

# Thèse

INSTITUT DE  
RECHERCHE  
MATHÉMATIQUE  
AVANCÉE

UMR 7501

Strasbourg

présentée pour obtenir le grade de docteur de  
l'Université de Strasbourg  
Spécialité MATHÉMATIQUES

**Aurore BACK**

**Étude théorique et numérique des équations de  
Vlasov-Maxwell dans le formalisme covariant**

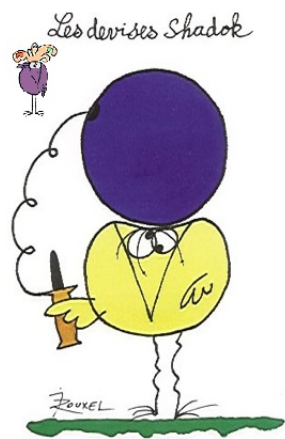
Soutenue le 7 Novembre 2011  
devant la commission d'examen

Éric Sonnendrücker, directeur de thèse  
Émmanuel Frénod, directeur de thèse  
Fransceca Rapetti, rapporteur  
Patrick Ciarlet, rapporteur  
Philippe Helluy, examinateur  
Nicolas Besse, examinateur

[www-irma.u-strasbg.fr](http://www-irma.u-strasbg.fr)



*À mon Titi.*



EN ESSAYANT CONTINUELLEMENT  
ON FINIT PAR RÉUSSIR. DONC:  
PLUS ÇA RATE, PLUS ON A  
DE CHANCES QUE ÇA MARCHE.

---

# Remerciements

---

---

Cette thèse marque la fin de mes huit années d'études à la faculté de Mathématiques à Strasbourg. J'ai l'occasion d'exprimer, ici, toute ma gratitude auprès des personnes qui m'ont guidées et qui m'ont soutenues durant mes trois années de doctorat mais également tout au long de ces huit dernières années.

Commençons par la fin : mes années de thèse. Je tiens à remercier chaleureusement mes directeurs de thèse Éric Sonnendrücker et Emmanuel Frénod sans qui ce travail n'aurait pas vu le jour. Éric Sonnendrücker a su me guider avec bienveillance toutes ces années. Il a toujours été très disponible pour m'encadrer dans mon travail. Il m'a transmis son savoir et son expérience et a fait preuve de beaucoup de patience. Ce manuscrit doit beaucoup à son expérience et à ses conseils avisés. Pour moi, il est difficile de trouver mieux comme directeur de thèse. Pour tout cela, merci.

Un grand merci également à Emmanuel Frénod en particulier pour sa patience et sa disponibilité. Il m'a fait partagé son expérience, son savoir et son goût des sciences.

Fransceca Rapetti et Patrick Ciarlet m'ont fait l'honneur d'accepter la tâche ingrate de rapporter ma thèse. Merci de m'avoir accordé leurs temps, que je sais si précieux, à la relecture de ce manuscrit ainsi que pour leurs nombreuses et constructives remarques.

Je remercie également Philippe Helluy et Nicolas Besse pour avoir accepté de faire partie de mon jury ainsi que pour leur intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Durant ces trois années, je les ai passé au sein de l'équipe EDP. Leurs passions, leurs compétences et leurs dynamismes m'ont ouvert l'esprit et beaucoup appris. Merci en particulier à Michel Merhenberger (pour son œil de Lynx), Stéphanie Salmon, Pierre Navaro, Jean-Philippe Braenig, Sever Hirstoaga, Marcella Szopos pour leurs conseils, leurs aides et leurs intérêts à mon travail. Merci également à l'équipe CALVI pour leurs conseils.

Merci aux mathématiciens que j'ai rencontré lors des conférences et qui ont bien voulu consacrer de leurs temps entre deux exposés. Je pense à Mihai

Bostan et Alain Brizard.

Mon aventure mathématique se poursuit au Centre de Physique Théorique à Marseille merci à Cristel Chandre, Emanuele Tassi et Michel Vittot pour leur accueil.

Un grand merci à tout le personnel technique et administratif de l'UFR de Mathématique et informatique ainsi que de l'IRMA : Alain Sartout pour ses dépannages informatique éclairs, Daniel Grosson pour son aide matériels, Claudine Bonnin, Sandrine Cerdan, Delphine Cirk, Delphine Schmitt pour leurs aides dans les démarches administratives.

Passons à mes confrères doctorants. Tout d'abords, Aurélien merci. Je suis heureuse d'avoir partagé le bureau avec toi et que tu es supporté mon caractère. Tu as toujours été disponible et patient avec moi et nos nombreuses discussions ont été agréables, instructifs, enrichissantes et même parfois délirantes! Merci pour ton humour déjanté. Merci également à toi Fabien. Tu as été pendant trois mois mon co-bureau, je regrette que tu ne l'as pas été plus tôt!

Ensuite pour les bons moments passés ensemble en conférences, au CEM-RACS ou ailleurs je souhaite remercier Hélène, Anaïs pour les délires et les piou-piou, Ahmed, Thomas, Florian et Audrey. Je souhaite également remercier tous les coincheurs qui m'ont aidé à décompresser Vincent (surtout change pas!), Scoum, Ghyslain et les autres Alexandre, Cédric (les deux), Adrien, Jonathan, Gilles et Charlotte (t'inquiète, tu vas y arriver!).

Merci à vous mes amis pour tous les délires sur les bancs de la fac et même ailleurs, je pense à Aurélie (que j'adore!!!) et Fred, à Takashi et Élodie (vous êtes géniaux!!), à Maxime (et ses poils de cul de mammouth), à Etienne (et ses films à vous couper le souffle!!), à Benoit et Laurent, à Olivier (toujours prêt à aider en informatique) et à Isabelle (pour son humour) et Robert (pour sa sagesse).

Je dois tout à ma famille. Merci maman, merci pour ton écoute, ton soutien, pour ton amour indéfectible et pour avoir à chaque instant veillé à ce que je manque de rien; On ne peut rêver de mieux comme maman. Merci à mon beau-père rémy (merci pour ta patience), à mes soeurs adorées Tati Flo, Jaddounou, Ma et son Pokemon (ou E.T si tu préfères!) ainsi qu'à ma super grand-mère de compétition et mes tantes Titoune (merci pour tout ce que tu as fait pour moi), Doudou, Moumou (avec ses tâches de rousseurs sur son joli...), Chou qui m'ont beaucoup aidé avec mon Titi. Vous m'avez beaucoup aidée et soutenue; Sans vous je ne serai pas là aujourd'hui. Mon père et mon grand-père sont partis malheureusement trop tôt mais heureusement il y a un homme qui a toujours été là pour moi mon parrain (my godfather) Minou. Et la meilleure pour la fin celle qui est et sera toujours mon rayon de soleil merci mon Titi d'amour, mon petit coeur.



---

# Table des matières

---

---

<b>Introduction</b>	<b>ix</b>
1 Le contexte physique . . . . .	ix
2 Description Mathématique . . . . .	xi
3 Plan . . . . .	xv
<b>Préliminaires</b>	<b>xix</b>
4 Les champs de vecteurs . . . . .	xx
5 Les formes différentielles . . . . .	xxiv

## Formulation géométrique des équations de Vlasov-Maxwell

<b>Étude théorique des équations de Vlasov-Maxwell dans le formalisme covariant</b>	<b>1</b>
1 Les équations de Vlasov-Maxwell . . . . .	2
2 L'équivalence des formulations . . . . .	3
3 La conservation géométrisée des quantités physiques . . . . .	4
4 L'équation de Vlasov-Poisson unidimensionnelle . . . . .	10
<b>Adimensionnement géométrique</b>	<b>13</b>
1 Adimensionnement des équations de Maxwell dans le calcul vectoriel. . . . .	14
2 Adimensionnement des équations de Maxwell dans la formulation covariante. . . . .	16
3 Adimensionnement de l'équation de Vlasov dans le formalisme covariant . . . . .	22

<b>Convergence géométrique à deux échelles. Applications sur l'équation de Vlasov.</b>	<b>27</b>
1 La $L^r$ cohomologie . . . . .	28
2 La convergence faible . . . . .	31
3 La convergence géométrique à deux échelles . . . . .	34
4 Homogénéisation de l'équation de Vlasov . . . . .	42

## Formes différentielles discrétisées à l'aide des formes de Whitney

<b>Discrétisation de l'espace en tétraèdres</b>	<b>51</b>
1 L'espace primal . . . . .	52
2 L'espace dual . . . . .	54
3 Le raffinement . . . . .	55
<b>Les <math>k</math>-formes différentielles discrètes et les <math>k</math>-chaines</b>	<b>57</b>
1 Les formes différentielles discrètes . . . . .	58
2 Les $k$ -chaines et leurs relations avec les $k$ -formes différentielles	60
3 Les éléments de Whitney d'ordres supérieurs . . . . .	63
<b>Les opérations agissant sur les formes différentielles discrètes</b>	<b>65</b>
1 La dérivée extérieure . . . . .	66
2 Le produit extérieur . . . . .	66
3 Le hodge star . . . . .	70
4 La dérivée co-extérieure et le laplacien . . . . .	71
5 Le produit intérieur . . . . .	71
6 La dérivée de Lie . . . . .	73
7 Conclusion . . . . .	74

## Formes différentielles discrétisées à l'aide des B-splines

<b>Discrétisation de l'espace</b>	<b>79</b>
1 L'espace primal . . . . .	80

2	L'espace dual . . . . .	82
<b>Les formes différentielles discrétisées par des fonctions B-splines</b>		<b>83</b>
1	Les fonctions B-splines . . . . .	84
2	Les formes différentielles discrétisées par les B-splines . . . . .	84
<b>Les opérations agissant sur les formes différentielles discrètes</b>		<b>95</b>
1	La dérivée extérieure et le diagramme de De Rham . . . . .	96
2	Lien entre les chaînes et les formes différentielles discrètes . . . . .	98
3	Le hodge star . . . . .	101
4	Le produit extérieur . . . . .	108
5	Le produit intérieur . . . . .	109
6	La dérivée de Lie . . . . .	110
7	La dérivée co-extérieure et le laplacien . . . . .	111
<b>Résultats Numériques</b>		<b>113</b>
8	Les équations de Maxwell . . . . .	114
9	L'équation de Vlasov-Poisson . . . . .	125
10	Formulation faible pour l'équation de Vlasov-Poisson . . . . .	127
<b>Développement d'un code PIC axisymétrique basé sur l'analyse isogométrique</b>		<b>173</b>
11	Les B-splines et les NURBS . . . . .	174
12	Définition du domaine physique . . . . .	175
13	Les équations de Vlasov-Maxwell . . . . .	176
14	Résolution de l'équation de Vlasov par une méthode PIC . . . . .	177
15	La résolution des équations de Maxwell . . . . .	181
16	Résultats numériques . . . . .	184

## Conclusion et perspectives

<b>Conclusion</b>	<b>191</b>
<b>Perspectives</b>	<b>193</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>195</b>
<b>Annexes</b>	<b>203</b>



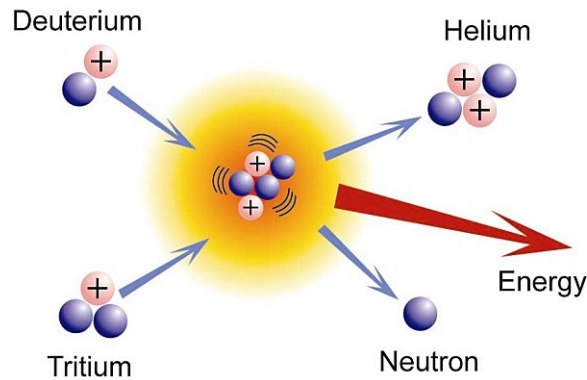
---

# Introduction

---

## 1 LE CONTEXTE PHYSIQUE

En 1920 les britanniques Francis William Aston et Arthur Eddington découvrent que l'énergie du soleil provient de la fusion de noyaux d'atomes d'hydrogène qui aboutit, par étapes, à produire de l'hélium. Cette fusion libère une énergie faramineuse provenant de l'attraction entre les nucléons due à l'interaction forte. L'épuisement des combustibles fossiles rend indispensable de développer de nouvelles sources d'énergie. L'un des intérêts de ces réactions est qu'elles produisent beaucoup plus d'énergie que les réactions de fission. Les réactions de fusion qui dégagent le plus d'énergie sont celles qui impliquent les noyaux les plus légers. Ainsi les noyaux de Deutérium (un proton et un neutron) et de Tritium (un proton et deux neutrons) sont impliqués dans la réaction suivante :

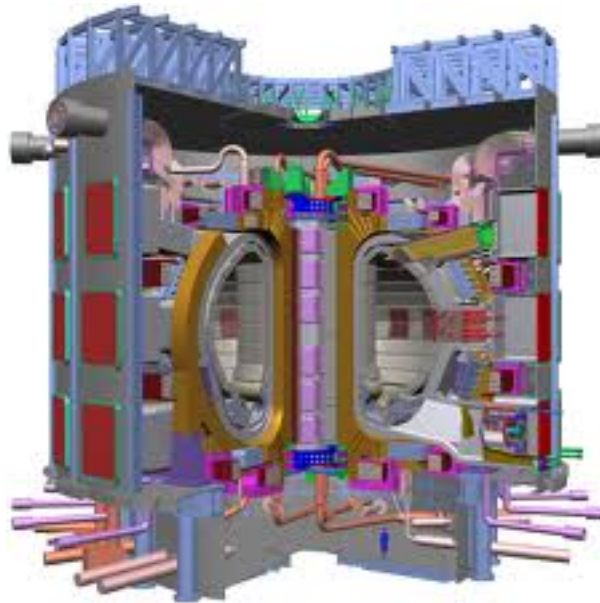


**FIG. 1:** La fusion nucléaire

L'énergie nécessaire à la fusion reste élevée. Elle correspond à des températures de plusieurs dizaines ou même de centaines de millions de degrés selon la nature des noyaux. (Pour le soleil, par exemple, les températures sont de l'ordre de 15 millions de degrés Kelvins). À cette température, les

électrons des noyaux des atomes quittent leurs orbites. On obtient alors un mélange globalement neutre des particules chargés qui est appelé plasma.

La fusion contrôlée est encore au stade de la recherche. Pour que celle-ci soit rentable, il est nécessaire que l'énergie produite soit supérieure à l'énergie consommée. Dans les réacteurs nucléaires, il faut ainsi éviter tout contact entre le milieu de réaction et les matériaux de l'environnement. Ce qu'on réalise par un confinement. On envisage alors deux approches : la fusion par confinement inertiel et la fusion par confinement magnétique. Le confinement inertiel consiste à atteindre une densité très élevée pendant un temps relativement court en tirant sur une capsule de Deutérium et de Tritium tandis que le confinement magnétique consiste à confiner le plasma grâce à un champ magnétique et à une densité moins élevée pendant un temps plus long. Après plusieurs prototypes, ce sont les soviétiques qui ont réussi, en 1968, à obtenir un plasma de 10 millions de degrés par confinement magnétique dans un tokamak.



**FIG. 2:** Vue d'artiste du tokamak ITER.

Actuellement, un réacteur nucléaire à fusion est en construction à Cadarache, ITER (Réacteur Thermonucléaire Expérimental International). Il contiendra un mélange gazeux de Deutérium et de Tritium. Cette matière

sera élevée à la température de 100 millions de degrés. Pour plus de renseignement, le lecteur pourra se référer au site maintenu par le CEA : [http://www.cea.fr/energie/dossier\\_iter/la\\_fusion\\_controllee](http://www.cea.fr/energie/dossier_iter/la_fusion_controllee). De plus, afin de tenir éloigné le plasma de la paroi, un champ électromagnétique est généré. Les particules tourneront ainsi autour des lignes de champs formant ainsi une hélice. En projetant cette hélice sur le plan perpendiculaire au champ magnétique, on obtient un cercle dont le centre est appelé centre-guide et le rayon est appelé le rayon de Larmor.

Les plasmas ont un comportement complexe mettant en jeu des interactions non linéaires et des échelles de temps et d'espace multiples. Dans les plasmas, il y a de nombreuses instabilités et des phénomènes turbulents qui s'opposent à leur confinement. Ces phénomènes jouent un rôle fondamental dans la physique des plasmas. L'étude de l'évolution d'un plasma dans un tokamak nécessite le recours à des techniques de simulations numériques avancées. La création de schémas numériques adaptés permettra de mieux comprendre ces phénomènes et ainsi de mieux contrôler les plasmas. Le modèle cinétique de base régissant l'évolution d'un plasma de fusion par confinement magnétique est le modèle de Vlasov-Maxwell tri-dimensionnel.

## 2 DESCRIPTION MATHÉMATIQUE

On considère le modèle cinétique dans lequel chaque espèce de particules du plasma est caractérisée par une fonction de distribution  $f_s(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  qui, dans une approche statistique, décrit la répartition des particules dans l'espace des phases pour un grand nombre de réalisations. Cette fonction  $f_s$  dépend de 7 variables : le temps  $t$ , la position  $\mathbf{x}$  (en 3D) et la vitesse  $\mathbf{p}$  (3D). L'équation de Vlasov (Anatoly Vlasov 1938) [8] est une équation différentielle décrivant l'évolution en temps de la fonction de distribution du plasma constitué de particules chargées en négligeant l'effet de collisions [33]. Elle s'écrit dans le cas relativiste pour chaque espèce de particules par la formule :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + q[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \times \mathbf{B}] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = 0,$$

où  $m$  est la masse et  $q$  la charge de la particule,  $\gamma$  est l'énergie réduite ou facteur de Lorentz élevé à la quantité de mouvement par la relation :

$$\gamma = \sqrt{1 + \frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2}},$$

avec  $c$  la vitesse de la lumière.

Le champ électromagnétique ( $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$ ) est solution des équations de Maxwell [2, 3, 26] :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} &= -\mathbf{J}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{H},\end{aligned}$$

avec  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  la permittivité électrique et la perméabilité magnétique. On peut remarquer que dans le vide  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$  sont des constantes et vérifient  $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$ . Les termes sources ( $\mathbf{J}$ ,  $\rho$ ) sont donnés par

$$\begin{aligned}\rho &= \sum_s \int f_s(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p}, & \text{la densité de charge,} \\ \mathbf{J} &= \sum_s \int f_s(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} d\mathbf{p}, & \text{la densité de courant.}\end{aligned}$$

Dans le cas où l'on considère les équations de Vlasov-Poisson, le système s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{\gamma m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + q\mathbf{E} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E}.\end{aligned}$$

Les équation de Vlasov vérifient quelques propriétés démontrés dans [55, 94] qui permettront de valider les codes numériques à savoir

- Le principe du maximum :

$$0 \leq f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \leq \max_{\mathbf{x}, \mathbf{p}} f(0, \mathbf{x}, \mathbf{p}).$$

- La conservation des normes  $L^r$ , pour  $r$  entier et  $1 \leq r \leq \infty$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int (f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}))^r d\mathbf{x} d\mathbf{p} \right) = 0.$$

On remarque alors pour  $r = 1$  la conservation de la masse.

- La conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int \frac{\mathbf{p}}{m\gamma} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} d\mathbf{p} + \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} d\mathbf{x} \right] = 0.$$



- La conservation d'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ mc^2 \int (\gamma - 1) f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) d\mathbf{x} d\mathbf{p} + \frac{\epsilon_0}{2} \int (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) d\mathbf{x} \right] = 0.$$

Dans la suite on considérera les équations de Vlasov-Maxwell dans le cas non relativiste, autrement dit, pour  $\mathbf{p} = m \mathbf{v}$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q}{m} [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

et

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{J}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (4)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (5)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}. \quad (6)$$

Les propriétés deviennent

- Le principe du maximum :

$$0 \leq f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \leq \max_{\mathbf{x}, \mathbf{v}} f(0, \mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

- La conservation des normes  $L^r$ , pour  $r$  entier et  $1 \leq r \leq \infty$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int (f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}))^r d\mathbf{x} d\mathbf{v} \right) = 0.$$

On remarque alors pour  $r = 1$  la conservation de la masse.

- La conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int \mathbf{v} f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} + \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} d\mathbf{x} \right] = 0.$$

- La conservation d'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int \mathbf{v}^2 f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{x} d\mathbf{v} + \int (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) d\mathbf{x} \right] = 0.$$

Ces équations ont été utilisées par les mathématiciens et les physiciens pour produire des simulations numériques et ainsi mieux comprendre le comportement du plasma. L'équation de Vlasov qui décrit l'évolution d'un plasma au cours du temps, est posée sur l'espace des phases 6D et du couplage non-linéaire entre Vlasov et Maxwell. Néanmoins, dans le cadre des plasmas de tokamaks pour lesquels le champ magnétique extérieur est très fort, on utilise des modèles approchés de type Vlasov-gyrocinétique couplés à une équation de quasi-neutralité pour déterminer le champ électrique auto-consistant. La théorie gyrocinétique moderne utilise un cadre et des outils de géométrie différentielle avancés, une compréhension suffisamment bonne de ces outils et des modèles est indispensable pour développer des logiciels de simulations précis et performants.

Ainsi on propose de changer de point de vue et d'utiliser la géométrie différentielle [26, 29, 84, 86, 101, 102], comme l'a fait Bossavit avec les équations de Maxwell [1, 2, 3, 4] et bien d'autres [6, 30, 41, 52, 53, 58, 92, 100] pour développer des schémas numériques. Ces deux points de vue sont équivalents et la formulation géométrique que l'on propose ici est la suivante. On écrit tous les objets mathématiques des équations sous forme de *formes différentielles* en fonction de leurs propriétés géométriques et physiques en découplant le temps de l'espace des phases. Les opérations comme la divergence, le rotationnel ou le gradient ont également leurs équivalents dans la géométrie différentielle. On notera cet équivalent  $d$ , la *dérivée extérieure*. C'est une application qui à une  $k$ -forme différentielle associe une  $(k + 1)$ -forme différentielle. Pour plus de détails, on pourra utiliser les préliminaires et les livres [26, 29, 86, 101, 102]. Expliquons brièvement la démarche à suivre pour associer aux objets mathématiques des objets géométriques :

La fonction de distribution  $f$  représente la répartition de particules dans l'espace des phases. Donc on s'intéresse à son intégrale sur un volume de l'espace des phases à six dimensions. On la considère alors comme une forme volume i.e. une 6-forme différentielle  ${}^6f$  sur l'espace des phases à six dimensions mais elle peut être considérée, de manière équivalente (que l'on expliquera dans la suite) comme une 0-forme différentielle.

L'équation de Vlasov s'écrit :

$$\frac{\partial {}^6f}{\partial t}(t) + \mathcal{L}_\tau {}^6f(t) = 0,$$

avec  $\mathcal{L}_\tau$  la *dérivée de Lie* le long du *champ de vecteurs*  $\tau$  qui sera explicité au premier chapitre de la thèse.

La représentation du champ électromagnétique à l'aide des *formes différentielles* a été expliquée dans le livre de Bossavit ainsi que dans ses articles [1, 2, 3, 4]. Les formes différentielles mises en jeu dans ces équations agissent

sur l'espace des positions donc l'espace à trois dimensions. La densité de charge  $\rho$  est comme son nom l'indique, une densité. On s'intéresse plus particulièrement à son intégrale sur un volume de l'espace à trois dimensions. Elle correspond à une 3-forme différentielle  ${}^3\rho$ , une forme volume, sur l'espace à trois dimensions. On déduit de l'équation (4), par cohérence avec la géométrie différentielle, que le champ d'induction magnétique  $\mathbf{D}$  correspond à une 2-forme différentielle  ${}^2\mathbf{D}$  sur l'espace des positions. De plus, comme la densité de courant  $\mathbf{J}$  mesure la quantité de charge à travers une surface par unité de temps, elle doit pouvoir être intégrée sur une surface (un objet de dimension deux). La densité de courant correspond à une 2-forme différentielle  ${}^2\mathbf{J}$  sur l'espace des positions et l'équation (30) nous indique que le champ magnétique  $\mathbf{H}$  correspond à une 1-forme différentielle  ${}^1\mathbf{H}$ . Passons maintenant à l'équation (1). Le champ électrique  $\mathbf{E}$  doit pouvoir être intégré le long d'une ligne de champ. Il correspond donc à une 1-forme différentielle  ${}^1\mathbf{E}$ . La relation entre les différents objets de l'équation (1) nous indique alors que le champ d'induction magnétique  $\mathbf{B}$  doit être représenté par une 2-forme différentielle  ${}^2\mathbf{B}$  sur l'espace des positions.

Les équations de Maxwell dans la formulation covariante sont les suivantes :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial {}^2\mathbf{D}}{\partial t} + d{}^1\mathbf{H} &= {}^2\mathbf{J}, \\ \frac{\partial {}^2\mathbf{B}}{\partial t} + d{}^1\mathbf{E} &= 0, \\ d{}^2\mathbf{D} &= {}^3\rho, \\ d{}^2\mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Il serait donc intéressant de travailler et d'établir des schémas numériques directement à partir de cette nouvelle formulation.

### 3 PLAN

Comme on a pu le constater dans les paragraphes précédents, on va rester dans le cadre de la géométrie différentielle tout au long de cette thèse.

Le chapitre qui suit rappelle brièvement les notions de géométrie différentielle qui nous seront utiles pour l'étude théorique et numérique. Cette thèse est divisée en trois parties.

La première concerne la formulation géométrique des équations de Vlasov-Maxwell [79]. Dans le premier chapitre, on écrit toutes les équations dans une formulation covariante ainsi que toutes les conservations des quantités physiques. On montre également que considérer la fonction de distribution

$f$  comme une 6-forme différentielle est équivalent à la considérer comme une 0-forme différentielle grâce au fait que la divergence du champ de vecteurs  $\tau$  décrivant le mouvement des particules est nulle.

De plus, les phénomènes multi-échelles présents dans le comportement des plasmas ne sont établis que formellement. Ces résultats peuvent être démontrés en s'appuyant sur les théories d'analyse fonctionnelle en partant d'un modèle Vlasov-Poisson ou Vlasov-Maxwell judicieusement adimensionné. Dans le chapitre deux on reprend les techniques d'adimensionnement et on les adapte au formalisme de la géométrie différentielle. En fait, on voit que procéder à l'adimensionnement au sens usuel est équivalent à appliquer le bon changement de coordonnées (ou *pull back*) sur les équations écrites dans la formulation covariante. On montre cela pour les équations de Maxwell dans le cas relativiste et non relativiste. On adimensionne également les équations de Vlasov-Poisson dans la formulation covariante en évidence le rayon de Larmor fini [12, 54, 62, 75]. Parmi les théories utilisées pour démontrer ces phénomènes multi-échelles, la convergence à deux échelles est bien adaptée. Initiée par G. Nguetseng[77] et reprise par G.Allaire [76], elle a été adaptée dans le cadre de la géométrie différentielle récemment par Pak [10] en 2005. Dans le chapitre trois, on reprend les travaux de Pak [10] et on développe cette nouvelle approche pour pouvoir faire de la convergence à deux échelles sur l'équation de Vlasov dans le formalisme covariant et donc sur des variétés différentielles adaptées au cadre physique. On établit des résultats de convergence en utilisant les *géodésiques* des variétés différentielles. On applique alors cette théorie, en se basant sur les articles [10, 12, 54, 62, 75, 76, 77], sur l'équation de Vlasov homogénéisée avec un champ électrique et magnétique fort.

Dans la seconde partie, on montre que le fait d'utiliser les formes différentielles pour décrire les équations a son utilité également dans l'étude numérique. On rappelle alors l'état de l'art de la discrétisation des formes différentielles qui a été développée par Bossavit [1, 2, 3, 4, 5] et bien d'autres [6, 30, 35, 41, 51, 52, 53, 92, 95, 96, 97, 100]. Dans le premier chapitre on rappelle le type de discrétisation utilisé et les relations entre les différents objets du maillage. Au cours du chapitre deux on explique brièvement la construction des *formes de Whitney* [2, 3, 51, 53, 82] et les relations entre les formes différentielles et les éléments du maillage, les chaînes. Le dernier chapitre de cette partie rappelle qu'il ne suffit pas de discrétiser les formes différentielles et qu'il faut aussi discrétiser les opérations agissant sur elles pour que la construction soit cohérente avec la théorie. On reprendra alors toutes les opérations expliquées dans les préliminaires et on explique les différentes possibilités qui ont été proposées à ce jour [2, 5, 6, 32, 34, 41, 58, 92, 95, 96, 100]. La dernière partie propose une nouvelle technique pour la discrétisation des

formes différentielles. On suggère d'utiliser d'autres fonctions pour l'interpolation des formes différentielles. Ces nouvelles fonctions doivent respecter certaines propriétés comme par exemple le diagramme de De Rham ou les propriétés géométriques des formes différentielles. Les fonctions de base qui se sont avérées adéquates sont les *B-splines* [15]. Ce sont des fonctions très utilisées dans le domaine de la CAO/DAO. On s'est aperçu alors que l'étude rejoint l'analyse isogéométrique [19, 22, 57, 63]. Sur le même schéma que la partie précédente, dans le premier chapitre on explique quel type de maillage on utilise pour les B-splines, un maillage utilisant des hypercubes. Dans le chapitre deux, on explique brièvement ce que sont les B-splines [15] et on explicite les différentes bases pour chaque type de formes différentielles à l'aide de ces fonctions. Dans le troisième chapitre, on proposera une discrétisation des différents opérateurs agissant sur les formes différentielles et on mettra à jour également un diagramme de De Rham discret. Le dernier chapitre est consacré aux résultats numériques à l'aide de cette nouvelle approche. Le fait d'avoir écrit les équations en utilisant les formes différentielles nous permet d'obtenir immédiatement un schéma d'approximation consistant et convergent qui respecte la nature géométrique de chaque objet qui constitue l'équation différentielle. De plus, ce point de vue est une formulation lagrangienne géométrique des équations c'est-à-dire qu'il n'y a pas de référence à un système de coordonnées et donc le schéma d'approximation reste valable dans le cas d'une déformation continue. On adaptera alors le schéma d'approximation aux équations de Maxwell avec différentes conditions au bords et avec un changement de coordonnées [60]. Puis, pour aller plus loin, on l'appliquera aux équations de Vlasov-Poisson. On proposera une formulation géométrique faible toujours en utilisant le formalisme des formes différentielles et on le testera sur cette dernière équation.

Un dernier chapitre expliquera brièvement le développement et les résultats obtenus concernant le projet du CEMRACS 2010.



---

# Préliminaires

---

---

## Contenu du chapitre

---

4	Les champs de vecteurs . . . . .	xx
5	Les formes différentielles . . . . .	xxiv

---

On rappelle ici les bases de la géométrie différentielle afin de les réutiliser, d'une part pour faire une étude théorique et numérique des équations de Vlasov-Maxwell et d'autre part pour développer une analyse fonctionnelle et une analyse asymptotique en géométrie différentielle. Pour ce faire, on rappellera quelques notions de géométrie différentielle utiles telles que les champs de vecteurs et les formes différentielles. Le lecteur pourra s'aider des livres d'Agricola, d'Arnold, de Jost, de Lafontaine et de Marsden [26, 29, 37, 86, 102] ainsi que du cours de Masson [101].

## 4 LES CHAMPS DE VECTEURS

Compte tenu de nos objectifs, on travaillera dans la suite avec des variétés qui seront toujours très régulières. On rappelle qu'une *variété différentielle orientable, connexe de classe  $C^\infty$  et de dimension  $n$*  est un espace topologique séparé connexe, tel qu'il existe un ensemble dénombrable d'ouverts  $(U_i)_{i \in I}$  recouvrant  $M$  et des homéomorphismes  $\varphi_i : U_i \rightarrow W_i \subset \mathbb{R}^n$ , tels que, pour tous  $i$  et  $j$  dans  $I$  avec  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , on ait :

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j),$$

de classe  $C^\infty$  dont son jacobien est positif.

Soit  $(U, \varphi)$  une *carte locale* de la variété différentielle  $M$  ( $\varphi$  est un homéomorphisme d'un ouvert  $U$  de  $M$  vers un ouvert  $W$  de  $\mathbb{R}^n$ ). Pour  $p \in U$ , comme  $\varphi(p) \in \mathbb{R}^n$ , on peut écrire  $\varphi(p) = (x_1(p), \dots, x_n(p))$ . Nous dirons que  $(x_1, \dots, x_n)$  sont les *coordonnées locales* de  $p$  dans la carte  $(U, \varphi)$ .

Autrement dit, une fonction  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  prendra localement la forme  $f(x_1, \dots, x_n)$  au-dessus de  $U$  (par abus de notation). En fait, il s'agit de la fonction  $f \circ \varphi^{-1}$ .

Pour une telle variété, pour tout  $p \in M$ , il existe un *espace tangent* de  $M$  en  $p$ ,  $T_p M$ . Il représente l'ensemble des vecteurs tangents à  $M$  au point  $p$ . C'est un espace vectoriel de dimension  $n$ . On peut également définir le *fibré tangent*  $TM$  associé à une variété différentielle  $M$  comme l'union disjointe de tous les espaces tangents en tous les points de la variété

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M.$$

Il est important de noter que  $TM$  n'est pas un espace vectoriel mais une collection d'espaces vectoriels paramétrée par les points de  $M$  et qu'il existe une projection canonique  $\pi : TM \rightarrow M$ .

$TM$  est également une variété différentiable orientable de dimension  $2n$ . Définissons maintenant la notion de *champ de vecteurs*

**Définition 4.0.1** — Un *champ de vecteurs*  $\xi$  sur  $M$  est défini par l'application :

$$\begin{aligned} \xi & : M \rightarrow TM \\ p & \mapsto \xi(p) = (p, \xi_p) \end{aligned}$$

Autrement dit, pour tout  $p$  dans  $M$ , on a un *vecteur tangent*  $\xi_p$  dans  $T_p M$ .

On remarque que, puisqu'une *section* de  $TM$  est une application  $f : M \rightarrow TM$  telle que  $\pi(f(p)) = p \forall p \in M$ , alors un champ de vecteurs est une



section du fibré tangent  $TM$ .

Ces propriétés ne dépendent pas du système de coordonnées choisi.

On peut étendre cette notion à l'aide de la loi multiplicative  $\wedge$ , appelée le produit extérieur. Les  $k$ -vecteurs de  $T_pM$  sont alors de la forme  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$  avec  $v_i \in T_pM$ . L'ensemble des  $k$ -vecteurs forment ainsi un espace vectoriel que l'on note

$$\bigwedge^k(T_pM) := \underbrace{T_pM \wedge \dots \wedge T_pM}_k.$$

De même, on définit l'ensemble des  $k$ -champs de vecteurs :

$$\bigwedge^k(TM) := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \bigwedge^k(T_pM).$$

On peut alors observer que  $\bigwedge^k(TM)$  est une variété différentielle.

**Définition 4.0.2** — Une *variété riemannienne*  $(M, g)$  est une variété différentielle  $M$  telle que pour tout  $p \in M$  l'espace tangent  $T_pM$  soit muni d'un produit scalaire  $g_p$  (la *métrique riemannienne*).

Soit  $p$  un point de  $M$ , la métrique riemannienne  $g_p$  est représentée par une matrice, toujours notée  $g_p$ , symétrique ( $(g_p)_{i,j} = (g_p)_{j,i}$ ), non dégénérée ( $\forall u$  tel que  $\forall v$  on ait  $u \cdot (g_p v) = 0 \Rightarrow u = 0$ ) et définie positive ( $\forall u, u \cdot (g_p u) \geq 0$ ), telle que pour tout  $u, v \in T_pM$ , on ait :

$$g_p(u, v) := u \cdot (g_p v),$$

où  $\cdot$  désigne le produit scalaire usuel.

**Remarque 4.1** — On remarque que  $g$  définit, en tout point  $p$  de  $M$ , une forme bilinéaire sur le fibré vectoriel  $\bigwedge^k(TM)$ , représentée par :

$$(\cdot, \cdot)_p : \bigwedge^k(T_pM) \times \bigwedge^k(T_pM) \rightarrow \mathbb{R},$$

et agit de telle sorte que pour tout  $u_1 \wedge \dots \wedge u_k$  et  $v_1 \wedge \dots \wedge v_k$  dans  $\bigwedge^k(T_pM)$  avec  $(u_i)_{i=1\dots k}$  et  $(v_i)_{i=1\dots k}$  dans  $T_pM$ , on ait

$$(u_1 \wedge \dots \wedge u_k, v_1 \wedge \dots \wedge v_k)_p = \det(g_p(u_i, v_j)_{i,j}).$$

Une métrique riemannienne  $g$  sur une variété différentielle connexe  $M$  définit sur chaque espace tangent  $T_pM$  une norme (de Banach), donnée par :

$$\|v_p\| := \sqrt{g_p(v_p, v_p)},$$

avec  $v_p \in T_p M$ . Soient  $p$  et  $q$  deux points de la variété  $M$ . Grâce à cette norme, on définit la *longueur d'une courbe*  $\gamma : [t_1, t_2] \rightarrow M$ ,  $C^1$  par morceaux joignant les points  $p$  et  $q$ , par :

$$L(p, q, \gamma) := \int_{t_1}^{t_2} \|\gamma'(t)\| dt,$$

avec  $\|\gamma'(t)\| := \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}$ ,  $\gamma(t_1) = p$  et  $\gamma(t_2) = q$ . Ainsi, on peut définir la distance entre deux points  $p, q$  de la variété  $M$  par :

$$d(p, q) := \inf L(p, q, \gamma)$$

où l'infimum porte sur toutes les courbes  $C^1$  par morceaux d'origine  $p$  et d'extrémité  $q$ . La distance  $d$  sur  $M$  est appelée *distance riemannienne*. Les courbes minimisant localement la longueur  $L(p, q, \gamma)$ , (i.e. pour des petites variations de  $\gamma$ ), sont appelées des *géodésiques*. Le minimum (absolu) donnant la distance n'est pas nécessairement atteint par une courbe. Une géodésique joignant  $p$  à  $q$  dont la longueur est exactement la distance  $d(p, q)$  est appelée *géodésique minimisante*. Dans le plan, les géodésiques sont des droites tandis que sur la sphère, les géodésiques sont les grands cercles. De plus, si  $p \in M$  et  $v_p \in T_p M$ , il existe une unique géodésique  $\gamma_{v_p}$  définie pour des temps petits au voisinage de  $p$ , telle que

$$\gamma_{v_p}(0) = p \quad \text{et} \quad \gamma'_{v_p}(0) = v_p.$$

On remarque alors, que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , la courbe

$$t \rightarrow \gamma_{v_p}(\lambda t) := \tilde{\gamma}_{\lambda v_p}(t)$$

est aussi une géodésique avec les conditions initiales

$$\tilde{\gamma}_{\lambda v_p}(0) = x \quad \text{et} \quad \tilde{\gamma}'_{\lambda v_p}(0) = \lambda v_p.$$

Donc, si  $\gamma_{v_p}$  est définie sur l'intervalle  $] -\epsilon_1, \epsilon_2[$  alors  $\tilde{\gamma}_{\lambda v_p}$  est définie sur l'intervalle  $] -\epsilon_1/\lambda, \epsilon_2/\lambda[$ . On en déduit, quitte à multiplier  $v_p$  par un scalaire plus petit que 1, que  $\gamma_{v_p}$  est définie pour  $t = 1$  et donc  $\tilde{\gamma}_{\lambda v_p}$  est aussi définie pour  $t = 1$  quand  $\lambda \in ]0, 1]$ .

Soit  $V_0$  le plus grand ouvert contenant 0 dans  $T_p M$  tel que si  $v_p \in V_0$  alors  $\gamma_{v_p}$  est définie en  $t = 1$ . Sur cet ouvert, on définit l'*application l'exponentielle*  $\exp_p : V_0 \rightarrow M$  vérifiant :

$$\exp_p v_p := \gamma_{v_p}(1).$$

La géodésique vérifiant  $\gamma_{v_p}(0) = p$  et  $\gamma'_{v_p}(0) = v_p$ , est de la forme

$$\gamma_{v_p}(t) = \exp_p(t v_p).$$

Elle est appelée *géodésique radiale*. Pour tout point  $p \in \exp_p(V_0)$ , elle correspond en fait à la géodésique minimisante.

De plus, l'application exponentielle induit un isomorphisme entre  $V_0 \subset T_p M$  et un voisinage ouvert  $U_p$  de  $p$  dans  $M$ . Autrement dit, si pour  $r > 0$ , on note  $B(p, r)$  la boule de centre 0 dans  $T_p M$  contenant les  $v_p$  tel que  $\|v_p\| := \sqrt{g_p(v_p, v_p)} \leq r$  et  $U(p, r)$  la boule ouverte de centre  $p$  et de rayon  $r$  dans  $M$  (i.e. que pour tout  $q \in U(p, r)$ , on a  $d(p, q) \leq r$ ), on a alors les propriétés suivantes :

- $\exp_p : B(p, r) \rightarrow U(p, r)$  est un difféomorphisme.
- Tout point  $q \in U(p, r)$  peut être joint par une géodésique unique contenue dans  $U(p, r)$  dont la longueur est exactement  $d(p, q)$ .

On détermine maintenant la longueur de cette géodésique : pour tout  $v_p \in T_p M$  avec  $\|v_p\| = 1$ , on pose

$$c(v_p) := \sup \{t > 0 : d(p, \exp_p(t v_p)) = t\}.$$

Avec ceci, le voisinage  $V_0 \subset T_p M$  peut être défini de la manière suivante :

$$V_0 := \{t v_p \in T_p M \mid v_p \in T_p M \text{ } \|v_p\| = 1 \text{ et } t \in [0, c(v_p)]\}.$$

L'ensemble  $Cut(p) := \exp_p(\partial V_0)$  est appelé l'ensemble des *cut locus de p* dans  $M$ . On peut voir cet ensemble comme étant l'ensemble des points qui sont reliés entre eux par une géodésique minimisante.

Généralement comme la géodésique est définie localement, on peut se demander dans quel cas la géodésique est définie sur tout  $T_p M$  (quelque soit  $p$  appartenant à  $M$ ). Ce sera le cas quand la variété  $M$  est complète pour la métrique  $d$ . On dira alors, que la variété  $M$  est *géodésiquement complète*. On a en fait les équivalences suivantes :

**Proposition .1** (Théorème de Hopf-Rinow) — *Soit  $M$  une variété riemannienne. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- Pour tout point  $p \in M$ , l'application  $\exp_p$  est définie sur tout  $T_p M$ .
- La variété  $(M, g)$  est géodésiquement complète, i.e. les géodésiques sont définies sur  $\mathbb{R}$ .
- L'espace  $M$  est complet pour la distance riemannienne.
- Les boules fermées et bornées de  $M$  sont compactes.

De cette proposition, on va en extraire une notion importante qui nous sera utile pour l'analyse asymptotique. On retiendra que pour une variété riemannienne géodésiquement complète, deux points de la variété peuvent être joint par une unique géodésique de longueur minimale.

On a vu que la métrique riemannienne  $g$  peut définir une distance riemannienne sur la variété, mais il existe une autre notion qui nous sera utile pour l'analyse fonctionnelle, la mesure. En effet, si la variété riemannienne est une variété orientable, alors elle possède une mesure naturelle  $vol_p$  dont l'expression au-dessus de l'ouvert  $U$  d'une carte de  $M$  de coordonnées  $(x_i)_i$  est  $\sqrt{(|\det g_p|)} dx_1 \dots dx_n$ . Cette mesure  $vol_p$  est appelée *mesure riemannienne* sur  $M$ . On peut alors écrire

$$\mu(f) := \int_M f(p) vol_p.$$

## 5 LES FORMES DIFFÉRENTIELLES

Tout d'abord, notons  $T_p^*M$  l'espace dual de  $T_pM$ , nommé également *l'espace cotangent* de  $M$  en  $p$ . Ses éléments sont appelés des 1-formes. De la même manière que pour les champs de vecteurs, on note  $T^*M$  le *fibré cotangent* et  $\pi^* : T^*M \rightarrow M$  la projection canonique. Une *1-forme différentielle* est alors définie comme étant l'application qui à tout point  $p$  de  $M$  associe une 1-forme en ce point (on peut également s'aider du livre de Gross et Kotiuga [104]).

Plus généralement, on va définir les *k-formes différentielles* sur  $M$  pour tout entier  $k$ . Pour cela, en chaque point  $p \in M$ , on appelle *k-forme* une forme  $k$ -linéaire antisymétrique sur  $\bigwedge^k(T_pM)$ . On nomme  $\bigwedge^k(T_p^*M)$  l'ensemble des *k-formes* en  $p$ , avec la convention que  $\bigwedge^1(T_p^*M) := T_p^*M$ . Ensuite, on note

$$\bigwedge^k(T^*M) := \bigsqcup_{p \in M} \bigwedge^k(T_p^*M) := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \bigwedge^k(T_p^*M),$$

l'union disjointe des espaces de  $k$ -formes en chaque point  $p$  de  $M$ . On a alors la définition suivante :

**Définition 5.0.3** — Une *forme différentielle de degré  $k$*   $\omega^k$  (ou couramment appelée *k-forme différentielle*) est l'application :

$$\begin{aligned} \omega^k : M &\rightarrow \bigwedge^k(T^*M) \\ p &\mapsto \omega^k(p) = (p, \omega_p^k) \end{aligned}$$

En fait,  $\omega_p^k \in \Lambda^k(T_p^*M)$  et  $\omega^k(p)$  peut être vue comme une section de  $\Lambda^k(T^*M)$ .

L'ensemble des  $k$ -formes différentielles sur une variété  $M$  est un espace vectoriel, noté  $\Omega^k(M)$ . Cet espace est de dimension 0 si  $k > n$  et de dimension  $\binom{n}{k}$  si  $k \leq n$ . Pour fixer les idées, on peut, au-dessus d'un ouvert d'une carte locale de  $M$  où  $p \in M$  a pour coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$ , écrire toute  $k$ -forme différentielle sous la forme

$$\omega_p^k = \sum_{i_1, \dots, i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k}^k(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}, \quad (7)$$

où les coefficients  $\omega_{i_1, \dots, i_k}^k$  sont des fonctions de  $M$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 5.1** — À toute 1-forme différentielle  $\omega_p = \omega_1(x)dx_1 + \dots + \omega_n(x)dx_n$ , on peut associer un champ de vecteurs  ${}^b\omega$  tel que :

$${}^b\omega_p = \omega^1(x) \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \omega^n(x) \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad (8)$$

et réciproquement à tout champ de vecteurs  $\eta$ , on peut associer une 1-forme différentielle  $\eta^\sharp$ .

Dans le cas où on a une application  $f : N \rightarrow M$ , avec éventuellement  $N = M$ , on peut définir des applications agissant sur les champs de vecteurs et sur les formes différentielles nommées respectivement *push forward* et *pull back*. On les définit précisément maintenant :

**Définition 5.0.4** — Soient  $N, M$  deux variétés riemanniennes et  $f : N \rightarrow M$  une application différentiable et  $\omega^k$  une  $k$ -forme différentielle sur  $M$ . Alors l'application suivante  $f^*(\omega^k)$  est une  $k$ -forme différentielle sur  $N$  appelée *pull back* de  $\omega^k$  par  $f$  :

$$(f^*(\omega^k))_p(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega_{f(p)}^k(f_*\xi_1, \dots, f_*\xi_k),$$

où  $p \in N$ ,  $\xi_1, \dots, \xi_k \in T_pN$  et  $f_* : TN \rightarrow TM$  où  $f_*$  désigne le *push forward*, c'est à dire l'application qui à un vecteur  $\xi$  de  $T_pN$  associe un vecteur  $df_p(\xi)$  appartenant à  $T_{f(p)}M$ . On remarquera que cette définition ne suppose pas que  $f$  soit inversible.

On peut observer que le pull back vérifie les propriétés suivantes, pour  $\omega^k \in \Omega^k(M)$  et  $\eta^l \in \Omega^l(M)$  :

- $f^*$  préserve le *produit extérieur* :  $f^*(\omega^k \wedge \eta^l) = f^*\omega^k \wedge f^*\eta^l$ .
- $f^*(\omega_1^k + \omega_2^k) = f^*\omega_1^k + f^*\omega_2^k$ .

- Pour  $f : N \longrightarrow M$  et  $g : M \longrightarrow D$ , on a  $(f \circ g)^* = f^* \circ g^*$ .
- Pour  $h : M \longrightarrow \mathbb{R}$ , on a  $f^*(h \cdot \omega^k) = (h \circ f) \cdot f^*(\omega^k)$ .

Sur l'ensemble des formes différentielles, on définit d'autres opérations telles que le *produit extérieur*, la *dérivée extérieure*, le *produit intérieur*, le *hodge star*. On commence par le *produit extérieur* :

**Définition 5.0.5** — Soit  $\omega^k \in \Omega^k(M)$  et  $\eta^l \in \Omega^l(M)$ . Le *produit extérieur* est l'application  $\omega^k \wedge \eta^l \in \Omega^{k+l}(M)$  qui agit en tout point  $p$  appartenant à  $M$  et sur  $(k+l)$  vecteurs  $\xi_1, \dots, \xi_{k+l}$  de  $T_pM$ , tel que :

$$(\omega^k \wedge \eta^l)_p(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \sum_{\sigma \in S_{k+l}} \frac{(-1)^{\text{sgn}(\sigma)}}{k! l!} \omega_p^k(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \eta_p^l(\xi_{\sigma(k+1)}, \dots, \xi_{\sigma(k+l)}),$$

avec  $S_{k+l}$  l'ensemble des permutations de  $\{1, \dots, k+l\}$ .

Le produit extérieur possède les propriétés suivantes avec  $\omega^k \in \Omega^k(M)$ ,  $\eta^l \in \Omega^l(M)$  et  $\gamma^m \in \Omega^m(M)$  : il est

- anti-commutatif :  $\omega^k \wedge \eta^l = (-1)^{kl} \eta^l \wedge \omega^k$ ,
- distributif :

$$(\omega_1^k \wedge \omega_2^k) \wedge \eta^l = \omega_1^k \wedge \eta^l + \omega_2^k \wedge \eta^l = (\omega_1^k \wedge \eta^l) + (\omega_2^k \wedge \eta^l),$$

- et associatif :  $(\omega^k \wedge \gamma^m) \wedge \eta^l = \omega^k \wedge (\gamma^m \wedge \eta^l)$ .

Une autre opération agissant sur les ensembles des formes différentielles est la *dérivée extérieure*. C'est une opération de dérivation qui a des équivalents dans le calcul vectoriel : le gradient, le rotationnel ou la divergence. Elle est déterminée de la façon suivante :

**Théorème 5.1** — Soit  $M$  une variété différentielle. Il existe une unique application linéaire  $d$  de  $\Omega^k(M)$  dans  $\Omega^{k+1}(M)$  telle que

- $d : \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^1(M)$  est la différentielle des fonctions,
- Pour tout  $\omega^k \in \Omega^k(M)$  et  $\eta^l \in \Omega^l(M)$  on a

$$d(\omega^k \wedge \eta^l) = d\omega^k \wedge \eta^l + (-1)^k \omega^k \wedge d\eta^l,$$

- Pour tout  $\omega^k \in \Omega^k(M)$  on a  $d(d\omega^k) = 0$ .

Cette application peut être définie de la façon suivante :

**Définition 5.0.6** — La *dérivée extérieure*  $d$  est un opérateur linéaire de  $\Omega^k(M)$  dans  $\Omega^{k+1}(M)$  et on a

$$d\omega_p^k(\xi_0, \dots, \xi_k) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i \cdot \omega_p^k(\xi_0, \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \xi_k) + \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \omega_p^k([\xi_i, \xi_j], \dots, \hat{\xi}_i, \dots, \hat{\xi}_j, \dots, \xi_k)$$

avec  $\omega_p^k \in \Omega^k(M)$  et  $[\xi_i, \xi_j] = \xi_i \xi_j - \xi_j \xi_i$  est le *crochet de Lie*. Le symbole  $\hat{\xi}_i$  signifie que l'on a retiré le vecteur  $\xi_i$ .

Au-dessus d'un ouvert muni d'une carte locale de  $M$ , pour tout point  $p$  la  $k$ -forme  $\omega_p^k$  est donnée par la formule (7) page (xxv) et on a

$$d\omega_p^k = \sum_{i_1, \dots, i_k} \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}^k}{\partial x_i}(x) dx_i \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

où  $x$  correspond aux coordonnées locales de  $p$  dans la carte.

De plus, si  $f$  désigne un changement de coordonnées, on a la propriété  $f^*(d\omega^k) = d(f^*\omega^k)$ .

Cet opérateur élève de 1 le degré de la forme différentielle. D'autres opérateurs diminuent le degré de 1 comme le *produit intérieur* (c'est une antidé-  
rivation). D'autres, comme la *dérivée de Lie*, ne vont pas modifier le degré. La définition du *produit intérieur* est la suivante :

**Définition 5.0.7** — Soit  $\tau$  un champ de vecteurs sur  $M$  et  $\omega^k$  une  $k$ -forme différentielle sur  $M$ . On définit un opérateur linéaire  $i_\tau$  qui agit sur l'espace des formes différentielles et est défini pour tout  $p \in M$  par :

$$\forall \tau \in T_p M \quad i_\tau \omega_p^k(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) := \omega_p^k(\tau, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}),$$

avec  $\xi_1, \dots, \xi_{k-1} \in T_p M$ . La  $(k-1)$ -forme différentielle  $i_\tau \omega^k$  est appelée le *produit intérieur* de  $\omega^k$  le long de  $\tau$ .

Tout comme pour ses prédécesseurs, pour tout point  $p \in M$  notons quelques propriétés du produit intérieur :

- $\forall \omega^k \in \Omega^k(M)$  et  $\forall \tau \in T_p M$  on a  $i_\tau \omega_p^0 = 0$ ,
- $\forall \omega^k \in \Omega^k(M)$  et  $\forall \eta^l \in \Omega^l(M)$  on a

$$i_\tau(\omega^k \wedge \eta^l)_p = i_\tau \omega_p^k \wedge \eta_p^l + (-1)^k \omega_p^k \wedge i_\tau \eta_p^l,$$

- $\forall \omega^k \in \Omega^k(M)$  et  $\forall \tau_1, \tau_2 \in T_p M$  on a  $i_{\tau_2}(i_{\tau_1} \omega_p^k) = -i_{\tau_1}(i_{\tau_2} \omega_p^k)$ ,
- $i_\tau i_\tau = 0 \quad \forall \tau \in T_p M$ .

Le produit intérieur, couramment appelé *contraction* le long d'un champ de vecteur, peut être utilisé pour définir la *dérivée de Lie*  $L_\tau$  le long d'un champ de vecteurs  $\tau$  par la formule d'homotopie :

$$L_\tau = d i_\tau + i_\tau d.$$

En voici une définition :

**Définition 5.0.8** — La dérivée de Lie le long d'un champ de vecteurs  $\tau$  est un opérateur linéaire de  $\Omega^k(M)$  dans  $\Omega^k(M)$  et agit pour tout point  $p \in M$  et pour tout  $\xi_1, \dots, \xi_k \in T_p M$  tel que l'on ait :

$$(L_\tau \omega_p^k)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \omega_p^k((\phi_p^t)_* \xi_1, \dots, (\phi_p^t)_* \xi_k),$$

avec  $\phi_p^t$  le flot du champ de vecteurs  $\tau \in T_p M$ .

De plus, l'opérateur vérifie les propriétés suivantes,  $\forall \tau, \tau_1, \tau_2 \in T_p M$  :

- $L_\tau$  préserve le degré ;
- $L_\tau$  est la dérivation sur  $\Omega^k(M)$  ;
- $\forall \omega^0 \in \Omega^0(M)$  on a  $L_\tau \omega_p^0 = \tau \cdot \omega_p^0$  ;
- $L_\tau d = dL_\tau$  ;
- $\forall \omega^k \in \Omega^k(M)$  et  $\forall \eta^l \in \Omega^l(M)$  on a

$$L_\tau(\omega^k \wedge \eta^l)_p = L_\tau \omega_p^k \wedge \eta_p^l + \omega_p^k \wedge L_\tau \eta_p^l ;$$

- $L_{\tau_1 + \tau_2} = L_{\tau_1} + L_{\tau_2}$  ;
- $\forall \omega^k \in \Omega^k(M)$  on a  $L_{f\tau} \omega_p^k = f L_\tau \omega_p^k + df \wedge i_\tau \omega_p^k$  où  $f$  est une application  $C^1$  sur  $M$ .

Contrairement aux autres opérateurs vus précédemment, l'opérateur *hodge star*, qu'on introduit maintenant, est un opérateur qui dépend de la métrique définie sur  $M$ . Voici sa définition :

**Définition 5.0.9** — L'opérateur *hodge star*  $\star : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{n-k}(M)$ , associe, à chaque  $k$ -forme différentielle  $\omega^k$ , une  $(n - k)$ -forme différentielle  $\omega^{n-k}$  (où  $n$  est la dimension de l'espace) de la façon suivante : pour une  $k$ -forme différentielle  $\omega_p^k = \sum \omega_I(x) dx^I$ , on pose :

$$\star \omega_p^k = \sum sgn(I, J) \omega_I(x) dx^J,$$

où  $J = (j_1, \dots, j_{n-k})$  avec  $(j_1 < \dots < j_{n-k})$  est le complémentaire du multi-  
indice  $I = (i_1, \dots, i_k)$  avec  $(i_1 < \dots < i_k)$  dans  $\{1, \dots, n\}$ .

On peut remarquer que le coefficient  $(\star \omega_p^k)_I$  est égal à

$$\frac{1}{k!} (\omega_p^k)_J \sqrt{|det(g_p)|} sgn(I, J)$$

avec  $I = (i_1, \dots, i_k)$  et  $J$  est égale à l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  privé de  $I$ ,  $\{1, \dots, n\}/I$ .  
L'opérateur *hodge star* vérifie la propriété suivante :

$$\star \star \omega^k = (-1)^{k(n-k)} \omega^k$$

et  $\omega^k \wedge \star \alpha^k = \alpha^k \wedge \star \omega^k$  pour tout  $\omega^k, \alpha^k \in \Omega^k(M)$ . De plus, avec son aide, pour tout point  $p$  dans  $M$  et pour tout  $\tau \in T_p M$  on peut voir que le produit intérieur est égal à

$$i_\tau \omega_p^k = \star (\star \omega_p^k \wedge \tau^\sharp)$$

où  $\tau^\sharp$  est défini à la remarque 5.1 page (xxv). Enfin, on peut définir la *divergence d'un champ de vecteurs*, l'opérateur de la *dérivée co-extérieure* et le *laplacien* :



- La *divergence d'un champ de vecteurs*  $\tau$  est égale à  $\star d \star \tau^\sharp$ .
- L'opérateur de la *dérivée co-extérieure*  $d^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$  est un opérateur de dérivation, au même titre que la dérivée extérieure, mais qui baisse le degré des formes différentielles de 1. Il est défini par  $d^* \omega^k := (-1)^{n(k-1)+1} \star d \star \omega^k$ .
- Le *laplacien*  $\Delta : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ , est également un opérateur de dérivation mais qui ne touche pas au degré des formes différentielles. Il est déterminé par :  $\Delta := d d^* + d^* d$ .

Maintenant que l'on a défini les opérations agissant sur l'ensemble des formes différentielles, on peut se permettre de réécrire la mesure naturelle

$$vol_p = \sqrt{(| \det g_p |)} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

En fait, celle-ci correspond à une forme volume.

De plus, on a vu que pour  $p \in M$ , la métrique  $g$  agit sur  $T_p M$  et sur  $\bigwedge^k(TM)$ , donc, par dualité, on peut en déduire qu'il existe également une métrique sur  $\bigwedge^k(T^*M)$  via la formule

$$\langle \omega^k, \alpha^k \rangle := \int_M \omega_p^k \wedge \star \alpha_p^k,$$

où  $\omega^k$  et  $\alpha^k$  sont des  $k$ -formes différentielles sur  $M$ . Du coup, pour toute  $k$ -forme différentielle,  $\omega^k$  et pour tout  $p$  appartenant à  $M$ , on peut définir une norme  $|\cdot|_p^r$  sur  $\bigwedge^k(T^*M)$  par :

$$|\omega^k|_p^r = (\star(\omega_p^k \wedge \star \omega_p^k))^{\frac{r}{2}} = \left( \sum_{i_1, \dots, i_k} (\omega_{i_1, \dots, i_k}(x))^2 \right)^{\frac{r}{2}}, \quad (9)$$

où  $x$  correspond aux coordonnées locales de  $p$  dans une carte de  $M$ .



# Première partie



## Formulation géométrique des équations de Vlasov-Maxwell



---

# Étude théorique des équations de Vlasov-Maxwell dans le formalisme covariant

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>Les équations de Vlasov-Maxwell . . . . .</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>L'équivalence des formulations . . . . .</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>La conservation géométrisée des quantités physiques . . . . .</b>	<b>4</b>
3.1	La conservation de la masse . . . . .	4
3.2	La conservation de la quantité de mouvement . . . . .	6
3.3	La conservation d'énergie . . . . .	9
<b>4</b>	<b>L'équation de Vlasov-Poisson unidimensionnelle . . . . .</b>	<b>10</b>

---

Pour décrire l'évolution d'un plasma, le modèle cinétique est basé sur l'équation de Vlasov. Cette équation décrit l'évolution de particules chargées dans un champ électromagnétique. Il y a eu de nombreuses recherches qui ont été faites sur ce sujet [7, 62, 79, 94] et bien d'autres. Dans ce chapitre, on va étudier le problème sous un angle différent en utilisant des outils de géométrie différentielle. Dans un premier temps, on reformulera les équations dans le formalisme de la géométrie différentielle. On remarquera alors que l'on a deux façons d'appréhender le problème. L'une est de considérer que la fonction de distribution des particules est, dans l'espace des phases, une 6-forme différentielle i.e. une forme volume, et l'autre, comme étant une 0-forme différentielle i.e. une fonction. On montrera alors que ces deux formulations sont équivalentes et ensuite on formulera la conservation des quantités physiques telles que la masse, la quantité de mouvement ainsi que l'énergie, toujours dans le formalisme de la géométrie différentielle. Enfin, on étudiera le cas particulier de l'équation de Vlasov-Poisson.

# 1 LES ÉQUATIONS DE VLASOV-MAXWELL

On suppose que le temps est découplé de *l'espace des phases*

$$T^*M = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) | \mathbf{x} \in M, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}^*M\},$$

où  $M$  désigne l'espace à trois dimensions. L'équation de Vlasov, dans le formalisme de la géométrie différentielle, s'écrit alors :

$$\frac{\partial {}^6f}{\partial t} + di_{\tau} {}^6f = 0, \quad (10)$$

où  ${}^6f$  est la 6-forme différentielle sur  $T^*M$  qui s'écrit sous la forme  $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})d\mathbf{x} \wedge d\mathbf{v}$  dans les coordonnées locales et  $\tau$  est égal à  $\tau_x + \tau_v$  avec

$$\tau_x := \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}},$$

$$\tau_v := \left( i_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}} {}^1\mathbf{E} + i_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}} i_{\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} {}^2\mathbf{B} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}.$$

La 1-forme différentielle  ${}^1\mathbf{E}$  sur  $M$  représente *champ électrique* et la 2-forme différentielle  ${}^2\mathbf{B}$  sur  $M$  le *champ d'induction magnétique*. L'équation de Vlasov est couplée avec les équations de Maxwell :

$$\frac{\partial {}^2\mathbf{D}}{\partial t} - d{}^1\mathbf{H} = -{}^2\mathbf{J}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial {}^2\mathbf{B}}{\partial t} + d{}^1\mathbf{E} = 0, \quad (12)$$

$$d{}^2\mathbf{D} = {}^3\rho,$$

$$d{}^2\mathbf{B} = 0,$$

(13)

avec

$${}^2\mathbf{J} = \int_{\mathbb{R}_{\mathbf{v}}^3} i_{\tau_x} {}^6f, \quad (14)$$

$${}^3\rho = \int_{\mathbb{R}_{\mathbf{v}}^3} {}^6f. \quad (15)$$

On expliquera page 5 pourquoi on peut intégrer ici  $i_{\tau_x} {}^6f$  et  ${}^6f$  sur un espace de dimension 3.

On note :

- ${}^2\mathbf{D}$  la 2-forme différentielle sur  $M$  représentant le *champ de l'induction électrique*,
- ${}^1\mathbf{H}$  la 1-forme différentielle sur  $M$  représentant le *champ magnétique*,
- ${}^2\mathbf{J}$  la 2-forme différentielle sur  $M$  représentant la *densité de courant*,
- et  ${}^3\rho$  la 3-forme différentielle représentant la *densité de charge*.

De plus, les équations de comportement peuvent s'écrire, dans le formalisme de la géométrie différentielle comme

$${}^2\mathbf{B} = \star_M \mu_0 {}^1\mathbf{H} \quad \text{et} \quad {}^2\mathbf{D} = \star_M \epsilon_0 {}^1\mathbf{E},$$

où  $\star_M$  correspond au hodge star sur la variété riemannienne  $M$ .

Ici, la fonction de distribution  $f$  est une 6-forme différentielle  ${}^6f$ , mais on peut la considérer comme une 0-forme différentielle  ${}^0f$  avec  ${}^0f = \star {}^6f$ . Dans ce cas, l'équation de Vlasov est de la forme :

$$\frac{\partial {}^0f}{\partial t} + i_\tau d {}^0f = 0. \quad (16)$$

Montrons en effet que les équations (16) et (10) sont équivalentes.

## 2 L'ÉQUIVALENCE DES FORMULATIONS

Puisque le temps est découplé de l'espace des phases  $T^*M$ , cela implique que  $\frac{\partial}{\partial t}$  et l'opérateur hodge star commutent. En appliquant l'opérateur hodge star à l'équation (16), on obtient alors, comme  $\star {}^0f = {}^6f$ ,

$$\frac{\partial {}^6f}{\partial t} + \star i_\tau d {}^0f = 0.$$

En comparant avec l'équation (10), on voit que les deux formulations sont équivalentes si et seulement si  $di_\tau \star {}^0f = \star i_\tau d {}^0f$ .

Pour démontrer cela, on va utiliser le fait que  $i_\tau \omega^k = \star (\star \omega^k \wedge \tau^\sharp)$  où  $\tau^\sharp$  est la 1-forme associée au champ de vecteurs  $\tau$  (voir page (xxv)). Donc on a d'une part, le fait que :

$$\star i_\tau d {}^0f = (\star d {}^0f \wedge \tau^\sharp) = \star d {}^0f \wedge \tau^\sharp$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned} di_\tau \star {}^0f &= d \star ({}^0f \wedge \tau^\sharp) \\ &= d ({}^0f \star \tau^\sharp) && \text{puisque } {}^0f \text{ est une 0-forme différentielle} \\ &= d {}^0f \wedge \star \tau^\sharp + {}^0f d \star \tau^\sharp && \text{car } d(\omega^k \wedge \alpha^l) = d\omega^k \wedge \alpha^l + (-1)^k \omega^k \wedge d\alpha^l \\ &= \star d {}^0f \wedge \tau^\sharp + {}^0f d \star \tau^\sharp && \text{car } \star \omega^k \wedge \alpha^k = (-1)^{k(n-k)} \omega^k \wedge \star \alpha^k \end{aligned}$$

On en conclut que pour  ${}^0f \neq 0$ , on a  $di_\tau \star {}^0f = \star i_\tau d {}^0f$  si et seulement si  $d \star \tau^\sharp = 0$ .

En d'autres termes, les équations (16) et (10) sont équivalentes si et seulement si la divergence du champ de vecteurs est nulle ( $\star d \star \tau^\sharp = 0$ ). Ce qui est le cas pour le champ de vecteurs  $\tau$ .

### 3 LA CONSERVATION GÉOMÉTRISÉE DES QUANTITÉS PHYSIQUES

#### 3.1 La conservation de la masse

La conservation de la masse est obtenue en intégrant l'équation de Vlasov en vitesse puis en espace. Malheureusement, il est a priori impossible de découpler l'espace  $M$  de l'espace des vitesses, car  ${}^6f$  est une 6-forme différentielle et ne peut être intégrée que sur un espace de dimension 6. Il va donc falloir utiliser une astuce pour pouvoir intégrer cette forme différentielle sur l'espace des vitesses, un espace de dimension 3. Pour cela, on rappelle que  $M$  est l'espace de dimension 3, que

$$P = T^*M = \{(\mathbf{x}, \mathbf{v}) | \mathbf{x} \in M, \mathbf{v} \in T_{\mathbf{x}}^*M\}$$

est l'espace de dimension 6, et que  $\pi : T^*M \rightarrow M$  et  $\pi_* : T^*P \rightarrow T^*M$  sont les projections canoniques. La 6-forme différentielle  ${}^6f$  est une application telle que :

$${}^6f : T^*M \rightarrow \bigwedge^6(T^*T^*M).$$

En observant  $T^*M$ , on s'aperçoit que pour  $\mathbf{x} \in M$ , si l'on trouve une 6-forme différentielle  ${}^6f_{\mathbf{x}}$  construite à partir de  ${}^6f$  qui agit de telle sorte à ce que l'on ait :

$${}^6f_{\mathbf{x}} : P \rightarrow \bigwedge^3(T_{\mathbf{q}}^*P) \times \bigwedge^3(T_{\mathbf{x}}^*M)$$

avec  $\mathbf{q} \in \pi^{-1}(\mathbf{x})$ , on pourra, alors, intégrer  ${}^6f_{\mathbf{x}}$  sur  $\pi^{-1}(\mathbf{x})$  où  $\pi^{-1}(\mathbf{x})$  correspondra à l'espace des vitesses.

Cette forme  ${}^6f_{\mathbf{x}}$  est alors construite de telle sorte qu'à 3 vecteurs de  $T_{\mathbf{q}}^*P$  elle associe une 3-forme sur  $M$ .

En fait, si cette forme différentielle existe, elle doit vérifier :

$${}^6f(\mathbf{q})(u_1, u_2, u_3, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3) = {}^6f_{\mathbf{x}}(\mathbf{q})(u_1, u_2, u_3)(v_1, v_2, v_3),$$



pour tout  $\mathbf{q}$  appartenant à  $P$ ,  $u_i$  et  $\tilde{v}_i$  dans  $T_{\mathbf{q}}^*P$  et  $v_i \in T_{\mathbf{x}}^*M$ .  
D'après le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} T^*P & \xrightarrow{\pi_*} & T^*M, \\ \downarrow & & \downarrow \\ P & \xrightarrow{\pi} & M \end{array}$$

puisque  $\pi$  est surjective, on peut choisir  $\tilde{v}_i$  tel que  $\tilde{v}_i = \pi_*^{-1}(v_i)$ . On remarque, alors, que  $\tilde{v}_i$  n'est pas unique car  $\pi_*$  n'est pas injective ! Mais  ${}^6f_{\mathbf{x}}$  est quand même bien définie, car, d'après le théorème de submersion, on a

$$\text{Ker}(\pi_*) = \text{Im}((\pi^{-1})_*).$$

On en déduit que

$${}^6f_{\mathbf{x}}(\mathbf{q}) \in \Lambda^3(T_{\mathbf{q}}^*P) \times \Lambda^3(T_{\mathbf{x}}^*M).$$

On peut donc construire une 6-forme  ${}^6f_{\mathbf{x}}(\mathbf{q})$  qui à trois vecteurs dans  $T_{\mathbf{q}}^*P$ , associe un élément de  $\Lambda^3(T_{\mathbf{x}}^*M)$ . Autrement dit,  ${}^6f_{\mathbf{x}}(\mathbf{q})$  évaluée sur  $\Lambda^3(T_{\mathbf{q}}^*P)$  est une 3-forme différentielle sur  $M$ .

Maintenant que l'existence de  ${}^6f_{\mathbf{x}}$  a été démontrée, on va pouvoir écrire la conservation de la masse.

On réécrit l'équation de Vlasov (10) en utilisant  ${}^6f_{\mathbf{x}}$ , on intègre sur l'espace des vitesses  $\pi^{-1}(\mathbf{x})$ . Par abus de langage on pose  ${}^6f_{\mathbf{x}} \equiv {}^6f$  et on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} {}^6f + \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} di_{\tau} {}^6f &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} {}^6f + \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} d(i_{\tau_x} + i_{\tau_v}) {}^6f \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} {}^6f + \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} di_{\tau_x} {}^6f + \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} di_{\tau_v} {}^6f \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} {}^6f + \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} di_{\tau_x} {}^6f = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

En effet,  $\int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} di_{\tau_v} {}^6f = 0$  car d'après le théorème de Stokes, on a

$$\int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} di_{\tau_v} {}^6f = \int_{\partial(\pi^{-1}(\mathbf{x}))} i_{\tau_v} {}^6f = 0,$$

car on suppose que  $i_{\tau_v} {}^6f_{\mathbf{x}}$  est nulle sur le bord  $\partial(\pi^{-1}(\mathbf{x}))$ . De plus, on observe que  $\int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} {}^6f$  et  $\int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} di_{\tau_x} {}^6f$  sont des 3-formes sur  $M$ , donc on peut intégrer sur l'espace l'équation (17) et elle devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} {}^6f = 0,$$

car  $\int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} \int_M di_{\tau_x} {}^6f = \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} \int_{\partial M} i_{\tau_x} {}^6f = 0$  (on suppose que  $\int_{\partial M} i_{\tau_x} {}^6f$  est nulle sur le bord  $\partial M$ ).

### 3.2 La conservation de la quantité de mouvement

Habituellement, on multiplie l'équation de Vlasov par  $\mathbf{v}$  puis on intègre en vitesse puis en espace. Mais que signifie " multiplier par  $\mathbf{v}$  " en géométrie différentielle? En fait multiplier l'équation par  $\mathbf{v}$  revient à lui appliquer le produit intérieur le long du champ de vecteurs  $\tau_x = \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$ . On a alors une équation qui fait intervenir une 5-forme différentielle,  $i_{\tau_x} {}^6f$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} i_{\tau_x} {}^6f + i_{\tau_x} di_{\tau_x} {}^6f = 0. \quad (18)$$

Le problème avec cette équation, est que non seulement on ne va pas pouvoir l'intégrer sur l'espace des phases à 6 dimensions mais en plus elle ne correspondra pas à la quantité de mouvement car celle-ci correspond à une densité i.e. à une forme volume sur  $P$ . Donc, pour obtenir une équation qui fait intervenir une 6-forme différentielle, on va effectuer le produit extérieur de (18) avec une 1-forme différentielle  $u^\sharp$  sur  $M$ . Mais  $u^\sharp$  ne pourra pas être n'importe quelle 1-forme différentielle. Pour que celle-ci n'ait aucune influence sur l'équation, son champ de vecteurs associé  $u$  devra conserver la métrique, i.e.  $u$  doit être un *champ de vecteurs de Killing*. Par définition, un champ de vecteurs  $u$  est dit de *Killing* si et seulement si on a pour tout point  $p$  de  $M$ ,  $L_u vol_p = 0$ . Il possède alors une propriété importante et utile : la dérivée de Lie le long d'un champ de vecteurs de Killing  $u$  commute avec l'opérateur du hodge star :  $L_u \star = \star L_u$ . L'équation (18) devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} (i_{\tau_x} {}^6f \wedge u) + (i_{\tau_x} di_{\tau_x} {}^6f) \wedge u = 0. \quad (19)$$

La dérivée extérieure  $d$  et le produit intérieur sont distributifs et que l'on peut écrire  $i_{\tau_x}$  comme étant égale à  $i_{\tau_x + \tau_v} = i_{\tau_x} + i_{\tau_v} = i_{\tau_x} + i_{\tau_{v,e}} + i_{\tau_{v,b}}$ , où  $\tau_{v,e}$  est le champ de vecteurs contenant  $i_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}} {}^1\mathbf{E}$  et  $\tau_{v,b}$  le champ de vecteurs contenant  $i_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}} {}^2\mathbf{B}$ . L'équation (19) peut s'écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} (i_{\tau_x} {}^6f \wedge u^\sharp) + (i_{\tau_x} di_{\tau_x} {}^6f) \wedge u^\sharp + (i_{\tau_x} di_{\tau_{v,e}} {}^6f) \wedge u^\sharp + (i_{\tau_x} di_{\tau_{v,b}} {}^6f) \wedge u^\sharp = 0. \quad (20)$$

On intègre sur l'espace des vitesses  $\pi^{-1}(\mathbf{x})$ . Puis, en passant en coordonnées locales, en ordonnant correctement les termes et en utilisant les définitions de  ${}^3\rho$  et de  ${}^2\mathbf{J}$  données par les égalités (15) et (14), on a :

$$\int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} (i_{\tau_x} di_{\tau_{v,e}} {}^6f) \wedge u^\sharp = -{}^1\mathbf{E} \wedge i_u {}^3\rho,$$

et

$$\int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} (i_{\tau_x} di_{\tau_{v,b}} {}^6f) \wedge u^\sharp = -{}^2\mathbf{J} \wedge i_u {}^2\mathbf{B},$$

avec  $u$  le champ de vecteurs associé à la 1-forme  $u^\sharp$  (i.e.  $u_1(x)\frac{\partial}{\partial x} + u_2(x)\frac{\partial}{\partial y} + u_3(x)\frac{\partial}{\partial z}$ ). On injecte ces termes dans l'équation (20) que l'on a intégrée en vitesse et on obtient ainsi la conservation de la quantité de mouvement :

$$\frac{\partial}{\partial t} {}^2\mathbf{J} \wedge u^\sharp + \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} (i_{\tau_x} di_{\tau_x} {}^6f) \wedge u^\sharp - ({}^1\mathbf{E} \wedge i_u {}^3\rho + {}^2\mathbf{J} \wedge i_u {}^2\mathbf{B}) = 0. \quad (21)$$

Pour pouvoir simplifier cette équation, on va utiliser maintenant les équations de Maxwell. À l'équation de Faraday (11) on applique le produit extérieur avec la 1-forme différentielle  $i_u {}^2\mathbf{B}$  et à l'équation d'Ampère (12) le produit extérieur avec la 1-forme différentielle  $i_u {}^2\mathbf{D}$ . Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial {}^2\mathbf{D}}{\partial t} \wedge i_u {}^2\mathbf{B} + d{}^1\mathbf{H} \wedge i_u {}^2\mathbf{B} &= {}^2\mathbf{J} \wedge i_u {}^2\mathbf{B}, \\ \frac{\partial {}^2\mathbf{B}}{\partial t} \wedge i_u {}^2\mathbf{D} + d{}^1\mathbf{E} \wedge i_u {}^2\mathbf{D} &= 0. \end{aligned}$$

Comme la dérivée extérieure  $d$  est antisymétrique, les équations précédentes peuvent s'écrire :

$$-\frac{\partial {}^2\mathbf{D}}{\partial t} \wedge i_u {}^2\mathbf{B} + d({}^1\mathbf{H} \wedge i_u {}^2\mathbf{B}) + {}^1\mathbf{H} \wedge di_u {}^2\mathbf{B} = {}^2\mathbf{J} \wedge i_u {}^2\mathbf{B}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial {}^2\mathbf{B}}{\partial t} \wedge i_u {}^2\mathbf{D} + d({}^1\mathbf{E} \wedge i_u {}^2\mathbf{D}) + {}^1\mathbf{E} \wedge di_u {}^2\mathbf{D} = 0. \quad (23)$$

De plus, on peut s'apercevoir que

$$\frac{\partial}{\partial t} ({}^2\mathbf{B} \wedge i_u {}^2\mathbf{D}) = \frac{\partial {}^2\mathbf{B}}{\partial t} \wedge i_u {}^2\mathbf{D} - \frac{\partial {}^2\mathbf{D}}{\partial t} \wedge i_u {}^2\mathbf{B}.$$

En remplaçant cette égalité dans l'équation obtenue en additionnant les équations (22) et (23), on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} ({}^2\mathbf{B} \wedge i_u {}^2\mathbf{D}) + d({}^1\mathbf{H} \wedge i_u {}^2\mathbf{B} + {}^1\mathbf{E} \wedge i_u {}^2\mathbf{D}) + {}^1\mathbf{H} \wedge di_u {}^2\mathbf{B} + {}^1\mathbf{E} \wedge di_u {}^2\mathbf{D} \\ = {}^2\mathbf{J} \wedge i_u {}^2\mathbf{B}. \end{aligned} \quad (24)$$

Or, vu que

$${}^1\mathbf{H} \wedge di_u {}^2\mathbf{B} = {}^1\mathbf{H} \wedge L_u {}^2\mathbf{B},$$

car  $d{}^2\mathbf{B} = 0$ , il est équivalent d'utiliser  $L_u$  au lieu de  $i_u$ . De plus, comme la dérivée de Lie vérifie

$$L_u ({}^1\mathbf{H} \wedge {}^2\mathbf{B}) = (L_u {}^1\mathbf{H}) \wedge {}^2\mathbf{B} + {}^1\mathbf{H} \wedge (L_u {}^2\mathbf{B}),$$

et que pour  $u$  un champ de vecteurs de Killing, on a la propriété

$$L_u \star = \star L_u,$$

on a

$$\begin{aligned} (L_u \mathbf{H}) \wedge \mathbf{B} &= (L_u \star \mathbf{B}) \wedge \star \mathbf{H} \quad \text{car } \star \mathbf{B} = \mathbf{H}, \\ &= (\star L_u \mathbf{B}) \wedge \star \mathbf{H} \quad \text{car } L_u \star = \star L_u, \\ &= (L_u \mathbf{B}) \wedge \mathbf{H} \quad \text{car } \star \omega^k \wedge \alpha^k = (-1)^{k(n-k)} \omega^k \wedge \star \alpha^k, \\ &= \mathbf{H} \wedge (L_u \mathbf{B}). \end{aligned}$$

D'où le fait que l'on ait

$$L_u(\mathbf{H} \wedge \mathbf{B}) = 2\mathbf{H} \wedge (L_u \mathbf{B}). \quad (25)$$

On injecte (25) dans l'équation (24) et on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B} \wedge i_u \mathbf{D}) + d(\mathbf{H} \wedge i_u \mathbf{B} + \mathbf{E} \wedge i_u \mathbf{D}) + \frac{1}{2} L_u(\mathbf{H} \wedge \mathbf{B}) + \mathbf{E} \wedge di_u \mathbf{D} \\ = \mathbf{J} \wedge i_u \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (26)$$

D'autre part, on a

$$\mathbf{E} \wedge di_u \mathbf{D} = \mathbf{E} \wedge L_u \mathbf{D} - \mathbf{E} \wedge i_u d^2 \mathbf{D} = \mathbf{E} \wedge L_u \mathbf{D} - \mathbf{E} \wedge i_u \mathbf{3}\rho,$$

car  $\mathbf{3}\rho = d^2 \mathbf{D}$ , et donc, on obtient également

$$L_u(\mathbf{E} \wedge \mathbf{D}) = 2\mathbf{E} \wedge L_u \mathbf{D}.$$

On remplace alors  $\mathbf{E} \wedge di_u \mathbf{D}$  par  $\frac{1}{2} L_u(\mathbf{E} \wedge \mathbf{D}) - \mathbf{E} \wedge i_u \mathbf{3}\rho$  dans l'équation (26) et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{B} \wedge i_u \mathbf{D}) + d(\mathbf{H} \wedge i_u \mathbf{B} + \mathbf{E} \wedge i_u \mathbf{D}) + \frac{1}{2} L_u(\mathbf{H} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{D}) \\ = \mathbf{J} \wedge i_u \mathbf{B} + \mathbf{E} \wedge i_u \mathbf{3}\rho. \end{aligned} \quad (27)$$

Pour simplifier l'équation (27), on utilise la formule d'homotopie, i.e.

$$L_u(\mathbf{H} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{D}) = di_u(\mathbf{H} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{D}) + i_u d(\mathbf{H} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{D}).$$

Or  $d(\mathbf{H} \wedge \mathbf{B}) = 0$  et  $d(\mathbf{E} \wedge \mathbf{D}) = 0$  car la différentielle d'une 3-forme dans un espace de dimension 3 est égale à 0, ce qui permet d'obtenir l'égalité suivante

$$L_u(\mathbf{H} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{D}) = di_u(\mathbf{H} \wedge \mathbf{B} + \mathbf{E} \wedge \mathbf{D}).$$

On intègre l'équation (27) en espace, on applique le théorème de Stokes, et en supposant la nullité aux bords, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M ({}^2\mathbf{B} \wedge i_u {}^2\mathbf{D}) = \int_M ({}^2\mathbf{J} \wedge i_u {}^2\mathbf{B} + {}^1\mathbf{E} \wedge i_u {}^3\rho). \quad (28)$$

Grâce à l'égalité (28), on peut en conclure que lorsque l'on intègre l'équation de la quantité de mouvement (21) en espace on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_M {}^2\mathbf{J} \wedge u^\sharp - {}^2\mathbf{B} \wedge i_u {}^2\mathbf{D} \right) = 0, \quad \forall u \text{ un vecteur de Killing,}$$

$$\text{car } \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} \int_M (i_{\tau_x} di_{\tau_x} {}^6f) \wedge u^\sharp = 0.$$

### 3.3 La conservation d'énergie

Commençons par manipuler les équations de Maxwell. On effectue le produit extérieur de l'équation (11) avec  ${}^1\mathbf{E}$ , ce qui nous donne :

$$\frac{\partial {}^2\mathbf{D}}{\partial t} \wedge {}^1\mathbf{E} - d^1\mathbf{H} \wedge {}^1\mathbf{E} = -{}^2\mathbf{J} \wedge {}^1\mathbf{E}. \quad (29)$$

Mais on remarque que

$$\begin{aligned} \frac{\partial ({}^2\mathbf{D} \wedge {}^1\mathbf{E})}{\partial t} &= \frac{\partial {}^2\mathbf{D}}{\partial t} \wedge {}^1\mathbf{E} + {}^2\mathbf{D} \wedge \frac{\partial {}^1\mathbf{E}}{\partial t}, \\ &= \frac{\partial {}^2\mathbf{D}}{\partial t} \wedge {}^1\mathbf{E} + \star {}^1\mathbf{E} \wedge \frac{\partial \star {}^2\mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{car } \star {}^1\mathbf{E} = {}^2\mathbf{D}, \\ &= \frac{\partial {}^2\mathbf{D}}{\partial t} \wedge {}^1\mathbf{E} + {}^1\mathbf{E} \wedge \frac{\partial {}^2\mathbf{D}}{\partial t}, \quad \text{car } \star \omega^k \wedge \alpha^k = (-1)^{k(n-k)} \omega^k \wedge \star \alpha^k, \\ &= 2 \frac{\partial {}^2\mathbf{D}}{\partial t} \wedge {}^1\mathbf{E}. \end{aligned}$$

Donc l'équation de Faraday (29) devient :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial ({}^2\mathbf{D} \wedge {}^1\mathbf{E})}{\partial t} - d^1\mathbf{H} \wedge {}^1\mathbf{E} = -{}^2\mathbf{J} \wedge {}^1\mathbf{E}. \quad (30)$$

On procède de la même manière pour l'équation d'Ampère (12) en effectuant le produit extérieur de celle-ci avec la 1-forme différentielle  ${}^1\mathbf{H}$ , et on obtient :

$$\frac{1}{2} \frac{\partial ({}^2\mathbf{B} \wedge {}^1\mathbf{H})}{\partial t} + d({}^1\mathbf{E} \wedge {}^1\mathbf{H}) + d^1\mathbf{H} \wedge {}^1\mathbf{E} = 0. \quad (31)$$

Pour déterminer la conservation de l'énergie, on multiplie l'équation de Vlasov (10) par le scalaire  $\mathbf{v}^2$  (une 0-forme) :

$$\frac{\partial \mathbf{v}^2 {}^6f}{\partial t} + \mathbf{v}^2 di_{\tau_x} {}^6f + \mathbf{v}^2 di_{\tau_v} {}^6f = 0. \quad (32)$$

Or, on a

$$\mathbf{v}^2 di_{\tau_v} {}^6f = d(\mathbf{v}^2 i_{\tau_v} {}^6f) - d\mathbf{v}^2 \wedge i_{\tau_v} {}^6f, \quad (33)$$

et

$$\begin{aligned} d\mathbf{v}^2 \wedge i_{\tau_v} {}^6f &= d\mathbf{v}^2 \wedge \star(\star {}^6f \wedge \tau_v^\sharp), \\ &= 2 \star {}^6f \wedge \star \tau_v^\sharp \wedge \mathbf{v} d\mathbf{v}, \\ &= -2 [i_{\tau_x} {}^6f \wedge {}^1\mathbf{E} + i_{\tau_x} {}^6f \wedge i_{\tau_x} {}^2\mathbf{B}]. \end{aligned} \quad (34)$$

On remplace (34) dans (33), on injecte le résultat obtenu dans (32), puis on intègre (32) en vitesse (car  ${}^6f = {}^6f_{\mathbf{x}}$ ), pour obtenir :

$$\frac{\partial \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} \mathbf{v}^2 {}^6f}{\partial t} + \left( \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} \mathbf{v}^2 di_{\tau_x} {}^6f \right) - 2 {}^2\mathbf{J} \wedge {}^1\mathbf{E} = 0, \quad (35)$$

car l'égalité (14) nous donne  $\int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} i_{\tau_x} {}^6f \wedge {}^1\mathbf{E} = {}^2\mathbf{J} \wedge {}^1\mathbf{E}$  et on a  $\int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} i_{\tau_x} {}^6f \wedge i_{\tau_x} {}^2\mathbf{B} = 0$ . Ensuite, on intègre sur l'espace  $M$  les équations (30) et (31) et leur somme est égale à

$$-2 \int_M {}^2\mathbf{J} \wedge {}^1\mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \int_M {}^2\mathbf{D} \wedge {}^1\mathbf{E} + {}^2\mathbf{B} \wedge {}^1\mathbf{H}. \quad (36)$$

On remplace (42) dans l'équation (35) intégrée sur  $M$  et on obtient l'équation de conservation d'énergie :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \int_M \int_{\pi^{-1}(\mathbf{x})} \mathbf{v}^2 {}^6f + \int_M {}^2\mathbf{D} \wedge {}^1\mathbf{E} + {}^2\mathbf{B} \wedge {}^1\mathbf{H} \right] = 0. \quad (37)$$

## 4 L'ÉQUATION DE VLASOV-POISSON UNIDIMENSIONNELLE

Rappelons que l'équation de Poisson est :

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^0D}{\partial t} &= -{}^0J, \\ d{}^0D &= {}^1\rho, \end{aligned}$$

avec  $d^1\mathbf{E} = 0$  et  ${}^1\mathbf{E} = \star^0D$ . Pour l'équation de Vlasov, on pose  ${}^2f = f(x, v)dx \wedge dv$ , et on considère les champs  $\tau_x = v \frac{\partial}{\partial x}$  et  $\tau_v = \left( i_{\frac{\partial}{\partial x}} {}^1\mathbf{E} \right) \frac{\partial}{\partial v}$ . Dans ce cas, on a toujours l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial}{\partial t} {}^2f + di_{\tau_x} {}^2f + di_{\tau_v} {}^2f = 0.$$

### La conservation géométrisée de la masse

Pour la conservation de la masse, la méthode reste la même qu'à la section (3.1) et on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M \int_{\pi^{-1}(x)} {}^2f = 0.$$

### La conservation géométrisée de la quantité de mouvement

Pour la conservation de quantité de mouvement, on effectue le produit intérieur de l'équation de Vlasov par  $\tau_x$  puis le produit extérieur avec le vecteur de Killing  $u = \frac{\partial}{\partial x}$  dont la 1-forme associée est  $dx$ . Ensuite, on intègre sur l'espace des vitesses  $\pi^{-1}(x)$ , ce qui nous donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} {}^0J \wedge dx + \int_{\pi^{-1}(x)} (i_{\tau_x} di_{\tau_x} {}^2f) \wedge dx - ({}^1\mathbf{E} \wedge i_u^1\rho) = 0. \quad (38)$$

Mais comme

$${}^1\mathbf{E} \wedge i_u^1\rho = {}^1\mathbf{E} \wedge i_u d^0D = {}^1\mathbf{E} \wedge L_u {}^0D = \frac{1}{2} L_u ({}^1\mathbf{E} \wedge {}^0D) = \frac{1}{2} di_u ({}^1\mathbf{E} \wedge {}^0D),$$

l'intégrale de (38) sur l'espace nous ramène à la conservation de la quantité de mouvement, à savoir :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_M {}^0J \wedge dx = 0.$$

### La conservation géométrisée de l'énergie

Pour la conservation de l'énergie, on multiplie l'équation de Vlasov par  $v^2$ , et on intègre sur l'espace des vitesses. On obtient :

$$\frac{\partial \int_{\pi^{-1}(x)} (v^2)^2 f}{\partial t} - 2 {}^0J \wedge {}^1\mathbf{E} = 0.$$

De plus, on a :

$$\frac{\partial {}^0D}{\partial t} = - {}^0J. \quad (39)$$

Le produit extérieur de (39) avec  ${}^1\mathbf{E}$  est donné par la relation

$$\frac{\partial {}^0D \wedge {}^1\mathbf{E}}{\partial t} = -2 {}^0J \wedge {}^1\mathbf{E}.$$

D'où, après intégration sur l'espace  $M$ , l'équation de la conservation de l'énergie est de la forme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_M \int_{\pi^{-1}(x)} (v^2)^2 f + \int_M {}^0D \wedge {}^1\mathbf{E} \right) = 0.$$



---

# Adimensionnement géométrique

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>Adimensionnement des équations de Maxwell dans le calcul vectoriel.</b>	<b>14</b>
1.1	Le cas non relativiste	14
1.2	Le cas relativiste	14
<b>2</b>	<b>Adimensionnement des équations de Maxwell dans la formulation covariante.</b>	<b>16</b>
2.1	Le cas non relativiste	16
2.2	Le cas relativiste	20
<b>3</b>	<b>Adimensionnement de l'équation de Vlasov dans le formalisme covariant</b>	<b>22</b>

---

Dans ce chapitre, on propose d'adimensionner les équations de Maxwell dans les cadres relativiste et non relativiste. Pour ce faire, on notera les échelles caractéristiques avec une barre au-dessus et les nouvelles variables adimensionnées avec des primes. On effectuera cette étude en utilisant des outils du calcul vectoriel et en utilisant également des outils de la géométrie différentielle. On verra alors que ces deux points de vue sont complètement équivalente dans le cas relativiste et dans le cas non relativiste. Pour finir, on adimensionnera l'équation de Vlasov dans une formulation covariante qui permettra de mettre en évidence le rayon de Larmor fini.

# 1 ADIMENSIONNEMENT DES ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS LE CALCUL VECTORIEL.

## 1.1 Le cas non relativiste

On définit quelques échelles caractéristiques. On note par  $\bar{t}$  le *temps caractéristique*,  $\bar{L}_{\parallel}$  la *longueur caractéristique dans la direction parallèle* du champ magnétique et  $\bar{L}_{\perp}$  la *longueur caractéristique dans la direction perpendiculaire* au champ magnétique. Pour tout vecteur  $\mathbf{x}$ , on pose  $\mathbf{x}_{\parallel}$  et  $\mathbf{x}_{\perp}$  ses composantes parallèles et perpendiculaires au champ magnétique. Les nouvelles variables adimensionnées seront notées  $t'$ ,  $\mathbf{x}'$  et vérifient  $t = \bar{t} t'$ ,  $\mathbf{x}_{\parallel} = \bar{L}_{\parallel} \mathbf{x}'_{\parallel}$  et  $\mathbf{x}_{\perp} = \bar{L}_{\perp} \mathbf{x}'_{\perp}$ . En utilisant le même principe, on adimensionne les champs électromagnétiques des équations de Maxwell et on note les champs adimensionnés par :  $\bar{E}$  pour le champ électrique et  $\bar{B}$  pour le champ magnétique. Les nouveaux champs sont notés  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{B}$  et vérifient

$$\begin{aligned}\bar{E}\mathcal{E}(t', \mathbf{x}') &= \mathbf{E}(\bar{t}t', \bar{L}_{\perp}\mathbf{x}'_{\perp}, \bar{L}_{\parallel}\mathbf{x}'_{\parallel}), \\ \bar{B}\mathcal{B}(t', \mathbf{x}') &= \mathbf{B}(\bar{t}t', \bar{L}_{\perp}\mathbf{x}'_{\perp}, \bar{L}_{\parallel}\mathbf{x}'_{\parallel}), \\ \bar{\rho}\rho'(t', \mathbf{x}') &= \rho(\bar{t}t', \bar{L}_{\perp}\mathbf{x}'_{\perp}, \bar{L}_{\parallel}\mathbf{x}'_{\parallel}).\end{aligned}$$

Avec ces nouvelles variables, on obtient les équations de Maxwell adimensionnées :

$$\frac{\partial}{\partial t'}\mathcal{B} + \frac{\bar{E}\bar{t}}{\bar{L}_{\parallel}\bar{B}} \left( \frac{\bar{L}_{\parallel}}{\bar{L}_{\perp}} \frac{\nabla_{\perp}}{\nabla_{\parallel}} \right) \times \mathcal{E} = 0, \quad (40)$$

$$\left( \frac{\bar{L}_{\parallel}}{\bar{L}_{\perp}} \frac{\nabla_{\perp}}{\nabla_{\parallel}} \right) \cdot \mathcal{B} = 0, \quad (41)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}\mathcal{E} - \frac{\bar{B}\bar{t}}{\bar{L}_{\parallel}\bar{E}\epsilon\mu} \left( \frac{\bar{L}_{\parallel}}{\bar{L}_{\perp}} \frac{\nabla_{\perp}}{\nabla_{\parallel}} \right) \times \mathcal{B} = -\frac{\bar{J}\bar{t}}{\epsilon\bar{E}}\mathcal{J}, \quad (42)$$

$$\left( \frac{\bar{L}_{\parallel}}{\bar{L}_{\perp}} \frac{\nabla_{\perp}}{\nabla_{\parallel}} \right) \cdot \mathcal{E} = \frac{\bar{\rho}\bar{L}_{\parallel}}{\epsilon\bar{E}}\rho'. \quad (43)$$

On observe que chaque coefficient est adimensionné.

## 1.2 Le cas relativiste

Dans les coordonnées relativistes  $(x, y, z, \tilde{t}) = (x, y, z, ct)$ , on pose  $\tilde{B}(x, y, z, \tilde{t}) = \mathbf{B}(x, y, z, \frac{\tilde{t}}{c})$  et  $\tilde{E}(x, y, z, \tilde{t}) = \mathbf{E}(x, y, z, \frac{\tilde{t}}{c})$ . Les équations de Maxwell sont

alors :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{E} - \nabla \times \tilde{B} = -\mu \tilde{J}, \quad (44)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{B} + \frac{1}{c} \nabla \times \tilde{E} = 0, \quad (45)$$

$$\nabla \cdot \tilde{E} = \frac{\tilde{\rho}}{\epsilon}, \quad (46)$$

$$\nabla \cdot \tilde{B} = 0. \quad (47)$$

On remarquera que  $\tilde{t}$  n'est pas une coordonnée de temps mais d'espace. Comme précédemment, on pose  $\tilde{t} = \bar{L} \tilde{t}'$ ,  $\mathbf{x}_{\parallel} = \bar{L}_{\parallel} \mathbf{x}'_{\parallel}$  et  $\mathbf{x}_{\perp} = \bar{L}_{\perp} \mathbf{x}'_{\perp}$  les nouvelles coordonnées adimensionnées et les champs électromagnétiques :

$$\begin{aligned} \bar{E} \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{t}', \mathbf{x}') &= \tilde{E}(\tilde{t} \tilde{t}', \bar{L}_{\perp} \mathbf{x}'_{\perp}, \bar{L}_{\parallel} \mathbf{x}'_{\parallel}), \\ \bar{B} \tilde{\mathcal{B}}(\tilde{t}', \mathbf{x}') &= \tilde{B}(\tilde{t} \tilde{t}', \bar{L}_{\perp} \mathbf{x}'_{\perp}, \bar{L}_{\parallel} \mathbf{x}'_{\parallel}), \\ \bar{J} \tilde{\mathcal{J}}(\tilde{t}', \mathbf{x}') &= \tilde{J}(\tilde{t} \tilde{t}', \bar{L}_{\perp} \mathbf{x}'_{\perp}, \bar{L}_{\parallel} \mathbf{x}'_{\parallel}), \\ \bar{\rho} \tilde{\rho}(\tilde{t}', \mathbf{x}') &= \tilde{\rho}(\tilde{t} \tilde{t}', \bar{L}_{\perp} \mathbf{x}'_{\perp}, \bar{L}_{\parallel} \mathbf{x}'_{\parallel}). \end{aligned}$$

D'où les équations adimensionnées de Maxwell dans les coordonnées relativistes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}'} \tilde{\mathcal{B}} + \frac{\bar{E} \tilde{t}}{\bar{L}_{\parallel} c \bar{B}} \left( \frac{\bar{L}_{\parallel}}{\bar{L}_{\perp}} \nabla_{\perp} \right) \times \tilde{\mathcal{E}} &= 0, \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}'} \tilde{\mathcal{E}} - \frac{\bar{B} \tilde{t}}{\bar{L}_{\parallel} \bar{E}} \left( \frac{\bar{L}_{\parallel}}{\bar{L}_{\perp}} \nabla_{\perp} \right) \times \tilde{\mathcal{B}} &= -\frac{\bar{J} \mu \tilde{t}}{\bar{E}} \tilde{\mathcal{J}}, \\ \left( \frac{\bar{L}_{\parallel}}{\bar{L}_{\perp}} \nabla_{\perp} \right) \cdot \tilde{\mathcal{E}} &= \frac{\bar{\rho} \bar{L}_{\parallel}}{\epsilon \bar{E}} \tilde{\rho}, \\ \left( \frac{\bar{L}_{\parallel}}{\bar{L}_{\perp}} \nabla_{\perp} \right) \cdot \tilde{\mathcal{B}} &= 0. \end{aligned}$$

## 2 ADIMENSIONNEMENT DES ÉQUATIONS DE MAXWELL DANS LA FORMULATION COVARIANTE.

### 2.1 Le cas non relativiste

Dans le système de coordonnées relativiste, on a la métrique de Minkowski :

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

Les équations de Maxwell sont alors de la forme

$$d\tilde{\mathbf{F}}^2 = 0 \tag{48}$$

$$d\star\tilde{\mathbf{F}}^2 = c\mu\tilde{\rho}^3 + \mu\tilde{\mathbf{j}}^2 \wedge d\tilde{t}, \tag{49}$$

avec  $\tilde{\mathbf{F}}^2$  une 2-forme différentielle dans l'espace relativiste telle que

$$\tilde{\mathbf{F}}^2 = \tilde{\mathbf{b}}^2 + \frac{\tilde{\mathbf{e}}^1}{c} \wedge d\tilde{t},$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^1 = \tilde{E}_x(\tilde{t}, \mathbf{x})dx + \tilde{E}_y(\tilde{t}, \mathbf{x})dy + \tilde{E}_z(\tilde{t}, \mathbf{x})dz, \quad \text{est une 1-forme,}$$

$$\tilde{\mathbf{b}}^2 = \tilde{B}_x(\tilde{t}, \mathbf{x})dy \wedge dz + \tilde{B}_y(\tilde{t}, \mathbf{x})dz \wedge dx + \tilde{B}_z(\tilde{t}, \mathbf{x})dx \wedge dy \quad \text{et } \tilde{\mathbf{j}}^2 \text{ sont des 2-formes,}$$

$$\tilde{\rho}^3 = \tilde{\rho}(\tilde{t}, \mathbf{x})dx \wedge dy \wedge dz, \text{ est une 3-forme.}$$

De la même manière qu'à la section précédente, afin d'adimensionner les équations de Maxwell, on effectue d'abord le changement de coordonnées suivant  $\varphi(\tilde{t}) = \frac{\tilde{t}}{c} = t$  qui permet de passer des coordonnées relativistes aux coordonnées non relativistes. On note alors par  $\mathbf{F}^2$  la 2-forme différentielle telle que  $\tilde{\mathbf{F}}^2 = \varphi^*\mathbf{F}^2$ . Les équations (42) et (40) s'écrivent

$$d\varphi^*\mathbf{F}^2 = 0$$

$$d\star\varphi^*\mathbf{F}^2 = c\mu(\varphi^*\rho^3) + \mu c\varphi^*(\mathbf{j}^2 \wedge dt),$$

Puisque  $(\varphi^{-1})^*d\varphi^* = d$ , on applique  $(\varphi^{-1})^*$  sur les deux équations pour obtenir :

$$d\mathbf{F}^2 = 0 \tag{50}$$

$$d(\varphi^{-1})^*\star\varphi^*\mathbf{F}^2 = c\mu\rho^3 + \mu c\mathbf{j}^2 \wedge dt, \tag{51}$$

L'application  $(\varphi^{-1})^* \star \varphi^*$  correspond à l'opérateur hodge star dans les nouvelles coordonnées  $(\mathbf{x}, t)$ , avec la métrique

$$g = \begin{pmatrix} \sqrt{c} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{c}}{c^2} \end{pmatrix},$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière. Dans ces nouvelles coordonnées, la formulation géométrique des équations de Maxwell est alors

$$d\mathbf{F}^2 = 0 \quad (52)$$

$$d\star\mathbf{F}^2 = c\mu\rho^3 + c\mu\mathbf{j}^2 \wedge dt, \quad (53)$$

avec  $\mathbf{F}^2$  la 2-forme différentielle dans les coordonnées espace-temps telle que  $\mathbf{F}^2 = \mathbf{b}^2 + \mathbf{e}^1 \wedge dt$  et où

$$\mathbf{e}^1 = E_x(t, \mathbf{x})dx + E_y(t, \mathbf{x})dy + E_z(t, \mathbf{x})dz$$

est une 1-forme,

$$\mathbf{b}^2 = B_x(t, \mathbf{x})dy \wedge dz + B_y(t, \mathbf{x})dz \wedge dx + B_z(t, \mathbf{x})dx \wedge dy$$

et  $\mathbf{j}^2$  sont des 2-formes et  $\rho^3 = \rho(t, \mathbf{x})dx \wedge dy \wedge dz$  une 3-forme sur l'espace-temps.

Pour l'adimensionnement, on considère le changement de coordonnées

$$\bar{\psi}(t', \mathbf{x}') = (\bar{t}t', \bar{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \bar{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel') = (t, \mathbf{x}).$$

D'où

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^* \mathbf{e}^1 &= E_y(\bar{t}t', \bar{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \bar{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel') \bar{L}_\perp d\mathbf{x}_{\perp 2}' + E_x(\bar{t}t', \bar{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \bar{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel') \bar{L}_\perp d\mathbf{x}_{\perp 1}' \\ &\quad + E_z(\bar{t}t', \bar{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \bar{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel') \bar{L}_\parallel d\mathbf{x}_\parallel', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}^* \mathbf{b}^2 &= B_z(\bar{t}t', \bar{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \bar{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel') \bar{L}_\perp^2 d\mathbf{x}_{\perp 1}' \wedge d\mathbf{x}_{\perp 2}' \\ &\quad + B_x(\bar{t}t', \bar{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \bar{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel') \bar{L}_\parallel \bar{L}_\perp d\mathbf{x}_{\perp 2}' \wedge d\mathbf{x}_\parallel' \\ &\quad + B_y(\bar{t}t', \bar{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \bar{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel') \bar{L}_\parallel \bar{L}_\perp d\mathbf{x}_\parallel' \wedge d\mathbf{x}_{\perp 1}', \end{aligned}$$

$$\bar{\psi}^* \rho^3 = \rho(\bar{t}t', \bar{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \bar{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel') \bar{L}_\parallel \bar{L}_\perp^2 d\mathbf{x}_{\perp 1}' \wedge d\mathbf{x}_{\perp 2}' \wedge d\mathbf{x}_\parallel'.$$

Précédemment on a posé

$$\begin{aligned} \bar{E}\mathcal{E}(t', \mathbf{x}') &= \mathbf{E}(\bar{t}t', \bar{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \bar{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel'), \\ \bar{B}\mathcal{B}(t', \mathbf{x}') &= \mathbf{B}(\bar{t}t', \bar{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \bar{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel'), \end{aligned}$$

donc on obtient

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}^* \mathbf{e}^1 &= \bar{E} \mathcal{E}_3(t', \mathbf{x}') \bar{L}_\parallel dx'_\parallel + \bar{E} \mathcal{E}_1(t', \mathbf{x}') \bar{L}_\perp d\mathbf{x}'_{\perp 1} + \bar{E} \mathcal{E}_2(t', \mathbf{x}') \bar{L}_\perp d\mathbf{x}'_{\perp 2}, \\
\bar{\psi}^* \mathbf{b}^2 &= \bar{B} \mathcal{B}_3(t', \mathbf{x}') \bar{L}_\perp^2 d\mathbf{x}'_{\perp 1} \wedge d\mathbf{x}'_{\perp 2} + \bar{B} \mathcal{B}_1(t', \mathbf{x}') \bar{L}_\parallel \bar{L}_\perp d\mathbf{x}'_{\perp 2} \wedge dx'_\parallel \\
&\quad + \bar{B} \mathcal{B}_2(t', \mathbf{x}') \bar{L}_\parallel \bar{L}_\perp d\mathbf{x}'_\parallel \wedge d\mathbf{x}'_{\perp 1}, \\
\bar{\psi}^* \rho^3 &= \bar{\rho} \rho'(t', \mathbf{x}') \bar{L}_\parallel \bar{L}_\perp^2 d\mathbf{x}'_{\perp 1} \wedge d\mathbf{x}'_{\perp 2} \wedge dx'_\parallel.
\end{aligned}$$

On déduit alors que

$$\bar{\psi}^* \mathbf{F}^2 = \bar{\psi}^* \mathbf{b}^2 + \left( \bar{\psi}^* \mathbf{e}^1 \right) \wedge \bar{t} dt',$$

Puisque  $\bar{\psi}^* d = d\bar{\psi}^*$ , l'équation (52) est équivalente à  $d\bar{\psi}^* \mathbf{F}^2 = 0$  dans les nouvelles coordonnées, et l'équation (53) est équivalente à

$$d\bar{\psi}^* (\star \mathbf{F}^2) = c \mu \bar{\psi}^* \rho^3 + \left( \bar{\psi}^* \mathbf{j}^2 \right) \wedge \bar{t} c \mu dt'.$$

Pour obtenir  $d\bar{\psi}^* \mathbf{F}^2$  et  $d\bar{\psi}^* (\star \mathbf{F}^2)$ , on calcule

$$\begin{aligned}
d \left( \bar{\psi}^* \mathbf{e}^1 \wedge \bar{t} dt' \right) &= \bar{E} \bar{t} \bar{L}_\perp \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \mathcal{E}_2(t', \mathbf{x}') - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \mathcal{E}_1(t', \mathbf{x}') \right) d\mathbf{x}'_{\perp 1} \wedge d\mathbf{x}'_{\perp 2} \wedge dt' \right. \\
&\quad + \left( \frac{\bar{L}_\parallel}{\bar{L}_\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \mathcal{E}_3(t', \mathbf{x}') - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_\parallel} \mathcal{E}_2(t', \mathbf{x}') \right) d\mathbf{x}'_{\perp 2} \wedge d\mathbf{x}'_\parallel \wedge dt' \\
&\quad \left. + \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_\parallel} \mathcal{E}_1(t', \mathbf{x}') - \frac{\bar{L}_\parallel}{\bar{L}_\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \mathcal{E}_3(t', \mathbf{x}') \right) d\mathbf{x}'_\parallel \wedge d\mathbf{x}'_{\perp 1} \wedge dt' \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\bar{\psi}^* \mathbf{b}^2 &= \bar{B} \bar{L}_\perp^2 \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_\parallel} \mathcal{B}_3(t', \mathbf{x}') + \frac{\bar{L}_\parallel}{\bar{L}_\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \mathcal{B}_1(t', \mathbf{x}') + \frac{\bar{L}_\parallel}{\bar{L}_\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \mathcal{B}_2(t', \mathbf{x}') \right) d\mathbf{x}'_\parallel \wedge d\mathbf{x}'_{\perp 1} \\
&\quad + \bar{B} \bar{L}_\perp^2 \left[ \frac{\partial}{\partial t'} \mathcal{B}_3(t', \mathbf{x}') d\mathbf{x}'_{\perp 1} \wedge d\mathbf{x}'_{\perp 2} \wedge dt' + \frac{\partial}{\partial t'} \mathcal{B}_1(t', \mathbf{x}') \frac{\bar{L}_\parallel}{\bar{L}_\perp} d\mathbf{x}'_{\perp 2} \wedge d\mathbf{x}'_\parallel \wedge dt' \right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial t'} \mathcal{B}_2(t', \mathbf{x}') \frac{\bar{L}_\parallel}{\bar{L}_\perp} d\mathbf{x}'_\parallel \wedge d\mathbf{x}'_{\perp 1} \wedge dt' \right].
\end{aligned}$$

On a  $d\bar{\psi}^* \mathbf{F}^2 = d\bar{\psi}^* \mathbf{b}^2 + d\left(\bar{\psi}^* \mathbf{e}^1 \wedge \bar{t} dt'\right) = 0$  et en regroupant termes à termes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\parallel}} \mathcal{B}_3(t', \mathbf{x}') + \frac{\bar{L}_{\parallel}}{\bar{L}_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \mathcal{B}_1(t', \mathbf{x}') + \frac{\bar{L}_{\parallel}}{\bar{L}_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \mathcal{B}_2(t', \mathbf{x}') &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t'} \mathcal{B}_1(t', \mathbf{x}') + \frac{\bar{E}\bar{t}}{\bar{B}} \left( \frac{1}{\bar{L}_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \mathcal{E}_3(t', \mathbf{x}') - \frac{1}{\bar{L}_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\parallel}} \mathcal{E}_2(t', \mathbf{x}') \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t'} \mathcal{B}_2(t', \mathbf{x}') + \frac{\bar{E}\bar{t}}{\bar{B}} \left( \frac{1}{\bar{L}_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\parallel}} \mathcal{E}_1(t', \mathbf{x}') - \frac{1}{\bar{L}_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \mathcal{E}_3(t', \mathbf{x}') \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t'} \mathcal{B}_3(t', \mathbf{x}') + \frac{\bar{E}\bar{t}}{\bar{B}\bar{L}_{\perp}} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \mathcal{E}_2(t', \mathbf{x}') - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \mathcal{E}_1(t', \mathbf{x}') \right) &= 0. \end{aligned}$$

On obtient alors les équations adimensionnées (40) et (41).  
Pour l'équation (53), on doit calculer

$$\star(\mathbf{e}^1 \wedge dt) = \frac{1}{c} (E_x(t, \mathbf{x}) dy \wedge dz + E_y(t, \mathbf{x}) dz \wedge dx + E_z(t, \mathbf{x}) dx \wedge dy), \quad (54)$$

$$\star \mathbf{b}^2 = c(B_x(t, \mathbf{x}) dx \wedge dt + B_y(t, \mathbf{x}) dy \wedge dt + B_z(t, \mathbf{x}) dz \wedge dt), \quad (55)$$

et donc, l'application de  $\bar{\psi}^*$  à (54) et (55) donne les mêmes expressions que  $\bar{\psi}^* \mathbf{b}^2$  et  $\bar{\psi}^*(\mathbf{e}^1 \wedge dt)$  respectivement mais en substituant les composantes de  $E$  par celles de  $B$  et inversement. Puis on calcule  $d\bar{\psi}^* \star(\mathbf{e}^1 \wedge dt)$  et  $d\bar{\psi}^* \star \mathbf{b}^2$ . On a alors les mêmes expressions que  $d\bar{\psi}^* \mathbf{b}^2$  et  $d\left(\bar{\psi}^* \mathbf{e}^1 \wedge \bar{t} dt'\right)$  mais en substituant les composantes de  $E$  par celles de  $B$  et inversement. L'équation  $d\bar{\psi}^* \star \mathbf{F}^2 = c\mu\bar{\psi}^* \rho^3 + c\mu\bar{\psi}^*(\mathbf{j}^2 \wedge dt)$  nous donne

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\parallel}} \mathcal{E}_3(t', \mathbf{x}') + \frac{\bar{L}_{\parallel}}{\bar{L}_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \mathcal{E}_1(t', \mathbf{x}') + \frac{\bar{L}_{\parallel}}{\bar{L}_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \mathcal{E}_2(t', \mathbf{x}') &= \frac{\bar{\rho}\bar{L}_{\parallel}}{\bar{E}\epsilon} \rho'(t', \mathbf{x}'), \\ \frac{\partial}{\partial t'} \mathcal{E}_1(t', \mathbf{x}') - \frac{\bar{B}\bar{t}}{\bar{E}\epsilon\mu} \left( \frac{1}{\bar{L}_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \mathcal{B}_3(t', \mathbf{x}') - \frac{1}{\bar{L}_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\parallel}} \mathcal{B}_2(t', \mathbf{x}') \right) &= -\frac{\bar{J}\bar{t}}{\bar{E}\epsilon} \mathcal{J}_1(t', \mathbf{x}'), \\ \frac{\partial}{\partial t'} \mathcal{E}_2(t', \mathbf{x}') - \frac{\bar{B}\bar{t}}{\bar{E}\epsilon\mu} \left( \frac{1}{\bar{L}_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\parallel}} \mathcal{B}_1(t', \mathbf{x}') - \frac{1}{\bar{L}_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \mathcal{B}_3(t', \mathbf{x}') \right) &= -\frac{\bar{J}\bar{t}}{\bar{E}\epsilon} \mathcal{J}_2(t', \mathbf{x}'), \\ \frac{\partial}{\partial t'} \mathcal{E}_3(t', \mathbf{x}') - \frac{\bar{B}\bar{t}}{\bar{E}\bar{L}_{\perp}\epsilon\mu} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \mathcal{B}_2(t', \mathbf{x}') - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \mathcal{B}_1(t', \mathbf{x}') \right) &= -\frac{\bar{J}\bar{t}}{\bar{E}\epsilon} \mathcal{J}_3(t', \mathbf{x}'). \end{aligned}$$

De manière similaire, on obtient les équations adimensionnées (42) et (43) calculées page 14.

## 2.2 Le cas relativiste

Dans ce système de coordonnées, on a la métrique de Minkowski :

$$\tilde{g} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

et les équations de Maxwell sont

$$d\tilde{\mathbf{F}}^2 = 0 \quad (56)$$

$$d\star\tilde{\mathbf{F}}^2 = c\mu\tilde{\rho}^3 + \mu\tilde{\mathbf{j}}^2 \wedge d\tilde{t}, \quad (57)$$

avec  $\tilde{\mathbf{F}}^2$  une 2-forme différentielle dans l'espace relativiste telle que

$$\tilde{\mathbf{F}}^2 = \tilde{\mathbf{b}}^2 + \frac{\tilde{\mathbf{e}}^1}{c} \wedge d\tilde{t},$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^1 = \tilde{E}_x(\tilde{t}, \mathbf{x})dx + \tilde{E}_y(\tilde{t}, \mathbf{x})dy + \tilde{E}_z(\tilde{t}, \mathbf{x})dz, \quad \text{est une 1-forme,}$$

$$\tilde{\mathbf{b}}^2 = \tilde{B}_x(\tilde{t}, \mathbf{x})dy \wedge dz + \tilde{B}_y(\tilde{t}, \mathbf{x})dz \wedge dx + \tilde{B}_z(\tilde{t}, \mathbf{x})dx \wedge dy \quad \text{et } \tilde{\mathbf{j}}^2 \text{ sont des 2-formes,}$$

$$\tilde{\rho}^3 = \tilde{\rho}(\tilde{t}, \mathbf{x})dx \wedge dy \wedge dz, \text{ est une 3-forme.}$$

Pour pouvoir adimensionner, on considère le changement de coordonnées suivant  $\tilde{\psi}(\tilde{t}', \mathbf{x}') = (\tilde{t}\tilde{t}', \overline{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \overline{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel') = (\tilde{t}, \mathbf{x})$ . On pose alors  $\tilde{\psi}^\star$  l'application pull back associée au changement de coordonnées  $\tilde{\psi}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^\star \tilde{\mathbf{e}}^1 &= \tilde{E}_z(\tilde{t}\tilde{t}', \overline{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \overline{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel') \overline{L}_\parallel d\mathbf{x}_\parallel' + \tilde{E}_x(\tilde{t}\tilde{t}', \overline{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \overline{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel') \overline{L}_\perp d\mathbf{x}_{\perp 1}' \\ &\quad + \tilde{E}_y(\tilde{t}\tilde{t}', \overline{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \overline{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel') \overline{L}_\perp d\mathbf{x}_{\perp 2}', \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^\star \tilde{\mathbf{b}}^2 &= \tilde{B}_z(\tilde{t}\tilde{t}', \overline{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \overline{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel') \overline{L}_\perp^2 d\mathbf{x}_{\perp 1}' \wedge d\mathbf{x}_{\perp 2}' + \tilde{B}_x(\tilde{t}\tilde{t}', \overline{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \overline{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel') \overline{L}_\parallel \overline{L}_\perp d\mathbf{x}_{\perp 2}' \wedge d\mathbf{x}_\parallel' \\ &\quad + \tilde{B}_y(\tilde{t}\tilde{t}', \overline{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \overline{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel') \overline{L}_\parallel \overline{L}_\perp d\mathbf{x}_\parallel' \wedge d\mathbf{x}_{\perp 1}', \end{aligned}$$

$$\tilde{\psi}^\star \tilde{\rho}^3 = \tilde{\rho}(\tilde{t}\tilde{t}', \overline{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \overline{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel') \overline{L}_\parallel \overline{L}_\perp^2 d\mathbf{x}_{\perp 1}' \wedge d\mathbf{x}_{\perp 2}' \wedge d\mathbf{x}_\parallel'.$$

Précédemment, on a défini

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{E}}(\tilde{t}', \mathbf{x}') &= \mathbf{E}(\tilde{t}\tilde{t}', \overline{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \overline{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel'), \\ \tilde{\mathcal{B}}(\tilde{t}', \mathbf{x}') &= \mathbf{B}(\tilde{t}\tilde{t}', \overline{L}_\perp \mathbf{x}_\perp', \overline{L}_\parallel \mathbf{x}_\parallel'), \end{aligned}$$

et donc on obtient

$$\tilde{\psi}^\star \tilde{\mathbf{e}}^1 = \tilde{E}\tilde{\mathcal{E}}_3(\tilde{t}', \mathbf{x}') \overline{L}_\parallel d\mathbf{x}_\parallel' + \tilde{E}\tilde{\mathcal{E}}_1(\tilde{t}', \mathbf{x}') \overline{L}_\perp d\mathbf{x}_{\perp 1}' + \tilde{E}\tilde{\mathcal{E}}_2(\tilde{t}', \mathbf{x}') \overline{L}_\perp d\mathbf{x}_{\perp 2}',$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}^\star \tilde{\mathbf{b}}^2 &= \tilde{B}\tilde{\mathcal{B}}_3(\tilde{t}', \mathbf{x}') \overline{L}_\perp^2 d\mathbf{x}_{\perp 1}' \wedge d\mathbf{x}_{\perp 2}' + \tilde{B}\tilde{\mathcal{B}}_1(\tilde{t}', \mathbf{x}') \overline{L}_\parallel \overline{L}_\perp d\mathbf{x}_{\perp 2}' \wedge d\mathbf{x}_\parallel' \\ &\quad + \tilde{B}\tilde{\mathcal{B}}_2(\tilde{t}', \mathbf{x}') \overline{L}_\parallel \overline{L}_\perp d\mathbf{x}_\parallel' \wedge d\mathbf{x}_{\perp 1}', \end{aligned}$$

$$\tilde{\psi}^\star \tilde{\rho}^3 = \tilde{\rho}\tilde{\rho}(\tilde{t}', \mathbf{x}') \overline{L}_\parallel \overline{L}_\perp^2 d\mathbf{x}_{\perp 1}' \wedge d\mathbf{x}_{\perp 2}' \wedge d\mathbf{x}_\parallel'.$$



On en déduit alors

$$\bar{\psi} \tilde{\mathbf{F}}^2 = \bar{\psi} \tilde{\mathbf{b}}^2 + \left( \bar{\psi} \tilde{\mathbf{e}}^1 \right) \wedge \frac{\bar{t}}{c} d\tilde{t}',$$

et puisque  $\bar{\psi}^* d = d\bar{\psi}^*$ , l'équation (56) est équivalente à  $d\bar{\psi} \tilde{\mathbf{F}}^2 = 0$  dans le nouveau système de coordonnées, et l'équation (57) devient

$$d\bar{\psi} \left( \star \tilde{\mathbf{F}}^2 \right) = c \mu \bar{\psi} \tilde{\rho}^3 + \left( \bar{\psi} \tilde{\mathbf{j}}^2 \right) \wedge \bar{t} \mu d\tilde{t}'.$$

Pour obtenir  $d\bar{\psi} \tilde{\mathbf{F}}^2$  et  $d\bar{\psi} \left( \star \tilde{\mathbf{F}}^2 \right)$ , on calcule

$$\begin{aligned} d \left( \bar{\psi} \tilde{\mathbf{e}}^1 \wedge \frac{\bar{t}}{c} d\tilde{t}' \right) &= \frac{\bar{E} \bar{t} \bar{L}_\perp}{c} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \tilde{\mathcal{E}}_2(\tilde{t}', \mathbf{x}') - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \tilde{\mathcal{E}}_1(\tilde{t}', \mathbf{x}') \right) d\mathbf{x}'_{\perp 1} \wedge d\mathbf{x}'_{\perp 2} \wedge d\tilde{t}' \right. \\ &\quad + \left( \frac{\bar{L}_\parallel}{\bar{L}_\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \tilde{\mathcal{E}}_3(\tilde{t}', \mathbf{x}') - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_\parallel} \tilde{\mathcal{E}}_2(\tilde{t}', \mathbf{x}') \right) d\mathbf{x}'_{\perp 2} \wedge d\mathbf{x}'_\parallel \wedge d\tilde{t}' \\ &\quad \left. + \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_\parallel} \tilde{\mathcal{E}}_1(\tilde{t}', \mathbf{x}') - \frac{\bar{L}_\parallel}{\bar{L}_\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \tilde{\mathcal{E}}_3(\tilde{t}', \mathbf{x}') \right) d\mathbf{x}'_\parallel \wedge d\mathbf{x}'_{\perp 1} \wedge d\tilde{t}' \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\bar{\psi} \tilde{\mathbf{b}}^2 &= \bar{B} \bar{L}_\perp^{-2} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_\parallel} \tilde{\mathcal{B}}_3(\tilde{t}', \mathbf{x}') + \frac{\bar{L}_\parallel}{\bar{L}_\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \tilde{\mathcal{B}}_1(\tilde{t}', \mathbf{x}') + \frac{\bar{L}_\parallel}{\bar{L}_\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \tilde{\mathcal{B}}_2(\tilde{t}', \mathbf{x}') \right) d\mathbf{x}'_\parallel \wedge d\mathbf{x}'_{\perp 1} \\ &\quad + \bar{B} \bar{L}_\perp^{-2} \left[ \frac{\partial}{\partial \tilde{t}'} \tilde{\mathcal{B}}_3(\tilde{t}', \mathbf{x}') d\mathbf{x}'_{\perp 1} \wedge d\mathbf{x}'_{\perp 2} \wedge d\tilde{t}' + \frac{\partial}{\partial \tilde{t}'} \tilde{\mathcal{B}}_1(\tilde{t}', \mathbf{x}') \frac{\bar{L}_\parallel}{\bar{L}_\perp} d\mathbf{x}'_{\perp 2} \wedge d\mathbf{x}'_\parallel \wedge d\tilde{t}' \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial \tilde{t}'} \tilde{\mathcal{B}}_2(\tilde{t}', \mathbf{x}') \frac{\bar{L}_\parallel}{\bar{L}_\perp} d\mathbf{x}'_\parallel \wedge d\mathbf{x}'_{\perp 1} \wedge d\tilde{t}' \right]. \end{aligned}$$

On a alors  $d\bar{\psi} \tilde{\mathbf{F}}^2 = d\bar{\psi} \tilde{\mathbf{b}}^2 + d \left( \bar{\psi} \tilde{\mathbf{e}}^1 \wedge \frac{\bar{t}}{c} d\tilde{t}' \right) = 0$  et en regroupant termes à termes, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_\parallel} \tilde{\mathcal{B}}_3(\tilde{t}', \mathbf{x}') + \frac{\bar{L}_\parallel}{\bar{L}_\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \tilde{\mathcal{B}}_1(\tilde{t}', \mathbf{x}') + \frac{\bar{L}_\parallel}{\bar{L}_\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \tilde{\mathcal{B}}_2(\tilde{t}', \mathbf{x}') &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{t}'} \tilde{\mathcal{B}}_1(\tilde{t}', \mathbf{x}') + \frac{\bar{E} \bar{t}}{c \bar{B}} \left( \frac{1}{\bar{L}_\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \tilde{\mathcal{E}}_3(\tilde{t}', \mathbf{x}') - \frac{1}{\bar{L}_\parallel} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_\parallel} \tilde{\mathcal{E}}_2(\tilde{t}', \mathbf{x}') \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{t}'} \tilde{\mathcal{B}}_2(\tilde{t}', \mathbf{x}') + \frac{\bar{E} \bar{t}}{c \bar{B}} \left( \frac{1}{\bar{L}_\parallel} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_\parallel} \tilde{\mathcal{E}}_1(\tilde{t}', \mathbf{x}') - \frac{1}{\bar{L}_\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \tilde{\mathcal{E}}_3(\tilde{t}', \mathbf{x}') \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{t}'} \tilde{\mathcal{B}}_3(\tilde{t}', \mathbf{x}') + \frac{\bar{E} \bar{t}}{c \bar{B} \bar{L}_\perp} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \tilde{\mathcal{E}}_2(\tilde{t}', \mathbf{x}') - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \tilde{\mathcal{E}}_1(\tilde{t}', \mathbf{x}') \right) &= 0. \end{aligned}$$

Ce sont exactement les équations adimensionnées (45) et (47) précédemment calculées. Pour l'équation (57), il faut calculer

$$\star \left( \frac{\tilde{\mathbf{e}}^1}{c} \wedge d\tilde{t} \right) = \frac{1}{c} \left( \tilde{E}_x(\tilde{t}, \mathbf{x}) dy \wedge dz + \tilde{E}_y(\tilde{t}, \mathbf{x}) dz \wedge dx + \tilde{E}_z(\tilde{t}, \mathbf{x}) dx \wedge dy \right), \quad (58)$$

$$\star \tilde{\mathbf{b}}^2 = \tilde{B}_x(\tilde{t}, \mathbf{x}) dx \wedge d\tilde{t} + \tilde{B}_y(\tilde{t}, \mathbf{x}) dy \wedge d\tilde{t} + \tilde{B}_z(\tilde{t}, \mathbf{x}) dz \wedge d\tilde{t}. \quad (59)$$

L'application du pull back  $\overline{\psi}^*$  sur l'équation (58) et (59), nous donne les expressions de  $\overline{\psi}^* \tilde{\mathbf{b}}^2$  et de  $\overline{\psi}^* \left( \frac{\tilde{\mathbf{e}}^1}{c} \wedge d\tilde{t} \right)$  respectivement mais en substituant les composantes de  $\tilde{E}$  par celles de  $\tilde{B}$  et inversement. Puis, on calcule  $d\overline{\psi}^* \star \left( \frac{\tilde{\mathbf{e}}^1}{c} \wedge d\tilde{t} \right)$  et  $d\overline{\psi}^* \star \tilde{\mathbf{b}}^2$ . On obtient les mêmes expressions que  $d\overline{\psi}^* \tilde{\mathbf{b}}^2$  et  $d \left( \overline{\psi}^* \frac{\tilde{\mathbf{e}}^1}{c} \wedge d\tilde{t} \right)$  mais en substituant les composantes de  $\tilde{E}$  par celles de  $\tilde{B}$  et inversement. L'équation  $d\overline{\psi}^* \star \tilde{\mathbf{F}}^2 = c\mu\overline{\psi}^* \tilde{\rho}^3 + \mu\overline{\psi}^* \left( \tilde{\mathbf{j}}^2 \wedge d\tilde{t} \right)$  nous donne alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}'} \tilde{\mathcal{E}}_3(\tilde{t}', \mathbf{x}') + \frac{\overline{L}_\parallel}{\overline{L}_\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \tilde{\mathcal{E}}_1(\tilde{t}', \mathbf{x}') + \frac{\overline{L}_\parallel}{\overline{L}_\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \tilde{\mathcal{E}}_2(\tilde{t}', \mathbf{x}') &= \frac{\overline{\tilde{\rho}} \overline{L}_\parallel}{\overline{E} \epsilon} \tilde{\rho}(\tilde{t}', \mathbf{x}'), \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}'} \tilde{\mathcal{E}}_1(\tilde{t}', \mathbf{x}') - \frac{\overline{B} \tilde{t}}{\overline{E}} \left( \frac{1}{\overline{L}_\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \tilde{\mathcal{B}}_3(\tilde{t}', \mathbf{x}') - \frac{1}{\overline{L}_\parallel} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_\parallel} \tilde{\mathcal{B}}_2(\tilde{t}', \mathbf{x}') \right) &= -\frac{\overline{J} \tilde{t} \mu}{\overline{E}} \tilde{\mathcal{J}}_1(\tilde{t}', \mathbf{x}'), \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}'} \tilde{\mathcal{E}}_2(\tilde{t}', \mathbf{x}') - \frac{\overline{B} \tilde{t}}{\overline{E}} \left( \frac{1}{\overline{L}_\parallel} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_\parallel} \tilde{\mathcal{B}}_1(\tilde{t}', \mathbf{x}') - \frac{1}{\overline{L}_\perp} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \tilde{\mathcal{B}}_3(\tilde{t}', \mathbf{x}') \right) &= -\frac{\overline{J} \tilde{t} \mu}{\overline{E}} \tilde{\mathcal{J}}_2(\tilde{t}', \mathbf{x}'), \\ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}'} \tilde{\mathcal{E}}_3(\tilde{t}', \mathbf{x}') - \frac{\overline{B} \tilde{t}}{\overline{E} \overline{L}_\perp} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} \tilde{\mathcal{B}}_2(\tilde{t}', \mathbf{x}') - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} \tilde{\mathcal{B}}_1(\tilde{t}', \mathbf{x}') \right) &= -\frac{\overline{J} \tilde{t} \mu}{\overline{E}} \tilde{\mathcal{J}}_3(\tilde{t}', \mathbf{x}'). \end{aligned}$$

On obtient alors les équations adimensionnées (44) et (46) que l'on a calculées à la page 14.

### 3 ADIMENSIONNEMENT DE L'ÉQUATION DE VLASOV DANS LE FORMALISME COVARIANT

Comme précédemment, on pose  $t = \tilde{t} t'$ ,  $\mathbf{x}_\parallel = \overline{L}_\parallel \mathbf{x}'_\parallel$  et  $\mathbf{x}_\perp = \overline{L}_\perp \mathbf{x}'_\perp$  et donc pour l'adimensionnement, on considère le changement de coordonnées

$$\overline{\psi}(t', \mathbf{x}', \mathbf{v}') = (\tilde{t} t', \overline{L}_\perp \mathbf{x}'_\perp, \overline{L}_\parallel \mathbf{x}'_\parallel, \tilde{v} \mathbf{v}') = (t, \mathbf{x}, \mathbf{v}).$$

On considère alors l'égalité suivante

$$\overline{L_{\parallel}} \overline{L_{\perp}}^{-2} \bar{f} {}^6f' = \overline{\psi^*} ({}^6f) = {}^6f(\bar{t} t', \overline{L_{\perp}} \mathbf{x}_{\perp}', \overline{L_{\parallel}} \mathbf{x}_{\parallel}', \bar{v} \mathbf{v}').$$

Puisque l'équation de Vlasov est de la forme :

$$\frac{\partial {}^6f}{\partial t} + \mathcal{L}_{\tau} {}^6f = 0,$$

avec  $\tau = \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \left( i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} {}^1\mathbf{E} + \frac{q}{m} i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} i_{\mathbf{v}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} {}^2\mathbf{B} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}$ , alors le changement de coordonnées nous donne l'équation de Vlasov adimensionnée suivante

$$\overline{\psi^*} \left[ \frac{\partial {}^6f}{\partial t} + \mathcal{L}_{\tau} {}^6f \right] = \frac{\overline{f} \overline{L_{\parallel}} \overline{L_{\perp}}^{-2}}{\bar{t}} \frac{\partial {}^6f'}{\partial t'} + \overline{f} \overline{L_{\parallel}} \overline{L_{\perp}}^{-2} \mathcal{L}_{\overline{\psi^*}(\tau)} {}^6f' = 0,$$

i.e.

$$\frac{\partial {}^6f'}{\partial t'} + \bar{t} \mathcal{L}_{\overline{\psi^*}(\tau)} {}^6f' = 0,$$

où

$$\overline{\psi^*}(\tau) = \bar{v} \mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}} \mathbf{x}'} + \frac{q}{m} \left( \bar{v} i \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}} \mathbf{x}'} \overline{\psi^*} ({}^1\mathbf{E}) + i \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}} \mathbf{x}'} i_{\mathbf{v}'} \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}} \mathbf{x}'} \overline{\psi^*} ({}^2\mathbf{B}) \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'},$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}} \mathbf{x}'} = \frac{1}{\overline{L_{\perp}}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{\perp 1}'} + \frac{1}{\overline{L_{\perp}}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{\perp 2}'} + \frac{1}{\overline{L_{\parallel}}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{\parallel}'}$$

et

$$\mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}} \mathbf{x}'} = \frac{\mathbf{v}_{\perp 1}'}{\overline{L_{\perp}}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{\perp 1}'} + \frac{\mathbf{v}_{\perp 2}'}{\overline{L_{\perp}}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{\perp 2}'} + \frac{\mathbf{v}_{\parallel}'}{\overline{L_{\parallel}}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{\parallel}'}$$

On a vu aux sections précédentes que

$$\overline{\psi^*} ({}^1\mathbf{E}) = \overline{E} \left[ \mathcal{E}_3(t', \mathbf{x}') \overline{L_{\parallel}} d\mathbf{x}_{\parallel}' + \mathcal{E}_1(t', \mathbf{x}') \overline{L_{\perp}} d\mathbf{x}_{\perp 1}' + \mathcal{E}_2(t', \mathbf{x}') \overline{L_{\perp}} d\mathbf{x}_{\perp 2}' \right],$$

$$\overline{\psi^*} ({}^2\mathbf{B}) = \overline{B} \left[ \mathcal{B}_3(t', \mathbf{x}') \overline{L_{\perp}}^{-2} d\mathbf{x}_{\perp 1}' \wedge d\mathbf{x}_{\perp 2}' + \mathcal{B}_1(t', \mathbf{x}') \overline{L_{\parallel}} \overline{L_{\perp}} d\mathbf{x}_{\perp 2}' \wedge d\mathbf{x}_{\parallel}' + \mathcal{B}_2(t', \mathbf{x}') \overline{L_{\parallel}} \overline{L_{\perp}} d\mathbf{x}_{\parallel}' \wedge d\mathbf{x}_{\perp 1}' \right].$$

Donc on a

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}} \mathbf{x}'} \overline{\psi^*} ({}^1\mathbf{E}) &= \overline{E} i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} {}^1\mathcal{E}, \\ i \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}} \mathbf{x}'} i_{\mathbf{v}'} \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}} \mathbf{x}'} \overline{\psi^*} ({}^2\mathbf{B}) &= \overline{B} i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} i_{\mathbf{v}'} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} {}^2\mathcal{B}, \end{aligned}$$

où

$${}^1\mathcal{E} = \mathcal{E}_3(t', \mathbf{x}') d\mathbf{x}_{\parallel}' + \mathcal{E}_1(t', \mathbf{x}') d\mathbf{x}_{\perp 1}' + \mathcal{E}_2(t', \mathbf{x}') d\mathbf{x}_{\perp 2}',$$

$${}^2\mathcal{B} = \mathcal{B}_3(t', \mathbf{x}') d\mathbf{x}_{\perp 1}' \wedge d\mathbf{x}_{\perp 2}' + \mathcal{B}_1(t', \mathbf{x}') d\mathbf{x}_{\perp 2}' \wedge d\mathbf{x}_{\parallel}' + \mathcal{B}_2(t', \mathbf{x}') d\mathbf{x}_{\parallel}' \wedge d\mathbf{x}_{\perp 1}'.$$

et

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\parallel}}, \quad \mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = \mathbf{v}'_{\perp 1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} + \mathbf{v}'_{\perp 2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} + \mathbf{v}'_{\parallel} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\parallel}}.$$

On peut donc simplifier  $\bar{\psi}^*(\tau)$  par la formule suivante :

$$\bar{\psi}^*(\tau) = \bar{v} \mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}} \mathbf{x}'} + \left( \frac{\bar{E} \bar{v} q}{m} i_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}} \mathcal{E} + \frac{q \bar{B}}{m} i_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}} i_{\mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}} \mathcal{B} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}'} \quad . \quad (60)$$

On pose  $\bar{\omega}_c = \frac{q \bar{B}}{m}$  la fréquence du cyclotron et  $a_L = \bar{v} / \bar{\omega}_c$  le rayon de Larmor fini. Comme dans l'article [62], on suppose que le champ d'induction magnétique est fort et donc on obtient les quantités suivantes :

$$\bar{t} \bar{\omega}_c = \frac{1}{\epsilon}, \quad \frac{\bar{E} \bar{v}}{\bar{B}} = \epsilon, \quad \frac{a_L}{L_{\perp}} = 1, \quad \frac{a_L}{L_{\parallel}} = \epsilon,$$

pour un petit paramètre  $\epsilon$ . Ainsi, après que l'on ait injecté ces différentes quantités dans l'équation de Vlasov, celle-ci peut s'écrire

$$\frac{\partial {}^6 f'}{\partial t'} + \mathcal{L}_{\mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}} \mathbf{x}'}} + \left( i_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}} \mathcal{E} + \frac{1}{\epsilon} i_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}} i_{\mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'}} \mathcal{B} \right) \frac{\partial {}^6 f'}{\partial \mathbf{v}'} = 0,$$

avec

$$\mathbf{v}' \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}} \mathbf{x}'} = \frac{\mathbf{v}'_{\perp 1}}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 1}} + \frac{\mathbf{v}'_{\perp 2}}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp 2}} + \mathbf{v}'_{\parallel} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\parallel}}.$$

Pour obtenir l'équation de Poisson on voit, tout d'abord que, le changement de variable nous donne  $\bar{\psi}^*(\mathbf{1} \mathbf{E}) = -\bar{\psi}^*(d^0 \phi) = d \bar{\psi}^*(\phi) = \bar{\phi} d^0 \phi'$  d'où, pour  $\bar{\phi} = \epsilon$ ,

$${}^1 \mathcal{E} = -\epsilon \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\perp}} d^0 \phi' - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'_{\parallel}} d^0 \phi'.$$

De plus l'équation de Poisson s'écrit

$$-(\lambda_D)^2 d \star_M d^0 \phi = [n^i - n^e],$$

avec  $\star_M$  le hodge star dans l'espace  $M$ ,  $\lambda_D$  la longueur de Debye,  $n^i = \int_{\pi^{-1}(x)} {}^6 f$  la densité des ions et  $n^e$  la densité des électrons ( $\pi^{-1}(x)$  correspond à l'espace des vitesses, voir la section 3.1 page 4). Afin de prendre en compte la quasi neutralité du plasma on pose  $\lambda_D = \sqrt{\epsilon}$ , on supposera également que la densité de distribution des ions est normalisée i.e.  $\int_P {}^6 f(0) = 1$ . Avant d'écrire l'équation de Poisson en fonction des quantités adimensionnées, on

peut la simplifier en se souvenant du fait que la concentration de la charge est décrite par la concentration de Boltzmann i.e.

$$n^e = \star_M \exp \frac{e^0 \phi}{k_B T_e},$$

où  $-e$  correspond à la charge,  $k_B$  à la constante de Boltzmann et  $T_e$  la température des électrons. On effectue alors un développement en série de Taylor et on obtient

$$n^e = \star_M \exp \frac{e^0 \phi}{k_B T_e} \approx \star_M \left[ 1 + \frac{e^0 \phi}{k_B T_e} \right].$$

Dans la suite on supposera que  $\frac{e}{k_B T_e} \sim 1$ . L'équation de Poisson devient alors

$$\bar{\psi}^{\star} \star_M^0 \phi - \epsilon \bar{\psi}^{\star} d(\star_M d^0 \phi) = \bar{\psi}^{\star} \left[ \int_{\pi^{-1}(x)} {}^6 f - \int_P {}^6 f(0) \right].$$

Après le changement de variables et après que l'on ait remplacé les quantités physiques, on obtient

$$\bar{\psi}^{\star} \star^0 \phi - d(\star_x d^0 \phi) = \star^0 \phi' \epsilon^2 - \left( \epsilon \frac{\partial^2}{\partial(\mathbf{x}_{\perp}')^2} {}^0 \phi' + \epsilon^3 \frac{\partial^2}{\partial(\mathbf{x}_{\parallel}')^2} {}^0 \phi' \right) \epsilon d\mathbf{x}_{\perp}' d\mathbf{x}_{\parallel}',$$

et

$$\bar{\psi}^{\star} \left[ \int_{\pi^{-1}(x)} {}^6 f - \int_P {}^6 f(0) \right] = \epsilon^2 \left[ \int_{\pi^{-1}(x)} {}^6 f' - \int_P {}^6 f'(0) \right] = \epsilon^2 \left[ \int_{\pi^{-1}(x)} {}^6 f' - 1 \right].$$

On en conclut alors que l'équation de Poisson adimensionnée est

$$\star_M^0 \phi' - \left[ \frac{\partial^2}{\partial(\mathbf{x}_{\perp}')^2} {}^0 \phi' - \epsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial(\mathbf{x}_{\parallel}')^2} {}^0 \phi' \right] d\mathbf{x}_{\perp}' d\mathbf{x}_{\parallel}' = \int_{\pi^{-1}(x)} {}^6 f' - 1.$$



---

# Convergence géométrique à deux échelles. Applications sur l'équation de Vlasov.

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>La <math>L^r</math> cohomologie . . . . .</b>	<b>28</b>
<b>2</b>	<b>La convergence faible . . . . .</b>	<b>31</b>
2.1	Formulation faible . . . . .	31
2.2	La théorie des k-courants . . . . .	32
<b>3</b>	<b>La convergence géométrique à deux échelles . . .</b>	<b>34</b>
3.1	Introduction à la convergence à deux échelles . . .	34
3.2	Introduction à la convergence géométrique à deux échelles . . . . .	35
<b>4</b>	<b>Homogénéisation de l'équation de Vlasov . . . . .</b>	<b>42</b>
4.1	Avec un champ magnétique fort . . . . .	42
4.2	Avec un champ magnétique et électrique fort . . .	46

---

Dans ce chapitre, on expliquera comment faire de l'analyse fonctionnelle en utilisant les outils de la géométrie différentielle. Cette théorie, appelée  $L^r$ -cohomologie, a été développée par Scott [80, 81] mais sans avoir pour but de faire de l'analyse asymptotique. On introduira alors des notions de topologie qui permettront de faire tendre  $\epsilon$  vers 0. Ainsi, on pourra expliquer comment faire de l'analyse asymptotique en utilisant des objets géométriques. Cette étude a été commencée récemment par Pak [10]. On expliquera cette nouvelle théorie ainsi que les notions de convergence forte et faible afin de construire la convergence à deux échelles dans ce cadre. Dans un premier temps, on rappellera la  $L^r$  cohomologie et les notions de convergence faible pour les formes différentielles. Puisque la théorie de la convergence à deux échelles a été bien développée dans le cadre du calcul vectoriel [54, 62, 76, 77], on adaptera, dans un second temps, la théorie de la convergence à deux échelles à la géométrie différentielle. Puis, pour finir, on l'appliquera dans deux cas particuliers de l'équation de Vlasov.

# 1 LA $L^r$ COHOMOLOGIE

On peut observer que les formes différentielles ne sont pas obligatoirement des objets réguliers. On va donc tout d'abord rappeler quelques notions utiles à l'analyse fonctionnelle comme la *mesurabilité*, les fonctions *définies presque partout* et les adapter pour les formes différentielles. Ceci nous permettra de définir une analyse fonctionnelle utilisant des éléments géométriques tels que les formes différentielles. Cette théorie est la  $L^r$ -cohomologie.

Dans la suite, on note une  $k$ -forme différentielle sur  $M$ ,  $\omega^k : M \rightarrow \bigwedge^k(T^*M)$ . Une  $k$ -forme différentielle *mesurable* sur  $M$  est une section mesurable du fibré vectoriel  $\bigwedge^k(T^*M) \rightarrow M$ . On dira qu'une  $k$ -forme différentielle  $\omega^k$  est *définie presque partout* s'il existe un ensemble  $N \subset M$  de mesure nulle tel que la fonction  $\omega^k : M \rightarrow \bigwedge^k(T^*M)$  est bien définie sur l'ensemble  $M \setminus N$ .

En d'autres termes, si au dessus d'une carte locale de  $M$  on a  $(x_1, \dots, x_n)$  le système de coordonnées local de  $p$  un point de  $M$ , alors toute  $k$ -forme différentielle sur  $M$  peut s'écrire

$$\omega_p^k = \sum_{i_1, \dots, i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k}^k(x) dx_{i_1} \cdots dx_{i_k}.$$

On dira que la forme différentielle  $\omega^k$  est *mesurable* si et seulement si les coefficients  $\omega_{i_1, \dots, i_k}^k$  sont des fonctions mesurables de  $M$  dans  $\mathbb{R}$  et que  $\omega^k$  est *définie presque partout* si les coefficients  $\omega_{i_1, \dots, i_k}^k$  sont des fonctions bien définies sur l'ensemble  $M \setminus N$ .

Une  $k$ -forme différentielle  $\omega^k$  à *support compact*  $K$  de dimension  $k$  sur  $M$  si pour tout point  $p$  en dehors de  $K$  et pour tout vecteurs  $\xi_1, \dots, \xi_k \in T_pM$  on a  $\omega_p^k(\xi_1, \dots, \xi_k) = 0$ .

L'intégrale d'une  $k$ -forme différentielle est définie de la façon suivante : soient  $M^k$  une variété différentielle de dimension  $k$  incluse dans  $M$  et  $\{\psi_i\}_{i \in I}$  une *partition de l'unité* associée à un ensemble de cartes dénombrables  $(U_i, f_i)_{i \in I}$  recouvrant  $M^k$  (i.e.  $\text{supp } \psi_i \subseteq U_i$ ). Alors, pour une telle partition,  $\omega^k$  peut s'écrire comme  $\sum_{i \in I} \psi_i \omega^k$  et son intégrale sur  $M^k$  est

$$\int_{M^k} \omega^k = \sum_{i \in I} \int_{U_i} \psi_i \omega^k.$$

Définissons, maintenant, les  $k$ -formes différentielles de *classe*  $C^s$  sur  $M$ . On dira qu'une  $k$ -forme différentielle  $\omega^k$  est de *classe*  $C^s$  si elle est vérifie



- pour tout  $p \in M$ ,  $\omega_p^k \in \bigwedge^k(T_p^*M)$ .
- Soit l'ensemble de cartes dénombrables  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  recouvrant  $M$ , alors pour tout  $i \in I$ ,  $\omega_i^k = (\varphi_i^{-1})^* \omega^k$  est une  $k$ -forme différentielle de classe  $C^s$  sur  $\varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^n$ .

On notera par  $\Omega_s^k(M)$  l'ensemble des  $k$ -formes différentielles de classe  $C^s$  sur  $M$ .

On notera également par  $L^r(M, \bigwedge^k)$  l'espace des  $k$ -formes différentielles  $r$ -intégrables. Il est défini par :

$$L^r(M, \bigwedge^k) = \{\alpha \in \Omega^k(M) \text{ mesurable tel que } \|\alpha\|_{L^r(M, \bigwedge^k)} < +\infty\},$$

pour  $1 \leq r \leq +\infty$  avec

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_{L^r(M, \bigwedge^k)} &:= \left( \int_M |\alpha|_p^r \text{vol}_p \right)^{\frac{1}{r}} \quad \text{pour } 1 \leq r < \infty, \\ \|\alpha\|_{L^{+\infty}(M, \bigwedge^k)} &:= \text{ess sup}_{p \in M} |\alpha|_p. \end{aligned}$$

On associe un produit scalaire à la norme  $\|\alpha\|_{L^2(M, \bigwedge^k)}$  de la façon suivante

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{L^2(M, \bigwedge^k)} := \int_M \alpha \wedge \star \beta,$$

avec  $\alpha, \beta \in \Omega^k(M)$  mesurables. On a  $\|\cdot\|$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  qui sont bien définis car ils ne dépendent pas des cartes sur  $M$ .

Pour  $M$  une variété riemannienne compacte avec bords, on souhaite pouvoir définir la composante tangentielle et la composante normale au bord d'une forme différentielle. C'est l'objet de ce que l'on va faire maintenant. Cette notion est importante car elle nous permet en analyse d'établir la formule de Green-Stokes ainsi que la formule d'intégration par parties. Pour répondre à cette question, posons d'abord  $\nu$  comme étant le vecteur normal unitaire sortant à  $\partial M$  et  $\nu^\sharp$  comme étant la 1-forme différentielle associée à  $\nu$ . On peut définir la notion de composante tangentielle et normale d'une  $k$ -forme différentielle  $\omega^k \in \Omega^k(M)$  en utilisant le produit extérieur et le produit intérieur. La composante tangentielle correspond à  $\nu^\sharp \wedge \omega^k$  et la composante normale à  $i_\nu \omega^k$ . Sous ces conditions, sur la variété  $M$ , on peut reformuler la formule de Green-Stokes pour les formes différentielles avec l'opérateur de la dérivée extérieure

$$\langle d\omega^k, \varphi^{k+1} \rangle_{L^2(M, \bigwedge^{k+1})} = \langle \omega^k, d^* \varphi^{k+1} \rangle_{L^2(M, \bigwedge^k)} + \langle \nu^\sharp \wedge \omega^k, \varphi^{k+1} \rangle_{L^2(\partial M, \bigwedge^{k+1})},$$

et avec l'opérateur de la dérivée co-extérieure

$$\langle d^* \omega^k, \psi^{k-1} \rangle_{L^2(M, \bigwedge^{k-1})} = \langle \omega^k, d \psi^{k-1} \rangle_{L^2(M, \bigwedge^k)} - \langle i_\nu \omega^k, \psi^{k-1} \rangle_{L^2(M, \bigwedge^{k-1})}.$$

Dans ce qui suit on remarque que la plupart des propriétés de la théorie des fonctions intégrables se transposent dans le cadre ici posé. On supposera que  $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$  avec  $1 \leq r, s \leq +\infty$ .

**Proposition .2** — (i) (*Inégalité de Hölder*) Si  $\alpha \in L^r(M, \Lambda^k)$  et  $\beta \in L^s(M, \Lambda^k)$ , alors  $\alpha \wedge \star\beta \in L^1(M, \Lambda^n)$  et

$$\|\alpha \wedge \star\beta\|_{L^1(M, \Lambda^n)} \leq \|\alpha\|_{L^r(M, \Lambda^k)} \|\beta\|_{L^s(M, \Lambda^k)}.$$

(ii) (*Inégalité de Minkowski*) Si  $\alpha, \beta \in L^r(M, \Lambda^k)$  alors  $\alpha + \beta \in L^r(M, \Lambda^k)$  et

$$\|\alpha + \beta\|_{L^r(M, \Lambda^k)} \leq \|\alpha\|_{L^r(M, \Lambda^k)} + \|\beta\|_{L^r(M, \Lambda^k)}.$$

(iii)  $L^r(M, \Lambda^k)$  est un espace de Banach.  $L^2(M, \Lambda^k)$  est un espace de Hilbert.

(iv) (*Densité*)  $C_c^2(M, \Lambda^k)$  l'ensemble des  $k$ -formes différentielles de classe  $C^2$  sur  $M$  avec un support compact est dense dans  $L^r(M, \Lambda^k)$  [70]

Maintenant que l'on a défini les espaces  $L^r(M, \Lambda^k)$ , on va pouvoir aller plus loin dans la théorie de l'analyse fonctionnelle et on va s'intéresser aux espaces de Sobolev. Comme on a plusieurs opérateurs de dérivation : la dérivée extérieure, la dérivée co-extérieure et le laplacien on va construire les 3 espaces de Sobolev partiels suivants :

$$W^{d,r}(M, \Lambda^k) := \{\omega \in L^r(M, \Lambda^k) : d\omega \in L^r(M, \Lambda^{k+1})\},$$

$$W^{d^*,r}(M, \Lambda^k) := \{\omega \in L^r(M, \Lambda^k) : d^*\omega \in L^r(M, \Lambda^{k-1})\},$$

$$W^{\Delta,r}(M, \Lambda^k) := \{\omega \in L^r(M, \Lambda^k) : \Delta\omega \in L^r(M, \Lambda^k)\},$$

respectivement à l'aide de l'opérateur de dérivée extérieure  $d$ , de l'opérateur de dérivée co-extérieure  $d^*$  et de l'opérateur de Laplace-Beltrami  $\Delta = d^*d + dd^*$ . Ce sont tous les trois des espaces vectoriels normés avec les normes suivantes :

$$\|\omega\|_{W^{d,r}(M, \Lambda^k)} := \left( \|\omega\|_{L^r(M, \Lambda^k)}^r + \|d\omega\|_{L^r(M, \Lambda^{k+1})}^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (61)$$

$$\|\omega\|_{W^{d^*,r}(M, \Lambda^k)} := \left( \|\omega\|_{L^r(M, \Lambda^k)}^r + \|d^*\omega\|_{L^r(M, \Lambda^{k-1})}^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (62)$$

$$\|\omega\|_{W^{\Delta,r}(M, \Lambda^k)} := \left( \|\omega\|_{L^r(M, \Lambda^k)}^r + \|d\omega\|_{L^r(M, \Lambda^{k+1})}^r + \|d^*\omega\|_{L^r(M, \Lambda^{k-1})}^r \right)^{\frac{1}{r}}. \quad (63)$$

Il est important de remarquer que l'espace de Sobolev  $W^{1,r}(M, \mathbb{R}^{\binom{n}{k}})$ , tel que l'on connaît en analyse fonctionnelle usuelle, coïncide avec l'intersection des

espaces de Sobolev partiels  $W^{d,r}(M, \Lambda^k)$  et  $W^{d^*,r}(M, \Lambda^k)$ . De plus, avec ceci on peut définir les conditions aux bords de Dirichlet [9] et déterminer les espaces des formes différentielles les vérifiant, par

$$\begin{aligned} W_0^{d,r}(M, \Lambda^k) &:= \overline{\{\omega \in C_c^2(M, \Lambda^k) : \nu^\# \wedge \omega = 0 \text{ sur } \partial M\}}^{\|\cdot\|_{W^{d,r}}}, \\ W_0^{d^*,r}(M, \Lambda^k) &:= \overline{\{\omega \in C_c^2(M, \Lambda^k) : i_\nu \omega = 0 \text{ sur } \partial M\}}^{\|\cdot\|_{W^{d^*,r}}}. \end{aligned}$$

## 2 LA CONVERGENCE FAIBLE

### 2.1 Formulation faible

Pour toute  $k$ -forme différentielle  $\alpha^k \in L^2(M, \Lambda^k)$ , on peut définir une forme linéaire continue sur l'espace des  $k$ -formes différentielles  $C^2$  à support compact  $C_c^2(M, \Lambda^k)$  par la formule

$$\langle \alpha^k, \phi^k \rangle_{L^2(M, \Lambda^k)} := \int_M \alpha_p^k \wedge \star \phi_p^k,$$

avec  $\phi^k \in C_c^2(M, \Lambda^k)$ . De plus, comme  $L^2(M, \Lambda^k)$  est un espace de Hilbert, on va pouvoir définir la convergence au sens faible à l'aide de cette forme linéaire.

**Définition 2.1.1** — Une suite  $(\alpha_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \in L^2(M, \Lambda^k)$  converge faiblement vers  $\alpha^k \in L^2(M, \Lambda^k)$  si et seulement si pour tout  $\phi^k \in C_c^2(M, \Lambda^k)$  on a

$$\langle \alpha_n^k, \phi^k \rangle_{L^2(M, \Lambda^k)} \rightarrow \langle \alpha^k, \phi^k \rangle_{L^2(M, \Lambda^k)}.$$

Les formes différentielles à support compact vérifient les conditions aux bords de Dirichlet, on va pouvoir définir la dérivée extérieure au sens faible de  $\alpha^k \in L^2(M, \Lambda^k)$  pour tout  $\varphi^{k+1} \in C_c^2(M, \Lambda^{k+1})$  :

$$\langle d\alpha^k, \varphi^{k+1} \rangle_{L^2(M, \Lambda^{k+1})} = \langle \alpha^k, d^* \varphi^{k+1} \rangle_{L^2(M, \Lambda^k)},$$

et sa dérivée co-extérieure au sens faible pour tout  $\psi^{k-1} \in C_c^2(M, \Lambda^{k-1})$  :

$$\langle d^* \alpha^k, \psi^{k-1} \rangle_{L^2(M, \Lambda^{k-1})} = \langle \alpha^k, d\psi^{k-1} \rangle_{L^2(M, \Lambda^k)}.$$

En s'appuyant sur ces formules, on peut développer une théorie similaire à la théorie des distributions, sur l'espace des formes différentielles, les  $k$ -courants [74, 89, 90].

## 2.2 La théorie des k-courants

Pour développer une théorie des distributions sur une variété riemannienne orientée avec bords, il faut, au préalable, définir la notion *d'intégrabilité locale* pour les formes différentielles sur une variété.

**Définition 2.2.1** — Une  $k$ -forme différentielle mesurable sur  $M$ ,  $\alpha^k$  est *localement intégrable* si pour tout  $U \subset M$  relativement compact, on a

$$\int_U |\alpha^k|_p \text{vol}_p < \infty.$$

Pour  $\alpha^k \in L^1_{loc}(M, \wedge^k)$  et  $\varphi^k \in C^2_c(M, \wedge^k)$ , on peut définir le  $k$ -courant  $T_{\alpha^k}$  par la relation

$$T_{\alpha^k}(\varphi^k) := \langle \alpha^k, \varphi^k \rangle := \int_M \alpha^k_p \wedge \star \varphi^k_p,$$

de plus, la dérivée extérieure d'un  $(k-1)$ -courant est obtenue par la relation

$$\begin{aligned} (dT_{\alpha^{k-1}})(\varphi^k) &:= (-1)^k \int_M \alpha^{k-1}_p \wedge d \star \varphi^k_p \\ &= \int_M \alpha^{k-1}_p \wedge \star d^* \varphi^k_p = \langle \alpha^{k-1}, d^* \varphi^k \rangle =: T_{\alpha^{k-1}}(d^* \varphi^k), \end{aligned}$$

avec  $\alpha^{k-1} \in L^1_{loc}(M, \wedge^{k-1})$  et  $\varphi^k \in C^2_c(M, \wedge^k)$ . Si  $\alpha^{k-1}$  est régulière, on peut voir qu'en partant de la première égalité, on obtient

$$(dT_{\alpha^{k-1}})(\varphi^k) := (-1)^k \int_M \alpha^{k-1}_p \wedge d \star \varphi^k_p = \int_M d \alpha^{k-1}_p \wedge \star \varphi^k_p := T_{d\alpha^{k-1}}(\varphi^k).$$

De la même manière, on a

$$(d^* T_{\alpha^k})(\varphi^{k-1}) := (-1)^k \int_M \alpha^k_p \wedge d^* \star \varphi^{k-1}_p = \int_M \alpha^k_p \wedge \star d \varphi^{k-1}_p = T_{\alpha^k}(d\varphi^{k-1})$$

et si  $\alpha^k$  est régulière on a

$$(d^* T_{\alpha^k})(\varphi^{k-1}) = \int_M d^* \alpha^k_p \wedge \star \varphi^{k-1}_p := \langle d^* \alpha^k, \varphi^{k-1} \rangle =: T_{d^* \alpha^k}(\varphi^{k-1}),$$

avec  $\alpha^k \in L^1_{loc}(M, \wedge^k)$  et  $\varphi^{k-1} \in C^2_c(M, \wedge^{k-1})$  et aussi

$$(\Delta T_{\alpha^k})(\varphi^k) := \int_M \alpha^k_p \wedge \star \Delta \varphi^k_p = T_{\alpha^k}(\Delta \varphi^k),$$

avec  $\alpha^k \in L^1_{loc}(M, \Lambda^k)$  et  $\varphi^k \in C^2_c(M, \Lambda^k)$  (on a également pour  $\alpha^k$  régulière  $T_{\Delta\alpha^k}(\varphi^k) = (\Delta T_{\alpha^k})(\varphi^k)$ ). On peut définir également le  $n$ -courant de Dirac de la façon suivante : pour toute forme volume  $\varphi^n = \varphi(p)vol_p \in C^2_c(M, \Lambda^n)$ , on pose

$$\delta(\varphi^n) := \varphi(0).$$

**Exemple 2.2.1** (En 1 dimension) — Sur  $\mathbb{R}$ , soit maintenant, la fonction de Heaviside  $H_t^0 = 1$  si  $t > 0 \in \mathbb{R}$  et  $H_t^0 = 0$  sinon. Le 0-courant associé à cette fonction est :

$$T_{H^0}(\varphi^0) := \int_{\mathbb{R}} H_t^0 \wedge \star\varphi^0(t) = \int_{\mathbb{R}} H_t^0 \wedge (\varphi^0(t)dt) = \int_0^\infty \varphi^0(t)dt,$$

pour tout  $\varphi^0(t) \in C^2_c(\mathbb{R})$ . La dérivée de ce 0-courant agit de la façon suivante

$$\begin{aligned} (dT_{H^0})(\varphi^1) &:= - \int_{\mathbb{R}} H_t^0 \wedge d \star \varphi^1(t) = - \int_{\mathbb{R}} H_t^0 \wedge d\varphi(t) \\ &= - \int_{\mathbb{R}} H_t^0 \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t)dt \\ &= - \int_0^\infty \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t)dt \\ &= \varphi(0) \\ &=: \delta(\varphi^1) \end{aligned}$$

pour tout  $\varphi^1 = \varphi(t)dt \in C^2_c(\mathbb{R}, \Lambda^1)$ . On retrouve le fait que  $(dT_{H^0})(\varphi^1) = \delta(\varphi^1)$ .

**Exemple 2.2.2** (En 2 dimension) — Sur  $\mathbb{R}^2$ , soit maintenant la 1-forme différentielle

$$H^1_{(x,y)} := \frac{1}{2}(-H_y(y)\kappa(x)dx + H_x(x)\kappa(y)dy),$$

où  $H_x$  et  $H_y$  sont les fonctions de Heaviside dans les composantes  $x$  et  $y$  respectivement et  $\kappa$  est le symbole de Kronecker. La dérivée du 1-courant

associé à cette 1-forme différentielle agit de la façon suivante

$$\begin{aligned}
(dT_{H^1})(\varphi^2) &:= \int_{\mathbb{R}^2} H^1(x, y) \wedge d \star \varphi^2(x, y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} H^1(x, y) \wedge d(\varphi(x, y)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} H^1(x, y) \wedge \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) dy \right) \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) H_x(x) \delta(y) + H_y(y) \delta(x) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right) dx \wedge dy \\
&= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, 0) H_x(x) dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, y) H_y(y) dy \\
&= \varphi(0, 0) \\
&=: \delta(\varphi^2)
\end{aligned}$$

pour tout  $\varphi_{(x,y)}^2 = \varphi(x, y) dx \wedge dy \in C_c^2(\mathbb{R}^2, \wedge^2)$  et on voit que  $(dT_{H^1})(\varphi^2) = T_{dH^1}(\varphi^2) = \delta(\varphi^2)$ .

**Exemple 2.2.3** (En dimension quelconque) — La fonction de Heaviside peut se généraliser en dimension  $n$  comme étant une  $(n - 1)$ -forme différentielle de la forme

$$H_x^{n-1} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} H_i(x_i) \prod_{j \neq i} \kappa(x_j) dx_1 \wedge \cdots \wedge \hat{dx}_i \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

## 3 LA CONVERGENCE GÉOMÉTRIQUE À DEUX ÉCHELLES

### 3.1 Introduction à la convergence à deux échelles

La *convergence à deux échelles* initiée par Nguetseng [77] et reprise par Allaire [76] permet d'établir des résultats de convergence pour une suite de fonctions  $(u^\epsilon)_{\epsilon > 0}$  définie dans un ouvert  $W$  de  $\mathbb{R}^n$  et présentant des oscillations de période  $\epsilon$  vers une fonction  $u_0(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  définie sur  $W \times \mathbb{R}^n$  et périodique en  $\mathbf{y}$ .

Le principe est le suivant : on fixe la période et on a  $u^\epsilon$  qui est solution d'une équation de la forme

$$L^\epsilon u^\epsilon = f,$$

sur l'ouvert  $W$  avec  $L^\epsilon$  est un opérateur différentiel présentant des oscillations de période  $\epsilon$  et  $f$  un terme source indépendant de  $\epsilon$ . On peut ajouter

également des conditions au bords appropriées. On dira alors que la suite de fonction  $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$  dans  $L^r(W)$  pour  $r \in ]1, +\infty]$  converge à deux échelles vers une fonction  $U$  dans l'espace  $L^r(W, L^r_{per}(Y))$  si pour toute fonction  $\psi \in C_c^\infty(W, C^\infty_{per}(Y))$ , on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_W u^\epsilon(\mathbf{x}) \psi\left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{x}}{\epsilon}\right) d\mathbf{x} = \int_Y \int_W U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y}.$$

$U$  est appelé la limite à deux échelles de  $u^\epsilon$  dans  $L^r(W, L^r_{per}(Y))$ .

De même, on dira que  $u^\epsilon$  converge fortement à deux échelles vers  $U$  si on a

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|u^\epsilon - U(\cdot, \frac{\cdot}{\epsilon})\|_{L^r(W)} = 0.$$

G. Nguetseng [77] et Allaire [76] ont établi un critère de convergence à deux échelles qui sera très utile pour établir un système d'équations différentielles vérifié par la limite deux échelles ou la limite faiblement\* de la suite  $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$  :

**Théorème 3.1** — Soit  $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$  une suite bornée indépendamment de  $\epsilon$  dans  $L^r(W)$ . Il existe alors une fonction  $U$  dans  $L^r(W, L^r_{per}(Y))$  et une sous suite de  $(u^\epsilon)_{\epsilon>0}$ , noté  $u^{\chi(\epsilon)}$  qui converge à deux échelles vers  $U$ . De plus,  $u^{\chi(\epsilon)}$  converge faiblement\* dans  $L^r(W)$  vers la fonction  $u$  définie par

$$\mathbf{x} \longrightarrow u(\mathbf{x}) = \int_Y U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}.$$

E. Frénod, E. Sonnendrücker [54, 62, 75], D. Han-Kwan [12], A. Mouton [7] et bien d'autres ont utilisé ces outils dans le cadre de l'équation de Vlasov-Poisson. Pak [10] a établi ces résultats dans le cadre de la géométrie différentielle et donc sur des variétés différentielles. Il serait donc intéressant de travailler sur la convergence à deux échelles dans le cadre de la géométrie différentielle et dans le cadre de l'équation de Vlasov.

## 3.2 Introduction à la convergence géométrique à deux échelles

Le point de vue géométrique pour la convergence à deux échelles a été développé par Pak [10]. Mais avant d'entrer dans le vif du sujet on va faire quelques observations.

Soient  $M$  une variété riemannienne de dimension  $n$  et  $Y$  une variété riemannienne de dimension  $n$ , on peut définir des formes différentielles qui sont des  $k$ -formes sur  $M$  et des  $l$ -formes sur  $Y$  :

$$\begin{aligned} \omega^{k,l} : M \times Y &\longrightarrow \bigwedge^k(T^*M) \times \bigwedge^l(T^*Y) \\ (p, q) &\longmapsto (p, q, \omega_{(p,q)}^{k,l}) \end{aligned}$$

Qui peut également se voir de la manière suivante

$$\begin{aligned} \omega^{k,l} : M &\longrightarrow \{\wedge^k(T^*M) \rightarrow \{Y \rightarrow \wedge^l(T^*Y)\}\} \\ p &\longmapsto (p, \omega_{(p,\cdot)}^{k,l}) \end{aligned}$$

$L^r(M, \wedge^k L^s(Y, \wedge^l))$  représente l'ensemble des  $k$ -formes différentielles  $L^r$  sur  $M$  et  $l$ -formes différentielles  $L^s$  sur  $Y$  avec  $r, s \in [1, +\infty]$ . Pour illustrer cette notation, on donne un exemple.  $\alpha^{k,l} \in L^r(M, \wedge^k L^s(Y, \wedge^l))$  a pour forme

$$\alpha_{(p,q)}^{k,l} = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ j_1 < \dots < j_l}} \alpha_{i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l}(x, y) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_l},$$

pour tout  $p \in M$  et  $q \in Y$  et  $x, y$  les coordonnées locales respectives de  $q$  et  $p$ .

On remarque qu'une  $k$ -forme différentielle sur  $M$  et une 0-forme différentielle sur  $Y$ ,  $\alpha^{k,0}$ ,

$$\alpha_{(p,q)}^{k,0} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(x, y) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \quad (64)$$

peut être identifiée avec une  $k$ -forme différentielle sur  $M$  ou avec une  $n$ -forme différentielle sur  $Y$ ,  $\alpha_{(p,q)}^{k,n}$  de la forme

$$\alpha_{(p,q)}^{k,n} = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1, \dots, i_k}(x, y) dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \wedge dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n \quad (65)$$

Maintenant que l'on a posé les bases, on va pouvoir expliquer la convergence géométrique à deux échelles. Rappelons, tout d'abord que pour  $M$  une variété riemannienne de dimension  $n$  avec bords, et pour  $Y$  une variété riemannienne complète sans bord, on peut identifier  $T_{p_0}M \stackrel{i}{\cong} T_{q_0}Y$  pour  $p_0 \in M/\partial M$  et  $q_0 \in Y$ . On a vu page (xxiii) qu'il existe une géodésique minimisante

$$\gamma_{v_{p_0}}(t) = \exp_{p_0}(t v_{p_0}) \text{ avec } \dot{\gamma}_{v_{p_0}}(0) = v_{p_0} \in T_{p_0}M \text{ et } \gamma_{v_{p_0}}(0) = p_0, \gamma_{v_{p_0}}(1) = p \in \exp_{p_0}(V_0)$$

avec

$$V_0 := \{t v_{p_0} \in T_{p_0}M \mid \text{avec } v_{p_0} \in T_{p_0}M \parallel v_{p_0} \parallel = 1 \text{ et } t \in [0, c(v_{p_0})]\}.$$

On en conclut alors que la géodésique  $\exp_{q_0}(t i(V_0))$  est bien définie, excepté pour les points de  $\partial V_0$  (les cut locus de  $p_0$ ) qui sont, d'ailleurs, de mesure nulle dans  $T_{p_0}M$ . Soient  $p_0 \in M$ ,  $q_0 \in Y$  et un isomorphisme  $i$  tel que



$T_{p_0}M \cong^i T_{q_0}Y$ . À l'aide du théorème de Hopf-Rinow, pour tout point  $q \in Y$ , il existe  $v_{p_0} \in V_0 \subset T_{p_0}M$  tel que  $q = \exp_{p_0} \left( \frac{1}{\epsilon} i(v_{p_0}) \right)$  pour  $\epsilon$  petit. Dans la suite, on notera  $p^\epsilon = \exp_{p_0} \left( \frac{1}{\epsilon} i(v) \right)$  avec  $v \in T_{p_0}M$ .

La convergence géométrique à deux échelles résulte de l'application du théorème de Birkhoff (1931), du théorème de Hopf (1939) et du théorème de Mautner (1957). Le théorème de Birkhoff [11] est le suivant :

**Théorème 3.2** — Soit  $(\Omega, \mu)$  un espace probabilisé et  $\varphi^t$  un flot préservant la mesure, pour  $f \in L^r(\Omega, \mu)$ , on a

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi^t) dt \xrightarrow{+\infty} g.$$

De plus, si le flot  $\varphi^t$  est ergodique, i.e. que tout ensemble invariant par  $\varphi^t$  est soit de mesure nulle soit de complémentaire de mesure nulle, alors on a

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi^t) dt \xrightarrow{+\infty} \int_M f(x) d\mu.$$

Puisque, dans la suite on utilisera le flot géodésique, pour avoir l'unicité de la limite, il va falloir que ce flot soit ergodique. Les théorèmes qui suivent nous donne des conditions sur  $M$  pour que l'on ait l'ergodicité du flot. Le théorème de Hopf [16] est le suivant :

**Théorème 3.3** — Dans une variété riemannienne compacte de volume fini à courbure négative, les flots géodésiques sont ergodiques.

Et le théorème de Mautner [85] :

**Théorème 3.4** — Dans une variété riemannienne symétrique (i.e. pour tout point  $p \in M$ , il existe une involution  $\sigma_p : M \rightarrow M$ ,  $\sigma_p(p) = p$  et  $d\sigma_p(p) = -id$ ), les flots géodésiques sont ergodiques.

Voici quelques exemples de variétés riemanniennes symétriques : les tores, les espaces projectifs, les espaces hyperboliques, les espaces d'Heisenberg,  $Sl(n, \mathbb{R})/SO(n, \mathbb{R})$ , l'espace symétrique quaternion-Kähler (qui est compacte si la *courbure de Ricci* est positive).

De plus, si les variétés vérifiant les conditions des théorèmes 3.3 et 3.4 sont des variétés géodésiquement complètes, on a encore le fait que tout point  $q$  appartenant à ces variétés peut s'écrire sous la forme  $q = p^\epsilon = \exp_{p_0} \left( \frac{1}{\epsilon} i(v_{p_0}) \right)$ .

Afin d'avoir les conditions optimales pour pouvoir utiliser le théorème de Birkhoff, on suppose que  $M$  et  $Y$  sont des variétés riemanniennes de dimension  $n$ , que  $M$  est complet avec bords et que  $Y$  est compacte et vérifie la condition de Mautner ou de Hopf.

**Définition 3.2.1** — Soit  $(\alpha^\epsilon)_{\epsilon>0}$  une suite de  $k$ -formes différentielles dans  $L^r(M, \bigwedge^k)$ , on dit qu'elle converge vers la limite à deux échelles  $\alpha^0 \in L^r(M, \bigwedge^k L^r(Y))$  si pour n'importe quelle  $k$ -forme différentielle  $\psi \in C_0^2(M, \bigwedge^k \Omega^0(Y))$ , on a

$$\langle \alpha^\epsilon, \psi_{(p,p^\epsilon)} \rangle_{L^r(M, \bigwedge^k)} \longrightarrow \langle \alpha^0, \psi \rangle_{L^r(M, \bigwedge^k L^r(Y))},$$

$\alpha^0$  est appelé limite deux échelles  $\alpha^\epsilon$  in  $L^r(M, \bigwedge^k L^r(Y))$ .

On dira que  $\alpha^\epsilon$  converge *fortement à deux échelles* vers  $\alpha^0$  si

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\alpha^\epsilon - \alpha_{(p,p^\epsilon)}^0\|_{L^r(M, \bigwedge^k)} = 0.$$

On peut alors avoir la proposition suivante :

**Proposition .3** — *On suppose que  $M$  et  $Y$  sont des variétés riemanniennes de dimension  $n$ , que  $M$  est complet avec bords et que  $Y$  est compacte et vérifie la condition de Mautner ou de Hopf.*

*Soit  $\psi \in L^2(M, \bigwedge^k C^2(Y))$ , on a*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\psi_{(p,p^\epsilon)}\|_{L^2(M, \bigwedge^k)} = \|\psi\|_{L^2(M, \bigwedge^k L^2(Y))}.$$

*Démonstration.* La variété  $Y$  est une variété riemannienne compacte, donc il existe un recouvrement d'ouverts fini  $(U_i)_{1 \leq i \leq m}$  de cette variété. On note

$$(\psi_n)_{(p,q)} = \sum_{j_1 \leq \dots \leq j_k} \sum_i \psi_{j_1, \dots, j_k}(x, y_i) \chi_i(y) dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_k}$$

pour  $x, y$  les coordonnées locales de  $p$  et  $q$  et  $y_i \in \varphi_i(U_i)$  et  $\chi_i$  la fonction caractéristique sur  $U_i$ . D'après Allaire [76], quand  $n$  tend vers l'infini  $\psi_n$  converge vers  $\psi$  à l'aide du théorème de convergence dominée. On a alors

$$\begin{aligned} \|\psi_{(p,p^\epsilon)}\|_{L^2(M, \bigwedge^k)} - \|\psi\|_{L^2(M, \bigwedge^k L^2(Y))} &= \|\psi_{(p,p^\epsilon)}\|_{L^2(M, \bigwedge^k)} - \|(\psi_n)_{(p,p^\epsilon)}\|_{L^2(M, \bigwedge^k)} \\ &+ \|(\psi_n)_{(p,p^\epsilon)}\|_{L^2(M, \bigwedge^k)} - \|\psi_n\|_{L^2(M, \bigwedge^k L^2(Y))} \\ &+ \|\psi_n\|_{L^2(M, \bigwedge^k L^2(Y))} - \|\psi\|_{L^2(M, \bigwedge^k L^2(Y))}. \end{aligned}$$

Montrons d'abord que  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|(\psi_n)_{(p,p^\epsilon)}\|_{L^2(M, \bigwedge^k)} = \|\psi_n\|_{L^2(M, \bigwedge^k L^2(Y))}$ . Pour le membre à gauche de l'égalité, on obtient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|(\psi_n)_{(p,p^\epsilon)}\|_{L^2(M, \bigwedge^k)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sqrt{\sum_{j_1 \leq \dots \leq j_k} \sum_i \int_M (\psi_{j_1, \dots, j_k}(x, y_i) \chi_i(x^\epsilon))^2 vol_x}.$$

Puisque  $Y$  est géodésiquement complète et que dans  $Y$  le flot géodésique est ergodique, alors  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \chi_i(x^\epsilon) = \text{vol}(U_i)$  d'où

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|(\psi_n)_{(p,p^\epsilon)}\|_{L^2(M,\Lambda^k)} &= \sqrt{\sum_{j_1 \leq \dots \leq j_k} \sum_i \int_M (\psi_{j_1, \dots, j_k}(x, y_i) \text{vol}(U_i))^2 \text{vol}_x} \\ &= \sqrt{\sum_{j_1 \leq \dots \leq j_k} \sum_i \int_M \int_Y (\psi_{j_1, \dots, j_k}(x, y_i) \chi_i(y))^2 \text{vol}_x \text{vol}_y} \\ &= \|\psi_n\|_{L^2(M, \Lambda^k L^2(Y))}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\psi_{(p,p^\epsilon)}\|_{L^2(M, \Lambda^k)} - \|\psi\|_{L^2(M, \Lambda^k L^2(Y))} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\psi_{(p,p^\epsilon)}\|_{L^2(M, \Lambda^k)} - \|(\psi_n)_{(p,p^\epsilon)}\|_{L^2(M, \Lambda^k)} \\ &\quad + \|\psi_n\|_{L^2(M, \Lambda^k L^2(Y))} - \|\psi\|_{L^2(M, \Lambda^k L^2(Y))}. \end{aligned}$$

Puis on fait tendre  $n$  vers l'infini, et on obtient

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|\psi_{(p,p^\epsilon)}\|_{L^2(M, \Lambda^k)} - \|\psi\|_{L^2(M, \Lambda^k L^2(Y))} = 0.$$

□

Grâce à cette proposition, Pak formula le théorème de la convergence à deux échelles avec un paramètre.

**Théorème 3.5** — On suppose que  $M$  et  $Y$  sont des variétés riemanniennes de dimension  $n$ , que  $M$  est complet avec bords et que  $Y$  est compacte et vérifie la condition de Mautner ou de Hopf.

Soit  $(\alpha^\epsilon)$  une suite bornée dans  $L^2([0, +\infty), L^2(M, \Lambda^6))$ , il existe une sous suite  $(\alpha^{\epsilon_j})$  de  $(\alpha^\epsilon)$  et une forme  $\alpha^0 \in L^2([0, +\infty), L^2(M, \Lambda^6 L^2(Y)))$  tel que pour tout  $\psi \in L^2([0, +\infty), C_c^2(M, \Lambda^6 \Omega^6(Y)))$ ,

$$\lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_0^\infty \langle \alpha^{\epsilon_j}(t), \psi_{(p,p^{\epsilon_j})}(t) \rangle_{L^2(M, \Lambda^6)} dt = \int_0^\infty \langle \alpha^0(t), \psi(t) \rangle_{L^2(M, \Lambda^6 L^2(Y))} dt.$$

*Démonstration.* On pose

$$\mathcal{F}^\epsilon(\psi) := \int_0^\infty \langle \alpha^\epsilon(t), \psi_{(p,p^\epsilon)}(t) \rangle_{L^2(M, \Lambda^6)} dt,$$

et comme  $(\alpha^\epsilon)$  est une suite bornée, il existe  $c$  un réel positif tel que

$$\|\alpha^\epsilon\|_{L^2([0, +\infty), L^2(M, \Lambda^6))} \leq c.$$

On a alors

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}^\epsilon(\psi)| &\leq \int_0^\infty \|\alpha^\epsilon\|_{L^2(M, \Lambda^6)} \|\psi_{(p, p^\epsilon)}(t)\|_{L^2(M, \Lambda^6)} dt \\ &\leq c \int_0^\infty \|\psi\|_{L^2(M, \Lambda^6 \Omega^6(Y))} dt \end{aligned}$$

On a alors  $\mathcal{F}^\epsilon \in (L^2([0, +\infty), L^2(M, \Lambda^6)))'$  et donc il existe une sous suite telle que  $\mathcal{F}^{\epsilon_j}$  converge vers  $\mathcal{F}^0 \in (L^2([0, +\infty), L^2(M, \Lambda^6)))'$ . De plus comme,  $\|\psi_{(p, p^\epsilon)}(t)\|_{L^2(M, \Lambda^6)} \leq \|\psi(t)\|_{L^2(M, \Lambda^6 \Omega^6(Y))}$ , en utilisant le théorème de convergence dominée on obtient

$$\mathcal{F}^0(\psi) = \lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} |\mathcal{F}^{\epsilon_j}(\psi)| \leq c \int_0^\infty \limsup_{\epsilon_j \rightarrow 0} \|\psi(t)\|_{L^2(M, \Lambda^6)} = c \int_0^\infty \|\psi(t)\|_{L^2(M, \Lambda^6 \Omega^6(Y))} dt.$$

À l'aide du théorème de Riesz, on en déduit qu'il existe  $\alpha^0 \in L^2([0, +\infty), L^2(M, \Lambda^6 L^2(Y)))$  telle que

$$\mathcal{F}^0(\psi) = \int_0^\infty \langle \alpha^0(t), \psi(t) \rangle_{L^2(M, \Lambda^6 L^2(Y))} dt,$$

pour tout  $\psi \in L^2([0, +\infty), C_c^2(M, \Lambda^6 \Omega^6(Y)))$ . D'où

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_0^\infty \langle \alpha^{\epsilon_j}(t), \psi_{(p, p^{\epsilon_j})}(t) \rangle_{L^2(M, \Lambda^6)} dt &= \lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \mathcal{F}^{\epsilon_j}(\psi) \\ &= \mathcal{F}^0(\psi) \\ &= \int_0^\infty \langle \alpha^0(t), \psi(t) \rangle_{L^2(M, \Lambda^6 L^2(Y))} dt. \end{aligned}$$

□

Dans la suite, on ne pourra pas appliquer directement ce théorème car on veut effectuer la convergence à deux échelles en temps (et non en espace) comme l'ont fait Frénod et Sonnendrücker pour les équations de Vlasov-Poisson [54, 62]. Pour ce faire, on adapte ce théorème à notre problème. Par hypothèse, la variété  $Y$  doit être une variété symétrique compacte de même dimension que la variété temporelle i.e. de dimension 1. Autrement dit,  $Y$  correspond au cercle  $S^1$  (à difféomorphisme près). On obtient alors le théorème suivant :

**Théorème 3.6** — Soit  $(\alpha^\epsilon)$  une suite bornée dans  $L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^6))$ , où  $T$  peut être égale à  $+\infty$ . Il existe une sous suite  $(\alpha^{\epsilon_j})$  de  $(\alpha^\epsilon)$  et  $\alpha^0 \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(M, \Lambda^6))$ , telle que, pour tout  $\psi \in L^2([0, T] \times S^1, C_c^2(M, \Lambda^6))$  on ait

$$\lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \int_0^T \langle \alpha^{\epsilon_j}(t), \psi(t, t^\epsilon) \rangle_{L^2(M, \Lambda^6)} dt = \int_0^T \int_{S^1} \langle \alpha^0(t, s), \psi(t, s) \rangle_{L^2(M, \Lambda^6)} ds dt,$$

avec  $t^\epsilon = \exp_t(\frac{1}{\epsilon}i(v))$  pour  $v \in T_t[0, T)$ , et  $i$  un isomorphisme tel qu'il existe  $q_0$  tel que  $T_t[0, T) \xrightarrow{i} T_{q_0}Y$ .

Ce théorème sera utilisé plus tard dans la section suivante. On peut remarquer, qu'on aurait pu les énoncer en utilisant les espaces  $L^\infty([0, T), L^2(M, \bigwedge^6))$  et  $L^1([0, T), L^2(M, \bigwedge^6))$ .

De la même manière que pour la convergence à deux échelles au sens classique, on a une proposition qui nous renseigne sur la convergence géométrique à deux échelles de la dérivée d'une suite qui peut être également adaptée pour la convergence à deux échelles en temps.

**Proposition .4** — *On suppose que les suites  $\alpha^\epsilon \in L^2(M, \bigwedge^k)$  et  $d\alpha^\epsilon \in L^2(M, \bigwedge^{k+1})$  sont bornées.*

*Alors, il existe une sous suite  $\alpha^{\epsilon_j}$  de  $\alpha^\epsilon$  telle que  $\alpha^{\epsilon_j}$  converge à deux échelles vers  $\alpha^0$  dans  $L^2(M, \bigwedge^k L^2(Y))$  et  $d\alpha^{\epsilon_j}$  converge à deux échelles vers  $d\alpha^0 + d_Y\alpha^1$  dans  $L^2(M, \bigwedge^{k+1} L^2(Y))$  pour  $\alpha^0$  dans  $L^2(M, \bigwedge^k H^{1,d}(Y))$  et  $\alpha^1 \in L^2(M, \bigwedge^{k+1} H^{1,d}(Y))$ . De plus,  $\alpha^0 \in \ker(d_Y)$ .*

Afin de démontrer cette proposition, on utilise le théorème de compacité 3.6, d'où :

*Démonstration.* Soit  $\alpha^{\epsilon_j}$  la sous suite de  $\alpha^\epsilon$  et  $d\alpha^{\epsilon_j}$  la sous suite de  $d\alpha^\epsilon$  telle que

$$\begin{aligned} \langle \alpha^{\epsilon_j}, \psi_{(p,p^\epsilon)} \rangle_{L^2(M, \bigwedge^k)} &\longrightarrow \langle \alpha^0, \psi \rangle_{L^2(M, \bigwedge^k L^2(Y))} \\ \langle d\alpha^{\epsilon_j}, \phi_{(p,p^\epsilon)} \rangle_{L^2(M, \bigwedge^{k+1})} &\longrightarrow \langle \eta, \phi \rangle_{L^2(M, \bigwedge^{k+1} L^2(Y))} . \end{aligned}$$

avec  $\psi \in C_c^2(M, \bigwedge^k \Omega^0(Y))$ ,  $\phi \in C_c^2(M, \bigwedge^{k+1} \Omega^0(Y))$ ,  $\alpha^0 \in L^2(M, \bigwedge^k L^2(Y))$  et  $\eta \in L^2(M, \bigwedge^{k+1} L^2(Y))$ . Or

$$\langle d\alpha^{\epsilon_j}, \phi_{(p,p^\epsilon)} \rangle_{L^2(M, \bigwedge^{k+1})} = \langle \alpha^{\epsilon_j}, d_M^* \phi_{(p,p^\epsilon)} \rangle_{L^2(M, \bigwedge^k)} + \frac{1}{\epsilon} \langle \alpha^{\epsilon_j}, d_Y^* \phi_{(p,p^\epsilon)} \rangle_{L^2(M, \bigwedge^k)},$$

où  $d_M^*$  et  $d_Y^*$  correspond à la dérivée co-extérieure sur  $M$  et sur  $Y$  respectivement. Alors, on obtient

$$\langle \alpha^{\epsilon_j}, d_M^* \phi_{(p,p^\epsilon)} \rangle_{L^2(M, \bigwedge^k)} = \langle d\alpha^{\epsilon_j}, \phi_{(p,p^\epsilon)} \rangle_{L^2(M, \bigwedge^{k+1})} - \frac{1}{\epsilon} \langle \alpha^{\epsilon_j}, d_Y^* \phi_{(p,p^\epsilon)} \rangle_{L^2(M, \bigwedge^k)} .$$

Mais pour  $\phi \in C_c^2(M, \bigwedge^{k+1} \Omega^0(Y))$  telle que  $d_Y^* \phi = 0$ , on a

$$\langle \alpha^{\epsilon_j}, d_M^* \phi_{(p,p^\epsilon)} \rangle_{L^2(M, \bigwedge^k)} = 0.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\langle \alpha^0, d_M^* \phi \rangle_{L^2(M, \wedge^k L^2(Y))} &= \lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \langle \alpha^{\epsilon_j}, d_M^* \phi_{(p, p^\epsilon)} \rangle_{L^2(M, \wedge^k)} \\
&= \lim_{\epsilon_j \rightarrow 0} \langle d\alpha^{\epsilon_j}, \phi_{(p, p^\epsilon)} \rangle_{L^2(M, \wedge^{k+1})} = \langle \eta, \phi \rangle_{L^2(M, \wedge^{k+1} L^2(Y))},
\end{aligned}$$

pour tout  $\phi \in C_c^2(M, \wedge^{k+1} \Omega^0(Y))$  telle que  $d_Y^* \phi = 0$ , donc

$$\langle \eta - d\alpha^0, \phi \rangle_{L^2(M, \wedge^{k+1} L^2(Y))} = 0,$$

car  $d_Y \alpha^0 = 0$ . Or, puisque pour  $\alpha^1 \in L^2(M, \wedge^{k+1} H^{1,d}(Y))$  on a  $\langle d_Y \alpha^1, \phi \rangle_{L^2(M, \wedge^k L^2(Y))} = 0$ , alors il existe  $\alpha^1 \in L^2(M, \wedge^{k+1} H^{1,d}(Y))$  telle que

$$\eta - d\alpha^0 = d_Y \alpha^1.$$

□

## 4 HOMOGÉNÉISATION DE L'ÉQUATION DE VLASOV

### 4.1 Avec un champ magnétique fort

Pour appliquer la convergence à deux échelles sur l'équation de Vlasov, on s'inspire des articles [54, 62]. Soit  $M$  l'espace de dimension 3, on se place dans l'espace des phases découpé du temps :

$$P = T^*M = \{(x, v) | x \in M, v \in T_x^*M\}.$$

Dans cet espace, l'équation de Vlasov à homogénéiser est la suivante

$$\frac{\partial {}^6f^\epsilon}{\partial t}(t) + \mathcal{L}_{\tau^\epsilon} {}^6f^\epsilon(t) = 0,$$

avec  $\tau^\epsilon$  le champ de vecteurs égale à

$$v \frac{\partial}{\partial x} + \left( i_{\frac{\partial}{\partial x}} {}^1\mathbf{E}^\epsilon + i_{\frac{\partial}{\partial x}} i_v \frac{\partial}{\partial x} \left( {}^2\mathbf{B}^\epsilon + \frac{\mathcal{M}}{\epsilon} \right) \right) \frac{\partial}{\partial v},$$

où  $\mathcal{M}$  est une 2-forme différentielle constante et  ${}^6f^\epsilon(t)$  une forme volume sur  $P$ , plus précisément  ${}^6f^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(P, \wedge^6))$ . On suppose que

- ${}^6f^\epsilon(0)$  est bornée dans  $L^2(P, \wedge^6)$ ,

- que  ${}^1\mathbf{E}^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^1))$  converge fortement vers  ${}^1\mathbf{E}$  dans  $L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^1))$ ,
- et  ${}^2\mathbf{B}^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^2))$  vers  ${}^2\mathbf{B}$  dans  $L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^2))$ .

Avec ceci, on peut alors montrer que la norme de  ${}^6f^\epsilon$  est conservée au cours du temps i.e qu'il existe une constante  $c \geq 0$  telle que  $\|{}^6f^\epsilon\|_{L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))} \leq c$ . Pour ce faire, il suffit de multiplier l'équation de Vlasov par  $\star {}^6f^\epsilon$  et de l'intégrer sur l'espace  $P$ . Après calculs, on obtient alors que la dérivée temporelle de la norme de  ${}^6f^\epsilon$  dans  $L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$  est égale à 0.

Ce résultat permet d'appliquer le théorème 3.6 page 40. On a alors l'existence d'une sous suite de  ${}^6f^\epsilon$ , encore notée  ${}^6f^\epsilon$  et d'une 6-forme différentielle  ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$  telle que pour tout  ${}^6\psi \in L^2([0, T] \times S^1, C_c^2(P, \Lambda^6))$ , on ait

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle {}^6f^\epsilon, {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))} dt = \langle {}^6F, {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))}.$$

Calculons alors le produit scalaire entre l'équation de Vlasov et  ${}^6\psi_q^\epsilon = {}^6\psi_q(t, t^\epsilon)$  sur l'espace  $[0, T] \times P$  ( $t^\epsilon$  est expliqué page 40) et après quelques calculs, on obtient

$$\langle {}^6f^\epsilon, \frac{\partial {}^6\psi^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial {}^6\psi^\epsilon}{\partial s} + \mathcal{L}_{\tau^\epsilon} {}^6\psi^\epsilon \rangle_{L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6f^\epsilon(0), {}^6\psi^\epsilon(0) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)}. \quad (66)$$

Pour pouvoir passer à la limite, on multiplie cette équation par  $\epsilon$ , ce qui nous donne

$$\langle {}^6F, \frac{\partial {}^6\psi^\epsilon}{\partial s} + \mathcal{L}_{\left(i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} i_v \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{M}\right) \frac{\partial}{\partial v}} {}^6\psi^\epsilon \rangle_{L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = 0,$$

avec  ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$ . De plus, d'après les articles de N'Guetseng [77] et Allaire [76], on a

$$\int_{S^1} {}^6F_q(t, s) ds = {}^6f_q(t).$$

Autrement dit, on a

$$\frac{\partial {}^6F}{\partial s} + \mathcal{L}_{\left(i \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} i_v \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{M}\right) \frac{\partial}{\partial v}} {}^6F = 0 \quad \text{dans } (L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6)))'. \quad (67)$$

Ce qui signifie que  ${}^6F$  est constante le long des caractéristiques. Les caractéristiques ont un mouvement hélicoïdale autour du vecteur magnétique  $\mathcal{M}$ . On va définir alors une transformation  $\varphi$  qui laisse invariant la projection de

la vitesse  $v$  sur  $\mathcal{M}$  et effectue une rotation d'angle  $s$  pour la projection sur le plan orthogonal à  $\mathcal{M}$  :

$$\varphi(v, s) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \cos(s) - v_3 \sin(s) \\ v_2 \sin(s) + v_3 \cos(s) \end{pmatrix}.$$

On peut voir alors qu'en prenant en compte la condition de périodicité, Frénod et Sonnendrücker [75] ont montré le lemme suivant

**Lemme 4.1** — On a  ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$  qui satisfait l'équation

$$\frac{\partial {}^6F}{\partial s} + \mathcal{L} \left( i_{\frac{\partial}{\partial x}} i_v \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M} \right) \frac{\partial}{\partial v} {}^6F = 0 \quad \text{dans } (L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6)))',$$

si et seulement si il existe  ${}^6G \in L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$  tel que

$${}^6F_q(t, s) = (\varphi^* {}^6G)_q(t, s).$$

On montre que pour  ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$  et  ${}^6G \in L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$  vérifiant le lemme précédent, l'équation vérifiée par  ${}^6G$  est

$$\frac{\partial {}^6G}{\partial t} + \mathcal{L} \left( u_{\parallel} \frac{\partial}{\partial x} + \left( i_{\frac{\partial}{\partial x}} {}^1\mathbf{E}_{\parallel} + i_{\frac{\partial}{\partial x}} i_u \frac{\partial}{\partial x} {}^2\mathbf{B}_{\parallel} \right) \frac{\partial}{\partial u} \right) {}^6G = 0, \quad (68)$$

avec  ${}^6G(0) = \frac{{}^6f(0)}{\text{vol}(S^1)} = \frac{{}^6f(0)}{2\pi}$  et  $u_{\parallel} = u_1 \mathbf{e}^1$  la projection dans la direction du champ magnétique  $\mathcal{M}$ . La solution de cette équation est unique. On a alors pour  ${}^6\psi \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$  l'existence de  ${}^6\phi \in L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$  vérifiant  ${}^6\psi_q(t, s) = (\varphi^* {}^6\phi)_q(t, s)$  et tel que l'on a

$$\frac{\partial {}^6\psi}{\partial s} + \mathcal{L} \left( i_{\frac{\partial}{\partial x}} i_v \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{M} \right) \frac{\partial}{\partial v} {}^6\psi = 0.$$

Pour une 6-forme test  ${}^6\psi^\epsilon$ , on a vu page 43 que l'on avait

$$\langle {}^6f^\epsilon, \frac{\partial {}^6\psi^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial {}^6\psi^\epsilon}{\partial s} + \mathcal{L}_{\tau^\epsilon} {}^6\psi^\epsilon \rangle_{L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6f^\epsilon(0), {}^6\psi^\epsilon(0) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)}.$$

Donc en passant à la limite deux échelles et en utilisant le fait que  ${}^1\mathbf{E}^\epsilon$  et  ${}^2\mathbf{B}^\epsilon$  converge fortement, on en déduit

$$\langle {}^6F, \frac{\partial {}^6\psi}{\partial t} + \mathcal{L}_{\tau} {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6F(0), {}^6\psi(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)},$$



avec  $\tau = v \frac{\partial}{\partial x} + \left( i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E} + i \frac{\partial}{\partial x} i_v \frac{\partial}{\partial x} {}^2\mathbf{B} \right) \frac{\partial}{\partial v}$ . On utilise alors le lemme 4.1 et on a

$$\langle \varphi^*({}^6G), \frac{\partial \varphi^*({}^6\phi)}{\partial t} + \mathcal{L}_\tau \varphi^*({}^6\phi) \rangle_{L^2([0,T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle \varphi^*({}^6G(0)), \varphi^*({}^6\phi)(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)}.$$

Or puisque  $\mathcal{L}_\tau \varphi^*({}^6\phi) = \varphi^*(\mathcal{L}_{(\varphi^*)^{-1}(\tau)} {}^6\phi)$  et que  $\frac{\partial \varphi^*({}^6\phi)}{\partial t} = \varphi^*\left(\frac{\partial {}^6\phi}{\partial t}\right)$ , alors on peut simplifier cette égalité et on a :

$$\langle {}^6G, \frac{\partial {}^6\phi}{\partial t} + \mathcal{L}_{(\varphi^*)^{-1}(\tau)} {}^6\phi \rangle_{L^2([0,T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6G(0), {}^6\phi(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)},$$

avec

$$(\varphi^*)^{-1}(\tau) = \tilde{u} \frac{\partial}{\partial x} + \left( i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E} + i \frac{\partial}{\partial x} i_{\tilde{u}} \frac{\partial}{\partial x} {}^2\mathbf{B} \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{u}},$$

$$\text{où } \tilde{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \cos(s) + u_3 \sin(s) \\ -u_2 \sin(s) + u_3 \cos(s) \end{pmatrix} \text{ et } \frac{\partial}{\partial \tilde{u}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u_1} \\ \cos(s) \frac{\partial}{\partial u_2} + \sin(s) \frac{\partial}{\partial u_3} \\ -\sin(s) \frac{\partial}{\partial u_2} + \cos(s) \frac{\partial}{\partial u_3} \end{pmatrix}.$$

De plus, comme  ${}^6G$  et  ${}^6\phi$  ne dépendent pas de  $s$ , on peut intégrer sur  $S^1$  et on obtient

$$\langle {}^6G, \frac{\partial {}^6\phi}{\partial t} + \mathcal{L}_{\tilde{\tau}} {}^6\phi \rangle_{L^2([0,T], L^2(P, \Lambda^6))} = - \frac{1}{2\pi} \langle {}^6G(0), {}^6\phi(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)},$$

avec

$$\tilde{\tau} = u_1 \cdot \frac{\partial}{\partial x} + \left( (i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E})_1 + i \frac{\partial}{\partial x} i_{\tilde{u}} \frac{\partial}{\partial x} (B_x dy \wedge dz) \right) \frac{\partial}{\partial u}.$$

On en conclut, à l'aide de l'unicité de la solution de l'équation (68), que la suite  ${}^6f^\epsilon$  converge à deux échelles vers  ${}^6F$  et comme on a l'égalité

$$\int_{S^1} {}^6F_q(t, s) ds = {}^6f_q(t),$$

${}^6F$  converge faiblement à deux échelles vers  ${}^6f$ . On a alors obtenu une formulation faible de (68) et on a démontré le théorème suivant :

**Théorème 4.1** — On suppose que

- ${}^6f^\epsilon(0)$  est bornée dans  $L^2(P, \Lambda^6)$ ,
- que  ${}^1\mathbf{E}^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^1))$  converge fortement vers  ${}^1\mathbf{E}$  dans  $L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^1))$ ,
- et  ${}^2\mathbf{B}^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^2))$  vers  ${}^2\mathbf{B}$  dans  $L^2([0, T], L^2(M, \Lambda^2))$ .

Sous ces conditions on peut extraire une sous suite  ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$  de  ${}^6f^\epsilon$  solution de

$$\frac{\partial {}^6F}{\partial t} + \mathcal{L}_{u \frac{\partial}{\partial x} + \left( i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E}_\parallel + i \frac{\partial}{\partial x} i_u \frac{\partial}{\partial x} {}^2\mathbf{B}_\parallel \right) \frac{\partial}{\partial u}} {}^6F = 0,$$

$$\text{avec } {}^6F(0) = \frac{{}^6f(0)}{\text{vol}(S^1)} = \frac{{}^6f(0)}{2\pi}.$$

## 4.2 Avec un champ magnétique et électrique fort

On homogénéise l'équation de Vlasov avec un champ magnétique et électrique fort :

$$\frac{\partial {}^6f^\epsilon}{\partial t}(t) + \mathcal{L}_{\tau^\epsilon} {}^6f^\epsilon(t) = 0,$$

avec  $\tau^\epsilon$  le champ de vecteurs égale à

$$v \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial x} \left( {}^1\mathbf{E}^\epsilon + \frac{\mathcal{N}}{\epsilon} + i_{v \frac{\partial}{\partial x}} \left( {}^2\mathbf{B}^\epsilon + \frac{\mathcal{M}}{\epsilon} \right) \right) \frac{\partial}{\partial v},$$

où  $\mathcal{M}$  est une 2-forme différentielle constante,  $\mathcal{N}$  une 1-forme différentielle constante et  ${}^6f^\epsilon(t)$  une forme volume sur  $P$ , plus précisément  ${}^6f^\epsilon \in L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$ . On suppose que l'on a les mêmes conditions initiales qu'à la section précédente. En procédant de la même manière que précédemment, on a l'existence d'une sous suite de  ${}^6f^\epsilon$ , encore notée  ${}^6f^\epsilon$  et d'une 6-forme différentielle  ${}^6F \in L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))$  telle que pour tout  ${}^6\psi \in L^2([0, T] \times S^1, C_c^2(P, \Lambda^6))$ , on ait

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle {}^6f^\epsilon, {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))} dt = \langle {}^6F, {}^6\psi \rangle_{L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))}.$$

On effectue le produit scalaire de l'équation de Vlasov avec  ${}^6\psi_q^\epsilon = {}^6\psi_q(t, t^\epsilon)$ , on multiplie par  $\epsilon$  puis on passe à la limite. On obtient alors l'équation de contrainte

$$\frac{\partial {}^6F}{\partial s} + \mathcal{L}_{i \frac{\partial}{\partial x} (\mathcal{N} + i_{v \frac{\partial}{\partial x}} \mathcal{M}) \frac{\partial}{\partial v}} {}^6F = 0 \quad \text{dans } (L^2([0, T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6)))'. \quad (69)$$

Cette équation signifie que  ${}^6F$  est constante le long de la caractéristique :

$$\frac{dV}{ds} = i \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{N} + i \frac{\partial}{\partial x} i_{v \frac{\partial}{\partial x}} \mathcal{M}.$$

On va définir alors une transformation  $\varphi$  :

$$\varphi(v, s) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \cos(s) - (v_3 + 1) \sin(s) \\ v_2 \sin(s) + (v_3 + 1) \cos(s) - 1 \end{pmatrix}.$$

Alors il existe  ${}^6G \in L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))$  tel que l'on ait

$${}^6F_q(t, s) = (\varphi^* {}^6G)_q(t, s).$$

De plus, pour une 6-forme test  ${}^6\psi^\epsilon$ , on a vu page 43 que l'on avait

$$\langle {}^6f^\epsilon, \frac{\partial {}^6\psi^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial {}^6\psi^\epsilon}{\partial s} + \mathcal{L}_{\tau^\epsilon} {}^6\psi^\epsilon \rangle_{L^2([0, T], L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6f^\epsilon(0), {}^6\psi^\epsilon(0) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)}.$$

Donc en passant à la limite deux échelles et en utilisant le fait que  ${}^1\mathbf{E}^\epsilon$  et  ${}^2\mathbf{B}^\epsilon$  converge fortement, on en déduit

$$\langle {}^6F, \frac{\partial {}^6\psi}{\partial t} + \mathcal{L}_\tau {}^6\psi \rangle_{L^2([0,T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6F(0), {}^6\psi(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)},$$

$$\text{avec } \tau = v \frac{\partial}{\partial x} + \left( i \frac{\partial}{\partial x} {}^1\mathbf{E} + i \frac{\partial}{\partial x} i_v \frac{\partial}{\partial x} {}^2\mathbf{B} \right) \frac{\partial}{\partial v}.$$

Pour obtenir l'équation vérifiée par  ${}^6G$ , on utilise la formule ci-dessus et on injecte les expressions de  ${}^6F$  et de  ${}^6\psi$  qui font apparaître le changement de coordonnées  $\varphi^*$ . On a

$$\langle \varphi^*({}^6G), \frac{\partial \varphi^*({}^6\phi)}{\partial t} + \mathcal{L}_\tau \varphi^*({}^6\phi) \rangle_{L^2([0,T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle \varphi^*({}^6G(0)), \varphi^*({}^6\phi)(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)}.$$

Ce qui se simplifie par

$$\langle {}^6G, \frac{\partial {}^6\phi}{\partial t} + \mathcal{L}_{(\varphi^*)^{-1}(\tau)} {}^6\phi \rangle_{L^2([0,T] \times S^1, L^2(P, \Lambda^6))} = - \langle {}^6G(0), {}^6\phi(0, 0, \cdot, \cdot) \rangle_{L^2(P, \Lambda^6)},$$

avec

$$(\varphi^*)^{-1}(\tau) = \tilde{u} \frac{\partial}{\partial x} + \left( i \frac{\partial}{\partial x_1} {}^1\mathbf{E} - i \frac{\partial}{\partial x_1} i_{\frac{\partial}{\partial x_3}} {}^2\mathbf{B} + i \frac{\partial}{\partial x} i_{\tilde{u}} \frac{\partial}{\partial x} {}^2\mathbf{B}_1 dy \wedge dz \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{u}},$$

$$\text{où } \tilde{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ et } \tilde{u} \frac{\partial}{\partial x} = u_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + (u_3 + 1) \frac{\partial}{\partial u_3} \text{ et } {}^6G(0) = \frac{1}{2\pi} {}^6f(0).$$

Maintenant, on peut en déduire l'équation satisfait par la limite faible  ${}^6f$  en utilisant la relation entre  ${}^6F$  et  ${}^6f$ . On obtient, pour  $\mathcal{M} = dy \wedge dz$  et  $\mathcal{N} = dy$ , que la limite faible étoile  $f$  de la sous suite satisfaisant l'équation de Vlasov est solution de

$$\frac{\partial {}^6f}{\partial t} + \mathcal{L}_{\tilde{\tau}} {}^6f = 0,$$

$$\text{avec } \tilde{\tau} = \tilde{u} \frac{\partial}{\partial x} + \left( i \frac{\partial}{\partial x_1} {}^1\mathbf{E} - i \frac{\partial}{\partial x_1} i_{\frac{\partial}{\partial x_3}} {}^2\mathbf{B} + i \frac{\partial}{\partial x} i_{\tilde{u}} \frac{\partial}{\partial x} {}^2\mathbf{B}_1 dy \wedge dz \right) \frac{\partial}{\partial \tilde{u}} \text{ et } {}^6f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \varphi^{*6} f(0).$$

On remarque que  $-i \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{N} \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{M} = -dz$  est l'effet drift. On peut retrouver ce terme dans l'approximation centre guide quand on utilise les mêmes hypothèses sur le champ électrique et magnétique.



## Deuxième partie

---

Formes différentielles discrétisées  
à l'aide des formes de Whitney



---

# Discrétisation de l'espace en tétraèdres

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>L'espace primal . . . . .</b>	<b>52</b>
1.1	Le maillage . . . . .	52
1.2	Lien entre les différents éléments du maillage . . .	53
<b>2</b>	<b>L'espace dual . . . . .</b>	<b>54</b>
<b>3</b>	<b>Le raffinement . . . . .</b>	<b>55</b>

---

Dans ce chapitre, on détaille la manière dont on discrétise l'espace. La discrétisation de l'espace  $M$  est faite à l'aide de simplexes [2, 24, 30, 31, 53, 66, 73]. Autrement dit, dans le cas d'un domaine de dimension 3, on utilise des tétraèdres. Dans la première partie, on passera en revue les différents objets que l'on munira d'une orientation et que l'on appellera  $k$ -simplexes si ils sont de dimension  $k$ . On pourra alors observer qu'il existe une application  $\partial^k$  qui permet de passer des  $(k - 1)$ -simplexes aux  $k$ -simplexes. Cette application jouera un rôle important dans la théorie des formes différentielles discrètes. Puis, on construira un maillage dual. Il nous permettra de distinguer les formes différentielles discrètes primales et duales [1, 2, 3]. Pour finir, on expliquera brièvement comment raffiner ce maillage.

# 1 L'ESPACE PRIMAL

## 1.1 Le maillage

Sur un maillage en tétraèdres, on a 4 ensembles :

- L'ensemble  $S_0$  des points : les 0-simplexes.
- L'ensemble  $S_1$  des vecteurs : les 1-simplexes.
- L'ensemble  $S_2$  des faces orientées : les 2-simplexes.
- L'ensemble  $S_3$  des volumes orientés : les 3-simplexes.

Plus généralement, on note  $S_k$  l'ensemble des  $k$ -simplexes et  $|S_k|$  son cardinal. Comme la notion d'orientation est importante en géométrie différentielle, il est nécessaire de donner une orientation ou une direction aux différents éléments du maillage. C'est pourquoi, les vecteurs auront une direction bien déterminée ainsi que tous les  $k$ -simplexes. Voici un tableau récapitulatif des différents éléments que l'on utilisera pour un maillage de dimension 3 ainsi qu'un tétraèdre orienté qui illustre nos propos.

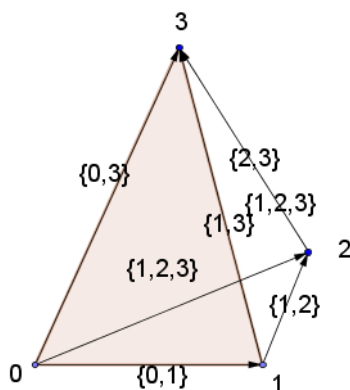


FIG. 3: Le Tétraèdre  $\{0, 1, 2, 3\}$

Simplexes	Dimensions	Ensembles	Notations
0-simplexes	0	$S_0$	$i$
1-simplexes	1	$S_1$	$v = \{i, j\}$
2-simplexes	2	$S_2$	$f = \{i, j, k\}$
3-simplexes	3	$S_3$	$t = \{i, j, k, l\}$



## 1.2 Lien entre les différents éléments du maillage

On peut observer que chaque  $k$ -simplexe peut s'écrire comme une combinaison linéaire de  $(k - 1)$ -simplexes.

**Exemple 1.2.1** — On a :

- le vecteur  $\{0, 3\}$  s'écrit  $\{3\} - \{0\}$  et le vecteur  $\{1, 2\} = \{2\} - \{1\}$ ,
- la face  $\{0, 1, 3\}$  s'écrit  $\{0, 1\} + \{1, 3\} - \{0, 3\}$ ,
- le volume  $\{0, 1, 2, 3\}$  s'écrit  $\{0, 1, 3\} + \{1, 2, 3\} + \{0, 2, 3\} - \{0, 1, 2\}$ .

On peut alors définir des matrices de taille  $|S_k| \times |S_{k-1}|$  qui correspondent à la transformation de  $(k - 1)$ -simplexes en  $k$ -simplexes. Elles sont appelées matrices d'incidences des  $(k - 1)$ -simplexes et sont notées  $\partial^{k-1}$ . Par exemple, en s'aidant de la figure (3) page 52, on voit que les 1-simplexes sont écrits en fonction des 0-simplexes :  $\{i, j\} = j - i$ . La matrice d'incidence des 0-simplexes  $\partial^0$  est alors de la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{\partial^0} \begin{pmatrix} \{0\} \\ \{1\} \\ \{2\} \\ \{3\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{0, 1\} \\ \{1, 2\} \\ \{0, 2\} \\ \{0, 3\} \\ \{1, 3\} \\ \{2, 3\} \end{pmatrix}.$$

La matrice d'incidence des 1-simplexes  $\partial^1$  correspond à :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\partial^1} \begin{pmatrix} \{0, 1\} \\ \{1, 2\} \\ \{0, 2\} \\ \{0, 3\} \\ \{1, 3\} \\ \{2, 3\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{0, 1, 2\} \\ \{1, 2, 3\} \\ \{0, 2, 3\} \\ \{0, 1, 3\} \end{pmatrix}.$$

Et la matrice d'incidence des 2-simplexes devient :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\partial^2} \begin{pmatrix} \{0, 1, 2\} \\ \{1, 2, 3\} \\ \{0, 2, 3\} \\ \{0, 1, 3\} \end{pmatrix} = \{0, 1, 2, 3\}.$$

Les coefficients des matrices d'incidences sont égales à 1,  $-1$  ou 0. De plus, on remarque que l'on a la suite exacte

$$S_0 \xrightarrow{\partial^0} S_1 \xrightarrow{\partial^1} S_2 \xrightarrow{\partial^2} S_3 \xrightarrow{\partial^3} \dots$$

car  $\partial^k \partial^{k-1} = 0$  (voir [1]).

## 2 L'ESPACE DUAL

L'idée est d'associer à un  $k$ -simplexe une cellule duale de dimension  $n - k$ , une  $(n - k)$ -cellule duale où  $n$  est la dimension de l'espace. On note l'espace des  $(n - k)$ -cellules duales par  $S_{n-k}^*$ . Pour des triangles équilatéraux, les cellules duales sont construites en prenant un maillage barycentrique. Par exemple, en dimension 2, le dual d'un 2-simplexe va être son barycentre, le dual d'un 1-simplexe va être le segment joignant les barycentres des deux 2-simplexes adjacents à celui-ci et le dual d'un 0-simplexe vont être la surface décrite par les 1-cellules duales. Pour des triangles non équilatéraux, on pourra utiliser le diagramme de Voronoï afin de construire un maillage dual à la triangulation (de Delaunay). On remarque par ailleurs que le nombre de  $k$ -simplexes est égal à celui  $(n - k)$ -cellules duales. Ce maillage dual conserve la notion d'incidence entre les différentes cellules duales et on a également une suite exacte pour les cellules duales mais en utilisant la transposée des matrices d'incidences  $(\partial^k)^t$  :

$$\dots S_3^* \xleftarrow{(\partial^2)^t} S_2^* \xleftarrow{(\partial^1)^t} S_1^* \xleftarrow{(\partial^0)^t} S_0^*.$$

Voici quelques exemples en 2D et en 3D qui illustrent le passage du maillage primal au maillage dual ainsi que la suite exacte correspondante.

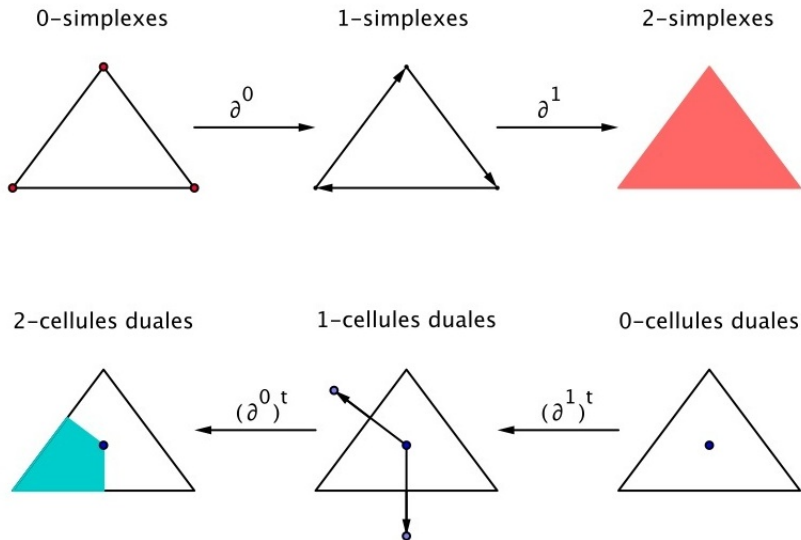


FIG. 4: Exemple en 2D de maillage primal et dual.

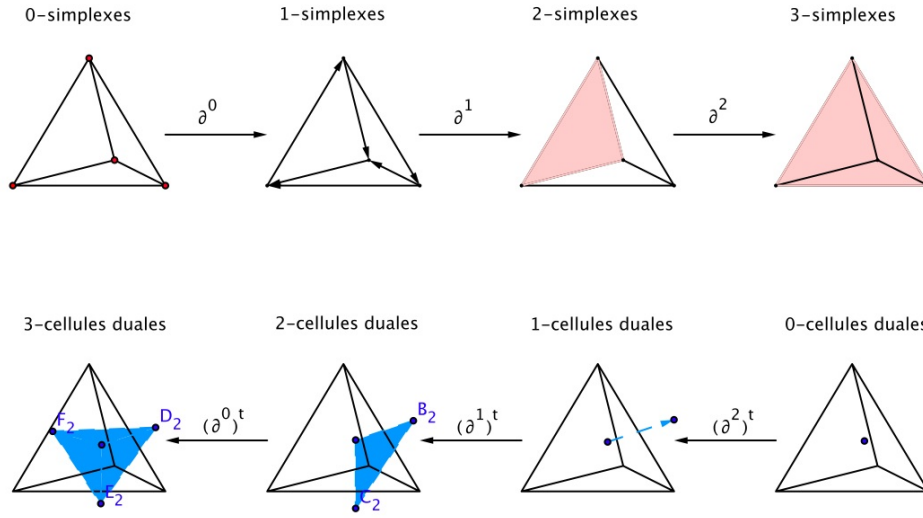


FIG. 5: Exemple en 3- $D$  de maillage primal et dual.

### 3 LE RAFFINEMENT

Pour le raffinement, Rapetti et Bossavit [51, 53] ont défini un multi- $\mathbf{m} = \{m_0, \dots, m_n\}$  où  $n$  correspond à la dimension de l'espace et les  $m_i$  à des entiers naturels. On dira que ce multi- $\mathbf{m}$  est de poids  $m$  si  $m = \sum_{i=0}^n m_i$ . L'ensemble des multi- $\mathbf{m}$  de longueur  $n + 1$  et de poids  $m$  sera noté  $\mathcal{I}(n + 1, m)$ . Il est de cardinal  $\binom{n+m}{n}$ . On a, alors, pour chaque multi- $\mathbf{m} \in \mathcal{I}(n + 1, m)$ , une carte  $\tilde{m}$  qui est une composition d'homothéties successives :

$$\tilde{m} = h\left(\frac{1}{m_0 + 1}, s_0^0\right) \circ h\left(\frac{m_0 + 1}{m_0 + m_1 + 1}, s_1^0\right) \circ h\left(\frac{\sum_{i=0}^{n-1} m_i + 1}{\sum_{i=0}^n m_i + 1}, s_n^0\right),$$

avec  $s_i^0$  les 0-simplexes de l'espace formant un  $n$ -simplexe.

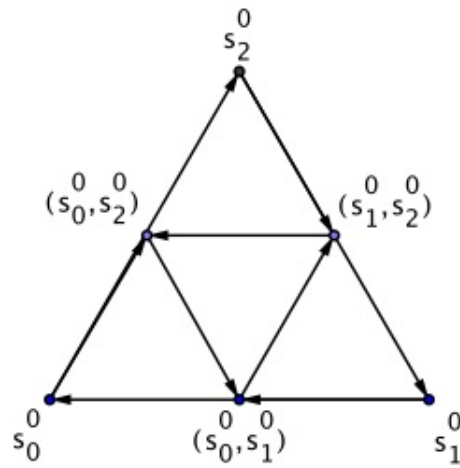
À l'aide de cette application, on va pouvoir définir la notion de  $k$ -petits simplexes. Ceux-ci vont correspondre à l'image des  $k$ -simplexes  $s^k \in S_k$  du maillage par l'application  $\mathbf{m} \in \mathcal{I}(n + 1, m)$ . Ils seront notés dans la suite par  $\tilde{s}^k = \{\mathbf{m}, s^k\}$ .

**Exemple 3.0.2** (en 2D) — Pour un poids  $m = 1$ , on aura 3 multi-indices, à savoir  $\mathbf{m}_0 = (1, 0, 0)$ ,  $\mathbf{m}_1 = (0, 1, 0)$ ,  $\mathbf{m}_2 = (0, 0, 1)$  et donc 3 cartes associées

à ces 3 multi-indices

$$\begin{aligned}\tilde{m}_0 &= h\left(\frac{1}{2}, s_0^0\right) \circ h(1, s_1^0) \circ h(1, s_2^0), \\ \tilde{m}_1 &= h(1, s_0^0) \circ h\left(\frac{1}{2}, s_1^0\right) \circ h(1, s_2^0), \\ \tilde{m}_2 &= h(1, s_0^0) \circ h(1, s_1^0) \circ h\left(\frac{1}{2}, s_2^0\right),\end{aligned}$$

avec  $\{s_0^0, s_1^0, s_2^0\}$  un triangle de l'espace. L'image de ce triangle par les applications  $\tilde{m}_i$  devient :



**FIG. 6:** Exemple de raffinement 2D.

On observe alors que l'on obtient un trou car aucune application ne fait correspondre à ce triangle  $\{s_0^0, s_1^0, s_2^0\}$  le triangle du milieu. De plus, on voit que les 0-petits simplexes ont des multiplicités.

Le problème avec ce raffinement est que le dual du maillage raffiné ne correspond pas au raffiné du maillage dual.

---

# Les $k$ -formes différentielles discrètes et les $k$ -chaines

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>Les formes différentielles discrètes . . . . .</b>	<b>58</b>
1.1	Les formes de Whitney . . . . .	58
1.2	Les formes différentielles discrètes . . . . .	60
<b>2</b>	<b>Les <math>k</math>-chaines et leurs relations avec les <math>k</math>-formes différentielles . . . . .</b>	<b>60</b>
2.1	Les $k$ -chaines . . . . .	60
2.2	Lien entre les $k$ -chaines et les $k$ -formes différen- tielles et mise en évidence d'un diagramme de De Rham . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Les éléments de Whitney d'ordres supérieurs . . .</b>	<b>63</b>

---

La discrétisation des formes différentielles a été introduite pour la première fois par Alain Bossavit [1, 2, 3, 4, 5] suivit par la suite de bien d'autres [24, 30, 31, 53, 66, 73, 58, 100]. Ils utilisent pour cela les fonctions de bases : les formes de Whitney. On travaillera principalement en dimension 3 et on étudiera les formes de Whitney dans ce cadre. Mais si l'on souhaite travailler en dimension supérieure, on peut s'apercevoir qu'il sera aisé de construire les formes de Whitney correspondantes. Pour la discrétisation des formes différentielles, on utilise le fait qu'une  $k$ -forme différentielle peut être intégrée sur un domaine de dimension  $k$  ou sur une  $k$ -chaîne [26, 83, 86]. On va donc définir la notion de  $k$ -chaines i.e de variété discrète et faire en sorte que les  $k$ -formes différentielles discrètes puissent être intégrées dessus. On mettra en évidence un complexe de De Rham pour les  $k$ -chaines et les  $k$ -formes différentielles discrètes et enfin, on expliquera brièvement comment construire des éléments de Whitney d'ordres supérieurs.

# 1 LES FORMES DIFFÉRENTIELLES DISCRÈTES

## 1.1 Les formes de Whitney

Ici, on fait un bref rappel sur les éléments de Whitney. Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer au livre et aux articles de Bossavit.

### 1.1.1 Les éléments de Nœuds : $W^0$

À chaque nœud  $n \in S_0$ , on associe la fonction  $\omega^n$  continue, affine par morceaux telle que

$$\omega^n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = n, \\ 0 & \text{si } x = m \text{ avec } m \neq n. \end{cases}$$

Ces bases sont appelées formes de Whitney de degré 0 et on note cet ensemble  $W^0$ , qui est un espace vectoriel de même dimension que  $S_0$ .

Ces formes de Whitney possèdent les propriétés suivantes :

- elles forment une partition de l'unité i.e que pour tout  $x$  appartenant au domaine on a  $\sum_{n \in S_0} \omega^n(x) = 1$ ,
- $\omega^n$  est continue au passage d'une facette du maillage.
- $W^0 \subset L^2_{grad}$ .
- $\forall \alpha \in W^0 \Rightarrow \alpha(x) = \sum_{n \in S_0} \alpha_n \omega^n$  où  $\alpha_n$  correspond à la valeur de  $\alpha$  en  $n : \alpha(n)$ . Ces valeurs seront nommées les degrés de liberté de  $\alpha$ .

### 1.1.2 Les éléments d'Arêtes : $W^1$

À chaque arête  $a = \{n, m\}$  de l'espace, on associe un champ de vecteurs  $\omega^a(x)$  de la forme :

$$\begin{aligned} \omega^a(x) &= \omega^n(x) \nabla \omega^m(x) - \omega^m(x) \nabla \omega^n(x), \\ &= \sum_{n \in S_0} G_a^n \omega^{a-n}(x) d\omega^n(x). \end{aligned}$$

avec  $G = \partial^0$  la matrice d'incidence définie au chapitre précédent et  $G_a^n$  le coefficient de la matrice  $G$  défini à l'intersection de la colonne concernant le point  $n$  et la ligne concernant le vecteur  $a$ . Ces bases  $\omega^a$  sont appelées formes de Whitney de degré 1 et on note cet ensemble  $W^1$ . C'est un espace vectoriel de même dimension que  $S_1$ .

De plus, on a

- la circulation de  $\omega^a$  le long de l'arête  $a$  vaut 1,
- la partie tangentielle de  $\omega^a$  est continue au passage d'une facette du maillage,

- $W^1 \subset H(rot)$ ,
- $\forall \beta \in W^1 \Rightarrow \beta(x) = \sum_{a \in S_1} \beta_a \omega^a(x)$  avec  $\beta_a = \int_a \beta(x) \cdot \tau_a dx$  où  $\tau_a$  est le vecteur tangent au coté  $a$ . Les valeurs  $\beta_a$  sont appelées les degrés de liberté de  $\beta$ .

### 1.1.3 Les éléments de Faces : $W^2$

À chaque face de l'espace  $f = \{l, n, m\}$ , on associe  $\omega^f$  telle que :

$$\begin{aligned} \omega^f(x) &= 2 \left[ \omega^l(x) \nabla \omega^m(x) \times \nabla \omega^n(x) + \omega^m(x) \nabla \omega^n(x) \times \nabla \omega^l(x) \right. \\ &\quad \left. + \omega^n(x) \nabla \omega^l(x) \times \nabla \omega^m(x) \right] \\ &= \sum_{a \in S_1} R_f^a \omega^{f-a}(x) d\omega^a(x). \end{aligned}$$

avec  $R = \partial^1$  la matrice d'incidence définie au chapitre précédent et  $R_f^a$  est le coefficient de la matrice  $R$  à la  $a$  colonne et la  $f$  ligne. Ces bases  $\omega^f$  sont appelées formes de Whitney de degré 2 et on note cet espace vectoriel de dimension  $|S_2|$ ,  $W^2$ . On a également

- le flux de  $\omega^f$  à travers la facette  $f$  est constant et est égal à 1,
- la partie normale de  $\omega^f$  est continue au passage d'une facette du maillage,
- $W^2 \subset H(div)$ ,
- $\forall \gamma \in W^2 \Rightarrow \gamma(x) = \sum_{f \in S_2} \gamma_f \omega^f(x)$  avec pour degré de liberté  $\gamma_f = \int_f \gamma(x) \cdot n_f dx$  où  $n_f$  est le vecteur normal à la face  $f$ .

### 1.1.4 Les éléments de Volumes : $W^3$

À chaque volume  $t = \{k, l, n, m\}$ , on associe  $\omega^t$  de la forme :

$$\omega^t(x) = \sum_{f \in S_2} D_t^f \omega^{t-f}(x) d\omega^f(x) = \begin{cases} \frac{1}{vol(t)} & \text{sur } t, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

avec  $D = \partial^2$  la matrice d'incidence des 2-simplexes et  $D_t^f$  le coefficient de la  $f$  colonne et la  $t$  ligne. L'ensemble de ces formes de Whitney de degré 3  $\omega^t$  forme une base de l'espace vectoriel noté  $W^3$ . Cet espace est de dimension  $|S_3|$ . Voici quelques une de leurs propriétés

- l'intégrale de  $\omega^t$  sur  $t$  vaut 1,
- $\omega^t$  est discontinue au passage d'une facette du maillage,
- $W^3 \subset L^2$ ,
- $\forall \eta \in W^3 \Rightarrow \eta(x) = \sum_{t \in S_3} \eta_t \omega^t(x)$  et  $\eta_t = \int_t \eta(x) dx$  les degré de liberté de  $\eta$ .

## 1.2 Les formes différentielles discrètes

Dans la section précédente, on a vu que les combinaisons linéaires de formes de Whitney de degré  $k$  sont intégrables sur des ensembles de dimension  $k$  tout comme les  $k$ -formes différentielles. On va donc supposer que ces combinaisons linéaires de formes de degré  $k$  représentent la discrétisation des  $k$ -formes différentielles. On notera également  $W^k$  l'ensemble des  $k$ -formes différentielles discrètes. On verra plus tard dans ce chapitre que les espaces  $W^k$  vérifient une propriété fondamentale pour la validation de la discrétisation des formes différentielles : le complexe de De Rham.

## 2 LES $k$ -CHAINES ET LEURS RELATIONS AVEC LES $k$ -FORMES DIFFÉRENTIELLES

### 2.1 Les $k$ -chaines

On a rappelé dans l'introduction que les  $k$ -formes différentielles peuvent être intégrées sur des  $k$ -chaines. Les  $k$ -chaines sont des combinaisons linéaires d'objets de dimensions  $k$ . Mais, une fois que l'espace est discrétisé, les objets discrets de dimension 0 correspondent aux 0-simplexes (les points), ceux de dimension 1 aux 1-simplexes (les segments), ceux de dimension 2 aux 2-simplexes (les surfaces), et ceux de dimension 3 aux 3-simplexes (les volumes). On en déduit que les  $k$ -chaines discrètes sont des combinaisons linéaires des  $k$ -simplexes du maillage.

Ce n'est qu'une généralisation du fait qu'un point de l'espace est une combinaison linéaire de 0-simplexes (i.e. une combinaison barycentrique). Cette notion va permettre de modéliser une courbe, une surface, une variété. Par exemple, une courbe va être représentée par une combinaison linéaire de 1-simplexes, c'est une 1-chaine. On appellera, alors,  $k$ -chaine une combinaison linéaire de tous les  $k$ -simplexes. Elle décrira une sous-variété de dimension  $k$ . Une  $k$ -chaine  $\sigma^k$  est implémentée par un vecteur de taille  $|S_k|$ ,  $\sigma^{s_i^k}$ , vérifiant,

$$\sigma^k = \sum_{s_i^k \in S_k} \sigma^{s_i^k} s_i^k.$$

Les  $\sigma^{s_i^k}$  correspondent aux poids associés au simplexe  $s_i^k \in S_k$ . Pour accéder aux bords de la  $k$ -chaine, on peut définir un opérateur de bord  $\partial$  qui transforme une  $k$ -chaine en une  $(k-1)$ -chaine et qui agit de la façon suivante

$$\partial^k \sigma^k = \sum_{s_i^k \in S_k} \sigma^{s_i^k} \partial^k s_i^k,$$



avec  $\partial^k \sigma^k$  une  $(k-1)$ -chaîne. Or, on a vu que passer des  $(k-1)$ -simplexes aux  $k$ -simplexes, c'est appliquer une matrice d'incidence de taille  $|S_k| \times |S_{k-1}|$  sur le vecteur contenant tous les  $(k-1)$ -simplexes de l'espace. On en déduit que l'opérateur de bord correspond à une matrice de taille  $|S_{k-1}| \times |S_k|$ . En effet, cet opérateur de bord n'est rien d'autre que la transposée des matrices d'incidences  $\partial^k, (\partial^k)^t$ . Dans la suite, pour  $k = 1, \dots, 3$ , on les notera respectivement  ${}^tG, {}^tR, {}^tD$ .

## 2.2 Lien entre les $k$ -chaines et les $k$ -formes différentielles et mise en évidence d'un diagramme de De Rham

Une  $k$ -forme différentielle  $\omega^k$  s'intègre sur un espace de dimension  $k$  et l'espace de dimension  $k$  correspond à une  $k$ -chaîne  $\sigma^k$ , alors on obtient par linéarité le fait que :

$$\omega^k : \sigma^k \longmapsto \sum_{s_i^k \in S_k} \sigma^i \int_{s_i^k} \omega^k = \langle \langle \omega^k, \sigma^k \rangle \rangle.$$

Or, on a vu que les  $k$ -formes différentielles  $\omega^k$  s'écrivent de la façon suivante :

$$\omega^k(x) = \sum_{s_i^k \in S_k} \omega_i \omega^{s_i^k}(x),$$

donc par linéarité on a

$$\langle \langle \omega^k, \sigma^k \rangle \rangle = \sum_{s_i^k, s_j^k \in S_k} \omega_j \sigma^i \int_{s_i^k} \omega^{s_j^k}(x) = \sum_{s_i^k \in S_k} \omega_i \sigma^i,$$

car on a la propriété suivante :  $\int_{s_i^k} \omega^{s_j^k}(x)$  vaut 0 si  $s_i^k \neq s_j^k$  et 1 sinon. De là, on peut conclure que les  $k$ -formes différentielles sont les duales des  $k$ -chaines d'où la terminologie de  $k$ -cochaines. De plus, à l'aide de cette application, on peut en déduire à quoi correspondent les poids des  $k$ -chaines et des  $k$ -cochaines.

Soit  $\omega^{s_i^k}$  la  $k$ -forme différentielle dont l'intégrale prend la valeur 1 sur  $s_i^k$  et 0 ailleurs. Alors, pour toute  $k$ -chaîne on a

$$\langle \langle \omega^{s_i^k}, \sigma^k \rangle \rangle = \sigma^i.$$

On définit, alors, les poids  $\sigma^i$  des  $k$ -chaines  $\sigma^k$  comme étant égaux à  $\langle \langle \omega^{s_i^k}, \sigma^k \rangle \rangle$ . De la même manière, soit  $s_i^k$  le  $k$ -simplexe alors, pour toute  $k$ -cochaîne  $\omega^k$  les degrés de liberté sont définis par

$$\langle \langle \omega^k, s_i^k \rangle \rangle = \omega_i.$$

Pour résumer, les  $k$ -cochaines s'écrivent de la forme :

$$\omega^k(x) = \sum_{s_i^k \in S_k} \langle \langle \omega^k, s_i^k \rangle \rangle \omega^{s_i^k}(x),$$

et les  $k$ -chaines

$$\sigma^k = \sum_{s_i^k \in S_k} \langle \langle \omega^{s_i^k}, \sigma^k \rangle \rangle s_i^k.$$

Pour mettre en évidence les degrés de liberté des  $k$ -cochaines, on utilise, en fait, l'application suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \quad \mathbb{R}^{|S_k|} &\longrightarrow W^k \\ (u_i)_{s_i^k \in S_k} &\longmapsto \sum_{s_i^k \in S_k} u_i \omega^{s_i^k}(x) = u^k, \end{aligned}$$

ainsi que son application inverse  $\mathcal{P}$  qui à toute  $k$ -forme différentielle dans  $W^k$  renvoie les degrés de libertés :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \quad W^k &\longrightarrow \mathbb{R}^{|S_k|} \\ u^k &\longmapsto (\langle \langle u^k, s_i^k \rangle \rangle)_{s_i^k \in S_k}, \end{aligned}$$

Et pour mettre en évidence les poids des  $k$ -chaines on utilise leurs applications duales

$$\begin{aligned} {}^t\mathcal{R} : \quad \mathbb{R}^{|S_k|} &\longrightarrow S_k \\ (\sigma^i)_{s_i^k \in S_k} &\longmapsto \sum_{s_i^k \in S_k} \langle \langle \omega^{s_i^k}, \sigma^k \rangle \rangle k_i = \sigma^k \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} {}^t\mathcal{P} : \quad S_k &\longrightarrow \mathbb{R}^{|S_k|} \\ \sigma^k &\longmapsto (\langle \langle \omega^{s_i^k}, \sigma^k \rangle \rangle)_{s_i^k \in S_k}. \end{aligned}$$

On peut alors en déduire les diagrammes associés aux  $k$ -cochaines et aux  $k$ -chaines :

$$\begin{array}{ccccccc} W^0 & \xrightarrow{\text{grad}} & W^1 & \xrightarrow{\text{rot}} & W^2 & \xrightarrow{\text{div}} & W^3 \\ \mathcal{R} \updownarrow \mathcal{P} & & \mathcal{R} \updownarrow \mathcal{P} & & \mathcal{R} \updownarrow \mathcal{P} & & \mathcal{R} \updownarrow \mathcal{P} \\ \mathbb{R}^{|S_0|} & \xrightarrow{G} & \mathbb{R}^{|S_1|} & \xrightarrow{R} & \mathbb{R}^{|S_2|} & \xrightarrow{D} & \mathbb{R}^{|S_3|} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccccccc} S_0 & \xrightarrow{\partial^1} & S_1 & \xrightarrow{\partial^2} & S_2 & \xrightarrow{\partial^3} & S_3 \\ {}^t\mathcal{R} \updownarrow {}^t\mathcal{P} & & {}^t\mathcal{R} \updownarrow {}^t\mathcal{P} & & {}^t\mathcal{R} \updownarrow {}^t\mathcal{P} & & {}^t\mathcal{R} \updownarrow {}^t\mathcal{P} \\ \mathbb{R}^{|S_0|} & \xrightarrow{{}^tG} & \mathbb{R}^{|S_1|} & \xrightarrow{{}^tR} & \mathbb{R}^{|S_2|} & \xrightarrow{{}^tD} & \mathbb{R}^{|S_3|} \end{array}$$

On peut montrer que ces deux diagrammes sont commutatifs et grâce à la propriété des matrices d'incidences i.e.  $\partial^k \partial^{k-1} = 0$ , ces diagrammes sont, en fait, des diagrammes de De Rham.

### 3 LES ÉLÉMENTS DE WHITNEY D'ORDRES SUPÉRIEURS

À l'aide de la carte de raffinement  $\tilde{m}$  définie à la page 55, on va pouvoir exprimer des polynômes de degré  $m$  avec  $m$  le poids de la carte  $\tilde{m}$ . Soit  $\mathbf{m} \in \mathcal{I}(n+1, m)$  (où  $n$  est la dimension de l'espace), un multi-indice de poids  $m$ . On pose  $\omega^{\mathbf{m}}$  le polynôme de degré  $m$  de la forme  $\prod_{i=0}^n (\omega^{s_i^0})^{m_i}$  où  $\omega^{s_i^0}$  sont les 0-formes de Whitney au noeud  $s_i^0$ .

Grâce à ce polynôme  $\omega^{\mathbf{m}}$  et à cette carte  $\mathbf{m}$ , on va pouvoir définir les  $k$ -formes de Whitney d'ordre  $m+1$  associées aux  $k$ -petits simplexes  $\tilde{s}^k = \{\mathbf{m}, s^k\}$ . Ceux-ci auront la forme  $\omega^{\mathbf{m}} \omega^{s^k}$ . L'espace vectoriel engendré par ces  $k$ -formes de Whitney d'ordre  $m+1$  sera noté  $W_{m+1}^k$  et aura pour dimension  $\binom{m+n}{n} \times |S_k|$ .

Les  $k$ -formes différentielles discrètes seront donc des combinaisons linéaires des  $k$ -formes de Whitney d'ordre  $m+1$  i.e

$$\sum_{s_i^k \in S_k \ \mathbf{m} \in \mathcal{I}(n+1, m)} c^{\{\mathbf{m}, s^k\}} \omega^{\mathbf{m}} \omega^{s^k}.$$

Intuitivement, pour connaître la valeur des coefficients  $c^{\{\mathbf{m}, s^k\}}$ , on a envie d'intégrer cette combinaison linéaire sur les  $k$ -petits simplexes. Le problème est que la matrice dont les coefficients sont  $\langle \omega^{\mathbf{m}} \omega^{s^k}, \{\mathbf{m}', s'^k\} \rangle$ , (l'intégrale de  $\omega^{\mathbf{m}} \omega^{s^k}$  sur  $\{\mathbf{m}', s'^k\}$ ), n'est pas inversible. Cela est dû au fait que l'on a des multiplicités pour les petits simplexes et pour les  $k$ -formes de Whitney (voir l'exemple page 55). Pour résoudre ce problème, dans leurs articles [51, 53], Rapetti et Bossavit proposent l'astuce suivante : on ignore les redondances pour les petits simplexes et pour les formes de Whitney. Ceci nous donne une bijection entre  $W_{m+1}^k$  et l'ensemble des  $k$ -petits simplexes. Il s'avère alors que les résultats numériques sont indépendants de cette bijection. En ce qui concerne les propriétés des  $k$ -formes de Whitney d'ordre  $m+1$ , leur intégrale sur les  $k$ -chaines, le diagramme de De Rham, on pourra lire [51, 53].



---

# Les opérations agissant sur les formes différentielles discrètes

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>La dérivée extérieure . . . . .</b>	<b>66</b>
<b>2</b>	<b>Le produit extérieur . . . . .</b>	<b>66</b>
2.1	Le produit extérieur primal-primal . . . . .	66
2.2	Le produit extérieur dual-dual . . . . .	68
2.3	Le produit extérieur primal-dual . . . . .	69
<b>3</b>	<b>Le hodge star . . . . .</b>	<b>70</b>
<b>4</b>	<b>La dérivée co-extérieure et le laplacien . . . . .</b>	<b>71</b>
<b>5</b>	<b>Le produit intérieur . . . . .</b>	<b>71</b>
<b>6</b>	<b>La dérivée de Lie . . . . .</b>	<b>73</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion . . . . .</b>	<b>74</b>

---

On peut effectuer plusieurs opérations (voir page (xxiv)) sur l'ensemble des  $k$ -formes différentielles  $\Lambda^k(T^*M)$ . Ces opérations sont les suivantes : la dérivée extérieure, le hodge star  $\star$ , le produit extérieur, la dérivée de Lie, le produit intérieur. Si l'on veut que la discrétisation des formes différentielles soit cohérente avec le "continu", on doit donner un analogue discret à toutes ces opérations. Ce chapitre a pour but de proposer cet analogue. Pour ce faire, on s'est appuyé sur les travaux de Bossavit [4, 5] pour la dérivée extérieure, le produit intérieur, de Kettunen [32] et de Lala [100] pour l'opérateur hodge star, d'Hirani [92], de McKenzie [6] et de Hiptmair [95, 96] pour la dérivée de Lie et le produit extérieur.

# 1 LA DÉRIVÉE EXTÉRIEURE

Dans l'introduction page (xxiv), on a vu que la dérivée extérieure vérifie les propriétés suivantes :

- $d \circ d = 0$ ,
- $d\omega^k = \omega^{(k+1)}$  pour  $\omega^k$  une  $k$ -forme différentielle,
- la formule de Stokes :

$$\int_{\sum_{s_i^k \in S_k} \sigma^i s_i^k} d\omega^k = \int_{\sum_{s_i^k \in S_k} \sigma^i \partial^k s_i^k} \omega^k = \sum_{s_i^k \in S_k} \sigma^i \int_{\partial^k s_i^k} \omega^{k, s_i^k}.$$

- le théorème de Poincaré : sur un ouvert étoilé, une forme différentielle  $\omega^k$  de classe  $C^1$  est exacte (i.e. il existe  $\gamma^{(k-1)} \in \Omega_1^{k-1}(M)$  tel que  $\omega^k = d\gamma^{(k-1)}$ ) si et seulement si elle est fermée ( $d\omega^k = 0$ ).

Son analogue discret devra alors également les vérifier. Il s'avère que les matrices d'incidences  $G = \partial^0$ ,  $R = \partial^1$ ,  $D = \partial^2$  que l'on a fait apparaître pour la première fois au chapitre 2 page 51, vérifient ces propriétés (le lemme de Poincaré discret est démontré par Desbrun dans l'article [35]). On considérera, alors, que ces matrices correspondent à la discrétisation de la dérivée extérieure. Ces matrices d'incidences agissent respectivement sur les 0-formes, les 1-formes et les 2-formes.

# 2 LE PRODUIT EXTÉRIEUR

Le produit extérieur est une application qui à une  $k$ -forme et à une  $l$ -forme renvoie une  $(k+l)$ -forme. Or, dans l'espace des formes différentielles discrètes, on a des formes différentielles discrètes sur le maillage primal et des formes différentielles discrètes sur le maillage dual. On va donc, devoir distinguer plusieurs types de produit extérieur : le produit extérieur de deux formes différentielles primales, le produit extérieur de deux formes différentielles duales et le produit extérieur d'une forme différentielle primale et d'une forme différentielle duale. Commençons par le produit extérieur de deux formes différentielles primales.

## 2.1 Le produit extérieur primal-primal

La  $(k+l)$ -forme obtenue par ce produit extérieur doit pouvoir être intégrée sur les  $(k+l)$ -simplexes du maillage. Pour ce faire, on remarque que les  $(k+l)$ -

simplexes peuvent être décrits par  $(k+l+1)$  0-simplexes. On note par  $s_i^0$  les 0-simplexes et par  $[s_0^0, \dots, s_{k+l}^0] = \sigma^{(k+l)}$  le  $(k+l)$ -simplexe construit à partir des 0-simplexes  $s_0^0, \dots, s_{k+l}^0$ . Hirani [92] a montré que l'intégrale du produit extérieur d'une  $k$ -forme  $\alpha^k$  et d'une  $l$ -forme  $\beta^l$  sur ce  $(k+l)$ -simplexe est égale à

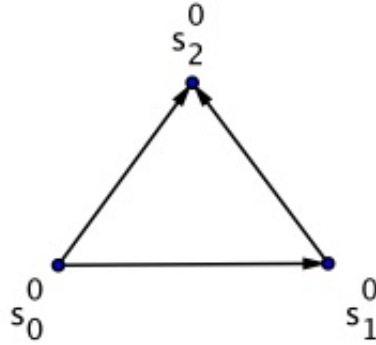
$$\langle\langle \alpha^k \wedge \beta^l, \sigma^{k+l} \rangle\rangle = \frac{1}{(k+l+1)!} \sum_{\zeta \in \text{Perm}(k+l+1)} \text{sign}(\zeta) (\alpha^k \smile \beta^l)(\zeta(\sigma^{k+l})),$$

où  $\text{Perm}(k+l+1)$  est le groupe des permutations des indices  $\{0, \dots, k+l\}$ ,  $\zeta(\sigma^{k+l}) = [s_{\zeta(0)}^0, \dots, s_{\zeta(k+l)}^0]$ , et

$$(\alpha^k \smile \beta^l)(\zeta(\sigma^{k+l})) = \langle\langle \alpha^k, [s_{\zeta(0)}^0, \dots, s_{\zeta(k)}^0] \rangle\rangle \langle\langle \beta^l, [s_{\zeta(k)}^0, \dots, s_{\zeta(k+l)}^0] \rangle\rangle.$$

Ce produit extérieur discret a la particularité de vérifier : l'anticommutativité ( $\alpha^k \wedge \beta^l = (-1)^{kl} \beta^l \wedge \alpha^k$ ), la règle de Leibniz ( $d(\alpha^k \wedge \beta^l) = d\alpha^k \wedge \beta^l + (-1)^k \alpha^k \wedge d\beta^l$ ) et l'associativité pour les formes fermées (si  $d\alpha^k = 0$ ,  $d\beta^l = 0$ ,  $d\gamma^m = 0$ , on a  $(\alpha^k \wedge \beta^l) \wedge \gamma^m = \alpha^k \wedge (\beta^l \wedge \gamma^m)$ ), expliqué par Desbrun et al. [34]. Il respecte aussi les propriétés avec la fonction pull back  $f^* : T^*M \rightarrow T^*N$ , i.e. on a  $f^*(\alpha^k \wedge \beta^l) = f^*\alpha^k \wedge f^*\beta^l$ . De plus, pour un  $k$ -simplexe  $\sigma^k$  dans  $TN$  et pour une  $k$ -forme  $\alpha^k$  sur  $M$ , on a  $\langle\langle f^*\alpha^k, \sigma^k \rangle\rangle = \langle\langle \alpha^k, f(\sigma^k) \rangle\rangle$ . Également avec l'application push forward  $f_* : T^*N \rightarrow T^*M$ , on a, pour un  $k$ -simplexe  $\sigma^k$  dans  $TM$  et pour une  $k$ -forme  $\alpha^k$  sur  $N$ , le fait que  $\langle\langle f_*\alpha^k, \sigma^k \rangle\rangle = \langle\langle \alpha^k, f^{-1}(\sigma^k) \rangle\rangle$ .

**Exemple 2.1.1** — On se place en dimension 2, soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux 1-formes et le triangle  $[s_0^0, s_1^0, s_2^0]$ .



**FIG. 7:** Le triangle orienté  $[s_0^0, s_1^0, s_2^0]$

On a alors

$$\text{Perm}(3) = \{\{1, 0, 2\}, \{2, 1, 0\}, \{0, 2, 1\}, \{2, 0, 1\}, \{0, 1, 2\}, \{1, 2, 0\}\},$$

et l'intégrale du produit extérieur de ces deux 1-formes sur le triangle  $[s_0^0, s_1^0, s_2^0]$  correspond à

$$\begin{aligned} \langle \langle \alpha \wedge \beta, [s_0^0, s_1^0, s_2^0] \rangle \rangle &= \frac{1}{3!} \left( -\langle \langle \alpha, [s_1^0, s_0^0] \rangle \rangle \langle \langle \beta, [s_0^0, s_2^0] \rangle \rangle - \langle \langle \alpha, [s_2^0, s_0^0] \rangle \rangle \langle \langle \beta, [s_0^0, s_1^0] \rangle \rangle \right. \\ &\quad - \langle \langle \alpha, [s_0^0, s_1^0] \rangle \rangle \langle \langle \beta, [s_1^0, s_2^0] \rangle \rangle + \langle \langle \alpha, [s_2^0, s_1^0] \rangle \rangle \langle \langle \beta, [s_1^0, s_0^0] \rangle \rangle \\ &\quad \left. + \langle \langle \alpha, [s_1^0, s_2^0] \rangle \rangle \langle \langle \beta, [s_2^0, s_0^0] \rangle \rangle + \langle \langle \alpha, [s_0^0, s_2^0] \rangle \rangle \langle \langle \beta, [s_2^0, s_1^0] \rangle \rangle \right). \end{aligned}$$

Ainsi, on peut obtenir les degrés de libertés de  $\alpha^k \wedge \beta^l$ , i.e. l'intégrale sur les  $(k+l)$ -simplexes du maillage, et donc, sa discrétisation sur la base appropriée des formes de Whitney. Qu'en est-il, maintenant, du produit extérieur de deux formes différentielles duales ?

## 2.2 Le produit extérieur dual-dual

Considérons, maintenant, le produit extérieur d'une  $k$ -forme différentielle duale  $\hat{\alpha}^k$  et d'une  $l$ -forme différentielle duale  $\hat{\beta}^l$ . Comme précédemment, on cherche à calculer l'intégrale de la  $(k+l)$ -forme différentielle obtenue sur les  $(k+l)$ -cellules duales du maillage. Par définition, le dual d'un  $(n-k-l)$ -simplexe (où  $n$  est la dimension de l'espace) est une  $(k+l)$ -cellule duale. Or à la section 2.1, on a vu qu'un  $(n-k-l)$ -simplexe peut être déterminé par  $(n-k-l+1)$  0-simplexes. Posons alors la  $(k+l)$ -cellule duale par  $\hat{\sigma}^{k+l}$ . Elle est le dual d'un  $(n-k-l)$ -simplexe  $\sigma^{n-k-l}$  et donc on a  $\hat{\sigma}^{k+l} = \star \sigma^{n-k-l} = \star [s_{k+l}^0, \dots, s_n^0]$  toujours avec  $s_i^0$  les  $(n-k-l+1)$  0-simplexes du maillage. Hirani [92] a montré que

$$\langle \langle \hat{\alpha}^k \wedge \hat{\beta}^l, \hat{\sigma}^{k+l} \rangle \rangle = \langle \langle \hat{\alpha}^k \wedge \hat{\beta}^l, \star \sigma^{n-k-l} \rangle \rangle$$

$$= \sum_{\sigma^n \succ \sigma^{n-k-l}} \text{sign}(\sigma^n, \sigma^{n-k-l}) \sum_{\zeta \in \text{Perm}(k+l)} \text{sign}(\zeta) \langle \langle \hat{\alpha}^k, \star [s_{\zeta(0)}^0, \dots, s_{\zeta(l-1)}^0, s_{k+l}^0, \dots, s_n^0] \rangle \rangle \langle \langle \hat{\beta}^l, \star [s_{\zeta(l)}^0, \dots, s_{\zeta(k+l-1)}^0, s_{k+l}^0, \dots, s_n^0] \rangle \rangle,$$

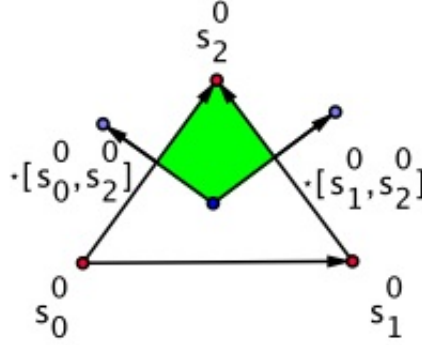
avec  $\sigma^n = [s_0^0, \dots, s_n^0]$  et  $\sigma^{n-k-l} = \pm [s_{k+l}^0, \dots, s_n^0]$  et  $\text{sign}(\sigma^n, \sigma^{n-k-l})$  correspond à la signature de  $\sigma^n$  privé de  $\sigma^{n-k-l}$ .

**Exemple 2.2.1** — On se place en dimension 2, soient  $\hat{\alpha}$  et  $\hat{\beta}$  deux 1-formes duales et  $\hat{\sigma}^2$  la 2-cellule duale telle que  $\hat{\sigma}^2 = \star \sigma^0 = \star [s_2^0]$ . Notons également l'un des triangles primaires contenant  $s_2^0$  par  $\sigma^2 = [s_0^0, s_1^0, s_2^0]$ . On a alors  $\text{Perm}(2) = \{\{0, 1\}, \{1, 0\}\}$ . On écrit la deuxième somme de la formule au-dessus et on obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{\zeta \in \text{Perm}(2)} \text{sign}(\zeta) \langle \langle \hat{\alpha}^1, \star [s_{\zeta(0)}^0, s_2^0] \rangle \rangle \langle \langle \hat{\beta}^1, \star [s_{\zeta(1)}^0, s_2^0] \rangle \rangle = \\ &\langle \langle \hat{\alpha}^1, \star [s_0^0, s_2^0] \rangle \rangle \langle \langle \hat{\beta}^1, \star [s_1^0, s_2^0] \rangle \rangle - \langle \langle \hat{\alpha}^1, \star [s_1^0, s_2^0] \rangle \rangle \langle \langle \hat{\beta}^1, \star [s_0^0, s_2^0] \rangle \rangle. \end{aligned}$$



Cette somme n'est rien d'autre que le calcul de l'intégrale de  $\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}$  sur la surface colorée représentée sur la figure 8.



**FIG. 8:** Le triangle orienté  $[s_0^0, s_1^0, s_2^0]$  et l'intersection avec la 2-cellule duale  $\star[s_2^0]$ .

Afin de connaître la valeur de  $\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}$  sur toute la 2-cellule duale  $\hat{\sigma}^2$ , il faut encore faire la somme  $\sum_{\sigma^2 \succ \sigma^0}$  (non écrite ici). Elle correspond au calcul de l'intégrale de  $\hat{\alpha} \wedge \hat{\beta}$  sur chaque surface correspondante à l'intersection d'un triangle avec la 2-cellule duale  $\hat{\sigma}^2$ .

Encore une fois, la discrétisation du produit extérieur dual-dual est bien définie et vérifie toutes les propriétés du "continu". De plus, avec cette formule, on connaît les degrés de libertés de toutes les formes différentielles duales obtenues par un produit extérieur "dual", donc on connaît leurs discrétisations dans la base appropriée des formes de Whitney.

Il ne nous reste plus qu'à définir le produit extérieur entre une forme différentielle primale et une forme différentielle duale.

### 2.3 Le produit extérieur primal-dual

Pour le calcul de ce produit extérieur, on va faire un mélange des deux formules vues précédemment. Pour une  $k$ -forme différentielle primale  $\alpha^k$  et une  $l$ -forme différentielle duale  $\hat{\beta}^l$ , on obtient

$$\langle\langle \alpha^k \wedge \hat{\beta}^l, \sigma^{(k+l)} \rangle\rangle = \sum_{\sigma^n \succ \sigma^{k+l}} \frac{1}{(k+l+1)!} \sum_{\zeta \in \text{Perm}(k+l+1)} \text{sign}(\zeta) \langle\langle \alpha^k, [s_{\zeta(0)}^0, \dots, s_{\zeta(k)}^0] \rangle\rangle \langle\langle \hat{\beta}^l, \star(\sigma^n / [s_{\zeta(k+1)}^0, \dots, s_{\zeta(k+l)}^0]) \rangle\rangle,$$

avec  $\sigma^n$  un  $n$ -simplexe tel que  $\sigma^n \supset \sigma^{(k+l)}$  et  $\sigma^{(k+l)} = [s_0^0, \dots, s_{k+l}^0]$  un  $(k+l)$ -simplexe.

**Exemple 2.3.1** — On va considérer une 1-forme différentielle primale  $\alpha$  et une 1-forme différentielle duale  $\hat{\beta}$  et on va calculer leur intégrale sur le 2-simplexe  $\sigma^2 = [s_0^0, s_1^0, s_2^0]$ . D'après la formule du dessus, on a

$$\begin{aligned} & \langle\langle \alpha \wedge \hat{\beta}, [s_0^0, s_1^0, s_2^0] \rangle\rangle = \\ & \frac{1}{3!} \sum_{\zeta \in \text{Perm}(3)} \text{sign}(\zeta) \langle\langle \alpha, [s_{\zeta(0)}^0, s_{\zeta(1)}^0] \rangle\rangle \langle\langle \hat{\beta}, \star([s_0^0, s_1^0, s_2^0] / [s_{\zeta(2)}^0]) \rangle\rangle, \end{aligned}$$

car le seul 2-simplexe qui contient  $[s_0^0, s_1^0, s_2^0]$  est lui-même.

On remarque que ce produit extérieur est très utile car le lagrangien est de la forme  $dA \wedge \star dA$ .

### 3 LE HODGE STAR

On peut discrétiser cet opérateur de deux manières différentes, soit on utilise la formulation forte comme l'ont fait Elcott [58, 97], Bossavit et Rapetti [52], Kettunen [32] et Hirani [92], soit on utilise la formulation faible comme l'ont fait Lala [100] et Hiptmair [95, 96].

On explique dans un premier temps la formulation forte et dans un second temps la formulation faible.

On veut, tout comme la différentielle discrète, que l'opérateur hodge star discret soit représenté par une matrice. Dans le cas non raffiné, on a le même nombre de  $k$ -simplexes que de  $(n - k)$ -cellules duales,  $|S_k|$ . On en déduit que la matrice sera de taille  $|S_k| \times |S_k|$ . De plus, on voit que l'opérateur hodge star doit vérifier

$$\int_{\star\sigma^k} \star\omega^k = \frac{|\star\sigma^k|}{|\sigma^k|} \int_{\sigma^k} \omega^k,$$

avec  $|\sigma^k|$  et  $|\star\sigma^k|$  le volume des  $k$ -simplexes (voir [58] pour le calcul du volume). Ceci doit être vérifié en particulier pour  $\sigma^k = s^k$ , un  $k$ -simplexe. On en conclut, alors que le hodge star discret est représenté par une matrice diagonale avec pour coefficient  $\star^{ii} = \frac{|\star s_i^k|}{|s_i^k|}$ .

Passons maintenant à la formulation faible. Dans les travaux de Stéphanie Lala [100] et de Hiptmair [95, 96] l'opérateur hodge star a la forme suivante :

$$M_{n-k, n-k}^{-1} M_{n-k, k},$$

où  $M_{n-k,n-k} = (\int_{\text{maillage}} \omega^{(n-k)_i} \omega^{(n-k)_j})_{ij}$  correspond à la matrice de masse des  $(n-k)$ -formes et  $M_{n-k,k} = (\int_{\text{maillage}} \omega^{(n-k)_i} \omega^{(k)_j})_{ij}$ , la matrice de passage des  $k$ -formes à des  $(n-k)$ -formes.

## 4 LA DÉRIVÉE CO-EXTÉRIEURE ET LE LAPLACIEN

On a vu à la page (xxix) que la dérivée co-extérieure  $d^*$  est égale à  $(-1)^{n(k-1)+1} \star d \star$  et que le laplacien a pour forme  $\Delta = dd^* + d^*d$ . Leur discrétisation est du coup évidente, il suffit d'utiliser l'opérateur de hodge discret  $\star$  et la dérivée extérieure  $d$  discrète que l'on a expliqués précédemment aux sections 3 et 1 respectivement.

## 5 LE PRODUIT INTÉRIEUR

Pour la discrétisation du produit intérieur d'une  $k$ -forme différentielle le long d'un champ de vecteurs, on doit distinguer deux cas. Le cas où le champ de vecteurs est indépendant du temps et le cas où il est dépendant du temps. Commençons par le cas où le champ de vecteurs est indépendant du temps.

Soit  $\tau$  un champ de vecteurs indépendant du temps. On peut montrer alors que dans un variété différentielle de dimension  $n$ , le produit intérieur d'une  $k$ -forme différentielle le long de ce champ de vecteurs s'écrit de la façon suivante

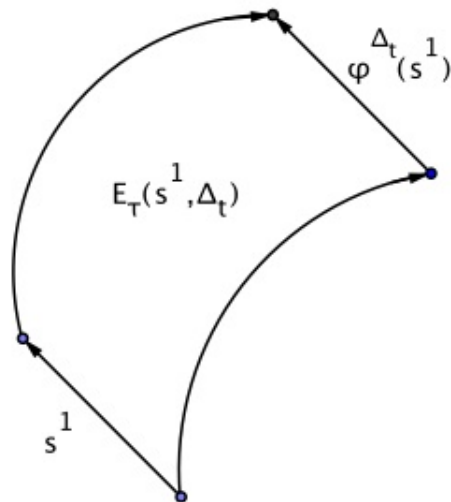
$$i_\tau \omega^k = (-1)^{k(n-k)} \star (\star \omega^k \wedge \tau^\sharp), \quad (70)$$

avec  $\tau^\sharp$  la 1-forme différentielle associée à  $\tau$  (vu page (xxv) ). Avec ceci, on peut donc aisément en déduire sa discrétisation en utilisant l'opérateur hodge star discret (voir section 3) et la discrétisation du produit extérieur (voir section 2).

Le cas où le champ de vecteurs est dépendant du temps est un peu plus délicat. McKenzie [6], Bossavit [5] et Hirani [92] ont développé la théorie suivante :

On sait que le produit intérieur d'une  $k$ -forme différentielle le long d'un champ de vecteurs est une  $(k-1)$ -forme différentielle. On en déduit donc, qu'il suffit de connaître son intégrale sur les  $(k-1)$ -simplexes du maillage pour obtenir

sa discrétisation. Pour ce faire, soit  $\varphi^t$  le flot associé au champ de vecteurs  $\tau$ . On définit l'extrusion [5] au temps  $t$  d'un  $(k-1)$ -simplexe  $s^{(k-1)}$  par ce flot comme étant l'image du  $(k-1)$ -simplexe  $s^{(k-1)}$  par  $\varphi^s$  pour  $s \in [0, t]$ , on le note  $E_\tau(s^{(k-1)}, t) = \{\varphi^s s^{(k-1)} \mid s \in [0, t]\}$  (voir figure 9).



**FIG. 9:** Extrusion de  $s^1$  le long d'un champ de vecteurs

On remarque, alors que l'extrusion d'un  $(k-1)$ -simplexe  $s^{(k-1)}$  est une  $k$ -chaîne et donc, on va pouvoir intégrer la  $k$ -forme différentielle  $\omega^k$  dessus. L'intégrale du produit intérieur  $i_\tau$  d'une  $k$ -forme différentielle  $\omega^k$  le long du champ de vecteurs  $\tau$  sur un  $(k-1)$ -simplexe  $s^{(k-1)}$  est définie comme étant la dérivée temporelle au temps  $t = 0$  de l'intégrale de  $\omega^k$  sur l'extrusion  $E_\tau(s^{(k-1)}, t)$ , i.e.

$$\int_{s^{(k-1)}} i_\tau \omega^k := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{E_\tau(s^{(k-1)}, t)} \omega^k.$$

En effectuant un développement de Taylor à l'ordre 2 en temps, on a

$$\begin{aligned} \int_{s^{(k-1)}} i_\tau \omega^k &\approx \frac{1}{\Delta_t} \left( \int_{E_\tau(s^{(k-1)}, \Delta_t)} \omega^k - \int_{E_\tau(s^{(k-1)}, 0)} \omega^k \right) \\ &\approx \frac{1}{\Delta_t} \int_{E_\tau(s^{(k-1)}, \Delta_t)} \omega^k \end{aligned} \quad (71)$$

avec  $\Delta_t$  un petit pas de temps.

## 6 LA DÉRIVÉE DE LIE

La dérivée de Lie le long d'un champ de vecteurs  $\tau$  est définie par :

$$\mathcal{L}_\tau = i_\tau d + di_\tau. \quad (72)$$

En réutilisant, alors, la discrétisation du produit intérieur vue précédemment, on aura deux manières de la discrétiser. L'une en considérant que le champ de vecteurs  $\tau$  dépend du temps et l'autre en le considérant indépendant du temps.

Pour le cas où le champ dépend du temps, on utilise la formule d'homotopie (72) et celle du produit intérieur (70), et on obtient

$$\mathcal{L}_\tau \omega^k = (-1)^{(k+1)(n-k-1)} \star (\star d \omega^k \wedge \tau^\sharp) + (-1)^{k(n-k)} d \star (\star \omega^k \wedge \tau^\sharp).$$

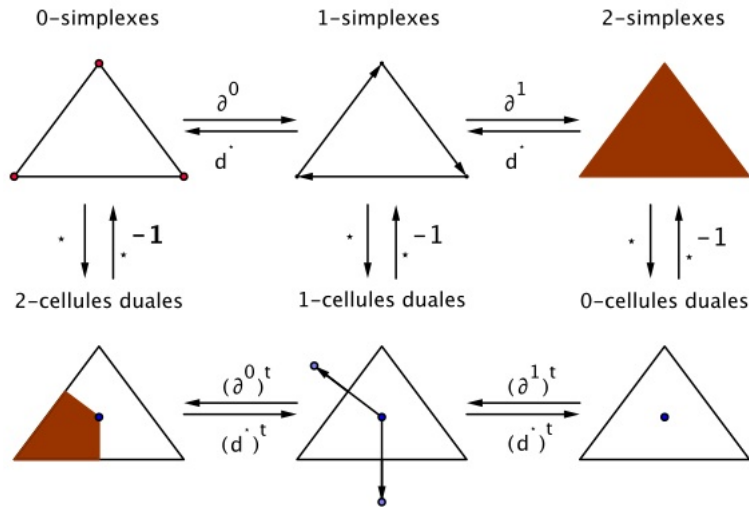
Son équivalent discret découle donc de la dérivée extérieure  $d$  discrète (voir section 1), de l'opérateur hodge star  $\star$  discret (voir section 3) et de la discrétisation du produit intérieur (voir section 5).

Pour le cas où le champ de vecteurs est dépendant du temps, puisque la dérivée de Lie ne change pas le degré de la  $k$ -forme différentielle, connaître sa discrétisation c'est connaître son intégrale sur les  $k$ -simplexes  $s^k$  du maillage. On utilise alors la formule d'homotopie (72) et de la discrétisation du produit intérieur (71) et on a :

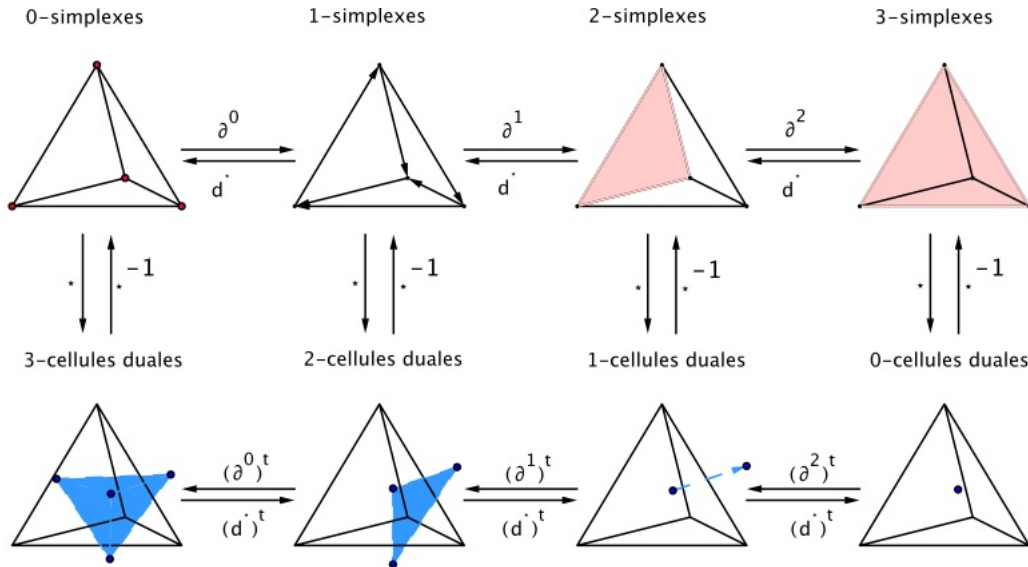
$$\begin{aligned} \int_{s^k} \mathcal{L}_\tau \omega^k &= \int_{s^k} d i_\tau \omega^k + \int_{s^k} i_\tau d \omega^k \\ &= \int_{\partial s^k} i_\tau \omega^k + \int_{s^k} i_\tau d \omega^k \\ &\approx \frac{1}{\Delta t} \int_{E_\tau(\partial s^k, \Delta t)} \omega^k + \frac{1}{\Delta t} \int_{E_\tau(s^k, \Delta t)} d \omega^k \text{ à l'aide de (71)} \\ &\approx \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{E_\tau(\partial s^k, \Delta t)} \omega^k + \int_{\partial E_\tau(s^k, \Delta t)} \omega^k \right) \\ &\approx \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{\varphi^{\Delta t} s^k} \omega^k - \int_{\varphi^0 s^k} \omega^k \right) \\ &\approx \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\varphi^t s^k} \omega^k \end{aligned}$$

## 7 CONCLUSION

Avec tous ces opérateurs on arrive à obtenir les schémas commutatifs représentés sur les figures 10 et 11.



**FIG. 10:** Schéma commutatif des différents opérateurs en 2D.



**FIG. 11:** Schéma commutatif des différents opérateurs en 3D.

Il est important de remarquer que dans le cas où on utilise la formulation forte pour l'opérateur hodge star et un maillage non raffiné, le hodge star

discret vérifie  $\star^{-1}\star = (-1)^{k(n-k)}id$ . Pour le maillage raffiné, un problème existe car le dual du maillage raffiné ne correspond pas au raffiné du maillage dual. On verra que ce problème se résout de lui même dans le cas où on utilise les fonctions B-splines pour la discrétisation des formes différentielles. Cette théorie est développée dans la troisième partie.

Dans le cas où on utilise la formulation forte, on voit que, plus le maillage est raffiné, la propriété du hodge star discret  $\star^{-1}\star$  tend vers  $(-1)^{k(n-k)}id$  (voir les travaux de Lala [100] et de Hiptmair [95]).





## Troisième partie

---

### Formes différentielles discrétisées à l'aide des B-splines



---

# Discrétisation de l'espace

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>L'espace primal . . . . .</b>	<b>80</b>
1.1	Discrétisation de l'espace en hypercubes. . . . .	80
1.2	Lien entre les différents éléments. . . . .	81
<b>2</b>	<b>L'espace dual . . . . .</b>	<b>82</b>

---

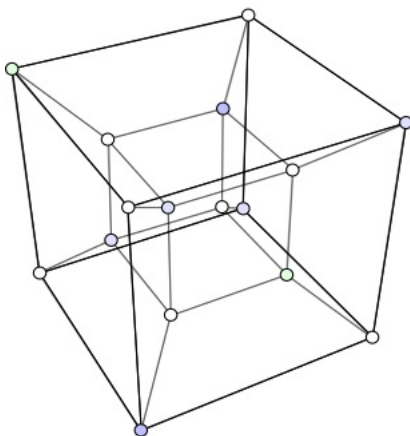
Dans ce chapitre, on explique comment discrétiser l'espace  $M$  de dimension  $n$  afin qu'il soit cohérent avec les fonctions de bases, les B-splines. Pour ce faire, on va utiliser des hypercubes [88, 91]. Dans une première partie, on passera en revue les différents objets de dimension  $k$ . On les appellera des  $k$ -cubes. Ensuite, on montrera que, tout comme pour les simplexes, on peut passer des  $(k-1)$ -cubes aux  $k$ -cubes par le même type de matrices d'incidence (vues à la page 51). On verra, alors, dans le chapitre suivant, que ces applications joueront un rôle important dans la théorie des formes différentielles discrétisées par des B-splines. Pour les mêmes raisons que précédemment on doit construire un maillage dual. Il nous permettra de distinguer les formes différentielles primales et duales.

# 1 L'ESPACE PRIMAL

## 1.1 Discrétisation de l'espace en hypercubes.

Soit  $M$  un domaine de dimension  $n$  et  $\partial M$  son bord. Afin d'être cohérent avec la construction des fonctions B-splines, on va devoir mailler le domaine par des hypercubes de dimension  $n$ . En fait, un hypercube de dimension  $n$  n'est rien d'autre que l'analogue d'un carré de dimension  $n$ . Il est aussi appelé  $n$ -cube. Pour comprendre cette construction, voici un tableau des différents éléments mis en jeu :

Hypercubes	Dimensions	Ensembles
0-cubes	0	points : $S_0$
1-cubes	1	cotés : $S_1$
2-cubes	2	carrés : $S_2$
3-cubes	3	cubes : $S_3$
4-cubes	4	tesseracts : $S_4$
5-cubes	5	penteracts : $S_5$



**FIG. 12:** Projection du tesseract, un 4-cube sur l'espace à 3 dimensions .

Comme la notion en géométrie différentielle est importante, on définit une orientation sur tous les éléments du maillage. On pose  $H_{\alpha,k}$  l'ensemble des  $k$ -cubes du maillage. On verra que celui-ci dépend du degré  $\alpha$  des B-splines seulement dans le cas non-périodique.

## 1.2 Lien entre les différents éléments.

De la même manière que pour les tétraèdres, on peut passer d'un  $(k-1)$ -cube à un  $k$ -cube en appliquant l'opérateur  $\partial^k$ . Il peut être représenté par une matrice contenant des 1,  $-1$  et des 0 et est de taille  $|H_{\alpha,k}| \times |H_{\alpha,k-1}|$ . Cette matrice est également appelée matrice d'incidence des  $k$ -cubes.

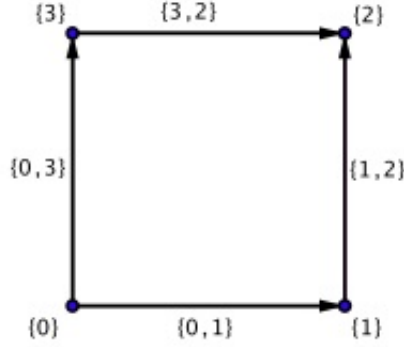


FIG. 13: Exemple d'un 2-cube orienté.

En s'aidant de la figure (13), on voit que les 1-cubes orientés peuvent être écrits en fonction des 0-cubes :  $\{i, j\} = j - i$ . Par exemple, en  $2D$ , la matrice d'incidence des 0-cubes est de la forme :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{\partial^0} \begin{pmatrix} \{0\} \\ \{1\} \\ \{2\} \\ \{3\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \{0,1\} \\ \{1,2\} \\ \{0,3\} \\ \{3,2\} \end{pmatrix}.$$

La matrice d'incidence des 1-cubes est :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}_{\partial^1} \begin{pmatrix} \{0,1\} \\ \{1,2\} \\ \{0,3\} \\ \{3,2\} \end{pmatrix} = \{0,1,2,3\}.$$

En fait, cet opérateur vérifie le diagramme ci-dessous et c'est une suite exacte car on a  $\partial^{k+1}\partial^k = 0$  :

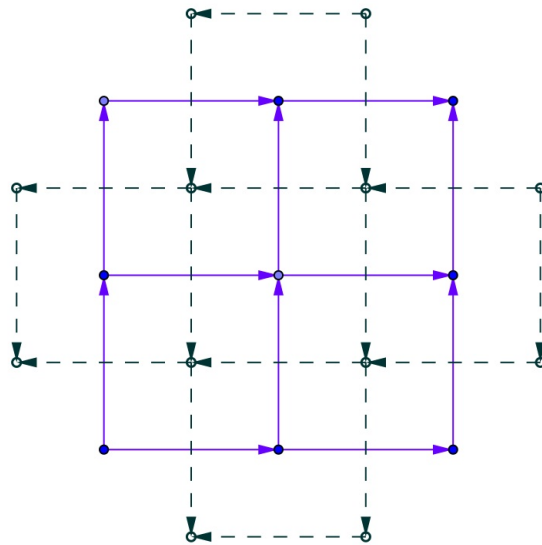
$$H_{\alpha,0} \xrightarrow{\partial^0} H_{\alpha,1} \xrightarrow{\partial^1} H_{\alpha,2} \xrightarrow{\partial^2} H_{\alpha,3} \xrightarrow{\partial^3} \dots$$

## 2 L'ESPACE DUAL

Le maillage dual va être défini en prenant le barycentre des différents éléments du maillage primal. Par exemple, dans l'espace à trois dimensions,

- les points duaux ou 0-cellules duales vont être les barycentres des 3-cubes,
- les côtés duaux, les 1-cellules duales, vont être les côtés joignant deux points duaux,
- les surfaces duales, 2-cellules duales, sont définies telles que les 1-cubes passent par leurs barycentres
- et les 3-cellules duales sont déterminées telles que les 0-cubes correspondent à leurs barycentres.

Dans la suite, on notera  $H_{\alpha,k}^*$  l'ensemble des  $k$ -cellules duales. On remarque, alors, que contrairement à la discrétisation utilisée pour les formes de Whitney, l'espace dual construit ici n'est en fait rien d'autre que l'espace primal décalé (voir figure 14). De plus, le maillage dual conserve la notion d'inci-



**FIG. 14:** Exemple d'un maillage primal (en traits continus) et dual (en traits discontinus).

dence et on a également une suite exacte pour les cellules duales mais avec la transposée des matrices d'incidences :

$$\dots \xleftarrow{(\partial^3)^t} H_{\alpha,3}^* \xleftarrow{(\partial^2)^t} H_{\alpha,2}^* \xleftarrow{(\partial^1)^t} H_{\alpha,1}^* \xleftarrow{(\partial^0)^t} H_{\alpha,0}^*.$$

---

# Les formes différentielles discrétisées par des fonctions B-splines

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>Les fonctions B-splines . . . . .</b>	<b>84</b>
<b>2</b>	<b>Les formes différentielles discrétisées par les B-splines . . . . .</b>	<b>84</b>
2.1	Le cas 1D . . . . .	84
2.2	Le cas 3D et plus . . . . .	92

---

Dans ce chapitre, on va montrer comment construire des formes différentielles discrètes à l'aide d'autres fonctions d'interpolation. Ces fonctions d'interpolation doivent posséder certaines propriétés afin que la forme différentielle discrétisée puisse être cohérente avec la théorie et conserver le diagramme de De Rham. Il s'est avéré que les fonctions B-splines correspondent à ce que l'on cherche. De plus, on a remarqué par la suite que l'étude à un lien avec l'analyse isogéométrique qui est d'ailleurs un sujet en plein essor [15, 57, 63]. Pour commencer, on rappelle la définition des B-splines ainsi que leurs particularités. Puis, on explique comment construire des formes différentielles discrètes à l'aide de ces fonctions. On proposera deux manières de les construire qui dépendront de la condition au bords. Enfin, on montrera comment il est aisé d'étendre leur construction en dimension  $n$ .

# 1 LES FONCTIONS B-SPLINES

Les B-splines peuvent être définies par récurrence sur un ensemble de noeuds  $x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N$ . Soit  $B_i^\alpha$  la B-spline de degré  $\alpha$  ayant son support dans l'intervalle  $[x_i, x_{i+\alpha+1}]$ . On pose alors pour  $\alpha = 0$  la B-spline telle que

$$B_i^0(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } x_i \leq x < x_{i+1}, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et pour tout  $\alpha \geq 1$  on a la relation de récurrence

$$B_i^\alpha(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+\alpha} - x_i} B_i^{\alpha-1}(x) + \frac{x_{i+\alpha+1} - x}{x_{i+\alpha+1} - x_{i+1}} B_{i+1}^{\alpha-1}(x). \quad (73)$$

Les B-splines vérifient les propriétés suivantes

- (i) La B-spline  $B_i^\alpha$  est une fonction polynomiale par morceaux de degré  $\alpha$  entre deux noeuds consécutifs,
- (ii) La B-spline  $B_i^\alpha$  est de classe  $C^{\alpha-1}$ ,
- (iii) Les B-splines vérifient la partition de l'unité i.e. pour tout  $x$  dans  $M$ , on a  $\sum_i B_i^\alpha(x) = 1$ .

De plus, la dérivée des B-splines de degré  $\alpha$  vérifie également une relation de récurrence qui est :

$$B_i^{\alpha'}(x) = \alpha \left( \frac{B_i^{\alpha-1}(x)}{x_{i+\alpha} - x_i} - \frac{B_{i+1}^{\alpha-1}(x)}{x_{i+\alpha+1} - x_{i+1}} \right). \quad (74)$$

Pour plus de détails sur les fonctions B-splines, le lecteur pourra se référer au livre de de Boor [15].

## 2 LES FORMES DIFFÉRENTIELLES DISCRÉTISÉES PAR LES B-SPLINES

### 2.1 Le cas 1D

#### 2.1.1 Avec un maillage périodique et uniforme

Soit un domaine périodique de dimension 1. On note les points du maillage (les 0-cubes) par  $x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N$ , ainsi que les points duaux (les 0-cellules) par  $x_{i+1/2} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+1})$  (les points barycentriques). On suppose



que le maillage est périodique de période  $x_N - x_0$  et que pour toute fonction  $f$  on a  $f(x_0) = f(x_N)$ . Donc le point  $x_N$  ne doit pas faire partie du maillage primal et on remarque alors qu'on a le même nombre  $N$  de points dans le maillage primal et dans le maillage dual.

Dans le cas  $1D$ , on n'a besoin que de définir les 0-formes et les 1-formes différentielles sur les deux maillages. Pour cela, on utilise des fonctions de base que l'on va noter  $w_i^{0,\alpha}$  et  $w_i^{1,\alpha}$ , pour le maillage primal, et  $\tilde{w}_{i+1/2}^{0,\alpha}$  et  $\tilde{w}_{i+1/2}^{1,\alpha}$ , pour le maillage dual. Notons par  $\mathcal{B}_0^\alpha$  l'espace vectoriel des 0-formes différentielles discrètes. Cet espace sera généré par les fonctions de bases  $w_i^{0,\alpha} = B_i^\alpha$ . Autrement dit, chaque 0-forme différentielle discrète  $C^0$  (ou fonction) va s'écrire telle que :

$$C^0(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j^0 B_j^\alpha(x).$$

Comme les 0-formes différentielles ne peuvent être intégrées que sur un domaine de dimension 0 i.e. des points, on définit les coefficients  $c_j^0$  par la condition d'interpolation suivante :

$$C^0(x_i) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j^0 B_j^\alpha(x_i),$$

pour  $0 \leq i \leq N-1$ . Donc, pour connaître les coefficients  $c_j^0$ , on a à résoudre un système linéaire qui s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$M_\alpha^0 c^0 = \mathbb{C}^0,$$

où le vecteur  $\mathbb{C}^0 = (C^0(x_0), \dots, C^0(x_{N-1}))^T$  correspond aux valeurs de la fonction sur les différents points du maillage,  $c^0 = (c_0^0, \dots, c_{N-1}^0)^T$  les coefficients à définir et  $M_\alpha^0$  la matrice carrée dont les coefficients sont égaux à  $m_{ij}^0 = B_j^\alpha(x_i)$  pour  $i = 0 \dots N-1$  et  $j = -\alpha+2 \dots N-\alpha+2$  avec  $B_j^\alpha = B_{N+j}^\alpha$  pour  $j < 0$  (à cause de la périodicité).

Avant de poursuivre, on doit regarder sous quelles conditions la matrice  $M_\alpha^0$  est une matrice inversible. Pour y répondre, on a démontré le lemme suivant :

**Lemme 2.1** — Pour un ensemble de  $N$  noeuds uniformément répartis, on a

- pour tout  $\alpha$  impair, la matrice  $((M_\alpha^0)_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N-1}$  est inversible.
- pour tout  $\alpha$  pair et pour  $N$  un entier impair, la matrice  $((M_\alpha^0)_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N-1}$  est inversible.

*Démonstration.* On note par  $B_{i,j}^\alpha = B_i^\alpha(x_j) = M_{\alpha,i,j}^0$ . À l'aide de la formule de récurrence (73) et du fait que les noeuds soient uniformément répartis, on

a  $B_{i+1,j}^\alpha = B_{i,j-1}^\alpha$  et

$$B_{i,j}^\alpha = \frac{j-i}{\alpha} B_{i,j}^{\alpha-1} + \frac{i+\alpha+1-j}{\alpha} B_{i,j-1}^{\alpha-1}.$$

De plus, comme  $B_{i,j}^\alpha = 0$  si  $j \notin \{i+1, \dots, i+\alpha\}$ , on en déduit que  $M_\alpha^0$  est une matrice circulante et peut s'écrire comme une somme :

$$M_\alpha^0 = \sum_{j=1}^{\alpha} B_{0,j}^\alpha (J_N)^j, \quad (75)$$

avec  $J_N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$  de taille  $N \times N$ . On factorise par  $\frac{J_N}{\alpha!}$  et

l'égalité (75) devient

$$\begin{aligned} M_\alpha^0 &= \frac{J_N}{\alpha!} \sum_{j=1}^{\alpha} (j(\alpha-1)! B_{0,j}^{\alpha-1} + (\alpha+1-j)(\alpha-1)! B_{0,j-1}^{\alpha-1}) (J_N)^{j-1}, \\ &= \frac{J_N}{\alpha!} E^{\alpha-1}(J_N), \end{aligned}$$

où

$$E^{\alpha-1}(X) = \sum_{j=1}^{\alpha} (j(\alpha-1)! B_{0,j}^{\alpha-1} + (\alpha+1-j)(\alpha-1)! B_{0,j-1}^{\alpha-1}) X^{j-1}$$

correspond au polynôme d'Euler. Les coefficients de ce polynôme sont positifs et symétriques. Puisque le déterminant d'une matrice est le produit de ses valeurs propres, on va travailler avec les valeurs propres de  $J_N$  et donc de  $M_\alpha^0$ . Les valeurs propres de  $J_N$  sont les racines  $N$ -ième de l'unité avec  $\{\omega^0, \omega^1, \dots\}$  où  $\omega^i = \exp(\frac{2i\pi}{N})$  et donc celles de  $M_\alpha^0$  sont  $\{\omega^0 E^{\alpha-1}(\omega^0), \omega^1 E^{\alpha-1}(\omega^1), \dots\}$ . On en conclut que si parmi les valeurs propres de  $J_N$  on a une racine du polynôme d'Euler  $E^{\alpha-1}$  alors  $M_\alpha^0$  est singulière. Or, d'après l'article [44], on sait que les racines du polynôme d'Euler sont toutes des réelles négatives et distinctes. La seule racine  $N$ -ième de l'unité qui vérifie ces conditions est  $-1$ . Regardons les différents cas en fonction de la parité de  $\alpha$ .

Si  $\alpha$  est impair, le polynôme d'Euler est un polynôme de degré pair. Or les coefficients de ce polynôme sont symétriques et positifs, donc  $-1$  ne peut pas en être une racine. Les valeurs propres de  $M_\alpha^0$  sont toutes différentes de 0,

donc  $M_\alpha^0$  est inversible.

Si  $\alpha$  est pair, le polynôme d'Euler est un polynôme de degré impair. Or les coefficients de ce polynôme sont symétriques et positifs, donc  $-1$  peut faire parti de ses racines. Mais  $\omega^i = \exp(\frac{2i\pi}{N}) = -1$  si et seulement si  $N$  est pair. Donc si  $N$  est impair les racines de l'unité sont toutes différentes de  $-1$ , et le polynôme d'Euler ne s'annule pas sur l'ensemble des racines  $N$ -ième de l'unité. Sous ces conditions, les valeurs propres de  $M_\alpha^0$  sont toutes différentes de 0 et donc  $M_\alpha^0$  est inversible.  $\square$

Pour définir les 1-formes différentielles, on note

$$D_i^\alpha(x) = \frac{\alpha}{x_{i+\alpha} - x_i} B_i^{\alpha-1}(x).$$

La dérivée d'une B-spline, d'après la formule (74), devient alors

$$B_i^{\alpha'}(x) = D_i^\alpha(x) - D_{i+1}^\alpha(x). \quad (76)$$

Maintenant, on définit la base des 1-formes différentielles discrètes par

$$w_i^{1,\alpha}(x) = D_i^\alpha(x) dx.$$

L'espace des 1-formes différentielles discrètes  $\mathcal{B}_1^\alpha$  est un espace vectoriel généré par ces bases. Toute 1-forme différentielle discrète  $C^1 \in \mathcal{B}_1^\alpha$  s'écrit

$$C^1(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j^1 D_j^\alpha(x) dx.$$

Puisque une 1-forme différentielle peut être intégrée sur un domaine de dimension 1, la 1-forme différentielle discrète doit pouvoir être intégrée sur les 1-cubes (les vecteurs) de l'espace. Les coefficients  $c_j^1$  sont définis de la manière suivante :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} C^1(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j^1 \int_{x_i}^{x_{i+1}} D_j^\alpha(x) dx \quad \text{for } 0 \leq i \leq N-1.$$

On a alors à résoudre le système linéaire suivant

$$M_\alpha^1 c^1 = \mathbb{C}^1,$$

avec le vecteur  $\mathbb{C}^1 = (\int_{x_0}^{x_1} C^1(x), \dots, \int_{x_{N-1}}^{x_N} C^1(x))^T$  qui correspond à l'intégrale de la 1-forme sur les différents 1-cubes du maillage,  $c^1 = (c_0^1, \dots, c_{N-1}^1)^T$  les coefficients à déterminer et  $M_\alpha^1$  la matrice carrée dont les coefficients sont  $m_{ij}^1 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} D_j^\alpha(x) dx$ . Étudions la matrice  $M_\alpha^1$  :

**Lemme 2.2** — Sous les mêmes conditions que le lemme précédent, la matrice  $M_\alpha^1$  est inversible.

*Démonstration.* À l'aide de la formule (76) et du fait que  $B_i^\alpha(x) = 0$  si  $x \notin [x_i, x_{i+\alpha}]$ , on a la relation de récurrence suivante

$$\int_{x_{i+\nu}}^{x_{i+\nu+1}} \mathbf{w}_i^{1,\alpha}(x) = \sum_{k=0}^{\nu} B_{i+k}^\alpha(x_{i+\nu+1}) - \sum_{k=0}^{\nu-1} B_{i+k}^\alpha(x_{i+\nu}).$$

Dans le cas d'un maillage uniforme,  $B_{i+k}^\alpha(x_{i+\nu+1}) = B_{i+k+\nu+1}^\alpha(x_i)$  et donc on en déduit que  $(M_\alpha^1)_{i,j} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} D_j^\alpha(x) dx = B_{j+1}^\alpha(x_{i+1})$ .  $\square$

De la même façon, pour obtenir les 0-formes différentielles duales, on note par  $B_{j+1/2}^\alpha$  la B-spline dont les noeuds sont ceux du maillage dual. On a alors

$$\tilde{C}^0(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{c}_{j+1/2}^0 B_{j+1/2}^\alpha(x),$$

pour  $\tilde{C}^0(x)$  une 0-forme différentielle duale discrète. L'ensemble des 0-formes différentielles duales discrètes est noté  $\tilde{\mathcal{B}}_0^\alpha$ . Les coefficients  $\tilde{c}_{j+1/2}^0$  sont définis par la condition d'interpolation suivante

$$\tilde{C}^0(x_{i+1/2}) = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{c}_{j+1/2}^0 B_{j+1/2}^\alpha(x_{i+1/2}),$$

pour  $0 \leq i \leq N-1$ . Donc, ceci est équivalent à résoudre le système linéaire suivant

$$\tilde{M}_\alpha^0 \tilde{c}^0 = \tilde{C}^0,$$

avec le vecteur  $\tilde{C}^0 = (\tilde{C}^0(x_{1/2}), \dots, \tilde{C}^0(x_{N-1/2}))^T$  qui correspond à la valeur de la 0-forme différentielle sur les différents 0-cellules duales du maillage,  $\tilde{c}^0 = (\tilde{c}_{1/2}^0, \dots, \tilde{c}_{N-1/2}^0)^T$  les coefficients à déterminer et  $\tilde{M}_\alpha^0$  la matrice carré dont les coefficients sont  $\tilde{m}_{ij}^0 = B_{j+1/2}^\alpha(x_{i+1/2})$ . On remarque que cette matrice est inversible sous les mêmes conditions que le premier lemme (2.1).

De la même façon, toute 1-forme différentielle duale est définie par la combinaison linéaire suivante

$$\tilde{C}^1(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{c}_{j+1/2}^1 D_{j+1/2}^\alpha(x) dx,$$

où les coefficients  $\tilde{c}_{j+1/2}^1$  sont à déterminer à l'aide de la relation

$$\int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+3/2}} \tilde{C}^1(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{c}_{j+1/2}^1 \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+3/2}} D_{j+1/2}^\alpha(x) dx \quad \text{pour } 0 \leq i \leq N-1.$$

Le système linéaire devient

$$\tilde{M}_\alpha^1 \tilde{c}^1 = \tilde{\mathbb{C}}^1,$$

où  $\tilde{\mathbb{C}}^1 = (\int_{x_{1/2}}^{x_{3/2}} \tilde{C}^1(x), \dots, \int_{x_{N-1/2}}^{x_{N+1/2}} \tilde{C}^1(x))^T$  est le vecteur dont les coefficients correspondent à l'intégrale de la 1-forme différentielle sur les différents 1-cellules duales du maillage,  $\tilde{c}^1 = (\tilde{c}_{1/2}^1, \dots, \tilde{c}_{N-1/2}^1)^T$  les coefficients à déterminer et  $\tilde{M}_\alpha^1$  la matrice carrée dont les coefficients sont définis par  $\tilde{m}_{ij}^1 = \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+3/2}} D_{j+1/2}^\alpha(x) dx$ . Pour les mêmes raisons que  $M^1$ ,  $\tilde{M}_\alpha^1$  est inversible. On remarque par ailleurs que l'hypothèse de périodicité nous donne que

$$\int_{x_{N-1/2}}^{x_{N+1/2}} \tilde{C}^1(x) = \int_{x_{N-1/2}}^{x_N} \tilde{C}^1(x) + \int_{x_0}^{x_{1/2}} \tilde{C}^1(x).$$

### 2.1.2 Pour un maillage non uniforme et des conditions aux bords non périodiques

Soit le maillage primal du domaine défini par un ensemble de noeuds non uniforme  $x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N$ . Avec les conditions aux bords non périodiques, on se heurte à un problème de dimension dès que l'on utilise un degré d'interpolation  $\alpha$  strictement plus grand que 1. On a  $N + \alpha$  fonction B-splines et  $N + 1$  noeuds sur le maillage primal. On doit alors rajouter des noeuds pour l'interpolation. On prendra alors  $\alpha$  impair et on ajoutera le milieu des  $\frac{(\alpha-1)}{2}$  premiers 1-cubes et des  $\frac{(\alpha-1)}{2}$  derniers 1-cubes du maillage primal. Par exemple, pour  $\alpha = 3$  on rajoute le milieu de  $[x_0, x_1]$  et de  $[x_{N-1}, x_N]$ . Les noeuds du maillage primal correspondent alors à

$$\begin{aligned} \{x_0, \dots, x_N\} \cup & \left\{ \frac{(x_{i+1} + x_i)}{2} \mid i \in \{0, \dots, \frac{(\alpha-1)}{2} - 1\} \right\} \\ \cup & \left\{ \frac{(x_{i-1} + x_i)}{2} \mid i \in \{N - \frac{(\alpha-1)}{2} + 1, \dots, N\} \right\}. \end{aligned} \quad (77)$$

Dans la suite, on notera  $n_0 < n_1 < \dots < n_{N+\alpha-1}$  l'ensemble ordonné des noeuds.

Pour le maillage dual, on prendra pour noeuds le milieu des noeuds primaux et on rajoutera les noeuds extremaux  $x_0$  et  $x_N$ , i.e.

$$n_0 = n_{-1/2} < n_{1/2} < \dots < n_{N+\alpha-3/2} < n_{N+\alpha-1/2} = n_{N+\alpha-1}.$$

Dorénavant, on a  $N + \alpha$  noeuds primaux,  $N + \alpha + 1$  noeuds duaux. À l'aide de cette construction, on va pouvoir définir les 0 et 1-formes primales et duales. Commençons par les 0-formes différentielles primales.

Toute fonction  $C^0 \in \mathcal{B}_0^\alpha$  s'écrit

$$C^0(x) = \sum_{j=-\alpha}^{N-1} c_j^0 B_j^\alpha(x),$$

avec les  $c_j^0$  définis par les conditions d'interpolation

$$C^0(n_i) = \sum_{j=-\alpha}^{N-1} c_j^0 B_j^\alpha(n_i),$$

pour  $i \in \{0, \dots, N + \alpha - 1\}$  et celui-ci s'écrit comme un système linéaire avec la forme matricielle suivante

$$M_\alpha^0 c^0 = \mathbb{C}^0,$$

où  $\mathbb{C}^0 = (C^0(n_0), \dots, C^0(n_{N+\alpha-1}))^T$  est le vecteur dont les coefficients sont les valeurs de la 0-forme différentielle sur les différents 0-cubes du maillage,  $c^0 = (c_{-\alpha}^0, \dots, c_{N-1}^0)^T$  les coefficients à déterminer et  $M_\alpha^0$  la matrice carrée de taille  $N+\alpha$  dont les coefficients sont  $m_{i,j+\alpha}^0 = B_j^\alpha(n_i)$  pour  $j = -\alpha, \dots, N-1$  et  $i = 0, \dots, N + \alpha - 1$ . Maintenant, il faut montrer que  $M_\alpha^0$  est inversible, pour cela, on utilise le lemme suivant :

**Lemme 2.3** — La matrice  $M_\alpha^0$  est inversible.

*Démonstration.*  $M_\alpha^0$  vérifie les conditions du théorème de Schoenberg-Whitney [15] et donc cette matrice est inversible.  $\square$

L'espace des 1-formes différentielles discrètes  $\mathcal{B}_1^\alpha$  est un espace vectoriel généré par les fonction de bases. Autrement dit, toute 1-forme différentielle  $C^1 \in \mathcal{B}_1^\alpha$  s'écrit

$$C^1(x) = \sum_{j=-\alpha+1}^{N-1} c_j^1 D_j^\alpha(x) dx,$$

et les coefficients  $c_j^1$  sont déterminés par la relation

$$\int_{n_i}^{n_{i+1}} C^1(x) = \sum_{j=-\alpha+1}^{N-1} c_j^1 \int_{n_i}^{n_{i+1}} D_j^\alpha(x) dx \quad \text{pour } 0 \leq i \leq N + \alpha - 2.$$

Ce qui revient à résoudre le système linéaire

$$M_\alpha^1 c^1 = \mathbb{C}^1,$$

où  $\mathbb{C}^1 = \left( \int_{n_0}^{n_1} C^1(x), \dots, \int_{n_{N+\alpha-2}}^{n_{N+\alpha-1}} C^1(x) \right)^T$  est le vecteur dont les coefficients sont les valeurs de l'intégrale de la 1-forme différentielle sur les différents 1-cubes du maillage,  $c^1 = (c_{-\alpha+1}^1, \dots, c_{N-1}^1)^T$  les coefficients à déterminer et  $M_\alpha^1$  la matrice carrée de taille  $N+\alpha-1$  dont les coefficients sont  $m_{i,j+\alpha-3}^1 = \int_{n_i}^{n_{i+1}} D_j^\alpha(x) dx$  pour  $j = -\alpha + 1, \dots, N - 1$  et  $i = 0, \dots, N + \alpha - 2$ . Montrons maintenant que  $M_\alpha^1$  est inversible.

**Lemme 2.4** — La matrice  $M_\alpha^1$  est inversible.

*Démonstration.* En utilisant la relation (76) et le fait que  $B_i^\alpha(x)$  est nulle pour  $x \notin [x_i, x_{i+\alpha}]$ , on a alors la relation de récurrence suivante

$$\int_{n_i}^{n_{i+1}} \mathbf{w}_i^{1,\alpha}(x) = \sum_{k=j}^{N-1} B_k^\alpha(n_{i+1}) - \sum_{k=j}^{N-1} B_k^\alpha(n_i) =: A_j^\alpha(n_{i+1}) - A_j^\alpha(n_i).$$

On observe que  $M_\alpha^1$  est le mineur principal (1,1) de la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} M_\alpha^0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{-\alpha}^\alpha(n_0) & A_{-\alpha+1}^\alpha(n_0) & \cdots & A_{N-1}^\alpha(n_0) \\ \int_{n_0}^{n_1} D_{-\alpha}^\alpha & & & \\ \int_{n_1}^{n_2} D_{-\alpha}^\alpha & & & \\ \vdots & & & \\ \int_{n_{N+\alpha-2}}^{n_{N+\alpha-1}} D_{-\alpha}^\alpha & & & M_\alpha^1 \end{pmatrix}.$$

Notons par  $\mathcal{A}$  la matrice à gauche de l'égalité et remarquons que celle-ci est inversible car elle est le produit de matrices inversibles. De plus, puisque pour tout  $i$  on a  $n_i \geq x_0$  et que le support de  $D_{-\alpha}^\alpha$  est  $]x_{-\alpha}, x_0[$ , on a alors  $\int_{n_i}^{n_{i+1}} D_{-\alpha}^\alpha = 0$ . Mais comme  $A_{-\alpha}^\alpha(n_0) \neq 0$  car  $B_i(x) \geq 0$  et  $B_{-\alpha}(n_0) \neq 0$ , donc  $0 \neq \det(\mathcal{A}) = A_{-\alpha}^\alpha(n_0) \det(M_\alpha^1)$ . Ce qui implique que  $\det(M_\alpha^1) \neq 0$ .  $\square$

Sur les mêmes principes de construction, les 0-formes et les 1-formes différentielles duales, dont les espaces sont notés respectivement  $\tilde{\mathcal{B}}_0^\alpha$  et  $\tilde{\mathcal{B}}_1^\alpha$ , s'écrivent de la forme

$$\tilde{C}^0(x) = \sum_{j=-\alpha-1}^{N-1} \tilde{c}_{j+1/2}^0 B_{j+1/2}^\alpha(x),$$

et

$$\tilde{C}^1(x) = \sum_{j=-\alpha}^{N-1} \tilde{c}_{j+1/2}^1 D_{j+1/2}^\alpha(x) dx,$$

respectivement. Les coefficients  $\tilde{c}_{j+1/2}^0$  sont définis par

$$\tilde{C}^0(n_{i-1/2}) = \sum_{j=-\alpha-1}^{N-1} \tilde{c}_{j+1/2}^0 B_{j+1/2}^\alpha(n_{i-1/2}) \quad \text{pour } i \in \{0, \dots, N + \alpha\}$$

sur le maillage dual et on a alors

$$\tilde{M}_\alpha^0 \tilde{c}^0 = \tilde{C}^0,$$

où  $\tilde{\mathcal{C}}^0 = \left( \tilde{C}^0(n_{-1/2}), \tilde{C}^0(n_{1/2}), \dots, \tilde{C}^0(n_{N+\alpha-1/2}) \right)^T$  est le vecteur qui contient les valeurs de la 0-forme différentielle duale sur les différents 0-cellules duales du maillage,  $\tilde{c}^0 = \left( \tilde{c}_{-\alpha+3/2}^0, \dots, \tilde{c}_{N+3/2}^0 \right)^T$  les coefficients à déterminer et  $\tilde{M}_\alpha^0$  la matrice carrée de taille  $N + \alpha + 1$  avec  $\tilde{m}_{i,j+\alpha-1}^0 = B_{j+1/2}^\alpha(n_{i-1/2})$ . On peut montrer que celle-ci est une matrice inversible car elle vérifie les conditions du théorème de Schoenberg-Whitney.

Les coefficients  $\tilde{c}_{j+1/2}^1$  de la 1-forme différentielle duale sont donnés par

$$\int_{n_{i-1/2}}^{n_{i+1/2}} \tilde{C}^1(x) = \sum_{j=-\alpha}^{N-1} \tilde{c}_{j+1/2}^1 \int_{n_{i-1/2}}^{n_{i+1/2}} D_{j+1/2}^\alpha(x) dx \quad \text{pour } 0 \leq i \leq N + \alpha - 1.$$

On a alors à résoudre

$$\tilde{M}_\alpha^1 \tilde{c}^1 = \tilde{\mathcal{C}}^1,$$

où  $\tilde{\mathcal{C}}^1 = \left( \int_{n_{-1/2}}^{n_{1/2}} \tilde{C}^1(x), \dots, \int_{n_{N+\alpha-3/2}}^{n_{N+\alpha-1/2}} \tilde{C}^1(x) \right)^T$  est le vecteur qui contient les valeurs de l'intégrale de la 1-forme différentielle duale sur les différents 1-cellules duales du maillage,  $\tilde{c}^1 = \left( \tilde{c}_{-\alpha+3/2}^1, \dots, \tilde{c}_{N+3/2}^1 \right)^T$  les coefficients à déterminer et  $\tilde{M}_\alpha^1$  la matrice carrée de taille  $N + \alpha$  avec  $\tilde{m}_{i,j+\alpha-2}^1 = \int_{n_{i-1/2}}^{n_{i+1/2}} D_{j+1/2}^\alpha(x) dx$ . Cette matrice est non singulière d'après le lemme précédent (2.4).

## 2.2 Le cas 3D et plus

Nous allons définir les expressions des formes différentielles discrètes pour un domaine de dimension 3 en prenant le produit tensoriel des formes différentielles en dimension 1. Cette procédure permet de généraliser le cas  $n$  dimensionnel.

Les formes différentielles de la dimension 3 vont être déterminées comme étant une combinaison linéaire des fonctions de bases ci-dessous :

- Les fonctions de bases pour les 0-formes différentielles sont

$${}^0w_{i,j,k}^\alpha(x, y, z) = B_i^\alpha(x) B_j^\alpha(y) B_k^\alpha(z).$$

- Les fonctions de bases pour les 1-formes différentielles sont

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{w}_{i,j,k}^{\alpha,x}(x, y, z) &= D_i^\alpha(x) B_j^\alpha(y) B_k^\alpha(z) dx, \\ {}^1\mathbf{w}_{i,j,k}^{\alpha,y}(x, y, z) &= B_i^\alpha(x) D_j^\alpha(y) B_k^\alpha(z) dy, \\ {}^1\mathbf{w}_{i,j,k}^{\alpha,z}(x, y, z) &= B_i^\alpha(x) B_j^\alpha(y) D_k^\alpha(z) dz. \end{aligned}$$



- Les fonctions de bases pour les 2-formes différentielles sont

$${}^2\mathbf{w}_{i,j,k}^{\alpha,x}(x, y, z) = B_i^\alpha(x)D_j^\alpha(y)D_k^\alpha(z) dy \wedge dz,$$

$${}^2\mathbf{w}_{i,j,k}^{\alpha,y}(x, y, z) = D_i^\alpha(x)B_j^\alpha(y)D_k^\alpha(z) dz \wedge dx,$$

$${}^2\mathbf{w}_{i,j,k}^{\alpha,z}(x, y, z) = D_i^\alpha(x)D_j^\alpha(y)B_k^\alpha(z) dx \wedge dy.$$

- Les fonctions de bases pour les 3-formes différentielles sont

$${}^3w_{i,j,k}^\alpha(x, y, z) = D_i^\alpha(x)D_j^\alpha(y)D_k^\alpha(z) dx \wedge dy \wedge dz.$$



---

# Les opérations agissant sur les formes différentielles discrètes

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>1</b>	<b>La dérivée extérieure et le diagramme de De Rham . . . . .</b>	<b>96</b>
<b>2</b>	<b>Lien entre les chaînes et les formes différentielles discrètes . . . . .</b>	<b>98</b>
<b>3</b>	<b>Le hodge star . . . . .</b>	<b>101</b>
3.1	À l'aide de la formulation forte . . . . .	101
3.2	À l'aide de la formulation faible . . . . .	106
<b>4</b>	<b>Le produit extérieur . . . . .</b>	<b>108</b>
4.1	Le produit extérieur primal-primal ou dual-dual . .	108
4.2	Le produit extérieur primal-dual . . . . .	109
<b>5</b>	<b>Le produit intérieur . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>6</b>	<b>La dérivée de Lie . . . . .</b>	<b>110</b>
<b>7</b>	<b>La dérivée co-extérieure et le laplacien . . . . .</b>	<b>111</b>

---

La théorie des formes différentielles discrètes serait incomplète si on ne discrétisait pas également les opérations agissant sur elles. On va donc compléter le chapitre précédent en proposant une discrétisation des opérations agissant sur les formes différentielles. Pour ce faire, on va s'inspirer fortement de ce qui a été fait précédemment page 65. Le chapitre commencera par l'étude de la dérivée extérieure et on mettra en évidence un diagramme de De Rham. On développera les relations étroites entre les chaînes et les cochaînes (ou formes différentielles). Ensuite, on proposera deux discrétisations différentes pour l'opérateur hodge star : les formulations forte et faible. Pour finir, on expliquera comment obtenir la forme différentielle discrète qui résulte d'un produit extérieur, d'un produit intérieur, d'une dérivée de Lie, d'une dérivée co-extérieure ou d'un laplacien.

# 1 LA DÉRIVÉE EXTÉRIEURE ET LE DIAGRAMME DE DE RHAM

En théorie, la dérivée extérieure est l'application qui à une  $(k-1)$ -forme différentielle associe une  $k$ -forme différentielle. Pour un domaine assez régulier (ouvert étoilé) on a le diagramme de De Rham suivant :

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \Omega^3(M) \dots,$$

avec  $\Omega^k(M)$  l'ensemble des  $k$ -formes différentielles (non discrètes). Si l'on veut être cohérent avec la géométrie différentielle, il faut que la dérivée extérieure discrète agisse de la même façon. Regardons ce que l'on obtient sur un exemple simple. Prenons une 0-forme différentielle discrète et appliquons lui la dérivée extérieure, cela nous donne :

$$\begin{aligned} dC^0 &= d\left(\sum c_{i,j,k}^0 B_i^\alpha(x) B_j^\alpha(y) B_k^\alpha(z)\right) \\ &= \sum c_{i,j,k}^0 d\left(B_i^\alpha(x) B_j^\alpha(y) B_k^\alpha(z)\right) \\ &= \sum c_{i,j,k}^0 (D_i^\alpha(x) - D_{i+1}^\alpha(x)) B_j^\alpha(y) B_k^\alpha(z) dx \\ &\quad + c_{i,j,k}^0 (D_j^\alpha(y) - D_{j+1}^\alpha(y)) B_i^\alpha(x) B_k^\alpha(z) dy \\ &\quad + c_{i,j,k}^0 (D_k^\alpha(z) - D_{k+1}^\alpha(z)) B_i^\alpha(x) B_j^\alpha(y) dz \\ &= \sum (c_{i,j,k}^0 - c_{i-1,j,k}^0) D_i^\alpha(x) B_j^\alpha(y) B_k^\alpha(z) dx \\ &\quad + (c_{i,j,k}^0 - c_{i,j-1,k}^0) B_i^\alpha(x) D_j^\alpha(y) B_k^\alpha(z) dy \\ &\quad + (c_{i,j,k}^0 - c_{i,j,k-1}^0) B_i^\alpha(x) B_j^\alpha(y) D_k^\alpha(z) dz \\ &= \sum (c_{i,j,k}^0 - c_{i-1,j,k}^0) {}^1\mathbf{w}_{i,j,k}^{\alpha,x}(x, y, z) \\ &\quad + (c_{i,j,k}^0 - c_{i,j-1,k}^0) {}^1\mathbf{w}_{i,j,k}^{\alpha,y}(x, y, z) \\ &\quad + (c_{i,j,k}^0 - c_{i,j,k-1}^0) {}^1\mathbf{w}_{i,j,k}^{\alpha,z}(x, y, z). \end{aligned}$$

On s'aperçoit que grâce à la relation de récurrence sur les dérivées des B-splines donnée par la formule (76), on a que la dérivée extérieure d'une  $(k-1)$ -forme différentielle discrète est une  $k$ -forme différentielle discrète. De plus, on constate que celle-ci peut se discrétiser par une matrice contenant des 0 des 1 et des  $-1$  et agissant sur les coefficients de la  $k$ -forme. Cette matrice correspond exactement à la matrice d'incidence  $\partial^k$  des  $k$ -cubes. Maintenant, on va pouvoir construire le diagramme de De Rham discret. Soit  $proj$  la projection de  $\Omega^k(M)$  dans  $\mathcal{B}_k^\alpha$ . Puisqu'une  $k$ -forme différentielle

discrète est entièrement définie par ses coefficients, on a un isomorphisme de  $\mathcal{B}_k^\alpha$  dans  $\mathbb{R}^{|H_{\alpha,k}|}$  où  $|H_{\alpha,k}|$  correspond au cardinal de l'ensemble des  $k$ -cubes. On obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 & \xrightarrow{d} & \Omega^3 \\
\text{proj} \downarrow & & \text{proj} \downarrow & & \text{proj} \downarrow & & \text{proj} \downarrow \\
\mathcal{B}_0^\alpha & \xrightarrow{d} & \mathcal{B}_1^\alpha & \xrightarrow{d} & \mathcal{B}_2^\alpha & \xrightarrow{d} & \mathcal{B}_3^\alpha \\
\mathcal{P}_\alpha \downarrow \uparrow \mathcal{R}_\alpha & & \mathcal{P}_\alpha \downarrow \uparrow \mathcal{R}_\alpha & & \mathcal{P}_\alpha \downarrow \uparrow \mathcal{R}_\alpha & & \mathcal{P}_\alpha \downarrow \uparrow \mathcal{R}_\alpha \\
\mathbb{R}^{|H_{\alpha,0}|} & \xrightarrow{\partial^0} & \mathbb{R}^{|H_{\alpha,1}|} & \xrightarrow{\partial^1} & \mathbb{R}^{|H_{\alpha,2}|} & \xrightarrow{\partial^2} & \mathbb{R}^{|H_{\alpha,3}|}
\end{array}$$

avec l'application  $\mathcal{P}_\alpha$  définie par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_\alpha : \mathcal{B}_k^\alpha &\rightarrow \mathbb{R}^{|H_{\alpha,k}|} \\
C^k &\mapsto \{c^k \mid \mathbb{C}^k = \mathbb{M}_\alpha^k c^k\}
\end{aligned}$$

avec  $\mathbb{M}_\alpha^k$  la matrice dont les coefficients sont  $\left(\int_{h_k^i} {}^k \mathbf{w}_j^\alpha\right)_{i,j}$  où  $h_k^i \in H_{\alpha,k}$  et  ${}^k \mathbf{w}_j^\alpha \in \mathcal{B}_k^\alpha$  et l'application  $\mathcal{R}_\alpha$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_\alpha : \mathbb{R}^{|H_{\alpha,k}|} &\rightarrow \mathcal{B}_k^\alpha \\
c^k &\mapsto \sum_{i \in |H_{\alpha,k}|} c_i^k {}^k \mathbf{w}_i^\alpha.
\end{aligned}$$

**Lemme 1.1** — Ce diagramme est commutatif.

*Démonstration.* Démontrons d'abord la commutativité du diagramme entre les  $k$ -formes différentielles discrètes et les coefficients des splines.

Soit  $C^k$  une  $k$ -forme différentielle discrète. On veut montrer que  $\mathcal{P}_\alpha d C^k = \partial^k \mathcal{P}_\alpha C^k$ . Or, effectuer la dérivée extérieure d'une  $k$ -forme différentielle discrète revient à appliquer la matrice d'incidence sur les coefficients de la  $k$ -forme différentielle discrète. Ce que l'on a par construction.

Démontrons, maintenant, la commutativité du diagramme concernant les formes différentielles théoriques et discrètes.

Soit  $\omega^k \in \Omega^k(\Omega)$  une  $k$ -forme différentielle. Sa dérivée extérieure est la  $(k+1)$ -forme différentielle  $d\omega^k$ . La formule de Stokes nous dit que

$$\int_{h_{k+1}^j} d\omega^k = \int_{\partial h_{k+1}^j} \omega^k.$$

Ce qui revient à dire que  $\mathbb{W}^{k+1} = \partial^k \mathbb{W}^k$  où  $\mathbb{W}^k$  est le vecteur dont les coefficients sont l'intégrale de  $\omega^k$  sur chaque  $k$ -cube  $h_k^j$  du maillage. D'une

part, on en déduit alors

$$proj d \omega^k = \sum_{i \in |H_{\alpha, k+1}|} \left( (\mathbb{M}_{\alpha}^{k+1})^{-1} \partial^k \mathbb{W}^k \right)_i {}^k \mathbf{w}_i^{\alpha}.$$

et d'autre part, on a

$$d proj \omega^k = \sum_{i \in |H_{\alpha, k}|} \left( \partial^k (\mathbb{M}_{\alpha}^k)^{-1} \mathbb{W}^k \right)_i {}^k \mathbf{w}_i^{\alpha}.$$

On en conclut que, démontrer  $d proj \omega^k = proj d \omega^k$  est équivalent à démontrer  $(\mathbb{M}_{\alpha}^{k+1})^{-1} \partial^k = \partial^k (\mathbb{M}_{\alpha}^k)^{-1}$  i.e

$$\partial^k \mathbb{M}_{\alpha}^k = \mathbb{M}_{\alpha}^{k+1} \partial^k.$$

Or puisque les B-splines vérifient  $B_j^{\alpha}(x_{i+1}) - B_j^{\alpha}(x_i) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} D_j(x) dx - \int_{x_i}^{x_{i+1}} D_{j+1}(x) dx$  (voir page 84), on a bien  $\partial^k \mathbb{M}_{\alpha}^k = \mathbb{M}_{\alpha}^{k+1} \partial^k$ .  $\square$

De même pour le maillage dual, on a le diagramme commutatif suivant qui ce démontre de la même façon :

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 & \xrightarrow{d} & \Omega^3 \\ proj \downarrow & & proj \downarrow & & proj \downarrow & & proj \downarrow \\ \tilde{\mathcal{B}}_0^{\alpha} & \xrightarrow{d} & \tilde{\mathcal{B}}_1^{\alpha} & \xrightarrow{d} & \tilde{\mathcal{B}}_2^{\alpha} & \xrightarrow{d} & \tilde{\mathcal{B}}_3^{\alpha} \\ \mathcal{P}_{\alpha} \updownarrow \mathcal{R}_{\alpha} & & \mathcal{P}_{\alpha} \updownarrow \mathcal{R}_{\alpha} & & \mathcal{P}_{\alpha} \updownarrow \mathcal{R}_{\alpha} & & \mathcal{P}_{\alpha} \updownarrow \mathcal{R}_{\alpha} \\ \mathbb{R}^{|H_{\alpha, 0}^*|} & \xrightarrow{(\partial^2)^t} & \mathbb{R}^{|H_{\alpha, 1}^*|} & \xrightarrow{(\partial^1)^t} & \mathbb{R}^{|H_{\alpha, 2}^*|} & \xrightarrow{(\partial^0)^t} & \mathbb{R}^{|H_{\alpha, 3}^*|} \end{array}$$

## 2 LIEN ENTRE LES CHAINES ET LES FORMES DIFFÉRENTIELLES DISCRÈTES

Théoriquement, une  $k$ -chaîne  $C_k$  est une combinaison linéaire d'objets de dimension  $k$ . Or, dans notre cas, les objets de dimension  $k$  correspondent aux  $k$ -cubes que l'on a définis au premier chapitre de cette partie à la page 79. Une  $k$ -chaîne  $C_k$  est, alors, une combinaison linéaire de  $k$ -cubes i.e. :

$$C_k = \sum_{h_k^i \in H_{\alpha, k}} c_k^i h_k^i,$$

avec les poids  $c_k^i \in \mathbb{R}$ . L'ensemble de toutes les  $k$ -chaines forme un espace vectoriel que l'on notera  $\mathcal{C}_{\alpha}^k$ . On remarque que ceci nous permet de définir la

notion de variété discrète de dimension  $k$ .

Pour définir le bord d'une  $k$ -chaîne, une  $k - 1$ -chaîne, on a besoin de  $\partial$ , l'opérateur linéaire qui à toute  $k$ -chaîne lui associe son bord, une  $(k - 1)$ -chaîne. On a, alors, par linéarité :

$$\partial C_k = \partial \left( \sum_{h_k^i \in H_{\alpha,k}} c_k^i h_k^i \right) = \sum_{h_k^i \in H_{\alpha,k}} c_k^i \partial h_k^i.$$

Puisque  $\partial h_k^i = (\partial^{k-1} h_{k-1})_i$ , en ordonnant correctement les termes, on a

$$\partial C_k = \sum_{h_{k-1}^i \in H_{\alpha,k-1}} ((\partial^{k-1})^t c_k)_i h_{k-1}^i,$$

avec  $(\partial^k)^t$  la transposée de la matrice d'incidence  $\partial^k$  du chapitre 1 et  $c_k = (c_k^i)_i$  le vecteur colonne des coefficients de la  $k$ -chaîne. En fait, appliquer un opérateur de bord à une  $k$ -chaîne est équivalent à appliquer la transposée de la matrice d'incidence  $(\partial^k)^t$  sur les coefficients de la  $k$ -chaîne. De plus, puisqu'une  $k$ -chaîne est entièrement déterminée par ces  $|H_{\alpha,k}|$  coefficients  $c_k^i$ , on peut définir une bijection de  $\mathcal{C}_\alpha^k$  dans  $\mathbb{R}^{|H_{\alpha,k}|}$ . Mais avant cela, on va expliquer comment trouver les coefficients  $c_k^i$ .

Une  $k$ -chaîne  $C_k$ , est de dimension  $k$ , donc pour toute fonction de base des  $k$ -formes différentielles discrètes,  ${}^k \mathbf{w}_i^\alpha \in \mathcal{B}_k^\alpha$ , on peut définir l'intégrale de  ${}^k \mathbf{w}_i^\alpha$  sur  $C_k$ . D'où, pour tout  $i \in |H_{\alpha,k}|$ , on a :

$$\int_{C_k} {}^k \mathbf{w}_i^\alpha = \sum_{h_k^j \in H_{\alpha,k}} c_k^j \int_{h_k^j} {}^k \mathbf{w}_i^\alpha.$$

On résout donc un système linéaire pour connaître les coefficients  $c_k^i$ .

Par exemple, en  $1D$ , on doit résoudre

- pour une 0-chaîne

$$\mathbb{C}_0 = (M_\alpha^0)^t c_0,$$

où  $\mathbb{C}_0 = (B_0^\alpha(C_0), \dots, B_{|H_{\alpha,0}|-1}^\alpha(C_0))^t$  est le vecteur dont les coefficients sont égales à l'évaluation de chaque base des 0-formes différentielles discrètes  $B_i^\alpha$  sur la 0-chaîne  $C_0$ ,  $c_0 = (c_0^0, \dots, c_0^{|H_{\alpha,0}|-1})^t$  les coefficients à déterminer et  $M_\alpha^0$  la matrice carrée que l'on a construite pour les 0-formes différentielles discrètes à la page 84.

- et pour une 1-chaîne

$$\mathbb{C}_1 = (M_\alpha^1)^t c_1,$$

où  $\mathbb{C}_1 = (\int_{C_1} D_0^\alpha(x) dx, \dots, \int_{C_1} D_{|H_{\alpha,1}|-1}^\alpha(x) dx)^t$  est le vecteur dont les coefficients sont égales à l'évaluation de chaque base des 1-formes différentielles discrètes  $D_i^\alpha$  sur la 1-chaîne  $C_1$ ,  $c_1 = (c_1^0, \dots, c_1^{|H_{\alpha,1}|-1})^t$  les

coefficients à déterminer et  $M_\alpha^1$  la matrice carrée que l'on a construite pour les 1-formes différentielles discrètes à la page 84.

De la même manière, en dimension 3, on peut voir que l'on doit résoudre un système linéaire. Le système matriciel correspondant aura une matrice qui s'exprimera comme un produit tensoriel de  $(M_\alpha^1)^t$  et de  $(M_\alpha^0)^t$ . Plus généralement, pour n'importe quelle dimension, on note  $\mathbb{M}_\alpha^k$  la matrice carrée utilisée pour trouver les coefficients d'une  $k$ -chaîne  $C_k$  autrement dit  $\mathbb{C}_k = (\mathbb{M}_\alpha^k)^t c_k$ . Définissons maintenant, les applications duales  $\mathcal{P}_\alpha^t$  de  $C_{\alpha,k}$  sur  $\mathbb{R}^{|H_{\alpha,k}|}$  et  $\mathcal{R}_\alpha^t$  de  $\mathbb{R}^{|H_{\alpha,k}|}$  sur  $\mathcal{C}_\alpha^k$  telles que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\alpha^t : \mathcal{C}_\alpha^k &\rightarrow \mathbb{R}^{|H_{\alpha,k}|} \\ C_k &\mapsto \{c_k | \mathbb{C}_k = (\mathbb{M}_\alpha^k)^t c_k\} \end{aligned}$$

avec  $\mathbb{M}_\alpha^k$  la matrice dont les coefficients sont  $\left(\int_{h_k^i} {}^k \mathbf{w}_j^\alpha\right)_{i,j}$  où  $h_k^i \in H_{\alpha,k}$  et  ${}^k \mathbf{w}_j^\alpha \in \mathcal{B}_k^\alpha$  et

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\alpha^t : \mathbb{R}^{|H_{\alpha,k}|} &\rightarrow \mathcal{C}_\alpha^k \\ c_k = (c_j)_j &\mapsto \sum_{i \in |H_{\alpha,k}|} c_k^i h_k^i. \end{aligned}$$

On peut démontrer l'existence du diagramme de De Rham à l'aide de ce qui a été fait précédemment page 97 :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{C}_\alpha^3 & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{C}_\alpha^2 & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{C}_\alpha^1 & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{C}_\alpha^0 \\ \mathcal{P}_\alpha^t \uparrow \downarrow \mathcal{R}_\alpha^t & & \mathcal{P}_\alpha^t \uparrow \downarrow \mathcal{R}_\alpha^t & & \mathcal{P}_\alpha^t \uparrow \downarrow \mathcal{R}_\alpha^t & & \mathcal{P}_\alpha^t \uparrow \downarrow \mathcal{R}_\alpha^t \\ \mathbb{R}^{|H_{\alpha,3}|} & \xrightarrow{(\partial^2)^t} & \mathbb{R}^{|H_{\alpha,2}|} & \xrightarrow{(\partial^1)^t} & \mathbb{R}^{|H_{\alpha,1}|} & \xrightarrow{(\partial^0)^t} & \mathbb{R}^{|H_{\alpha,0}|} \end{array}$$

avec  $\partial^k \partial^{k+1} = 0$ .

**Lemme 2.1** — Ce diagramme est commutatif.

*Démonstration.* Appliquer l'opérateur de bord sur la  $k$ -chaîne  $C_k$  est équivalent à appliquer l'opérateur  $(\partial^k)^t$  sur les coefficients de cette  $k$ -chaîne. Donc, par construction, on a bien  $\mathcal{P}_\alpha^t \partial C_k = (\partial^k)^t \mathcal{P}_\alpha^t C_k$ .  $\square$

Pour le maillage dual, on note  $H_{\alpha,k}^*$  les  $k$ -cellules duales, les duales des  $(n-k)$ -cubes et  $\mathcal{C}_\alpha^{k,*}$  l'ensemble des  $k$ -chaînes sur le maillage dual. De façon



similaire, on obtient le diagramme de De Rham qui est également commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{C}_\alpha^{3,*} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{C}_\alpha^{2,*} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{C}_\alpha^{1,*} & \xrightarrow{\partial} & \mathcal{C}_\alpha^{0,*} \\
\mathcal{P}_\alpha^t \updownarrow \mathcal{R}_\alpha^t & & \mathcal{P}_\alpha^t \updownarrow \mathcal{R}_\alpha^t & & \mathcal{P}_\alpha^t \updownarrow \mathcal{R}_\alpha^t & & \mathcal{P}_\alpha^t \updownarrow \mathcal{R}_\alpha^t \\
\mathbb{R}^{|H_{\alpha,0}|} & \xrightarrow{\partial^0} & \mathbb{R}^{|H_{\alpha,1}|} & \xrightarrow{\partial^1} & \mathbb{R}^{|H_{2,\alpha}|} & \xrightarrow{\partial^2} & \mathbb{R}^{|H_{\alpha,3}|}
\end{array}$$

### 3 LE HODGE STAR

#### 3.1 À l'aide de la formulation forte

##### 3.1.1 Pour un maillage uniforme et périodique

Puisque les 0-formes et les 1-formes différentielles discrètes sont bien définies sur le maillage primal et dual, on va pouvoir définir l'opérateur discret du hodge star en procédant de la même manière que Kettunen [32]. Cet opérateur discret associe à une  $k$ -forme différentielle primale une  $(n-k)$ -forme duale et inversement. Puisque les formes différentielles discrètes sont entièrement déterminées par leurs coefficients dans une base appropriée, l'opérateur du hodge star discret doit envoyer les *coefficients splines* (les coefficients devant les fonctions de base) d'une  $k$ -forme différentielle discrète vers des coefficients dans la base appropriée des  $(n-k)$ -formes différentielles discrètes. On se place sur une variété de dimension 1 et on commence par le hodge star discret agissant sur les 0-formes primales.

Soit la 0-forme sur le maillage primal définie telle que

$$C^0(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j^0 B_j^\alpha(x).$$

On peut lui appliquer l'opérateur continu qui agit tel que  $\star 1 = dx$  et on a alors

$$\star C^0(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j^0 B_j^\alpha(x) dx.$$

Or les  $B_j^\alpha$  ne correspondent pas à la base des 1-formes discrètes sur le maillage dual, donc cette expression ne définit pas la 1-forme différentielle discrète sur le maillage dual. On a donc besoin de rajouter une projection. Soit  $\pi C^0$  la projection de  $\star C^0$  sur l'espace des 0-formes différentielles discrètes du maillage dual, on écrira alors

$$\pi C^0(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{c}_{j+1/2}^1 D_{j+1/2}^\alpha(x) dx,$$

avec

$$\int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+3/2}} \star C^0(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{c}_{j+1/2}^1 \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+3/2}} D_{j+1/2}^\alpha(x) dx \quad \text{pour } 0 \leq i \leq N-1.$$

Maintenant, définissons  $\tilde{S}^1$  la matrice où les coefficients  $(\tilde{S}^1)_{i,j}$  sont définis par  $\int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+3/2}} B_j^\alpha(x) dx$ . On obtient, alors, le système matriciel suivant

$$\tilde{S}^1 c^0 = \tilde{M}_\alpha^1 \tilde{c}^1.$$

Donc l'opérateur du hodge star discret qui envoie  $c^0$  sur  $\tilde{c}^1$  est égal à

$$(\tilde{M}_\alpha^1)^{-1} \tilde{S}^1 \quad \text{avec } \tilde{S}_{i,j}^1 = \int_{x_{i+1/2}}^{x_{i+3/2}} B_j^\alpha(x) dx.$$

Par le même procédé, on va maintenant définir le hodge star discret qui à une 1-forme sur le maillage primal associe une 0-forme sur le dual. On applique l'opérateur continu ( $\star dx = 1$ ) afin d'obtenir une 0-forme i.e. :

$$\star C^1(x) = \sum_{j=0}^{N-1} c_j^1 D_j^\alpha(x).$$

La projection sur l'espace des 0-formes duales est définie par la valeur  $\star C^1(x_{i+1/2})$ . Dans ce cas, l'opérateur hodge star discret est défini par la matrice

$$(\tilde{M}_\alpha^0)^{-1} \tilde{S}^0 \quad \text{avec } \tilde{S}_{i,j}^0 = D_j^\alpha(x_{i+1/2}).$$

Le hodge star discret allant du maillage dual vers le maillage primal est défini de la même manière par

$$(M_\alpha^1)^{-1} S^1 \quad \text{avec } S_{i,j}^1 = \int_{x_i}^{x_{i+1}} B_{j+1/2}^\alpha(x) dx,$$

et

$$(M_\alpha^0)^{-1} S^0 \quad \text{avec } S_{i,j}^0 = D_{j+1/2}^\alpha(x_i).$$

Écrivons explicitement les différentes matrices représentant le hodge star dans le cas où  $\alpha = 1$  ou  $3$ . Rappelons la relation de récurrence

$$D_j^\alpha(x) - D_{j+1}^\alpha(x) = B_{j+1}^{\alpha-1}(x).$$

Lorsque l'on intègre entre  $i$  et  $i+1$ , on peut utiliser le fait que  $B_j^\alpha(x) = B_0^\alpha(x - x_j)$  car on utilise un maillage uniforme et donc on a

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} (D_0^\alpha(x - x_j) - D_0^\alpha(x - x_j - \Delta x)) dx = B_0^\alpha((i-j)\Delta x) - B_0^\alpha((i-j-1)\Delta x).$$

avec  $\Delta_x$  le pas d'espace. Alors, on obtient la relation suivante

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} D_j^\alpha(x) dx = B_{j+1}^\alpha(x_{i+1}).$$

Dans le cadre d'un maillage uniforme et périodique, on remarque que  $M_\alpha^0 = M_\alpha^1 = \tilde{M}_\alpha^0 = \tilde{M}_\alpha^1$  avec  $\alpha$  le degré des splines.

Pour des splines linéaire ( $\alpha = 1$ ), les matrices  $M_1^0 = M_1^1 = \tilde{M}_1^0 = \tilde{M}_1^1 = \mathbb{I}$  correspondent à la matrice identité. Pour des splines cubiques ( $\alpha = 3$ ), les matrices sont des matrices circulantes avec  $2/3$  sur la diagonale et  $1/6$  au dessus et en dessous de celle-ci.

Explicitons maintenant les matrices qui définissent le hodge star. Grâce aux expressions des matrices vues au dessus, on peut observer que l'on obtient également une matrice circulante et que  $S_\alpha^0 = \tilde{S}_\alpha^0$  et  $S_\alpha^1 = \tilde{S}_\alpha^1$ . Dans le cas où  $\alpha = 1$ ,  $D_i^\alpha(x) = \frac{1}{\Delta_x}$  pour  $x_{i-1} \leq x \leq x_i$  et 0 sinon. D'où

$$S_1^0 = \tilde{S}_1^0 = \frac{1}{\Delta_x} \mathbb{I}.$$

Par un simple calcul, on montre que  $S_1^1 = \tilde{S}_1^1$  sont des matrices circulantes tridiagonales et que

$$S_1^1 = \tilde{S}_1^1 = \Delta_x \text{circ}\left[\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}\right],$$

où

$$\text{circ}\left[\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}\right] = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 & \dots & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & 0 & \dots & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \frac{1}{8} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Remarquons que  $S_1^0$  et  $\tilde{S}_1^1$  ne sont pas exactement les inverses réciproques et c'est également le cas pour  $S_1^1$  et  $\tilde{S}_1^0$ , mais on peut quand même utiliser  $\tilde{S}_1^1$  et  $(S_1^0)^{-1}$  pour approximer le hodge star.

Pour le cas des splines cubiques, on a les matrices circulantes suivantes

$$S_3^0 = \tilde{S}_3^0 = \frac{1}{\Delta_x} \text{circ}\left[\frac{1}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}\right],$$

$$S_3^1 = \tilde{S}_3^1 = \Delta_x \text{circ}\left[\frac{1}{384}, \frac{19}{96}, \frac{115}{192}, \frac{19}{96}, \frac{1}{384}\right].$$

### 3.1.2 Pour un maillage non-uniforme avec les conditions aux bords non périodiques

Commençons par l'opérateur hodge star discret qui à une 0-forme primale associe une 1-forme duale. Soit la 0-forme discrète primale

$$C^0(x) = \sum_{j=-\alpha}^{N-1} c_j^0 B_j^\alpha(x),$$

et donc

$$\star C^0(x) = \sum_{j=-\alpha}^{N-1} c_j^0 B_j^\alpha(x) dx.$$

On note  $\pi C^0$  la projection de  $\star C^0$  sur l'espace des 0-formes différentielles discrètes duales et on a alors

$$\pi C^0(x) = \sum_{j=-\alpha}^{N-1} \tilde{c}_{j+1/2}^1 D_{j+1/2}^\alpha(x) dx,$$

avec

$$\int_{n_{i-1/2}}^{n_{i+1/2}} \star C^0(x) = \sum_{j=-\alpha}^{N-1} \tilde{c}_{j+1/2}^1 \int_{n_{i-1/2}}^{n_{i+1/2}} D_{j+1/2}^\alpha(x) dx \quad \text{pour } 0 \leq i \leq N+\alpha-1,$$

où  $n_{-1/2} = n_0$  et  $n_{N+\alpha-1/2} = n_{N+\alpha-1}$  (les points du maillage définis page 89). Maintenant définissons  $\tilde{S}^1$  la matrice carrée de taille  $N+\alpha$  dont le  $(i, j)$  ième coefficient est donné par  $\int_{n_{i-1/2}}^{n_{i+1/2}} B_j^\alpha(x) dx$ . De cette relation on en déduit le système matriciel suivant

$$\tilde{S}^1 c^0 = \tilde{M}_\alpha^1 \tilde{c}^1.$$

L'opérateur du hodge star discret qui à  $c^0$  associe  $\tilde{c}^1$  est

$$(\tilde{M}_\alpha^1)^{-1} \tilde{S}^1 \quad \text{avec} \quad \tilde{S}_{i,j}^1 = \int_{n_{i-1/2}}^{n_{i+1/2}} B_j^\alpha(x) dx.$$

Pour l'opérateur de hodge star qui à une 1-forme primale associe une 0-forme duale, on a

$$\star C^1(x) = \sum_{j=-\alpha+1}^{N-1} c_j^1 D_j^\alpha(x).$$

Alors, la projection de l'espace des 0-formes duales est définie par la valeur  $\star C^1(n_{i-1/2})$  pour  $i \in \{0, \dots, N+\alpha\}$ . Et donc, en procédant de la même façon, on a

$$(\tilde{M}_\alpha^0)^{-1} \tilde{S}^0 \quad \text{avec} \quad \tilde{S}_{i,j}^0 = D_j^\alpha(n_{i-1/2}).$$

On peut remarquer que contrairement au cas périodique, la matrice n'est pas carrée car elle est de taille  $(N + \alpha + 1) \times (N + \alpha - 1)$ .

L'opérateur hodge star allant du maillage dual vers le maillage primal est défini par

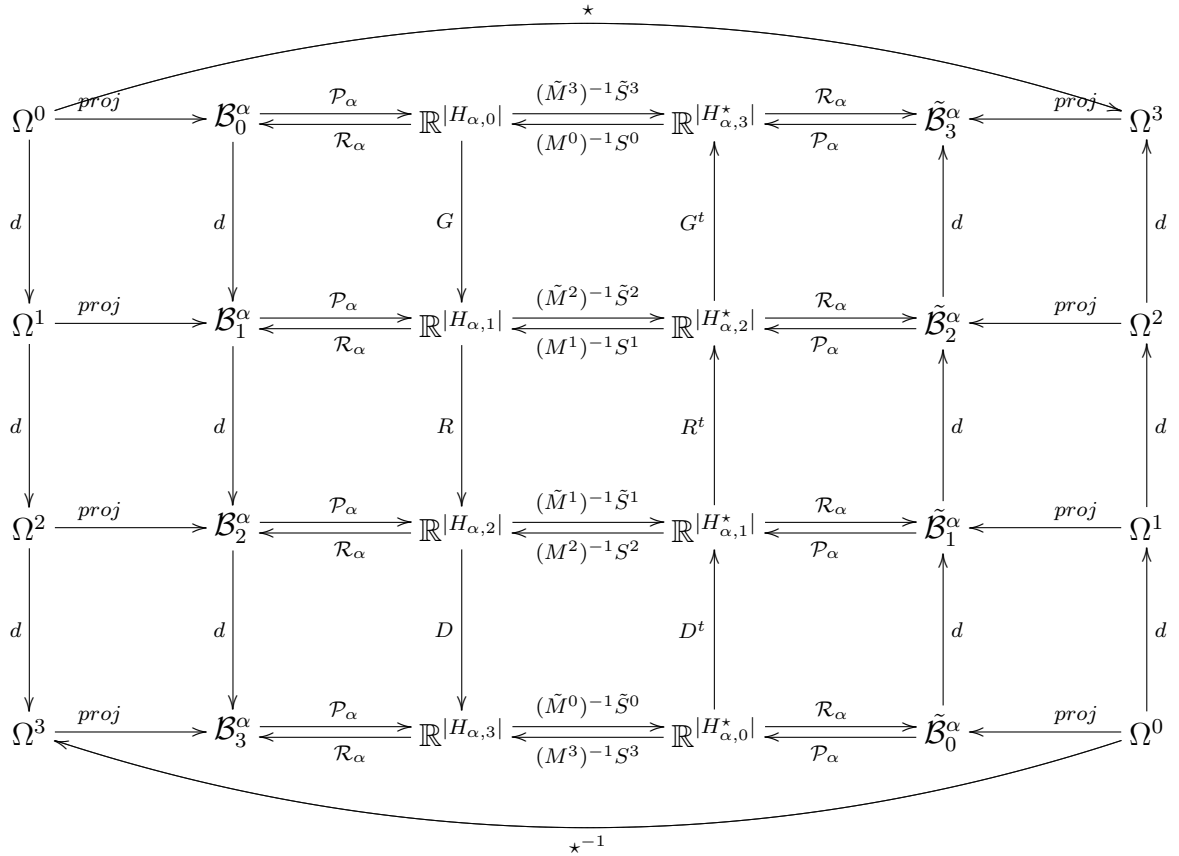
$$(M_\alpha^1)^{-1}S^1 \quad \text{avec} \quad S_{i,j}^1 = \int_{n_i}^{n_{i+1}} B_{j+1/2}^\alpha(x) dx.$$

Cette matrice n'est également pas carrée car elle est de taille  $(N + \alpha - 1) \times (N + \alpha + 1)$ , mais la matrice  $S^0$  est carrée et est de taille  $(N + \alpha) \times (N + \alpha)$  :

$$(M_\alpha^0)^{-1}S^0 \quad \text{avec} \quad S_{i,j}^0 = D_{j+1/2}^\alpha(n_i).$$

### 3.1.3 Conclusion

On peut évidemment étendre ce qui a été fait précédemment en dimension supérieure. De plus, avec l'opérateur hodge star  $\star$ , on a alors le diagramme de De Rham :



Pour faire le parallèle avec les opérateurs du calcul vectoriel, comme le gradient, le rotationnel et la divergence, on note  $G, R, D$  les matrices  $\partial^k$  pour

$k = 1, 2, 3$  respectivement.

Pour généraliser un espace de dimension quelconque, on a posé  $(\tilde{M}^{n-k})^{-1}\tilde{S}^{n-k}$  l'application hodge star qui à une  $k$ -forme différentielle primale associe une  $(n-k)$ -forme différentielle duale et l'application hodge star  $(M^{n-k})^{-1}S^{n-k}$  qui à une  $k$ -forme différentielle duale associe une  $(n-k)$ -forme différentielle primale.

Théoriquement, on a l'égalité suivante  $\star\star\omega^k = (-1)^{k(n-k)}\omega^k$  pour toute  $k$ -forme différentielle  $\omega^k$ . Malheureusement, on n'a pas cette propriété numériquement, mais  $(M^{n-k})^{-1}S^{n-k}(\tilde{M}^{n-k})^{-1}\tilde{S}^{n-k}$  tend vers  $(-1)^{k(n-k)}Id$  lorsque le degré des splines augmente. On peut remarquer, par ailleurs que cela ne dépend pas du nombre de points. Pour un domaine périodique en dimension 1, on a obtenu le tableau suivant :

Degrés des splines	$Max( \star\star - Id )$
$\alpha = 1$	0.25
$\alpha = 3$	0.011031684
$\alpha = 5$	0.001809231

### 3.2 À l'aide de la formulation faible

On va maintenant redéfinir l'opérateur hodge star discret à l'aide d'une formulation faible en utilisant les travaux de Hiptmair [95]. Pour une  $k$ -forme différentielle discrète primale  $\omega^k$  et une  $(n-k)$ -forme différentielle discrète duale  $\beta^{(n-k)}$  telles que  $\star\omega^k = \beta^{(n-k)}$  et  $(-1)^{k(n-k)}\star\beta^{(n-k)} = \omega^k$ , on a

$$\int_M \star\omega^k \wedge \eta^k = \int_M \beta^{(n-k)} \wedge \eta^k, \quad (78)$$

$$\int_M (-1)^{k(n-k)} \star\beta^{(n-k)} \wedge \gamma^{(n-k)} = \int_M \omega^k \wedge \gamma^{(n-k)}. \quad (79)$$

Selon Hiptmair [95, 96] on doit se ramener au problème suivant

$$M_k^\alpha \omega^k = \tilde{S}_{(n-k)}^\alpha \beta^{(n-k)}, \quad (80)$$

$$(-1)^{k(n-k)} \tilde{M}_{(n-k)}^\alpha \beta^{(n-k)} = S_k^\alpha \omega^k, \quad (81)$$

où  $M_k^\alpha$  et  $\tilde{M}_{(n-k)}^\alpha$  sont des matrices carrées ayant pour tailles respectives  $|H_{\alpha,k}|$  et  $|H_{\alpha,n-k}^\star|$ . Les matrices  $S_k^\alpha$  et  $\tilde{S}_{(n-k)}^\alpha$  ont pour tailles  $|H_{\alpha,n-k}^\star| \times |H_{\alpha,k}|$  et  $|H_{\alpha,k}| \times |H_{\alpha,n-k}^\star|$  respectivement. Quand on se place en dimension  $n = 1$ , la 0-forme différentielle primale  $\omega^0$  s'écrit  $\sum \omega_i B_i^\alpha(x)$  et  $\tilde{\beta}^1 = \sum \beta_{i+1/2} D_{i+1/2}^\alpha(x) dx$  la 1-forme différentielle discrète duale. Pour le passage de  $\omega^0$  à  $\tilde{\beta}^1$ , on applique

l'égalité (79) avec  $\tilde{\gamma}^1 = D_{j+1/2}^\alpha(x) dx$  et donc cela revient à faire

$$\sum_i \beta_{i+1/2} \int_M D_{i+1/2}^\alpha(x) D_{j+1/2}^\alpha(x) dx = \sum_i \omega_i \int_M B_i^\alpha(x) D_{j+1/2}^\alpha(x) dx,$$

et matriciellement on obtient

$$\tilde{M}_1^\alpha \tilde{\beta}^1 = S_0^\alpha \omega^0,$$

avec  $S_0^\alpha = \left( \int_M B_j^\alpha(x) D_{i+1/2}^\alpha(x) dx \right)_{i,j}$  et  $\tilde{M}_1^\alpha = \left( \int_M D_{i+1/2}^\alpha(x) D_{j+1/2}^\alpha(x) dx \right)_{i,j}$ .

Pour le passage d'une 1-forme différentielle primale  $\omega^1 = \sum_i \omega_i D_i^\alpha(x) dx$

à une 0-forme différentielle duale  $\tilde{\beta}^0 = \sum_i \beta_{i+1/2} B_{i+1/2}^\alpha(x)$  on aura, avec

$$\tilde{\gamma}^0 = B_{j+1/2}^\alpha(x)$$

$$\tilde{M}_0^\alpha \tilde{\beta}^0 = S_1^\alpha \omega^1,$$

avec  $S_1^\alpha = \left( \int_M B_{i+1/2}^\alpha(x) D_j^\alpha(x) dx \right)_{i,j}$  et  $\tilde{M}_0^\alpha = \left( \int_M B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{j+1/2}^\alpha(x) dx \right)_{i,j}$ .

De la même manière, en appliquant (78) pour le passage d'une 0-forme différentielle discrète duale  $\tilde{\beta}^0$  à une 1-forme différentielle discrète primale  $\omega^1$  on a avec  $\eta^1 = D_j^\alpha(x) dx$

$$M_1^\alpha \omega^1 = S_1^\alpha \tilde{\beta}^0,$$

avec  $M_1^\alpha = \left( \int_M D_i^\alpha(x) D_j^\alpha(x) dx \right)_{i,j}$ . Pour le passage d'une 1-forme différentielle discrète duale  $\tilde{\beta}^1$  à une 0-forme différentielle discrète primale  $\omega^0$  on a, pour  $\eta^0 = B_j^\alpha(x)$

$$M_0^\alpha \omega^0 = S_0^\alpha \tilde{\beta}^1,$$

et  $M_0^\alpha = \left( \int_M B_j^\alpha(x) B_i^\alpha(x) dx \right)_{i,j}$ .

**Remarque 3.1** — Si les B-splines sont uniformément réparties, on peut observer que  $M_1^\alpha = \tilde{M}_1^\alpha$ ,  $M_0^\alpha = \tilde{M}_0^\alpha$ .

Pour conclure, le hodge star permettant de passer d'une  $k$ -forme différentielle primale à une  $(n-k)$ -forme différentielle duale est représenté par la matrice :

$$(\tilde{M}_{n-k}^\alpha)^{-1} S_k^\alpha,$$

et celui permettant de passer d'une  $k$ -forme différentielle duale à une  $(n-k)$ -forme différentielle primale est représenté par

$$(M_{n-k}^\alpha)^{-1} S_k^\alpha.$$

## 4 LE PRODUIT EXTÉRIEUR

Le produit extérieur d'une  $k$ -forme différentielle  $\gamma^k$  et d'une  $l$ -forme différentielle  $\beta^l$  est une  $(k+l)$ -forme différentielle  $\gamma^k \wedge \beta^l$ . Donc, on doit pouvoir calculer l'intégrale de celle-ci sur les  $(k+l)$ -cubes du maillage. Pour ce faire, puisque l'on a différencié les formes différentielles discrètes primales et duales, on distingue deux types de produit extérieur, à savoir :

- le produit extérieur entre deux formes différentielles discrètes de même type (primales ou duales),
- et le produit extérieur entre deux formes différentielles de types différents.

Commençons par le premier cas :

### 4.1 Le produit extérieur primal-primal ou dual-dual

Pour fixer les idées, prenons un cas simple :

**Exemple 4.1.1** — Considérons le cas unidimensionnel, ainsi qu'une 1-forme différentielle discrète  $C^1 = \sum_i c_i^1 D_i^\alpha(x) dx$  et une 0-forme différentielle discrète  $C^0 = \sum_i c_i^0 B_i^\alpha(x)$ . Le produit extérieur est une 1-forme différentielle représentée par

$$C^1 \wedge C^0 = \sum_{i,j} c_i^1 c_j^0 B_j^\alpha(x) D_i^\alpha(x) dx.$$

Afin d'écrire  $C^1 \wedge C^0$  dans la base appropriée des 1-formes différentielles, on pose  $\pi$  la projection qui à une 1-forme différentielle dans la base appropriée des 1-formes différentielles discrètes. On va devoir intégrer  $\pi(C^1 \wedge C^0)$  sur les 1-cubes du maillage et résoudre un système linéaire pour calculer les coefficients splines (c'est le même principe que pour la discrétisation du hodge star).

La méthode peut se généraliser pour le produit extérieur d'une  $k$ -forme différentielle  $C^k$  et d'une  $l$ -forme différentielle  $C^l$  sur le même maillage. On pose  $\pi$  la projection qui à une  $(k+l)$ -forme différentielle dans la base appropriée des  $(k+l)$ -formes différentielles discrètes. On calcule alors les degrés de liberté, i.e. l'intégrale de  $\pi(C^k \wedge C^l)$  sur chaque  $(k+l)$ -cube du maillage (si les formes différentielles sont primales) ou sur chaque  $(k+l)$ -cellule duale (si les formes différentielles sont duales). Puis, on résout un système linéaire afin de déterminer les coefficients splines associés à  $C^k \wedge C^l$  dans la base appropriée des  $(k+l)$ -formes différentielles discrètes.



## 4.2 Le produit extérieur primal-dual

Soit une  $k$ -forme différentielle primale  $C^k$  et une  $l$ -forme différentielle duale  $\tilde{C}^l$ . Afin de déterminer les coefficients splines de la forme différentielle  $C^k \wedge \tilde{C}^l$ , on doit calculer les degrés de liberté soit sur les  $(k+l)$ -cubes, soit sur les  $(k+l)$ -cellules duales. On pose  $\pi$  la projection qui à une  $(k+l)$ -forme différentielle dans la base appropriée des  $(k+l)$ -formes différentielles discrètes primales et  $\pi^*$  la projection qui à une  $(k+l)$ -forme différentielle dans la base appropriée des  $(k+l)$ -formes différentielles discrètes duales. On résout ensuite un système linéaire afin de déterminer les coefficients splines dans la base appropriée des  $(k+l)$ -formes différentielles primales ou duales. On remarque que cette notion est très utile pour discrétiser le lagrangien qui est de la forme  $dA \wedge \star dA$ .

**Remarque 4.1** — En donnant cette définition discrète du produit extérieur, les propriétés des formes différentielles sont vérifiées pour les formes différentielles discrètes, à savoir :

- L'anticommutativité :  $\gamma^k \wedge \beta^l = (-1)^{kl} \beta^l \wedge \gamma^k$  ;
- La règle de Leibniz :  $d(\gamma^k \wedge \beta^l) = d\gamma^k \wedge \beta^l + (-1)^k \gamma^k \wedge d\beta^l$  ;
- Le pull back :  $f^*(\gamma^k \wedge \beta^l) = f^*\gamma^k \wedge f^*\beta^l$  .

## 5 LE PRODUIT INTÉRIEUR

Pour définir le produit intérieur d'une  $k$ -forme différentielle le long d'un champ de vecteurs dépendant du temps, on a repris les travaux de McKenzie [6], de Bossavit [5] et d'Hirani [92].

Soit  $\tau$  un champ de vecteurs sur  $M$ , le produit intérieur d'une  $k$ -forme différentielle  $C^k$  le long de ce champ de vecteur est une  $(k-1)$ -forme différentielle  $i_\tau C^k$ . La construction des formes différentielles discrètes basées sur les B-splines, conduit à calculer les coefficients splines dans la base appropriée des  $(k-1)$ -formes différentielles à partir des degrés de liberté de celles-ci, autrement dit, à partir des valeurs de l'intégrale de  $i_\tau C^k$  sur chaque  $(k-1)$ -cube  $h_{k-1}$  du maillage. Il reste donc à déterminer

$$\int_{h_{k-1}} i_\tau C^k.$$

Pour cela, il faut utiliser le fait que l'image d'un  $(k-1)$ -cube  $h_{k-1}$  par le flot  $\varphi^t$  du champ de vecteurs  $\tau$  est une  $k$ -chaîne  $C_k$ . On définit alors cette  $k$ -chaîne comme étant l'extrusion de  $h_{k-1}$  sur l'intervalle de temps  $[0, t]$  :

$$E_\tau(h_{k-1}, t) = \{\varphi^s(h_{k-1}) \mid s \in [0, t]\}.$$

L'intégrale du produit intérieur  $i_\tau C^k$  va être définie comme étant la dérivée temporelle au temps  $t = 0$  de  $\int_{E_\tau(h_{k-1}, t)} C^k$ , autrement dit :

$$\begin{aligned} \int_{h_{k-1}} i_\tau C^k &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_{E_\tau(h_{k-1}, t)} C^k \\ &\approx \frac{1}{\Delta t} \left( \int_{E_\tau(h_{k-1}, \Delta t)} C^k - \int_{E_\tau(h_{k-1}, 0)} C^k \right) \end{aligned}$$

en utilisant en développement de Taylor avec  $\Delta t$  le pas de temps assez petit. Mais puisque  $E_\tau(h_{k-1}, 0)$  est un espace de dimension  $(k - 1)$  et que l'on ne peut intégrer une  $k$ -forme différentielle sur cette espace, le produit intérieur devient

$$\int_{h_{k-1}} i_\tau C^k \approx \frac{1}{\Delta t} \int_{E_\tau(h_{k-1}, \Delta t)} C^k.$$

**Remarque 5.1** — Une autre solution pour discrétiser le produit intérieur d'une  $k$ -forme différentielle le long d'un champ de vecteurs indépendant du temps, est d'utiliser la formule suivante :

$$i_\tau \omega^k = (-1)^{k(n-k)} \star (\star \omega^k \wedge \tau^\#).$$

La discrétisation de celle-ci laisse plusieurs possibilités : on peut soit utiliser la formulation faible de l'opérateur hodge star (voir la section précédente (3.2) page 106) soit la formulation forte (voir la section (3.1) page 101).

## 6 LA DÉRIVÉE DE LIE

On rappelle la formule d'homotopie suivante  $\mathcal{L}_\tau = i_\tau d + d i_\tau$ . La dérivée de Lie ne modifie pas le degré des formes différentielles. Donc, pour discrétiser la dérivée de Lie d'une  $k$ -forme différentielle le long d'un champ de vecteurs  $\tau$ ,  $\mathcal{L}_\tau C^k$ , i.e. pour déterminer les coefficients splines dans la base appropriée des formes différentielles discrètes, on doit connaître l'intégrale de celle-ci sur chaque  $k$ -cube du maillage. Pour ce faire, on va utiliser la formule d'homotopie et la discrétisation du produit intérieur, il vient alors

$$\begin{aligned}
\int_{h_k} \mathcal{L}_\tau C^k &= \int_{h_k} i_\tau dC^k + \int_{h_k} d i_\tau C^k \\
&\approx \frac{1}{\Delta_t} \int_{E_\tau(h_k, \Delta_t)} dC^k + \int_{\partial h_k} i_\tau C^k \\
&\approx \frac{1}{\Delta_t} \left( \int_{\partial E_\tau(h_k, \Delta_t)} C^k + \int_{E_\tau(\partial h_k, \Delta_t)} C^k \right) \\
&\approx \frac{1}{\Delta_t} \left( \int_{\varphi^{\Delta_t}(h_k)} C^k - \int_{\varphi^0(h_k)} C^k \right) \\
&\approx \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\varphi^t(h_k)} C^k
\end{aligned}$$

avec  $\Delta_t$  un pas de temps assez petit et  $\varphi^t$  le flot associé au champ de vecteurs  $\tau$ . La dérivée de Lie d'une  $k$ -forme différentielle le long d'un champ de vecteurs  $\tau$  correspond à

$$\int_{h_k} \mathcal{L}_\tau C^k = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int_{\varphi^t(h_k)} C^k \approx \frac{1}{\Delta_t} \left( \int_{\varphi^{\Delta_t}(h_k)} C^k - \int_{\varphi^0(h_k)} C^k \right).$$

**Remarque 6.1** — De même, si le champ de vecteurs ne dépend pas du temps, on aurait pu utiliser l'autre discrétisation du produit intérieur à savoir celle qui correspond à  $i_\tau C^k = (-1)^{k(n-k)} \star (\star C^k \wedge \tau^\sharp)$ .

## 7 LA DÉRIVÉE CO-EXTÉRIEURE ET LE LAPLACIEN

L'opérateur de dérivée co-extérieure  $d^*$  associée à une  $k$ -forme différentielle, une  $(k-1)$ -forme différentielle et on a la formule suivante  $d^* = (-1)^{n(k-1)+1} \star d \star$ . Il intervient également dans les formules de Green-Stokes

$$\int_M d\alpha^k \wedge \star \varphi^{k+1} = \int_M \alpha^k \wedge \star d^* \varphi^{k+1} + \int_{\partial M} \nu^\sharp \wedge \alpha^k \wedge \star \varphi^{k+1},$$

et

$$\int_M d^* \alpha^k \wedge \star \psi^{k-1} = \int_M \alpha^k \wedge \star d \psi^{k-1} - \int_{\partial M} i_\nu \alpha^k \wedge \star \psi^{k-1},$$

avec  $\nu$  le vecteur unitaire sortant à  $\partial M$  et  $\nu^\sharp$  la 1-forme différentielle associée à  $\nu$  et  $\alpha^k \in \Omega^k(M)$ ,  $\varphi^{k+1} \in \Omega^{k+1}(M)$ ,  $\psi^{k-1} \in \Omega^{k-1}(M)$ .

Ici encore, on a deux manières de discrétiser  $d^*$ . Soit on utilise la formulation forte du hodge star et on calcule à chaque étape de la formule  $\star d \star$  les coefficients splines, soit on utilise la formulation faible et la formule de Green-Stokes. La première solution n'assure pas la conservation des formules de Green-Stokes contrairement à la deuxième solution.

Prenons un exemple en 1D, soit  $C^1 = \sum_i c_i^1 D_i^\alpha(x) dx$  une 1-forme différentielle

discrète. On a alors  $d^* \omega^1$  qui doit être égale à  $\sum_i c_i^0 B_i^\alpha(x)$ . Pour  $\nu = \nu(x) \frac{\partial}{\partial x}$  on obtient

$$\begin{aligned} \int_M d^* C^1 \wedge \star B_j^\alpha(x) &= \sum_i c_i^0 \int_M B_i^\alpha(x) B_j^\alpha(x) dx \\ &= \sum_i c_i^1 \int_M D_i^\alpha(x) (B_i^\alpha(x))' dx - \sum_i c_i^1 \int_{\partial M} D_i^\alpha(x) \nu(x) B_i^\alpha(x) \\ &= \int_M C^1 \wedge (B_i^\alpha(x))' - \int_{\partial M} i_\nu C^1 \wedge B_i^\alpha(x). \end{aligned}$$

On voit alors que la discrétisation de  $d^*$  revient à résoudre un système linéaire :

$$\sum_i c_i^0 \int_M B_i^\alpha(x) B_j^\alpha(x) dx = \sum_i c_i^1 \int_M D_i^\alpha(x) (B_i^\alpha(x))' dx - \sum_i c_i^1 \int_{\partial M} D_i^\alpha(x) \nu(x) B_i^\alpha(x).$$

On peut généraliser cette méthode pour toute  $k$ -forme différentielle discrète. La dérivée co-extérieure permettant le passage d'une  $k$ -forme différentielle à une  $(k-1)$ -forme différentielle est représentée par la matrice :

$$(M_{(k-1)}^\alpha)^{-1} (N_k^\alpha \Gamma_k^\alpha),$$

où

$$(M_{(k-1)}^\alpha)_{i,j} = \int_M {}^{(k-1)}\mathbf{w}_i^\alpha {}^{(k-1)}\mathbf{w}_j^\alpha, \quad (N_k^\alpha)_{i,j} = \int_M {}^k\mathbf{w}_j^\alpha d({}^{(k-1)}\mathbf{w}_i^\alpha)$$

et

$$(\Gamma_k^\alpha)_{i,j} = \int_{\partial M} {}^{(k-1)}\mathbf{w}_j^\alpha i_\nu {}^{(k)}\mathbf{w}_i^\alpha.$$

Avec ce qui a été fait au dessus et avec la définition du laplacien à savoir  $\Delta = d d^* + d^* d$ , il est facile d'en déduire sa discrétisation. On discrétise  $d^*$  soit en prenant la formulation forte soit en prenant la formulation faible. Puis on utilise la discrétisation de la dérivée extérieure  $d$  vue à la section (1) page 96.

---

# Résultats Numériques

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>8</b>	<b>Les équations de Maxwell</b> . . . . .	<b>114</b>
8.1	Cadre général . . . . .	114
8.2	Avec un changement de coordonnées . . . . .	119
<b>9</b>	<b>L'équation de Vlasov-Poisson</b> . . . . .	<b>125</b>
<b>10</b>	<b>Formulation faible pour l'équation de Vlasov-Poisson</b> . . . . .	<b>127</b>
10.1	Avec ${}^0f$ une 0-forme différentielle . . . . .	128
10.2	Avec ${}^2f$ une 2-forme différentielle . . . . .	136
10.3	Schéma en temps . . . . .	142
10.4	Validation des codes Vlasov-Poisson 1D . . . . .	145

---

Ce chapitre est consacré aux résultats obtenus en discrétisant les équations à l'aide des formes différentielles discrètes basées sur les B-splines. De plus, comme les formes différentielles sont indépendantes du système de coordonnées choisi, on a testé le schéma numérique sur les équations de Maxwell dans le cas général et dans le cas d'un changement de coordonnées. La formulation s'est avérée pratique car pour le passage au deuxième cas, seule la discrétisation de l'opérateur hodge star est modifiée (l'opérateur dépend de la métrique). On a ensuite appliqué la théorie aux équations de Vlasov-Poisson et on s'est aperçu que l'on retrouvait les mêmes schémas numériques que la méthode semi-lagrangienne et que la méthode de volume fini [20, 42, 43, 55, 56, 61, 64, 94]. Cette méthode peut être également appliquée aux équations de Vlasov-Maxwell et on en tirerait les mêmes conclusions. Donc, on a développé une formulation faible, toujours en utilisant les formes différentielles basées sur des B-splines et on a pu alors utiliser un schéma numérique exact en temps en utilisant la méthode ETD (Exponential time differencing).

## 8 LES ÉQUATIONS DE MAXWELL

### 8.1 Cadre général

En 3D, les équations de Maxwell peuvent s'écrire, à l'aide des formes différentielles [2, 3, 26], comme :

$$-\partial_t {}^2\mathbf{D} + d {}^1\mathbf{H} = {}^2\mathbf{J}, \quad (82)$$

$$\partial_t {}^2\mathbf{B} + d {}^1\mathbf{E} = 0, \quad (83)$$

$$d {}^2\mathbf{D} = {}^3\rho, \quad (84)$$

$$d {}^2\mathbf{B} = 0, \quad (85)$$

où  ${}^2\mathbf{D}$ ,  ${}^2\mathbf{B}$ ,  ${}^2\mathbf{J}$  sont des 2-formes,  ${}^1\mathbf{E}$ ,  ${}^1\mathbf{H}$  sont des 1-formes et  ${}^3\rho$  une 3-forme. Pour la validation du code, on va considérer le cas bidimensionnel, autrement dit, on considère que toutes les fonctions dépendent seulement des variables  $x$  et  $y$ . Afin, de discrétiser les équations de Maxwell avec des formes différentielles discrètes basées sur des B-splines, on va devoir définir deux sortes de maillage sur  $[0, 1]^3$ , le maillage primal et le maillage dual (voir le chapitre 3 page 79). Le maillage que l'on considérera dans les deux cas est le produit cartésien d'un maillage 2D et d'une cellule de longueur 1 dans l'axe  $z$ . Dans la direction  $x$  et  $y$ , on notera les points  $x_i = i/\Delta x$ ,  $y_j = j/\Delta y$ , avec  $(i, j) \in [0, N_x] \times [0, N_y]$  et  $N_x\Delta x = N_y\Delta y$ . Dans le cas où les conditions sont périodiques aux bords, dans la direction  $x$  par exemple, le point  $x_{N_x}$  correspond à  $x_0$  et ne sera pas considéré dans le maillage. Les points du maillage dual seront notés :  $x_{i+1/2} = (i + 1/2)/\Delta x$ ,  $y_{j+1/2} = (j + 1/2)/\Delta y$ , avec  $(i, j) \in [0, N_x - 1] \times [0, N_y - 1]$ .

Regardons, comment déterminer les différents objets intervenant dans les équations de Maxwell. On a vu, au chapitre 2 page 83, que ces éléments devront être des combinaisons linéaires des fonctions bases des formes différentielles discrétisées par les B-splines. Rappelons ces fonctions de base :

- pour les 0-formes

$${}^0w_{i,j}^\alpha(x, y) = B_i^\alpha(x)B_j^\alpha(y),$$

- pour les 1-formes

$${}^1\mathbf{w}_{i,j}^{\alpha,x}(x, y) = D_i^\alpha(x)B_j^\alpha(y) dx, \quad {}^1\mathbf{w}_{i,j}^{\alpha,y}(x, y) = B_i^\alpha(x)D_j^\alpha(y) dy,$$

$${}^1\mathbf{w}_{i,j}^{\alpha,z}(x, y) = B_i^\alpha(x)B_j^\alpha(y) dz,$$

- pour les 2-formes

$${}^2\mathbf{w}_{i,j}^{\alpha,x}(x,y) = B_i^\alpha(x)D_j^\alpha(y)dy \wedge dz, \quad {}^2\mathbf{w}_{i,j}^{\alpha,y}(x,y) = D_i^\alpha(x)B_j^\alpha(y)dz \wedge dx,$$

$${}^2\mathbf{w}_{i,j}^{\alpha,z}(x,y) = D_i^\alpha(x)D_j^\alpha(y)dx \wedge dy,$$

- pour les 3-formes

$${}^3w_{i,j}^\alpha(x,y) = D_i^\alpha(x)D_j^\alpha(y)dx \wedge dy \wedge dz.$$

Les formes différentielles discrètes définies sur le maillage dual sont définies de la même manière mais indexées sur le maillage dual.

En 2D, les équations de Maxwell sont découplées en deux types. L'une mettant en lien les composantes en  $x$  et  $y$  de  ${}^2\mathbf{D}$  et de  ${}^1\mathbf{E}$  et la composante en  $z$  de  ${}^2\mathbf{B}$  et  ${}^1\mathbf{H}$ . L'autre type mettant en lien les composantes en  $x$  et  $y$  de  ${}^2\mathbf{B}$  et  ${}^1\mathbf{H}$  et la composante en  $z$  de  ${}^2\mathbf{D}$  et  ${}^1\mathbf{E}$ . Voici donc les différents objets dans la base appropriée des formes différentielles discrètes :

$${}^2\mathbf{D}_h^x(t,x,y) = \sum_{i,j} d_{i+1/2,j+1/2}^x(t) {}^2\tilde{\mathbf{w}}_{i+1/2,j+1/2}^{\alpha,x}(x,y), \quad {}^1\mathbf{E}_h^x(t,x,y) = \sum_{i,j} e_{i,j}^x(t) {}^1\mathbf{w}_{i,j}^{\alpha,x}(x,y),$$

$${}^2\mathbf{D}_h^y(t,x,y) = \sum_{i,j} d_{i+1/2,j+1/2}^y(t) {}^2\tilde{\mathbf{w}}_{i+1/2,j+1/2}^{\alpha,y}(x,y) \quad {}^1\mathbf{E}_h^y(t,x,y) = \sum_{i,j} e_{i,j}^y(t) {}^1\mathbf{w}_{i,j}^{\alpha,y}(x,y),$$

$${}^1\mathbf{H}_h^z(t,x,y) = \sum_{i,j} h_{i+1/2,j+1/2}^z(t) {}^1\tilde{\mathbf{w}}_{i+1/2,j+1/2}^{\alpha,z}(x,y), \quad {}^2\mathbf{B}_h(t,x,y) = \sum_{i,j} b_{i,j}^z(t) {}^2\mathbf{w}_{i,j}^{\alpha,z}(x,y).$$

Par souci de cohérence avec les équations de Maxwell, on considérera (82) dans le maillage dual et (83) dans le maillage primal.

Afin, d'obtenir les relations entre les différents coefficients de ces formes différentielles discrètes, on injecte ces expressions dans les équations de Maxwell (82)-(85). D'après le chapitre 2 à la section 1 page 96, on voit que

$$d^1\mathbf{H}_h^z(t,x,y) = \sum_{i,j} (h_{i-1/2,j+1/2}^z(t) - h_{i+1/2,j+1/2}^z(t))D_{i+1/2}^\alpha(x)B_{j+1/2}^\alpha(y)dz \wedge dx$$

$$+ \sum_{i,j} (h_{i+1/2,j+1/2}^z(t) - h_{i+1/2,j-1/2}^z(t))B_{i+1/2}^\alpha(x)D_{j+1/2}^\alpha(y)dy \wedge dz,$$

$$d^1\mathbf{E}_h^x(t,x,y) = - \sum_{i,j} (e_{i,j}^x(t) - e_{i,j-1}^x(t))D_i^\alpha(x)D_j^\alpha(y)dx \wedge dy,$$

$$d^1\mathbf{E}_h^y(t,x,y) = \sum_{i,j} (e_{i,j}^y(t) - e_{i-1,j}^y(t))D_i^\alpha(x)D_j^\alpha(y)dx \wedge dy.$$

Puisque l'équation d'Ampère (82), sans densité de courant, s'écrit

$$\partial_t {}^2\mathbf{D}^x + \partial_t {}^2\mathbf{D}^y - d^1\mathbf{H} = 0,$$

on obtient des relations entre les coefficients :

$$\begin{aligned} d_{i+1/2,j+1/2}^x(t) + h_{i+1/2,j+1/2}^z(t) - h_{i+1/2,j-1/2}^z(t) &= 0, \\ d_{i+1/2,j+1/2}^y(t) - h_{i+1/2,j+1/2}^z(t) + h_{i-1/2,j+1/2}^z(t) &= 0. \end{aligned}$$

D'autre part, l'équation de Faraday (83) s'écrit :

$$\partial_t {}^2\mathbf{B}^z + d^1\mathbf{E} = 0,$$

et de la même manière, on obtient une relation entre les coefficients :

$$b_{i,j}^z(t) + (e_{i,j}^y(t) - e_{i-1,j}^y(t)) - (e_{i,j}^x(t) - e_{i,j-1}^x(t)) = 0.$$

Il va falloir discrétiser l'opérateur hodge star qui envoie  $\mathbf{d}^x$  vers  $\mathbf{e}^x$ ,  $\mathbf{d}^y$  vers  $\mathbf{e}^y$  et  $\mathbf{b}^z$  vers  $\mathbf{h}^z$ . On applique alors la technique que l'on a vue au chapitre 2 à la section 3.1 pour la formulation forte, ce qui nous donne les systèmes suivants :

$$\begin{aligned} S^1\mathbf{d}^x(S^0)^t &= M_\alpha^1\mathbf{e}^x(M_\alpha^0)^t, \\ S^0\mathbf{d}^y(S^1)^t &= M_\alpha^0\mathbf{e}^y(M_\alpha^1)^t, \\ S^1\mathbf{b}^z(S^1)^t &= M_\alpha^0\mathbf{h}^z(M_\alpha^0)^t. \end{aligned}$$

### Cas test : En 2D avec des conditions périodiques aux bords

On applique ce que l'on a vu au chapitre 3 à la section 2.1.2 page 89. En 2D avec des conditions périodiques aux bords, on considère les solutions des équations de Maxwell suivants : le champ électrique, une 1-forme,

$${}^1\mathbf{E} = -k_y \sin(k_x x + k_y y - \omega t)dx - k_x \sin(k_x x + k_y y - \omega t)dy,$$

et le champ d'induction magnétique, une 2-forme,

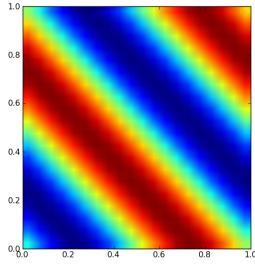
$${}^2\mathbf{B} = \omega \cos(k_x x + k_y y - \omega t)dx dy.$$

Avec l'aide du hodge star on en déduit le champ d'induction électrique

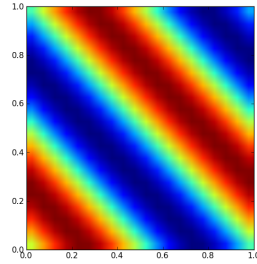
$${}^1\mathbf{D} = -k_y \sin(k_x x + k_y y - \omega t)dy - k_x \sin(k_x x + k_y y - \omega t)dx$$

et le champ magnétique  ${}^0\mathbf{H} = \omega \cos(k_x x + k_y y - \omega t)$ . Les constantes sont données par  $k_x = \frac{2\pi}{L_x}$ ,  $k_y = \frac{2\pi}{L_y}$ , où  $L_x$  et  $L_y$  sont les longueurs des intervalles dans les directions  $x$  et  $y$  respectivement et  $\omega = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ . On pose  $L_x = L_y = 1$ , on utilise un schéma d'ordre 4 en temps et on observe que l'ordre du schéma est donné par le degré des B-splines.

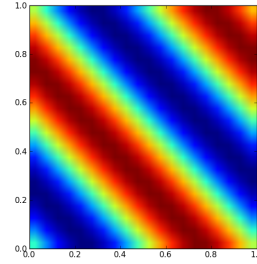




**FIG. 15:** Le champ magnétique  $H$  en  $2D$ .



**FIG. 16:** La première composante du champ d'induction électrique  $Dx$  en  $2D$ .



**FIG. 17:** La deuxième composante du champ d'induction électrique  $Dy$  en  $2D$ .

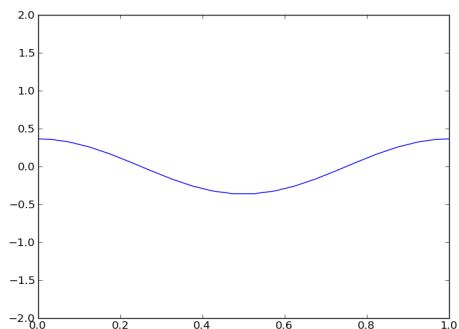
Degré des splines $\alpha = 1$		
Nombre de points	Erreurs $L^2$ pour Dx	ordre de conv.
10	0.963466687612	
20	0.244961611114	1.97567910882
40	0.0617111800439	1.98895188936
80	0.015439432949	1.99891211506

Degré des splines $\alpha = 3$		
Nombre de points	Erreurs $L^2$ pour Dx	ordre de conv.
10	0.0346451065418	
20	0.00221920090229	3.96453940841
40	0.000139584011258	3.99083467768
80	8.73723793614e-06	3.99781260726

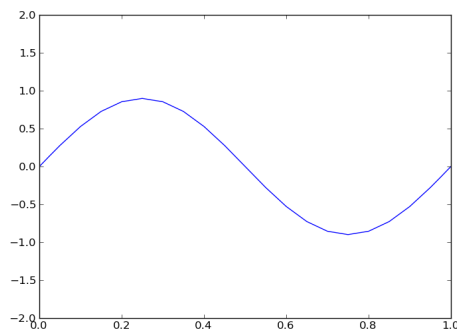
**Cas test : En 1D avec des conditions aux bords de type conducteur parfait .**

On applique ce que l'on a vu au chapitre 3 à la section 3 page 79. En 1D avec des conditions aux bords de type conducteur parfait, les solutions des équations de Maxwell sont, pour le champ électrique, une 0-forme,  ${}^0\mathbf{E} = \frac{k}{\epsilon} \sin(kx) \cos(\omega t)$  et pour le champ d'induction magnétique, une 1-forme,  ${}^1\mathbf{B} = -\cos(kx) \sin(\omega t) dx$ . Puis avec l'aide du hodge star, on a pour le champ d'induction électrique, une 1-forme,  ${}^1\mathbf{D} = \frac{k}{\omega} \sin(kx) \cos(\omega t) dx$  et pour le champ magnétique, une 0-forme,  ${}^0\mathbf{H} = -\cos(kx) \sin(\omega t)$ . Les constantes sont données par la condition suivante  $k = \frac{2\pi}{L}$ , où  $L$  est la longueur de l'intervalle dans la direction  $x$  et  $\omega = |k_x|$ . On pose  $L = 1$ , on teste

le code avec un schéma d'ordre 4 en temps et on s'aperçoit que l'ordre du schéma dépend également du degré des B-splines.



**FIG. 18:** Le champ magnétique  $H$  en  $1D$  avec des conditions aux bords de type conducteur parfait.



**FIG. 19:** Le champ d'induction électrique  $D$  en  $1D$  avec des conditions aux bords de type conducteur parfait.

Degré des splines $\alpha = 1$		
Nombre de points	Erreurs $L^2$ de H	ordre de conv.
10	0.14405968937	
20	0.0365895785828	1.97716199381
40	0.0091869581337	1.99377364042
80	0.00229392316474	2.00177018523

Degré des splines $\alpha = 3$		
Nombre de points	Erreurs $L^2$ de H	ordre de conv.
10	0.00291782099873	
20	0.000191704646607	3.92793416901
40	1.22331803519e-05	3.97001387997
80	7.61847256487e-07	4.00515393133

On a pris pour temps final  $T = 2$  et lorsque le degré des splines  $\alpha$  est égal à 1, on a pris  $\Delta t = \Delta_x/0.5$  et  $\Delta t = \Delta_x/3.5$  pour  $\alpha = 3$ .

## 8.2 Avec un changement de coordonnées

On considère l'application  $f$  qui à un carré associe le domaine de calcul. Le changement de variables  $f : (r, s) \rightarrow (f_1(r, s), f_2(r, s)) = (x, y)$  est un isomorphisme. On note  $J$  la jacobienne de  $f$  :

$$J(r, s) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r}(r, s) & \frac{\partial f_1}{\partial s}(r, s) \\ \frac{\partial f_2}{\partial r}(r, s) & \frac{\partial f_2}{\partial s}(r, s) \end{pmatrix},$$

et  $|J|$  son déterminant. On peut montrer que la jacobienne de la fonction inverse  $f^{-1}$  est

$$\begin{aligned} J^{-1}(r, s) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial x}(f_1(r, s), f_2(r, s)) & \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(f_1(r, s), f_2(r, s)) \\ \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial x}(f_1(r, s), f_2(r, s)) & \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial y}(f_1(r, s), f_2(r, s)) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{|J|} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_2}{\partial s}(r, s) & -\frac{\partial f_1}{\partial s}(r, s) \\ -\frac{\partial f_2}{\partial r}(r, s) & \frac{\partial f_1}{\partial r}(r, s) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dans la suite, on a discrétisé le domaine cartésien paramétré par  $(r, s)$  et on travaillera uniquement dans ce domaine. Le maillage primal en 2D sera noté  $r_0 < r_1 < \dots < r_{N_r-1} < r_{N_r}$  dans la direction de  $r$  et  $s_0 < s_1 < \dots < s_{N_s-1} < s_{N_s}$  dans la direction de  $s$ .

En 2D, les formes différentielles mises en jeu dans les équations de Maxwell sont

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{H}(x, y) &= h_z(x, y)dz, \\ {}^2\mathbf{B}(x, y) &= b_z(x, y)dx \wedge dy, \\ {}^1\mathbf{E}(x, y) &= e_x(x, y)dx + e_y(x, y)dy, \\ {}^2\mathbf{D}(x, y) &= d_x(x, y)dy \wedge dz + d_y(x, y)dz \wedge dx. \end{aligned}$$

Lorsque l'on change de coordonnées, on obtient

$$\begin{aligned} f^* {}^1\mathbf{H}(r, s) &= h_z(f_1(r, s), f_2(r, s))dz, \\ f^* {}^2\mathbf{B}(r, s) &= b_z(f_1(r, s), f_2(r, s)) |J| dr \wedge ds, \\ f^* {}^1\mathbf{E}(r, s) &= (e_x(f_1(r, s), f_2(r, s)) \frac{\partial f_1}{\partial r}(r, s) + e_y(f_1(r, s), f_2(r, s)) \frac{\partial f_2}{\partial r}(r, s))dr \\ &\quad + (e_x(f_1(r, s), f_2(r, s)) \frac{\partial f_1}{\partial s}(r, s) + e_y(f_1(r, s), f_2(r, s)) \frac{\partial f_2}{\partial s}(r, s))ds, \\ f^* {}^2\mathbf{D}(r, s) &= (d_x(f_1(r, s), f_2(r, s)) \frac{\partial f_2}{\partial r}(r, s) - d_y(f_1(r, s), f_2(r, s)) \frac{\partial f_1}{\partial r}(r, s))dr \wedge dz \\ &\quad + (d_x(f_1(r, s), f_2(r, s)) \frac{\partial f_2}{\partial s}(r, s) - d_y(f_1(r, s), f_2(r, s)) \frac{\partial f_1}{\partial s}(r, s))ds \wedge dz. \end{aligned}$$

Soient, les expressions des formes différentielles discrètes dans la base appropriée :

$$\begin{aligned}
f^{\star 2} \mathbf{D}_h^r(t, r, s) &= \sum_{i,j} d_{i+1/2, j+1/2}^r(t) {}^2 \tilde{\mathbf{w}}_{i+1/2, j+1/2}^{\alpha, r}(r, s), & f^{\star 1} \mathbf{E}_h^r(t, r, s) &= \sum_{i,j} e_{i,j}^r(t) {}^1 \mathbf{w}_{i,j}^{\alpha, r}(r, s), \\
f^{\star 2} \mathbf{D}_h^s(t, r, s) &= \sum_{i,j} d_{i+1/2, j+1/2}^s(t) {}^2 \tilde{\mathbf{w}}_{i+1/2, j+1/2}^{\alpha, s}(r, s), & f^{\star 1} \mathbf{E}_h^s(t, r, s) &= \sum_{i,j} e_{i,j}^s(t) {}^1 \mathbf{w}_{i,j}^{\alpha, s}(r, s), \\
f^{\star 1} \mathbf{H}_h^z(t, r, s) &= \sum_{i,j} h_{i+1/2, j+1/2}^z(t) {}^1 \tilde{\mathbf{w}}_{i+1/2, j+1/2}^{\alpha, z}(r, s), & f^{\star 2} \mathbf{B}_h(t, r, s) &= \sum_{i,j} b_{i,j}^z(t) {}^2 \mathbf{w}_{i,j}^{\alpha, z}(r, s).
\end{aligned}$$

Les coefficients associés aux splines sont calculés avec l'aide des degrés de liberté dans la grille cartésienne  $(r, s, z)$ .

En théorie, la dérivée extérieure ne dépend pas du système de coordonnées choisi, i.e.  $f^{\star} d = df^{\star}$ . On voit que cette propriété est également vérifiée pour la dérivée extérieure discrète.

On rappelle que l'équation d'Ampère (82), sans densité de courant, est donnée par

$$\partial_t f^{\star 2} \mathbf{D}^r + \partial_t f^{\star 2} \mathbf{D}^s - df^{\star 1} \mathbf{H} = 0,$$

et que l'équation de Faraday (83) est donnée par

$$\partial_t f^{\star 2} \mathbf{B}^z + df^{\star 1} \mathbf{E} = 0.$$

Pour le calcul de l'opérateur hodge star discret, on va devoir faire attention car  $f^{\star}$  et  $\star$  ne commutent pas. On doit le discrétiser dans les nouvelles coordonnées tel que l'on ait les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
f^{\star 2} \mathbf{B} &= f^{\star} (\star {}^1 \mathbf{H}), \\
f^{\star 1} \mathbf{E} &= f^{\star} (\star {}^2 \mathbf{D}).
\end{aligned}$$

On connaît  $f^{\star 1} \mathbf{H}$ ,  $f^{\star 2} \mathbf{D}$  et on veut calculer les coefficients splines de  $f^{\star 2} \mathbf{B}$ ,  $f^{\star 1} \mathbf{E}$ . Pour cela, on va devoir revenir dans les nouvelles coordonnées  $(x, y, z)$  en appliquant le pull back à  $f^{\star 1} \mathbf{H}$ ,  $f^{\star 2} \mathbf{D}$  pour avoir  ${}^1 \mathbf{H}$ ,  ${}^2 \mathbf{D}$ . On applique ensuite à  ${}^1 \mathbf{H}$ ,  ${}^2 \mathbf{D}$  l'opérateur du hodge star suivi du pull back  $f^{\star}$ . Après simplification,

on obtient

$$\begin{aligned}
f^*(\star^1 \mathbf{H}) &= \sum_{i,j} d_{i+1/2,j+1/2}^z(t) B_{i+1/2}^\alpha(r) B_{j+1/2}^\alpha(s) |J(r,s)| dr \wedge ds, \\
(f^*(\star^2 \mathbf{D}_h))^r(t,r,s) &= \sum_{i,j} \left( d_{i+1/2,j+1/2}^r(t) B_{i+1/2}^\alpha(r) D_{j+1/2}^\alpha(s) \frac{(J^t J(r,s))_{1,1}}{|J(r,s)|} \right. \\
&\quad \left. + d_{i+1/2,j+1/2}^s(t) D_{i+1/2}^\alpha(r) B_{j+1/2}^\alpha(s) \frac{(J^t J(r,s))_{2,1}}{|J(r,s)|} \right) dr, \\
(f^*(\star^2 \mathbf{D}_h))^s(t,r,s) &= \sum_{i,j} \left( d_{i+1/2,j+1/2}^r(t) B_{i+1/2}^\alpha(r) D_{j+1/2}^\alpha(s) \frac{(J^t J(r,s))_{1,2}}{|J(r,s)|} \right. \\
&\quad \left. + d_{i+1/2,j+1/2}^s(t) D_{i+1/2}^\alpha(r) B_{j+1/2}^\alpha(s) \frac{(J^t J(r,s))_{2,2}}{|J(r,s)|} \right) ds,
\end{aligned}$$

avec  $(J^t J(r,s))_{i,j}$  le  $(i,j)$  ième coefficients de la matrice  $J^t J(r,s)$ . Maintenant, on peut définir l'image de  ${}^1 \mathbf{H}$  par  $f^* \star$  comme une projection de cette 2-forme, que l'on note par  $f^* {}^2 \mathbf{B}_h(t,r,s) = \sum_{i,j} b_{i,j}^z(t) {}^2 \mathbf{w}_{i,j}^{\alpha,z}(r,s)$  sur le maillage primal. On a, alors, pour tout  $(k,l) \in [0, N_r - 1] \times [0, N_s - 1]$

$$\begin{aligned}
\int_{r_k}^{r_{k+1}} \int_{s_l}^{s_{l+1}} f^*(\star^1 \mathbf{H}_h)(t,r,s) &= \sum_{i,j} d_{i+1/2,j+1/2}^z(t) \int_{r_k}^{r_{k+1}} \int_{s_l}^{s_{l+1}} B_{i+1/2}^\alpha(r) B_{j+1/2}^\alpha(s) |J(r,s)| dr \wedge ds \\
&= \int_{r_k}^{r_{k+1}} \int_{s_l}^{s_{l+1}} f^* {}^2 \mathbf{B}_h(t,r,s) \\
&= \sum_{i,j} b_{i,j}^z(t) \int_{r_k}^{r_{k+1}} \int_{s_l}^{s_{l+1}} {}^2 \mathbf{w}_{i,j}^{\alpha,z}(r,s).
\end{aligned}$$

Ensuite, on pose

$$f^* {}^1 \mathbf{E}_h = f^* {}^1 \mathbf{E}_h^r(t,r,s) + f^* {}^1 \mathbf{E}_h^s(t,r,s) = \sum_{i,j} e_{i,j}^r(t) {}^1 \mathbf{w}_{i,j}^{\alpha,r}(r,s) + \sum_{i,j} e_{i,j}^s(t) {}^1 \mathbf{w}_{i,j}^{\alpha,s}(r,s),$$

la projection de  ${}^2\mathbf{D}$  et donc

$$\begin{aligned}
\int_{r_k}^{r_{k+1}} (f^\star \star {}^2\mathbf{D}_h)^r(t, r, s_l) &= \sum_{i,j} d_{i+1/2,j+1/2}^r(t) D_{j+1/2}^\alpha(s_l) \int_{r_k}^{r_{k+1}} \left( B_{i+1/2}^\alpha(r) \frac{(J^t J)_{1,1}(r, s_l)}{|J(r, s_l)|} \right) dr \\
&\quad + d_{i+1/2,j+1/2}^s(t) B_{j+1/2}^\alpha(s_l) \int_{r_k}^{r_{k+1}} \left( D_{i+1/2}^\alpha(r) \frac{(J^t J)_{2,1}(r, s_l)}{|J(r, s_l)|} \right) ds \\
&= \int_{r_k}^{r_{k+1}} f^\star \mathbf{E}_h^r(t, r, s_l) \\
&= \sum_{i,j} e_{i,j}^r(t) \int_{r_k}^{r_{k+1}} \mathbf{w}_{i,j}^{\alpha,r}(r, s_l),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{s_l}^{s_{l+1}} (f^\star \star {}^2\mathbf{D}_h)^s(t, r_k, s) &= \sum_{i,j} d_{i+1/2,j+1/2}^r(t) B_{i+1/2}^\alpha(r_k) \int_{s_l}^{s_{l+1}} \left( D_{j+1/2}^\alpha(s) \frac{(J^t J)_{1,2}(r_k, s)}{|J(r_k, s)|} \right) ds \\
&\quad + d_{i+1/2,j+1/2}^s(t) D_{i+1/2}^\alpha(r_k) \int_{s_l}^{s_{l+1}} \left( B_{j+1/2}^\alpha(s) \frac{(J^t J)_{2,2}(r_k, s)}{|J(r_k, s)|} \right) ds \\
&= \int_{s_l}^{s_{l+1}} f^\star \mathbf{E}_h^s(t, r_k, s) \\
&= \sum_{i,j} e_{i,j}^s(t) \int_{s_l}^{s_{l+1}} \mathbf{w}_{i,j}^{\alpha,s}(r_k, s).
\end{aligned}$$

On procède de la même manière si l'on doit résoudre  $f^\star \mathbf{H} = f^\star \star {}^2\mathbf{B}$  en connaissant  $f^\star \star {}^2\mathbf{B}$ . On applique le pull back  $f^{-1\star}$  à  $f^\star \star {}^2\mathbf{B}$  afin de revenir dans les anciennes variables  $(x, y, z)$  pour avoir  ${}^2\mathbf{B}$ . Puis on applique le hodge star à  ${}^2\mathbf{B}$  suivi pull back  $f^\star$ . Après simplification, on obtient

$$f^\star \star {}^2\mathbf{B} = \sum_{i,j} b_{i,j}^z(t) D_i^\alpha(r) D_j^\alpha(s) \frac{1}{|J(r, s)|} dz.$$

On note  $f^\star \mathbf{H}_h^z(t, r, s) = \sum_{i,j} h_{i+1/2,j+1/2}^z(t) \tilde{\mathbf{w}}_{i+1/2,j+1/2}^{\alpha,z}(r, s)$  la projection

sur le maillage dual d'où

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f^* \star {}^2\mathbf{B}(t, r_{i+1/2}, s_{j+1/2}) &= \sum_{i,j} b_{i,j}^z(t) \frac{D_i^\alpha(r_{i+1/2}) D_j^\alpha(s_{j+1/2})}{|J(r_{i+1/2}, s_{j+1/2})|} \\
&= \int_0^1 f^* {}^1\mathbf{H}_h^z(t, r_{i+1/2}, s_{j+1/2}) \\
&= \sum_{i,j} h_{i+1/2, j+1/2}^z(t) {}^1\tilde{\mathbf{w}}_{i+1/2, j+1/2}^{\alpha, z}(r_{i+1/2}, s_{j+1/2}).
\end{aligned}$$

**Cas test en 2D dans le cas d'un changement de variables et avec des conditions aux bords de type conducteur parfait.**

On suppose que les équations de Maxwell sont valides dans le domaine physique avec des conditions aux bords de type conducteur parfait. On a alors les solutions suivantes

$$\begin{aligned}
{}^1\mathbf{E} &= -\cos(2k\theta) (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) J_{2k}(\omega r) d\theta \\
&\quad + \cos(2k\theta) (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) J'_{2k}(\omega r) dr,
\end{aligned}$$

pour le champ électrique, une 1-forme, et

$${}^2\mathbf{B} = \cos(2k\theta) (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) J_{2k}(\omega r) dr d\theta,$$

pour le champ d'induction magnétique, une 2-forme. La fonction  $J_{2k}$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $2k$  et  $J'_{2k}$  sa dérivée. À l'aide de l'opérateur hodge star, le déplacement électrique, une 1-forme, a pour forme

$$\begin{aligned}
{}^1\mathbf{D} &= -\cos(2k\theta) (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) J_{2k}(\omega r) dr \\
&\quad + \cos(2k\theta) (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) J'_{2k}(\omega r) d\theta,
\end{aligned}$$

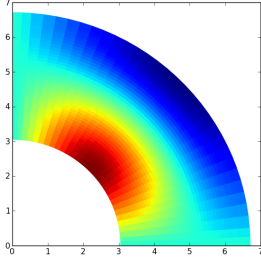
et le champ magnétique,

$${}^0\mathbf{H} = \cos(2k\theta) (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) J_{2k}(\omega r).$$

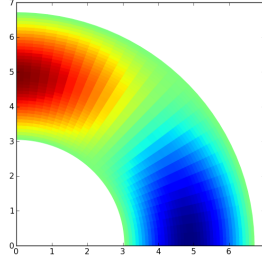
L'intervalle sur lequel on a les conditions aux bords de type conducteur parfait est  $(r, \theta) \in [\gamma_1, \gamma_2] \times [0, \frac{\pi}{2}]$  où  $\gamma_1, \gamma_2$  sont les deux premières racines de la fonction de Bessel de première espèce d'ordre  $2k$ .

Dans notre cas, le changement de variable n'est rien d'autre qu'un changement de coordonnées polaires.

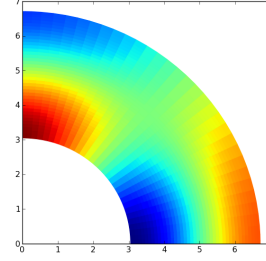
On teste le code avec un schéma d'ordre 4 en temps et on s'aperçoit que l'ordre du schéma dépend du degré des B-splines.



**FIG. 20:** La première composante du champ d'induction électrique  $D_x$  dans le domaine physique.



**FIG. 21:** La deuxième composante du champ d'induction électrique  $D_y$  dans le domaine physique.



**FIG. 22:** Le champ magnétique  $H$  dans le domaine physique.

Degré des splines $\alpha = 1$		
Nombre de points	Erreurs $L^2$ pour H	ordre de conv.
10	0.00513786236267	
20	0.00238054129513	1.67627824073
40	0.000947723465878	1.81682625586
80	0.00035447325496	1.85997897801

Degré des splines $\alpha = 3$		
Nombre de points	Erreurs $L^2$ pour H	ordre de conv.
10	0.000245195436118	
20	1.91520985487e-05	3.67835774002
40	1.4651702633e-06	3.7083622499
80	9.27738247413e-08	3.9812066957

On a pris pour temps final  $T = 1$  pour le degré des splines égal à 1 et  $T = 2$  pour le degré égal à 3. Cet ordre de convergence est obtenu en prenant  $\Delta t = \min(\Delta_x, \Delta_y)/0.5$  quand le degré des splines vaut 1 et  $\Delta t = \min(\Delta_x, \Delta_y)/3.5$  quand celui-ci vaut 3.



## 9 L'ÉQUATION DE VLASOV-POISSON

On va maintenant regarder la discrétisation des équations Vlasov-Poisson et traiter le cas où on considère la fonction de distribution comme une 2-forme différentielle  ${}^2\mathbf{f}$  et le cas où elle est une 0-forme différentielle  ${}^0\mathbf{f}$ .

Plaçons-nous dans l'espace unidimensionnel en espace et en vitesse. L'équation géométrique de Vlasov est de la forme suivante :

$$\frac{\partial({}^2\mathbf{f})}{\partial t}(t) = \mathcal{L}_\tau({}^2\mathbf{f}),$$

avec  $\tau$  le champ de vecteurs tel que  $\tau = v \frac{\partial}{\partial x} + \left( i \frac{\partial}{\partial x} {}^1E \right) \frac{\partial}{\partial v}$ . Ce champ de vecteurs est donné par l'équation de Poisson à savoir :

$$\begin{aligned} -\partial_t {}^0D &= {}^0J, \\ d {}^0D &= {}^1\rho, \end{aligned}$$

avec  ${}^0J$  la densité de courant égale à  ${}^0J(t) = \int_v i_v \frac{\partial}{\partial x} ({}^2\mathbf{f})(t)$  et la densité de charge  ${}^1\rho$  égale à  ${}^1\rho(t) = \int_v ({}^2\mathbf{f})(t)$ .

On discrétise l'espace, dans la direction de  $x$  et on note par  $x_i$  les noeuds (les 0-cubes) du maillage pour  $i = 0, \dots, N-1$  avec  $x_N = x_0$  par périodicité et dans la direction de  $v$ , on pose par  $v_j$  les noeuds avec  $j = 0, \dots, M$ .

À l'aide de la discrétisation de la dérivée de Lie vue page 110 et de la discrétisation d'une forme volume,  ${}^2\mathbf{f}(t, x, v) = \sum_{i,j} f_{i,j}^2 D_i^\alpha(x) D_j^\alpha(v) dx \wedge dv$ , l'équation de Vlasov devient alors :

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial t} f_{i,j}^2(t) \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} D_i^\alpha(x) dx \right) \left( \int_{v_l}^{v_{l+1}} D_j^\alpha(v) dv \right) \\ &= \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left( \int_{\varphi^s([x_k, x_{k+1}] \times [v_l, v_{l+1}])} D_i^\alpha(x) D_j^\alpha(v) dx \wedge dv \right), \end{aligned}$$

avec  $\varphi^s$  le flot du champ de vecteurs  $\tau$ . Soient  $\Delta t$  le pas de temps et  $t_n = n\Delta t$  les points en temps, on a alors par définition, pour  $\Delta t$  petit,

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} \frac{d}{dt} f_{i,j}^2(t) \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} D_i^\alpha(x) dx \right) \left( \int_{v_l}^{v_{l+1}} D_j^\alpha(v) dv \right) \\ &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int_{\varphi^{\Delta t}([x_k, x_{k+1}] \times [v_l, v_{l+1}])} D_i^\alpha(x) D_j^\alpha(v) dx \wedge dv \right) \right. \\ & \quad \left. - \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} D_i^\alpha(x) dx \right) \left( \int_{v_l}^{v_{l+1}} D_j^\alpha(v) dv \right) \right]. \end{aligned}$$

Par différence finie, on discrétise le membre de gauche de l'égalité de dessus, et on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t_{n+1}) \left( \int_{x_k}^{x_{k+1}} D_i^\alpha(x) dx \right) \left( \int_{v_l}^{v_{l+1}} D_j^\alpha(v) dv \right) \\ &= \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t_n) \left( \int_{\varphi^{\Delta t}([x_k, x_{k+1}] \times [v_l, v_{l+1}])} D_i^\alpha(x) D_j^\alpha(v) dx \wedge dv \right). \end{aligned}$$

On voit alors que l'on retrouve la méthode de volume fini expliquée dans la thèse de Barthelmé et dans bien d'autres [94, 55, 42, 56, 61, 64, 43, ?]. L'ensemble  $\varphi^{\Delta t}([x_k, x_{k+1}] \times [v_l, v_{l+1}])$  correspond à l'image de la maille  $[x_k, x_{k+1}] \times [v_l, v_{l+1}]$  par le flot du champ de vecteurs  $\tau$  au temps  $t_{n+1}$ . Pour son calcul, on résout les équations de Newton :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= v, \\ \frac{dv}{dt} &= i_{\frac{\partial}{\partial x}} {}^1E = \star({}^0D \wedge dx) = {}^0D. \end{aligned}$$

On peut toujours résoudre toutes ces équations avec ou sans spliting. Pour  ${}^0J(t_n, x_{k+1/2})$ , il suffit de calculer

$${}^0J(t_n, x_{k+1/2}) = \int_v \star(\star({}^2\mathbf{f})v) dx = \int_v ({}^0\mathbf{f})(t_n, x_{k+1/2}, v) v dv,$$

avec

$$\begin{aligned} {}^0\mathbf{f}(t, x_{k+1/2}, v_{l+1/2}) &= \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) B_{i+1/2}^\alpha(x_{k+1/2}) B_{j+1/2}^\alpha(v_{l+1/2}) \\ &= \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) D_{i+1/2}^\alpha(x_{k+1/2}) D_{j+1/2}^\alpha(v_{l+1/2}) \\ &= (\star^2\mathbf{f})(t, x_{k+1/2}, v_{l+1/2}). \end{aligned}$$

Une autre manière de voir la fonction de distribution  $f$  est de la considérer comme une 0-forme différentielle  ${}^0\mathbf{f}$ . Dans ce cas, l'équation de Vlasov devient

$$\frac{\partial({}^0\mathbf{f})}{\partial t}(t) = \mathcal{L}_\tau({}^0\mathbf{f}),$$

avec  $\tau$  le champ de vecteurs tel que  $\tau = v \frac{\partial}{\partial x} + \left( i_{\frac{\partial}{\partial x}} {}^1E \right) \frac{\partial}{\partial v}$ . En procédant de la même manière que précédemment, on obtient l'équation discrète suivante :

$$\sum_{i,j} f_{i,j}^0(t_{n+1}) (B_{i+1/2}^\alpha(x_{k+1/2}) B_{j+1/2}^\alpha(v_{l+1/2}))$$

$$= \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t_n) (B_{i+1/2}^\alpha(\varphi_x^{\Delta t}(x_{k+1/2}, v_{l+1/2})) B_{j+1/2}^\alpha(\varphi_v^{\Delta t}(x_{k+1/2}, v_{l+1/2}))),$$

avec  $\varphi^{\Delta t}(x_{k+1/2}, v_{l+1/2}) = (\varphi_x^{\Delta t}(x_{k+1/2}, v_{l+1/2}), \varphi_v^{\Delta t}(x_{k+1/2}, v_{l+1/2}))$ , l'image du point  $(x_{k+1/2}, v_{l+1/2})$  le long du flot  $\varphi^t$  au temps  $t = t_{n+1}$ . La densité de courant est calculée ici de la façon suivante

$${}^0J(t_n, x_{k+1/2}) = \int_v ({}^0\mathbf{f})(t_n, x_{k+1/2}, v) v dv.$$

On peut également écrire le schéma en temps avec ou sans splitting et on retrouve la méthode semi-lagrangienne expliquée dans la thèse de Barthelmé et dans bien d'autre[20, 42, 43, 55, 56, 61, 64, 94].

**Remarque 9.1** — On peut effectuer cette même méthode sur les équations de Vlasov-Maxwell et on obtiendrai les mêmes conclusions.

## 10 FORMULATION FAIBLE POUR L'ÉQUATION DE VLASOV-POISSON

On a deux manières de considérer le problème, qui en théorie sont toutes les deux équivalentes (voir la section 2 page 3).

- Soit on considère la fonction de distribution  $f$  comme une 0-forme différentielle  ${}^0\mathbf{f}$  et dans ce cas là, en dimension 1, l'équation de Vlasov-Poisson s'écrit

$$\frac{\partial({}^0\mathbf{f})}{\partial t} + i_{v \frac{\partial}{\partial x}} d({}^0\mathbf{f}) + i_{-\frac{e}{\mathbf{m}}(i_{\frac{\partial}{\partial x}} {}^1E) \frac{\partial}{\partial v}} d({}^0\mathbf{f}) = 0;$$

avec  $-e$  la charge de la particule et  $\mathbf{m}$  sa masse.

- Soit on considère la fonction de distribution  $f$  comme une forme volume de l'espace des phases,  ${}^2\mathbf{f}$ , et dans ce cas l'équation de Vlasov-Poisson s'écrit

$$\frac{\partial({}^2\mathbf{f})}{\partial t} + d i_{v \frac{\partial}{\partial x}} ({}^2\mathbf{f}) + d i_{-\frac{e}{\mathbf{m}}(i_{\frac{\partial}{\partial x}} {}^1E) \frac{\partial}{\partial v}} ({}^2\mathbf{f}) = 0$$

Dans les deux cas, on considère l'équation de Poisson :

$$\begin{aligned}\frac{\partial({}^0D)}{\partial t} &= -{}^0J, \\ d({}^0D) &= \frac{e}{\mathbf{m}}({}^1\rho).\end{aligned}$$

On a également la relation de construction  ${}^1E = \star{}^0D$  et avec  $d{}^1E = 0$  car on est en dimension 1. On a donc deux façon d'aborder le problème, soit on considère la fonction de distribution comme une 0-forme différentielle, soit comme une 2-forme différentielle. En théorie, ces deux formulations sont équivalentes mais lorsque l'on discrétise, ce n'est souvent pas le cas. On va donc écrire la formulation faible dans les deux situations ainsi que les équations de la conservation des quantités physiques tels que la masse, la norme  $L^2$ , la quantité de mouvement et l'énergie, dans les deux cas considérés. Tout d'abord, on développe les formulations avec  $f$  une 0-forme différentielle  ${}^0\mathbf{f}$  puis avec  $f$  une 2-forme différentielle  ${}^2\mathbf{f}$  sur l'espace des phases.

## 10.1 Avec ${}^0\mathbf{f}$ une 0-forme différentielle

### 10.1.1 Formulation faible de l'équation de Vlasov

Soient  ${}^0\mathbf{f}(x, v, t) = \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{j+1/2}^\alpha(v)$  la 0-forme différentielle sur l'espace des phases,  ${}^1E(x, t) = \sum_i e_i(t) D_i^\alpha(x) dx$  la 1-forme différentielle sur l'espace associée au champ électrique et l'équation de Vlasov :

$$\frac{\partial({}^0\mathbf{f})}{\partial t} + v \frac{\partial({}^0\mathbf{f})}{\partial x} - \frac{e}{\mathbf{m}} (i_{\frac{\partial}{\partial x}} {}^1E) \frac{\partial({}^0\mathbf{f})}{\partial v} = 0.$$

Puisque le champ de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial x}$  ne dépend pas du temps, on discrétise  $i_{\frac{\partial}{\partial x}} {}^1E$  à l'aide de la formule suivante (voir la remarque 5.1 à la section 5 page 110) :

$$i_{\frac{\partial}{\partial x}} {}^1E = \star(\star{}^1E \wedge dx) = \star({}^0D \wedge dx) = {}^0D = \sum_i d_i(t) B_{i+1/2}^\alpha(x).$$

En multipliant l'équation de Vlasov par

$$\star(B_{k+1/2}^\alpha(x) B_{l+1/2}^\alpha(v)) = B_{k+1/2}^\alpha(x) B_{l+1/2}^\alpha(v) dx \wedge dv,$$

et en intégrant celle-ci en espace et en vitesse on obtient

$$\begin{aligned}
& \int \int \frac{\partial({}^0\mathbf{f})}{\partial t} B_{k+1/2}^\alpha(x) B_{l+1/2}^\alpha(v) dx \wedge dv + v \frac{\partial({}^0\mathbf{f})}{\partial x} B_{k+1/2}^\alpha(x) B_{l+1/2}^\alpha(v) dx \wedge dv - \frac{e}{\mathbf{m}} {}^0 D \frac{\partial({}^0\mathbf{f})}{\partial v} B_{k+1/2}^\alpha(x) B_{l+1/2}^\alpha(v) dx \wedge dv \\
&= \frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) B_{l+1/2}^\alpha(v) dv \right) \\
&+ \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int (B_{i+1/2}^\alpha(x))' B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v B_{l+1/2}^\alpha(v) dv \right) \\
&- \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^0(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int (B_{j+1/2}^\alpha(v))' B_{l+1/2}^\alpha(v) dv \right)
\end{aligned}$$

De plus, comme

$$\left( \int (B_{i+1/2}^\alpha(x))' B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) = \left( \int (B_{i+1/2}^\alpha(x), B_{k+1/2}^\alpha(x))' dx \right) - \left( \int (B_{k+1/2}^\alpha(x))' B_{i+1/2}^\alpha(x) dx \right)$$

l'équation devient

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) B_{l+1/2}^\alpha(v) dv \right) \\
&- \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int (B_{k+1/2}^\alpha(x))' B_{i+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v B_{l+1/2}^\alpha(v) dv \right) \\
&+ \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^0(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int (B_{l+1/2}^\alpha(v))' B_{j+1/2}^\alpha(v) dv \right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

car on suppose que  $f$  est périodique en  $x$  et s'annule au voisinage des bords ( $f_{i,j}^0(t) B_{j+1/2}^\alpha(\pm v \max) = 0$  pour tout  $j$ ). Matriciellement cela revient à

$$\frac{d}{dt} \tilde{M}_{0,x}^\alpha \mathbf{f}^0 (\tilde{M}_{0,v}^\alpha)^t - \tilde{K}_{0,x}^\alpha \mathbf{f}^0 (\tilde{V}_{0,v}^\alpha)^t + \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_m d_m(t) \tilde{T}_{0,x}^\alpha(m) \mathbf{f}^0 (\tilde{K}_{0,v}^\alpha)^t = 0,$$

avec  $\mathbf{f}^0$  la matrice des coefficients splines de  ${}^0\mathbf{f}$  et avec les matrices suivantes

$$\begin{aligned}
\tilde{K}_{0,x}^\alpha &= \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) (B_{k+1/2}^\alpha(x))' dx \right)_{k,i}, & \tilde{V}_{0,x}^\alpha &= \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v B_{l+1/2}^\alpha(v) dv \right)_{l,j}, \\
\tilde{T}_{0,x}^\alpha(m) &= \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right)_{k,i}.
\end{aligned}$$

### 10.1.2 Formulation faible de la conservation de la masse

Pour la conservation de la masse, on reprend l'équation suivante

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) B_{l+1/2}^\alpha(v) dv \right) \\
& + \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int (B_{i+1/2}^\alpha(x))' B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v B_{l+1/2}^\alpha(v) dv \right) \\
& - \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^0(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int (B_{j+1/2}^\alpha(v))' B_{l+1/2}^\alpha(v) dv \right) \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Comme les B-splines forment une partition de l'unité :  $\sum B_{k+1/2}^\alpha(x) = 1$  pour tout  $x$  dans le maillage. Pour obtenir la conservation de la masse, il suffit de sommer sur les  $k$  et sur les  $l$  et on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) dv \right) \\
& + \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int (B_{i+1/2}^\alpha(x))' dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v dv \right) \\
& - \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^0(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) B_{i+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int (B_{j+1/2}^\alpha(v))' dv \right) = 0.
\end{aligned}$$

Comme  $f$  s'annule aux bords, car on suppose  $f$  périodique en  $x$  et  $f$  est nulle au voisinage des bords, on a alors l'équation suivante

$$\frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) dv \right) = 0.$$

### 10.1.3 Formulation faible de la conservation de la norme $L^2$ .

Il suffit de multiplier l'équation de Vlasov par

$$\star^0 f(x, v, t) = \sum_{k,l} f_{k,l}^0(t) B_{k+1/2}^\alpha(x) B_{l+1/2}^\alpha(v) dx \wedge dv$$

et d'intégrer en espace et en vitesse, ce qui revient à

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_{i,j,k,l} f_{i,j}^0(t) f_{k,l}(t) \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) B_{l+1/2}^\alpha(v) dv \right) \\
& + \sum_{i,j,k,l} f_{i,j}^0(t) f_{k,l}(t) \left( \int (B_{i+1/2}^\alpha(x))' B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v B_{l+1/2}^\alpha(v) dv \right) \\
& - \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m,k,l} f_{i,j}^0(t) f_{k,l}^0(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int (B_{j+1/2}^\alpha(v))' B_{l+1/2}^\alpha(v) dv \right) \\
& = 0.
\end{aligned} \tag{86}$$

Par un changement d'indice, on a l'égalité suivante

$$\sum_{i,k} f_{i,j}^0 f_{k,l}^0 \int (B_{i+1/2}^\alpha(x))' B_{k+1/2}^\alpha(x) dx = \sum_{i,k} f_{k,j}^0 f_{i,l}^0 \int B_{i+1/2}^\alpha(x) (B_{k+1/2}^\alpha(x))' dx,$$

et par un autre changement d'indices on obtient

$$\sum_{i,k} f_{i,j}^0 f_{k,l}^0 \int (B_{i+1/2}^\alpha(x))' B_{k+1/2}^\alpha(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{i,k} f_{i,j}^0 f_{k,l}^0 \int B_{i+1/2}^\alpha(x) (B_{k+1/2}^\alpha(x))' dx.$$

Donc, comme les splines sont périodiques en  $x$  on a :

$$\sum_{i,k} f_{i,j}^0 f_{k,l}^0 \int (B_{i+1/2}^\alpha(x))' B_{k+1/2}^\alpha(x) dx = \frac{1}{2} \sum_{i,k} f_{i,j}^0 f_{k,l}^0 \int (B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x))' dx = 0.$$

Pour le troisième terme de l'équation (86), il faut supposer que  $f$  est à support compact et est donc nulle à quelques mailles du bord. On a alors la conservation de la norme  $L^2$

$$\frac{d}{dt} \sum_{i,j,k,l} f_{i,j}^0(t) f_{k,l}^0(t) \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) B_{l+1/2}^\alpha(v) dv \right) = 0.$$

#### 10.1.4 Formulation faible de la conservation géométrique de l'énergie.

Afin de déterminer la conservation de l'énergie, on multiplie l'équation de Vlasov par  $\star (B_{k+1/2}^\alpha(x) v^2) = B_{k+1/2}^\alpha(x) v^2 dx \wedge dv$  et on intègre en espace et

en vitesse

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v^2 dv \right) \\
& + \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int (B_{i+1/2}^\alpha(x))' B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v^3 dv \right) \\
& - \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^0 d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int (B_{j+1/2}^\alpha(v))' v^2 dv \right) = 0. \quad (87)
\end{aligned}$$

Mais puisque  $\left( \int (B_{j+1/2}^\alpha(v) v^2)' dv \right) = \left( \int (B_{j+1/2}^\alpha(v))' v^2 dv \right) + 2 \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v dv \right)$ ,  
l'équation (87) devient

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v^2 dv \right) \\
& \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int (B_{i+1/2}^\alpha(x))' B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v^3 dv \right) \\
& + 2 \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^0 d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v dv \right) = 0. \quad (88)
\end{aligned}$$

Or, on remarque que  ${}^0J(t) = \sum_i J_i(t) B_{i+1/2}^\alpha(x) = \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) B_{i+1/2}^\alpha(x) \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v dv$   
et que  $\frac{\partial^0 D}{\partial t} = -{}^0J$ , donc on a

$$\begin{aligned}
& 2 \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^0 d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v dv \right) \\
& = 2 \frac{e}{\mathbf{m}} \int {}^0J \wedge B_{k+1/2}^\alpha(x) {}^0D dx \\
& = -2 \frac{e}{\mathbf{m}} \int \frac{\partial^0 D}{\partial t} \wedge B_{k+1/2}^\alpha(x) {}^0D dx, \\
& = -\frac{e}{\mathbf{m}} \frac{\partial}{\partial t} \int ({}^0D)^2 B_{k+1/2}^\alpha(x) dx
\end{aligned}$$



En remplaçant l'égalité précédente dans l'équation (88), on a

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v^2 dv \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j} d_i(t) d_j(t) \int B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{j+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right] \\ & - \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int (B_{k+1/2}^\alpha(x))' B_{i+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v^3 dv \right) = 0. \end{aligned}$$

Puisque  $\sum_k B_{k+1/2}^\alpha(x) = 1$  pour tout  $x$ , en effectuant la somme sur  $k$  de l'équation précédente, et donc

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i,j,k} f_{i,j}^0(t) \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v^2 dv \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i,j,k} d_i(t) d_j(t) \int B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{j+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right] = 0, \end{aligned}$$

i.e.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v^2 dv \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i,j} d_i(t) d_j(t) \int B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{j+1/2}^\alpha(x) dx \right] = 0. \end{aligned}$$

On retrouve la formulation forte pour la conservation de l'énergie.

**Remarque 10.1** — On remarque qu'on aurait pu également multiplier Vlasov par

$$\star(B_{k+1/2}^\alpha(x) v^2 B_{l+1/2}^\alpha(v)) = B_{k+1/2}^\alpha(x) v^2 B_{l+1/2}^\alpha(v) dx \wedge dv$$

et faire par la suite la somme en  $k$  et en  $l$ .

### 10.1.5 Formulation faible de la conservation géométrique de la quantité de mouvement.

Pour déterminer la quantité de mouvement, on multiplie l'équation de Vlasov par

$$\star(B_{k+1/2}^\alpha(x) v B_{l+1/2}^\alpha(v)) = B_{k+1/2}^\alpha(x) v B_{l+1/2}^\alpha(v) dx \wedge dv$$

et on intègre en espace et en vitesse, autrement dit :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v B_{l+1/2}^\alpha(v) dv \right) \\
& + \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int (B_{i+1/2}^\alpha(x))' B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v^2 B_{l+1/2}^\alpha(v) dv \right) \\
& - \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^0(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{k+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int (B_{j+1/2}^\alpha(v))' v B_{l+1/2}^\alpha(v) dv \right) \\
& = 0.
\end{aligned}$$

Puisque  $\sum_k B_{k+1/2}^\alpha(x) = 1$  pour tout  $x$ , on somme sur  $k$  et sur  $l$  ce qui nous conduit à :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v dv \right) \\
& + \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int (B_{i+1/2}^\alpha(x))' dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v^2 dv \right) \\
& + \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^0(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) B_{i+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int (B_{j+1/2}^\alpha(v))' v dv \right) = 0.
\end{aligned}$$

On remarque que la deuxième ligne est égale à 0 et qu'en utilisant l'intégration par parties en  $v$  à la troisième ligne on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v dv \right) \\
& + \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^0(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) B_{i+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) dv \right) = 0.
\end{aligned}$$

Les B-splines, pour un maillage uniforme, vérifient  $\left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) dv \right) = \Delta_v$ , avec  $\Delta_v$  le pas d'espace. L'équation précédente se simplifie et devient alors

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v dv \right) \\
& + \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^0(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) B_{i+1/2}^\alpha(x) dx \right) \Delta_v = 0. \quad (89)
\end{aligned}$$

Mais par définition, on a

$${}^0 J(t, x) = \sum_i J_i(t) B_{i+1/2}^\alpha(x) = \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) B_{i+1/2}^\alpha(x) \int B_{j+1/2}^\alpha(v) v dv,$$

donc l'équation (89) est égale à

$$\frac{d}{dt} \left( \int {}^0 J(t, x) \wedge dx \right) + \frac{e}{\mathbf{m}} (\mathbf{f}_v^0)^t \tilde{M}_0^\alpha \mathbf{d} = 0. \quad (90)$$

avec  $\mathbf{f}_v^0 = (f_v)_i = \sum_j f_{i,j}^0 \Delta_v$ . Regardons de plus près la partie  $(\mathbf{f}_v^0)^t \tilde{M}_0^\alpha \mathbf{d}$ . Pour le calcul de la densité de courant  ${}^1\rho$  qui est de la forme

$${}^1\rho(t, x) = \sum_i \rho_i(t) D_{i+1/2}^\alpha(x) dx,$$

celui-ci est obtenu en effectuant le hodge de  $f_v$  i.e.

$$\star^0 \mathbf{f}_v = \star \left( \sum_{i,j} f_{i,j}^0(t) \Delta_v B_{i+1/2}^\alpha(x) \right).$$

On utilise la formulation faible du hodge star et on a alors

$$\tilde{M}_1 \rho = \left( \int D_{i+1/2}^\alpha(x) B_{j+1/2}^\alpha(x) dx \right) \mathbf{f}_v^0.$$

Mais  $\left( \int D_{i+1/2}^\alpha(x) B_{j+1/2}^\alpha(x) dx \right)^t \neq \tilde{M}_0^\alpha$ , donc, on va transformer l'égalité ci-dessus afin d'injecter dans l'équation (90) un élément qui dépend des coefficients splines de  ${}^1\rho$ . Dans la formulation faible de la discrétisation du hodge star, on va, au lieu de multiplier l'égalité  ${}^1\rho = \star^0 \mathbf{f}_v$  par

$$\star(D_{i+1/2}^\alpha(x) dx) = D_{i+1/2}^\alpha(x),$$

on va la multiplier par  $\star(B_{i+1/2}^\alpha(x) dx) = B_{i+1/2}^\alpha(x)$  d'où

$$K_1^\alpha \rho = \tilde{M}_0^\alpha \mathbf{f}_v^0,$$

avec  $K_1^\alpha = \left( \int B_{i+1/2}^\alpha(x) D_{j+1/2}^\alpha(x) dx \right)$ . En remplaçant cette dernière égalité dans l'équation (90), on obtient

$$\frac{d}{dt} \left( \int {}^0 J(t, x) \wedge dx \right) + \frac{e}{\mathbf{m}} \rho^t (K_1^\alpha)^t \mathbf{d} = 0.$$

On utilise ensuite l'équation de Poisson,  $d^0 D = \frac{e}{\mathbf{m}} {}^1\rho$  i.e.

$$\sum_i d_i(t) (B_{i+1/2}^\alpha(x))' dx = \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_i \rho_i(t) D_{i+1/2}^\alpha dx. \quad (91)$$

On peut alors injecter (91) dans  $\rho^t(K_1^\alpha)^t \mathbf{d}$  :

$$\begin{aligned} \frac{e}{\mathbf{m}} \rho^t(K_1^\alpha)^t \mathbf{d} &= \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j} \rho_i(t) d_j(t) \int D_{i+1/2}^\alpha(x) B_{j+1/2}^\alpha(x) dx \\ &= \sum_{i,j} d_i(t) d_j(t) \int (B_{i+1/2}^\alpha(x))' B_{j+1/2}^\alpha(x) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

On obtient alors la conservation de la quantité du mouvement

$$\frac{d}{dt} \left( \int {}^0 J(t, x) \wedge dx \right) = 0.$$

## 10.2 Avec ${}^2 f$ une 2-forme différentielle

### 10.2.1 Formulation faible de l'équation de Vlasov

Quand  $f$  est considérée comme une 2-forme différentielle dans l'espace des phases, discrétisée, elle est de la forme :

$${}^2 \mathbf{f}(x, v, t) = \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) D_i^\alpha(x) D_j^\alpha(v) dx \wedge dv.$$

La discrétisation du produit intérieur devient

$$i_{v \frac{\partial}{\partial x}} {}^2 \mathbf{f} = \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) D_i^\alpha(x) v D_j^\alpha(v) dv \quad (92)$$

$$\begin{aligned} i_{0D} \frac{\partial}{\partial v} {}^2 \mathbf{f} &= - \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) D_i^\alpha(x) D_j^\alpha(v) {}^0 D dx \\ &= - \sum_{i,j,m} f_{i,j}^2(t) d_m(t) D_i^\alpha(x) B_{m+1/2}^\alpha(x) D_j^\alpha(v) dx. \end{aligned} \quad (93)$$

En utilisant (92) et (93), on peut écrire l'équation de Vlasov discrète à savoir :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) D_i^\alpha(x) D_j^\alpha(v) dx \wedge dv \\ &+ \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) (D_i^\alpha(x))' v D_j^\alpha(v) dx \wedge dv \\ &- \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^2(t) d_m(t) D_i^\alpha(x) B_{m+1/2}^\alpha(x) (D_j^\alpha(v))' dx \wedge dv \\ &= 0. \end{aligned}$$

Pour obtenir la formulation faible, on multiplie l'équation précédente par

$$\star(D_k^\alpha(x) D_l^\alpha(v) dx \wedge dv) = D_k^\alpha(x) D_l^\alpha(v)$$

puis on intègre en espace et en vitesse :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) D_l^\alpha(v) dv \right) \\ & + \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int (D_i^\alpha(x))' D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v D_l^\alpha(v) dv \right) \\ & - \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^2(t) d_m(t) \left( \int D_i^\alpha(x) B_{m+1/2}^\alpha(x) D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_l^\alpha(v) (D_j^\alpha(v))' dv \right) = 0. \end{aligned} \quad (94)$$

On intègre par parties et puisque  ${}^2\mathbf{f}$  est nulle aux bords, le système matriciel de l'équation (94) est de la forme

$$\frac{d}{dt} M_{1,x}^\alpha \mathbf{f}^2 (M_{1,v}^\alpha)^t - N_{1,x}^\alpha \mathbf{f}^2 (V_1^\alpha)^t + \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_m d_m(t) T_1^\alpha(m) \mathbf{f}^2 (N_{1,v}^\alpha)^t = 0, \quad (95)$$

avec  $\mathbf{f}^2$  la matrice des coefficients de  ${}^2\mathbf{f}$  et avec les matrices suivantes

$$\begin{aligned} N_{1,x}^\alpha &= \left( \int (D_k^\alpha(x))' D_i^\alpha(x) dx \right)_{k,i}, & T_1^\alpha(m) &= \left( \int D_i^\alpha(x) B_{m+1/2}^\alpha(x) D_k^\alpha(x) dx \right)_{k,i} \\ V_1^\alpha &= \left( \int D_j^\alpha(v) v D_l^\alpha(v) dv \right)_{j,l}. \end{aligned}$$

### 10.2.2 Formulation faible de la conservation de la masse

Avant de commencer les calculs, remarquons d'abord que si on utilise un maillage uniforme en vitesse et en espace, les  $D_i^\alpha(x)$  ne forment pas de partition de l'unité, mais on a

$$\sum_i D_i^\alpha(x) = \sum_i \frac{\alpha}{x_{i+\alpha} - x_i} B_i^{\alpha-1}(x) = \frac{\alpha}{\alpha \Delta_x} \sum_i B_i^{\alpha-1}(x) = \frac{1}{\Delta_x},$$

avec un pas d'espace que l'on notera  $\Delta_x$ . Donc lorsque l'on somme sur  $k$  et  $l$  l'équation (94), on va pouvoir factoriser par  $\frac{1}{\Delta_x \Delta_v}$ , et on obtient

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) dv \right) \\ & + \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int (D_i^\alpha(x))' dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v dv \right) \\ & - \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^2(t) d_m(t) \left( \int D_i^\alpha(x) B_{m+1/2}^\alpha(x) dx \right) \left( \int (D_j^\alpha(v))' dv \right) = 0. \end{aligned}$$

et comme  $f$  est périodique en  $x$  et s'annule aux bords en  $v$ , l'équation de la conservation de la masse devient

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) dv \right) = 0.$$

### 10.2.3 Formulation faible de la conservation de la norme $L^2$ .

On multiplie l'équation de Vlasov par

$$\star(^2\mathbf{f})(x, v, t) = \sum_{k,l} f_{k,l}^2(t) D_k^\alpha(x) D_l^\alpha(v),$$

puis on intègre en espace et en vitesse :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum_{i,j,k,l} f_{i,j}^2(t) f_{k,l}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) D_l^\alpha(v) dv \right) \\ & + \sum_{i,j,k,l} f_{i,j}^2(t) f_{k,l}^2(t) \left( \int (D_i^\alpha(x))' D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v D_l^\alpha(v) dv \right) \\ & - \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m,k,l} f_{i,j}^2(t) f_{k,l}^2(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) D_i^\alpha(x) D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int (D_j^\alpha(v))' D_l^\alpha(v) dv \right) \\ & = 0. \end{aligned} \tag{96}$$

Par un changement d'indice, on a

$$\sum_{i,k} f_{i,j}^2(t) f_{k,l}^2(t) \left( \int (D_i^\alpha(x))' D_k^\alpha(x) dx \right) = \sum_{i,k} f_{i,j}^2(t) f_{k,l}^2(t) \left( \int (D_k^\alpha(x))' D_i^\alpha(x) dx \right),$$

et donc

$$\sum_{i,k} f_{i,j}^2(t) f_{k,l}^2(t) \left( \int (D_i^\alpha(x))' D_k^\alpha(x) dx \right) = \frac{1}{2} \sum_{i,k} f_{i,j}^2(t) f_{k,l}^2(t) \left( \int (D_i^\alpha(x) D_k^\alpha(x))' dx \right) = 0.$$

On peut donc obtenir la conservation de la norme  $L^2$  en supposant que  $f$  est à support compact en  $v$  :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i,j,k,l} f_{i,j}^2(t) f_{k,l}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) D_l^\alpha(v) dv \right) = 0.$$

### 10.2.4 Formulation faible de la conservation géométrique de l'énergie.

Pour déterminer la conservation de l'énergie, on multiplie l'équation de Vlasov par

$$\star(D_k^\alpha(x) v^2 D_l^\alpha(v) dx \wedge dv) = D_k^\alpha(x) v^2 D_l^\alpha(v)$$

et on intègre sur l'espace des phases i.e.

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v^2 D_l^\alpha(v) dv \right) \\ & + \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int (D_i^\alpha(x))' D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v^3 D_l^\alpha(v) dv \right) \\ & - \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^2(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) D_i^\alpha(x) D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int (D_j^\alpha(v))' v^2 D_l^\alpha(v) dv \right) = 0. \end{aligned} \quad (97)$$

Les  $D_i^\alpha(x)$  ne vérifient pas la partition de l'unité mais pour un maillage uniforme et avec un pas d'espace que l'on notera  $\Delta_x$ , on a  $\sum_i D_i^\alpha(x) = \frac{1}{\Delta_x}$ .  
Donc pour un maillage uniforme en  $v$  avec un pas noté  $\Delta_v$ , lorsque l'on somme en  $l$ , l'équation (97) devient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum_{i,j} \frac{1}{\Delta_v} f_{i,j}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v^2 dv \right) \\ & + \sum_{i,j} \frac{1}{\Delta_v} f_{i,j}^2(t) \left( \int (D_i^\alpha(x))' D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v^3 dv \right) \\ & - \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} \frac{1}{\Delta_v} f_{i,j}^2(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) D_i^\alpha(x) D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int (D_j^\alpha(v))' v^2 dv \right) = 0, \end{aligned}$$

et plus simplement,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v^2 dv \right) \\ & + \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int (D_i^\alpha(x))' D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v^3 dv \right) \\ & - \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^2(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) D_i^\alpha(x) D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int (D_j^\alpha(v))' v^2 dv \right) = 0. \end{aligned}$$

On effectue l'intégration par parties pour  $\int (D_j^\alpha(v))' v^2 dv$  et comme  ${}^2\mathbf{f}$  est nulle aux bords on arrive à obtenir

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v^2 dv \right) \\ & + \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int (D_i^\alpha(x))' D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v^3 dv \right) \\ & + 2 \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^2(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) D_i^\alpha(x) D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v dv \right) = 0. \end{aligned}$$

On somme sur  $k$ , on multiplie par  $\Delta_x$  et on observe que la deuxième somme est nulle d'où :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v^2 dv \right) \\ & + 2 \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^2(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) D_i^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v dv \right) = 0. \quad (98) \end{aligned}$$

De plus, la densité de courant s'écrit

$${}^0J(t, x) = \sum_i J_i(t) B_{i+1/2}^\alpha(x) = \int_v i_{v \frac{\partial}{\partial x}} \mathbf{f}^2 \approx \sum_{i,j} f_{i,j}^2 D_i^\alpha(x) \left( \int D_j^\alpha(v) v dv \right).$$

On va donc projeter  $\int_v i_{v \frac{\partial}{\partial x}} \mathbf{f}^2$  sur la base de  ${}^0J$  en multipliant par

$$\star B_{m+1/2}^\alpha(x) = B_{m+1/2}^\alpha(x) dx.$$

On intègre sur l'espace et on obtient alors le système linéaire suivant :

$$\tilde{M}_{0,x}^\alpha \mathbf{J} = \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) D_i^\alpha(x) dx \right) \mathbf{f}_v^2,$$

avec  $(\mathbf{f}_v^2)_i = \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int D_j^\alpha(v) v dv \right)$ . Du coup, l'équation (98) devient

$$\frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v^2 dv \right) + 2 \frac{e}{\mathbf{m}} \mathbf{d} \tilde{M}_{0,x}^\alpha \mathbf{J} = 0.$$

Comme  $\frac{\partial {}^0D}{\partial t} = -{}^0J$ , on obtient l'équation de la conservation d'énergie

$$\frac{d}{dt} \left[ \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v^2 dv \right) - \frac{e}{\mathbf{m}} \mathbf{d} \tilde{M}_{0,x}^\alpha \mathbf{d} \right] = 0.$$



### 10.2.5 Formulation faible de la conservation géométrique de la quantité de mouvement.

Afin de déterminer la quantité de mouvement, on multiplie l'équation de Vlasov par

$$\star(D_k^\alpha(x) v D_l^\alpha(v)) = D_k^\alpha(x) v D_l^\alpha(v) dx \wedge dv$$

et on intègre sur l'espace des phases, autrement dit :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v D_l^\alpha(v) dv \right) \\ & + \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int (D_i^\alpha(x))' D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v^2 D_l^\alpha(v) dv \right) \\ & - \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^2(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) D_i^\alpha(x) D_k^\alpha(x) dx \right) \left( \int (D_j^\alpha(v))' v D_l^\alpha(v) dv \right) = 0. \end{aligned}$$

On somme sur  $k$  et  $l$ , on multiplie par  $\Delta_v \Delta_x$  et on intègre par parties dans la composante en  $v$  :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v dv \right) \\ & + \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,j,m} f_{i,j}^2(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) D_i^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) dv \right) = 0. \quad (99) \end{aligned}$$

Comme  ${}^1\rho(t, x)$  est égale à  $\sum_i \rho_i(t) D_{i+1/2}^\alpha(x) dx$  et est égale à

$$\int_v ({}^2\mathbf{f}) = \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) D_i^\alpha(x) dx \left( \int D_j^\alpha(v) dv \right) = \frac{1}{\Delta_v} \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) D_i^\alpha(x) dx.$$

On multiplie ces deux termes par  $B_{m+1/2}^\alpha(x)$  et on intègre sur l'espace pour pouvoir l'injecter dans l'équation (99) i.e. :

$$\sum_i \rho_i(t) \int D_{i+1/2}^\alpha(x) B_{m+1/2}^\alpha(x) dx = \frac{1}{\Delta_v} \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \int D_i^\alpha(x) B_{m+1/2}^\alpha(x) dx.$$

Par conséquent, si on pose

$$L^\alpha = \left( \int D_{i+1/2}^\alpha(x) B_{m+1/2}^\alpha(x) dx \right)_{m,i},$$

l'équation (99) est égale à

$$\frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v dv \right) + \frac{e}{\mathbf{m}} \sum_{i,m} \rho_i(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) D_{i+1/2}^\alpha(x) dx \right) = 0. \quad (100)$$

Mais puisqu'on a l'équation de Poisson  $d^0 D = \frac{e}{\mathbf{m}} \rho$ , on peut remplacer  $\frac{e}{\mathbf{m}} \rho$  par  $d^0 D$  dans l'équation (100), autrement dit :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v dv \right) + \sum_{i,m} d_i(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) (B_{i+1/2}^\alpha(x))' dx \right) = 0. \quad (101)$$

Une intégration par parties nous donne l'égalité suivante :

$$\sum_{i,m} d_i(t) d_m(t) \left( \int B_{m+1/2}^\alpha(x) (B_{m+1/2}^\alpha(x))' dx \right) = \frac{1}{2} \int d({}^0 D)^2 = 0,$$

donc, après simplification, on obtient la conservation de la quantité d'énergie :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i,j} f_{i,j}^2(t) \left( \int D_i^\alpha(x) dx \right) \left( \int D_j^\alpha(v) v dv \right) = 0.$$

### 10.3 Schéma en temps

Pour le schéma en temps, on va utiliser un schéma ETD (Exponential Time Differencing) [40, 48, 49, 72] qui permet de s'affranchir de la contrainte CFL sur le pas de temps. Le principe de la méthode est le suivant. Pour une équation du type :

$$\dot{u} = \mathbf{L}u + \mathcal{M}(u(t), t),$$

avec  $u(t_0) = u(0)$ , et  $\mathbf{L}u, \mathcal{M}(u(t), t)$  la discrétisation du terme linéaire et du terme non linéaire en  $u$ . On observe que

$$\frac{d}{dt} (\exp(-\mathbf{L}t)u(t)) = -\exp(-\mathbf{L}t)\mathbf{L}u(t) + \exp(-\mathbf{L}t)\dot{u}(t) = \exp(-\mathbf{L}t)\mathcal{M}(u(t), t).$$

En intégrant entre  $t_n$  et  $t_{n+1}$ , on obtient

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{d}{dt} (\exp(-\mathbf{L}t)u(t)) = \exp(-\mathbf{L}t_{n+1})u(t_{n+1}) - \exp(-\mathbf{L}t_n)u(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp(-\mathbf{L}s)\mathcal{M}(u(s), s)ds,$$

d'où

$$u(t_{n+1}) = \exp(\mathbf{L}\Delta_t)u(t_n) + \exp(\mathbf{L}t_{n+1}) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp(-\mathbf{L}s)\mathcal{M}(u(s), s)ds,$$

avec  $\Delta_t = t_{n+1} - t_n$ .

### 10.3.1 L'équation de Vlasov-Poisson sans splitting

Dans notre cas, on pose  $e = m = 1$  et on a à résoudre

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{f}(t) &= - \left( \tilde{M}_{0,x}^\alpha \right)^{-1} \tilde{K}_{0,x}^\alpha \mathbf{f}(t) \left( \tilde{V}_{0,v}^\alpha \right)^t \left( \left( \tilde{M}_{0,v}^\alpha \right)^{-1} \right)^t \\ &\quad - \sum_m d_m(t) \left( \tilde{M}_{0,x}^\alpha \right)^{-1} \tilde{T}_{0,x}^\alpha(m) \mathbf{f} \left( \tilde{K}_{0,v}^\alpha \right)^t \left( \left( \tilde{M}_{0,v}^\alpha \right)^{-1} \right)^t, \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{f}$  la matrice dont les coefficients sont les degrés de liberté de  ${}^0f$ . On ne peut pas appliquer directement la méthode EDT à cause de la disposition des matrices. On va donc devoir transformer  $\mathbf{f}$  en vecteur colonne. On note  $\mathbf{f}^c$  le vecteur colonne obtenu en mettant les colonnes  $(\mathbf{f}_{i,\cdot})^t$  bout à bout et donc l'équation à résoudre devient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{f}^c(t) &= - \underbrace{\left[ \left( \tilde{M}_{0,x}^\alpha \right)^{-1} \tilde{K}_{0,x}^\alpha \otimes \left( \tilde{M}_{0,v}^\alpha \right)^{-1} \tilde{V}_{0,v}^\alpha \right]}_{\mathbf{L}} \mathbf{f}^c(t) \\ &\quad - \underbrace{\left[ \sum_m d_m(t) \left( \tilde{M}_{0,x}^\alpha \right)^{-1} \tilde{T}_{0,x}^\alpha(m) \otimes \left( \tilde{M}_{0,v}^\alpha \right)^{-1} \tilde{K}_{0,v}^\alpha \right]}_{\mathcal{M}(\mathbf{f}^c(t),t)} \mathbf{f}^c(t). \end{aligned}$$

Maintenant, on peut appliquer la méthode ETD. Le schéma en temps à résoudre est :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^c(t_{n+1}) &= \exp(-\mathbf{L} \Delta_t) \mathbf{f}^c(t_n) \\ &\quad + \exp(-\mathbf{L} t_{n+1}) \int_{t_n}^{t_{n+1}} \exp(-\mathbf{L} s) \left[ \sum_m d_m(s) \left( \tilde{M}_{0,x}^\alpha \right)^{-1} \tilde{T}_{0,x}^\alpha(m) \otimes \left( \tilde{M}_{0,v}^\alpha \right)^{-1} \tilde{K}_{0,v}^\alpha \right] \mathbf{f}^c(s) ds, \end{aligned}$$

et il est exact. Pour résoudre l'intégrale, on peut utiliser une méthode basée sur les groupes de Lie [39, 99] ou plus simplement avec un schéma du point milieu pour obtenir l'ordre 2.

### 10.3.2 L'équation de Vlasov avec splitting

À la section précédente, on a montré que sans splitting, l'exponentielle de la matrice  $\mathbf{L}$  peut être longue à calculer. C'est pourquoi, on va utiliser la méthode du splitting [94]. On va décomposer l'équation en deux parties

$$\frac{\partial({}^0\mathbf{f})}{\partial t} + i_v \frac{\partial}{\partial x} d({}^0\mathbf{f}) = 0, \quad (102)$$

avec  $v$  fixé et

$$\frac{\partial({}^0\mathbf{f})}{\partial t} + i_{({}^0D)} \frac{\partial}{\partial v} d({}^0\mathbf{f}) = 0, \quad (103)$$

avec  $x$  fixé. Ce sont alors deux advections à coefficients constants qu'on peut résoudre plus simplement avec la méthode ETD.

Pour la première équation (102) on fixe  $v$ , on multiplie par  $\star B_{k+1/2}^\alpha(x) dx = B_{k+1/2}^\alpha(x)$  et on intègre sur l'espace des  $x$ , matriciellement on a, après inversement de la matrice de masse :

$$\frac{d}{dt} \sum_j f_{i,j}(t) B_{j+1/2}^\alpha(v) = - \sum_j \left( \tilde{M}_{0,x}^\alpha \right)^{-1} \tilde{K}_{0,x}^\alpha f_{i,j}(t) v B_{j+1/2}^\alpha(v).$$

On a alors pour chaque point du maillage dual  $v_{l+1/2}$  l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt} \sum_j f_{i,j}(t) B_{j+1/2}^\alpha(v_{k+1/2}) = - \sum_j \left( \tilde{M}_{0,x}^\alpha \right)^{-1} \tilde{K}_{0,x}^\alpha f_{i,j}(t) v_{k+1/2} B_{j+1/2}^\alpha(v_{k+1/2}).$$

De même pour la seconde équation (103) on fixe  $x$ , on multiplie par  $\star B_{l+1/2}^\alpha(v) dx = B_{l+1/2}^\alpha(v)$  et on intègre sur l'espace des vitesses, après inversement de la matrice de masse on obtient le système matriciel suivant :

$$\frac{d}{dt} \sum_i f_{i,j}(t) B_{i+1/2}^\alpha(x) = - \sum_{i,m} d_m(t) f_{i,j}(t) B_{i+1/2}^\alpha(x) B_{m+1/2}^\alpha(x) (\tilde{K}_{0,v}^\alpha)^t \left( \left( \tilde{M}_{0,v}^\alpha \right)^{-1} \right)^t.$$

Et pour chaque point du maillage  $x_{k+1/2}$  l'équation

$$\frac{d}{dt} \sum_i f_{i,j}(t) B_{i+1/2}^\alpha(x_{k+1/2}) = - \sum_{i,m} d_m(t) f_{i,j}(t) B_{i+1/2}^\alpha(x_{k+1/2}) B_{m+1/2}^\alpha(x_{k+1/2}) (\tilde{K}_{0,v}^\alpha)^t \left( \left( \tilde{M}_{0,v}^\alpha \right)^{-1} \right)^t.$$

Avec la méthode du splitting, cette dernière équation est considérée comme un système linéaire car le champ d'induction électrique  ${}^0D(t)$  est connu à chaque pas de temps.

L'algorithme s'écrit dans ce cas :

- (i) **Initialisation.** La fonction de distribution  ${}^0\mathbf{f}(0, x, v)$  est donnée. On en déduit  ${}^1\rho(0)$  à l'aide de la formule  $K_1^\alpha \rho = (\tilde{M}_0^\alpha)^t \mathbf{f}_v$ , avec  $\mathbf{f}_v = \sum_j f_{i,j}(0) \Delta_v$ . Puis on calcule le champ  ${}^0D(0)$  en résolvant Poisson.
- (ii) **Passage du temps  $t_n$  au temps  $t_{n+1}$ .** On connaît  ${}^0\mathbf{f}(t_n)$  et  ${}^0D(t_n)$  sur tout l'espace des phases.

- On calcule  ${}^0\mathbf{f}_x(t, x) = \sum_i f_{i,j}(t) B_{i+1/2}^\alpha(x)$  au temps  $t_{n+1/2}$  i.e. pour chaque point  $x_k$  du maillage

$${}^0\mathbf{f}_x(t_{n+1/2}, x_k) = \exp\left(-\frac{\Delta t}{2} L_x(x_k, t_n)\right) {}^0\mathbf{f}_x(t_n, x_k),$$

$$\text{avec } L_x(x, t_n) = \sum_m d_m(t_n) B_{m+1/2}^\alpha(x) (\tilde{K}_{0,v}^\alpha)^t \left( \left( \tilde{M}_{0,v}^\alpha \right)^{-1} \right)^t.$$

- On calcule les nouveaux coefficients splines  $f_{i,j} = \left( B_{i+1/2}^\alpha(x_{j+1/2}) \right)_{i,j}^{-1} f_x^0(t_{n+1/2})$ .
- On calcule  ${}^0\mathbf{f}_v(t, v) = \sum_i f_{i,j}(t) B_{j+1/2}^\alpha(v)$  au temps  $t_{n+1}$ , pour chaque point  $v_l$  du maillage

$${}^0\mathbf{f}_v(t_{n+1}, v_l) = \exp(-\Delta t L_v(v_l)) {}^0\mathbf{f}_v(t_n, v_l),$$

avec  $L_v(v) = \left( \tilde{M}_{0,x}^\alpha \right)^{-1} \tilde{K}_{0,x}^\alpha v$  et les coefficients de  ${}^0\mathbf{f}_v(t_n, v)$  correspondent à ceux calculés précédemment.

- On calcule les nouveaux coefficients splines  $f_{i,j} = {}^0\mathbf{f}_v(t_{n+1}) \left( B_{i+1/2}^\alpha(v_{j+1+2}) \right)^{-1}$ .
- On en déduit  ${}^1\rho(t_{n+1})$  à l'aide de la formule  $K_1^\alpha \rho = (\tilde{M}_0^\alpha)^t \mathbf{f}_v$ , avec  $\mathbf{f}_v = \sum_i f_{i,j}(t_{n+1}) \Delta_v$  et le champ  ${}^0D(t_{n+1})$  en résolvant Poisson.
- On calcule  ${}^0\mathbf{f}_x(t, x) = \sum_i f_{i,j}(t) B_{i+1/2}^\alpha(x)$  au temps  $t_{n+1/2}$ , pour chaque point  $x_k$  du maillage

$${}^0\mathbf{f}_x(t_{n+1/2}, x_k) = \exp\left(-\frac{\Delta t}{2} L_x(x_k, t_{n+1})\right) {}^0\mathbf{f}_x(t_n, x_k), \quad (104)$$

où  ${}^0\mathbf{f}_x(t_n)$  a pour coefficients ceux que l'on a calculés précédemment.

- On calcule les nouveaux coefficients splines  $f_{i,j}(t_{n+1}) = \left( B_{i+1/2}^\alpha(x_{j+1+2}) \right)^{-1} f_x^0(t_{n+1/2})$ .

**Remarque 10.2** — Le calcul de  ${}^1\rho(t_{n+1})$  se fait à l'aide de  ${}^0\mathbf{f}_v(t_{n+1}, v)$  car l'intégrale sur l'espace des vitesses de (104) est égale à 0.

Pour calculer l'exponentielle de matrice on a utilisé le fait que les matrices soient circulantes. On peut alors calculer manuellement leurs valeurs propres à l'aide des racines de l'unité et ainsi utiliser la transformée de Fourier. Il faut alors appliquer un filtre pour dissiper les hautes fréquences qui ne sont pas résolues par le maillage car le schéma conserve "presque" la norme  $L^2$  et n'est donc pas assez dissipatif pour le faire par lui même.

## 10.4 Validation des codes Vlasov-Poisson 1D

On considère le problème de Vlasov-Poisson 1D avec une fonction de distribution pour les électrons et un fond d'ions neutralisant sur un domaine

$[0, L]$  périodique en  $x$  et infini en  $v$ . Pour la simulation, on tronque l'espace des vitesses à un segment  $[-A, A]$  suffisamment grand pour que  $f^0$  reste de l'ordre de l'erreur d'arrondi pour des vitesses de l'ordre de  $-A$  ou  $A$  tout au long de la simulation.

On définit un maillage uniforme de l'espace des phases  $x_i = \frac{iL}{N}$ , pour  $i = 0, \dots, N-1$  et  $v_j = -A + \frac{j2A}{M}$ , pour  $J = 0, \dots, M$ . On ne redéfinit pas  $x_N$  qui correspond à  $x_0$ . On prendra, alors, des conditions périodiques dans les deux directions  $x$  et  $v$ .

Dans tous les cas tests qui vont suivre, on va comparer quatre méthodes : la nôtre, la méthode semi-lagrangienne en arrière utilisant les splines cubiques [20, 42, 43, 55, 56, 61, 94] et les polynômes de Lagrange de degré trois [65] et la méthode semi-lagrangienne en arrière utilisant la transformée de Fourier [25, 65, 87].

La méthode semi-lagrangienne est constituée de deux étapes : à partir de la fonction de distribution approximée  $f_h^n$  au temps  $t_n$ , on calcule dans un premier temps les points au temps  $t_{n+1}$  sur l'espace des phases le long de la caractéristique des équations de mouvement et dans un second temps,  $f_h^{n+1}(x_i, v_j)$  sur chaque point du maillage est calculée comme étant égale à  $f_h^n(\varphi_{x_i, v_j, t_{n+1}}(t_n))$  où  $\varphi_{x_i, v_j, t_{n+1}}(t_n)$  est la valeur au temps  $t_n$  de la caractéristique passant par le point  $(x_i, v_j)$  du maillage au temps  $t_{n+1}$ . On va séparer les advections en position et en vitesse et ces étapes sont effectuées à chaque pas du splitting.

Pour la méthode utilisant l'interpolation par les splines cubiques ou par les polynômes de Lagrange, l'interpolant  $f_h$  de  $f^0$  est défini par  $f_h(x_i) = f^0(x_i)$  avec  $f_h \in \mathbb{P}_3([x_i, x_{i+1}])$  et  $f_h \in C^2$ . Dans le cas périodique ces conditions suffisent à déterminer de manière unique  $f_h$  sinon il faut rajouter des conditions aux bords comme par exemple  $f_h''(a) = f_h''(b) = 0$ . L'expression de  $f_h$  s'écrit alors  $f_h = \sum \alpha_{i,j} p_i(x) p_j(v)$  avec  $p_i$  qui correspond soit à une spline cubique soit à un polynôme de Lagrange de degré 3.

La méthode qui utilise la transformée de Fourier à chaque étape du splitting est la suivante : pour l'advection en  $x$ , la fonction de distribution est approchée par des sommes partielles de séries de Fourier :  $f_{h,M}(t, x, v) = \sum_{k=-M}^M \hat{f}_k(t, v) \exp(-2i\pi kx/L)$  et les coefficients de Fourier sont donnés par  $\hat{f}_k(t, v) = \sum_{j=-M}^M f(t, x_j, v) \exp(2i\pi kx_j/L)$  pour tout  $k = -M, \dots, M$ . On procède alors de la même façon pour l'advection en  $v$ . Comme avec notre méthode, cela nécessite des filtres.

### 10.4.1 L'amortissement Landau

L'amortissement Landau correspond à

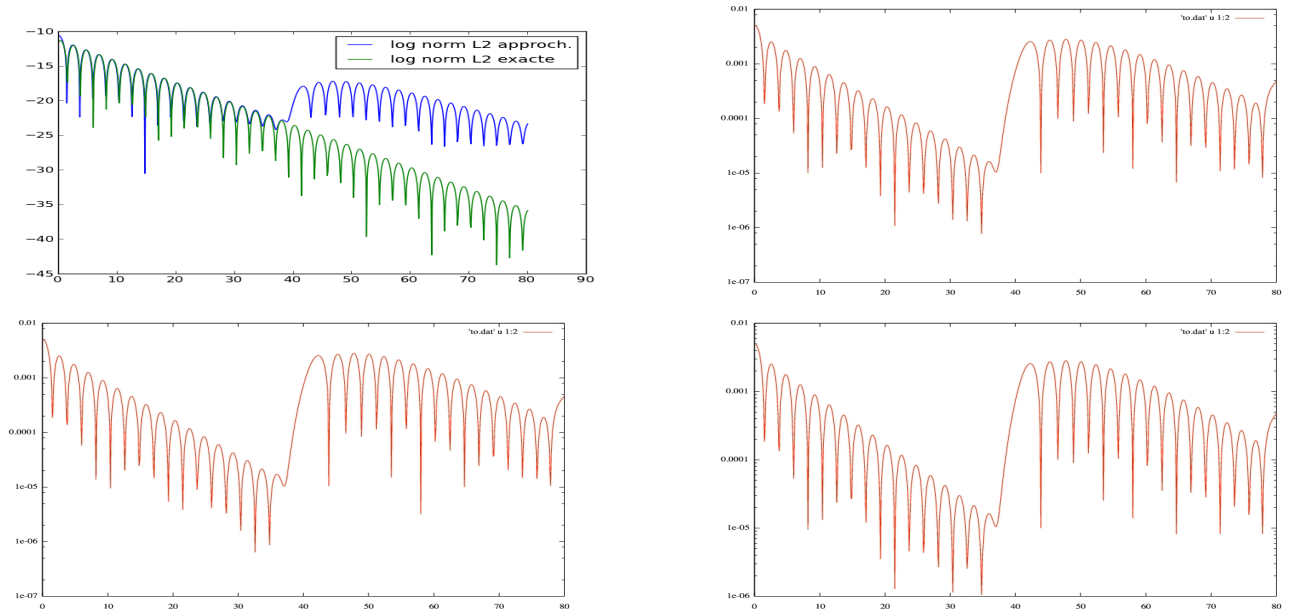
$$f^0(x, v, 0) = (1 + \epsilon \cos(kx)) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)$$

avec  $(x, v) \in [0, L] \times [-10, 10]$  où  $L = \frac{2\pi}{k}$ . En linéarisant et en utilisant la transformée de Fourier et pour  $k = 0.5$ , on a

$${}^0D(x, t) \approx 4 \epsilon 0,3677 \exp(-0,1533t) \sin(0,5x) \cos(1,4156t - 0,536245).$$

Cette formule du champ électrique pour Landau est connue depuis de nombreuses années par les physiciens. La démonstration est détaillée dans la thèse de R. Barthelmé [94].

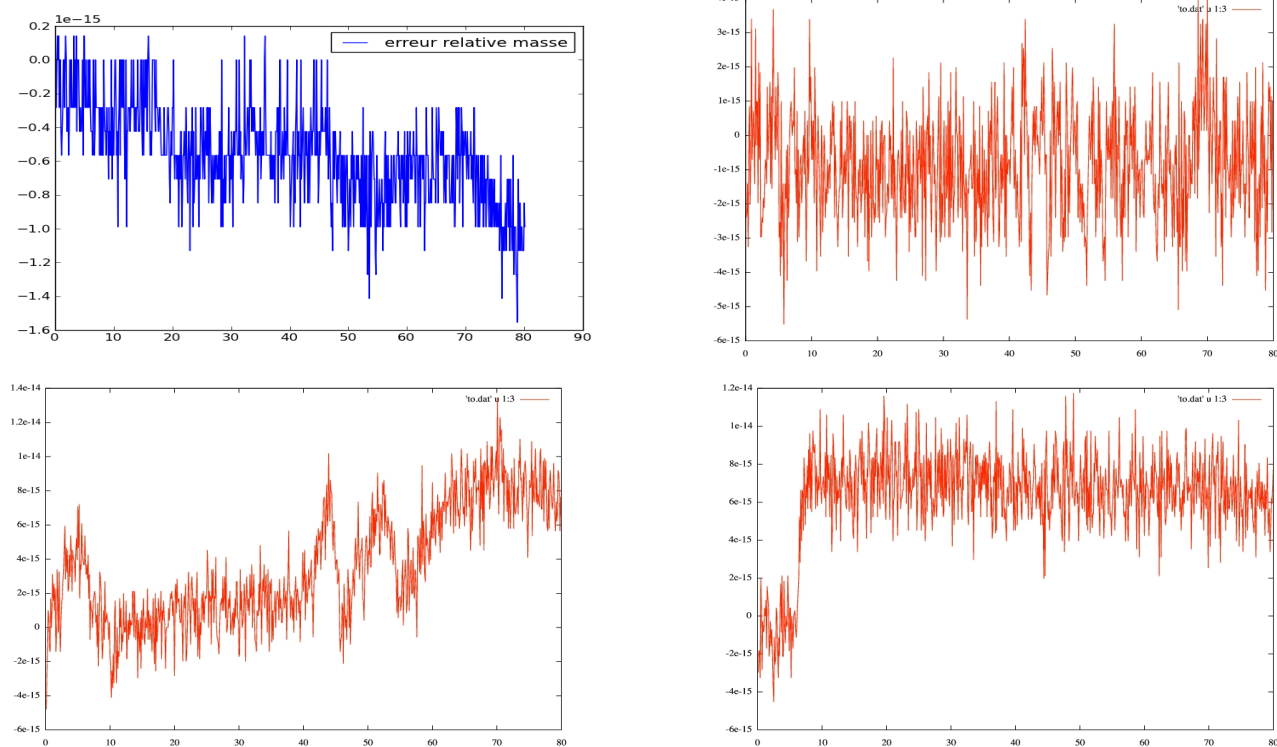
Pour  $k = 0.5$  et  $\epsilon = 0.001$ , on compare le logarithme de la norme  $L^2$  de  ${}^0D$  avec 64 points en  $x$  et en  $v$ , on a



**FIG. 23:** Le logarithme de la norme  $L^2$  de  ${}^0D$  en fonction du temps en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

## Conservation de la masse

Comparons dans un premier temps l'erreur relative de la masse. On voit



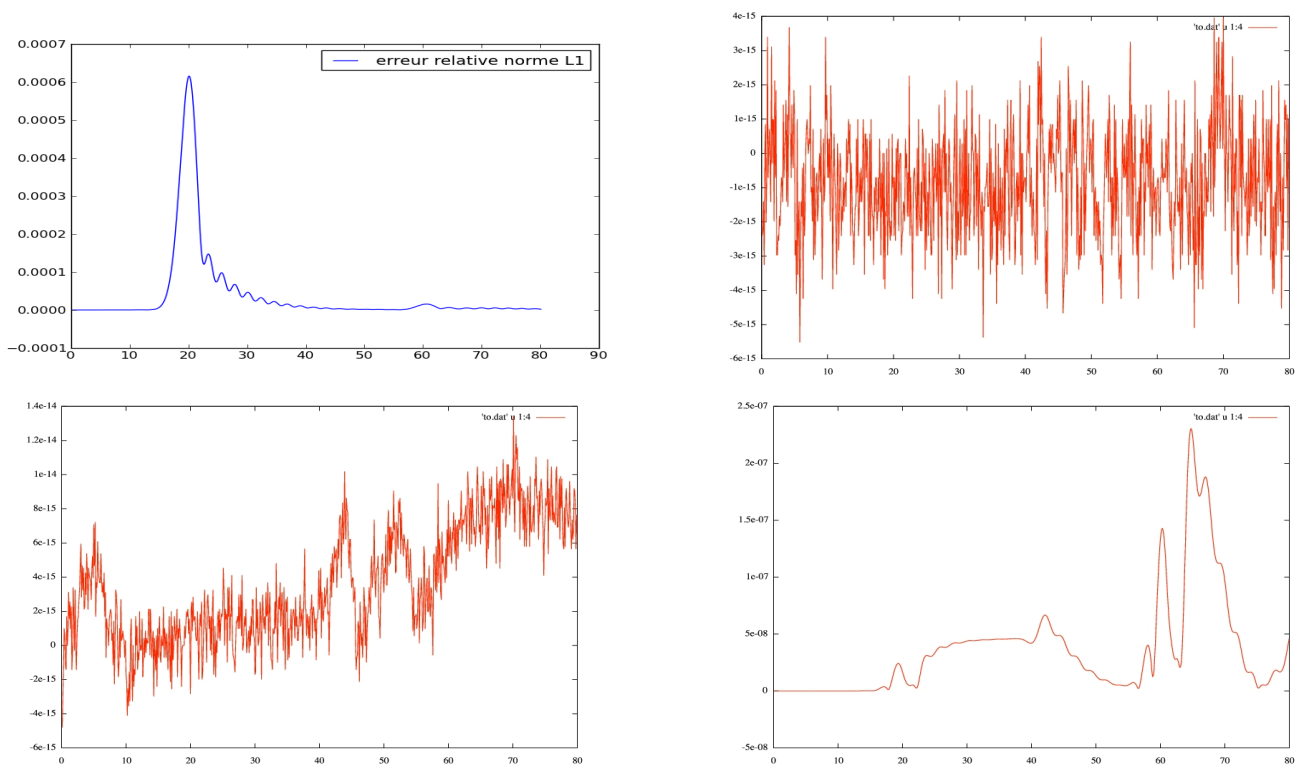
**FIG. 24:** L'erreur relative de la masse en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

alors que l'on a la conservation de la masse à l'erreur machine avec notre méthode ainsi qu'avec les autres.

### Conservation de la norme $L^1$

On voit que la norme  $L^1$  est conservé par les méthodes utilisant les splines cubiques et les polynômes de Lagrange. Les deux autres méthodes ne la conserve pas mais l'erreur relative est stable et n'augmente pas au cours du temps.

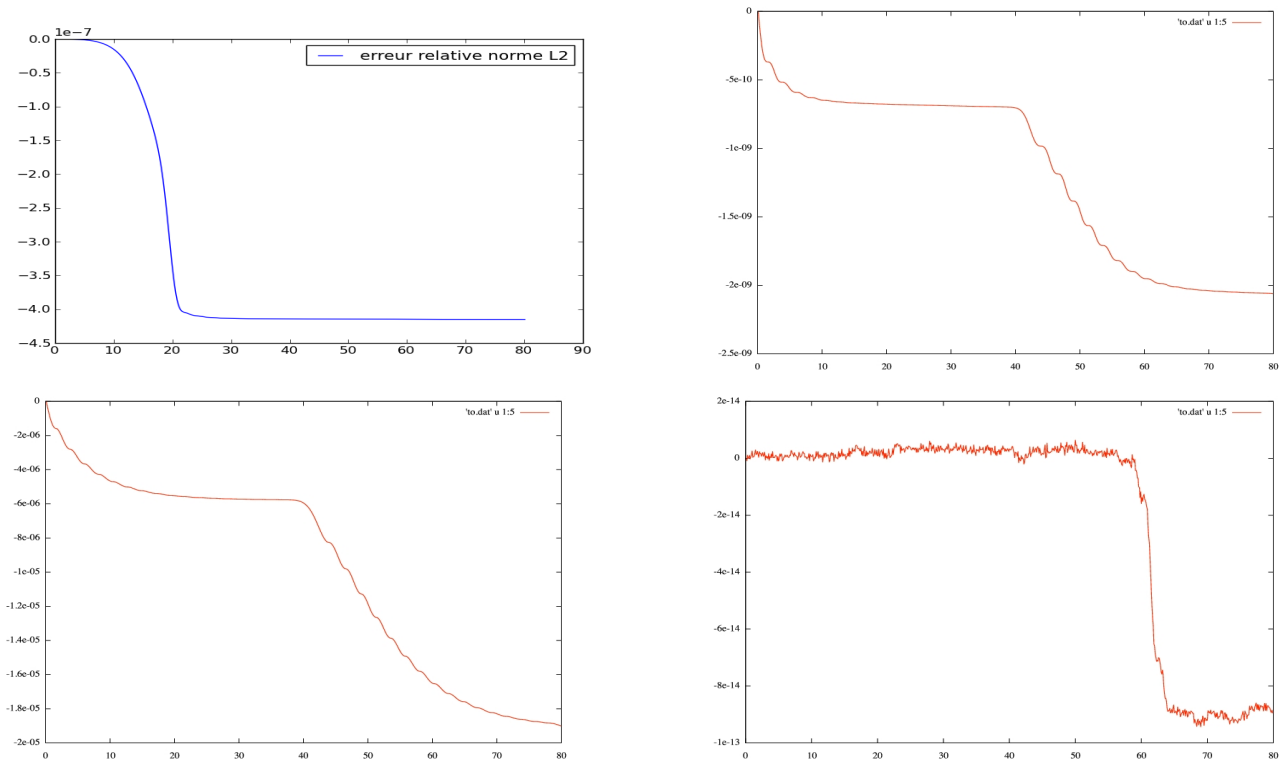




**FIG. 25:** L'erreur relative de la norme  $L^1$  en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

### Conservation de la norme $L^2$

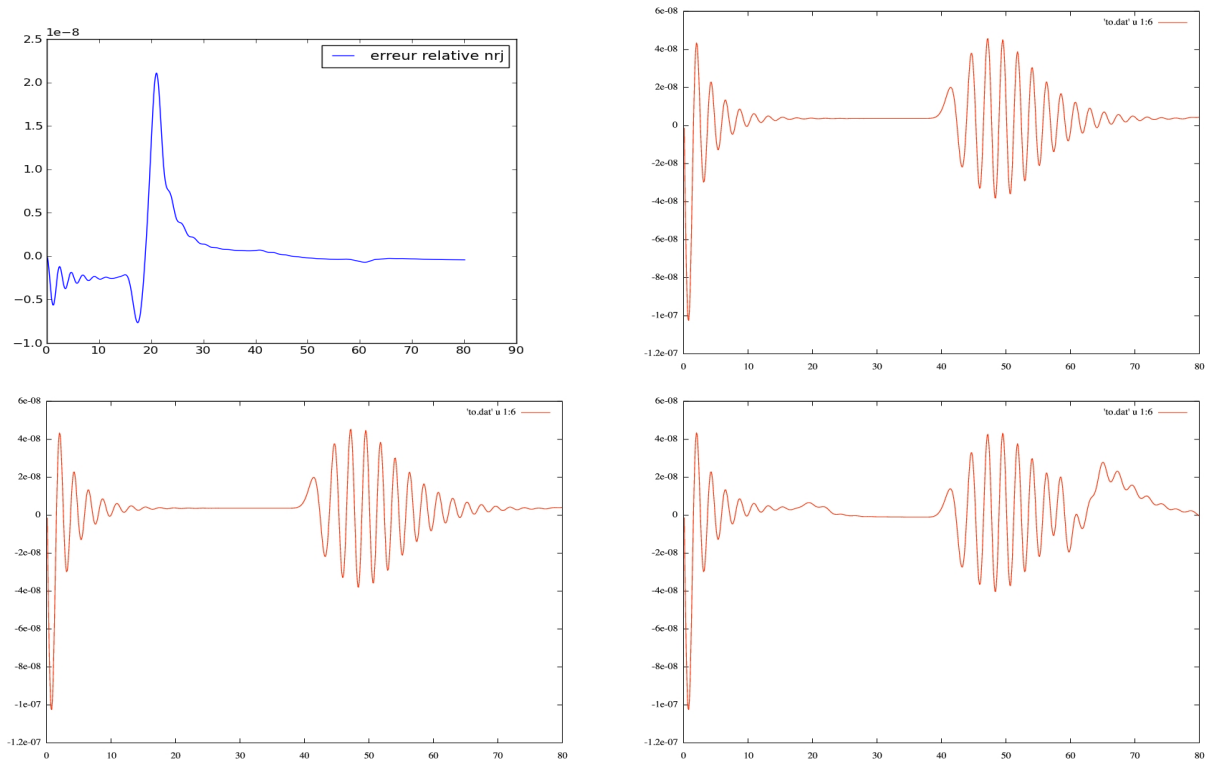
La norme  $L^2$  est conservée plus longtemps avec la méthode utilisant Fourier. Notre méthode la conserve moins longtemps mais elle comme l'erreur relative tend vers 0, la norme  $L^2$  est constante à partir d'un certain temps contrairement aux deux autres méthodes.



**FIG. 26:** L'erreur relative de la norme  $L^2$  en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

### Conservation de l'énergie

L'énergie est mieux conservée avec notre méthode qu'avec les autres méthodes. L'erreur relative est stable pour les quatre méthodes mais elle oscille moins avec la nôtre.



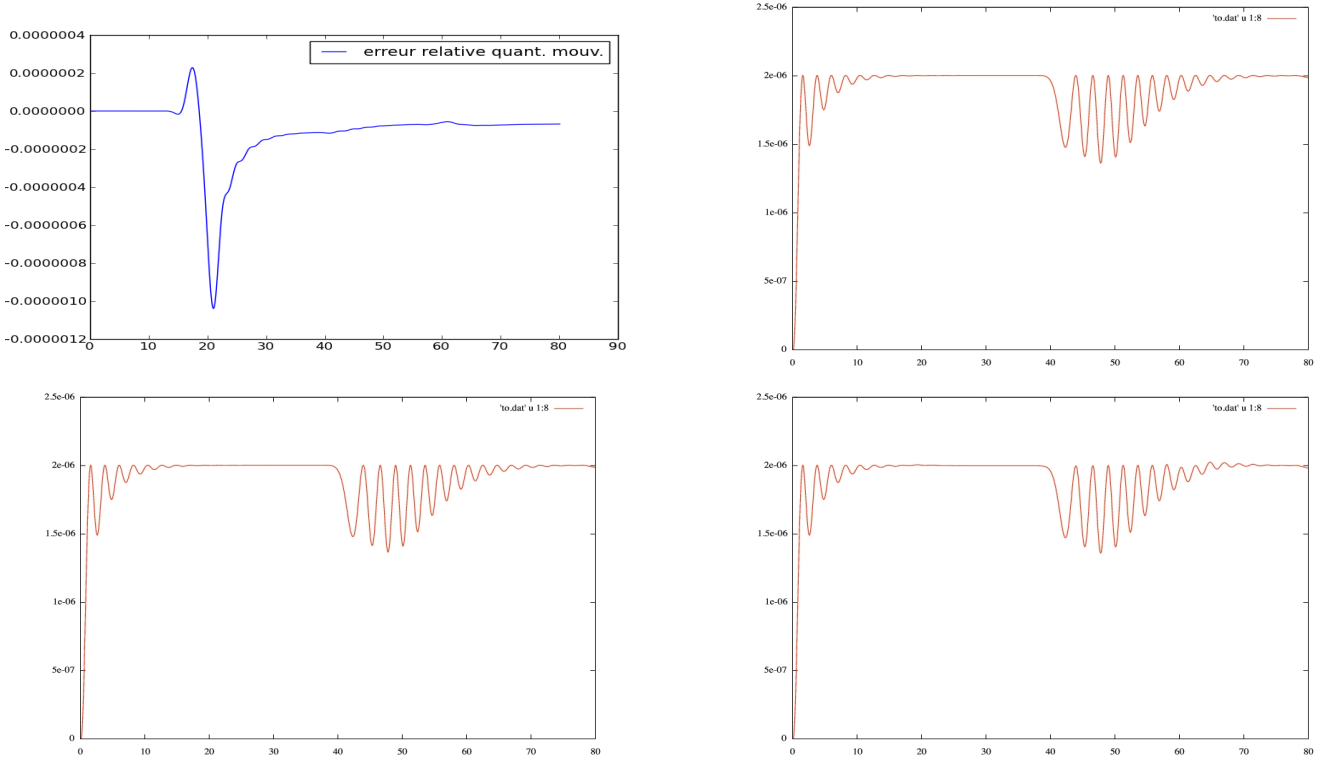
**FIG. 27:** L'erreur relative de l'énergie en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

### Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement est conservé plus longtemps au cours du temps. Les autres méthodes ne la conserve pas du tout mais l'erreur relative est stable au cours du temps. Avec notre méthode, l'énergie n'explose pas au cours du temps est reste constante à partir d'un certain moment. Pour les autres méthodes on voit que comme l'erreur relative est stable l'énergie au cours du temps n'est pas bornée.

### Remarque

Pour toutes les quantités obtenues avec notre méthode on voit au même instant un saut plus ou moins important puis l'erreur relative tend à revenir vers 0. Cela est du au fait que l'on a supposé la périodicité en  $v$  (pour facilité l'implémentation). Cette périodicité est effacée par le filtre que l'on a introduit il va de soit que si on ne supposait pas la périodicité en  $v$  lors de l'implémentation on a envie de penser que ce saut n'existerai pas et que du



**FIG. 28:** L'erreur relative de la quantité de mouvement en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

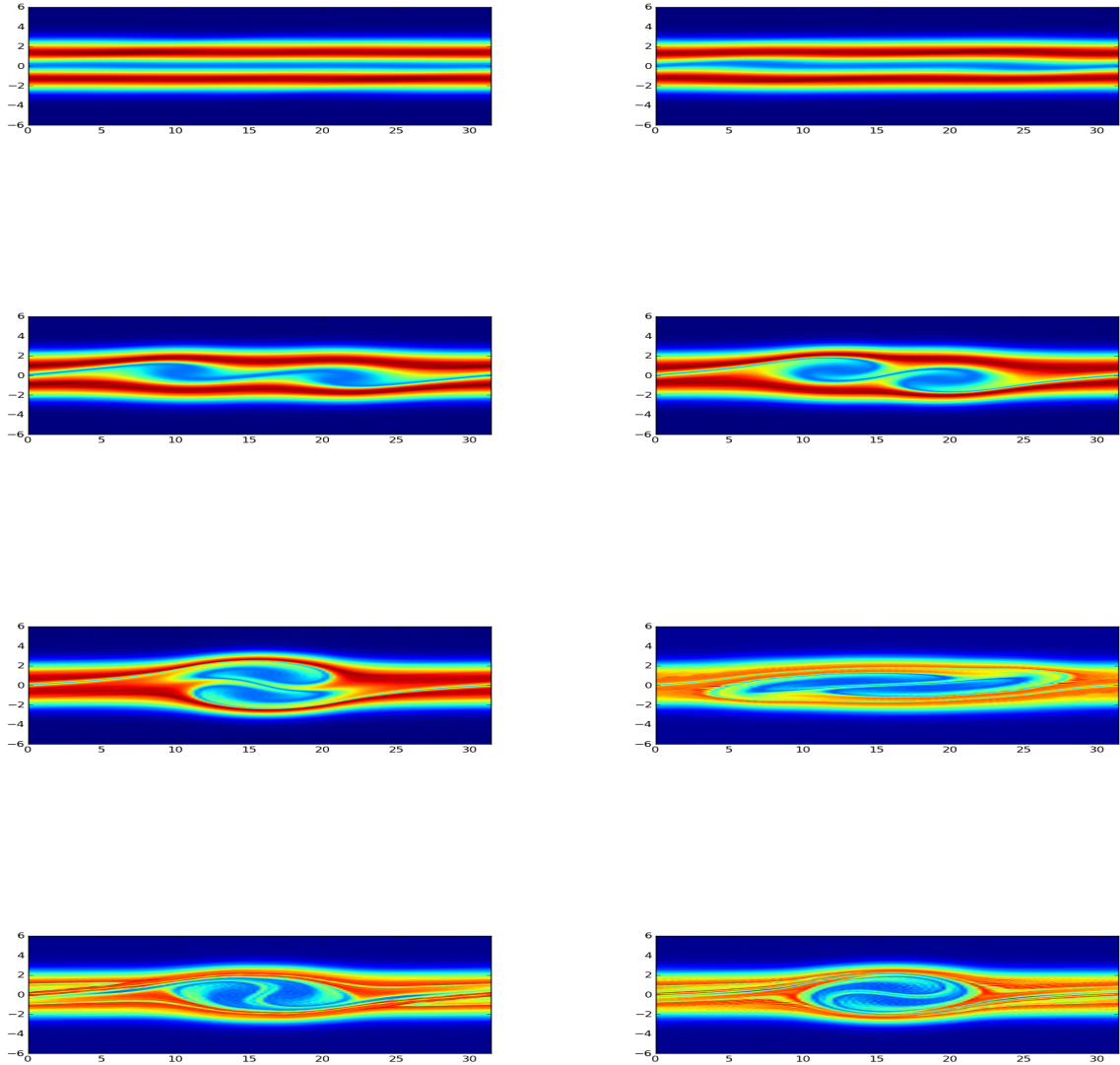
coup les quantités physiques seraient mieux conservées.

#### 10.4.2 L'instabilité double faisceaux

L'instabilité double faisceaux correspond à deux faisceaux de vitesses moyennes différentes qui se rencontrent. La condition initiale est la suivante :

$$f^0(x, v, 0) = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}}(1+5v^2) \exp(-0.5v^2) \left(1 + \epsilon \left( \cos(kx) + \frac{\cos(2kx) + \cos(3kx)}{1.2} \right) \right),$$

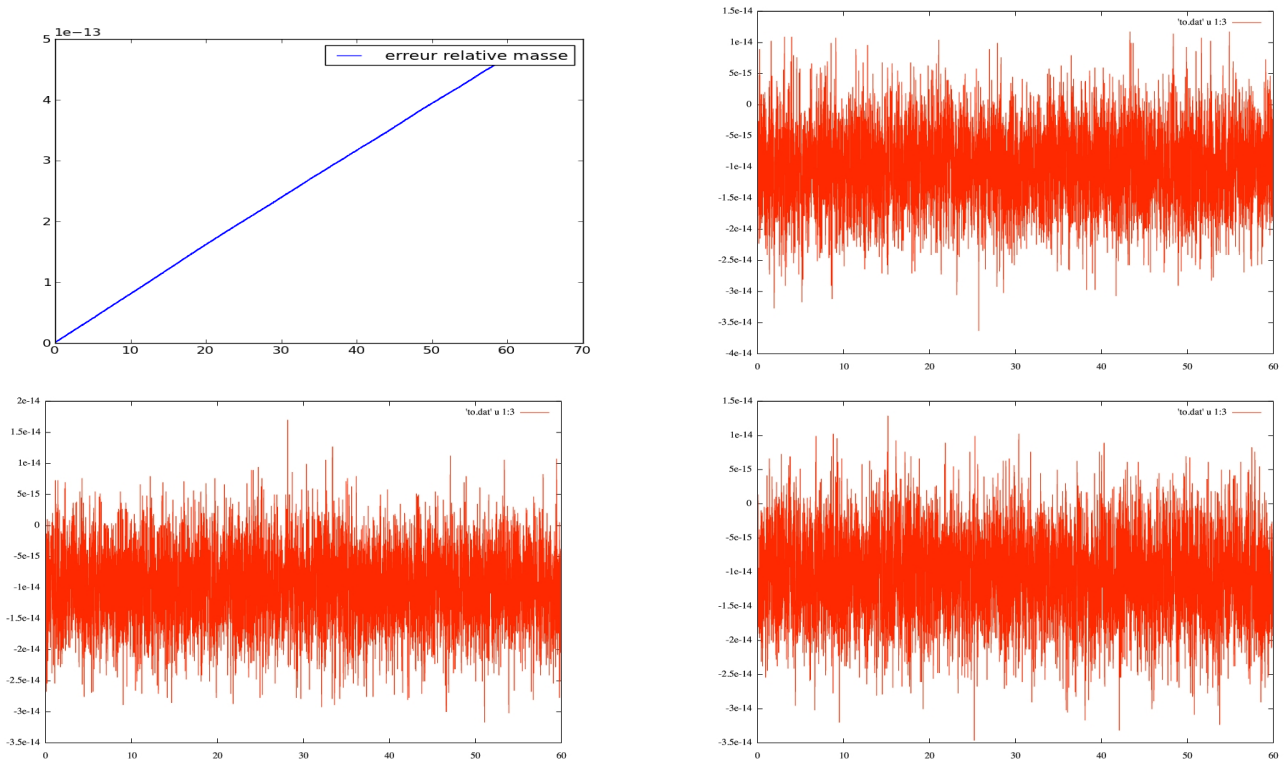
avec  $(x, v) \in [0, L] \times [-6, 6]$  où  $L = \frac{2\pi}{k}$ . On teste notre code avec  $k = 0.2$ ,  $\epsilon = 0.01$ . On prendra comme pas de temps  $dt = 0.01$ , et 128 points dans la direction  $x$  et 256 points dans la direction en  $v$ . On compare nos résultats avec ceux obtenus par d'autres méthodes : la méthode semi-lagrangienne avec des splines cubiques, la méthode semi-lagrangienne avec les polynômes de Lagrange de degré 3 et avec la méthode semi-lagrangienne avec Fourier.



**FIG. 29:** Valeur de la fonction de distribution au temps (de bas en haut)  $T = 5, 15, 25, 30, 35, 45, 55, 60$ .

### Conservation de la masse

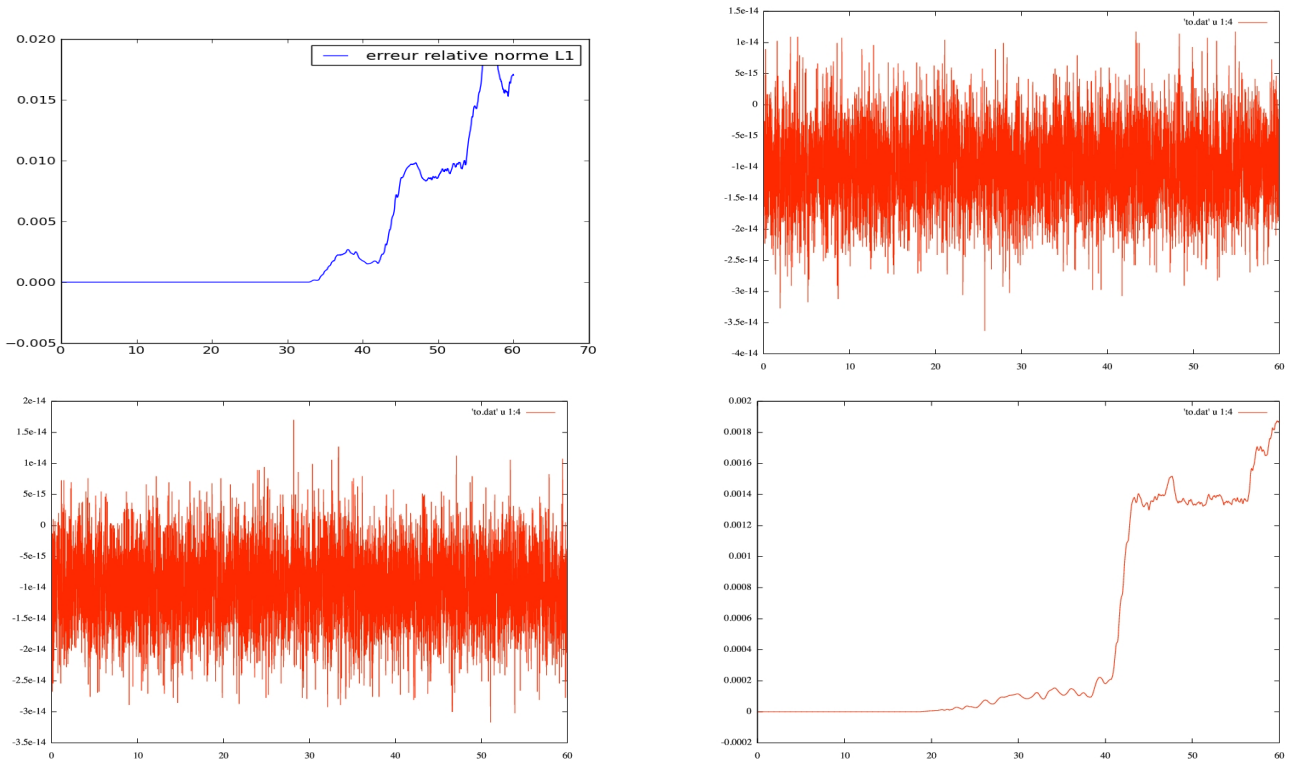
Comparons dans un premier temps l'erreur relative de la masse. On voit alors que l'on a la conservation de la masse à l'erreur machine avec notre méthode ainsi qu'avec les autres.



**FIG. 30:** L'erreur relative de la masse en utilisant la méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

### Conservation de la norme $L^1$

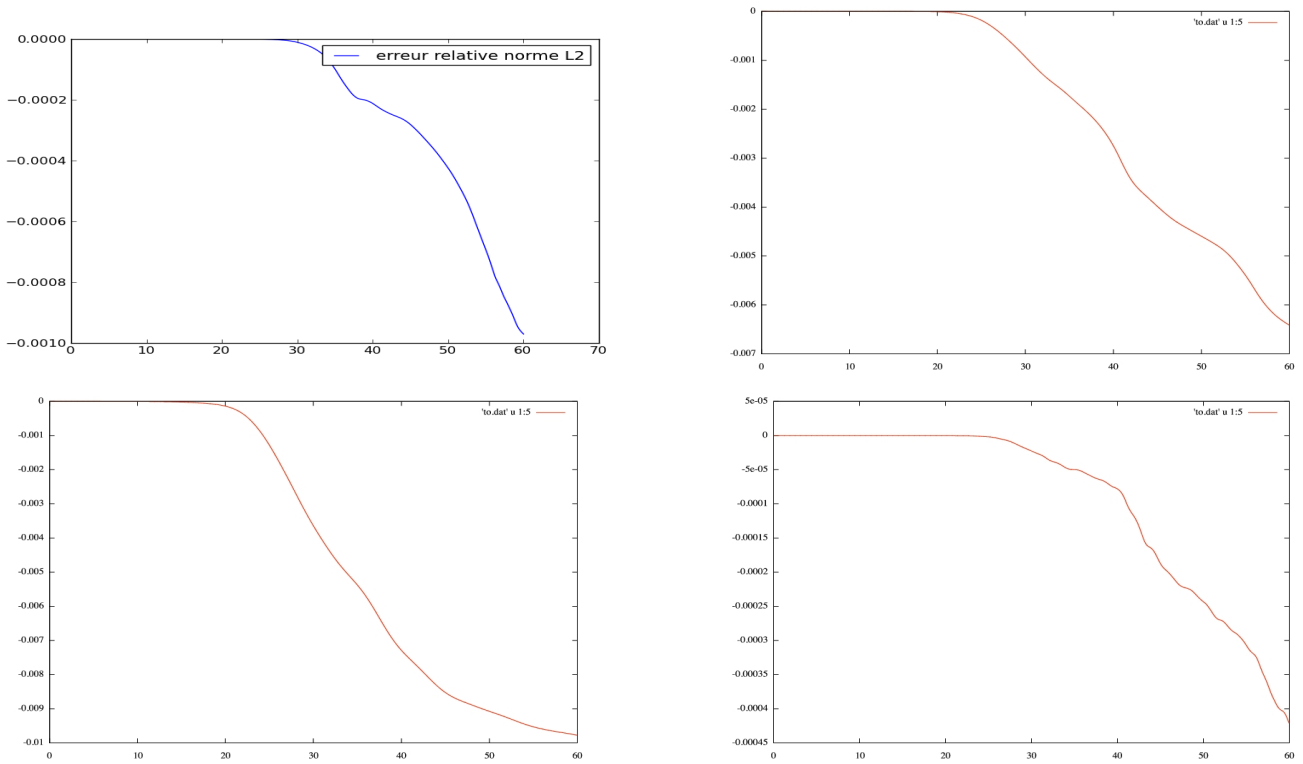
On voit que la norme  $L^1$  est conservé par les méthodes utilisant les splines cubiques et les polynômes de Lagrange. Notre méthode ne la conserve pas mais l'erreur relative est stable et n'augmente pas au cours du temps contrairement à la méthode avec Fourier.



**FIG. 31:** L'erreur relative de la norme  $L^1$  en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

### Conservation de la norme $L^2$

La norme  $L^2$  est conservée plus longtemps avec la méthode utilisant Fourier.

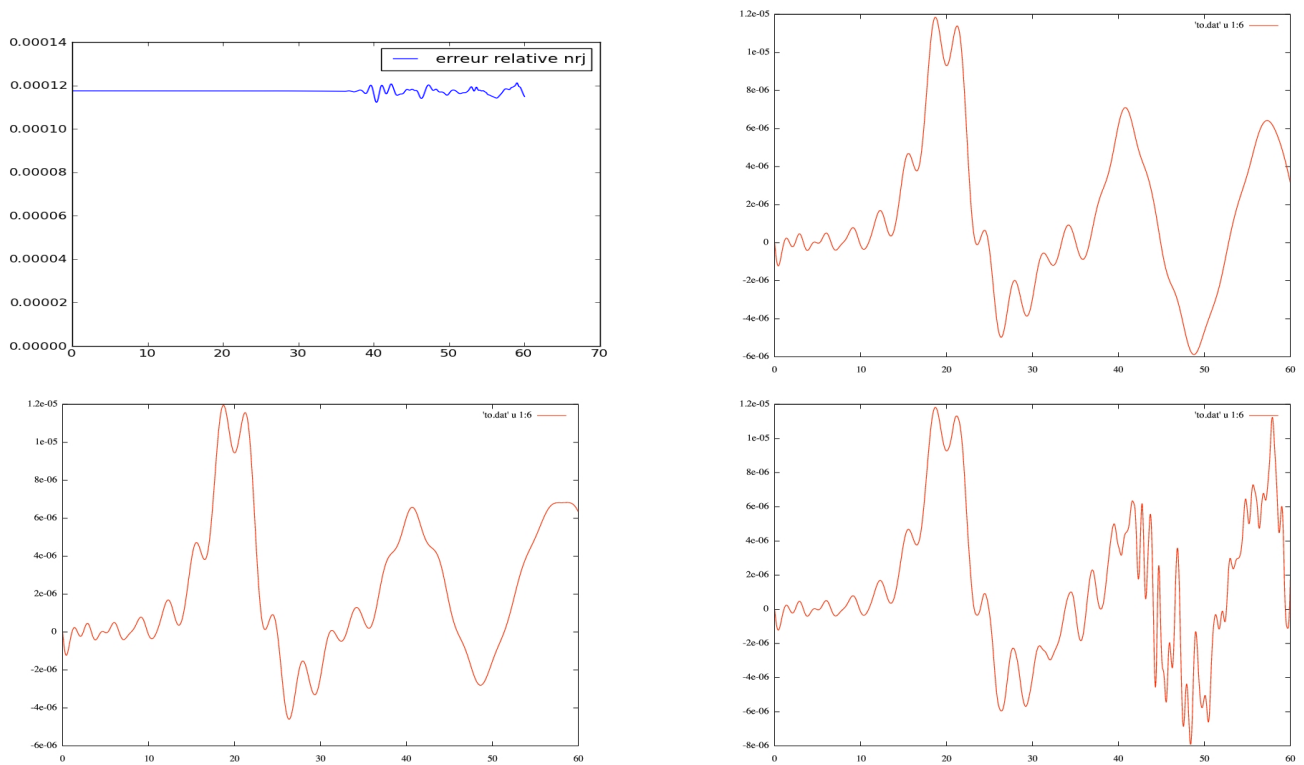


**FIG. 32:** L'erreur relative de la norme  $L^2$  en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

### Conservation de l'énergie

L'énergie est conservée beaucoup plus longtemps avec notre méthode et est stable. Les autres méthodes ne la conservent pas. L'erreur relative est stable pour les trois méthodes mais elle oscille moins avec la nôtre.

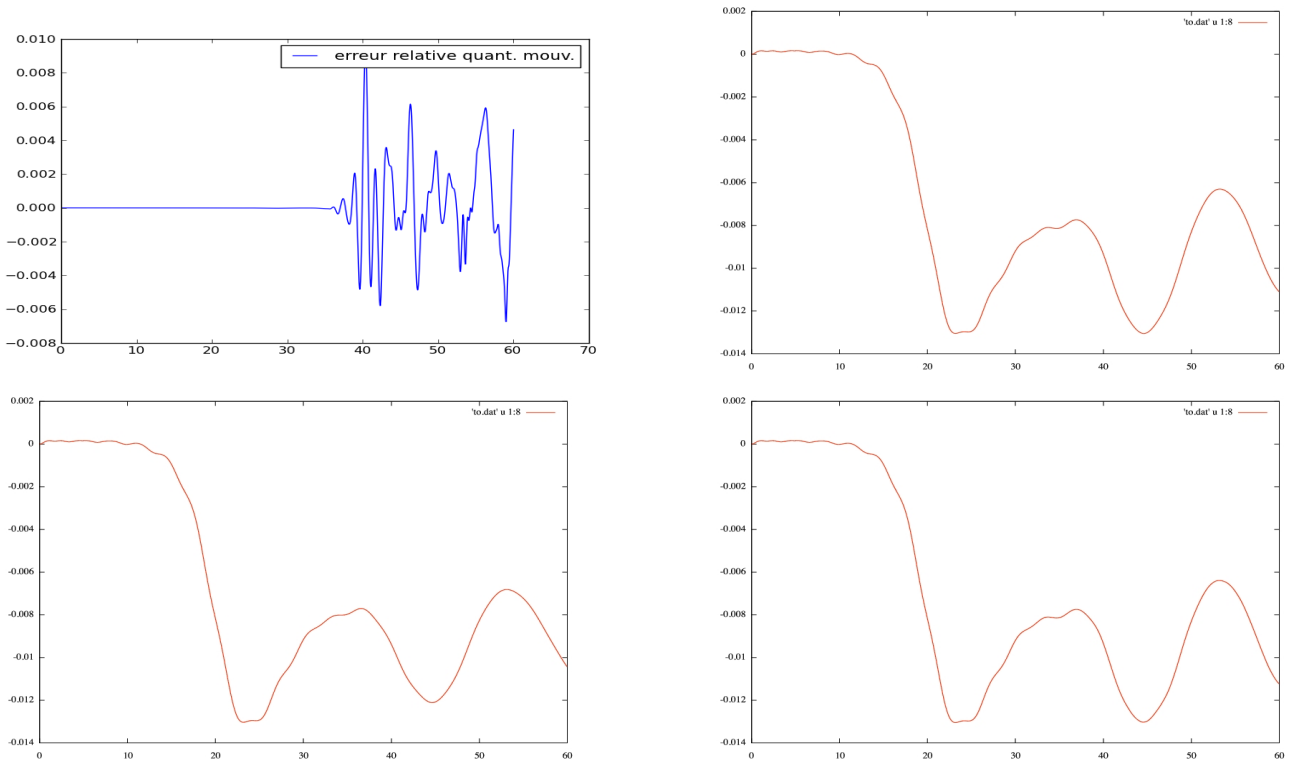




**FIG. 33:** L'erreur relative de l'énergie en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

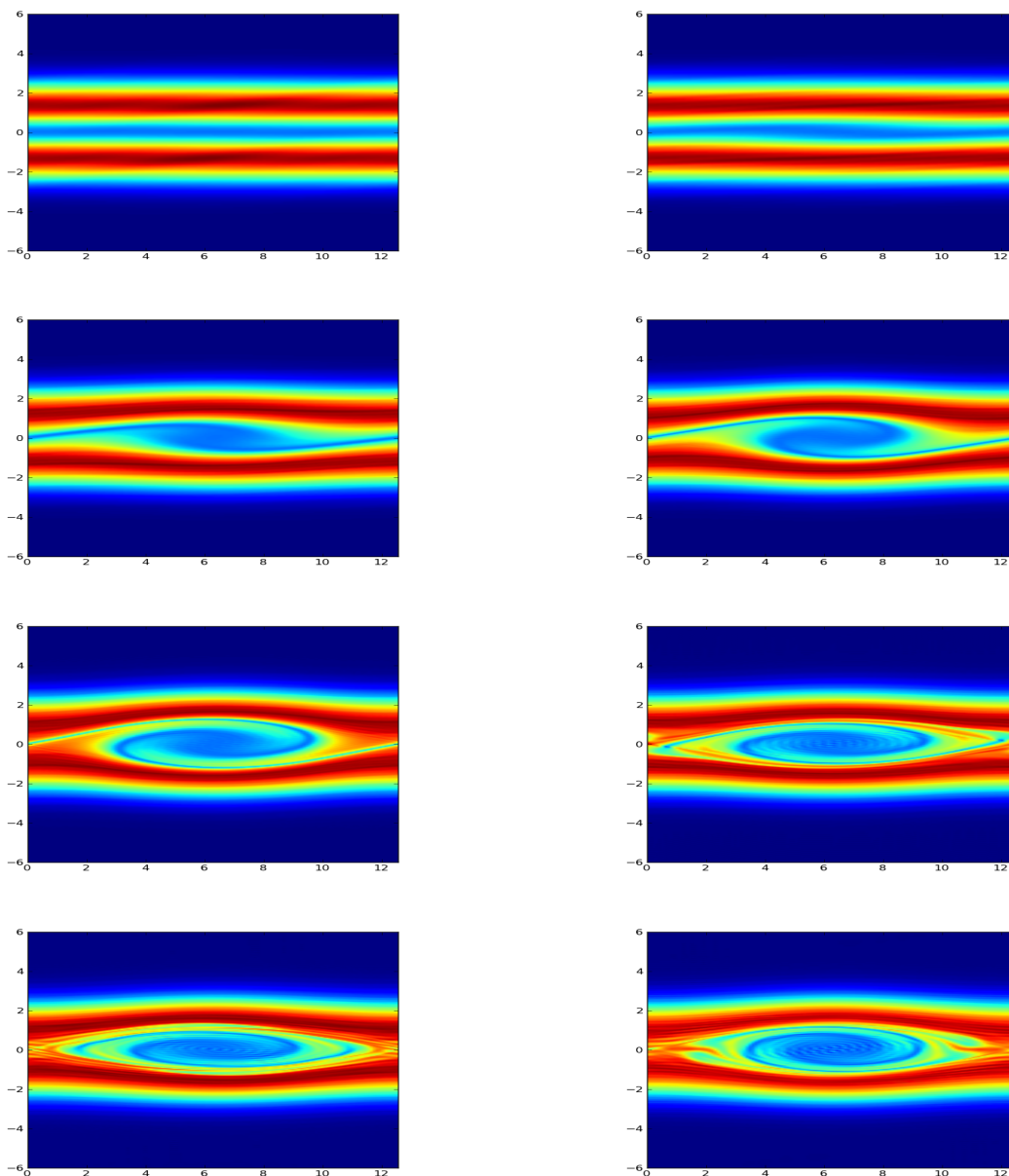
### Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement est mieux conservée au cours du temps avec notre méthode et l'erreur relative n'augmente pas au cours du temps mais effectue des oscillations de l'ordre de  $10^{-4}$ . Les autres méthodes ne conservent pas cette quantité de mouvement et l'erreur relative oscille dès le départ et malgré le saut au temps 15 cette erreur reste stable.



**FIG. 34:** L'erreur relative de la quantité de mouvement en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

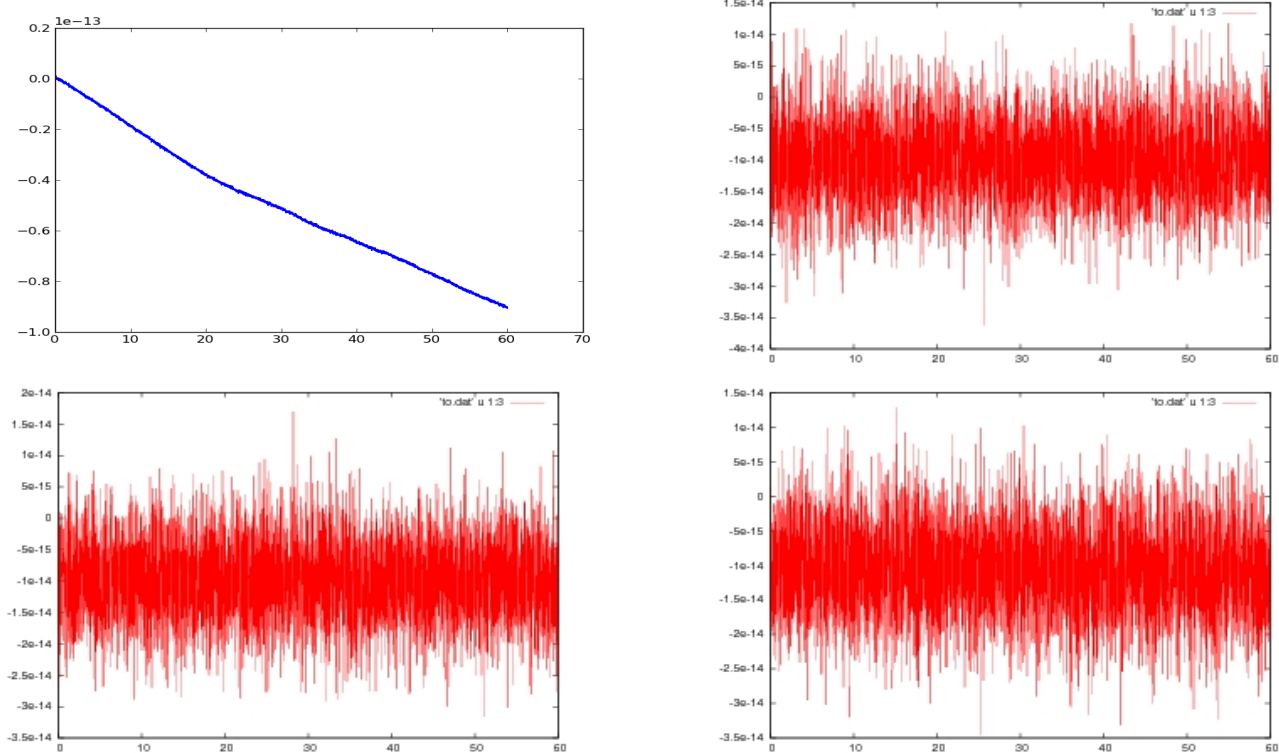
On teste notre code avec  $k = 0.5$ ,  $\epsilon = 0.01$ . On prendra comme pas de temps  $dt = 0.01$ , et 128 points dans la direction  $x$  et 256 points dans la direction en  $v$ . On compare nos résultats avec ceux obtenus par d'autres méthodes : la méthode semi-lagrangienne avec des splines cubiques, la méthode semi-lagrangienne avec les polynômes de Lagrange de degré 3 et avec la méthode semi-lagrangienne avec Fourier.



**FIG. 35:** Valeur de la fonction de distribution au temps (de bas en haut)  $T = 5, 15, 25, 30, 35, 45, 55, 60$ .

### Conservation de la masse

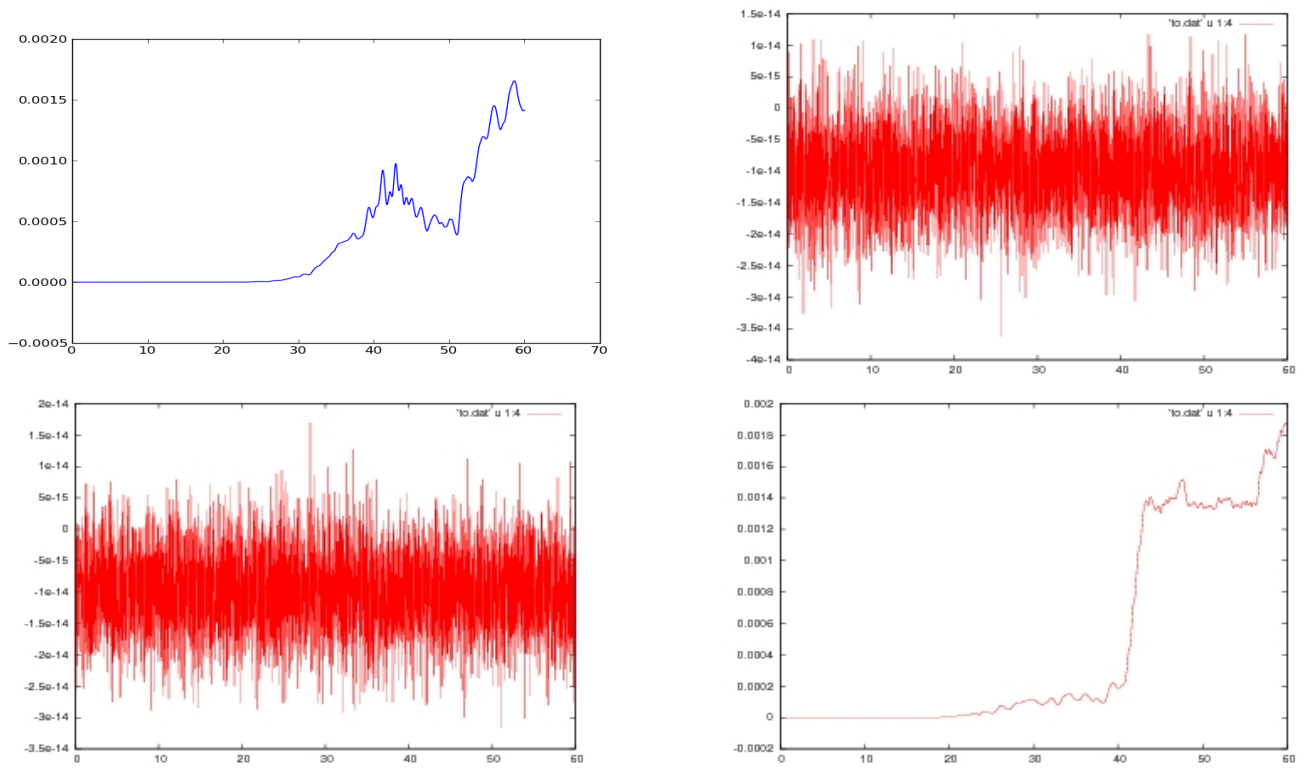
Comparons dans un premier temps l'erreur relative de la masse. On voit alors que l'on a la conservation de la masse à l'erreur machine avec notre méthode ainsi qu'avec les autres.



**FIG. 36:** L'erreur relative de la masse en utilisant la méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

### Conservation de la norme $L^1$

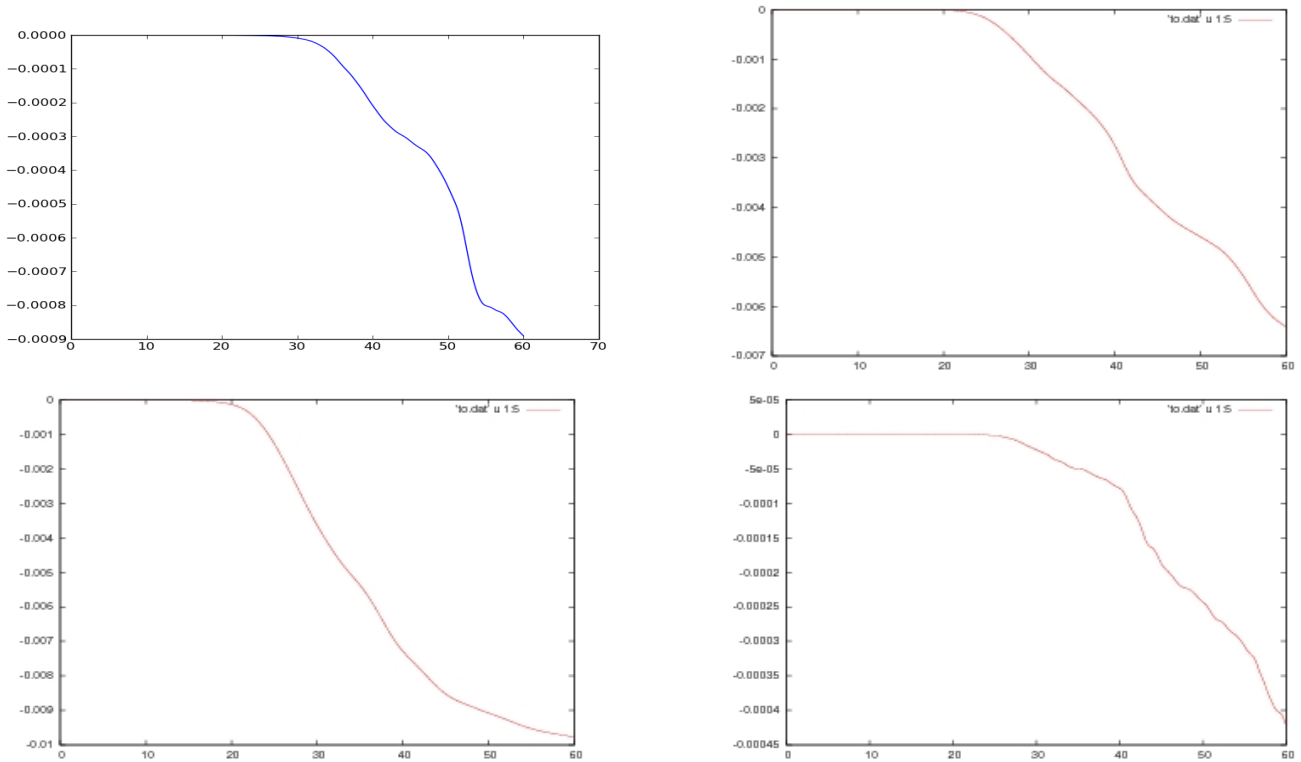
On voit que la norme  $L^1$  est conservé par les méthodes utilisant les splines cubiques et les polynômes de Lagrange. Notre méthode ne la conserve pas mais l'erreur relative est stable et n'augmente pas au cours du temps contrairement à la méthode avec Fourier.



**FIG. 37:** L'erreur relative de la norme  $L^1$  en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

### Conservation de la norme $L^2$

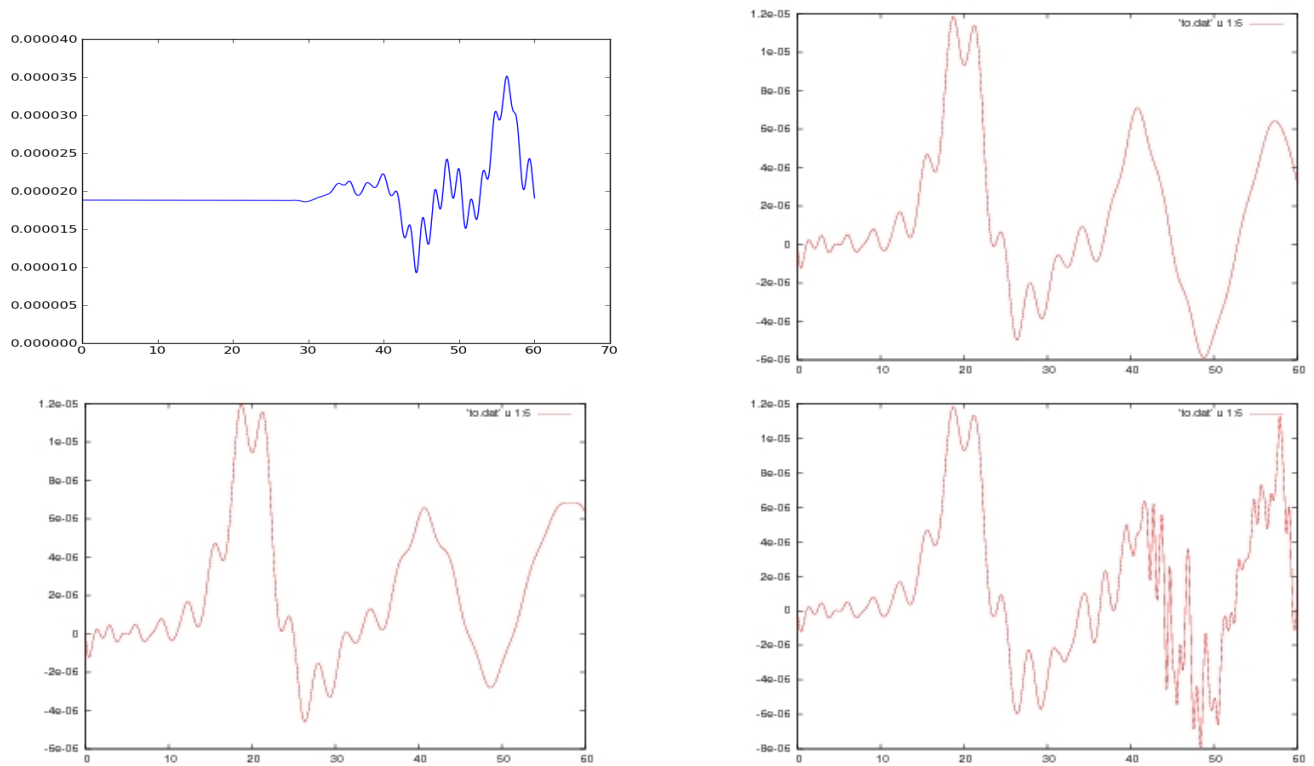
La norme  $L^2$  est conservée plus longtemps avec la méthode utilisant Fourier.



**FIG. 38:** L'erreur relative de la norme  $L^2$  en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

### Conservation de l'énergie

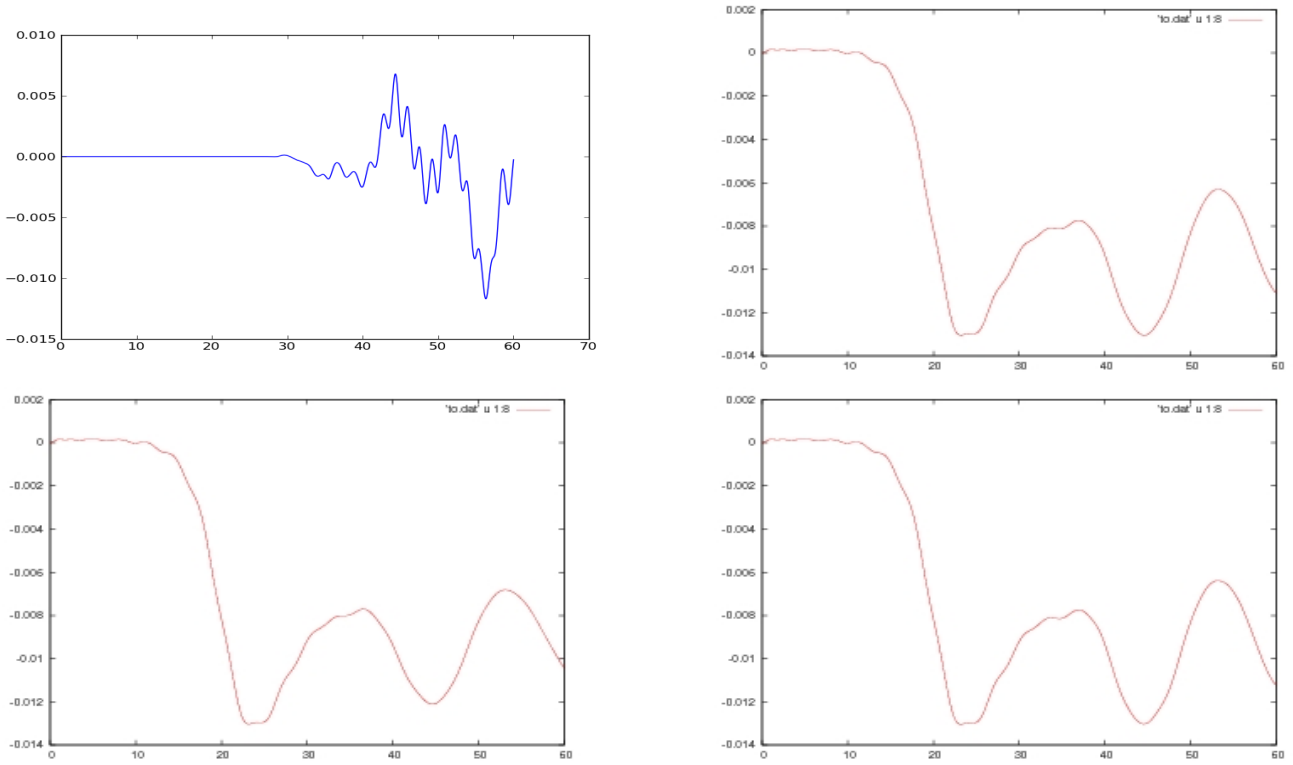
L'énergie est conservée beaucoup plus longtemps avec notre méthode. Les autres méthodes ne la conservent pas. L'erreur relative est stable pour les trois méthodes mais elle oscille moins avec la nôtre.



**FIG. 39:** L'erreur relative de l'énergie en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

### Conservation de la quantité de mouvement

La quantité de mouvement est mieux conservée au cours du temps avec notre méthode et l'erreur relative n'augmente pas au cours du temps mais effectue des oscillations de l'ordre de  $10^{-4}$ . Les autres méthodes ne conservent pas cette quantité de mouvement et l'erreur relative oscille dès le départ et malgré le saut au temps 15 cette erreur reste stable.



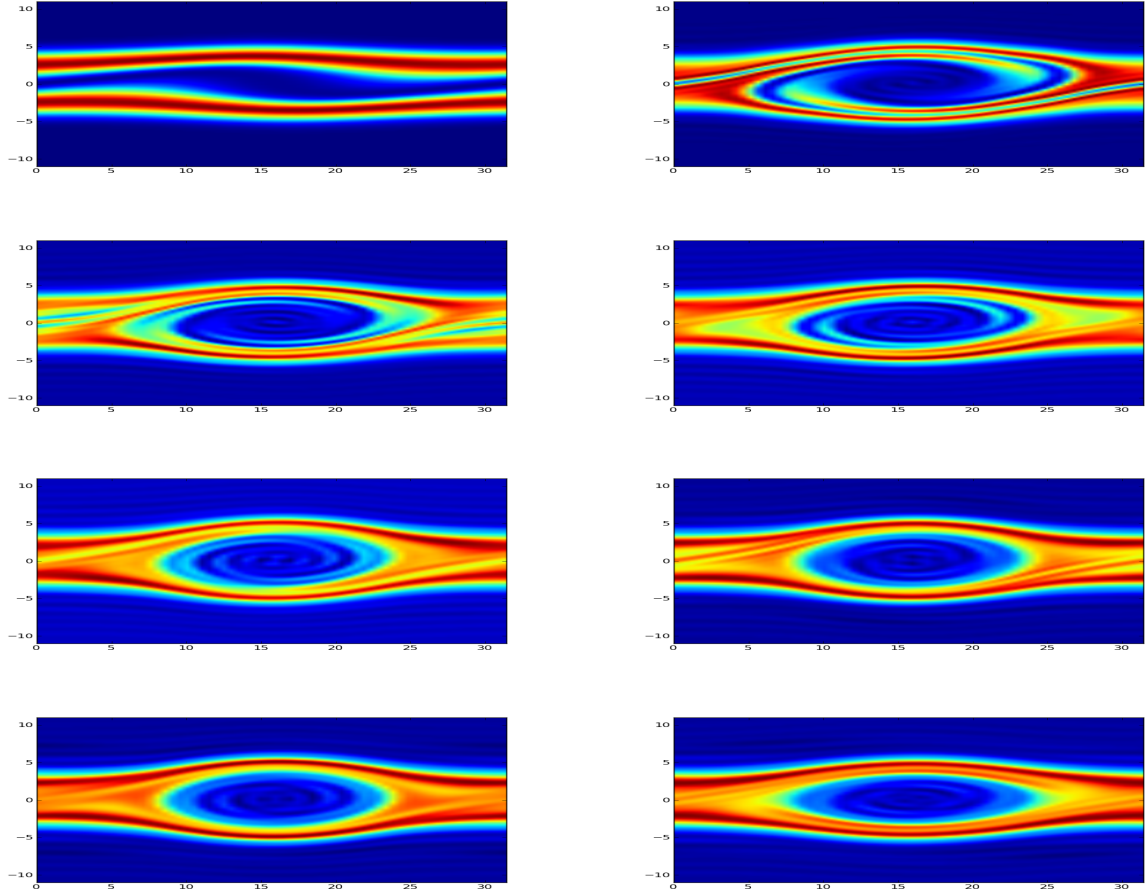
**FIG. 40:** L'erreur relative de la quantité de mouvement en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

L'instabilité double faisceaux correspond à deux faisceaux de vitesses moyennes différentes qui se rencontrent. On considère ici, deux faisceaux se déplaçant à des vitesses moyennes  $v_0$  et  $-v_0$ . En fonction de  $k$  et de  $v_0$ , cette configuration peut être stable ou instable [94]. La condition initiale est la suivante :

$$f^0(x, v, 0) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}(1+\epsilon \cos(kx)) \left( \exp\left(-\frac{(v-v_0)^2}{2}\right) + \exp\left(-\frac{(v+v_0)^2}{2}\right) \right).$$

avec  $(x, v) \in [0, L] \times [-11, 11]$  où  $L = \frac{2\pi}{k}$ . Pour  $k = 0, 2$  et  $v_0 = 3$  on excite d'autres modes que précédemment. On utilise 128 points pour les vitesses et 64 points en  $x$  avec  $\Delta t = 0, 1$ .





**FIG. 41:** Valeur de la fonction de distribution au temps (de droite à gauche)  
 $T = 15, 25, 35, 45, 50, 55, 65, 75, 80$ .

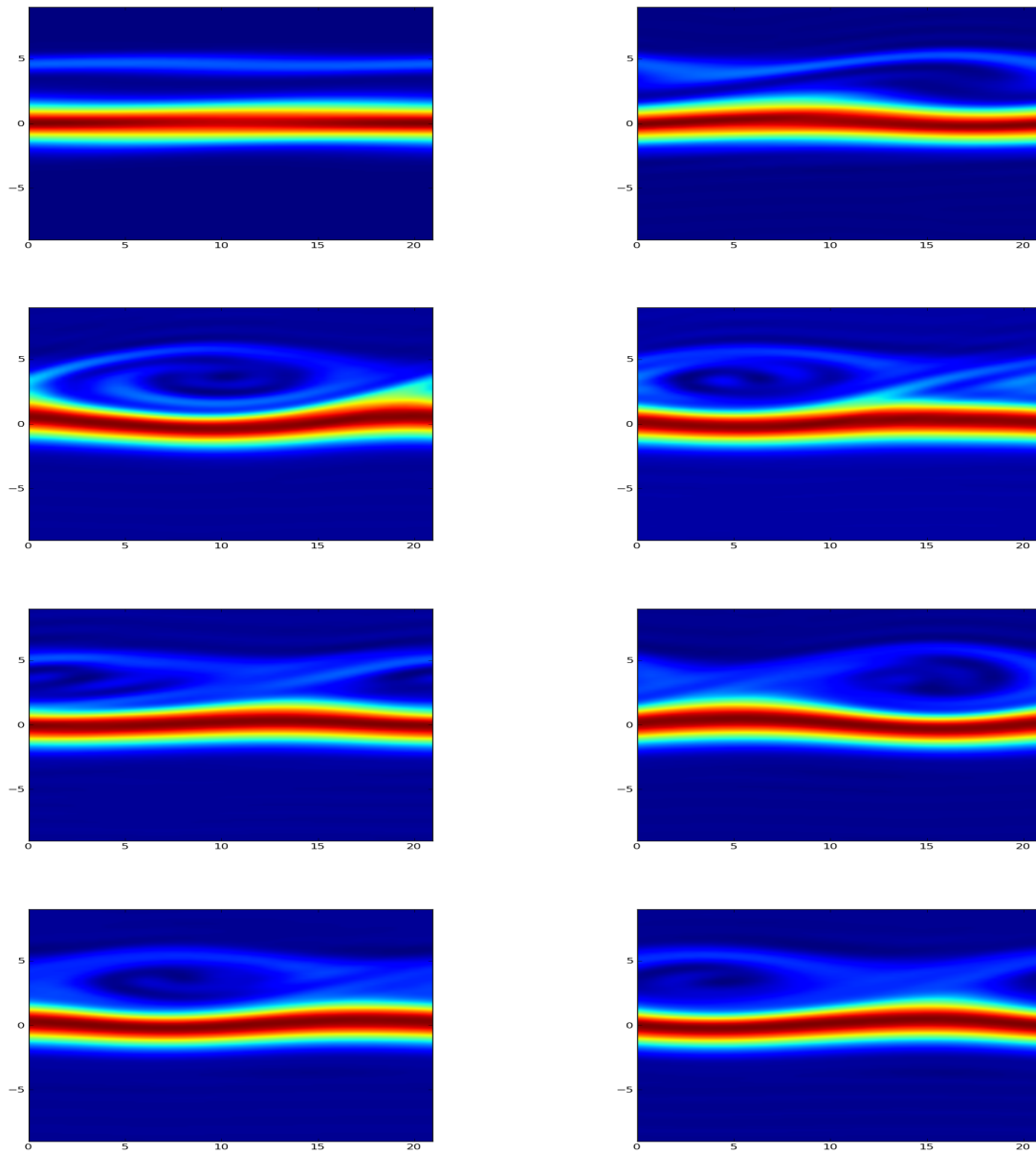
### 10.4.3 Le bump on tail

Le bump on tail correspond à deux faisceaux de vitesses moyennes différentes qui se rencontrent. La condition initiale est la suivante :

$$f^0(x, v, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1 + \epsilon \cos(kx)) \left( 0.9 \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) + 0.2 \exp\left(-\frac{(v - 4.5)^2}{0.5}\right) \right)$$

avec  $(x, v) \in [0, L] \times [-9, 9]$  où  $L = \frac{2\pi}{k}$ . On teste le code en prenant  $k = 0.3$ ,  $\epsilon = 0.03$ ,  $\Delta t = 0.01$  et on prend dans la direction  $x$ , 64 points et dans la direction  $v$ , 192 points.

On compare nos résultats avec ceux obtenus par d'autres méthodes : la méthode semi-lagrangienne avec des splines cubiques, la méthode semi-lagrangienne avec les polynômes de Lagrange de degré 3 et avec la méthode

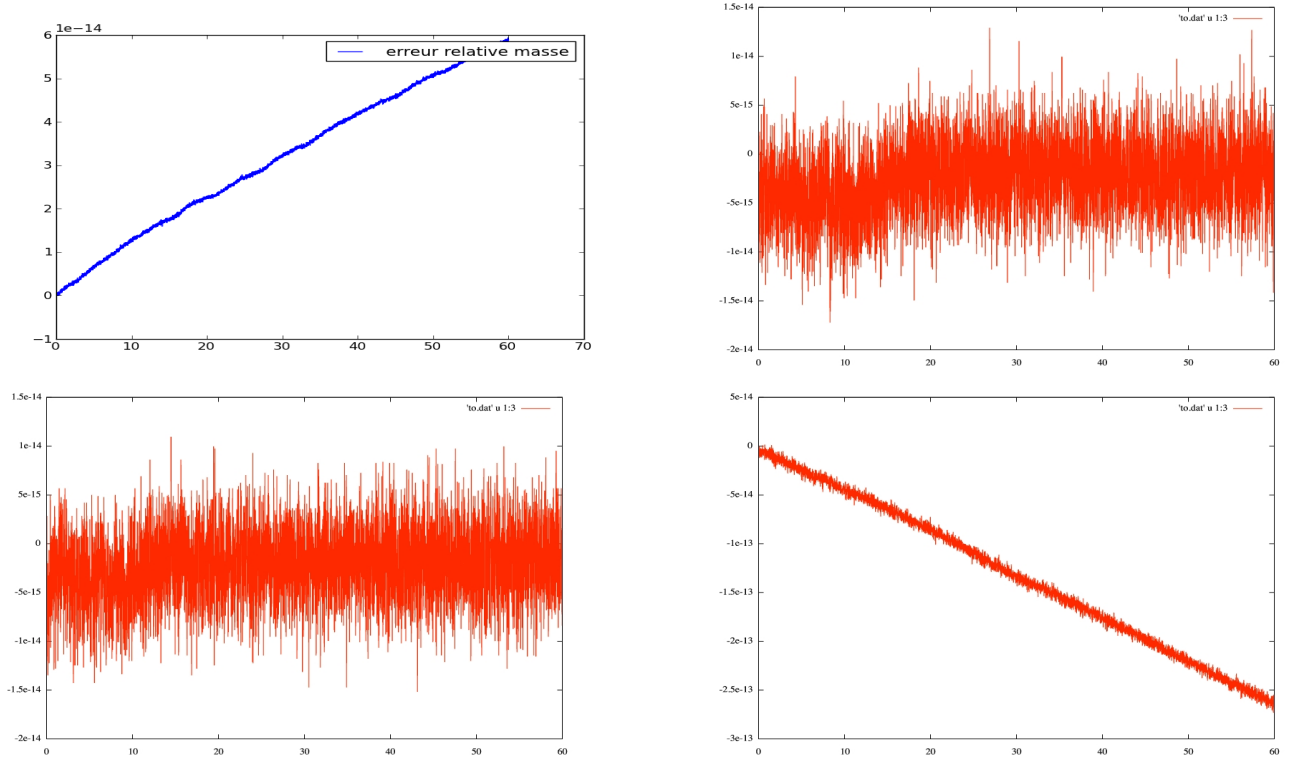


**FIG. 42:** Valeur de la fonction de distribution au temps (de bas en haut)  
 $T = 5, 15, 25, 35, 45, 55, 60$ .

semi-lagrangienne avec Fourier.

## Conservation de la masse

Comparons dans un premier temps l'erreur relative de la masse. On voit

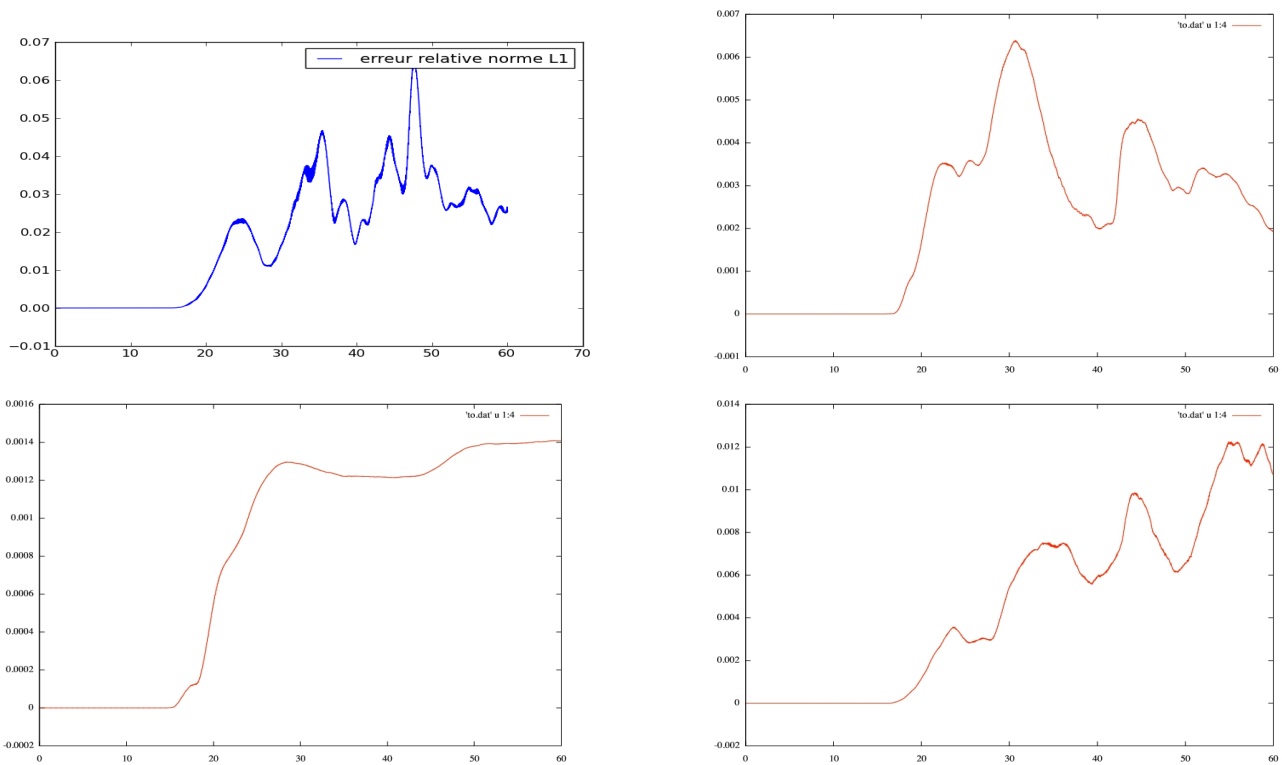


**FIG. 43:** L'erreur relative de la masse en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

alors que l'on a la conservation de la masse à l'erreur machine avec notre méthode et les méthodes semi-lagrangienne utilisant des polynômes de Lagrange ou des splines cubiques. La méthode de Fourier ne permet pas de la conserver.

## Conservation de la norme $L^1$

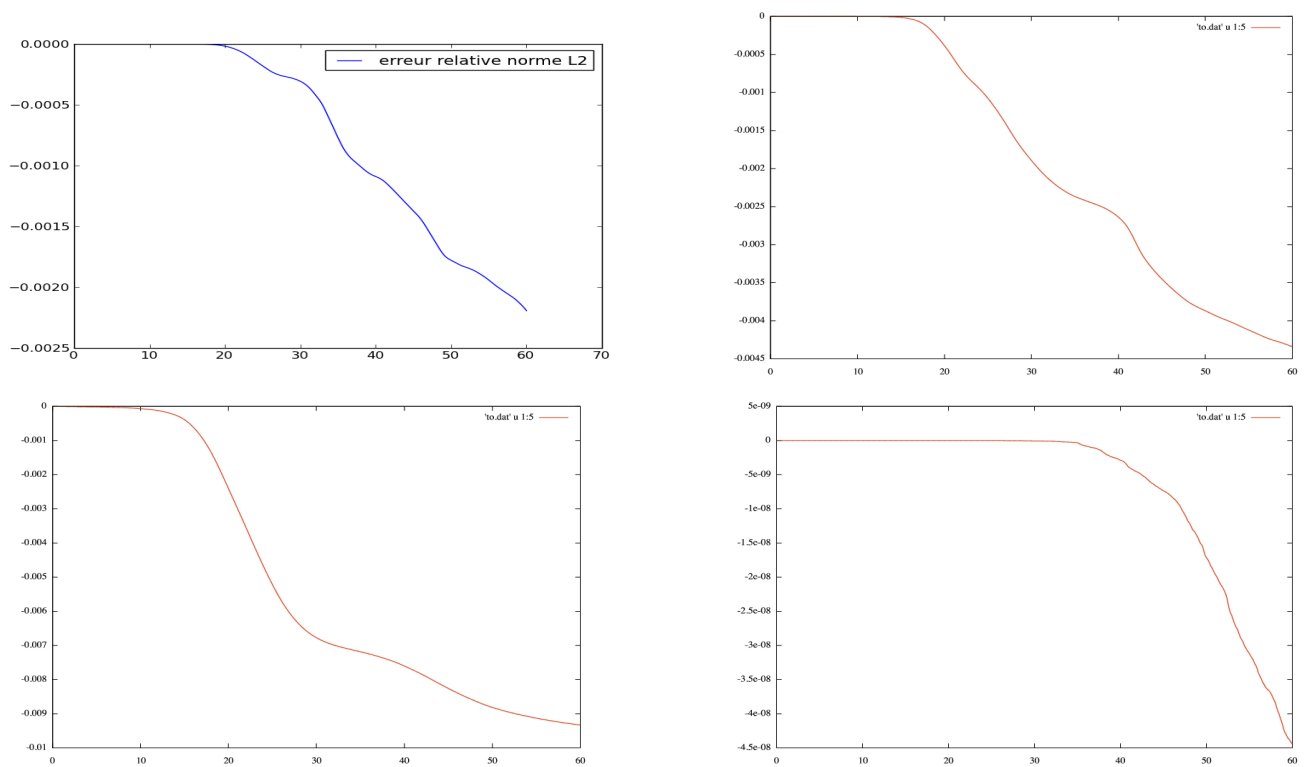
La norme  $L^1$  est beaucoup mieux conservé avec notre méthode qu'avec les autres. De plus, elle est beaucoup plus stable et la différence entre le temps  $n$  et le temps  $n + 1$  est de l'ordre de  $10^{-5}$  tandis qu'avec les autres méthodes elle est de l'ordre de  $10^{-3}$ .



**FIG. 44:** L'erreur relative de la norme  $L^1$  en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

### Conservation de la norme $L^2$

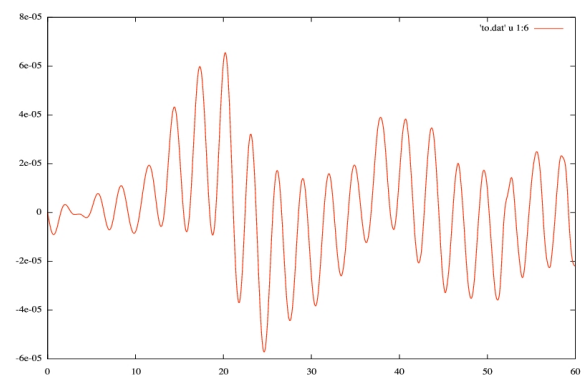
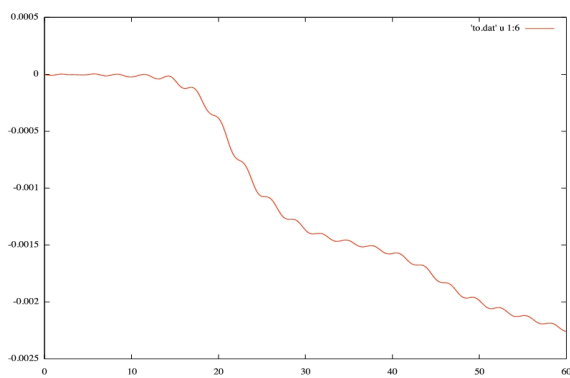
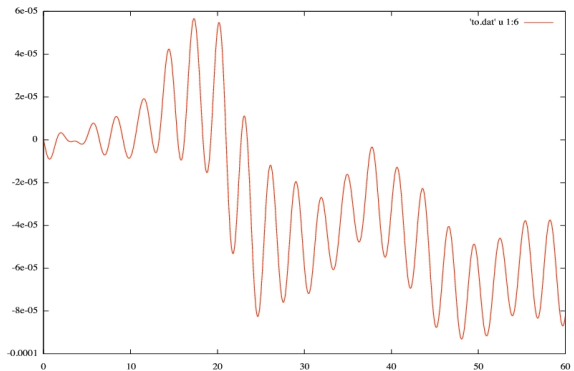
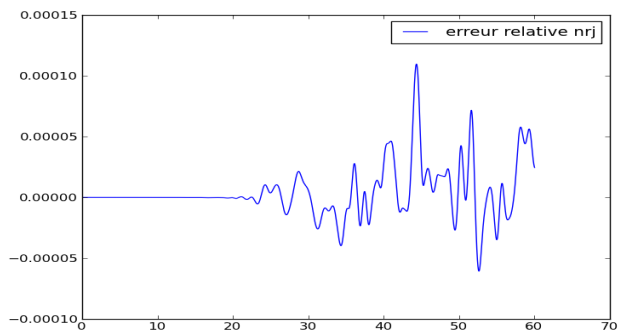
La norme  $L^2$  est conservé moins longtemps avec notre méthode qu'avec les autres méthodes. La méthode utilisant Fourier étant meilleure pour la conservation de la norme  $L^2$ . Pour notre méthode, l'erreur relative est de l'ordre de  $10^{-6}$  et elle diminue sur la fin tandis qu'avec les méthodes utilisant les polynômes de Lagrange et les splines cubiques cette erreur est de l'ordre de  $10^{-3}$  et de l'ordre de  $10^{-9}$  pour celle utilisant Fourier mais pour ces trois méthodes elle augmente au cours du temps. On en conclut qu'avec les trois autres méthodes la norme  $L^2$  diverge au cours du temps contrairement avec la notre.



**FIG. 45:** L'erreur relative de la norme  $L^2$  en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

### Conservation de l'énergie

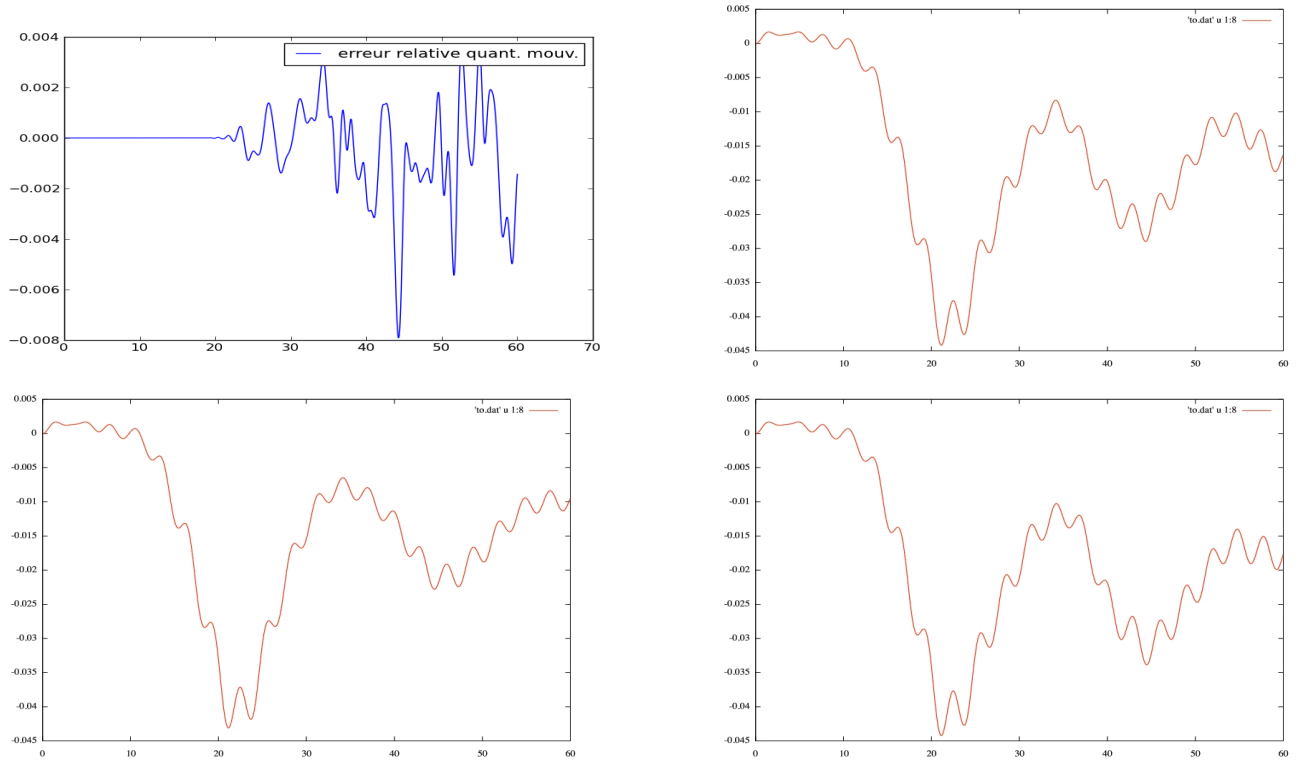
L'énergie obtenue avec la méthode des polynômes de Lagrange est la mieux conservée mais l'erreur relative augmente au cours du temps et est de l'ordre de  $10^{-3}$ . Avec les autres méthodes (dont la nôtre) cette erreur est beaucoup plus stable et est de l'ordre de  $10^{-5}$  et de  $10^{-6}$  pour la nôtre.



**FIG. 46:** L'erreur relative de l'énergie en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).

### Conservation de la quantité de mouvement

L'erreur relative est de l'ordre de  $10^{-3}$  pour la nôtre et de  $10^{-2}$  pour les autres. Cette erreur est plus stable avec notre méthode qu'avec les autres mais dans tous les cas elle n'augmente pas au cours du temps.



**FIG. 47:** L'erreur relative de la quantité de mouvement en utilisant notre méthode, et avec des splines cubiques (première ligne de gauche à droite) et en utilisant les polynômes de Lagrange, et avec Fourier (seconde ligne de gauche à droite).





---

# Développement d'un code PIC axisymétrique basé sur l'analyse isogéométrique

---

---

## Contenu du chapitre

---

<b>11</b>	<b>Les B-splines et les NURBS . . . . .</b>	<b>174</b>
11.1	Les B-splines . . . . .	174
11.2	Les NURBS . . . . .	174
<b>12</b>	<b>Définition du domaine physique . . . . .</b>	<b>175</b>
<b>13</b>	<b>Les équations de Vlasov-Maxwell . . . . .</b>	<b>176</b>
<b>14</b>	<b>Résolution de l'équation de Vlasov par une méthode PIC . . . . .</b>	<b>177</b>
14.1	La méthode PIC . . . . .	177
<b>15</b>	<b>La résolution des équations de Maxwell . . . . .</b>	<b>181</b>
<b>16</b>	<b>Résultats numériques . . . . .</b>	<b>184</b>

---

Dans ce chapitre, on présente le code IsoPIC basé sur le code d'Ahmed Ratnani [22, 63] et développé dans le cadre d'un projet CEMRACS 2010. C'est un solveur Vlasov-Maxwell qui permet de résoudre ces équations dans une géométrie axisymétrique en deux dimensions d'espace  $(z, r)$ . L'objectif était de simuler l'émission de particules dans une diode à cathode hémisphérique. Le principe est le suivant : on applique une tension positive à l'anode et une tension négative à la cathode de sorte que la différence de potentiel créée soit supérieure à une valeur seuil, les électrons sont alors arrachés de la cathode et se déplacent vers l'anode. On va alors imposer un champ électrique négatif à l'entrée de la diode et le faire se propager. Il va extraire sur son passage des électrons de la cathode qui se dirigeront alors vers l'anode. En se plaçant dans les coordonnées cylindriques  $(z, r, \theta)$ , on peut faire l'hypothèse que le domaine est indépendant de  $\theta$ . On est alors en 2D axisymétrique. On utilisera des notions de géométrie différentielle et on procédera comme l'on a fait au chapitre (8.2) page 119 à la différence près et que le changement de coordonnées va être défini par des NURBS (non-uniform rational basis splines) et des B-splines. On construira ce changement de coordonnées qui enverra un carré vers le domaine physique. Les calculs s'effectueront alors sur le carré.

# 11 LES B-SPLINES ET LES NURBS

## 11.1 Les B-splines

Tout d'abord rappelons la définition des B-splines. Soit  $T = (t_i)_{1 \leq i \leq N+\alpha}$  une suite croissante de nœuds. La  $i$ -ème B-Spline de degré  $\alpha$  (et donc d'ordre  $p = \alpha + 1$ ) est définie par la relation de récurrence :

$$B_i^\alpha(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+\alpha-1} - t_i} B_i^{\alpha-1}(x) + \frac{t_{i+1} - x}{t_{i+\alpha} - t_{i+1}} B_{i+1}^{\alpha-1}(x)$$

où

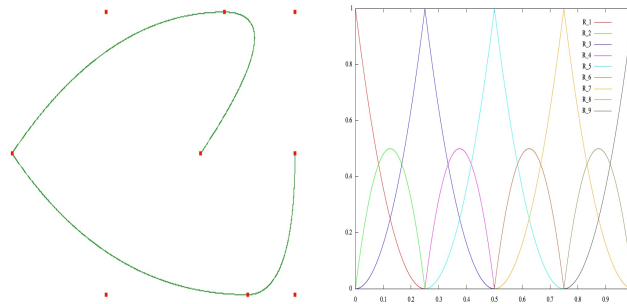
$$B_i^0(x) = \chi_{[t_i, t_{i+1}[}(x).$$

En plus des propriétés déjà énumérées on a :

- elles ont une indépendance linéaire locale,
- si le nœud  $t$  a une multiplicité  $m$  alors la B-Spline est  $\mathcal{C}^{(p-m)}$  en  $t$ .

La courbe B-Spline de  $\mathbb{R}^d$  associée à  $T = (t_i)_{1 \leq i \leq N+\alpha}$  et  $(\mathbf{P}_i)_{1 \leq i \leq N}$  une suite de points de contrôle, est définie par :

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^N B_i^\alpha(t) \mathbf{P}_i.$$



**FIG. 48:** A gauche : une courbe B-Spline et ses points de contrôle ; à droite : les fonctions B-Splines associées à la courbe avec  $N = 9$ ,  $p = 2$ ,  $T = \{000, \frac{1}{4}\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\frac{3}{4}, 111\}$ .

## 11.2 Les NURBS

Les NURBS de degré  $\alpha$  sont définies par

$$N_i^\alpha = \frac{\omega_i B_i^\alpha}{\sum_{i=1}^N \omega_i B_i^\alpha},$$

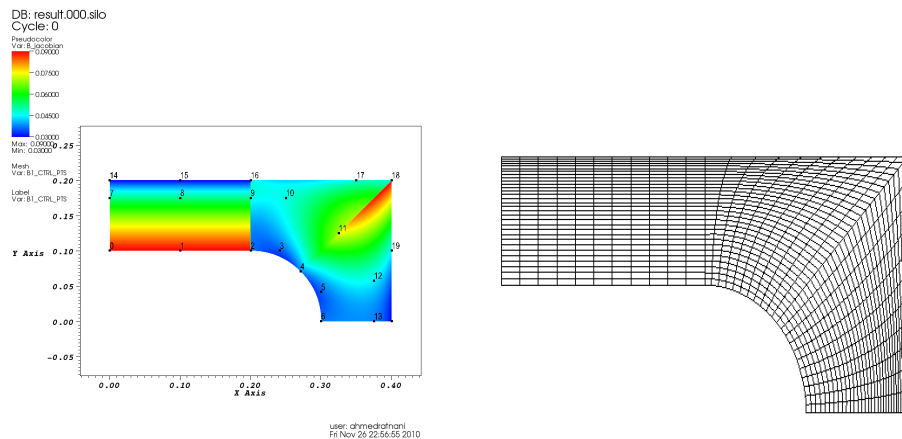
avec  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq N}$  des poids réels et positifs. On peut alors remarquer que pour  $\omega_i = 1$  pour tout  $i$  on retombe sur les B-splines définies au-dessus. Pour  $(\mathbf{Q}_i)_{1 \leq i \leq N}$  une suite de points de contrôle et  $(\omega_i)_{1 \leq i \leq N}$  des poids réels et positifs, on peut définir des courbes d'ordre  $\alpha + 1$  à l'aide des NURBS par la formule

$$\gamma(t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i N_i^\alpha(t) = \frac{\sum_{i=1}^N \mathbf{Q}_i \omega_i B_i^\alpha(t)}{\sum_{i=1}^N \omega_i B_i^\alpha(t)}.$$

Le lecteur pourra s'aider des livres et des articles suivants [15, 18, 28, 36, 50, 59, 68] pour plus de détails sur les NURBS et les B-splines.

## 12 DÉFINITION DU DOMAINE PHYSIQUE

L'idée est de construire un maillage à partir d'une description en terme de courbes du bord du domaine. Dans notre cas, on va devoir construire un changement de coordonnées de classe  $C^1$  car pour résoudre les équations de Maxwell on utilisera des éléments finis avec comme fonctions de base des B-splines. On va donc utiliser des NURBS pour décrire le quart de cercle de la bobine avec les vecteurs de noeuds définis en-dessous.



**FIG. 49:** Bobine : (à gauche) le Jacobien du mapping ainsi que les points de contrôle, (à droite) le maillage.

Pour plus de détails, le lecteur pourra se référer aux articles [21, 22, 27, 38, 45].

1 <sup>st</sup> Vecteur de noeuds	$\{0 \ 0 \ 0 \ \frac{1}{3} \ \frac{1}{3} \ \frac{2}{3} \ \frac{2}{3} \ 1 \ 1 \ 1\}$
2 <sup>nd</sup> Vecteur de noeuds	$\{0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1\}$

Points de contrôle	Poids
(0.0, 0.1)	1.0
(0.1, 0.1)	1.0
(0.2, 0.1)	1.0
(0.2414213562373095, 0.1)	0.8535533905932738
(0.2707106781186547, 0.07071067811865475)	1.0
(0.3, 0.0414213562373095)	0.8535533905932738
(0.3, 0.0)	1.0
(0.0, 0.175)	1.0
(0.1, 0.175)	1.0
(0.2, 0.175)	1.0
(0.25, 0.175)	1.0
(0.325, 0.125)	1.0
(0.375, 0.0575)	1.0
(0.375, 0.0)	1.0
(0.0, 0.2)	1.0
(0.1, 0.2)	1.0
(0.2, 0.2)	1.0
(0.35, 0.2)	1.0
(0.4, 0.2)	1.0
(0.4, 0.1)	1.0
(0.4, 0.0)	1.0

**FIG. 50:** Description de la diode en utilisant les *NURBS*.

## 13 LES ÉQUATIONS DE VLASOV-MAXWELL

Pour les équations de Maxwell on considère le mode transverse électrique (noté TE). Les composantes du champ électrique et du champ magnétique seront notés  $E_r$ ,  $E_z$  et  $B_\theta$ .

Le système d'équations de Vlasov-Maxwell adimensionné en mode *TE* en 2D axi-

symétrique s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla_x f - (\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge B) \cdot \nabla_v f = 0, \\ -\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{rot} B = \mathbf{J}, \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \mathbf{rot} \mathbf{E} = 0, \\ \mathbf{div} \mathbf{E} = \rho, \end{array} \right. \quad (105)$$

avec  $f$  la fonction de distribution,

$$\mathbf{rot} \mathbf{E} = \partial_z E_r - \partial_r E_z, \quad \mathbf{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r} \partial_r (r E_r) + \partial_z E_z \quad \text{et} \quad \mathbf{rot} B_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \partial_r (r B_\theta) \\ -\partial_z B_\theta \end{pmatrix}.$$

Les densités de charge et de courant  $\rho$  et  $J$  sont définies par

$$\rho(t, \mathbf{x}) = - \int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}, \quad \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = - \int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}) \mathbf{v} d\mathbf{v}.$$

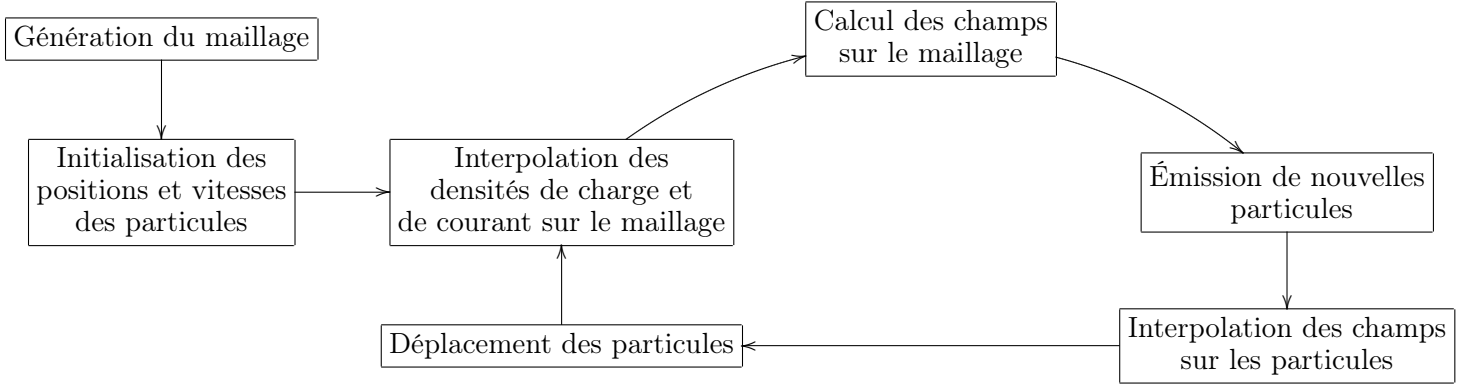
## 14 RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION DE VLASOV PAR UNE MÉTHODE PIC

### 14.1 La méthode PIC

Pour résoudre l'équation de Vlasov, on considère un ensemble de  $N$  macro particules de positions  $\mathbf{X}_k$ , de vitesses  $\mathbf{V}_k$  et de poids  $\omega_k$  représentant la fonction de distribution  $f$ . On approche alors  $f$  par une somme de masses de Dirac centrées en les positions et les vitesses des particules :

$$f(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) \approx f_N(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) = \sum_{k=1}^N \omega_k \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k(t)) \delta(\mathbf{V} - \mathbf{V}_k(t)). \quad (106)$$

Les particules se déplacent suivant les équations de Newton qui dépendent du champ électrique et du champ magnétique. Pour résoudre ces équations on doit donc résoudre les équations de Maxwell qui dépendent des densités de courant et de charge. La méthode PIC est décrite par le schéma ci-dessous :



Les particules se déplacent dans le domaine physique, il faut donc écrire les équations de Newton en géométrie 2D axisymétrique dans des coordonnées quelconques.

Les équations de Newton en coordonnées cartésiennes s'écrivent

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{V}, \\ \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -(\mathbf{E} + \mathbf{V} \wedge \mathbf{B}), \end{cases}$$

Afin de les écrire en 2D axisymétrique on passe des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  aux coordonnées cylindriques  $(z, r, \theta)$  puis en axisymétrique  $(z, r)$  puis à un système de coordonnées quelconques  $(\xi, \eta)$ . On pose alors  $F$  ce changement de coordonnées tel que  $F(\xi, \eta) = \mathbf{x}$ . On utilise les équations d'Euler-Lagrange car elles décrivent de façon équivalente le mouvement des particules et elles ont l'avantage d'être valables dans n'importe quel système de coordonnées :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t).$$

On dira que la fonction  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  est le lagrangien.

On écrit le Lagrangien (voir [13] et [78]) dans les coordonnées  $(\xi, \eta, \dot{\xi}, \dot{\eta})$  :

$$L = \frac{1}{2}m(M_\xi \dot{\xi}^2 + M_\eta \dot{\eta}^2 + 2M_{\xi\eta} \dot{\xi} \dot{\eta}) + e(A_\xi \dot{\xi} + A_\eta \dot{\eta} - \phi),$$

où

$$\begin{aligned} M_\xi &= \left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2, \\ M_\eta &= \left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2, \\ M_{\xi\eta} &= \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta}, \end{aligned}$$

avec  $\mathbf{A} = (A_\xi, A_\eta)$  le potentiel vecteur et  $\phi$  le potentiel scalaire :  $\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi$ .  
Les équations d'Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}},$$

où

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix},$$

conduisent aux équations du mouvement suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(J) \frac{d\dot{\xi}}{dt} + \dot{\xi}^2 K_{\xi,\eta} + \dot{\eta}^2 K_{\eta,\eta} + 2\dot{\eta}\dot{\xi} K_{\eta\xi,\eta} \\ = -\frac{1}{\det(J)} (((\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) |_\xi) M_\eta - (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) |_\eta) M_{\xi\eta} \\ \\ \det(J) \frac{d\dot{\eta}}{dt} - \dot{\xi}^2 K_{\xi,\xi} - \dot{\eta}^2 K_{\eta,\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\xi} K_{\xi\eta,\xi} \\ = -\frac{1}{\det(J)} (((\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) |_\eta) M_\xi - (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) |_\xi) M_{\xi\eta} \end{array} \right. ,$$

avec  $\det(J)$  le jacobien du changement de coordonnées  $F$  du carré vers le domaine physique. Tous les coefficients sont explicités en annexe ainsi que les détails des calculs. Passons maintenant aux calculs des densités de charge et de courant. Dans les coordonnées du domaine physique (où  $\mathbf{X}$  est le vecteur position et  $\mathbf{V}$  le vecteur vitesse), les densités de charge  $\rho$  et de courant  $\mathbf{J}$  s'écrivent :

$$\rho(\mathbf{X}, t) = - \int \int \int_{\mathbf{V}} f(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) d\mathbf{V},$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}, t) = - \int \int \int_{\mathbf{V}} f(\mathbf{X}, \mathbf{V}, t) \mathbf{V} d\mathbf{V}.$$

Plus simplement, en remplaçant  $f$  par sa somme de masses de Dirac, on a :

$$\rho(\mathbf{X}, t) = - \sum_{k=1}^N \omega_k \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k(t)),$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}, t) = - \sum_{k=1}^N \omega_k \mathbf{V}_k(t) \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_k(t)).$$

Numériquement on doit calculer l'intégrale de ces fonctions sur le carré (le patch) donc

$$\int_M \mathbf{J}(\mathbf{X}, t) \cdot \psi(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \int_M \sum_k \omega_k \delta(F(\xi, \eta) - \mathbf{X}_k(t)) \mathbf{V}_k(t) Jac(\xi, \eta) \psi(F(\xi, \eta)) d\xi d\eta,$$

avec  $\psi$  une fonction test et

$$\int_M \rho(\mathbf{X}, t) \varphi(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \int_{\tilde{M}} \sum_k \omega_k \delta(F(\xi, \eta) - \mathbf{X}_k(t)) Jac(\xi, \eta) \varphi(F(\xi, \eta)) d\xi d\eta,$$

où  $\phi$  est une fonction test,  $M$  est le domaine physique et  $F(\tilde{M}) = M$ .

Pour calculer ces intégrales on utilise le fait que l'intégrale ne change pas lorsque l'on effectue un changement de coordonnées, on a alors

$$1 = \int_M \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) d\mathbf{x} = \int_{\tilde{M}} \delta(F(\xi, \eta) - \mathbf{x}_k) Jac(\xi, \eta) d\xi d\eta = \int_{\tilde{M}} \frac{\delta(\xi - \xi_k) \delta(\eta - \eta_k)}{Jac(\xi_k, \eta_k)} Jac(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

avec  $F(\xi_k, \eta_k) = \mathbf{x}_k$  et par définition on a  $\delta(F(\xi, \eta) - \mathbf{x}_k) = \frac{\delta(\xi - \xi_k) \delta(\eta - \eta_k)}{Jac(\xi_k, \eta_k)}$ , donc

$$g(\mathbf{x}_k) = \int_M \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k) g(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int_{\tilde{M}} g(F(\xi, \eta)) \delta(F(\xi, \eta) - \mathbf{x}_k) Jac(\xi, \eta) d\xi d\eta = g(F(\xi_k, \eta_k)). \quad (107)$$

pour toute fonction  $g$  mesurable. On en déduit à l'aide de l'égalité (107) :

$$\int_M \mathbf{J}(\mathbf{X}, t) \cdot \psi(\mathbf{X}) d\mathbf{X} = \sum_{k|\mathbf{X}_k(t) \in M} \omega_k \mathbf{V}_k(t) \cdot \psi(\mathbf{X}_k(t)),$$

et

$$\int_M \rho(\mathbf{X}, t) \varphi d\mathbf{X} = \sum_{k|\mathbf{X}_k(t) \in M} \omega_k \varphi(\mathbf{X}_k(t)).$$

À une fréquence donnée d'itérations, on crée des particules dans chaque maille  $\Omega$  avec les conditions suivantes :

- la maille  $\Omega$  touche la cathode,
- le champ électrique normal à la cathode sur  $\Omega$  est supérieur à une valeur seuil (que l'on déterminera).

Les poids des particules créées sont positifs et tels que la relation suivante soit respectée :

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho, \quad (108)$$

et tel que le champ électrique normal s'annule à la cathode. Lorsque l'on intègre sur une maille  $\Omega$  cette relation, on obtient :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{E} d\Gamma = \int_{\Omega} \rho d\Gamma.$$

En utilisant la formule de Stokes, on a :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{E} d\Gamma = \int_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\gamma.$$



De plus comme on a l'approximation (106), on peut l'injecter dans la formule au-dessus et ceci nous donne :

$$\int_{\Omega} \rho d\Gamma = \sum_{\text{particule } k \in \Omega} -\omega_k$$

car les particules sont des électrons, donc de charge négative, et que les poids sont positifs. On obtient la relation

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\gamma = \int_{\partial\Omega_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\gamma + \int_{\partial\Omega_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\gamma = \sum_{\text{particule } k \in \Omega} -\omega_k,$$

où  $\partial\Omega_0$  est le bord de  $\Omega$  touchant la cathode et  $\partial\Omega_1$  est la réunion des autres bords de la maille  $\Omega$ .

Comme on souhaite annuler le terme

$$\int_{\partial\Omega_0} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\gamma,$$

le poids des particules injectées est déterminé de la façon suivante

$$\int_{\partial\Omega_1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} d\gamma = \sum_{\text{particule } k \in \Omega} -\omega_k.$$

Le nombre de particules injectées dans chaque maille n'est donc pas déterminé, ce qui compte c'est que la somme de leurs poids vérifie l'égalité au-dessus. La disposition des particules injectées dans une maille  $\Omega$  est aléatoire. Leurs vitesses sont théoriquement nulles mais on les a prises de l'ordre de  $10^{-5}$ .

## 15 LA RÉOLUTION DES ÉQUATIONS DE MAXWELL

On considère, dans la suite, le mode TE qui s'écrit en coordonnées cartésiennes 2D :

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \text{rot } H = -\mathbf{J}, \quad (109)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad (110)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \rho. \quad (111)$$

Pour obtenir la formulation variationnelle, on va multiplier les deux équations (109) et (110) par une fonction test et on intégrera par parties. On se trouve alors devant deux cas, soit on utilise la formule de Green sur la première équation, soit

sur la deuxième mais pas sur les deux.

La première formulation variationnelle dans le cas où les conditions aux bords est un conducteur parfait nous donne

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\psi} dX - \int_{\Omega} H(\text{rot } \boldsymbol{\psi}) dX = - \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\psi} dX \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in H_0(\text{rot}, \Omega), \quad (112)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} H\varphi dX + \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{E})\varphi dX = 0 \quad \forall \varphi \in L^2(\Omega). \quad (113)$$

avec  $(\mathbf{E}, H) \in H_0(\text{rot}, \Omega) \times L^2(\Omega)$  et  $(\boldsymbol{\psi}, \varphi) \in H_0(\text{rot}, \Omega) \times L^2(\Omega)$ . La deuxième formulation variationnelle est

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\psi} dX - \int_{\Omega} (\mathbf{rot } H) \cdot \boldsymbol{\psi} dX = - \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\psi} dX \quad \forall \boldsymbol{\psi} \in H(\text{div}, \Omega), \quad (114)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} H\varphi dX + \int_{\Omega} \mathbf{E} \cdot (\text{rot } \varphi) dX = 0 \quad \forall \varphi \in H^1(\Omega). \quad (115)$$

avec  $(\mathbf{E}, H) \in H(\text{div}, \Omega) \times H^1(\Omega)$  et  $(\boldsymbol{\psi}, \varphi) \in H(\text{div}, \Omega) \times H^1(\Omega)$ . Les espaces que l'on a considérés sont les suivants :

$$H(\text{rot}, \Omega) = \{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2; \text{rot } \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \} \text{ et } H_0(\text{rot}, \Omega) = \{ \mathbf{v} \in H(\text{rot}, \Omega); \mathbf{v} \times \mathbf{n} = 0 \},$$

$$H(\text{div}, \Omega) = \{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2; \text{div } \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \}.$$

On peut alors définir les espaces discrets à l'aide des fonctions B-splines qui ont pour propriété de vérifier le diagramme de De Rham (Buffa et al. [57]) de la manière suivante

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathbf{rot} & & \text{div} \\ H^1(\Omega) & \longrightarrow & H(\text{div}, \Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ \cup & & \cup & & \cup \\ V & \longrightarrow & W_{div} & \longrightarrow & X \end{array} . \quad (116)$$

avec

$$V = \text{span}\{B_i^\alpha(x)B_j^\alpha(y), 1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y\} \subset L^2(\Omega),$$

$$W_{div} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} B_i^\alpha(x)D_j^\alpha(y) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ D_i^\alpha(x)B_j^\alpha(y) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y \right\} \subset H(\text{div}, \Omega),$$

$$W_{rot} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} D_i^\alpha(x)B_j^\alpha(y) \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ B_i^\alpha(x)D_j^\alpha(y) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y \right\} \subset H(\mathbf{rot}, \Omega),$$

$$X = \text{span}\{D_i^\alpha(x)D_j^\alpha(y), 1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y\} \subset H^1(\Omega),$$

$$\text{où } D_i^\alpha = \alpha \frac{B_i^{\alpha-1}(t)}{t_{i+\alpha}-t_i} \text{ et}$$

$$B_i^{\alpha'}(t) = D_i^\alpha(t) - D_{i+1}^\alpha(t).$$

On va considérer la deuxième formulation (114)-(115) et on va chercher la discrétisation de  $\mathbf{E}_h \in W_{div}$  et  $H_h \in H^1(\Omega)$ . Comme on doit avoir la propriété  $\text{div } \mathbf{E}_h \in X$ , on va alors noter

$$\psi_{i,j}^1 = \begin{pmatrix} B_i^\alpha(x)D_j^{\alpha-1}(y) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \psi_{i,j}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ D_i^{\alpha-1}(x)B_j^\alpha(y) \end{pmatrix}.$$

On obtient alors :

$$W_{div} = \text{span} \{ \psi_{i,j}^1, \psi_{i,j}^2, \quad 1 \leq i \leq N_x, 1 \leq j \leq N_y \}.$$

Les composantes discrètes  $(E_h^x, E_h^y)$  de  $\mathbf{E}_h$  ont pour forme

$$E_h^x(t, x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} e_{i,j}^x(t) B_i^\alpha(x) D_j^\alpha(y), \quad E_h^y(t, x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} e_{i,j}^y(t) D_i^\alpha(x) B_j^\alpha(y),$$

et

$$H_h^z(t, x, y) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} h_{i,j}^z(t) B_i^\alpha(x) B_j^\alpha(y),$$

avec  $e_{i,j}^x(t), e_{i,j}^y(t), h_{i,j}^z(t)$  les coefficients splines des  $E_h$  et  $H_h$  respectivement. Pour obtenir le rotationnel de  $H_h^z$  dans la base appropriée, on opère comme au chapitre 2.2 section 1 page 96 en effectuant un changement d'indice sur les coefficients splines de  $H_h^z$ . Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} \text{rot} H_h &= \sum_{i=2}^{N_x} \sum_{j=2}^{N_y} (h_{i,j}^z - h_{i,j-1}^z) \psi_{i,j}^1 - (h_{i,j}^z - h_{i-1,j}^z) \psi_{i,j}^2 \\ &+ \sum_{j=2}^{N_y} \{h_{1,j}^z - h_{1,j-1}^z\} \psi_{1,j}^1 + \sum_{i=2}^{N_x} \{h_{i-1,1}^z - h_{i,1}^z\} \psi_{i,1}^2 + h_{1,1}^z \psi_{1,1}^1 - h_{1,1}^z \psi_{1,1}^2. \end{aligned}$$

On obtient la formulation forte de l'équation d'Ampère (114) :

$$-\dot{\mathbf{e}} + R h^z = M_W^{-1} j, \quad (117)$$

où  $h^z, e^x, e^y$  sont les vecteurs de coefficients des splines,  $M_W$  est la matrice de masse à partir des fonctions de base de  $W_{div}$  et  $R$  la matrice composée de deux

blocs l'un correspondant à la dérivée dans la direction  $x$  et l'autre à la dérivée dans la direction  $y$ . Pour l'équation (115) on obtient la formulation suivante :

$$M_V \dot{h} = -K^T \mathbf{e},$$

avec  $K^T = M_W R$  et  $M_V$  la matrice de masse écrite à partir des fonctions de base de l'espace  $V$ . Pour la discrétisation en temps du second ordre, on pourra prendre un saute-mouton ou le schéma de Verlet.

Pour la résolution de Maxwell en 2D axisymétrique on a

$$\text{rot} \mathbf{E} = \partial_z E_r - \partial_r E_z, \quad \text{div} \mathbf{E} = \frac{1}{r} \partial_r (r E_r) + \partial_z E_z, \quad \text{et} \quad \mathbf{rot} B_\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \partial_r (r B_\theta) \\ -\partial_z B_\theta \end{pmatrix}.$$

Les bases associées au domaine paramétrique restent pratiquement les mêmes, on doit juste rajouter le jacobien de la transformation i.e.  $r$ . La matrice de masse concernant le champ électrique devient

$$M_{b,b'}^W = \int_{\Omega} \vec{\psi}_b \cdot \vec{\psi}_{b'} d\Omega,$$

et la matrice de masse concernant le champ magnétique

$$M_{b,b'}^V = \int_{\Omega} \varphi_b \varphi_{b'} d\Omega.$$

Elles restent identiques au cas cartésien, mis à part le fait que le Jacobien sera multiplié par  $r$ . La matrice concernant le rotationnel est de la forme

$$\begin{aligned} K_{b,b'} &= \int_{\Omega} \mathbf{rot} \varphi_b \cdot \vec{\psi}_{b'} d\Omega = \int_{\Omega} (r \partial_r \varphi_b + \varphi_b) \psi_{b'}^z - (r \partial_z \varphi_b) \psi_{b'}^r dr dz \\ &= \int_{\Omega} r (\partial_r \varphi_b \psi_{b'}^z - \partial_z \varphi_b \psi_{b'}^r) dr dz + \int_{\Omega} \varphi_b \psi_{b'}^z dr dz. \end{aligned}$$

On voit ici que l'on doit rajouter deux termes. Le premier  $r(\partial_r \varphi_b \psi_{b'}^z - \partial_z \varphi_b \psi_{b'}^r)$  qui diffère de la formulation cartésienne par la multiplication par  $r$  et le deuxième terme qui n'existait pas auparavant  $\varphi_b \psi_{b'}^z$  qui est à rajouter à la contribution en formulation axisymétrique.

## 16 RÉSULTATS NUMÉRIQUES

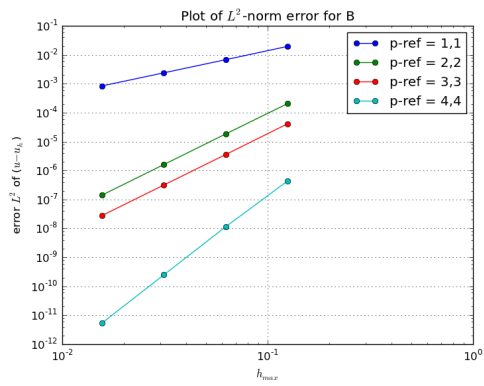
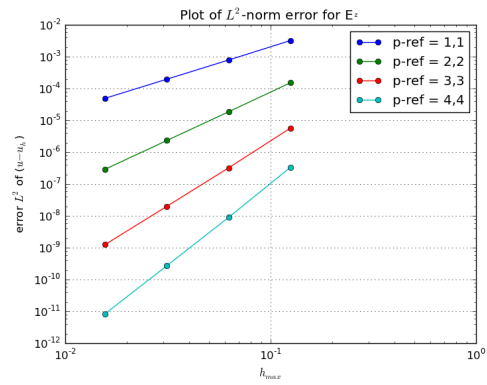
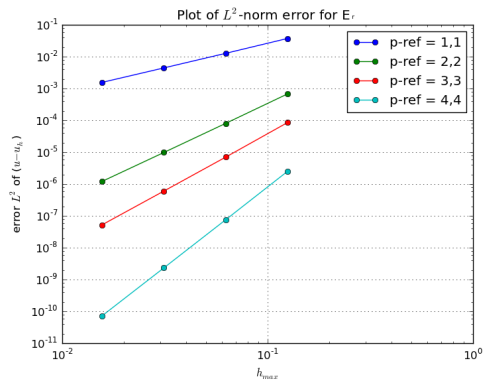
Nous testons l'ordre de convergence du solveur Maxwell sur un carré en axisymétrique en prenant le même type de solution que page 119 sur un rectangle  $z \in (0, L)$  et  $r \in (0, R)$  [22]. Soit  $m$  le mode. La solution analytique est :

$$\begin{aligned}
H(z, r) &= \frac{\omega \lambda_p}{c R} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} J_1\left(\frac{\lambda_p}{R} r\right) \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \cos(\omega t), \\
E^z(z, r) &= \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\lambda_p}{R}\right)^2 J_0\left(\frac{\lambda_p}{R} r\right) \cos\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \sin(\omega t), \\
E^r(z, r) &= \frac{1}{\mu_0} \frac{m\pi \lambda_p}{L R} J_1\left(\frac{\lambda_p}{R} r\right) \sin\left(\frac{m\pi z}{L}\right) \sin(\omega t),
\end{aligned}$$

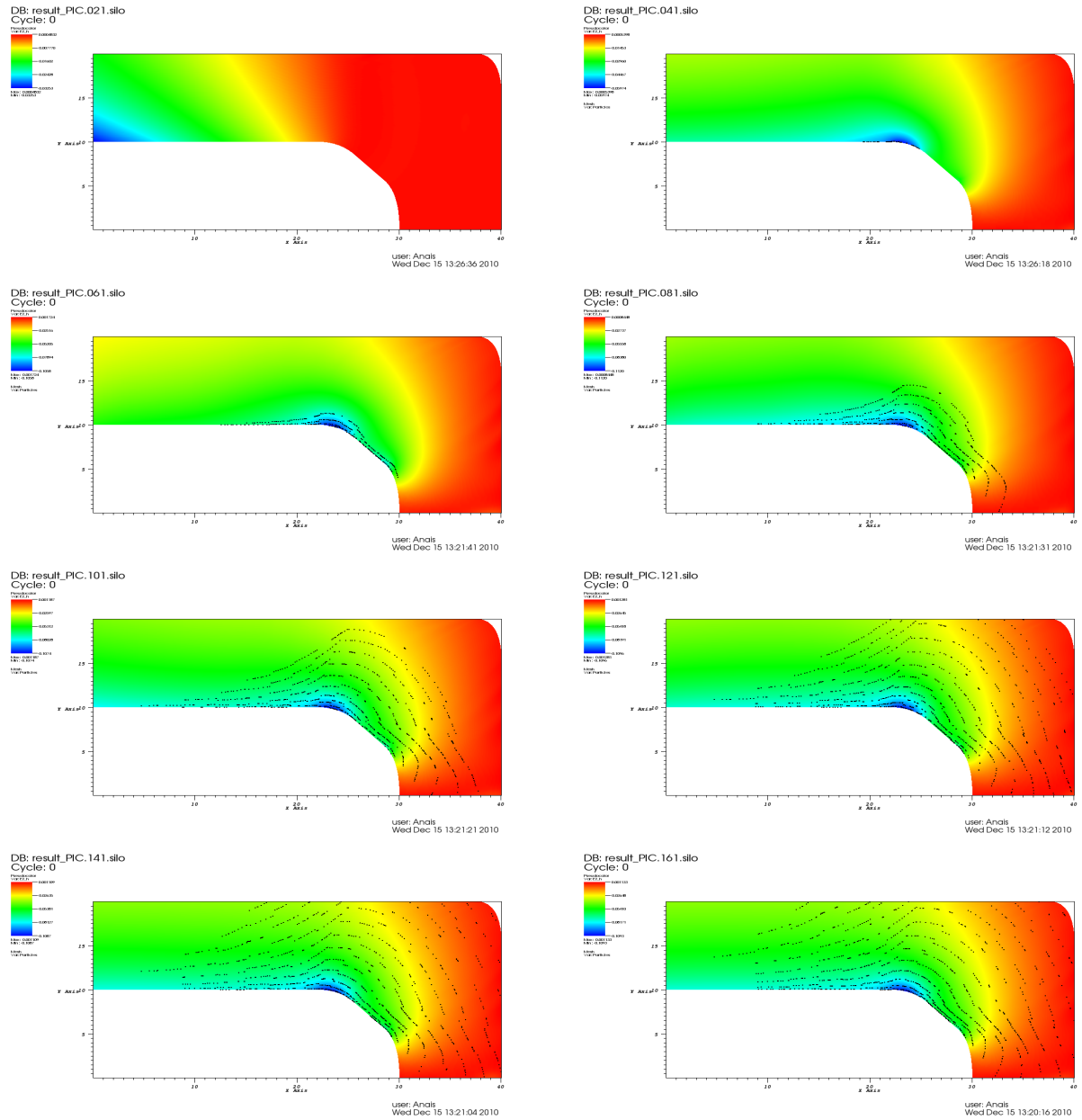
où  $J_n$  sont les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre  $n$ .  $\lambda_p$  est la  $p^{ieme}$  racine de  $J_0$ .

On trace l'erreur en norme  $L^2$  entre la solution calculée et la solution analytique en fonction du diamètre maximal des mailles, noté  $h$ . Nous prenons pour les tests un domaine  $[0, 1] \times [0, 1]$  et un nombre de mailles  $N$  égal à 4, 8, 16, 32 et 64. Le pas de temps choisi correspondant est  $1 \times 10^{-5}$  de manière à garder un rapport  $\frac{dt}{h}$  constant, où  $h$  est la taille caractéristique d'une maille dans le patch. On effectue respectivement 25, 50, 100, 200 et 400 itérations. Le schéma en temps est d'ordre 2. Les courbes sont représentées en échelle logarithmique sur la figure 51.

On étudie qualitativement l'extraction des particules dans le domaine physique de la diode. Les particules sont émises à la cathode sous les conditions d'extraction décrites page 180. On prend  $dt = 1.0 \times 10^{-2}$  comme pas de temps et on va jusqu'à 25 000 itérations. Dans les figures ci-dessous 52, on affiche le champ électrique  $E_r$  et les particules aux temps  $T = 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200$ .



**FIG. 51:** Avec la norme  $L^2$  pour le champ électrique  $E_z$ ,  $E_r$  et pour le champ magnétique  $B_\theta$ , pour des B-splines de degrés 1, 2, 3, 4.



**FIG. 52:** Le champ électrique et les électrons aux temps  $T=25$ ,  $T=50$  (première ligne),  $T=75$ ,  $T=100$  (seconde ligne),  $T=125$ ,  $T=150$  (troisième ligne),  $T=175$  et  $T=200$  (à la dernière ligne).





## Quatrième partie



### Conclusion et perspectives



---

# Conclusion

---

---

Nous avons étudié ici les aspects théoriques et numériques des équations dans le contexte de la géométrie différentielle et nous nous sommes plus particulièrement intéressés à l'équation de Vlasov et aux équations de Maxwell. Le système de Vlasov-Maxwell a été écrit dans un formalisme covariant ainsi que les quantités physique conservées au cours du temps. On a alors considéré d'une part que la fonction de distribution est une 0-forme différentielle et d'autre part comme une 6-forme différentielle sur l'espace des phases à six dimensions. Ces deux formulations se sont avérées équivalentes.

Dans une partie de la thèse, on a également utilisé la géométrie différentielle pour la convergence à deux échelles. On a montré que l'on pouvait considérer d'autres espaces pour contenir les oscillations et prendre en particulier des espaces symétriques. Ces espaces sont par ailleurs très importants pour la physique des champs et la physique quantique.

Nous avons ensuite utilisé des outils géométriques pour développer des méthodes de résolution numérique. On a alors, au lieu d'utiliser les éléments de Whitney, proposé de discrétiser les formes différentielles à l'aide des B-splines. Il s'est avéré que cette théorie rejoint l'analyse isogéométrique. On a également proposé une discrétisation de tous les opérateurs agissant sur les formes différentielles.

Puis on a testé le schéma numérique sur les équations de Maxwell avec différentes conditions aux bords et avec un changement de coordonnées [60]. On a vu alors que seule la discrétisation de l'opérateur de hodge change dans ce dernier cas. Ensuite, on a testé la méthode sur les équations de Vlasov-Poisson et on a montré que celui-ci correspond à des formulations bien connues telle que la méthode de volumes finis et la méthode semi-lagrangienne. On a donc proposé une formulation faible en utilisant le formalisme géométrique. Le schéma en temps, dans ce cas est résolu avec la méthode ETD. Cette méthode a permis de conserver la norme  $L^2$  à chaque étape du splitting et de s'affranchir de la condition CFL. Mais l'utilisation du splitting nous a fait perdre de la précision car on doit calculer les nouveaux coefficients splines à chaque étape.

En ce qui concerne le projet CEMRACS, on a développé un code qui résout les équations de Vlasov-Maxwell en géométrie 2D axisymétrique [22].

2 articles ont été écrits pour l'instant sur les résultats de cette thèse :

Back A. et Sonnendrücker E., Spline discrete differential forms. Application to Maxwell' s equations., 2010, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00568811/fr/>.

Back A. et Crestetto A. et Ratnani A. et Sonnendrücker E., Axisymmetric pic code based on isogeometrical analysis, Esaim : proceedings, 2010.



---

# Perspectives

---

---

Avec ceci, on voit que de nombreux projets restent à développer. Tout d'abord, on peut développer des codes qui considèrent la fonction de distribution comme une 2-forme différentielle et utiliser ou non le splitting pour résoudre l'équation de Vlasov-Poisson. En dimension supérieure, il serait intéressant d'effectuer un changement de coordonnées et peut-être de passer en coordonnées gyrocinétiques.

Comme on a développé la discrétisation des formes différentielles sur des hypercubes avec des B-splines, il serait intéressant d'utiliser ces mêmes fonctions de base sur un maillage de simplexes. La construction de ces fonctions sur ce type de maillage est en plein essor et assez prometteur [14, 93, 103]. Ce type de fonctions porte le nom de Box-splines. Il permettrait de développer une nouvelle discrétisation pour les formes différentielles avec le même type de maillage que celui utilisé pour les formes de Whitney.

Des techniques hamiltoniennes ont également été étudiées pour les codes PIC de simulation de plasmas, en particulier par Lewis et ses collaborateurs [17, 33]. On pourra réfléchir à l'utilisation d'un hamiltonien d'équilibre complètement intégrable pour améliorer l'efficacité d'un solveur numérique pour un hamiltonien faiblement perturbé non intégrable. On pourra alors adapter la méthode [69] avec la nôtre et l'étendre à la résolution de Vlasov-Poisson.

Pour la convergence à deux échelles on a vu que les oscillations peuvent être incluses dans un espace symétrique et compact. Il serait donc intéressant d'approfondir dans cette direction en appliquant la théorie considérée sur des exemples concrets de la Physique. On peut également s'intéresser au développement d'un code multi-échelles [23] pour l'équation de Vlasov-Poisson en prenant en compte un espace symétrique adéquat et en travaillant avec les mêmes géodésiques utilisées pour faire de la convergence à deux échelles.



---

# Bibliographie

---

---

- [1] Bossavit A. Differential forms and the computation of fields and forces in electromagnetism. *European J. Mech. B Fluids*, 10(5) :474–488, 1991.
- [2] Bossavit A. *Electromagnetism, in view of modeling. (Électromagnétisme, en vue de la modélisation.)*. Mathématiques & Applications (Paris). 14. Paris : Springer-Verlag,. xiii, 174 p. DM 70.00 ; öS 546.00 ; sFr. 77.00, 1993.
- [3] Bossavit A. *Computational electromagnetism*. 1998.
- [4] Bossavit A. Generating whitney forms of polynomial degree one and high. *IEEE Trans. on Magnetics*, 38(2) :341–344, 2002.
- [5] Bossavit A. Extrusion, contraction : their discretization via Whitney forms. *COMPEL*, 22(3) :470–480, 2003.
- [6] McKenzie A. *HOLA : a High-Order Lie Advection of Discrete Differential Forms*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2007.
- [7] Mouton A. Two-scale semi-Lagrangian simulation of a charged particle beam in a periodic focusing channel. *Kinet. Relat. Models*, 2(2) :251–274, 2009.
- [8] Vlasov A. A. *Many-particle theory and its application to plasma*. Translated from the Russian. Gordon and Breach Science Publishers, Inc., New York, 1961.
- [9] Anné C. Principe de Dirichlet pour les formes différentielles. *Bull. Soc. Math. France*, 117(4) :445–450, 1989.
- [10] Pak H. C. Geometric two-scale convergence on forms and its applications to maxwell's equations. *Proc. R. Soc. Edinb., Sect. A, Math.*, 135(1) :133–147, 2005.
- [11] Birkhoff G. D. What is the ergodic theorem ? *Amer. Math. Monthly*, 49 :222–226, 1942.
- [12] Han-Kwan D. The three-dimensional finite Larmor radius approximation. *Asymptot. Anal.*, 66(1) :9–33, 2010.
- [13] Tong D. Lectures on classical dynamics.
- [14] de Boor C. On the evaluation of box splines. *Numer. Algorithms*, 5(1-4) :5–23, 1993. Algorithms for approximation, III (Oxford, 1992).

- [15] de Boor C. *A practical guide to splines*, volume 27 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, revised edition, 2001.
- [16] Hopf E. Statistik der geodätischen Linien in Mannigfaltigkeiten negativer Krümmung. *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig*, 91 :261–304, 1939.
- [17] Lewis H.R. et Barnes D. C. et Melendez K. J. The liouville theorem and accurate plasma simulation. *J. Comput. Phys.*, 69 :267–282, 1987.
- [18] Evans J.A. et Bazilevs Y. et Babuska I. et Hughes T.J.R. n-widths, sup-infs, and optimality ratios for the k-version of the isogeometric finite element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198(21-26) :1726 – 1741, 2009. *Advances in Simulation-Based Engineering Sciences - Honoring J. Tinsley Oden*.
- [19] Buffa A. et Cho D. et Sangalli G. Linear independence of the T-spline blending functions associated with some particular T-meshes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199(23-24) :1437–1445, 2010.
- [20] Barthelmé R. et Ciarlet Jr. P. et Sonnendrücker E. Generalized formulations of Maxwell’s equations for numerical Vlasov-Maxwell simulations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 17(5) :657–680, 2007.
- [21] Martin T. et Cohen E. et Kirby R.M.". Volumetric parameterization and trivariate b-spline fitting using harmonic functions. *Computer Aided Geometric Design*, 26(6) :648 – 664, 2009. *Solid and Physical Modeling 2008, ACM Symposium on Solid and Physical Modeling and Applications*.
- [22] Back A. et Crestetto A. et Ratnani A. et Sonnendrücker E. Axisymmetric pic code based on isogeometrical analysis. *Esaim : proceedings*, 2010.
- [23] Rahman I. U. et Drori I. et Stodden V. C. et Donoho D. L. et Schröder P. Multiscale representations for manifold-valued data. *Multiscale Model. Simul.*, 4(4) :1201–1232, 2005.
- [24] Arnold D. N. et Falk R. S. et Winther R. Finite element exterior calculus, homological techniques, and applications. *Acta Numer.*, 15 :1–155, 2006.
- [25] Klimas A. J. et Farwell W.M. A splitting algorithm for vlasov simulation with filamentation filtration. *Journal of computational physics*, 110(1) :150–163, 1994.
- [26] Agricola I. et Friedrich T. *Global analysis*, volume 52 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [27] Aigner M. et Heinrich C. et Jüttler B. et Pilgerstorfer E. et Simeon B. et Vuong A. V. Swept volume parameterization for isogeometric analysis. In *Proceedings of the 13th IMA International Conference on Mathematics of Surfaces XIII*, pages 19–44, Berlin, Heidelberg, 2009. Springer-Verlag.
- [28] Huang Q.X. et Hu S.M. et Martin R.R. Fast degree elevation and knot insertion for b-spline curves. *Computer Aided Geometric Design*, 22(2) :183 – 197, 2005.



- [29] Gallot S. et Hulin D. et Lafontaine J. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, third edition, 2004.
- [30] Desbrun M. et Kanso E. et Tong Y. Discrete differential forms for computational modeling. In *Discrete differential geometry*, volume 38 of *Oberwolfach Semin.*, pages 287–324. Birkhäuser, Basel, 2008.
- [31] Desbrun M. et Kanso E. et Tong Y. Discrete differential forms for computational modeling. In *Discrete differential geometry*, volume 38 of *Oberwolfach Semin.*, pages 287–324. Birkhäuser, Basel, 2008.
- [32] Tarhasaari T. et Kettunen T. et Bossavit A. Some realizations of a discrete hodge : A reinterpretation of finite element techniques. *IEEE Trans. Magnetics*, 35 :1494–1497, 1999.
- [33] Bridesall C.K. et Langdon A.B. *Plasma Physics via Computer Simulation*. Bristol/Philadelphia, Inst. of Phys., 1991.
- [34] Desbrun M. et Leok M. et Marsden J. E. In *Discrete Exterior Calculus*. 2003.
- [35] Desbrun M. et Leok M. et Marsden J. E. Discrete Poincaré lemma. *Appl. Numer. Math.*, 53(2-4) :231–248, 2005.
- [36] DeVore R.A. et Lorentz G.G. *Constructive Approximation*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1993.
- [37] Abraham R. et Marsden J. E. et Ratiu T. *Manifolds, tensor analysis, and applications*, volume 75 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1988.
- [38] Cohen E. et Martin T. et Kirby R.M. et Lyche T. et Riesenfeld R.F. Analysis-aware modeling : Understanding quality considerations in modeling for isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199(5-8) :334 – 356, 2010. Computational Geometry and Analysis.
- [39] Cox S. M. et Matthews P. C. Exponential time differencing for stiff systems. *J. Comput. Phys.*, 176(2) :430–455, 2002.
- [40] Cox S.M. et Matthews P.C. Exponential time differencing for stiff systems. *J. Comput. Phys.*, 176(2) :430–455, 2002.
- [41] Mullen P. et McKenzie A. et Pavlov D. et Durant L. et Tong Y. et Kanso E. et Marsden J. E. et Desbrun M. Discrete Lie advection of differential forms. *Found. Comput. Math.*, 11(2) :131–149, 2011.
- [42] Besse N. et Mehrenberger M. Convergence of classes of high-order semi-Lagrangian schemes for the Vlasov-Poisson system. *Math. Comp.*, 77(261) :93–123 (electronic), 2008.
- [43] Crouseilles N. et Mehrenberger M. et Sonnendrücker E. Conservative semi-Lagrangian schemes for Vlasov equations. *J. Comput. Phys.*, 229(6) :1927–1953, 2010.
- [44] Weller S. R. et Moran W. et Ninness B. et Pollington A. D. Sampling zeros and the Euler-Frobenius polynomials. *IEEE Trans. Automat. Control*, 46(2) :340–343, 2001.

- [45] Xu G. et Mourrain B. et Duvigneau R. et Galligo A. Optimal analysis-aware parameterization of computational domain in isogeometric analysis. submitted.
- [46] Marsden J. E. et O'Reilly O. M. et Wicklin F. J. et Zombro B. W. Symmetry, stability, geometric phases, and mechanical integrators. I. *Nonlinear Sci. Today*, 1(1) :4–11, 1991.
- [47] Marsden J. E. et O'Reilly O. M. et Wicklin F. J. et Zombro B. W. Symmetry, stability, geometric phases, and mechanical integrators. II. *Nonlinear Sci. Today*, 1(2) :14–21, 1991.
- [48] Hochbruck M. et Ostermann A. Exponential integrators. *Acta Numer.*, 19 :209–286, 2010.
- [49] Hochbruck M. et Ostermann A. et Schweitzer J. Exponential Rosenbrock-type methods. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(1) :786–803, 2008/09.
- [50] Prautzsch H. et Piper B. A fast algorithm to raise the degree of spline curves. *Comput. Aided Geom. Des.*, 8 :253–265, October 1991.
- [51] Bossavit A. et Rapetti F. A prolongation/restriction operator for Whitney elements on simplicial meshes. *SIAM J. Numer. Anal.*, 43(5) :2077–2097 (electronic), 2005.
- [52] Bossavit A. et Rapetti F. Geometrical localisation of the degrees of freedom for whitney elements of higher order. *IET Sci. Meas. Technol.*, 1(1) :63–66, January 2007.
- [53] Bossavit A. et Rapetti F. Whitney forms of higher degree. *SIAM J. Numer. Anal.*, 47(3) :2369–2386, 2009.
- [54] Frénod E. et Raviart P.-A. et Sonnendrücker E. Two-scale expansion of a singularly perturbed convection equation. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 80(8) :815–843, 2001.
- [55] Crouseilles N. et Respaud T. et Sonnendrücker E. A forward semi-Lagrangian method for the numerical solution of the Vlasov equation. *Comput. Phys. Comm.*, 180, 2009.
- [56] Sonnendrücker E. et Roche J. et Bertrand P. et Ghizzo A. The semi-Lagrangian method for the numerical resolution of the Vlasov equation. *J. Comput. Phys.*, 149(2) :201–220, 1999.
- [57] Buffa A. et Sangalli G. et Vázquez R. Isogeometric analysis in electromagnetics : B-splines approximation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 199(17-20) :1143–1152, 2010.
- [58] Elcott S. et Schöder P. Building your own dec at home. *Caltech*, inconnu.
- [59] Curry H.B. et Schoenberg I.J. On polya frequency functions iv : The fundamental spline functions and their limits. *J. d'Analyse Math.*, 17 :71–107, 1966.

- [60] Back A. et Sonnendrücker E. Spline discrete differential forms. application to maxwell' s equations. [http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00568811/fr/](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00568811/fr/), 2010.
- [61] Filbet F. et Sonnendrücker E. Numerical methods for the Vlasov equation. In *Numerical mathematics and advanced applications*, pages 459–468. Springer Italia, Milan, 2003.
- [62] Frénod E. et Sonnendrücker E. The finite Larmor radius approximation. *SIAM J. Math. Anal.*, 32(6) :1227–1247 (electronic), 2001.
- [63] Ratnani A. et Sonnendrücker E. Arbitrary high-order spline finite element solver for the time domain maxwell equations. [http ://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00507758/fr](http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00507758/fr/), 2010.
- [64] Filbet F. et Sonnendrücker E. et Bertrand P. Conservative numerical schemes for the Vlasov equation. *J. Comput. Phys.*, 172(1) :166–187, 2001.
- [65] Filbet F. et Sonnendrücker E. comparison of eulerian vlasov solvers. *Computer Physics Communications*, 150 :247–266, 2003.
- [66] He B. et Teixeira F. L. Geometric finite element discretization of Maxwell equations in primal and dual spaces. *Phys. Lett. A*, 349(1-4) :1–14, 2006.
- [67] He B. et Teixeira F. L. Geometric finite element discretization of Maxwell equations in primal and dual spaces. *Phys. Lett. A*, 349(1-4) :1–14, 2006.
- [68] Piegl L. et Tiller W. *The NURBS Book*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1995. second ed.
- [69] Stern A. et Tong T. et Desbrun M. et Marsden J.E. Computational electromagnetism with variational integrators and discrete differential forms. *arXiv :0707.4470v2*.
- [70] Gol'dshtein V. et Troyanov M. Sobolev inequalities for differential forms and  $L_{q,p}$ -cohomology. *J. Geom. Anal.*, 16(4) :597–631, 2006.
- [71] Gol'dshtein V. et Troyanov M. A conformal de Rham complex. *J. Geom. Anal.*, 20(3) :651–669, 2010.
- [72] Hairer E. et Wanner G. *Solving ordinary differential equations.II*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [73] Graglia R. D. et Wilton D. R. et Peterson A. F. et Gheorma I. L. Higher order interpolatory vector bases on prism elements. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 46(3) :442–450, 1998.
- [74] Norguet F. Problèmes sur les formes différentielles et les courants. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 11 :1–82, XIII–XIV, 1961.
- [75] Emmanuel Frénod and Eric Sonnendrücker. Homogenization of the Vlasov equation and of the Vlasov-Poisson system with a strong external magnetic field. *Asymptot. Anal.*, 18(3-4) :193–213, 1998.
- [76] Allaire G. Homogenization and two-scale convergence. *SIAM J. Math. Anal.*, 23(6) :1482–1518, 1992.

- [77] Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization. *SIAM J. Math. Anal.*, 20(3) :608–623, 1989.
- [78] Goldstein H. *Classical mechanics*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., second edition, 1980. Addison-Wesley Series in Physics.
- [79] Qin H. A short introduction to general gyrokinetic theory. In *Topics in kinetic theory*, volume 46 of *Fields Inst. Commun.*, pages 171–192. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2005.
- [80] Scott C. H.  *$L^p$  theory of differential forms on manifolds*. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 1993. Thesis (Ph.D.)–Syracuse University.
- [81] Scott C. H.  $L^p$  theory of differential forms on manifolds. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(6) :2075–2096, 1995.
- [82] Whitney H. *Geometric integration theory*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1957.
- [83] Arnold V. I. *Mathematical methods of classical mechanics*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1976.
- [84] Chavel I. *Riemannian geometry*, volume 98 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2006. A modern introduction.
- [85] Mautner F. I. Geodesic flows on symmetric Riemann spaces. *Ann. of Math. (2)*, 65 :416–431, 1957.
- [86] Jost J. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, fifth edition, 2008.
- [87] Klimas A. J. A method for overcoming the velocity space filamentation problem in collisionless plasma model solutions. *Journal of computational physics*, 68(1) :202–226, 1987.
- [88] Bowen J.P. *Hypercubes*. Practical Computing, avril 1982.
- [89] Schwartz L. Courant associé à une forme différentielle méromorphe sur une variété analytique complexe. In *Géométrie différentielle. Colloques Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique, Strasbourg, 1953*, pages 185–195.
- [90] Schwartz L. *Théorie des distributions*. Publications de l’Institut de Mathématique de l’Université de Strasbourg, No. IX-X. Nouvelle édition, entièrement corrigée, refondue et augmentée. Hermann, Paris, 1966.
- [91] Coxeter H. S. M. *The beauty of geometry*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 1999. Twelve essays, Reprint of the 1968 original [it Twelve geometric essays, Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, IL, 1968 ; MR0310745 (46 #9843)].
- [92] Hirani A. N. *Discrete Exterior Calculus*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2003.

- [93] Hartmut Prautzsch and Wolfgang Boehm. Box splines. In *Handbook of computer aided geometric design*, pages 255–282. North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [94] Barthelmé R. *Le problème de conservation de la charge dans le couplage des équations de Vlasov et de Maxwell*. PhD thesis, Université de Strasbourg, 2005.
- [95] Hiptmair R. Discrete hodge operators. *Numer. Math.*, 90(2) :265–289, 2001.
- [96] Hiptmair R. Finite elements in computational electromagnetism. *Acta Numerica*, 11 :237–339, 2002.
- [97] Elcott S. *Discrete, Circulation-Preserving, and Stable Simplicial Fluid*. PhD thesis, California Institute of Technology, 2005.
- [98] Helgason S. *Differential geometry, Lie groups, and symmetric spaces*, volume 34 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001. Corrected reprint of the 1978 original.
- [99] Krogstad S. Generalized integrating factor methods for stiff PDEs. *J. Comput. Phys.*, 203(1) :72–88, 2005.
- [100] Lala S. *Approximation Géométrique pour des équations de l'électrodynamique*. PhD thesis, L'école Nationale des Ponts et Chaussée, 1998.
- [101] Masson T. *Géométrie différentielle, groupes et algèbre de lie, fibrés et connexions*. 2010.
- [102] Arnold V. *Les méthodes mathématiques de la mécanique classique*. Éditions Mir, Moscow, 1976. Traduit du russe par Djilali Embarek.
- [103] Patrick J. Van Fleet. Some recurrence formulas for box splines and cone splines. *Approx. Theory Appl. (N.S.)*, 18(1) :81–89, 2002.
- [104] Gross P. W. and Kotiuga P. R. *Electromagnetic theory and computation : a topological approach*, volume 48 of *Mathematical Sciences Research Institute Publications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.



---

# Annexes

---

## EQUATIONS DU MOUVEMENT

### 0.1 Coordonnées cylindriques

#### Changement de coordonnées

Soient

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

les coordonnées cartésiennes et

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix}$$

les coordonnées cylindriques, avec

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan(\frac{y}{x}) \\ z \end{pmatrix}.$$

Le Jacobien de ce changement de coordonnées s'écrit

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = r.$$

## Expression du Lagrangien

Le Lagrangien s'écrit en coordonnées cartésiennes

$$L(\mathbf{X}, \dot{\mathbf{X}}, t) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{X}}^2 - e(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{X}} - \phi) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - e(A_x\dot{x} + A_y\dot{y} + A_z\dot{z} - \phi),$$

où on utilise la notation

$$\dot{u} = \frac{du}{dt},$$

avec  $\mathbf{A}$  le potentiel vecteur et  $\phi$  le potentiel scalaire.

Cherchons son expression en coordonnées cylindriques :

$$\tilde{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = L(\mathbf{X}(\mathbf{q}), \dot{\mathbf{X}}(\mathbf{q}), t).$$

On a :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\ \dot{x} &= \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta & \Rightarrow \dot{x}^2 &= \dot{r}^2 \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta - 2r\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \end{aligned}$$

de même

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta \quad \Rightarrow \dot{y}^2 = \dot{r}^2 \sin^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2 \cos^2 \theta + 2r\dot{r}\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta$$

et

$$\dot{z} = \dot{z} \quad \Rightarrow \dot{z}^2 = \dot{z}^2.$$

On peut en déduire que

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2.$$

## Transformation covariante du potentiel vecteur $\mathbf{A}$

On a :



$$\begin{aligned}
A_x &= \frac{\partial r}{\partial x} A_r + \frac{\partial \theta}{\partial x} A_\theta + \frac{\partial z}{\partial x} A_z \\
&= \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} A_r + \frac{-y}{x^2 + y^2} A_\theta \\
&= \frac{r \cos \theta}{r} A_r - \frac{r \sin \theta}{r^2} A_\theta \\
&= \cos \theta A_r - \frac{\sin \theta}{r} A_\theta,
\end{aligned}$$

de même,

$$A_y = \sin \theta A_r + \frac{\cos \theta}{r} A_\theta$$

et

$$A_z = \frac{\partial r}{\partial z} A_r + \frac{\partial \theta}{\partial z} A_\theta + \frac{\partial z}{\partial z} A_z = A_z.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{aligned}
A_x \dot{x} + A_y \dot{y} + A_z \dot{z} &= (\cos \theta A_r - \frac{\sin \theta}{r} A_\theta)(\dot{r} \cos \theta - r \dot{\theta} \sin \theta) \\
&\quad + (\sin \theta A_r + \frac{\cos \theta}{r} A_\theta)(\dot{r} \sin \theta + r \dot{\theta} \cos \theta) + A_z \dot{z} \\
&= A_r \dot{r} + A_\theta \dot{\theta} + A_z \dot{z}
\end{aligned}$$

et

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - e (A_r \dot{r} + A_\theta \dot{\theta} + A_z \dot{z} - \phi).$$

### Equations d'Euler-Lagrange

On considère les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \mathbf{q}}.$$

Or

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{L}}{\partial r} &= mr\dot{\theta}^2 - e\left(\dot{r}\frac{\partial A_r}{\partial r} + \dot{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial \phi}{\partial r}\right), \\
\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \theta} &= -e\left(\dot{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \dot{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right), \\
\frac{\partial \tilde{L}}{\partial z} &= -e\left(\dot{r}\frac{\partial A_r}{\partial z} + \dot{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial z} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z}\right),
\end{aligned}$$

d'autre part

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{r}} &= m\dot{r} - eA_r, \\
\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\theta}} &= mr^2\dot{\theta} - eA_\theta, \\
\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{z}} &= m\dot{z} - eA_z,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{r}} &= m\ddot{r} - e\left(\dot{r}\frac{\partial A_r}{\partial r} + \dot{\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \dot{z}\frac{\partial A_r}{\partial z} + \frac{\partial A_r}{\partial t}\right), \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{\theta}} &= 2mrr\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} - e\left(\dot{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \dot{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dot{z}\frac{\partial A_\theta}{\partial z} + \frac{\partial A_\theta}{\partial t}\right), \\
\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{z}} &= m\ddot{z} - e\left(\dot{r}\frac{\partial A_z}{\partial r} + \dot{\theta}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit les équations du mouvement :

$$\left\{ \begin{aligned}
m\ddot{r} - e\left(\dot{r}\frac{\partial A_r}{\partial r} + \dot{\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \dot{z}\frac{\partial A_r}{\partial z} + \frac{\partial A_r}{\partial t}\right) &= mr\dot{\theta}^2 - e\left(\dot{r}\frac{\partial A_r}{\partial r} + \dot{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial \phi}{\partial r}\right) \\
2mrr\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} - e\left(\dot{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \dot{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dot{z}\frac{\partial A_\theta}{\partial z} + \frac{\partial A_\theta}{\partial t}\right) &= -e\left(\dot{r}\frac{\partial A_r}{\partial \theta} + \dot{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) \\
m\ddot{z} - e\left(\dot{r}\frac{\partial A_z}{\partial r} + \dot{\theta}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial A_z}{\partial t}\right) &= -e\left(\dot{r}\frac{\partial A_r}{\partial z} + \dot{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial z} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial z} - \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)
\end{aligned} \right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} m\ddot{r} - e\left(\dot{\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} + \dot{z}\frac{\partial A_r}{\partial z} + \frac{\partial A_r}{\partial t}\right) = mr\dot{\theta}^2 - e\left(\dot{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial\phi}{\partial r}\right) \\ 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} - e\left(\dot{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \dot{z}\frac{\partial A_\theta}{\partial z} + \frac{\partial A_\theta}{\partial t}\right) = -e\left(\dot{r}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} + \dot{z}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \\ m\ddot{z} - e\left(\dot{r}\frac{\partial A_z}{\partial r} + \dot{\theta}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial t}\right) = -e\left(\dot{r}\frac{\partial A_r}{\partial z} + \dot{\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\left\{ \begin{array}{l} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -e\left(\dot{\theta}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) + \dot{z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial z}\right) - \frac{\partial A_r}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial r}\right) \\ 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} = -e\left(\dot{r}\left(\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial r}\right) + \dot{z}\left(\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) - \frac{\partial A_\theta}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) \\ m\ddot{z} = -e\left(\dot{r}\left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) + \dot{\theta}\left(\frac{\partial A_\theta}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\theta}\right) - \frac{\partial A_z}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial z}\right) \end{array} \right.$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} \\ m\ddot{z} \end{pmatrix} = -e(\dot{\mathbf{q}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} \end{pmatrix} = -\frac{e}{m} \left( \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{r} \\ \dot{\theta} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} r B_z \\ r B_r \\ \frac{B_\theta}{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_z \\ E_r \\ E_\theta \end{pmatrix} \right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} r \ddot{z} \\ r \ddot{r} - (r\dot{\theta})^2 \\ 2r\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} \end{pmatrix} = -\frac{e}{m} \left( \begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{r} \\ \dot{\theta} r^2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_z \\ B_r \\ B_\theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r E_z \\ r E_r \\ \frac{E_\theta}{r} \end{pmatrix} \right).$$

## 0.2 Coordonnées quelconques

On souhaite maintenant passer d'un système de coordonnées quelconques  $(\xi, \eta, \theta)$  aux coordonnées cylindriques. On pose  $F$  la fonction telle que  $F(\xi, \eta, \theta) = (z, r, \theta)$ . On se place tout de suite en géométrie  $2D$  axisymétrique, en faisant l'hypothèse que  $\dot{\theta} = 0$  :

$$F(\xi, \eta) = (z, r).$$

On rappelle le Lagrangien en coordonnées cylindriques :

$$\tilde{L} = \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 + \dot{r}^2) - e(A_z \dot{z} + A_r \dot{r} - \phi).$$

Nous avons

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial r}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial r}{\partial \eta} \dot{\eta},$$

ainsi que

$$\dot{z} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \dot{\eta}.$$

On en déduit que

$$\dot{r}^2 + \dot{z}^2 = \left(\left(\frac{\partial r}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2\right)\dot{\xi}^2 + \left(\left(\frac{\partial r}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2\right)\dot{\eta}^2 + 2\left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\dot{\xi}\dot{\eta}.$$

### Transformation covariante du potentiel vecteur $\mathbf{A}$

On a :

$$A_\xi = \frac{\partial r}{\partial \xi} A_r + \frac{\partial z}{\partial \xi} A_z,$$

et

$$A_\eta = \frac{\partial r}{\partial \eta} A_r + \frac{\partial z}{\partial \eta} A_z.$$

Ainsi dans les nouvelles coordonnées le potentiel vecteur s'écrit

$$\begin{aligned}
A_r \dot{r} + A_z \dot{z} &= A_r \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial r}{\partial \eta} \dot{\eta} \right) + A_z \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \dot{\eta} \right) \\
&= \left( A_r \frac{\partial r}{\partial \xi} + A_z \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \dot{\xi} + \left( A_r \frac{\partial r}{\partial \eta} + A_z \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \dot{\eta} \\
&= A_\xi \dot{\xi} + A_\eta \dot{\eta},
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2} m \left( \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2 \right) \dot{\xi}^2 + \left( \left( \frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2 \right) \dot{\eta}^2 + 2 \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) \dot{\xi} \dot{\eta} \\
&\quad - e(A_\xi \dot{\xi} + A_\eta \dot{\eta} - \phi).
\end{aligned}$$

On pose

$$M_\xi = \left( \frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \xi} \right)^2,$$

$$M_\eta = \left( \frac{\partial r}{\partial \eta} \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial \eta} \right)^2,$$

et

$$M_{\xi\eta} = \frac{\partial r}{\partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

on peut alors écrire

$$L = \frac{1}{2} m (M_\xi \dot{\xi}^2 + M_\eta \dot{\eta}^2 + 2M_{\xi\eta} \dot{\xi} \dot{\eta}) - e(A_\xi \dot{\xi} + A_\eta \dot{\eta} - \phi).$$

### Equations d'Euler-Lagrange

On rappelle que

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}},$$

où

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}.$$

Calculons les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} = 2 \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} \frac{\partial r}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial z}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial M_\xi}{\partial \eta} = 2 \frac{\partial^2 r}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial M_\eta}{\partial \eta} = 2 \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} \frac{\partial r}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial M_\eta}{\partial \xi} = 2 \frac{\partial^2 r}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 r}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \xi},$$

et

$$\frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 r}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial r}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} \frac{\partial r}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \frac{\partial z}{\partial \xi}.$$

On en déduit que

$$\frac{\partial L}{\partial \xi} = \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} \dot{\xi}^2 + \frac{\partial M_\eta}{\partial \xi} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \xi} \dot{\xi} \dot{\eta} \right) - e \left( \frac{\partial A_\xi}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} \dot{\eta} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right),$$

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial M_\xi}{\partial \eta} \dot{\xi}^2 + \frac{\partial M_\eta}{\partial \eta} \dot{\eta}^2 + 2 \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \eta} \dot{\xi} \dot{\eta} \right) - e \left( \frac{\partial A_\xi}{\partial \eta} \dot{\xi} + \frac{\partial A_\eta}{\partial \eta} \dot{\eta} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right).$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \frac{1}{2}m(2M_{\xi}\dot{\xi} + 2M_{\xi\eta}\dot{\eta}) - eA_{\xi} = m(M_{\xi}\dot{\xi} + M_{\xi\eta}\dot{\eta}) - eA_{\xi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} = \frac{1}{2}m(2M_{\eta}\dot{\eta} + 2M_{\xi\eta}\dot{\xi}) - eA_{\eta} = m(M_{\eta}\dot{\eta} + M_{\xi\eta}\dot{\xi}) - eA_{\eta}.$$

Les dérivées en temps s'écrivent

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} &= m(M_{\xi}\ddot{\xi} + M_{\xi\eta}\ddot{\eta} + \frac{\partial M_{\xi}}{\partial \xi}(\dot{\xi})^2 + \frac{\partial M_{\xi}}{\partial \eta}\dot{\eta}\dot{\xi} + \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \eta}(\dot{\eta})^2 + \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \xi}\dot{\xi}\dot{\eta}) \\ &\quad - e\left(\frac{\partial A_{\xi}}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial A_{\xi}}{\partial \eta}\dot{\eta} + \frac{\partial A_{\xi}}{\partial t}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\eta}} &= m(M_{\eta}\ddot{\eta} + M_{\xi\eta}\ddot{\xi} + \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \xi}(\dot{\xi})^2 + \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \eta}\dot{\eta}\dot{\xi} + \frac{\partial M_{\eta}}{\partial \eta}(\dot{\eta})^2 + \frac{\partial M_{\eta}}{\partial \xi}\dot{\xi}\dot{\eta}) \\ &\quad - e\left(\frac{\partial A_{\eta}}{\partial \xi}\dot{\xi} + \frac{\partial A_{\eta}}{\partial \eta}\dot{\eta} + \frac{\partial A_{\eta}}{\partial t}\right). \end{aligned}$$

On obtient donc les équations du mouvement dans ce système de coordonnées quelconques :

$$\begin{aligned}
m(M_\xi \ddot{\xi} + M_{\xi\eta} \ddot{\eta}) &= e \left( \frac{\partial A_\xi}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial A_\xi}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial A_\xi}{\partial t} \right) \\
&+ m \left( \left( \frac{-1}{2} \frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} \right) \xi^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial M_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \eta} \right) \dot{\eta}^2 - \frac{\partial M_\xi}{\partial \eta} \dot{\xi} \dot{\eta} \right) \\
&- e \left( \frac{\partial A_\xi}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} \dot{\eta} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
m(M_\eta \ddot{\eta} + M_{\xi\eta} \ddot{\xi}) &= +e \left( \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} \dot{\xi} + \frac{\partial A_\eta}{\partial \eta} \dot{\eta} + \frac{\partial A_\eta}{\partial t} \right) \\
&+ m \left( \left( \frac{1}{2} \frac{\partial M_\xi}{\partial \eta} - \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \xi} \right) \xi^2 + \left( \frac{-1}{2} \frac{\partial M_\eta}{\partial \eta} \right) \dot{\eta}^2 - \frac{\partial M_\eta}{\partial \xi} \dot{\xi} \dot{\eta} \right) \\
&- e \left( \frac{\partial A_\xi}{\partial \eta} \dot{\xi} + \frac{\partial A_\eta}{\partial \eta} \dot{\eta} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \right).
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi = \begin{pmatrix} -\frac{\partial A_\xi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial A_\eta}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial \eta} \end{pmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{q}} \wedge \begin{pmatrix} \frac{B_\xi M_\eta - B_\eta M_{\xi\eta}}{\det(J)} \\ \frac{B_\eta M_\xi - B_\xi M_{\xi\eta}}{\det(J)} \end{pmatrix} = \dot{\mathbf{q}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A}) = \begin{pmatrix} \dot{\eta} \left( \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial A_\xi}{\partial \eta} \right) \\ -\dot{\xi} \left( \frac{\partial A_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial A_\xi}{\partial \eta} \right) \end{pmatrix},$$

avec  $(B_\xi, B_\eta)$  les coordonnées de  $\mathbf{B}$  dans le nouveau système. Donc :

$$\begin{aligned}
M_\xi \ddot{\xi} + M_{\xi\eta} \ddot{\eta} &= \left( \frac{-1}{2} \frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} \right) \xi^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial M_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \eta} \right) \dot{\eta}^2 - \frac{\partial M_\xi}{\partial \eta} \dot{\xi} \dot{\eta} \\
&- \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})) |_\xi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_\eta \ddot{\eta} + M_{\xi\eta} \ddot{\xi} &= \left( \frac{1}{2} \frac{\partial M_\xi}{\partial \eta} - \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \xi} \right) \xi^2 + \left( \frac{-1}{2} \frac{\partial M_\eta}{\partial \eta} \right) \dot{\eta}^2 - \frac{\partial M_\eta}{\partial \xi} \dot{\xi} \dot{\eta} \\
&- \frac{e}{m} (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge (\nabla \wedge \mathbf{A})) |_\eta,
\end{aligned}$$



où les dérivées en  $\xi$  et en  $\eta$  ont été explicitées plus haut.

Ceci est équivalent au système :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_{\xi}\ddot{\xi} + M_{\xi\eta}\ddot{\eta} - \left( \left( \frac{-1}{2} \frac{\partial M_{\xi}}{\partial \xi} \right) \dot{\xi}^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial M_{\eta}}{\partial \xi} - \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \eta} \right) \dot{\eta}^2 - \frac{\partial M_{\xi}}{\partial \eta} \dot{\xi}\dot{\eta} \right) \\ = -\frac{e}{m} (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) |_{\xi} \\ \\ M_{\eta}\ddot{\eta} + M_{\xi\eta}\ddot{\xi} - \left( \left( \frac{1}{2} \frac{\partial M_{\xi}}{\partial \eta} - \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \xi} \right) \dot{\xi}^2 + \left( \frac{-1}{2} \frac{\partial M_{\eta}}{\partial \eta} \right) \dot{\eta}^2 - \frac{\partial M_{\eta}}{\partial \xi} \dot{\xi}\dot{\eta} \right) \\ = -\frac{e}{m} (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) |_{\eta} \end{array} \right.$$

où  $\dot{\mathbf{q}} = (v_{\xi}, v_{\eta}) = (\dot{\xi}, \dot{\eta})$  sont les composantes de la vitesse dans les nouvelles coordonnées. Pour pouvoir implémenter ces équations, on doit tout d'abord les linéariser, ensuite on calcule explicitement les coefficients et on obtient après simplifications :

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(J) \frac{d\dot{\xi}}{dt} + \dot{\xi}^2 K_{\xi,\eta} + \dot{\eta}^2 K_{\eta,\eta} + 2\dot{\eta}\dot{\xi} K_{\eta\xi,\eta} \\ = -\frac{e}{m \det(J)} ((\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) |_{\xi}) M_{\eta} - (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) |_{\eta}) M_{\xi\eta} \\ \\ \det(J) \frac{d\dot{\eta}}{dt} - \dot{\xi}^2 K_{\xi,\xi} - \dot{\eta}^2 K_{\eta,\xi} - 2\dot{\eta}\dot{\xi} K_{\xi\eta,\xi} \\ = -\frac{e}{m \det(J)} ((\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) |_{\eta}) M_{\xi} - (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) |_{\xi}) M_{\xi\eta} \end{array} \right.$$

avec

$$\begin{aligned} K_{\xi,\xi} &= H_{\xi} V_{\xi}, \\ K_{\xi,\eta} &= H_{\xi} V_{\eta}, \\ K_{\eta,\eta} &= H_{\eta} V_{\eta}, \\ K_{\eta,\xi} &= H_{\eta} V_{\xi}, \\ K_{\xi\eta,\xi} &= H_{\xi\eta} V_{\xi}, \\ K_{\xi\eta,\eta} &= H_{\xi\eta} V_{\eta}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
H_\xi &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial^2 \xi} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial^2 \xi} \end{pmatrix}, \\
H_\eta &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial^2 \eta} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial^2 \eta} \end{pmatrix}, \\
H_{\xi\eta} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi \partial \eta} \end{pmatrix}, \\
V_\xi &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial F_1}{\partial \xi} \end{pmatrix}, \\
V_\eta &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial F_1}{\partial \eta} \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

et  $\det(J) = \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \frac{\partial F_2}{\partial \eta} - \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \frac{\partial F_2}{\partial \xi}$  correspond au déterminant du Jacobien du changement de variables.

### 0.3 Implémentation numérique

#### Les équations

Pour  $\dot{\theta} = 0$ , on doit résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} M_\xi \ddot{\xi} + M_{\xi\eta} \ddot{\eta} - \left( \left( \frac{-1}{2} \frac{\partial M_\xi}{\partial \xi} \right) \dot{\xi}^2 + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial M_\eta}{\partial \xi} - \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \eta} \right) \dot{\eta}^2 - \frac{\partial M_\xi}{\partial \eta} \dot{\xi} \dot{\eta} \right) \\ = -\frac{e}{m} (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) |_\xi \\ \\ M_\eta \ddot{\eta} + M_{\xi\eta} \ddot{\xi} - \left( \left( \frac{1}{2} \frac{\partial M_\xi}{\partial \eta} - \frac{\partial M_{\xi\eta}}{\partial \xi} \right) \dot{\xi}^2 + \left( \frac{-1}{2} \frac{\partial M_\eta}{\partial \eta} \right) \dot{\eta}^2 - \frac{\partial M_\eta}{\partial \xi} \dot{\xi} \dot{\eta} \right) \\ = -\frac{e}{m} (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) |_\eta \end{array} \right.$$

où  $\dot{\mathbf{q}} = (v_\xi, v_\eta, v_\theta) = (\dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\theta})$  sont les composantes de la vitesse dans les nouvelles coordonnées. Pour pouvoir implémenter ces équations, on doit tout d'abord les linéariser, ensuite on calcule explicitement les coefficients et on obtient, après simplifications :

$$\left\{ \begin{array}{l} \det(J) \frac{d\dot{\xi}}{dt} + \dot{\xi}^2 K_{\xi,\eta} + \dot{\eta}^2 K_{\eta,\eta} + 2 \dot{\eta} \dot{\xi} K_{\eta\xi,\eta} \\ = -\frac{e}{m \det(J)} (((\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) |_{\xi}) M_{\eta} - (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) |_{\eta}) M_{\xi\eta} \\ \\ \det(J) \frac{d\dot{\eta}}{dt} - \dot{\xi}^2 K_{\xi,\xi} - \dot{\eta}^2 K_{\eta,\xi} - 2 \dot{\eta} \dot{\xi} K_{\xi\eta,\xi} \\ = -\frac{e}{m \det(J)} (((\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) |_{\eta}) M_{\xi} - (\mathbf{E} + \dot{\mathbf{q}} \wedge \mathbf{B}) |_{\xi}) M_{\xi\eta} \end{array} \right.$$

avec


$$\begin{aligned} K_{\xi,\xi} &= H_{\xi} V_{\xi}, \\ K_{\xi,\eta} &= H_{\xi} V_{\eta}, \\ K_{\eta,\eta} &= H_{\eta} V_{\eta}, \\ K_{\eta,\xi} &= H_{\eta} V_{\xi}, \\ K_{\xi\eta,\xi} &= H_{\xi\eta} V_{\xi}, \\ K_{\xi\eta,\eta} &= H_{\xi\eta} V_{\eta}, \end{aligned}$$

où


$$\begin{aligned} H_{\xi} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial^2 \xi} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial^2 \xi} \end{pmatrix} \\ H_{\eta} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial^2 \eta} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial^2 \eta} \end{pmatrix} \\ H_{\xi\eta} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \xi \partial \eta} \\ \frac{\partial^2 F_2}{\partial \xi \partial \eta} \end{pmatrix} \\ V_{\xi} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial F_1}{\partial \xi} \end{pmatrix} \\ V_{\eta} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial F_2}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial F_1}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et  $\det(J) = \frac{\partial F_1}{\partial \xi} \frac{\partial F_2}{\partial \eta} - \frac{\partial F_1}{\partial \eta} \frac{\partial F_2}{\partial \xi}$  correspond au déterminant du changement de variables.

Un nouvel point de vue est proposé pour la simulation des plasmas utilisant le modèle cinétique qui couple les équations de Vlasov pour la distribution des particules et les équations de Maxwell pour la contribution des champs électromagnétique. On part du principe que les équations de la Physique sont des objets mathématiques qui mettent en relation des objets géométriques. Afin de conserver les propriétés géométriques des différents objets intervenant dans une équation, on utilise, pour l'étude théorique et numérique, la géométrie différentielle. Il s'avère que toutes les équations de la Physique peuvent s'écrire à l'aide des formes différentielles et que sous ce point de vue celles-ci sont indépendantes du choix des coordonnées. On propose alors une discrétisation des formes différentielles en utilisant les B-splines comme fonctions d'interpolation. Afin d'être cohérent avec la théorie, on proposera également une discrétisation des différentes opérations de la géométrie différentielle agissant sur les formes différentielles. On teste notre schéma tout d'abord sur les équations de Maxwell avec plusieurs conditions aux bords et puisque ce schéma numérique obtenu est indépendant du système de coordonnées, on le teste également lorsque l'on effectue un changement de coordonnées. Enfin, on applique la même méthode sur les équations de Vlasov-Poisson 1D et on propose plusieurs schémas numériques.



UNIVERSITÉ DE STRASBOURG



IRMA 2011/008

**INSTITUT DE RECHERCHE MATHÉMATIQUE AVANCÉE**  
**UMR 7501**  
 Université de Strasbourg et CNRS  
 7 Rue René Descartes  
 67 084 STRASBOURG CEDEX

Tél. 03 68 85 01 29  
 Fax 03 68 85 03 28

[www-irma.u-strasbg.fr](http://www-irma.u-strasbg.fr)  
[irma@math.unistra.fr](mailto:irma@math.unistra.fr)

ISSN 0755-3390 <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00637516/fr/>