



ÉCOLE DOCTORALE MATHÉMATIQUES, SCIENCES DE  
L'INFORMATION ET DE L'INGÉNIEUR

## THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG**

par

**Benjamin CHARBORD**

**SUR LES COHOMOLOGIES DES VARIÉTÉS DE  
GRIFFITHS-SCHMID DU GROUPE  $SU(2, 2)$ .**

Soutenue publiquement le 4 mars 2010 devant le jury composé de

HENRI CARAYOL	Directeur de thèse
SIMON GINDIKIN	Rapporteur
CAROLINE GRUSON	Rapporteur
GUY ROUSSEAU	Examineur
JEAN-PIERRE WINTENBERGER	Examineur



## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement Henri Carayol, qui a su me motiver et m'encourager tout au long de ces nombreuses années. Sans son soutien permanent et sa confiance, notamment à certains moments difficiles, cette thèse n'aurait pas été menée à terme. Lors des nombreuses conversations que nous avons eues, sa bonne humeur et ses conseils ont à chaque fois su me remotiver. Je regrette que l'exercice de style que constituent ces remerciements en atténue ici la portée.

Les professeurs Simon Gindikin et Caroline Gruson ont eu l'extrême gentillesse d'accepter de juger ce travail et d'en être les rapporteurs. Je les remercie vivement pour leurs efforts, leur patience et pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Un grand merci à Guy Rousseau et Jean-Pierre Wintemberger d'avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je tiens également à remercier Wolfgang Soergel pour le temps qu'il m'a consacré à m'expliquer la théorie des  $\mathcal{D}$ -modules, ainsi que Anthony Knapp et Michel Duflo pour l'aide qu'ils m'ont apportée.

Ce n'est pas sans émotion que je remercie les nombreux co-bureaux et co-thésards que j'ai côtoyés, pour les conversations mathématiques que nous avons parfois eues, mais surtout pour leur bonne humeur, m'aidant à garder le moral dans l'adversité : Nicolas, David, Vincent, Rémi, Kees, Damien, Thomas, Iianis, Sofien, Audrey, Anne-Laure et bien d'autres (qui se reconnaîtront). Je garde pour eux une profonde sympathie, et songerai toujours avec nostalgie aux pauses café-clope et aux parties de base-bureau<sup>®</sup>.

Vient à présent le moment de remercier ceux qui ont partagé mon quotidien : les colocataires du 36 bd de Lyon et le petit monde qui l'entourait, Greg, Melanie, Myriam, Laurence, Perrine, Regis et Christophe. Je remercie également ma famille, qui m'a toujours encouragé à continuer dans la voie des mathématiques.

Finalement, je remercie de tout mon cœur Florence qui, en plus d'enseigner mes journées, a lu et relu cette thèse, traquant les trop nombreuses fautes d'orthographe.



## Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	1
<b>Première Partie : Limites dégénérées de séries discrètes et leurs cohomologies.</b>	<b>11</b>
Chapitre 1. Variétés de Griffiths-Schmid, faisceaux et cohomologie	13
1. Variétés de Griffiths-Schmid	13
2. Faisceaux	16
Chapitre 2. Cohomologies des séries discrètes et leurs limites.	19
1. Les limites dégénérées de série discrète de paramètre 0 et leur cohomologie	19
2. Représentations automorphes de type à l'infini une série discrète	25
Chapitre 3. Cup produit des représentations archimédiennes	31
1. Multiplicité de $\pi_3$ dans $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$	31
2. Cup-produit	45
Chapitre 4. Cup-produit dans les cohomologies de faisceaux	53
1. Du cup-produit archimédien au cup-produit de faisceaux	53
2. Dualité de Serre	55
<b>Seconde partie : Relations entre cohomologies de faisceaux de structures complexes différentes.</b>	<b>57</b>
Chapitre 5. Définition d'une application entre deux cohomologies de faisceaux sur $X$ et sur $\Omega$	59
1. Structures complexes sur $G/H$	59
2. Faisceaux cohérents sur les $G/H$	60
3. Cohomologie des faisceaux $\mathcal{F}_\mu$	61
4. Cohomologie des séries discrètes	64
5. Définition d'une cochaîne	65
6. Définition de l'application $\mathcal{P}$	69
Chapitre 6. Injectivité de l'application $\mathcal{P}$	73
1. Injectivité de $\mathcal{P}$ dans l'espace homogène	73
2. Passage à l'espace complexe homogène local	76
3. Classes de cohomologie provenant de la limite dégénérée de série discrète.	82
Annexe A. Généralisation de l'application $\mathcal{P}$ à $SU(m, n)$ .	85

1. Notations	85
2. Choix des éléments.	85
3. L'application $\mathcal{P}$	88
4. Injectivité de $\mathcal{P}$	95
5. Passage à l'espace local.	98
Bibliographie	103

## Introduction

Soit  $G_{\mathbb{C}}$  un groupe de Lie complexe semi-simple connexe, et  $G$  une forme réelle connexe de ce groupe. On suppose de plus que  $G$  possède un sous-groupe de Cartan  $H$  qui soit compact. Soit  $B$  un sous-groupe de Borel contenant  $H$ . L'espace homogène  $G/H$  peut être muni de diverses structures complexes différentes, en identifiant  $G/H$  à une  $G$ -orbite ouverte de l'espace des drapeaux  $G_{\mathbb{C}}/B$ . Notons la variété homogène complexe obtenue en considérant l'ouvert contenant l'élément  $eB$  par  $\Omega \simeq G/H$ . À chaque caractère  $\mu$  de  $H$ , on peut associer un fibré en droites holomorphe  $G_{\mathbb{C}} \times_B \mathbb{C}_{\mu}$  sur  $G_{\mathbb{C}}/B$ . En prenant les germes de sections holomorphes de ce fibré, on obtient un faisceau  $\mathcal{F}_{\mu}$  dont la cohomologie est bien connue : le théorème de Bott-Borel-Weil nous affirme que, si  $\mu$  n'est pas singulier, la cohomologie est concentrée en un degré, et l'action de  $G_{\mathbb{C}}$  sur l'espace correspondant en fait une représentation holomorphe irréductible, et toute représentation holomorphe irréductible s'obtient ainsi.

Par restriction de  $G_{\mathbb{C}} \times_B \mathbb{C}_{\mu}$ , on obtient un fibré en droites holomorphe sur  $\Omega$ . On note à nouveau  $\mathcal{F}_{\mu}$  le faisceau des germes de sections holomorphes de ce fibré. Pour un caractère  $\mu$  régulier et dominant, Schmid ([Sc2]) a prouvé que la cohomologie de Dolbeault  $H^{\bullet}(\Omega, \mathcal{F}_{\mu})$  de ce faisceau était à nouveau concentrée en un seul degré ; en ce degré l'espace obtenu est une représentation irréductible de  $G$  infinitésimalement isomorphe à une série discrète de  $G$ , et toute série discrète peut s'obtenir de cette manière. On obtient ainsi une construction "géométrique" des séries discrètes. Maintenant, lorsque  $\mu$  n'est plus dominant régulier, un résultat de Wong ([Wo]) affirme que les représentations obtenues sur les espaces de cohomologies sont toujours admissibles mais ne sont plus nécessairement irréductibles, elles sont en fait infinitésimalement équivalentes à des représentations obtenues par induction cohomologique à la Zuckerman.

Considérons désormais un sous-groupe arithmétique discret co-compact  $\Gamma$  de  $G$ . Le quotient  $\Gamma \backslash \Omega$  est alors une variété complexe compacte mais qui n'est pas nécessairement algébrique ; c'est un exemple de variété de *Griffiths-Schmid* étudiée dans [Gr-Sc]. Le faisceau  $\mathcal{F}_{\mu}$  ci-dessus définit, par passage au quotient, un faisceau encore noté  $\mathcal{F}_{\mu}$ , sur  $\Gamma \backslash \Omega$ . On s'intéresse à nouveau à la cohomologie de Dolbeault  $H^{\bullet}(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{\mu})$  de  $\mathcal{F}_{\mu}$ . Schmid ([Sc3]) et Williams ([Wi2]) ont prouvé une conjecture de Langlands selon laquelle, pour  $\mu$  suffisamment régulier<sup>1</sup>, la cohomologie est nulle en tous degrés sauf un ; la dimension de l'espace non nul est égal à la multiplicité de la série

---

<sup>1</sup>il suffit notamment que  $\mu + \delta$  soit le paramètre de Harish-Chandra d'une série discrète intégrable.

discrète de paramètre de Harish-Chandra  $\mu + \delta$  dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$ .

Ce travail se propose d'étudier divers aspects de certains espaces de cohomologie  $H^\bullet(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_\mu)$  dans le cas du groupe  $G = SU(2, 2)$ . On considère en fait une forme anisotrope de  $G$  sur  $\mathbb{Q}$ , de sorte que tout sous-groupe de congruence  $\Gamma$  soit co-compact. Ce travail est organisé en deux parties relativement indépendantes. Les deux parties suivent les articles [Ca] et [Ca2], où le cas analogue du groupe  $SU(2, 1)$  est considéré. Dans la première partie, on s'intéresse, pour une structure compacte sur  $G/H$  fixée, à "l'apparition" (dans un sens à définir) d'une certaine *limite dégénérée de série discrète*  $\pi_1$  dans la cohomologie d'un faisceau  $\mathcal{F}_{\mu_1}$ . Le caractère  $\mu_1$  est hautement singulier, et nous ne sommes pas dans le cadre d'application du résultat de Williams rappelé ci-dessus, ce qui permet à certaines représentations autres que les séries discrètes, notamment cette limite dégénérée, d'intervenir dans la cohomologie. On parvient à exprimer les classes de cohomologies correspondantes à  $\pi_1$  en fonction du *cup-produit* de classes de cohomologies "mieux connues" en ce sens qu'elles correspondent à deux *séries discrètes*. Tout ceci est motivé par le fait que les représentations automorphes ayant pour composante arithmédienne une limite dégénérée n'ont, au contraire du cas des séries discrètes, aucune interprétation arithmétique ; l'idée est d'établir un lien entre ces deux types de représentations au niveau de la cohomologie des variétés de Griffiths-Schmid.

La seconde partie est consacrée à l'étude de relations entre les cohomologies de faisceaux associées à *différentes structures complexes* sur  $G/H$ . Nous avons choisi deux structures complexes particulières : l'une est celle considérée au premier chapitre, notée  $\Omega$ , et l'autre est choisie afin que  $G/H$  soit *algébrique* et *fibré holomorphiquement* sur un domaine hermitien symétrique  $G/K$ , où  $K$  est un sous-groupe compact maximal contenant  $H$ . On prouve alors l'existence d'une application injective  $\mathcal{P}$  entre l'espace de 0-cohomologie  $H^0(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\mu)$  (l'espace des formes modulaires "classiques") et l'espace de 1-cohomologie  $H^1(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{\mu'})$  ; le caractère  $\mu$  est choisi afin que l'espace considéré soit non nul, et  $\mu'$  est le translaté de  $\mu$  par un vecteur ne dépendant que de  $\Omega$  et de  $X$ . On obtient également que sous certaines conditions plus restrictives (conditions de Williams [Wi2] décrites ci-dessus), l'application est *bijjective*. L'application est d'abord construite entre les espaces de cohomologie homogène  $H^0(X, \mathcal{F}_\mu)$  et  $H^1(\Omega, \mathcal{F}_{\mu'})$ , puis "passée" au quotient. La motivation initiale était de pouvoir exprimer les classes de cohomologie de la première partie correspondant aux séries discrètes en fonction de formes modulaires "classiques". Ceci est fait pour l'une des deux séries discrètes, les classes de cohomologie correspondantes étant l'image par  $\mathcal{P}$  de classes de 0-cohomologies sur  $\Gamma \backslash X$ .

La première partie s'organise comme suit. Les généralités sur les variétés de Griffiths-Schmid  $\Gamma \backslash \Omega$  décrites ci-dessus sont rappelées dans le premier chapitre. On précise que le choix d'une structure complexe de  $\Omega \simeq G/H$  correspond au choix, à l'action du groupe de Weil  $W_K$  de  $\Delta_K$  près, d'un

système de racines positives  $\Delta^+$  : si  $\mathfrak{n}$  désigne l'algèbre nilpotente définie par

$$\mathfrak{n} = \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}^\alpha,$$

où  $\mathfrak{g}^\alpha$  est l'espace propre de la racine  $\alpha$ , et  $\mathfrak{b}$  le sous-groupe de Borel défini par  $\mathfrak{b} = \mathfrak{h}_\mathbb{C} \oplus \mathfrak{n}$  de sous-groupe normalisateur  $B$  dans  $G_\mathbb{C}$ , on identifie  $G/H$  à la  $G$ -orbite ouverte de  $eB$  dans  $G_\mathbb{C}/B$ . On rappelle ensuite une relation due à Schmid, essentielle pour ce travail, interprétant les espaces  $H^\bullet(\Gamma \backslash \Omega)$  en terme de représentations de  $G$ . Plus précisément, on a :

$$H^\bullet(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_\mu) \simeq \bigoplus m_\Gamma(\pi) H^\bullet(\mathfrak{b}, H, \pi \otimes \mu), \quad (0.1)$$

où la somme est prise sur l'ensemble des représentations irréductibles unitaires  $\pi$  de  $G$  et  $m_\Gamma(\pi)$  est la multiplicité de  $\pi$  dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$ . Ce résultat est également donné sous forme adélique, et la somme est obtenue en décomposant l'espace des *formes automorphes* de  $G$  en représentations automorphes. Dire qu'une représentation  $\pi$  "*intervient*" dans une classe de cohomologie de  $H^\bullet(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_\mu)$  signifie que cette classe, par l'isomorphisme (0.1), est dans le terme indexé par  $\pi$  dans le membre de droite. Remarquons au passage que le résultat de Schmid et Williams rappelé précédemment affirme que seules les séries discrètes interviennent dans cette somme dès que  $\mu$  est suffisamment régulier.

Dans le second chapitre nous introduisons la limite dégénérée de série discrète  $\pi_1$  qui est le principal objet de cette première partie. Nous introduisons également une famille infinie de séries discrètes  $\pi_2$  et  $\pi_3$  en expliquant soigneusement les raisons des conditions que nous avons imposées sur leurs paramètres de Harish-Chandra  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$ . Soergel a étudié la  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologie (ou, de façon équivalente, la  $\mathfrak{n}$ -cohomologie) des limites dégénérées de série discrète dans [So]. Nous appliquons ce résultat pour les limites de séries discrètes *totalelement dégénérées*, c'est-à-dire de paramètre de Harich Chandra *nul*, et pour chaque structure complexe sur  $G/H$  décrite ci-dessus. Cette cohomologie est égale à zéro pour toute structure complexe à l'exception de deux d'entre elles,  $\Omega$  et  $\Omega'$ . On prouve ainsi qu'une limite totalement dégénérée *intervient* dans la cohomologie d'un certain faisceau  $\mathcal{F}_{\mu_1}$  sur  $\Gamma \backslash \Omega$ .

Avant d'aller plus avant, il nous faut expliquer précisément le premier résultat que nous cherchons à obtenir. Considérons les espaces de cohomologie  $H^p(\mathfrak{b}, H, \pi_1 \otimes \mu_1)$  et  $H^q(\mathfrak{b}, H, \pi_2 \otimes \mu_2)$ , où  $p, q, \pi_2$  et  $\mu_2$  sont, pour le moment, quelconques (avec tout de même la condition que la cohomologie concernée soit non nulle). Alors par cup-produit on a une application :

$$H^p(\mathfrak{b}, H, \pi_1 \otimes \mu_1) \otimes H^q(\mathfrak{b}, H, \pi_2 \otimes \mu_2) \xrightarrow{\cup} H^{p+q}(\mathfrak{b}, H, \pi_1 \hat{\otimes} \pi_2 \otimes \mu_3), \quad (0.2)$$

où  $\mu_3 = \mu_1 \cdot \mu_2$  et  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$  est le produit tensoriel complété de  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . Supposons maintenant qu'il existe une représentation  $\pi_3$  qui soit un facteur direct fermé de multiplicité 1 dans  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ . On dispose alors d'une projection bien définie (à un scalaire près) de  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$  sur  $\pi_3$ . On en déduit au niveau de la cohomologie une application **proj**

$$\mathbf{proj} : H^{p+q}(\mathfrak{b}, H, \pi_1 \hat{\otimes} \pi_2 \otimes \mu_3) \rightarrow H^{p+q}(\mathfrak{b}, H, \pi_3 \otimes \mu_3). \quad (0.3)$$

Le résultat souhaité peut alors s'énoncer ainsi :

**THÉORÈME 0.1.** *Soit  $(\pi_2, \pi_3)$  un couple de séries discrètes de la famille infinie considérée ci-dessus. Pour  $p = 2$ ,  $q = 1$ , et pour un choix de  $\mu_2$  imposé par  $\pi_2$ , la composée du cup-produit et de l'application **proj** :*

$$H^2(\mathfrak{b}, H, \pi_1 \otimes \mu_1) \otimes H^1(\mathfrak{b}, H, \pi_2 \otimes \mu_2) \rightarrow H^3(\mathfrak{b}, H, \pi_3 \otimes \mu_3) \quad (0.4)$$

*est bijective ; les espaces apparaissant sont alors tous de dimension 1.*

Remarquons que le fait que les espaces sont de dimension 1 est une conséquence immédiate de l'application du théorème de Soergel pour  $\pi_1$  et d'un théorème de Schmid [Sc] dans le cas des séries discrètes. À la fin du second chapitre, nous définissons la famille infinie de séries discrètes ainsi que les paramètres  $p$ ,  $q$  et  $\mu_2$  afin que l'application (0.4) ait un sens, la preuve de la bijectivité fera l'objet du chapitre suivant. Le fait que les espaces de cohomologie concernés doivent être non nuls impose :  $p = 2$  et  $q = 1$  ; le paramètre  $\lambda_2$  de la représentation  $\pi_2$  doit alors appartenir à une certaine demi-droite de l'espace des poids, et  $\lambda_3$  est le translaté de  $\lambda_2$  par un vecteur constant. On vérifie finalement que  $\pi_3$  est un facteur direct fermé de  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ .

Le coeur de la preuve du théorème 0.1 est l'objet du chapitre 3. Rappelons que  $K$  désigne le sous-groupe compact maximal contenant  $H$  ; notons  $\mathfrak{k}$  son algèbre de Lie et  $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$  la décomposition de  $\mathfrak{g}$  donnée par l'involution de Cartan. Soit  $\Delta = \{e_{ij}\}$  le système de racines de  $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ , de sorte que l'on a la décomposition :

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}^{\alpha}.$$

On note  $\Delta_K$  l'ensemble des racines compactes de  $\Delta$ , c'est-à-dire qui soit une racine de  $(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$  ;  $\Delta_n$  désigne l'ensemble des racines non compactes.

On commence par prouver que  $\pi_3$  a pour multiplicité 1 dans  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ . On y montre en fait un peu plus : la projection **proj** envoie le produit tensoriel des  $K$ -types minimaux  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  de  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sur le  $K$ -type minimal  $\Lambda_3$  de  $\pi_3$ . La preuve consiste à considérer tous les vecteurs du module de Harish-Chandra de  $\pi_1 \otimes \pi_2$  sur lesquels  $K$  agisse par  $\Lambda_3$  (la composante  $\Lambda_3$ -isotypique) et à démontrer que, parmi ceux-ci, une seule droite est annulée sous l'action d'un certain vecteur  $X_{32}$ , qui est dans l'espace propre  $\mathfrak{g}^{e_{32}}$  de la racine  $e_{32} \in \Delta_n$ . Notons  $V$  l'espace des vecteurs vérifiant cela. Le  $K$ -type minimal de  $\pi_3$  étant annulé par  $X_{32}$ , le fait que  $V$  soit de dimension 1 suffit à obtenir le résultat escompté. On commence par appliquer la formule de Blattner, qui reste valable dans les cas des limites de série discrète, afin de connaître *tous* les  $K$ -types des représentations  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  et  $\pi_3$ . Une formule de Steinberg permet ensuite de déterminer, parmi tous les produits tensoriels de  $K$ -types de  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ , ceux qui contiennent  $\Lambda_3$ . On obtient une famille  $L_n \otimes M_n$  de produits tensoriels de  $K$ -types paramétrés par un entier naturel  $n$  ; pour  $n = 0$ , le produit  $L_0 \otimes M_0$  correspond à  $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ . À ce stade, aucune connaissance de l'action d'éléments "non compacts" (en dehors de  $K$ ) n'a été nécessaire. Il faut cependant obtenir des informations sur l'action de  $X_{32} \in \mathfrak{p}$  sur les espaces  $L_n \subset \pi_1$  et  $M_n \subset \pi_2$ . Ceci ne pose aucun problème pour la représentation

$\pi_2$  car c'est une série discrète *holomorphe*, dont une réalisation explicite est bien connue. Les calculs sont menés dans la section 1.3, et l'action de  $X_{32}$  est totalement connue. La représentation  $\pi_1$  est plus délicate à aborder, car on ne dispose pas d'une réalisation explicite. On a cependant besoin d'un résultat moins précis que celui de  $\pi_2$  : il s'agit simplement de prouver que  $\pi_1(X_{32}).L_n$  est inclus dans  $L_{n+1}$ . On parvient heureusement à contourner l'absence de connaissance précise sur  $\pi_1$  en utilisant la *structure* particulière des  $K$ -types étudiés auparavant, et le fait que l'action de  $\pi_1(X_{32})$  commute à celle de  $\pi_1(X_\alpha)$ , pour toute racine compacte  $\alpha$  dominante relativement à un choix d'un système de racine positive. On conclut par un argument d'unicité du plus haut poids (voir section 1.4). On est désormais en mesure de prouver le fait que  $V$  est de dimension 1. On considère les projetés  $v_n$  d'un élément  $v$  dans la composante  $\Lambda_3$ -isotypique de  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$  sur chacun des espaces  $L_n \otimes M_n$ . On utilise alors les résultats précédents pour prouver que la condition  $\pi_1(X_{32}).v = 0$  implique que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est entièrement déterminé par  $v_0$ . Les espaces  $L_0$  et  $M_0$  étant de dimension 1, l'ensemble des vecteurs  $v$  précédents annulés par  $\pi_1(X_{32})$  sera également de dimension 1. Comme nous l'avons expliqué plus haut, on en déduit que  $\pi_3$  a pour multiplicité 1.

L'application **proj** du théorème 0.1 étant ainsi bien définie à un scalaire près, nous allons décrire l'idée de la preuve de ce théorème. L'inclusion  $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}} \cap \mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}$  permet de définir une suite spectrale de Hochschild-Serre  $E_r^{i,j}$  :

$$E_r^{i,j} \Rightarrow H^{i+j}(\mathfrak{n}, \pi)_{-\mu} \simeq H^{i+j}(\mathfrak{b}, H, \pi \otimes \mu).$$

Nous allons prouver que l'application "**proj**  $\circ \cup$ " de (0.4) définit une bijection au niveau de la *première feuille*  ${}_1E_1$ ,  ${}_2E_1$  et  ${}_3E_1$  des suites spectrales respectivement attachées à  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  et  $\pi_3$  ; puis que cette bijection suffit à induire une bijection au niveau de la  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologie en entier. Ceci repose sur le fait que toutes les suites spectrales considérées *dégénèrent* à la première feuille. Pour les représentations  $\pi_2$  et  $\pi_3$ , la dégénérescence est automatique : c'est un résultat général sur les séries discrètes (voir par exemple [Wi]). En revanche pour  $\pi_1$  la situation est plus compliquée, aucun théorème de dégénérescence n'étant disponible. Une raison heuristique qui expliquerait pourquoi la première page pourrait être *insuffisante* pour  $\pi_1$  est que l'espace de Harish-Chandra des limites de séries discrètes n'est pas déterminé de façon unique par la structure des  $K$ -types, contrairement au cas des séries discrètes (théorème du  $K$ -type minimal) ; or la feuille  $E_1$  et ses différentielles font intervenir *uniquement* l'action de  $K$  sur les  $K$ -types. Les calculs de ces premières feuilles sont effectués dans la section 1.5, et on trouve en effet que la suite spectrale de  $\pi_1$  n'est pas nécessairement dégénérée, une différentielle dans la seconde feuille  ${}_1E_2$  pouvant être non nulle :

$${}_1E_2^{0,2} \xrightarrow{d} {}_1E_2^{2,1}.$$

L'étude de cette différentielle s'avère compliquée, car elle fait intervenir l'action d'éléments en dehors de  $K$ . Mais nous connaissons *déjà* la cohomologie de  $\pi_1$ , que nous avons obtenue en appliquant le résultat de Soergel dans le deuxième chapitre. On en déduit que la différentielle  $d$  ci-dessus est nulle, donc que la suite spectrale de  $\pi_1$  *dégénère* à la première feuille. Le reste de

la preuve consiste à établir la bijection dans les feuilles  $E_1$  (on utilise notamment le fait que  $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$  se projette sur  $\Lambda_3$ ), et à expliquer comment cela induit la bijection au niveau de la cohomologie.

Les résultats concernant la cohomologie des faisceaux sont énoncés dans le chapitre 4. L'application cup-produit :

$$H^2(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{\mu_1}) \times H^1(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{\mu_2}) \xrightarrow{\cup} H^3(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{\mu_3})$$

correspond, via l'isomorphisme (0.1) (ou plutôt son équivalent en termes de formes automorphes), à une application :

$$H^2(\mathfrak{b}, H, \mathcal{A}_U \otimes \mu_1) \times H^1(\mathfrak{b}, H, \mathcal{A}_U \otimes \mu_2) \xrightarrow{\cup} H^3(\mathfrak{b}, H, \mathcal{A}_U \otimes \mu_3), \quad (0.5)$$

où  $\mathcal{A}_U$  est l'ensemble des formes automorphes  $U$ -invariantes,  $U$  étant un sous-groupe ouvert compact de  $G(\mathbb{A}_f)$  (voir chapitre 1). On obtient alors le théorème principal (ou plutôt une forme duale) suivant :

**THÉORÈME 0.2.** *Soient  $\phi_1$  et  $\phi_2$  deux classes dans le membre de droite de (0.5). Supposons de plus que ces classes proviennent de  $\pi_1$  et  $\pi_2$  dans le sens usuel. Alors leur image  $\phi_1 \cup \phi_2$  par l'application (0.5) est un élément ("virtuellement") non nul dont la projection sur la composante provenant de  $\pi_3$  est non nulle.*

Ici "virtuellement" signifie que l'on peut être amené à considérer un sous-groupe  $U'$  plus petit. La difficulté dans la preuve vient du fait qu'apparaît à un moment la projection  $\pi_1 \otimes \pi_2 \xrightarrow{p} \pi_3$  "vue" dans l'espace des formes automorphes  $\mathcal{A}_{U \times U}$  de  $G \times G$  (ou plutôt sa complétion  $L^2$ ). Il n'est alors pas sûr que l'image d'un élément sera une forme automorphe  $K$ -finie. Un article de Harris [**Ha2**] permet de répondre par l'affirmative à condition que  $\pi_3$  soit une série discrète *intégrable*, hypothèse que nous adoptons. Le résultat central est obtenu par un argument de dualité de Serre. La notation  $\tilde{\pi}$  signifie représentation contragrédiente de  $\pi$ .

**THÉORÈME 0.3.** *Les classes de 4-cohomologie de  $\mathcal{F}_{\mu_1}$  provenant de la limite dégénérée  $\tilde{\pi}_1$  sont des combinaisons linéaires de cup-produits de classes de 1 et de 3 cohomologie de  $\mathcal{F}_{\mu_2}$  et  $\mathcal{F}_{\mu_3}$  provenant virtuellement de séries discrètes  $\pi_2$  et  $\tilde{\pi}_3$  (théorème 4.2).*

Remarquons pour finir que, dans cette première partie, l'emploi des variétés de Griffiths-Schmid à la place des variétés de Shimura  $\Gamma \backslash G/K$ , qui possèdent pourtant bien plus de propriétés arithmétiques, se justifie par le fait que les limites dégénérées *n'interviennent pas* dans la cohomologie des faisceaux localement homogènes correspondants. Dans le même esprit, parmi les 6 structures complexes possibles pour  $G/H$ , deux structures (conjuguées)  $X$  et  $Y$  sont des fibrés sur des domaines hermitiens symétriques  $G/K$ , et ont l'avantage d'être des variétés algébriques. Cependant, un résultat de Mirkovic [**Mi**] affirme que, à l'instar des variétés de Shimura, ces variétés n'ont

aucune limite dégénérée intervenant dans leur cohomologie.

Une voie possible pour tenter de pallier l'absence "d'algébricité" de  $\Gamma \backslash \Omega$  est d'exprimer une  $(\Gamma \backslash \Omega)$ -classe (classe dans la cohomologie sur  $\Gamma \backslash \Omega$ ) en fonction d'une  $(\Gamma \backslash X)$ -classe ou d'une  $(\Gamma \backslash Y)$ -classe. Cela est fait dans [Ca2] dans le cas de  $SU(2, 1)$ . Dans la seconde partie de cette thèse, nous parvenons à un résultat partiel : une application bijective  $\mathcal{P}$  est définie entre  $H^0(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\mu)$  et  $H^1(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{\mu'})$ , où  $\mu$  appartient à une certaine chambre de Weil et  $\mu'$  est un translaté de  $\mu$ . Les conditions sur  $\mu$  sont telles que l'on peut choisir  $\mu' = \mu_2$ , où  $\mu_2$  est celui considéré au théorème 0.3.

La seconde partie s'organise comme suit. Dans le chapitre 5, nous définissons une application  $\mathcal{P}$  de type Penrose au niveau des espaces homogènes (sans quotienter par  $\Gamma$ ). Celle-ci peut être entièrement définie en utilisant les complexes de Dolbeault. Cependant, afin de prouver l'injectivité de cette application dans le chapitre 6, nous utilisons des propriétés de fonctions *holomorphes*, rendant l'emploi des complexes de Dolbeault peu adapté. Un travail de Gindikin [Gi] permet de calculer la cohomologie cohérente des faisceaux considérés par un complexe dont les éléments sont des *sections holomorphes* de certains faisceaux. Aussi les résultats du chapitre 5 sont énoncés à chaque fois en fonction des complexes de Dolbeault et des complexes de Gindikin. Dans un premier temps, et indépendamment de la discussion précédente, nous exprimons les faisceaux  $\mathcal{F}_\mu$  sous forme de certains faisceaux  $\mathcal{F}_{a,b,c}$  de germes de fonctions holomorphes ;  $a, b, c$  sont trois entiers donnant le degré d'homogénéité d'une section en fonction d'un drapeau<sup>2</sup>  $(p, d, P)$ . L'avantage de cette formulation est qu'il est plus aisé de déterminer si une fonction donnée est une section d'un de ces faisceaux.

Nous définissons ensuite, au paragraphe 3, le complexe décrit par Gindikin. Plus précisément, on y définit un fibré  $\mathbb{U}$  sur  $\Omega$ , et on vérifie que c'est un espace de Stein, dont les fibres sont contractiles. Dans ces conditions, Gindikin prouve que la cohomologie de  $\mathcal{F}_\mu$  est isomorphe à la cohomologie relative de De Rham :

$$H^n(\Omega, \mathcal{F}_\mu) \simeq H^n(\Gamma(\mathbb{U}, \Omega_\pi^n(\mathcal{F}_\mu))), \quad (0.6)$$

où  $\Omega_\pi^n$  est l'espace des  $n$ -formes différentielles relatives par rapport à la projection  $\mathbb{U} \xrightarrow{\pi} \Omega$ , et  $\Gamma(\dots)$  désigne l'espace des sections globales de  $(\dots)$ .

Rappelons que notre objectif est de définir une application au niveau de la cohomologie des espaces homogènes locaux  $\Gamma \backslash X$  et  $\Gamma \backslash \Omega$ , et que ces cohomologies sont calculées en termes de  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologies de représentations (cf. (0.1)), parmi lesquelles les séries discrètes<sup>3</sup> ; on calcule donc la  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologie des séries discrètes pour le sous-groupe de Borel  $\mathfrak{b}$  attaché à  $X$  (le cas  $\Omega$  a déjà été traité dans la première partie). Il en résulte que la chambre de Weyl (affine) contenant les  $\mu$  pour lesquels  $H^0$  est non nul pour  $X$ , et celle considérée pour le  $H^1$  de  $\Omega$  sont translatés l'une de l'autre par la racine  $e_{14}$ . On cherche alors naturellement une application vérifiant :

$$\mathcal{P} : H^0(X, \mathcal{F}_\mu) \rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{F}_{\mu+e_{14}}),$$

<sup>2</sup>ou plutôt d'un relevé  $(\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P})$  via les plongements de Plücker, voir §2.

<sup>3</sup>et même seules les séries discrètes, pour  $\mu$  suffisamment régulier.

pour  $\mu$  dans la chambre de 0-cohomologie des séries discrètes. Heuristiquement, on utilise un certain cocycle, noté  $\eta$ , dans le complexe attaché à  $H^1(\Omega, \mathcal{F}_{e_{14}})$  (versions Dolbeault et Gindikin), qui permet de translater  $\mu$  en  $\mu + e_{14}$  et d'augmenter le degré  $H^0$  en  $H^1$ . L'application  $\mathcal{P}$  en découle (voir le paragraphe 6).

Dans le chapitre 6, on prouve que l'application  $\mathcal{P}$  est injective au niveau de la cohomologie des espaces homogènes, puis que cette application permet de définir une application injective au niveau des variétés de Griffiths-Schmid. On se place exclusivement dans le formalisme de Gindikin.

Avant de rentrer dans les grandes lignes de la preuve, expliquons un "procédé" qui est au centre de la plupart des preuves de ce chapitre. À un certain point, on est amené à considérer des fonctions holomorphes  $s$  sur un certain sous-espace  $D$  de l'ensemble des drapeaux, qui de plus sont homogènes dans l'espace relevé (non projectif). On choisit un espace  $F$ , ainsi qu'une surjection  $F \rightarrow D$ , de sorte que  $F$  satisfasse les conditions d'utilisation du théorème de prolongement de Hartogs. On peut alors associer à  $s$  une fonction holomorphe homogène  $\sigma$  sur  $F$ , et les propriétés de  $F$  ainsi que l'homogénéité de  $s$  assurent que  $\sigma$  détermine uniquement  $s$ . De plus  $F$  a été choisi afin que l'on puisse prolonger holomorphiquement  $\sigma$  à un espace plus grand en utilisant le théorème de Hartogs. Si l'espace prolongé contient un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel, l'homogénéité de  $\sigma$  en fait un *polynôme* sur cet espace.

La preuve de l'injectivité de  $\mathcal{P}$  consiste à considérer une section holomorphe  $\phi$  dans  $\Gamma(\mathbb{U}, \Omega_\pi^n(\mathcal{F}_\mu))$  telle que  $d_\pi(\phi) = \mathcal{P}(f)$  et à prouver que  $\phi$  est identiquement nul. On applique le procédé décrit ci-dessus en considérant pour  $F$  un sous-espace de drapeaux de l'orthogonal  $p^\perp$  d'un point fixé  $p$ . On applique le procédé précédent pour  $s = \phi$  puis pour  $s = \mathcal{P}$ , et la comparaison des coefficients des polynômes obtenus permet de prouver qu'ils sont tous *nuls*. L'injectivité en découle.

Il reste à prouver que l'application  $\mathcal{P}$  permet de définir une application au niveau des espaces homogènes locaux  $\Gamma \backslash G/H$ . On utilise pour cela la suite spectrale de Cartan-Leray, ou plutôt la suite exacte attachée aux termes de bas degré :

$$H^1(\Gamma, H^0(\Omega, \mathcal{F})) \rightarrow H^1(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (H^1(\Omega, \mathcal{F}))^\Gamma \rightarrow H^2(\Gamma, H^0(\Omega, \mathcal{F})).$$

On voit ainsi que lorsque  $H^0(\Omega, \mathcal{F})$  est *nul*, on peut identifier  $H^1(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F})$  à  $(H^1(\Omega, \mathcal{F}))^\Gamma$ , ce qui permet d'en définir  $\mathcal{P}$  sur ce dernier espace.

Il suffit donc de prouver que  $H^0(\Omega, \mathcal{F}_{\mu'})$  est *nul* pour les  $\mu'$  considérés. On commence par prouver que toute section holomorphe globale d'un faisceau  $\mathcal{F}_{\mu'}$  sur  $\Omega$  se prolonge holomorphiquement à l'espace des drapeaux  $\mathbb{D}$  en entier. Expliquons les conséquences de ce résultat avant d'en schématiser la preuve. L'espace des sections holomorphes globales  $\Gamma(\mathbb{D}, \mathcal{F}_{\mu'})$  est l'objet du théorème de Borel-Weil; cet espace est *nul* dès que  $\mu$  n'est pas anti-dominant vis-à-vis du système de racines définissant  $\Omega$ . Pour les  $\mu'$  que nous

considérons, ceci est toujours le cas, d'où :

$$H^0(\Omega, \mathcal{F}_\mu) = 0 \text{ pour les } \mu' \text{ considérés.}$$

La démonstration du résultat de prolongement d'une section  $s \in \Gamma(\Omega, \mathcal{F}_\mu)$  utilise deux fois le procédé décrit ci-dessus, une fois en considérant l'ensemble des drapeaux  $(p, d, P) \in \Omega$  à  $p$  fixé, une fois en fixant l'hyperplan  $P$ . Deux problèmes apparaissent alors : les prolongements ayant été faits à  $p$  et  $P$  fixé, il n'est pas clair que la fonction obtenue sera holomorphe ; de plus l'espace sur lequel on prolonge  $s$  n'est pas  $\mathbb{D}$  en entier. Nous allons à nouveau utiliser le procédé ci-dessus, en considérant comme espace  $F$  l'ensemble des triplets de points  $(p, y, z)$  tel que  $(p, \langle p, y \rangle, \langle p, y, z \rangle)$  soit un drapeau de  $\Omega$ . La section  $s$  correspond alors à une fonction holomorphe  $\sigma$  sur  $F$ . Le prolongement précédent à  $p$  fixé permet de définir  $\sigma$  sur les triplets  $(p, y, z)$ , sans restriction sur  $y$  et  $z$ , mais pour  $p$  de signature négative. La fonction étant holomorphe homogène, c'est un polynôme en  $y$  et en  $z$ . La fin de la preuve repose alors sur les coefficients de ce polynôme (qui dépendent de  $p$ ). On possède suffisamment d'information pour affirmer que ces coefficients dépendent holomorphiquement de  $p$  (donc le prolongement à  $p$  fixé est bien une fonction holomorphe), et le prolongement précédent à  $P$  fixé permet d'étendre ces coefficients sans restrictions sur  $p$ . La fonction  $\sigma$  se prolonge donc à  $(\mathbb{C}^4)^3$ , ce qui implique que  $s$  se prolonge à  $\mathbb{D}$ .

On a donc prouvé la première assertion du théorème suivant :

THÉORÈME 0.4. (1) *Soient  $\mu$  et  $\mu' = \mu + e_{14}$  deux poids entiers appartenant aux chambres de Weil affines décrites précédemment. Alors l'application*

$$\mathcal{P} : H^0(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\mu) \rightarrow H^1(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{\mu'})$$

*est injective.*

(2) *Si de plus la série discrète de paramètre  $\mu - \delta_X$ , où  $\delta_X$  est la demi-somme des racines définissant la structure complexe de  $X$ , est une série discrète intégrable, alors  $\mathcal{P}$  est bijective.*

La seconde assertion est obtenue en appliquant le résultat de Williams [Wi2] rappelé au début de cette introduction. Nous terminons le chapitre 6 par une discussion sur la motivation de cette seconde partie, à savoir décrire les classes apparaissant dans la première partie en fonction de classes mieux comprises.

Finalement, nous avons remarqué que les résultats de la seconde partie se généralisaient naturellement aux groupes de type  $SU(n, n)$  et  $SU(n + 1, n)$ . Les démonstrations restant très similaires au cas  $SU(2, 2)$ , bien que plus techniques, nous avons décidé de mettre cela en annexe, en donnant les preuves complètes et en expliquant en quoi celles-ci diffèrent du cas  $SU(2, 2)$ .



Première Partie : Limites dégénérées  
de séries discrètes et leurs  
cohomologies.



## CHAPITRE 1

# Variétés de Griffiths-Schmid, faisceaux et cohomologie

### 1. Variétés de Griffiths-Schmid

Soit  $G$  un groupe algébrique défini sur  $\mathbb{Q}$  tel que  $G_{\mathbb{C}}$  soit un groupe de Lie connexe et semi-simple. À tout sous-groupe parabolique  $B$  de  $G_{\mathbb{C}}$  on peut associer la variété algébrique compacte  $G_{\mathbb{C}}/B$ . Si  $G_{\mathbb{R}}$  est un groupe connexe réel tel que le sous-groupe  $H = G_{\mathbb{R}} \cap B$  est compact, alors on peut munir  $G_{\mathbb{R}}/H$  d'une structure complexe en l'identifiant à la  $G_{\mathbb{R}}$  orbite ouverte de  $eB$  dans  $G_{\mathbb{C}}/B$  ( $e$  étant l'élément neutre de  $G_{\mathbb{C}}$ ). Notons  $\Omega$  la variété ainsi obtenue.

Considérons maintenant un sous-groupe de congruence  $\Gamma$  de  $G$  agissant proprement et sans point fixe sur  $\Omega$ . Alors la variété complexe obtenue en quotientant  $\Omega$  par  $\Gamma$  est une variété de Griffiths-Schmid  $GS_{\Gamma}$  de  $G$  au sens de [Gr-Sc]. Contrairement aux cas des variétés de Shimura, elles ne sont pas nécessairement algébriques.

Ces variétés ont, tout comme les variétés de Shimura, une description adélique. Notons  $\mathbb{A}$  l'ensemble des adèles et  $\mathbb{A}_f$  l'ensemble des adèles finies. Soit  $U$  un sous-groupe ouvert et compact de  $\mathbb{A}_f$ . On définit alors une variété de Griffiths-Schmid par le quotient :

$$GS_U = G(\mathbb{Q}) \backslash (\Omega \times G(\mathbb{A}_f)) / U. \quad (1.1)$$

Le lien avec la définition ci-dessus se fait de façon analogue au cas des variétés de Shimura en remarquant que  $G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A}_f) / U$  est un ensemble fini dont on note  $\gamma_i$  une famille de représentants. La variété  $GS_U$  se décompose alors comme l'union disjointe suivante :

$$GS_U = \coprod \Gamma_i \backslash \Omega,$$

avec  $\Gamma_i = \gamma_i U \gamma_i^{-1} \cap G(\mathbb{Q})$ . Chaque composante connexe est donc une variété de Griffiths-Schmid au sens "classique".

On s'intéresse ici à une forme anisotrope du groupe  $SU(2, 2)$  sur  $\mathbb{Q}$ , évitant ainsi tout problème de compactification car les quotients  $\Gamma \backslash G_{\mathbb{R}}/H$  sont compacts. Ce type de groupe est obtenu en considérant une algèbre centrale simple de dimension 16 sur un corps quadratique imaginaire que l'on munie d'une involution de seconde espèce (voir [Cl]). Ce groupe vérifie  $G_{\mathbb{R}} = SU(2, 2)$  et  $G_{\mathbb{C}} = SL_4(\mathbb{C})$ , et nous noterons tant que cela n'entraîne pas de confusion  $G$  le groupe  $G_{\mathbb{R}}$ . Ce groupe satisfait aux conditions d'existence des

variétés de Griffiths-Schmid, et les variétés que nous considérons sont celles obtenues à partir de certains sous-groupes de Borel  $B$ . Les variétés  $G_{\mathbb{C}}/B$  sont alors des variétés de drapeaux de  $\mathbb{C}^4$  et les groupes  $H = B \cap G_{\mathbb{R}}$  sont des sous-groupes de Cartan de  $G$ .

Le sous-groupe compact maximal  $K$  que l'on considère est formé des matrices de la forme :

$$K : \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix},$$

et le sous-groupe de Cartan  $H$  est formé des matrices de la forme :

$$H : \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Notons  $B_0$  le sous-groupe de Borel de  $G_{\mathbb{C}}$  formé des matrices triangulaires supérieures.

Afin de décrire les variétés de Griffiths-Schmid de ce groupe, nous commençons par étudier les différentes  $G_{\mathbb{R}}$ -orbites de  $eB$  dans  $G_{\mathbb{C}}/B$ . Il suffit pour cela d'étudier toutes les  $G_{\mathbb{R}}$ -orbites ouvertes de  $G_{\mathbb{C}}/B_0$ , les sous-groupes de Borel étant conjugués sous  $G_{\mathbb{C}}$ .

On note  $\mathbb{D}$  la variété de drapeaux de  $V = \mathbb{C}^4$ , isomorphe à  $G_{\mathbb{C}}/B_0$ . Les  $G_{\mathbb{R}}$ -orbites ouvertes des grassmanniennes de  $k$ -plans sont obtenues en appliquant le théorème de Witt pour la forme hermitienne  $\mathbf{q}(x, y, z, t) = |x|^2 + |y|^2 - |z|^2 - |t|^2$ . On trouve que ces orbites sont données par les différentes signatures possibles de la restriction de la forme  $\mathbf{q}$  aux  $k$ -plans. Il y a deux possibilités pour la signature de la restriction de  $\mathbf{q}$  à un point  $x$  de  $\mathbb{P}(V)$ , que nous notons naturellement  $+$  et  $-$ ; pour une droite  $d$  de  $\mathbb{P}(V)$ , il y a trois possibilités, notées  $++$ ,  $+-$  et  $--$ ; finalement pour un plan  $P$  de  $\mathbb{P}(V)$ , deux possibilités, notées  $++-$  et  $+--$ . Les espaces de grassmanniennes correspondants sont notés  $Gr^{+-}(V)$  pour l'espace des 2-plans de signature  $+-$  et de la même façon pour les autres.

Les  $G_{\mathbb{R}}$ -orbites de  $\mathbb{D}$  sont alors obtenues en prenant les drapeaux  $(x, d, P)$  de  $\mathbb{P}(V)$  pour lesquels la signature de la restriction de  $\mathbf{q}$  est fixée. On trouve alors six possibilités, notées comme suit :

$$(+-), \quad (+-+), \quad (+--), \quad (-++), \quad (-+-), \quad (---),$$

où à chaque fois le premier signe donne la signature sur le point (dans l'espace projectif), les deux premiers signes la signature sur la droite et les trois signes la signature sur le plan. Ainsi  $(+-+)$  est l'ouvert de  $\mathbb{D}$  formé des points de signature positive par rapport à  $\mathbf{q}$ , des droites de signature  $+-$  et des plans de signature  $+--$ .

Les orbites ci-dessus forment l'ensemble des  $G_{\mathbb{R}}$ -orbites ouvertes de  $G_{\mathbb{C}}/B_0$ . Il y a donc six façons de mettre une structure complexe sur  $G_{\mathbb{R}}/H$ . Nous

notons  $\Omega_{(+--+)}$  la variété correspondant à l'ouvert  $(+ - +)$  et les autres de façon similaire.

La dualité relativement à la forme  $\mathbf{q}$  peut se traduire par la formule suivante :

$$\text{le dual de l'espace } (\varepsilon_1 \ \varepsilon_2 \ \varepsilon_3) \text{ est l'espace } (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 \ \varepsilon_3 \ \varepsilon_2). \quad (1.2)$$

Ainsi  $(+ - -)$  et  $(- + +)$  sont auto-duaux, le dual de  $(+ + -)$  est  $(- - +)$  et celui de  $(+ - +)$  est  $(- + -)$ .

Dans la suite, deux variétés joueront un rôle particulier : les variétés  $\Omega_{(-+-)}$  et  $\Omega_{(+--+)}$ , duales l'une de l'autre. Les deux éléments de  $\Omega_{(-+-)}$  et  $\Omega_{(+--+)}$  suivants :

$$\left( \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bullet \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet \\ 0 \\ \bullet \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet \\ 0 \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} \right) \right) \quad \text{et} \quad \left( \left( \begin{pmatrix} \bullet \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet \\ 0 \\ \bullet \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bullet \\ \bullet \\ \bullet \\ 0 \end{pmatrix} \right), \right),$$

ont pour stabilisateur sous l'action de  $G_{\mathbb{C}}$  les sous-groupes de Borel  $B_{(-+-)}$  et  $B_{(+--+)}$  définis par :

$$B_{(-+-)} = \begin{pmatrix} * & * & 0 & * \\ 0 & * & 0 & 0 \\ * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix} \quad B_{(+--+)} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & 0 & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}.$$

Une autre façon de décrire les structures complexes sur  $G_{\mathbb{R}}/H$  est d'en donner les espaces tangents holomorphes et anti-holomorphes. Si l'on note  $p$  la projection de  $G_{\mathbb{R}}$  sur  $G_{\mathbb{R}}/H$ , l'espace anti-holomorphe de  $\Omega_{(-+-)}$  et de  $\Omega_{(+--+)}$  s'identifie, via  $p_*$ , respectivement à l'algèbre nilpotente associée à  $B_{(-+-)}$  et à  $B_{(+--+)}$  (voir par exemple [Gr-Sc], §1).

Nous ne donnerons pas les espaces anti-holomorphes des quatre autres variétés, remarquons simplement que celles-ci sont paramétrées par les systèmes de racines positives de  $G_{\mathbb{C}}$  par rapport à  $H_{\mathbb{C}}$ . Donnons quelques notations avant d'en expliquer la raison. On note  $\mathfrak{g}$ ,  $\mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{b}$  et  $\mathfrak{k}$  les algèbres de Lie de  $G(\mathbb{R})$ ,  $H$ ,  $B$  et  $K$  respectivement, et  $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ ,  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$  et  $\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$  leur complexifications. Le système de racines associé au couple  $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$  est noté  $\Delta$ . Il est composé des racines  $e_{ij}$ ,  $i$  et  $j$  étant deux entiers distincts entre 1 et 4, définies comme suit : si  $X$  est un élément de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ ,  $e_{ij}(X)$  est la différence du  $i$ -ème élément de la diagonale de  $X$  avec le  $j$ -ème élément. Le groupe de Weyl associé sera noté  $W$ . Si l'on remplace  $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$  par  $(\mathfrak{k}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{h}_{\mathbb{C}})$ , on obtient le système de racine compact  $\Delta_K$  et le groupe de Weyl compact  $W_K$ .

Chaque algèbre de Borel contenant  $H$  peut s'identifier à un choix de système de racines positives de  $\mathfrak{g}$  par rapport à l'algèbre de Lie  $\mathfrak{h}$  de  $H$ . Il y a deux normalisations possibles, nous choisissons ici celle-ci :

$$\Delta^+ \mapsto \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \oplus \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_{\alpha} \quad (1.3)$$

où  $\Delta^+$  est un système de racines positives et  $\mathfrak{g}_{\alpha}$  est l'espace propre associé à la racine  $\alpha$ . Donc chaque système de racines positif permet de définir une structure complexe sur  $G_{\mathbb{R}}/H$ .

D'autre part, rappelons que le groupe de Weyl compact  $W_K$  est égal au quotient du normalisateur de  $H$  dans  $G$  sur le centralisateur de  $H$  dans  $G$ . Il en résulte que deux systèmes de racines positives dans la même  $W_K$ -orbite donnent la même structure complexe. Pour le voir, il suffit de considérer l'application suivante, qui est un holomorphisme d'inverse holomorphe :

$$\begin{aligned} G_{\mathbb{C}}/B &\rightarrow G_{\mathbb{C}}/B' \\ xB &\mapsto gxg^{-1}B' \end{aligned}$$

où  $g$  est un représentant d'un élément de  $W_K$  et  $B' = gBg^{-1}$ . On retrouve alors les six structures complexes à partir des six  $W_K$  orbites de systèmes de racines positives.

## 2. Faisceaux

Nous allons définir certains faisceaux sur les variétés de Griffiths-Schmid  $GS_{\Gamma}$  considérées précédemment, et étudier les liens entre la cohomologie de ces faisceaux et la  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologie des représentations automorphes de  $G$ .

Considérons  $\Omega$  la  $G_{\mathbb{R}}$ -orbite ouverte de  $eB$  dans  $G_{\mathbb{C}}/B$  pour un sous-groupe de Borel  $B$  de  $G_{\mathbb{C}}$ ,  $\Gamma$  un sous-groupe arithmétique de  $G$  et  $GS_{\Gamma} = \Gamma \backslash \Omega$  la variété de Griffiths-Schmid associée. Soit  $(\mu, \mathbb{C}_{\mu})$  un caractère algébrique de  $H_{\mathbb{C}}$ . On prolonge  $\mu$  à  $B$  de façon triviale. On considère alors le fibré en droite  $G_{\mathbb{C}} \times_B \mathbb{C}_{\mu}$  sur  $G_{\mathbb{C}}/B$  défini comme quotient de  $G_{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}_{\mu}$  par les relations  $(g.b, c) = (g, \mu(b).c)$  où  $g, b$  et  $c$  sont des éléments de  $G_{\mathbb{C}}, B$  et  $\mathbb{C}_{\mu}$  respectivement. Ce fibré en droites est holomorphe et  $G_{\mathbb{C}}$ -équivariant. On considère alors le faisceau des germes de sections holomorphes de ce fibré, que l'on restreint ensuite à  $\Omega$ . Le faisceau obtenu est  $G_{\mathbb{R}}$ -équivariant, et on obtient par passage au quotient un faisceau localement libre sur  $GS_{\Gamma}$  noté  $\mathcal{F}_{\mu}$ .

Une version adélique de ce faisceau est obtenue en prenant l'injection  $j : G_{\mathbb{R}}/H \hookrightarrow G_{\mathbb{C}}/B$ , puis le fibré :

$$G(\mathbb{Q}) \backslash j^*(G_{\mathbb{C}} \times_B \mathbb{C}_{\mu}) \times G(\mathbb{A}_f)/U$$

sur  $GS_U$ . On regarde alors le faisceau holomorphe associé, que l'on note également  $\mathcal{F}_{\mu}$ .

La cohomologie cohérente de ce fibré possède un lien étroit avec la  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologie des représentations automorphes, à l'instar des variétés de Shimura et de la  $(\mathfrak{p}, K)$ -cohomologie.

Soit  $\mathcal{A}_U$  l'ensemble des vecteurs de  $\mathcal{C}^{\infty}(G(\mathbb{Q}) \backslash G(\mathbb{A})/U)$  qui sont  $K$ -finis sous l'action de  $G_{\mathbb{R}}$  et  $Z(\mathfrak{g})$ -finis, où  $Z(\mathfrak{g})$  est le centre de l'algèbre enveloppante de  $\mathfrak{g}$ . La réunion des  $\mathcal{A}_U$  pour tous les  $U$  ouverts compacts de  $G(\mathbb{A}_f)$  est le  $(\mathfrak{g}, K) \times G(\mathbb{A}_f)$ -module des formes automorphes. Il se décompose en la somme directe des représentations automorphes irréductibles de  $G$ . La complétion de  $\mathcal{A}$  par rapport à la norme  $L^2$  est notée  $\mathcal{A}^2$ . Une représentation automorphe  $(\pi, \mathcal{H}^{\pi})$  peut s'écrire comme le produit tensoriel  $\mathcal{H}^{\pi} = \mathcal{H}_f^{\pi} \otimes \mathcal{H}_{\infty}^{\pi}$

d'une représentation  $\pi_f$  de  $G(\mathbb{A}_f)$  par une représentation  $\pi_\infty$  de  $G(\mathbb{R})$ . La représentation  $\pi_\infty$  est appelée composante archimédienne de  $\pi$ . En notant  $m(\pi)$  la multiplicité de  $\pi$  dans  $\mathcal{A}$ , on a la relation :

$$\mathcal{A} = \bigoplus m(\pi) (\mathcal{H}_f^\pi)^U \otimes \mathcal{H}_\infty^\pi,$$

puis en passant aux vecteurs  $U$ -invariants, on obtient :

$$\mathcal{A}_U = \bigoplus m(\pi) (\mathcal{H}_f^\pi)^U \otimes \mathcal{H}_\infty^\pi. \quad (1.4)$$

La relation entre la cohomologie du faisceau précédent et la  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologie de  $\mathcal{A}$  est donnée par la relation suivante :

$$H^*(GS_U, \mathcal{F}_\mu) = H^*(\mathfrak{b}, H, \mathcal{A}_U \otimes \mu) \quad (1.5)$$

L'article [Ha2] donne une démonstration du résultat correspondant pour les variétés de Shimura et dans le cas d'un quotient non compact. Rappelons que nous avons choisi une forme anisotropique de  $SU(2; 2)$ , évitant ainsi tout problème de compactification,  $GS_U$  étant compact. Cette démonstration se généralise dans ce cas pour les variétés de Griffiths-Schmid, et cela est fait dans [Ca].

En combinant (1.4) et (1.5), on obtient :

$$H^*(GS_U, \mathcal{F}_\mu) = \bigoplus m(\pi) \mathcal{H}_{f,U}^\pi \otimes H^*(\mathfrak{b}, H, \mathcal{H}_\infty \otimes \mu), \quad (1.6)$$

et un résultat de Casselman-Osborne [Ca-Os] montre que seules les représentations automorphes  $\pi_f \otimes \pi_\infty$  telles que  $\pi_\infty$  ait son caractère infinitésimal égal à  $\chi_{\delta-\mu}$  peuvent apparaître dans cette somme, où  $\delta$  est la demi-somme des racines positives correspondant à  $B$ .

Rappelons que la formule (1.6) est la généralisation d'une formule identique pour les variétés de Shimura, dans laquelle la  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologie est remplacée par la  $(\mathfrak{p}, K)$ -cohomologie, et les faisceaux considérés sont obtenus de façon similaire aux  $\mathcal{F}_\mu$  en considérant une représentation irréductible  $\sigma$  de  $K$ , comme nous l'avons évoqué en introduction. On peut dans ce cas obtenir des informations sur les représentations automorphes ayant pour composante archimédienne une limite de série discrète, mais aucune information sur les représentations dont la composante archimédienne est une limite dégénérée de série discrète, car celles-ci ont une  $(\mathfrak{p}, K)$ -cohomologie nulle (cf. [Mi]). Dans le prochain chapitre, nous calculons la  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologie des limites de séries discrètes dégénérées de paramètre de Harish-Chandra nul et montrons qu'elle n'est pas nulle.



## CHAPITRE 2

### Cohomologies des séries discrètes et leurs limites.

Nous nous plaçons dans le cadre archimédien dans toute cette partie.  $G$  désigne  $G_{\mathbb{R}}$ ;  $H$  et  $K$  sont ceux définis dans le chapitre précédent. L'ensemble des racines simples d'un système de racines positives sera généralement noté  $\mathcal{R}$ . Une chambre de Weyl  $C$  peut être définie par un ensemble de racines simples  $\mathcal{R}$  en prenant tous les points ayant un produit scalaire positif avec les éléments de  $\mathcal{R}$ . Il y a une bijection entre les systèmes de racines positives  $\Delta^+$ , les ensembles  $\mathcal{R}$  de racines simples et les chambres de Weyl  $C$ . Nous utiliserons indifféremment les trois notations tant qu'il n'y a pas de confusion possible.

#### 1. Les limites dégénérées de série discrète de paramètre 0 et leur cohomologie

##### 1.1. Définition et propriétés.

Une série discrète de  $G$  est une représentation irréductible telle que les coefficients matriciels associés sont des fonctions  $L^2$  sur le groupe. Ces représentations sont paramétrées, à l'action du groupe de Weyl compact près, par un élément  $\lambda$  du dual de  $i\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ , et on les note alors  $\pi(\lambda)$  ou  $\pi_{\lambda}$ . Les paramètres  $\lambda$  possibles appartiennent à un réseau de  $(i\mathfrak{h})^*$  et se situent hors des murs des chambres de Weyl. Une limite de série discrète est obtenue en "poussant" le paramètre  $\lambda$  sur les murs par un foncteur de translation de Zuckermann. La représentation obtenue est irréductible, elle n'est plus  $L^2$  mais tempérée. Ces limites de séries discrètes sont paramétrées par un couple  $(\lambda, C)$ , où  $\lambda$  appartient à au moins un mur et  $C$  est une chambre de Weyl contenant ce mur. Deux couples de paramètres donnent, à équivalence près, la même représentation si, et seulement si, ils sont conjugués par le groupe de Weyl compact. Une limite est dite dégénérée si le paramètre  $\lambda$  est orthogonal à une racine compacte. Pour de plus amples détails, voir par exemple [Kn], chapitre XII.

Les limites auxquelles nous nous intéressons sont les limites totalement dégénérées, c'est à dire celles obtenues lorsque  $\lambda$  est nul. Si une des racines compactes de  $\mathcal{R}$  (donc simple) est orthogonale à  $\lambda$ , la représentation est nulle. On doit donc choisir un système de racines simples  $\mathcal{R}$  ne contenant aucune racine compacte. Il ne reste que deux systèmes possibles, modulo le

groupe de Weyl compact :  $\mathcal{R}_1 = \{e_{32}, e_{13}, e_{24}\}$  et  $\mathcal{R}_2 = \{e_{14}, e_{42}, e_{31}\}$ .

Avant de passer au calcul de la  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologie, nous allons rappeler quelques-unes des propriétés de ces cohomologies. Soit  $\mathfrak{n}$  l'algèbre nilpotente telle que  $\mathfrak{b} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ . La  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologie d'une représentation est liée à la  $\mathfrak{n}$ -cohomologie par la relation suivante :

$$H^*(\mathfrak{b}, H, \pi \otimes \mu) = H^*(\mathfrak{n}, \pi)_{-\mu}, \quad (2.1)$$

où  $H^*(\mathfrak{n}, \pi)_{-\mu}$  désigne la composante de  $H^*(\mathfrak{n}, \pi)$  sur laquelle  $H^{\mathbb{C}}$  agit par le caractère  $-\mu$ . Rappelons que la  $\mathfrak{n}$ -cohomologie peut être calculée en utilisant le complexe de cochaînes suivant :

$$\mathcal{C}^q(\mathfrak{n}, \pi) = \text{Hom}(\Lambda^q \mathfrak{n}, \mathcal{H}_\pi), \quad (2.2)$$

muni de la différentielle

$$\begin{aligned} df(x_0, \dots, x_q) &= \sum_i (-1)^i \pi(x_i) \cdot f(x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, x_q) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j], x_0, \dots, \hat{x}_i, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_q). \end{aligned}$$

Considérons  $\mathfrak{n}' = \omega \cdot \mathfrak{n}$  avec  $\omega$  un élément du groupe de Weyl compact. Le groupe de Weyl compact étant égal au quotient du normalisateur de  $H$  dans  $K$  par le centralisateur de  $H$  dans  $K$ , on peut donc considérer un représentant  $w$  de  $\omega$  dans  $K$ . La représentation  $(w \cdot \pi) : g \mapsto \pi(w^{-1}gw)$  est équivalente à  $\pi$ . Soit  $i : \mathcal{C}^q(\mathfrak{n}, \pi) \rightarrow \mathcal{C}^q(\mathfrak{n}', w \cdot \pi)$  l'application qui à  $f$  associe  $i(f) : (x_1, \dots, x_q) \mapsto f(w^{-1}x_1w, \dots, w^{-1}x_qw)$ , alors  $i$  commute avec les différentielles des complexes que nous considérons. Ainsi  $H^*(\mathfrak{n}, \pi) \simeq H^*(\mathfrak{n}', w \cdot \pi)$ , donc  $H^*(\mathfrak{n}, \pi)$  est invariant sous l'action de  $W_K$  sur  $\mathfrak{n}$ . Pour être plus précis, on trouve que  $H^*(\mathfrak{n}, \pi)_\mu$  s'envoie sur  $H^*(\mathfrak{n}', w \cdot \pi)_{\omega \cdot \mu}$ .

Ainsi, si l'on souhaite calculer toutes les cohomologies de nos limites dégénérées, il suffit de choisir un représentant de  $\mathfrak{n}$  de chacune des 6 orbites sous l'action du groupe de Weyl compact. Une algèbre nilpotente maximale étant associée au choix d'un système de racines positives  $\Delta^+$  par la formule

$$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha, \quad (2.3)$$

on se limite aux systèmes de racines positives définies par les ensembles de racines simples<sup>1</sup>  $-\mathcal{R}_i$ , pour  $\mathcal{R}_i$  donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{e_{32}; e_{13}; e_{24}\} & \mathcal{R}_2 &= \{e_{14}; e_{42}; e_{31}\} & \mathcal{R}_3 &= \{e_{12}; e_{31}; e_{24}\} \\ \mathcal{R}_4 &= \{e_{34}; e_{13}; e_{42}\} & \mathcal{R}_5 &= \{e_{41}; e_{34}; e_{12}\} & \mathcal{R}_6 &= \{e_{23}; e_{34}; e_{12}\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

<sup>1</sup>dans l'article de Soergel [So] que nous utiliserons pour calculer ces cohomologies, l'algèbre associée au système  $\mathcal{R}_i$  correspond à celle associée à  $-\mathcal{R}_i$  dans nos notations, d'où le choix de noter  $-\mathcal{R}_i$  ici

## 1.2. Calcul de la $\mathfrak{n}$ -cohomologie.

Nous allons maintenant passer au calcul de la  $\mathfrak{n}$ -cohomologie de cette limite de série discrète. Pour cela, nous allons utiliser le résultat obtenu par Soergel dans [So]. Dans cet article, Soergel se ramène à un problème géométrique par localisation, et transforme le problème du calcul de la  $\mathfrak{n}$ -cohomologie à un calcul d'hypercohomologie d'un certain faisceau sur une sous-variété de l'espace des drapeaux  $\mathbb{D}$ . Ce calcul est ensuite ramené à celui d'un complexe formé d'espaces vectoriels dont la base est donnée par certains éléments du groupe de Weyl, et de différentielles définies à l'aide d'ordres de Bruhat sur ces éléments du groupe de Weyl.

Nous énonçons le résultat de Soergel avant de donner les définitions des divers éléments intervenant, puis nous appliquerons la méthode pour un  $\mathfrak{n}$  fixé.

### 1.2.1. Description du résultat de Soergel.

Dans ce paragraphe,  $\pi$  désigne une limite de série discrète de paramètre  $(\lambda, C)$ ,  $\mathfrak{n}$  une sous-algèbre nilpotente maximale de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  dont l'ensemble des racines positives associé comme en (2.3) est  $\Delta^+$ . On notera  $B$  la chambre de Weyl opposée à celle définie par  $\Delta^+$  et  $\delta$  la demi-somme des racines positives par rapport à  $\Delta^+$ .

**THÉORÈME 2.1.** (Soergel, [So]) *Soit  $\pi$  une limite de série discrète de paramètre  $(\lambda, C)$  de  $G$ , alors  $H^*(\mathfrak{n}, \pi)_{\mu}$  est nul sauf si  $\mu + \delta$  appartient à  $(W_K \cdot \lambda)$ . Dans ce cas, on a l'égalité :*

$$H^n(\mathfrak{n}, \pi)_{\mu} \cong \bigoplus_{c \in \mathbb{N}} H^{2c+2-n} V(A, D, c).$$

Commençons par définir les ensembles  $A$  et  $D$ , qui sont deux sous-ensembles du groupe de Weyl  $W$ . Soit  $x_0$  l'élément de  $W$  qui envoie la chambre  $B$  sur la chambre  $C$ , on pose alors  $A = W_K \cdot x_0$ . On définit  $D$  comme étant l'ensemble des éléments de  $W$  envoyant  $B$  sur une des chambres contenant  $\mu + \delta$ . Dit autrement,  $D = \{x \in W ; x^{-1}(\mu + \delta) \in B\}$ . Remarquons que lorsque  $\lambda$  est nul,  $\mu + \delta$  est aussi nul, et donc  $D$  est toujours égal à  $W$ . On définit ensuite des familles de sous-ensembles de  $A \cap D$  notés  $V(A, D, c)$ , où  $c$  est un entier naturel, qui dépendent de l'écart entre la "longueur" et la "longueur compacte" des éléments de  $A \cap D$ . Soit  $\mathcal{R}$  le système de racines simples correspondant à  $\Delta_+$ , et soit  $P$  le sous-ensemble de  $W$  formé des trois symétries associées à  $\mathcal{R}$  (dans le cas de  $SU(2, 2)$ ). Alors  $P$  engendre  $W$  et la longueur  $l(x)$  d'un élément  $x \in W$  est définie comme la longueur minimale des chaînes d'éléments de  $P$  dont le produit vaut  $x$ . Une autre façon d'interpréter  $l(x)$  est de la voir comme le nombre de chambres de Weyl séparant  $B$  de  $x \cdot B$ . Cette interprétation nous permet de donner un sens à la longueur compacte  $l_K(x)$  comme étant le nombre de murs compacts (i.e. orthogonaux à une racine compacte) séparant  $B$  et  $x \cdot B$ . On pose alors  $V(A, D, c) = \{x \in A \cap D / l(x) = l_K(x) + c\}$ .

Nous allons maintenant associer à chaque  $c$  un complexe de cochaînes de la façon suivante. Pour chaque  $V(A, D, c)$ , on considère la famille d'espaces vectoriels  $(C^k(A, D, c))_{k \in \mathbb{N}}$ , où une base de  $C^k(A, D, c)$  est formé des éléments de  $V(A, D, c)$  de longueur  $k$ . La définition des différentielles est plus fine et repose sur la notion d'ordre de Bruhat sur  $W$ , que nous rappelons brièvement.

Soit  $R$  l'ensemble des conjugués de  $P$  dans  $W$ . Pour  $v$  et  $w$  dans  $W$ , on écrit  $v \rightarrow w$  si :

$$\exists t \in R \quad / \quad vt = w \quad \text{et} \quad l(v) < l(w). \quad (2.5)$$

On dit que  $x$  est inférieur à  $y$  s'il existe une suite  $(w_n)$  telle que :

$$x \rightarrow w_1 \rightarrow \dots \rightarrow w_n \rightarrow y \quad (2.6)$$

Cette relation est appelée ordre de Bruhat et notée  $<$  (voir par exemple [Ga], §1.8). Pour  $(x, y, z, t) \in W^4$ , on dit que  $(x, y, z, w)$  forme un "carré" si  $\{y, z\} = \{v/x < v < w\}$ , si  $y \neq z$  et si  $l(x) = l(w) - 2$ . On choisit alors pour tout couple  $x < y$  tel que  $l(x) = l(y) - 1$  un signe  $s(x, y)$  de telle sorte que  $s(x, y)s(x, z)s(y, w)s(z, w) = -1$  pour tout carré  $(x, y, z, t)$ . Si deux éléments  $x$  et  $y$  ne sont pas dans un même carré, on pose  $s(x, y) = 0$ . La différentielle  $d : C^k(A, D, c) \rightarrow C^{k-1}(A, D, c)$  est définie comme la matrice  $(s(x, y))$ , où  $x$  et  $y$  parcourent l'ensemble des vecteurs de la base de  $C^k(A, D, c)$  et de  $C^{k-1}(A, D, c)$  respectivement.

On peut ainsi considérer les espaces de cohomologie de ces complexes, notés  $H^\bullet V(A, D, c)$ , et la  $\mathfrak{n}$ -cohomologie de nos séries discrètes est obtenue par la formule du théorème.

Dans notre cas, nous verrons que la valeur précise de  $s(x, y)$  ne sera pas nécessaire, nous aurons simplement besoin de savoir si  $s(x, y)$  est nul ou non.

### 1.2.2. Résultats.

**THÉORÈME 2.2.** *La  $\mathfrak{n}$ -cohomologie des limites de séries discrètes de paramètre de Harish-Chandra  $(0, C)$  est nulle si  $\mathfrak{n}$  est l'algèbre associée à  $-\mathcal{R}_3$ ,  $-\mathcal{R}_4$ ,  $-\mathcal{R}_5$  ou  $-\mathcal{R}_6$  par la formule (2.3). Pour  $\mathfrak{n}$  correspondant à  $-\mathcal{R}_1$  ou  $-\mathcal{R}_2$ , les groupes de cohomologie  $H^\bullet(\mathfrak{n}, \pi(0, C))_{-\delta}$  qui sont non nuls, pour  $\delta$  la demi-somme des racines positives associées à  $\mathfrak{n}$ , sont donnés dans le tableau suivant :*

Cas $C \leftrightarrow \mathcal{R}_1$		Cas $C \leftrightarrow \mathcal{R}_2$		(2.7)
$\mathfrak{n} \leftrightarrow -\mathcal{R}_1$	$\mathfrak{n} \leftrightarrow -\mathcal{R}_2$	$\mathfrak{n} \leftrightarrow -\mathcal{R}_1$	$\mathfrak{n} \leftrightarrow -\mathcal{R}_2$	
$H^2(\mathfrak{n}, \pi) = \mathbb{C}$	$H^3(\mathfrak{n}, \pi) = \mathbb{C}$	$H^3(\mathfrak{n}, \pi) = \mathbb{C}$	$H^2(\mathfrak{n}, \pi) = \mathbb{C}$	
$H^3(\mathfrak{n}, \pi) = \mathbb{C}$	$H^4(\mathfrak{n}, \pi) = \mathbb{C}$	$H^4(\mathfrak{n}, \pi) = \mathbb{C}$	$H^3(\mathfrak{n}, \pi) = \mathbb{C}$	

Avant de passer à la preuve de ce théorème, remarquons que les deux limites de séries discrètes apparaissant sont contragrédiente l'une de l'autre

(on a en effet  $\mathcal{R}_1 = -\mathcal{R}_2$  à l'action du groupe de Weyl compact près). La dualité de Serre, à  $\mathfrak{n}$  fixé, nous donne donc les isomorphismes suivants :

$$H^k(\mathfrak{n}_{-\mathcal{R}_i}, \pi_{\mathcal{R}_1})_{-\delta} \simeq H^{n-k}(\mathfrak{n}_{-\mathcal{R}_i}, \pi_{\mathcal{R}_2})_{-\delta},$$

avec les notations évidentes (voir 2 pour une explication plus précise). On retrouve bien cette dualité dans le résultat.

DÉMONSTRATION: Nous allons détailler le calcul dans un cas particulier, les autres se traitant de façon similaire. On se place dans le cas où la chambre  $C$  correspond à  $\mathcal{R}_1$  et l'algèbre nilpotente  $\mathfrak{n}$  est donnée comme étant la somme des espaces propres des racines du système positif engendré par  $-\mathcal{R}_1$ . Le système de racines positives  $\Delta^+$  est dans ce cas  $\{e_{23}, e_{31}, e_{42}, e_{43}, e_{21}, e_{41}\}$ , et la demi-somme est  $\delta = e_{41} + \frac{1}{2}(e_{43} + e_{21})$ .

Pour  $\lambda = 0$ , un seul  $\mu$  doit être envisagé :  $\mu = -\delta$ . Afin de simplifier les notations, nous identifions  $W$  avec  $\mathcal{S}_4$  en associant à la symétrie liée à  $e_{ij}$  la transposition  $(ij)$ . On a alors  $P = \{(23), (31), (42)\}$ .

La figure 2-1. suivante montre l'enveloppe complexe du système de racines de  $G$  ainsi que l'image sur cette enveloppe des chambres de Weyl  $C$  et  $B$ , ici confondues, représentées en hachuré. Le vecteur  $\delta$  n'y apparaît pas : il appartient à la chambre de Weyl opposée.

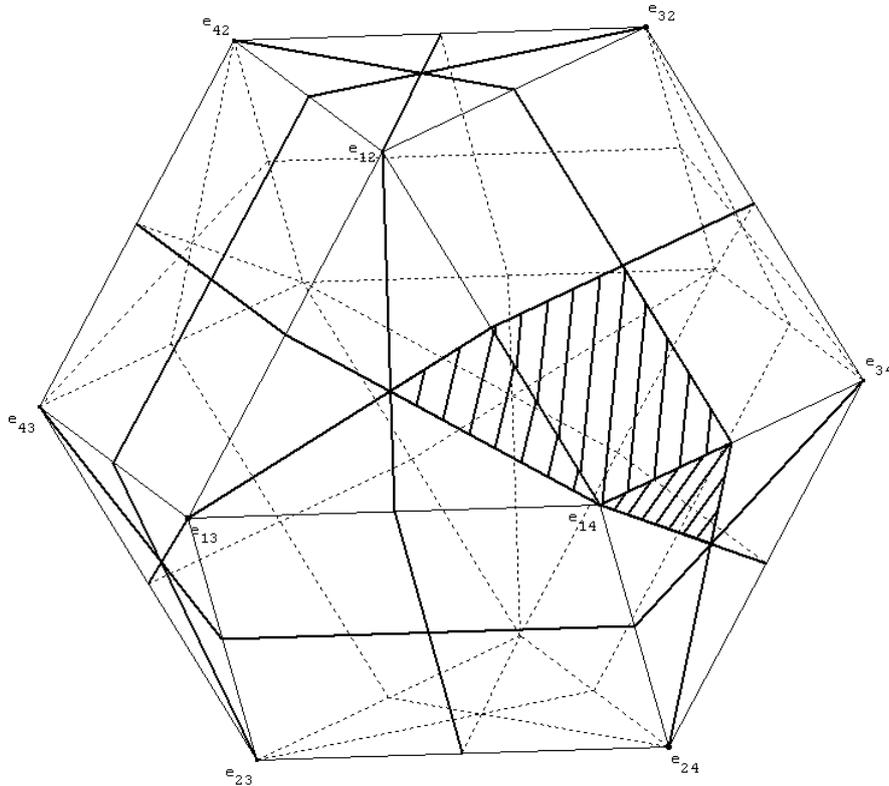


FIG. 2-1. Chambres de Weyl  $C$  et  $B$

On voit immédiatement que  $A = W_K = \{(12), (34), (12)(34), id\}$  et  $D = W$ . Il ne reste plus qu'à calculer les longueurs des éléments de  $W_K$ . Le tableau suivant donne le résultat :

	$id$	$(12)$	$(34)$	$(12)(34)$
$l(x)$	0	3	3	4
$l_K(x)$	0	1	1	2

On en déduit que

$$V(A, D, 0) = \{id\}$$

$$V(A, D, 2) = \{(12), (34), (12)(34)\}$$

et les autres termes sont vides. Le complexe  $\mathcal{C}^*V(A, D, 0)$  est donc de la forme :

$$0 \leftarrow \mathbb{C} \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow \dots$$

D'où  $H^0V(A, D, 0) = \mathbb{C}$  et les autres termes sont nuls.

Le complexe  $\mathcal{C}^*V(A, D, 2)$  est un peu plus compliqué :

$$0 \leftarrow 0 \leftarrow 0 \leftarrow 0 \xleftarrow{d_2} \mathbb{C}^2 \xleftarrow{d_3} \mathbb{C} \xleftarrow{d_4} 0 \leftarrow \dots$$

On voit que  $(12) \rightarrow (12)(34)$  car  $(34) = (24)(23)(24)^{-1}$  appartient à  $R$ . De même on voit que  $(132) \rightarrow (12)$  et  $(132) \rightarrow (1342) \rightarrow (12)(34)$ . On vérifie que  $(21)$  et  $(1342)$  sont les seuls éléments de longueur 3 compris entre  $(132)$  et  $(12)(34)$  au sens de l'ordre de Bruhat. Donc ces quatre éléments forment un carré, d'où  $s((12), (12)(34)) \neq 0$ . L'application  $d_3$  étant non nulle, on trouve que  $H^3V(A, D, 2) = \mathbb{C}$  et les autres termes sont nuls.

Finalement, en appliquant la formule du théorème, on obtient :

$$\begin{aligned} H^2(\mathfrak{n}, \pi)_{-\delta} &= \mathbb{C} \\ H^3(\mathfrak{n}, \pi)_{-\delta} &= \mathbb{C} \end{aligned}$$

□

Considérons le faisceau  $\mathcal{F}_\mu$  où  $\mu$  est la demi-somme des racines positives de  $\mathcal{R}_1$  ou  $\mathcal{R}_2$ , sur la variété de Griffiths-Schmid  $GS_U$  définie par (1.1), avec  $\Omega$  correspondant à  $-\mathcal{R}_1$  et  $-\mathcal{R}_2$  respectivement. D'après l'équation (1.6), combinée avec les résultats du théorème précédent, une représentation auto-morphe du type  $\pi_f^U \otimes \pi(0, \mathcal{R}_i)$ , pour  $i = 1, 2$ , intervient de façon non nulle dans la cohomologie du faisceau  $\mathcal{F}_\mu$  pour  $U$  suffisamment petit.

Rappelons que dans le paragraphe 1, deux structures complexes ont été désignées comme jouant un rôle particulier :  $\Omega_{(-+-)}$  et  $\Omega_{(+-+)}$ . On voit que ce sont celles correspondant respectivement à  $-\mathcal{R}_1$  et  $-\mathcal{R}_2$  par (1.3). La dualité par rapport à la forme hermitienne définissant  $G$  donne une application anti-holomorphe de  $\Omega_{(-+-)}$  dans  $\Omega_{(+-+)}$ .

Dans la suite, nous ne considérons que l'algèbre  $\mathfrak{n}$  associée au système  $-\mathcal{R}_1$  et la chambre de Weyl  $C$  associée au système  $\mathcal{R}_1$ . On note  $\pi_1$  la limite dégénérée de série discrète définie par le couple  $(0, \mathcal{R}_1)$ . Le faisceau  $\mathcal{F}_\mu$

considéré est celui défini à partir de  $\Omega_{(-+-)}$  et pour  $\mu$  égal à

$$\mu_1 = \delta = e_{41} + \frac{1}{2}(e_{21} + e_{43})$$

(demi-somme des racines positives définissant  $\mathfrak{n}$ ). Ainsi  $\pi_1$  apparaît dans la cohomologie de  $\mathcal{F}_{\mu_1}$ .

## 2. Représentations automorphes de type à l'infini une série discrète

### 2.1. Cohomologie des séries discrètes.

Les groupes de  $\mathfrak{n}$ -cohomologie de séries discrètes sont donnés par un résultat bien connu de Schmid [Sc], reposant sur la dégénérescence de la suite spectrale de Hochschild-Serre ([Ho-Se]) associée au complexe  $(Hom(\Lambda^\bullet \mathfrak{n}, \pi_2), d)$ . Seuls les  $K$ -types de la série discrète et l'action de  $K$  sont nécessaires pour calculer la cohomologie. Dans le cas des limites dégénérées de séries discrètes, une difficulté supplémentaire apparaît car cette suite spectrale ne dégénère plus à la première feuille. Les  $K$ -types ne suffisent alors plus pour calculer les feuilles suivantes de la suite spectrale, imposant l'utilisation du résultat de Soergel. Nous verrons plus tard que cette suite spectrale nous fournira tout de même de précieuses informations sur le groupe de cohomologie des limites dégénérées, à condition d'avoir quelques précisions sur la façon dont  $G$  agit sur les  $K$ -types.

Nous calculons ici les groupes de cohomologies des séries discrètes en fonction de la chambre de Weyl à laquelle le paramètre  $\lambda$  appartient, en appliquant le théorème suivant.

**THÉORÈME 2.3.** (Schmid) *Pour tout  $\mu$  caractère entier de  $\mathfrak{h}^{\mathbb{C}}$ ,  $H^p(\mathfrak{n}, \pi(\lambda))_{-\mu}$  s'annule pour tout  $p$ , sauf si  $\mu$  appartient à  $\delta - (W_k \cdot \lambda)$ . Si  $\mu = \delta - w\lambda$  pour  $w \in W_k$ , alors  $H^p(\mathfrak{n}, \pi(\lambda))_{-\mu}$  est nul sauf pour*

$$p = \#\{\alpha \in -\mathcal{R}_1 \cap \Delta_k : (\alpha, -\mu + \delta) < 0\} + \#\{\alpha \in -\mathcal{R}_1 \cap \Delta_n : (\alpha, -\mu + \delta) > 0\}. \quad (2.8)$$

*Dans ce cas, cet espace est de dimension un.*

Nous allons exprimer la  $\mathfrak{n}$ -cohomologie d'une série discrète par rapport au paramètre  $\mu$ . Ce dernier doit être lié à  $\lambda$  par la formule  $\mu = \delta - w\lambda$  pour  $w \in W_k$  d'après le théorème, et la valeur du  $p$  pour lequel il y a de la cohomologie est donné par la chambre de Weyl à laquelle  $-\mu + \delta$  appartient. Il faut donc considérer les 24 chambres de Weyl possibles. Nous en avons déjà 12 explicitées avec les systèmes  $\pm \mathcal{R}_i$ , pour  $i = 1 \dots 6$ . Posons :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}'_1 &= \{e_{42}; e_{14}; e_{23}\} & \mathcal{R}'_2 &= \{e_{13}; e_{32}; e_{41}\} & \mathcal{R}'_3 &= \{e_{12}; e_{41}; e_{23}\} \\ \mathcal{R}'_4 &= \{e_{43}; e_{14}; e_{32}\} & \mathcal{R}'_5 &= \{e_{31}; e_{43}; e_{12}\} & \mathcal{R}'_6 &= \{e_{24}; e_{43}; e_{12}\} \end{aligned} \quad (2.9)$$

On obtient ainsi les 12 restantes. Le tableau suivant donne le degré  $p$  pour lequel  $H^p(\mathfrak{n}, \pi(\lambda))_{-\mu}$  est non nul, en fonction de la chambre de Weyl à laquelle  $-\mu + \delta$  appartient.

$-\mu + \delta$	$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_2$	$\mathcal{R}_3$	$\mathcal{R}_4$	$\mathcal{R}_5$	$\mathcal{R}_6$	$-\mathcal{R}_1$	$-\mathcal{R}_2$	$-\mathcal{R}_3$	$-\mathcal{R}_4$	$-\mathcal{R}_5$	$-\mathcal{R}_6$
$p$	2	4	3	3	5	3	4	2	3	3	1	3
$-\mu + \delta$	$\mathcal{R}'_1$	$\mathcal{R}'_2$	$\mathcal{R}'_3$	$\mathcal{R}'_4$	$\mathcal{R}'_5$	$\mathcal{R}'_6$	$-\mathcal{R}'_1$	$-\mathcal{R}'_2$	$-\mathcal{R}'_3$	$-\mathcal{R}'_4$	$-\mathcal{R}'_5$	$-\mathcal{R}'_6$
$p$	3	3	4	2	4	2	3	3	2	4	2	4

(2.10)

## 2.2. Cup-produit de classes de cohomologies.

Pour des raisons que nous détaillerons ultérieurement, on cherche à définir une application entre le produit tensoriel de la  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologie de la limite dégénérée  $\pi_1$  précédente et de la  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologie d'une série discrète  $\pi_2$  bien choisie, à valeur dans la  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologie d'une autre série discrète  $\pi_3$  bien choisie :

$$H^p(\mathfrak{b}, H, \pi_1 \otimes \mu_1) \times H^q(\mathfrak{b}, H, \pi_1 \otimes \mu_2) \rightarrow H^{p+q}(\mathfrak{b}, H, \pi_3 \otimes \mu_3). \quad (2.11)$$

Cette application doit être obtenue en prenant le cup produit des deux espaces de cohomologie de gauche, donnant ainsi un élément de

$$H^{p+q}(\mathfrak{b}, H, (\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2) \otimes (\mu_1 \otimes \mu_2)),$$

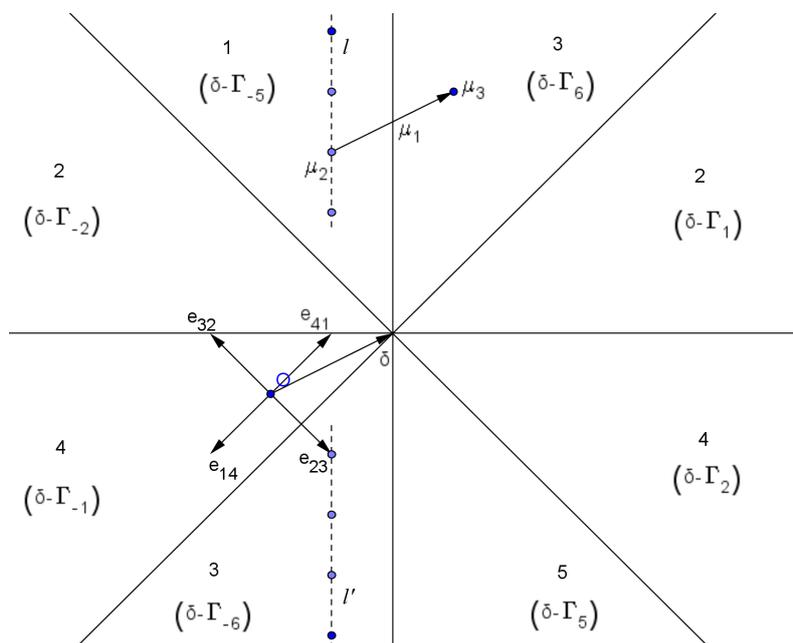
où  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$  désigne le produit scalaire complété de  $\pi_1$  avec  $\pi_2$ . A condition que  $\pi_3$  soit un facteur direct fermé de  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ , on compose ensuite avec la projection de  $(\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2) \otimes (\mu_1 \otimes \mu_2)$  sur  $\pi_3 \otimes \mu_3$ .

De cette construction résulte immédiatement que  $\mu_3$  doit être la somme de  $\mu_1$  et  $\mu_2$ . Selon (2.7), la représentation  $\pi_1$  n'a de cohomologie qu'en degrés deux et trois. Rappelons que  $\mu_1$  est égal à la demi-somme  $\delta$  des racines positives associées à  $\mathfrak{n}$ . Il faut donc choisir un caractère  $\mu_2$  tel que  $H^{p+i}(\mathfrak{n}, \pi(w(\delta - (\mu_2 + \delta))))_{-(\mu_2 + \delta)}$  soit non nul pour  $i = 2$  ou pour  $i = 3$ .

D'après le tableau (2.10), et comme on le voit également d'après le résultat général de Schmid, le degré de cohomologie des séries discrètes change d'au plus 1 lorsque  $-\mu + \delta$  "traverse" un mur. Il faut donc que  $\mu_2$  et  $\mu_2 + \delta$  soient séparés par 2 murs. Sachant que  $\mu_2$  doit appartenir à un réseau, la norme de  $\delta$  réduit considérablement les possibilités, et il ne reste plus que deux demi-droites possibles pour  $\mu_2$ . La figure 2-2 représente le plan contenant  $e_{41}$  et  $e_{23}$ . Les deux demi-droites en question sont  $l$  et  $l'$ . Les autres droites de la figure sont les murs des chambres de Weyl décalés par  $-\delta$ . Les numéros sont les degrés de cohomologie des séries discrètes apparaissant en fonction de la position de  $\mu$  et les  $\delta - \mathcal{R}_i$  indiquent que l'on se trouve dans  $\delta - C_i$  où  $C_i$  est la chambre de Weyl associée au système  $\mathcal{R}_i$ .

Le cas  $i = 3$  ne se présente pas car les degrés concernés pour  $\pi_2$  et  $\pi_3$  sont alors 2 et 5 respectivement, et aucune chambre de Weyl, translatée par  $\delta$ , n'intersecte la chambre donnant de la cohomologie de degré 5.

Dans la suite, on se place dans le cas  $\mu_2 \in l$ , c'est-à-dire  $\mu_2 = e_{41} + \frac{k}{2}(e_{32} + e_{41})$ , avec  $k$  un entier supérieur ou égal à 2.

FIG. 2-2. Positions de  $\mu_2$  et  $\mu_3$ 

### 2.3. $\pi_3$ est un facteur direct fermé de $\pi_1 \otimes \pi_2$ .

Revenons sur la condition que nous avons imposée concernant la définition de l'application cup produit :  $\pi_3$  doit être un facteur direct fermé de  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ . Les articles de Li [Li] et Harris-Li [Ha-Li] donnent un critère permettant d'avoir ce résultat. La méthode consiste dans un premier temps à considérer le produit tensoriel  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$  comme la restriction d'une représentation de  $G \times G$  à la diagonale  $\{(g, g), g \in G\}$ , qui est bien sûr isomorphe à  $G$ . Cette représentation est le produit tensoriel extérieur complété  $\pi_1 \boxtimes \pi_2$  de  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . L'avantage est que cette représentation est bien connue : il s'agit d'une limite de série discrète. La preuve repose sur les fonctions sphériques de  $\pi_1 \boxtimes \pi_2$  et  $\pi_3$  associées à leurs  $(K \times K)$ -types et  $K$ -types minimaux et la théorie de Flensted-Jensen (voir [F1]), et se conclut par l'existence de coefficients matriciels de  $\pi_3$  et  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$  non orthogonaux. Nous énonçons ce résultat pour des hypothèses restreintes.

**THÉORÈME 2.4.** *Soit  $G$  un groupe réductif connexe à centre compact. On note également  $G$  le groupe diagonal  $\{(g, g), g \in G\}$  dans  $G \times G$ . Soit  $K$  un sous-groupe compact maximal de  $G$ . On considère une limite de série discrète  $\Pi$  de  $G \times G$  de  $(K \times K)$ -type minimal  $\tau$ . Alors une série discrète  $\pi$  de  $G$  de  $K$ -type minimal  $\sigma$  est équivalente à une sous-représentation de  $\Pi|_G$  si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- (a) *Les restrictions des coefficients matriciels de  $\Pi$  à  $G$ , associés à un sous-ensemble dense de vecteurs, sont des fonctions  $L^2$ .*
- (b)  *$\sigma$  apparaît dans la restriction de  $\tau$  à  $K$ .*

Nous allons donc appliquer ce théorème pour  $\Pi = \pi_1 \boxtimes \pi_2$  et  $\pi = \pi_3$ . La première condition sera toujours satisfaite, quel que soit le choix de  $\pi_2$ , car le produit d'une fonction  $L^2$  et d'une fonction  $L^{2+\varepsilon}$  est  $L^{1+\varepsilon}$ .

En revanche, la seconde condition dépend du choix des paramètres de Harish-Chandra  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  des séries discrètes  $\pi_2$  et  $\pi_3$  respectivement, car les  $K$ -types minimaux en dépendent. Rappelons qu'un résultat de Schmid montre que le  $K$ -type minimal d'une série discrète (ou d'une limite de série discrète)  $\pi(\lambda, C)$  a pour plus haut poids  $\Lambda = \lambda + \delta - 2\delta_K$  où  $\delta$  est la demi-somme des racines positives correspondant à  $C$  et  $\delta_K$  la demi-somme des racines positives compactes. On notera également  $\Lambda$  ce  $K$ -type tant qu'il n'y aura pas d'ambiguïté possible.

On choisit  $\lambda_2 = -\mu_2 + \delta$  et, afin de simplifier les notations,  $\lambda_3 = (12)(34)(\delta - \mu_3)$  (rappelons que le choix du paramètre de Harish-Chandra se fait à l'action du groupe de Weyl compact près), ainsi  $\lambda_3$  est dans la même chambre de Weyl que  $\lambda_2$  : la chambre de  $-\mathcal{R}_5$ . Les calculs des  $K$ -types minimaux donnent le résultat suivant :

$$\begin{aligned}\Lambda_1 &= \frac{1}{2}(e_{14} + e_{23}) \\ \Lambda_2 &= \lambda_2 + e_{14} + \frac{1}{2}(e_{23} + e_{14}) = \frac{k+2}{2}(e_{14} + e_{23}) \\ \Lambda_3 &= \lambda_3 + e_{14} + \frac{1}{2}(e_{23} + e_{14}) = \frac{k+3}{2}(e_{14} + e_{23})\end{aligned}$$

Tous les  $K$ -types minimaux se situant à l'intersection des murs compacts, ce sont donc des représentations de dimension 1 de  $K$ . De plus, on voit que  $\Lambda_1 + \Lambda_2 = \Lambda_3$ , ce qui implique que la restriction du produit tensoriel externe de  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  à  $K$ , qui n'est autre que  $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$ , est la représentation  $\Lambda_3$ . Étant donné que le  $(K \times K)$ -type minimal de  $\pi_1 \boxtimes \pi_2$  est le produit externe de  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$ , la seconde condition est vérifiée. On peut alors déduire de tout ce qui précède la proposition suivante :

**PROPOSITION 2.5.** *Soient  $\pi_1$  la limite dégénérée de série discrète de paramètre  $(0, \mathcal{R}_1)$ ,  $\pi_2$  et  $\pi_3$  les séries discrètes de paramètre*

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(e_{41} + e_{23}) + \frac{k}{2}(e_{14} + e_{23}) \text{ et } \lambda_3 = \frac{1}{2}(e_{41} + e_{23}) + \frac{k+1}{2}(e_{14} + e_{23})$$

*respectivement. Alors la représentation  $\pi_3$  apparait comme facteur direct fermé du produit tensoriel de  $\pi_1$  avec  $\pi_2$ .*

*Soient  $\mathfrak{n}$  l'algèbre nilpotente correspondant à la chambre  $-\mathcal{R}_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  et  $\mu_3$  définis par  $\mu_1 = \delta$ ,  $\mu_2 = \delta - \lambda_2$  et  $\mu_3 = \delta - (12)(34)\lambda_3$ . Alors l'application cup-produit voulue en (2.11) :*

$$H^2(\mathfrak{n}, \pi_1)_{-\mu_1} \times H^1(\mathfrak{n}, \pi_2)_{-\mu_2} \rightarrow H^3(\mathfrak{n}, \pi_3)_{-\mu_3} \quad (2.12)$$

*est bien définie.*

*De plus, les représentations automorphes de composante archimédienne  $\pi_1$  apparaissent dans la cohomologie du faisceau  $\mathcal{F}_{\mu_1}$ .*

Remarquons que si nous avons considéré l'autre demi-droite de la figure 2-2, l'argument précédent n'aurait pas fonctionné, car dans ce cas l'égalité  $\Lambda_1 + \Lambda_2 = \Lambda_3$  n'est pas vérifiée.

L'objectif du prochain chapitre est de prouver que cette application est définie de façon unique (nous prouverons pour cela que  $\pi_3$  est de multiplicité 1 dans  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ ) et non nulle.



## CHAPITRE 3

### Cup produit des représentations archimédiennes

Dans cette partie, nous prouvons que l'application définie par cup-produit au chapitre précédent est une bijection. Dans un premier temps, nous allons prouver que la série discrète  $\pi_3$  qui, comme nous l'avons vu, est un facteur direct fermé de  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ , n'apparaît qu'une seule fois (i.e. est de multiplicité 1). La suite de la preuve repose alors sur la suite spectrale de Hochschild-Serre qui, comme nous le verrons, dégénère à la troisième feuille.

#### 1. Multiplicité de $\pi_3$ dans $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$

Les représentations  $\pi_1$ ,  $\pi_2$  et  $\pi_3$  sont celle définies auparavant. Rappelons que les  $K$ -types minimaux  $\Lambda_1$ ,  $\Lambda_2$  et  $\Lambda_3$  de ces représentations sont de dimension 1.

Nous allons prouver que la représentation  $\pi_3$  n'apparaît qu'une seule fois dans  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ , et que la projection qui en résulte sur le facteur correspondant à  $\pi_3$  dans  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$  envoie le produit tensoriel des  $K$ -types minimaux  $\Lambda_1$  et  $\Lambda_2$  respectivement de  $\pi_1$  et  $\pi_2$  sur celui de  $\pi_3$  (soit  $\Lambda_3$ ).

Soit  $X_{32}$  la matrice élémentaire ne comportant que des 0 sauf à la troisième ligne et la deuxième colonne. Notons  $\mathfrak{g}_\alpha$  l'espace propre associé à une racine  $\alpha$ , ainsi  $X_{32}$  appartient à  $\mathfrak{g}_{e_{32}}$ . Pour prouver que  $\pi_3$  n'apparaît qu'une fois, nous allons démontrer les deux propositions suivantes.

**PROPOSITION 3.1.** *Le  $K$ -type minimal  $\Lambda_3$  de  $\pi_3$  est annulé par l'action de  $X_{32}$ .*

Nous verrons que la démonstration est simple, il suffit pour cela de connaître les  $K$ -types de  $\pi_3$ .

**PROPOSITION 3.2.** *L'ensemble des vecteurs de la composante  $\Lambda_3$ -isotypique de  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$  (considérée en tant que  $K$ -module) qui sont annulés par  $X_{32}$  forment un espace vectoriel de dimension 1.*

Lors de la preuve de ces propositions, nous aurons besoin de la structure des  $K$ -types des trois représentations considérées, de voir quels produits tensoriels des  $K$ -types de  $\pi_1$  et  $\pi_2$  contiennent  $\Lambda_3$  comme sous-représentation et

de connaître précisément l'image de certains vecteurs de l'espace de  $\pi_2$  par  $X_{32}$ . Lors de la preuve, nous verrons que la projection du produit tensoriel de  $\Lambda_1$  par  $\Lambda_2$  sur cet espace de dimension un est surjective.

En combinant ces deux propositions et le fait que  $\pi_3$  apparaisse au moins une fois dans  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$  (c.f. Proposition 2.5), on obtient le théorème suivant :

**THÉORÈME 3.3.** *La représentation  $\pi_3$  n'apparaît qu'une seule fois dans le produit tensoriel complété  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ . De plus, la projection de  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$  sur  $\pi_3$  envoie  $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$  sur  $\Lambda_3$ .*

La preuve s'organise comme suit. Nous calculons précisément en premier lieu les  $K$ -types des  $\pi_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$ , avec comme conséquence immédiate la proposition 3.1. Nous étudions ensuite les produits tensoriels des  $K$ -types de  $\pi_1$  et  $\pi_2$ , et en déduisons la liste de ceux contenant  $\Lambda_3$ . L'étape suivante consiste à expliciter complètement l'action de la représentation  $\pi_2$  afin d'en déduire l'action de  $X_{32}$  sur les  $K$ -types de  $\pi_2$  apparaissant dans l'étape précédente (théorème 3.7). Bien que nous n'ayons pas de construction explicite pour  $\pi_1$ , on cherche ensuite à obtenir des informations sur l'action de  $X_{32}$  par  $\pi_1$ , données dans le théorème 3.12. Nous avons alors suffisamment d'éléments pour prouver la proposition 3.2, suivie du théorème 3.3.

### 1.1. Calcul des $K$ -types de $\pi_1$ , $\pi_2$ et $\pi_3$ .

La conjecture de Blattner, prouvée par Hecht-Schmid [**He-Sc**], décrit les multiplicités des  $K$ -types des séries discrètes. Nous avons précédemment décrit les limites de séries discrètes comme la représentation obtenue en "poussant" les caractères infinitésimaux des séries discrètes par un foncteur tensoriel de Zuckerman. Afin de voir que cette formule reste valable pour les limites de séries discrètes, une autre description des représentations  $\pi(\lambda, C)$  est nécessaire. Considérons le foncteur d'induction cohomologique  $\mathcal{L}_{\mathfrak{b}}$ , où  $\mathfrak{b}$  est le sous groupe de Borel défini par la chambre de Weil  $C$ , et appliquons le au  $(\mathfrak{h}, H)$ -module  $(\mu, \mathbb{C}_{\mu})$  de dimension 1 tel que  $\mu = \lambda - \delta_n$  ( $\delta_n$  étant la demi-somme des racines positives non compactes données par  $C$ ). Dans [**Kn-Vo**], la représentation induite obtenue est notée  $\mathcal{A}_{\mathfrak{b}}(\mu)$ . Le  $(\mathfrak{g}, K)$ -module associé à  $\mathcal{A}_{\mathfrak{b}}(\mu)$  étant infinitésimalement unitaire (théorème 9.68 de [**Kn-Vo**]), il existe une représentation unitaire ayant le même  $(\mathfrak{g}, K)$ -module. Le chapitre XI. 8. de [**Kn-Vo**] permet d'affirmer que cette représentation est la limite de série discrète  $\pi(\lambda, C)$ . Il suffit ensuite d'appliquer le corollaire 5.105 de [**Kn-Vo**] et la discussion qui suit pour pouvoir affirmer que la formule de Blattner reste valable pour les limites (éventuellement dégénérées) de séries discrètes. Nous rappelons cette formule avant d'effectuer les calculs.

Soit  $\Delta_n^+$  l'ensemble des racines non compactes définies par la chambre de Weyl de la (limite de) série discrète. Pour  $\tau$  un élément du dual de  $i\mathfrak{h}$ , notons  $Q(\tau)$  le nombre de façons d'écrire  $\tau$  comme combinaison linéaire à coefficients entiers positifs d'éléments de  $\Delta_n^+$ . Alors la multiplicité de la représentation

de plus haut poids  $\mu$  dans la (limite de) série discrète de paramètre  $(\lambda, \Delta^+)$  est donnée par

$$\sum_{w \in W_K} \varepsilon(w) \cdot Q(w(\mu + \delta_K) - \lambda - \delta_n) \quad (3.1)$$

où  $\varepsilon(w)$  désigne la signature de  $w$  et où  $\delta_k$  et  $\delta_n$  sont respectivement les demi-sommes des racines positives compactes et non compactes relativement à  $\Delta^+$ .

Pour la représentation  $\pi_1$ , rappelons que le système (à l'action du groupe de Weyl près) de racines positives est  $\Delta^+ = \{e_{32}, e_{13}, e_{24}, e_{14}, e_{34}, e_{12}\}$ , les racines non compactes sont  $\Delta_n^+ = \{e_{32}, e_{13}, e_{24}, e_{14}\}$ . Afin de calculer  $Q(\tau)$  dans ce cas, nous allons exprimer les vecteurs dans la base  $\{e_{32}, e_{13}, e_{24}\}$ . Remarquons que  $e_{14}$  est la somme des trois vecteurs de la base, de sorte que le vecteur de coordonnée  $(1, 1, 1)$  dans cette base a deux façons de s'exprimer avec les racines de  $\Delta_n^+$ . Si  $(a, b, c)$  sont les coordonnées de  $\tau$  dans cette base, on déduit de ce qui précède l'égalité suivante :

$$Q(a, b, c) = Q(ae_{32} + be_{13} + ce_{24}) = \begin{cases} \min(a, b, c) + 1 & \text{si } a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il reste à calculer  $\sum_{w \in W_K} \varepsilon(w) \cdot Q(w(\mu + \delta_K) - \lambda_1 - \delta_n)$ . On désigne par  $\text{Cone}(\Delta_n^+)$

l'ensemble des vecteurs obtenus comme combinaison linéaire à coefficients positifs entiers d'éléments de  $\Delta_n^+$ . Sachant que  $\Lambda_1$  est le  $K$ -type minimal et que  $e_{32}, e_{13}$  et  $e_{24}$  sont les racines simples de  $\Delta^+$ , tout  $\mu$  en dehors du cône  $\Lambda_1 + \text{Cone}(\Delta_n^+)$  a une multiplicité nulle. Soit  $\mu = (a, b, c) + \Lambda_1$ , avec  $a, b$  et  $c$  positifs, un élément de ce cône. La somme (3.1) est formée de quatre termes, dont voici le détail :

- Cas  $w = 1$  : Dans la base ci-dessus on obtient  $Q(\mu - \Lambda_1) = \min(a, b, c) + 1$ .
- Cas  $w = (12)$  : Dans la base ci-dessus on obtient  $Q((12)(\mu + \delta_K) - \lambda_1 - \delta_n) = Q(c - b - 1, c - a - 1, c) = \min(c - b, c - a)$ .
- Cas  $w = (34)$  : Dans la base ci-dessus on obtient  $Q((34)(\mu + \delta_K) - \lambda_1 - \delta_n) = Q(b - c - 1, b - a - 1, b) = \min(b - c, b - a)$ .
- Cas  $w = (12)(34)$  : Dans la base ci-dessus on obtient  $Q((12)(34)(\mu + \delta_K) - \lambda_1 - \delta_n) = Q(-a - 2, c - a - 1, b - a - 1) = 0$ .  
Ce terme est toujours nul,  $-a - 2$  étant toujours négatif.

Il faut maintenant distinguer tous les cas possibles. Les plus hauts poids doivent appartenir à la chambre "compacte" formée des vecteurs de produit scalaire positif avec les racines compactes positives, ainsi qu'à  $\Lambda_1 + \text{Cone}(\Delta_n^+)$ , ce qui se traduit par la condition :  $a \geq |b - c|$ .

- Cas  $b = c$  :
  - Si  $c = b = a$ , alors  $m(\mu) = a + 1$
  - Si  $c = b < a$ , alors  $m(\mu) = b + 1$ .
  - Si  $c = b > a$ , alors  $m(\mu) = a + 1$ .
- Cas  $c < b$ 
  - Si  $c < b < a$ , alors  $m(\mu) = c + 1$ .
  - Si  $c < b = a$ , alors  $m(\mu) = c + 1$ .
  - Si  $c < a < b$ , alors  $m(\mu) = c - b + a + 1$ .

- Si  $c = a < b$ , alors  $m(\mu) = 2c + 1 - b$ .
- Si  $a < c < b$ , alors  $m(\mu) = c + 1 - b + a$ .
- Cas  $c > b$ 
  - Si  $b < c < a$ , alors  $m(\mu) = b + 1$ .
  - Si  $b < c = a$ , alors  $m(\mu) = b + 1$ .
  - Si  $b < a < c$ , alors  $m(\mu) = b + 1 - c + a$ .
  - Si  $b = a < c$ , alors  $m(\mu) = b + 1 - c + a$ .
  - Si  $a < b < c$ , alors  $m(\mu) = b + 1 - c + a$ .

On en déduit la proposition suivante :

PROPOSITION 3.4. *Tous les poids appartenant au cône  $\Lambda_1 + \text{Cone}(\Delta_n^+)$  sont des plus hauts poids de  $K$ -types de  $\pi_1$ . La multiplicité du  $K$ -type de plus haut poids  $\Lambda_1 + a.e_{32} + b.e_{13} + c.e_{24}$  est soit  $a - |c - b| + 1$  si  $a \neq \max(a, b, c)$ , soit  $\min(a, b, c) + 1$ .*

Le cas de  $\pi_2$  et  $\pi_3$  se traite de façon similaire. On obtient le résultat suivant :

PROPOSITION 3.5. *Les  $K$ -types de  $\pi_2$  sont ceux de plus haut poids  $\Lambda_2 + (a - b)e_{14} + be_{23}$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers naturels vérifiant  $b \leq a \leq 2b$ . Ils sont tous de multiplicité 1. Les poids des  $K$ -types de  $\pi_3$  sont ceux de  $\pi_2$  translatés par  $\frac{1}{2}(e_{14} + e_{23})$ .*

Les figures 3-1 et 3-2 représentent le plan engendré par  $e_{14}$  et  $e_{32}$ . Sur la figure 3.1 apparaissent les plus hauts poids des  $K$ -types de  $\pi_3$ . Ils sont tous contenus dans ce plan. Sur la figure 3-2 apparaît une partie des plus hauts poids des  $K$ -types de  $\pi_1$  (situés dans la partie grisée) et ceux de  $\pi_2$ .

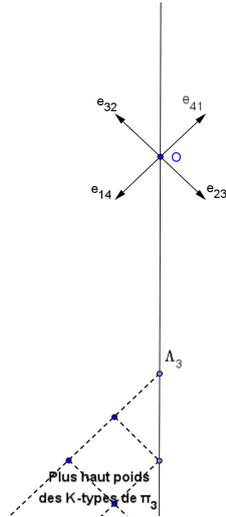


FIG. 3-1.  $K$ -types de  $\pi_3$

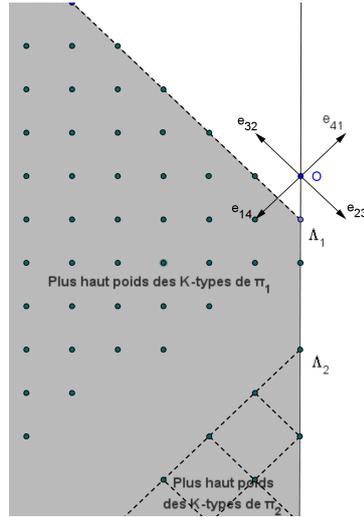


FIG. 3-2.  $K$ -types de  $\pi_1$  et de  $\pi_2$

On est désormais en mesure de prouver la proposition 3.1.

DÉMONSTRATION (PROPOSITION 3.1) : Le vecteur  $X_{32}$  appartient à  $\mathfrak{g}_{e_{32}}$ . Ainsi un vecteur de l'espace de la représentation  $\pi_3$  de poids  $\mu$  est envoyé par  $X_{32}$  sur un vecteur de poids  $\mu + e_{32}$ . Il suffit alors de voir qu'il n'existe pas de vecteur de poids  $\Lambda_3 + e_{32}$  dans  $\pi_3$ .

Nous connaissons les plus hauts poids des  $K$ -types de  $\pi_3$ , les autres poids de chaque  $K$ -type sont obtenus en ajoutant une combinaison linéaire entière positive de  $-\Delta_k^+$ . On voit alors (par exemple sur la figure 3-2) qu'aucun  $K$ -type de  $\pi_3$  ne peut contenir un vecteur de poids  $\Lambda_3 + e_{32}$ . Donc nécessairement  $\Lambda_3$  est annulé par  $X_{32}$ .  $\square$

## 1.2. Produits tensoriels contenant $\Lambda_3$ .

Dans un premier temps, on modifie les paramètres des (limites de) séries discrètes  $\pi_1$  et  $\pi_2$  afin qu'ils définissent les mêmes racines positives compactes. Le paramètre d'une série discrète étant défini modulo l'action du groupe de Weyl compact, on peut remplacer le paramètre  $\lambda_2$  par  $(12)(34).\lambda_2$ . Ainsi  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  ont le même système de racines compactes  $\Delta_K^+$  les rendant positives. Les  $\Lambda_i$  étant à l'intersection des murs "compacts" (en ce sens que leurs produits scalaires avec les racines compactes sont nuls), ils restent inchangés. Pour tout entier naturel  $n$ , notons  $L_n$  le  $K$ -type de  $\pi_1$  de plus haut poids  $\Lambda_1 + n.e_{32}$  et  $M_n$  celui de  $\pi_2$  de plus haut poids  $\Lambda_2 + n.e_{14}$ . La figure 3-3 montre les plus hauts poids de ces représentations dans le même repère que précédemment. On cherche les  $K$ -types de  $\pi_1$  et  $\pi_2$  tels que leur produit tensoriel contienne la représentation  $\Lambda_3$ .

PROPOSITION 3.6. *La représentation  $\Lambda_3$  apparaît avec une multiplicité 1 dans  $L_n \otimes M_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De plus, les  $(L_n, M_n)$  sont les seuls couples de  $K$ -types de  $\pi_1$  et  $\pi_2$  respectivement contenant  $\Lambda_3$  comme sous-représentation.*

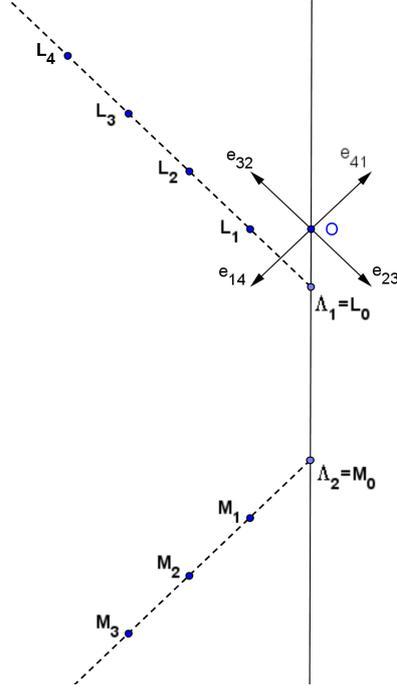
DÉMONSTRATION: Une formule de Steinberg permet de calculer la multiplicité d'une représentation d'un groupe compact semi-simple de plus haut poids  $\mu$  dans le produit tensoriel de deux représentations de plus haut poids  $\gamma$  et  $\lambda$  (voir par exemple [Br-To] p.259). La formule est la suivante :

$$m(\mu) = \sum_{v,w \in W_k} \det(v.w) Q(v(\gamma + \delta) + w(\lambda + \delta) - (\mu + 2\delta))$$

Dans notre cas,  $K = S(U(2) \times U(2))$  n'est pas semi-simple, mais le produit de son centre  $Z$  avec le sous-groupe  $K_{ss} = SU(2) \times SU(2)$ . Une représentation de  $K$  est donc le produit tensoriel d'un caractère du centre avec une représentation de  $K_{ss}$ . Il faut dans un premier temps vérifier que le produit des deux caractères du centre donne le caractère de la représentation  $\mu$ , puis appliquer la formule sur les représentations de la partie semi-simple.

On cherche à faire le produit tensoriel d'un  $K$ -type de plus haut poids  $\tau_1$  de  $\pi_1$  avec un  $K$ -type de plus haut poids  $\tau_2$  de  $\pi_2$ . Le poids  $\tau_1$  est de la forme

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \Lambda_1 + ae_{32} + be_{13} + ce_{24} \\ &= \frac{a-b+c}{2} e_{34} + \frac{a-c+b}{2} e_{12} + \frac{-a+b+c+1}{2} (e_{24} + e_{13}) \end{aligned}$$

FIG. 3-3. Plus hauts poids de  $M_n$  et  $L_n$ .

De même  $\tau_2$  vérifie

$$\begin{aligned} \tau_2 &= \Lambda_2 + \alpha e_{23} + \beta e_{14} \\ &= \frac{\beta - \alpha}{2} e_{34} + \frac{\beta - \alpha}{2} e_{12} + \frac{\alpha + \beta + 2 + k}{2} (e_{24} + e_{13}) \end{aligned}$$

On cherche la multiplicité de la représentation  $\Lambda_3$  de plus haut poids

$$\Lambda_3 = \Lambda_1 + \Lambda_2 = \frac{3 + k}{2} (e_{24} + e_{13})$$

Un élément  $\text{diag}(e^{ix}, e^{ix}, e^{-ix}, e^{-ix})$  du centre  $Z$  agit sur l'espace de  $\tau_1$  par la multiplication par  $(-a + b + c + 1)e^{ix}$ ; son action sur  $\tau_2$  est la multiplication par  $(\alpha + \beta + 2 + k)x$  et sur  $\Lambda_3$  par  $(3 + k)x$ . La première condition sur les caractères du centre donne donc la relation :

$$-a + b + c = -\alpha - \beta.$$

La seconde condition se traduit par  $m(0) \neq 0$  pour les représentations de plus haut poids  $\frac{a - b + c}{2} e_{34} + \frac{a - c + b}{2} e_{12}$  et  $\frac{\beta - \alpha}{2} e_{34} + \frac{\beta - \alpha}{2} e_{12}$ . Nous donnons sommairement les calculs pour les représentations  $L_n$  et  $M_n$ , laissant les autres au lecteur. On est donc dans le cas  $\gamma = \lambda = \frac{n}{2} e_{34} + \frac{n}{2} e_{12}$ . Il faut donc calculer les différents  $\det(v.w)Q(v(\gamma + \delta) + w(\lambda + \delta) - 2\delta)$ . A chaque fois que (12) ou (34) apparaît à la fois dans  $v$  et  $w$ , ce terme est nul. Il vaut  $-1$  lorsque  $v$  est l'identité et  $w$  est soit (12) soit (34) (ou inversement, la formule étant symétrique), et il prend la valeur 1 dans les 5 autres cas. On en déduit que la somme de ces termes, donnant la multiplicité de  $\mu_3$ , vaut 1.  $\square$

### 1.3. Réalisation explicite de $\pi_2$ .

Connaître les  $K$ -types de  $\pi_2$  n'est pas suffisant pour prouver la proposition 3.2. Il faut connaître l'action de  $X_{32}$  par  $\pi_2$  sur les  $K$ -types  $M_n$ . Pour cela il nous faut donner plus explicitement l'espace et l'action de  $\pi_2$ . La représentation  $\pi_2$  est une représentation bien connue : il s'agit d'une série discrète antiholomorphe, voir par exemple [Kn] §VI.4 (le système de racines positives considéré dans Knapp n'est pas celui associé à la série discrète par la théorie de Harish-Chandra mais  $\Delta'_+ = -(12)(34)\Delta^+$ ) où l'espace de la représentation est donné par certaines fonctions holomorphes sur  $GB$ .

La réalisation permettant d'avoir le plus "clairement" les  $K$ -types est celle faisant intevernir le domaine hermitien symétrique  $\Omega$  défini par :

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ \omega & I \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{C}), {}^t\bar{\omega}\omega + I \text{ est défini positif} \right\}.$$

L'espace de la représentation est alors défini par :

$$\mathcal{O}_2 = \{ \psi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}_{\Lambda_2}, \psi \text{ est holomorphe.} \} \quad (3.2)$$

où  $(\Lambda_2, \mathbb{C}_{\Lambda_2})$  est la représentation de dimension 1 de  $K$  de plus haut poids  $\Lambda_2$ .

Pour obtenir l'action de  $G$  sur cet espace, on remarque que toute matrice de  $G^{\mathbb{C}}$  se décompose sous la forme :

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

De plus, si on se restreint à  $G$ , alors l'application associant à une matrice sa première composante est une surjection de  $G$  dans  $\Omega$ . On obtient ainsi une action de  $g \in G$  sur  $\omega \in \Omega$  comme étant la première composante de  $g\omega$  dans la décomposition ci-dessus. En fait, seuls les deux premiers facteurs de  $g\omega$  dans cette décomposition nous seront utiles dans la suite, nous les donnons ici :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \omega & I \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ (C + D\omega)(A + B\omega)^{-1} & I \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} (A + B\omega)^{-1} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I & * \\ 0 & I \end{pmatrix} \\ &= g.\omega.k(g\omega).p(g\omega), \end{aligned}$$

où  $g.\omega$  est la première composante du produit  $g\omega$  (i.e. l'action de  $g$  sur  $\omega$  dans  $\Omega$ ),  $k(g\omega)$  la seconde et  $p(g\omega)$  la troisième. L'action de  $G$  sur  $\mathcal{O}_2$  est alors :

$$(g.\psi)(\omega) = \Lambda_2(k(g^{-1}\omega))^{-1}\psi(g^{-1}.\omega)$$

soit

$$\begin{aligned} (g.\psi)(\omega) &= \Lambda_2 \begin{pmatrix} {}^t\bar{A} - {}^t\bar{C}\omega & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \cdot \psi(({}^t\bar{D}\omega - {}^t\bar{B})({}^t\bar{A} - {}^t\bar{C}\omega)^{-1}) \\ &= \det({}^t\bar{A} - {}^t\bar{C}\omega)^{k+2} \cdot \psi(({}^t\bar{D}\omega - {}^t\bar{B})({}^t\bar{A} - {}^t\bar{C}\omega)^{-1}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

car  $\Lambda_2 = \frac{k+2}{2}(e_{14} + e_{23})$ .

Pour cet espace, le module de Harish-Chandra est l'espace engendré par la restriction des polynômes de  $\mathbb{C}^4$  à  $\Omega$  (voir par exemple [Ja-Ve], §2), et les espaces propres des poids sont donnés par les monômes. On note  $\varepsilon_{ijkl}$  la restriction du monôme de degré  $(i, j, k, l)$ .

On peut désormais déduire l'action de certains éléments de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  sur ces monômes d'après ce qui précède. Les  $\varepsilon_{ijkl}$  sont les vecteurs propres des poids de  $\pi_2$ , et le poids de  $\varepsilon_{ijkl}$  est  $\Lambda_2 + ie_{13} + je_{23} + ke_{14} + le_{24}$ , ainsi plusieurs  $\varepsilon_{ijkl}$  peuvent correspondre au même poids.

L'action des éléments de  $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}$  est la plus simple à calculer, car l'action de  $K$  est donnée par

$$(k.\psi)(\omega) = \zeta_{\lambda_2}(k).\psi(k^{-1}\omega)$$

Notons  $X_{ab}$  la matrice élémentaire de coefficient 1 sur la a-ème ligne et la b-ème colonne, de sorte que  $X_{ab} \in \mathfrak{g}_{e_{ab}}$ . Après calculs (on détaillera le calcul pour  $X_{32}$  ci-dessous), on obtient

$$\begin{aligned} X_{21}.\varepsilon_{ijkl} &= i\varepsilon_{i-1,j+1,k,l} + k\varepsilon_{i,j,k-1,l+1} \\ X_{43}.\varepsilon_{ijkl} &= -l\varepsilon_{i,j+1,k,l-1} - k\varepsilon_{i+1,j,k-1,l} \end{aligned}$$

Les calculs pour  $X_{32}$  sont assez longs mais élémentaires. On écrit en premier  $X_{32}$  comme la somme de deux éléments de  $\mathfrak{g}$  :

$$X_{32} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i/2 & 0 \\ 0 & -i/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = X + iY.$$

On considère alors les matrices  $e^{tX}$  et  $e^{tY}$ , dont l'action sur les  $\varepsilon_{i,j,k,l}$  est donnée par la formule 3.3. On calcule ensuite la dérivée en  $t = 0$  afin d'avoir l'action de  $X$  et de  $Y$ , et on somme  $X$  et  $iY$ . Il ne reste qu'un terme dans cette somme et on trouve :

$$X_{32}.\varepsilon_{ijkl} = -j\varepsilon_{i,j-1,k,l} \tag{3.4}$$

Nous pouvons désormais démontrer le théorème suivant.

**THÉORÈME 3.7.** *Le vecteur  $X_{32}$  envoie  $M_n$  sur  $M_{n-1}$ . Le noyau de cette application est l'espace engendré par les monômes  $\varepsilon_{k,0,n-k,0}$  et  $\varepsilon_{0,0,k,n-k}$ , pour  $k$  allant de 0 à  $n$ .*

**DÉMONSTRATION:** Rappelons que le système de racines positives compactes est  $\Delta_k^+ = \{e_{12}, e_{34}\}$  (nous avons remplacé  $\lambda_2$  par  $(12)(34)\lambda_2$ ). Les  $\varepsilon_{0,0,n,0}$  sont des vecteurs propres de poids  $\Lambda_2 + ne_{14}$  et ces poids sont les plus haut poids de certains  $K$ -types de  $\pi_2$ . De plus la représentation de plus haut poids  $\Lambda_2 + ne_{14}$  apparaît dans  $\pi_2$  avec une multiplicité 1 : il s'agit de la représentation  $M_n$ . Une formule de Kostant, analogue à celle de Blattner (qui en est une généralisation), permet de calculer la multiplicité des poids d'une représentation irréductible d'un groupe compact (voir par exemple [Br-To] p.258). En l'appliquant, on voit que les poids de  $M_n$  sont contenus dans le

cône entier :  $\Lambda_2 + ne_{14} + \mathbf{Cone}(e_{21}, e_{43})$ , tous appartiennent au "carré" noté  $C_n$  de sommets  $\Lambda_2 + ne_{14}$ ,  $\Lambda_2 + ne_{13}$ ,  $\Lambda_2 + ne_{23}$ ,  $\Lambda_2 + ne_{24}$  et apparaissent avec une multiplicité 1. La figure 3-4 représente les poids de  $M_n$  dans le plan affine engendré par  $\Delta_k$  et passant par le plus haut poids de  $M_n$ ; par rapport à la figure 3-2, on se place donc sur le plan horizontal passant par  $M_n$ . Sur cette figure, on retrouve les poids de  $M_n$  mais également ceux d'autres  $K$ -types de  $\pi_2$ . En revanche, les poids appartenant aux bords du carré sont nécessairement dans  $M_n$ , leurs espaces propres sont de dimension 1 et sont engendrés par les monômes correspondants.

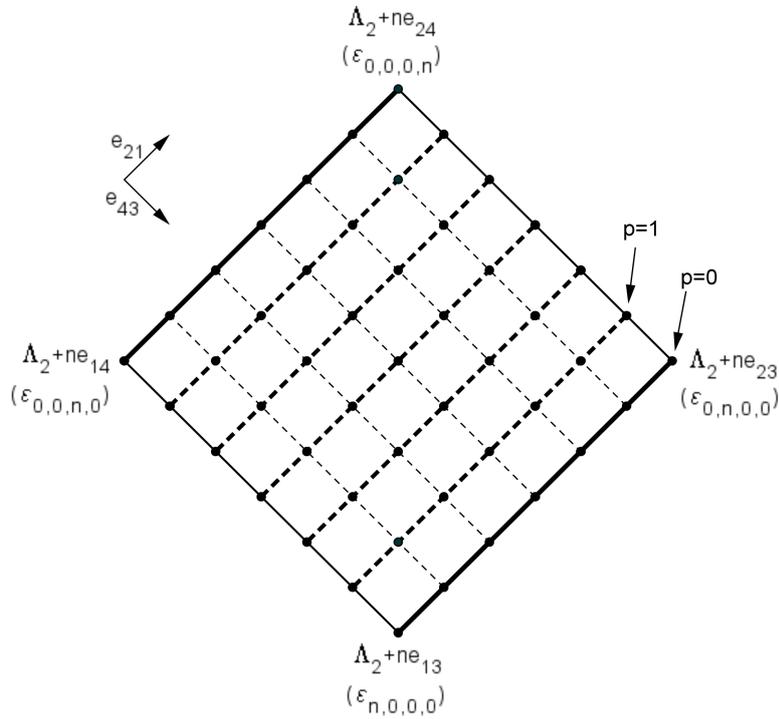


FIG. 3-4. Carré  $C_n$  des poids de  $M_n$ .

Considérons les vecteurs  $\varepsilon_{k,n-k,0,0}$ , qui sont ceux correspondant à l'arrête inférieure droite de  $C_n$ . En appliquant la formule (3.4), on obtient :

$$\pi_2(X_{32}) \cdot \varepsilon_{k,n-k,0,0} = -(n-k)\varepsilon_{k,(n-1)-k,0,0}.$$

Ainsi l'image de  $\varepsilon_{n,0,0,0}$  par  $X_{32}$  est nulle. Pour  $k$  différent de  $n$ , l'image de  $\varepsilon_{k,n-k,0,0}$  est un élément non nul appartenant au bord du carré  $C_{n-1}$  situé "au-dessus" de  $C_n$ . C'est donc un élément non nul de  $M_{n-1}$  ce qui prouve une partie du résultat cherché pour les vecteurs apparaissant dans l'arrête inférieure droite de  $C_n$ .

Pour les autres vecteurs, on procède de proche en proche en considérant les parallèles à cette arrête. Plus précisément, on raisonne par récurrence sur  $p < n$  avec l'hypothèse :

- ( $H_p$ ) L'image de l'espace propre d'un poids de la forme  $\Lambda_2 + ke_{13} + (n - k)e_{23} + pe_{34}$  est :
- un sous-espace de  $M_{n-1}$  différent de  $\{0\}$  si  $k < n$ ,
  - nulle si  $k = n$ .

Supposons l'affirmation vraie pour  $p - 1$ . Remarquons que la somme de  $\Lambda_2 + ne_{13} + pe_{34}$  et de  $e_{32}$  n'appartient pas au carré  $C_{n-1}$ . L'assertion est donc prouvée pour  $k = n$ .

Considérons désormais un vecteur  $v$  de poids  $ke_{13} + (n - k)e_{23} + pe_{34}$  avec  $k \neq n$ . Le petit lemme suivant permet d'affirmer qu'il existe nécessairement un vecteur  $v'$  non nul de poids  $\Lambda_2 + ke_{13} + (n - k)e_{23} + (p - 1)e_{34}$  tel que :

$$X_{34}.v' = v.$$

LEMME 3.8. *L'application  $\pi_2(X_{34})$  est une bijection de l'espace de poids  $\nu$  de  $M_n$  dans l'espace de poids  $\nu + e_{34}$  de  $M_n$  si, et seulement si,  $\nu + e_{34}$  est un poids de  $M_n$ .*

DÉMONSTRATION DU LEMME : Étant donné que les multiplicités de poids de  $M_n$  sont égales à 1, il suffit de montrer que cette application est non nulle. Par l'irréductibilité de  $M_n$ , tout vecteur propre d'un poids de  $M_n$  est obtenu en faisant agir  $X_{34}$  et  $X_{12}$  un certain nombre de fois sur l'espace de plus bas poids. D'autre part, l'égalité  $X_{34}X_{12}.v = X_{12}X_{34}.v$  montre qu'on peut choisir  $X_{34}$  et  $X_{12}$  dans un ordre quelconque. Ainsi aucune des applications ci-dessus ne peut être nulle car les éléments de poids  $\nu + e_{34}$  ne pourraient être obtenus à partir de l'espace de plus bas poids.  $\square$

Revenons à  $v$  et  $v'$ . On a

$$X_{32}.v = X_{32}.X_{34}.v' = [X_{32}, X_{34}].v' + X_{34}.X_{32}.v' = X_{34}.X_{32}.v'$$

Or  $X_{32}.v'$  est un vecteur non nul de  $M_{n-1}$  de poids  $\Lambda_2 + ke_{13} + (n - k - 1)e_{23} + pe_{34}$  d'après l'hypothèse de récurrence. Donc son image par  $X_{34}$  est différente de 0 d'après ce qui précède car  $\Lambda_2 + ke_{13} + (n - k - 1)e_{23} + (p + 1)e_{34}$  appartient au carré  $C_{n-1}$  pour  $p < n$  : c'est un poids de  $M_{n-1}$ .

Finalement, dans le cas  $p = n$ , il est immédiat de voir que la somme d'un poids avec  $e_{32}$  n'est pas un poids de  $M_n$ , donc appartient au noyau, ce qui termine la preuve.  $\square$

#### 1.4. Image de $L_n$ par $\pi_1(X_{32})$ .

Nous avons détaillé l'action de  $X_{32}$  sur les  $K$ -types de  $\pi_2$  qui nous intéressent. Pour les  $K$ -types  $L_n$  de  $\pi_1$ , nous n'aurons pas besoin d'un résultat aussi précis : il suffit de prouver que l'image de  $L_n$  par le vecteur  $X_{32}$  est incluse dans  $L_{n+1}$ . La démonstration est un peu technique. L'idée consiste à minimiser le nombre de représentations auxquelles  $X_{32}.L_n$  pourrait appartenir en ne se servant que des propriétés des représentations de groupes compacts, ce qui est fait dans le lemme 3.11. La structure particulière des  $K$ -types de  $\pi_1$  suffit alors pour conclure que  $X_{32}.L_n$  est inclus dans  $L_{n+1}$ .

Les deux propositions et le lemme qui suit sont indépendants du reste. On se place donc dans le cadre général. Soit  $(\tau, N_\lambda)$  une représentation irréductible d'un groupe compact  $K$  de plus haut poids  $\lambda$  correspondant au choix d'un système de racines positives  $\Delta_k^+$ . Soit  $\Psi_k = \{b_1, \dots, b_n\}$  les racines simples de  $\Delta_k^+$ . On note  $V_\mu$  l'espace propre associé au poids  $\mu$ , et  $X_\alpha$  un vecteur non nul dans  $\mathfrak{k}^\mathbb{C}$  appartenant à  $\mathfrak{g}_\alpha$  pour  $\alpha \in \Delta$ .

**PROPOSITION 3.9.** *Soit  $v \in V_\mu$  un vecteur non nul de  $N_\lambda$  de poids  $\mu$ . Alors il existe une suite de racines simples  $(b_{i_1}, \dots, b_{i_r})$  de  $\Psi_k$  telle que  $\tau(X_{b_{i_r}}, \dots, X_{b_{i_1}})v$  soit un élément non nul dans l'espace propre de plus haut poids, soit :  $\tau(X_{b_{i_r}}, \dots, X_{b_{i_1}})v \in V_\lambda \setminus \{0\}$ .*

**DÉMONSTRATION:** Il existe nécessairement un élément  $X_{b_1}$  associé à un  $\Psi_k$  qui n'annule pas  $v$ , car l'espace de plus haut poids est le seul à avoir cette propriété (voir par exemple [Kn] Théorème 4.28). Le poids de  $\tau(X_{b_{i_1}})v$  est  $\mu + b_{i_1}$ , donc en itérant le procédé on aboutit dans  $V_\lambda$  et l'élément obtenu sera non nul.  $\square$

Considérons que  $K$  est un sous-groupe compact maximal d'un groupe de Lie  $G$  réductif. On considère maintenant  $(\pi, W)$  une représentation de  $K$  provenant du module de Harish-Chandra d'une représentation admissible de  $G$ , et soit  $w \in W$  un vecteur de poids  $\mu$ .

**DÉFINITION 3.1.** On appelle chemin de  $w$  toute suite  $(b_{i_1}, \dots, b_{i_r})$  d'éléments de  $\Psi_k$  telle que  $\pi(X_{b_{i_r}} \dots X_{b_{i_1}})w \neq 0$ . L'ensemble des chemins de  $w$  est noté  $A_w$ . Un chemin  $c_w$  est dit maximal s'il ne peut être prolongé par une racine simple de  $\Psi$ .

On associe à un chemin  $c_w$  le poids de l'élément  $\pi(X_{b_{i_r}} \dots X_{b_{i_1}})w$ , soit  $\mu + \sum b_{i_j}$ . Cet élément sera appelé le poids de  $c_w$  et noté  $p(c_w)$ . Finalement, pour tout poids  $\nu$  on note  $W_{(\nu)}$  la somme des sous-représentations irréductibles de  $W$  de plus haut poids inférieur à  $\nu^1$ .

<sup>1</sup>Inferieur signifie ici de la forme  $\nu - \sum_{\Delta^+} n_\alpha \alpha$  pour  $n_\alpha$  positif.

- PROPOSITION 3.10. (1) *Si  $w$  possède un unique chemin maximal  $c_w$ , alors  $w$  appartient à  $W_{(p(c_w))}$ .*
- (2) *Si tous les chemins maximaux de  $w$  sont inférieurs à un poids  $p$ , alors  $w$  appartient à  $W_{(p)}$ .*

DÉMONSTRATION: Supposons que  $w$  ait un unique chemin maximal  $c_w$ . Soit  $w_1 + w_2$  la décomposition de  $w$  dans  $W_{(p(c_w))} \oplus W_{(p(c_w))}^\perp$ . Si  $w_2$  est non nul, il possède une composante non nulle dans une représentation irréductible de plus haut poids  $\mu$ , notée  $N_\mu$ , tel que  $\mu \notin p(c_w) - \text{cone}(\Delta_K^+)$ . D'après la proposition 3.9, il existe un chemin de  $w$  de poids  $\mu$ . Soit  $\tilde{W}$  l'ensemble des représentations irréductibles de  $W_{(p(c_w))}^\perp$  contenant une composante de  $w$ . Cet ensemble est fini et non vide, il contient donc au moins une représentation de plus haut poids  $\nu$  tel qu'aucune autre représentations de  $\tilde{W}$  n'ait un plus haut poids supérieur à  $\nu$ . Ainsi il existe un chemin de  $w$  de poids  $\nu$  et ce chemin est maximal, ce qui contredit l'hypothèse. Si tous les chemins maximaux de  $w$  sont de poids inférieurs à  $p$ , le même argument nous donne l'existence d'un chemin maximal tel que son poids n'est pas inférieur à  $p$  si  $w$  n'appartient pas à  $W_{(p)}$ .  $\square$

Le lemme qui nous sera nécessaire pour la suite est le suivant.

LEMME 3.11. *Soit  $(\pi, \mathcal{W})$  une représentation admissible d'un groupe réductif  $G$  et soit  $W$  son module de Harish-Chandra. Soit  $N_\lambda$  un certain  $K$ -type de  $W$  de plus haut poids  $\lambda$  et  $\alpha$  une racine positive telle que  $(\alpha + \Delta_K^+) \cap \Delta = \emptyset$ . Alors l'image du  $K$ -type  $N_\lambda$  par  $X_\alpha$  est dans un somme de représentations de plus hauts poids inférieur à  $\lambda + \alpha$ , soit :*

$$\pi(X_\alpha)N_\lambda \subset W_{(\lambda+\alpha)}$$

DÉMONSTRATION: Pour prouver ce lemme il suffit de montrer que les vecteurs des espaces propres des poids de  $N_\lambda$  s'envoient par  $X_\alpha$  dans l'espace désiré. Les poids de  $N_\lambda$  sont de la forme  $\lambda - (\sum_{b \in \Psi_K} n_b b)$ , où  $\Psi_k$  est l'ensemble des racines simples de  $\Delta_k^+$ . Nous allons prouver ce résultat par récurrence sur  $n = \sum n_b$ . Pour  $n = 0$ , on considère un vecteur  $w$  dans l'espace propre  $V_\lambda$  du plus haut poids  $\lambda$  de  $N_\lambda$ . Alors pour tout  $b \in \Psi_K$  on a

$$\pi(X_b)\pi(X_\alpha)w = \pi(X_\alpha)\pi(X_b)w,$$

car  $b + \alpha$  n'est pas une racine de  $G$ , et, car  $w$  étant un vecteur de plus haut poids,

$$\pi(X_b)\pi(X_\alpha)w = 0.$$

Ainsi,  $\pi(X_\alpha)w$  est soit nul, soit un plus haut poids pour  $K$ , ce qui prouve qu'il appartient à la somme des  $K$ -types de  $\pi$  de plus haut poids  $\lambda + \alpha$ , soit :  $\pi(X_\alpha)w \in W_{(\lambda+\alpha)}$ . Une autre façon de formuler ce résultat est de voir que  $A_w = \emptyset$  et d'appliquer la proposition 3.10.

Supposons le résultat vrai pour tout vecteur appartenant à un espace propre d'un poids de la forme  $\lambda - (\sum_{b \in \Psi_k} m_b b)$  pour  $\sum m_b \leq n$ .

Soit  $w$  un vecteur dans l'espace de  $V_\mu$  de poids  $\mu = \lambda - (\sum_{b \in \Psi_k} n_b b)$  avec  $\sum n_b = n + 1$ . Étudions les chemins de  $\pi(X_\alpha)w$  commençant par un  $X_{b_0}$ , pour  $b_0 \in \Psi_k$ .

Si  $b_0$  satisfait  $n_{b_0} = 0$ , alors  $\mu + b_0$  n'appartient pas au cône  $\lambda - \text{Cone}(\Delta_k^+)$ , ce n'est donc pas un poids de  $N_\lambda$ , d'où

$$\pi(X_{b_0})\pi(X_\alpha)w = \pi(X_\alpha)\pi(X_{b_0})w = 0.$$

Ainsi, aucun chemin non vide ne peut commencer par  $X_{b_0}$ .

Supposons que  $b_0 \in \Psi$  est tel que  $n_{b_0} \neq 0$ . Pour que le chemin commence par  $X_{b_0}$ , il faut que  $\pi(X_{b_0})w$  soit non nul. Dans ce cas,  $\pi(X_{b_0})w$  est un vecteur vérifiant l'hypothèse de récurrence. Ainsi, les chemins de  $\pi(X_{b_0})\pi(X_\alpha)w = \pi(X_\alpha)\pi(X_{b_0})w$  sont des chemins de poids inférieurs à  $\lambda + \alpha$  (i.e. dans le cône  $\lambda + \alpha - \text{Cone}(\Delta_k^+)$ ) selon l'hypothèse de récurrence.

Tous les chemins maximaux de  $\pi(X_\alpha)w$  sont donc de poids inférieur à  $\lambda + \alpha$ , ce qui montre d'après la proposition précédente que  $\pi(X_\alpha)w \in W_{(\lambda+\alpha)}$ .  $\square$

Revenons à la représentation  $\pi_1$ . La famille qui nous intéresse est l'ensemble des  $K$ -types  $L_n$  de plus haut poids  $\Lambda_1 + n.e_{32}$ , pour  $n \in \mathbb{N}$ . Selon la proposition 6, la multiplicité de ces  $K$ -types est  $\min(n, 0, 0) + 1 = 1$ .

**THÉORÈME 3.12.** *Le vecteur  $X_{32}$  envoie la représentation  $L_n$  sur  $L_{n+1}$  sous l'action de  $\pi_1$ .*

**DÉMONSTRATION:** On rappelle que le système de racines positives compactes est  $\Delta_k^+ = \{e_{12}, e_{34}\}$ . Remarquons d'une part qu'aucun poids de la forme  $(\Lambda_1 + n.e_{32}) - (\sum_{\alpha \in \Delta_k^+} n_\alpha \alpha)$  pour  $n_\alpha \geq 0$  n'est un plus haut poids de  $K$ -types de  $\pi_1$  (ils n'appartiennent pas au cône  $\Lambda_1 + \text{cone}(\Delta_n^+)$ ). En notant  $\mathcal{H}_1$  l'espace de  $\pi_1$  et  $H_1$  son module de Harish-Chandra, on a donc  $(H_1)_{(\Lambda_1 + n.e_{32})} = L_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . D'autre part  $e_{32}$  possède la propriété  $(e_{32} + \Delta_k^+) \cap \Delta = \emptyset$ , on peut donc appliquer le lemme précédent à la représentation  $L_n$  :

$$\pi_1(X_{32})L_n \subset (H_1)_{(\Lambda_1 + (n+1).e_{32})} = L_{n+1},$$

ce qui prouve le résultat.  $\square$

### 1.5. Démonstration du théorème 3.3.

**DÉMONSTRATION (PROPOSITION 3.2) :** La somme des  $K$ -types de  $\pi_i$  ( $i = 1, 2$ ) est dense dans  $\pi_i$ . L'espace de  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$  étant le complété du produit tensoriel des deux représentations, on en déduit que la somme  $E$  des produits tensoriels des  $K$ -types de  $\pi_1$  avec ceux de  $\pi_2$  est dense dans  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ .

Soit  $V$  l'espace vectoriel formé de vecteurs de la composante  $\Lambda_3$ -isotypique de  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$  annulés par  $X_{32}$ . Lorsqu'on projette un vecteur  $v$  de  $V$  sur un produit tensoriel de  $K$ -types, on obtient un élément sur lequel  $K$  agit toujours par  $\Lambda_3$ . La proposition 3.6 nous permet d'affirmer que le projeté de  $v$  sera nul sauf éventuellement sur les  $L_n \otimes M_n$ . Pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ , on note  $v_n$  le projeté de  $v$  sur l'espace  $L_n \otimes M_n$ .

Montrons que si  $v_0$  est nul, les  $v_n$  ( $n \geq 1$ ) le sont également. Les théorèmes 3.7 et 3.12 permettent de considérer les applications suivantes :

$$\begin{aligned} x &= X_{32} \otimes 1 : L_n \otimes M_n \rightarrow L_{n+1} \otimes M_n \\ x' &= 1 \otimes X_{32} : L_n \otimes M_n \rightarrow L_n \otimes M_{n-1}. \end{aligned}$$

La condition  $X_{32}v = 0$  se traduit par  $x(v_n) = -x'(v_{n+1})$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ . Le théorème 3.7 affirme que le noyau  $x'$  est l'espace  $L_n \otimes E_n$  où  $E_n$  est l'espace de  $M_n$  engendré par les  $\varepsilon_{0,0,k,n-k}$  et  $\varepsilon_{k,0,n-k,0}$ .

Le groupe  $K$  agit sur chaque  $v_k$  par  $\Lambda_3$ , ainsi  $\mathfrak{k}^{\mathbb{C}}.v_n$  est inclus dans  $\mathbb{C}.v_n$ . Or aucun vecteur non nul du noyau de  $x'$  ne satisfait cette relation. On en déduit par récurrence que  $v_n$  est nul pour tout  $n$ , ce qui prouve le résultat énoncé ci-dessus.

Considérons désormais deux éléments  $v$  et  $v'$  de  $V$ , de projetés  $v_n$  et  $v'_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). L'espace  $L_0 \otimes M_0$  étant de dimension 1, il existe deux nombres complexes  $\lambda$  et  $\mu$  tels que le projeté de  $\lambda v + \mu v'$  sur  $L_0 \otimes M_0$  soit nul. D'après ce qui précède, les projetés de  $\lambda v + \mu v'$  sur tous les  $L_n \otimes M_n$  sont nuls, donc le projeté de cet élément sur tous les produits tensoriels de  $K$ -types de  $\pi_1$  avec ceux de  $\pi_2$  est nul. La densité de  $E$  permet d'en déduire que  $\lambda v + \mu v' = 0$ . Ainsi  $V$  est de dimension 1, ce qui achève la preuve de la proposition 3.2.  $\square$

DÉMONSTRATION (THÉORÈME 3.3) : Le fait que  $\pi_3$  soit de multiplicité 1 est une conséquence immédiate des propositions 3.1 et 3.2.

Soit  $\Pi$  la projection de  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$  sur le sous-espace  $\mathcal{H}_3$  de  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$  isomorphe à  $\pi_3$ . Les espaces  $\Lambda_1 = L_0$  et  $\Lambda_2 = M_0$  étant de dimension un, leur produit  $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$  est isomorphe à  $\Lambda_3$ . L'image de  $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$  par  $\Pi$ , si elle n'est pas nulle, est une composante  $\Lambda_3$ -isotypique de  $\mathcal{H}_3$ . Or,  $\mathcal{H}_3$  n'a qu'une seule telle composante :  $\Lambda_3$ .

Par ailleurs nous avons vu, au cours de la démonstration précédente, que l'espace  $V$  de dimension 1, qui est en fait le  $K$ -type minimal  $\Lambda_3$  de  $\mathcal{H}_3 \simeq \pi_3$ , avait nécessairement une composante en  $L_0 \otimes M_0$  non nulle. Donc le projeté de  $L_0 \otimes M_0$  par  $\Pi$  ne peut être nul.

On en déduit que  $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$  se projette bien par  $\Pi$  sur la composante correspondante à  $\Lambda_3$ , ce qui prouve le théorème.  $\square$

## 2. Cup-produit

Nous pouvons désormais prouver le résultat que nous avons annoncé au début de ce chapitre.

**THÉORÈME 3.13.** *Pour les paramètres définis dans la proposition 2.5, l'application induite par cup-produit et projection :*

$$H^2(\mathfrak{n}, H_{\pi_1})_{-\mu_1} \otimes H^1(\mathfrak{n}, H_{\pi_2})_{-\mu_2} \rightarrow H^3(\mathfrak{n}, H_{\pi_3})_{-\mu_3}$$

*est une bijection.*

**DÉMONSTRATION:** L'idée de la preuve est de se servir des suites spectrales de Hochschild-Serre attachées à la cohomologie des  $\pi_i$ ,  $1 \leq i \leq 3$  afin de détailler les éléments des différents espaces de cohomologie.

Dans le cas des séries discrètes ( $i = 2, 3$ ), Schmid utilise cette suite spectrale pour calculer la  $\mathfrak{n}$ -cohomologie ([Sc]). Cette suite spectrale dégénère à la première feuille, et les différentielles qui apparaissent sont entièrement déterminées par l'action bien connue du sous-groupe compact  $K$ . Dans le cas des limites non dégénérées (c'est-à-dire dont le paramètre  $\lambda$  n'est orthogonal à aucune racine compacte), Williams ([Wi]) étudie également cette suite spectrale, et par une analyse plus fine, il parvient à prouver qu'elle dégénère aussi à la première feuille.

Dans le cas des limites dégénérées, cette méthode ne permet plus en général de calculer la cohomologie, car cette suite spectrale ne dégénère plus à la première feuille. On est alors confronté au problème du calcul des différentielles de la feuille suivante, qui dépendent de l'action de  $G$  entier (et non plus de  $K$ ), action difficile à expliciter.

Cependant, nous allons voir qu'il n'est pas nécessaire d'explicitement cette action pour obtenir notre résultat, car nous avons déjà calculé les degrés de cohomologie en utilisant le résultat de Soergel. Cela nous permet d'obtenir sans effort supplémentaire l'annulation d'une certaine différentielle.

Finalement, nous effectuons le cup-produit des suites spectrales associées à  $\pi_1$  et à  $\pi_2$ , puis prouvons que l'on obtient un élément non nul dans la suite spectrale de  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ , et que cet élément se projette dans la suite spectrale de  $\pi_3$  en un élément différent de zéro, ce qui prouvera le théorème.

Soit  $(\pi, H_\pi)$  une représentation quelconque. La suite spectrale de Hochschild-Serre est définie par la filtration des espaces  $\mathcal{C}^k(\mathfrak{n}, \pi)$  par les espaces  $A^{i,j}$  formés des applications de  $\mathcal{C}^{i+j}(\mathfrak{n}, \pi)_{-\mu_i}$  s'annulant sur les produits extérieurs contenant au moins  $j+1$  éléments compacts. Les termes de la première feuille  $E_0$  sont donnés par  $E_0^{i,j} = A^{i,j}/A^{i+1,j-1}$ .

**Suite spectrale de  $\pi_1$ .** On dispose pour la feuille  $E_1$  de l'isomorphisme suivant :

$$E_1^{i,j} = H^j(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, H_{\pi_1} \otimes \Lambda^i \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-)_{-\delta}, \quad (3.5)$$

où  $\mathfrak{p}^- = \mathfrak{n} \cap \mathfrak{p}$ . Détaillons la méthode décrite par Williams dans [Wi] permettant de calculer ces espaces. Après avoir décomposé  $H_{\pi_1}$  comme somme de ses  $K$ -types  $V_\nu$  de multiplicité  $m(\nu)$ , on obtient :

$$E_1^{i,j} = \sum_{\nu \in \hat{K}} m(\nu) H^j(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, V_\nu \otimes \Lambda^i \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-)_{-\delta} \quad (3.6)$$

Rappelons que  $\Delta_1^+$  désigne le système de racines opposé à celui définissant  $\mathfrak{n}$  (pour les normalisations de Williams, c'est le système définissant  $\mathfrak{n}$ ), et notons  $N = \binom{4}{i}$  le nombre de  $i$ -uplets de racines parmi les 4 racines non compactes de  $(\Delta_1^+)_n$ . A  $i$  fixé, on peut calculer les  $H^j(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, V_\nu \otimes \Lambda^i \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-)_\mu$  avec une autre suite spectrale obtenue à partir d'une filtration (cf. [Wi2]) des  $\Lambda^i \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-$  par une suite de sous-espaces  $0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \dots \subset \mathcal{E}_N = \Lambda^i \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-$  telle que :

- chacun des  $\mathcal{E}_r$  est un  $\mathfrak{b}$ -module, où  $\mathfrak{b} = (\mathfrak{n} \cap \mathfrak{k}) \oplus \mathfrak{h}$ ,
- les  $\mathcal{E}_r/\mathcal{E}_{r+1}$  sont des espaces de dimension 1 sur lesquels  $\mathfrak{h}$  agit par un caractère  $\sigma_r$ .

Alors la filtration précédente est donnée par un ordre sur les  $i$ -uplets de racines non compactes  $(\Delta_1^+)_n$ ; la somme  $\sigma_r$  des  $i$  racines du  $r$ -ième uplet correspond au caractère  $\sigma_r$  ci-dessus. On obtient pour première feuille de cette nouvelle suite spectrale :

$$F_1^{a,b} = H^{a+b}(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, V_\nu)_{-\delta - \sigma_{N-a}} \Rightarrow H^j(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, V_\nu \otimes \Lambda^i \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-)_\mu. \quad (3.7)$$

Le calcul de ces espaces de cohomologie est l'objet du théorème (3.7) de [Wi], qui permet d'obtenir les dimensions de tous les espaces de cohomologie des  $V_\nu$  d'indice  $-\delta - \langle T \rangle$ , où  $\langle T \rangle$  est une somme quelconque de racines non compactes.

En appliquant ce théorème (3.7), il en résulte que les seuls  $H^b(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, V_\nu)_{-\delta - \langle T \rangle}$  intervenant sont ceux tels que  $V_\nu = \Lambda_1$ . Ainsi  $E_1^{i,j} = H^j(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_1 \otimes \Lambda^i(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-))_\mu$  et, après calcul, les groupes de cohomologie non nuls sont :

- $H^2(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_1)_{-\delta} = \mathbb{C}$ ,
- $H^1(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_1)_{-\delta - (e_{32} + e_{13})} = \mathbb{C}$ ,
- $H^1(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_1)_{-\delta - (e_{32} + e_{24})} = \mathbb{C}$ ,
- $H^0(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_1)_{-\delta - (e_{32} + e_{14})} = \mathbb{C}$ .

Donc pour  $i = 0$ ,  $F_1^{a,b}$  n'a qu'un seul espace différent de  $\{0\}$  :  $H^2(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_1)_{-\delta}$ . Il en résulte :

$$H^2(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_1 \otimes \Lambda^0 \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-)_{-\delta} = \mathbb{C}.$$

Pour  $i = 1$ , tous les groupes sont nuls. Pour  $i = 2$ , il y a trois termes non nuls. Il nous faut alors détailler la filtration sur  $\Lambda^2 \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-$ . L'action de  $X_{21}$  et  $X_{43}$  sur  $\Lambda^2 \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-$  est donnée dans le tableau suivant (où les vecteurs  $X_\alpha$  sont dans  $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-$ ) :

	$X_{14} \wedge X_{13}$	$X_{14} \wedge X_{24}$	$X_{14} \wedge X_{32}$
$X_{21}$	$X_{24} \wedge X_{13}$	0	$X_{24} \wedge X_{32}$
$X_{43}$	0	$-X_{13} \wedge X_{24}$	$-X_{13} \wedge X_{32}$

l'action sur les éléments manquants étant nulle. Ainsi, un choix possible de filtration est comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \mathbb{C}X_{13} \wedge X_{24} & ; & \quad \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \oplus \mathbb{C}X_{13} \wedge X_{32} & ; & \quad \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_2 \oplus \mathbb{C}X_{24} \wedge X_{32} \\ \mathcal{E}_4 &= \mathcal{E}_3 \oplus \mathbb{C}X_{14} \wedge X_{13} & ; & \quad \mathcal{E}_5 = \mathcal{E}_4 \oplus \mathbb{C}X_{14} \wedge X_{24} & ; & \quad \mathcal{E}_6 = \mathcal{E}_5 \oplus \mathbb{C}X_{14} \wedge X_{32}. \end{aligned}$$

On obtient l'ordre suivant sur les  $\sigma_i$  :

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= e_{13} + e_{24} & ; & \quad \sigma_2 = e_{13} + e_{32} & ; & \quad \sigma_3 = e_{24} + e_{32} \\ \sigma_4 &= e_{14} + e_{13} & ; & \quad \sigma_5 = e_{14} + e_{24} & ; & \quad \sigma_6 = e_{14} + e_{32}. \end{aligned}$$

D'après les calculs de cohomologie précédents, nous pouvons affirmer que :

$$\begin{aligned} F_1^{4,-3} &= H^{4-3}(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_1)_{-\delta-\sigma_{6-4}} = \mathbb{C} \\ F_1^{3,-2} &= H^{3-2}(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_1)_{-\delta-\sigma_{6-3}} = \mathbb{C} \\ F_1^{0,0} &= H^{0-0}(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_1)_{-\delta-\sigma_{6-0}} = \mathbb{C} \end{aligned}$$

On obtient une première feuille comme suit :

$b \backslash a$	0	1	2	3	4
-3					$\mathbb{C}$
-2				$\mathbb{C}$	
-1					
0	$\mathbb{C}$				

TAB. 1. Espaces  $F_1^{a,b}$ .

Cette suite spectrale ne dégénère pas nécessairement. On peut obtenir  $H^0(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_1 \otimes \Lambda^2 \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-)_{-\delta}$  par un calcul élémentaire direct. On trouve :

$$H^0(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_1 \otimes \Lambda^2 \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-)_{-\delta} = 0.$$

La suite spectrale précédente permet alors de conclure que

$$H^1(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_1 \otimes \Lambda^2 \mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-)_{-\delta} = \mathbb{C}.$$

Nous connaissons désormais complètement la première feuille de la suite spectrale de Horchschild-Serre :

$j \backslash i$	0	1	2
0			
1			$\mathbb{C}$
2	$\mathbb{C}$		

TAB. 2. Espaces  $E_1^{i,j}$  pour  $\pi_1$ .

On voit donc qu'une différentielle de la feuille  $E_2$  a pour espace de départ  $E_2^{(0,2)} = \mathbb{C}$  et pour espace d'arrivée  $E_2^{(2,1)} = \mathbb{C}$ . D'après le résultat obtenu en utilisant l'article de Soergel, nous devons obtenir des espaces de dimension 1 en degrés 2 et 3. Donc cette différentielle doit impérativement être *nulle*. D'où :

$$\begin{aligned} H^2(\mathfrak{n}, \pi_1)_{-\delta} &\simeq E_1^{(0,2)} \simeq H^2(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_1)_{-\delta} \\ H^3(\mathfrak{n}, \pi_1)_{-\delta} &\simeq E_1^{(2,1)} \quad . \end{aligned} \quad (3.8)$$

**Suites spectrales de  $\pi_2$  et  $\pi_3$ .** En appliquant le théorème (3.7) de Williams pour les séries discrètes  $\pi_2$  et  $\pi_3$ , il ne reste dans chacun des cas qu'un seul espace non nul parmi les espaces  $F_1^{i,j}$  de (3.7), dans chaque cas pour  $i = 1$  et  $V_\nu = \Lambda_k$  ( $k = 1, 2$ ). On en déduit que la première feuille de la suite spectrale de Hochschild-Serre, donnée par la l'isomorphisme (3.5), est :

$$H^0(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, H_{\pi_2} \otimes \Lambda^1(p/p^-))_{-\mu_2} = H^0(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_2 \otimes \Lambda^1(p/p^-))_{-\mu_2} = \mathbb{C} \quad (3.9)$$

$$H^2(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, H_{\pi_3} \otimes \Lambda^1(p/p^-))_{-\mu_3} = H^2(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_3 \otimes \Lambda^1(p/p^-))_{-\mu_3} = \mathbb{C}. \quad (3.10)$$

Ainsi les cohomologies de  $\pi_2$  et  $\pi_3$  ont pour première feuille de la suite spectrale :

$j \backslash i$	0	1	2
0		$\mathbb{C}$	
1			
2			

TAB. 3. Espaces  $E_1^{i,j}$  pour  $\pi_2$ .

$j \backslash i$	0	1	2
0			
1			
2		$\mathbb{C}$	

TAB. 4. Espaces  $E_1^{i,j}$  pour  $\pi_3$ .

**Cup-produits dans les suites spectrales.** L'application cup-produit :

$$\mathcal{C}^{i+j}(\mathfrak{n}, \pi_1) \otimes \mathcal{C}^{i'+j'}(\mathfrak{n}, \pi_1) \xrightarrow{\cup} \mathcal{C}^{i+i'+j+j'}(\mathfrak{n}, \pi_1 \hat{\otimes} \pi_2)$$

respecte la filtration donnant les suites spectrales ; de plus on a :

$$d_{\otimes}(\phi_1 \cup \phi_2) = (d_1 \phi_1) \cup \phi_2 + (-1)^{i+j} \phi_1 \cup (d_2 \phi_2),$$

où  $d_r$  est la différentielle de  $\pi_r = \pi_1, \pi_2$  ou  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ . Alors l'application cup-produit donne, par quotient, une application cup-produit sur chacune des feuilles  $E_n$  des suites spectrales, puis sur les espaces  $E_\infty$  (voir par exemple [Be], §3.9). Pour  $n$  dans  $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , notons  ${}_1E_n, {}_2E_n, {}_3E_n$  et  ${}_{\otimes}E_n$  les  $n$ -ièmes feuilles des suites spectrales respectivement de  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  et  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ . On a donc une application :

$${}_1E_n^{i,j} \otimes {}_2E_n^{i',j'} \xrightarrow{\cup} {}_{\otimes}E_n^{i+i',j+j'}.$$

On obtient le diagramme suivant : dans la première ligne nous considérons l'élément non nul de la somme dans le terme de droite de (3.6) pour

chaque représentation  $\pi_i$ , dans la seconde ligne, l'espace du terme de droite de (3.5) et dans la troisième ligne apparaissent les premières feuilles de cohomologies, les isomorphismes entre la deuxième et la troisième ligne sont donc ceux de (3.5). Afin d'alléger les notations, le cup-produit des deux premières lignes est celui attaché à la  $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}$  cohomologie, les indices  $-\mu_i$  sont sous-entendus, et  $H^i(\star)$  représente  $H^i(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \star)$  :

$$\begin{array}{ccccc}
H^2(\Lambda_1) \otimes H^0(\Lambda_2 \otimes (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-)) & \xrightarrow{\cup} & H^2((\Lambda_2 \otimes \Lambda_1) \otimes (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-)) & \xrightarrow{\text{proj}} & H^2(\Lambda_3 \otimes (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-)) \\
\downarrow \sim & & \downarrow & & \downarrow \sim \\
H^2(H_{\pi_1}) \otimes H^0(H_{\pi_2} \otimes (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-)) & \xrightarrow{\cup} & H^2((H_{\pi_1} \hat{\otimes} H_{\pi_2}) \otimes (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-)) & \xrightarrow{\text{proj}} & H^2((H_{\pi_3}) \otimes (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-)) \\
\downarrow \sim & & \downarrow \sim & & \downarrow \sim \\
{}_1E_1^{0,2} \otimes {}_2E_1^{1,0} & \xrightarrow{\cup} & \otimes E_1^{1,2} & \xrightarrow{\text{proj}} & {}_3E_1^{1,2}
\end{array}$$

L'existence de l'application **proj** de la première ligne est justifiée par le fait que  $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$  dans  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$  se projette sur  $\Lambda_3$  dans  $\pi_3$  (théorème (3.3)). Les isomorphismes verticaux entre les deux premières lignes étant donnés par l'inclusion des  $K$ -types dans leurs modules de Harish-Chandra, on voit aisément que la partie supérieure gauche du diagramme est commutative. De même, les parties de droite sont obtenues par projection dans l'espace d'arrivée au niveau des complexes associés, et la commutativité en découle. Les isomorphismes verticaux du carré inférieur gauche sont ceux donnés par (3.5) pour la première feuille de la suite spectrale. Les isomorphismes pour  $H^2(H_{\pi_1})$  et  $H^0(H_{\pi_2} \otimes (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-))$  sont évidents ; pour  $H^2((H_{\pi_1} \hat{\otimes} H_{\pi_2}) \otimes (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-))$ , l'isomorphisme (inverse) provient de l'application au niveau des complexes :

$$\begin{aligned}
\otimes A^{1,2} &\rightarrow C^2(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, C^1(\mathfrak{n}/(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}), (H_{\pi_1} \hat{\otimes} H_{\pi_2}))) \\
\phi_{\otimes} &\mapsto \psi_{\otimes}(x_{c_1} \wedge x_{c_2}) : x_n \mapsto \phi_{\otimes}(x_{c_1} \wedge x_{c_2} \wedge x_n)
\end{aligned}$$

où  $x_{c_1}, x_{c_2}$  sont des éléments de  $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}$  et  $x_n$  un élément de  $\mathfrak{n}/(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n})$ . En écrivant explicitement la composée " $\cup \circ \sim$ ", on associe à une application  $\phi_1 \otimes \phi_2$  l'application :

$$(x_{c_1} \wedge x_{c_2}) \mapsto [x_n \mapsto \phi_1(x_{c_1} \wedge x_{c_2}) \otimes \phi_2(x_n)] ;$$

tandis que la composée  $\sim \circ \cup$  donne :

$$\begin{aligned}
(x_{c_1} \wedge x_{c_2}) \mapsto & [x_n \mapsto \phi_1(x_{c_1} \wedge x_{c_2}) \otimes \phi_2(x_n) - \phi_1(x_{c_1} \wedge x_n) \otimes \phi_2(x_{c_2}) \\
& + \phi_1(x_{c_2} \wedge x_n) \otimes \phi_2(x_{c_1})].
\end{aligned}$$

Or  $\phi_2$  appartient à  $A^{1,0}$ , donc s'annule sur tout élément de  $\mathfrak{k}$ . Il ne reste dans la somme précédente que le terme  $\phi_1(x_{c_1} \wedge x_{c_2}) \otimes \phi_2(x_n)$ , ce qui prouve que le diagramme est bien commutatif.

Prouvons que chaque application de la première ligne est un isomorphisme. Sous l'action de  $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}$ ,  $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$  est isomorphe à  $\Lambda_3$ , donc  $H^2(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, (\Lambda_2 \otimes \Lambda_1) \otimes (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-))_{-\mu_3}$  est de même dimension que  $H^2(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_3 \otimes (\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-))_{-\mu_3}$ , c'est-à-dire 1 par (3.10). Par ailleurs, la projection de  $\Lambda_1 \otimes \Lambda_2$  sur  $\Lambda_3$  commute

à l'action de  $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}$  (ce sont des  $K$ -types de dimension 1), donc l'application **proj** de la première ligne est une bijection.

Un représentant de  $H^2(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_1)_{-\delta}$  est nécessairement de la forme  $\phi_1 : X_{21} \wedge X_{43} \mapsto c_{\Lambda_1}$ , où  $c_{\Lambda_1}$  est un élément quelconque de  $\Lambda_1$ . En considérant l'action du groupe  $H$  sur les cochaînes de  $H^0(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_2 \otimes \Lambda^1(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-))_{-\mu_2}$ , on voit qu'un représentant de cet espace de cohomologie est de la forme  $\phi_2 = c_{\Lambda_2} \otimes X_{32}$ , où  $c_{\Lambda_2}$  est un élément quelconque de  $\Lambda_2$  et  $X_{32}$  est l'élément de  $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-$  évident. Le cup-produit des deux est donc  $\phi_1 \cup \phi_2 : X_{21} \wedge X_{43} \mapsto c_{\Lambda_1} \otimes c_{\Lambda_2} \otimes X_{32}$ . En raisonnant à nouveau sur l'action de  $H$  sur les cochaînes de  $H^2(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_3 \otimes \Lambda^1(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-))_{-\mu_3}$ , on voit qu'un représentant de cet espace de cohomologie doit être de la forme  $X_{21} \wedge X_{43} \mapsto c_{\Lambda_3} \otimes X_{32}$ , où  $c_{\Lambda_3}$  est un élément quelconque de  $\Lambda_3$ . Ainsi  $\phi_1 \cup \phi_2$  est non nul dans  $H^2(\mathfrak{k} \cap \mathfrak{n}, \Lambda_3 \otimes \Lambda^1(\mathfrak{p}/\mathfrak{p}^-))_{-\mu_3}$ . Donc chaque application de la première ligne est une bijection.

Les applications verticales entre la première et la seconde ligne sont injectives, donc on en déduit que la composée des applications de la seconde ligne est non nulle. La commutativité du diagramme permet alors d'affirmer que la composée des applications de la dernière ligne est non nulle.

Il reste à faire le lien entre la première feuille des suites spectrales considérées et la feuille  $E_\infty$ . Regardons de plus près la feuille de la suite spectrale de  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ . Nous savons que  $\pi_3$  apparaît, avec multiplicité 1, dans  $\pi_1 \hat{\otimes} \pi_2$ , de sorte que l'on peut écrire  $H_{\pi_1} \hat{\otimes} H_{\pi_2} = H_{\pi_3} \oplus H_{-\pi_3}$ , où  $H_{\pi_3}$  est la composante  $\pi_3$ -isotypique et  $H_{-\pi_3}$  la somme des autres composantes. Alors chacune des feuilles  ${}_\otimes E_n^{ij}$  se décompose en une somme de deux espaces  ${}_3 E_n^{ij} \oplus {}_{-} E_n^{ij}$ , l'un lié à  $H_{\pi_3}$  et l'autre à  $H_{-\pi_3}$ . Chacun de ces espaces étant  $G$ -invariant, les différentielles respectent cette décomposition. Rappelons que la suite spectrale associée à  $\pi_3$  dégénère à la première feuille. Ainsi les différentielles des suites spectrales, restreintes aux composantes en  $\pi_3$ , sont toutes nulles à partir de la première feuille. On a donc la relation suivante, pour tout  $n \geq 1$  :

$${}_\otimes E_n^{ij} = {}_3 E_n^{ij} \oplus {}_{-} E_n^{ij} \simeq {}_3 E_1^{ij} \oplus {}_{-} E_n^{ij}. \quad (3.11)$$

Revenons au diagramme précédent. Le fait que la composée des applications de la dernière ligne soit non nulle signifie que l'image par cup-produit d'un élément non nul de  ${}_1 E_1^{0,2} \otimes {}_2 E_1^{1,0}$  a une composante non nulle dans  ${}_3 E_1^{1,2}$ . La relation (3.11) permet d'affirmer que, dans les feuilles d'ordre supérieur, le cup-produit aura toujours une composante non nulle dans  ${}_3 E_n^{1,2} \simeq {}_3 E_1^{1,2}$ , donc restera non nulle. On en déduit que la composée des applications suivantes est différente de zéro :

$${}_1 E_\infty^{0,2} \otimes {}_2 E_\infty^{1,0} \xrightarrow{\cup} {}_\otimes E_\infty^{1,2} \xrightarrow{\text{proj}} {}_3 E_\infty^{1,2} \quad (3.12)$$

Rappelons que notre objectif est de prouver une bijection entre deux espaces de dimension 1, donc de prouver que l'image d'une classe non nulle, par cup-produit puis par projection, est différente de zéro. Afin de décrire précisément le lien entre les espaces de cohomologie et les suites spectrales,

fixons quelques notations. Notons  ${}_r H^*$  la  $\mathbf{n}$ -cohomologie de la représentation  $\pi_r$  comme ci-dessus. Nous avons une filtration sur les espaces  $\mathcal{C}^*$  définissant la suite spectrale compatible avec la différentielle  $d$  calculant la cohomologie. On note  ${}_r F_j^*$  la cohomologie du complexe  $(A^{*-j}, d)$ . La suite spectrale permet alors de calculer le gradué associé à la cohomologie :

$$\bigoplus_{j=0}^* {}_r F_j^* / {}_r F_{j+1}^* \simeq \bigoplus_{i+j=*} {}_r E_\infty^{i,j}.$$

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} {}_1 H^2 \otimes {}_2 H^1 & \xrightarrow{\cup} & \otimes H^3 & \xrightarrow{\text{proj}} & {}_3 H^3 \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow & & \downarrow \simeq \\ \bigoplus_{j=0}^2 ({}_1 F_j^2 / {}_1 F_{j+1}^2) \otimes \bigoplus_{j'=0}^1 ({}_2 F_{j'}^1 / {}_2 F_{j'+1}^1) & \xrightarrow{\cup} & \bigoplus_{j=0}^3 \otimes F_j^3 / \otimes F_{j+1}^3 & \xrightarrow{\text{proj}} & \bigoplus_{j=0}^3 {}_3 F_j^3 / \otimes F_{j+1}^3 \end{array}$$

Si les applications de la première ligne sont identiquement nulles, alors celle sur les gradués associés le seront également. Ainsi, pour prouver que la composée des applications de la première ligne est non nulle, il suffit de prouver que la composée de celle du dessous est elle-même non nulle.

Au niveau des suites spectrales, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \bigoplus_{j=0}^2 ({}_1 F_j^2 / {}_1 F_{j+1}^2) \otimes \bigoplus_{j'=0}^1 ({}_2 F_{j'}^1 / {}_2 F_{j'+1}^1) & \xrightarrow{\cup} & \bigoplus_{j=0}^3 \otimes F_j^3 / \otimes F_{j+1}^3 & \xrightarrow{\text{proj}} & \bigoplus_{j=0}^3 {}_3 F_j^3 / {}_3 F_{j+1}^3 \\ \sim \downarrow & & \sim \downarrow & & \sim \downarrow \\ \bigoplus_{i+j=2} {}_1 E_\infty^{i,j} \otimes \bigoplus_{i'+j'=1} {}_2 E_\infty^{i',j'} & \xrightarrow{\cup} & \bigoplus_{i+j=3} \otimes E_\infty^{i,j} & \xrightarrow{\text{proj}} & \bigoplus_{i+j=3} {}_3 E_\infty^{i,j} \end{array}$$

Selon les tableaux 2 et 3, l'espace en bas à gauche peut s'identifier à  ${}_1 E_1^{0,2} \otimes {}_2 E_1^{1,0}$  et selon le tableau 4, l'espace en bas à droite est isomorphe à  ${}_3 E_1^{1,2}$ . La non-annulation de l'application (3.12) permet alors d'affirmer que la dernière ligne de l'application précédente est différente de zéro. Il en suit que

$${}_1 H^2 \otimes {}_2 H^1 \xrightarrow{\cup} \otimes H^3 \xrightarrow{\text{proj}} {}_3 H^3$$

est nécessairement différente de zéro, ce qui prouve le théorème.  $\square$



## Cup-produit dans les cohomologies de faisceaux

Dans ce chapitre, nous démontrons le résultat central de cette partie : chaque élément de  $H^4(GS_U, \mathcal{F}_{\mu_1})$  "provenant", dans un sens à préciser, de la limite dégénérée de série discrète contragrédiente de  $\pi_1$  est une combinaison linéaire de cup-produits d'éléments "provenant" de séries discrètes.

### 1. Du cup-produit archimédien au cup-produit de faisceaux

On considère les représentations  $\pi_1, \pi_2$  et  $\pi_3$  définies précédemment, dont les espaces sont  $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_3$ . Notons  $H_1, H_2$  et  $H_3$  les espaces des vecteurs  $K$ -finis associés. Pour  $U$  un sous-groupe ouvert compact de  $G(\mathbb{A}_f)$ , considérons  $j_i$  un élément de  $\text{Hom}_{(\mathfrak{g}, K)}(H_i, \mathcal{A}_U)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , où  $\mathcal{A}_U$  est l'espace des formes automorphes  $U$ -invariantes.

On dit qu'un élément  $\phi$  de  $H^*(GS_U, \mathcal{F}_\mu)$  "provient" de  $\pi_i$  s'il correspond, via l'isomorphisme 1.5, à un élément de l'image de l'application :

$$j_* : H^*(\mathfrak{b}, H, H_i \otimes \mu) \rightarrow H^*(GS_U, \mathcal{F}_\mu).$$

Nous allons dans un premier temps montrer que tout cup-produit d'éléments de  $H^2(GS_U, \mathcal{F}_{\mu_1})$  et de  $H^1(GS_U, \mathcal{F}_{\mu_2})$  provenant respectivement de la limite dégénérée de série discrète  $\pi_1$  et de la série discrète  $\pi_2$  donne un élément "virtuellement" non nul de  $H^3(GS_U, \mathcal{F}_{\mu_3})$  provenant en partie de la série discrète  $\pi_3$ . Ici "virtuellement" signifie que l'on peut être amené à considérer un sous-groupe  $U'$  plus petit. Plus précisément, nous avons le théorème suivant :

**THÉORÈME 4.1.** *Soit  $k$  supérieur ou égal à 5,  $\pi_1, \pi_2$  et  $\pi_3$  définis au chapitre 2.*

*Soient  $\phi_1$  et  $\phi_2$  deux éléments respectivement de  $\varinjlim_U H^2(GS_U, \mathcal{F}_{\mu_1})$  et de  $\varinjlim_U H^1(GS_U, \mathcal{F}_{\mu_2})$  provenant respectivement de  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . Alors il existe deux éléments  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $G(\mathbb{A}_f)$  tels que le cup-produit  $\gamma_1 \cdot \phi_1 \cup \gamma_2 \cdot \phi_2$  soit un élément non nul de  $\varinjlim_U H^3(GS_U, \mathcal{F}_{\mu_3})$ , tel que sa projection sur le sous-espace provenant de  $\pi_3$  soit non nul.*

**DÉMONSTRATION:** Hecht et Schmid dans [He-Sc2] prouvent que la condition *nécessaire* pour qu'une série discrète soit intégrable, donnée par

Trombi et Varadarajan [**Tr-Va**], est en fait *suffisante* : une série discrète  $\pi(\lambda)$  est intégrable si, et seulement si

$$|(\lambda, \beta)| > \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta, (\alpha, \beta) > 0} (\alpha, \beta),$$

pour toute racine non-compacte  $\beta$ . Concrètement, cela signifie dans notre cas que  $\lambda$  doit être suffisamment loin des murs correspondant aux racines non-compactes, soit :

$$|(\lambda, \beta)| > 3.$$

Si l'on considère que  $k$  est supérieur ou égal à 5, la condition est vérifiée pour  $\pi_2$  et  $\pi_3$ .

Considérons  $j_1$  et  $j_2$  deux éléments de  $Hom_{(\mathfrak{g}, K)}(H_1, \mathcal{A}_U)$  et  $Hom_{(\mathfrak{g}, K)}(H_2, \mathcal{A}_U)$  respectivement. Rappelons que  $\pi_2$  et  $\pi_3$  ont été choisies afin d'être des séries discrètes intégrables, et que  $\pi_3$  apparait dans la restriction du produit tensoriel extérieur  $\pi_1 \boxtimes \pi_2$  de  $G \times G$  à la diagonale (c'est à dire dans le produit tensoriel usuel  $\pi_1 \otimes \pi_2$ ).

On se retrouve alors dans les hypothèses du théorème (7.4) de [**Ha2**]. Soit  $p$  la projection de  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  sur le facteur (unique) correspondant à  $\pi_3$ . La représentation  $\pi_1 \boxtimes \pi_2$  est isomorphe à l'adhérence de  $j_1 \otimes j_2(H_1 \otimes H_2)$  dans la complétion  $(\mathcal{A}_{U \times U})_2$  de  $\mathcal{A}_{U \times U}$  par rapport à la métrique  $L^2$ ; soit  $p_U$  la projection de  $j_1 \otimes j_2(H_1 \otimes H_2)$  sur le sous-espace correspondant à  $\pi_3$ . Le théorème de Harris fournit alors l'existence d'un morphisme  $j_3$  de  $Hom_{(\mathfrak{g}, K)}(H_3, \mathcal{A}_U)$  vérifiant la propriété suivante :

$$\forall v \in H_1 \otimes H_2, j_3(p(v)) = p_U(j_1 \otimes j_2(v))|_{Diag}$$

De plus, en "tordant"  $j_1$  et  $j_2$  par certains éléments  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $G(\mathbb{A}_f)$ ,  $j_3$  est différente de zéro.

Revenons à nos espaces de cohomologies. Nous savons qu'il existe  $j_1$  et  $j_2$  tels que  $\phi_1$  et  $\phi_2$  sont dans l'image de  $(j_i)_*$ ,  $i = 1, 2$ .

Le cup-produit considéré  $\phi_1 \cup \phi_2$  peut être obtenu en considérant d'abord le cup-produit externe  $\phi_1 \sqcup \phi_2$  dans  $H^3(X_U \times X_U, \mathcal{F}_{\mu_1} \otimes \mathcal{F}_{\mu_2})$ ; dans le complexe de Dolbeault, on obtient une section  $\mathcal{C}^\infty$  dans

$$\Gamma(GS_U \times GS_U; (\mathcal{F}_{\mu_1} \otimes \mathcal{F}_{\mu_2}) \otimes \Omega^{0,q}(GS_U \times GS_U)).$$

En considérant la restriction à la diagonale des formes de  $\Omega^{0,q}(GS_U \times GS_U)$ , puis la restriction à la diagonale de  $GS_U \otimes GS_U$  de la section obtenue, on obtient l'élément cup-produit  $\phi_1 \cup \phi_2$  désiré.

Du côté de la  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologie, cela correspond à considérer le cup-produit externe dans  $H^3(\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}, H \times H, \mathcal{A}_{U \times U} \times (\mu_1 \otimes \mu_2))$ , puis de restreindre les classes de cohomologies à la diagonale de  $\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}$ , et finalement d'appliquer  $r_*$  où  $r : \mathcal{A}_{U \times U} \rightarrow \mathcal{A}_U$  est la restriction des formes automorphes à la diagonale :

$$H^3(\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}, H \times H, \mathcal{A}_{U \times U} \otimes (\mu_1 \otimes \mu_2)) \xrightarrow{res} H^3(\mathfrak{b}, H, \mathcal{A}_{U \times U} \times \mu_3) \xrightarrow{r_*} H^3(\mathfrak{b}, H, \mathcal{A}_U \otimes \mu_3)$$

Dans le diagramme suivant, a priori pas commutatif, le cup-produit étudié est dans l'image de l'enchaînement des applications dans la partie supérieure.

$$\begin{array}{ccccc}
H^3(\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}, H \times H, \mathcal{A}_{U \times U} \otimes (\mu_1 \otimes \mu_2)) & \xrightarrow{res} & H^3(\mathfrak{b}, H, \mathcal{A}_{U \times U} \otimes \mu_3) & \xrightarrow{r_*} & H^3(\mathfrak{b}, H, \mathcal{A}_U \otimes \mu_3) \\
\uparrow (j_1 \otimes j_2)_* & & \uparrow (j_1 \otimes j_2)_* & & \uparrow (j_3)_* \\
H^3(\mathfrak{b} \times \mathfrak{b}, H \times H, (H_1 \otimes \mu_1) \otimes (H_2 \otimes \mu_2)) & \xrightarrow{res} & H^3(\mathfrak{b}, H, H_1 \otimes H_2 \otimes \mu_3) & \xrightarrow{p_*} & H^3(\mathfrak{b}, H, H_3 \otimes \mu_3)
\end{array}$$

En remplaçant  $j_1$  et  $j_2$  afin que  $j_3$  soit non nul, et en utilisant le théorème (3.13), on est assuré que l'enchaînement inférieur  $(j_3)_* \circ p_* \circ res$  ne s'annule pas.

La partie gauche du diagramme est naturellement commutative. Soit  $f$  un représentant d'une classe  $\bar{f}$  de  $H^3(\mathfrak{b}, H, H_1 \otimes H_2 \otimes \mu_3)$ . Un représentant de  $r_* \circ (j_1 \otimes j_2)_*(\bar{f})$  est :

$$\omega \mapsto ((j_1 \otimes j_2)(f(\omega)))|_{diag}$$

et représentant de  $(j_3)_* \circ p_*(\bar{f})$  :

$$\omega \mapsto j_3(p(\omega)) = \left( p_U((j_1 \otimes j_2)(f(\omega))) \right)|_{diag}.$$

Ce dernier élément est donc la projection d'un représentant de notre cup-produit, il provient de  $\pi_3$  et son image dans la cohomologie ne s'annule pas, ce qui prouve le théorème.  $\square$

## 2. Dualité de Serre

Pour les faisceaux considérés, le faisceau dualisant étant  $\mathcal{F}_{2\delta}$ , la dualité de Serre découle de l'application suivante :

$$H^k(GS_U, \mathcal{F}_\mu) \times H^{n-k}(GS_U, \mathcal{F}_{2\delta-\mu}) \rightarrow H^n(GS_U, \mathcal{F}_{2\delta}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}.$$

La première application est le cup-produit, la seconde provient de l'intégration des formes. En termes de  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologie, cela se traduit par :

$$H^k(\mathfrak{b}, H, \mathcal{A}_U \otimes \mu) \times H^{n-k}(\mathfrak{b}, H, \mathcal{A}_U \otimes 2\delta - \mu) \rightarrow H^n(\mathfrak{b}, H, (\mathcal{A}_U \times \mathcal{A}_U) \otimes 2\delta) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C},$$

l'application à gauche étant le cup-produit et celle de droite provenant de l'application :

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A}_U \times \mathcal{A}_U & \rightarrow & \mathbb{C} \\
(f, g) & \mapsto & \int_{GS_U} fg
\end{array}$$

Considérons  $\pi$  une représentation irréductible composante de  $\mathcal{A}_U$  et un élément  $f$  dans  $\pi$ . Afin que  $\int f.g$  soit non nul, il faut prendre  $g$  dans une composante de  $\mathcal{A}_U$  correspondant à la représentation contragrédiente  $\tilde{\pi}$  de  $\pi$ .

Ainsi, à un élément de  $H^k(\mathfrak{b}, H, \mathcal{A}_U \otimes \mu)$  provenant d'une représentation  $\pi$ , on peut associer un élément de  $H^{n-k}(\mathfrak{b}, H, \mathcal{A}_U \otimes 2\delta - \mu)$  provenant de la représentation contragrédiente  $\tilde{\pi}$  de  $\pi$  afin que leur cup-produit soit non nul.

Notons  $\widetilde{\pi}_1$  la limite dégénérée de série discrète de paramètre  $(0, \mathcal{R}_2)$  et  $\widetilde{\pi}_3$  la série discrète de paramètre  $2\delta - \lambda_3$ , de sorte que  $\widetilde{\pi}_1$  et  $\widetilde{\pi}_3$  soient les représentations contragrédientes de  $\pi_1$  et  $\pi_3$ . On pose  $\mu'_3 = 2\delta - \mu_3$ . Nous pouvons déduire du théorème 4.1 le résultat suivant :

**THÉORÈME 4.2.** *Soit  $\Phi$  un élément de  $H^4(GS_U, \mathcal{F}_{\mu_1})$  provenant de la limite dégénérée de série discrète  $\widetilde{\pi}_1$  de paramètre  $(0, \mathcal{R}_2)$ . Il existe alors un sous-groupe compact ouvert  $U' \subset U$  tel que l'image réciproque  $p^*(\Phi)$  de  $\Phi$  dans  $H^4(GS_{U'}, \mathcal{F}_{\mu_1})$  (où  $p$  est la projection de  $GS_{U'}$  sur  $GS_U$ ) est combinaison linéaire de cup-produits de la forme  $\Phi_2 \cup \Phi'_3$  avec  $\Phi_2$  un élément de  $H^1(GS_{U'}, \mathcal{F}_{\mu_2})$  provenant de  $\pi_2$  et  $\Phi'_3$  un élément de  $H^3(GS_{U'}, \mathcal{F}_{\mu'_3})$  provenant de  $\widetilde{\pi}_3$ .*

DÉMONSTRATION:

Pour un groupe de cohomologie  $H^k(\mathfrak{b}, H, \mathcal{A}_U)$  (respectivement  $H^k(GS_U, \mathcal{F}_\mu)$ ) notons  $H^k(\mathfrak{b}, H, \mathcal{A}_U)_\pi$  (respectivement  $H^k(GS_U, \mathcal{F}_\mu)_\pi$ ) l'ensemble des classes provenant d'une représentation  $\pi$ . Considérons l'ensemble  $P$  des classes de cohomologie vérifiant notre conclusion, et son orthogonal  $P^\circ$  par rapport à la dualité de Serre dans  $H^2(GS_U, \mathcal{F}_{\mu_1})_{\pi_1}$ .

Supposons  $P^\circ$  non nul et considérons un élément  $\phi_1$  dans  $P^\circ$  non nul. On peut montrer que pour tout sous-groupe compact ouvert  $U' \subset U$ ,  $p$  étant la projection de  $GS_{U'}$  sur  $GS_U$ , et pour tout couple  $(\phi_2, \phi'_3)$  dans  $H^1(GS_U, \mathcal{F}_{\mu_2})_{\pi_2} \times H^3(GS_U, \mathcal{F}_{2\delta - \mu_3})_{\widetilde{\pi}_3}$ , on a :

$$p^*(\phi_1) \cup (\phi_2 \cup \phi'_3) = 0.$$

Il suffit pour cela de reprendre l'argument dans [Ca].

Maintenant,  $\phi_1$  étant non nul, il existe d'après le théorème 4.1 un sous-groupe compact  $U' \subset U$ , un élément  $\phi_2$  dans  $H^1(GS_U, \mathcal{F}_{\mu_2})_{\pi_2}$  ainsi que des éléments  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  de  $G(\mathbb{A}_f)$  tels que  $p^*(\gamma_1 \cdot \phi_1) \cup \gamma_2 \cdot \phi_2$  soit un élément de  $H^3(GS_U, \mathcal{F}_{\mu_3})$  ayant une composante  $\phi_{\pi_3}$  dans  $H^3(GS_U, \mathcal{F}_{\mu_3})_{\pi_3}$  différente de zéro.

En appliquant à nouveau la dualité de Serre, on trouve un élément  $\phi'_3$  dans  $H^3(GS_U, \mathcal{F}_{2\delta - \mu_3})_{\widetilde{\pi}_3}$  tel que  $\phi_{\pi_3} \cup \phi'_3 \neq 0$ . Ainsi,  $p^*(\gamma_1 \cdot \phi_1) \cup \gamma_2 \cdot \phi_2 \cup \phi'_3 \neq 0$ , d'où une contradiction. L'orthogonal de  $P$  est donc nul, ce qui prouve le résultat.  $\square$

Seconde partie : Relations entre  
cohomologies de faisceaux de  
structures complexes différentes.



## Définition d'une application entre deux cohomologies de faisceaux sur $X$ et sur $\Omega$

Dans cette partie, le groupe  $G$  est toujours une forme anisotrope sur  $\mathbb{Q}$  du groupe unitaire  $SU(2, 2)$  associé à la forme quadratique  $\mathbf{q}$  sur  $\mathbb{C}^4$  et  $H$  désigne la sous-algèbre de Cartan diagonale.

Nous avons vu qu'il y a différentes structures complexes possibles sur  $G/H$  données par l'identification de  $G/H$  avec une  $G$ -orbite ouverte de l'espace des drapeaux  $\mathbb{D}$  sur  $\mathbb{C}^4$ . Dans cette partie, nous allons définir une application  $\mathcal{P}$  entre deux espaces de cohomologies associées à deux structures complexes différentes. Plus précisément, on considère les espaces  $\Omega = \Omega_{(-+-)}$  et  $X = \Omega_{(--+)}$ ; le premier est l'espace étudié dans la première partie, et le second est un fibré en  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  sur l'espace hermitien symétrique formé des droites projectives de signature  $(--)$ . La motivation initiale est de trouver un moyen d'exprimer la classe de cohomologie  $\Phi_2$  du théorème (4.2), qui apparaît dans la cohomologie de la variété de Griffiths-Schmid définie par  $\Omega$ , en fonction de classes "mieux connues" en ce sens qu'elles dépendent du domaine hermitien symétrique  $X$ , donc essentiellement d'une variété de Shimura (quotient de  $X$  par un sous-groupe arithmétique). Nous verrons que ces classes, se réalisant dans l'espace de 0-cohomologie, sont donc des formes modulaires classiques.

Dans ce chapitre, nous laissons provisoirement de côté les variétés de Griffiths-Schmid et ne considérons que les espaces homogènes locaux  $X$  et  $\Omega$ , la fin du chapitre suivant permettra de passer aux quotients par les sous-groupes arithmétiques.

### 1. Structures complexes sur $G/H$

Rappelons que nous avons posé  $\Omega = \Omega_{(-+-)}$  et  $X = \Omega_{(--+)}$ . On souhaite que les systèmes de racines associés aux sous-groupes de Borel définissant à  $\Omega$  et à  $X$  aient les mêmes racines compactes, à savoir  $e_{12}$  et  $e_{34}$ . Nous choisissons donc les sous-groupes de Borel suivants :

$$B_X = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & 0 & \bullet \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B_\Omega = \begin{pmatrix} \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & \bullet & 0 & 0 \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & 0 & \bullet \end{pmatrix}.$$

On voit que  $B_\Omega$  est l'image du Borel  $B_{(-+-)}$  considéré au chapitre 1 par l'élément (12)(34) du groupe de Weyl engendré par les racines compactes, or les

structures complexes sont invariantes sous l'action du groupe de Weyl compact, donc ces éléments permettent bien de définir les mêmes structures complexes. Les algèbres de Lie de ces espaces contiennent une sous-algèbre nilpotente maximale  $\mathfrak{n}_X$  et  $\mathfrak{n}_\Omega$  qui correspond à l'espace tangent anti-holomorphe. Les systèmes de racines associés sont les suivants :

$$\Delta_X = \{e_{12}; e_{31}; e_{32}; e_{34}; e_{41}; e_{42}\} \quad \text{et} \quad \Delta_\Omega = \{e_{12}; e_{14}; e_{31}; e_{32}; e_{34}; e_{42}\},$$

dont la demi-somme des racines est :

$$\delta_X = e_{32} + \frac{1}{2}(e_{41} + e_{32}) \quad \text{et} \quad \delta_\Omega = e_{32} + \frac{1}{2}(e_{14} + e_{32}).$$

Finalement, les duals de  $\Omega$  et de  $X$  relativement à notre forme  $\mathbf{q}$ , décrits en 1.2, sont respectivement  $\Omega' = \Omega_{(+-+)}$  et  $Y = \Omega_{(++-)}$ .

## 2. Faisceaux cohérents sur les $G/H$

Rappelons que pour  $\mu$  un caractère de  $H$ , le faisceau  $\mathcal{F}_\mu$  est défini comme étant l'ensemble des (restrictions des) sections holomorphes du fibré suivant :

$$G^{\mathbb{C}} \times_B \mathbb{C}_\mu \rightarrow G^{\mathbb{C}}/B$$

où  $G^{\mathbb{C}} \times_B \mathbb{C}_\mu$  est  $G^{\mathbb{C}} \times \mathbb{C}$  quotienté par la relation :  $(g, c) \simeq (gb, \mu^{-1}(b)c)$ . Notamment, dans la fibre au-dessus de  $eB$ ,  $B$  agit par  $\mu^{-1}$ .

Il y a une autre façon de définir ces faisceaux. L'espace des drapeaux  $\mathbb{D}$  s'injecte dans l'espace  $P(\mathbb{C}^4) \times P(\Lambda^2 \mathbb{C}^4) \times P(\Lambda^3 \mathbb{C}^4)$  par les plongements de Plücker. On définit alors un faisceau localement libre  $\mathcal{F}_{a,b,c}$  sur l'ensemble des drapeaux  $\mathbb{D}$  comme la restriction de  $\mathcal{O}(a) \times \mathcal{O}(b) \times \mathcal{O}(c)$  au-dessus de  $\mathbb{C}^4 \times \Lambda^2 \mathbb{C}^4 \times \Lambda^3 \mathbb{C}^4$ . Chaque drapeau  $(p, d, P)$  peut être relevé en un triplet de vecteurs de  $\mathbb{C}^4 \times \Lambda^2 \mathbb{C}^4 \times \Lambda^3 \mathbb{C}^4$  que nous noterons  $(\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P})$ . Une section de  $\mathcal{F}_{a,b,c}$  se relève alors en une fonction homogène de degré  $(a, b, c)$  en  $(\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P})$ . Ces faisceaux  $\mathcal{F}_{a,b,c}$  sont isomorphes aux faisceaux  $\mathcal{F}_\mu$ . Pour faire le lien entre ces différents faisceaux, plaçons-nous en la fibre correspondant à l'élément neutre dans  $X$  et  $\Omega$  et étudions l'action de  $H$ . En termes des faisceaux  $\mathcal{F}_\mu$ , cette action est clairement  $\mu$ .

Pour  $\Omega$ , cette fibre correspond à la fibre au-dessus du drapeau

$$\left( \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \bullet \\ 0 \end{pmatrix} \right); \left( \begin{pmatrix} \bullet \\ 0 \\ \bullet \\ 0 \end{pmatrix} \right); \left( \begin{pmatrix} \bullet \\ 0 \\ \bullet \\ \bullet \end{pmatrix} \right) \right).$$

On choisit alors le représentant

$$R_{1,1,1} = \left( \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right); \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \wedge \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right); \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \wedge \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \wedge \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right). \quad (5.1)$$

Les sections de ce fibré se relèvent en des fonctions homogènes de degré  $(a, b, c)$ . On choisit comme représentant obtenu en multipliant  $R_{1,1,1}$  par  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  l'élément suivant :

$$R_{\alpha,\beta,\gamma} = \left( \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{array} \right) \wedge \left( \begin{array}{c} \alpha^{-1}\beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right); \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ 0 \end{array} \right) \wedge \left( \begin{array}{c} \alpha^{-1}\beta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right) \wedge \left( \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \beta^{-1}\gamma \end{array} \right) \right).$$

La matrice  $B$  vérifiant  $R_{\alpha,\beta,\gamma} = B.R_{1,1,1}$  est

$$B = \begin{pmatrix} \alpha^{-1}\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma\beta^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, étant donné que, pour toute section  $f$  de  $\mathcal{F}_{a,b,c}$ ,  $(h.f)(x) = f(h^{-1}.x)$ , on a :

$$B^{-1}.f(R_{1,1,1}) = f(B.R_{1,1,1}) = f(R_{\alpha,\beta,\gamma}) = \alpha^a.\beta^b.\gamma^c.f(R_{1,1,1}).$$

On en déduit que le lien entre  $\mathcal{F}_\mu$  et  $\mathcal{F}_{a,b,c}$  est donné par :

$$\mu \begin{pmatrix} \alpha\beta^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma^{-1}\beta \end{pmatrix} = \alpha^a\beta^b\gamma^c.$$

On en déduit finalement que pour  $\Omega$  :

$$\mathcal{F}_{e_{12}} \leftrightarrow \mathcal{F}_{1,-1,-1} \quad \mathcal{F}_{e_{23}} \leftrightarrow \mathcal{F}_{1,0,1} \quad \mathcal{F}_{e_{34}} \leftrightarrow \mathcal{F}_{-1,-1,1} \quad \mathcal{F}_{e_{41}} \leftrightarrow \mathcal{F}_{-1,2,-1},$$

donc, dit autrement,

$$\mathcal{F}_{a,b,c} \leftrightarrow \mathcal{F}_{\frac{a-2b-c}{4}e_{12} + \frac{a+c}{2}e_{23} + \frac{-a-2b+c}{4}e_{34}}$$

En faisant de même pour  $X$  on obtient :

$$\mathcal{F}_{e_{12}} \leftrightarrow \mathcal{F}_{0,1,-2} \quad \mathcal{F}_{e_{23}} \leftrightarrow \mathcal{F}_{1,0,1} \quad \mathcal{F}_{e_{34}} \leftrightarrow \mathcal{F}_{-2,1,0} \quad \mathcal{F}_{e_{41}} \leftrightarrow \mathcal{F}_{-1,2,-1},$$

donc, dit autrement,

$$\mathcal{F}_{a,b,c} \leftrightarrow \mathcal{F}_{\frac{a+2b-c}{4}e_{12} + \frac{a+2b+c}{2}e_{23} + \frac{-a+2b+c}{4}e_{34}}. \quad (5.2)$$

Remarquons que, dans chaque cas, le faisceau dualisant est  $\mathcal{F}_{-2,-2,-2}$ .

### 3. Cohomologie des faisceaux $\mathcal{F}_\mu$

Nous allons détailler rapidement la façon dont Gindikin calcule les cohomologies  $H^\bullet(G/H, \mathcal{F}_\mu)$ , où  $G/H$  est muni d'une des structures complexes précédentes. L'article [Gi] permet de voir cette cohomologie comme celle de sections holomorphes d'un certain espace de Stein  $\mathbb{U}$  à valeur dans le faisceau  $\mathcal{F}_\mu$ . On définit dans notre cas l'espace  $\mathbb{U}$  comme étant l'ensemble des quadruplets  $(p, q, p', q')$  de points distincts de  $P^3(\mathbb{C})$  tels que la droite  $(pq)$  soit de signature  $(--)$  et la droite  $(p'q')$  de signature  $(++)$ .

PROPOSITION 5.1. *L'espace  $\mathbb{U}$  défini ci-dessus est un espace de Stein.*

DÉMONSTRATION: Fixons deux droites  $D_0^-$  et  $D_0^+$  de signatures respectives  $(--)$  et  $(++)$ . Alors à tout couple de droites  $(d^-, d^+)$ , de signature respectives  $(--)$  et  $(++)$ , tout couple de points  $(\alpha^-, \beta^-)$  de  $D_0^-$  distincts et tout couple de points  $(\alpha^+, \beta^+)$  de  $D_0^+$  distincts, on peut associer de façon unique un élément de  $\mathbb{U}$  de la manière suivante : les plans contenant  $d^-$  et passant par  $\alpha^+$  ou  $\beta^+$  coupent la droite  $d^+$  en deux points  $p'$  et  $q'$  ; les plans contenant  $d^+$  et passant par  $\alpha^-$  ou  $\beta^-$  coupent la droite  $d^-$  en deux points  $p$  et  $q$ . Ainsi  $\mathbb{U}$  est isomorphe au produit de l'espace hermitien symétrique formé des droites de signature  $(--)$ , de son dual et de  $(P^1(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C}) \setminus \text{Diag})^2$ , où  $\text{Diag}$  est la diagonale de  $P^1(\mathbb{C}) \times P^1(\mathbb{C})$ . Ces espaces étant de Stein, leur produit l'est également. Donc  $\mathbb{U}$  est un espace de Stein.  $\square$

On peut également voir  $\mathbb{U}$  comme étant un sous-ensemble de  $\Omega \times \tilde{\Omega}$ , où  $\tilde{\Omega}$  est le dual de  $\Omega$ , formé des drapeaux  $((p; d; P) ; (p', d', P'))$  tels que la droite passant par  $p$  et  $d' \cap P$  soit de signature  $(--)$  et celle passant par les points  $p'$  et  $d \cap P'$  de signature  $(++)$ . L'isomorphisme correspondant est :

$$(p, q, p', q') \mapsto ( (p, (pq'), \langle pq'q \rangle) ; (p', (qp'), \langle qp'p \rangle) ).$$

Sur le dessin suivant, l'hyperboloïde centrale représente l'ensemble des points de signature négative dans  $\mathcal{P}^3(\mathbb{C})$ . On y représente également les deux façons de voir  $\mathbb{U}$ , la droite  $(pq)$  étant dans le cône, et la droite  $(p'q)'$  étant en dehors.

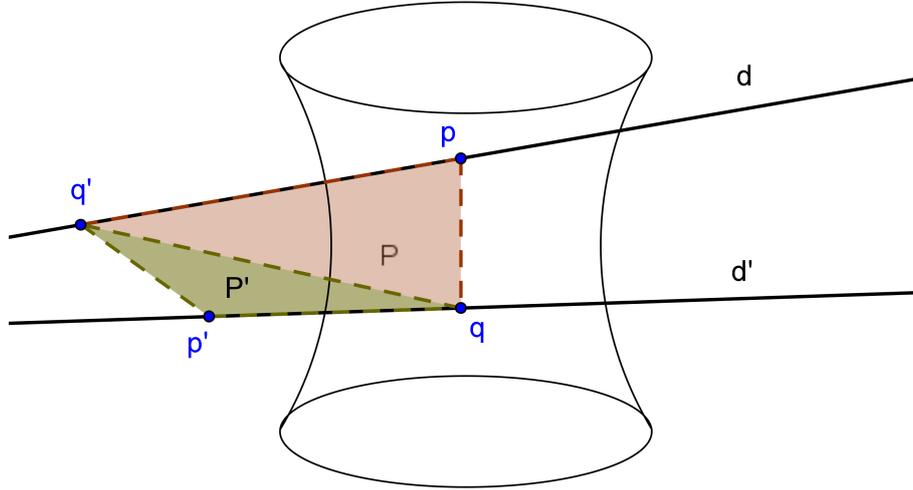


FIG. 5-1. Représentation de l'espace  $\mathbb{U}$ .

On dispose d'une projection de  $\mathbb{U}$  sur  $\Omega$  :

$$((p; d; P) ; (q', d', P')) \mapsto (p; d; P). \quad (5.3)$$

On a également une projection de  $\mathbb{U}$  sur  $X$  définie par

$$(p, q, p', q') \mapsto (p, \langle pq \rangle, \langle pqp' \rangle).$$

PROPOSITION 5.2. *Les fibres de la projection (5.3) sont contractiles.*

DÉMONSTRATION: Fixons  $(p, d, P)$  dans  $\Omega$ . Nous allons paramétrer les droites  $d^-$  et  $d^+$  de la preuve précédente, puis utiliser l'isomorphisme décrit dans la preuve précédente pour décrire la fibre  $\mathbf{Fib}(p, d, P)$ .

Considérons  $p^\perp$  le plan orthogonal à  $p$ , et soit  $(p^\perp \cap P)^-$  l'ensemble des points de  $p^\perp \cap P$  de signature négative. Alors à tout choix  $x$  de  $(p^\perp \cap P)^-$  correspond une unique droite  $d^-$  de signature  $(--)$  définie par  $d^- = \langle p, x \rangle$ . Remarquons que  $(p^\perp \cap P)^-$  est contractile.

Soit  $y$  un point de  $(d^\perp)^+$  (l'ensemble des points de  $d^\perp$  de signature positive). Alors le plan  $\langle y, d \rangle$  est de signature  $++-$ . On choisit une droite  $d^+$  de signature  $++$  dans ce plan. Remarquons que l'ensemble des droites de signature  $(++)$  dans un plan de signature  $(++-)$  est contractile (c'est le dual de l'ensemble des points  $-$  dans un plan  $--+$ ).

Puis, en utilisant l'isomorphisme de la preuve précédente, tout choix de  $\beta^-$  dans  $D_0^-$  distinct de  $\alpha^- := D_0^- \cap \langle D_0^+; p \rangle$  donne un unique  $q; q'$  est automatiquement défini par  $q' = d \cap d^+$ ; tout choix de  $\alpha^+$  dans  $D_0^+$  distinct de  $\beta^+ = D_0^+ \cap \langle D_0^-; q' \rangle$  donne un unique  $p'$ . D'où un isomorphisme :

$$\mathbf{Fib}(p, d, P) \simeq (D_0^- \setminus \{\alpha^-\}) \times A,$$

avec les notations évidentes, et où  $A$  est l'ensemble des triplets  $(y, d^+, \alpha^+)$  formés d'un point de signature positive  $y$  dans  $d^\perp$ , d'une droite de signature  $(++)$  dans le plan  $\langle y, d^+ \rangle$ , et d'un point  $\alpha^+$  de  $D_0^+$  permettant d'obtenir  $p'$  via l'identification de la preuve précédente. Plus précisément :

$$A = \left\{ (y, d^+, \alpha^+) ; \begin{array}{l} y \in (d^\perp)^+ , \quad d^+ \in (\langle d, y \rangle)^{++} , \quad \alpha^+ \in D_0^+ \setminus \{\beta^+\} \\ \text{où } \beta^+ = D_0^+ \cap \langle D_0^-; q' \rangle \end{array} \right\}.$$

Il reste à prouver la contractibilité de  $A$ ,  $(D_0^- \setminus \{\alpha^-\})$  étant clairement contractile. Remarquons que l'espace

$$B = \left\{ (y, d^+) ; y \in (d^\perp)^+ , \quad d^+ \in (\langle d, y \rangle)^{++} \right\}$$

est un fibré localement trivial sur  $(d^\perp)^+$ , qui est contractile, dont les fibres sont l'ensemble des droites de signature  $++$  dans un espace  $++-$ , donc contractiles. On en déduit que ce fibré est trivial, donc contractile.

Or

$$A = \left\{ (y, d^+, \alpha^+) ; (y, d^+) \in B , \quad \alpha^+ \in D_0^+ \setminus \{\beta^+\} \text{ où } \beta^+ = D_0^+ \cap \langle D_0^-; q' \rangle \right\},$$

donc  $A$  est un fibré sur  $B$ , qui est contractile, de fibres isomorphes à  $D_0^+$  privé d'un point, donc contractile. C'est donc un fibré trivial, ce qui prouve que  $A$  est contractile, donc  $\mathbf{Fib}(p, d, P)$  est contractile.  $\square$

L'espace  $\mathbb{U}$  étant de Stein et les fibres étant contractiles, on a l'isomorphisme suivant, selon Gindikin [Gi] :

$$H^n(\Omega, \mathcal{F}_\mu) \simeq H^n(\Gamma(\mathbb{U}, \Omega_\pi^n(\mathcal{F}_\mu))), \quad (5.4)$$

où l'espace de droite est la cohomologie holomorphe relative de De Rham. On peut définir cet isomorphisme au niveau des classes associées au complexe de Dolbeault, pour cela il nous faut choisir une section de la projection (5.3) :

$$s : \begin{array}{ccc} \Omega & \rightarrow & \mathbb{U} \\ (p, d, P) & \mapsto & ((p, d, P), (P^\perp, d^\perp, p^\perp)) \end{array} \quad (5.5)$$

où  $p^\perp$ ,  $d^\perp$  et  $P^\perp$  sont les orthogonaux de  $p$ ,  $d$  et  $P$  par rapport à notre forme  $\mathbf{q}$ . L'isomorphisme s'obtient alors en prenant une forme  $\omega$  de  $\mathbb{U}$  dans  $\Omega_\pi^n(\mathcal{F}_\mu)$ , en la relevant en une forme  $\tilde{\omega}$  de  $\mathbb{U}$  dans  $\Omega^n(\mathcal{F}_\mu)$ ; on prend alors son pull-back par la section  $s$ ,  $s^*(\tilde{\omega})$ , à valeur dans  $\sum \Omega^{i,j}(\mathcal{F}_\mu)$ ; finalement, on ne garde que la composante  $\kappa\omega$  de degré  $(0, n)$ .

#### 4. Cohomologie des séries discrètes

Les séries discrètes interviennent dans la  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologie des représentations automorphes de  $G$ , donc dans la cohomologie des faisceaux  $\mathcal{F}_\mu$  sur  $\Gamma \backslash G/H$ . Nous allons donc regarder en quels degrés apparaissent les  $(\mathfrak{b}, H)$ -cohomologies de ces séries discrètes. Comme nous l'avons vu pour la cohomologie de  $\Omega$ , les formules de Schmid permettent de calculer ces degrés. Le tableau suivant donne les degrés en lesquels apparaissent  $H^\bullet(\mathfrak{b}, H, \pi(\lambda) \otimes \mu)$ , en fonction de la chambre de Weyl dans laquelle se trouve  $\delta - \mu$  :

• Pour  $\Omega$  :

$-\mu + \delta$	$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_2$	$\mathcal{R}_3$	$\mathcal{R}_4$	$\mathcal{R}_5$	$\mathcal{R}_6$	$-\mathcal{R}_1$	$-\mathcal{R}_2$	$-\mathcal{R}_3$	$-\mathcal{R}_4$	$-\mathcal{R}_5$	$-\mathcal{R}_6$
$p$	2	4	3	3	3	1	4	2	3	3	3	5
$-\mu + \delta$	$\mathcal{R}'_1$	$\mathcal{R}'_2$	$\mathcal{R}'_3$	$\mathcal{R}'_4$	$\mathcal{R}'_5$	$\mathcal{R}'_6$	$-\mathcal{R}'_1$	$-\mathcal{R}'_2$	$-\mathcal{R}'_3$	$-\mathcal{R}'_4$	$-\mathcal{R}'_5$	$-\mathcal{R}'_6$
$p$	3	3	2	4	4	2	3	3	4	2	2	4

• Pour  $X$  :

$-\mu + \delta$	$\mathcal{R}_1$	$\mathcal{R}_2$	$\mathcal{R}_3$	$\mathcal{R}_4$	$\mathcal{R}_5$	$\mathcal{R}_6$	$-\mathcal{R}_1$	$-\mathcal{R}_2$	$-\mathcal{R}_3$	$-\mathcal{R}_4$	$-\mathcal{R}_5$	$-\mathcal{R}_6$
$p$	1	3	2	2	4	0	5	3	4	4	2	6
$-\mu + \delta$	$\mathcal{R}'_1$	$\mathcal{R}'_2$	$\mathcal{R}'_3$	$\mathcal{R}'_4$	$\mathcal{R}'_5$	$\mathcal{R}'_6$	$-\mathcal{R}'_1$	$-\mathcal{R}'_2$	$-\mathcal{R}'_3$	$-\mathcal{R}'_4$	$-\mathcal{R}'_5$	$-\mathcal{R}'_6$
$p$	2	4	3	3	5	1	4	2	3	3	1	5

On obtient les diagrammes suivants :

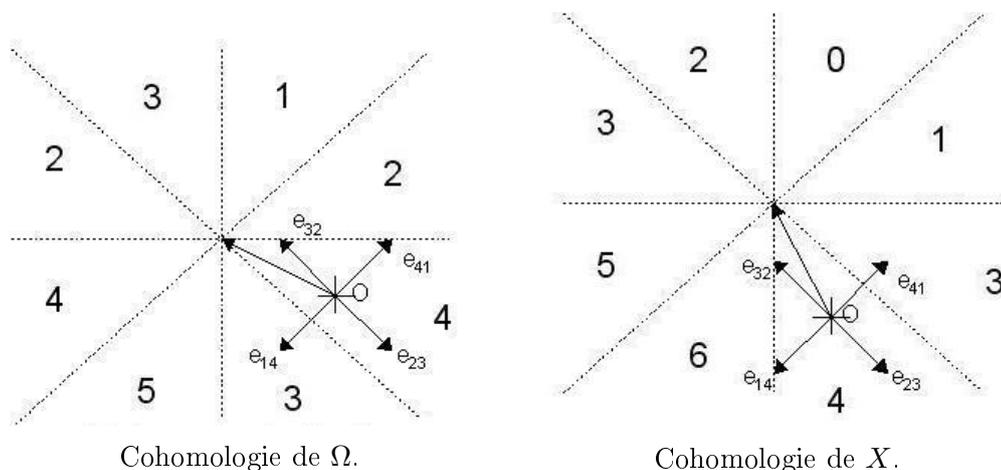


FIG. 5-2. Cohomologies de  $\Omega$  et de  $X$ .

Remarquons alors que si on translate par le vecteur  $e_{14}$  la chambre donnant de la 0-cohomologie des séries discrètes de  $X$ , on arrive dans celle donnant de la 1-cohomologie. En utilisant la relation (1.6), liant la cohomologie des faisceaux  $\mathcal{F}_\mu$  et la  $n$ -cohomologie de certaines représentations, on peut espérer un lien entre  $H^0(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\mu)$  pour  $\mu$  le paramètre d'une série discrète ayant de la 0-cohomologie, et  $H^1(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{\mu+e_{14}})$ ,  $\mu + e_{14}$  étant alors un paramètre de série discrète possédant de la 1-cohomologie. La première étape consiste à définir une cochaîne fermée dans le complexe associé à  $H^1(\Omega, \mathcal{F}_{e_{14}})$  afin de pouvoir faire le lien entre la cohomologie sur  $X$  des faisceaux  $\mathcal{F}_\mu$  et la cohomologie sur  $\Omega$  des faisceaux  $\mathcal{F}_{\mu+e_{14}}$ .

## 5. Définition d'une cochaîne

Il y a deux façons de construire cet élément, l'une en interprétant la cohomologie via les complexes de Dolbeault, l'autre en utilisant le théorème de Gindikin. La première a l'avantage de faire apparaître clairement l'élément  $e_{14}$ , la seconde nous servira par la suite. Nous allons construire ces deux éléments avant de prouver qu'il s'agit bien du même.

### 5.1. Dans le complexe de Dolbeault.

Considérons l'élément canonique  $X_{14}$  de l'espace propre de  $e_{14}$  et la forme sur  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  de restriction à  $\mathbb{C}X_{14}$  nulle. Cela donne sur  $G$  une forme différentielle invariante à gauche, puis par passage au quotient par  $T$ ,  $X_{14}$  étant dans l'espace tangent anti-holomorphe, un élément  $\eta_D$  de  $\Gamma(\Omega, \Omega^{(0,1)}(\mathcal{F}_{e_{14}}))$ . La formule de Maurer Cartan, explicitée dans [Gr-Sc] (1.6), permet de calculer  $\bar{\partial}\eta_D$ . Pour cela, il nous faut les constantes de structure de  $\mathfrak{n}_\Omega$  :

$$[e_{12}; e_{31}] = -e_{32} \quad ; \quad [e_{14}; e_{31}] = -e_{34} \quad ; \quad [e_{14}; e_{42}] = e_{12} \quad \text{et} \quad [e_{34}; e_{42}] = e_{32},$$

et les autres produits sont nuls. On en déduit que :

$$\bar{\partial}\eta_D = 0$$

On a donc construit une cochaîne dans le complexe de Dolbreault associé à  $H^1(\Omega, \mathcal{F}_{e_{14}})$ .

## 5.2. Dans le complexe de Gindikin.

Une section de  $\mathcal{F}_{1,-2;1}$  sur  $\mathbb{U}$  se relève en une fonction d'un sous-ensemble de  $(\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^6 \times \mathbb{C}^4) \times (\mathbb{C}^4 \times \mathbb{C}^6 \times \mathbb{C}^4)$  dans  $\mathbb{C}$  qui soit homogène de degré  $(1, -2, 1)$  en la première variable et holomorphe et homogène de degré  $(0, 0, 0)$  en la seconde.

Commençons par fixer un déterminant  $det$  de  $\mathbb{C}^4$ . Fixons un relèvement  $(\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P})$  d'un élément  $(p, d, P)$  de  $\Omega$ . Nous allons paramétrer les droites  $m$  de  $P$  passant par  $p$  différentes de  $d$ .

Étant donné que  $\tilde{P}$  est un élément de  $\Lambda^3\mathbb{C}^4$ , on peut définir un déterminant sur  $P$  par :

$$det_P(h_1, h_2, h_3) = det(\tilde{P} \wedge *)^{-1} \cdot det(h_1, h_2, h_3, *),$$

où les  $h_i$  sont dans  $P$ , et  $*$  est un élément quelconque en dehors de  $P$ . Remarquons que  $det_P$  dépend de  $\tilde{P}$  et non de  $P$ .

On fixe une droite d'origine  $d_0$  passant par  $p$  distincte de  $d$  dans  $P$  et on choisit un relèvement  $\tilde{d}_0$  dans  $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$ . Nous allons paramétrer une droite quelconque  $m$  passant par  $p$  distincte de  $d$  dans  $P$ , de relèvement  $\tilde{m}$ .

On peut choisir des vecteurs de  $\mathbb{C}^4$  afin que  $\tilde{d} = \tilde{p} \wedge \tilde{p}_d$ ,  $\tilde{d}_0 = \tilde{p} \wedge \tilde{p}_{d_0}$  et  $\tilde{m} = \tilde{p} \wedge \tilde{p}_m$ . Les vecteurs ainsi choisis ne sont pas uniques, mais la définition suivante est indépendante du choix que l'on fait :

$$x(m) = \frac{det_P(\tilde{p}, \tilde{p}_{d_0}, \tilde{p}_m)}{det_P(\tilde{p}, \tilde{p}_d, \tilde{p}_{d_0}) \cdot det_P(\tilde{p}, \tilde{p}_d, \tilde{p}_m)}.$$

Ainsi défini,  $x(m)$  est indépendant du relèvement choisi pour  $m$  et  $d_0$ , indépendant du choix de  $p_d$  et homogène de degré  $(1, -2, 1)$  en  $(\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P})$ . Remarquons que si nous changeons notre origine  $d_0 = \langle \tilde{p}, \tilde{p}_{d_0} \rangle$  en une droite  $d'_0 = \langle \tilde{p}, \lambda \tilde{p}_{d_0} + \mu \tilde{p}_d \rangle$  distincte de  $d$  ( $\lambda \neq 0$ ),  $x_{d_0}(m)$  devient :

$$\begin{aligned} x_{d'_0}(m) &= \frac{det_P(\tilde{p}, \tilde{p}_{d'_0}, \tilde{p}_m)}{det_P(\tilde{p}, \tilde{p}_d, \tilde{p}_{d'_0}) \cdot det_P(\tilde{p}, \tilde{p}_d, \tilde{p}_m)} \\ &= \frac{\lambda det_P(\tilde{p}, \tilde{p}_{d_0}, \tilde{p}_m) + \mu det_P(\tilde{p}, \tilde{p}_d, \tilde{p}_m)}{\lambda det_P(\tilde{p}, \tilde{p}_d, \tilde{p}_{d_0}) \cdot det_P(\tilde{p}, \tilde{p}_d, \tilde{p}_m)} \quad (5.6) \\ &= x_{d_0}(m) + \frac{\mu}{\lambda det_P(\tilde{p}, \tilde{p}_d, \tilde{p}_{d_0})} \end{aligned}$$

On définit pour tout élément  $((p, d, P), (p', d', P'))$  de  $\mathbb{U}$  la "droite d'intersection"  $d_I$  par :  $d_I = \langle p, d' \cap P \rangle$ . En termes de la définition de  $\mathbb{U}$  par les quadruplets  $(p, q, p', q')$ , la droite  $d_I$  est  $\langle p, q \rangle$ .

Pour un choix local de  $d_0$  dépendant localement de  $(p, d, P)$  de façon holomorphe, on s'intéresse à la fonction définie localement sur  $\mathbb{U}$  par  $x(d_I)$ .

On voit d'après (5.6) qu'un changement d'origine  $d_0$  transforme  $x(d_I)$  en  $x(d_I) + \phi$ , où  $\phi$  est une fonction dépendant holomorphiquement de  $(p, d, P)$ . Ainsi la différentielle relative par rapport à  $\pi$  de cette fonction sera une fonction de  $\mathbb{U}$  dans  $\Omega_\pi^1(\mathcal{F}_{1,-2,1})$  indépendant du choix local des origines  $d_0$ .

Cette fonction, notée  $\eta$ , correspond au même élément  $\eta$ , défini auparavant, à multiplication par un scalaire près, comme nous allons le prouver dans la suite. On a donc :

$$\eta = d_\pi(x(\langle p; d' \cap P \rangle))$$

### 5.3. Lien entre les deux.

Afin de montrer que les deux applications définies ci-dessus sont égales (à une constante près), nous allons utiliser l'isomorphisme (5.4), et comparer nos formes au drapeau  $R_{1,1,1} = (p_1, d_1, P_1)$  défini en (5.1). L'image de  $\eta = d_\pi(x(d_I))$  (défini dans le complexe holomorphe de De Rham) dans le complexe de Dolbeault est obtenue en relevant en la forme  $\tilde{\eta} = d(x(d_I))$ , puis en prenant son pull-back par  $s$  défini en (5.5) et finalement en ne gardant que la composante  $(0, q)$ .

Commençons par déterminer un choix de  $d_0$  à proximité de  $s(R_{1,1,1}) = ((p_1, d_1, P_1), (P_1^\perp, d_1^\perp, p_1^\perp))$ . Un voisinage de  $s(R_{1,1,1})$  est obtenu en considérant l'ensemble des

$$\left( (e^{tX} p_1, e^{tX} d_1, e^{tX} P_1), (e^{tX} P_1^\perp, e^{tX} d_1^\perp, e^{tX} p_1^\perp) \right)$$

où  $t$  appartient à un voisinage  $V_0(\mathbb{R})$  de 0 dans  $\mathbb{R}$ , et  $X \in \mathfrak{g}$ . On choisit pour  $d_0(t, X)$  la droite dans  $e^{tX} P_1$  contenant  $e^{tX} p_1$  et un point de première coordonnée nulle.

On cherche désormais à calculer  $d(x(d_I))$  localement au voisinage de  $s(p_1, d_1, P_1)$ . Considérons pour cela la fonction

$$\begin{aligned} \phi : V_0 \times \mathfrak{g} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, X) &\mapsto \phi(t, X) = x(\langle e^{tX} p_1, e^{tX} d_1^\perp \cap e^{tX} P_1 \rangle). \end{aligned} \quad (5.7)$$

On a

$$\phi(0, X) = x_{d_0(0, X)}(\langle p_1, d_1^\perp \cap P_1 \rangle),$$

où l'on a indexé  $x$  par  $d_0(0, X)$  pour indiquer la droite origine choisie. Or

$$d_1^\perp = \begin{pmatrix} \star \\ 0 \\ \star \\ 0 \end{pmatrix}^\perp = \begin{pmatrix} 0 \\ \star \\ 0 \\ \star \end{pmatrix},$$

ainsi tous les points de  $d_1^\perp$  ont leur première coordonnée nulle, c'est donc le cas pour  $d_1^\perp \cap P_1$ . On en déduit que  $d_0(0, X) = \langle p_1, d_1^\perp \cap P_1 \rangle$ , donc que  $\phi(0, X) = 0$ .

En dérivant  $\phi$  par rapport à  $t$  en 0 et en l'évaluant pour  $X$  dans  $\mathfrak{n}$ , nous

obtiendrons l'élément voulu de  $\Gamma(\Omega, \Omega^{0,1}\mathcal{F}_{e_{14}})$ .

Considérons  $X$  de la forme :

$$X = \begin{pmatrix} * & a & b & c \\ \bar{a} & * & d & e \\ -\bar{b} & -\bar{d} & * & f \\ -\bar{c} & -\bar{e} & \bar{f} & * \end{pmatrix}$$

Alors un développement limité de  $e^{tX}$  à l'ordre 1 est :

$$e^{tX} = \begin{pmatrix} 1+t* & ta & tb & tc \\ \bar{t}\bar{a} & 1+t* & td & te \\ -t\bar{b} & -t\bar{d} & 1+t* & tf \\ -t\bar{c} & -t\bar{e} & t\bar{f} & 1+t* \end{pmatrix} + o(t).$$

Ainsi, le développement limité à l'ordre 1 des images de  $p_1$ ,  $d_1$  et  $P_1$  par  $e^{tX}$  est :

$$e^{tX}p_1 = \begin{pmatrix} tb \\ td \\ 1+t* \\ t\bar{f} \end{pmatrix} + o(t), \quad e^{tX}d_1 = \begin{pmatrix} tb \\ td \\ 1+t* \\ t\bar{f} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{t}\bar{a} \\ -t\bar{b} \\ -t\bar{c} \end{pmatrix} + o(t)$$

$$e^{tX}P_1 = \begin{pmatrix} tb \\ td \\ 1+t* \\ t\bar{f} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ \bar{t}\bar{a} \\ -t\bar{b} \\ -t\bar{c} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} tc \\ te \\ tf \\ 1 \end{pmatrix} + o(t)$$

et l'image de l'orthogonal, vis-à-vis de la forme  $q$ , de  $d_1$  est :

$$e^{tX}(d_1)^\perp = \begin{pmatrix} ta \\ 1 \\ -t\bar{d} \\ -t\bar{e} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} tc \\ te \\ tf \\ 1 \end{pmatrix} + o(t),$$

de sorte que

$$\langle e^{tX}(p_1), (e^{tX}(d_1))^\perp \cap e^{tX}(P_1) \rangle = \begin{pmatrix} tb \\ td \\ 1 \\ t\bar{f} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} tc \\ te \\ tf \\ 1 \end{pmatrix} + o(t).$$

La droite d'origine  $d_0$  de  $e^{tX}P_1$  a pour développement :

$$d_0 = \begin{pmatrix} tb \\ td \\ 1 \\ t\bar{f} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ te \\ tf \\ 1 \end{pmatrix} + o(t).$$

On en déduit immédiatement :

$$\phi(t, X) = x(\langle e^{tX}p_1, e^{tX}d_1^\perp \cap e^{tX}P_1 \rangle) = -tc + o(t).$$

Donc finalement, la dérivée en  $t = 0$  est :

$$\frac{d}{dt}\Big|_0 \phi(t, X) = -c.$$

En exprimant les vecteurs propres des racines définissant  $\mathfrak{n}$ , on trouve que leurs images par cette fonction sont toutes nulles, sauf pour  $X_{14}$ , qui a pour

image  $-1$ , ce qui prouve que la fonction  $\eta$  définie dans la cohomologie de Dolbeault et celle définie dans la cohomologie à la Gindikin sont l'opposée l'une de l'autre.

## 6. Définition de l'application $\mathcal{P}$

Nous allons maintenant définir l'application qui permet de passer du  $H^0(X, \mathcal{F}_\mu)$  au  $H^1(\Omega, \mathcal{F}_{\mu+e_{14}})$  en utilisant la cohomologie de Dolbeault puis celle de Gindikin.

### 6.1. Par le complexe de Dolbeault.

On souhaite définir, pour  $\mu$  dans la chambre affine  $-C_{\mathcal{R}_6} + \delta$ , une application  $\mathcal{P}$  :

$$\mathcal{P} : H^0(X, \mathcal{F}_\mu) \rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{F}_{\mu+e_{14}}),$$

c'est à dire, d'après les identifications que nous avons vues :

$$\mathcal{P} : H^0(X, \mathcal{F}_{a,b,c}) \rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{F}_{a+b+1, -b-2, b+c+1}).$$

La condition  $\mu \in \delta - C_{\mathcal{R}_6}$  se traduit, en utilisant la relation (5.2), par :

$$\begin{cases} a + b + c + 3 < 0 \\ a + 1 > 0 \\ c + 1 > 0 \end{cases} \quad (5.8)$$

REMARQUE 5.1. Soit  $(p, d, P)$  un drapeau de  $\Omega$ . Alors, l'intersection  $q$  de  $d^\perp$  avec le plan  $P$  est un point de signature négative, et la droite passant par les points  $p$  et  $q$  est de signature  $(--)$  (car  $q$  est orthogonal à  $p$ ). On a donc un drapeau de  $X$  en considérant  $(p; < pq >; P)$ .

Considérons désormais  $(\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P})$  un élément du relèvement de  $\Omega$  dans  $V \times \Lambda^2 V \times \Lambda^3 V$ , noté  $\tilde{\Omega}$ , avec  $V = \mathbb{C}^4$ . On choisit comme représentant de  $d^\perp$  l'élément, noté  $\tilde{d}^\perp$ , vérifiant l'égalité :

$$\det(\tilde{d}, \tilde{d}^\perp) = 1. \quad (5.9)$$

Nous allons maintenant définir plus généralement un représentant de l'intersection d'une droite  $d$  et un plan  $P$  dans  $\Lambda^1 V$ , en connaissant  $\tilde{d}$  et  $\tilde{P}$ . Via le déterminant  $\det$  on associe à  $\tilde{P}$  un élément  $\tilde{P}^*$  dans le dual  $V^*$  de  $V$ . De même à  $\tilde{d}$  on associe  $\tilde{d}^*$  dans  $\Lambda^2 V^*$ .

On définit alors  $\tilde{d} \cap \tilde{P}$  comme étant l'élément de  $V$  tel que, pour tout  $\phi$  dans  $V^*$ , on ait :

$$\phi(\tilde{d} \cap \tilde{P}) = \det(\tilde{P}^*, \tilde{d}^*, \phi). \quad (5.10)$$

Cet élément est bien dans  $P$  car :

$$\begin{aligned} \det(\tilde{P}, \tilde{d} \cap \tilde{P}) &= \tilde{P}^*(\tilde{d} \cap \tilde{P}) \\ &= \det(\tilde{P}^*, \tilde{d}^*, \tilde{P}^*) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Il est également dans  $d$  car pour tout élément  $\star$  de  $V$  :

$$\begin{aligned} \det(\tilde{d}, \tilde{d} \cap \tilde{P}, \star) &= (\tilde{d} \wedge \star)^*(\tilde{d} \cap \tilde{P}) \\ &= \det(\tilde{P}^*, \tilde{d}^*, (\tilde{d} \wedge \star)^*) . \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi, l'élément  $\tilde{d}^\perp \cap \tilde{P}$  est bien défini, et  $\tilde{p} \wedge \tilde{d}^\perp \cap \tilde{P}$  est un représentant de la droite  $\langle pq \rangle$  mentionnée dans la remarque 5.1. On peut désormais définir l'application  $\mathcal{P}$ .

**PROPOSITION 5.3.** *Soient  $a, b$  et  $c$  trois entiers vérifiant les conditions (5.8). À toute fonction  $\tilde{f}$  du relevé  $\tilde{X}$  de  $X$  qui soit homogène de degré  $(a, b, c)$ , on associe la fonction de  $\tilde{\Omega}$  dans  $\mathbb{C}$  suivante :*

$$(\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P}) \mapsto -\tilde{f}(\tilde{p}, \tilde{p} \wedge (\tilde{d}^\perp \cap \tilde{P}), \tilde{P}) \eta_D(\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P}).$$

Alors cette fonction est bien définie et homogène de degré  $(a + b + 1, -b - 2, b + c + 1)$  en  $(\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P})$  et permet donc de définir une application  $\mathcal{P}$  :

$$\mathcal{P} : H^0(X; \mathcal{F}_{a,b,c}) \rightarrow \Gamma(\tilde{\Omega}, \Omega^{(0,1)}(\mathcal{F}_{a+b+1, -b-2, b+c+1}))$$

**DÉMONSTRATION:** La remarque 5.1 assure que  $f(\tilde{p}, \tilde{p} \wedge (\tilde{d}^\perp \cap \tilde{P}), \tilde{P})$  est bien défini. De plus, la condition (5.9) implique que cette fonction est homogène de degré  $(a + b, -b, b + c)$  en  $(\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P})$ .  $\eta_D$  étant homogène de degré  $(1, -2, 1)$ , on obtient le degré d'homogénéité désiré.  $\square$

## 6.2. Par le complexe de Gindikin.

Dans le formalisme de Gindikin, on cherche à définir une application :

$$\mathcal{P} : \Gamma(X, \mathcal{F}_{a,b,c}) \rightarrow \Gamma(\mathbb{U}, \Omega_\pi^1(\mathcal{F}_{a+b+1, -b-2, b+c+1})),$$

où  $(a, b, c)$  vérifie (5.8).

Soit  $((\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P}), (\tilde{p}', \tilde{d}', \tilde{P}'))$  un élément du relèvement de  $\mathbb{U}$  dans  $(V \times \Lambda^2 V \times \Lambda^3 V)^2$ , noté  $\tilde{\mathbb{U}}$ . Rappelons que  $\tilde{d}' \cap \tilde{P}$  est défini par la relation (5.10).

**PROPOSITION 5.4.** *Soient  $a, b$  et  $c$  trois entiers vérifiant les conditions (5.8). À toute fonction  $\tilde{f}$  du relevé  $\tilde{X}$  de  $X$  qui soit homogène de degré  $(a, b, c)$ , on associe la fonction de  $\tilde{\mathbb{U}}$  dans  $\mathbb{C}$  suivante :*

$$((\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P}), (\tilde{p}', \tilde{d}', \tilde{P}')) \mapsto \tilde{f}(\tilde{p}, \tilde{p} \wedge (\tilde{d}' \cap \tilde{P}), \tilde{P}). \det(\tilde{d}, \tilde{d}')^{-b} \eta.$$

Alors cette fonction est homogène et bien définie de degré  $(a + b + 1, -b - 2, b + c + 1)$  en  $(\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P})$  et de degré  $(0, 0, 0)$  en  $(\tilde{p}', \tilde{d}', \tilde{P}')$ . Elle permet donc de définir une application  $\mathcal{P}$  :

$$\mathcal{P} : H^0(X; \mathcal{F}_{a,b,c}) \rightarrow \Gamma(\mathbb{U}, \Omega_\pi^1(\mathcal{F}_{a+b+1, -b-2, b+c+1}))$$

REMARQUE 5.2. Les deux définitions de  $\mathcal{P}$ , dans les complexes de Dolbeault et de Gindikin, sont les mêmes via l'identification (5.4).



## Injectivité de l'application $\mathcal{P}$

Nous allons maintenant prouver que l'application  $\mathcal{P}$  définie précédemment dans la cohomologie à la Gindikin est injective, puis prouver que cette application reste injective après passage au quotient par un sous-groupe arithmétique. Nous verrons qu'avec des hypothèses plus restrictives, l'application  $\mathcal{P}$  devient bijective au niveau des espaces homogènes locaux.

### 1. Injectivité de $\mathcal{P}$ dans l'espace homogène

THÉORÈME 6.1. *L'application  $\mathcal{P}$  est injective.*

Le reste de cette sous-partie est consacrée à la démonstration de ce résultat. Considérons une fonction  $f$  et supposons qu'il existe un élément  $\phi$  dans  $\Gamma(\mathbb{U}, \mathcal{F}_{a+b+1, -b-2, b+c+1})$  tel que  $d_\pi \phi = \mathcal{P}(f)$ .

#### 1.1. Expression de $\phi$ à l'aide de polynômes.

Soit  $\mathbb{U}_{(p,d,P,d_I)}$  la sous-variété connexe de  $\mathbb{U}$  obtenue en fixant  $p, d, P$  et la droite  $d_I = \langle p, d' \cap P \rangle$ . On voit que la fonction  $x(d_I)$  localement définie est constante sur cette sous-variété connexe. Ainsi, sa différentielle suivant cette sous-variété sera nulle. Étant donné que  $\mathcal{P}(f)$  est le produit de la différentielle de  $x(d_I)$  par une fonction et que  $d_\pi \phi = \mathcal{P}(f)$ , on en déduit que  $\phi$  sera constante sur  $\mathbb{U}_{(p,d,P,d_I)}$ . Ainsi  $\phi$  ne dépend que du drapeau  $(p, d, P)$  et de la droite  $d_I$ , ce que nous noterons abusivement par  $\phi(p, d, P, d_I)$ . Si  $\tilde{\phi}$  désigne le relèvement de  $\phi$  sur  $\tilde{\mathbb{U}}$ , alors  $\tilde{\phi}$  ne dépend que de  $(\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P})$  et de  $\tilde{d}_I$ .

Fixons désormais et pour le reste de cette partie  $\tilde{p}$ , un représentant d'un point  $p$  dans  $Q = \{z \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^4); q(z) < 0\}$ . Considérons  $\mathbb{U}_p$  les éléments de  $\mathbb{U}$  contenant  $p$  et  $\tilde{\mathbb{U}}_p$  l'équivalent dans  $\tilde{\mathbb{U}}$  à  $\tilde{p}$  fixé. L'orthogonal de  $p$  relativement à notre forme  $q$  est noté  $P_p$  (resp.  $\tilde{P}_p$  dans  $\tilde{\mathbb{U}}$ ). Considérons un élément  $\tilde{m}$  de  $\Lambda^2 \mathbb{C}^4$  correspondant à une droite passant par  $p$ . Alors  $\tilde{m}$  peut s'écrire de façon unique comme le wedge-produit de  $\tilde{p}$  avec un élément  $\tilde{p}_m$  de  $\tilde{P}_p$ . Cela définit une bijection :

$$\begin{aligned} \{\tilde{m} \in \Lambda^2 \mathbb{C}^4 : p \in \langle m \rangle\} &\rightarrow \tilde{P}_p \\ \tilde{m} &\mapsto \tilde{p}_m \end{aligned} \tag{6.1}$$

De plus, la droite correspondant à  $\tilde{p} \wedge \tilde{p}_m$  sera de signature  $(--)$  si et seulement si  $\tilde{p}_m$  se situe dans le cône  $\tilde{\Delta}_p = \tilde{Q} \cap \tilde{P}_p$  et de signature  $(+-)$  si et seulement si  $p_m$  est dans  $\tilde{P}_p \setminus \overline{\tilde{\Delta}_p}$ .

Ainsi, à un couple  $(\tilde{p}_d, \tilde{p}_{d_I})$  de  $(\tilde{P}_p \setminus \overline{\tilde{\Delta}_p}) \times \tilde{\Delta}_p$  on peut associer le quadruplet  $(\tilde{p}, \tilde{p} \wedge \tilde{p}_d, \tilde{p} \wedge \tilde{p}_{d_I}, \tilde{p} \wedge \tilde{p}_d \wedge \tilde{p}_{d_I})$  qui est dans l'ensemble des  $(\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P}, \tilde{p} \wedge \tilde{p}_{d_I})$  définissant  $\phi$  (en remarquant que le plan  $P$  contient nécessairement  $p, p_d$  et  $p_{d_I}$ ). La figure 6-1 permet de "visualiser" cet isomorphisme dans l'espace projectif.

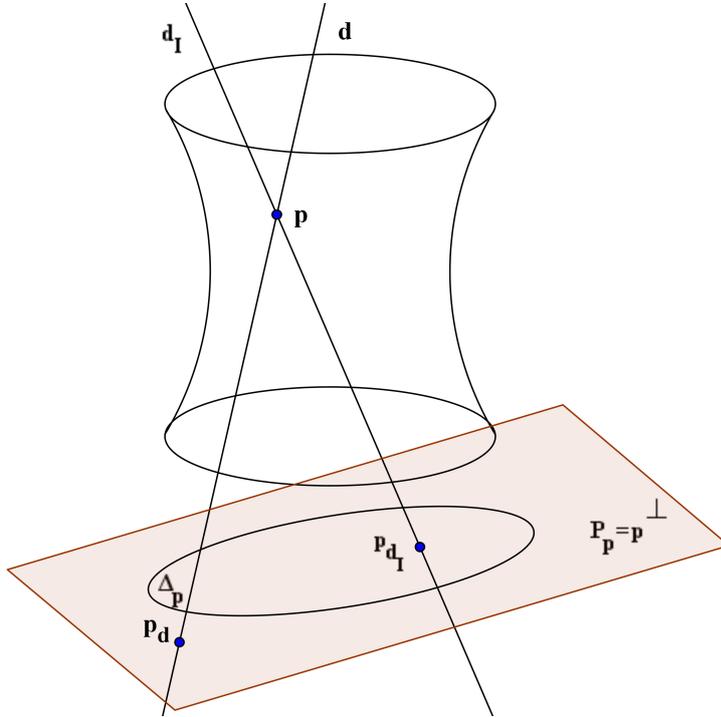


FIG. 6-1. Le point  $p$  et son espace orthogonal dans  $\mathbb{P}^3$ .

On pose :

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_p : (\tilde{P}_p \setminus \overline{\tilde{\Delta}_p}) \times \tilde{\Delta}_p &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\tilde{p}_d, \tilde{p}_{d_I}) &\mapsto \tilde{\phi}(\tilde{p}, \tilde{p} \wedge \tilde{p}_d, \tilde{p} \wedge \tilde{p}_{d_I}, \tilde{p} \wedge \tilde{p}_d \wedge \tilde{p}_{d_I}). \end{aligned}$$

On obtient une fonction homogène de degré  $(-b-2) + (b+c+1) = c-1$  en  $p_d$  et  $b+c+1$  en  $p_{d_I}$ , qui correspond à une fonction holomorphe  $\psi$  sur  $P_p \setminus \overline{\Delta}_p \times \Delta_p$  à valeur dans un certain faisceau.  $P_p \setminus \overline{\Delta}_p$  étant le complémentaire d'une boule dans  $P_p$ , on peut prolonger holomorphiquement  $\psi$  à  $P_p$  tout entier par le théorème de Hartogs. Ainsi  $\tilde{\psi}$  est soit une fonction holomorphe homogène sur  $P_p$ , soit la fonction nulle ; elle dépend donc polynomialement

de  $p_d$ , ce polynôme étant homogène de degré  $c - 1$  (si  $c - 1 \geq 0$ ).

Pour exprimer  $\tilde{\phi}$  en fonction de  $\tilde{\psi}_p$ , nous avons vu qu'à  $\tilde{d}$  et  $\tilde{d}_I$  on associe de façon unique  $p_d$  et  $p_{d_I}$  par la bijection (6.1). Il reste à remarquer que :

$$\tilde{P} = \det_P(\tilde{p} \wedge \tilde{p}_d \wedge \tilde{p}_{d_I})^{-1} \cdot \tilde{p} \wedge \tilde{p}_d \wedge \tilde{p}_{d_I}.$$

On a alors :

$$\tilde{\phi}(\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P}, \tilde{p} \wedge \tilde{p}_{d_I}) = \det_P(\tilde{p} \wedge \tilde{p}_d \wedge \tilde{p}_{d_I})^{-b-c-1} \cdot \tilde{\psi}_p(\tilde{p}_d, \tilde{p}_{d_I}) \quad (6.2)$$

Remarquons que, sous les conditions (5.8) sur  $a, b$  et  $c$ ,  $-b-c-1$  est positif.

### 1.2. Paramétrisation de $p_d$ et $p_{d_I}$ .

On fixe  $\tilde{p}$  et  $\tilde{P}$  pour le reste de la preuve. Dans l'hyperplan  $P$ , on fixe une droite affine munie de coordonnée affine, et contenue dans  $P_p$ . On considère deux points de cette droite :  $p_d(u)$  de coordonnée  $u$  et  $p_{d_I}(v)$  de coordonnée  $v$ .

En utilisant la dépendance polynomiale de  $\tilde{\psi}_p$  en  $p_d$ , on voit que la fonction  $\tilde{\psi}_p(u, v) = \tilde{\psi}_p(p_d(u), p_{d_I}(v))$  peut s'écrire comme un polynôme de degré  $c - 1$  en  $u$ , que l'on développe en fonction des puissances de  $(u - v)$  :

$$\tilde{\psi}_p(u, v) = \sum_{i=0}^{c-1} \psi_{p,i}(v)(u - v)^i.$$

On en déduit, en appliquant (6.2) :

$$\tilde{\phi}(\tilde{p}, \tilde{p} \wedge \tilde{p}_d(u), \tilde{p} \wedge \tilde{p}_d(u) \wedge \tilde{p}_{d_I}(v), \tilde{p} \wedge \tilde{p}_{d_I}(v)) = \det_P(\tilde{p} \wedge \tilde{p}_d(u) \wedge \tilde{p}_{d_I}(v))^{-b-c-1} \cdot \tilde{\psi}_p(\tilde{p}_d(u), \tilde{p}_{d_I}(v))$$

En remarquant que  $\det_P(\tilde{p}, p(a), p(b)) = k \cdot (a - b)$ , avec  $k$  indépendant de  $a$  et de  $b$ , on a :

$$\tilde{\phi}(u, v) = k^{-b-c-1} \cdot \sum_{i=0}^{c-1} \psi_{p,i}(v)(u - v)^{i-b-c-1}.$$

En dérivant cette dernière expression par rapport à  $v$ , on obtient une expression de  $d_\pi \tilde{\phi}$  :

$$d_\pi \tilde{\phi}(u, v) = k^{-b-c-1} \cdot \sum_{i=0}^{c-1} \psi'_{p,i}(v)(u - v)^{i-b-c-1} + (i-b-c-1)\psi_{p,i}(v)(u - v)^{i-b-c-2} dv.$$

### 1.3. Paramétrisation de $\mathcal{P}(f)$ .

Nous sommes dans les mêmes conditions que précédemment, à  $\tilde{p}$  et  $\tilde{P}$  fixés.

Dans la définition de  $x(d_I)$ , nous choisissons désormais comme relevé de la droite de référence  $d_0$  l'élément  $\tilde{p} \wedge \tilde{p}_{d_0}$ , avec  $\tilde{p}_{d_0}$  sur notre droite de coordonnée

affine fixée dans  $P_p$ . Notons  $w$  l'ordonnée de ce point. La définition de  $x(d_I)$  donne :

$$x(d_I) = \frac{\det_{\mathcal{P}}(\tilde{p}, \tilde{p}_{d_0}(w), \tilde{p}_{d_I}(v))}{\det_{\mathcal{P}}(\tilde{p}, \tilde{p}_d(u), \tilde{p}_{d_0}(w)) \cdot \det_{\mathcal{P}}(\tilde{p}, \tilde{p}_d(u), \tilde{p}_{d_I}(v))} = \frac{1}{k \cdot (u-w)} - \frac{1}{k \cdot (u-v)}.$$

On en déduit que

$$\eta = k^{-1}(u-v)^{-2}dv$$

Par définition de  $\mathcal{P}(f)$ , on obtient :

$$\mathcal{P}(\tilde{f})(\tilde{p}, \tilde{p} \wedge \tilde{p}_d(u), \tilde{P}, \tilde{p} \wedge \tilde{p}_{d_I}(v)) = \tilde{f}(\tilde{p}, \tilde{p} \wedge \tilde{p}_{d_I}(v), \tilde{P}) \cdot \det(\tilde{p} \wedge \tilde{p}_d(u) \wedge \tilde{p}_{d_I}(v) \wedge \star)^{-b} \cdot \eta,$$

où  $\star$  est un représentant quelconque d'un point  $p'$  de signature négative. On choisit  $\star$  de sorte que  $\det(\tilde{P}, \star) = 1$ .

Or par définition de  $\det_{\mathcal{P}}$ , on a :

$$\det(\tilde{p} \wedge \tilde{p}_d(u) \wedge \tilde{p}_{d_I}(v) \wedge \star) = \det_{\mathcal{P}}(\tilde{p} \wedge \tilde{p}_d(u) \wedge \tilde{p}_{d_I}(v)) \cdot \det(\tilde{P} \wedge \star).$$

Avec notre choix de  $\star$ , le dernier facteur est égal à 1. On obtient donc la formule suivante :

$$\mathcal{P}(\tilde{f})(\tilde{p}, \tilde{p} \wedge \tilde{p}_d(u), \tilde{P}, \tilde{p} \wedge \tilde{p}_{d_I}(v)) = \tilde{f}(v) \cdot k^{-b-1} \cdot (u-v)^{-b-2} \cdot dv$$

où  $-b-2$  est positif d'après (5.8).

#### 1.4. Comparaison et conclusion.

En reprenant les formules trouvées pour  $d_{\pi}\tilde{\phi}(u, v)$  et pour  $\mathcal{P}(\tilde{f})(u, v)$ , on obtient :

$$\begin{aligned} k^c \tilde{f}(v)(u-v)^{-b-2} &= (-b-c-1)\psi_{p,0}(v)(u-v)^{-b-c-2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{c-1} (u-v)^{-b-2+i-c} \left( \psi'_{p,i}(v) + (i-b-c-1)\psi_{p,i}(v) \right) \\ &\quad + \psi'_{p,c-1}(v)(u-v)^{-b-2} \end{aligned}$$

On identifie alors les termes de même degré, prouvant ainsi l'annulation des fonctions  $\psi_{p,0}$ , puis  $\psi_{p,1}$ , etc. . .

On trouve au final que  $f$  est elle-même nulle, ce qui achève la preuve du théorème 6.1.

## 2. Passage à l'espace complexe homogène local

Nous allons voir dans quelle mesure la construction précédente permet de définir une application injective de  $H^0(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_{\mu})$  dans  $H^1(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{\mu+e_{14}})$ .

### 2.1. Sections globales de $\Omega$ à valeurs dans $\mathcal{F}_{a',b',c'}$ .

Commençons par prouver un résultat général sur les sections globales de  $\Omega$ . Son corollaire, qui affirme que  $\Omega$  n'a pas de 0-cohomologie pour les  $(a', b', c')$  considérés, sera essentiel pour la suite.

**THÉORÈME 6.2.** *Pour tout triplet quelconque d'entiers  $(a', b', c')$ , l'ensemble  $H^0(\Omega, \mathcal{F}_{a',b',c'})$  est soit une représentation algébrique irréductible de  $G^{\mathbb{C}}$ , soit la représentation nulle.*

**DÉMONSTRATION:** Considérons un élément  $s$  de  $H^0(\Omega, \mathcal{F}_{a',b',c'})$ . Il s'agit donc d'une section globale qui se relève en une fonction  $\tilde{s}$  définie sur  $\tilde{\Omega}$  qui soit holomorphe et homogène de degré  $(a', b', c')$ .

L'idée de la preuve est d'utiliser deux fois le théorème de Hartogs afin de prolonger  $\tilde{s}$  à un domaine plus grand. Nous exploiterons ensuite les propriétés polynomiales de ce prolongement afin de démontrer qu'il peut s'étendre à  $\mathbb{D}$  en entier. Il suffit alors d'appliquer le théorème de Borel-Weil pour conclure.

**Prolongement à  $p$  fixé.** Fixons  $p$  dans  $\mathbb{P}(V)$  ( $V = \mathbb{C}^4$ ) et notons  $P_p$  son hyperplan orthogonal par rapport à notre forme  $\mathbf{q}$  dans  $\mathbb{P}(V)$  (c.f. figure (6-1)). On a alors un isomorphisme biholomorphe (toujours à  $p$  fixé) :

$$\begin{aligned} \{(p, d, P) \in \mathbb{D}(V)\} &\rightarrow \{(p_d, d_P) \in \mathbb{D}(P_p)\} \\ (p, d, P) &\mapsto (d \cap P_p, P \cap P_p), \end{aligned}$$

où  $\mathbb{D}(\dots)$  représente l'ensemble des drapeaux sur l'espace  $(\dots)$ .

On désigne par  $\Delta_p$  l'ensemble des points de  $P_p$  de signature négative par rapport à  $\mathbf{q}$ . À l'espace  $\Omega_p$  formé en considérant  $p$  fixé, correspond via cet isomorphisme l'ensemble  $\Upsilon_p$  des drapeaux formés d'un point en dehors de  $\overline{\Delta_p}$  et d'une droite intersectant  $\Delta_p$ . Étant donné que dans ce cas,  $p$  est nécessairement de signature  $-$ ,  $P_p$  est de signature  $++-$ . Ainsi,  $\Upsilon_p$  est l'espace étudié par Carayol, noté également  $\Omega$ , dans le cas  $SU(2, 1)$  (c.f. [Ca2]).

À  $\tilde{s}$  on peut donc associer une fonction holomorphe homogène sur  $\Upsilon_p$ , et en utilisant le lemme (4.2) de [Ca2], on peut prolonger cette fonction en une fonction définie sur  $\mathbb{D}(P_p)$  tout entier. Cela permet d'étendre  $\tilde{s}$  en une fonction définie sur  $\{(p, d, P) \in \mathbb{D}(V) : \mathbf{q}(p) < 0\}$ . Nous verrons dans la suite que cette fonction dépend holomorphiquement de  $p$ .

**Prolongement à  $P$  fixé.** Fixons désormais le plan  $P$  de signature  $(+ - -)$  ( $p$  n'est plus fixé) et considérons l'ensemble  $\Omega_P$  des éléments de  $\Omega$  ayant  $P$  comme hyperplan. On peut alors identifier cet ensemble à l'ensemble des drapeaux de  $P$  formés d'un point de  $Q_P = \{p \in P : \mathbf{q}(p) < 0\}$  et d'une droite intersectant le complémentaire de cet ensemble. On est alors à nouveau dans le même cas que celui étudié par Carayol (mais pour le groupe dual  $SU(1; 2)$ ). On peut donc à nouveau étendre  $\tilde{s}$  à  $\{(p, d, P) \in \mathbb{D}(V)\}$ .

**Interprétation polynomiale de  $\tilde{s}$ .** Les deux prolongements précédents ne suffisent pas à étendre  $\tilde{s}$  à  $\mathbb{D}$  tout entier, et ne sont a priori pas holomorphes en la variable fixée. Pour cela, nous allons devoir faire intervenir une interprétation polynomiale de  $\tilde{s}$ .

Considérons l'ensemble  $V_\Omega$  formé des triplets de points  $(\tilde{p}, \tilde{y}, \tilde{z})$  de  $V$  tels que  $(\tilde{p}, \tilde{p} \wedge \tilde{y}, \tilde{p} \wedge \tilde{y} \wedge \tilde{z})$  soit dans  $\tilde{\Omega}$ . On peut alors associer à  $\tilde{s}$  une fonction  $\sigma$  définie sur  $V_\Omega$  par :

$$\sigma(\tilde{p}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \tilde{s}(\tilde{p}, \tilde{p} \wedge \tilde{y}, \tilde{p} \wedge \tilde{y} \wedge \tilde{z}).$$

Inversement, on peut retrouver  $\tilde{s}$  à partir de  $\sigma$  par la formule :

$$\tilde{s}(\tilde{p}, \tilde{d}, \tilde{P}) = \left( \frac{\det(\tilde{d}, \alpha, \beta)}{\det(\tilde{p}, \tilde{y}, \alpha, \beta)} \right)^{b'} \left( \frac{\det(\tilde{P}, \beta)}{\det(\tilde{p}, \tilde{y}, \tilde{z}, \beta)} \right)^{b'+c'} \sigma(\tilde{p}, \tilde{y}, \tilde{z}),$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux points quelconques non colinéaires hors de  $P$ .

Le premier prolongement obtenu précédemment à  $p$  fixé permet d'étendre  $\sigma$  à l'ensemble des triplets de points  $(\tilde{p}, \tilde{y}, \tilde{z})$  tels que  $\tilde{p}$  est de signature négative,  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$  tels que l'espace engendré par  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$  soit de dimension 3. En se plaçant à  $\tilde{p}$  fixé, on voit que la fonction est définie sur l'ensemble  $\{(\tilde{y}, \tilde{z}) \in V^2 : \tilde{y} \neq \tilde{p}, \tilde{z} \notin \langle \tilde{p}, \tilde{y} \rangle\}$ , qui est une sous-variété de  $V^2$  de codimension 3. En utilisant le théorème de Hartogs et le fait que la fonction est holomorphe à  $\tilde{p}$  fixé, on peut prolonger holomorphiquement  $\sigma$ , à  $\tilde{p}$  fixé, à  $V^2$  en entier. La fonction ainsi obtenue est holomorphe et homogène de degré  $b' + c'$  en  $\tilde{y}$  et  $c'$  en  $\tilde{z}$ . Cette fonction est donc nulle ou un polynôme en  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$ .

Considérons l'ensemble

$$E = \{((i_1, \dots, i_4), (j_1, \dots, j_4)) \in \mathbb{N}^8 : i_1 + \dots + i_4 \leq b' + c'; j_1 + \dots + j_4 \leq c'\}.$$

En décomposant  $\sigma$  en fonction des puissances de  $\tilde{y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \tilde{y}_4)$  et de  $\tilde{z} = (\tilde{z}_1, \tilde{z}_2, \tilde{z}_3, \tilde{z}_4)$ , on obtient l'écriture suivante :

$$\sigma(\tilde{p}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \sum_{(I, J) \in E} f_{I, J}(\tilde{p}) \tilde{y}^I \tilde{z}^J, \quad (6.3)$$

où  $I = (i_1, \dots, i_4)$ ,  $\tilde{y}^I = \tilde{y}_1^{i_1} \tilde{y}_2^{i_2} \tilde{y}_3^{i_3} \tilde{y}_4^{i_4}$ , et de façon similaire pour  $J$  et  $\tilde{z}^J$ . Remarquons que les coefficients  $f_{I, J}(\tilde{p})$  ne dépendent que de  $\tilde{p}$ .

La restriction de  $\sigma$  à  $V_\Omega$  est une fonction holomorphe, et contient l'ensemble des  $\tilde{p}$  considérés ici (c'est-à-dire de signature négative). On en déduit que les coefficients  $f_{I, J}(\tilde{p})$  dépendent holomorphiquement de  $\tilde{p}$ , ce qui prouve que le prolongement de  $\sigma$  détaillé ci-dessus est **holomorphe**.

**Construction d'une fonction  $\psi$  polynomiale en  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$ .** Le second prolongement de  $\tilde{s}$  permet de définir  $\sigma$  sur l'ensemble des triplets  $(\tilde{p}, \tilde{y}, \tilde{z})$  tels que  $\tilde{p} \wedge \tilde{y} \wedge \tilde{z}$  soit de signature  $(+ - -)$ . L'objectif ici est de définir une fonction holomorphe  $\psi$  de  $(\tilde{p}, \tilde{y}, \tilde{z})$ , définie pour tout  $\tilde{p}$  de  $V$  et dépendant polynomialement de  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$ . Nous prouverons par la suite que  $\psi$  et  $\sigma$  sont égales sur un ouvert, ce qui impliquera que  $\psi$  est un prolongement holomorphe de  $\sigma$ . Le corollaire suivant s'avérera utile.

LEMME 6.3. *Soit  $W$  un espace vectoriel complexe de dimension  $a$ , et soit  $\mathbb{P}_N$  l'ensemble des polynômes sur  $W$  de degré  $N$ .*

*Soit  $M$  le cardinal de l'ensemble :*

$$F = \{(i_1, \dots, i_a) \in \mathbb{N}^a : i_1 + \dots + i_a \leq N\}.$$

*Considérons l'ensemble des  $M$ -uplets  $(w_1, \dots, w_M)$  de vecteurs de  $W$  tels que l'application*

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_N &\rightarrow \mathbb{C}^M \\ \rho &\mapsto (\rho(w_1), \dots, \rho(w_M)) \end{aligned}$$

*soit une bijection. Alors cet ensemble est ouvert dense de  $W^M$ .*

DÉMONSTRATION: Soit  $\rho$  un polynôme de degré  $N$ . On peut écrire  $\rho$  comme :

$$\rho(p) = \rho(x_1, \dots, x_a) = \sum_{i_1 + \dots + i_a \leq N} r_{i_1, \dots, i_a} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_a^{i_a},$$

où on note  $(x_1, \dots, x_a)$  les coefficients de  $p$  dans la base canonique de  $W = \mathbb{C}^a$ . On désigne par  $I$  un  $a$ -uplet  $(i_1, \dots, i_a)$ . Dire que l'application donnée dans le théorème est bijective revient à dire que les coefficients  $r_I$  de  $\rho$  sont définis de façon unique par les valeurs de  $\rho$  en ces points, donc, que le système suivant, d'inconnues  $(r_I)$ , admet une unique solution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(p_1) = \rho(x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,a}) = \sum_{I \in F} r_I \cdot x_{1,1}^{i_1} \cdot x_{1,2}^{i_2} \dots x_{1,a}^{i_a} \\ \vdots \\ \rho(p_M) = \rho(x_{M,1}, x_{M,2}, \dots, x_{M,a}) = \sum_{I \in F} r_I \cdot x_{M,1}^{i_1} \cdot x_{M,2}^{i_2} \dots x_{M,a}^{i_a} \end{array} \right. \quad (6.4)$$

Ce qui équivaut à ce que le déterminant de la matrice associée soit non nul. Or, le déterminant de ce système est un polynôme non nul en  $x_{i,j}$ , pour  $i = 1 \dots M$  et  $j = 1 \dots a$ . Son noyau est donc une sous-variété algébrique de  $W^M$  de degré strictement inférieur à celui de  $W^M$ , donc son complémentaire un ouvert dense de  $W^M$ , ce qui prouve le résultat.  $\square$

Pour un tel ensemble de points de  $W^M$ , on dira que les points sont en position générale.

Revenons à notre fonction  $\sigma$ . Soit  $M$  le cardinal de l'ensemble  $E$  défini plus haut. Considérons  $M$  couples de points  $(\tilde{y}_k, \tilde{z}_k)$ ,  $k = 1 \dots M$ , de  $V$  tels que

(C1) Les droites  $\langle \tilde{y}_k, \tilde{z}_k \rangle$  sont de signature  $(--)$ .

(C2) Les points  $(\tilde{y}_k, \tilde{z}_k)$  de  $W = V^2$  sont en position générique.

L'ensemble des points vérifiant (C1) est un ouvert de  $W^M$ , et le lemme 6.3 assure que l'ensemble des points vérifiant (C2) est un ouvert dense de  $W^M$ , donc un tel choix ne pose aucun problème.

Alors, si  $\tilde{p}$  n'appartient pas aux droites  $\langle \tilde{y}_k, \tilde{z}_k \rangle$  pour tout  $k$ , le plan  $\langle \tilde{p}, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k \rangle$  est nécessairement de signature  $(+ - -)$ , et on peut donc associer à chacun des  $M$  couples de points  $(\tilde{y}_k, \tilde{z}_k)$  le nombre complexe  $\sigma(\tilde{p}, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k)$  (grâce au prolongement à  $P$  fixé). Le corollaire 6.3 et la remarque qui suit permet alors d'affirmer l'existence d'un polynôme  $\psi$  en  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$  ayant les propriétés suivantes :

- (1)  $\psi$  est de degré  $b' + c'$  en  $\tilde{y}$  et  $c'$  en  $\tilde{z}$
- (2)  $\psi$  est égale à  $\sigma$  en chacun des  $(\tilde{p}, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k)$ .
- (3)  $\psi$  est définie pour tout  $(\tilde{p}, \tilde{y}, \tilde{z})$  tel que  $\tilde{p}$  est en dehors des  $M$  droites choisies ci-dessus.
- (4) les coefficients du polynôme en  $\tilde{y}$  et  $\tilde{z}$  dépendent de  $\tilde{p}$  de façon holomorphe (car  $\sigma(\tilde{p}, \tilde{y}_k, \tilde{z}_k)$  dépend de  $\tilde{p}$  de façon holomorphe), ce qui implique que  $\psi$  est une fonction holomorphe là où elle est définie.
- (5) L'unicité des coefficients (c.f. Corollaire 6.3) assure que, pour  $p$  de signature négative, les coefficients de  $\psi$  sont les mêmes que ceux de  $\sigma$  donnés précédemment. Ainsi, les fonctions  $\psi$  et  $\sigma$  sont égales sur l'ouvert  $V_\Omega$  de  $V^3$  privé des  $M$  droites pour la première variable.

Le dernier point et le fait que les deux fonctions  $\sigma$  et  $\psi$  sont holomorphes assurent qu'on a trouvé un prolongement holomorphe de  $\sigma$  à  $V^3$  privé des  $M$  droites. Pour prolonger à  $V^3$  en entier, il suffit de refaire le même raisonnement en choisissant un autre ensemble de  $M$  droites.

La fonction  $\sigma$  se prolonge donc à  $V^3$ . Cette fonction étant homogène, holomorphe et définie sur  $V^3$ , on en déduit que c'est soit un polynôme, soit la fonction nulle.

Nous avons donc prouvé que  $\tilde{s}$  correspond nécessairement à une fonction nulle ou un polynôme homogène de degré  $(a' + b' + c')$ ,  $(b' + c')$  et  $c'$ . Donc  $\tilde{s}$  elle même s'étend holomorphiquement à  $\mathbb{D}$ . Le théorème de Borel-Weil nous dit alors que  $H^0(\Omega, \mathcal{F}_{a', b', c'})$  est une représentation algébrique irréductible de  $G^{\mathbb{C}}$  à condition que  $a'$ ,  $b'$  et  $c'$  soient positifs<sup>1</sup>.  $\square$

COROLLAIRE 6.4. *Pour  $a'$ ,  $b'$   $c'$  vérifiant :*

$$\begin{cases} a' + b' + c' + 3 < 0 \\ a' + b' + 2 > 0 \\ b' + c' + 2 > 0 \end{cases},$$

*c'est-à-dire pour  $(a', b', c')$  correspondant, dans la structure complexe définie par  $\Omega$ , à un poids  $\mu$  tel que  $\mu - \delta_\Omega$  appartient à la chambre  $C_{-\mathcal{R}_6}$ , on a :*

$$H^0(\Omega, \mathcal{F}_{a', b', c'}) = 0.$$

DÉMONSTRATION: Il suffit de remarquer que la première condition sur  $a'$ ,  $b'$ ,  $c'$  implique que  $a$ ,  $b$  et  $c$  ne peuvent être positifs ou nuls.  $\square$

<sup>1</sup>Cette condition se traduit, au niveau des faisceaux  $\mathcal{F}_\mu$ , par le fait que  $-\mu$  (avec nos normalisations) doit être dominant vis-à-vis du système de racines définissant  $\Omega$ .

## 2.2. Injectivité de l'application $\mathcal{P}$ : cas de l'espace homogène local.

Nous sommes désormais en mesure de prouver le théorème suivant :

THÉORÈME 6.5. *Soit  $(a, b, c)$  tel que*

$$\begin{cases} a + b + c + 3 < 0 \\ a + 1 > 0 \\ c + 1 > 0 \end{cases},$$

et soient  $a' = a + b + 1$ ,  $b' = -b - 2$  et  $c' = b + c + 1$ .

(1) *L'application :*

$$\mathcal{P} : H^0(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_{a,b,c}) \rightarrow H^1(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{a',b',c'})$$

*existe et est injective.*

(2) *Soient  $\mu$  et  $\mu'$  les caractères attachés à  $\mathcal{F}_{a,b,c}$  et  $\mathcal{F}_{a',b',c'}$  de façon habituelle. Supposons de plus que l'on impose sur  $\mu - \delta_X$  (ou de façon équivalente sur  $\mu' - \delta_\Omega$ ) la condition de régularité suivante : la série discrète de paramètre de Harish-Chandra  $\mu - \delta_X$  doit être intégrable (c.f. [Tr-Va]). Alors l'application  $\mathcal{P}$  est bijective.*

DÉMONSTRATION:

En utilisant la suite spectrale de Cartan-Leray permettant de calculer  $H^\bullet(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{a',b',c'})$ , on obtient la suite exacte associée aux termes de bas degré :

$$H^1(\Gamma, H^0(\Omega, \mathcal{F})) \rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (H^1(\Omega, \mathcal{F}))^\Gamma \rightarrow H^2(\Gamma, H^0(\Omega, \mathcal{F})), \quad (6.5)$$

où  $\mathcal{F}$  désigne bien évidemment  $\mathcal{F}_{a',b',c'}$ . Le corollaire précédent prouve que les espaces de gauche et de droite sont nuls,  $H^0(\Omega, \mathcal{F}_{a',b',c'})$  l'étant. Ainsi,  $H^1(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{a',b',c'})$  s'identifie à  $(H^1(\Omega, \mathcal{F}_{a',b',c'}))^\Gamma$ .

On considère alors un élément  $f$  de  $H^0(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_{a,b,c}) = H^0(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_{a,b,c})^\Gamma$ . On vérifie aisément que  $\mathcal{P}(f)$  est invariant par  $\Gamma$ . Ceci implique que  $\mathcal{P}(f)$  est bien dans  $H^1(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{a',b',c'})$ , donc que l'application  $\mathcal{P}$  est définie sur les espaces homogènes locaux. S'agissant d'une restriction,  $\mathcal{P}$  reste injective.

Pour la seconde assertion du théorème, l'article [Wi2] prouve une conjecture de Langlands selon laquelle, sous les conditions de régularité du corollaire, la seule représentation apparaissant dans la cohomologie  $H^\bullet(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\mu)$  est la série discrète  $\pi_{\mu - \delta_X}$  ; la dimension de l'espace de cohomologie  $H^\bullet(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\mu)$  est alors égale à la multiplicité  $m_\Gamma(\pi_{\mu - \delta_X})$  de la série discrète dans  $L^2(\Gamma \backslash G)$  (de même pour  $\Omega$ ). Remarquons que, le caractère  $\mu'$  étant égal à  $\mu + e_{14}$ , on a :

$$\mu - \delta_X = \mu' - \delta_\Omega.$$

On en déduit que, sous les conditions du corollaire,

$$\dim(H^0(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\mu) = \dim(H^\bullet(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_\mu) = m_\Gamma(\pi_{\mu-\delta_X}).$$

Les espaces étant de même dimension, l'application injective  $\mathcal{P}$  est alors bijective.

□

REMARQUE 6.1. Dans le cas  $SU(2, 1)$ , Carayol [Ca2] est parvenu à un résultat de bijectivité de  $\mathcal{P}$  sans condition de régularité, ou presque, sur  $\mu$ . L'argument manquant ici est le fait que les seules représentations intervenant dans l'espace des formes automorphes du cas  $SU(2, 1)$  sont les séries discrètes et leurs limites (cf. [Ro]). Ne disposant pas de résultats analogues pour  $SU(2, 2)$ , on doit se contenter de la condition de régularité ci-dessus (ou plutôt de celle de [Wi2], moins forte).

### 3. Classes de cohomologie provenant de la limite dégénérée de série discrète.

Dans la première partie, nous avons prouvé que les classes  $\phi$  dans l'espace  $H^4(GS_U, \mathcal{F}_{\mu_1})$  provenant de la limite dégénérée de série discrète  $\tilde{\pi}_1$  pouvait s'exprimer par des cup-produits de classes  $\phi_2$  et  $\phi'_3$  respectivement dans les espaces  $H^1$  et  $H^3$  de  $GS_U$ , provenant de séries discrètes (c.f. Théorème 4.2). La seconde assertion du théorème 6.5 permet alors d'affirmer que la classe  $\phi_2$  est l'image d'une classe dans l'espace de 0-cohomologie sur la variété  $\Gamma \backslash X$ , provenant nécessairement de  $\pi_2$  selon le résultat de Williams [Wi2]. On peut ainsi exprimer  $\phi_2$  en fonction d'une forme classique, correspondant à une série discrète holomorphe.

On ne dispose pas ici de résultats similaires pour  $\tilde{\phi}_3$ . Nous pouvons cependant faire quelques remarques. Au niveau de la classe  $\tilde{\phi}_3$  associée au paramètre  $\mu'_3$  apparaissant sur le dessin ci-dessous, il paraît difficile de construire une application similaire à  $\mathcal{P}$  entre des espaces de cohomologies de  $X$  dans  $\Omega$ , car la chambre correspondante dans  $X$  possède de la cohomologie en degré  $4 > 3$ .

On dispose cependant d'un autre espace qui est, à l'instar de  $X$ , un fibré en  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  sur un domaine hermitien symétrique : l'espace dual  $Y = \Omega_{(++-)}$ . La figure 6-2 ci-dessous est l'analogie du dessin 5-2 pour  $\Omega$  et  $Y$  pour la chambre qui nous intéresse.

On peut alors espérer pouvoir définir une application  $\mathcal{P}'$  allant du  $H^0$  de  $Y$  dans le  $H^4$  de  $\Omega$  dans un travail futur. Cela permettrait d'exprimer notre classe  $\phi$  provenant de  $\tilde{\pi}_1$  en fonction de formes automorphes classiques.

3. CLASSES DE COHOMOLOGIE PROVENANT DE LA LIMITE DÉGÉNÉRÉE DE SÉRIE DISCRÈTE

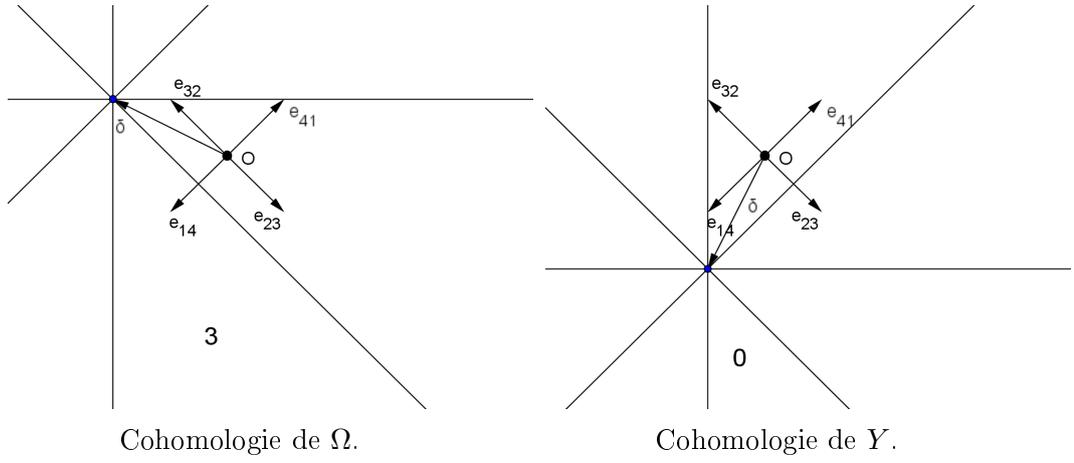


FIG. 6-2. Cohomologies de  $\Omega$  et de  $Y$ .



## ANNEXE A

### Généralisation de l'application $\mathcal{P}$ à $SU(m, n)$ .

L'objectif de cet annexe est de décrire comment généraliser l'application  $\mathcal{P}$  définie pour  $SU(2, 1)$  et  $SU(2, 2)$  à  $G = SU(n+1, n)$  et  $G = SU(n, n)$ . On considère en fait une forme anisotrope de ces groupes, définie par une algèbre centrale simple de dimension  $n(n+1)$  sur un corps quadratique imaginaire que l'on munit d'une involution de seconde espèce. On impose que la fonction  $\mathcal{P}$  aille d'un espace de cohomologie  $H^0(X, \mathcal{F}_\mu)$  dans un  $H^1(\Omega, \mathcal{F}_{\mu'})$ , où  $X$  et  $\Omega$  sont des quotients de  $G$  par le tore maximal diagonal  $H$ , que l'on munit d'une structure complexe.

#### 1. Notations

Soit  $m$  défini par  $m = n$  pour  $SU(n, n)$ ,  $m = n + 1$  pour  $SU(n + 1, n)$ , et soit  $N = m + n$ . On désigne par  $\mathbb{D}(\mathbb{C}^N)$  l'ensemble des drapeaux de  $\mathbb{C}^N$ . Pour  $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{N-1})$ , où chaque  $\varepsilon_i$  est un signe  $+$  ou  $-$ , on note  $\Omega_\varepsilon$  l'ensemble des drapeaux de  $\mathbb{D}(\mathbb{C}^N)$  formé des droites de signature  $\varepsilon_1$ , des plans de signature  $\varepsilon_1\varepsilon_2$ , etc... Pour simplifier les notations à venir, on note  $\ominus$  une succession de  $n - 1$  signes moins et  $\oplus$  une succession de  $m - 2$  signes plus.

On désigne par  $K$  et  $H$  le sous-groupe compact maximal et le tore maximal de façon similaire au cas  $SU(2, 2)$ .

#### 2. Choix des éléments.

##### 2.1. Choix de $X$ .

Le choix de la variété  $X$  est assez clair : afin d'avoir de la cohomologie de degré 0, et par analogie aux cas précédents, on choisit l'espace qui sera un fibré sur le domaine hermitien symétrique de  $\mathbb{C}^N$  des droites de signature  $(0, n)$ . Cela impose à  $X$  d'être  $\Omega_\varepsilon$  avec  $\varepsilon = (\ominus - +\oplus)$ .

Une autre façon de définir  $X$  est de voir quel sous-groupe de Borel  $B_X$  choisir afin que l'espace  $G/H$  s'identifie à l'ouvert de  $G^{\mathbb{C}}/B_X$  contenant  $eB_X$  donnant la bonne structure complexe. Rappelons que ce choix est unique à

l'action de  $W_K$  près. Ici, nous choisissons :

$$B_X = \left( \begin{array}{cccc|ccc} \bullet & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \bullet & \dots & \dots & \bullet & 0 & \dots & 0 \\ \hline \bullet & \dots & \dots & \bullet & \bullet & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \bullet & \dots & \dots & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \end{array} \right)$$

où le bloc supérieur gauche est une matrice  $m \times m$ .

Rappelons qu'on a un isomorphisme :

$$H^0(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\mu) \xrightarrow{\sim} H^0(\mathfrak{b}_X, H, \mathcal{A}_\Gamma \otimes \mu).$$

L'espace des formes automorphes  $\mathcal{A}_\Gamma$  se décompose en une somme directe de  $(\mathfrak{g}, K)$ -modules irréductibles, parmi lesquels apparaissent les séries discrètes. On s'intéresse donc à la cohomologie de ces séries discrètes afin de savoir pour quels  $\mu$  l'espace  $H^0(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\mu)$  est différent de zéro.

En appliquant la formule de Schmid, on voit que pour  $-\mu + \delta_X$  (où  $\delta_X$  désigne la demi-somme des racines associées à  $B_X$ ) appartenant à la chambre de Weyl définie par :

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} \bullet & 0 & \dots & 0 & \bullet & \dots & \bullet \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \bullet & \dots & \dots & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & \bullet & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \bullet & \dots & \bullet \end{array} \right),$$

on a :

$$H^0(\mathfrak{b}_X, H, \pi(-\mu + \delta_X))_{-\mu} = \mathbb{C}.$$

Le système de racines positives associé à  $B_X$  sera noté  $\Delta_X$  et celui ci-dessus  $\Delta_\pi$ . On peut donc affirmer que  $H^0(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\mu)$  est non nul pour  $-\mu + \delta_X$  dans  $C_{\Delta_\pi}$ .

## 2.2. Choix de $\Omega$ .

On cherche un espace  $\Omega$  (ou plutôt les structures  $\Delta_\Omega$ ,  $\Gamma_\Omega$  et  $B_\Omega$  le définissant) tel que

$$H^1(\mathfrak{b}_\Omega, T, \pi(-\mu + \delta_\Omega))_{-\mu} = \mathbb{C}$$

pour  $-\mu + \delta_\Omega$  dans  $C_{\Delta_\pi}$ . Tout les structures étant équivalentes à l'action de  $W_K$  près, on peut imposer à  $B_\Omega$  de contenir les matrices diagonales inférieures

de  $K_{\mathbb{C}}$ . En étudiant la formule de Schmid, on doit avoir, pour  $-\mu + \delta_{\Omega}$  dans  $C_{\Delta_{\pi}}$ , la relation suivante :

$$1 = \underbrace{\#\{\alpha \in \Delta_K \cap \Delta_{\Omega}; (\alpha, -\mu + \delta) < 0\}}_0 + \underbrace{\#\{\alpha \in \Delta_n \cap \Delta_{\Omega}; (\alpha, -\mu + \delta) > 0\}}_{+\#\{\alpha \in \Delta_n \cap \Delta_{\Omega}; (\alpha, -\mu + \delta) > 0\}}$$

Donc il doit n'y avoir qu'une seule racine non compacte de  $\Delta_{\Omega}$  ayant un produit scalaire positif avec  $-\mu + \delta_{\Omega}$ , c'est-à-dire associée à un élément de la sous-matrice triangulaire supérieure. On obtient un tel ensemble en considérant

$$\Delta_{\Omega} = (m, m+1).\Delta_X,$$

où  $(m, m+1)$  est la symétrie du groupe de Weyl  $W$  défini naturellement par identification avec le groupe des symétries  $S_N$ . On obtient :

$$B_{\Omega} = \left( \begin{array}{cccc|ccc} \bullet & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ \bullet & \dots & \dots & \bullet & \bullet & 0 & \dots & 0 \\ \hline \bullet & \dots & \bullet & 0 & \bullet & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ \bullet & \dots & \dots & \bullet & \bullet & \dots & \bullet \end{array} \right)$$

On voit immédiatement que la différence entre  $\delta_X$  et  $\delta_{\Omega}$  est égale à la racine  $e_{m,m+1}$ . On retrouve le même "phénomène" que dans le cas de  $SU(2, 1)$  ou  $SU(2, 2)$  avec la racine  $e_{32}$  (mais nous avons fait ici un choix de racines compactes différent).

Pour finir, cet espace  $\Omega$  est défini en terme de drapeaux par  $\Omega = \Omega_{\varepsilon}$  avec  $\varepsilon = (\ominus + -\oplus)$ .

### 2.3. Interprétation des $\mathcal{F}_{\mu}$ par des faisceaux holomorphes.

Tout comme dans les cas précédents, les  $\mathcal{F}_{\mu}$  ont une interprétation en termes de faisceaux  $\mathcal{O}(n)$  sur certains espaces.

A chaque élément  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{N-1})$  de  $\mathbb{Z}^{N-1}$  on peut associer un faisceau  $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}$  sur  $X$  et sur  $\Omega$  de la façon suivante. Les plongements de Plücker permettent de voir  $\mathbb{D}(\mathbb{C}^N)$  comme un sous-ensemble de

$$\mathbb{P}(\Lambda^1 \mathbb{C}^N) \times \mathbb{P}(\Lambda^2 \mathbb{C}^N) \times \dots \times \mathbb{P}(\Lambda^{N-1} \mathbb{C}^N).$$

On considère alors le faisceau

$$\mathcal{O}(a_1) \times \mathcal{O}(a_2) \times \dots \times \mathcal{O}(a_{N-1})$$

que l'on restreint à  $\mathbb{D}(\mathbb{C}^N)$ . Les espaces  $X$  et  $\Omega$  étant des espaces de drapeaux de  $\mathbb{D}(\mathbb{C}^N)$ , il suffit de restreindre à nouveau le précédent drapeau pour

obtenir  $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}$ .

Pour faire le lien entre ces drapeaux et les  $\mathcal{F}_{\mu}$ , nous allons nous placer en la fibre au-dessus du drapeau correspondant à l'élément neutre de  $X$  et de  $\Omega$  à l'instar du paragraphe 2 du chapitre 5.

- Pour  $X$  :

$$e_{i, i+1} \leftrightarrow \mathbf{a} = (0, \dots, 0, -1, 2, -1, 0, \dots, 0), \quad 1 \leq i \leq N-1,$$

où le 2 est placé à la  $(N-i)$ -ème position (pour  $i=1$  et  $i=N-1$ , la formule est la même avec un "-1" de moins).

- Pour  $\Omega$  :

$$\begin{aligned} e_{i, i+1} &\leftrightarrow \mathbf{a} = (0, \dots, 0, -1, 2, -1, 0, \dots, 0), i \neq \{m-1, m, m+1\}, \\ &\quad \text{où le 2 est placé à la } (N-i)\text{-ème position,} \\ e_{m-1, m} &\leftrightarrow \mathbf{a} = (0, \dots, 0, -1, 1, 1, -1, 0, \dots, 0), \\ &\quad \text{où le premier 1 est placé à la } n\text{-ème position,} \\ e_{m+1, m+2} &\leftrightarrow \mathbf{a} = (0, \dots, 0, -1, 1, 1, -1, 0, \dots, 0), \\ &\quad \text{où le premier 1 est placé à la } (n-1)\text{-ème position,} \\ e_{m, m+1} &\leftrightarrow \mathbf{a} = (0, \dots, 0, 1, -2, 1, 0, \dots, 0), \\ &\quad \text{où le } -2 \text{ est placé à la } n\text{-ème position.} \end{aligned}$$

### 3. L'application $\mathcal{P}$

#### 3.1. Cohomologie à la Gindikin.

Nous aurons besoin de la définition équivalente de la cohomologie de nos faisceaux donnée par Gindikin. Il faut pour cela définir correctement un espace de Stein  $\mathbb{U}$  fibré sur  $\Omega$ . Pour cela on pose :

Pour  $SU(n+1, n)$  :

$\mathbb{U}$  est formé des couples de drapeaux  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{d}'$  en position générale tels que :

- $\mathbf{d} = (p_1, p_2, \dots, p_{N-1}) \in \Omega$  avec  $\Omega = \Omega_{(\ominus+-\oplus)}$ .
- $\mathbf{d}' = (p'_1, p'_2, \dots, p'_{N-1}) \in \Omega'$  avec  $\Omega' = \Omega_{(\oplus+-+---)}$  le dual de  $\Omega$  relativement à la forme  $\mathbf{q}$ .
- $\langle p'_n, p_n \cap p'_{n+2} \rangle$  soit de signature  $(n+1, 0)$
- $\langle p_{n-1}, p_{n+1} \cap p'_{n+1} \rangle$  soit de signature  $(0, n)$

Pour  $SU(n, n)$  :

$\mathbb{U}$  est formé des couples de drapeaux  $\mathbf{d}$  et  $\mathbf{d}'$  en position générale tels que :

- $\mathbf{d} = (p_1, p_2, \dots, p_{N-1}) \in \Omega$  avec  $\Omega = \Omega_{(\ominus+-\oplus)}$ .
- $\mathbf{d}' = (p'_1, p'_2, \dots, p'_{N-1}) \in \Omega'$  avec  $\Omega' = \Omega_{(\oplus+-+---)}$  le dual de  $\Omega$  relativement à la forme  $\mathbf{q}$ .
- $\langle p'_{n-1}, p_n \cap p'_{n+1} \rangle$  soit de signature  $(n, 0)$
- $\langle p_{n-1}, p_{n+1} \cap p'_n \rangle$  soit de signature  $(0, n)$

Ces conditions peuvent se résumer par :

$$\mathbb{U} = \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{d}, \mathbf{d}'); \quad \mathbf{d} \in \Omega \\ \quad \quad \quad \mathbf{d}' \in \Omega' \\ \langle p'_{m-1}, p_n \cap p'_{m+1} \rangle \text{ de signature } (m, 0) \\ \langle p_{n-1}, p'_m \cap p_{n+1} \rangle \text{ de signature } (0, n) \\ \mathbf{d} \text{ et } \mathbf{d}' \text{ en position générale} \end{array} \right\}$$

Remarquons que les plans de signature  $(0, n)$  et  $(m, 0)$  correspondent aux droites "d'intersection"  $(pq)$  et  $(p'q')$  dans le cas  $SU(2, 2)$ .

THÉORÈME A.1. *L'espace  $\mathbb{U}$  est un espace de Stein.*

La preuve est très similaire à la preuve de la proposition (5.1) dans le cas  $SU(2, 2)$ , en ce sens qu'on commence par "paramétrer" les drapeaux en fonction de deux plans de signature  $(m, 0)$  et  $(0, n)$ , ce qui est l'objet du lemme suivant.

LEMME A.2. *Soient  $D_+$  un plan de signature  $(m, 0)$  et  $D_-$  un plan de signature  $(0, n)$  fixés dans  $\mathbb{C}^N$ . L'espace  $\mathbb{U}$  est isomorphe à :*

$$\mathbb{U} \simeq DHS \times DHS^* \times \left\{ \begin{array}{l} (\alpha^+, \beta^+, \alpha^-, \beta^-) \in \mathbb{D}(D_+)^2 \times \mathbb{D}(D_-)^2 \\ \text{t.q. } (\alpha^-, \beta^-) \text{ et } (\alpha^+, \beta^+) \text{ sont en position générale} \end{array} \right\} \quad (\text{A.1})$$

où  $DHS$  désigne le domaine hermitien symétrique formé des plans de signature  $(0, n)$  et  $DHS^*$  son dual : l'ensemble des  $(m, 0)$ -plans.

DÉMONSTRATION DU LEMME : Considérons un élément

$$(d_+, d_-, (\alpha^+, \beta^+, \alpha^-, \beta^-))$$

dans l'espace de droite. On lui associe un couple de drapeaux de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} p_1 & = \langle d_+, \alpha_1^- \rangle \cap d_- & p'_1 & = \langle d_-, \beta_1^+ \rangle \cap d_+ \\ p_2 & = \langle d_+, \alpha_2^- \rangle \cap d_- & p'_2 & = \langle d_-, \beta_2^+ \rangle \cap d_+ \\ & \vdots & & \vdots \\ p_{n-1} & = \langle d_+, \alpha_{n-1}^- \rangle \cap d_- & p'_{m-1} & = \langle d_-, \beta_{n-1}^+ \rangle \cap d_+ \\ p_n & = \langle p_{n-1}, \langle d_-, \alpha_1^+ \rangle \cap d_+ \rangle & p'_m & = \langle p'_{m-1}, \langle d_+, \beta_1^- \rangle \cap d_- \rangle \\ p_{n+1} & = \langle d_-, \langle d_-, \alpha_1^+ \rangle \cap d_+ \rangle & p'_{m+1} & = \langle d_+, \langle d_+, \beta_1^- \rangle \cap d_- \rangle \\ & \vdots & & \vdots \\ p_{N-1} & = \langle d_-, \langle d_-, \alpha_{m-1}^+ \rangle \cap d_+ \rangle & p'_{N-1} & = \langle d_+, \langle d_+, \beta_{n-1}^- \rangle \cap d_- \rangle \end{array}$$

Les espaces  $p_i$  et  $p'_i$  ci-dessus sont de dimension au moins  $i$ , et pour des raisons de signature, il ne reste qu'une dimension possible :  $i$  avec la signature voulue.

Nous allons montrer que l'élément ainsi défini est bien dans  $\mathbb{U}$ . Pour cela, on commence par prouver que les plans  $p_i$  et  $p'_{N-i}$  sont en position générale, donc par étudier les dimensions des espaces  $\langle p_i, p'_{N-i} \rangle$ .

**Cas  $1 \leq i \leq n-1$  :**

$$\begin{aligned} \langle p_i, p'_{N-i} \rangle &= \langle \langle d_+, \alpha_i^- \rangle \cap d_-; \langle d_+, \langle d_+, \beta_{n-i}^- \rangle \cap d_- \rangle \rangle \\ &= \langle d_+, \langle d_+, \alpha_i^-, \beta_{n-i}^- \rangle \cap d_- \rangle \\ &= \langle d_+, \langle d_+, D_- \rangle \cap d_- \rangle \quad \text{car } (\alpha^-, \beta^-) \text{ en position générale} \\ &= \langle d_+, \mathbb{C}^N \cap d_- \rangle \\ &= \mathbb{C}^N \end{aligned}$$

Donc ces deux plans sont bien en position générale.

Le cas des  $n+1 \leq i \leq N-1$  se traite de façon similaire.

**Cas  $i = n$  :**

$$\begin{aligned} \langle p_n, p'_m \rangle &= \langle \langle p_{n-1}, \langle d_-, \alpha_1^+ \rangle \cap d_+ \rangle, \langle p'_{m-1}, \langle d_+, \beta_1^- \rangle \cap d_- \rangle \rangle \\ &= \langle \langle d_-, \alpha_1^+, \beta_{m-1}^+ \rangle \cap d_+, \langle d_+, \alpha_{n-1}^-, \beta_1^- \rangle \cap d_- \rangle \rangle \\ &= \langle \langle d_-, D_+ \rangle \cap d_+, \langle d_+, D_- \rangle \cap d_- \rangle \rangle \\ &= \langle d_+, d_- \rangle \\ &= \mathbb{C}^N \end{aligned}$$

Ces égalités prouvent que le couple de drapeau obtenu est bien en position générale.

Il reste à prouver que les deux espaces  $d_-$  et  $d_+$  correspondent aux deux droites de signature  $(m, 0)$  et  $(0, n)$  de la définition de  $\mathbb{U}$ . On veut donc prouver que  $d_+ = \langle p'_{m-1}, p_n \cap p'_{m+1} \rangle$  et que  $d_- = \langle p_{n-1}, p'_m \cap p_{n+1} \rangle$ . Remarquons que  $p_{n-1}$  est inclus par définition dans le plan  $d_-$ . Il reste à voir que  $p'_m \cap p_{n+1}$  est inclus dans  $d_-$  et engendre  $d_-$  avec  $p_{n+1}$ . On a l'égalité suivante :

$$p'_m \cap p_{n+1} = \langle p'_{m-1}, \langle d_+, \beta_1^- \rangle \cap d_- \rangle \cap \langle d_-, \langle d_-, \alpha_1^+ \rangle \cap d_+ \rangle$$

La droite  $\langle d_+, \beta_1^- \rangle \cap d_-$  est incluse dans  $d_-$ , donc dans  $p_{n+1}$ . C'est donc une droite de  $p'_m \cap p_{n+1}$ . Ainsi  $\langle p_{n-1}, p'_m \cap p_{n+1} \rangle$  contient :

$$\begin{aligned} \langle p_{n-1}, \langle d_+, \beta_1^- \rangle \cap d_- \rangle &= \langle \langle d_+, \alpha_{n-1}^- \rangle \cap d_-, \langle d_+, \beta_1^- \rangle \cap d_- \rangle \\ &= \langle d_+, \alpha_{n-1}^-, \beta_1^- \rangle \cap d_- \\ &= d_- \end{aligned}$$

Ainsi  $\langle p_{n-1}, p'_m \cap p_{n+1} \rangle$  contient  $d_-$ .

Par ailleurs,  $E = p'_m \cap p_{n+1}$  ne peut être de dimension autre que 1, car sinon il serait de codimension au plus  $m-2$  dans  $p'_m$ ;  $p'_{m-1}$  étant de codimension 1 dans  $p'_m$ , on voit que  $E \cap p'_{m-1}$  contiendrait une droite, ce qui contredirait le fait que  $p'_{m-1}$  et  $p_{n+1}$  sont en position générale. Ainsi  $d_- = \langle p_{n-1}, p'_m \cap p_{n+1} \rangle$ . La démonstration est semblable pour  $d_+$ .

On a donc une application de l'espace de droite de (A.1) vers  $\mathbb{U}$ . Cette application est clairement surjective. L'injectivité est assurée par le fait que les espaces du type  $\langle d_+, \alpha_i^- \rangle$  sont différents pour chaque  $\alpha_i^-$  choisi. En

effet, considérons que  $\langle d_+, \alpha_i^- \rangle = \langle d_+, \alpha_i'^- \rangle$ . Alors  $\alpha_i'^- \subset \langle d_+, \alpha_i^- \rangle$ , donc  $\forall x \in \alpha_i'^-$ ,  $\exists (y, z) \in \alpha_i^- \times d_+$  tel que :

$$x = y + z$$

Ainsi  $z = x - y \in D_-$  donc  $z = 0$ . D'où  $x \in \alpha_i$  et ce pour tout  $x$  de  $\alpha_i'$ . Par symétrie, on obtient :  $\alpha_i = \alpha_i'$ .

Donc cette application est bijective, ce qui achève la preuve.  $\square$

On est désormais en mesure de prouver le théorème A.1.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME : Les espaces  $DHS$  et  $DHS^*$  sont de Stein. Il reste donc à prouver que l'espace

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha^+, \beta^+, \alpha^-, \beta^-) \in \mathbb{D}(D_+)^2 \times \mathbb{D}(D_-)^2 \\ \text{t.q. } (\alpha^-, \beta^-) \text{ et } (\alpha^+, \beta^+) \text{ sont en position générale} \end{array} \right\}$$

est un espace de Stein. Pour cela, nous allons prouver que pour tout espace vectoriel  $V$  de dimension  $N$  les ensembles

$$E = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{D}(V)^2 \text{ en position générale} \}$$

sont des espaces de Stein, ce qui prouvera le résultat.

Pour montrer que les fonctions holomorphes séparent les points, considérons deux couples de drapeaux distincts  $(\alpha^1, \beta^1)$  et  $(\alpha^2, \beta^2)$ . Soient  $\alpha_i^1$  et  $\alpha_i^2$  des plans de dimension  $i$  distincts pour un certain  $i$ .

On fixe un  $(N-i)$ -plan  $\beta_{N-i}^0$  tel que

$$\langle \alpha_i^1, \beta_{N-i}^0 \rangle \neq \mathbb{C}^N \text{ et } \langle \alpha_i^2, \beta_{N-i}^0 \rangle = \mathbb{C}^N,$$

un  $i$ -plan  $\alpha_i^0$  tel que

$$\langle \alpha_i^0, \beta_{N-i}^1 \rangle = \mathbb{C}^N \text{ et } \langle \alpha_i^0, \beta_{N-i}^2 \rangle = \mathbb{C}^N,$$

ainsi que des relèvements de ces plans via les plongements de Plücker.

Munissons  $V$  d'un déterminant. On pose alors :

$$\begin{aligned} \Psi : E &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto \frac{\det(\alpha_i, \beta_{N-i}^0) \det(\alpha_i^0, \beta_{N-i})}{\det(\alpha_i, \beta_{N-i})} \end{aligned}$$

Cette application n'est définie a priori que sur les relevés de  $(\alpha, \beta)$ , mais est homogène donc bien définie sur les espaces de drapeaux. De plus, le dénominateur est non nul car les drapeaux sont en position générale. On a donc une fonction holomorphe sur  $E$ . Les conditions sur  $(\alpha_i^0, \beta_{N-i}^0)$  assurent le fait que  $\Psi(\alpha^1, \beta^1) = 0$  et  $\Psi(\alpha^2, \beta^2) \neq 0$ . Ainsi les fonctions holomorphes séparent les points.

Il reste à montrer la condition de concavité holomorphe. Considérons une suite  $(\alpha^n, \beta^n)$  de points de  $E$  sans valeur d'adhérence. Cette suite est incluse dans l'espace compact  $\mathbb{D}(V)^2$ . Quitte à considérer la suite extraite, on peut donc supposer que  $(\alpha^n, \beta^n)$  converge vers un couple  $(\alpha^\infty, \beta^\infty)$  de  $\mathbb{D}(V)^2$  hors de  $E$  (car  $(\alpha^n, \beta^n)$  n'a pas de valeur d'adhérence). Donc  $(\alpha^\infty, \beta^\infty)$  n'est pas en position générale. On peut supposer sans perte de généralité que les plans

$\alpha_i^\infty$  et  $\beta_{N-i}^\infty$  n'engendrent pas  $\mathbb{C}^N$ , donc que  $\det(\alpha_i^\infty, \beta_{N-i}^\infty) = 0$ .  
Choisissons  $(\alpha_i^0, \beta_{N-i}^0)$  tels que

$$\langle \alpha_i^0, \beta_{N-i}^\infty \rangle = \mathbb{C}^N \text{ et } \langle \alpha_i^\infty, \beta_{N-i}^0 \rangle = \mathbb{C}^N.$$

Alors, à partir d'un certain rang, les  $\det(\alpha_i^0, \beta_{N-i}^n)$  et  $\det(\alpha_i^n, \beta_{N-i}^0)$  sont non nuls. La fonction  $\Psi$  définie précédemment permet de définir une fonction holomorphe telle que  $\Psi(\alpha^n, \beta^n)$  n'est pas borné.

Ainsi  $E$  est de Stein, ce qui termine la preuve.  $\square$

**PROPOSITION A.3.** *Les fibres de la projection naturelle  $\pi$  de  $\mathbb{U}$  sur  $\Omega$  sont contractiles.*

**DÉMONSTRATION:** La démonstration est une généralisation directe de la proposition (5.2) dans le cas de  $SU(2, 2)$ .

Fixons un élément  $(p_1, \dots, p_n)$  de  $\Omega$ . On désigne par  $\text{Fib}((p_1, \dots, p_n))$  la fibre de la projection de  $\mathbb{U}$  sur  $\Omega$  de base  $(p_1, \dots, p_n)$ . L'idée de la preuve est de paramétrer les droites  $d_-$  et  $d_+$  avant d'utiliser l'isomorphisme du lemme (A.2) pour paramétrer le reste.

Le  $(n-1)$ -plan  $p_{n-1}$  est de signature  $(0, n-1)$ . Considérons le plan  $p_{n-1}^\perp \cap p_{n+1}$ , où  $\perp$  désigne l'orthogonal vis-à-vis de la forme  $\mathbf{q}$ . Sa dimension est au moins 2, et il ne peut, pour des raisons de signature, contenir un 3-plan. C'est donc une droite de signature  $(1, 1)$ . On choisit un élément  $x \in p_{n-1}^\perp \cap p_{n+1}$  de signature  $(0, 1)$  et on pose :

$$d_- = \langle p_{n-1}, x \rangle.$$

Remarquons que tout plan de signature  $(0, n)$  contenant  $p_{n-1}$  et contenu dans  $p_{n+1}$  intersecte nécessairement  $p_{n-1}^\perp \cap p_{n+1}$  (pour des raisons de dimensions) en un point de signature négative, et que chaque choix de  $x$  donne un  $d_-$  différent. Nous avons donc bien paramétré  $d_-$ .

Dans  $p_n^\perp$  (de signature  $(m-1, 1)$ ), choisissons un  $(m-1)$ -plan  $y$  de signature  $(m-1, 0)$ . On obtient un hyperplan  $H = \langle p_n, y \rangle$  de signature  $(m, n-1)$ . On choisit alors un  $m$ -plan  $d_+$  de  $\langle p_n, y \rangle$  de signature  $(m, 0)$ . Remarquons que tout  $m$ -plan de signature  $(m, 0)$  contenant un point de  $p_n$  de signature positive engendrera nécessairement avec  $p_n$  un hyperplan  $(m, n-1)$  (pour des raisons de signatures). Nous avons donc bien une paramétrisation de  $d_+$ .

Fixons désormais un  $(m, 0)$ -plan  $D_+$ , et posons  $D_- = d_-$ . Alors les drapeaux  $\alpha^+$  et  $\alpha^-$  de la propriété (A.2) sont donnés par  $\alpha^- = (p_1, \dots, p_{n-1})$  et  $\alpha^+ = (p_{n+1} \cap D_+, \dots, p_{N-1} \cap D_+)$ . On en déduit qu'un choix de couple de drapeaux  $(\beta^-; \beta^+) \in \mathbb{D}(D_+) \times \mathbb{D}(D_-)$  en position générale avec  $(\alpha^-, \alpha^+)$  permet de paramétrer la fibre  $\text{Fib}((p_1, \dots, p_n))$ .

Pour un espace vectoriel  $V$ , on note  $\text{Gr}_k^{(a,b)}(V)$  les  $k$ -plans de  $V$  de signature  $(a, b)$ . Alors on en déduit de ce qui précède que  $\text{Fib}(p_1, \dots, p_n)$  est isomorphe à :

$$\begin{aligned} & \text{Gr}_1^{(0,1)}(p_{n-1}^\perp \cap p_{n+1}) \times \\ & \{(y, d_+) \in \text{Gr}_{m-1}^{(m-1,0)}(p_n^\perp) \times \text{Gr}_m^{(m,0)}(\mathbb{C}^N) ; d_+ \subset \langle p_n, y \rangle\} \times \\ & \{(\beta^-; \beta^+) \in \mathbb{D}(D_+) \times \mathbb{D}(D_-) \text{ en position générale}\}. \end{aligned}$$

Le premier et le dernier ensemble sont clairement contractiles. Le second ensemble est un fibré sur  $\text{Gr}_{m-1}^{(m-1,0)}(p_n^\perp)$  de fibre  $\text{Gr}_m^{(m,0)}(\langle p_n, y \rangle)$  qui est contractile. La base étant également contractile, ce fibré est trivial, ce qui prouve que ce second ensemble est contractile.

La fibre  $\text{Fib}(p_1, \dots, p_n)$  est donc bien contractile.

□

On a alors, d'après Gindikin, un isomorphisme :

$$H^n(\Omega, \mathcal{F}_\mu) \xrightarrow{\sim} \Gamma(\mathbb{U}, \Omega_\pi^n(\mathcal{F}_\mu)).$$

On peut exprimer cet isomorphisme au niveau des classes dans le complexe de Dolbeault. Pour cela, on a besoin d'une section de la projection  $\pi$ . On peut choisir, à l'instar du cas  $SU(2, 2)$ ,

$$\begin{aligned} s : \Omega & \rightarrow \mathbb{U} \\ \mathbf{d} & \mapsto (\mathbf{d}, \mathbf{d}^\perp). \end{aligned}$$

On retrouve la section envisagée dans le cas  $SU(2, 2)$ .

### 3.2. Définition de l'élément $\eta$ .

On dispose de deux espaces  $X$  et  $\Omega$  tels que pour certains  $\mu$  les espaces de cohomologie  $H^0(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\mu)$  et  $H^1(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_\mu)$  sont différents de zéro. De plus, le cône dans lequel les  $\mu$  donnent de la cohomologie de degré 0 pour  $X$  et celui donnant de la cohomologie de degré 1 pour  $\Omega$  sont translatés l'un de l'autre par le vecteur  $e_{m \ m+1}$ . Tout comme dans les cas précédents, nous aurons besoin d'une cochaîne  $\eta$  dans le complexe associé à  $H^1(\Omega, \mathcal{F}_{e_{m \ m+1}})$ .

Nous allons définir cet élément dans le formalisme de Gindikin. La méthode reste la même : paramétrer une certaine famille de  $n$ -plans, puis choisir la plan "d'intersection"  $d_-$  comme étant le plan à paramétrer. On trouve  $\eta$  en prenant la différentielle relative de cette fonction. Nous illustrons cette méthode pour  $G = SU(n, n)$ , le cas  $SU(n+1, n)$  est identique.

Considérons un élément  $\mathbf{d}$  de  $\Omega$  et  $\tilde{\mathbf{d}}$  un relèvement dans l'espace de Plücker  $\tilde{\Omega}$  (le tilde représentant à chaque fois le relèvement de l'élément de

référence). Nous allons paramétrer les espaces  $\tilde{M}$  de dimension  $n$  contenus dans  $\tilde{p}_{n+1}$ , contenant  $\tilde{p}_{n-1}$  et différents de  $\tilde{p}_n$ .

On fixe un déterminant  $\det$  sur  $\mathbb{C}^N$ , on peut mettre sur  $p_{n+1}$  un déterminant  $\det_{n+1}$  défini par :

$$\det_{n+1}(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = \frac{\det(x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n+1} \wedge \star)}{\det(\tilde{p}_{n+1} \wedge \star)}$$

où  $\star$  est un élément quelconque de  $\Lambda^{n-1}\mathbb{C}^N$  associé à un plan complémentaire de  $p_{n+1}$ .

Fixons un  $n$ -plan d'origine  $p_0$  de relèvement  $\tilde{p}_0$  avec  $p_{n-1} \subset p_0 \subset p_{n+1}$ . Il existe des vecteurs  $\tilde{x}_n, \tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}_M$  de  $\mathbb{C}^N$  tels que :

$$\tilde{p}_n = \tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_n \quad , \quad \tilde{p}_0 = \tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_0 \quad \text{et} \quad \tilde{p}_M = \tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_M.$$

On pose alors :

$$\text{param}(M) = \frac{\det_{n+1}(\tilde{p}_{n-1}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_M)}{\det_{n+1}(\tilde{p}_{n-1}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_n) \cdot \det_{n+1}(\tilde{p}_{n-1}, \tilde{x}_n, \tilde{x}_M)}.$$

Cette fonction est indépendante du relèvement choisi pour  $M$  et pour  $d_0$ , indépendante du choix des vecteurs  $\tilde{x}_n, \tilde{x}_0$  et  $\tilde{x}_M$  et homogène de degré  $(0, \dots, 0, 1, -2, 1, 0, \dots, 0)$ , où  $-2$  est au  $n$ -ème rang, en fonction de  $\mathbf{d}$ .

Considérons un changement d'origine  $d_0$  en  $d'_0$  de relèvement  $\tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}'_0$ . On voit qu'on peut choisir un  $\tilde{x}'_0$  de la forme  $\tilde{x}'_0 = \lambda \tilde{x}_0 + \mu \tilde{x}_n$  car  $\tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_0 \wedge \tilde{x}_n$  est un relèvement de  $p_{n+1}$ . Notre paramétrage devient :

$$\text{param}_{p'_0}(M) = \text{param}_{p_0}(M) + \frac{\mu}{\lambda \det_{n+1}(\tilde{p}_{n-1}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_n)}$$

Pour un choix de  $p_0$  dépendant localement de  $\mathbf{d}$  de façon holomorphe, on s'intéresse à  $\text{param}(\langle p_{n-1}, p_{n+1} \cap p'_n \rangle)$ . Alors la différentielle relative de cette fonction sera bien définie et on pose :

$$\eta = d_\pi(\text{param}(\langle p_{n-1}, p_{n+1} \cap p'_n \rangle)) \in \Gamma(\mathbb{U}, \Omega_\pi^1(\mathcal{F}_{(0, \dots, 0, 1, -2, 1, 0, \dots, 0)}))$$

On vérifie que l'espace de droite correspond à l'espace  $\Gamma(\Omega, \Omega^{(0,1)}(\mathcal{F}_{e_m \ m+1}))$  du paragraphe précédent via les identifications du paragraphe 2.3.

REMARQUE A.1. On peut, tout comme dans les cas précédents, définir  $\eta$  dans le complexe de Dolbeault de la façon suivante. Considérons l'élément  $X_{m, m+1} \in T^{(0,1)}\Omega$ , on définit la forme linéaire sur  $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$  duale de cet élément, ce qui nous donne une forme différentielle invariante à gauche sur  $G$ . En passant au quotient, on obtient un élément  $\eta \in \Gamma(\Omega, \Omega^{(0,1)}(\mathcal{F}_{e_m \ m+1}))$ .

Il ne reste plus qu'à calculer  $\bar{\delta}\eta$  et vérifier que cet élément est nul avec la formule de Maurer-Cartan.

### 3.3. Définition de l'application $\mathcal{P}$ .

On considère un faisceau  $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}$  correspondant à  $\mathcal{F}_{\mu}$  pour  $\mu$  dans  $\delta_X - C_X$ , où  $C_X$  est la chambre de Weyl associée à  $B_X$ , afin de s'assurer que  $H^0(X, \mathcal{F}_m)$  est non nul. Commençons par remarquer qu'on définit une projection de  $\mathbb{U}$  sur  $X$  en posant :

$$(\mathbf{d}, \mathbf{d}') \mapsto \mathbf{d}_X = (p_1, \dots, p_{n-1}, \langle p_{n-1}, p_{n+1} \cap p'_n \rangle, p_{n+1}, \dots, p_{N-1}).$$

A travers les identifications du paragraphe 2.3, le faisceau  $\mathcal{F}_{\mathbf{a}}$ , avec  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{N-1})$ , sur  $X$  correspond au faisceau  $\mathcal{F}_{\mathbf{a}'}$  avec :

$$\mathbf{a}' = (a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n+1} + a_n, -a_n, a_{n+1} + a_n, a_{n+2}, \dots, a_{N-1})$$

sur l'espace  $\Omega$ . On pose alors :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : H^0(X, \mathcal{F}_{\mathbf{a}}) &\rightarrow H^1(\Omega, \mathcal{F}_{\mathbf{a}'+(0\dots 0, 1, -2, 1, 0\dots 0)}) & (A.2) \\ f &\mapsto \mathcal{P}(f)(\tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{d}}') = f(\mathbf{d}_X) \det(\tilde{p}_n, \tilde{p}'_m)^{-a_n \eta} \end{aligned}$$

En terme de caractères  $\mu$ , on passe de  $H^0(X, \mathcal{F}_{\mu})$  à  $H^1(\Omega, \mathcal{F}_{\mu+e_{m,m+1}})$ .

## 4. Injectivité de $\mathcal{P}$

THÉORÈME A.4. *L'application  $\mathcal{P}$  définie en (A.2) est injective.*

La démonstration reste fidèle aux cas  $SU(2, 1)$  et  $SU(2, 2)$ .

DÉMONSTRATION: Considérons un élément  $f$  de  $H^0(X, \mathcal{F}_{\mathbf{a}})$  et supposons qu'il existe un élément  $\phi \in \Gamma(\mathbb{U}, F_{\mathbf{a}'+(0\dots 0, 1, -2, 1, 0\dots 0)})$  tel que  $d_{\pi}\phi = \mathcal{P}(f)$ . Nous allons montrer que  $\phi$  dépend polynomialement de  $p_n$ , puis en comparant ce polynôme à  $\mathcal{P}(f)$ , on en déduira que  $f$  est nul, prouvant ainsi le théorème.

**Expression de  $\phi$  à l'aide de polynômes.** De par sa définition, la fonction  $\text{param}(d_-)$  est localement constante à  $(p_{n-1}, p_n, p_{n+1}, p_-)$  fixés. Ainsi  $\eta$  est nul sur la sous-variété connexe de  $\mathbb{U}$  obtenue en fixant  $(p_{n-1}, p_n, p_{n+1}, p_-)$ .  $\mathcal{P}(f)$  étant le produit de  $\eta$  par une fonction, il est également nul sur cette sous-variété. On en déduit que  $\phi$  doit être constante sur cette sous-variété, et donc  $\phi$  ne dépend que de  $(p_{n-1}, p_n, p_{n+1}, p_-)$ . Soit  $\mathbb{U}_{(p_{n-1}, p_n, p_{n+1}, p_-)}$  l'ensemble des  $(p_{n-1}, p_n, p_{n+1}, p_-)$  permettant de définir un élément de  $\mathbb{U}$ . On note, comme précédemment, par un tilde les éléments obtenus par relèvement dans les espaces  $\Lambda^i(\mathbb{C}^N)$  via les plongements de Plücker. On **fixe dans toute la suite de cette démonstration** un élément  $\tilde{p}_{n-1}$ . On a alors un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \{\tilde{M} \in \widetilde{Gr}_n(\mathbb{C}^N) ; p_{n-1} \subset M\} &\rightarrow \{\tilde{x}_M \in \tilde{p}_{n-1}^{\perp}\} \\ \tilde{M} &\mapsto \tilde{x}_M \text{ tel que } \tilde{M} = \tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_M \end{aligned}$$

Plus précisément, la signature de  $M$  dépendra de la signature de  $x_M$ . Cela nous permet de créer une application :

$$\begin{aligned} \widetilde{Gr}^{(1,0)}(p_{n-1}^\perp) \times \widetilde{Gr}^{(0,1)}(p_{n-1}^\perp) &\xrightarrow{r} \mathbb{U}_{(p_{n-1}, p_n, p_{n+1}, p_-)} \\ (\tilde{x}_n, \tilde{x}_-) &\mapsto (\tilde{p}_{n-1}, \tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_n, \tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_-, \tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_-) \end{aligned}$$

On peut donc définir à partir de  $\phi$  une application  $\tilde{\psi}$  définie sur  $\widetilde{Gr}^{(1,0)}(p_{n-1}^\perp) \times \widetilde{Gr}^{(0,1)}(p_{n-1}^\perp)$  par :

$$\tilde{\psi} = \tilde{\phi} \circ r.$$

Cette application est holomorphe homogène de degré

$$-a_n - 2 + a_{n+1} + a_n + 1 = a_{n+1} - 1 \text{ en } \tilde{x}_n \text{ et } a_{n+1} + a_n + 1 \text{ en } \tilde{x}_-.$$

Par ailleurs, l'adhérence de  $\widetilde{Gr}^{(0,1)}(p_{n-1}^\perp)$  est une boule dans le  $(m-1, 1)$ -plan  $p_{n-1}^\perp$  (ou plutôt le relevé d'une boule par les plongements de Plücker).

Donc  $\widetilde{Gr}^{(1,0)}(p_{n-1}^\perp)$  est le complémentaire de cette boule, et la fonction  $\tilde{\psi}$  est prolongeable holomorphiquement à  $p_{n-1}^\perp$  par le théorème de Hartogs. On obtient un polynôme homogène en  $\tilde{x}_n$  de degré  $a_{n+1} - 1$  sur  $p_{n-1}^\perp$ .

Pour retrouver  $\tilde{\psi}$  avec  $\tilde{\phi}$ , il suffit d'exprimer  $\tilde{p}_{n+1}$  en fonction de  $\tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_n \wedge \tilde{x}_-$  :

$$\tilde{p}_{n+1} = \det_{n+1}(\tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_n \wedge \tilde{x}_-)^{-1} \cdot \tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_n \wedge \tilde{x}_-.$$

On a donc :

$$\tilde{\phi}(\tilde{p}_{n-1}, \tilde{p}_n, \tilde{p}_{n+1}, \tilde{p}_-) = \det_{n+1}(\tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_n \wedge \tilde{x}_-)^{-a_{n+1}-a_n-1} \cdot \tilde{\psi}(\tilde{x}_n, \tilde{x}_-) \quad (\text{A.3})$$

**Paramétrisation de  $d_n$  et de  $d_-$ .** Pour la fin de la démonstration, on fixe  $\tilde{p}_{n-1}$  et  $\tilde{p}_{n+1}$ . Nous allons maintenant paramétrer les  $\tilde{x}_n$  et  $\tilde{x}_-$  en choisissant une droite affine munie de coordonnées affines dans  $p_{n+1} \cap p_{n-1}^\perp$ . Sur cette droite, soient  $\tilde{x}_n(u)$  et  $\tilde{x}_-(v)$  deux points de coordonnées affine  $u$  et  $v$ . Alors l'application :

$$\tilde{\psi}(u, v) := \tilde{\psi}(\tilde{x}_n(u), \tilde{x}_-(v))$$

est un polynôme de degré  $a_{n+1} - 1$  en  $u$ . On peut décomposer en fonction des puissances de  $u - v$ , et on obtient :

$$\tilde{\psi}(u, v) = \sum_{i=0}^{a_{n+1}-1} \tilde{\psi}_i(v)(u - v)^i.$$

L'équation (A.3) donne, en remarquant que

$$\det_{n+1}(\tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_n(u) \wedge \tilde{x}_-(v)) = k(u - v)$$

avec  $k$  indépendant de  $u$  et de  $v$  :

$$\tilde{\phi}(u, v) = k^{-a_{n+1}-a_n-1} \sum_{i=0}^{a_{n+1}-1} \tilde{\psi}_i(v)(u - v)^{i-a_{n+1}-a_n-1}.$$

Pour obtenir une expression de  $d_\pi \tilde{\phi}(u, v)$ , on dérive par rapport à  $v$  :

$$d_\pi \tilde{\phi}(u, v) = k^{-a_{n+1}-a_n-1} \sum_{i=0}^{a_{n+1}-1} \left[ \tilde{\psi}'_i(v)(u-v)^{i-a_{n+1}-a_n-1} + (i-a_{n+1}-a_n-1)\tilde{\psi}_i(v)(u-v)^{i-a_{n+1}-a_n-2} \right] dv. \quad (\text{A.4})$$

**Paramétrisation de  $\mathcal{P}(\tilde{f})$ .** Laissons de côté ce polynôme et considérons la fonction qui associe à  $(u, v)$  l'image  $\mathcal{P}(\tilde{f})(u, v)$  par  $\mathcal{P}(\tilde{f})$  de

$$(\tilde{p}_{n-1}, \tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_n(u), \tilde{p}_{n+1}, \tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_-(v)).$$

Dans la définition de  $\text{param}(d_-)$ , on a fixé un  $n$ -plan d'origine  $p_0$  tel que  $p_{n-1} \subset p_0 \subset p_{n+1}$ . On choisit ici

$$\tilde{p}_0 = \tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_0(w),$$

où  $\tilde{x}_0(w)$  est le point d'affixe affine  $w$ . On obtient :

$$\begin{aligned} \text{param}(d_-) &= \frac{\det_{n+1}(\tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_0(w) \wedge \tilde{x}_-(v))}{\det_{n+1}(\tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_0(w) \wedge \tilde{x}_n(u)) \cdot \det_{n+1}(\tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_n(u) \wedge \tilde{x}_-(v))} \\ &= \frac{k(w-v)}{k^2(w-u)(u-v)} = \frac{1}{k \cdot (u-w)} - \frac{1}{k \cdot (u-v)} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

On en déduit une expression de  $\eta$  en dérivant par rapport à  $v$  :

$$\eta(u, v) = k^{-1}(u-v)^{-2}dv.$$

Par définition de  $\mathcal{P}(f)$ , on trouve :

$$\mathcal{P}(f)(u, v) = f(\tilde{p}_{n-1}, \tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_n(u), \tilde{p}_{n+1}) \cdot \det(\tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_n(u) \wedge \tilde{x}_-(v) \wedge \star)^{-a_n} \eta,$$

où  $\star$  est un  $m-1$ -plan tel que  $\star \wedge \tilde{x}_-(v)$  soit un plan de type  $p'_m$  convenable.

On peut choisir  $\star$  afin que  $\det(\tilde{p}_{n+1} \wedge \star) = 1$ . Par définition de  $\det_{n+1}$ , on a :

$$\begin{aligned} \det(\tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_n(u) \wedge \star \wedge \tilde{x}_-(v)) &= \det_{n+1}(\tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_n(u) \wedge \tilde{x}_-(v)) \cdot \det(\tilde{p}_{n+1} \wedge \star) \\ &= \det_{n+1}(\tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_n(u) \wedge \tilde{x}_-(v)) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(f)(u, v) &= f(v) \cdot \det_{n+1}(\tilde{p}_{n-1} \wedge \tilde{x}_n(u) \wedge \tilde{x}_-(v))^{-a_n} \cdot k^{-1}(u-v)^{-2}dv \\ &= f(v) \cdot k^{-a_n}(u-v)^{-a_n} \cdot k^{-1}(u-v)^{-2}dv \\ &= f(v)k^{-a_n-a}(u-v)^{-a_n-2}dv \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

On compare alors les formules (A.4) et (A.6) et on obtient :

$$k^{-a_{n+1}} \sum_{i=0}^{a_{n+1}-1} \left[ \tilde{\psi}'_i(v)(u-v)^{i-a_{n+1}+1} + (i-a_{n+1}-a_n-1)\tilde{\psi}_i(v)(u-v)^{i-a_{n+1}} \right] = f(v)$$

On identifie alors les termes un par un, prouvant ainsi l'annulation de  $\psi_{p,0}$ , puis  $\psi_{p,1}$ , etc...

On trouve au final que  $f$  est elle-même nulle, ce qui achève la preuve du théorème.  $\square$

### 5. Passage à l'espace local.

Les notations sont les mêmes que celle du paragraphe 2.1. Nous allons d'abord prouver le théorème suivant :

**THÉORÈME A.5.** *Soit  $\mathfrak{a}'$  un élément de  $\mathbb{Z}^{N-1}$  et  $\mu'$  le caractère tel que les faisceaux  $\mathcal{F}_{\mathfrak{a}'}$  et  $\mathcal{F}_{\mu'}$  sur  $\Omega$  sont égaux. Alors l'espace  $H^0(\Omega, \mathcal{F}_{\mathfrak{a}'})$  est une représentation algébrique irréductible de  $G^{\mathbb{C}}$ .*

La preuve de ce théorème respecte les étapes de celle du théorème 6.2. L'objectif est de prolonger holomorphiquement une section  $s$  à l'espace de drapeaux  $\mathbb{D}$  en entier. On commence par prolonger holomorphiquement de deux façons différentes  $s$  (ou plutôt son relevé  $\tilde{s}$ ), en fixant certaines variables. On est alors confronté à deux problèmes : la fonction obtenue n'est pas nécessairement holomorphe en la variable fixée, et elle n'est pas définie sur  $\mathbb{D}$  en entier. On soulève le premier problème en faisant intervenir, à l'instar de la page 78, une fonction  $\sigma$  définie sur  $V^n$ . Cette fonction s'avère être un polynôme, et on peut en déduire l'holomorphisme de  $\sigma$ , puis de  $s$ . On parvient ainsi à étendre  $\sigma$  à deux ensembles d'intersection  $\Omega$ . Afin d'obtenir l'extension à  $V^N$  en entier, on doit utiliser le fait que  $\sigma$  est un polynôme en certaines variables, et on étend holomorphiquement les coefficients de ce polynôme en utilisant la même méthode que dans le cas de  $SU(2, 2)$ .

**DÉMONSTRATION:** Nous allons prouver ce théorème par récurrence sur  $N$ ,  $N \geq 3$ . Pour  $N = 3$ , c'est le résultat prouvé par Carayol dans [Ca2], Lemme (4.2). Supposons le résultat vrai pour  $N - 1$ . Nous devons distinguer le cas  $N$  pair et  $N$  impair.

#### Cas $N$ pair.

Considérons une section  $s$  de  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathcal{F}_{\mathfrak{a}'}$  et  $\tilde{s}$  son relevé dans  $\tilde{\Omega}$ . Nous allons prolonger holomorphiquement  $s$  à  $\Omega$ .

**Prolongement à  $p_1$  fixé.** On fixe un élément  $p_1$  dans  $\mathbb{P}(V)$  (où  $V = \mathbb{C}^N$ ) de signature  $(0, 1)$ . Considérons  $p_1^\perp$  : c'est un plan de signature  $(n, n - 1)$ . Soit  $\mathbf{d} = (p_1, \dots, p_n)$  un drapeau de  $\Omega$  contenant  $p_1$ . A chaque plan  $p_i$ ,  $i \geq 2$ , on associe de façon unique un  $(i - 1)$ -plan de  $p_1^\perp$  en considérant son intersection avec  $p_1^\perp$ . Ainsi, chaque drapeau de l'espace  $\Omega_{p_1}$  à  $p_1$  fixé correspond à un unique drapeau de  $p_1^\perp$ . De plus, la signature de ce drapeau, déterminée par celle de  $p_i$ , est celle des drapeaux du cas  $N - 1$ .

On peut donc associer à  $s$  une fonction définie sur cet ensemble de drapeaux de  $p_1^\perp$ , qui est holomorphe et homogène. En appliquant l'hypothèse de récurrence, on prolonge cette fonction à  $\mathbb{D}(p_1^\perp)$ . On en déduit que  $s$  est prolongeable à l'ensemble suivant :

$$\Omega_1 = \{(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{D}(V) \text{ tel que } : \mathbf{q}(p_1) < 0\}.$$

Cette fonction est holomorphe à  $p_1$  fixé et holomorphe sur  $\Omega$ .

Pour prouver que ce prolongement est holomorphe en  $p_1$ , plaçons-nous dans l'espace relevé et considérons l'espace :

$$\Upsilon = \left\{ (\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_{N-1}) \in V^{N-1} ; (\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{x}_{N-1}) \in \tilde{\Omega} \right\}$$

On peut alors naturellement associer à  $\tilde{s}$  une fonction  $\tilde{\sigma}$  sur  $\Upsilon$ , qui est holomorphe et homogène de degré  $((a_1 + \dots + a_{N-1}), \dots, a_{N-1})$ . Inversement, on peut exprimer  $\tilde{\sigma}$  en fonction de  $\tilde{s}$ . Pour cela, on choisit un  $(N-1)$ -uplet  $(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_{N-1})$  correspondant à chaque  $(\tilde{p}_1; \dots; \tilde{p}_{n-1})$  et un drapeau  $(\alpha_1; \dots; \alpha_{N-1})$  quelconque en position générale avec  $(\tilde{p}_1; \dots; \tilde{p}_{n-1})$ . La formule est alors la suivante :

$$\tilde{s}(\tilde{p}_1; \dots; \tilde{p}_{n-1}) = d_2^{a_2} \cdot d_3^{a_2+a_3} \dots d_{N-1}^{a_2+\dots+a_{N-1}} \cdot \tilde{\sigma}(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_{N-1}), \quad (\text{A.7})$$

où

$$d_i = \frac{\det(\tilde{p}_i, \alpha_{N-i})}{\det(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_i, \alpha_{N-i})}.$$

Le prolongement à  $\Omega_1$  permet d'étendre  $\tilde{\sigma}$  à :

$$\Upsilon_1 = \left\{ (\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_{N-1}) \in V^{N-1} ; \begin{array}{l} \tilde{x}_1 \text{ de signature } (0; 1) \\ \langle \tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_{N-1} \rangle \text{ de dimension } N-1 \end{array} \right\}$$

Le sous-espace de  $\Upsilon_{\tilde{x}_1}^1$  obtenu en fixant  $\tilde{x}_1$  est le complémentaire de l'ensemble :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_2 \neq \tilde{x}_1 \text{ ou} \\ \tilde{x}_3 \in \langle \tilde{x}_1; \tilde{x}_2 \rangle \text{ ou} \\ \vdots \\ \tilde{x}_{N-1} \in \langle \tilde{x}_1; \tilde{x}_{N-2} \rangle \end{array} \right\}$$

La dimension de cet espace est  $(N-3) \cdot \dim(V) + N-2 = (N-2) \cdot N-2$ , donc de codimension 2 dans  $V^{N-2}$ . Par le théorème d'Hartogs, on peut donc étendre  $\tilde{\sigma}$  en une fonction holomorphe à  $\tilde{x}_1$  fixé, sur  $V^{N-2}$ . L'homogénéité implique que cette fonction est (nulle ou) un polynôme de dimension finie  $A$ . On peut donc développer  $\tilde{\sigma}$  en une somme de monômes :

$$\tilde{\sigma}(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_{N-1}) = \sum_{k \in [0; A]^{N(N-2)}} f_k(\tilde{x}_1) \cdot (\tilde{x}_2; \dots; \tilde{x}_{N-1})^k$$

où  $(\tilde{x}_2; \dots; \tilde{x}_{N-1})^k$  désigne le monôme formé des produits des coordonnées des  $\tilde{x}_i$  aux puissances données par  $k$ . Les coefficients polynomiaux  $f_k(\tilde{x}_1)$  ne dépendent que de  $\tilde{x}_1$  et sont définis pour tout  $\tilde{x}_1$  de signature  $(0, 1)$ . La fonction  $\tilde{\sigma}$  est holomorphe sur le sous-espace de  $\Upsilon$  correspondant à  $\tilde{\Omega}$ . On en déduit que chacun des coefficients est une fonction holomorphe en  $\tilde{x}_1$ , donc que  $\tilde{\sigma}$  et  $\tilde{s}$  sont holomorphes.

**Prolongement à  $(\tilde{p}_{n+1}; \dots; \tilde{p}_{N-1})$  fixé.** Fixons un élément  $(\tilde{p}_{n+1}; \dots; \tilde{p}_{N-1})$ . Alors l'espace restreint obtenu  $\tilde{\Omega}_{p_{n+1}}$  est isomorphe à  $\tilde{\Omega}_{-\dots-+}(\tilde{p}_{n+1})$ . Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME A.6. *Soit  $\phi$  une fonction holomorphe homogène sur  $\Omega_{\dots\dots+}(E)$  où  $E$  est un  $(1, n)$ -espace ( $n \geq 2$ ). Alors  $\phi$  est prolongeable holomorphiquement à  $\mathbb{D}(E)$ .*

DÉMONSTRATION: Nous allons le prouver par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 2$ , on est à nouveau dans le cas de  $SU(2, 1)$  (où plutôt  $SU(1, 2)$ ) et on applique le résultat de Carayol.

Fixons un point  $t_1$  de signature  $(0, 1)$  et considérons  $t_1^\perp$ , qui est donc de signature  $(1, n - 1)$ . On a à nouveau un isomorphisme entre l'espace étudié à  $t_1$  fixé et un espace de drapeaux de  $t_1^\perp$ , de même signature que celui de l'hypothèse de récurrence. On peut donc étendre  $\phi$  à  $t_1$  fixé. On obtient une fonction sur

$$Z = \{(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{D}(E) ; t_1 \text{ est de signature } (0; 1)\}.$$

Considérons  $\mathcal{A} = \{t_1 ; t_1 \notin A\}$  où  $A$  est un hyperplan fixé (faisant de  $\mathcal{A}$  un espace affine). Alors  $Z$  est isomorphe au produit du complémentaire d'une boule dans  $\mathcal{A}$  par  $\mathbb{D}(A)$ . On prolonge alors par le théorème de Hartogs, ce qui permet de définir  $\phi$  sur  $\mathbb{D}(E)$ .

La fonction ainsi définie n'est pas a priori holomorphe en  $t_1$ , mais on peut encore une fois associer à  $\phi$  une fonction  $\psi$  définie sur  $E^{n+1}$ , et prouver que cette fonction est polynomiale en ses  $n$  dernières variables. On en déduit que les coefficients de ce polynôme, qui ne dépendent que de  $t_1$ , sont des fonctions holomorphes de  $t_1$ . Ainsi  $\psi$  et  $\phi$  sont holomorphes en  $t_1$ .  $\square$

Revenons à la preuve du théorème. En appliquant la proposition précédente avec  $E = p_{n+1}$ , on peut étendre  $\tilde{s}$ , à  $(\tilde{p}_{n+1}; \dots; \tilde{p}_{N-1})$  fixé, à l'ensemble

$$\Omega_2 = \{(p_1; \dots; p_n) \in \mathbb{D}(\mathbb{C}^N) ; p_{n+1} \text{ de signature } (1; n)\}.$$

Au niveau de la fonction  $\tilde{\sigma}$ , on obtient un prolongement à

$$\Upsilon_2 = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{x}_{n+1} \text{ de signature } (1; n) \\ \tilde{x}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{x}_{n+2} \text{ de signature } (2; n) \\ \vdots \\ \tilde{x}_1 \wedge \dots \wedge \tilde{x}_{N-1} \text{ de signature } (n-1; n) \end{array} \right\}$$

**Définition de  $\tilde{\sigma}$  pour  $p_1$  de signature positive.** Considérons un élément  $\tilde{x}_1$  qui ne soit pas de signature  $(0, 1)$ . Soit  $M$  le cardinal de l'ensemble  $[0; A]^{N(N-2)}$ . Considérons  $M$   $(N - 1)$ -uplets de points  $(\tilde{x}_2(k), \dots, x_{N-1}(k))$ ,  $k = 1 \dots M$ , de  $V$  tels que

- (C1) Les plans  $\langle \tilde{x}_2(k), \dots, x_{n+1}(k) \rangle$  sont de signature  $(0, n)$ .
- (C2) Les plans  $\langle \tilde{x}_1, \tilde{x}_2(k), \dots, x_{n+1}(k) \rangle$  sont de dimension  $N - 1$ .
- (C3) Les points  $(\tilde{x}_2(k), \dots, x_{N-1}(k))$  de  $W = V^{N-1}$  sont en position générique.

L'ensemble des points vérifiant (C1) et (C2) est un ouvert de  $W^M$ , et le lemme 6.3 page 79 assure que l'ensemble des points vérifiant (C3) est un ouvert dense de  $W^M$ , donc un tel choix ne pose aucun problème.

On peut alors appliquer l'argument suivant le lemme 6.3 pour prolonger  $\tilde{\sigma}$  à  $V^N$ , et donc  $s$  à  $\mathbb{D}(V)$  en entier.

Il reste à appliquer le théorème de Borel-Weil, on en déduit que  $H^0(\Omega, \mathcal{F}_{\mathbf{a}'})$  est une représentation irréductible si  $\mathbf{a}'$  est dans  $\mathbb{N}^N$ , et 0 dans le cas contraire.

### Cas $N$ impair

On ne peut pas appliquer tout à fait le même raisonnement, car les  $p_1^\perp$  considérés en début de preuve sont de signature  $(n+1, n-1)$ . Fixons à la place un élément  $p_{N-1}$  de signature  $(n, n)$ . Alors l'espace restreint obtenu  $\Omega_{p_{N-1}}$  est isomorphe au cas de l'hypothèse de récurrence. Cela permet d'étendre  $s$  à l'ensemble :

$$\Omega_3 = \{(p_1, \dots, p_{N-1}) \in \mathbb{D}(\mathbb{C}^N) ; p_{N-1} \text{ de signature } (n, n)\}$$

Ce dernier ensemble contient  $\Omega_{+\ominus+-+\dots+}$ . Fixons alors un  $p_1$  de signature  $(1, 0)$ . Alors  $p_1^\perp$  est de signature  $(n, n)$  et le sous-ensemble de  $\Omega_{+\ominus+-+\dots+}$  obtenu en fixant  $p_1$  est isomorphe à  $\Omega_{\ominus+-+\dots+}(p_1^\perp)$ . On est bien dans l'hypothèse de récurrence, on peut donc reprendre le même raisonnement que précédemment.

□

**COROLLAIRE A.7.** *Pour  $\mathbf{a}'$  correspondant, dans la structure complexe définie par  $\Omega$ , à un poids  $\mu'$  tel que  $\mu' - \delta_\Omega$  appartient à la chambre de Weyl associé à  $B_X$ , on a :*

$$H^0(\Omega, \mathcal{F}_{\mathbf{a}', b', c'}) = 0.$$

**DÉMONSTRATION:** C'est une conséquence du théorème de Borel-Weil,  $\mu'$  n'étant pas (anti) dominant vis-à-vis du système associé à  $\Omega$ . □

Nous sommes désormais en mesure de prouver le théorème suivant :

**THÉORÈME A.8.** *Soit  $\mathbf{a}$  vérifiant les mêmes hypothèses que celles du théorème (A.5).*

(1) *L'application :*

$$\mathcal{P} : H^0(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_{\mathbf{a}}) \rightarrow H^1(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{\mathbf{a}'})$$

*existe et est injective.*

- (2) Soient  $\mu$  et  $\mu'$  les caractères attachés à  $\mathcal{F}_\alpha$  et  $\mathcal{F}_{\alpha'}$  de façon habituelle. Supposons de plus que l'on impose sur  $\mu - \delta_X$  (ou de façon équivalente sur  $\mu' - \delta_\Omega$ ) la condition de régularité suivante : la série discrète de paramètre de Harish-Chandra  $\mu - \delta_X$  doit être intégrable (c.f. [Tr-Va]). Alors l'application  $\mathcal{P}$  est bijective.

DÉMONSTRATION: La preuve reste la même. On utilise la suite spectrale de Cartan-Leray, ce qui permet d'identifier  $H^1(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_\alpha)$  avec  $(H^1(\Omega, \mathcal{F}_\alpha))^\Gamma$  car  $H^0(\Omega, \mathcal{F}_\alpha)$  est nul.

On considère alors un élément  $f$  de  $H^0(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\alpha) = H^0(\Gamma \backslash X, \mathcal{F}_\alpha)^\Gamma$ . Étant donné que  $\mathcal{P}(f)$  est invariant par  $\Gamma$ ,  $\mathcal{P}(f)$  est bien dans  $H^1(\Gamma \backslash \Omega, \mathcal{F}_{\alpha'})$ , ce qui prouve le premier résultat.

La seconde assertion est obtenue en appliquant le résultat de Williams [Wi2].  
□

## Bibliographie

- [Be] Benson, D. J. Representations and cohomology. II. Cohomology of groups and modules. Second edition. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 31. Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [Br-To] Bröcker, T. et tom Dieck, T. Representations of compact Lie groups. Graduate Texts in Mathematics, 98. Springer-Verlag, New York, 1985
- [Ca] Carayol, Henri. Limites dégénérées de séries discrètes, formes automorphes et variétés de Griffiths-Schmid : le cas du groupe  $U(2, 1)$ . *Compositio Math.* 111 (1998), no. 1, 51–88.
- [Ca2] Carayol, Henri. Quelques relations entre les cohomologies des variétés de Shimura et celles de Griffiths-Schmid (cas du groupe  $SU(2, 1)$ ). *Compositio Math.* 121 (2000), no. 3, 305–335.
- [Ca-Os] Casselman, William; Osborne, M. Scott. The  $n$ -cohomology of representations with an infinitesimal character. *Compositio Math.* 31 (1975), no. 2, 219–227.
- [Cl] Clozel, Laurent. On the cohomology of Kottwitz's arithmetic varieties. *Duke Math. J.* 72 (1993), no. 3, 757–795.
- [De] Deligne, Pierre. Variétés de Shimura : Interpretation modulaire et techniques de construction de modèles canoniques, *Proc. Sympos. Pure Math.*, Vol. 33, Part 2, Amer. Math. Soc, Providence, RI, 1979, 247–290.
- [Fl] Flensted-Jensen, Mogens. Discrete series for semisimple symmetric spaces. *Ann. of Math.* (2) 111 (1980), no. 2, 253–311.
- [Ga] Garrett, Paul. Buildings and classical groups. Chapman & Hall, London, 1997.
- [Gi] Gindikin, Simon. Holomorphic language for  $\bar{\partial}$ -cohomology and representations of real semisimple Lie groups. The Penrose transform and analytic cohomology in representation theory (South Hadley, MA, 1992), 103–115, *Contemp. Math.*, 154, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [Gr-Sc] Griffiths, Phillip; Schmid, Wilfried. Locally homogeneous complex manifolds. *Acta Math.* 123 1969 253–302.
- [Ha] Harris, Michael. Formes automorphes "géométriques" non-holomorphes : Problèmes d'arithmétique (Sem de Théorie des Nombres, Paris 1984-85), *Progress in Math.*, Vol. 63, Birkhäuser, Boston, 1986, 109–129.
- [Ha2] Harris, Michael. Automorphic forms of  $\bar{\partial}$ -cohomology type as coherent cohomology classes. *J. Differential Geom.* 32 (1990), no. 1, 1–63.
- [Ha-Li] Harris, Michael; Li, Jian-Shu. A Lefschetz property for subvarieties of Shimura varieties. *J. Algebraic Geom.* 7 (1998), no. 1, 77–122.
- [He-Sc] Hecht, H. et Schmid, W. A proof of Blattner's conjecture. *Invent. Math.* 31 (1975), no. 2, 129–154.
- [He-Sc2] Hecht, Henryk; Schmid, Wilfried. On integrable representations of a semisimple Lie group. *Math. Ann.* 220 (1976), no. 2, 147–149.
- [Ho-Se] Hochschild, G. ; Serre, J.-P. Cohomology of Lie algebras. *Ann. of Math.* (2) 57, (1953). 591–603.
- [Ja-Ve] Jakobsen, Hans Plesner; Vergne, Michèle. Restrictions and expansions of holomorphic representations. *J. Funct. Anal.* 34 (1979), no. 1, 29–53.

- [Kn] Knapp, Anthony W. Representation theory of semisimple groups. An overview based on examples. Reprint of the 1986 original. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.
- [Kn-Vo] Knapp, Anthony W.; Vogan, David A. Cohomological induction and unitary representations. Princeton Mathematical Series, 45. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.
- [Ko] Kostant, Bertram. Lie algebra cohomology and the generalized Borel-Weil theorem. *Ann. of Math. (2)* 74 1961 329–387.
- [Li] Li, Jian-Shu. Theta lifting for unitary representations with nonzero cohomology. *Duke Math. J.* 61 (1990), no. 3, 913–937.
- [Mi] Mirković, Ivan. On the localization for a singular infinitesimal character, Preprint, University of Massachusetts at Amherst, 1990.
- [Od] Oda, Takayuki. Hodge structures attached to geometric automorphic forms. Automorphic forms and number theory (Sendai, 1983), 223–276, *Adv. Stud. Pure Math.*, 7, North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [Ro] Rogawski, J. D. : Automorphic representations of unitary groups in three variables, *Annals of Math. Studies* 123, Princeton University Press, 1990.
- [Sc] Schmid, Wilfried.  $L^2$ -cohomology and the discrete series. *Ann. of Math. (2)* 103 (1976), no. 2, 375–394.
- [Sc2] Schmid, Wilfried. Homogeneous complex manifolds and representations of semisimple Lie groups. Dissertation, University of California, Berkeley, CA, 1967. *Math. Surveys Monogr.*, 31, Representation theory and harmonic analysis on semisimple Lie groups, 223–286, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.
- [Sc3] Schmid, Wilfried. On a conjecture of Langlands. *Ann. of Math. (2)* 93 1971 1–42.
- [So] Soergel, Wolfgang. On the  $n$ -cohomology of limits of discrete series representations. *Represent. Theory* 1 (1997), 69–82.
- [Tr-Va] Trombi, P. C.; Varadarajan, V. S. Asymptotic behaviour of eigen functions on a semisimple Lie group : the discrete spectrum. *Acta. Math.* 129 (1972), no. 3-4, 237–280.
- [Wi] Williams, Floyd. The  $n$ -cohomology of limits of discrete series. *J. Funct. Anal.* 80 (1988), no. 2, 451–461.
- [Wi2] Williams, Floyd L. Discrete series multiplicities in  $L^2(\Gamma \backslash G)$ . II. Proof of Langlands' conjecture. *Amer. J. Math.* 107 (1985), no. 2, 367–376.
- [Wo] Wong, Hon-Wai. Dolbeault cohomological realization of Zuckerman modules associated with finite rank representations. *J. Funct. Anal.* 129 (1995), no. 2, 428–454.