

École Doctorale Mathématiques, Sciences de
l'Information et de l'Ingénieur

UdS – INSA – ENGEES

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Strasbourg

Discipline : Mécanique et ingénierie des systèmes

Spécialité : Mécanique des fluides

par

Jonathan WERTEL

Modélisation tridimensionnelle des écoulements
turbulents en conduite d'assainissement à surface libre

Soutenue publiquement le 03 décembre 2009

Membres du jury

Directeur de thèse : M. Robert MOSE, Professeur, ENGEES

Rapporteur externe : M. Patrick CHASSAING, Professeur, INP
Toulouse

Rapporteur externe : M. Bernard CHOCAT, Professeur, INSA Lyon

Examineur : M. Gerhard SCHÄFER, Professeur, LHYGES

IMFS

FRE 3240



N° d'ordre :

École Doctorale Mathématiques, Sciences de
l'Information et de l'Ingénieur

UdS – INSA – ENGEES

Résumé

L'objectif de ce travail est l'interpolation du débit à partir de données issues de vélocimètre à effet Doppler. Pour ce faire une modélisation précise des écoulements turbulents doit être implémentée dans un code conçu pour les conduites d'assainissement. Du fait de l'uniformité de l'écoulement dans le sens du flux, un maillage 2D est utilisé pour effectuer le calcul du champ de vitesse en 3D. Un modèle RSM des écoulements turbulents uniformes à surface libre a donc été développé en version bas-Reynolds afin de pouvoir intégrer les équations en zone proche paroi incluant la sous-couche visqueuse. Une combinaison de (Shir, 1973), (Gibson & Launder, 1978) et (Cokljat, 1993) a été additionnée au terme de corrélation fluctuation de pression/champ moyen de vitesse afin de prendre en compte l'effet d'amortissement de la surface libre et le caractère redistributif d'énergie cinétique turbulente des parois.

Ce modèle a été implémenté (sous Matlab) dans un code aux volumes finis, tout comme un modèle $k-\epsilon$ à titre de comparaison. On montre ainsi le rôle prépondérant du caractère anisotrope de la turbulence dans la génération des courants secondaires. Les résultats présentés sont comparés avec ceux de (Kang & Choi, 2005) qui ont développé un modèle RSM utilisant des lois de paroi et avec les résultats expérimentaux de (Nezu & Rodi, 1985). Il y a une bonne corrélation entre les résultats du modèle et les mesures. Les effets sur les tensions de Reynolds de l'annulation de la contrainte tangentielle aux coins sont reproduits. Par ailleurs, la projection du champ moyen de vitesse sur une section transverse met en évidence des courants secondaires, notamment des petites structures au niveau des angles formés par la surface libre avec les parois. Enfin, des cas expérimentaux issus de la littérature sont modélisés afin de comparer les débits mesurés avec ceux calculés par le modèle présenté, là encore il y a une bonne corrélation.

Pour finir, un banc d'essai a été conçu pour la mesure de vitesse en canal. Un banc de déplacement automatisé a été assemblé autour d'un canal de 20m de long, il est équipé des systèmes de mesure par ADV et PIV.

Mots clés:

- écoulement à surface libre
- turbulence
- Reynolds stress model
- Dip phenomenon
- courants secondaires
- calcul de débit

Abstract

The aim of this work is the interpolation of a mean flow stream from discrete data supplied by a Doppler velocimeter. This is why a precise flow modeling needs to be implemented in a code designed for sewer net conduit. A 2D mesh is used to calculate 3D velocity flow. This work deals with the description of a Reynolds stress model for the numerical modeling of uniform 3D turbulent open-channel flows. The turbulence model is low-Reynolds one in order to enable the viscosity-affected region to be resolved including the viscous sublayer. Therefore, in order to consider the damping effects at the free surface and the redistribution of turbulent kinetic energy effects at the wall, a combinations of (Shir, 1973), (Gibson & Launder, 1978) and (Cokljat, 1993) models are added to the pressure-strain term.

The finite volume method is used for the numerical solution (with Matlab) of the flow equations and transport equations of the Reynolds stress components. k- ϵ model has been implanted to compare with the developed model; it is found that both production terms by anisotropy of Reynolds normal stress and by Reynolds shear stress contribute to the generation of secondary currents. The results presented here are compared with results predicted by the RSM model of (Kang & Choi, 2005) employing wall functions and with experimental data of (Nezu & Rodi, 1985). There is a good agreement between the measurements and the results predicted. Effects of low corner's wall shear stress on Reynolds stress are underlined. The computed flow vectors in the plane normal to the main flow direction show secondary currents and moreover a small vortex, called inner secondary currents, located at the juncture of the sidewall and the free surface. Then experimental cases are modeled, good agreement of flow rate predicted with measurement was found.

Finally test bench has been created for velocity channel measurements. An automated portal structure has been assembled all around a 20m long channel to fix onto the ADV and PIV sensors.

Keywords:

- open-channel flows
- turbulence
- Reynolds stress model
- Dip phenomenon
- secondary current
- flow rate prediction

Remerciements

Voici le moment de terminer ce travail de thèse, de tourner cette page dédiée à la recherche. Je tiens à remercier tout ceux qui m'ont aidé à l'écrire, ponctuellement ou au quotidien. En pensant à eux je me retrouve dans cette citation issue du Discours à l'Académie de La Bruyère « [...] *il a, dans ce qu'il emprunte aux autres, toutes les grâces de la nouveauté et tout le mérite de l'invention* ».

Je tiens à remercier M. Robert MOSE, Professeur à l'IMFS qui a accepté de diriger cette thèse. Il est le premier à m'avoir initié au calcul numérique, créant sans le savoir une vocation.

Cette thèse n'aurait pas vu le jour sans M. José VAZQUEZ, Maître de Conférences à l'IMFS. Enseignant motivé et débordant d'enthousiasme, il a patiemment assisté à mes premiers pas dans le monde de la modélisation hydraulique lorsque j'étais étudiant en première année à l'ENGEEES et m'a fait découvrir le monde de la recherche. Merci pour son soutien au quotidien.

Merci à M. Yannick HOARAU, Maître de Conférences à l'IMFS, qui a redonné un second souffle à ma thèse grâce à sa maîtrise des CFD, son rôle et sa générosité ont été indispensables dans l'aboutissement de cette thèse.

J'exprime aussi toute ma gratitude à M. Antoine-Georges SADOWSKI, directeur du laboratoire HU qui m'a accueilli. Un esprit éclairé, touche à tout, avec qui mes rapports furent aussi divers qu'enrichissants.

Merci à M. Martin FISCHER, technicien du laboratoire HU, qui m'a aidé à trouver bon nombre de solutions techniques aux problèmes rencontrés lors de mon travail expérimental.

Je remercie aussi M. Jean-Bernard BARDIAUX, ingénieur à l'IMFS, qui m'a fait bénéficier de son expérience en modélisation des écoulements en canal et dont les conseils se sont bien souvent révélés judicieux.

Merci à M. Patrick CHASSAING, Professeur de l'INP de Toulouse, de l'honneur qu'il me fait en acceptant d'être rapporteur de cette thèse. Son livre sur la modélisation de la turbulence, plusieurs fois cité dans le présent mémoire, fut mon livre de chevet pendant ces trois années de doctorat.

J'aimerais exprimer toute ma reconnaissance à M. Bernard CHOCAT, Professeur à l'INSA de Lyon, d'avoir accepté de rapporter sur mon travail. J'espère que nous aurons l'occasion de travailler ensemble dans le domaine de l'hydrologie urbaine.

Ma gratitude va aussi à M. Gerhard SCHÄFER, Professeur à l'Université de Strasbourg, pour avoir été examinateur de cette thèse. Ayant participé à ses cours sur le transport en milieu poreux, j'ai le souvenir d'un enseignant captivant, à l'écoute de ses élèves.

Merci à M. Jan DUSEK d'avoir accepté de relire ce mémoire et pour ses explications à propos du caractère chaotique de la turbulence.

Merci à Damien KUSS, Matthieu DUFRESNE, doctorants au HU, qui m'ont souvent aidé à mettre des mots sur mes difficultés ce qui a grandement contribué à les résoudre. Merci pour leur amitié.

Merci à Charlotte GINSBURGER, Adeline HUSTACHE et Ludovic PAUL qui ont contribué à la partie expérimentale de ce travail dans le cadre d'un projet technologique que j'ai encadré.

Merci à toutes les personnes croisées au HU, permanents ou de passage: Adrien WANKO, Fabien JEANJEAN (BlackFab), Georges KESSERWANI, Rabih GOSTINE, Gabriela TAPIA, Pierre HARGUINDEGUY, Alain PETITJEAN...

Un grand merci, à M. Jean WOLFF, enseignant en classe préparatoire de l'ORT, doctorant à l'Institut Charles Sadron, pour son soutien, son aide, son amitié et plus encore.

J'aimerais exprimer toute ma reconnaissance à mes parents, Michel et Danièle.

Je dédie enfin ce travail à ma femme, ma Choupie, Vanessa, que j'aime.

Sommaire

Chapitre 1	Introduction	1
Chapitre 2	Etude bibliographique sur le champ de vitesse en canal à surface libre	5
2.1	Naissance de la turbulence dans un écoulement en conduite lisse	6
2.1.1	Point de vue phénoménologique.....	6
2.1.2	Point de vue analytique.....	10
2.2	Structure de l'écoulement développé.....	11
2.2.1	Les courants secondaires.....	11
2.2.2	Dip phenomenon	14
Chapitre 3	La modélisation des écoulements turbulents	16
3.1	Les équations fondamentales	16
3.1.1	L'équation de continuité	16
3.1.2	Les équations de Navier-Stokes.....	17
3.2	La simulation des grandes échelles (LES)	23
3.3	Description statistique de la turbulence	25
Chapitre 4	Les modèles de fermeture des équations de Navier Stokes moyennées	28
4.1	La distinction haut-Reynolds/bas-Reynolds	28
4.2	Les modèles au premier ordre	29
4.2.2	Les modèles de longueur de mélange.....	30
4.2.3	Les modèles k- ϵ	31
4.3	Les modèles au second ordre	40
4.3.2	Modélisation de la diffusion turbulente.....	41
4.3.3	Modélisation de la corrélation vitesse/fluctuation de pression.....	42
4.3.4	Modélisation de la pseudo-dissipation visqueuse	44
4.4	Le modèle algébriques des contraintes de Reynolds.....	45
Chapitre 5	Méthodes numérique et programme	48
5.1	Volumes finis, éléments finis	48
5.2	Schéma numérique de discrétisation.....	49
5.2.1	Le schéma centré	50

5.2.2	Le schéma upwind.....	51
5.2.3	La méthode hybride	52
5.2.4	Le schéma power-law.....	54
5.3	Méthodes de calcul du champ de pression	56
5.3.1	La méthode SIMPLE.....	56
5.3.2	Modélisation à grilles décalées.....	58
5.4	Algorithme global.....	61
5.5	Condition aux limites.....	62
5.5.1	Conditions aux parois	62
5.5.2	Conditions à la surface libre	63
5.5.3	Condition d'entrée du fluide.....	65
5.5.4	Condition de sortie du fluide	66
5.6	Le solver.....	66
Chapitre 6	Résultats des modélisations bidimensionnelles	68
6.1	Résultats en laminaire: la cavité entraînée	68
6.2	Modélisation d'un écoulement bidimensionnel entre deux plaques planes.....	73
6.2.1	Résultats en régime laminaire	73
6.2.2	Résultats en régime turbulent	74
6.3	Modélisation d'un écoulement bidimensionnel sur une plaque plane	75
Chapitre 7	Résultats des modélisations tridimensionnelles d'un écoulement en canal	83
7.1	Résultats issus du modèle k- ϵ bas Reynolds.....	84
7.2	Résultats issus du modèle RSM bas Reynolds proposé	87
7.2.1	Les tensions de Reynolds.....	88
7.2.2	Le champ moyen de vitesse.....	94
Chapitre 8	Conception et montage d'un banc expérimental de mesure du champ de vitesse	102
8.1	Objectifs.....	102
8.2	Conception et description du canal	103
8.2.1	Alimentation du canal	103
8.2.2	Le banc de déplacement.....	105
8.2.3	Instrumentation de mesure du champ de vitesse	107
8.3	Résultats de la mesure	111

Chapitre 9 Conclusion.....	114
ANNEXE A Développement du modèle et des équations.....	118
ANNEXE B Intégration des équations du modèle sur les grilles décalées avec schéma de discrétisation de type power-law.....	140
Bibliographie	167

Table des figures

Figure 1-1 Principe de mesure de la vitesse le vélocimètre Doppler.....	2
Figure 1-2 Principe de reconstitution du profil de vitesse par le profilomètre à ultrasons.....	2
Figure 2-1 Filament tourbillonnaire en épingle à cheveux d'une fumée de cigarette	8
Figure 2-2 Vue de haut et profil en long de tourbillons en épingles à cheveux dans le sillage d'une demi-sphère à $Re=550$ selon (Tufo, Fischer, Papka, & Blom, 1999)	9
Figure 2-3 Vue de haut et profil en long de tourbillons en épingles à cheveux dans le sillage d'une demi-sphère à $Re=850$ selon (Tufo, Fischer, Papka, & Blom, 1999)	9
Figure 2-4 Attracteur de Lorenz, $\alpha = 10$, $\beta = 28$ et $\delta = 8/3$	11
Figure 2-5 Courants secondaires selon la modélisation de (Ikeda, 1981).....	12
Figure 2-6 Division des courants secondaires au voisinage des angles selon (Nezu & Rodi, 1985).....	13
Figure 2-7 Courants secondaires dans une demi-section transverse selon (Nezu & Rodi, 1985)	13
Figure 2-8 Champ U/U_{max} dans une demi-canalisation mesuré par (Nezu & Rodi, 1985) et allure du profil de vitesse avec Dip phenomenon comparé à la loi logarithmique.....	14
Figure 3-1 Volume élémentaire de fluide	16
Figure 3-2 Bilan des flux sur un volume élémentaire de fluide	17
Figure 3-3 Représentation des normales aux surfaces du volume élémentaire	18
Figure 3-4 Composantes des contraintes selon x	19
Figure 3-5 Variation temporelle de la vitesse en un point	26
Figure 4-1 Configuration du maillage suivant une approche haut-Reynolds ou bas-Reynolds	29
Figure 5-1 Zone d'intégration de la méthode aux volumes finis pour un problème 1D.....	49
Figure 5-2 Résidu de la résolution de (3.26) et (3.29) discrétisée avec un schéma centré	51
Figure 5-3 Zone d'intégration de la méthode aux volumes finis pour un problème 2D.....	55
Figure 5-4 Disposition des grilles décalées d'un modèle k- ϵ	59
Figure 5-5 Disposition des grilles décalées d'un modèle RSM	60
Figure 5-6 Algorithme du logiciel	61
Figure 5-7 Traitement des conditions aux limites du champ de vitesse moyenne aux parois gauche et droite	62
Figure 5-8 Traitement des conditions aux limites du champ de vitesse moyenne à la surface libre et au radier	64
Figure 6-1 Cas test de la cavité entraînée	68
Figure 6-2 Comparaison des profils $V(y=0.5)$ calculés avec les profils mesurés par (Ghia, Ghia, & Shin, 1982) pour différents nombre de Reynolds	69
Figure 6-3 Comparaison des profils $W(z=0.5)$ calculés avec les profils mesurés par (Ghia, Ghia, & Shin, 1982) pour différents nombre de Reynolds	69
Figure 6-4 Ligne de courant du champ moyen de vitesse pour $Re=5000$ selon (Ghia, Ghia, & Shin, 1982)	70

Figure 6-5 Ligne de courant du champ moyen de vitesse calculé pour $Re=5000$	70
Figure 6-6 Comparaison de la recirculation inférieure gauche calculée avec les résultats de (Ghia, Ghia, & Shin, 1982).....	71
Figure 6-7 Comparaison des recirculations inférieures droites calculée avec les résultats de (Ghia, Ghia, & Shin, 1982).....	71
Figure 6-8 Comparaison de la recirculation inférieure gauche calculée avec les résultats de (Ghia, Ghia, & Shin, 1982).....	72
Figure 6-9 Cas de la modélisation bidimensionnelle entre deux plaques planes.....	73
Figure 6-10 Profils de vitesse d'un écoulement entre deux plaques planes en régime laminaire à différentes distances de l'amont, comparés au profil de Poiseuille	74
Figure 6-11 Profils de vitesse d'un écoulement entre deux plaques planes en régime turbulent à différentes distances de l'amont, calculés avec le modèle RSM.....	75
Figure 6-12 Cas de la modélisation bidimensionnelle sur une plaque plane	76
Figure 6-13 Profils de vitesse d'un écoulement sur une plaque plane en régime turbulent à différentes distances de l'amont, calculés avec le modèle RSM	77
Figure 6-14 Profils de vitesse d'un écoulement sur une plaque plane en régime turbulent à différentes distances de l'amont, calculés avec le modèle $k-\epsilon$	77
Figure 6-15 Comparaison des profils de vitesse de la section aval calculés avec les modèles RSM et $k-\epsilon$	78
Figure 6-16 Profils de vitesse $V(z)$ obtenus avec Fluent (aval du canal)	79
Figure 6-17 Détail du maillage de la modélisation réalisée sous Fluent.....	80
Figure 6-18 Comparaison des profils $V(z)$ à mi-longueur du canal et barre d'erreur à 2.5%...81	
Figure 7-1 Cas de la modélisation tridimensionnelle en canal rectangulaire	83
Figure 7-2 Cartographie de $\overline{U} / \overline{U}_{max}$ calculée par le modèle $k-\epsilon$	85
Figure 7-3 Cartographie de k/u^{*2} calculée par le modèle $k-\epsilon$	86
Figure 7-4 Cartographie de ϵ calculée par le modèle $k-\epsilon$	86
Figure 7-5 Comparaison des contraintes de cisaillement à la paroi modélisées et mesurées par (Yang S. Q., 2005) pour des parois formant des angles de 63.4° (a) et 45° (b)	89
Figure 7-6 Cartographie de $u/U\tau$ (a) calculée par le modèle RSM proposé, (b) par le modèle RSM de (Kang & Choi, 2005) et (c) expérimentale (Nezu & Rodi, 1985)	90
Figure 7-7 Cartographie de $w/U\tau$: (a) calculée par le modèle RSM proposé, (b) par le modèle RSM de (Kang & Choi, 2005) et (c) expérimentale (Nezu & Rodi, 1985)	91
Figure 7-8 Interprétation schématique du signe de \overline{uv}	92
Figure 7-9 Cartographie de $-w/U\tau^2$: (a) calculée par le modèle RSM proposé, (b) par le modèle RSM de (Kang & Choi, 2005) et (c) expérimentale (Nezu & Rodi, 1985).....	93
Figure 7-10 Position du Dip phenomenon selon (Yang, Tan, & Lim, 2004) avec cône d'erreur à 10%, comparaison avec les valeurs calculées.....	95
Figure 7-11 Cartographie de $\overline{U} / \overline{U}_{max}$: (a) calculée par le modèle RSM proposé, (b) par le modèle RSM de (Kang & Choi, 2005) et (c) expérimentale (Nezu & Rodi, 1985).....	96

Figure 7-12 Contour du champ de vitesse projeté sur le plan transverse (a) calculée par le modèle RSM proposé, (b) par le modèle RSM de (Kang & Choi, 2005) et (c) expérimentale (Nezu & Rodi, 1985).....	97
Figure 7-13 Contour du champ de vitesse projeté sur la demi-section transverse d'une conduite fermée selon (Nezu & Rodi, 1985)	98
Figure 7-14 Contour du champ de vitesse calculé avec Fluent, projeté sur la demi-section transverse d'une conduite fermée.....	99
Figure 8-1 Installation d'une banquette dans un canal de section rectangulaire	102
Figure 8-2 Canal du Hall Boussingault	103
Figure 8-3 Alimentation par débordement du canal	104
Figure 8-4 Partie verticale des conduites d'alimentation	104
Figure 8-5 Schéma du dispositif d'alimentation du canal	105
Figure 8-6 Banc de déplacement mobile dans les trois directions	106
Figure 8-7 Schéma du volume de la cartographie 3D	106
Figure 8-8 Le vélocimètre acoustique Doppler (Sontek, 2001)	108
Figure 8-9 Tête du capteur ADV composée d'un émetteur et de 3 récepteurs acoustiques	108
Figure 8-10 Différentes têtes de capteur ADV: (a) latérale 2D, (b) 3D vers le haut	110
Figure 8-11 Zone de mesure et discrétisation des points de mesure	111
Figure 8-12 Limites de la zone de mesure	112
Figure 8-13 Section transverse du champ de vitesse de la composante moyenne de U	113

Chapitre 1 Introduction

Le présent travail traite de l'analyse physique par modélisation numérique des écoulements tridimensionnels turbulents à surface libre en canal lisse. Les finalités de cette thèse sont d'évaluer l'apport des modèles plus complets dans les applications d'ingénierie hydraulique liées à la gestion des réseaux d'assainissement et plus particulièrement de la mesure de débit. En effet, la protection des milieux naturels récepteurs des déversements des réseaux urbains d'assainissement passe par un contrôle de plus en plus fin des débits et des charges polluantes des systèmes et réseaux d'assainissement (Bertrand-Krajewski, Barraud, & Chocat, 2000). À long terme, la maîtrise des rejets passera par une gestion en temps réel des ouvrages (auto surveillance) afin de minimiser les flux pollués rejetés directement. Cette démarche passe par une instrumentation fiable, notamment dans le domaine de la débitmétrie.

Les instruments de mesure de débit les plus couramment utilisés en réseau d'assainissement sont les vélocimètres à effet Doppler et les profilomètres à ultrasons. La faiblesse des premiers réside en la représentativité de la vitesse mesurée (et donc du débit calculé) qui est extraite d'un cône de mesure (Figure 1-1) dont la situation spatiale varie fortement en fonction du matériel et de la pose comme le précisent (Larrarte, Bardiaux, Battaglia, & Joannis, 2008). De plus, le calcul de la vitesse issue de ce cône de mesure n'est pas toujours très clair, dans certains cas il s'agit de la vitesse maximum, cela peut être aussi la vitesse moyenne ou encore la vitesse mesurée le plus fréquemment. Quant aux seconds, dont le principe, illustré Figure 1-2, repose aussi sur l'effet Doppler, ils consistent en une reconstitution du profil de vitesse et en son intégration pour produire une vitesse moyenne locale et, par transformation, un débit. Les constructeurs ne donnent généralement pas leur méthode d'intégration. Dans le meilleur des cas on peut penser qu'elle s'appuie sur des lois analytiques intégrant une composante hydraulique à la mesure, telles que celle de (Bardiaux, Vazquez, & Mosé, 2008). Ces derniers mettent d'ailleurs en avant la faiblesse de ces lois; elles ne sont valides que pour un jeu de paramètres hydrauliques et pour quelques géométries de conduite. Pour (Bardiaux, Vazquez, & Mosé, 2008) la présence d'une banquettes ou une position de capteur trop proche d'une paroi accroît considérablement l'imprécision du résultat. Un modèle 3D n'est pas exploitable en temps réel mais il peut contribuer à l'amélioration des lois analytiques voire servir dans un post traitement du profil mesuré. En effet, connaissant la position du cône d'émission d'ultrasons et la corde mesurée, on est capable d'identifier le champ de vitesse modélisé. On peut alors obtenir et intégrer la vitesse sur l'ensemble de la section et réduire l'incertitude liée à la représentativité des vitesses mesurées. On améliore ainsi la détermination du débit.

Un tel modèle doit évidemment prendre en compte le caractère turbulent de l'écoulement. Le présent travail étudie les écoulements uniformes et permanents en conduite, pour cela le canal considéré est nécessairement infini rectiligne à section constante. Or le processus de transition vers le régime turbulent uniforme d'un écoulement en canal lisse est, à ce jour, encore mal décrit alors que d'autres configurations plus complexes, tels que l'écoulement autour d'un profil d'aile (Hoarau, 2002) ou la turbulence de jet (Saïdi & Dusek, 2009), bénéficient de progrès considérables.

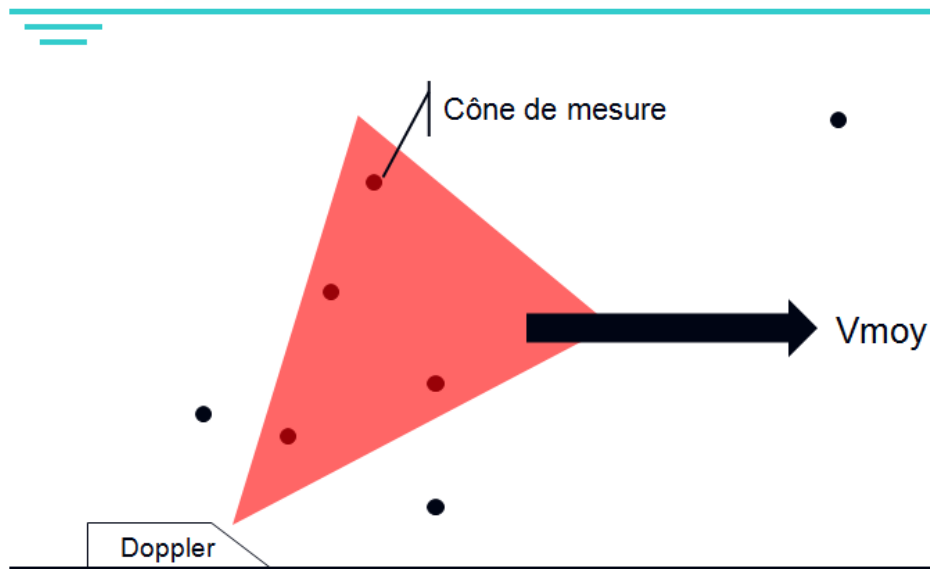


Figure 1-1 Principe de mesure de la vitesse le vélocimètre Doppler

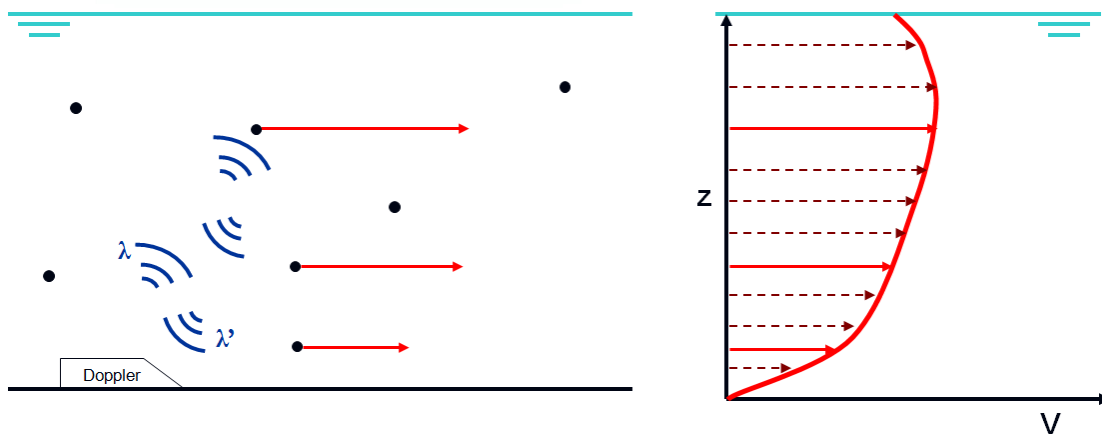


Figure 1-2 Principe de reconstitution du profil de vitesse par le profilomètre à ultrasons

Malgré cela de nombreux modèles, aux complexités et à la pertinence croissantes, ont vu le jour. Mais l'hydraulique des réseaux à surface libre en a peu bénéficié. Les équations le plus couramment utilisées sont celles de Barré de S^t Venant, généralement réduites à leur version 1D (De Saint Venant, 1871) ou (Canoë, 1999). Les équations de Barré de S^t Venant ne modélisent nullement les effets de la turbulence, le terme de diffusion visqueuse étant remplacé, dans ces équations, par une modification de la pente.

Motivé par les besoins de mesures ponctuelles de vitesse et débit décrits ci-dessus, ce travail s'intéresse à établir un modèle pour le calcul du champ tridimensionnel de vitesse d'un écoulement turbulent à surface libre en canal lisse et rectangulaire. Les résultats pourront être exploités pour d'autres types de sections. Une attention particulière a été portée aux parois et à la surface libre qui augmentent le caractère anisotrope de la turbulence, ce qui a conduit à choisir un modèle du second ordre; le modèle aux tensions de Reynolds ou *Reynolds Stress Model* (RSM) pour lequel nous proposons notamment un couplage efficace pour la modélisation du terme de corrélation vitesse/fluctuation de pression. Les parois et la surface libre constituant les limites de notre système, cette étude tente d'apporter sa contribution dans l'analyse des conditions au niveau de ces dernières, notamment pour les variables turbulentes.

Ce modèle a été implémenté dans un code aux volumes finis dont l'objet est d'être exploitable pour les problématiques précitées. Il était donc nécessaire de concevoir un programme pouvant effectuer les calculs sur un ordinateur standard en un laps de temps acceptable tout en respectant les préconisations 'classiques' de tailles de maillage des modèles utilisés. Pour chaque configuration testée, un modèle du premier ordre a été implémenté à titre de comparaison. Le modèle k- ϵ a été choisi car il est le plus largement utilisé dans les applications industrielles. Les modèles présentés sont développés dans leur version bas Reynolds afin de prendre en compte aux mieux l'effet des limites et de s'affranchir des lois de paroi.

La présente thèse commence par une étude bibliographique sur la transition vers la turbulence et sur l'influence de cette dernière sur le champ moyen d'écoulement à travers les courants secondaires et le Dip-phenomenon. Un second chapitre fera état des différents modèles de turbulence de la littérature après avoir établi les équations de base. Puis, à l'issue d'une présentation des modèles de fermeture des équations de Navier-Stokes moyennées, un couplage de (Speziale, Sarkar, & Gatski, 1991), (Shir, 1973) et (Cokljat, 1993) sera proposé pour une modélisation du terme de corrélation vitesse/fluctuation de pression. Dans un quatrième temps sera présentée la méthode numérique du code implémentant ces modèles dont les résultats sont présentés dans les deux chapitres suivants. Nous montrerons la pertinence de ce couplage à travers son aptitude à reproduire les courants secondaires. Puis, dans le cadre de l'établissement du modèle tridimensionnel pour l'exploitation de données issues de vélocimètre, le présent travail se propose de comparer l'incidence des modèles de turbulence RSM et k- ϵ sur le profil adimensionnel et le débit.

Parallèlement, un banc d'essai de mesure de vitesse en canal à section rectangulaire, en boucle fermée, a été conçu. Des banquettes seront prochainement installées. L'objectif est de rendre possible la cartographie des trois composantes du champ de vitesse. Un banc de déplacement automatisé, pilotable par ordinateur, a été assemblé autour d'un canal de 20m de long. Ce banc est équipé du vélocimètre ADV permettant la mesure ponctuelle des composantes moyenne et fluctuante de la vitesse dans les trois directions. Il est aussi pourvu de la technologie PIV permettant la mesure instantanée du champ de vitesse. Il est fait état des difficultés rencontrées notamment pour la mesure de la vitesse dans les directions transverses et sous la surface libre. Des solutions sont proposées. Quoiqu'ils ne soient pas directement exploitables, les premiers résultats sont présentés et analysés dans un dernier chapitre.

Chapitre 2 Etude bibliographique sur le champ de vitesse en canal à surface libre

Trois types d'écoulement peuvent être distingués. La première catégorie est celle des systèmes uniformes et ordonnés tel l'écoulement de Poiseuille. Ces écoulements sont faciles à décrire et à modéliser. Ils se caractérisent par leur stabilité, d'ailleurs la plupart ont des comportements caractéristiques des attracteurs réduits à un ou plusieurs points fixes; le système converge toujours vers un stade final stationnaire, indépendant des conditions initiales. Tout autre comportement n'est que transitoire.

Une autre catégorie est composée des écoulements à transition vers la turbulence. Ces systèmes dynamiques sont capables de gérer une grande quantité d'énergie qu'ils dissipent par des comportements complexes propres à la transition vers le chaos. Mais ces systèmes ne sont pas chaotiques, ils ont une structure qui est très organisée. On parle alors d'attracteurs étranges; le système converge dans une gamme de stades finaux possibles au sein de laquelle il est par contre difficilement prédictible. Deux systèmes aux conditions limites proches ne convergeront pas vers des stades voisins mais l'ensemble des solutions est très précisément délimité, il s'agit de déterminisme chaotique ou chaos déterminisme. Ces systèmes ont un équilibre énergétique et ils sont stables car auto-entretenus, comme l'illustrent les tempêtes qui se déchaînent sur les côtes américaines avec beaucoup de violence mais aussi avec beaucoup de 'ponctualité'.

Une dernière catégorie regroupe les écoulements pleinement turbulents. Ils sont quasi imprévisibles tant ils sont sensibles à chacun des paramètres qui les gouvernent. Au contraire des attracteurs, un changement infime des conditions initiales change du tout au tout le comportement du système. C'est souvent le cas des systèmes qui bénéficient d'un apport d'énergie bien supérieur à ce qu'ils sont capables de dissiper par des phénomènes simples (conduction, dissipation visqueuse...). C'est le cas, par exemple, d'un fluide au pied d'une chute (grand apport d'énergie potentielle à un système inerte). Ces écoulements ont perdu leur caractère déterministe, surtout dans le cas d'écoulements en canal. D'ailleurs leur modélisation nécessite une approche stochastique, propre à l'étude des phénomènes aléatoires. Pourtant, on ne peut assimiler chaos et désordre. Malgré l'absence de déterminisme et la présence aux petites échelles de tourbillons à la répartition aléatoire, il existe, dans certains cas, aux grandes échelles, des recirculations qui relèvent d'une contrainte globale qui ne dépendent pas d'instabilités locales comme on l'observe pour les écoulements de jet ou en canal rectiligne.

En effet, c'est à cette dernière catégorie qu'appartient l'écoulement turbulent étudié. Cet écoulement est évidemment caractérisé par un nombre de Reynolds élevé, lui-même caractéristique, généralement d'une vitesse élevée; ce système subit donc un apport conséquent d'énergie cinétique. Cette énergie est dans un premier temps gérée de manière

'classique' par transport et dissipation visqueuse mais cela ne suffit pas au système pour s'équilibrer, l'énergie cinétique mettant le fluide en mouvement étant trop intense par rapport aux forces visqueuses que le fluide lui oppose. C'est pourquoi l'écoulement adopte une structure plus complexe que celle de l'écoulement laminaire, il y a naissance de courants secondaires. Ces derniers, qui seront décrits plus loin, se présentent globalement sous la forme de rouleaux contra-rotatifs. C'est un mode de transport qui permet de dissiper plus d'énergie et donc de trouver un équilibre énergétique. L'étude d'un tel système dynamique pose la question préalable de la transition vers la turbulence et de la naissance de cette dernière.

2.1 Naissance de la turbulence dans un écoulement en conduite lisse

Un écoulement laminaire dans une conduite lisse se caractérise par la superposition de lames d'eau parallèles glissant les unes sur les autres. Le fluide entame sa transition vers la turbulence lorsqu'une perturbation, pouvant être petite à l'origine, n'est plus amortie par l'écoulement mais commence à grandir en prenant son énergie de l'écoulement laminaire d'origine. En dépit d'une géométrie assez simple, le processus de transition vers le régime turbulent dans un canal lisse infini à section constante est encore très mal connu. Des expériences effectuées par (Detlev & Eckelmann, 1982) ou encore (Williamson, 1989) ont montré une influence des extrémités sur le champ de vitesse dans le sillage d'un cylindre malgré des rapports longueur/diamètre très élevés et ce, même à de faibles nombres de Reynolds. Aussi, même dans un canal présentant un rapport longueur/largeur très élevé, rien ne garantit que le champ de vitesse ne soit pas influencé par les sections amont et aval. Ainsi le problème ne peut bénéficier que difficilement de l'apport expérimental. Quant à la simulation numérique directe, l'infini du canal est modélisé par une périodicité des conditions limites dont l'équivalence n'a pas été démontrée. La suite tente de décrire l'état de l'art sur le sujet d'un point de vue phénoménologique dans un premier temps, puis analytique.

2.1.1 Point de vue phénoménologique

Vorticité et filaments tourbillonnaires

La vorticité est incontournable dans l'étude de la turbulence pour caractériser un tourbillon. Il s'agit d'un vecteur dont l'origine est le point considéré, la direction est l'axe de rotation du tourbillon et la norme est celle du demi-rotationnel de la vitesse, défini comme suit, en reprenant les notations de la Figure 3-1:

$$\frac{1}{2} \overrightarrow{rotU} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \\ \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \end{vmatrix} \quad (2.1)$$

On appelle filament tourbillonnaire les lignes de champ associées à la vorticité. Une vorticité non nulle n'implique pas forcément la présence de tourbillon. Dans le cas d'un écoulement laminaire dans un canal plan, les filaments tourbillonnaires sont tous parallèles, dans la direction transversale y . Du fait du gradient de vitesse U suivant l'horizontale, surtout au voisinage du radier, une faible perturbation du filament tourbillonnaire entraîne sa déformation car il sera transport  plus vite dans sa partie haute. Le filament prend alors la forme d'une épingle à cheveux ou *hairpin*. Cette structure se caractérise par une succession longitudinale de tourbillons alternativement positifs et négatifs. La partie supérieure étant la plus rapide, elle est le siège d'une dépression aspirant le fluide en vertu de la loi de Bernoulli. Les tourbillons aux pieds de l'épingle où la vitesse est plus faible, vont éjecter le fluide depuis l'intérieur vers l'extérieur de la structure, par surpression, créant ainsi une circulation secondaire caractéristique, illustrée Figure 2-1. D'après (Bailly & Comte-Bellot, 2003), on observe ce phénomène principalement au voisinage de $y^+ = 30$, où y^+ est donné par (4.1), soit entre la sous-couche visqueuse et la zone logarithmique.

Une vitesse élevée dans le sens de l'écoulement a tendance à incliner et  tirer cette structure en épingle à cheveux. Quand cette dernière est étirée à un niveau critique, la partie supérieure se brise brusquement lâchant de petits tourbillons de Kelvin-Helmholtz ou *burst* contraignant le fluide au passage à une turbulence développée. Pour une description de ce mécanisme, on se reportera à (Klebanoff, Tidstrom, & Sargent, 1962).

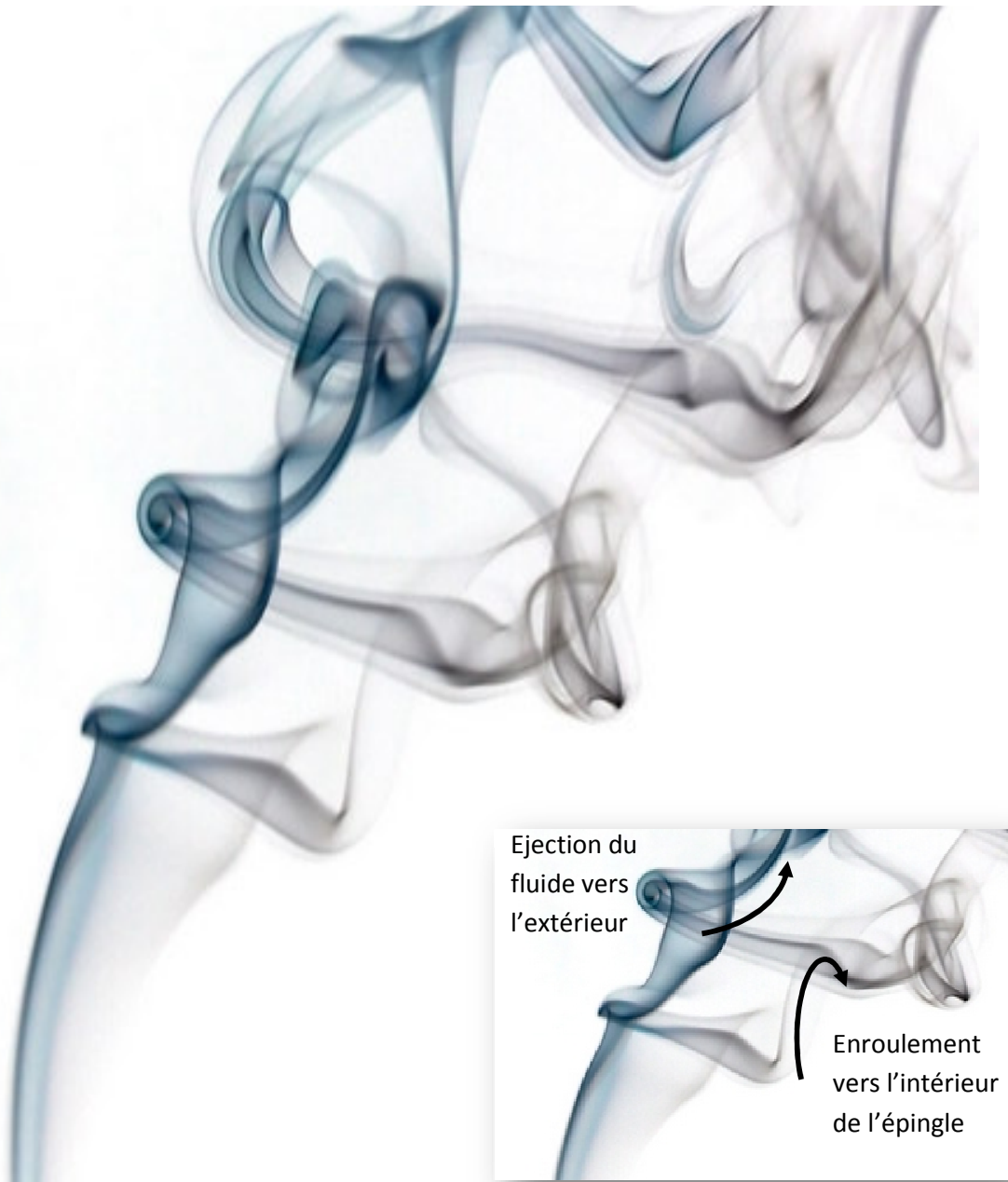


Figure 2-1 Filament tourbillonnaire en épingle à cheveux d'une fumée de cigarette

Les images suivantes sont issues de la simulation numérique directe de l'écoulement dans le sillage d'une demi-sphère effectué par (Tufo, Fischer, Papka, & Blom, 1999). Une comparaison des Figure 2-2 et Figure 2-3, correspondant respectivement à un nombre de Reynolds de 550 et 850, montre que les tourbillons en épingle à cheveux successifs ont tendance à se rapprocher quand le degré de turbulence augmente. La Figure 2-3 montre que l'inclinaison des structures est progressive, l'éjection de tourbillon au niveau de la tête de l'épingle est clairement visible.

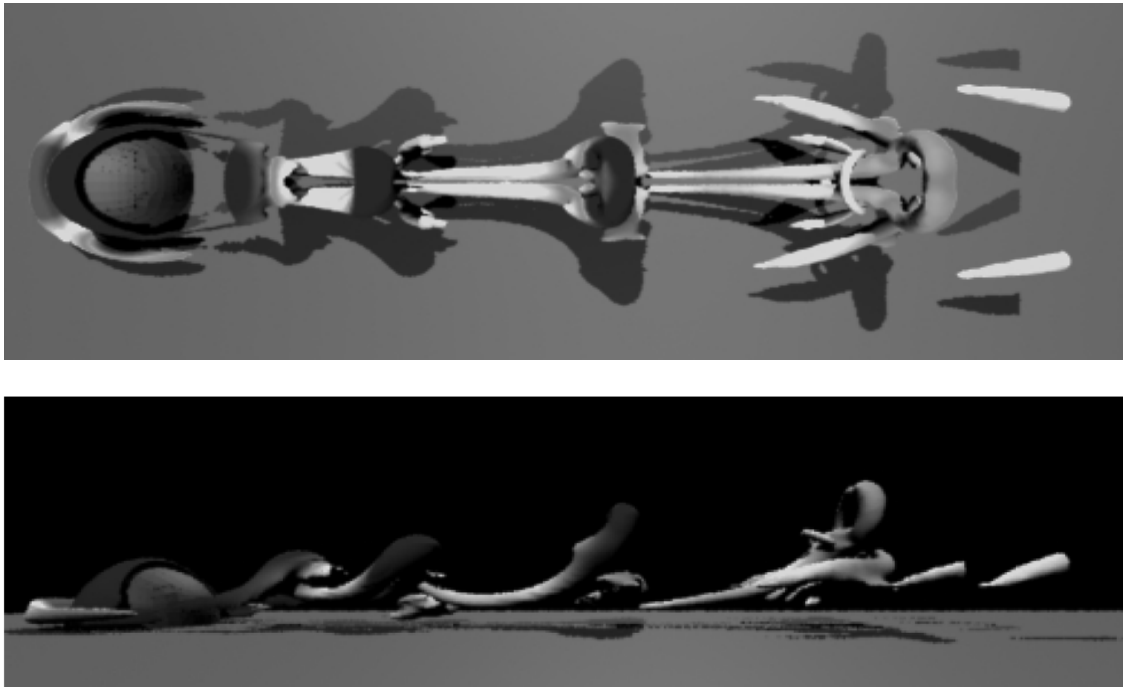


Figure 2-2 Vue de haut et profil en long de tourbillons en épingles à cheveux dans le sillage d'une demi-sphère à $Re=550$ selon (Tufo, Fischer, Papka, & Blom, 1999)

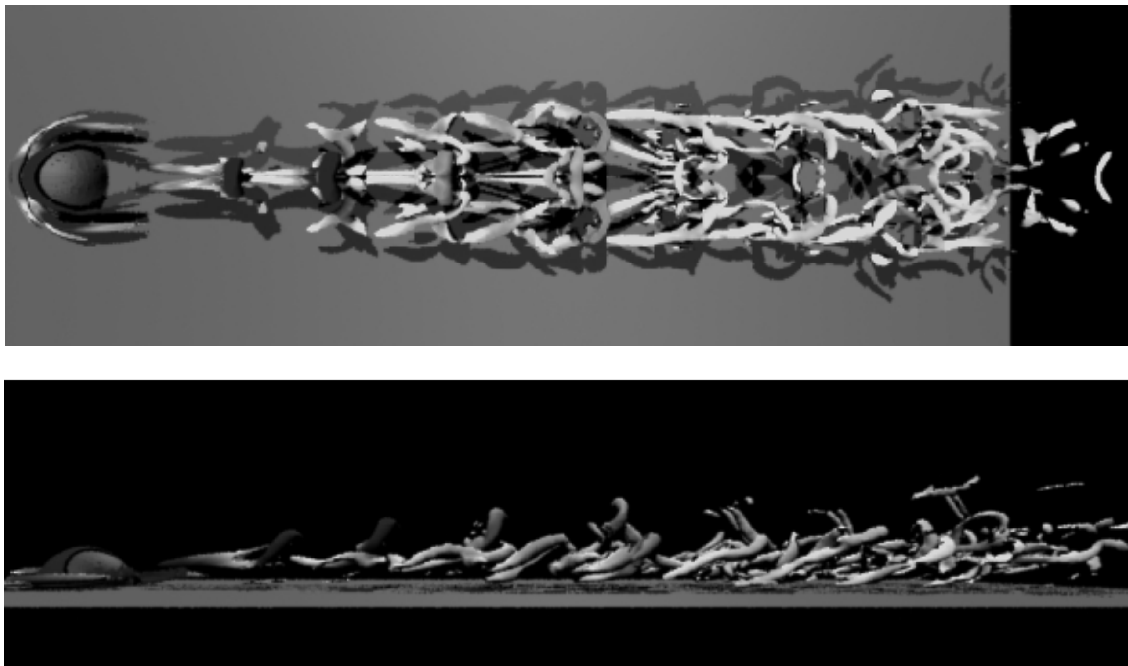


Figure 2-3 Vue de haut et profil en long de tourbillons en épingles à cheveux dans le sillage d'une demi-sphère à $Re=850$ selon (Tufo, Fischer, Papka, & Blom, 1999)

2.1.2 Point de vue analytique

(Lorenz, 1963) mit en avant le comportement des systèmes non linéaires, auxquels Henri Poincaré s'est intéressé le premier, en étudiant le phénomène de convection de Rayleigh-Bénard. Il étudie alors un système dynamique différentiel possédant seulement trois degrés de liberté, numériquement simple à intégrer, du type :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha (y(t) - x(t)) \\ \frac{dy}{dt} &= \beta x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \frac{dz}{dt} &= x(t)y(t) - \delta z(t)\end{aligned}\tag{2.2}$$

Ce système présente trois points fixes, c'est-à-dire trois triplets (x,y,z) qui sont solution quelques soient les trois coefficients constants α , β et δ . Pour $\alpha = 10$, $\beta = 28$ et $\delta = 8/3$, l'ensemble des solutions de ce système dynamique différentiel de Lorenz constitue l'attracteur étrange en forme d'ailes de papillon, illustré Figure 2-4.

La résolution du système (2.2) en partant de deux conditions initiales très proches (x_0, y_0, z_0) et $(x_0 + \varepsilon, y_0, z_0)$, peut aboutir à des solutions fort éloignées sur l'attracteur, au bout de quelques itérations seulement. On parle alors de chaos déterminisme.

On a vu précédemment qu'une faible perturbation du filament tourbillonnaire provoque l'apparition de tourbillons de tailles variées amorçant la transition vers la turbulence. Ce phénomène est illustré par les équations de Navier-Stokes moyennées (3.29) qui font intervenir une combinaison des parties fluctuantes de la vitesse (corrélations doubles de vitesse fluctuante). Ce terme, qui reprend à lui seul les effets de la turbulence, peut être vu comme un terme puits/source des équations de transport de la composante moyenne du champ de vitesse. Sans celui-ci, ces équations sont celles d'un écoulement laminaire. Or ces équations sont non-linéaires ce qui leur confère le pouvoir d'amplifier ce terme puits/sources et ainsi assurer la transition vers la turbulence multipliant les échelles de longueur et leurs interactions. (Bailly & Comte-Bellot, 2003) montrent comment, en partant d'une condition initiale harmonique, le terme convectif non linéaire des équations de Navier-Stokes (3.17) entraîne l'apparition d'harmoniques supérieures mais également inférieures (tourbillons plus petits et plus grands) et de transferts d'énergie entre ces structures. Et ce, tout en réduisant la prédictibilité du système par rapport aux conditions initiales et aux limites.

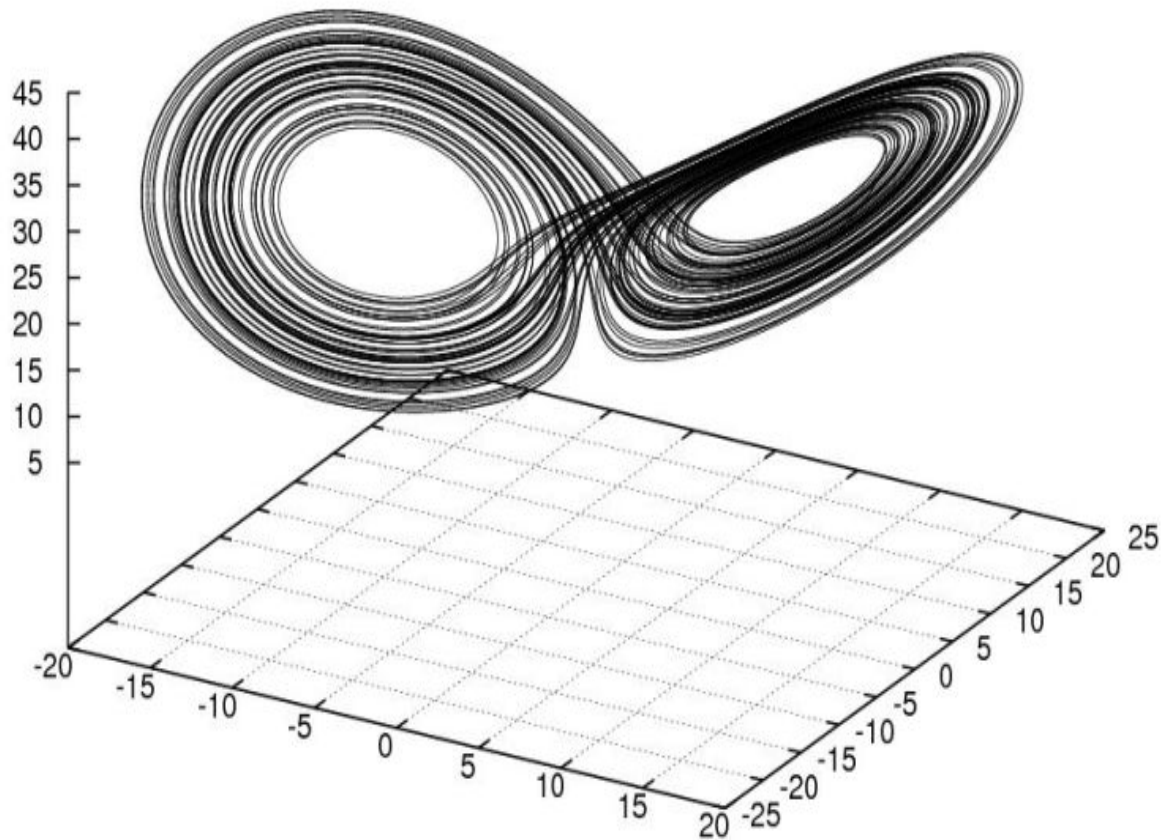


Figure 2-4 Attracteur de Lorenz, $\alpha = 10$, $\beta = 28$ et $\delta = 8/3$

2.2 Structure de l'écoulement développé

2.2.1 Les courants secondaires

Dans cette partie nous allons définir et décrire les écoulements secondaires, cette description se fera à travers l'analyse de mesures expérimentales tirées notamment de l'ouvrage de (Nezu & Nakagawa, Turbulence in open-channel flows, 1993). Les écoulements secondaires sont des perturbations à grande échelle de l'écoulement moyen, qui en modifient grandement la structure. Il existe plusieurs types d'écoulement secondaire. Les premiers sont liés aux gradients de pression qui découlent directement des forces d'inertie dues aux courbures éventuelles du canal. Le canal étudié étant rectiligne, l'écoulement ne présente pas ce type de courant secondaire, ceux de première catégorie selon la

classification de Prandtl. Le second type consiste en la perturbation du champ moyen par effet de la turbulence. Dans la mesure où cette turbulence peut être générée par les parois et les angles, la présence de ces derniers va donc amplifier ces écoulements secondaires. En effet, les parois et la surface libre ont tendance à réduire l'intensité turbulente dans le sens de l'écoulement. Cette perte est redistribuée, par réflexion, dans les deux autres directions augmentant l'anisotropie de la turbulence et provoquant la mise en mouvement du fluide dans le plan transverse. Ce phénomène de réflexion est modélisé par le terme proche paroi de l'expression de la corrélation vitesse/fluctuation de pression (voir paragraphe (4.5)). La vitesse de ces courants secondaires fluctue entre 2 et 5% de la vitesse débitante.

(Ikeda, 1981) reprend les équations de Navier-Stokes moyennées (3.29) en modélisant la distribution du frottement pariétal par une fonction sinusoïdale et les tensions de Reynolds par une fonction linéaire de la vitesse de frottement. Il obtient le résultat illustré Figure 2-5. Cette modélisation très simplifiée, ne prend pas en compte les effets de la surface libre, de la rugosité ni même de tous les effets des parois et des angles qui divisent la recirculation à leur voisinage selon une droite proche de la bissectrice visible sur la Figure 2-6. On se reportera à (Yang S. Q., 2005) pour l'équation de cette droite qui est fonction de la géométrie de la canalisation et de la valeur du cisaillement à la paroi. La Figure 2-7, issue de données expérimentales de (Nezu & Rodi, 1985), donne une vision plus juste de la forme des courants secondaires.

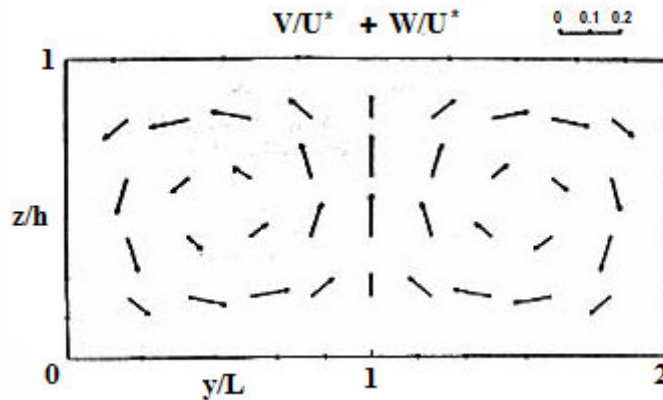


Figure 2-5 Courants secondaires selon la modélisation de (Ikeda, 1981)

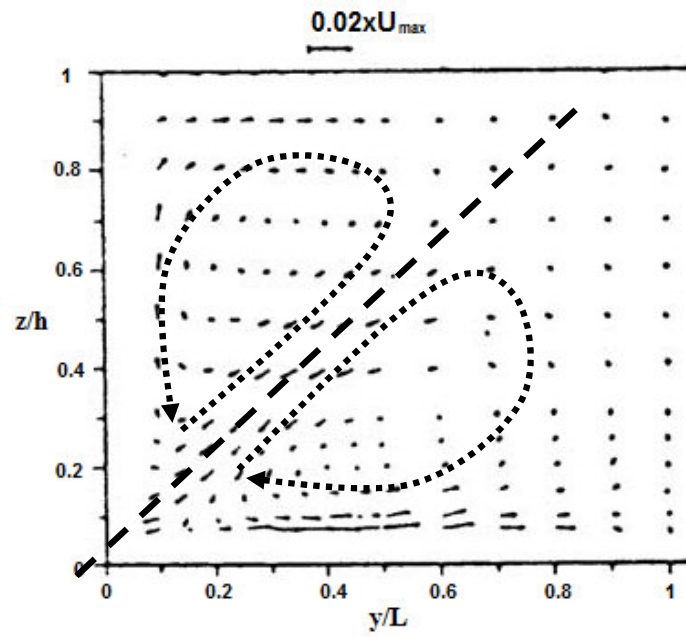


Figure 2-6 Division des courants secondaires au voisinage des angles selon (Nezu & Rodi, 1985)

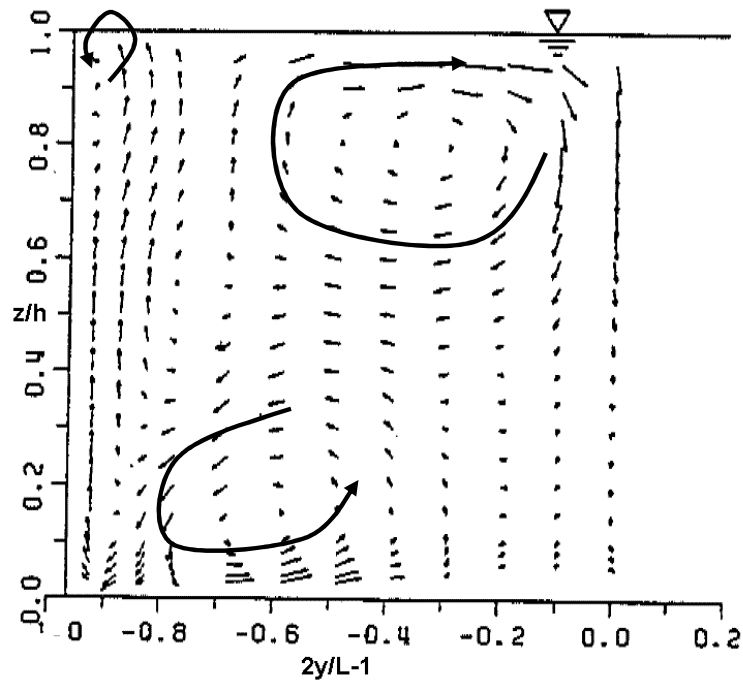


Figure 2-7 Courants secondaires dans une demi-section transverse selon (Nezu & Rodi, 1985)

Les courants secondaires prennent la forme de rouleaux contrarotatifs assurant ainsi le rôle de dissipation d'énergie cinétique. Tel est le comportement complexe mais stable adopté par le fluide afin de parvenir à un équilibre énergétique. On notera enfin que ces courants secondaires entretiennent les causes qui leur ont donné naissance. En effet ces recirculations vont modifier le champ de vitesse et augmenter fortement l'anisotropie de la turbulence. Il s'agit donc d'un système auto-entretenu.

2.2.2 Dip phenomenon

Une des conséquences principales des courants secondaires est le Dip-phenomenon; le fluide est ralenti au voisinage de la surface libre. Ainsi le maximum de vitesse ne se trouve pas au niveau de la surface où les effets de la viscosité sont les plus faibles, mais en dessous, à 80% de la hauteur d'eau environ (voir Figure 2-8). Comme on le voit sur la Figure 2-5, une partie du fluide est déplacé du bas, zone où le fluide subit fortement les effets de la viscosité, vers le haut ce qui peut expliquer le ralentissement du fluide dans cette zone. Au vu du champ de vitesse mesuré par (Nezu & Rodi, 1985) représenté ci-dessus, l'allure globale du profil de vitesse à mi-largeur de la canalisation n'est pas un logarithme comme bon nombre d'applications d'ingénierie le préconisent mais ressemble plutôt à la Figure 2-8.

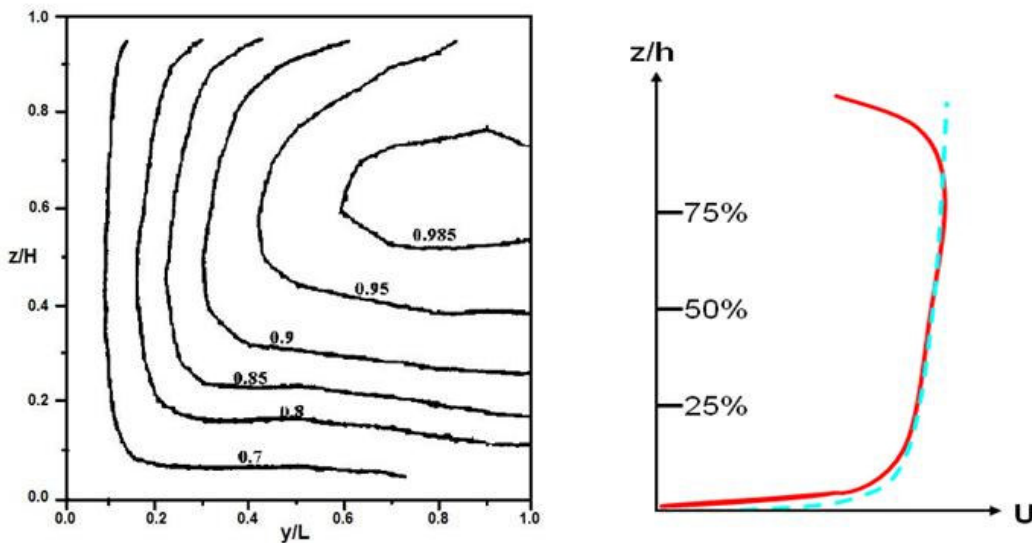


Figure 2-8 Champ U/U_{max} dans une demi-canalisation mesuré par (Nezu & Rodi, 1985) et allure du profil de vitesse avec Dip phenomenon comparé à la loi logarithmique

Le Dip phenomenon n'apparaît qu'en deçà d'une valeur du rapport de la largeur par la hauteur. (Nezu & Rodi, 1985) évaluent expérimentalement cette valeur seuil $\left. \frac{B}{h} \right|_c$ égale à 5. (Yang, Tan, & Lim, 2004) proposent la relation suivante pour déterminer la hauteur d'eau à laquelle la vitesse débitante est la maximum.

$$\frac{z_{\max}}{h} = \frac{1}{1 + \alpha} \quad (2.3)$$

$$\alpha = 1.3 e^{-\frac{B}{2h}} \quad (2.4)$$

où B et h sont respectivement la largeur et la hauteur d'eau du canal et z_{\max} est la cote correspondant au maximum du profil de vitesse.

La modélisation des écoulements en canal avec pour exigence la reproduction des courants secondaires et du Dip phenomenon, nécessite une modélisation fine de la turbulence, soit une prise en compte de l'anisotropie de la turbulence et des parois (modélisation des redistributions énergétique aux parois).

Chapitre 3 La modélisation des écoulements turbulents

3.1 Les équations fondamentales

Les équations de base de la mécanique des fluides sont les équations de Navier-Stokes et l'équation de continuité. Elles sont issues d'un bilan de force et de masse effectué sur un volume élémentaire du fluide de volume $dxdydz$ représenté sur la Figure 3-1. Nous étudions ici un fluide incompressible.

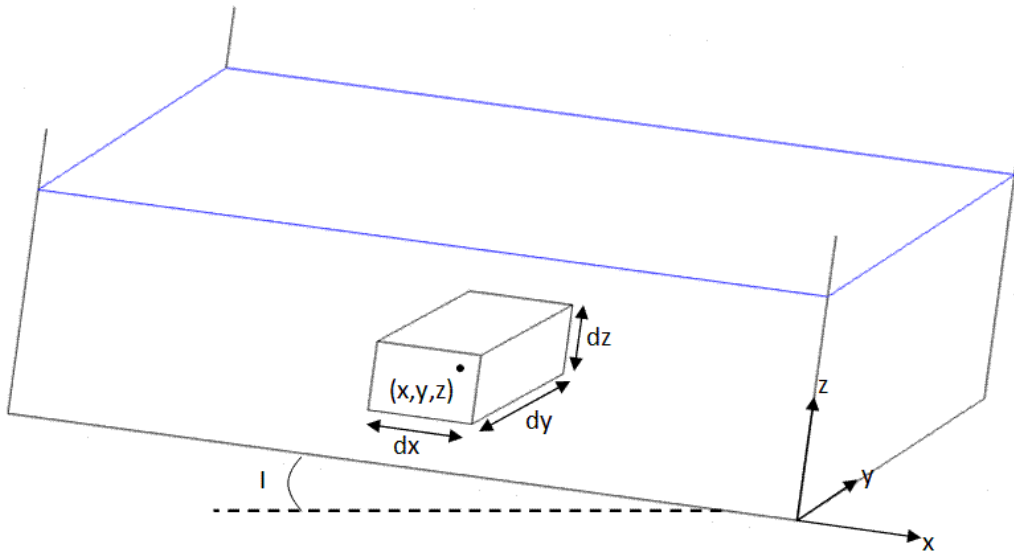


Figure 3-1 Volume élémentaire de fluide

3.1.1 L'équation de continuité

La variation de la masse dans un volume élémentaire de fluide pendant un temps dt s'exprime de la façon suivante :

$$dm = \frac{\partial \rho}{\partial t} dxdydz \cdot dt \quad (3.1)$$

Elle est égale à la somme des masses de fluide entrant diminuée de celle des masses de fluide sortant comme représenté sur la Figure 3-2.

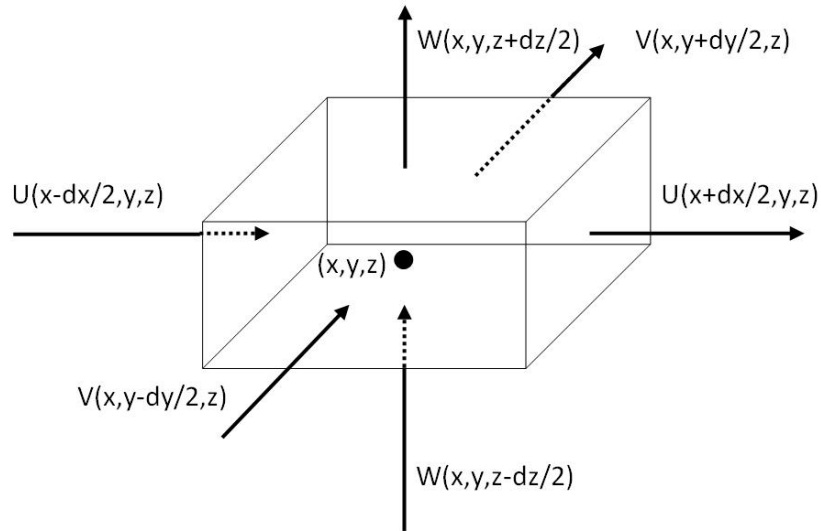


Figure 3-2 Bilan des flux sur un volume élémentaire de fluide

$$\begin{aligned}
 dm &= \rho U \left(x - \frac{dx}{2}, y, z \right) dy \cdot dz - \rho U \left(x + \frac{dx}{2}, y, z \right) dy \cdot dz \\
 &+ \rho V \left(x, y - \frac{dy}{2}, z \right) dx \cdot dz - \rho V \left(x, y + \frac{dy}{2}, z \right) dx \cdot dz \\
 &+ \rho W \left(x, y, z - \frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy - \rho W \left(x, y, z + \frac{dz}{2} \right) dx \cdot dy
 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Le fluide étant incompressible $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, soit :

$$\frac{\partial U}{\partial x} dx \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial V}{\partial y} dy \cdot dx \cdot dz + \frac{\partial W}{\partial z} dz \cdot dx \cdot dy = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (3.3)$$

$$\text{div}(\vec{u}) = 0 \quad (3.4)$$

3.1.2 Les équations de Navier-Stokes

Ces équations sont issues de l'écriture de la seconde loi de Newton; le produit de la masse par l'accélération du volume de fluide est égal à la somme des forces extérieures exercées sur l'objet.

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} \quad (3.5)$$

Listes des forces :

- Forces volumiques (Poids)
- Forces surfaciques (Forces de pression et de viscosité)

$$m\vec{a} = \vec{F}_S + \vec{P} \quad (3.6)$$

Où l'accélération, selon une description lagrangienne, est la dérivée particulière de la vitesse.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{DU}{Dt} \\ \frac{DV}{Dt} \\ \frac{DW}{Dt} \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Le bilan des forces surfaciques est effectué en considérant le tenseur des contraintes suivant :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \text{ ce tenseur étant symétrique}$$

La force surfacique est issue de la somme des produits des contraintes avec les surfaces portées par leur vecteur normal tel que représenté sur la Figure 3-3.

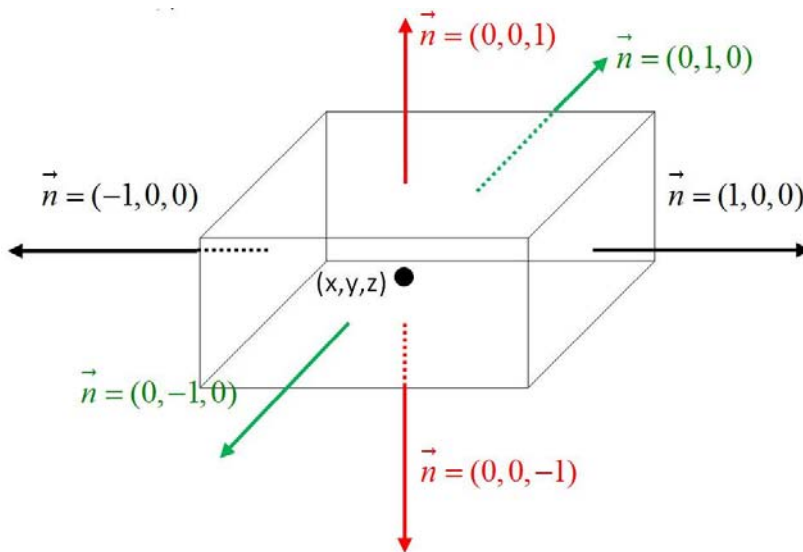


Figure 3-3 Représentation des normales aux surfaces du volume élémentaire

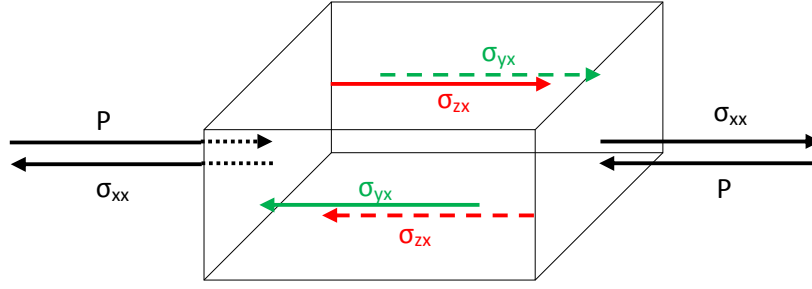


Figure 3-4 Composantes des contraintes selon x

La projection des contraintes selon l'axe x telle qu'illustrée sur la Figure 3-4 permet d'établir :

$$\begin{aligned}
 F_{S_x} = & \left[P \left(x - \frac{dx}{2}, y, z \right) - \sigma_{xx} \left(x - \frac{dx}{2}, y, z \right) \right] dy.dz + \left[-P \left(x + \frac{dx}{2}, y, z \right) + \sigma_{xx} \left(x + \frac{dx}{2}, y, z \right) \right] dy.dz \\
 & - \sigma_{xy} \left(x, y - \frac{dy}{2}, z \right) dx.dz + \sigma_{xy} \left(x, y + \frac{dy}{2}, z \right) dx.dz \\
 & - \sigma_{xz} \left(x, y, z - \frac{dz}{2} \right) dx.dy + \sigma_{xz} \left(x, y, z + \frac{dz}{2} \right) dx.dy
 \end{aligned}$$

Soit:

$$F_{S_x} = \left[-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right] dx.dy.dz + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy.dx.dz + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz.dx.dy \quad (3.8)$$

Par analogie:

$$\begin{aligned}
 F_{S_y} = & \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} dx.dy.dz + \left[-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right] dy.dx.dz + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} dz.dx.dy \\
 F_{S_z} = & \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} dx.dy.dz + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} dy.dx.dz + \left[-\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right] dz.dx.dy
 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Après injection des expressions (3.7), (3.8) et (3.9) et projection selon les trois axes principaux, l'équation (3.6) devient:

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{DU}{Dt} &= \left[-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \right] + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \rho g \sin I \\
 \rho \frac{DV}{Dt} &= \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \left[-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right] + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \\
 \rho \frac{DW}{Dt} &= \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \left[-\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right] - \rho g \cos I
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Le tenseur des taux de déformation du volume élémentaire de fluide est donné par :

$$\overline{\overline{G}} = \overrightarrow{\text{grad}} \vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} & \frac{\partial U}{\partial y} & \frac{\partial U}{\partial z} \\ \frac{\partial V}{\partial x} & \frac{\partial V}{\partial y} & \frac{\partial V}{\partial z} \\ \frac{\partial W}{\partial x} & \frac{\partial W}{\partial y} & \frac{\partial W}{\partial z} \end{bmatrix} = \overline{\overline{e}} + \overline{\overline{w}} \tag{3.11}$$

avec

$$\overline{\overline{e}} = \frac{\overline{\overline{G}} + \overline{\overline{G}}^T}{2} \quad \overline{\overline{w}} = \frac{\overline{\overline{G}} - \overline{\overline{G}}^T}{2}$$

L'eau étant un fluide newtonien, le tenseur des contraintes visqueuses est une combinaison linéaire du tenseur des taux de déformation et de sa partie symétrique. Soit:

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} - \frac{2}{3}\mu(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz})\delta_{ij} \tag{3.12}$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide. Par ailleurs :

$$e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = \text{div} \vec{u} = 0 \tag{3.13}$$

Soit

$$\sigma_{ij} = 2\mu e_{ij} \tag{3.14}$$

En injectant (3.14) dans (3.10), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \rho \frac{DU}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial W}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right] + \rho g \sin I \\
 &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} \right) + \rho g \sin I \\
 &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \text{div} \vec{u} + \rho g \sin I \\
 &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \rho g \sin I \\
 \rho \frac{DV}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \\
 \rho \frac{DW}{Dt} &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) - \rho g \cos I
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

La dérivée particulaire issue de la description lagrangienne s'exprime en fonction des dérivées partielles en description eulérienne de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{DX}{Dt} &= \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\
 &= \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial x} U + \frac{\partial X}{\partial y} V + \frac{\partial X}{\partial z} W
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ainsi (3.15) devient:

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} U + \frac{\partial U}{\partial y} V + \frac{\partial U}{\partial z} W \right) &= -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + \rho g \sin I \\
 \rho \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} U + \frac{\partial V}{\partial y} V + \frac{\partial V}{\partial z} W \right) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \right) \\
 \rho \left(\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} U + \frac{\partial W}{\partial y} V + \frac{\partial W}{\partial z} W \right) &= -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} \right) - \rho g \cos I
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Ainsi sont établies les équations (3.4) et (3.17), équations fondamentales de la dynamique des fluides. Ces équations sont fortement non-linéaires ce qui exclut toute solution analytique dans le cas général. En revanche, elles peuvent être résolues numériquement de manière directe; il s'agit de la simulation directe numérique (SDN) ou encore Direct Numerical Simulation (DNS) en anglais. Néanmoins il y a des contraintes fortes sur le

maillage d'une telle simulation. Comme l'indique (Chassaing, 2000), le nombre total de mailles N , prenant en considération la taille des plus petits tourbillons effectivement présents dans l'écoulement, est tel que:

$$N \geq \text{Re}_t^{9/4} \quad (3.18)$$

Re_t est le nombre de Reynolds turbulent, il est calculé de la manière suivante :

$$\text{Re}_t = \frac{\sqrt{k} 0.07L}{\nu} \quad (3.19)$$

L est une échelle de longueur caractéristique de la conduite dans laquelle l'écoulement est simulé, on prendra ici le diamètre. ν est la viscosité cinématique du fluide.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}$$

L'intensité turbulente d'un écoulement de vitesse moyenne 1 m.s^{-1} dans une conduite de diamètre $D=1\text{m}$ sur une longueur $L=1\text{m}$ s'élève à environ 3% :

$$I = 0.16. \text{Re}^{-1/8} \text{ avec } \text{Re} = \frac{VD}{\nu}$$

Re étant le nombre de Reynolds du champ moyen, classiquement utilisé pour caractériser le régime de l'écoulement.

k est alors calculé suivant :

$$k = \frac{3}{2} (V_{moy}.I)^2$$

Soit $N \geq 4 \cdot 10^7$

A chaque nœud quatre variables sont calculées (U , V , W et P). La matrice issue de la résolution numérique des équations (3.17) sera donc de taille $4.N \times 4.N$, soit $2.56 \cdot 10^{16}$. Chaque terme de la matrice étant codé sur 2 octets, cette matrice nécessite 5.10^7 Go de mémoire vive. Aucun ordinateur n'étant pourvu d'une telle capacité, la DNS n'est pas envisageable pour un tel volume. Toutefois il convient de préciser que les progrès informatiques rendent possible aujourd'hui de mener un calcul sur un domaine de 40 millions de mailles. Aussi la DNS serait envisageable sur un volume environ 3 fois plus petit dans chaque direction, ce qui resterait des dimensions rencontrées en assainissement. Néanmoins (3.18) découle du concept de cascade d'énergie de Kolmogorov; dans la pratique le nombre de mailles est encore supérieur. De plus, des simulations comportant un tel

nombre de mailles nécessitent des supercalculateurs et un temps considérable de calculs intensifs ce qui est incompatible avec l'objectif d'auto-surveillance des réseaux de ce travail. Il est donc nécessaire de simplifier la modélisation de Navier-Stokes (3.14).

3.2 La simulation des grandes échelles (LES)

La simulation des grandes échelles ou *large eddy simulation* (LES) constitue une étape intermédiaire entre la simulation numérique directe et la modélisation de la turbulence visant à fermer les équations de Navier-Stokes moyennées établies ci-dessous. Cette méthode s'appuie sur la décomposition spectrale de la turbulence et sur la distinction des structures selon leur taille. Les tourbillons appartenant aux grandes échelles seront décrits par la résolution des équations de Navier-Stokes (3.17), donc par DNS. Ceux des petites échelles sont modélisés autrement. Les plus petits tourbillons ayant la particularité d'être homogènes et isotropes, la modélisation s'en retrouve simplifiée. La discrétisation spatio-temporelle de la simulation fixe la limite entre les deux échelles. En effet, les plus petites structures ne peuvent être calculées que si le maillage est réduit en conséquence. Dans la pratique la sélection s'opère par l'application d'un filtre, le plus souvent uniquement spatial:

$$\overline{Y(x,t)} = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-\xi)Y(\xi,t)d\xi \quad (3.20)$$

où G est une fonction de filtrage.

Le champ Y est alors décomposé comme il suit:

$$Y = \overline{Y} + y \quad (3.21)$$

\overline{Y} est le champ filtré, ou champ résolu, contenant toutes les structures dont la taille est supérieure à celle du maillage. y est le champ de sous maille, ou champ fluctuant, dont le calcul nécessite une modélisation.

Contrairement à la décomposition statistique qui va suivre:

$$\begin{aligned} \overline{\overline{Y}} &\neq \overline{Y} \\ \overline{y} &\neq 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

En appliquant ce filtrage aux équations (3.17) on obtient:

$$\begin{aligned}
 & \rho \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \bar{U} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \bar{V} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \bar{W} \right) = \\
 & \quad - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho g \sin I \\
 & \rho \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \bar{U} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \bar{V} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \bar{W} \right) = \\
 & \quad - \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \\
 & \rho \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \bar{U} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \bar{V} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \bar{W} \right) = \\
 & \quad - \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} - \rho g \cos I
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

avec $\tau_{ij} = \overline{U_i U_j} - \bar{U}_i \bar{U}_j$. En appliquant la décomposition (3.21) à ce tenseur, on fait apparaître trois autres tenseurs :

$$\begin{aligned}
 R_{ij} &= \overline{u_i u_j} \\
 L_{ij} &= \overline{U_i U_j} - \bar{U}_i \bar{U}_j \\
 C_{ij} &= \overline{U_i u_j} - \bar{U}_i \bar{u}_j
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

R_{ij} est le tenseur des contraintes de Reynolds tel qu'on le retrouve dans (3.29) issu de la description statistique, L_{ij} est le tenseur de Léonard et C_{ij} est le tenseur des contraintes croisées. Pour assurer la fermeture du problème il faut donc, pour un choix de filtre G , modéliser ces trois tenseurs à partir des caractéristiques des champs résolus par simulation. (Sagaut, 1995) ou (Bardina, Ferziger, & Reynolds, 1983) décrivent quelques uns de ces modèles.

(Hoarau, 2002) montre que la gamme d'application de la LES correspond à un nombre de Reynolds s'élevant à 10^4 environ. C'est une limite très forte qui exclut l'écoulement en conduite d'assainissement où le nombre de Reynolds peut être très élevé, de l'ordre de $10^6/10^7$. La résolution des équations de Navier-Stokes moyennées, passant par une description statistique de la turbulence décrite ci-dessous, est adaptée à de tels nombres de Reynolds.

3.3 Description statistique de la turbulence

L'écoulement étudié est hors de la gamme de résolution de la LES. Il est aussi montré l'impossibilité de la résolution numérique directe des équations de Navier-Stokes (3.17) à cause de la forte contrainte sur le maillage. Cette dernière est avant tout due à la présence de tourbillons, quand l'écoulement est turbulent, qui peuvent avoir de très petites tailles mais qui influencent grandement l'écoulement lui donnant un caractère chaotique, ou tout du moins à transition vers le chaos; le système est très sensible aux conditions limites et initiales. Pour contourner le problème lié au caractère chaotique des écoulements turbulents il est préférable d'étudier l'incidence de la turbulence sur le champ moyen. Ceci amène à introduire la description statistique de Reynolds; chaque variable X peut être décomposée en une partie constante dans le temps et une autre fluctuante :

$$X = \bar{X} + x$$

La partie constante dans le temps est une moyenne temporelle :

$$\bar{X} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} X(t) dt$$

La moyenne temporelle de la partie fluctuante est nulle :

$$\bar{x} = 0$$

La moyenne d'un produit se calcule donc comme suit :

$$\begin{aligned} \overline{XY} &= \overline{(\bar{X} + x)(\bar{Y} + y)} = \overline{\bar{X}\bar{Y} + \bar{X}y + x\bar{Y} + xy} \\ &= \overline{\bar{X}\bar{Y} + xy} \end{aligned}$$

Ainsi les variables de vitesse et de pression s'expriment suivant:

$$U = \bar{U} + u \quad V = \bar{V} + v \quad W = \bar{W} + w \quad P = \bar{P} + p$$

Une représentation de la variation temporelle de la vitesse en un point tel que la Figure 3-5 permet d'illustrer les deux composantes de la vitesse.

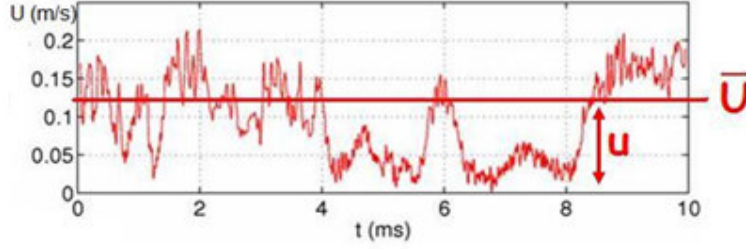


Figure 3-5 Variation temporelle de la vitesse en un point

En injectant la décomposition de Reynolds dans l'équation de continuité (3.4), on obtient :

$$\frac{\partial(\bar{U} + u)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{V} + v)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{W} + w)}{\partial z} = 0 \quad (3.25)$$

Une fois moyennée (3.25) devient :

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} = 0 \quad (3.26)$$

En injectant la décomposition de Reynolds dans la première équation de (3.17), on obtient :

$$\rho \left(\frac{\partial(\bar{U} + u)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{U} + u)}{\partial x} (\bar{U} + u) + \frac{\partial(\bar{U} + u)}{\partial y} (\bar{V} + v) + \frac{\partial(\bar{U} + u)}{\partial z} (\bar{W} + w) \right) = \quad (3.27)$$

$$-\frac{\partial(\bar{P} + p)}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2(\bar{U} + u)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{U} + u)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{U} + u)}{\partial z^2} \right) + \rho g \sin I$$

Une fois moyennée (3.27) devient :

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \bar{U} - \frac{\partial \bar{u}\bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \bar{V} - \frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \bar{W} - \frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z} \right) = \quad (3.28)$$

$$-\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) + \rho g \sin I$$

En faisant de même avec les deux autres équations de (3.17) et après réécriture, on obtient les équations de Navier-Stokes moyennées:

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \bar{U} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \bar{V} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \bar{W} \right) = \\
 - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \bar{u}u}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} + \rho g \sin I \\
 \\
 \rho \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \bar{U} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \bar{V} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \bar{W} \right) = \\
 - \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \bar{u}v}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}v}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}w}{\partial z} \\
 \\
 \rho \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \bar{U} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \bar{V} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \bar{W} \right) = \\
 - \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \bar{u}w}{\partial x} - \frac{\partial \bar{v}w}{\partial y} - \frac{\partial \bar{w}w}{\partial z} - \rho g \cos I
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

Dans les équations (3.29) sont apparues de nouvelles variables issues de la non-linéarité des équations de Navier-Stokes. Ces variables sont les contraintes de Reynolds $\overline{u_i u_j}$ appelées aussi corrélations doubles de vitesse fluctuante. La fermeture des équations précédentes nécessite de calculer ou modéliser ces contraintes.

Chapitre 4 Les modèles de fermeture des équations de Navier Stokes moyennées (RANS)

Il existe de nombreux modèles dont l'objet est la fermeture de (3.29), appelés Reynolds Averaged Navier-Stokes (RANS). En effet, l'équation de continuité moyennée (3.26) et les équations de Navier-Stokes moyennées (3.29), établies au chapitre précédent, constituent les équations de base du calcul du champ de vitesse moyenne. Néanmoins la description statistique de la turbulence introduit 7 nouvelles variables portant le nombre total à 10 :

$$\overline{U}, \overline{V}, \overline{W}, \overline{P}, \overline{uu}, \overline{vv}, \overline{ww}, \overline{uv}, \overline{uw}, \overline{vw}$$

Toute la problématique de la modélisation classique de la turbulence se réduit à un problème de fermeture des équations (3.29). Certains des modèles ci-dessous sont déclinés en une version haut-Reynolds et bas-Reynolds. Il convient d'expliquer d'abord cette distinction.

4.1 La distinction haut-Reynolds/bas-Reynolds

Ces deux modes ne concernent pas le régime d'écoulement turbulent (haut-Reynolds)/ faiblement turbulent - laminaire (bas-Reynolds) malgré ce que l'appellation suggère. La différence se situe au voisinage de la paroi. Les modèles haut-Reynolds, fréquemment utilisés dans les codes commerciaux, n'intègrent pas les équations dans la zone proche paroi. Dans cette zone, composée de la sous-couche visqueuse et d'une partie de la zone logarithmique, le champ de vitesse moyenne et toutes les autres variables ne sont pas calculés. Ils sont interpolés par des lois semi-empiriques, généralement logarithmiques, appelées « lois de paroi ». Dans la seconde approche, les équations sont résolues dans tout le domaine incluant ainsi la zone pariétale, zone où le fluide est fortement ralenti car la viscosité moléculaire ν est dominante. Cette faible vitesse induit un faible nombre de Reynolds d'où le nom de « bas-Reynolds » s'appliquant aux modèles qui couvrent aussi le voisinage de la paroi et prennent en compte la présence de cette dernière.

Comme l'illustre la Figure 4-1, le maillage d'un modèle haut-Reynolds ne nécessite pas de maille dans la zone proche-paroi puisque les équations n'y sont pas intégrées. En revanche, pour les modèles bas-Reynolds, cette zone doit être non seulement maillée mais il y a une forte contrainte sur la taille de ces mailles. En effet la taille de la maille adjacente à la paroi doit être inférieure à l'épaisseur de la sous-couche visqueuse afin de calculer correctement le champ de vitesse de cette zone où prennent naissance les phénomènes turbulents. Il est donc préférable d'y avoir quelques mailles. L'épaisseur de la sous-couche visqueuse

correspondant à un y^+ égal à 5, il est recommandé d'adopter, pour la maille adjacente à la paroi, une taille correspondant à un y^+ égal à 1. y^+ est une coordonnée adimensionnelle :

$$y^+ = \frac{U_\tau y}{\nu} \quad (4.1)$$

$$U_\tau = \sqrt{\frac{\tau_p}{\rho}} \quad (4.2)$$

y étant la distance à la paroi, U_τ la vitesse de frottement et τ_p le taux de cisaillement à la paroi. Cette contrainte impose un maillage plus dense et donc un temps de calcul plus grand malgré la possibilité de raffiner le maillage.

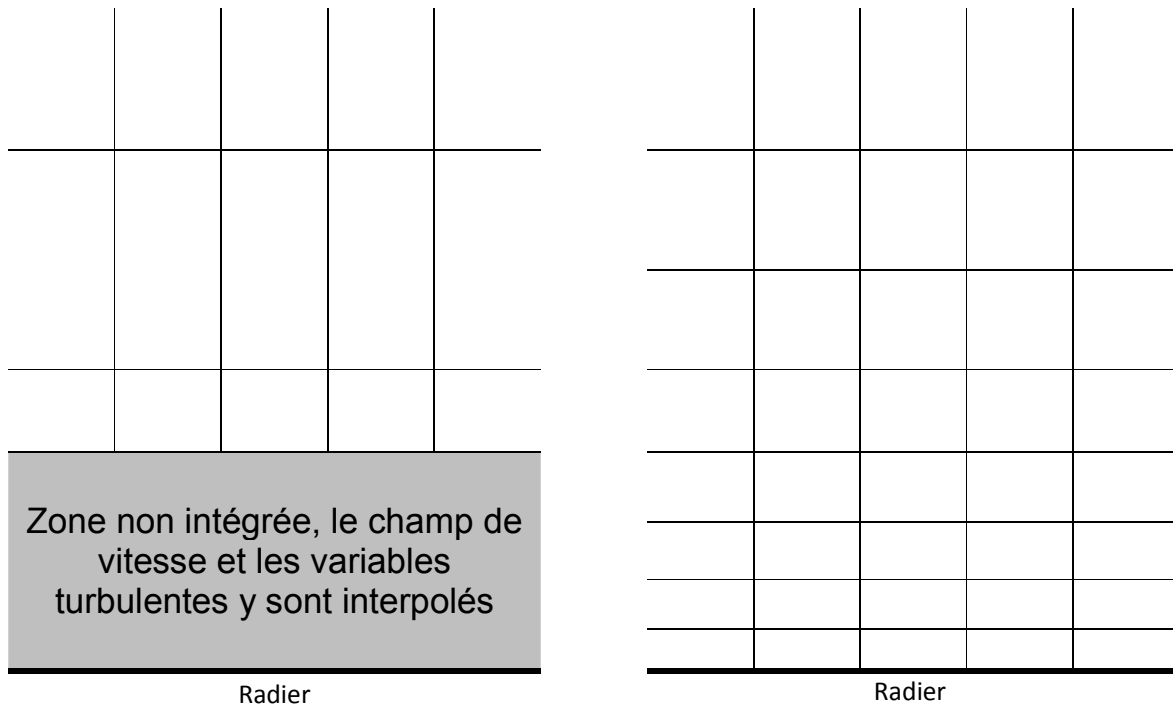


Figure 4-1 Configuration du maillage suivant une approche haut-Reynolds ou bas-Reynolds

4.2 Les modèles au premier ordre

Les fermetures au premier ordre consistent en l'expression des corrélations doubles de vitesse fluctuantes $\overline{u_i u_j}$ en fonction des autres variables; les grandeurs moyennes $\overline{U_i}, \overline{P}$. Par

analogie avec la loi de Newton par laquelle sont exprimées les contraintes visqueuses, les contraintes d'agitation turbulentes sont exprimées suivant :

$$-\rho \overline{u_i u_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.3)$$

4.2.2 Les modèles de longueur de mélange

Dans l'expression précédente, μ_t est la viscosité dynamique turbulente introduite par (Boussinesq, 1877). Boussinesq la considérait constante mais bon nombre de mesures expérimentales remettent en cause la validité de cette hypothèse. Un modèle largement répandu est le modèle 'de longueur de mélange' de (Prandtl, 1925).

$$\mu_t \sim \rho \times u' \times l \quad (4.4)$$

u' représente une échelle de vitesse turbulente [u']=m.s⁻¹, l représente une échelle de longueur turbulente [l]=m.

Les tourbillons ayant la plus grande énergie cinétique sont les plus grands, ce sont eux qui ont donc la plus forte interaction avec le champ moyen. C'est pourquoi l'échelle de longueur turbulente l caractérise la taille de ces tourbillons. Quant à l'échelle de vitesse turbulente, la vitesse de rotation des tourbillons les plus grands s'exprime suivant :

$$u' = c \times l \times \left| \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \right| \quad (4.5)$$

c est un coefficient adimensionnel. Le gradient de vitesse apparaît sous forme de valeur absolue pour garantir une échelle de vitesse turbulente positive. Il est à noter que dans le cas étudié des écoulements à surface libre en canal, $\partial \overline{U} / \partial y$ n'est pas toujours positif notamment sous la surface libre, siège du Dip phenomenon. En combinant les expressions (4.4) et (4.5) et en absorbant le coefficient c dans une nouvelle échelle de longueur l_m , on obtient :

$$\mu_t = \rho \times l_m^2 \times \left| \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \right| \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \quad (4.6)$$

L'expression empirique de l_m varie suivant le type d'écoulement, (Rodi W. , 1980) en donne quelques formulations parmi lesquelles celle du cas d'un écoulement en conduite:

$$\frac{l_m}{R} = 0.14 - 0.08 \left(1 - \frac{y}{R} \right)^2 - 0.06 \left(1 - \frac{y}{R} \right)^4 \quad (4.7)$$

avec R le rayon de la conduite et y la distance normale à la paroi.

Pour une couche limite sur paroi (Van Driest, 1956) donne:

$$l_m = \chi y \left(1 - e^{-\frac{y^+}{A^+}} \right) \quad (4.8)$$

avec $\chi=0.41$ et $A^+=26$. Le domaine de validité de cette relation est $y^+ \leq 40$, soit dans la région proche paroi regroupant zone interne (ou sous-couche visqueuse) et la zone tampon. Dans la région logarithmique:

$$l_m = \chi y \quad (4.9)$$

4.2.3 Les modèles k-ε

Le modèle k-ε a été développé par (Launder & Spadling, 1974). C'est un modèle à deux équations; k est l'énergie cinétique turbulente, ε est le taux de dissipation.

$$k = \frac{\overline{uu} + \overline{vv} + \overline{ww}}{2} \quad \varepsilon = -2\nu \left(\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \right)$$

Ainsi ce modèle reproduit les effets principaux de la turbulence; transfert d'énergie cinétique du champ moyen au champ turbulent, dissipation de l'énergie du champ turbulent par la chaleur et les tourbillons. Etant un modèle du premier ordre; il permet une fermeture directe des équations (3.29) en utilisant, là encore, le concept de la viscosité turbulente (μ_t) qui induit une relation linéaire entre les contraintes turbulentes moyennes et la déformation moyenne (analogie avec la loi de Newton).

$$-\overline{\rho u_i u_j} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij} \quad (4.10)$$

Cette relation reprend directement (4.3) auquel est rajouté le terme supplémentaire de droite. Le calcul de la somme des contraintes de Reynolds pour lesquels $i=j$ en montre la nécessité.

$$\begin{aligned}
 -\rho(\overline{uu} + \overline{vv} + \overline{ww}) &= 2\mu_t \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \right) - 3\frac{2}{3}\rho k \\
 &= -2\rho k \\
 &= -\rho(\overline{uu} + \overline{vv} + \overline{ww})
 \end{aligned}
 \tag{4.11}$$

Le passage de la première ligne à la deuxième est dû à l'injection de l'équation de la continuité moyennée (3.26). Le terme $-2/3\rho\bar{k}$, pouvant être vu comme une pression dynamique par agitation turbulente, préserve l'égalité.

La relation (4.10) est issue de quelques hypothèses qu'il convient de préciser :

- Cette relation induit une relation linéaire entre les axes principaux du tenseur d'anisotropie, issu du tenseur des contraintes de Reynolds, et le tenseur de taux de déformation moyenne. Ceci n'est vrai que dans le cas d'une turbulence homogène et isotrope. En effet, on suppose une invariance de la relation contrainte/déformation dans les trois directions principales de l'écoulement et en tout point du fluide.
- L'objet de l'expression (4.10) est la modélisation des corrélations doubles de vitesse fluctuante qui apparaissent dans (3.29) du fait de la non-linéarité du terme convectif des équations de Navier-Stokes (3.17). Or cette relation prête à ces contraintes un caractère linéaire et diffusif. Cela rend plus facile la résolution des équations (3.29) mais rend linéaires des termes qui ne le sont pas.

Les équations de Navier-Stokes moyennées (3.29) deviennent après injection de (4.10) :

$$\begin{aligned}
 & \rho \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \bar{U} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \bar{V} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \bar{W} \right) = \\
 & \quad - \frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{U}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \right) + \rho g \sin I \\
 & \rho \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \bar{U} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \bar{V} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \bar{W} \right) = \\
 & \quad - \frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \right) \\
 & \rho \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \bar{U} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \bar{V} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \bar{W} \right) = \\
 & \quad - \frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left((\mu + \mu_t) \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \right) - \rho g \cos I
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

Les équations de transport des variables principales de ce modèle, k et ϵ , sont issues des équations de transport des contraintes des Reynolds. Ces équations (4.13) se déduisent, selon la procédure classique, de (3.17) soustrait de (3.29), multipliée par un terme de fluctuation de vitesse u_i puis moyennée.

$$\overline{((1.17) - (1.22)) \cdot u_i} \rightarrow (2.11)$$

Soit:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \overline{u^2}}{\partial t} + \sum_k \rho \frac{\partial (\overline{u^2 U_k})}{\partial x_k} &= -2\rho \sum_k \overline{uu_k} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_k} - \sum_k \rho \frac{\partial \overline{u^2 u_k}}{\partial x_k} - 2\overline{u} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \overline{uu}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_k} \\
 \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial t} + \sum_k \rho \frac{\partial (\overline{v^2 U_k})}{\partial x_k} &= -2\rho \sum_k \overline{vu_k} \frac{\partial \overline{V}}{\partial x_k} - \sum_k \rho \frac{\partial \overline{v^2 u_k}}{\partial x_k} - 2\overline{v} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \overline{vv}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_k} \\
 \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial t} + \sum_k \rho \frac{\partial (\overline{w^2 U_k})}{\partial x_k} &= -2\rho \sum_k \overline{wu_k} \frac{\partial \overline{W}}{\partial x_k} - \sum_k \rho \frac{\partial \overline{w^2 u_k}}{\partial x_k} - 2\overline{w} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 \overline{ww}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \frac{\partial \overline{w}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{w}}{\partial x_k} \\
 \frac{\partial \overline{uv}}{\partial t} + \sum_k \rho \frac{\partial (\overline{uv U_k})}{\partial x_k} &= -\rho \sum_k \left(\overline{vu_k} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_k} + \overline{uu_k} \frac{\partial \overline{V}}{\partial x_k} \right) \\
 &\quad - \sum_k \rho \frac{\partial \overline{uvu_k}}{\partial x_k} - \overline{u} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} - \overline{v} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \overline{uv}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_k} \\
 \frac{\partial \overline{uw}}{\partial t} + \sum_k \rho \frac{\partial (\overline{uw U_k})}{\partial x_k} &= -\rho \sum_k \left(\overline{wu_k} \frac{\partial \overline{U}}{\partial x_k} + \overline{uu_k} \frac{\partial \overline{W}}{\partial x_k} \right) \\
 &\quad - \sum_k \rho \frac{\partial \overline{uwu_k}}{\partial x_k} - \overline{u} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} - \overline{w} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 \overline{uw}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{w}}{\partial x_k} \\
 \frac{\partial \overline{vw}}{\partial t} + \sum_k \rho \frac{\partial (\overline{vw U_k})}{\partial x_k} &= -\rho \sum_k \left(\overline{wu_k} \frac{\partial \overline{V}}{\partial x_k} + \overline{vu_k} \frac{\partial \overline{W}}{\partial x_k} \right) \\
 &\quad - \sum_k \rho \frac{\partial \overline{vwu_k}}{\partial x_k} - \overline{v} \frac{\partial \overline{p}}{\partial z} - \overline{w} \frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 \overline{vw}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{w}}{\partial x_k}
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Nous reviendrons sur ces équations et l'interprétation des membres pris un a un.

En sommant les trois premières équations de (4.13) on obtient :

$$\frac{\partial \overline{k}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \overline{k}}{\partial x_k} = \underbrace{-\overline{u_i u_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j}}_{P_k} - \underbrace{\frac{\partial \overline{k u_i}}{\partial x_i}}_{Dt_k} - \underbrace{\frac{1}{\rho} \overline{u_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j}}_{\Pi_k} + \nu \underbrace{\frac{\partial^2 \overline{k}}{\partial x_k \partial x_k}}_{Dv_k} - \underbrace{2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}}_{\varepsilon} \tag{4.14}$$

P_k est le terme de production d'énergie cinétique turbulente par le champ moyen.

Dt_k est le terme de diffusion turbulente.

Π_k est le terme de corrélation vitesse fluctuante/gradient de pression fluctuante ou terme de diffusion de pression fluctuante.

Dv_k est le terme de diffusion visqueuse.

ε est la dissipation visqueuse.

L'équation de transport du taux de dissipation s'obtient de (3.17)-(3.29) soit l'équation de transport de la fluctuation de vitesse, dérivée par rapport à x_j , multipliée par $\partial u_i / \partial x_j$ puis moyennée.

$$\overline{((1.17)-(1.22)) \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} \rightarrow (2.13)$$

Soit:

$$\begin{aligned} \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \times \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} + \overline{U_k \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \times \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} = \\ - \overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \times \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_k}} - \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \times \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_j}} - \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k}} \\ - \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \times \frac{\partial}{\partial x_j} \left(u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)} \\ - \frac{1}{\rho} \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \times \frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j}} + \nu \overline{\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \times \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)} \end{aligned} \quad (4.15)$$

ou encore:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{U_k \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k}} = \\ - 2\nu \underbrace{\overline{u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial^2 \overline{U_i}}{\partial x_j \partial x_k} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k}}}_{P_\varepsilon} \\ - 2\nu \underbrace{\overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j}}}_{I_\varepsilon} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\overline{u_k \varepsilon} \right)}_{Dt_\varepsilon} \\ - 2 \underbrace{\frac{\nu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial p}{\partial x_j} \right)}_{\Pi_\varepsilon} + \nu \underbrace{\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_k \partial x_k}}_{Dv_\varepsilon} \\ - 2\nu^2 \underbrace{\overline{\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k}}}_{Dl_\varepsilon} \end{aligned} \quad (4.16)$$

P_ε est le terme de production.

I_ε est l'interaction interne au mouvement d'agitation.

Dt_ε est le terme de diffusion turbulente.

Π_ε est le terme de corrélation vitesse fluctuante/gradient de pression fluctuante ou terme de diffusion de pression fluctuante.

Dv_ε est le terme de diffusion visqueuse.

Dr_ε est la destruction visqueuse.

Le modèle k- ε se décline sous deux formes qui diffèrent selon l'ordre de grandeur du nombre de Reynolds de l'écoulement étudié.

Le modèle haut-Reynolds

Les équations du modèle k- ε version haut-Reynolds s'obtiennent en appliquant différents modèles aux termes des équations (4.14) et (4.16). La réécriture de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente commence par injection de (4.10) dans le terme de production, on obtient:

$$\begin{aligned}
 P_k &= \overline{-u_i u_j} \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} = \left[v_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right] \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \\
 &= v_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} k \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_i} \\
 &= v_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} k \text{div} \vec{u} \\
 &= v_t \left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

Par analogie avec la diffusion visqueuse, la diffusion turbulente Dt_k s'exprime selon un gradient:

$$\overline{-u_i k} = v_t \frac{\partial k}{\partial x_j} = v_t \frac{\partial k}{\partial x_j} \tag{4.18}$$

La contribution de la fluctuation de pression se fait par pondération de la viscosité turbulente selon le coefficient σ_k ; coefficient de Prandtl d'énergie cinétique turbulente.

$$-u_i \overline{\left(k + \frac{p}{\rho} \right)} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \quad (4.19)$$

Soit:

$$\Pi_k + Dt_k = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) \quad (4.20)$$

Dans des conditions de haut Reynolds, soit suffisamment loin de la paroi, le terme de diffusion visqueuse Dv_k est négligé.

Ainsi l'équation de transport de k du modèle k - ε , proposée dans sa version initiale en une formulation haut Reynolds, s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - \varepsilon \quad (4.21)$$

L'équation de transport du taux de dissipation est plus compliqué à réécrire. Le terme de production, dont on ne retient que les deux dernières composantes, s'écrit :

$$\begin{aligned} P_\varepsilon &= -2\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial \overline{U_k}}{\partial x_j} \left(C_{\varepsilon 1} \frac{\overline{u_k u_j}}{k} \varepsilon \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{k} C_{\varepsilon 1} P_k = \frac{\varepsilon}{k} C_{\varepsilon 1} \nu_t \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Les termes I_ε et Dr_ε sont assemblés et modélisés comme il suit :

$$-2\nu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - 2\nu^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = -C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (4.23)$$

Par analogie avec la diffusion visqueuse, la diffusion turbulente Dt_ε s'exprime selon un gradient:

$$-\overline{u_k \varepsilon} = \nu_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} = \nu_t \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \quad (4.24)$$

Tout comme pour l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente la corrélation avec la fluctuation de pression se fait par pondération de la viscosité turbulente selon le coefficient σ_ε ; coefficient de Prandtl du taux de dissipation. Soit:

$$-\overline{u_i \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} \right)} = \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \quad (4.25)$$

$$\Pi_\varepsilon + Dt_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) \quad (4.26)$$

Ainsi l'équation de transport du taux de dissipation s'écrit:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} \nu_t \frac{\varepsilon}{k} \left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (4.27)$$

Au final le modèle k- ε s'écrit, dans sa formulation haut-Reynolds :

$$\frac{\partial \overline{k}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \overline{k}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial \overline{k}}{\partial x_j} \right) + P_k - \varepsilon \quad (4.28)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (4.29)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (4.30)$$

Les constantes du modèle sont

$$C_\mu = 0.09 \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44 \quad C_{\varepsilon 2} = 1.92 \quad \sigma_k = 1 \quad \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad (4.31)$$

Voir (Hoarau, 2002) pour la détermination de ces paramètres.

Le modèle Bas Reynolds

Pour un nombre de Reynolds élevé la diffusion turbulente prédomine sur la diffusion visqueuse. Ceci n'est plus valable en zone proche paroi. Dans la sous-couche visqueuse le rapport s'inverse. Les équations (4.28) et (4.29) ne sont alors plus valables. La diffusion visqueuse n'étant plus négligeable, la dissipation est donc influencée par le champ moyen. Elle n'est donc plus isotrope puisqu'elle n'est plus le seul fait de la turbulence (les tourbillons aux petites échelles étant eux isotropes). Une solution consiste à reprendre les équations (4.28) et (4.29), d'y introduire des fonctions d'amortissement proche paroi et d'y réintroduire l'influence de la viscosité. La formulation générale du modèle k-ε, telle que donnée par (Patel, Rodi, & Scheuerer, 1985) devient donc:

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_j} \right) + P_k - \varepsilon - D \quad (4.32)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{1\varepsilon} f_1 P_k - C_{2\varepsilon} f_2 \varepsilon) + E \quad (4.33)$$

Les modèles proche paroi diffèrent entre eux en l'expression des fonctions d'amortissement. (Chien, 1982) propose :

$$f_1 = 1 \quad (4.34)$$

$$f_2 = 1 - 0.22 \cdot e^{-(R_t/6)^2} \quad (4.35)$$

$$f_\mu = 1 - 0.22 \cdot e^{-0.0115 y^+} \quad (4.36)$$

R_t est le nombre de Reynolds turbulent :

$$R_t = \frac{k^2}{\nu \varepsilon} \quad (4.37)$$

(Hoarau, 2002) utilise un modèle de Chien modifié dans lequel (4.36) est remplacé par :

$$f_\mu = 1 - 0.22 \cdot e^{-0.0002 y^+ - 0.000065 (y^+)^2} \quad (4.38)$$

formulation proposée par (Jin, 1994).

f_1 est pris ici égal à l'unité comme le font la plupart des auteurs. Il est sinon une fonction supérieure à l'unité pour augmenter la dissipation au niveau de la paroi, comme (Lam & Bremhorst, 1981) :

$$f_1 = \left(1 + \frac{0.05}{f_\mu}\right)^3 \quad (4.39)$$

f_2 est une fonction permettant l'ajustement du rapport convection turbulente/destruction de ε . La fonction d'amortissement f_μ joue sur la viscosité turbulente qui intervient simultanément dans les équations de transport des variables turbulente (4.32)-(4.33) et dans les équations de Navier-Stokes moyennées modifiées (4.12). f_μ est inférieure à l'unité et décroît avec la distance à la paroi. Cette fonction a donc pour but de diminuer la dissipation turbulente au voisinage de la paroi.

Les termes supplémentaires D et E n'ont une influence qu'à proximité de la paroi et rendent possible la résolution de (4.32) et (4.33) dans la sous couche visqueuse.

$$D = 2\nu \frac{k}{y^2} \quad (4.40)$$

$$E = -2\nu \frac{\varepsilon - D}{y^2} e^{-0.5y^+} \quad (4.41)$$

Il est préférable de travailler avec la dissipation modifiée :

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - D$$

D étant la valeur de la dissipation à la paroi, l'implémentation des conditions limites s'en retrouve simplifiée, la valeur de $\tilde{\varepsilon}_y$ est nulle.

4.3 Les modèles au second ordre

Les modèles au second ordre consistent non pas en la fermeture directe des équations de Navier Stokes moyennées (3.29) mais en la fermeture des équations de transport des corrélations doubles de vitesse fluctuante. C'est pourquoi on nomme ces modèles, introduits par (Launder, Reece, & Rodi, 1975), modèles aux tensions de Reynolds ou Reynolds Stress Model (RSM). Ces équations se présentent sous la forme générale :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = & - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} \\ & - \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_j} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} \right) + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Ces équations nécessitent une modélisation de chacun de leurs termes, présentés dans le Tableau 4-1.

C_{ij}	$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k}$	Dérivée particulaire
P_{ij}	$-\left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} \right)$	Couplage avec le mouvement moyen, énergie donnée au champ turbulent par le champ moyen.
Dt_{ij}	$-\frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k}$	Diffusion turbulente
Dv_{ij}	$\nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k}$	Diffusion moléculaire
Π_{ij}	$-\frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \overline{P'}}{\partial x_j} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{P'}}{\partial x_i} \right)$	Corrélation vitesse/gradient de pression fluctuante
ε_{ij}	$2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k}$	Pseudo-dissipation

Tableau 4-1 Les différents termes de (4.42) et leur notation.

P_{ij} étant une fonction des vitesses moyennes et des contraintes de Reynolds, il peut être conservé sous sa forme exacte, aucune modélisation n'est nécessaire.

4.3.2 Modélisation de la diffusion turbulente

Le modèle de (Daly & Harlow, 1970), dont dérivent (4.18) et (4.24) s'écrit:

$$\begin{aligned} -\overline{u_i u_j u_k} = C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$0.22 \leq C_s \leq 0.25$$

Le tenseur des corrélations triples de vitesse fluctuante $\overline{u_i u_j u_k}$ est clairement symétrique, propriété qui n'est pas reprise par cette modélisation. Un des premiers schémas qui respecte cette propriété est celui de (Donaldson, 1971) dont (Mellor & Herring, 1973) s'inspire pour prendre la forme :

$$\overline{u_i u_j u_k} = \frac{2}{3} C_s \frac{k^2}{\varepsilon} \left(\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} + \frac{\partial \overline{u_i u_k}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j u_k}}{\partial x_i} \right) \quad (4.44)$$

Ce schéma, utilisé ici, est particulièrement adapté aux écoulements en canal selon (Demuren & Sarkar, 1987).

4.3.3 Modélisation de la corrélation vitesse/fluctuation de pression

Ce terme est le plus dur à modéliser. En effet il faut consentir à de lourdes hypothèses pour pouvoir exprimer la fluctuation de pression p en fonction des vitesses moyennes et des corrélations doubles de vitesse fluctuante. Une multitude de modèles existent, chacun étant adapté à une catégorie d'écoulement. Aussi la caractérisation de l'écoulement et de la turbulence est-elle essentielle pour le choix du modèle. Une classification claire et complète des écoulements turbulents figure dans (Chassaing, 2000). L'écoulement étudié présentant un gradient de vitesse moyenne non constant, il n'est pas homogène. Par ailleurs, dans le cas présent, $\partial \overline{U} / \partial z$ est la composante la plus significative du tenseur $\partial \overline{U}_i / \partial x_j$, ce qui est caractéristique d'un écoulement cisailé. Enfin, tout le champ de vitesse ne présente pas un nombre de Reynolds élevé ; au voisinage des parois, l'écoulement est à faible Re . Au final, l'écoulement étudié appartient à la catégorie des écoulements inhomogènes cisailés complexes. Aussi faut-il choisir un modèle de corrélation vitesse/fluctuation de pression adapté à cette catégorie. Pour un écoulement similaire (Kang & Choi, 2005) utilisent le modèle de (Speziale, Sarkar, & Gatski, 1991):

$$\begin{aligned} \phi_{ij} = & \alpha_0 \varepsilon b_{ij} + \alpha_1 \varepsilon \left(b_{ik} b_{jk} - \frac{1}{3} b_{mn} b_{nm} \delta_{ij} \right) + \alpha_2 k S_{ij} + \alpha_3 P_k b_{ij} \\ & + \alpha_4 k \left(b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) + \alpha_5 k (b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik}) \end{aligned} \quad (4.45)$$

$b_{ij} = \frac{R_{ij}}{2k} - \frac{1}{3}\delta_{ij}$	Tenseur d'anisotropie
$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$	Partie symétrique du tenseur du taux de déformation
$W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$	Partie antisymétrique du tenseur du taux de déformation
$\alpha_0 = -3.4, \alpha_1 = 4.2, \alpha_2 = 0.8 - 1.3(b_{mn}b_{nm})^{1/2}$ $\alpha_3 = -1.8, \alpha_4 = 1.25$	Coefficients

Tableau 4-2 Termes et coefficients du modèle de Speziale

(Kang & Choi, 2005) ajoutent à ce modèle un terme chargé de prendre en compte l'effet de la surface libre. Ce terme est une combinaison des modèles de (Shir, 1973) et de (Gibson & Launder, 1978) qui sont des modèles proche paroi calibrés pour la surface libre par (Cokljat, 1993). Ainsi au modèle précédent est ajouté :

$$\begin{aligned} \phi_{ij,sl} = & C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m n_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i n_k n_i} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j n_k n_j} \right) f_s \\ & + C_{fs,2} \left(\phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ki,2} n_k n_i - \frac{3}{2} \phi_{kj,2} n_k n_j \right) f_s \end{aligned} \quad (4.46)$$

$f_s = \left(\frac{L}{z_n^{-1} + C_f L} \right)^2$	Fonction d'amortissement
$L = C_\mu^{3/4} k^{1.5} / (\kappa \varepsilon)$	Echelle de longueur turbulente
z_n	Distance à la surface libre
$C_f = 0.16$	Coefficient

Tableau 4-3 Termes et coefficients de la combinaison des modèles de (Shir, 1973) et de (Gibson & Launder, 1978) adaptée à la surface libre par (Cokljat, 1993).

Les parois jouant un rôle prépondérant dans l'écoulement étudié, le présent travail propose de compléter ce modèle par un terme proche paroi qui n'est autre que la combinaison de

(Shir, 1973) et (Gibson & Launder, 1978) sans la modification de (Cokljat, 1993), soit adaptée aux parois et non à la surface libre. Ainsi le terme suivant est ajouté:

$$\phi_{ij,w} = C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} \left(\phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ki,2} n_k n_i - \frac{3}{2} \phi_{kj,2} n_k n_j \right) f_w \quad (4.47)$$

$\phi_{ij,2} = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right)$	
$f_w = \frac{l}{\chi y}$	Fonction d'amortissement
$l = \frac{(-uv)^{3/2}}{\varepsilon}$	Echelle de longueur turbulente
y	Distance à la paroi
$C_{w,2} = 0.3, C_2 = 0.6, \chi = 0.41$	Coefficients

Tableau 4-4 Termes et coefficients de la combinaison des modèles de (Shir, 1973) et de (Gibson & Launder, 1978).

Au final :

$$\Pi_{ij} = \phi_{ij} + \phi_{ij,sl} + \phi_{ij,w} \quad (4.48)$$

Ainsi, pour modéliser le terme de corrélation champ moyen/fluctuation de pression, un modèle de redistribution de seconde génération (Speziale, Sarkar, & Gatski, 1991) est utilisé. L'influence des parois et de la surface libre est modélisée de manière explicite par l'ajout de termes supplémentaires (4.46) et (4.47) pondérés par des fonctions d'amortissement figurant dans le Tableau 4-3 et le Tableau 4-4.

Les modélisations de Π_{ij} sont nombreuses tout comme leurs versions proche paroi ou proche surface libre. On trouvera une classification et une présentation de bon nombre d'entre elles dans (Chassaing, 2000).

4.3.4 Modélisation de la pseudo-dissipation visqueuse

Les fluctuations de vitesse n'étant pas directement calculées, il est nécessaire de transporter le tenseur de la pseudo-dissipation visqueuse ε_{ij} qui intervient dans l'équation de transport des contraintes de Reynolds (4.42). On utilise ici l'équation de transport de la dissipation visqueuse ε issue du modèle k- ε bas Reynolds (4.33). En effet, ce sont les petits tourbillons

qui dissipent le plus d'énergie cinétique sous forme de chaleur. Or à cette échelle, la turbulence est considérée comme isotrope aussi peut on considérer que:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{ij} \varepsilon \quad (4.49)$$

Il existe des modèles d'équations de ε spécifiques au modèle RSM. Ces modèles ont pour équation de départ (4.16) et varient dans la modélisation des différents termes. Une modélisation de (Daly & Harlow, 1970) est utilisée ici pour la diffusion turbulente Dt_ε .

Soit:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (4.50)$$

D'autres formulations existent variant avec la catégorie de la turbulence. Outre les autres modélisations de la diffusion turbulente, certains auteurs comme (Zeman & Lumley, 1977) ont travaillé sur des coefficients pondérant le terme Dr_ε de destruction visqueuse modélisé par:

$$Dr_\varepsilon = -2\nu^2 \frac{\overline{\partial^2 u_i}}{\partial x_j \partial x_k} \frac{\overline{\partial^2 u_i}}{\partial x_j \partial x_k} = -\psi \frac{\varepsilon}{k} = -\psi_0 \frac{\varepsilon^2}{k} + \psi_1 \frac{\varepsilon}{k} P_k \quad (4.51)$$

Dans le modèle standard $\psi_0 = C\varepsilon_2 = 1.92$ et $\psi_1 = C\varepsilon_1 = 1.44$.

4.4 Le modèle algébriques des contraintes de Reynolds

Les modèles algébriques des contraintes de Reynolds ou *Algebraic Reynolds Stress Model* (ARSM) constituent une étape intermédiaire entre les modèles du premier ordre à deux équations et les modèles du second ordre. Ils sont une manière 'économique' de prendre en compte l'anisotropie de la turbulence. En effet la présence des termes convectifs et diffusifs dans les équations (4.42) augmente considérablement la complexité et le temps des calculs. Négliger simplement ces termes peut se révéler pertinent (Naot & Rodi, 1982). Mais l'hypothèse de base des modèles ARSM la plus répandue, introduite par (Rodi W. , 1972), consiste à considérer que la somme des termes convectifs et diffusifs des équations de transports des contraintes de Reynolds (4.42) est proportionnelle à la somme des termes convectifs et diffusifs de l'équation de transport de l'énergie cinétique turbulente k (4.14).

Soit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} - (Dt_{ij} + Dv_{ij}) &= \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \left[\frac{\partial k}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial k}{\partial x_k} - (Dt_{k,ij} + Dv_{k,ij} + \Pi_{k,ij}) \right] \\ &= \frac{\overline{u_i u_j}}{k} (P_k - \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.52)$$

En injectant (4.52) dans (4.42), on obtient:

$$\frac{\overline{u_i u_j}}{k} (P_k - \varepsilon) = - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \overline{u_j} \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) - 2\nu \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_k} \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_k} \quad (4.53)$$

Le terme de corrélation vitesse/gradient de pression fluctuante de (Launder, Reece, & Rodi, 1975) est modélisé selon:

$$\Pi_{ij} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) \quad (4.54)$$

avec $C_1=1.8$ et $C_2=0.6$.

(4.53) devient alors:

$$\frac{\overline{u_i u_j}}{k} (P_k - \varepsilon) = P_{ij} - C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_i u_j} - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right) - C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) - \varepsilon \quad (4.55)$$

Après reformulation, on obtient:

$$\overline{u_i u_j} = -\frac{2}{3} k \delta_{ij} + \frac{C_D k}{\varepsilon (C_1 - 1) + P_k} \left(P_{ij} - \frac{2}{3} P_k \delta_{ij} \right) \quad (4.56)$$

(Versteeg & Malalasekera, 1995) recommande $C_D = 0.55$ et $C_1 = 2.2$.

Ainsi sont établies les équations du modèle ARSM qui doivent être couplées avec les équations de transport de k et ε , respectivement (4.28) et (4.29). Les contraintes de Reynolds intervenant dans P_{ij} , la résolution de (4.56) nécessite un schéma itératif d'inversion matricielle tout comme le modèle RSM et connaît un comportement numérique tout aussi instable (Versteeg & Malalasekera, 1995). Aussi pour des hypothèses de base tout de même

très fortes, l'apport de ce modèle n'est pas si évident. Il n'a pas été choisi ici de l'implémenter, au profit du modèle RSM.

Le lecteur trouvera l'écriture complète du développement des équations du modèle RSM développé (Navier-Stokes moyennées, équations de transport de corrélations doubles de vitesse fluctuante et du taux de dissipation, équation de continuité) en annexe A p.118.

Chapitre 5 Méthodes numérique et programme

5.1 Volumes finis, éléments finis

Un écoulement à surface libre, permanent et uniforme dans un canal de section rectangulaire est étudié ici. Le modèle k-ε et le modèle RSM ont été implémentés, tous les deux dans leur version bas Reynolds, dans un code de calcul dédiés aux écoulements en conduite d'assainissement. Du fait de l'uniformité du problème dans le sens de l'écoulement, toutes les dérivées selon x sont nulles. Il en est de même des dérivées selon la variable temporelle car l'écoulement étudié est stationnaire. Les calculs sont menés dans une section transverse (maillage 2D) pour être interpolés dans toute la conduite, ceci réduisant considérablement le temps de calcul. Aussi les équations de Navier-Stokes moyennées (3.29) deviennent:

$$\begin{aligned}
 \rho \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial y} \bar{V} + \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} \bar{W} \right) &= \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \bar{u}v}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}w}{\partial z} + \rho g \sin I \\
 \rho \left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial y} \bar{V} + \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} \bar{W} \right) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \bar{v}v}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}w}{\partial z} \\
 \rho \left(\frac{\partial \bar{W}}{\partial y} \bar{V} + \frac{\partial \bar{W}}{\partial z} \bar{W} \right) &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{W}}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial \bar{v}w}{\partial y} - \frac{\partial \bar{w}w}{\partial z} - \rho g \cos I
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Des simplifications similaires sont appliquées aux équations (3.26), (4.32), (4.33) et (4.42).

Quoique les éléments aient été considérés dans un premier temps, la méthode des volumes finis a été choisie pour l'intégration des équations de Navier-Stokes moyennées (3.29) ainsi que des équations de transport des contraintes de Reynolds et du taux de dissipation. Si cette méthode a été conçue à l'origine pour intégrer des équations de bilan de masse ou de flux, des développements plus récents ont permis de la rendre performante pour des calculs d'équations de convection/diffusion auxquelles s'apparentent les équations intégrées. Néanmoins c'est surtout parce que cette méthode est la plus répandue en mécanique des fluides et est largement décrite par des auteurs faisant référence dans le domaine tels que (Patankar, 1980) ou (Versteeg & Malalasekera, 1995). La méthode des volumes finis permet de résoudre des équations aux dérivées partielles en faisant des approximations d'intégrales. Le principe consiste en la discrétisation du domaine de calcul en mailles aux dimensions idéalement réduites. Les équations sont alors intégrées du centre d'une maille au centre de la maille adjacente. Si l'on désigne par P le point à l'interface des deux mailles, par W et E les points respectivement à l'Ouest et à l'Est de P, et par w et e les mailles

comprises respectivement en entre W et P et entre P et E, comme sur la Figure 5-1, la taille

de la zone d'intégration est $\Delta x = \frac{(\delta x)_w + (\delta x)_e}{2}$.

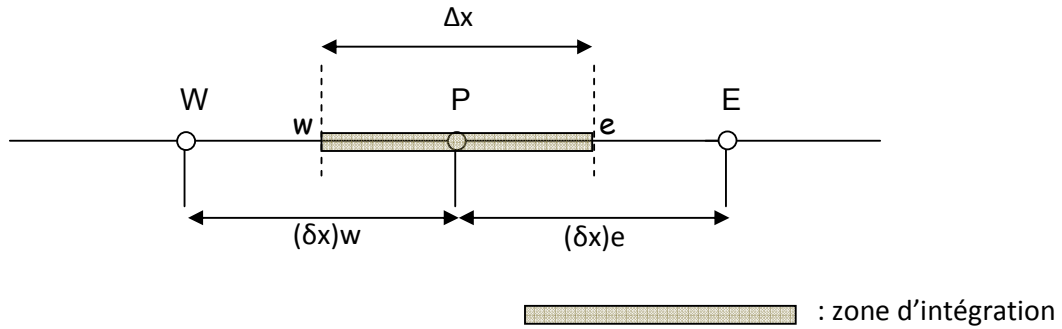


Figure 5-1 Zone d'intégration de la méthode aux volumes finis pour un problème 1D

Ainsi pour une équation convection/diffusion, de transport de Ω , en 1D de la forme:

$$\frac{d}{dx}(\rho u \Omega) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\Omega}{dx} \right) \quad (5.2)$$

L'intégration donne:

$$[\rho u \Omega]_e - [\rho u \Omega]_w = \left(\Gamma \frac{d\Omega}{dx} \right)_e - \left(\Gamma \frac{d\Omega}{dx} \right)_w \quad (5.3)$$

Soit:

$$(\rho u)_e \Omega_e - (\rho u)_w \Omega_w = \Gamma_e \frac{\Omega_E - \Omega_P}{(\delta x)_e} - \Gamma_w \frac{\Omega_P - \Omega_W}{(\delta x)_w} \quad (5.4)$$

5.2 Schéma numérique de discrétisation

Le schéma numérique de discrétisation consiste en l'interpolation de la valeur de Ω au milieu de la maille soit au choix de la fonction f de l'interpolation de la variable calculée au milieu de la maille.

$$\Omega_e = f(\Omega_E, \Omega_P), \quad \Omega_w = f(\Omega_W, \Omega_P)$$

5.2.1 Le schéma centré

Le schéma centré est classiquement utilisé, l'interpolation consiste en une simple moyenne arithmétique :

$$\Omega_e = \frac{1}{2}(\Omega_E + \Omega_P), \quad \Omega_w = \frac{1}{2}(\Omega_W + \Omega_P)$$

En notant:

$$F_e = (\rho u)_e \quad F_w = (\rho u)_w$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e} \quad D_w = \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w}$$

L'équation (5.4) devient:

$$F_e \frac{\Omega_E + \Omega_P}{2} - F_w \frac{\Omega_P + \Omega_W}{2} = D_e (\Omega_E - \Omega_P) - D_w (\Omega_P - \Omega_W) \quad (5.5)$$

Que l'on peut écrire avec les notations figurant dans le Tableau 5-1:

$$a_P \Omega_P = a_E \Omega_E + a_W \Omega_W \quad (5.6)$$

a_E	$D_e - \frac{F_e}{2}$
a_W	$D_w + \frac{F_w}{2}$
a_P	$a_E + a_W + (F_e - F_w)$

Tableau 5-1 Expression des coefficients de l'équation discrétisée avec un schéma centré

Le problème principal du schéma centré est son incapacité à identifier le sens de l'écoulement. En posant $\Omega_w = \frac{1}{2}(\Omega_W + \Omega_P)$ et $\Omega_e = \frac{1}{2}(\Omega_P + \Omega_E)$, on considère que l'influence des nœuds amont et aval de la cellule est égale. Or en cas d'écoulement à tendance convective, l'écoulement a un sens principal qui déséquilibre les contributions des

deux nœuds. Ainsi le schéma centré n'est pas adapté au calcul du transport d'une variable dans un flux à tendance convective et a tendance à générer des oscillations dans le calcul comme en témoigne le résidu des premières tentatives (Figure 5-2), discrétisées avec un schéma centré.

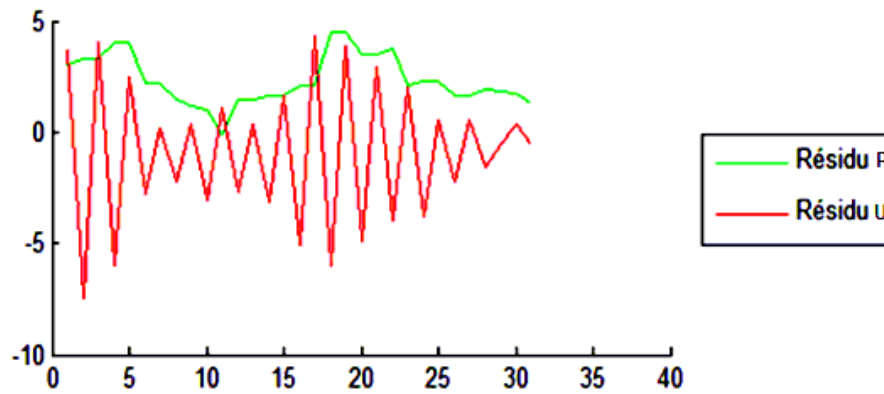


Figure 5-2 Résidu de la résolution de (3.26) et (3.29) discrétisée avec un schéma centré

5.2.2 Le schéma upwind

Le schéma upwind est une tentative de résoudre le problème du schéma centré de manière un peu booléenne. L'interpolation prend la valeur d'un des deux nœuds adjacents suivant le sens du flux. Cette méthode est adaptée à une convection forte. Le Tableau 5-2 donne la valeur de l'interpolation au sein de la maille suivant le sens du flux, ce qui revient à dire suivant le signe de F_e et F_w .

Sens du flux	Valeurs de Ω_w et Ω_e
$W \leftarrow E$	$\Omega_w = \Omega_P \quad \Omega_e = \Omega_E$
$W \rightarrow E$	$\Omega_w = \Omega_W \quad \Omega_e = \Omega_P$

Tableau 5-2 Valeur de l'interpolation de Ω suivant le sens du flux

L'équation (5.4) devient:

$$a_p \Omega_P = a_E \Omega_E + a_W \Omega_W \quad (5.7)$$

L'expression des coefficients est donnée dans le tableau ci-dessous.

a_E	$D_e + \max(-F_e, 0)$
a_W	$D_w + \max(F_w, 0)$
a_P	$a_E + a_W + (F_e - F_w)$

Tableau 5-3 Expression des coefficients de l'équation discrétisée avec un schéma upwind

5.2.3 La méthode hybride

Le schéma hybride, introduit par (Spalding, 1972) tente d'exploiter les qualités des deux schémas précédents. L'idée globale est d'utiliser le schéma centré dans les zones du maillage où le flux est diffusif et le schéma upwind dans les zones où le flux est convectif. On définit alors un critère permettant d'identifier la direction du flux et le type de transport (convection/diffusion). Il s'agit du nombre de Peclet :

$$Pe = \frac{\rho u \delta_x}{\Gamma} \quad (5.8)$$

Pe est le rapport convection sur diffusion (Γ est le coefficient de diffusion). En effet pour la face ouest, par exemple :

$$Pe_w = \frac{F_w}{D_w} = \frac{(\rho u)_w}{\Gamma_w / (\delta_x)_w} = \frac{(\rho u)_w (\delta_x)_w}{\Gamma_w} \quad (5.9)$$

Le Tableau 5-4 donne l'interpolation de la valeur de Ω entre les nœuds du maillage suivant la valeur du nombre de Peclet:

	Valeurs de Ω_w et Ω_e
$ Pe < 2$	$\Omega_w = \frac{1}{2}(\Omega_w + \Omega_p) \quad \Omega_e = \frac{1}{2}(\Omega_p + \Omega_E)$
$Pe \leq -2$	$\Omega_w = \Omega_p \quad \Omega_e = \Omega_E$
$Pe \geq 2$	$\Omega_w = \Omega_w \quad \Omega_e = \Omega_p$

Tableau 5-4 Valeur de l'interpolation de Ω suivant la valeur de Pe

L'expression des coefficients est donnée dans le Tableau 5-5 ci-dessus.

a_E	$\max \left[-F_e, \left(D_e - \frac{F_e}{2} \right), 0 \right]$
a_W	$\max \left[F_w, \left(D_w + \frac{F_w}{2} \right), 0 \right]$
a_P	$a_E + a_W + (F_e - F_w)$

Tableau 5-5 Expression des coefficients de l'équation discrétisée avec un schéma hybride

Le nombre 2 est utilisé ici comme valeur seuil du nombre de Peclet pour le choix du schéma appliqué. On pourrait directement utiliser le nombre de Peclet pour pondérer l'influence des nœuds amont et aval dans le calcul de ϕ_w et ϕ_e . En effet, la solution analytique d'une équation convection/diffusion telle que (5.2) est une fonction exponentielle de Pe (Patankar, 1980) mais une telle fonction d'interpolation rendrait le temps de calcul beaucoup trop long, surtout pour un calcul en 2D ou 3D. L'idéal est un schéma peu gourmand en calcul mais dont le comportement est proche de l'exponentielle ce qui est le cas du schéma suivant.

5.2.4 Le schéma power-law

Description 1D

Le schéma power-law inventé par (Patankar, 1980), utilisé ici, est basé sur une bonne interpolation, peu coûteuse en temps de calcul, de la solution exponentielle.

	Calcul des coefficients
$ Pe < 10$	Expression polynomiale
$ Pe \geq 10$	Diffusion négligée

Tableau 5-6 Méthode d'interpolation de Ω suivant la valeur de Pe

L'équation (5.4) devient:

$$a_p \Omega_p = a_E \Omega_E + a_W \Omega_W \quad (5.10)$$

L'expression des coefficients est donnée dans le Tableau 5-7 ci-dessous:

a_E	$D_e \max \left[0, (1 - 0.1 Pe_e)^5 \right] + \max [-F_e, 0]$
a_W	$D_w \max \left[0, (1 - 0.1 Pe_w)^5 \right] + \max [F_w, 0]$
a_p	$a_E + a_W + (F_e - F_w)$

Tableau 5-7 Expression des coefficients de l'équation 1D discrétisée avec un schéma power-law

Description 2D

Soit une équation convection/diffusion 2D telle que:

$$\frac{d}{dx}(\rho u \Omega) + \frac{d}{dy}(\rho v \Omega) = \frac{d}{dx} \left(\Gamma \frac{d\Omega}{dx} \right) + \frac{d}{dy} \left(\Gamma \frac{d\Omega}{dy} \right) \quad (5.11)$$

Cette équation va être intégrée sur la surface grisée représentée sur la Figure 5-3 ci-dessous. Revenant les notations introduites au début du paragraphe 5.1 et en notant S et N les points respectivement au Sud et au Nord de P, et par s et n les mailles comprises respectivement en entre S et P et entre P et N, , la taille de la zone d'intégration est

$$\Delta S = \Delta x \Delta y \text{ avec } \Delta x = \frac{(\delta x)_w + (\delta x)_e}{2} \text{ et } \Delta y = \frac{(\delta x)_s + (\delta x)_n}{2}.$$

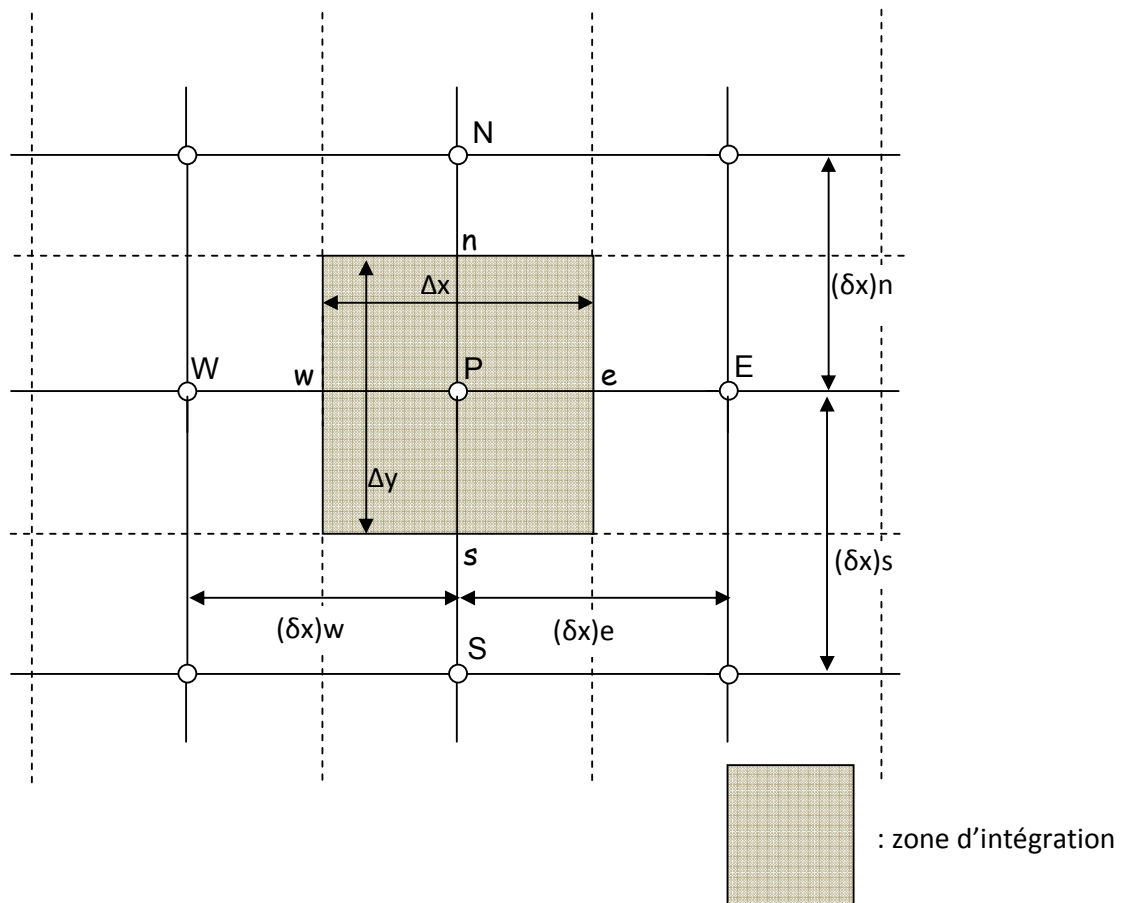


Figure 5-3 Zone d'intégration de la méthode aux volumes finis pour un problème 2D

(5.11) dans sa forme intégrée puis discrétisée devient:

$$a_P \Omega_P = a_E \Omega_E + a_W \Omega_W + a_N \Omega_N + a_S \Omega_S \quad (5.12)$$

L'expression des coefficients est donnée dans le Tableau 5-8 ci-dessous:

a_E	$D_e \max \left[0, (1 - 0.1 Pe_e)^5 \right] + \max [-F_e, 0]$
a_W	$D_w \max \left[0, (1 - 0.1 Pe_w)^5 \right] + \max [F_w, 0]$
a_N	$D_n \max \left[0, (1 - 0.1 Pe_n)^5 \right] + \max [-F_n, 0]$
a_S	$D_s \max \left[0, (1 - 0.1 Pe_s)^5 \right] + \max [F_s, 0]$
a_P	$a_E + a_W + (F_e - F_w + F_n - F_s)$

Tableau 5-8 Expression des coefficients de l'équation 2D discrétisée avec un schéma power-law

Tous les schémas de discrétisation présentés ici sont utilisés avec de la sous-relaxation selon la méthode classique dont le lecteur pourra trouver une description dans (Patankar & Spalding, 1972). Enfin le lecteur trouvera l'écriture complète de l'intégration de toutes les équations du modèle selon la méthode présentée en annexe B, p.140.

5.3 Méthodes de calcul du champ de pression

5.3.1 La méthode SIMPLE

Le calcul du champ de pression nécessite un traitement adapté. Si l'on prend l'exemple d'une modélisation d'écoulement turbulent avec un modèle k-ε haut Reynolds, les équations de Navier-Stokes moyennées (3.29) servent à calculer les trois composantes du champ de vitesse moyenne, les équations de transport (4.28) et (4.29) déterminent les variables turbulentes. Ainsi le champ de pression est résolu par l'équation de continuité (3.26) dans

laquelle la pression n'intervient pas. Pour parer à ce problème (Patankar & Spalding, 1972) ont mis au point la méthode SIMPLE dont le nom est un acronyme pour Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations. Dans son concept, cette méthode a pour point de départ la reformulation aux volumes finis des équations (3.29) dans lesquelles la pression intervient sous forme de gradient. A ce stade, la vitesse au nœud P (voir Figure 5-3) peut être exprimée comme une combinaison linéaire des vitesses et de la pression aux nœuds adjacents. Il suffit alors d'injecter cette combinaison linéaire dans l'équation de continuité (3.26) qui fait intervenir les vitesses. Cette équation permet alors de déterminer la pression. Cette démarche va être décrite plus précisément.

Une fois reformulées aux volumes finis, les équations (3.29) deviennent:

$$a_P \bar{U}_P = a_E \bar{U}_E + a_W \bar{U}_W + a_N \bar{U}_N + a_S \bar{U}_S + b_U \quad (5.13)$$

$$a_P \bar{V}_P = a_E \bar{V}_E + a_W \bar{V}_W + a_N \bar{V}_N + a_S \bar{V}_S + b_V - \frac{\delta_z}{\rho} \left(\frac{\bar{P}_E - \bar{P}_W}{2} \right) \quad (5.14)$$

$$a_P \bar{W}_P = a_E \bar{W}_E + a_W \bar{W}_W + a_N \bar{W}_N + a_S \bar{W}_S + b_W - \frac{\delta_y}{\rho} \left(\frac{\bar{P}_N - \bar{P}_S}{2} \right) \quad (5.15)$$

où b_U , b_V et b_W sont des termes puits/source. Le gradient de pression selon x étant nul (écoulement uniforme), la pression n'intervient pas dans (5.13). Aussi seules les deux dernières équations sont conservées.

Le système d'équations résolu étant non linéaire, le schéma de calcul est itératif (voir Figure 5-6). (Patankar & Spalding, 1972) en profite pour introduire un calcul de correction plutôt qu'un calcul direct de variable. Ainsi les variables du champ de vitesse moyenne et de pression sont la somme de leur valeur à calculée avec le champ P de l'itération précédente et d'une correction:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \bar{U}^* + \bar{U}' \\ \bar{V} &= \bar{V}^* + \bar{V}' \\ \bar{W} &= \bar{W}^* + \bar{W}' \\ \bar{P} &= \bar{P}^* + \bar{P}' \end{aligned} \quad (5.16)$$

\bar{U}^* étant la valeur de la vitesse calculée à l'itération précédente et \bar{U}' étant la correction calculée à l'itération en court. Il en est de même pour les autres variables. Pour la première itération \bar{U}^* , \bar{V}^* , \bar{W}^* et \bar{P}^* sont les conditions initiales.

En faisant la soustraction des équations (5.13) calculée à l'itération précédente et des équations (5.13) calculée à l'itération en court, on établit:

$$a_P \bar{V}_P' = a_E \bar{V}_E' + a_W \bar{V}_W' + a_N \bar{V}_N' + a_S \bar{V}_S' - \frac{\delta_z}{\rho} \left(\frac{\bar{P}_E' - \bar{P}_W'}{2} \right) \quad (5.17)$$

$$a_P \bar{W}_P' = a_E \bar{W}_E' + a_W \bar{W}_W' + a_N \bar{W}_N' + a_S \bar{W}_S' - \frac{\delta_y}{\rho} \left(\frac{\bar{P}_N' - \bar{P}_S'}{2} \right) \quad (5.18)$$

On simplifie ces équations en omettant les contributions des vitesses des nœuds adjacents ce qui constitue la principale approximation de cet algorithme. Soit:

$$\bar{V}_P' = d_{V,P} \left(\frac{\bar{P}_E' - \bar{P}_W'}{2} \right) \quad (5.19)$$

$$\bar{W}_P' = d_{W,P} \left(\frac{\bar{P}_N' - \bar{P}_S'}{2} \right) \quad (5.20)$$

Reprenant les expressions (5.16), les équations (5.19) et (5.20) sont injectées dans (3.26) permettant ainsi de calculer le champ P' :

$$\begin{aligned} & \delta_z (\bar{V}_e^* - \bar{V}_w^*) + \delta_y (\bar{W}_n^* - \bar{W}_s^*) \\ & + \left(\delta_z d_{V,E} + \delta_z d_{V,P} + \delta_y d_{W,N} + \delta_y d_{W,P} \right) \bar{P}'_P \\ & - \delta_z d_{V,E} \bar{P}'_E - \delta_z d_{V,P} \bar{P}'_W - \delta_y d_{W,N} \bar{P}'_N - \delta_y d_{W,P} \bar{P}'_S = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

Ainsi la pression est-elle calculée par corrections successives. L'algorithme SIMPLE est présenté intégré dans l'algorithme global Figure 5-6. Pour les équations exactes en détails, le lecteur se reportera aux annexes, p.165.

5.3.2 Modélisation à grilles décalées

La pression n'intervient dans les équations (3.29) que sous forme de gradient. Ainsi une forte variation de la pression entre deux nœuds consécutifs du maillage peut passer inaperçue lors du calcul comme dans l'exemple donné par (Versteeg & Malalasekera, 1995, p. 137). C'est pour parer à ce problème que SIMPLE est couplé avec la méthode des grilles décalées (staggered grid) introduite par (Harlow & Welch, 1965). Les équations de \bar{U} , \bar{V} , \bar{W} , \bar{P} et des variables turbulentes sont intégrées sur des grilles décalées les unes par rapport aux autres. Densifiant ainsi le maillage, cette méthode rend plus stable le calcul de la pression à laquelle le système est très sensible. Le nombre de grilles varie avec le modèle utilisé pour

modéliser la turbulence. Dans le cas d'un maillage 2D, un modèle k-ε nécessite trois grilles contre quatre pour un modèle RSM. L'expression des dérivées selon la grille permet de voir l'apport des grilles décalées. Si toutes les variables étaient calculées sur la même grille:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = \frac{\bar{P}_e - \bar{P}_w}{\delta_x} = \frac{\left(\frac{\bar{P}_E + \bar{P}_P}{2}\right) - \left(\frac{\bar{P}_P + \bar{P}_W}{2}\right)}{\delta_x} = \frac{\bar{P}_E - \bar{P}_W}{2} \quad (5.22)$$

De la même manière:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = \frac{\bar{P}_N - \bar{P}_S}{2} \quad (5.23)$$

Ainsi les expressions des dérivées de la pression intervenant dans (3.29) ne font pas intervenir la pression au nœud central P. De proche en proche seuls les gradients des valeurs de la pression aux conditions limites contribuent au calcul.

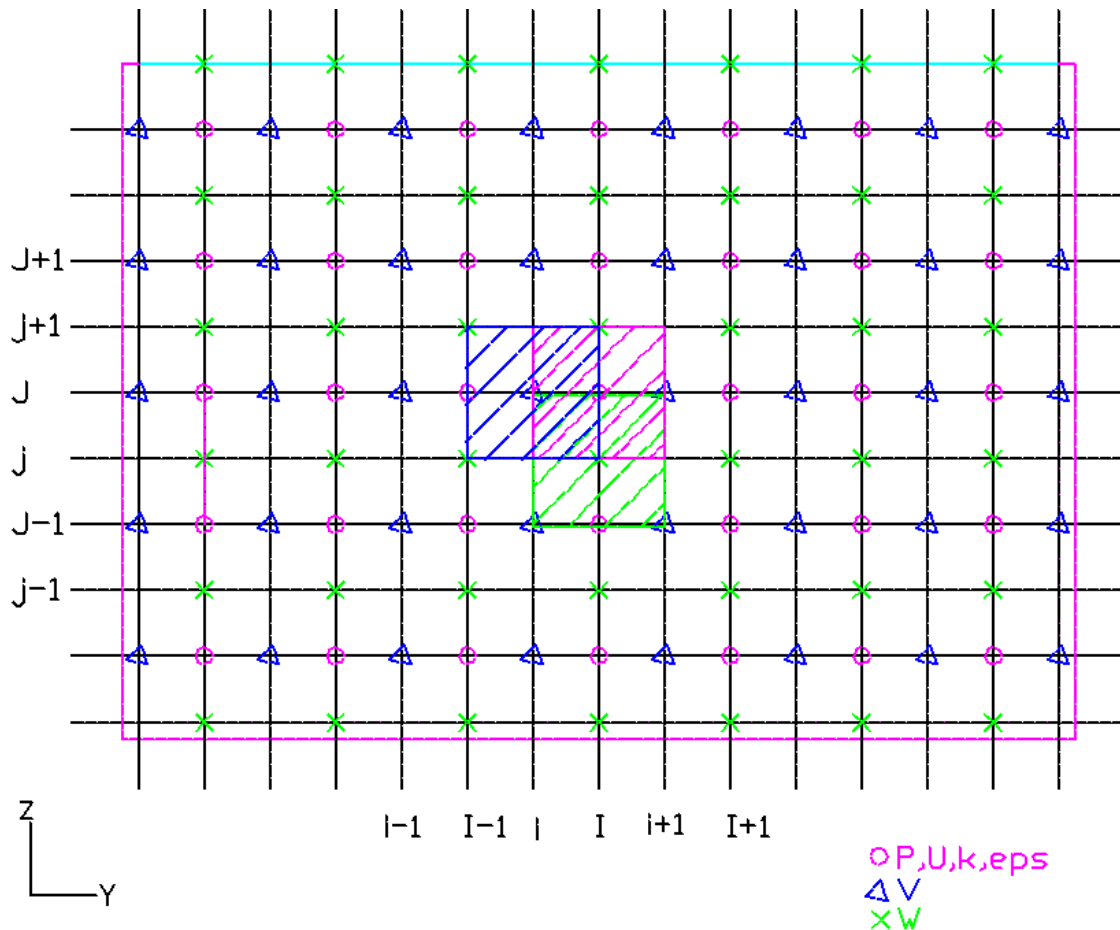


Figure 5-4 Disposition des grilles décalées d'un modèle k-ε

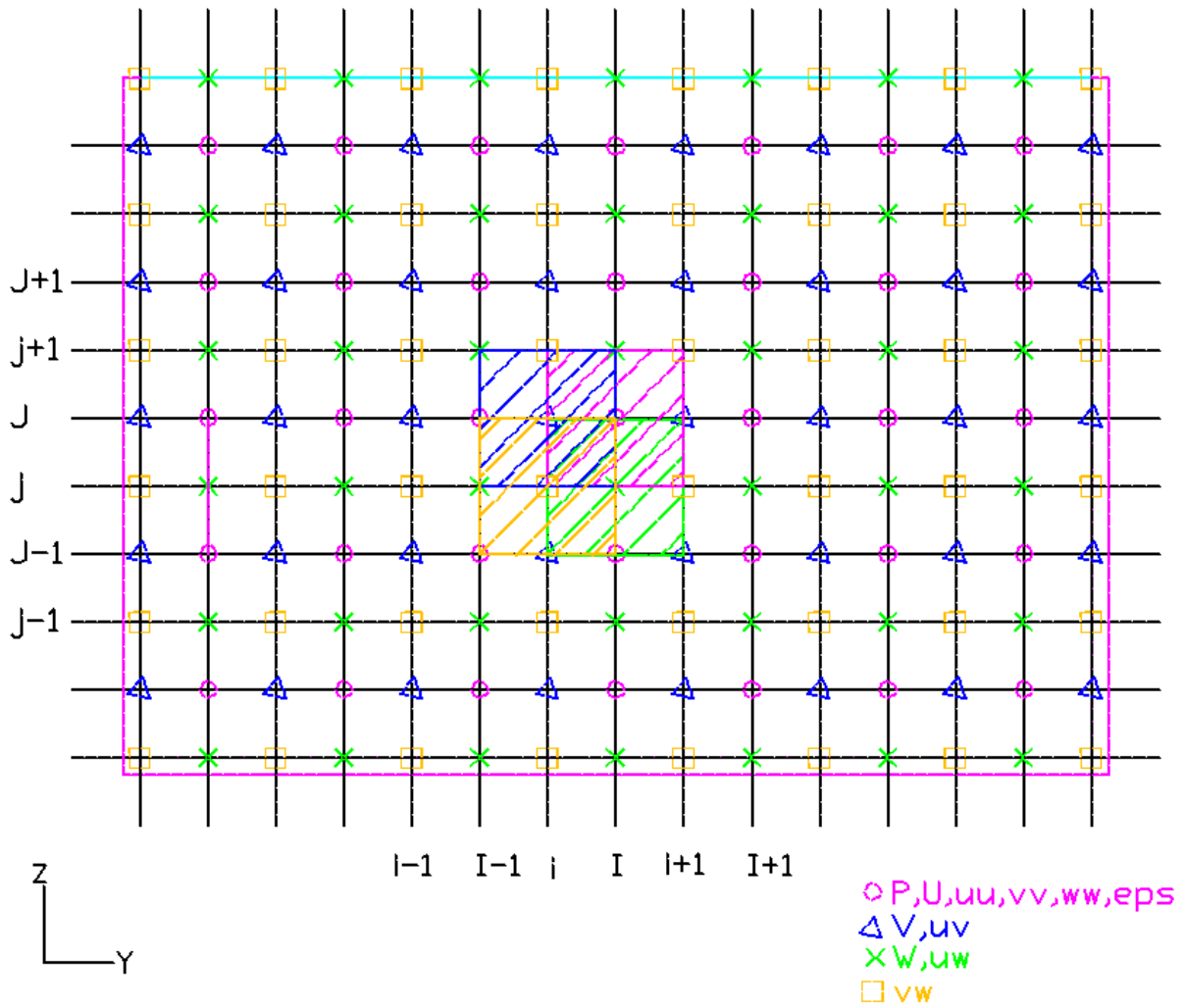


Figure 5-5 Disposition des grilles décalées d'un modèle RSM

Avec les grilles décalées, telles qu'elles sont représentées sur les Figure 5-4 et Figure 5-5, l'expression des gradients de pression deviennent:

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial y} = \frac{\bar{P}_e - \bar{P}_w}{\delta_x} = \frac{\bar{P}_E - \bar{P}_P}{2} \quad (5.24)$$

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial z} = \frac{\bar{P}_N - \bar{P}_P}{2} \quad (5.25)$$

La pression au nœud P intervient dans l'expression de ces gradients ce qui rend possible le calcul d'un champ de pression réaliste.

5.4 Algorithme global

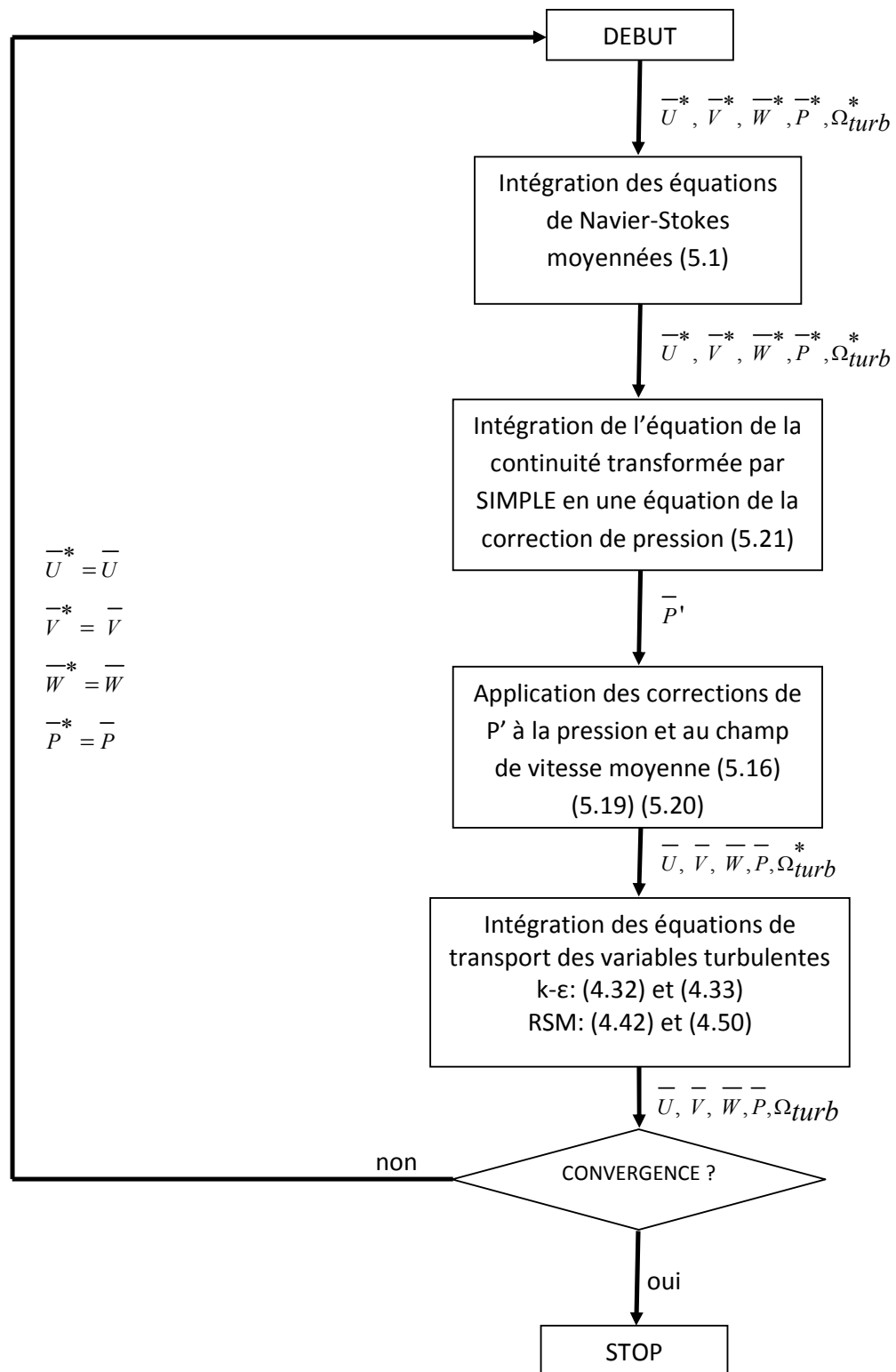


Figure 5-6 Algorithme du logiciel

5.5 Condition aux limites

Si l'utilisation d'un modèle bas Reynolds impose des contraintes fortes sur le maillage, elle simplifie en revanche l'implémentation des conditions aux limites, pour les parois du moins. La partie suivante donne le type de condition imposée suivant le type de limite.

5.5.1 Conditions aux parois

La condition d'adhérence impose:

	Vitesse moyenne	Correction de pression	Variables turbulentes
Modèle k-ε	$\bar{U} = \bar{V} = \bar{W} = 0$ Voir Figure 5-7 et Figure 5-8	$\frac{\partial \bar{P}'}{\partial n} = 0$	$k = \tilde{\varepsilon} = 0$
Modèle RSM			$\overline{uu} = \overline{vv} = \overline{ww} = \overline{vw} = \tilde{\varepsilon} = 0$ $\overline{uv}, \overline{uw}$ voir ci-dessous

La vitesse étant imposée à la paroi, la correction y est nulle. Considérant (5.19) et (5.20), on en déduit le gradient nul de la correction de pression selon la normale \vec{n} à la paroi.

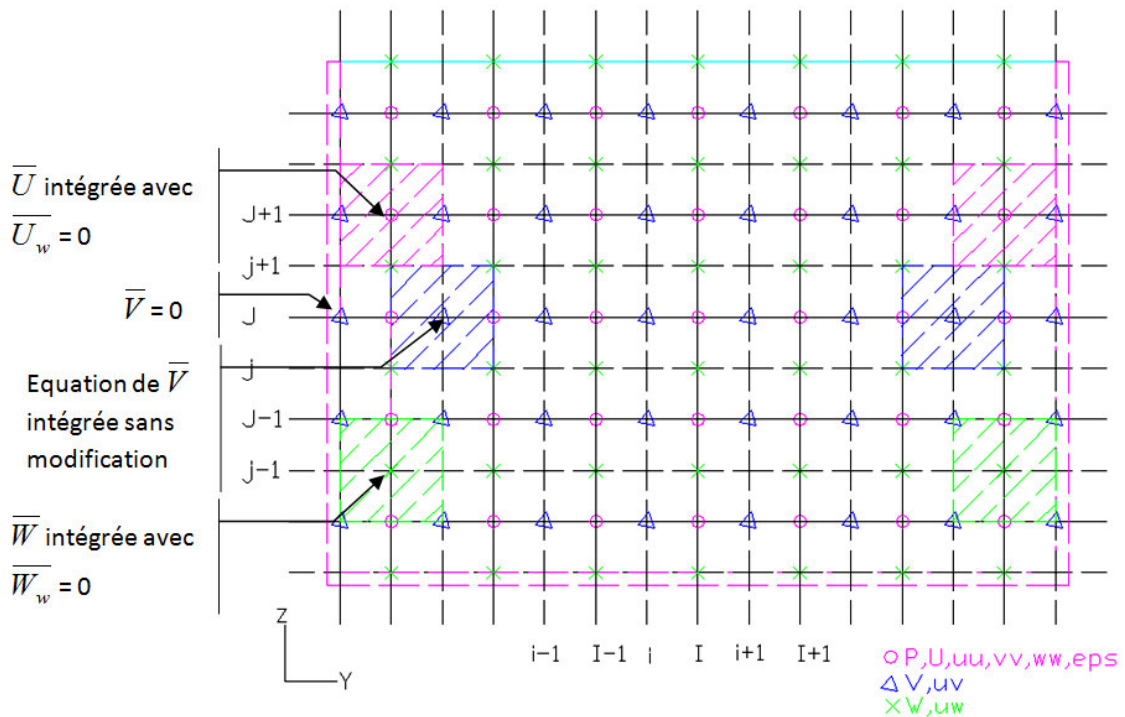


Figure 5-7 Traitement des conditions aux limites du champ de vitesse moyenne aux parois gauche et droite

La figure ci-dessus donne à voir le type d'implémentation des conditions aux limites du champ de vitesse moyenne suivant la grille et sa disposition par rapport à la limite du maillage.

Quant aux conditions limites des variables turbulentes, un traitement spécial est fait pour \overline{uv} et \overline{uw} . En reprenant (4.3), on peut approximer $\overline{uv_w}$ et $\overline{uw_w}$ les valeurs respectives à la paroi de \overline{uv} et \overline{uw} .

$$-\rho \overline{uv_w} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_w + \frac{\partial \overline{V}}{\partial x} \Big|_w \right) = \mu_t \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_w \quad (5.26)$$

$$-\rho \overline{uw_w} = \mu_t \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_w + \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} \Big|_w \right) = \mu_t \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_w \quad (5.27)$$

or $\frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_w$ est nul au radier mais pas aux parois gauche et droite, à l'inverse de $\frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_w$. Ainsi $\overline{uv_w}$ sera pris nul au radier et de gradient nul aux parois latérales, $\overline{uw_w}$ sera de gradient nul au radier et nul aux parois latérales. Le gradient nul, utilisé par (Kang & Choi, 2005), peut se justifier en écrivant d'après (5.26):

$$-\rho \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} \Big|_w = \mu_t \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial y^2} \Big|_w \quad (5.28)$$

$$-\rho \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \Big|_w = \mu_t \frac{\partial^2 \overline{U}}{\partial z^2} \Big|_w \quad (5.29)$$

or le profil de \overline{U} est assimilé à une droite dans la sous couche visqueuse, donc sa dérivée seconde est bien nulle dans cette zone. D'où un gradient nul de \overline{uv} aux parois droite et gauche et de \overline{uw} au radier.

5.5.2 Conditions à la surface libre

La surface libre est modélisée par un plan de symétrie pour tous les paramètres sauf pour le taux de dissipation ϵ dans le cas du modèle RSM. Toutes les variables présentent un gradient nul à la surface libre sauf celle faisant intervenir les deux composantes statistiques de W.

	Vitesse moyenne	Correction de pression	Variables turbulentes
Modèle k-ε	$\frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = \bar{W} = 0$ Voir Figure 5-8	$\bar{P}' = 0$	$\frac{\partial k}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial z} = 0$
Modèle RSM			$\frac{\partial \overline{uu}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{vv}}{\partial z} = \frac{\partial \overline{uv}}{\partial z} = 0$ $\overline{ww} = \overline{uw} = \overline{vw} = 0$ $\tilde{\varepsilon} = cste \text{ voir ci-dessous}$

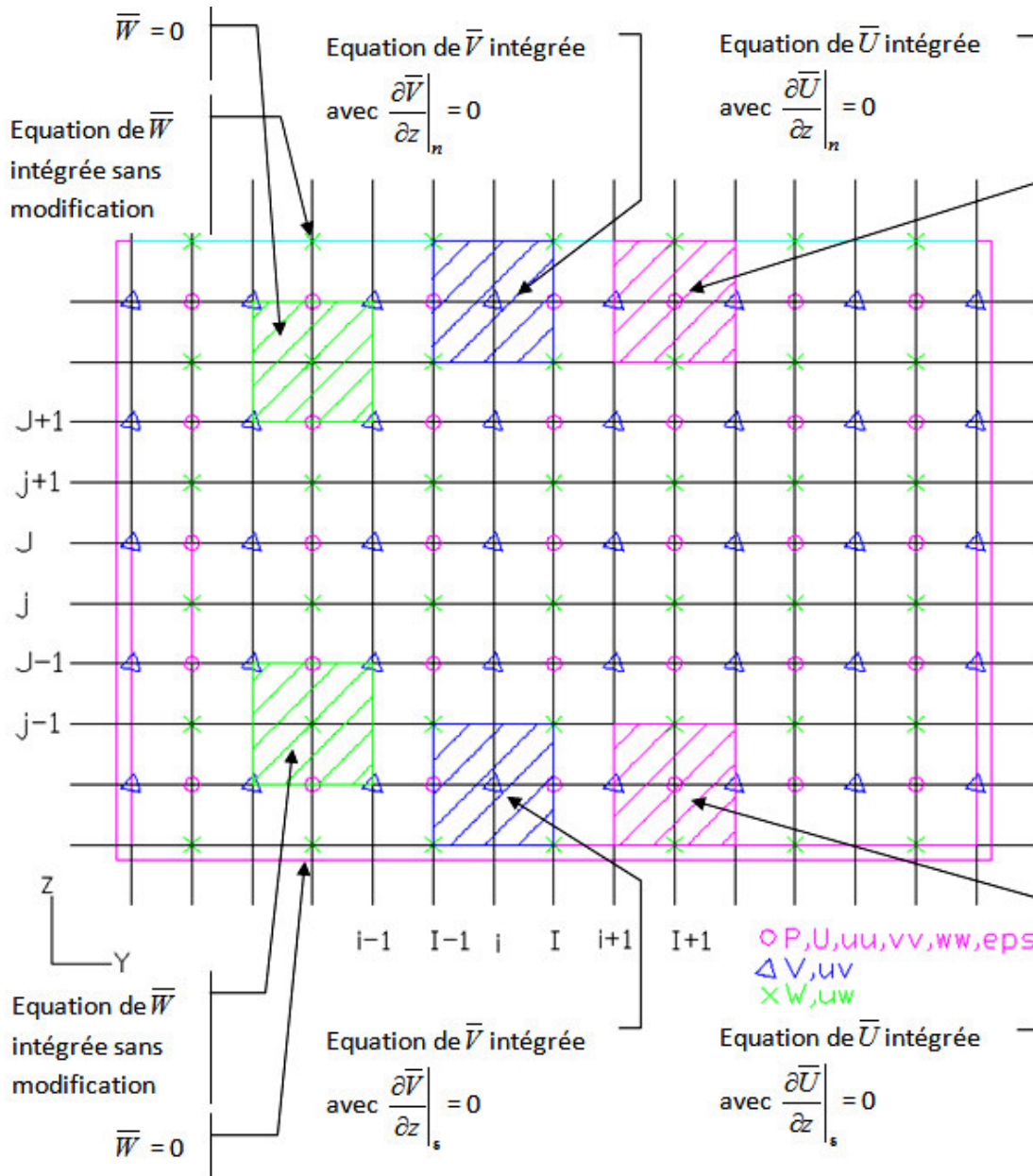


Figure 5-8 Traitement des conditions aux limites du champ de vitesse moyenne à la surface libre et au radier

Dans le cas du modèle RSM certains auteurs tels que (Kang & Choi, 2005) préfèrent une condition aux limites de type Dirichlet pour ε à la surface libre plutôt qu'un gradient nul. Ce type de condition aux limites améliore la stabilité du calcul. La valeur adoptée pour le taux de dissipation est celle prescrite par (Naot & Rodi, 1982):

$$\varepsilon_{SL} = \frac{C_{\mu}^{3/4}}{\kappa} k_s^{3/2} \left(\frac{1}{0.2h} + \frac{1}{y^*} \right) \quad (5.30)$$

k_s est la valeur de l'énergie cinétique turbulente à la surface libre, y^* est la distance à la paroi latérale la plus proche, κ est la constante de Karman $\kappa = 0.41$.

5.5.3 Condition d'entrée du fluide

Le champ de vitesse est généralement imposé en condition d'entrée, de même que pour la paroi on en déduit le gradient nul de la correction de pression selon la normale \vec{n} à la section d'entrée. La détermination des paramètres turbulents à ce type de condition limite est plus complexe. Si on ne dispose pas de données, on peut faire un calcul à partir de l'intensité turbulente:

$$I = 0.16 \text{Re}^{-\frac{1}{8}} \quad (5.31)$$

	Vitesse moyenne	Correction de pression	Variables turbulentes
Modèle k- ε	$\bar{U} = cste$ $\bar{V} = cste$	$\frac{\partial \bar{P}'}{\partial n} = 0$	$k = \frac{3}{2} (U_{moy} I)^2$ $\varepsilon = C_{\mu}^{3/4} \frac{k^{3/2}}{0.07L}$
Modèle RSM	$\bar{W} = cste$		$\overline{uu} = k, \overline{vv} = \overline{ww} = 0.5k$ $\overline{uv} = \overline{uw} = \overline{vw} = 0$ $k, \varepsilon = cste$ voir ci-dessous

5.5.4 Condition de sortie du fluide

Le gradient de chacune des variables est pris nul pression selon la normale \vec{n} à la section de sortie.

	Vitesse moyenne	Correction de pression	Variables turbulentes
Modèle k-ε			$\frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial n}$
Modèle RSM	$\frac{\partial \bar{U}}{\partial n} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial n} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial n} = 0$	$\bar{P}' = 0$	$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial n} = 0 \quad \forall (i, j) \in [1, 3]^2$

5.6 Le solver

Le code étant programmé sous Matlab, un solver préprogrammé est utilisé. Ce dernier est basé sur la méthode des gradients bi-conjugués stabilisée. C'est une méthode itérative qui présente un taux de convergence satisfaisant pour une stabilité optimale. C'est une évolution de la méthode des gradients conjugués dont le principe est le suivant. On se propose de résoudre le système linéaire suivant:

$$Ax = b \quad (5.32)$$

où A est une matrice symétrique de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Soit $(p_k)_{k \in [1; n]}$ un ensemble de n vecteurs A-conjugués, c'est-à-dire :

$$\forall i \neq k \quad {}^t p_k A p_i = 0 \quad (5.33)$$

Cet ensemble constitue alors une base de \mathbb{R}^n . Il existe donc $(\alpha_k)_{k \in [1; n]}$ tels que:

$$x = \alpha_i p_i \quad (5.34)$$

On a donc:

$$\alpha_k = \frac{{}^i p_k b}{{}^i p_k A p_k} \quad (5.35)$$

Le calcul itératif consiste en la détermination des $(p_k)_{k \in [1;n]}$ à travers l'optimisation d'une fonction dérivant de $b - Ax$ par un calcul de gradient.

La méthode utilisée, celle des gradients bi-conjugués stabilisés, est une généralisation de la méthode des gradients conjugués aux matrices non symétriques. On se reportera à (Van der Vorst, 1992) pour la description de la méthode.

Chapitre 6 Résultats des modélisations bidimensionnelles

6.1 Résultats en laminaire: la cavité entraînée

Afin de valider l'implémentation des équations du champ moyen de vitesse, un écoulement laminaire est modélisé. Il a été pris le cas test de la cavité entraînée dont les résultats de la modélisation sont comparés avec ceux de (Ghia, Ghia, & Shin, 1982) qui font référence.

La cavité entraînée est un problème à 2 dimensions modélisant l'écoulement dans une cavité carrée dont la paroi supérieure est en mouvement à vitesse uniforme tel que représenté sur la Figure 6-1. Toutes les conditions aux limites sont de types Dirichlet.

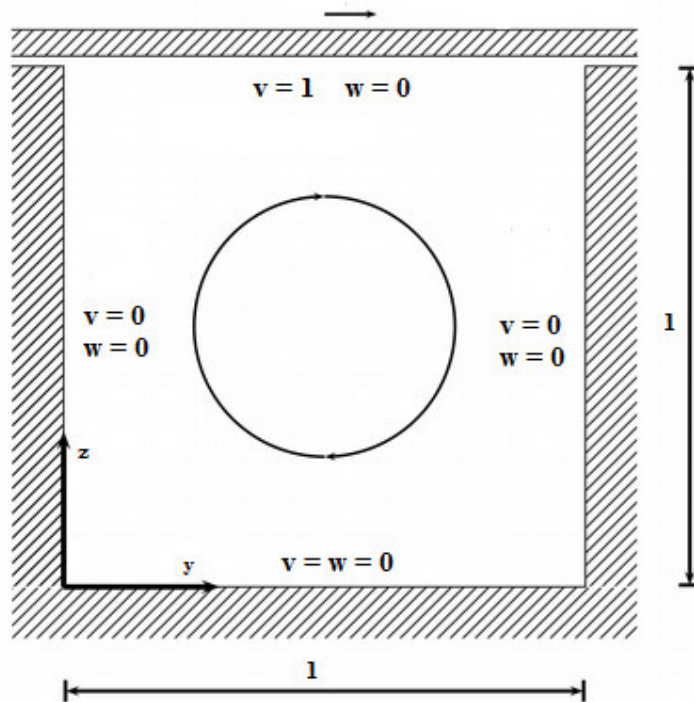


Figure 6-1 Cas test de la cavité entraînée

Les modélisations sont réalisées avec les densités de maillage préconisées par (Ghia, Ghia, & Shin, 1982) soit 129×129 pour un nombre de Reynolds inférieur à 3200 et 257×257 sinon. La Figure 6-2 et la Figure 6-3 représentent respectivement la comparaison des profils $V(y=0.5)$ et $W(z=0.5)$ avec les données de (Ghia, Ghia, & Shin, 1982). Il y a globalement une très bonne adéquation entre les profils calculés. Même s'il semble préférable d'adopter un maillage 257×257 dès que le nombre de Reynolds atteint la valeur de 1000.

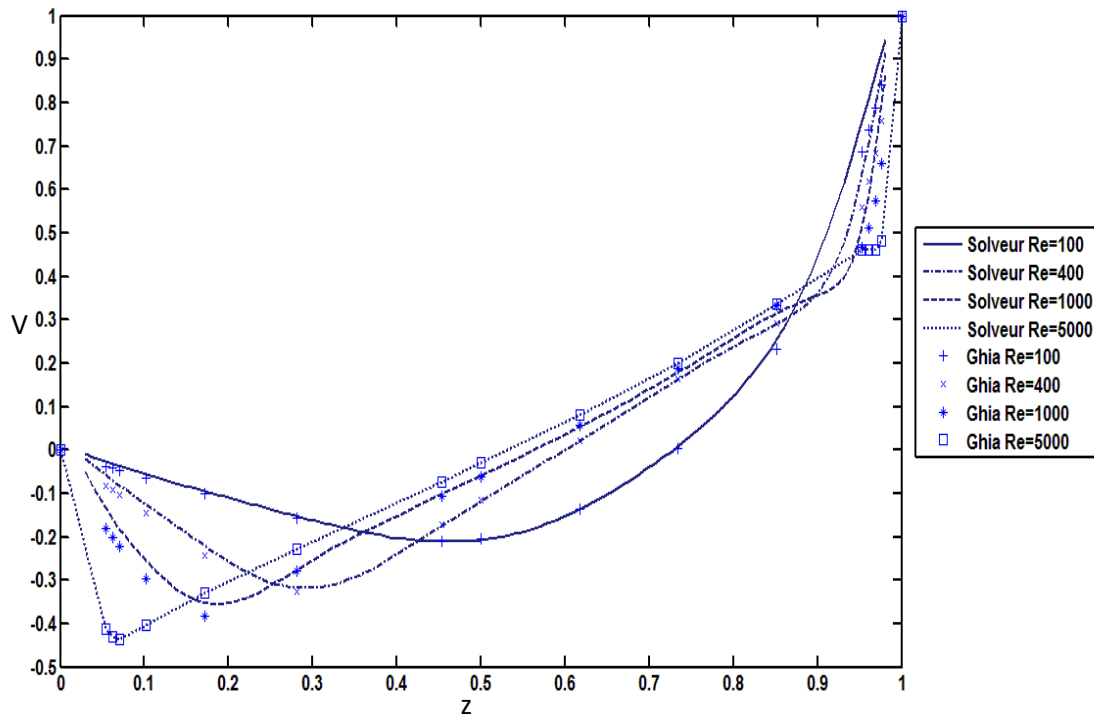


Figure 6-2 Comparaison des profils $V(y=0.5)$ calculés avec les profils mesurés par (Ghia, Ghia, & Shin, 1982) pour différents nombre de Reynolds

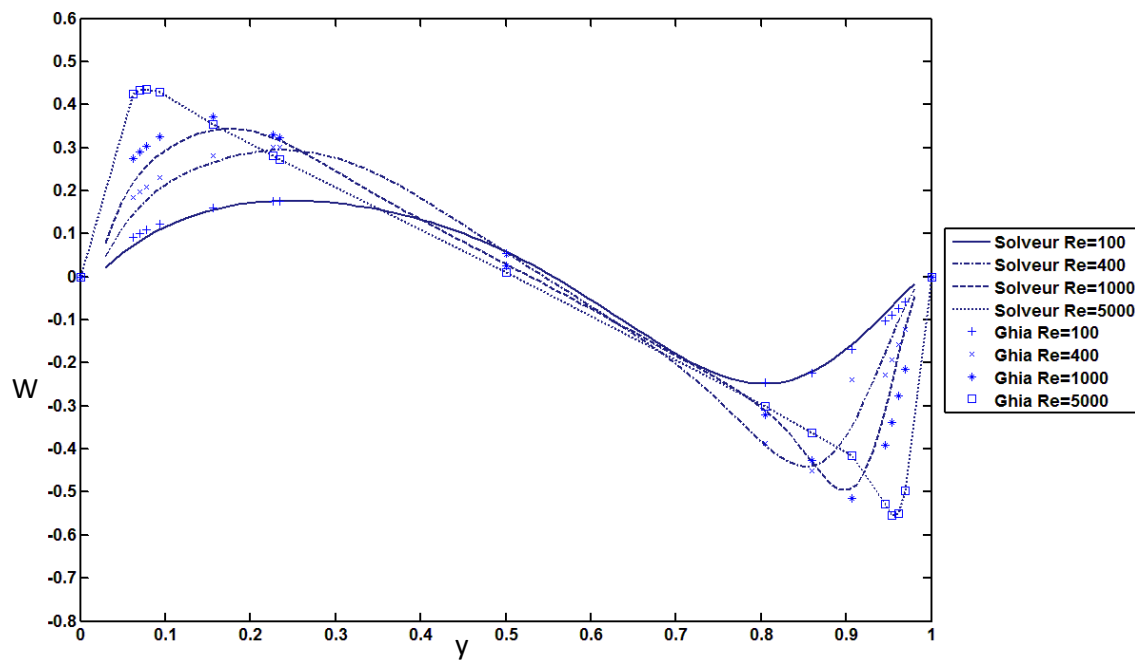


Figure 6-3 Comparaison des profils $W(z=0.5)$ calculés avec les profils mesurés par (Ghia, Ghia, & Shin, 1982) pour différents nombre de Reynolds

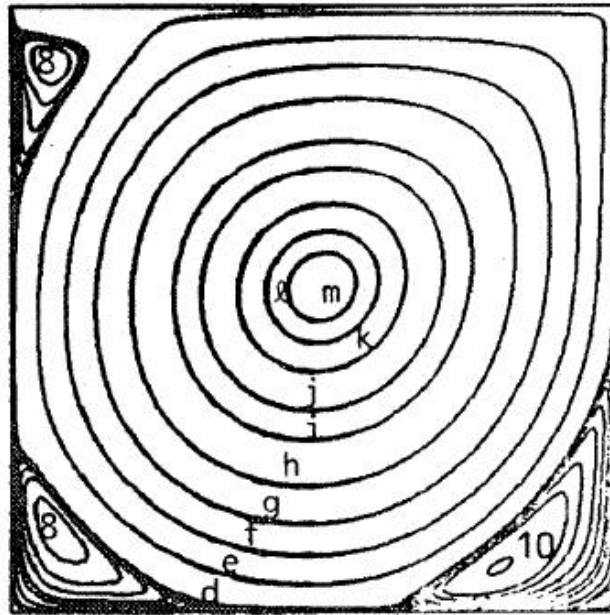


Figure 6-4 Ligne de courant du champ moyen de vitesse pour $Re=5000$ selon (Ghia, Ghia, & Shin, 1982)

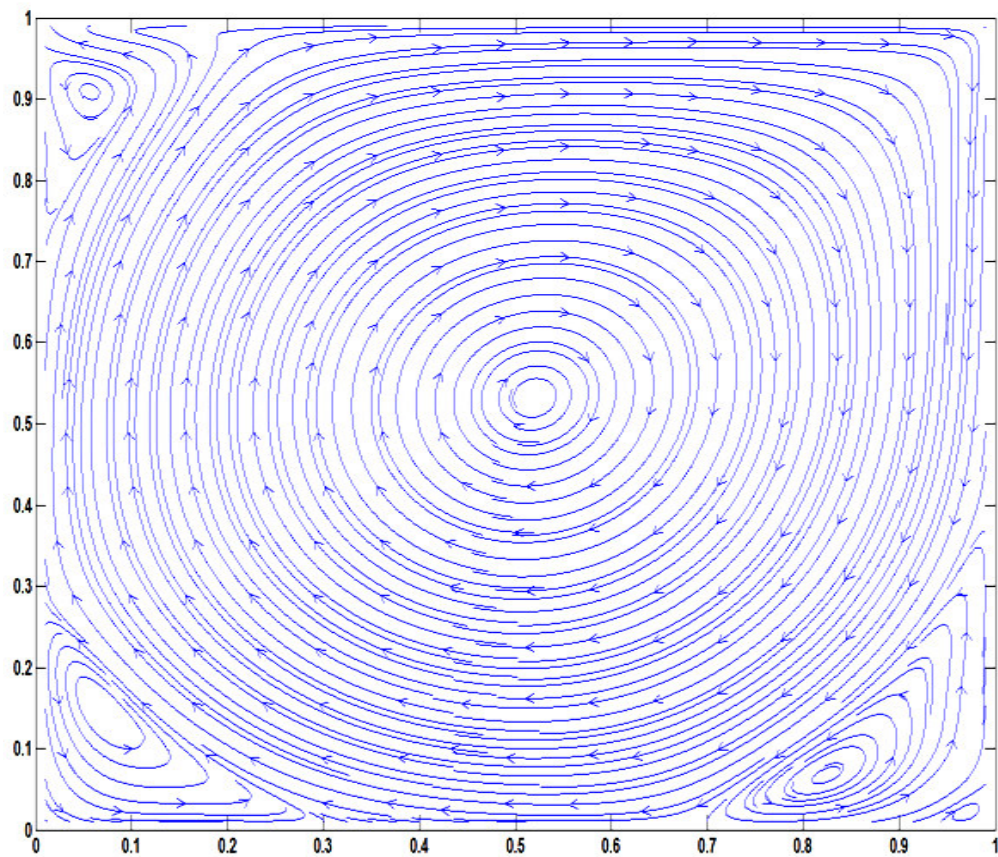


Figure 6-5 Ligne de courant du champ moyen de vitesse calculé pour $Re=5000$

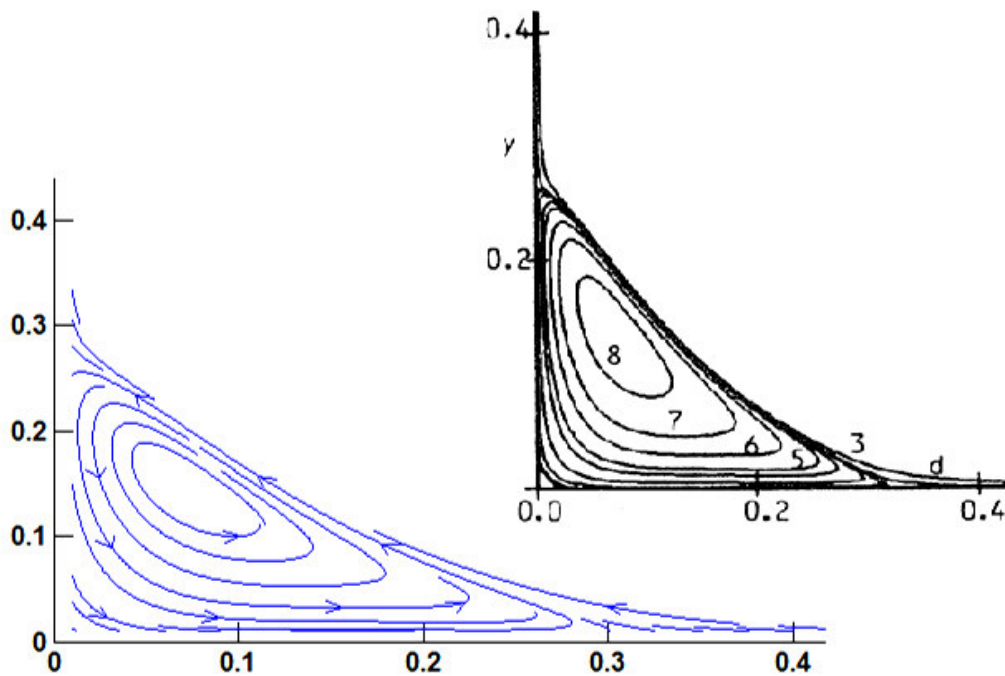


Figure 6-6 Comparaison de la recirculation inférieure gauche calculée avec les résultats de (Ghia, Ghia, & Shin, 1982)

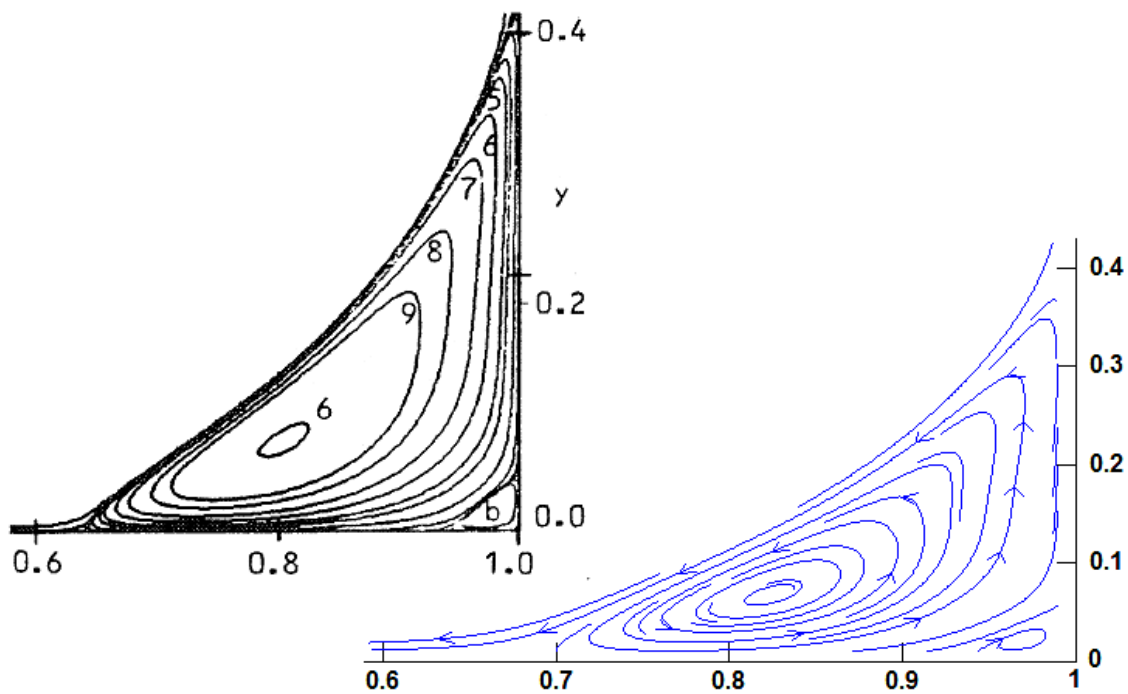


Figure 6-7 Comparaison des recirculations inférieures droites calculée avec les résultats de (Ghia, Ghia, & Shin, 1982)

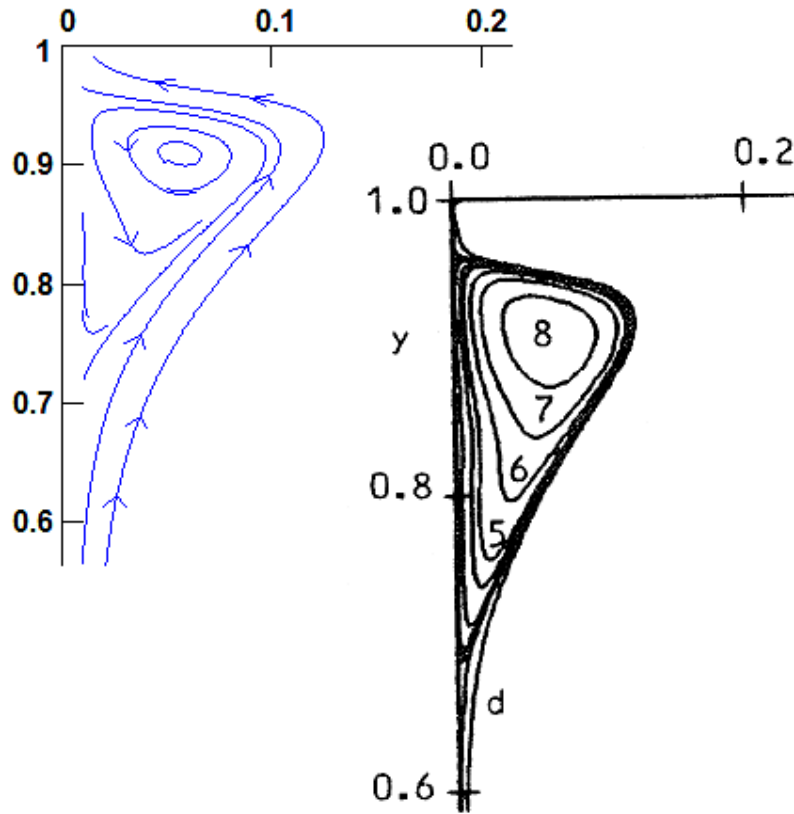


Figure 6-8 Comparaison de la recirculation inférieure gauche calculée avec les résultats de (Ghia, Ghia, & Shin, 1982)

Sur la Figure 6-5 sont représentées les lignes de courant du champ moyen de vitesse calculé. En comparant avec les résultats de (Ghia, Ghia, & Shin, 1982) représentés Figure 6-4, on constate qu'il y a une parfaite similarité. Les recirculations des coins inférieur et supérieur gauche sont parfaitement reproduites comme en témoignent les Figure 6-6, Figure 6-7 et Figure 6-8 sur lesquelles les recirculations calculées sont comparées avec celles de (Ghia, Ghia, & Shin, 1982) notamment sur le critère de la taille. On notera la petite recirculation dans l'angle du coin inférieur droit contrarotative par rapport à la recirculation principale dans cette zone, notée 'b' sur le dessin de (Ghia, Ghia, & Shin, 1982) et reproduite sur les résultats présentés.

Ces résultats nous permettent de valider le solveur et les conditions aux limites des parois pour le champ moyen de vitesse.

6.2 Modélisation d'un écoulement bidimensionnel entre deux plaques planes

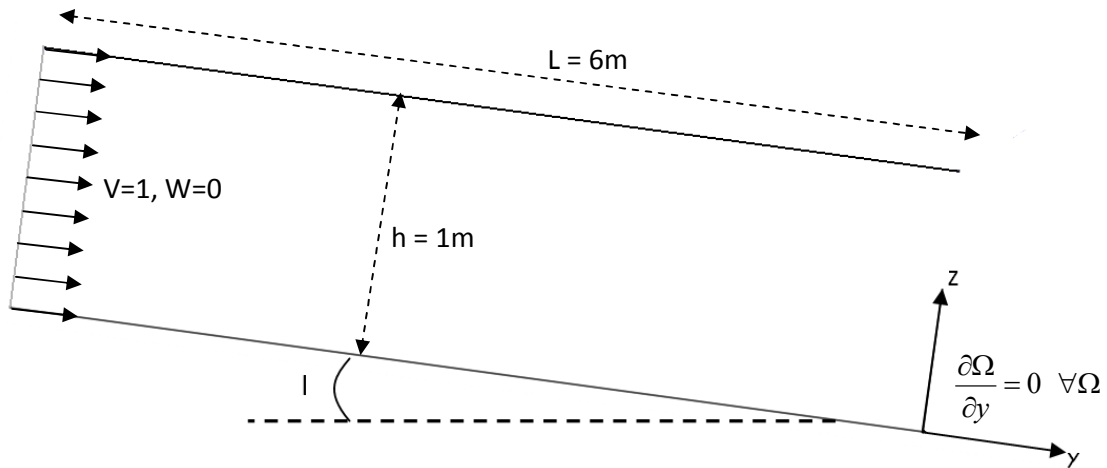


Figure 6-9 Cas de la modélisation bidimensionnelle entre deux plaques planes

La deuxième étape de validation du code est la modélisation d'un écoulement entre deux plaques planes séparées par une distance h , infiniment larges, de longueur L , en laminaire dans un premier temps puis au régime turbulent (modèle $k-\epsilon$ bas-Reynolds puis RSM bas-Reynolds). Le profil de vitesse est imposé égale à 1 selon y et nul selon z en amont du canal, le radier et le plafond sont modélisés comme des parois solides. Enfin l'aval du canal est modélisé par un gradient nul dans le sens de l'écoulement comme illustré Figure 6-9.

6.2.1 Résultats en régime laminaire

Les résultats de la modélisation en régime laminaire présentés Figure 6-10 montrent le profil de vitesse $V(z)$ pour plusieurs ratio y/L . La modélisation présentée, réalisée avec un maillage 35×35 raffiné près des parois, se caractérise par un bilan de masse finale entre l'amont (où le champ de vitesse est imposé) et l'aval de l'ordre de 10^{-4} . Plus ce ratio y/L s'approche des 100% (plus la position du profil s'approche de l'aval), plus il est similaire à la solution analytique de Poiseuille qui s'exprime, dans cette configuration, selon :

$$V(z) = \frac{8V_{\text{moy}}}{h^2} (h^2 - z^2) \quad (6.1)$$

Le système modélisé présente un ratio h/L égal à 6 pour que le l'écoulement ait assez de longueur pour se développer. Comme on le verra dans la suite, ce ratio doit être bien plus élevé au régime turbulent.

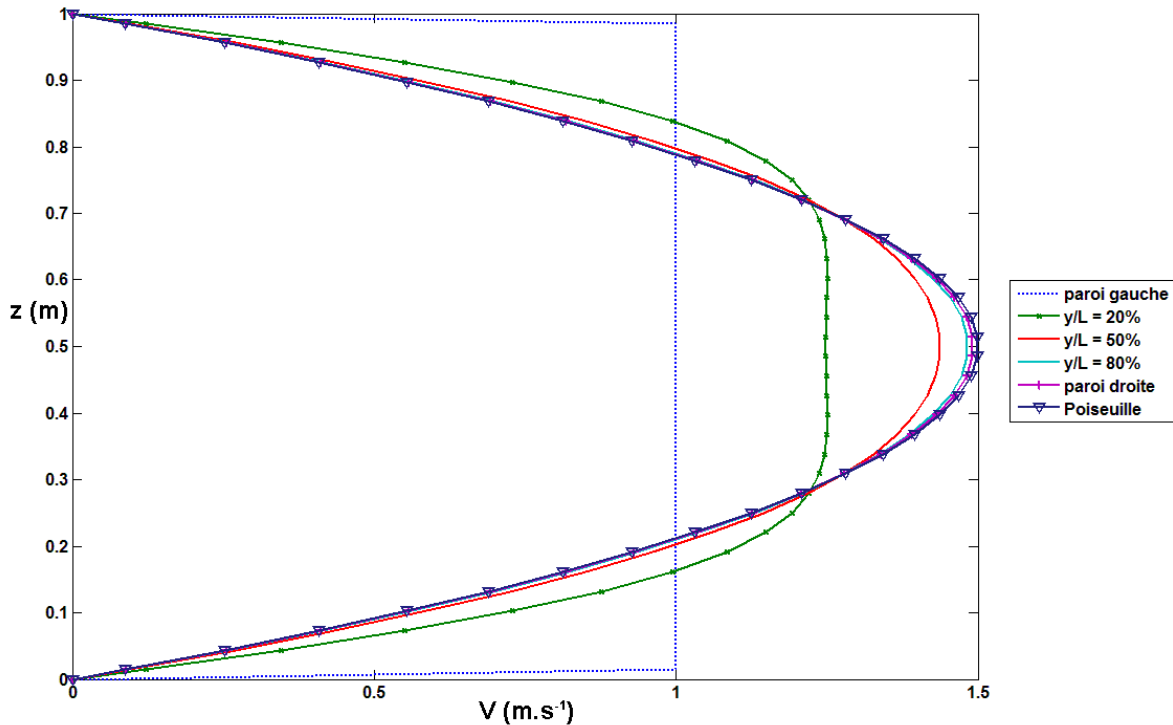


Figure 6-10 Profils de vitesse d'un écoulement entre deux plaques planes en régime laminaire à différentes distances de l'amont, comparés au profil de Poiseuille

6.2.2 Résultats en régime turbulent

Les résultats de la modélisation en régime turbulent présentés Figure 6-11 montre plusieurs profils de vitesse $V(z)$ pour divers ratio y/L . Plus ce ratio s'approche des 100% (plus la position du profil s'approche de l'aval), moins il varie. La modélisation présentée, réalisée avec un maillage 250x150 raffiné près des parois, se caractérise par un y^+ à la paroi inférieur à 1, et un bilan de masse entre l'amont (où le champ de vitesse est imposé) et l'aval de 0.0104%. Le système modélisé présente un ratio h/L égal à 100 pour que l'écoulement ait assez de longueur pour se développer. Pourtant le profil évolue encore, montrant ainsi que même dans une canalisation longue dans laquelle l'écoulement atteint son état développé les sections amont et aval influencent l'écoulement, confirmant les tendances observées par (Detlev & Eckelmann, 1982) et (Williamson, 1989).

Cependant, il est difficile de valider ces résultats. En effet, la configuration étant idéale (plaques infiniment larges), tout comme la distribution de vitesse parfaitement uniforme à l'amont, il n'existe pas, par définition, de données expérimentales. Néanmoins on peut observer que les profils de vitesse ont bien une tendance logarithmique, caractéristique des écoulements en canalisation, du moins au voisinage des parois. Dans la zone centrale pleinement développée, les profils sont quasiment verticaux ce qui peut paraître étrange dans un premier temps. Or la même tendance est observée sur les profils de vitesse issus de

la modélisation de l'écoulement sur une seule plaque plane infiniment large réalisée avec notre code mais aussi avec un code commercial validé et largement utilisé en ingénierie. Ces modélisations sont présentées dans la partie suivante.

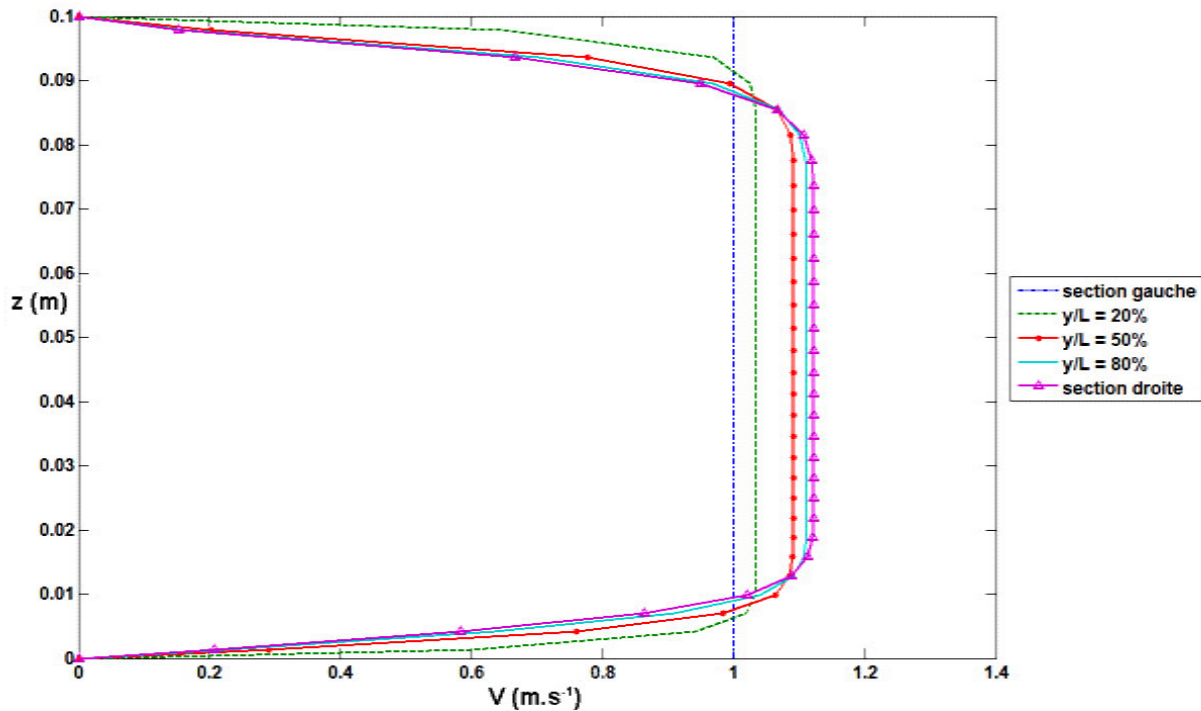


Figure 6-11 Profils de vitesse d'un écoulement entre deux plaques planes en régime turbulent à différentes distances de l'amont, calculés avec le modèle RSM

6.3 Modélisation d'un écoulement bidimensionnel sur une plaque plane

L'étape suivante de validation du code est la modélisation d'un écoulement sur une plaque plane, infiniment large, au régime turbulent (modèle $k-\epsilon$ bas-Reynolds puis RSM bas-Reynolds). Le profil de vitesse est imposé en amont du canal, la surface libre est telle qu'elle est décrite au paragraphe 5.5.2, le radier est modélisé par une paroi solide. Enfin l'aval du canal est modélisé par un gradient nul dans le sens de l'écoulement comme illustré Figure 6-12. Il est nécessaire de bien comprendre l'interaction entre le débit et la hauteur d'eau dans les systèmes comportant une surface libre et qui ne sont pas uniformes pour bien appréhender leur modélisation. Dans le cas présent, la distribution du champ de vitesse est imposée à l'amont mais celle-ci va évoluer vers un profil plus classique en s'approchant de la section aval, comme le montrent les modélisations précédentes. Cet écoulement n'est donc pas uniforme, ce en quoi il se différencie radicalement de la modélisation de la section

transverse traitée dans la partie suivante, qui est l'objet principal de ce doctorat, pour laquelle la hauteur d'eau et la pente est imposée et le débit est retrouvé par la modélisation.

Ainsi, on impose un flux d'entrée et donc, indirectement, un débit. Or la pente et la hauteur d'eau sont elles aussi fixées. Le système est donc sur-contraint ce qui confirme l'intérêt purement théorique de ce cas. Dans la réalité le fluide aurait géré ce flux d'entrée en modifiant le tirant d'eau provoquant ainsi l'apparition d'une courbe de remous et rompant avec le caractère uniforme de l'écoulement. Dans le cas précédent, le débit était aussi imposé mais c'est le plafond de la canalisation qui impose la hauteur d'eau. Le champ de pression, directement lié aux pertes de charge, en est alors modifié.

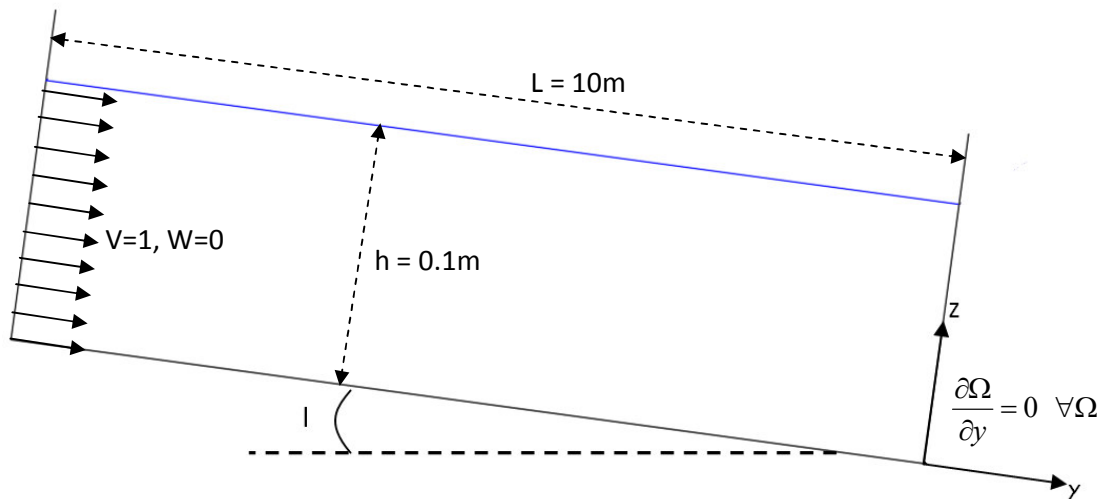


Figure 6-12 Cas de la modélisation bidimensionnelle sur une plaque plane

Les résultats des modélisations en régime turbulent présentés Figure 6-10, Figure 6-13 et Figure 6-14 montrent le profil de vitesse $V(z)$ pour plusieurs ratio y/L . Plus ce ratio s'approche des 100% (plus la position du profil s'approche de l'aval), moins il varie. Les modélisations présentées, réalisées avec un maillage 250x150 raffiné près du radier, se caractérisent par un y^+ à la paroi inférieur à 1, et un bilan de masse entre l'amont (où le champ de vitesse est imposé) et l'aval de 0.004% pour le modèle RSM et de 0.0086% pour le modèle k- ϵ . Le système modélisé présente un ratio h/L égal à 100 pour que l'écoulement ait assez de longueur pour se développer. Là encore, le profil continue d'évoluer quand y tend vers L , montrant que l'influence des sections amont et aval persiste.

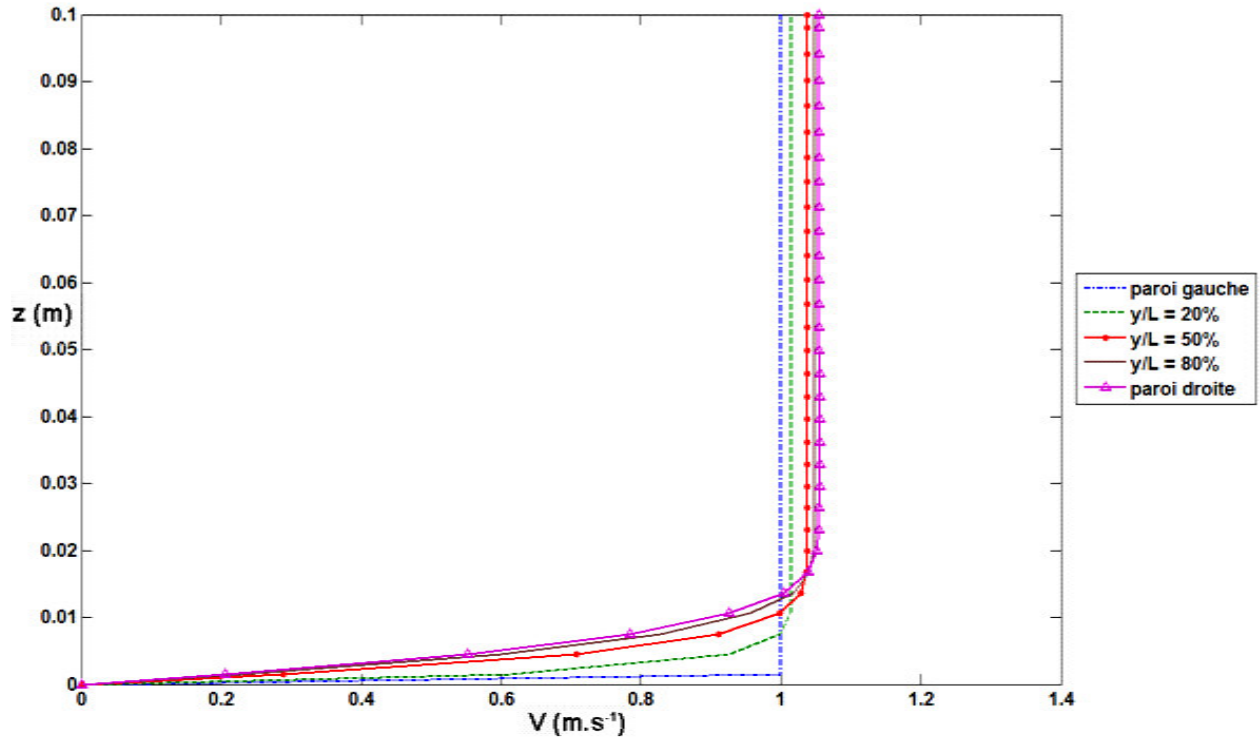


Figure 6-13 Profils de vitesse d'un écoulement sur une plaque plane en régime turbulent à différentes distances de l'amont, calculés avec le modèle RSM

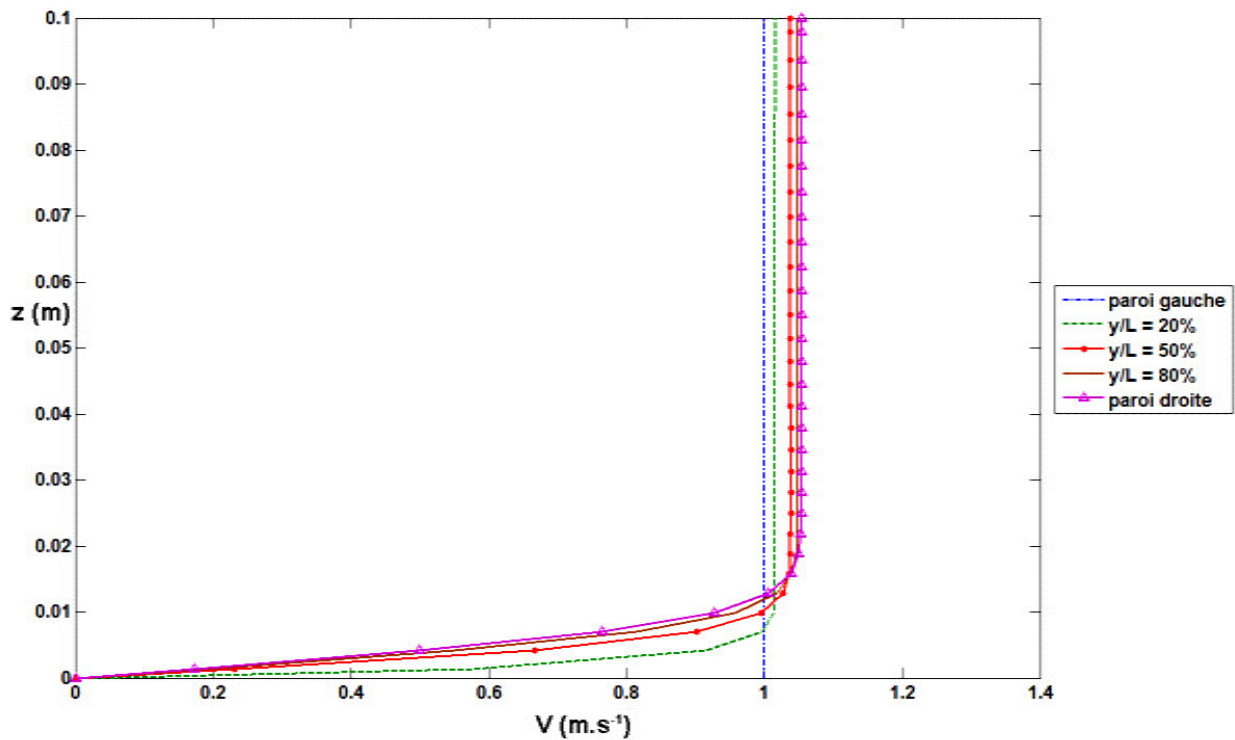


Figure 6-14 Profils de vitesse d'un écoulement sur une plaque plane en régime turbulent à différentes distances de l'amont, calculés avec le modèle k-ε

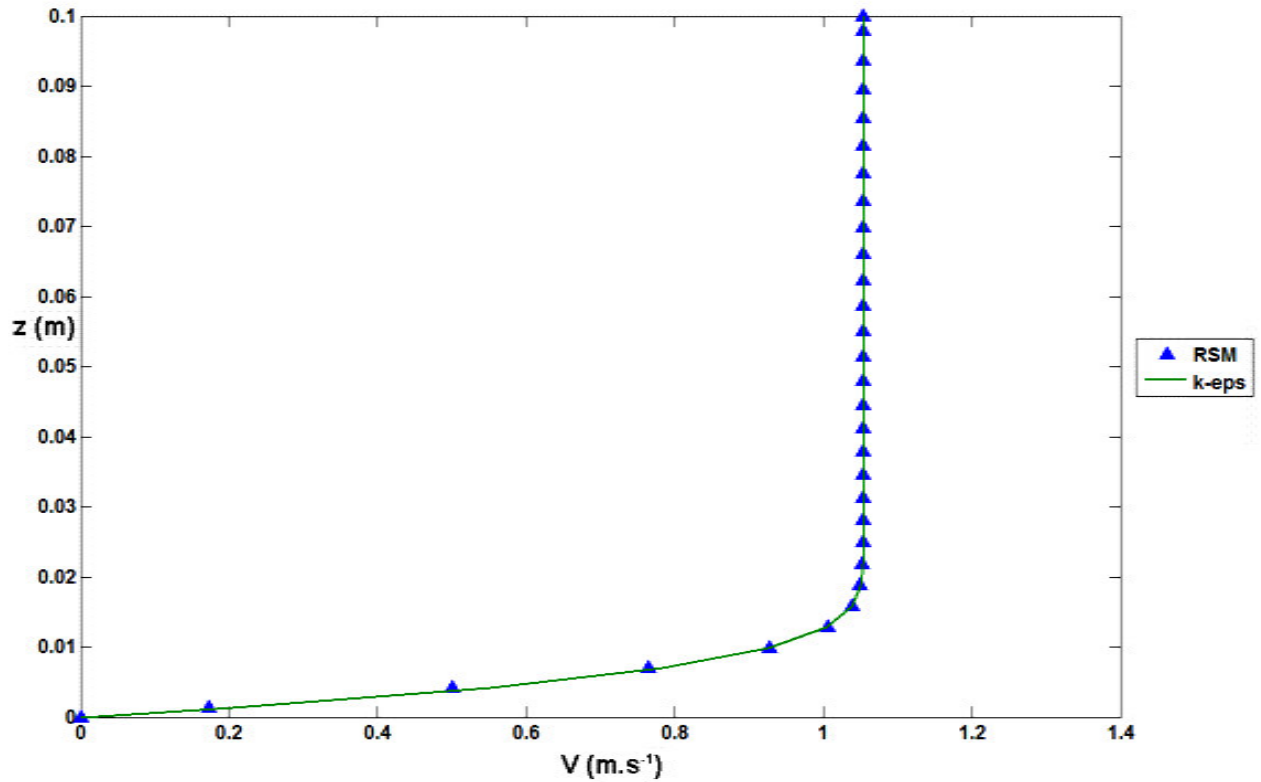


Figure 6-15 Comparaison des profils de vitesse de la section aval calculés avec les modèles RSM et k-ε

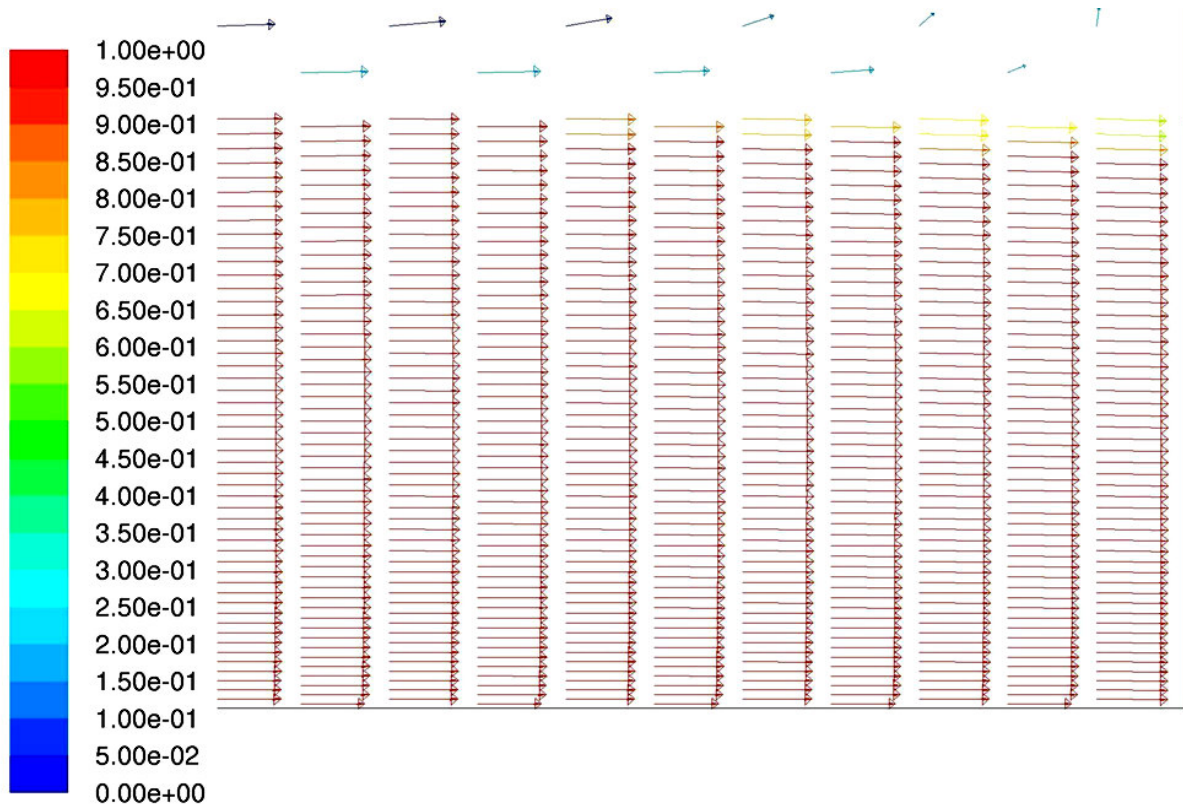
Il apparaît clairement sur la Figure 6-15 représentant les profils de vitesse V à la section aval calculés tour à tour avec les modèles RSM et k-ε que les deux profils de vitesse sont très similaires. Le RSM ne présente donc pas de réel apport par rapport au modèle k-ε. L'absence de parois latérales et de recirculations dans le sens transverse à l'écoulement réduit l'utilité d'un modèle prenant en compte le caractère anisotrope de la turbulence. Plus encore, il est montré ici qu'une modélisation bidimensionnelle n'est pas à même de reproduire les phénomènes qui ont motivés ce travail, notamment le Dip phenomenon. Ceci est d'ailleurs en accord avec (Yang S. Q., 2005). En effet, selon les lois (2.3) et (2.4) et considérant $\frac{b}{h} = \infty$, on obtient:

$$\alpha = 0$$

$$z_{\max} = h$$

Ainsi le maximum du profil de vitesse se trouve à la surface libre.

On retrouve, comme lors de la modélisation entre deux plaques planes, une tendance logarithmique du profil au voisinage de la paroi puis une allure très verticale dans la partie centrale développée jusqu'à la surface libre. La forme de ce profil, qui n'est pas très réaliste, est certainement une conséquence de cette condition limite amont composée d'un champ de vitesse V constant qui n'est elle-même pas très naturelle. En effet, ce front doit avoir un effet résiduel sur l'aval d'où l'aspect verticale du profil V . On retrouve d'ailleurs ce même phénomène lorsqu'on réalise la modélisation du même canal sous Fluent (voir Figure 6-16). La comparaison de nos résultats avec ceux d'un logiciel commercial n'est pas rigoureusement une validation. Néanmoins, à défaut de données expérimentales pour les raisons citées précédemment, une bonne corrélation de nos résultats avec ce logiciel largement validé pour bon nombre d'applications d'ingénierie conforte la confiance que l'on peut accorder à nos propres résultats.



Velocity Vectors Colored By Volume fraction (eau)

Oct 06, 2009
FLUENT 6.3 (2d, dp, pbns, vof, rke)

Figure 6-16 Profils de vitesse $V(z)$ obtenus avec Fluent (aval du canal)

Il a été choisi de modéliser la surface libre sous Fluent au moyen du modèle VOF (Volume of Fluid) consistant à transporter deux phases, ici l'eau et l'air, en résolvant les équations de Navier-Stokes moyennées (3.29) fermées par un modèle de turbulence et complétées par

une équation de transport de la fraction volumique. Cette dernière détermine la part de chaque phase à chaque cellule du maillage. Cela nécessite donc de modéliser un volume d'air au dessus d'un volume d'eau. Le champ de vitesse de l'air nous intéressant moins, le maillage du volume d'air est moins dense que celui de l'eau. Les maillages sont raffinés près du radier et de la surface libre comme illustré Figure 6-17. Ayant constaté précédemment qu'il donnait les mêmes résultats que le modèle RSM dans ce cas, le modèle de turbulence choisi est un modèle k- ϵ . Le lecteur pourra trouver une description du modèle VOF dans (Ramamurthy, Junying, & Diep, 2005) ou encore dans (Fluent, 2003).

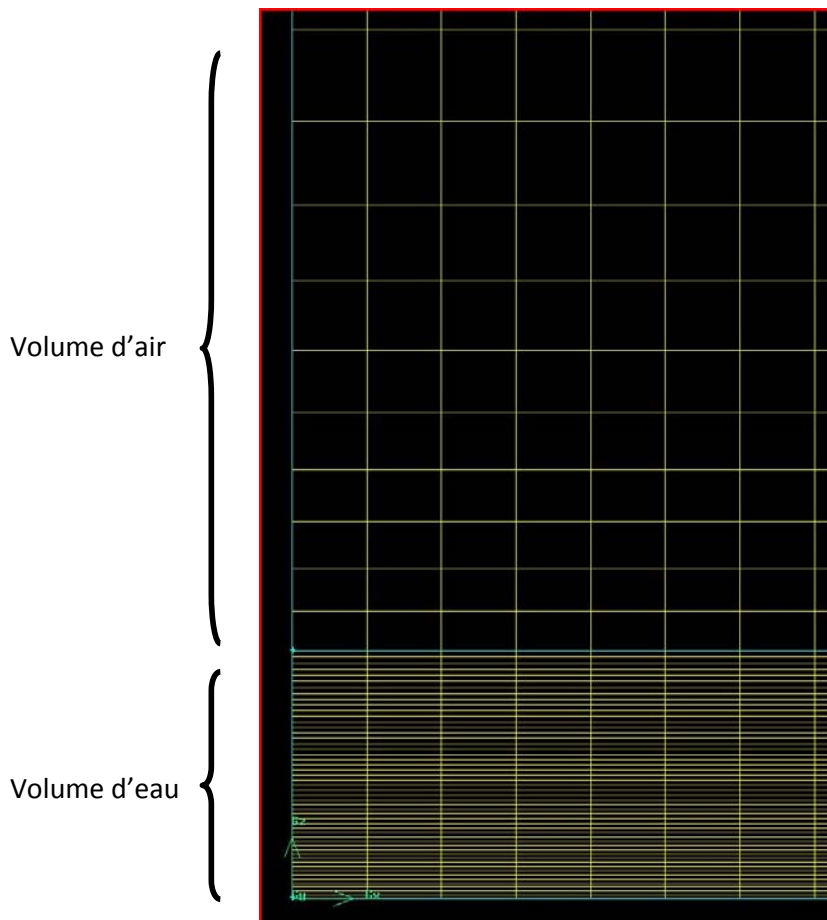


Figure 6-17 Détail du maillage de la modélisation réalisée sous Fluent

La comparaison des profils de milieu de canalisation générés par le solveur et Fluent (Figure 6-18), montrent une bonne corrélation entre ces deux résultats. La différence entre les deux profils est majorée à 2.5% comme le montre la barre d'erreur ajoutée au graphique. La différence d'allure qui demeure entre les deux profils est certainement due au fait que la condition de gradient nul pour chaque variable selon la normale à la surface, utilisée pour la section aval avec le solveur, n'existe pas sous Fluent et a donc été remplacée par un débit et

une hauteur d'eau imposée (condition 'outflow'). Néanmoins on retrouve bien cette tendance à la verticalité dans un large voisinage de la surface libre.

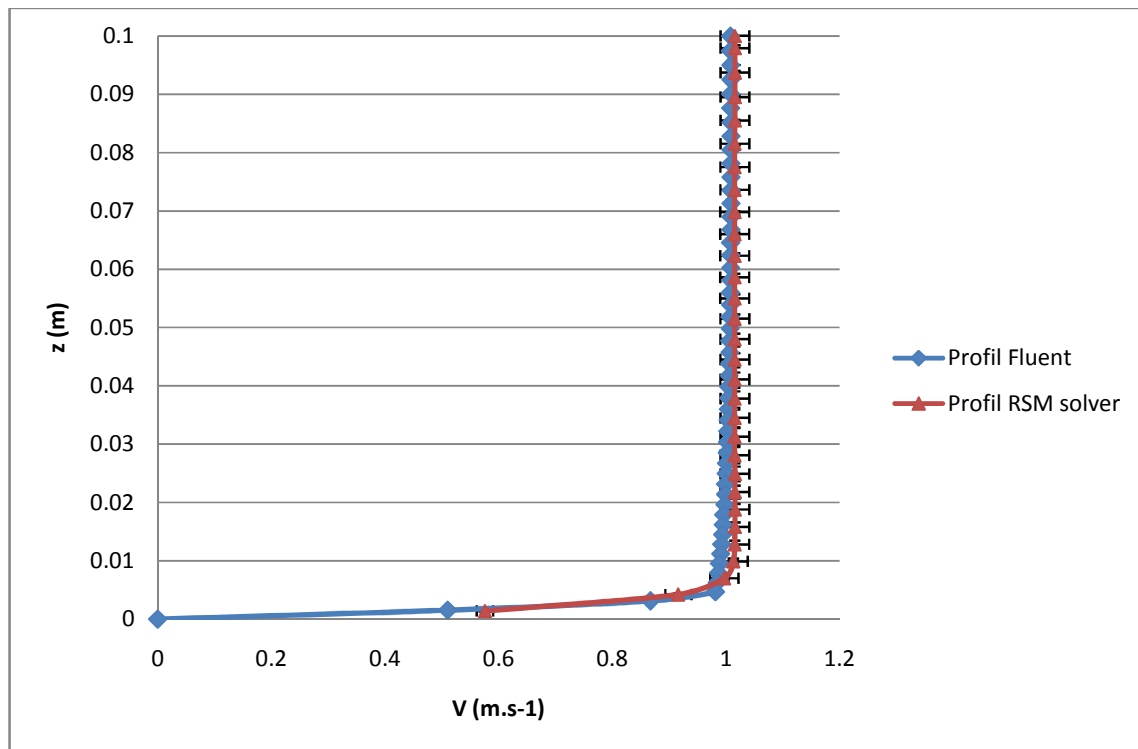


Figure 6-18 Comparaison des profils $V(z)$ à mi-longueur du canal et barre d'erreur à 2.5%

Cette partie valide donc la démarche d'une modélisation tridimensionnelle; un modèle bidimensionnel n'est pas à même de reproduire les phénomènes de turbulence qui sont par définition tridimensionnels et intimement liés à des éléments de géométrie comme les coins de la section et qui sont à l'origine des courants secondaires que l'ont cherche à reproduire. Par ailleurs, une telle modélisation pose la question de la relation entre le débit, la perte de charge et la hauteur d'eau. Il semble nécessaire, pour obtenir un profil de vitesse réaliste, d'implémenter un modèle prenant en compte la variation de la surface libre, tel (Guillou, Barbry, & Nguyen, 2000) qui préconise un maillage de type eulérien-adaptatif pour le calcul de la surface libre.

Il est aussi envisageable de réaliser un pré-calcul de la hauteur d'eau de l'écoulement à modéliser. En effet, le débit, la perte de charge et la hauteur d'eau sont liés selon:

$$Q = f(h, j) \quad (6.2)$$

$$j = \frac{\partial H}{\partial x} \quad (6.3)$$

$$H = \frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\rho g} + z \quad (6.4)$$

L'écoulement modélisé étant uniforme, la hauteur d'eau est constante et la perte de charge linéaire j est égale à la pente du canal. Soit:

$$I = \lambda Q^2 / (S^2 2gh) \quad (6.5)$$

λ est le coefficient de perte de charge qui peut être évalué, par exemple, par la formule expérimentale de Prandtl-Nikuradse (Nikuradse, 1926) adapté aux écoulements en conduite lisse:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.035 \log_{10} (\text{Re} \sqrt{\lambda}) - 0.8 \quad (6.6)$$

Dans le cas d'une conduite rugueuse, on utilisera la formule de Colebrook:

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left(\frac{k}{3.7 D_h} + \frac{2.51}{\text{Re} \sqrt{\lambda}} \right) + 1.74 \quad (6.7)$$

où k est la rugosité exprimée en mètre et D_h est le diamètre hydraulique $D_h = h$ dans le cas d'une conduite rectangulaire.

Chapitre 7 Résultats des modélisations tridimensionnelles d'un écoulement en canal

Le cas suivant consiste en la modélisation tridimensionnelle d'une conduite rectangulaire infiniment longue. L'écoulement étudié étant pleinement développé et uniforme dans le sens principal de l'écoulement, toutes les dérivées spatiales dans cette direction sont considérées nulles ce qui simplifie considérablement les équations (3.29), (4.42) et (4.50) notamment les termes convectifs et diffusifs mais surtout cela réduit le maillage. En effet si tous les champs sont modélisés selon leurs trois composantes dans l'espace, ils sont en revanche indépendants à la variable x .

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} U(y, z, t) \\ V(y, z, t) \\ W(y, z, t) \end{pmatrix}$$

Ainsi la modélisation est tridimensionnelle mais le maillage est bidimensionnel ce qui réduit le nombre de nœuds et donc le temps de calcul. L'espace modélisé est donc une section transverse dont les parois et le radier sont modélisés par des parois solides et la surface est telle que décrite dans le paragraphe 5.5.2.

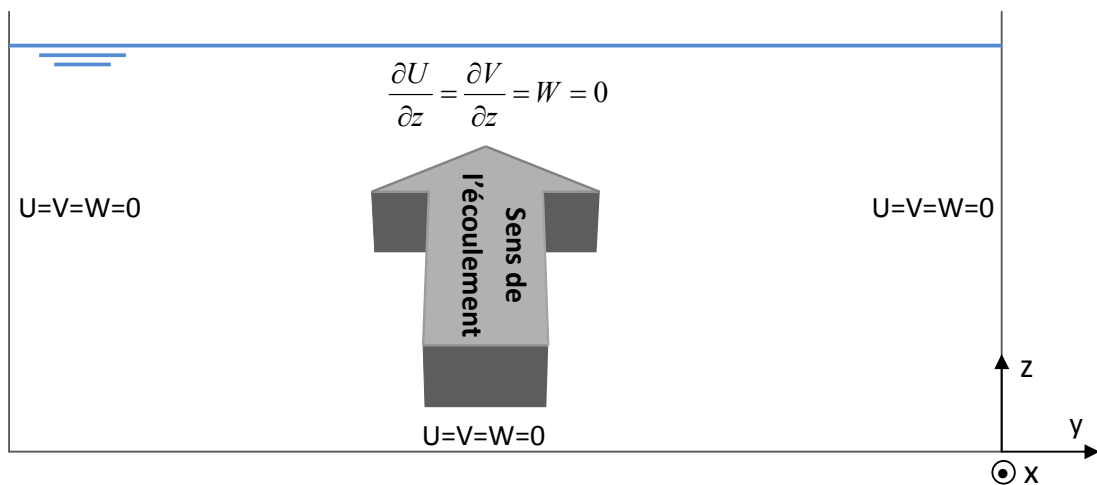


Figure 7-1 Cas de la modélisation tridimensionnelle en canal rectangulaire

7.1 Résultats issus du modèle k- ϵ bas Reynolds

Les calculs réalisés avec le modèle k- ϵ ont été menés dans le but d'établir la comparaison avec les résultats du modèle RSM présentés au paragraphe suivant. L'écoulement est modélisé dans une section de hauteur $h=0.172\text{m}$ et de largeur $L=0.344\text{m}$ soit un rapport $L/h=2$. La pente, descendante dans le sens de l'écoulement x , est fixée à $I = 0.2\%$. Un modèle k- ϵ bas-Reynolds étant utilisé, le nombre de mailles a été choisi tel que y^+ n'excède pas 1 aux parois, ou plus précisément au niveau de la première rangée de mailles à partir des parois. La taille du maillage du maillage est de 200×250 ($h \times L$), un raffinement a été appliqué au voisinage de chaque paroi. Le nombre de Reynolds de cet écoulement s'élève à $1.7 \cdot 10^5$ ce qui garantit donc une turbulence pleinement développée et un régime turbulent chaotique. Indépendamment de la qualité des résultats présentés Figure 7-2, Figure 7-3 et Figure 7-4, il est à noter l'exceptionnelle stabilité de ce modèle. Finalement assez peu sensible aux coefficients de sous-relaxation, ce modèle converge rapidement avec la méthode numérique décrite précédemment et ce malgré une condition initiale constante sur toute la section pour le champ de vitesse comme pour les variables turbulentes. Le calcul est aussi beaucoup plus rapide non seulement parce que le nombre d'équations à intégrer est plus faible mais aussi parce que le solveur, basé sur la méthode des gradients bi-conjugués stabilisée, qui est itératif, converge plus rapidement pour les équations de transport de l'énergie cinétique turbulente et du taux de dissipation que pour celles des tensions de Reynolds. L'équation de ϵ étant commune aux deux modèles ((4.33) pour k- ϵ et (4.50) pour RSM) mais présente elle aussi ce temps de convergence plus long dans le second cas. On en déduit que c'est le changement d'écriture qui engendre cette différence de temps de calcul. Plus précisément, la réécriture du terme de diffusion selon (Daly & Harlow, 1970), s'affranchissant de l'hypothèse de (Boussinesq, 1877), semble augmenter le nombre d'itérations nécessaires à l'inversion de la matrice.

La Figure 7-2 représente la cartographie de \bar{U} / \bar{U}_{\max} . Il apparaît clairement que le Dip phenomenon n'est pas reproduit ce qui est tout à fait normal car, après convergence du modèle, V et W demeurent proches de 0. Sur les Figure 7-3 et Figure 7-4 figurent les cartographies respectives de k et ϵ . On remarque que les valeurs les plus élevées se trouvent aux parois où la turbulence est la plus intense. En effet, les gradients de vitesse U les plus forts se trouvant aux parois (voir Figure 7-2), c'est à ces endroits que les filaments tourbillonnaires sont les plus susceptibles d'être déformés pour devenir des structures en épingle à cheveux, produisant des tourbillons et augmentant ainsi l'intensité turbulente selon le mécanisme décrit au paragraphe 2.1.1.

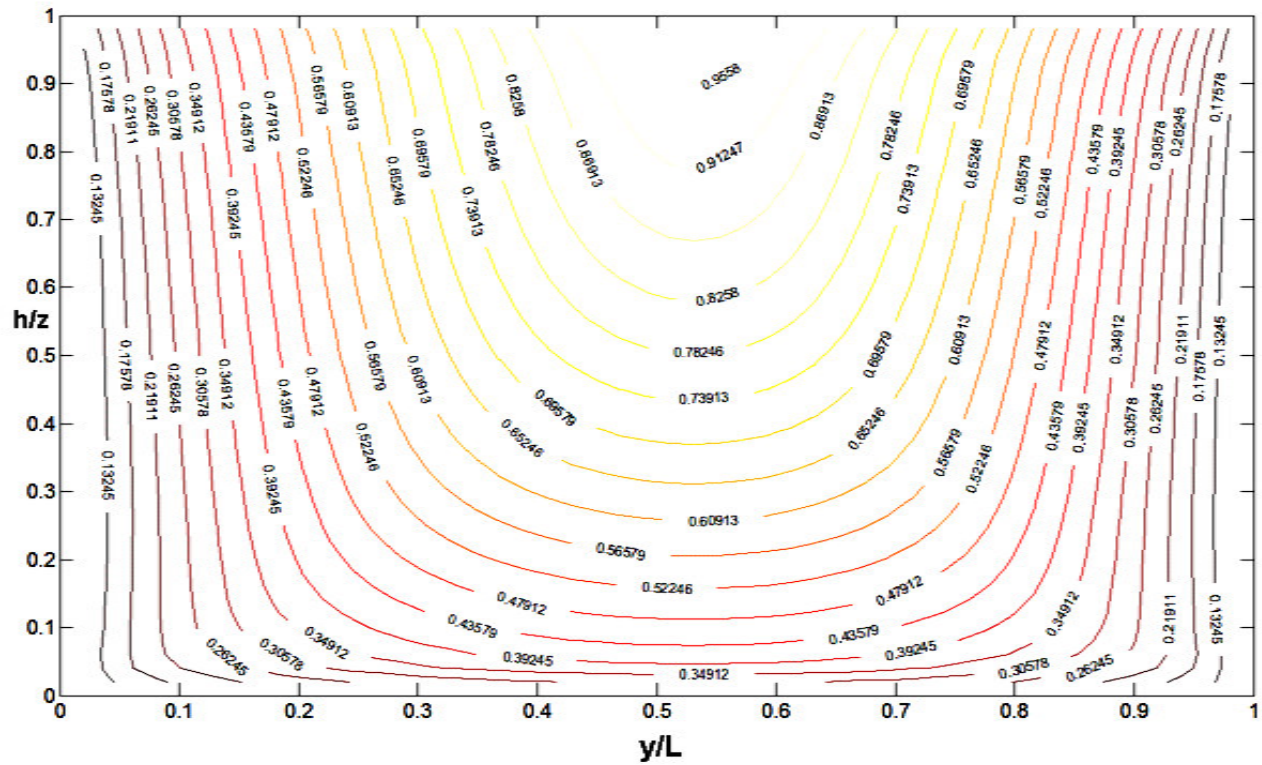


Figure 7-2 Cartographie de \bar{U} / \bar{U}_{\max} calculée par le modèle k- ϵ

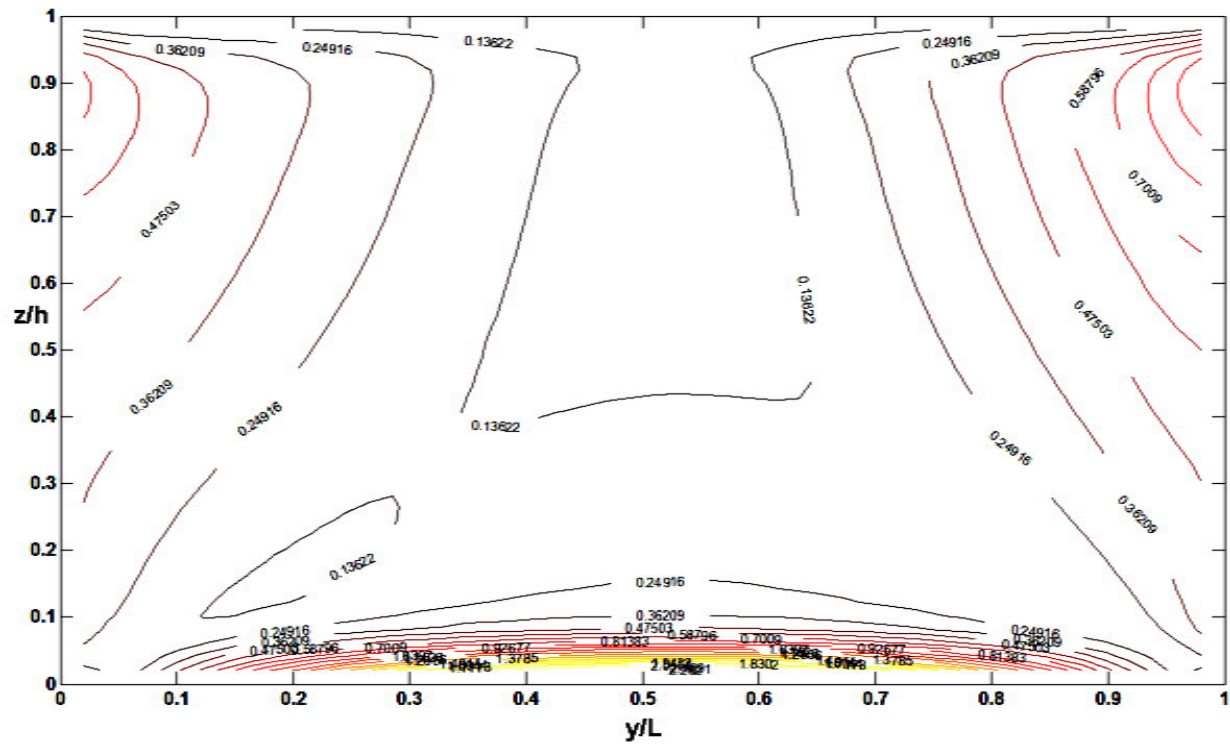


Figure 7-3 Cartographie de k/u_*^2 calculée par le modèle k- ϵ

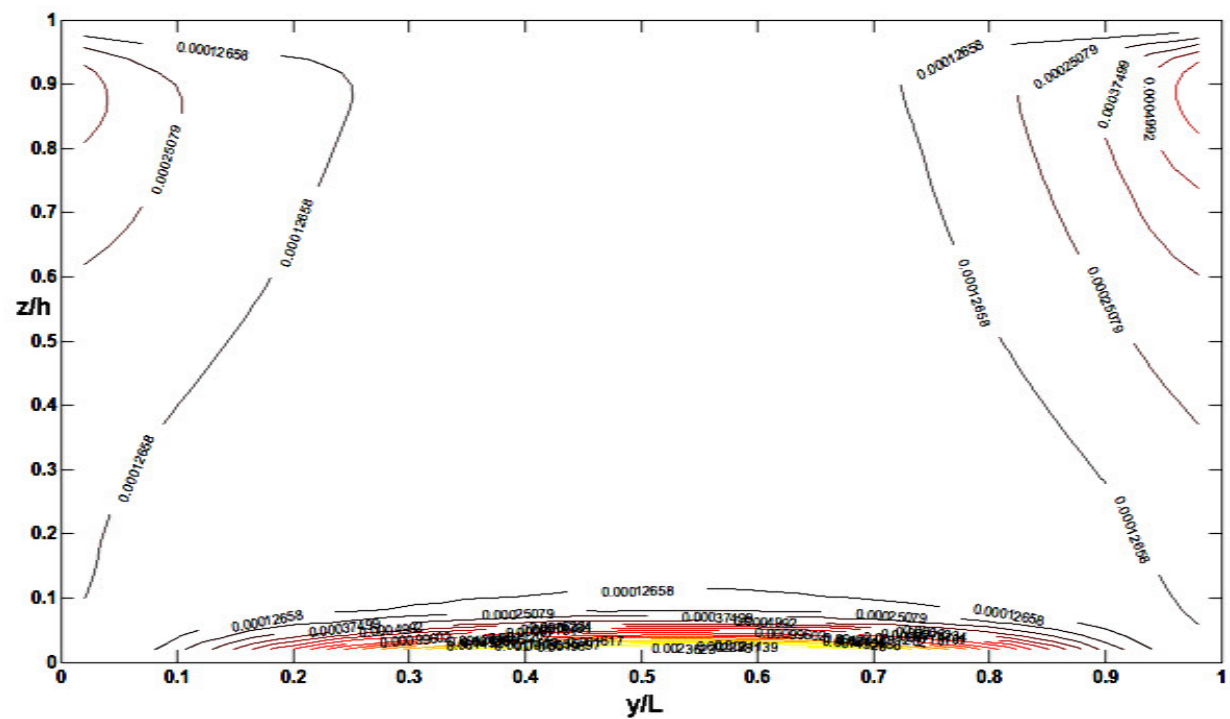


Figure 7-4 Cartographie de ϵ calculée par le modèle k- ϵ

7.2 Résultats issus du modèle RSM bas Reynolds proposé

L'écoulement est modélisé dans la même section que précédemment, pour la même pente de canal, maillée identiquement, soit en respectant $y^+ \leq 1$ au niveau de la première rangée de mailles à partir des parois. Les paramètres hydrauliques ne variant pas non plus, la valeur du nombre de Reynolds reste inchangée. Les résultats de cette modélisation, présentés dans les pages suivantes, sont comparés aux résultats expérimentaux adimensionnels de (Nezu & Rodi, 1985) issus d'expériences réalisées dans un canal présentant le même rapport largeur sur hauteur $L/h = 2$ ainsi qu'aux résultats de (Kang & Choi, 2005). Ces derniers ont développés un modèle RSM n'intégrant pas la combinaison de (Shir, 1973) et (Gibson & Launder, 1978) adaptant la modélisation de la corrélation fluctuation de pression/champ de vitesse moyenne aux régions proche parois. Par ailleurs, (Kang & Choi, 2005) ont fait le choix d'utiliser des lois de parois comme conditions aux limites des parois leur permettant de s'affranchir d'une adaptation aux faibles nombres de Reynolds et d'un maillage raffiné aux limites. Ainsi cette comparaison, permettra de juger de l'influence de l'utilisation de loi de paroi sur le résultat.

Avant de se livrer à la description de ces résultats, il convient de préciser les difficultés rencontrées avec le modèle RSM. Au contraire du modèle $k-\epsilon$, la convergence des calculs menés avec ce modèle est beaucoup plus longue et difficile. Par ailleurs ces calculs sont fortement instables, ils sont très sensibles aux coefficients de sous-relaxation mais aussi à la condition initiale qui n'est autre que la solution obtenue avec le modèle $k-\epsilon$. Pour le modèle présenté, le résidu passe difficilement en dessous des $10^{-2.5}$. La différence de temps de calcul entre les deux modèles varie exponentiellement avec la taille du maillage. Pour le présent maillage, le modèle RSM nécessite un temps de calcul environ quatre fois supérieur au modèle $k-\epsilon$.

Les instabilités du modèle RSM peuvent s'expliquer de la manière suivante. Ce modèle prenant en compte le caractère anisotrope de la turbulence, les champs de vitesse V et W qui en résultent ne sont pas nuls contrairement au modèle $k-\epsilon$. Ceci a pour effet de rendre non nuls les termes de convection présents dans les équations de Navier-Stokes moyennées (3.29), dans les équations de transport des corrélations doubles de vitesse fluctuante (4.42) et dans celle du taux de dissipation (4.50):

$$\overline{U_k} \frac{\partial X}{\partial x_k}$$

Or ce sont ces termes de convection qui engendrent les oscillations et l'instabilité du calcul car ils augmentent le degré de non-linéarité des équations et sont responsables de la multiplication des fréquences des structures tourbillonnaires comme décrit au paragraphe

2.1.2. Ainsi, en générant un champ de vitesse pratiquement nul pour V et W (vitesses transverses), le modèle $k-\varepsilon$ annule quasiment ces termes de convection, linéarisant ainsi les équations régissant le système.

7.2.1 Les tensions de Reynolds

Les Figure 7-6, Figure 7-7 et Figure 7-9 représentent respectivement les cartographies adimensionalisées de u , w (composantes fluctuantes de U et W) et $-\overline{uw}$.

La représentation de u/U_τ montre une bonne corrélation entre le champ calculé par le solveur et les données expérimentales. On remarquera en premier lieu que le minimum de u est sous la surface libre ce qui est lié au Dip phenomenon observable Figure 7-11. Ce phénomène, mesuré par (Nezu & Rodi, 1985), n'est pas visible sur la modélisation de (Kang & Choi, 2005) alors que le Dip phenomenon est présent sur leur représentation du champ de vitesse moyenne selon x . Il aurait pu sembler que l'élément déterminant pour reproduire le Dip phenomenon fut la condition limite à la surface libre. Pourtant le modèle proposé reprend exactement la même condition que (Kang & Choi, 2005) (condition de symétrie sauf pour ε pour lequel on utilise la méthode de (Naot & Rodi, 1982)). Notons que ce phénomène est aussi observé sur la cartographie de w ce qui ne semble pas réaliste au vu des résultats expérimentaux.

Comme pour l'énergie cinétique turbulente du modèle $k-\varepsilon$, les valeurs les plus élevées se trouvent aux parois et au radier où la turbulence est la plus intense et ce pour toutes les fluctuations de vitesse. On notera toutefois que les champs u et w mesurés sont comme bombés au voisinage des coins formés par les parois et le radier de la canalisation créant d'ailleurs des iso-surfaces fermées dans cette zone. Leur présence s'explique par le fait que les contraintes tangentielles à la paroi ont tendance à s'annuler par réciprocity au niveau des coins. En effet le canal étant indéformable, les contraintes selon y des parois droite et gauche sont nulles, de même la contrainte selon z est nulle le long du radier. Aussi, au niveau des coins inférieurs, les contraintes sont nulles dans les deux directions, on retrouve d'ailleurs ces résultats sur l'illustration de la modélisation et des mesures de contrainte tangentielle (en trait plein) de (Yang S. Q., 2005), Figure 7-5. Sur cette figure, τ_w est la contrainte à la paroi droite et τ_b au radier. Dans notre cas, ce phénomène d'autant plus important que les angles sont droits. Ainsi, l'annulation de la contrainte tangentielle au niveau de l'angle peut expliquer la présence d'une iso-surface plus faible en son voisinage et l'aspect bombé des lignes de courant le long de sa bissectrice pour le champ u et, dans une moindre mesure, pour le champ w . Là encore, ce phénomène est observable sur les mesures expérimentales de (Naot & Rodi, 1982) et est très bien rendu par le modèle proposé alors qu'il est plus difficilement observable chez (Kang & Choi, 2005). Ceci peut s'expliquer par l'utilisation des lois de paroi qui uniformisent la distribution de la contrainte à la paroi et qui reproduisent donc mal l'effet des coins.

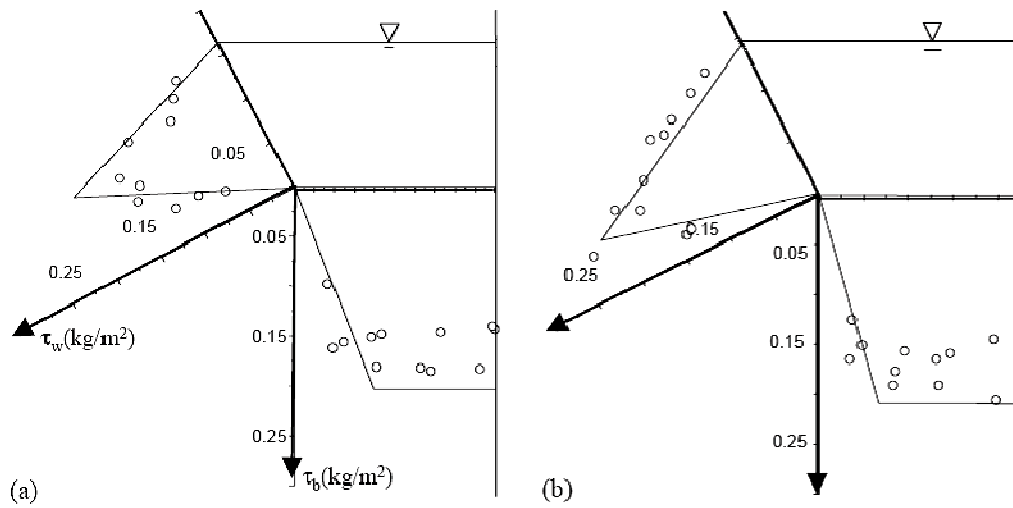
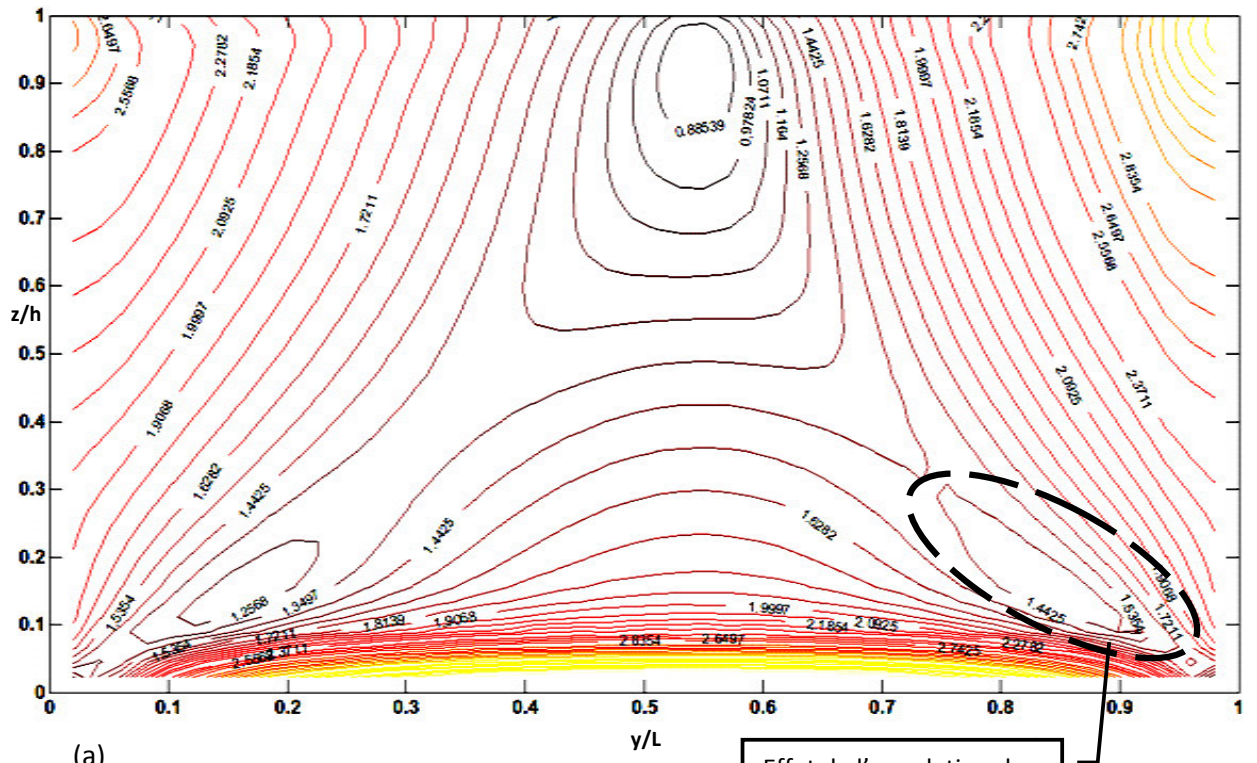


Figure 7-5 Comparaison des contraintes de cisaillement à la paroi modélisées et mesurées par (Yang S. Q., 2005) pour des parois formant des angles de 63.4° (a) et 45° (b)



Effet de l'annulation du cisaillement aux coins

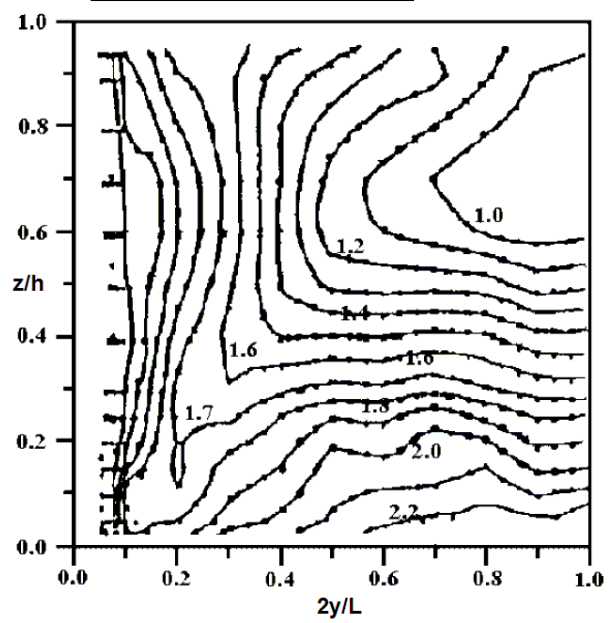
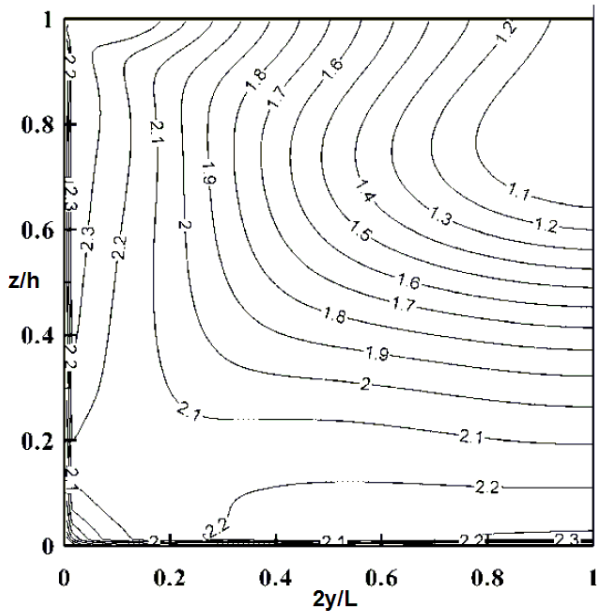


Figure 7-6 Cartographie de u/U_{τ} (a) calculée par le modèle RSM proposé, (b) par le modèle RSM de (Kang & Choi, 2005) et (c) expérimentale (Nezu & Rodi, 1985)

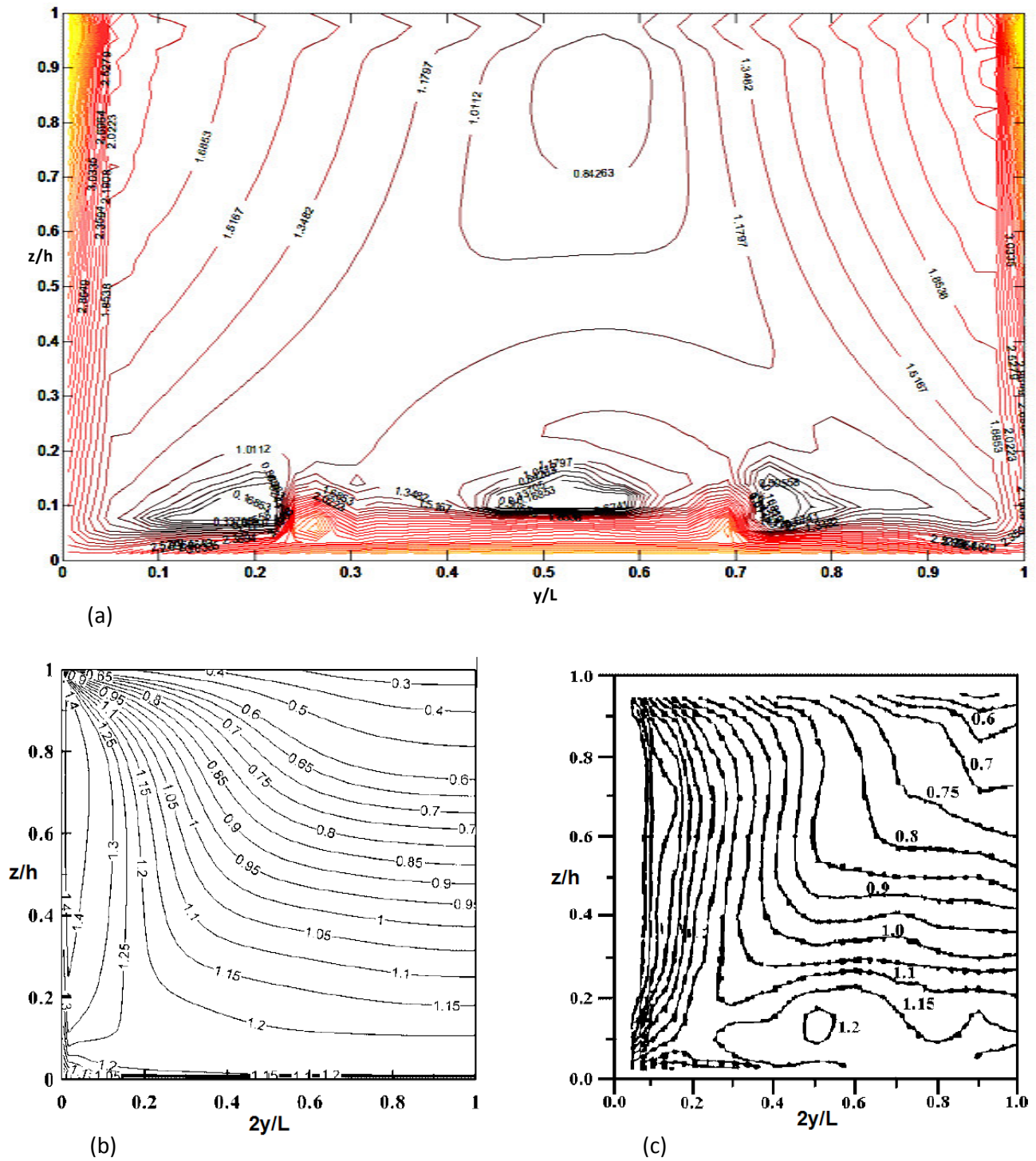


Figure 7-7 Cartographie de $w/U\tau$: (a) calculée par le modèle RSM proposé, (b) par le modèle RSM de (Kang & Choi, 2005) et (c) expérimentale (Nezu & Rodi, 1985)

Les contraintes de Reynolds \overline{uv} et \overline{uw} sont négatives ce qui peut facilement s'expliquer pour un écoulement cisailé plan caractérisé par un champ U présentant un fort gradient vertical.

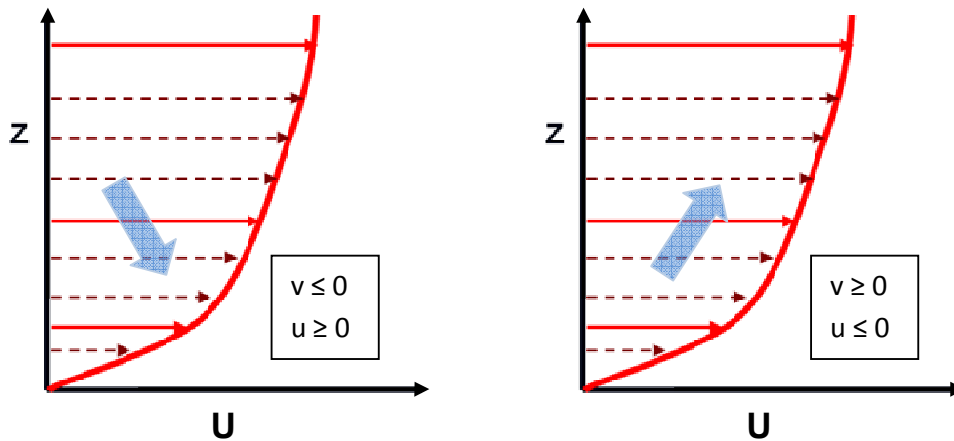


Figure 7-8 Interprétation schématique du signe de \overline{uv}

En effet, en considérant un profil vertical de U, tout déplacement du fluide vers le bas ($v \leq 0$) est perçu par le volume d'arrivée comme étant de vitesse plus élevée ($u \geq 0$). A l'inverse un déplacement vers le haut ($v \geq 0$) est perçu par le volume d'arrivée comme un ralentissement ($u \leq 0$). Dans tous les cas, $\overline{uv} \leq 0$. En raisonnant de même au niveau des parois latérales où U connaît un fort gradient horizontal, on montre que $\overline{uw} \leq 0$.

La Figure 7-9 représente des cartographies du champ $-\overline{uw}$ adimensionalisé. Si le champ calculé est bien négatif, il présente quelques divergences avec les résultats expérimentaux. En effet, les plus forts gradients sont bien observés au voisinage des parois latérales et du radier. Néanmoins le gradient proche du radier calculé semble plus élevé que celui mesuré par (Nezu & Rodi, 1985) ou encore celui modélisé par (Kang & Choi, 2005).

Pour le reste il y a une bonne corrélation entre les résultats calculés et les données expérimentales. En premier lieu, les iso-surfaces négatives au voisinage des angles formés par les parois latérales avec la surface libre, visibles sur la cartographie expérimentale, sont reproduites quoique leur valeur soit inférieure en norme. Ce changement de signe est certainement lié aux courants secondaires et au Dip phenomenon qui perturbent le champ de vitesse U au niveau de la surface libre au point d'en modifier le signe du gradient, aussi l'interprétation schématique du signe de \overline{uv} , illustrée Figure 7-9, n'est elle plus valable à partir d'une valeur seuil du rapport h/z. Il semblerait que nous sous-estimons cette valeur, qui oscille entre 0.5 et 0.7 sur la cartographie de (Naot & Rodi, 1982).

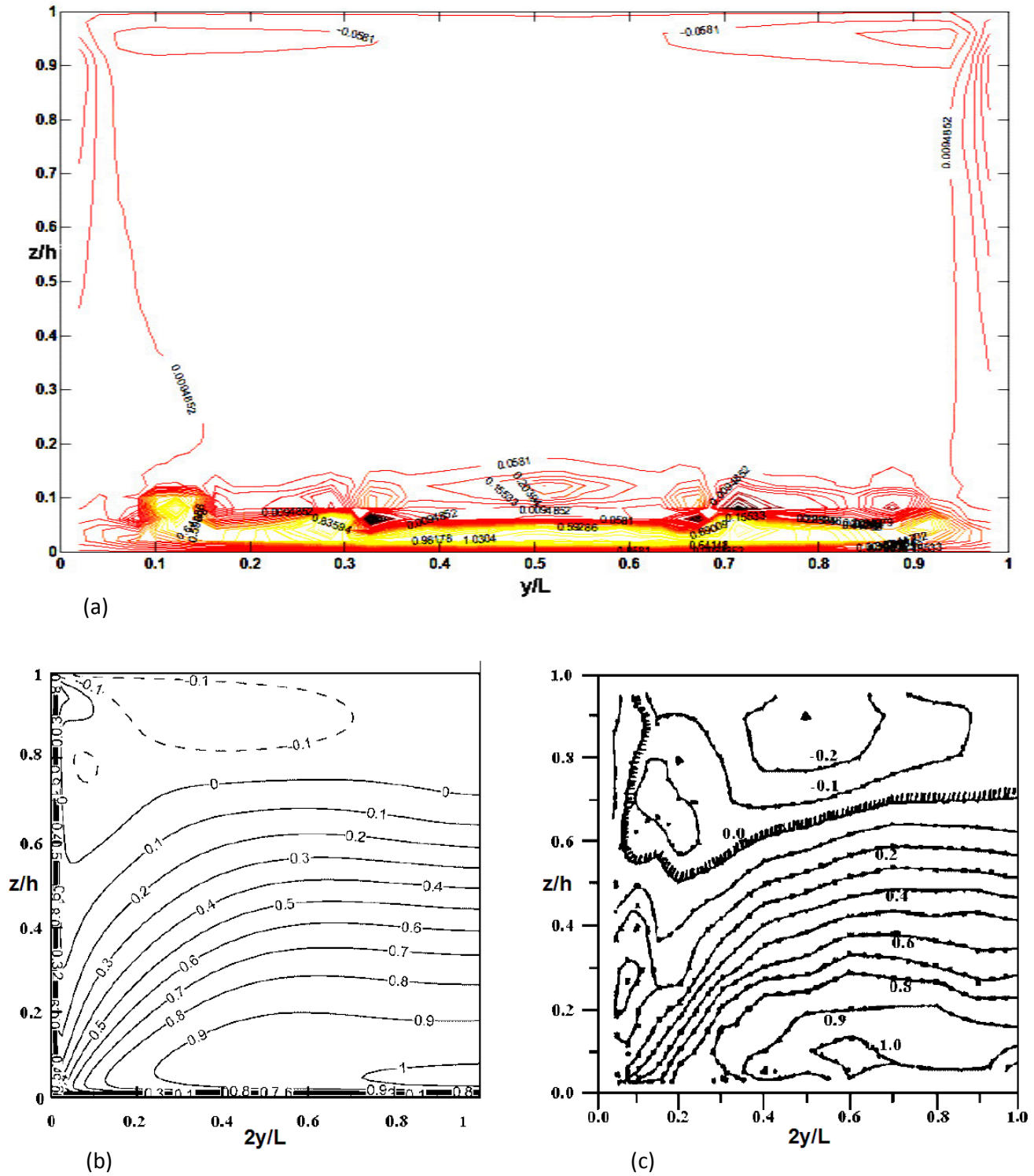


Figure 7-9 Cartographie de $-uw/U\tau^2$: (a) calculée par le modèle RSM proposé, (b) par le modèle RSM de (Kang & Choi, 2005) et (c) expérimentale (Nezu & Rodi, 1985)

7.2.2 Le champ moyen de vitesse

La Figure 7-11 représente des cartographies de \bar{U} / \bar{U}_{\max} . La comparaison avec la même cartographie issue du calcul mené avec le modèle k- ϵ met en évidence l'absence de Dip phenomenon. Avec le modèle k- ϵ , le gradient de \bar{U} selon z est toujours positif et le maximum de vitesse est à la surface libre confirmant ainsi le lien entre le Dip phenomenon et le caractère anisotrope de la turbulence. Avec le présent modèle, le Dip phenomenon est bien reproduit. Il ne faut pas se laisser abuser par la différence de densité des lignes de courant entre les différentes cartographies. Si l'iso-surface fermée, sur la cartographie calculée, correspondant au maximum de vitesse paraît plus étroite et plus haute que celle de la cartographie expérimentale, c'est parce que ces iso-surfaces ne correspondent pas à la même valeur. Il est intéressant de souligner qu'une modélisation complexe de l'écoulement aux parois n'est pas une condition nécessaire à la reproduction du Dip phenomenon du champ moyen de vitesse contrairement à ce que l'on constatait plus haut pour le champ de la composante fluctuante u pour laquelle l'abaissement du maximum se discerne mieux sur les résultats de notre modèle bas Reynolds que sur ceux de (Kang & Choi, 2005) qui utilisent des lois de paroi.

En considérant les données expérimentales, le maximum de la vitesse débitante se trouve à une altitude comprise entre 55 et 80% de la hauteur d'eau. Avec le modèle proposé, cette altitude se situe à 73% de la hauteur totale environ. Ces valeurs sont en accord avec les formules (2.3) et (2.4) proposées par (Yang, Tan, & Lim, 2004), une largeur de canal valant deux fois la hauteur d'eau entraîne:

$$\alpha \approx 0.48 \quad (7.1)$$

$$\frac{z_{\max}}{h} = 0.67\% \quad (7.2)$$

Sur la Figure 7-10 sont comparées la position du Dip phenomenon calculée par le solver avec celle prédite par la relation de (Yang, Tan, & Lim, 2004) pour des sections présentant divers rapports L/h. On notera que tous les points calculés sont dans le cône d'erreur de 10% à l'exception du dernier correspondant à un rapport largeur sur hauteur L/h=5. En fait, pour cette section nous n'obtenons aucun Dip phenomenon mais cela est en bon accord avec les résultats de (Nezu & Rodi, 1985) qui ont mesuré que ce phénomène n'apparaissait qu'en deçà L/h=5.

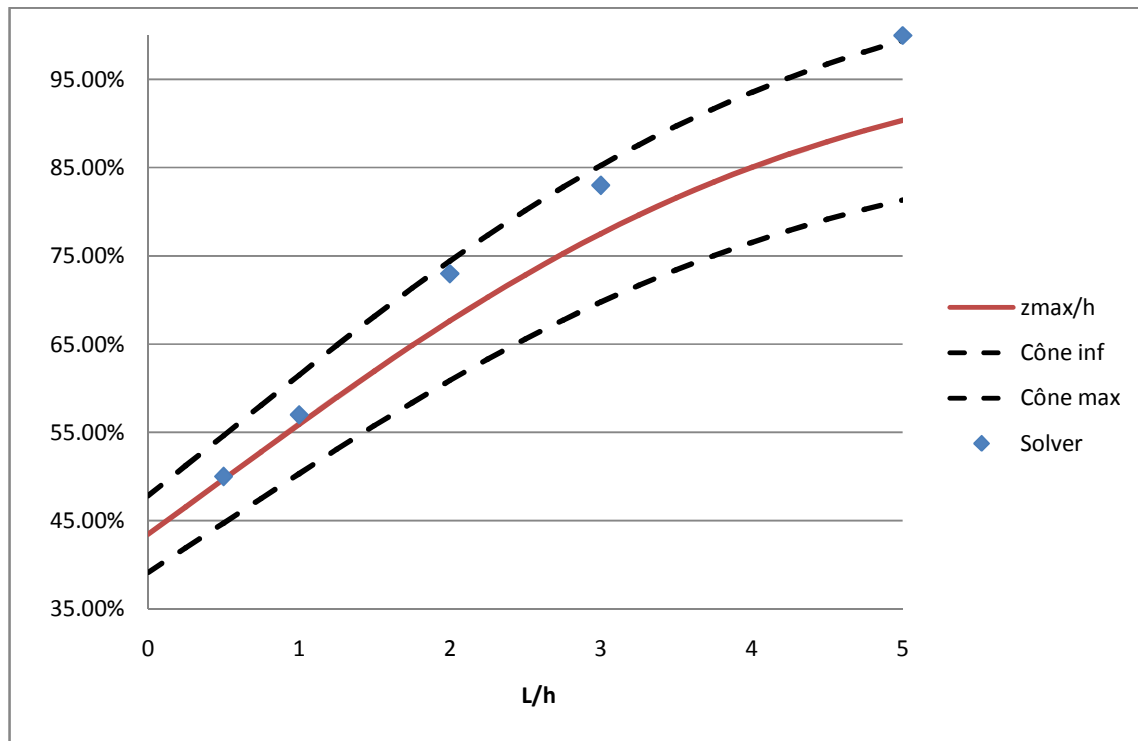


Figure 7-10 Position du Dip phenomenon selon (Yang, Tan, & Lim, 2004) avec cône d'erreur à 10%, comparaison avec les valeurs calculées

Il apparaît clairement sur la Figure 7-11 qu'il y a un fort gradient de vitesse aux parois du canal. Sur la représentation des résultats de notre calcul, on peut voir l'effet de l'annulation de la contrainte tangentielle aux angles inférieurs, décrite plus haut. Cette fois, les lignes de champ s'écartent des coins contrairement à la Figure 7-6, représentant la composante fluctuante de U , dont le gradient selon z varie à l'opposé de la composante moyenne. Ceci n'est que légèrement visible sur la cartographie de (Nezu & Rodi, 1985), sûrement du fait de la plus faible densité des lignes de courant due certainement aux contraintes expérimentales.

On notera aussi que sur la cartographie calculée, les lignes de courant sont bombées au voisinage des angles formés par la surface libre avec les parois. Ce phénomène apparaît également sur les résultats de (Kang & Choi, 2005) mais pas sur les mesures expérimentales probablement, une fois encore, pour des raisons de densité des points de mesure. Cette déformation du profil de vitesse en cette zone s'explique par la présence d'une recirculation, visible sur la Figure 7-12 et évoquée au paragraphe 2.2.1, qui redistribue une partie de la vitesse débitante aux deux autres composantes.

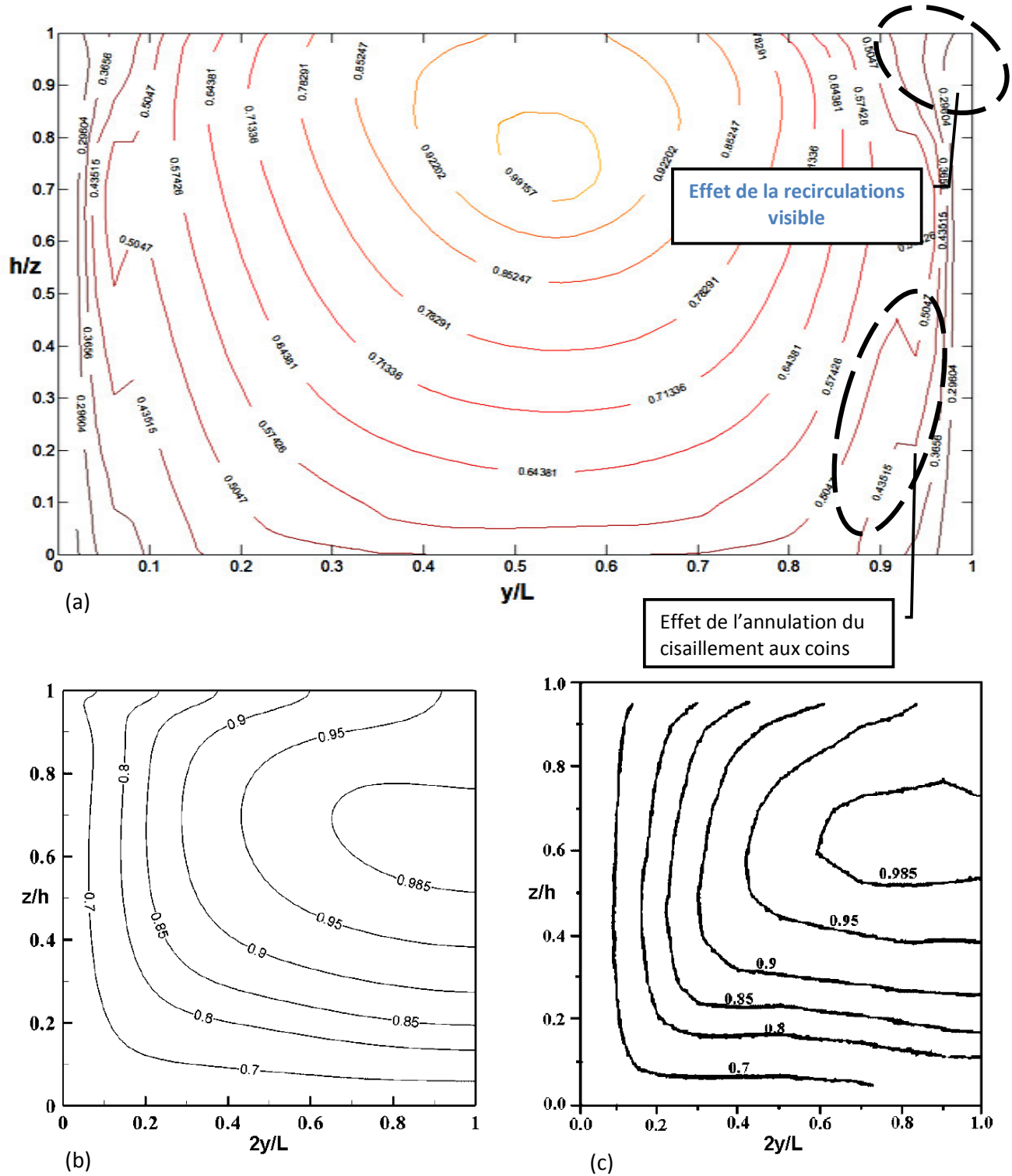


Figure 7-11 Cartographie de \bar{U}/\bar{U}_{max} : (a) calculée par le modèle RSM proposé, (b) par le modèle RSM de (Kang & Choi, 2005) et (c) expérimentale (Nezu & Rodi, 1985)

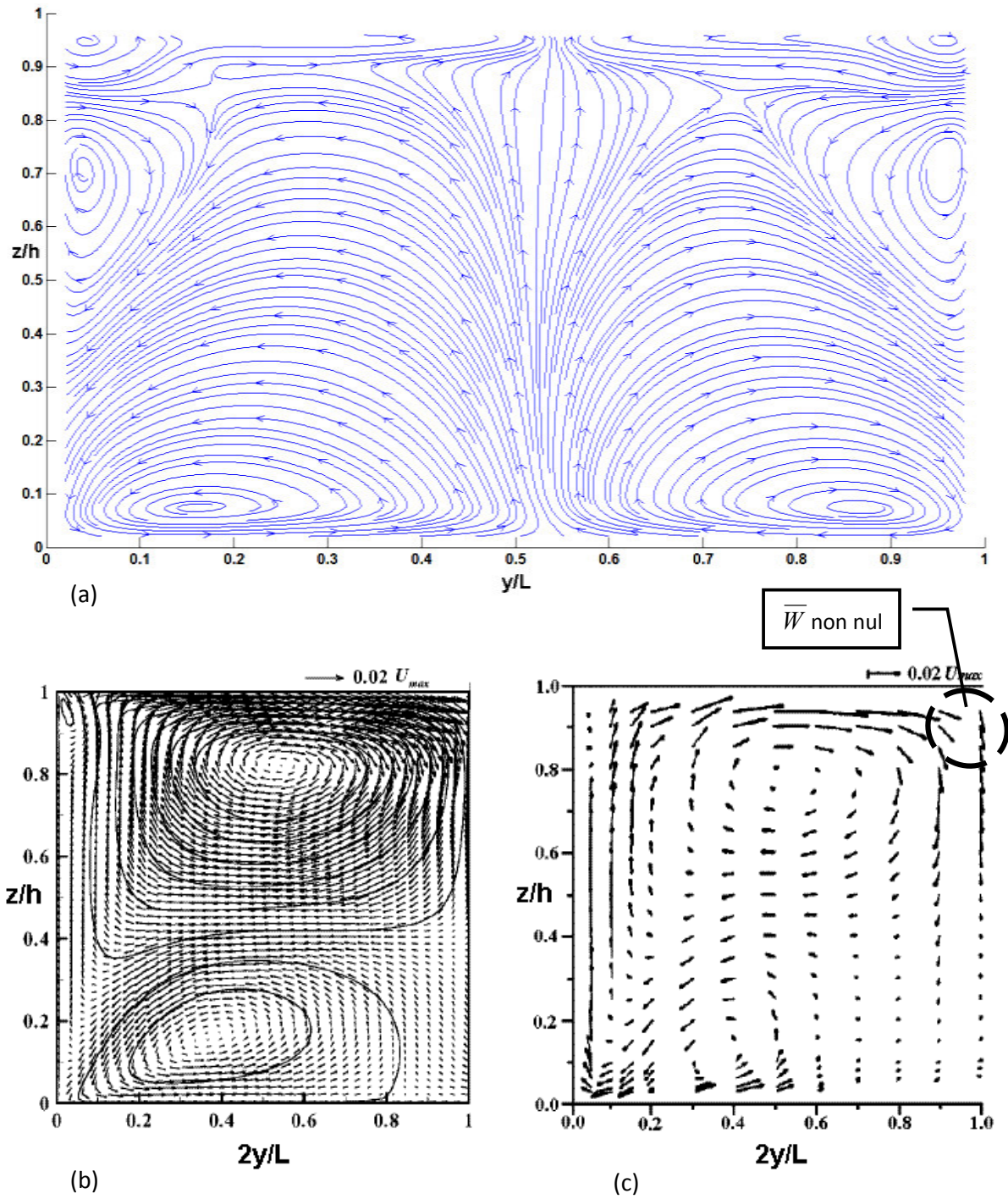


Figure 7-12 Contour du champ de vitesse projeté sur le plan transverse (a) calculée par le modèle RSM proposé, (b) par le modèle RSM de (Kang & Choi, 2005) et (c) expérimentale (Nezu & Rodi, 1985)

L'observation du contour du champ de vitesse permet tout d'abord de constater que les trois types de recirculations, évoqués au paragraphe 2.2.1 et illustrés Figure 2-7, sont présents. L'effet de coins est lui aussi visible; une droite proche de la bissectrice de l'angle formé par le radier avec les parois forme bien un axe de symétrie des deux recirculations principales. Les recirculations sont bien contrarotatives par rapport à l'axe de symétrie verticale du canal confirmant ainsi le rôle de dissipateur d'énergie de ces structures évoqué au début du Chapitre 2. Si les recirculations supérieures sont bien à leur place, la disposition des tourbillons par rapport à la bissectrice de l'angle n'est pas bonne. Celle qui est au-dessus devrait être plus proche du centre et plus grande. Paradoxalement nos recirculations ressemblent à celles qui se développent dans les conduites fermées mesurées par (Nezu & Rodi, 1985) représentées Figure 7-13. Ce n'est pourtant pas la condition limite au niveau de la surface libre qui est à remettre en cause puisqu'elle est similaire à celle de (Kang & Choi, 2005).

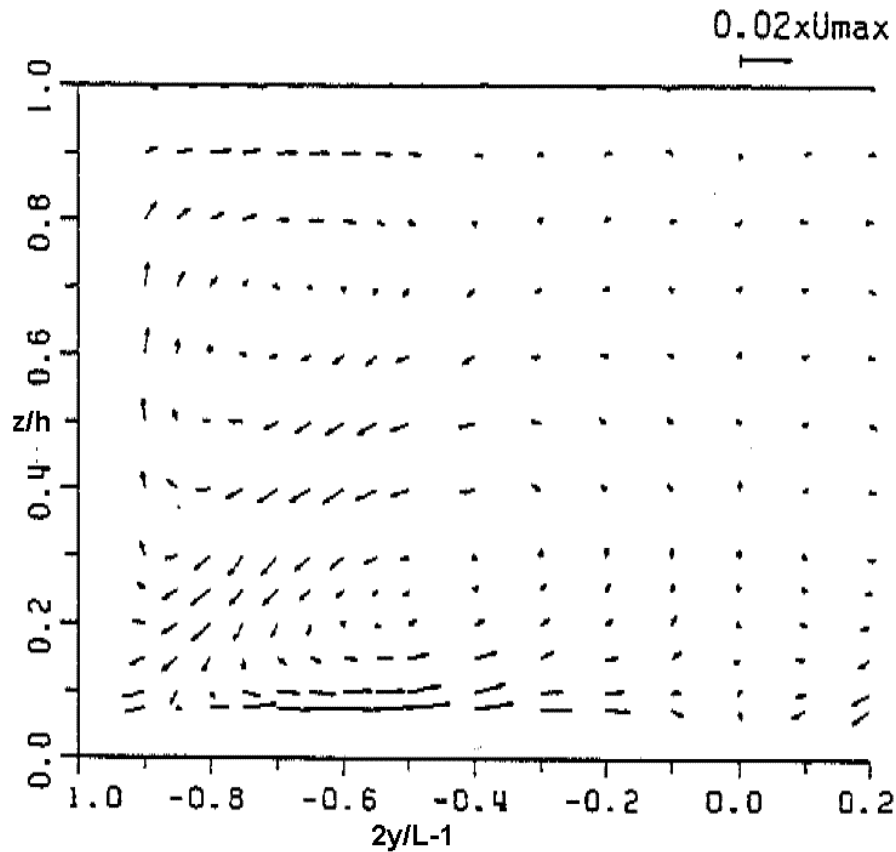


Figure 7-13 Contour du champ de vitesse projeté sur la demi-section transverse d'une conduite fermée selon (Nezu & Rodi, 1985)

Cependant une modélisation RSM, couplée au modèle VOF, menée avec le logiciel Fluent, illustrée Figure 7-14, présente la même allure; la recirculation au-dessus de la bissectrice de l'angle est collée à la paroi alors que l'autre se rapproche du centre. Aussi nos résultats ne sont pas forcément à remettre en cause.

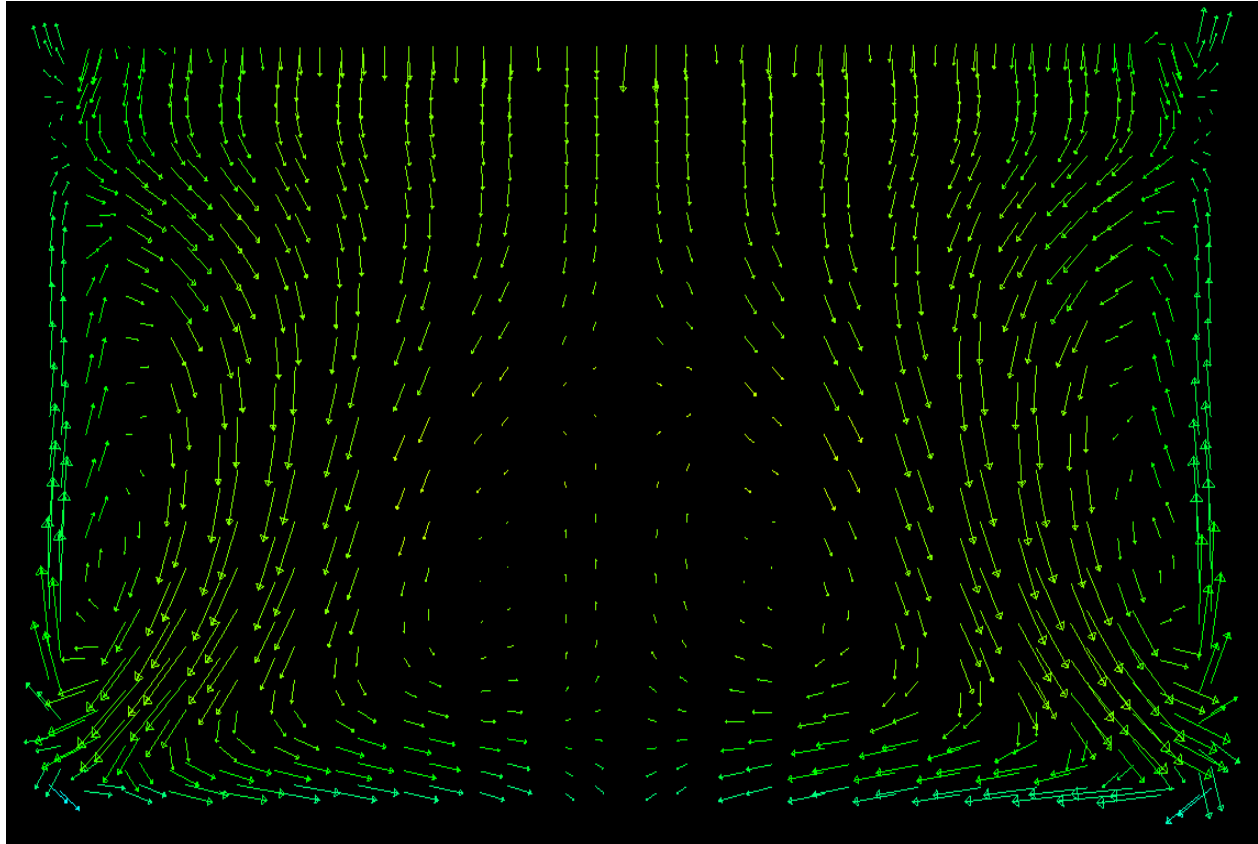


Figure 7-14 Contour du champ de vitesse calculé avec Fluent, projeté sur la demi-section transverse d'une conduite fermée

D'après (Nezu & Nakagawa, 1993) la modélisation de la surface libre par un simple plan de symétrie fausse la distribution de $\overline{v'v'} - \overline{w'w'}$ dans cette zone. Or la forme des courants secondaires est directement liée à ce champ, comme en témoignent les équations de Navier-Stokes moyennées (3.29). La modélisation proposée diffère du simple plan de symétrie puisqu'une combinaison des modèles de (Shir, 1973) et de (Gibson & Launder, 1978) calibrés pour la surface libre par (Cokljat, 1993) est utilisée pour le calcul du terme de corrélation fluctuation de pression/champ moyen de vitesse intervenant dans les équations de transport des tensions de Reynolds (4.42). Néanmoins les conditions aux limites du champ moyen de vitesse à la surface libre sont bien celles d'un plan de symétrie ce qui impose, en outre, que \overline{w} soit nul comme le précise (Versteeg & Malalasekera, 1995). Or en étudiant les données expérimentales de (Nezu & Rodi, 1985) on peut observer que \overline{w} n'est

pas nul à la surface libre, surtout au milieu du canal (coin supérieur droit de la Figure 7-12 (c)), confirmant que cette modélisation classique de la surface présente quelques limites.

Comme précisé précédemment, le débit n'est pas imposé lors du calcul du champ de vitesse. Il est retrouvé par intégration de ce dernier sur la section transverse. Par ailleurs la pente du canal et la hauteur sont imposées, ainsi on évite de surdéterminer le système selon la relation (6.2)-(6.7). Afin d'évaluer la performance de notre modèle au regard du débit et de la comparer au modèle k- ϵ bas Reynolds, le cas expérimental de (Coleman, 1986) a été modélisé, ce sont d'ailleurs les résultats issus de ce calcul qui ont été présentés précédemment. Ce dernier s'intéresse surtout à la mesure de la vitesse de frottement mais met néanmoins à disposition le débit mesuré pour sa configuration qui est la suivante:

$$h = 0.172m$$

$$\frac{L}{h} = 2$$

$$I = 0.002$$

$$Q = 0.0621m^3.s^{-1}$$

Après intégration du champ de vitesse \bar{U} calculé par le modèle k- ϵ , présenté Figure 7-2, on obtient un débit $Q = 0.0686 m^3.s^{-1}$ soit un écart type de 10.4% environ. Alors que de l'intégration du champ de vitesse \bar{U} calculé par le modèle RSM, présenté Figure 7-11, résulte un débit $Q = 0.0601 m^3.s^{-1}$ soit un écart type de 3.3% environ. Des tests similaires ont été réalisés avec d'autres cas expérimentaux présentés dans (Guo & Julien, 2005) notamment ceux de (Muste & Patel, 1997). Le Tableau 7-1 ci-dessous montre les résultats obtenus.

H	0.172	0.0575	0.128	0.13
B	0.344	0.2668	0.9088	0.91
B/h	2	4.64	7.1	7
Qexp $m^3.s^{-1}$	0.0621	0.0113	0.0731	0.0738
Q RSM $m^3.s^{-1}$	0.0601	0.0110	0.0721	0.0755
Erreur relative	3.31%	2.31%	1.30%	2.28%
Q k- ϵ $m^3.s^{-1}$	0.0686	0.0107	0.0752	0.0755
Erreur relative	10.42%	-4.98%	2.94%	2.28%

Tableau 7-1 Débits calculés par les modèles RSM et k- ϵ , calcul de l'erreur relative par rapport au débit expérimental.

On constate qu'il y a une globalement une bonne corrélation entre les débits calculés et les débits mesurés. Cette corrélation est meilleure pour le modèle RSM. Il est intéressant de noter que l'erreur commise sur le calcul du débit avec le modèle k- ϵ décroît quand le rapport L/h augmente. On peut y voir la faiblesse de ce modèle due à son incapacité à reproduire le Dip phenomenon. On constate d'ailleurs que pour des valeurs de L/h supérieures à cinq, donc pour lesquelles il n'y a pas de Dip phenomenon, les résultats issus du modèle au premier ordre s'améliorent et sont du niveau de ceux obtenus avec le modèle RSM.

Cette comparaison est néanmoins à nuancer par la difficulté d'obtention du résultat et un résidu numérique demeurant élevé avec le modèle RSM. Cependant, il est montré ici, la capacité du modèle RSM développé à prédire le débit généré par la pente et la section et donc à traiter des données issues de capteurs de mesure du débit par vélocimétrie.

Chapitre 8 Conception et montage d'un banc expérimental de mesure du champ de vitesse

8.1 Objectifs

Tout projet de modélisation doit s'accompagner des étapes de calage et de validation pour lesquelles des données expérimentales sont nécessaires. C'est pourquoi nous avons entrepris de monter un banc expérimental permettant la mesure de la cartographie des champs de vitesse moyenne et fluctuante d'un écoulement en canal à surface libre. Ce projet, cofinancé par le projet RITEAU (Réseau de recherche et d'Innovation Technologique « EAU et technologie de l'environnement ») et le GEMCEA (Groupement pour l'Evaluation de la Mesure en Continu dans les Eaux et en Assainissement), prend place dans le cadre de la plateforme technologique du Hall Boussingault de l'IMFS. Des données expérimentales de vitesse en canal rectangulaire sont disponibles dans la littérature, notamment celles de (Nezu & Rodi, 1985) avec lesquelles nous avons comparé nos résultats dans le chapitre précédent. Elles sont en revanche plus rares en ce qui concerne les conduites à banquettes. Forme répandue en assainissement pour laquelle notre code doit être adapté comme il est précisé en introduction. Aussi le canal installé, décrit plus bas, est de section rectangulaire, mais il est prévu, à terme, d'y ajouter des banquettes (voir Figure 8-1).

Le second objectif de ce banc est l'étude expérimentale de l'écoulement en des zones spécifiques comme à proximité des parois et de la surface libre. En cartographiant les zones proche paroi nous pourrions interpoler le champ des composantes moyenne et fluctuante dans cette zone. Nous pourrions comparer ces données aux lois de paroi existantes. Ceci est d'autant plus important pour l'appréciation des conditions aux limites au niveau de l'angle d'une banquette, zone qui influence grandement le champ de vitesse dans le reste de la section (Bardiaux, Mosé, Vazquez, & Wertel, 2008).

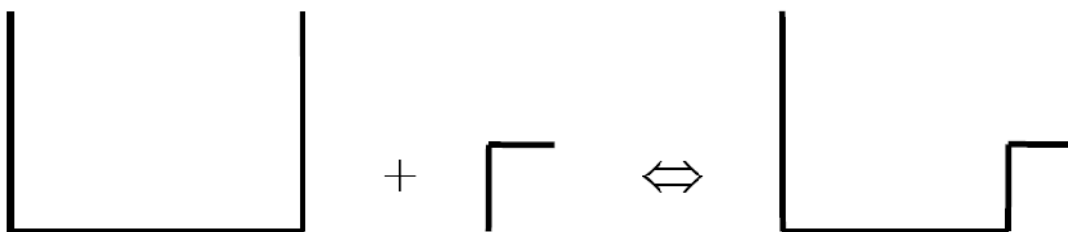


Figure 8-1 Installation d'une banquette dans un canal de section rectangulaire

8.2 Conception et description du canal

8.2.1 Alimentation du canal

Le canal en plexiglas de 20m de long, de largeur 0.6m, de hauteur 1m est représenté Figure 8-2. Il est posé sur des vérins afin de pouvoir ajuster la pente. Ceci est d'autant plus important que ce paramètre est essentiel quant au régime d'écoulement fluvial/torrentiel pour un débit donné, toute modification reste une opération délicate. Deux bâches enterrées ont été creusées afin de servir de réservoir d'alimentation, deux pompes de capacité maximale de $300 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$ y sont immergées. La fréquence de rotation des roues à aubes des pompes, et donc le débit, sont contrôlés, eux aussi, par un automate programmable via un variateur de fréquence. Ainsi le canal, schématisé Figure 8-5, peut être alimenté en boucle fermée par les deux pompes en parallèle depuis les bâches de stockage. Les pertes du circuit fermé sont compensées par un apport depuis la nappe via un forage que l'IMFS a mis en place. L'alimentation du canal se fait par débordement afin de stabiliser l'écoulement, d'où la présence du bac en amont du canal (voir Figure 8-3). Un bac identique se trouve à l'aval, l'eau s'y déverse pour être évacuée. Le débit est mesuré grâce à deux débitmètres électromagnétiques (un par pompe). Ces derniers ne peuvent effectuer de mesure que dans des conduites en charge. Ceci explique la structure verticale, visible Figure 8-4, d'une partie du réseau d'alimentation du canal.

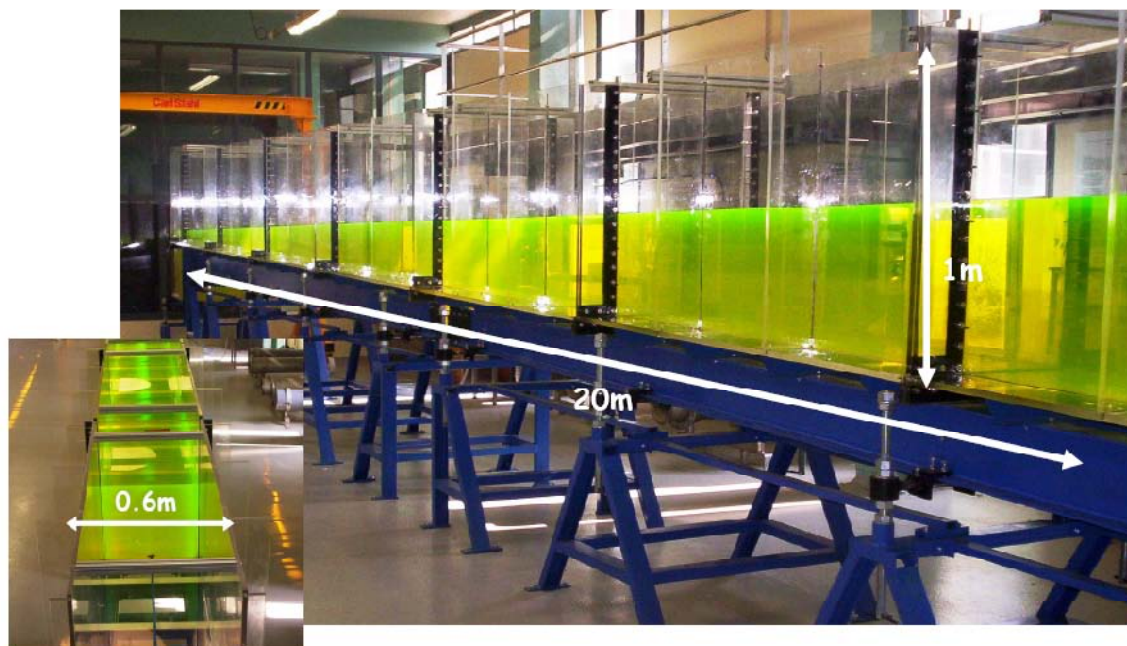


Figure 8-2 Canal du Hall Boussingault



Figure 8-3 Alimentation par débordement du canal



Figure 8-4 Partie verticale des conduites d'alimentation

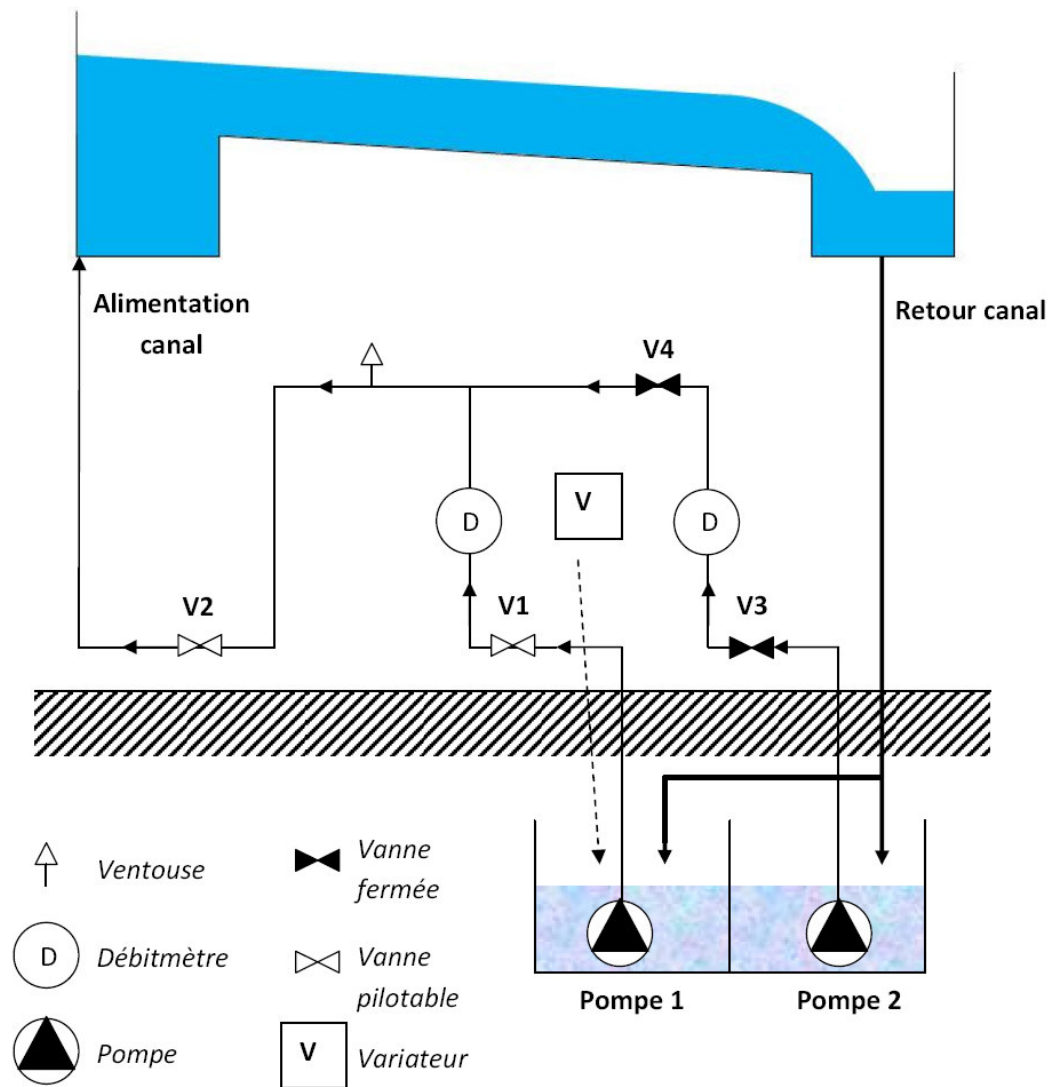


Figure 8-5 Schéma du dispositif d'alimentation du canal

8.2.2 Le banc de déplacement

Ce canal est complété par un portique mobile qui permet de déplacer le capteur, présenté dans la partie suivante, afin de dresser une cartographie 3D du champ de vitesse dans le volume schématisé Figure 8-7. En effet ce banc de déplacement dispose des trois degrés de liberté comme illustré Figure 8-6. Le déplacement selon les directions Y et Z est assuré par des automates pilotables par ordinateur permettant un positionnement très précis du capteur dans la section transverse.



Figure 8-6 Banc de déplacement mobile dans les trois directions

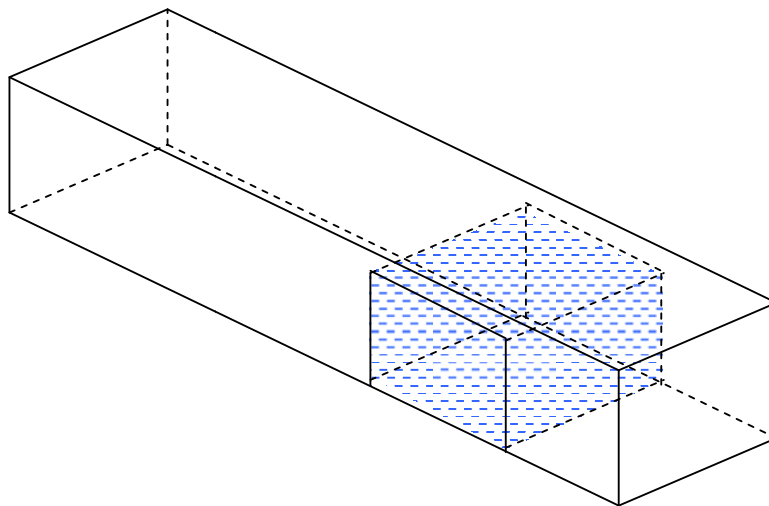


Figure 8-7 Schéma du volume de la cartographie 3D

8.2.3 Instrumentation de mesure du champ de vitesse

Ce banc expérimental rend possible deux types de mesure qui sont complémentaires; la mesure ponctuelle sur un laps de temps donné et la mesure instantanée d'un champ de vitesse.

La vélocimétrie acoustique Doppler

La première catégorie de mesure est assurée par un capteur ADV (Acoustic Doppler Velocimeter), illustré Figure 8-8, prenant la forme d'un tripode, composé d'un émetteur d'onde acoustique et de trois récepteurs, comme illustré sur la Figure 8-9. L'émetteur produit un signal acoustique court et périodique. Quand l'impulsion acoustique traverse la colonne d'eau, les matières en suspension dispersent une fraction de l'énergie acoustique. Les récepteurs détectent l'écho acoustique provenant du volume de mesure à l'intersection des récepteurs et de l'émetteur. La fréquence de l'écho est modifiée par effet Doppler, en fonction du déplacement relatif des particules dont on suppose qu'elles se déplacent à la vitesse de l'écoulement. Cette modification de fréquence, captée par les trois récepteurs, permet une détermination du vecteur vitesse: il est déterminé à partir des trois projections de la vitesse mesurée par les récepteurs et d'une matrice de transformation qui prend en compte la position géométrique des récepteurs et de l'émetteur. La vitesse est ainsi mesurée simultanément dans les trois directions toutes les cinq millisecondes dans un volume situé cinq centimètres sous l'émetteur. Cette dernière spécificité limite le caractère invasif de la prise de mesure sans pour autant l'annuler car le capteur est tout de même immergé et donc influence l'écoulement. Les dimensions du volume de mesure avoisinent les 6 mm de hauteur et 6 mm de diamètre. Chaque mesure est appelée 'ping', la vitesse moyenne est donc la moyenne de tous les 'pings'. La différence entre le 'ping' et cette moyenne est la composante turbulente de la vitesse. Ainsi ce capteur permet de mesurer les deux composantes statistiques (\overline{U}_i et u_i) de la vitesse. Pour que la composante moyenne soit représentative, il est nécessaire que le temps de mesure en un point soit largement supérieur à l'échelle de temps de la turbulence, nous avons choisi un temps de cinq minutes comme le préconise (Dufresne, 2008).

Ce capteur effectuant la mesure en continu, il est nécessaire de filtrer les données. En effet ces dernières peuvent présenter de brusques variations et des pics de vitesse dus aux erreurs liées au matériel et au principe de mesure. Ces erreurs sont filtrées par *phase-space threshold despiking* (Sontek, 2001). Par ailleurs, la cartographie du champ de vitesse impliquant la mise en mouvement du capteur ADV fixé sur le banc de déplacement présenté plus haut, il est nécessaire de filtrer les données correspondant aux phases de déplacement pour lesquelles les mesures sont invalides du fait de la vitesse propre du vélocimètre. Nous avons donc écrit notre propre code de filtrage des données prenant en compte les positions successives des points de mesure et la vitesse des automates qui diffère selon la direction du déplacement.



Figure 8-8 Le vélocimètre acoustique Doppler (Sontek, 2001)

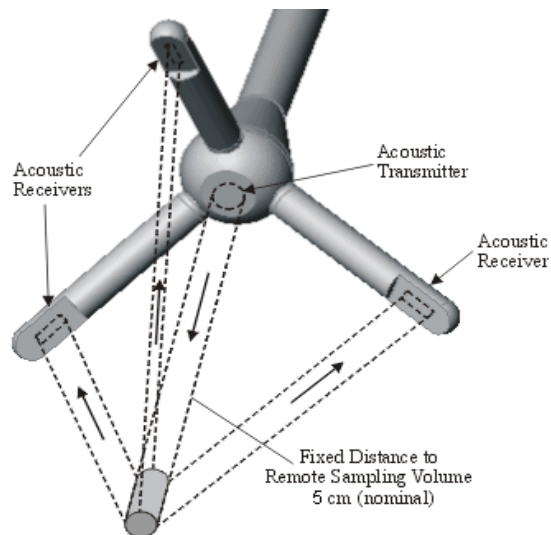


Figure 8-9 Tête du capteur ADV composée d'un émetteur et de 3 récepteurs acoustiques

Limites de l'ADV

Si l'utilisation de l'ADV est pertinente pour la mesure de la vitesse moyenne (par moyenne temporelle) elle présente quelques limites. Comme précisé précédemment, le volume de mesure se trouve cinq centimètres sous le capteur afin de le rendre moins invasif. Aussi la prise de mesure en un point situé trois centimètres sous la surface libre implique un capteur situé, par translation, deux centimètres au-dessus de l'eau. Or si l'ADV est émergé, il n'est plus opérationnel. Autrement dit, ce vélocimètre n'est pas utilisable sur les cinq derniers centimètres de la hauteur d'eau ce qui est d'autant plus limitant pour mesurer le Dip phenomenon.

Par ailleurs, l'utilisation de l'ADV nécessite de pré-implémenter certains paramètres dans le logiciel de traitement des données associé à cet instrument. Il faut notamment préciser une gamme de mesure parmi $\{1 \text{ m.s}^{-1}, 10 \text{ cm.s}^{-1}, 1 \text{ cm.s}^{-1}\}$. Or l'ordre de grandeur de la vitesse dans les directions transverses (V, W) d'un écoulement en canal à surface libre et de 3% de la vitesse dans le sens principal de l'écoulement (U) (Nezu & Nakagawa, 1993). Il n'existe donc pas de gamme commune aux trois composantes de la vitesse. Considérons un écoulement de vitesse moyenne 1 m.s^{-1} . Si la gamme de mesure choisie est 1 m.s^{-1} , V et W sont imperceptibles pour l'ADV tant sa sensibilité est faible. Si la gamme de mesure choisie est 10 cm.s^{-1} , U devient trop intense par rapport à la sensibilité de l'ADV est l'aveugle littéralement. Ainsi seule la cartographie de U est possible. Il a été envisagé de résoudre ce problème changeant l'orientation du tripode afin de distribuer U sur les trois récepteurs. Cela n'a pour effet que de diviser l'intensité de U par trois au maximum comme le montre une analyse trigonométrique de base. Mais ce n'est pas suffisant car le ratio $U/(V+W)$ est supérieur à trente.

Les fabricants proposent des solutions aux problèmes mentionnés dans cette partie. Il existe notamment des capteurs ADV dont la tête est tournée vers le haut (voir Figure 8-10 (a)) et qui mesure donc au-dessus de lui. La mesure sous la surface libre est alors possible mais ce type de forme est sûrement plus invasive. On peut contourner le problème de sensibilité de l'ADV en utilisant une tête de capteur avec seulement deux récepteurs (voir Figure 8-10 (b)). En orientant ces derniers de manière adéquate, soit dans le plan de normale X, il est possible de mesurer le champ de vitesse de V et W. Nous n'avons pas eu le temps de mettre en place ces solutions qui sont coûteuses et prennent du temps car, entre autre, les délais de livraison sont très longs (presque un an).

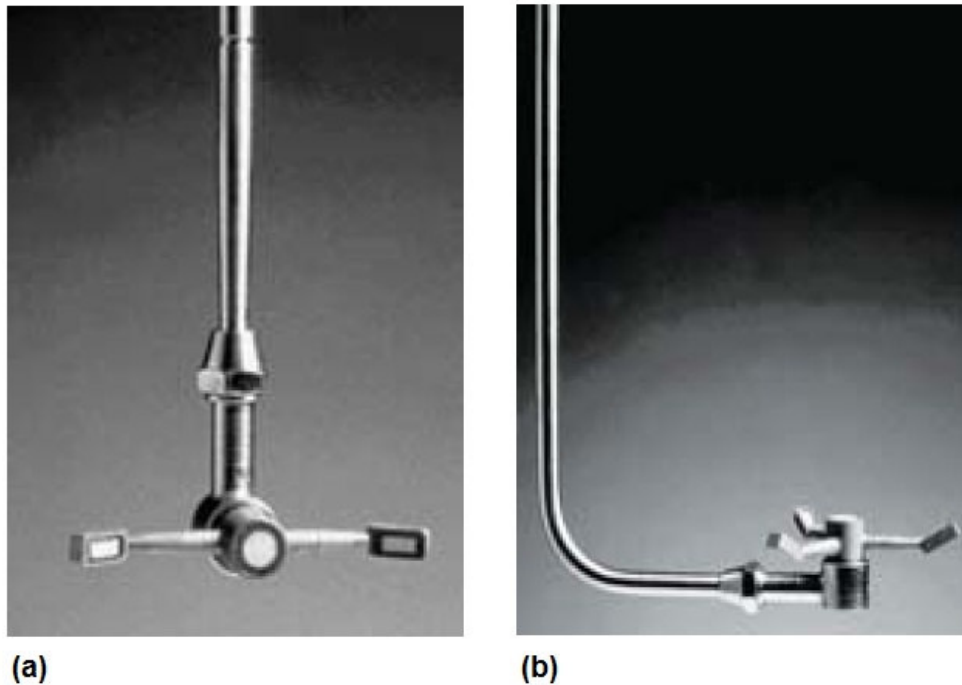


Figure 8-10 Différentes têtes de capteur ADV: (a) latérale 2D, (b) 3D vers le haut

Vélocimétrie par images de particules

La vélocimétrie par images de particules ou *Particle Image Velocimetry (PIV)*, dont (Dufresne, 2008) est le précurseur de l'usage dans notre laboratoire, est une méthode de mesure optique qui permet de mesurer les trois composantes de la vitesse moyenne dans un plan. Ce dispositif est, lui aussi, installé sur le banc de déplacement présenté précédemment. Deux caméras sont placées de telle sorte à pouvoir acquérir les images du plan de mesure souhaité. Un laser est placé pour pouvoir éclairer ce même plan de mesure. L'eau est alorsensemencée par des particules de traceurs (taille micrométrique). Le plan de mesure est éclairé par le laser à deux instants très proches (typiquement 2.5 ms). Chaque caméra enregistre une image en chacun de ces instants. La vitesse est évaluée par inter corrélation sur des fenêtres (typiquement 32X32 pixels) entre les images acquises pour chacun des deux instants. Par moyenne temporelle sur plusieurs acquisitions (typiquement 300 couples d'images, correspondant à 150 s), nous accédons à la vitesse moyenne dans le plan (deux composantes par caméra). Le champ de vitesse moyen tridimensionnel est alors déterminé en utilisant l'étalonnage (stéréovision). On notera que ce procédé n'est nullement invasif. Nous disposons ainsi des trois composantes de la vitesse moyenne en chacune des fenêtres de corrélation. Pour plus de détails le lecteur se reportera à (Dantec, 2004).

A l'issue de ce doctorat, ce dispositif a été adapté au canal mais n'a pu être exploité faute de temps. Il faut savoir que l'emploi du laser nécessite une cabine de protection et donc des installations assez lourdes. La PIV est néanmoins opérationnelle.

8.3 Résultats de la mesure

Les résultats présentés sont la reconstitution du champ de vitesse dans une section transverse du canal. La section choisie se situe à environ trois quarts de la longueur du canal soit assez loin de l'amont pour s'affranchir encore un peu plus des effets de l'alimentation et tout de même éloigné de la chute d'eau de l'aval du canal qui induit une baisse de la hauteur d'eau. Les points de mesure sont répartis dans la section à la manière d'un maillage, la zone proche du radier a été densifiée afin de capter le fort gradient de vitesse, de même que la zone sous la surface libre afin de capter l'amorce du Dip phenomenon (voir Figure 8-11). Cette discrétisation n'est pas raffinée aux parois car ces dernières ne sont pas accessibles au capteur pour des raisons de sécurité du matériel. Des limites géographiques sont en effet implémentées dans l'automate qui assure les déplacements du banc afin d'éviter la collision de l'ADV avec les parois. Par ailleurs la distance horizontale entre l'émetteur et le récepteur minore aussi la distance du capteur à la paroi latérale.

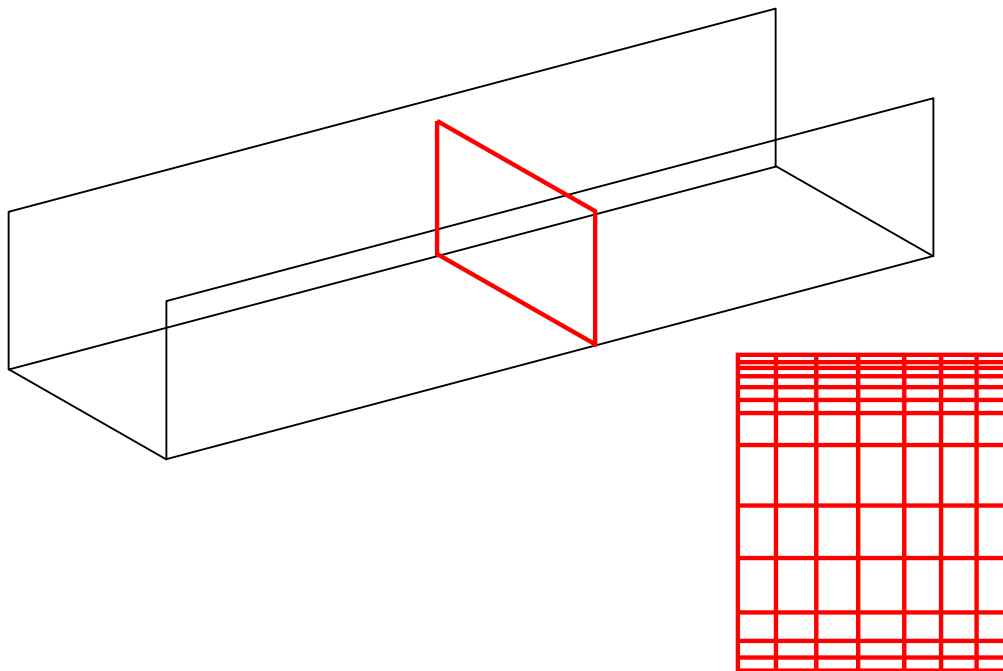


Figure 8-11 Zone de mesure et discrétisation des points de mesure

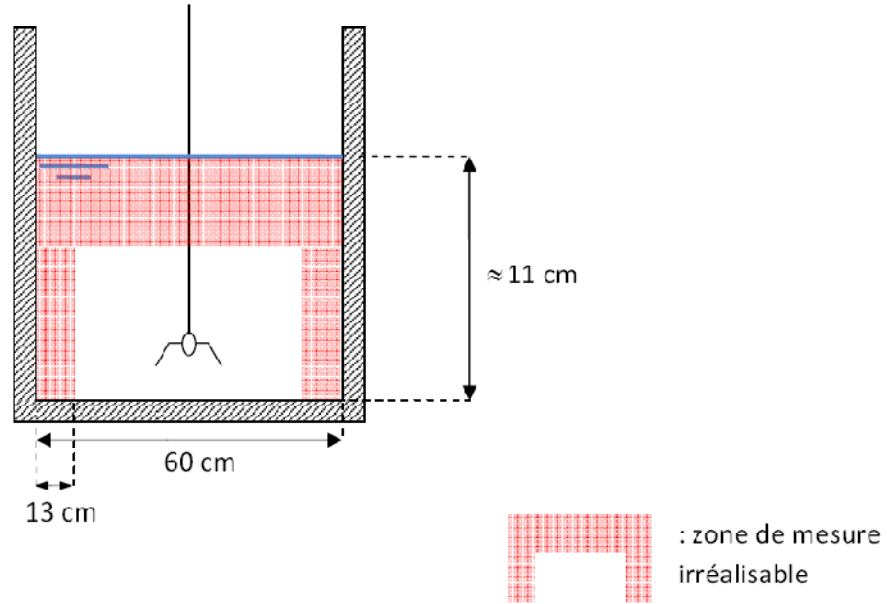


Figure 8-12 Limites de la zone de mesure

Les résultats présentés Figure 8-13 sont issus de la cartographie de la mesure de vitesse dans une section transverse située à 460 cm de l'aval. Le débit Q indiqué par le débitmètre électromagnétique (une seule pompe est utilisée) s'élève à $275 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$. La hauteur d'eau est de 11 cm. Ces résultats présentent quelques particularités qui les rendent encore plus difficilement exploitables. On observe bien un fort gradient de vitesse au niveau du radier et un profil $\bar{U}(z)$ ayant une tendance logarithmique. Cependant on constate un minimum local de l'enveloppe de vitesse selon l'axe vertical passant au milieu de la section. Ainsi le champ de vitesse prend la forme d'un paraboïde replié sur lui-même en son milieu. Nous pensons que ce phénomène est dû au caractère torrentiel de l'écoulement. En effet la hauteur critique h_c , caractérisant la nature du régime fluvial/torrentiel se calcule, dans une section rectangulaire, selon :

$$Fr = 1 = \frac{Q}{b\sqrt{gh_c^{3/2}}} \quad (8.1)$$

Soit $h_c = 11.8 \text{ cm}$. Dans la formule précédente, b est la largeur du canal et Fr est le nombre de Froude. La hauteur d'eau dans le canal étant inférieure à la hauteur critique, le régime est bien torrentiel. Un écoulement torrentiel se caractérisant par une surface libre perturbée par des ondes de surface. Ces dernières ont tendance à élever la hauteur d'eau au milieu de la surface libre, élévation qui s'accompagne, selon le principe de Bernoulli, d'une diminution de la vitesse. Pour plus de détails, le lecteur se reportera à (Vazquez, 2009). Il serait judicieux de réduire la pente du canal afin de conserver le régime fluvial pour ce débit afin de s'affranchir de ce phénomène.

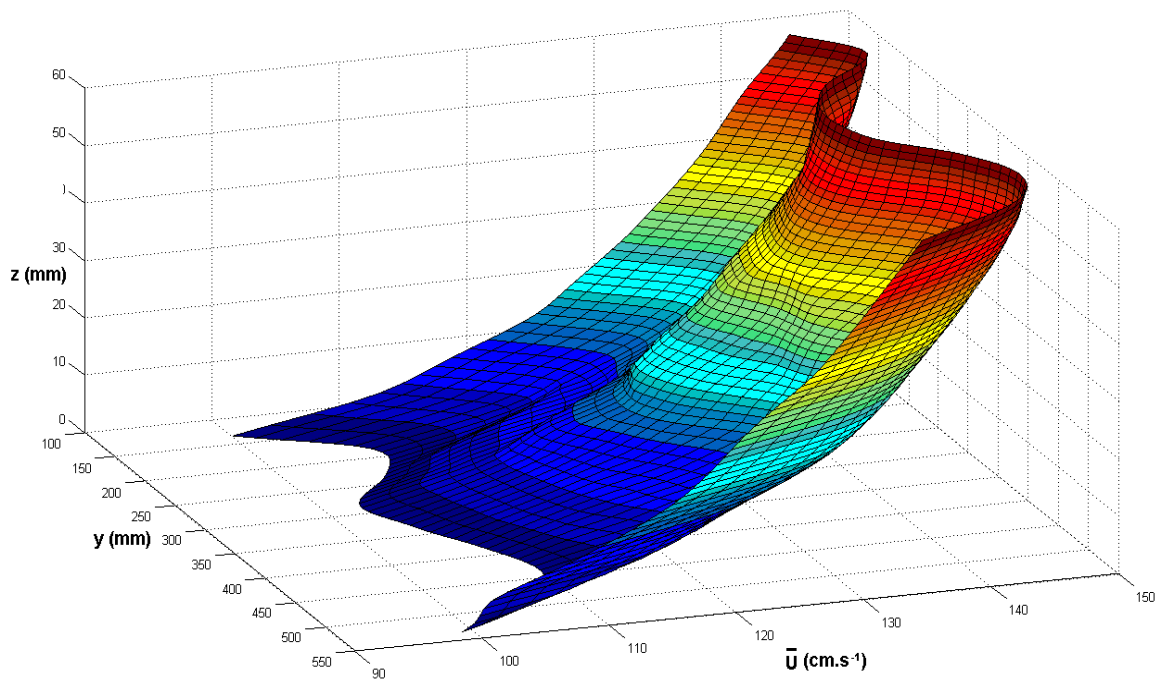


Figure 8-13 Section transverse du champ de vitesse de la composante moyenne de U

Ainsi si les résultats ne sont pas directement exploitables pour le cas d'étude de ce doctorat, le banc d'essai est opérationnel. Après les modifications préconisées dans le présent travail, cet outil expérimental sera à même de fournir des données qui permettront de valider notre logiciel et son adaptation aux conduites à banquettes.

Chapitre 9 Conclusion

Cette étude, menée au sein de l'équipe HU (Hydraulique Urbaine) de l'IMFS (Institut de Mécanique des Fluides et des Solides) et de l'ENGEES (Ecole Nationale du Génie de l'Eau et de l'Environnement de Strasbourg), contribue à l'analyse physique par modélisation tridimensionnelle numérique des écoulements au régime turbulent et uniforme en canal à surface libre à section rectangulaire. Motivé par le besoin d'implémentation de modèles physiques dans les capteurs débitométriques, ce travail s'attache à la conception d'un modèle permettant de calculer le champ des trois composantes de la vitesse moyenne, de la pression et des variables turbulentes, capable de reproduire les principaux phénomènes observables pour ce type d'écoulement.

S'agissant du Dip phenomenon et des courants secondaires, il était nécessaire de choisir un modèle prenant en compte le caractère anisotrope de la turbulence. C'est donc naturellement que nous nous sommes tournés vers le modèle RSM. Les phénomènes cités étant des conséquences directes de la turbulence et sachant que cette dernière naît au voisinage des parois selon un mécanisme que nous nous sommes attachés à décrire, il nous a semblé essentiel de s'affranchir des lois de paroi habituellement utilisées comme conditions aux limites. En effet, ces dernières ont tendance à simplifier et à uniformiser l'écoulement proche paroi pourtant complexe et générateur de phénomènes à grande échelle dans la zone d'écoulement pleinement développée. Ainsi le modèle RSM proposé est une version bas Reynolds tout comme le modèle $k-\epsilon$ implémenté à titre de comparaison. Ces modèles sont nécessairement couplés à un maillage très fin de la zone proche paroi.

Pour les mêmes raisons, un travail particulier a été apporté à la réécriture du terme de corrélation de fluctuation de pression/champ moyen de vitesse et de son adaptation à la zone proche paroi et surface libre. Il en est de même quant aux conditions aux limites des corrélations doubles de vitesse fluctuantes aux parois. Le présent travail propose d'ailleurs une justification originale quant aux choix d'un gradient nul ou d'une valeur nulle à la paroi des contraintes de Reynolds.

Ces modèles ont été implémentés dans des codes de calcul dédiés aux écoulements uniformes en conduite d'assainissement. Le caractère uniforme de ces derniers dans le sens de l'écoulement permet une simplification des équations et de la zone à mailler. En effet la modélisation tridimensionnelle de toute la canalisation peut s'effectuer en menant les calculs dans une section transverse ce qui permet un gain considérable en temps de calcul et en simplicité d'utilisation. Plusieurs méthodes numériques ont été testées avant d'opter pour la méthode aux volumes finis couplée avec un schéma de discrétisation de type power-law. L'algorithme SIMPLE a été utilisé pour calculer le champ de pression, classiquement complété par l'utilisation de grilles décalées. Le solveur utilisé pour l'inversion matricielle, liée à la résolution du système d'équations, préprogrammé sous MATLAB, repose sur la méthode

des gradients conjugués stabilisée Cette méthode est particulièrement adaptée aux matrices ayant un mauvais conditionnement telles que les matrices à diagonales dominantes caractéristiques des équations de convection/diffusion de notre modèle.

Une première modélisation bidimensionnelle a été réalisée. Les champs de vitesse, de pression et des variables turbulentes ont été calculés sur un profil en long avec les deux modèles. Les résultats sont parfaitement identiques, le profil de vitesse généré par le modèle RSM ne présente aucun Dip phenomenon. Cela démontre que la prise en compte du caractère anisotrope de la turbulence n'a aucun intérêt en bidimensionnel. Mais cela valide surtout la démarche d'une modélisation tridimensionnelle, impliquant par définition le calcul du champ de vitesse dans les directions normales au sens de l'écoulement pour lequel l'anisotropie de la turbulence joue un rôle prépondérant du fait des parois latérales.

La modélisation tridimensionnelle du champ de vitesse au travers d'une section a été menée avec les deux modèles. Le modèle RSM se révèle capable de reproduire les courants secondaires et le Dip phenomenon à l'inverse du modèle k- ϵ . Ceci confirme l'incapacité bien connue des modèles au premier ordre de modéliser ces phénomènes du fait de la simplification d'une turbulence isotrope inhérente à l'hypothèse de Boussinesq. La comparaison a été faite entre les résultats issus de notre modèle RSM avec ceux (Kang & Choi, 2005) qui ont aussi mis au point un modèle RSM mais couplé à des lois de paroi et dont le terme de corrélation fluctuation de pression/champ moyen de vitesse ne comprend pas de fonction spécifique à la zone proche paroi. Par ailleurs nos résultats ont été comparés aux résultats expérimentaux de (Nezu & Rodi, 1985).

Cette confrontation des résultats a permis tout d'abord de mettre en avant que l'utilisation du modèle RSM permet de bien reconstituer l'écoulement en canal à surface libre dans sa globalité. Plus précisément:

- L'utilisation d'un modèle bas Reynolds permet de reproduire l'effet de l'annulation de la contrainte de cisaillement au niveau des coins qui se traduit par une diminution locale des termes diagonaux du tenseur de Reynolds et de \bar{U} , soit par la déformation de leurs lignes de courants dans cette zone.
- Elle permet aussi de reproduire les iso-surfaces fermées positives qui se trouvent sous la surface libre de la cartographie de \overline{uv} malgré une tendance à la sous estimation.
- Il y a une bonne corrélation de la cartographie du champ de vitesse \bar{U} calculé avec la cartographie mesurée et la position du Dip phenomenon est en bon accord avec la loi empirique de (Yang, Tan, & Lim, 2004).
- La déformation des lignes de courants du champ de \bar{U} aux coins supérieurs de la section, due aux recirculations de cette zone, est bien reproduite.

- On arrive à reproduire des courants secondaires, parfaitement symétriques. S'ils ressemblent à ceux d'une conduite fermée, on constate le même résultat avec le logiciel Fluent. Il semblerait que la condition $W=0$ à la surface libre, clairement démentie par les mesures expérimentales, soit responsable de ces déformations.

Enfin l'analyse des débits calculés pour chaque modélisation montre que la différence entre les modèles RSM et $k-\epsilon$ peut être conséquente (jusqu'à 10% environ) avec la présence d'un Dip phenomenon mais disparaît avec celui-ci, soit pour des rapports largeur/hauteur supérieurs à 7. La modélisation de cas expérimentaux trouvés dans la littérature montre une bonne corrélation entre débit mesuré et calculé ce qui constitue le résultat principal au regard de l'application à la débitmétrie. En effet l'erreur maximale commise au regard des cas modélisés n'excède pas 3.5%.

En parallèle, un banc de mesure du champ de vitesse, équipé d'un banc de déplacement automatisé, a été conçu et installé. Il est équipé des technologies ADV et PIV permettant respectivement la mesure ponctuelle des composantes moyennes et fluctuantes de la vitesse dans les trois directions et la mesure instantanée du champ de vitesse. Les données obtenues ne sont pas directement exploitables pour le présent travail mais le banc est opérationnel et prêt à être adapté pour la mesure du champ de vitesse en conduite à banquettes.

Le modèle RSM développé au cours de ce doctorat présente un réel apport en matière d'analyse des écoulements turbulents en canal à surface libre et dans le domaine de la mesure de débit par vélocimétrie. Il convient cependant de préciser la difficulté générale d'implémentation et d'utilisation d'un modèle RSM, notamment en matière de convergence. Il est possible que cette difficulté de programmation et d'utilisation dépasse celle qu'on est prêt à accepter d'une application d'ingénierie. C'est pourquoi nous poursuivons ce travail en développant un algorithme de résolution basé sur la méthode des éléments finis avec intégration par la méthode de Galerkin. Nous pensons que cette démarche permettra d'améliorer la stabilité et les performances de notre code. Par ailleurs, l'utilisation d'un maillage non structuré est envisagé pour rendre possible l'adaptation de ce code aux diverses formes de conduite rencontrées en assainissement.

L'influence sur les tensions de Reynolds de chaque terme des équations (4.42) en zone proche paroi est connue (Mansour, Kim, & Moin, 1988). En revanche peu de résultats sont disponibles quant aux grandes structures, notamment les courants secondaires et le Dip phenomenon. Ce travail se poursuivra à travers l'étude de l'influence de ces termes sur le mécanisme de production de ces phénomènes aux grandes échelles.

Annexes

ANNEXE A Développement du modèle et des équations p.118

ANNEXE B Intégration des équations du modèle sur les grilles décalées avec schéma de discrétisation de type power-law p.140

ANNEXE A Développement du modèle et des équations

Equations globales RSM	119
Modélisation de la diffusion turbulente (corrélation triple), schéma de (Daly & Harlow, 1970) :	120
Modélisation de la corrélation avec la fluctuation de pression	121
Modèle non linéaire regroupant les contributions	121
Schémas de redistribution proche paroi	122
Schémas de redistribution proche surface libre	123
Ecriture du terme du M.N.L	124
Ecriture du terme de redistribution (paroi et surface libre).....	132
Assemblage des termes, équations RSM à intégrer	136
Equation du taux de dissipation	139

Equations globales RSM

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} = - \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} \right) - \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \overline{P'}}{\partial x_j} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{P'}}{\partial x_i} \right) + \nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k} - 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}}$$

$$\frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_k} \quad : \text{dérivée particulaire}$$

$$- \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_k} \right) \quad : \text{couplage avec le mouvement moyen (énergie donnée au champs turbulent par le champ moyen)}$$

$$- \frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} \quad : \text{diffusion turbulente}$$

$$\nu \frac{\partial^2 \overline{u_i u_j}}{\partial x_k \partial x_k} \quad : \text{diffusion moléculaire}$$

$$- \frac{1}{\rho} \left(\overline{u_i} \frac{\partial \overline{P'}}{\partial x_j} + \overline{u_j} \frac{\partial \overline{P'}}{\partial x_i} \right) \quad : \text{corrélation vitesse/gradient de pression fluctuation}$$

$$- 2\nu \overline{\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}} \quad : \text{pseudo-dissipation}$$

Modélisation de la diffusion turbulente (corrélation triple), schéma de (Daly & Harlow, 1970) :

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \overline{u_i u_j u_k}}{\partial x_k} &= C_s \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{u_k u_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right) = C_s \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{uu_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right) + C_s \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{vu_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right) + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{uw_l} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_l} \right) \\
 &= C_s \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{uu} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x} \right) + \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial y} \right) + \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{uw} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{uv} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x} \right) + \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{vv} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial y} \right) + \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial z} \right) \right] \\
 &\quad + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{uw} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x} \right) + \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial y} \right) + \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{ww} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial z} \right) \right] \quad \text{avec } C_s = 0.11 \\
 &= C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vv} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial z} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\sum_k \frac{\partial \overline{u^2 u_k}}{\partial x_k} = C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vv} \frac{\partial \overline{uu}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{uu}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{uu}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{uu}}{\partial z} \right) \right]$$

$$\sum_k \frac{\partial \overline{v^2 u_k}}{\partial x_k} = C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vv} \frac{\partial \overline{vv}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{vv}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{vv}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{vv}}{\partial z} \right) \right]$$

$$\sum_k \frac{\partial \overline{w^2 u_k}}{\partial x_k} = C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{ww}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{ww}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{ww}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{ww}}{\partial z} \right) \right]$$

$$\sum_k \frac{\partial \overline{uv u_k}}{\partial x_k} = C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vv} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial z} \right) \right]$$

$$\sum_k \frac{\partial \overline{uw u_k}}{\partial x_k} = C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vv} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \right) \right]$$

$$\sum_k \frac{\partial \overline{vw u_k}}{\partial x_k} = C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vv} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} \right) \right]$$

Modélisation de la corrélation avec la fluctuation de pression

Modèle non linéaire regroupant les contributions

$$\phi_{ij,TOT} = \phi_{ij} + \phi_{ij,w} + \phi_{ij,sl}$$

$$\phi_{ij} = \alpha_0 \varepsilon b_{ij} + \alpha_1 \varepsilon \left(b_{ik} b_{jk} - \frac{1}{3} b_{mn} b_{nm} \delta_{ij} \right) + \alpha_2 k S_{ij} + \alpha_3 P_k b_{ij} + \alpha_4 k \left(b_{ik} S_{jk} + b_{jk} S_{ik} - \frac{2}{3} b_{kl} S_{kl} \delta_{ij} \right) + \alpha_5 k (b_{ik} W_{jk} + b_{jk} W_{ik})$$

$$b_{ij} = \frac{R_{ij}}{2k} - \frac{1}{3} \delta_{ij} : \text{tenseur d'anisotropie. Note: il est symétrique autrement dit } b_{mn} b_{nm} = b_{mn}^2$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad W_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \quad \forall i \quad W_{ii} = 0$$

P_k est le taux de production d'énergie cinétique

$$\alpha_0 = -3.4 \quad \alpha_1 = 4.2 \quad \alpha_2 = 0.8 - 1.3(b_{mn} b_{nm})^{1/2} \quad \alpha_3 = -1.8 \quad \alpha_4 = 1.25 \quad \alpha_5 = 0.4$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= 0.8 - 1.3(b_{mn} b_{nm})^{1/2} = 0.8 - 1.3 b_{mn} = 0.8 - 1.3 (b_{xx} + b_{yy} + b_{zz} + b_{xy} + b_{yx} + b_{yz} + b_{zy} + b_{zx} + b_{xz} + b_{zy} + b_{zz}) \\ &= 0.8 - 1.3 \left(\frac{\overline{uu}}{2k} - \frac{1}{3} + \frac{\overline{uv}}{2k} + \frac{\overline{uw}}{2k} + \frac{\overline{uv}}{2k} + \frac{\overline{vw}}{2k} - \frac{1}{3} + \frac{\overline{vw}}{2k} + \frac{\overline{uw}}{2k} + \frac{\overline{vw}}{2k} + \frac{\overline{ww}}{2k} - \frac{1}{3} \right) = 0.8 - 1.3 \left(\frac{\overline{uu}}{2k} + \frac{\overline{vw}}{2k} + \frac{\overline{ww}}{2k} + 2 \frac{\overline{uv}}{2k} + 2 \frac{\overline{uw}}{2k} + 2 \frac{\overline{vw}}{2k} - 1 \right) \\ &= 0.8 - 1.3 \left(1 + 2 \frac{\overline{uv}}{2k} + 2 \frac{\overline{uw}}{2k} + 2 \frac{\overline{vw}}{2k} - 1 \right) = 0.8 - \frac{1.3}{k} (\overline{uv} + \overline{uw} + \overline{vw}) \end{aligned}$$

(Chassaing, 2000, p. 524) décrit ce modèle dans le chapitre consacré aux MNL (modèles non linéaires). L'auteur donne l'expression de P_k (Production). Il propose plusieurs jeux de constantes et on retrouve celles de (Speziale, Sarkar, & Gatski, 1991).

$$P_k = -\sum_i \sum_j \left(\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right) \neq -\sum_k \left(\overline{u_i u_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{u_j u_k} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) = P_{ij}$$

$$P_k = -\left(\overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \overline{uw} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right)$$

$$-\frac{1}{3} \overline{b_{mn} b_{nm}} = -\frac{1}{3} \overline{b_{nn}^2} = -\frac{1}{3} \overline{b_{xx}^2} - \frac{1}{3} \overline{b_{yy}^2} - \frac{1}{3} \overline{b_{zz}^2} - \frac{2}{3} \overline{b_{xy}^2} - \frac{2}{3} \overline{b_{xz}^2} - \frac{2}{3} \overline{b_{yz}^2}$$

$$-\frac{8}{9} \frac{\overline{u^2}}{k} + \frac{4}{9} \frac{\overline{v^2}}{k} + \frac{4}{9} \frac{\overline{w^2}}{k} = -\frac{12}{9} \frac{\overline{u^2}}{k} + \frac{4}{9} \frac{\overline{u^2}}{k} + \frac{4}{9} \frac{\overline{v^2}}{k} + \frac{4}{9} \frac{\overline{w^2}}{k} = -\frac{4}{3} \frac{\overline{u^2}}{k} + \frac{8}{9}$$

$$\left(\frac{\overline{u^2}}{2k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{v^2}}{2k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{w^2}}{2k} \right)^2 = \left(\frac{\overline{u^2}}{2k} + \frac{\overline{v^2}}{2k} + \frac{\overline{w^2}}{2k} \right)^2 - 2 \frac{\overline{u^2}}{2k} \frac{\overline{v^2}}{2k} - 2 \frac{\overline{u^2}}{2k} \frac{\overline{w^2}}{2k} - 2 \frac{\overline{v^2}}{2k} \frac{\overline{w^2}}{2k} \Rightarrow \left(\frac{\overline{v^2}}{2k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{w^2}}{2k} \right)^2 = 1 - \left(\frac{\overline{u^2}}{2k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{uv}}{2k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{uw}}{2k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{vw}}{2k} \right)^2$$

Schémas de redistribution proche paroi

On ajoute un terme pour modéliser l'effet et interactions avec la paroi. Ce modèle de corrélation avec la fluctuation de pression proche paroi est le modèle celui de (Shir, 1973). Une description en est faite par (Chassaing, 2000, pp. 561-562).

$$\phi_{ij,w} = C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} \left(\phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ki,2} n_k n_i - \frac{3}{2} \phi_{kj,2} n_k n_j \right) f_w$$

$$\phi_{ij,2} = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) \quad C_{w,2} = 0.3 \quad C_2 = 0.6$$

$$f_w = \frac{l}{\chi y} \quad l = \frac{(-\overline{uv})^{3/2}}{\varepsilon} \quad \chi = 0.41 \quad y \text{ distance à la paroi}$$

Schémas de redistribution proche surface libre

On ajoute un terme pour modéliser les interactions avec la surface libre :

$$\phi_{ij,sl} = C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m n_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_l n_k n_l} - \frac{3}{2} \overline{u_l u_j n_k n_j} \right) f_s + C_{fs,2} \left(\phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ki,2} n_k n_l - \frac{3}{2} \phi_{lj,2} n_k n_j \right) f_s$$

$$C_{fs,1} = 0.5 \quad C_{fs,2} = 0.1$$

$$\phi_{ij,2} = -C_2 \left(P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) \quad C_2 = 0.6$$

Ce modèle de corrélation avec la fluctuation de pression proche paroi est le modèle utilisé par (Kang & Choi, 2005), soit celui développé par (Gibson & Launder, 1978) basé sur celui de (Shir, 1973) modifié par (Cokijat, 1993).

$$f_s = \left(\frac{L}{z_n^{-1} + C_f L} \right)^2 \quad \text{avec } L = C_\mu^{3/4} k^{1.5} / (\kappa \varepsilon) \quad \text{c'est l'échelle de longueur turbulente}$$

$$z_n \text{ est la distance par rapport à la surface libre} \quad C_f = 0.16$$

Ecriture du terme du M.N.L

$$\begin{aligned}
\phi_{xx} &= \alpha_0 \varepsilon b_{xx} + \alpha_1 \varepsilon \left(b_{xk} b_{xk} - \frac{1}{3} b_{mn} b_{nm} \right) + \alpha_2 k S_{xx} + \alpha_3 P_k b_{xx} + \alpha_4 k \left(b_{xk} S_{xk} + b_{xk} S_{xk} - \frac{2}{3} b_{kl} S_{kl} \right) + \alpha_5 k (b_{xk} W_{xk} + b_{xk} W_{xk}) \\
&= \alpha_0 \varepsilon b_{xx} + \alpha_1 \varepsilon \left[b_{xx}^2 + b_{xy}^2 + b_{xz}^2 - \frac{1}{3} (b_{xx}^2 + 2b_{xy}^2 + 2b_{xz}^2 + b_{yy}^2 + 2b_{yz}^2 + b_{zz}^2) \right] + \alpha_2 k S_{xx} + \alpha_3 P_k b_{xx} \\
&\quad + \alpha_4 k \left[2b_{xx} S_{xx} + 2b_{xy} S_{xy} + 2b_{xz} S_{xz} - \frac{2}{3} (b_{xx} S_{xx} + b_{xy} S_{xy} + b_{xz} S_{xz} + b_{xy} S_{xy} + b_{yy} S_{yy} + b_{yz} S_{yz} + b_{xz} S_{xz} + b_{yz} S_{yz} + b_{zz} S_{zz}) \right] + 2\alpha_5 k (b_{xx} W_{xx} + b_{xy} W_{xy} + b_{xz} W_{xz}) \\
&= \alpha_0 \varepsilon b_{xx} + \frac{1}{3} \alpha_1 \varepsilon [2b_{xx}^2 + b_{xy}^2 + b_{xz}^2 - b_{yy}^2 - 2b_{yz}^2 - b_{zz}^2] + \alpha_2 k S_{xx} + \alpha_3 P_k b_{xx} \\
&\quad + \frac{2}{3} \alpha_4 k [2b_{xx} S_{xx} + b_{xy} S_{xy} + b_{xz} S_{xz} - b_{yy} S_{yy} - 2b_{yz} S_{yz} - b_{zz} S_{zz}] + 2\alpha_5 k (b_{xx} W_{xx} + b_{xy} W_{xy} + b_{xz} W_{xz}) \\
\phi_{yy} &= \alpha_0 \varepsilon b_{yy} + \alpha_1 \varepsilon \left(b_{yk} b_{yk} - \frac{1}{3} b_{mn} b_{nm} \right) + \alpha_2 k S_{yy} + \alpha_3 P_k b_{yy} + \alpha_4 k \left(2b_{yk} S_{yk} - \frac{2}{3} b_{kl} S_{kl} \right) + 2\alpha_5 k b_{yk} W_{yk} \\
&= \alpha_0 \varepsilon b_{yy} + \alpha_1 \varepsilon \left[b_{xy}^2 + b_{yy}^2 + b_{yz}^2 - \frac{1}{3} (b_{xx}^2 + 2b_{xy}^2 + 2b_{xz}^2 + b_{yy}^2 + 2b_{yz}^2 + b_{zz}^2) \right] + \alpha_2 k S_{yy} + \alpha_3 P_k b_{yy} \\
&\quad + \alpha_4 k \left[2b_{xy} S_{xy} + 2b_{yy} S_{yy} + 2b_{yz} S_{yz} - \frac{2}{3} (b_{xx} S_{xx} + b_{xy} S_{xy} + b_{xz} S_{xz} + b_{xy} S_{xy} + b_{yy} S_{yy} + b_{yz} S_{yz} + b_{xz} S_{xz} + b_{yz} S_{yz} + b_{zz} S_{zz}) \right] + 2\alpha_5 k (b_{xy} W_{xy} + b_{yy} W_{yy} + b_{yz} W_{yz}) \\
&= \alpha_0 \varepsilon b_{yy} + \frac{1}{3} \alpha_1 \varepsilon [b_{xy}^2 + 2b_{yy}^2 + b_{yz}^2 - b_{xx}^2 - 2b_{xz}^2 - b_{zz}^2] + \alpha_2 k S_{yy} + \alpha_3 P_k b_{yy} \\
&\quad + \frac{2}{3} \alpha_4 k (b_{xy} S_{xy} + 2b_{yy} S_{yy} + b_{yz} S_{yz} - b_{xx} S_{xx} - 2b_{xz} S_{xz} - b_{zz} S_{zz}) + 2\alpha_5 k (b_{xy} W_{xy} + b_{yy} W_{yy} + b_{yz} W_{yz})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{zz} &= \alpha_0 \varepsilon b_{zz} + \alpha_1 \varepsilon \left(b_{zk} b_{zk} - \frac{1}{3} b_{mn} b_{nm} \right) + \alpha_2 k S_{zz} + \alpha_3 P_k b_{zz} + \alpha_4 k \left(2b_{zk} S_{zk} - \frac{2}{3} b_{kl} S_{kl} \right) + 2\alpha_5 k b_{zk} W_{zk} \\
&= \alpha_0 \varepsilon b_{zz} + \alpha_1 \varepsilon \left[b_{xz}^2 + b_{yz}^2 + b_{zz}^2 - \frac{1}{3} (b_{xx}^2 + 2b_{xy}^2 + 2b_{xz}^2 + b_{yy}^2 + 2b_{yz}^2 + b_{zz}^2) \right] + \alpha_2 k S_{zz} + \alpha_3 P_k b_{zz} \\
&\quad + \alpha_4 k \left[2b_{xz} S_{xz} + 2b_{yz} S_{yz} + 2b_{zz} S_{zz} + 2b_{zk} S_{zk} - \frac{2}{3} (b_{xx} S_{xx} + b_{xy} S_{xy} + b_{xz} S_{xz} + b_{xy} S_{xy} + b_{yy} S_{yy} + b_{yz} S_{yz} + b_{xz} S_{xz} + b_{yz} S_{yz} + b_{zz} S_{zz}) \right] + 2\alpha_5 k (b_{xz} W_{xz} + b_{yz} W_{yz} + b_{zz} W_{zz}) \\
&= \alpha_0 \varepsilon b_{zz} + \frac{1}{3} \alpha_1 \varepsilon [b_{xz}^2 + b_{yz}^2 + 2b_{zz}^2 - b_{xx}^2 - 2b_{xy}^2 - b_{yy}^2] + \alpha_2 k S_{zz} + \alpha_3 P_k b_{zz} \\
&\quad + \frac{2}{3} \alpha_4 k [b_{xz} S_{xz} + b_{yz} S_{yz} + 2b_{zz} S_{zz} - b_{xx} S_{xx} - 2b_{xy} S_{xy} - b_{yy} S_{yy}] + 2\alpha_5 k (b_{xz} W_{xz} + b_{yz} W_{yz} + b_{zz} W_{zz}) \\
\phi_{xy} &= \alpha_0 \varepsilon b_{xy} + \alpha_1 \varepsilon b_{xk} b_{yk} + \alpha_2 k S_{xy} + \alpha_3 P_k b_{xy} + \alpha_4 k (b_{xk} S_{yk} + b_{yk} S_{xk}) + \alpha_5 k (b_{xk} W_{yk} + b_{yk} W_{xk}) \\
&= \alpha_0 \varepsilon b_{xy} + \alpha_1 \varepsilon (b_{xx} b_{xy} + b_{xy} b_{yy} + b_{xz} b_{yz}) + \alpha_2 k S_{xy} + \alpha_3 P_k b_{xy} + \alpha_4 k (b_{xx} S_{xy} + b_{xy} S_{xx} + b_{xy} S_{yy} + b_{yy} S_{xy} + b_{xz} S_{yz} + b_{yz} S_{xz}) \\
&\quad + \alpha_5 k (b_{xx} W_{xy} + b_{xy} W_{xx} + b_{xy} W_{yy} + b_{yy} W_{xy} + b_{xz} W_{yz} + b_{yz} W_{xz}) \\
\phi_{xz} &= \alpha_0 \varepsilon b_{xz} + \alpha_1 \varepsilon b_{xk} b_{zk} + \alpha_2 k S_{xz} + \alpha_3 P_k b_{xz} + \alpha_4 k (b_{xk} S_{zk} + b_{zk} S_{xk}) + \alpha_5 k (b_{xk} W_{zk} + b_{zk} W_{xk}) \\
&= \alpha_0 \varepsilon b_{xz} + \alpha_1 \varepsilon (b_{xx} b_{xz} + b_{xy} b_{yz} + b_{xz} b_{zz}) + \alpha_2 k S_{xz} + \alpha_3 P_k b_{xz} + \alpha_4 k (b_{xx} S_{xz} + b_{xz} S_{xx} + b_{xy} S_{yz} + b_{yz} S_{xy} + b_{xz} S_{zz} + b_{zz} S_{xz}) \\
&\quad + \alpha_5 k (b_{xx} W_{xz} + b_{xz} W_{xx} + b_{xy} W_{yz} + b_{yz} W_{xy} + b_{xz} W_{zz} + b_{zz} W_{xz}) \\
\phi_{yz} &= \alpha_0 \varepsilon b_{yz} + \alpha_1 \varepsilon b_{yk} b_{zk} + \alpha_2 k S_{yz} + \alpha_3 P_k b_{yz} + \alpha_4 k (b_{yk} S_{zk} + b_{zk} S_{yk}) + \alpha_5 k (b_{yk} W_{zk} + b_{zk} W_{yk}) \\
&= \alpha_0 \varepsilon b_{yz} + \alpha_1 \varepsilon (b_{xy} b_{xz} + b_{yy} b_{yz} + b_{yz} b_{zz}) + \alpha_2 k S_{yz} + \alpha_3 P_k b_{yz} + \alpha_4 k (b_{xy} S_{xz} + b_{xz} S_{xy} + b_{yy} S_{yz} + b_{yz} S_{yy} + b_{yz} S_{zz} + b_{zz} S_{yz}) \\
&\quad + \alpha_5 k (b_{xy} W_{xz} + b_{xz} W_{xy} + b_{yy} W_{yz} + b_{yz} W_{yy} + b_{yz} W_{zz} + b_{zz} W_{yz})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{xx} &= \alpha_0 \varepsilon b_{xx} + \frac{1}{3} \alpha_1 \varepsilon \left[2 \left(\frac{\bar{u}^2}{2k} - \frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{\bar{uv}}{2k} \right)^2 + \left(\frac{\bar{uw}}{2k} \right)^2 - \left(\frac{\bar{v}^2}{2k} - \frac{1}{3} \right)^2 - 2 \left(\frac{\bar{vw}}{2k} \right)^2 - \left(\frac{\bar{ww}}{2k} - \frac{1}{3} \right)^2 \right] + \alpha_2 k S_{xx} + \alpha_3 P_k b_{xx} \\
&\quad + \frac{2}{3} \alpha_4 k \left(2 \left(\frac{\bar{u}^2}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\bar{uv}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\bar{uw}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - \left(\frac{\bar{v}^2}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial V}{\partial y} - 2 \frac{\bar{vw}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - \left(\frac{\bar{w}^2}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial W}{\partial z} \right) + 2 \alpha_5 k (b_{xy} W_{xy} + b_{xz} W_{xz}) \\
&= \alpha_0 \varepsilon \left(\frac{\bar{u}^2}{2k} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{12} \alpha_1 \varepsilon \left[2 \left(\frac{\bar{u}^2}{k} \right)^2 - \frac{8 \bar{u}^2}{3k} + \frac{8}{9} + \left(\frac{\bar{uv}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\bar{uw}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\bar{v}^2}{k} \right)^2 + \frac{4 \bar{v}^2}{3k} - \frac{4}{9} - 2 \left(\frac{\bar{vw}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\bar{ww}}{k} \right)^2 + \frac{4 \bar{w}^2}{3k} - \frac{4}{9} \right] + \alpha_2 k S_{xx} + \alpha_3 P_k b_{xx} \\
&\quad + \frac{1}{6} \alpha_4 k \left(4 \left(\frac{\bar{u}^2}{k} - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\bar{uv}}{k} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\bar{uw}}{k} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - 2 \left(\frac{\bar{v}^2}{k} - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial V}{\partial y} - 2 \frac{\bar{vw}}{k} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - 2 \left(\frac{\bar{w}^2}{k} - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial W}{\partial z} \right) + 2 \alpha_5 k (b_{xy} W_{xy} + b_{xz} W_{xz}) \\
&= \alpha_0 \varepsilon \left(\frac{\bar{u}^2}{2k} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{12} \alpha_1 \varepsilon \left[-4 \frac{\bar{u}^2}{k} + \frac{8}{3} + 2 \left(\frac{\bar{u}^2}{k} \right)^2 + \left(\frac{\bar{uv}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\bar{uw}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\bar{v}^2}{k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\bar{vw}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\bar{ww}}{k} \right)^2 \right] + 2 \alpha_2 k \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial x} \\
&\quad + \alpha_3 \left[\bar{u}^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{v}^2 \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{w}^2 \frac{\partial W}{\partial z} + \bar{uv} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \bar{uw} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \bar{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \left(\frac{\bar{u}^2}{2k} - \frac{1}{3} \right) \\
&\quad + \frac{1}{6} \alpha_4 \left(4 \bar{u}^2 \frac{\partial U}{\partial x} - 4k \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{uv} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \bar{uw} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - 2 \bar{v}^2 \frac{\partial V}{\partial y} - 2 \bar{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - 2 \bar{w}^2 \frac{\partial W}{\partial z} \right) + 2 \alpha_5 k \left[\frac{\bar{uv}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\bar{uw}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] \quad \text{div} \vec{u} = 0 \\
&= \alpha_0 \varepsilon \left(\frac{\bar{u}^2}{2k} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{12} \alpha_1 \varepsilon \left[-4 \frac{\bar{u}^2}{k} + \frac{8}{3} + 2 \left(\frac{\bar{u}^2}{k} \right)^2 + \left(\frac{\bar{uv}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\bar{uw}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\bar{v}^2}{k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\bar{vw}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\bar{ww}}{k} \right)^2 \right] + 2 \alpha_2 k \frac{\partial U}{\partial x} \\
&\quad + \alpha_3 \left[\bar{u}^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{v}^2 \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{w}^2 \frac{\partial W}{\partial z} + \bar{uv} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \bar{uw} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \bar{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\bar{u}^2}{2k} + \frac{\alpha_5}{2} \left(\bar{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{uw} \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\
&\quad + \frac{1}{6} \left[(4\alpha_4 - 2\alpha_3) \bar{u}^2 \frac{\partial U}{\partial x} - 4k\alpha_4 \frac{\partial U}{\partial x} + (\alpha_4 - 2\alpha_3) \bar{uv} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + (\alpha_4 - 2\alpha_3) \bar{uw} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \bar{v}^2 \frac{\partial V}{\partial y} - (2\alpha_4 + 2\alpha_3) \bar{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \bar{w}^2 \frac{\partial W}{\partial z} \right] \\
&= \alpha_0 \varepsilon \left(\frac{\bar{u}^2}{2k} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{12} \alpha_1 \varepsilon \left[-4 \frac{\bar{u}^2}{k} + \frac{8}{3} + 2 \left(\frac{\bar{u}^2}{k} \right)^2 + \left(\frac{\bar{uv}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\bar{uw}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\bar{v}^2}{k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\bar{vw}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\bar{ww}}{k} \right)^2 \right] \\
&\quad + \alpha_3 \left[\bar{v}^2 \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{w}^2 \frac{\partial W}{\partial z} + \bar{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\bar{u}^2}{2k} \\
&\quad + \frac{1}{6} \left[(\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) \bar{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) \bar{uw} \frac{\partial U}{\partial z} - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \bar{v}^2 \frac{\partial V}{\partial y} - (2\alpha_4 + 2\alpha_3) \bar{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \bar{w}^2 \frac{\partial W}{\partial z} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{zz} &= \alpha_0 \varepsilon \left(\frac{\overline{ww}}{2k} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3} \alpha_1 \varepsilon \left[\left(\frac{\overline{uw}}{2k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{vw}}{2k} \right)^2 + 2 \left(\frac{\overline{ww}}{2k} - \frac{1}{3} \right)^2 - \left(\frac{\overline{uu}}{2k} - \frac{1}{3} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{uv}}{2k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{vv}}{2k} - \frac{1}{3} \right)^2 \right] + \alpha_2 k \frac{\partial W}{\partial z} \\
&+ \alpha_3 \left[\overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \overline{uw} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \left(\frac{\overline{w^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) + \alpha_5 \left[\frac{1}{2} \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2} \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \\
&+ \frac{2}{3} \alpha_4 k \left(\frac{\overline{uw}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\overline{vw}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + 2 \left(\frac{\overline{ww}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial W}{\partial z} - \left(\frac{\overline{uu}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial U}{\partial x} - \left(\frac{\overline{vv}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial V}{\partial y} - 2 \frac{\overline{uv}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \right) \\
&= \alpha_0 \varepsilon \left(\frac{\overline{ww}}{2k} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{12} \alpha_1 \varepsilon \left[-4 \frac{\overline{w^2}}{k} + \frac{8}{3} + \left(\frac{\overline{uw}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{vw}}{k} \right)^2 + 2 \left(\frac{\overline{w^2}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{u^2}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{v^2}}{k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{uv}}{k} \right)^2 \right] + \alpha_2 k \frac{\partial W}{\partial z} \\
&+ \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{w^2}}{2k} \\
&+ \frac{1}{6} \left[(\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} + (\alpha_4 - 2\alpha_3 - 3\alpha_5) \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} + 2(2\alpha_4 - \alpha_3) \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} - 4\alpha_4 k \frac{\partial W}{\partial z} - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \right]
\end{aligned}$$

Notons que:

$$2 \left(\frac{\overline{ww}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial W}{\partial z} - \left(\frac{\overline{uu}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial U}{\partial x} - \left(\frac{\overline{vv}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial V}{\partial y} = 2 \left(\frac{\overline{ww}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{1}{3} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\overline{uu}}{2k} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\overline{vv}}{2k} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\text{div}(\vec{V})}{3} = 2 \frac{\overline{ww}}{2k} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\overline{uu}}{2k} \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\overline{vv}}{2k} \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\text{div}(\vec{V})}{3}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{xy} &= \alpha_0 \varepsilon b_{xy} + \alpha_1 \varepsilon \left[\left(\frac{\bar{u}^2}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{\bar{u}\bar{v}}{2k} + \frac{\bar{u}\bar{v}}{2k} \left(\frac{\bar{v}^2}{2k} - \frac{1}{3} \right) + \frac{\bar{u}\bar{w}\bar{v}\bar{w}}{2k \cdot 2k} \right] + \alpha_2 k \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \\
&\quad + \alpha_3 \left[\bar{u}^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{v}^2 \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{w}^2 \frac{\partial W}{\partial z} + \bar{u}\bar{v} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \bar{u}\bar{w} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \bar{v}\bar{w} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\bar{u}\bar{v}}{2k} \\
&\quad + \alpha_3 k \left[\left(\frac{\bar{u}^2}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\bar{u}\bar{w}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \left(\frac{\bar{v}^2}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\bar{v}\bar{w}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] \\
&\quad + \alpha_4 k \left[\left(\frac{\bar{u}^2}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\bar{u}\bar{v}}{2k} \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\bar{u}\bar{w}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\bar{u}\bar{v}}{2k} \frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{\bar{v}^2}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\bar{v}\bar{w}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] \\
&= \alpha_0 \varepsilon \frac{\bar{u}\bar{v}}{2k} + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{4} \left(\frac{\bar{u}^2 \bar{u}\bar{v}}{k \cdot k} + \frac{\bar{u}\bar{v} \bar{v}^2}{k \cdot k} + \frac{\bar{u}\bar{w}\bar{v}\bar{w}}{k \cdot k} - \frac{4 \bar{u}\bar{v}}{3 \cdot k} \right) + \alpha_2 k \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial y} \\
&\quad + \alpha_3 \left[\bar{v}^2 \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{w}^2 \frac{\partial W}{\partial z} + \bar{u}\bar{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{u}\bar{w} \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{v}\bar{w} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\bar{u}\bar{v}}{2k} + \frac{\alpha_3 k}{4} \left[\left(\frac{\bar{u}^2}{k} - 2 \right) \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\bar{u}\bar{w}}{k} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \left(\frac{\bar{v}^2}{k} - 2 \right) \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\bar{v}\bar{w}}{k} \frac{\partial U}{\partial z} \right] \\
&\quad + \frac{\alpha_4 k}{4} \left[\left(\frac{\bar{u}^2}{k} - 2 \right) \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\bar{u}\bar{v}}{k} 2 \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\bar{u}\bar{w}}{k} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \left(\frac{\bar{v}^2}{k} - 2 \right) \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\bar{v}\bar{w}}{k} \frac{\partial U}{\partial z} \right] \\
&= \alpha_0 \varepsilon \frac{\bar{u}\bar{v}}{2k} + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{2} \left(-\frac{\bar{w}^2 \bar{u}\bar{v}}{k \cdot k} + \frac{\bar{u}\bar{w}\bar{v}\bar{w}}{k \cdot k} + \frac{2 \bar{u}\bar{v}}{3 \cdot k} \right) + \alpha_2 k \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial y} \\
&\quad + \alpha_3 \left[\bar{v}^2 \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{w}^2 \frac{\partial W}{\partial z} + \bar{u}\bar{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{u}\bar{w} \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{v}\bar{w} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\bar{u}\bar{v}}{2k} \\
&\quad + \frac{1}{4} \left[-\frac{4k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\partial U}{\partial y} + (\alpha_4 + \alpha_5) \bar{u}^2 \frac{\partial U}{\partial y} + 2\alpha_4 \bar{u}\bar{v} \frac{\partial V}{\partial y} + (\alpha_4 + \alpha_5) \bar{u}\bar{w} \frac{\partial V}{\partial z} + (\alpha_4 - \alpha_5) \bar{u}\bar{w} \frac{\partial W}{\partial y} + (\alpha_4 + \alpha_5) \bar{v}^2 \frac{\partial U}{\partial y} + (\alpha_4 + \alpha_5) \bar{v}\bar{w} \frac{\partial U}{\partial z} \right] \\
&= \alpha_0 \varepsilon \frac{\bar{u}\bar{v}}{2k} + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{4} \left(-\frac{\bar{w}^2 \bar{u}\bar{v}}{k \cdot k} + \frac{\bar{u}\bar{w}\bar{v}\bar{w}}{k \cdot k} + \frac{2 \bar{u}\bar{v}}{3 \cdot k} \right) + \alpha_2 k \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial y} \\
&\quad + \alpha_3 \left[\bar{v}^2 \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{w}^2 \frac{\partial W}{\partial z} + \bar{u}\bar{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{u}\bar{w} \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{v}\bar{w} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\bar{u}\bar{v}}{2k} \\
&\quad + \frac{1}{4} \left[\frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\partial U}{\partial y} - (\alpha_4 + \alpha_5) \bar{w}\bar{w} \frac{\partial U}{\partial y} + 2\alpha_4 \bar{u}\bar{v} \frac{\partial V}{\partial y} + (\alpha_4 + \alpha_5) \bar{u}\bar{w} \frac{\partial V}{\partial z} + (\alpha_4 - \alpha_5) \bar{u}\bar{w} \frac{\partial W}{\partial y} + (\alpha_4 + \alpha_5) \bar{v}\bar{w} \frac{\partial U}{\partial z} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{xz} &= \alpha_0 \varepsilon \frac{\overline{uw}}{2k} + \alpha_1 \varepsilon \left[\left(\frac{\overline{u^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{\overline{uw}}{2k} + \frac{\overline{uv} \overline{vw}}{2k} + \frac{\overline{uw}}{2k} \left(\frac{\overline{w^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \right] + \alpha_2 k \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \\
&\quad + \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{uw}}{2k} + \alpha_3 k \left[\left(\frac{\overline{u^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\overline{uv}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\overline{vw}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \left(\frac{\overline{w^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] \\
&\quad + \alpha_4 k \left[\left(\frac{\overline{u^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \frac{\overline{uv}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\overline{uw}}{2k} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\overline{uw}}{2k} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\overline{vw}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \left(\frac{\overline{w^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) \right] \\
&= \alpha_0 \varepsilon \frac{\overline{uw}}{2k} + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{4} \left(-\frac{\overline{v^2} \overline{uw}}{k} + \frac{\overline{uv} \overline{vw}}{k} + \frac{2 \overline{uw}}{3} \right) + \alpha_2 k \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial z} \\
&\quad + \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{uw}}{2k} + \frac{\alpha_3 k}{4} \left[\left(\frac{\overline{u^2}}{k} - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\overline{uv}}{k} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\overline{vw}}{k} \frac{\partial U}{\partial y} + \left(\frac{\overline{w^2}}{k} - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial U}{\partial z} \right] \\
&\quad + \frac{\alpha_4 k}{4} \left[\left(\frac{\overline{u^2}}{k} - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\overline{uv}}{k} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\overline{uw}}{k} 2 \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\overline{vw}}{k} \frac{\partial U}{\partial y} + \left(\frac{\overline{w^2}}{k} - \frac{2}{3} \right) \frac{\partial U}{\partial z} \right] \\
&= \alpha_0 \varepsilon \frac{\overline{uw}}{2k} + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{4} \left(-\frac{\overline{v^2} \overline{uw}}{k} + \frac{\overline{uv} \overline{vw}}{k} + \frac{2 \overline{uw}}{3} \right) + \alpha_2 k \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial z} \\
&\quad + \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{uw}}{2k} \\
&\quad + \frac{1}{4} \left[\frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\partial U}{\partial z} - (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial z} + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uv} \frac{\partial V}{\partial z} + (\alpha_4 - \alpha_5) \overline{uv} \frac{\partial W}{\partial y} + 2\alpha_4 \overline{uw} \frac{\partial W}{\partial z} + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{vw} \frac{\partial U}{\partial y} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{yz} &= \alpha_0 \varepsilon b_{yz} + \alpha_1 \varepsilon \left[\frac{\overline{uv} \overline{uw}}{2k} + \left(\frac{\overline{v^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{\overline{vw}}{2k} + \frac{\overline{vw}}{2k} \left(\frac{\overline{w^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \right] + \alpha_2 k S_{yz} \\
&+ \alpha_3 \left[\overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \overline{uw} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{vw}}{2k} \\
&+ \alpha_5 k \left[\frac{\overline{uv}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \left(\frac{\overline{v^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\overline{uw}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \left(\frac{\overline{w^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \\
&+ \alpha_4 k \left[\frac{\overline{uv}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \left(\frac{\overline{v^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\overline{vw}}{2k} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\overline{uw}}{2k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\overline{vw}}{2k} \frac{\partial V}{\partial y} + \left(\frac{\overline{w^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \\
&= \alpha_0 \varepsilon b_{yz} + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{4} \left[-\frac{\overline{u^2} \overline{vw}}{k} + \frac{\overline{uv} \overline{uw}}{k} + \frac{2 \overline{vw}}{3k} \right] + \alpha_2 k \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \\
&+ \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{vw}}{2k} + \frac{\alpha_5 k}{4} \left[\frac{\overline{uv}}{k} \frac{\partial U}{\partial z} + \left(\frac{\overline{v^2}}{k} - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) + \frac{\overline{uw}}{k} \frac{\partial U}{\partial y} + \left(\frac{\overline{w^2}}{k} - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \\
&+ \frac{\alpha_4 k}{4} \left[\frac{\overline{uv}}{k} \frac{\partial U}{\partial z} + \left(\frac{\overline{v^2}}{k} - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) + 2 \frac{\overline{vw}}{k} \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{\overline{uw}}{k} \frac{\partial U}{\partial y} + 2 \frac{\overline{vw}}{k} \frac{\partial V}{\partial y} + \left(\frac{\overline{w^2}}{k} - \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \\
&= \alpha_0 \varepsilon \frac{\overline{vw}}{2k} + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{4} \left[-\frac{\overline{u^2} \overline{vw}}{k} + \frac{\overline{uv} \overline{uw}}{k} + \frac{2 \overline{vw}}{3k} \right] + \alpha_2 k \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \\
&+ \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{vw}}{2k} \\
&+ \frac{1}{4} \left[(\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial z} + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial z} + (\alpha_4 - \alpha_5) \overline{v^2} \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{4k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{4k}{3} (\alpha_4 - \alpha_5) \frac{\partial W}{\partial y} \right. \\
&\quad \left. + 2\alpha_4 \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial z} + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial y} + 2\alpha_4 \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial y} + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{w^2} \frac{\partial V}{\partial z} + (\alpha_4 - \alpha_5) \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial y} \right] \\
&= \alpha_0 \varepsilon \frac{\overline{vw}}{2k} + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{4} \left[-\frac{\overline{u^2} \overline{vw}}{k} + \frac{\overline{uv} \overline{uw}}{k} + \frac{2 \overline{vw}}{3k} \right] + \alpha_2 k \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \\
&+ \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{vw}}{2k} \\
&+ \frac{1}{4} \left[(\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial z} - (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uw} \frac{\partial V}{\partial z} + (\alpha_4 - \alpha_5) \overline{uw} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{2k}{3} (\alpha_4 - \alpha_5) \frac{\partial W}{\partial y} + 2\alpha_4 \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial z} + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + 2\alpha_4 \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial y} \right]
\end{aligned}$$

Ecriture du terme de redistribution (paroi et surface libre)

$$\phi_{ij,sl} + \phi_{ij,w} = C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u_k u_m n_k n_m} \delta_{ij} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_i n_k n_i} - \frac{3}{2} \overline{u_k u_j n_k n_j} \right) f_s + \left(\phi_{km,2} n_k n_m \delta_{ij} - \frac{3}{2} \phi_{ki,2} n_k n_i - \frac{3}{2} \phi_{kj,2} n_k n_j \right) \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right)$$

$$\begin{aligned} \phi_{xx,sl} + \phi_{xx,w} &= C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2} - \frac{3}{2} \overline{u^2} - \frac{3}{2} \overline{u^2} \right) f_s + \left(\phi_{xx,2} + \phi_{yy,2} + \phi_{zz,2} - \frac{3}{2} \phi_{xx,2} - \frac{3}{2} \phi_{xx,2} \right) \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \\ &= C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-2\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2} \right) f_s + \left(-2\phi_{xx,2} + \phi_{yy,2} + \phi_{zz,2} \right) \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \\ &= C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-2\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left[-2 \left(P_{xx} - \frac{2}{3} P_k \right) + \left(P_{yy} - \frac{2}{3} P_k \right) + \left(P_{zz} - \frac{2}{3} P_k \right) \right] \\ &= C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-2\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left(-2P_{xx} + P_{yy} + P_{zz} \right) \\ &= C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-2\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left[4 \left(\overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} \right) - 2 \left(\overline{uv} \frac{\partial V}{\partial x} + \overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} \right) - 2 \left(\overline{uw} \frac{\partial W}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] \\ &= C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-2\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left[4 \left(\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} \right) - 2 \left(\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} \right) - 2 \left(\overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{yy,sl} + \phi_{yy,w} &= C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} (\bar{u}^2 - 2\bar{v}^2 + \bar{w}^2) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) (P_{xx} - 2P_{yy} + P_{zz}) \\
&= C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} (\bar{u}^2 - 2\bar{v}^2 + \bar{w}^2) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left[-2 \left(\bar{u}^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{u}\bar{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{u}\bar{w} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + 4 \left(\bar{u}\bar{v} \frac{\partial V}{\partial x} + \bar{v}^2 \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{v}\bar{w} \frac{\partial V}{\partial z} \right) - 2 \left(\bar{u}\bar{w} \frac{\partial W}{\partial x} + \bar{v}\bar{w} \frac{\partial W}{\partial y} + \bar{w}^2 \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] \\
&= C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} (\bar{u}^2 - 2\bar{v}^2 + \bar{w}^2) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left[-2 \left(\bar{u}\bar{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{u}\bar{w} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + 4 \left(\bar{v}^2 \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{v}\bar{w} \frac{\partial V}{\partial z} \right) - 2 \left(\bar{v}\bar{w} \frac{\partial W}{\partial y} + \bar{w}^2 \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{zz,sl} + \phi_{zz,w} &= C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 - 2\bar{w}^2) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) (P_{xx} + P_{yy} - 2P_{zz}) \\
&= C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 - 2\bar{w}^2) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left[-2 \left(\bar{u}^2 \frac{\partial U}{\partial x} + \bar{u}\bar{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{u}\bar{w} \frac{\partial U}{\partial z} \right) - 2 \left(\bar{u}\bar{v} \frac{\partial V}{\partial x} + \bar{v}^2 \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{v}\bar{w} \frac{\partial V}{\partial z} \right) + 4 \left(\bar{u}\bar{w} \frac{\partial W}{\partial x} + \bar{v}\bar{w} \frac{\partial W}{\partial y} + \bar{w}^2 \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right] \\
&= C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 - 2\bar{w}^2) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left[-2 \left(\bar{u}\bar{v} \frac{\partial U}{\partial y} + \bar{u}\bar{w} \frac{\partial U}{\partial z} \right) - 2 \left(\bar{v}^2 \frac{\partial V}{\partial y} + \bar{v}\bar{w} \frac{\partial V}{\partial z} \right) + 4 \left(\bar{v}\bar{w} \frac{\partial W}{\partial y} + \bar{w}^2 \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi_{yz,sl} + \phi_{yz,w} &= C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{v^2} - \frac{3}{2} \overline{w^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left(-\frac{3}{2} P_{yy} - \frac{3}{2} P_{zz} + 2P_k \right) \\
&= C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{v^2} - \frac{3}{2} \overline{w^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left[\frac{3}{2} 2 \left(\overline{uv} \frac{\partial V}{\partial x} + \overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \frac{3}{2} 2 \left(\overline{uw} \frac{\partial W}{\partial x} + \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2 \left(\overline{u^2} \frac{\partial U}{\partial x} + \overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \overline{uw} \left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x} \right) + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right) \right] \\
&= C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{v^2} - \frac{3}{2} \overline{w^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left[3 \left(\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} \right) + 3 \left(\overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \right) - 2 \left(\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right) \right] \\
&= C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{v^2} - \frac{3}{2} \overline{w^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left(\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} + \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - 2\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Assemblage des termes, équations RSM à intégrer

$$\begin{aligned}
 (R_{xx}) \rightarrow & \frac{\partial(\overline{u^2V})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u^2W})}{\partial z} = -2\overline{uv} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} - 2\overline{uw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} + C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{v} \frac{\partial \overline{uu}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{uu}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{uu}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{uu}}{\partial z} \right) \right] - \frac{2}{3} \varepsilon + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u^2}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{u^2}}{\partial z^2} \right) \\
 & + \alpha_0 \varepsilon \left(\frac{\overline{u^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{12} \alpha_1 \varepsilon \left[-4 \frac{\overline{u^2}}{k} + \frac{8}{3} + 2 \left(\frac{\overline{u^2}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{uv}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{uw}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{v^2}}{k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{vw}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{ww}}{k} \right)^2 \right] \\
 & + \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{u^2}}{2k} \\
 & + \frac{1}{6} \left[(\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} - (2\alpha_4 + 2\alpha_3) \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \right] \\
 & + C_{f_s,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-2\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left[4 \left(\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} \right) - 2 \left(\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} \right) - 2 \left(\overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (R_{yy}) \rightarrow & \frac{\partial(\overline{v^2V})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{v^2W})}{\partial z} = -2\overline{v^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} - 2\overline{vw} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} + C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{v} \frac{\partial \overline{vv}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{vv}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{vv}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{vv}}{\partial z} \right) \right] - \frac{2}{3} \varepsilon + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{v^2}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{v^2}}{\partial z^2} \right) \\
 & + \alpha_0 \varepsilon \left(\frac{\overline{v^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{12} \alpha_1 \varepsilon \left[-4 \frac{\overline{v^2}}{k} + \frac{8}{3} + \left(\frac{\overline{uv}}{k} \right)^2 + 2 \left(\frac{\overline{vv}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{vw}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{uu}}{k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{uw}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{ww}}{k} \right)^2 \right] + \alpha_2 k \frac{\partial V}{\partial y} \\
 & + \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{v^2}}{2k} \\
 & + \frac{1}{6} \left[-4\alpha_4 k \frac{\partial V}{\partial y} + (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} + (\alpha_4 - 2\alpha_3 - 3\alpha_5) \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} + 2(2\alpha_4 - \alpha_3) \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial y} - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \overline{ww} \frac{\partial W}{\partial z} \right] \\
 & + C_{f_s,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(\overline{u^2} - 2\overline{v^2} + \overline{w^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left[-2 \left(\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} \right) + 4 \left(\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} \right) - 2 \left(\overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_{zz}) \rightarrow & \frac{\partial(\overline{w^2V})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{w^2W})}{\partial z} = -2\overline{vw} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} - 2\overline{w^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{ww}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{ww}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{ww}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{ww}}{\partial z} \right) \right] - \frac{2}{3} \varepsilon + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{w^2}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{w^2}}{\partial z^2} \right) \\
& + \alpha_0 \varepsilon \left(\frac{\overline{ww}}{2k} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{12} \alpha_1 \varepsilon \left[-4 \frac{\overline{w^2}}{k} + \frac{8}{3} + \left(\frac{\overline{uw}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{vw}}{k} \right)^2 + 2 \left(\frac{\overline{w^2}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{u^2}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{v^2}}{k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{uv}}{k} \right)^2 \right] + \alpha_2 k \frac{\partial W}{\partial z} \\
& + \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{w^2}}{2k} \\
& + \frac{1}{6} \left[\begin{aligned} & (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} + (\alpha_4 - 2\alpha_3 - 3\alpha_5) \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} \\ & + 2(2\alpha_4 - \alpha_3) \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} - 4\alpha_4 k \frac{\partial W}{\partial z} - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned} \right] \\
& + C_{f_s,1} \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u^2} + \overline{v^2} - 2\overline{w^2}) f_s - C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left[-2 \left(\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} \right) - 2 \left(\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} \right) + 4 \left(\overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_{xy}) \rightarrow & \frac{\partial(\overline{uvV})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{uvW})}{\partial z} = -\overline{v^2} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} - \overline{vw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} - \overline{uv} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} - \overline{uw} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} + C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial z} \right) \right] + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{uv}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{uv}}{\partial z^2} \right) \\
& + \alpha_0 \varepsilon \frac{\overline{uv}}{2k} + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{4} \left(-\frac{\overline{w^2} \overline{uv}}{k} + \frac{\overline{uw} \overline{vw}}{k} + \frac{2 \overline{uv}}{3k} \right) + \alpha_2 k \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial y} \\
& + \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{uv}}{2k} \\
& + \frac{1}{4} \left[\frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\partial U}{\partial y} - (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{ww} \frac{\partial U}{\partial y} + 2\alpha_4 \overline{uv} \frac{\partial V}{\partial y} + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uw} \frac{\partial V}{\partial z} + (\alpha_4 - \alpha_5) \overline{uw} \frac{\partial W}{\partial y} + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{vw} \frac{\partial U}{\partial z} \right] \\
& + C_{f_s,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{u^2} - \frac{3}{2} \overline{v^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left(\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} - 2\overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_{xz}) \rightarrow \frac{\partial(\overline{uwV})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{uwW})}{\partial z} &= -\overline{vw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} - \overline{w^2} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} - \overline{uv} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} - \overline{uw} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \right) \right] + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{uw}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{uw}}{\partial z^2} \right) \\
&+ \alpha_0 \varepsilon \frac{\overline{uw}}{2k} + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{4} \left(-\frac{\overline{v^2} \overline{uw}}{k} + \frac{\overline{uv} \overline{vw}}{k} + \frac{2 \overline{uw}}{3k} \right) + \alpha_2 k \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial z} \\
&+ \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{uw}}{2k} \\
&+ \frac{1}{4} \left[\frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\partial U}{\partial z} - (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{v^2} \frac{\partial U}{\partial z} + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uv} \frac{\partial V}{\partial z} + (\alpha_4 - \alpha_5) \overline{uv} \frac{\partial W}{\partial y} + 2\alpha_4 \overline{uw} \frac{\partial W}{\partial z} + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{vw} \frac{\partial U}{\partial y} \right] \\
&+ C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{u^2} - \frac{3}{2} \overline{w^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left(\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} - 2\overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_{yz}) \rightarrow \frac{\partial(\overline{vwV})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{vwW})}{\partial z} &= -\overline{vw} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} - \overline{w^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} - \overline{v^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} - \overline{vw} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} \right) \right] + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{vw}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{vw}}{\partial z^2} \right) \\
&+ \alpha_0 \varepsilon \frac{\overline{vw}}{2k} + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{4} \left[-\frac{\overline{u^2} \overline{vw}}{k} + \frac{\overline{uv} \overline{uw}}{k} + \frac{2 \overline{vw}}{3k} \right] + \alpha_2 k \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \\
&+ \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{vw}}{2k} \\
&+ \frac{1}{4} \left[(\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial z} - (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uu} \frac{\partial V}{\partial z} + (\alpha_4 - \alpha_5) \overline{uu} \frac{\partial W}{\partial y} + \frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\partial V}{\partial z} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2k}{3} (\alpha_4 - \alpha_5) \frac{\partial W}{\partial y} + 2\alpha_4 \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial z} + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial y} + 2\alpha_4 \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial y} \right] \\
&+ C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{v^2} - \frac{3}{2} \overline{w^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left(\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} + \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} - 2\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} - 2\overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} \right)
\end{aligned}$$

Equation du taux de dissipation

Equation de ε , c'est celle du modèle k- ε sauf pour la diffusion turbulente pour laquelle on utilise une modélisation de (Daly & Harlow, 1970)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \overline{U_k} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_k} &= C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{u_i u_j} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \\ \overline{V} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \overline{W} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) \right] + C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) \right] + \nu \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x_j^2} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \\ \overline{V} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \overline{W} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\nu + C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{ww} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] + C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + C_\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \end{aligned}$$

Ici ε est la dissipation modifiée soit $\varepsilon = \varepsilon - D$. D est la valeur de la dissipation à la paroi $D = 2\nu \frac{k}{y^2}$

f_1 et f_2 sont des fonctions d'amortissement:

$$f_1 = 1 \text{ et } f_2 = 1 - 0.22 \exp \left(- \left(\frac{Rt}{6} \right)^2 \right) \text{ avec } Rt \text{ le Reynolds de turbulence } Rt = \frac{k^2}{\nu \varepsilon}$$

$$f_\mu = 1 - \exp \left(-0.0002 y^+ - 0.000065 y^{+2} \right)$$

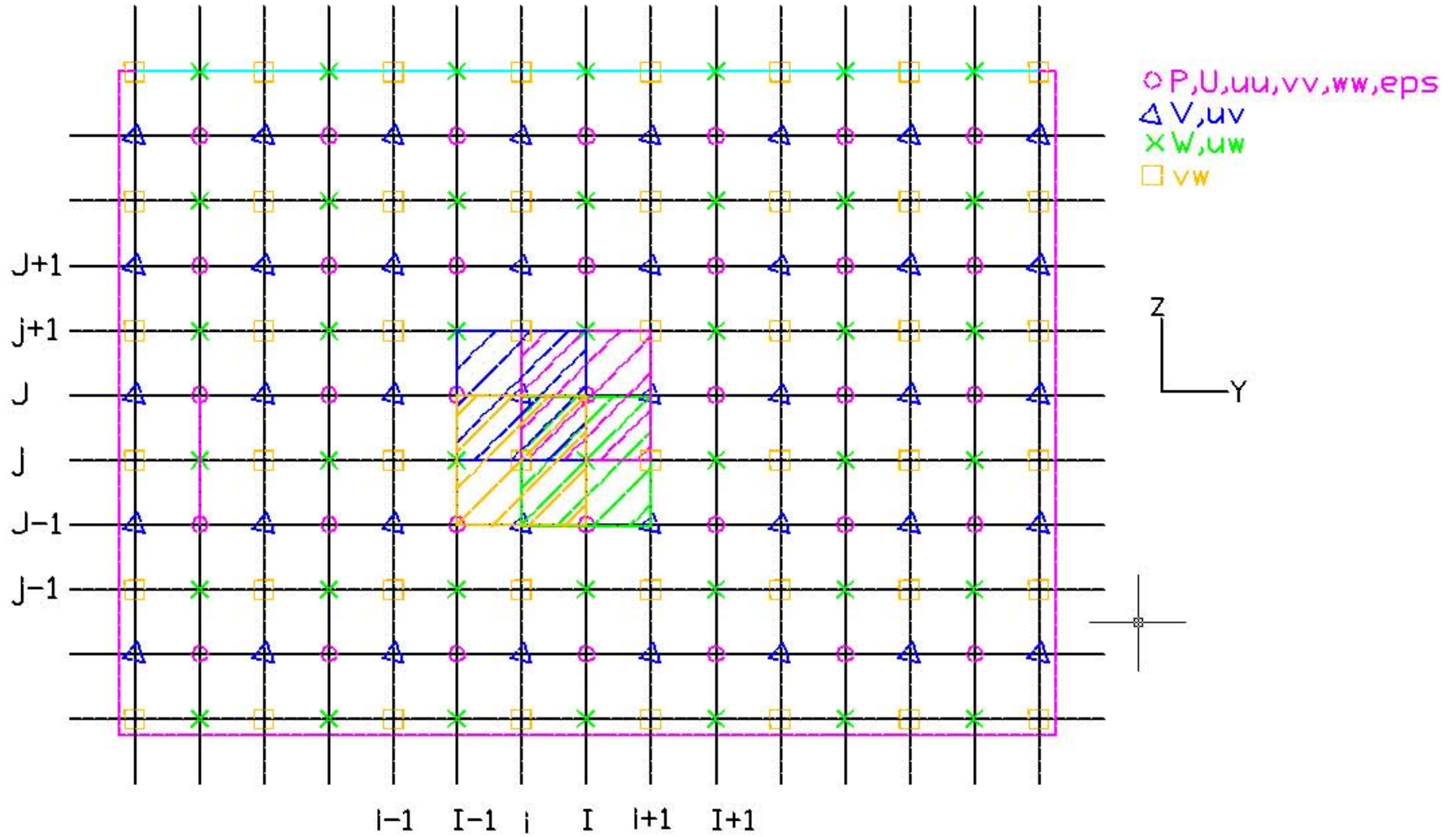
$$E = -2\nu \frac{\tilde{\varepsilon}}{y^2} \exp \left(-0.5 y^+ \right)$$

$$C_\varepsilon = 0.18 \quad C_{\varepsilon 1} = 1.44 \quad C_{\varepsilon 2} = 1.9$$

ANNEXE B Intégration des équations du modèle sur les grilles décalées avec schéma de discrétisation de type power-law

Intégration des équations de transport des corrélations doubles de vitesse fluctuante.....	141
Equations de Navier Stokes moyennées	162
Algorithme SIMPLE.....	165

Intégration des équations de transport des corrélations doubles de vitesse fluctuante



$$\begin{aligned}
(R_{xx}) \rightarrow & \frac{\partial(\overline{u^2V})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{u^2W})}{\partial z} = -2\overline{uv} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} - 2\overline{uw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} + C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{uu}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{uu}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{uu}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{uu}}{\partial z} \right) \right] + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{u^2}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{u^2}}{\partial z^2} \right) - \frac{2}{3} \varepsilon \\
& + \alpha_0 \varepsilon \left(\frac{\overline{u^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{12} \left[-4 \frac{\overline{u^2}}{k} + \frac{8}{3} + 2 \left(\frac{\overline{u^2}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{uv}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{uw}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{v^2}}{k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{vw}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{ww}}{k} \right)^2 \right] \\
& + \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{u^2}}{2k} \\
& + \frac{1}{6} \left[(\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \right] \\
& + C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-2\overline{u^2} + \overline{v^2} + \overline{w^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left[4 \left(\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} \right) - 2 \left(\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} \right) - 2 \left(\overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_{xx}) \rightarrow & \left[\overline{u^2V} \right]_w^e \delta_z + \left[\overline{u^2W} \right]_s^n \delta_y = \left[\left(\nu + C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \right) \frac{\partial \overline{uu}}{\partial y} \right]_w^e \delta_z + \left[\left(\nu + C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{ww} \right) \frac{\partial \overline{uu}}{\partial z} \right]_s^n \delta_y + C_s \left[\frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \overline{uu}}{\partial z} \right]_w^e \delta_z + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \overline{uu}}{\partial y} \right]_s^n \delta_y - \frac{2}{3} \varepsilon_p \delta_y \delta_z \\
& + \alpha_0 \varepsilon_p \left(\frac{\overline{u_p^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1 \varepsilon_p}{12} \left[-4 \frac{\overline{u_p^2}}{k} + \frac{8}{3} + 2 \left(\frac{\overline{u_p^2}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{uv_p}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{uw_p}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{v_p^2}}{k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{vw_p}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{ww_p}}{k} \right)^2 \right] \delta_y \delta_z \\
& + \alpha_3 \left[\overline{v_p^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_p + \overline{w_p^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \Big|_p + \overline{uv_p} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_p + \overline{uw_p} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_p + \overline{vw_p} \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_p + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \Big|_p \right) \right] \frac{\overline{u_p^2}}{2k} \delta_y \delta_z + C_{fs,1} \frac{\varepsilon_p}{k} f_s \left(-2\overline{u_p^2} + \overline{v_p^2} + \overline{w_p^2} \right) \delta_y \delta_z \\
& + \left[\left(\frac{1}{6} (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) - 4C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) - 2 \right) \overline{uv_p} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_p + \left(\frac{1}{6} (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) - 4C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_p}{k} f_w \right) - 2 \right) \overline{uw_p} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_p \right. \\
& + \left. \left[-\left(\frac{1}{3} (\alpha_4 + \alpha_3) - 2C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_p}{k} f_w \right) \right) \overline{v_p^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_p - \left(\frac{1}{3} (\alpha_4 + \alpha_3) - 2C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_p}{k} f_w \right) \right) \overline{vw_p} \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_p + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \Big|_p \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \left(\frac{1}{3} (\alpha_4 + \alpha_3) - 2C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_p}{k} f_w \right) \right) \overline{w_p^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \Big|_p \right] \right] \delta_y \delta_z
\end{aligned}$$

$$a_{uu_P} \overline{uu}_P = a_{uu_E} \overline{uu}_E + a_{uu_W} \overline{uu}_W + a_{uu_N} \overline{uu}_N + a_{uu_S} \overline{uu}_S + b_{uu} \quad a_{uu_E} = D_{uu} e \left[0, (1-0.1|Pe_e|)^5 \right] + [-Fe, 0] \quad a_{uu_W} = D_{uu} w \left[0, (1-0.1|Pe_w|)^5 \right] + [Fw, 0]$$

$$a_{uu_N} = D_{uu} n \left[0, (1-0.1|Pe_n|)^5 \right] + [-Fn, 0] \quad a_{uu_S} = D_{uu} s \left[0, (1-0.1|Pe_s|)^5 \right] + [Fs, 0]$$

$$b_{uu} = -\frac{1}{3} \varepsilon_p \delta_y \delta_z (2 + \alpha_0) + C_{fs,1} \frac{\varepsilon_p}{k} f_s (-2\overline{u_p^2} + \overline{v_p^2} + \overline{w_p^2}) \delta_y \delta_z + \frac{1}{12} \alpha_1 \varepsilon_p \left[\frac{8}{3} + \left(\frac{\overline{uv}_p}{k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{uw}_p}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{v_p^2}}{k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{vw}_p}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{ww}_p}{k} \right)^2 \right] \delta_y \delta_z$$

$$+ \left(\frac{v_{I+1,J}^{DH} + v_{I,J}^{DH}}{2} \frac{\overline{uu}_{I+1,J+1} + \overline{uu}_{I,J+1} - \overline{uu}_{I+1,J-1} - \overline{uu}_{I,J-1}}{4\delta_z} \right) \delta_z - \left(\frac{v_{I,J}^{DH} + v_{I-1,J}^{DH}}{2} \frac{\overline{uu}_{I,J+1} + \overline{uu}_{I-1,J+1} - \overline{uu}_{I,J-1} - \overline{uu}_{I-1,J-1}}{4\delta_z} \right) \delta_z$$

$$+ \left(\frac{v_{I,J+1}^{ww} + v_{I,J}^{ww}}{2} \frac{\overline{uu}_{I+1,J+1} + \overline{uu}_{I+1,J} - \overline{uu}_{I-1,J+1} - \overline{uu}_{I-1,J}}{4\delta_y} \right) \delta_y - \left(\frac{v_{I,J}^{ww} + v_{I,J-1}^{ww}}{2} \frac{\overline{uu}_{I+1,J} + \overline{uu}_{I+1,J-1} - \overline{uu}_{I-1,J} - \overline{uu}_{I-1,J-1}}{4\delta_y} \right) \delta_y$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{6} (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) - 4f_s C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_p}{k} f_w \right) - 2 \right) \overline{uv}_p \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_P + \left(\frac{1}{6} (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) - 4f_s C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_p}{k} f_w \right) - 2 \right) \overline{uw}_p \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_P \right. \\ \left. - \left(\frac{1}{3} (\alpha_4 + \alpha_3) - 2f_s C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_p}{k} f_w \right) \right) \left(\overline{v_p^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_P + \overline{w_p^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \Big|_P \right) - \left(\frac{1}{3} (\alpha_4 + \alpha_3) - 2f_s C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_p}{k} f_w \right) \right) \overline{vw}_p \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_P + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \Big|_P \right) \right] \delta_y \delta_z$$

$$a_{uu_P} = a_{uu_E} + a_{uu_W} + a_{uu_N} + a_{uu_S} + \frac{\alpha_0 \varepsilon_p}{2k} \delta_y \delta_z + \frac{1}{6k} \alpha_1 \varepsilon_p \left(-2 + \frac{\overline{u_p^2}}{k} \right) \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_3}{2k} \delta_y \delta_z \left[\overline{v_p^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_P + \overline{w_p^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \Big|_P + \overline{uv}_p \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_P + \overline{uw}_p \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_P + \overline{vw}_p \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_P + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \Big|_P \right) \right]$$

$$v_{I,J}^{DH} = Cs \frac{k_{I,J} \overline{vw}_{i,j} + \overline{vw}_{i,j+1} + \overline{vw}_{i+1,j} + \overline{vw}_{i+1,j+1}}{\varepsilon_{I,J}} \quad Pe_{uu_e} = \frac{Fe}{Dy_{uu}} \quad Pe_{uu_w} = \frac{Fw}{Dy_{uu}} \quad Pe_{uu_n} = \frac{Fn}{Dz_{uu}} \quad Pe_{uu_s} = \frac{Fs}{Dz_{uu}}$$

$$v_{I,J}^{vv} = Cs \frac{k_{I,J} \overline{vv}_{I,J}}{\varepsilon_{I,J}} \quad v_{I,J}^{ww} = Cs \frac{k_{I,J} \overline{ww}_{I,J}}{\varepsilon_{I,J}} \quad Fe = V_e \delta_z = V_{i+1,J} \delta_z \quad Fw = V_w \delta_z = V_{i,J} \delta_z \quad Fn = V_n \delta_z = W_{I,j+1} \delta_y \quad Fs = V_s \delta_z = W_{I,j} \delta_y$$

$$D_{uu} e = \left(v + \frac{v_{I+1,J}^{vv} + v_{I,J}^{vv}}{2} \right) \frac{\delta_z}{\delta_y} \quad D_{uu} w = \left(v + \frac{v_{I,J}^{ww} + v_{I-1,J}^{ww}}{2} \right) \frac{\delta_z}{\delta_y} \quad D_{uu} n = \left(v + \frac{v_{I,J+1}^{ww} + v_{I,J}^{ww}}{2} \right) \frac{\delta_y}{\delta_z} \quad D_{uu} s = \left(v + \frac{v_{I,J}^{ww} + v_{I,J-1}^{ww}}{2} \right) \frac{\delta_y}{\delta_z}$$

$$\begin{aligned}
b_{uu} = & -\frac{1}{3}(2+\alpha_0)\varepsilon_{I,J}\delta_y\delta_z + C_{fs,1}\frac{\varepsilon_{I,J}}{k}f_s\left(-2\overline{u_{I,J}^2} + \overline{v_{I,J}^2} + \overline{w_{I,J}^2}\right)\delta_y\delta_z \\
& + \frac{1}{12}\alpha_1\varepsilon_{I,J}\left[\frac{8}{3} + \left(\frac{\overline{uv_{i,j}} + \overline{uv_{i+1,j}}}{2k_{I,J}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{uw_{I,j+1}} + \overline{uw_{I,j}}}{2k_{I,J}}\right)^2 - \left(\frac{\overline{v_{I,J}^2}}{k_{I,J}}\right)^2 - 2\left(\frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i,j+1}} + \overline{vw_{i+1,j+1}} + \overline{vw_{i+1,j}}}{4k_{I,J}}\right)^2 - \left(\frac{\overline{ww_{I,J}}}{k_{I,J}}\right)^2\right]\delta_y\delta_z \\
& + \left(\frac{v_{I+1,J}^{DH} + v_{I,J}^{DH}}{2}\frac{\overline{uu_{I+1,J+1}} + \overline{uu_{I,J+1}} - \overline{uu_{I+1,J-1}} - \overline{uu_{I,J-1}}}{4\delta_z}\right)\delta_z - \left(\frac{v_{I,J}^{DH} + v_{I-1,J}^{DH}}{2}\frac{\overline{uu_{I,J+1}} + \overline{uu_{I-1,J+1}} - \overline{uu_{I,J-1}} - \overline{uu_{I-1,J-1}}}{4\delta_z}\right)\delta_z \\
& + \left(\frac{v_{I,J+1}^{ww} + v_{I,J}^{ww}}{2}\frac{\overline{uu_{I+1,J+1}} + \overline{uu_{I+1,J}} - \overline{uu_{I-1,J+1}} - \overline{uu_{I-1,J}}}{4\delta_y}\right)\delta_y - \left(\frac{v_{I,J}^{ww} + v_{I-1,J}^{ww}}{2}\frac{\overline{uu_{I+1,J}} + \overline{uu_{I+1,J-1}} - \overline{uu_{I-1,J}} - \overline{uu_{I-1,J-1}}}{4\delta_y}\right)\delta_y \\
& + \left[\left(\frac{1}{6}(\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) - 4C_2\left(C_{fs,2}f_s + C_{w,2}\frac{\varepsilon_{I,J}}{k}f_w\right) - 2\right)\left(\frac{\overline{uv_{i,j}} + \overline{uv_{i+1,j}}}{2}\frac{\overline{U_{I+1,J}} - \overline{U_{I-1,J}}}{2\delta_y} + \frac{\overline{uw_{I,j+1}} + \overline{uw_{I,j}}}{2}\frac{\overline{U_{I,J+1}} - \overline{U_{I,J-1}}}{2\delta_z}\right)\right. \\
& + \left. -\left(\frac{1}{3}(\alpha_4 + \alpha_3) - 2C_2\left(C_{fs,2}f_s + C_{w,2}\frac{\varepsilon_{I,J}}{k}f_w\right)\right)\left(\frac{\overline{v_{I,J}^2}}{v_{I,J}^2}\frac{\overline{V_{i+1,J}} - \overline{V_{i,J}}}{\delta_y} + \frac{\overline{w_{I,J}^2}}{w_{I,J}^2}\frac{\overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I,j}}}{\delta_z}\right)\right. \\
& \left. -\left(\frac{1}{3}(\alpha_4 + \alpha_3) - 2C_2\left(C_{fs,2}f_s + C_{w,2}\frac{\varepsilon_{I,J}}{k}f_w\right)\right)\frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i,j+1}} + \overline{vw_{i+1,j+1}} + \overline{vw_{i+1,j}}}{4}\left(\frac{\overline{V_{i,J+1}} + \overline{V_{i+1,J+1}} - \overline{V_{i,J-1}} - \overline{V_{i+1,J-1}}}{4\delta_z} + \frac{\overline{W_{I+1,j}} + \overline{W_{I+1,j+1}} - \overline{W_{I-1,j}} - \overline{W_{I-1,j+1}}}{4\delta_y}\right)\right]\delta_y\delta_z \\
a_{uu_P} = & a_{uu_E} + a_{uu_W} + a_{uu_N} + a_{uu_S} - \left\{ \begin{aligned} & \frac{\alpha_0\varepsilon_{I,J}}{2k}\delta_y\delta_z + \frac{\alpha_1\varepsilon_{I,J}}{6k}\left(-2 + \frac{\overline{u_{I,J}^2}}{k}\right)\delta_y\delta_z \\ & + \frac{\alpha_3}{2k}\delta_y\delta_z \left[\frac{\overline{v_{I,J}^2}}{v_{I,J}^2}\frac{\overline{V_{i+1,J}} - \overline{V_{i,J}}}{\delta_y} + \frac{\overline{w_{I,J}^2}}{w_{I,J}^2}\frac{\overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I,j}}}{\delta_z} + \frac{\overline{uv_{i,j}} + \overline{uv_{i+1,j}}}{2}\frac{\overline{U_{I+1,J}} - \overline{U_{I-1,J}}}{2\delta_y} + \frac{\overline{uw_{I,j+1}} + \overline{uw_{I,j}}}{2}\frac{\overline{U_{I,J+1}} - \overline{U_{I,J-1}}}{2\delta_z} \right. \\ & \left. + \frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i,j+1}} + \overline{vw_{i+1,j+1}} + \overline{vw_{i+1,j}}}{4}\left(\frac{\overline{V_{i,J+1}} + \overline{V_{i+1,J+1}} - \overline{V_{i,J-1}} - \overline{V_{i+1,J-1}}}{4\delta_z} + \frac{\overline{W_{I+1,j}} + \overline{W_{I+1,j+1}} - \overline{W_{I-1,j}} - \overline{W_{I-1,j+1}}}{4\delta_y}\right) \right] \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_{yy}) \rightarrow & \frac{\partial(\overline{v^2V})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{v^2W})}{\partial z} = -2\overline{v^2} \frac{\partial\overline{V}}{\partial y} - 2\overline{vw} \frac{\partial\overline{V}}{\partial z} + C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial\overline{v}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial\overline{v}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial\overline{v}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial\overline{v}}{\partial z} \right) \right] - \frac{2}{3} \varepsilon + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{v^2}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{v^2}}{\partial z^2} \right) \\
& + \alpha_0 \varepsilon \left(\frac{\overline{v^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{12} \left[-4 \frac{\overline{v^2}}{k} + \frac{8}{3} + \left(\frac{\overline{uv}}{k} \right)^2 + 2 \left(\frac{\overline{vw}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{vw}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{uu}}{k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{uw}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{ww}}{k} \right)^2 \right] + \alpha_2 k \frac{\partial\overline{V}}{\partial y} \\
& + \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial\overline{V}}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial\overline{W}}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial\overline{U}}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial\overline{U}}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial\overline{V}}{\partial z} + \frac{\partial\overline{W}}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{v^2}}{2k} \\
& + \frac{1}{6} \left[-4\alpha_4 k \frac{\partial\overline{V}}{\partial y} + (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) \overline{uv} \frac{\partial\overline{U}}{\partial y} + (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) \overline{vw} \frac{\partial\overline{V}}{\partial z} + (\alpha_4 - 2\alpha_3 - 3\alpha_5) \overline{vw} \frac{\partial\overline{W}}{\partial y} + 2(2\alpha_4 - \alpha_3) \overline{vw} \frac{\partial\overline{V}}{\partial y} - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \overline{uw} \frac{\partial\overline{U}}{\partial z} - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \overline{ww} \frac{\partial\overline{W}}{\partial z} \right] \\
& + C_{f_s,1} \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u^2} - 2\overline{v^2} + \overline{w^2}) f_s - C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left[-2 \left(\overline{uv} \frac{\partial\overline{U}}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial\overline{U}}{\partial z} \right) + 4 \left(\overline{v^2} \frac{\partial\overline{V}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial\overline{V}}{\partial z} \right) - 2 \left(\overline{vw} \frac{\partial\overline{W}}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial\overline{W}}{\partial z} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_{yy}) \rightarrow & \left[\overline{v^2V} \right]_w^e \delta_z + \left[\overline{v^2W} \right]_s^n \delta_y = \left[\left(\nu + C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \right) \frac{\partial\overline{v}}{\partial y} \right]_w^e \delta_z + \left[\left(\nu + C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{ww} \right) \frac{\partial\overline{v}}{\partial z} \right]_s^n \delta_y + \left[C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial\overline{v}}{\partial z} \right]_w^e \delta_z + \left[C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial\overline{v}}{\partial z} \right]_s^n \delta_y \\
& - \frac{2}{3} \varepsilon_P \delta_y \delta_z + \alpha_0 \varepsilon_P \left(\frac{\overline{v_P^2}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1 \varepsilon_P}{12} \left[-4 \frac{\overline{v_P^2}}{k} + \frac{8}{3} + \left(\frac{\overline{uv_P}}{k} \right)^2 + 2 \left(\frac{\overline{v_P^2}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{vw_P}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{uu_P}}{k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{uw_P}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{ww_P}}{k} \right)^2 \right] \delta_y \delta_z + \alpha_2 k [V]_w^e \delta_z \\
& + \alpha_3 \left[\overline{v_P^2} \frac{\partial\overline{V}}{\partial y} \right]_P + \left[\overline{w_P^2} \frac{\partial\overline{W}}{\partial z} \right]_P + \left[\overline{uv_P} \frac{\partial\overline{U}}{\partial y} \right]_P + \left[\overline{uw_P} \frac{\partial\overline{U}}{\partial z} \right]_P + \left[\overline{vw_P} \left(\frac{\partial\overline{V}}{\partial z} + \frac{\partial\overline{W}}{\partial y} \right) \right]_P \right] \frac{\overline{v_P^2}}{2k} \delta_y \delta_z + C_{f_s,1} \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_P^2} - 2\overline{v_P^2} + \overline{w_P^2}) f_s \delta_y \delta_z \\
& + \left[-\frac{2}{3} \alpha_4 k \frac{\partial\overline{V}}{\partial y} \right]_P + \left[\frac{1}{6} (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) + 2C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) \right] \overline{uv_P} \frac{\partial\overline{U}}{\partial y} \right]_P + \left[\frac{1}{6} (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) - 4C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) - 2 \right] \overline{vw_P} \frac{\partial\overline{V}}{\partial z} \right]_P \\
& + \left[\frac{1}{6} (\alpha_4 - 2\alpha_3 - 3\alpha_5) + 2C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) \right] \overline{vw_P} \frac{\partial\overline{W}}{\partial y} \right]_P + \left[\frac{1}{3} (2\alpha_4 - \alpha_3) - 4C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) - 2 \right] \overline{vw_P} \frac{\partial\overline{V}}{\partial y} \right]_P \\
& + \left[-\frac{1}{3} (\alpha_4 + \alpha_3) + 2C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) \right] \overline{uw_P} \frac{\partial\overline{U}}{\partial z} \right]_P + \left[-\frac{1}{3} (\alpha_4 + \alpha_3) + 2C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) \right] \overline{ww_P} \frac{\partial\overline{W}}{\partial z} \right]_P \delta_y \delta_z
\end{aligned}$$

$$a_{vv_P} \overline{vw_P} = a_{vv_E} \overline{vw_E} + a_{vv_W} \overline{vw_W} + a_{vv_N} \overline{vw_N} + a_{vv_S} \overline{vw_S} + b_{vv}$$

$$a_{vv_E} = D_{vv} e \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{vv_e}| \right)^5 \right] + [-Fe, 0] \quad a_{vv_W} = D_{vw} w \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{vv_w}| \right)^5 \right] + [Fw, 0]$$

$$a_{vv_N} = D_{vn} n \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{vv_n}| \right)^5 \right] + [-Fn, 0] \quad a_{vv_S} = D_{vs} s \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{vv_s}| \right)^5 \right] + [Fs, 0]$$

$$b_{vv} = 2 \left[Cs \frac{k^2}{\varepsilon} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial y} \right]^n \delta_y - \frac{1}{3} (2 + \alpha_0) \varepsilon_P \delta_y \delta_z + C_{fs,1} \frac{\varepsilon_P}{k} (\overline{u_P^2} - 2\overline{v_P^2} + \overline{w_P^2}) f_s \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1 \varepsilon_P}{12} \left[\frac{8}{3} + \left(\frac{\overline{uv_P}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{vw_P}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{uu_P}}{k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{uw_P}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{ww_P}}{k} \right)^2 \right] \delta_y \delta_z$$

$$+ \left(\frac{v_{I+1,J}^{DH} + v_{I,J}^{DH}}{2} \frac{\overline{vw_{I+1,J+1}} + \overline{vw_{I,J+1}} - \overline{vw_{I+1,J-1}} - \overline{vw_{I,J-1}}}{4\delta_z} \right) \delta_z - \left(\frac{v_{I,J}^{DH} + v_{I-1,J}^{DH}}{2} \frac{\overline{vw_{I,J+1}} + \overline{vw_{I-1,J+1}} - \overline{vw_{I,J-1}} - \overline{vw_{I-1,J-1}}}{4\delta_z} \right) \delta_z + \alpha_2 k_P (V_e - V_w) \delta_z$$

$$+ \left(\frac{v_{I,J+1}^{DH} + v_{I,J}^{DH}}{2} \frac{\overline{vw_{I+1,J+1}} + \overline{vw_{I+1,J}} - \overline{vw_{I-1,J+1}} - \overline{vw_{I-1,J}}}{4\delta_y} \right) \delta_y - \left(\frac{v_{I,J}^{DH} + v_{I-1,J}^{DH}}{2} \frac{\overline{vw_{I+1,J}} + \overline{vw_{I+1,J-1}} - \overline{vw_{I-1,J}} - \overline{vw_{I-1,J-1}}}{4\delta_y} \right) \delta_y$$

$$+ \left[\begin{aligned} & -\frac{2}{3} \alpha_4 k \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_P + \left(\frac{1}{6} (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) + 2C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) \right) \overline{uv_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_P + \left(\frac{1}{6} (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) - 4C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) - 2 \right) \overline{vw_P} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_P \\ & + \left(\frac{1}{6} (\alpha_4 - 2\alpha_3 - 3\alpha_5) + 2C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) \right) \overline{vw_P} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \Big|_P \\ & + \left(\frac{1}{3} (2\alpha_4 - \alpha_3) - 4C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) - 2 \right) \overline{vw_P} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_P + \left(-\frac{1}{3} (\alpha_4 + \alpha_3) + 2C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) \right) \left(\overline{uw_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_P + \overline{ww_P} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \Big|_P \right) \end{aligned} \right] \delta_y \delta_z$$

$$a_{vv_P} = a_{vv_E} + a_{vv_W} + a_{vv_N} + a_{vv_S} + \frac{\alpha_0 \varepsilon_P}{2k} \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1 \varepsilon_P}{6k} \left(-2 + \frac{\overline{vw_P}}{k} \right) \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_3}{2k} \delta_y \delta_z \left[\overline{v_P^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_P + \overline{w_P^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \Big|_P + \overline{uv_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_P + \overline{uw_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_P + \overline{vw_P} \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_P + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \Big|_P \right) \right]$$

$$Fe = V_e \delta_z = V_{i+1,J} \delta_z \quad Fw = V_w \delta_z = V_{i,J} \delta_z \quad Fn = V_n \delta_z = W_{I,j+1} \delta_y \quad Fs = V_s \delta_z = W_{I,J} \delta_y$$

$$D_{vv} e = \left(v + \frac{v_{I+1,J}^{vv} + v_{I,J}^{vv}}{2} \right) \frac{\delta_z}{\delta_y} \quad D_{vw} w = \left(v + \frac{v_{I,J}^{vw} + v_{I-1,J}^{vw}}{2} \right) \frac{\delta_z}{\delta_y} \quad D_{vn} n = \left(v + \frac{v_{I,J+1}^{vn} + v_{I,J}^{vn}}{2} \right) \frac{\delta_y}{\delta_z} \quad D_{vs} s = \left(v + \frac{v_{I,J}^{vs} + v_{I,J-1}^{vs}}{2} \right) \frac{\delta_y}{\delta_z}$$

$$\begin{aligned}
(R_{zz}) \rightarrow & \frac{\partial(\overline{w^2V})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{w^2W})}{\partial z} = -2\overline{vw} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} - 2\overline{w^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{ww}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{ww}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{ww}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{ww}}{\partial z} \right) \right] - \frac{2}{3} \varepsilon + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{w^2}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{w^2}}{\partial z^2} \right) \\
& + \alpha_0 \varepsilon \left(\frac{\overline{ww}}{2k} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{12} \alpha_1 \varepsilon \left[-4 \frac{\overline{w^2}}{k} + \frac{8}{3} + \left(\frac{\overline{uw}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{vw}}{k} \right)^2 + 2 \left(\frac{\overline{w^2}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{u^2}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{v^2}}{k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{uv}}{k} \right)^2 \right] + \alpha_2 k \frac{\partial W}{\partial z} \\
& + \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{w^2}}{2k} \\
& + \frac{1}{6} \left[(\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} + (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} + (\alpha_4 - 2\alpha_3 - 3\alpha_5) \overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} + 2(2\alpha_4 - \alpha_3) \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} - 4\alpha_4 k \frac{\partial W}{\partial z} - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} - 2(\alpha_4 + \alpha_3) \overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} \right] \\
& + C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u^2} + \overline{v^2} - 2\overline{w^2}) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left[-2 \left(\overline{uv} \frac{\partial U}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial U}{\partial z} \right) - 2 \left(\overline{v^2} \frac{\partial V}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial V}{\partial z} \right) + 4 \left(\overline{vw} \frac{\partial W}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_{zz}) \rightarrow & \left[\overline{w^2V} \right]_w^e \delta_z + \left[\overline{w^2W} \right]_s^n \delta_y = \left[\left(\nu + C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \right) \frac{\partial \overline{ww}}{\partial y} \right]_w^e \delta_z + \left[\left(\nu + C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{ww} \right) \frac{\partial \overline{ww}}{\partial z} \right]_s^n \delta_y + \left[C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \overline{ww}}{\partial z} \right]_w^e \delta_z + \left[C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \overline{ww}}{\partial y} \right]_s^n \delta_y \\
& - \frac{2}{3} \varepsilon_P \delta_y \delta_z + \alpha_0 \varepsilon_P \left(\frac{\overline{ww_P}}{2k} - \frac{1}{3} \right) \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1 \varepsilon_P}{12} \delta_y \delta_z \left[-4 \frac{\overline{w_P^2}}{k} + \frac{8}{3} + \left(\frac{\overline{uw_P}}{k} \right)^2 + \left(\frac{\overline{vw_P}}{k} \right)^2 + 2 \left(\frac{\overline{w_P^2}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{u_P^2}}{k} \right)^2 - \left(\frac{\overline{v_P^2}}{k} \right)^2 - 2 \left(\frac{\overline{uv_P}}{k} \right)^2 \right] + \alpha_2 k \left[\overline{W} \right]_s^n \delta_y \\
& + \alpha_3 \left[\overline{v_P^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_P + \overline{w_P^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \Big|_P + \overline{uv_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_P + \overline{uw_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_P + \overline{vw_P} \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_P + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \Big|_P \right) \right] \frac{\overline{w_P^2}}{2k} \delta_y \delta_z + C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u_P^2} + \overline{v_P^2} - 2\overline{w_P^2}) f_s \delta_y \delta_z \\
& + \left[-\frac{2}{3} \alpha_4 k \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \Big|_P + \left(\frac{1}{6} (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) + 2C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) \right) \overline{uw_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_P + \left(\frac{1}{6} (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) + 2C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) \right) \overline{vw_P} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_P \right. \\
& + \left. \left(\frac{1}{6} (\alpha_4 - 2\alpha_3 - 3\alpha_5) - 4C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) - 2 \right) \overline{vw_P} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \Big|_P + \left(\frac{1}{3} (2\alpha_4 - \alpha_3) - 4C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) - 2 \right) \overline{w_P^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \Big|_P \right. \\
& \left. + \left(-\frac{1}{3} (\alpha_4 + \alpha_3) + 2C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) \right) \overline{v_P^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_P + \left(-\frac{1}{3} (\alpha_4 + \alpha_3) + 2C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) \right) \overline{uv_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_P \right] \delta_y \delta_z
\end{aligned}$$

$$a_{ww_P} \overline{ww}_P = a_{ww_E} \overline{ww}_E + a_{ww_W} \overline{ww}_W + a_{ww_N} \overline{ww}_N + a_{ww_S} \overline{ww}_S + b_{ww}$$

$$a_{ww_E} = D_{ww} e \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{ww_e}|\right)^5 \right] + [-Fe, 0] \quad a_{ww_W} = D_{ww} w \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{ww_w}|\right)^5 \right] + [Fw, 0]$$

$$a_{ww_N} = D_{ww} n \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{ww_n}|\right)^5 \right] + [-Fn, 0] \quad a_{ww_S} = D_{ww} s \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{ww_s}|\right)^5 \right] + [Fs, 0]$$

$$b_{ww} = -\frac{1}{3}(2 + \alpha_0) \varepsilon_P \delta_y \delta_z + C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} (\overline{u^2_P} + \overline{v^2_P} - 2\overline{w^2_P}) f_s \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1 \varepsilon_P}{12} \left[\frac{8}{3} + \left(\frac{\overline{uw_P}}{k}\right)^2 + \left(\frac{\overline{vw_P}}{k}\right)^2 - \left(\frac{\overline{u^2_P}}{k}\right)^2 - \left(\frac{\overline{v^2_P}}{k}\right)^2 - 2\left(\frac{\overline{uv_P}}{k}\right)^2 \right] \delta_y \delta_z$$

$$+ \left(\frac{v_{I+1,J}^{DH} + v_{I,J}^{DH}}{2} \frac{\overline{ww_{I+1,J+1}} + \overline{ww_{I,J+1}} - \overline{ww_{I+1,J-1}} - \overline{ww_{I,J-1}}}{4\delta_z} \right) \delta_z - \left(\frac{v_{I,J}^{DH} + v_{I-1,J}^{DH}}{2} \frac{\overline{ww_{I,J+1}} + \overline{ww_{I-1,J+1}} - \overline{ww_{I,J-1}} - \overline{ww_{I-1,J-1}}}{4\delta_z} \right) \delta_z + \alpha_2 k [W]_s^n \delta_y$$

$$+ \left(\frac{v_{I,J+1}^{DH} + v_{I,J}^{DH}}{2} \frac{\overline{ww_{I+1,J+1}} + \overline{ww_{I+1,J}} - \overline{ww_{I-1,J+1}} - \overline{ww_{I-1,J}}}{4\delta_y} \right) \delta_y - \left(\frac{v_{I,J}^{DH} + v_{I,J-1}^{DH}}{2} \frac{\overline{ww_{I+1,J}} + \overline{ww_{I+1,J-1}} - \overline{ww_{I-1,J}} - \overline{ww_{I-1,J-1}}}{4\delta_y} \right) \delta_y$$

$$+ \left[\begin{aligned} & -\frac{2}{3} \alpha_4 k \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_P + \left(\frac{1}{6} (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) + 2C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \right) \overline{uw_P} \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_P + \left(\frac{1}{6} (\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) + 2C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \right) \overline{vw_P} \frac{\partial V}{\partial z} \Big|_P \\ & + \left(\frac{1}{6} (\alpha_4 - 2\alpha_3 - 3\alpha_5) - 4C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) - 2 \right) \overline{vw_P} \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_P \\ & + \left(\frac{1}{3} (2\alpha_4 - \alpha_3) - 4C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) - 2 \right) \overline{w^2_P} \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_P + \left(-\frac{1}{3} (\alpha_4 + \alpha_3) + 2C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \right) \left(\overline{v^2_P} \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_P + \overline{uv_P} \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_P \right) \end{aligned} \right] \delta_y \delta_z$$

$$a_{ww_P} = a_{ww_E} + a_{ww_W} + a_{ww_N} + a_{ww_S} + \frac{\alpha_0 \varepsilon_P}{2k} \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1 \varepsilon_P}{6k} \left(-2 + \frac{\overline{w^2_P}}{k} \right) \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_3}{2k} \left[\overline{v^2_P} \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_P + \overline{w^2} \frac{\partial W}{\partial z} \Big|_P + \overline{uv_P} \frac{\partial U}{\partial y} \Big|_P + \overline{uw_P} \frac{\partial U}{\partial z} \Big|_P + \overline{vw_P} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \Big|_P + \frac{\partial W}{\partial y} \Big|_P \right) \right] \delta_y \delta_z$$

$$Fe = V_e \delta_z \quad Fw = V_w \delta_z \quad Fn = W_n \delta_y \quad Fs = W_s \delta_y$$

$$D_{ww} e = \left(v + \frac{v_{I+1,J}^{vw} + v_{I,J}^{vw}}{2} \right) \frac{\delta_z}{\delta_y} \quad D_{ww} w = \left(v + \frac{v_{I,J}^{vw} + v_{I-1,J}^{vw}}{2} \right) \frac{\delta_z}{\delta_y} \quad D_{ww} n = \left(v + \frac{v_{I,J+1}^{ww} + v_{I,J}^{ww}}{2} \right) \frac{\delta_y}{\delta_z} \quad D_{ww} s = \left(v + \frac{v_{I,J}^{ww} + v_{I,J-1}^{ww}}{2} \right) \frac{\delta_y}{\delta_z}$$

$$\begin{aligned}
b_{ww} = & -\frac{1}{3}(2+\alpha_0)\varepsilon_{I,J}\delta_y\delta_z + C_{fs,1}\frac{\varepsilon}{k}(\overline{u^2_{I,J}} + \overline{v^2_{I,J}} - 2\overline{w^2_{I,J}})f_s\delta_y\delta_z \\
& + \frac{\alpha_1\varepsilon_{I,J}}{12}\left[\frac{8}{3} + \left(\frac{\overline{uw_{I,j+1}} + \overline{uw_{I,j}}}{2k_{I,J}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i,j+1}} + \overline{vw_{i+1,j+1}} + \overline{vw_{i+1,j}}}{4k_{I,J}}\right)^2 - \left(\frac{\overline{u^2_{I,J}}}{k}\right)^2 - \left(\frac{\overline{v^2_{I,J}}}{k}\right)^2 - 2\left(\frac{\overline{uv_{i,j}} + \overline{uv_{i+1,j}}}{2k_{I,J}}\right)^2\right]\delta_y\delta_z \\
& + \left(\frac{\nu_{I+1,J}^{DH} + \nu_{I,J}^{DH}}{2}\frac{\overline{ww_{I+1,J+1}} + \overline{ww_{I,J+1}} - \overline{ww_{I+1,J-1}} - \overline{ww_{I,J-1}}}{4\delta_z}\right)\delta_z - \left(\frac{\nu_{I,J}^{DH} + \nu_{I-1,J}^{DH}}{2}\frac{\overline{ww_{I,J+1}} + \overline{ww_{I-1,J+1}} - \overline{ww_{I,J-1}} - \overline{ww_{I-1,J-1}}}{4\delta_z}\right)\delta_z + \alpha_2k(\overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I,j}})\delta_y \\
& + \left(\frac{\nu_{I,J+1}^{DH} + \nu_{I,J}^{DH}}{2}\frac{\overline{ww_{I+1,J+1}} + \overline{ww_{I+1,J}} - \overline{ww_{I-1,J+1}} - \overline{ww_{I-1,J}}}{4\delta_y}\right)\delta_y - \left(\frac{\nu_{I,J}^{DH} + \nu_{I,J-1}^{DH}}{2}\frac{\overline{ww_{I+1,J}} + \overline{ww_{I+1,J-1}} - \overline{ww_{I-1,J}} - \overline{ww_{I-1,J-1}}}{4\delta_y}\right)\delta_y \\
& + \left[-\frac{2}{3}\alpha_4k_{I,J}\frac{\overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I,j}}}{\delta_z} + \left(\frac{1}{6}(\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) + 2C_2\left(C_{fs,2}f_s + C_{w,2}\frac{\varepsilon_{I,J}}{k}f_w\right)\right)\frac{\overline{uw_{I,j+1}} + \overline{uw_{I,j}}}{2}\frac{\overline{U_{I,J+1}} - \overline{U_{I,J-1}}}{2\delta_z} \right. \\
& + \left(\frac{1}{6}(\alpha_4 - 2\alpha_3 + 3\alpha_5) + 2_sC_2\left(C_{fs,2}f_s + C_{w,2}\frac{\varepsilon_{I,J}}{k}f_w\right)\right)\frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i,j+1}} + \overline{vw_{i+1,j+1}} + \overline{vw_{i+1,j}}}{4}\frac{\overline{V_{i,J+1}} + \overline{V_{i+1,J+1}} - \overline{V_{i,J-1}} - \overline{V_{i+1,J-1}}}{4\delta_z} \\
& + \left(\frac{1}{6}(\alpha_4 - 2\alpha_3 - 3\alpha_5) - 4C_2\left(C_{fs,2}f_s + C_{w,2}\frac{\varepsilon_{I,J}}{k}f_w\right) - 2\right)\frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i,j+1}} + \overline{vw_{i+1,j+1}} + \overline{vw_{i+1,j}}}{4}\frac{\overline{W_{I+1,j}} + \overline{W_{I+1,j+1}} - \overline{W_{I-1,j}} - \overline{W_{I-1,j+1}}}{4\delta_y} \\
& + \left(\frac{1}{3}(2\alpha_4 - \alpha_3) - 4C_2\left(C_{fs,2}f_s + C_{w,2}\frac{\varepsilon_{I,J}}{k}f_w\right) - 2\right)\overline{w^2_{I,J}}\frac{\overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I,j}}}{\delta_z} \\
& \left. + \left(-\frac{1}{3}(\alpha_4 + \alpha_3) + 2C_2\left(C_{fs,2}f_s + C_{w,2}\frac{\varepsilon_{I,J}}{k}f_w\right)\right)\overline{v^2_{I,J}}\frac{\overline{V_{i+1,j}} - \overline{V_{i,j}}}{\delta_y} + \left(-\frac{1}{3}(\alpha_4 + \alpha_3) + 2C_2\left(C_{fs,2}f_s + C_{w,2}\frac{\varepsilon_{I,J}}{k}f_w\right)\right)\frac{\overline{uv_{i,j}} + \overline{uv_{i+1,j}}}{2}\frac{\overline{U_{I+1,j}} - \overline{U_{I-1,j}}}{2\delta_y} \right]\delta_y\delta_z \\
a_{ww_P} = & a_{ww_E} + a_{ww_W} + a_{ww_N} + a_{ww_S} - \left\{ \begin{aligned} & \frac{\alpha_0\varepsilon_{I,J}}{2k}\delta_y\delta_z + \frac{\alpha_1\varepsilon_{I,J}}{6k}\left[-2 + \frac{\overline{w^2_{I,J}}}{k}\right]\delta_y\delta_z \\ & + \frac{\alpha_3}{2k}\left[\frac{\overline{v_{I,J}^2}\frac{\overline{V_{i+1,j}} - \overline{V_{i,j}}}{\delta_y} + \overline{w_{I,J}^2}\frac{\overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I,j}}}{\delta_z} + \frac{\overline{uv_{i,j}} + \overline{uv_{i+1,j}}}{2}\frac{\overline{U_{I+1,j}} - \overline{U_{I-1,j}}}{2\delta_y} + \frac{\overline{uw_{I,j+1}} + \overline{uw_{I,j}}}{2}\frac{\overline{U_{I,J+1}} - \overline{U_{I,J-1}}}{2\delta_z} \right. \\ & \left. + \frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i,j+1}} + \overline{vw_{i+1,j+1}} + \overline{vw_{i+1,j}}}{4}\left(\frac{\overline{V_{i,J+1}} + \overline{V_{i+1,J+1}} - \overline{V_{i,J-1}} - \overline{V_{i+1,J-1}}}{4\delta_z} + \frac{\overline{W_{I+1,j}} + \overline{W_{I+1,j+1}} - \overline{W_{I-1,j}} - \overline{W_{I-1,j+1}}}{4\delta_y}\right) \right]\delta_y\delta_z \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_{xy}) \rightarrow \frac{\partial(\overline{uvV})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{uvW})}{\partial z} &= -\overline{v^2} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} - \overline{vw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} - \overline{uv} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} - \overline{uw} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} + C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial z} \right) \right] + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{uv}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{uv}}{\partial z^2} \right) \\
&+ \alpha_0 \varepsilon \frac{\overline{uv}}{2k} + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{4} \left(-\frac{\overline{w^2} \overline{uv}}{k} + \frac{\overline{uw} \overline{vw}}{k} + \frac{2 \overline{uv}}{3k} \right) + \frac{\alpha_2 k}{2} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \\
&+ \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{uv}}{2k} \\
&+ \frac{1}{4} \left[\frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} - (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{ww} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + 2\alpha_4 \overline{uv} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uw} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} + (\alpha_4 - \alpha_5) \overline{uw} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{vw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \right] \\
&+ C_{f_s,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{u^2} - \frac{3}{2} \overline{v^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left(\overline{uv} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} + \overline{v^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} - 2\overline{w^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} - 2\overline{vw} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_{xy}) \rightarrow \left[\overline{uvV} \right]_w^e \delta_z + \left[\overline{uvW} \right]_s^n \delta_y &= -\overline{v^2}_P \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_P \delta_y \delta_z + \left[C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} \right]_w^e \delta_z + \left[C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{ww} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial z} \right]_s^n \delta_y + \left[C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} \right]_s^n \delta_y + \left[C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \overline{uv}}{\partial z} \right]_w^e \delta_z \\
&+ \alpha_0 \varepsilon_P \frac{\overline{uv}_P}{2k} \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1 \varepsilon_P}{4} \left(-\frac{\overline{w^2}_P \overline{uv}_P}{k} + \frac{\overline{uw}_P \overline{vw}_P}{k} + \frac{2 \overline{uv}_P}{3k} \right) \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_2 k}{2} \left[\overline{U} \right]_w^e \delta_z \\
&+ \alpha_3 \left[\overline{v^2}_P \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_P + \overline{w^2}_P \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \Big|_P + \overline{uv}_P \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_P + \overline{uw}_P \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_P + \overline{vw}_P \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_P + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \Big|_P \right) \right] \frac{\overline{uv}_P}{2k} \\
&+ \frac{1}{4} \left[\frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_P - (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{ww}_P \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_P + 2(\alpha_4 - 2) \overline{uv}_P \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_P \right. \\
&\quad \left. + (\alpha_4 + \alpha_5 - 4) \overline{uw}_P \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_P + (\alpha_4 - \alpha_5) \overline{uw}_P \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_P + (\alpha_4 + \alpha_5 - 4) \overline{vw}_P \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_P \right] \delta_y \delta_z \\
&+ C_{f_s,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{u^2}_P - \frac{3}{2} \overline{v^2}_P \right) f_s \delta_y \delta_z \\
&- C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) \left[\overline{uv}_P \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_P + \overline{uw}_P \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_P + \overline{v^2}_P \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_P + \overline{vw}_P \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_P - 2\overline{w^2}_P \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \Big|_P - 2\overline{vw}_P \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \Big|_P \right] \delta_y \delta_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{uv_P} \overline{uv_P} &= a_{uv_E} \overline{uv_E} + a_{uv_W} \overline{uv_W} + a_{uv_N} \overline{uv_N} + a_{uv_S} \overline{uv_S} + b_{uv} \\
a_{uv_E} &= D_{uv} e \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{uv_e}| \right)^5 \right] + [-Fe, 0] \quad a_{uv_W} = D_{uv} w \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{uv_w}| \right)^5 \right] + [Fw, 0] \\
a_{uv_N} &= D_{uv} n \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{uv_n}| \right)^5 \right] + [-Fn, 0] \quad a_{uv_S} = D_{uv} s \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{uv_s}| \right)^5 \right] + [Fs, 0] \\
b_{uv} &= -\overline{v^2_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_P \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1 \varepsilon_P}{4} \frac{\overline{uw_P}}{k} \frac{\overline{vw_P}}{k} \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_2 k}{2} [\overline{U}]_w^e \delta_z + \frac{1}{4} \left[\begin{aligned} &\frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_P - (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{ww_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_P + 2(\alpha_4 - 2) \overline{uv_P} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_P \\ &+ (\alpha_4 + \alpha_5 - 4) \overline{uw_P} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_P + (\alpha_4 - \alpha_5) \overline{uw_P} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_P + (\alpha_4 + \alpha_5 - 4) \overline{vw_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_P \end{aligned} \right] \delta_y \delta_z \\
&+ \left(\frac{\nu_{I-1,J}^{DH} + \nu_{I,J}^{DH} + \nu_{I-1,J+1}^{DH} + \nu_{I,J+1}^{DH}}{4} \frac{\overline{uv_{i+1,J+1}} + \overline{uv_{i+1,J}} - \overline{uv_{i-1,J+1}} - \overline{uv_{i-1,J}}}{4\delta_y} \right) \delta_y - \left(\frac{\nu_{I-1,J}^{DH} + \nu_{I,J}^{DH} + \nu_{I-1,J-1}^{DH} + \nu_{I,J-1}^{DH}}{4} \frac{\overline{uv_{i+1,J}} + \overline{uv_{i+1,J-1}} - \overline{uv_{i-1,J}} - \overline{uv_{i-1,J-1}}}{4\delta_y} \right) \delta_y \\
&+ \left(\nu_{I,J}^{DH} \frac{\overline{uv_{i+1,J+1}} + \overline{uv_{i+1,J}} - \overline{uv_{i+1,J-1}} - \overline{uv_{i,J-1}}}{4\delta_z} \right) \delta_z - \left(\nu_{I-1,J}^{DH} \frac{\overline{uv_{i,J+1}} + \overline{uv_{i-1,J+1}} - \overline{uv_{i,J-1}} - \overline{uv_{i-1,J-1}}}{4\delta_z} \right) \delta_z \\
&+ C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{u_P^2} - \frac{3}{2} \overline{v_P^2} \right) f_s \delta_y \delta_z - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) \left[\overline{uv_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_P + \overline{uw_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_P + \overline{v_P^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_P + \overline{vw_P} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_P - 2\overline{w_P^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \Big|_P - 2\overline{vw_P} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \Big|_P \right] \delta_y \delta_z \\
a_{uv_P} &= a_{uv_E} + a_{uv_W} + a_{uv_N} + a_{uv_S} + \frac{\alpha_0 \varepsilon_P}{2k} \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1 \varepsilon_P}{4k} \left(-\frac{\overline{w_P^2}}{k} + \frac{2}{3} \right) \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_3}{2k} \delta_y \delta_z \left[\overline{v^2_P} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_P + \overline{w^2_P} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \Big|_P + \overline{uv_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_P + \overline{uw_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_P + \overline{vw_P} \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_P + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \Big|_P \right) \right] \\
Fe = V_e \delta_z &= \frac{\overline{V_{i,J}} + \overline{V_{i+1,J}}}{2} \delta_z \quad Fw = V_w \delta_z = \frac{\overline{V_{i-1,J}} + \overline{V_{i,J}}}{2} \delta_z \quad Fn = W_n \delta_y = \frac{\overline{W_{i-1,j+1}} + \overline{W_{i,j+1}}}{2} \delta_y \quad Fs = W_s \delta_y = \frac{\overline{W_{i-1,j}} + \overline{W_{i,j}}}{2} \delta_y \\
D_{uv} e &= \left(\nu + \nu_{I,J}^{vw} \right) \frac{\delta_z}{\delta_y} \quad D_{uv} w = \left(\nu + \nu_{I-1,J}^{vw} \right) \frac{\delta_z}{\delta_y} \quad D_{uv} n = \left(\nu + \frac{\nu_{I-1,J}^{ww} + \nu_{I,J}^{ww} + \nu_{I-1,J+1}^{ww} + \nu_{I,J+1}^{ww}}{4} \right) \frac{\delta_y}{\delta_z} \quad D_{uv} s = \left(\nu + \frac{\nu_{I-1,J}^{ww} + \nu_{I,J}^{ww} + \nu_{I-1,J-1}^{ww} + \nu_{I,J-1}^{ww}}{4} \right) \frac{\delta_y}{\delta_z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{uv} = & -\frac{\overline{v_{I-1,J}^2} + \overline{v_{I,J}^2}}{2} \frac{\overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I-1,J}}}{\delta_y} \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1}{4} \frac{\overline{\varepsilon_{I-1,J}} + \overline{\varepsilon_{I,J}}}{2} \frac{\overline{uw_{I-1,j}} + \overline{uw_{I-1,j+1}} + \overline{uw_{I,j}} + \overline{uw_{I,j+1}}}{4k} \frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i,j+1}}}{2k} \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_2 k}{2} (\overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I-1,J}}) \delta_z \\
& + \left(\frac{\overline{v_{I-1,J}^{DH}} + \overline{v_{I,J}^{DH}} + \overline{v_{I-1,J+1}^{DH}} + \overline{v_{I,J+1}^{DH}}}{4} \frac{\overline{uv_{i+1,j+1}} + \overline{uv_{i+1,j}} - \overline{uv_{i-1,j+1}} - \overline{uv_{i-1,j}}}{4\delta_y} \right) \delta_y - \left(\frac{\overline{v_{I-1,J}^{DH}} + \overline{v_{I,J}^{DH}} + \overline{v_{I-1,J-1}^{DH}} + \overline{v_{I,J-1}^{DH}}}{4} \frac{\overline{uv_{i+1,j}} + \overline{uv_{i+1,j-1}} - \overline{uv_{i-1,j}} - \overline{uv_{i-1,j-1}}}{4\delta_y} \right) \delta_y \\
& + \left(\overline{v_{I,J}^{DH}} \frac{\overline{uv_{i+1,j+1}} + \overline{uv_{i,j+1}} - \overline{uv_{i+1,j-1}} - \overline{uv_{i,j-1}}}{4\delta_z} \right) \delta_z - \left(\overline{v_{I-1,J}^{DH}} \frac{\overline{uv_{i,j+1}} + \overline{uv_{i-1,j+1}} - \overline{uv_{i,j-1}} - \overline{uv_{i-1,j-1}}}{4\delta_z} \right) \delta_z \\
& + \frac{1}{4} \left[\begin{aligned} & \frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I-1,J}}}{\delta_y} - (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\overline{ww_{I,J}} + \overline{ww_{I-1,J}}}{2} \frac{\overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I-1,J}}}{\delta_y} + (2\alpha_4 - 4) \overline{uv_{i,j}} \frac{\overline{V_{i+1,J}} - \overline{V_{i-1,J}}}{2\delta_y} \\ & + (\alpha_4 + \alpha_5 - 4) \frac{\overline{uw_{I-1,j}} + \overline{uw_{I-1,j+1}} + \overline{uw_{I,j}} + \overline{uw_{I,j+1}}}{4} \frac{\overline{V_{i,j+1}} - \overline{V_{i,j-1}}}{2\delta_z} \\ & + (\alpha_4 - \alpha_5) \frac{\overline{uw_{I-1,j}} + \overline{uw_{I-1,j+1}} + \overline{uw_{I,j}} + \overline{uw_{I,j+1}}}{4} \frac{\overline{V_{i+1,J}} - \overline{V_{i-1,J}}}{2\delta_y} + (\alpha_4 + \alpha_5 - 4) \frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i,j+1}}}{2} \frac{\overline{U_{I,J+1}} + \overline{U_{I-1,J+1}} - \overline{U_{I,J-1}} - \overline{U_{I-1,J-1}}}{4\delta_z} \end{aligned} \right] \delta_y \delta_z + C_{f_s,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(\begin{aligned} & \frac{3}{2} \frac{\overline{u_{I-1,J}^2} + \overline{u_{I,J}^2}}{2} \\ & - \frac{3}{2} \frac{\overline{v_{I-1,J}^2} + \overline{v_{I,J}^2}}{2} \end{aligned} \right) f_s \delta_y \delta_z \\
& - C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\overline{\varepsilon_{I-1,J}} + \overline{\varepsilon_{I,J}}}{2k} f_w \right) \left[\begin{aligned} & \frac{\overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I-1,J}}}{\delta_y} + \frac{\overline{uw_{I-1,j}} + \overline{uw_{I-1,j+1}} + \overline{uw_{I,j}} + \overline{uw_{I,j+1}}}{4} \frac{\overline{U_{I,J+1}} + \overline{U_{I-1,J+1}} - \overline{U_{I,J-1}} - \overline{U_{I-1,J-1}}}{4\delta_z} \\ & + \frac{\overline{v_{I-1,J}^2} + \overline{v_{I,J}^2}}{2} \frac{\overline{V_{i+1,J}} - \overline{V_{i-1,J}}}{2\delta_y} + \frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i,j+1}}}{2} \frac{\overline{V_{i,j+1}} - \overline{V_{i,j-1}}}{2\delta_z} \\ & - 2 \frac{\overline{w_{I-1,J}^2} + \overline{w_{I,J}^2}}{2} \frac{\overline{W_{I-1,j+1}} + \overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I-1,j}} - \overline{W_{I,j}}}{2\delta_z} - 2 \frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i,j+1}}}{2} \frac{\overline{W_{I,j}} + \overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I-1,j}} - \overline{W_{I-1,j+1}}}{2\delta_y} \end{aligned} \right] \delta_y \delta_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_{xz}) \rightarrow & \frac{\partial(\overline{uwV})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{uwW})}{\partial z} = -\overline{vw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} - \overline{w^2} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} - \overline{uv} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} - \overline{uw} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial y} + \overline{ww} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \right) \right] + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{uw}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{uw}}{\partial z^2} \right) \\
& + \alpha_0 \varepsilon_p \frac{\overline{uw}}{2k} + \frac{\alpha_1 \varepsilon_p}{4} \left(-\frac{\overline{v^2} \overline{uw}}{k} + \frac{\overline{uv} \overline{vw}}{k} + \frac{2 \overline{uw}}{3k} \right) + \frac{\alpha_2 k}{2} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \\
& + \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{uw}}{2k} \\
& + \frac{1}{4} \left[\frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} - (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{v^2} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uv} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} + (\alpha_4 - \alpha_5) \overline{uv} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} + 2\alpha_4 \overline{uw} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{vw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \right] \\
& + C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{u^2} - \frac{3}{2} \overline{w^2} \right) f_s \delta_y \delta_z - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left(\overline{uv} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} - 2\overline{v^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} - 2\overline{vw} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \right) \delta_y \delta_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_{xz}) \rightarrow & \left[\overline{uwV} \right]_w^e \delta_z + \left[\overline{uwW} \right]_s^n \delta_y = -\overline{w_p^2} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_p \delta_y \delta_z + \left[\left(\nu + C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \right) \frac{\partial \overline{uw}}{\partial y} \right]_w^e \delta_z + \left[\left(\nu + C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{ww} \right) \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \right]_s^n \delta_y + \left[C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \right]_w^e \delta_z + \left[C_s \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \overline{uw}}{\partial y} \right]_s^n \delta_y \\
& + \alpha_0 \varepsilon_p \frac{\overline{uw_p}}{2k} \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1 \varepsilon_p}{4} \left(-\frac{\overline{v_p^2} \overline{uw_p}}{k} + \frac{\overline{uv_p} \overline{vw_p}}{k} + \frac{2 \overline{uw_p}}{3k} \right) \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_2 k}{2} \left[\overline{U} \right]_s^n \delta_y \\
& + \alpha_3 \left[\overline{v_p^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_p + \overline{w_p^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \Big|_p + \overline{uv_p} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_p + \overline{uw_p} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_p + \overline{vw_p} \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_p + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \Big|_p \right) \right] \frac{\overline{uw_p}}{2k} \\
& + \frac{1}{4} \left[\frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_p - (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{v_p^2} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_p + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uv_p} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_p + (\alpha_4 - \alpha_5 - 4) \overline{uv_p} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \Big|_p \right. \\
& \left. + 2(\alpha_4 - 2) \overline{uw_p} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \Big|_p + (\alpha_4 + \alpha_5 - 4) \overline{vw_p} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_p \right] \delta_y \delta_z \\
& + C_{fs,1} \frac{\varepsilon_p}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{u_p^2} - \frac{3}{2} \overline{w_p^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_p}{k} f_w \right) \left(\overline{uv_p} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \Big|_p + \overline{uw_p} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \Big|_p + \overline{vw_p} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \Big|_p + \overline{w_p^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \Big|_p - 2\overline{v_p^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \Big|_p - 2\overline{vw_p} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \Big|_p \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{uw_P} \overline{uw_P} &= a_{uw_E} \overline{uw_E} + a_{uw_W} \overline{uw_W} + a_{uw_N} \overline{uw_N} + a_{uw_S} \overline{uw_S} + b_{uw} \\
a_{uw_E} &= Dy_{uw} \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{uw_e}|\right)^5 \right] + [-Fe, 0] & a_{uw_W} &= Dy_{uw} \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{uw_w}|\right)^5 \right] + [Fw, 0] \\
a_{uw_N} &= Dz_{uw} \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{uw_n}|\right)^5 \right] + [-Fn, 0] & a_{uw_S} &= Dz_{uw} \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{uw_s}|\right)^5 \right] + [Fs, 0] \\
b_{uw} &= -\overline{w_P^2} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \bigg|_P \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1 \varepsilon_P}{4} \frac{\overline{uv_P}}{k} \frac{\overline{vw_P}}{k} \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_2 k}{2} [\overline{U}]_s^n \delta_y \\
&+ \left(v_{I,J}^{DH} \frac{\overline{uw_{I+1,j+1}} + \overline{uw_{I+1,j}} - \overline{uw_{I-1,j+1}} - \overline{uw_{I-1,j}}}{4\delta_y} \right) \delta_y - \left(v_{I,J-1}^{DH} \frac{\overline{uw_{I+1,j}} + \overline{uw_{I+1,j-1}} - \overline{uw_{I-1,j}} - \overline{uw_{I-1,j-1}}}{4\delta_y} \right) \delta_y \\
&+ \left(\frac{v_{I,J}^{DH} + v_{I+1,J}^{DH} + v_{I+1,J-1}^{DH} + v_{I,J-1}^{DH}}{4} \frac{\overline{uw_{I+1,j+1}} + \overline{uw_{I,j+1}} - \overline{uw_{I+1,j-1}} - \overline{uw_{I,j-1}}}{4\delta_z} \right) \delta_z - \left(\frac{v_{I,J}^{DH} + v_{I-1,J}^{DH} + v_{I-1,J-1}^{DH} + v_{I,J-1}^{DH}}{4} \frac{\overline{uw_{I,j+1}} + \overline{uw_{I-1,j+1}} - \overline{uw_{I,j-1}} - \overline{uw_{I-1,j-1}}}{4\delta_z} \right) \delta_z \\
&+ \frac{1}{4} \left[\frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \bigg|_P - (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{v_P^2} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \bigg|_P + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uv_P} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \bigg|_P + (\alpha_4 - \alpha_5 - 4) \overline{uv_P} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \bigg|_P \right] \delta_y \delta_z \\
&+ \frac{1}{4} \left[+2(\alpha_4 - 2) \overline{uw_P} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \bigg|_P + (\alpha_4 + \alpha_5 - 4) \overline{vw_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \bigg|_P \right] \delta_y \delta_z \\
&+ C_{f_s,1} \frac{\varepsilon_P}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{u_P^2} - \frac{3}{2} \overline{w_P^2} \right) f_s \delta_y \delta_z - C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon_P}{k} f_w \right) \left(\overline{uv_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \bigg|_P + \overline{uw_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \bigg|_P + \overline{vw_P} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \bigg|_P + \overline{w_P^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \bigg|_P - 2\overline{v_P^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \bigg|_P - 2\overline{vw_P} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \bigg|_P \right) f_s \delta_y \delta_z \\
a_{uw_P} &= a_{uw_E} + a_{uw_W} + a_{uw_N} + a_{uw_S} + \frac{\alpha_0 \varepsilon_P}{2k} \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1 \varepsilon_P}{4k} \left(-\frac{\overline{v_P^2}}{k} + \frac{2}{3} \right) \delta_y \delta_z + \alpha_3 \left[\overline{v_P^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \bigg|_P + \overline{w_P^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \bigg|_P + \overline{uv_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \bigg|_P + \overline{uw_P} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \bigg|_P + \overline{vw_P} \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \bigg|_P + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \bigg|_P \right) \right] \frac{\overline{uw_P}}{2k} \\
v_{I,J}^{Mellor} &= Cs \frac{k_{I,J}^2}{\varepsilon_{I,J}} & Fe &= V_e \delta_z = \frac{\overline{V_{i+1,J}} + \overline{V_{i+1,J-1}}}{2} \delta_z & Fw &= V_w \delta_z = \frac{\overline{V_{i,J}} + \overline{V_{i,J-1}}}{2} \delta_z & Fn &= W_n \delta_y = \frac{\overline{W_{I,j}} + \overline{W_{I,j+1}}}{2} \\
&& Fs &= W_s \delta_y = \frac{\overline{W_{I,j}} + \overline{W_{I,j-1}}}{2} \\
D_{uw} e &= \left(v + \frac{v_{I,J-1}^{vw} + v_{I,J}^{vw} + v_{I+1,J-1}^{vw} + v_{I+1,J}^{vw}}{4} \right) \frac{\delta_z}{\delta_y} & D_{uw} w &= \left(v + \frac{v_{I-1,J-1}^{vw} + v_{I-1,J}^{vw} + v_{I,J-1}^{vw} + v_{I,J}^{vw}}{4} \right) \frac{\delta_z}{\delta_y} & D_{uw} n &= (v + v_{I,J}^{vw}) \frac{\delta_y}{\delta_z} & D_{uw} s &= (v + v_{I,J-1}^{vw}) \frac{\delta_y}{\delta_z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{uw} = & -\frac{\overline{w^2_{I,J}} + \overline{w^2_{I,J-1}}}{2} \frac{\overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I,J-1}}}{\delta_z} \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1}{4} \frac{\overline{\varepsilon_{I,J}} + \overline{\varepsilon_{I,J-1}}}{2} \frac{\overline{uv_{i,j}} + \overline{uv_{i,j-1}} + \overline{uv_{i+1,j}} + \overline{uv_{i+1,j-1}}}{4k} \frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i+1,j}}}{2k} \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_2 k}{2} (\overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I,J-1}}) \delta_y \\
& + \left(v_{I,J}^{DH} \frac{\overline{uw_{I+1,j+1}} + \overline{uw_{I+1,j}} - \overline{uw_{I-1,j+1}} - \overline{uw_{I-1,j}}}{4\delta_y} \right) \delta_y - \left(v_{I,J-1}^{DH} \frac{\overline{uw_{I+1,j}} + \overline{uw_{I+1,j-1}} - \overline{uw_{I-1,j}} - \overline{uw_{I-1,j-1}}}{4\delta_y} \right) \delta_y \\
& + \left(\frac{v_{I,J}^{DH} + v_{I+1,J}^{DH} + v_{I+1,J-1}^{DH} + v_{I,J-1}^{DH}}{4} \frac{\overline{uw_{I+1,j+1}} + \overline{uw_{I+1,j}} - \overline{uw_{I-1,j+1}} - \overline{uw_{I-1,j-1}}}{4\delta_z} \right) \delta_z - \left(\frac{v_{I,J}^{DH} + v_{I-1,J}^{DH} + v_{I-1,J-1}^{DH} + v_{I,J-1}^{DH}}{4} \frac{\overline{uw_{I,j+1}} + \overline{uw_{I-1,j+1}} - \overline{uw_{I,j-1}} - \overline{uw_{I-1,j-1}}}{4\delta_z} \right) \delta_z \\
& + \frac{1}{4} \left[\frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I,J-1}}}{\delta_z} - (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\overline{v^2_{I,J}} + \overline{v^2_{I,J-1}}}{2} \frac{\overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I,J-1}}}{\delta_z} + (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\overline{uv_{i,j}} + \overline{uv_{i,j-1}} + \overline{uv_{i+1,j}} + \overline{uv_{i+1,j-1}}}{4} \frac{\overline{V_{i,J}} + \overline{V_{i+1,J}} - \overline{V_{i,j-1}} - \overline{V_{i+1,j-1}}}{2\delta_z} \right. \\
& \left. + (\alpha_4 - \alpha_5 - 4) \frac{\overline{uv_{i,j}} + \overline{uv_{i,j-1}} + \overline{uv_{i+1,j}} + \overline{uv_{i+1,j-1}}}{4} \frac{\overline{W_{I+1,j}} - \overline{W_{I-1,j}}}{2\delta_y} + 2(\alpha_4 - 2) \overline{uw_{I,j}} \frac{\overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I,j-1}}}{2\delta_z} + (\alpha_4 + \alpha_5 - 4) \frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i+1,j}}}{2} \frac{\overline{U_{I+1,J-1}} + \overline{U_{I+1,J}} - \overline{U_{I-1,J-1}} - \overline{U_{I-1,J}}}{4\delta_y} \right] \delta_y \delta_z \\
& + C_{f_s,1} \frac{\overline{\varepsilon_{I,J}} + \overline{\varepsilon_{I,J-1}}}{2k} \left(-\frac{3}{2} \frac{\overline{u^2_{I,J}} + \overline{u^2_{I,J-1}}}{2} - \frac{3}{2} \frac{\overline{w^2_{I,J}} + \overline{w^2_{I,J-1}}}{2} \right) f_s \delta_y \delta_z \\
& - C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\overline{\varepsilon_{I,J}} + \overline{\varepsilon_{I,J-1}}}{2k} f_w \right) \left[\frac{\overline{uv_{i,j}} + \overline{uv_{i,j-1}} + \overline{uv_{i+1,j}} + \overline{uv_{i+1,j-1}}}{4} \frac{\overline{U_{I+1,J-1}} + \overline{U_{I+1,J}} - \overline{U_{I-1,J-1}} - \overline{U_{I-1,J}}}{4\delta_y} + \overline{uw_{I,j}} \frac{\overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I,J-1}}}{\delta_z} + \frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i+1,j}}}{2} \frac{\overline{W_{I+1,j}} - \overline{W_{I-1,j}}}{2\delta_y} \right. \\
& \left. + \frac{\overline{w^2_{I,J}} + \overline{w^2_{I,J-1}}}{2} \frac{\overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I,j-1}}}{2\delta_z} - 2 \frac{\overline{v^2_{I,J}} + \overline{v^2_{I,J-1}}}{2} \frac{\overline{V_{i+1,J}} + \overline{V_{i+1,J-1}} - \overline{V_{i,J}} - \overline{V_{i,J-1}}}{2\delta_y} - 2 \frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i+1,j}}}{2} \frac{\overline{V_{i,J}} + \overline{V_{i+1,J}} - \overline{V_{i,j-1}} - \overline{V_{i+1,j-1}}}{2\delta_z} \right] \delta_y \delta_z \\
a_{uw_P} = a_{uw_E} + a_{uw_W} + a_{uw_N} + a_{uw_S} - & \left\{ \frac{\alpha_0}{2k} \frac{\overline{\varepsilon_{I,J}} + \overline{\varepsilon_{I,J-1}}}{2} \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1}{4k} \frac{\overline{\varepsilon_{I,J}} + \overline{\varepsilon_{I,J-1}}}{2} \left(-\frac{\overline{v^2_{I,J}} + \overline{v^2_{I,J-1}}}{2k} + \frac{2}{3} \right) \delta_y \delta_z \right. \\
& + \frac{\alpha_3}{2k} \left[\frac{\overline{v^2_{I,J}} + \overline{v^2_{I,J-1}}}{2} \frac{\overline{V_{i+1,J}} + \overline{V_{i+1,J-1}} - \overline{V_{i,J}} - \overline{V_{i,J-1}}}{2\delta_y} + \frac{\overline{w^2_{I,J}} + \overline{w^2_{I,J-1}}}{2} \frac{\overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I,j-1}}}{2\delta_z} \right. \\
& \left. + \frac{\overline{uv_{i,j}} + \overline{uv_{i,j-1}} + \overline{uv_{i+1,j}} + \overline{uv_{i+1,j-1}}}{4} \frac{\overline{U_{I+1,J-1}} + \overline{U_{I+1,J}} - \overline{U_{I-1,J-1}} - \overline{U_{I-1,J}}}{4\delta_y} \right. \\
& \left. + \overline{uw_{I,j}} \frac{\overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I,J-1}}}{\delta_z} + \frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i+1,j}}}{2} \left(\frac{\overline{V_{i,J}} + \overline{V_{i+1,J}} - \overline{V_{i,j-1}} - \overline{V_{i+1,j-1}}}{2\delta_z} + \frac{\overline{W_{I+1,j}} - \overline{W_{I-1,j}}}{2\delta_y} \right) \right] \delta_y \delta_z \left. \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(R_{yz}) \rightarrow \frac{\partial(\overline{vwV})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{vwW})}{\partial z} = & -\overline{vw} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} - \overline{w^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} - \overline{v^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} - \overline{vw} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + C_s \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} \right) \right] + C_s \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{k}{\varepsilon} \left(\overline{vw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} \right) \right] + \nu \left(\frac{\partial^2 \overline{vw}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{vw}}{\partial z^2} \right) \\
& + \alpha_0 \varepsilon \frac{\overline{vw}}{2k} + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{4} \left[-\frac{\overline{u^2} \overline{vw}}{k} + \frac{\overline{uv} \overline{uw}}{k} + \frac{2 \overline{vw}}{3k} \right] + \alpha_2 k \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \right) \\
& + \alpha_3 \left[\overline{v^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + \overline{uv} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + \overline{uw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} + \overline{vw} \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \right) \right] \frac{\overline{vw}}{2k} \\
& + \frac{1}{4} \left[\begin{aligned} & (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uv} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} - (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uu} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} + (\alpha_4 - \alpha_5) \overline{uu} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} + \frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \\ & + \frac{2k}{3} (\alpha_4 - \alpha_5) \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} + 2\alpha_4 \overline{vw} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} + (\alpha_4 + \alpha_5) \overline{uw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} + 2\alpha_4 \overline{vw} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \end{aligned} \right] \\
& + C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \overline{v^2} - \frac{3}{2} \overline{w^2} \right) f_s - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left(\overline{v^2} \frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{V}}{\partial z} + \overline{vw} \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} + \overline{w^2} \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} - 2\overline{uv} \frac{\partial \overline{U}}{\partial y} - 2\overline{uw} \frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \right) f_s
\end{aligned}$$

$$v_{I,J}^{Mellor} = C_s \frac{k_{I,J}^2}{\varepsilon_{I,J}} \quad Fe = V_e \delta_z = \frac{\overline{V_{i,j-1}} + \overline{V_{i,j}} + \overline{V_{i+1,j-1}} + \overline{V_{i+1,j}}}{4} \delta_z \quad Fw = V_w \delta_z = \frac{\overline{V_{i-1,j-1}} + \overline{V_{i-1,j}} + \overline{V_{i,j-1}} + \overline{V_{i,j}}}{4} \delta_z$$

$$Fn = W_n \delta_y = \frac{\overline{W_{i-1,j}} + \overline{W_{i,j}} + \overline{W_{i-1,j+1}} + \overline{W_{i,j+1}}}{4} \delta_y \quad Fs = W_s \delta_y = \frac{\overline{W_{i-1,j-1}} + \overline{W_{i,j-1}} + \overline{W_{i-1,j}} + \overline{W_{i,j}}}{4} \delta_y$$

$$D_{vw} e = \left(\nu + \frac{v_{I,J}^{vw} + v_{I,J-1}^{vw}}{2} \right) \frac{\delta_z}{\delta_y} \quad D_{vw} w = \left(\nu + \frac{v_{I-1,J}^{vw} + v_{I-1,J-1}^{vw}}{2} \right) \frac{\delta_z}{\delta_y} \quad D_{vw} n = \left(\nu + \frac{v_{I,J}^{vw} + v_{I-1,J}^{vw}}{2} \right) \frac{\delta_y}{\delta_z} \quad D_{vw} s = \left(\nu + \frac{v_{I,J-1}^{vw} + v_{I-1,J-1}^{vw}}{2} \right) \frac{\delta_y}{\delta_z}$$

$$\begin{aligned}
(R_{yz}) \rightarrow & \left[\overline{vwV} \right]_w^e + \left[\overline{vwV} \right]_s^n = -\frac{\overline{w^2_{I-1,J-1}} + \overline{w^2_{I-1,J}} + \overline{w^2_{I,J-1}} + \overline{w^2_{I,J}}}{4} \frac{\overline{V_{i,J}} - \overline{V_{i,J-1}}}{\delta_z} - \frac{\overline{v^2_{I-1,J-1}} + \overline{v^2_{I-1,J}} + \overline{v^2_{I,J-1}} + \overline{v^2_{I,J}}}{4} \frac{\overline{W_{I,j}} - \overline{W_{I-1,j}}}{\delta_y} \\
& + \left[\left(\nu + Cs \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \right) \frac{\partial \overline{vw}}{\partial y} \right]_w^e \delta_z + \left[\left(\nu + Cs \frac{k}{\varepsilon} \overline{ww} \right) \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} \right]_s^n \delta_y + \left[Cs \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} \right]_w^e \delta_z + \left[Cs \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \overline{vw}}{\partial y} \right]_s^n \delta_y \\
& + \alpha_0 \varepsilon \frac{\overline{vw_{i,j}}}{2k} \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1 \varepsilon}{4} \left[-\frac{\overline{u^2_{I-1,J-1}} + \overline{u^2_{I-1,J}} + \overline{u^2_{I,J-1}} + \overline{u^2_{I,J}}}{4k} \frac{\overline{vw_{i,j}}}{k} + \frac{\overline{uv_{i,J-1}} + \overline{uv_{i,J}}}{2k} \frac{\overline{uw_{I-1,j}} + \overline{uw_{I,j}}}{2k} + \frac{2}{3} \frac{\overline{vw_{i,j}}}{k} \right] \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_2 k}{2} \left(\left[\overline{V} \right]_s^n \delta_y + \left[\overline{W} \right]_w^e \delta_z \right) \\
& + \alpha_3 \left[\frac{\overline{v^2_{I-1,J-1}} + \overline{v^2_{I-1,J}} + \overline{v^2_{I,J-1}} + \overline{v^2_{I,J}}}{4} \frac{\overline{V_{i+1,J}} + \overline{V_{i+1,J-1}} - \overline{V_{i-1,J}} - \overline{V_{i-1,J-1}}}{4\delta_y} + \frac{\overline{w^2_{I-1,J-1}} + \overline{w^2_{I-1,J}} + \overline{w^2_{I,J-1}} + \overline{w^2_{I,J}}}{4} \frac{\overline{W_{I-1,j+1}} + \overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I-1,j-1}} - \overline{W_{I,j-1}}}{4\delta_z} \right. \\
& \left. + \frac{\overline{uv_{i,J-1}} + \overline{uv_{i,J}}}{2} \frac{\overline{U_{I,J-1}} + \overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I-1,J-1}} - \overline{U_{I-1,J}}}{2\delta_y} + \frac{\overline{uw_{I-1,j}} + \overline{uw_{I,j}}}{2} \frac{\overline{U_{I,J}} + \overline{U_{I-1,J}} - \overline{U_{I,J-1}} - \overline{U_{I-1,J-1}}}{2\delta_z} + \overline{vw_{i,j}} \left(\frac{\overline{V_{i,J}} - \overline{V_{i,J-1}}}{\delta_z} + \frac{\overline{W_{I,j}} - \overline{W_{I-1,j}}}{\delta_y} \right) \right] \frac{\overline{vw_{i,j}}}{2k} \\
& + \frac{1}{4} \left[(\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\overline{uv_{i,J-1}} + \overline{uv_{i,J}}}{2} \frac{\overline{U_{I,J}} + \overline{U_{I-1,J}} - \overline{U_{I,J-1}} - \overline{U_{I-1,J-1}}}{2\delta_z} - (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\overline{u^2_{I-1,J-1}} + \overline{u^2_{I-1,J}} + \overline{u^2_{I,J-1}} + \overline{u^2_{I,J}}}{4} \frac{\overline{V_{i,J}} - \overline{V_{i,J-1}}}{\delta_z} \right. \\
& + (\alpha_4 - \alpha_5) \frac{\overline{u^2_{I-1,J-1}} + \overline{u^2_{I-1,J}} + \overline{u^2_{I,J-1}} + \overline{u^2_{I,J}}}{4} \frac{\overline{W_{I,j}} - \overline{W_{I-1,j}}}{\delta_y} + \frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\overline{V_{i,J}} - \overline{V_{i,J-1}}}{\delta_z} + \frac{2k}{3} (\alpha_4 - \alpha_5) \frac{\overline{W_{I,j}} - \overline{W_{I-1,j}}}{\delta_y} \\
& \left. + 2(\alpha_4 - 2) \overline{vw_{i,j}} \frac{\overline{W_{I-1,j+1}} + \overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I-1,j-1}} - \overline{W_{I,j-1}}}{4\delta_z} + (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\overline{uw_{I-1,j}} + \overline{uw_{I,j}}}{2} \frac{\overline{U_{I,J-1}} + \overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I-1,J-1}} - \overline{U_{I-1,J}}}{2\delta_y} + 2(\alpha_4 - 2) \overline{vw_{i,j}} \frac{\overline{V_{i+1,J}} + \overline{V_{i+1,J-1}} - \overline{V_{i-1,J}} - \overline{V_{i-1,J-1}}}{4\delta_y} \right] \\
& + C_{fs,1} \frac{\varepsilon}{k} \left(-\frac{3}{2} \frac{\overline{v^2_{I-1,J-1}} + \overline{v^2_{I-1,J}} + \overline{v^2_{I,J-1}} + \overline{v^2_{I,J}}}{4} - \frac{3}{2} \frac{\overline{w^2_{I-1,J-1}} + \overline{w^2_{I-1,J}} + \overline{w^2_{I,J-1}} + \overline{w^2_{I,J}}}{4} \right) f_s \\
& - C_2 \left(C_{fs,2} f_s + C_{w,2} \frac{\varepsilon}{k} f_w \right) \left[\frac{\overline{v^2_{I-1,J-1}} + \overline{v^2_{I-1,J}} + \overline{v^2_{I,J-1}} + \overline{v^2_{I,J}}}{4} \frac{\overline{V_{i+1,J}} + \overline{V_{i+1,J-1}} - \overline{V_{i-1,J}} - \overline{V_{i-1,J-1}}}{4\delta_y} + \overline{vw_{i,j}} \frac{\overline{V_{i,J}} - \overline{V_{i,J-1}}}{\delta_z} + \overline{vw_{i,j}} \frac{\overline{W_{I,j}} - \overline{W_{I-1,j}}}{\delta_y} \right. \\
& \left. + \frac{\overline{w^2_{I-1,J-1}} + \overline{w^2_{I-1,J}} + \overline{w^2_{I,J-1}} + \overline{w^2_{I,J}}}{4} \frac{\overline{W_{I-1,j+1}} + \overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I-1,j-1}} - \overline{W_{I,j-1}}}{4\delta_z} - 2 \frac{\overline{uv_{i,J-1}} + \overline{uv_{i,J}}}{2} \frac{\overline{U_{I,J-1}} + \overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I-1,J-1}} - \overline{U_{I-1,J}}}{2\delta_y} \right. \\
& \left. - 2 \frac{\overline{uw_{I-1,j}} + \overline{uw_{I,j}}}{2} \frac{\overline{U_{I,J}} + \overline{U_{I-1,J}} - \overline{U_{I,J-1}} - \overline{U_{I-1,J-1}}}{2\delta_z} \right]
\end{aligned}$$

$$a_{vw_P} \overline{vw_P} = a_{vw_E} \overline{vw_E} + a_{vw_W} \overline{vw_W} + a_{vw_N} \overline{vw_N} + a_{vw_S} \overline{vw_S} + b_{vw}$$

$$a_{vw_E} = Dy_{vw} \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{vw_e}|\right)^5 \right] + [-Fe, 0] \quad a_{vw_W} = Dy_{vw} \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{vw_w}|\right)^5 \right] + [Fw, 0]$$

$$a_{vw_N} = Dz_{vw} \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{vw_n}|\right)^5 \right] + [-Fn, 0] \quad a_{vw_S} = Dz_{vw} \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{vw_s}|\right)^5 \right] + [Fs, 0]$$

$$a_{vw_P} = a_{vw_E} + a_{vw_W} + a_{vw_N} + a_{vw_S}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\alpha_0}{2k} \frac{\overline{\varepsilon_{I-1,J-1}} + \overline{\varepsilon_{I-1,J}} + \overline{\varepsilon_{I,J-1}} + \overline{\varepsilon_{I,J}}}{4} \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_1}{4k} \frac{\overline{\varepsilon_{I-1,J-1}} + \overline{\varepsilon_{I-1,J}} + \overline{\varepsilon_{I,J-1}} + \overline{\varepsilon_{I,J}}}{4} \left[-\frac{\overline{u^2_{I-1,J-1}} + \overline{u^2_{I-1,J}} + \overline{u^2_{I,J-1}} + \overline{u^2_{I,J}}}{4k} + \frac{2}{3} \right] \delta_y \delta_z \\ & - \frac{\alpha_3}{2k} \left[\frac{\overline{v^2_{I-1,J-1}} + \overline{v^2_{I-1,J}} + \overline{v^2_{I,J-1}} + \overline{v^2_{I,J}}}{4} \frac{\overline{V_{i+1,J}} + \overline{V_{i+1,J-1}} - \overline{V_{i-1,J}} - \overline{V_{i-1,J-1}}}{4\delta_y} + \frac{\overline{w^2_{I-1,J-1}} + \overline{w^2_{I-1,J}} + \overline{w^2_{I,J-1}} + \overline{w^2_{I,J}}}{4} \frac{\overline{W_{I-1,j+1}} + \overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I-1,j-1}} - \overline{W_{I,j-1}}}{4\delta_z} \right] \\ & + \frac{\alpha_3}{2k} \left[\frac{\overline{uv_{i,J-1}} + \overline{uv_{i,J}}}{2} \frac{\overline{U_{I,J-1}} + \overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I-1,J-1}} - \overline{U_{I-1,J}}}{2\delta_y} + \frac{\overline{uw_{I-1,j}} + \overline{uw_{I,j}}}{2} \frac{\overline{U_{I,J}} + \overline{U_{I-1,J}} - \overline{U_{I,J-1}} - \overline{U_{I-1,J-1}}}{2\delta_z} + \overline{vw_{i,j}} \left(\frac{\overline{V_{i,J}} - \overline{V_{i,J-1}}}{\delta_z} + \frac{\overline{W_{I,j}} - \overline{W_{I-1,j}}}{\delta_y} \right) \right] \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
b_{vw} = & -\frac{\overline{w^2_{I-1,J-1}} + \overline{w^2_{I-1,J}} + \overline{w^2_{I,J-1}} + \overline{w^2_{I,J}}}{4} \frac{\overline{V_{i,J}} - \overline{V_{i,J-1}}}{\delta_z} - \frac{\overline{v^2_{I-1,J-1}} + \overline{v^2_{I-1,J}} + \overline{v^2_{I,J-1}} + \overline{v^2_{I,J}}}{4} \frac{\overline{W_{I,j}} - \overline{W_{I-1,j}}}{\delta_y} \\
& + \left(\frac{v_{I,J}^{DH} + v_{I,J-1}^{DH}}{2} \frac{\overline{vw_{i+1,j+1}} + \overline{vw_{i,j+1}} - \overline{vw_{i+1,j-1}} - \overline{vw_{i,j-1}}}{\delta_z} - \frac{v_{I-1,J}^{DH} + v_{I-1,J-1}^{DH}}{2} \frac{\overline{vw_{i-1,j+1}} + \overline{vw_{i,j+1}} - \overline{vw_{i-1,j-1}} - \overline{vw_{i,j-1}}}{\delta_z} \right) \delta_z \\
& + \left(\frac{v_{I-1,J}^{DH} + v_{I,J}^{DH}}{2} \frac{\overline{vw_{i+1,j+1}} + \overline{vw_{i+1,j}} - \overline{vw_{i-1,j+1}} - \overline{vw_{i-1,j}}}{\delta_z} - \frac{v_{I-1,J-1}^{DH} + v_{I,J-1}^{DH}}{2} \frac{\overline{vw_{i+1,j-1}} + \overline{vw_{i+1,j}} - \overline{vw_{i-1,j-1}} - \overline{vw_{i-1,j}}}{\delta_z} \right) \delta_y \\
& + \frac{\alpha_1}{4} \frac{\overline{\varepsilon_{I-1,J-1}} + \overline{\varepsilon_{I-1,J}} + \overline{\varepsilon_{I,J-1}} + \overline{\varepsilon_{I,J}}}{4} \frac{\overline{uv_{i,j-1}} + \overline{uv_{i,j}}}{2k} \frac{\overline{uw_{I-1,j}} + \overline{uw_{I,j}}}{2k} \delta_y \delta_z + \frac{\alpha_2 k}{2} \left[\left(\overline{V_{i,J}} - \overline{V_{i,J-1}} \right) \delta_y + \left(\overline{W_{I,j}} - \overline{W_{I-1,j}} \right) \delta_z \right] \\
& + \frac{1}{4} \left[\begin{aligned}
& (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\overline{uv_{i,j-1}} + \overline{uv_{i,j}}}{2} \frac{\overline{U_{I,j}} + \overline{U_{I-1,j}} - \overline{U_{I,J-1}} - \overline{U_{I-1,J-1}}}{2\delta_z} - (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\overline{u^2_{I-1,J-1}} + \overline{u^2_{I-1,J}} + \overline{u^2_{I,J-1}} + \overline{u^2_{I,J}}}{4} \frac{\overline{V_{i,J}} - \overline{V_{i,J-1}}}{\delta_z} \\
& + (\alpha_4 - \alpha_5) \frac{\overline{u^2_{I-1,J-1}} + \overline{u^2_{I-1,J}} + \overline{u^2_{I,J-1}} + \overline{u^2_{I,J}}}{4} \frac{\overline{W_{I,j}} - \overline{W_{I-1,j}}}{\delta_y} + \frac{2k}{3} (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\overline{V_{i,J}} - \overline{V_{i,J-1}}}{\delta_z} + \frac{2k}{3} (\alpha_4 - \alpha_5) \frac{\overline{W_{I,j}} - \overline{W_{I-1,j}}}{\delta_y} \\
& + 2(\alpha_4 - 2) \overline{vw_{i,j}} \frac{\overline{W_{I-1,j+1}} + \overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I-1,j-1}} + \overline{W_{I,j-1}}}{4\delta_z} + (\alpha_4 + \alpha_5) \frac{\overline{uw_{I-1,j}} + \overline{uw_{I,j}}}{2} \frac{\overline{U_{I,J-1}} + \overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I-1,J-1}} - \overline{U_{I-1,J}}}{2\delta_y} \\
& + 2(\alpha_4 - 2) \overline{vw_{i,j}} \frac{\overline{V_{i+1,J}} + \overline{V_{i+1,J-1}} - \overline{V_{i-1,J}} - \overline{V_{i-1,J-1}}}{4\delta_y}
\end{aligned} \right] \\
& + C_{f_s,1} \frac{\overline{\varepsilon_{I-1,J-1}} + \overline{\varepsilon_{I-1,J}} + \overline{\varepsilon_{I,J-1}} + \overline{\varepsilon_{I,J}}}{4k} \left(-\frac{3}{2} \frac{\overline{v^2_{I-1,J-1}} + \overline{v^2_{I-1,J}} + \overline{v^2_{I,J-1}} + \overline{v^2_{I,J}}}{4} - \frac{3}{2} \frac{\overline{w^2_{I-1,J-1}} + \overline{w^2_{I-1,J}} + \overline{w^2_{I,J-1}} + \overline{w^2_{I,J}}}{4} \right) f_s \\
& - C_2 \left(C_{f_s,2} f_s + C_{w,2} \frac{\overline{\varepsilon_{I-1,J-1}} + \overline{\varepsilon_{I-1,J}} + \overline{\varepsilon_{I,J-1}} + \overline{\varepsilon_{I,J}}}{4k} f_w \right) + \left(\begin{aligned}
& \frac{\overline{v^2_{I-1,J-1}} + \overline{v^2_{I-1,J}} + \overline{v^2_{I,J-1}} + \overline{v^2_{I,J}}}{4} \frac{\overline{V_{i+1,J}} + \overline{V_{i+1,J-1}} - \overline{V_{i-1,J}} - \overline{V_{i-1,J-1}}}{4\delta_y} + \overline{vw_{i,j}} \frac{\overline{V_{i,J}} - \overline{V_{i,J-1}}}{\delta_z} + \overline{vw_{i,j}} \frac{\overline{W_{I,j}} - \overline{W_{I-1,j}}}{\delta_y} \\
& + \frac{\overline{w^2_{I-1,J-1}} + \overline{w^2_{I-1,J}} + \overline{w^2_{I,J-1}} + \overline{w^2_{I,J}}}{4} \frac{\overline{W_{I-1,j+1}} + \overline{W_{I,j+1}} - \overline{W_{I-1,j-1}} + \overline{W_{I,j-1}}}{4\delta_z} - 2 \frac{\overline{uv_{i,j-1}} + \overline{uv_{i,j}}}{2} \frac{\overline{U_{I,J-1}} + \overline{U_{I,J}} - \overline{U_{I-1,J-1}} - \overline{U_{I-1,J}}}{2\delta_y} \\
& - 2 \frac{\overline{uw_{I-1,j}} + \overline{uw_{I,j}}}{2} \frac{\overline{U_{I,j}} + \overline{U_{I-1,j}} - \overline{U_{I,J-1}} - \overline{U_{I-1,J-1}}}{2\delta_z}
\end{aligned} \right)
\end{aligned}$$

Equation du taux de dissipation

$$\begin{aligned} \overline{V} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + \overline{W} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\nu + C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\nu + C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{ww} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left(C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_{1\varepsilon} f_1 P_k - C_{2\varepsilon} f_2 \varepsilon) + E \\ \left[\varepsilon \overline{V} \right]_w^e \delta_z + \left[\varepsilon \overline{W} \right]_s^n \delta_y &= \left[\left(\nu + C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right]_w^e \delta_z + \left[\left(\nu + C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{ww} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right]_s^n \delta_y + \left[\left(C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) \right]_w^e \delta_z + \left[\left(C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \right]_s^n \delta_y + \frac{\varepsilon}{k} (C_{1\varepsilon} f_1 P_k - C_{2\varepsilon} f_2 \varepsilon) \delta_y \delta_z + E \delta_y \delta_z \end{aligned}$$

$$a_{\varepsilon_P} \varepsilon_P = a_{\varepsilon_E} \varepsilon_E + a_{\varepsilon_W} \varepsilon_W + a_{\varepsilon_N} \varepsilon_N + a_{\varepsilon_S} \varepsilon_S + b_\varepsilon$$

$$a_{\varepsilon_E} = D_\varepsilon e \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{\varepsilon_e}| \right)^5 \right] + [-Fe, 0] \quad a_{\varepsilon_W} = D_\varepsilon w \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{\varepsilon_w}| \right)^5 \right] + [Fw, 0]$$

$$a_{\varepsilon_N} = D_\varepsilon n \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{\varepsilon_n}| \right)^5 \right] + [-Fn, 0] \quad a_{\varepsilon_S} = D_\varepsilon s \left[0, \left(1 - 0.1 |Pe_{\varepsilon_s}| \right)^5 \right] + [Fs, 0]$$

$$a_{\varepsilon_P} = a_{\varepsilon_E} + a_{\varepsilon_W} + a_{\varepsilon_N} + a_{\varepsilon_S}$$

$$b_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{k} (C_{1\varepsilon} f_1 P_k - C_{2\varepsilon} f_2 \varepsilon) \delta_y \delta_z + \left[\left(C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) \right]_w^e \delta_z + \left[\left(C_\varepsilon \frac{k}{\varepsilon} \overline{vw} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) \right]_s^n \delta_y$$

$$= \frac{\varepsilon}{k} (C_{1\varepsilon} f_1 P_k - C_{2\varepsilon} f_2 \varepsilon) \delta_y \delta_z$$

$$\begin{aligned} &+ \left(C_\varepsilon \frac{\overline{k_{I+1,J}} + \overline{k_{I,J}}}{\varepsilon_{I+1,J} + \varepsilon_{I,J}} \frac{\overline{vw_{i+1,j+1}} + \overline{vw_{i+1,j}}}{2} \frac{\overline{\varepsilon_{I+1,J+1}} + \overline{\varepsilon_{I,J+1}} - \overline{\varepsilon_{I+1,J-1}} - \overline{\varepsilon_{I,J-1}}}{4\delta_z} \right) \delta_z - \left(C_\varepsilon \frac{\overline{k_{I,J}} + \overline{k_{I-1,J}}}{\varepsilon_{I,J} + \varepsilon_{I-1,J}} \frac{\overline{vw_{i,j+1}} + \overline{vw_{i,j}}}{2} \frac{\overline{\varepsilon_{I,J+1}} + \overline{\varepsilon_{I-1,J+1}} - \overline{\varepsilon_{I,J-1}} - \overline{\varepsilon_{I-1,J-1}}}{4\delta_z} \right) \delta_z \\ &+ \left(C_\varepsilon \frac{\overline{k_{I,J+1}} + \overline{k_{I,J}}}{\varepsilon_{I,J+1} + \varepsilon_{I,J}} \frac{\overline{vw_{i+1,j+1}} + \overline{vw_{i,j+1}}}{2} \frac{\overline{\varepsilon_{I+1,J+1}} + \overline{\varepsilon_{I+1,J}} - \overline{\varepsilon_{I-1,J+1}} - \overline{\varepsilon_{I-1,J}}}{4\delta_y} \right) \delta_y - \left(C_\varepsilon \frac{\overline{k_{I,J}} + \overline{k_{I,J-1}}}{\varepsilon_{I,J} + \varepsilon_{I,J-1}} \frac{\overline{vw_{i,j}} + \overline{vw_{i+1,j}}}{2} \frac{\overline{\varepsilon_{I+1,J}} + \overline{\varepsilon_{I+1,J-1}} - \overline{\varepsilon_{I-1,J}} - \overline{\varepsilon_{I-1,J-1}}}{4\delta_y} \right) \delta_y \end{aligned}$$

$$Fe = V_e \delta_z = \overline{V_{i+1,J}} \delta_z \quad Fw = V_w \delta_z = \overline{V_{i,J}} \delta_z$$

$$D_\varepsilon e = \left(v + C_\varepsilon \frac{\overline{k_{I+1,J}} + \overline{k_{I,J}}}{\overline{\varepsilon_{I+1,J}} + \overline{\varepsilon_{I,J}}} \frac{\overline{vw_{I+1,J}} + \overline{vw_{I,J}}}{2} \right) \frac{\delta_z}{\delta_y}$$

$$D_\varepsilon n = \left(v + C_\varepsilon \frac{\overline{k_{I,J+1}} + \overline{k_{I,J}}}{\overline{\varepsilon_{I,J+1}} + \overline{\varepsilon_{I,J}}} \frac{\overline{ww_{I,J+1}} + \overline{ww_{I,J}}}{2} \right) \frac{\delta_y}{\delta_z}$$

$$Fn = V_n \delta_z = \overline{W_{I,j+1}} \delta_y \quad Fs = V_s \delta_z = \overline{W_{I,j}} \delta_y$$

$$D_\varepsilon w = \left(v + C_\varepsilon \frac{\overline{k_{I,J}} + \overline{k_{I-1,J}}}{\overline{\varepsilon_{I,J}} + \overline{\varepsilon_{I-1,J}}} \frac{\overline{vw_{I,J}} + \overline{vw_{I-1,J}}}{2} \right) \frac{\delta_z}{\delta_y}$$

$$D_{uu} s = \left(v + C_\varepsilon \frac{\overline{k_{I,J}} + \overline{k_{I,J-1}}}{\overline{\varepsilon_{I,J}} + \overline{\varepsilon_{I,J-1}}} \frac{\overline{ww_{I,J}} + \overline{ww_{I,J-1}}}{2} \right) \frac{\delta_y}{\delta_z}$$

Equations de Navier Stokes moyennées

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\overline{UV})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{UW})}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial y}(\overline{\tau_{xy}} - \overline{uv}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{\tau_{xz}} - \overline{uw}) + g \sin \alpha \\ \frac{\partial(\overline{V^2})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{VW})}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{\tau_{yy}} - \overline{v^2}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{\tau_{yz}} - \overline{vw}) \\ \frac{\partial(\overline{VW})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{W^2})}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}(\overline{\tau_{yz}} - \overline{vw}) + \frac{\partial}{\partial z}(\overline{\tau_{zz}} - \overline{w^2}) - g \cos \alpha \end{aligned}$$

$$[\overline{UV}\delta_z]_w^e + [\overline{UW}\delta_y]_s^n = \nu \left(\left[\frac{\partial \overline{U}}{\partial y} \right]_w^e \delta_z + \left[\frac{\partial \overline{U}}{\partial z} \right]_s^n \delta_y \right) - [\overline{uv}\delta_z]_w^e - [\overline{uw}\delta_y]_s^n + g \sin \alpha \Delta V$$

$$[\overline{V^2}\delta_z]_w^e + [\overline{VW}\delta_y]_s^n = -\frac{1}{\rho} [\overline{P}\delta_z]_w^e + \nu \left(\left[\frac{\partial \overline{V}}{\partial y} \right]_w^e \delta_z + \left[\frac{\partial \overline{V}}{\partial z} \right]_s^n \delta_y \right) - [\overline{vv}\delta_z]_w^e - [\overline{vw}\delta_y]_s^n$$

$$[\overline{VW}\delta_z]_w^e + [\overline{W^2}\delta_y]_s^n = -\frac{1}{\rho} [\overline{P}\delta_y]_s^n + \nu \left(\left[\frac{\partial \overline{W}}{\partial y} \right]_w^e \delta_z + \left[\frac{\partial \overline{W}}{\partial z} \right]_s^n \delta_y \right) - [\overline{vw}\delta_z]_w^e - [\overline{ww}\delta_y]_s^n - g \cos \alpha \Delta V$$

$$Fe = V_e \delta_z \quad Fw = V_w \delta_z \quad Fn = W_n \delta_y \quad Fs = W_s \delta_y \quad Dy = v \delta_z / \delta_y \quad Dz = v \delta_y / \delta_z$$

$$\begin{aligned} FeU &= V_{i+1,j} \delta_z & FwU &= V_{i,j} \delta_z & FnU &= W_{l,j+1} \delta_y & FsU &= W_{l,j} \delta_y \\ FeV &= \frac{V_{i,j} + V_{i+1,j}}{2} \delta_z & FwV &= \frac{V_{i,j} + V_{i-1,j}}{2} \delta_z & FnV &= \frac{W_{l,j+1} + W_{l-1,j+1}}{2} \delta_y & FsV &= \frac{W_{l,j} + W_{l-1,j}}{2} \delta_y \\ FeW &= \frac{V_{i+1,j} + V_{i+1,j-1}}{2} \delta_z & FwW &= \frac{V_{i,j} + V_{i,j-1}}{2} \delta_z & FnW &= \frac{W_{l,j} + W_{l,j+1}}{2} \delta_y & FsW &= \frac{W_{l,j} + W_{l,j-1}}{2} \delta_y \end{aligned}$$

$Pe_e = \frac{Fe}{Dy}$	$Pe_w = \frac{Fw}{Dy}$	$Pe_n = \frac{Fn}{Dz}$	$Pe_s = \frac{Fs}{Dz}$
------------------------	------------------------	------------------------	------------------------

$$a_E = Dy \left[0, (1 - 0.1 |Pe_e|)^5 \right] + [-Fe, 0] \quad a_W = Dy \left[0, (1 - 0.1 |Pe_w|)^5 \right] + [Fw, 0]$$

$$a_N = Dz \left[0, (1 - 0.1 |Pe_n|)^5 \right] + [-Fn, 0] \quad a_S = Dz \left[0, (1 - 0.1 |Pe_s|)^5 \right] + [Fs, 0]$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S$$

$$a_P \overline{U_P} = a_E \overline{U_E} + a_W \overline{U_W} + a_N \overline{U_N} + a_S \overline{U_S} + b_U$$

$$b_U = -\delta_z (\overline{uv_{i+1,j}} - \overline{uv_{i,j}}) - \delta_y (\overline{uw_{l,j+1}} - \overline{uw_{l,j}}) + g \sin \alpha \Delta V \delta_y \delta_z$$

$$a_p \bar{V}_p = a_E \bar{V}_E + a_W \bar{V}_W + a_N \bar{V}_N + a_S \bar{V}_S + b_V$$

$$b_V = -\frac{\delta_z}{\rho} (\bar{P}_{I,J} - \bar{P}_{I-1,J}) - \delta_z (\overline{vw}_{I,J} - \overline{vw}_{I-1,J}) - \delta_y (\overline{vw}_{i,j+1} - \overline{vw}_{i,j})$$

$$a_p \bar{V}_p = \sum_{E,W,N,S} a_i \bar{V}_i + b_V \quad \Leftrightarrow \quad \bar{V}_p = \frac{\sum_{E,W,N,S} a_i \bar{V}_i + b_V}{a_p} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{V}_p = \bar{V}_p^{old} + \frac{\sum_{E,W,N,S} a_i \bar{V}_i + b_V}{a_p} - \bar{V}_p^{old}$$

$$\bar{V}_p = \bar{V}_p^{old} + \alpha_V \left(\frac{\sum_{E,W,N,S} a_i \bar{V}_i + b_V}{a_p} - \bar{V}_p^{old} \right)$$

$$\frac{\bar{V}_p}{\alpha_V} = \frac{\bar{V}_p^{old}}{\alpha_V} + \frac{\sum_{E,W,N,S} a_i \bar{V}_i + b_V}{a_p} - \frac{\bar{V}_p^{old}}{\alpha_V} = \frac{1 - \alpha_V}{\alpha_V} \bar{V}_p^{old} + \frac{\sum_{E,W,N,S} a_i \bar{V}_i + b_V}{a_p}$$

$$\frac{a_p}{\alpha_V} \bar{V}_p = a_p \frac{1 - \alpha_V}{\alpha_V} \bar{V}_p^{old} + \sum_{E,W,N,S} a_i \bar{V}_i + b_V$$

$$a_p \bar{W}_p = a_E \bar{W}_E + a_W \bar{W}_W + a_N \bar{W}_N + a_S \bar{W}_S + b_W$$

$$b_W = -\frac{\delta_y}{\rho} (\bar{P}_{I,J} - \bar{P}_{I,J-1}) - \delta_z (\overline{vw}_{i+1,j} - \overline{vw}_{i,j}) - \delta_y (\overline{ww}_{I,J} - \overline{ww}_{I,J-1}) - g \cos \alpha \delta_y \delta_z$$

$$\frac{a_p}{\alpha_W} \bar{W}_p = a_p \frac{1 - \alpha_W}{\alpha_W} \bar{W}_p^{old} + \sum_{E,W,N,S} a_i \bar{W}_i + b_W$$

Algorithme SIMPLE

$$a_p \bar{U}_p = a_E \bar{U}_E + a_W \bar{U}_W + a_N \bar{U}_N + a_S \bar{U}_S + b_U \text{ soit } a_{I,J} \bar{U}_{I,J} = \sum_{nb} a_{nb} \bar{U}_{nb}^* + b_{I,J} \text{ (NVS) avec } \bar{U} = \bar{U}^* + \bar{U}' \text{ (valeur précédente + correction)}$$

à l'itération précédente, il a été établi :

Faisons (NVS)- (NVS)* :

$$a_{I,J} \overline{U^*_{I,J}} = \sum_{nb} a_{nb} \overline{U^*_{nb}} + b_{I,J}$$

$$a_{i,j} \overline{U'_{I,J}} = \sum_{nb} a_{nb} \overline{U'_{nb}}$$

$$\frac{a_{i,j}}{\alpha_V} \overline{V^*_{i,j}} = - \left(\overline{P^*_{I,J}} - \overline{P^*_{I-1,J}} \right) \frac{\delta_z}{\rho} + \sum_{nb} a_{nb} \overline{V^*_{nb}} + b_{i,j} \quad \text{(NVS*)}$$

$$\frac{a_{i,j}}{\alpha_V} \overline{V'_{i,j}} = - \left(\overline{P'_{I,J}} - \overline{P'_{I-1,J}} \right) \frac{\delta_z}{\rho} + \sum_{nb} a_{nb} \overline{V'_{nb}}$$

$$\frac{a_{I,j}}{\alpha_W} \overline{W^*_{I,j}} = - \left(\overline{P^*_{I,J}} - \overline{P^*_{I,J-1}} \right) \frac{\delta_y}{\rho} + \sum_{nb} a_{nb} \overline{W^*_{nb}} + b_{I,j}$$

$$\frac{a_{I,j}}{\alpha_W} \overline{W'_{I,j}} = - \left(\overline{P'_{I,J}} - \overline{P'_{I,J-1}} \right) \frac{\delta_y}{\rho} + \sum_{nb} a_{nb} \overline{W'_{nb}}$$

On obtient une relation liant la correction de pression avec les corrections de vitesses aux nœuds aux alentours. La simplification de SIMPLE se fait ici, elle consiste à négliger les contributions des nœuds aux alentours pour ne garder que celle du nœud le plus proche de celui où la pression est calculée.

$$\frac{a_{i,j}}{\alpha_V} \overline{V'}_{i,j} = - \left(\overline{P'}_{i,j} - \overline{P'}_{i,j+1} \right) \frac{\delta_z}{\rho}$$

$$\frac{a_{i,j}}{\alpha_W} \overline{W'}_{i,j} = - \left(\overline{P'}_{i,j} - \overline{P'}_{i,j-1} \right) \frac{\delta_y}{\rho}$$

soit

$$\overline{V'}_{i,j} = d_{i,j} \left(\overline{P'}_{i,j-1} - \overline{P'}_{i,j} \right)$$

$$\overline{W'}_{i,j} = d_{i,j} \left(\overline{P'}_{i,j+1} - \overline{P'}_{i,j} \right)$$

avec

$$d_{i,j} = \alpha_V \delta_y / a_{i,j} / \rho$$

$$d_{i,j} = \alpha_W \delta_z / a_{i,j} / \rho$$

d'où

$$\overline{V}_{i,j} = \overline{V}^*_{i,j} + \overline{V'}_{i,j} = \overline{V}^*_{i,j} + d_{i,j} \left(\overline{P'}_{i,j-1} - \overline{P'}_{i,j} \right)$$

$$\overline{W}_{i,j} = \overline{W}^*_{i,j} + \overline{W'}_{i,j} = \overline{W}^*_{i,j} + d_{i,j} \left(\overline{P'}_{i,j+1} - \overline{P'}_{i,j} \right)$$

de même

$$\overline{V}_{i+1,j} = \overline{V}^*_{i+1,j} + d_{i+1,j} \left(\overline{P'}_{i,j} - \overline{P'}_{i+1,j} \right)$$

$$\overline{W}_{i,j+1} = \overline{W}^*_{i,j+1} + d_{i,j+1} \left(\overline{P'}_{i,j} - \overline{P'}_{i,j+1} \right)$$

Intégrons maintenant l'équation de continuité :

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = 0$$

$$\left[\overline{V} \right]_w^e \delta_z + \left[\overline{W} \right]_s^n \delta_y = 0$$

$$\left(\overline{V}_{i+1,j} - \overline{V}_{i,j} \right) \delta_z + \left(\overline{W}_{i,j+1} - \overline{W}_{i,j} \right) \delta_y$$

$$\left(\overline{V}^*_{i+1,j} + d_{i+1,j} \left(\overline{P'}_{i,j} - \overline{P'}_{i+1,j} \right) - \overline{V}^*_{i,j} - d_{i,j} \left(\overline{P'}_{i,j-1} - \overline{P'}_{i,j} \right) \right) \delta_z + \left(\overline{W}^*_{i,j+1} + d_{i,j+1} \left(\overline{P'}_{i,j} - \overline{P'}_{i,j+1} \right) - \overline{W}^*_{i,j} - d_{i,j} \left(\overline{P'}_{i,j-1} - \overline{P'}_{i,j} \right) \right) \delta_y = 0$$

$$\delta_z \left(\overline{V}^*_{i+1,j} - \overline{V}^*_{i,j} \right) + \delta_y \left(\overline{W}^*_{i,j+1} - \overline{W}^*_{i,j} \right) + \left(\delta_z d_{i+1,j} + \delta_z d_{i,j} + \delta_y d_{i,j+1} + \delta_y d_{i,j} \right) \overline{P'}_{i,j} - \delta_z d_{i,j+1} \overline{P'}_{i,j+1} - \delta_y d_{i,j+1} \overline{P'}_{i,j+1} - \delta_y d_{i,j-1} \overline{P'}_{i,j-1} = 0$$

Bibliographie

- Bailly, C., & Comte-Bellot, G. (2003). *Turbulence*. Paris: CNRS Editions.
- Bardiaux, J.-B., Mosé, R., Vazquez, J., & Wertel, J. (2008). Two turbulent flow 3D-modelings to improve sewer net instrumentation. *11th International Conference on Urban Drainage*. Edinburg, Scotland.
- Bardiaux, J.-B., Vazquez, J., & Mosé, R. (2008). Assessment of velocity fields through open-channel flows with an empiric law. *Water Science and Technology*, 11 (57), 1763-1768.
- Bardina, J., Ferziger, J., & Reynolds, W. (1983). *Improved turbulence models based on large eddy simulation of homogeneous, incompressible, turbulent flows*. Stanford University, Technical Report TF-19.
- Bertrand-Krajewski, J.-L., Barrauda, S., & Chocat, B. (2000). Need for improved methodologies and measurements for sustainable management of urban water systems. *Environmental Impact Assessment Review*, 20, 323–331.
- Boussinesq, J. (1877). Essai sur la théorie des eaux courantes. *Mémoire des Savants étrangers. Ac. Sc. Paris*, XXVIII.
- Canoë. (1999). *Notice 1999 du logiciel Canoë*. SOGREAH.
- Chassaing, P. (2000). *Turbulence en mécanique des fluides. Analyse du phénomène en vue de sa modélisation à l'usage de l'ingénieur*. Cepadues-éditions.
- Chien, K. (1982). Predictions of channel and boundary-layer flows with a low-Reynolds number turbulence model. *AIAA Journal*, 20, 33-38.
- Cokljat, D. (1993). *Turbulence models for non-circular ducts and channels*. Ph.D. Thesis, Department of Civil Engineering, City University, London.
- Coleman, N. (1986). Effects of suspended sediment on the open-channel velocity distribution. *Water resources and management*, 22 (10), 1377-1384.
- Daly, B., & Harlow, F. (1970). Transport equations in turbulence. *Physics of Fluid*, 13, 2634-2649.
- Dantec. (2004). *FLOWMAP 3D-PIV system, installation & user's guide*. Dantec Dynamics.
- De Saint Venant, A. (1871). Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 73, 147-154.

Demuren, A. O., & Sarkar, S. (1987). Study of second-moment closure models in computations of turbulent shear flows. Dans W. Rodi, & F. Martelli (Éds.), *Engineering Turbulence Modelling and Experiments 2* (pp. 53-62). Elsevier Science Publishers.

Detlev, G., & Eckelmann, H. (1982). Influence of end plates and free ends on the shedding frequency of circular cylinders. *Journal of Fluid Mechanics* , 122, 109-121.

Donaldson, C. d. (1971). A progress report on an attempt to construct an invariant model of turbulent shear flows. *Conference proceedings on Turbulent Shear Flows*. London: AGARD.

Dufresne, M. F. (2008). *la modélisation 3D du transport solide dans les bassins en assainissement: du pilote expérimental à l'ouvrage réel*. Mémoire de doctorat, Institut National des Sciences Appliquées de Strasbourg.

Fluent. (2003). *Fluent 6.1 software User's Guide*. Fluent Inc.

Ghia, U., Ghia, K. H., & Shin, C. T. (1982). High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics* , 48, 387-411.

Gibson, M., & Launder, B. (1978). Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. *Journal of Fluid Mechanics* , 86, 491-511.

Guillou, S., Barbry, N., & Nguyen, K. D. (2000). Calcul numérique des ondes de surface par une méthode de projection et un maillage eulérien adaptatif. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences* , II B, 875-881.

Guo, J., & Julien, P. Y. (2005). Shear stress in smooth rectangular open-channel flows. *Journal of hydraulic engineering* , 131 (1), 30-37.

Harlow, F. H., & Welch, J. E. (1965). Numerical Calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of Fluids* , 8, 2182-2189.

Hoarau, Y. (2002). *Analyse Physique par Simulation Numérique et Modélisation des Écoulements Décollés Instationnaires autour de Surfaces Portantes*. Toulouse, France: Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.

Ikeda, S. (1981). Self-formed straight channels in sandy beds. (ASCE, Éd.) *Journal of the Hydraulic Division* , 107, 389-406.

Jin, G. (1994). *Simulation numérique et modélisation d'écoulements instationnaires turbulents autour d'un profil d'aile à forte incidence*. Toulouse, France: Thèse de Doctorat, Institut National Polytechnique de Toulouse.

Kang, H., & Choi, S.-U. (2005). Reynolds stress modelling of rectangular open-channel flow. *International journal for numerical methods in fluids* , 51 (11), 1319-1334.

-
- Kang, H., & Choi, S.-U. (2005). Turbulence modeling of compound open-channel flows with and without vegetation on the floodplain using the Reynolds stress model. *Advances in Water Resources* , 29 (11), 1650-1664.
- Klebanoff, P., Tidstrom, K. D., & Sargent, L. (1962). The three-dimensional nature of boundary layer transition. *Journal of Fluid Mechanics* , 12, 1-34.
- Lam, C. K., & Bremhorst, K. A. (1981). Modified Form of the k- ϵ Model for Predicting Wall Turbulence. *Journal of Fluids Engineering* , 103, 456-460.
- Larrarte, F., Bardiaux, J.-B., Battaglia, P., & Joannis, C. (2008). Acoustic Doppler flow-meters : a proposal to characterize their technical parameters. *Flow Measurement and Instrumentation* , 19, 261-267.
- Lauder, B., & Spadling, D. (1974). The numerical computation of the turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* , 3, 269-289.
- Lauder, B., Reece, G., & Rodi, W. (1975). Progress in the development of a Reynolds stress. *Journal of Fluid Mechanics* , 68 (3), 537-566.
- Lorenz, E. (1963). Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences* , 20, 130-141.
- Mansour, N., Kim, J., & Moin, P. (1988). Reynolds-stress and dissipation-rate budgets in a turbulent channel flow. *Journal of Fluid Mechanics* , 194, 15-44.
- Mellor, G. L., & Herring, H. J. (1973). A survey of mean turbulent field closure models. *AIAA Journal* , 11, 590-599.
- Muste, M., & Patel, V. C. (1997). Velocity profiles for particles and liquid in open-channel flow with suspended sediment. *Journal of hydraulic engineering* , 123 (9), 742-751.
- Naot, D., & Rodi, W. (1982). Calculation of secondary currents in channel flows. (ASCE, Éd.) *Journal of the Hydraulic Division* , 108, 948-968.
- Nezu, I., & Nakagawa, H. (1993). *Turbulence in open-channel flows* (éd. IAHR Monograph). Rotterdam, The Netherlands: Balkema.
- Nezu, I., & Rodi, W. (1985). Experimental study on secondary currents in open channel. *21st IAHR Congress*, (pp. 115-119). Melbourne.
- Nikuradse, J. (1926). Turbulente Strömung im Innern des rechteckigen offenen Kanals. *Forschungsarbeiten* (281), 36-44.
- Patankar, S. V. (1980). *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. (H. p. Corporation, Éd.) New York: Taylor & Francis Group.

- Patankar, S. V., & Spalding, D. B. (1972). A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15, 1787.
- Patel, V. C., Rodi, W., & Scheuerer, G. (1985). Turbulence Models for Near-Wall and Low Reynolds Number Flows: A Review. *AIAA Journal*, 23 (9), 1308-1319.
- Prandtl, L. (1925). Über die ausgebildete Turbulenz. *ZAMM*, 5, 136-139.
- Ramamurthy, A. S., Junying, Q., & Diep, V. (2005). Volume of fluid model for an open channel flow problem. *Canadian journal of civil engineering*, 32 (5), 996-1001.
- Rodi, W. (1972). *The prediction of the free turbulent boundary layers by use of two-equations model of turbulence*. PhD Thesis, University of London, London.
- Rodi, W. (1980). Turbulence Models and their Application in Hydraulics. *A State of the Art review*. Delft: IAHR.
- Sagaut, P. (1995). *Simulation numérique d'écoulements décollés avec des modèles de sous-maille*. Thèse de Doctorat de l'Université de Paris IV.
- Saïdi, A., & Dusek, J. (2009). Une méthode directe de caractérisation statistique de l'écoulement d'un jet excité par une perturbation stochastique. *XIXème Congrès Français de Mécanique*. Marseille.
- Shir, C. (1973). A preliminary study of atmospheric turbulent flow in the idealized planetary boundary layer. *Journal of Atmospheric Science*, 30, 1327–1339.
- Sontek. (2001). *Sontek ADVfield acoustic Doppler velocimeter: technical documentation*. SonTek/YSI Inc.
- Spalding, D. B. (1972). A novel finite difference formulation for differential expressions involving both first and second derivatives. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 4, 551.
- Speziale, C., Sarkar, S., & Gatski, T. (1991). Modeling the pressure strain correlation of turbulence: an invariant dynamical. *Journal of Fluid Mechanics*, 227, 245-272.
- Tufo, H. M., Fischer, P. F., Papka, M. E., & Blom, K. (1999). Numerical Simulation and Immersive Visualization of Hairpin. *Proceedings of the 1999 ACM/IEEE conference on Supercomputing*, article No. 62. Portland.
- Van der Vorst, H. A. (1992). BI-CGSTAB: a fast and smoothly converging variant of BI-CG for the solution of nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 12, 631-644.

Van Driest, E. R. (1956). On the turbulent flow near a wall. *Journal of the Aeronautical Science* , 23, 1007-1011.

Vazquez, J. (2009). *Cours d'hydraulique à surface libre*. ENGEES.

Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (1995). *An introduction to computational fluid dynamics, the finite volume method*. (P. Hall, Éd.) Pearson Education.

Williamson, C. (1989). Oblique and parallel modes of vortex shedding in the wake of a circular cylinder at low Reynolds numbers. *The Journal of Fluid Mechanics* , 206, 579-627.

Yang, S. Q. (2005). Interactions of boundary shear stress, secondary currents and velocity. *Fluid dynamics research* , 36, 121-136.

Yang, S.-Q., Tan, S.-K., & Lim, S.-Y. (2004). Velocity distribution and dip-phenomenon in smooth uniform open channel flows. *Journal of Hydraulic Engineering* , 130 (12), 1179-1186.

Zeman, O., & Lumley, J. (1977). Buoyancy effects in entraining turbulent boundary layers: A second order closure. *Proceedings Symposium on Turbulent Shear Flows*. Berlin: Springer-Verlag.