INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE

Université de Strasbourg et C.N.R.S. (UMR 7501)

7, rue René Descartes

67084 STRASBOURG Cedex

Les applications conforme-harmoniques

Par

Vincent BERARD

Mots-clés :; géométrie riemannienne, applications harmoniques, applications conforme-harmoniques, géométrie conforme, analyse non-linéaire, énergie renormalisée, opérateur de Paneitz.

Classification mathématique: 35J30; 53C43; 58E20; 53A30; 53A21; 58-99

Remerciements

J'aimerais tout d'abord remercier sincèrement mon directeur de thèse Olivier Biquard, pour m'avoir entouré de toute sa rigueur et d'avoir partagé avec moi sa vision très profonde des mathématiques.

Je voudrais ensuite exprimer toute ma reconnaissance à Zindine Djadli et Marc Herzlich, pour avoir accepté d'être les rapporteurs, ainsi qu'à Thomas Delzant et Emmanuel Humbert pour leur participation à mon jury.

Je remercie mon tuteur pédagogique Frédéric Fauvet pour sa sympathie et ses conseils toujours utiles, ainsi que tous les enseignants avec qui j'ai eu le plaisir de partager mon monitorat et mon contrat d'ATER.

Durant ces quatre années, j'ai eu la chance de travailler dans un environnement exceptionnel, je pense naturellement à la « philosophie 113 » personnifiée par mes co–bureaux, Rémi, Kees, Audrey, Ben, Alain et Salimou, qui m'ont supporté dans tous les sens du terme. Je n'oublie pas non plus les autres thésards, notamment Adrien, Scoum, Anne–Laure, Jürgen et les membres du 113b. J'aimerais profiter de ces quelques lignes pour leur témoigner toute mon amitié, ainsi que leur souhaiter beaucoup d'idées lumineuses dans leurs domaines de recherche respectifs.

J'ai pu compter aussi sur l'appui sans faille de mes amis non–thésards, je pense à mon « cousin » Julien, aux sportifs et assimilés Adrien, Régis, Sylvain et Claire, au vétéran du Vietnam Seby, et aux membres du CCSC et de son fan club Pique, Koub, Yan et Ysia. Je les en remercie, pour ça et pour tout le reste.

Je dois tout à mes parents, ils ont été et resterons pour moi un exemple. Je tiens également à remercier mes soeurs Julie et Charlotte pour m'avoir entre autres hébergé–secouru de nombreuses fois, mon bôf Adrien et ma « tante » Yolande.

Si j'ai choisi la recherche, j'ai bien peur de le devoir à mon père, mais si c'est en mathématiques, je crois bien que c'est la faute de mon oncle Daniel. Je l'en remercie sincèrement, ainsi que ma tante Bernadette, pour toutes ces vacances où les devinettes mathématiques remplissaient le temps d'une randonnée et où tous les jeux de cartes se finissaient évidemment en bridge.

Table des matières

Introduction

Motivation

Nous allons commencer par faire de brefs rappels sur les applications harmoniques. Soient (M,g) et (N,h) deux variétés riemanniennes de dimension n et m, dans toute la suite, on considérera que ces variétés sont compactes et de classe C^∞. On appelle énergie des applications de classe C^∞ de (M,g) dans (N,h), la fonctionnelle E_g définie de la manière suivante :

$$E_g(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |T\varphi|^2_{g,h}\, dvol_g,$$

où $T\varphi$ désigne l'application tangente de φ, qui est une section du fibré des 1–formes à valeurs dans les champs de vecteurs de TN tirés–en–arrière par φ, qu'on note $\Omega^1(M)\otimes\varphi^*TN$.

Définition. *Une application est dite harmonique de (M,g) dans (N,h) si et seulement si, elle est un point critique de l'énergie.*

On munit le fibré des champs de vecteurs tirés–en–arrière φ^*TN, de la connexion de Levi-Civita de TN tirée–en–arrière par φ, ce qui nous permet de définir δ^g comme étant la divergence canonique du fibré $\Omega^1(M)\otimes\varphi^*TN$ qui dépend de l'application φ et des métriques g et h. On montre facilement la proposition suivante :

Proposition. *L'application φ est harmonique de (M,g) dans (N,h) si et seulement si $\delta^g T\varphi = 0$.*

Dans le cas des applications d'une surface à valeurs dans une variété riemannienne quelconque, il est bien connu que l'énergie ne dépend que de la classe conforme de la métrique de départ (et bien sur de la métrique d'arrivée), c'est–à–dire que pour deux métriques conformes g et $\overline{g} := e^{2\omega}g$ sur une variété de dimension 2, on a

$$E_{\overline{g}}(\varphi) = E_g(\varphi) \text{ et } \delta^{\overline{g}} T\varphi = e^{2\omega}\delta^g T\varphi.$$

Il faut remarquer que le laplacien pour les applications est en général non–linéaire, ainsi quand la variété de départ M est une surface, alors être harmonique signifie que l'application en question est solution d'une équation non–linéaire d'ordre 2 qui est invariante par changement conforme de métrique sur la surface.

Par contre quand M est de dimension strictement supérieure à 2, l'énergie n'est plus un invariant conforme, en effet on obtient alors pour le laplacien :

$$\delta^{\overline{g}} T\varphi = e^{2\omega}\big(\delta^g T\varphi - (n-2)\langle d\omega, T\varphi\rangle_g\big).$$

Dans ce cas là, la notion d'harmonicité n'est plus une propriété géométrique de la classe conforme de g, mais bien de la métrique g.

On peut trouver dans la littérature (voir [4], [16] et les références citées) une généralisation des applications harmoniques qui est non conforme, ce sont les applications biharmoniques, qui sont définies comme étant les points critiques de la biénergie :

$$E^2_g(\varphi) := \frac{1}{2}\int_M |\delta^g T\varphi|^2_g \, dvol_g.$$

En effet, on obtient facilement qu'une application harmonique est biharmonique. L'étude de cette classe d'applications donnent de nombreux résultats, comme par exemple dans [15], ou Lamm donne une nouvelle démonstration du théorème d'Eells–Sampson sur l'existence d'applications harmoniques dans les classes d'homotopie. Mais les applications harmoniques n'existent pas toujours (voir l'article [7] d'Eells et Wood pour des exemples d'obstructions topologiques), et un des principaux objectifs de cette théorie est de vouloir prouver l'existence d'applications biharmoniques dans ces cas là, pour combler le manque laissé par l'absence des applications harmoniques. On peut citer encore les travaux de Baird et de Kamissoko dans [2], qui utilisent justement le fait que l'harmonicité ne soit pas une notion invariante conforme en dimension supérieure à 2, pour exhiber des applications biharmoniques qui ne sont pas harmoniques. Nous nous poserons le même type de question et nous obtiendrons aussi un résultat d'existence non trivial.

Le but de cette thèse est de définir une nouvelle notion d'harmonicité pour les applications sur les variétés de dimension paire qui soit invariante conforme, c'est–à–dire définir une fonctionnelle invariante conforme qui va jouer le rôle de l'énergie et déterminer l'équation de ses points critiques qui va remplacer la condition non–linéaire d'annulation du laplacien.

Si on se restreint aux fonctions sur les variétés de dimension paire, Graham, Jenne, Mason et Sparling, ont démontré en 1987 dans [12], l'existence d'un opérateur différentiel invariant conforme de terme principal $\Delta^{n/2}$ sur les fonctions C^∞ de M. En dimension 4, il s'agit de l'opérateur de Paneitz P_4,

$$P_4 := \Delta^2 + \delta(\frac{2}{3}\operatorname{Scal} - 2\operatorname{Ric})\, d.$$

Nous proposons de généraliser l'équation du noyau de cet opérateur sur des fonctions, en une équation aux dérivées partielles elliptique non–linéaire d'ordre n sur les applications C^∞ de (M,g) dans (N,h) qui soit invariante conforme par rapport à g. De plus, nous construisons une fonctionnelle invariante conforme par rapport à g, dont les points critiques sont exactement les solutions de cette EDP. Bien que la démonstration de l'existence de cette EDP suit les idées de Graham, Jenne, Mason et Sparling en résolvant un problème de Cauchy, la fonctionnelle s'obtient en renormalisant l'énergie de la solution de ce problème à bord, en suivant l'idée de Graham dans [10] quand il définit son volume renormalisé.

Principaux résultats

Existence de la fonctionnelle et de l'équation de ses points critiques

Nous avons le théorème suivant qui résume les théorèmes 3.1.1 et 4.1.1 :

Théorème. *Soit (M^n, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes, on suppose que n est pair, alors il existe une fonctionnelle sur les applications de classe C^∞ de (M,g) dans (N,h) qui est invariante conforme par rapport à g. De plus, l'équation de ses points critiques est une équation aux dérivées partielles elliptique non–linéaire d'ordre n, qui est invariante conforme elle aussi par rapport à g.*

Définition. *On note $\mathcal{E}_g^n$ la fonctionnelle du théorème précédent et on appelle ses points critiques, les applications conforme–harmoniques, qu'on abrège en C–harmoniques.*

On regarde la variété (M^n, g) comme étant l'infini conforme d'une variété (X^{n+1}, g_+) particulière qu'on appelle métrique de Poincaré, cette notion généralise le modèle du disque de Poincaré, quand on considère la sphère $\mathbb{S}^n$ munie de sa métrique canonique, comme le bord à l'infini de la boule unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ munie de la métrique hyperbolique. L'équation des points critiques est obtenue comme une obstruction à résoudre un problème de Cauchy dégénéré sur la métrique de Poincaré de (M, g).

On se donne une application φ de M dans N, notre problème à bord est de déterminer $\tilde{\varphi}$, une application C^∞ de $\overline{X}$ dans N qui soit égale à φ sur M et qui soit harmonique de (X, g_+) dans (N, h). Sur les fonctions, Graham, Jenne, Mason et Sparling ont montré qu'il n'était pas toujours possible de résoudre ce problème localement. En effet, quand la variété de départ est de dimension paire, il existe un terme logarithmique non–trivial dans le développement formel de la solution près du bord, ce qui obstrue la régularité de la résolution. L'opérateur GJMS d'ordre maximal est ensuite défini comme étant la valeur du terme logarithmique, qui ne dépend que de la classe conforme de g, de la métrique h et de φ. On va suivre la même idée pour les applications, à la différence près qu'on va identifier localement la variété d'arrivée avec son espace tangent, de manière à calculer le développement asymptotique non pas de $\tilde{\varphi}$ (ce qui n'a pas de sens, puisque $\tilde{\varphi}$ est à valeurs dans une variété quelconque), mais de la composée de $\tilde{\varphi}$ avec l'exponentielle. Dans le cas général, il y a toujours un terme logarithmique, quand la variété de départ est de dimension paire, qui ne dépend que de l'application de départ et de la classe conforme de g (et de la métrique h), notre EDP est simplement la condition sur φ que ce terme logarithmique soit nul.

Le développement asymptotique est entièrement déterminé jusque–là par φ et des termes de courbures des variétés de départ et d'arrivée, ce qui est équivalent à la donnée de la valeur sur le bord des n premières dérivées de la solution $\tilde{\varphi}$ par rapport à la coordonnée radiale. Cela nous permet de calculer le développement asymptotique de l'énergie dans un ruban $M \times [\rho; \varepsilon]$ quand ρ tend vers 0. Robin Graham défini le volume renormalisé de $(M, [g])$ comme étant le terme constant dans le développement asymptotique dans un voisinage du bord du volume de la métrique de Poincaré (qui est juste un développement asymptotique d'une métrique qui est solution à un problème à bord), ici notre développement admet aussi un terme constant qui ne dépend que de φ et de la classe conforme de g (et de la métrique h), il s'agit de la valeur de notre fonctionnelle invariante conforme en φ. On montre ensuite, par une intégration par parties, que le gradient de cette fonctionnelle est bien notre terme logarithmique précédent.

Formules explicites

En dimension 2, la fonctionnelle $\mathcal{E}_g^2$ est évidemment l'énergie des applications de (M^2, g) dans (N, h) et les applications C–harmoniques sont exactement les applications harmoniques.

En dimension 4, le théorème 5.1.1 nous donne une expression explicite de la fonctionnelle $\mathcal{E}_g^4$ en terme de courbures de g et de l'équation de ses points critiques en termes de courbures de g et de h :

Théorème. *Quand M est de dimension 4, notre fonctionnelle s'écrit :*

$$\mathcal{E}_g^4(\varphi) = \int_M \big(|\delta T\varphi|_h^2 + \frac{2}{3}\operatorname{Scal}|T\varphi|_{g,h}^2 - 2\operatorname{Ric}(T\varphi, T\varphi)\big)\, dvol,$$

où Scal *et* Ric *désignent respectivement la courbure scalaire et le tenseur de Ricci de g et $dvol$ la forme volume de g. Notons* S *l'endomorphisme de φ^*TN défini de la manière suivante :*

$$\mathrm{S}(X) = \sum_{i=1}^4 \mathrm{R}^h_{X, T\varphi(e_i)}\, T\varphi(e_i),$$

où $(e_1, \ldots, e_4)$ est une base orthonormée de TM par rapport à g et R^h est le tenseur de courbure de (N, h), alors l'équation de ses points critiques s'écrit :

$$\delta d\delta T\varphi + \delta\big((\frac{2}{3}\operatorname{Scal} - 2\operatorname{Ric})\, T\varphi\big) - \mathrm{S}(\delta T\varphi) = 0.$$

Obtenir des écritures explicites de la condition de C–harmonicité devient rapidement très compliqué quand la dimension de M augmente, en dimension 6 on est alors amené à faire des hypothèses sur la courbure de (M, g) et de (N, h) :

Théorème. *Soient (M, g) une variété d'Einstein de dimension 6 avec $\operatorname{Ric}^g = 20\,\lambda\, g$ et (N, h) une variété riemannienne symétrique, alors on obtient pour notre fonctionnelle :*

$$\mathcal{E}_g^6(\varphi) = \int_M \big(|d\delta T\varphi|_{g,h}^2 - \langle \mathrm{S}(\delta T\varphi), \delta T\varphi\rangle_h + 40\,\lambda\, |\delta T\varphi|_h^2 + 384\,\lambda^2\, |T\varphi|_{g,h}^2\big)\, dvol$$

où S *est l'endomorphisme de* φ^*TN *défini de manière analogue à la dimension* 4 *:*

$$\mathrm{S}(X) = \sum_{i=1}^{6} \mathrm{R}^h_{X,\,T\varphi(e_i)}\, T\varphi(e_i),$$

où $(e_1, \ldots, e_6)$ *est une base orthonormée de* TM *par rapport à* g*.*

De plus, on obtient pour l'équation de C–harmonicité :

$$(\delta d - \mathrm{S} + 16\,\lambda\,)(\delta d - \mathrm{S} + 24\,\lambda)\,\delta T\varphi - 2\,\mathrm{R}^h_{\delta T\varphi,\,T\varphi(e_i)}(\nabla^h_{T\varphi(e_i)}\delta T\varphi) = 0.$$

où δ *et* d *se rapportent à* g*, et* ∇^h *est la connexion de* h*.*

Toutefois, quand la variété (M,g) est seulement riemannienne, on peut encore calculer la condition de C–harmonicité et la valeur de notre fonctionnelle pour l'identité de $(M,[g])$ dans (M,g), c'est l'objet du théorème suivant :

Théorème. *Soit* (M^6, g) *une variété de dimension* 6*, alors on obtient pour l'identité de* M *:*

$$\mathcal{E}^6_g(id) = \frac{4}{25}\int_M \mathrm{Scal}^2\, dvol,$$

où Scal *est la courbure scalaire de* (M,g)*.*

De plus l'identité est C–harmonique de $(M,[g])$ *dans* (M,g) *si et seulement si :*

$$(\Delta + \frac{9}{20}\,\mathrm{Scal}\, g - \frac{5}{4}\,\mathrm{Ric})\, d\,\mathrm{Scal} - \frac{15}{2}\,\mathrm{tr}(\nabla_{\mathrm{Ric}}\mathrm{Ric}) + 20\,\delta\,\mathrm{B} + \frac{5}{4}\, d(|\,\mathrm{Ric}\,|^2) = 0,$$

où Ric *et* B *désignent respectivement le tenseur de Ricci et le tenseur de Bach de* g*.*

Le cas des variétés d'Einstein

Si la variété de départ est une variété d'Einstein, l'expression de sa métrique de Poincaré est plus simple, ce qui nous permet d'obtenir la proposition suivante :

Proposition. *Soient* (M,g) *et* (N,h) *deux variétés riemanniennes, on suppose de plus que* (M,g) *est une variété d'Einstein de dimension paire, alors les applications harmoniques de* (M,g) *dans* (N,h) *sont aussi C–harmoniques de* $(M,[g])$ *dans* (N,h)*.*

Néanmoins, le calcul explicite de la fonctionnelle et de la condition de C–harmonicité reste compliqué. Toutefois, si l'on travaille avec les applications harmoniques de (M, g) dans (N, h), on obtient la proposition suivante :

Proposition. *Soient (M^n, g) une variété d'Einstein de dimension paire avec*

$$\mathrm{Ric}^g = 4\lambda(n-1)\, g,$$

une variété riemannienne (N, h) et une application φ qui est harmonique de (M, g) dans (N, h), alors notre fonctionnelle invariante conforme prise en φ est égale à :

$$\mathcal{E}_g(\varphi) = (4\lambda)^{n/2-1}(n-2)! \int_M |T\varphi|^2_{g,h}\, dvol_g.$$

Dans le cas particulier de l'identité de (M, g), on obtient ainsi :

$$\mathcal{E}_g(id_M) = (4\lambda)^{n/2-1}(n-2)!\, n\, vol_g(M),$$

où $vol_g(M)$ désigne le volume de M par rapport à g.

Le cas de la dimension 4

Il est facile de voir que l'identité est toujours une application harmonique de (M, g) dans (M, g), cela traduit juste le fait que la métrique g est parallèle. Ainsi en dimension 2, c'est aussi une application C–harmonique, en revanche l'identité n'est pas toujours C–harmonique en dimension supérieure à 2. En utilisant l'identité de Bianchi, on obtient une condition nécessaire et suffisante en dimension 4, c'est l'objet du corollaire suivant, qui nous servira de point de départ pour construire une application conforme–harmonique qui ne soit pas trivialement harmonique.

Corollaire. *Soit (M^4, g) une variété riemannienne de dimension 4, l'identité de M est C–harmonique de $(M, [g])$ dans (M, g) si et seulement si la courbure scalaire de g est constante.*

Nous avons vu, si la variété de départ est d'Einstein, que les applications harmoniques sont aussi C–harmoniques, la proposition suivante nous donne des conditions sur les courbures de nos deux variétés, pour lesquelles les applications C–harmoniques sont alors exactement les applications harmoniques.

Proposition. *Soient (M^4, g) une variété d'Einstein de dimension 4 à courbure scalaire positive ou nulle et (N, h) une variété riemannienne de courbure sectionnelle négative ou nulle, alors les applications C–harmoniques de $(M, [g])$ dans (N, h) sont exactement les applications harmoniques.*

Ces conditions sur les courbures ne sont pas sans nous rappeler celles, plus générales, de la proposition suivante due à Eells et Sampson dans [6] :

Proposition (Eells–Sampson). *Soient (M^4, g) une variété riemannienne de tenseur de Ricci positif ou nul et (N, h) une variété riemannienne de courbure sectionnelle négative ou nulle, on se donne une application φ qui est harmonique de (M, g) dans (N, h), alors*

1. *φ est totalement géodésique (c'est–à–dire que $\nabla T\varphi = 0$),*
2. *si la courbure scalaire de (M, g) est strictement positive en un point, alors φ est constante,*
3. *si la courbure sectionnelle de (N, h) est strictement négative, alors φ est constante ou a une géodésique comme image.*

Ainsi on obtient directement la proposition suivante comme corollaire à la proposition précédente :

Proposition. *Soient (M^4, g) une variété d'Einstein de courbure scalaire positive ou nulle et (N, h) une variété riemannienne de courbure sectionnelle négative ou nulle, on se donne une application φ qui est C–harmonique de $(M, [g])$ dans (N, h), alors*

1. *φ est totalement géodésique (c'est–à–dire que $\nabla T\varphi = 0$),*
2. *si le tenseur* Ric *de (M, g) est strictement positif en un point, alors φ est constante,*
3. *si la courbure sectionnelle de (N, h) est strictement négative, alors φ est constante ou a une géodésique comme image.*

Rigidité

Si n est pair, on a la proposition suivante :

Proposition. *Soit n un nombre pair, on munit la boule unité ouverte B de $\mathbb{R}^{n+1}$ de la métrique hyperbolique g_{hyp} et on se donne φ une application C^n de $\overline{B}$ dans une variété riemannienne (N, h) qui est harmonique de (B, g_{hyp}) dans (N, h), alors sa restriction à $\partial\overline{B}$ est C–harmonique.*

Dans le cas général, la construction de notre variété X admet une obstruction qui n'intervient pas dans la construction de la fonctionnelle et de ses points critiques, et qui est mesurée par le tenseur d'obstruction (voir [11]). Par exemple en dimension 2, le tenseur d'obstruction est nul et en dimension 4 il s'agit du tenseur de Bach. On peut généraliser la proposition précédente en travaillant avec des variétés asymptotiquement hyperboliques à la place de la boule B.

Exemple d'application C–harmonique non trivial

On désire prouver l'existence d'une application qui soit C–harmonique de $(M, [g])$ dans (N, h), mais qui ne soit pas harmonique de $(M, \overline{g})$ dans (N, h), et ce pour n'importe quelle métrique $\overline{g}$ dans la classe conforme de g. Nous allons nous concentrer sur les variétés de dimension 4. Notre angle d'attaque est le suivant ; nous savons que l'identité d'une variété riemannienne (M, h) à courbure scalaire constante strictement négative est C–harmonique et harmonique (corollaire 5.1.4), on suppose que h est « proche » d'une métrique d'Einstein, on va montrer que fixer la métrique h dans la variété d'arrivée et déformer judicieusement la métrique de la variété de départ, permet de construire une application proche de l'identité qui conserve la C–harmonicité, mais qui n'est plus harmonique, pour n'importe quel changement conforme de métrique par rapport à la variété de départ.

On obtient le théorème suivant (on pourra consulter le théorème 6.2.1 pour avoir un énoncé plus précis) :

Théorème. *Soit (M, g_e) une variété d'Einstein de dimension 4 à courbure scalaire négative, alors pour toute métrique h suffisamment proche de g_e il existe une application φ de M dans M et deux métriques g et h « proches » de g_e telles que :*

1. *φ est C–harmonique de $(M, [g])$ dans (M, h),*
2. *φ est non–harmonique de $(M, \overline{g})$ dans (M, h), quelque soit $\overline{g}$ dans la classe conforme de g.*

Nous rappellerons des résultats connus sur les applications harmoniques au premier chapitre et nous regarderons plus en détail le cas où la variété de départ est de dimension 2, ainsi que les propriétés d'invariance conforme bien connus qui en découlent. C'est cet exemple précis que l'on généralisera en dimension paire supérieure, notamment par le biais de la métrique de Poincaré, que nous étudierons dans le deuxième chapitre. Nous en donnerons quelques exemples en dimensions 2, 4 et 6, ainsi que pour les variétés d'Einstein. Quand la variété de départ est de dimension paire, nous définirons alors nos applications C–harmoniques avec le théorème 3.1.1 dans le troisième chapitre et l'énergie renormalisée qui leur est associée grâce au théorème 4.1.1 dans le quatrième chapitre. Le cinquième chapitre est consacré à l'étude des applications C–harmoniques en basses dimensions, on pourra y trouver une équation explicite de conforme–harmonicité en dimension 4, et en dimension 6 sous certaines conditions. Dans le sixième et dernier chapitre, nous démontrerons un résultat non trivial d'existence d'application C–harmonique. On trouvera dans l'annexe le détail de certains résultats techniques.

Chapitre 1

Les applications harmoniques

1.1 Définitions

Soient (M, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes et φ une application C^∞ de M dans N, on note $T\varphi$ son application tangente, qui est une section du fibré des 1–formes sur M à valeurs dans les champs de vecteurs de N tirés–en–arrière par φ, qu'on note $\Omega^1(M) \otimes \varphi^*TN$. On appelle première forme fondamentale de φ, le tiré–en–arrière de h par φ, c'est–à–dire le 2–tenseur symétrique φ^*h, défini de la façon suivante :

$$\varphi^*h(X, Y) := h\big(T\varphi(X), T\varphi(Y)\big), \ \forall (X, Y) \in TM.$$

On munit le fibré φ^*TN des champs de vecteurs de N tiré–en–arrière par φ de la connexion de Levi–Civita de N tirée–en–arrière par φ, qu'on note ∇^{φ^*h}. C'est–à–dire que pour tout X dans TM et tout U dans φ^*TN, on a :

$$\nabla^{\varphi^*h}_X U = \nabla^h_{T\varphi(X)} U.$$

On définit la norme de l'application tangente de φ par rapport à g et h, en prenant la trace par rapport à g de sa première forme fondamentale :

$$|T\varphi|^2_{g,h} := \mathrm{tr}^g(\varphi^*h).$$

Définition 1.1.1. *On appelle énergie des applications φ de classe C^∞ de (M, g) dans (N, h), la fonctionnelle suivante :*

$$E_g(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M |T\varphi|^2_{g,h}\, dvol_g.$$

Le fibré $\Omega^1(M) \otimes \varphi^*TN$ des 1–formes à valeurs dans φ^*TM dans lequel vit l'application tangente de φ est munit canoniquement de la connexion suivante :

$$\nabla^{g,h} := \nabla^g \otimes 1_{\varphi^*TN} + 1_{\Omega(M)} \otimes \nabla^{\varphi^*h},$$

ce qui donne pour α une section de $\Omega^1(M) \otimes \varphi^*TN$ et X, Y dans $\Gamma(TM)$:

$$(\nabla^{g,h}_X \alpha)(Y) = \nabla^h_{T\varphi(X)}\big(\alpha(Y)\big) - \alpha(\nabla^g_X Y).$$

On peut alors définir la seconde forme fondamentale de φ comme étant la forme bilinéaire symétrique $\nabla^{g,h}T\varphi$, en effet pour tout X et Y dans TM,

$$\begin{aligned}
&(\nabla^{g,h}_X T\varphi)(Y) - (\nabla^{g,h}_Y T\varphi)(X)\\
&= \nabla^h_{T\varphi(X)}\big(T\varphi(Y)\big) - \nabla^h_{T\varphi(Y)}\big(T\varphi(X)\big) - T\varphi\big(\nabla^g_X Y\big) + T\varphi\big(\nabla^g_Y X\big)\\
&= T\varphi([X,Y]) - T\varphi([X,Y])\\
&= 0.
\end{aligned}$$

Définition 1.1.2. *Soit φ une application C^∞ de (M, g) dans (N, h), on dit que φ est totalement géodésique, si sa seconde forme fondamentale est nulle, c'est–à–dire si $\nabla^{g,h}T\varphi = 0$.*

On définit la divergence $\delta^{g,h}$ sur $\Omega^1(M) \otimes \varphi^*TN$ de la façon suivante :

$$\delta^{g,h}\alpha := -(\nabla^{g,h}_{e_i}\alpha)(e_i),$$

où α est une section du fibré $\Omega^1(M) \otimes \varphi^*TN$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de TM. On abrégera les notations en omettant de mentionner la métrique h s'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'identité du fibré en question.

Définition 1.1.3. *Soit φ une application C^∞ entre deux variétés riemanniennes (M, g) et (N, h), on appelle laplacien de φ entre (M, g) et (N, h), le champ de vecteurs $\delta^g T\varphi$, qui est une section de φ^*TN.*

On dit que φ est une application harmonique de (M, g) dans (N, h) si son laplacien est nul, c'est–à–dire si elle est solution de l'équation aux dérivées partielles non–linéaire suivante :

$$\delta^g T\varphi = 0.$$

Remarque 1. L'appellation « laplacien d'une application φ », ne doit pas nous faire oublier que nous avons affaire à un opérateur non–linéaire en général sur les applications de M dans N.

Remarque 2. La divergence δ^g (et donc à fortiori le laplacien de φ) dépend aussi de la métrique $\varphi^* h$, mais nous ne mettons pas h en indice, pour la simple raison que la métrique de l'espace d'arrivée sera toujours fixée et que φ sera implicitement donnée par le fibré sur lequel on prendra la divergence. Ainsi la notion d'harmonicité pour des applications entre deux variétés riemanniennes dépend à la fois de la métrique de l'espace de départ, mais aussi de la métrique de l'espace d'arrivée.

1.2 Étude de l'énergie au premier ordre

La proposition suivante caractérise les applications harmoniques grâce à l'étude au premier ordre de l'énergie :

Proposition 1.2.1. *Une application C^∞ de (M, g) dans (N, h) est harmonique de (M, g) dans (N, h) si et seulement si elle est un point critique de l'énergie E.*

Démonstration. On se donne φ une application C^∞ de (M, g) dans (N, h) et $\dot{\varphi}$ une section quelconque de $\varphi^* TN$ qui s'interprète comme un champ de vecteur le long de φ, on va différencier l'énergie à partir des déformations de φ le long de $\dot{\varphi}$.

Soit $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$ une famille à un paramètre d'applications C^∞ de M dans N qui vérifie le système suivant

$$\begin{cases} \varphi_0 & = \varphi \\ \left[\partial_t \varphi_t\right]_{t=0} & = \dot{\varphi}, \end{cases}$$

alors la dérivée de l'énergie de φ_t par rapport à t est égale à :

$$\begin{aligned}
\partial_t E(\varphi_t) &= \frac{1}{2}\partial_t\Big(\int_M |T\varphi_t|^2_{g,h}\, dvol_g\Big) \\
&= \int_M \big\langle \big(\nabla^{g,h}_{\partial_t} T\varphi_t\big)(e_i), T\varphi_t(e_i)\big\rangle_h\, dvol_g \\
&= \int_M \big\langle \nabla^h_{T\varphi_t(e_i)} \partial_t\varphi_t, T\varphi_t(e_i)\big\rangle_h\, dvol_g \\
&= -\int_M \big\langle \partial_t\varphi_t, \nabla^h_{T\varphi_t(e_i)}\big(T\varphi_t(e_i)\big)\big\rangle_h\, dvol_g \\
&\quad + \int_M e_i\cdot \big\langle \partial_t\varphi_t, T\varphi_t(e_i)\big\rangle_h\, dvol_g.
\end{aligned}$$

On obtient pour $t = 0$ et avec le théorème de Green :

$$\begin{aligned}
\big[\partial_t E(\varphi_t)\big]_{t=0} &= \int_M \big\langle \dot\varphi, \delta^g T\varphi\big\rangle_h\, dvol_g - \int_M \delta^g\big(\langle\dot\varphi, T\varphi\rangle_h\big)\, dvol_g. \\
&= \int_M \big\langle \dot\varphi, \delta^g T\varphi\big\rangle_h\, dvol_g.
\end{aligned}$$

Ainsi les applications harmoniques sont les points critiques de l'énergie et l'équation $\delta^g T\varphi = 0$ est l'équation d'Euler–Lagrange de la fonctionnelle énergie. □

Soient (x_i) un système de coordonnées locales de M et (y_α) un système de coordonnées locales de N, on note g_{ij} et Γ^i_{jk} les coordonnées de la métrique et des symboles de Christoffel de la connexion de (M, g), et $h_{\alpha,\beta}$ et $\Gamma^\alpha_{\beta,\gamma}$ les coordonnées de la métrique et des symboles de Christoffel de la connexion de (N, h). La proposition suivante énonce la condition d'harmonicité en coordonnées.

Proposition 1.2.2. *Soit φ une application de M dans N, on la note (φ^α) dans notre système de coordonnées, alors φ est harmonique de (M, g) dans (N, h) si et seulement si, pour tout α :*

$$\Delta\varphi^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\varphi^\beta_i\varphi^\gamma_j g^{ij} = 0.$$

Démonstration. En coordonnées, on obtient pour le laplacien de φ :

$$\begin{aligned}
\nabla^{g,h}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} d\varphi &= \nabla^{g,h}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\big(\varphi^\alpha_j\, dx^i \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}\big) \\
&= \big(\frac{\partial\varphi^\alpha_j}{\partial x^i}\big)\, dx^i\otimes\frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \varphi^\alpha_j\,\big(\nabla^g_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^j\big)\otimes\frac{\partial}{\partial y^\alpha} + \varphi^\alpha_j\, dx^j\otimes\nabla^h_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}.
\end{aligned}$$

En utilisant les deux identités suivantes :

$$\begin{aligned}
\nabla^g_{\frac{\partial}{\partial x^i}} dx^j &= -\Gamma^j_{ik}, \\
\nabla^h_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial y^\alpha} &= \varphi^\beta_i \Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial y^\gamma},
\end{aligned}$$

on obtient pour la seconde forme fondamentale de φ :

$$(\nabla d\varphi)^\alpha_{ij} = \varphi^\alpha_{ij} - \Gamma^k_{ij}\varphi^\alpha_k + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\varphi^\beta_i\varphi^\gamma_j,$$

ce qui donne bien pour le laplacien de φ en coordonnées :

$$(\delta T\varphi)^\alpha = \Delta\varphi^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\varphi^\beta_i\varphi^\gamma_j g^{ij}.$$

□

1.3 Étude de l'énergie au second ordre

Sur une variété riemannienne (M, g), on note respectivement

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{X,Y} &:= \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}, \\
K(X,Y) &:= g(\mathrm{R}_{X,Y}Y, X), \\
\mathrm{Ric}(X,Y) &:= \mathrm{tr}(Z \to \mathrm{R}_{Z,X}Y), \\
\mathrm{Scal} &:= \mathrm{tr}\,\mathrm{Ric},
\end{aligned}$$

le tenseur de courbure, la courbure sectionnelle du plan $\langle X, Y\rangle$, le tenseur de Ricci et la courbure scalaire de (M, g). On dit que la courbure sectionnelle de (M, g) est négative ou nulle si pour tout couple (X, Y) de champs de vecteurs,

$$K(X, Y) \leq 0.$$

Eells et Sampson ont démontré la proposition suivante dans ([6]), en étudiant l'énergie au second ordre :

Proposition 1.3.1 (Eells–Sampson). *Soient (M, g) une variété riemannienne de tenseur de Ricci positif ou nul et (N, h) une variété riemannienne de courbure sectionnelle négative ou nulle, on se donne une application φ qui est harmonique de (M, g) dans (N, h), alors*

1. *φ est totalement géodésique,*
2. *si le tenseur* Ric *de (M, g) est strictement positif en un point, alors φ est constante,*
3. *si la courbure sectionnelle de (N, h) est strictement négative, alors φ est constante ou a une géodésique fermée comme image.*

Démonstration. Soit φ une application C^∞ de (M, g) dans (N, h), pour simplifier les notations, nous indicerons les connections, les divergences et les normes du fibré $\Omega^1(M)$ par g et celles de φ^*TN par h, mais pas celles du fibré $\Omega^1(M) \otimes \varphi^*TN$. On obtient pour le laplacien de la norme de $T\varphi$:

$$-\frac{1}{2}\,\Delta^g(|T\varphi|^2) = |\nabla T\varphi|^2 + \sum_{i,j=1}^{n} \big\langle (\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}T\varphi)(e_j), T\varphi(e_j)\big\rangle_h$$

où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée parallèle de (M, g). Regardons le premier terme, comme φ est harmonique, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{n} \big\langle (\nabla_{e_i}\nabla_{e_i}T\varphi)(e_j), T\varphi(e_j)\big\rangle_h \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \big\langle (\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}T\varphi)(e_i), T\varphi(e_j)\big\rangle_h \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \big\langle (\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}T\varphi)(e_i), T\varphi(e_j)\big\rangle_h + \big\langle (\mathrm{R}_{e_i,\,e_j}\,T\varphi)(e_i), T\varphi(e_j)\big\rangle_h \\
&= -\sum_{i,j=1}^{n} K^h\big(T\varphi(e_i), T\varphi(e_j)\big) + \sum_{j=1}^{n} \big\langle T\varphi(\mathrm{Ric}^g(e_j)), T\varphi(e_j)\big\rangle_h,
\end{aligned}$$

ainsi on obtient la formule de Weitzenbock :

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\,\Delta^g(|T\varphi|^2) \;=\;& |\nabla T\varphi|^2 - \sum_{i,j=1}^{n} K^h\big(T\varphi(e_i), T\varphi(e_j)\big) \\
&+ \sum_{j=1}^{n} \big\langle T\varphi(\mathrm{Ric}^g(e_j)), T\varphi(e_j)\big\rangle_h.
\end{aligned}$$

Comme on a supposé que notre variété de départ M était compacte, on obtient en intégrant cette dernière égalité :

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{2}\int_M \Delta^g(|T\varphi|^2_{g,h})\ dvol_g \\
&= \int_M |\nabla T\varphi|^2\ dvol_g - \int_M \sum_{i,j=1}^n K^h\big(T\varphi(e_i), T\varphi(e_j)\big)\ dvol_g \\
&\quad + \int_M \sum_{j=1}^n \big\langle T\varphi(\mathrm{Ric}^g(e_i)), T\varphi(e_i)\big\rangle_h\ dvol_g,
\end{aligned}$$

ce qui implique, à cause des signes des termes de courbure de (M, g) et (N, h), que φ soit totalement géodésique.

Si le tenseur de Ricci de (M, g) est strictement positif en un point p, alors en ce point, $T_p\varphi = 0$ et par principe du maximum, l'application φ est constante.

Supposons que la courbure sectionnelle de (N, h) soit strictement négative, alors il existe au plus un vecteur e_i tel que $T_p\varphi(e_i) \neq 0$. Ainsi, soit $T_p\varphi(T_pM)$ est de dimension nulle et φ est donc constante, soit $T_p\varphi(T_pM)$ est de dimension 1, et comme φ est totalement géodésique, l'image de φ est une géodésique fermée de N. □

1.4 Propriétés conformes des applications harmoniques

Proposition 1.4.1. *Soient (M^n, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes, φ une application C^∞ de M dans N et $\overline{g} = e^{2\omega}g$ une métrique conforme à g, alors le laplacien de φ par rapport à $\overline{g}$ s'écrit en terme de métrique g :*

$$\delta^{\overline{g}}T\varphi = e^{-2\omega}\big(\delta^g T\varphi - (n-2)\langle T\varphi, d\omega\rangle_g\big).$$

Démonstration. On se donne φ une application C^∞ de (M^n, g) dans (N, h) et $\overline{g} = e^{2\omega}g$ une métrique conforme à g, notons $(\overline{X_i})$ une base orthonormée de $(M, \overline{g})$, alors les vecteurs $(X_i) := (e^\omega\,\overline{X_i})$ forment une base orthonormée de (M,g). On obtient pour le laplacien de φ de $(M,\overline{g})$ dans (N,h) :

$$\begin{aligned}
\delta^{\overline{g}}T\varphi &= -(\nabla^{\overline{g},h}_{\overline{X_i}}T\varphi)(\overline{X_i}) \\
&= -\nabla^h_{T\varphi(\overline{X_i})}\big(T\varphi(\overline{X_i})\big) + T\varphi\big(\nabla^{\overline{g}}_{\overline{X_i}}\overline{X_i}\big) \\
&= -e^{-2\omega}\Big(\nabla^h_{T\varphi(X_i)}\big(T\varphi(X_i)\big) + d\omega(X_i)\,X_i\Big) \\
&\quad +e^{-2\omega}\Big(T\varphi\big(\nabla^{\overline{g}}_{X_i}T\varphi(X_i)\big) + d\omega(X_i)\,T\varphi(X_i)\Big) \\
&= -e^{-2\omega}\Big(\nabla^h_{T\varphi(X_i)}\big(T\varphi(X_i)\big) - T\varphi\big(\nabla^{\overline{g}}_{X_i}T\varphi(X_i)\big)\Big)
\end{aligned}$$

mais d'après la formule de changement conforme pour la connexion (voir le théorème A.1.3) :

$$\begin{aligned}
\nabla^{\overline{g}}_{X_i}T\varphi(X_i) &= \nabla^g_{X_i}X_i + 2\,d\omega(X_i)\,X_i - g(X_i,X_i)\,d\omega \\
&= \nabla^g_{X_i}X_i - (n-2)\,d\omega,
\end{aligned}$$

ce qui donne bien

$$\begin{aligned}
\delta^{\overline{g}}T\varphi &= -e^{-2\omega}\Big(\nabla^h_{T\varphi(X_i)}\big(T\varphi(X_i)\big) - T\varphi\big(\nabla^g_{X_i}X_i\big) + (n-2)\langle T\varphi, d\omega\rangle_g\Big) \\
&= e^{-2\omega}\big(\delta^gT\varphi - (n-2)\langle T\varphi, d\omega\rangle_g\big).
\end{aligned}$$

□

Comme corollaire de la proposition précédente, on obtient en dimension 2, la propriété très importante suivante, qui va nous guider dans toute la suite :

Corollaire 1.4.2. *Soient (M,g) et (N,h) deux variétés riemanniennes et φ une application C^∞ de M dans N, on suppose que M est de dimension 2, alors l'énergie et le laplacien de φ sont des invariants conforme de (M,g) :*

$$\begin{aligned}
E_{\overline{g}}(\varphi) &= E_g(\varphi) \\
\delta^{\overline{g}}T\varphi &= e^{-2\omega}\delta^gT\varphi,
\end{aligned}$$

quelque soit la métrique $\overline{g} = e^{2\omega}g$ conforme à g.

Démonstration. Nous avons juste besoin de regarder l'énergie de φ par rapport à $\overline{g}$, ce qui donne avec le théorème A.1.3 :

$$\begin{aligned} E_{\overline{g}}(\varphi) &= \frac{1}{2}\int_M |T\varphi|^2_{\overline{g},h}\, dvol_{\overline{g}} \\ &= \frac{1}{2}\int_M e^{-2\omega}|T\varphi|^2_{g,h}\, dvol_{\overline{g}} \\ &= \frac{1}{2}\int_M |T\varphi|^2_{g,h}\, dvol_g \\ &= E_g(\varphi). \end{aligned}$$

□

1.5 Exemples d'applications harmoniques

Exemple 1. Si on travaille avec les fonctions réelles, c'est–à–dire que notre variété d'arrivée (N, h) est simplement $\mathbb{R}^m$ munie de la métrique euclidienne, on retombe bien sur la notion classique d'harmonicité. Une fonction f est harmonique si et seulement si chacune de ces coordonnées est une fonction harmonique de (M, g) dans $\mathbb{R}$.

Exemple 2. Si la variété de départ M est l'intervalle $[0, 1]$, on retrouve l'équation des géodésiques de la variété (N, h).

Exemple 3. Soit φ une immersion riemannienne de (M, g) dans (N, h) (c'est–à–dire que $\varphi^*h = g$), alors φ est harmonique de (M, g) dans (N, h) si et seulement si c'est une immersion minimale. En effet, la connexion de Lévi–Civita de (M, g) est induite par celle de (N, h) via l'immersion φ, de la manière suivante :

$$T\varphi(\nabla^g_X Y) = \big(\nabla^h_{T\varphi(X)} T\varphi(Y)\big)^T,\ \forall (X, Y) \in \Gamma(TM)$$

où $(\dots)^T$ désigne la projection des champs de vecteurs le long de φ sur $T\varphi(TM)$. On obtient donc pour la seconde forme fondamentale de φ :

$$\big(\nabla^{g,h}_X T\varphi\big)(Y) = \nabla^h_{T\varphi(X)}\big(T\varphi(Y)\big) - T\varphi(\nabla^g_X Y) = \mathrm{II}^g(X, Y),$$

c'est–à–dire la seconde forme fondamentale de (M, g) vue comme une sous variété de (N, h). Ainsi φ est harmonique si et seulement si $\mathrm{tr}^g\, \mathrm{II}^g = 0$, ce qui revient à dire que φ est une immersion minimale.

Exemple 4. Si M et N sont des variétés kähleriennes et φ est une application holomorphe de M dans N, alors φ est harmonique.

Chapitre 2

La métrique de Poincaré

2.1 Définition

Dans toute la suite, $\overline{X}$ désignera une variété différentielle compacte à bord de dimension $n+1$, on note X son intérieur et $M = \partial\overline{X}$ son bord.

Définition 2.1.1. *Soient g_+ une métrique définie sur X et r une fonction C^∞ de $\overline{X}$ vérifiant :*

$$r > 0 \text{ sur } X,\ r = 0 \text{ sur } M \text{ et } dr \neq 0 \text{ sur } M,$$

si le changement conforme $r^2 g_+$ se prolonge de manière continue en une métrique $\overline{g}$ sur $\overline{X}$, on dit que r compactifie (X, g_+) sur le bord en $(M, \overline{g}|_M)$ et que g_+ est une métrique conformément compacte.

On appelle infini conforme de (X, g_+), la classe conforme de $\overline{g}$ restreinte aux champs de vecteurs TM.

Remarquons que la notion d'infini conforme est indépendante du choix de la fonction compactifiante r, de plus la fonction $|dr|^2_{r^2 g_+}$ se prolonge sur $\overline{X}$ et sa restriction à M est aussi un invariant conforme de (X, g_+).

Définition 2.1.2. *Une variété asymptotiquement hyperbolique est une variété (X, g_+) conformément compacte qui a sa courbure sectionnelle qui tend vers -1 dans un voisinage de M.*

Lemme 2.1.3. *Soit (X, g_+) une variété conformément compacte, on note $\overline{g}$ la métrique qui prolonge $r^2 g_+$ sur $\overline{X}$, alors les deux propositions sont équivalentes :*

1. (X, g_+) *est une variété asymptotiquement hyperbolique.*

2. $|dr|^2_{\overline{g}} = 1$ *sur* M.

Démonstration. Avec (A.1.5), on montre facilement l'équivalence. □

Chaque fonction compactifiante r donne une métrique qui est dans l'infini conforme de (X, g_+), inversement si (X, g_+) est asymptotiquement hyperbolique et qu'on se donne un représentant g de son infini conforme, alors on peut déterminer la fonction compactifiante r modulo $O(r^2)$. Cependant, on peut améliorer la précision en rajoutant une certaine condition de normalisation. Dans ce cas–là, dans un voisinage du bord, on peut identifier chaque élément de l'infini conforme de g_+ à une unique fonction compactifiante. C'est l'objet du lemme suivant dû à Graham dans [10] :

Lemme 2.1.4 (Graham). *Soient* (X, g_+) *une variété asymptotiquement hyperbolique et* g *une métrique dans son infini conforme, alors il existe une unique fonction* r *dans un voisinage du bord* M *qui compactifie* (X, g_+) *sur le bord en* (M, g) *et qui vérifie* $|dr|^2_{\overline{g}} = 1$ *sur ce voisinage, où* $\overline{g}$ *est la métrique qui prolonge* $r^2 g_+$ *sur* $\overline{X}$.

Démonstration. Soit g une métrique dans l'infini conforme de (X, g_+), il existe alors une fonction r_0 qui compactifie (X, g_+) sur le bord en (M, g) et on note $\overline{g}_0$ la métrique qui prolonge $r_0^2\, g_+$ sur $\overline{X}$. On se donne ω une fonction C^∞ de $\overline{X}$, il est clair que la fonction $r = e^\omega r_0$ compactifie aussi (X, g_+) sur le bord en (M, g) et on note $\overline{g}$ la métrique qui prolonge $r^2 g_+$ sur $\overline{X}$. Comme $\overline{g} = e^\omega \overline{g}_0$, on obtient :

$$|dr|^2_{\overline{g}} = |dr_0 + r_0\, d\omega|^2_{\overline{g}_0} = |dr_0|^2_{\overline{g}_0} + 2\, r_0\, d\omega(\nabla^{\overline{g}_0} r_0) + r_0^2\, |d\omega|^2_{\overline{g}_0},$$

ce qui entraîne que la condition de normalisation $|dr|^2_{\overline{g}} = 1$ sur X est équivalente à :

$$2\, d\omega(\nabla^{\overline{g}_0} r_0) + r_0\, |d\omega|^2_{\overline{g}_0} = \frac{1 - |dr_0|^2_{\overline{g}_0}}{r_0}.$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles de premier ordre en ω, qui admet une unique solution dans un voisinage de M dans X. □

Définition 2.1.5. *Soient* (X, g_+) *une variété asymptotiquement hyperbolique et* g *une métrique dans son infini conforme, on appelle fonction compactifiante normalisée associée à* g*, la fonction* r *du lemme 2.1.4.*

D'après ce lemme, pour chaque métrique g dans l'infini conforme de (X, g_+), on a une identification d'un voisinage de M dans X avec $M \times [0, \varepsilon[$ pour un certain ε (qui dépend de g). Dans ces coordonnées, g_+ s'écrit :

$$g_+ = \frac{dr^2 + g_r}{r^2}, \tag{2.1.1}$$

où g_r est une famille à un paramètre de métriques sur M avec $g_0 = g$.

Regardons les choses sous un angle différent, on se donne une variété riemannienne (X^{n+1}, g_+) de bord M^n et $[g]$ une structure conforme sur M, on peut se poser la question suivante :

Quelle conditions mettre sur la métrique g_+ pour que $(M, [g])$ soit l'infini conforme de (X, g_+) ?

Quand M est une variété riemannienne de dimension paire, Fefferman et Graham [8] ont apporté une réponse locale à ce problème, en demandant en plus que g_+ soit une métrique d'Einstein, ils ont obtenu le théorème suivant :

Théorème 2.1.6 (Fefferman–Graham). *Soit X une variété différentielle de dimension $n + 1$ et de bord $\partial X = M$, on se donne $[g]$ une structure conforme sur M et g un de ses représentants, alors il existe une métrique g_+ définie sur un voisinage de M dans X et une fonction r de $\overline{X}$ qui compactifie (X, g_+) sur le bord en (M, g), telles que*

1. $\mathrm{Ric}^{g_+} + n\, g_+ = O(r^{n-1} \log r)$ *par rapport à g, si n est pair,*
2. $\mathrm{Ric}^{g_+} + n\, g_+ = O(r^{\infty})$ *par rapport à g, si n est impair.*

De plus, g_+ est unique modulo $O(r^{n-2})$ et aux difféomorphismes de $\overline{X}$ près, qui se restreignent en l'identité sur M. Sur $M \times]0, \varepsilon[$, la métrique g_+ s'écrit :

$$g_+ = \frac{dr^2 + g_r}{r^2}, \tag{2.1.2}$$

où g_r est une famille à un paramètre de métriques sur M. Si n est pair, g_r admet le développement asymptotique en $r = 0$ suivant :

$$g_r = g + g_{(2)} r^2 + \cdots + g_{(n-2)} r^{n-2} + h\, r^n \log r + g_{(n)} r^n + O(r^{n+1}), \tag{2.1.3}$$

où les points désignent des termes en puissance paires de r^2 à r^{n-2}. Les termes $g_{(2)}, \ldots, g_{(n-2)}, h$ et la trace de $g_{(n)}$ par rapport à g sont uniquement déterminés par des termes de courbure de g et h est sans trace par rapport *à g. Si n est impair, alors g_r admet le développement asymptotique en $r = 0$ suivant : :*

$$g_r = g + g_{(2)}r^2 + \cdots + g^{(n-1)}r^{n-1} + g_{(n)}r^n + O(r^{n+1}), \tag{2.1.4}$$

où les points désignent des termes en puissance paires de r^2 à r^{n-1}. Les termes $g_{(2)}, \ldots, g^{(n-1)}$ sont uniquement déterminés par des termes de courbure de g, de plus la trace de $g_{(n)}$ par rapport à g est nulle.

En outre, h est invariant conforme par rapport à g, c'est–à–dire qu'avec le changement de métrique $\tilde{g} = e^{2\omega}g$, on obtient :

$$\tilde{h} = e^{(2-n)\omega}\, h, \tag{2.1.5}$$

où $\tilde{h}$ est le terme logarithmique correspondant à $\tilde{g}$.

Définition 2.1.7. *On appelle métrique de Poincaré de $(M, [g])$, la métrique g_+ du théorème 2.1.6.*

Remarque 3. Le terme h dans le développement asymptotique de g_r est, à un coefficient multiplicatif près, le tenseur d'obstruction de Graham et Hirachi [11].

Remarque 4. Le fait de déterminer la métrique de Poincaré de $(M, [g])$ est équivalent à un autre problème à bord ; celui de déterminer la métrique ambiante de $(M, [g])$. On pourra consulter a ce sujet [13] et [8].

Pour la démonstration de ce théorème, on va d'abord rappeler la définition de la seconde forme fondamentale, avant de démontrer deux résultats techniques qui vont nous servir par la suite :

Définition 2.1.8. *Soit $(\overline{X}, dr^2 + g_r)$ une variété riemannienne à bord de dimension $n+1$, on note M son bord et on suppose que g_r est une famille à un paramètre de métriques sur M. On note $\overline{\nabla}$ la connexion de Levi–Civita de $dr^2 + g_r$ et ∇^{g_r} celle de g_r, on définit la seconde forme fondamentale $\mathrm{I\!I}$ des tranches $M \times \{r\}$ par :*

$$\mathrm{I\!I}(Z, T) = \overline{\nabla}_Z T - \nabla^{g_r}_Z T,$$

où Z et T sont deux champs de vecteurs de TM.

Le premier point technique de la démonstration du théorème (2.1.6) est le lemme suivant, qui nous donne la décomposition du tenseur $\mathrm{Ric}^{g_+} + n\, g_+$ sur $M \times [0, \varepsilon[$:

Lemme 2.1.9. *Soit* (X, g_+) *une variété riemannienne, on note*

$$E = \mathrm{Ric}^{g_+} + n\, g_+$$

et on suppose que $g_+ = r^{-2}(dr^2 + g_r)$*, avec* g_r *une famille à un paramètre de métriques sur* M*. On se donne* Z, T *deux vecteurs de* TM*, alors on a :*

$$\begin{aligned} E(Z,T) &= \Big(\mathrm{Ric}^{g_r} + \big(2\,\mathrm{II} + \partial_r - \mathrm{tr}^{g_r}\mathrm{II} - r^{-1}(n-1)\big)\,\mathrm{II} \\ &\qquad - r^{-1}(\mathrm{tr}^{g_r}\mathrm{II})\, g_r \Big)(Z,T), \qquad (2.1.6) \\ E(Z,\partial_r) &= \big(d\,\mathrm{tr}^{g_r}\mathrm{II} + \delta^{g_r}\mathrm{II} \big)(Z), \qquad (2.1.7) \\ E(\partial_r,\partial_r) &= \partial_r\,\mathrm{tr}^{g_r}\mathrm{II} - |\,\mathrm{II}\,|^2_{g_r} - r^{-1}(\mathrm{tr}^{g_r}\mathrm{II}), \qquad (2.1.8) \end{aligned}$$

où II *est la seconde forme fondamentale des tranches* $M \times \{r\}$ *par rapport à* $dr^2 + g_r$*,* tr^{g_r} *désigne la trace par rapport à* g_r *et* II^2 *est le carré de l'endomorphisme symétrique associé à la seconde forme fondamentale via* g_r*.*

Démonstration. On pose $\overline{g} = r^2 g_+ = dr^2 + g_r$, d'après (A.1.3) on a :

$$\mathrm{Ric}^{g_+} = \overline{\mathrm{Ric}} + \frac{n-1}{r}\,\overline{\nabla} dr - \Big(\frac{\overline{\Delta} r}{r} + \frac{n}{r^2} |dr|^2_{\overline{g}} \Big)\, \overline{g}.$$

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de TM par rapport à g_r, alors les vecteurs $e_1, \ldots, e_n, \partial_r$ forment une base orthonormée de TX par rapport à $\overline{g}$. On obtient ainsi :

$$\overline{\Delta} r = -\overline{\nabla}_{\partial_r} dr(\partial_r) - \sum_{k=1}^{n} \overline{\nabla}_{e_k} dr(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{II}(e_k, e_k) = \mathrm{tr}^{g_r}\mathrm{II},$$

ce qui donne pour le tenseur E en fonction de la métrique $\overline{g}$:

$$E = \overline{\mathrm{Ric}} + \frac{n-1}{r}\,\overline{\nabla} dr - \frac{\mathrm{tr}^{g_r}\mathrm{II}}{r}\,\overline{g}. \qquad (2.1.9)$$

On rappelle les formules de Gauss pour la seconde forme fondamentale avec

Z et T deux vecteurs de TM :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \overline{g}\big(\overline{\mathrm{R}}_{Z,\,e_k} e_k, T\big) &= (\mathrm{Ric}^{g_r} - (\mathrm{tr}^{g_r}\, \mathrm{I\!I}) \cdot \mathrm{I\!I} + \mathrm{I\!I}^2)(Z,T), && (2.1.10)\\
\overline{g}\big(\overline{\mathrm{R}}_{Z,\,\partial_r} \partial_r, T\big) &= (\partial_r\, \mathrm{I\!I} + \mathrm{I\!I}^2)(Z,T), && (2.1.11)\\
\sum_{k=1}^{n} \overline{g}\big(\overline{\mathrm{R}}_{Z,\,e_k} e_k, \partial_r\big) &= (d\,\mathrm{tr}^{g_r} \mathrm{I\!I} + \delta^{g_r} \mathrm{I\!I})(Z), && (2.1.12)\\
\sum_{k=1}^{n} \overline{g}\big(\overline{\mathrm{R}}_{\partial_r,\,e_k} e_k, \partial_r\big) &= \partial_r(\mathrm{tr}^{g_r} \mathrm{I\!I}) - |\,\mathrm{I\!I}\,|^2_{g_r}. && (2.1.13)
\end{aligned}$$

Comme $\overline{\nabla} dr(Z,T) = -dr(\overline{\nabla}_Z T) = -\,\mathrm{I\!I}(Z,T)$, on obtient pour E restreint à $TM \times TM$ avec (2.1.9) et les formules de Gauss (2.1.10) et (2.1.11) :

$$\begin{aligned}
E(Z,T) &= \overline{\mathrm{Ric}}(Z,T) - r^{-1}(n-1)\,\mathrm{I\!I}(Z,T) - r^{-1}(\mathrm{tr}^{g_r} \mathrm{I\!I})\, g_r(Z,T)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \overline{g}\big(\overline{\mathrm{R}}_{Z,\,e_k} e_k, T\big) + \overline{g}\big(\overline{\mathrm{R}}_{Z,\,\partial_r} \partial_r, T\big)\\
&\quad -\big(r^{-1}(n-1)\,\mathrm{I\!I} + r^{-1}(\mathrm{tr}^{g_r} \mathrm{I\!I})\, g_r\big)(Z,T)\\
&= \big(\,\mathrm{Ric}^{g_r} + \big(2\,\mathrm{I\!I} + \partial_r - \mathrm{tr}^{g_r} \mathrm{I\!I} - r^{-1}(n-1)\big)\,\mathrm{I\!I} - r^{-1}(\mathrm{tr}^{g_r} \mathrm{I\!I})\, g_r\big)(Z,T).
\end{aligned}$$

D'autre part, on a :

$$\overline{\nabla} dr(Z, \partial_r) = -dr(\overline{\nabla}_Z \partial_r) = -\frac{1}{2}\, Z \cdot |dr|^2_{\overline{g}} = 0,$$

ainsi avec (2.1.9) et la formule de Gauss (2.1.12), l'égalité (2.1.7) est facilement démontrée.

L'égalité (2.1.8) vient directement de (2.1.13). □

Lemme 2.1.10. *Avec les notations du lemme précédent on a les deux égalités suivantes :*

$$\mathrm{tr}^{g_r} \partial_r E = -2\delta^{g_r} E(\partial_r) + \big(\partial_r - 2\,\mathrm{tr}^{g_r} \mathrm{I\!I} - 2(n-1)r^{-1}\big) E(\partial_r, \partial_r), \qquad (2.1.14)$$

$$e_i \cdot \big(E(\partial_r, \partial_r) + \mathrm{tr}^{g_r} E\big) + 2\delta^{g_r} E(e_i) = 2\big(\partial_r - \mathrm{tr}^{g_r} \mathrm{I\!I} - (n-1)r^{-1}\big) E(e_i, \partial_r). \qquad (2.1.15)$$

Démonstration. On va démontrer ces deux égalités en appliquant l'identité de Bianchi $\delta^{g_+}E + \frac{1}{2}\, d\,\mathrm{tr}^{g_+}E = 0$ aux vecteurs ∂_r et e_i. On obtient donc les deux égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \delta^{g_+}E(\partial_r) + \frac{1}{2}\,\partial_r(\mathrm{tr}^{g_+}E) &= 0 && (2.1.16)\\ \delta^{g_+}E(e_i) + \frac{1}{2}\,e_i \cdot (\mathrm{tr}^{g_+}E) &= 0 && (2.1.17) \end{aligned}$$

D'après l'égalité (A.1.1), on obtient pour le changement conforme de métrique $g_+ = r^{-2}\overline{g}$:

$$\nabla^+_U V = \overline{\nabla}_U V - \frac{dr(U)}{r}\,V - \frac{dr(V)}{r}\,U + \overline{g}(U,V)\,\partial_r, \tag{2.1.18}$$

où U et V sont deux vecteurs de TX et ∇^+ est la connexion de Levi–Civita de g_+.

Ainsi pour le premier terme de (2.1.16) on obtient :

$$\begin{aligned} \delta^{g_+}E(\partial_r) &= -r^2(\mathrm{tr}^{\overline{g}}\,\nabla^+E)(\partial_r)\\ &= -r^2\Big(\sum_{k=1}^n e_kE(e_k,\partial_r) - E(\nabla^+_{e_k}e_k,\partial_r) - E(e_k,\nabla^+_{e_k}\partial_r)\\ &\qquad + \partial_rE(\partial_r,\partial_r) - 2E(\nabla^+_{\partial_r}\partial_r,\partial_r)\Big)\\ &= -r^2\Big(\big(\partial_r - \mathrm{tr}^{g_r}\mathrm{I\!I} - r^{-1}(n-2)\big)E(\partial_r,\partial_r) + \delta^{g_r}E(\partial_r)\\ &\qquad - \mathrm{tr}^{g_r}\mathrm{I\!I}\circ E - r^{-1}(\mathrm{tr}^{g_r}E)\Big), \end{aligned}$$

et pour le deuxième terme de l'égalité 2.1.16 :

$$\partial_r\,\mathrm{tr}^{g_+}E = r^2\big(\mathrm{tr}^{g_r}\partial_rE + 2\,\mathrm{tr}^{g_r}\mathrm{I\!I}\circ E + \partial_rE(\partial_r,\partial_r)\big) + 2r\big(\mathrm{tr}^{g_r}E + E(\partial_r,\partial_r)\big),$$

ce qui donne directement (2.1.14).

Calculons maintenant le premier terme de (2.1.17) :

$$\begin{aligned} \delta^{g_+}E(e_i) &= -r^2\Big(\sum_{k=1}^n e_k\cdot E(e_k,e_i) - E(\nabla^+_{e_k}e_k,e_i) - E(e_k,\nabla^+_{e_k}e_i)\Big)\\ &\quad - r^2\big(\partial_rE(\partial_r,e_i) - E(\nabla^+_{\partial_r}\partial_r,e_i) - E(\partial_r,\nabla^+_{\partial_r}e_i)\big)\\ &= -r^2\big(\partial_r - \mathrm{tr}^{g_r}\mathrm{I\!I} - r^{-1}(n-1)\big)E(\partial_r,e_i) + r^2\delta^{g_r}E(e_i), \end{aligned}$$

et le deuxième terme de (2.1.17)

$$e_i \cdot (\mathrm{tr}^{g_+} E) = r^2 \big(e_i \cdot E(\partial_r, \partial_r) + e_i \cdot (\mathrm{tr}^{g_r} E) \big),$$

ce qui donne bien (2.1.15). □

Nous allons maintenant démontrer le théorème 2.1.6.

Démonstration. On va étudier la résolution en série formelle de l'équation d'Einstein $E = O(r^\infty)$. On désigne par une apostrophe la dérivée par rapport à r, d'après (2.1.6) et en utilisant l'égalité $\mathrm{II} = -\frac{1}{2} g'_r$, on a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} -2r\, E_{|TM} &= r\, g''_r + (1-n)\, g'_r - (\mathrm{tr}^{g_r}\, g'_r)\, g_r - r\, g'_r g'^{-1}_r g'_r \\ &\quad + \frac{r}{2} (\mathrm{tr}^{g_r}\, g'_r)\, g'_r - 2r\, \mathrm{Ric}^{g_r} . \end{aligned}$$

Soit g_r une famille à un paramètre de métriques sur M qui vérifie l'égalité $E_{|TM} = 0$, c'est–à–dire :

$$r\, g''_r + (1-n)\, g'_r - (\mathrm{tr}^{g_r} g'_r)\, g_r - r\, g'_r\, g_r^{-1} g'_r + \frac{r}{2} (\mathrm{tr}^{g_r} g'_r)\, g'_r - 2r\, \mathrm{Ric}^{g_r} = 0, \quad (2.1.19)$$

on va déterminer par récurrence son développement en série formelle en $r = 0$ en regardant les dérivées successives de l'équation (2.1.19) restreinte au bord. On utilise la convention suivante ; on omettra le r pour les dérivées de g_r qui sont prises sur M (par exemple, $g' := g'_{r|r=0}$). On commence en regardant l'équation (2.1.19) sur le bord, c'est–à–dire pour $r = 0$, ce qui donne l'équation en g' suivante :

$$(1-n)\, g' - (\mathrm{tr}^g g')\, g = 0.$$

Ainsi le premier terme $g^{(1)} = g'$ du développement asymptotique de g_r est nul. Dérivons maintenant l'équation (2.1.19) par rapport à r en $r = 0$, on obtient :

$$(2-n)\, g'' - (\mathrm{tr}^g g'')\, g - 2\, \mathrm{Ric}^g = 0,$$

ce qui donne

$$\mathrm{tr}^g g'' = \frac{\mathrm{Scal}^g}{(n-1)} \quad (2.1.20)$$

$$g'' = -2\, \mathrm{P}_g \quad (2.1.21)$$

où P_g désigne le tenseur de Schouten de g :

$$\mathrm{P}_g := \frac{1}{n-2}\,\mathrm{Ric}^g - \frac{1}{2(n-1)(n-2)}\,\mathrm{Scal}^g\, g. \tag{2.1.22}$$

Soit k un entier inférieur à n, alors l'équation (2.1.19) dérivée $(k-1)$ fois est de la forme suivante :

$$0 = (k-n)g^{(k)} - (\mathrm{tr}^g g^{(k)})\, g + \text{des termes en } g^{(l)} \text{ avec l<k} \tag{2.1.23}$$

Pour $k \neq n$, l'opérateur $\eta \to (k-n)\eta - (\mathrm{tr}^g \eta)\, g$ est inversible sur les 2–tenseurs symétriques, ainsi on calcule $g^{(k)}$ par récurrence avec les termes $g^{(l)}$ préalablement déterminés par des termes de courbures de (M, g) tant que k est strictement inférieur à n. Si $n > 3$ et sachant que $g^{(1)} = 0$, l'équation (2.1.23) pour $r = 0$ et $k = 3$ implique que $g^{(3)} = 0$. Par des arguments de parité, on montre alors par récurrence, que les dérivées impaires par rapport à r de g_r et d'ordre inférieur à n s'annulent sur le bord. La différence entre la dimension paire et la dimension impaire apparaît quand on dérive $n-1$ l'équation (2.1.19). Quand n est impair, on obtient que la trace de $g_{(n)}$ est nulle, car les autres termes s'écrivent comme une somme de produit de dérivées impaires de g_r, par contre on ne peut déterminer sa partie sans trace, mais on peut continuer la résolution de manière C^∞. Si maintenant n est pair, on peut encore déterminer $\mathrm{tr}^g g_{(n)}$, mais il se peut que le terme en dérivées d'ordre inférieur contienne un terme sans trace. Ce qui donne un terme sans trace h en $r^n \log r$ dans le développement de g_r qui est lui aussi déterminé par des termes de courbures de (M, g).

Pour résumer, on vient de montrer que g_r est entièrement définie par des termes en courbures de g modulo $O(r^n)$ et qu'elle possède bien le développement asymptotique décrit dans le théorème 2.1.6. Cela implique que g_+ est unique modulo $O(r^{n-2})$ et que g_+ vérifie :

$$[\mathrm{Ric}^{g_+} + n\, g_+]_{|TM} = O(r^{n-1}\log r).$$

Pour compléter la démonstration, on va montrer par récurrence que le développement asymptotique de g_r qu'on vient de déterminer donne des termes négligeables dans les autres directions pour E, c'est–à–dire que

$$E(\partial_r, \partial_r) = O(r^{n-1}) \quad \text{et} \quad E(e_i, \partial_r) = O(r^{n-2}).$$

On montre facilement avec (2.1.7) et (2.1.8), que $E(\partial_r, \partial_r) = O(r^{-1})$ et $E(e_i, \partial_r) = O(1)$. Supposons que $E(\partial_r, \partial_r) = O(r^{s-1})$ et $E(e_i, \partial_r) = O(r^s)$

pour $0 \leq s \leq n-1$, on écrit alors $E(\partial_r, \partial_r) = \lambda r^{s-1}$ et $E(e_i, \partial_r) = \mu_i r^s$. Comme $E(e_i, \partial_j) = O(r^{n-2})$, on a $\mathrm{tr}^{g_r} \partial_r E = O(r^{n-3}) = O(r^{s-1})$, de plus $\delta^{g_r} E(\partial_r) = O(r^s)$ et $\mathrm{tr}^{g_r} \mathrm{I\!I} = O(r)$, ainsi l'égalité (2.1.14) $\mod O(r^{s-1})$ devient $(s - 2n + 1)\lambda r^{s-2} = O(r^{s-1})$ et l'égalité (2.1.15) $\mod O(r^s)$ devient $(s + 1 - n)\mu_i r^{s-1} = O(r^s)$, ce qui donne $\lambda = O(r)$ et $\mu_i = O(r)$. □

Exemple 5. Pour l'espace hyperbolique $(\mathbb{H}^{n+1}, g_+)$, on utilise le modèle du disque de Poincaré, alors en notant $\rho = \sum x_i^2$, la métrique g_+ s'écrit :

$$g_+ = \frac{4 \sum (dx^i)^2}{(1-\rho^2)^2} = \frac{4\, d\rho^2 + 4\, \rho^2\, g_{\mathbb{S}^n}}{(1-\rho^2)^2}.$$

Soit $d(x) = \log \frac{1+\rho}{1-\rho}$ la distance hyperbolique de x à 0, on pose $r(x) = e^{-d(x)}$ ce qui donne $\rho = \frac{1-r}{1+r}$ et $d\rho = \frac{2\, dr}{(1+r)^2}$, ainsi en fonction de r, la métrique hyperbolique s'écrit de la façon suivante :

$$g_+ = \frac{dr^2 + (1-r^2)^2\, g_0}{r^2}, \text{ avec } g_0 = \frac{g_{\mathbb{S}^n}}{4}.$$

Il est facile de voir que r compactifie $(\mathbb{H}^{n+1}, g_+)$ sur le bord en $(\mathbb{S}^n, 1/4\, g_{\mathbb{S}^n})$, et avec les notations du théorème (2.1.6) on obtient :

$$g_r = \frac{(1-r^2)^2}{4}\, g_{\mathbb{S}^n}. \tag{2.1.24}$$

Exemple 6. Soit (M^n, g) une variété d'Einstein avec $\mathrm{Ric}^g = 4\lambda(n-1)g$, alors la métrique

$$g_+ = \frac{dr^2 + (1-\lambda\, r^2)^2 g}{r^2} \tag{2.1.25}$$

satisfait l'équation $\mathrm{Ric}^{g_+} + n\, g_+ = 0$. On prouve ce résultat, en montrant que $g_r = (1-\lambda\, r^2)^2$ est une solution exacte de (2.1.19).

2.2 La métrique de Poincaré en dimension 2

Proposition 2.2.1. *En dimension 2, la métrique de Poincaré g_r admet le développement asymptotique suivant :*

$$g_r = g + g_{(2)} r^2 + O(r^3), \tag{2.2.1}$$

avec $\mathrm{tr}\, g_{(2)} = -\frac{1}{2}\, \mathrm{Scal}^g$*, où* tr *désigne la trace par rapport à g.*

Démonstration. Quand $n = 2$, l'équation (2.1.19) devient :

$$r\,g_r'' - g_r' - (\mathrm{tr}^{g_r} g_r')\,g_r - r\,g_r' g_r^{-1} g_r' + \frac{r}{2}\,(\mathrm{tr}^{g_r} g_r')\,g_r' - 2r\,\mathrm{Ric}^{g_r} = 0. \qquad (2.2.2)$$

D'après le théorème (2.1.6), $g^{(1)} = 0$ et en dérivant (2.2.2) par rapport à r sur M, on obtient :

$$(\mathrm{tr}\,g'')\,g + 2\,\mathrm{Ric}^g = 0,$$

ce qui donne en prenant la trace :

$$\mathrm{tr}\,g_{(2)} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Scal}^g\,.$$

De plus en dimension 2, le tenseur de Ricci est proportionnel à la métrique, ainsi il n'y a pas de terme en $r^2 \log r$, ce qui conclut la preuve. □

2.3 La métrique de Poincaré en dimension 4

Nous allons montrer que le terme logarithmique dans le développement de la métrique de Poincaré de (M, g) en dimension 4 est égale à un tenseur particulier, le tenseur de Bach de (M, g) (voir [11]), que l'on définit ici en toute dimension :

Définition 2.3.1. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n, on définit le tenseur de Bach de la manière suivante :*

$$\mathrm{B}(X,Y) = (\nabla_{e_k}\nabla_{e_k}\,\mathrm{P})(X,Y) - (\nabla_{e_k}\nabla_Y\,\mathrm{P})(X,e_k) - \mathrm{P}(\mathrm{W}_{e_k,\,X}\,Y, e_k). \qquad (2.3.1)$$

où W *désigne le tenseur de Weyl de g,* P *le tenseur de Schouten de g en dimension* 4 *(2.1.22) et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormée de TM.*

On obtient pour le développement de la métrique de Poincaré :

Proposition 2.3.2. *En dimension* 4*, la métrique de Poincaré g_r admet le développement asymptotique suivant :*

$$g_r = g - \mathrm{P}\,r^2 - \frac{1}{3}\,\mathrm{B}\,r^4 \log r + g_{(4)}\,r^4 + O(r^5), \qquad (2.3.2)$$

avec $\mathrm{tr}\,g_{(4)} = 1/4\,(\mathrm{tr}\,\mathrm{P}{\circ}\mathrm{P})$*, où* tr *désigne la trace par rapport à g.*

Remarque 5. Soient g et $\tilde{g} = e^{2\omega} g$ deux métriques conformes sur M^4, grâce au théorème 2.1.6, on retrouve le fait que le tenseur de Bach est invariant conforme en dimension 4 :

$$\tilde{\mathrm{B}} = e^{-2\omega}\,\mathrm{B},$$

où B est le tenseur de Bach de g et $\tilde{\mathrm{B}}$ celui de $\tilde{g}$.

Démonstration. Quand M est de dimension 4, l'équation (2.1.19) devient :

$$r\, g_r'' - 3\, g_r' - (\mathrm{tr}^{g_r} g_r')\, g_r - r\, g_r' g_r^{-1} g_r' + \frac{r}{2}\, (\mathrm{tr}^{g_r} g_r')\, g_r' - 2r\, \mathrm{Ric}^{g_r} = 0. \quad (2.3.3)$$

D'après le théorème 2.1.6 avec (2.1.21), g_r admet le développement asymptotique en r suivant :

$$g_r = g + g_{(2)} r^2 + h\, r^4 \log r + O(r^4),$$

avec

$$g_{(2)} = -\,\mathrm{P} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Ric} + \frac{1}{12}\,\mathrm{Scal},$$

où Scal et Ric désignent respectivement la courbure scalaire et le tenseur de Ricci de g.

Dérivons trois fois par rapport à r l'équation (2.3.3) en $r = 0$, on obtient :

$$3\, h + 4\, (\mathrm{tr}\, g_{(4)})\, g - 2\, (\mathrm{tr}\, \mathrm{P} \circ \mathrm{P})\, g + 4\, \mathrm{P} \circ \mathrm{P} - 2\, d_g\, \mathrm{Ric}(\mathrm{P}) = 0,$$

où $d_g\, \mathrm{Ric}(\mathrm{P})$ désigne la différentielle du tenseur de Ricci en g dans la direction P. On détermine alors facilement le terme h :

$$h = -\frac{4}{3}\, \mathrm{tf}(\mathrm{P} \circ \mathrm{P}) + \frac{2}{3}\, \mathrm{tf}(d_g\, \mathrm{Ric}(\mathrm{P})),$$

où tf désigne la partie sans trace par rapport à g.

Lemme 2.3.3. *Soit (M, g) une variété riemannienne de dimension n, alors la différentielle du tenseur de Ricci en g dans la direction du tenseur de Schouten* P *est égale à :*

$$d_g\, \mathrm{Ric}(\mathrm{P}) = -\frac{1}{2}\, \mathrm{B} + \frac{n}{2}\, \mathrm{tf}(\mathrm{P} \circ \mathrm{P}). \quad (2.3.4)$$

où B *est le tenseur de Bach de g et* P∘P *est considéré comme un 2–tenseur symétrique via g.*

Comme le tenseur de Bach est un tenseur sans trace, $h = -1/3\,\mathrm{B}$ et on obtient

$$\operatorname{tr} g_{(4)} = \frac{1}{4}(\operatorname{tr} \mathrm{P}{\circ}\mathrm{P}),$$

ce qui conclut la démonstration de la proposition. □

Il nous reste à démontrer le lemme ci–dessus.

Démonstration. D'après [3, 1.116] le tenseur de courbure R de g se décompose de la manière suivante :

$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{Scal}}{2n(n-1)}\, g \owedge g + \frac{1}{n-2}\big(\operatorname{Ric} - \frac{\mathrm{Scal}}{4} g\big) \owedge g + \mathrm{W},$$

on obtient facilement que :

$$\mathrm{R} = \mathrm{P} \owedge g + \mathrm{W}\,. \tag{2.3.5}$$

D'après l'égalité de Bianchi, le tenseur de Schouten vérifie l'égalité suivante $\delta^g\,\mathrm{P} + d(\operatorname{tr}\mathrm{P}) = 0$, on obtient ainsi l'égalité suivante :

$$-(\nabla_X \nabla_{e_k} \mathrm{P})(Y, e_k) + (\nabla_X \nabla_Y \mathrm{P})(e_k, e_k) = 0. \tag{2.3.6}$$

En intervertissant les dérivées, on obtient :

$$\begin{aligned}&(\nabla_{e_k} \nabla_X \mathrm{P})(Y, e_k) = \\ &\qquad (\nabla_X \nabla_{e_k} \mathrm{P})(Y, e_k) - \mathrm{P}(\mathrm{R}_{e_k, X}\, Y, e_k) + (\mathrm{P} \circ \operatorname{Ric})(X, Y)\end{aligned} \tag{2.3.7}$$

Calculons la différentielle du tenseur de Ricci de la métrique g dans la direction h, d'après [3, 1.174] on a

$$\begin{aligned} d_g \operatorname{Ric}(h)(X,Y) &= \frac{1}{2}\big((\nabla_{e_k}\nabla_X h)(Y, e_k) + (\nabla_{e_k}\nabla_Y h)(X, e_k) \\ &\quad -(\nabla_{e_k}\nabla_{e_k} h)(X, Y) - (\nabla_X \nabla_Y h)(e_k, e_k)\big), \end{aligned}$$

avec (2.3.7), (2.3.1) et (2.3.6), 2.3.5 on obtient

$$\begin{aligned} &2d_g \operatorname{Ric}(\mathrm{P})(X,Y) \\ &= (\nabla_{e_k}\nabla_X \mathrm{P})(Y, e_k) + (\nabla_{e_k}\nabla_Y \mathrm{P})(X, e_k) \\ &\quad -(\nabla_{e_k}\nabla_{e_k} \mathrm{P})(X, Y) - (\nabla_X \nabla_Y \mathrm{P})(e_k, e_k) \\ &= (\nabla_X \nabla_{e_k} \mathrm{P})(Y, e_k) - \mathrm{P}(\mathrm{R}_{e_k, X}\, Y, e_k) + (\mathrm{P} \circ \operatorname{Ric})(X, Y) \\ &\quad - B(X,Y) - \mathrm{P}(\mathrm{W}_{e_k, X}\, Y, e_k) - (\nabla_X \nabla_Y \mathrm{P})(e_k, e_k) \\ &= (\mathrm{P} \owedge g)(e_k, X, Y, e_l)\,\mathrm{P}(e_l, e_k) + (\mathrm{P} \circ \operatorname{Ric})(X,Y) - B(X,Y) \\ &= 2(\mathrm{P} \circ \mathrm{P})(X,Y) - (\operatorname{tr} \mathrm{P} \circ \mathrm{P}) g(X,Y) - (\operatorname{tr}\mathrm{P})\,\mathrm{P}(X,Y) \\ &\quad + (\mathrm{P} \circ \operatorname{Ric})(X,Y) - B(X,Y). \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Ric} = (n-2)\,\mathrm{P} + \mathrm{tr}\,\mathrm{P}$, on arrive bien au résultat voulu :

$$2d_g\,\mathrm{Ric}(\mathrm{P}) = n(\mathrm{tf}\,\mathrm{P}\circ\mathrm{P}) - B.$$

□

2.4 La métrique de Poincaré en dimension 6

On obtient pour le développement de la métrique de Poincaré :

Proposition 2.4.1. *En dimension* 6*, la métrique de Poincaré* g_r *admet le développement asymptotique suivant :*

$$\begin{aligned} g_r &= g + \Big(\frac{1}{20}\,\mathrm{Scal}\,g - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ric}\Big)\,\frac{r^2}{2!} \\ &\quad + \Big(\frac{3}{800}\,\mathrm{Scal}^2\,g - \frac{3}{40}\,\mathrm{Scal}\,\mathrm{Ric} + \frac{3}{8}\,\mathrm{Ric}\circ\mathrm{Ric} - 3\,\mathrm{B}\Big)\,\frac{r^4}{4!} \\ &\quad + h\,r^6\log r + g_{(6)}\,r^6 + O(r^7). \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Démonstration. Quand M est de dimension 6, l'équation (2.1.19) devient :

$$r\,g_r'' - 5\,g_r' - (\mathrm{tr}^{g_r} g_r')\,g_r - r\,g_r' g_r^{-1} g_r' + \frac{r}{2}\,(\mathrm{tr}^{g_r} g_r')\,g_r' - 2r\,\mathrm{Ric}^{g_r} = 0. \tag{2.4.2}$$

D'après le théorème 2.1.6 avec (2.1.21), g_r admet le développement asymptotique en r suivant :

$$g_r = g + g_{(2)}r^2 + g_{(4)}r^4 + h\,r^6\log r + g_{(6)}r^6 + O(r^7),$$

avec

$$g_{(2)} = -\,\mathrm{P} = -\frac{1}{4}\,\mathrm{Ric} + \frac{1}{40}\,\mathrm{Scal},$$

où Scal et Ric désignent respectivement la courbure scalaire et le tenseur de Ricci de g.

Dérivons trois fois par rapport à r l'équation (2.3.3) en $r=0$, on obtient :

$$-2g'''' - (\mathrm{tr}\,g'''')\,g + 12\,(\mathrm{tr}\,\mathrm{P}\circ\mathrm{P})\,g - 24\,\mathrm{P}\circ\mathrm{P} + 12\,d_g\,\mathrm{Ric}(\mathrm{P}) = 0,$$

d'après le lemme 2.3.3, on a ;

$$-2g'''' - (\mathrm{tr}\,g'''')\,g + 6\,(\mathrm{tr}\,\mathrm{P}\circ\mathrm{P})\,g + 12\,\mathrm{P}\circ\mathrm{P} - 6\,\mathrm{B} = 0.$$

En prenant la trace par rapport à g, on détermine le tenseur g'''' :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} g'''' &= 6\,(\operatorname{tr} \mathrm{P}\circ\mathrm{P}) \\ g'''' &= 6\,\mathrm{P}\circ\mathrm{P} - 3\,\mathrm{B}, \end{aligned}$$

ainsi on obtient bien :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} g_{(4)} &= \frac{\operatorname{tr} g''''}{4!} = \frac{1}{4!}\Big(-\frac{21}{400}\,\mathrm{Scal}^2 + \frac{3}{8} |\,\mathrm{Ric}\,|_g^2 \Big) \\ g_{(4)} &= \frac{1}{4!}\,g'''' = \frac{1}{4!}\Big(\frac{3}{800}\,\mathrm{Scal}^2\,g - \frac{3}{40}\,\mathrm{Scal}\,\mathrm{Ric} + \frac{3}{8}\,\mathrm{Ric}\circ\mathrm{Ric} - 3\,\mathrm{B}\Big). \end{aligned}$$

□

Pour plus de détails sur la métrique de Poincaré et les applications qui en découlent, on pourra consulter l'excellent livre [5].

Chapitre 3

Les applications conforme–harmoniques

3.1 Un problème à bord

On munit notre variété compacte M^n d'une structure conforme $[g]$ et on note $g_+ = r^{-2}(dr^2 + g_r)$ sa métrique de Poincaré définie sur $X = M\times]0,\epsilon[$. Il convient de remarquer que g_+ explose pour $r = 0$, cependant on peut quand même définir le laplacien de $(\overline{X}, g_+)$ sur (N, h).

On se donne φ une application C^∞ de M dans N, notre problème à bord est de prolonger φ en une application $\tilde{\varphi}$ de $\overline{X}$ dans N qui soit C^∞ et harmonique de $(\overline{X}, g_+)$ dans (N, h). On cherche donc à déterminer les obstructions à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{|r=0} & = \varphi \\ \delta^{g_+} T\tilde{\varphi} & = 0. \end{cases}$$

Notons p_M la projection de $M \times [0, 1]$ sur M, grâce à l'exponentielle, on va identifier localement notre variété d'arrivée N, avec le fibré $(\varphi \circ p_M)^* TN$, de manière à faire un développement asymptotique sur ce fibré.

Quand la dimension de M est paire, on obtient le théorème suivant :

Théorème 3.1.1. *Supposons que n soit un entier pair, on se donne (M^n, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes et on note (X, g_+) la métrique de Poincaré de (M, g). On écrit g_+ sous la forme (2.1.1) et on se donne φ une application C^∞ de (M, g) dans (N, h), alors il existe une unique section U*

de $(\varphi \circ p_M)^* TN$ *modulo* $O(r^n)$*, telle que l'application* $\tilde{\varphi} := (\exp_{\varphi\circ p_M}) \circ U$ *vérifie le système suivant :*

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{|r=0} & = \varphi \\ \delta^{g_+} T\tilde{\varphi} & = O(r^{n+1} \log r). \end{cases}$$

De plus U *admet le développement asymptotique en* r *suivant :*

$$U(p,r) = U_2(p)\, r^2 + \cdots + U_{n-2}(p)\, r^{n-2} + H^g(p)\, r^n \log r + U_n(p)\, r^n + \ldots, \quad (3.1.1)$$

où les premiers points désignent des termes en puissances de r *paires qui sont entièrement déterminés par* φ *et des termes de courbures de* g *et de* h*. Le terme* H^g *ne dépend que de* φ *et de* $[g]$ *et l'équation* $H^g(\varphi) = 0$ *est une équation aux dérivées partielles elliptique non–linéaire d'ordre* n *sur des applications de* (M^n, g) *dans* (N, h)*, qui est invariante conforme par rapport à* g*.*

En outre, notre terme $H^g(\varphi)$ *est de la forme suivante :*

$$H^g(\varphi) \;=\; a_n\, (\delta^g d)^{n/2-1} \delta^g T\varphi + \textit{des dérivées de } \varphi \textit{ d'ordre inférieurs},$$

où δ^g *désigne la divergence sur le fibré* $\Omega(M) \otimes \varphi^* TN$ *et* a_n *est un coefficient qui est donné par la formule :*

$$a_n := \frac{(-1)^{n/2-1}}{2^{n-1}(n/2)!(n/2-1)!}.$$

Nous avons le théorème suivant quand la dimension de M est impaire :

Théorème 3.1.2. *Supposons que* n *soit impair, on se donne* (M^n, g) *et* (N, h) *deux variétés riemanniennes et on note* (X, g_+) *la métrique de Poincaré de* (M, g)*. On écrit* g_+ *sous la forme (2.1.1) et on se donne* φ *une application* C^∞ *de* (M, g) *dans* (N, h)*, alors il existe une unique section* U *de* $(\varphi \circ p_M)^* TN$ *modulo* $O(r^n)$*, telle que l'application* $\tilde{\varphi} := (\exp_{\varphi\circ p_M}) \circ U$ *vérifie le système suivant :*

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{|r=0} & = \varphi \\ \delta^{g_+} T\tilde{\varphi} & = O(r^{n+1}). \end{cases}$$

De plus U *admet le développement asymptotique en* r *suivant :*

$$U(p,r) = U_2(p)\, r^2 + \cdots + U_n(p)\, r^n + U_{n+1}\, r^{n+1} + \ldots, \quad (3.1.2)$$

où les premiers points désignent des termes en puissances de r *paires qui sont entièrement déterminés par* φ *et des termes de courbures de* g *et de* h*. Le terme* U_n *est indéterminé.*

Nous pouvons à présent définir les applications conforme–harmoniques.

Définition 3.1.3. *Soit n un nombre pair, on dit qu'une application φ entre deux variétés riemanniennes (M^n, g) et (N, h) est conforme–harmonique de $(M^n, [g])$ dans (N, h), si φ est solution de l'équation aux dérivées partielles $H^g(\varphi) = 0$ du théorème 3.1.1. Afin d'alléger le texte, on parlera alors d'application C–harmonique.*

Remarque 6. Nous aurions pu nous contenter de déterminer la valeur sur le bord des $(n-1)$ premières dérivées par rapport à r de notre solution $\tilde{\varphi}$ et de notre terme H quand n est pair. Il est facile de voir que c'est équivalent à la donnée du développement asymptotique de U, mais il nous semble plus naturel de procéder comme nous avons fait, en particulier pour faire le lien avec le théorème de Graham–Zworski sur les fonctions (voir ci–dessous).

Un exemple simple d'applications C–harmoniques est de regarder quand notre variété d'arrivée N est égale à $\mathbb{R}^m$, cela revient à travailler avec les fonctions C^∞ de (X, g_+). On retrouve quand n est pair, la construction de Graham et Zworski ([14]) des opérateurs GJMS de Graham, Jenne, Mason et Sparling ([12]) en calculant directement le développement asymptotique de $\tilde{\varphi}$. C'est pourquoi dans le cas général, comme on ne peut pas faire de développement asymptotique sur $\tilde{\varphi}$, on identifie notre variété N d'arrivée avec le fibré φ^*TN, pour pouvoir calculer le développement asymptotique de U. Sur les fonctions, notre théorème 3.1.1 devient :

Théorème 3.1.4 (Graham–Zworski). *Soit f une fonction C^∞ de M, alors il existe une unique fonction $\tilde{f} \mod O(r^n)$ de $\overline{X}$ vérifiant le système suivant :*

$$\begin{cases} \tilde{f}_{|r=0} & = f \\ \Delta_{g_+}\tilde{f} & = O(r^{n+1}\log r). \end{cases}$$

De plus, le développement asymptotique de f est pair jusqu'au terme $n-1$ et il contient un terme en $r^n \log r$ qui ne dépend que de f et de $[g]$. Ce terme logarithmique définit un opérateur différentiel invariant conforme sur les fonctions de (M, g) qui a pour terme principal $\Delta_g^{n/2}$. Il s'agit de l'opérateur GJMS de rang maximal.

Exemple 7. Supposons que (M, g) soit une variété d'Einstein de dimension paire, alors on a une écriture explicite de la condition de C–harmonicité, la fonction f est une fonction C–harmonique sur $(M, [g])$ si et seulement si :

$$(\Delta^g - c_1)\dots(\Delta^g - c_{n/2})f = 0$$

avec
$$c_j = \frac{(n+2j-2)\,(n-2j)}{4\,n\,(n-1)}\;\mathrm{Scal}^g\,.$$
Ceci découle d'une formule due à Graham, qui a été redémontré par Gover (voir théorème 1.2 dans [9]).

3.2 Démonstration du théorème 3.1.1

3.2.1 Quand M est de dimension paire

Soit $\tilde\varphi$ une application de $(\overline{X}, g_+)$ dans (N,h), on note φ sa restriction sur M, on va montrer que si $\delta^{g_+}T\tilde\varphi = O(r^{n+1}\log r)$, alors l'application $U := (\exp_{\varphi\circ p_M})^{-1}\circ\tilde\varphi$ admet le développement asymptotique annoncé.

Soit $\overline{g}$ le prolongement de $r^2 g_+$ sur $\overline{X}$, on note respectivement $\overline{\nabla}$ et ∇^h les connexions de Levi–Civita de $(M,\overline{g})$ et (N,h). Par changement conforme de métrique (A.1.4), on obtient pour laplacien de $\tilde\varphi$:
$$\begin{aligned}
\delta^{g_+}T\tilde\varphi &= r^2\,\delta^{\overline{g}}T\tilde\varphi + r(n-1)\,\partial_r\tilde\varphi\\
&= -r^2\Big(\nabla^h_{T\tilde\varphi(e_i)}\big(T\tilde\varphi(e_i)\big) - T\tilde\varphi(\overline{\nabla}_{e_i}e_i) + \nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi}\partial_r\tilde\varphi\Big)\\
&\quad + r\,(n-1)\,\partial_r\tilde\varphi\\
&= r^2\big(\delta^{g_r}T\tilde\varphi + (\mathrm{tr}^{g_r}\,\mathrm{I\!I})\,\partial_r\tilde\varphi - \nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi}\partial_r\tilde\varphi\big) + r(n-1)\,\partial_r\tilde\varphi,
\end{aligned}$$
où $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormée de TM par rapport à g_r et $\mathrm{I\!I}$ est la seconde forme fondamentale des tranches $\{r\}\times M$ par rapport à $\overline{g}$. Comme $\mathrm{I\!I} = -\frac{1}{2}\,g_r'$, alors le laplacien de $\tilde\varphi$ s'écrit finalement :
$$\delta^{g_+}T\tilde\varphi = r^2\big(\delta^{g_r}T\tilde\varphi - \frac{\mathrm{tr}^{g_r}g_r'}{2}\,\partial_r\tilde\varphi - \nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi}\partial_r\tilde\varphi\big) + r(n-1)\,\partial_r\tilde\varphi, \qquad (3.2.1)$$
et on obtient directement que $\delta^{g_+}T\tilde\varphi = O(r)$ par rapport à la métrique g. Pour simplifier les notations, on pose $\varphi^{(k)}$ comme étant égale à la valeur au bord de la k–ième dérivée de $\tilde\varphi$ par rapport à r, c'est–à–dire
$$\varphi^{(k)} := \Big[(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^{k-1}\partial_r\tilde\varphi\Big]_{r=0}.$$
On a facilement les équivalences suivantes
$$\delta^{g_+}T\tilde\varphi = O(r^2) \iff [\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi}\delta^{g_+}T\tilde\varphi]_{r=0} = 0 \iff \varphi^{(1)} = 0.$$

Comme la dérivation $\nabla^h_{\partial_r \tilde{\varphi}}$ sur $\tilde{\varphi}^* TN$ restreinte au bord ne dépend que de la métrique h, de l'application φ et de $\varphi^{(1)}$ qui est nul, on peut déterminer $\varphi^{(k)}$ en fonction des conditions initiales, c'est–à–dire notre application φ et des termes de courbures de (M, g) et de (N, h). On procède par récurrence sur k tant que k est strictement plus petit que n. Supposons que $\varphi^{(k-1)}$ soit déterminé par les conditions initiales, on détermine $\varphi^{(k)}$ en résolvant l'équation $\delta^{g_+} T\tilde{\varphi} = O(r^{k+1})$ qui est équivalente à $\big[(\nabla^h_{\partial_r \tilde{\varphi}})^k \delta^{g_+} T\tilde{\varphi}\big]_{r=0} = 0$. On obtient alors

$$(k-n)\,\varphi^{(k)} = (k-1)\Big[(\nabla^h_{\partial_r \tilde{\varphi}})^{k-2}(\delta^{g_r} T\tilde{\varphi} - \frac{\operatorname{tr}^{g_r} g'_r}{2}\,\partial_r \tilde{\varphi})\Big]_{r=0}. \qquad (3.2.2)$$

Comme on connaît les dérivées d'ordre inférieur de $\tilde{\varphi}$ par hypothèse de récurrence et le développement asymptotique de g_r pour $r = 0$ jusqu'au terme en $r^n \log r$, alors le terme de droite de (3.2.2) est entièrement explicité par les conditions initiales, tant que k est strictement inférieur à n.

Par exemple si $k = 2$ et $n \neq 2$, on obtient :

$$\varphi^{(2)} = \frac{1}{2-n}\,\delta^g T\varphi, \qquad (3.2.3)$$

car la dérivée de g_r par rapport à r s'annule pour $r = 0$ (voir théorème 2.1.6). Si k est impair, on montre facilement par récurrence, en utilisant le fait que g_r admet un développement asymptotique pair en $r = 0$ jusqu'au terme $n-1$, que le terme de droite de (3.2.2) est nul, ainsi pour tout entier impair s compris entre 1 et $n-1$, on a :

$$\varphi^{(s)} = 0. \qquad (3.2.4)$$

On verra que pour n strictement plus grand que 2, il apparaît des termes de courbures de (M, g) et de (N, h) dès le terme $\varphi^{(4)}$, (on pourra consulter les exemples explicites du cinquième chapitre).

Nous allons faire maintenant notre identification entre notre section U et notre application $\tilde{\varphi}$. Pour cela, on prend p un point de M, l'application exponentielle en $\varphi(p)$ détermine un isomorphisme entre une petite boule $B_{\varphi(p)}$ de N centrée en $\varphi(p)$ et un ouvert de $T_{\varphi(p)}N$. On pose $\varepsilon_p = \sup(\{\alpha \mid \forall \beta < \alpha,\ \tilde{\varphi}(p, \beta) \in B_{\varphi(p)}\})$ et on définit

$$U(p, r) := (\exp_{\varphi(p)})^{-1}\big(\tilde{\varphi}(p, r)\big), \text{ pour } r < \varepsilon_p.$$

Remarquons ici que $U(p,0)$ est nul, puisque par définition de l'exponentielle,

$$U(p,0) = (\exp_{\varphi(p)})^{-1}\big(\varphi(p)\big) = 0. \tag{3.2.5}$$

Comme la dérivée de $\tilde{\varphi}$ par rapport à r est nulle sur le bord, il en est de même pour la dérivée de U par rapport à r. On montre ainsi par récurrence, que les dérivées impaires d'ordre inférieur à n de U s'annulent sur le bord. Ainsi les termes impairs du développement asymptotique de U sont nuls jusqu'à l'ordre n et les termes pairs sont donnés jusqu'à l'ordre $n-2$ par les dérivées de $\tilde{\varphi}$ par rapport à r en $r=0$, qui sont eux–mêmes entièrement déterminés par les conditions initiales. En résumé, le développement asymptotique de U en $r=0$ est de la forme suivante :

$$U(p,r) = U_2(p)\, r^2 + \cdots + U_{n-2}(p)\, r^{n-2} + \ldots,$$

Supposons que le terme suivant du développement asymptotique soit le terme $U_n(p)\, r^n$ et non le terme en $r^n \log r$, alors la dérivée par rapport à r de $\tilde{\varphi}$ admet le développement asymptotique en $r=0$ suivant :

$$\begin{aligned} \partial_r \tilde{\varphi} &= \partial_r\big(\exp_{\varphi\circ p_M}(U)\big) \\ &= \varphi^{(2)}\, r + \frac{1}{3!}\,\varphi^{(4)}\, r^3 + \ldots + Q\, r^{n-1} + \ldots, \end{aligned}$$

ou le terme Q est déterminé par le développement de U. On obtient alors facilement que

$$r^2\big(\nabla^h_{\partial_r\tilde{\varphi}}\partial_r\tilde{\varphi}\big) - r\,(n-1)\,\partial_r\tilde{\varphi} = O(r^n),$$

ce qui montre qu'avec (3.2.1), l'égalité $\delta^{g_+}T\tilde{\varphi} = O(r^{n+1}\log r)$ implique que

$$\Big[(\nabla^h_{\partial_r\tilde{\varphi}})^{k-2}(\delta^{g_r}T\tilde{\varphi} - \frac{\operatorname{tr}^{g_r} g_r'}{2}\,\partial_r\tilde{\varphi})\Big]_{r=0} = 0. \tag{3.2.6}$$

Cette équation n'a aucune chance d'être vraie en général, c'est pourquoi on introduit notre terme en $r^{n-1}\log r$. Le développement asymptotique en $r=0$ de la dérivée de $\tilde{\varphi}$ est ainsi la forme :

$$\partial_r\tilde{\varphi} \;=\; \varphi^{(2)}\, r + \frac{1}{3!}\,\varphi^{(4)}\, r^3 + \ldots + n\, H^g(\varphi)\, r^{n-1}\log r + Q\, r^{n-1} + \ldots,$$

et on obtient dans ce cas là

$$r^2\big(\nabla^h_{\partial_r\tilde{\varphi}}\partial_r\tilde{\varphi}\big) - r\,(n-1)\,\partial_r\tilde{\varphi} = n\, H^g(\varphi)\, r^n + O(r^{n+1}\log r),$$

ce qui montre qu'avec (3.2.1), l'équation $\delta^{g_+}T\tilde{\varphi} = O(r^{n+1}\log r)$ est équivalente à l'égalité suivante :

$$H^g(\varphi) = \frac{n-1}{n!}\Big[(\nabla^h_{\partial_r\tilde{\varphi}})^{n-2}(\delta^{g_r}T\tilde{\varphi} - \frac{\mathrm{tr}^{g_r}g'_r}{2}\,\partial_r\tilde{\varphi})\Big]_{r=0}, \tag{3.2.7}$$

ce qui détermine $H^g(\varphi)$ par les conditions initiales. Il faut remarquer ici, que notre équation de récurrence ne nous permet pas d'expliciter le terme U_n, ce qui nous empêche de prolonger notre unicité au delà de ce rang.

Regardons le coefficient devant le terme de plus haut degré par rapport à φ, on obtient facilement

$$\begin{aligned} H^g(\varphi) &= \frac{n-1}{n!}\,\delta^g d\varphi^{(n-2)} \ + \text{ des termes d'ordres inférieurs} \\ &= -\frac{(n-1)}{n!}\frac{(n-3)}{2}\,(\delta^g d)^2\varphi^{(n-4)} + \cdots \\ &= (-1)^{n/2-1}\frac{(n-1)}{n!}\frac{(n-3)(n-5)\cdots 1}{2\cdots(n-4)(n-2)}\,(\delta^g d)^{n/2-1}\delta^g T\varphi + \cdots \\ &= \frac{(-1)^{n/2-1}}{2^{n-1}(n/2)!(n/2-1)!}\,(\delta^g d)^{n/2-1}\delta^g T\varphi + \cdots . \end{aligned}$$

Montrons maintenant l'invariance conforme, soit $\overline{g} = e^{2\omega}g$ une métrique sur M conforme à g, on va montrer que $H^{\overline{g}}(\varphi) = e^{n\omega}H^g(\varphi)$, où $H^{\overline{g}}(\varphi)$ se rapporte à $\overline{g}$. Soit $\overline{r}$ la fonction compactifiante normalisée associée à $\overline{g}$, alors la section $\overline{U}$ associée à $\overline{g}$ admet le développement asymptotique en $\overline{r} = 0$ suivant :

$$\overline{U}(p,\overline{r}) = \overline{U}_0(p) + \cdots + \overline{U}_{n-2}(p)\,\overline{r}^{n-2} + H^{\overline{g}}(p)\,\overline{r}^n\log r + O(\overline{r}^n). \tag{3.2.8}$$

Comme $\overline{r} = e^\omega r$, on remarque facilement que le seul terme qui va donner $r^n\log r$ est $e^{n\omega}H^{\overline{g}}$, ainsi on obtient :

$$H^g = e^{n\omega}H^{\overline{g}}.$$

3.2.2 Quand M est de dimension impaire

Supposons maintenant que n est impair, l'égalité suivante est encore vraie

$$\delta^{g_+}T\tilde{\varphi} = r^2\big(\delta^{g_r}T\tilde{\varphi} - \frac{\mathrm{tr}^{g_r}g'_r}{2}\,\partial_r\tilde{\varphi} - \nabla^h_{\partial_r\tilde{\varphi}}\partial_r\tilde{\varphi}\big) + r(n-1)\,\partial_r\tilde{\varphi}, \tag{3.2.9}$$

ainsi, en procédant de la même façon qu'avant, on montre que les dérivées impaires de $\tilde{\varphi}$ par rapport à r d'ordre inférieur à $n-1$ s'annulent sur le bord. Par contre, pour des raisons de parité, on remarque que le terme de droite de l'égalité ci–dessus ne contient pas de terme en r^n, contrairement au cas précédent. Il n'y a donc pas de terme en $r^n \log r$ dans le développement asymptotique de U et le terme en r^n est indéterminé.

On vient de montrer que si $\tilde{\varphi}$ est une application C^{n-1} de $\overline{X}$ dans N et qui est harmonique de (X, g_+) dans (N, h), alors son « développement asymptotique » (en fait celui de U) est déterminé jusqu'au terme r^{n-1} par les métriques g et h, et la valeur de $\tilde{\varphi}$ sur le bord.

3.3 Exemples

Proposition 3.3.1. *Soient (M^n, g) une variété d'Einstein de dimension paire et (N, h) une variété riemannienne, alors les applications harmoniques de (M, g) dans (N, h) sont C–harmoniques.*

Démonstration. Supposons que g soit une métrique d'Einstein avec $\mathrm{Ric}^g = 4\lambda(n-1)\, g$, nous avons vu dans (2.1.25) que la métrique de Poincaré de g s'écrit :

$$g_+ = \frac{dr^2 + (1-\lambda\, r^2)^2 g}{r^2}.$$

Soit φ une application harmonique de (M, g) dans (N, h), nous allons montrer que $H^g(\varphi) = 0$. La métrique g étant d'Einstein, on obtient avec (3.2.2) pour $k = 1$:

$$\varphi^{(2)} = \frac{-1}{n-2}\Big[\frac{\delta^g T\tilde{\varphi}}{(1-\lambda r^2)^2} + \frac{2\,\lambda n r}{1-\lambda r^2}\Big]_{r=0} = 0.$$

Par récurrence, on montre ainsi que les dérivées paires de $\tilde{\varphi}$ sont nulles en $r = 0$ et donc que $H^g(\varphi) = 0$. □

Comme l'application identité d'une variété riemannienne est harmonique, on vient donc de montrer que si la variété est Einstein, alors elle est C–harmonique. On montrera qu'il existe des hypothèses plus faibles qu'être Einstein pour que l'identité soit harmonique (voir le corollaire 5.1.4 pour la dimension 4 et le théorème 5.2.2 pour la dimension 6).

3.4 Obstruction au remplissage harmonique

On obtient facilement du théorème 3.1.1, pour les variétés asymptotiquement hyperboliques, le corollaire suivant :

Corollaire 3.4.1. *Soient (X^{n+1}, g_+) une variété asymptotiquement hyperbolique de dimension impaire et une variété riemannienne (N, h), on se donne φ une application qui est C^n de $\overline{X}$ dans N et harmonique de (X, g_+) dans (N, h), alors $\varphi_{|M}$ est C–harmonique de $(M, [g])$ dans (N, h).*

Démonstration. D'après le théorème 3.1.1, l'application

$$U(p, r) := (\exp_{\varphi(p,0)})^{-1}\varphi(p, r)$$

admet comme développement asymptotique pour $r = 0$:

$$U(p, r) = U_0(p) + \cdots + U_{n-2}(p)\, r^{n-2} + H^g(p)\, r^n \log r + O(r^n), \qquad (3.4.1)$$

or φ est C^n sur $\overline{X}$, donc $H^g = 0$ et $\varphi_{|M}$ est bien C–harmonique. □

Chapitre 4

L'énergie renormalisée

4.1 Quand M est de dimension paire

Soient φ une application de (M,g) dans (N,h) et $\tilde{\varphi}$ son prolongement construit par le théorème 3.1.1 (les termes indéterminés de $\tilde{\varphi}$ n'auront aucune incidence dans la suite), on note

$$E(\tilde{\varphi},\rho) := \frac{1}{2}\int_{M\times[\rho;\varepsilon]} |T\tilde{\varphi}|^2_{g_+} dvol_{g_+}$$

l'énergie de $\tilde{\varphi}$ dans le ruban $M\times[\rho;\varepsilon]$ qui dépend donc de l'identification au bord via la métrique g. En renormalisant cette énergie, on obtient le théorème suivant :

Théorème 4.1.1. *Le développement asymptotique de $E(\tilde{\varphi},\rho)$ en $\rho = 0$ est de la forme suivante :*

$$E(\tilde{\varphi},\rho) = E_{(2-n)}\,\rho^{2-n} + \cdots + E_{(-2)}\,\rho^{-2} + F\,\log\frac{1}{\rho} + O(1),$$

où les points désignent des termes en puissances paires de ρ de $2-n$ à -2 qui sont entièrement déterminés par φ et des termes de courbures de g et de h.

Le terme F ne dépend que de φ et de la classe conforme de g et de la métrique h, ainsi la fonctionnelle

$$\mathcal{E}_g(\varphi) := \frac{2}{n\,a_n}\,F(\varphi,g)$$

est invariante conforme, c'est–à–dire que pour toute métrique $\overline{g}$ dans la classe conforme de g, on a :

$$\mathcal{E}_{\overline{g}}(\varphi) = \mathcal{E}_g(\varphi),$$

et elle s'écrit

$$\mathcal{E}_g(\varphi) = \frac{1}{2}\int_M \left\langle (\delta^g d)^{n/2-2}\delta^g T\varphi, \delta^g T\varphi \right\rangle_g dvol_g + \dots, \qquad (4.1.1)$$

où les points de suspension désignent des intégrales sur M de termes en dérivées de φ d'ordre inférieur.

De plus, le gradient de notre fonctionnelle $\mathcal{E}_g$ associé à g est égale à $a_n^{-1} H^g$, c'est–à–dire que quelque soit $\dot{\varphi} \in \Gamma(\varphi^* TN)$, on a

$$d_\varphi \mathcal{E}_g(\dot{\varphi}) = \frac{1}{a_n}\int_M \langle \dot{\varphi}, H^g \rangle_h \, dvol_g.$$

L'étude du développement asymptotique de l'énergie est à mettre en parallèle avec celle du développement asymptotique du volume d'une variété asymptotique hyperbolique, calculé par Graham dans [10]. En effet, celui–ci est similaire au niveau de sa structure à celui de notre théorème : un développement en puissances paires de r, suivie d'un terme logarithmique L qui est invariant conforme et qui joue le rôle de notre terme H dans notre théorème. Pour le gradient de notre énergie, on retrouve les mêmes idées pour l'étude de la variation du terme L, dans le théorème suivant du à Graham et Hirachi dans [11].

Théorème (Graham–Hirachi). *Soient (X, g_+) une variété asymptotiquement hyperbolique et g une métrique dans son infini conforme, on se donne g_t une famille à 1–paramètre de métriques sur M vérifiant $g_0 = g$ et on note $\dot{g} := [\partial_t \gamma]_{t=0}$. La variation du terme L dans la direction $\dot{g}$ est égale à*

$$d_g L(\dot{g}) = -\frac{1}{4}\int_M \langle h, \dot{g} \rangle_g \, dvol_g,$$

ou h est le terme en $r^n \log r$ dans le développement asymptotique de g_r du théorème 2.1.6.

On remarquera que Graham et Hirachi ont énoncé ce théorème en terme de Q–courbure et de tenseur d'obstruction. En effet, à un facteur multiplicatif, l'intégrale de la Q–courbure est égale à L (voir Graham et Zworski dans [14]) et le tenseur d'obstruction est égale à h. On pourra également consulter les travaux de Pierre Albin ([1]) sur le sujet.

Démonstration. On va commencer par montrer que le développement asymptotique de l'énergie E est bien de ce type, remarquons déjà que :

$$E(\tilde{\varphi},\rho) = \frac{1}{2}\int_{M\times[\rho;\varepsilon]} |T\tilde{\varphi}|^2_{g_+} dvol_{g_+} = \frac{1}{2}\int_{M\times[\rho;\varepsilon]} \frac{|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r}}{r^{n-1}} dr\, dvol_{g_r}.$$

D'après les théorèmes 2.1.6 et 3.1.1, les dérivées impaires d'ordre inférieur à n de g_r et de $\tilde{\varphi}$ s'annule pour $r=0$, alors $|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r} dvol_{g_r}$ admet le développement asymptotique suivant :

$$|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r} dvol_{g_r} = \big(e_0 + e_2\, r^2 + \cdots + e_{n-2}\, r^{n-2} + O(r^n \log r)\big)\; dvol_g,$$

ce qui donne :

$$E(\tilde{\varphi},\rho) = \frac{1}{2}\int_{M\times[\rho;\varepsilon]} \big(e_0\, r^{1-n} + e_2\, r^{3-n} + \cdots + e_{n-2}\, r^{-1}\big)\, dr\, dvol_g + O(1). \tag{4.1.2}$$

On obtient ainsi le développement asymptotique annoncé :

$$\begin{aligned} E(\tilde{\varphi},\rho) \;&=\; E_{(2-n)}\,\rho^{2-n} + E_{(4-n)}\,\rho^{4-n} + \cdots + E_{(-2)}\,\rho^{-2} \\ &\quad + F\,\log\frac{1}{\rho} + E_{(0)} + o(1), \end{aligned}$$

et la formule suivante bien utile pour la suite :

$$\mathcal{E}_g(\varphi) = \frac{1}{n\,(n-2)!\,a_n}\int_M \partial_r^{n-2}\big[|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r}\, dvol_{g_r}\big]_{r=0}. \tag{4.1.3}$$

En effet, on a pour le terme de gauche :

$$\mathcal{E}_g(\varphi) = \frac{2}{n\,a_n}\,F = \frac{1}{n\,a_n}\int_M e_{n-2}\, dvol_g,$$

et pour le terme sous l'intégrale à droite :

$$\partial_r^{n-2}\big[|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r}\, dvol_{g_r}\big]_{r=0} = (n-2)!\, e_{n-2}\, dvol_g.$$

La fonctionnelle $\mathcal{E}_g : \varphi \to F$ est bien définie, car F dépend seulement des $(n-2)$ premiers termes des développements asymptotiques de g_r et de $\tilde{\varphi}$, qui sont déterminés par les conditions initiales.

Montrons maintenant que cette fonctionnelle est invariante conforme par rapport à g. Soient r et $\overline{r}$ deux fonctions compactifiantes normalisées associées à deux choix de métriques conformes g et $\overline{g}$, d'après Graham ([10]), il existe une fonction b de $M \times [0, \varepsilon]$ qui admet un développement asymptotique en $\overline{r} = 0$ pair jusqu'au terme $\overline{r}^{n+1}$, qui vérifie $r = \overline{r}\, b(x, \overline{r})$. Posons $\overline{\rho}(x, \rho) = \rho\, b(x, \rho)$, alors $\overline{r} > \rho$ est équivalent à $r > \overline{\rho}(x, \rho)$. La différence entre ces deux choix de métriques conformes donne au niveau de l'énergie :

$$E(\tilde{\varphi}, \bar{\rho}) - E(\tilde{\varphi}, \rho) = \frac{1}{2} \int_{M \times [\rho; \bar{\rho}]} \left(\sum_{j=0}^{n/2-1} e_{(2j)}\, r^{1-n+2j} \right) dr\, dvol_g + O(1)$$

et après intégration sur la tranche,

$$\begin{aligned} & E(\tilde{\varphi}, \bar{\rho}) - E(\tilde{\varphi}, \rho) \\ = \ & \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n/2-2} \frac{\rho^{2-n+2j}}{2-n+2j} \int_M \left(e_{(2j)} (b(x,\rho)^{2-n+2j} - 1) \right) dvol_g \\ & + \frac{1}{2} \int_M e_{(n-2)} \log b(x, \rho)\ dvol_g + O(1). \end{aligned}$$

Il n'y a pas de terme en $\log \rho$ dans la première intégrale et comme $b(x, \rho)$ admet un développement pair en ρ jusqu'au terme ρ^n, il n'y en a pas non plus dans la deuxième, ainsi $F(\tilde{\varphi})$ est indépendant du choix de g dans sa classe conforme :

$$\mathcal{E}_{\overline{g}}(\varphi) = \mathcal{E}_g(\varphi).$$

D'après la formule 4.1.3, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_g(\varphi) &= \frac{1}{n\,(n-2)!\, a_n} \int_M \left\langle d\varphi^{(n-2)}, T\varphi \right\rangle_g dvol_g + \dots \\ &= \int_M \left\langle (\delta^g d)^{n/2-2} \delta^g T\varphi, \delta^g T\varphi \right\rangle_g dvol_g + \dots . \end{aligned}$$

On va montrer que le gradient de notre fonctionnelle $\mathcal{E}_g$ est égal à un terme de bord dans une intégration par parties, pour cela on différencie notre fonctionnelle en φ dans la direction $\dot{\varphi} \in \Gamma(\varphi^* TN)$. Soit $(\varphi_t)_{t \in [0,1]}$ une famille à un paramètre d'applications C^∞ de M dans N qui vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \varphi_0 & = \varphi \\ \left[\partial_t \varphi_t\right]_{t=0} & = \dot{\varphi}, \end{cases}$$

alors d'après le théorème 3.1.1, quelque soit $t \in [0, 1]$, il existe une application $\tilde{\varphi}_t$ de X dans N qui vérifie le système suivant :

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{t|r=0} & = \varphi_t \\ \delta^{g_+} T\tilde{\varphi}_t & = O(r^{n+1}\log r). \end{cases}$$

On munit $X \times [0,1]$ de la métrique $\gamma = g_+ + dt^2$ et on note Φ l'application de $X \times [0,1]$ dans N définie de la manière suivante :

$$\Phi(p,t) = \tilde{\varphi}_t(p), \forall (p,t) \in X \times [0,1].$$

Son application tangente $T\Phi$ est une section du fibré $\Omega(X) \otimes \Phi^* TN$, sur lequel on définit la connexion $\nabla^{\gamma,h}$ comme précédemment.

La différentielle de $\mathcal{E}_g$ en φ dans la direction $\dot{\varphi}$ est égale à

$$d_\varphi \mathcal{E}(\dot{\varphi}) = \frac{1}{n\, a_n}[\partial_t F(\varphi_t)]_{t=0},$$

c'est–à–dire le terme en $\log\rho$ de $(n\, a_n)^{-1}[\partial_t E(\tilde{\varphi}_t, \rho)]_{t=0}$. Comme

$$|T\tilde{\varphi}_t|^2_{g_+,h} = |T\Phi|^2_{\gamma,h} - |\partial_t \Phi|^2_h,$$

on obtient en utilisant le fait que $\nabla^{\gamma,h} T\Phi$ soit symétrique :

$$\begin{aligned}
&\partial_t E(\tilde{\varphi}_t, \rho) \\
&= \frac{1}{2}\partial_t\Big(\int_{M\times[\rho,\varepsilon]} |T\tilde{\varphi}_t|^2_{g_+,h} dvol_{g_+}\Big) \\
&= \int_{M\times[\rho,\varepsilon]} \Big(\big\langle \nabla^{\gamma,h}_{\partial_t} T\Phi, T\Phi\big\rangle_{\gamma,h} - \big\langle \nabla^h_{\partial_t \Phi}(\partial_t\Phi), \partial_t\Phi\big\rangle_h\Big) dvol_{g_+} \\
&= \int_{M\times[\rho,\varepsilon]} \Big(\big\langle \nabla^h_{T\Phi}(\partial_t\Phi), T\Phi\big\rangle_{\gamma,h} - \big\langle \nabla^h_{T\Phi}(\partial_t\Phi), T\Phi\big\rangle_{dt^2,h}\Big) dvol_{g_+} \\
&= \int_{M\times[\rho,\varepsilon]} \big\langle \nabla^h_{T\Phi}(\partial_t\Phi), T\Phi\big\rangle_{g_+,h} dvol_{g_+} \\
&= \int_{M\times[\rho,\varepsilon]} \big\langle \nabla^h_{T\tilde{\varphi}_t}(\partial_t\tilde{\varphi}_t), T\tilde{\varphi}_t\big\rangle_{g_+,h} dvol_{g_+},
\end{aligned}$$

ce qui donne pour $t = 0$:

$$\Big[\partial_t E(\tilde{\varphi}_t, \rho)\Big]_{t=0} = \int_{M\times[\rho,\varepsilon]} \big\langle \nabla^h_{T\tilde{\varphi}}[\partial_t\tilde{\varphi}_t]_{t=0}, T\tilde{\varphi}\big\rangle_{g_+,h} dvol_{g_+}.$$

Après une intégration par parties, on obtient que la différentielle de $\mathcal{E}$ est égale au terme en $\log\rho$ de l'expression suivante,

$$\int_{M\times[\rho,\varepsilon]} \big\langle [\partial_t\tilde{\varphi}_t]_{t=0}, \delta^{g_+} T\tilde{\varphi}\big\rangle_h - \int_{M\times[\rho,\varepsilon]} \delta^{g_+}\big\langle [\partial_t\tilde{\varphi}_t]_{t=0}, T\tilde{\varphi}\big\rangle_h dvol_{g_+}.$$

Comme $\delta^{g_+}T\tilde{\varphi} = O(r^{n+1}\log r)$, $[\partial_t\tilde{\varphi}_t]_{t=0} = O(1)$ et $dvol_{g_+} = O(r^{-n-1})$, il n'y a pas de terme en $\log\rho$ dans le premier terme. La deuxième intégrale nous donne :

$$\begin{aligned}
&\int_{M\times[\rho,\varepsilon]} \delta^{g_+}\left\langle[\partial_t\tilde{\varphi}_t]_{t=0}, T\tilde{\varphi}\right\rangle_h dvol_{g_+} \\
&= -\int_M \rho^{-n-1}\left\langle d\rho, \left\langle[\partial_t\tilde{\varphi}_t]_{t=0}, T\tilde{\varphi}\right\rangle_h\right\rangle_{g_+} dvol_{g_\rho} \\
&= -\int_M \rho^{-n+1}\left\langle[\partial_t\tilde{\varphi}_t]_{t=0}, \partial_\rho\tilde{\varphi}\right\rangle_h dvol_{g_\rho},
\end{aligned}$$

ainsi le terme en $\log\rho$ recherché est le terme en $\rho^{n-1}\log\rho$ de $\partial_\rho\tilde{\varphi}$, qui est exactement le terme $n\,H^g$. De plus $[\partial_t\tilde{\varphi}_t]_{t=0,r=0} = \dot{\varphi}$, ce qui montre bien que :

$$d_\varphi\mathcal{E}_g(\dot{\varphi}) = \frac{1}{a_n}\int_M \langle\dot{\varphi}, H^g\rangle_h\, dvol_g.$$

□

Remarque 7. On peut trouver dans la littérature (voir [4], [16] et les références citées) une autre généralisation des applications harmoniques qui est non–conforme. Ce sont les applications biharmoniques, qui sont définies comme étant les points critiques de la biénergie :

$$E_g^2(\varphi) := \frac{1}{2}\int_M |\delta^g T\varphi|_h^2\, dvol_g.$$

Quand (M,g) est conformément plate, les applications C–harmoniques sont biharmoniques pour le bon changement conforme de métrique.

4.2 Quand M est de dimension impaire

Soient (X^{n+1}, g_+) une variété d'Einstein conformément compacte et g une métrique dans son infini conforme munie de sa fonction définissante r, on identifie un voisinage de M dans $\overline{X}$ avec $M\times[0,\varepsilon]$. Dans ces nouvelles coordonnées, g_+ s'écrit $g_+ = r^{-2}(dr^2 + g_r)$ où g_r est une métrique sur M. Soient $\tilde{\varphi}$ une application de $\overline{X}$ dans N on note

$$E(\tilde{\varphi},\rho) = \frac{1}{2}\int_{M_\rho} |T\tilde{\varphi}|^2_{g_+,h} dvol_{g_+}, \tag{4.2.1}$$

l'énergie de $\tilde{\varphi}$ dans $M_\rho := X\backslash(M\times]0;\rho[)$, où ρ est un réel dans $]0,\varepsilon]$. En renormalisant cette énergie, on obtient le théorème suivant :

Théorème 4.2.1. *Soit $\tilde{\varphi}$ une application harmonique de (X, g_+) dans une variété riemannienne (N, h) qui est C^∞ de $\overline{X}$ dans N, alors le développement asymptotique de $E(\tilde{\varphi},\rho)$ en $\rho = 0$ est de la forme suivante :*

$$E(\tilde{\varphi},\rho) = E_{(2-n)}\,\rho^{2-n} + \cdots + E_{(-1)}\,\rho^{-1} + F + o(1),$$

où les points désignent des termes en puissances impaires de ρ de $2-n$ à -1 qui sont entièrement déterminés par $\tilde{\varphi}$ et des termes de courbures de g et de h.

De plus F est un invariant conforme :

$$F(\overline{g},\tilde{\varphi}) = F(g,\tilde{\varphi}), \forall \overline{g} \in [g].$$

Remarque 8. Pour définir notre invariant conforme quand n était pair, on avait seulement besoin d'une partie du développement limité de g_r et de $\tilde{\varphi}$, qui dépendaient exclusivement de termes de courbure de g et de la valeur de $\tilde{\varphi}$ sur M, ainsi on avait une fonctionnelle parfaitement définie sur les applications de M dans N. Alors que si n est impair on a besoin de toute la métrique g_r et de toute l'application $\tilde{\varphi}$ pour avoir notre invariant conforme, ce qui fait apparaître des termes qui sont indépendants du bord rendant impossible la construction d'une fonctionnelle analogue à celle du théorème 4.1.1.

Démonstration. On va commencer par montrer que le développement asymptotique de l'énergie E est bien de ce type, remarquons déjà que :

$$E(\tilde{\varphi},\rho) = E(\tilde{\varphi},\epsilon) + \frac{1}{2}\int_{M\times[\rho;\varepsilon]} |T\tilde{\varphi}|^2_{g_+,h} dvol_{g_+},$$

avec les théorèmes 2.1.6 et 3.1.2, on obtient :

$$\begin{aligned}
&|T\tilde{\varphi}|^2_{g_+,h} dvol_{g_+} \\
&\quad = \; r^{1-n}|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r,h} dvol_{g_r}\,dr \\
&\quad = \; \left(e_{(0)}\,r^{1-n} + e_{(2)}\,r^{3-n} + \cdots + e_{(n-1)} + e_{(n)}\,r + \ldots\right) dvol_g\,dr,
\end{aligned}$$

ainsi on a bien le développement suivant de l'énergie :

$$\begin{aligned}
E(\tilde{\varphi},\rho) \;&=\; E_{(2-n)}\,\rho^{2-n} + E_{(4-n)}\,\rho^{4-n} + \cdots + E_{(-1)}\,\rho^{-1} \\
&\quad + F + o(1).
\end{aligned}$$

Montrons maintenant l'invariance conforme du terme constant dans ce développement asymptotique. Soient r et $\overline{r}$ deux fonctions compactifiantes normalisées associées à deux choix de métriques conformes g et $\overline{g}$, d'après Graham ([10]), il existe une fonction b de $M \times [0, \varepsilon]$ qui admet un développement asymptotique en $\overline{r} = 0$ pair jusqu'au terme $\overline{r}^{n+1}$, qui vérifie $r = \overline{r}\, b(x, \overline{r})$. Posons $\overline{\rho}(x, \rho) = \rho\, b(x, \rho)$, alors $\overline{r} > \rho$ est équivalent à $r > \overline{\rho}(x, \rho)$. La différence entre ces deux choix de métriques conformes donne au niveau de l'énergie :

$$
\begin{aligned}
&E(\tilde{\varphi}, \bar{\rho}) - E(\tilde{\varphi}, \rho) \\
&= \frac{1}{2} \int_{M \times [\rho; \bar{\rho}]} \Big(\sum_{j=0}^{(n-1)/2} e_{2j}\, r^{1-n+2j} \Big) dr\, dvol_g + o(1) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{(n-1)/2} \frac{\rho^{2-n+2j}}{2-n+2j} \int_M \big(e_{(2j)} (b(x, \rho)^{2-n+2j} - 1) \big) dvol_g + o(1)
\end{aligned}
$$

Comme $b(x, \rho)$ admet un développement pair en ρ jusqu'au terme ρ^n, il n'y a pas de terme constant dans la différence $E(\tilde{\varphi}, \bar{\rho}) - E(\tilde{\varphi}, \rho)$, ce qui démontre l'invariance conforme. □

4.3 Exemple

La proposition suivante nous donne la valeur de notre fonctionnelle pour des applications harmoniques d'une variété (M, g) d'Einstein de dimension paire dans une variété riemannienne (N, h) quelconque.

Proposition 4.3.1. *Soit (M^n, g) une variété d'Einstein de dimension paire avec*

$$\mathrm{Ric}^g = 4\lambda(n-1)\, g, \tag{4.3.1}$$

(N, h) une variété riemannienne et φ une application harmonique de (M, g) dans (N, h), alors notre fonctionnelle invariante conforme prise en φ est égale à :

$$\mathcal{E}_g(\varphi) = (4\lambda)^{n/2-1}(n-2)! \int_M |T\varphi|^2_{g,h}\, dvol_g.$$

Dans le cas particulier de l'identité de (M, g), on obtient ainsi :

$$\mathcal{E}_g(id_M) = (4\lambda)^{n/2-1}(n-2)!\, n\, vol_g(M),$$

où $vol_g(M)$ désigne le volume de M par rapport à g.

Démonstration. D'après les égalités (4.1.3) et (2.1.25), on a

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_g(\varphi) &= \frac{1}{n\,(n-2)!\,a_n}\int_M \Big[\partial_r^{n-2}\big(|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r}\,dvol_{g_r}\big)\Big]_{r=0}\\ &= \frac{1}{n\,(n-2)!\,a_n}\int_M \big[\partial_r^{n-2}\big((1-\lambda\,r^2)^n|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r}\big)\big]_{r=0}\,dvol_g,\end{aligned}$$

avec (3.3.1), on sait que les dérivées de $\tilde{\varphi}$ par rapport à r s'annulent quand $r=0$, ainsi

$$\begin{aligned}\big[\partial_r^{n-2}\big((1-\lambda\,r^2)^n|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r}\big)\big]_{r=0} &= \Big[\partial_r^{n-2}\big((1-\lambda\,r^2)^{n-2}\big)\Big]_{r=0}|T\varphi|^2_{g,h}\\ &= (-\lambda)^{n/2-1}\,\frac{\big((n-2)!\big)^2}{\big((n/2-1)!\big)^2}\,|T\varphi|^2_{g,h},\end{aligned}$$

ce qui donne bien pour la fonctionnelle en φ :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_g(\varphi) &= \frac{(-\lambda)^{n/2-1}}{n\,(n-2)!\,a_n}\frac{\big((n-2)!\big)^2}{\big((n/2-1)!\big)^2}\int_M |T\varphi|^2_{g,h}\,dvol_g\\ &= (4\lambda)^{n/2-1}(n-2)!\int_M |T\varphi|^2_{g,h}\,dvol_g,\end{aligned}$$

$\square$

Chapitre 5

Étude en basses dimensions.

5.1 La dimension 4.

5.1.1 Écriture explicite

En dimension 4, on peut expliciter facilement la fonctionnelle du théorème 4.1.1 et l'équation de ses points critiques, c'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 5.1.1. *Soient (M^4, g) et (N, h) deux variétés riemanniennes, la fonctionnelle invariante conforme du théorème 4.1.1 s'écrit alors :*

$$\mathcal{E}_g^4(\varphi) = \int_M \Big(|\delta T\varphi|_h^2 + \frac{2}{3} \operatorname{Scal} |T\varphi|_{g,h}^2 - 2\, (\operatorname{Ric} \otimes h)(T\varphi, T\varphi) \Big) dvol, \quad (5.1.1)$$

où δ désigne la divergence sur le fibré $\Omega(M) \times \varphi^*TN$. L'équation de ses points critiques est :

$$\delta d\delta T\varphi + \delta(\frac{2}{3} \operatorname{Scal} - 2 \operatorname{Ric}) T\varphi - \mathrm{S}(\delta T\varphi) = 0,$$

où Ric, Scal et $dvol$ se rapportent à g et S est l'endomorphisme de φ^*TN défini de la manière suivante :

$$\mathrm{S}(X) = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{R}^h_{X,\, T\varphi(e_i)}\, T\varphi(e_i), \quad (5.1.2)$$

où $(e_1, \dots, e_4)$ est une base orthonormée de TM par rapport à g et R^h est le tenseur de courbure de (N, h).

Nous démontrerons ce théorème dans la section 1.4.2.

Remarque 9. Quand on travaille avec des fonctions, l'équation des points critiques de $\mathcal{E}_g^4$ est tout simplement l'équation du noyau de l'opérateur de Paneitz P_4 :

$$P_4 = \Delta^2 + \delta(\frac{2}{3}\,\mathrm{Scal} - 2\,\mathrm{Ric})\,d,$$

où Δ désigne le laplacien de g.

5.1.2 Rigidité

Proposition 5.1.2. *Soient (M^4, g) une variété d'Einstein à courbure positive ou nulle et (N, h) une variété riemannienne de courbure sectionnelle négative ou nulle, alors les applications C–harmoniques de $(M, [g])$ dans (N, h) sont exactement les applications harmoniques.*

Démonstration. Soit φ une application de (M, g) dans (N, h), g étant une métrique d'Einstein, l'équation de C–harmonicité s'écrit :

$$\delta d\delta T\varphi + \frac{1}{6}\,\mathrm{Scal}\,\delta T\varphi - \mathrm{S}(\delta T\varphi) = 0 \qquad (5.1.3)$$

Nous avons déjà vu dans le corollaire (3.3.1), que si φ est harmonique de (M, g) dans (N, h), alors φ est C–harmonique. Supposons que φ soit une application C–harmonique de $(M, [g])$ dans (N, h), en prenant le produit scalaire de (5.1.3) contre $\delta T\varphi$ par rapport à g et h, on obtient avec une intégration par parties :

$$\int_M \Big(|d\delta T\varphi|^2_{g,h} + \frac{1}{6}\,\mathrm{Scal}\,|\delta T\varphi|^2_h - \big\langle\, \mathrm{S}(\delta T\varphi), \delta T\varphi \big\rangle_h \Big) dvol = 0.$$

Si la courbure scalaire de g est strictement positive, alors $\delta T\varphi = 0$ et l'application φ est harmonique de (M, g) dans (N, h). Maintenant si la courbure scalaire de g est nulle, alors $d\delta T\varphi = 0$ et dans ces conditions, le produit scalaire de $d\delta T\varphi$ contre $T\varphi$ par rapport à g et h donne avec une intégration par parties :

$$0 = \int_M \big\langle d\delta T\varphi, T\varphi \big\rangle_{g,h} dvol = \int_M |\delta T\varphi|^2_h dvol.$$

Ce qui montre que φ est encore une application harmonique de (M, g) dans (N, h). □

Des propositions 1.3.1 et 5.1.2, on obtient directement la proposition suivante :

Proposition 5.1.3. *Soient (M^4, g) une variété d'Einstein de courbure scalaire positive ou nulle et (N, h) une variété riemannienne de courbure sectionnelle négative ou nulle, on se donne une application φ qui est C–harmonique de $(M, [g])$ dans (N, h), alors*

1. *φ est totalement géodésique,*
2. *si la courbure scalaire de (M, g) est strictement positive en un point, alors φ est constante,*
3. *si la courbure sectionnelle de (N, h) est strictement négative, alors φ est constante ou a une géodésique comme image.*

D'après le théorème 3.3.1, on sait que l'identité sur une variété d'Einstein de dimension paire est C–harmonique, l'objet du corollaire ci–dessous est de donner une condition plus faible sur les variétés de dimension 4 pour que l'identité reste C–harmonique.

Corollaire 5.1.4. *Soit (M^4, g) une variété riemannienne, l'application identité de M est C–harmonique de $(M, [g])$ dans (M, g) si et seulement si la courbure scalaire de g est constante.*

Démonstration. D'après le théorème 5.1.3, l'application identité de M est C–harmonique de $(M, [g])$ dans (M, g) si et seulement si

$$\frac{2}{3}\delta(\mathrm{Scal}\, id_{TM}) - 2\delta(\mathrm{Ric}\, id_{TM}) = 0.$$

En utilisant l'identité de Bianchi on obtient :

$$\frac{2}{3}\delta(\mathrm{Scal}\, id_{TM}) - 2\delta(\mathrm{Ric}\, id_{TM}) = -\frac{2}{3}\, d\,\mathrm{Scal} - 2\,\delta(\mathrm{Ric}) = \frac{1}{3}\, d\,\mathrm{Scal},$$

ce qui montre que l'identité est C–harmonique si et seulement si la courbure scalaire de g est constante. □

5.1.3 Démonstration du théorème 5.1.1

L'équation de C–harmonicité en dimension 4

Soient (M^4, g) une variété conforme et $g_+ = r^{-2}(dr^2 + g_r)$ sa métrique de Poincaré, d'après (2.3.2), g_r admet le développement asymptotique en $r = 0$

suivant :

$$g_r = g + \big(\frac{1}{12}\,\mathrm{Scal}\,g - \frac{1}{2}\,\mathrm{Ric}\big)r^2 + O(r^4\log r). \tag{5.1.4}$$

On se donne φ une application C^∞ de M dans une variété riemannienne (N,h) et $\tilde\varphi$ l'application du théorème 3.1.1, d'après (3.2.2), (3.2.4) et (3.2.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)} &= 0,\\ \varphi^{(2)} &= -\frac{1}{2}\,\delta T\varphi,\\ \varphi^{(3)} &= 0 \end{aligned}$$

et en notant $g'' = [\partial_r g_r]_{r=0}$, on obtient pour le terme $H^g(\varphi)$:

$$\begin{aligned} H^g(\varphi) &= \frac{1}{8}\Big[(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2(\delta^{g_r}T\tilde\varphi - \frac{\mathrm{tr}^{g_r}g'_r}{2}\,\partial_r\tilde\varphi)\Big]_{r=0}\\ &= \frac{1}{8}\Big(\Big[(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2(\delta T\tilde\varphi)\Big]_{r=0} + \Big[(\nabla_{\partial_r\tilde\varphi})^2(\delta^{g_r}T\varphi)\Big]_{r=0} - (\mathrm{tr}\,g'')\,\varphi^{(2)}\Big). \end{aligned}$$

On obtient pour le premier terme avec (A.3.4) :

$$\Big[(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2(\delta T\tilde\varphi)\Big]_{r=0} = (\delta d - \mathrm{S})\,\varphi^{(2)} = -\frac{1}{2}\,\delta d\delta T\varphi + \frac{1}{2}\,\mathrm{S}(\delta T\varphi).$$

Pour les deuxième et troisième termes de $H^g(\varphi)$, on obtient avec les formules (A.3.6) et (5.1.4) :

$$\begin{aligned} &\Big[(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2(\delta^{g_r}T\varphi)\Big]_{r=0} - (\mathrm{tr}\,g'')\,\varphi^{(2)}\\ &= -\delta\big(g''\,(T\varphi)\big) - \frac{1}{2}\,\langle d\,\mathrm{tr}\,g'', T\varphi\rangle + \frac{1}{2}\,(\mathrm{tr}\,g'')\,\delta T\varphi\\ &= -\delta\big((g'' - \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,g'')(T\varphi)\big)\\ &= -\frac{1}{3}\,\delta(\mathrm{Scal}\,T\varphi) + \delta(\mathrm{Ric}\,T\varphi). \end{aligned}$$

où la divergence δ, le produit scalaire et la trace sont pris par rapport à g. Finalement on obtient bien le résultat annoncé,

$$H^g(\varphi) = -\frac{1}{16}\Big(\delta d\delta T\varphi - \mathrm{S}(\delta T\varphi) + \delta\big(\frac{2}{3}\,\mathrm{Scal} - 2\,\mathrm{Ric}\big)T\varphi\Big).$$

La fonctionnelle invariante conforme en dimension 4

D'après la formule 4.1.3, notre fonctionnelle $\mathcal{E}_g^4$ est égale à :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_g^4(\varphi) &= \frac{1}{8\,a_4}\int_M \partial_r^2\Big[|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r,h}dvol_{g_r}\Big]_{r=0}\\ &= -2\int_M\Big(\partial_r^2\Big[|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r,h}\Big]_{r=0}+\frac{\operatorname{tr} g''}{2}\,|T\varphi|^2_{g,h}\Big)dvol.\end{aligned}$$

Regardons le premier terme sous l'intégrale, cela donne avec (5.1.4) :

$$\begin{aligned}&\partial_r^2\Big[|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r,h}\Big]_{r=0}\\ &= 2\left\langle\big[(\nabla^h_{\partial_r\tilde{\varphi}})^2T\tilde{\varphi}\big]_{r=0}, T\varphi\right\rangle_{g,h} - |T\varphi|^2_{g'',h}+2\left[|(\nabla^h_{\partial_r\tilde{\varphi}})^2T\tilde{\varphi}|^2_h\right]_{r=0}\\ &= -\frac{1}{2}\left\langle d\delta T\varphi, T\varphi\right\rangle_{g,h}-\frac{1}{6}\operatorname{Scal}|T\varphi|^2_{g,h}+\operatorname{Ric}(T\varphi,T\varphi).\end{aligned}$$

Comme $\operatorname{tr} g'' = -\frac{1}{3}\operatorname{Scal}$, on obtient en faisant une intégration par partie :

$$\mathcal{E}_g^4(\varphi)=\int_M\Big(|\delta T\varphi|^2_h+\frac{2}{3}\operatorname{Scal}|T\varphi|^2_{g,h}-2\operatorname{Ric}(T\varphi,T\varphi)\Big)dvol.$$

5.2 La dimension 6

5.2.1 Écriture explicite

Obtenir des écritures explicites de la condition de C–harmonicité devient rapidement très compliqué quand la dimension de M augmente, mis à part le cas des fonctions d'une variété d'Einstein traité dans l'exemple 3, les calculs deviennent rapidement pharaoniques. Toutefois en supposant que la variété de départ M soit de dimension 6 et que la variété d'arrivée N soit symétrique, on a le résultat suivant :

Théorème 5.2.1. *Soient (M,g) une variété d'Einstein de dimension 6 avec $\operatorname{Ric}^g = 20\,\lambda\,g$ et (N,h) une variété riemannienne symétrique, on se donne une application φ qui est C^∞ de M dans N. Alors φ est C–harmonique de $(M,[g])$ dans (N,h) si et seulement si*

$$(\delta d-\mathrm{S}+16\,\lambda\,)(\delta d-\mathrm{S}+24\,\lambda)\,\delta T\varphi-2\,\mathrm{R}^h_{\delta T\varphi,\,T\varphi(e_i)}(\nabla^h_{T\varphi(e_i)}\delta T\varphi)=0. \tag{5.2.1}$$

où ∇^h *est la connexion de* h *sur* φ^*TN*,* δ *et* d *se rapportent à* g*, et* S *est l'endomorphisme de* φ^*TN *défini de manière analogue à la dimension* 4 *:*

$$\mathrm{S}(X) = \mathrm{R}^h_{X,\,T\varphi(e_i)}\, T\varphi(e_i), \tag{5.2.2}$$

où $(e_1, \ldots, e_6)$ *est une base orthonormée de* (M, g) *et* R^h *est le tenseur de courbure de* (N, h)*.*

De plus, la fonctionnelle invariante conforme associée aux applications C–harmoniques s'écrit :

$$\mathcal{E}^6_g(\varphi) = \int_M \left(|d\delta T\varphi|^2_{g,h} - \langle \mathrm{S}(\delta T\varphi), \delta T\varphi\rangle_h + 40\,\lambda\, |\delta T\varphi|^2_h + 384\,\lambda^2\, |T\varphi|^2_{g,h} \right) dvol.$$

Toutefois, quand la variété (M, g) est seulement riemannienne, on peut encore calculer la condition de C–harmonicité et la valeur de notre fonctionnelle pour l'identité de $(M, [g])$ dans (M, g), c'est l'objet du théorème suivant :

Théorème 5.2.2. *Soit* (M, g) *une variété de dimension* 6*, alors l'identité est une application C–harmonique de* $(M, [g])$ *dans* (M, g) *si et seulement si :*

$$(\Delta + \frac{9}{20}\,\mathrm{Scal}\, g - \frac{5}{4}\,\mathrm{Ric})\, d\,\mathrm{Scal} - \frac{15}{2}\,\mathrm{tr}(\nabla_{\mathrm{Ric}}\,\mathrm{Ric}) + 20\,\delta\,\mathrm{B} + \frac{5}{4}\, d(|\,\mathrm{Ric}\,|^2) = 0,$$

où Scal*,* Ric *et* B *désignent respectivement la courbure scalaire, le tenseur de Ricci et le tenseur de Bach de* g*.*

De plus, notre fonctionnelle en l'identité est égale à :

$$\mathcal{E}^6_g(id) = \frac{4}{25} \int_M \mathrm{Scal}^2\, dvol.$$

5.2.2 Démonstration du théorème 5.2.1

L'équation de C–harmonicité en dimension 6

Avec l'égalité (3.2.3), on détermine la valeur de la dérivée seconde de $\tilde{\varphi}$ sur le bord qu'on note U :

$$U = -\frac{1}{4}\,\delta T\varphi \tag{5.2.3}$$

et avec l'égalité (3.2.2) pour $k = 4$, on obtient la valeur de la dérivée quatrième qu'on note V :

$$\begin{aligned}
V &= -\frac{3}{2}\Big[(\nabla^h_{\partial_r \tilde\varphi})^2\Big(\frac{1}{(1-\lambda\, r^2)^2}\,\delta T\tilde\varphi + \frac{12\lambda r}{1-\lambda\, r^2}\,\partial_r\tilde\varphi\Big)\Big]_{r=0} \\
&= -\frac{3}{2}\,\Big[(\nabla^h_{\partial_r \tilde\varphi})^2\delta T\tilde\varphi\Big]_{r=0} - 6\,\lambda\,\delta T\varphi - 36\,\lambda\, U \\
&= \frac{3}{8}\,(\delta d - \mathrm{S} + 8\,\lambda)\,\delta T\varphi, \qquad (5.2.4)
\end{aligned}$$

en utilisant l'égalité suivante qui vient directement de la formule (A.3.4) :

$$\Big[(\nabla^h_{\partial_r \tilde\varphi})^2\delta T\tilde\varphi\Big]_{r=0} = -\frac{1}{4}\,(\delta d - \mathrm{S})\,\delta T\varphi. \qquad (5.2.5)$$

Calculons notre terme H, d'après (3.2.7) en utilisant les égalités (5.2.4) et (5.2.5), on obtient :

$$\begin{aligned}
144\, H^g(\varphi) &= \Big[(\nabla^h_{\partial_r \tilde\varphi})^4\Big(\frac{1}{(1-\lambda\, r^2)^2}\,\delta^g T\tilde\varphi + \frac{12\lambda r}{1-\lambda\, r^2}\,\partial_r\tilde\varphi\Big)\Big]_{r=0} \\
&= \big[(\nabla^h_{\partial_r \tilde\varphi})^4\delta T\tilde\varphi\big]_{r=0} + 24\,\lambda\big[(\nabla^h_{\partial_r \tilde\varphi})^2\delta T\tilde\varphi\big]_{r=0} \\
&\quad + 72\,\lambda^2\delta T\varphi + 48\,\lambda\, V + 288\,\lambda^2 U \\
&= \big[(\nabla^h_{\partial_r \tilde\varphi})^4\delta T\tilde\varphi\big]_{r=0} - 6\,(\delta d - \mathrm{S})\,\delta T\varphi. \\
&\quad + 12\,(\delta d - \mathrm{S} + 8\,\lambda)\,\delta T\varphi \\
&= \big[(\nabla^h_{\partial_r \tilde\varphi})^4\delta T\tilde\varphi\big]_{r=0} + 12\,(\delta d - \mathrm{S} + 12\,\lambda)\,\delta T\varphi. \qquad (5.2.6)
\end{aligned}$$

Soit $(e_1, \ldots, e_6)$ une base orthonormée de (M, g), remarquons qu'en intervertissant les dérivées par rapport à i et r, on obtient l'égalité suivante qui va nous servir par la suite :

$$\begin{aligned}
\big[(\nabla^h_{\partial_r \tilde\varphi})^2 T\varphi(e_i)\big]_{r=0} &= \big[\nabla^h_{T\varphi(e_i)}\partial_r^2\tilde\varphi - \mathrm{R}^h_{\partial_r\tilde\varphi,\, T\varphi(e_i)}\, T\varphi(e_i)\big]_{r=0} \\
&= \nabla^h_{T\varphi(e_i)} U.
\end{aligned}$$

Intéressons nous au premier terme de (5.2.6), on a de suite :

$$\begin{aligned}(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^4\delta T\tilde\varphi &= -(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^4\big(\nabla^h_{T\tilde\varphi(e_i)}T\tilde\varphi(e_i)\big)\\ &= -\nabla^h_{T\tilde\varphi(e_i)}(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^4\big(T\tilde\varphi(e_i)\big)\\ &\quad +(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^3\big(\,\mathrm{R}^h_{\partial_r\tilde\varphi,\,T\tilde\varphi(e_i)}\,T\tilde\varphi(e_i)\big)\\ &\quad +(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2\Big(\,\mathrm{R}^h_{\partial_r\tilde\varphi,\,T\tilde\varphi(e_i)}\,(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi}T\tilde\varphi(e_i))\Big)\\ &\quad +\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi}\Big(\,\mathrm{R}^h_{\partial_r\tilde\varphi,\,T\tilde\varphi(e_i)}\,((\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2T\tilde\varphi(e_i))\Big)\\ &\quad +\mathrm{R}^h_{\partial_r\tilde\varphi,\,T\tilde\varphi(e_i)}\,\big((\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^3T\tilde\varphi(e_i)\big),\end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned}&(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^4\big(T\tilde\varphi(e_i)\big)\\ &= \nabla^h_{T\tilde\varphi(e_i)}\big((\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^3(\partial_r\tilde\varphi)\big)+\ \big((\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2(\mathrm{R}^h_{\partial_r\tilde\varphi,\,T\tilde\varphi(e_i)}\,\partial_r\tilde\varphi)\big)\\ &\quad +\ \nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi}\big(\,\mathrm{R}^h_{\partial_r\tilde\varphi,\,T\tilde\varphi(e_i)}(\nabla^h_{\partial_r}\partial_r\tilde\varphi)\big)+\ \mathrm{R}^h_{\partial_r\tilde\varphi,\,T\tilde\varphi(e_i)}\,\big((\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2\partial_r\tilde\varphi\big).\end{aligned}$$

Comme (N,h) est symétrique et que la dérivée première et la dérivée troisième de $\tilde\varphi$ par rapport à r s'annulent sur le bord, on obtient avec (5.2.7) :

$$\begin{aligned}&\big[(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^4\delta T\tilde\varphi\big]_{r=0}\\ &= (\delta d-\mathrm{S})V-3\,\nabla^h_{T\varphi(e_i)}\big(\,\mathrm{R}^h_{U,\,T\varphi(e_i)}\,U\big)-6\,\mathrm{R}^h_{U,\,T\varphi(e_i)}(\nabla^h_{T\varphi(e_i)}U)\\ &\quad -3\,\mathrm{R}^h_{U,\,\nabla^h_{T\varphi(e_i)}U}\,T\varphi(e_i)\\ &= (\delta d-\mathrm{S})V-9\,\mathrm{R}^h_{U,\,T\varphi(e_i)}(\nabla^h_{T\varphi(e_i)}U)\\ &\quad -3\,\mathrm{R}^h_{\nabla^h_{T\varphi(e_i)}U,\,T\varphi(e_i)}\,U-3\,\mathrm{R}^h_{U,\,\nabla^h_{T\varphi(e_i)}U}\,T\varphi(e_i).\end{aligned}$$

Avec l'identité de Bianchi, cela donne :

$$\Big[(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^4\delta T\tilde\varphi\Big]_{r=0} = (\delta d-\mathrm{S})V-12\,\mathrm{R}^h_{U,\,T\varphi(e_i)}(\nabla^h_{T\varphi(e_i)}U)$$

ce qui fait avec les égalités (5.2.3) et (5.2.4) :

$$\begin{aligned}\big[(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^4\delta T\tilde\varphi\big]_{r=0} &= \frac{3}{8}(\delta d-\mathrm{S})(\delta d-\mathrm{S}+8\,\lambda)\,\delta T\varphi\\ &\quad -\frac{3}{4}\,\mathrm{R}^h_{\delta T\varphi,\,T\varphi(e_i)}(\nabla^h_{T\varphi(e_i)}\delta T\varphi).\end{aligned}$$

Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} 384\, H^g(\varphi) &= (\delta d - \mathrm{S} + 16\,\lambda)(\delta d - \mathrm{S} + 24\,\lambda)\,\delta T\varphi \\ &\quad -2\,\mathrm{R}^h_{\delta T\varphi,\, T\varphi(e_i)}(\nabla^h_{T\varphi(e_i)}\delta T\varphi), \end{aligned}$$

qui est la condition de C–harmonicité énoncée.

La fonctionnelle invariante conforme en dimension 6

Nous allons calculer maintenant la fonctionnelle invariante conforme. La variété (M, g) satisfait la condition d'Einstein, alors on a $g_r = (1 - \lambda\, r^2)^2 g$ et avec la formule (4.1.3) et les notations du théorème 3.1.1, on obtient

$$\mathcal{E}^6_g(\varphi) = \frac{1}{144\, a_6} \int_M \Big[\partial^4_r\big((1-\lambda\, r^2)^6\, |T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r,h}\big)\Big]_{r=0} dvol_g.$$

Regardons le terme sous l'intégrale :

$$\begin{aligned} &\Big[\partial^4_r\big((1-\lambda\, r^2)^6\, |T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r,h}\big)\Big]_{r=0} \\ &= \Big[\partial^4_r\big((1-\lambda\, r^2)^4\, |T\tilde{\varphi}|^2_{g,h} + (1-\lambda\, r^2)^6\, |\partial_r\tilde{\varphi}|^2_{g,h}\big)\Big]_{r=0} \\ &= \big[\partial^4_r(|T\tilde{\varphi}|^2_{g,h}) - 48\,\lambda\,\partial^2_r(|T\tilde{\varphi}|^2_{g,h})\big]_{r=0} + 144\,\lambda^2\, |T\varphi|^2_{g,h} \\ &\quad + 8\,\big\langle V, U\big\rangle_h - 144\,\lambda\, |U|^2_h, \end{aligned}$$

d'après l'expression de U et V (voir 5.2.3 et 5.2.4), on a d'une part :

$$\Big[\partial^2_r\big(|T\tilde{\varphi}|^2_{g,h}\big)\Big]_{r=0} = 2\,\big\langle d\,U, T\varphi\big\rangle_{g,h} = -\frac{1}{2}\big\langle d\delta T\varphi, T\varphi\big\rangle_{g,h},$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned} \Big[\partial^4_r\big(|T\tilde{\varphi}|^2_{g,h}\big)\Big]_{r=0} &= 2\,\big\langle \big[(\nabla_{\partial_r\tilde{\varphi}})^4\, T\tilde{\varphi}\big]_{r=0}, T\varphi\big\rangle_{g,h} + 6\,\big[|(\nabla_{\partial_r\tilde{\varphi}})^2\, T\tilde{\varphi}|^2_{g,h}\big]_{r=0} \\ &= 2\,\big\langle d\,V + 3\,\mathrm{R}^h_{U,\,T\varphi}\; U, T\varphi\big\rangle_{g,h} + 6\,|dU|^2_{g,h} \\ &= \frac{3}{4}\,\big\langle d(\delta d - \mathrm{S} + 8\,\lambda)\,\delta T\varphi, T\varphi\big\rangle_{g,h} \\ &\quad -\frac{3}{8}\,\big\langle\, \mathrm{S}(\delta T\varphi), \delta T\varphi\big\rangle_h + \frac{3}{8}\,|d\delta T\varphi|^2_{g,h}, \end{aligned}$$

ce qui fait finalement, pour le terme sous l'intégrale :

$$\begin{aligned}
&\partial_r^4\big[(1-\lambda\, r^2)^6\, |T\tilde\varphi|^2_{dr^2+g_r,h}\big]_{r=0} \\
&\quad = \frac{3}{4}\big\langle d(\delta d - \mathrm{S} + 8\,\lambda)\,\delta T\varphi, T\varphi\big\rangle_{g,h} - \frac{3}{8}\big\langle\, \mathrm{S}(\delta T\varphi), \delta T\varphi\big\rangle_h \\
&\qquad + \frac{3}{8}\,|d\delta T\varphi|^2_{g,h} + 24\,\lambda\,\big\langle d\delta T\varphi, T\varphi\big\rangle_{g,h} + 144\,\lambda^2\,|T\varphi|^2_{g,h} \\
&\qquad - \frac{3}{4}\big\langle(\delta d - \mathrm{S} + 8\,\lambda)\,\delta T\varphi, \delta T\varphi\big\rangle_h - 9\,\lambda\,|\delta T\varphi|^2_h.
\end{aligned}$$

Cela donne bien en intégrant par partie :

$$\mathcal{E}^6_g(\varphi) = \int_M \big(|d\delta T\varphi|^2_{g,h} - \big\langle\, \mathrm{S}(\delta T\varphi), \delta T\varphi\big\rangle_h + 40\,\lambda\,|\delta T\varphi|^2_h + 384\,\lambda^2\,|T\varphi|^2_{g,h}\big)\; dvol.$$

5.2.3 Démonstration du théorème 5.2.2

L'équation de C–harmonicité en dimension 6 pour l'identité

Soit $\varphi = id_M$, on va calculer les dérivées $\varphi^{(2)}$ et $\varphi^{(4)}$ et le terme logarithmique H. Le terme $\varphi^{(2)}$ est nul d'après (3.2.3) et avec l'égalité (3.2.2) pour $n = 6$, on obtient pour $\varphi^{(4)}$:

$$\begin{aligned}
\varphi^{(4)} &= -\frac{3}{2}\Big[(\nabla^h_{\partial_r\tilde\varphi})^2(\delta^{g_r} T\tilde\varphi - \frac{\mathrm{tr}^{g_r} g'_r}{2}\,\partial_r\tilde\varphi)\Big]_{r=0} \\
&= -\frac{3}{2}\Big[(\nabla_{\partial_r\tilde\varphi})^2\delta^g T\tilde\varphi\Big]_{r=0} - \frac{3}{2}\Big[(\nabla_{\partial_r\tilde\varphi})^2\delta^{g_r} T\varphi\Big]_{r=0}.
\end{aligned}$$

Le premier terme est nul, en effet :

$$\Big[(\nabla_{\partial_r\tilde\varphi})^2\delta^g T\tilde\varphi\Big]_{r=0} = (\Delta - \mathrm{Ric})\,(\varphi^{(2)}) = 0,$$

ainsi on obtient pour $\varphi^{(4)}$:

$$\varphi^{(4)} = \frac{3}{2}(\delta g'' + \frac{1}{2}\,d\,\mathrm{tr}\,g'') = -\frac{3}{4}\,d\,\mathrm{tr}\,g'' = \frac{3}{20}\,d\,\mathrm{Scal}\,. \tag{5.2.7}$$

D'après (3.2.7), le terme logarithmique H est égale à :

$$\begin{aligned}
144\,H &= \Big[(\nabla_{\partial_r\tilde\varphi})^4(\delta^{g_r} T\tilde\varphi - \frac{\mathrm{tr}^{g_r} g'_r}{2}\,\partial_r\tilde\varphi)\Big]_{r=0} \\
&= \Big[(\nabla_{\partial_r\tilde\varphi})^4\delta T\tilde\varphi\Big]_{r=0} + \Big[(\nabla_{\partial_r\tilde\varphi})^4\delta^{g_r} T\varphi\Big]_{r=0} - 2\,(\mathrm{tr}\,g'')\,\varphi^{(4)}.
\end{aligned}$$

On obtient facilement pour le premier terme avec (5.2.7) :

$$\Big[(\nabla_{\partial_r \tilde{\varphi}})^4 \delta^g T\tilde{\varphi}\Big]_{r=0} = (\Delta - \mathrm{Ric})\,\varphi^{(4)} = \frac{3}{20}(\Delta - \mathrm{Ric})\, d\,\mathrm{Scal}\,. \tag{5.2.8}$$

Pour le deuxième terme, sachant que $g'''' = \frac{3}{2}\, g'' \circ g'' - 3\,\mathrm{B}$ et que φ est l'identité de M, on obtient avec (A.3.6) :

$$\begin{aligned}
&\Big[(\nabla_{\partial_r \tilde{\varphi}})^4 \delta^{g_r} T\varphi\Big]_{r=0} \\
&= \Big[(\nabla_{\partial_r \tilde{\varphi}})^3 \Big(- \delta^{g_r}\big(g'_r\,(T\varphi)\big) - \frac{1}{2}\, g_r(T\varphi, d\,\mathrm{tr}^{g_r} g'_r)\Big)\Big]_{r=0} \\
&= \Big[(\nabla_{\partial_r \tilde{\varphi}})^2 \Big(2\,\delta^{g_r}\big(g'_r \circ g'_r\,(T\varphi)\big) + \frac{1}{2}\, g'_r\,(T\varphi, d\,\mathrm{tr}^{g_r} g'_r) - \delta^{g_r}\big(g''(T\varphi)\big)\Big)\Big]_{r=0} \\
&\quad -\frac{1}{2}\Big[(\nabla_{\partial_r \tilde{\varphi}})^3 \big(g_r(T\varphi, d\,\mathrm{tr}^{g_r} g'_r)\big)\Big]_{r=0} \\
&= \frac{9}{2}\,\delta(g'' \circ g'') + 3\, g''(d\,\mathrm{tr}\, g'') + 3\,\delta\,\mathrm{B} + \frac{3}{4}\, d(\mathrm{tr}\, g'' \circ g'').
\end{aligned}$$

Comme $g'' = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Ric} + \frac{1}{20}\,\mathrm{Scal}\, g$, alors

$$\begin{aligned}
\Big[(\nabla_{\partial_r \tilde{\varphi}})^4 \delta^{g_r} T\varphi\Big]_{r=0} &= \frac{9}{8}\,\delta(\mathrm{Ric} \circ \mathrm{Ric}) + (\frac{3}{400}\,\mathrm{Scal}\, g + \frac{21}{40}\,\mathrm{Ric})(d\,\mathrm{Scal}) \\
&\quad + 3\,\delta\,\mathrm{B} + \frac{3}{16}\, d|\,\mathrm{Ric}\,|^2
\end{aligned}$$

Soit $(e_1, \ldots, e_6)$ une base orthonormée de (M, g), on obtient alors pour l'avant dernier terme,

$$\begin{aligned}
\delta(\mathrm{Ric} \circ \mathrm{Ric}) &= \mathrm{Ric} \circ \delta \mathrm{Ric} - (\nabla_{e_i} \mathrm{Ric})(\mathrm{Ric}(e_i)) \\
&= -\frac{1}{2}\, d\,\mathrm{Scal} \circ \mathrm{Ric} - (\nabla_{\mathrm{Ric}(e_i)} \mathrm{Ric})(e_i) \\
&= -\frac{1}{2}\, d\,\mathrm{Scal} \circ \mathrm{Ric} - \mathrm{tr}(\nabla_{\mathrm{Ric}} \mathrm{Ric}),
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\Big[(\nabla_{\partial_r \tilde{\varphi}})^4 \delta^{g_r} T\varphi\Big]_{r=0} &= (\frac{3}{400}\,\mathrm{Scal}\, g - \frac{3}{80}\,\mathrm{Ric})(d\,\mathrm{Scal}) - \frac{9}{8}\,\mathrm{tr}(\nabla_{\mathrm{Ric}} \mathrm{Ric}) \\
&\quad + 3\,\delta\,\mathrm{B} + \frac{3}{16}\, d|\,\mathrm{Ric}\,|^2.
\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Finalement, avec (5.2.8) et (5.2.9), on obtient :

$$\begin{aligned} 144\,H &= \frac{3}{20}(\Delta + \frac{9}{20}\,\mathrm{Scal}\; g - \frac{5}{4}\,\mathrm{Ric})\, d\,\mathrm{Scal} \\ &\quad -\frac{9}{8}\,\mathrm{tr}(\nabla_{\mathrm{Ric}}\,\mathrm{Ric}) + 3\,\delta\,\mathrm{B} + \frac{3}{16}\, d(|\,\mathrm{Ric}\,|^2), \end{aligned}$$

ce qui donne bien que H est nul si et seulement si

$$(\Delta + \frac{9}{20}\,\mathrm{Scal}\, g - \frac{5}{4}\,\mathrm{Ric})\, d\,\mathrm{Scal} - \frac{15}{2}\,\mathrm{tr}(\nabla_{\mathrm{Ric}}\,\mathrm{Ric}) + 20\,\delta\,\mathrm{B} + \frac{5}{4}\, d(|\,\mathrm{Ric}\,|^2) = 0$$

La fonctionnelle invariante conforme en dimension 6 en l'identité

D'après l'égalité (4.1.3), on obtient en dimension 6 :

$$\mathcal{E}^6_g(id) \;=\; \frac{8}{3}\int_M \left[\partial^4_r\big(|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r,g}\, dvol_{g_r}\big)\right]_{r=0}.$$

Comme les dérivées premières et troisièmes de g_r et $\tilde{\varphi}$ par rapport à r s'annulent pour $r=0$, on obtient pour le terme sous l'intégrale :

$$\left[\partial^4_r(|T\tilde{\varphi}|^2_{g_r,g})\right]_{r=0} dvol_g + 6\left[\partial^2_r(|T\tilde{\varphi}|^2_{g_r,g})\partial^2_r(dvol_{g_r})\right]_{r=0} + 6\left[\partial^4_r(dvol_{g_r})\right]_{r=0}.$$

Regardons le dernier terme :

$$\left[\partial^4_r(dvol_{g_r})\right]_{r=0} = \left[\partial^3_r(\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}^{g_r} g'_r)\right]_{r=0} = \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\, g'''' - \frac{3}{2}\,\mathrm{tr}\, g''\circ g'' + \frac{3}{4}(\mathrm{tr}\, g'')^2,$$

ainsi, comme $\mathrm{tr}\, g'''' = -\frac{3}{2}\,\mathrm{tr}\, g''\circ g''$, le terme sous l'intégrale est égale à

$$\left[\partial^4_r\big(|T\tilde{\varphi}|^2_{dr^2+g_r,g}\, dvol_{g_r}\big)\right]_{r=0} = \frac{3}{2}(\mathrm{tr}\, g'')^2\, dvol = \frac{3}{50}\,\mathrm{Scal}^2\; dvol,$$

ce qui donne bien :

$$\mathcal{E}^6_g(id) = \frac{4}{25}\int_M \mathrm{Scal}^2\; dvol.$$

Chapitre 6

Un exemple d'application conforme–harmonique non trivial

6.1 Situation

Nous avons défini dans le troisième chapitre une nouvelle famille d'applications entre deux variétés riemanniennes, la question qui se pose ici est de comparer cette nouvelle « notion d'harmonicité » avec celle, déjà pré–existante en dimension supérieure.

Nous avons déjà vu, avec la proposition 3.3.1, que si la variété de départ est une variété d'Einstein de dimension paire, alors les applications harmoniques sont C–harmoniques. D'autre part, il existe aussi des applications harmoniques qui ne sont pas C–harmoniques, il suffit de prendre l'identité d'une variété riemannienne de dimension 4 munie d'une métrique à courbure scalaire non constante (voir le corollaire 5.1.4). Comme l'harmonicité n'est pas une notion qui est invariante conforme en dimension plus grande que 2, contrairement à la C–harmonicité, il existe beaucoup d'applications C–harmoniques, qui ne soient pas harmoniques.

La question naturelle qui se pose, est donc l'existence d'une application C–harmonique, qui ne soit pas simplement non–harmonique pour une métrique particulière, mais qui ne soit pas harmonique pour toute la classe conforme considérée pour la C–harmonicité.

6.2 Énoncé

Notre stratégie est de partir d'une variété (M, h) de dimension 4 à courbure scalaire constante strictement négative, on a vu que dans ce cas là, l'identité est une application harmonique et C–harmonique (corollaire 5.1.4). On suppose que h est « proche » d'une métrique d'Einstein, on va montrer que fixer la métrique h dans la variété d'arrivée et déformer judicieusement la métrique de la variété de départ, permet de construire une application proche de l'identité qui conserve la C–harmonicité, mais qui n'est plus harmonique, pour n'importe quel changement conforme « petit » ou « grand » de métrique, par rapport à la variété de départ.

On note $\mathcal{M}^{k,\alpha}$ l'espace des métriques riemanniennes $C^{k,\alpha}$ de M, $\mathcal{A}^{k,\alpha}$ l'espace des applications $C^{k,\alpha}$ de M dans M et $\Gamma^{k,\alpha}$ l'espace des sections $C^{k,\alpha}$ de φ^*TM, ce sont des espaces de Banach.

On peut maintenant énoncer notre résultat d'existence d'une application C–harmonique non triviale :

Théorème 6.2.1. *Soit (M, g_e) une variété d'Einstein de dimension 4 à courbure scalaire strictement négative, alors il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour toute métrique lisse h vérifiant $\|h - g_e\|_{k+4,\alpha} < \epsilon$, il existe φ une application C^∞ de M dans M et g une métrique C^∞, telles que :*

1. *$\|g - g_e\|_{k+4,\alpha} < \epsilon$,*
2. *φ est C–harmonique de $(M, [g])$ dans (M, h),*
3. *quelque soit ω dans $C^{k+4,\alpha}$, φ n'est pas harmonique de $(M, e^{2\omega}g)$ dans (M, h).*

La démonstration du théorème se fait en quatre étapes.

1. On prouve grâce au théorème des fonctions implicites, que pour n'importe quelle métrique g suffisamment « proche » de h, il existe une unique application $\varphi(g)$ qui soit à la fois « proche » de l'identité et C–harmonique de $(M, [g])$ dans (M, h) (lemme 6.3.1).
2. Grâce encore au théorème des fonctions implicites, on montre que pour n'importe quelle métrique g suffisamment « proche » de h, il existe un unique changement conforme $\omega(g)$ qui soit à la fois « petit » et qui soit solution d'une équation plus faible que l'harmonicité de $\varphi(g)$ de $(M, e^{2\omega}g)$ dans (M, h) (lemme 6.3.2).

3. On construit une telle métrique g de façon à ce que l'application $\varphi(g)$ ne soit pas harmonique de $(M, e^{2\omega} g)$ dans (M, h), pour de « petits » changements conforme ω.
4. On montre finalement avec le lemme 6.3.3, que cette application $\varphi(g)$ n'est pas non plus harmonique de $(M, e^{2\omega} g)$ dans (M, h), pour de « grands » changements conforme ω.

6.3 Démonstration du théorème 6.2.1

6.3.1 Déformation de l'équation de conforme–harmonicité

Nous allons montrer comment obtenir des applications C–harmoniques proches de l'identité, quand on se place suffisamment « proche » d'une métrique d'Einstein à courbure scalaire négative.

Pour cela, prenons g et h deux métriques dans $\mathcal{M}^{k+3,\alpha}$ et φ dans $\mathcal{A}^{k+4,\alpha}$, on note :

$$P^4(\varphi, g, h) := \delta d \delta T\varphi + \delta(\frac{2}{3} \operatorname{Scal}^g - 2 \operatorname{Ric}^g) T\varphi - \mathrm{S}^h(\delta T\varphi),$$

c'est–à–dire que $P^4(\varphi, g, h) = 0$ est la condition de C–harmonicité de $(M, [g])$ dans (M, h) de φ. L'opérateur P^4 s'interprète comme l'opérateur de Paneitz généralisé aux applications en dimension 4.

On veut construire des applications C–harmoniques proches de l'identité en faisant varier la métrique g. Le lemme suivant nous donne l'existence d'un opérateur qui permet d'associer à chaque métrique g « proche » d'une métrique h particulière, l'unique application qui va être à la fois « proche » de l'identité et C–harmonique. Pour alléger les notations, on notera φ cet opérateur.

Lemme 6.3.1. *Soit g_e une métrique d'Einstein à courbure scalaire strictement négative, alors le problème implicite*

$$P^4(\varphi(g), g, h) = 0$$

admet une unique solution locale, c'est–à–dire qu'il existe un voisinage V_e de g_e dans $\mathcal{M}^{k+3,\alpha}$, tel que pour toute métrique h dans V_e, il existe un voisinage V_{id} de l'identité de M dans M dans $\mathcal{A}^{k+4,\alpha}$ et un opérateur φ continue qui dépend de h, qui est inversible de V_e dans V_{id} et qui vérifie $P^4(\varphi(g), g, h) = 0$.

Démonstration. Nous allons appliquer le théorème des fonctions implicites. L'opérateur P^4 est continue de $\mathcal{M}^{k+3,\alpha}(M) \times \mathcal{A}^{k+4,\alpha}(M)$ dans $\Gamma^{k,\alpha}(M)$ et s'annule en (id, g_e, g_e), nous allons donc calculer la différentielle de P^4, par rapport aux applications et montrer qu'elle est inversible au point (id, g_e, g_e).

Soit $\dot{\varphi}$ une section de φ^*TM, on obtient dans cette direction :

$$\frac{\partial P^4}{\partial \varphi}(\dot{\varphi})|_{(id,g_e,g_e)} = (\delta d - \frac{\mathrm{Scal}^e}{12})(\delta d - \frac{\mathrm{Scal}^e}{4})\,\dot{\varphi}, \tag{6.3.1}$$

où Scal^e est la courbure scalaire de g_e. Supposons que la différentielle de l'opérateur P^4 par rapport aux applications et dans la direction $\dot{\varphi}$ s'annule au point (id, g_e, g_e), alors en intégrant par parties et en utilisant le signe de la courbure scalaire de g_e, on montre alors que $\dot{\varphi} = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M g_e(\frac{\partial P^4}{\partial \varphi}(\dot{\varphi}), \dot{\varphi})\, dvol_e \\ &= \int_M g_e\big((\delta d - \frac{\mathrm{Scal}^e}{12})(\delta d - \frac{\mathrm{Scal}^e}{4})\,\dot{\varphi}, \dot{\varphi}\big)\, dvol_e \\ &= \int_M |\Delta_e \dot{\varphi}|_e^2\, dvol_e - \frac{\mathrm{Scal}^e}{3}\int_M |d\dot{\varphi}|_e^2\, dvol_e + \frac{(\mathrm{Scal}^e)^2}{48}\int_M |\dot{\varphi}|_e^2\, dvol_e, \end{aligned}$$

ce qui permet bien de conclure que l'opérateur $\frac{\partial P^4}{\partial \varphi}$ est inversible au point (id, g_e, g_e). La fin de la démonstration est une application directe du théorème des fonctions implicites. □

6.3.2 Contrôle local du changement conforme

Nous allons montrer comment contrôler le seul changement conforme local, qui puisse rendre harmonique notre application C–harmonique précédemment construite.

Soient φ une application $\mathcal{A}^{k+4,\alpha}$ et ω une fonction $C^{k+3,\alpha}$, on désigne par $P^2(\omega, \varphi, g, h)$ le laplacien de φ de $(M, e^{2\omega}g)$ dans (M, h), on obtient facilement avec l'égalité de Bianchi :

$$\begin{aligned} P^4(\varphi, g, h) &= (\delta d + \frac{2}{3}\,\mathrm{Scal}^g - \mathrm{S}^h)\, P^2(0, \varphi, g, h) \\ &\quad + \frac{1}{3}\langle d\,\mathrm{Scal}^g, T\varphi\rangle_g + 2\langle \mathrm{Ric}^g, \nabla T\varphi\rangle_g. \end{aligned}$$

Pour contrôler localement le changement conforme, on va utiliser encore une fois le théorème des fonctions implicites. Si on l'applique directement à P^4, on a besoin de conditions sur la courbure de M qui vont être contradictoires avec les hypothèses du lemme 6.3.1. C'est pourquoi, on va ajouter un terme correctif à P^4, ce sera notre terme Q. Cette correction au second ordre nous permet d'appliquer le théorème des fonctions implicites sous des conditions de courbures satisfaisantes.

Soit $\overline{g} = e^{2\omega} g$, on pose :

$$Q(\omega, \varphi, g, h) := P^4(\varphi, \overline{g}, h) - (\delta^{\overline{g}} d - \mathrm{S}^h) P^2(\omega, \varphi, g, h),$$

ce qui donne :

$$Q(\omega, \varphi, g, h) = \frac{2}{3} \mathrm{Scal}^{\overline{g}}\, P^2(\omega, \varphi, g, h) + \frac{1}{3} \langle d\, \mathrm{Scal}^{\overline{g}}, T\varphi \rangle_{\overline{g}} + 2 \langle \mathrm{Ric}^{\overline{g}}, \nabla^{\overline{g}} T\varphi \rangle_{\overline{g}},$$

ainsi Q est un opérateur de degré 3 en ω, d'ordre 2 en φ, d'ordre 3 en g et d'ordre 1 en h. Le fait qu'une application φ soit harmonique de $(M, \overline{g})$ dans (M, h) et C–harmonique de $(M, [g])$ dans (M, h) est donc équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} Q(\omega, \varphi, g, h) & = 0, \\ P^2(\omega, \varphi, g, h) & = 0. \end{cases}$$

Soit g et h deux métriques dans V_e, on va s'intéresser aux changements conformes ω qui vérifient la sous–condition d'harmonicité suivante, qui va nous permettre de contrôler le changement conforme localement :

$$\delta P^2(\omega, \varphi(g), g, h) = 0, \tag{6.3.2}$$

où δ désigne la divergence par rapport à g. Le lemme suivant nous donne l'existence d'un opérateur qui permet d'associer pour chaque métrique g « proche » de h, l'unique changement conforme qui va être à la fois « proche » de 0 et solution de (6.3.2). On peut remarquer que l'on aurait pu travailler avec la condition $\delta Q(\omega, \varphi(g), g, h) = 0$, qui est toute aussi naturelle et qui donne les mêmes résultats. On note ω cet opérateur, qui contrôle donc localement le changement conforme, dans le sens où si l'application $\varphi(g)$ est harmonique pour un petit changement conforme de g, alors nécessairement ce changement conforme sera égale à $\omega(g)$.

Lemme 6.3.2. *Soit g_e une métrique d'Einstein à courbure scalaire strictement négative, alors le problème implicite*

$$\delta P^2(\omega(g), \varphi(g), g, h) = 0$$

admet une unique solution locale, c'est–à–dire qu'il existe un voisinage $V'_e \subset V_e$ *de* g_e *dans* $\mathcal{M}^{k+4,\alpha}$*, tel que pour toute métrique* h *dans* V'_e*, il existe un voisinage* V_0 *de la fonction nulle dans* $C^{k+4,\alpha}$ *et un opérateur* ω *continue et inversible de* V'_e *dans* V_0 *qui vérifie* $\delta P^2\big(\omega(g), \varphi(g), g, h\big) = 0$*.*

Démonstration. On remarque facilement que

$$\delta P^2\big(\omega + cste, \varphi, g, h\big) = 0 \Longleftrightarrow \delta Q\big(\omega, \varphi, g, h\big) = 0,$$

ainsi le contrôle du changement conforme se fait donc à une constante près, qu'on fixe de la manière suivante ; on impose que les changement conformes soient d'intégrale nulle sur M par rapport à g, c'est–à–dire

$$\int_M \omega \; dvol_g = 0.$$

On note $\tilde{C}^{k+4,\alpha}$ l'ensemble des fonctions $C^{k+4,\alpha}$ qui sont d'intégrale nulle sur M par rapport à g. Comme l'opérateur δP^2 s'annule au point $(0, id, g_e, g_e)$, on va lui appliquer le théorème des fonctions implicites. Pour cela nous allons calculer sa différentielle par rapport aux changement conformes $\tilde{C}^{k+4,\alpha}$ et montrer qu'elle est inversible au point $(0, id, g_e, g_e)$. Soit $\dot{\omega}$ une fonction $\tilde{C}^{k+4,\alpha}$, on obtient pour la divergence de P^2 au point $(0, id, g_e, g_e)$, dans la direction $\dot{\omega}$:

$$\frac{\partial \delta P^2}{\partial \omega}(\dot{\omega}) \quad = \quad -2\,\Delta_e \dot{\omega}.$$

Supposons que la différentielle de l'opérateur δP^2 par rapport aux changements conformes s'annule au point $(0, id, g_e, g_e)$ dans la direction $\dot{\omega}$, alors avec une intégration par parties, on obtient facilement que la fonction $\dot{\omega}$ est constante sur M. Mais elle est aussi d'intégrale nulle sur M, c'est donc la fonction nulle. Ainsi la différentielle de δP^2 par rapport aux changements conformes est inversible au point $(0, id, g_e, g_e)$ de $\mathcal{M}^{k+4,\alpha}$ dans $\tilde{C}^{k+4,\alpha}$. La fin de la démonstration est une application directe du théorème des fonctions implicites.

□

Le seul changement conforme local qui puisse rendre notre application $\varphi(g)$ harmonique est maintenant contrôlé par notre application ω.

6.3.3 Construction de notre contre–exemple

Nous savons maintenant comment contrôler l'unique « petit » changement conforme qui pourrait rendre harmonique (voir notre condition (6.3.2)) notre application C–harmonique précédemment construite en déformant la métrique de départ. On va montrer ici que les équations sont trop rigides, c'est–à–dire qu'il existe au moins une déformation pour laquelle l'application et le changement conforme qui lui sont associés ne vérifient pas la condition d'harmonicité.

Soit $\tilde{Q}$ l'opérateur défini de $\mathcal{M}^{k+4}$ dans $\Gamma^{k+1,\alpha}$ de la façon suivante,

$$\tilde{Q}(g) := Q(\omega(g), \varphi(g), g, h), \tag{6.3.3}$$

où g est une métrique de V_e', on se donne $\dot{g}$ dans S^2TM et $(g_t)_{t\in[0,1]}$ une famille de métriques de W vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} g_0 & = h \\ \left[\partial_t g_t\right]_{t=0} & = \dot{g}, \end{cases}$$

nous allons montrer que si l'on choisit bien $\dot{g}$, il existe s dans $[0,1]$ tel que la métrique g_s n'annule pas $\tilde{Q}$. Pour cela, on va calculer la différentielle extérieure de la variation infinitésimale de $\tilde{Q}$ dans la direction $\dot{g}$ au point $(0, id, h, h)$ et montrer que celle–ci est non nulle. Commençons par calculer la variation infinitésimale de Q au point $(0, id, h, h)$, on obtient dans la direction $\dot{\omega}$:

$$\frac{\partial Q}{\partial \omega}(\dot{\omega}) \quad = \quad 2\, d\Delta\dot{\omega} - 4\, \mathrm{Ric}\, d\dot{\omega},$$

dans la direction $\dot{\varphi}$ avec les formules (A.3.4) et (A.3.3) :

$$\frac{\partial Q}{\partial \varphi}(\dot{\varphi}) \quad = \quad \frac{2}{3}\,\mathrm{Scal}(\delta d - \mathrm{Ric})\,\dot{\varphi} + 2\,\langle \mathrm{Ric}, \nabla d\dot{\varphi} + \mathrm{R}_{\dot{\varphi},\,.\,.}\rangle,$$

et dans la direction $\dot{g}$ avec les formules (A.3.6), (A.3.5) et [3, 1.174.e)] :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial g}(\dot{g}) \quad = \quad & -\frac{1}{3}\,\mathrm{Scal}(2\,\delta\dot{g} + d\,\mathrm{tr}\,\dot{g}) + \frac{1}{3}\left(d\Delta(\mathrm{tr}\,\dot{g}) + d\delta\delta\dot{g} - d\langle \mathrm{Ric}, \dot{g}\rangle\right) \\ & -\langle \mathrm{Ric}, 2\,\delta^*\dot{g} - \nabla\dot{g}\rangle, \end{aligned}$$

où les termes $\mathrm{Scal}, \mathrm{Ric}, \delta, \Delta$ ainsi que les traces et les produits scalaires sont donnés par rapport à h, et δ^* désigne l'adjoint de la divergence δ par rapport à h, définie de la manière suivante :

$$\delta^*\gamma(X,Y)(Z) = \frac{1}{2}\big(\nabla_X\gamma(Y,Z) + \nabla_Y\gamma(X,Z)\big).$$

Ce qui donne pour la variation infinitésimale de l'opérateur $\tilde{Q}$ au point h dans la direction $\dot{g}$:

$$\begin{aligned}
&T_h\tilde{Q}(\dot{g}) = \\
&\quad 2\,d\Delta T\omega(\dot{g}) - 4\,\mathrm{Ric}\,d\,T\omega(\dot{g}) + \frac{2}{3}\,\mathrm{Scal}\,(\delta d - \mathrm{S})\,T\varphi(\dot{g}) \\
&\quad +2\,\Big\langle\,\mathrm{Ric}, \nabla d\,T\varphi(\dot{g}) + \mathrm{R}_{\,T\varphi(\dot{g}),\,.}\,\cdot\Big\rangle - \frac{1}{3}\,\mathrm{Scal}\,(2\,\delta\dot{g} + d\,\mathrm{tr}\,\dot{g}) \\
&\quad +\frac{1}{3}\,\big(d\Delta(\mathrm{tr}\,\dot{g}) + d\delta\delta\dot{g} - d\langle\mathrm{Ric},\dot{g}\rangle\big) - \langle\mathrm{Ric}, 2\,\delta^*\dot{g} - \nabla\dot{g}\rangle,
\end{aligned}$$

Comme $g \to \omega(g)$ est d'ordre 0 et $g \to \varphi(g)$ est d'ordre -1, alors $\dot{g} \to T\tilde{Q}(\dot{g})$ est d'ordre 3. On va prendre la différentielle extérieure de la variation infinitésimale de $\tilde{Q}$ au point h dans la direction $\dot{g}$; cela va faire disparaître les termes d'ordre 2 et 3 et il ne restera que les termes d'ordre 1 de $T\tilde{Q}(\dot{g})$ (qui seront des termes d'ordre 2 dans la différentielle extérieure). On la note $d\,T\tilde{Q}(\dot{g})$, c'est une section des 2–forme à valeur dans φ^*TM :

$$\begin{aligned}
d\,T\tilde{Q}(\dot{g}) \;=\;& -4\,d\big(\,\mathrm{Ric}\,d\,T\omega(\dot{g})\big) + \frac{2}{3}\,\mathrm{Scal}\,d\big(\delta d\,T\varphi(\dot{g}) - \delta\dot{g}\big) \\
& + d\langle\mathrm{Ric}, 2\nabla d\,T\varphi(\dot{g}) - 2\,\delta^*\dot{g} + \nabla\dot{g}\rangle \\
& + \text{des termes d'ordre inférieurs.}
\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

Par un calcul de symbole, on cherche une condition sur $\dot{g}$ pour que $d\,T\tilde{Q}(\dot{g})$ ne soit pas nul. Pour cela, nous allons calculer le symbole de $T\varphi$ au point (id, h, h). D'une part, on a

$$T\varphi(\dot{g}) \;=\; -\Big(\frac{\partial P^4}{\partial\varphi}\Big)^{-1}\Big(\frac{\partial P^4}{\partial g}(\dot{g})\Big)$$

et d'autre part, on obtient avec les formules (A.3.7) et (A.3.8) :

$$\begin{aligned}
\Big(\frac{\partial P^4}{\partial\varphi}\Big)(\dot{\varphi}) \;&=\; \delta d\delta d\dot{\varphi} + \text{des termes d'ordre inférieurs à 2 en } \dot{\varphi}, \\
\Big(\frac{\partial P^4}{\partial g}\Big)(\dot{g}) \;&=\; -\delta d\big(\delta\dot{g} + \frac{1}{2}\nabla(\mathrm{tr}\,\dot{g})\big) + \frac{1}{3}\,\big(d\,\Delta(\mathrm{tr}\,\dot{g}) + d\delta\delta\dot{g}\big) \\
&\quad + \text{ des termes d'ordre 1 en } \dot{g},
\end{aligned}$$

ce qui donne au niveau des symboles au point (id, h, h) :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\frac{\partial P^4}{\partial\varphi}}(X) \;&=\; |X|^4\,\dot{\varphi}, \\
\sigma_{\frac{\partial P^4}{\partial g}}(X) \;&=\; -|X|^2\,\dot{g}(X) + \frac{|X|^2\ \mathrm{tr}\,\dot{g}}{6}\,X + \frac{\dot{g}(X,X)}{3}\,X
\end{aligned}$$

et donc pour le symbole de $T\varphi$:

$$\sigma_{T\varphi}(X) = \frac{1}{|X|^2}\,\dot g(X) - \frac{\operatorname{tr}\dot g}{6|X|^2}\,X - \frac{\dot g(X,X)}{3|X|^4}\,X. \tag{6.3.5}$$

Calculons maintenant le symbole de $T\omega$, on a déjà au point $(0, id, h, h)$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\delta P^2}{\partial\omega}(\dot\omega) &= -2\,\Delta\dot\omega,\\
\frac{\partial\delta P^2}{\partial\varphi}(\dot\varphi) &= \delta(\delta d - \operatorname{Ric})\,\dot\varphi,\\
\frac{\partial\delta P^2}{\partial g}(\dot g) &= -\delta\delta\dot g - \frac{1}{2}\Delta\operatorname{tr}\dot g,
\end{aligned}$$

cela donne pour les symboles au point $(0, id, h, h)$ avec (6.3.5) :

$$\begin{aligned}
\sigma_{\frac{\partial\delta P^2}{\partial\omega}}(X) &= 2\,|X|^2\,\dot\omega,\\
\sigma_{\frac{\partial\delta P^2}{\partial\varphi}}(X) &= |X|^2 g(X,\dot\varphi) = \frac{2}{3}\,\dot g(X,X) - \frac{|X|^2}{6}\,\operatorname{tr}\dot g,\\
\sigma_{\frac{\partial\delta P^2}{\partial g}}(X) &= -\dot g(X,X) + \frac{|X|^2}{2}\,\operatorname{tr}\dot g,
\end{aligned}$$

ainsi, on obtient pour le symbole de $T\omega$:

$$\begin{aligned}
\sigma_{T\omega}(X) &= -(\sigma_{\frac{\partial\delta P^2}{\partial\omega}})^{-1}\big((\sigma_{\frac{\partial\delta Q}{\partial g}})(X) + \sigma_{\frac{\partial\delta P^2}{\partial g}}(X)\big) && (6.3.6)\\
&= -\frac{1}{6}\big(\operatorname{tr}\dot g - \frac{\dot g(X,X)}{|X|^2}\big). && (6.3.7)
\end{aligned}$$

Calculons maintenant les symboles des trois premiers termes de droite de (6.3.4). On obtient pour le premier symbole avec (6.3.6) :

$$\frac{2}{3}\big(\operatorname{tr}\dot g - \frac{\dot g(X,X)}{|X|^2}\big)\,X\wedge\operatorname{Ric}(X).$$

Le deuxième terme est d'ordre inférieure, il suffit de remarquer que

$$\sigma_{(\delta dT\varphi-\delta)}(X) = \frac{\operatorname{tr}\dot g}{6}\,X + \frac{\dot g(X,X)}{3|X|^2}\,X.$$

Pour le symbole du troisième terme, on obtient

$$\frac{2\operatorname{Ric}(X,X)}{|X|^2}\,X\wedge\dot g(X) - 2\,X\wedge\dot g(\operatorname{Ric}(X)).$$

La somme de ces trois symboles est ainsi égale à

$$\frac{2}{3}\big(\operatorname{tr}\dot g - \frac{\dot g(X,X)}{|X|^2}\big)\, X\wedge \operatorname{Ric}(X) + \frac{2\operatorname{Ric}(X,X)}{|X|^2}\, X\wedge \dot g(X) - 2\, X\wedge \dot g(\operatorname{Ric}(X)).$$

On remarque que si h était une métrique d'Einstein, la somme des symboles des trois premiers termes de (6.3.4) serait nul, ce qui nous empêcherait de conclure. On va montrer que si h n'est pas une métrique d'Einstein et que si on choisit bien $\dot g$, alors cette somme n'est pas nulle, et qu'elle est donc égale au symbole de $dT\tilde Q$. Il existe donc un champ de vecteurs Y de norme 1 tel que $\operatorname{Ric}(Y)$ et Y ne soient pas colinéaires, c'est–à–dire qu'il existe un champ de vecteurs Z orthogonal à Y tels que $\operatorname{Ric}(Y) = aY + Z$. On obtient donc pour ce qui sera le symbole de $dT\tilde Q$ pour Y :

$$\frac{2}{3}\big(\operatorname{tr}\dot g - \dot g(Y,Y)\big)\, Y\wedge Z - 2\, Y\wedge \dot g(Z),$$

qui est non nul si l'on choisis $\dot g$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} \operatorname{tr}\dot g &= 0,\\ \dot g(Y) &= Y,\\ \dot g(Z) &= Z.\end{cases}$$

En effet, on obtient que $\sigma_{dT\tilde Q}(Y) = -\frac{8}{3}\, Y\wedge Z$.

On vient donc de montrer que $T\tilde Q$ n'est pas nul dans la direction $\dot g$, or $\tilde Q(g_0) = \tilde Q(h) = 0$, ainsi il existe g_s telle que $\tilde Q(g_s)$ ne soit pas nul, ce qui prouve que $\varphi(g_s)$ n'est pas harmonique pour aucun « petit » changement conforme à g_s.

6.3.4 Le changement conforme est local

Supposons que $\varphi(g)$ est harmonique de $(M, e^{2\omega}g)$ dans (M,h), alors on va montrer que si g est « suffisamment proche » de h, alors on peut supposer que ω est « petit ».

Lemme 6.3.3. *Quelque soit $\lambda > 0$, il existe un réel μ strictement positif qui vérifie la propriété suivante ; quelque soit la métrique g vérifiant $\|g - h\|_{k+4,\alpha} < \mu$, alors s'il existe une fonction f de classe $C^{k+4,\alpha}$ qui satisfait*

$$P^2(\varphi(g), e^{2f}g, h) = 0,$$

alors il existe une fonction ω de classe $C^{k+4,\alpha}$ qui satisfait

$$P^2(\varphi(g), e^{2\omega}g, h) = 0 \ et \ \|\omega\|_{k+4,\alpha} < \lambda.$$

Démonstration. Soient λ un réel strictement positif et f une fonction $C^{k+4,\alpha}$, comme l'application φ est continue de $\mathcal{M}^{k+4,\alpha}$ dans $\mathcal{A}^{k+5,\alpha}$, alors l'application

$$g \to \langle df, T\varphi(g)\rangle_g$$

est bien définie et continue de $\mathcal{M}^{k+4,\alpha}$ dans $\Gamma^{k,\alpha}$. De plus, le laplacien est continu de $\mathcal{A}^{k+5,\alpha} \times \mathcal{M}^{k+4,\alpha}$ dans $\Gamma^{k+3,\alpha}$. Ainsi, quelque soit $\lambda > 0$, il existe un réel μ tel que pour toute métrique g vérifiant $\|g - h\|_{k+4,\alpha} < \mu$, alors

$$\begin{aligned} \Big| \, \|\langle df, T\varphi(h)\rangle_h\|_{k+3,\alpha} - \|\langle df, T\varphi(g)\rangle_g\|_{k+3,\alpha} \, \Big| &\leq \lambda/4 \\ \Big| \, \|P^2(\varphi(h), h, h)\|_{k+3,\alpha} - \|P^2(\varphi(g), g, h)\|_{k+3,\alpha} \, \Big| &\leq \lambda/2, \end{aligned}$$

comme l'application $\varphi(h)$ est simplement l'identité, on obtient

$$\|df\|_{k+3,\alpha} \leq \lambda/4 + \|\langle df, T\varphi(g)\rangle_g\|_{k+3,\alpha} \tag{6.3.8}$$

$$\|P^2(\varphi(g), g, h)\|_{k+3,\alpha} \leq \lambda/2. \tag{6.3.9}$$

Supposons maintenant que $\varphi(g)$ est harmonique de (M, e^{2f}) dans (M, h), d'après la formule de changement conforme pour le laplacien, c'est équivalent à l'égalité suivante :

$$P^2(\varphi(g), g, h) = 2 \, \langle df, T\varphi(g)\rangle_g,$$

ce qui permet d'obtenir avec (6.3.8) et (6.3.9) :

$$\|df\|_{k+3,\alpha} \leq \lambda/4 + \|\langle df, T\varphi(g)\rangle_g\|_{k+3,\alpha} \leq \lambda/2.$$

Or d'après le lemme A.2.2, il existe une constante C telle que

$$\|f - C\|_{k+4,\alpha} \leq 2 \, \|df\|_{k+3,\alpha},$$

il suffit donc de poser $\omega := f - C$. □

6.3.5 Conclusion

Soit ε un nombre réel strictement positif, on reprend les notations du lemme 6.3.2, on a un voisinage V_e' de g_e dans $\mathcal{M}^{k+4,\alpha}$, un voisinage V_0 de la fonction nulle dans $C^{k+4,\alpha}$ et on fixe la métrique h dans V_e' de la manière suivante ; on suppose que sa courbure scalaire est constante et égale à celle de g_e, et qu'en plus :

$$\|h - g_e\|_{k+4,\alpha} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il existe deux nombres réels λ et R strictement positifs tels que la boule B_λ dans $C^{k+4,\alpha}$ de centre la fonction nulle et de rayon λ et la boule B_R dans $\mathcal{M}^{k+4,\alpha}$ de centre g_e et de rayon R vérifient

$$\begin{array}{rcl} B_\lambda & \subset & V_0 \\ \omega(B_R) & \subset & B_0. \end{array}$$

On se donne une métrique g qui vérifie $\|g-h\|_{k+4,\alpha} < \min(\mu, R, \epsilon/2)$, où μ est défini par le lemme 6.3.3 et on suppose qu'il existe un changement conforme f tel que l'application $\varphi(g)$ est harmonique de $(M, e^{2f}g)$ dans (N, h). La métrique g vérifie

$$\|g - g_e\|_{k+4,\alpha} < \|g - h\|_{k+4,\alpha} + \|h - g_e\|_{k+4,\alpha} < \varepsilon$$

et comme $\|g - h\|_{k+4,\alpha} < \mu$, alors le changement conforme ω du lemme 6.3.3 est dans B_λ. De plus la métrique g est dans B_R, alors $\omega = \omega(g)$ d'après le lemme 6.3.2. On vient donc de montrer que pour de telles métriques g, le problème global se résume au problème local.

Annexe A

Quelques résultats techniques

A.1 Formules de changement conforme

Définition A.1.1. *Soient h et k des 2–tenseurs symétriques, on définit le produit de Kulkarni-Nomizu de h et k par le 4–tenseur suivant :*

$$(h \owedge k)(x,y,z,t) = h(x,t)k(y,z)+h(y,z)k(x,t)-h(x,z)k(y,t)-h(y,t)k(x,z).$$

D'après Besse ([3], 1.159), on a le théorème suivant :

Théorème A.1.2. *Soient (M^n, g) une variété riemannienne et f une fonction sur M, alors la métrique conforme $\overline{g} = e^{2f} g$ possède les invariants suivants :*

1. *La connexion de Levi-Civita*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + df(X)Y + df(Y)X - g(X,Y)Df$$

où X et Y sont deux champs de vecteurs de TM et Df le gradient de f par rapport à g

2. *Le $(4,0)$ tenseur de courbure*

$$\overline{\mathrm{R}} = e^{2f}\big(\,\mathrm{R} - g \owedge (\nabla df - df \circ df + \frac{1}{2}\,|df|_g^2\, g)\big)$$

3. *Le tenseur de Ricci*

$$\overline{\mathrm{Ric}} = \mathrm{Ric} - (n-2)(\nabla df - df \circ df) + (\Delta f - (n-2)|df|_g^2)\, g$$

4. Le laplacien sur les fonctions de M

$$\overline{\Delta}u = e^{-2f}\big(\Delta u - (n-2)\, i_{Df}du\big)$$

5. La forme volume de (M, g)

$$\overline{dvol} = e^{nf}dvol$$

où $\nabla, Df, \mathrm{R}, \mathrm{Ric}, \Delta, dvol$ se rapportent à g et $\overline{\nabla}, \overline{\mathrm{R}}, \overline{\mathrm{Ric}}, \overline{\Delta}, \overline{dvol}$ se rapportent à $\overline{g}$.

On obtient facilement l'analogue de ce théorème pour les changements conformes $g_+ = r^{-2}\overline{g}$:

Théorème A.1.3. *Soient (X^n, g_+) une variété riemannienne et r une fonction sur M, alors la métrique conforme $g_+ = r^{-2}\overline{g}$ possède les invariants suivants :*

1. La connexion de Levi-Civita

$$\nabla^+_X Y = \nabla_X Y - \frac{dr(X)}{r}Y + \frac{dr(Y)}{r}X + g(X,Y)Dr \tag{A.1.1}$$

où X et Y sont deux champs de vecteurs de TM et Df le gradient de r par rapport à g

2. Le $(4, 0)$ tenseur de courbure

$$\mathrm{R}^+ = \frac{1}{r^2}\big(\,\mathrm{R} + g \owedge (\frac{1}{r}\nabla dr - \frac{1}{2r^2}\,|dr|^2_g\, g)\big) \tag{A.1.2}$$

3. Le tenseur de Ricci

$$\mathrm{Ric}^+ = \mathrm{Ric} + \frac{n-1}{r}\nabla dr - (\frac{\Delta r}{r} + \frac{n}{r^2}\,|dr|^2_g)\, g \tag{A.1.3}$$

4. Le laplacien sur les fonctions de M

$$\Delta^+ u = r^2\Delta u + r(n-2)\, i_{Dr}du \tag{A.1.4}$$

où $\nabla, Df, \mathrm{R}, \Delta$ se rapportent à g et $\overline{\nabla}, \overline{\mathrm{R}}, \overline{\Delta}$ se rapportent à $\overline{g}$.

Avec les notations du théorème précédent, on a la proposition suivante :

Proposition A.1.4. *Soient X et Y deux vecteurs de TM orthogonaux par rapport à g_+, on note K^{g_+} la courbure sectionnelle de g_+ et K la courbure sectionnelle de g, alors on a :*

$$K^{g_+}(X,Y) = r^2K(X,Y)+\frac{r}{|X|_g^2}\nabla dr(X,X)+\frac{r}{|Y|_g^2}\nabla dr(Y,Y)-|dr|_g^2. \quad \text{(A.1.5)}$$

Démonstration. D'après (A.1.2) on obtient a :

$$\begin{aligned}
&K^{g_+}(X,Y)\\
&= \frac{\mathrm{R}^{g_+}(X,Y,Y,X)}{|X|_{g_+}^2|Y|_{g_+}^2}\\
&= \frac{\mathrm{R}(X,Y,Y,X)}{r^2|X|_{g_+}^2|Y|_{g_+}^2}+\frac{|Y|_g^2\nabla dr(X,X)}{r^3|Y|_{g_+}^2|X|_{g_+}^2}+\frac{|X|_g^2\nabla dr(Y,Y)}{r^3|X|_{g_+}^2|Y|_{g_+}^2}-|dr|_g^2\\
&= r^2K(X,Y)+\frac{r}{|X|_g^2}\nabla dr(X,X)+\frac{r}{|Y|_g^2}\nabla dr(Y,Y)-|dr|_g^2,
\end{aligned}$$

□

A.2 Les espaces de Hölder

Les espaces de Hölder ont l'avantage par rapport aux espaces de fonctions de classe C^k, de bien se comporter avec les opérateurs elliptiques. On se donne k un entier et α un réel strictement compris entre 0 et 1.

Définition A.2.1. *Soit f une fonction C^0 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$, on dit que f est $C^{0,\alpha}$ si*

$$\sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha} < +\infty$$

et on définit la norme $C^{0,\alpha}$ de la manière suivante :

$$\|f\|_{0,\alpha} := \|f\|_\infty + \sup_{x\neq y}\frac{|f(y)-f(z)|}{|y-z|^\alpha}.$$

Soit f une fonction C^k, on dit que f est $C^{k,\alpha}$ si les dérivées k–ième de f sont $C^{0,\alpha}$ et on défini la norme $C^{k,\alpha}$ de la manière suivante :

$$\|f\|_{k,\alpha} := \sum_{|\beta|\leq k}\|\partial^\beta f\|_\infty + \sum_{|\beta|=k}\sup_{x\neq y}\frac{|\partial^\beta f(x)-\partial^\beta f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

On obtient facilement le lemme suivant :

Lemme A.2.2. *Soit f une fonction $C^{k,\alpha}$, alors il existe une constante C telle que*

$$\|f - C\|_{k,\alpha} \leq 2\,\|df\|_{k-1,\alpha}.$$

Démonstration. Soient g une fonction $C^{k,\alpha}$ et (x_n) une suite de points de $\mathbb{R}^n$ telle que $|g(x_n)| \to \|g\|_\infty$, alors il existe un entier N et un compact K de diamètre inférieur à 1 tels qu'à partir du rang N, tous les points de la suite soient dans K. On fixe x_0 un point de K, d'après les inégalités des accroissements finis, pour tout x de K, on a :

$$|g(x)| \leq |g(x_0)| + \|dg\|_\infty,$$

ce qui donne

$$\|g\|_\infty \leq |g(x_0)| + \|dg\|_{k-1,\alpha}.$$

D'autre part, on a facilement que

$$\|g\|_{k,\alpha} = \|g\|_\infty + \|dg\|_{k-1,\alpha},$$

ainsi avec ce qui précède, on obtient

$$\|g\|_{k,\alpha} \leq |g(x_0)| + 2\,\|dg\|_{k-1,\alpha}.$$

Il suffit ensuite de poser $C := f(x_0)$ et $g := f - C$ pour obtenir l'inégalité désirée. □

La notion d'espace de Hölder s'étend aux fibrés vectoriels au dessus d'une variété M de la manière suivante :

Définition A.2.3. *Soit E un fibré vectoriel au dessus de M, on définit l'espace $\Gamma^{k,\alpha}$ des sections de E dont les coefficients dans n'importe quelles trivialisations et n'importe quels systèmes de coordonnées sont de classe $C^{k,\alpha}$.*

On se donne $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de M par des ouverts correspondant à un atlas maximal, $E|_{U_i}$ se trivialise au moyen d'une base $(e_{i,a})_{a=1,\dots,r}$ de sections de E et on note (χ_i) une partition de l'unité subordonnée à (U_i), ainsi une section u de E s'écrit $u = \sum \chi_i u_{i,a} e_{i,a}$ où $\chi_i u_{i,a}$ est une fonction à support compact dans U_i, de plus dans cette trivialisation, on note :

$$\|u\|_{k,\alpha} = \sup_{i,a} \|\chi_i u_{i,a}\|_{k,\alpha}.$$

A.3 Formules de variations au premier ordre

On se donne deux variétés riemanniennes (M,g), (N,h) et φ une application C^∞ de M dans N, on utilise la convention suivante : on va indicer par h les termes qui se réfèrent à (N,h) et ne rien mettre pour ceux qui se réfèrent à (M,g). On note $P^2(\omega,\varphi,g,h)$ le laplacien de φ de $(M,e^{2\omega}g)$ dans (M,h) et $P^4(\varphi,g,h)$ l'opérateur suivant

$$P^4(\varphi,g,h) \quad := \quad \delta d\delta T\varphi + \delta\big((\frac{2}{3}\operatorname{Scal} -2\operatorname{Ric}) T\varphi\big) - \mathrm{S}(\delta T\varphi).$$

Avec l'identité de Bianchi, on obtient

$$\begin{aligned} P^4(\varphi,g,h) &= (\delta d + \frac{2}{3}\operatorname{Scal} - \mathrm{S}^h)\, P^2(0,\varphi,g,h) && \text{(A.3.1)}\\ &\quad +\frac{1}{3}\langle d\operatorname{Scal}, T\varphi\rangle_{g,h} + 2\langle \operatorname{Ric}, \nabla T\varphi\rangle_g. && \text{(A.3.2)}\end{aligned}$$

Proposition A.3.1. *Avec les notations précédentes, on obtient pour les déformations infinitésimales par rapport aux applications au point* $(0,\varphi,g,h)$ *:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla T}{\partial\varphi}(\dot\varphi) &= \nabla d\dot\varphi - \mathrm{R}^h_{\dot\varphi,T\varphi} T\varphi && \text{(A.3.3)}\\ \frac{\partial P^2}{\partial\varphi}(\dot\varphi) &= (\delta d - \mathrm{S}^h)(\dot\varphi), && \text{(A.3.4)}\end{aligned}$$

et par rapport à la métrique de départ au point $(0,\varphi,g,h)$ *:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla T\varphi}{\partial g}(\dot g) &= -\langle T\varphi, \delta^*\dot g - \frac{1}{2}\,\nabla \dot g\rangle && \text{(A.3.5)}\\ \frac{\partial P^2}{\partial g}(\dot g) &= -\delta\big(\dot g\,(T\varphi)\big) - \frac{1}{2}\,\langle d\operatorname{tr}\dot g, T\varphi\rangle, && \text{(A.3.6)}\end{aligned}$$

où $\delta^*\dot g$ *est défini de la manière suivante :*

$$\delta^*\dot g(X,Y,Z) := \frac{1}{2}\,\big(\nabla_X \dot g(Y,Z) + \nabla_Y \dot g(X,Z)\big).$$

Démonstration. On note $(\varphi_t)_{t\in[0,1]}$ une famille à 1–paramètre d'applications de (M,g) dans (N,h), vérifiant le système suivant :

$$\begin{cases} \varphi_0 & = \varphi\\ \big[\partial_t\varphi_t\big]_{t=0} & = \dot\varphi. \end{cases}$$

On munit $M \times [0,1]$ de la métrique $\gamma = g + dt^2$ et on note Φ l'application de $M \times [0,1]$ dans N définie de la manière suivante :

$$\Phi(p,t) = \varphi_t(p), \forall (p,t) \in M \times [0,1].$$

Son application tangente $T\Phi$ est une section du fibré $\Omega(M) \otimes \Phi^* TN$, sur lequel on définit la connexion $\nabla^{\gamma,h}$ comme d'habitude. On se donne deux vecteurs X et Y de TM, alors :

$$\begin{aligned}
&\nabla^h_{\partial_t \varphi_t}\big((\nabla^{\gamma,h}_{T\varphi_t(X)} T\varphi_t)\, Y\big)\\
&= \nabla^h_{T\varphi_t(X)}\big((\nabla^{\gamma,h}_{\partial_t \varphi_t} T\varphi_t)\, Y\big) - \mathrm{R}^h_{\partial_t \varphi_t, T\varphi_t(X)}\, T\varphi_t(Y)\\
&= \nabla^h_{T\varphi_t(X)}\big((\nabla^{\gamma,h}_{T\varphi_t(Y)} T\varphi_t)\partial_t\big) - \mathrm{R}^h_{\partial_t \varphi_t, T\varphi_t(X)}\, T\varphi_t(Y)
\end{aligned}$$

ce qui donne bien au point (φ, g, h) :

$$\frac{\partial \nabla T}{\partial \varphi}(\dot\varphi) = \nabla d\dot\varphi - \mathrm{R}^h_{\dot\varphi, T\varphi}\, T\varphi,$$

où R^h désigne le tenseur de courbure de (N,h). Cela donne directement l'égalité (A.3.4).

D'après la définition de la seconde forme fondamentale de φ, on obtient au point $(0, id, h, h)$ avec la formule [3, 1.174.a)] :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \nabla T\varphi}{\partial g}(\dot g)(X,Y) &= -T\varphi\big(d_h \nabla(\dot g)(X,Y)\big)\\
&= -\frac{1}{2}\,\langle T\varphi, \nabla_X \dot g(Y,.) + \nabla_Y \dot g(X,.) - \nabla \dot g(X,Y)\rangle\\
&= -\langle T\varphi, \delta^* \dot g(X,Y,.) - \frac{1}{2}\,\nabla \dot g(X,Y)\rangle.
\end{aligned}$$

Sachant que $P^2(0,\varphi,g,h) = -\operatorname{tr}^g \nabla T\varphi$, alors dans la direction $\dot g$, on obtient pour le laplacien :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P^2}{\partial g}(\dot g)|_{(0,id,h,h)} &= g(\dot g, \nabla T\varphi) - \operatorname{tr}^g\Big(\frac{\partial \nabla T}{\partial g}(\dot g)\Big)\\
&= g(\dot g, \nabla T\varphi) - \langle \delta \dot g + \frac{1}{2}\, d \operatorname{tr} \dot g, T\varphi\rangle\\
&= -\delta\big(\dot g\,(T\varphi)\big) - \frac{1}{2}\,\langle d \operatorname{tr} \dot g, T\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

$\square$

Proposition A.3.2. *Avec les notations précédentes et en supposant que la courbure scalaire de h est constante, on obtient en regardant localement autour de l'identité de (M,h) dans (M,h) :*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P^4}{\partial \varphi}(\dot\varphi)|_{id,h,h} &= (\delta d + \frac{2}{3}\,\mathrm{Scal} - \mathrm{Ric})\,(\delta d - \mathrm{Ric})\,\dot\varphi \\
&\quad +2\,\langle \mathrm{Ric}, \nabla d\dot\varphi + \mathrm{R}_{\dot\varphi,\,T\varphi}\,T\varphi\rangle \qquad (\mathrm{A.3.7})\\
\frac{\partial P^4}{\partial g}(\dot g)|_{id,h,h} &= -(\delta d + \frac{2}{3}\,\mathrm{Scal} - \mathrm{Ric})(\delta \dot g + \frac{1}{2}\,d\,\mathrm{tr}\,\dot g) + \frac{1}{3}\,(d\,\Delta\,\mathrm{tr}\,\dot g + d\delta\delta\dot g)\\
&\quad -\langle \mathrm{Ric}, 2\,\delta^*\dot g - \nabla \dot g\rangle. \qquad (\mathrm{A.3.8})
\end{aligned}$$

Démonstration. D'après (A.3.1), on obtient bien pour P^4 avec les égalités (A.3.4) et (A.3.3) dans la direction $\dot\varphi$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P^4}{\partial \varphi}(\dot\varphi)|_{id,h,h} &= (\delta d + \frac{2}{3}\,\mathrm{Scal} - \mathrm{Ric})\,\big(\frac{\partial P^2}{\partial \varphi}(\dot\varphi)|_{0,id,h,h}\big)\\
&\quad +2\,\big\langle\, \mathrm{Ric}, \frac{\partial \nabla T}{\partial \varphi}(\dot\varphi)|_{0,id,h,h}\big\rangle\\
&= (\delta d + \frac{2}{3}\,\mathrm{Scal} - \mathrm{Ric})\,(\delta d - \mathrm{Ric})\,\dot\varphi\\
&\quad +2\,\langle \mathrm{Ric}, \nabla d\dot\varphi + \mathrm{R}_{\dot\varphi,\,T\varphi}\,T\varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Toujours d'après (A.3.1), on obtient bien pour P^4 avec les égalités (A.3.6), ([3, 1.174.e)]) et (A.3.5) dans la direction $\dot g$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P^4}{\partial \varphi}(\dot g)|_{id,h,h} &= (\delta d + \frac{2}{3}\,\mathrm{Scal} - \mathrm{Ric})\,\big(\frac{\partial P^2}{\partial \varphi}(\dot g)|_{0,id,h,h}\big)\\
&\quad +\frac{1}{3}\,d\big(\,\mathrm{Scal}'_h(\dot g)\big) + 2\,\big\langle\, \mathrm{Ric}, \frac{\partial \nabla T\varphi}{\partial \varphi}(\dot g)|_{0,id,h,h}\big\rangle\\
&= -(\delta d + \frac{2}{3}\,\mathrm{Scal} - \mathrm{Ric})(\delta \dot g + \frac{1}{2}\,d\,\mathrm{tr}\,\dot g) + \frac{1}{3}\,(d\,\Delta\,\mathrm{tr}\,\dot g + d\delta\delta\dot g)\\
&\quad -\langle \mathrm{Ric}, 2\,\delta^*\dot g - \nabla \dot g\rangle.
\end{aligned}$$

□

Bibliographie

[1] P. Albin. Renormalizing curvature integrals on Poincaré-Einstein manifolds. *Adv. Math.*, 221(1) :140–169, 2009.

[2] P. Baird and D. Kamissoko. On constructing biharmonic maps and metrics. *Ann. Global Anal. Geom.*, 23(1) :65–75, 2003.

[3] A. L. Besse. *Einstein manifolds*, volume 10 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[4] S.-Y. A. Chang, L. Wang, and P. C. Yang. A regularity theory of biharmonic maps. *Comm. Pure Appl. Math.*, 52(9) :1113–1137, 1999.

[5] Z. Djadli, C. Guillarmou, and M. Herzlich. *Opérateurs géométriques, invariants conformes et variétés asymptotiquement hyperboliques (à paraître).*

[6] J. Eells and J. H. Sampson. Harmonic mappings of Riemannian manifolds. *Amer. J. Math.*, 86 :109–160, 1964.

[7] J. Eells and J. C. Wood. Restrictions on harmonic maps of surfaces. *Topology*, 15(3) :263–266, 1976.

[8] C. Fefferman and C. R. Graham. Conformal invariants. *Astérisque*, (Numero Hors Serie) :95–116, 1985. The mathematical heritage of Élie Cartan (Lyon, 1984).

[9] A. R. Gover. Laplacian operators and Q-curvature on conformally Einstein manifolds. *Math. Ann.*, 336(2) :311–334, 2006.

[10] C. R. Graham. Volume and area renormalizations for conformally compact Einstein metrics. In *The Proceedings of the 19th Winter School "Geometry and Physics" (Srní, 1999)*, number 63, pages 31–42, 2000.

[11] C. R. Graham and K. Hirachi. The ambient obstruction tensor and Q-curvature. In *AdS/CFT correspondence : Einstein metrics and their*

conformal boundaries, volume 8 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 59–71. Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.

[12] C. R. Graham, R. Jenne, L. J. Mason, and G. A. J. Sparling. Conformally invariant powers of the Laplacian. I. Existence. *J. London Math. Soc. (2)*, 46(3) :557–565, 1992.

[13] C. R. Graham and J. M. Lee. Einstein metrics with prescribed conformal infinity on the ball. *Adv. Math.*, 87(2) :186–225, 1991.

[14] C. R. Graham and M. Zworski. Scattering matrix in conformal geometry. *Invent. Math.*, 152(1) :89–118, 2003.

[15] T. Lamm. Biharmonic map heat flow into manifolds of nonpositive curvature. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 22(4) :421–445, 2005.

[16] S. Montaldo and C. Oniciuc. A short survey on biharmonic maps between Riemannian manifolds. *Rev. Un. Mat. Argentina*, 47(2) :1–22 (2007), 2006.

Résumé :

Sur une surface de Riemann, l'énergie d'une application à valeurs dans une variété riemannienne est une fonctionnelle invariante conforme, ses points critiques sont les applications harmoniques. Nous proposons ici un analogue en dimension supérieure, en construisant une fonctionnelle invariante conforme pour les applications entre deux variétés riemanniennes, dont la source est de dimension n paire. Ses points critiques satisfont une EDP elliptique d'ordre n non linéaire qui est invariante conforme sur la source, on les appelle les applications C--harmoniques. Dans le cas des fonctions, on retrouve l'opérateur GJMS, dont le terme principal est une puissance n/2 du laplacien.

INSTITUT DE RECHERCHE MATHEMATIQUE AVANCEE
UMR 7501
Université Louis Pasteur et CNRS
7 Rue René Descartes
67084 STRASBOURG CEDEX

Tél.03 90 24 01 29
Fax 03 90 24 03 28

http://www-irma.u-strasbg.fr
irma@math.u-strasbg.fr

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ LOUIS PASTEUR STRASBOURG

Institut de Recherche Mathématique Avancée

IRMA 2010/01
http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00468343

ISSN 0755-3390