INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
STRASBOURG

Thèse

Présentée pour obtenir le grade de DOCTEUR
de l'Université de Strasbourg
Spécialité **Mathématiques**

Florian HECHNER

Lois fortes des grands nombres et martingales asymptotiques

Soutenue le **8 septembre 2009** devant la Commission d'Examen :

Armelle GUILLOU	Examinateur
Allan GUT	Rapporteur
Bernard HEINKEL	Directeur de Thèse
Florence MERLEVEDE	Rapporteur

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
UMR 7501
Université de Strasbourg et CNRS
http://www-irma.u-strasbg.fr

Institut de Recherche
Mathématique Avancée

INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE
Université de Strasbourg et C.N.R.S. (UMR 7501)
7, rue René Descartes
67084 STRASBOURG Cedex

Lois fortes des grands nombres et martingales asymptotiques

Par

Florian HECHNER

Mots-clés : amart - quasimartingale - lois des grands nombres - loi des grands nombres de Kolmogorov - loi des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund - loi des grands nombres de Cesàro - type d'un espace de Banach - type stable d'un espace de Banach

Classification mathématique: 60B12 ; 60G48 ; 60F15

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Bernard Heinkel qui a su me guider toutes ces années durant et sans qui ce travail n'aurait pas vu le jour. Qu'il soit ici remercié pour sa grande disponibilité, la patience dont il a fait preuve à mon égard, et les nombreuses explications et indications qu'il a pu me fournir.

Je voudrais ensuite remercier Florence Merlevède, pour avoir accepté d'être rapporteur de mon travail ainsi que pour ses remarques constructives. Je remercie également Allan Gut, qui m'a fait l'honneur de s'intéresser à mes travaux, a accepté d'en être rapporteur et qui a fait un long déplacement pour en voir l'aboutissement. Je remercie enfin Armelle Guillou d'avoir bien voulu participer à ce jury et de m'avoir permis de jongler avec les difficultés d'une réunification.

Mon travail a été grandement facilité par tous ceux (et ils sont nombreux) qui chaque jour veillent discrètement mais efficacement au confort des chercheurs et enseignants-chercheurs de l'UFR en les soulageant des contraintes matérielles. Je remercie vivement l'ensemble du personnel administratif de l'UFR et celui de l'IRMA, les documentalistes, l'équipe informatique, le personnel technique.... Je remercie plus particulièrement Yvonne Borell, toujours capable de faire des miracles à l'impression et Claudine Bonnin qui m'a permis de retrouver à de nombreuses reprises mon chemin dans les méandres des administrations universitaires et académiques. Mes remerciements sont d'autant plus vifs que j'ai également été obligé, pour ma formation doctorale, d'être en contact ces dernières années avec un service universitaire qui n'a pas le privilège de bénéficier de personnel aussi compétent.

Le plaisir que l'on prend à effectuer un travail tient également pour une grande part à l'environnement dans lequel on évolue. Je remercie particulièrement Jean-Yves, Jürgen, et tous les autres doctorants pour leur bonne humeur et leur amitié. Mes sincères remerciements vont également à Régis, Jonathan, Jean, Mélanie, Lisa,... et à tous ceux qui n'ont jamais manqué une occasion de m'encourager.

Cette thèse n'aurait pas pu voir le jour sans le soutien sans faille de ma famille. Je remercie infiniment ma maman pour m'avoir laissé m'engager dans cette voie et avoir à chaque instant veillé à ce que je ne manque de rien. Je remercie également ma grand-mère pour tout ce qu'elle a pu faire pour moi et pour ses questions mathématiques métaphysiques. Enfin, je remercie tout particulièrement Audrey pour une infinité (non dénombrable) de raisons.

À mon grand-père.

Table des matières

Quelques remarques et notations

Remarques :

- Dans tout ce travail, nous serons régulièrement amenés à écrire des majorations non nécessairement optimales. Les valeurs c_k qui apparaîtront à ces occasions désignent des constantes strictement positives dont la valeur exacte importe peu.
- Les suites de variables aléatoires qui interviennent sont – sauf mention du contraire – supposées adaptées à la filtration considérée.

Notations :

Nous utiliserons un certain nombre de notations qui ne sont pas toutes usuelles.

- La notation $:=$ indique la définition d'un objet mathématique.
- $(\mathcal{G}_n)$ désigne une filtration quelconque.
- Une filtration $(\mathcal{G}_n)$ étant fixée, on désigne par $\mathcal{G}_\infty$ la tribu engendrée par $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} \mathcal{G}_n$.
- Une suite $(\mathbf{X}_k)$ de variables aléatoires étant donnée, $(\mathcal{F}_n)$ désigne la filtration naturelle associée à la suite $(\mathbf{X}_k)$: $\mathcal{F}_n := \sigma(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$.
- On désigne par $\mathcal{T}$ l'ensemble des temps d'arrêt adaptés à une filtration $(\mathcal{G}_n)$, à valeurs dans $\mathbb{N}$ et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (autrement dit bornés).
- On notera $\mathbf{1}_A$ l'indicatrice d'un événement A.
- La notation (ε_k) désigne une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Rademacher, c'est–à–dire telles que $\mathbb{P}(\varepsilon_k = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_k = -1) = \frac{1}{2}$.
- Un espace de Banach $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ étant fixé, on note $\mathcal{B}'$ son dual et $\mathcal{U}$ l'ensemble des formes linéaires de norme $\leqslant 1$ sur $\mathcal{B}$.
- Si $\varphi \in \mathcal{B}'$ est une forme linéaire sur $\mathcal{B}$ et $x \in \mathcal{B}$, on note $\langle \varphi, x \rangle$ le réel $\varphi(x)$.
- Si $f : x \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$, on désigne par f^+ la partie positive de f, i.e. $f^+ := x \longmapsto \max(f(x), 0)$.
- La notation $[\![a, b]\!]$ désigne l'ensemble des entiers de l'intervalle $[a, b]$: $[\![a, b]\!] := [a, b] \cap \mathbb{Z}$.

- Enfin, une suite $(\mathbf{X}_i)$ de variables aléatoires étant fixée, on désignera de façon usuelle par $\mathbf{S}_n$ la n-ième somme partielle associée à la suite $(\mathbf{X}_i)$ et par $\mathbf{V}_n^\alpha$ la moyenne de Cesàro d'ordre α associée à cette même suite (voir le chapitre 4 pour une définition).

Abréviations

Nous utiliserons quelques abréviations usuelles en probabilité dont nous rappelons ici le sens :

- v.a. pour "variable aléatoire".
- LFGN pour "loi forte des grands nombres".
- p.s. pour "presque sûre".
- i.i.d pour "indépendantes et identiquement distribuées".

Introduction

La loi forte des grands nombres (LFGN) de Kolmogorov est l'un des résultats les plus importants parmi les théorèmes limites des probabilités. Parmi ses nombreuses applications, l'une des plus utiles en pratique est l'estimation de la moyenne d'une variable aléatoire. En effet, étant donnés une suite $(\mathbf{X}_i)$ de copies indépendantes d'une variable aléatoire (v.a.) réelle intégrable $\mathbf{X}$ et $\mathbf{S}_n$ la somme partielle de rang n associée : $\mathbf{S}_n = \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n$, la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ converge presque sûrement (p.s.) vers $\mathbb{E}\mathbf{X}$.
La construction d'intervalles de confiance pour $\mathbb{E}\mathbf{X}$ nécessite des renseignements précis sur la vitesse de convergence de $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ vers $\mathbb{E}\mathbf{X}$.

On peut s'intéresser plus généralement au problème de la vitesse de convergence des suites $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ – où $p \in [1, 2[$ – intervenant dans la LFGN de Marcinkiewicz-Zygmund. Cette notion de vitesse de convergence est généralement quantifiée par des majorations fines de la queue de la fonction de répartition de la somme $\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}$. Un exemple d'un tel résultat est donné par le théorème suivant :

Théorème 1 (Baum-Katz) :
Soient $1 \leqslant p < 2$ et $\mathbf{X}$ une v.a. centrée. Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{E}|\mathbf{X}|^p < +\infty$.
2. $\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}} \longrightarrow 0$ *p.s.*
3. $\forall t > 0, \ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \mathbb{P}\left(\frac{|\mathbf{S}_n|}{n^{1/p}} > t\right) < +\infty$.

Rappelons que l'équivalence entre 1. et 2. constitue la LFGN de Kolmogorov dans le cas $p = 1$ et celle de Marcinkiewicz-Zygmund dans le cas $1 < p < 2$. L'équivalence entre 1. et 3. est quant à elle due à Baum et Katz (équivalence entre les propositions (c) et (d) du théorème 1. de [2]).

Ces résultats concernent la vitesse de convergence mesurée en fonction du comportement de la queue des fonctions de répartition. On peut également s'intéresser à des résultats globaux sur $\frac{\mathbf{S}_n}{n}$.

Dans le cadre du théorème 1 – pour $p \in]1, 2[$ – Gut a montré (exemple 4.6 dans [13]) que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ est un amart :

Théorème 2 :
Soient $1 < p < 2$ *et* $\mathbf{X}$ *une v.a. centrée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\mathbb{E}|\mathbf{X}|^p < +\infty$.
2. $\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}} \longrightarrow 0$ *p.s.*
3. $\forall t > 0,\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{P}\left(\frac{|\mathbf{S}_n|}{n^{1/p}} > t\right) < +\infty$.
4. $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ *est un amart.*

La vitesse de convergence de $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$, traditionnellement exprimée à l'aide de la queue des fonctions de répartition comme dans la propriété 3. est donc équivalente à un comportement de martingale généralisée de cette suite.

Une autre classe de généralisation de martingales, plus restrictive que celle des amarts, est celle des quasimartingales. Il est donc naturel de se demander si le fait que la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ soit une quasimartingale équivaut également à une bonne vitesse de convergence de cette suite vers 0.

Toujours dans le cadre du théorème 2, on remarque qu'en intégrant la propriété 3. par rapport à t, on obtient la propriété :

5. $$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+1/p}}\mathbb{E}|\mathbf{S}_n| < +\infty,$$

et on vérifie immédiatement que cette propriété traduit le fait que la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ est une quasimartingale.

La vitesse de convergence peut donc également être mesurée en terme de comportement de martingale généralisée – amart ou quasimartingale – de la suite considérée.

Ces observations forment le point de départ de ce travail, dont l'objectif est double :

1. Étudier la vitesse de convergence sous l'aspect de martingale généralisée dans différentes lois fortes des grands nombres pour des v.a. scalaires (indépendantes équidistribuées centrées).
2. Montrer que de tels résultats scalaires se généralisent aux v.a. indépendantes et équidistribuées à valeurs dans des espaces de Banach suffisamment réguliers.

Nous nous placerons tout d'abord dans le cadre de la LFGN de Kolmogorov équidistribuée et rechercherons à quelles conditions la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ est un amart ou une quasimartingale.

Dans le cas de variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach séparable, nous verrons que ces conditions sont souvent liées à des propriétés de régularité de l'espace. Nous nous intéresserons ensuite à deux généralisations de cette LFGN que sont les lois des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund d'ordre $1 < p < 2$ et de Cesàro d'ordre $0 < \alpha < 1$.

Plus précisément, le plan que nous adopterons et les principaux résultats obtenus sont les suivants :

Dans un premier chapitre, nous commencerons par rappeler les définitions et quelques propriétés des deux types de martingales généralisées que nous allons considérer – amarts et quasimartingales – pour des variables aléatoires réelles puis pour des variables aléatoires à valeurs dans des espaces de Banach.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude du comportement de martingale généralisée de la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ associée à la LFGN de Kolmogorov pour des variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach séparable. Nous rappelons tout d'abord le résultat de Marcinkiewicz-Zygmund et de Davis : dans le cas scalaire la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ est un amart si et seulement si $\mathbb{E}|\mathbf{X}|\ln(1+|\mathbf{X}|) < +\infty$. Nous montrons ensuite que de façon surprenante cette dernière condition est, dans le cas scalaire, également nécessaire et suffisante pour que la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ soit une quasimartingale. La seconde partie du chapitre concerne les variables aléatoires à valeurs banachiques. Nous montrons que sous des hypothèses d'intégrabilité faible de $\mathbf{X}$, l'intégrabilité uniforme de $\{\langle\varphi,\mathbf{X}\rangle\ln(1+|\langle\varphi,\mathbf{X}\rangle|),\ \varphi\in\mathcal{B}',\ \|\varphi\|\leqslant 1\}$ suffit à ce que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ soit un amart. Dans la troisième partie de ce chapitre, nous démontrons que la condition obtenue dans le cas scalaire, généralisée naturellement sous la forme $\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|\ln(1+\|\mathbf{X}\|) < +\infty$, ne suffit plus en général pour que la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ soit une quasimartingale. Nous montrons cependant que ce résultat reste vrai si l'espace possède une propriété de régularité supplémentaire, celle d'avoir un type strictement supérieur à 1.

Une première généralisation de la LFGN de Kolmogorov consiste à normaliser différemment les sommes partielles $\mathbf{S}_n$, en considérant non plus la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ mais la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ pour $p\in]1,2[$. La loi forte des grands nombres obtenue est celle de Marcinkiewicz-Zygmund, qui fait l'objet du chapitre trois. Un résultat célèbre de De Acosta stipule que l'équivalence des propriétés 1. et 2. du théorème 1 de Baum et Katz caractérise les espaces de Banach de type p. Nous précisons ce résultat en remarquant qu'alors $\left(\frac{\|\mathbf{S}_n\|}{n^{1/p}}\right)$ est un amart mais que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ n'est pas nécessairement une quasimartingale (nous donnons un contre-exemple). Dans le cas scalaire, Heinkel a donné une condition nécessaire et suffisante portant sur les quantiles de $|\mathbf{X}|$ – à savoir que $\int_0^{+\infty}\mathbb{P}^{1/p}(|\mathbf{X}|>t)dt < +\infty \quad (\star)$ – pour que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ soit une quasimartingale. Imposant la même condition $(\star)$ aux quantiles de $\|\mathbf{X}\|$, on montre – par un contre-exemple – que dans un espace de type p cette condition n'est plus suffisante pour impliquer que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ soit une quasimartingale. Par contre, dans un espace de type

strictement supérieur à p, $(\star)$ implique que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ soit une quasimartingale.
On retrouve donc un phénomène similaire à celui observé pour la LFGN de Kolmogorov au chapitre 2.

La LFGN de Kolmogorov peut également être vue comme la convergence presque sûre de $(\mathbf{X}_i)$ au sens de Cesàro d'ordre 1. De nombreux auteurs ont étudié la LFGN au sens de Cesàro d'ordre $\alpha \in]0,1[$, i.e. la convergence p.s. des moyennes de Cesàro $\mathbf{V}_n^\alpha$ associées à une suite de v.a. centrées i.i.d. Il est donc naturel de considérer le comportement en terme de martingale généralisée des moyennes de Cesàro $\mathbf{V}_n^\alpha$ d'ordre $\alpha \in]0;1[$. L'étude de ce problème fait l'objet du quatrième chapitre. Nous y montrons que, si la suite $(\mathbf{V}_n^\alpha)$ n'est jamais une quasimartingale, la suite $(\|\mathbf{V}_n^\alpha\|)$ est par contre toujours un amart.

Enfin, en guise de conclusion, nous évoquons le problème de la LFGN pour des suites de variables aléatoires indépendantes mais non équidistribuées. Nous précisons par exemple le critère de type p en terme de LFGN dû à Hoffmann-Jørgensen et Pisier, en montrant qu'un espace de Banach $\mathcal{B}$ est de type p si et seulement si pour toute suite de v.a. indépendantes centrées à valeurs dans $\mathcal{B}$ telles que la série de terme général $\frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p}$ converge, la suite $\left(\left\|\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right\|^p\right)$ est une quasimartingale.

Chapitre 1

Martingales généralisées

Dans ce chapitre, nous commençons par rappeler les définitions et quelques propriétés des généralisations de martingales que nous considérerons par la suite : amarts et quasimartingales, pour des variables aléatoires (v.a.) à valeurs réelles. Dans un second temps, nous nous intéresserons à ces mêmes notions pour des v.a. à valeurs dans des espaces de Banach.

Dans tout ce qui suit, nous considérons des v.a. définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, et $(\mathcal{G}_n)$ une filtration, c'est–à–dire une suite croissante de sous–tribus de $\mathcal{A}$.
Étant donnée $(\mathbf{X}_k)$ une suite de v.a. indépendantes centrées, on note $\mathbf{S}_n$ les sommes partielles d'ordre n associées : $\mathbf{S}_n := \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n$, et on considère la filtration naturelle $(\mathcal{F}_n)$ où $\mathcal{F}_n := \sigma(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$ est la tribu engendrée par les v.a. $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$.

Bien évidemment, $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ n'est en général pas une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)$, mais on observe que

$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathbf{S}_{n+1}}{n+1} - \frac{\mathbf{S}_n}{n}\middle|\,\mathcal{F}_n\right) = -\frac{1}{n+1}\frac{\mathbf{S}_n}{n}. \tag{1.1}$$

Dans le cas identiquement distribué, $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ converge vers 0 presque sûrement en vertu de la loi forte des grands nombres de Kolmogorov. On constate ainsi que sous cette hypothèse, $\mathbb{E}\left(\frac{\mathbf{S}_{n+1}}{n+1} - \frac{\mathbf{S}_n}{n}|\mathcal{F}_n\right)$ converge vers 0 “rapidement”. La suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ a donc un comportement “proche” de celui d'une martingale.

Ce constat amène à considérer des généralisations de la notion de martingale. Commençons par introduire la notion d'amart.

1.1 Les amarts

La théorie des amarts apparaît dans les années 1975, dans des articles de Austin, Edgar et Ionescu Tulcea [1], Chacon et Sucheston [4], et Edgar et Sucheston [10]. Les résultats présentés ici peuvent être trouvés sous une forme plus détaillée dans le chapitre 1 de l'ouvrage d'Edgar et Sucheston [11] ou dans la première partie de celui de Gut et Schmidt [14].

Dans tout ce qui suit, nous considérerons des suites de v.a. adaptées à une filtration $(\mathcal{G}_n)$ convenable.

1.1.1 Quelques définitions

Cette première généralisation de la notion de martingale s'appuie sur le théorème de Doob ci–dessous, qui fournit une caractérisation des martingales :

Théorème 1.1.1 :
Soit $(\mathbf{X}_n)$ une suite de v.a. intégrables. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :
1. $(\mathbf{X}_n)$ *est une martingale par rapport à* $(\mathcal{G}_n)$ *;*
2. *Pour tout temps d'arrêt borné* τ, $\mathbb{E}\mathbf{X}_\tau = \mathbb{E}\mathbf{X}_0$.

La notion de martingale se généralise en celle d'amart à partir de cette caractérisation en termes de temps d'arrêt bornés. Elle s'obtient en considérant les v.a. telles que $(\mathbb{E}\mathbf{X}_\tau)$ soit non plus constante, mais seulement convergente lorsque τ décrit un certain ensemble $\mathcal{T}$ de temps d'arrêt, qui est le suivant :

Définition 1.1.2 :
On notera $\mathcal{T}$ l'ensemble des temps d'arrêt adaptés à la filtration $(\mathcal{G}_n)$ à valeurs dans $\mathbb{N}$ et ne prenant qu'un nombre fini de valeurs (autrement dit des temps d'arrêt bornés).

Pour définir une notion de convergence de $(\mathbb{E}\mathbf{X}_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}$, on commence par préciser une relation d'ordre sur $\mathcal{T}$:

Remarque 1.1.3 :
On munit $\mathcal{T}$ d'une relation d'ordre partiel de la façon suivante :

$$\text{on dit que } \tau \leqslant \tau' \text{ si } \mathbb{P}\left(\{\omega : \ \tau(\omega) \leqslant \tau'(\omega)\}\right) = 1.$$

La convergence de $(\mathbb{E}\mathbf{X}_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}$ est alors une convergence de “filets”. En utilisant ce terme, nous suivons la terminologie introduite par Komornik (section 2.5 p 39 de [22]). La notion de filet utilisée se définit comme suit :

Définition 1.1.4 :
Soit I un ensemble muni d'une relation d'ordre partiel $\geqslant$ telle que :
- $\forall i \in I,\ i \geqslant i$;
- si $i \geqslant j$ et $j \geqslant k$, alors $i \geqslant k$;
- $\forall (i,j) \in I^2,\ \exists k \in I,\ k \geqslant i, k \geqslant j$.

Un *filet* dans un ensemble X est une fonction $x : I \longrightarrow X$ définie sur I. On écrira x_i au lieu de $x(i)$ et (x_i) ou $(x_i)_{i\in I}$ au lieu de x.

La convergence du filet $(\mathbb{E}\mathbf{X}_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}$ se définit alors en calquant la définition de convergence d'une suite :

Définition 1.1.5 :
Soit $(\mathbf{X}_n)$ une suite de v.a. réelles intégrables et a un réel.
On dit que *le filet* $(\mathbb{E}\mathbf{X}_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}$ *converge vers* a, ce que l'on note

$$\mathbb{E}\mathbf{X}_\tau \underset{\tau\in\mathcal{T}}{\longrightarrow} a$$

si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \tau_0 \in \mathcal{T},\ \forall \tau \in \mathcal{T},\ \tau \geqslant \tau_0 \Longrightarrow |\mathbb{E}\mathbf{X}_\tau - a| \leqslant \varepsilon.$$

En fait, la convergence du filet $(\mathbb{E}\mathbf{X}_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}$ se réduit à la convergence des suites $(\mathbb{E}\mathbf{X}_{\tau_n})_n$ pour des suites (τ_n) de temps d'arrêt bornés bien choisies :

Proposition 1.1.6 :
Soit $(\mathbf{X}_n)$ *une suite de v.a. réelles intégrables. Les propriétés suivantes sont équivalentes* :
- *Le filet* $(\mathbb{E}\mathbf{X}_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}$ *est convergent ;*
- *Pour toute suite croissante* (τ_n) *de temps d'arrêt bornés qui tend vers* $+\infty$*, la suite* $(\mathbb{E}\mathbf{X}_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge.*

Nous avons à présent tous les outils pour introduire la notion d'amart (i.e. *martingale "a"symptotique*).

Définition 1.1.7 :
Soit $(\mathbf{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. intégrables.

On dit que $(\mathbf{X}_n, \mathcal{G}_n)$ est *un amart* si le filet $(\mathbb{E}\mathbf{X}_\tau)_{\tau\in\mathcal{T}}$ converge dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.1.8 :
Par abus de langage, on omettra la plupart du temps la filtration, et on dira que $(\mathbf{X}_n)$ est un amart.

On retiendra donc qu'une martingale est caractérisée par le fait que $(\mathbb{E}\mathbf{X}_\tau)$ est constant pour $\tau \in \mathcal{T}$, et un amart par celui que $(\mathbb{E}\mathbf{X}_\tau)$ est convergent ("asymptotiquement constant").

Rappelons à présent quelques propriétés des amarts dont nous aurons besoin par la suite.

1.1.2 Quelques propriétés des amarts

Une première propriété des amarts, qui nous servira dans le prochain chapitre, est la suivante :

Proposition 1.1.9 :
Soit $(\mathbf{X}_n)$ un amart borné dans L^1. Alors $(\mathbf{X}_n^+)$ est un amart borné dans L^1 (où x^+ désigne la partie positive de x, i.e. $x^+ := \max(x, 0)$).

Les amarts forment également une classe de processus ayant de bonnes propriétés de convergence. Ainsi le théorème de convergence des martingales bornées dans L^1 s'étend-t-il aux amarts :

Théorème 1.1.10 (Convergence des amarts) :
Soit $(\mathbf{X}_n)$ un amart borné dans L^1. Alors $(\mathbf{X}_n)$ converge presque sûrement.

En fait, pour une certaine classe de v.a., la convergence presque sûre équivaut au comportement d'amart. Autrement dit le théorème précédent de convergence des amarts admet en quelque sorte une réciproque sous certaines hypothèses, à savoir :

Proposition 1.1.11 :
Soit $(\mathbf{X}_n)$ une suite de v.a. intégrables, vérifiant

$$\mathbb{E} \sup_i |\mathbf{X}_i| < +\infty. \tag{1.2}$$

Alors les propositions suivantes sont équivalentes :
- $(\mathbf{X}_n)$ *est un amart ;*
- $(\mathbf{X}_n)$ *converge presque sûrement.*

L'exemple suivant nous donne un critère simple de construction de v.a. telles que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ soit un amart.

Exemple 1.1.12 :
Soit $(\mathbf{X}_k)$ une suite de v.a. indépendantes centrées, telle que la série de terme général $\frac{\mathbb{E}\mathbf{X}_k^2}{k^2}$ converge. Alors $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ est un amart.

Démonstration :

En effet, si la série de terme général $\frac{\mathbb{E}\mathbf{X}_k^2}{k^2}$ converge, la loi forte des grands nombres est vérifiée et $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers 0. D'autre part, l'inégalité de Kolmogorov (voir l'inégalité A.1.2) implique que $\mathbb{E}\sup\left|\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right|$ est finie. La proposition précédente montre alors que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ est un amart.

□

Passons à présent à la seconde généralisation de la notion de martingale que nous considérerons : la notion de quasimartingale.

1.2 Les quasimartingales

Une autre généralisation possible de la notion de martingale peut être obtenue de la façon suivante : si $(\mathbf{X}_n)$ est une suite de v.a. intégrables adaptées à la filtration $(\mathcal{F}_n)$, $(\mathbf{X}_n)$ est une martingale si pour tout n, $\mathbb{E}(\mathbf{X}_{n+1} - \mathbf{X}_n|\mathcal{F}_n) = 0$.
Il est donc naturel de se demander ce qui se passe lorsque ce terme n'est pas nul, mais tend rapidement vers 0, c'est–à–dire par exemple lorsque l'espérance de sa valeur absolue est le terme général d'une série convergente.

On définit ainsi une nouvelle classe de suites de v.a., les quasimartingales, que nous allons considérer dans cette section. Les premières occurrences des quasimartingales se trouvent dans des articles de Fisk [12], Orey [36] et Rao [40].

Définition 1.2.1 :
Soit $(\mathbf{X}_n)$ une suite de v.a. intégrables adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_n)$. On dit que $(\mathbf{X}_n)$ est une *quasimartingale* si

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\left|\mathbb{E}(\mathbf{X}_{n+1}|\mathcal{F}_n) - \mathbf{X}_n\right| < +\infty.$$

Une martingale est bien sûr une quasimartingale, et la relation entre amart et quasimartingale est donnée par la proposition :

Proposition 1.2.2 :
- *Une quasimartingale est un amart.*
- *La réciproque est fausse.*

Justifions le deuxième point par deux exemples – faisant respectivement intervenir les sommes partielles des lois fortes des grands nombres de Kolmogorov et de Marcinkiewicz-Zygmund – d'amarts qui ne sont pas des quasimartingales.

Exemple 1.2.3 :
Soit (ε_k) une suite de v.a. de Rademacher indépendantes et $\mathbf{X}_k := \frac{\sqrt{k}}{\ln k}\varepsilon_k$. Alors $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ est un amart, sans pour autant être une quasimartingale.

DÉMONSTRATION :

Comme la série de terme général $\frac{\mathbf{X}_k^2}{k^2} = \frac{1}{k \ln^2 k}$ converge, l'exemple 1.1.12 montre que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ est un amart.

D'autre part, la relation (1.1) montre que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ est une quasimartingale si et seulement si la série de terme général $\frac{1}{n}\frac{\mathbb{E}|\mathbf{S}_n|}{n}$ converge.
L'inégalité de Khintchine (Proposition A.2.1) permet d'obtenir la minoration

$$\mathbb{E}|\mathbf{S}_n| \geqslant c_1 \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\sqrt{k}}{\ln k} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{(\ln k)^2} \geqslant c_2 \frac{n^2}{(\ln n)^2}$, la quantité $\frac{1}{n}\mathbb{E}\frac{|\mathbf{S}_n|}{n}$ est minorée par $\frac{c_3}{n \ln n}$ qui est le terme général d'une série divergente. La suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ n'est donc pas une quasimartingale.

□

Voici un second exemple de suite de v.a. qui est un amart sans être une quasimartingale. Nous réutiliserons cet exemple lorsque nous considérerons la loi des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund.

Exemple 1.2.4 :
Considérons une v.a. symétrique $\mathbf{X}$ dont la loi vérifie :

$$\forall t > 0,\ \mathbb{P}(|\mathbf{X}|^p > t) = \mathbf{1}_{[0,e^2]}(t) + \frac{\beta}{t(\ln t)^p(\ln \ln t)}\mathbf{1}_{]e^2,+\infty[}(t),$$

où $\beta = 2^p e^2 \ln 2$ et $p \in]1,2[$ est fixé.
Alors $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ est un amart mais n'est pas une quasimartingale.

DÉMONSTRATION :

Gut a montré (exemple 4.6 dans [13]) que pour une suite de v.a. i.i.d. centrées telles que $|\mathbf{X}|^p$ est intégrable, $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ est un amart. Dans notre exemple, ces hypothèses d'intégrabilité sont vérifiées.

Pour que la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ soit une quasimartingale, il faut que la série suivante converge :

$$\sum_{n \geqslant 1} \mathbb{E} \left| \mathbb{E}\left(\frac{\mathbf{S}_{n+1}}{(n+1)^{1/p}} \middle| \mathcal{F}_n \right) - \frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}} \right|$$

En écrivant $\mathbf{S}_{n+1} = \mathbf{S}_n + \mathbf{X}_{n+1}$, il vient :

$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathbf{S}_{n+1}}{(n+1)^{1/p}} - \frac{\mathbf{S}_n}{n}\middle| \mathcal{F}_n\right) = \mathbf{S}_n\left(\frac{1}{(n+1)^{1/p}} - \frac{1}{n^{1/p}}\right) + \frac{\mathbb{E}\mathbf{X}_{n+1}}{(n+1)^{1/p}} = \mathbf{S}_n\left(\frac{1}{(n+1)^{1/p}} - \frac{1}{n^{1/p}}\right).$$

De plus, par le théorème des accroissements finis, $\frac{1}{(n+1)^{1/p}} - \frac{1}{n^{1/p}} \sim \frac{c_4}{n^{1+1/p}}$, donc $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ est une quasimartingale si et seulement si la série suivante converge :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\mathbb{E}|\mathbf{S}_n|}{n^{1+1/p}}. \tag{1.3}$$

Supposons que ce soit le cas.
D'après l'inégalité de Lévy (A.1.1), qui s'applique car $\mathbf{X}$ est symétrique, la série de terme général $\frac{1}{n^{1+1/p}}\mathbb{E} \sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |\mathbf{X}_k|$ convergerait. Or

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \sup_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{|\mathbf{X}_k|}{n^{1+1/p}} &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{|\mathbf{X}_k|}{n^{1+1/p}} > t\right) dt \geqslant \int_0^{\frac{1}{n\ln n}} \mathbb{P}\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{|\mathbf{X}_k|}{n^{1+1/p}} > t\right) dt \\ &\geqslant \frac{1}{n\ln n}\mathbb{P}\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n} |\mathbf{X}_k| > \frac{n^{1/p}}{\ln n}\right). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Mais, compte-tenu de la loi suivie par $\mathbf{X}$, on a les inégalités suivantes :

$$\mathbb{P}\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n} |\mathbf{X}_k| > \frac{n^{1/p}}{\ln n}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\sup_{1\leqslant k\leqslant n} |\mathbf{X}_k| \leqslant \frac{n^{1/p}}{\ln n}\right) \geqslant 1 - \left(1 - \frac{c_5}{n\ln\ln n}\right)^n \geqslant \frac{c_6}{\ln\ln n}. \tag{1.5}$$

Les équations (1.4) et (1.5) conduisent à la relation

$$\mathbb{E} \sup_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{|\mathbf{X}_k|}{n^{1+1/p}} \geqslant \frac{c_6}{n\ln n\ln\ln n}. \tag{1.6}$$

Le membre de droite de l'équation précédente étant le terme général d'une série divergente, la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ n'est pas une quasimartingale.

□

Nous pouvons à présent considérer l'analogue des notions d'amart et de quasimartingale dans des espaces de Banach.

1.3 Variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach

Dans ce travail, nous nous intéresserons surtout à des v.a. à valeurs dans un espace de Banach. Dans ce paragraphe, nous rappelons un certain nombre de définitions et de propriétés concernant de telles v.a.. Toutes ces propriétés sont détaillées dans le chapitre 2 de l'ouvrage de Ledoux et Talagrand [25] et dans le chapitre 5 de celui d'Edgar et Sucheston [11].

1.3.1 Généralités

Dans toute la suite, nous considérons un espace de Banach réel séparable $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$, muni de sa tribu borélienne.

Définition 1.3.1 :
On dit qu'une fonction $\mathbf{X} : \Omega \longrightarrow \mathcal{B}$ est une *variable aléatoire* si elle est mesurable au sens de Bochner, c'est–à–dire s'il existe une suite $(\mathbf{X}_i)$ de v.a. étagées, *i.e.* de la forme

$$\mathbf{X}_i(\omega) := \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{1}_{A_j}(\omega)$$

où $x_j \in \mathcal{B}$ et $A_j \in \mathcal{A}$,
telle que $(\mathbf{X}_i(\omega)) \longrightarrow \mathbf{X}(\omega)$ p.s au sens de Bochner (ou de la norme), *i.e* :

$$\lim_{i \to +\infty} \|\mathbf{X}_i(\omega) - \mathbf{X}(\omega)\| = 0 \ p.s.$$

La notion de séparabilité de l'espace est toujours essentielle lors de l'étude de v.a. à valeurs dans un espace de Banach. En effet :

Remarque 1.3.2 :
Comme l'espace $\mathcal{B}$ est séparable, la norme d'un élément x peut s'exprimer comme une borne supérieure $\|x\| = \sup_{f \in D} |f(x)|$, où D désigne un ensemble dénombrable de formes linéaires de norme 1 (ou plus petite que 1).

Lorsque l'on considère des espaces de Banach, on peut les munir de plusieurs topologies, dont la topologie faible qui conduit à définir la convergence presque sûre scalaire :

Définition 1.3.3 :
On dit que la suite $(\mathbf{X}_n)$ de v.a. converge *presque sûrement scalairement* vers une v.a. $\mathbf{X}$ si pour toute forme linéaire φ sur $\mathcal{B}$ la suite de v.a. réelles $(\varphi(\mathbf{X}_n))$, notée généralement $(\langle \varphi, \mathbf{X}_n \rangle)$ converge presque sûrement vers $\varphi(\mathbf{X}) =: \langle \varphi, \mathbf{X} \rangle$.

Les différentes topologies permettent également d'introduire différentes définitions de la notion d'espérance de v.a.. Le fait de considérer la topologie forte (topologie induite par la norme $\|\cdot\|$) conduit à la définition suivante :

Définition 1.3.4 :
Une v.a. $\mathbf{X}$ est *intégrable au sens de Bochner* si $\mathbb{E}\|\mathbf{X}\| < +\infty$.
Dans ce cas, la suite $(\mathbf{X}_i)$ de fonctions étagées approximant $\mathbf{X}$ peut être choisie telle que $\mathbb{E}\|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}\| \longrightarrow 0$, et l'intégrale de Bochner de $\mathbf{X}$ est définie par

$$\mathbb{E}\mathbf{X} := \lim_{i \to +\infty} \mathbb{E}\mathbf{X}_i.$$

L'intérêt principal de l'intégrale au sens de Bochner est de préserver l'essentiel des propriétés de l'intégrale réelle. En particulier, on peut définir une notion d'espérance conditionnelle qui préserve les résultats du cas réel parmi lesquels la proposition suivante :

Proposition 1.3.5 :
Soit $\mathbf{X}$ une v.a. intégrable au sens de Bochner, $(\mathcal{G}_n)$ une filtration et $\mathcal{G}_\infty$ la tribu engendrée par les tribus $\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{G}_i$. Alors la martingale de Doob $\mathbf{X}_n := \mathbb{E}(\mathbf{X}|\mathcal{G}_n)$ converge presque sûrement et au sens de la norme vers $\mathbb{E}(\mathbf{X}|\mathcal{G}_\infty)$.

On peut également munir $\mathcal{B}$ de la topologie faible, ce qui conduit à la définition suivante de l'espérance d'une v.a. :

Définition 1.3.6 :
Une v.a. $\mathbf{X}$ est *intégrable au sens de Pettis* s'il existe $y \in \mathcal{B}$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{B}', \ \langle \varphi, \mathbf{X} \rangle \text{ est intégrable et } \mathbb{E}\langle \varphi, \mathbf{X} \rangle = \langle \varphi, y \rangle.$$

Dans ce cas, $y =: \mathbb{E}\mathbf{X}$ est l'intégrale de Pettis de $\mathbf{X}$. Lorsque $y = 0$ on dit que $\mathbf{X}$ est faiblement centrée.

1.3.2 Martingales généralisées à valeurs vectorielles

La notion de martingale peut bien sûr être généralisée à des espaces de Banach, par exemple de la façon suivante :

Définition 1.3.7 :
Soit $(\mathbf{X}_n)$ une suite de v.a. intégrables au sens de Bochner. On dit que $(\mathbf{X}_n)$ est une martingale si $\forall \tau \in \mathcal{T}, \ \mathbb{E}\mathbf{X}_\tau = \mathbb{E}\mathbf{X}_0$.

Hélas, dans des espaces de Banach généraux, les martingales n'ont pas de bonnes propriétés de convergence. Il est nécessaire de se restreindre à des espaces de Banach plus réguliers, comme par exemple les espaces réflexifs pour avoir des résultats de convergence harmonieux (voir par exemple Chatterji [5]).

La définition d'un amart scalaire s'étend naturellement aux v.a. à valeurs dans un espace de Banach de la façon suivante :

Définition 1.3.8 :
Soit $(\mathbf{X}_n)$ une suite de v.a. adaptées à la filtration $(\mathcal{G}_n)$ et intégrables au sens de Pettis. On dit que $(\mathbf{X}_n)$ *est un amart* si le filet $(\mathbb{E}\mathbf{X}_\tau)_{\tau \in \mathcal{T}}$ converge au sens de la norme de $\mathcal{B}$ vers $x \in \mathcal{B}$.

Un amart $(\mathbf{X}_n)$ non seulement borné dans L^1 mais tel que $\sup_n \|\mathbf{X}_n\| \leqslant 1$ *p.s.* peut ne pas converger faiblement p.s. (et a fortiori fortement) même s'il est à valeurs dans un espace très régulier. On pourra se reporter à la page 58 de l'article de Chacon et Sucheston [4] pour un exemple dû à W.J. Davis d'une telle situation.

Pour ce qui est des quasimartingales, la généralisation naturelle de la définition scalaire au cas des v.a. à valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{B}$ consiste à remplacer la valeur absolue dans la définition réelle par la norme sur $\mathcal{B}$:

Définition 1.3.9 :
Soit $(\mathbf{X}_n)$ une suite de v.a. adaptées à la filtration $(\mathcal{G}_n)$, intégrables au sens de Bochner. On dit que $(\mathbf{X}_n)$ *est une quasimartingale* si :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left\| \mathbb{E}\left(\mathbf{X}_{n+1} \middle| \mathcal{G}_n\right) - \mathbf{X}_n \right\| < +\infty.$$

Une quasimartingale est en particulier encore un amart.

Chapitre 2

La loi des grands nombres de Kolmogorov

Ce chapitre est consacré à l'étude du comportement de martingale généralisée de la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ qui intervient dans la loi forte des grands nombres au sens de Kolmogorov. Dans tout ce chapitre, on considèrera un espace de Banach séparable $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$, muni de sa tribu borélienne, une suite $(\mathbf{X}_i)$ de copies indépendantes d'une v.a. centrée $\mathbf{X}$ à valeurs dans $\mathcal{B}$, et $\mathbf{S}_n := \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n$ la n-ième somme partielle associée à la suite $(\mathbf{X}_i)$. Enfin, $(\mathcal{F}_n)$ désignera la filtration naturelle associée aux v.a. $(\mathbf{X}_k)$.

Plus précisément, nous cherchons à obtenir une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité portant sur la v.a. $\mathbf{X}$ pour que la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ soit un amart ou une quasimartingale. Des problèmes de ce type, dans le cas de v.a. non nécessairement i.i.d. ont déjà été étudiés dans [17], [19],... Nous reviendrons sur le cas non équidistribué dans le chapitre 5.

Commençons par rappeler l'énoncé de la loi des grands nombres équidistribuée de Kolmogorov pour des v.a. à valeurs dans des espaces de Banach.

La loi forte des grands nombres démontrée par Kolmogorov [21] a été étendue aux v.a. à valeurs dans des espaces de Banach séparables en 1956 par Mourier dans [35] de la façon suivante :

Théorème 2.0.10 :
Soit $(\mathbf{X}_i)$ *une suite de copies indépendantes d'une v.a.* $\mathbf{X}$ *à valeurs dans* $\mathcal{B}$*. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *La suite* $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ *converge presque sûrement ;*
2. $\mathbb{E}\|\mathbf{X}\| < +\infty$.

Dans ce cas, la limite de $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ *est presque sûrement constante, et vaut* $\mathbb{E}\mathbf{X}$.

Il est à noter que ce résultat est l'un des rares dont l'énoncé dans un espace de Banach séparable quelconque se déduise immédiatement de l'énoncé scalaire.

Nous allons à présent nous intéresser aux hypothèses sous lesquelles la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ est un amart ou une quasimartingale.

2.1 Le cas des amarts

2.1.1 Le cas scalaire

Commençons par nous intéresser aux hypothèses sous lesquelles $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ est un amart. La première proposition se fonde sur des travaux de Marcinkiewicz et Zygmund [28] :

Proposition 2.1.1 :
Soit $\mathbf{X}$ *une v.a. centrée telle que* $\mathbb{E}|\mathbf{X}|\ln(1+|\mathbf{X}|) < +\infty$. *Alors* $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ *est un amart.*

Démonstration :

Marcinkiewicz et Zygmund ont montré que la condition $\mathbb{E}|\mathbf{X}|\ln(1+|\mathbf{X}|) < +\infty$ implique $\mathbb{E}\sup_k \frac{|\mathbf{X}_k|}{k} < +\infty$. En vertu d'un résultat de Hoffmann-Jørgensen (proposition A.1.4), $\mathbb{E}\sup_n \frac{|\mathbf{S}_n|}{n} < +\infty$. La loi forte des grands nombres de Kolmogorov étant vérifiée, le résultat annoncé découle de la proposition 1.1.11.

$\square$

Cette condition d'intégrabilité de $|\mathbf{X}|\ln(1+|\mathbf{X}|)$ peut sembler très restrictive, puisqu'elle entraîne l'intégrabilité de $\sup_{1\leqslant k<+\infty} \frac{|\mathbf{X}_k|}{k}$. En fait, il n'en est rien. Burgess Davis [7] a construit un exemple montrant que cette condition d'intégrabilité est également nécessaire. Nous donnons ici un autre exemple, plus probabiliste :

Proposition 2.1.2 :
Soit $(\mathbf{X}_k)$ *une suite de copies indépendantes d'une v.a. centrée* $\mathbf{X}$.
Si $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}, \mathcal{F}_n\right)$ *est un amart, alors* $\mathbb{E}|\mathbf{X}|\ln^+|\mathbf{X}| < +\infty$.

Démonstration :

La démonstration repose sur un procédé de troncation.
On commence par définir les v.a. tronquées et centrées suivantes :

$$\theta_k := \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k|\leqslant k)} - \mathbb{E}\left(\mathbf{X}_k \mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k|\leqslant k)}\right) \quad \text{et} \quad \eta_k := \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k|> k)} - \mathbb{E}\left(\mathbf{X}_k \mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k|> k)}\right).$$

On désigne par $\mathbf{U}_n$ et $\mathbf{V}_n$ les sommes partielles d'ordre n associées respectivement aux v.a. θ_k et η_k :

$$\mathbf{U}_n := \sum_{k=1}^n \theta_k \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_n := \sum_{k=1}^n \eta_k.$$

• **Première étape.** Nous allons tout d'abord montrer que $\left(\frac{\mathbf{V}_n}{n}\right)$ est un amart. Pour cela, commençons par montrer que cette suite converge presque sûrement vers 0.

Lemme 2.1.3 *:*
La suite $\left(\frac{\mathbf{V}_n}{n}\right)$ *converge presque sûrement vers 0.*

Démonstration :

Écrivons tout d'abord $\frac{\mathbf{V}_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k|>k)} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(\mathbf{X}_k \mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k|>k)})$.
Comme $\mathbb{E}|\mathbf{X}|$ est finie, le lemme de Borel-Cantelli implique que pour presque tout ω, il existe $N(\omega)$ tel que pour $k \geqslant N(\omega)$, $\mathbf{X}_k(\omega)\mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k|>k)}(\omega) = 0$.
De plus, par convergence dominée, $\mathbb{E}\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k|>k)}$ tend vers 0.
Par conséquent, par le lemme de Cesàro dans sa forme classique, la suite de terme général $\frac{\mathbf{V}_n}{n}$ converge presque sûrement vers 0.

□

Lemme 2.1.4 *:*
La suite $\left(\frac{\mathbf{V}_n}{n}, \mathcal{F}_n\right)$ *est un amart.*

Démonstration :

Comme la v.a. $\mathbf{X}$ est centrée, la loi forte des grands nombres de Kolmogorov est vérifiée et la suite de terme général $\frac{\mathbf{S}_n}{n}$ tend presque sûrement vers 0. Par conséquent, le lemme précédent entraîne la convergence presque sûre vers 0 de la suite de terme général $\frac{\mathbf{U}_n}{n}$.
D'autre part, la suite $\left(\frac{|\theta_k|}{k}\right)$ est majorée par 2, et $\mathbb{E}\sup_{1\leqslant k<+\infty}\frac{|\theta_k|}{k}$ est donc finie. En appliquant l'inégalité de Hoffmann-Jørgensen (corollaire A.1.4), on en déduit qu'il en est de même de l'espérance de $\sup_{1\leqslant n<+\infty}\frac{|\mathbf{U}_n|}{n}$.
Nous venons donc de prouver que la v.a. $\sup_{1\leqslant n<+\infty}\left(\frac{|U_n|}{n}\right)$ admet une espérance, et que la suite $\left(\frac{\mathbf{U}_n}{n}\right)$ converge presque sûrement. D'après la proposition 1.1.11, cette suite est donc un amart pour $(\mathcal{F}_n)$. Mais par hypothèse la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ est un amart donc $\left(\frac{\mathbf{V}_n}{n}, \mathcal{F}_n\right)$ est un amart comme différence d'amarts.

□

• **Deuxième étape.** Montrons que $\mathbb{E}\mathbf{X}^+ \ln^+ \mathbf{X}^+ < +\infty$.
Remarquons tout d'abord que s'il existe t tel que $\mathbb{P}(\mathbf{X}^+ > t) = 0$, alors $\mathbb{E}\mathbf{X}^+ \ln^+ \mathbf{X}^+ < +\infty$.
Nous supposerons donc que $\forall t,\ \mathbb{P}(\mathbf{X}^+ > t) > 0$.
Par l'absurde, supposons $\mathbb{E}\mathbf{X}^+ \ln^+ \mathbf{X}^+ = +\infty$. Alors pour tout $M \in \mathbb{N}^*$ fixé, il existe N tel que $\sum_{j=M}^{N-1} j \ln j \mathbb{P}(j < \mathbf{X}^+ \leqslant j+1) > 2(\ln M)\mathbb{E}\mathbf{X}^+$. Construisons un temps d'arrêt $\tau \in \mathcal{T}$ permettant d'aboutir à une contradiction. Pour cela, nous sommes amenés à considérer de

nouvelles v.a. :

$$\xi_k := \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\{|\mathbf{X}_k|>k\}} \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_n := \sum_{k=1}^{n} \xi_k.$$

Comme $\mathbb{E}(\mathbf{X}_k \mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k|\leqslant k)}) = -\mathbb{E}(\mathbf{X}_k \mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k|>k)})$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\frac{\mathbf{X}_k \mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k|\leqslant k)}}{n}\right)$ tend vers 0, et $\left(\frac{\mathbf{W}_n}{n}, \mathcal{F}_n\right)$ est un amart. Ainsi, par la proposition 1.1.9, $\left(\frac{\mathbf{W}_n^+}{n}, \mathcal{F}_n,\right)$ est également un amart.
Définissons à présent le temps d'arrêt τ.
Soit $M \in \mathbb{N}^*$ fixé et $N \geqslant M$ défini comme annoncé précédemment. On définit le temps d'arrêt τ par la relation suivante :

$$\tau(\omega) := \inf\{k \geqslant M \ : \xi_k(\omega) > 0\} \wedge N.$$

Alors, pour tout $M < n < N$, en posant $A_{n-1} := \bigcap\limits_{k=M}^{n-1} \{\mathbf{X}_k \leqslant k\}$ et $U_{n-1} := \left\{\left|\sum\limits_{j=M}^{n-1} \xi_j\right| \leqslant \frac{n}{2}\right\}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\tau=n} \frac{\mathbf{W}_n^+}{n} d\mathbb{P} &\geqslant \int_{\tau=n} \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{M-1} \xi_j + \sum_{j=M}^{n-1} \xi_j \mathbf{1}_{(\xi_j \leqslant 0)} + \xi_n^+\right)^+ \mathbf{1}_{A_{n-1}} \mathbf{1}_{U_{n-1}} d\mathbb{P} \\
&= \int_{\tau=n} \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{M-1} \xi_j + \sum_{j=M}^{n-1} \xi_j \mathbf{1}_{(\xi_j < 0)} + \xi_n^+\right)^+ \mathbf{1}_{A_{n-1}} \mathbf{1}_{U_{n-1}} d\mathbb{P} \\
&\geqslant \int_{\tau=n} \frac{1}{n}\left(\sum_{j=M}^{n-1} \xi_j \mathbf{1}_{(\xi_j < 0)} + \xi_n^+\right)^+ \mathbf{1}_{A_{n-1}} \mathbf{1}_{U_{n-1}} d\mathbb{P} - \int_{\tau=n} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{M-1} |\xi_j| d\mathbb{P}
\end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'inégalité $(a+b)^+ \geqslant a^+ - |b|$.
Remarquons à présent que $\sum\limits_{n=M}^{N-1} \frac{1}{n} \int\limits_{\tau=n} \sum\limits_{j=1}^{M-1} |\xi_j| d\mathbb{P} \leqslant \frac{1}{M} \sum\limits_{j=1}^{M-1} \mathbb{E}|\xi_j|$, qui converge vers 0 quand $M \to +\infty$ par le lemme de Cesàro.
Il ne reste donc plus qu'à étudier $\displaystyle\int_{\tau=n} \frac{1}{n}\left(\sum_{j=M}^{n-1} \xi_j \mathbf{1}_{(\xi_j < 0)} + \xi_n^+\right)^+ \mathbf{1}_{A_{n-1}} \mathbf{1}_{U_{n-1}} d\mathbb{P}$.
Or

$$\int_{\tau=n} \frac{1}{n}\left(\sum_{j=M}^{n-1} \xi_j \mathbf{1}_{(\xi_j < 0)} + \xi_n^+\right)^+ \mathbf{1}_{A_{n-1}} \mathbf{1}_{U_{n-1}} d\mathbb{P} \geqslant \int_{\tau=n} \frac{\xi_n^+}{2n} \mathbf{1}_{U_{n-1}} \mathbf{1}_{A_{n-1}} d\mathbb{P} \geqslant \mathbb{E}\left(\frac{\xi_n^+}{2n} \mathbf{1}_{U_{n-1}} \mathbf{1}_{A_{n-1}}\right)$$

car $\{\tau = n\} = A_{n-1} \cap \{\xi_n^+ > 0\}$. Or A_{n-1} et U_{n-1} sont mesurables par rapport à la tribu $\sigma(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_{n-1})$, donc

$$\int_{\tau=n} \frac{1}{n}\left(\sum_{j=M}^{n-1} \xi_j \mathbf{1}_{(\xi_j<0)} + \xi_n^+\right)^+ \mathbf{1}_{A_{n-1}} \mathbf{1}_{U_{n-1}} d\mathbb{P} \geqslant \mathbb{E}\left(\frac{\xi_n^+}{2n}\right) \mathbb{P}(A_{n-1} \cap U_{n-1})$$
$$\geqslant \mathbb{E}\left(\frac{\xi_n^+}{2n}\right) \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \mathbf{1}_{(\xi_j<0)}\right| \leqslant \frac{M}{2} \cap A_{n-1}\right). \tag{2.1}$$

Mais, d'après le lemme de Borel-Cantelli, la série de terme général $\xi_j \mathbf{1}_{(\xi_j<0)}$ converge p.s. vers une v.a. $\mathbf{R} \leqslant 0$.
Donc, pour M assez grand, $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \mathbf{1}_{(\xi_j<0)}\right| \leqslant \frac{M}{2}\right) \geqslant \frac{3}{4}$.
D'autre part, par le théorème des accroissements finis, il existe $c_7 > 0$ tel que

$$\mathbb{P}(A_{n-1}) \geqslant \mathbb{P}(\bigcap_{k=M}^{+\infty} \{\mathbf{X}_k \leqslant k\}) \geqslant \exp\left(-c_7 \sum_{k=M}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{X}_k > k)\right) \geqslant \exp(-c_7 \sum_{k=M}^{+\infty} \mathbb{P}(|\mathbf{X}_k| > k)) \longrightarrow 1$$

donc $\mathbb{P}(A_{n-1}) \geqslant \frac{3}{4}$ pour M assez grand.
Par conséquent, pour M assez grand, $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^{+\infty} \xi_j \mathbf{1}_{(\xi_j<0)}\right| \leqslant \frac{M}{2} \cap A_{n-1}\right) \geqslant \frac{1}{2}$.

On en déduit que, pour $M < \tau < N$:

$$\int_{\tau=n} \frac{\mathbf{W}_n^+}{n} d\mathbb{P} \geqslant c_8 \frac{\mathbb{E}(\xi_n^+)}{n}. \tag{2.2}$$

D'où, en sommant :

$$\sum_{n=M}^{N} \int_{\tau=n} \frac{\mathbf{W}_n^+}{n} d\mathbb{P} \geqslant \sum_{n=M+1}^{N-1} \int_{\tau=n} \frac{\mathbf{W}_n^+}{n} d\mathbb{P} \geqslant c_9 \sum_{n=M+1}^{N-1} \frac{\mathbb{E}(\xi_n^+)}{n}$$
$$\geqslant c_9 \sum_{n=M+1}^{N-1} \frac{1}{n} \sum_{j=n}^{+\infty} j\mathbb{P}(j < \mathbf{X}^+ \leqslant j+1) = c_9 \sum_{j=M+1}^{+\infty} j\mathbb{P}(j < \mathbf{X}^+ \leqslant j+1) \sum_{n=M+1}^{j\wedge N-1} \frac{1}{n}$$
$$\geqslant c_{10} \sum_{j=M+1}^{N-1} j\mathbb{P}(j < \mathbf{X}^+ \leqslant j+1) \ln\left[\frac{j}{M+1}\right]$$
$$\geqslant c_{10} \sum_{j=M+1}^{N-1} j \ln j \mathbb{P}(j < \mathbf{X}^+ \leqslant j+1) - c_{11} \ln(M+1) \mathbb{E}\mathbf{X}^+.$$

Comme annoncé au début, si $\mathbb{E}\mathbf{X}^+ \ln^+ \mathbf{X}^+ = +\infty$, on pourrait choisir N tel que

$$\sum_{j=M+1}^{N-1} j \ln j \mathbb{P}(j < \mathbf{X}^+ \leqslant j+1) > 2 \ln(M+1) \mathbb{E}\mathbf{X}^+,$$

et alors $\int \frac{\mathbf{W}_\tau^+}{\tau} d\mathbb{P} \geqslant c_{12} \ln(M+1)\mathbb{E}\mathbf{X}^+$. En faisant tendre M vers $+\infty$, on voit que $\left(\frac{\mathbf{W}_n^+}{n}, \tau_n\right)$ ne peut pas être un amart.
Donc nécessairement $\mathbb{E}\mathbf{X}^+ \ln^+ \mathbf{X}^+ < +\infty$.
La même construction de temps d'arrêt montre que nécessairement : $\mathbb{E}\mathbf{X}^- \ln^+ \mathbf{X}^- < +\infty$.
Finalement $\mathbb{E}|\mathbf{X}| \ln^+ |\mathbf{X}| < +\infty$.

□

En résumé, on a donc :

Théorème 2.1.5 :
Soit $\mathbf{X}$ *une v.a. réelle centrée. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :
1. $\mathbb{E}|\mathbf{X}| \ln(1+|\mathbf{X}|) < +\infty$ *;*
2. $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ *est un amart.*

Il est naturel de se demander si cette condition d'intégrabilité de $|\mathbf{X}| \ln(1+|\mathbf{X}|)$ est également suffisante pour que la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ soit aussi une quasimartingale. De façon surprenante, nous allons voir que tel est le cas, du moins dans le cas de v.a. réelles.

Théorème 2.1.6 :
Soit $\mathbf{X}$ *une v.a. réelle centrée et* $(\mathbf{X}_i)$ *une suite de copies indépendantes de* $\mathbf{X}$*. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :
1. $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ *est une quasimartingale ;*
2. $\mathbb{E}(|\mathbf{X}| \ln^+ |\mathbf{X}|) < +\infty$.

Démonstration :

- Commençons par démontrer que la propriété 2 entraîne la propriété 1.

Nous allons démontrer le résultat pour une v.a. $\mathbf{X}$ symétrique, le cas général s'en déduisant par un argument de symétrisation classique. Supposons donc $\mathbb{E}|\mathbf{X}| \ln^+ |\mathbf{X}| < +\infty$.
On veut montrer que $\sum \mathbb{E}\left|\mathbb{E}\left(\frac{\mathbf{S}_{n+1}}{n+1}\middle|\mathcal{F}_n\right) - \frac{\mathbf{S}_n}{n}\right| < +\infty$,
condition qui, comme le montre la relation (1.1) est équivalente à :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left|\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right| < +\infty. \tag{2.3}$$

Soit $p \in]1,2]$ et $\beta > \frac{p}{p-1}$ fixés, de sorte que $\beta\left(1-\frac{1}{p}\right) > 1$.
Définissons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1,n]\!]$ les v.a. tronquées – et centrées par symétrie de $\mathbf{X}$ – suivantes :

$$\mathbf{Y}_{n,k} := \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\left\{|\mathbf{X}_k| \leqslant \frac{n}{(\ln n)^\beta}\right\}} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{Z}_{n,k} := \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\left\{|\mathbf{X}_k| > \frac{n}{(\ln n)^\beta}\right\}}$$

ainsi que les sommes partielles d'ordre n associées :

$$\mathbf{U}_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Y}_{n,k} \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Z}_{n,k}.$$

Ainsi $\mathbf{S}_n = \mathbf{U}_n + \mathbf{V}_n$, et donc

$$\mathbb{E}|\mathbf{S}_n| \leqslant \mathbb{E}|\mathbf{U}_n| + \mathbb{E}|\mathbf{V}_n|.$$

Pour montrer la relation (2.3), il suffit de montrer que les deux séries de terme général $\frac{\mathbb{E}|\mathbf{U}_n|}{n^2}$ et $\frac{\mathbb{E}|\mathbf{V}_n|}{n^2}$ convergent.

Lemme 2.1.7 :
$\sum \frac{\mathbb{E}|\mathbf{U}_n|}{n^2} < +\infty$.

Démonstration :

Comme $\mathbb{R}$ est de type 2, donc de type p (on pourra se reporter à la section 2.3 pour une définition de cette notion) et que les v.a. $\mathbf{Y}_{n,i}$ sont centrées, on déduit de l'inégalité $\mathbb{E}|\sum_{i=1}^{n} \mathbf{Y}_{n,i}| \leqslant c_{13}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}|\mathbf{Y}_{n,i}|^p\right)^{1/p}$ la suite d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}|\mathbf{U}_n|}{n^2} &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{14}}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}|\mathbf{Y}_{n,k}|^p\right)^{1/p} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{14}}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n}{(\ln n)^\beta}\right)^{p-1} \mathbb{E}|\mathbf{X}_k|\right)^{1/p} \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} c_{15}(\mathbb{E}|\mathbf{X}|)^{1/p} \frac{1}{n(\ln n)^{\beta-\beta/p}} < +\infty \quad \text{car } \beta > \frac{p}{p-1}.\end{aligned}$$

□

Lemme 2.1.8 :
$\sum \frac{\mathbb{E}|\mathbf{V}_n|}{n^2} < +\infty$.

Démonstration :

On pose $\lambda_n := \left[\frac{n}{(\ln n)^\beta}\right]$, où $[x]$ désigne la partie entière de x, et $\Lambda_j := \inf\{n|\lambda_n > j\}$.
Alors

$$\frac{\mathbb{E}|\mathbf{V}_n|}{n^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left(|\mathbf{X}_k|\mathbf{1}_{\{|\mathbf{X}_k|>\frac{n}{(\ln n)^\beta}\}}\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(|\mathbf{X}|\mathbf{1}_{\{|\mathbf{X}|>\frac{n}{(\ln n)^\beta}\}}\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=\lambda_n}^{+\infty} j\mathbb{P}(j-1 < |\mathbf{X}| \leqslant j).$$

d'où

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathbb{E}|\mathbf{V}_n|}{n^2} &\leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=\lambda_n}^{+\infty} j\mathbb{P}(j-1<|\mathbf{X}|\leqslant j) = \sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(j-1<|\mathbf{X}|\leqslant j)\sum_{n|\lambda_n\leqslant j}\frac{1}{n}\\ &\leqslant \sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(j-1<|\mathbf{X}|\leqslant j)\sum_{n=1}^{\Lambda_j}\frac{1}{n}\leqslant c_{16}\sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(j-1<|\mathbf{X}|\leqslant j)\ln\Lambda_j\\ &\leqslant c_{17}\sum_{j=1}^{+\infty} j\mathbb{P}(j-1<|\mathbf{X}|\leqslant j)\ln j \;\leqslant c_{18}\mathbb{E}|\mathbf{X}|\ln^+|\mathbf{X}|<+\infty.\end{aligned}$$

□

• La réciproque est immédiate par le théorème de Davis, car $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ étant une quasimartingale est aussi un amart.

□

Traitons à présent le cas des v.a. banachiques.

2.1.2 Le cas banachique

Proposition 2.1.9 : *Soit* $\mathbf{X}$ *une v.a. faiblement centrée telle que*

$$\{|\langle\varphi,\mathbf{X}\rangle|\ln(1+|\langle\varphi,\mathbf{X}\rangle|),\ \|\varphi\|_{\mathcal{B}'}\leqslant 1\}$$

soit uniformément intégrable.
Alors $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ *est un amart.*

Démonstration :

Soit τ un temps d'arrêt borné, $N\leqslant\tau\leqslant M$.
Soit φ une forme linéaire de norme 1 définie sur $\mathcal{B}$. Par simplicité, notons ξ_k la v.a. réelle $\langle\varphi,\mathbf{X}_k\rangle$. Nous noterons $\mathcal{U}$ l'ensemble des formes linéaires de norme 1 sur $\mathcal{B}$.
Rappelons que pour tout $x\in\mathcal{B}$, $\|x\|=\sup_{\varphi\in\mathcal{U}}|\langle\varphi,x\rangle|$.
Tronquons les v.a. ξ_k en posant

$$\mathbf{Y}_k:=\xi_k\mathbf{1}_{(|\xi_k|\leqslant k)}-\mathbb{E}\left(\xi_k\mathbf{1}_{(|\xi_k|\leqslant k)}\right)\quad\text{et}\quad\mathbf{Z}_k:=\xi_k\mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}-\mathbb{E}\left(\xi_k\mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}\right).$$

Associons-leur les sommes partielles d'ordre n :

$$\mathbf{U}_n:=\mathbf{U}_n^{\varphi}:=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{Y}_k\quad\text{et}\quad\mathbf{V}_n:=\mathbf{V}_n^{\varphi}:=\sum_{k=1}^{n}\mathbf{Z}_k.$$

Ainsi $\langle\varphi,\mathbf{S}_n\rangle=\mathbf{U}_n+\mathbf{V}_n$.

Montrer que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ est un amart convergeant vers 0 revient à prouver que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \sup_{\tau \geqslant N} \left\| \int \frac{\mathbf{S}_\tau}{\tau} d\mathbb{P} \right\| \leqslant 2\varepsilon.$$

Pour cela, il suffit de montrer que les deux propriétés suivantes sont vraies pour $\varepsilon > 0$ fixé et N assez grand :

$$\sup_{\tau \geqslant N} \sup_{\varphi \in \mathcal{U}} \int \frac{\mathbf{U}_\tau^\varphi}{\tau} d\mathbb{P} \leqslant \varepsilon, \tag{2.4}$$

$$\sup_{\tau \geqslant N} \sup_{\varphi \in \mathcal{U}} \int \frac{\mathbf{V}_\tau^\varphi}{\tau} d\mathbb{P} \leqslant \varepsilon. \tag{2.5}$$

La condition (2.4) résulte immédiatement du lemme suivant, que nous démontrerons à la fin du chapitre :

Lemme 2.1.10 *:*
$\forall t > 0,\ \sup_{\varphi \in \mathcal{U}} \mathbb{P}\left(\sup_{n \geqslant N} \left|\frac{\mathbf{U}_n^\varphi}{n}\right| > t\right) \leqslant \frac{c_{19}}{t^2 \ln N}.$

En effet, pour $\tau \geqslant N$, en posant pour alléger les notations $\mathbf{U}_n := \mathbf{U}_n^\varphi$:

$$\begin{aligned}
\sup_{\varphi \in \mathcal{U}} \int \frac{\mathbf{U}_\tau}{\tau} d\mathbb{P} &\leqslant \sup_{\varphi \in \mathcal{U}} \int \sup_{n \geqslant N} \frac{|\mathbf{U}_n|}{n} d\mathbb{P} \\
&\leqslant \sup_{\varphi \in \mathcal{U}} \int_0^{1/\sqrt{\ln(N)}} \mathbb{P}\left(\sup_{n \geqslant N} \frac{|\mathbf{U}_n|}{n} > t\right) dt + \sup_{\varphi \in \mathcal{U}} \int_{1/\sqrt{\ln(N)}}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{n \geqslant N} \frac{|\mathbf{U}_n|}{n} > t\right) dt \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{\ln N}} + \int_{1/\sqrt{\ln(N)}}^{+\infty} \frac{c_{20}}{t^2 \ln N} dt \leqslant \frac{c_{21}}{\sqrt{\ln N}}.
\end{aligned}$$

ce qui montre la relation (2.4).
Montrons à présent la condition (2.5).
Soit τ un temps d'arrêt borné, $N \leqslant \tau \leqslant M$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\frac{\mathbf{V}_\tau}{\tau} &= \int_\tau \frac{\mathbf{V}_\tau}{\tau} d\mathbb{P} = \sum_{n \geqslant N} \int_{(\tau = n)} \frac{\mathbf{V}_n}{n} d\mathbb{P} = \sum_{n \geqslant N} \int_{(\tau \geqslant n)} \frac{\mathbf{V}_n}{n} d\mathbb{P} - \int_{(\tau \geqslant n+1)} \frac{\mathbf{V}_n}{n} d\mathbb{P} \\
&= \int_{\tau \geqslant N} \frac{\mathbf{V}_N}{N} d\mathbb{P} + \sum_{n=N}^{M} \left(\int_{(\tau \geqslant n+1)} \left(\frac{\mathbf{V}_{n+1}}{n+1} - \frac{\mathbf{V}_n}{n} \right) d\mathbb{P} \right) \\
&= \frac{1}{N}\mathbb{E}\mathbf{V}_N - \sum_{n=N}^{M} \frac{1}{n(n+1)} \int_{(\tau \geqslant n+1)} \mathbf{V}_n d\mathbb{P} + \frac{1}{n(n+1)} \mathbb{E}(\mathbf{Z}_{n+1}) \mathbb{P}(\tau \geqslant n+1) \\
&\leqslant c_{22} \sum_{n \geqslant N} \mathbb{E}\frac{|\mathbf{V}_n|}{n^2}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Or

$$
\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant N}\frac{\mathbb{E}|\mathbf{V}_n|}{n^2} &\leqslant \sum_{n\geqslant N}\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|\xi_k\mathbf{1}_{|\xi_k|>k}\right| \\
&= \sum_{n\geqslant N}\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left|\xi_k\mathbf{1}_{|\xi_k|>k}\right| + \sum_{n\geqslant N}\frac{2}{n^2}\sum_{k=N}^{n}\mathbb{E}\left|\xi_k\mathbf{1}_{|\xi_k|>k}\right| \\
&\leqslant 2\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left|\xi_k\mathbf{1}_{|\xi_k|>k}\right|\frac{1}{N} + 2\sum_{k\geqslant N}\mathbb{E}\left|\xi_k\mathbf{1}_{|\xi_k|>k}\right|\frac{1}{k}. \qquad (2.7)
\end{aligned}
$$

On commence par remarquer que, comme $\{\langle\varphi,\mathbf{X}_k\rangle\}$ est uniformément intégrable car $\{\langle\varphi,\mathbf{X}_k\rangle\ln(1+\langle\varphi,\mathbf{X}_k\rangle)\}$ l'est, il existe N_1 indépendant de φ tel que pour $N\geqslant N_1$, on ait :

$$
\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}|\xi_k\mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}| = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N_1}\mathbb{E}|\xi_k\mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}| + \frac{1}{N}\sum_{k=N_1}^{N}\mathbb{E}|\xi_k|\mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)} \leqslant \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N_1}\mathbb{E}|\xi_k\mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}| + \varepsilon.
$$

Comme $\mathbb{E}|\xi_k|\mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}$ tend vers 0, on déduit de l'inégalité précédente et du lemme de Cesàro que pour N assez grand, indépendant de φ :

$$
\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}|\xi_k\mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}| \leqslant 2\varepsilon. \qquad (2.8)
$$

D'autre part, on remarque la suite de majorations suivante :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant N}\frac{1}{k}\mathbb{E}\left|\xi_k\mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}\right| &\leqslant \sum_{k\geqslant N}\frac{1}{k}\sum_{j\geqslant k} j\mathbb{P}(j-1<|\xi|\leqslant j) \leqslant \sum_{j\geqslant N} j\mathbb{P}(j-1<|\xi|\leqslant j)\ln j \\
&\leqslant c_{23}\mathbb{E}|\xi|\ln(1+|\xi|)\mathbf{1}_{(|\xi|\ln(1+|\xi|)\geqslant N\ln N)}.
\end{aligned}
$$

En utilisant à nouveau l'intégrabilité uniforme de $\{|\xi_k|\ln(1+|\xi_k|)\}$, il existe N_2 indépendant de φ tel que pour $N\geqslant N_2$,

$$
\mathbb{E}|\xi_k|\ln(1+|\xi_k|)\mathbf{1}_{(|\xi_k|\ln(1+|\xi_k|)\geqslant N\ln N)} \leqslant \varepsilon. \qquad (2.9)
$$

Les relations (2.8) et (2.9) montrent, compte-tenu des majorations obtenues dans (2.7) et (2.6) que pour N assez grand, et $\mathcal{T}$ temps d'arrêt supérieur à N, $\left|\sup_{\varphi\in\mathcal{U}}\mathbb{E}\frac{\mathbf{V}_\tau}{\tau}\right| \leqslant \varepsilon$, achevant la preuve de la relation (2.5).

□

Remarque 2.1.11 :
Remarquons que $\{|\langle\varphi,\mathbf{X}\rangle|\ln(1+|\langle\varphi,\mathbf{X}\rangle|),\ \|\varphi\|_{\mathcal{B}'}\leqslant 1\}$ est en particulier uniformément intégrable si $\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|\ln(1+\|\mathbf{X}\|)<+\infty$.

En dimension infinie, la propriété d'amart est liée à des hypothèses de moment faible de la v.a. $\mathbf{X}$ considérée. En effet, $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ peut être un amart sans que $\mathbf{X}$ soit intégrable au sens de Bochner :

Exemple 2.1.12 :
On considère l'espace probabilisé $(\Omega_1 :=]0,1], \mathcal{B}(]0,1]), \lambda)$ et un second espace probabilisé $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_2)$ ainsi qu'une suite (ε_n) de v.a. de Rademacher indépendantes définies sur Ω_2. Soit (e_n) la base canonique de ℓ_2 et $A_n := \left]\frac{1}{n+1}; \frac{1}{n}\right]$. Définissons enfin la variable aléatoire :

$$\mathbf{X} := \sum_{n=1}^{+\infty} n \mathbf{1}_{A_n} \varepsilon_n e_n.$$

Alors la variable aléatoire $\mathbf{X}$ est faiblement centrée et vérifie la condition $\sup_{\varphi \in \mathcal{U}} \mathbb{E}\langle \varphi, \mathbf{X}\rangle^2 < +\infty$, donc $\{ \langle \varphi, \mathbf{X}\rangle \ln^+ |\langle \varphi, x\rangle|, \|\varphi\| \leqslant 1\}$ est uniformément intégrable. D'après la proposition précédente, $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ est donc un amart, qui de plus converge presque sûrement scalairement vers 0. Par contre, $\mathbb{E}\|\mathbf{X}\| = +\infty$, donc $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ n'est pas une quasimartingale, car $\mathbb{E}\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n} \middle| \mathcal{F}_n\right)$ n'est pas définie.

On voit donc déjà que les comportements d'amart et de quasimartingale de $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ sont très différents en dimension infinie.

Sous des hypothèses d'intégrabilité forte, on a la proposition suivante :

Proposition 2.1.13 :
Soit $\mathbf{X}$ une v.a. fortement centrée telle que $\mathbb{E}\|\mathbf{X}\| \ln(1 + \|\mathbf{X}\|) < +\infty$, alors $\left(\left\|\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right\|\right)$ est un amart.

Démonstration :

Tout d'abord, on montre que si $\mathbb{E}\|\mathbf{X}\| \ln(1 + \|\mathbf{X}\|) < +\infty$, alors $\mathbb{E} \sup_k \frac{\|\mathbf{X}_k\|}{k} < +\infty$. En vertu d'un résultat de Hoffmann-Jørgensen (proposition A.1.4), $\mathbb{E} \sup_n \frac{\|\mathbf{S}_n\|}{n} < +\infty$. La loi forte des grands nombres de Kolmogorov étant vérifiée, le résultat annoncé découle de la proposition 1.1.11.

$\square$

Il est à présent naturel de se demander si sous l'hypothèse $\mathbb{E}\|\mathbf{X}\| \ln(1 + \|\mathbf{X}\|) < +\infty$, la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ est également une quasimartingale. Il n'en est rien dans le cas général, comme nous le montre l'exemple développé dans le prochain paragraphe.

2.2 Un exemple décourageant

Exemple 2.2.1 :
Pour une v.a. fortement centrée à valeurs dans un espace de Banach $\mathcal{B}$ arbitraire, la condition $\mathbb{E}\|\mathbf{X}\| \ln^+ \|\mathbf{X}\| < +\infty$ ne suffit pas à garantir que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ soit une quasimartingale.

DÉMONSTRATION :

Nous allons adapter ici des idées mises en oeuvre dans un exemple de Lai [24] pour fournir un exemple justifiant l'affirmation ci-dessus.
Soit (ε_k) une suite de v.a. i.i.d de Rademacher. On considère la suite (a_k) définie de la façon suivante : l'entier k étant fixé, il existe un unique entier n_k tel que $k \in [\![2^{n_k}+1, 2^{n_k+1}]\!]$ car les intervalles $[2^n, 2^{n+1}[$ forment une partition de $\mathbb{R}$. On pose alors $a_k := \frac{1}{\ln\ln n_k}$, et $a_k := 1$ pour $k \leqslant 9$.
Soit $\mathbf{X}$ la v.a. à valeurs dans l'espace c_0 des suites réelles qui convergent vers 0, dont la k–ième composante est $a_k\varepsilon_k$. Soit $(\mathbf{X}_i)$ une suite de v.a. i.i.d. de même loi que $\mathbf{X}$. On note $a_k^i\varepsilon_k^i$ la k–ième composante de $\mathbf{X}_i$. En notant (e_k) la base canonique de c_0, on a donc $\mathbf{X}_i = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k^i\varepsilon_k^i e_k$.
On a alors $\mathbf{S}_{2^j} = \sum\limits_{i=1}^{2^j}\mathbf{X}_i = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{i=1}^{2^j} a_k^i\varepsilon_k^i\right)e_k$.
Par conséquent,

$$\|\mathbf{S}_{2^j}\| = \sup_{k=1}^{+\infty}\left|\sum_{i=1}^{2^j} a_k^i\varepsilon_k^i\right| \geqslant \sup_{k=1}^{2^{2^j}-1}\left|\sum_{i=1}^{2^j} a_k^i\varepsilon_k^i\right|.$$

Or si $k \in [\![2^j+1, 2^{2^j}-1]\!]$, on a par définition des a_k, $a_k \in [\frac{1}{\ln\ln(2^j)}, 1]$. Alors, comme $\ln(\ln(2^j)) = \ln(j\ln(2)) \leqslant c_{24}\ln j$, on a

$$\|\mathbf{S}_{2^j}\| \geqslant \sup_{k=1}^{2^{2^j}-1}\frac{c_{25}}{\ln j}\left|\sum_{i=1}^{2^j}\varepsilon_k^i\right|.$$

Par conséquent,

$$\mathbb{P}\left(\frac{\|\mathbf{S}_{2^j}\|}{2^j} \geqslant \frac{c_{25}}{\ln j}\right) = \mathbb{P}\left(\|\mathbf{S}_{2^j}\| \geqslant \frac{c_{25}2^j}{\ln j}\right) \geqslant \mathbb{P}\left(\sup_{k=1}^{2^{2^j}-1}\left|\sum_{i=1}^{2^j}\varepsilon_k^i\right| \geqslant 2^j\right)$$
$$= 1 - \mathbb{P}\left(\sup_{k=1}^{2^{2^j}-1}\left|\sum_{i=1}^{2^j}\varepsilon_k^i\right| < 2^j\right) = 1 - \left(\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{2^j}\varepsilon_k^i\right| < 2^j\right)\right)^{2^{2^j}-1}.$$

Comme les ε_k^i ne prennent que les valeurs -1 et 1, la somme ne prend que des valeurs entre -2^j et 2^j, donc

$$\mathbb{P}\left(\frac{\|\mathbf{S}_{2^j}\|}{2^j} \geqslant \frac{c_{25}}{\ln j}\right) \geqslant 1 - \left(1 - \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{2^j} \varepsilon_k^i\right| = 2^j\right)\right)^{2^{2^j}-1} = 1 - \left(1 - \frac{1}{2^{2^j-1}}\right)^{2^{2^j}-1}.$$

Par conséquent, il existe j_0 tel que pour $j \geqslant j_0$ la suite de terme général $\mathbb{P}\left(\frac{\|\mathbf{S}_{2^j}\|}{2^j} \geqslant \frac{c_{25}}{\ln j}\right)$ soit minorée par $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$.
Si la suite $\frac{\mathbf{S}_n}{n}$ était une quasimartingale on aurait : $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left\|\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right\| < +\infty$.
Or, pour $j \geqslant j_0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\|\frac{\mathbf{S}_{2^j}}{2^j}\right\| &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\|\mathbf{S}_{2^j}\|}{2^j} > t\right) dt \geqslant \int_0^{\frac{c_{25}}{\ln j}} \mathbb{P}\left(\frac{\|\mathbf{S}_{2^j}\|}{2^j} > t\right) dt \\ &\geqslant \int_0^{\frac{c_{25}}{\ln j}} \mathbb{P}\left(\frac{\|\mathbf{S}_{2^j}\|}{2^j} > \frac{c_{25}}{\ln(j)}\right) dt \geqslant \frac{c_{26}}{2\ln j}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = \frac{c_{27}}{\ln j}\end{aligned}$$

Remarquons que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left\|\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right\| = \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{1}{k}\mathbb{E}\left\|\frac{\mathbf{S}_k}{k}\right\| \geqslant \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+1}-1} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{S}_k\|}{k}.$$

Or pour $k \in [\![2^j, 2^{j+1}-1]\!]$ l'inégalité de Jensen conditionnelle montre que $\mathbb{E}\|\mathbf{S}_k\| \geqslant \mathbb{E}\|\mathbf{S}_{2^j}\|$. Par conséquent,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\mathbb{E}\left\|\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right\| \geqslant \sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{1}{2^{j+1}-1} \sum_{k=2^j}^{2^{j+1}-1} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{S}_{2^j}\|}{k} \geqslant c_{28} \sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{1}{(2^{j+1}-1)}\mathbb{E}\|\mathbf{S}_{2^j}\| \ln 2 \geqslant \sum_{j=j_0}^{+\infty} \frac{c_{29}}{\ln j} = +\infty.$$

□

On peut naturellement se demander ce qui a permis de construire un tel exemple. En fait c_0 est un espace de Banach très “irrégulier”. Précisons à présent cette notion d'espace régulier.

2.3 Type d'un espace de Banach

Lorsque $(\mathbf{X}_i)$ est une suite finie de v.a. réelles indépendantes centrées de carré intégrable, on a l'égalité :

$$\mathbb{E}\left|\sum_i \mathbf{X}_i\right|^2 = \sum_i \mathbb{E}|\mathbf{X}_i|^2.$$

Une telle égalité reste vraie pour des v.a. à valeurs dans un espace de Hilbert, mais pas pas pour des v.a. à valeurs dans des espaces de Banach généraux.
On est alors amenés à considérer des v.a. à valeurs dans des espaces de Banach dans lesquels on conserve un contrôle sur le moment d'ordre p d'une somme – pour certaines valeurs de p – par les moments d'ordre p des v.a. elles-mêmes.
Maurey et Hoffmann-Jørgensen introduisent indépendamment les notions de type et de cotype d'un espace de Banach en 1972-1973 [30]. On pourra trouver un grand nombre de résultats concernant ces notions dans les ouvrages de Ledoux et Talagrand [25], Li et Quéffélec [26], Pisier [38], [39] ainsi que Milman et Schechtman [34].

Définition 2.3.1 :
Soit (ε_i) une suite de v.a. de Rademacher et $1 \leqslant p < +\infty$. On dit qu'un espace de Banach séparable $\mathcal{B}$ est *de type* p (ou de type de Rademacher p) s'il existe une constante c_{30} telle que pour toute suite finie (x_i) d'éléments de $\mathcal{B}$, on ait

$$\left\| \sum_i \varepsilon_i x_i \right\|_p \leqslant c_{30} \left(\sum_i \|x_i\|^p \right)^{1/p}.$$

Les inégalités de Khintchine montrent qu'une telle propriété n'a de sens que pour $p \leqslant 2$.

La définition précédente peut sembler trop particulière. On a le résultat d'apparence plus générale suivant :

Théorème 2.3.2 :
Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach de type p. Alors il existe une constante universelle c_{31} telle que pour toute suite finie $(\mathbf{X}_i)$ de v.a. indépendantes, centrées, à valeurs dans $\mathcal{B}$, admettant un moment d'ordre p, on ait :

$$\mathbb{E}\left\| \sum_i \mathbf{X}_i \right\|^p \leqslant c_{31} \sum_i \mathbb{E}\|\mathbf{X}_i\|^p.$$

Il résulte de cet énoncé que :

Remarque 2.3.3 :
Un espace de Banach de type p est aussi de type p' pour tout $p' \leqslant p$.

Exemple 2.3.4 :
En vertu de l'inégalité triangulaire, tout espace de Banach est de type 1.
Tout espace de Hilbert est de type 2.

Les exemples suivant montrent – entre autres – qu'il existe des espaces de type p pour tout $p \in [1, 2]$.

Exemple 2.3.5 :
Les espaces ℓ_p, $p \geqslant 1$, sont de type $\inf(p, 2)$.
L'espace c_0 n'est de type p pour aucun $p > 1$.

Dans la section précédente, nous avons vu que la condition d'intégrabilité de $\|\mathbf{X}\| \ln^+ \|\mathbf{X}\|$ ne suffit pas à ce que la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ soit une quasimartingale, en construisant un contrexemple dans l'espace c_0 dont nous venons de rappeler qu'il n'était de type p pour aucun $p > 1$. Nous allons voir à présent que la situation est plus favorable si $\mathcal{B}$ est un espace de type $p > 1$.

2.4 Le cas des espaces de type $p > 1$

Dans des espaces de type $p > 1$, le théorème scalaire se généralise immédiatement de la façon suivante :

Théorème 2.4.1 :
Soit $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach séparable de type $p > 1$. Soient $\mathbf{X}$ une v.a. centrée à valeurs dans $\mathcal{B}$ qui est intégrable au sens de Bochner et $(\mathbf{X}_i)$ une suite de copies indépendantes de $\mathbf{X}$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ *est une quasimartingale ;*
2. $\mathbb{E}(\|\mathbf{X}\| \ln^+ \|\mathbf{X}\|) < +\infty$.

Démonstration :

La démonstration de l'implication $2 \Longrightarrow 1$ se calque sur celle du cas scalaire.
Montrons que $1 \Longrightarrow 2$: Il suffit de considérer une v.a. $\mathbf{X}$ symétrique. Comme 1. est vérifié, il en est de même de la relation (2.3). En appliquant l'inégalité de Lévy, on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \mathbb{E} \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\|\mathbf{X}_k\|}{n} < +\infty.$$

Comme $\mathbf{X}$ est intégrable au sens de Bochner, la suite $(n\mathbb{P}(\|\mathbf{X}\| > n))$ converge vers 0, et donc $\exists n_0,\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall t \geqslant n_0,\ \mathbb{P}\left(\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \|\mathbf{X}_k\| > t\right) \geqslant c_{32} n \mathbb{P}(\|\mathbf{X}\| > t)$. Alors

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \int_n^{+\infty} \mathbb{P}(\|\mathbf{X}\| > t) dt = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n} \sum_{j \geqslant n} \int_j^{j+1} \mathbb{P}(\|\mathbf{X}\| > t) dt \leqslant c_{33} \sum_{j \geqslant 1} j \ln j \mathbb{P}(j-1 < \|\mathbf{X}\| \leqslant j) < +\infty$$

ce qui montre bien que $\mathbb{E}\|\mathbf{X}\| \ln^+ \|\mathbf{X}\| < +\infty$.

□

2.5 Conclusion

En ce qui concerne les espaces de Banach de type $p > 1$, nous avons exhibé une condition nécessaire et suffisante pour que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ soit une quasimartingale. On peut remarquer que le fait d'admettre un type non trivial n'est pas uniquement une hypothèse technique, mais qu'elle est naturelle à la lumière de la caractérisation des espaces de type $p > 1$ de Woyczyǹski [42], à savoir :

Théorème 2.5.1 :
Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach séparable. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *$\mathcal{B}$ est de type $p > 1$,*
2. *Pour toute suite $(\mathbf{X}_i)$ de v.a. indépendantes fortement centrées à valeurs dans $\mathcal{B}$ pour lesquelles il existe une v.a. ξ vérifiant les conditions* :
   $\mathbb{E}\|\xi\| \ln(1 + \|\xi\|) < +\infty$ *et* $\exists c > 0,\ \forall t > 0,\ \forall i,\ \mathbb{P}(\|\mathbf{X}_i\| > t) \leqslant c\mathbb{P}(\|\xi\| > t)$,
   la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers 0.

On peut remarquer que l'implication 2. $\Longrightarrow$ 1. du théorème 2.4.1 se généralise à des suites de variables aléatoires ayant des queues de distribution uniformément bornées par celles d'une v.a. ξ vérifiant $\mathbb{E}\|\xi\| \ln(1 + \|\xi\|) < +\infty$. Le résultat de Woyczyǹski et la démonstration du théorème 2.4.1 justifient donc de se placer dans un espace de type $p > 1$.

$\mathbb{R}$ étant un espace de Banach de type 2, une seconde conséquence du théorème 2.4.1 et du résultat de Davis est la surprenante équivalence suivante :

Théorème 2.5.2 :
Soit $\mathbf{X}$ une v.a. centrée à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{E}|\mathbf{X}| \ln(1 + |\mathbf{X}|) < +\infty$,
2. $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ *est un amart,*
3. $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ *est une quasimartingale.*

2.6 Annexe

Démonstration du lemme 2.1.10 :
L'inégalité de Hajek-Renyi A.1.2 donne en posant pour $i \geqslant 1$ $\gamma_i := \frac{1}{i}$,

$$\forall t > 0,\ \mathbb{P}\left(\sup_{n \geqslant N} \left|\frac{\mathbf{U}_n}{n}\right| > t\right) \leqslant \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N} \operatorname{Var} \mathbf{Y}_k + \sum_{k \geqslant N+1} \frac{1}{k^2} \operatorname{Var} \mathbf{Y}_k\right)$$

$$\leqslant \frac{1}{t^2 N^2}\sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}\left(\xi_k^2 \mathbf{1}_{(|\xi_k| \leqslant k)}\right) + \frac{1}{t^2}\sum_{k \geqslant N+1} \frac{1}{k^2}\mathbb{E}\left(\xi_k^2 \mathbf{1}_{(|\xi_k| \leqslant k)}\right).$$

Or, en désignant par α la partie entière de $\sqrt{N}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left(\xi_k^2\mathbf{1}_{(|\xi_k|)\leqslant k}\right) &= \sum_{k=1}^{\alpha}\mathbb{E}\left(\xi_k^2\mathbf{1}_{(|\xi_k|\leqslant k)}\right) + \sum_{k=\alpha+1}^{N}\mathbb{E}\left(\xi_k^2\mathbf{1}_{(|\xi_k|\leqslant k)}\right) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{\alpha}\mathbb{E}\left(|\xi_k|\sqrt{N}\mathbf{1}_{(|\xi_k|\leqslant k)}\right) + \sum_{k=\alpha}^{N}\mathbb{E}\left(\xi_k^2\mathbf{1}_{(|\xi_k|\leqslant k)}\right) \\
&\leqslant \sqrt{N}\sqrt{N}\mathbb{E}|\xi| + \sum_{k=\alpha}^{N}\mathbb{E}\left(\xi_k^2\mathbf{1}_{(|\xi_k|<\sqrt{N})}\right) + \sum_{k=\alpha}^{N}\mathbb{E}\left(\xi_k^2\mathbf{1}_{(\sqrt{N}\leqslant|\xi_k|\leqslant k)}\right) \\
&\leqslant N\mathbb{E}|\xi| + N\sqrt{N}\mathbb{E}|\xi| + \sum_{k=\alpha}^{N}\mathbb{E}\left(\xi_k^2\mathbf{1}_{(\sqrt{N}\leqslant|\xi_k|\leqslant k)}\right) \\
&\leqslant N\mathbb{E}|\xi| + N\sqrt{N}\mathbb{E}|\xi| + \frac{c_{34}N^2}{\ln N}\mathbb{E}(|\xi|\ln(1+|\xi|)),
\end{aligned}$$

car, pour $\sqrt{N} < k \leqslant N$, en écrivant $\xi_k^2 = \frac{\xi_k}{\ln \xi_k}\xi_k \ln \xi_k$, on obtient $\xi_k^2\mathbf{1}_{(\sqrt{N}\leqslant|\xi_k|\leqslant k)} \leqslant \frac{2}{\ln N}N\mathbb{E}|\xi|\ln(1+|\xi|)$.

Donc

$$\frac{1}{N^2t^2}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}(\xi_k^2\mathbf{1}_{(|\xi_k|\leqslant k)}) \leqslant \frac{c_{34}}{t^2}\left(\frac{1}{\ln N}\mathbb{E}|\xi|\ln(1+|\xi|) + \frac{\mathbb{E}|\xi|}{\sqrt{N}}\right). \tag{2.10}$$

D'autre part,

$$\sum_{k\geqslant N+1}\frac{1}{k^2}\mathbb{E}\left(\xi_k^2\mathbf{1}_{(|\xi_k|\leqslant k)}\right) = \sum_{k\geqslant N+1}\frac{1}{k^2}\mathbb{E}\left(\xi_k^2\mathbf{1}_{(|\xi_k|\leqslant\sqrt{N})}\right) + \sum_{k\geqslant N+1}\frac{1}{k^2}\mathbb{E}\left(\xi_k^2\mathbf{1}_{(\sqrt{N}<|\xi_k|\leqslant k)}\right).$$

Or

$$\sum_{k\geqslant N+1}\frac{1}{k^2}\mathbb{E}\left(\xi_k^2\mathbf{1}_{(|\xi_k|\leqslant\sqrt{N})}\right) \leqslant \sum_{k\geqslant N+1}\frac{1}{k^2}\sqrt{N}\mathbb{E}|\xi| \leqslant \frac{c_{35}}{\sqrt{N}}\mathbb{E}|\xi|,$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant N+1}\frac{1}{k^2}\mathbb{E}\left(\xi_k^2\mathbf{1}_{(\sqrt{N}<|\xi_k|\leqslant k)}\right) &= \sum_{k\geqslant N+1}\frac{1}{k^2}\sum_{j=\alpha+1}^{k} j^2\mathbb{P}(j-1<|\xi_j|\leqslant j) \\
&= \sum_{j\geqslant\alpha+1} j^2\mathbb{P}(j-1<|\xi|\leqslant j)\sum_{k\geqslant j}\frac{1}{k^2} \\
&\leqslant c_{36}\sum_{j\geqslant\alpha+1} j\mathbb{P}(j-1<|\xi|\leqslant j) \\
&\leqslant \frac{c_{37}}{\ln N}\sum_{j\geqslant\alpha+1} j\ln j\mathbb{P}(j-1<|\xi|\leqslant j).
\end{aligned}$$

Donc
$$\frac{1}{t^2}\sum_{j\geqslant N+1}\frac{1}{k^2}\mathbb{E}\left(\xi_k^2\mathbf{1}_{(|\xi_k|\leqslant k)}\right)\leqslant\frac{1}{t^2}\frac{c_{38}}{\ln N}\mathbb{E}|\xi|\ln(1+|\xi|).\tag{2.11}$$
Comme par intégrabilité uniforme $\sup_{\varphi\in\mathcal{U}}\mathbb{E}|\langle\varphi,\mathbf{X}\rangle|\ln(1+|\langle\varphi,\mathbf{X}\rangle|)<+\infty$, les inégalités (2.10) et (2.11) achèvent la démonstration du lemme 2.1.10.

$\square$

Chapitre 3

La loi des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'une des généralisations de la loi des grands nombres de Kolmogorov, à savoir la loi des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund. On considère à nouveau une suite $(\mathbf{X}_i)$ de copies indépendantes d'une v.a. centrée $\mathbf{X}$ à valeurs dans un espace de Banach séparable $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$, $\mathbf{S}_n := \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n$ et, $p \in]1, 2[$ étant fixé, on cherche à trouver une condition nécessaire et suffisante d'intégrabilité portant sur $\mathbf{X}$ pour que la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ soit un amart ou une quasimartingale pour la filtration naturelle associée aux v.a. $\mathbf{X}_i$.

Commençons par rappeler l'énoncé de cette loi des grands nombres.

3.1 La loi des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund dans les espaces de Banach

Dans le cas de v.a. réelles, le théorème suivant est dû à Marcinkiewicz et Zygmund [28] :

Théorème 3.1.1 :
Soit $1 < p < 2$. *Soit* $(\mathbf{X}_i)$ *une suite de copies indépendantes d'une v.a. centrée* $\mathbf{X}$. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

1. *La suite* $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ *converge presque sûrement vers 0 ;*
2. $\mathbb{E}|\mathbf{X}|^p < +\infty$.

Gut a précisé ce résultat en remarquant que, sous les mêmes hypothèses, $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ est un amart borné dans L^1 si et seulement si $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ converge presque sûrement vers 0 (exemple 4.6 de [13]).

Cette loi des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund nécessite, pour se généraliser à des espaces de Banach, une hypothèse de régularité sur l'espace. Plus précisément, De Acosta [8] a montré que cette loi des grands nombres caractérise les espaces de Banach de type p :

Théorème 3.1.2 :
Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach séparable et $1 < p < 2$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *$\mathcal{B}$ est de type p ;*
2. *Pour toute suite $(\mathbf{X}_i)$ de copies indépendantes d'une v.a. $\mathbf{X}$ à valeurs dans $\mathcal{B}$, les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :
   - *$\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ converge vers 0 p.s. ;*
   - *$\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^p < +\infty$ et $\mathbb{E}\mathbf{X} = 0$.*

3.2 Le cas des amarts

Le résultat scalaire de Gut s'étend immédiatement aux espaces de Banach de type p comme le montre le théorème suivant :

Théorème 3.2.1 :
Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach de type $p \in]1,2[$, et $(\mathbf{X}_i)$ une suite de copies indépendantes d'une v.a. centrée $\mathbf{X}$ à valeurs dans $\mathcal{B}$, telle que $\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^p < +\infty$.
Alors $\left(\frac{\|\mathbf{S}_n\|}{n^{1/p}}\right)$ est un amart relativement à la filtration naturelle.

Démonstration :

Ce théorème est une conséquence immédiate du théorème 3.1.2. N'ayant pas trouvé de référence pour sa démonstration, nous en donnons une preuve élémentaire, semblable à celle employée dans le cas Kolmogorov. Considérons la suite d'inégalités suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \sup_{1 \leqslant k < +\infty} \frac{\|\mathbf{X}_k\|}{k^{1/p}} &\leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{1 \leqslant k < +\infty} \frac{\|\mathbf{X}_k\|}{k^{1/p}} > t\right) dt \leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}\left(\frac{\|\mathbf{X}_k\|^p}{t^p} > k\right) dt \\ &\leqslant 1 + \int_1^{+\infty} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^p}{t^p} < +\infty.\end{aligned}$$

Comme $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ converge presque sûrement vers 0 d'après le théorème 3.1.2, le corollaire A.1.4 entraîne que $\mathbb{E} \sup\limits_{1 \leqslant 1 < +\infty} \frac{\|\mathbf{S}_n\|}{n^{1/p}} < +\infty$. Finalement, l'inégalité $\sup\limits_{\substack{\tau \in \mathcal{T} \\ \tau \geqslant N}} \mathbb{E} \frac{\|\mathbf{S}_\tau\|}{\tau^{1/p}} \leqslant \mathbb{E} \sup\limits_{n \geqslant N} \frac{\|\mathbf{S}_n\|}{n^{1/p}}$ entraîne, par le théorème de convergence dominée, que $\left(\frac{\|\mathbf{S}_n\|}{n^{1/p}}\right)$ est un amart.

□

3.3 Le cas des quasimartingales

Plaçons-nous pour commencer dans le cas scalaire. Nous avons vu, dans l'exemple 1.2.4, que nous rappelons ici, que l'hypothèse d'intégrabilité de $|\mathbf{X}|^p$ ne suffit pas à assurer que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ soit une quasimartingale.

Exemple 3.3.1 :
Considérons une v.a. symétrique $\mathbf{X}$ dont la loi vérifie :

$$\forall t > 0,\ \mathbb{P}(|\mathbf{X}|^p > t) = \mathbf{1}_{[0,e^2]}(t) + \frac{\beta}{t(\ln t)^p(\ln\ln t)}\mathbf{1}_{]e^2,+\infty[}(t).$$

où $\beta = 2^p e^2 \ln 2$ et $p \in]1,2[$ est fixé.
$\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ est un amart d'après le théorème 3.2.1. Mais ce n'est pas une quasimartingale.

Cependant, il existe des situations dans lesquelles la suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ est une quasimartingale, par exemple lorsque $\mathbf{X}$ est de carré intégrable.

Se pose donc tout naturellement la question de l'existence d'une condition sur la loi de $\mathbf{X}$ qui soit nécessaire et suffisante pour assurer que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ soit une quasimartingale. Dans le cas scalaire, le problème a été résolu par l'énoncé suivant de Heinkel [15] :

Théorème 3.3.2 :
Soit $(\mathbf{X}_i)$ une suite de copies indépendantes d'une v.a. réelle centrée $\mathbf{X}$, et $p \in]1,2[$ fixé. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ *est une quasimartingale ;*
2. $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}^{1/p}(|\mathbf{X}| > t)dt < +\infty.$

L'objectif de ce chapitre est de généraliser cet énoncé à la dimension infinie. Commençons par remarquer que ce théorème ne se généralise pas immédiatement aux v.a. à valeurs dans un espace de Banach de type p, comme le montre l'exemple détaillé qui suit.

3.4 Un exemple éclairant

Comme nous l'avons vu précédemment, l'hypothèse de type p est nécessaire pour que la loi forte de Marcinkiewicz-Zygmund soit vérifiée. Elle n'est hélas pas suffisante pour généraliser le théorème 3.3.2, comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 3.4.1 :
Soit $1 < p < 2$ et $(\xi_n)_{n\geqslant 2}$ une suite de v.a. indépendantes de même loi de Pareto de paramètres $(1,p)$. Pour tout n, ξ_n admet pour densité :

$$f(x) := \frac{p}{x^{p+1}}\mathbf{1}_{[1;+\infty[}.$$

Soit $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 2}$ une suite de v.a. de Rademacher indépendantes, et indépendante de (ξ_n), et (e_n) la base canonique de ℓ_p.
Soit

$$\mathbf{X} := \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{1/p}(\ln n)^{\frac{p+1}{p}-\frac{p-1}{2p}}}\varepsilon_n\xi_n\mathbf{1}_{(\xi_n\leqslant n^{1/p})}e_n.$$

Alors $\mathbf{X}$ est une v.a. à valeurs dans ℓ_p, vérifiant la condition $\int_0^{+\infty}\mathbb{P}^{1/p}(\|\mathbf{X}\|>t)dt < +\infty$. Pourtant $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ n'est pas une quasimartingale.

Démonstration :

Montrons que $\mathbf{X}$ est une v.a. à valeurs dans ℓ_p :

$$\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|_p^p = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{p+1-\frac{p-1}{2}}}\mathbb{E}|\xi_n\mathbf{1}_{(\xi_n\leqslant n^{1/p})}|^p = c_{39}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\frac{p+3}{2}}}\ln n < +\infty.$$

Montrons que $\mathbf{X}$ vérifie la condition $(\star)$: $\int_0^{+\infty}\mathbb{P}^{1/p}(\|\mathbf{X}\|>t)dt < +\infty$.
Comme toutes les composantes de $\mathbf{X}$ sont de norme inférieure à 1, l'inégalité de Hoffmann-Jørgensen (proposition A.1.3) donne

$$\mathbb{P}(\|\mathbf{X}\|>3n) \leqslant 4\mathbb{P}(\|\mathbf{X}\|^p > n^p)^2 \leqslant 4\frac{(\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^p)^2}{n^{2p}}.$$

Donc, comme $\int_0^{+\infty}(\mathbb{P}(\|\mathbf{X}\|>t))^{1/p} \leqslant 3+3\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}^{1/p}(\|\mathbf{X}\|>3n)$, la condition $(\star)$ est vérifiée.
Soit $(\mathbf{X}_j)$ une suite de copies indépendantes de $\mathbf{X}$. On notera pour tout j :

$$\mathbf{X}_j := \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^{1/p}(\ln n)^{\frac{p+1}{p}-\frac{p-1}{2p}}}\varepsilon_n^j\xi_n^j\mathbf{1}_{(\xi_n\leqslant n^{1/p})}e_n.$$

On pose également, pour tout n : $\mathbf{S}_n := \mathbf{X}_1+\cdots+\mathbf{X}_n$.
Soit ω fixé. Posons :

$$v_k(\omega) := \frac{1}{k^{\frac{p-1}{p}}(\ln k)^{\frac{p-1}{p}+\frac{p-1}{2p}}}sgn\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_k^j\varepsilon_k^j\mathbf{1}_{(\xi_k^j\leqslant k^{1/p})}\right).$$

La suite (v_k) est un élément de $\ell_{\frac{p}{p-1}}$. On pose $v := (cv_k)$ où c est choisi de sorte que $\|v\|_{\frac{p}{p-1}} = 1$.

Comme $\ell_{\frac{p}{p-1}}$ est isomorphe au dual de ℓ_p, l'application :

$$\begin{array}{rrcl} \psi \ : & \ell_p & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x_i) & \longmapsto & c\sum v_i x_i \end{array}$$

est une forme linéaire de norme 1.
Alors, pour tout ω, comme pour tout $x \in \ell_p$, $\|x\|_p = \sup_{\substack{\varphi\in(\ell_p)^* \\ \|\varphi\|=1}} |\langle \varphi, x\rangle|$, on a

$$\frac{\|\mathbf{S}_n(\omega)\|_p}{n^{1/p}} \geqslant \frac{|\langle \psi, \mathbf{S}_n\rangle(\omega)|}{n^{1/p}} \geqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \left| \sum_{j=1}^{n} \frac{\xi_k^j \varepsilon_k^j \mathbf{1}_{\{\xi_k^j \leqslant k^{1/p}\}}(\omega)}{n^{1/p}} \right|,$$

et donc en intégrant :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\frac{\|\mathbf{S}_n\|}{n^{1/p}} &\geqslant \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \mathbb{E}\left| \sum_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{\xi_k^j \varepsilon_k^j \mathbf{1}_{(\xi_k^j \leqslant k^{1/p})}}{n^{1/p}} \right| \\ &\geqslant c_{40} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \mathbb{E} \sup_{1\leqslant j\leqslant n} \frac{\xi_k^j \mathbf{1}_{(\xi_k^j \leqslant k^{1/p})}}{n^{1/p}} \\ &\geqslant c_{40} \sum_{k=4^p n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{1\leqslant j\leqslant n} \xi_k^j \mathbf{1}_{(\xi_k^j \leqslant k^{1/p})} > n^{1/p} t \right) dt. \end{aligned}$$

On constate que pour tout $t \geqslant 2$ et $n \geqslant n_0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\sup_{1\leqslant j\leqslant n} \xi_k^j \mathbf{1}_{(\xi_k^j \leqslant k^{1/p})} > n^{1/p} t) &= 1 - \mathbb{P}(\sup_{1\leqslant j\leqslant n} \xi_k^j \mathbf{1}_{(\xi_k^j \leqslant k^{1/p})} \leqslant n^{1/p} t) = 1 - \left(\mathbb{P}(\xi_k^1 \mathbf{1}_{(\xi_k^1 \leqslant k^{1/p})} \leqslant n^{1/p} t) \right)^n \\ &= 1 - e^{n\ln(1-\mathbb{P}(\xi_k^1 \mathbf{1}_{(\xi_k^1 \leqslant k^{1/p})} > n^{1/p} t))} \geqslant \frac{1}{2} n\mathbb{P}(\xi_k^1 \mathbf{1}_{(\xi_k^1 \leqslant k^{1/p})} > n^{1/p} t), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\frac{\|\mathbf{S}_n\|}{n^{1/p}} &\geqslant c_{41} \sum_{k=4^p n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \int_2^3 n\mathbb{P}(n^{1/p} t < \xi_k^1 \leqslant k^{1/p}) dt \\ &\geqslant c_{42} \sum_{k=4^p n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \int_2^3 \left(\frac{1}{t^p} - \frac{1}{4^p} \right) dt \geqslant c_{43} \sum_{k=4^p n}^{+\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} dt \geqslant c_{44} \frac{1}{\ln n}. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{S}_n\|}{n^{1+\frac{1}{p}}} \geqslant \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)} = +\infty$$

et $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}, \mathcal{F}_n\right)$ n'est pas une quasimartingale.

□

Pour obtenir un résultat de comportement de quasimartingale dans la loi des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund, nous aurons en fait besoin de la notion de type stable d'un espace de Banach, que nous rappelons à présent.

3.5 Type stable d'un espace de Banach

La notion de type d'un espace de Banach rencontrée précédemment est construite à l'aide de v.a. de Rademacher. On peut imaginer des notions similaires pour d'autres v.a. symétriques classiques comme les v.a. normales centrées réduites ou plus généralement les v.a. p-stables :

Définition 3.5.1 :
Soit $0 < p \leqslant 2$. Une v.a. réelle $\mathbf{X}$ est dite p-stable s'il existe $\sigma > 0$ telle que la fonction caractéristique de $\mathbf{X}$ soit de la forme

$$\mathbb{E}e^{it\mathbf{X}} = e^{-\frac{\sigma^p|t|^p}{2}}.$$

Exemple 3.5.2 :
Les v.a. gaussiennes sont 2-stables, les v.a. de Cauchy sont 1-stables.

Remarquons toutefois que les v.a. p-stables n'ont pas de très bonnes propriétés d'intégrabilité, car une v.a. p-stable pour $0 < p < 2$ n'est pas dans L^p.

Pour définir la notion de type p-stable, nous avons besoin de munir l'espace des suites réelles d'une norme faible.
Soit $a := (a_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une suite de réels et (a_k^*) la suite $(|a_k|)$ réordonnée de façon décroissante. Pour $q \geqslant 1$ fixé, $\|a\|_{q,\infty} := \sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} (k^{1/q}a_k^*)$ est appelée norme ℓ_q–faible de la suite a.

Comme $\|a\|_{q,\infty}$ s'exprime également sous la forme $\|a\|_{q,\infty} = \sup\limits_{t>0} (t^p \operatorname{Card}\{k : |a_k| > t\})^{1/p}$, il est naturel de généraliser cette définition aux v.a. comme suit.

On définit ainsi la norme de Laurent $\|\mathbf{X}\|_{p,\infty}$ d'une v.a. $\mathbf{X}$ à valeurs dans $\mathcal{B}$:

$$\|\mathbf{X}\|_{p,\infty} := \left(\sup_{t>0} t^p\mathbb{P}(\|\mathbf{X}\| > t)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Nous pouvons à présent définir les espaces de type stable p :

Définition 3.5.3 :
Soit $1 \leqslant p < 2$. Soit (θ_i) une suite de v.a. i.i.d. p-stables. On dit qu'un espace de Banach séparable B est *de type stable d'ordre p* ou *de type p–stable* s'il existe une constante c_{45} telle que pour toute suite finie (x_i) d'éléments de B, on ait

$$\left\|\sum_i \theta_i x_i\right\|_{p,\infty} \leqslant c_{45}\left(\sum_i \|x_i\|^p\right)^{1/p}.$$

Remarque 3.5.4 :
Un espace de Banach de type stable $1 < p < 2$ est aussi de type p'–stable pour $1 \leqslant p' \leqslant p$.

Le théorème suivant, dû à Pisier [37], précise la relation entre la notion de type (de Rademacher) et celle de type stable :

Théorème 3.5.5 :
Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach et $1 < p \leqslant 2$. Alors

1. *Si $\mathcal{B}$ est de type p-stable, il est de type p ;*
2. *Si $\mathcal{B}$ est de type p, il est de type p'-stable pour tout $p' < p$.*

De plus, un théorème de Maurey et Pisier [31] montre que l'ensemble des q tels que $\mathcal{B}$ soit de type q-stable est un ouvert :

Théorème 3.5.6 :
Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach de type p–stable pour un $p < 2$. Alors $\mathcal{B}$ est aussi de type p'-stable pour un $p' > p$.

À présent, nous pouvons nous intéresser à la généralisation du théorème 3.3.2, dans des espaces de type p-stable.

3.6 La quasimartingale de Marcinkiewicz-Zygmund dans les espaces p-stables

On a le résultat suivant :

Théorème 3.6.1 :
Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach p–stable, $p \in]1, 2[$ étant fixé, et $\mathbf{X}$ une v.a. centrée à valeurs dans $\mathcal{B}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}, \mathcal{F}_n\right)$ *est une quasimartingale ;*
2. $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}^{1/p}(\|\mathbf{X}\| > t)dt < +\infty$.

La seconde propriété semble quelque peu mystérieuse, mais elle s'exprime en fait à l'aide du quantile d'ordre $1 - \frac{1}{n}$ de $\|\mathbf{X}\|$:

$$u_n := \inf \left\{ x | \mathbb{P}(\|\mathbf{X}\| \leqslant x) > 1 - \frac{1}{n} \right\} = \inf \left\{ x | \mathbb{P}(\|\mathbf{X}\| > x) < \frac{1}{n} \right\}.$$

Proposition 3.6.2 :
Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
(a) $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}^{1/p}(\|\mathbf{X}\| > t)dt < +\infty$;
(b) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{u_n}{n^{1+1/p}} < +\infty$;
(c) $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{1+1/p}} \mathbb{E} \sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \|\mathbf{X}_k\| < +\infty$.

Démonstration :

On notera dans la suite $f(t)$ la queue de la distribution de $\|\mathbf{X}\|$:

$$f(t) := \mathbb{P}(\|\mathbf{X}\| > t).$$

On pose également $u_0 := 0$ et $\alpha := \frac{1}{p}$.
Commençons par énoncer un lemme technique que nous démontrerons dans l'annexe de ce chapitre :

Lemme 3.6.3 :
Soit $0 < \alpha < 1$. *Posons* $\delta_{\alpha,n} := \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$. *Posons également, pour* $|x| \leqslant 1$, $G_\alpha(x) := \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \delta_{\alpha,n}(1-x^n)$. *Soit* (a_i) *une suite de nombres positifs et* $A_n := a_1 + \cdots + a_n$. *Alors* :

1. $\sum\limits_{j\geqslant 1} \frac{a_j}{j^\alpha} = \sum\limits_{n\geqslant 1} \delta_{\alpha,n} A_n$;
2. *Pour tout* $n \geqslant 1$, $\frac{\alpha}{(2n)^{\alpha+1}} \leqslant \frac{\alpha}{(n+1)^{\alpha+1}} \leqslant \delta_{\alpha,n} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha+1}}$;
3. *Il existe une constante* $C_\alpha > 0$ *telle que pour tout* $0 \leqslant x \leqslant 1$, *on ait* $(1-x)^\alpha \leqslant G_\alpha(x) \leqslant C_\alpha(1-x)^\alpha$.

Montrons que les propriétés (a) et (b) sont équivalentes.
Pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_j := u_{j+1} - u_j$. Commençons par remarquer que la suite (u_n) est une suite croissante, vérifiant $\sup\limits_{n\geqslant 1} u_n = \|\mathbf{X}\|_\infty$, et que $f(t)$ est nulle pour $t \geqslant \|\mathbf{X}\|_\infty$. Par conséquent, (t_j) est une suite de nombres positifs. L'inégalité :

$$u_1 + \sum_{j\geqslant 1} \int_{u_j}^{u_{j+1}} f^\alpha(t)dt \geqslant \int_0^{+\infty} f^\alpha(t)dt \geqslant \sum_{j\geqslant 1} \int_{u_j}^{u_{j+1}} f^\alpha(t)dt.$$

On en déduit que la propriété (a) est équivalente à la convergence de la série de terme général $\int_{u_j}^{u_{j+1}} f^\alpha(t)dt$.
Comme pour tout $t \in]u_j, u_{j+1}[$, $\frac{1}{j+1} \leqslant f(t) \leqslant \frac{1}{j}$, on obtient la relation

$$\frac{t_j}{2^\alpha j^\alpha} \leqslant \frac{t_j}{(j+1)^\alpha} \leqslant \int_{u_j}^{u_{j+1}} f^\alpha(t)dt \leqslant \frac{t_j}{j^\alpha}.$$

La propriété (a) est donc équivalente à la convergence de la série de terme général $\frac{t_j}{j^\alpha}$. Or la première propriété du lemme 3.6.3 appliquée en posant $a_j := t_j$ nous donne

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{t_j}{j^\alpha} = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{\alpha,n}(u_{n+1} - u_1).$$

L'inégalité suivante, qui découle du second point du lemme 3.6.3, achève de montrer l'équivalence entre les propriétés (a) et (b) :

$$\frac{\alpha}{2^{\alpha+1}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_{n+1} - u_1}{n^{\alpha+1}} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{\alpha,n}(u_{n+1} - u_1) \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_{n+1} - u_1}{n^{\alpha+1}}.$$

Montrons à présent l'équivalence des propriétés (a) et (c). Remarquons tout d'abord que :

$$\mathbb{E} \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \|\mathbf{X}_k\| = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \|\mathbf{X}_k\| > t\right) dt = \int_0^{+\infty} \left(1 - (1 - f(t))^n\right) dt.$$

D'après le troisième point du lemme 3.6.3,

$$\exists C_\alpha > 0, \forall t \geqslant 0,\ f^\alpha(t) \leqslant G_\alpha(1 - f(t)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{\alpha,n} \left(1 - (1 - f(t))^n\right) \leqslant C_\alpha f^\alpha(t).$$

En intégrant cette inégalité et en utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, on obtient

$$\int_0^{+\infty} f^\alpha(t) dt \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \delta_{\alpha,n} \mathbb{E} \sup_{1 \leqslant k \leqslant n} \|\mathbf{X}_k\| \leqslant C_\alpha \int_0^{+\infty} f^\alpha(t) dt.$$

Le second point du lemme 3.6.3 montre alors l'équivalence des propriétés (a) et (c).

□

Une question naturelle est celle de la relation entre l'intégrabilité de $\|\mathbf{X}\|^p$ et la condition 2 du théorème 3.6.1. On a la proposition suivante :

Proposition 3.6.4 :
La condition $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}^{1/p}(\|\mathbf{X}\| > t) dt < +\infty$ *implique que* $\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^p < +\infty$.

Démonstration :

Remarquons tout d'abord la suite d'inégalités suivante :

$$\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^p = p \int_0^{+\infty} t^{p-1} f(t) dt \leqslant u_1^p + p \sum_{j=1}^{+\infty} \int_{u_j}^{u_{j+1}} t^{p-1} f(t) dt \leqslant u_1^p + p \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{u_{j+1}^{p-1}}{j^{1-1/p}} \int_{u_j}^{u_{j+1}} f^{1/p}(t) dt.$$

Or, la condition $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}^{1/p}(\|\mathbf{X}\| > t) dt < +\infty$ étant équivalente à la convergence de la série de terme général $\frac{u_n}{n^{1+1/p}}$ d'après la proposition précédente, et la suite (u_n) étant croissante, la suite de terme général $\frac{u_n}{n^{1/p}}$ tend vers 0. Il existe donc une constante c_{46} telle que :

$$\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^p = u_1^p + c_{47}^{p-1} \int_{u_1}^{+\infty} f^{1/p}(t) dt,$$

ce qui achève la démonstration de la proposition 3.6.4.

□

Nous pouvons à présent passer à la démonstration du théorème 3.6.1.

Démonstration :

Commençons par un lemme technique :

Lemme 3.6.5 *:*
Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach de type q-stable, $1 < q < 2$. Alors il existe une constante $c_{48} > 0$ telle que pour toute suite $(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$ de v.a. indépendantes, de somme $\mathbf{S}_n := \mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_n$, on ait :

$$\mathbb{E}\,\|\mathbf{S}_n - \mathbb{E}\mathbf{S}_n\| \leqslant c_{48}\Delta^{1/q},$$

où

$$\Delta := \Delta(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n) := \sup_{t>0} t^q \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\|\mathbf{X}_k\| > t).$$

Démonstration :

Comme $\mathcal{B}$ est de type q–stable $q > 1$, $\mathcal{B}$ est également de type q'-stable pour un certain $q' > q$ d'après le théorème de Maurey-Pisier (théorème 3.5.6 ci–dessus), et est donc aussi de type de Rademacher q'.
Soit $(\varepsilon_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une suite de v.a. de Rademacher indépendantes définie sur un espace probabilisé $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbb{P}_1)$. Soient $(\mathbf{X}_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ et $(\mathbf{X}'_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ deux suites de v.a. indépendantes, définies respectivement sur des espaces probabilisés $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_2)$ et $(\Omega_3, \mathcal{A}_3, \mathbb{P}_3)$, telles que $\mathbf{X}_k$ et $\mathbf{X}'_k$ aient même loi pour tout k. Soit $\mathbf{S}'_n := \mathbf{X}'_1 + \ldots + \mathbf{X}'_n$ la somme partielle d'ordre n associée la suite $(\mathbf{X}'_k)$.
On notera pour simplifier $\mathbf{N}(\mathbf{X}_k)$ la norme ℓ^q faible du vecteur aléatoire réel $(\|\mathbf{X}_k\|)_{1\leqslant k\leqslant n}$, c'est–à–dire la quantité $\mathbf{N}(\mathbf{X}_k) := \left\|(\|\mathbf{X}_k\|)_{1\leqslant k\leqslant n}\right\|_{q,\infty}$. On notera enfin $\mathbb{E}_i$ l'espérance sur l'espace probabilisé $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mathbb{P}_i)$.
Alors, en appliquant successivement le théorème de Fubini et l'inégalité de Jensen, on obtient par symétrie de $\mathbf{X}_k - \mathbf{X}'_k$:

$$\mathbb{E}_2\|\mathbf{S}_n - \mathbb{E}_3\mathbf{S}'_n\| \leqslant \mathbb{E}_2\mathbb{E}_3\|\mathbf{S}_n - \mathbf{S}'_n\| \leqslant 2\mathbb{E}_2\mathbb{E}_1 \left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\mathbf{X}_k\right\| \leqslant 2\mathbb{E}_2 \left(\mathbb{E}_1\left\|\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k\mathbf{X}_k\right\|^{q'}\right)^{1/q'}$$
$$\leqslant c_{49}\mathbb{E}_2 \left(\sum_{k=1}^{n} \|\mathbf{X}_k\|^{q'}\right)^{1/q'} \leqslant c_{50}\mathbb{E}_2\mathbf{N}(\mathbf{X}_k)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{q'}{q}}}\right)^{1/q'} \leqslant c_{51}\mathbb{E}_2\mathbf{N}(\mathbf{X}_k).$$

L'inégalité de Marcus Pisier A.3.1 nous permet alors de conclure :

$$\mathbb{E}_2\mathbf{N}(\mathbf{X}_k) = \int_0^{\Delta^{1/q}} \mathbb{P}(\mathbf{N}(\mathbf{X}_k) > t)dt + \int_{\Delta^{1/q}}^{+\infty} \mathbb{P}(\mathbf{N}(\mathbf{X}_k) > t)dt \leqslant \Delta^{1/q} + \int_{\Delta^{1/q}}^{+\infty} \frac{2e\Delta}{t^q}dt,$$

ce qui termine la preuve du lemme 3.6.5.

□

À présent, nous pouvons nous intéresser à la démonstration du théorème 3.6.1.

<u>Démonstration :</u>

Commençons par montrer que la propriété 1. implique la propriété 2.
Supposons que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right)$ soit une quasimartingale, c'est–à–dire que :

$$\sum \mathbb{E}\left\|\mathbb{E}\left(\frac{\mathbf{S}_{n+1}}{(n+1)^{1/p}}\middle|\mathcal{F}_n\right) - \frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}\right\| < +\infty.$$

ou encore de façon équivalente, que :

$$\sum \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{S}_n\|}{n^{1+1/p}} < +\infty.$$

En reprenant les notations de la preuve du lemme 3.6.5, et en appliquant les inégalités de Jensen et de Lévy, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_2 \sup_{1\leqslant k\leqslant n} \|\mathbf{X}_k\| &\leqslant 2\mathbb{E}_2 \sup_{1\leqslant k\leqslant n} \|\mathbf{S}_k\| = 2\mathbb{E}_2 \sup_{1\leqslant k\leqslant n} \|\mathbf{S}_k - \mathbb{E}_3(\mathbf{S}'_k)\| \leqslant 2\mathbb{E}_2\mathbb{E}_3 \sup_{1\leqslant k\leqslant n} \|\mathbf{S}_k - \mathbf{S}'_k\| \\ &\leqslant 4\mathbb{E}_2\mathbb{E}_3\|\mathbf{S}_n - \mathbf{S}'_n\| \leqslant 8\mathbb{E}_2\|\mathbf{S}_n\|.\end{aligned}$$

D'après la proposition 3.6.2, la propriété 1. entraîne donc la propriété 2.
Montrons à présent que la propriété 2. entraîne la propriété 1.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k = 1, \ldots, n$, on considère les v.a. tronquées suivantes :

$$\mathbf{U}_k := \mathbf{U}_{n,k} := \mathbf{X}_k\mathbf{1}_{(\|\mathbf{X}_k\|>u_n)} \text{ et } \mathbf{V}_k := \mathbf{V}_{n,k} := \mathbf{X}_k\mathbf{1}_{(\|\mathbf{X}_k\|\leqslant u_n)}.$$

À ces v.a. tronquées, on associe les sommes partielles d'ordre n :

$$\mathbf{T}_n^{(1)} := \sum_{k=1}^n \mathbf{U}_k \text{ et } \mathbf{T}_n^{(2)} := \sum_{k=1}^n \mathbf{V}_k.$$

Si pour tout $j = 1, 2$ la série de terme général $\mathbb{E}\|\mathbf{T}_n^{(j)} - \mathbb{E}\mathbf{T}_n^{(j)}\|/n^{1+1/p}$ converge, alors $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n^{1/p}}, \mathcal{F}_n\right)$ est une quasimartingale. Montrons donc que ces deux séries convergent.

Lemme 3.6.6 :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{1+1/p}}\mathbb{E}\|\mathbf{T}_n^{(1)} - \mathbb{E}\mathbf{T}_n^{(1)}\| < +\infty.$$

Démonstration :

Nous allons tout d'abord prouver que

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{1+1/p}} \mathbb{E}\|\mathbf{T}_n^{(1)}\| < +\infty. \tag{3.1}$$

Remarquons l'inégalité élémentaire suivante :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\|\mathbf{T}_n^{(1)}\| &\leqslant n\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|\mathbf{1}_{(\|\mathbf{X}\|>u_n)} \\ &= nu_n\mathbb{P}(\|\mathbf{X}\| > u_n) + n\int_{u_n}^{+\infty} f(t)dt \leqslant u_n + n\int_{u_n}^{+\infty} f(t)dt.\end{aligned}$$

La proposition 3.6.2 entraîne la convergence de la série de terme général $\frac{u_n}{n^{1+1/p}}$. Il reste donc à vérifier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{n^{1/p}} \int_{u_n}^{+\infty} f(t)dt$.
En écrivant

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1/p} \int_{u_n}^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-1/p} \sum_{j=n}^{+\infty} \int_{u_j}^{u_{j+1}} f(t)dt$$

et en échangeant les deux symboles de sommation, on obtient :

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \left(\int_{u_j}^{u_{j+1}} f(t)dt \right) \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{n^{1/p}} \leqslant c_{52} \sum_{j\geqslant 1} \left(\int_{u_j}^{u_{j+1}} f^{1/p}(t)dt \right) \frac{j^{1-1/p}}{j^{1-1/p}} \leqslant c_{52} \int_0^{+\infty} f^{1/p}(t)dt.$$

Ceci achève la preuve de la relation (3.1).
Comme $\mathbb{E}\|\mathbf{T}_n^{(1)} - \mathbb{E}\mathbf{T}_n^{(1)}\| \leqslant 2\mathbb{E}\|\mathbf{T}_n^{(1)}\|$, la série de terme général $\frac{1}{n^{1+1/p}}\mathbb{E}\|\mathbf{T}_n^{(1)} - \mathbb{E}\mathbf{T}_n^{(1)}\|$ converge.

□

Comme $\mathcal{B}$ est de type stable p, le théorème de Maurey-Pisier entraîne qu'il est aussi de type stable q pour un certain $q > p$, et donc aussi de type de Rademacher q.
Ainsi d'après le lemme 3.6.5 la convergence de la série de terme général $\mathbb{E}\|\mathbf{T}_n^{(2)} - \mathbb{E}\mathbf{T}_n^{(2)}\|/n^{1+1/p}$ est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 3.6.7 :
La série de terme général $\frac{\Delta_n^{1/q}}{n^{1+1/p}}$ *converge, où* $\Delta_n := \Delta(\mathbf{V}_{n,1}, \ldots, \mathbf{V}_{n,n})$.

Démonstration :

Pour commencer, nous allons prouver l'inégalité suivante :

$$\Delta_n \leqslant n\left(\int_0^{u_n} f^{1/q}(t)dt \right)^q. \tag{3.2}$$

L'inégalité évidente :

$$\sup_{x>0}(x^q\mathbb{P}(\|\mathbf{V}_1\|>x)) = \sup_{x\in[0,u_n]}(x^q\mathbb{P}(\|\mathbf{V}_1\|>x)) \leqslant \sup_{x\in[0,u_n]} x^q f(x),$$

ainsi que la décroissance de la fonction f qui fournit :

$$\forall x \geqslant 0,\ x^q f(x) \leqslant \left(\int_0^x f^{1/q}(t)dt\right)^q,$$

impliquent que, pour tout $0<x\leqslant u_n$:

$$x^q\mathbb{P}(\|\mathbf{V}_1\|>x) \leqslant \left(\int_0^{u_n} f^{1/q}(t)dt\right)^q,$$

qui achève la démonstration de la relation (3.2).
Pour terminer la démonstration du lemme, il reste donc à vérifier la convergence de la série de terme général

$$\frac{1}{n^{1+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}}\int_0^{u_n} f^{1/q}(x)dx.$$

En remarquant que

$$J := \sum_{n\geqslant 1} n^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-1\right)}\int_0^{u_n} f^{1/q}(x)dx \leqslant \sum_{n\geqslant 1} n^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}-1\right)} \sum_{0\leqslant j\leqslant n}\int_{u_j}^{u_{j+1}} f^{1/q}(x)dx,$$

et en échangeant une nouvelle fois les sommations en n et j, on obtient

$$J \leqslant c_{53}\left(\sum_{j\geqslant 1} j^{\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\left(\int_{u_j}^{u_{j+1}} f^{1/q}(x)dx\right)+u_1\right) \leqslant c_{54}\left(\int_0^{+\infty} f^{1/p}(x)dx+u_1\right) < +\infty.$$

Ceci achève la preuve du lemme 3.6.7 ainsi que celle du théorème principal.

□

□

3.7 Démonstration du lemme 3.6.3 sur les séries entières

Lemme 3.7.1 :
Soit $0<\alpha<1$. *Posons* $\delta_{\alpha,n} := \frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}$. *Posons également, pour* $|x|\leqslant 1$, $G_\alpha(x) := \sum_{n=1}^{+\infty}\delta_{\alpha,n}(1-x^n)$. *Soit* (a_i) *une suite de nombres positifs et* $A_n := a_1+\cdots+a_n$. *Alors :*

1. $\sum_{j\geqslant 1}\frac{a_j}{j^\alpha} = \sum_{n\geqslant 1}\delta_{\alpha,n}A_n$;
2. *Pour tout* $n\geqslant 1$, $\frac{\alpha}{(2n)^{\alpha+1}} \leqslant \frac{\alpha}{(n+1)^{\alpha+1}} \leqslant \delta_{\alpha,n} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha+1}}$;
3. *Il existe une constante* $C_\alpha>0$ *telle que pour tout* $0\leqslant x\leqslant 1$, *on ait* $(1-x)^\alpha \leqslant G_\alpha(x) \leqslant C_\alpha(1-x)^\alpha$;

Démonstration :

1. Par le théorème de Fubini–Tonelli,
$$\sum_{n\geqslant 1}\delta_{\alpha,n}A_n=\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)\sum_{i=1}^n a_i=\sum_{i\geqslant 1}a_i\sum_{n\geqslant i}\left(\sum_{n\geqslant i}\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)=\sum_{i\geqslant 1}a_i\frac{1}{i^\alpha}.$$
2. Par le théorème des accroissements finis, il existe $\theta_n\in]n,n+1[$ tel que $\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}=\frac{\alpha}{\theta_n^{1+\alpha}}$, d'où le résultat.
3. Tout d'abord, comme pour tout x, $1+x\leqslant e^x$, on a pour tout $j\in\mathbb{N}^*$,
$$1-\frac{\alpha^2}{j^2}=\left(1-\frac{\alpha}{j}\right)\left(1+\frac{\alpha}{j}\right)\leqslant\left(1-\frac{\alpha}{j}\right)e^{\alpha/j}\leqslant 1.$$
Par conséquent la suite de terme général $\left(\prod_{j=1}^n\left(1-\frac{\alpha}{j}\right)e^{\alpha/j}\right)_j$ est décroissante, minorée et donc converge vers $v_\alpha>0$ car $\prod_{j=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\alpha^2}{j^2}\right)>0$. On a donc :
$$\forall j\geqslant 1,\ 0<v_\alpha\leqslant\prod_{j=1}^n\left(1-\frac{\alpha}{j}\right)e^{\alpha/j}\leqslant 1. \tag{3.3}$$
D'autre part, comme
$$\sum_{j=1}^n\frac{1}{j}-1\leqslant\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}\leqslant\ln(n+1)=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx\leqslant\sum_{j=1}^n\frac{1}{j},$$
il découle de l'inégalité (3.3) les inégalités suivantes :
$$\frac{v_\alpha}{e^\alpha(n+1)^\alpha}\leqslant v_\alpha\exp\left(-\sum_{j=1}^n\frac{\alpha}{j}\right)\leqslant\prod_{j=1}^n\left(1-\frac{\alpha}{j}\right)\leqslant\exp\left(-\sum_{j=1}^n\frac{\alpha}{j}\right)\leqslant\frac{1}{(n+1)^\alpha}. \tag{3.4}$$
Le développement en série entière $(1-x)^{\alpha-1}=\sum_{n=0}^{+\infty}(\prod_{j=1}^n(1-\frac{\alpha}{j}))x^n$ permet de déduire de l'inégalité (3.4), en posant $F_\alpha(x):=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{(n+1)^\alpha}$, l'encadrement :
$$\forall\ 0\leqslant x<1,\ \frac{v_\alpha}{e^\alpha}F_\alpha(x)\leqslant(1-x)^{\alpha-1}\leqslant F_\alpha(x).$$
En appliquant à présent le premier point avec $a_i:=(1-x)x^{i-1}$, on obtient $G_\alpha(x)=(1-x)F_\alpha(x)$, ce qui achève la preuve de la propriété 3. avec $C_\alpha:=\frac{e^\alpha}{v_\alpha}$.

□

Chapitre 4

La loi des grands nombres de Cesàro

En toute généralité, le problème de la loi des grands nombres pour une suite de v.a. à valeurs dans un espace de Banach réel séparable $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ peut être posé de la façon suivante : soit une matrice infinie de réels $\{a_{n,j}, 1 \leqslant j \leqslant k_n\}$ et $(\mathbf{X}_i)$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathcal{B}$. Sous quelles hypothèses la suite $\mathbf{Z}_n := \sum\limits_{j=1}^{k_n} a_{n,j}\mathbf{X}_j$ converge-t-elle presque sûrement ?

Dans les deux chapitres précédents, nous nous sommes intéressés aux deux cas particuliers les plus fameux $\left\{a_{n,j} = \frac{1}{n^{1/p}}, j = 1 \ldots n\right\}$ avec $p = 1$ et $p \in]1, 2[$ pour des v.a. $(\mathbf{X}_i)$ indépendantes et équidistribuées. Nous avons constaté que pour que $(\|\mathbf{Z}_n\|)$ ait un comportement d'amart il fallait imposer une condition supplémentaire de régularité à l'espace $\mathcal{B}$ lorsque $1 < p < 2$. De même, pour que $(\mathbf{Z}_n)$ ait un comportement de quasimartingale, nous avons vu qu'il fallait se restreindre à des espaces réguliers lorsque $1 \leqslant p < 2$.

La loi forte des grands nombres a été étudiée pour d'autres matrices célèbres (voir par exemple Bingham [3], Mikosch et Norvaisa [32],[33]...). Dans ce chapitre, nous allons considérer la matrice de Cesàro d'ordre $0 < \alpha < 1$ que nous définirons ci–dessous, et nous établirons que $\|\mathbf{Z}_n\|$ a un comportement d'amart sans hypothèse additionnelle sur l'espace.

4.1 La loi forte des grands nombres au sens de Cesàro dans les espaces de Banach

L'étude des séries divergentes a conduit à la découverte d'autres procédés de sommation. Cesàro a introduit, à la fin du dix-neuvième siècle, le procédé de sommation qui porte son nom.

Commençons par rappeler la définition et quelques propriétés de la convergence au sens de Cesàro de suites de nombres réels.

4.1.0.1 Convergence au sens de Cesàro de suites numériques

Définition 4.1.1 :
Soient $x_0, \ldots, x_n$ $n+1$ réels, et soit $\alpha > -1$ un réel. On appelle *moyenne de Cesàro d'ordre α de $x_0, \ldots, x_n$* le nombre :

$$v_n^\alpha := \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{i=0}^{n} A_{n-i}^{\alpha-1} x_i,$$

où les coefficients sont définis par $A_0^\alpha := 1$ et $\forall n \geqslant 1,\ A_n^\alpha := \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+n)}{n!}$.

Définition 4.1.2 :
Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de réels, et $\alpha > -1$ un réel. On dit que *la suite (x_i) converge au sens de Cesàro d'ordre α*, ou encore que (x_n) converge au sens (C, α) si la suite (v_n^α) des moyennes de Cesàro converge.

Commençons par quelques remarques élémentaires concernant les moyennes de Cesàro :

Remarques 4.1.3 :
- Comme $\alpha > -1$, $A_n^\alpha > 0$, et donc les moyennes de Cesàro d'ordre α sont des moyennes à coefficients positifs.
- Pour $\alpha = 1$, $A_n^1 = n + 1$ et donc la convergence $(C, 1)$ est la convergence au sens de Cesàro "classique".

Les deux remarques qui suivent concernent le comportement de la suite (A_n^α) et nous serviront à de nombreuses reprises par la suite.

Remarques 4.1.4 :
1. Quand $n \to +\infty$, la suite (A_n^α) est équivalente à (n^α).
2. La suite $\left(\sum\limits_{i=0}^{n} \frac{A_{n-i}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}\right)$ est bornée.

Les convergences au sens de Cesàro d'ordres différents sont liées les unes aux autres de la façon suivante :

Proposition 4.1.5 :
- *Si (x_n) converge au sens de Cesàro d'ordre α, alors elle converge au sens de Cesàro d'ordre β vers la même limite, pour tout $\beta > \alpha$.*
- *Il existe des suites convergeant au sens de Cesàro d'ordre α et ne convergeant pas au sens de Cesàro d'ordre $\beta < \alpha$.*

Passons à présent aux convergences au sens de Cesàro de suites de variables aléatoires.

4.1.0.2 Convergence au sens de Cesàro de suites de v.a.

La définition précédente s'étend naturellement aux variables aléatoires :

Définition 4.1.6 :
Soit $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. réelles, et $\alpha > -1$ un réel. On dit que *la suite* $(\mathbf{X}_i)$ *converge p.s. au sens de Cesàro d'ordre* α, ce que l'on note (C,α)–p.s. si la suite de variables aléatoires $(\mathbf{V}_n^\alpha)$ définie par :

$$\mathbf{V}_n^\alpha := \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{i=0}^{n} A_{n-i}^{\alpha-1}\mathbf{X}_i$$

converge presque sûrement.

La convergence au sens de Cesàro d'ordre 1 étant, avec les notations habituelles, la convergence presque sûre de $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$, il est naturel de se demander sous quelles hypothèses la loi des grands nombres de Kolmogorov s'étend aux sommes de Cesàro générales.

La réponse à cette question est fournie par le théorème suivant, qui a été démontré en trois temps. Tout d'abord Lorentz [27] a étudié le cas $1/2 < \alpha < 1$ en 1955, puis Chow et Lai [6] ont montré le résultat dans le cas $0 < \alpha < 1/2$ en 1973. Il a fallu attendre 1988 pour que Deniel et Derriennic [9] achèvent la démonstration en traitant le cas $\alpha = 1/2$:

Théorème 4.1.7 :
Soit $(\mathbf{X}_i)$ *une suite de copies indépendantes d'une variable aléatoire réelle* $\mathbf{X}$, *et* $0 < \alpha < 1$ *un réel. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

1. *La suite* $(\mathbf{X}_i)$ *converge* (C,α)*–p.s. ;*
2. $\mathbb{E}|\mathbf{X}|^{\frac{1}{\alpha}} < +\infty$.

Dans ce cas, la limite de $(\mathbf{V}_n^\alpha)$ *est presque sûrement constante et vaut* $\mathbb{E}\mathbf{X}$.

On peut évidemment considérer également des sommes de Cesàro pour des v.a. à valeurs dans un espace de Banach. On a alors l'analogue suivant du théorème 4.1.7 :

Théorème 4.1.8 :
Soit $(\mathbf{X}_i)$ *une suite de copies indépendantes d'une variable aléatoire centrée* $\mathbf{X}$ *à valeurs dans* $\mathcal{B}$, *et* $0 < \alpha \leqslant 1$ *un réel. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

1. *La suite* $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *converge* (C,α)*–p.s. vers 0 ;*
2. $\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^{\frac{1}{\alpha}} < +\infty$.

Ce résultat, généralisation du théorème 4.1.7, est dû à Heinkel [16].

Par analogie avec les lois fortes des grands nombres de Kolmogorov et de Marcinkiewicz-Zygmund, il est naturel de se poser la question d'un éventuel comportement de martingale généralisée des sommes de Cesàro. La réponse à cette question fait l'objet de ce chapitre.

4.2 Martingale généralisée de Cesàro

Théorème 4.2.1 :
Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach séparable et $(\mathbf{X}_n)$ une suite de copies indépendantes d'une variable aléatoire fortement centrée $\mathbf{X}$ à valeurs dans $\mathcal{B}$. Alors :

1. *$(\mathbf{V}_n^\alpha)$ n'est jamais une quasimartingale ;*
2. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*
   - *(a) $(\|\mathbf{V}_n^\alpha\|)$ est un amart tel que $\lim\limits_{N\to+\infty} \sup\limits_{\tau\geqslant N} \mathbb{E}\|\mathbf{V}_\tau^\alpha\| = 0$;*
   - *(b) $\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^{\frac{1}{\alpha}} < +\infty$.*

Avant de démontrer le résultat, signalons que ce théorème admet le corollaire suivant, qui n'est autre que l'une des implications du théorème (4.1.8) :

Corollaire 4.2.2 :
Soit $\mathcal{B}$ un espace de Banach séparable et $(\mathbf{X}_n)$ une suite de copies indépendantes d'une variable aléatoire fortement centrée $\mathbf{X}$ à valeurs dans $\mathcal{B}$. Supposons $\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^{\frac{1}{\alpha}} < +\infty$. Alors la suite $(\mathbf{X}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge (C,α)–p.s vers 0.

Démonstration :

Remarquons que

$$\sup_n \mathbb{E}\|\mathbf{V}_n^\alpha\| \leqslant \left(\sup_n \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}\right) \mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^{1/\alpha} < +\infty.$$

L'amart $(\|\mathbf{V}_n^\alpha\|)$ étant borné dans L^1, il converge presque sûrement d'après le théorème 1.1.10. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\|\mathbf{V}_n^\alpha\| = 0$, il vient $\|\mathbf{V}_n^\alpha\| \longrightarrow 0$ *p.s.*

□

Précisons que la démonstration de l'implication $(b) \Longrightarrow (a)$ de notre résultat ne fait pas appel à la condition suffisante du théorème 4.1.8 et que nous fournissons ainsi une preuve donnant à la fois la condition suffisante du théorème 4.1.8 et le caractère d'amart de $\|\mathbf{V}_n^\alpha\|$.

Démonstration :

Commençons par signaler que la suite de variables aléatoires considérée étant définie pour

$n \geqslant 0$, la filtration naturelle a pour premier élément $\mathcal{F}_0 := \sigma\{\mathbf{X}_0\}$. Signalons également que $\mathcal{F}_{-1} := \sigma\{\emptyset, \Omega\}$ désigne la tribu triviale.

- Le point 1. est facile à vérifier.

- L'implication $(a) \Longrightarrow (b)$ résulte du théorème 4.1.8, via la preuve du corollaire 4.2.2.

- Montrons à présent que la propriété (b) implique la propriété (a).

Commençons par démontrer le résultat pour une variable aléatoire $\mathbf{X}$ symétrique. Pour k variant de 1 à n, définissons les variables tronquées $\mathbf{Y}_{nk} := \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\{\|\mathbf{X}_k\| \leqslant n^\alpha\}}$ et $\mathbf{Z}_{nk} := \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\{\|\mathbf{X}_k\| > n^\alpha\}}$. Désignons par $\mathbf{U}_n$ et $\mathbf{W}_n$ les sommes de Cesàro d'ordre α associées respectivement à $(\mathbf{Y}_{nk})_{1 \leqslant k \leqslant n}$ et à $(\mathbf{Z}_{nk})_{1 \leqslant j \leqslant n}$.
Enfin, pour ne pas alourdir les notations, nous noterons simplement $\mathbf{V}_n$ au lieu de $\mathbf{V}_n^\alpha$ la moyenne de Cesàro d'ordre α des $(\mathbf{X}_i)$.
Écrivons la majoration évidente

$$\|\mathbf{V}_n\| \leqslant \|\mathbf{W}_n\| + \|\mathbf{U}_n\| - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\| + \mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\|.$$

Nous allons successivement montrer que $(\|\mathbf{W}_n\|)$ est une quasimartingale, et donc un amart, puis que $(\|\mathbf{U}_n\| - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\|)$ est un amart, et enfin que $(\mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\|)$ tend vers 0 pour prouver le résultat annoncé.

Lemme 4.2.3 *:*
$(\|\mathbf{W}_n\|, \mathcal{F}_n)$ *est une quasimartingale.*

DÉMONSTRATION :

Il résulte de l'inégalité triangulaire inversée que :

$$\left| \left\| \sum_{k=0}^{n+1} \frac{A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_{n+1}^\alpha} \mathbf{Z}_{(n+1),k} \right\| - \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \mathbf{Z}_{n,k} \right\| \right| \leqslant \left\| \sum_{k=0}^{n+1} \frac{A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_{n+1}^\alpha} \mathbf{Z}_{(n+1),k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \mathbf{Z}_{n,k} \right\|$$
$$\leqslant \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_{n+1}^\alpha} \mathbf{Z}_{(n+1),k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \mathbf{Z}_{n,k} \right\| + \frac{1}{A_{n+1}^\alpha} \|\mathbf{Z}_{n+1,n+1}\|.$$

On a donc

$$\mathbb{E}\left(\left| \left\| \sum_{k=0}^{n+1} \frac{A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_{n+1}^\alpha} \mathbf{Z}_{(n+1),k} \right\| - \left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \mathbf{Z}_{n,k} \right\| \right| \middle| \mathcal{F}_n \right)$$
$$\leqslant \mathbb{E}\left(\left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_{n+1}^\alpha} \mathbf{Z}_{(n+1),k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \mathbf{Z}_{n,k} \right\| \middle| \mathcal{F}_n \right) + \frac{1}{A_{n+1}^\alpha} \mathbb{E}\|\mathbf{Z}_{n+1,n+1}\|.$$

Comme $\sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_{n+1}^\alpha} \mathbf{Z}_{(n+1),k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha} \mathbf{Z}_{n,k} = \mathbb{E}\left(\mathbf{W}_{n+1} - \mathbf{W}_n \mid \mathcal{F}_n\right)$ et que la suite $(\mathbf{W}_n)$ est une quasimartingale (ce fait fera l'objet du lemme (4.2.12) que nous démontrerons à la fin de ce chapitre), la série de terme général $\mathbb{E}\left(\left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_{n+1}^{\alpha}} \mathbf{Z}_{(n+1),k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_{n}^{\alpha}} \mathbf{Z}_{n,k} \right\| \middle| \mathcal{F}_n\right)$ converge.

Il ne reste donc plus qu'à considérer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{A_{n+1}^{\alpha}} \mathbb{E}\|\mathbf{Z}_{n+1,n+1}\|$. Or

$$\mathbb{E}\|\mathbf{Z}_{n+1,n+1}\| \leqslant 2 \sum_{j=n+1}^{+\infty} j^{\alpha} \mathbb{P}(j^{\alpha} \leqslant \|\mathbf{Z}_{n+1,n+1}\| < (j+1)^{\alpha}) = 2 \sum_{j=n+1}^{+\infty} j^{\alpha} \mathbb{P}(j^{\alpha} \leqslant \|\mathbf{X}\| < (j+1)^{\alpha}),$$

donc, comme d'après la remarque 4.1.4 $A_n^{\alpha} \sim n^{\alpha}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{A_{n+1}^{\alpha}} \mathbb{E}\|\mathbf{Z}_{n+1,n+1}\| &\leqslant c_{55} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \sum_{j=n+2}^{+\infty} j^{\alpha} \mathbb{P}(j^{\alpha} \leqslant \|\mathbf{X}\| < (j+1)^{\alpha}) \\
&\leqslant c_{55} \sum_{j=1}^{+\infty} j^{\alpha} \mathbb{P}(j^{\alpha} \leqslant \|\mathbf{X}\| < (j+1)^{\alpha}) \sum_{n=1}^{j-1} \frac{1}{(n+1)^{\alpha}} \\
&\leqslant c_{55} \sum_{j=1}^{+\infty} j \mathbb{P}(j^{\alpha} \leqslant \|\mathbf{X}\| < (j+1)^{\alpha}) \leqslant c_{56} \mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^{1/\alpha} < +\infty.
\end{aligned}$$

Ceci achève la démonstration du lemme 4.2.3.

□

Lemme 4.2.4 *La suite* $(\|\mathbf{U}_n\| - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\|)$ *est un amart.*

Soit $\mathcal{T}$ un temps d'arrêt borné compris entre M et N ($M \leqslant N$), et $r > 4$ un multiple de 4 tel que $r(1-\alpha) > 1$, $r > \frac{1}{\alpha}$.
On a alors :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathcal{T}=n} (\|\mathbf{U}_{\mathcal{T}}\| - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_{\mathcal{T}}\|)\, d\mathbb{P} \right| &= \left| \sum_{k=M}^{N} \int_{\mathcal{T}=k} (\|\mathbf{U}_n\| - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\|)\, d\mathbb{P} \right| \\
&\leqslant \sum_{k=M}^{N} (\mathbb{P}(\mathcal{T}=k))^{1-\frac{1}{r}} (\mathbb{E}|\|\mathbf{U}_n\| - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\||^{r})^{\frac{1}{r}}. \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Majorons à présent la quantité $\mathbb{E}|\|\mathbf{U}_n\| - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\||^r$ à l'aide de l'inégalité de Rosenthal pour les martingales (Proposition A.2.2).

En effet, écrivons $\|\mathbf{U}_n\| - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\| = \mathbb{E}(\|\mathbf{U}_n\||\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(\|\mathbf{U}_n\||\mathcal{F}_{n-1}) + \mathbb{E}(\|\mathbf{U}_n\||\mathcal{F}_{n-1}) - \cdots + \mathbb{E}(\|\mathbf{U}_n\||\mathcal{F}_0) - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\|$. La suite de terme général $\mathbb{E}(\|\mathbf{U}_n\||\mathcal{F}_{k+1}) - \mathbb{E}(\|\mathbf{U}_n\||\mathcal{F}_k)$ pour $k \in [\![0, n-1]\!]$ constitue bien une différence de martingale relative à la filtration $(\mathcal{F}_k)_{k \geqslant -1}$.
L'inégalité de Rosenthal s'écrit alors :

$$\mathbb{E}|\|\mathbf{U}_n\| - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\||^r \leqslant c_{57}\left[\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}(\mathbf{T}_{n,i}^2|\mathcal{F}_i)\right)^{r/2} + \sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}|\mathbf{T}_{n,i}|^r\right], \tag{4.2}$$

avec $\mathbf{T}_{n,i} := \mathbb{E}(\|\mathbf{U}_n\||\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(\|\mathbf{U}_n\||\mathcal{F}_{i-1})$.

D'autre part, notons que d'après un argument classique dû à Yurinskii [43],

$$\forall i,\ |\mathbf{T}_{n,i}| \leqslant \|\tilde{\mathbf{Y}}_{n,i}\| + \mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{Y}}_{n,i}\|,\ \text{où } \tilde{\mathbf{Y}}_{n,i} := \frac{A_{n-i}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}\mathbf{Y}_{n,i}. \tag{4.3}$$

Lemme 4.2.5 *:*
La série de terme général $\sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}|\mathbf{T}_{n,i}|^r$ *converge.*

<u>DÉMONSTRATION :</u>

En effet, la relation (4.3) permet d'obtenir l'inégalité $\mathbb{E}|\mathbf{T}_{n,i}|^r \leqslant c_{58}\mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{Y}}_{n,i}\|^r$, de sorte que la remarque 4.1.4 et le choix de r tel que $r(\alpha-1) < -1$ donnent :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}|\mathbf{T}_{n,i}|^r &\leqslant c_{58}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{A_{n-i}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}\right)^r\mathbb{E}\|\mathbf{Y}_{n,i}\|^r \leqslant c_{59}\mathbb{E}\|\mathbf{Y}_{n,1}\|^r\frac{1}{n^{r\alpha}}\sum_{i=0}^{n}(n-i)^{r(\alpha-1)}\\ &\leqslant c_{59}\mathbb{E}\|\mathbf{Y}_{n,1}\|^r\frac{1}{n^{r\alpha}}\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^{r(1-\alpha)}}\right) \leqslant c_{59}\mathbb{E}\|\mathbf{Y}_{n,1}\|^r\frac{1}{n^{r\alpha}}\left(1+\sum_{i=1}^{+\infty}\frac{1}{i^{r(1-\alpha)}}\right)\\ &\leqslant c_{60}\frac{1}{n^{r\alpha}}\mathbb{E}\|\mathbf{Y}_{n,1}\|^r. \end{aligned}\tag{4.4}$$

Le changement de variable $u = xn^{-\alpha}$ permet alors d'obtenir :

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{r\alpha}}\mathbb{E}\|\mathbf{Y}_{n,1}\|^r &= \frac{1}{n^{r\alpha}}r\int_0^{+\infty}x^{r-1}\mathbb{P}(\|\mathbf{Y}_{n,1}\| > x)dx \leqslant \frac{1}{n^{r\alpha}}r\int_0^{n^\alpha}x^{r-1}\mathbb{P}(\|\mathbf{X}_1\| > x)dx\\ &= r\int_0^1 u^{r-1}\mathbb{P}\left(\frac{\|\mathbf{X}_1\|}{n^\alpha} > u\right)du.\end{aligned}$$

Puis, en sommant :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{r\alpha}}\mathbb{E}\|\mathbf{Y}_{n,1}\|^r \leqslant r\int_0^1 u^{r-1}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\|\mathbf{X}_1\|^{\frac{1}{\alpha}}}{u^{1/\alpha}} > n\right)du \leqslant r\int_0^1 u^{r-1}\frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^{1/\alpha}}{u^{1/\alpha}}du,$$

quantité qui est finie d'après les hypothèses faites sur r.

Remarquons que nous avons utilisé le fait que pour toute variable aléatoire positive $\mathbf{T}$,

$$\mathbb{E}\mathbf{T} = \int_0^{+\infty}\mathbb{P}(\mathbf{T} > x)dx = \sum_{i=0}^{+\infty}\int_i^{i+1}\mathbb{P}(\mathbf{T} > x)dx \geqslant \sum_{i=0}^{+\infty}\mathbb{P}(\mathbf{T} > i+1). \qquad \square$$

Lemme 4.2.6 *:*
La série de terme général $\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}(\mathbf{T}_{n,i}^2|\mathcal{F}_i)\right)^{r/2}$ *converge.*

Démonstration :

En effet, comme $|\mathbf{T}_{n,i}|^2 \leqslant c_{61}(\|\tilde{\mathbf{Y}}_{n,i}\|^2 + \mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{Y}}_{n,i}\|^2)$, $\mathbb{E}(\mathbf{T}_{n,i}^2|\mathcal{F}_i) \leqslant c_{61}(\|\tilde{\mathbf{Y}}_{n,i}\|^2 + \mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{Y}}_{n,i}\|^2)$.
Écrivons $\|\tilde{\mathbf{Y}}_i\|^2 + \mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{Y}}_i\|^2 = \|\tilde{\mathbf{Y}}_i\|^2 - \mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{Y}}_i\|^2 + 2\mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{Y}}_i\|^2$.
L'inégalité $(a+b)^{r/2} \leqslant 2^{r/2-1}(a^{r/2}+b^{r/2})$ permet d'obtenir :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\mathbf{T}_i^2|\mathcal{F}_i)\right)^{r/2} \leqslant c_{62}\mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n}\|\tilde{\mathbf{Y}}_i\|^2 - \mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{Y}}_i\|^2\right)^{r/2} + c_{63}\left(\sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{Y}}_i\|^2\right)^{r/2}. \quad (4.5)$$

Lemme 4.2.7 *:*
La série de terme général $a_n := \mathbb{E}\left(\sum_{i=0}^{n}\|\tilde{\mathbf{Y}}_{n,i}\|^2 - \mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{Y}}_{n,i}\|^2\right)^{r/2}$ *converge.*

Démonstration :

Pour démontrer ce lemme, on utilise l'inégalité de Rosenthal pour des sommes de v.a. indépendantes A.2.3 et, avec ses notations, on a :

$$a_n \leqslant C(r)\left(B_n^{r/4} + M_{r,n/2}\right),$$

avec

- $M_{r/2,n} := \sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}\left|\|\tilde{\mathbf{Y}}_{n,i}\|^2 - \mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{Y}}_{n,i}\|^2\right|^{r/2} \leqslant c_{64}\sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{Y}}_{n,i}\|^r$, quantité dont on a vu dans la démonstration du lemme 4.2.5 (relation (4.4)) qu'elle était le terme général d'une série convergente,
- et $B_n := \sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}\left|\|\tilde{\mathbf{Y}}_{n,i}\|^2 - \mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{Y}}_{n,i}\|^2\right|^2 \leqslant c_{65}\sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{Y}}_{n,i}\|^4$.
  On a

$$A := \sum_{i=0}^{n}\mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{Y}}_{n,i}\|^4 \leqslant \frac{c_{66}}{n^{4\alpha}}\left(\mathbb{E}\|\mathbf{Y}_{n,0}\| + \sum_{i=1}^{n} i^{4(\alpha-1)}\mathbb{E}\|\mathbf{Y}_{n,i}\|^4\right).$$

  - Lorsque $\alpha > \frac{3}{4}$, i.e. $4(\alpha-1) > -1$, on peut majorer $\frac{1}{n^{4\alpha}}\sum_{i=1}^{n} i^{4(\alpha-1)}\mathbb{E}\|\mathbf{Y}_{n,i}\|^4$ par $\frac{c_{67}}{n^{4\alpha}}n^{4(\alpha-1)+1}\mathbb{E}\|\mathbf{Y}_{n,i}\|^4 = n^{-3}\mathbb{E}\|\mathbf{Y}_{n,i}\|^4 \leqslant n^{-3}n^{(4-\frac{1}{\alpha})\alpha}\mathbb{E}\|\mathbf{X}_1\|^{\frac{1}{\alpha}} = n^{4(\alpha-1)}\mathbb{E}\|\mathbf{X}_1\|^{\frac{1}{\alpha}}$. On a alors :

$$B_n^{r/4} \leqslant c_{68}n^{r(\alpha-1)}(\mathbb{E}\|\mathbf{X}_1\|^{\frac{1}{\alpha}})^{r/4}.$$

- Pour $4(\alpha-1) < -1$, i.e $\alpha < \frac{3}{4}$, le même argument que pour la preuve de la relation (4.4) permet de majorer $\frac{1}{n^{4\alpha}} \sum_{i=1}^{n} i^{4(\alpha-1)} \mathbb{E}\|\mathbf{Y}_{n,i}\|^4$ par $\frac{c_{69}}{n^{4\alpha}} \mathbb{E}\|\mathbf{Y}_{n,i}\|^4 \leqslant \frac{1}{n^{4\alpha}} n^{(4-\frac{1}{\alpha})\alpha} \mathbb{E}\|\mathbf{X}_1\|^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{n}\mathbb{E}\|\mathbf{X}_1\|^{\frac{1}{\alpha}}$. On a alors :
$$B_n^{r/4} \leqslant c_{70} \frac{1}{n^{r/4}} (\mathbb{E}\|\mathbf{X}_1\|^{\frac{1}{\alpha}})^{r/4}.$$
- Pour $4(\alpha-1) = -1$, i.e $\alpha = \frac{3}{4}$, on majore $\frac{1}{n^{4\alpha}} \sum_{i=1}^{n} i^{4(\alpha-1)} \mathbb{E}\|\mathbf{Y}_{n,i}\|^4$ par la quantité $\frac{c_{71}\ln(n)}{n^{4\alpha}} n^{(4-\frac{1}{\alpha})\alpha} \mathbb{E}\|\mathbf{X}_1\|^{\frac{1}{\alpha}} = \ln(n) n^{-1} \mathbb{E}\|\mathbf{X}_1\|^{\frac{1}{\alpha}}$. On a alors :
$$B_n^{r/4} \leqslant c_{72} \frac{\ln(n)^{r/4}}{n^{r/4}} (\mathbb{E}\|\mathbf{X}_1\|^{\frac{1}{\alpha}})^{r/4}.$$

Dans tous les cas, $B_n^{r/4}$ est le terme général d'une série convergente.

Lemme 4.2.8 *:*
La série de terme général $C_n^{r/2} := \left(\sum_{i=0}^{n} \mathbb{E}\|\tilde{\mathbf{Y}}_i\|^2 \right)^{r/2}$ *converge.*

Démonstration :

En utilisant à nouveau l'argument de la preuve de (4.4), il vient
$$\sum_{k=0}^{n} \mathbb{E} \left\| \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} \mathbf{X}_k \mathbf{1}_{\{|\mathbf{X}_k| \leqslant n^{\alpha}\}} \right\|^2 \leqslant c_{73} \mathbb{E}\left(\|\mathbf{X}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\mathbf{X}\| \leqslant n^{\alpha}\}} \right) \frac{1}{n^{2\alpha}} \left(1 + \sum_{j=1}^{n} j^{2(\alpha-1)} \right).$$

- Lorsque $\alpha < \frac{1}{2}$, on a $2 < \frac{1}{\alpha}$, donc $\mathbf{X}$ a un moment d'ordre 2. De plus, $2(\alpha-1) < -1$, donc la série de terme général $j^{2(\alpha-1)}$ converge.
  Alors $C_n \leqslant c_{74} \frac{1}{n^{2\alpha}} \mathbb{E}\left(\|\mathbf{X}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\mathbf{X}\| \leqslant n^{\alpha}\}} \right) \leqslant c_{74} \frac{1}{n^{2\alpha}} \mathbb{E}\left(\|\mathbf{X}\|^2 \right)$ et donc :
$$C_n^{r/2} \leqslant c_{75} \frac{1}{n^{r\alpha}} \left(\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^2 \right)^{r/2}.$$
- Lorsque $\alpha > \frac{1}{2}$, $2(\alpha-1) > -1$, donc $\sum_{j=1}^{n} j^{2(\alpha-1)} \leqslant c_{76} n^{2\alpha-1}$.
  Alors
  $C_n \leqslant c_{77} \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\|\mathbf{X}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\mathbf{X}\| \leqslant n^{\alpha}\}} \right) \leqslant c_{77} \frac{1}{n} \mathbb{E}\left(\|\mathbf{X}\|^{\frac{1}{\alpha}} n^{\alpha(2-\frac{1}{\alpha})} \mathbf{1}_{\{\|\mathbf{X}\| \leqslant n^{\alpha}\}} \right) \leqslant c_{77} n^{2\alpha-1-1} \mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^{\frac{1}{\alpha}}$, et donc :
$$C_n^{r/2} \leqslant \frac{c_{78}}{n^{r(1-\alpha)}} \left(\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{r/2}.$$
- Lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$, $C_n \leqslant \frac{c_{79} \ln n}{n^{2\alpha}} \mathbb{E}\left(\|\mathbf{X}\|^2 \mathbf{1}_{\{\|\mathbf{X}\| \leqslant n^{\alpha}\}} \right)$.

On déduit des trois points précédents que la série de terme général $C_n^{r/2}$ converge.

□

Revenons à présent à la relation (4.1) :

$$\left|\int_{\mathcal{T}=n} (\|\mathbf{U}_{\mathcal{T}}\| - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_{\mathcal{T}}\|)\, d\mathbb{P}\right| \leqslant \sum_{k=M}^{N} (\mathbb{P}(\mathcal{T}=k))^{1-\frac{1}{r}} (\mathbb{E}|\|\mathbf{U}_n\| - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\||^r)^{\frac{1}{r}}.$$

Écrivons l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=M}^{N} (\mathbb{P}(\mathcal{T}=k))^{1-\frac{1}{r}} (\mathbb{E}|\|\mathbf{U}_n\| - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\||^r)^{\frac{1}{r}} \\ &\leqslant \left(\sum_{k=M}^{N} \mathbb{P}(\mathcal{T}=k)^{\frac{r-1}{r}\frac{r}{r-1}}\right)^{\frac{r-1}{r}} \left(\sum_{k=M}^{N} (\mathbb{E}|\|\mathbf{U}_n\| - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\||^r)^{\frac{r}{r}}\right)^{1/r}.\end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant la majoration (4.2) et en tenant compte des quatre lemmes précédents,

$$\left|\int_{\mathcal{T}=n} (\|\mathbf{U}_{\mathcal{T}}\| - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_{\mathcal{T}}\|)\, d\mathbb{P}\right| \leqslant \left(\sum_{k=M}^{+\infty} \mathbb{E}|\|\mathbf{U}_n\| - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\||^r\right)^{1/r},$$

qui tend vers 0 quand M tend vers $+\infty$. Ceci achève la preuve du lemme 4.2.4.

□

Il ne reste donc plus qu'à démontrer le lemme suivant pour achever la preuve du théorème 4.2.1.

Lemme 4.2.9 *:*
$\mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\| \longrightarrow 0.$

Démonstration :

Écrivons $\mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\| \leqslant \mathbb{E}\|\mathbf{W}_n\| + \mathbb{E}\|\mathbf{V}_n\|$ et montrons que chacune de ces deux suites majorantes converge vers 0.

Lemme 4.2.10 :
$\mathbb{E}\|\mathbf{W}_n\| \to 0.$

Démonstration :

On a, en vertu du second point de la remarque 4.1.4,

$$\mathbb{E}\|\mathbf{W}_n\| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} \mathbb{E}\|\mathbf{Z}_{n,k}\| \leqslant c_{80}\mathbb{E}\|\mathbf{Z}_{n,1}\| \leqslant \sum_{j=n+1}^{+\infty} j^{\alpha}\mathbb{P}(j^{\alpha} \leqslant \|\mathbf{X}\| < (j+1)^{\alpha}).$$

Comme $\sum_{j=1}^{+\infty} j^\alpha \mathbb{P}(j^\alpha \leqslant \|\mathbf{X}\| < (j+1)^\alpha) \leqslant 1 + \mathbb{E}\|\mathbf{X}\|$, $\mathbb{E}\|\mathbf{W}_n\|$ tend bien vers 0.

□

Lemme 4.2.11 :
$\mathbb{E}\|\mathbf{V}_n\| \to 0$.

<u>Démonstration :</u>

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Comme $\mathcal{B}$ est séparable, il existe une suite de v.a. i.i.d., mettons $(\mathbf{H}_n(\varepsilon))$, qui ne prennent qu'un nombre fini de valeurs, et telle que $\mathbb{E}\|\mathbf{X}_n - \mathbf{H}_n(\varepsilon)\| < \varepsilon$.
On écrit alors

$$\mathbf{V}_n = \left(\mathbf{V}_n - \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}\mathbf{H}_k(\varepsilon)\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}\mathbf{H}_k(\varepsilon) - \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}\mathbb{E}\mathbf{H}_k(\varepsilon)\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}\mathbb{E}\mathbf{H}_k(\varepsilon)\right)$$

et on montre que l'espérance de la norme de chacun des trois termes est plus petite que ε pour n assez grand.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\|\mathbf{V}_n - \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}\mathbf{H}_k(\varepsilon)\right\| &= \mathbb{E}\left\|\sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}(\mathbf{X}_k - \mathbf{H}_k(\varepsilon))\right\| \\
&\leqslant \mathbb{E}\sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}\|\mathbf{X}_k - \mathbf{H}_k(\varepsilon)\| \\
&\leqslant \varepsilon.
\end{aligned}$$

- Écrivons $\mathbf{H}_n(\varepsilon) := \sum_{j=1}^{k} b_j \mathbf{1}_{B_{n,j}}$. On a alors $\mathbf{H}_n(\varepsilon) - \mathbb{E}(\mathbf{H}_n(\varepsilon)) = \sum_{j=1}^{k} b_j(\mathbf{1}_{B_{n,j}} - \mathbb{P}(B_{n,j}))$, d'où

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{l=1}^{n} \frac{A_{n-l}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}(\mathbf{H}_l(\varepsilon) - \mathbb{E}(\mathbf{H}_l(\varepsilon)))\right\| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \|b_j\| \mathbb{E}\left|\sum_{l=1}^{n} \frac{A_{n-l}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}(\mathbf{1}_{B_{l,j}} - \mathbb{P}(B_{l,j}))\right|.$$

Or, les $B_{k,j}$ étant disjoints,

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}\left|\sum_{l=1}^{n} \frac{A_{n-l}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}(\mathbf{1}_{B_{l,j}} - \mathbb{P}(B_{l,j}))\right|\right)^2 &\leqslant \mathbb{E}\left|\sum_{l=1}^{n} \frac{A_{n-l}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}(\mathbf{1}_{B_{l,j}} - \mathbb{P}(B_{l,j}))\right|^2 \leqslant \left|\sum_{l=1}^{n} \frac{(A_{n-l}^{\alpha-1})^2}{(A_n^\alpha)^2}\mathbb{P}(B_{l,j})\right| \\
&\leqslant \frac{1}{n^{2\alpha}} n^{2(\alpha-1)+1} \leqslant \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{l=1}^{n} \frac{A_{n-l}^{\alpha-1}}{A_n^\alpha}(\mathbf{H}_l(\varepsilon) - \mathbb{E}(\mathbf{H}_l(\varepsilon)))\right\| \leqslant \sum_{j=1}^{k} \|b_j\| \left(\frac{1}{n}\right)^{1/2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On a $\mathbf{H}_n(\varepsilon) = (\mathbf{H}_n(\varepsilon) - \mathbf{X}_n) + \mathbf{X}_n$, donc comme $\mathbf{X}$ est centrée, $\mathbb{E}(\mathbf{H}_n(\varepsilon)) = \mathbb{E}(\mathbf{H}_n(\varepsilon) - \mathbf{X}_n)$. Or $\mathbb{E}\|\mathbf{X}_n - \mathbf{H}_n(\varepsilon)\| < \varepsilon$, donc $\|\mathbb{E}(\mathbf{H}_n(\varepsilon))\| < \varepsilon$. Il suffit alors d'appliquer la seconde propriété de la remarque (4.1.4) pour conclure.

□

En regroupant les résultats des trois points précédents, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que pour $n \geqslant N$, $\mathbb{E}\|\mathbf{V}_n\| \leqslant 3\varepsilon$, ce qui termine la démonstration du lemme 4.2.9.

□

Finalement, $\|\mathbf{V}_n\| \leqslant \|\mathbf{W}_n\| + \|\mathbf{U}_n - \mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\|\| + \mathbb{E}\|\mathbf{U}_n\|$ est donc un amart comme somme d'amarts.

A présent, prouvons le résultat pour une variable aléatoire $\mathbf{X}$ non nécessairement symétrique.

On considère comme précédemment une suite $(\mathbf{X}_i)$ de copies de $\mathbf{X}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, \mathbb{P}_1)$.
Soit $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_2)$ un second espace probabilisé, et $(\mathbf{X}'_i)$ une suite de copies indépendantes de $\mathbf{X}$, définies sur Ω'. Soient enfin $(\mathbf{V}_n)$ et $(\mathbf{V}'_n)$ les sommes de Cesàro associées respectivement aux v.a. $(\mathbf{X}_i)$ et $(\mathbf{X}'_i)$. Sur l'espace produit $(\Omega_3 := \Omega \times \Omega', \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2, \mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2)$, un raisonnement tel que le précédent montre que $(\mathbf{V}_n - \mathbf{V}'_n)$ est un amart pour la filtration $(\mathcal{F}_3^n)$, où $(\mathcal{F}_3^n)$ est la tribu engendrée par les v.a. $(\mathbf{X}_0, \dots, \mathbf{X}_n, \mathbf{X}'_0, \dots, \mathbf{X}'_n)$.
Alors, tout temps d'arrêt τ borné pour $(\mathcal{F}_1^n)$, en est aussi un pour $(\mathcal{F}_3^n)$, et en écrivant :

$$\int_{\{\tau=n\}} (\mathbf{V}_n - \mathbf{V}'_n)\, d(\mathbb{P}_1 \otimes \mathbb{P}_2) = \int_{\{\tau=n\}} \mathbf{V}_n d\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1(\tau = n)\mathbb{E}_2(\mathbf{V}'_n) = \int_{\{\tau=n\}} \mathbf{V}_n d\mathbb{P}_1,$$

on obtient $\sup_{\tau \geqslant N} |\mathbb{E}_1 \mathbf{V}_\tau| \leqslant \sup_{\tau \geqslant N} |\mathbb{E}_3(\mathbf{V}_\tau - \mathbf{V}'_\tau)| \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, ce qui achève la démonstration.

□

Annexe

Lemme 4.2.12 *:*
La suite $(\mathbf{W}_n, \mathcal{F}_n)$ *est une quasimartingale.*

Démonstration :

Se rappelant que $\mathbf{X}$ est symétrique, les tronquées $\mathbf{Z}_{i,j}$ sont centrées, et on a immédiatement :

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{W}_{n+1} - \mathbf{W}_n \middle|\, \mathcal{F}_n\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_{n+1}^{\alpha}} \mathbf{Z}_{(n+1),k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_n^{\alpha}} \mathbf{Z}_{n,k}. \tag{4.6}$$

Réécrivons :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_{n+1}^{\alpha}}\mathbf{Z}_{(n+1),k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_{n+1}^{\alpha}}\mathbf{Z}_{n,k}-\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_{n+1}^{\alpha}}\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\{(n+1)^\alpha>\|\mathbf{X}_k\|\geqslant n^\alpha\}}=:\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_{n+1}^{\alpha}}\mathbf{Z}_{n,k}+u_n.$$

De sorte que la relation (4.6) donne :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathbf{W}_{n+1}-\mathbf{W}_n|\,\mathcal{F}_n\right)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_{n+1}^{\alpha}}\mathbf{Z}_{n,k}-\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{n-k}^{\alpha-1}}{A_{n}^{\alpha}}\mathbf{Z}_{n,k}+u_n\\&=\left(\frac{1}{A_{n+1}^{\alpha}}-\frac{1}{A_{n}^{\alpha}}\right)\sum_{k=0}^{n}A_{n+1-k}^{\alpha-1}\mathbf{Z}_{n,k}+\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}\left(A_{n+1-k}^{\alpha-1}-A_{n-k}^{\alpha-1}\right)\mathbf{Z}_{n,k}+u_n.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\mathbb{E}\left(\mathbf{W}_{n+1}-\mathbf{W}_n|\,\mathcal{F}_n\right)\right|\leqslant&\left(\frac{1}{A_{n}^{\alpha}}-\frac{1}{A_{n+1}^{\alpha}}\right)\sum_{k=0}^{n}A_{n+1-k}^{\alpha-1}\mathbb{E}\left\|\mathbf{Z}_{n,k}\right\|\\&+\frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=0}^{n}\left|A_{n+1-k}^{\alpha-1}-A_{n-k}^{\alpha-1}\right|\mathbb{E}\left\|\mathbf{Z}_{n,k}\right\|+\mathbb{E}\|u_n\|\\&=:v_n+w_n+\mathbb{E}\|u_n\|.\end{aligned}$$

Montrons donc que les séries ayant respectivement pour terme général $\mathbb{E}\|u_n\|$, v_n et w_n convergent toutes les trois.

- On a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N}\mathbb{E}\|u_n\|&\leqslant\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_{n}^{\alpha}}\mathbb{E}\left\|\mathbf{X}_k\mathbf{1}_{\{(n+1)^\alpha>\|\mathbf{X}_k\|\geqslant n^\alpha\}}\right\|=\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{n}\frac{A_{n+1-k}^{\alpha-1}}{A_{n}^{\alpha}}\mathbb{E}\left(\|\mathbf{X}\|\,\mathbf{1}_{\{(n+1)^\alpha>\|\mathbf{X}\|\geqslant n^\alpha\}}\right)\\&\leqslant c_{81}\sum_{n=0}^{N}\mathbb{E}\left(\|\mathbf{X}\|\,\mathbf{1}_{\{(n+1)^\alpha>\|\mathbf{X}\|\geqslant n^\alpha\}}\right)=c_{81}\mathbb{E}\left(\|\mathbf{X}\|\,\mathbf{1}_{\{(N+1)^\alpha>\|\mathbf{X}\|\}}\right),\end{aligned}$$

  en utilisant le point 2. de la remarque 4.1.4. Ce terme tend vers $\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|$ quand $n\to+\infty$, donc $\sum\mathbb{E}\|u_n\|$ converge.
- Prouvons la convergence de la série de terme général w_n. Commençons par simplifier les coefficients. Pour $k\neq n$,

$$\begin{aligned}A_{n+1-k}^{\alpha-1}-A_{n-k}^{\alpha-1}&=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-k)}{(n+1-k)!}-\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1-k)}{(n-k)!}\\&=\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-k-1)(\alpha+n-k-(n+1-k))}{(n+1-k)!}\\&=\frac{(\alpha-1)\alpha\cdots(\alpha+n-k-1)}{(n+1-k)!}\\&\leqslant c_{82}(n+1-k)^{\alpha-2}.\end{aligned}$$

Pour $k = n$, on a $A_1^{\alpha-1} - A_0^{\alpha-1} = \alpha - 1 \leqslant c_{83}$.
On en déduit, comme en (4.4), la majoration :

$$w_n \leqslant \frac{c_{84}}{A_n^\alpha}\left(1 + \sum_{k=0}^{n-1}(n+1-k)^{\alpha-2}\right)\mathbb{E}\|\mathbf{Z}_{n,1}\| \leqslant c_{85}\frac{1}{n^\alpha}\mathbb{E}\|\mathbf{Z}_{n,1}\|(1+\sum_{k=1}^{+\infty}k^{\alpha-2}) \leqslant c_{86}\frac{1}{n^\alpha}\mathbb{E}\|\mathbf{Z}_{n,1}\|.$$

En utilisant le théorème de Tonelli, on obtient la suite d'inégalités suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\mathbb{E}\|\mathbf{Z}_{n,1}\| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^\alpha}\mathbb{E}(\|\mathbf{X}\|\mathbf{1}_{\{\|\mathbf{X}\|>n^\alpha\}}) \leqslant c_{86}\sum_{j=1}^{+\infty}j^\alpha\mathbb{P}(j^\alpha \leqslant \|\mathbf{X}\| < (j+1)^\alpha)\sum_{n=1}^{j}\frac{1}{n^\alpha}$$

$$\leqslant c_{87}\sum_{j=1}^{+\infty}j\mathbb{P}(j^\alpha \leqslant \|\mathbf{X}\| < (j+1)^\alpha) \leqslant c_{87}\mathbb{E}\|\mathbf{X}\|^{1/\alpha} < +\infty. \tag{4.7}$$

Par conséquent la série de terme général w_n converge.

- Prouvons à présent la convergence de la série de terme général v_n. Commençons par simplifier les fractions :

$$\frac{1}{A_n^\alpha} - \frac{1}{A_{n+1}^\alpha} = \frac{n!}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)} - \frac{(n+1)!}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n+1)} = \frac{n!(\alpha+n+1)-(n+1)!}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n+1)}$$

$$= \alpha\frac{n!}{(\alpha+1)\cdots(\alpha+n+1)} = \frac{\alpha}{n+1}\frac{1}{A_{n+1}^\alpha} \leqslant \frac{c_{88}}{(n+1)^{\alpha+1}}.$$

On obtient alors la majoration

$$v_n \leqslant \frac{c_{88}}{(n+1)^{\alpha+1}}\sum_{k=0}^{n}A_{n+1-k}^{\alpha-1}\mathbb{E}\left(\|\mathbf{X}\|\mathbf{1}_{\{\|\mathbf{X}\|>n^\alpha\}}\right) \leqslant \frac{c_{89}}{n+1}\mathbb{E}\left(\|\mathbf{X}\|\mathbf{1}_{\{\|\mathbf{X}\|>n^\alpha\}}\right).$$

Or la série de terme général $\frac{1}{n+1}\mathbb{E}\left(\|\mathbf{X}\|\mathbf{1}_{\{\|\mathbf{X}\|>n^\alpha\}}\right)$ converge. En effet, la relation (4.7) prouve la convergence de la série de terme général $\dfrac{1}{n^\alpha}\mathbb{E}(\|\mathbf{X}\|\mathbf{1}_{\{\|\mathbf{X}\|>n\}})$, et $\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{n^\alpha}$ car $\alpha \in]0,1[$.

□

4.3 Conclusion

On va clore ce chapitre par quelques commentaires relatifs à la démonstration du théorème 4.2.1.

Tout d'abord, il convient de rappeler que la preuve n'utilise pas comme lemme technique la partie suffisante du théorème 4.1.8. Par le biais du corollaire 4.2.2, elle redonne une autre démonstration de la partie suffisante de ce théorème 4.1.8.

Par ailleurs, la preuve met en évidence un phénomène qui a déjà été rencontré (voir par exemple la preuve de la proposition 2.1.9), à savoir que par troncation on peut décomposer $\mathbf{V}_n$ en la somme d'un amart et d'une quasimartingale.

Chapitre 5

En guise de conclusion. . .

Nous allons donner quelques indications sur les aspects de martingale généralisée dans la loi forte des grands nombres de Kolmogorov non équidistribuée.

L'énoncé de Kolmogorov est la forme la plus célèbre de la loi forte des grands nombres dans le cas non équidistribué. En dimension infinie cet énoncé dû à Kuelbs et Zinn (corollaire 1 de [23]) devient :

Théorème 5.0.1 :
Soit $(\mathbf{X}_k)$ *une suite de v.a. à valeurs dans* $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ *indépendantes, fortement centrées, et telles qu'il existe* $p \in]1,2]$ *avec :*

$$\sum_{k \geqslant 1} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p} < +\infty. \tag{5.1}$$

Alors $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ *converge presque sûrement vers 0 si et seulement si* $\left(\frac{\|\mathbf{S}_n\|}{n}\right)$ *converge en probabilité vers 0.*

En connexion avec les résultats des chapitres 2 et 3, il est naturel de s'interroger sur un comportement d'amart ou de quasimartingale de $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ dans le contexte du théorème de Kuelbs et Zinn.

On a déjà le résultat suivant :

Théorème 5.0.2 :
Soit $(\mathbf{X}_k)$ *une suite de v.a. à valeurs dans* $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ *indépendantes, fortement centrées et vérifiant la relation (5.1) pour un certain* $p \in]1,2]$*. Alors* $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ *est un amart.*

<u>DÉMONSTRATION :</u>

Notons $\mathcal{U}$ l'ensemble des formes linéaires définies sur $\mathcal{B}$ dont la norme est inférieure ou égale à 1.

Soit τ un temps d'arrêt borné et φ un élément de $\mathcal{U}$. Par souci de simplicité, on notera ξ_k la v.a. réelle $\langle \varphi, \mathbf{X}_k \rangle$. Tronquons les variables ξ_k en posant :

$$\mathbf{Y}_k := \xi_k \mathbf{1}_{(|\xi_k| \leqslant k)} - \mathbb{E}\big(\xi_k \mathbf{1}_{(|\xi_k| \leqslant k)}\big) \quad \text{et} \quad \mathbf{Z}_k := \xi_k \mathbf{1}_{(|\xi_k| > k)} - \mathbb{E}\big(\xi_k \mathbf{1}_{(|\xi_k| > k)}\big).$$

Associons leur les sommes partielles d'ordre n :

$$\mathbf{U}_n := \mathbf{U}_n^{\varphi} := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Y}_k \quad \text{et} \quad \mathbf{V}_n := \mathbf{V}_n^{\varphi} := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{Z}_k,$$

de sorte que $\langle \varphi, \mathbf{S}_n \rangle = \mathbf{U}_n + \mathbf{V}_n$.

La suite $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ est un amart convergeant vers 0 si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N,\ \sup_{\tau \geqslant N} \left\| \int \frac{\mathbf{S}_\tau}{\tau} d\mathbb{P} \right\| \leqslant 6\varepsilon.$$

Pour cela, il suffit de montrer que les deux propriétés suivantes sont vraies pour $\varepsilon \in]0;1[$ fixé et N assez grand :

$$\sup_{\tau \geqslant N} \sup_{\varphi \in \mathcal{U}} \int \frac{\mathbf{U}_\tau^{\varphi}}{\tau} d\mathbb{P} \leqslant 3\varepsilon. \tag{5.2}$$

$$\sup_{\tau \geqslant N} \sup_{\varphi \in \mathcal{U}} \int \frac{\mathbf{V}_\tau^{\varphi}}{\tau} d\mathbb{P} \leqslant 3\varepsilon. \tag{5.3}$$

Commençons par remarquer que, par le lemme de Kronecker, comme $\sum_{k \geqslant 1} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p} < +\infty$, la suite de terme général $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^{p-1}}$ tend vers 0.

Par conséquent, il existe N_0 tel que pour $n \geqslant N_0$, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^{p-1}} \leqslant \varepsilon^2$.

D'autre part, comme la série de terme général $\frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p}$ converge, il existe N_1 tel que pour $n \geqslant N_1$, $\sum_{k \geqslant n} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p} \leqslant \varepsilon^2$.

Montrons tout d'abord la propriété (5.2).

Pour $\tau \geqslant N \geqslant \max(N_0, N_1)$ l'inégalité de Hajek-Renyi A.1.2 donne :

$$\begin{aligned}\forall t>0, \mathbb{P}\left(\sup_{n\geqslant N}\left|\frac{\mathbf{U}_n}{n}\right|>t\right) &\leqslant \frac{1}{t^2N^2}\sum_{k=1}^{N}\operatorname{Var}\mathbf{Y}_k+\frac{1}{t^2}\sum_{k\geqslant N+1}\frac{\operatorname{Var}\mathbf{Y}_k}{k^2}\\ &\leqslant \frac{1}{t^2N^2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\mathbb{E}\|\xi_k\|^p}{k^{p-2}}+\frac{1}{t^2}\sum_{k\geqslant N+1}\frac{\mathbb{E}|\xi_k|^p}{k^p}\\ &\leqslant \frac{1}{t^2N}\sum_{k=1}^{N}\frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^{p-1}}+\frac{1}{t^2}\sum_{k\geqslant N+1}\frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p}\leqslant\frac{2\varepsilon^2}{t^2}.\end{aligned}$$

On a donc finalement :

$$\sup_{\|\varphi\|\leqslant 1}\mathbb{P}\left(\sup_{n\geqslant 1}\left|\frac{\mathbf{U}_n}{n}\right|>t\right)\leqslant\frac{2\varepsilon^2}{t^2}.$$

Soit donc $\tau \geqslant \max(N_0, N_1)$. Alors :

$$\sup_{\varphi\in\mathcal{U}}\int\frac{\mathbf{U}_\tau}{\tau}d\mathbb{P}\leqslant\sup_{\varphi\in\mathcal{U}}\int\sup_{n\geqslant N}\frac{|\mathbf{U}_n|}{n}d\mathbb{P}\leqslant\sup_{\varphi\in\mathcal{U}}\int_0^{\varepsilon}\mathbb{P}\left(\sup_{n\geqslant N}\frac{|\mathbf{U}_n|}{n}>t\right)dt+2\varepsilon^2\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt\leqslant 3\varepsilon.$$

Montrons la condition (5.3)
Soit τ un temps d'arrêt borné, $N \leqslant \tau \leqslant M$. Alors comme $\mathbf{Z}_{n+1}$ et $\{\tau \geqslant n+1\} = \{\tau \leqslant n\}^c$ sont indépendants :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\frac{\mathbf{V}_\tau}{\tau}&=\int_\tau\frac{\mathbf{V}_\tau}{\tau}d\mathbb{P}=\sum_{n=N}^{M}\int_{(\tau=n)}\frac{\mathbf{V}_n}{n}d\mathbb{P}=\sum_{n=N}^{M}\left(\int_{(\tau\geqslant n)}\frac{\mathbf{V}_n}{n}d\mathbb{P}-\int_{(\tau\geqslant n+1)}\frac{\mathbf{V}_n}{n}\right)d\mathbb{P}\\ &=\int_{\tau=N}^{M}\frac{\mathbf{V}_N}{N}d\mathbb{P}+\sum_{n=N}^{M}\left(\int_{(\tau\geqslant n+1)}\left(\frac{\mathbf{V}_{n+1}}{n+1}-\frac{\mathbf{V}_n}{n}\right)d\mathbb{P}\right)\\ &=\frac{1}{N}\mathbb{E}\mathbf{V}_N-\sum_{n=N}^{M}\frac{1}{n(n+1)}\int_{(\tau\geqslant n+1)}\mathbf{V}_n d\mathbb{P}+\frac{1}{n+1}\mathbb{E}(\mathbf{Z}_{n+1})\mathbb{P}(\tau\geqslant n+1)\\ &\leqslant c_{90}\sum_{n\geqslant N}\mathbb{E}\frac{|\mathbf{V}_n|}{n^2}.\end{aligned}\tag{5.4}$$

Or on a les majorations suivantes :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant N}\frac{\mathbb{E}|\mathbf{V}_n|}{n^2}&\leqslant\sum_{n\geqslant N}\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left|\xi_k\mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}\right|=\sum_{n\geqslant N}\frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left|\xi_k\mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}\right|+\sum_{n\geqslant N}\frac{2}{n^2}\sum_{k=N+1}^{n}\mathbb{E}\left|\xi_k\mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}\right|\\ &\leqslant 2\sum_{k=1}^{N}\mathbb{E}\left|\xi_k\mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}\right|\frac{1}{N}+2\sum_{k\geqslant N}\mathbb{E}\left|\xi_k\mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}\right|\frac{1}{k}.\end{aligned}\tag{5.5}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, il vient :

$$\sum_{k\geqslant N} \mathbb{E}\left|\xi_k \mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}\right| \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k\geqslant N} \left(\mathbb{E}\frac{\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p}\right)^{1/p} \mathbb{P}(|\xi_k|>k)^{1-1/p}.$$

Or, par l'inégalité de Markov,

$$\sum_{k\geqslant N} \left(\mathbb{E}\frac{\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p}\right)^{1/p} \mathbb{P}(|\xi_k|>k)^{1-1/p} \leqslant \sum_{k\geqslant N} \left(\mathbb{E}\frac{\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p}\right)^{1/p} \frac{(\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p)^{1-1/p}}{k^{p\left(1-\frac{1}{p}\right)}}.$$

Par conséquent,

$$\sup_{\varphi} \sum_{k\geqslant N} \mathbb{E}|\xi_k \mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}| \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k\geqslant N} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p}.$$

Il existe donc N_3 indépendant de φ tel que pour $n \geqslant N_3$, $\sum\limits_{k\geqslant n} \mathbb{E}\left|\xi_k \mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}\right| \frac{1}{k} \leqslant \varepsilon$.

D'après le lemme de Kronecker, la suite de terme général $\sup\limits_{\varphi} \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|\xi_k \mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}\right|$ converge vers 0. Il existe donc N_4 indépendant de φ tel que pour $n \geqslant N_4$, $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left|\xi_k \mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}\right| \leqslant \varepsilon$.

On déduit alors des inégalités (5.4) et (5.5) que pour $\tau \geqslant N \geqslant \max(N_3, N_4)$:

$$\begin{aligned}
\sup_{\varphi\in\mathcal{U}} \int \frac{\mathbf{V}_\tau}{\tau} d\tau &\leqslant \sup_{\varphi\in\mathcal{U}} \sum_{n\geqslant N} \frac{\mathbb{E}|\mathbf{V}_n|}{n^2} \\
&\leqslant 2 \sup_{\varphi\in\mathcal{U}} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{E}|\xi_k \mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}|\right) + 2 \sup_{\varphi\in\mathcal{U}} \left(\sum_{k\geqslant N} \mathbb{E}|\xi_k \mathbf{1}_{(|\xi_k|>k)}| \frac{1}{k}\right) \\
&\leqslant 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Remarquons à présent que le théorème de Kuelbs et Zinn admet le corollaire suivant :

Corollaire 5.0.3 :
Soit $(\mathbf{X}_k)$ une suite de v.a. à valeurs dans $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ indépendantes, fortement centrées, et telles qu'il existe $p \in]1,2]$ avec :

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p} < +\infty.$$

Si $\left(\frac{\|\mathbf{S}_n\|}{n}\right)$ converge en probabilité vers 0, alors $\left(\frac{\|\mathbf{S}_n\|}{n}, \mathcal{F}_n\right)$ est un amart convergeant presque sûrement vers 0.

<u>Démonstration :</u>

Remarquons que

$$\forall t>0,\ \mathbb{P}\left(\sup_{k\geqslant 1}\frac{\|\mathbf{X}_k\|}{k}>t\right)\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}\left(\frac{\|\mathbf{X}_k\|}{k}>t\right)\leqslant\frac{1}{t^p}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p}.$$

On a donc $\mathbb{E}\sup\limits_{k\geqslant 1}\frac{\|\mathbf{X}_k\|}{k}<+\infty$. En vertu du théorème de Kuelbs et Zinn 5.0.1, on sait que $\frac{\mathbf{S}_n}{n}\longrightarrow 0$ p.s. Par application du théorème de Hoffmann-Jørgensen (corollaire A.1.4), on a donc $\mathbb{E}\sup\limits_{n\geqslant 1}\frac{\|\mathbf{S}_n\|}{n}<+\infty$.
$\left(\frac{\|\mathbf{S}_n\|}{n},\mathcal{F}_n\right)$ est alors un amart par le théorème de convergence dominée.

□

Une question naturelle à ce stade est alors “Quand $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n},\mathcal{F}_n\right)$ est–elle une quasimartingale ?”

Nous allons donner quelques éléments de réponse à cette question dans le cas des espaces de type p. Dans ce cas particulier, le théorème de Kuelbs et Zinn se simplifie sous la forme suivante (théorème 4 de [23]) :

Théorème 5.0.4 :
Soit $(\mathcal{B},\|\cdot\|)$ un espace de Banach de type $p\in]1,2]$, et soit $(\mathbf{X}_k)$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans $(\mathcal{B},\|\cdot\|)$, fortement centrées, et telles que :

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p}<+\infty.$$

Alors $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers 0.

Ceci rend naturel le problème de quasimartingale sous la seule hypothèse 5.1 dans des espaces de type p. L'hypothèse optimiste que dans un espace de type p la condition 5.1 implique que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ est une quasimartingale est contredite par l'exemple élémentaire suivant :

Exemple 5.0.5 :
Soit $(\mathbf{Y}_k)$ une suite de v.a. de Cauchy standard indépendantes.
Posons $\mathbf{X}_k:=\frac{\mathbf{Y}_k}{\ln k}\mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k|\leqslant\alpha k)}$ où $\alpha>0$ est choisi tel que $\sup\limits_n\sum\limits_{k=[n/2]}^{n}\mathbb{P}(|\mathbf{Y}_k|>\alpha k)\leqslant\frac{1}{4}$.
Soit $p\in]1,2[$. Alors $\sum\limits_{k\geqslant 1}\frac{\mathbb{E}|\mathbf{X}_k|^p}{k^p}<+\infty$, mais $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ n'est pas une quasimartingale.

Démonstration :

Par symétrie de $(\mathbf{X}_k)$, en remarquant que $\mathbf{S}_n = \sum_{k=1}^{[n/2]-1} \mathbf{X}_k + \sum_{k=[n/2]}^{n} \mathbf{X}_k$ est somme de deux v.a. indépendantes et centrées, l'inégalité de Jensen donne :

$$\mathbb{E}|\mathbf{S}_n| \geqslant \mathbb{E}\left|\sum_{k=[n/2]}^{n} \frac{\mathbf{Y}_k}{\ln k} \mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k| \leqslant \alpha k)}\right|. \tag{5.6}$$

Nous allons appliquer le principe de contraction (voir [25] p 97) dont seule la forme élémentaire suivante nous est utile :

Lemme 5.0.6 *:*
Soient $\xi_1, \dots, \xi_n$ n v.a. indépendantes, symétriques, intégrables et $a_1, \dots, a_n$ n réels strictement positifs. Alors :

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \xi_k\right| \geqslant \inf_{j=1}^{n} a_j \mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right|.$$

Par application de ce lemme, il vient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|\sum_{k=[n/2]}^{n} \frac{\mathbf{Y}_k}{\ln k} \mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k| \leqslant \alpha k)}\right| &\geqslant \frac{1}{\ln n} \mathbb{E}\left|\sum_{k=[n/2]}^{n} \frac{\mathbf{Y}_k}{\ln k} \mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k| \leqslant \alpha_k)}\right| \\ &\geqslant \frac{1}{\ln n} \int_0^{n/2} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=[n/2]}^{n} \mathbf{Y}_k \mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k| \leqslant \alpha k)}\right| > t\right) dt. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Or, pour $0 \leqslant t \leqslant n/2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=[n/2]}^{n} \mathbf{Y}_k \mathbf{1}_{(|\mathbf{X}_k| \leqslant \alpha k)}\right| > t\right) &\geqslant \mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=[n/2]}^{n} \mathbf{Y}_k\right| > t\right) - \sum_{[n/2]}^{n} \mathbb{P}(|\mathbf{Y}_k| > \alpha k) \\ &\geqslant \mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=[n/2]}^{n} \mathbf{Y}_k\right| > t\right) - \frac{1}{4}. \end{aligned} \tag{5.8}$$

D'autre part, comme $\sum_{[n/2]}^{n} \frac{\mathbf{Y}_k}{n-[n/2]+1}$ suit une loi de Cauchy, et que $n - [n/2] + 1 > n/2$, $\mathbb{P}\left(\left|\sum_{k=n/2}^{n} \mathbf{Y}_k\right| > t\right) \geqslant \frac{2}{\pi} \int_{2t/n}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx.$

Comme $\forall t \in [0, n/2]$, $\frac{2}{\pi}\int_{\frac{2t}{n}}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx \geqslant \frac{2}{\pi}\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}$, les relations (5.7) et (5.8) donnent :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|\mathbf{S}_n| &\geqslant \frac{1}{\ln n}\int_0^{n/2}\left(\frac{2}{\pi}\int_{2t/n}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx - \frac{1}{4}\right)dt \geqslant \frac{1}{2\ln n}\int_0^{n/2}\left(\frac{2}{\pi}\int_{2t/n}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}dx\right)dt \\ &\geqslant \frac{n}{8\ln n}.\end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{\mathbb{E}|\mathbf{S}_n|}{n^2} \geqslant \frac{c_{91}}{n\ln n}$, ce qui achève de montrer que $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}, \mathcal{F}_n\right)$ n'est pas une quasimartingale.

□

Dans un espace de type p, on a cependant le théorème (cf. [19]) :

Théorème 5.0.7 :
Soit $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel séparable de type $p \in]1, 2]$. Soit $(\mathbf{X}_k)$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathcal{B}$, indépendantes, fortement centrées, vérifiant :

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p} < +\infty.$$

Alors $\left(\frac{\|\mathbf{S}_n\|^p}{n^p}\right)$ est une quasimartingale.

Le théorème précédent permet de préciser la relation entre la notion d'espace de type p et la loi forte des grands nombres de Kolmogorov non équidistribuée. Rappelons pour commencer l'énoncé classique de Hoffmann-Jørgensen et Pisier :

Théorème 5.0.8 :
Soit $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $p \in]1, 2]$. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *$(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ est de type p ;*
2. *Soit (x_k) une suite d'éléments de $\mathcal{B}$, vérifiant $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\|x_k\|^p}{k^p} < +\infty$. Alors, pour toute suite (ε_k) de v.a. de Rademacher indépendantes, $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k x_k}{n}\right)$ converge p.s. vers 0 ;*
3. *Soit $(\mathbf{X}_k)$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$, fortement centrées vérifiant :*
$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p} < +\infty.$$
Alors $\left(\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right)$ converge p.s. vers 0.

En utilisant le théorème 5.0.7, Heinkel a précisé ce critère de Hoffmann-Jørgensen et Pisier en montrant que la condition de loi des grands nombres pour des v.a. de Rademacher (condition 2. du théorème précédent) pouvait s'énoncer en terme de quasimartingale (th 5.1 de [18]) :

Théorème 5.0.9 :
Soit $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $p \in]1,2]$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *$(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ est de type p ;*
2. *Soit (x_k) une suite d'éléments de $\mathcal{B}$, vérifiant :*

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{\|x_k\|^p}{k^p} < +\infty.$$

Alors, pour toute suite (ε_k) de v.a. de Rademacher indépendantes, $\left(\left\|\sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon_k x_k}{n}\right\|^p\right)$ est une quasimartingale.

On peut de même préciser la condition 3. du théorème 5.0.8 en termes de quasimartingales :

Théorème 5.0.10 :
Soit $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $p \in]1,2]$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *$(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ est de type p ;*
2. *Soit $(\mathbf{X}_k)$ une suite de v.a. indépendantes à valeurs dans $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$, fortement centrées vérifiant :*

$$\sum_{k\geqslant 1} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p} < +\infty.$$

Alors $\left(\left\|\frac{\mathbf{S}_n}{n}\right\|^p\right)$ est une quasimartingale.

Démonstration :

L'implication $1 \Longrightarrow 2$ est donnée par le théorème 5.0.7.
Bien qu'elle se déduise facilement de la preuve de l'implication $2 \Longrightarrow 1$ du théorème 5.0.9, donnons tout de même la démonstration de l'implication $2 \Longrightarrow 1$.

Soit $(\mathbf{X}_k)$ une suite de v.a. vérifiant $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{X}_k\|^p}{k^p} < +\infty$. La suite $\frac{\|\mathbf{S}_n\|^p}{n^p}$ étant une quasimartingale positive, elle converge presque sûrement vers une v.a. $\mathbf{U}$.

La condition (5.1) implique l'existence d'une suite (α_k) croissante de réels strictement positifs tendant vers $+\infty$, telle qu'en posant

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_1 := \mathbf{X}_1, \\ \mathbf{Y}_k := \alpha_n \mathbf{X}_k \quad \forall n,\ \forall k \in I(n) := \{2^n + 1 \ldots, 2^{n+1}\}, \end{cases}$$

on ait $\sum\limits_{k\geqslant 1} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{Y}_k\|^p}{k^p} < +\infty$. Posons $\mathbf{T}_n := \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbf{Y}_k$. Alors $\frac{\|\mathbf{T}_n\|^p}{n^p}$ est une quasimartingale positive convergeant presque sûrement vers une v.a. $\mathbf{V}$.

Remarquons à présent qu'en posant $c_{92} := \sup\limits_n \mathbb{E}\left\| \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\mathbf{Y}_k}{n} \right\|^p > 0$, l'inégalité de Jensen donne :

$$\mathbb{E}\left\| \frac{\mathbf{T}_{2^{n+1}} - \mathbf{T}_{2^n}}{2^n} \right\|^p \leqslant \mathbb{E}\left\| \sum_{k=1}^{2^{n+1}} \frac{\mathbf{Y}_k}{2^n} \right\|^p \leqslant c_{92},$$

et donc que :

$$\sup_n \mathbb{E}\left\| \frac{\mathbf{T}_{2^{n+1}} - \mathbf{T}_{2^n}}{2^n} \right\| \leqslant c_{92}^{1/p}.$$

Or pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left\| \frac{\mathbf{S}_{2^n}}{2^n} \right\| &\leqslant \mathbb{E}\frac{\|\mathbf{X}_1\|}{2^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\mathbb{E}\|\mathbf{T}_{2^{k+1}} - \mathbf{T}_{2^k}\|}{\alpha_k 2^k} . \frac{2^k}{2^n} \\ &\leqslant \mathbb{E}\frac{\|\mathbf{X}_1\|}{2^n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k c_{92}}{2^n \alpha_k} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{\mathbf{S}_{2^n}}{2^n}$ tend vers 0 en probabilité. Mais $\frac{\mathbf{S}_{2^n}}{2^n}$ tend vers $\mathbf{U}$ presque sûrement, donc $\mathbf{U} = 0$ p.s.. L'implication $3 \Longrightarrow 1$ du théorème 5.0.8 montre alors que $(\mathcal{B}, \|\cdot\|)$ est de type p.

□

Dans ce court chapitre nous avons montré que pour la loi des grands nombres non équidistribuée de Kolmogorov également, les martingales généralisées sont un bon outil d'étude de la vitesse de convergence (théorème 5.0.2) ou de la géométrie de l'espace de Banach dans lequel les v.a. considérées prennent leurs valeurs (théorème 5.0.10).

On pourrait évidemment aussi s'intéresser aux aspects "martingale généralisée"pour d'autres lois des grands nombres non équidistribuées, comme celles de Brunk, Prohorov, Nagaev,... De telles études restent à faire. En ce qui nous concerne, nous conclurons par le théorème 5.0.10.

Quelques propriétés des sommes de v.a. indépendantes

Dans cette annexe, nous rappelons différentes inégalités que nous avons utilisées dans ce travail.

A.1 Inégalités maximales

A.1.1 Inégalités de Lévy

Les premières inégalités sont connues sous le nom d'inégalités de Lévy. Elles sont spécifiques aux v.a. symétriques et donnent une majoration du maximum d'une suite de v.a.

Proposition A.1.1 :
Soit $(\mathbf{X}_i)$ *une suite de variables aléatoires indépendantes symétriques à valeurs dans* $\mathcal{B}$. *Pour tout* k, *on pose* $\mathbf{S}_k := \sum_{i=1}^{k} \mathbf{X}_i$. *Alors pour tout entier* N *et pour tout* $t > 0$, *on a :*

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbb{P}(\max_{k\leqslant N} \|\mathbf{S}_k\| > t) & \leqslant & 2\mathbb{P}(\|\mathbf{S}_N\| > t) \\ \textit{et} & \mathbb{P}(\max_{i\leqslant N} \|\mathbf{X}_i\| > t) & \leqslant & 2\mathbb{P}(\|\mathbf{S}_N\| > t/2). \end{array}$$

A.1.2 Inégalité de Hájek-Rényi

L'inégalité de Hajek-Renyi suivante est une généralisation de la célèbre inégalité de Kolmogorov :

Proposition A.1.2 :
Soit $(\mathbf{X}_k)$ *une suite de v.a. indépendantes de carré intégrable et* (γ_i) *une suite décroissante de réels strictement positifs. Soit* $\mathbf{S}_i := \mathbf{X}_1 - \mathbb{E}\mathbf{X}_1 + \cdots + \mathbf{X}_i - \mathbb{E}\mathbf{X}_i$. *Alors :*

$$\forall m \in \mathbb{N},\ \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\sup_{m\leqslant i} \gamma_i |\mathbf{S}_i| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\gamma_m^2 \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Var} \mathbf{X}_j + \sum_{j\geqslant m+1} \gamma_j^2 \operatorname{Var} \mathbf{X}_j\right).$$

A.1.3 Queues de distribution de sommes de v.a. indépendantes

La troisième inégalité dont nous avons eu besoin est l'inégalité de Hoffmann-Jørgensen (inégalité (3.3) dans [20]).

Proposition A.1.3 :
Soit $(\mathbf{X}_i)$ *une suite de v.a. indépendantes et symétriques à valeurs dans* $\mathcal{B}$. *Soit* $\mathbf{S}_k := \sum_{i=1}^{k} \mathbf{X}_i$. *Si* $(\mathbf{S}_n)$ *converge p.s. vers* $\mathbf{S}$, *alors, pour tous* $s, t > 0$ *:*

$$\mathbb{P}(\|\mathbf{S}\| > 2t + s) \leqslant 4(\mathbb{P}(\|\mathbf{S}\| > t))^2 + \mathbb{P}\left(\sup_i \|\mathbf{X}_i\| > s\right).$$

Le corollaire suivant permet de comparer les propriétés d'intégrabilité de $\sup \frac{\|\mathbf{X}_n\|}{a_n}$ et $\sup \frac{\|\mathbf{S}_n\|}{a_n}$ (corollaire 3.4 dans [20]) :

Corollaire A.1.4 :
Soient $(\mathbf{X}_i)$ *une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans* $\mathcal{B}$, (a_n) *une suite croissante de réels strictement positifs tendant vers* $+\infty$ *et* $0 < p < +\infty$. *Alors si* $\sup_n \frac{\|\mathbf{S_n}\|}{a_n} < \infty$ *p.s, les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

i) $\mathbb{E} \sup_n \left(\frac{\|\mathbf{S}_n\|}{a_n}\right)^p < \infty$

ii) $\mathbb{E} \sup_n \left(\frac{\|\mathbf{X}_n\|}{a_n}\right)^p < \infty$

A.2 Inégalités de moments

A.2.1 Inégalités de Khintchine

Soit (ε_i) une suite de v.a. de Rademacher. Les inégalités de Khintchine expriment que toutes les normes L^p, $1 \leqslant p < +\infty$ (ou quasi-normes pour $0 < p < 1$) sont équivalentes sur l'espace vectoriel engendré par (ε_i).

Proposition A.2.1 :
Soient $0 < p < +\infty$ *et* (ε_i) *une suite de variables aléatoires de Rademacher indépendantes. Il existe deux constantes strictement positives* A_p *et* B_p *telles que pour toute suite finie* (α_i) *de réels,*

$$A_p\Big(\sum \alpha_i^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big\|\sum \alpha_i \varepsilon_i\Big\|_p \leqslant B_p\Big(\sum \alpha_i^2\Big)^{1/2}.$$

A.2.2 Inégalité de Rosenthal

L'inégalité de Rosenthal permet de majorer les moments d'une martingale (théorème 3 de [41]).

Proposition A.2.2 :
Soit $(\mathbf{S}_i, \mathcal{F}_i)$ *une martingale de longueur finie, dont les accroissements sont notés* $(\mathbf{X}_i)$. *Alors, pour tout* $p > 2$, *il existe une constante* C *telle que*

$$\mathbb{E}|\mathbf{S}_n|^p \leqslant C\left(\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(\mathbf{X}_i^2 \,|\, \mathcal{F}_{i-1})\right)^{p/2} + \sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}|\mathbf{X}_i|^p\right).$$

Corollaire A.2.3 :
Soit $(\mathbf{X}_i)$ *une suite de v.a. indépendantes. Alors pour tout* $r > 2$, *il existe une constante* C *telle que :*

$$\mathbb{E}|\mathbf{S}_n|^r \leqslant C\left(B_n^{r/2} + M_{r,n}\right),$$

où $B_n := \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}\mathbf{X}_k^2$ *et* $M_{r,n} := \sum_{k=0}^{n} \mathbb{E}|\mathbf{X}_k|^r$.

A.3 Inégalité de Marcus-Pisier

L'inégalité de Marcus-Pisier permet de majorer les queues de distribution des normes de Laurent de suites de v.a. Il est à noter que la constante de l'inégalité originelle [29] était 262 et non pas $2e$. Elle a été améliorée par Zinn (voir le lemme 4.11 dans [38]).

Proposition A.3.1 :
Soient $(\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n)$ n *v.a. indépendantes réelles, alors*

$$\forall q \geqslant 1,\ \forall u > 0,\ \mathbb{P}(\|(\mathbf{X}_k)\|_{q,\infty} > u) \leqslant \frac{2e}{u^q}\sup_{t>0}\left(t^q \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(|\mathbf{X}_k| > t)\right).$$

Index

Bibliographie

[1] D. G. Austin, G. A. Edgar, and A. Ionescu Tulcea. Pointwise convergence in terms of expectations. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 30 :17–26, 1974.

[2] L. Baum and M. Katz. Convergence rates in the law of large numbers. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120 :108–123, 1965.

[3] N. H. Bingham. Extensions of the strong law. *Adv. in Appl. Probab.*, (suppl.) :27–36, 1986.

[4] R. V. Chacon and L. Sucheston. On convergence of vector-valued asymptotic martingales. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 33(1) :55–59, 1975/76.

[5] S. D. Chatterji. Martingale convergence and the Radon-Nikodym theorem in Banach spaces. *Math. Scand.*, 22 :21–41, 1968.

[6] Y. S. Chow and T. L. Lai. Limiting behavior of weighted sums of independent random variables. *Ann. Probability*, 1 :810–824, 1973.

[7] B. Davis. Stopping rules for S_n/n, and the class $L \log L$. *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete*, 17 :147–150, 1971.

[8] A. de Acosta. Inequalities for B-valued random vectors with applications to the strong law of large numbers. *Ann. Probab.*, 9(1) :157–161, 1981.

[9] Y. Déniel and Y. Derriennic. Sur la convergence presque sûre, au sens de Cesàro d'ordre α, $0 < \alpha < 1$, de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées. *Probab. Theory Related Fields*, 79(4) :629–636, 1988.

[10] G. A. Edgar and L. Sucheston. Les amarts : une classe de martingales asymptotiques. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 282(13) :Aii, A715–A718, 1976.

[11] G. A. Edgar and L. Sucheston. *Stopping times and directed processes*, volume 47 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[12] D. L. Fisk. Quasi-martingales. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 120 :369–389, 1965.

[13] A. Gut. A contribution to the theory of asymptotic martingales. *Glasgow Math. J.*, 23(2) :177–186, 1982.

[14] A. Gut and K. D. Schmidt. *Amarts and set function processes*, volume 1042 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[15] B. Heinkel. Communication personnelle.

[16] B. Heinkel. An infinite-dimensional law of large numbers in Cesàro's sense. *J. Theoret. Probab.*, 3(4) :533–546, 1990.

[17] B. Heinkel. Kolmogorov's strong law of large numbers : the amart point of view. In *Probability theory and mathematical statistics (Vilnius, 1993)*, pages 361–367. TEV, Vilnius, 1994.

[18] B. Heinkel. On the Kolmogorov quasimartingale property. *Probab. Math. Statist.*, 16(1) :113–126, 1996.

[19] B. Heinkel. When is $|S_n|^p/n^p$ an amart ? *Studia Sci. Math. Hungar.*, 32(3-4) :445–453, 1996.

[20] J. Hoffmann-Jørgensen. Sums of independent Banach space valued random variables. *Studia Math.*, 52 :159–186, 1974.

[21] A. Kolmogorov. *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Ergebnisse des Mathematik und ihrer Grenzgebiete. Springer, Berlin, 1933.

[22] V. Komornik. *Précis d'analyse réelle. Topologie. Calcul différentiel. Méthodes d'approximation.* Mathématiques pour le 2è cycle. Ellipses, 2001.

[23] J. Kuelbs and J. Zinn. Some stability results for vector valued random variables. *Ann. Probab.*, 7(1) :75–84, 1979.

[24] T. L. Lai. Convergence rates in the strong law of large numbers for random variables taking values in Banach spaces. *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 2(1) :67–85, 1974.

[25] M. Ledoux and M. Talagrand. *Probability in Banach spaces*, volume 23 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)].* Springer-Verlag, Berlin, 1991. Isoperimetry and processes.

[26] D. Li and H. Queffélec. *Introduction à l'étude des espaces de Banach*, volume 12 of *Cours Spécialisés [Specialized Courses].* Société Mathématique de France, Paris, 2004. Analyse et probabilités. [Analysis and probability theory].

[27] G. G. Lorentz. Borel and Banach properties of methods of summation. *Duke Math. J.*, 22 :129–141, 1955.

[28] J. Marcinkiewicz and A. Zygund. Sur les fonctions indépendantes. *Fund. Math.*, (29) :60–90, 1937.

[29] M. B. Marcus and G. Pisier. Characterizations of almost surely continuous p-stable random Fourier series and strongly stationary processes. *Acta Math.*, 152(3-4) :245–301, 1984.

[30] B. Maurey. Espaces de cotype p, $0 < p \leqslant 2$. In *Séminaire Maurey-Schwartz (année 1972–1973), Espaces L^p et applications radonifiantes, Exp. No. 7*, page 11. Centre de Math., École Polytech., Paris, 1973.

[31] B. Maurey and G. Pisier. Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach. *Studia Math.*, 58(1) :45–90, 1976.

[32] T. Mikosh and R. Norvaĭsha. Limit theorems for methods of summation of independent random variables. I. *Litovsk. Mat. Sb.*, 27(1) :142–155, 1987.

[33] T. Mikosh and R. Norvaĭsha. Limit theorems for methods of summation of independent random variables. II. *Litovsk. Mat. Sb.*, 27(2) :303–326, 1987.

[34] V. D. Milman and G. Schechtman. *Asymptotic theory of finite-dimensional normed spaces*, volume 1200 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. With an appendix by M. Gromov.

[35] E. Mourier. Eléments aléatoires dans un espace de Banach. *Ann. Inst. H. Poincaré*, 13 :161–244, 1953.

[36] S. Orey. F-processes. In *Proc. Fifth Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probability (Berkeley, Calif., 1965/66), Vol, II : Contributions to Probability Theory, Part 1*, pages 301–313. Univ. California Press, Berkeley, Calif., 1967.

[37] G. Pisier. Type des espaces normés. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 276 :A1673–A1676, 1973.

[38] G. Pisier. Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces. In *Probability and analysis (Varenna, 1985)*, volume 1206 of *Lecture Notes in Math.*, pages 167–241. Springer, Berlin, 1986.

[39] G. Pisier. *The volume of convex bodies and Banach space geometry*, volume 94 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[40] K. M. Rao. Quasi-martingales. *Math. Scand.*, 24 :79–92, 1969.

[41] H. P. Rosenthal. On the subspaces of L^p $(p > 2)$ spanned by sequences of independent random variables. *Israel J. Math.*, 8 :273–303, 1970.

[42] W.A. Woyczyǹski. On Marcinkiewicz-Zygmund laws of lage numbers in banach spaces and related rates of convergence. *Probab. Math. Statist.*, 1(2) :117–131 (1981), 1980.

[43] V. V. Yurinskiĭ. Exponential inequalities for sums of random vectors. *J. Multivariate Anal.*, 6(4) :473–499, 1976.

Résumé – La vitesse de convergence dans la loi forte des grands nombres de Kolmogorov est généralement quantifiée par des majorations fines de la queue de la fonction de répartition des sommes partielles. Une autre approche, à laquelle nous nous intéressons dans ce travail, consiste à considérer ce problème de vitesse de convergence sous un aspect de martingale généralisée (amart ou quasimartingale). Nous considérons successivement la loi des grands nombres de Kolmogorov pour des variables aléatoires indépendantes équidistribuées et deux de ses généralisations : la loi des grands nombres de Marcinkiewicz-Zygmund d'ordre p ($1<p<2$) et celle de Cesàro d'ordre α ($0<\alpha<1$). Nous exhibons, pour chacune de ces lois des grands nombres, des conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité pour que les sommes partielles aient un comportement d'amart ou de quasimartingale. Nous remarquons en particulier que la généralisation de certains résultats scalaires aux variables aléatoires à valeurs dans un espace de Banach nécessite de se placer dans un espace de type p. Nous concluons notre travail par quelques résultats dans le cas non équidistribué.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
UMR 7501
Université de Strasbourg et CNRS
7 Rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX

Tél.03 68 85 01 29
Fax 03 68 85 03 28

http://www-irma.u-strasbg.fr
irma@math.u-strasbg.fr

UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Institut de Recherche Mathématique Avancée

IRMA 2009/02
ISSN 0755-3390
http://tel.archives-ouvertes/tel-00406311