l'investissement dans l'actif sans risque soit optimal<sup>65</sup>.

Finalement, nous avons démontré le théorème suivant :

### ***Théorème 1***

Soit  $S_{ijk} = \{W / 0 \leq x_i < x_j < x_k; i, j, l = 1, 2, 3 \text{ et } i \neq j \neq k\}$ . L'agent cherche à résoudre le programme de maximisation suivant :

$$\text{Max } x_i q_i + x_j q_j + x_k q_k$$

$$\text{s.c } (x_i - x_{0i})\pi_i + (x_j - x_{0j})\pi_j + (x_l - x_{0k})\pi_k = 0$$

$$x_i \geq 0; x_i \leq x_j; x_j \leq x_k.$$

où les poids sont définis par :

---

<sup>65</sup> voir annexe A.6.

$$\begin{aligned}
q_i &= w(p_i), \\
q_j &= w(p_i + p_j) - w(p_i) \text{ et} \\
q_k &= 1 - w(p_i + p_j).
\end{aligned}$$

L'actif sans risque est le seul portefeuille optimal dans  $\bar{S}_{ijk}$  si et seulement si

$$\frac{q_i + q_j}{q_k} > \frac{\pi_i + \pi_j}{\pi_k} \text{ et } \frac{q_i}{q_j + q_k} > \frac{\pi_i}{\pi_j + \pi_k}.$$

Le théorème 1 propose une condition nécessaire et suffisante dans l'ensemble  $S_{ijk}$ . Évidemment, si l'agent choisit l'actif sans risque dans chacun des six sous-ensembles  $\bar{S}_{ijk}$ , cet actif sera préféré par l'agent à tout autre portefeuille. Nous montrons que la condition du théorème 1 ne peut pas être vérifiée sur tous les  $S_{ijk}$  simultanément. Pour cela réécrivons la condition du théorème 1 en termes de probabilités objectives :

$$\frac{w(p_i + p_j)}{1 - w(p_i + p_j)} > \frac{\pi_i + \pi_j}{\pi_k} \text{ et } \frac{w(p_i)}{1 - w(p_i)} > \frac{\pi_i}{\pi_j + \pi_k} \quad (12)$$

Concrètement, sur l'ensemble  $S_{123}$  nous avons :

$$\frac{w(p_1 + p_2)}{1 - w(p_1 + p_2)} > \frac{\pi_1 + \pi_2}{\pi_3} \text{ et } \frac{w(p_1)}{1 - w(p_1)} > \frac{\pi_1}{\pi_2 + \pi_3}.$$

De même, sur l'ensemble  $S_{231}$  l'équation 11 devient :

$$\frac{w(p_2 + p_3)}{1 - w(p_2 + p_3)} > \frac{\pi_2 + \pi_3}{\pi_1} \text{ et } \frac{w(p_2)}{1 - w(p_2)} > \frac{\pi_2}{\pi_1 + \pi_3}.$$

Finalement, d'après le théorème 1, l'actif sans risque est le portefeuille optimal dans tous les  $\bar{S}_{ijk}$  si et seulement si le système suivant est compatible :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w(p_1 + p_2)}{1 - w(p_1 + p_2)} > \frac{\pi_1 + \pi_2}{\pi_3} \\ \frac{w(p_1 + p_3)}{1 - w(p_1 + p_3)} > \frac{\pi_1 + \pi_3}{\pi_2} \\ \frac{w(p_2 + p_3)}{1 - w(p_2 + p_3)} > \frac{\pi_2 + \pi_3}{\pi_1} \\ \frac{w(p_1)}{1 - w(p_1)} > \frac{\pi_1}{\pi_2 + \pi_3} \\ \frac{w(p_2)}{1 - w(p_2)} > \frac{\pi_2}{\pi_1 + \pi_3} \\ \frac{w(p_3)}{1 - w(p_3)} > \frac{\pi_3}{\pi_1 + \pi_2} \end{array} \right. \quad (13)$$

Les trois premières équations du système correspondent à la condition 7 reproduite dans chacun des ensembles  $S_{ijk}$  et les trois dernières équations correspondent à la condition 8. Notons  $\pi = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$ . D'après les calculs élémentaires<sup>66</sup> le système 13 est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} w(p_1 + p_2) > \frac{\pi_1 + \pi_2}{\pi} \\ w(p_1 + p_3) > \frac{\pi_1 + \pi_3}{\pi} \\ w(p_2 + p_3) > \frac{\pi_2 + \pi_3}{\pi} \\ w(p_1) > \frac{\pi_1}{\pi} \\ w(p_2) > \frac{\pi_2}{\pi} \\ w(p_3) > \frac{\pi_3}{\pi} \end{array} \right.$$

---

<sup>66</sup> voir annexe A.7.

Ainsi,  $w(p_1)+w(p_2)+w(p_3)>1$  d'après les trois dernières équations. Or, toute fonction de pondération  $w$  vérifie la condition  $w(p_1)+w(p_2)+w(p_3)=1$ . De cette façon nous avons montré que la condition nécessaire et suffisante du théorème 1 ne peut pas être vérifiée sur tous les sous-ensembles  $S_{ijk}$  simultanément. Cela implique qu'il existe au moins un sous-ensemble, noté  $\tilde{S}_{ijk}$ , sur lequel les conditions du théorème 1 ne sont pas vérifiées. Sur cet ensemble l'investissement dans l'actif sans risque n'est donc pas optimal. Ainsi, il existe un portefeuille risqué  $P$  appartenant à  $\tilde{S}_{ijk}$  qui procure à l'agent plus de satisfaction que l'actif sans risque. Or, sur tout ensemble  $S_{ijk}$ , l'actif sans risque procure la même satisfaction à l'agent. De ce fait, après avoir considéré tous les sous-ensembles  $S_{ijk}$ , l'investisseur préfère, à l'optimum, le portefeuille  $P$  à l'actif sans risque. En conclusion, pour un agent qui maximise l'espérance de sa richesse finale en déformant les probabilités objectives, l'investissement dans l'actif sans risque n'est jamais optimal.

En outre, le portefeuille optimal  $P$  est de la même forme que celui choisi par l'agent du type VNM, puisque  $P$  se trouve sur la frontière de  $R_+^3$ . De cette façon, il n'y a pas de différence significative entre l'agent BPT – investisseur qui déforme les probabilités objectives et l'agent VNM sous l'hypothèse que les deux maximisent l'espérance de la richesse finale.

## 4. Discussion

La déformation des probabilités objectives est un des points qui fait la différence entre les modèles de Markowitz (1952a) et de Shefrin et Statman (2000). En effet, dans ces deux modèles les agents cherchent à maximiser l'espérance de leur richesse finale. Or, l'un considère des probabilités déformées et l'autre - des probabilités objectives. En outre, le portefeuille optimal de Markowitz (1952a) est

déterminé pour une valeur donnée de la variance (qui mesure le risque du portefeuille), alors que le choix de l'agent BPT est conditionné par une contrainte de sécurité. Dans ce chapitre, nous avons supposé que la contrainte de sécurité de l'agent BPT est toujours satisfaite. Cette hypothèse a été retenue afin d'éliminer l'effet de la contrainte sur le choix du portefeuille. Cette démarche nous a permis d'une part, d'étudier la déformation des probabilités objectives dans le modèle BPT et, d'autre part, d'analyser son impact sur le choix du portefeuille dans le cas plus général. La discussion des résultats concernant la théorie comportementale du portefeuille est proposée à la fin de cette thèse après une étude approfondie de tous les aspects qui sont à l'origine de sa particularité.

Pour le moment, nous avons considéré un marché de deux et de trois actifs purs. Nous avons constaté que la fonction de pondération ne joue pas sur la forme du portefeuille optimal dans la mesure où l'investisseur place son argent dans un seul titre. Et ceci, indépendamment du fait qu'il considère des probabilités objectives ou déformées. De ce point de vue, le choix de l'agent qui déforme les probabilités objectives est similaire à celui qui ne les déforme pas à condition de maximiser l'espérance de la richesse finale.

Notre analyse a surtout été fondée sur la linéarité de la fonction objective. En effet, nous avons considéré un agent qui maximise l'espérance de sa richesse finale et non pas l'utilité espérée. Cet agent est neutre au risque en termes de l'utilité espérée et son attitude face au risque n'est prise en compte que par la fonction de pondération. De cette façon, notre résultat s'inscrit dans le contexte des travaux défendant l'application jointe de la fonction de pondération et de la fonction de l'utilité (ou la fonction de valeur). Par exemple, dans le chapitre précédent nous avons présenté la théorie des perspectives de Tversky et Kahneman (1992). Cette théorie connaît aujourd'hui un grand succès car elle apporte des explications satisfaisantes à des phénomènes qui sont considérés comme des « puzzles » dans le contexte de la théorie de l'utilité espérée. La théorie des perspectives fait partie des modèles non linéaires. Dans ce cadre, l'individu décrit par Tversky et Kahneman (1992) transforme les probabilités aussi bien que les paiements d'une loterie avant de

l'évaluer. Certains auteurs, comme par exemple Levy et Levy (2002), proposent des expériences qui semblent prouver l'insuffisance de la théorie des perspectives. Or, dans ces expériences Levy et Levy (2002) appliquent les probabilités objectives en prétendant que la déformation des probabilités ne joue pas de rôle important. Cependant, Wakker (2003) refait les mêmes expériences et montre que c'est parce que Levy et Levy (2002) ont négligé la fonction de pondération qu'ils sont arrivés à ces conclusions<sup>67</sup>. De cette façon, Wakker (2003) souligne l'importance des deux composantes dans la prise en compte de l'attitude face au risque de l'individu.

Par ailleurs, Yaari (1987) développe la théorie duale à l'utilité espérée où les rôles des paiements d'une loterie et des probabilités d'occurrence sont renversés. Le comportement considéré comme « paradoxal » dans la théorie de l'utilité espérée s'explique bien avec la théorie duale de Yaari (1987). Cependant, un des nombreux résultats de Yaari (1987) est le constat de l'existence de « paradoxes duaux ». Concrètement, pour chaque « paradoxe » de l'utilité espérée, il en existe un autre, le « paradoxe » de la théorie duale. Par exemple, considérons l'expérience utilisée par Allais (1953) pour prouver l'impossibilité d'expliquer à l'aide de la théorie de l'utilité espérée certains comportements observés. Ce dernier n'est pas considéré comme paradoxal dans la théorie duale. Cependant, il est possible d'établir une expérience qui ressemble à celle utilisée par Allais (1953), mais avec les rôles de paiements et de probabilités inversés. Cette expérience permet d'observer un comportement cohérent avec la théorie de l'utilité espérée, mais qui ne peut pas être expliqué par la théorie duale.

Le résultat de Yaari (1987) implique que la déformation des probabilités, seule, ne permettra pas d'aboutir à des résultats convenables. En fait, l'attitude face au risque doit être prise en compte de manière jointe par l'intermédiaire des deux fonctions : d'une part, par la fonction de pondération et, d'autre part, par la fonction d'utilité ou la fonction de valeur. Notre résultat, obtenu dans un contexte différent, va dans le même sens que celui de Yaari (1987) et de Wakker (2003) qui soulignent aussi l'importance de cette double transformation. En effet, ces auteurs se placent

---

<sup>67</sup> Nous avons discuté ces articles en détail dans le chapitre 1.

dans un cadre d'une théorie de prise de décision d'un individu dans un environnement risqué. Dans notre cas, nous partons de la théorie de gestion de portefeuille particulière. Nous montrons qu'un individu qui maximise l'espérance de sa richesse finale sous des probabilités déformées se comporte de la même façon qu'un individu qui considère les probabilités objectives. Ainsi, nous prétendons que la déformation des probabilités objectives n'est pas suffisante, à elle seule, pour amener à des résultats significativement différents en termes de portefeuilles optimaux.

## 5. Conclusion

L'espérance d'utilité de la richesse finale ou la rentabilité espérée est un critère de choix intuitif quand il s'agit de faire un choix dans une situation risquée. Nous l'avons constaté au travers de nombreux modèles présentés dans le chapitre précédent. Le modèle de gestion de portefeuille de Shefrin et Statman (2000) s'appuie, également, sur le critère de l'espérance, mais contrairement à l'approche classique, suppose que les préférences des individus ne sont pas linéaires dans les probabilités.

Dans ce chapitre, nous avons tout d'abord mis en évidence la difficulté de la mise en œuvre opérationnelle de la déformation des probabilités objectives dans les modèles de gestion de portefeuille. Ensuite, nous avons étudié l'impact de ce phénomène psychologique sur le choix de portefeuille. Nous avons pris comme référence le modèle BPT de Shefrin et Statman (2000) dans lequel l'individu fait son choix en maximisant l'espérance de la richesse finale sous des probabilités déformées et sous une contrainte de sécurité. Notre choix a été motivé par le fait que le portefeuille optimal obtenu dans le cadre de ce modèle diffère de celui proposé par l'approche standard de Markowitz (1952a). En effet, l'agent de Shefrin et Statman (2000) déforme les probabilités objectives et choisit un portefeuille contenant un billet

de loterie. Nous avons comparé deux agents qui maximisent l'espérance de la richesse finale. Or, l'un d'entre eux considère les probabilités objectives, tandis que le deuxième déforme les probabilités avant de calculer l'espérance. En alternant deux techniques différentes, une approche analytique et une approche graphique, nous avons constaté, dans des cas relativement simples (le nombre d'actifs purs  $n = 2$  et  $n = 3$ ), que les portefeuilles optimaux des deux agents ont la même structure. Plus précisément, il existe toujours un portefeuille optimal qui ne contient qu'un seul actif. Précisons que cela ne signifie pas, toutes choses égales par ailleurs, que les deux agents vont choisir le même portefeuille à l'optimum. Toutefois, il n'y a pas de différence significative dans le comportement des deux individus dans la mesure où chacun cherche à investir dans un portefeuille qui se trouve sur la frontière de l'ensemble des portefeuilles disponibles. Il est connu que pour l'agent VNM cette stratégie est optimale car il maximise l'espérance, c'est-à-dire une fonction linéaire par rapport aux probabilités. Et même si ce n'est plus le cas pour l'individu déformant les probabilités (sa fonction objectif n'étant pas linéaire par rapport aux probabilités sur l'ensemble des portefeuilles disponibles), le résultat obtenu laisse penser que le critère de l'espérance de la richesse finale ne suffira pas pour amener à des choix de portefeuille significativement différents.

Rappelons que pour le moment le rôle de la contrainte de sécurité n'a pas été clarifié puisque nous avons supposé que cette contrainte est toujours satisfaite. En fait, la contrainte détermine l'ensemble des portefeuilles de sécurité. Mais, dans la mesure où un individu qui déforme les probabilités se comporte de manière similaire à celle d'un individu qui ne les déforme pas, le problème de maximisation de l'agent BPT se réduit à une maximisation de l'espérance de la richesse finale sur un sous-ensemble particulier. Nous allons étudier ceci en détail dans le chapitre suivant.





## Chapitre 3

# La théorie comportementale du portefeuille et l'équilibre du marché



# 1. Introduction

L'un des premiers objectifs d'un modèle de gestion de portefeuille consiste à déterminer le choix optimal des investisseurs dont le comportement est conditionné par des critères préalablement définis. D'une manière générale, ces critères sont fondés de façon à tenir compte du risque et de la rentabilité de l'investissement. Considérons par exemple les modèles de Markowitz (1952a) et celui de Shefrin et Statman (2000). Dans le modèle moyenne – variance de Markowitz (1952a), l'investisseur fait son choix en minimisant le risque du portefeuille (défini par sa variance) pour un niveau de rentabilité espérée fixé. Dans la théorie comportementale du portefeuille de Shefrin et Statman (2000), les critères de choix sont différents. En effet, le risque est pris en compte par le biais de la contrainte de sécurité. Ainsi, l'investisseur choisit le portefeuille d'espérance maximale parmi ceux qui satisfont cette contrainte.

Dans les modèles de gestion de portefeuille, il est supposé que les prix des actifs échangés sur le marché sont connus. Un investisseur particulier ne peut donc pas affecter le marché dans la mesure où les prix des actifs avant et après son intervention restent les mêmes. Dans la littérature, après avoir élaboré un modèle de gestion de portefeuille, l'étape suivante consisterait à déterminer les prix d'équilibre qui ont été établis sur le marché après l'échange des investisseurs suivant tous ce modèle de gestion. Dans ce sens, le modèle d'équilibre des actifs financiers de Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966) est la suite du modèle moyenne-variance de Markowitz (1952a). Cependant, la question de l'équilibre de marché dans le cadre de la théorie comportementale du portefeuille n'a pas été étudiée pour le moment. Ce chapitre a pour objectif d'aborder cette question.

Ceci est une étape importante d'un point de vue théorique aussi bien que pratique. D'une part, il s'agit du premier test sur la capacité du modèle à produire des résultats proches de ceux observés sur les marchés réels. D'autre part, cette étape permet d'établir dans quelle mesure les résultats issus de ce modèle sont différents

par rapport à ceux obtenus par les autres théories existantes. Et ce d'autant plus que le modèle BPT est perçu comme une véritable approche alternative aux concepts dominants de la théorie financière.

Ici nous considérons un cas simple à deux actifs purs avec deux investisseurs présents sur le marché. Nous avons choisi ce cadre puisqu'il s'agit d'un cas facilement représentable graphiquement et donc facile à visualiser et à comprendre. C'est d'ailleurs pour cette raison que l'approche des actifs purs est souvent utilisée en finance. En outre, il implique que le marché est complet et que tous les paiements peuvent être dupliqués. Techniquement, le passage d'un monde d'actifs purs au monde des titres se fait par la matrice inverse des paiements. Ainsi, sous l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, les prix des titres sont des combinaisons linéaires des prix des actifs purs. Inversement, le prix d'un actif pur est représenté par une combinaison linéaire des prix des titres. Toutefois, il peut arriver que cette combinaison prenne une valeur négative. Ceci n'est pas interdit du point de vue mathématique, mais, n'est pas appréhendable économiquement parlant. En effet, le prix d'un actif pur ne peut pas être négatif puisqu'il paye une valeur strictement positive dans un état de la nature et zéro dans les autres états. Si le prix d'un tel actif est négatif, l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage n'est pas respectée. Pour cette raison, l'utilisation de l'approche des actifs purs sur les données réelles peut s'avérer délicate. Cependant, en termes de présentation et de compréhension des phénomènes étudiés, il s'agit d'une des méthodes les plus simples et efficaces.

En ce qui concerne le choix d'un cadre théorique à deux états de la nature, précisons que celui-ci est souvent utilisé en finance. En effet, c'est une façon de modéliser l'incertitude en supposant que les événements futurs peuvent être favorable – l'état "up", ou défavorable – l'état "down" par rapport à la situation actuelle. Toutefois, nous allons élargir ce raisonnement au cas général si cela est nécessaire pour produire une vision globale.

Rappelons que dans le modèle BPT l'aversion au risque est caractérisée d'une part par la contrainte de sécurité, d'autre part par la fonction de pondération. Dans le chapitre précédent nous avons étudié l'impact de la déformation des probabilités

objectives sur le choix de portefeuille. La contrainte de sécurité a été supposée satisfaite. Dans ce chapitre, nous considérons des agents qui ne transforment pas les probabilités objectives, mais nous ne mettons aucune restriction sur la contrainte. Nous commençons d'ailleurs cette étude par une analyse de la contrainte de sécurité.

Concrètement, le chapitre est organisé comme suit. La deuxième section est consacrée à la contrainte de sécurité. Les questions auxquelles nous cherchons à répondre sont les suivantes : dans le monde à deux actifs purs comment la contrainte de sécurité d'un BPT - agent est-elle représentée ? Quels sont les portefeuilles de sécurité et quelle est la forme du portefeuille optimal ? Ensuite, dans la section 3 nous considérons différents cas d'équilibre. Cette fois, nous confrontons deux agents l'un à l'autre et nous calculons les prix des titres suite à l'échange. Ceci nous permettra de mettre en évidence certains inconvénients de la théorie comportementale du portefeuille, telle qu'elle ait été formulée par Shefrin et Statman (2000). Dans la section 4 nous proposons une nouvelle formulation du modèle BPT et nous étudions l'équilibre dans le cadre de cette nouvelle formulation. La discussion des résultats fait l'objet de la section 5. La section 6 reprend les points essentiels et conclut ce chapitre.

## 2. La contrainte de sécurité

Reprenons le raisonnement de Shefrin et Statman (2000) dans le cas simplifié de deux actifs purs. Considérons une économie à 2 états de la nature  $\omega_1$  et  $\omega_2$  dont les probabilités d'occurrence sont notées  $p_1$  et  $p_2$  respectivement. L'économie fonctionne sur une période entre deux dates 0 et T. Il existe 2 actifs purs sur le marché :  $e_1$  et  $e_2$ . En date T l'actif  $e_1$  paye 1 si l'état  $\omega_1$  se réalise et 0 dans l'état  $\omega_2$ . L'actif  $e_2$  ne paye rien si l'état  $\omega_1$  se réalise et 1 dans l'état  $\omega_2$ . Les paiements des titres sont donnés dans le tableau 3.1.

**Tableau 3.1**

**Paielements des actifs purs en date T.**

	<i>état <math>\omega_1</math></i>	<i>état <math>\omega_2</math></i>
$e_1$	1	0
$e_2$	0	1

Dans un premier temps nous supposons que l'offre des actifs  $n_k$   $k=1,2$  et les prix en date 0, notés  $\pi_k$ , sont connus.

L'investisseur est caractérisé par un niveau d'aspiration  $A$  et un seuil de faillite admissible  $\alpha$  et possède une dotation initiale uniquement en actifs purs; son portefeuille en date 0 est noté  $W_0 = (x_{01}, x_{02})$ . En date 0, l'agent construit un portefeuille de façon à maximiser l'espérance de la richesse finale, notée  $W = (x_1, x_2)$ , sous sa contrainte budgétaire et sous sa contrainte de sécurité. Plus précisément, son programme s'écrit :

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } (x_1 p_1 + x_2 p_2) \\
 \text{s.c } & (x_1 - x_{01})\pi_1 + (x_2 - x_{02})\pi_2 = 0 \\
 & \text{s.c } P(W < A) \leq \alpha
 \end{aligned} \tag{1}$$

Si nous omettons la contrainte de sécurité  $P(W < A) \leq \alpha$ , nous retrouvons le cas étudié dans le chapitre précédent. Le programme de maximisation (1) devient alors un problème classique d'un agent neutre au risque dont les courbes d'indifférence sont des droites de pente  $-\frac{p_1}{p_2}$ . La contrainte du budget est la droite de pente  $-\frac{\pi_1}{\pi_2}$  passant par le point  $W_0$ . D'une manière générale, la solution optimale consiste à investir toute la richesse dans l'actif dont le rapport du prix sur la

probabilité est le moins élevé. Par exemple, si  $\frac{\pi_1}{p_1} < \frac{\pi_2}{p_2}$ , l'investisseur n'achète que le titre  $e_1$  et son portefeuille optimal est de la forme  $(x_1, 0)$ .

De quelle façon la solution optimale décrite ci-dessus est-elle affectée par le fait que la contrainte de sécurité  $P(W < A) \leq \alpha$  doit être respectée ? C'est à cette question que nous cherchons à répondre. Appelons ensemble de sécurité  $S_{A,\alpha}$ , l'ensemble des portefeuilles satisfaisant l'équation  $P(W < A) \leq \alpha$ . Le portefeuille optimal d'un agent caractérisé par les paramètres  $A$  et  $\alpha$  doit appartenir à  $S_{A,\alpha}$ . Plus précisément, la solution optimale consiste à construire un portefeuille appartenant à  $S_{A,\alpha}$  qui se trouve simultanément sur la droite budgétaire et sur la courbe d'indifférence la plus élevée possible.

La forme de l'ensemble  $S_{A,\alpha}$  est définie par les paramètres  $A$  et  $\alpha$ . Dans un monde à deux états de la nature, trois cas de figure sont possibles. En effet, le paramètre  $\alpha$  peut se situer entre les probabilités d'occurrence  $p_1$  et  $p_2$ , il peut être plus petit ou plus grand que les deux probabilités d'états. Considérons dans un premier temps chacun de ces cas, avant d'aborder une situation d'un plus grand nombre d'actifs  $n \geq 3$ .

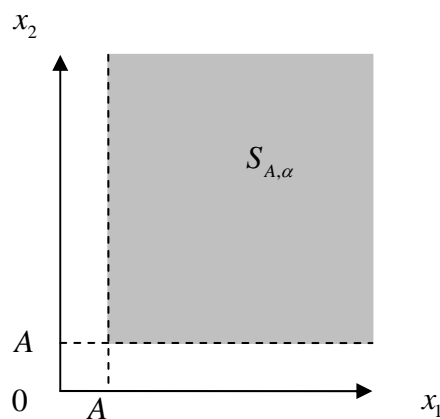
*Cas 1.* Supposons que la probabilité de faillite admissible  $\alpha$  ne dépasse aucune des probabilités des états :  $\alpha < \min\{p_1, p_2\}$ . D'une manière générale, si la probabilité d'occurrence d'un état de la nature est supérieure à  $\alpha$ , l'agent doit investir dans l'actif correspondant de façon à couvrir cet état. Dans le cas contraire, sa contrainte de sécurité n'est pas satisfaite car la probabilité de ne pas atteindre le niveau d'aspiration  $A$  soit au moins égale à la probabilité d'occurrence de cet état.

Par exemple  $p_1 = p_2 = 0,5$  et  $\alpha = 0,1$ . Ainsi, l'investisseur est prêt à supporter un risque de 10% de ne pas atteindre son niveau d'aspiration  $A$ . Cependant, tous les états de la nature se réalisent avec une probabilité supérieure à 0,1. Cela implique que l'agent doit tous les assurer. En effet, il suffit qu'un seul état ne soit pas couvert



pour que la contrainte de sécurité ne soit pas satisfaite<sup>68</sup>. Pour cela, le choix de l'investisseur de supporter le risque de ne pas attendre son niveau d'aspiration  $A$  avec une probabilité de 10% se transforme en souhait de recevoir au moins  $A$  dans les deux états de la nature. En d'autres termes, la tolérance au risque à 10% est équivalente à la tolérance nulle. En fait, pour toute valeur de  $\alpha$  strictement inférieure à  $\min\{p_1, p_2\}$ , et, en particulier, pour  $\alpha = 0$ , le comportement de l'investisseur reste le même. Ainsi, lorsque  $\alpha < \min\{p_1, p_2\}$ , un agent caractérisé par un seuil de faillite de 30% se comporte de la même manière que celui qui est prêt à supporter un risque de 5% ou de 10% ou de 25%, toutes choses égales par ailleurs.

L'ensemble des portefeuilles  $W = (x_1, x_2)$  vérifiant la contrainte de sécurité est alors défini par  $S_{A,\alpha} = \{W = (x_1, x_2) / x_1 \geq A \text{ et } x_2 \geq A\}$ . Ce cas est présenté sur la figure 3.1.



$$\alpha < \min\{p_1, p_2\}$$

$$S_{A,\alpha} = \{W = (x_1, x_2) / x_1 \geq A \text{ et } x_2 \geq A\}$$

**Figure 3.1.**

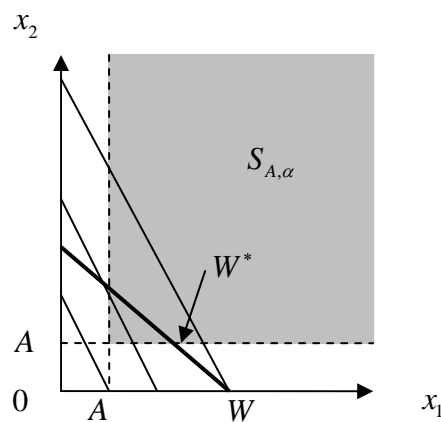
L'agent cherche le portefeuille optimal qui n'est pas dans l'ensemble de tous les portefeuilles disponibles représenté par  $\square_+^2$ , mais seulement dans l'ensemble

---

<sup>68</sup> Supposons que l'agent investit dans un seul titre (par exemple  $e_1$ ) de façon à couvrir l'état  $\omega_1$ . Dans ce cas, l'investisseur détient un portefeuille du type  $(A + x, 0)$  avec  $x \geq 0$ . La probabilité de ne pas atteindre le niveau d'aspiration  $A$  est égale à  $P(W \leq A) = p_2 = 0,5 > 0,1$ .

délimité par les droites  $x_1 = A$  et  $x_2 = A$ . Soulignons que tout portefeuille en dehors de l'ensemble  $S_{A,\alpha}$  est considéré par l'investisseur comme non attractif. Plus encore, tous sont perçus exactement de la même façon. Un portefeuille sans risque  $(A - \varepsilon, A - \varepsilon)$ , avec  $\varepsilon$  infiniment petit, très proche de la frontière de  $S_{A,\alpha}$  est aussi peu attractif que, par exemple, un portefeuille  $(10 \times A, 0)$  qui procure une chance sur deux de gagner 10 fois plus que le niveau d'aspiration de l'agent. Ce phénomène est dû au fait que l'équation  $P(W < A) \leq \alpha$  entre dans le programme d'optimisation de l'agent sous forme d'une contrainte. Cela signifie que la solution doit impérativement appartenir à l'ensemble décrit par cette équation. Existe-il un moyen plus souple permettant d'intégrer l'idée *safety first* de façon à être plus cohérent avec la réalité ? Nous allons revenir à cette discussion plus loin.

La composition du portefeuille optimal dépendra de la pente des courbes d'indifférence  $-\frac{p_1}{p_2}$  et de celle de la droite budgétaire  $-\frac{\pi_1}{\pi_2}$ .



$$\frac{\pi_1}{p_1} < \frac{\pi_2}{p_2}$$

$$W^* = (A + x, A), \quad x \geq 0$$

$$S_{A,\alpha} = \{ W = (x_1, x_2) / x_1 \geq A \text{ et } x_2 \geq A \}$$

**Figure 3.2.**

Sur la figure 3.2, les courbes d'indifférence (les droites fines) sont plus pentues que la droite du budget (la droite épaisse). Nous avons donc  $\frac{\pi_1}{p_1} < \frac{\pi_2}{p_2}$ . Si la contrainte de sécurité n'est pas prise en compte toute la richesse est investie dans le titre  $e_1$  (le point  $W$ ). Cependant, puisque la contrainte doit être respectée, le portefeuille optimal appartient à l'ensemble  $S_{A,\alpha}$ . Il est représenté par le point  $W^*$  sur la figure 3.2.

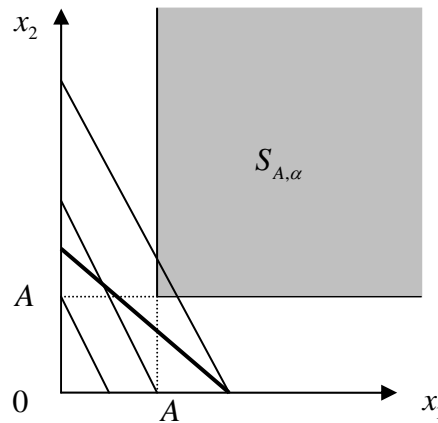
Plus précisément, la solution optimale, s'il en existe une, se trouve sur une des droites  $x_1 = A$  ou  $x_2 = A$ . En effet, le programme d'optimisation (1) consiste à maximiser  $E(W)$  qui est une fonction linéaire sur l'ensemble  $S_{A,\alpha}$  délimité par ces droites. En d'autres termes, afin d'éviter de se retrouver en dessous de son seuil d'aspiration  $A$ , l'individu investit le minimum nécessaire pour satisfaire la contrainte de sécurité. La quantité du portefeuille sans risque (1,1) achetée par l'agent est égale à  $A$ . Cependant, une fois la contrainte satisfaite, le reste de la richesse est investi dans le titre  $e_1$ .

Dans ce cas, le portefeuille optimal issu du modèle BPT peut être décomposé en l'actif sans risque  $(A, A)$  et en l'investissement dans un des actifs purs. Ainsi, à l'équilibre, l'agent du type BPT investit une partie de sa richesse dans l'actif sans risque et mise le reste dans un des titres, celui qui correspond au rapport prix sur probabilité minimal. Rappelons qu'à l'équilibre l'agent de Markowitz (1952a) investit, lui aussi une part de sa richesse dans l'actif sans risque. Concrètement, cette part est déterminée par son attitude face au risque. Plus il présente de l'aversion au risque, plus la part investie dans l'actif sans risque est grande. Le reste de la richesse sert à acheter le portefeuille de marché composé de tous les titres existants contrairement à l'agent BPT qui investit la richesse restante dans un seul titre.

Dans le modèle BPT la part destinée à l'actif sans risque dépend du niveau d'aspiration de l'individu. En effet, comparons un agent BPT caractérisé par un niveau d'aspiration  $A$  à celui dont le niveau d'aspiration s'élève à  $A-1$ . Le portefeuille optimal du dernier se trouve sur la frontière de son ensemble de sécurité

$S_{A-1,\alpha}$  délimité par les droites  $x_1 = A-1$  et  $x_2 = A-1$ . Pour cet agent le minimum nécessaire pour se couvrir est déterminé par l'actif sans risque  $(A-1, A-1)$ , alors que le premier agent investit dans l'actif  $(A, A)$ . En d'autres termes, la quantité du portefeuille sans risque  $(1, 1)$  achetée par le premier agent est égale à  $A$ . Alors que le deuxième n'en achète que  $A-1$ . De cette façon, plus le niveau d'aspiration est élevé plus la part de richesse initiale investie dans l'actif sans risque est importante.

Toutefois, la solution optimale peut ne pas exister. C'est le cas où l'intersection de l'ensemble  $S_{A,\alpha}$  avec la droite du budget est vide (figure 3.3) :



$$S_{A,\alpha} = \{ W = (x_1, x_2) / x_1 \geq A \text{ et } x_2 \geq A \}$$

$$CB \cap S_{A,\alpha} = \emptyset$$

**Figure 3.3.**

Le problème de maximisation (1) n'a pas de solution. Cela signifie que l'agent n'est pas suffisamment riche pour atteindre le niveau de sécurité qu'il souhaite sur le marché où les prix des actifs sont fixés à  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . En effet, si  $x_1 = x_2 = A$ , le portefeuille se trouve au-dessous de la contrainte budgétaire :

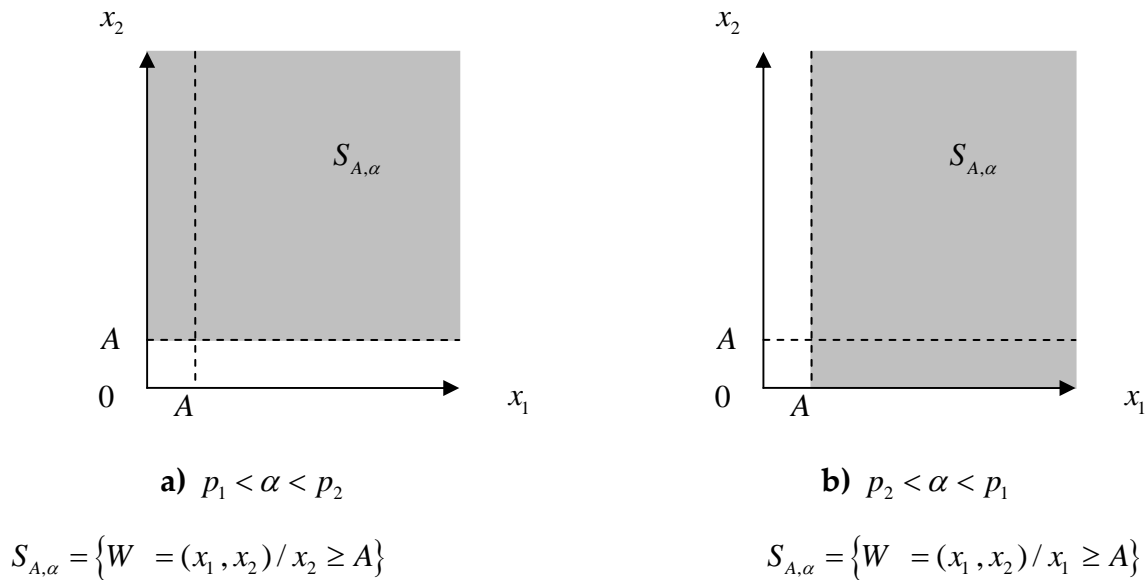
$$A > \frac{x_{01}\pi_1 + x_{02}\pi_2}{\pi_1 + \pi_2}.$$

En d'autres termes, avec les moyens qu'il possède à la date 0, l'investisseur n'arrivera pas à acheter l'actif (1,1) en quantité  $A$ . Or, ceci est une condition nécessaire pour que la contrainte de sécurité soit satisfaite.

Dans le modèle de Shefrin et Statman (2000) la situation où l'agent n'arrive pas à atteindre sa contrainte de sécurité n'est pas étudiée. Cependant, nous pouvons nous interroger sur la stratégie qu'un investisseur dans la sphère réelle pourrait mettre en place face à une telle situation. Une solution intuitive peut être envisagée. En fait, si les conditions du marché sont telles que l'ensemble de sécurité ne peut pas être atteint, l'investisseur sera probablement amené à modifier ses paramètres individuels  $A$  et  $\alpha$ . Encore il faudrait que cette modification éventuelle apporte à l'individu de la satisfaction par rapport à sa situation initiale. Dans ce contexte, la question se pose sur l'utilité que l'agent attribue à un portefeuille non assuré et, en particulier, à son portefeuille initial. Ainsi, la modification des paramètres  $A$  et  $\alpha$  (et donc la stratégie que l'investisseur peut mettre en place quand les conditions du marché ne lui sont pas favorables) est étroitement liée à l'ordre de préférence des portefeuilles non assurés. Par exemple, nous pouvons supposer que l'individu baisserait son niveau d'aspiration  $A$  tout en gardant le seuil de faillite inchangé  $\alpha$ . Ou au contraire, il pourrait maintenir le même niveau de  $A$  et augmenter  $\alpha$ . Dans les deux cas de figure, l'ordre de préférence des portefeuilles non sécurisés reste à déterminer. Mais, il est évident que cet ordre ne sera pas le même puisque la nature des modifications est différente dans les deux cas.

Les modifications de  $A$  et  $\alpha$  diminuent le niveau de sécurité initialement souhaité par l'individu et ont donc un impact négatif sur sa satisfaction. Cependant, ils peuvent augmenter la satisfaction globale dans la mesure où le nouveau niveau de sécurité peut être atteint. Dans le cadre du modèle BPT, les modifications des paramètres individuels ne peuvent pas être mises en place. Plus loin, nous reviendrons à cette discussion et nous proposerons un nouveau cadre théorique du modèle BPT permettant de tenir compte de cette remarque.

**Cas 2.** Supposons maintenant que la probabilité de faillite admissible  $\alpha$  se trouve entre les deux probabilités d'occurrence des états. Sur la figure 3.4 sont présentés les situations (a) où  $p_1 < \alpha < p_2$  et (b) où  $p_2 < \alpha < p_1$ .

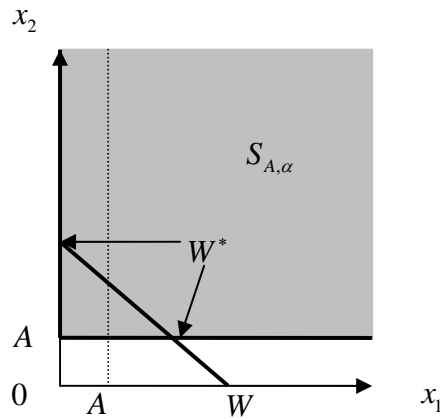


**Figure 3.4.**

Si  $p_1 < \alpha < p_2$ , la contrainte est satisfaite à condition que l'état  $\omega_2$  soit assuré. En effet, en étudiant le cas précédent, nous avons évoqué que tout état de la nature qui se réalise avec une probabilité supérieure à  $\alpha$  doit être assuré, sinon, la contrainte n'est pas satisfaite. Pour cela, l'agent doit investir dans l'actif  $e_2$  et la quantité achetée de  $e_2$  doit être supérieure à  $A$ . Donc  $S = \{W = (x_1, x_2) / x_2 \geq A\}$ . Si  $p_2 < \alpha < p_1$ , c'est l'état  $\omega_1$  qui doit être assuré, d'où l'ensemble de sécurité est défini par  $S = \{W = (x_1, x_2) / x_1 \geq A\}$ .

A titre d'exemple, nous supposons que  $p_1 = 0,3$ ,  $p_2 = 0,7$  et  $\alpha = 0,5$ . Nous sommes dans la situation a. Évidemment, les raisonnements qui suivent peuvent être repris dans le cas b. En fait, pour tout  $\alpha$  entre 0,3 et 0,7, le comportement de l'individu est identique. Ainsi, comme précédemment, tous les portefeuilles en dehors de l'ensemble  $S_{A,\alpha}$  sont perçus exactement de la même manière par l'investisseur. La solution optimale, si elle existe, se trouve sur une des droites  $x_2 = A$

ou bien  $x_1 = 0$  avec  $x_2 \geq A$ . Ces droites représentent la frontière de l'ensemble de sécurité  $S_{A,\alpha}$  (figure 3.5). Ainsi, le portefeuille optimal  $W^*$  peut être de la forme  $(x, A)$  ou  $(0, A+x)$  où  $x$  est une valeur positive.



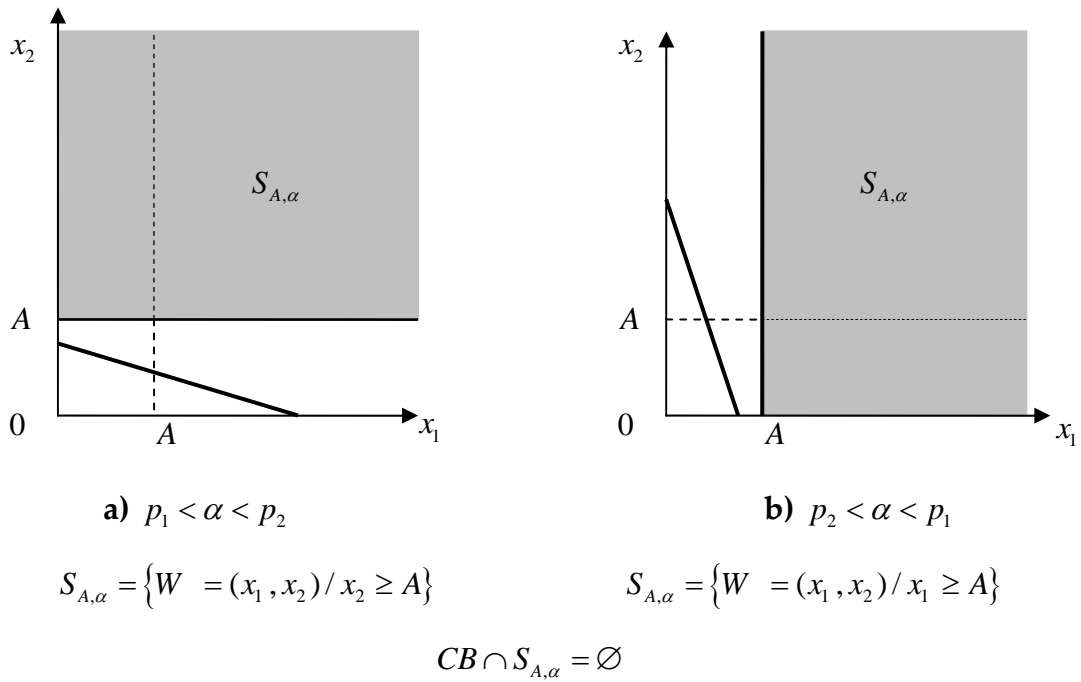
$$W^* = (A+x, A) \text{ ou } W^* = (0, A+x), \quad x \geq 0$$

$$S_{A,\alpha} = \{W = (x_1, x_2) / x_2 \geq A\}$$

**Figure 3.5.**

Contrairement au cas précédent nous ne pouvons pas affirmer qu'à l'optimum l'agent investit une partie de sa richesse dans l'actif sans risque. En fait, dans la situation considérée l'investissement dans l'actif  $e_2$  est suffisant pour que l'individu se sente en sécurité. Le portefeuille de  $S_{A,\alpha}$  le moins cher est  $(0, A)$ . Après avoir acheté ce portefeuille l'agent investit la richesse restante dans  $e_1$  ou dans  $e_2$  en fonction du rapport prix sur probabilités.

Comme auparavant la solution optimale n'existe pas si l'intersection de la droite budgétaire avec l'ensemble  $S_{A,\alpha}$  est vide (figure 3.6).



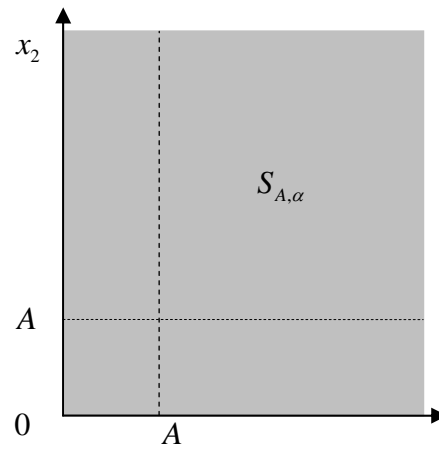
**Figure 3.6.**

Si  $p_1 < \alpha < p_2$  le portefeuille sécurisé le moins cher est  $(0, A)$ . Or, la dotation initiale de l'agent n'est pas suffisante pour acquérir ce portefeuille :

$$A > \frac{x_{01}\pi_1 + x_{02}\pi_2}{\pi_2}.$$

**Cas 3.** Considérons maintenant la situation où  $\alpha$  est supérieur à chaque probabilité d'occurrence :  $\alpha > \max(p_1, p_2)$ . D'une manière générale, il faut distinguer le cas où  $\alpha > \max(p_1, p_2)$  mais  $\alpha \neq 1$  et la situation où  $\alpha = 1$ . En effet, dans le dernier cas la contrainte de sécurité  $P(W < A) \leq \alpha$  est toujours vérifiée (figure 3.7) :



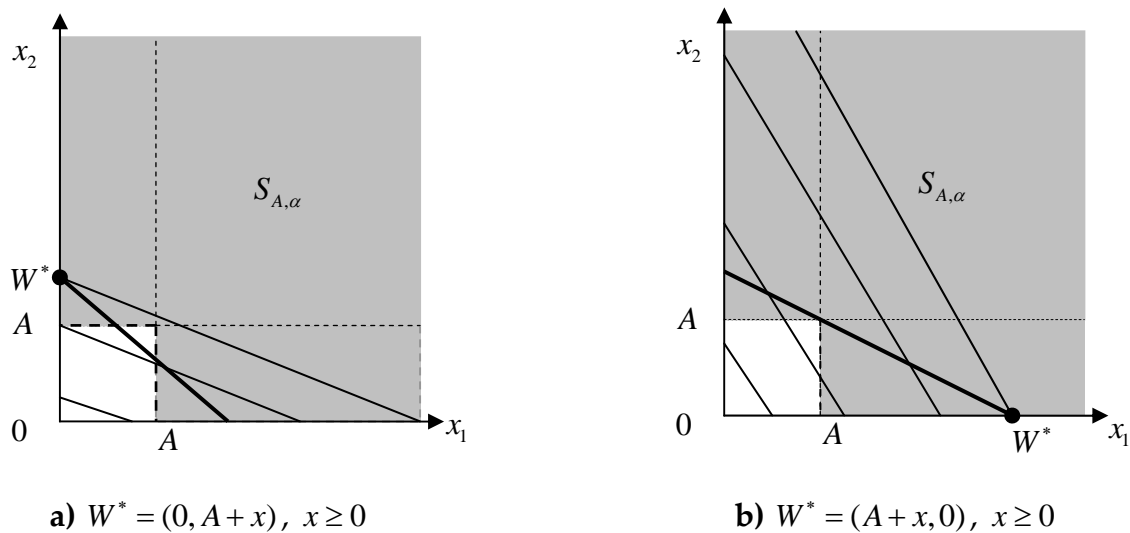


$$S_{A, \alpha} = \square_+^2$$

**Figure 3.7.**

Supposer  $\alpha = 1$  revient à considérer que l'agent ne cherche pas à se couvrir contre des pertes et se préoccupe seulement de la deuxième partie de son programme d'optimisation, à savoir la maximisation de l'espérance de la richesse finale. D'une part, ceci est le cas extrême dans la théorie comportementale du portefeuille dans la mesure où le seul objectif de l'individu est d'investir dans un billet de loterie. D'autre part, puisque le seul critère de choix de l'agent est l'espérance de la richesse finale, nous sommes dans le cas d'un agent neutre au risque en termes de la théorie de l'utilité espérée. La solution optimale existe toujours et consiste à investir dans un seul titre (chapitre 2).

Par contre, si  $\alpha \neq 1$ , le comportement de l'individu est le même quelque soit  $\alpha > \max(p_1, p_2)$ . Par exemple si  $p_1 = 0,4$ ,  $p_2 = 0,6$  et  $\alpha = 0,7$ , l'agent ne tient pas forcément à ce qu'un état particulier soit assuré, mais il souhaite couvrir au moins un des deux. Évidemment, le choix de couvrir l'un plutôt que l'autre dépendra du prix des actifs purs et des probabilités d'occurrence. Concrètement, l'agent investira dans l'actif le moins cher par rapport à sa probabilité de façon à minimiser le coût de l'assurance. L'ensemble de sécurité est donc  $S_{A, \alpha} = \{W = (x_1, x_2) / x_1 \geq A \text{ ou } x_2 \geq A\}$ . Finalement, le portefeuille optimal est de la forme  $(A + x, 0)$  ou  $(0, A + x)$  avec  $x \geq 0$ . Le tableau 3.8 illustre ces deux situations :



$\alpha > \max(p_1, p_2)$  et  $\alpha \neq 1$

$$S_{A,\alpha} = \{W = (x_1, x_2) / x_1 \geq A \text{ ou } x_2 \geq A\}$$

**Figure 3.8.**

*Cas  $n \geq 3$ .*

Considérons maintenant le cas où le nombre  $n$  d'actifs purs est supérieur à deux. De la même façon, si  $\alpha = 1$  nous nous retrouvons dans le cas de la théorie de l'utilité espérée avec un agent neutre au risque puisque la contrainte de sécurité est toujours satisfaite. L'ensemble  $S_{A,\alpha}$  comprend alors tous les portefeuilles. Pour d'autres valeurs de  $\alpha$  la situation est plus compliquée que dans un monde à deux états de la nature. Cependant, en se fondant sur les raisonnements précédents, nous n'avons pas vraiment besoin de décrire tout l'ensemble de sécurité. Il suffit de comprendre d'une part, quels états de la nature doivent nécessairement être assurés et, d'autre part, quels sont les portefeuilles d'assurance les moins chers. Evidemment, les portefeuilles d'assurance les moins chers se trouvent sur la frontière de  $S_{A,\alpha}$ . Concrètement, la quantité de certains actifs doit être nulle alors que la quantité des autres actifs achetés est égale à  $A$ . Les actifs choisis sont ceux pour lesquels les rapports prix sur probabilité sont les moins importants. En outre, un état de la nature qui se réalise avec une probabilité supérieure à  $\alpha$  doit être couvert (comme dans le cas 1). Une fois le portefeuille de sécurité construit, la richesse restante est investie dans un titre caractérisé par le rapport prix sur probabilité minimal.

Après avoir analysé les différentes formes de l'ensemble de sécurité en fonction des paramètres individuels des agents, nous étudions à présent les conditions de l'équilibre du marché en présence de deux agents BPT.

### 3. Les prix d'équilibre

Sous l'hypothèse que les prix des actifs sont connus, et d'une manière simplifiée, la stratégie de l'agent suivant le modèle BPT peut être décrite en deux étapes successives. Tout d'abord, il investit dans les actifs les moins chers<sup>69</sup> de façon à atteindre son niveau d'aspiration  $A$  dans un certain nombre d'états défini par  $\alpha$ . Ensuite, la richesse restante est investie dans l'actif le moins cher. Ainsi, nous pouvons nous interroger sur ce qui se passerait si tous les agents intervenant sur le marché se comportaient comme le prédit le modèle BPT. Dans ce cas, si tous veulent acheter le titre le moins cher, le prix de celui-ci devrait en toute logique augmenter. Quels sont alors les prix d'équilibre qui vont s'établir sur un tel marché ?

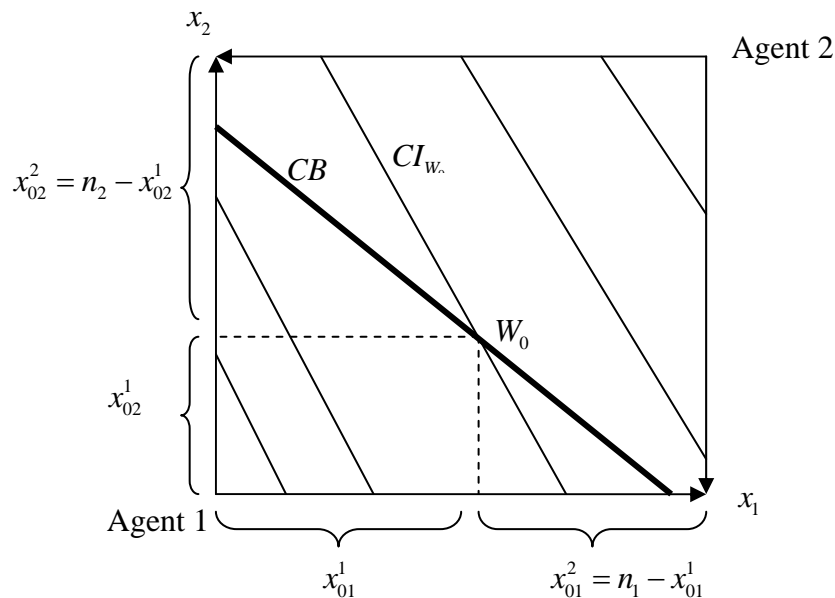
Nous considérons le cas de deux agents. Chacun cherche à maximiser l'espérance de la richesse finale  $W^i = (x_1^i, x_2^i)$ ,  $i = 1, 2$ ; sous la contrainte de sécurité  $P(W^i < A_i) \leq \alpha_i$  et sous la contrainte budgétaire  $(x_1^i - x_{01}^i)\pi_1 + (x_2^i - x_{02}^i)\pi_2 = 0$ . Les  $\pi_1$  et  $\pi_2$  désignent cette fois-ci les prix d'équilibre qui vont s'établir en date 0 suite à l'échange. A l'équilibre tous les actifs sont détenus par les agents :

$$x_k^1 + x_k^2 = x_{0k}^1 + x_{0k}^2 \quad k = 1, 2.$$

---

<sup>69</sup> Ce raisonnement suppose que les états sont équiprobables. Dans le cas général il faut tenir compte du rapport prix / probabilité.

En suivant la même logique que précédemment, nous omettons dans un premier temps les contraintes de sécurité des agents. Pour représenter cette situation, nous utilisons la boîte d'Edgeworth<sup>70</sup> (figure 3.9) :



**Figure 3.9.**

Sur la figure, les axes horizontaux correspondent à l'offre de l'actif  $e_1$  et les axes verticaux à l'offre de l'actif  $e_2$ . La position de l'agent 1 est déterminée à partir du coin gauche inférieur. Plus la courbe d'indifférence est éloignée de ce point, plus la satisfaction de l'agent 1 est forte. De la même façon, la position de l'agent 2 se détermine à partir du coin droit supérieur. Les courbes d'indifférence des deux agents sont les droites parallèles de pente  $-\frac{p_1}{p_2}$ .  $CI_{W_0}$  est la courbe d'indifférence passant par  $W_0$ . Ce point représente la dotation initiale des deux agents. La droite budgétaire est notée  $CB$ .

Le programme de maximisation s'écrit :

<sup>70</sup> Eeckhoudt et Gollier (1992).

$$\begin{aligned}
 & \text{Max } \lambda^1(x_1^1 p_1 + x_2^1 p_2) + \lambda^2(x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2) \\
 \text{s.c } & (x_1^i - x_{01}^i)\pi_1 + (x_2^i - x_{02}^i)\pi_2 = 0 \quad i = 1, 2 \quad (2) \\
 & x_k^1 + x_k^2 = x_{0k}^1 + x_{0k}^2 \quad k = 1, 2.
 \end{aligned}$$

où  $\lambda^1$  et  $\lambda^2$  sont des constantes positives. D'après la condition du premier ordre, nous avons :

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{\pi_1}{\pi_2}$$

Ce résultat (représenté sur la figure 3.10) indique que les prix d'équilibre vont s'établir de façon à ce que la droite du budget soit parallèle aux courbes d'indifférence. En effet, sans contrainte de sécurité, la satisfaction de l'individu est totalement déterminée par la courbe d'indifférence. Dans un cas comme celui-ci (cas linéaire), l'augmentation de la satisfaction d'un agent entraîne automatiquement la baisse de la satisfaction de l'autre. Dans ces conditions, chacun des individus cherche à garder sa position initiale et à rester sur la courbe d'indifférence de départ. Pour cela, les prix à l'équilibre vont s'établir de façon à ce que la droite budgétaire coïncide avec la courbe d'indifférence passant par  $W_0$ .

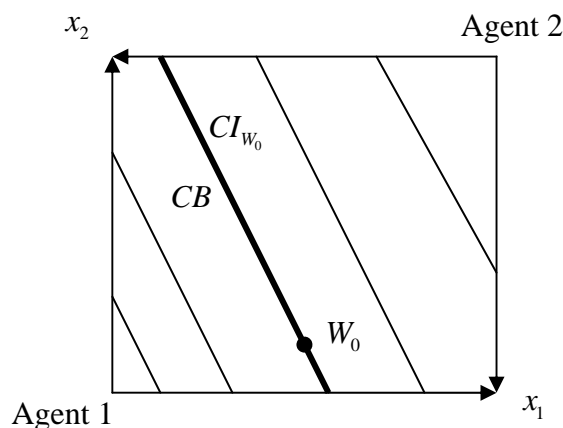
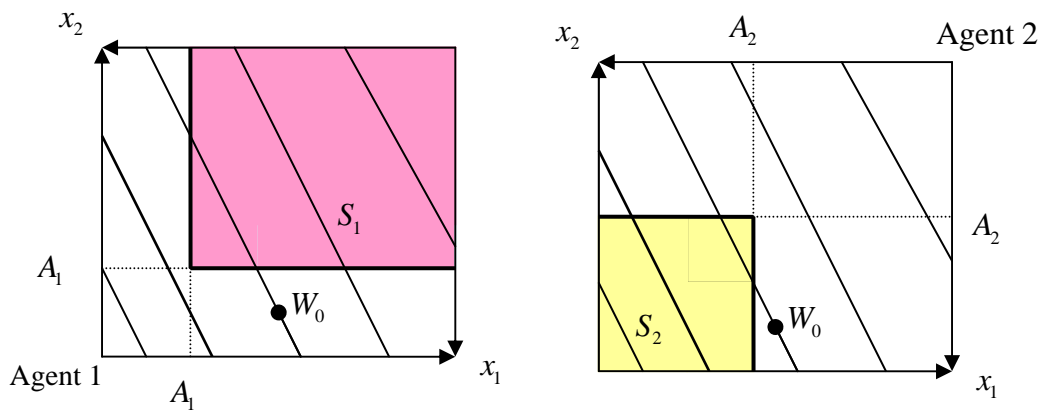


Figure 3.10.

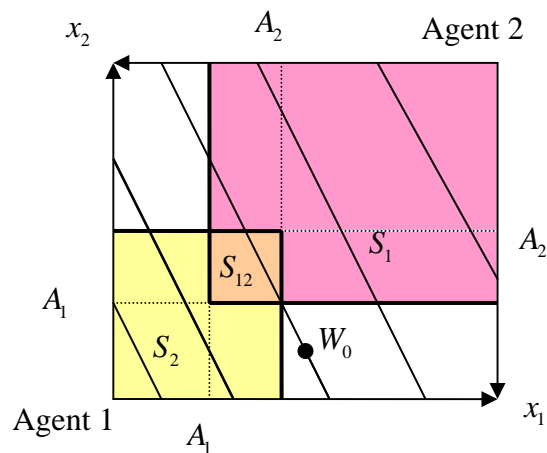
Finalement, il existe un nombre infini de portefeuilles optimaux qui se trouvent sur la courbe d'indifférence  $CI_{W_0}$  de la pente égale à  $-\frac{p_1}{p_2}$ .

Nous allons à présent étudier si ce résultat sera affecté dans le cas où nous ajoutons les contraintes de sécurité des agents. La figure 3.11 représente la situation avant échange. Pour illustration nous supposons que  $\alpha_i < \min(p_1, p_2)$ ,  $i = 1, 2$ ; (cas 1 de la section précédente) : les agents cherchent à assurer tous les états de la nature.  $S_1$  et  $S_2$  sont les ensembles de sécurité. Les figures 3.11 a) et b) décrivent les agents séparément, alors que la figure 3.11 c) est la superposition de a) et de b) ou  $S_{12} = S_1 \cap S_2$  est l'intersection des ensembles de sécurité des agents.



a) Agent 1

b) Agent 2



c) Agents 1 et 2 ensemble

Figure 3.11.

Comme nous l'avons constaté dans la section précédente, l'ensemble de sécurité de l'agent 1 est défini par :

$$S_1 = \{W_1 / P(W_1 < A_1) \leq \alpha_1\} = \{W_1 = (x_1^1, x_2^1) / x_1^1 \geq A_1, x_2^1 \geq A_1\}.$$

En ce qui concerne l'agent 2, précisons que  $x_1^2$  et  $x_2^2$  désignent respectivement les quantités des actifs  $e_1$  et  $e_2$  détenus à l'équilibre par cet agent. Ainsi, s'il cherche à assurer deux états de la nature, son ensemble de sécurité est défini par :

$$S_2 = \{W_2 / P(W_2 < A_2) \leq \alpha_2\} = \{W_2 = (x_1^2, x_2^2) / x_1^2 \geq A_2, x_2^2 \geq A_2\}.$$

Or, dans la boîte d'Edgeworth, toutes les valeurs associées à l'agent 2 sont mesurées non pas dans le repère d'origine (0,0) comme pour l'agent 1, mais dans le repère dont l'origine se trouve dans le coin droite supérieur, de coordonnées  $(n_1, n_2)$ . Pour cela l'ensemble de sécurité  $S_2$  est représenté par le carré :

$$\{(x, y) / 0 \leq x \leq n_1 - A_2, 0 \leq y \leq n_2 - A_2\}.$$

Le nouveau programme d'optimisation s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{Max } \lambda^1(x_1^1 p_1 + x_2^1 p_2) + \lambda^2(x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2) \\ \text{s.c } & (x_1^i - x_{01}^i)\pi_1 + (x_2^i - x_{02}^i)\pi_2 = 0 \quad i = 1, 2 \quad (3) \\ & x_k^1 + x_k^2 = x_{0k}^1 + x_{0k}^2 \quad k = 1, 2. \\ & (x_1^i, x_2^i) \in S_i \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

A l'équilibre les portefeuilles optimaux doivent appartenir à  $S_{12}$ . Si ce n'est pas le cas, cela signifie qu'au moins un des agents n'est pas assuré et donc le programme

d'optimisation (3) n'a pas de solution. Supposons pour le moment que l'intersection  $S_1 \cap S_2$  n'est pas vide. Le cas où l'ensemble  $S_{12}$  est vide sera étudié plus loin.

D'après le programme (3) la satisfaction de chaque individu est définie non seulement par le niveau de la courbe d'indifférence comme cela est le cas dans le programme d'optimisation (2) mais aussi par l'appartenance à l'ensemble de sécurité. Ainsi, la solution optimale dépend d'une part de la position de la courbe d'indifférence passant par  $W_0$  et, d'autre part de la position du point  $W_0$  lui-même. En effet, la stratégie de l'agent varie selon qu'il est assuré ou non. Si l'agent est initialement assuré ( $W_0$  appartient à son ensemble de sécurité), son objectif est de construire un portefeuille à l'espérance maximale. C'est-à-dire de passer de la courbe d'indifférence initiale  $CI_{W_0}$  à une courbe d'indifférence plus élevée, tout en restant évidemment dans son ensemble de sécurité. Par contre, si le portefeuille initial de l'agent n'est pas assuré,  $W_0$  n'appartient pas à son ensemble de sécurité. Dans ce cas la stratégie consiste à atteindre cet ensemble et, parallèlement, l'agent cherche à construire un portefeuille à l'espérance maximale. Pour cela, il faut distinguer les cas selon que l'intersection de  $CI_{W_0}$  avec  $S_{12}$  est vide ou non, et selon la position de  $W_0$  par rapport à l'ensemble de sécurité pour chaque agent. Ainsi, nous considérons six cas de figure résumés dans le tableau suivant :

**Tableau 3.2.**  
**Différents cas d'équilibre**

	$CI_{W_0} \cap S_{12} \neq \emptyset$	$CI_{W_0} \cap S_{12} = \emptyset$
$W_0 \in S_1$ et $W_0 \in S_2$	<i>Trivial</i>	<i>Impossible</i>
$W_0 \notin S_1$ et $W_0 \notin S_2$	<i>Cas 1</i>	<i>Cas 2</i>
$W_0 \notin S_1$ et $W_0 \in S_2$	<i>Cas 3</i>	<i>Cas 4</i>



D'après le raisonnement de Shefrin et Statman (2000), l'investisseur achète dans un premier temps le portefeuille de sécurité le moins cher, et, dans un second temps, il investit la richesse restante dans un billet de loterie. Précisons que ce raisonnement concerne un investisseur qui ne peut pas affecter les prix des actifs définis par le marché. Dans notre cas, l'achat ou la vente des titres a un impact immédiat sur les prix. Même si l'agent non assuré a deux objectifs (l'assurance et la maximisation de l'espérance de la richesse finale) cela ne signifie pas qu'il agit en deux temps.

Étudions en détail tous les cas du tableau 3.2.

**Cas Impossible.** Évidemment, si le point  $W_0$  appartient à  $S_1$  et à  $S_2$ , il appartient aussi à l'intersection  $S_{12}$  des deux ensembles. Ainsi, l'intersection de  $S_{12}$  avec la courbe d'indifférence  $CI_{W_0}$  passant par  $W_0$  ne peut pas être vide.

**Cas Trivial.** De même, nous considérons que le cas où  $CI_{W_0} \cap S_{12} \neq \emptyset$  avec  $W_0 \in S_1$  et  $W_0 \in S_2$  est trivial. En effet, si  $W_0 \in S_{12}$ , les deux agents sont assurés et ils se retrouvent donc dans le cadre d'un programme d'optimisation (1). La seule différence est que l'ensemble de portefeuilles considéré est restreint à l'ensemble des portefeuilles de sécurité  $S_{12}$  (figure 3.12) :

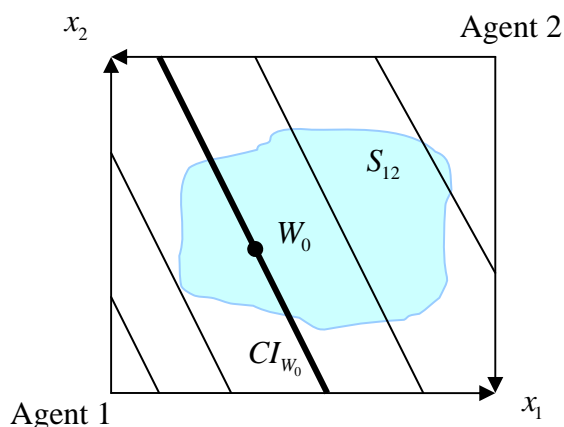


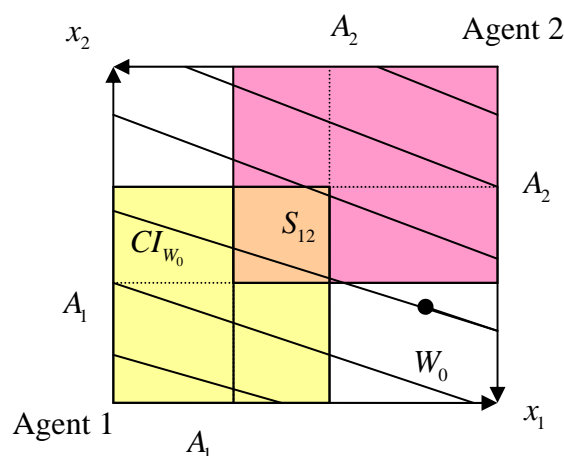
Figure 3.12.

Les portefeuilles optimaux se trouvent sur la courbe d'indifférence initiale  $CI_{W_0}$  à l'intérieur de l'ensemble  $S_{12}$ . Les prix d'équilibre vérifient  $\frac{p_1}{p_2} = \frac{\pi_1}{\pi_2}$ .

Afin d'analyser en détail les autres cas du tableau 3.2, nous considérons des agents caractérisés par  $\alpha_i < \min(p_1, p_2)$ ,  $i=1,2$ . Comme nous l'avons vu dans la section précédente, cette restriction a un impact sur la forme de l'ensemble de sécurité. Dans ce cas, les deux agents vont chercher à assurer les deux états de la nature. Ce cas nous semble le plus approprié dans la mesure où il permet d'illustrer toutes les possibilités du tableau 3.2. En effet, pour certains types d'ensembles  $S_1$  et  $S_2$ , la situation  $CI_{W_0} \cap S_{12} = \emptyset$  (cas 2 et 4) du tableau ne peut avoir lieu car cette intersection n'est jamais vide. D'une manière générale, toutes les situations possibles peuvent s'inscrire dans un des cas du tableau 3.2 puisqu'il a été créé sans restriction quelconque sur les ensembles  $S_1$  et  $S_2$ . Pour cela le cas particulier  $\alpha_i < \min(p_1, p_2)$ ,  $i=1,2$  que nous considérons sert d'illustration mais les raisonnements ci-dessous peuvent être repris dans les autres cas.

**Cas 1.**  $CI_{W_0} \cap S_{12} \neq \emptyset$ ;  $W_0 \notin S_1$  et  $W_0 \notin S_2$ .

L'intersection de la courbe d'indifférence passant par  $W_0$  avec  $S_{12}$  n'est pas vide.  $W_0$  n'appartient à aucun des ensembles de sécurité. Cette situation est représentée sur la figure 3.13 :



**Figure 3.13.**

Avant l'échange, les deux agents se situent au point  $W_0$ . Dans ce cas, aucun des deux n'est assuré puisque  $W_0$  est en dehors de  $S_1$  et de  $S_2$ . L'objectif de chacun est donc, dans un premier temps, de construire un portefeuille de sécurité. En point initial, la satisfaction des individus est définie par la courbe d'indifférence initiale  $CI_{W_0}$ . Les deux agents souhaitent au moins maintenir ce niveau et rester sur cette courbe. En effet, se déplacer sur une courbe d'indifférence supérieure pour un agent implique que l'autre doit se déplacer vers une courbe d'indifférence inférieure. Dans ce sens, augmenter la satisfaction des deux agents n'est pas possible puisque les individus ont des conditions initiales identiques.

Dans le cas étudié, les deux objectifs (l'assurance et la maximisation de l'espérance) peuvent être atteints simultanément. En effet, les agents peuvent se retrouver chacun dans leur ensemble de sécurité tout en restant sur la courbe d'indifférence initiale. Ainsi, l'ensemble de portefeuilles optimaux est défini par l'intersection de la droite de budget avec  $S_{12}$  (la droite du budget coïncidant avec la courbe d'indifférence  $CI_{W_0}$ <sup>71</sup>). De cette façon, à l'équilibre chacun des agents reste sur

sa courbe d'indifférence initiale. Les prix d'équilibre vérifient  $\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2}$  (figure 3.14) :

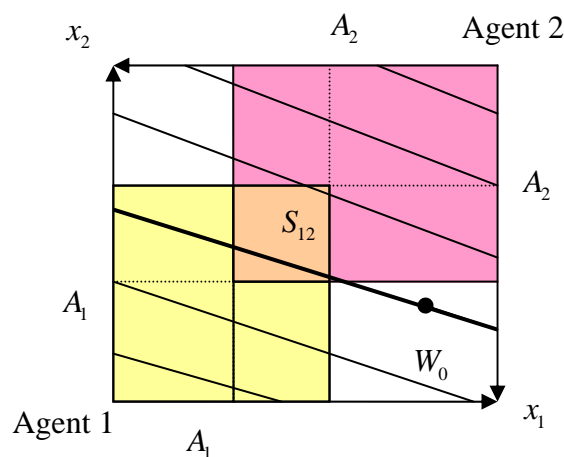


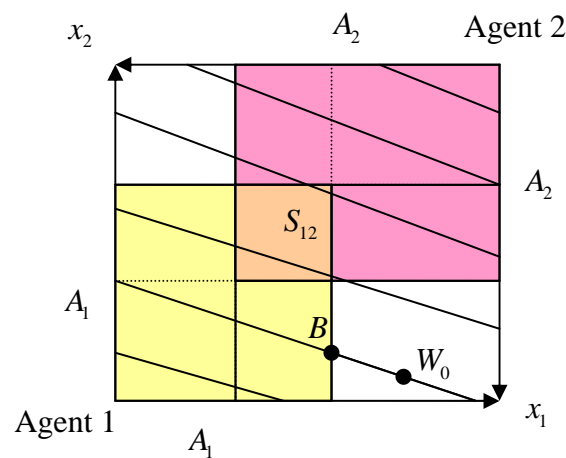
Figure 3.14.

<sup>71</sup> Pour la démonstration voir l'annexe B.

Nous sommes donc dans un cas similaire à la théorie de l'utilité espérée puisque les prix d'équilibre établis vérifient la même équation. La différence réside dans le fait que l'ensemble des portefeuilles optimaux est restreint par rapport au cas classique. En effet, dans le modèle BPT une seule partie des portefeuilles de la courbe d'indifférence  $CI_{W_0}$  est prise en compte – la partie qui appartient à l'intersection  $S_{12}$  des ensembles de sécurité  $S_1$  et  $S_2$ .

**Cas 2.**  $CI_{W_0} \cap S_{12} = \emptyset$ ;  $W_0 \notin S_1$  et  $W_0 \notin S_2$ .

Supposons maintenant que l'intersection de la courbe d'indifférence  $CI_{W_0}$  avec  $S_{12}$  est vide et que  $W_0$  n'appartient à aucun des ensembles de sécurité des agents. La courbe d'indifférence  $CI_{W_0}$  passe nécessairement par l'un des ensembles de sécurité  $S_1$  ou  $S_2$ . Nous supposons ici que  $CI_{W_0} \cap S_2 \neq \emptyset$  (figure 3.15) :



**Figure 3.15.**

Avant l'échange les agents se trouvent dans les mêmes conditions, puisque aucun des deux n'est assuré. Cette situation ressemble à celle décrite dans le cas 1. Ainsi, nous pouvons supposer qu'à l'équilibre la droite du budget coïncide avec la courbe d'indifférence.

$$\text{Hypothèse 1 : } \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Cette solution est profitable pour l'agent 2 car il pourra construire un portefeuille appartenant à  $S_2$  tout en restant sur sa courbe d'indifférence initiale (par exemple le point  $B$ ). Par contre, l'agent 1 ne sera pas satisfait dans la mesure où son portefeuille final ne sera pas assuré. En fait, l'intersection de la courbe d'indifférence initiale  $CI_{W_0}$  avec  $S_1$  est vide. Ainsi, dans le cadre de notre hypothèse, l'agent 1 n'arrivera pas à atteindre son ensemble de sécurité  $S_1$ .

Toutefois, pour l'agent 1 les deux portefeuilles  $W_0$  et  $B$  ne sont pas sécurisés et se situent sur la même courbe d'indifférence. Nous pouvons donc supposer, en absence de coûts de transaction, que l'agent 1 accepte l'échange puisqu'il est indifférent entre les deux portefeuilles. Dans ce cas, l'agent 2 a réussi à construire le portefeuille de sécurité et à rester sur sa courbe d'indifférence initiale. Même si l'agent 2 a augmenté sa satisfaction suite à l'échange, cette solution n'est pas véritablement un équilibre puisque la contrainte de sécurité de l'agent 1 n'est pas satisfaite. Rappelons que l'objectif majeur d'un agent BPT est d'atteindre son ensemble de sécurité. Dans le programme d'optimisation (3), la condition  $P(W < A) \leq \alpha$  est prise en compte comme une contrainte. Il s'agit donc d'une condition nécessaire pour que le portefeuille optimal existe. Ainsi, d'après Shefrin et Statman (2000), l'individu n'accepte l'échange que si celui-ci lui permet d'atteindre son ensemble de sécurité. Si au moins une des contraintes n'est pas satisfaite, formellement le programme d'optimisation (3) n'a pas de solution. Pour cela, l'échange de  $W_0$  contre  $B$  ne va pas avoir lieu. L'équilibre avec les prix tels que  $\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2}$  n'est donc pas possible même si, à condition que l'agent 1 accepte l'échange, les prix établis vérifient cette équation. Finalement, nous devrions rejeter l'hypothèse 1.

Existe-il un autre portefeuille, différent de  $B$ , qui pourrait augmenter la satisfaction des deux agents ? Afin que chaque individu puisse satisfaire sa contrainte de sécurité, la solution optimale doit appartenir à  $S_{12}$  l'intersection de  $S_1$  et de  $S_2$ . Pour cela, en ce qui concerne l'agent 1, il n'a pas d'intérêt à rester sur  $CI_{W_0}$  puisque dans ce cas il n'arrivera jamais à atteindre son ensemble de sécurité. Donc, s'il décide d'entrer sur le marché, c'est pour se retrouver sur une courbe d'indifférence qui passe par  $S_1$ , c'est-à-dire sur une courbe d'indifférence plus élevée (par exemple au point  $C$  représenté sur la figure 3.16) <sup>72</sup>. Si l'agent 2 accepte l'échange, cela signifie qu'il construit un portefeuille sécurisé mais, parallèlement, il se retrouve sur une courbe d'indifférence plus basse que celle passant par  $W_0$ . La question est donc de savoir quel portefeuille,  $W_0$  ou  $C$ , apporte à l'agent 2 plus de satisfaction : celui qui est assuré ou celui qui l'espérance plus élevée.

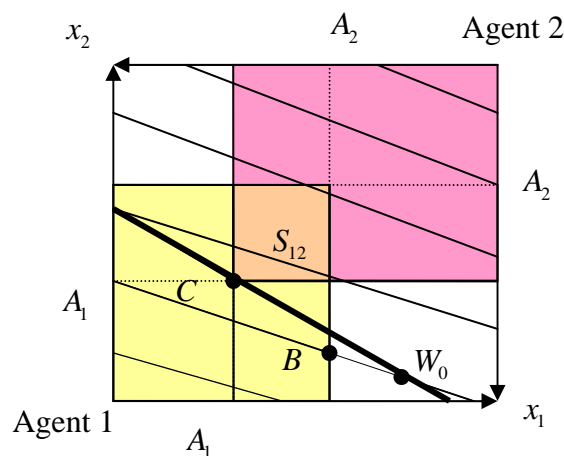


Figure 3.16.

D'une façon intuitive, nous pouvons supposer qu'un portefeuille sécurisé apporte plus de satisfaction à l'agent que celui qui n'est pas assuré. Toutefois, le comportement d'un agent non assuré n'est pas clairement précisé dans le modèle BPT. L'ordre de préférence entre différents portefeuilles (assurés ou non) n'est pas

<sup>72</sup> Le portefeuille  $C$  se situe sur la courbe d'indifférence la plus proche de celle passant par  $W_0$  et dont l'intersection avec  $S_{12}$  n'est pas vide.

déterminé. Pour cela, nous ne pouvons pas affirmer que l'agent 2 préfère le portefeuille  $C$  au  $W_0$ . En fait, le modèle BPT définit le comportement d'un individu à condition que celui-ci arrive à atteindre son ensemble de sécurité. Il ne précise pas ce qui se passe quand cette condition n'est pas vérifiée. Dans notre contexte, quand il s'agit de confronter deux agents, cette formulation du modèle BPT amène à deux situations. Ou bien, nous retrouvons le cas de l'équilibre décrit dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée (le cas trivial et le cas 1 du tableau 3.2). Ou bien, la solution n'est pas déterminée (cas 2)<sup>73</sup>. En effet, la formulation du modèle BPT suppose que l'individu maximise l'espérance de sa richesse finale sur un ensemble de portefeuilles restreint. Pour cela, à l'intérieur de l'ensemble de sécurité, le comportement de l'agent est bien défini puisque nous sommes dans le cas de la théorie de l'utilité espérée. Par contre, en dehors de cet ensemble, les préférences ne sont pas clarifiées et nous ne connaissons donc pas les critères de choix des investisseurs. Il semblerait qu'un individu suivant le concept *safety first* ne devrait pas se comporter de la même manière qu'un agent neutre au risque. Cependant, nous constatons une certaine similitude dans le choix de ces agents. Pour cela, il est important de souligner, que ceci est dû uniquement à la formulation du modèle BPT selon laquelle la sécurité est prise en compte par le biais d'une contrainte.

**Cas 3.**  $CI_{W_0} \cap S_{12} \neq \emptyset$ ;  $W_0 \notin S_1$  et  $W_0 \in S_2$ .

L'intersection de la courbe d'indifférence  $CI_{W_0}$  avec  $S_{12}$  n'est pas vide et  $W_0$  appartient à l'un des ensembles de sécurité. Par exemple,  $W_0 \in S_2$  (figure 3.17) :

---

<sup>73</sup> Ce résultat sera aussi confirmé dans tous les autres cas étudiés.

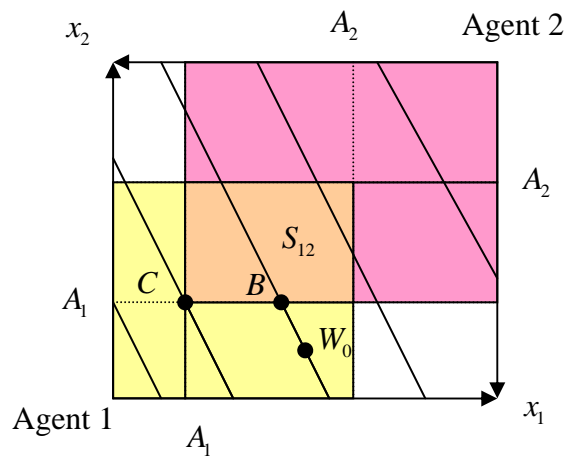


Figure 3.17.

Cette fois-ci la situation initiale des agents est différente : l'agent 2 est assuré alors que l'agent 1 ne l'est pas. L'objectif de ce dernier, dans un premier temps, est d'atteindre son ensemble de sécurité  $S_1$ . Par contre, l'agent 2 cherche à se retrouver sur une courbe d'indifférence la plus élevée possible en restant à l'intérieur de  $S_2$ . Toutefois, l'agent 2 peut accepter de se déplacer tout au long de sa courbe d'indifférence initiale  $CI_{W_0}$ . Et puisque  $CI_{W_0}$  passe aussi par l'ensemble  $S_{12}$ , l'échange qui amène à l'équilibre peut avoir lieu (par exemple au point  $B$ ). En tout cas, ce raisonnement s'applique de façon naturelle dans le cas classique en l'absence de coûts de transaction.

Cependant, dans le modèle BPT les conditions ne sont pas tout à fait les mêmes. Certes, l'agent 2 est indifférent entre le point  $W_0$  et un point de même courbe d'indifférence appartenant à l'ensemble  $S_2$ . Par contre, l'agent 1 préfère évidemment être au point  $B$  et détenir un portefeuille sécurisé plutôt que de rester avec sa dotation initiale. L'agent 2, étant dans une position privilégiée, peut ne pas accepter l'échange de  $W_0$  contre  $B$ . Après tout, cet agent est déjà assuré. En fait, l'agent 2 peut proposer l'échange de façon à se retrouver, par exemple, au point  $C$ . Ce portefeuille lui procure plus de satisfaction que  $W_0$  car  $C$  se trouve sur une courbe d'indifférence plus élevée. Puisque  $C$  fait partie de l'ensemble  $S_{12}$ , il semblerait que l'agent 1, initialement non assuré, acceptera cet échange. Toutefois, cela signifie que cet agent



doit se déplacer sur une courbe d'indifférence plus basse pour atteindre son ensemble de sécurité. Comme dans les cas précédents, nous ne pouvons pas affirmer que l'agent 1 préférera échanger  $W_0$  contre  $C$ .

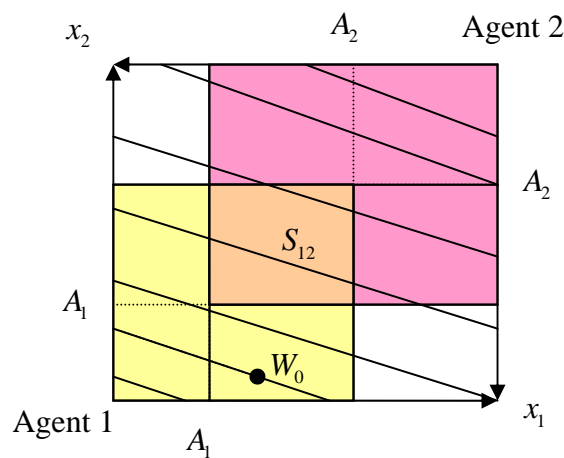
En même temps, avant l'échange, l'agent 2 n'est pas nécessairement conscient de sa situation avantageuse. En effet, les paramètres  $A_1$  et  $\alpha_1$  qui déterminent l'ensemble de sécurité de l'agent 1 sont *a priori* inconnus aux autres participants du marché car il s'agit des paramètres individuels. Pour cela l'agent 2, étant indifférent entre les portefeuilles  $W_0$  et  $B$ , peut éventuellement accepter d'échanger ces titres et se de déplacer en point  $B$ .

De cette façon, dans le contexte du modèle BPT, le seul équilibre possible est celui établi en point  $B$  (ou tout point qui se situe sur la courbe  $CI_{W_0}$  et qui appartient à  $S_{12}$ ). Les prix d'équilibre sont identiques à ceux obtenus dans le cas de la théorie de

l'utilité espérée :  $\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2}$ .

**Cas 4.**  $CI_{W_0} \cap S_{12} = \emptyset$ ;  $W_0 \notin S_1$  et  $W_0 \in S_2$

L'intersection de la courbe d'indifférence passant par  $W_0$  avec  $S_{12}$  est vide et  $W_0$  appartient à l'ensemble de sécurité d'un des agents. Par exemple  $W_0 \in S_2$  (figure 3.18) :



**Figure 3.18.**

A la date 0 seul l'agent 1 n'est pas assuré. Du point de vue de l'agent 2, tout portefeuille de  $S_{12}$  se trouve sur une courbe d'indifférence inférieure à celle passant par  $W_0$ . En d'autres termes, quel que soit le portefeuille de  $S_{12}$ , l'agent 2 n'a aucun intérêt à l'échanger contre son portefeuille initial. Pour cette raison l'échange ne peut pas avoir lieu car l'agent 2 refusera de vendre ses titres. Ainsi, il n'existe pas de couple de prix qui pourrait amener l'agent 1 à augmenter sa satisfaction sans baisser pour autant celle de l'agent 2.

Cependant, nous pouvons nous interroger sur une stratégie qu'un investisseur dans la sphère réelle pourrait suivre quand il se trouve dans une situation similaire à celle de l'agent 1. Une solution intuitive peut être envisagée. L'agent 1, étant dans une situation défavorable, et ne pouvant pas augmenter sa satisfaction dans ces conditions, est amené à modifier ses paramètres individuels  $A_1$  et  $\alpha_1$ . Autrement dit, l'agent 1 pourrait revoir ses exigences en termes de sécurité. Par exemple, il pourrait diminuer son niveau d'aspiration ou bien augmenter le seuil de faillite admissible, ou encore modifier les deux paramètres en même temps. Évidemment, ces modifications nécessaires doivent être prises en compte en termes de satisfaction. D'une part, la baisse du niveau d'aspiration, ainsi que l'augmentation du seuil de faillite doivent entraîner la baisse de satisfaction par rapport au niveau exigé initialement. D'autre part, les nouveaux paramètres vont définir le nouvel ensemble de sécurité. Ce dernier, qui est plus large que l'ensemble de sécurité initial, doit permettre à l'agent d'atteindre un portefeuille sécurisé en termes de nouveaux paramètres. De ce point de vue, les modifications entreprises vont finalement augmenter la satisfaction de l'individu par rapport à sa situation du départ.

La modification des paramètres individuels peut ainsi apporter une réponse à certaines critiques du modèle de Shefrin et Statman (2000). Comme nous l'avons déjà mentionné (section 2, cas 1), les différents portefeuilles en dehors de l'ensemble de sécurité sont traités par l'individu de la même façon. Concrètement, ils sont perçus comme non attractifs alors que certains d'entre eux sont plus proches de la frontière de l'ensemble de sécurité que d'autres. Par exemple pour un agent avec  $\alpha = 0$  (c'est-à-

dire, celui qui cherche à assurer tous les états de la nature) un portefeuille sans risque  $(A - \varepsilon, A - \varepsilon)$  avec  $\varepsilon$  infiniment petit procure la même satisfaction que l'actif  $(0, 0)$ .

De cette façon, la modification des paramètres est étroitement liée avec l'ordre de préférence des portefeuilles. Un individu qui décide de diminuer son niveau d'aspiration n'a pas les mêmes préférences que celui que préfère augmenter le seuil de faillite admissible. Alors qu'à l'intérieur de l'ensemble de sécurité la satisfaction de chaque portefeuille est définie par les courbes d'indifférence, aucun classement n'est établi en dehors de cet ensemble. Les cas étudiés mettent en évidence que ceci réduit la capacité du modèle à décrire le comportement des individus. Comme nous l'avons déjà évoqué, puisque les préférences ne sont pas déterminées en dehors de l'ensemble de sécurité, les résultats issus du modèle de Shefrin et Statman (2000) sont confondus avec ceux obtenus dans la théorie de l'utilité espérée. Ce fait pourrait mettre un doute sur le concept de *safety first* en général. Cependant, le phénomène observé est uniquement dû à la formulation du modèle BPT. Ainsi, il semblerait que la mise en place de processus de modification des paramètres de sécurité permettra de clarifier le comportement d'un agent du type BPT.

Cette idée ne peut pas s'intégrer dans le modèle BPT tel qu'il a été proposé par Shefrin et Statman (2000). Ceci est lié au fait que l'équation  $P(W < A) \leq \alpha$  est une condition nécessaire pour que la solution existe. Les nouveaux paramètres  $A$  et  $\alpha$  caractérisent un nouvel agent et donc ils déterminent un nouveau programme d'optimisation. Pour cela, afin de déterminer l'ordre de préférence des portefeuilles nous proposons de sortir du cadre du modèle BPT. L'idée consiste à introduire une fonction d'utilité qui d'une part, traduit le comportement d'un agent BPT et, d'autre part, pourrait définir son niveau de satisfaction pour chaque portefeuille existant. Nous développons cette fonction dans la section suivante.

## 4. Une nouvelle version du modèle BPT

Dans leur article Shefrin et Statman (2000) ont proposé une fonction d'utilité pour décrire le comportement d'un investisseur suivant le modèle BPT. Nous avons présenté cette fonction dans le cadre du modèle BPT-MA évoqué dans le premier chapitre. Ici, nous le rappelons brièvement.

Le modèle BPT-MA est la suite du modèle BPT que nous étudions. Le modèle BPT-MA suppose qu'un individu possède plusieurs comptes mentaux, alors que nous considérons un individu avec un seul compte. Des comptes sont gérés différemment et d'une manière indépendante puisqu'ils sont destinés à des buts différents. A chaque compte correspond un niveau d'aspiration. Par exemple, un compte de sécurité avec un niveau d'aspiration, noté  $A_s$ , relativement petit, sert à satisfaire l'envie de sécurité de l'individu. Un compte appelé spéculatif, avec le niveau d'aspiration  $A_p$  ( $P$  comme « potentiel ») relativement élevé traduit l'envie de s'enrichir. A chaque compte Shefrin et Statman (2000) associent une fonction d'utilité :  $U_s = U_s(P(W_s \geq A_s), E(W_s))$  pour le compte de sécurité et  $U_p = U_p(P(W_p \geq A_p), E(W_p))$  pour le compte spéculatif.  $W_s$  et  $W_p$  représentent respectivement les richesses futures des comptes. La satisfaction globale de l'individu avec ces deux comptes est définie par la fonction suivante :

$$U = K_s U_s \times (1 + K_p U_p)$$

qui dépend des fonctions d'utilités  $U_s$  et  $U_p$ , ainsi que des constantes  $K_s$  et  $K_p$ . Cette fonction s'annule si l'utilité du compte de sécurité est nulle. Cependant, l'utilité du compte spéculatif peut être nulle, alors que l'utilité globale de l'individu reste positive. De ce fait, l'individu attribue plus d'importance à sa sécurité qu'à l'envie de s'enrichir. D'une façon plus générale, nous retrouvons dans ce raisonnement l'idée de départ des modèles *safety first*, à savoir « la sécurité d'abord ».

Le problème de maximisation de  $U$  s'avère une tâche compliquée. Toutefois, en s'appuyant sur le raisonnement de Shefrin et Statman (2000) développé dans le cadre du modèle BPT-MA, nous proposons une forme simplifiée de  $U$  qui, à notre avis, traduit d'une manière convenable le comportement de l'individu doté d'un seul compte mental.

Posons

$$U = U_s \times (1 + U_p)$$

avec

$$U_s(W) = \begin{cases} 1, & \text{si } W \in S \\ 0, & \text{si } W \notin S \end{cases} \quad \text{et} \quad U_p(W) = E(W).$$

La satisfaction de l'agent, définie par la fonction  $U$ , dépend de la fonction de sécurité  $U_s$  et de la fonction  $U_p$  qui correspond à l'envie de l'investisseur de s'enrichir d'une manière conséquente. L'investisseur cherche à maximiser l'espérance de sa richesse finale et, parallèlement, tient à ce que sa contrainte de sécurité soit vérifiée ( $W \in S$ , où  $S$  définit l'ensemble de sécurité). La satisfaction globale de l'agent est nulle ( $U = 0$ ) si l'ensemble de sécurité n'est pas atteint ( $U_s = 0$ ). Par contre, si  $U_p = 0$  la satisfaction  $U$  de l'agent dépend uniquement de la valeur  $U_s$  et, en tout cas, ne s'annule pas si l'investisseur n'a pas pu atteindre l'espérance  $E(W)$  maximale. En d'autres termes, la fonction  $U$  met l'accent sur la contrainte de sécurité.

La fonction  $U$  semble traduire d'une manière convenable le comportement de l'agent BPT que nous considérons. En effet, la fonction d'utilité  $U$  s'annule si le portefeuille n'est pas assuré. Dans les autres cas,  $U$  est strictement positive et sa valeur dépend du niveau de la courbe d'indifférence définie par  $U_p = E(W)$ .

Dans ce nouveau cadre théorique le programme de l'agent consiste à maximiser sa fonction d'utilité  $U$ . L'équilibre du marché est déterminé par le programme suivant :

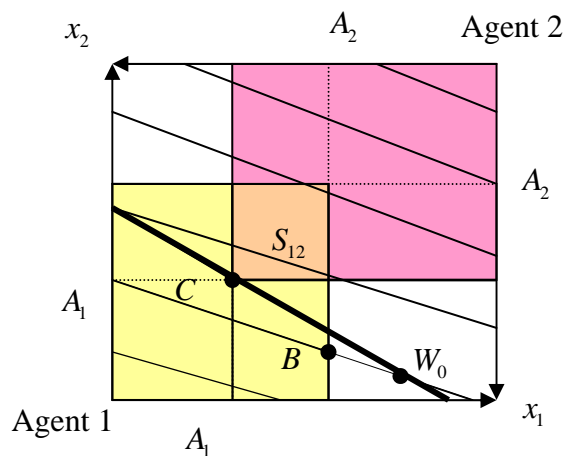
$$\begin{aligned}
& \text{Max } \lambda_1 U_1 + \lambda_2 U_2 \\
\text{s.c } & (x_1^i - x_{01}^i)\pi_1 + (x_2^i - x_{02}^i)\pi_2 = 0 \quad i=1,2 \quad (4) \\
& x_k^1 + x_k^2 = x_{0k}^1 + x_{0k}^2 \quad k=1,2.
\end{aligned}$$

où  $U_i = U_{si} \times (1 + U_{pi})$  est la fonction d'utilité de l'agent  $i$ , et  $\lambda_1, \lambda_2$  sont des constantes positives.

A présent, appliquons le modèle BPT modifié aux cas de la section précédente afin d'étudier si les nouveaux cas d'équilibre sont possibles. Dans le cas 1, la solution obtenue en termes de la fonction  $U$  est similaire à celle proposée par le modèle BPT, ainsi qu'à celle issue de la théorie de l'utilité espérée<sup>74</sup>. Considérons les cas 2, 3 et 4.

**Cas 2.**  $CI_{W_0} \cap S_{12} = \emptyset; W_0 \notin S_1$  et  $W_0 \notin S_2$ .

Avant l'échange les deux agents ne sont pas assurés. Rappelons que la solution proposée auparavant était d'échanger  $C$  contre  $W_0$  (figure 3.19) :



**Figure 3.19.**

Cependant, on ne pouvait affirmer que l'agent 2 acceptait cet échange car cela signifiait qu'il devait diminuer l'espérance de son portefeuille en faveur de plus de sécurité.

<sup>74</sup> Voir annexe B.2.

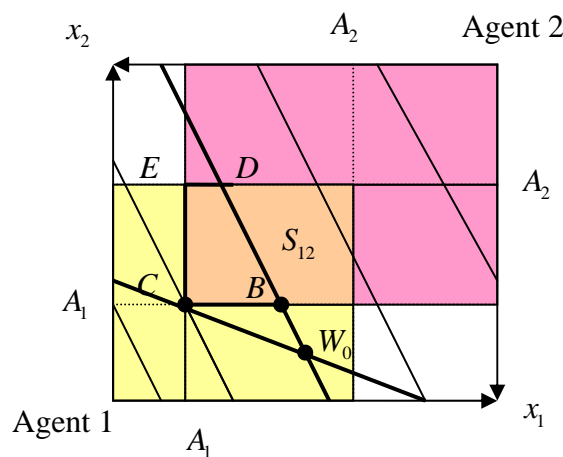
En termes de la fonction  $U$ , l'échange de  $W_0$  contre  $C$  permet d'augmenter la satisfaction des deux individus. En effet, avant la transaction, à la date 0, la fonction  $U$  prend la valeur nulle pour les deux agents car ils ne sont pas assurés. Après l'échange, la valeur de  $U$  est strictement positive pour chacun puisque le portefeuille  $C$  est assuré pour les deux agents. Concrètement, dans le cas représenté sur la figure 3.18, la droite de budget passe par les points  $W_0$  et  $C = (A_1, A_1)$  et donc :

$$\frac{\pi_1}{\pi_2} = -\frac{A_1 - x_{02}^1}{x_{01}^1 - A_1}.$$

La droite de budget n'est pas parallèle aux courbes d'indifférence. Pour cela, nous avons  $\frac{\pi_1}{\pi_2} \neq \frac{p_1}{p_2}$ . Ceci est une solution d'équilibre intéressante dans la mesure où elle diffère de celle obtenue dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée.

**Cas 3.**  $CI_{W_0} \cap S_{12} \neq \emptyset$ ;  $W_0 \notin S_1$  et  $W_0 \in S_2$ .

Le portefeuille  $W_0$  est assuré pour l'agent 2, mais il ne l'est pas pour l'agent 1.



**Figure 3.20.**

Le portefeuille  $C$  (figure 3.20) peut être proposé par l'agent 2 comme une solution d'équilibre. En effet, en ce point les deux agents sont assurés. En plus, l'agent 2 augmente sa satisfaction par rapport à celle de  $W_0$ . Cependant, comme dans

le cas précédent, nous ne pouvons pas affirmer que l'agent 1 préférera échanger  $W_0$  contre  $C$ .

En termes de la fonction de l'utilité  $U$ , le portefeuille  $C$  peut être choisi à l'équilibre. En effet, la satisfaction des agents a augmenté par rapport à leur situation initiale. Puisque  $C$  est assuré,  $U_s(C) = 1$  pour les deux agents, alors que  $U_s(W_0) = 0$  pour l'agent 1 et donc sa satisfaction globale en point  $W_0$  est nulle. De cette façon, l'agent 1 a augmenté sa satisfaction. En ce qui concerne l'agent 2,  $U(C) > U(W_0)$  puisqu'il se retrouve sur une courbe d'indifférence plus élevée. Il a aussi augmenté sa satisfaction.

Le raisonnement ci-dessus s'applique de la même façon à tout portefeuille de l'ensemble  $BCED$  (figure 3.20).  $BCED$  est un sous-ensemble de portefeuilles de sécurité  $S_{12}$  qui se trouve entre la courbe  $CI_{W_0}$  passant par  $W_0$  et la courbe d'indifférence passant par le point  $C$ . Finalement, tout point de l'ensemble  $BCED$  peut être le portefeuille optimal dans la mesure où il augmente la satisfaction de chaque individu. En effet, en tout point de  $BCED$  les deux agents sont assurés. L'agent 1, qui ne l'était pas avant l'échange, augmente donc sa satisfaction. L'agent 2 garde sa position assuré et, parallèlement peut se retrouver sur une courbe d'indifférence plus élevée.

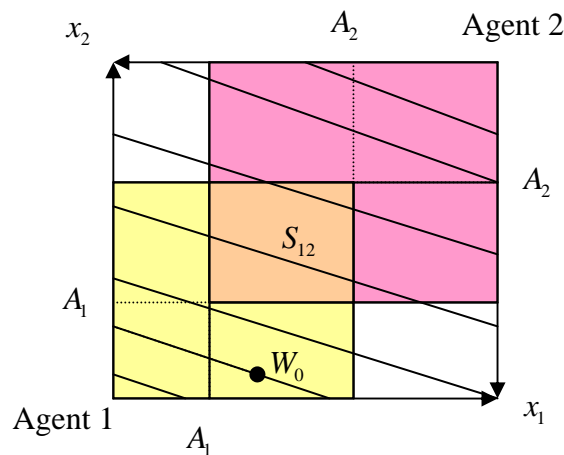
Dans le cas particulier où la solution optimale est le portefeuille  $B$  (ou tout portefeuille de la courbe  $CI_{W_0}$  appartenant à  $S_{12}$ ), les prix d'équilibre sont identiques à ceux obtenus dans les cas du modèle BPT et de la théorie de l'utilité espérée. Mais, en général, l'équation  $\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2}$  n'est pas établie à l'équilibre. En fait, il existe une infinité de couples de prix  $(\pi_1, \pi_2)$  correspondant aux différents portefeuilles de  $BCED$ . Remarquons que dès que les prix ont été annoncés ou déterminés lors de la négociation entre les deux agents, il n'est plus possible de les modifier. Effectivement, à partir du moment où les prix ont été acceptés, les deux individus arrivent à atteindre l'ensemble  $S_{12}$ . Or, dès que les agents se trouvent à l'intérieur de leurs ensembles de sécurité, la stratégie de chacun devient celle d'un individu neutre



au risque. En d'autres termes, à l'intérieur de  $BCED$ , tout échange d'actifs amène à une augmentation de satisfaction d'un agent et une baisse de satisfaction de l'autre puisque les courbes d'indifférence sont des droites parallèles. Puisque aucun agent ne peut augmenter sa satisfaction sans détériorer la satisfaction de l'autre, nous sommes dans le cas de l'équilibre de Pareto.

**Cas 4.**  $CI_{W_0} \cap S_{12} = \emptyset$ ;  $W_0 \notin S_1$  et  $W_0 \in S_2$

Le portefeuille  $W_0$  est assuré pour l'agent 2, mais il ne l'est pas pour l'agent 1. En plus, la courbe d'indifférence  $CI_{W_0}$  n'a pas de point commun avec l'ensemble de sécurité de l'agent 1 (figure 3.21) :



**Figure 3.21.**

Comme nous l'avons montré dans la section précédente, la solution n'existe pas dans le cadre du modèle BPT. Puisque les conditions du marché sont défavorables pour l'agent 1, il pourrait être amené à modifier ces paramètres  $A$  et  $\alpha$ .

La modification des paramètres peut être mise en place au travers de la fonction d'utilité  $U$ . Rappelons sa définition :

$$U = U_s \times (1 + U_p)$$

avec

$$U_s(W) = \begin{cases} 1, & \text{si } W \in S \\ 0, & \text{si } W \notin S \end{cases} \quad \text{et} \quad U_p(W) = E(W)$$

où  $S$  est l'ensemble de sécurité de l'agent. Dans cette version la fonction  $U$  s'annule pour tout portefeuille en dehors de  $S$ , de la même façon que le programme d'optimisation (3) n'a pas de solution si l'ensemble de sécurité n'est pas atteint. Ceci est dû à la forme de la fonction  $U_s$  qui est discontinue en tout point de la frontière de  $S$ . Parallèlement, la modification des paramètres de sécurité  $A$  et  $\alpha$  ne joue que sur la forme de  $U_s$  et n'a pas d'impact sur la fonction  $U_p$ . Pour cela, afin de répondre aux inconvénients évoqués ci-dessus, nous devrions remplacer  $U_s$  par une fonction continue. Cette nouvelle fonction, notée  $\tilde{U}_s$ , doit prendre des valeurs strictement positives en tout portefeuille dont au moins un des paiements est strictement positif. Par contre,  $\tilde{U}_s = 0$  si les paiements du portefeuille sont tous nuls. Aussi, pour tout portefeuille de l'ensemble de sécurité initial de l'individu,  $\tilde{U}_s$  doit prendre la même valeur de façon à ce qu'à l'intérieur de  $S$  l'individu suive les principes du modèle BPT.

Nous ne développons pas ici la construction de cette nouvelle fonction, ceci est une piste éventuelle de nos futures recherches. Toutefois, sous l'hypothèse que le changement des paramètres de sécurité peut être mis en place, nous pouvons aborder la question de l'équilibre de marché. Revenons au cas 4 (figure 3.20). L'agent 1 n'est pas assuré et donc il est dans une situation défavorable par rapport à l'agent 2 qui est assuré car  $W_0$  appartient à son ensemble de sécurité. L'agent 1 est contraint de revoir ses paramètres de façon à ce que l'agent 2 accepte l'échange. Au premier abord, il n'y a pas d'inconvénient à ce que l'agent 2 ne reste pas sur sa courbe d'indifférence initiale. En d'autres termes, l'agent 1 modifiera ses paramètres  $A_1$  et  $\alpha_1$  de façon à ce que son ensemble de sécurité  $S_1$  atteigne la courbe d'indifférence  $CI_{W_0}$ . Afin d'illustrer ce point, nous présentons sur la figure 3.22 la situation où l'agent 1

augmente  $\alpha_1$  et garde le même niveau d'aspiration  $A_1$ . Dans ce cas, le portefeuille optimal peut coïncider avec le portefeuille initial.

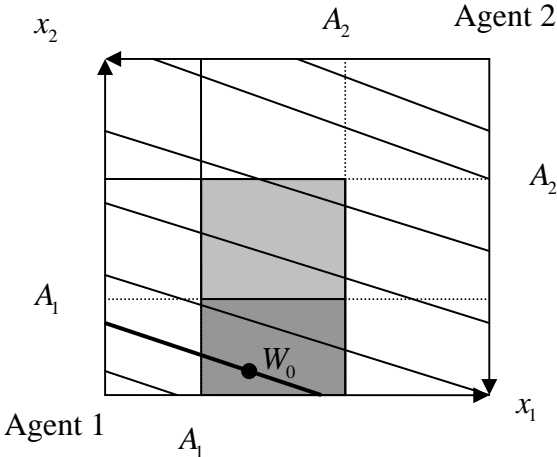


Figure 3.22<sup>75</sup>.

La figure 3.23 décrit la situation dans laquelle l'agent 1 décide de baisser  $A_1$  et de garder le même niveau de  $\alpha_1$ . En absence de coûts de transaction, l'agent 2 accepte d'échanger  $W_0$  contre  $W^*$  puisqu'il est indifférent entre ces deux portefeuilles.

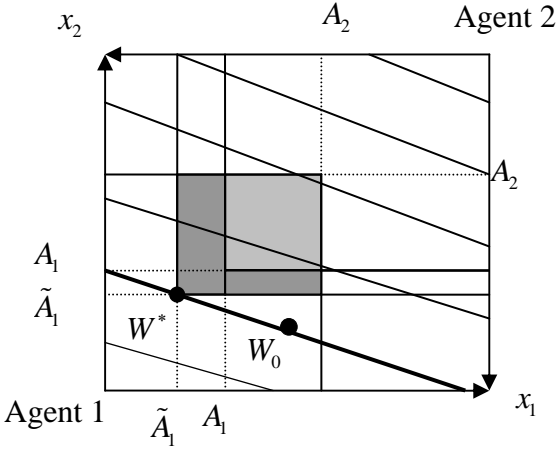


Figure 3.23.

<sup>75</sup> L'espace gris foncé sur les figures représente l'intersection de  $S_2$  avec l'ensemble de portefeuilles qui s'ajoutent à l'ensemble de sécurité initial de l'agent 1.

Dans les deux cas, la contrainte du budget coïncide avec  $CI_{W_0}$  et les prix d'équilibre vérifient l'équation  $\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2}$  comme le prédit la théorie de l'utilité espérée.

Cependant, que se passerait-il si l'agent 2 décidait de profiter de sa situation avantageuse ? En supposant qu'il n'accepte l'échange que si celui-ci augmente sa satisfaction, cet agent essaiera de se déplacer sur une courbe d'indifférence la plus élevée possible. Pour l'agent 1, cela signifie qu'il doit revoir ces paramètres de sécurité de façon encore plus désavantageuse par rapport à la situation précédente, où il acceptait de descendre sur la courbe  $CI_{W_0}$ . Parallèlement, l'agent 1 n'acceptera pas de baisser sa satisfaction en dessous de celle que lui procure le portefeuille  $W_0$ . En d'autres termes, cet agent modifiera ses paramètres  $A_1$  et  $\alpha_1$  de façon à ce que  $W_0$  appartienne à son nouvel ensemble de sécurité. Ainsi, les prix d'équilibre vérifient la même équation  $\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2}$  (figure 3.24) :

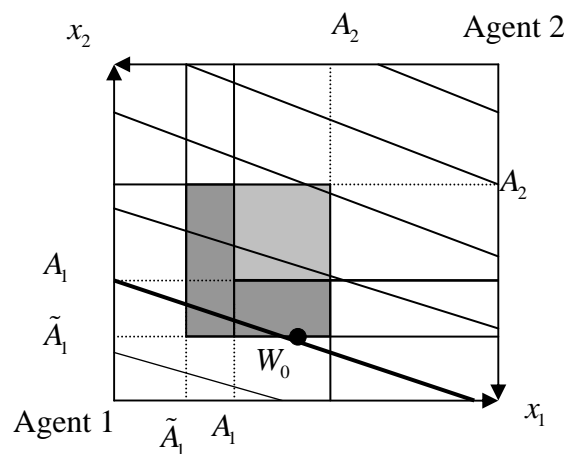


Figure 3.24.

Finalement, dans le cas où un seul agent est amené à modifier ses paramètres individuels, les résultats à l'équilibre ne se différencient pas de ceux obtenus dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée. Le changement des paramètres se fait de façon à ce que le nouvel ensemble de sécurité contienne  $W_0$  ou un portefeuille de  $CI_{W_0}$ .

Considérons maintenant la situation où  $W_0$  n'appartient à aucun des ensembles de sécurité  $S_1$  et  $S_2$ . L'intersection  $S_{12}$  est vide et aucun échange ne peut être satisfaisant pour les agents (figure 3.25) :

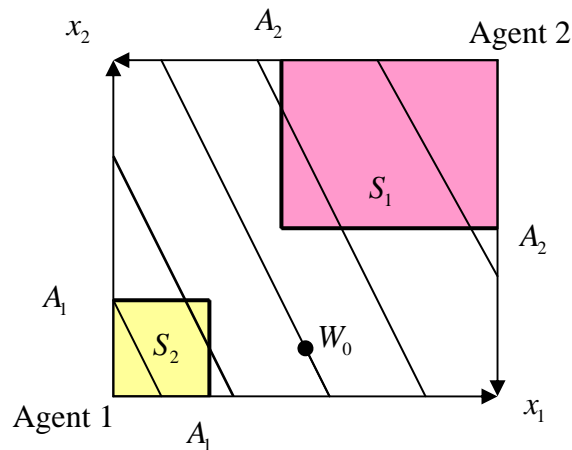


Figure 3.25.

Pour cela, les deux individus sont amenés à modifier leurs paramètres individuels afin de pouvoir augmenter leur satisfaction. Contrairement au cas précédent, nous ne pouvons pas prétendre cette fois-ci que les prix d'équilibre vont vérifier l'équation  $\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2}$ . Evidemment, l'échange aura lieu dès que l'intersection  $S_{12}$  n'est pas vide. Or, nous ne savons pas exactement où se trouve ce point d'intersection car la façon dont les individus révisent leurs paramètres individuels n'a pas encore été clarifiée.

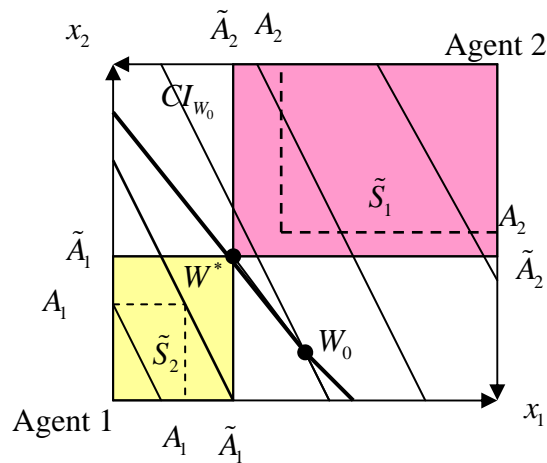


Figure 3.26.

Par exemple, sur la figure 3.26 nous avons supposé que les deux individus diminuent le niveau d'aspiration et maintiennent le seuil de faillite inchangé. D'une manière générale, le résultat dépendra de la façon dont la modification des paramètres est prise en compte dans les programmes des investisseurs. En d'autres termes, il est nécessaire de déterminer d'une façon rigoureuse la fonction  $\tilde{U}_s$  afin de pouvoir établir les portefeuilles optimaux des agents et les prix d'équilibre.

## 4. Discussion

Dans ce chapitre nous nous sommes posés la question de l'équilibre du marché en présence des agents suivant le modèle BPT de Shefrin et Statman (2000). Cette étude nous a permis de comparer les conditions d'équilibre et les portefeuilles optimaux obtenus dans le cadre du modèle BPT avec les résultats bien connus de la théorie de l'utilité espérée. Sous l'hypothèse que l'agent BPT considère les probabilités objectives, la contrainte de sécurité devient le seul point qui différencie les investisseurs décrits par ces deux modèles.

Pour cela, il n'est pas surprenant qu'à l'intérieur de son ensemble de sécurité, l'agent BPT se comporte de la même façon qu'un individu neutre au risque. Or, ce

fait a un impact direct sur les prix et les portefeuilles d'équilibre. En fait, les conditions du marché peuvent être telles que les deux agents arrivent simultanément à atteindre leurs ensembles de sécurité, sans avoir besoin de diminuer leurs satisfactions en termes de rentabilité espérée. Dans ce cas particulier, les prix établis, ainsi que les portefeuilles construits, sont identiques à ceux, qui sont prédits par la théorie de l'utilité espérée. Une seule différence réside dans le fait que l'ensemble de portefeuilles optimaux est restreint aux investissements sécurisés.

Cependant, dans la plupart des cas, l'un des deux agents ne peut pas construire un portefeuille sécurisé sans diminuer sa satisfaction en termes de rentabilité espérée. Une alternative pour cet agent est de ne pas entrer sur le marché et garder son portefeuille initial. La question est donc de savoir, laquelle des deux stratégies apporte à l'agent plus de satisfaction. La question similaire se pose aussi dans la situation où l'agent n'arrive jamais à construire un portefeuille de sécurité. Quelle stratégie pourrait-il mettre en place face à une telle situation ?

La théorie comportementale du portefeuille ne donne pas de réponse à ces questions. En fait, dans l'ensemble de sécurité les préférences sont définies par les courbes d'indifférence correspondant aux différents niveaux de rentabilité espérée. Par contre, en dehors de l'ensemble de sécurité cet ordre n'est pas défini. Pour cela, la capacité du modèle BPT à décrire le comportement des individus est limitée.

Toutefois, ceci est dû à la formulation du modèle BPT selon lequel le risque est pris en compte par le biais d'une contrainte. Cette idée est héritée de l'approche *safety first* qui souligne l'importance de la sécurité pour l'investisseur. En partant de ce point, nous avons proposé d'intégrer la contrainte de sécurité du modèle BPT dans la fonction d'utilité de l'agent. D'une part, cette nouvelle fonction décrit le même type d'individu que celui de Shefrin et Statman (2000). D'autre part, elle établit l'ordre de préférences sur l'ensemble de portefeuilles en totalité. Evidemment, la fonction proposée nécessite une étude plus approfondie pour être qualifiée de véritable fonction d'utilité. Il s'agit, en fait, d'une proposition qui pourrait pallier certains inconvénients des modèles *safety first* et, en particulier, du modèle BPT. D'ailleurs, le premier test de cette fonction, établi dans le contexte de recherche de l'équilibre du

marché, a donné des résultats intéressants. En effet, nous avons montré que les prix et les portefeuilles optimaux des agents dotés de la nouvelle fonction sont différents de ceux obtenus dans le contexte de la théorie de l'utilité espérée.

## 5. Conclusion

Ce chapitre était consacré à l'étude de l'équilibre du marché dans le cas de deux actifs purs en présence de deux agents suivant le modèle BPT de Shefrin et Statman (2000). L'agent du type BPT choisit à l'optimum le portefeuille à l'espérance maximale dans l'ensemble de portefeuilles vérifiant la contrainte de sécurité. Pour cela, dans un premier temps, nous avons étudié de quelle façon l'ensemble des portefeuilles, qui pourrait être choisis par l'investisseur à l'optimum, se restreint quand la contrainte de sécurité est appliquée. Concrètement, nous avons analysé différents types d'ensembles en fonction des paramètres  $A$  et  $\alpha$ .

Dans un second temps, nous avons confronté deux agents BPT l'un à l'autre. Nous avons constaté, que sous certaines conditions, l'équilibre établi sur le marché coïncide avec celui obtenu dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée. Cependant, dans le cas général, la solution d'équilibre n'est pas possible à trouver puisque les préférences des investisseurs ne sont pas définies pour tout l'ensemble de portefeuilles disponibles. Pour pallier cet inconvénient, nous avons proposé une fonction d'utilité qui à son tour traduit le comportement d'un agent du type *safety first*. En appliquant cette fonction, nous pouvons aboutir à des cas d'équilibre intéressants dans la mesure où ils diffèrent de l'équilibre établi dans le contexte de la théorie de l'utilité espérée.





## Chapitre 4

La théorie comportementale du portefeuille vs. le modèle « moyenne – variance ». Étude empirique.



# 1. Introduction

La vérification empirique est une étape importante, voire indispensable pour tout modèle ayant prétention de décrire le comportement des individus. En effet, il est fondamental de confronter le modèle aux données réelles. Nous avons évoqué dans le premier chapitre les diverses études empiriques permettant de tester la théorie moyenne – variance de Markowitz (1952a) ainsi que le modèle d'équilibre des actifs financiers développé par Sharpe (1964), Lintner (1965) et Mossin (1966). A ce jour, ces deux modèles représentent l'approche classique et sont largement utilisés par les professionnels.

Cependant, les critiques accumulées lors du dernier demi – siècle (voir chapitre 1) ont alimenté le développement d'approches alternatives, comme par exemple, la théorie comportementale du portefeuille (*Behavioral Portfolio Theory*, BPT dans la suite) de Shefrin et Statman (2000).

Un des points remarquables de cette théorie réside dans la forme particulière du portefeuille optimal. Par rapport au portefeuille parfaitement diversifié de Markowitz (1952a), le portefeuille optimal en termes de BPT a la forme d'une pyramide qui peut contenir plusieurs couches superposées. La couche inférieure est composée de titres peu risqués, par exemple les obligations d'État, et procure une rentabilité faible. Au contraire, la couche supérieure est composée de titres à forte exposition au risque et une rentabilité élevée, par exemple des actions. En d'autres termes, les différentes couches correspondent aux différents niveaux de risque et de rentabilité espérée. En outre, l'investisseur ne tient pas compte de la corrélation entre les couches dans la mesure où elles sont gérées indépendamment l'une de l'autre. Cette façon de gérer le portefeuille est compatible avec celle exercée par les grandes institutions financières comme les banques, les sociétés de gestion de fonds d'investissement et les caisses d'épargne. Elle correspond par ailleurs au conseil donné par les banquiers pour le compte de leurs clients (Fisher et Statman, 1997). De ce point de vue, la théorie comportementale du portefeuille est en accord avec le

concept de comptabilité mentale (voir chapitre 1) qui s'est développé sur la base de nombreuses observations des comportements des individus.

Pour ces raisons, le positionnement de la théorie comportementale du portefeuille comme alternative à l'approche classique de gestion de portefeuille semble être justifié. Dans le chapitre précédent nous avons confronté le modèle BPT à la théorie de l'utilité espérée dans le contexte de l'équilibre du marché. Dans ce chapitre, au moyen d'une étude empirique, nous comparons les choix d'un investisseur individuel suivant le modèle BPT avec ceux d'un investisseur qui utilise le modèle moyenne – variance. Nous testons ainsi la théorie comportementale du portefeuille sur des données réelles.

La suite de ce chapitre est organisée de la manière suivante. Dans la section 2 nous présentons les données et la méthode. Les résultats sont décrits dans la section 3 et discutés dans la section 4. La section 5 conclut ce chapitre.

## 2. Données et méthodologie

### 2.1. Données

#### 2.1.1. Présentation de l'échantillon

Notre étude porte sur un échantillon de titres de l'indice SBF120 (Société des Bourses Françaises) pour lesquels nous avons collecté les cours quotidiens sur la période du 1 juin 2001 au 1 juin 2007. L'indice SBF120 regroupe les valeurs de l'indice CAC40 et 80 autres titres en fonction de leurs capitalisations et des volumes traités. L'indice est ainsi représentatif des valeurs boursières les plus capitalisées et les plus liquides cotées à la Bourse de Paris. La figure 4.1 représente l'évolution de l'indice entre le 1 juin 2001 et le 1 juin 2007 :

## Cotation de l'indice SBF120 sur la période du 01/06/2001 au 01/06/2007



Source : <http://bourse.lci.fr>

**Figure 4.1.**

Globalement, nous observons un marché baissier entre juin 2001 et mars 2003. Sur cette période de crise économique suivant l'éclatement de la bulle d'internet en 2000 et les attentats du 11 septembre 2001 l'indice a perdu 2000 points<sup>76</sup> avec une baisse très prononcée le jour des attentats (plus de 200 points en une journée). La tendance s'est inversée à partir du deuxième trimestre 2003 lorsque l'économie semble sortir de la crise. Le 1 juin 2007 l'indice dépasse 4500 points. De cette façon, sur 1/3 de la période considérée le marché est baissier et sur les 2/3 suivants il est haussier.

Afin de construire l'échantillon nous avons considéré les titres qui appartiennent à l'indice au 1 juin 2001 (les 119 titres<sup>77</sup> sont présentés dans le tableau C.1.1 de l'annexe C.1) et nous avons suivi les changements dans la composition de l'indice jusqu'au 1 juin 2007. Concrètement, nous avons exclu les titres qui sont sortis de l'indice SBF120 durant la période considérée ainsi que les titres radiés de la bourse suite à une restructuration, une fusion, ou une reprise<sup>78</sup>.

<sup>76</sup> La base du SBF120 a été fixée à 1000 au 31.12.1990.

<sup>77</sup> Le nombre de titres composant l'indice varie au tour de 120. Il n'est pas nécessairement égal à 120.

<sup>78</sup> Soit un total de 40 titres présentés dans le tableau C.1.2 de l'annexe C.1.

Les valeurs de clôture journalière des titres ont été téléchargées à l'aide du logiciel Finwin<sup>79</sup>. Les cours sont ajustés par logiciel, c'est-à-dire retraités des opérations sur titres comme, par exemple, les augmentations de capital avec émission d'actions nouvelles, les divisions de la valeur nominale, les regroupements ou les réductions du nombre de titres, etc. Puisque les variations de cours dues à ces opérations ne sont pas prises en compte dans les cours ajustés, ces dernières traduisent uniquement un changement de valeur du capital.

Après avoir construit cet échantillon, nous avons calculé les rentabilités journalières. La période étudiée comprend 1535 jours de cotations. Cependant, parmi les 79 titres restants nous en avons identifié 8 pour lesquels les données pour une ou plusieurs dates isolées n'étaient pas disponibles. Pour les trois titres Ingenico, Schneider Electric et Zodiac les données sont manquantes pour une seule date isolée. Nous gardons donc ces titres dans l'échantillon, et, afin de pouvoir calculer les rentabilités journalières, nous considérons que la cotation de la date manquante est égale à la moyenne des deux cotations les plus proches<sup>80</sup>.

Pour les quatre titres CGG, Natexis Banque Populaire<sup>81</sup>, Rhodia et Technip il nous manque des données pour une date proche d'un week-end ou pour deux dates consécutives. Par exemple, pour Technip les données du vendredi 29 juin 2001 et du lundi 2 juillet 2001 sont manquantes. Comme, le 30 juin 2001 et le 1 juillet 2001 sont respectivement un samedi et un dimanche il n'y donc pas de cotation à ces dates. Ainsi, pour garder ce titre en portefeuille il faudrait calculer la rentabilité journalière à partir des données du jeudi 28 juin et du mardi 3 juillet, soit une période de 5 jours qui nous semble trop longue. Le tableau C.1.4 de l'annexe C.1 regroupe l'ensemble de l'information sur les dates manquantes de CGG, Natexis Banque Populaire, Rhodia et Technip. Ces titres ont été exclus de notre échantillon. Enfin, le titre Gecina a été éliminé car seules les données relatives à 1527 jours de cotation au lieu de 1535 sont disponibles.

---

<sup>79</sup> [www.fininfo.fr](http://www.fininfo.fr)

<sup>80</sup> Voir le tableau C.1.3 de l'annexe C.1.

<sup>81</sup> A partir du 25 octobre 2006 la banque porte le nom Natexis.

Pour les 74 titres restants, nous avons vérifié qu'ils sont entrés dans l'indice au moins deux mois avant le début de la période considérée et qu'ils sont sortis de l'indice au moins deux mois après la fin de la période.

Les rentabilités journalières de chaque titre ont été calculées de la façon suivante :

$$R_{i,t} = \ln(P_{i,t} + D_{i,t}) - \ln(P_{i,t-1}) \quad (1)$$

où  $R_{i,t}$  est la rentabilité du titre  $i$  à la date  $t$ ,

$P_{i,t}$  désigne le cours du titre  $i$  à la date  $t$ ,

$D_{i,t}$  est le dividende versé par le titre  $i$  à la date  $t$  ( $D_{i,t} = 0$  si aucun dividende n'est versé à la date  $t$ ).

Cependant, le logiciel Finwin corrige uniquement les rendements dus aux opérations sur titres et ne tient pas compte des variations de cours suite aux détachements de dividendes. Nous avons donc calculé les rendements en intégrant les dividendes (cf. Relation (1)).<sup>82</sup> Par ailleurs, l'information sur les dividendes n'est pas disponible pour deux titres de notre échantillon (Ubi Soft Entertainment et Business Objects). De même, l'information sur les dividendes versés par le titre Unibail diffère fortement selon les sources<sup>83</sup>. Nous avons préféré éliminer ces titres afin de construire une série cohérente de rentabilités.

Notre échantillon final contient par conséquent 71 titres présentés dans le tableau C.1.7 de l'annexe C.1.<sup>84</sup>

---

<sup>82</sup> Un exemple de retraitement des dividendes est présenté dans le tableau C.1.5 de l'annexe C.1. Le tableau C.1.6 récapitule les corrections de dividendes pour tous les titres de l'échantillon en excluant ceux qui n'ont pas versé de dividendes sur la période étudiée.

<sup>83</sup> Nous avons utilisé deux sources (proposées par Fininfo et Yahoo) afin de vérifier l'information sur les dividendes versés.

<sup>84</sup> Entre le début et la fin de la période certains titres ont changé de noms. Dans le tableau C.1.7 les titres figurent avec les noms actuels. Les changements des noms sont donnés dans le tableau C.1.8 de l'annexe C.1.



## 2.1.2 Description des données

Parmi les titres retenus on retrouve les plus grandes capitalisations boursières telles que Total, BNP, Suez, Sanofi-Aventis, France Télécom. Globalement, la capitalisation boursière des 71 titres représente environ 80% de la capitalisation boursière du SBF250<sup>85</sup>, le plus important indice de la Bourse de Paris qui sert de mesure de référence et traduit l'évolution du marché français dans sa totalité.

Pour chaque titre nous disposons d'une série de 1534 rentabilités journalières. Le tableau 4.1 récapitule les valeurs maximales, minimales et moyennes des principales statistiques<sup>86</sup>. Par exemple, nous avons trouvé que les rentabilités moyennes des titres varient de  $-1,45 \times 10^{-3}$  pour Altran Technologies à  $1,97 \times 10^{-3}$  pour Vallourec, avec une moyenne de  $0,1896 \times 10^{-3}$ . Altran Technologies est aussi le titre avec l'écart-type maximal qui s'élève à  $46,5 \times 10^{-3}$ . L'écart-type minimal, celui de Klepierre, est égal à  $13,3 \times 10^{-3}$ . Le coefficient d'asymétrie (skewness) est proche de zéro pour certains titres<sup>87</sup>, par exemple, Club Méditerranée, Euler-Hermes, Lafarge, Peugeot, Sanofi-Aventis. Il varie entre  $-2,56$  pour Sodexho et  $10,78$  pour Schneider Electric. Ce dernier est aussi caractérisé par le kurtosis (coefficient d'aplatissement) maximal, à savoir  $298,24$ . En fait, le kurtosis minimal, correspondant au titre Total avec  $5,55$ , alors que le kurtosis d'une loi normale est égal à  $3$ . Ainsi, les distributions des rentabilités des titres sont plutôt pointues avec des queues épaisses.

---

<sup>85</sup> Source : [www.euronext.com](http://www.euronext.com)

<sup>86</sup> Les statistiques descriptives sont détaillées en annexe C.2.

<sup>87</sup> Un skewness positif indique une distribution étalée vers la gauche, alors qu'un skewness négatif correspond à une distribution étalée vers la droite. Dans le cas d'une distribution normale ce coefficient est égal à  $0$  car il s'agit d'une distribution symétrique.

**Tableau 4.1.**

**Les statistiques descriptives pour les rentabilités journalières**

	<b>Rentabilité *10<sup>-3</sup></b>	<b>Écart-type *10<sup>-3</sup></b>	<b>Skewness</b>	<b>Kurtosis</b>
<b>Max</b>	<b>1,9735</b> Vallourec	<b>46,5</b> Altran Technologies	<b>10,78</b> Sodexho	<b>298,24</b> Schneider Electric
<b>Min</b>	<b>-1,4493</b> Altran Technologies	<b>13,3</b> Klepierre	<b>-2,56</b> Schneider Electric	<b>5,55</b> Total
<b>Moyenne</b>	<b>0,1896</b>	<b>21,8</b>	<b>0,05</b>	<b>16,22</b>

A l'aide du test de Jarque – Bera sur la normalité, nous avons constaté que la distribution des rentabilités des titres ne suit pas une loi normale et ceci au seuil de 1%. Les valeurs des statistiques de Jarque-Bera pour chaque titre sont données dans le tableau C.9 de l'annexe C.2. Elles dépassent toutes la valeur critique du test qui s'élève à 9,83 pour le seuil de 1%.

Sous l'hypothèse d'une année de 250 jours de cotation nous calculons les rentabilités annuelles des titres<sup>88</sup>. Nous constatons que les rentabilités annuelles moyennes varient entre -37,55% et 48,35% avec une moyenne de 4,2%. En matière d'écart-type, il varie entre 0,63% et 97,08%<sup>89</sup> avec une moyenne de 33,55%.

<sup>88</sup> Plus tard dans notre étude (2.2.2) nous changeons d'échelle et nous considérons des portefeuilles de rentabilité annuelle. Les résultats de calculs sont présentés dans le tableau C.2.2 de l'annexe C.2.

<sup>89</sup> L'écart-type le moins important est celui de Pernod Ricard et non pas celui de Klepierre qui est égal à 0,1877. Plus généralement, la relation  $\sigma_j \times \sqrt{250} = \sigma_a$  où  $\sigma_j$  et  $\sigma_a$  désignent respectivement des écart-types journalier et annuel, n'est pas vérifiée. En fait, cette égalité suppose que les variations journalières des cours sont indépendantes, hypothèse qui peut ne pas être vérifiée sur les données réelles. Par exemple, il est difficile d'imaginer que les variations des cours observées pendant une période après le 11 septembre 2001 soient indépendantes. De plus, nous avons calculé les valeurs journalières en utilisant notre base de données dans sa totalité, c'est-à-dire 1535 jours de cotations. Or, en supposant qu'une année contient 250 jours de cotation, les valeurs annuelles sont calculées en utilisant les  $250 \times 6 = 1500$  premiers jours de notre base de données.

## 2.2. Méthodologie

Dans la mesure où le modèle moyenne – variance de Markowitz (1952a) propose une solution différente de celle de BPT de Shefrin et Statman (2000), notre objectif est de confronter ces deux modèles dans un contexte réel. Harlow (1991), Alexander et Baptista (2002), Broihanne et *al.*, (2006) suggèrent que les deux frontières efficientes coïncident sous l’hypothèse de rentabilités normales. Cependant, de nombreuses études (Fama, 1976; Walter 2003) montrent que les rentabilités des titres ne peuvent pas être approchées par une loi normale puisque les queues des distributions sont trop épaisses. Le test de Jarque – Bera réalisé sur notre échantillon le confirme. De ce fait, nous ne faisons aucune hypothèse sur la distribution des rentabilités et nous cherchons à construire, puis à comparer la frontière efficiente de Shefrin et Statman (2000) avec celle de Markowitz (1952a) en nous appuyant sur notre base de données.

La démarche utilisée est décomposée en plusieurs étapes. Dans un premier temps, nous ne faisons pas de distinction entre un agent à la Markowitz (1952a) et un individu suivant le modèle de Shefrin et Statman (2000). Nous commençons dans la section 2.2.1 par la description de l’environnement dans lequel opère l’individu. Dans la section 2.2.2 nous présentons les moyens utilisés pour modéliser l’incertitude. La construction du portefeuille optimal de Shefrin et Statman (2000) est expliquée dans la section 2.2.3. Enfin, dans la section 2.2.4, nous précisons de quelle façon ce portefeuille est comparé avec celui optimal en termes moyenne – variance. Dans la section 2.2.5 nous récapitulons les étapes précédentes et finalisons l’explication de notre démarche.

## 2.2.1. Environnement de l'individu

### Investisseur individuel

Nous considérons un investisseur individuel qui opère dans un monde à 71 titres. Selon le principe de diversification de Markowitz (1952a), le portefeuille optimal est composé de tous les titres échangés sur le marché. Du point de vue opérationnel, la construction de ce portefeuille n'exige pas de calculs complexes et peut être effectuée sur des logiciels courants<sup>90</sup>. Ceci n'est pas le cas pour un portefeuille optimal issu du modèle BPT de Shefrin et Statman (2000). Concrètement, plus le nombre de titres qui composent le portefeuille est élevé plus la construction est lourde (ceci sera évident à la section 2.2.3 où nous expliquons cette construction en détail)<sup>91</sup>. Ceci est incontestablement un inconvénient majeur de la théorie comportementale du portefeuille. Pour contourner ce problème opérationnel, nous réduisons dans un premier temps le nombre de titres composant le portefeuille final. En d'autres termes, nous supposons que le nombre de titres choisi par l'individu ne peut pas dépasser une certaine limite, inférieure à 71 titres.

Bien qu'issue des restrictions opérationnelles, l'hypothèse ci-dessus peut être justifiée. En effet, comme nous l'avons déjà remarqué précédemment (chapitre 1), le principe de diversification est loin d'être respecté en pratique. Les portefeuilles individuels sont très peu diversifiés. Par exemple, l'étude de Kumar et Goetzmann (2003) portant sur 40 000 individus montre que sur la période 1991-1996, le nombre moyen de titres dans un portefeuille était de 4 et la médiane était de 3. Les coûts de transactions et d'information ainsi que les taxes sont des justifications courantes de la sous-diversification (Nieuwerburgh et Veldkamp, 2008). Rappelons aussi que les individus ont tendance à investir dans les titres qui leurs sont familiers (Kilka et Weber, 2000; Huberman, 2001). Par exemple, les salariés préfèrent investir dans les titres de l'entreprise dans laquelle ils travaillent (Holden et VanDerhei, 2001). La

---

<sup>90</sup> Par exemple Excel ou Matlab.

<sup>91</sup> Par exemple, le document d'aide du logiciel Matlab précise que la fiabilité du résultat n'est pas garantie au-delà de 15 titres.

sous-diversification peut aussi s'expliquer par le concept de rationalité limitée. En particulier, la rationalité de l'individu est limitée en termes de capacité de traitement de l'information disponible : l'individu n'a pas de moyens cognitifs suffisants pour construire un portefeuille comportant tous les titres échangés. La comptabilité mentale issue de l'approche comportementale est une autre façon d'expliquer la sous diversification (voir chapitre 1).

Dans ce contexte quel devrait être le nombre des titres composant le portefeuille final de l'individu ? Ceci fait l'objet du paragraphe suivant.

### **Choix du nombre de titres du portefeuille final**

Comme nous venons de le rappeler, les portefeuilles individuels sont loin d'être parfaitement diversifiés. En même temps, la diversification est le point clé du modèle moyenne - variance de Markowitz (1952a). Étant donné que notre objectif est de confronter ce modèle à celui de Shefrin et Statman (2000), le nombre de titres composant le portefeuille final devrait permettre d'atteindre un niveau de diversification suffisamment élevé.

De nombreuses études ont été effectuées afin d'établir le niveau optimal de la diversification au sens du modèle moyenne – variance. Par exemple, Bloomfield, Leftwich et Long (1977) estiment qu'un portefeuille contenant une vingtaine de titres bénéficie d'une grande partie de l'effet total de la diversification. Statman (1987) suggère qu'au moins 30 titres sont nécessaires pour atteindre un niveau de diversification optimal. Pour aboutir à ce résultat, Statman (1987) évalue les coûts et les bénéfices marginaux de la diversification en comparant un portefeuille de 30 titres avec celui de 500 titres du *Vanguard 500 Index fund*. Toutefois, dans son étude plus récente, Statman (2003) montre que le nombre de titres composant le portefeuille parfaitement diversifié dépasse 120. Cette différence dans les résultats s'explique de la façon suivante. Dans la deuxième étude, le *Vanguard Total Stock Market Index fund* sert de point de référence. Ce fonds qui n'existait pas dans les années quatre-vingt

contient 3444 titres<sup>92</sup>. Hormis cette différence, les autres paramètres qui ont un impact sur le niveau optimal de la diversification tels que la prime de risque et les corrélations entre les titres, ont changé au fil des années. Par exemple, les études récentes de Campbell, Lettau, Malkeil, Burton et Xu (2001) ont mis en évidence une forte augmentation de la volatilité idiosyncratique pendant les 25 dernières années alors que la volatilité du marché est restée stable. Ceci implique que les corrélations entre les rentabilités des titres ont diminué. En effet, Campbell et *al.*, montrent que les corrélations calculées sur des données mensuelles ont diminué, passant de 0,28 dans les années soixante à 0,08 en 1997. Dans son étude de 1987, Statman se base sur les données d'Elton et Gruber (1977) selon lesquelles la corrélation s'élève à 0,15. Dans son travail de 2003, l'auteur reprend l'analyse avec la nouvelle valeur estimée à 0,08. Ainsi, d'après Statman (2003), le nombre de titres composant le portefeuille parfaitement diversifié dépasse 120 alors que ce nombre s'élève à 30 dans l'article publié en 1987.

D'une façon générale, les études récentes montrent qu'afin d'atteindre le même niveau de diversification, un portefeuille actuel doit contenir plus de titres qu'un portefeuille construit il y a 25 ans. Campbell et *al.*, (2001) analysent les titres échangés sur le NYSE, l'AMEX et le NASDAQ. Dans un premier temps, les titres sont groupés par 2 d'une manière aléatoire et sans remise. Ainsi, des portefeuilles composés de 2 titres sont construits. Les titres composant le portefeuille ont un poids identique. L'écart-type est calculé pour chaque portefeuille. Ensuite, l'écart-type moyen de tous les portefeuilles est comparé avec l'écart-type du portefeuille composé de tous les titres disponibles. Ce dernier est appelé par les auteurs le portefeuille-index. Les poids des titres composant le portefeuille-index sont aussi identiques. La démarche est répétée pour les portefeuilles respectivement composés de 5, 20 et 50 titres. Chaque fois, l'écart-type moyen est comparé avec l'écart-type du portefeuille-index. Campbell et *al.*, (2001) estiment que, sur la période 1986-1997, 50 titres ont été nécessaires afin d'aboutir à la même différence d'écart que celle obtenue avec seulement 20 titres sur la période 1963-1985.

---

<sup>92</sup> Données de mars 2002.

Dans le cadre de notre étude, basée sur 71 titres, nous cherchons à établir le nombre de titres composant le portefeuille final de l'investisseur de façon à ce que ce dernier soit suffisamment diversifié en terme de moyenne-variance. La démarche proposée reprend l'idée de Campbell et *al.*, (2001). Concrètement, pour chaque  $n$  fixé,  $n = 2, \dots, 71$ , nous construisons 10 000 portefeuilles composés chacun de  $n$  titres. Les  $n$  titres sont choisis aléatoirement parmi les 71 disponibles et ont le même poids dans le portefeuille. Pour chaque  $n$  nous calculons la variance moyenne de tous les portefeuilles contenant  $n$  titres. La figure 4.2 récapitule les résultats obtenus<sup>93</sup>.

### L'effet de la diversification

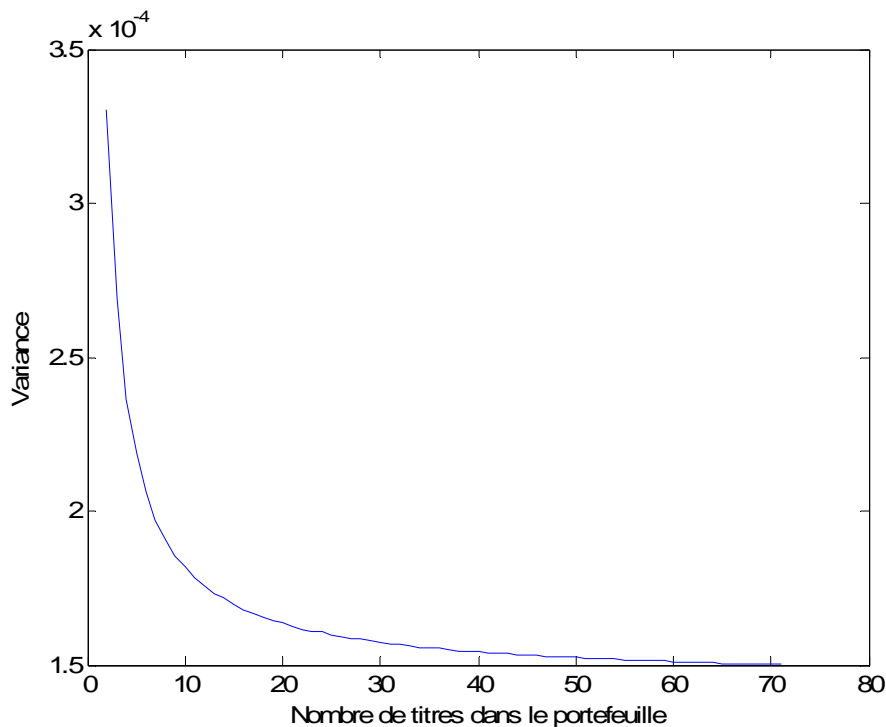


Figure 4.2

La variance du portefeuille contenant tous les 71 titres, ou bien la variance minimale, s'élève à  $1,5 \times 10^{-4}$ , alors que la variance maximale correspondante aux portefeuilles de 2 titres est à  $3,3 \times 10^{-4}$ . L'écart entre ces deux variances est égal à  $1,8 \times 10^{-4}$ . Cet écart diminue au fur et à mesure de l'augmentation du nombre de titres

<sup>93</sup> Les programmes sont présentés en annexe C.3.

composant le portefeuille. Par exemple, 35% de l'écart est réduit quand le portefeuille passe de 2 à 3 titres. Certaines de ces proportions cumulées sont présentées dans le tableau 4.2 :

**Tableau 4.2.**  
**L'effet de la diversification**

<b>Nombre de titres</b>	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<b>Proportion Cumulée de réduction de la variance</b>	0	0,35	0,52	0,63	0,69	0,74	0,78	0,80	0,83	0,84	0,86
<b>Nombres de titres</b>	13	14	15	18	20	30	40	50	60	70	71
<b>Proportion Cumulée de réduction de la variance</b>	0,87	0,88	0,91	0,93	0,94	0,96	0,98	0,99	0,99	0,99	1

Nous constatons que presque 90% de l'écart est réduit quand le portefeuille passe de 2 à 15 titres. Nous supposons que ce niveau de diversification est suffisant dans le cadre de notre étude. Ainsi, nous retenons que l'investisseur particulier choisit un portefeuille optimal composé au maximum de 15 titres.

Une fois le nombre de titres retenu, nous déterminons la façon dont le choix des titres est effectué. En pratique les facteurs qui influencent la préférence de l'individu pour un titre par rapport à un autre peuvent être très variés. Pour ne pas privilégier un facteur parmi d'autres, et afin d'éviter tout préjugé sur le choix des 15 titres, nous les choisissons d'une façon aléatoire dans notre base de données. Avec ce tirage nous répliquons le choix opéré par un individu pour ces 15 titres en fonction de ses critères personnels qui nous sont inconnus.



Ce tirage constitue la première étape de notre étude. Passons à présent à l'explication des étapes suivantes<sup>94</sup>.

## 2.2.2 Modélisation de l'incertitude : Approche par scénarii générés par la méthode bootstrap<sup>95</sup>

Nous considérons une économie mono-périodique à 1 année. A la date 0 l'individu construit un portefeuille en investissant sa richesse initiale dans les 15 titres. La date 1 correspond à la date de revente du portefeuille. Il n'y aucune transaction entre ces deux dates.

Afin de modéliser l'incertitude à la date 1 nous utilisons la méthode des simulations historiques (par exemple Hull, 2007, p 348). Cette méthode consiste à collecter les variations des valeurs précédant la date 0 et à supposer que des variations similaires vont se reproduire dans le futur, pendant la période entre les dates 0 et 1. De cette façon, les variations historiques qui précèdent la date 0 constituent les scénarii possibles pour l'année en cours (jusqu'à la date 1). Chaque scénario est ainsi considéré comme un des états de la nature (supposés équiprobables) qui peut se réaliser à la date 1.

Puisque la durée de la période considérée est 1 année, chaque scénario représente une série de rentabilités annuelles des titres. Cependant, notre base de données contient des rentabilités journalières. Plus précisément, nous avons 1535 jours de cotation du 1 juin 2001 jusqu'à 1 juin 2007. Après avoir choisi les 15 titres à l'étape 1, nous détenons une matrice, notée  $R1$ , de dimension  $1534 \times 15$  des rentabilités journalières des 15 titres. A partir de ces données journalières, notre objectif est de générer des séries de rentabilités annuelles pour ces 15 titres. Afin de

---

<sup>94</sup> Il nous semble important de prévenir le lecteur qu'une fois toutes les étapes effectuées, la démarche sera répétée un certain nombre de fois. Concrètement, 1680 tirages seront nécessaires. Le fait de répéter le processus permet de considérer des individus avec des critères de choix différents.

<sup>95</sup> Les programmes liés à cette modélisation sont fournis en annexe C.4.

générer les scénarii possibles des rentabilités annuelles nous utilisons la méthode de bootstrap<sup>96</sup>.

La méthode bootstrap s'organise autour d'une technique de ré-échantillonnage accompagnée d'un grand nombre d'itérations. En partant d'un échantillon initial de taille  $n$ , cette technique consiste à générer des échantillons de même taille, appelés échantillons bootstrap, en choisissant d'une manière aléatoire et avec remise  $n$  éléments de l'échantillon initial. En général, on commence par créer 1000 échantillons bootstrap.

Sans compter les week-ends et les jours fériés nous supposons qu'une année contient 250 jours de cotation<sup>97</sup>. Nous choisissons d'une manière aléatoire une date sur la période des données disponibles. Ceci revient à choisir une ligne, notée  $\hat{i}$ , dans la matrice  $R1$ . La date choisie est considérée comme le point de départ ou la date 0. Les 250 rentabilités journalières précédant la date 0 (ou les 250 lignes de  $R1$  précédant la ligne  $\hat{i}$ ) représentent l'échantillon initial et servent à générer les séries des rentabilités annuelles ou des scénarii possibles qui pourraient se produire à la date 1<sup>98</sup>. Concrètement, le premier échantillon bootstrap est obtenu par tirage au sort avec remise de 250 lignes dans l'échantillon initial. Puisque les rentabilités journalières sont logarithmiques, la rentabilité annuelle correspondante est égale à la somme des 250 rentabilités journalières. De cette façon, nous faisons la somme des 250 lignes tirées et nous obtenons ainsi une suite de 15 rentabilités annuelles. Cette suite est le premier scénario ou le premier état de la nature. Intuitivement, les 250 lignes tirées représentent les 250 scénarios journaliers possibles, pour les 15 titres, qui pourraient se produire pendant la période de l'année considérée. De cette façon, les corrélations entre les rentabilités sont bien prises en compte.

En répétant 1000 fois ce processus, nous engendrons 1000 scénarii (ou 1000 états de la nature) possibles pour les 15 titres. Finalement, à l'issue de cette deuxième

---

<sup>96</sup> Davison et Hinkley, 1997; Efron, Bradley et Tibshirani, 1993.

<sup>97</sup> Hull, 2008.

<sup>98</sup> La date de départ n'est pas choisie sur l'ensemble de toutes les dates disponibles, mais, à partir de la 251-ème journée de cotation qui correspond au 30 mai 2002.

étape nous obtenons une matrice  $R$  de dimension  $1000 \times 15$  des rentabilités annuelles probables pour les 15 titres préalablement choisis à la première étape.

$$R = \begin{matrix} & \begin{matrix} \text{titre 1} & \text{titre 2} & \dots & \text{titre 15} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \dots \\ \omega_{1000} \end{matrix} & \begin{matrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{115} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{215} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{10001} & r_{10002} & \dots & r_{100015} \end{matrix} \end{matrix}$$

### 2.2.3. Construction du portefeuille optimal de Shefrin et Statman (2000)

Rappelons le programme de maximisation d'un agent BPT :

$$\begin{aligned} & \text{Max } E_h(W^h) & (2) \\ & \text{s.c } P(W^h < A) \leq \alpha \end{aligned}$$

où  $W^h$  désigne la richesse finale

$A$  est le niveau d'aspiration de l'agent et  $\alpha$  désigne le seuil de faillite admissible.  $A$  et  $\alpha$  sont des paramètres individuels.

Nous considérons le cas  $h = Id$ <sup>99</sup>. Cela signifie que nous supposons que l'individu considère les probabilités objectives.

A la date 0, l'agent investit toute sa richesse  $W_0$  dans un portefeuille dont les paiements sont représentés par la variable aléatoire  $W^h$ . La rentabilité  $\%$  de l'investissement est une variable aléatoire égale à  $\% = \frac{W^h - W_0}{W_0}$ . De ce fait, choisir le portefeuille qui maximise l'espérance de la richesse finale  $E(W^h)$  revient à choisir le portefeuille avec  $E(\%)$  maximal.

<sup>99</sup>  $Id$  désigne la fonction d'identité :  $Id(x) = x$ .

La contrainte de sécurité peut aussi être réécrite. En effet, soit  $r^*$  tel que  $A = W_0(1 + r^*)$ . Ainsi, le niveau d'aspiration  $A$  de l'individu est une fonction de la richesse investie et d'un taux de rentabilité  $r^*$ <sup>100</sup>. Par exemple, si au pire des cas l'agent cherche à récupérer son investissement initial, son niveau d'aspiration  $A = W_0$  et la valeur de  $r^*$  correspondante est égale à 0. Dans le cas où le seuil d'aspiration de l'agent est supérieur à sa richesse investie ( $A > W_0$ ), le niveau de rentabilité correspondant est strictement positif :  $r^* > 0$ . Le risque que la rentabilité  $r^*$  ne soit pas atteinte est déterminé en fonction de  $\alpha$ , de la même façon que le risque de ne pas recevoir  $A$  est déterminé dans la contrainte de sécurité usuelle.

En tenant compte de cette remarque nous avons :

$$P(W\% < A) = P(W\% < W_0(1 + r^*)) = P\left(\frac{W\% - W_0}{W_0} < \frac{W_0(1 + r^*) - W_0}{W_0}\right) = P(\% < r^*)$$

et, le programme (2) de l'agent du type BPT devient :

$$\begin{aligned} & \text{Max } E(\%) \\ & \text{s.c } P(\% < r^*) \leq \alpha \end{aligned}$$

La variable aléatoire  $\%$  est une combinaison linéaire des rentabilités des titres choisis à l'étape précédente. Elle est donc définie par la matrice  $R$  et par les valeurs des parts investies dans chaque titre. Comme précédemment  $r^*$  et  $\alpha$  sont des paramètres individuels.

L'individu peut décider d'investir toute sa richesse dans un seul titre parmi 15. Ou bien, il peut décider d'investir dans certains titres et de ne rien investir dans d'autres. Pour déterminer la part de la richesse investie dans un actif, nous retenons un pas de  $1/15$ <sup>101</sup>. Cela signifie que la part de la richesse initiale investie dans un actif

---

<sup>100</sup> Alexander et Baptista, 2002.

<sup>101</sup> Nous avons choisi le pas de  $\frac{1}{15}$  pour des raisons opérationnelles. Plus le pas est petit, plus le nombre de portefeuilles possibles est élevé. Dans la section 3 nous discutons l'impact de ce choix sur nos résultats.

peut être égale<sup>102</sup> à 0, 1/15, 2/15, 3/15,...,14/15 ou 1. La somme des proportions investies dans tous les titres est égale à 1. Finalement, nous devons étudier tous les portefeuilles  $(x_1, x_2, \dots, x_{15})$  tels que  $\sum_{i=1}^{15} x_i = 1$  et  $x_i = \frac{k}{15}$  pour tout  $k = 0, \dots, 15$ . Notons P l'ensemble des portefeuilles de ce type.

Compte tenu de la capacité du logiciel, considérer tous les portefeuilles de P s'avère d'une part une tâche difficile et d'autre part très coûteuse en termes de temps de calcul. En effet, comme nous le montrerons plus loin, l'ensemble P contient 77 558 760 portefeuilles. Une solution consiste à considérer un échantillon aléatoire des éléments de P. Ici, nous proposons une méthode de construction de l'échantillon qui permet, en outre, de compter le nombre de portefeuilles composant l'ensemble P.

Concrètement, nous proposons d'ordonner tous les portefeuilles de la manière suivante. Tout d'abord, l'ensemble P est divisé en 15 groupes en fonction du nombre de titres composant les portefeuilles. Le premier groupe contient seulement les portefeuilles composés d'un seul titre. Le deuxième groupe est composé des portefeuilles à deux titres. Le troisième, de trois titres et ainsi de suite.

Il y a 15 éléments dans le groupe 1 de la forme  $(0, \dots, 0, a_i, 0, \dots, 0)$  avec  $a_i = 15/15$  et  $i$  varie entre 1 et 15. Les portefeuilles de ce premier groupe sont ordonnés d'une façon naturelle :

$$P_1 = \left(\frac{15}{15}, 0, \dots, 0\right), \quad \text{investissement dans le premier titre}$$

$$P_2 = \left(0, \frac{15}{15}, 0, \dots, 0\right), \quad \text{investissement dans le deuxième titre}$$

....

$$P_{15} = \left(0, \dots, 0, \frac{15}{15}\right), \quad \text{investissement dans le quinzième titre}$$

Pour les autres groupes (sauf le dernier) la situation est plus complexe. Considérons le groupe 2 composé des portefeuilles contenant exactement deux titres.

---

<sup>102</sup> Nous supposons que les ventes à découvert ne sont pas autorisées

Tout d'abord, il existe  $\binom{15}{2} = 105$  possibilités de choisir 2 titres parmi 15. Une fois ce choix réalisé, il existe 14 façons de répartir la richesse entre les deux titres. En effet, les portefeuilles du groupe 2 sont de la forme  $(0, \dots, a_i, \dots, b_j, \dots, 0)$  avec  $a_i + b_j = 1$ ;  $i, j = 1 \dots 15$ ,  $i < j$ . Remarquons que  $a_i$  et  $b_j$  sont strictement positifs car sinon ce portefeuille n'appartient plus au groupe 2. Ainsi,  $a_i = \frac{k}{15}$  et  $b_j = 1 - a_i$ ,  $k = 1 \dots 14$ , ( $k$  ne peut pas prendre des valeurs 0 ou 15). Finalement, le nombre d'éléments dans le groupe 2 s'élève à  $14 \times 105 = 1470$  qui sont ordonnés de la façon suivante. Les 14 premiers portefeuilles ne contiennent que les titres 1 et 2. Nous continuons la numérotation commencée dans le groupe 1 :

$$P_{16} = \left(\frac{1}{15}, \frac{14}{15}, 0, \dots, 0\right)$$

$$P_{17} = \left(\frac{2}{15}, \frac{13}{15}, 0, \dots, 0\right)$$

....

$$P_{29} = \left(\frac{14}{15}, \frac{1}{15}, 0, \dots, 0\right)$$

Les 14 portefeuilles suivants sont composés des titres 1 et 3 :

$$P_{30} = \left(\frac{1}{15}, 0, \frac{14}{15}, 0, \dots, 0\right)$$

$$P_{31} = \left(\frac{2}{15}, 0, \frac{13}{15}, 0, \dots, 0\right)$$

....

$$P_{43} = \left(\frac{14}{15}, 0, \frac{1}{15}, 0, \dots, 0\right)$$

Nous classons ensuite les portefeuilles composés des titres 1 et 4, 1 et 5, ..., 1 et 15. Puis, nous classons les portefeuilles composés de titres 2 et 3, 2 et 4, ... , 2 et 15. Ainsi,

le dernier portefeuille du groupe 2 est de la forme  $P_{1485} = (0, \dots, 0, \frac{14}{15}, \frac{1}{15})$ . Nous procédons de la même manière dans tous les autres groupes.

D'une façon générale, pour chaque groupe  $g$ ,  $g = 1, \dots, 15$ ; nous décrivons toutes les possibilités de choisir  $g$  titres parmi 15. Il en existe  $\binom{15}{g}$ . Pour chacun de ces choix nous énumérons les portefeuilles en fonction de la répartition de la richesse sur les  $g$  titres choisis.  $m = m(g)$  est le nombre de répartitions possibles de la richesse sur  $g$  titres. Le tableau 4.3 récapitule les résultats des calculs.

Tableau 4.3.

Répartition des portefeuilles dans l'ensemble P

Groupe $g$	$\binom{15}{g} \times m$	Nombre de portefeuilles	Numérotation des portefeuilles
Groupe 1	15×1	15	$P_1 \dots P_{15}$
Groupe 2	105×14	1 470	$P_{16} \dots P_{1\,485}$
Groupe 3	455×91	41 405	$P_{1\,486} \dots P_{42\,890}$
Groupe 4	1365×364	496 860	$P_{42\,891} \dots P_{539\,750}$
Groupe 5	3003×1001	3 006 003	$P_{539\,751} \dots P_{3\,545\,753}$
Groupe 6	5005×2002	10 020 010	$P_{3\,545\,754} \dots P_{13\,565\,763}$
Groupe 7	6435×3003	19 324 305	$P_{13\,565\,764} \dots P_{32\,890\,068}$
Groupe 8	6435×3432	22 084 920	$P_{32\,890\,069} \dots P_{54\,974\,988}$
Groupe 9	5005×3003	15 030 015	$P_{54\,974\,989} \dots P_{70\,005\,003}$
Groupe 10	3003×2002	6 012 006	$P_{70\,005\,004} \dots P_{76\,017\,009}$
Groupe 11	1365×1001	1 366 365	$P_{76\,017\,010} \dots P_{77\,383\,374}$
Groupe 12	455×364	165 620	$P_{77\,383\,375} \dots P_{77\,548\,994}$
Groupe 13	105×91	9 555	$P_{77\,548\,995} \dots P_{77\,558\,549}$
Groupe 14	15×14	210	$P_{77\,558\,550} \dots P_{77\,558\,759}$
Groupe 15	1×1	1	$P_{77\,558\,760}$

Le dernier groupe ne contient qu'un seul portefeuille de la forme  $P_{77\,558\,760} = (\frac{1}{15}, \dots, \frac{1}{15})$

et le nombre total de portefeuilles de P s'élève à 77 558 760.

Après avoir ordonné l'ensemble P, la construction d'un échantillon aléatoire est équivalente au tirage aléatoire dans la suite de nombres naturels allant de 1 à



77 558 760. En effet, chaque nombre retenu correspond à un portefeuille bien précis. A l'aide du tableau 4.3 nous pouvons établir le groupe auquel appartient le portefeuille. Ensuite, puisque la place de ce portefeuille à l'intérieur du groupe est unique, nous déduisons quels sont les titres qui font partie de ce portefeuille et de quelle façon la richesse est répartie. L'avantage de cette méthode est qu'elle permet de compter tous les portefeuilles composés au maximum de 15 titres et en même temps, d'éviter la construction de ces portefeuilles. En effet, seuls les portefeuilles tirés au sort sont construits. La taille de l'échantillon retenu est de 100 000 (les programmes sont donnés en annexe C.5).

Pour chacun des 100 000 portefeuilles, nous vérifions la contrainte de sécurité  $P(\% < r^*) \leq \alpha$ . Dans le modèle BPT, le couple  $(r^*, \alpha)$  caractérise l'individu en fonction de son attitude face au risque et détermine sa stratégie d'investissement. Le fait de considérer plusieurs valeurs de  $r^*$  et  $\alpha$  revient à analyser les choix de plusieurs individus suivant le même modèle. Pour cela, nous effectuons les calculs pour 3 valeurs de  $r^*$  :  $r^* = 0$ ,  $r^* = 0,05$  et  $r^* = 0,1$  (Broihanne et *al.*, 2006). Pour chacun des 3 niveaux de rentabilité souhaité la contrainte de sécurité est vérifiée pour les 4 seuils de faillite  $\alpha$  :  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $\alpha = 0,2$  et  $\alpha = 0,3$ . Ainsi, le risque supporté par l'individu, ou, en d'autres termes, la probabilité que le niveau de rentabilité souhaités  $r^*$  ne soit pas atteint, est de l'ordre de 0% (pas de tolérance au risque), 10%, 20% ou 30% respectivement.

Pour les valeurs de paramètres retenues, nous déterminons les ensembles de sécurité correspondants. En d'autres termes, parmi 100 000 portefeuilles nous distinguons ceux qui sont sécurisés. Pour les portefeuilles respectant la contrainte, nous calculons l'espérance de la richesse finale sous les probabilités objectives. Ainsi, nous obtenons le portefeuille optimal au sens de Shefrin et Statman (2000). Cependant, pour certaines valeurs de  $r^*$  et  $\alpha$  (souvent pour  $\alpha = 0$ ), il peut arriver que parmi tous les portefeuilles, aucun ne satisfasse la contrainte. Dans ce cas, l'ensemble de sécurité est vide et le portefeuille optimal n'existe pas<sup>103</sup>.

---

<sup>103</sup> Voir annexe C.6.

## 2.2.4. Comparaison avec l'agent suivant le principe moyenne - variance

Notre objectif essentiel est de comparer les portefeuilles de Shefrin et Statman (2000) construits précédemment avec ceux obtenus dans le contexte de la théorie moyenne - variance de Markowitz (1952a). Pour cela, pour chacun des 100 000 portefeuilles nous calculons son espérance et son écart-type.

Notons  $P_S$  le portefeuille optimal au sens du modèle BPT (pour des valeurs  $\alpha$  et  $r^*$  fixées). Une fois  $P_S$  déterminé, nous vérifions si, parmi tous les portefeuilles, il en existe pour lesquels le niveau de rentabilité est au moins aussi élevé et qui supportent moins de risque dans le cadre du modèle moyenne - variance. En d'autres termes, nous cherchons des portefeuilles d'espérance au moins aussi élevée que celle de  $P_S$  et d'écart-type inférieur ou égale à celui de  $P_S$ . Normalement, il faut chercher des portefeuilles qui procurent exactement le même niveau de rentabilité avec un écart-type moins élevé que celui du portefeuille optimal de Shefrin et Statman (2000). Cependant, le portefeuille  $P_S$  est le seul qui atteint ce niveau de rentabilité. En effet, l'ensemble des portefeuilles considérés est restreint dans la mesure où nous ne considérons que 100 000 portefeuilles pour lesquels la part de  $W_0$  investie dans un titre est égale à  $\frac{k}{15}$ ,  $k = 0, \dots, 15$ . Dans ce cas, l'ensemble de portefeuilles représenté dans le repère  $(E, \sigma)$  n'est pas convexe<sup>104</sup>. Il se peut qu'il n'y ait pas d'autres portefeuilles dans un voisinage très proche de  $P_S$ . Ce phénomène se produit surtout près de la frontière efficiente. Pour cela, plutôt que chercher à vérifier si  $P_S$  appartient à la frontière efficiente moyenne-variance, notre démarche consiste à repérer des portefeuilles qui procurent à l'individu suivant le concept de Markowitz (1952a) plus de satisfaction que le portefeuille choisi à l'équilibre par l'agent BPT.

---

<sup>104</sup> C'est-à-dire, pour deux points quelconques de cet ensemble, le segment qui les joint y est entièrement contenu.

## 2.2.5. Récapitulatif des étapes

Nous disposons d'une base de données contenant 1535 jours de cotations pour 71 titres sur la période entre le 1 juin 2001 et le 1 juin 2007.

Premièrement, nous choisissons d'une manière aléatoire 15 titres ainsi qu'une date à partir du 30 mai 2002. Cette date correspond à la date 0.

Deuxièmement, nous calculons les 250 rentabilités journalières sur la période précédant la date 0. A partir de ces valeurs journalières, nous générons 1000 séries de rentabilités annuelles par la méthode bootstrap. Chaque série contient 15 valeurs annuelles et représente un scénario ou un état de la nature qui pourrait se produire à la date 1.

A l'issue de ces deux étapes, une matrice  $R$  de dimension  $1000 \times 15$  est construite. Une ligne de  $R$  correspond à une série de 15 rentabilités annuelles probables des titres choisis précédemment. Une colonne de  $R$  représente les rentabilités du titre correspondant dans tous les états de la nature.

Parmi tous les portefeuilles possibles (77 558 760) composés au maximum de 15 titres, un échantillon aléatoire de taille 100 000 est prélevé. Ensuite, cet échantillon est utilisé tout au long de notre étude. En utilisant la matrice  $R$  nous calculons l'espérance et l'écart-type de chaque portefeuille afin de construire la frontière efficiente de Markowitz (1952a).

Ensuite, pour un couple  $(r^*, \alpha)$  fixé, nous construisons l'ensemble de sécurité ainsi que le portefeuille optimal  $P_S$ , s'il en existe un, selon le modèle BPT. Les valeurs retenues de  $r^*$  et de  $\alpha$  sont :  $r^* = 0$ ,  $r^* = 0,05$ ,  $r^* = 0,1$  et  $\alpha = 0$ ,  $\alpha = 0,1$ ,  $\alpha = 0,2$ ,  $\alpha = 0,3$ . Ainsi, 12 situations différentes sont étudiées. Après avoir construit le portefeuille  $P_S$  nous vérifions si parmi les 100 000 portefeuilles il en existe qui procurent à l'individu suivant le concept de Markowitz (1952a) plus de satisfaction que  $P_S$ . En d'autres termes, nous cherchons des portefeuilles avec une rentabilité espérée au moins aussi importante et une exposition au risque inférieure ou égale que ceux de  $P_S$ .

Nous répétons 1680 fois ce processus. A chaque fois une nouvelle date de départ, et 15 nouveaux titres parmi les 71 initialement disponibles sont choisis d'une manière aléatoire. De cette façon, nous étudions 1680 matrices  $R$  différentes, soit 140 situations différentes pour chaque couple  $(r^*, \alpha)$ .

### 3. Résultats

Le tableau 4.4 récapitule les résultats de comparaisons des portefeuilles optimaux. Les deux premières colonnes correspondent aux différents paramètres  $r^*$  et  $\alpha$  pour lesquels les calculs ont été effectués. Le nombre de tirages réalisés pour un couple  $(r^*, \alpha)$  s'élève à 140, chaque tirage correspondant à la formation d'une nouvelle matrice de rentabilités  $R$ . Pour chaque  $R$  nous avons construit le portefeuille optimal au sens du modèle BPT. Pour certains  $R$ , ce portefeuille n'existe pas car parmi les 100 000 portefeuilles considérés il n'y en a aucun qui satisfasse la contrainte de sécurité retenue. Nous avons présenté dans la troisième colonne le nombre, noté  $N_s$ , de portefeuilles optimaux obtenus. Le taux de réussite  $N_s / 140$  est rapporté dans la colonne 4. Pour chaque portefeuille  $P_s$  optimal selon la théorie BPT, nous vérifions si parmi les 100 000 il existe au moins un portefeuille  $P_M$  qui est caractérisé par une espérance au moins aussi élevée que celle de  $P_s$  et présente un niveau de risque inférieur ou égal à celui de  $P_s$  (écart-type de  $P_M \leq$  écart-type de  $P_s$ ). En d'autres termes, nous vérifions si l'individu suivant le modèle de Markowitz (1952a) choisit un autre portefeuille, meilleur que  $P_s$  d'après ses critères. La colonne 5 récapitule le nombre de fois où  $P_M$  diffère de  $P_s$ . Ce nombre est noté  $N_M, N_M \leq N_s$ .

**Tableau 4.4.**

**Résultats de comparaison de portefeuilles optimaux**

$r$	$\alpha$	$N_S$	$N_S / 140$	$N_M$
0	0	30	<b>0,21</b>	6
0	0,1	102	<b>0,73</b>	0
0	0,2	114	<b>0,81</b>	0
0	0,3	117	<b>0,84</b>	0
0,05	0	20	<b>0,14</b>	0
0,05	0,1	102	<b>0,73</b>	0
0,05	0,2	113	<b>0,81</b>	0
0,05	0,3	120	<b>0,86</b>	0
0,1	0	14	<b>0,10</b>	1
0,1	0,1	82	<b>0,59</b>	0
0,1	0,2	99	<b>0,71</b>	0
0,1	0,3	116	<b>0,83</b>	0
<b>Total</b>		<b>1029</b>		7

Nous constatons que sur 1680 tirages réalisés (140 pour chacun des 12 couples  $(r^*, \alpha)$ ), 1029 portefeuilles optimaux selon le modèle de Shefrin et Statman (2000) ont été construits. Clairement, les portefeuilles moins nombreux sont ceux qui correspondent à  $\alpha = 0$ . Dans ce cas, tous les états doivent rapporter au moins l'investissement initial. Ceci restreint considérablement l'ensemble de portefeuilles considéré par l'agent. En fait, sur 140 essais nous avons obtenu 30 portefeuilles pour  $r^* = 0$ , 20 portefeuilles pour  $r^* = 0,05$  et seulement 14 pour  $r^* = 0,1$ . Évidemment, plus l'individu est exigeant en termes de sécurité, plus son ensemble de portefeuilles sécurisés est restreint et donc plus il est difficile de récupérer les portefeuilles satisfaisant la contrainte. Le tableau 4.5 qui est extrait du tableau 4.4 met en évidence ce point.

**Tableau 4.5.****Pourcentage de portefeuilles optimaux identifiés.**

	$\alpha = 0$	$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,2$	$\alpha = 0,3$
$r^* = 0$	<b>0,21</b>	<b>0,73</b>	<b>0,81</b>	<b>0,84</b>
$r^* = 0,05$	<b>0,14</b>	<b>0,73</b>	<b>0,81</b>	<b>0,86</b>
$r^* = 0,1$	<b>0,1</b>	<b>0,59</b>	<b>0,71</b>	<b>0,83</b>

Plus  $\alpha$  est important plus le nombre de portefeuilles de sécurité trouvés est grand. Alexander et Baptista (2002) observent le même phénomène en étudiant le comportement d'un investisseur choisissant la VaR comme mesure de risque. Les auteurs montrent que le seuil de confiance ne doit pas être "trop" important pour que la solution optimale existe. Rappelons que le seuil de confiance est défini comme une probabilité que la richesse finale soit supérieure à la VaR (voir chapitre 1, section II.2.2).

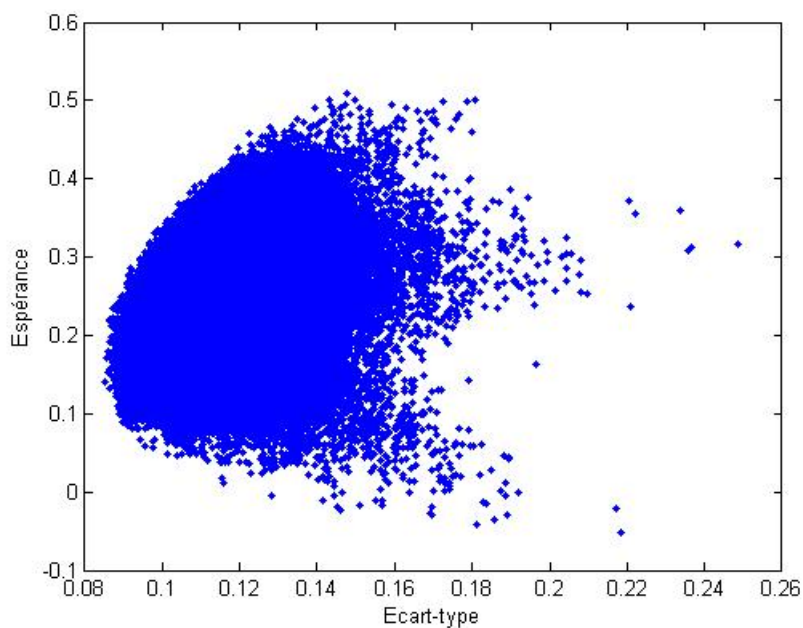
En même temps, plus la rentabilité  $r^*$  est élevée, plus l'ensemble de portefeuilles vérifiant la contrainte devrait être restreint, pour un seuil  $\alpha$  fixé. Nous remarquons cependant que ce raisonnement intuitif n'est pas tout à fait confirmé par les données du tableau 4.5. Par exemple, si  $\alpha = 0,1$ , le taux de réussite est le même pour  $r^* = 0$  que pour  $r^* = 0,05$ . Ceci est dû à l'aléa car les couples  $(r^*, \alpha)$  correspondant aux différents paramètres ont été étudiés séparément les uns des autres. Les 140 matrices construites pour analyser la situation  $(r^* = 0, \alpha = 0,1)$  ne sont pas les mêmes que les 140 matrices construites pour la situation  $(r^* = 0,05, \alpha = 0,1)$ . Si ceci avait été le cas, notre raisonnement serait confirmé.

Parmi 1029 situations considérées, dans 7 cas seulement l'individu suivant le concept moyenne – variance n'investit pas, à l'équilibre, dans le même portefeuille qu'un agent du type BPT. Afin d'expliquer ce résultat quelques figures illustratives

sont nécessaires. Tout d'abord, nous analysons le cas le plus fréquent, celui où  $N_M = 0$ . Ensuite, nous étudions en détail un exemple de la situation où  $N_M \neq 0$ .

**Cas  $N_M = 0$  : l'agent du type BPT choisit à l'optimum le même portefeuille que l'investisseur moyenne – variance.**

Pour une matrice<sup>105</sup>  $R$  nous avons présenté tous les 100 000 portefeuilles dans le repère<sup>106</sup>  $(\sigma, E)$  (figure 4.3). Rappelons qu'il s'agit de portefeuilles construits sur une période d'un an correspondant aux 250 jours de cotations.



**Ensemble de tous les 100 000 portefeuilles**

**Figure 4.3.**

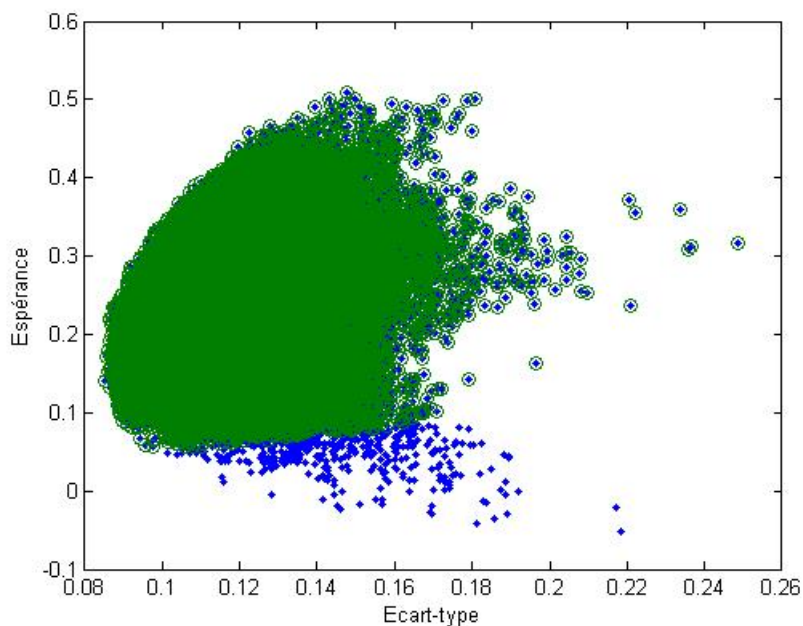
Les portefeuilles optimaux en termes de moyenne – variance correspondant à l'espérance maximale pour un écart-type fixé sont situés sur la frontière gauche de l'ensemble.

---

<sup>105</sup> La matrice a été choisie de façon à ce que tout type de l'ensemble de sécurité puisse être graphiquement représenté.

<sup>106</sup> D'autres exemples sont fournis en annexe C.7.

Ensuite, pour la même matrice  $R$  nous présentons l'ensemble de sécurité correspondant aux paramètres  $r^* = 0$  et  $\alpha = 0,3$  (figures 4.4).



**Ensemble de tous les portefeuilles (en bleu)**

**Ensemble des portefeuilles de sécurité  $r^* = 0$ ,  $\alpha = 0,3$  (en vert)**

**Figure 4.4.**

Rappelons que du point de vue de l'agent du type BPT tous les portefeuilles de l'ensemble de sécurité (en vert) sont identiques en termes de risque alors que leur écart-type peut prendre toutes les valeurs possibles. Nous constatons que pour un certain niveau de rentabilité, tout portefeuille de rentabilité supérieure à ce niveau, satisfait la contrainte de sécurité. Par exemple, sur la figure 4.4, tout portefeuille de rentabilité supérieure à 0,1 est un portefeuille de sécurité, indépendamment de la valeur de l'écart-type. Cependant, plus l'écart-type est élevé, plus la rentabilité espérée du portefeuille doit être grande pour qu'il soit un portefeuille de sécurité (voir aussi la figure C.2 en annexe C.7 qui illustre bien cette tendance)<sup>107</sup>. Nous remarquons en particulier que les portefeuilles sécurisés sont toujours de rentabilité

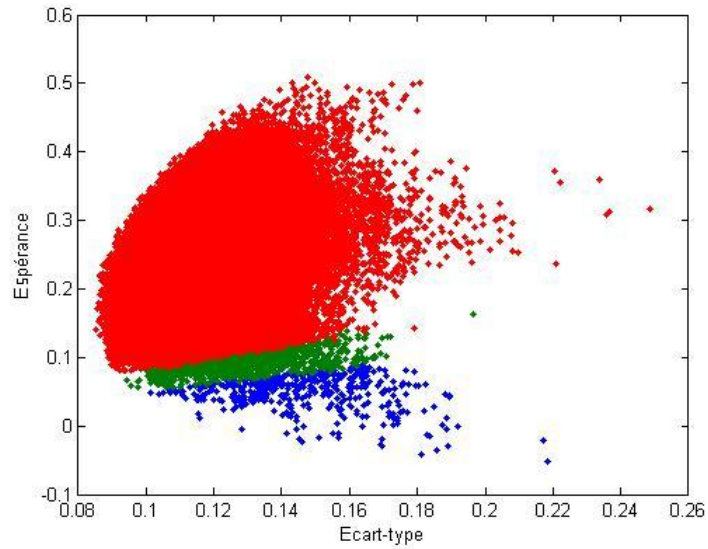
<sup>107</sup> A l'aide d'une simulation Broihanne et *al.*, (2004) montrent que la rentabilité espérée du portefeuille augmente avec  $r^*$  pour un seuil de faillite  $\alpha$  fixé. Aussi, plus  $\alpha$  est faible plus fort est le niveau de rentabilité espérée exigé.



espérée positive. Cette observation est certainement due au choix des paramètres  $r^*$  et  $\alpha$  qui suppose qu'au plus dans 70% des états de la nature la rentabilité doit être au moins supérieure à 0.

Finalement, si nous retenons les paramètres  $r^* = 0$  et  $\alpha = 0,3$ , l'ensemble de sécurité correspondant contient tous les portefeuilles de la frontière efficiente de Markowitz (1952a). Par conséquent, le portefeuille optimal au sens de Shefrin et Statman (2000) l'est aussi en termes de moyenne - variance. En d'autres termes, parmi 100 000 portefeuilles, un individu suivant le modèle BPT choisit le même portefeuille qu'un agent qui pour le même niveau de rentabilité cherche à minimiser le risque exprimé par l'écart-type. Concrètement, le portefeuille  $P_s$  optimal au sens de Shefrin et Statman (2000) est celui qui a l'espérance maximale et donc la plus forte exposition au risque en termes de moyenne - variance par rapport à d'autres portefeuilles sur la frontière efficiente. Ce résultat est conforme à celui d'Alexander et Baptista (2002). Ces auteurs montrent qu'un agent présentant de l'aversion au risque peut accroître l'écart-type de son portefeuille optimal s'il décide d'utiliser la VaR comme mesure du risque.

L'agent BPT caractérisé par  $r^* = 0$  et  $\alpha = 0,3$  est le moins exigeant en termes de sécurité par rapport aux agents BPT caractérisés par d'autres paramètres retenus. *A priori*, cet ensemble de sécurité doit être plus grand par rapport aux autres ensembles. La question est de savoir si l'ensemble de sécurité de l'agent BPT plus exigeant contient toujours la frontière efficiente de Markowitz (1952a). Pour savoir de quelle façon évolue l'ensemble de sécurité nous avons tout d'abord fait varier  $\alpha$  et gardé  $r^* = 0$  (figures 4.5 et 4.6).

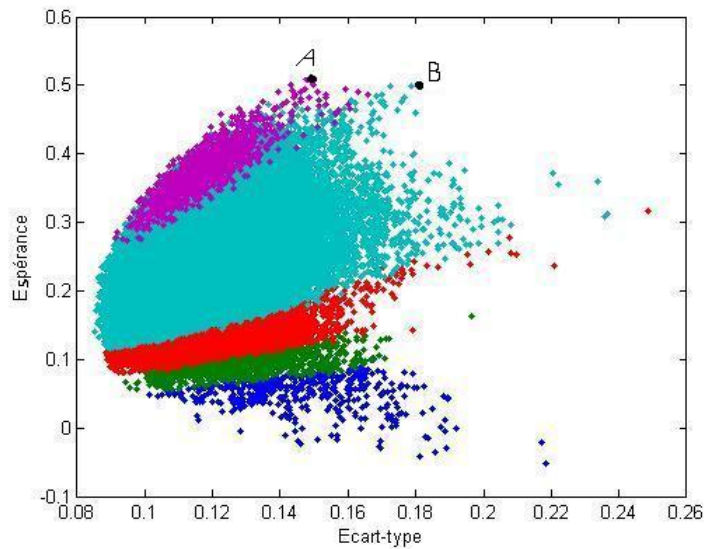


**Ensemble de tous les portefeuilles (en bleu)**

**Ensemble de portefeuilles de sécurité  $r^* = 0$  et  $\alpha = 0,3$  (en vert)**

**Ensemble de sécurité  $r^* = 0$  et  $\alpha = 0,2$  (en rouge)**

**Figure 4.5.**



**Ensemble de tous les portefeuilles (en bleu)**

**Ensemble de portefeuilles de sécurité  $r^* = 0$  et  $\alpha = 0,3$  (en vert)**

**Ensemble de sécurité  $r^* = 0$  et  $\alpha = 0,2$  (en rouge)**

**Ensemble de sécurité  $r^* = 0$  et  $\alpha = 0,1$  (en bleu clair)**

**Ensemble de sécurité  $r^* = 0$  et  $\alpha = 0$  (en violet)**

**Figure 4.6.**

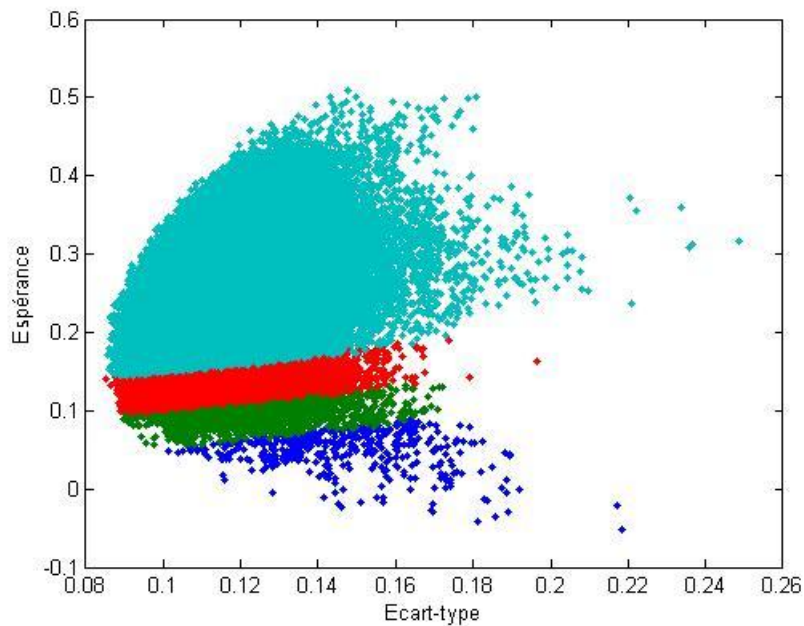
En comparant les ensembles correspondants aux différents  $\alpha$ , nous constatons que plus l'agent BPT est exigeant en termes de sécurité plus la rentabilité espérée des portefeuilles sécurisés est élevée. En même temps, plus l'écart-type du portefeuille est élevé, plus sa rentabilité doit être importante pour que ce portefeuille soit sécurisé. En effet, si nous traçons la frontière entre deux ensembles de sécurité, elle peut être approchée par une ligne droite de pente positive. Cette pente est d'autant plus forte quand nous considérons la frontière correspondant aux niveaux de plus en plus exigeants de sécurité. Par exemple (figure 4.6), la pente de la frontière entre deux ensembles correspondant à  $r^* = 0$ ,  $\alpha = 0,3$  (en vert) et  $r^* = 0$ ,  $\alpha = 0,2$  (en rouge) est moins forte que la pente entre les ensembles  $r^* = 0$ ,  $\alpha = 0,1$  (bleu clair) et  $r^* = 0$ ,  $\alpha = 0$  (violet).

Comparons le portefeuille optimal de l'agent A, caractérisé par les paramètres  $r^* = 0$ ,  $\alpha = 0$ , avec celui de l'agent B de paramètres  $r^* = 0$ ,  $\alpha = 0,1$ . L'agent A exige plus de sécurité que l'agent B, son ensemble sécurisé est plus restreint. Parallèlement, la rentabilité du portefeuille optimal de l'agent A est moins élevée que celle du portefeuille de l'agent B. D'une façon générale, plus l'investisseur du type BPT est exigeant en termes de sécurité, plus son portefeuille optimal se situe vers la gauche de la frontière efficiente de Markowitz (1952a).

Considérons de plus près l'ensemble correspondant au  $r^* = 0$  et  $\alpha = 0$ , et notons le  $S$ . Chaque portefeuille de  $S$  paie au moins la richesse investie dans chaque état de la nature. Il n'y a donc aucun risque de perte. Ici, l'écart-type du portefeuille mesure le risque de gagner par rapport à la richesse initiale. Plus l'écart-type est élevé plus forte est la dispersion des gains sur différents états. L'agent BPT choisit le portefeuille  $P_S$  d'espérance maximale à l'intérieur de  $S$ . En fait, pour cet agent, les portefeuilles sécurisés sont identiques en termes de risque même si leurs écart-types sont différents. Ceci n'est pas le cas pour l'investisseur suivant le modèle de Markowitz (1952a). Pour celui-là, la notion d'ensemble de sécurité n'existe pas. Supposons un instant que cet individu ait fixé un certain niveau de risque, mesuré par l'écart-type  $\sigma_M$ , qu'il est prêt à supporter de façon à ce que son portefeuille

optimal  $P_M$  se trouve à l'intérieur de  $S$ . Considérons le cas où  $\sigma_M < \sigma_S$ . Dans cette situation, la répartition des gains parmi les différents états de la nature est moins forte dans le portefeuille  $P_M$  que dans  $P_S$ . En faisant ce choix, cet individu se prive d'une chance de gagner un « jackpot » tout en étant sûr de récupérer son investissement initial. Le portefeuille choisi par l'agent BPT, a une rentabilité espérée plus élevée. Certes, son risque (en termes moyenne-variance) est aussi plus élevé, mais ici il s'agit de risque de gain et non de perte puisqu'on reste à l'intérieur de  $S$ . Finalement, cet exemple montre clairement les limites des mesures de risque telles que l'écart-type ou la variance qui sont utilisés dans le modèle de Markowitz (1952a).

Ensuite, pour  $\alpha = 0,3$  nous avons étudié de quelle façon l'ensemble de sécurité évolue selon la variation de  $r^*$  (figure 4.7).



**Ensemble de tous les portefeuilles (en bleu)**

**Ensemble de portefeuilles de sécurité  $r^* = 0$  et  $\alpha = 0,3$  (en vert)**

**Ensemble de sécurité  $r^* = 0,05$  et  $\alpha = 0,3$  (en rouge)**

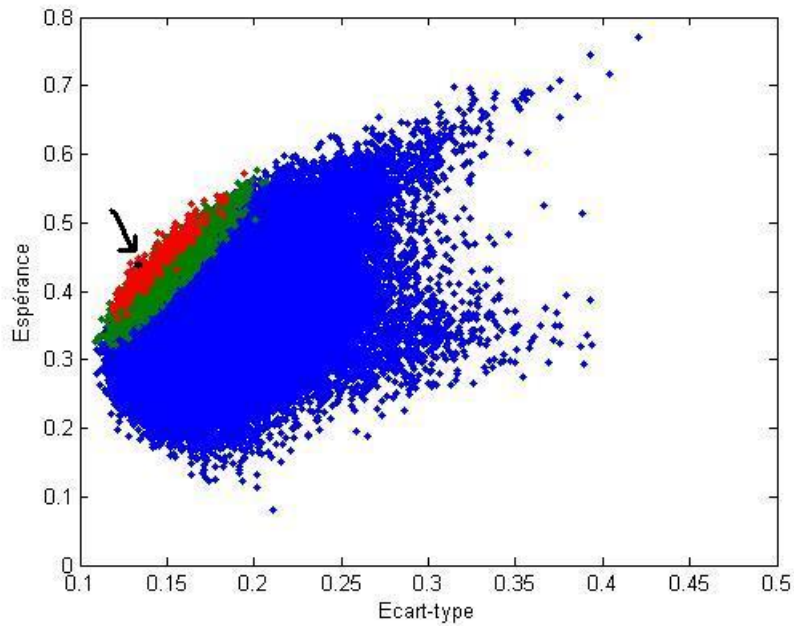
**Ensemble de sécurité  $r^* = 0,1$  et  $\alpha = 0,3$  (en bleu clair)**

**Figure 4.7.**

Finalement, dans deux situations, l'augmentation du niveau d'aspiration  $r^*$  et la diminution du seuil de faillite admissible  $\alpha$ , nous constatons le même type de changement de l'ensemble de sécurité. L'espérance du portefeuille est d'autant plus importante que  $r^*$  est grand pour un  $\alpha$  fixé ou que  $\alpha$  est proche de 1, pour un  $r^*$  fixé. Cette observation est conforme à celle obtenue par Broihanne et *al.*, (2006) avec trois actifs.

#### **Cas $N_M \neq 0$ : le choix des deux agents diffère à l'optimum**

Considérons maintenant le cas où le portefeuille optimal au sens de la théorie BPT diffère du portefeuille optimal issu du modèle moyenne-variance. D'après le tableau 4.4 nous avons obtenu 7 situations de ce type. En guise d'illustration, nous présentons le cas avec les paramètres  $r^* = 0,1$  et  $\alpha = 0$ . En fait, parmi les 100 000 portefeuilles, pour la matrice  $R$  correspondante, il n'existe qu'un seul portefeuille qui satisfait la contrainte de sécurité. Ce portefeuille noté  $P_s$  est donc le portefeuille optimal en termes du modèle BPT. Nous l'avons désigné par le point noir sur la figure 4.8.



**Ensemble de tous les portefeuilles (en bleu),**  
**Ensemble de portefeuilles de sécurité  $r^* = 0$  et  $\alpha = 0$  (en vert),**  
**Ensemble de sécurité  $r^* = 0,05$  et  $\alpha = 0$  (en rouge),**

**Figure 4.8.**

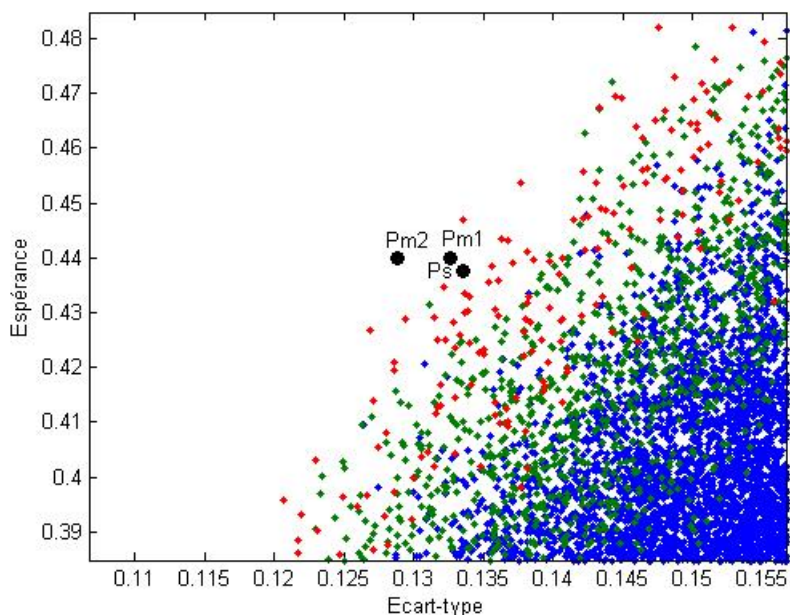
En comparant la rentabilité espérée et l'écart-type de  $P_s$  avec ceux des autres 100 000 portefeuilles, nous avons trouvé deux portefeuilles, notés respectivement  $P_{m1}$  et  $P_{m2}$ , qui sont meilleurs du point de vue d'un agent suivant le modèle de Markowitz (1952a). Le tableau 4.6 récapitule ces paramètres.

**Tableau 4.6.**

**Les caractéristiques des portefeuilles optimaux**

Portefeuille	Espérance	Écart-type
$P_s$	0,4375	0,1335
$P_{m1}$	0,4400	0,1326
$P_{m2}$	0,4398	0,1288

En fait, le portefeuille optimal d'agent BPT se trouve très proche des deux portefeuilles de Markowitz (1952a). Les trois points sont représentés sur la figure 4.9 qui est un agrandissement de la figure précédente.



**Agrandissement de la figure 4.8.**

**Figure 4.9.**

Ce résultat est à notre avis dû au fait que nous n'avons pas considéré l'ensemble de tous les portefeuilles, mais seulement un échantillon de ceux ayant une forme particulière (l'investissement dans un titre doit être de la forme  $\frac{k}{15}$ ,  $k = 0, 1, \dots, 15$ ). Pour cela, l'ensemble des portefeuilles n'est pas convexe et  $P_s$  se trouve en quelque sorte isolé puisque il n'y a pas d'autres portefeuilles dans son voisinage proche.  $P_s$  est donc sur la frontière efficiente de Markowitz (1952a). En effet, il n'y a pas de portefeuille qui, pour exactement le même niveau de risque, procure un niveau de rentabilité espérée plus important que celui de  $P_s$ . De ce point de vue, les sept cas du tableau 4.4 ne constituent pas des exceptions et nous pouvons affirmer que sur 1029 portefeuilles, tous sont optimaux en termes de moyenne - variance. Toutefois,  $P_s$  se trouve sur la frontière efficiente de Markowitz (1952a)

uniquement parce que l'ensemble de portefeuilles considéré n'est pas convexe. Si l'ensemble de portefeuilles était considéré dans sa totalité, il existerait un portefeuille présentant le même niveau de risque que  $P_s$  avec une rentabilité plus élevée. Ce portefeuille noté  $P^*$  serait alors situé sur la frontière efficiente et nous pourrions affirmer que  $P_s$  n'est pas optimal au sens moyenne – variance. Toutefois, en s'appuyant sur les observations précédentes, nous pouvons supposer que  $P^*$  serait aussi optimal pour un agent du type BPT (et  $P_s$  serait simplement un portefeuille sécurisé, mais pas optimal). A ce stade de notre travail, cela constitue seulement une hypothèse car les ensembles de sécurité n'ont pas encore été étudiés dans le cas général (plus précisément, nous ne pouvons pas affirmer que ces ensembles sont convexes).

Finalement, dans 1022 cas sur 1029 nous avons constaté qu'une partie de la frontière efficiente de Markowitz (1952a) appartient à l'ensemble de sécurité de l'agent BPT. Pour cela, le portefeuille optimal au sens du modèle de Shefrin et Statman (2000) coïncide systématiquement avec un portefeuille optimal en termes de moyenne – variance. Dans les sept autres cas il semblerait que le résultat soit identique si nous avons pu élargir notre étude à l'ensemble de tous les portefeuilles.

## 4. Discussion

La théorie comportementale du portefeuille (Shefrin et Statman, 2000) suppose que l'individu opère sur un marché d'actifs purs. Sa stratégie consiste à investir une partie de la richesse initiale dans un portefeuille peu risqué (ou sans risque) et la partie restante dans un seul titre, le moins cher. Dans ce cadre théorique, le portefeuille optimal obtenu semble être différent du portefeuille parfaitement diversifié de Markowitz (1952a). Ceci est une des raisons principales qui justifie le positionnement de la théorie comportementale du portefeuille de Shefrin et Statman



(2000) comme un modèle alternatif de gestion de portefeuille. Pour cela, il est important de tester cette théorie sur le marché réel et ce d'autant plus que nous avons montré qu'un individu suivant le modèle BPT choisit systématiquement un portefeuille situé sur la frontière efficiente de Markowitz (1952a). Ce résultat met en doute le positionnement de la théorie comportementale du portefeuille comme une alternative à l'approche classique.

En outre, le concept de la contrainte de sécurité qui définit l'ensemble des portefeuilles sécurisés s'applique aussi dans d'autres modèles de type *safety first* (Roy, 1952). En fait, l'individu considère que les portefeuilles de l'ensemble de sécurité sont identiques en termes de risque. De ce point de vue, il est intéressant de comparer ces portefeuilles en termes de leur écart – type qui est la mesure de risque souvent utilisée dans d'autres modèles, et notamment dans le modèle de Markowitz (1952a). De ce fait, notre étude de l'ensemble de sécurité peut contribuer aux études concernant d'autres modèles *safety first*.

Finalement, cette étude empirique est une des rares tentatives (Harlow, 1991) de confronter la théorie comportementale du portefeuille au marché réel. Les hypothèses restrictives, notamment celles portant sur le nombre de titres ou sur le nombre de portefeuilles considérés, ont été nécessaires pour effectuer les calculs. Nous avons mis en place une méthodologie innovante permettant de construire la frontière efficiente dans le cadre du modèle BPT. Les hypothèses restrictives limitent l'ensemble de nos conclusions. Par ailleurs, elles mettent en évidence les difficultés liées à l'utilisation de la théorie comportementale du portefeuille dans un contexte réel.

## 5. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons effectué une étude empirique permettant de tester la théorie comportementale du portefeuille de Shefrin et Statman (2000) sur les données réelles. Pour cela, nous avons utilisé les rentabilités journalières des 71 titres appartenant à l'indice SBF120 sur la période de 1 juin 2001 à 1 juin 2007. Les portefeuilles considérés contiennent au maximum 15 titres qui ont été choisis d'une manière aléatoire. Pour chaque série de titres, nous avons calculé leurs rentabilités annuelles en utilisant la méthode bootstrap. De ce fait, même pour deux séries de titres identiques la matrice de rentabilités est différente. Nous avons supposé que la part de richesse investie dans chaque titre est un nombre entier qui varie entre 0 et 15. Cet ensemble contient 77 558 760 portefeuilles. Cependant, même avec cette restriction, il est impossible de tenir compte de tous les portefeuilles à cause de la puissance opérationnelle limitée du logiciel. Pour cela nous avons construit un échantillon aléatoire de taille 100 000. Le tirage des 15 titres a été effectué 1680 fois. Pour chaque tirage nous avons construit (s'il en existe un) le portefeuille optimal en termes de modèle BPT. Ensuite, nous avons vérifié si un agent suivant le concept moyenne – variance préfère investir dans un autre portefeuille qui lui procure un niveau de rentabilité espérée plus élevé et un niveau de risque moins important.

Notre objectif principal était de confronter la théorie comportementale de gestion de portefeuille avec celui de moyenne – variance de Markowitz (1952a). Pour cela nous avons présenté tous les portefeuilles considérés dans l'espace  $(E, \sigma)$ .

Tout d'abord, nous avons étudié des ensembles de sécurité correspondant à différents paramètres de sécurité. Concrètement, nous avons étudié de quelle façon l'ensemble de sécurité est affecté par la modification des paramètres  $A$  et  $\alpha$ . Pour un niveau d'aspiration  $A$  fixé, nous avons présenté des ensembles de sécurité correspondant aux différents seuils de faillite admissibles  $\alpha$ . De la même façon, nous avons fixé  $\alpha$  et fait varier  $A$ .

Premièrement, nous avons constaté que les portefeuilles appartenant au même ensemble de sécurité sont caractérisés par des écart – types qui varient fortement pour le même niveau de rentabilité espérée. Ceci est aussi vrai pour les portefeuilles “sans risque” en termes de modèle BPT, c’est-à-dire des portefeuilles qui procurent au moins la richesse initiale dans chaque état de la nature. Deuxièmement, plus l’écart-type du portefeuille est important, plus grande est la rentabilité espérée qu’il doit procurer pour être considéré comme un portefeuille sécurisé. En fait, ce phénomène est accentué quand nous considérons des ensembles d’individus de plus en plus exigeants en termes de sécurité. Dans les deux cas de figure (variation de  $A$  ou de  $\alpha$ ) nous avons constaté le même type de changement : plus l’agent est exigeant en terme de sécurité (plus  $A$  est élevé, ou plus  $\alpha$  est proche de 0 ) plus la rentabilité espérée du portefeuille est élevée. Cette remarque rejoint les résultats de Harlow, 1991; Alexander et Baptista, 2002; Levy et Levy, 2004; Broihanne et *al.*, 2006, obtenus dans le cas de rentabilités normales.

Ensuite, pour chaque couple de  $A$  et  $\alpha$  retenu, nous avons superposé l’ensemble de sécurité de l’agent BPT avec la frontière efficiente moyenne – variance. Celle-ci regroupe les portefeuilles d’espérance de rentabilité maximale pour un niveau fixé de risque mesuré par l’écart-type. Nous avons constaté qu’une partie de cette frontière appartient toujours à l’ensemble de sécurité. Or, un agent BPT opte aussi pour le portefeuille de rentabilité espérée maximale. De ce fait, le choix de l’agent BPT coïncide avec celui d’un individu suivant le modèle moyenne – variance qui recherche le même niveau de rentabilité (Alexander et Baptista, 2002). En outre, plus l’investisseur du type BPT est exigeant en termes de sécurité, plus son portefeuille optimal se situe vers la gauche de la frontière efficiente de Markowitz (1952a).





## Conclusion générale

L'objectif de cette thèse était d'étudier la théorie comportementale du portefeuille. D'une part, il s'agit d'un modèle de gestion de portefeuille qui prend en compte certains éléments issus de l'approche comportementale tels que la déformation des probabilités objectives (Quiggin, 1982; Kahneman et Tversky, 1979) et la comptabilité mentale (Thaler, 1980, 1985). D'autre part, cette théorie s'appuie sur l'approche *safety first* (Roy, 1952) et ne prend en considération que le *downside risk* (Bawa, 1975; Menezes et al., 1980). Pour cette raison, l'étude de la théorie comportementale du portefeuille nous a permis d'analyser ces différents aspects de comportement du point de vue de gestion de portefeuille.

L'objet du premier chapitre était de présenter ces aspects dans leur contexte d'origine, comprendre leur justification et leur positionnement par rapport aux autres aspects de comportement intégrés dans la modélisation financière. Dans la première partie, nous avons étudié, les modèles ayant pour vocation de décrire le comportement des individus face aux choix risqués. Nous avons commencé par présenter la théorie de l'utilité espérée (Bernoulli, 1738; Von Neumann et Morgenstern, 1947) ainsi que certaines critiques (Allais, 1953; Ellsberg, 1961) émises à l'encontre de ce modèle qui est considéré comme un paradigme de la microéconomie, et par conséquent, de la théorie financière. Ensuite, nous avons étudié l'apparition et le développement de certains modèles qui se sont développés afin de répondre à l'insuffisance de l'approche classique de décrire le comportement d'un individu réel. En particulier, nous avons passé en revue les travaux consacrés à la déformation des probabilités objectives (Edwards 1953, 1954 ; Kahneman, Slovic et Tversky, 1982). Ce phénomène psychologique, révélé dans les comportements observés, est à présent intégré dans les modèles non linéaires (Quiggin, 1982; Yaari, 1987; Lopes, 1987), et en particulier, dans la théorie des perspectives de Tversky et Kahneman (1992). Cette dernière connaît aujourd'hui un grand succès car elle semble

apporter des explications convenables quant aux phénomènes qui ne pouvaient pas être expliqués dans le cadre de l'approche classique.

Dans la seconde partie, nous avons étudié les différents modèles de gestion de portefeuille. Largement utilisé par les praticiens, le modèle moyenne – variance de Markowitz (1952a) occupe une place dominante. Les critiques émises à l'encontre de ce modèle concernent notamment le choix de la variance comme mesure du risque. En effet, la variance tient compte des écarts négatifs mais aussi des écarts positifs de la rentabilité par rapport à la rentabilité espérée. Or, le risque est généralement associé avec le risque de perte et non pas avec le risque de gain. De ce point de vue, les modèles du type *safety first* (Roy, 1952) qui ne prennent en considération que le *downside risk* semblent être plus appropriés afin de décrire le comportement de l'investisseur. Le concept *safety first* s'intègre dans les modèles de gestion de portefeuille par le biais d'une contrainte de sécurité. Celle-ci doit nécessairement être respectée à l'optimum. Dans la théorie de Shefrin et Statman (2000) le portefeuille d'équilibre est celui à l'espérance maximale parmi tous les portefeuilles satisfaisant la contrainte, l'espérance du portefeuille étant calculée sous les probabilités transformées.

Dans le chapitre 2 nous avons supposé que la contrainte de sécurité est toujours satisfaite. Ce cadre théorique nous a permis d'étudier l'impact de la déformation des probabilités objectives sur le choix de l'investisseur maximisant l'espérance de la richesse finale. En d'autres termes, nous avons considéré un individu neutre au risque en termes de la théorie de l'utilité espérée. A condition de ne pas déformer les probabilités objectives, le programme de l'investisseur est une maximisation d'une fonction linéaire. Dans ce cas, le choix optimal est bien connu et consiste à investir toute la richesse dans un seul titre, celui qui correspond au rapport prix sur probabilité minimal. En d'autres termes, le portefeuille optimal se situe sur la frontière de l'ensemble des portefeuilles disponibles. Quand les probabilités objectives sont remplacées par des poids suite à la déformation, le programme de maximisation devient plus complexe. En effet, les poids dépendent eux-mêmes des paiements du portefeuille, le programme n'est donc pas linéaire. Toutefois, dans les

cas de deux et de trois actifs purs, nous avons montré que l'investisseur déformant les probabilités suit la même stratégie que quand il ne les déforme pas. La seule différence est que cette fois-ci il choisit le titre correspondant au rapport minimal du prix sur la probabilité déformée.

Ainsi, dans ce chapitre, nous avons montré que l'introduction du phénomène de la déformation des probabilités dans le programme de l'individu, ne signifie pas nécessairement un choix d'investissement différent. Rappelons, que la démonstration proposée est surtout fondée sur la linéarité de la fonction de l'utilité. Pour cette raison, il semblerait que le critère de l'espérance de la richesse finale est à l'origine de ce résultat. Alors que ce phénomène apporte des résultats satisfaisants dans le cas où les réalisations de la richesse sont aussi déformées par une fonction d'utilité ou une fonction de valeur, nous montrons qu'il n'a pas d'impact significatif si les réalisations de la richesse sont traitées d'une façon linéaire. De cette façon, notre étude se rajoute aux travaux de Yaari, 1987; Tversky et Kahneman, 1992; Wakker, 2003 qui défendent une transformation conjointe des probabilités objectives aussi bien que des réalisations de la richesse finale.

Dans le chapitre 3 nous avons introduit à nouveau la contrainte de sécurité dans le programme de l'investisseur. Parallèlement, nous avons supposé que l'individu considère les probabilités objectives des événements. Dans ce cas, le programme de l'investisseur devient un problème de maximisation de l'espérance de sa richesse finale, c'est-à-dire la maximisation d'une fonction linéaire, sur l'ensemble de portefeuilles restreint vérifiant la contrainte. Ainsi, le choix optimal de l'agent est un portefeuille qui se situe sur la frontière de son ensemble de sécurité. En d'autres termes, l'investisseur choisit le portefeuille d'assurance le moins cher, c'est-à-dire celui qui correspond au rapport prix sur probabilité minimal.

En prenant en compte les résultats du chapitre précédent, nous constatons que le comportement d'un individu suivant la théorie comportementale du portefeuille est très similaire à celui d'un individu neutre au risque en termes de la théorie de l'utilité espérée. En effet, tous les deux appliquent le même critère (le rapport du prix sur probabilité minimal) en choisissant ainsi le portefeuille le moins cher dans



l'ensemble de portefeuilles considéré. La différence réside dans le fait que cet ensemble n'est pas identique pour les deux individus. Aussi, le portefeuille le moins cher peut être différent pour les deux agents du fait que l'agent BPT déforme les probabilités objectives.

Par la suite, dans le chapitre 3 nous avons étudié l'équilibre du marché en présence de deux investisseurs suivant le modèle de Shefrin et Statman (2000). Il n'était pas surprenant de retrouver les cas d'équilibre identiques à ceux décrits dans le cadre de la théorie de l'utilité espérée. En fait, ceci se reproduit quand chacun des individus arrive à atteindre son ensemble de sécurité sans avoir besoin de diminuer l'espérance de sa richesse au-dessous de son niveau initial. Cependant, dans le cas général, l'investisseur se retrouve face à une situation dans laquelle il doit choisir entre un portefeuille assuré mais correspondant à une espérance moins élevée et un portefeuille non assuré mais à l'espérance supérieure. Puisque dans la formulation du modèle de Shefrin et Statman (2000), telle qu'elle a été proposée par les auteurs, il n'est pas précisé lequel des deux portefeuilles apportera à l'agent plus de satisfaction, il n'est pas possible de déterminer les prix et les portefeuilles d'équilibre. Ce problème est lié au fait que l'ordre de préférence n'est pas défini sur l'ensemble de portefeuilles en totalité. Plus précisément, à l'intérieur de l'ensemble de sécurité l'agent se comporte d'une façon similaire à celui d'un individu neutre au risque. Or, à l'extérieur de cet ensemble ces préférences ne sont pas déterminées. Ce fait empêche de comprendre la stratégie éventuelle de l'agent en dehors de son ensemble de sécurité et limite ainsi la capacité descriptive du modèle. De cette façon, ce n'est pas le concept *safety first* qui est remis en cause, mais la façon de l'introduire dans le modèle de Shefrin et Statman (2000).

Aussi, nous avons mis en évidence les cas dans lesquels au moins un des agents n'arrivera jamais à construire un portefeuille sécurisé. Face à une telle situation, l'investisseur peut décider de revoir ses exigences en termes de sécurité. Autrement dit, il peut être amené à modifier ces paramètres individuels afin de déterminer un nouvel ensemble sécurisé. La mise en place du processus de modification est étroitement liée à l'ordre de préférence établi en dehors de

l'ensemble de sécurité initial. Nous avons évoqué les différentes façons pour modifier les paramètres individuels. Chacune correspond à un type de comportement bien précis et par conséquent, impliquera l'établissement d'un ordre de préférence différent. Pour cette raison, la mise en place du processus de modification s'avère une tâche compliquée et nécessite des recherches supplémentaires. Toutefois, nous avons proposé une méthode qui semble permettre de la mettre en place en palliant ainsi les inconvénients du modèle.

Dans le chapitre 4 de cette thèse nous avons comparé, par le biais d'une étude empirique, un investisseur du type BPT avec celui qui suit le modèle de gestion de portefeuille de Markowitz (1952a). Nous avons montré que l'ensemble de sécurité de l'agent de Shefrin et Statman (2000) contient toujours une partie de la frontière efficiente de Markowitz (1952a). Pour cette raison, le choix des deux investisseurs est confondu, à condition qu'ils souhaitent atteindre le même niveau de rentabilité. En outre, plus l'individu suivant la théorie comportementale du portefeuille est exigeant en termes de sécurité plus son portefeuille optimal, s'il en existe un, se situe vers le côté gauche de la frontière efficiente de Markowitz (1952a). Autrement dit, un individu caractérisé par une forte aversion au risque choisira un portefeuille de moindre espérance indépendamment de la mesure de risque retenue. Au contraire, à l'intérieur de son ensemble de sécurité, un agent du type BPT choisira le portefeuille à l'espérance maximale, c'est-à-dire celui qui correspond au portefeuille le plus risqué en termes de moyenne – variance.

Le travail effectué dans cette thèse s'inscrit dans le contexte des travaux consacrés aux mesures du type *downside risk* et, plus généralement, au concept *safety first*. En dépit du fait qu'il s'agit d'une approche largement utilisée par les praticiens, ces travaux restent peu nombreux pour le moment. De cette façon, notre travail apporte des éléments supplémentaires permettant de mieux comprendre ces concepts. En se servant de la théorie de Shefrin et Statman (2000) comme un exemple de modèle de gestion de portefeuille fondé sur l'approche *safety first*, nous avons mis en évidence que la stratégie d'investissement d'un agent décrit par ce modèle n'est

guère différente de celles préconisées par les modèles classiques. Cependant, il semblerait que c'est la formulation du programme d'optimisation de l'agent de Shefrin et Statman (2000) qui est à l'origine de ce résultat. Ainsi, si l'on veut développer un modèle de gestion de portefeuille fondé sur l'approche *safety first*, il faudra réfléchir sur le moyen de l'intégrer dans le programme de l'investisseur.

# Bibliographie

- ALEXANDER, G. J., and A. M. BAPTISTA (2002): "Economic Implications of Using a Mean-Var Model for Portfolio Selection: A Comparison with Mean-Variance Analysis," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 26, 1159-1193.
- (2004): "A Comparison of Var and Cvar Constraints on Portfolio Selection with the Mean-Variance Model," *Management Science*, 50, 1261-1273.
- ALL, M. M. (1977): "Probability and Utility Estimates for Racetrack Betting," *Journal of Political Economy*, 85, 803-15.
- ALLAIS, M. (1953): "Le Comportement De L'homme Rationnel Devant Le Risque, Critiques Des Postulats Et Axiomes De L'école Américaine," *Econometrica*, 21, 503-546.
- (1988): *The General of Random Choices in Relation to the Invariant Cardinal Utility Function and the Specific Probability Function: The (U,Theta) Model - a General Overview*. Paris: Centre National de la Recherche Scientifique.
- ARTZNER, P., F. DELBAEN, J.-M. EBER, and D. HEATH (1999): "Coherent Measures of Risk," *Mathematical Finance*, 9, 203-228.
- ARZAC, R. E. (1976): "Profits and Safety in the Theory of the Firm under Price Uncertainty," *International Economic Review*, 17, 163-171.
- ARZAC, R. E., and V. BAWA (1977): "Portfolio Choice and Equilibrium in Capital Markets with Safety First Investors," *Journal of Financial Economics*, 4, 227-288.
- BALTUSSEN, G. T., POST, and VAN VLIET (2006): "Violations of Cumulative Prospect Theory in Mixed Gambles with Moderate Probabilities," *Management Science*, 52, 1288-1290.
- BARBER, B., and T. ODEAN (2000): "Trading Is Hazardous to Your Wealth: The Common Stock Investment Performance of Individual Investors," *Journal of Finance*, 55, 773-806.
- BARBERIS, N., and M. HUANG (2001): "Mental Accounting, Loss Aversion, and Individual Stock Returns," *Journal of Finance*, 56, 1247-1292.

- BARBERIS, N., M. HUANG, and T. SANTOS (2001): "Prospect Theory and Asset Prices," *Quarterly Journal of Economics*, 116, 1-53.
- BASAK, S., and A. SHAPIRO (2001): "Value-at-Risk Management: Optimal Policies and Asset Prices," *Review of Financial Studies*, 14, 371-405.
- BAUCELLS, M., and F. HEUKAMP (2006): "Stochastic Dominance and Cumulative Prospect Theory," *Management Science*, 52, 1409-1423.
- BAUMOL, W. J. (1963): "An Expected Gain-Confidence Limit Criterion for Portfolio Selection," *Management Science*, 10, 174-182.
- BAWA, V. S. (1975): "Optimal Rules for Ordering Uncertain Prospects," *Journal of Financial Economics*, 2, 95-121.
- BAWA, V. S., and E. B. LINDENBERG (1977): "Capital Market Equilibrium, in a Mean-Lower Partial Moment Framework," *Journal of Financial Economics*, 5, 189-200.
- BENARTZI, S. (2001): "Excessive Extrapolation and the Allocation of 401(K) Accounts to Company Stock," *Journal of Finance*, 56, 1747-1764.
- BENARTZI, S., and R. H. THALER (1995): "Myopic Loss Aversion and the Equity Premium Puzzle," *Quarterly Journal of Economics*, 110, 73-92.
- (2001): "Naïve Diversification Strategies in Defined Contribution Saving Plans," *American Economic Review*, 91, 79-98.
- BERNOULLI, D. (1954, Edition Originale, 1738): "Exposition of New Theory of the Measurement of Risk," *Econometrica*, 22, 123-136.
- BERNOULLI, N. (1713): "Specimen Theoriae Novae De Mensura Sortis," *Commentarii Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae*, 5, 175-192.
- BERNSTEIN, P. L. (1996): *Against the Gods: A Remarkable Story of Risk*. New York: Wiley.
- BLEICHRODT, H. J., ABELLAN-PERPINAN, J. PINTO-PRADES, and I. MENDEZ-MARTINEZ (2007): "Resolving Inconsistencies in Utility Measurement under Risk: Test of Generalizations of Expected Utility," *Management Science*, 53, 469-482.
- BLOOMFIELD, LEFTWHICH, and LONG (1977): "Portfolio Strategies and Performance," *Journal of Financial Economics*, 5, 201-218.
- BLUME, M., J. CROCKETT, and I. FRIEND (1974): "Stockownership in the United States: Characteristics and Trends," *Survey of Current Business*, 54, 16-40.

- BLUME, M., and I. FRIEND (1975): "The Asset Structure of Individual Portfolios and Some Implications for Utility Functions," *Journal of Finance*, 30, 585-603.
- BODNAR, G. M., G. S. HAYT, and R.C. MARSTON (1998): "Wharton Survey of Financial Management by U.S. Non-Financial Firms," *Financial Management*, 27, 70-91.
- BROIHANNE, M., M. MERLI, and P. ROGER (2004): *Finance Comportementale*. Economica.
- (2006): "Théorie Comportementale Du Portefeuille: Intérêt Et Limites," *Revue Economique*, 57, 297-314.
- C. M. BRENDL, A. B. MARKMAN, and E. T. HIGGINS (2000): "La Comptabilité Mentale Comme Autorégulation: Représentativité Pour Les Catégories Dirigées Par Un But," *Sélection Internationale, Recherche et Application en Marketing*, 15, 81-95.
- CAMPBELL, J. Y., M. LETTAU, MALKEIL, B. G., and Y. XU (2001): "Have Individual Stocks Become More Volatile? An Empirical Exploration of Idiosyncratic Risk," *Journal of Finance*, 56, 1-43.
- CHATEAUNEUF, A., and M. COHEN (1994): "Risk Seeking with Diminishing Marginal Utility in a Non-Expected Utility Model," *Journal of Risk and Uncertainty*, 9, 77-91.
- COVAL, J., and T. MOSKOWITZ (1999): "Home Bias at Home: Local Equity Preference in Domestic Portfolios," *Journal of Finance*, 54, 145-166.
- DAVISON, A. C., and D.V. HINKLEY (1997): *Bootstrap Methods and Their Application*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.
- DOWD, K. (1998): *Beyond Value at Risk: The New Science of Risk Management*. London: Wiley.
- DUFFIE, D., and J. PAN (1997): "An Overview of Value at Risk," *Journal of Derivatives*, 4, 7-49.
- EDWARDS, W. (1953): "Probability Preferences in Gambling," *American Journal of Psychology*, 66, 349-64.
- (1954): "Probability Preferences among Bets with Differing Expected Value," *American Journal of Psychology*, 67, 56-67.
- (1962): "Subjective Probabilities Inferred from Decisions," *Psychological Review*, 69, 109-135.

- EECKOUDT, L., and C. GOLLIER (1992): *Les Risques Financiers*. Ediscience International.
- EFRON, BRADLEY, and R. J. TIBSHIRANI (1993): *An Introduction to the Bootstrap*. New York: Chapman and Hall.
- ELLSBERG, D. (1961): "Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms," *Quarterly Journal of Economics*, 75, 686-696.
- ELTON, E. J., and M. L. GRUBER (1977): "Risk Reduction and Portfolio Size: An Analytical Solution," *The Journal of Business*, 50, 415-437.
- FAMA, E. F. (1976): *Foundations of Finance: Portfolio Decisions and Securities Prices*. New York: Basic Books.
- FELDSTEIN, M. S. (1969): "Mean Variance Analysis in the Theory of Liquidity Preference and Portfolio Selection," *Review of Economic Studies*, 36, 5-12.
- FENNEMA, H., and M. V. ASSEN (1999): "Measuring the Utility of Losses by Means of the Trade-Off Method," *Journal of Risk and Uncertainty*, 17, 277-295.
- FISHBURN, P. C. (1977): "Mean-Risk Analysis with Risk Associated with Below-Target Returns," *American Economic Review*, 67, 116-126.
- (1978): "On Handa's New Theory of Cardinal Utility and the Maximization of Expected Return," *Journal of Political Economy*, 86, 321-324.
- (1988): *Non Linear Preference and Utility Theory*. Weatsheaf Books Ltd.
- FISHBURN, P. C., and G. A. KOCHENBERGER (1978): "Two-Piece Von Neumann-Morgensterne Utility Functions," *Decision Sciences*, 10, 503-518.
- FISHER, K., and M. STATMAN (1997): "Investment Advice from Mutual Fund Companies," *Journal of Portfolio Management*, 24, 9-25.
- FRIEDMAN, M., and L. SAVAGE (1948): "The Utility Analysis of Choices Involving Risk," *Journal of Political Economy*, 56, 279-304.
- GOLLIER, C. (2001): *The Economics of Risk and Time*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.
- GOLLIER, C., and A. MUERMANN (2006): "Optimal Choice and Beliefs with Ex Ante Savoring and Ex Post Disappointment," *Working Paper LERNA*, University of Toulouse.

- GRINBLATT, M., and M. KELOHARJU (2000): "The Investment Behavior and Performance of Various Investor Type: A Study of Finland's Unique Data Set," *Journal of Financial Economics*, 55, 43-67.
- GUILLEN, M. F., and A. E. TSCHOEGL (2002): "Banking on Gambling: Banks and Lottery-Linked Deposit Accounts," *Journal of Financial Services Research*, 21, 219-231.
- HAIGH, M. S., and J. A. LIST (2005): "Do Professional Traders Exhibit Myopic Loss Aversion? An Experimental Analysis," *Journal of Finance*, 60, 523-534.
- HANDA, J. (1977): "Risk, Probabilities and New Theory of Cardinal Utility," *Journal of Political Economy*, 85, 97-122.
- HARLOW, W. V. (1991): "Asset Allocation in a Downside-Risk Framework," *Financial Analysts Journal*, 47, 28-40.
- HEATH, C., and A. TVERSKY (1991): "Preferences and Beliefs: Ambiguity and Competence in Choice under Uncertainty," *Journal of Risk and Uncertainty*, 4, 5-28.
- HOLDEN, S., and J. VANDERHEI (2001): "401(K) Plan Asset Allocation, Account Balances, and Loan Activity in 2000," *Investment Company Institute, Perspective* 7, 1-27.
- HUBERMAN, G. (2001): "Familiarity Breeds Investment," *Review of Financial Studies*, 14, 161-178.
- HULL, J. C. (2006): *Risk Management and Financial Institutions*. Prentice Hall  
 — (2008): *Options, Futures and Other Derivatives*. New York: Prentice Hall.
- JORION, P. (1994): "Mean-Variance Analysis of Currency Overlays," *Financial Analysts Journal*, 50, 48-56.  
 — (2000): *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*. New York: McGraw-Hill.
- KAHNEMAN, D., P. SLOVIC, and A. TVERSKY (1982): *Intuitive Prediction: Biases and Corrective Procedures in Judgment under Uncertainty: Heuristics and Biases*. Cambridge University Press, London: CUP.



- KAHNEMAN, D., and A. TVERSKY (1979): "Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk," *Econometrica*, 47, 263-291.
- KILKA, M., and M. WEBER (2000): "Home Bias in International Stock Return Expectations," *The Journal of Psychology and Financial Markets*, 1, 176-192.
- KNIGHT (1921): *Risk, Uncertainty and Profit*. Boston: Houghton Mifflin.
- KÖBBERLING, V., and WAKKER (2005): "An Index of Loss Aversion," *Journal of Economic Theory*, 122, 199-131.
- KOOREMAN, P. (1997): "The Labeling Effect of a Child Benefit System," *Working paper*, University of Groningen.
- KROLL, Y., H. LEVY, and A. RAPOPORT (1988): "Experimental Tests of the Separation Theorem and the Capital Asset Pricing Model," *American Economic Review*, 78, 500-518.
- KUMAR, A., and W. GOETZMANN (2003): "Diversification Decisions of Individual Investors and Asset Prices," *Working Paper*, Yale School of Management.
- LAURIOLA, M., and I. LEVIN (2001): "Personality Traits and Risky Decision-Making in a Controlled Experimental Task: An Exploratory Study," *Personality and Individual Differences*, 31, 215-226.
- LEGGIO, K. B., and D. LIEN (2002): "Covered Call Investing in Loss Aversion Framework," *The Journal of Psychology and Financial Markets*, 3, 182-191.
- LEONNET, J. (1936): *Les Loteries D'état En France Au 18-Ème Et 19-Ème Siècles*. Paris.
- LEVY, H. (1974): "The Rational of the Mean-Standard Deviation Analysis: Comment," *American Economic Review*, 64, 434-441.
- LEVY, M., and H. LEVY (2002): "Prospect Theory: Much Ado About Nothing?," *Management Science*, 48, 1334-1349.
- LEVY, H., and M. LEVY (2004): "Prospect Theory and Mean-Variance Analysis," *The Review of Financial Studies*, 17, 1015-1041.
- LIBBY, R., and P. FISHBURN (1977): "Behavioral Models of Risk Taking in Business Decisions : A Survey and Evaluation," *Journal of Accounting Research*, 15, 272-292.

- LICHTENSTEIN, S., and P. SLOVIC (1971): "Reversal of Preference between Bids and Choices in Gambling Decision," *Journal of Experimental Psychology*, 89, 46-55.
- LIDMAN, H. (1971): "Inconsistent Preferences among Gambles," *Journal of Experimental Psychology*, 89, 390-390.
- LINSMEIER, T. J., and N. D. PEARSON (2000): "Value at Risk," *Financial Analysts Journal*, 56, 47-67.
- LINTNER, J. (1965): "The Valuation of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets," *Review of Economics and Statistics*, 47, 13-37.
- LINVILLE, R. W., and G. W. FISCHER (1991): "Preferences for Separating or Combining Events," *Journal of Personality and Social Psychology*, 60, 5-23.
- LOEWENSTEIN, G. (1988): "Frames of Minds in Intertemporal Choice," *Management Science*, 34, 200-214.
- LOPES, L. L. (1987): "Between Hope and Fear: The Psychology of Risk," *Advances in Experimental Social Psychology*, 20, 255-295.
- LOPES, L. L., and G. C. ODEN (1999): "The Role of Aspiration Level in Risky Choice: A Comparison of Cumulative Prospect Theory and Sp/a Theory," *Journal of Mathematical Psychology*, 43, 286-313.
- LUCE, R. (2000): *Utility of Gains and Losses: Measurement-Theoretical and Experimental Approaches*. London, UK: Lawrence Erlbaum Publishers.
- MANGOT, M. (2005): *Psychologie De L'investisseur Et Des Marchés Financiers*. Paris: Dunod.
- MARKOWITZ, H. (1952a): "Portfolio Selection," *Journal of Finance*, 6, 77-91.
- (1952b): "The Utility of Wealth," *Journal of Political Economy*, 60, 151-158.
- MEHRA, R., and E. PRESCOTT (1985): "The Equity Premium: A Puzzle," *Journal of Monetary Economics*, 15, 145-161.
- MENEZES, C., C. GEISS, and J. TRESSLER (1980): "Increasing Downside Risk," *American Economic Review*, 70, 921-932.
- MOSSIN, J. (1966): "Equilibrium in Capital Asset Market," *Econometrica*, 34, 768-783.

- NIEUWERBURGH, and I. VELDKAMP (2008): "Information Acquisition and Portfolio under Diversification," *Working paper, No. EC-08-21*, Stern School of Business.
- O'CURRY (1997): "Income Source Effects," *Working paper*, DePaul University.
- PIFFELMANN, M., and P. ROGER (2005): "Les Comptes D'épargne Associés À Des Loteries: Approche Comportementale Et Étude De Cas," *Banque et Marchés*, 78, 16-23.
- POLKOVNICHENKO, V. (2005): "Household Portfolio Diversification: A Case for Rank-Dependent Preferences," *Review of Financial Studies*, 18, 1467-1502.
- PRATT, J. W. (1964): "Risk Aversion in the Small and in the Large," *Econometrica*, 32, 122-136.
- QUIGGIN, J. (1982): "A Theory of Anticipated Utility," *Journal of Economic Behavior and Organization*, 3, 323-343.
- (1993): *Generalized Expected Utility Theory: The Rank-Dependent Model*. Kluwer Academic Publishers Group.
- RABIN, M. (2000): "Risk Aversion and Expected-Utility Theory: A Calibration Theorem," *Econometrica*, 68, 1281-1292.
- ROGER, P. (1996): *L'évaluation Des Actifs Financiers : Modèles À Temps Discret*. DeBoeck Université.
- ROY, A. D. (1952): "Safety-First and the Holding of Asset," *Econometrica*, 20, 431-449.
- SAUNDERS, A. (1999): *Financial Institutions Management: A Modern Perspective*. New York: McGraw-Hill.
- SEBORA, T., and J. CORNWALL (1995): "Expected Utility Theory Vs. Prospect Theory," *Journal of Mathematical Economics*, 7, 41-61.
- SERVIGNY, and RENAULT (2004): *Measuring and Managing Credit Risk*. McGraw-Hill.
- SHARPE, W. (1964): "Capital Asset Pricing: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," *Journal of Finance*, 19, 425-442.
- SHEFRIN, H., and M. STATMAN (1985): "The Disposition to Sell Winners Too Early and Ride Losers Too Long: Theory and Evidence," *Journal of Finance*, 40, 777-790.
- (2000): "Behavioral Portfolio Theory," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 35, 127-151.

- SHEFRIN, H. M., and R. H. THALER (1992): "Mental Accounting, Saving, and Self-Control," *Choice Over Time*, éd. G. Loewenstein and J. Elster, 287-330.
- SHILLER, R. J. (1981): "Do Stock Prices Move Too Much to Be Justified by Subsequent Changes in Dividends?," *American Economic Review*, 71, 421-436.
- SLOVIC, P. B., and LICHTENSTEIN (1968): "The Relative Importance of Probabilities and Payoffs in Risk Taking," *Journal of Experimental Psychology*, 78, 1-18.
- STARMER, and CHRIS (2000): "Developments in Non-Expected Utility Theory: The Hunt for a Descriptive Theory of Choice under Risk," *Journal of Economic Literature*, 38, 332-382.
- STATMAN, M. (1987): "How Many Stocks Make a Diversified Portfolio?," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 353-363.
- (2003): "How Much Diversification Is Enough?," *Working Paper*, Santa Clara University.
- STRACCA, L. (2004): "Behavioral Finance and Asset Prices: Where Do We Stand?," *Journal of Economic Psychology*, 25, 373-405.
- STRONG, N., and X. XU (2003): "Understanding the Equity Home Bias: Evidence from Survey Data," *Review of Economics and Statistics*, 85, 307- 312.
- TELSER, L. (1955): "Safety First and Hedging," *Review of Economic Studies*, 23, 1-16.
- THALER, R. (1980): "Towards a Positive Theory of Consumer Choice," *Journal of Economic Behavior and Organization*, 1, 39-60.
- (1985): "Mental Accounting and Consumer Choice," *Marketing Science*, 4, 199-214.
- (1999): "Mental Accounting Matters," *Journal of Behavioral Decision Making*, 12, 183-206.
- THALER, R. H., and E. J. JONSON (1990): "Gambling with the House Money and Trying to Break Even: The Effects of Prior Outcomes on Risky Choice," *Management Science*, 36, 643-660.
- TOBIN, J. (1958): "Liquidity Preference as Behavior toward Risk," *Review of Economic Studies*, 25, 65-87.
- TVERSKY, A. (1969): "Intransitivity of Preferences," *Psychological Review*, 79, 281-299.

- TVERSKY, A., and D. KAHNEMAN (1974): "Judgment under Uncertainty: Heuristic and Biases," *Science*, 185, 1124-1130.
- (1992): "Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty," *Journal of Risk and Uncertainty*, 5, 297-323.
- VON NEUMANN, J., and O. MORGENSTERN (1947): *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.
- WAKKER, P. P. (2003): "The Date of Levy and Levy (2000) 'Prospect Theory: Much Ado About Nothing?': Actually Support Prospect Theory," *Management Science*, 49, 979-981.
- WALTER, C. (2003): "1900-2000 : Un Siècle De Descriptions Statistiques Des Fluctuations Boursières Ou Les Aléas Du Modèle De Marche Au Hasard En Finance," Collège de France.
- WILLIAMS, A. C. (1966): "Attitude toward Speculative Risk as an Indicator of Attitudes toward Pure Risks," *Journal of Risk and Insurance*, 33, 577-586.
- YAARI, M. (1984): "Risk Aversion without Diminishing Marginal Utility," *Working Paper*, Theoretical Economics Paper Series, No 106, London School of Economics.
- (1987): "The Dual Theory of Choice under Risk," *Econometrica*, 55, 95-115.
- YIU, K. F. C. (2004): "Optimal Portfolios a Value-at-Risk Constraint," *Journal of Economic Dynamics and Control*, 28, 1317-1334.

# Annexe A

## Annexes du chapitre 2

### A.1. Cas $n=3$ . Les plans d'indifférence, sont-ils parallèles ?

Nous montrons que, contrairement au cas de deux actifs purs, les plans d'indifférence correspondant aux différents sous-ensembles ne sont pas parallèles. Notons  $S_{ijk} = \{W / 0 \leq x_i < x_j < x_k; i, j, l = 1, 2, 3 \text{ et } i \neq j \neq k\}$ . L'ensemble  $\square_+^3$  de tous les portefeuilles est divisé en six sous-ensembles  $S_{ijk}$ . A chacun de ces sous-ensembles correspond le système de poids  $q_i, q_j$  et  $q_k$ , *a priori* différents, défini selon la règle de Quiggin (1993) :

$$\begin{aligned}q_i &= w(p_i), \\q_j &= w(p_i + p_j) - w(p_i), \\q_k &= w(p_i + p_j + p_k) - w(p_i + p_j) = 1 - w(p_i + p_j).\end{aligned}$$

Les plans d'indifférence sont définis par les équations :

$$x_i q_i + x_j q_j + x_k q_k = \text{const}$$

Nous pouvons montrer que les plans des différents sous-ensembles  $S_{ijk}$  ne sont pas parallèles. A titre d'exemple considérons  $S_{123}$  et  $S_{132}$ . Nous avons  $S_{123} = \{(x_1, x_2, x_3) / 0 < x_1 < x_2 < x_3\}$ . Si  $W \in S_{123}$  les poids  $q_1, q_2$  et  $q_3$  sont définis par :

$$\begin{aligned}
q_1 &= w(p_1), \\
q_2 &= w(p_1 + p_2) - w(p_1), \\
q_3 &= w(p_1 + p_2 + p_3) - w(p_1 + p_2) = 1 - w(p_1 + p_2).
\end{aligned}$$

Ainsi, dans  $S_{123}$  l'équation des plans d'indifférence est :

$$x_1 w(p_1) + x_2 (w(p_1 + p_2) - w(p_1)) + x_3 (1 - w(p_1 + p_2)) = \text{const}$$

Dans l'ensemble  $S_{132} = \{(x_1, x_2, x_3) / 0 < x_1 < x_3 < x_2\}$  les poids sont définis par :

$$\begin{aligned}
q_1 &= w(p_1), \\
q_2 &= w(p_1 + p_3) - w(p_1), \\
q_3 &= w(p_1 + p_3 + p_2) - w(p_1 + p_3) = 1 - w(p_1 + p_3).
\end{aligned}$$

et les plans d'indifférence sont :

$$x_1 w(p_1) + x_2 (w(p_1 + p_3) - w(p_1)) + x_3 (1 - w(p_1 + p_3)) = \text{const}$$

Pour que les plans d'indifférence de  $S_{123}$  et  $S_{132}$  soient parallèles il faut et il suffit que les rapports entre les coefficients soient égaux :

$$\frac{w(p_1)}{w(p_1)} = \frac{w(p_1 + p_2) - w(p_1)}{w(p_1 + p_3) - w(p_1)} = \frac{1 - w(p_1 + p_2)}{1 - w(p_1 + p_3)}$$

La première égalité implique :

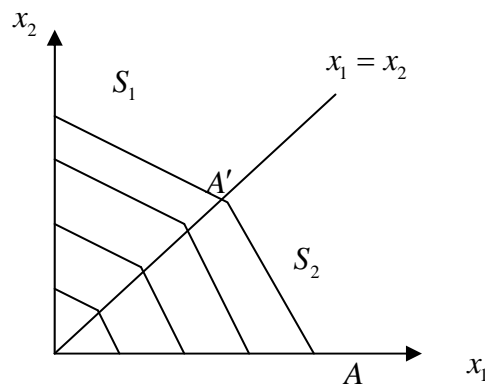
$$\begin{aligned}
w(p_1)w(p_1 + p_3) - w(p_1)^2 &= w(p_1 + p_2)w(p_1) - w(p_1)^2 \\
w(p_1 + p_3) &= w(p_1 + p_2)
\end{aligned}$$

Or, ceci n'est pas vérifié *a priori* car  $w(p_1 + p_2) \neq w(p_1 + p_3)$ .

De la même façon, nous pouvons montrer que les plans d'indifférence appartenant aux différents sous-ensembles  $S_{ijk}$  ne sont pas parallèles.

## A.2. Cas $n=2$ . Le choix optimal de l'agent BPT sous l'hypothèse $w(p_1) + w(p_2) \neq 1$

Considérons le cas représenté sur la figure A.1 ci-dessous où les courbes d'indifférence dans  $S_1$  sont moins pentues que celles dans  $S_2$  :  $\frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} < \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)}$ .



$$\frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} < \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)}$$

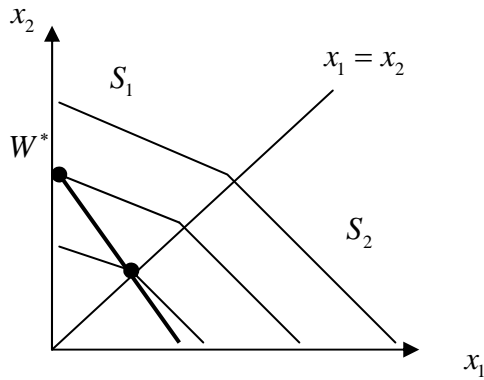
**Figure A.1.**

Nous montrons que dans ce cas le choix optimal de l'agent consiste à investir toute sa richesse dans un seul actif comme dans le cas de l'agent VNM. Pour cela, nous comparons les pentes des courbes d'indifférence avec la pente de la droite budgétaire dans  $S_1$  et  $S_2$  respectivement.

**Cas 1.** La droite de budget est plus pentue que les courbes d'indifférence dans  $S_2$  (elle l'est forcément dans  $S_1$ ) :  $\frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} < \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)} < \frac{\pi_1}{\pi_2}$ . La solution optimale dans

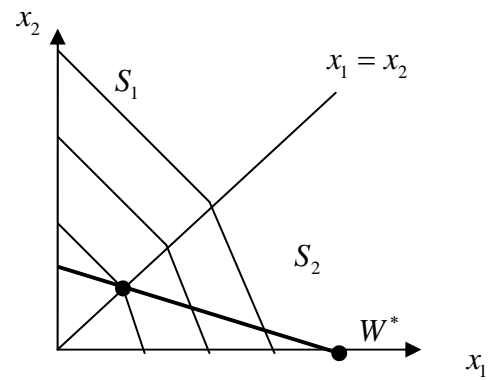


$S_1$  est un portefeuille de la forme  $(0, x_2)$  et dans  $S_2$  la solution optimale se trouve sur la bissectrice. Finalement, le portefeuille optimal (dans  $R_+^2$ ) est de la forme  $(0, x_2)$ . (figure A.2, cas 1).



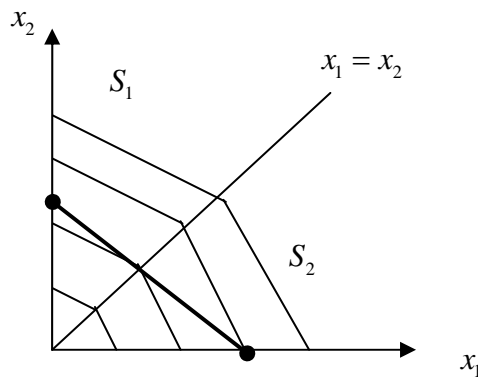
$$\frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} < \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)} < \frac{\pi_1}{\pi_2}$$

**Cas 1.**



$$\frac{\pi_1}{\pi_2} < \frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} < \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)}$$

**Cas 2.**



$$\frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} < \frac{\pi_1}{\pi_2} < \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)}$$

**Cas 3.**

**Figure A.2.**

**Cas 2.** La droite de budget est moins pentue que les courbes d'indifférence dans  $S_1$  et elle est moins pentue que les courbes d'indifférence dans  $S_2$  :

$\frac{\pi_1}{\pi_2} < \frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} < \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)}$  Ainsi, la solution optimale dans  $S_1$  se trouve sur la

bissectrice et celle dans  $S_2$  est de la forme  $(x_1, 0)$ . Finalement, le portefeuille optimal est aussi de la forme  $(x_1, 0)$ .

*Cas 3.* La droite de budget est moins pentue que les courbes d'indifférence dans  $S_2$  et elle est plus pentue que les courbes d'indifférence dans  $S_1$  :

$\frac{w(p_1)}{1-w(p_1)} < \frac{\pi_1}{\pi_2} < \frac{1-w(p_2)}{w(p_2)}$ . Dans ce cas, la solution optimale dans  $S_1$  est de la forme

$(0, x_2)$  et celle dans  $S_2$  est de la forme  $(x_1, 0)$ . De cette façon, le portefeuille optimal peut prendre une de ces deux formes (par exemple, sur la figure A.2, cas 2 le portefeuille  $(x_1, 0)$  apporte plus de satisfaction à l'agent que le portefeuille  $(0, x_2)$ ).

### A.3. Cas $n=2$ . Le problème d'optimisation de l'agent BPT. Approche analytique

Nous cherchons à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = q_1 - \lambda \pi_1 + \mu_1 - \mu_2 = 0 & 1.1 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = q_2 - \lambda \pi_2 + \mu_2 = 0 & 1.2 \\ (x_1 - x_{01})\pi_1 + (x_2 - x_{02})\pi_2 = 0 & 1.3 \\ \mu_1 x_1 = 0; \quad \mu_2 (x_1 - x_2) = 0 & 1.4 \\ \mu_1 \geq 0; \quad \mu_2 \geq 0 & 1.5 \\ x_1 \geq 0; \quad x_1 - x_2 \leq 0 & 1.6 \end{cases}$$

où  $\lambda$ ,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont des constantes et  $q_1$  et  $q_2$  sont définis par :

$$q_1 = w(p_1) \text{ et } q_2 = w(p_1 + p_2) - w(p_1) = 1 - w(p_1).$$

Quatre cas de figures sont possibles selon que les constantes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont strictement positives ou nulles. Remarquons que dans le cas où  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont strictement positives simultanément, le système n'est pas compatible. En effet, si  $\mu_1 > 0$  et  $\mu_2 > 0$  pour que les équations 1.4 soient vérifiées les deux contraintes 1.6 doivent être saturées :  $x_1 = 0$  et  $x_1 = x_2$ . Ainsi,  $x_1 = x_2 = 0$  pourrait être une solution s'il en existe une. Or, d'après la contrainte budgétaire 1.3 cela impliquerait  $x_{01}\pi_1 + x_{02}\pi_2 = 0$ . Ceci est impossible car les dotations initiales  $x_{01}$  et  $x_{02}$  ne peuvent pas être négatives.

Si  $\mu_1 = \mu_2 = 0$ , nous avons  $\frac{\pi_1}{q_1} = \frac{\pi_2}{q_2}$  d'après les deux premières équations. Ce

cas correspond à la situation où la contrainte budgétaire coïncide avec une courbe d'indifférence et donc tout portefeuille satisfaisant la contrainte budgétaire est optimal. Ce cas est identique au cas 1 représenté sur la figure 2.1 pour l'agent VNM. La seule différence est que cette fois-ci l'ensemble de portefeuilles considérés est restreint à ceux pour lesquels  $x_1 \leq x_2$ .

Si  $\mu_1 > 0$  et  $\mu_2 = 0$ , nous avons  $x_1 = 0$  d'après 1.4. Les équations 1.1 et 1.2 deviennent :  $q_1 - \lambda\pi_1 < 0$  et  $q_2 - \lambda\pi_2 = 0$ , et nous avons  $\frac{\pi_1}{q_1} > \frac{\pi_2}{q_2}$ . Le portefeuille optimal est de la forme  $(0, x_2)$ . Ainsi, comme dans le cas standard, l'agent investit dans l'actif dont le rapport « prix sur poids » est minimal.

Si  $\mu_1 = 0$  et  $\mu_2 > 0$  nous avons  $x_1 = x_2$  d'après 1.4. Ainsi, le portefeuille optimal est l'actif sans risque. Parallèlement,  $q_1 - \lambda\pi_1 > 0$  et  $q_2 - \lambda\pi_2 < 0$  d'après 1.1 et 1.2.

Nous en déduisons  $\frac{\pi_1}{q_1} < \frac{\pi_2}{q_2}$ .

Après avoir refait les mêmes calculs dans l'ensemble  $S_2$ , nous constatons qu'à l'optimum deux types de portefeuilles peuvent être choisis. L'individu peut investir toute sa richesse dans un seul titre ou bien dans l'actif sans risque. Cependant, en combinant les solutions obtenues sur les deux ensembles  $S_1$  et  $S_2$ , l'actif sans risque sera éliminé. En effet, si  $x_1 = x_2$  est une solution optimale dans  $S_1$ , cela signifie que la solution optimale dans  $S_2$  est de la forme  $(x_1, 0)$  (figure 2.6). Or, le point  $(x_1, 0)$  se

trouve sur une courbe d'indifférence plus élevée que le point  $x_1 = x_2$ . C'est donc le portefeuille  $(x_1, 0)$  qui sera choisi à l'optimum.

#### A.4. Maximisation de l'espérance sous les probabilités déformées. Cas $n=3$

Considérons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} q_i - \lambda \pi_i + \mu_1 - \mu_2 = 0 \\ q_j - \lambda \pi_j + \mu_2 - \mu_3 = 0 \\ q_k - \lambda \pi_k + \mu_3 = 0 \\ c.b \\ \mu_1 x_i = 0; \quad \mu_2 (x_i - x_j) = 0; \quad \mu_3 (x_j - x_k) = 0; \\ x_i \geq 0; \quad x_i \leq x_j; \quad x_j \leq x_k. \end{array} \right. \quad (2)$$

Si  $\mu_2 > 0$ , c'est-à-dire que le portefeuille optimal est tel que  $x_i = x_j$ , le programme de maximisation de l'agent doit être réécrit. Concrètement, nous passons de la dimension 3 à la dimension 2 :

$$\begin{aligned} & \text{Max } x_{ij} q_{ij} + x_k q_k \\ & \text{s.c } (x_{ij} - x_{0i}) \pi_i + (x_{ij} - x_{0j}) \pi_j + (x_k - x_{0k}) \pi_k = 0 \\ & \quad x_{ij} \geq 0; \quad x_{ij} \leq x_k \end{aligned}$$

où  $x_{ij}$  représente la dotation en actif  $e_1$  et  $e_2$  à l'optimum. Le système de poids correspondant est :

$$q_{ij} = w(p_i + p_j) \text{ et } q_k = 1 - q_{ij}.$$

Le lagrangien  $L_{ijk}$  est défini par :

$$L_{ijk} = x_{ij}q_{ij} + x_kq_k - \lambda((x_{ij} - x_{0i})\pi_i + (x_{ij} - x_{0j})\pi_j + (x_k - x_{0k})\pi_k) + \mu_1x_{ij} - \mu_2(x_{ij} - x_k)$$

où  $\mu_1 \geq 0$  et  $\mu_2 \geq 0$ .

De cette façon, en supposant dans le système (2) qu'une des contraintes  $x_i \leq x_j$  où  $x_j \leq x_k$  est saturée, nous ramenons le problème à la dimension 2. Entre autres, cela implique que nous allons être confrontés à la contradiction que nous avons rencontrée en étudiant le cas de deux actifs.

Une autre question concerne le cas où les deux contraintes  $x_i \leq x_j$  et  $x_j \leq x_k$  sont simultanément saturées. Cela revient à supposer  $\mu_2 > 0$  et  $\mu_3 > 0$  dans le système (2) et donc  $x_i = x_j = x_k$ . D'une part, ce cas particulier est le plus intéressant car la solution correspondante est l'actif sans risque. D'autre part, supposer que les deux contraintes sont saturées amène le problème de maximisation de l'agent à une dimension. La solution dans ce cas est connue : investissement du même montant  $\frac{W_0}{\pi_1 + \pi_2 + \pi_3}$  dans chaque actif. Ainsi, le raisonnement en une dimension ne nous permet pas d'établir des conditions éventuelles sur le système des poids dans  $S_{ijk}$  conduisant l'agent à investir dans l'actif sans risque. En fait, nous cherchons une condition sur les poids  $q_i$ ,  $q_j$  et  $q_k$ , (définie dans la dimension 3) sous laquelle l'investissement dans l'actif sans risque est le seul choix optimal. Or, nous venons de constater que cette condition ne peut pas être établie par la méthode analytique générale.

## A.5. Le choix optimal de l'agent du type VNM. Approche graphique. Cas $n=3$

Le programme s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{Max } x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 \\ \text{s.c } & (x_1 - x_{01})\pi_1 + (x_2 - x_{02})\pi_2 + (x_3 - x_{03})\pi_3 = 0 \\ & x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

D'après les trois dernières contraintes l'ensemble de portefeuilles accessibles est  $\square_+^3$  et donc les plans d'indifférence de l'agent sont des plans parallèles définis par :

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = \text{const.}$$

La contrainte budgétaire est le plan de l'équation suivante :

$$x_1 \pi_1 + x_2 \pi_2 + x_3 \pi_3 - W_0 = 0.$$

Le portefeuille optimal (ou l'ensemble de portefeuilles optimaux) est défini par la disposition des plans d'indifférence par rapport au plan du budget. Par exemple, considérons le cas trivial où le plan du budget est parallèle aux plans d'indifférence. Dans ce cas le plan du budget coïncide avec un des plans d'indifférence. Ainsi, tout portefeuille sur le plan budgétaire est un portefeuille optimal. L'agent est donc indifférent entre un actif risqué et l'actif sans risque. Ce cas est analogue au cas 1 de deux actifs représenté sur la figure 2.1, où la droite budgétaire coïncide avec une des courbes d'indifférence.

Il est plus difficile d'établir le portefeuille optimal quand le plan du budget n'est pas parallèle aux plans d'indifférence. Pour pouvoir imaginer et analyser une telle situation nous utilisons la technique suivante. Le résultat de maximisation d'une fonction linéaire est forcément un point (ou un sous-ensemble) sur la frontière de

l'ensemble de maximisation. L'ensemble  $\square_+^3$  est borné par les trois plans  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  et  $x_3 = 0$ . Pour cela nous étudions les intersections des plans d'indifférence et du plan budgétaire avec ces trois plans.

L'intersection du plan de budget avec par exemple, le plan  $x_3 = 0$  est une droite dans  $x_1Ox_2$ , où  $O$  est le point d'origine. Nous appelons cette droite - droite du budget dans  $x_3 = 0$ . De même, nous appelons courbes d'indifférence des droites obtenues par l'intersection des plans d'indifférence avec le plan  $x_3 = 0$ . Nous analysons la position des courbes d'indifférence par rapport à la droite du budget dans le plan  $x_3 = 0$ . Ensuite, nous effectuons la même démarche dans les plans  $x_1 = 0$  et  $x_2 = 0$ . Notons que dans certains cas il suffit d'étudier les intersections avec seulement deux parmi les trois plans. Ces analyses (chacune établie dans un espace à deux dimensions) nous permettent de visualiser la position des plans dans  $\square_+^3$  et en déduire l'intersection du plan budgétaire avec le plan d'indifférence le plus élevé. Le résultat de cette intersection est une droite ou un point dans un des plans  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  et  $x_3 = 0$ , c'est-à-dire sur la frontière de l'ensemble  $\square_+^3$ .

Concrètement, considérons un exemple où les intersections avec les plans  $x_1 = 0$  et  $x_3 = 0$  sont comme celles représentées sur la figure A.3:

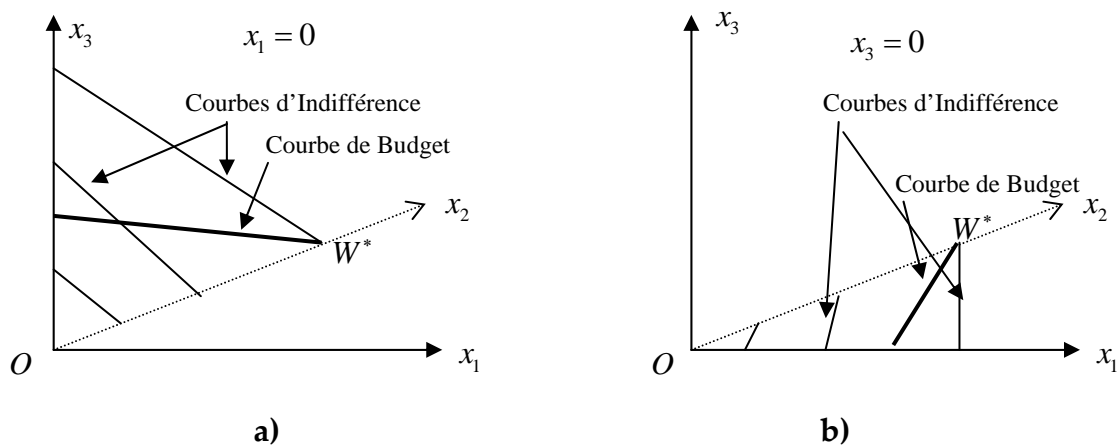


Figure A.3.

Dans  $x_3 O x_2$  les courbes d'indifférence sont plus pentues que la droite du budget. Puisque l'investissement dans l'actif  $e_1$  est nul ( $x_1 = 0$ ), il est optimal d'investir toute la richesse dans l'actif  $e_2$  (figure A.3.a). De même, si  $x_3 = 0$ , les courbes d'indifférence sont moins pentues que la droite du budget : il est optimal d'investir dans l'actif  $e_2$  (figure A.3.b). Finalement, le portefeuille optimal  $W^*$  dans le cas représenté sur la figure A.3 est de la forme  $(0, x_2, 0)$ .

Plus généralement, le portefeuille optimal est toujours un portefeuille risqué qui contient un ou maximum deux actifs purs. En d'autres termes, parmi les trois actifs il en existe au moins un dans lequel l'investissement est nul à l'optimum. L'individu peut choisir d'investir dans un actif sans risque uniquement dans le cas où il est indifférent entre l'actif sans risque et d'autres portefeuilles risqués situés sur le plan du budget (cas où le plan budgétaire coïncide avec un des plans d'indifférence).

## A.6. Condition nécessaire et suffisante

Supposons que la condition suivante :

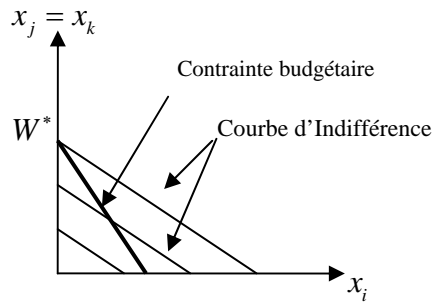
$$\frac{q_i}{q_j + q_k} > \frac{\pi_i}{\pi_j + \pi_k} \quad (3)$$

n'est pas vérifiée :

$$\text{Hypothèse : } \frac{q_i}{q_j + q_k} \leq \frac{\pi_i}{\pi_j + \pi_k} \quad \text{ou bien} \quad \frac{q_i}{q_{kj}} \leq \frac{\pi_i}{\pi_j + \pi_k} \quad \text{sur } x_j = x_k \quad (4)$$

Sur le plan  $x_j = x_k$ , cela signifie que la pente des courbes d'indifférence est moins forte que celle de la contrainte budgétaire (figure A.4).





**Figure A.4**

Le portefeuille  $W^*$  tel que  $x_i = 0$  et  $x_j = x_k$  sera préféré par l'agent au portefeuille

sans risque. En effet, nous avons  $E_h(W^*) = \frac{q_{jk}W_0}{\pi_j + \pi_k}$  et d'après 4 :

$$(1 - q_{jk})(\pi_j + \pi_k) - \pi_i q_{jk} \leq 0$$

ou

$$\frac{q_{jk}W_0}{\pi_j + \pi_k} \geq \frac{W_0}{(\pi_i + \pi_j + \pi_k)}.$$

De cette façon, si la condition 3 n'est pas vérifiée l'agent ne choisira pas le portefeuille sans risque à l'optimum.

## A.7. Transformation du système (13)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{w(p_1 + p_2)}{1 - w(p_1 + p_2)} > \frac{\pi_1 + \pi_2}{\pi_3} \\ \frac{w(p_1 + p_3)}{1 - w(p_1 + p_3)} > \frac{\pi_1 + \pi_3}{\pi_2} \\ \frac{w(p_2 + p_3)}{1 - w(p_2 + p_3)} > \frac{\pi_2 + \pi_3}{\pi_1} \\ \frac{w(p_1)}{1 - w(p_1)} > \frac{\pi_1}{\pi_2 + \pi_3} \\ \frac{w(p_2)}{1 - w(p_2)} > \frac{\pi_2}{\pi_1 + \pi_3} \\ \frac{w(p_3)}{1 - w(p_3)} > \frac{\pi_3}{\pi_1 + \pi_2} \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} w(p_1 + p_2)\pi_3 > (\pi_1 + \pi_2)(1 - w(p_1 + p_2)) \\ w(p_1 + p_3)\pi_2 > (\pi_1 + \pi_3)(1 - w(p_1 + p_3)) \\ w(p_2 + p_3)\pi_1 > (\pi_2 + \pi_3)(1 - w(p_2 + p_3)) \\ w(p_1)(\pi_2 + \pi_3) > \pi_1(1 - w(p_1)) \\ w(p_2)(\pi_1 + \pi_3) > \pi_2(1 - w(p_2)) \\ w(p_3)(\pi_1 + \pi_2) > \pi_3(1 - w(p_3)) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} w(p_1 + p_2)(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) > \pi_1 + \pi_2 \\ w(p_1 + p_3)(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) > \pi_1 + \pi_3 \\ w(p_2 + p_3)(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) > \pi_2 + \pi_3 \\ w(p_1)(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) > \pi_1 \\ w(p_2)(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) > \pi_2 \\ w(p_3)(\pi_1 + \pi_2 + \pi_3) > \pi_3 \end{array} \right.$$

Notons  $\pi = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3$ . Nous obtenons :

$$\left\{ \begin{array}{l} w(p_1 + p_2) > \frac{\pi_1 + \pi_2}{\pi} \\ w(p_1 + p_3) > \frac{\pi_1 + \pi_3}{\pi} \\ w(p_2 + p_3) > \frac{\pi_2 + \pi_3}{\pi} \\ w(p_1) > \frac{\pi_1}{\pi} \\ w(p_2) > \frac{\pi_2}{\pi} \\ w(p_3) > \frac{\pi_3}{\pi} \end{array} \right.$$



# Annexe B

## Annexe du chapitre 3

### B.1. La condition d'équilibre du marché en présence de deux agents du type BPT

Nous cherchons la solution du problème suivant :

$$\text{Max } \lambda^1(x_1^1 p_1 + x_2^1 p_2) + \lambda^2(x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2)$$

$$\text{s.c } (x_1^1 - x_{01}^1)\pi_1 + (x_2^1 - x_{02}^1)\pi_2 = 0 \quad (1)$$

$$(x_1^2 - x_{01}^2)\pi_1 + (x_2^2 - x_{02}^2)\pi_2 = 0 \quad (2)$$

$$x_1^1 + x_1^2 = n_1 \quad (3)$$

$$x_2^1 + x_2^2 = n_2 \quad (4)$$

$$x_1^1 \geq A_1 \quad \text{et} \quad x_2^1 \geq A_1 \quad (5)$$

$$x_1^2 \geq A_2 \quad \text{et} \quad x_2^2 \geq A_2 \quad (6)$$

où  $\lambda^1$  et  $\lambda^2$  sont des constantes positives. La contrainte du budget (2) de l'agent 2 est automatiquement vérifiée si la contrainte du budget (1) de l'agent 1 et les conditions d'équilibre (3) et (4) sont vérifiées. Ainsi, le lagrangien s'écrit :

$$\begin{aligned} L(x_1^1, x_2^1, x_1^2, x_2^2, \mu_1, \dots, \mu_7) = & \lambda^1(x_1^1 p_1 + x_2^1 p_2) + \lambda^2(x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2) - \\ & \mu_1(A_1 - x_1^1) - \mu_2(A_1 - x_2^1) - \mu_3(A_2 - x_1^2) - \mu_4(A_2 - x_2^2) - \\ & \mu_5((x_1^1 - x_{01}^1)\pi_1 + (x_2^1 - x_{02}^1)\pi_2) - \\ & \mu_6(x_1^1 + x_1^2 - n_1) - \mu_7(x_2^1 + x_2^2 - n_2) \end{aligned}$$

Conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^1 p_1 + \mu_1 - \mu_5 \pi_1 - \mu_6 = 0 \\ \lambda^1 p_2 + \mu_2 - \mu_5 \pi_2 - \mu_7 = 0 \\ \lambda^2 p_1 + \mu_3 - \mu_6 = 0 \\ \lambda^2 p_2 + \mu_4 - \mu_7 = 0 \\ (x_1^1 - x_{01}^1) \pi_1 + (x_2^1 - x_{02}^1) \pi_2 = 0 \\ x_1^1 + x_1^2 = n_1 \\ x_2^1 + x_2^2 = n_2 \\ \mu_1 (A_1 - x_1^1) = 0 \\ \mu_2 (A_1 - x_2^1) = 0 \\ \mu_3 (A_2 - x_1^2) = 0 \\ \mu_4 (A_2 - x_2^2) = 0 \\ x_1^1 \geq A_1 \\ x_2^1 \geq A_1 \\ x_1^2 \geq A_2 \\ x_2^2 \geq A_2 \\ \mu_1 \geq 0, \quad \mu_2 \geq 0, \quad \mu_3 \geq 0, \quad \mu_4 \geq 0 \end{array} \right.$$

Si  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = 0$  les contraintes (5) et (6) ne sont pas saturées. Dans ce cas le système devient

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda^1 p_1 - \mu_5 \pi_1 - \mu_6 = 0 \\ \lambda^1 p_2 - \mu_5 \pi_2 - \mu_7 = 0 \\ \lambda^2 p_1 - \mu_6 = 0 \\ \lambda^2 p_2 - \mu_7 = 0 \\ (x_1^1 - x_{01}^1) \pi_1 + (x_2^1 - x_{02}^1) \pi_2 = 0 \\ x_1^1 + x_1^2 = n_1 \\ x_2^1 + x_2^2 = n_2 \\ x_1^1 \geq A_1 \\ x_2^1 \geq A_1 \\ x_1^2 \geq A_2 \\ x_2^2 \geq A_2 \end{array} \right.$$

A partir des 4 premières équations de ce système nous déduisons  $\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2}$ .

Nous pouvons en conclure que s'il existe une solution à l'intérieur de l'ensemble

$$S_{12} = S_1 \cap S_2$$

où  $S_1 = \{W = (x_1^1, x_2^1) / x_1^1 \geq A_1 \text{ et } x_2^1 \geq A_1\}$  et  $S_2 = \{W = (x_1^2, x_2^2) / x_1^2 \geq A_2 \text{ et } x_2^2 \geq A_2\}$ , alors

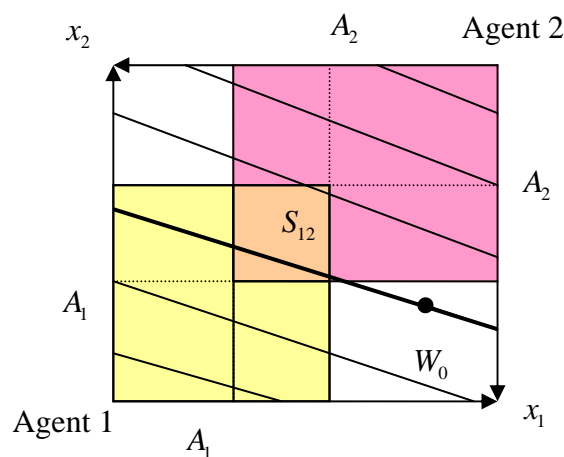
l'égalité  $\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2}$  doit être respectée.

### B.2. *Cas 1.* $CI_{W_0} \cap S_{12} \neq \emptyset; W_0 \notin S_1 \text{ et } W_0 \notin S_2$

L'intersection de la courbe d'indifférence passant par  $W_0$  avec  $S_{12}$  n'est pas vide.  $W_0$  n'appartient à aucun des ensembles de sécurité.

La solution dans le cadre du modèle BPT est l'ensemble défini par l'intersection de la droite de budget avec  $S_{12}$ . La droite du budget coïncidant avec la courbe d'indifférence  $CI_{W_0}$  et les prix vérifient  $\frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{p_1}{p_2}$  à l'équilibre (figure 3.18).

La solution similaire est obtenue en termes de la fonction  $U$ . En effet, puisque les agents ne sont pas initialement assurés, les fonctions d'utilité  $U_1$  et  $U_2$  s'annulent. Après l'échange,  $U_1$  et  $U_2$  sont positives. Les deux agents ont donc augmenté leurs satisfactions.



**Figure B.1.**



# Annexe C

## Annexe du chapitre 4

### C.1. Les données

Tableau C.1.1. La composition de l'indice SBF120 au 1 juin 2001, 119 titres.

Libellé	Code Isin	Libellé	Code Isin
ALTADIS	ES0177040013	EADS	NL0000235190
ACCOR	FR0000120404	EIFFAGE	FR0000130452
AGF	FR0000125924	EQUANT	NL0000200889
AIR FRANCE	FR0000031122	ERIDANIA BEGHIN SAY	FR0000120891
AIR LIQUIDE	FR0000120073	ESSILOR INTERNATIONAL	FR0000121667
ALCATEL A	FR0000130007	EULER	FR0004254035
ALSTOM NON REGROUPE	FR0000120198	EURAZEO	FR0000121121
ALTEN	FR0000071946	EURO DISNEY	FR0000125874
ALTRAN TECHNOLOGIES	FR0000034639	EUROTUNNEL PLC/EUROTUNNEL SA	FR0000125379
ATOS ORIGIN	FR0000051732	FAURECIA	FR0000121147
AVENIR TELECOM	FR0000066052	FRANCE TELECOM	FR0000133308
AVENTIS	FR0000130460	GALERIES LAFAYETTE	FR0000121246
AXA	FR0000120628	GECINA	FR0010040865
BIC	FR0000120966	GENSET	FR0004036408
BNP PARIBAS	FR0000131104	GFI INFORMATIQUE	FR0004038099
BOUYGUES	FR0000120503	GRANDVISION	FR0000052979
BOUYGUES OFFSHORE	FR0000130700	GUYENNE ET GASCOGNE	FR0000120289
BULL	FR0000052607	HAVAS ADVERTISING	FR0000121881
BUSINESS OBJECTS	FR0004026250	HERMES INTERNATIONAL	FR0000052292
CAP GEMINI	FR0000125338	HIGHWAVE OPTICAL TECHNOLOGIES	FR0004161008
CARBONE LORRAINE	FR0000039620	IMERYS	FR0000120859
CARREFOUR	FR0000120172	INFOGRAMES ENTERTAINMENT	FR0000052573
CASINO GUICHARD	FR0000125585	INGENICO	FR0000125346
CASTORAMA DUBOIS INVESTISSEMENT	FR0000124208	INTEGRA	FR0004035947
CGIP	FR0000121022	ISIS	FR0000120008
CIMENTS FRANCAIS	FR0000120982	KLEPIERRE	FR0000121964
CLARINS	FR0000130296	L'OREAL	FR0000120321
CLUB MEDITERRANEE	FR0000121568	LAFARGE	FR0000120537
CNP ASSURANCES	FR0000120222	LAGARDERE	FR0000130213
COFACE	FR0004253748	LAPEYRE	FR0000130510
COFLEXIP	FR0000130643	LEGRAND	FR0000120610
COMPAGNIE GEN. DE GEOPHYSIQUE	FR0000120164	LIBERTY SURF	FR0000075087
CREDIT LYONNAIS	FR0000184202	LVMH	FR0000121014
DANONE	FR0000120644	M6 METROPOLE TELEVISION	FR0000053225
DASSAULT SYSTEMES	FR0000130650	MICHELIN	FR0000121261
DEXIA	BE0003796134	NATEXIS BANQUES POPULAIRES	FR0000120685



Libellé	Code Isin	Libellé	Code Isin
NEOPOST	FR0000120560	SOPRA	FR0000050809
NRJ GROUP	FR0000121691	SPIR COMMUNICATION	FR0000131732
OBERTHUR CARD SYSTEMS	FR0000124133	SR TELEPERFORMANCE	FR0000051807
ORANGE	FR0000079196	ST MICROELECTRONICS	NL0000226223
PECHINEY	FR0000132904	STUDIOCANAL	FR0000124109
PERNOD RICARD	FR0000120693	SUEZ	FR0000120529
PEUGEOT	FR0000121501	TECHNIP	FR0000131708
PINAULT PRINTEMPS	FR0000121485	TF1	FR0000054900
PUBLICIS GROUPE	FR0000130577	THALES	FR0000121329
REMY COINTREAU	FR0000130395	THOMSON MULTIMEDIA	FR0000184533
RENAULT	FR0000131906	TOTAL FINA ELF	FR0000120271
REXEL	FR0000125957	TRANSICIEL	FR0000062713
RHODIA (NON REGROUPE)	FR0000120131	UBI SOFT ENTERTAINMENT	FR0000054470
ROYAL CANIN	FR0000031536	UNIBAIL	FR0000124711
SAGEM	FR0000073272	UNILOG	FR0000034662
SAINT-GOBAIN	FR0000125007	USINOR	FR0000132607
SANOFI-SYNTHELABO	FR0000120578	VALEO	FR0000130338
SCHNEIDER ELECTRIC	FR0000121972	VALLOUREC	FR0000120354
SCOR (NON REGROUPE)	FR0000130304	VALTECH	FR0004155885
SEB	FR0000121709	VIVENDI ENVIRONNEMENT	FR0000124141
SIDEL	FR0000130601	VIVENDI UNIVERSAL	FR0000127771
SIMCO	FR0000121808	WANADOO	FR0000124158
SOCIETE GENERALE A	FR0000130809	ZODIAC	FR0000125684
SODEXHO	FR0000121220		

**Tableau C.1.2.** Les 40 titres sortis ou radiés de l'indice SBF120 sur la période du 1 juin 2001 au 1 juin 2007.

Libellé	Code Isin	Date et cause de l'élimination de l'échantillon
ALTADIS	ES0177040013	sorti le 03.04.2002
AGF	FR0000125924	sorti le 11.02.2007
ALSTOM NON REGROUPE	FR0000120198	radié le 06.02.2006
AVENIR TELECOM	FR0000066052	sorti le 24.11.2001
AVENTIS	FR0000130460	radié le 30.10.2005 suite au rachat par Sanofi-E
BOUYGUES OFFSHORE	FR0000130700	radié le 29.10.2002, par la suite fusion avec la société mère Bouygues
BULL	FR0000052607	sorti le 03.04.2002
CASTORAMA DUBOIS INVESTISSEMENT	FR0000124208	radié le 22.05.2003 suite au rachat par Kingfisher
CGIP	FR0000121022	fusion avec Marine Wendel, devient Wendel qui sort de l'indice le 01.07.2002
COFACE	FR0004253748	radié le 26.05.2004 suite au rachat par Nexis
COFLEXIP	FR0000130643	radié le 12.01.2004, absorbé par Technip
CREDIT LYONNAIS	FR0000184202	radié le 04.08.2003, rachat par Credit Agricole

<b>Libellé</b>	<b>Code Isin</b>	<b>Cause de l'élimination de l'échantillon</b>
ERIDANIA BEGHIN SAY	FR0000120891	la scission du groupe, quatre sociétés indépendantes nouvelles créées : Beghin Say, Cereol, Cerestart, Provimi.
EURO DISNEY	FR0000125874	Sorti le 01.09.2005
EUROTUNNEL PLC/EUROTUNNEL SA	FR0000125379	sorti le 18.12.2006
GALERIES LAFAYETTE	FR0000121246	radié le 21.07.2005
GENSET	FR0004036408	racheté par Serono en 2002; ensuite radié le 16.06.2003
GFI INFORMATIQUE	FR0004038099	Sorti le 19.12.2005
GRANDVISION	FR0000052979	radié le 25.06.2004, rachat par Hal Trust
HIGHWAVE OPTICAL TECHNOLOGIES	FR0004161008	radiation et liquidation le 08.03.2006
INFOGRAMES ENTERTAINMENT	FR0000052573	sorti le 03.01.2005
INTEGRA	FR0004035947	radié le 24.02.2003
ISIS	FR0000120008	radié le 04.02.2002, absorbé par Technip
LAPEYRE	FR0000130510	radié le 30.04.2002, absorbé par Sain-Gobain - la société mère
LEGRAND	FR0000120610	radié le 30.10.2003, fusion avec Schneider
LIBERTY SURF	FR0000075087	radié le 21.09.2005, repris par Tiscali
ORANGE	FR0000079196	radié le 23.04.2004
PECHINEY	FR0000132904	radié le 06.02.2004, rachat par Alcan
REXEL	FR0000125957	radié le 25.04.2005, arrêt de cotation suite au rachat par trois fonds d'investissement
ROYAL CANIN	FR0000031536	radié le 19.11.2002
SIDEL	FR0000130601	radié le 16.05.2003, fusion avec Tetra Laval
SIMCO	FR0000121808	racheté par Gecina en 2002, radié le 01.04.2004
SOPRA	FR0000050809	sorti le 01.09.2005
STUDIOCANAL	FR0000124109	radié le 09.10.2001
TRANSICIEL	FR0000062713	acheté par Cap Gemini en 2003, radié le 23.04.2004
UNILOG	FR0000034662	radié le 10.07.2006, racheté par Logicacgm
VALTECH	FR0004155885	sorti le 03.04.2002
WANADOO	FR0000124158	radié le 26.07.2004
USINOR	FR0000132607	radié le 24.02.2003, devient Arcelor
EQUANT	NL0000200889	radié le 30.05.2005, racheté par France Télécom

**Tableau C.1.3.** Retraitement des données.

**Ingenico**

Date		Cotation
15/4/2005		12,8
18/4/2005		12,25
19/4/2005	date manquante	12,365
20/4/2005		12,48
21/4/2005		12,5

La cotation ajoutée 12,365 est la moyenne de 12,25 et 12,48.

**Scheider Electric**

Date		Cotation
5/6/2001		71,53362
6/6/2001		69,35694
7/6/2001	date manquante	68,71383
8/6/2001		68,07072
11/6/2001		66,2898

**Zodiac**

Date		Cotation
16/4/2007		54,98
18/4/2007		56,1
17/4/2007	date manquante	55,865
19/4/2007		55,63
20/4/2007		55,7

**Tableau C.1.4.** Les données manquantes.

Libellé	Code Isin	Date
COMPAGNIE GEN. DE GEOPHYSIQUE	FR0000120164	manque de données pour deux jours consécutifs : vendredi 29.06.2001 et lundi 02.07.2001
NATEXIS BANQUES POPULAIRES	FR0000120685	manque de cotation vendredi 02.04.2002 et lundi 06.12.2006
RHODIA (NON REGROUPE)	FR0000120131	manque de cotation vendredi 03.10.2003
TECHNIP	FR0000131708	manque de données pour deux jours consécutifs, vendredi 29.06.2001 et lundi 02.07.2001

**Tableau C.1.5.** Un exemple de retraitement des dividendes de l'action Peugeot. Le 1 juin 2004 intervient un dividende de 1,35 euro.

Date	Cours Brut	Rentabilité Brut
28/5/2004	46,23	
31/5/2004	46,75	0,011248
<b>1/6/2004</b>	<b>45,3</b>	<b>-0,03102</b>
2/6/2004	46,95	0,036424
3/6/2004	45,36	-0,03387

$$4,53 + 1,35 =$$

Cours Retraité	Rentabilité Retraitée
46,23	
46,75	0,011248
<b>46,65</b>	<b>-0,00214</b>
46,95	0,036424
45,36	-0,03387

Tableau C.1.6. Corrections des rentabilités aux dividendes.

Nom / Ticker	Date	Dividende	Cours	Rentabilité	Rentabilité Corrigée
<b>ACCOR</b>	17/5/2006	1,15	47,75	-0,01744	0,00636
AC	17/5/2005	1,3	46,31	-0,05237	-0,03101
	17/5/2004	1,05	42,89	-0,01642	0,007768
	2/6/2003	1,05	30,88	-0,03438	-0,00094
	3/6/2002	1,05	32,28	-0,0365	-0,00449
	14/6/2001	1,3	35,54	-0,01591	0,020014
<b>AIR FRANCE</b>	19/7/2005	0,15	13,53	0,00370	0,01473
AF	27/9/2004	0,05	12,91	-0,04023	-0,03637
	25/7/2003	0,06	12,96	-0,00539	-0,00077
	4/10/2002	0,1	7,58	0,06261	0,07571
	24/9/2001	0,22	10,75	0,15462	0,17487
<b>AIR LIQUIDE</b>	15/5/2007	2	87,22	-0,0267	-0,00403
AI	16/5/2006	1,75	75,14	-0,0251	-0,00208
	17/5/2005	1,59	62,68	-0,02225	0,002805
	18/5/2004	1,32	58,1	-0,02599	-0,00353
	21/5/2003	1,32	52,11	-0,02352	0,001498
	7/5/2002	1,32	60,39	-0,02097	0,000648
<b>ALCATEL A</b>	11/9/2006	0,16	14,73	-0,04383	-0,03303
ALU	22/4/2002	0,16	10,25	-0,00777	0,00771
<b>ALTRAN TECHNOLOGIES</b>	1/7/2002	0,19	51,67	0,00894	0,01146
ALT	2/7/2001	0,13	27,93	0,01661	0,02339
<b>AXA</b>	21/5/2007	1,06	32,23	-0,02995	0,00241
CS	12/5/2006	0,88	27,59	-0,05225	-0,02086
	28/4/2005	0,61	18,55	-0,02502	0,00733
	3/5/2004	0,38	17,20	-0,00174	0,02011
	7/5/2003	0,34	13,32	-0,03323	-0,00802
	14/5/2002	0,56	22,06	0,01830	0,04337
<b>BIC</b>	1/6/2007	1,3	55,48	0,00705	0,03022
BB	1/6/2006	1,15	51,45	-0,01543	0,00668
	27/5/2005	1,5	43,30	-0,04449	-0,01044
	3/11/2004	0,4	36,40	-0,00684	0,00408
	10/6/2004	0,8	36,06	-0,01732	0,00462
	5/6/2003	0,8	32,21	-0,02423	0,00030
	14/6/2002	0,36	42,37	-0,01150	-0,00304
	8/2/2002	0,29	36,50	0,02300	0,03092
	15/6/2001	0,29	41,55	-0,02519	-0,01824
<b>BNP PARIBAS</b>	24/5/2007	3,1	89,46	-0,05216	-0,01809
BNP	31/5/2006	2,6	72,80	-0,01972	0,01537
	30/5/2005	2	54,13	-0,04218	-0,00589
	11/6/2004	1,45	50,26	-0,02534	0,00310
	12/6/2003	1,2	44,94	-0,02421	0,00214
	1/7/2002	1,2	54,92	-0,01168	0,00994
	11/6/2001	2,25	50,11	-0,03119	0,01273
<b>BOUYGUES</b>	3/5/2007	1,2	58,74	-0,00051	0,01971
EN	3/5/2006	0,9	42,40	-0,00986	0,01115
	4/5/2005	0,75	30,72	-0,01197	0,01215
	7/1/2005	0,5	30,18	-0,00197	0,01446
	29/4/2004	0,5	24,45	-0,03008	-0,00983
	30/4/2003	0,36	18,81	-0,00637	0,01259
	3/5/2002	0,36	26,47	-0,02686	-0,01336
	8/6/2001	0,36	37,48	0,01105	0,02061

Nom / Ticker	Date	Dividende	Cours	Rentabilité	Rentabilité Corrigée
<b>CAP GEMINI</b>	30/4/2007	0,7	55,84	-0,01475	-0,00230
CAP	16/5/2006	0,5	43,89	-0,01739	-0,00606
	26/4/2002	0,4	64,50	0,01878	0,02496
<b>CARBONE LORRAINE</b>	29/5/2007	0,85	53,75	-0,00353	0,01216
CRL	24/5/2006	0,7	41,29	-0,03358	-0,03358
	26/5/2005	0,55	37,70	-0,00529	0,00919
	19/6/2003	0,6	22,74	-0,00800	0,01805
	23/5/2002	0,8	35,39	-0,02308	-0,00072
<b>CARREFOUR</b>	4/5/2007	1,03	54,94	-0,02143	-0,00285
CA	5/5/2006	1	45,16	-0,00640	0,01550
	22/4/2005	0,94	39,11	-0,03072	-0,00697
	30/4/2004	0,74	38,71	-0,02928	-0,01034
	17/4/2003	0,64	37,87	-0,00737	0,00939
	29/4/2002	0,56	48,75	-0,01567	-0,00425
<b>CASINO GUICHARD</b>	9/6/2006	2,08	57,40	-0,01556	0,02004
CO	10/6/2005	2,08	57,40	-0,04263	-0,00704
	10/6/2004	1,98	70,60	-0,02449	0,00317
	10/6/2003	1,8	66,20	-0,02462	0,00221
	10/6/2002	1,54	86,25	-0,01781	-0,00011
	11/6/2001	1,33	105,50	-0,00095	0,01158
<b>CIMENTS FRANCAIS</b>	9/5/2007	2,28	173,62	-0,00385	0,00920
CMA	5/5/2006	1,9	139,10	0,01448	0,02805
	3/5/2005	1,6	70,60	-0,02862	-0,00621
	3/5/2004	1,5	61,70	-0,03190	-0,00788
	12/5/2003	1,5	48,40	-0,01639	0,01413
	21/5/2002	1,4	51,25	-0,04297	-0,01602
	20/6/2001	1,4	51,00	-0,03184	-0,00476
<b>CLARINS</b>	17/7/2006	0,85	51,05	-0,00878	0,00774
CLR	15/7/2005	0,8	46,03	-0,01662	0,00061
	15/7/2004	0,77	37,64	-0,02437	-0,00412
	15/7/2003	0,85	29,21	-0,00898	0,01970
	12/7/2002	0,65	35,61	-0,00988	0,00821
	20/7/2001	1,1	50,29	-0,01130	0,01034
<b>CNP ASSURANCES</b>	27/4/2007	2,3	92,30	-0,03303	-0,00842
CNP	1/6/2006	1,91	74,66	-0,02482	0,00109
	9/6/2005	1,66	51,45	-0,04961	-0,04961
	11/6/2004	1,53	46,36	-0,05006	-0,01759
	6/6/2003	1,49	37,82	-0,01888	-0,01888
	7/6/2002	1,39	40,89	-0,01415	0,01928
	15/6/2001	1,08	38,23	-0,02626	0,00160
<b>DANONE</b>	10/5/2007	2	58,55	-0,02804	0,00555
BN	10/5/2006	1,7	47,00	-0,09046	-0,06173
	17/5/2005	1,35	35,85	-0,08997	-0,05301
	11/5/2004	2,45	32,03	-0,14845	-0,07473
	6/5/2003	2,3	30,68	-0,01135	0,06096
	4/6/2002	2,06	33,54	-0,14787	-0,08826
	6/6/2001	1,9	38,75	0,00647	0,05434

Nom / Ticker	Date	Dividende	Cours	Rentabilité	Rentabilité Corrigée
<b>DASSAULT SYSTEMES</b>	5/7/2006	0,42	40,90	-0,04611	-0,03589
DSY	28/6/2005	0,38	39,31	0,00204	0,01166
	22/6/2004	0,34	36,59	-0,02002	-0,01077
	18/6/2003	0,33	32,62	-0,04701	-0,03694
	18/6/2002	0,33	43,90	0,04424	0,05173
	25/6/2001	0,31	46,16	-0,03219	-0,02550
<b>DEXIA</b>	24/5/2007	0,6075	23,91	-0,03856	-0,01347
DX	24/5/2006	0,5325	19,78	-0,03478	-0,00821
	26/5/2005	0,465	17,68	-0,02899	-0,00303
	11/6/2004	0,3975	13,92	-0,03042	-0,00227
	13/6/2003	0,36	11,28	-0,05602	-0,02461
	14/6/2002	0,36	14,78	-0,04044	-0,01638
	14/6/2001	0,3225	17,93	0,00167	0,01950
<b>EIFFAGE</b>	27/4/2007	1	98,80	-0,04754	-0,03747
FGR	28/4/2006	1,5	59,85	-0,01985	0,00490
	29/4/2005	0,5	30,33	-0,01147	0,00488
	30/11/2004	1	24,98	-0,01982	0,01943
	30/4/2004	2,32	23,10	0,01161	0,10731
	30/4/2003	2,1	12,93	-0,02167	0,12879
	30/4/2002	2,1	15,57	0,02274	0,14929
<b>ESSILOR INTERNATIONAL</b>	15/5/2007	1,1	88,61	-0,00394	0,00840
EF	16/5/2006	0,94	77,85	-0,01971	-0,00771
	18/5/2005	0,76	55,35	-0,01791	-0,00427
	18/5/2004	0,56	50,20	-0,00596	0,00514
	20/5/2003	0,5	34,54	-0,02205	-0,00768
	28/5/2002	0,41	43,60	-0,00458	0,00478
<b>EULER</b>	11/5/2007	4	109,97	-0,04472	-0,00900
ELE	5/6/2006	3,5	86,30	-0,04309	-0,00334
	2/5/2005	2,5	59,20	-0,04136	0,00000
	3/5/2004	1,82	47,90	-0,02596	0,01133
	28/4/2003	0,8	28,50	-0,00664	0,02104
	2/5/2002	1,4	41,20	-0,03950	-0,00608
<b>EURAZEO</b>	7/5/2007	1,1	108,89	-0,01018	-0,00013
RF	16/5/2006	1	80,27	-0,01403	-0,00165
	12/5/2005	1	57,81	0,01405	0,03120
	7/5/2004	1	39,74	-0,03317	-0,00832
	30/4/2003	1	33,08	-0,01198	0,01781
	16/5/2002	1	42,13	0,02572	0,04918
<b>FAURECIA</b>	15/6/2005	1,1	61,55	-0,00728	0,01043
EO	12/7/2004	0,91	55,90	-0,01509	0,00106
	11/7/2003	0,91	65,75	0,00305	0,01679
	15/7/2002	0,91	37,50	-0,06204	-0,03806
	5/7/2001	0,9147	66,55	0,01133	0,02498
<b>FRANCE TELECOM</b>	10/5/2006	1	18,17	-0,05357	0,00000
FTE	3/6/2005	0,48	22,79	-0,01690	0,00394
	7/5/2004	0,25	19,45	-0,01323	-0,00046
	4/6/2002	1	15,99	-0,11069	-0,05004
	14/6/2001	1	49,82	-0,03069	-0,01082

Nom / Ticker	Date	Dividende	Cours	Rentabilité	Rentabilité Corrigée
<b>GUYENNE ET GASCOGNE</b>	30/5/2007	3,2	126,00	-0,02353	0,00155
GG	30/5/2006	2,65	88,75	-0,03052	-0,00109
	1/6/2005	2,5	97,80	-0,00815	0,01709
	2/6/2004	2,36	93,00	-0,01123	0,01383
	3/6/2003	2	78,00	-0,01274	0,01258
	4/6/2002	1,7	88,30	-0,01350	0,00557
	7/6/2001	1,5	90,80	-0,00823	0,00816
<b>HAVAS ADVERTISING</b>	14/6/2006	0,03	3,70	-0,00539	0,00268
HAV	14/6/2005	0,07	4,72	0,02141	0,03614
	17/6/2004	0,05	3,83	-0,02404	-0,01108
	18/6/2003	0,09	3,92	-0,02120	0,00152
	11/6/2002	0,17	6,82	0,01516	0,03980
	17/7/2001	0,17	10,13	-0,07465	-0,05801
<b>HERMES INTERNATIONAL</b>	9/6/2006	2,5	64,70	0,00052	0,03843
RMS	8/6/2005	2	54,10	-0,01042	0,02588
	11/6/2004	1,7	53,50	-0,01054	0,02074
	10/6/2003	1,65	42,17	-0,02189	0,01649
	7/6/2002	1,5	57,30	-0,00638	0,01946
	7/6/2001	1,25	55,73	-0,01543	0,00675
<b>IMERYS</b>	15/5/2007	1,8	71,11	-0,01908	0,00592
NK	17/5/2006	1,65	63,45	-0,05668	-0,03100
	17/5/2005	1,5	54,15	-0,03181	-0,00448
	18/5/2004	1,25	49,75	0,07837	0,10318
	21/5/2003	4,3	30,30	-0,01067	0,12204
	27/5/2002	3,7	32,05	-0,03525	0,07400
	2/7/2001	3,6	28,85	-0,01377	0,10382
<b>INGENICO</b>	16/5/2007	0,1	18,92	-0,01781	-0,01254
ING	30/5/2005	0,12	11,53	-0,00346	0,00689
	2/7/2004	0,08	14,38	-0,03552	-0,02997
	30/5/2003	0,15	7,98	0,02796	0,04658
	7/6/2002	0,15	20,64	-0,04648	-0,03924
	3/7/2001	0,1	20,85	-0,05924	-0,05446
<b>KLEPIERRE</b>	13/4/2007	1,07	146,19	-0,00348	0,00381
LI	13/4/2006	0,9	99,53	0,000804	0,009806
	15/4/2005	0,77	72,7	-0,01569	-0,00516
	16/4/2004	0,67	51	-0,03469	-0,02163
	15/4/2003	0,39	36,63335	-0,13909	-0,1285
	19/4/2002	0,39	40,06669	-0,02221	-0,01253
<b>L'OREAL</b>	3/5/2007	1,18	86,67	-0,01466	-0,00114
OR	10/5/2006	1	72,65	-0,02380	-0,01013
	11/5/2005	0,82	56,50	-0,01319	0,00122
	14/5/2004	0,73	63,65	-0,01945	-0,00804
	27/5/2003	0,64	61,10	0,00000	0,01042
	4/6/2002	0,54	74,95	-0,02438	-0,01720
	8/6/2001	0,44	78,15	-0,00574	-0,00013
<b>LAFARGE</b>	25/5/2007	3	129,56	-0,01105	0,01184
LG	8/6/2006	2,55	84,80	-0,08095	-0,05132
	1/6/2005	2,4	72,50	-0,01845	0,01412
	1/6/2004	2,3	68,25	-0,04442	-0,01128
	2/6/2003	2,3	50,55	-0,01679	0,02771
	3/6/2002	2,3	101,38	-0,02410	-0,00166
	5/6/2001	2,2	101,09	-0,02233	-0,00080

Nom / Ticker	Date	Dividende	Cours	Rentabilité	Rentabilité Corrigée
<b>LAGARDERE</b>	10/5/2007	1,2	57,91	-0,03312	-0,01261
MMB	10/5/2006	1,1	65,80	-0,01956	-0,00299
	6/7/2005	2	59,80	-0,03613	-0,00323
	19/5/2005	1	57,40	-0,01556	0,00171
	19/5/2004	0,9	49,80	0,01824	0,03615
	20/5/2003	0,82	33,12	-0,04285	-0,01839
	29/5/2002	0,82	48,09	-0,01014	0,00677
<b>LVMH</b>	15/5/2007	1,1	85,19	-0,00585	0,00698
MC	1/12/2006	0,3	76,15	-0,02784	-0,02391
	18/5/2006	0,9	77,15	0,01963	0,03123
	2/12/2005	0,25	74,00	-0,00270	0,00067
	18/5/2005	0,7	57,65	0,00522	0,01729
	2/12/2004	0,25	54,30	0,00000	0,00459
	19/5/2004	0,63	57,90	0,02006	0,03088
	4/12/2003	0,22	59,25	-0,00253	0,00118
	28/5/2003	0,58	42,58	0,00825	0,02178
	3/12/2002	0,22	45,38	-0,02867	-0,02384
	4/6/2002	0,53	54,15	-0,05217	-0,04243
	4/12/2001	0,22	44,68	0,01307	0,01798
	5/6/2001	0,53	66,70	0,01131	0,01922
<b>M6 METROPOLE TELEVISION</b>	4/5/2007	0,95	25,75	-0,01388	0,02235
MMT	28/4/2006	0,95	24,72	-0,03498	0,00273
	3/5/2005	0,84	19,34	-0,03954	0,00298
	5/5/2004	0,67	24,03	-0,00664	0,02086
	5/5/2003	0,57	21,67	0,00000	0,02596
	7/5/2002	0,57	26,20	-0,04879	-0,02727
<b>MICHELIN</b>	15/5/2007	1,45	89,90	-0,02331	-0,00731
ML	16/5/2006	1,35	52,30	-0,03753	-0,01204
	24/5/2005	1,25	49,75	-0,04327	-0,01846
	18/5/2004	0,93	38,26	-0,00755	0,01647
	20/5/2003	0,93	30,14	-0,01318	0,01721
	22/5/2002	0,85	43,02	-0,01133	0,00824
<b>NEOPOST</b>	10/7/2006	3	87,60	-0,03202	0,00166
NEO	11/7/2005	3,5	74,15	-0,02003	0,02609
	12/7/2004	1,25	45,70	-0,02741	-0,00043
	11/7/2003	1	36,82	-0,00758	0,01922
<b>NRJ GROUP</b>	29/6/2006	0,37	14,81	-0,01674	0,00794
NRJ	28/2/2005	0,29	17,80	-0,01284	0,00332
	15/3/2004	0,21	16,56	-0,02269	-0,01009
	17/3/2003	0,21	12,72	0,03358	0,04995
	15/3/2002	0,28	23,14	0,01086	0,02289
<b>OBERTHUR CARD SYSTEMS</b>	12/6/2006	0,18	5,70	-0,05959	-0,02850
OCS	14/6/2005	0,14	7,05	0,01141	0,03108



Nom / Ticker	Date	Dividende	Cours	Rentabilité	Rentabilité Corrigée
<b>PERNOD RICARD</b>	15/11/2006	1,4	135,50	0,00865	0,01893
RI	5/7/2006	1,12	126,83	-0,00655	0,00224
	17/11/2005	1,08	115,42	-0,00144	0,00787
	7/6/2005	1,16	109,58	0,04670	0,05723
	11/1/2005	0,98	91,42	-0,03757	-0,02691
	25/5/2004	1,06	86,25	-0,01724	-0,00503
	13/1/2004	0,9	70,37	-0,01877	-0,00606
	15/5/2003	0,9	66,71	-0,03257	-0,01917
	14/1/2003	0,9	61,57	0,00271	0,01722
	11/6/2002	1	65,33	-0,01720	-0,00201
	10/1/2002	0,8	56,17	-0,01356	0,00059
<b>PEUGEOT</b>	30/5/2007	1,35	58,34	-0,01074	0,01214
UG	31/5/2006	1,35	49,60	-0,01302	0,01383
	1/6/2005	1,35	47,98	-0,01448	0,01326
	2/6/2004	1,35	45,03	-0,03749	-0,00795
	4/6/2003	1,35	38,23	-0,03369	0,00101
	22/5/2002	1,15	59,00	-0,01347	0,00584
<b>PINAULT PRINTEMPS</b>	1/6/2007	3	136,90	0,00910	0,03078
PP	2/6/2006	2,72	94,70	-0,01883	0,00949
	3/6/2005	2,52	80,15	-0,03855	-0,00759
	4/6/2004	2,4	85,60	-0,01161	0,01604
	6/6/2003	2,3	69,95	-0,03512	-0,00276
	7/6/2002	2,3	128,10	-0,02467	-0,00688
	8/6/2001	2,18	202,20	-0,00592	0,00481
<b>PUBLICIS GROUPE</b>	4/7/2006	0,36	29,83	-0,01563	-0,00364
PUB	5/7/2005	0,3	24,45	-0,01824	-0,00604
	5/7/2004	0,26	23,50	-0,02935	-0,01835
	3/7/2003	0,24	22,76	-0,02216	-0,01167
	10/7/2002	0,22	25,90	-0,02592	-0,01746
	10/7/2001	0,2	25,30	-0,02652	-0,01865
<b>REMY COINTREAU</b>	31/7/2006	1,1	39,25	0,00000	0,02764
RCO	3/10/2005	1	36,75	-0,02685	0,00000
	4/10/2004	1	26,73	-0,03420	0,00253
	1/10/2003	1	27,68	-0,05003	-0,01454
	3/10/2002	0,9	27,70	0,00145	0,03342
<b>RENAULT</b>	15/5/2007	3,1	102,97	0,00526	0,03492
RNO	15/5/2006	2,4	89,70	-0,03935	-0,01295
	13/5/2005	1,8	67,90	0,00147	0,02764
	17/5/2004	1,4	56,65	-0,03640	-0,01199
	15/5/2003	1,15	37,20	-0,04725	-0,01681
	15/5/2002	0,92	55,00	-0,00454	0,01205
	5/6/2001	0,9146	54,00	0,00000	0,01680
<b>SAGEM</b>	28/5/2007	0,22	19,58	0,01078	0,02196
SAF	22/5/2006	0,36	16,39	-0,06152	-0,03979
	20/5/2005	0,12	15,95	-0,01740	-0,00991
	18/3/2005	0,1	16,60	-0,01138	-0,00537
	25/5/2004	0,94	17,42	-0,01538	0,03717
	5/6/2003	0,9	12,86	0,00267	0,07033
	10/6/2002	0,6	12,22	-0,01046	0,03746
	10/7/2001	0,6	11,06	0,12361	0,17646

Nom / Ticker	Date	Dividende	Cours	Rentabilité	Rentabilité Corrigée
<b>SAINT-GOBAIN</b>	22/6/2006	1,36	53,25	-0,01676	0,00846
SGO	23/6/2005	1,28	46,41	-0,01794	0,00927
	24/6/2004	1,15	41,26	-0,01515	0,01234
	23/6/2003	1,13	33,50	-0,04180	-0,00863
	24/6/2002	4,5	44,48	-0,02058	0,07580
	2/7/2001	4,3	41,00	0,02157	0,12131
<b>SANOFI-SYNTHELABO</b>	7/6/2006	1,52	72,35	-0,00276	0,01803
SAN	7/6/2005	1,2	72,80	-0,00548	0,01087
	30/9/2004	0,05	58,40	-0,01866	-0,01780
	5/5/2004	0,97	52,20	-0,00096	0,01745
	3/6/2002	0,66	63,00	-0,03048	-0,02006
<b>SCHNEIDER ELECTRIC</b>	2/5/2007	3	104,58	0,00489	0,03317
SU	9/5/2006	2,25	89,79	-0,02503	-0,00028
	17/5/2005	1,8	55,70	-0,02283	0,00897
	10/5/2004	1,1	53,77	-0,03436	0,65879
	20/5/2003	1	38,29	-0,03334	-0,00756
	31/5/2002	1,3	54,42	0,03516	0,05876
<b>SCOR (NON REGROUPE)</b>	19/5/2006	0,05	1,77	0,00517	0,03299
SCO	8/6/2005	0,03	1,50	-0,03135	-0,01161
	2/5/2002	0,08	10,16	0,00106	0,00890
<b>SEB</b>	15/5/2007	2,55	137,44	-0,01473	0,00365
SK	23/5/2006	2,4	85,80	-0,02759	0,00000
	24/5/2005	2,4	82,00	-0,04180	-0,01295
	24/5/2004	2,27	93,20	-0,00802	0,01605
	2/6/2003	2,16	72,73	0,00376	0,03302
	31/5/2002	2	84,41	0,03118	0,05459
	8/6/2001	1,9	53,45	-0,01183	0,02309
<b>SOCIETE GENERALE A</b>	21/5/2007	5,2	152,89	0,01529	0,04874
GLE	6/6/2006	4,5	117,17	-0,01741	0,02028
	30/5/2005	3,3	79,34	-0,04734	-0,00659
	18/5/2004	2,5	69,77	0,02110	0,05631
	24/4/2003	2,1	54,76	-0,02396	0,01367
	25/4/2002	2,1	75,43	-0,01745	0,01001
<b>SODEXHO</b>	12/2/2007	0,95	54,45	-0,00641	0,01089
SW	7/3/2006	0,75	35,25	-0,02715	-0,00609
	4/3/2005	0,7	23,94	-0,02067	0,00815
	4/3/2004	0,61	26,57	-0,01346	0,00924
	4/3/2003	0,61	20,56	-0,08482	-0,05558
	5/3/2002	0,56	46,20	-0,00969	0,00236
<b>SPIR COMMUNICATION</b>	31/5/2007	5	111,79	-0,03265	0,01111
SPI	31/5/2006	5	122,50	-0,03922	0,00078
	31/5/2005	5	154,00	-0,03760	-0,00564
	31/5/2004	3,3	115,50	-0,01290	0,01527
	30/5/2003	3,2	64,40	-0,06318	-0,01468
	31/5/2002	3	85,70	-0,01506	0,01935
<b>SR TELEPERFORMANCE</b>	17/7/2006	0,3	26,23	-0,04139	-0,03002
RCF	12/7/2005	0,1	22,64	-0,00785	-0,00345
	16/12/2004	0,15	17,94	0,01903	0,02735
	19/7/2004	0,2	17,36	0,00217	0,01362
	15/7/2003	0,18	12,89	-0,00943	0,00444
	16/7/2002	0,18	19,59	-0,05323	-0,04409
	16/7/2001	0,15	20,91	0,00721	0,01436

Nom / Ticker	Date	Dividende	Cours	Rentabilité	Rentabilité Corrigée
<b>SUEZ</b>	7/5/2007	1,2	43,08	-0,01062	0,01685
SZE	8/5/2006	1	31,66	-0,03933	-0,00823
	16/5/2005	0,8	20,91	-0,04287	-0,00532
	3/5/2004	0,71	16,00	-0,02851	0,01490
	2/5/2003	0,71	14,24	-0,00895	0,03971
	2/5/2002	0,71	31,46	-0,03385	-0,01153
<b>TOTAL</b>	18/5/2007	1	56,19	0,010556	0,028196
FP	17/11/2006	0,87	54,45	-0,03696	-0,02111
	18/5/2006	0,86	51,15	-0,01307	0,003607
	24/11/2005	0,74	53,72292	-0,01776	-0,00408
	24/5/2005	0,74	43,55579	-0,01071	0,00614
	24/11/2004	0,6	40,54513	-0,0163	-0,00161
	24/5/2004	1,175	38,07738	-0,01096	0,019434
	16/5/2003	1	30,6001	-0,01996	0,012196
	17/5/2002	0,95	41,6803	-0,02802	-0,00549
<b>TF1</b>	2/5/2007	0,85	24,59	-0,02846	0,00552
TF1	2/5/2006	0,65	26,01	-0,01109	0,01360
	2/5/2005	0,65	21,59	-0,01426	0,01541
	30/4/2004	0,65	25,77	-0,03583	-0,01092
	28/4/2003	0,65	26,24	-0,02744	-0,00297
	26/4/2002	0,65	33,13	0,00757	0,02700
<b>THALES</b>	31/5/2007	0,87	45,48	-0,00264	0,01631
HO	31/5/2006	0,83	30,03	-0,01225	0,01502
	31/5/2005	0,8	32,45	-0,02796	-0,00360
	31/5/2004	0,75	27,98	-0,03131	-0,00486
	2/6/2003	0,7	23,39	-0,02907	0,00042
	31/5/2002	0,7	44,75	0,00583	0,02135
	11/6/2001	0,62	46,60	-0,01934	-0,00612
<b>THOMSON MULTIMEDIA</b>	11/7/2006	0,3	12,37	-0,05275	-0,02878
TMS	27/5/2005	0,285	20,61	-0,00291	0,01083
	27/5/2004	0,26	15,73	-0,01012	0,00627
	3/6/2003	0,225	13,75	-0,03852	-0,02229
<b>VALEO</b>	1/6/2007	1,1	42,09	-0,00569	0,02011
FR	1/6/2006	1,1	29,13	-0,02609	0,01098
	16/5/2005	1,1	32,69	-0,02865	0,00445
	1/6/2004	1,05	32,02	-0,05351	-0,02124
	1/7/2003	1	27,91	-0,07886	-0,04365
	1/7/2002	0,7	41,50	-0,01435	0,00237
<b>VALLOUREC</b>	20/10/2006	2	191,7	0,013656	0,024035
VK	5/7/2006	1,44	190,1	-0,00995	-0,0024
	12/10/2005	0,8	89,1	0,053245	0,062183
	6/7/2005	0,64	51,6	0,002717	0,015044
	7/7/2004	0,32	16,0171	-0,03098	-0,0112
	2/7/2003	0,42	10,84934	-0,04453	-0,00655
	3/7/2002	0,42	11,8572	-0,04481	-0,01001
	4/7/2001	0,26	13,03304	-0,02323	-0,00348

Nom / Ticker	Date	Dividende	Cours	Rentabilité	Rentabilité Corrigée
<b>VIVENDI ENVIRONNEMENT</b>	15/5/2007	1,05	59,10	-0,02205	-0,00444
VIE	29/5/2006	0,85	43,26	-0,01556	0,00163
	27/5/2005	0,68	30,47	-0,01505	0,00702
	28/5/2004	0,55	21,53	-0,01451	0,01071
	7/5/2003	0,55	19,08	-0,01687	0,01156
	6/5/2002	0,55	35,50	-0,01225	0,00312
<b>VIVENDI UNIVERSAL</b>	26/4/2007	1,2	30,38	-0,03015	0,00859
VIV	4/5/2006	1	27,45	-0,03156	0,00423
	4/5/2005	0,6	23,57	-0,00719	0,01795
	13/5/2002	1	29,85	-0,03780	-0,00485
<b>ZODIAC</b>	3/1/2007	0,86	50,25	-0,02068	-0,00371
ZC	6/1/2006	0,75	53,95	-0,03102	-0,01722
	21/12/2004	0,65	34,23	0,01087	0,02968
	18/12/2003	0,6	22,87	-0,02717	-0,00128
	19/12/2002	0,56	19,40	-0,01788	0,01058
	20/12/2001	0,52	20,03	-0,03290	-0,00727
<b>EADS</b>	11/5/2007	0,102	23,33	0,00473	0,00909
EAD	10/5/2006	0,4875	31,48	-0,01200	0,00337
	16/5/2005	0,375	21,76	-0,01369	0,00339
	11/5/2004	0,3	19,81	-0,00302	0,01201
	12/5/2003	0,225	8,25	-0,02750	-0,00059
	22/5/2002	0,375	17,04	-0,03120	-0,00943
<b>ST MICROELECTRONICS</b>	21/5/2007	0,255	14,85	-0,00403	0,01299
STM	22/5/2006	0,09	12,52	-0,01820	-0,01104
	23/5/2005	0,09	11,76	0,00000	0,00762
	24/5/2004	0,09	17,83	0,01298	0,01802
	22/4/2003	0,06	18,84	0,01497	0,01815
	22/4/2002	0,03	34,62	-0,03128	-0,03041

**Tableau C.1.7.** Les 71 titres restants utilisés pour notre étude.

Libelle	Ticker	Code Isin	Libelle	Ticker	Code Isin
ACCOR	AC	FR0000120404	LAFARGE	LG	FR0000120537
AIR FRANCE	AF	FR0000031122	LAGARDERE	MMB	FR0000130213
AIR LIQUIDE	AI	FR0000120073	LVMH	MC	FR0000121014
ALCATEL A	ALU	FR0000130007	M6 METROPOLE TELEVISION	MMT	FR0000053225
ALTEN	ATE	FR0000071946	MICHELIN	ML	FR0000121261
ALTRAN TECHNOLOGIES	ALT	FR0000034639	NEOPOST	NEO	FR0000120560
ATOS ORIGIN	ATO	FR0000051732	NRJ GROUP	NRG	FR0000121691
AXA	CS	FR0000120628	OBERTHUR CARD SYSTEMS	OCS	FR0000124133
BIC	BB	FR0000120966	PERNOD RICARD	RI	FR0000120693
BNP PARIBAS	BNP	FR0000131104	PEUGEOT	UG	FR0000121501
BOUYGUES	EN	FR0000120503	PINAULT PRINTemps	PP	FR0000121485
CAP GEMINI	CAP	FR0000125338	PUBLICIS GROUPE	PUB	FR0000130577

Libelle	Ticker	Code Isin	Libelle	Ticker	Code Isin
CARBONE LORRAINE	CRL	FR0000039620	REMY COINTREAU	RCO	FR0000130395
CARREFOUR	CA	FR0000120172	RENAULT	RNO	FR0000131906
CASINO GUICHARD	CO	FR0000125585	SAGEM	SAF	FR0000073272
CIMENTS FRANCAIS	CMA	FR0000120982	SAINT-GOBAIN	SGO	FR0000125007
CLARINS	CLR	FR0000130296	SANOFI-SYNTHELABO	SAN	FR0000120578
CLUB MEDITERRANEE	CU	FR0000121568	SCHNEIDER ELECTRIC	SU	FR0000121972
CNP ASSURANCES	CNP	FR0000120222	SCOR (NON REGROUPE)	SCO	FR0000130304
DANONE	BN	FR0000120644	SEB	SK	FR0000121709
DASSAULT SYSTEMES	DSY	FR0000130650	SOCIETE GENERALE A	GLE	FR0000130809
DEXIA	DX	BE0003796134	SODEXHO	SW	FR0000121220
EADS	EAD	NL0000235190	SPIR COMMUNICATION	SPI	FR0000131732
EIFFAGE	FGR	FR0000130452	SR TELEPERFORMANCE	RCF	FR0000051807
ESSILOR INTERNATIONAL	EF	FR0000121667	ST MICROELECTRONICS	STM	NL0000226223
EULER	ELE	FR0004254035	SUEZ	SZE	FR0000120529
EURAZEO	RF	FR0000121121	TF1	TFI	FR0000054900
FAURECIA	EO	FR0000121147	THALES	HO	FR0000121329
FRANCE TELECOM	FTE	FR0000133308	THOMSON MULTIMEDIA	TMS	FR0000184533
GUYENNE ET GASCOGNE	GG	FR0000120289	TOTAL FINA ELF	FP	FR0000120271
HAVAS ADVERTISING	HAV	FR0000121881	VALEO	FR	FR0000130338
HERMES INTERNATIONAL	RMS	FR0000052292	VALLOUREC	VK	FR0000120354
IMERYS	NK	FR0000120859	VIVENDI ENVIRONNEMENT	VIE	FR0000124141
INGENICO	ING	FR0000125346	VIVENDI UNIVERSAL	VIV	FR0000127771
KLEPIERRE	LI	FR0000121964	ZODIAC	ZC	FR0000125684
L'OREAL	OR	FR0000120321			

**Tableau C.1.8.** Changement du nom des titres sur la période du 1 juin 2001 au 1 juin 2007.

Ancien Nom	Nom Actuel
ALCATEL A	ALCATEL -LUCENTE
EULER	EULER-HERMES
HAVAS ADVERTISING	HAVAS
PINAULT PRINTEMPS	PPR
SANOFI-SYNTHELABO	SANOFI-AVENTIS
SR TELEPERFORMANCE	TELEPERFORMANCE
THOMSON MULTIMEDIA	THOMSON
VIVENDI ENVIRONNEMENT	VIOLIA ENVIRONNEMENT
VIVENDI UNIVERSAL	VIVENDI

## C.2. Analyse des données

Tableau C.2.1. Statistiques descriptives (valeurs journalières).

Libelle	Rentabilité *10 <sup>-3</sup>	Écart-type *10 <sup>-3</sup>	Skewness	Kurtosis	JB Statistique
ACCOR	0,3389	19,5	-0,37	8,17	1745,95
AIR France	0,4099	25,7	-0,41	12,37	5653,82
AIR LIQUIDE	0,3541	15,6	-0,04	7,57	1336,95
ALCATEL -LUCENTE	-0,6581	34,3	0,34	14,16	7982,93
ALTEN	0,0604	31,4	0,23	13,11	6542,69
ALTRAN TECHNOLOGIES	<b>-1,4493</b>	<b>46,5</b>	-2,13	31,58	53371,95
ATOS ORIGIN	-0,4911	29,6	0,28	9,22	2491,00
AXA	0,1286	25,8	0,06	8,01	1608,28
BIC	0,2705	16	-0,12	9,86	3013,49
BNP PARIBAS	0,5319	18,7	-0,13	9,27	2513,91
BOUYGUES	0,4725	19,3	0,16	7,51	1308,44
CAP GEMINI	-0,5373	30,1	-0,11	11,60	4725,94
CARBONE LORRAINE	0,1782	22,8	-0,26	8,76	2139,80
CARREFOUR	-0,0378	17,6	-0,03	7,14	1095,64
CASINO GUICHARD	-0,0830	15,2	0,36	8,15	1727,92
CIMENTS FRANCAIS	-0,0830	15,2	0,36	8,15	1727,92
CLARINS	0,2413	19,6	-0,21	18,22	14810,16
CLUB MEDITERRANEE	-0,2678	25,7	0,02	9,72	2882,42
CNP ASSURANCES	0,7276	15,5	-0,06	6,51	788,74
DANONE	0,5153	14,1	0,10	10,94	4030,07
DASSAULT SYSTEMES	-0,0558	26,8	0,14	8,59	2002,45
DEXIA	0,3138	19	0,07	9,72	2889,82
EADS	0,0528	26	-0,94	17,13	12993,25
EIFFAGE	1,7244	20,3	0,60	11,57	4780,56
ESSILOR INTERNATIONAL	0,7169	16,1	0,12	10,58	3673,15
EULER-HERMES	0,5831	18,9	0,00	8,84	2178,13
EURAZEO	0,6127	16	0,20	8,94	2261,96
FAURECIA	-0,0189	23,6	1,23	13,36	7249,07
FRANCE TELECOM	-0,4457	29,2	0,41	10,20	3352,12
GUYENNE ET GASCOGNE	0,3021	13,9	0,55	12,45	5791,62
HAVAS	-0,7167	29,6	0,29	6,37	745,25
HERMES INTERNATIONAL	0,5262	17,5	0,11	6,92	987,42
IMERYS	0,9050	17,1	0,79	12,35	5751,72
INGENICO	0,0582	31,4	-1,23	28,78	42859,36
KLEPIERRE	0,8897	<b>13,3</b>	-0,95	12,54	6048,33
L'OREAL	0,1372	16,6	-0,22	7,49	1298,69
LAFARGE	0,2917	18,3	-0,03	6,65	851,15
LAGARDERE	0,0990	18,5	0,28	6,96	1021,87
LVMH	0,2472	20,1	0,42	9,28	2567,22
M6 METROPOLE TELEVISION	-0,0058	23,1	0,21	7,15	1113,69
MICHELIN	0,6561	19	0,16	6,98	1017,73
NEOPOST	0,9694	17,9	-0,43	11,06	4197,66
NRJ GROUP	-0,1704	23	0,58	7,92	1631,31

Libelle	Rentabilité *10 <sup>-3</sup>	Écart-type *10 <sup>-3</sup>	Skewness	Kurtosis	JB Statistique
OBERTHUR CARD SYSTEMS	-0,6708	35,2	-0,04	14,28	8128,30
PERNOD RICARD	0,8182	15	0,13	9,18	2442,47
PEUGEOT	0,1705	17,2	0,01	6,83	936,54
PPR	-0,1527	20,8	0,07	10,08	3203,25
PUBLICIS GROUPE	-0,0166	23,6	0,23	7,40	1251,99
REMY COINTREAU	0,3475	19,1	-2,02	61,77	221831,70
RENAULT	0,5970	19,8	-0,15	6,50	789,35
SAGEM	0,4021	23,2	0,16	13,60	7192,63
SAINT-GOBAIN	0,6343	20,6	-0,94	23,23	26389,65
SANOFI-AVENTIS	0,0454	17,5	-0,01	6,32	703,95
SCHNEIDER ELECTRIC	0,8258	25,4	<b>10,78</b>	<b>298,24</b>	5601040,90
SCOR (NON REGROUPE)	-1,2078	34,1	-1,52	22,99	26137,02
SEB	0,7324	18,7	0,51	9,63	2871,72
SOCIETE GENERALE A	0,6209	20,2	0,04	8,32	1806,49
SODEXHO	0,1613	22,2	<b>-2,56</b>	48,99	136882,26
SPIR COMMUNICATION	0,3181	16,8	-0,66	20,85	20486,76
ST MICROELECTRONICS	-0,6516	25,7	0,34	6,50	810,14
SUEZ	0,2561	24,3	-0,10	9,82	2973,63
TELEPERFORMANCE	0,1351	25	-0,04	8,30	1794,23
TF1	-0,1555	21,7	-0,29	11,40	4528,31
THALES	0,0693	17,9	-0,09	6,74	895,95
THOMSON	-0,7009	26,9	-0,24	9,09	2388,46
TOTAL FINA ELF	0,2940	15,1	-0,31	<b>5,55</b>	439,78
VALEO	-0,0071	18,7	0,17	6,08	613,23
VALLOUREC	<b>1,9735</b>	22,6	0,61	12,64	6036,09
VIOLIA ENVIRONNEMENT	0,2576	19	0,33	11,98	5185,81
VIVENDI	-0,4609	30,1	-1,62	25,58	33249,13
ZODIAC	0,5290	20,8	0,18	8,09	1661,77
<b>Max</b>	<b>1,9735</b>	<b>46,5</b>	<b>10,78</b>	<b>298,24</b>	
<b>Min</b>	<b>-1,4493</b>	<b>13,3</b>	<b>-2,56</b>	<b>5,55</b>	
<b>Moyenne</b>	<b>0,1896</b>	<b>21,8</b>	<b>0,05</b>	<b>16,22</b>	
<b>Médiane</b>	<b>0,2413</b>	<b>20,1</b>	<b>0,04</b>	<b>9,28</b>	

Tableau C.2.2. Statistiques descriptives (valeurs annuelles).

Libelle	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	Année 6	Moyenne	Ecart-type
ACCOR	-0,1131	-0,2998	0,1027	0,1154	0,3490	0,4208	<b>0,0958</b>	0,2722
AIR France	-0,1396	-0,5188	0,1535	-0,0074	0,4108	0,7114	<b>0,1016</b>	0,4301
AIR LIQUIDE	0,0600	-0,1572	0,1356	0,1045	0,2369	0,1799	<b>0,0933</b>	0,1370
ALCATEL - LUCENTE	-0,8080	-0,6316	0,4798	-0,2634	0,3805	-0,2733	<b>-0,1860</b>	0,5222
ALTEN	-0,6190	-0,5627	0,4484	0,4590	0,4336	-0,0199	<b>0,0233</b>	0,5093
ALTRAN TECHNOLOGIES	-0,2658	-2,1413	0,3676	-0,2461	0,6107	-0,5783	<b>-0,3755</b>	<b>0,9708</b>
ATOS ORIGIN	-0,4305	-0,8084	0,4538	0,0733	0,2200	-0,0768	<b>-0,0948</b>	0,4584
AXA	-0,3815	-0,5896	0,3362	0,2489	0,3746	0,2020	<b>0,0318</b>	0,4107
BIC	-0,0087	-0,2464	0,1099	0,2000	0,3401	-0,0321	<b>0,0605</b>	0,2038
BNP PARIBAS	0,2153	-0,3566	0,1732	0,1241	0,3922	0,1772	<b>0,1209</b>	0,2516

Libelle	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	Année 6	Moyenne	Ecart-type
BOUYGUES	-0,2243	-0,4162	0,2580	0,3095	0,3299	0,3491	<b>0,1010</b>	0,3333
CAP GEMINI	-0,9073	-0,6646	0,0094	-0,0832	0,5308	0,3116	<b>-0,1339</b>	0,5556
CARBONE LORRAINE	-0,2189	-0,6403	0,5865	0,1348	0,2137	0,0358	<b>0,0186</b>	0,4159
CARREFOUR	-0,1834	-0,3324	0,0133	0,0682	0,1728	0,2392	<b>-0,0037</b>	0,2172
CASINO GUICHARD	-0,1528	-0,3454	0,1267	-0,1321	0,0987	0,2501	<b>-0,0258</b>	0,2211
CIMENTS FRANCAIS	-0,1528	-0,3454	0,1267	-0,1321	0,0987	0,2501	<b>-0,0258</b>	0,2211
CLARINS	-0,1156	-0,2690	0,1474	0,1175	0,3416	0,1426	<b>0,0607</b>	0,2173
CLUB MEDITERRANEE	-0,7325	-0,6551	0,5436	0,1533	0,2327	-0,0354	<b>-0,0822</b>	0,5098
CNP ASSURANCES	0,1047	-0,0486	0,1976	0,1779	0,4916	0,1184	<b>0,1736</b>	0,1783
DANONE	0,0093	-0,0863	0,2340	0,0674	0,3337	0,2335	<b>0,1319</b>	0,1602
DASSAULT SYSTEMES	-0,1265	-0,5697	0,2590	0,1332	0,1649	-0,0499	<b>-0,0315</b>	0,2997
DEXIA	-0,0363	-0,4232	0,2317	0,3484	0,1878	0,1530	<b>0,0769</b>	0,2752
EADS	-0,3186	-0,6991	0,8423	0,1739	0,3854	-0,2952	<b>0,0148</b>	0,5594
EIFFAGE	0,4159	0,0224	0,5633	0,4342	0,6429	0,5852	<b>0,4440</b>	0,2247
ESSILOR INTERNATIONA L	0,3202	-0,2188	0,3767	0,1260	0,3550	0,1132	<b>0,1787</b>	0,2260
EULER-HERMES	-0,2464	-0,3517	0,5099	0,3173	0,5117	0,1282	<b>0,1448</b>	0,3735
EURAZEO	-0,1348	-0,2117	0,1657	0,3876	0,4000	0,3236	<b>0,1551</b>	0,2688
FAURECIA	-0,2394	-0,3056	0,3997	0,1570	-0,1307	0,1032	<b>-0,0026</b>	0,2694
FRANCE TELECOM	-1,0331	0,0996	-0,0423	0,2036	-0,1949	0,1753	<b>-0,1320</b>	0,4658
GUYENNE ET GASCOGNE	-0,0032	-0,1790	0,2332	-0,0297	0,1079	0,3089	<b>0,0730</b>	0,1802
HAVAS	-0,6477	-0,7521	0,1366	0,2519	-0,1567	0,0271	<b>-0,1902</b>	0,4185
HERMES INTERNATIONA L	0,0718	-0,3191	0,2921	-0,0299	0,3193	0,5171	<b>0,1419</b>	0,2972
IMERYS	0,2573	0,0784	0,4274	0,2304	0,2308	0,0527	<b>0,2128</b>	0,1359
INGENICO	0,0818	-1,0968	0,3581	0,1055	0,4711	0,0639	<b>-0,0027</b>	0,5612
KLEPIERRE	0,1554	-0,0833	0,1936	0,3829	0,2649	0,4458	<b>0,2266</b>	0,1877
L'OREAL	0,0037	-0,2329	0,0499	-0,0929	0,2748	0,1751	<b>0,0296</b>	0,1824
LAFARGE	0,0416	-0,6825	0,2965	0,0939	0,3665	0,1921	<b>0,0513</b>	0,3794
LAGARDERE	-0,2372	-0,3296	0,3589	0,1770	0,2120	-0,1063	<b>0,0125</b>	0,2758
LVMH	-0,0851	-0,3293	0,2856	0,0217	0,4398	0,0210	<b>0,0590</b>	0,2723
M6 METROPOLE TELEVISION	-0,0197	-0,3397	0,0661	-0,0688	0,2677	0,1197	<b>0,0042</b>	0,2053
MICHELIN	0,0304	-0,3086	0,2578	0,2296	0,2121	0,4592	<b>0,1467</b>	0,2615
NEOPOST	0,3843	-0,3452	0,4361	0,3948	0,3791	0,1971	<b>0,2410</b>	0,2989
NRJ GROUP	0,0704	-0,3658	0,1036	0,1278	0,0498	-0,2946	<b>-0,0515</b>	0,2187
OBERTHUR CARD SYSTEMS	-1,3090	-0,1623	0,3523	0,1502	0,0951	-0,1855	<b>-0,1765</b>	0,5904
PERNOD RICARD	0,2125	0,0987	0,2539	0,1597	0,2692	0,2037	<b>0,1996</b>	<b>0,0628</b>
PEUGEOT	0,0804	-0,4157	0,1739	0,0868	0,1435	0,1212	<b>0,0317</b>	0,2219
PPR	-0,4137	-0,6605	0,2200	-0,0204	0,3135	0,2296	<b>-0,0552</b>	0,3972
PUBLICIS GROUPE	-0,1301	-0,3447	-0,0051	0,0371	0,3818	0,0820	<b>0,0035</b>	0,2407
REMY COINTREAU	-0,0994	-0,2300	0,0920	0,2421	0,2952	0,2160	<b>0,0860</b>	0,2094
RENAULT	0,0166	-0,3638	0,4834	0,1588	0,3641	0,0353	<b>0,1157</b>	0,2983



Libelle	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5	Année 6	Moyenne	Ecart-type
SAGEM	-0,0437	-0,0107	0,4581	-0,0169	0,2982	-0,1337	<b>0,0919</b>	0,2316
SAINT-GOBAIN	0,2327	-0,3715	0,2753	0,1760	0,3034	0,2707	<b>0,1478</b>	0,2582
SANOFI-AVENTIS	-0,0783	-0,2516	0,0595	0,2881	0,0697	-0,0704	<b>0,0028</b>	0,1821
SCHNEIDER ELECTRIC	-0,2811	-0,2589	0,9995	0,0672	0,4903	0,1703	<b>0,1979</b>	0,4866
SCOR (NON REGROUPE)	-0,3461	-1,3813	-0,7441	0,2394	0,3042	0,1178	<b>-0,3017</b>	0,6632
SEB	0,4426	-0,1081	0,2721	-0,1040	0,1934	0,3823	<b>0,1797</b>	0,2376
SOCIETE GENERALE A	0,0990	-0,3566	0,3026	0,1792	0,4768	0,2840	<b>0,1642</b>	0,2853
SODEXHO	-0,2758	-0,6129	0,0748	0,2687	0,4037	0,3825	<b>0,0401</b>	0,4072
SPIR COMMUNICATION	-0,0052	-0,2197	0,5845	0,3354	-0,1720	-0,1053	<b>0,0696</b>	0,3206
ST MICROELECTRONICS	-0,3015	-0,5254	-0,0362	-0,4119	0,3015	-0,0015	<b>-0,1625</b>	0,3067
SUEZ	-0,1093	-0,7854	0,1843	0,3140	0,4327	0,2962	<b>0,0554</b>	0,4512
TELEPERFORMANCE	-0,0930	-0,8216	0,2788	0,3294	0,4103	0,1026	<b>0,0344</b>	0,4564
TF1	-0,1418	-0,2579	-0,0225	-0,0638	0,1934	-0,0113	<b>-0,0506</b>	0,1505
THALES	-0,0558	-0,6310	0,2106	0,1569	0,0907	0,2818	<b>0,0089</b>	0,3339
THOMSON	-0,3977	-0,8680	0,1757	0,3177	-0,1673	-0,1230	<b>-0,1771</b>	0,4239
TOTAL FINA ELF	-0,0357	-0,2728	0,2496	0,1661	0,2740	0,0027	<b>0,0640</b>	0,2079
VALEO	-0,0659	-0,6685	0,3259	0,0958	0,0392	0,2382	<b>-0,0059</b>	0,3535
VALLOUREC	0,0492	-0,2299	0,3150	0,8824	1,8841	0,0002	<b>0,4835</b>	0,7849
VIOLIA ENVIRONNEMENT	-0,3160	-0,6185	0,2086	0,3100	0,5097	0,1976	<b>0,0486</b>	0,4258
VIVENDI	-0,7652	-0,7650	0,2064	0,2360	0,1922	0,1327	<b>-0,1271</b>	0,4953
ZODIAC	-0,0647	-0,3360	0,3291	0,4327	0,3756	0,0360	<b>0,1288</b>	0,3018
<b>Min</b>							<b>-0,3755</b>	<b>0,0628</b>
<b>Max</b>							<b>0,4835</b>	<b>0,9708</b>
<b>Moyenne</b>							<b>0,0420</b>	<b>0,3355</b>

### C.3. L'effet de la diversification

#### Construction de la figure 4.2.

1) fonction N=ntir(n)

```

% tirage au sort sans remise de n chiffres numérotés de 1 à
71
m=1:71;
t=ceil(rand*71);
N=t; i=1; m(:,t)=[];
while i<n, i=1+i;
t1=ceil(rand*(72-i));
t=m(t1);
N=[N,t]; m(:,t1)=[];
end

```

```
end
```

```
2)function varmean=tir(n)
    % les n titres composent le portefeuille, les poids sont
    identiques
load D:\fichiers\MATLAB\RENT ;
    % RENT est la matrice 1534x71 de rentabilité journalière des
titres
cv=cov(RENT);
i=0; varmean=0;
    while i<10000, i=1+i;
        N=ntir(n);
        cvin=cv(N,N);
        v=(1/n)*(1/n)*sum(sum(cvin));
        varmean=varmean+v;
    end
varmean=varmean/10000 ;
end
```

```
3)function res=diversif
res=tir(2);
    for n=3:71
        res=[res,tir(n)];
    end
```

```
4)
x=2:71;
y=res;
% max(res)= 3.3149e-004 et min(res)= 1.5012e-004
plot(x,y);
xlabel('Nombre de titres dans le portefeuille');
ylabel('Variance');
```

### Construction du tableau 4.1.

```
ecart = res(1,1)-res(1,70)
004
for i=1:69
    k(i)=(res(1,i)-res(1,i+1))/ecart;
end
s=k(1,1); l(1,1)=s;
for i=2:69
    s=k(1,i)+s; l(i)=s;
end
4.1
% les valeurs du vecteur l sont ceux du tableau
```

## C.4. Modélisation de l'incertitude

```
1) function B=bootstrap(A)
    % A est une matrice 250x15 de rentabilité
    journalière
    t=ceil(rand*250) ;
    B=A(t,:); i=0;
    while i<249, i=1+i;
        t=ceil(rand*250);
        B=B+A(t,:);
    end % première échantillon bootstrap; B est le premier
    scénario
end

2) function R=bootstrapmille
load D:\fichiers\MATLAB\RENT;
N=ntir(15); % choix aléatoire des 15
titres
d=ceil(rand*(1534-250))+250 ; % choix aléatoire de la
date
A=RENT((d-249):d,N);
R=bootstrap(A);
i=1;
    while i<1000, i=1+i;
        V=bootstrap(A);
        R=[R;V];
    end
R=R';
end
```

## C.5. Rangement des portefeuilles de P

```
1) function v=trier2(s)
    % distribue les parts sur 2 places, s est le nombre des
    parts
v=[];
    for i=1:(s-1)
        vv(1)=i;
        vv(2)=s-vv(1);
        v=[v;vv];
    end
end
function v=trier3(s) % distribue les parts sur 3
places
v=[];
    for i=1:(s-2)
        v1=i;
        t=trier2(s-v1);
        for l=1:size(t)
            vvv=[v1,t(l,:)];
            v=[v;vvv];
        end
    end
end
function v=trier4(s) % distribue les parts sur 4
places
```

```

v=[];
    for i=1:(s-3)
        v1=i;
        t=trier3(s-v1);
            for l=1:size(t)
                vvv=[v1,t(l,:)];
                v=[v;vvv];
            end
        end
    end
end
function v=trier5(s) % distribue les parts sur 5
places
v=[];
    for i=1:(s-4)
        v1=i;
        t=trier4(s-v1);
            for l=1:size(t)
                vvv=[v1,t(l,:)];
                v=[v;vvv];
            end
        end
    end
end
function v=trier6(s) % distribue les parts sur 6
places
v=[];
    for i=1:(s-5)
        v1=i;
        t=trier5(s-v1);
            for l=1:size(t)
                vvv=[v1,t(l,:)];
                v=[v;vvv];
            end
        end
    end
end
function v=trier7(s) % distribue les parts sur 7
places
v=[];
    for i=1:(s-6)
        v1=i;
        t=trier6(s-v1);
            for l=1:size(t)
                vvv=[v1,t(l,:)];
                v=[v;vvv];
            end
        end
    end
end
function v=trier8(s) % distribue les parts sur 8
places
v=[];
    for i=1:(s-7)
        v1=i;
        t=trier7(s-v1);
            for l=1:size(t)
                vvv=[v1,t(l,:)];
                v=[v;vvv];
            end
        end
    end
end
function v=trier9(s) % distribue les parts sur 9
places
v=[];
    for i=1:(s-8)
        v1=i;
        t=trier8(s-v1);

```

```

        for l=1:size(t)
            vvv=[v1,t(l,:)];
            v=[v;vvv];
        end
    end
end
function v=trier10(s) % distribue les parts sur 10
places
v=[];
    for i=1:(s-9)
        v1=i;
        t=trier9(s-v1);
        for l=1:size(t)
            vvv=[v1,t(l,:)];
            v=[v;vvv];
        end
    end
end
function v=trier11(s) % distribue les parts sur 11
places
v=[];
    for i=1:(s-10)
        v1=i;
        t=trier10(s-v1);
        for l=1:size(t)
            vvv=[v1,t(l,:)];
            v=[v;vvv];
        end
    end
end
function v=trier12(s) % distribue les parts sur 12
places
v=[];
    for i=1:(s-11)
        v1=i;
        t=trier11(s-v1);
        for l=1:size(t)
            vvv=[v1,t(l,:)];
            v=[v;vvv];
        end
    end
end
function v=trier13(s) % distribue les parts sur 13
places
v=[];
    for i=1:(s-12)
        v1=i;
        t=trier12(s-v1);
        for l=1:size(t)
            vvv=[v1,t(l,:)];
            v=[v;vvv];
        end
    end
end
function v=trier14(s) % distribue les parts sur 14
places
v=[];
    for i=1:(s-13)
        v1=i;
        t=trier13(s-v1);
        for l=1:size(t)
            vvv=[v1,t(l,:)];
            v=[v;vvv];
        end
    end
end

```

```

end
end

function v=trier15(s) % distribue les parts sur 15
places
v=[];
for i=1:(s-14)
v1=i;
t=trier14(s-v1);
for l=1:size(t)
vvv=[v1,t(l,:)];
v=[v;vvv];
end
end
end
function v=structure % calcule le nombre de portefeuilles dans
l'ensemble P
qz=1:15;
for i=2:15
nc=nchoosek(qz,i);
[n1,n2]=size(nc);
n(i-1)=n1;
v=n;
end
part=trier2(15); [m2,m1]=size(part);
part=trier3(15); [m3,m1]=size(part);
part=trier4(15); [m4,m1]=size(part);
part=trier5(15); [m5,m1]=size(part);
part=trier6(15); [m6,m1]=size(part);
part=trier7(15); [m7,m1]=size(part);
part=trier8(15); [m8,m1]=size(part);
part=trier9(15); [m9,m1]=size(part);
part=trier10(15); [m10,m1]=size(part);
part=trier11(15); [m11,m1]=size(part);
part=trier12(15); [m12,m1]=size(part);
part=trier13(15); [m13,m1]=size(part);
part=trier14(15); [m14,m1]=size(part);
part=trier15(15); [m15,m1]=size(part);
m=[m2,m3,m4,m5,m6,m7,m8,m9,m10,m11,m12,m13,m14,m15];
v=[v;m];

save v struct -ascii -tabs;
end
for i=1:14
nb(i)=v(1,i)*v(2,i); % la troisième colonne dans le tableau
4.2
end
s=sum(nb); % s = 77 558 760

```

## 2) fonction trier

```

% crée la liste des répartitions des parts de la
richesse
% investie dans 2,3,4...15
titres
part2=trier2(15); save part2 part2 -ascii -tabs;
part3=trier3(15); save part3 part3 -ascii -tabs;
part4=trier4(15); save part4 part4 -ascii -tabs;
part5=trier5(15); save part5 part5 -ascii -tabs;
part6=trier6(15); save part6 part6 -ascii -tabs;
part7=trier7(15); save part7 part7 -ascii -tabs;
part8=trier8(15); save part8 part8 -ascii -tabs;
part9=trier9(15); save part9 part9 -ascii -tabs;
part10=trier10(15); save part10 part10 -ascii -tabs;

```

```

part11=trier11(15); save part11 part11 -ascii -tabs;
part12=trier12(15); save part12 part12 -ascii -tabs;
part13=trier13(15); save part13 part13 -ascii -tabs;
part14=trier14(15); save part14 part14 -ascii -tabs;
part15=trier15(15); save part15 part15 -ascii -tabs;

```

```

function v=echantportf

```

```

v=[]; qz=1:15;
load D:\fichiers\MATLAB\stract;
load D:\fichiers\MATLAB\part2;
load D:\fichiers\MATLAB\part3;
load D:\fichiers\MATLAB\part4;
load D:\fichiers\MATLAB\part5;
load D:\fichiers\MATLAB\part6;
load D:\fichiers\MATLAB\part7;
load D:\fichiers\MATLAB\part8;
load D:\fichiers\MATLAB\part9;
load D:\fichiers\MATLAB\part10;
load D:\fichiers\MATLAB\part11;
load D:\fichiers\MATLAB\part12;
load D:\fichiers\MATLAB\part13;
load D:\fichiers\MATLAB\part14;
load D:\fichiers\MATLAB\part15;
for i=1:14
    p(i)=stract(1,i)*stract(2,i);
end
p=[15,p];
N=sum(p);
cummul=[]; cum=0;
for j=1:15
    cum=cum+p(j); cummul=[cummul,cum];
end
for i=1:100000
    n0=round(rand*N) ;
    if n0<=15
        vv=zeros(1,15);
        vv(n0)=15;
    else; end
    for k=1:14
        if (cummul(k)<n0) & n0<=cummul(k+1)
            n0=n0-cummul(k);
            nn=k+1;
            nc=nchoosek(qz,nn);
            mm=stract(2,k);
            r=mod(n0,mm);
            b=(n0-r)/mm;
            n=nc(b+1,:);
            if nn==2 part=part2; else ; end;
            if nn==3 part=part3; else; end;
            if nn==4 part=part4; else ; end;
            if nn==5 part=part5; else ; end;
            if nn==6 part=part6; else ; end;
            if nn==7 part=part7; else ; end;
            if nn==8 part=part8; else ; end;
            if nn==9 part=part9; else ; end;
            if nn==10 part=part10; else ; end;
            if nn==11 part=part11; else ; end;
            if nn==12 part=part12; else ; end;
            if nn==13 part=part13; else ; end;
            if nn==14 part=part14; else ; end;
            if nn==15 part=part15; else ; end;
        end
    end
    m=part(r+1,:);
end

```

```

                [s1,s2]=size(n);
                vv=zeros(1,15);
                for d=1:s2
                    for dd=1:15
                        if n(d)==dd vv(dd)=m(d);
                        else; end;
                    end
                end
            end
        else; end
    end
v=[v;vv];
end
save v PORTF -ascii -tabs;
end

% PORTF est la matrice des 100 000 portefeuilles de l'échantillon
aléatoire

```

## C.6. Construction du portefeuille optimal de Shefrin et Statman (2000)

```

function portf=optimss(D) % portefeuille avec espérance
maximale
    if size(D)==[0,0]
        portf=[];
    else
        [d1,d2]=size(D);
        rent=D(:,16);
        maxrent=max(rent);
        for i=1:d1
            if rent(i)==maxrent
                portf=D(i,:);
            else; end;
        end
    end
end
end
function [mr,R]=contrss(t,tt) % t=r*,
tt=a
M1=[];
R=bootstrapmille ;
expp=(1/1000)*sum(R'); % les rentabilités des 15
titres
load D:\fichiers\MATLAB\PORTF;
r=(1/15)*PORTF*(expp'); % les rentabilités de tous les
portefeuilles
RR=cov(R'); Varttport=[];
rr=t ;
for i=1:100000
    p=(1/15)*PORTF(i,:); % les part investies dans chaque
titre
    VarPort=p*RR*(p');
    Varttport=[Varttport;VarPort];
    pp=p*R ;
    ppp=pp<rr;
    prob=(1/1000)*((sum(ppp))) ; % calcule
Pr(r<r*)
    if (prob<=tt)

```



```

        rp=p*(expp');
        p=[p,rp,VarPort];
        M1=[M1;p];
sécurité                                     % l'ensemble de
        else; end;
    end
OOss1=optimss(M1);
    if size(OOss1)==[0,0]
        mr=[];
    else
        vp=OOss1(1,17);
        rp=OOss1(1,16);
        mr=[];
        for j=1:100000
            if and ( (r(j,1)>=rp) , (Varttport(j,1)<=vp) )
                p=[PORTF(j,:), r(j,1), Varttport(j,1)];
                mr=[mr;p];
            else; end;
        end;
        mr=[mr;OOss1];
    end
end

```

### Construction du tableau 4.3.

```

function [ls,lm]=markovss(t,tt)
ls=0; lm=0;
for k=1:10
    [mr,R]=contrss(t,tt);
    [n1,n2]=size(mr);
    if n1>0
        ls=ls+1
    else
    end
    if n1> 2
        lm=lm+1
        save RMV RMV -tabs -ascii;
        save mr mr -tabs -ascii;
    else
    end
end
end
function do
[ls,lm]=markovss(0,0.1);
    save lm lm -tabs -ascii;
    save ls ls -tabs -ascii;
[lss,lmm]=markovss(0,0.2);
    save lmm lmm -tabs -ascii;
    save lss lss -tabs -ascii;
[loss,lomm]=markovss(0,0.3);
    save lomm lomm -tabs -ascii;
    save loss loss -tabs -ascii;
[lsss,lmmm]=markovss(0.05,0.1);
    save lmmm lmmm -tabs -ascii;
    save lsss lsss -tabs -ascii;
[l1s,l1m]=markovss(0.05,0.2);
    save l1m l1m -tabs -ascii;
    save l1s l1s -tabs -ascii;
[looss,loomm]=markovss(0.05,0.3);
    save loomm loomm -tabs -ascii;
    save looss looss -tabs -ascii;
[l11s,l11m]=markovss(0.1,0.1);
    save l11m l11m -tabs -ascii;

```

```

    save llls llls -tabs -ascii;
[ls1,lm1]=markovss(0.1,0.2);
    save lm1 lm1 -tabs -ascii;
    save ls1 ls1 -tabs -ascii;
[lsso,lmso]=markovss(0.1,0.3);
    save lmso lmso -tabs -ascii;
    save lsso lsso -tabs -ascii;
[lsll,lmll]=markovss(0,0);
    save lmll lmll -tabs -ascii;
    save lsll lsll -tabs -ascii;
[lssl,lmml]=markovss(0.05,0);
    save lmml lmml -tabs -ascii;
    save lssl lssl -tabs -ascii;
[lslll,lmlll]=markovss(0.1,0);
    save lmlll lmlll -tabs -ascii;
    save lslll lslll -tabs -ascii;
end

```

### Construction de la figure 4.3.

```

function [r, Varttport, pss]=contrssF(t,tt)
R=bootstrapmille ;
expp=(1/1000)*sum(R');
load D:\fichiers\MATLAB\PORTF;
r=(1/15)*PORTF*(expp');
RR=cov(R'); Varttport=[];
rr=t ; pss=[];
    for i=1:100000
        p=(1/15)*PORTF(i,:);
        VarPort=p*RR*(p');
        Varttport=[Varttport;VarPort];
        pp=p*R;
        ppp=pp<rr;
        prob=(1/1000)*((sum(ppp)));
            if (prob<=tt)
                ps=[r(i,1),VarPort];
                pss=[pss;ps];
            else; end;
    end
end
[r, Var, pss]=contrssF(0,0.3);
plot(sqrt(Var),r,'.');
xlabel('Ecart-type');
ylabel('Espérance');

```

### Construction de la figure 4.4.

```

plot(sqrt(Var),r, '.',sqrt(pss(1,2)),pss(1,1),'o');
xlabel('Ecart-type');
ylabel('Espérance');

```

### Construction de la figure 4.5.

```

[r, Var, pss1]=contrssF(0,0.2);
plot(sqrt(Var),r, '.',sqrt(pss1(1,2)),pss1(1,1),'.',sqrt(pss1(1,2)),pss1(1,1),
'.');
xlabel('Ecart-type');
ylabel('Espérance');

```

### Construction de la figure 4.6.

```
[r, Var, pss2]=contrssF(0,0.1);
[r, Var, pss3]=contrssF(0,0);
plot(sqrt(Var),r, '.',sqrt(pss(1,2)),pss(1,1), '.',sqrt(pss1(1,2)),pss1(1,1),
'.',sqrt(pss2(1,2)),pss2(1,1), '.',sqrt(pss3(1,2)),pss3(1,1), '.');
xlabel('Ecart-type');
ylabel('Espérance');
```

### Construction de la figure 4.7.

```
[r, Var, pss4]=contrssF(0,05,0.3);
[r, Var, pss5]=contrssF(0,1,0.3);
plot(sqrt(Var),r, '.',sqrt(pss(1,2)),pss(1,1), '.',sqrt(pss4(1,2)),pss4(1,1),
'.',sqrt(pss5(1,2)),pss5(1,1), '.');
xlabel('Ecart-type');
ylabel('Espérance');
```

### Construction de la figure 4.8.

```
function [r, Varttport, pss]=contrssFF(t,tt)
load D:\fichiers\MATLAB\RMV;
R=RMV ;
expp=(1/1000)*sum(R');
load D:\fichiers\MATLAB\PORTF;
r=(1/15)*PORTF*(expp');
RR=cov(R'); Varttport=[];
rr=t ; pss=[];
    for i=1:100000
        p=(1/15)*PORTF(i,:);
        VarPort=p*RR*(p');
        Varttport=[Varttport;VarPort];
        pp=p*R;
        ppp=pp<rr;
        prob=(1/1000)*((sum(ppp)));
            if (prob<=tt)
                ps=[r(i,1),VarPort];
                pss=[pss;ps];
            else; end;
    end
end
function [mr,R]=contrss(t,tt)
M1=[];
load D:\fichiers\MATLAB\RMV;
R=RMV ;
expp=(1/1000)*sum(R');
load D:\fichiers\MATLAB\PORTF;
r=(1/15)*PORTF*(expp');
RR=cov(R'); Varttport=[];
rr=t ;
    for i=1:100000
        p=(1/15)*PORTF(i,:);
        VarPort=p*RR*(p');
        Varttport=[Varttport;VarPort];
        pp=p*R ;
        ppp=pp<rr;
        prob=(1/1000)*((sum(ppp))) ;
            if (prob<=tt)
                rp=p*(expp');
                p=[p,rp,VarPort];
                M1=[M1;p];
            else; end;
    end
end
OOss1=optimss(M1);
```

```

if size(OOss1)==[0,0]
    mr=[];
else
    vp=OOss1(1,17);
    rp=OOss1(1,16);
    mr=[];
    for j=1:100000
        if and ( (r(j,1)>=rp) , (Varttport(j,1)<=vp) )
            p=[PORTF(j,:), r(j,1), Varttport(j,1)];
            mr=[mr;p];
        else; end;
    end;
    mr=[mr;OOss1];
end
end
y1=mr(1,16); x1=sqrt(mr(1,17));           % ces valeurs sont
y2=mr(2,16); x2=sqrt(mr(2,17));           % rapportées dans
y3=mr(3,16); x3=sqrt(mr(3,17));           % le tableau 4.5
[r, Var, pss]=contrssFF(0,0);
[r, Var, pss1]=contrssFF(0,05,0);
plot(sqrt(Var),r, '.',sqrt(pss(1,2)),pss(1,1), '.',sqrt(pss1(1,2)),pss1(1,1),
'. ', x1,y1,'o',x2,y2,'o', x3,y3,'x');
xlabel('Ecart-type');
ylabel('Espérance');

```

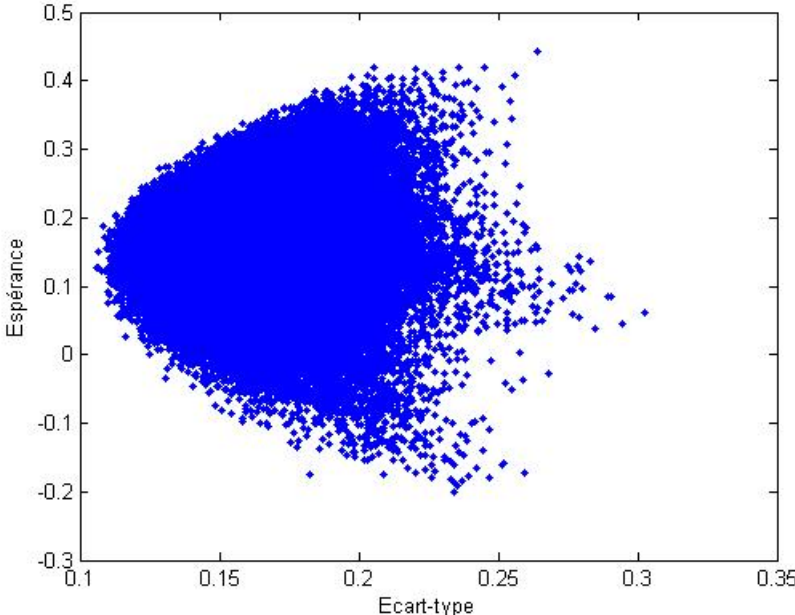
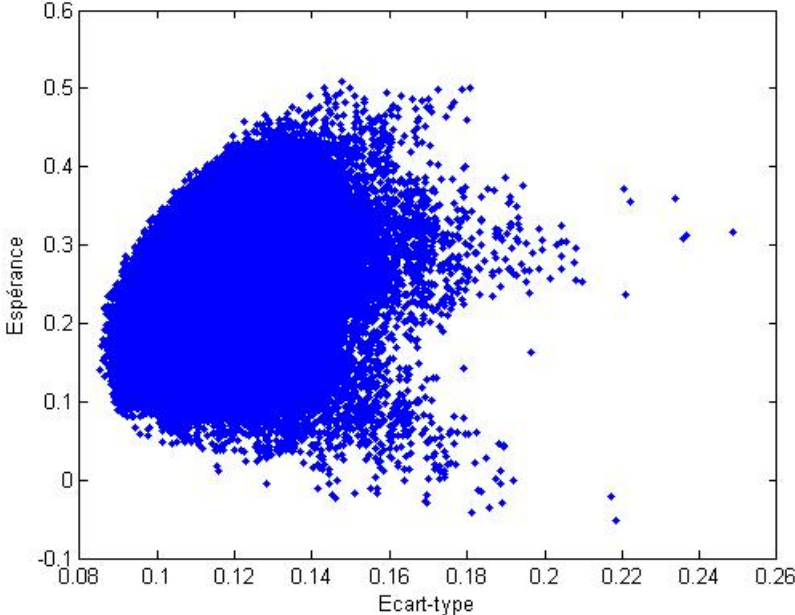
### Construction de la figure 4.9.

```

text(pmx1,pmx1,'Ps','Position',[0.131,0.437],'FontSize',10)
text(pmx1,pmx1,'Pm1','Position',[0.132,0.4435],'FontSize',10)
text(pmx1,pmx1,'Pm2','Position',[0.128,0.443],'FontSize',10)

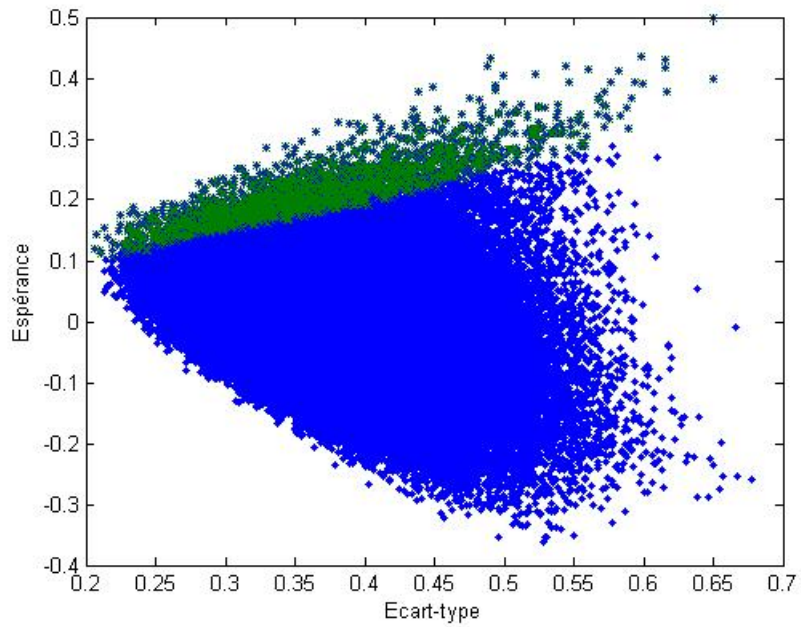
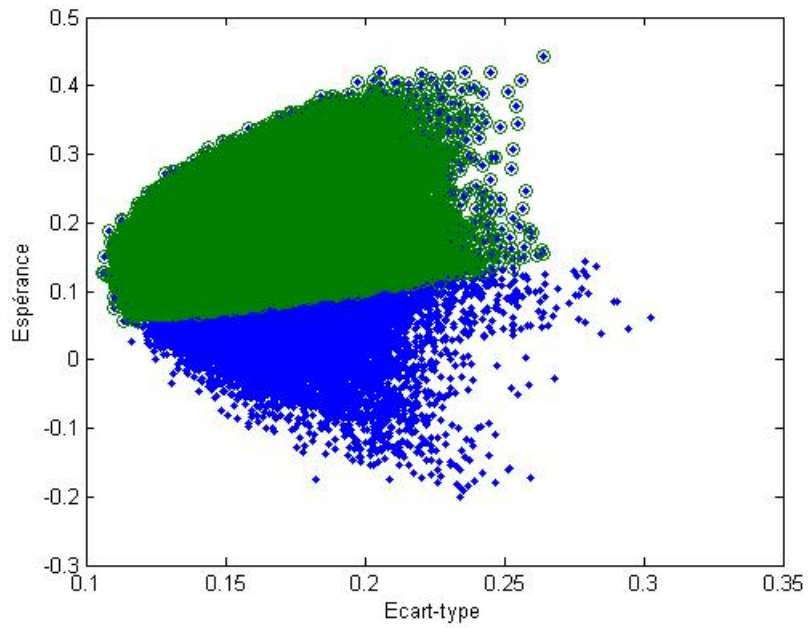
```

# C.7. Quelques illustrations



**Ensemble de tous les 100 000 portefeuilles**

**Figure C.1.**



**L'ensemble de tous les portefeuilles (en bleu)**

**L'ensemble de portefeuilles de sécurité  $r = 0$ ,  $a = 0,3$  (en vert)**

**Figure C.2.**



# Liste des tableaux

1.1. Expérience de Markowitz (1952b).....	36
1.2. Expérience de Markowitz (1952b), la suite.....	37
3.1. Paiements des actifs purs en date T.....	135
3.2. Différents cas d'équilibre .....	152
4.1. Les statistiques descriptives pour les rentabilités journalières.....	186
4.2. L'effet de la diversification.....	192
4.3. Répartition des portefeuilles dans l'ensemble P .....	200
4.4. Résultats de comparaison de portefeuilles optimaux.....	205
4.5. Pourcentage de portefeuilles optimaux identifiés.....	206
4.6. Les caractéristiques des portefeuilles optimaux .....	214
C.1.1. La composition de l'indice SBF120 au 1 juin 2001, 119 titres. ....	256
C.1.2. Les 40 titres sortis ou radiés de l'indice SBF120 sur la période du 1 juin 2001 au 1 juin 2007.....	257
C.1.3. Retraitement des données. ....	259
C.1.4. Les données manquantes. ....	259
C.1.5. Un exemple de retraitement des dividendes de l'action Peugeot. Le 1 juin 2004 intervient un dividende de 1,35 euro. ....	259
C.1.6. Corrections des rentabilités aux dividendes. ....	260
C.1.7. Les 71 titres restants utilisés pour notre étude.....	268
C.1.8. Changement du nom des titres sur la période du 1 juin 2001 au 1 juin 2007..	269
C.2.1. Statistiques descriptives (valeurs journalières).....	270
C.2.2. Statistiques descriptives (valeurs annuelles).....	271





# Table des figures

FIGURE 1.1. Fonction d'Utilité de Friedman et Savage (1948) .....	35
FIGURE 1.2. Fonction d'Utilité de Markowitz (1952b) .....	38
FIGURE 1.3. Value Fonction de Kahneman et Tversky (1979) .....	41
FIGURE 1.4. Fonctions de Pondération.....	49
FIGURE 1.5. Fonctions de Déformation de Lopes (1987) .....	69
FIGURE 1.6. Les paiements du portefeuille optimal BPT-SA.....	75
FIGURE 2.1. Le choix de l'agent VNM.....	98
FIGURE 2.2. Agent VNM vs. Agent BPT .....	101
FIGURE 2.3.....	103
FIGURE 2.4. Le choix de l'agent BPT .....	105
FIGURE 2.5.....	107
FIGURE 2.6.....	110
FIGURE 2.7.....	120
FIGURE 3.1.....	137
FIGURE 3.2.....	138
FIGURE 3.3.....	140
FIGURE 3.4.....	142
FIGURE 3.5.....	143
FIGURE 3.6.....	144
FIGURE 3.7.....	145
FIGURE 3.8.....	146
FIGURE 3.9.....	148
FIGURE 3.10.....	149
FIGURE 3.11.....	150
FIGURE 3.12.....	153
FIGURE 3.13.....	154

FIGURE 3.14.....	155
FIGURE 3.15.....	156
FIGURE 3.16.....	158
FIGURE 3.17.....	160
FIGURE 3.20.....	167
FIGURE 3.21.....	169
FIGURE 3.22.....	171
FIGURE 3.23.....	171
FIGURE 3.24.....	172
FIGURE 3.25.....	173
FIGURE 3.26.....	174
FIGURE 4.1.....	182
FIGURE 4.2.....	191
FIGURE 4.3.....	207
FIGURE 4.4.....	208
FIGURE 4.5.....	210
FIGURE 4.6.....	210
FIGURE 4.7.....	212
FIGURE 4.8.....	214
FIGURE 4.9.....	215
FIGURE A.1.....	240
FIGURE A.2.....	241
FIGURE A.3.....	247
FIGURE A.4.....	249
FIGURE B.1.....	254
FIGURE C.1.....	285
FIGURE C.2.....	286