

**INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
STRASBOURG**

Thèse

**Présentée pour obtenir le grade de DOCTEUR
de l'Université de Strasbourg**

Spécialité Mathématiques

Par Olivier DODANE

Théorèmes de Petri pour les courbes stables et dégénérescence du système d'équations du plongement canonique

Soutenue le **18 juin 2009** devant la Commission d'Examen:

Jean-François Boutot
Olivier Debarre
Qing Liu

rapporteur interne
examinateur

rapporteur externe

rapporteur externe
directeur de thèse

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

UMR 7501

Université de Strasbourg et CNRS

<http://www-irma.u-strasbg.fr>



Institut de Recherche
Mathématique Avancée

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
Université de Strasbourg et C.N.R.S. (UMR 7501)
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cedex

Théorèmes de Petri pour les courbes stables
et dégénérescence du système d'équations
du plongement canonique

par

Olivier Dodane

Mots-clés: plongement canonique - courbe stable - courbe hyperelliptique -
dégénérescence - Karl Petri

Classification mathématique: 01A60 - 14E25 - 14H10 - 13D02

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	3
I. INTRODUCTION	5
§ I.1. Karl Petri	5
§ I.2. Théorème de Petri classique	9
§ I.3. Principaux résultats	16
II. CAS D'UNE COURBE STABLE À NORMALISÉE HYPERELLIPTIQUE	19
§ II.1. Préliminaires	19
§ II.2. Générateurs de l'idéal de l'image et théorème de Petri	20
§ II.3. Questions de surjectivité	33
§ II.4. Simplifications des équations.	36
§ II.5. Dégénérescence.	38
III. CAS D'UNE COURBE STABLE DONT LE GRAPHE EST PLANAIRE	43
§ III.1. Généralités sur les graphes	43
§ III.2. Cadre de travail et notations	47
§ III.3. Graphe associé à une courbe stable	48
§ III.4. Construction d'une base de $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$	51
§ III.5. Générateurs de l'idéal canonique.	52
IV. CAS D'UNE COURBE STABLE RELATIVE	65
§ IV.1. Hypothèses de travail	65
§ IV.2. Modèle canonique et singularité	66
§ IV.3. Choix d'une base de $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}/S})$	67
§ IV.4. Cas où la surface \mathcal{C} est régulière.	70

§ IV.5. Considérations sur le cas général.	76
ANNEXES	77
§ A.1. Un argument combinatoire pour le théorème de Petri classique	77
§ A.2. Calculs relatifs au § II.4	84
BIBLIOGRAPHIE	87

AVANT-PROPOS

[...]
*Altesse, il m'a fallu des revers, des traverses,
De beaux soleils, coupés d'effroyables averses,
Être pauvre, être errant et triste, être cocu,
Et recevoir beaucoup de coups de pieds au cul,
Avoir des trous l'hiver à mes grègues de toiles,
Grelotter, et pourtant regarder les étoiles,
Pour devenir, après tous mes beaux jours enfuis,
Le philosophe illustre et profond que je suis.*
[...]

VICTOR HUGO, Fragments dramatiques, *Maglia*

Le travail présenté dans cette thèse a débuté avec le cours de D.E.A. de Rutger Noot durant l'année universitaire 2004/2005 à Strasbourg. Il s'agissait d'une introduction à la géométrie algébrique et aux courbes elliptiques. Le mémoire *Réduction semi-stable des courbes algébriques*, dirigé par R. Noot, a conclu cette année et engagé le travail de thèse sur la question du plongement canonique des courbes et des généralisations possibles du théorème de Petri.

On aura compris toute l'influence qu'a pu exercer R. Noot sur mon travail. Pédagogue attentif et patient, il a su tantôt me laisser naviguer dans les mathématiques voisines de mon sujet proprement dit, tantôt m'inciter à me recentrer sur ce sujet ; chercheur curieux et brillant, il n'a jamais manqué d'idées, de pistes ou d'intuitions. Je sais tout ce que je lui dois et tout ce que cette thèse lui doit. Qu'il soit assuré de ma profonde reconnaissance.

J'exprime également toute ma gratitude envers MM. Jean-François Boutot, Qing Liu et Johannes Nagel qui ont accompli avec diligence la tâche de rapporteur, dans des délais serrés. Leurs remarques ont permis d'améliorer sensiblement la clarté de ce mémoire. La

présence d'Olivier Debarre dans mon jury est un honneur ; sait-il combien sa compétence, son attention et sa sympathie sont appréciées par ses étudiants et ses collègues ?

Mes recherches sur la vie du mathématicien allemand Karl Petri ont abouti grâce au concours de M^{mes} Ulla Pfaffmann et Adelheid Radun et de M. Norbert Schappacher. Je les en remercie très chaleureusement.

Le quotidien à l'université est facilité par l'efficacité et la bonne humeur de M^{mes} Claudine Bonnin, Yvonne Borell, Sandrine Cerdan, Ferdaos Fassih, Josiane Moreau, Claudine Orphanides, Myriam Pepino, Simone Thouvenin et de MM. Aimal Amini, Daniel Gros-son, Serge Le Gurun et Philippe Sablon, sans oublier les employés chargés de l'entretien des locaux. Le personnel de la bibliothèque (notamment M^{mes} Christine Disdier, Christiane Molard et M. Grégory Thureau) a toujours répondu efficacement à mes questions. Je remercie également M^{me} Véronique Bertrand et MM. Michael Essa, Pierre Navaro, Alexis Palaticky et Alain Sartout de l'équipe informatique.

De nombreuses personnes m'ont accompagné et supporté, dans tous les sens du terme, depuis le début de mon travail de thèse. Je veux ici saluer Étienne et Céline A., Gilles et Céline G., Manu R. et Lize, Nicolas et Perrine, Nermin, Manu B. et Géraldine, Marie-Laure, Julien, Cécile, Franck, Frédéric, Patrick, Manu V., Anthony, Émile, Raphaël, . . . et les assurer de toute mon amitié.

Mes parents Mireille et Pierre, mon frère Sylvain et Céline m'ont apporté un soutien constant sans lequel il est certain que cette thèse n'aurait même jamais été entreprise. J'ai pu aussi compter sur les encouragements et la bienveillance de ma « seconde » famille : Marie-Claude, Marc, Olivia, Noémie, Pierre et, bien sûr, ma chère Caroline.

À la mémoire de mes grands-parents

À la mémoire de Damien Charberet

CHAPITRE I

INTRODUCTION

§ I.1. Karl Petri



*Les droits sur cette image sont détenus par un tiers
La modification de cette partie de la thèse a été effectuée par le
Service Commun de la Documentation de l'Université de Strasbourg*

PHOTOGRAPHIE I.1 – Karl Petri (début du XX^e siècle)

La postérité a accordé au mathématicien allemand Karl Petri une place de choix : on parle de *théorème de Petri* ([SD73, Har77, Noo88, Sch91]), de *schéma de Petri* ([Lit98]), de *conjecture de Petri* ([Gie82, EH83]), etc. Pourtant, Karl Petri n'eut jamais de poste académique de chercheur : il pratiqua la recherche parallèlement à son métier d'ensei-

gnant. On comprend dès lors que les informations le concernant soient rares et très partielles. Il a publié, entre 1904 et 1935, cinq articles (dont sa thèse).

On se propose ici de fournir de nouveaux éléments de la biographie de Karl Petri. Ceux-ci ont pu être obtenus de la façon suivante. Petri signe certains de ses articles ainsi :

« K. Petri in Wollmesheim (Pfalz) ».


Wollmesheim est un village allemand proche de Landau (Rhénanie-Palatinat, Rheinland-Pfalz en allemand). La mairie de ce village a fait suivre notre demande de renseignements à l'une de ses habitantes, M^{me} Ulla Pfaffmann, qui a su nous orienter vers M^{me} Adelheid Radun, petite-fille de Karl Petri. La fille unique de Karl Petri a quitté l'Allemagne pour s'établir en Suisse peu après le décès de son père.

La plupart des informations contenues dans ce qui suit nous ont été gracieusement transmises par M^{me} Radun ; les documents (photographies, fac-similé, . . .) produits dans ce § proviennent de ses archives personnelles. L'expertise de Norbert Schappacher sur les mathématiques et les mathématiciens allemands a été déterminante.

Nous avons également utilisé les archives de Zentralblatt MATH.

I.1.1. BIOGRAPHIE

Karl Petri naquit le 13 septembre 1881 à Altleiningen (Rhénanie-Palatinat, Allemagne). Fils de Jakob Petri (pasteur en Palatinat) et de Julie Petri (née Stepp), il eut deux frères et deux sœurs.



*Les droits sur cette image sont détenus par un tiers
La modification de cette partie de la thèse a été effectuée par le
Service Commun de la Documentation de l'Université de Strasbourg*

PHOTOGRAPHIE I.2 – Karl Petri, à droite, et son frère Ludwig (début du XX^e siècle)

Sa femme Charlotte Walther donna naissance en 1914 à leur fille unique également prénommée Charlotte.

Petri effectua sa scolarité à Landau jusqu'à l'automne 1899, avant de rejoindre l'université de Munich (Ludwig-Maximilians-Universität) en section *Mathématiques et Physique*.

**Les droits sur cette image sont détenus par un tiers
La modification de cette partie de la thèse a été effectuée par le
Service Commun de la Documentation de l'Université de Strasbourg**

PHOTOGRAPHIES I.3 – Karl Petri et sa fille Charlotte (1924 et 1931)

Il y soutint sa thèse le 10 mars 1903 sous la direction de Ferdinand von Lindemann (Facsimilé I.4 : on y apprend notamment qu'il obtint l'excellente mention *summa cum laude*). Durant son séjour à Munich, il fréquenta également la Technischen Hochschule en tant qu'auditeur libre (*Hospitant*).

On ignore l'activité qu'exerça Petri entre 1903 et la Première Guerre mondiale. En revanche, on sait qu'il participa à celle-ci dans les environs de Metz et qu'il y fut blessé par asphyxie.

À la rentrée scolaire 1920/1921, Petri occupa un poste de professeur de mathématiques et physique à l'Oberrealschule de Landau, avant d'être transféré au lycée de Landau le 1^{er} mai 1921. C'est à cette époque qu'il reprit la recherche en mathématiques et la publication d'articles. Le 1^{er} septembre 1934, il devint proviseur (*Oberstudiendirektor*) de l'Oberrealschule. La notice nécrologique du journal local [D.55] mentionne son action déterminée à la reconstruction de l'Oberrealschule après la Seconde Guerre mondiale. Il prit sa retraite à la rentrée 1949/1950.

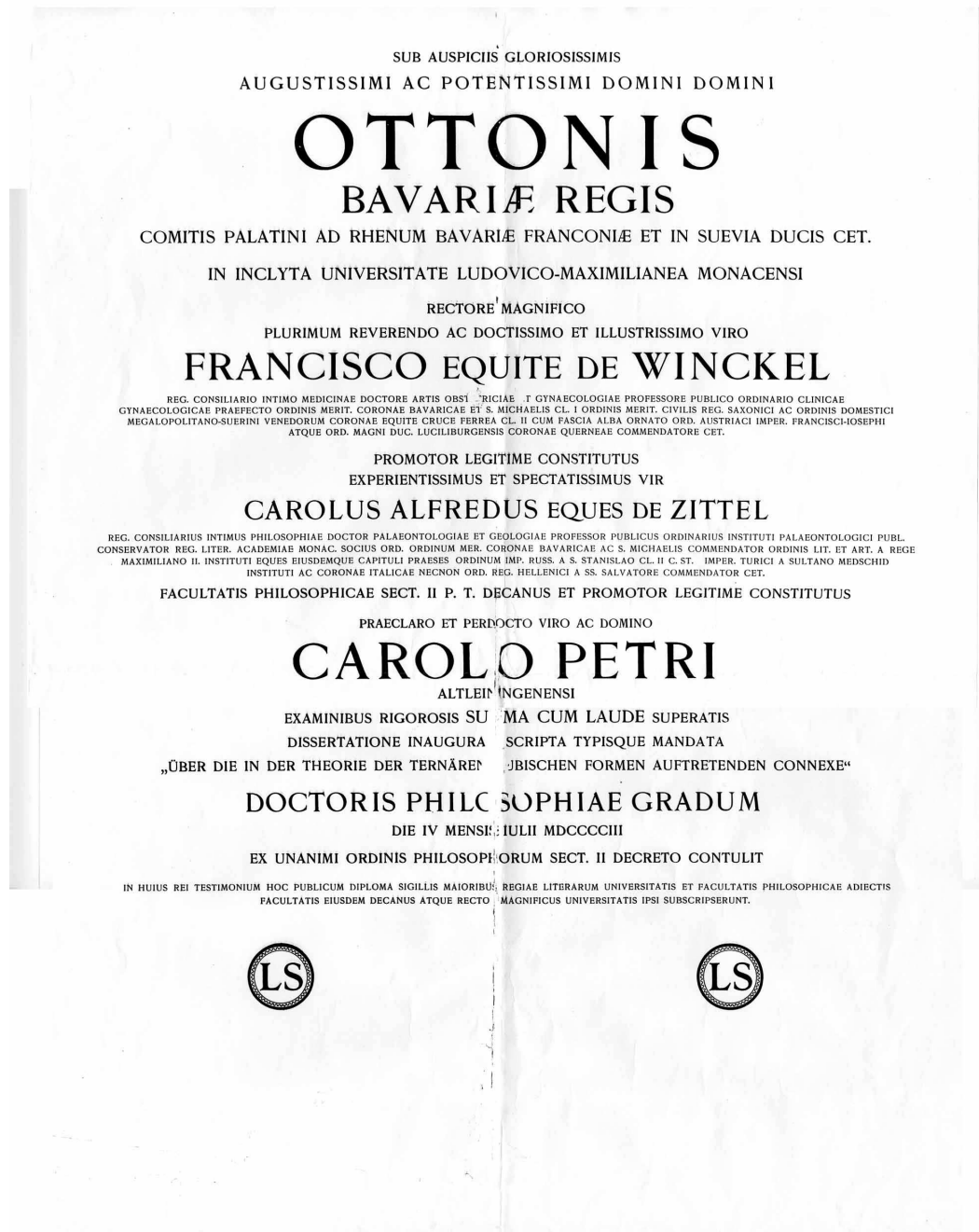
Karl Petri mourut subitement le 17 mai 1955 à Landau.

L'alpinisme et la photographie furent, avec les mathématiques, les principaux centres d'intérêt de Petri.

I.1.2. ACTIVITÉS MATHÉMATIQUES

Petri publia cinq articles : sa thèse [Pet04] puis [Pet23], [Pet25], [Pet33] et [Pet35] ; tous concernent la géométrie algébrique. Il est avéré qu'il eut des contacts avec des mathématiciens éminents, notamment Max et Emmy Noether (cf. les remerciements formulés dans [Pet23]).

Les travaux dont il est question dans cette thèse font suite à [Pet23]. Cet article contient le théorème que nous appelons désormais *théorème de Petri*.



FAC-SIMILÉ I.4 – Diplôme de doctorat de Petri

**Les droits sur cette image sont détenus par un tiers
La modification de cette partie de la thèse a été effectuée par le
Service Commun de la Documentation de l'Université de Strasbourg**

PHOTOGRAPHIE I.5 – Karl Petri entouré de ses élèves (non daté)

§ I.2. Théorème de Petri classique

On donne dans ce § une introduction au théorème de Petri dans le cadre *classique*, c'est-à-dire celui des courbes lisses.

I.2.1. DÉFINITIONS, ÉNONCÉS, HISTORIQUE

Datant de 1923 ([Pet23]), le théorème de Petri a d'abord été formulé dans le langage de la géométrie algébrique dite classique. On donne un énoncé dans le langage moderne.

Soit k un corps algébriquement clos¹. On appellera *courbe* tout schéma de dimension 1, réduit, connexe et propre sur k . Une courbe est dite *lisse* si elle est régulière en tout point. Soit \mathcal{C} une courbe lisse sur k ; on note $\Omega_{\mathcal{C}/k}$ (ou simplement $\Omega_{\mathcal{C}}$, voire Ω) le faisceau des différentielles régulières sur \mathcal{C} (cf. [Har77, § II.8]) et $g = \dim_k (H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}))$ le *genre* de \mathcal{C} .

Dès que $g \geq 2$, le faisceau $\Omega_{\mathcal{C}}$ est sans point de base ([Har77, lemma IV.5.1 p. 341]). On a donc un morphisme $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{P}_k^{g-1}$ naturellement associé à \mathcal{C} .

Une courbe \mathcal{C} est dite *hyperelliptique* s'il existe un morphisme fini $f: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ de degré 2. Une telle courbe est alors munie d'une involution, dite *involution hyperelliptique*, qui permute les points $x, y \in \mathcal{C}$ tels que $f(x) = f(y)$.

Si $g = 2$, le morphisme $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ déduit de $\Omega_{\mathcal{C}}$ est un morphisme fini de degré 2, de sorte

1. Dans ce mémoire, on se placera toujours sur un corps algébriquement clos. En réalité, cette hypothèse n'est pas toujours nécessaire. Par exemple, les résultats de plongement et de surjectivité de l'application de Noether sont valables sur tout corps de base. Les résultats de type « Petri » pour les courbes lisses sont probablement valables en prenant un corps infini, mais pour les courbes stables, il faut supposer que les points singuliers sont rationnels.

que \mathcal{C} est hyperelliptique. D'autre part, si \mathcal{C} n'est pas hyperelliptique, $\Omega_{\mathcal{C}}$ est très ample ([Har77, prop. IV.5.2 p. 341]); on a alors un plongement $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{P}_k^{g-1}$ appelé *plongement canonique* de \mathcal{C} . Celui-ci est entièrement déterminé par le choix d'une base de $\mathbf{H}^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}})$. Sans un tel choix, le plongement canonique de \mathcal{C} est défini à un automorphisme de \mathbf{P}_k^{g-1} près. L'image de \mathcal{C} dans \mathbf{P}_k^{g-1} est une courbe de degré $(2g - 2)$.

L'application naturelle

$$\Phi: \text{Sym } \mathbf{H}^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}) \longrightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{H}^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes n})$$

est appelée *application de Noether*. On dispose à son sujet du résultat suivant ([SD73, th. 2.10 p. 164]; l'article original est [Noe80]).

Théorème (Max Noether). — *Soit \mathcal{C} une courbe lisse de genre $g \geq 3$. L'application naturelle $\Phi: \text{Sym } \mathbf{H}^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}) \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{H}^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes n})$ est surjective dès que \mathcal{C} n'est pas hyperelliptique.*

Le noyau de Φ est l'*idéal canonique* de \mathcal{C} ; on le note \mathbf{I} . Cet idéal est gradué :

$$\mathbf{I} = \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{I}_n,$$

et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, \mathbf{I}_n est un k -espace vectoriel de dimension finie.

On déduit du théorème de Noether et de la formule de Riemann-Roch une formule pour la dimension des espaces \mathbf{I}_n :

$$\dim_k(\mathbf{I}_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n = 1, \\ \binom{g+n-1}{n} - (2n-1)(g-1) & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Exemples. — Cette formule permet de décrire l'image du plongement canonique dans les cas $g = 3$ et $g = 4$.

a) On sait que l'image canonique d'une courbe de genre 3 est une courbe de degré 4 dans \mathbf{P}_k^2 . Les formules ci-dessus donnent

$$\dim_k(\mathbf{I}_2) = \dim_k(\mathbf{I}_3) = 0 \quad \text{et} \quad \dim_k(\mathbf{I}_4) = 1.$$

L'image canonique de \mathcal{C} n'est contenue dans aucune hypersurface quadrique.

b) Si $g = 4$, on a $\dim_k(\mathbf{I}_2) = 1$; soit $Q \subset \mathbf{P}_k^3$ une quadrique contenant l'image de \mathcal{C} . Celle-ci est irréductible et comme $\dim_k(\mathbf{I}_3) = 5$, il existe une cubique irréductible C contenant l'image de \mathcal{C} et non contenue dans Q . Enfin, on sait que l'image de \mathcal{C} est de degré 6, donc c'est l'intersection complète de Q et C . Voir aussi [Har77, ex. IV.5.2.2].

Théorème (Babbage-Chisini-Enriques). — *On suppose que $k = \mathbf{C}$. Soit \mathcal{C} une courbe lisse non hyperelliptique de genre $g \geq 4$. L'image de \mathcal{C} via le plongement canonique $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{P}_k^{g-1}$ est une intersection d'hypersurfaces quadriques et cubiques. Les seuls cas pour lesquels cette image n'est pas une intersection de quadriques seulement sont les suivants :*

a) \mathcal{C} est une courbe plane de degré 5 (dans ce cas, $g = 6$);

b) \mathcal{C} est trigonale (i.e., il existe un morphisme fini $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{P}_k^1$ de degré 3).

Remarque. — On peut donner une formulation à l'aide de l'idéal canonique I de \mathcal{C} . Celui-ci est engendré par I_2 et I_3 ; si \mathcal{C} n'est ni trigonale, ni plane de degré 5, l'idéal I est engendré par I_2 .

Ce théorème trouve ses origines dans un article d'Enriques [Enr19]. Poursuivi par Chisini et Enriques entre 1915 et 1934 ([EC85a, EC85b] : ces références sont des rééditions), l'argument est complété par Babbage [Bab39]. Petri a abordé la question d'un point de vue purement algébrique, sans référence à la géométrie ; il se place sur un corps de caractéristique nulle. La transcription de l'argument de Petri dans le langage moderne, obtenue par Saint-Donat dans [SD73], a permis de supprimer l'hypothèse sur la caractéristique de k .

Le théorème de Babbage-Chisini-Enriques est souvent cité sous le nom de théorème de Petri (p. ex. dans [Bea05] et [Har77]). Si Petri fournit en effet une preuve de ce résultat, son principal apport réside dans la donnée de générateurs explicites pour l'idéal canonique I : il exhibe des quadriques $f_{i,j}$ et des cubiques $G_{\ell,m}$ (ces notations seront précisées plus loin) qui engendrent I . Plus important encore, Petri fournit des relations (*syzygies*) entre ces quadriques et ces cubiques. Ce point de vue préfigure les bases de Gröbner (voir p. ex. [Sch91, Lit98]).

Théorème (Petri). — *Soit \mathcal{C} une courbe lisse non hyperelliptique de genre $g \geq 4$. Les quadriques $f_{i,j}$ et les cubiques $G_{\ell,m}$ engendrent l'idéal canonique de \mathcal{C} . Si \mathcal{C} n'est ni une courbe plane de degré 5, ni trigonale, les cubiques $G_{\ell,m}$ sont dans l'idéal engendré par les quadriques $f_{i,j}$.*

Pour compléter les références concernant le théorème de Petri, citons [ACGH85, AS78, Mum75, Šok71].

L'approche de Petri est une approche « par l'intérieur », au sens où elle consiste à exhiber des éléments de l'idéal canonique (le plus souvent en utilisant des méthodes d'algèbre linéaire fondées sur le théorème de Noether) puis à montrer que ceux-ci sont des générateurs. L'argument de Petri est souvent appelé *analyse de Petri*. On en donne les grandes lignes dans la section suivante.

Il faut signaler qu'une approche « par l'extérieur » a été mise en œuvre en faisant davantage appel à l'algèbre homologique. Dans ce contexte apparaissent les notions de nombres de Betti, de syzygies, d'indice de Clifford, etc., préalables à l'énoncé de la conjecture de Green ([Gre84a, Gre84b]). Un des premiers résultats dans cette voie est le théorème des syzygies de Hilbert ([Eis05, th.1.1 p. 3]). Les puissants outils d'algèbre homologique (et notamment la cohomologie de Koszul) permettent d'obtenir certains résultats très rapidement. Par exemple, le théorème de Babbage-Chisini-Enriques (pour un corps algébriquement clos k quelconque) se traduit par l'annulation de certains nombres de Betti, et se déduit de la dualité de Serre et de l'unicité de la résolution libre minimale de l'anneau canonique $\bigoplus_{n \in \mathbf{N}} H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes n})$ ([Sch91, cor. 1.3.c]). On trouve une introduction à cette approche, par exemple, dans [Eis05] et [Bea05].

Dans le présent travail, on utilise des techniques proches de celles de Petri et Saint-Donat.

I.2.2. ANALYSE DE PETRI

Afin de mettre le lecteur dans l'ambiance des raisonnements utilisés dans les chapitres suivants, on rappelle ici les étapes essentielles de l'analyse de Petri, telle qu'elle est exposée dans [SD73] et [ACGH85]. On se contente de donner les techniques permettant de construire les quadriques $f_{i,j}$ et les cubiques $G_{\ell,m}$ qui, *in fine*, engendrent l'idéal canonique.

On se donne une courbe lisse non hyperelliptique \mathcal{C} sur k de genre $g \geq 4$ et on note $\Omega_{\mathcal{C}}$ le faisceau des différentielles régulières sur \mathcal{C} .

On commence par fixer des points A_1, \dots, A_g sur \mathcal{C} , *en position générale*; cela signifie en particulier que chaque espace $E_i = H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}(-\sum_{j \neq i} A_j))$ est de dimension 1. Pour chaque entier i tel que $1 \leq i \leq g$, on choisit une forme $w_i \in E_i$ qui engendre E_i . Alors (w_1, \dots, w_g) est une base de $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}})$.

Remarque. — Les points A_1, \dots, A_g étant en position générale, on peut supposer que les diviseurs (w_i) consistent chacun en $(2g - 2)$ points distincts et que leurs supports sont deux à deux disjoints. Cette hypothèse technique permet de connaître précisément les ordres d'annulation des produits $\prod_{\nu=1}^g \lambda_{\nu} w_{\nu}^{e_{\nu}}$.

Par ailleurs, soit D le diviseur effectif

$$D = A_1 + \dots + A_g.$$

Une base de $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}(-D))$ est donnée par (w_1, w_2) .

Quadriques

On construit une base de $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 2})$ adaptée à l'inclusion

$$H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 2}(-D)) \subset H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 2}).$$

$2g-1$ $3g-3$

(Les dimensions des espaces en jeu sont indiquées sur la seconde ligne.)

D'après un lemme de Castelnuovo ([SD73, (2.11)], [Mum70]; [ACGH85] donne un argument légèrement différent basé sur un *base point free pencil trick lemma*), l'application

$$H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}) \otimes H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}(-D)) \longrightarrow H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 2}(-D))$$

est surjective. On en déduit que les $(2g - 1)$ éléments

$$\begin{aligned} w_3 w_1, \dots, w_g w_1, \\ w_3 w_2, \dots, w_g w_2, \\ w_1^2, w_1 w_2, w_2^2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

engendrent $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 2}(-D))$; ils en forment donc une base.

Il manque $(g - 2)$ éléments pour obtenir une base de $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 2})$. On prend

$$w_3^2, \dots, w_g^2.$$

(Pour voir que ces éléments sont linéairement indépendants dans $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 2})$ modulo $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 2}(-D))$, il suffit d'évaluer aux points A_3, \dots, A_g .)

On dispose ainsi d'une base de $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 2})$:

$$\begin{aligned} &w_3w_1, \dots, w_gw_1, \\ &w_3w_2, \dots, w_gw_2, \\ &w_1^2, w_1w_2, w_2^2, \\ &w_3^2, \dots, w_g^2. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Soient maintenant i, j des entiers tels que $3 \leq i \neq j \leq g$. La 2-forme w_iw_j est un élément de $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 2}(-D))$ et elle s'annule en A_1 et A_2 , donc, d'après la base (1.1) de $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 2}(-D))$, on peut l'écrire sous la forme

$$w_iw_j = \sum_{s=3}^g a_{s,i,j}w_s + b_{i,j}w_1w_2, \tag{1.3}$$

avec $a_{s,i,j} = \lambda_{s,i,j}w_1 + \mu_{s,i,j}w_2$, $\lambda_{s,i,j}, \mu_{s,i,j}, b_{i,j} \in k$. Ainsi, l'élément ²

$$f_{i,j} = w_i \cdot w_j - \sum_{s=3}^g a_{s,i,j} \cdot w_s - b_{i,j}w_1 \cdot w_2 \in \text{Sym}^2 H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}})$$

est un élément de I_2 . On exhibe ainsi $(g - 2)(g - 3)$ quadriques qui vérifient

$$f_{i,j} = f_{j,i}.$$

Les $\binom{g-2}{2}$ quadriques $(f_{i,j})_{3 \leq i < j \leq g}$ sont linéairement indépendantes dans I_2 , qui est de dimension $\binom{g-2}{2}$; elles forment donc une base de I_2 .

Cubiques

On cherche à construire une base de $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 3})$ adaptée à l'inclusion

$$H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 3}(-2D)) \subset H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 3}(-D)) \subset H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 3}).$$

$3g-1 \qquad\qquad\qquad 4g-3 \qquad\qquad\qquad 5g-5$

L'application

$$H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 2}) \otimes H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}(-D)) \longrightarrow H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 3}(-D))$$

2. On note $w_i \cdot w_j$ le produit dans $\text{Sym} H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}})$.

est surjective (lemme de Castelnuovo). Compte-tenu de (1.2) et (1.1), on en déduit que les éléments

$$\begin{aligned}
& w_3^2 w_1, \dots, w_g^2 w_1, \\
& w_3^2 w_2, \dots, w_g^2 w_2, \\
& w_3 w_1^2, \dots, w_g w_1^2, \\
& w_3 w_1 w_2, \dots, w_g w_1 w_2, \\
& w_3 w_2^2, \dots, w_g w_2^2, \\
& w_1^3, w_1^2 w_2, w_1 w_2^2, w_2^3
\end{aligned} \tag{1.4}$$

engendrent $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 3}(-D))$. On montre que les $(3g-2)$ éléments des quatre dernières lignes dans (1.4) sont linéairement indépendants sur k . Soit W le sous-espace qu'ils engendrent. On a $W \subset H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 3}(-2D))$, de sorte qu'il manque un élément seulement pour avoir une base de $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 3}(-2D))$. Soit η un tel élément.

Lemme. — *Soit i un entier tel que $3 \leq i \leq g$. L'espace $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}(-D - A_i))$ est de dimension 1 et si α est un élément de cet espace, on a $\alpha w_i^2 \in H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 3}(-2D))$ mais $\alpha w_i^2 \notin W$.*

Démonstration. — Voir [SD73, lemma 3.8] ou [ACGH85, p. 128–129]. \square

Fixons un entier i tel que $3 \leq i \leq g$. Il existe une unique forme $\alpha_i \in H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}(-D - A_i))$ telle que

$$\alpha_i w_i^2 = \eta + \theta_i \tag{1.5}$$

avec $\theta_i \in W$. Choisissons une forme $\beta_i \in H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}(-D))$ telle que (α_i, β_i) constitue une base de $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}(-D))$. Une base de $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 3}(-D))$ est alors donnée par

$$\begin{aligned}
& \beta_3 w_3^2, \dots, \beta_g w_g^2, \\
& \eta, \\
& w_3 w_1^2, \dots, w_g w_1^2, \\
& w_3 w_1 w_2, \dots, w_g w_1 w_2, \\
& w_3 w_2^2, \dots, w_g w_2^2, \\
& w_1^3, w_1^2 w_2, w_1 w_2^2, w_2^3,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

les cinq dernières lignes formant une base de $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 3}(-2D))$. Pour compléter (1.6) en une base de $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes 3})$, il suffit d'ajouter les éléments w_3^3, \dots, w_g^3 .

Soient maintenant ℓ, m des entiers tels que $3 \leq \ell \neq m \leq g$. D'après (1.5), on a

$$\eta = \alpha_{\ell} w_{\ell}^2 - \theta_{\ell} = \alpha_m w_m^2 - \theta_m,$$

de sorte que si l'on pose

$$G_{\ell, m} = \alpha_{\ell} \cdot w_{\ell} \cdot w_{\ell} - \alpha_m \cdot w_m \cdot w_m + \theta_m - \theta_{\ell} \in \text{Sym}^3 H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}),$$

on a $G_{\ell,m} \in I_3$. Bien sûr les cubiques ainsi construites ne sont pas linéairement indépendantes. Elles vérifient les relations de cocycle

$$\begin{cases} G_{\ell,m} + G_{m,\ell} = 0, \\ G_{\ell,m} + G_{m,n} = G_{\ell,n}. \end{cases}$$

Le sous-espace vectoriel de I_3 engendré par les cubiques $G_{\ell,m}$ est de dimension $(g-3)$: il est engendré par exemple par les éléments

$$G_{3,g}, G_{4,g}, \dots, G_{g-1,g}.$$

Remarques. —

- a) On peut montrer que le sous-espace de I_3 engendré par I_2 est de codimension $(g-3)$. Il en découle immédiatement que les $f_{i,j}$ et les $G_{\ell,m}$ engendrent I_3 . Plus généralement, on peut mettre en place un argument combinatoire montrant que les $f_{i,j}$ et les $G_{\ell,m}$ engendrent I ; voir l'annexe A.1.
- b) La construction de bases pour les espaces $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes n})$ pour $n \geq 4$ se fait en suivant la démarche initiée pour les cas $n=2$ et $n=3$. En fait, seul le cas $n=3$ nécessite un traitement séparé avec le recours au lemme donné plus haut. Pour $n \geq 4$, on obtient itérativement une base de $H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes n})$ adaptée aux inclusions

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes n}((1-n)D)) &\subset H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes n}((2-n)D)) \subset \dots \\ &\quad \substack{(2n-1)(g-1)-(1-n)(g-2) & (2n-1)(g-1)-(2-n)(g-2)} \\ &\dots \subset H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes n}(-D)) \subset H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}^{\otimes n}). \\ &\quad \substack{(2n-1)(g-1)-(g-2) & (2n-1)(g-1)} \end{aligned}$$

Syzygies

Pour terminer cette section, on donne la fameuse *identité de Petri* et les raisons pour lesquelles celle-ci permet de conclure la démonstration du théorème de Petri avec le traitement des exceptions.

On conserve les notations introduites plus haut et on suppose que $g \geq 5$ (les cas $g=3$ et $g=4$ sont déjà connus). Soient i, j, ℓ des entiers deux à deux distincts tels que $3 \leq i, j, \ell \leq g$. D'après (1.3), on a

$$a_{\ell,i,j}w_{\ell} = w_iw_j - \sum_{\substack{s=3 \\ s \neq \ell}}^g a_{s,i,j}w_s - b_{i,j}w_1w_2.$$

Dans le membre de droite, chaque terme s'annule à l'ordre ≥ 2 en A_{ℓ} ; on en déduit que $a_{\ell,i,j}$ s'annule à l'ordre ≥ 2 en A_{ℓ} . En d'autres termes,

$$a_{\ell,i,j} \in H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}(-D - A_{\ell})).$$

Or cet espace est de dimension 1, engendré par α_{ℓ} . Il existe donc un scalaire $\rho_{i,j,\ell} \in k$ tel que

$$a_{\ell,i,j} = \rho_{i,j,\ell}\alpha_{\ell}.$$

Proposition (Identité de Petri). — Soient i, j, ℓ des entiers deux à deux distincts tels que $3 \leq i, j, \ell \leq g$. Avec les conventions $f_{j,j} = f_{\ell,\ell} = 0$, on a

$$f_{i,j} \cdot w_\ell - f_{i,\ell} \cdot w_j = \sum_{s=3}^g (a_{s,i,\ell} \cdot f_{s,j} - a_{s,i,j} \cdot f_{s,\ell}) + \rho_{i,j,\ell} G_{j,\ell}.$$

De plus, les scalaires $\rho_{i,j,\ell}$ sont symétriques en i, j, ℓ .

Il suit de cette proposition que si $\rho_{i,j,\ell} \neq 0$, la cubique $G_{j,\ell}$ est dans l'idéal engendré par les quadriques $(f_{i,j})_{3 \leq i \neq j \leq g}$. La fin de l'analyse de Petri consiste alors à étudier les scalaires $\rho_{i,j,\ell}$: si l'un d'eux est non nul, l'idéal canonique est engendré par I_2 ; sinon, l'intersection des quadriques de I_2 a une unique composante irréductible F contenant l'image canonique de \mathcal{C} . On a alors $\dim F = 2$, $\deg F = g - 2$ et on en déduit (en suivant des arguments de Enriques-Chisini-Babbage) que \mathcal{C} est soit trigonale, soit plane de degré 5.

§ I.3. Principaux résultats

On peut chercher des généralisations du théorème de Petri dans plusieurs directions. La voie la plus empruntée est certainement celle qui mène à la conjecture de Green (Green, Schreyer, Voisin, Hirschowitz, Ramanan, Teixidor I Bigas, Aprodu, etc.) ; les auteurs se placent alors le plus souvent sur \mathbf{C} , la conjecture de Green étant fautive en caractéristique 2 ([Sch86, Sch91]) et, vraisemblablement, aussi en toute caractéristique positive. Arbarello et Sernesi [AS78] s'intéressent au cas du plongement associé à un diviseur *spécial* sans point de base.

Dans le présent travail sont explorées trois cas de courbes stables pour lesquelles on cherche à généraliser le théorème de Petri.

Le chapitre II est consacré aux courbes stables ayant un seul point double et dont la normalisée est hyperelliptique. Soit \mathcal{C}' une courbe hyperelliptique de genre $(g - 1)$ et soit \mathcal{C} la courbe stable de genre g obtenue à partir de \mathcal{C}' en identifiant en un point double ordinaire deux points non conjugués sous l'involution hyperelliptique. Les sections du faisceau canonique $\omega_{\mathcal{C}}$ donnent une immersion fermée de \mathcal{C} dans \mathbf{P}_k^{g-1} . Dès lors, on peut mettre en œuvre un raisonnement proche de l'analyse de Petri : on exhibe des bases pour les espaces $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}^{\otimes n})$, $n \geq 1$ et, à partir de celles-ci, on obtient des quadriques et des cubiques dont on montre qu'elles engendrent l'idéal canonique (th. II.13). Au passage, ces constructions donnent des résultats de surjectivité, dont un analogue du théorème de Noether pour les courbes hyperelliptiques (th. II.18, th. II.19). Dans une dernière partie, on examine un cas de dégénérescence.

Dans le chapitre III, on s'intéresse aux courbes stables sur un corps k . On introduit d'abord le graphe G associé à une courbe stable \mathcal{C} . Un lien naturel est explicité entre $H_1(G, \mathbf{Z})$ et les formes différentielles sur \mathcal{C} . Dans le cas où le graphe est planaire, et sous

des hypothèses peu restrictives, on obtient d'abord une liste de quadriques et cubiques dans l'idéal canonique de \mathcal{C} , puis on établit un théorème de Petri (th. III.11 et cor. III.12). On aborde dans le chapitre IV le cas d'une courbe stable relative : \mathcal{C} est une courbe sur un anneau de valuation discrète R dont la fibre générique est lisse et la fibre spéciale est une courbe stable constituée de deux composantes irréductibles se coupant en un seul point. La première difficulté est de prolonger l'application rationnelle $\varphi: \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbf{P}_R^{g-1}$ en une application $\tilde{\varphi}: \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{P}_R^{g-1}$, où $\tilde{\mathcal{C}}$ est l'éclaté de \mathcal{C} le long d'un certain idéal \mathcal{I} dont le support du sous-schéma fermé correspondant est le point double de la fibre spéciale. Dans le cas où la surface \mathcal{C} est régulière, ce prolongement est obtenu et l'on parvient à établir un théorème de Petri pour l'image de $\tilde{\varphi}$ (th. IV.8).

Les chapitres II, III et IV sont indépendants.

CHAPITRE II

CAS D'UNE COURBE STABLE À NORMALISÉE HYPERELLIPTIQUE

“Since the hyperelliptic case is so simple we will normally exclude it from consideration, [...]”
[Eis05, p. 181]

§ II.1. Préliminaires

II.1.1. NOTATIONS ET HYPOTHÈSES

Soit k un corps algébriquement clos de caractéristique quelconque et soit \mathcal{C}' une courbe hyperelliptique lisse sur k de genre $(g - 1)$, où $g \geq 3$ est un entier. On note \mathcal{O} le faisceau structural sur \mathcal{C}' et Ω celui des différentielles régulières. Le cas des courbes hyperelliptiques de genre ≥ 2 est le seul pour lequel les sections globales de Ω ne fournissent pas un plongement de \mathcal{C}' dans \mathbf{P}_k^{g-2} (cf. [Har77, prop. IV.5.2 p. 341]).

Dans toute la suite, un point $x \in \mathcal{C}'$ est fixé. L'involution hyperelliptique sur \mathcal{C}' est notée $y \mapsto y'$. Soit D le diviseur $x + x'$ sur \mathcal{C}' . On sait (cf. [Har77, prop. IV.5.3 p. 342]) que $\Omega \simeq \mathcal{O}((g - 2)D)$; on choisit une base (w_0, \dots, w_{g-2}) de $H^0(\mathcal{C}', \Omega)$ adaptée à cet isomorphisme, c'est-à-dire que l'ordre d'annulation de w_j (vue comme une forme différentielle) en x est $(g - 2 - j)$. Ainsi, w_{g-2} ne s'annule pas en x .

II.1.2. PLONGEMENT

Les sections globales de Ω ne suffisent pas pour distinguer les points conjugués de \mathcal{C}' . Dans les § II.1, II.2, II.3, II.4, un point $y \in \mathcal{C}'$ distinct de x et de x' est fixé. D'après la formule de Riemann-Roch sur \mathcal{C}' , on a

$$h^0(\Omega(x + y)) = h^0(\mathcal{O}(-x - y)) + \deg(\Omega(x + y)) + 1 - (g - 1) = g = h^0(\Omega) + 1.$$

Il existe donc une forme différentielle η ayant des pôles simples en x et y et aucun autre pôle. Autrement dit, en notant ω le faisceau des 1-formes sur \mathcal{C}' ayant au plus des pôles simples en x et y , on a $h^0(\omega) = g$, et une base de $H^0(\mathcal{C}', \omega)$ est donnée par $(w_0, \dots, w_{g-2}, \eta)$. D'après la formule des résidus, on a automatiquement

$$\text{Res}_x \eta + \text{Res}_y \eta = 0.$$

Proposition II.1. — *Le système linéaire donné par $H^0(\omega)$ fournit un plongement de la courbe \mathcal{C}' privée de $\{x, y\}$ dans \mathbf{P}_k^{g-1} .*

Démonstration. — Il suffit de reprendre la preuve de [Har77, prop. IV.5.2 p. 341] en utilisant le fait que x et y ne sont pas conjugués. Voir aussi [Noo88, lemma 2.5]. \square

Notation. — Les points x et y étant fixés, on note \mathcal{C} la courbe algébrique obtenue à partir de \mathcal{C}' en identifiant les points x et y en un point double ordinaire. Ainsi, \mathcal{C}' est la normalisée de \mathcal{C} ; la courbe \mathcal{C} est stable de genre g et le faisceau canonique sur \mathcal{C} est $f_*(\omega)$ (voir [Noo88, § 1.2] et [DM69, § 1]), où $f: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ est le morphisme de normalisation. Par abus de notation, on se permettra de noter ω au lieu de $f_*(\omega)$.

Corollaire II.2. — *Le système linéaire donné par $H^0(\mathcal{C}, \omega)$ fournit une immersion fermée de \mathcal{C} dans \mathbf{P}_k^{g-1} .*

On s'attache désormais à l'étude de l'idéal de l'image de \mathcal{C} dans \mathbf{P}_k^{g-1} .

Remarque. — Dans les § II.1, II.2, II.3, II.4, on travaille avec une courbe \mathcal{C} fixée; on se permettra donc de simplifier l'écriture en supprimant les références à \mathcal{C} . Ainsi, $H^0(\mathcal{C}, \mathcal{F})$ sera noté $H^0(\mathcal{F})$ lorsque \mathcal{F} est un faisceau sur \mathcal{C} , etc.

§ II.2. Générateurs de l'idéal de l'image et théorème de Petri

II.2.1. APPLICATION DE NOETHER

Soient $A = \text{Sym}^\bullet H^0(\Omega)$ et $B = \text{Sym}^\bullet H^0(\omega)$. Les applications $w_j \mapsto X_j$ (pour les entiers j tels que $0 \leq j \leq g-2$) et $\eta \mapsto Y$ fournissent des isomorphismes de k -algèbres

$$A \simeq k[X_0, \dots, X_{g-2}] \quad \text{et} \quad B \simeq k[X_0, \dots, X_{g-2}, Y].$$

Pour tout $d \in \mathbf{N}$, on note $A_d = \text{Sym}^d H^0(\Omega)$ et $B_d = \text{Sym}^d H^0(\omega)$.

On considère les applications naturelles Φ et φ définies par

$$\begin{aligned} \Phi &= \bigoplus_{d \in \mathbf{N}} \Phi_d: A = \bigoplus_{d \in \mathbf{N}} A_d \longrightarrow \bigoplus_{d \in \mathbf{N}} H^0(\Omega^{\otimes d}), \\ \varphi &= \bigoplus_{d \in \mathbf{N}} \varphi_d: B = \bigoplus_{d \in \mathbf{N}} B_d \longrightarrow \bigoplus_{d \in \mathbf{N}} H^0(\omega^{\otimes d}). \end{aligned}$$

Enfin, on pose, pour tout $d \in \mathbf{N}$,

$$\begin{aligned} I_\Phi(d) &= \text{Ker } \Phi_d, \\ I_\varphi(d) &= \text{Ker } \varphi_d. \end{aligned}$$

Ce sont des k -espaces vectoriels de dimension finie.

L'application Φ_d est-elle surjective pour tout $d \in \mathbf{N}$? Dans le cas d'une courbe lisse non hyperelliptique, la réponse est positive (théorème de Noether, [SD73, th. 2.10 p. 164]). Ici, la réponse est négative dès que $d \geq 2$ (cor. II.6). Cependant, on dispose d'un théorème de Noether pour l'application φ (th. II.18).

On se propose d'étudier les applications Φ et φ , notamment le noyau de φ . Il est clair que Φ_0 , φ_0 , Φ_1 et φ_1 sont surjectives (et même bijectives).

II.2.2. QUADRIQUES

On étudie ici les applications Φ_2 et φ_2 . Les dimensions des espaces en jeu sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \dim(\text{Sym}^2 H^0(\Omega)) &= \frac{g(g-1)}{2}, & \dim(H^0(\Omega^{\otimes 2})) &= 3g-6, \\ \dim(\text{Sym}^2 H^0(\omega)) &= \frac{g(g+1)}{2}, & \dim(H^0(\omega^{\otimes 2})) &= 3g-3. \end{aligned}$$

Commençons par déterminer le noyau de Φ_2 . On appellera *niveau* d'un produit $X_i X_j$ (avec $0 \leq i \leq j \leq g-2$) l'entier $i+j$. (Plus généralement, on considérera dans la suite le niveau de monômes de degré quelconque : par définition, le niveau de $X_{j_1} \cdots X_{j_n}$ est l'entier $\sum_{i=1}^n j_i$.) Par construction, on a les relations dans $H^0(\Omega^2)$, dites *de niveau*,

$$w_i w_j = w_{i+k} w_{j-k}$$

pour tous les indices i, j, k tels que cette égalité ait un sens. On a donc

$$X_i X_j - X_{i+k} X_{j-k} \in I_\Phi(2).$$

Ces quadriques ne sont pas linéairement indépendantes mais on peut les ranger par niveau. Il n'y a aucune quadrique de niveau 0 car seul le monôme X_0^2 a ce niveau. De même, seul $X_0 X_1$ est de niveau 1. Pour le niveau 2, il n'y a qu'une quadrique, à savoir

$$X_0 X_2 - X_1^2.$$

On indique dans la table II.1 une « base » pour chaque niveau. Notons par exemple que pour le niveau 4, on a *a priori* les quadriques suivantes :

$$X_0 X_4 - X_2^2, \quad X_0 X_4 - X_1 X_3, \quad X_2^2 - X_1 X_3,$$

mais il est clair que la troisième est combinaison linéaire des deux premières.

Niveau	Éléments de $I_{\Phi}(2)$
0	\emptyset
1	\emptyset
2	$X_0X_2 - X_1^2$
3	$X_0X_3 - X_1X_2$
4	$X_0X_4 - X_1X_3$ et $X_0X_4 - X_2^2$
\vdots	\vdots
$2g - 6$	$X_{g-2}X_{g-4} - X_{g-3}^2$
$2g - 5$	\emptyset
$2g - 4$	\emptyset

TABLE II.1 – Base de $I_{\Phi}(2)$ rangée par niveaux

D'une façon générale, on a choisi les quadriques dans la table II.1 ainsi : les quadriques de niveau N avec $0 \leq N \leq g - 2$ sont de la forme $X_0X_N - X_iX_{N-i}$ avec $1 \leq i \leq N/2$ et les quadriques de niveau N avec $g - 1 \leq N \leq 2g - 4$ sont de la forme $X_{g-2}X_{N-g+2} - X_iX_{N-i}$ avec $N - g + 3 \leq i \leq N/2$.

Proposition II.3. — *Les éléments donnés dans la table II.1 forment une base de $I_{\Phi}(2)$.*

Démonstration. — Cette famille est libre car elle l'est dans A (chaque élément comporte un monôme qui n'apparaît dans aucun autre élément). Elle est génératrice car si $P \in I_{\Phi}(2)$, on peut réduire (modulo les éléments de la table II.1) tous ses monômes de niveau N en X_0X_N (si $0 \leq N \leq g - 2$) ou $X_{g-2}X_{N-g+2}$ (si $g - 1 \leq N \leq 2g - 4$). On obtient alors un polynôme P' qui ne comporte que ces monômes ; ceux-ci sont étagés par le niveau et comme $P' \in I_{\Phi}(2)$, on a $P' = 0$. \square

Il n'est pas difficile de dénombrer les éléments dans la table II.1. La figure II.1 présente une façon de le faire : chaque point entier à l'intérieur du triangle correspond à l'une des quadriques que l'on cherche à dénombrer ; il y en a $(g - 2)(g - 3)/2$, de sorte que

$$\dim I_{\Phi}(2) = \frac{(g - 2)(g - 3)}{2}.$$

On en déduit que $\text{Coker } \Phi_2$ est de dimension $(g - 3)$ et donc que Φ_2 n'est pas surjective dès que $g > 3$.

Il est clair que $\text{Ker } \Phi_2 \subseteq \text{Ker } \varphi_2$. Il y a en fait égalité, ainsi que le montre le lemme suivant ; quoiqu'élémentaire, ce lemme s'avère très précieux dans la suite.

Lemme II.4. — *Soit $P \in \text{Ker } \varphi$ homogène de degré $d \geq 1$ de la forme $P = P_1 + P_2Y$ où $P_1 \in A_d$ et $P_2 \in A_{d-1}$ (autrement dit, $\deg_A P = 1$). Alors $P_1 \in \text{Ker } \Phi_d$ et $P_2 \in \text{Ker } \Phi_{d-1}$.*

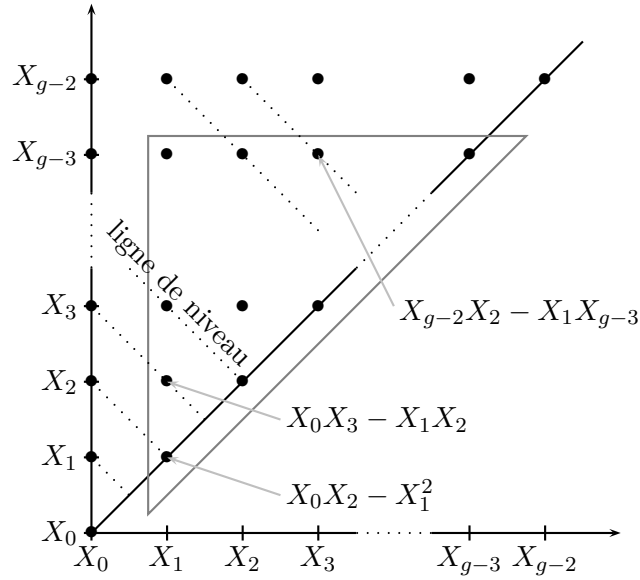


FIGURE II.1 – Dénombrement des éléments dans la table II.1

Démonstration. — Notons $p_1 = \Phi_d(P_1)$ et $p_2 = \Phi_{d-1}(P_2)$, de sorte que $p_1 + p_2\eta = 0$ dans $H^0(\omega^{\otimes d})$. Le point central de la démonstration est le fait que p_1 et p_2 ont la même valeur en x et x' (puisque $P_1, P_2 \in A$).

Comme $p_1 + p_2\eta$ n'a pas de pôle en x et y , p_2 s'annule en x et y . En particulier, p_2 s'annule en x' et comme η n'a pas de pôle en x' (car on a choisi $y \neq x, x'$), le terme p_2y est nul en x' . Or $p_1 + p_2\eta = 0$, donc p_1 s'annule aussi en x' et donc en x . En utilisant de nouveau le fait que $p_1 + p_2\eta = 0$, on en déduit que $p_2\eta$ s'annule en x et donc que p_2 s'annule au moins à l'ordre 2 en x . En itérant ce raisonnement, on voit que p_2 s'annule à tout ordre en x et donc $p_2 = 0$ dans $H^0(\Omega^{\otimes(d-1)})$, i.e., $P_2 \in \text{Ker } \Phi_{d-1}$. Par suite, $p_1 = 0$ dans $H^0(\Omega^{\otimes d})$, donc $P_1 \in \text{Ker } \Phi_d$. \square

Corollaire II.5. — On a $\text{Ker } \Phi_2 = \text{Ker } \varphi_2$. De plus, l'application naturelle

$$\varphi_2: \text{Sym}^2 H^0(\omega) \rightarrow H^0(\omega^{\otimes 2})$$

est surjective.

Démonstration. — On sait déjà que $\text{Ker } \Phi_2 \subseteq \text{Ker } \varphi_2$. Soit $P \in \text{Ker } \varphi_2$; alors P s'écrit $P = P_1 + P_2Y + P_3Y^2$ avec $P_1 \in A_2$, $P_2 \in A_1$ et $P_3 \in A_0 = k$. Comme $\varphi_2(P) = 0$, P_3 s'annule en x (et y) donc $P_3 = 0$ puisque c'est une constante. Cela dit, le lemme assure que $P_1 \in \text{Ker } \Phi_2$ et $P_2 \in \text{Ker } \Phi_1$. Or Φ_1 est bijective, donc $P_2 = 0$. Finalement, $P = P_1 \in \text{Ker } \Phi_2$.

En particulier, on a

$$\dim I_\varphi(2) = \frac{(g-2)(g-3)}{2},$$

et donc Coker $\varphi_2 = 0$. Ainsi, φ_2 est surjective. \square

Remarque. — Le calcul précédent est cohérent avec le fait que

$$h^0(\Omega(-x - y)) = g - 3,$$

car si l'on prend une base (t_1, \dots, t_{g-3}) de cet espace, les 2-formes $t_1\eta, \dots, t_{g-3}\eta$ sont dans $H^0(\Omega^{\otimes 2})$ et complètent la famille précédente en une base de $H^0(\Omega^{\otimes 2})$. Une base de $H^0(\omega^{\otimes 2})$ est obtenue en ajoutant les formes $t_0\eta, t_{g-2}\eta, \eta^2$ à la base de $H^0(\Omega^{\otimes 2})$ précédente; nous y reviendrons en détail plus loin (cf. § II.3).

Corollaire II.6. — *Soit d un entier ≥ 2 . L'application naturelle*

$$\Phi_d: \text{Sym}^d H^0(\Omega) \rightarrow H^0(\Omega^{\otimes d})$$

n'est pas surjective.

Démonstration. — Comme $d \geq 2$, il existe un polynôme $P \in A_{d-1}$ tel que la $(d-1)$ -forme $\Phi_{d-1}(P)$ est nulle en x et y mais n'est pas identiquement nulle sur \mathcal{C} . On a

$$\varphi_d(PY) \in H^0(\Omega^{\otimes d}).$$

Si Φ_d est surjective, il existe un polynôme $Q \in A_d$ tel que $\varphi_d(PY) = \Phi_d(Q)$, i.e., $Q - PY \in \text{Ker } \varphi$. Le lemme II.4 implique alors que $P \in \text{Ker}(\Phi_{d-1})$: contradiction. \square

Notation. — Soit N un entier tel que $0 \leq N \leq g - 2$; on note, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq N/2$,

$$F_{N,i} = X_0 X_N - X_i X_{N-i}.$$

De même, si N est un entier tel que $g - 1 \leq N \leq 2g - 4$, on note, pour tout i tel que $N - g + 3 \leq i \leq N/2$,

$$F_{N,i} = X_{g-2} X_{N-g+2} - X_i X_{N-i}.$$

Enfin, on note I_F l'idéal de A engendré par les quadriques $F_{N,i}$.

Proposition II.7. — *On a $\text{Ker } \Phi = I_F$.*

Démonstration. — Il est clair que $I_F \subset \text{Ker } \Phi$. Montrons l'inclusion réciproque. Pour ce faire, il faut montrer que $I_\Phi(d) \subset I_F$ pour tout entier $d \geq 2$. Le cas où $d = 2$ est une conséquence de la prop. II.3. On procède ensuite par récurrence sur d . Remarquons que $I_\Phi(d)$ est engendré par les éléments de la forme

$$X_{j_1} \cdots X_{j_d} - X_{j'_1} \cdots X_{j'_d} \tag{2.1}$$

avec

$$\begin{aligned} 0 &\leq j_1 \leq \cdots \leq j_d \leq g - 2, \\ 0 &\leq j'_1 \leq \cdots \leq j'_d \leq g - 2, \\ j_1 + \cdots + j_d &= j'_1 + \cdots + j'_d. \end{aligned}$$

On va montrer que l'élément (2.1) est dans l'idéal engendré par les éléments

$$X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_{d-1}} - X_{\ell'_1} \cdots X_{\ell'_{d-1}}$$

avec

$$\begin{aligned} 0 &\leq \ell_1, \dots, \ell_{d-1} \leq g-2, \\ 0 &\leq \ell'_1, \dots, \ell'_{d-1} \leq g-2, \\ \ell_1 + \dots + \ell_{d-1} &= \ell'_1 + \dots + \ell'_{d-1}. \end{aligned}$$

Notons $N = j_1 + \dots + j_d$ le niveau de l'élément (2.1). Sans perte de généralité, on peut supposer que $j_1 \leq j'_1$. L'idée est de se ramener au cas où

$$\{j_1, \dots, j_d\} \cap \{j'_1, \dots, j'_d\} \neq \emptyset.$$

pour lequel une factorisation immédiate est possible.

– Premier cas : $j_d \leq j'_d$. Montrons alors que

$$0 \leq N - j'_1 - j_d \leq (d-2)(g-2). \quad (2.2)$$

On a d'une part

$$j_d \leq j'_d \leq \sum_{i=2}^d j'_i = N - j'_1,$$

et d'autre part

$$N - j_d = \underbrace{j_1}_{\leq j'_1} + \sum_{i=2}^{d-1} \underbrace{j_i}_{\leq g-2} \leq j'_1 + (d-2)(g-2),$$

ce qui montre les inégalités (2.2).

– Second cas : $j'_d < j_d$. Montrons alors que

$$0 \leq N - j_2 - j'_2 \leq (d-2)(g-2). \quad (2.3)$$

On a

$$j'_2 \leq j'_d \leq j_d \leq \sum_{i \neq 2} j_i = N - j_2,$$

et

$$N - j_2 = \underbrace{j_1}_{\leq j'_1 \leq j'_2} + \sum_{i=3}^d \underbrace{j_i}_{\leq g-2} \leq j'_2 + (d-2)(g-2),$$

d'où les inégalités (2.3).

Revenons maintenant au premier cas ($j_d \leq j'_d$). D'après les inégalités (2.2), il existe des entiers m_1, \dots, m_{d-2} vérifiant

$$0 \leq m_1, \dots, m_{d-2} \leq g - 2$$

et tels que le monôme $X_{m_1} \cdots X_{m_{d-2}}$ soit de niveau $N - j'_1 - j_d$. Le monôme

$$X_{j'_1} X_{j_d} X_{m_1} \cdots X_{m_{d-2}}$$

est donc de niveau N . On a alors

$$\begin{aligned} X_{j_1} \cdots X_{j_d} - X_{j'_1} \cdots X_{j'_d} &= (X_{j_1} \cdots X_{j_d} - X_{j'_1} X_{j_d} X_{m_1} \cdots X_{m_{d-2}}) \\ &\quad + (X_{j'_1} X_{j_d} X_{m_1} \cdots X_{m_{d-2}} - X_{j'_1} \cdots X_{j'_d}) \\ &= X_{j_d} (X_{j_1} \cdots X_{j_{d-1}} - X_{j'_1} X_{m_1} \cdots X_{m_{d-2}}) \\ &\quad + X_{j'_1} (X_{j_d} X_{m_1} \cdots X_{m_{d-2}} - X_{j'_2} \cdots X_{j'_d}). \end{aligned}$$

Ceci montre que l'élément (2.1) est dans l'idéal engendré par les éléments

$$X_{\ell_1} \cdots X_{\ell_{d-1}} - X_{\ell'_1} \cdots X_{\ell'_{d-1}}.$$

On procède de même pour traiter le second cas ($j'_d < j_d$), en utilisant les inégalités (2.3). \square

Remarque. — La démonstration précédente donne un algorithme qui dans certains cas s'avère lourd, notamment si dès le départ on a

$$\{j_1, \dots, j_d\} \cap \{j'_1, \dots, j'_d\} \neq \emptyset.$$

Exemple. — Prenons $g = 6$ et décomposons le polynôme

$$X_0 X_2^2 X_3 - X_1^3 X_4$$

selon les quadriques $F_{N,i}$ qui, dans ce cas, sont les suivantes :

$$\begin{aligned} F_{2,1} &= X_0 X_2 - X_1^2, & F_{3,1} &= X_0 X_3 - X_1 X_2, \\ F_{4,1} &= X_0 X_4 - X_1 X_3, & F_{4,2} &= X_0 X_4 - X_2^2, \\ F_{5,2} &= X_4 X_1 - X_2 X_3, & F_{5,3} &= X_4 X_2 - X_3^2. \end{aligned}$$

En utilisant l'algorithme ci-dessus (précisément, on est dans le premier cas), on obtient

$$X_0 X_2^2 X_3 - X_1^3 X_4 = X_3 (X_0 X_2^2 - X_1^2 X_2) + X_1 (X_1 X_2 X_3 - X_1^2 X_4).$$

On a ensuite immédiatement

$$\begin{aligned} X_0 X_2^2 X_3 - X_1^3 X_4 &= X_2 X_3 (X_0 X_2 - X_1^2) + X_1^2 (X_2 X_3 - X_1 X_4) \\ &= X_2 X_3 F_{2,1} - X_1^2 F_{5,2}. \end{aligned}$$

	Ordre d'annulation en x	Ordre d'annulation en y
t_0	$g - 2$	0
t_1	$g - 3$	≥ 1
t_2	$g - 4$	≥ 1
\vdots	\vdots	\vdots
t_{g-4}	2	≥ 1
t_{g-3}	1	≥ 1
t_{g-2}	0	≥ 1

TABLE II.2 – Ordre d'annulation en x et y des formes t_j

II.2.3. CUBIQUES

Construction d'une base de $H^0(\omega^{\otimes 3})$

Commençons par construire une base de $H^0(\Omega)$ adaptée à l'inclusion

$$H^0(\Omega(-x-y)) \subset H^0(\Omega).$$

Pour tout $0 \leq j \leq g-2$, la forme w_j est nulle en x à l'ordre $(g-2-j)$.

Proposition II.8. — *La forme w_0 est non nulle en y .*

Démonstration. — Il est clair que l'une au moins parmi les formes w_j est non nulle en y puisque $h^0(\Omega(-y)) = h^0(\Omega) - 1$. On a l'isomorphisme

$$\Omega \simeq \mathcal{O}((g-2)(x+x')).$$

Vu comme élément de $\mathcal{O}((g-2)(x+x'))$, w_0 est une constante non nulle. Si la forme w_0 est nulle en y , tout générateur local de Ω en y est nul en y , ce qui implique alors que toutes les formes w_j sont nulles en y : contradiction. Ainsi, w_0 n'est pas nulle en y .

[Autre démonstration] Pour voir que w_0 ne s'annule pas en y , on peut aussi procéder comme suit. On a $\deg(\Omega) = 2g-4$ et w_0 s'annule en x et x' à l'ordre $(g-2)$; il en résulte que w_0 n'a pas de zéro hors de x et x' , et en particulier, pas en y . \square

Comme w_0 n'est pas nulle en y , il existe des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_{g-2}$ tels que $w_j - \lambda_j w_0$ soit nulle en y pour tout $1 \leq j \leq g-2$. On pose alors

$$t_0 = w_0 \quad \text{et} \quad t_j = w_j - \lambda_j w_0 \quad (1 \leq j \leq g-2).$$

La table II.2 indique l'ordre d'annulation en x et y des formes t_j .

La famille (t_0, \dots, t_{g-2}) est une base de $H^0(\Omega)$ et une base de $H^0(\Omega(-x-y))$ est donnée par (t_1, \dots, t_{g-3}) . Cette famille est bien adaptée pour construire des bases de $H^0(\omega^{\otimes d})$

pour $d \geq 2$: on va le voir ci-dessous pour $d = 3$ puis dans le cas général plus loin (cf. § II.3).

Soit $T_j \in A_1$ l'élément correspondant à t_j , i.e., $T_j = \Phi_1^{-1}(t_j)$ ou encore $T_0 = X_0$ et $T_j = X_j - \lambda_j X_0$ pour tout $1 \leq j \leq g-2$.

Pour notre usage, nous avons besoin d'une base de $H^0(\omega^{\otimes 3})$ adaptée aux inclusions

$$H^0(\Omega^{\otimes 3}) \subset H^0(\Omega^{\otimes 3}(x+y)) \subset H^0(\omega^{\otimes 3}).$$

$5g-10 \qquad \qquad 5g-8 \qquad \qquad 5g-5$

(Les dimensions des espaces en jeu sont indiquées sur la seconde ligne.)

Considérons d'abord la famille \mathcal{F}_3 constituée des cubiques suivantes¹:

$$\underbrace{t_0^3, t_0^2 t_1, \dots, t_0^2 t_{g-2}}_{(g-1) \text{ éléments}}, \underbrace{t_0 t_{g-2} t_1, t_0 t_{g-2} t_2, \dots, t_0 t_{g-2}^2}_{(g-2) \text{ éléments}}, \underbrace{t_{g-2}^2 t_1, t_{g-2}^2 t_2, \dots, t_{g-2}^3}_{(g-2) \text{ éléments}}. \quad (2.4)$$

En regardant l'ordre d'annulation en x de chacun des éléments de \mathcal{F}_3 , on voit que cette famille est libre dans $H^0(\Omega^{\otimes 3})$; elle comporte $(3g-5)$ éléments. Pour compléter cette famille en une base de $H^0(\Omega^{\otimes 3})$, il nous manque $(2g-5)$ éléments.

La famille

$$\mathcal{F}'_2 = \underbrace{(t_0 t_1, t_1^2, t_1 t_2, \dots, t_1 t_{g-3})}_{(g-2) \text{ éléments}}, \underbrace{(t_{g-3} t_2, t_{g-3} t_3, \dots, t_{g-3}^2, t_{g-3} t_{g-2})}_{(g-3) \text{ éléments}}, \quad (2.5)$$

est libre dans $H^0(\Omega^{\otimes 2}(-x-y))$, comme on le voit en regardant les ordres d'annulation en x . On en déduit que la famille \mathcal{G}_3 composée des $(2g-5)$ éléments

$$\underbrace{t_0 t_1 \eta, t_1^2 \eta, t_1 t_2 \eta, \dots, t_1 t_{g-3} \eta}_{(g-2) \text{ éléments}}, \underbrace{t_{g-3} t_2 \eta, t_{g-3} t_3 \eta, \dots, t_{g-3}^2 \eta, t_{g-3} t_{g-2} \eta}_{(g-3) \text{ éléments}} \quad (2.6)$$

est libre dans $H^0(\Omega^{\otimes 3})$. D'après le lemme II.4, la famille $\mathcal{F}_3 \cup \mathcal{G}_3$ est libre dans $H^0(\Omega^{\otimes 3})$. Ceci démontre la proposition suivante.

Proposition II.9. — *Les éléments des familles \mathcal{F}_3 et \mathcal{G}_3 forment une base de $H^0(\Omega^{\otimes 3})$.*

Proposition II.10. — *La famille composée des éléments de \mathcal{F}_3 , \mathcal{G}_3 et des éléments*

$$t_0^2 \eta, t_{g-2}^2 \eta, t_0 \eta^2, t_{g-2} \eta^2, \eta^3 \quad (2.7)$$

forment une base de $H^0(\omega^{\otimes 3})$. Plus précisément, la figure II.2 présente une base de $H^0(\omega^{\otimes 3})$ adaptée aux inclusions

$$H^0(\Omega^{\otimes 3}) \subset H^0(\Omega^{\otimes 3}(x+y)) \subset H^0(\Omega^{\otimes 3}(2x+2y)) \subset H^0(\omega^{\otimes 3}).$$

1. Les notations « \mathcal{F}_3 », « \mathcal{F}'_2 » et « \mathcal{G}_3 » sont choisies en cohérence avec la généralisation de cette construction présentée au § II.3.

Notons

$$G_j = T_j Y^2 - \left[\alpha_j T_0^2 Y + \beta_j T_{g-2}^2 Y + \sum_{\ell=2}^{g-2} \theta_{j,\ell} T_{g-3} T_\ell Y + \sum_{m=0}^{g-3} \iota_{j,m} T_1 T_m Y \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{g-2} \lambda_{j,n} T_{g-2}^2 T_n + \sum_{p=1}^{g-2} \mu_{j,p} T_0 T_{g-2} T_p + \sum_{q=0}^{g-2} \xi_{j,q} T_0^2 T_q \right],$$

de sorte que

$$G_j \in \mathbf{I}_\varphi(3), \quad (1 \leq j \leq g-3).$$

Remarques. —

a) Les cubiques G_j ci-dessus ne sont pas dans l'idéal de B engendré par les quadriques $F_{N,i}$. En effet, supposons que

$$G_j = \sum_{(N,i)} Q_{N,i} F_{N,i},$$

où $Q_{N,i} \in B_1$, i.e., $\deg Q_{N,i} = 1$. Le degré sur A du membre de droite est ≤ 1 et celui de G_j vaut 2: contradiction.

b) En fait, pour un entier j fixé, la cubique G_j n'est pas dans l'idéal de B engendré par les quadriques $F_{N,i}$ et les cubiques $G_{j'}$, où $j' \neq j$. Pour le voir, munissons B de l'ordre lexicographique gradué associé à l'ordre suivant entre les variables :

$$Y > T_1 > T_2 > \cdots > T_{g-3} > T_0 > T_{g-2}.$$

Le monôme dominant de G_j est alors $T_j Y^2$. Supposons que

$$G_j = \sum_{(N,i)} Q_{N,i} F_{N,i} + \sum_{j' \neq j} \sigma_{j'} G_{j'},$$

où $Q_{N,i} \in B_1$ et $\sigma_{j'} \in k$. D'après ce qu'on a vu ci-dessus, l'un des scalaires $\sigma_{j'}$ au moins est non nul. Le monôme dominant du membre de droite est donc de la forme $\sigma_{j'} T_{j'} Y^2$ avec $j' \neq j$ et $\sigma_{j'} \neq 0$, tandis que celui du membre de gauche est $T_j Y^2$.

La 2-forme $t_0 t_{g-2}$ est nulle en x et y , donc $t_0 t_{g-2} \eta \in H^0(\Omega^{\otimes 3})$. Il existe donc des constantes $\theta_{g-2,\ell}$, $\iota_{g-2,m}$, $\lambda_{g-2,n}$, $\mu_{g-2,p}$, $\xi_{g-2,q}$ telles que

$$t_0 t_{g-2} \eta = \sum_{\ell=2}^{g-2} \theta_{g-2,\ell} t_{g-3} t_\ell \eta + \sum_{m=0}^{g-3} \iota_{g-2,m} t_1 t_m \eta + \sum_{n=1}^{g-2} \lambda_{g-2,n} t_{g-2}^2 t_n \\ + \sum_{p=1}^{g-2} \mu_{g-2,p} t_0 t_{g-2} t_p + \sum_{q=0}^{g-2} \xi_{g-2,q} t_0^2 t_q.$$

Notons

$$G_{g-2} = T_0 T_{g-2} Y - \left[\sum_{\ell=2}^{g-2} \theta_{g-2,\ell} T_{g-3} T_\ell Y + \sum_{m=0}^{g-3} \iota_{g-2,m} T_1 T_m Y + \sum_{n=1}^{g-2} \lambda_{g-2,n} T_{g-2}^2 T_n + \sum_{p=1}^{g-2} \mu_{g-2,p} T_0 T_{g-2} T_p + \sum_{q=0}^{g-2} \xi_{g-2,q} T_0^2 T_q \right].$$

On a

$$G_{g-2} \in \mathbf{I}_\varphi(3).$$

Remarque. — On a $\deg_A G_{g-2} = 1$ donc d'après le lemme II.4, cette cubique est dans l'idéal de B engendré par les quadriques $F_{N,i}$. Plus précisément, on a

$$T_0 T_{g-2} - \left[\sum_{\ell=2}^{g-2} \theta_{g-2,\ell} T_{g-3} T_\ell + \sum_{m=0}^{g-3} \iota_{g-2,m} T_1 T_m \right] \in \mathbf{I}_\Phi(2)$$

et

$$\sum_{n=1}^{g-2} \lambda_{g-2,n} T_{g-2}^2 T_n + \sum_{p=1}^{g-2} \mu_{g-2,p} T_0 T_{g-2} T_p + \sum_{q=0}^{g-2} \xi_{g-2,q} T_0^2 T_q \in \mathbf{I}_\Phi(3).$$

En regardant les ordres d'annulation en x , on voit que les coefficients $\theta_{g-2,\ell}$, $\lambda_{g-2,n}$, $\mu_{g-2,p}$ et $\xi_{g-2,q}$ sont tous nuls.

II.2.4. THÉORÈME DE PETRI

Lemme II.12. — *Soit d un entier ≥ 1 et soit $P \in A_d$ tel que la d -forme $\Phi(P)$ soit nulle en x et y . Alors il existe des polynômes homogènes $Q_1, \dots, Q_{g-3} \in A_{d-1}$ et des constantes $\pi_1, \dots, \pi_{d-1} \in k$ vérifiant*

$$P = \sum_{j=1}^{g-3} Q_j T_j + \sum_{\ell=1}^{d-1} \pi_\ell T_0^\ell T_{g-2}^{d-\ell}.$$

Démonstration. — *A priori*, le polynôme P s'écrit

$$P = \sum_{j=1}^{g-3} Q_j T_j + \sum_{\ell=0}^d \pi_\ell T_0^\ell T_{g-2}^{d-\ell},$$

avec $Q_1, \dots, Q_{g-3} \in A_{d-1}$ et $\pi_0, \dots, \pi_d \in k$. L'annulation de $\Phi(P)$ en x (respectivement en y) implique que $\pi_0 = 0$ (respectivement $\pi_d = 0$). \square

Théorème II.13. — Soit \mathcal{C}' une courbe hyperelliptique de genre $(g-1)$ (où $g \geq 3$) sur un corps algébriquement clos k . Soient x, y deux points de \mathcal{C}' tels que $y \neq x, x'$ et soit ω le faisceau des 1-formes ayant au plus des pôles simples en x et y (avec résidus opposés). On note \mathcal{C} la courbe obtenue après identification de x et y en un point double ordinaire (de sorte que \mathcal{C}' est la normalisée de \mathcal{C}).

Le faisceau ω est le faisceau canonique de \mathcal{C} et l'image de \mathcal{C} par l'immersion fermée associée à ω (cf. prop. II.1) est une intersection de quadriques et de cubiques. Plus précisément, avec les notations introduites précédemment, les quadriques $F_{N,i}$ et les cubiques G_j engendrent l'idéal de l'image de \mathcal{C} dans \mathbf{P}_k^{g-1} .

Démonstration. — Notons J l'idéal de B engendré par les quadriques $F_{N,i}$ et les cubiques G_j .

Soit $P \in \text{Ker } \varphi$ un polynôme homogène de degré d (sur k). Notons $m = \deg_A P$. On procède par récurrence sur $m \in \mathbf{N}$. Si $m = 0$, on a $P \in \text{Ker } \Phi$ et le résultat est vrai d'après la prop. II.7. Si $m = 1$, on utilise le lemme II.4 pour se ramener au cas où $m = 0$. Supposons maintenant que $m \geq 2$; dans ce cas, P s'écrit

$$P = \tilde{P}Y^m + (\text{termes de degré} \leq m-1 \text{ sur } A) \quad (2.8)$$

avec $\tilde{P} \in A$. Notons $d = \deg_k(\tilde{P})$; comme $P \in \text{Ker } \varphi$, la forme $\Phi(\tilde{P})$ s'annule en x et y donc d'après le lemme II.12, on peut écrire

$$\tilde{P} = \sum_{j=1}^{g-3} Q_j T_j + \sum_{\ell=1}^{d-1} \pi_\ell T_0^\ell T_{g-2}^{d-\ell},$$

avec $Q_j \in A_{d-1}$ ($1 \leq j \leq g-3$) et $\pi_\ell \in k$ ($1 \leq \ell \leq d-1$). On a donc

$$\tilde{P}Y^m = \sum_{j=1}^{g-3} Q_j T_j Y^m + T_0 T_{g-2} Y^m \left(\sum_{\ell=1}^{d-1} \pi_\ell T_0^{\ell-1} T_{g-2}^{d-1-\ell} \right).$$

En utilisant la cubique G_{g-2} , on a

$$T_0 T_{g-2} Y^m \equiv \sum_{\ell=2}^{g-2} \theta_{g-2,\ell} T_{g-3} T_\ell Y^m + \sum_{m=0}^{g-3} \iota_{g-2,m} T_1 T_m Y^m + (\text{termes de degré} \leq m-1 \text{ sur } A) \pmod{J}.$$

On en déduit qu'il existe des polynômes Q'_1, \dots, Q'_{g-3} tels que

$$\tilde{P}Y^m \equiv \sum_{j=1}^{g-3} Q'_j T_j Y^m + (\text{termes de degré} \leq m-1 \text{ sur } A) \pmod{J}.$$

Maintenant, les cubiques G_1, \dots, G_{g-3} permettent² de réduire modulo J les termes $T_j Y^m$ en des termes de degré $\leq m - 1$ sur A . On a donc

$$\tilde{P}Y^m \equiv (\text{termes de degré } \leq m - 1 \text{ sur } A) \pmod{J},$$

et en revenant à (2.8), on en déduit que

$$P \equiv (\text{termes de degré } \leq m - 1 \text{ sur } A) \pmod{J},$$

ce qui achève la récurrence. \square

§ II.3. Questions de surjectivité

II.3.1. BASE DE $H^0(\omega^{\otimes d})$

On a déjà construit des bases de $H^0(\omega^{\otimes d})$ pour $d = 1, 2, 3$. On va maintenant construire une base de $H^0(\omega^{\otimes d})$ pour tout $d \geq 2$. Pour $d = 2$ et $d = 3$, on retrouvera les bases déjà obtenues. D'ailleurs, on se contente de généraliser la méthode employée pour $d = 3$ (cf. prop. II.10).

Soit d un entier ≥ 2 . On a

$$h^0(\Omega^{\otimes d}) = (2d - 1)(g - 2) \quad \text{et} \quad h^0(\omega^{\otimes d}) = (2d - 1)(g - 1).$$

Le lemme suivant, qui généralise ce qui a été vu dans la démonstration de la prop. II.10, donne une base du quotient $H^0(\omega^{\otimes d})/H^0(\Omega^{\otimes d})$.

Lemme II.14. — *Soit d un entier ≥ 2 . Les $(2d - 1)$ éléments*

$$t_0^{d-1}\eta, t_{g-2}^{d-1}\eta, t_0^{d-2}\eta^2, t_{g-2}^{d-2}\eta^2, \dots, t_0\eta^{d-1}, t_{g-2}\eta^{d-1}, \eta^d. \quad (2.9)$$

sont linéairement indépendants dans $H^0(\omega^{\otimes d})$ modulo $H^0(\Omega^{\otimes d})$.

Démonstration. — L'argument présenté dans la démonstration de la prop. II.10 se généralise sans problème. \square

Proposition II.15. — *Soit d un entier ≥ 1 . La famille \mathcal{F}_d composée des éléments*

$$\begin{aligned} & t_0^{d-1}t_\ell, \quad (0 \leq \ell \leq g - 2) \\ & t_0^m t_{g-2}^{d-1-m} t_n, \quad (0 \leq m \leq d - 2, \quad 1 \leq n \leq g - 2) \end{aligned}$$

est libre dans $H^0(\Omega^{\otimes d})$.

De plus, la famille $\mathcal{F}'_d = \mathcal{F}_d - \{t_0^d, t_{g-2}^d\}$ est libre dans $H^0(\Omega^{\otimes d}(-x - y))$. On a

$$\begin{aligned} \text{Card } \mathcal{F}_d &= (g - 1) + (d - 1)(g - 2), \\ \text{Card } \mathcal{F}'_d &= (g - 3) + (d - 1)(g - 2). \end{aligned}$$

2. Il faut avoir $m \geq 2$ pour exploiter les cubiques G_1, \dots, G_{g-3} ; c'est pourquoi il a été nécessaire de traiter à part le cas où $m = 1$.

Démonstration. — La famille \mathcal{F}_d est libre car ses éléments ont des ordres d'annulation en x deux à deux distincts. Les autres assertions sont immédiates. \square

Notation. — Pour tout entier $d \geq 2$, notons \mathcal{G}_d la famille composée des éléments $z\eta$, où $z \in \mathcal{F}'_{d-1}$. Comme $\mathcal{F}'_{d-1} \subset H^0(\Omega^{\otimes d}(-x-y))$, on a $\mathcal{G}_d \subset H^0(\Omega^{\otimes d})$.

Proposition II.16. — *Soit d un entier ≥ 2 . Les éléments des familles \mathcal{F}_d et \mathcal{G}_d constituent une base de $H^0(\Omega^{\otimes d})$.*

Démonstration. — Le nombre total d'éléments dans les familles \mathcal{F}_d et \mathcal{G}_d est

$$\begin{aligned} \text{Card } \mathcal{F}_d + \text{Card } \mathcal{G}_d &= (g-1) + (d-1)(g-2) + (g-3) + (d-2)(g-2) \\ &= (2d-1)(g-2) \\ &= h^0(\Omega^{\otimes d}). \end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que ces éléments sont linéairement indépendants. C'est une conséquence du lemme II.4 et de la prop. II.15. \square

Corollaire II.17. — *Soit d un entier ≥ 2 . Une base de $H^0(\omega^{\otimes d})$ est donnée par les éléments des familles \mathcal{F}_d et \mathcal{G}_d ainsi que par les éléments (2.9).*

Démonstration. — Combiner le lemme II.14 et la prop. II.16. \square

II.3.2. THÉORÈME DE NOETHER

Le théorème de Noether classique ([SD73, th. 2.10 p. 164] ou [GH78, p. 253]) concerne les courbes non hyperelliptiques. On se propose de donner un énoncé analogue pour les courbes hyperelliptiques.

Théorème II.18. — *Soit \mathcal{C}' une courbe hyperelliptique lisse de genre $(g-1)$ (où $g \geq 3$) sur un corps algébriquement clos k . Soient x, y deux points de \mathcal{C}' tels que $y \neq x, x'$ et soit ω le faisceau des 1-formes ayant au plus des pôles simples en x et y (avec résidus opposés). On note \mathcal{C} la courbe obtenue après identification de x et y en un point double ordinaire (de sorte que \mathcal{C}' est la normalisée de \mathcal{C}).*

L'application naturelle graduée

$$\varphi: \text{Sym}^\bullet H^0(\omega) \longrightarrow \bigoplus_{d \in \mathbf{N}} H^0(\omega^{\otimes d})$$

est surjective.

Démonstration. — Il s'agit de montrer que l'application

$$\varphi_d: \text{Sym}^d H^0(\omega) \longrightarrow H^0(\omega^{\otimes d})$$

est surjective pour tout $d \in \mathbf{N}$. C'est clair pour $d = 0$ et $d = 1$ (φ_0 et φ_1 sont même bijectives). Supposons donc que $d \geq 2$; avec le cor. II.17, on dispose d'une base de $H^0(\omega^{\otimes d})$, à partir de laquelle il est clair que tout élément de $H^0(\omega^{\otimes d})$ est l'image par φ_d d'un élément de $\text{Sym}^d H^0(\omega)$. \square

Remarque. — On a un résultat plus précis : tout élément de $H^0(\omega^{\otimes d})$ s'écrit $\varphi_d(P)$ avec $P \in B_d$ et $\deg_A P = 1$.

II.3.3. THÉORÈME DE GÓMEZ-MONT

Dans la même veine que les résultats précédents, on peut donner une nouvelle démonstration d'un théorème d'extension de sections, dû à Gómez-Mont [GM79, th. 1 p. 145]. On en donne un énoncé cohérent avec les notations employées plus haut.

Théorème II.19 (Gómez-Mont). — *Soit k un corps algébriquement clos et soit \mathcal{C}' une courbe hyperelliptique lisse sur k de genre $(g-1)$, avec $g \geq 3$. On note Ω le faisceau des différentielles régulières sur \mathcal{C}' . Soit d un entier ≥ 2 . L'application de multiplication*

$$H^0(\mathcal{C}', \Omega) \otimes H^0(\mathcal{C}', \Omega^{\otimes d}) \longrightarrow H^0(\mathcal{C}', \Omega^{\otimes(d+1)}) \quad (2.10)$$

est surjective si $(d, g) \neq (2, 3)$. Si $(d, g) = (2, 3)$, son image est de codimension 1.

Démonstration. — Traitons d'abord le cas où $(d, g) = (2, 3)$. On peut écrire des bases explicites des espaces en jeu :

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{C}', \Omega) &: & t_0, t_1, \\ H^0(\mathcal{C}', \Omega^{\otimes 2}) &: & t_0^2, t_0 t_1, t_1^2, \\ H^0(\mathcal{C}', \Omega^{\otimes 3}) &: & t_0^3, t_0^2 t_1, t_0 t_1^2, t_1^3, t_0 t_1 \eta. \end{aligned}$$

On constate que l'image de l'application (2.10) est engendrée par $(t_0^3, t_0^2 t_1, t_0 t_1^2, t_1^3)$, et donc que l'image de (2.10) est de codimension 1 (il manque $t_0 t_1 \eta$ dans cette image).

Supposons maintenant que $d = 2$ et $g > 3$. On a alors les bases suivantes :

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{C}', \Omega) &: & t_0, \dots, t_{g-2}, \\ H^0(\mathcal{C}', \Omega^{\otimes 2}) &: & \begin{cases} t_0 t_\ell & (0 \leq \ell \leq g-2), \\ t_{g-2} t_n & (1 \leq n \leq g-2), \\ t_\ell \eta & (1 \leq \ell \leq g-3), \end{cases} \\ H^0(\mathcal{C}', \Omega^{\otimes 3}) &: & \begin{cases} t_0^2 t_\ell & (0 \leq \ell \leq g-2), \\ t_{g-2}^2 t_n & (1 \leq n \leq g-2), \\ t_0 t_{g-2} t_n & (1 \leq n \leq g-2), \\ t_0 t_\ell \eta & (1 \leq \ell \leq g-2), \\ t_{g-2} t_n \eta & (1 \leq n \leq g-3). \end{cases} \end{aligned}$$

Si $d > 2$ et $g \geq 3$, on a les bases suivantes :

$$\begin{aligned}
H^0(\mathcal{C}', \Omega): & \quad t_0, \dots, t_{g-2}, \\
H^0(\mathcal{C}', \Omega^{\otimes d}): & \quad \begin{cases} t_0^{d-1} t_\ell & (0 \leq \ell \leq g-2), \\ t_0^m t_{g-2}^{d-1-m} t_n & (0 \leq m \leq d-2, \quad 1 \leq n \leq g-2), \\ t_0^{d-2} t_\ell \eta & (1 \leq \ell \leq g-2), \\ t_0^m t_{g-2}^{d-2-m} t_n & (1 \leq m \leq d-3, \quad 1 \leq n \leq g-2), \\ t_{g-2}^{d-2} t_n \eta & (1 \leq n \leq g-3), \end{cases} \\
H^0(\mathcal{C}', \Omega^{\otimes(d+1)}): & \quad \begin{cases} t_0^d t_\ell & (0 \leq \ell \leq g-2), \\ t_0^m t_{g-2}^{d-m} t_n & (0 \leq m \leq d-1, \quad 1 \leq n \leq g-2), \\ t_0^{d-1} t_\ell \eta & (1 \leq \ell \leq g-2), \\ t_0^m t_{g-2}^{d-1-m} t_n & (1 \leq m \leq d-2, \quad 1 \leq n \leq g-2), \\ t_{g-2}^{d-1} t_n \eta & (1 \leq n \leq g-3). \end{cases}
\end{aligned}$$

On vérifie à partir de ces bases que (2.10) est surjective dès que $(d, g) \neq (2, 3)$ en remarquant que chaque élément de la base de $H^0(\mathcal{C}', \Omega^{\otimes(d+1)})$ est le produit d'un élément de la base de $H^0(\mathcal{C}', \Omega)$ par un élément de la base de $H^0(\mathcal{C}', \Omega^{\otimes d})$. \square

§ II.4. Simplifications des équations

II.4.1. COEFFICIENTS λ_j

Proposition II.20. — *Soit j un entier tel que $1 \leq j \leq g-2$. On a $\lambda_j = \lambda_1^j$.*

Démonstration. — Il n'y a rien à montrer si $j = 1$; supposons donc que $2 \leq j \leq g-2$. On a, identiquement sur \mathcal{C} ,

$$0 = w_0 w_j - w_1 w_{j-1} = (t_0 t_j - t_1 t_{j-1}) - \lambda_{j-1} t_0 t_1 - \lambda_1 t_0 t_{j-1} + (\lambda_j - \lambda_1 \lambda_{j-1}) t_0^2.$$

On sait que t_1, t_{j-1} et t_j s'annulent en y et que t_0 ne s'y annule pas; donc $\lambda_j = \lambda_1 \lambda_{j-1}$. Le résultat en découle immédiatement. \square

II.4.2. CUBIQUES

Les coefficients des équations cubiques G_1, \dots, G_{g-3} (cf. § II.2.3) peuvent être simplifiés. *A priori*, leur nombre est un $O(g^2)$; on va montrer qu'en réalité, c'est un $O(g)$ et que les coefficients de G_1 déterminent ceux de G_2, \dots, G_{g-3} (cf. prop. II.21). Rappelons que

pour tout $1 \leq j \leq g-3$, on a

$$\begin{aligned} G_j &= T_j Y^2 - \left[\alpha_j T_0^2 Y + \beta_j T_{g-2}^2 Y + \sum_{\ell=2}^{g-2} \theta_{j,\ell} T_{g-3} T_\ell Y + \sum_{m=0}^{g-3} \iota_{j,m} T_1 T_m Y \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{g-2} \lambda_{j,n} T_{g-2}^2 T_n + \sum_{p=1}^{g-2} \mu_{j,p} T_0 T_{g-2} T_p + \sum_{q=0}^{g-2} \xi_{j,q} T_0^2 T_q \right] \\ &= T_j Y^2 - G_{j,1} Y - G_{j,2}, \end{aligned}$$

où $G_{j,1} \in A_2$ et $G_{j,2} \in A_3$ sont définis par

$$\begin{aligned} G_{j,1} &= \alpha_j T_0^2 + \beta_j T_{g-2}^2 + \sum_{\ell=2}^{g-2} \theta_{j,\ell} T_{g-3} T_\ell + \sum_{m=0}^{g-3} \iota_{j,m} T_1 T_m, \\ G_{j,2} &= \sum_{n=1}^{g-2} \lambda_{j,n} T_{g-2}^2 T_n + \sum_{p=1}^{g-2} \mu_{j,p} T_0 T_{g-2} T_p + \sum_{q=0}^{g-2} \xi_{j,q} T_0^2 T_q. \end{aligned}$$

Fixons un entier j tel que $2 \leq j \leq g-3$ et considérons la quartique

$$Q_j = T_1 G_j - T_j G_1 = (T_j G_{1,1} - T_1 G_{j,1}) Y + (T_j G_{1,2} - T_1 G_{j,2}).$$

Remarque. — On notera que cette quartique résulte de l'annulation des monômes dominants de G_1 et G_j relativement à l'ordre monomial sur B muni de l'ordre lexicographique gradué associé à l'ordre suivant entre les variables :

$$Y > T_1 > T_2 > \cdots > T_{g-3} > T_0 > T_{g-2}.$$

Comme $G_1, G_j \in \text{Ker } \varphi$, on a $Q_j \in \text{Ker } \varphi$; de plus, $\deg_A Q = 1$. D'après le lemme II.4, on en déduit que

$$T_j G_{1,1} - T_1 G_{j,1} \in \text{Ker } \Phi_3 \quad \text{et} \quad T_j G_{1,2} - T_1 G_{j,2} \in \text{Ker } \Phi_4.$$

On se reportera à l'annexe A.2 pour un exposé des calculs permettant de justifier la proposition suivante.

Proposition II.21. — *Le nombre de coefficients nécessaires pour définir la cubique G_1 est $\leq 3g$. Ils déterminent ceux des cubiques G_2, \dots, G_{g-3} . La cubique G_1 s'écrit*

$$\begin{aligned} G_1 &= T_1 Y^2 - \left[\alpha_1 T_0^2 Y + \theta_{1,2} T_{g-3} T_2 Y + \theta_{1,3} T_{g-3} T_3 Y + \sum_{m=0}^{g-3} \iota_{1,m} T_1 T_m Y \right. \\ &\quad \left. + \lambda_{1,1} T_{g-2}^2 T_1 + \lambda_{1,2} T_{g-2}^2 T_2 + \sum_{p=1}^{g-2} \mu_{1,p} T_0 T_{g-2} T_p + \sum_{q=0}^{g-2} \xi_{1,q} T_0^2 T_q \right]. \end{aligned}$$

§ II.5. Dégénérescence

Dans les § précédents, nous avons travaillé avec une courbe \mathcal{C}' munie de deux points x et y tels que $y \neq x$ et $y \neq x'$ et nous avons montré certaines propriétés de la courbe \mathcal{C} (dépendant de x et y) obtenue après l'identification de x et y en un point double ordinaire. Dans ce §, nous considérons la famille de courbes obtenue en fixant x sur \mathcal{C}' et en faisant varier le point y sur $\mathcal{C}' \setminus \{x, x'\}$ et nous étudions la dégénérescence des équations en $y = x'$. Le point x est fixé sur \mathcal{C}' une fois pour toutes.

Notations. — Soit $y \in \mathcal{C}' \setminus \{x, x'\}$; notons \mathcal{C}_y la courbe obtenue après l'identification de x et y en un point double ordinaire. Les résultats obtenus plus haut sont applicables à \mathcal{C}_y . On notera $\mathcal{C}_{x'}$ la courbe obtenue après l'identification de x et x' .

Pour $y \neq x'$, l'idéal de l'image de \mathcal{C}_y dans \mathbf{P}_k^{g-1} sera noté $\mathbf{I}^{g,y}$ (idéal de la fibre générique). Il faut noter que les formes w_j telles que définies au § II.1.1 dépendent de x mais pas de y . Dès lors, ces formes sont *constantes* dans la famille $(\mathcal{C}_y)_y$. Pour tout j , nous noterons w'_j la forme sur $\mathcal{C}_{x'}$ qui est la limite, lorsque y dégénère en x' , de w_j . On a encore les relations de niveau

$$w'_i w'_j = w'_{i+k} w'_{j-k}, \quad (2.11)$$

pour toutes les valeurs entières de i, j, k telles que $i, j, i+k$ et $j-k$ soient ≥ 0 et $\leq g-2$. La forme η , quant à elle, dépend de x et y . Le point x étant fixé, nous la notons η_y . Lorsque y dégénère en x' , cette forme à pôles dégénère vers une forme notée w'_{g-1} qui a des pôles simples en x et x' . La notation « w'_{g-1} » est justifiée d'une part par le fait que cette forme complète la famille (w'_0, \dots, w'_{g-2}) en une base de $\mathbf{H}^0(\mathcal{C}_{x'}, \omega_{\mathcal{C}_{x'}})$, et d'autre part parce qu'elle vérifie les relations de niveau (2.11) (quitte à la multiplier par une constante bien choisie).

II.5.1. IDÉAL DE L'IMAGE DE $\mathcal{C}_{x'}$ DANS \mathbf{P}_k^{g-1}

Bien entendu, lorsque $y = x'$, les résultats présentés plus haut ne sont pas valables. Par exemple, la prop. II.1 n'est plus vraie. De fait, le système linéaire donné par $\mathbf{H}^0(\mathcal{C}_{x'}, \omega_{\mathcal{C}_{x'}})$ fournit une application vers \mathbf{P}_k^{g-1} qui est $2 : 1$. On peut néanmoins se poser la question de l'idéal définissant l'image de cette courbe dans \mathbf{P}_k^{g-1} . Nous le noterons \mathbf{I}^s (idéal de la fibre spéciale). Celui-ci est engendré par les quadriques de niveau correspondant aux relations

$$w'_i w'_j = w'_{i+k} w'_{j-k},$$

pour toutes les valeurs entières de i, j, k telles que $i, j, i+k$ et $j-k$ soient ≥ 0 et $\leq g-1$. On peut exhiber une base de l'espace vectoriel de ces quadriques tout comme nous l'avons fait au § II.2.2. Ici, il y a $(g-2)$ quadriques supplémentaires correspondant aux relations

de niveau faisant intervenir w'_{g-1} :

$$\begin{array}{lll}
w'_0 w'_{g-1} = w'_1 w'_{g-2} & \rightsquigarrow & X'_0 X'_{g-1} - X'_1 X_{g-2} \in \mathbb{I}^s, \\
w'_1 w'_{g-1} = w'_2 w'_{g-2} & \rightsquigarrow & X'_1 X'_{g-1} - X'_2 X_{g-2} \in \mathbb{I}^s, \\
& & \vdots \\
w'_{g-4} w'_{g-1} = w'_{g-3} w'_{g-2} & \rightsquigarrow & X'_{g-4} X'_{g-1} - X'_{g-3} X_{g-2} \in \mathbb{I}^s, \\
w'_{g-3} w'_{g-1} = w_{g-2}^2 & \rightsquigarrow & X'_{g-3} X'_{g-1} - X_{g-2}^2 \in \mathbb{I}^s.
\end{array} \tag{2.12}$$

La question de la dégénérescence peut être formulée de la façon suivante : parmi les éléments de l'idéal \mathbb{I}^s , lesquels peuvent être obtenus comme dégénérescence d'éléments de $\mathbb{I}^{s,y}$? Il s'agit d'une question d'extension de sections : une section nulle sur la fibre spéciale (i.e., pour $y = x'$) peut-elle s'étendre en une section nulle sur un ouvert autour de x' ?

Les quadriques de niveau $F_{N,i}$ sur \mathcal{C}_y dégèrent naturellement vers des quadriques $F'_{N,i}$ sur $\mathcal{C}_{x'}$. Ainsi, les quadriques de niveau *ne faisant pas intervenir la forme w'_{g-1}* sont toutes obtenues comme dégénérescence de quadriques génériques. Il reste donc à étudier le cas des quadriques (2.12) listées ci-dessus.

Pour espérer obtenir l'une de ces quadriques comme dégénérescence d'équations génériques, il est nécessaire de faire appel à des cubiques, car les quadriques génériques ne mettent pas en jeu la forme η_y . Cela dit, il n'est pas commode d'utiliser les cubiques G_1, \dots, G_{g-3} introduites plus haut : en effet, celles-ci sont écrites dans les coordonnées T_j et les formes t_j ne dégèrent pas « proprement » (les coefficients λ_j , qui sont des fonctions de y , présentent un pôle lorsque y dégère en x' ; en fait, les t_j forment une bonne base *générique* mais la dégénérescence de cette base est de dimension 1, engendrée par w'_0). Nous allons donc écrire d'autres cubiques génériques, écrites avec les formes w_0, \dots, w_{g-2} (qui, elles, dégèrent proprement) et η_y . Bien entendu, ces cubiques peuvent s'exprimer en fonction des cubiques G_1, \dots, G_{g-3} .

II.5.2. UNE BASE DE $H^0(\mathcal{C}_y, \omega_y^{\otimes 3})$ AU VOISINAGE DE x'

La forme w_{g-3} ne s'annule qu'en un nombre fini de points (car $\deg(\Omega) = 2g - 4$), dont x et x' . Il existe donc un ouvert U de \mathcal{C}_y contenant x' tel que w_{g-3} ne s'annule pas sur U , sauf en x' .

Proposition II.22. — *Une base de $H^0(U, \omega_{\mathcal{C}_y|U}^{\otimes 3})$ (pour $y \neq x'$) est donnée par les éléments suivants :*

$$\begin{aligned}
& w_0^3, w_0^2 w_1, \dots, w_0^2 w_{g-2}, w_0 w_{g-2} w_1, \dots, w_0 w_{g-2}^2, w_{g-2}^2 w_1, \dots, w_{g-2}^3, \\
& w_0^2 \eta_y, \dots, w_0 w_{g-2} \eta_y, w_{g-2} w_1 \eta_y, \dots, w_{g-2}^2 \eta_y, \\
& w_{g-3} \eta_y^2, w_{g-2} \eta_y^2, \eta_y^3.
\end{aligned}$$

[Voir aussi § II.2.3.]

Remarque. — La notation $H^0(U, \omega_{\mathcal{C}_y|U}^{\otimes 3})$ est abusive : on considère en réalité une famille \mathfrak{C} de courbes indexée par \mathcal{C}' . On a donc une application $p: \mathfrak{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ telle que $p^{-1}(y) = \mathcal{C}_y$ pour tout $y \in \mathcal{C}'$. Quitte à restreindre U , on peut supposer que U est affine et que son groupe de Picard est trivial (de sorte que tout \mathcal{O}_U -module projectif est libre). Dans la notation ci-dessus, il faudrait alors remplacer U par $p^{-1}(U)$.

Démonstration. — La liste ci-dessus comporte $(5g - 5)$ éléments. Il suffit donc de vérifier que la famille qu'ils composent est libre. Supposons donc que l'on a une combinaison linéaire nulle de ces termes. L'élément η_y^3 est le seul ayant un pôle triple en x (et y), donc son coefficient est nul. Ensuite, $w_{g-2}\eta_y^2$ est le seul ayant un pôle double en x , donc son coefficient est nul. Vu le choix de l'ouvert U sur lequel on se place, $w_{g-3}\eta_y^2$ est le seul terme ayant un pôle double en y : son coefficient est nul. Il suffit ensuite d'utiliser le lemme II.4 et d'examiner les ordres d'annulation en x pour conclure que tous les coefficients restants sont nuls. \square

II.5.3. EXTENSION

Soit p un entier tel que $0 \leq p \leq g-4$. Nous allons montrer qu'un multiple de la quadrique de niveau $w'_p w'_{g-1} - w'_{p+1} w'_{g-2}$ sur la fibre spéciale peut être étendu sur l'ouvert U .

Soit $y \in U$; la 3-forme $(w_p \eta_y - w_{p+1} w_{g-2}) \eta_y$ est un élément de $H^0(U, \omega_{\mathcal{C}_y|U}^{\otimes 3})$: on peut le décomposer³ dans la base donnée par la prop. II.22. Il existe donc des scalaires

$$\begin{aligned} \alpha_{y,i} & \quad (0 \leq i \leq g-2), \\ \beta_{y,j} & \quad (1 \leq j \leq g-2), \\ \gamma_{y,k} & \quad (1 \leq k \leq g-2), \\ \delta_{y,\ell} & \quad (0 \leq \ell \leq g-2), \\ \epsilon_{y,m} & \quad (1 \leq m \leq g-2), \\ \tau_y, \theta_y, \sigma_y, & \end{aligned}$$

tels que

$$\begin{aligned} (w_p \eta_y - w_{p+1} w_{g-2}) \eta_y &= \tau_y \eta_y^3 + \theta_y w_{g-3} \eta_y^2 + \sigma_y w_{g-2} \eta_y^2 + \sum_{i=0}^{g-2} \alpha_{y,i} w_0^2 w_i \\ &+ \sum_{j=1}^{g-2} \beta_{y,j} w_0 w_{g-2} w_j + \sum_{k=1}^{g-2} \gamma_{y,k} w_{g-2}^2 w_k \\ &+ \sum_{\ell=0}^{g-2} \delta_{y,\ell} w_0 w_\ell \eta_y + \sum_{m=1}^{g-2} \epsilon_{y,m} w_{g-2} w_m \eta_y. \end{aligned} \tag{2.13}$$

3. On doit exclure le cas où $p = g-3$ car la décomposition de $(w_{g-3} \eta_y - w_{g-2}^2) \eta_y$ dans la base considérée est triviale.

Le membre de gauche n'a pas de pôle triple en x , donc $\tau_y = 0$. Il n'a pas non plus de pôle double en x , donc $\sigma_y = 0$. En revanche, il a un pôle double en y (dû au terme $w_p \eta_y^2$); le seul terme dans le membre de droite ayant un pôle double en y est $\theta_y w_{g-3} \eta_y^2$. On en déduit que

$$\ll \theta_y = \frac{w_p \eta_y^2}{w_{g-3} \eta_y^2} = \frac{w_p}{w_{g-3}} \gg,$$

donc θ_y présente un zéro (d'ordre $g - 3 - p > 0$) lorsque y dégénère en x' .

Examinons maintenant la dégénérescence en $y = x'$ des autres coefficients. On commence par multiplier l'égalité ci-dessus par une fonction π_y s'annulant éventuellement en $y = x'$, afin de compenser les (éventuels) pôles des coefficients $\alpha_{y,i}$, $\beta_{y,j}$, $\gamma_{y,k}$, $\delta_{y,\ell}$, $\epsilon_{y,m}$. Soit M l'ordre maximal des pôles de ces coefficients lorsque y dégénère en x' .

Notons $\pi_{x'} = 0$ si $M > 0$ et $\pi_{x'} = 1$ si $M = 0$. La limite de $\pi_y \delta_{y,i}$ (resp. de $\pi_y \beta_{y,j}$, $\pi_y \gamma_{y,k}$, $\pi_y \delta_{y,\ell}$, $\pi_y \epsilon_{y,m}$) sera notée δ'_i (resp. β'_j , γ'_k , δ'_ℓ , ϵ'_m).

L'équation $\pi_y \cdot (2.13)$ dégénère vers la relation

$$\begin{aligned} \pi_{x'} (w'_p w'_{g-1} - w'_{p+1} w'_{g-2}) w'_{g-1} &= \sum_{i=0}^{g-2} \alpha'_i w_0'^2 w'_i + \sum_{j=1}^{g-2} \beta'_j w'_0 w'_{g-2} w'_j \\ &+ \sum_{k=1}^{g-2} \gamma'_k w_{g-2}'^2 w'_k + \sum_{\ell=0}^{g-2} \delta'_\ell w'_0 w'_\ell w'_{g-1} \\ &+ \sum_{m=1}^{g-2} \epsilon'_m w'_{g-2} w'_m w'_{g-1}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Notons r' le membre de droite de (2.14). On *sait* que le membre de gauche de (2.14) est nul (car $w'_p w'_{g-1} - w'_{p+1} w'_{g-2} = 0$), donc $r' = 0$. On en déduit déjà que $\epsilon'_{g-2} = 0$ car ce terme est le seul présentant un pôle (simple) en x' . On peut utiliser les relations de niveaux

$$w'_q w'_{g-1} = w'_{q+1} w'_{g-2} \quad (1 \leq q \leq g-3)$$

pour obtenir

$$\begin{aligned} r' &= \sum_{i=0}^{g-2} \alpha'_i w_0'^2 w'_i + \sum_{j=1}^{g-2} (\beta'_j + \delta'_{j-1}) w'_0 w'_{g-2} w'_j \\ &+ (\gamma'_1 + \delta'_{g-2}) w_{g-2}'^2 w'_1 + \sum_{k=2}^{g-2} (\gamma'_k + \epsilon'_{k-1}) w_{g-2}'^2 w'_k. \end{aligned}$$

En regardant l'ordre d'annulation en x' , on en déduit que

$$\begin{aligned} \alpha'_i &= 0, \\ \beta'_j &= -\delta'_{j-1} \quad (1 \leq j \leq g-2), \\ \gamma'_1 &= -\delta'_{g-2}, \\ \gamma'_k &= -\epsilon'_{k-1} \quad (2 \leq k \leq g-2). \end{aligned}$$

Dès lors, on peut récrire (2.14) ainsi :

$$\begin{aligned} \pi_{x'}(w'_p w'_{g-1} - w'_{p+1} w'_{g-2}) w'_{g-1} &= \sum_{\ell=0}^{g-3} \delta'_\ell (w'_0 w'_\ell w'_{g-1} - w'_0 w'_{g-2} w'_{\ell+1}) \\ &\quad + \delta'_{g-2} (w'_0 w'_{g-2} w'_{g-1} - w'^2_{g-2} w'_1) \\ &\quad + \sum_{m=1}^{g-3} \epsilon'_m (w'_{g-2} w'_m w'_{g-1} - w'^2_{g-2} w'_{m+1}). \end{aligned} \quad (2.15)$$

À ce stade, on peut dire que

$$\begin{aligned} P &= \pi_{x'}(X'_p X'_{g-1} - X'_{p+1} X'_{g-2}) X'_{g-1} - \left(\sum_{\ell=0}^{g-3} \delta'_\ell (X'_0 X'_\ell X'_{g-1} - X'_0 X'_{g-2} X'_{\ell+1}) \right. \\ &\quad \left. + \delta'_{g-2} (X'_0 X'_{g-2} X'_{g-1} - X'^2_{g-2} X'_1) + \sum_{m=1}^{g-3} \epsilon'_m (X'_{g-2} X'_m X'_{g-1} - X'^2_{g-2} X'_{m+1}) \right) \end{aligned}$$

est un élément de \mathbb{I}^s qui est une dégénérescence d'éléments de $\mathbb{I}^{s,y}$.

Notons

$$\mathbb{J}^s \subset k[X'_0, \dots, X'_{g-1}]$$

l'idéal engendré par les quadriques de niveau ne faisant pas intervenir X'_{g-1} . Les éléments de \mathbb{J}^s sont des dégénérescences d'éléments de $\mathbb{I}^{s,y}$.

On a

$$\begin{aligned} X'_p X'_0 X'_{g-2} X'_{\ell+1} &\equiv X'_0 X'_\ell X'_{p+1} X'_{g-2} \pmod{\mathbb{J}^s} \quad (0 \leq \ell \leq g-3), \\ X'_p X'^2_{g-2} X'_1 &\equiv X'_0 X'^2_{g-2} X'_{p+1} \pmod{\mathbb{J}^s}, \\ X'_p X'^2_{g-2} X'_{m+1} &\equiv X'_m X'^2_{g-2} X'_{p+1} \pmod{\mathbb{J}^s} \quad (1 \leq m \leq g-3), \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $X'_p P$ est congru à

$$(X'_p X'_{g-1} - X'_{p+1} X'_{g-2}) \left(\pi_{x'} X'_p X'_{g-1} - \sum_{\ell=0}^{g-2} \delta'_\ell X'_0 X'_\ell - \sum_{m=1}^{g-3} \epsilon'_m X'_{g-2} X'_m \right)$$

modulo \mathbb{J}^s . L'un (au moins) des coefficients $\delta'_0, \dots, \delta'_{g-2}, \epsilon'_1, \dots, \epsilon'_{g-3}$ est non nul ; on en déduit qu'un multiple (non nul) de la quadrique

$$X'_p X'_{g-1} - X'_{p+1} X'_{g-2}$$

est une dégénérescence d'éléments de $\mathbb{I}^{s,y}$.

CHAPITRE III

CAS D'UNE COURBE STABLE DONT LE GRAPHE EST PLANAIRE

Le théorème de Petri classique concerne les courbes lisses et affirme que l'image canonique de telles courbes est une intersection de quadriques et de cubiques. On sait par ailleurs que l'espace des modules des courbes lisses n'est pas propre et que son bord est constitué des courbes stables. Il devient dès lors légitime de se poser la question du plongement canonique des courbes stables et, si celui-ci est obtenu, des générateurs de l'idéal de l'image canonique.

Cette question a été abordée sous deux angles différents par Noot [Noo88] (approche combinatoire) et Schreyer [Sch91] (approche géométrique). On se propose ici de fournir un résultat concernant les courbes stables *dont le graphe associé est planaire*. Un résultat sans cette hypothèse se trouve dans [Noo88] ; pour l'établir, il est nécessaire de considérer une certaine relation d'équivalence sur les arêtes du graphe associé et les équations quadriques et cubiques intervenant dans la démonstration d'un théorème de Petri pour cette courbe dépendent de cette relation. Dans le cas particulier où le graphe est planaire, l'argument peut être modifié de sorte que les équations ne dépendent pas de la relation d'équivalence citée plus haut.

§ III.1. Généralités sur les graphes

On appellera *arc fermé* tout espace topologique homéomorphe à l'intervalle $[0, 1] \subset \mathbf{R}$ ou au cercle pointé $(\mathbf{S}^1, p) \subset \mathbf{R}^2$, p étant un point quelconque de \mathbf{S}^1 . Les extrémités d'un arc fermé homéomorphe à $[0, 1]$ sont les points correspondant à 0 et 1. Un arc fermé homéomorphe à (\mathbf{S}^1, p) a pour seule extrémité le point $p \in \mathbf{S}^1$.

Un *graphe* est un espace topologique qui est une réunion d'un nombre fini d'arcs fermés (appelés *arêtes* du graphe) telles que deux arcs fermés ne s'intersectent qu'en leurs extrémités (appelées *sommets* du graphe).

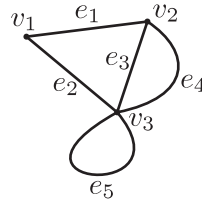


FIGURE III.1 – Un graphe

Un *sous-graphe* d'un graphe G est un graphe dont toutes les arêtes et tous les sommets appartiennent à G .

Une arête dont les extrémités sont confondues est appelée une *boucle*.

On dit que deux sommets sont *adjacents* s'il existe une arête dont ils sont les extrémités.

Un *chemin* dans un graphe est une suite v_1, \dots, v_n de sommets (avec $n \geq 1$) telle que les sommets v_j et v_{j+1} sont adjacents pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq n-1$. Un tel chemin est noté

$$v_1 \rightarrow \dots \rightarrow v_n.$$

Un *cycle* dans un graphe est un chemin v_1, \dots, v_n tel que $v_1 = v_n$. Si de plus $v_j \neq v_{j'}$ dès que $1 \leq j < j' \leq n$, on dit que le cycle est *simple*.

Un graphe est dit *connexe* s'il est connexe au sens topologique.

Un *homéomorphisme de graphe* est un homéomorphisme entre graphes qui préserve les extrémités des arêtes. Un graphe est dit *planaire* s'il est homéomorphe à un graphe contenu dans \mathbf{R}^2 .

Remarque. — Nous ne considérons pas des graphes orientés, mais nous aurons besoin de la notion d'orientation pour les cycles. Un cycle à n sommets est homéomorphe (au sens des graphes) à un cercle \mathbf{S}^1 n -pointé; on peut donc y considérer deux orientations naturelles (sens direct ou indirect).

Exemples. —

- a) La figure III.1 présente un graphe (planaire) à trois sommets v_1, v_2, v_3 et cinq arêtes e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 . Le cycle $v_3 \xrightarrow{e_5} v_3$ est simple, ainsi que le cycle $v_1 \xrightarrow{e_1} v_2 \xrightarrow{e_3} v_3 \xrightarrow{e_2} v_1$. En revanche, le cycle $v_2 \xrightarrow{e_4} v_3 \xrightarrow{e_5} v_3 \xrightarrow{e_3} v_2$ n'est pas simple.
- b) Soit r un entier ≥ 1 . On appelle *rose à r pétales*¹ le graphe composé d'un unique sommet et de r arêtes; un tel graphe est planaire. Voir la figure III.2. Tout graphe connexe est homotopiquement équivalent à une rose à r pétales, pour un certain entier r ([AB73, p. 52–53]); autrement dit, en contractant des arêtes qui ne sont pas des boucles, on peut transformer tout graphe en une rose à r pétales.
- c) On appelle K_5 le graphe à 5 sommets dont chaque sommet est relié à tous les autres par une seule arête et $K_{3,3}$ le graphe à 6 sommets $v_1, v_2, v_3, v'_1, v'_2, v'_3$ dont les seules arêtes relient chaque sommet v_1, v_2, v_3 à chaque sommet v'_1, v'_2, v'_3 (cf. figure III.3). On peut montrer que K_5 et $K_{3,3}$ ne sont pas planaires. De plus, un théorème de

1. Cette terminologie provient de [GH81].

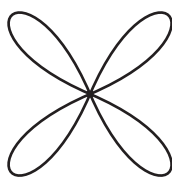


FIGURE III.2 – Une rose à 4 pétales

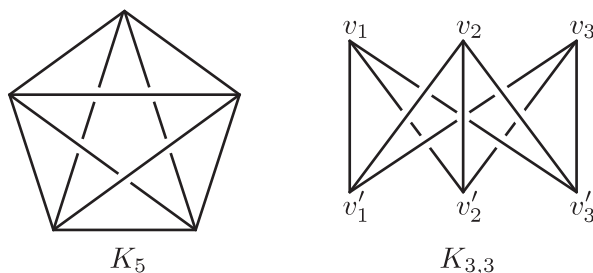


FIGURE III.3 – Deux graphes non planaires

Kuratowski affirme que si un graphe n'est pas planaire, il contient un sous-graphe qui est une *expansion* de $K_{3,3}$ ou de K_5 . Une expansion d'un graphe est l'ajout de sommets le long de certaines arêtes. En ce sens, $K_{3,3}$ et K_5 sont les plus petits graphes non planaires.

Soit G un graphe : on appelle *connectivité* de G le plus grand entier p pour lequel il existe dans G des arêtes distinctes e_1, \dots, e_p telles que

$$G - \{e_1, \dots, e_p\}$$

soit connexe. La connectivité de G est notée r_G ou simplement r s'il n'y a pas d'ambiguïté.

On peut donner des définitions alternatives pour la connectivité :

– en terme de la caractéristique d'Euler-Poincaré :

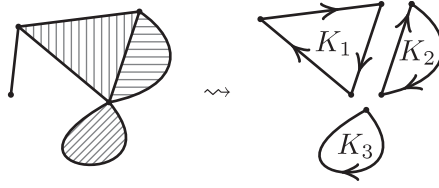
$$1 - r_G = \chi(G) = (\text{nombre de sommets de } G) - (\text{nombre d'arêtes de } G);$$

- si on contracte G en une rose à r pétales, l'entier r est la connectivité de G ;
- si G est planaire, r_G est le nombre de composantes connexes bornées du complémentaire de G dans \mathbf{R}^2 .

Proposition III.1. — Soit G un graphe de connectivité r . Pour tout anneau de coefficients R , le premier groupe d'homologie $H_1(G, R)$ est libre à r générateurs ; autrement dit, $H_1(G, R) = R^r$.

Démonstration. — Voir [GH81, p. 101–102].

□

FIGURE III.4 – Construction d'une base de $H_1(G, \mathbf{Z})$

Lemme III.2. — Soit G un graphe planaire de connectivité r . Il existe une base

$$(K_1, \dots, K_r)$$

du \mathbf{Z} -module $H_1(G, \mathbf{Z})$ constituée de cycles simples orientés et telle que toute arête de G appartient au plus à deux cycles parmi K_1, \dots, K_r .

Démonstration. — Les arêtes de G qui n'appartiennent à aucun cycle de G ne contribuent pas dans $H_1(G, \mathbf{Z})$; on peut donc les omettre.

Le graphe G étant planaire, on peut considérer les composantes connexes du complémentaire de G dans \mathbf{R}^2 ; il y en a $(r + 1)$, dont une seule est non bornée. Les r composantes connexes bornées ont un bord homéomorphe à \mathbf{S}^1 . On choisit pour chacune d'elles une orientation (directe ou indirecte) et on les appelle K_1, \dots, K_r (voir la figure III.4). Par construction, les cycles K_ℓ sont simples et une arête de G appartient au plus à deux cycles parmi K_1, \dots, K_r . Montrons qu'ils engendrent $H_1(G, \mathbf{Z})$. Soit K un cycle orienté dans G . On peut supposer que K est simple car tout cycle orienté dans G est la somme (dans $H_1(G, \mathbf{Z})$) de cycles simples. Le sous-ensemble de \mathbf{R}^2 borné par K contient l'intérieur de certains des cycles K_1, \dots, K_r : on les note $K_{\ell_1}, \dots, K_{\ell_p}$. Montrons par récurrence sur p que

$$K = \sum_{j=1}^p \pm K_{\ell_j}$$

(les signes \pm dépendent des orientations choisies pour les cycles K_ℓ). Si $p = 1$, il n'y a rien à montrer. Si $p > 1$, soit e une arête de K ; e est aussi une arête de l'un des cycles $K_{\ell_1}, \dots, K_{\ell_p}$, disons de K_{ℓ_1} . Si e apparaît dans K et K_{ℓ_1} avec la même orientation, on considère $K' = K - K_{\ell_1}$, sinon on considère $K' = K + K_{\ell_1}$. Le cycle K' est simple et il contient les cycles $K_{\ell_2}, \dots, K_{\ell_p}$: on peut conclure par récurrence.

Enfin, les cycles K_1, \dots, K_r engendrent $H_1(G, \mathbf{Z})$ qui est libre de rang r (prop. III.1), donc ils forment une base. \square

Remarque. — MacLane a montré dans [Mac36] qu'un graphe G est planaire si et seulement si $H_1(G, \mathbf{Z})$ admet une base K_1, \dots, K_r telle que toute arête de G appartient au plus à deux cycles parmi K_1, \dots, K_r .

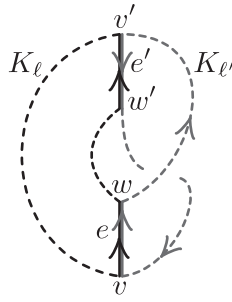


FIGURE III.5 – Deux arêtes avec orientations incompatibles

Lemme III.3. — Soit G un graphe planaire de connectivité r et soit (K_1, \dots, K_r) une base de $H_1(G, \mathbf{Z})$ fournie par le lemme III.2. Pour toute paire (ℓ, ℓ') d'entiers tels que $1 \leq \ell < \ell' \leq r$, les arêtes communes de K_ℓ et $K_{\ell'}$ ont des orientations compatibles, i.e., soit elles ont toutes la même orientation dans K_ℓ et $K_{\ell'}$, soit elles ont toutes des orientations opposées.

Démonstration. — Supposons qu'il existe deux cycles K_ℓ et $K_{\ell'}$ et deux arêtes e (de sommets v, w) et e' (de sommets v', w') tels que e apparaisse avec la même orientation dans K_ℓ et $K_{\ell'}$ et e' avec des orientations opposées. Voir la figure III.5 (le cycle K_ℓ est en noir et $K_{\ell'}$ en gris).

Suivons le cycle $K_{\ell'}$ en partant de v . On atteint successivement w, v' puis w' ; le cycle K_ℓ correspond à une composante connexe du complémentaire de G dans \mathbf{R}^2 , donc le chemin $w' \rightarrow \dots \rightarrow v$ qui clôt le cycle $K_{\ell'}$ ne peut passer à l'intérieur de K_ℓ . De plus, $K_{\ell'}$ est simple, donc ce chemin ne peut pas non plus passer par l'un des autres sommets de $K_{\ell'}$. On en déduit que ce chemin coupe le chemin $w \rightarrow \dots \rightarrow v'$ en un point qui n'est pas un sommet de $K_{\ell'}$, ce qui contredit le fait que G est planaire. \square

§ III.2. Cadre de travail et notations

Soit \mathcal{C} une courbe stable de genre g définie sur un corps algébriquement clos k . Cela signifie que \mathcal{C} est une courbe (i.e., un k -schéma de dimension 1 connexe, réduit et propre sur k) dont les seules singularités sont des points doubles ordinaires et dont les composantes rationnelles non singulières rencontrent les autres composantes en au moins trois points.

On note \mathcal{C}' la normalisée de \mathcal{C} et $\iota: \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ le morphisme de normalisation. Soient $\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_N$ les composantes irréductibles de \mathcal{C}' . Pour chaque entier i tel que $1 \leq i \leq N$, on note $\mathcal{C}_i = \iota(\mathcal{C}'_i)$, g_i le genre de \mathcal{C}'_i et Ω_i le faisceau des différentielles régulières sur la courbe lisse \mathcal{C}'_i .

Les points doubles de \mathcal{C} sont notés z_1, \dots, z_q . Au-dessus de chacun d'entre eux se

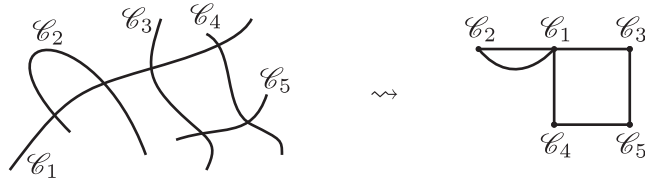


FIGURE III.6 – Graphe associé à une courbe stable

trouvent dans \mathcal{C}' deux points :

$$z_j = \iota(x_j) = \iota(y_j) \quad \text{et} \quad x_j \neq y_j$$

pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq q$.

Le faisceau dualisant de \mathcal{C} (cf. [DM69, § I]) est noté $\omega_{\mathcal{C}}$; dans le cas présent où l'on considère une courbe sur un corps k , $\omega_{\mathcal{C}}$ est le faisceau des 1-formes w sur \mathcal{C}' régulières en tout point sauf éventuellement $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ en lesquels des pôles simples sont possibles, avec la condition

$$\text{Res}_{x_j}(w) + \text{Res}_{y_j}(w) = 0$$

pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq q$.

Soit i un entier tel que $1 \leq i \leq N$. La description ci-dessus permet de voir $H^0(\mathcal{C}'_i, \Omega_i)$ comme un sous-module de $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$. On peut donc fixer des différentielles linéairement indépendantes $w_{i,1}, \dots, w_{i,g_i} \in H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$ telles que $(w_{i,1}, \dots, w_{i,g_i})$ est une base de $H^0(\mathcal{C}'_i, \Omega_i)$.

§ III.3. Graphe associé à une courbe stable

À la courbe \mathcal{C} , on associe un graphe $G(\mathcal{C})$ défini comme suit : ses sommets sont les composantes irréductibles de \mathcal{C} et deux sommets sont reliés par d arête(s) si les composantes correspondantes se coupent en d point(s) double(s). (Voir la figure III.6.)

Remarques. —

- Le graphe associé à une courbe stable \mathcal{C} est connexe puisque \mathcal{C} l'est.
- Il se peut que le graphe associé à une courbe stable ne soit pas planaire. Par exemple, le graphe associé à la courbe présenté sur la figure III.7 est $K_{3,3}$ (cf. figure III.3).

On note r la connectivité de $G(\mathcal{C})$; cet entier est aussi le rang de $H_1(G(\mathcal{C}), \mathbf{Z})$.

À toute forme $w \in H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$ on associe un sous-graphe $G(w)$ de $G(\mathcal{C})$ dont les sommets sont les composantes de \mathcal{C} sur lesquelles w ne s'annule pas identiquement et dont les arêtes sont les points doubles en lesquels w a un pôle (y compris les points doubles irréductibles, qui induisent une boucle dans $G(w)$).

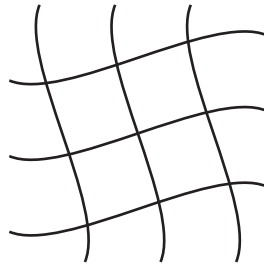


FIGURE III.7 – Une courbe stable dont le graphe n’est pas planaire

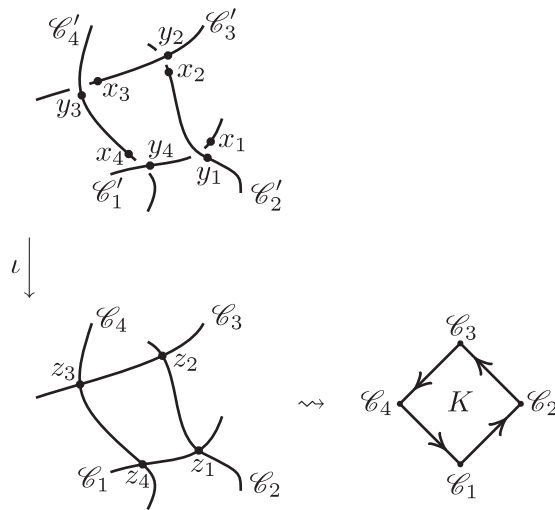


FIGURE III.8 – Démonstration du lemme III.4: cas où $n = 4$

Lemme III.4. — Pour tout cycle simple orienté K dans $G(\mathcal{C})$, il existe une forme $w \in H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$ telle que $K = G(w)$.

Démonstration. — Le cycle K correspond à une chaîne fermée de n composantes irréductibles de \mathcal{C} . Sans perte de généralité, on peut supposer que ce sont $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n$ et que les points doubles correspondant aux arêtes de K sont z_1, \dots, z_n . On utilise les notations implicitement données par la figure III.8.

La formule de Riemann-Roch sur \mathcal{C}'_1 donne

$$\dim_k H^0(\mathcal{C}'_1, \Omega_1(x_1 + y_n)) = g_1 + 1 = \dim_k H^0(\mathcal{C}'_1, \Omega_1) + 1,$$

donc il existe une forme w_1 définie sur \mathcal{C}'_1 qui a des pôles simples en x_1 et y_n et aucun autre pôle. D’après la formule des résidus sur \mathcal{C}'_1 , on a

$$\text{Res}_{x_1}(w_1) + \text{Res}_{y_n}(w_1) = 0.$$

Quitte à multiplier w_1 par une constante non nulle, on peut supposer que

$$\text{Res}_{x_1}(w_1) = 1 \quad \text{et} \quad \text{Res}_{y_n}(w_1) = -1.$$

Le même argument assure qu'il existe une forme w' sur \mathcal{C}'_2 ayant des pôles simples en x_2 et y_1 , aucun autre pôle, et vérifiant

$$\operatorname{Res}_{x_2}(w') + \operatorname{Res}_{y_1}(w') = 0.$$

On choisit la valeur du résidu en y_1 de sorte qu'on puisse étendre w_1 sur \mathcal{C}'_2 :

$$\operatorname{Res}_{y_1}(w') = -\operatorname{Res}_{x_1}(w_1) = -1.$$

Ceci permet de définir w_2 sur $\mathcal{C}'_1 \cup \mathcal{C}'_2$ vérifiant

$$\operatorname{Res}_{x_1}(w_2) + \operatorname{Res}_{y_1}(w_2) = 0.$$

On poursuit cette construction successivement sur chaque composante jusqu'à \mathcal{C}'_n . Notons que le fait que K soit simple assure qu'il n'y a aucune ambiguïté à chaque étape : chaque composante \mathcal{C}'_i ($1 \leq i \leq n$) contient exactement deux points en lesquels des pôles sont autorisés.

On obtient finalement une forme w_n définie sur $\mathcal{C}'_1 \cup \dots \cup \mathcal{C}'_n$ et qui vérifie

$$\operatorname{Res}_{x_i}(w_n) = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{Res}_{y_i}(w_n) = -1$$

pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$. En étendant w_n par 0 hors de K , on obtient la forme w voulue. \square

Remarque. — Dans la démonstration ci-dessus, on effectue un choix lorsqu'on pose

$$\operatorname{Res}_{x_1}(w_1) = 1.$$

On fera systématiquement ce choix. Dès lors, l'orientation de K détermine entièrement la forme w . Si l'on inverse l'orientation de K , la forme w est changée en $-w$. Plus généralement, si l'on a une relation entre cycles simples

$$\sum_{t=1}^n \lambda_t K_t = 0$$

dans $H_1(G(\mathcal{C}), \mathbf{Z})$, on a

$$\sum_{t=1}^n \lambda_t w_t = 0$$

dans $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$, où pour tout entier t tel que $1 \leq t \leq n$, w_t est la forme correspondant à K_t via le lemme III.4.

Lemme III.5. — *Soit $w \in H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$; toute arête de $G(w)$ appartient à un cycle de $G(w)$.*

Démonstration. — Si $G(w)$ n'a aucune arête, il n'y a rien à montrer.

Les arêtes de $G(w)$ qui sont des boucles sont elles-mêmes des cycles. On peut, sans perte de généralité, supposer que $G(w)$ ne contient aucune boucle.

Remarquons ensuite que d'après la formule des résidus, si w admet un pôle sur une composante de \mathcal{C} , elle y admet au moins un autre pôle. Comme on suppose que $G(w)$ ne contient aucune boucle, on en déduit qu'un sommet de $G(w)$ est soit l'extrémité d'aucune arête, soit l'extrémité d'au moins deux arêtes.

Considérons maintenant une arête e de $G(w)$ et l'un de ses sommets v_1 . Ce dernier est l'extrémité d'au moins une autre arête dont on note v_2 le second sommet. En poursuivant ce raisonnement, on construit une suite (v_n) de sommets de $G(w)$. Or il n'y a qu'un nombre fini de sommets dans $G(w)$, donc il existe $n_1, n_2 \in \mathbf{N}^*$ tels que $n_1 < n_2$ et $v_{n_1} = v_{n_2}$. Autrement dit, $v_{n_1} \rightarrow \dots \rightarrow v_{n_2}$ est un cycle orienté que l'on peut supposer simple en prenant n_2 minimal. Notons K ce cycle simple orienté.

Si e est une arête de K , c'est fini. Sinon, soit $\eta \in H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$ une forme telle que $K = G(\eta)$ (lemme III.4). Il existe un scalaire λ tel que $w' = w - \lambda\eta$ n'a pas de pôle en les arêtes de K . L'arête e est une arête du sous-graphe $G(w')$ et ce dernier a strictement moins d'arêtes que $G(w)$. On conclut par récurrence sur le nombre d'arêtes de $G(w)$. \square

§ III.4. Construction d'une base de $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$

À partir de maintenant, on suppose que le graphe $G(\mathcal{C})$ est planaire. Sous cette hypothèse, on va exhiber une base du k -espace vectoriel $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$ et démontrer à l'aide de celle-ci un théorème de Petri pour la courbe \mathcal{C} (th. III.11 et cor. III.12).

Notations. — On fixe des cycles simples orientés K_1, \dots, K_r obtenus en appliquant le lemme III.2 au graphe planaire $G(\mathcal{C})$. On note η_1, \dots, η_r les différentielles correspondantes (lemme III.4) i.e., $K_\ell = G(\eta_\ell)$ pour tout entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq r$. Il faut garder à l'esprit qu'un choix de signe est effectué une fois pour toutes concernant les résidus des formes η_1, \dots, η_r .

Proposition III.6. — *Les éléments $(w_{i,j})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq g_i}$ et $(\eta_\ell)_{1 \leq \ell \leq r}$ forment une base du k -espace vectoriel $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$.*

Démonstration. — Soit $w \in H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$. Si w n'a pas de pôle sur \mathcal{C} , c'est une combinaison linéaire des éléments $(w_{i,j})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq g_i}$. Si w a n pôles, avec $n > 0$, alors $G(w)$ a au moins une arête et celle-ci appartient (lemme III.5) à un cycle K que l'on munit d'une orientation. On décompose K dans la base K_1, \dots, K_r de $H_1(G(\mathcal{C}), \mathbf{Z})$:

$$K = \sum_{\ell=1}^r \lambda_\ell K_\ell,$$

avec $\lambda_\ell \in \mathbf{Z}$ pour tout ℓ . Les pôles de $\sum_{\ell=1}^r \lambda_\ell \eta_\ell$ sont exactement les arêtes de K , donc il existe un scalaire $\lambda \in k$ tel que

$$w' = w - \lambda \sum_{\ell=1}^r \lambda_\ell \eta_\ell$$

n'a pas de pôles en ces points. Les autres pôles de w' sont des pôles de w , donc w' a strictement moins de pôles que w . On conclut par récurrence sur le nombre de pôles de w que w est combinaison linéaire des éléments $(w_{i,j})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq g_i}$ et $(\eta_\ell)_{1 \leq \ell \leq r}$. La récurrence fonctionne car à chaque étape, on annule au moins un pôle et on n'en introduit pas d'autres.

Les éléments $(w_{i,j})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq g_i}$ sont linéairement indépendants dans $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$ par définition. Pour conclure, il suffit donc de montrer que η_1, \dots, η_r sont linéairement indépendants dans $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$ modulo $\bigoplus_{i=1}^N H^0(\mathcal{C}'_i, \Omega_i)$. Si l'une des formes η_ℓ , disons η_r , est combinaison linéaire des autres modulo $\bigoplus_{i=1}^N H^0(\mathcal{C}'_i, \Omega_i)$, il existe des scalaires μ_1, \dots, μ_{r-1} et une forme ν sur \mathcal{C} sans pôles tels que

$$\eta_r = \sum_{\ell=1}^{r-1} \mu_\ell \eta_\ell + \nu. \quad (3.1)$$

En conséquence, les pôles de η_r sont parmi les pôles des η_ℓ ($1 \leq \ell \leq r-1$) et les autres pôles des η_ℓ se compensent dans (3.1). On en déduit que

$$K_r = \sum_{\ell=1}^{r-1} \mu_\ell K_\ell$$

dans $H_1(G(\mathcal{C}), k)$. Cette combinaison linéaire non triviale sur k contredit le fait que K_1, \dots, K_r forment une \mathbf{Z} -base, donc une k -base². \square

Corollaire III.7. — On a $g = r + \sum_{i=1}^N g_i$.

§ III.5. Générateurs de l'idéal canonique

III.5.1. HYPOTHÈSES, NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Dans toute la suite, on suppose que la courbe stable \mathcal{C} vérifie les conditions supplémentaires suivantes :

- (\star_1) pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq N$, \mathcal{C}'_i n'est pas hyperelliptique ;
- (\star_2) pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq N$, $g_i \geq 3$;
- (\star_3) toute arête de $G(\mathcal{C})$ appartient au moins à un cycle (que l'on peut supposer être l'un des cycles simples K_1, \dots, K_ℓ).

2. En effet, le choix de la \mathbf{Z} -base K_1, \dots, K_r induit une identification $H_1(G(\mathcal{C}), \mathbf{Z}) \simeq \mathbf{Z}^r$, l'image de K_ℓ étant l'élément $e_\ell = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbf{Z}^r$, le « 1 » se situant en ℓ -ème position. En tensorisant par k au-dessus de \mathbf{Z} , on obtient une identification

$$H_1(G(\mathcal{C}), k) \simeq H_1(G(\mathcal{C}), \mathbf{Z}) \otimes_{\mathbf{Z}} k \simeq k^r.$$

L'image de $e_\ell \in \mathbf{Z}^r$ dans le produit tensoriel est $e_\ell \in k^r$. Ceci montre que les cycles orientés K_1, \dots, K_r sont k -linéairement indépendants dans $H_1(G(\mathcal{C}), k)$.

Ces hypothèses sont justifiées en détail dans [Noo88, § 3.1]; elles assurent que l'application $\varphi: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{P}_k^{g-1}$ induite par le système canonique $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}})$ est un plongement. Pour résumer, les hypothèses (\star_1) et (\star_2) sont celles nécessaires à l'application du théorème de Max Noether aux composantes \mathcal{C}'_i , $1 \leq i \leq N$, et l'hypothèse (\star_3) assure qu'il n'y a pas de point de base dans le système linéaire associé à $\omega_{\mathcal{C}}$. On pourra aussi consulter [CFHR99, Art04] (je dois ces références à J. Nagel).

On s'intéresse alors aux équations de $\varphi(\mathcal{C})$ dans \mathbf{P}_k^{g-1} .

Remarque. — Notons que les hypothèses nécessaires à l'application du théorème de Petri classique sont plus restrictives que celles du théorème de Noether (il faut écarter le cas où le genre vaut 3); on va établir (cor. III.12) un théorème de Petri pour les courbes stables sous les seules hypothèses (\star_1) , (\star_2) et (\star_3) , en excluant bien sûr le cas des courbes lisses de genre 3.

Notations. — Pour chaque entier i tel que $1 \leq i \leq N$, soient

$$A_i = k[X_{i,1}, \dots, X_{i,g_i}], \quad A = A_1 \otimes \dots \otimes A_N \quad \text{et} \quad B = A[X_1, \dots, X_r].$$

Pour tout $P \in B$, on note $\deg_k(P)$ son degré sur k et $\deg_A(P)$ son degré sur A . Lorsqu'on parle de degré sans plus de précision, il s'agit du degré sur k .

Les identifications $X_{i,j} \mapsto w_{i,j}$ (pour $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq g_i$) et $X_\ell \mapsto \eta_\ell$ ($1 \leq \ell \leq r$) donnent des isomorphismes de k -algèbres

$$A_i \cong \text{Sym } H^0(\mathcal{C}'_i, \Omega_i) \quad \text{et} \quad B \cong \text{Sym } H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}).$$

On pose

$$R = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}^{\otimes n})$$

et, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq N$,

$$R_i = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(\mathcal{C}'_i, \Omega_i^{\otimes n}).$$

On a des homomorphismes naturels de k -algèbres $\theta: B \rightarrow R$ et $\theta_i: A_i \rightarrow R_i$. Notons respectivement I et I_i leurs noyaux: ce sont les idéaux canoniques, respectivement, de \mathcal{C} et \mathcal{C}'_i .

Rappelons l'énoncé du théorème de Max Noether dans ce contexte.

Théorème III.8 (Max Noether). — *Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq N$, l'application θ_i est surjective.*

Remarque. — Ce théorème peut s'énoncer *degré par degré*: pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'application

$$\text{Sym}^n H^0(\mathcal{C}'_i, \Omega_i) \longrightarrow H^0(\mathcal{C}'_i, \Omega_i^{\otimes n})$$

est surjective. C'est évident pour $n = 0$ et $n = 1$.

Proposition III.9. — Soit $n \in \mathbf{N}^*$ et soit $s \in H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}}^{\otimes n})$ une forme qui n'a que des pôles d'ordre $\leq \rho$, avec $\rho < n$. Alors il existe un polynôme homogène $Q \in B$ tel que

$$\deg_k(Q) = n, \quad \deg_A(Q) \leq \rho \quad \text{et} \quad s = \theta(Q).$$

Démonstration. — On procède par récurrence sur ρ . Si $\rho = 0$, le résultat découle du th. III.8. Supposons que $\rho > 0$; soit m le nombre de pôles de s d'ordre ρ sur \mathcal{C}' . Considérons un pôle $\iota(x)$ de s d'ordre ρ et soit \mathcal{C}'_i ($1 \leq i \leq N$) la composante de \mathcal{C}' qui contient x . D'après la condition (\star_3) , on sait que l'arête de $G(\mathcal{C})$ correspondant à $\iota(x)$ appartient à K_ℓ , pour un certain entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq r$. Cela dit, le cycle K_ℓ est simple, donc il existe un autre point $y \in \mathcal{C}'_i$, et un seul, tel que $\iota(y)$ est une autre arête de K_ℓ . Comme $n - \rho > 0$, et d'après le th. III.8, il existe un polynôme homogène $P \in A_i$ avec $\deg_k(P) = n - \rho$ tel que $\theta_i(P)$ s'annule en y mais pas en x . La n -forme $\theta(PX_\ell^\rho)$ s'annule sur toutes les composantes de \mathcal{C} sauf \mathcal{C}'_i , a un pôle d'ordre ρ en $\iota(x)$ et un pôle d'ordre $< \rho$ en $\iota(y)$. Il existe donc un scalaire $\lambda \in k$ tel que $s - \lambda\theta(PX_\ell^\rho)$ a un pôle d'ordre $< \rho$ en $\iota(x)$ et des pôles d'ordre ρ exactement aux autres points en lesquels s a un pôle d'ordre ρ . Ainsi, $s - \lambda\theta(PX_\ell^\rho)$ a $(m - 1)$ pôles d'ordre ρ . Par récurrence descendante sur m , on se ramène au cas où s n'a que des pôles d'ordre $< \rho$, ce qui achève la récurrence sur ρ . \square

Notations. — Soit i un entier tel que $1 \leq i \leq N$ et soient x, y deux points distincts de \mathcal{C}'_i . On sait que le k -espace vectoriel $H^0(\mathcal{C}'_i, \Omega_i)$ est de dimension g_i et que $(w_{i,1}, \dots, w_{i,g_i})$ en est une base. Par combinaison linéaire de ces formes, on peut construire une autre base $(w_{i,x,y,1}, \dots, w_{i,x,y,g_i})$ de $H^0(\mathcal{C}'_i, \Omega_i)$ vérifiant :

- $w_{i,x,y,1}$ s'annule en y mais pas en x ;
- $w_{i,x,y,2}$ s'annule en x mais pas en y ;
- pour tout entier γ tel que $3 \leq \gamma \leq g_i$, $w_{i,x,y,\gamma}$ s'annule en x et en y .

Le théorème III.8 assure qu'il existe des polynômes homogènes de degré 1

$$N_{i,x,y,1}, \dots, N_{i,x,y,g_i} \in A_i$$

tels que

$$\theta(N_{i,x,y,\gamma}) = w_{i,x,y,\gamma}$$

pour tout entier γ tel que $1 \leq \gamma \leq g_i$.

III.5.2. UNE LISTE DE QUADRIQUES ET DE CUBIQUES DANS L'IDÉAL CANONIQUE I

Nous sommes désormais prêts à établir une liste d'éléments de B qui s'annulent identiquement sur l'image de \mathcal{C} dans \mathbf{P}_k^{g-1} , i.e., des éléments de I. Ce seront tous des quadriques ou des cubiques.

- Soit i un entier tel que $1 \leq i \leq N$. Les formes $w_{i,j}$ (où $1 \leq j \leq g_i$) s'annulent hors de \mathcal{C}'_i . Ainsi, si i, i' sont des entiers tels que $1 \leq i < i' \leq N$, on a $w_{i,j}w_{i',j'} = 0$ ($1 \leq j \leq g_i, 1 \leq j' \leq g_{i'}$). On en déduit que

$$X_{i,j}X_{i',j'} \in I. \tag{J1}$$

- Soient i, ℓ des entiers tels que $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq \ell \leq r$. On suppose que \mathcal{C}_i n'est pas un sommet de K_ℓ . Alors η_ℓ s'annule sur \mathcal{C}'_i , et donc $w_{i,j}\eta_\ell = 0$ pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq g_i$. Ainsi,

$$X_{i,j}X_\ell \in I. \quad (\text{J}_2)$$

- Soient ℓ, ℓ', ℓ'' des entiers tels que $1 \leq \ell < \ell' < \ell'' \leq r$. Par construction, une arête de $G(\mathcal{C})$ appartient au plus à deux cycles parmi K_1, \dots, K_r , donc la 3-forme $\eta_\ell\eta_{\ell'}\eta_{\ell''}$ a des pôles d'ordre au plus 2. On déduit de la prop. III.9 qu'il existe un polynôme homogène Q tel que $\deg_k(Q) = 3$, $\deg_A(Q) \leq 2$ et

$$\eta_\ell\eta_{\ell'}\eta_{\ell''} = \theta(Q).$$

L'élément $X_\ell X_{\ell'} X_{\ell''} - Q$ est donc dans I . On a donc

$$X_\ell X_{\ell'} X_{\ell''} + (\text{termes dont le degré sur } A \text{ est } \leq 2) \in I. \quad (\text{J}_3)$$

- Soient ℓ, ℓ' des entiers tels que $1 \leq \ell < \ell' \leq r$. Si K_ℓ et $K_{\ell'}$ n'ont pas d'arêtes communes, la 2-forme $\eta_\ell\eta_{\ell'}$ n'a que des pôles simples sur \mathcal{C} . On déduit de la prop. III.9 l'existence d'un élément

$$X_\ell X_{\ell'} + (\text{termes dont le degré sur } A \text{ est } \leq 1) \in I. \quad (\text{J}_4)$$

- Soient ℓ, ℓ' des entiers tels que $1 \leq \ell < \ell' \leq r$. Supposons que K_ℓ et $K_{\ell'}$ ont une arête commune. Cela signifie que η_ℓ et $\eta_{\ell'}$ ont un pôle commun. D'après le lemme III.3, les autres pôles communs de η_ℓ et $\eta_{\ell'}$ apparaissent avec des résidus compatibles, i.e., soit les formes η_ℓ et $\eta_{\ell'}$ ont les mêmes résidus en chaque pôle commun, soit elles y ont des résidus opposées. Par conséquent, l'une des deux 3-formes

$$\eta_\ell^2\eta_{\ell'} - \eta_\ell\eta_{\ell'}^2, \quad \eta_\ell^2\eta_{\ell'} + \eta_\ell\eta_{\ell'}^2$$

a des pôles d'ordre ≤ 2 en les pôles communs de η_ℓ et $\eta_{\ell'}$. De plus, ces 3-formes n'ont pas de pôle d'ordre 3 en d'autres points. On peut donc déduire de la prop. III.9 l'existence d'un élément

$$X_\ell^2 X_{\ell'} \pm X_\ell X_{\ell'}^2 + (\text{termes dont le degré sur } A \text{ est } \leq 2) \in I. \quad (\text{J}_5)$$

- Soit ℓ un entier tel que $1 \leq \ell \leq r$. Supposons que K_ℓ partage toutes ses arêtes, i.e., toute arête de K_ℓ est aussi une arête d'un cycle $K_{\ell'}$ avec $\ell' \neq \ell$; dans ce cas, il existe un unique tel $\ell' \neq \ell$. Notons, comme dans l'item précédent, que si K_ℓ et $K_{\ell'}$ ont plusieurs arêtes communes, elles apparaissent avec des orientations compatibles (lemme III.3). Ceci dit, la 2-forme η_ℓ^2 a un pôle d'ordre 2 en chacune des arêtes de K_ℓ ; si une arête appartient aussi à $K_{\ell'}$ où $\ell' \neq \ell$, la 2-forme $\eta_\ell\eta_{\ell'}$ y a aussi un pôle d'ordre 2. On en déduit que $\eta_\ell^2 \pm \eta_\ell\eta_{\ell'}$ (le signe dépend des orientations de K_ℓ et $K_{\ell'}$) n'a pas de pôle d'ordre 2 en cette arête, ni en les autres arêtes communes de K_ℓ et $K_{\ell'}$. En faisant ce raisonnement pour chacune des arêtes de K_ℓ , on voit qu'il existe, pour chaque $\ell' \neq \ell$,

des scalaires $\lambda_{\ell'}$ (valant ± 1 si K_{ℓ} et $K_{\ell'}$ partagent au moins une arête et 0 sinon) tels que

$$\eta_{\ell}^2 - \sum_{\ell' \neq \ell} \lambda_{\ell'} \eta_{\ell} \eta_{\ell'}$$

n'a que des pôles d'ordre ≤ 1 . La prop. III.9 assure alors l'existence d'un élément

$$X_{\ell}^2 - \sum_{\ell' \neq \ell} \lambda_{\ell'} X_{\ell} X_{\ell'} + (\text{termes dont le degré sur } A \text{ est } \leq 1) \in I. \quad (\text{J}_6)$$

- Soient i, ℓ des entiers tels que $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq \ell \leq r$. On suppose que \mathcal{C}_i est un sommet de K_{ℓ} . On note $p, q \in \mathcal{C}_i'$ les pôles correspondants de η_{ℓ} sur \mathcal{C}_i' ; en d'autres termes, on a $\{\iota(p), \iota(q)\} = \{\text{arêtes de } \mathcal{C}_i \text{ dans } K_{\ell}\}$. Alors $p \neq q$ et comme K_{ℓ} est simple, ce sont les seuls pôles de η_{ℓ} sur \mathcal{C}_i' . Par définition, $w_{i,p,q,\gamma}$ s'annule en p et q pour tout entier γ tel que $3 \leq \gamma \leq g_i$, donc $w_{i,p,q,\gamma} \eta_{\ell}$ n'a pas de pôles sur \mathcal{C}_i' ; elle n'en a pas non plus hors de \mathcal{C}_i' puisque la forme $w_{i,p,q,\gamma}$ y est nulle. On obtient donc, d'après la prop. III.9,

$$N_{i,p,q,\gamma} X_{\ell} + (\text{termes dans } A) \in I. \quad (\text{J}_{7,1})$$

De plus, la 2-forme $w_{i,p,q,1} w_{i,p,q,2}$ s'annule aussi en p et q , ce qui permet d'obtenir l'élément

$$N_{i,p,q,1} N_{i,p,q,2} X_{\ell} + (\text{termes dans } A) \in I. \quad (\text{J}_{7,2})$$

- Soient i, ℓ, ℓ' des entiers tels que $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq \ell < \ell' \leq r$. On suppose que K_{ℓ} et $K_{\ell'}$ ont une seule arête commune et que \mathcal{C}_i en est un sommet. Notons $p \in \mathcal{C}_i'$ le point correspondant. La 2-forme $\eta_{\ell} \eta_{\ell'}$ a un pôle d'ordre 2 en p et aucun autre pôle d'ordre 2. Soit $q \in \mathcal{C}_i'$ un point distinct de p et soit γ un entier tel que $2 \leq \gamma \leq g_i$. La forme $w_{i,p,q,\gamma}$ s'annule en p et hors de \mathcal{C}_i' . On en déduit que $w_{i,p,q,\gamma} \eta_{\ell} \eta_{\ell'}$ n'a que des pôles d'ordre ≤ 1 sur \mathcal{C} et donc (prop. III.9) qu'il existe un élément

$$N_{i,p,q,\gamma} X_{\ell} X_{\ell'} + (\text{termes dont le degré sur } A \text{ est } \leq 1) \in I. \quad (\text{J}_8)$$

- Soient i, ℓ des entiers tels que $1 \leq i \leq N$ et $1 \leq \ell \leq r$. On suppose que \mathcal{C}_i est un sommet de K_{ℓ} et on note $p, q \in \mathcal{C}_i'$ les pôles correspondants de η_{ℓ} sur \mathcal{C}_i' .
 - Supposons que $\iota(q)$ est une arête d'un autre cycle $K_{\ell'}$ avec $\ell' \neq \ell$ et que $\iota(p)$ n'est l'arête d'aucun autre cycle parmi K_1, \dots, K_r . La 2-forme $w_{i,p,q,2} \eta_{\ell}$ a un unique pôle, en q ; la 2-forme $w_{i,t,q,2} \eta_{\ell'}$ (où t est le second pôle de $\eta_{\ell'}$ sur \mathcal{C}_i') a également pour seul pôle le point q . Il existe donc un scalaire λ tel que $w_{i,p,q,2} \eta_{\ell} - \lambda w_{i,t,q,2} \eta_{\ell'}$ n'a aucun pôle sur \mathcal{C} . On obtient donc (prop. III.9) un élément

$$N_{i,p,q,2} X_{\ell} - \lambda N_{i,t,q,2} X_{\ell'} + (\text{termes dans } A) \in I. \quad (\text{J}_{9,1})$$

- Supposons maintenant que $\iota(p)$ est une arête de $K_{\ell'}$ et que $\iota(q)$ est une arête de $K_{\ell''}$, avec $\ell' \neq \ell$ et $\ell'' \neq \ell$. Notons s le second pôle de $\eta_{\ell'}$ sur \mathcal{C}_i' et t le second pôle de $\eta_{\ell''}$ sur \mathcal{C}_i' . Pour la même raison que ci-dessus, on voit que pour tout entier j tel que

$1 \leq j \leq g_i$, il existe des scalaires λ, μ tels que $w_{i,j}\eta_\ell - \lambda w_{i,s,p,2}\eta_{\ell'} - \mu w_{i,t,q,2}\eta_{\ell''}$ n'a aucun pôle sur \mathcal{C} . La prop. III.9 fournit alors un élément

$$X_{i,j}X_\ell - \lambda N_{i,s,p,2}X_{\ell'} - \mu N_{i,t,q,2}X_{\ell''} + (\text{termes dans } A) \in I. \quad (\text{J}_9,2)$$

Il se peut que $\ell' = \ell''$, auquel cas on a $s = q$ et $t = p$.

- Soient ℓ, ℓ' des entiers tels que $1 \leq \ell < \ell' \leq r$. Supposons que K_ℓ et $K_{\ell'}$ ont une arête commune et qu'il existe un entier i ($1 \leq i \leq N$) tel que \mathcal{C}_i est un sommet commun à K_ℓ et $K_{\ell'}$ mais qu'aucune arête de \mathcal{C}_i n'est commune à K_ℓ et $K_{\ell'}$. Pour tout entier j tel que $1 \leq j \leq g_i$, la 3-forme $w_{i,j}\eta_\ell\eta_{\ell'}$ n'a que des pôles simples sur \mathcal{C}'_i et s'annule ailleurs. D'après la prop. III.9, il existe un élément

$$X_{i,j}X_\ell X_{\ell'} + (\text{termes dont le degré sur } A \text{ est } \leq 1) \in I. \quad (\text{J}_{10})$$

Notations. — Soit ℓ un entier tel que $1 \leq \ell \leq r$. On note V_ℓ l'ensemble des entiers i , $1 \leq i \leq N$, tels que \mathcal{C}_i est un sommet du cycle K_ℓ .

Par ailleurs, si ℓ, ℓ' sont des entiers tels que $1 \leq \ell < \ell' \leq r$, on écrira « $K_\ell \cap K_{\ell'} \ni$ arête(s) » pour stipuler que les cycles K_ℓ et $K_{\ell'}$ ont une arête commune. Dans ce cas, l'arête en question n'appartient à aucun des autres cycles $K_{\ell''}$, $\ell'' \neq \ell, \ell'$.

On écrira « $K_\ell \ni$ arête propre » pour stipuler que le cycle K_ℓ admet une arête qui n'est commune à aucun autre cycle $K_{\ell'}$, $\ell' \neq \ell$.

Un récapitulatif des équations obtenues ci-dessus est donné dans la table III.1 (on utilise l'abréviation « t.d.i. » pour signifier « terme dont le degré sur A est strictement inférieur au terme qui le précède »).

III.5.3. ÉNONCÉ ET PREUVE D'UN THÉORÈME DE PETRI POUR LES COURBES STABLES

Lemme III.10. — Soit i un entier tel que $1 \leq i \leq N$ et soient x, y deux points distincts de \mathcal{C}'_i . Soit aussi $P \in A_i$ un polynôme homogène de degré $d \in \mathbf{N}$.

- a) Si $\theta(P)$ s'annule en x , il existe des polynômes homogènes $P_2, \dots, P_{g_i} \in A_i$ de degré $(d-1)$ tels que

$$P = \sum_{\gamma=2}^{g_i} P_\gamma N_{i,x,y,\gamma}.$$

- b) Si $\theta(P)$ s'annule en x et y , il existe des polynômes homogènes $P' \in A_i$ (de degré $(d-2)$) et $P_3, \dots, P_{g_i} \in A_i$ (de degré $(d-1)$) tels que

$$P = P' N_{i,x,y,1} N_{i,x,y,2} + \sum_{\gamma=3}^{g_i} P_\gamma N_{i,x,y,\gamma}.$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème de Noether en utilisant les coordonnées $N_{i,x,y,1}, \dots, N_{i,x,y,g_i}$ au lieu des coordonnées $X_{i,1}, \dots, X_{i,g_i}$. \square

Conditions	Éléments de I	Numéro	Illustration
$1 \leq i < i' \leq N$ $1 \leq j \leq g_i, 1 \leq j' \leq g_{i'}$	$X_{i,j}X_{i',j'}$	J ₁	
$1 \leq i \leq N, 1 \leq \ell \leq r$ $i \notin V_\ell$	$X_{i,j}X_\ell$	J ₂	
$1 \leq \ell < \ell' < \ell'' \leq r$	$X_\ell X_{\ell'} X_{\ell''} + \text{t.d.i.}$	J ₃	
$1 \leq \ell < \ell' \leq r$ $K_\ell \cap K_{\ell'} \not\ni \text{arête(s)}$	$X_\ell X_{\ell'} + \text{t.d.i.}$	J ₄	
$1 \leq \ell < \ell' \leq r$ $K_\ell \cap K_{\ell'} \ni \text{arête(s)}$	$X_\ell^2 X_{\ell'} \pm X_\ell X_{\ell'}^2 + \text{t.d.i.}$	J ₅	
$1 \leq \ell \leq r$ $K_\ell \not\ni \text{arête propre}$	$X_\ell^2 - \sum_{\ell' \neq \ell} \lambda_{\ell'} X_\ell X_{\ell'} + \text{t.d.i.}$	J ₆	
$1 \leq i \leq N, 1 \leq \ell \leq r$ $i \in V_\ell, 3 \leq \gamma \leq g_i$ $\{\iota(p), \iota(q)\} = \{\text{arêtes de } \mathcal{C}_i \text{ dans } K_\ell\}$	$N_{i,p,q,\gamma} X_\ell + \text{t.d.i.}$ $N_{i,p,q,1} N_{i,p,q,2} X_\ell + \text{t.d.i.}$	J _{7,1} J _{7,2}	
$1 \leq i \leq N, 1 \leq \ell < \ell' \leq r$ $K_\ell \cap K_{\ell'} = \{\iota(p)\}$ \mathcal{C}_i est un sommet de $\iota(p)$ $2 \leq \gamma \leq g_i$ $q \neq p$ quelconque sur \mathcal{C}_i	$N_{i,p,q,\gamma} X_\ell X_{\ell'} + \text{t.d.i.}$	J ₈	
$1 \leq i \leq N, 1 \leq \ell, \ell' \leq r$ $i \in V_\ell \cap V_{\ell'}$ $\{\iota(p), \iota(q)\} = \{\text{arêtes de } \mathcal{C}_i \text{ dans } K_\ell\}$ $\{\iota(q), \iota(t)\} = \{\text{arêtes de } \mathcal{C}_i \text{ dans } K_{\ell'}\}$	$N_{i,p,q,2} X_\ell - \lambda N_{i,t,q,2} X_{\ell'} + \text{t.d.i.}$	J _{9,1}	
$1 \leq i \leq N, 1 \leq \ell, \ell', \ell'' \leq r$ $i \in V_\ell \cap V_{\ell'} \cap V_{\ell''}$ $\{\iota(p), \iota(q)\} = \{\text{arêtes de } \mathcal{C}_i \text{ dans } K_\ell\}$ $\{\iota(p), \iota(s)\} = \{\text{arêtes de } \mathcal{C}_i \text{ dans } K_{\ell'}\}$ $\{\iota(q), \iota(t)\} = \{\text{arêtes de } \mathcal{C}_i \text{ dans } K_{\ell''}\}$	$X_{i,j} X_\ell - \lambda N_{i,s,p,2} X_{\ell'} - \mu N_{i,t,q,2} X_{\ell''} + \text{t.d.i.}$	J _{9,2}	
$1 \leq \ell < \ell' \leq r, i \in V_\ell \cap V_{\ell'}$ $K_\ell \cap K_{\ell'} \ni \text{arête(s)}$ $K_\ell \cap K_{\ell'} \not\ni \text{arêtes de } \mathcal{C}_i$ $1 \leq j \leq g_i$	$X_{i,j} X_\ell X_{\ell'} + \text{t.d.i.}$	J ₁₀	

TABLE III.1 – Éléments de l'idéal canonique I

Théorème III.11. — L'idéal canonique I de l'image de \mathcal{C} dans \mathbf{P}_k^{g-1} est engendré par les idéaux canoniques I_1, \dots, I_N des courbes lisses $\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_N$ et par les quadriques et cubiques listées dans la table III.1.

Démonstration. — Notons J l'idéal engendré par I_1, \dots, I_N et par les quadriques et cubiques listées dans la table III.1. Il est clair que $J \subseteq I$; montrons l'inclusion réciproque. Soit $P \in I$ un polynôme homogène; on procède par récurrence sur $m = \deg_A(P)$.

Si $m = 0$, on a $P \in A$. Grâce à (J_1) , on a $P \equiv P' \pmod{J}$, où $P' = \sum_{i=1}^N Q_i$ avec $Q_i \in A_i$ pour tout i . On a $P' \in I$ donc, par restriction, $Q_i \in I_i$ pour tout i . Ainsi, $P \in I$.

On traite séparément le cas $m = 1$. Dans ce cas, on a

$$P = \sum_{\ell=1}^r Q_\ell X_\ell + (\text{termes dans } A).$$

Notons que $\deg_k(Q_\ell) \geq 1$ pour tout ℓ car dans le cas contraire, on obtient une relation linéaire entre les $(\eta_\ell)_{1 \leq \ell \leq r}$ et les $(w_{i,j})_{1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq g_i}$, ce qui contredit la prop. III.6. En utilisant (J_1) , on a

$$P \equiv \sum_{\ell=1}^r \sum_{i=1}^N Q_{\ell;i} X_\ell + (\text{termes dans } A) \pmod{J},$$

avec $Q_{\ell;i} \in A_i$ pour tout i . Comme $\deg_k(Q_\ell) \geq 1$ pour tout ℓ , on peut utiliser l'équation (J_2) pour obtenir

$$P \equiv \underbrace{\sum_{\ell=1}^r \sum_{i \in V_\ell} Q_{\ell;i} X_\ell}_{P'} + (\text{termes dans } A) \pmod{J}.$$

Pour commencer, on va réduire les monômes contenant l'indéterminée X_1 . Soit $i \in V_1$ et soient $p, q \in \mathcal{C}'_i$ les pôles correspondants de η_1 sur \mathcal{C}'_i .

- Supposons que p et q ne sont les pôles d'aucune autre forme parmi η_2, \dots, η_r . Comme $P' \in I$, la forme $\theta(Q_{1;i})$ s'annule en p et q . Le lemme III.10 (ii) et les équations $(J_{7,1})$ et $(J_{7,2})$ permettent de réduire modulo J le terme $Q_{1;i} X_1$ en un élément de A .
- Supposons que p n'est pas le pôle d'une autre forme parmi η_2, \dots, η_r mais que q est un pôle de η_1 et $\eta_{\ell'}$ avec $2 \leq \ell' \leq r$. Alors la forme $\theta(Q_{1;i}) X_1$ s'annule en p et l'on déduit du lemme III.10 (i) et de l'équation $(J_{7,1})$ que le terme $Q_{1;i} X_1$ se réduit modulo J en un terme divisible par $N_{i,p,q,2} X_1$. L'équation $(J_{9,1})$ permet de remplacer cet élément (modulo J) par un élément divisible par $X_{\ell'}$ (au lieu de X_1). Ainsi, X_1 disparaît. Le même argument fonctionne si l'on échange p et q .
- Supposons enfin que p est un pôle $\eta_{\ell'}$ et que q est un pôle de $\eta_{\ell''}$ avec $\ell', \ell'' > 1$. On peut utiliser l'équation $(J_{9,2})$ pour remplacer les occurrences de X_1 par des occurrences de $X_{\ell'}$ et $X_{\ell''}$.

Le raisonnement ci-dessus permet de supprimer les monômes divisibles par X_1 . Continuons avec X_2 : soit $i \in V_2$ et soient p, q les pôles de η_2 sur \mathcal{C}'_i .

- Si p et q ne sont les pôles que de η_1 ou η_2 alors, comme il n'y a plus de termes divisibles par X_1 , seule la forme η_2 a des pôles en p et q ; on réduit alors (modulo J) comme ci-dessus les termes divisibles par X_2 .
- Supposons que p (resp. q) n'est pas le pôle d'une autre forme que η_1 ou η_2 , mais que q (resp. p) est un pôle de η_2 et $\eta_{\ell'}$ avec $\ell' > 2$; on peut alors remplacer comme ci-dessus les termes divisibles par X_2 par des termes divisibles par $X_{\ell'}$.
- Si p est un pôle de $\eta_{\ell'}$ et q un pôle de $\eta_{\ell''}$ avec $\ell', \ell'' > 2$, on remplace les occurrences de X_2 par des occurrences de $X_{\ell'}$ et $X_{\ell''}$.

En poursuivant cette procédure, on peut réduire P' en un polynôme ne faisant pas intervenir les indéterminées X_1, \dots, X_r , i.e., en un élément de A . Le cas $m = 0$ ayant déjà été traité, cela montre que P' , et donc P , est dans J .

Supposons maintenant que $m \geq 2$. Le polynôme P s'écrit

$$P = \sum_{e_1 + \dots + e_r = m} Q_{e_1, \dots, e_r} X_1^{e_1} \cdots X_r^{e_r} + \underbrace{(\text{termes dont le degré sur } A \text{ est } \leq m - 1)}_{\text{abrégé « t.d.i. » (terme de degré inférieur) dans la suite}},$$

où $Q_{e_1, \dots, e_r} \in A$. À l'aide de (J₃), on a

$$P \equiv \sum_{\substack{\ell < \ell', \\ e_\ell + e_{\ell'} = m}} Q_{e_\ell, e_{\ell'}} X_\ell^{e_\ell} X_{\ell'}^{e_{\ell'}} + \sum_{\ell=1}^r Q_\ell X_\ell^m + \text{t.d.i.} \pmod{J}, \quad (3.2)$$

avec $Q_{e_\ell, e_{\ell'}}, Q_\ell \in A$.

- Supposons que $\deg_k(P) = m$, i.e., que les $(Q_{e_\ell, e_{\ell'}})_{1 \leq \ell < \ell' \leq r, e_\ell + e_{\ell'} = m}$ et $(Q_\ell)_{1 \leq \ell \leq r}$ sont des constantes sur \mathcal{C} . Notons que la valeur de chacune de ces constantes est la même sur chaque composante car elle doit se recoller aux points doubles; on utilise ici le fait qu'une courbe stable est connexe.

Comme $m \geq 2$, on peut utiliser l'équation (J₆) pour remplacer chaque terme X_ℓ^2 pour lequel K_ℓ partage toutes ses arêtes par une combinaison linéaire de termes $X_\ell X_{\ell'}$ avec $\ell' \neq \ell$; ceci peut modifier les termes $Q_{e_\ell, e_{\ell'}}$ mais dans un souci de simplicité, on conserve cette notation, en écrivant

$$P \equiv \sum_{\substack{\ell < \ell', \\ e_\ell + e_{\ell'} = m}} Q_{e_\ell, e_{\ell'}} X_\ell^{e_\ell} X_{\ell'}^{e_{\ell'}} + \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq r, \\ K_\ell \ni \text{arête propre}}} Q_\ell X_\ell^m + \text{t.d.i.} \pmod{J},$$

avec $Q_{e_\ell, e_{\ell'}}, Q_\ell \in A$. L'équation (J₄) donne

$$P \equiv \sum_{\substack{\ell < \ell', \\ e_\ell + e_{\ell'} = m, \\ K_\ell \cap K_{\ell'} \ni \text{arête(s)}}} Q_{e_\ell, e_{\ell'}} X_\ell^{e_\ell} X_{\ell'}^{e_{\ell'}} + \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq r, \\ K_\ell \ni \text{arête propre}}} Q_\ell X_\ell^m + \text{t.d.i.} \pmod{J}.$$

L'équation (J₅) permet de remplacer (modulo J et des termes dont le degré sur A est $\leq m - 1$) chaque terme $X_\ell^{e_\ell} X_{\ell'}^{e_{\ell'}}$ par $X_\ell^{m-1} X_{\ell'}$. On a donc

$$P \equiv \sum_{\substack{\ell < \ell', \\ K_\ell \cap K_{\ell'} \ni \text{arête(s)}}} Q_{\ell, \ell'} X_\ell^{m-1} X_{\ell'} + \sum_{\substack{1 \leq \ell \leq r, \\ K_\ell \ni \text{arête propre}}} Q_\ell X_\ell^m + \text{t.d.i.} \pmod{J}. \quad (3.3)$$

avec $Q_{\ell,\ell'}, Q_\ell \in A$.

Prenons un entier ℓ tel que K_ℓ a une arête propre. Par définition, cette arête n'appartient à aucun autre cycle, donc X_ℓ^m est le seul terme dans (3.3) dont l'image par θ a un pôle d'ordre m en cette arête. On en déduit que le coefficient Q_ℓ s'y annule, et comme c'est une constante, celle-ci est nulle. L'expression (3.3) devient

$$P \equiv \sum_{\substack{\ell < \ell', \\ K_\ell \cap K_{\ell'} \ni \text{arête(s)}}} Q_{\ell,\ell'} X_\ell^{m-1} X_{\ell'} + \text{t.d.i.} \pmod{J}. \quad (3.4)$$

Maintenant, soient $\ell < \ell'$ des entiers tels que K_ℓ et $K_{\ell'}$ partagent au moins une arête; cette arête correspond à un pôle commun de η_ℓ et $\eta_{\ell'}$. Le terme $X_\ell^{m-1} X_{\ell'}$ est le seul dans (3.4) dont l'image par θ présente un pôle d'ordre m en cette arête. Le coefficient $Q_{\ell,\ell'}$ y est donc nul, et comme c'est une constante, on a $Q_{\ell,\ell'} = 0$.

Finalement, on a

$$P \equiv \text{t.d.i.} \pmod{J},$$

et on peut conclure par récurrence sur m que $P \in J$.

- On suppose désormais que les $\deg_k(Q_{e_\ell, e_{\ell'}})$ et $\deg_k(Q_\ell)$ sont tous ≥ 1 . Revenons à la relation (3.2) :

$$P \equiv \sum_{\substack{\ell < \ell', \\ e_\ell + e_{\ell'} = m}} Q_{e_\ell, e_{\ell'}} X_\ell^{e_\ell} X_{\ell'}^{e_{\ell'}} + \underbrace{\sum_{\ell=1}^r Q_\ell X_\ell^m}_{P'} + \text{t.d.i.} \pmod{J},$$

et notons $P' = \sum_{\ell=1}^r Q_\ell X_\ell^m$.

D'après les équations (J₁) et (J₂) (pour l'utilisation desquelles on a besoin de l'hypothèse $\deg_k(Q_\ell) \geq 1$), on peut écrire

$$P' \equiv \sum_{\ell=1}^r \sum_{i \in V_\ell} Q_{\ell;i} X_\ell^m + \text{t.d.i.} \pmod{J},$$

avec $Q_{\ell;i} \in A_i$ pour tout entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq r$ et tout $i \in V_\ell$. On a donc

$$P \equiv \sum_{\substack{\ell < \ell', \\ e_\ell + e_{\ell'} = m}} Q_{e_\ell, e_{\ell'}} X_\ell^{e_\ell} X_{\ell'}^{e_{\ell'}} + \sum_{\ell=1}^r \sum_{i \in V_\ell} Q_{\ell;i} X_\ell^m + \text{t.d.i.} \pmod{J}. \quad (3.5)$$

Fixons des entiers ℓ, i tels que $1 \leq \ell \leq r$ et $i \in V_\ell$; on note $p, q \in \mathcal{C}'_i$ les pôles correspondants de η_ℓ sur \mathcal{C}'_i .

- Si p et q ne sont des pôles d'aucune forme à part η_ℓ , le terme X_ℓ^m est le seul dans (3.5) dont l'image par θ présente un pôle d'ordre m en p et q ; ainsi qu'on l'a vu plus haut, cela implique que $\theta(Q_{\ell;i})$ s'annule en p et q . On déduit du lemme III.10 (ii) et des équations (J_{7,1}), (J_{7,2}) que le terme $Q_{\ell;i} X_\ell^m$ se réduit modulo J en des termes dont le degré sur A est $\leq m - 1$.

- Supposons que p n'est un pôle d'aucune forme à part η_ℓ mais que q est un pôle de η_ℓ et $\eta_{\ell'}$ avec $\ell' \neq \ell$. On peut utiliser le lemme III.10 (i) et l'équation (J_{7,1}) de sorte que le terme $Q_{\ell;i}X_\ell^m$ est remplacé par le terme $N_{i,p,q,2}X_\ell^m$. Comme q est également un pôle de $\eta_{\ell'}$, l'équation (J_{9,1}) permet ensuite de remplacer $N_{i,p,q,2}X_\ell^m$ par

$$\lambda N_{i,r,q,2}X_\ell^{m-1}X_{\ell'} + \text{t.d.i.},$$

où λ est un scalaire et r l'autre pôle de $\eta_{\ell'}$ sur \mathcal{C}'_i . Ainsi, dans l'expression (3.5), le terme $Q_{\ell;i}X_\ell^m$ dans la seconde somme est soit remplacé par des termes dont le degré sur A est $\leq m-1$, soit transféré dans la première somme.

- Si p est un pôle de $\eta_{\ell'}$ et q un pôle de $\eta_{\ell''}$ avec $\ell' \neq \ell$ et $\ell'' \neq \ell$, on utilise l'équation (J_{9,2}) pour transférer le terme $Q_{\ell;i}X_\ell^m$ de la seconde somme de (3.5) vers la première.

Les réductions effectuées dans les trois précédents items peuvent modifier les termes $Q_{e_\ell, e_{\ell'}}$ dans (3.5) mais, par commodité, on conserve la notation. À ce stade, on a réduit le polynôme P à la forme suivante :

$$P \equiv \sum_{\substack{\ell < \ell', \\ e_\ell + e_{\ell'} = m}} Q_{e_\ell, e_{\ell'}} X_\ell^{e_\ell} X_{\ell'}^{e_{\ell'}} + \text{t.d.i.} \pmod{J}.$$

On exploite successivement les équations (J₁), (J₂), (J₄) et (J₅) pour obtenir la simplification suivante :

$$P \equiv \sum_{\substack{\ell < \ell', \\ K_\ell \cap K_{\ell'} \ni \text{arête(s)}}} \sum_{i \in V_\ell \cap V_{\ell'}} Q_{\ell, \ell'; i} X_\ell^{m-1} X_{\ell'} + \text{t.d.i.} \pmod{J},$$

avec $Q_{\ell, \ell'; i} \in A_i$.

Fixons des entiers ℓ, ℓ' tels que K_ℓ et $K_{\ell'}$ ont au moins une arête commune et un entier $i \in V_\ell \cap V_{\ell'}$. Les formes η_ℓ et $\eta_{\ell'}$ ont 0, 1 ou 2 pôles communs sur \mathcal{C}'_i .

- Dans le premier cas, on utilise (J₁₀) pour réduire le terme $Q_{\ell, \ell'; i} X_\ell^{m-1} X_{\ell'}$ en des termes de degré inférieur.
- Dans le deuxième cas, le terme $X_\ell X_{\ell'}$ est le seul dont l'image par θ présente un pôle d'ordre m en l'unique pôle commun de η_ℓ et $\eta_{\ell'}$. Le lemme III.10 (i) et l'équation (J₈) permettent de réduire $Q_{\ell, \ell'; i} X_\ell^{m-1} X_{\ell'}$ en des termes de degré inférieur.
- Dans le troisième cas, on utilise le lemme III.10 (ii) et les équations (J_{7,1}) et (J_{7,2}) pour réduire $Q_{\ell, \ell'; i} X_\ell^{m-1} X_{\ell'}$.

Finalement, on a montré que

$$P \equiv \text{termes dont le degré sur } A \text{ est } \leq m-1 \pmod{J},$$

et on peut conclure le raisonnement par récurrence : $P \in J$. □

Corollaire III.12. — *Si \mathcal{C} n'est pas une courbe lisse de genre 3, l'idéal canonique de son image dans \mathbf{P}_k^{g-1} est engendré par des quadriques et des cubiques.*

Démonstration. — Si \mathcal{C} est lisse, elle est nécessairement de genre > 3 et le résultat n'est autre que le théorème de Petri classique.

Supposons maintenant que \mathcal{C} n'est pas lisse. D'après le th. III.11, il suffit de montrer que les idéaux I_1, \dots, I_N sont engendrés par des quadriques et des cubiques. Soit i un entier tel que $1 \leq i \leq N$; si $g_i > 3$, l'idéal I_i est engendré par des quadriques et des cubiques (th. de Petri classique). Il reste donc à examiner les idéaux I_i pour lesquels $g_i = 3$. Dans ce cas, on a $I_i = \langle S_i \rangle$ où $S_i \in A_i$ est un polynôme homogène de degré 4. Comme \mathcal{C} n'est pas lisse, il existe un entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq r$ et $i \in V_\ell$. Notons p, q les pôles de η_ℓ sur \mathcal{C}'_i . Les équations $(J_{7,1}), (J_{7,2})$, s'écrivent

$$N_{i,p,q,3}X_\ell + a \in I, \quad (3.6)$$

$$N_{i,p,q,1}N_{i,p,q,2}X_\ell + a' \in I, \quad (3.7)$$

avec $a, a' \in A$. On multiplie (3.6) par $N_{i,p,q,1}N_{i,p,q,2}$, (3.7) par $N_{i,p,q,3}$ et on les soustrait. On obtient un élément T de degré 4 dans I_i :

$$T = N_{i,p,q,3}a' - N_{i,p,q,1}N_{i,p,q,2}a \in I_i.$$

Supposons que $T = 0$. Alors $N_{i,p,q,1}N_{i,p,q,2}a$ est divisible par $N_{i,p,q,3}$. Or $N_{i,p,q,1}, N_{i,p,q,2}$ et $N_{i,p,q,3}$ sont des indéterminées de A_i , donc a est divisible par $N_{i,p,q,3}$: il existe $\tilde{a} \in A$ tel que $a = \tilde{a}N_{i,p,q,3}$. En revenant à (3.6), on en déduit que

$$\eta_\ell + \theta(\tilde{a}) = 0,$$

ce qui contredit la prop. III.6.

Ainsi, $T \neq 0$, donc il existe un scalaire $\lambda \neq 0$ tel que $T = \lambda S_i$. Par suite, S_i est dans l'idéal engendré par la quadrique $(J_{7,1})$ et la cubique $(J_{7,2})$. \square

CHAPITRE IV

CAS D'UNE COURBE STABLE RELATIVE

Le but de ce chapitre est d'entreprendre l'étude du plongement canonique d'une courbe stable relative. Le cas très général où l'on étudie la dégénérescence d'une courbe lisse vers une courbe stable quelconque est actuellement hors de notre portée ; c'est pourquoi on se contente d'étudier le cas particulier où la courbe stable est la réunion de deux courbes lisses s'intersectant en un unique point double. Même dans ce cas, il nous faut formuler des hypothèses supplémentaires (essentiellement sur la régularité du schéma considéré) afin d'aboutir à un théorème de Petri.

§ IV.1. Hypothèses de travail

Soit R un anneau de valuation discrète dont on note η le point générique, s le point spécial et \mathfrak{m}_s l'unique idéal maximal. On suppose que le corps résiduel $k = R/\mathfrak{m}_s$ est algébriquement clos de caractéristique quelconque et on note K le corps des fractions de R . Enfin, on note t une uniformisante de R (i.e., un générateur de \mathfrak{m}_s). Soit

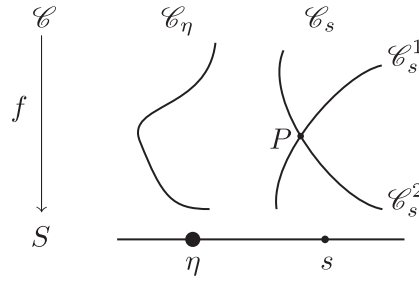
$$f: \mathcal{C} \longrightarrow S = \text{Spec } R$$

une courbe stable de genre $g \geq 3$; cela signifie (cf. [Liu02, déf. 10.3.14 p. 510]) que le morphisme f est propre et plat et que les fibres géométriques de f sont des courbes stables de genre g . On suppose plus précisément que la fibre générique \mathcal{C}_η est lisse sur K et que la fibre spéciale \mathcal{C}_s a deux composantes irréductibles \mathcal{C}_s^1 et \mathcal{C}_s^2 qui se coupent en un unique point double ordinaire P (voir la fig. IV.1).

Notons $\omega_{\mathcal{C}/S}$ le faisceau dualisant relatif. Le choix¹ d'une base de l'espace des sections globales de ce dernier détermine une application rationnelle (dite *application canonique*)

$$\varphi: \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbf{P}_S^{g-1}$$

1. Le choix d'une autre base de l'espace des sections globales de $\omega_{\mathcal{C}/S}$ fournit la même application rationnelle modulo un automorphisme de \mathbf{P}_S^{g-1} .

FIGURE IV.1 – Fibres générique et spéciale de la courbe stable \mathcal{C}

qui n'est pas définie au point P . On cherche à prolonger φ en P ; pour ce faire, la méthode classique ([Har77, ex. II.7.17.3 p. 168]) consiste à considérer l'éclatement de \mathcal{C} le long d'un faisceau d'idéaux \mathcal{I} dont le support du sous-schéma fermé correspondant est le point P (pour une description précise de \mathcal{I} , cf. *infra*). On souhaite donc, au final, avoir un diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{\mathcal{C}} & & \\
 \pi \downarrow & \searrow \tilde{\varphi} \text{ (à déterminer)} & \\
 \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{P}_S^{g-1} \\
 f \downarrow & \swarrow & \\
 S & &
 \end{array}$$

où π est l'éclatement de \mathcal{C} le long de \mathcal{I} et où $\tilde{\varphi}$ est un morphisme prolongeant φ à la courbe exceptionnelle au-dessus de P . Notons que l'image de $\tilde{\mathcal{C}}$ dans \mathbf{P}_S^{g-1} n'est autre que l'adhérence de $\varphi(\mathcal{C} - \{P\})$ dans \mathbf{P}_S^{g-1} .

Dans un second temps, on étudie l'idéal de l'image de $\tilde{\mathcal{C}}$ dans \mathbf{P}_S^{g-1} . L'objectif est d'obtenir un théorème de Petri pour cette image dans \mathbf{P}_S^{g-1} , à savoir l'énoncé suivant.

Théorème. — *L'idéal de l'image de $\tilde{\mathcal{C}}$ dans \mathbf{P}_S^{g-1} est engendré par des quadriques et des cubiques.*

Lorsque la surface \mathcal{C} est régulière, on parvient à cette fin (th. IV.8).

§ IV.2. Modèle canonique et singularité

Compte tenu des hypothèses ci-dessus, la surface $\mathcal{C} \rightarrow S$ est le modèle canonique de \mathcal{C}_η .

Proposition IV.1. — *Quitte à faire un changement de base étale de S , la singularité en P se décrit localement de la façon suivante :*

$$\hat{\mathcal{O}}_{\mathcal{C},P} \simeq \hat{\mathcal{O}}_{S,s}[[x, y]]/(xy - c)$$

avec $c \in \mathfrak{m}_s \mathcal{O}_{S,s}$ et $c \neq 0$.

Démonstration. — Voir [Liu02, cor. 10.3.22 p. 514]. □

Avec les notations ci-dessus, il existe un entier $e \geq 1$, appelé l'épaisseur de P dans \mathcal{C} tel que $c = ut^e$ où u est une unité de R .

Remarque. — Pour que le modèle canonique $\mathcal{C} \rightarrow S$ de \mathcal{C}_η soit régulier, il faut et il suffit que $e = 1$.

§ IV.3. Choix d'une base de $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}/S})$

Rappelons d'abord certaines propriétés du faisceau $\omega_{\mathcal{C}/S}$. Notons $\iota: \tilde{\mathcal{C}}_s \rightarrow \mathcal{C}_s$ la normalisation de \mathcal{C}_s , $\tilde{\mathcal{C}}_s^1 = \iota^{-1}(\mathcal{C}_s^1)$, $\tilde{\mathcal{C}}_s^2 = \iota^{-1}(\mathcal{C}_s^2)$ et soient $P_1 \in \mathcal{C}_s^1$, $P_2 \in \mathcal{C}_s^2$ tels que $P = \iota(P_1) = \iota(P_2)$.

Proposition IV.2. — *Le faisceau $\omega_{\mathcal{C}/S}$ vérifie :*

- a) *pour tout morphisme $g: T \rightarrow S$, le faisceau $\omega_{\mathcal{C} \times_S T/T}$ est canoniquement isomorphe à $g^*(\omega_{\mathcal{C}/S})$;*
- b) *$\omega_{\mathcal{C}_s/k}$ est le faisceau des différentielles ν sur $\tilde{\mathcal{C}}_s$ régulières en tout point sauf éventuellement aux points P_1 et P_2 en lesquels des pôles simples sont autorisés avec la condition suivante sur les résidus :*

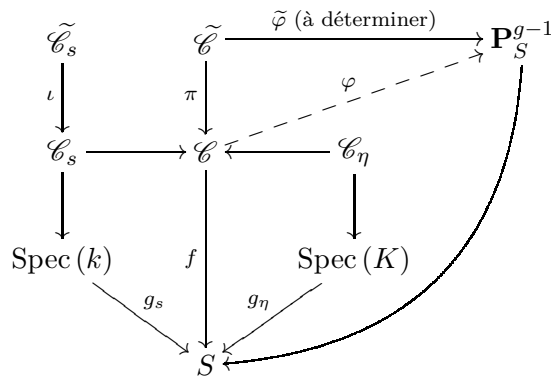
$$\text{Res}_{P_1}(\nu) + \text{Res}_{P_2}(\nu) = 0. \tag{4.1}$$

Démonstration. — Voir [DM69, § I] qui renvoie à [Har66]. □

D'après a), et en notant $g_\eta: \text{Spec}(K) \rightarrow S$ et $g_s: \text{Spec}(k) \rightarrow S$, on a

$$\omega_{\mathcal{C}_s/k} \simeq g_s^*(\omega_{\mathcal{C}/S}) \quad \text{et} \quad \omega_{\mathcal{C}_\eta/K} \simeq g_\eta^*(\omega_{\mathcal{C}/S}).$$

Le diagramme suivant résume la situation :



Nous allons commencer par choisir une base de $H^0(\mathcal{C}_s, \omega_{\mathcal{C}_s/k})$ bien adaptée à notre problème, puis nous l'étendrons en une base de $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}/S})$.

Notation. — D'une façon générale, si X est une courbe lisse sur k , nous notons $\Omega_{X/k}$ le faisceau des différentielles régulières sur X .

D'après la prop. IV.2 b), on a

$$H^0(\mathcal{C}_s, \omega_{\mathcal{C}_s/k}) = \left\{ \nu \in H^0(\tilde{\mathcal{C}}_s, \Omega_{\tilde{\mathcal{C}}_s/k}(P_1 + P_2)) \mid \text{Res}_{P_1}(\nu) + \text{Res}_{P_2}(\nu) = 0 \right\}.$$

Or $\tilde{\mathcal{C}}_s$ a deux composantes connexes, $\tilde{\mathcal{C}}_s = \tilde{\mathcal{C}}_s^1 \sqcup \tilde{\mathcal{C}}_s^2$, d'où

$$H^0(\mathcal{C}_s, \omega_{\mathcal{C}_s/k}) = \left\{ (\nu_1, \nu_2) \in H^0(\tilde{\mathcal{C}}_s^1, \Omega_{\tilde{\mathcal{C}}_s^1/k}(P_1)) \oplus H^0(\tilde{\mathcal{C}}_s^2, \Omega_{\tilde{\mathcal{C}}_s^2/k}(P_2)) \mid \text{Res}_{P_1}(\nu_1) + \text{Res}_{P_2}(\nu_2) = 0 \right\}.$$

Cela dit, la formule des résidus (ou celle de Riemann-Roch) sur $\tilde{\mathcal{C}}_s^1$ et $\tilde{\mathcal{C}}_s^2$ donne

$$H^0(\tilde{\mathcal{C}}_s^1, \Omega_{\tilde{\mathcal{C}}_s^1/k}(P_1)) = H^0(\tilde{\mathcal{C}}_s^1, \Omega_{\tilde{\mathcal{C}}_s^1/k}),$$

et

$$H^0(\tilde{\mathcal{C}}_s^2, \Omega_{\tilde{\mathcal{C}}_s^2/k}(P_2)) = H^0(\tilde{\mathcal{C}}_s^2, \Omega_{\tilde{\mathcal{C}}_s^2/k}),$$

si bien que

$$H^0(\mathcal{C}_s, \omega_{\mathcal{C}_s/k}) = H^0(\tilde{\mathcal{C}}_s^1, \Omega_{\tilde{\mathcal{C}}_s^1/k}) \oplus H^0(\tilde{\mathcal{C}}_s^2, \Omega_{\tilde{\mathcal{C}}_s^2/k}). \quad (4.2)$$

Soit g_1 (resp. g_2) le genre de $\tilde{\mathcal{C}}_s^1$ (resp. de $\tilde{\mathcal{C}}_s^2$); d'après (4.2), on a

$$g = g_1 + g_2. \quad (4.3)$$

Pour une formule plus générale, cf. [Liu02, prop. 7.5.4 p. 304].

Lemme IV.3. — *Supposons que $g_1 \geq 2$ et $g_2 \geq 2$. Il existe une base $(w_{s,1}, \dots, w_{s,g})$ de $H^0(\mathcal{C}_s, \omega_{\mathcal{C}_s/k})$ vérifiant :*

- a) pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq g_1$, on a $w_{s,i}|_{\mathcal{C}_s^2} = 0$;
- b) pour tout entier j tel que $g_1 + 1 \leq j \leq g$, on a $w_{s,j}|_{\mathcal{C}_s^1} = 0$;
- c) $w_{s,1}$ a un zéro d'ordre 1 en P ;
- d) w_{s,g_1+1} a un zéro d'ordre 1 en P .

Démonstration. — Les assertions a) et b) découlent de (4.2) en choisissant une base adaptée à cette somme directe. Plus précisément, on choisit une base $(\tilde{w}_{s,1}, \dots, \tilde{w}_{s,g_1})$ de $H^0(\tilde{\mathcal{C}}_s^1, \Omega_{\tilde{\mathcal{C}}_s^1/k})$ et une base $(\tilde{w}_{s,g_1+1}, \dots, \tilde{w}_{s,g})$ de $H^0(\tilde{\mathcal{C}}_s^2, \Omega_{\tilde{\mathcal{C}}_s^2/k})$ et on pose $w_{s,\ell} = \iota_* \tilde{w}_{s,\ell}$ pour tout entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq g$.

Montrons que pour une telle base il existe un entier i_0 ($1 \leq i_0 \leq g_1$) tel que w_{s,i_0} a un zéro d'ordre 1 en P . Quitte à réordonner la base, ceci montrera l'assertion c), l'argument étant aussi valable pour l'assertion d).

Le point P est un point double ordinaire dans \mathcal{C}_s , donc il existe deux paramètres locaux de \mathcal{C}_s en P , disons x_s et y_s , qui définissent localement les composantes \mathcal{C}_s^1 et \mathcal{C}_s^2 . Soient $\tilde{x}_s = \iota^*(x_s)$ et $\tilde{y}_s = \iota^*(y_s)$; au voisinage de $P_1 \in \mathcal{C}_s^1$, le faisceau $\Omega_{\mathcal{C}_s^1/k}$ est engendré par $d\tilde{x}_s$ et de même, $d\tilde{y}_s$ est un générateur local au voisinage de P_2 de $\Omega_{\mathcal{C}_s^2/k}$. Cela dit, d'après (4.1), le faisceau $\omega_{\mathcal{C}_s/k}$ est engendré par $dx_s/x_s - dy_s/y_s$ au voisinage de P . Supposons que toutes les sections $w_{s,i}$ avec $1 \leq i \leq g_1$ s'annulent en P à un ordre ≥ 2 ; alors on peut écrire, au voisinage de P ,

$$w_{s,i} = f_i(x_s) \cdot x_s^2 \cdot \left(\frac{dx_s}{x_s} - \frac{dy_s}{y_s} \right) \quad \text{pour tout entier } i \text{ tel que } 1 \leq i \leq g_1,$$

où f_i est une fonction régulière au voisinage de P . Notons que le facteur $f_i(x_s) \cdot x_s^2$ ne dépend pas de y_s car la forme $w_{s,i}$ est identiquement nulle sur \mathcal{C}_s^2 . On en déduit qu'au voisinage de $P_1 \in \mathcal{C}_s^1$, on a

$$\tilde{w}_{s,i} = \tilde{f}_i(\tilde{x}_s) \cdot \tilde{x}_s^2 \cdot \frac{d\tilde{x}_s}{\tilde{x}_s} = \tilde{f}_i(\tilde{x}_s) \cdot \tilde{x}_s \cdot d\tilde{x}_s \quad \text{pour tout entier } i \text{ tel que } 1 \leq i \leq g_1,$$

avec \tilde{f}_i régulière au voisinage de P_1 . Ainsi, P_1 est un point de base de $\Omega_{\mathcal{C}_s^1/k}$, ce qui contredit l'hypothèse $g_1 \geq 2$ ([Har77, lemma IV.5.1 p. 341]). \square

Remarque. — Plus généralement, la preuve ci-dessus montre que si une section de $\omega_{\mathcal{C}_s/k}$ s'annule en P à l'ordre $\rho \geq 1$, alors la section correspondante de $\Omega_{\mathcal{C}_s^1/k}$ sur \mathcal{C}_s^1 s'annule en P_1 à l'ordre $(\rho - 1)$.

Proposition IV.4. — *Supposons que $g_1 \geq 2$ et $g_2 \geq 2$. Il existe une base (w_1, \dots, w_g) du R -module $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}/S})$ (qui est libre de rang g) dont la spécialisation en s est la base $(w_{s,1}, \dots, w_{s,g})$ donnée par le lemme IV.3.*

Démonstration. — Le lemme de Nakayama ([Lan02, lemma X.4.3 p. 425]) permet de relever la base $(w_{s,1}, \dots, w_{s,g})$ du lemme IV.3 en une base de $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}/S})$. \square

Dans toute la suite, on suppose que $g_1 \geq 2$ et $g_2 \geq 2$ et on fixe une base (w_1, \dots, w_g) du R -module $H^0(\mathcal{C}, \omega_{\mathcal{C}/S})$ comme ci-dessus.

L'application canonique $\varphi: \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbf{P}_S^{g-1}$ est définie de la façon suivante. Soit $Q \in \mathcal{C}$ et soit U un voisinage de Q dans \mathcal{C} qui trivialise $\omega_{\mathcal{C}/S}$; notons $\psi_U: \omega_{\mathcal{C}/S}|_U \rightarrow \mathcal{O}_U$ un isomorphisme. On a

$$\varphi(Q) = [\psi_U(w_1|_U)(Q) : \dots : \psi_U(w_g|_U)(Q)] \in \mathbf{P}_S^{g-1}.$$

Cette application est définie en tout point excepté P et elle est indépendante de la trivialisatation ψ , ce qui permet d'alléger le texte en écrivant

$$\varphi(Q) = [w_1(Q) : \dots : w_g(Q)] \in \mathbf{P}_S^{g-1}.$$

§ IV.4. Cas où la surface \mathcal{C} est régulière

On suppose que la surface \mathcal{C} est régulière, ce qui correspond au fait que $e = 1$. Dans ce cas, les calculs sont grandement simplifiés et peuvent être menés à terme : on obtient une description de l'éclatement ainsi qu'un prolongement de l'application canonique φ à la courbe exceptionnelle E . Enfin, on montre un théorème de Petri dans ce contexte.

IV.4.1. DESCRIPTION DE L'IDÉAL \mathcal{I}

Nous suivons la procédure de prolongement indiquée dans [Har77, ex. II.7.17.3 p. 168]. Celle-ci consiste à éclater \mathcal{C} le long d'un certain idéal \mathcal{I} dont le support du sous-schéma fermé correspondant est le point P .

Commençons par déterminer cet idéal. D'après la prop. IV.1, on a

$$\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{C},P} \simeq \widehat{\mathcal{O}}_{S,s}[[x, y]]/(xy - c) \quad (4.4)$$

avec $c = ut^e$, $u \in R^\times$ et $e \geq 1$ (on rappelle que t est une uniformisante de R). Soit U un ouvert de \mathcal{C} qui trivialise $\omega_{\mathcal{C}/S}$ et soit $\psi_U : \omega_{\mathcal{C}/S}|_U \rightarrow \mathcal{O}_U$ un isomorphisme. L'application rationnelle φ s'écrit, sur U ,

$$\varphi|_U : U \longrightarrow \mathbf{A}_S^{g-1} = \text{Spec}(R[X_1, \dots, X_{g-1}]).$$

On a alors

$$\mathcal{I}|_U = \varphi^*(X_1, \dots, X_{g-1}) = \langle \psi_U(w_1), \dots, \psi_U(w_g) \rangle.$$

Notons que le support du sous-schéma fermé correspondant au faisceau d'idéaux \mathcal{I} est le point P , puisque c'est le seul point en lequel toutes les formes w_ℓ s'annulent. Les assertions c) et d) du lemme IV.3 assurent que

$$\psi_U(w_1) = u_1x \pmod{t} \quad \text{et} \quad \psi_U(w_{g_1+1}) = v_1y \pmod{t}, \quad (4.5)$$

avec $u_1, v_1 \in \widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{C},P}^\times$. Il existe donc des éléments

$$x' = u_1x + t\tau(x, y), \quad (4.6)$$

$$y' = v_1y + t\phi(x, y) \quad (4.7)$$

dans \mathcal{I} , où τ et ϕ sont des séries en x, y . Jusqu'ici, on n'a pas utilisé l'hypothèse sur la régularité de \mathcal{C} , et l'on reviendra au § IV.5 sur le cas général.

Proposition IV.5. — *Si la surface \mathcal{C} est régulière, l'idéal $\widehat{\mathcal{I}}$ de $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{C},P}$ engendré par \mathcal{I} est donné par $\widehat{\mathcal{I}} = \langle x, y \rangle$.*

Démonstration. — Comme \mathcal{C} est régulière, on a $e = 1$ et donc $xy = ut$. On déduit de (4.6) et (4.7) que $x'y' = u't$ où u' est une unité de $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathcal{C},P}$. Ainsi, l'élément t est dans l'idéal engendré par x' et y' , donc il est dans \mathcal{I} . On déduit alors de (4.5) que $x, y \in \mathcal{I}$. Par ailleurs, on a en général $\mathcal{I} \subset \langle x, y, t \rangle$, donc $\mathcal{I} = \langle x, y \rangle$. \square

IV.4.2. ÉCLATEMENT ET PROLONGEMENT

Soit $\pi: \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathcal{C}$ l'éclatement de \mathcal{C} le long de l'idéal \mathcal{I} . La procédure décrite dans [Har77, ex. II.7.17.3 p. 168] permet de prolonger l'application φ et d'obtenir le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\mathcal{C}} & & \\ \pi \downarrow & \searrow \tilde{\varphi} & \\ \mathcal{C} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{P}_S^{g-1} \\ f \downarrow & \swarrow & \\ S & & \end{array}$$

voulu. Mais nous avons besoin de précisions sur l'image de la courbe exceptionnelle dans \mathbf{P}_S^{g-1} ; c'est pourquoi nous menons en détail le calcul de l'éclatement.

Lemme IV.6. — Soit $\tilde{X} \rightarrow X = \text{Spec}(A)$ l'éclatement d'un schéma affine noethérien intègre le long d'un idéal I engendré par f_1, \dots, f_n , avec $f_i \neq 0$ pour tout i . Alors \tilde{X} est recouvert par les sous-schémas ouverts affines $\text{Spec}(A_i)$ (avec $1 \leq i \leq n$), où A_i est la sous- A -algèbre de $\text{Frac}(A)$ engendrée par les éléments $f_j f_i^{-1}$ avec $1 \leq j \leq n$.

Démonstration. — Voir [Liu02, lemma 8.1.4 p. 320]. □

Remarque. — Les hypothèses de ce lemme n'imposent pas que le système de générateurs f_1, \dots, f_n soit minimal.

La question qui nous occupe (le calcul de l'image de la droite exceptionnelle) est locale au voisinage de P et permet de travailler sur les complétés; d'après (4.4) et la prop. IV.5, on peut supposer que l'on éclate le schéma

$$X = \text{Spec}(R[x, y]/(xy - ut))$$

(qui a le même complété que la courbe) le long de l'idéal engendré par x et y . Dès lors, le lemme IV.6 permet de calculer cet éclatement \tilde{X} dont on note $E = \pi^{-1}(P)$ la courbe exceptionnelle.

Considérons les éléments suivants de $K(X)$:

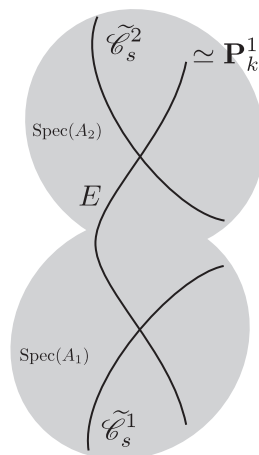
$$x_1 = x/y \quad \text{et} \quad y_1 = y/x.$$

D'après le lemme IV.6, \tilde{X} est recouvert par les ouverts $\text{Spec}(A_1)$ et $\text{Spec}(A_2)$ où

$$\begin{aligned} A_1 &= R[x, y, x_1] = R[y, x_1] \quad \text{avec} \quad y^2 x_1 = ut, \\ A_2 &= R[x, y, y_1] = R[x, y_1] \quad \text{avec} \quad x^2 y_1 = ut. \end{aligned}$$

L'allure de la fibre spéciale est obtenue en faisant $t = 0$. On a donc

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{C}}_s \cap \text{Spec}(A_1) &= \text{Spec}(k[y, x_1]/(y^2 x_1)), \\ \tilde{\mathcal{C}}_s \cap \text{Spec}(A_2) &= \text{Spec}(k[x, y_1]/(x^2 y_1)). \end{aligned}$$

FIGURE IV.2 – Allure de la fibre spéciale lorsque \mathcal{C} est régulière

Quant à la courbe exceptionnelle E , elle intersecte les deux ouverts affines de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E \cap \text{Spec}(A_1) &= \text{Spec}(k[x_1]), \\ E \cap \text{Spec}(A_2) &= \text{Spec}(k[y_1]). \end{aligned}$$

La courbe E est isomorphe à \mathbf{P}_k^1 et apparaît avec multiplicité 2 dans la fibre spéciale. La figure IV.2 présente l'allure de la fibre spéciale dans l'éclaté.

On sait que l'application $\varphi: \mathcal{C} \dashrightarrow \mathbf{P}_S^{g-1}$ se prolonge en une application $\tilde{\varphi}: \tilde{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbf{P}_S^{g-1}$. Voyons explicitement comment ce prolongement apparaît.

Pour tout entier ℓ tel que $1 \leq \ell \leq g$, on traduit le fait que $w_\ell \in \mathcal{I}$, soit

$$w_\ell = \alpha_\ell x + \beta_\ell y + \tilde{w}_\ell(x, y),$$

avec $\alpha_\ell, \beta_\ell \in R$ et $\tilde{w}_\ell \in \mathcal{I}$ constitué de termes divisibles par xy , x^2 ou y^2 .

Examinons la fibre spéciale ; notons x_s, y_s les spécialisations de x, y en s , $\alpha_{s,\ell}, \beta_{s,\ell}$ celles de α_ℓ, β_ℓ et $\tilde{w}_{s,\ell}$ celle de \tilde{w}_ℓ . D'après le lemme IV.3, on a

$$\begin{aligned} \alpha_{s,i} &= 0 \quad \text{pour tout } i \text{ tel que } 1 \leq i \leq g_1, \\ \beta_{s,j} &= 0 \quad \text{pour tout } j \text{ tel que } g_1 + 1 \leq j \leq g, \\ \alpha_{s,g_1+1} &\neq 0, \\ \beta_{s,1} &\neq 0. \end{aligned}$$

Soit $Q = (x, y)$ un point de \mathcal{C} au voisinage de P ; tant que Q est hors de P , l'application φ est bien définie en Q , avec

$$\begin{aligned} \varphi(Q) &= [w_1(Q) : \cdots : w_g(Q)] \\ &= [\alpha_1 x + \beta_1 y + \tilde{w}_1(x, y) : \cdots : \alpha_g x + \beta_g y + \tilde{w}_g(x, y)]. \end{aligned}$$

Sur $\text{Spec}(A_1)$, on a $x = x_1y$, donc

$$\varphi(Q) = [\alpha_1x_1y + \beta_1y + \tilde{w}_1(x_1y, y) : \cdots : \alpha_gx_1y + \beta_gy + \tilde{w}_g(x_1y, y)].$$

Dans cette expression, on peut simplifier chaque terme par y , d'où

$$\varphi(Q) = [\alpha_1x_1 + \beta_1 + \tilde{w}_1(x_1y, y)/y : \cdots : \alpha_gx_1 + \beta_g + \tilde{w}_g(x_1y, y)/y].$$

Dès lors, on peut étendre cette égalité au cas $y = 0$ (en notant que les termes $\tilde{w}_\ell(x_1y, y)/y$ sont alors nuls). Ainsi, on prolonge l'application φ en une application $\tilde{\varphi}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{P}_S^{g-1}$ dont la restriction à $E \cap \text{Spec}(A_1)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_s(x_1) &= [\alpha_{s,1}x_1 + \beta_{s,1} : \cdots : \alpha_{s,g}x_1 + \beta_{s,g}] \\ &= [\beta_{s,1} : \cdots : \beta_{s,g_1} : \alpha_{s,g_1+1}x_1 : \cdots : \alpha_{s,g}x_1]. \end{aligned}$$

On montre de même que le prolongement à $\text{Spec}(A_2)$ est donné par

$$\tilde{\varphi}_s(y_1) = [\beta_{s,1}y_1 : \cdots : \beta_{s,g_1}y_1 : \alpha_{s,g_1+1} : \cdots : \alpha_{s,g}].$$

Finalement, l'image $\tilde{\varphi}(E)$ de la courbe exceptionnelle dans \mathbf{P}_k^{g-1} est la droite projective paramétrée par

$$[U : V] \in \mathbf{P}_k^1 \longmapsto [\beta_{s,1}V : \cdots : \beta_{s,g_1}V : \alpha_{s,g_1+1}U : \cdots : \alpha_{s,g}U] \in \mathbf{P}_k^{g-1}. \quad (4.8)$$

IV.4.3. THÉORÈME DE PETRI

On a montré ci-dessus que l'image canonique de la fibre spéciale \mathcal{C}_s dans \mathbf{P}_k^{g-1} est constituée de trois branches, à savoir $\varphi(\mathcal{C}_s^1)$, $\varphi(\mathcal{C}_s^2)$ et $\tilde{\varphi}(E)$; cette dernière est la droite projective dont une paramétrisation est donnée par (4.8).

Les coordonnées dans \mathbf{P}_k^{g-1} sont w_1, \dots, w_g .

La droite projective $\tilde{\varphi}(E)$ est notée \mathcal{D} . Cette droite joint les points p_1 et p_2 définis par

$$p_1 = [\beta_{s,1} : \cdots : \beta_{s,g_1} : 0 : \cdots : 0] \in \varphi(\mathcal{C}_s^1)$$

et

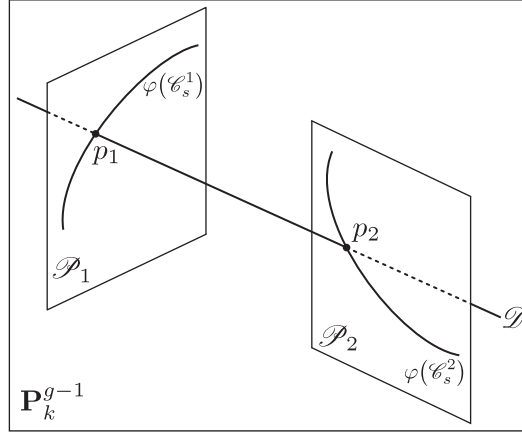
$$p_2 = [0 : \cdots : 0 : \alpha_{s,g_1+1} : \cdots : \alpha_{s,g}] \in \varphi(\mathcal{C}_s^2).$$

Le sous-espace linéaire de \mathbf{P}_k^{g-1} défini par

$$w_1 = \cdots = w_{g_1} = 0$$

est noté \mathcal{P}_2 . De même, on note \mathcal{P}_1 le sous-espace linéaire défini par

$$w_{g_1+1} = \cdots = w_g = 0.$$

FIGURE IV.3 – Image canonique de la fibre spéciale lorsque \mathcal{C} est régulière

Voir la figure IV.3.

Pour tout sous-ensemble \mathcal{E} de \mathbf{P}_k^{g-1} , on notera $I(\mathcal{E})$ l'idéal homogène associé, c'est-à-dire

$$I(\mathcal{E}) = \langle \text{polynômes homogènes } P \text{ tels que } P(e) = 0 \text{ pour tout } e \in \mathcal{E} \rangle.$$

On suppose désormais que g_1 et g_2 sont ≥ 4 et que \mathcal{C}_s^1 et \mathcal{C}_s^2 ne sont pas hyperelliptiques. Avec les notations ci-dessus, on a $\varphi(\mathcal{C}_s^1) \subseteq \mathcal{P}_1$ et $\varphi(\mathcal{C}_s^2) \subseteq \mathcal{P}_2$. Le théorème de Petri classique assure que $\varphi(\mathcal{C}_s^1)$ est une intersection de quadriques et de cubiques ; on a donc

$$I(\varphi(\mathcal{C}_s^1)) = \langle w_{g_1+1}, \dots, w_g, f_{1,1}, \dots, f_{1,q_1}, G_{1,1}, \dots, G_{1,c_1} \rangle, \quad (4.9)$$

où q_1, c_1 sont des entiers ≥ 0 , $f_{1,1}, \dots, f_{1,q_1}$ sont des quadriques et $G_{1,1}, \dots, G_{1,c_1}$ sont des cubiques, ces polynômes ne faisant intervenir que les coordonnées w_1, \dots, w_{g_1} . En particulier, ces quadriques et ces cubiques sont des éléments de $I(\mathcal{P}_2)$.

De même,

$$I(\varphi(\mathcal{C}_s^2)) = \langle w_1, \dots, w_{g_1}, f_{2,1}, \dots, f_{2,q_2}, G_{2,1}, \dots, G_{2,c_2} \rangle, \quad (4.10)$$

où q_2, c_2 sont des entiers ≥ 0 , $f_{2,1}, \dots, f_{2,q_2}$ sont des quadriques et $G_{2,1}, \dots, G_{2,c_2}$ sont des cubiques, ces polynômes ne faisant intervenir que les coordonnées w_{g_1+1}, \dots, w_g . Ces quadriques et ces cubiques sont des éléments de $I(\mathcal{P}_1)$.

La droite \mathcal{D} est une intersection de $(g-2)$ hyperplans dans \mathbf{P}_k^{g-1} . On les choisit de la façon suivante. Soient $\mathcal{H}_{1,1}, \dots, \mathcal{H}_{1,g_1-1}$ des hyperplans dont l'intersection est le sous-espace linéaire engendré par \mathcal{P}_2 et p_1 ; soient aussi $\mathcal{H}_{2,1}, \dots, \mathcal{H}_{2,g_2-1}$ des hyperplans dont l'intersection est le sous-espace linéaire engendré par \mathcal{P}_1 et p_2 . On a alors

$$\mathcal{D} = \mathcal{H}_{1,1} \cap \dots \cap \mathcal{H}_{1,g_1-1} \cap \mathcal{H}_{2,1} \cap \dots \cap \mathcal{H}_{2,g_2-1}.$$

Si $\mathcal{H}_{i,j}$ est l'un de ces hyperplans, on choisit une forme linéaire homogène $h_{i,j}$ telle que $I(\mathcal{H}_{i,j}) = \langle h_{i,j} \rangle$. Par définition, les formes $h_{1,1}, \dots, h_{1,g_1-1}$ sont identiquement nulles

sur \mathcal{P}_2 , donc ne font intervenir que les coordonnées w_1, \dots, w_{g_1} . De même, les formes $h_{2,1}, \dots, h_{2,g_2-1}$ ne font intervenir que les coordonnées w_{g_1+1}, \dots, w_g . L'idéal de \mathcal{D} est donné par

$$I(\mathcal{D}) = \langle h_{1,1}, \dots, h_{1,g_1-1}, h_{2,1}, \dots, h_{2,g_2-1} \rangle. \quad (4.11)$$

Lemme IV.7. — *Les quadriques $f_{i,j}$ et les cubiques $G_{i,j}$ sont des éléments de $I(\mathcal{D})$.*

Démonstration. — Soit $p = \lambda p_1 + \mu p_2$ un point de \mathcal{D} , avec $[\lambda : \mu] \in \mathbf{P}_k^1$. La quadrique $f_{1,1}$ ne dépend que des coordonnées w_1, \dots, w_{g_1} , donc

$$f_{1,1}(p) = f_{1,1}(\lambda p_1 + \mu p_2) = f_{1,1}(\lambda p_1) = \lambda^2 f_{1,1}(p_1) = 0,$$

la dernière égalité étant due au fait que $p_1 \in \varphi(\mathcal{C}_s^1)$. On montre de même que les autres quadriques et cubiques sont dans $I(\mathcal{D})$. \square

Théorème IV.8. — *Si la surface \mathcal{C} est régulière, l'idéal de l'image canonique de \mathcal{C}_s dans \mathbf{P}_k^{g-1} est engendré par des quadriques et des cubiques. Plus précisément, on a*

$$\begin{aligned} I(\varphi(\mathcal{C}_s^1) \cup \varphi(\mathcal{C}_s^2) \cup \mathcal{D}) = \langle & w_i h_{2,s}, \quad (1 \leq i \leq g_1, 1 \leq s \leq g_2 - 1) \\ & w_j h_{1,r}, \quad (g_1 + 1 \leq j \leq g, 1 \leq r \leq g_1 - 1) \\ & f_{1,1}, \dots, f_{1,g_1}, G_{1,1}, \dots, G_{1,c_1}, f_{2,1}, \dots, f_{2,g_2}, G_{2,1}, \dots, G_{2,c_2} \rangle. \end{aligned}$$

Démonstration. — Notons J l'idéal donné par le membre de droite ci-dessus. Les relations (4.9), (4.10), (4.11) et le lemme IV.7 assurent que $J \subseteq I(\varphi(\mathcal{C}_s^1) \cup \varphi(\mathcal{C}_s^2) \cup \mathcal{D})$.

Soit $T \in I(\varphi(\mathcal{C}_s^1) \cup \varphi(\mathcal{C}_s^2) \cup \mathcal{D})$; alors $T \in I(\mathcal{D})$, donc (d'après (4.11)) il existe des polynômes homogènes $\Lambda_{1,1}, \dots, \Lambda_{1,g_1-1}, \Lambda_{2,1}, \dots, \Lambda_{2,g_2-1}$ tels que

$$T = \sum_{r=1}^{g_1-1} \Lambda_{1,r} h_{1,r} + \sum_{s=1}^{g_2-1} \Lambda_{2,s} h_{2,s}.$$

Pour chaque entier r tel que $1 \leq r \leq g_1 - 1$ et pour chaque entier s tel que $1 \leq s \leq g_2 - 1$, on écrit

$$\Lambda_{1,r} = \Lambda'_{1,r} + \Lambda''_{1,r} \quad \text{et} \quad \Lambda_{2,s} = \Lambda'_{2,s} + \Lambda''_{2,s},$$

où

- $\Lambda'_{1,r}$ ne dépend que des variables w_1, \dots, w_{g_1} ;
- chaque monôme de $\Lambda''_{1,r}$ est divisible par l'une des variables w_{g_1+1}, \dots, w_g ;
- $\Lambda'_{2,s}$ ne dépend que des variables w_{g_1+1}, \dots, w_g ;
- chaque monôme de $\Lambda''_{2,s}$ est divisible par l'une des variables w_1, \dots, w_{g_1} .

Avec ces notations, on a $\Lambda''_{1,r} h_{1,r} \in J$ et $\Lambda''_{2,s} h_{2,s} \in J$, donc

$$T \equiv \underbrace{\sum_{r=1}^{g_1-1} \Lambda'_{1,r} h_{1,r}}_{T_1} + \underbrace{\sum_{s=1}^{g_2-1} \Lambda'_{2,s} h_{2,s}}_{T_2} \pmod{J}. \quad (4.12)$$

Enfin, $T_1 = \sum_{r=1}^{g_1-1} \Lambda'_{1,r} h_{1,r}$ est un polynôme homogène ne dépendant que de w_1, \dots, w_{g_1} et $T_2 = \sum_{s=1}^{g_2-1} \Lambda'_{2,s} h_{2,s}$ est un polynôme homogène ne dépendant que de w_{g_1+1}, \dots, w_g . Or T s'annule identiquement sur $\varphi(\mathcal{C}_s^1) \cup \varphi(\mathcal{C}_s^2)$, donc $T_1 \in I(\varphi(\mathcal{C}_s^1))$ et $T_2 \in I(\varphi(\mathcal{C}_s^2))$. Par conséquent,

$$T_1 \in \langle f_{1,1}, \dots, f_{1,q_1}, G_{1,1}, \dots, G_{1,c_1} \rangle \quad \text{et} \quad T_2 \in \langle f_{2,1}, \dots, f_{2,q_2}, G_{2,1}, \dots, G_{2,c_2} \rangle.$$

Ainsi, $T_1 + T_2 \in J$ donc, compte tenu de (4.12), $T \in J$. \square

§ IV.5. Considérations sur le cas général

Lorsque la surface \mathcal{C} n'est pas supposée régulière, nous ne sommes pas parvenus à dégager un exposé clair de la situation. De nombreux cas et sous-cas apparaissent, selon les valeurs de e , e' et des valuations (en t) des séries τ et ϕ (cf. (4.6) et (4.7)). On peut cependant formuler des conjectures concernant l'idéal \mathcal{I} et l'allure de la courbe exceptionnelle dans l'éclaté.

Conjecture. — *L'idéal \mathcal{I} est de la forme $\langle x', y', t^{e'} \rangle$ où e' est un entier ≥ 1 et où x', y' sont donnés par (4.6) et (4.7). De plus, la courbe exceptionnelle E est une chaîne de courbes isomorphes à \mathbf{P}_k^1 dans \tilde{X} .*

Cette conjecture est étayée par le fait qu'elle est vraie lorsque la surface \mathcal{C} est régulière (on l'a vu plus haut); de plus, lorsque les valuations des séries τ et ϕ sont « grandes » (typiquement $\geq e$), on peut se ramener au cas où l'idéal \mathcal{I} est de la forme $\langle x', y', t^{e'} \rangle$ avec $x'y' = u't^e$, où u est une unité. On peut alors mener tous les calculs (à la manière de ce qu'on a fait dans le cas régulier) en partant du lemme IV.6. Si $e > 2e'$, on obtient que la courbe exceptionnelle est une chaîne de deux courbes isomorphes à \mathbf{P}_k^1 . Par ailleurs, on peut montrer dans ce cas que l'image de chacune de ces deux courbes dans \mathbf{P}_k^{g-1} est une droite projective. L'établissement d'un théorème de Petri est alors abordable.

ANNEXES

§ A.1. Un argument combinatoire pour le théorème de Petri classique

A.1.1. RAPPELS

On reprend les notations de l'introduction : \mathcal{C} est une courbe lisse non hyperelliptique de genre $g \geq 4$, $\Omega_{\mathcal{C}}$ est le faisceau des différentielles régulières sur \mathcal{C} . L'analyse de Petri classique exposée au § I.2.2 permet d'exhiber des quadriques $f_{i,j}$ et des cubiques $G_{\ell,m}$ dans l'idéal canonique I de \mathcal{C} . On va montrer que celles-ci engendrent I .

Rappelons que si i, j sont des entiers tels que $3 \leq i < j \leq g$, on a

$$f_{i,j} = w_i \cdot w_j - \sum_{s=3}^g a_{s,i,j} \cdot w_s - b_{i,j} w_1 \cdot w_2 \in \text{Sym}^2 H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}) \quad (\text{a.1})$$

avec $a_{s,i,j} = \lambda_{s,i,j} w_1 + \mu_{s,i,j} w_2$, $\lambda_{s,i,j}, \mu_{s,i,j}, b_{i,j} \in k$. De plus, si ℓ est un entier tel que $3 \leq \ell \leq g-1$, on a les cubiques

$$G_{\ell,g} = \alpha_{\ell} \cdot w_{\ell} \cdot w_{\ell} - \alpha_g \cdot w_g \cdot w_g + \theta_g - \theta_{\ell} \in \text{Sym}^3 H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}), \quad (\text{a.2})$$

avec $\alpha_i \in H^0(\mathcal{C}, \Omega_{\mathcal{C}}(-D - A_i))$ et $\theta_i \in W$ pour tout entier i tel que $3 \leq i \leq g$. Notons que α_i s'écrit $\alpha_i = \nu_1 w_1 + \nu_2 w_2$ avec $\nu_1, \nu_2 \in k$, tous deux non nuls car α_i s'annule à l'ordre ≥ 2 en A_i .

Soit $S = k[w_1, \dots, w_g]$; on munit l'ensemble des monômes de S de l'ordre lexicographique gradué associé à l'ordre suivant des variables :

$$w_3 > w_4 > \dots > w_g > w_1 > w_2.$$

Avec cet ordre, on a

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= w_i \cdot w_j + (\text{termes de degré inférieur}), & (3 \leq i < j \leq g), \\ G_{\ell,g} &= w_1 \cdot w_{\ell} \cdot w_{\ell} + (\text{termes de degré inférieur}), & (3 \leq \ell \leq g-1). \end{aligned}$$

A.1.2. FORMULAIRE

On rappelle les formules donnant la dimension des espaces I_n :

$$\dim_k(I_n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \text{ ou } n = 1, \\ \binom{g+n-1}{n} - (2n-1)(g-1) & \text{si } n \geq 2. \end{cases}$$

Le nombre de monômes de degré d formés par g variables est égal à $\binom{g+d-1}{d}$. On utilisera par ailleurs la formule suivante, valable pour tous entiers m, p tels que $0 \leq p \leq m$:

$$\sum_{n=p}^m \binom{n}{p} = \binom{m+1}{p+1}.$$

Lemme A.1. — *Le nombre de monômes de degré d , à g variables, qui sont multiples de l'une (au moins) parmi v variables fixées, est égal à*

$$\binom{g+d-1}{d} - \binom{g+d-v-1}{d}.$$

Exemple. — Prenons $d = 3$, $g = 3$ et notons x_0, x_1 et x_2 les variables. Le nombre de monômes en x_0, x_1, x_2 de degré 3 qui sont multiples de x_2 est

$$\binom{5}{3} - \binom{4}{3} = 6.$$

Précisément, ces monômes sont

$$x_0^2 x_2, \quad x_0 x_1 x_2, \quad x_1^2 x_2, \quad x_0 x_2^2, \quad x_1 x_2^2 \quad \text{et} \quad x_2^3.$$

Lemme A.2. — *Soit \mathcal{F} une famille finie d'éléments de S . Si les monômes dominants de \mathcal{F} sont linéairement indépendants, il en va de même pour les éléments de \mathcal{F} .*

Ce lemme permet de se contenter de faire les calculs de dimension avec les monômes dominants. Ainsi, on simplifie les notations en posant

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= w_i \cdot w_j, & (3 \leq i < j \leq g), \\ G_{\ell,g} &= w_1 \cdot w_\ell \cdot w_\ell, & (3 \leq \ell \leq g-1). \end{aligned}$$

Il est clair que les quadriques $(f_{i,j})_{3 \leq i < j \leq g}$ sont linéairement indépendantes dans I_2 ; or

$$\binom{g-2}{2} = \binom{g+1}{2} - 3(g-1) = \dim_k(I_2),$$

donc elles forment une base de I_2 .

A.1.3. QUADRIQUES ET CUBIQUES

Combien de cubiques linéairement indépendantes obtient-on à partir des $f_{i,j}$? En multipliant les $f_{i,j}$ par les variables w_ℓ (monômes de degré 1), on obtient une collection de monômes de degré 3 et la question est de déterminer la dimension du sous-espace de I_3 qu'ils engendrent. On calcule d'abord les multiples de $f_{3,j} = w_3 \cdot w_j$ avec $4 \leq j \leq g$.

- Le monôme $w_3 \cdot w_4$ fournit g cubiques linéairement indépendantes, à savoir les $w_3 \cdot w_4 \cdot w_\ell$ pour $1 \leq \ell \leq g$;
- le monôme $w_3 \cdot w_5$ fournit $(g - 1)$ nouvelles cubiques (il faut exclure $w_3 \cdot w_4 \cdot w_5$ qui a déjà été obtenue);
- le monôme $w_3 \cdot w_6$ fournit $(g - 2)$ nouvelles cubiques (il faut exclure $w_3 \cdot w_4 \cdot w_6$ et $w_3 \cdot w_5 \cdot w_6$);
- ...
- le monôme $w_3 \cdot w_g$ fournit 4 nouvelles cubiques (on multiplie par w_1, w_2, w_3 ou w_g).

On obtient ainsi déjà $\binom{g+1}{2} - 6$ monômes cubiques (et ils sont tous divisibles par w_3).

Passons aux multiples de $f_{4,j} = w_4 \cdot w_j$, avec $5 \leq j \leq g$. On va multiplier par toutes les variables w_ℓ sauf w_3 , de sorte qu'on est sûr d'obtenir de nouvelles cubiques. On reprend donc le même calcul que ci-dessus, mais on ne dispose plus que de $(g - 1)$ variables. On obtient ainsi $\binom{g}{2} - 6$ nouvelles cubiques.

En continuant ce procédé, on voit que pour tout entier i tel que $3 \leq i \leq g - 1$, les monômes de la forme $w_i \cdot w_j$ (avec $i + 1 \leq j \leq g$) fournissent

$$\binom{g+4-i}{2} - 6$$

nouvelles cubiques. Tous calculs faits, le nombre de cubiques indépendantes multiples de l'une des quadriques $f_{i,j}$ est

$$\binom{g+2}{3} - 6(g-3) - 10.$$

Comme

$$\dim_k(I_3) = \binom{g+2}{3} - 5(g-1),$$

on voit qu'il manque $(g - 3)$ cubiques pour engendrer I_3 . Ce sont les $G_{\ell,g}$ ($3 \leq \ell \leq g - 1$) qui comblent ce manque: il est en effet clair que ces monômes sont indépendants de ceux déjà introduits.

A.1.4. QUARTIQUES

Calculons maintenant le nombre de quartiques linéairement indépendantes que l'on peut obtenir à partir des $f_{i,j}$ et des $G_{\ell,g}$. On utilisera sans le préciser le lemme A.1.

Multiples d'une quadrique parmi les $f_{i,j}$

On procède comme dans le calcul des cubiques multiples de l'une des $(f_{i,j})$. À partir de $f_{3,4}$, on obtient $\binom{g+1}{2}$ quartiques linéairement indépendantes, ce qu'on note

$$f_{3,4} \rightsquigarrow \binom{g+1}{2}.$$

On a ensuite

$$\begin{aligned} f_{3,5} &\rightsquigarrow \binom{g+1}{2} - |\{\text{monômes de degré 2, à } g \text{ variables, multiples de } w_4\}| \\ &= \binom{g+1}{2} - \left[\binom{g+1}{2} - \binom{g}{2} \right] \\ &= \binom{g}{2}. \end{aligned}$$

Poursuivons :

$$\begin{aligned} f_{3,6} &\rightsquigarrow \binom{g+1}{2} - |\{\text{monômes de degré 2, à } g \text{ variables, multiples de } w_4 \text{ ou } w_5\}| \\ &= \binom{g+1}{2} - \left[\binom{g+1}{2} - \binom{g-1}{2} \right] \\ &= \binom{g-1}{2}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi successivement :

$$\begin{aligned} f_{3,4} &\rightsquigarrow \binom{g+1}{2} \\ f_{3,5} &\rightsquigarrow \binom{g}{2} \\ f_{3,6} &\rightsquigarrow \binom{g-1}{2} \\ &\vdots \\ f_{3,g} &\rightsquigarrow \binom{5}{2}. \end{aligned}$$

En notant σ_1 le nombre de quartiques fournies par les $f_{3,j}$, $4 \leq j \leq g$, on a

$$\sigma_1 = \sum_{j=4}^g \binom{j+1}{2} = \binom{g+2}{3} - \binom{5}{3}.$$

Pour calculer la contribution des $f_{4,j}$, on reprend le même calcul, en remplaçant g par $g-1$ (on ne fait plus apparaître la variable w_3). Le nombre σ_2 de quartiques ainsi obtenues est

$$\sigma_2 = \binom{g+1}{3} - \binom{5}{3}.$$

Avec des notations évidentes, on a de même, pour tout entier i tel que $3 \leq i \leq g-1$,

$$\sigma_i = \binom{g+5-i}{3} - \binom{5}{3}.$$

La contribution des $f_{i,j}$ est donc

$$\sum_{i=3}^{g-1} \sigma_i = \binom{g+3}{4} - \binom{6}{4} - (g-3) \binom{5}{3} = \binom{g+3}{4} - 10(g-3) - 15.$$

On obtient ainsi tous les monômes de la forme

$$w_i \cdot w_j \cdot w_\ell \cdot w_m,$$

avec $3 \leq i < j \leq g$ et $1 \leq \ell, m \leq g$, i.e., tous les monômes divisibles par l'un des $w_i \cdot w_j$.

Nouvelles quartiques multiples d'un cubique parmi les $G_{\ell,g}$

Voyons maintenant ce qu'apportent les cubiques $G_{\ell,g} = w_1 \cdot w_\ell \cdot w_\ell$ ($3 \leq \ell \leq g-1$). Pour chaque ℓ , on obtient seulement 3 nouvelles quartiques, à savoir

$$w_2 \cdot w_1 \cdot w_\ell \cdot w_\ell, \quad w_1 \cdot w_1 \cdot w_\ell \cdot w_\ell \quad \text{et} \quad w_1 \cdot w_\ell \cdot w_\ell \cdot w_\ell.$$

En tout, les $G_{\ell,g}$ apportent donc $3(g-3)$ nouvelles quartiques (on vérifie facilement qu'elles sont bien linéairement indépendantes de celles déjà obtenues).

Ajout d'une dernière quartique

Jusqu'à présent, le nombre de quartiques obtenues est

$$\binom{g+3}{4} - 10(g-3) - 15 + 3(g-3) = \binom{g+3}{4} - 7(g-1) - 1.$$

On voit qu'il en manque une pour engendrer I_4 . D'après (a.1) et (a.2),

$$H = w_1 \cdot w_g \cdot w_g \cdot w_g$$

est le monôme dominant de la quartique² $\alpha_3 w_3 \cdot f_{3,g} - w_g \cdot G_{3,g}$ qui est dans l'idéal engendré par les $f_{i,j}$ et les $G_{\ell,g}$. Comme H est linéairement indépendant des quartiques déjà trouvées, il complète la famille de ces quartiques en une base de I_4 .

2. Il s'agit ici d'un calcul « à la Gröbner » : on élimine les monômes dominants de $f_{3,g}$ et $G_{3,g}$.

A.1.5. ÉQUATIONS DE DEGRÉ ≥ 5

On a traité à part les cas des cubiques et des quartiques car il fallait à chaque fois introduire des monômes manquants. À partir du degré 5, il n'y a plus de telles exceptions, et nous pouvons traiter directement le cas général et montrer que pour tout entier $n \geq 5$, l'idéal I_n est engendré par les quadriques $f_{i,j}$, les cubiques $G_{\ell,g}$ et la quartique H . La stratégie est la même que celle employée précédemment : on cherche d'abord les monômes obtenus comme multiples des $f_{i,j}$, puis ceux ajoutés par les G_k et enfin la contribution de H .

Fixons un entier $n \geq 5$. On utilise la notation « \rightsquigarrow » comme précédemment, c'est-à-dire que

$$P \rightsquigarrow p$$

signifie que le monôme P ajoute p nouveaux monômes à la liste déjà construite. Plus généralement, P peut être une famille finie de monômes. Au début du raisonnement, cette liste est vide.

Contribution des quadriques $f_{i,j}$

Il faut multiplier les $f_{i,j}$ par tous les monômes de degré $(n-2)$ en g variables. Il y a $\binom{g+n-3}{n-2}$ tels monômes. On a alors successivement

$$\begin{aligned} f_{3,4} &\rightsquigarrow \binom{g+n-3}{n-2}, \\ f_{3,5} &\rightsquigarrow \binom{g+n-3}{n-2} - |\{\text{monômes de degré } n-2, \text{ à } g \text{ variables, multiples de } w_4\}| \\ &= \binom{g+n-3}{n-2} - \left[\binom{g+n-3}{n-2} - \binom{g+n-4}{n-2} \right] \\ &= \binom{g+n-4}{n-2}, \\ f_{3,6} &\rightsquigarrow \binom{g+n-3}{n-2} \\ &\quad - |\{\text{monômes de degré } n-2, \text{ à } g \text{ variables, multiples de } w_4 \text{ ou } w_5\}| \\ &= \binom{g+n-5}{n-2}, \\ &\quad \vdots \\ f_{3,g} &\rightsquigarrow \binom{n+1}{n-2}. \end{aligned}$$

Ceci nous donne déjà

$$\sigma_1 = \sum_{j=2}^{g-2} \binom{j+n-1}{n-2} = \binom{g+n-1}{n-1} - \binom{n+1}{n-1}$$

monômes de degré n . Comme on l'a vu plus haut, la contribution des $f_{4,j}$ s'obtient en remplaçant g par $(g-1)$, soit

$$(f_{4,j})_{5 \leq j \leq g} \rightsquigarrow \sigma_2 = \binom{g+n-2}{n-1} - \binom{n+1}{n-1}.$$

En poursuivant ce raisonnement, on voit que pour tout entier i tel que $3 \leq i \leq g-1$, la contribution des $f_{i,j}$ est

$$\sigma_i = \binom{g+n-i+2}{n-1} - \binom{n+1}{n-1}.$$

La contribution totale des $f_{i,j}$ est donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^{g-1} \sigma_i &= \sum_{i=3}^{g-1} \left[\binom{g+n-i+2}{n-1} - \binom{n+1}{n-1} \right] \\ &= \binom{g+n-1}{n} - \binom{n+2}{n} - (g-3) \binom{n+1}{n-1}. \end{aligned} \quad (\text{a.3})$$

Contribution des cubiques $G_{\ell,g}$

Soit ℓ un entier tel que $3 \leq \ell \leq g-1$; pour obtenir un nouveau monôme de degré n à partir de $G_{\ell,g} = w_1 \cdot w_\ell \cdot w_\ell$, il faut multiplier $G_{\ell,g}$ par un monôme de degré $(n-3)$ en les 3 variables w_1, w_2 et w_ℓ . Il y a $\binom{n-1}{n-3}$ tels monômes, et les monômes de degré n ainsi construits sont linéairement indépendants des précédents. La contribution totale des cubiques $G_{\ell,g}$ est donc

$$(G_{\ell,g})_{3 \leq \ell \leq g-1} \rightsquigarrow \binom{n-1}{n-3} (g-3). \quad (\text{a.4})$$

Contribution de la quartique H

On a $H = w_1 \cdot w_g \cdot w_g \cdot w_g$; les nouveaux monômes sont obtenus en multipliant H par un monôme de degré $(n-4)$ en les 3 variables w_1, w_2 et w_g . Il y a $\binom{d-2}{2}$ tels monômes. La contribution de H est donc

$$H \rightsquigarrow \binom{d-2}{2}. \quad (\text{a.5})$$

Conclusion

Un calcul élémentaire montre que

$$(\text{a.3}) + (\text{a.4}) + (\text{a.5}) = \binom{g+n-1}{n} - (2n-1)(g-1) = \dim_k(\mathbb{I}_n),$$

ce qui achève de montrer que les quadriques $(f_{i,j})_{3 \leq i < j \leq g}$ et les cubiques $(G_{\ell,g})_{3 \leq \ell \leq g-1}$ engendrent l'idéal canonique \mathbb{I} .

Remarque. — L'argument combinatoire présenté ici s'applique tel quel au cas plus général des courbes *canoniques* au sens de Schreyer [Sch91].

§ A.2. Calculs relatifs au § II.4

On indique dans cette annexe comment on obtient la prop. II.21. Les notations sont celles du § II.4.

Rappelons que pour tout $1 \leq j \leq g-3$, on a

$$\begin{aligned} G_j &= T_j Y^2 - \left[\alpha_j T_0^2 Y + \beta_j T_{g-2}^2 Y + \sum_{\ell=2}^{g-2} \theta_{j,\ell} T_{g-3} T_\ell Y + \sum_{m=0}^{g-3} \iota_{j,m} T_1 T_m Y \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{g-2} \lambda_{j,n} T_{g-2}^2 T_n + \sum_{p=1}^{g-2} \mu_{j,p} T_0 T_{g-2} T_p + \sum_{q=0}^{g-2} \xi_{j,q} T_0^2 T_q \right] \\ &= T_j Y^2 - G_{j,1} Y - G_{j,2}, \end{aligned}$$

où $G_{j,1} \in A_2$ et $G_{j,2} \in A_3$ sont définis par

$$G_{j,1} = \alpha_j T_0^2 + \beta_j T_{g-2}^2 + \sum_{\ell=2}^{g-2} \theta_{j,\ell} T_{g-3} T_\ell + \sum_{m=0}^{g-3} \iota_{j,m} T_1 T_m, \quad (\text{a.6})$$

$$G_{j,2} = \sum_{n=1}^{g-2} \lambda_{j,n} T_{g-2}^2 T_n + \sum_{p=1}^{g-2} \mu_{j,p} T_0 T_{g-2} T_p + \sum_{q=0}^{g-2} \xi_{j,q} T_0^2 T_q. \quad (\text{a.7})$$

Soit j un entier tel que $2 \leq j \leq g-3$. Il s'agit de voir pourquoi les relations

$$T_j G_{1,1} - T_1 G_{j,1} \in \text{Ker } \Phi_3 \quad \text{et} \quad T_j G_{1,2} - T_1 G_{j,2} \in \text{Ker } \Phi_4$$

impliquent d'une part que certains des coefficients de G_1 sont nuls, et d'autre part que les coefficients de G_j sont déterminés par ceux de G_1 . Par souci de clarté, nous traitons explicitement le cas où $g = 5$; les calculs pour le cas général sont tout à fait semblables, quoique plus touffus.

On a

$$T_2 G_{1,1} - T_1 G_{2,1} \in \text{Ker } \Phi_3, \quad (\text{a.8})$$

$$T_2 G_{1,2} - T_1 G_{2,2} \in \text{Ker } \Phi_4. \quad (\text{a.9})$$

Exploitions d'abord (a.8) : à l'aide des expressions développées (a.6), on trouve

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 T_0^2 T_2 + \beta_1 T_2 T_3^2 + \theta_{1,2} T_2^3 + \theta_{1,3} T_2^2 T_3 + \iota_{1,0} T_0 T_1 T_2 + \iota_{1,1} T_1^2 T_2 + \iota_{1,2} T_1 T_2^2) \\ &- (\alpha_2 T_0^2 T_1 + \beta_2 T_1 T_3^2 + \theta_{2,2} T_2^2 T_1 + \theta_{2,3} T_1 T_2 T_3 + \iota_{2,0} T_0 T_1^2 + \iota_{2,1} T_1^3 + \iota_{2,2} T_1^2 T_2) \in \text{Ker } \Phi_3. \end{aligned}$$

Niveau	Coefficient
0	$-\alpha_1\lambda_1^2 - \beta_1\lambda_1^8 - \theta_{1,2}\lambda_1^6 - \theta_{1,3}\lambda_1^7 + \iota_{1,0}\lambda_1^3 - \iota_{1,1}\lambda_1^4 - \iota_{1,2}\lambda_1^5 + \alpha_2\lambda_1 + \beta_2\lambda_1^7$ $+ \theta_{2,2}\lambda_1^5 + \theta_{2,3}\lambda_1^6 - \iota_{2,0}\lambda_1^2 + \iota_{2,1}\lambda_1^3 + \iota_{2,2}\lambda_1^4$
1	$-\iota_{1,0}\lambda_1^2 + 2\iota_{1,1}\lambda_1^3 + \iota_{1,2}\lambda_1^4 - \alpha_2 - \beta_2\lambda_1^6 - \theta_{2,2}\lambda_1^4$ $- \theta_{2,3}\lambda_1^5 + 2\iota_{2,0}\lambda_1 - 3\iota_{2,1}\lambda_1^2 - 2\iota_{2,2}\lambda_1^3$
2	$\alpha_1 + \beta_1\lambda_1^6 + 3\theta_{1,2}\lambda_1^4 + 2\theta_{1,3}\lambda_1^5 - \iota_{1,0}\lambda_1$ $+ 2\iota_{1,2}\lambda_1^3 - 2\theta_{2,2}\lambda_1^3 - \theta_{2,3}\lambda_1^4 - \iota_{2,0} + 3\iota_{2,1}\lambda_1$
3	$2\beta_1\lambda_1^5 + \theta_{1,3}\lambda_1^4 + \iota_{1,0} - 2\iota_{1,1}\lambda_1 - 2\iota_{1,2}\lambda_1^2$ $- 2\beta_2\lambda_1^4 + 2\theta_{2,2}\lambda_1^2 - \iota_{2,1} + 2\iota_{2,2}\lambda_1$
4	$-3\theta_{1,2}\lambda_1^2 - \theta_{1,3}\lambda_1^3 + \iota_{1,1} - \iota_{1,2}\lambda_1 + 2\beta_2\lambda_1^3 + \theta_{2,2}\lambda_1 + \theta_{2,3}\lambda_1^2 - \iota_{2,2}$
5	$-2\beta_1\lambda_1^3 - 2\theta_{1,3}\lambda_1^2 + \iota_{1,2} - \theta_{2,2} + \theta_{2,3}\lambda_1$
6	$-\beta_1\lambda_1^2 + \theta_{1,2} + \beta_2\lambda_1 - \theta_{2,3}$
7	$\theta_{1,3} - \beta_2$
8	β_1

TABLE A.1 – Coefficients de $H_1 \in \text{Ker } \Phi_3$ rangés par niveaux

Or on sait que $T_0 = X_0$ et $T_j = X_j - \lambda_j X_0$ pour $j = 1, 2, 3$; de plus, la prop. II.20 assure que $\lambda_j = \lambda_1^j$ pour $j = 2, 3$. On peut donc récrire la relation précédente dans les coordonnées X_0, \dots, X_3 puis utiliser des relations de niveau afin d'ordonner le résultat. On obtient au final un élément $H_1 \in \text{Ker } \Phi_3$ dont les coefficients sont donnés dans la table A.1.

Comme $H_1 \in \text{Ker } \Phi_3$, chaque coefficient dans la table A.1 est nul. C'est ainsi qu'on obtient l'annulation de β_1 et l'expression des coefficients de $G_{2,1}$ en fonction de ceux de $G_{1,1}$.

Le même travail effectué à partir de la relation (a.9) aboutit à un élément $H_2 \in \text{Ker } \Phi_4$ dont les coefficients permettent d'exprimer les coefficients de $G_{2,2}$ en fonction de ceux de $G_{1,2}$.

BIBLIOGRAPHIE

- [AB73] E. ARTIN & H. BRAUN – *Leçons de topologie algébrique*, Les Presses de l'Université du Québec, Montreal, 1973, rédigé par A. Thedy et H. Braun, traduit de l'allemand par J. Troué.
- [ACGH85] E. ARBARELLO, M. CORNALBA, P. A. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Geometry of algebraic curves. Vol. I*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 267, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [Art04] I. V. ARTAMKIN – « Canonical mappings of punctured curves with the simplest singularities », *Mat. Sb.* **195** (2004), n° 5, p. 3–32.
- [AS78] E. ARBARELLO & E. SERNESI – « Petri's approach to the study of the ideal associated to a special divisor », *Invent. Math.* **49** (1978), n° 2, p. 99–119.
- [Bab39] D. W. BABBAGE – « A note on the quadrics through a canonical curve », *J. London Math. Soc.* **14** (1939), p. 310–315.
- [Bea05] A. BEAUVILLE – « La conjecture de Green générique (d'après C. Voisin) », *Astérisque* (2005), n° 299, p. 1–14, Séminaire Bourbaki. Vol. 2003/2004, Exp. n° 924.
- [CFHR99] F. CATANESE, M. FRANCIOSI, K. HULEK & M. REID – « Embeddings of curves and surfaces », *Nagoya Math. J.* **154** (1999), p. 185–220.
- [D.55] H. D. – « Dr. Karl Petri », *Pfälzer Tageblatt* **115** (18.5.1955).
- [DM69] P. DELIGNE & D. MUMFORD – « The irreducibility of the space of curves of given genus », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1969), n° 36, p. 75–109.
- [EC85a] F. ENRIQUES & O. CHISINI – *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. 1. Vol. I, II*, Collana di Matematica [Mathematics Collection], vol. 5, Nicola Zanichelli Editore S.p.A., Bologne, 1985, réimpression des éditions de 1915 et 1918.
- [EC85b] — , *Lezioni sulla teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche. 2. Vol. III, IV*, Collana di Matematica [Mathematics Collection], vol. 5, Nicola Zanichelli Editore S.p.A., Bologne, 1985, réimpression des éditions de 1924 et 1934.

- [EH83] D. EISENBUD & J. HARRIS – « A simpler proof of the Gieseker-Petri theorem on special divisors », *Invent. Math.* **74** (1983), p. 269–280.
- [Eis05] D. EISENBUD – *The geometry of syzygies, a second course in commutative algebra and algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 229, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [Enr19] F. ENRIQUES – « Sulle curve canoniche di genere p dello spazio a $p - 1$ dimensioni », *Rend. dell'Acc. delle Scienze di Bologna* **23** (1919), p. 80–82.
- [GH78] P. GRIFFITHS & J. HARRIS – *Principles of algebraic geometry*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1978, Pure and Applied Mathematics.
- [GH81] M.-J. GREENBERG & J.-R. HARPER – *Algebraic topology*, Mathematics Lecture Note Series, vol. 58, Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, 1981.
- [Gie82] D. GIESEKER – « Stable curves and special divisors: Petri's conjecture », *Invent. Math.* **66** (1982), p. 251–275.
- [GM79] X. GÓMEZ-MONT – « Differentials on hyperelliptic curves », *An. Inst. Mat. Univ. Nac. Autónoma México* **19** (1979), n° 2, p. 141–147.
- [Gre84a] M. GREEN – « Koszul cohomology and the geometry of projective varieties. Appendix: The nonvanishing of certain Koszul cohomology groups (by M. Green and R. Lazarsfeld) », *J. Differ. Geom.* **19** (1984), p. 125–171.
- [Gre84b] — , « Koszul cohomology and the geometry of projective varieties. II. », *J. Differ. Geom.* **20** (1984), p. 279–289.
- [Har66] R. HARTSHORNE – *Residues and duality. Appendix: Cohomologie à support propre et construction du foncteur $f^!$. par P. Deligne.*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 20, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966.
- [Har77] — , *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 52, Springer-Verlag, New York, 1977.
- [Lan02] S. LANG – *Algebra*, 3^e éd., Graduate Texts in Mathematics, vol. 211, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [Lit98] J.-B. LITTLE – « Canonical curves and the Petri scheme », in *Gröbner bases and applications* (Cambridge university Press , éd.), London mathematical society lecture note series, vol. 251, 1998, p. 381–392.
- [Liu02] Q. LIU – *Algebraic geometry and arithmetic curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol. 6, Oxford University Press, Oxford, 2002, traduit du français par Reinie Erné.
- [Mac36] S. MACLANE – « A combinatorial condition for planar graphs. », *Bull. Amer. math. Soc.* **42** (1936), p. 331–332.
- [Mum70] D. MUMFORD – « Varieties defined by quadratic equations », in *Questions on Algebraic Varieties (C.I.M.E., III Ciclo, Varenna, 1969)*, Edizioni Cremonese, Rome, 1970, p. 29–100.

- [Mum75] — , *Curves and their Jacobians*, The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1975.
- [Noe80] M. NOETHER – « Über die invariante Darstellung algebraischer Functionen », *Math. Ann.* **17** (1880), n° 2, p. 263–284.
- [Noo88] R. NOOT – « The canonical embedding of stable curves », *Preprint Rijksuniversiteit Utrecht* **520** (1988).
- [Pet04] K. PETRI – « Über die in der Theorie der ternären kubischen Formen auftretenden Konnexen », Thèse, München. 44 S. 8° , 1904.
- [Pet23] — , « Über die invariante Darstellung algebraischer Funktionen einer Veränderlichen », *Math. Ann.* **88** (1923), n° 3-4, p. 242–289.
- [Pet25] — , « Über Spezialkurven. I. », *Math. Ann.* **93** (1925), p. 182–209.
- [Pet33] — , « Über eine kovariante Kurve », *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie des Wissenschaften* (1933), p. 49–59.
- [Pet35] — , « Über die Diskriminante ternärer Formen », *Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie des Wissenschaften* (1935), p. 471–484.
- [Sch86] F.-O. SCHREYER – « Syzygies of canonical curves and special linear series », *Math. Ann.* **275** (1986), n° 1, p. 105–137.
- [Sch91] — , « A standard basis approach to syzygies of canonical curves », *J. Reine Angew. Math.* **421** (1991), p. 83–123.
- [SD73] B. SAINT-DONAT – « On Petri's analysis of the linear system of quadrics through a canonical curve », *Math. Ann.* **206** (1973), p. 157–175.
- [Šok71] V. V. ŠOKUROV – « The Noether-Enriques theorem on canonical curves », *Math. USSR Sbornik* **15** (1971), n° 3, p. 361–403.

Résumé. — Le théorème de Petri affirme que l'image canonique d'une courbe lisse non hyperelliptique de genre $g \geq 4$ définie sur un corps algébriquement clos est une intersection d'hypersurfaces quadriques et cubiques. De plus, on peut exhiber un système d'équations pour cette image; il s'agit ici de résultats de Petri (1923) transcrits dans le langage moderne par Saint-Donat (1973). On sait par ailleurs que l'espace des modules des courbes lisses n'est pas propre, son bord étant constitué des courbes stables. C'est pourquoi il est naturel de chercher des énoncés similaires valables pour les courbes stables et d'examiner la dégénérescence du système d'équations d'une courbe lisse vers une courbe stable.

Dans cette thèse, on envisage d'une part le cas d'une courbe stable ayant un seul point double ordinaire et dont la normalisée est hyperelliptique, et d'autre part le cas d'une courbe stable dont le graphe est planaire. De plus, on entreprend l'étude du plongement canonique d'une courbe stable définie sur un anneau de valuation discrète. Quel que soit le contexte, la méthode employée pour aboutir à des théorèmes de Petri est la suivante:

- description du faisceau canonique et construction d'une base bien adaptée de l'espace de ses sections globales;
- construction de quadriques et cubiques dans l'idéal canonique;
- démonstration que ces éléments engendrent l'idéal canonique.

Ce mémoire contient également de nouveaux éléments biographiques concernant le mathématicien allemand Karl Petri.



INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
UMR 7501
 Université de Strasbourg et CNRS
 7 Rue René Descartes
 67084 STRASBOURG CEDEX

Tél. 03 90 24 01 29
 Fax 03 90 24 03 28

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

<http://www-irma.u-strasbg.fr>
irma@math.u-strasbg.fr



ISSN 0755-3390

IRMA 2009/01

<http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00392525/fr/>