

Université de STRASBOURG  
IPHC / DRS (UMR 7178)

Numéro d'ordre UdS : 1084

THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCE DE  
L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG  
spécialité : physique théorique

---

Aspects dynamiques des courants autour de  
la transition quantique-classique

---

Thèse réalisée par Mathieu PLANAT  
sous la direction de Janos POLONYI

Thèse soutenue le 07 septembre 2011 devant la commission d'examen composée de :

Directeur de thèse : Janos POLONYI  
Rapporteur externe : Jean-Yves FORTIN  
Rapporteur externe : Mahmoud MERAD  
Examineur interne : Paul-Antoine HERVIEUX



# Remerciements

Cette thèse n'aurait pas vu le jour sans le soutien et l'aide de Janos POLONYI, que je souhaite remercier tout particulièrement. Je tiens à lui exprimer toute mon estime et toute ma gratitude pour son appui au cours de ces années de thèse. Travailler avec lui fut pour moi une expérience très enrichissante, tant sur le plan professionnel qu'humain. J'ai ainsi particulièrement apprécié les discussions que nous avons pu avoir autour des thèmes abordés dans ce manuscrit. Je souhaite aussi remercier très chaleureusement ceux qui ont pris part à mon jury : merci à Paul-Antoine HERVIEUX, Jean-Yves FORTIN ainsi qu'à Mahmoud MERAD pour le temps et les conseils qu'ils m'ont prodigués, me permettant ainsi de mettre un terme à ce travail. Encore merci à Jean-Yves pour son soutien précieux et ses recommandations pertinentes lors de la préparation de l'oral.

Durant ces années, j'ai eu l'occasion de côtoyer de nombreuses personnes, à l'UFR de physique, à l'IPHC aussi que dans le cadre d'écoles d'été. J'aimerais remercier, tout particulièrement, Michel RAUSCH DE TRAUBENBERG ainsi que Jean-Luc JACQUOT pour leur sympathie et leur bonne humeur mais aussi pour leur soutien. Toute ma sympathie va également à Marcus SLUPINSKI et Nicolas RIVIER ainsi qu'aux autres chercheurs de l'ancien laboratoire "du centre ville" : Véronique BERNARD, Dominique BOSE, Jean RICHERT et Daniel CABRA. Je souhaite également "bonne route" aux doctorants qui ont arpenté notre "fameux" couloir et leur témoigne toute mon amitié : Karima, Alicja, Hélène (LN2\_3), Marion & Vincent et Raoul. Mes amitiés à ceux que j'ai côtoyé au campus de CRONENBOURG parmi lesquels : *Χριστιάννα* (Christina), Marie, Éric, Jérémy, Benjamin, Marco, *Γιώργος* (Yorgos), Matthieu, Goulven, *Λεωνίδας* (Léonidas), Guillaume, sans oublier mon collègue de bureau Adam. Un très grand merci également à François SCHMIDT, à Sophie SCHLAEDER ainsi qu'au personnel administratif du laboratoire. Enfin, mes amitiés à tous ceux que j'ai rencontré en écoles d'été, notamment à TRIESTE : j'ai vraiment beaucoup apprécié leurs compagnies.

Pour finir, je tiens à remercier ma famille Pauline, Xavier, Anne ainsi que mes parents, Christine & Jean-Bernard, pour leur aide, leur soutien et leur patience durant ces années d'études. Je veux enfin exprimer toute ma gratitude à Éric (Rico) et Paul et les remercier pour leur solide amitié.

Merci également à toi, courageux lecteur, qui a eu la "bienveillance" de lire ces lignes... et qui aura, je l'espère, la patience de poursuivre cette lecture au delà de cette page !

## REMERCIEMENTS

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Éléments de théorie quantique des champs</b>	<b>5</b>
1.1 Systèmes de particules en physique des hautes énergies . . . . .	6
1.1.1 Amplitudes de transition et grandeurs physiques mesurées . . . . .	6
1.1.2 Lagrangien, Hamiltonien et variables dynamiques . . . . .	7
1.1.3 Évolution en temps des états et des observables . . . . .	8
1.1.4 Expression d'amplitudes de transition en terme d'intégrales de chemin . . . . .	10
1.2 Fonctions de Green pour les amplitudes de transition . . . . .	12
1.2.1 Fonctions de Green à N-points . . . . .	12
1.2.2 Descriptions au moyen de fonctionnelles génératrices . . . . .	14
1.3 Évaluation de fonctionnelles génératrices . . . . .	17
1.3.1 Intégration des degrés de liberté d'une théorie libre . . . . .	17
1.3.2 Développement perturbatif . . . . .	18
1.3.3 Développement en boucles . . . . .	18
1.3.4 Limite classique d'amplitudes de transition . . . . .	21
1.4 Action effective . . . . .	22
1.5 Théorie de jauge : cas de l'électrodynamique quantique . . . . .	25
<b>2 Propagateurs</b>	<b>27</b>
2.1 Introduction aux fonctions de Green . . . . .	28
2.2 Principales prescriptions définissant les fonctions de Green . . . . .	29
2.2.1 Propagateurs pour les ondes d'énergies positive et négative . . . . .	30
2.2.2 Propagateurs pour les produits chronologique et anti-chronologique . . . . .	30
2.2.3 Propagateurs retardé et avancé . . . . .	31
2.2.4 Rayonnement : propagateurs proche et lointain . . . . .	32
2.2.5 Fonction de corrélations . . . . .	33
2.3 Projections sur et hors couche de masse . . . . .	34
<b>3 Actions effectives pour les valeurs moyennes et matrices densité</b>	<b>37</b>
3.1 Valeurs moyennes et matrices densité . . . . .	38
3.2 Calcul de valeurs moyennes : formalisme closed time path . . . . .	41
3.2.1 Expression de valeurs moyennes en terme d'intégrales de chemin . . . . .	41

TABLE DES MATIÈRES

---

3.2.2	Condition de bord du formalisme et indépendance vis-à-vis de la date de fermeture du contour . . . . .	45
3.2.3	Notations et conventions . . . . .	46
3.3	Méthode fonctionnelle pour le formalisme closed time path . . . . .	47
3.3.1	Fonctionnelles génératrices des fonctions de Green à N-points . . . . .	48
3.3.2	Unitarité et rôles joués par les degrés de liberté . . . . .	49
3.3.3	Propriétés de la fonctionnelle $\mathcal{W}$ . . . . .	51
3.3.4	Fonctions de Green pour la paramétrisation de Schwinger . . . . .	51
3.3.5	Fonctions de Green pour la paramétrisation de Keldysh . . . . .	53
3.3.6	Évaluation de fonctionnelles génératrices . . . . .	58
3.4	Champs effectifs de type in-in et valeurs moyennes . . . . .	59
3.5	Actions effectives pour le formalisme closed time path usuel . . . . .	61
3.5.1	Transformées de Legendre . . . . .	61
3.5.2	Équations variationnelles vérifiées par les champs effectifs . . . . .	62
3.5.3	Fonctionnelle génératrice des vertices propres . . . . .	63
3.5.4	Absence de principe variationnel sous unitarité . . . . .	63
3.6	Principe variationnel et valeurs moyennes . . . . .	64
3.6.1	Paramétrisation physique compatible avec un principe variationnel . . . . .	64
3.6.2	Influence des degrés de liberté auxiliaires . . . . .	65
3.7	Calcul de matrices densité : formalisme opened time path . . . . .	66
3.7.1	Matrices densité et contour $\mathcal{C}^\pm$ pour un système isolé . . . . .	67
3.7.2	Environnement et détermination de matrices densité réduites . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Éléments de théorie quantique des champs à température et densité finies</b>	<b>71</b>
4.1	Ensemble grand-canonique . . . . .	71
4.2	Formalisme en temps imaginaire . . . . .	73
4.3	Formalisme en temps réel . . . . .	75
4.3.1	Forme du contour à température finie . . . . .	75
4.3.2	Développement perturbatif . . . . .	76
4.3.3	Fonction de Green à deux points à température et densité finies . . . . .	77
<b>5</b>	<b>Champs sub-classiques et polarisation en électrodynamique</b>	<b>79</b>
5.1	Influence de charges spectatrices . . . . .	81
5.2	Principe variationnel et équations dynamiques . . . . .	83
5.2.1	Expression des valeurs moyennes à partir des quantités effectives . . . . .	83
5.2.2	Champs sub-classiques . . . . .	86
5.2.3	Actions effectives et équations du mouvement . . . . .	86
5.3	Influence des polarisations . . . . .	90
5.3.1	Caractérisation d'excitations collectives . . . . .	90
5.3.2	Aspects vers la limite classique : décohérence et consistance des chemins . . . . .	94
	<b>Conclusion</b>	<b>105</b>

<b>A</b>	<b>Propagateurs du formalisme <i>closed time path</i></b>	<b>109</b>
A.1	Propagateurs dans le vide . . . . .	109
A.1.1	Propagateurs du formalisme de Schwinger dans le vide . . . . .	109
A.1.2	Propagateurs physiques dans le vide . . . . .	116
A.2	Propagateurs à température et densité finies . . . . .	117
A.2.1	Propagateurs du formalisme de Schwinger en présence d'un environnement . . . . .	118
A.2.2	Propagateurs physiques en présence d'un environnement . . . . .	127
<b>B</b>	<b>Actions effectives et tenseur de polarisation</b>	<b>131</b>
B.1	Calcul des fonctionnelles . . . . .	132
B.1.1	Approximation à une boucle . . . . .	132
B.1.2	Valeurs moyennes et actions effectives . . . . .	143
B.2	Structure du tenseur de polarisation et de l'énergie propre . . . . .	159
B.2.1	Tenseur de polarisation . . . . .	159
B.2.2	Énergie propre . . . . .	160
B.3	Calcul du tenseur de polarisation . . . . .	162
B.3.1	Expression générale . . . . .	162
B.3.2	Expression dans le vide . . . . .	162
B.3.3	Expressions à température et densité finies . . . . .	163
	<b>Bibliographie</b>	<b>169</b>



# Table des figures

1.1	Règles de <i>Feynman</i> pour la théorie $\varphi^4$ . . . . .	14
1.2	Exemples de diagrammes de <i>Feynman</i> à 4 points pour la théorie $\varphi^4$ . . . . .	14
2.1	Opérateurs sur et hors couche de masse en fonction des propagateurs libres proches et lointains . . . . .	35
3.1	Contour pour le formalisme <i>closed time path</i> (amplitudes <i>in-in</i> ) . . . . .	45
3.2	Règles de <i>Feynman</i> pour la théorie $\varphi^4$ dans le cadre du formalisme <i>CTP</i> . . . . .	59
4.1	Contour pour le formalisme <i>closed time path</i> à température finie . . . . .	76
5.1	Correction à une boucle $e_\tau^2 \tilde{G}_{2,\tau}$ issue de la saveur $\tau$ . . . . .	84
5.2	Excitations collectives pour le secteur électrique dans le plan $( \mathbf{p} , p^0)$ . . . . .	93
5.3	Permittivité électrique, susceptibilité électrique et valeur absolue $ \epsilon $ dans le plan $(\mathbf{p}, p^0)$ . . . . .	95
5.4	Excitations collectives pour le secteur magnétique dans le plan $( \mathbf{p} , p^0)$ . . . . .	96
5.5	Perméabilité magnétique, susceptibilité magnétique et valeur absolue $ \mu^{-1} $ dans le plan $( \mathbf{p} , p^0)$ . . . . .	97
5.6	Partie imaginaire de l'action nue . . . . .	100



# Introduction

Les lois de la physique peuvent être radicalement différentes suivant l'échelle à laquelle les phénomènes sont envisagés. Ainsi, les processus microscopiques sont régis par la physique quantique dont les résultats choquent l'intuition (classique) que l'on peut avoir des phénomènes empiriques. Dès lors, il est légitime de se demander comment relier ces deux types de physiques au comportement si différent : c'est l'objet de l'étude de la transition quantique-classique.

Un premier lien entre ces descriptions microscopiques et macroscopiques de la Nature vient de la construction des systèmes quantiques eux-mêmes. Le processus de quantification d'un système part traditionnellement d'un modèle classique : les degrés de liberté et les interactions utilisées pour décrire les phénomènes microscopiques sont motivés par la physique classique. L'état d'un système microscopique est alors décrit par une superposition d'états macroscopiques produisant des effets qui ne peuvent pas être décrits par la physique classique. La dynamique classique est alors souvent l'ordre dominant de celle décrivant la physique quantique. Ce premier lien entre ces descriptions peut se comprendre par l'intermédiaire du théorème d'*Ehrenfest* : la valeur moyenne du centre de masse d'un système quantique suit les équations classiques du mouvement dans la limite où le paquet d'onde le décrivant est fortement localisé. Aussi, la dynamique classique apparaît effectivement comme un cas limite de celle valable à l'échelle quantique et justifie ainsi le schéma de quantification traditionnel. Toutefois, ce théorème montre également que toute description classique doit en principe pouvoir être construite à partir d'une théorie microscopique sous-jacente. On peut alors se demander comment les lois de la physique classique sont effectivement dérivées de celles de la physique quantique plutôt que supposées dès la construction. Cette démarche est d'autant plus légitime que le théorème d'*Ehrenfest* est limitée à des résolutions ne dépassant pas la taille caractéristique des charges mises en jeu<sup>1</sup>. Ainsi, la façon dont la dynamique classique est construite à partir de celle valable à l'échelle microscopique reste un problème ouvert : par exemple, l'importance des contributions classiques à la dynamique de systèmes microscopiques n'explique pas comment les superpositions d'états, propres à la physique quantique, peuvent disparaître complètement dans la limite classique.

En fait, l'étude de la transition quantique-classique est traditionnellement comprise comme la recherche des conditions et des phénomènes nécessaires à l'obtention d'un comportement classique. Un élément d'étude de cette transition s'attache à la disparition des interférences entre

---

1. La localisation du paquet d'onde est limitée à cause de la création inévitable de paires de particules et d'antiparticules pour les processus dont l'échelle caractéristique est proche de la longueur d'onde de *Compton*.

états : la disparition des états superposés est nécessaire au rétablissement de la loi d'addition des probabilités d'événements s'excluant, valable en physique classique. Cependant, les lois d'évolution des états en physique quantique sont unitaires et linéaires. Par conséquent, elles doivent préserver ces superpositions et, *a priori*, rien ne permet d'expliquer leur disparition. Un élément de réponse vient de la théorie de la décohérence introduite en 1970 par *H. D. Zeh* [45]. Le point centrale de cette théorie porte sur l'identification du système effectivement à l'étude : les lois d'évolution des états sont valables pour un système isolé et "global" qui ne correspond pas au système étudié mais à la réunion de ce dernier avec son environnement. Cet environnement n'est pas l'objet de mesure. Selon l'importance des dissipations qu'il génère, l'environnement habille alors les contributions du système suivi et induit ainsi la disparition des interférences entre états, propres à la physique quantique. Seul les états pointeurs c'est-à-dire ceux pour lesquels cet habillage a peu d'influence, "survivent" à ces dissipations. De tels états sont alors supposés présents des deux côtés de la transition quantique-classique.

Ainsi, la particularité de la théorie de la décohérence réside dans le fait que le comportement classique ou quantique d'un système est dicté par l'importance des interactions qu'il a avec son environnement. Par conséquent, la théorie de la décohérence ne fait intervenir qu'*indirectement* la taille du système dans l'établissement de la limite classique : les systèmes microscopiques sont généralement isolés et ont alors un comportement plutôt quantique alors que les systèmes macroscopiques ont plus tendance à être ouverts. Dès lors, c'est le nombre de degrés de liberté interagissant avec l'environnement, ainsi que leur nature, qui décide du caractère classique ou quantique d'un système. Dès lors, l'utilisation de la théorie quantique des champs apparaît comme un outil clef dans l'étude de ce type de physique : cette théorie permet de gérer suffisamment de degrés de liberté pour décrire un système pouvant évoluer vers la limite classique.

La théorie quantique des champs est le cadre théorique permettant d'étudier les systèmes satisfaisant à la fois les principes relativistes et les postulats de la mécanique quantique. Son utilisation est nécessaire à la description de la transition quantique / classique car elle permet de décrire un environnement suffisamment dissipatif pour que cette transition ait lieu. Une première approche de ce cadre théorique s'intéresse au calcul d'*amplitudes de transition* [1, 2]. L'objet du premier chapitre est de présenter le calcul de ces quantités dans le contexte de la physique des particules. Plus particulièrement, cette présentation est centrée sur l'utilisation d'intégrales de chemin : elles décrivent le calcul d'amplitudes de transition comme une somme de phases prises sur toute une classe de chemins. Les observables sont alors définies en terme de fonctions de *Green* dont le calcul peut être rendu systématique par l'utilisation de fonctionnelles génératrices. Cependant, le calcul d'amplitudes de transition se révèle peu adapté à l'étude de la transition entre les domaines quantique et classique : d'une part, elles ne permettent pas d'accéder à l'étude de matrices densités réduites ; d'autre part, elles ne donnent accès à des observables que dans des cas très spécifiques. Toutefois, une partie importante des méthodes et des concepts issus du calcul d'amplitudes de transition peut être adaptée à un cadre propice à l'étude de cette transition.

Le second chapitre regroupe les définitions de différents propagateurs. Le calcul d'amplitudes de transition se limite à l'utilisation de la prescription de *Feynman*. Toutefois, la détermination de

valeurs moyennes, à partir du principe d'action introduit par *Schwinger* présenté dans le chapitre suivant, fait intervenir d'autres prescriptions. Les relations entre ces différentes prescriptions sont décrites ainsi que des propriétés de calcul vis-à-vis des couches de masses.

Le troisième chapitre présente une autre approche de la théorie quantique des champs : le formalisme *closed time path (CTP)*, introduit par *Schwinger* [18] en 1961, permet de décrire directement la dépendance temporelle de valeurs moyennes. Ce formalisme constitue une représentation de *Heisenberg* de la théorie quantique des champs au sein duquel les matrices densités apparaissent naturellement. En outre, il permet d'étudier des états mixtes alors que le calcul d'amplitudes de transition se limite à la description d'états purs : ce formalisme est un des cadres d'études de la transition quantique / classique [12]. L'idée directrice de ce formalisme est d'exprimer les valeurs moyennes à partir d'une première amplitude de transition allant vers un état final arbitraire puis revenant, dans un second temps vers l'état initial *via* une seconde amplitude de transition présentant une évolution chronologique contraire. Cette procédure double alors le nombre de degrés de liberté. Le calcul d'observables peut être fait au moyen d'un formalisme fonctionnel analogue à celui présenté dans le premier chapitre. Toutefois, les valeurs moyennes ne peuvent pas être obtenues par principe variationnel pour le formalisme *CTP* usuel : une paramétrisation non-orthogonale des paires de degrés de liberté vient résoudre ce problème [39]. Enfin, les derniers développements de ce chapitre permettent d'introduire le formalisme *opened time path (OTP)*. Ce formalisme décrit le calcul d'éléments de matrices d'un opérateur densité de façon analogue au formalisme *CTP*. Plus particulièrement, ce formalisme est utile pour décrire le calcul de matrices densités réduites.

Le quatrième chapitre aborde brièvement la théorie quantique des champs à l'équilibre thermodynamique. Dans un premier temps, une présentation du formalisme en temps imaginaire est faite. Ce formalisme représente une alternative aux formalismes en temps réel qui sont présentés dans une seconde partie dans la seconde partie de ce chapitre. L'utilisation d'un réservoir de chaleur et de particules est en fait une commodité pour paramétrer les propriétés des degrés de liberté qui vont jouer le rôle d'un environnement dans l'étude de la décohérence présentée dans le chapitre suivant.

Le dernier chapitre traite de l'établissement d'aspects classiques pour des moyennes définies à une résolution appartenant au domaine quantique : les valeurs moyennes définies à cette échelle sont appelées *champs sub-classiques*. Plus particulièrement, la valeur moyenne du champ électromagnétique et des densités de charges sont introduites pour une telle résolution en tant que fonctions sur l'espace-temps : elles permettent d'aborder quelques aspects majeurs de la construction de la théorie classique correspondante à partir de l'électrodynamique quantique sous-jacente. Tout d'abord, des équations du mouvement retardées vérifiées par ces moyennes ont pu être obtenues à partir du principe variationnel dans l'approximation à une boucle. D'autre part, l'influence des polarisations sur les propriétés électromagnétiques du milieu ont pu être obtenues à température et densité finies. Enfin, certains aspects propres à la décohérence du champs de photons, pour cette résolution, ont pu être établis à partir d'une évaluation perturbative de la matrice densité réduite *via* le formalisme *OTP*.



# Chapitre 1

## Éléments de théorie quantique des champs

Ce chapitre a pour objectif d'introduire brièvement la théorie quantique des champs dans le cadre de la physique des particules. L'objet de cette branche de la physique est l'étude de phénomènes microscopiques très énergétiques afin d'en extraire les propriétés de particules élémentaires ainsi que les lois gouvernant les interactions fondamentales de la nature à de telles échelles. Les résultats de ces processus microscopiques sont observés à l'échelle macroscopique où ceux-ci apparaissent alors comme extrêmement brefs. La plupart des propriétés des particules sont déduites d'expériences de diffusion au cours desquelles sont déterminées des sections efficaces ainsi que des largeurs de désintégration<sup>1</sup>. En outre, pour être pertinentes, ces expériences sont réalisées dans des conditions particulières : en principe, les systèmes à l'étude sont isolés et préparés dans un état pur.

Le domaine d'application de la théorie quantique des champs est bien plus vaste que celui décrit par la physique des particules : cette théorie a fait l'objet de développements fructueux en physique de la matière ou encore en physique statistique. Plus particulièrement, la théorie quantique des champs permet d'étudier les problématiques liées à la description de la transition entre les domaines quantiques et classiques. À la différence de la situation présentée en physique des particules, ce type de problématique s'appuie sur l'étude de la relation entre le système observé et son environnement. Le rapport entre les domaines classique et quantique est plus généralement fondé sur l'analyse de matrices densités réduites plutôt que sur la détermination d'amplitudes de diffusion. Toutefois, ces deux démarches comportent aussi beaucoup de similitudes : toutes deux s'appuient sur une description en terme de fonctions de *Green* pouvant être obtenues de façon systématique par des méthodes fonctionnelles similaires. Aussi, dans ce chapitre, une partie des outils théoriques nécessaires à l'étude de la transition quantique-classique va être introduite dans le contexte, plus familier, de la physique des particules.

---

1. Une présentation complète de la démarche employée en physique des particules et notamment du calcul de sections efficaces, est développée dans la référence [1]. Une présentation efficace des aspects formels et plus particulièrement du formalisme fonctionnel, peut être trouvée dans [3, 5]

## 1.1 Systèmes de particules en physique des hautes énergies

La théorie quantique des champs est le cadre théorique permettant d'étudier les phénomènes envisagés en physique des particules. Elle constitue l'extension multi-particulaire de la mécanique quantique relativiste dont sont issues les principales équations d'ondes qui satisfont à la fois les principes issus de la relativité restreinte et les postulats de la physique quantique.

La démarche employée en théorie quantique des champs est déductive. On postule tout d'abord un modèle microscopique : c'est la théorie *nue*<sup>2</sup>. Cette théorie est définie à haute énergie c'est-à-dire pour une forte résolution spatiale (théorie dans "l'ultraviolet" - UV). Ensuite, on calcule quelles seraient les propriétés mesurables de ce modèle à l'échelle macroscopique c'est-à-dire à basse énergie (théorie dans "l'infrarouge" - IR). Le calcul fait alors intervenir des corrections quantiques qui "habillent" les paramètres de la théorie initiale et qui sont dépendants de l'échelle de définition de cette dernière. Pour toute une classe de théories particulières, les théories *renormalisables*, cette échelle UV peut formellement être éliminée : plus spécifiquement, une redéfinition des paramètres nus par la procédure de *renormalisation* suffit à éliminer toute divergence dans le calcul d'observables pour ces théories les rendant ainsi prédictibles<sup>3</sup>.

### 1.1.1 Amplitudes de transition et grandeurs physiques mesurées

La physique des particules s'appuie sur l'étude de systèmes préparés et aboutissant à des états *asymptotiquement non-interactifs*. Longtemps avant toute interaction, le système est dans un état  $|in, t_{in}\rangle$  qui doit correspondre à la description de particules libres et isolées. Les processus mis en jeu interviennent ensuite : ils correspondent à des phénomènes élémentaires consistant en des absorptions, des diffusions ou des créations de particules et sont contraints par des lois fondamentales de conservation. Lors de ces processus, on considère ainsi des états interactifs qui doivent s'interpoler avec les états libres initiaux. Les résultats de l'interaction sont alors observés longtemps après que celle-ci ait eu lieu *via* l'état final du système  $|out, t_{out}\rangle$ . Ce dernier correspond également à la description de particules libres s'interpolant avec les états mis en jeu lors de l'interaction.

Concrètement, c'est par l'intermédiaire de la norme au carré de l'*amplitude de transition*  $\langle out, t_{out} | in, t_{in} \rangle$  que l'on accède à la probabilité que l'état initial évolue au cours du temps vers l'état final c'est-à-dire

$$\mathcal{P}_{out \leftarrow in} = |\langle out, t_{out} | in, t_{in} \rangle|^2. \quad (1.1)$$

Dans cette expression, il est nécessaire que  $t_{in} \rightarrow -\infty$ ,  $t_{out} \rightarrow +\infty$  et que les états pris dans cette limite soient asymptotiquement non-interactifs et isolés (superposition linéaire d'états décrivant

---

2. On dit qu'une théorie est "nue" si elle n'a pas été "habillée" par des fluctuations quantiques : elle est alors définie dans l'UV c'est-à-dire à haute énergie. Plus généralement, on qualifie de théorie nue (ou de quantité nue) toute théorie *effective* (ou quantité effective) définie alors qu'il reste des fluctuations quantiques pertinentes à intégrer (hors troncatures).

3. Une présentation de la procédure de renormalisation (et du groupe de renormalisation) peut être trouvée dans la plupart des références traitant de théorie quantique des champs, notamment dans [1, 3]. En outre, le livre de *Collins* [4] constitue un ouvrage de référence pour cette thématique.

des particules libres). On introduit alors la matrice  $\hat{S}$  comme étant l'opérateur appliquant les états finaux sur les états initiaux *via* la relation

$$\langle out, t_{out} \rightarrow +\infty | in, t_{in} \rightarrow -\infty \rangle = \langle out, t_{in} | \hat{S} | in, t_{in} \rangle.$$

C'est par l'intermédiaire de cette matrice et plus particulièrement de sa partie non-triviale  $i\hat{T} = \hat{S} - \hat{1}$ , que l'on accède aux sections efficaces de diffusion  $\sigma$  ou encore aux largeurs de désintégration qui permettent de caractériser le processus étudié :

$$\sigma = \frac{1}{F} \int |\langle out, t_{in} | \hat{T} | in, t_{in} \rangle|^2 d\mathcal{E}_p$$

Dans l'expression qui précède,  $F$  désigne un facteur cinématique lié au flux incident et à la densité de cibles. Ce facteur est exprimé de sorte à rendre les grandeurs physiques invariantes de *Lorentz* et indépendantes des détails spécifiques de l'expérience. Enfin, l'intégrale est faite sur l'espace des phases disponibles  $d\mathcal{E}_p$  qui correspond à tous les états finaux possibles. Ainsi, la matrice  $\hat{S}$  permet de caractériser les processus élémentaires étudiés en physique des particules : le formalisme développé en physique des particules doit être interprété dans ce contexte.

### 1.1.2 Lagrangien, Hamiltonien et variables dynamiques

En théorie quantique des champs, l'opérateur de configuration de champ  $\hat{\varphi}$  et son moment conjugué  $\hat{\pi}$  constituent les degrés de libertés fondamentaux de cette description. En fonction de ces variables dynamiques, la théorie peut alors être décrite par l'intermédiaire du *Hamiltonien*  $\mathcal{H}[\varphi, \pi]$  ou bien *via* le *Lagrangien*  $\mathcal{L}[\varphi, \partial\varphi]$  : ces deux fonctionnelles, qui contiennent la plupart des informations utiles à la théorie étudiée, se déduisent l'une de l'autre au moyen d'une *transformée de Legendre*

$$\mathcal{H}[\hat{\varphi}, \hat{\pi}] = \partial_0 \hat{\varphi}(x) \hat{\pi}(x) - \mathcal{L}[\hat{\varphi}, \partial\hat{\varphi}]$$

complétée par la définition suivante du moment conjugué de la configuration de champ

$$\hat{\pi}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}[\varphi, \partial\varphi, x]}{\partial \partial_0 \varphi(x)}.$$

À partir du *principe d'action stationnaire*, les équations du mouvement peuvent être obtenues et les constantes du mouvement de la théorie peuvent être déduites des invariances présentées par  $\mathcal{L}$  (ou  $\mathcal{H}$ ). La théorie nue repose sur une description en terme d'un *Lagrangien* (ou d'un *Hamiltonien*) local, (généralement) renormalisable et satisfaisant à des principes de symétries postulées. Dans la limite classique, cette action quantique doit, en principe, permettre de déterminer l'action classique correspondante (*cf* chapitre 5).

En seconde quantification, les variables dynamiques satisfont des relations de commutation pour les bosons (-) ou d'anti-commutation pour les fermions (+) :

$$[\hat{\varphi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})]_{\mp} = i\delta[\mathbf{x} - \mathbf{y}], \quad [\hat{\varphi}(t, \mathbf{x}), \hat{\varphi}(t, \mathbf{y})]_{\mp} = [\hat{\pi}(\mathbf{x}), \hat{\pi}(\mathbf{y})]_{\mp} = 0. \quad (1.2)$$

Ceci a pour conséquence que l'opérateur de champ et son moment conjugué s'expriment comme une superposition d'opérateurs de création et d'annihilation de particules respectivement associés aux solutions d'ondes d'énergies positives et négatives des équations d'ondes relativistes. D'autre part, l'évolution en temps des variables dynamiques est conditionnée par les équations d'*Heisenberg*

$$\partial_0 \hat{\varphi} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\varphi}]_{\mp}, \quad \partial_0 \hat{\pi} = \frac{i}{\hbar} [\hat{\mathcal{H}}, \hat{\pi}]_{\mp},$$

de sorte que les relations de commutation (ou d'anti-commutation) (1.2) restent vraies à n'importe quelle date<sup>4</sup>. À partir du vide  $|0\rangle$ , les variables dynamiques servent à construire les états représentant les particules,

$$|in, t_{in}\rangle = \hat{\varphi}(x_1)\hat{\varphi}(x_2)\cdots\hat{\varphi}(x_n)|0, t_{in}\rangle, \quad |out, t_{out}\rangle = \hat{\varphi}(y_1)\hat{\varphi}(y_2)\cdots\hat{\varphi}(y_n)|0, t_{out}\rangle,$$

et les observables correspondent aux "valeurs moyennes" d'opérateurs  $\hat{\mathcal{O}}$  prises également sur le vide c'est-à-dire à des grandeurs du type  $\langle 0, t_{out} | \hat{\mathcal{O}} | 0, t_{in} \rangle$ <sup>5</sup>.

En théorie quantique des champs, les phénomènes microscopiques sont ainsi représentés par des combinaisons d'opérations de créations et d'annihilations. Plus particulièrement, les interactions sont interprétées comme des échanges de particules et sont soumises aux lois de conservation des nombres quantiques résultant des invariances de  $\mathcal{L}$  et de  $\mathcal{H}$ . Elles obéissent également à la conservation de la quadri-impulsion mais seulement dans les limites du principe d'incertitude d'*Heisenberg* permettant ainsi l'existence d'états transitoires constitués par des particules sur couche de masse d'autant plus énergétiques qu'elles violent cette loi de conservation pendant des durées d'autant plus courtes<sup>6</sup>. Ces effets multi-particulaires apparaissent pour des échelles de distances inférieures à la longueur d'onde de *Compton*.

### 1.1.3 Évolution en temps des états et des observables

#### Opérateur d'évolution

En représentation de *Schrödinger*, toutes les dépendances temporelles du système sont contenues dans les états tandis que les opérateurs sont indépendants du temps. En revanche, en représentation de *Heisenberg*, ce sont les opérateurs qui dépendent exclusivement du temps mais pas les états. On peut formellement retranscrire cette dépendance temporelle au moyen de l'opérateur d'évolution  $\hat{U}$  dont la détermination permet ainsi de traiter complètement la dynamique du système. Ainsi, pour la représentation de *Schrödinger*, on définit  $\hat{U}$  par la dépendance en

---

4. Cette situation est modifiée dans le cadre des théories de jauge : la dépendance en temps des équations de l'équation d'*Heisenberg* n'est plus unique et les relations (1.2) ne sont pas nécessairement conservées à n'importe quelle date

5. En toute rigueur, les quantités  $\langle 0, t_{out} | \hat{\mathcal{O}} | 0, t_{in} \rangle$  sont des éléments de matrices et non pas des valeurs moyennes au sens des postulats de la mécanique quantique.

6. De façon équivalente, on peut également imposer la conservation de la quadri-impulsion mais il faut alors considérer des états correspondant à des particules hors-couche de masse : ces états virtuels ne sont pas durables et ne peuvent pas être asymptotiques. C'est cette approche qui est retenue lors de l'utilisation de diagrammes de *Feynman* usuels.

temps des états c'est-à-dire

$$|\Psi, t\rangle = \hat{U}(t - t_0)|\Psi, t_0\rangle$$

ou par celle des opérateurs pour la représentation de *Heisenberg via*

$$\hat{A}(t) = \hat{U}^\dagger(t - t_0)\hat{A}(t_0)\hat{U}(t - t_0).$$

Enfin, la représentation de *Dirac* (ou représentation "d'interaction") est utile pour décrire les systèmes interactifs. Elle s'appuie sur la décomposition du *Hamiltonien* de la théorie  $H$  comme la somme d'une partie libre  $H_0$  et d'une partie interactive  $H_1$ . Cette représentation consiste alors à faire évoluer les opérateurs à partir de la partie libre du *Hamiltonien* et les états *via* la partie interactive.

### Produits chronologique et anti-chronologique

Si l'*Hamiltonien* décrivant le système ne dépend pas explicitement du temps ( $\hat{H}[\hat{\pi}, \hat{\varphi}]$ ), l'opérateur d'évolution s'écrit

$$\hat{U}(t_b, t_a) = \exp\left\{-\frac{i(t_b - t_a)}{\hbar}\hat{H}\right\}.$$

En revanche, si le système étudié dépend explicitement du temps ( $\hat{H}[\hat{\pi}, \hat{\varphi}, t] \equiv \hat{H}(t)$ ), l'expression de l'opérateur d'évolution est donnée par le développement de *Neumann-Liouville* pouvant symboliquement s'écrire

$$\hat{U}(t_b, t_a) = \hat{T} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \hat{H}(t)\right\} \quad (1.3)$$

au moyen de l'opérateur d'ordre chronologique  $\hat{T}$ . Concrètement, cette situation est quasiment exclusive à la représentation de *Dirac* où l'expression (1.3) avec  $\hat{H} = \hat{H}_1$  décrit alors l'évolution des états.  $\hat{T}$  ordonne un produit arbitraire d'opérateurs de façon *causale* : les opérateurs sont rangés de sorte à agir par ordre de temps croissant en partant du *ket* c'est-à-dire de la droite. Ainsi, le produit *chronologique* de deux opérateurs  $\hat{A}_a(t_a, \mathbf{x}_a)$  et  $\hat{A}_b(t_b, \mathbf{x}_b)$  peut être défini par l'expression

$$\hat{T}[\hat{A}_a(t_a, \mathbf{x}_a)\hat{A}_b(t_b, \mathbf{x}_b)] = \Theta(t_a - t_b)\hat{A}_a(t_a, \mathbf{x}_a)\hat{A}_b(t_b, \mathbf{x}_b) \pm \Theta(t_b - t_a)\hat{A}_b(t_b, \mathbf{x}_b)\hat{A}_a(t_a, \mathbf{x}_a), \quad (1.4)$$

respectivement pour des opérateurs bosoniques qui commutent (+) ou fermioniques qui anti-commutent (-).

On peut définir le produit *anti-chronologique* de deux opérateurs  $\hat{A}_a(t_a, \mathbf{x}_a)$  et  $\hat{A}_b(t_b, \mathbf{x}_b)$  par

$$\hat{T}^*[\hat{A}_a(t_a, \mathbf{x}_a)\hat{A}_b(t_b, \mathbf{x}_b)] = \Theta(t_b - t_a)\hat{A}_a(t_a, \mathbf{x}_a)\hat{A}_b(t_b, \mathbf{x}_b) \pm \Theta(t_a - t_b)\hat{A}_b(t_b, \mathbf{x}_b)\hat{A}_a(t_a, \mathbf{x}_a). \quad (1.5)$$

Le produit  $\hat{T}^*$  réalise donc l'opération inverse de celle due à  $\hat{T}$  : les opérateurs sont ordonnés de la même façon mais par ordre de temps décroissant. En outre, les produits chronologiques et

anti-chronologiques d'opérateurs peuvent être exprimés l'un en fonction de l'autre. Pour deux opérateurs  $\hat{A}_a(t_a, \mathbf{x}_a)$  et  $\hat{A}_b(t_b, \mathbf{x}_b)$ , on a<sup>7</sup>

$$(\hat{T}^*[\hat{A}_a(t_a, \mathbf{x}_a)\hat{A}_b(t_b, \mathbf{x}_b)])^\dagger = \hat{T}[\hat{A}_a(t_a, \mathbf{x}_a)\hat{A}_b(t_b, \mathbf{x}_b)]. \quad (1.6)$$

Cette relation permet ainsi de déduire les propriétés liées au produit *anti-chronologique* de celles du produit *chronologique*. Plus particulièrement, on peut exprimer  $\hat{U}$  et  $\hat{U}^\dagger$  au moyen de  $\hat{T}^*$  par

$$\hat{U}(t_b, t_a) = \hat{T}^* \exp\left\{ + \frac{i}{\hbar} \int_{t_b}^{t_a} dt \hat{H}(t) \right\}, \quad \hat{U}^\dagger(t_a, t_b) = \hat{T}^* \exp\left\{ - \frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} dt \hat{H}(t) \right\} = \hat{U}(t_b, t_a), \quad (1.7)$$

$\hat{U}^\dagger$  s'interprétant alors comme une évolution anti-chronologique.

### Amplitudes de transition

La matrice  $\hat{S}$  peut être reliée à l'opérateur d'évolution du système  $\hat{U}$  par l'intermédiaire de la relation

$$\hat{S} = \hat{U}[t_{out} \rightarrow +\infty, t_{in} \rightarrow -\infty]$$

et les résultats d'une mesure déduits de ceux d'amplitudes de transition du type

$$\langle out, t_{out} | in, t_{in} \rangle = \langle 0, t_{out} | \hat{T}[\varphi^\dagger(y_1) \cdots \varphi^\dagger(y_n) \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \int_{t_{in}}^{t_{out}} d\tau \hat{H}_1(\tau)\right] \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)] | 0, t_{in} \rangle.$$

$\hat{H}_1$  désigne le potentiel écrit en représentation de *Dirac* ( $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1$ ). Concrètement, seule l'évolution chronologique intervient dans le calcul d'amplitudes de transition. En revanche, l'évolution anti-chronologique intervient lorsque l'on cherche à exprimer des valeurs moyennes du type  $\langle in, t_{in} | \hat{O} | in, t_{in} \rangle$  comme nous le verrons dans le chapitre 3.

#### 1.1.4 Expression d'amplitudes de transition en terme d'intégrales de chemin

Le calcul d'amplitudes de transition peut être réalisé à partir de l'expression (1.3) dans le cadre du formalisme opératoire. Cependant, une approche alternative consiste à exprimer ces grandeurs en terme d'intégrales prises sur des fonctions. On peut montrer que les amplitudes de transition s'expriment dans l'espace des phases fonctionnelles *via* [7]

$$\langle 0 | \hat{U}(t_{out}, t_{in}) | 0 \rangle = \int \mathcal{D}[\varphi] \tilde{\mathcal{D}}[\pi] \exp\left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_{in}}^{t_{out}} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3x (\partial_0 \varphi(x) \pi(x) - \mathcal{H}[\varphi, \partial\varphi, x])\right] \quad (1.8)$$

où les *bra* et *ket* (en représentation de *Heisenberg*) sont exprimés dans l'espace des configurations de champ et où les notations

$$\int \mathcal{D}[\varphi] \equiv \int \mathcal{D}[\varphi(\cdot)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left[ \int_{\mathbb{R}} d\varphi_n \right], \quad \int \tilde{\mathcal{D}}[\pi] \equiv \int \tilde{\mathcal{D}}[\pi(\cdot)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N+1} \left[ \int_{\mathbb{R}} \frac{d\pi_n}{2\pi\hbar} \right]$$

---

7. En effet, l'opération de conjugaison hermitique agit seulement sur les produits de champs : cette opération permute leur combinaison avec leurs fonctions de *Heaviside* associées dans la définition (1.4).

correspondent à la limite continue obtenue à partir de variables dynamiques initialement définies sur une segmentation discrète de l'axe de temps : l'intégrale de chemin est construite à partir de propagateurs élémentaires<sup>8</sup>  $\langle X_{n+1} | \hat{U}(t_{n+1}, t_n) | X_n \rangle$  définis sur un intervalle de temps *infinitésimal*  $[t_n, t_{n+1}]$  et qui sont combinés entre eux selon la formule de *Chapman-Kolmogorov*<sup>9</sup> :

$$\langle X_{n+2} | \hat{U}(t_{n+2}, t_n) | X_n \rangle = \int dX_{n+1} \langle X_{n+2} | \hat{U}(t_{n+2}, t_{n+1}) | X_{n+1} \rangle \langle X_{n+1} | \hat{U}(t_{n+1}, t_n) | X_n \rangle \quad (1.9)$$

Dans cette relation, l'intégration est prise sur l'ensemble des configurations  $X_{n+1}$  accessibles au système décrit mais pour une date  $t_{n+1}$  fixée.

L'intégrale de chemin (1.8) constitue l'expression s'adaptant, en principe, aux *Hamiltoniens* les plus généraux. Toutefois, lorsque le potentiel est indépendant des moments associés aux configurations de champs<sup>10</sup>, l'intégration sur ces moments conduit à la *formule de Feynman*

$$\langle 0 | \hat{U}(t_{out}, t_{in}) | 0 \rangle = \int \mathcal{D}[\varphi] e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\varphi(\cdot)]} \quad (1.10)$$

qui permet d'introduire l'action écrite directement en terme du *Lagrangien* décrivant le système

$$\mathcal{S}[\varphi(\cdot)] = \int_{t_{in}}^{t_{out}} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{L}[\varphi, \partial\varphi].$$

Un des intérêts de ce type d'expression provient de l'utilisation de fonctions au lieu d'opérateurs lors de l'évaluation d'amplitudes de transition : d'un point de vue calculatoire, les intégrales de chemin offrent ainsi une description alternative plus intuitive et plus commode que celle issue du formalisme opératoire. Par ailleurs, dans la formule de *Feynman*, les amplitudes de transition sont directement conditionnées par le *Lagrangien* et permettent, *in fine*, de décrire toutes les observables directement en terme de fonctions de *Green*. En outre, l'utilisation de ce type d'intégrales fonctionnelles réalise directement la quantification du système en lui donnant une interprétation géométrique [6, 7].

### Expression de quantités mesurables en terme d'intégrales de chemin

Soulignons que les observables et les probabilités de transition sont obtenues, *in fine*, à partir de la combinaison de deux amplitudes de transition (*cf* relation (1.1)). En physique des particules, l'évaluation d'une seule amplitude de transition est *suffisante* car on traite de systèmes *isolés* et dans un *état pur* : "l'élévation au carré" de l'amplitude de transition calculée, qui permet de définir la probabilité correspondante *via* la relation (1.1), n'est en fait valable *que* pour un système isolé. Une telle situation est ainsi spécifique à certaines problématiques notamment celles décrites en physique des particules.

---

8. L'expression algébrique des propagateurs infinitésimaux est propre à la Physique [6, 7].

9. La formule de *Chapman-Kolmogorov* est formellement équivalente à la relation de fermeture en raison de la définition des propagateurs élémentaires.

10. Toute autre situation nécessite d'utiliser explicitement la relation (1.8) - *cf* [5, 6, 7].

A *contrario*, lorsque le système suivi ne peut pas être considéré comme isolé<sup>11</sup>, on peut montrer que les observables et les probabilités *doivent* être décrits directement par la combinaison de deux intégrales de chemin comme présentée dans les références [18, 21] et décrite ultérieurement dans ce manuscrit. Les degrés de liberté doivent être doublés par rapport à ceux spécifiques aux situations décrivant des systèmes asymptotiquement isolés. En outre, *l'influence* que ces deux jeux de variables ont l'un sur l'autre est caractéristique d'intrications (*cf* chapitre 3). De telles situations sortent du cadre habituellement défini en physique des particules et s'appuyant sur les développements de ce chapitre.

Dès lors, émerge le principal défaut d'une description fondée uniquement sur des intégrales de chemin : ces formulations ne décrivent pas toujours *clairement* le statut des quantités calculées vis-à-vis des postulats de la mécanique quantique c'est-à-dire leur caractère mesurable ou non. Ainsi, les champs effectifs  $\tilde{\varphi}$ , que nous définirons par la suite par la relation (1.22), ne permettent pas de paramétrer des quantités observables lorsque des états mixtes sont définis. En revanche, les descriptions opératorielles sont généralement plus adaptées pour définir et interpréter sans ambiguïtés le statut des termes évalués.

## 1.2 Fonctions de Green pour les amplitudes de transition

### 1.2.1 Fonctions de Green à N-points

À partir des configurations de champs, on peut définir les fonctions de *Green* à N-points par la relation

$$iK^F(x_1, x_2, \dots, x_N) = \langle 0, t_{out} | \hat{T}[\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_N)] | 0, t_{in} \rangle. \quad (1.11)$$

Ces quantités sont interprétées comme des *amplitudes de probabilité* décrivant la propagation de  $n$  particules introduites initialement en  $x_1, x_2, \dots, x_n$  puis finalement observées en  $x_{n+1}, \dots, x_N$  après qu'il y ait éventuellement eu interaction entre elles. Ce type de grandeurs permet ainsi de décrire des processus ne conservant pas nécessairement le nombre de particules initiales. Concrètement, leur expression est calculée à partir d'opérations sur des fonctionnelles génératrices qui seront introduites ultérieurement.

De plus, la fonction à deux points, ou *propagateur*, est une donnée essentielle de la théorie étudiée : les autres fonctions à N-points peuvent être exprimées en terme de combinaisons de celle-ci par l'intermédiaire du *théorème de Wick*. Un propagateur correspond au produit chronologique de deux champs

$$iK^F(x, y) = \langle 0, t_{out} | \hat{T}[\varphi(x)\varphi(y)] | 0, t_{in} \rangle.$$

Ceci revient à considérer que les ondes d'énergies positives se déplacent vers l'avenir tandis que celles d'énergies négatives vont vers le passé (*cf* chapitre 2)

$$K^F(x, y) = \Theta[x^0 - y^0]K^{(+)}(x, y) + \Theta[y^0 - x^0]K^{(-)}(x, y).$$

---

11. La description la plus générale de l'état d'un système quantique est donnée par une matrice densité (théorème de *Gleason*).

Ce type de grandeur est alors défini à partir de la prescription de *Feynman*<sup>12 13</sup>.

Les propagateurs utilisés en physique classique, comme la fonction de *Green* retardée par exemple, sont incompatibles avec les développements permettant d'obtenir des amplitudes de transition. Par exemple, le propagateur retardé s'écrivant (pour des bosons)

$$iD^r(x, y) = \theta[x^0 - y^0] \langle 0, t_{out} | [\varphi(x), \varphi(y)] | 0, t_{in} \rangle = i\theta[x^0 - y^0] D^{(+)}(x, y) - i\theta[x^0 - y^0] D^{(-)}(x, y),$$

ne peut pas être obtenu à partir de séries perturbatives fondées sur le calcul d'amplitudes de transition<sup>14</sup>. En fait, la prescription de *Feynman* est nécessaire au calcul d'amplitudes de transition. Cependant, ces quantités sont des grandeurs complexes dans l'espace des positions d'espace-temps et, plus généralement, les fonctions de *Green* issues de ce formalisme ne représentent pas des grandeurs *directement* mesurables<sup>15</sup>. En revanche, en physique des particules, ce sont ces quantités qui conduisent à l'obtention des observables physiques par l'intermédiaire de leur "carré".

### Diagrammes de Feynman

Les fonctions de *Green* peuvent être symbolisées au moyen des *diagrammes de Feynman* : il s'agit d'une représentation des termes issus de l'expression algébrique des fonctions de *Green* ; ces dernières peuvent alors être schématisées comme des combinaisons de motifs élémentaires. On distingue deux types de motifs élémentaires : les *lignes* et les *vertices* (nus). Chaque ligne représente une particule et chaque vertex représente une interaction entre particules. En fonction de la théorie étudiée, certains vertices peuvent être exclus. À chacun de ces motifs est alors associée une expression algébrique : les lignes correspondent au propagateur de la particule représentée tandis que les vertices désignent l'expression du couplage entre les particules mises en jeu lors d'une interaction. Enfin, les lignes externes sont sur couche de masse et la quadri-impulsion doit être conservée à chaque vertex.

Les fonctions de *Green* peuvent ainsi être obtenues à partir du théorème de *Wick* en utilisant les règles de *Feynman*. Cependant, seuls les propagateurs utilisant la prescription de *Feynman* peuvent être exprimés de la sorte : plus particulièrement, les propagateurs avancés et retardés ne peuvent pas être calculés par cette méthode<sup>16</sup>.

---

12. Dans l'expression de l'intégrale de chemin (1.10), l'utilisation de la prescription de *Feynman* revient à ajouter au *Lagrangien* un terme en  $+i\epsilon\varphi^2$  avec  $\epsilon > 0$  arbitrairement petit contribuant alors à la convergence de l'intégrale pour les larges amplitudes du champ.

13. À partir du chapitre 3, le propagateur de *Feynman*, nécessaire ici au calcul d'amplitudes de transition, sera noté  $K^{++}$ .

14. Pour le propagateur retardé, les modes d'énergies négatives se propagent dans le même sens de temps que ceux d'énergies positives. Ce propagateur ne peut pas être utilisé dans l'action nue (microscopique) car il entraîne une divergence de l'intégrale de chemin (1.10) à cause du sens de parcours de ces modes d'énergies négatives. En effet, la prescription retardée revient alors à ajouter un terme en  $+i\text{sgn}[E]\epsilon\varphi^2$  au *Lagrangien* où  $E$  est la fréquence du mode considéré.

15. Ceci a notamment une incidence sur l'interprétation des équations du mouvement vérifiées par les champs effectifs issus d'amplitudes de transition.

16. Le calcul de propagateurs avancés et retardés peut, en revanche, être réalisé dans le cadre du formalisme de

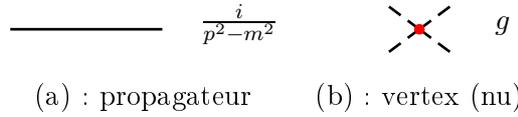


FIGURE 1.1 – Règles de *Feynman* pour la théorie  $\varphi^4$

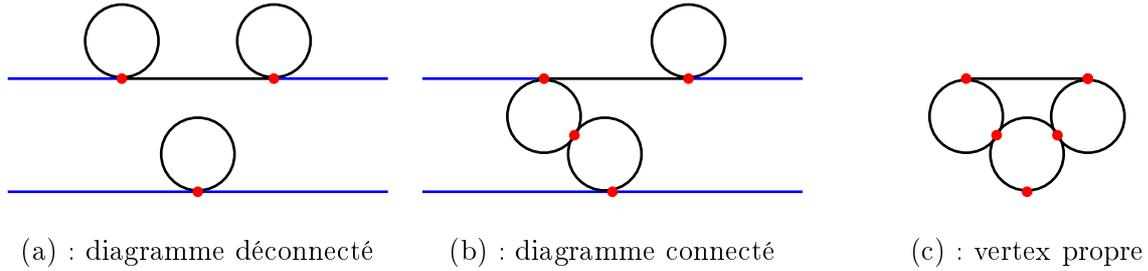


FIGURE 1.2 – Exemples de diagrammes de *Feynman* à 4 points pour la théorie  $\varphi^4$

### Fonctions de Green particulières

Les fonctions de *Green déconnectées* sont celles qui peuvent être écrites comme le produit d'au moins deux fonctions d'ordre inférieur. Leur diagramme de *Feynman* est alors composé de plusieurs sous-diagrammes qui ne sont pas reliés entre eux par des lignes internes. Les fonctions de *Green connectées* sont celles qui présentent la propriété inverse : les éventuels sous-diagrammes qui les composent sont toujours reliés entre eux. Les fonctions de *Green à une particule irréductible* (1PI) sont les fonctions de *Green connectées* qui le restent lorsque l'on coupe l'une des lignes internes de leur diagramme. Les graphes *amputés* désignent les fonctions de *Green* dont on a ôté toutes les lignes externes. Enfin, les fonctions de *Green à une particule irréductible et amputée* sont appelées *vertex propre*.

#### 1.2.2 Descriptions au moyen de fonctionnelles génératrices

Les fonctionnelles génératrices constituent un outil commode pour décrire un ensemble de fonctions de *Green* particulières. Elles sont définies par une série de puissances du type

$$\mathcal{F}[j(\cdot)] = \sum_N \frac{1}{N!} \frac{i^N}{\hbar^N} \int d^4x_1 d^4x_2 \cdots d^4x_N iK^F(x_1, x_2, \cdots, x_N) j(x_1)j(x_2) \cdots j(x_N). \quad (1.12)$$

Dans cette expression, les coefficients sont proportionnels aux fonctions à N-points  $K^F(x_1, x_2, \cdots, x_N)$  que l'on cherche à exprimer et les sources  $j$  sont des fonctions arbitraires de l'espace-temps. Ce

---

*Keldysh* présenté dans le chapitre 3. Plus spécifiquement, les fonctions de *Green lointaines*, qui sont nécessaires à la définition des propagateurs retardés et avancés (*cf* chapitre 2), ne peuvent jamais être obtenues dans le cadre d'un formalisme décrivant des amplitudes de transition uniquement.

type d'expressions regroupe de façon succincte toute une classe de fonctions à N-points qui peuvent alors être déduites d'une seule fonctionnelle  $\mathcal{F}[j(\cdot)]$  par dérivations :

$$iK^F(x_1, x_2, \dots, x_N) = \lim_{j \rightarrow 0} \hbar^N \left[ \prod_{n=1}^N \frac{\delta}{i\delta j(x_n)} \right] \mathcal{F}[j]. \quad (1.13)$$

Ainsi, le rôle de la source  $j$  est de paramétrer le calcul d'observables : on parle de sources de *book-keeping*. Formellement, elles s'identifient à des sources externes complètement indépendantes des degrés de liberté du système. En outre, cette description sous forme de séries (1.12) suppose que les fonctionnelles génératrices soient analytiques en terme de ces sources.

On définit la fonctionnelle  $\tilde{\mathcal{Z}}$  collectant toutes les fonctions de *Green* par une série de puissances du type (1.12). Son expression en terme d'intégrale de chemin est

$$\tilde{\mathcal{Z}}[j(\cdot)] = \int \mathcal{D}[\varphi] e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi] + \frac{i}{\hbar} j \cdot \varphi} \equiv \int \mathcal{D}[\varphi] e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi; j]}.$$

De la même manière, on définit la fonctionnelle  $\mathcal{Z}$  regroupant toutes les fonctions de *Green* qui ne sont pas issues du vide. Elle peut être mise sous la forme

$$\mathcal{Z}[j(\cdot)] = \langle 0, t_{out} | \hat{T} \left[ \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_{out}}^{t_{in}} dx^0 \int d^3x j(x) \varphi(x) \right\} \right] | 0, t_{in} \rangle \quad (1.14)$$

et correspond à l'intégrale de chemin

$$\mathcal{Z}[j(\cdot)] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}[\varphi] e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi; j]} = \frac{\tilde{\mathcal{Z}}[j(\cdot)]}{\tilde{\mathcal{Z}}[0]}. \quad (1.15)$$

Dans cette expression, le facteur de normalisation (facteur de phase infini)

$$\mathcal{N}^{-1} \equiv \int \mathcal{D}[\varphi] e^{\frac{i}{\hbar} S[\varphi]}$$

impose  $\langle 0, t_{out} | 0, t_{in} \rangle = 1$  ce qui supprime, dans le numérateur  $\tilde{\mathcal{Z}}[j(\cdot)]$ , les fonctions de *Green* contribuant exclusivement au vide<sup>17</sup>. De la même manière, on définit par une série de puissances du type (1.12) la fonctionnelle génératrice  $\mathcal{W}$  regroupant uniquement les fonctions de *Green* connectées. En décomposant les fonctions de *Green* issues de  $\mathcal{Z}$  sous forme de combinaisons de produits de termes connectés, on peut montrer que l'on a [2] :

$$e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{W}[j(\cdot)]} = \mathcal{Z}[j(\cdot)]$$

au sens des fonctionnelles.

---

17. Les contributions propres au vide correspondent aux fonctions de *Green* à "zéro point" c'est-à-dire à tous les diagrammes sans propagateur externe.

### Cas des fermions

Les fonctionnelles précédentes peuvent être adaptées aux champs de fermions en considérant que les degrés de liberté correspondants sont des nombres qui anti-commutent (variables de *Grassmann*). Le terme de couplage source-champ  $j \cdot \varphi$  est alors remplacé par la somme  $\bar{\eta} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot \eta$  où les sources externes  $\bar{\eta}$  et  $\eta$  sont également des variables de *Grassmann*. Enfin, on choisit de définir les opérations de dérivation sur ce type de variables comme agissant à gauche des produits :

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} \bar{\psi} \psi = +\psi, \quad \frac{\delta}{\delta \psi} \bar{\psi} \psi = -\frac{\delta}{\delta \psi} \psi \bar{\psi} = -\bar{\psi}.$$

### Définition d'opérateurs composites

La méthode fonctionnelle présentée peut être généralisée à l'expression d'amplitudes de transition pour des *opérateurs composites* c'est-à-dire pour des expressions du type

$$\langle 0, t_{out} | A(x_1) \cdots A(x_n) | 0, t_{in} \rangle \equiv \langle 0, t_{out} | A[\varphi(x_1)] \cdots A[\varphi(x_n)] | 0, t_{in} \rangle$$

où  $A$  est une fonctionnelle particulière de la configuration de champ<sup>18</sup>. L'expression de la fonctionnelle génératrice doit alors être modifiée en couplant ces opérateurs particuliers à une source externe  $j$  :

$$\mathcal{Z}[j(\cdot)] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}[\varphi] e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\varphi] + \frac{i}{\hbar} j \cdot A[\varphi]}.$$

### Statut des termes composant la phase d'une fonctionnelle génératrice

L'utilisation d'opérateurs composites ne relève pas uniquement d'une commodité visant à simplifier les écritures formelles : leurs définitions traduisent avant tout l'impact que peut avoir une mesure sur le système étudié et, par là même, son influence de principe<sup>19</sup>. Cet aspect est d'autant plus marqué dans le contexte du formalisme *closed time path* présenté et développé à partir du chapitre 3.

Le statut des termes composant la phase d'une fonctionnelle génératrice n'est pas le même selon que ceux-ci sont couplés ou non à des sources *extérieures*. En premier lieu, la partie de l'action nue indépendante de toute quantité extérieure<sup>20</sup> a rapport au comportement *intrinsèque* du système, que ce soit dans le cadre d'une théorie fondamentale ou bien pour un modèle effectif ou même phénoménologique. Cette partie conditionne les règles suivies par le système : par exemple, c'est exclusivement de cette partie que sont issues les règles de *Feynman* pour une théorie donnée. En second lieu, la partie de la phase dépendante des sources extérieures décrit les observables recherchées : ces termes dépendent exclusivement des choix de mesures effectuées c'est-à-dire de ce que l'on recherche et impose au système plutôt qu'à sa nature intrinsèque. Les paramètres de contrôle sont justement liés à la manipulation formelle des sources extérieures et sont alors

---

18. Plus généralement, un opérateur composite peut être fonction du moment associé à la configuration de champ auquel cas les intégrales de chemin doivent être définies dans l'espace des phases fonctionnelles.

19. Cet aspect sera illustré dans la première partie du chapitre 5.

20. C'est l'action nue usuelle  $\mathcal{S}[\varphi]$  nécessaire à la définition des fonctions de *Green*.

répercutés sur le système *via* le couplage entre les opérateurs composites et ces quantités. Dès lors, l'incidence de mesures peut être modélisée au travers de ces sources extérieures : ainsi, des différences notables peuvent apparaître selon que différents opérateurs sont définis *conjointement* plutôt que *séparément*.

### 1.3 Évaluation de fonctionnelles génératrices

On considère une théorie renormalisable quelconque définie par une action  $\mathcal{S}$ . Sa fonctionnelle  $\mathcal{Z}$  est définie par une expression du type (1.15). L'évaluation exacte de celle-ci n'est possible que pour une théorie libre et, dans le cadre d'une théorie plus générale, son expression ne peut être qu'approchée. On distingue principalement deux types d'approximation permettant l'évaluation de fonctionnelles génératrices : le *développement perturbatif* et le *développement en boucles*. Ces deux programmes reposent sur la *méthode de la phase stationnaire* [15, 16].

Le *développement perturbatif* nécessite que l'action soit décomposable en une partie libre (quadratique en champs) et une partie interactive. Cette dernière doit être de *faible amplitude* par rapport à la partie libre de l'action : les contributions perturbatives sont alors des combinaisons fortement dominées par celles issues de la théorie libre : en conséquence, le développement perturbatif correspond à un développement sur les constantes de couplages de la théorie (supposées faibles par construction). Enfin, cette méthode peut être comprise comme une application de la méthode de la phase stationnaire en imposant que les fluctuations quantiques soient dominées par le champ issu de la théorie libre correspondante.

Le *développement en boucles* réalise l'intégration de fluctuations quantiques de *faibles amplitudes* autour d'un champ dominant généralement différent de celui issu de la théorie libre. Il correspond à une application stricte de la méthode de la phase stationnaire et réalise un développement des contributions quantiques en puissance de  $\hbar$ . Toutefois, le traitement des termes non-quadratiques du *Lagrangien* nécessite également d'utiliser un développement perturbatif.

#### 1.3.1 Intégration des degrés de liberté d'une théorie libre

Les fonctionnelles génératrices libres  $\mathcal{Z}_0$  correspondent à celles présentant une action quadratique en champ : ces expressions sont solubles *exactement*. En effet, l'intégrale de chemin sur les champs quantiques peut être calculée directement comme la limite d'un produit d'intégrales de type *Fresnel* définies soit pour des nombres qui commutent (cas des degrés de libertés bosoniques), soit pour des nombres qui anti-commutent (cas des degrés de libertés fermioniques). Pour les bosons, le résultat de cette intégration est

$$\int \mathcal{D}[\varphi] e^{\frac{i}{2}\varphi \cdot D_0^{F-1} \cdot \varphi + i j \cdot \varphi} = (\det[D_0^F])^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{i}{2} j \cdot D_0^F \cdot j}, \quad \mathcal{Z}_0[j(\cdot)] = e^{\frac{i}{2} j \cdot D_0^F \cdot j} = e^{-\frac{1}{2} i j \cdot i D_0^F \cdot i j}$$

tandis que pour les fermions celle-ci donne

$$\int \mathcal{D}[\psi] \mathcal{D}[\bar{\psi}] e^{i(\bar{\psi} \cdot G_0^{F-1} \cdot \psi + \bar{\eta} \cdot \psi + \bar{\psi} \cdot \eta)} = (\det[G_0^F])^{+1} e^{i \bar{\eta} \cdot G_0^F \cdot \eta}, \quad \mathcal{Z}_0[\bar{\eta}(\cdot), \eta(\cdot)] = e^{-i \bar{\eta} \cdot G_0^F \cdot \eta} = e^{+i \bar{\eta} \cdot i G_0^F \cdot i \eta}.$$

Pour les théories libres, la méthode de la phase stationnaire conduit à un résultat exact.

### 1.3.2 Développement perturbatif

Le traitement perturbatif d'une fonctionnelle génératrice repose sur l'approximation que la partie interactive de l'action soit de faible amplitude par rapport à celle de la partie libre. Cette méthode consiste à exprimer la fonctionnelle de la théorie complète en fonction d'une autre connue exactement : cette dernière correspond généralement à celle issue de la théorie libre mais toute fonctionnelle dont l'expression peut être calculée avec suffisamment de précision peut alors jouer ce rôle. Dans cette partie, nous prenons  $c = \hbar = 1$ .

Partant du constat que l'expression de l'intégrale de chemin d'une dérivée fonctionnelle totale est nulle *ie*

$$\int \mathcal{D}[\varphi] \frac{\delta}{\delta\varphi} \exp\left(i\mathcal{S}[\varphi] + ij \cdot \varphi\right) = 0$$

(termes de bord ignorés), on peut montrer que  $\tilde{\mathcal{Z}}$  vérifie l'équation de Schwinger-Dyson

$$K_0^{F-1}(x, y) \cdot \frac{\delta \tilde{\mathcal{Z}}[j]}{\delta j(y)} + \mathcal{S}'_{int} \left[ \frac{\delta \tilde{\mathcal{Z}}[j]}{\delta j(x)} \right] + j(x) \tilde{\mathcal{Z}}[j] = 0, \quad \mathcal{S}'_{int}[X] \equiv \left. \frac{\delta \mathcal{S}_{int}}{\delta \varphi} \right|_{\varphi=X}$$

avec  $\mathcal{S} = \frac{1}{2}\varphi \cdot K_0^{F-1} \cdot \varphi + \mathcal{S}_{int}[\varphi]$  et où  $\mathcal{S}_{int}[\varphi] = -\int d^4x \mathcal{L}_{int}[\varphi]$ . La solution de cette équation permet finalement d'obtenir  $\mathcal{Z}$  après normalisation :

$$\mathcal{Z}[j(\cdot)] = \mathcal{N} \exp \left\{ i\mathcal{S}_{int} \left[ \frac{\delta}{\delta j(\cdot)} \right] \right\} \mathcal{Z}_0[j(\cdot)]. \quad (1.16)$$

Ces résultats peuvent aisément être étendus au cas des fermions et conduisent à des expressions similaires. Toute la dépendance résultant de l'interaction est ainsi contenue dans la première exponentielle de cette expression : son développement permet d'obtenir concrètement les termes de la série perturbative contribuant à un ordre donné.

Les fonctions à N-points de la théorie sont alors obtenues *via* (1.13) et s'écrivent comme des séries en puissances des constantes de couplage de la théorie combinant exclusivement des propagateurs libres. Il est alors commode d'organiser ces termes en utilisant des diagrammes de *Feynman* : chaque ordre de la série perturbative correspond alors à la somme de toutes les topologies de diagrammes possibles ayant un nombre de vertices fixés.

### 1.3.3 Développement en boucles

Le développement en boucles consiste à calculer l'intégrale de chemin pour de petites fluctuations autour d'un champ dominant : les fonctionnelles génératrices sont approximées par la *méthode de la phase stationnaire*.

**Développement autour d'un champ dominant et structure en boucles de  $\mathcal{W}$** 

Le champ dominant  $\Phi_S(x; j]$  correspond au *point selle* de l'intégrant : il est défini comme étant celui annulant la dérivé première de la phase  $\mathcal{S}[\varphi; j]$  c'est-à-dire vérifiant

$$j + \frac{\delta \mathcal{S}[\varphi]}{\delta \varphi} \Big|_{\varphi(\cdot) = \Phi_S(\cdot; j]} = 0. \quad (1.17)$$

Ceci revient donc à imposer que  $\Phi_S(x; j]$  soit le champ vérifiant les équations du mouvement en présence d'une source externe  $j$  non-nulle. C'est le chemin dont le voisinage apporte la plus forte contribution à la valeur de l'intégrale de chemin. En outre,  $\Phi_S(x; j]$  est indépendant de  $\hbar$  par construction et nous le supposons unique dans les développements qui suivent.

L'équation précédente peut être utilisée pour exprimer la dépendance de la source en fonction du champ  $\Phi_S(x; j]$  ou, à l'inverse, celle du champ dominant en terme de la source. Cependant, la solution exacte de l'équation du mouvement (1.17) ne peut généralement pas être obtenue et elle doit alors faire l'objet d'approximations. Cette relation peut être alors cherchée sous la forme d'une série en puissance de  $j$ . L'expression (1.17) constitue le point de départ pour obtenir les variations de  $\Phi_S(x; j]$  en fonction des sources. On a notamment

$$\frac{\delta \Phi_S(x; j]}{\delta j(y)} = -K_0^F(x, y; \Phi_S]$$

où le propagateur  $K_0^F[\Phi_S]$  est défini par l'expression

$$\mathcal{S}^{(2)}[\Phi_S] \cdot K_0^F[\Phi_S] = \delta(x - y). \quad (1.18)$$

Ce propagateur comporte un terme de masse dépendant du champ  $\Phi_S(x; j]$ . Les variations d'ordre supérieur peuvent également être déterminées de cette façon c'est-à-dire en exploitant les dérivées de (1.17) et de (1.18).

Le phase  $\mathcal{S}[\varphi; j]$  peut ensuite être développée pour des fluctuations de petites amplitudes  $\chi$  autour de  $\Phi_S(x; j]$  sous la forme  $\varphi(x) = \Phi_S(x; j] + \sqrt{\hbar} \chi(x)$ , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \mathcal{S}[\varphi; j] &\equiv \mathcal{S}[\Phi_S[j] + \sqrt{\hbar} \chi] + j \cdot (\Phi_S[j] + \sqrt{\hbar} \chi) \\ &= \mathcal{S}[\Phi_S] + j \cdot \Phi_S + \sum_{N=2}^P \frac{\hbar^{N/2}}{N!} \left[ \prod_n^N \int d^4 z_n \right] \mathcal{S}^{(N)}[\Phi_S(z_n; j)] \left[ \prod_n^N \chi(z_n) \right] + \mathcal{O}(\chi^P) \end{aligned}$$

avec

$$\mathcal{S}^{(N)}[\Phi_S(z_n; j)] = \left( \left[ \prod_n^N \frac{\delta}{\delta \varphi(z_n)} \right] \mathcal{S}[\varphi] \right)_{\varphi(\cdot) = \Phi_S(\cdot; j]}.$$

L'intégration des fluctuations issues du développement précédent conduit à structurer  $\mathcal{Z}$  en terme d'une somme de fonctionnelles  $\mathcal{W}_L$  génératrices des fonctions connexes à  $L$ -boucles de la théorie :

$$\mathcal{Z}[j(\cdot)] = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \mathcal{W}_A[\Phi_S] + \frac{i}{\hbar} \sum_{L=1}^B \hbar^L \mathcal{W}_L[\Phi_S] + \mathcal{O}(\hbar^B) \right]. \quad (1.19)$$

$\mathcal{W}_A$  désigne le niveau *arbre* de la théorie c'est-à-dire la partie sans boucle : ce terme comporte généralement une dépendance explicite en terme de la source externe  $j$ . Tous les termes d'ordre supérieur peuvent être paramétrés en fonction du champ  $\Phi_S$  qui contient alors implicitement la dépendance de la fonctionnelle selon la source externe  $j$ .

### Développement à une boucle

Le développement à une boucle correspond au calcul des termes issus de la partie quadratique des fluctuations quantiques c'est-à-dire ceux proportionnels à  $\hbar$  :

$$\mathcal{S}[\varphi; j] \simeq \mathcal{S}[\Phi_S] + j \cdot \Phi_S + \frac{\hbar}{2} \chi \cdot \mathcal{S}^{(2)}[\Phi_S] \cdot \chi.$$

Dans l'approximation à une boucle, la fonctionnelle génératrice s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}[j] &\simeq \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{W}_A[\Phi_S] + i \mathcal{W}_1[\Phi_S]\right) \\ &= \mathcal{N} e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\Phi_S] + \frac{i}{\hbar} j \cdot \Phi_S} \int \mathcal{D}[\chi] e^{\frac{i}{2} \chi \cdot \mathcal{S}^{(2)}[\Phi_S] \cdot \chi} \\ &= \mathcal{N} e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\Phi_S] + \frac{i}{\hbar} j \cdot \Phi_S} \det(\mathcal{S}^{(2)}[\Phi_S])^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

par intégration des fluctuations. En outre, le calcul du facteur de normalisation conduit à

$$\mathcal{N}^{-1} = \int \mathcal{D}[\varphi] e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\varphi]} = \det(\mathcal{S}^{(2)}[0])^{-\frac{1}{2}}$$

car le point col  $\Phi_S(x; j = 0)$  est nécessairement trivial en l'absence de source externe (on suppose ici qu'il n'y a pas de condensat dans le vide). Ce résultat permet d'écrire finalement

$$\mathcal{Z}[j] = e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\Phi_S] + \frac{i}{\hbar} j \cdot \Phi_S} \det\left(\frac{\mathcal{S}^{(2)}[\Phi_S]}{\mathcal{S}^{(2)}[0]}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

c'est-à-dire

$$\mathcal{Z}[j] = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\Phi_S] + \frac{i}{\hbar} j \cdot \Phi_S - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ \frac{\mathcal{S}^{(2)}[\Phi_S]}{\mathcal{S}^{(2)}[0]} \right]\right).$$

Plus particulièrement, à partir de l'expression de l'action écrite sous la forme

$$\mathcal{S}[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^4x \varphi \cdot K_0^{F-1} \cdot \varphi - \mathcal{S}_{int}[\varphi], \quad \mathcal{S}^{(2)}[\Phi_S] = K_0^{F-1} - \mathcal{S}_{int}^{(2)}[\Phi_S] \equiv K_0^{F-1}[\Phi_S],$$

l'approximation à une boucle conduit au résultat

$$\mathcal{Z}[j] = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\Phi_S] + \frac{i}{\hbar} j \cdot \Phi_S - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[ 1 - \frac{\mathcal{S}_{int}^{(2)}[\Phi_S]}{K_0^{F-1}} \right]\right).$$

La dépendance en source dans le terme à une boucle est implicitement contenue dans l'expression de  $\Phi_S$ . Ainsi, la méthode de la phase stationnaire est particulièrement efficace pour évaluer une fonctionnelle génératrice à l'ordre d'une boucle. Enfin, les fermions peuvent être traités de manière similaire.

### Développements aux ordres supérieurs

Les termes dont l'ordre est supérieur à une boucle ne font plus intervenir des intégrales uniquement quadratiques suivant les fluctuations quantiques : ils font alors l'objet d'un développement perturbatif sur  $\hbar$  à partir de la solution de l'équation de *Schwinger-Dyson* (1.16). La fonctionnelle génératrice s'écrit

$$\mathcal{Z}[j(\cdot)] = e^{\frac{i}{\hbar}(\mathcal{W}_A[\Phi_S] + \hbar \mathcal{W}_1[\Phi_S])} \frac{\int \mathcal{D}[\chi] e^{\frac{i}{2}\chi \cdot \mathcal{S}^{(2)}[\Phi_S] \cdot \chi + i \sum_{L=3}^{2B} \frac{\hbar^{L/2}}{N!} \mathcal{S}^{(L)}[\Phi_S] \cdot \chi^L + \mathcal{O}(\hbar^B)}}{\int \mathcal{D}[\chi] e^{\frac{i}{\hbar}\chi \cdot \mathcal{S}^{(2)}[\Phi_S] \cdot \chi}}. \quad (1.20)$$

La partie quadratique de l'action fait intervenir le propagateur  $K_0^F[\Phi_S]$  défini par la relation (1.18). Ce propagateur fait office de fonction à deux points "libre" dont le terme de masse dépend du champ dominant. Les autres termes de l'action issus de la somme sont tous proportionnels à des puissances de  $\hbar$  : ils jouent le rôle d'interactions "effectives" dont les constantes de couplage dépendent également du champ dominant mais aussi de puissances de  $\hbar$ .

La fonctionnelle (1.20) ne contient pas de terme explicite couplant sources et fluctuations en raison du couplage linéaire de ces quantités<sup>21</sup> : la dépendance en source externe est implicitement contenue dans l'expression du champ  $\Phi_S$  dont dépendent tous les paramètres de l'action de l'intégrale de chemin de (1.20). Par conséquent, cette intégrale de chemin peut être évaluée de façon standard en ne retenant que les diagrammes issus du vide contribuant à un nombre de boucles donné pour une théorie nue effective de propagateur  $K_0^F[\Phi_S]$  et dont les termes d'interactions sont alors définis par les ordres supérieurs dépendant également de  $\Phi_S$ . La fonctionnelle (1.20) s'écrit alors sous la forme d'une somme de contributions  $\mathcal{W}_L[\Phi_S]$  dépendantes du champ dominant (équation (1.19)).

Toutefois, ce programme d'évaluation est la cause de difficultés lorsqu'il est mis en œuvre au delà de deux boucles. C'est le cas notamment lorsque l'action effective, présentée ultérieurement, est recherchée. En effet, il est souvent nécessaire d'écrire les contributions en boucles en terme des sources extérieures  $j$  plutôt qu'en fonction du point selle  $\Phi_S$  : cette reparamétrisation peut être compliquée puisque l'équation (1.17) ne peut généralement pas être résolue exactement. Dès lors, on préférera généralement utiliser directement une approche perturbative suivie d'une réorganisation de la série en fonction des boucles ou employer d'autres méthodes [3].

#### 1.3.4 Limite classique d'amplitudes de transition

Les amplitudes de transition, et les fonctions de *Green* qui en dérivent, peuvent être avantageusement exprimées au moyen d'intégrales de chemin. Dans ce cadre, la limite classique des observables est définie par leur limite lorsque  $\hbar \rightarrow 0$  : cette limite correspond à celle d'une théorie

---

21. Cette situation est différente pour des opérateurs composites où des couplages explicites en terme des sources extérieures peuvent alors apparaître dans l'intégrale de chemin de l'expression (1.20) correspondante.

*faiblement* couplée<sup>22</sup>. Le chemin défini par la phase stationnaire<sup>23</sup> constitue le chemin classique et domine alors toutes les autres configurations de champ. La limite classique d'amplitudes de transition est alors caractérisée par l'atténuation forte de toutes les fluctuations autour de ce chemin classique : on qualifie alors cette limite de *rigide* (très contrainte). D'autre part, on peut montrer que, dans cette limite, les corrélations entre les différentes histoires disparaissent [3]. Ainsi, la limite classique proposée dans le cadre des amplitudes de transition en présente les caractéristiques sans toutefois en donner explicitement l'origine : en fait, on a coutume d'expliquer l'établissement d'un régime classique par l'influence de dissipations produites par un environnement (théorie de la décohérence). Cependant, ces dernières ne sont pas apparentes dans le cadre d'amplitudes de transition qui décrit, en outre, la limite classique entre des états purs plutôt qu'en faisant intervenir des états mixtes.

## 1.4 Action effective

### Définition

L'action effective  $\Gamma$  correspond à une réexpression de la fonctionnelle  $\mathcal{W}$  non plus en terme des sources extérieures  $j$  mais au moyen d'un champ effectif  $\tilde{\varphi}$ . L'action effective  $\Gamma$  est alors la transformée de *Legendre* de  $\mathcal{W}$

$$\Gamma[\tilde{\varphi}] = \mathcal{W}[j] - j[\tilde{\varphi}] \cdot \tilde{\varphi}. \quad (1.21)$$

où la source  $j$  doit être comprise comme une fonctionnelle de  $\tilde{\varphi}$ . En outre, en représentation de *Dirac*, le champ effectif est défini par

$$\tilde{\varphi}(x; j(\cdot)) \equiv \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta j(x)} = \frac{\langle 0, t_{out} | \hat{T}[\varphi(x) e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4 \varphi(x) j(x)}] | 0, t_{in} \rangle}{\langle 0, t_{out} | \hat{T} e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4 \varphi(x) j(x)} | 0, t_{in} \rangle}. \quad (1.22)$$

C'est une quantité auxiliaire non-mesurable<sup>24</sup>. Par ailleurs, pour que la transformée de *Legendre* (1.21) soit définie, il est nécessaire que la reparamétrisation liant la source extérieure  $j$  au champ effectif  $\tilde{\varphi}$  soit bijective. Enfin, dans la limite  $j \rightarrow 0$ , on a coutume d'interpréter le champ effectif  $\tilde{\varphi}(x; 0) = \langle 0, t_{out} | \varphi(x) | 0, t_{in} \rangle / \langle 0, t_{out} | 0, t_{in} \rangle$  comme la valeur moyenne du champ sur le vide.

### Généralisation de l'action classique et potentiel effectif

L'action effective  $\Gamma$  correspond à la généralisation quantique de l'action classique. C'est une grandeur non-locale (*cf* développement sur les vertices propres (1.26)) qui peut néanmoins être

---

22. En effet, le facteur  $\hbar$  (entre autres) gouverne l'importance des fluctuations quantiques. Par exemple, pour la théorie  $\frac{g}{4!} \varphi^4$  en dimension  $3 + 1$ , la phase totale  $\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_g[\varphi]$  intervenant dans l'intégrale de chemin correspondante peut être écrite  $i \mathcal{S}_{gh}[\varphi]$  par changement de variable : aussi, la "véritable" constante de couplage de la théorie correspond au produit  $g\hbar$  dans ce cas.

23. À nouveau, nous supposons ce chemin unique ici.

24. La définition (1.22) peut être étendue au cas des opérateurs composites. Soulignons que les champs (et opérateurs) effectifs sont des quantités à valeurs complexes même s'ils sont définis, à l'origine, à partir d'opérateurs hermitiens : en effet, ces grandeurs sont issues d'amplitudes de transition qui ne sont pas, en principe, directement interprétables (*cf* définition des probabilités (1.1)). Comme nous le verrons à partir du chapitre 3, il est possible d'obtenir des fonctionnelles ayant pour paramètre une quantité strictement réelle faisant office de valeur moyenne dans le cadre du formalisme *closed time path*.

écrite sous la forme

$$\Gamma[\tilde{\varphi}] = \int d^4x \left( Z[\tilde{\varphi}] \partial_\mu \tilde{\varphi} \partial^\mu \tilde{\varphi} - V_{eff}[\tilde{\varphi}] + \text{dérivées d'ordre supérieurs} \right)$$

par développement sur les dérivées du champ (uniquement dans le cadre du développement perturbatif ou en boucles). Dans la limite  $\hbar \rightarrow 0$ , l'action effective se réduit à l'expression locale

$$\Gamma[\tilde{\varphi}] \rightarrow \int d^4x \left( \partial_\mu \tilde{\varphi} \partial^\mu \tilde{\varphi} - V_{classique}[\tilde{\varphi}] \right), \quad V_{eff}[\tilde{\varphi}] \rightarrow V_{classique}[\tilde{\varphi}], \quad Z[\tilde{\varphi}] \rightarrow 1$$

c'est-à-dire à l'action classique. Enfin, en imposant que le champ auxiliaire  $\tilde{\varphi}$  soit constant sur l'espace-temps, on peut obtenir le potentiel effectif  $V_{eff}$  via  $\Gamma[\tilde{\varphi}] = -V_{eff}[\tilde{\varphi}] \int d^4x$ . Celui-ci constitue la généralisation quantique du potentiel classique.

### Développement en boucles

Le développement en boucles de l'action effective consiste à écrire cette fonctionnelle sous la forme d'une série en puissances de  $\hbar$

$$\Gamma[\tilde{\varphi}] = \sum_L^B \hbar^L \Gamma_L[\tilde{\varphi}] + \mathcal{O}(\hbar^B). \quad (1.23)$$

Par ailleurs, en paramétrant la fonctionnelle  $\mathcal{W}$  en terme du champ dominant  $\Phi_S$ , la définition (1.21) conduit à l'expression

$$\Gamma[\tilde{\varphi}] = \mathcal{W}[\Phi_S] - j[\Phi_S] \cdot \tilde{\varphi} + \mathcal{O}(\hbar^B) = \mathcal{W}[\Phi_S] + \frac{\delta \mathcal{S}[\Phi_S]}{\delta \Phi_S} \cdot \tilde{\varphi} + \mathcal{O}(\hbar^B). \quad (1.24)$$

L'expression en boucles de l'action effective passe donc par la réexpression du champ dominant  $\Phi_S$  en fonction du champ effectif  $\tilde{\varphi}$ . Cependant, la dépendance fonctionnelle entre ces deux quantités ne peut généralement pas être obtenue de manière exacte : au mieux, elle ne peut qu'être approximée comme une série en  $\hbar$  devant alors être combinée avec celle des fonctionnelles mises en jeu dans l'expression (1.24) pour pouvoir déterminer, *in fine*, l'expression en boucles de l'action effective.

L'équation du point selle (1.17) permet d'établir la dépendance fonctionnelle de la source  $j$  en terme du champ dominant  $\Phi_S$ . Il reste alors à exprimer la dépendance fonctionnelle de  $\Phi_S$  en terme du champs effectif  $\tilde{\varphi}$  à l'ordre  $\hbar^B$ . À partir de la décomposition en boucles de  $\mathcal{W}$  (cf expression (1.19)), on peut écrire

$$\tilde{\varphi} = \frac{\delta \mathcal{W}[\Phi_S]}{\delta j} = \frac{\delta \mathcal{W}_A[\Phi_S]}{\delta j} + \sum_{L=1}^B \hbar^L \frac{\delta \mathcal{W}_L[\Phi_S]}{\delta j} + \mathcal{O}(\hbar^B).$$

Or, le niveau arbre de  $\mathcal{W}$  s'écrivant  $\mathcal{W}_A = \mathcal{S}[\Phi_S] + j \cdot \Phi_S$ , on a

$$\frac{\delta \mathcal{W}_A[\Phi_S]}{\delta j} = \frac{\delta \mathcal{S}[\Phi_S]}{\delta j} + \Phi_S + j \cdot \frac{\delta \Phi_S}{\delta j} = \Phi_S + \frac{\delta \Phi_S}{\delta j} \cdot \left( \frac{\delta \mathcal{S}[\Phi_S]}{\delta \Phi_S} + j \right) = \Phi_S$$

en utilisant l'équation du point selle (1.17). Le champs moyen  $\tilde{\varphi}$  correspond ainsi au champ dominant  $\Phi_S$  seulement à l'ordre  $\hbar^0$ .

$$\begin{aligned}\Phi_S &= \tilde{\varphi} - \sum_{L=1}^B \hbar^L \frac{\mathcal{W}_L[j]}{\delta j} + \mathcal{O}(\hbar^B) = \tilde{\varphi} - \sum_{L=1}^B \hbar^L \frac{\delta \Phi_S}{\delta j} \cdot \frac{\mathcal{W}_L[\Phi_S]}{\delta \Phi_S} + \mathcal{O}(\hbar^B) \\ &= \tilde{\varphi} + \sum_{L=1}^B \hbar^L G[\Phi_S] \cdot \frac{\mathcal{W}_L[\Phi_S]}{\delta \Phi_S} + \mathcal{O}(\hbar^B).\end{aligned}$$

Ce résultat conduit à poser que le champ dominant  $\Phi_S$  s'écrit comme une série de variations en  $\hbar$  autour du champ moyen  $\tilde{\varphi}$ .

$$\Phi_S = \tilde{\varphi} + \sum_{L=1}^B \hbar^L \tilde{\varphi}_L[\tilde{\varphi}] + \mathcal{O}(\hbar^B)$$

Comme décrit précédemment, la détermination des termes  $\tilde{\varphi}_L$  ne peut être qu'approchée. L'expression en boucles de  $\Gamma$  peut alors être obtenue en remplaçant le champ dominant par son expression en série dans la relation (1.24) conduisant à :

$$\begin{aligned}\Gamma[\tilde{\varphi}] &= \mathcal{W}[\tilde{\varphi} + \sum_{L=1}^B \hbar^L \tilde{\varphi}_L] - j[\tilde{\varphi} + \sum_{L=1}^B \hbar^L \tilde{\varphi}_L] \cdot \tilde{\varphi} + \mathcal{O}(\hbar^B) \\ &= \mathcal{W}_A[\tilde{\varphi} + \sum_{l=1}^B \hbar^l \tilde{\varphi}_l] + \sum_{L=1}^B \hbar^L \left( \mathcal{W}_L[\tilde{\varphi} + \sum_{l=1}^{B-L} \hbar^l \tilde{\varphi}_l] - j[\tilde{\varphi} + \sum_{l=1}^{B-L} \hbar^l \tilde{\varphi}_l] \cdot \tilde{\varphi}_L \right) + \mathcal{O}(\hbar^B).\end{aligned}$$

Les différents termes sont alors développés jusqu'à l'ordre  $\hbar^B$  pour obtenir l'expression des termes à  $L$  boucles de  $\Gamma$ . Plus particulièrement, l'expression d'une fonctionnelle  $\mathcal{W}_L[\Phi_S]$  apporte des contributions aux ordres supérieurs  $L' > L$  par l'intermédiaire de ce développement (et de  $\tilde{\varphi}_L$ ). On peut alors montrer que le résultat de cette procédure revient à soustraire les contributions à une particule réductible des termes de boucles  $\mathcal{W}_L$  [3] : en conséquence, l'action effective  $\Gamma$  s'écrit en terme de diagrammes à une particule irréductible.

### Fonctionnelle génératrice des vertex propres

La première dérivée de  $\Gamma$  conduit aux équations du mouvement pour le champ effectif

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \tilde{\varphi}(x)} = -j(x) \tag{1.25}$$

et plus particulièrement à celles de la quantité  $\langle 0, t_{out} | \varphi(x) | 0, t_{in} \rangle / \langle 0, t_{out} | 0, t_{in} \rangle$  dans la limite  $j \rightarrow 0$ . En outre, la relation (1.25) prise dans la limite  $j \rightarrow 0$  permet d'obtenir l'amplitude de transition du vide au vide [2] :

$$\hat{S} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \Gamma[\tilde{\varphi}]\right) \Big|_{\frac{\delta \Gamma}{\delta \tilde{\varphi}}=0}.$$

La dérivation par rapport à une source de l'équation (1.25) conduit à la relation de *Dyson* :

$$\int d^4z \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\varphi}(x) \tilde{\varphi}(z)} \frac{\delta^2 \mathcal{W}}{\delta j(z) \delta j(y)} = -\delta(x - y).$$

L'inverse de  $\Gamma^{(2)}$  correspond ainsi au propagateur (connecté) complet de la théorie. Une autre conséquence de l'équation de *Dyson* est que l'action effective, pour qu'elle soit définie, doit être une fonctionnelle convexe<sup>25</sup>. Par ailleurs, dans le cadre de la théorie des perturbations, on peut montrer que  $\Gamma$  constitue la fonctionnelle génératrice des vertices propres que l'on note  $\Gamma^{(N)}$  :

$$\Gamma[\tilde{\varphi}] = \sum_N \frac{1}{N!} \Gamma^{(N)}(x_1, \dots, x_N) \tilde{\varphi}(x_1) \cdots \tilde{\varphi}(x_N). \quad (1.26)$$

Le potentiel effectif correspond alors à la somme de tous les vertices pris pour une impulsion nulle.

## 1.5 Théorie de jauge : cas de l'électrodynamique quantique

Imposer qu'une symétrie vérifiée à l'échelle globale soit valable *localement* correspond à construire *une symétrie de jauge*. Concrètement, ceci revient à définir, à l'échelle locale, une dérivée covariante en introduisant un ou plusieurs champs de jauge. Ces champs compensent les variations locales du système d'origine sous transformations liées à la symétrie imposée.

Les symétries de jauge permettent de construire la plupart des interactions fondamentales de la Nature. Ainsi, le *Lagrangien* de l'électrodynamique quantique (*QED*) est donné par l'expression

$$\mathcal{L}_{qed}[\bar{\psi}, \psi, A] = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \quad (1.27)$$

Cette théorie est le résultat de l'invariance de jauge locale  $U(1)$  imposé au *Lagrangien* de *Dirac*. De cette invariance émerge l'interaction entre le photon, le champ de jauge de la théorie, et les particules chargées; la dynamique des photons est décrite par le *Lagrangien* de *Maxwell* tandis que celle des fermions massifs peut être déterminée à partir du *Lagrangien* de *Dirac* [1]. En outre, dans l'espace des impulsions, le propagateur libre des fermions  $G_0^F$  s'écrit

$$G_0^F(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i0} \quad \text{avec } \not{p} = \gamma^\mu p_\mu$$

et où les matrices de *Dirac*  $\gamma^\mu$  vérifient la relation  $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$  ( $g^{\mu\nu}$  désigne la métrique de *Minkowski* dans ce manuscrit). La partie de l'action liée à la dynamique du photon,

$$\mathcal{S}_{ph}[A] = -\frac{1}{4} \int d^4x F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \int d^4x A^\mu (g_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) A^\nu,$$

---

25. En effet, la monotonie de la fonctionnelle (1.22) impose que la dérivée seconde de  $\mathcal{W}$  soit non nulle : par l'intermédiaire de l'équation de *Dyson*, cette propriété est alors transmise à l'action effective qui est soit convexe, soit concave. Toutefois, cette dernière possibilité est à rejeter afin que la théorie ait un minimum.

met en jeu uniquement l'opérateur de projection transverse qui n'est pas inversible : une des quatre composantes du champ électromagnétique n'a alors pas de dynamique. Dès lors, il est nécessaire de fixer la jauge pour correctement définir des expressions fonctionnelles à partir du *Lagrangien* (1.27). Cette procédure s'appuie sur l'introduction des fantômes de *Faddeev-Popov* [5]. Pour la jauge covariante, la *QED*, en tant que théorie de jauge abélienne, a la particularité de découpler ces degrés de liberté de ceux du champ électromagnétique : les fantômes introduits par cette procédure peuvent alors être intégrés et conduisent à un facteur de phase infini en facteur de l'expression des fonctionnelles. En outre, dans le cadre de la jauge covariante, la fixation de jauge revient à ajouter une contribution longitudinale arbitraire au *Lagrangien* :

$$\mathcal{L}_{qed}^{(\lambda)}[\bar{\psi}, \psi, A] = \mathcal{L}_{qed}[\bar{\psi}, \psi, A] - \frac{\lambda}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad \lambda \neq 0.$$

On est alors en mesure d'obtenir le propagateur libre du photon sous la forme

$$D_0^{F\mu\nu}(p) = \frac{g^{\mu\nu} - (1 - \lambda)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}}{p^2 + i0} = \frac{T^{\mu\nu} + \lambda L^{\mu\nu}}{p^2 + i0}$$

où  $T^{\mu\nu}$  et  $L^{\mu\nu}$  désignent respectivement les opérateurs de projection transverse et longitudinale. Plus particulièrement, dans la jauge de *Feynman* ( $\lambda = 1$ ), ce propagateur s'écrit en fonction de celui d'un champ scalaire non-massif  $D_0^F$  :

$$D_0^{F\mu\nu}(p) = \frac{g^{\mu\nu}}{p^2 + i0} = g^{\mu\nu} D_0^F(p).$$

Tous les développements ultérieurs seront fait dans ce contexte.

## Chapitre 2

# Propagateurs

L'étude de systèmes satisfaisant à la fois les principes de la relativité restreinte et les postulats de la mécanique quantique repose sur une description en terme de fonctions de *Green*. En théorie quantique des champs usuelle, ces quantités, à la fois nécessaires<sup>1</sup> et commodes, correspondent à l'expression d'amplitudes de transition dont le calcul, notamment dans le cadre du développement perturbatif ou en boucles, peut être efficacement réalisé au moyen d'intégrales de chemin [1, 6]. Dans ce cadre, les fonctions à N-points peuvent être déduites des propagateurs (fonctions à deux points) qui doivent *nécessairement* suivre la prescription de *Feynman*. Toutefois, d'autres prescriptions peuvent être définies comme par exemple celles que l'on a coutume d'introduire en physique classique : dans le contexte de la théorie quantique des champs, l'utilisation de prescriptions autres que celle de *Feynman* fait appel, par exemple, au formalisme *closed time path* qui sera présenté dans le chapitre 3. En fait, en théorie quantique des champs, il peut être montré que la prescription suivie par les propagateurs est imposée par les conditions de bord définissant la situation traitée. Ainsi, les amplitudes du chapitre 1 imposent que soient définies des conditions initiales *et* finales alors que celles qui seront présentées dans le chapitre 3 dépendent de conditions initiales *ou* finales. Soulignons, en outre, que les développements propres à un type de condition de bord sont incompatibles avec ceux intervenant pour d'autres conditions.

L'objet de cette section est ainsi de présenter les différents types de propagateurs qui seront utilisés dans ce manuscrit. Dans un premier temps, nous introduirons les fonctions de *Green* puis nous préciserons différentes prescriptions possibles. Celles-ci sont liées à la façon dont ces fonctions à deux points sont prolongées sur "couche de masse"<sup>2</sup>. Enfin, les propriétés, vis-à-vis de la couche de masse, d'opérations entre propagateurs seront abordées dans un second temps, principalement afin de simplifier l'expression des fonctionnelles dont le calcul est présenté dans l'annexe B.1.

---

1. Le vecteur d'état de tels systèmes n'est généralement pas bien défini durant son évolution. En revanche, la réunion de vecteurs d'état et d'opérateurs d'évolution sous la forme d'amplitudes de transition préserve la structure relativiste.

2. La couche de masse constitue le noyau de l'opérateur différentiel correspondant au propagateur calculé.

## 2.1 Introduction aux fonctions de Green

Supposons que l'on cherche à déterminer l'ensemble des fonctions  $\varphi$  vérifiant l'équation différentielle

$$\mathcal{L}_{x,z} \cdot \varphi(z) = g(x) \quad (2.1)$$

où  $g$  est une fonction,  $\mathcal{L}_{x,z}$  un opérateur différentiel linéaire et continu. En outre, l'ensemble des solutions de cette équation est contrainte par des conditions aux limites. Une méthode de résolution d'un tel problème fait appel aux fonctions de *Green*. On définit les fonctions de *Green*  $K$  de l'opérateur  $\mathcal{L}$  comme étant les distributions satisfaisant la relation

$$\mathcal{L}_{x,z} \cdot K(z, y) = \delta[x - y].$$

Généralement, plusieurs fonctions de *Green* peuvent être définies à partir d'un unique opérateur. C'est la donnée des conditions de bord qui impose l'utilisation d'une fonction de *Green* particulière : ces conditions aux limites précisent la façon dont est atteinte la "couche de masse" c'est-à-dire le noyau de l'opérateur différentiel. Adjoint de ces prescriptions, ce dernier est alors inversible et, au sens des fonctionnelles, les fonctions de *Green* correspondent donc à leur inverse.

La recherche de solutions particulières  $\varphi_b[g]$  de l'équation différentielle (2.1) est alors aisée : celles-ci peuvent être exprimées directement au moyen des différentes fonctions de *Green*  $K^b$  qui satisfont aux conditions du problème *via*

$$\varphi_b[g](x) = \int dz K^b(x, z)g(z).$$

Enfin, l'ensemble des solutions  $\varphi$  de l'équation (2.1) est obtenu en ajoutant à la solution particulière  $\varphi_b[g]$  les solutions homogènes  $\varphi_0$  c'est-à-dire celles correspondant au noyau de l'opérateur  $\mathcal{L}$  :

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_b[g].$$

Concrètement, en théorie quantique des champs, les fonctions de *Green* sont définies à partir du *Lagrangien* de la théorie comme précisé dans le chapitre 1. Plus généralement, les valeurs moyennes d'observables peuvent être exprimées en termes de fonctions de *Green* à N-points elles-mêmes écrites comme des combinaisons de fonctions de *Green* à deux points (théorème de *Wick*).

Généralement, pour résoudre une équation différentielle au moyen de fonctions de *Green*, on commence par exprimer celles-ci en représentation de *Fourier* : l'équation devient alors algébrique et les fonctions de *Green* de l'opérateur s'écrivent *via* la transformée de *Fourier* inverse

$$K(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot (x-y)} K(p) \quad (2.2)$$

où

$$\text{TF}[\mathcal{L}](p) \cdot K(p) = 1, \quad K(p) \equiv \text{TF}[K](p) \quad (\text{TF}[X] \text{ désigne la transformée de } \textit{Fourier} \text{ de } X).$$

Les intégrales sur la quadri-impulsion doivent être évaluées en calculant, dans un premier temps, l'intégrale suivant la partie temporelle ( $dp^0$ ) puis celle suivant la partie spatiale ( $d^3p$ ). Des ambiguïtés peuvent apparaître lors de cette première étape car l'expression (2.2) n'est pas définie sur couche de masse : elle comporte généralement des pôles sur l'axe des réels. On ne peut donc pas définir, de façon univoque, de fonction de *Green* à partir de la seule expression (2.2) et il est nécessaire de préciser la façon dont ces pôles sont contournés<sup>3</sup> : cela revient à réaliser un prolongement analytique de l'intégrale (2.2) sur couche de masse en imposant des conditions de bords en temps à la fonction calculée. Ces différentes prescriptions peuvent alors conduire à des expressions radicalement différentes.

## 2.2 Principales prescriptions définissant les fonctions de Green

En théorie quantique des champs, la prescription imposée aux propagateurs est *spécifique* au type de quantité évaluée. Par exemple, l'évaluation perturbative d'amplitudes de transition (amplitudes *in-out*) s'appuie sur un théorème de *Wick* combinant des propagateurs utilisant *nécessairement* la prescription de *Feynman* (*cf* chapitre 1). De manière analogue, à partir du formalisme *closed time path* présenté ultérieurement dans les chapitres 3 et 4, il est possible de définir des séries perturbatives combinant (entre autre) des propagateurs retardé ou avancé mais seulement pour évaluer des amplitudes de type *in-in* ou *out-out*. Ces dernières s'identifient à des valeurs moyennes respectivement définies pour des conditions de bord exclusivement initiales pour la première, ou exclusivement finales pour la seconde.

Les propagateurs utilisés dans ces différents développements peuvent toujours être définis par la moyenne d'une combinaison particulière de deux champs : la combinaison de champs retenue est *spécifique au type de prescription retenue* tandis que les états (*bra* et *ket*) sur lesquels les moyennes sont prises sont, en fait, *caractéristiques de la situation physique étudiée*. Habituellement, les propagateurs sont définis sur le vide en théorie quantique des champs usuelle. Souvent, l'étude des propriétés de parité des propagateurs consiste à vérifier si les propriétés correspondantes sont valables pour les états sur lesquels les moyennes sont faites. Par exemple, la parité d'un propagateur sous opération de transposition dépend de l'invariance des états sous conjugaison de charge. Dans cette présentation, nous nous restreindrons aux moyennes sur le vide.

---

3. Plutôt que de définir un contour spécifique à chacune des prescriptions présentées par la suite, les pôles des propagateurs sont déplacés le long de l'axe imaginaire et l'on considère alors toujours le même contour d'intégration formé par un demi-cercle s'appuyant sur l'axe des réels et se refermant, soit dans le demi plan des parties imaginaires positives (correspondant à  $t > 0$ ), soit dans celui des parties imaginaires négatives (correspondant à  $t < 0$ ). C'est l'application du lemme de *Jordan* qui permet de déterminer le signe de la variable temporelle en fonction des contours retenus.

### 2.2.1 Propagateurs pour les ondes d'énergies positive et négative

Les propagateurs pour les modes d'énergies positives  $K^{(+)}$  et ceux pour les modes d'énergies négatives  $K^{(-)}$  sont définis par les expressions <sup>4</sup>

$$iD^{(+)}(x, y) = +\langle\varphi(x)\varphi^\dagger(y)\rangle, \quad iD^{(-)}(x, y) = +\langle\varphi^\dagger(y)\varphi(x)\rangle, \quad (2.3)$$

$$iG^{(+)}(x, y) = -\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle, \quad iG^{(-)}(x, y) = +\langle\bar{\psi}(y)\psi(x)\rangle, \quad (2.4)$$

respectivement pour les bosons (2.3) et les fermions (2.4). Pour des particules massives, le calcul de ces grandeurs sur le vide donne :

$$D^{(\pm)}(x, y) = -\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} 2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[\pm p^0],$$

$$G^{(\pm)}(x, y) = +\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} 2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[\pm p^0](\not{p} + m).$$

En outre, ces propagateurs vérifient l'identité :

$$G^{(\pm)}(x, y) = -(i\not{\partial} + m)D^{(\pm)}(x, y).$$

### 2.2.2 Propagateurs pour les produits chronologique et anti-chronologique

Les intégrales de chemin en espace de *Minkovski* conduisent à définir un propagateur correspondant au produit chronologique de champs sous la forme

$$iD^F(x, y) = \langle\hat{T}[\varphi(x)\varphi^\dagger(y)]\rangle = \{\theta(x^0 - y^0)\langle\varphi(x)\varphi^\dagger(y)\rangle + \theta(y^0 - x^0)\langle\varphi^\dagger(y)\varphi(x)\rangle\}, \quad (2.5)$$

$$iG^F(x, y) = \langle\hat{T}[\psi(x)\bar{\psi}(y)]\rangle = \{\theta(x^0 - y^0)\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle - \theta(y^0 - x^0)\langle\bar{\psi}(y)\psi(x)\rangle\}, \quad (2.6)$$

respectivement pour les bosons (2.5) et les fermions (2.6). Cette quantité correspond à l'amplitude de variables dynamiques ordonnées de façon causale. *In fine*, ceci revient à considérer que les ondes d'énergies positives se déplacent vers l'avenir tandis que celles d'énergies négatives vont vers le passé :

$$iD^F(x, y) = +\{\theta(x^0 - y^0)D^{(+)}(x, y) + \theta(y^0 - x^0)D^{(-)}(x, y)\},$$

$$iG^F(x, y) = -\{\theta(x^0 - y^0)G^{(+)}(x, y) + \theta(y^0 - x^0)G^{(-)}(x, y)\}.$$

En outre, le propagateur de *Feynman* est une grandeur à valeurs complexes et symétrique sous transposition. De manière analogue, on peut définir un propagateur associé au produit *anti-chronologique* de champs sous la forme <sup>5</sup>

$$iD^{\bar{F}}(x, y) = \langle\hat{T}^*[\varphi(x)\varphi^\dagger(y)]\rangle = \{\theta(y^0 - x^0)\langle\varphi(x)\varphi^\dagger(y)\rangle + \theta(x^0 - y^0)\langle\varphi^\dagger(y)\varphi(x)\rangle\}$$

$$iG^{\bar{F}}(x, y) = \langle\hat{T}^*[\psi(x)\bar{\psi}(y)]\rangle = \{\theta(y^0 - x^0)\langle\psi(x)\bar{\psi}(y)\rangle - \theta(x^0 - y^0)\langle\bar{\psi}(y)\psi(x)\rangle\},$$

---

4. À partir du chapitre 3 et dans le contexte du formalisme *closed time path*, les propagateurs  $K^{(\pm)}$  seront respectivement notés  $K^{\mp\pm}$  pour des problèmes définis par des conditions de bord *initiales* : dans ce contexte, le second indice coïncide alors avec le signe de l'énergie. En revanche, pour un problème défini par des conditions de bord *finales* dans le cadre du formalisme *closed time path*, cette correspondance devra être inversée :  $K^{(\pm)} = K^{\pm\mp}$ .

5. À partir du chapitre 3 et dans le contexte du formalisme *closed time path*, les propagateurs  $K^F$  et  $K^{\bar{F}}$  seront respectivement notés  $K^{++}$  et  $K^{--}$ .

respectivement pour les bosons (2.5) et les fermions (2.6). Ce type de propagateur peut être exprimé en fonction du propagateur de *Feynman* par

$$K^{\bar{F}}(x, y) = [K^F(y, x)]^\dagger$$

puisque l'opération de conjugaison hermitique n'affecte pas les fonctions de *Heaviside* dans (2.5) et (2.6). Les propriétés de  $K^F$  et  $K^{\bar{F}}$  sont donc similaires.

Enfin, à partir de l'identité  $\theta(x) + \theta(-x) = 1$ , il résulte que la somme des produits chronologique et anti-chronologique de deux champs vérifie les égalités suivantes<sup>6</sup>

$$\hat{T}[\varphi(x)\varphi^\dagger(y)] + \hat{T}^*[\varphi(x)\varphi^\dagger(y)] = \varphi(x)\varphi^\dagger(y) + \varphi^\dagger(y)\varphi(x), \quad (2.7)$$

$$\hat{T}[\psi(x)\bar{\psi}(y)] + \hat{T}^*[\psi(x)\bar{\psi}(y)] = \psi(x)\bar{\psi}(y) - \bar{\psi}(y)\psi(x), \quad (2.8)$$

ce qui se traduit, en terme de propagateurs, sous la forme :

$$D^F + D^{\bar{F}} = D^{(+)} + D^{(-)}, \quad G^F + G^{\bar{F}} = -G^{(+)} - G^{(-)}. \quad (2.9)$$

Ces relations sont toujours valables (y compris dans les milieux : cf chapitre 4). Les quatre types de propagateurs présentés jusqu'ici peuvent donc être écrits à partir de trois grandeurs différentes uniquement. Pour des particules massives, ces propagateurs sur le vide s'écrivent :

$$\begin{aligned} iD^F(x, y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i0}, & iD^{\bar{F}}(x, y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 - i0}, \\ iG^F(x, y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(\not{p} + m)e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i0}, & iG^{\bar{F}}(x, y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(\not{p} + m)e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 - i0}. \end{aligned}$$

### 2.2.3 Propagateurs retardé et avancé

Les propagateurs *retardé*  $K^r$  et *avancé*  $K^a$  sont définis par les expressions suivantes

$$iD^r(x, y) = \Theta[x^0 - y^0] \langle [\varphi(x), \varphi^\dagger(y)] \rangle, \quad iD^a(x, y) = -\Theta[y^0 - x^0] \langle [\varphi(x), \varphi^\dagger(y)] \rangle, \quad (2.10)$$

$$iG^r(x, y) = \Theta[x^0 - y^0] \langle \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} \rangle, \quad iG^a(x, y) = -\Theta[y^0 - x^0] \langle \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} \rangle, \quad (2.11)$$

respectivement pour les bosons (2.10) et les fermions (2.11). Ces propagateurs sont réels dans l'espace des positions alors qu'en représentation de *Fourier*, leur partie réelle est égale tandis que leur partie imaginaire est opposée (cf section 2.2.4). En outre, le propagateur retardé est causal<sup>7</sup> c'est-à-dire nul pour  $x^0 < y^0$ . En revanche, le propagateur avancé est anti-causal c'est-à-dire nul pour  $x^0 > y^0$ . En outre, si les états des moyennes (2.10) et (2.11) sont invariants sous conjugaison de charge, les propagateurs retardé et avancé sont les transposés l'un de l'autre.

6. Comme nous le verrons par la suite, le propagateur de la différence d'un produit chronologique et d'un produit anti-chronologique fait intervenir le propagateur lointain  $K^f$ .

7. Le caractère causal du propagateur retardé (sens de parcours du temps après calcul de la moyenne) est différent de celui présenté par la prescription de *Feynman* (ordre temporel des *variables dynamiques* avant calcul de la moyenne).

Enfin, les propagateurs avancé et retardé peuvent s'écrire comme une combinaison linéaire de ceux définis précédemment

$$D^r(x, y) = D^F(x, y) - D^{(-)}(x, y) = D^{(+)}(x, y) - D^{\bar{F}}(x, y), \quad (2.12)$$

$$D^a(x, y) = D^F(x, y) - D^{(+)}(x, y) = D^{(-)}(x, y) - D^{\bar{F}}(x, y), \quad (2.13)$$

$$G^r(x, y) = G^F(x, y) + G^{(-)}(x, y) = -G^{(+)}(x, y) - G^{\bar{F}}(x, y), \quad (2.14)$$

$$G^a(x, y) = G^F(x, y) + G^{(+)}(x, y) = -G^{(-)}(x, y) - G^{\bar{F}}(x, y), \quad (2.15)$$

respectivement pour les bosons (2.12, 2.13) et les fermions (2.14, 2.15) et en utilisant les identités (2.9). Pour des particules massives, ces propagateurs sur le vide s'écrivent :

$$iD^a(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 - \text{sgn}[k^0] i0}, \quad iD^r(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + \text{sgn}[k^0] i0},$$

$$iG^a(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + m)e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 - \text{sgn}[k^0] i0}, \quad iG^r(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{(\not{k} + m)e^{-ik \cdot (x-y)}}{k^2 - m^2 + \text{sgn}[k^0] i0}.$$

Enfin, soulignons que les propagateurs avancé et retardé ne peuvent pas être obtenus à partir du calcul d'amplitudes de transition présentées dans le chapitre 1.

#### 2.2.4 Rayonnement : propagateurs proche et lointain

Les propagateurs *proche*  $K^n$  et *lointain*  $K^f$  sont définis par les expressions suivantes

$$iD^n(x, y) = \frac{1}{2} \left[ iD^r(x, y) + iD^a(x, y) \right] = \frac{1}{2} \text{sgn}(x^0 - y^0) \langle [\varphi(x), \varphi^\dagger(y)] \rangle, \quad (2.16)$$

$$iD^f(x, y) = \frac{1}{2} \left[ iD^r(x, y) - iD^a(x, y) \right] = \frac{1}{2} \langle [\varphi(x), \varphi^\dagger(y)] \rangle, \quad (2.17)$$

$$iG^n(x, y) = \frac{1}{2} \left[ iG^r(x, y) + iG^a(x, y) \right] = \frac{1}{2} \text{sgn}(x^0 - y^0) \langle \{ \psi(x), \bar{\psi}(y) \} \rangle, \quad (2.18)$$

$$iG^f(x, y) = \frac{1}{2} \left[ iG^r(x, y) - iG^a(x, y) \right] = \frac{1}{2} \langle \{ \psi(x), \bar{\psi}(y) \} \rangle, \quad (2.19)$$

respectivement pour les bosons (2.16, 2.17) et les fermions (2.18, 2.19). Que ce soit pour des fermions ou des bosons, les propagateurs proche et lointain sont ainsi définis par la même combinaison linéaire de propagateurs retardé et avancé : ceci a pour conséquence que, d'une part, ces propagateurs pour les fermions et les bosons soient liés par les relations

$$G^n(x, y) = (i\partial + m)D^n(x, y), \quad G^f(x, y) = (i\partial + m)D^f(x, y),$$

et que, d'autre part, les propagateurs proche et lointain puissent s'écrire l'un en fonction de l'autre *via*

$$iK^n(x, y) = \text{sgn}[x^0 - y^0] iK^f(x, y) \quad (2.20)$$

indépendamment de la statistique des champs. Le propagateur proche est pair sous opération de transposition alors que le propagateur lointain est impair sous cette opération.

Les propagateurs retardé et avancé peuvent être déterminés à partir des propagateurs causaux selon les identités

$$\begin{aligned} D^n(x, y) &= \frac{1}{2} \left( D^F(x, y) - D^{\bar{F}}(x, y) \right), & D^f(x, y) &= \frac{1}{2} \left( D^{(+)}(x, y) - D^{(-)}(x, y) \right), \\ G^n(x, y) &= \frac{1}{2} \left( G^F(x, y) - G^{\bar{F}}(x, y) \right), & G^f(x, y) &= \frac{1}{2} \left( G^{(-)}(x, y) - G^{(+)}(x, y) \right). \end{aligned}$$

Leur calcul sur le vide pour des particules massives donne

$$\begin{aligned} iD^n(p) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Pp} \left[ \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2} \right], & (\text{Pp}[\cdot] \text{ désigne la partie principale de l'intégrale}) \\ iD^f(p) &= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} 2i\pi \delta[k^2 - m^2] \text{sgn}[k^0], \\ iG^n(p) &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \text{Pp} \left[ \frac{(\not{k} + m)e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2} \right], \\ iG^f(p) &= - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik(x-y)} 2i\pi (\not{k} + m) \delta[k^2 - m^2] \text{sgn}[k^0] \end{aligned}$$

En représentation de *Fourier*,  $K^n$  est réel tandis que  $K^f$  est imaginaire pur. Dans l'espace des positions d'espace-temps, ces propagateurs sont tous deux réels. Enfin, soulignons que le propagateur lointain ne peut pas être calculé à partir des séries qui permettent de déterminer des amplitudes de transition (présentées dans le chapitre 1) : toutefois, ce propagateur peut être obtenu dans le cadre du formalisme *closed time path* décrit à partir du chapitre suivant. En revanche, le propagateur proche peut être calculé à partir des développements du chapitre 1 *via* la partie réelle du propagateur de *Feynman*.

### 2.2.5 Fonction de corrélations

On définit la fonction de corrélations  $K^c$  comme la moyenne des propagateurs correspondant aux produits chronologiques et anti-chronologiques c'est-à-dire :

$$i^2 D^c(x, y) = \frac{1}{2} \left[ iD^F(x, y) + iD^{\bar{F}}(x, y) \right] = \frac{1}{2} \langle \{ \varphi(x), \varphi^\dagger(y) \} \rangle \quad (2.21)$$

$$i^2 G^c(x, y) = \frac{1}{2} \left[ iG^F(x, y) + iG^{\bar{F}}(x, y) \right] = \frac{1}{2} \langle [ \psi(x), \bar{\psi}(y) ] \rangle. \quad (2.22)$$

Ce propagateur est réel. La quantité  $iK^c$  correspond à la partie imaginaire des propagateurs  $K^F$  et  $K^{\bar{F}}$  :

$$K^F(x, y) = K^n(x, y) + iK^c(x, y), \quad K^{\bar{F}}(x, y) = -K^n(x, y) + iK^c(x, y).$$

Par conséquent,  $K^c(x, y)$  est toujours pair sous opération de transposition.  $iK^c$  est imaginaire pur que ce soit en représentation de *Fourier* ou dans l'espace des positions. Pour des particules massives, la fonction de corrélation sur le vide s'écrit :

$$D^c(x, y) = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \pi \delta[k^2 - m^2], \quad G^c(x, y) = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{-ik \cdot (x-y)} \pi (\not{k} + m) \delta[k^2 - m^2].$$

Ce propagateur peut être calculé à partir des développements du chapitre 1 pour des états purs. Pour des états mixtes, l'utilisation du formalisme présenté dans le chapitre 3 est nécessaire.

### 2.3 Projections sur et hors couche de masse

Les principales différences entre les propagateurs définis jusqu'ici sont liées à leur relation vis-à-vis de la couche de masse, elle-même issue de la partie libre de l'action. On définit les opérateurs  $P_{\text{off}}$  et  $P_{\text{on}} = 1 - P_{\text{off}}$  projetant respectivement hors et sur couche de masse<sup>8</sup>. On cherche à exprimer des combinaisons de propagateurs en fonction de ces opérateurs. Plus particulièrement, on se restreint ici à un champ scalaire libre de masse  $m$  (pouvant éventuellement être nulle).

Le propagateur proche libre  $D_0^n$  d'un tel champs est défini par la relation (2.16) et s'écrit comme une partie principale en représentation de *Fourier*. Le secteur correspondant à la couche de masse est ainsi absent de la définition de  $D_0^n$  : cette définition est alors complétée en imposant que  $D_0^n$ , ainsi que son inverse, soient nuls sur couche de masse. De façon similaire,  $D_0^f$  n'est non nul que sur couche de masse. À partir des opérateurs de projection  $P_{\text{on}}$  et  $P_{\text{off}}$ , on a :

$$D_0^n = D_0^n P_{\text{off}}, \quad D_0^{n-1} = D_0^{n-1} P_{\text{off}}, \quad D_0^n P_{\text{on}} = 0, \quad D_0^{n-1} P_{\text{on}} = 0, \quad D_0^n D_0^{n-1} = P_{\text{off}},$$

$$D_0^n = \begin{cases} D_0^n & \text{hors couche de masse} \\ 0 & \text{sur couche de masse} \end{cases}, \quad D_0^f = \begin{cases} 0 & \text{hors couche de masse} \\ \neq 0 & \text{sur couche de masse} \end{cases}$$

Les propagateurs  $D_0^f$  et  $D_0^n$  permettent de décomposer la partie réelle de la dynamique sur et hors couche de masse, cependant, le produit  $D_0^f D_0^{n-1}$  est en général mal défini sur couche de masse :

$$D_0^f D_0^{n-1} = \begin{cases} 0 & \text{hors couche de masse} \\ \text{mal défini} & \text{sur couche de masse} \end{cases}.$$

Toutefois, on peut estimer que la quantité  $D_0^f D_0^{n-1}$  tend à être grande sur couche de masse lorsque la limite thermodynamique est imposée avant toute élimination du paramètre de  $D_0^{n-1}$  régularisant le comportement singulier de cette quantité sur couche de masse. Dès lors,  $D_0^{n-1}$  est maintenu arbitrairement fini sur couche de masse. En revanche, la limite thermodynamique de  $D_0^f$  est obtenue à partir d'une quantité écrite initialement en terme d'un symbole de *Kronecker* (imposant qu'elle soit sur couche de masse) : elle diverge alors dans cette limite et, par suite, la quantité  $D_0^f D_0^{n-1}$  aussi.

Par conséquent, on peut en déduire les relations suivantes :

$$D_0^n D_0^{n-1} = D_0^n \frac{1}{D_0^n + D_0^f} = \frac{1}{P_{\text{off}} + D_0^f D_0^{n-1}} = \begin{cases} 1 & \text{hors couche de masse} \\ 0 & \text{sur couche de masse} \end{cases} \equiv P_{\text{off}}$$

---

8. Ces secteurs sont identifiés en représentation de *Fourier* : en notant  $p$  la quadri-impulsion, le secteur sur couche de masse correspond au domaine tel que  $p^2 = m^2$  alors que la partie hors couche de masse est définie pour  $p^2 \neq m^2$ .

### 2.3. PROJECTIONS SUR ET HORS COUCHE DE MASSE

Opérateur	Valeur sur couche de masse	Valeur hors couche de masse
$[\square + m^2]D_0^n$	0	1
$D_0^n$	0	$[m^2 + \square]^{-1}$
$D_0^f$	$\neq 0$	0
$D_0^n D_0^{a-1}$	0	1
$D_0^{r-1} D_0^n D_0^{a-1}$	0	$D_0^{n-1}$

FIGURE 2.1 – Opérateurs sur et hors couche de masse en fonction des propagateurs libres proches et lointains

et

$$D_0^n D_0^{a-1} = \frac{1}{P_{\text{off}} - D_0^f D_0^{n-1}} = P_{\text{off}}.$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} D_0^{a-1} D_0^n D_0^{r-1} &= \frac{1}{D_0^n - D_0^f} D_0^n \frac{1}{D_0^n + D_0^f} = D_0^{n-1} \frac{1}{P_{\text{off}} - D_0^f D_0^{n-1}} \frac{1}{P_{\text{off}} + D_0^f D_0^{n-1}} \\ &= \begin{cases} D_0^{n-1} & \text{hors couche de masse} \\ 0 & \text{sur couche de masse} \end{cases} = D_0^{n-1} P_{\text{off}} = D_0^{n-1} \end{aligned}$$

et

$$D_0^{r-1} D_0^n D_0^{a-1} = D_0^{n-1} P_{\text{off}}.$$

Ces résultats sont résumés dans la table 2.1 et permettront de simplifier une partie des expressions dans l'annexe B.1 (séparation formelle des parties réelle et imaginaire de la fonctionnelle génératrice  $\mathcal{W}$ ).



## Chapitre 3

# Actions effectives pour les valeurs moyennes et matrices densité

Au cours des dernières décennies, la plupart des enjeux théoriques en physique des hautes énergies ont été développés dans le contexte d'expériences liées aux accélérateurs de particules : ces développements théoriques visent à déterminer la matrice  $S$  à partir de laquelle peuvent être déduites les propriétés mesurables expérimentalement des phénomènes étudiés. Cependant, cette approche est très spécifique : l'étude de problèmes de diffusion suppose que les états initiaux et finaux soient déterminés et s'appuie alors sur l'évaluation d'amplitudes de transition. Bien que les amplitudes de type *in-out* soient des quantités commodes, tant sur le plan théorique que sur le plan calculatoire, ces amplitudes ne permettent toutefois d'exprimer simplement des probabilités (*cf* relation (1.1)) qu'en raison d'un contexte physique particulier propre à la physique des particules : les états asymptotiques considérés pour un tel système sont des états purs. Dès lors ces amplitudes s'adaptent difficilement à la description d'états mixtes, nécessaires notamment dans le cadre de la théorie de la décohérence [45] : comme nous allons le voir par la suite, lorsque le système est dans un état mixte, il est nécessaire d'exprimer les probabilités directement [21]. En outre, l'utilisation d'amplitudes *in-out* ne permet pas d'étudier correctement et en toute généralité des situations où l'évolution est entièrement conditionnée par la donnée de conditions initiales (ou finales) seulement. Actuellement, ces problématiques prennent une importance croissante notamment en astrophysique et en cosmologie [32, 33, 37] (interprétation des quantités calculées et conditions de bord) ou encore dans l'étude de systèmes ouverts en physique quantique [12, 23, 28, 36] (présence d'états mixtes, systèmes hors équilibre).

En fait, ces situations nécessitent l'utilisation d'une théorie conduisant strictement à des valeurs moyennes définies au sens des postulats de la mécanique quantique. En théorie quantique des champs, le calcul de ces quantités peut être réalisé directement au moyen du formalisme *closed time path* (*CTP*) initié par *Schwinger* dans [18]. Jusqu'alors, seuls leurs "carrés" étaient accessibles par calcul d'amplitudes de transition. Dans son article, *Schwinger* obtient un principe d'action donnant directement des valeurs moyennes en combinant deux évolutions de chronologie inverse. Dans les années qui suivirent cette publication, les méthodes de calculs de valeurs moyennes furent précisées, notamment dans [19, 20, 24, 25] et rendues populaires, entre autres

grâce aux travaux de *Keldysh* dans [23]. Durant cette même période, *Feynman* et *Vernon* ont développé une approche très similaire, le formalisme de *l'influence fonctionnelle*, afin d'aborder plus spécifiquement les phénomènes dissipatifs à l'échelle quantique [21]. Toutefois, l'utilisation de séries perturbatives pour les valeurs moyennes, réalisée par le formalisme *CTP* est restée relativement marginale par rapport au schéma perturbatif fondé sur les amplitudes de transition : ce schéma popularisé par *Feynman* via les intégrales de chemin est beaucoup plus efficace pour traiter de problèmes mettant en jeu des états purs. Aussi, le formalisme *CTP* fut alors principalement développé dans le contexte des systèmes ouverts [24, 25, 28, 9, 12] où il constitue un exemple de formalisme dit en *temps réel* : les formalismes de ce type représentent une alternative au formalisme plus ancien de *Matsubara* [17] également appelé formalisme en *temps imaginaire*.

L'objet de ce chapitre est de présenter le formalisme *closed time path* (*CTP*) ainsi que son "extension", le formalisme *opened time path* (*OTP*). Ce dernier permet de décrire l'évolution de matrices densité à partir de développements similaires à ceux donnant des valeurs moyennes. En outre, il est particulièrement bien adapté à la description des facteurs conditionnant l'intrication d'un système suivi avec son environnement (sous-système formellement éliminé). À l'origine, le formalisme *OTP* fut introduit par *Feynman* et *Vernon* dans la référence [21], sous l'appellation *fonctionnelle d'influence*, sans que son rapport avec le formalisme *CTP* ne soit toutefois explicitement mis en valeur. La complémentarité de ces formalismes ne fut soulignée que par la suite, notamment dans les références [22, 39] : dans ce manuscrit, le formalisme de la *fonctionnelle d'influence* est désigné sous l'appellation *OTP*. La présentation faite ici du formalisme *CTP* est centrée sur l'obtention des équations du mouvement vérifiées par les valeurs moyennes d'opérateurs à partir du principe variationnel. La dernière partie de ce chapitre est dédiée au calcul de matrices densité à partir du formalisme *OTP*. Les principaux résultats qualitatifs permettant de décrire l'évolution des différents termes des matrices densité sont alors présentés dans le but d'étudier la *consistance* entre chemins [50, 51] dans le chapitre 5. Enfin, la plupart des développements présentés dans ce chapitre seront illustrés également dans le chapitre 5.

### 3.1 Valeurs moyennes et matrices densité

L'objet de ce chapitre est de présenter des formalismes donnant accès au calcul de valeurs moyennes et de matrices densité. Avant d'en introduire les aspects formels, rappelons les définitions et les principales caractéristiques de ces quantités.

En représentation de *Heisenberg*, on définit la valeur moyenne d'une observable  $\hat{A}$  par une expression du type

$$\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A}(t, \mathbf{x}) | \psi \rangle, \quad (3.1)$$

c'est-à-dire par une relation où les *bra* et *ket* agissant sur l'opérateur sont *strictement* identiques. Conformément aux postulats de la mécanique quantique, ces grandeurs correspondent à des quantités, en principe, toujours mesurables. Lorsque leur évolution est définie à partir de conditions initiales, ces grandeurs sont qualifiées d'amplitudes *in-in* :  $|\psi\rangle = |in, t_{in}\rangle$ . De la même manière, les valeurs moyennes sont appelées amplitudes *out-out* lorsqu'elles sont déterminées par

la donnée de conditions finales<sup>1</sup> :  $|\psi\rangle = |out, t_{out}\rangle$ . En outre, l'évolution en temps de valeurs moyennes, définies à partir de conditions initiales, peut être écrite sous la forme

$$\langle A \rangle = \langle in, t_{in} | \hat{U}(t_{in}, t) \hat{A}(t_{in}, \mathbf{x}) \hat{U}(t, t_{in}) | in, t_{in} \rangle, \quad \hat{U}^\dagger(t, t_{in}) = \hat{U}(t_{in}, t) \quad (3.2)$$

au moyen de l'opérateur d'évolution  $\hat{U}$ . Les amplitudes *out-out* vérifient une relation similaire. Ces grandeurs se distinguent des amplitudes *in-out* présentées dans le chapitre 1 essentiellement dans leur rapport au temps. En effet, en écrivant la dépendance en temps de ces dernières de la même façon que dans l'équation (3.2), on aboutit à une expression du type (avec  $x \equiv (t, \mathbf{x})$ )

$$\begin{aligned} \langle out, t_{out} | \hat{A}(x) | in, t_{in} \rangle &= \langle out, t_{in} | \hat{U}(t_{out}, t_{in}) \hat{A}(x) | in, t_{in} \rangle \\ &= \langle out, t_{in} | \hat{U}(t_{out}, t) \hat{A}(t_{in}, \mathbf{x}) \hat{U}(t, t_{in}) | in, t_{in} \rangle \end{aligned} \quad (3.3)$$

où la configuration de l'état final est généralement identique à celle de l'état initial, *ie*  $|out, t_{in}\rangle = |in, t_{in}\rangle$ . Formellement, la principale différence entre valeurs moyennes et amplitudes de transition correspond à la présence de l'opérateur d'évolution  $\hat{U}(t_{out}, t)$  dans ces dernières (3.3) en lieu et place de l'opérateur  $\hat{U}(t_{in}, t)$  dans ces premières (3.2).

Les *bra* et *ket* sont toujours définis à des instants différents pour les amplitudes de transition mais ne le sont jamais pour les valeurs moyennes. En fait, amplitudes de transition et valeurs moyennes sont adaptées à l'étude de problèmes de natures différentes. Les amplitudes de transition informent quant à la probabilité de transition entre des états définis à des instants différents. Ainsi, pour les amplitudes de transition  $\langle out, t_{out} | in, t_{in} \rangle$ , on a coutume d'interpréter l'insertion d'un opérateur  $\hat{A}$  comme un moyen de générer des configurations particulières à partir d'une évolution adiabatique, *ie*  $\langle out, t_{out} | in, t_{in} \rangle \equiv \langle 0, t_{out} | \hat{A}(x) | 0, t_{in} \rangle$ . Le calcul de l'amplitude *in-out* d'opérateurs est alors un moyen commode de décrire un recouvrement d'états différents. Cette démarche trouve application notamment en physique des particules où les processus de diffusion sont compris au travers de la différence entre les états antérieurs et postérieurs au phénomène étudié. Les propriétés de ces processus sont alors résumées *via* leur amplitude de transition du vide au vide. En revanche, la valeur moyenne d'un opérateur  $\hat{A}$ , c'est-à-dire une quantité du type  $\langle in, t_{in} | \hat{A}(t, \mathbf{x}) | in, t_{in} \rangle$ , est traditionnellement interprétée comme la valeur prise par cet opérateur sur un ensemble particulier : l'opérateur est directement caractérisé comme une quantité mesurable.

Amplitudes de transition et valeurs moyennes sont généralement des quantités très différentes l'une de l'autre<sup>2</sup>. Toutefois, ces quantités sont proportionnelles entre elles dès lors qu'elles s'écrivent comme des amplitudes sur des états propres du *Hamiltonien* conditionnant leur dynamique<sup>3</sup>. Cependant, une telle situation reste exceptionnelle pour un système "réaliste" : en général, un système de ce genre met en jeu des états contenant des excitations collectives compliquées,

1. Les résultats relatifs aux amplitudes *out-out* peuvent être déduits de ceux correspondant aux amplitudes *in-in* par opération de renversement du temps : cette présentation sera centrée sur l'obtention de valeurs moyennes à partir de conditions initiales

2. Une illustration s'appuyant sur l'étude d'un système en mécanique quantique tel que  $|0, t_{in}\rangle \neq |0, t_{out}\rangle$  (potentiel dépendant du temps) peut être trouvée dans [31].

3. Le facteur de proportionnalité dépend du fait que les *bra* et *ket* d'une amplitude de transition sont né-

notamment *via* leurs conditions initiales. Ces situations dépassent le cadre du formalisme présenté dans le chapitre 1. En effet, les équations conditionnant le champ effectif  $\langle 0, t_{out} | \hat{A}(x) | 0, t_{in} \rangle$ , calculées dans ce contexte, comportent d'importantes limitations [31] : en général, le champ effectif  $\langle 0, t_{out} | \hat{A}(x) | 0, t_{in} \rangle$  ne peut pas être interprété en terme d'observables et les équations satisfaites par celui-ci ne sont pas compatibles avec des conditions de bord initiales (ou finales) uniquement<sup>4</sup>. Pour s'abstraire de ces limitations, on est alors contraint d'utiliser un formalisme différent qui aboutit rigoureusement au calcul de valeurs moyennes. Toutefois une grande partie des outils et des méthodes développées dans le cadre des amplitudes *in-out* peuvent être adaptés au calcul de grandeurs de type *in-in*.

Enfin, les matrices densité sont des quantités de premier plan dans l'étude des systèmes microscopiques : elles permettent une description à la fois générale<sup>5</sup> et systématique de l'état d'un système à un instant donné. Les matrices densité pondèrent l'importance prise par certains états particuliers parmi l'ensemble de ceux accessibles au système et sont, en outre, le seul moyen de décrire des situations spécifiques à la physique quantique telles que l'intrication. Leur emploi est alors nécessaire dès lors que l'on cherche à traiter efficacement de modèles proches de la réalité. Les matrices densité sont des opérateurs hermitiens, positifs et de trace unité. Ainsi, les valeurs moyennes de type *in-in* peuvent alors être définies en toute généralité par

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[\hat{A}(t, \mathbf{x}) \hat{\rho}_{in}(t_{in})] = \text{Tr}[\hat{A}(t_{in}, \mathbf{x}) \hat{U}(t - t_{in}) \hat{\rho}_{in}(t_{in}) \hat{U}(t_{in} - t)] = \text{Tr}[\hat{A}(t_{in}, \mathbf{x}) \hat{\rho}_{in}(t)] \quad (3.4)$$

où  $\hat{\rho}_{in}$  définit complètement l'état initial du système. En outre, pour la représentation de *Schrö-*

---

cessairement définis à des instants différents. Ainsi, pour un état stationnaire  $|in\rangle$  tel que  $\hat{H}|in\rangle = E_0|in\rangle$ , on obtient

$$\langle in, t_{out} | \hat{A}(x) | in, t_{in} \rangle = \langle in, t_{in} | \hat{U}(t_{out} - t_{in}) \hat{A}(x) | in, t_{in} \rangle = e^{-i(t_{out} - t_{in}) \frac{E_0}{\hbar}} \langle in, t_{in} | \hat{A}(x) | in, t_{in} \rangle.$$

4. Les méthodes habituelles de théorie quantique des champs imposent que l'état final du système soit spécifié avant que les équations de champs ne soient résolues : par construction, les objets mathématiques (intégrales de chemin), permettant de construire l'action qui résulte de la physique microscopique, imposent des conditions de bord aux frontières du domaine de définition. Une première conséquence de cette construction est que les fonctions de *Green* paramétrant les observables suivent *nécessairement* la prescription de *Feynman* : les quantités obtenues sont symétriques sous opération de transposition et les propagateurs retardés sont exclus des descriptions en théorie de la matrice *S*. Une autre conséquence directe de cette approche réside dans le fait que toutes les fonctionnelles d'intérêts physiques, ainsi que les équations qui en découlent, soient nécessairement écrites en terme de champ effectif de type *in-out* c'est-à-dire spécifiquement à partir d'une quantité définie pour des conditions de bord sur les frontières. Soulignons que, dans cette approche, la cause de difficultés réside dans le fait que l'on a coutume de raisonner à partir d'objets définis par une amplitude (de transition) alors que c'est seulement le "carré" de cette amplitude qui conduit à des résultats interprétables. Comme nous le verrons par la suite, un autre formalisme, le formalisme *CTP* dans son approche "usuelle", permet de considérer des quantités définies à partir de conditions initiales (à nouveau, ces conditions sont strictement exclusives...). Ainsi, la démarche employée en physique quantique nécessite toujours de préciser le type de conditions envisagées avant toute étude. À noter que les méthodes classiques ne font pas l'objet de ce type de limitations : les conditions de bord sont imposées après obtention des quantités issues du principe variationnel.

5. Seuls les états purs peuvent être représentés par un vecteur d'état de l'espace de *Hilbert* du système étudié. La description la plus générale de l'état d'un système est donnée par une matrice densité (théorème de *Gleason*) : les états intriqués correspondent à ce type de situation.

dingier, l'équation de *Liouville - von Neumann*

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (3.5)$$

constitue le point de départ de l'étude de l'évolution au cours du temps d'une matrice densité<sup>6</sup>. Plus particulièrement, un système est dit à *l'équilibre thermodynamique* si la matrice densité représentant son état est indépendante du temps. En conséquence, dans ce type de situation  $\hat{\rho}$  ne peut être écrite qu'à partir de constantes du mouvement : ainsi, la température et le potentiel chimique correspondent à des paramètres imposant respectivement une énergie moyenne et un nombre de charges moyen au système étudié.

## 3.2 Calcul de valeurs moyennes : formalisme closed time path

La spécificité de la méthode introduite par *Schwinger* est de combiner deux amplitudes de transition et de les contraindre à produire des valeurs moyennes. Plus particulièrement, cette présentation sera centrée sur l'expression de valeurs moyennes lorsque les états initiaux sont spécifiés c'est-à-dire de quantités de type  $\langle in|\hat{A}|in\rangle$  (en représentation d'*Heisenberg*) : l'expression de valeurs moyennes définies pour des conditions finales  $\langle out|\hat{A}|out\rangle$  peut être reproduite de façon analogue aux développements présentés dans cette section mais en imposant d'autres conditions de bord. En outre, les quantités  $\langle out|\hat{A}|out\rangle$  peuvent alors être obtenues par inversion du temps à partir des moyennes  $\langle in|\hat{A}|in\rangle$ .

En toute rigueur, la démarche introduite par *Schwinger* n'est pas le seul moyen d'exprimer des valeurs moyennes. Comme nous le verrons brièvement dans le chapitre 4, une méthode alternative consiste à imposer des contraintes sur les états, plus particulièrement des conditions périodiques sur les configurations de champs, et conduit alors à des formalismes de type *Matsubara*. Cependant, la plupart du temps, les approches de type *Matsubara* impliquent une description beaucoup moins efficace que celle définie par *Schwinger* : la plupart des méthodes fonctionnelles en théorie quantique des champs sont plus difficiles à exploiter lorsque les contraintes sont exprimées directement sur les états plutôt qu'à partir des degrés de liberté. L'objet de cette section est ainsi d'introduire la méthode de *Schwinger* d'obtention de valeurs moyennes. En outre, les considérations relatives à la présence d'un environnement seront principalement abordées dans le chapitre 4 : en principe, cette méthode est avant tout un moyen de calculer des valeurs moyennes quelque soit l'état du système envisagé.

### 3.2.1 Expression de valeurs moyennes en terme d'intégrales de chemin

Les amplitudes de transition *in-out* peuvent être évaluées en utilisant des intégrales de chemin. Cependant, l'extension de ces dernières au calcul de valeurs moyennes n'est pas directe<sup>7</sup>. Afin de

---

6. L'équation de *Liouville - von Neumann* est analogue à celle d'*Heisenberg* : ces deux équations d'évolution ne diffèrent que d'un signe et correspondent à des représentations différentes (respectivement de *Schrödinger* pour les matrices densité et d'*Heisenberg* pour les opérateurs).

7. Par *construction* (utilisation de la relation de *Chapman-Kolmogorov*), les intégrales de chemin (1.10) ne permettent d'obtenir que des amplitudes de transition entre des états  $|in, t_{in}\rangle$  et  $|out, t_{out}\rangle$  nécessairement définis

pouvoir exprimer les valeurs moyennes au moyen d'intégrales de chemin, les définitions (3.2) ou (3.4) doivent donc être écrites en fonction d'amplitudes de transition. Le point de départ de cette réexpression consiste à écrire la définition (3.2) en représentation de *Heisenberg* sous la forme

$$\langle A \rangle = \langle in, t_{in} | \hat{U}(t_{in} - t_{out}) \hat{U}(t_{out} - t) \hat{A}(t_{in}, \mathbf{x}) \hat{U}(t - t_{in}) | in, t_{in} \rangle$$

c'est-à-dire en y faisant apparaître un temps final  $t_{out}$  arbitraire mais vérifiant  $t_{out} > t > t_{in}$ . En outre, tous les états sont ici définis en représentation de *Heisenberg* et leur expression est alors donnée à la date  $t_{in}$  pour un problème s'appuyant sur des conditions initiales :  $|X, t_{in}\rangle \equiv |X\rangle$ . Ensuite, l'insertion de la relation de fermeture

$$\hat{1} = \int d\psi_{out} |out\rangle \langle out|, \quad |out\rangle \equiv |\psi_{out}\rangle$$

dans la relation précédente permet d'obtenir une première expression de la valeur moyenne de  $\hat{A}$  en terme d'amplitudes de transition :

$$\langle A \rangle = \int d\psi_{out} [\langle out | \hat{U}(t_{out}, t_{in}) | in \rangle]^\dagger \langle out | \hat{U}(t_{out}, t) \hat{A}(t_{in}, \mathbf{x}) \hat{U}(t, t_{in}) | in \rangle \quad (3.6)$$

où l'on a utilisé la relation

$$\langle in | \hat{U}(t_{in}, t_{out}) | out \rangle = [\langle out | \hat{U}(t_{out}, t_{in}) | in \rangle]^\dagger.$$

Insérer la relation de fermeture à droite de l'opérateur  $\hat{A}(t_{in}, \mathbf{x})$  dans la définition (3.2) permet d'obtenir la valeur moyenne de cet opérateur sous une seconde forme, analogue à la relation (3.6),

$$\langle A \rangle = \int d\psi_{out} \langle in | \hat{U}(t_{in}, t) \hat{A}(t_{in}, \mathbf{x}) \hat{U}(t, t_{out}) | out \rangle \langle out | \hat{U}(t_{out}, t_{in}) | in \rangle, \quad (3.7)$$

c'est-à-dire

$$\langle A \rangle = \int d\psi_{out} [\langle out | \hat{U}(t_{out}, t) \hat{A}(t_{in}, \mathbf{x}) \hat{U}(t, t_{in}) | in \rangle]^\dagger \langle out | \hat{U}(t_{out}, t_{in}) | in \rangle. \quad (3.8)$$

En outre, les expressions (3.6) et (3.8) se généralisent aisément lorsque l'état initial du système à l'étude est défini par l'intermédiaire d'une matrice densité  $\hat{\rho}_{in}$  :

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \text{Tr}[\hat{A}(t, \mathbf{x}) \hat{\rho}_{in}] = \int d\psi_{out} \langle out | \hat{A}(t, \mathbf{x}) \hat{\rho}_{in} | out \rangle \\ &= \int d\psi_\alpha d\psi_\beta \langle \psi_\alpha | \hat{\rho}_{in} | \psi_\beta \rangle \int d\psi_{out} [\langle out | \hat{U}(t_{out}, t_{in}) | \psi_\beta \rangle]^\dagger \langle out | \hat{U}(t_{out}, t) \hat{A}(t_{in}, \mathbf{x}) \hat{U}(t, t_{in}) | \psi_\alpha \rangle \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$= \int d\psi_\alpha d\psi_\beta \langle \psi_\alpha | \hat{\rho}_{in} | \psi_\beta \rangle \int d\psi_{out} [\langle out | \hat{U}(t_{out}, t) \hat{A}(t_{in}, \mathbf{x}) \hat{U}(t, t_{in}) | \psi_\beta \rangle]^\dagger \langle out | \hat{U}(t_{out}, t_{in}) | \psi_\alpha \rangle. \quad (3.10)$$

---

à des instants *différents*.

Dans les expressions précédentes, on a inséré deux jeux d'états arbitraires  $|\psi_\alpha\rangle$  et  $|\psi_\beta\rangle$  autour de la matrice densité  $\hat{\rho}_{in}$  *via* les relations de fermeture

$$\hat{1} = \int d\psi_\alpha |\psi_\alpha\rangle\langle\psi_\alpha|, \quad \hat{1} = \int d\psi_\beta |\psi_\beta\rangle\langle\psi_\beta|$$

de la même façon que pour les moyennes (3.6) et (3.8). Sur l'ensemble défini par  $\hat{\rho}_{in}$ , une valeur moyenne s'écrit alors comme la somme d'une combinaison algébrique d'expressions du type (3.6) ou (3.8) (valeurs moyennes pour un système pur). Les différents termes de cette somme sont pondérés par les éléments de matrice  $\langle\psi_\alpha|\hat{\rho}_{in}|\psi_\beta\rangle$  : ces derniers spécifient ainsi l'état initial du système. Enfin, dans *toutes* les expressions qui précèdent, les états finaux sont traités de la même manière par une opération de trace qui consiste à sommer sur tous les états finaux  $|out\rangle \equiv |\psi_{out}\rangle$  accessibles au système.

Ainsi, la valeur moyenne de  $\hat{A}$  peut être exprimée de *deux* façons différentes, c'est-à-dire *via* (3.6) ou (3.7). Chacune de ces expressions met en jeu, à chaque fois, *deux* amplitudes de transition différentes. Chacune de ces "*branches*" évolue entre l'état initial du système  $|in\rangle$  et un même état final  $|out\rangle$  arbitraire mais de façon inverse. Le système décrit tout d'abord une évolution standard sur la première branche c'est-à-dire depuis l'état initial vers l'état final (évolution dans le sens croissant du temps). *Dans un second temps*, le système évolue sur la seconde branche selon la chronologie inverse c'est-à-dire depuis l'état final vers l'état initial (l'axe de temps est alors parcouru dans le sens décroissant). La première branche réalise donc une évolution *chronologique*<sup>8</sup> tandis que la seconde, étant l'expression conjuguée de la première, réalise une évolution *anti-chronologique*. C'est cette dernière amplitude de transition qui permet le retour à l'état initial d'origine et assure ainsi que la grandeur produite soit de type *in-in*. Les branches chronologiques et anti-chronologiques sont respectivement notées  $\mathcal{C}^+$  et  $\mathcal{C}^-$  et constituent le contour  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ . Ces deux amplitudes sont alors couplées entre elles par une opération de trace sur les états finaux : ce couplage engendre *la condition de bord du formalisme* et constitue sa principale spécificité<sup>9</sup>. Comme nous le verrons par la suite, cette contrainte induit un mélange de la dynamique des branches lorsque les fluctuations quantiques sont intégrées.

Une même valeur moyenne pouvant être obtenue par insertion d'opérateurs indifféremment suivant la branche chronologique ou anti-chronologique, les degrés de liberté du système doivent donc être doublés pour que chacune de ces branches puisse être traitée indépendamment l'une de l'autre. Les amplitudes de transition contenues dans les expressions (3.6) et (3.7) peuvent être exprimées en terme d'intégrales de chemin de la façon suivante. L'amplitude de transition

---

8. Cette amplitude de transition correspond à une intégrale de chemin du même type que celles présentées dans le chapitre 1.

9. L'adaptation de ces développements à une situation où les valeurs moyennes sont conditionnées par une condition finale peut être réalisée également à partir de la même combinaison d'amplitudes  $\mathcal{C}^\pm$ . Cependant, dans ce cas, le contour formé par celles-ci doit être fermé à une date *initiale* arbitraire et les configurations finales doivent être imposées au travers d'une matrice densité définie à cette date : le contour correspondant est ainsi obtenu à partir de celui décrit par la figure 3.1 mais en inversant l'axe réel de temps ( $\Re t \sim -\Re t$ ). La situation décrite correspond alors à l'étude d'observables dont l'évolution dynamique doit aboutir à une valeur déterminée en fin d'évolution.

correspondant à la branche chronologique s'écrit sous la forme

$$\langle out|\hat{U}(t_{out}, t_{in})|in\rangle = \int \mathcal{D}[\varphi^+] e^{\frac{i}{\hbar}\{\mathcal{S}[\varphi^+] + \mathcal{S}_{CT}[\varphi^+]\}}. \quad (3.11)$$

Par convention, le champ  $\varphi^+$  désigne les degrés de liberté définis sur cette branche uniquement. L'amplitude de transition issue de la branche anti-chronologique, qui correspond au conjugué hermitique de l'expression précédente (cf relation (1.6)), est donnée par

$$\langle in|\hat{U}(t_{in}, t_{out})|out\rangle = \int \mathcal{D}[\varphi^-] e^{-\frac{i}{\hbar}\{\mathcal{S}[\varphi^-] + \mathcal{S}_{CT}[\varphi^-]\}}. \quad (3.12)$$

Les degrés de liberté de cette branche sont notés  $\varphi^-$  et sont à distinguer des précédents. L'opérateur dont on fait la moyenne est exprimé soit en terme des degrés de liberté contenus sur la branche chronologique *ie*  $A[\varphi^+]$ , soit en fonction de ceux de la branche anti-chronologique *via*  $A[\varphi^-]$ , selon que l'on traduit en intégrale de chemin une expression du type (3.6) ou (3.7)<sup>10</sup>. Le résultat final ne dépend pas de la façon dont l'opérateur  $\hat{A}$  est inséré. Ainsi, la valeur moyenne de  $\hat{A}$  est finalement obtenue en regroupant les deux intégrales de chemin précédentes et en prenant la trace sur les configurations de champ finales c'est-à-dire

$$\langle \hat{A} \rangle = \int d\varphi_{in}^+ d\varphi_{in}^- \langle \varphi_{in}^+ | \hat{\rho}_{in} | \varphi_{in}^- \rangle \int d\varphi_{out} \int_{\varphi^\pm(t_{in}, \mathbf{x}) = \varphi_{in}^\pm}^{\varphi^\pm(t_{out}, \mathbf{x}) = \varphi_{out}} \mathcal{D}[\varphi^+] \mathcal{D}[\varphi^-] e^{\frac{i}{\hbar}\{\mathcal{S}[\varphi^+] + \mathcal{S}_{CT}[\varphi^+]\} - \frac{i}{\hbar}\{\mathcal{S}[\varphi^-] + \mathcal{S}_{CT}[\varphi^-]\}} A[\varphi^\sigma] \quad (3.13)$$

avec  $\sigma$  prenant indifféremment la valeur  $-$  ou  $+$ <sup>11</sup>.  $\mathcal{S}$  désigne l'action et  $\mathcal{S}_{CT}$  celle des contre-terms. La forme de l'action et celle des contre-terms est la même sur chaque branche car celles-ci ne dépendent que de la dynamique du système et non pas du sens de parcours en temps. Les configurations initiales du champ sont liées à la situation physique étudiée *via* les conditions initiales  $\langle \varphi_{in}^+ | \hat{\rho}_{in} | \varphi_{in}^- \rangle$  traduisant les expressions (3.9) et (3.10) : souvent, ces conditions initiales peuvent être incorporées à la définition du propagateur de la théorie<sup>12</sup>. En revanche, les configurations finales des champs  $\varphi_{out}^\pm$  sont propres au formalisme : ces configurations sont prises identiques sur chaque branche, *ie*  $\varphi_{out}^+ = \varphi_{out}^- = \varphi_{out}$ , puis sont intégrées en imposant qu'elles aient toutes le même poids statistique. L'intégration du degré de liberté  $\varphi_{out}$  produit les conditions de bord du formalisme développé. Enfin, soulignons que dans les expressions précédentes, il est nécessaire que  $t_{out} - t_{in}$  soit arbitrairement grand pour que l'action puisse être écrite *via* une transformée de *Fourier* usuelle (fréquences continues) : habituellement, la date finale du contour  $t_{out}$  est rejetée à l'infini.

---

10. Plus généralement, un opérateur composite peut être écrit comme une combinaison des champs issus des deux branches.

11. Dans les intégrales de chemin, les indices  $\pm$  servent uniquement à distinguer si les grandeurs sont définies sur les parties chronologiques ou anti-chronologiques ; cette distinction est nécessaire dès lors que ces deux branches sont traitées conjointement *via* une intégrale de chemin. Les champs  $\varphi^\pm$  présentent ainsi cette duplication des degrés de liberté d'origine et ont la même interprétation physique.

12. C'est, par ailleurs, l'un des avantages de ce formalisme.

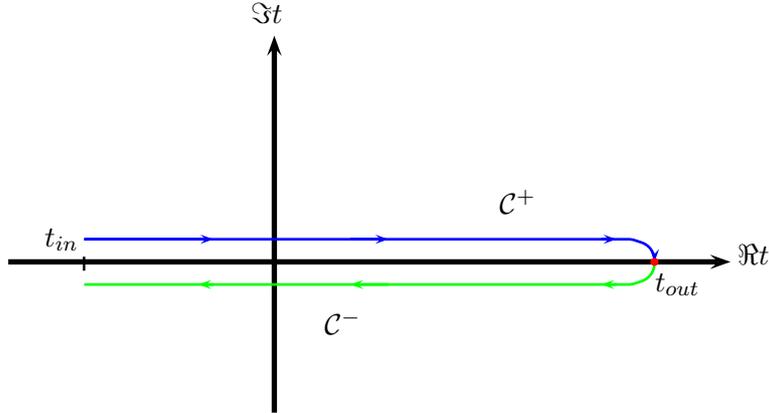


FIGURE 3.1 – Contour pour le formalisme *closed time path* (amplitudes *in-in*)

Ainsi, la méthode de calcul de valeurs moyennes *in-in*, introduite par *Schwinger*, se distingue de celle d’amplitudes *in-out* par un doublement des degrés de liberté auxquels sont imposés une contrainte : deux amplitudes de transition couplées entre elles permettent de produire des valeurs moyennes. On obtient ainsi un formalisme à contour fermé en temps : c’est le formalisme *closed time path*. Amplitudes *in-out* et *in-in* ont en commun qu’elles s’appuient (sur chaque branche) sur les mêmes actions et les mêmes principes de symétrie. Dès lors, l’utilisation d’un type particulier d’amplitude est lié au contexte physique décrit plutôt qu’à la nature des “interactions fondamentales” qui le régissent.

### 3.2.2 Condition de bord du formalisme et indépendance vis-à-vis de la date de fermeture du contour

La date  $t_{out}$  où la trace sur les états finaux est prise dans l’expression des valeurs moyennes (3.13) est nécessairement arbitraire sous réserve qu’elle soit ultérieure à celle où les moyennes sont calculées<sup>13</sup> : par conséquent, ces dernières doivent en être indépendantes. L’intégration du dernier degré de liberté (défini à  $t_{out}$ ) produit la condition de bord du formalisme. L’influence de ce degré de liberté particulier peut être étudiée en écrivant les intégrales de chemin sur un réseau. Chacune des amplitudes de transition de  $\mathcal{C}^\pm$  correspond alors à un produit d’intégrales définies sur un réseau constitué par la discrétisation temporelle de ces contours. Ceci revient à définir une série d’amplitudes élémentaires dont la combinaison, *via* la formule de *Chapman-Kolmogorov*<sup>14</sup>, permet de construire l’amplitude correspondant à l’ensemble d’une branche  $\mathcal{C}^\pm$  particulière. Le propre du formalisme *CTP* est alors de combiner ces deux branches  $\mathcal{C}^\pm$ , à leur extrémité, directement au moyen de la formule de *Chapman-Kolmogorov*<sup>15</sup>. Dès lors, l’intégration de ce degré de liberté n’influence que les termes de l’action qui en dépendent nécessairement.

13. Dans les expressions (3.6) et (3.8), la date  $t_{out}$  peut être changée en utilisant les propriétés d’unitarité de l’opérateur d’évolution.

14. *cf* relation (1.9) du chapitre 1.

15. Ici, la formule de *Chapman-Kolmogorov* est équivalente à la relation de fermeture appliquée au degré de liberté final commun aux deux branches  $\mathcal{C}^\pm$ .

Sur un intervalle élémentaire, la partie cinétique discrète de l'action est nécessairement définie par la moyenne des variables dynamiques prises aux frontières du domaine afin de construire les dérivés : la partie cinétique de l'action sera donc dépendante de la condition de bord du formalisme *CTP*. En revanche, ce n'est pas le cas des potentiels sous réserve qu'ils soient indépendants du moment conjugué <sup>16</sup>. En effet, dans ce cas, l'expression discrète d'un potentiel peut être définie qu'à partir d'une seule position librement choisie dans l'intervalle élémentaire. Aussi, sur tous les intervalles élémentaires construisant  $\mathcal{C}^+$  et  $\mathcal{C}^-$ , lorsque les potentiels sont définis uniquement en fonction de la borne inférieure de ces intervalles, aucune des amplitudes sur  $\mathcal{C}^\pm$  ne présentera de potentiel dépendant spécifiquement de la dernière condition finale. Par conséquent, le résultat de l'intégration de ce degré de liberté final modifiera uniquement la partie quadratique de l'action d'origine sans affecter la partie correspondant aux potentiels.

Ainsi, dans le cadre du formalisme *CTP*, la duplication des variables dynamiques entraîne celle des termes de l'action : la contrainte imposée à ces degrés de liberté peut être contenue uniquement dans la fonction à deux points généralisée au contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  lorsque les potentiels sont usuels.

### 3.2.3 Notations et conventions

L'expression de valeurs moyennes de type *in-in* conduit à introduire un formalisme présentant deux axes de temps : un produit d'opérateurs  $y$  est ordonné soit de façon chronologique sur le premier axe, soit de façon anti-chronologique sur le second, soit en combinant ces deux règles et en donnant priorité aux opérateurs de la branche chronologique sur ceux de la branche anti-chronologique lorsque les deux axes sont mis à contribution conjointement. Ces considérations permettent ainsi d'établir une relation d'ordre sur le contour fermé en temps  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  et d'y définir un opérateur d'ordre :

$$\hat{T}_{\mathcal{C}}[\hat{A}_1^{\sigma_1}(x_1)\hat{A}_2^{\sigma_2}(x_2)\dots\hat{A}_N^{\sigma_N}(x_N)] = \hat{T}^*[\hat{A}_k^-(x_k)\dots\hat{A}_l^-(x_l)] \hat{T}[\hat{A}_m^+(x_m)\dots\hat{A}_n^+(x_n)]. \quad (3.14)$$

Les différents opérateurs  $\hat{A}_i^{\sigma_i}$  sont distribués dans les parties chronologiques ou anti-chronologiques suivant le signe pris par  $\sigma_i$ . Soulignons que cet opérateur n'est pas valable pour les amplitudes de type *out-out* : dans ce cas, il faut lui substituer l'opérateur  $\hat{T}_{\mathcal{C}}^*$  suivant

$$\hat{T}_{\mathcal{C}}^*[\hat{A}_1^{\sigma_1}(x_1)\hat{A}_2^{\sigma_2}(x_2)\dots\hat{A}_N^{\sigma_N}(x_N)] = \hat{T}[\hat{A}_m^+(x_m)\dots\hat{A}_n^+(x_n)] \hat{T}^*[\hat{A}_k^-(x_k)\dots\hat{A}_l^-(x_l)] \quad (3.15)$$

dans toutes les expressions où  $\hat{T}_{\mathcal{C}}$  intervenait. L'opérateur  $\hat{T}_{\mathcal{C}}^*$  est l'analogue de  $\hat{T}_{\mathcal{C}}$  sous renversement du temps.

En outre, la duplication des variables dynamiques incite également à introduire une notation où les grandeurs sont directement définies sur le contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ . Ainsi, pour une quantité quelconque  $X$ , on définit celle qui lui correspond sur le contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  par  $\check{X}$  :  $\check{X}$  est alors

---

16. Nous nous restreindrons à des potentiels de ce type dans les développements de ce manuscrit.

le produit tensoriel des paramètres d'origine sur  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ . Ainsi, les variables dynamiques et les sources sont respectivement définies par les vecteurs suivants

$$\check{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^- \end{pmatrix}, \quad \check{j} = \begin{pmatrix} j^+ \\ j^- \end{pmatrix}.$$

Comme nous le verrons par la suite, les fonctions à deux points sur  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  sont des matrices alors que celles à N-points correspondent à des tenseurs d'ordres supérieurs. En outre, nous définissons les matrices suivantes par commodité :

$$\check{\mathfrak{I}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (\delta^{\sigma, \sigma'}), \quad \check{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = (\sigma \delta^{\sigma, \sigma'}).$$

De plus, nous serons amenés à introduire des quantités avancées  $X^a$  et retardées  $X^r$  : on choisit de les noter toujours selon leur causalité intrinsèque. Enfin, dans ce manuscrit, nous traiterons plus particulièrement du calcul d'amplitudes de type *in-in* plutôt que de celui d'amplitudes de type *out-out* : le passage d'une de ces quantités à l'autre revient à réaliser une inversion du temps (ou à modifier les conditions de bord utilisées).

### 3.3 Méthode fonctionnelle pour le formalisme closed time path

La recherche de valeurs moyennes, définies à partir de l'évolution introduite par *Schwinger*, peut être rendue systématique en introduisant un formalisme fonctionnel analogue à celui défini pour les amplitudes de transition. Les méthodes fonctionnelles utilisées en théorie quantique des champs consistent à exprimer les quantités recherchées, c'est-à-dire l'expression (3.13), à partir d'opérations algébriques appliquées à *une* fonctionnelle dont l'évolution est rendue physique dans un second temps (restauration d'une évolution unitaire par suppression de paramètres extérieurs).

Pour la formalisme *CTP*, la première étape de cette démarche revient à paramétrer les moyennes recherchées par des *quantités effectives de type in-in*. Toutes les quantités effectives pertinentes sont construites par opérations sur une seule fonctionnelle génératrice adaptée au problème étudié. Cette dernière est définie à partir de la dynamique d'origine, en y introduisant des "sources" externes brisant l'unitarité de l'évolution et dont le rôle est de produire les moyennes par opérations sur celles-ci (rôle de *book-keeping*). Dans un second temps, les valeurs moyennes sont déduites des quantités effectives en rétablissant l'unitarité de l'évolution. En principe, les équations et grandeurs issues des quantités effectives restent alors valables pour les valeurs moyennes dans cette limite. En réalité, comme nous le verrons ultérieurement, cette situation n'est que partiellement réalisée dans le cadre du formalisme *CTP* : dans les développements usuels de ce formalisme, le principe variationnel ne peut pas être maintenu dès lors que les quantités physiques sont obtenues.

L'objet de cette section, et des deux qui suivent, est de décrire ce programme. Plus particulièrement, la définition et les règles de calcul des fonctionnelles génératrices pour le formalisme *CTP* vont être introduites dans cette section. Les champs effectifs et leur rapport aux valeurs

moyennes seront présentés plus en détail dans la section 3.4. Pour finir, l'action effective générant les équations du mouvement sera définie dans la section 3.5<sup>17</sup>.

### 3.3.1 Fonctionnelles génératrices des fonctions de Green à N-points

La stratégie de calcul développée précédemment pour obtenir des valeurs moyennes de type *in-in* motive l'introduction de la fonctionnelle génératrice suivante

$$\mathcal{Z}[j^+, j^-] = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{W}[j^+, j^-]} = \text{Tr} \left\{ \hat{\mathbb{T}} \left[ e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_{in}}^{t_{out}} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \hat{H}(x) + \frac{i}{\hbar} \int_{t_{in}}^{t_{out}} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3x j^+(x) \hat{A}(x)} \right] \hat{\rho}_{in} \right. \\ \left. \hat{\mathbb{T}}^* \left[ e^{+\frac{i}{\hbar} \int_{t_{in}}^{t_{out}} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \hat{H}(x) + \frac{i}{\hbar} \int_{t_{in}}^{t_{out}} dt \int_{\mathbb{R}^3} d^3x j^-(x) \hat{A}(x)} \right] \right\} \quad (3.16)$$

où l'on a utilisé les notations introduites précédemment. Cette fonctionnelle dépend de deux sources distinctes  $j^+$  et  $j^-$  qui agissent exclusivement sur les branches chronologique pour la première et anti-chronologique pour la seconde. Elles sont toutes deux couplées à un *même* opérateur local  $\hat{A}$  dont on cherche la valeur moyenne (ou celle de combinaisons de celui-ci). Concrètement, cette dernière peut être obtenue à partir d'opérations sur  $\mathcal{W}$  de deux façons différentes

$$\langle \hat{A} \rangle = \lim_{j^\pm=0} \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta j^+} \quad \text{et} \quad \langle \hat{A} \rangle = \lim_{j^\pm=0} \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta j^-},$$

c'est-à-dire exclusivement soit à partir de la branche chronologique (première expression), soit à partir de la branche anti-chronologique (seconde expression). Dans ces relations, l'amplitude pour laquelle aucun opérateur n'est inséré sert alors à définir des degrés de liberté auxiliaires imposant que la moyenne produite soit finalement de type *in-in*. Ces aspects seront développés par la suite notamment dans la section 3.4. En outre, la fonctionnelle génératrice précédente peut être écrite de façon plus compacte comme la moyenne d'un produit ordonné sur le contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  :

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{W}[j^+, j^-]} = \langle \hat{\mathbb{T}}_{\mathcal{C}} [e^{\frac{i}{\hbar} \int d^4x \{j^+(x)\varphi^+(x) + j^-(x)\varphi^-(x)\}}] \rangle. \quad (3.17)$$

Cette expression est analogue à la relation (1.14) du chapitre 1 : pour les amplitudes *in-in*,  $\hat{\mathbb{T}}_{\mathcal{C}}$  joue un rôle équivalent à celui de l'opérateur  $\hat{\mathbb{T}}$  dans le contexte des amplitudes *in-out*. Enfin, l'expression précédente est particulièrement commode pour définir les fonctions de *Green* propres au formalisme *CTP* (cf sections 3.3.4 et 3.3.5).

En terme d'intégrales de chemin, la fonctionnelle génératrice (3.16) s'écrit sous la forme :

$$\mathcal{Z}[j^+, j^-] = \int d\varphi_{in}^+ d\varphi_{in}^- \langle \varphi_{in}^- | \hat{\rho}_{in} | \varphi_{in}^+ \rangle \int d\varphi_{out} \\ \int_{\varphi^\pm(t_{in}, \mathbf{x}) = \varphi_{in}^\pm}^{\varphi^\pm(t_{out}, \mathbf{x}) = \varphi_{out}} \mathcal{D}[\varphi^+] \mathcal{D}[\varphi^-] e^{\frac{i}{\hbar} \{ \mathcal{S}[\varphi^+] + \mathcal{S}_{CT}[\varphi^+] \} - \frac{i}{\hbar} \{ \mathcal{S}[\varphi^-] + \mathcal{S}_{CT}[\varphi^-] \} + \frac{i}{\hbar} \{ j^+ \cdot A[\varphi^+] + j^- \cdot A[\varphi^-] \}}.$$

---

17. Les définitions retenues dans ce manuscrit pour ces quantités sont adaptées à l'obtention des équations du mouvement vérifiées par les valeurs moyennes : elles diffèrent de celles communément prises dans les études liées au formalisme *CTP*.

Par ailleurs, nous limitons notre étude au cas où les termes relatifs aux conditions initiales  $\langle \varphi_{in}^- | \hat{\rho}_{in} | \varphi_{in}^+ \rangle$  peuvent être formellement absorbés dans l'expression de l'action nue. Plus particulièrement, dans ce chapitre, on considérera que l'état du système décrit initialement peut être obtenu à partir d'une évolution adiabatique (formellement paramétrable par des sources extérieures) depuis le vide  $\hat{\rho}_{in} = |0\rangle\langle 0|$  : une telle situation est proche des réalisations expérimentales. L'intégration sur le dernier degré de liberté conduit à écrire symboliquement la fonctionnelle précédente sous la forme :

$$\mathcal{Z}[j^+, j^-] = \int \mathcal{D}[\varphi^+] \mathcal{D}[\varphi^-] e^{\frac{i}{\hbar} \{ \mathcal{S}[\varphi^+, \varphi^-] + j^+ \cdot A[\varphi^+] + j^- \cdot A[\varphi^-] \}} \quad (3.18)$$

en fonction de l'action définie sur le contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$

$$\mathcal{S}[\varphi^+, \varphi^-] = \mathcal{S}[\varphi^+] - \mathcal{S}[\varphi^-] + \mathcal{S}_{BC}[\varphi^+, \varphi^-] + \mathcal{S}_{CT}[\varphi^+, \varphi^-],$$

lorsque  $\hat{\rho}_{in} = |0\rangle\langle 0|$  et où l'action  $\mathcal{S}_{BC}[\varphi^+, \varphi^-]$  désigne le résultat d'une telle intégration. En théorie des perturbations, l'expression de  $\mathcal{S}_{BC}$  est incorporée dans la définition de la fonction à deux points définie sur le contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  (elle n'influence que la dynamique et non pas le potentiel). Soulignons que le choix d'autres conditions initiales conduit à un résultat similaire en intégrant les degrés de liberté initiaux à l'action nue de la même façon que pour les degrés de liberté finaux.

### 3.3.2 Unitarité et rôles joués par les degrés de liberté

Dans la définition (3.16), les parties chronologique et anti-chronologique, respectivement à gauche et à droite de la matrice densité  $\hat{\rho}_{in}$ , sont des quantités exactement conjuguées l'une de l'autre dès lors que les sources prennent des valeurs opposées c'est-à-dire pour  $j^+ = -j^-$ . Dans ce cas, la fonctionnelle s'écrit

$$\mathcal{Z}[j^+, j^- = -j^+] = \text{Tr}[\hat{\rho}_{in}] = 1, \quad \mathcal{W}[j^+, j^- = -j^+] = 0$$

même si *ces sources ne sont pas nulles*. Ce résultat caractérise l'*unitarité* de la fonctionnelle. Lorsque l'unitarité est restaurée, les combinaisons d'opérateurs décrites par opérations sur la fonctionnelle (3.16) s'identifient à des expressions du type (3.13) et *deviennent alors des valeurs moyennes* en principe observables<sup>18</sup>. Cette condition d'unitarité est au centre du formalisme *CTP* car elle permet de faire la distinction entre les degrés de liberté conduisant aux quantités physiques (mesurables) et ceux correspondant à des grandeurs auxiliaires.

Les quantités définies à partir des degrés de liberté  $\varphi^\pm$  sont dites écrites en *base de Schwinger*. Généralement, cette paramétrisation est utilisée pour décrire les propriétés systématiques des fonctionnelles. Toutefois, l'unitarité fait jouer un rôle particulier à la *somme* des sources  $j^\pm$  et incite à utiliser une autre paramétrisation pour souligner son influence :

$$j^a = j^+ + j^-, \quad j^r = \frac{1}{2}[j^+ - j^-], \quad j^\pm = \frac{1}{2}j^a \pm j^r. \quad (3.19)$$

---

18. La partie des sources qui n'a pas été annulée s'identifie alors à une source physique : elle peut être utilisée pour paramétrer une évolution adiabatique depuis le vide ou depuis des états initiaux simples.

La notation précédente est spécifique aux amplitudes de type *in-in*<sup>19</sup>. Cette paramétrisation, dite de *Keldysh*, fait émerger distinctement des modes avancés et retardés ainsi que deux rôles différents pour les sources. La source  $j^a$  désigne une source avancée tandis que la source  $j^r$  est retardée : la justification de ces causalités peut être établie par l'intermédiaire des fonctions de *Green* correspondantes et présentées dans la section 3.3.5. Dès lors, l'unitarité est, d'une part, complètement indépendante de la valeur de  $j^r$  et, d'autre part, vérifiée seulement lorsque  $j^a = 0$  :

$$\mathcal{W}[j^a = 0, j^r \neq 0] = 0. \quad (3.20)$$

De plus, le terme d'interaction sources/champs de la fonctionnelle (3.16) prend la forme

$$j^+ \cdot \varphi^+ + j^- \cdot \varphi^- = j^a \cdot \frac{1}{2}[\varphi^+ + \varphi^-] + j^r \cdot [\varphi^+ - \varphi^-]$$

et conduit alors à définir les variables dynamiques avancées  $\varphi^a$  et retardées  $\varphi^r$  par les relations suivantes :

$$\varphi^a = \varphi^+ - \varphi^-, \quad \varphi^r = \frac{1}{2}[\varphi^+ + \varphi^-]. \quad (3.21)$$

Ces champs sont définis de sorte qu'ils soient toujours couplés avec la transposée de la source de causalité opposée à la leur (c'est-à-dire avec une quantité de même causalité *in fine*).

Enfin, l'intégrale de chemin (3.18) peut être exprimée en fonction des degrés de liberté retardés et avancés sous la forme suivante :

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{W}[j^a, j^r]} = \int \mathcal{D}[\varphi^a] \mathcal{D}[\varphi^r] e^{\frac{i}{\hbar}\{\mathcal{S}[\varphi^a, \varphi^r] + j^r \cdot \varphi^a + j^a \cdot \varphi^r\}} \quad (3.22)$$

Toutes les quantités définies à partir de ces degrés de liberté sont dites écrites en *base de Keldysh* (ou *base physique*).

### Identification des degrés de liberté physiques et auxiliaires

La paramétrisation de *Keldysh* met en avant deux types de degrés de liberté dont le rôle n'est pas équivalent. Les fluctuations couplées aux sources  $j^a$  et  $j^r$  correspondent respectivement, aux degrés de liberté  $\varphi^r$  et  $\varphi^a$  introduits précédemment. L'influence de ces fluctuations en terme d'observables peuvent être identifiée par les variations de la fonctionnelle  $\mathcal{W}$  vis-à-vis des sources auxquelles elles sont couplées. Pour des amplitudes de type *in-in*, on obtient :

$$\frac{\delta \mathcal{W}}{\delta j^a} = \frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta j^+} + \frac{1}{2} \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta j^-}, \quad \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta j^r} = \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta j^+} - \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta j^-} \quad (\hbar \equiv 1).$$

Les valeurs moyennes leur correspondant sont alors déduites en imposant l'unitarité :

$$\frac{\delta \mathcal{W}}{\delta j^a} \longrightarrow \langle \varphi \rangle \equiv \langle \varphi^r \rangle, \quad \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta j^r} \longrightarrow 0 \equiv \langle \varphi^a \rangle.$$

---

19. Pour les amplitudes de type *out-out*, les indices retardés et avancés doivent être permutés

Par conséquent, en base de *Keldysh*, seuls les degrés de liberté  $\varphi^r$  conduisent aux valeurs moyennes et sont donc physiques. En revanche, les degrés de liberté  $\varphi^a$  conduisent à des quantités auxiliaires toujours nulles une fois l'unitarité restaurée.

Enfin, la condition d'unitarité impose que  $j^a$  représente une quantité auxiliaire. Aussi, son rôle est exclusivement celui d'une variable de *book-keeping* puisqu'elle est couplée aux degrés de liberté physiques. En revanche, rien n'impose que la source  $j^r$  soit nulle lorsque les valeurs moyennes sont déterminées. Concrètement, cette source modifie l'expression du *Lagrangien* d'origine et joue le rôle d'une source externe physique.

### 3.3.3 Propriétés de la fonctionnelle $\mathcal{W}$

La fonctionnelle (3.16) vérifie l'identité

$$\mathcal{W}^*[j^+, j^-] = -\mathcal{W}[-j^-, -j^+].$$

Pour la paramétrisation de *Keldysh*, cette identité s'écrit plus explicitement sous la forme

$$\mathcal{W}^*[j^a, j^r] = -\mathcal{W}[-j^a, j^r].$$

Par conséquent, les parties réelle et imaginaire de  $\mathcal{W}$  sont respectivement impaire et paire suivant la source auxiliaire  $j^a$  :

$$\Re\mathcal{W}[j^a, j^r] = -\Re\mathcal{W}[-j^a, j^r], \quad \Im\mathcal{W}[j^a, j^r] = +\Im\mathcal{W}[-j^a, j^r]. \quad (3.23)$$

Enfin, les dérivées successives de la fonctionnelle  $\mathcal{W}$  par rapport à la source  $j^r$  vérifient toujours l'identité suivante :

$$\left. \frac{\delta^N \mathcal{W}[j^a, j^r]}{\delta j^r(x_1) \cdots \delta j^r(x_N)} \right|_{j^a=0} = 0. \quad (3.24)$$

Cette relation est une conséquence directe de la propriété d'unitarité (3.20) et est valide quelque soit la valeur prise par  $j^r$ . En conséquence, la fonctionnelle  $\mathcal{W}$  ne comporte jamais de termes indépendants de la source auxiliaire  $j^a$ . La fonctionnelle  $\mathcal{Z}$  vérifie la même relation et les mêmes conclusions lui sont applicables.

### 3.3.4 Fonctions de Green pour la paramétrisation de Schwinger

Pour la paramétrisation de *Schwinger*, les fonctions à N-points  $K^{\sigma_1 \cdots \sigma_N}$  sont définies par la relation :

$$iK^{\sigma_1 \cdots \sigma_N}(x_1, \cdots, x_N) = \langle \hat{T}_C[\varphi^{\sigma_1}(x_1) \cdots \varphi^{\sigma_N}(x_N)] \rangle. \quad (3.25)$$

Comme pour les amplitudes de transition, ces quantités servent à construire les fonctionnelles génératrices sous la forme

$$\mathcal{F}[j^+, j^-] = \sum_N \frac{1}{N!} \frac{i^N}{\hbar^N} \sum_{\sigma_n = \pm} \int dx_1 \cdots dx_N iK^{\sigma_1 \cdots \sigma_N}(x_1, \cdots, x_N) j^{\sigma_1}(x_1) \cdots j^{\sigma_N}(x_N). \quad (3.26)$$

En outre, elles peuvent en être déduites par dérivations fonctionnelles

$$iK^{\sigma_1 \cdots \sigma_N}(x_1, \cdots, x_N) = \lim_{j^\pm \rightarrow 0} \hbar^N \left[ \prod_{n=1}^N \frac{\delta}{i\delta j^{\sigma_n}(x_n)} \right] \mathcal{F}[j^+, j^-] \quad (3.27)$$

où les fonctions de *Green* produites sont connectées si  $\mathcal{F} = i\mathcal{W}/\hbar$  ou ne le sont pas nécessairement pour  $\mathcal{F} = \mathcal{Z}$  [28]. Les fonctions de *Green* à N-points définies à partir des degrés de liberté  $\varphi^\pm$  sont dites écrites en base de *Schwinger* : le principal intérêt de cette paramétrisation réside dans le fait que l'expression algébrique de ces fonctions y est simple. Enfin, les fonctions à N-points (3.25) sont toujours liées entre elles par *une* relation de contrainte<sup>20</sup>. Par exemple, les fonctions à deux points doivent vérifier la relation (2.9) présentée dans le chapitre 2.

### Propagateurs en base de Schwinger

Sur le contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ , la fonction à deux points peut être représentée par une matrice

$$\check{K}(x, y) = \begin{pmatrix} K^{++}(x, y) & K^{+-}(x, y) \\ K^{-+}(x, y) & K^{--}(x, y) \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

où les propagateurs  $K^{\sigma\sigma'}$  sont définis par (3.25). Les termes diagonaux correspondent au noyau de la partie quadratique de l'action sur les branches  $\mathcal{C}^\pm$  tandis que ceux hors de la diagonale sont le résultat des conditions de bord du formalisme *CTP*. Le propagateur  $\check{K}$  peut également être défini à partir de

$$\sum_{\alpha=\pm} \int d^4z K^{\sigma\alpha}(x, z) \frac{\delta}{\delta\varphi^\alpha(z)} \frac{\delta}{\delta\varphi^{\sigma'}(y)} \left[ \mathcal{S}[\varphi^+] - \mathcal{S}[\varphi^-] + \mathcal{S}_{BC}[\varphi^+, \varphi^-] \right] \Big|_{\varphi^\pm=0} = \sigma \delta^{\sigma, \sigma'} \delta^{(4)}(x, y).$$

Cependant, ce type de définition est généralement plus difficile à mettre en œuvre qu'une définition du type (3.25).

Ainsi, pour des degrés de liberté bosoniques, les quantités définissant le propagateur s'écrivent

$$\begin{aligned} iD^{++}(x, y) &= \langle \hat{\mathbb{T}}[\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}^\dagger(y)] \rangle = iD^F(x, y) \\ iD^{--}(x, y) &= \langle \hat{\mathbb{T}}^*[\hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}^\dagger(y)] \rangle = iD^{\bar{F}}(x, y) \\ iD^{-+}(x, y) &= \langle \hat{\varphi}(x)\hat{\varphi}^\dagger(y) \rangle = iD^{(+)}(x, y) \\ iD^{+-}(x, y) &= \langle \hat{\varphi}^\dagger(y)\hat{\varphi}(x) \rangle = iD^{(-)}(x, y) \end{aligned}$$

en identifiant les différents blocs à l'aide des définitions du chapitre 2. De la même façon, le propagateur pour des degrés de liberté fermioniques correspond aux expressions

$$\begin{aligned} iG^{++}(x, y) &= \langle \hat{\mathbb{T}}[\bar{\psi}(x)\psi(y)] \rangle = iG^F(x, y) \\ iG^{--}(x, y) &= \langle \hat{\mathbb{T}}^*[\bar{\psi}(x)\psi(y)] \rangle = iG^{\bar{F}}(x, y) \\ iG^{-+}(x, y) &= \langle \bar{\psi}(x)\psi(y) \rangle = iG^{(+)}(x, y) \\ iG^{+-}(x, y) &= -\langle \psi(y)\bar{\psi}(x) \rangle = iG^{(-)}(x, y). \end{aligned}$$

---

20. Cette relation de contrainte peut être avantageusement déterminée par changement de variables depuis le formalisme de *Keldysh* comme décrit par la suite.

Pour une théorie libre définie sur le vide, c'est-à-dire pour  $\hat{\rho}_{in} = |0\rangle\langle 0|$ , les propagateurs  $\check{D}_0$  et  $\check{G}_0$  s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned}\check{D}_0(p) &= \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} & -2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[-p^0] \\ -2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[+p^0] & \frac{-1}{p^2 - m^2 - i0} \end{pmatrix}, \\ \check{G}_0(p) &= (\not{p} + m) \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} & +2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[-p^0] \\ +2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[+p^0] & \frac{-1}{p^2 - m^2 - i0} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

dans l'espace des impulsions.

### Parties réelle et imaginaire des propagateurs

Dans l'espace des positions, la partie réelle de la fonction à deux points  $\check{K}$  fait intervenir les propagateurs proches et lointains ; la partie imaginaire de  $\check{K}$ , également définie dans l'espace des positions, peut être exclusivement paramétrée par l'intermédiaire du propagateur  $K^c$  (cf chapitre 2). Ainsi, les fonctions à deux points peuvent toujours être décomposées de la façon suivante

$$\check{D} = \begin{pmatrix} D^n & -D^f \\ D^f & -D^n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} D^c & D^c \\ D^c & D^c \end{pmatrix}, \quad \check{G} = \begin{pmatrix} G^n & G^f \\ -G^f & -G^n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} G^c & -G^c \\ -G^c & G^c \end{pmatrix}, \quad (3.29)$$

respectivement pour des degrés de liberté bosoniques ou fermioniques. L'expression de ces propagateurs est donnée dans le chapitre 2.

Ainsi, les termes diagonaux de la partie réelle du propagateur  $\check{K}$  ont la particularité d'être paramétrés par les propagateurs proches alors que ceux hors de la diagonale correspondent aux propagateurs lointains. Cette structure peut être comprise qualitativement de la manière suivante. Les corrélations au sein d'une branche particulière mettent en jeu des corrélations sans tenir compte de l'existence de l'autre amplitude : cette situation est similaire à celle du formalisme à une amplitude et les fluctuations correspondent à celles du rayonnement proche (partie réelle du propagateur de *Feynman*, présente dans les amplitudes *in-out*). En revanche, les corrélations entre des branches différentes sont le résultat d'une évolution plus "longue" car celle-ci doit suivre le contour imposé par le formalisme *CTP* : elle doit donc passer par la configuration finale pour relier des éléments des deux branches. En conséquence, les fluctuations correspondant aux propagateurs lointains sont prédominantes pour les éléments non-diagonaux<sup>21</sup>.

### 3.3.5 Fonctions de Green pour la paramétrisation de Keldysh

En base de *Keldysh*, l'expression générale des fonctions de *Green* à N-points est définie par dérivations des fonctionnelles  $\mathcal{Z}$  et  $\mathcal{W}$  selon les sources  $j^a$  et  $j^r$  introduites par cette paramétrisation. Nous ne considérerons ici que le cas d'amplitudes de type *in-in*. Les fonctionnelles génératrices peuvent être écrites sous la forme

$$\mathcal{F}[j^a, j^r] = \sum_N \frac{1}{N!} \frac{i^N}{\hbar^N} \sum_{\xi_n=1,2} \int dx_1 \cdots dx_N i\mathcal{K}^{\xi_1 \cdots \xi_N}(x_1, \cdot, x_N) j^{\xi_1}(x_1) \cdots j^{\xi_N}(x_N)$$

21. On retrouve, qualitativement, que l'influence de la condition de bord en temps propre au formalisme *CTP* produit les contributions non-diagonales des propagateurs.

où les symboles  $\xi_n$  désignent soit les dérivations par rapport à la source *auxiliaire*  $\xi_n = 1$  (s'identifiant à la source avancée  $j^1 = j^a$  pour les amplitudes de type *in-in*) soit celles par rapport à la source *physique*  $\xi_n = 2$  (correspondant alors à la source retardée  $j^2 = j^r$ ) :

$$i\mathcal{K}^{\xi_1 \dots \xi_N}(x_1, \cdot, x_N) = \lim_{j^a = j^r = 0} 2^{R-1} \hbar^N \frac{\delta^N \mathcal{F}[j^a, j^r]}{i\delta j^{\xi_1}(x_1) \dots i\delta j^{\xi_N}(x_N)}.$$

Dans l'expression précédente  $R$  désigne le nombre de dérivations effectuées par rapport à la source  $j^1 (\equiv j^a)$ . Concrètement, il est avantageux de définir ici les fonctions de *Green* par leurs dérivées suivant la fonctionnelle génératrice  $\mathcal{F}$  et d'en déduire, ensuite, leur expression en fonction des champs. Ces fonctions de *Green* peuvent être estimées en faisant intervenir des produits ordonnés par  $\hat{T}_{\mathcal{C}}$  des champs  $\varphi^a$  et  $\varphi^r$ . Typiquement, pour  $\mathcal{F} = \mathcal{Z}$ , elles correspondent à des expressions du type :

$$i\mathcal{K}^{\xi_1 \dots \xi_N}(x_1, \cdot, x_N) = 2^{R-1} \langle \hat{T}_{\mathcal{C}}[\varphi^{\xi_1}(x_1) \dots \varphi^{\xi_N}(x_N)] \rangle. \quad (3.30)$$

Les fonctions à N-points pour la paramétrisation de *Keldysh* peuvent alors être obtenues en calculant explicitement ces combinaisons ordonnées sur le contour  $\mathcal{C}$  par récurrence [28] : leur expression est généralement compliquée et consiste en des combinaisons de commutateurs et d'anti-commutateurs suivant la nature des champs insérés dans la moyenne. En fait, la paramétrisation de *Schwinger* est plus commode pour définir les fonctions à N-points alors que la plupart des propriétés vis-à-vis des observables physiques sont plus naturellement étudiées *via* la paramétrisation de *Keldysh*. Ainsi, pour les amplitudes de type *in-in*, les règles de causalité issues des fonctions à N-points imposent que les sources  $j^a$  et  $j^r$  soient respectivement avancées et retardées.

### Expression des fonctions de Green à N-points

Par souci de concision, nous ne considérons dans cette partie que le calcul de fonctions à N-points issus de la fonctionnelle  $\mathcal{Z}$  pour des degrés de liberté bosoniques : les expressions présentées peuvent être aisément adaptées aux fermions ainsi qu'à la fonctionnelle  $\mathcal{W}$ . La détermination de ces fonctions de *Green* peut être faite par récurrence. Celle-ci s'appuie sur le résultat suivant : le produit ordonné de  $N + 1$  champs, défini par les expressions qui suivent et où la date  $x_{N+1}^0$  est antérieure à toutes les autres, vérifie les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\mathcal{C}}[\varphi^{\xi_1}(x_1) \dots \varphi^{\xi_N}(x_N) \varphi^1(x_{N+1})] &= [\hat{T}_{\mathcal{C}}[\varphi^{\xi_1}(x_1) \dots \varphi^{\xi_N}(x_N)], \varphi(x_{N+1})] \\ \hat{T}_{\mathcal{C}}[\varphi^{\xi_1}(x_1) \dots \varphi^{\xi_N}(x_N) \varphi^2(x_{N+1})] &= \frac{1}{2} \{ \hat{T}_{\mathcal{C}}[\varphi^{\xi_1}(x_1) \dots \varphi^{\xi_N}(x_N)], \varphi(x_{N+1}) \}. \end{aligned}$$

Rappelons que pour des amplitudes de type *in-in*,  $\varphi^1 \equiv \varphi^a$  tandis que  $\varphi^2 \equiv \varphi^r$ . On introduit alors la notation  $(, \varphi(x_n))$  désignant soit un commutateur soit un anti-commutateur selon que la variable sortie du produit ordonné ( $\varphi^{\xi_{N+1}}(x_{N+1})$  dans les deux relations précédentes) soit auxiliaire ou physique. Les deux identités précédentes peuvent alors être écrites

$$\hat{T}_{\mathcal{C}}[\varphi^{\xi_1}(x_1) \dots \varphi^{\xi_N}(x_N) \varphi^{\xi_{N+1}}(x_{N+1})] = \frac{1}{2\delta(\xi_{N+1}-2)} (\hat{T}_{\mathcal{C}}[\varphi^{\xi_1}(x_1) \dots \varphi^{\xi_N}(x_N)], \varphi(x_{N+1})). \quad (3.31)$$

Ainsi, à partir de la fonctionnelle génératrice, les dérivations selon la source physique entraînent l'apparition de commutateurs dans la moyenne (insertion d'un champ auxiliaire) tandis que

### 3.3. MÉTHODE FONCTIONNELLE POUR LE FORMALISME CLOSED TIME PATH

---

les dérivations suivant la source auxiliaire (insertion d'un champ physique) donnent des anti-commutateurs.

Le calcul des fonctions à N-points (données par l'expression (3.30)) peut être réalisé en appliquant encore les identités précédentes aux autres degrés de liberté du contour  $\mathcal{C}$  : pour poursuivre cette procédure, ces champs doivent alors être ordonnés. Pour cela, on introduit tout d'abord les fonctions de *Heaviside* généralisées *via*

$$\Theta[y_1, \dots, y_N] = \Theta[y_1^0 - y_2^0] \cdots \Theta[y_{N-1}^0 - y_N^0], \quad 1 = \sum_{S_N} \Theta[y_1, \dots, y_N]$$

où la somme est prise sur toutes les permutations  $S_N$  des  $N$  variables (sans conditions). Les champs peuvent alors être ordonnés en les permutant sous le produit  $\hat{T}_{\mathcal{C}}$  selon l'ordre imposé par les fonctions de *Heaviside* :

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\mathcal{C}}[\varphi^{\xi_1}(x_1) \cdots \varphi^{\xi_N}(x_N)] &= \left( \sum_{S_N} \Theta[y_1, \dots, y_N] \right) \hat{T}_{\mathcal{C}}[\varphi^{\xi_1}(x_1) \cdots \varphi^{\xi_N}(x_N)] \\ &= \sum_{S_N} \Theta[y_1, \dots, y_N] \hat{T}_{\mathcal{C}}[\varphi^{\zeta_1}(y_1) \cdots \varphi^{\zeta_N}(y_N)]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Pour obtenir la relation (3.32), le produit ordonné  $\hat{T}_{\mathcal{C}}[\varphi^{\xi_1}(x_1) \cdots \varphi^{\xi_N}(x_N)]$  à été distribué dans la somme  $\sum_{S_N} \Theta[y_1, \dots, y_N]$ , puis, dans chacun des termes de cette somme, les différents champs  $\varphi^{\xi_1}(x_1)$  sous  $\hat{T}_{\mathcal{C}}$  ont été permutés de sorte qu'ils soient dans l'ordre imposé par les fonctions de *Heaviside*  $\Theta[y_1, \dots, y_N]$  : dans ces relations, pour chaque terme de la somme, le jeu de variables  $y_n$  correspond ainsi à une permutation particulière des différentes variables  $x_n$  d'origine. Ainsi, les champs  $\varphi^{\zeta_n}(y_n)$  sous l'opérateur  $\hat{T}_{\mathcal{C}}$  dans la somme (3.32) ont été ordonnés de sorte que l'on ait toujours :  $y_N^0 < y_{N-1}^0 < \cdots < y_1^0$ .

Ceci fait, les fonctions de *Green* (3.30) peuvent être calculées par récurrence en utilisant l'identité (3.31) : les opérateurs de champs sont alors sortis du produit ordonné l'un après l'autre et par date croissante. Plus particulièrement, l'expression des produits chronologiques est fortement influencée par le type du dernier champ inséré ( $y_1^0 > y_n^0$ ) sur le contour :

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\mathcal{C}}[\varphi^1(y_1) \cdots \varphi^{\xi_N}(y_N)] &\equiv ((\hat{T}_{\mathcal{C}}[\varphi^+(y_1) - \varphi^-(y_1)], \varphi(y_2)), \cdots, \varphi(y_N)) = 0 \\ \hat{T}_{\mathcal{C}}[\varphi^2(y_1) \cdots \varphi^{\xi_N}(y_N)] &\equiv ((\hat{T}_{\mathcal{C}} \frac{1}{2} [\varphi^+(y_1) + \varphi^-(y_1)], (\varphi(y_2))) \cdots, \varphi(y_N)) \\ &= ((\varphi(y_1), \varphi(y_2)), \cdots, \varphi(y_N)). \end{aligned}$$

Le fait que certains produits ordonnés  $\hat{T}_{\mathcal{C}}[\cdots]$  soient nuls exclut une partie des permutations de la sommation (3.32) : ce résultat est à l'origine des propriétés de causalité du formalisme de *Keldysh*. L'expression des fonctions de *Green* à N-points peut alors être résumée au moyen de l'expression suivante :

$$i\mathcal{D}^{\xi_1 \cdots \xi_N}(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{S'_N} \Theta[y_1, \dots, y_N] \langle ((\varphi(y_1), \varphi(y_1)), \cdots), \varphi(y_N) \rangle \quad (3.33)$$

La somme est prise sur toutes les permutations  $S'_N$  (et non pas  $S_N$ ) :  $S'_N$  est défini par toutes les permutations possibles des  $N$  variables  $x_n$  mais en excluant celles plaçant un champ auxiliaire après tous les autres (au sens chronologique) : les termes pour lesquels  $\varphi(y_1)$  provient d'un champ *auxiliaire* sont toujours nuls et ainsi absents de l'ensemble  $S'_N$ .

L'expression des fonctions à N-points pour les degrés de liberté fermioniques peut être trouvée de la même façon. Toutefois, les commutateurs sont alors remplacés par des anti-commutateurs et *vice versa*. De la même manière, les développements précédents peuvent être adaptés aux amplitudes *out-out* en utilisant l'opérateur  $\hat{T}_C^*$ . Cette fois, ce sont les règles de récurrences qui sont modifiées car les opérateurs de champs sont sortis en les ordonnant par date décroissante plutôt que croissante : la principale conséquence de cette procédure est alors d'inverser la causalité des propagateurs obtenus, en comparaison à ceux issus des amplitudes *in-in*. Enfin, l'expression (3.33) ne distingue pas les fonctions de *Green* connectées de celles déconnectées : les fonctions à N-points issues de  $\mathcal{W}$  peuvent être déterminées à partir des précédentes en supprimant les parties déconnectées, définies à nouveau par la paramétrisation de *Schwinger* [28].

### Fonctions de Green particulières

La fonction de *Green*  $\mathcal{D}^{1\dots 1}$  est toujours nulle. Cette fonction de *Green* correspond à la contrainte imposée aux fonctions à N-points par le formalisme *CTP* lorsque celles-ci sont écrites en base de *Schwinger*. Pour les fonctions à 2 points, on retrouve ainsi la relation (2.9). L'identité liant les fonctions d'ordre supérieur peut être déterminée par changement de variable  $\varphi^1(x) = \varphi^+(x) - \varphi^-(x) (\equiv \varphi^a(x))$  puis par développement de l'expression obtenue. Enfin, la fonction de *Green* issue du produit ordonné des champs physiques  $\varphi^2 = \frac{1}{2}\varphi^+ + \frac{1}{2}\varphi^- (\equiv \varphi^r(x))$  peut être écrite uniquement en terme d'anti-commutateurs (cas des champs bosoniques) :

$$i\mathcal{D}^{2\dots 2}(x_1, \dots, x_N) = \sum_{S_N} \Theta[y_1, \dots, y_N] \langle \{ \{ \varphi(y_1), \varphi(y_1) \}, \dots \}, \varphi(y_N) \rangle$$

Cette fonction est à la base du théorème de fluctuation-dissipation et est la seule, avec  $i\mathcal{K}^{1\dots 1} = 0$  à ne privilégier aucune causalité.

### Causalité

Les règles de causalité des fonctions à N-points, propres aux amplitudes *in-in*, sont directement déduites de la relation (3.33). Dans cette expression, la sommation est réalisée sur l'ensemble des permutations  $S'_N$  qui ne correspond pas à l'ensemble  $S_N$  de celles sans condition : dans cette somme (3.33), sont toujours absents les termes correspondant aux permutations dont le résultat est de placer un champ auxiliaire en dernier dans la chronologie (terme de type  $\varphi^1(y_1) \equiv \varphi^a(y_1)$ ). *De facto*, l'expression des fonctions à N-points ne comporte alors jamais les fonctions de *Heaviside* correspondant à ces permutations particulières. En conséquence, pour la paramétrisation de *Keldysh*, les propriétés de causalités sont ainsi définies par la relation suivante

$$\Theta[z, x_k, \dots, x_l] i\mathcal{D}^{\xi_1 \dots 1 \dots \xi_N}(x_1, \dots, z, \dots, x_N) = 0 \quad (3.34)$$

c'est-à-dire

$$\Theta[z, x_k, \dots, x_l] \langle \hat{T}_C[\varphi^{\xi_1}(x_1) \cdots \varphi^1(z) \cdots \varphi^{\xi_N}(x_N)] \rangle = 0 \quad (\varphi^1 \equiv \varphi^a).$$

Dans les relations précédentes, la coordonnée  $z$  correspond à un champ *auxiliaire* quelconque et toutes les autres coordonnées  $x_n$  peuvent être prises dans n'importe quel ordre dans la fonction de *Heaviside* : les fonctions à N-points sont toujours nulles dès que l'un des champs auxiliaires est placé en dernier dans la chronologie<sup>22</sup>. À noter que les seules fonctions à N-points ne vérifiant pas de relation du type (3.34) sont  $\mathcal{D}^{2 \cdots 2}$  et  $\mathcal{D}^{1 \cdots 1}$  (cette dernière est toujours nulle).

Par exemple, les fonctions à trois points  $\mathcal{D}^{211}$  et  $\mathcal{D}^{221}$  vérifient les relations suivantes :

$$\Theta[x_2, x_i, x_j] \mathcal{D}^{211}(x_1, x_2, x_3) = \Theta[x_3, x_i, x_j] \mathcal{D}^{211}(x_1, x_2, x_3) = \Theta[x_3, x_i, x_j] \mathcal{D}^{221}(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

où les termes  $x_i$  et  $x_j$  désignent toutes les combinaisons pouvant être prises à partir des variables restantes. Ainsi, les fonctions à deux points  $\mathcal{D}^{21}(x, y)$  et  $\mathcal{D}^{12}(x, y)$  doivent être respectivement proportionnelles à  $\Theta[x - y]$  et  $\Theta[y - x]$  : par conséquent, les champs  $j^a$  et  $j^r$  correspondent respectivement à des sources avancées et retardées pour les amplitudes *in-in*.

### Propagateurs en base de Keldysh

Pour la paramétrisation de *Keldysh*, la fonction à deux points donnant les amplitudes *in-in* est constituée par les propagateurs suivants :

$$\begin{aligned} i\mathcal{D}^{11}(x, y) &= 0 \\ i\mathcal{D}^{21}(x, y) &= \Theta[x - y] \langle [\varphi(x), \varphi(y)] \rangle = iD^r(x, y) \\ i\mathcal{D}^{12}(x, y) &= i\mathcal{D}^{21}(y, x) = -\Theta[y - x] \langle [\varphi(x), \varphi(y)] \rangle = iD^a(x, y) \\ i\mathcal{D}^{22}(x, y) &= \langle \{\varphi(x), \varphi(y)\} \rangle = -D^c(x, y) \end{aligned}$$

Les propagateurs pour les fermions donnent des résultats similaires ; sous forme matricielle, la fonction à deux points s'écrit alors

$$\tilde{\mathcal{D}}(x, y) = \begin{pmatrix} iD^c(x, y) & D^r(x, y) \\ D^a(x, y) & 0 \end{pmatrix}, \quad \check{\mathcal{G}}(x, y) = \begin{pmatrix} iG^c(x, y) & G^r(x, y) \\ G^a(x, y) & 0 \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

respectivement pour des degrés de liberté bosoniques ou fermioniques. L'expression concrète de ces propagateurs est donnée dans le chapitre 2. Pour les amplitudes *out-out*, les parties retardées et avancées doivent être permutées dans les relations (3.35). Cette paramétrisation présente de nombreux avantages : un des blocs vaut zéro et le nombre de propagateurs utilisés est minimal ; en outre, une partie de ceux-ci correspond à des quantités physiques *a priori* directement mesurables.

---

22. En outre, la relation précédente permet alors d'établir que le produit de certaines fonctions à N-points est nul [28] : ces simplifications ont une incidence sur le développement perturbatif exprimé dans la paramétrisation de *Keldysh*.

Les propagateurs avancé et retardé permettent ainsi de construire complètement la partie réelle de la fonction à deux points en base de *Keldysh*. De plus, ces termes sont toujours issus de la partie non diagonale du propagateur total : la partie réelle de la fonction à deux points décrit les fluctuations définies à partir de conditions de bord sur une seule frontière du domaine. La partie imaginaire du propagateur est également entièrement déterminée par le propagateur  $K^c$  qui, en revanche, est issu d'un des termes de la diagonale.

### 3.3.6 Évaluation de fonctionnelles génératrices

Les variables dynamiques sont doublées dans le cadre du formalisme *CTP*. Cependant, cette modification ne bouleverse pas les règles de calcul d'intégrales de chemin et l'évaluation de fonctionnelles génératrices pour les valeurs moyennes fait appel à des manipulations formelles analogues à celles développées pour les amplitudes de transition. Ainsi, la fonction à deux points, issue de la partie quadratique de l'action, continue d'être à la base des développements ; les fonctionnelles génératrices peuvent s'écrire sous la forme

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{W}[j^+,j^-]} = \int \mathcal{D}[\varphi^+] \mathcal{D}[\varphi^-] \exp \frac{i}{\hbar} \left[ \check{\varphi} \cdot \check{K}_0 \cdot \check{\varphi} + \mathcal{S}_{int}[\varphi^+] - \mathcal{S}_{int}[\varphi^-] + \check{j} \cdot \check{\varphi} \right] \quad (3.36)$$

en fonction du propagateur libre  $\check{K}_0$ , dont l'expression est donnée par la relation (3.28), et où tous les termes non-quadratiques sont alors contenus dans les quantités fonctions de  $\mathcal{S}_{int}$ . Soulignons que, comme décrit précédemment, la contrainte sur le degré de liberté pour lequel les branches  $\mathcal{C}^\pm$  sont refermées (condition de bord du formalisme) est entièrement contenue dans le propagateur  $\check{K}_0$  défini sur  $\mathcal{C}$ .

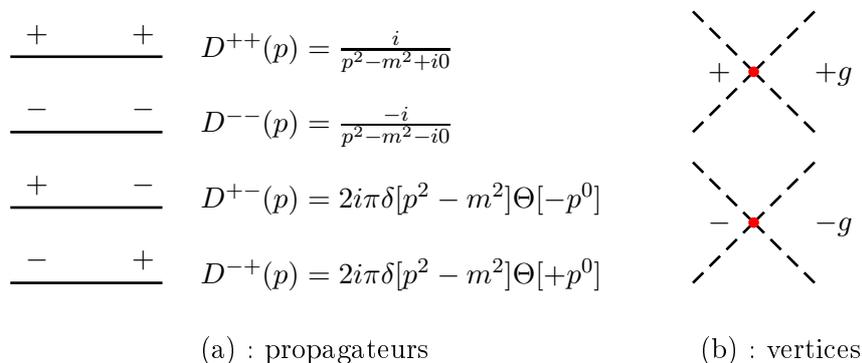
Le calcul de fonctionnelles libres peut se faire directement par limite d'intégrales de *Fresnel* conduisant aux résultats suivant

$$e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{W}_0[\check{j}(\cdot)]} = \exp \left[ -\frac{1}{2\hbar} i\check{j} \cdot i\check{D}_0 \cdot i\check{j} \right], \quad e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{W}_0[\check{\eta}(\cdot),\check{\eta}(\cdot)]} = \exp \left[ +\frac{1}{\hbar} i\check{\eta} \cdot i\check{G}_0 \cdot i\check{\eta} \right] \quad (3.37)$$

respectivement pour les bosons et les fermions. Les théories interactives peuvent faire l'objet d'un développement perturbatif. Les équations de *Schwinger-Dyson* valables pour le formalisme *CTP*, peuvent être montrées exactement de la même façon que dans la partie 1.3.2. Elles ont pour solution fonctionnelle

$$\mathcal{Z}[j^+,j^-] = \exp \left( \frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{int} \left[ \hbar \frac{\delta}{i\delta j^+} \right] - \frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{int} \left[ \hbar \frac{\delta}{i\delta j^-} \right] \right) \mathcal{Z}_0[j^+,j^-]. \quad (3.38)$$

À partir de cette relation, on peut définir des diagrammes de *Feynman* ainsi que leurs règles, soit directement à partir des propagateurs par blocs  $\check{K}_0$ , soit en décomposant les éléments de ces derniers suivant les combinaisons de branches  $\mathcal{C}^\pm$ . Une des spécificités du formalisme *CTP* est alors d'introduire des vertices produisant une interaction comptée négativement (interaction issue de la partie anti-chronologique).


 FIGURE 3.2 – Règles de *Feynman* pour la théorie  $\varphi^4$  dans le cadre du formalisme *CTP*

Enfin, soulignons que, pour les amplitudes *in-in*, lorsque les matrices densité spécifiant l'état initial du système sont quadratiques en champs, celles-ci peuvent alors être formellement incluses dans le propagateur : à partir de tels états, on peut décrire d'autres conditions initiales en faisant intervenir une évolution adiabatique *via* la source  $j^r$ . En outre, comme nous le verrons dans le prochain chapitre, lorsque cette matrice densité décrit un ensemble grand-canonique, celle-ci peut également être formellement incluse dans le propagateur [22, 29, 30]. Un des intérêts du formalisme *CTP* réside dans cette démarche : les effets d'un ensemble de matrices densité peuvent être avantageusement décrits au moyen de fonctions de *Green* et peuvent donc être évalués, de façon systématique, en faisant appel à des diagrammes de *Feynman*.

### 3.4 Champs effectifs de type in-in et valeurs moyennes

En théorie quantique des champs, l'expression et les propriétés des quantités mesurables sont formellement déduites de celles de quantités effectives. Ces dernières sont l'objet des développements de cette section. Les quantités effectives sont toujours déduites d'une fonctionnelle génératrice dont la définition et le calcul ont été présentés dans la section précédente. Habituellement, les *champs effectifs de type in-in*<sup>23</sup> sont définis partir de la fonctionnelle  $\mathcal{W}$  [28] :

$$\tilde{\varphi}^\pm(x) = \frac{\delta\mathcal{W}[j^+, j^-]}{\delta j^\pm(x)}. \quad (3.39)$$

Le formalisme *CTP* définit nécessairement deux champs effectifs différents. Ces champs ne sont pas des quantités physiques car ils ne sont pas issus d'une évolution unitaire. Les valeurs moyennes

---

23. Les champs effectifs présentés dans cette section illustrent un archétype de la méthode fonctionnelle : cette démarche peut aisément être étendue aux opérateurs composites. Les moyennes effectives issues d'opérateurs composites correspondent toujours à une paramétrisation conduisant directement aux moyennes observables voulues. Cette démarche sera appliquée à la détermination de la moyenne de densités de charges dans le chapitre 5.

observables sont ensuite obtenues par une limite<sup>24</sup> rendant physique l'évolution des champs effectifs :

$$\langle \varphi(x) \rangle = \lim_{j^\pm=0} \tilde{\varphi}^\sigma(x), \quad \forall \sigma \in \{+, -\}. \quad (3.40)$$

Par construction, les deux champs effectifs précédents permettent d'obtenir la même valeur moyenne : elle est obtenue en tant que moyenne soit suivant la branche chronologique ( $\sigma = +$ ), soit suivant la branche anti-chronologique ( $\sigma = -$ ) c'est-à-dire indifféremment à partir de deux évolutions différentes.

Dans ce manuscrit, cette approche est l'objet de modifications, principalement pour simplifier les expressions recherchées, et suit la démarche introduite dans [39] : on ne retient de l'approche habituelle décrite précédemment que les parties "utiles" des expressions conduisant aux valeurs moyennes.

### Définition des champs effectifs en base de Keldysh

Les valeurs moyennes sont toujours des quantités réelles<sup>25</sup>. Dans le cadre du *CTP*, cette propriété est réalisée par la relation (3.23) : les parties réelle et imaginaire de  $\mathcal{W}$  sont toujours respectivement impaire et *paire* en fonction de la source  $j^a$ . En outre, dans la base de *Keldysh*, les degrés de liberté couplés à cette source produisent spécifiquement les valeurs moyennes. En conséquence, les parties réelle et imaginaire du champ effectif, défini par dérivation suivant  $j^a$ , seront respectivement paire et *impaire* en terme de cette source. L'application de l'unitarité, *ie*  $j^a = 0$ , impose donc que la partie imaginaire de ce champ effectif soit nécessairement nulle dans cette limite : seule la partie réelle de  $\mathcal{W}$  conditionne l'obtention de valeurs moyennes<sup>26</sup>.

Ce constat conduit à définir les champs effectifs à partir de la partie réelle de  $\mathcal{W}$  uniquement :

$$\tilde{\varphi}^a = \frac{\delta \Re \mathcal{W}[j^a, j^r]}{\delta j^r}, \quad \tilde{\varphi}^r = \frac{\delta \Re \mathcal{W}[j^a, j^r]}{\delta j^a} \quad (3.41)$$

Ces définitions remplacent celles introduites précédemment (3.39) à partir de la fonctionnelle  $\mathcal{W}$  complète. Toutes les propriétés décrites dans la section 3.3.2 restent vraies pour les champs effectifs précédents : lorsque l'unitarité est restaurée, le champ effectif retardé  $\tilde{\varphi}^r$  produit la valeur moyenne physique tandis que le champ effectif avancé  $\tilde{\varphi}^a$  correspond à une quantité auxiliaire de moyenne nulle dans cette limite.

---

24. Les sources  $j^\pm$  sont prises arbitraires en base de *Schwinger* puis toutes mises à zéro pour définir les valeurs moyennes. L'unitarité, obtenue à partir de  $j^a = 0$  est détaillée par la suite dans le contexte de la paramétrisation de *Keldysh*. En outre, il n'y a pas d'ambiguïtés quant au caractère mesurable (en principe) des valeurs moyennes produites par cette méthode contrairement à la situation décrite par les amplitudes de transition.

25. Dans cette partie et dans celles qui suivent (dans ce chapitre), les parties réelle et imaginaire sont définies dans l'espace des positions.

26. Comme nous le verrons par la suite, la partie imaginaire de la fonctionnelle  $\mathcal{W}$  conditionne la *consistance* des chemins [50, 51] c'est-à-dire la restauration de certains aspects de la physique classique depuis une description quantique.

### Définition des champs effectifs en base de Schwinger

Par consistance avec les quantités définies précédemment, les champs effectifs de type *in-in* sont également définis à partir de la partie réelle de  $\mathcal{W}$  en base de *Schwinger* c'est-à-dire par les expressions :

$$\tilde{\varphi}^\pm(x) = \frac{\delta \Re \mathcal{W}[j^+, j^-]}{\delta j^\pm(x)}. \quad (3.42)$$

Pour l'étude présentée dans ce manuscrit, ces relations remplacent les définitions habituelles (3.39). Cependant, elles conduisent aux mêmes propriétés vis-à-vis des valeurs moyennes. Dans la limite où les sources  $j^\pm$  sont nulles, ces champs sont tous deux égaux à valeur moyenne recherchée.

## 3.5 Actions effectives pour le formalisme closed time path usuel

En théorie quantique des champs, les méthodes fonctionnelles consistent à rechercher les équations et quantités d'intérêt physique indirectement à partir de celles vérifiées par les champs effectifs. Dès lors, le principe de cette méthode consiste à paramétrer les quantités fonctionnelles, calculées en fonction de sources externes arbitraires, en terme de ces champs effectifs : c'est l'enjeu de l'action effective.

### 3.5.1 Transformées de Legendre

Un des rôles de l'action effective est de produire les équations du mouvement vérifiées par les champs effectifs. Celles-ci sont obtenues par principe variationnel. Habituellement, l'action effective est le résultat de la transformée de *Legendre* de  $\mathcal{W}$  et les champs effectifs sont alors définis par dérivation de la fonctionnelle  $\mathcal{W}$  complète. Cependant, la partie réelle de  $\mathcal{W}$  suffit à obtenir les valeurs moyennes.

Dans ce manuscrit, la reparamétrisation de  $\Re \mathcal{W}$  en terme des champs effectifs définis par (3.41) et (3.42) constitue la définition de l'action effective  $\Gamma$ . Elle *ne correspond pas* à la *fonctionnelle génératrice des vertices* pour le formalisme *CTP*. Pour la paramétrisation de *Schwinger*, l'action effective est définie par

$$\Gamma[\tilde{\varphi}^+, \tilde{\varphi}^-] = \Re \mathcal{W}[j^+, j^-] - j^+ \cdot \tilde{\varphi}^+ - j^- \cdot \tilde{\varphi}^- \quad (3.43)$$

pour les champs effectifs de (3.42). L'écriture de  $\mathcal{W}$  dans la base de *Keldysh* permet de séparer clairement l'influence des parties physiques et de *book-keeping* des degrés de liberté. Dans cette base, l'action effective  $\Gamma$  s'écrit

$$\Gamma[\tilde{\varphi}^a, \tilde{\varphi}^r] = \Re \mathcal{W}[j^a, j^r] - j^a \cdot \tilde{\varphi}^r - j^r \cdot \tilde{\varphi}^a \quad (3.44)$$

en fonction des champs effectifs (3.41). À noter que c'est la définition des champs effectifs qui impose que les fonctionnelles précédentes soient effectivement celles générant les équations du mouvement vérifiées par les valeurs moyennes.

### 3.5.2 Équations variationnelles vérifiées par les champs effectifs

En base de *Schwinger*, les équations du mouvement vérifiées par les champs effectifs (3.42) sont issues des relations

$$\frac{\delta\Gamma[\tilde{\varphi}^+, \tilde{\varphi}^-]}{\delta\tilde{\varphi}^\pm} = -j^\pm. \quad (3.45)$$

Plus particulièrement, celles vérifiées par la valeur moyenne  $\langle\varphi\rangle$  proviennent de<sup>27</sup>

$$\left. \frac{\delta\Gamma[\tilde{\varphi}^+, \tilde{\varphi}^-]}{\delta\tilde{\varphi}^\pm} \right|_{\tilde{\varphi}^+ = \tilde{\varphi}^- = \langle\varphi\rangle} = 0. \quad (3.46)$$

Cette équation est réelle par construction. Comme pour le formalisme *in-out*, les équations variationnelles d'ordre supérieur contraignent la structure de  $\Gamma$ . Ainsi, l'équation de *Dyson* peut être obtenue à partir des équations du mouvement (3.45) sous la forme :

$$\sum_{\alpha=\pm} \int dz \frac{\delta^2 \Re \mathcal{W}}{\delta j^\sigma(x) \delta j^\alpha(z)} \frac{\delta^2 \Gamma}{\delta \tilde{\varphi}^\alpha(z) \delta \tilde{\varphi}^{\sigma'}(y)} = -\sigma \delta^{\sigma\sigma'} \delta^{(4)}(x-y). \quad (3.47)$$

Elle impose que les relations de contraintes (2.9), appliquées aux parties réelles des propagateurs connectés, à savoir

$$\Re K^{++} + \Re K^{--} = \zeta \Re K^{+-} + \zeta \Re K^{-+}$$

soient transmises au noyau de  $\Gamma$  conduisant à

$$\Gamma^{(2)++} + \Gamma^{(2)--} = -\zeta \Gamma^{(2)+-} - \zeta \Gamma^{(2)-+}$$

où  $\zeta = +1$  pour les bosons et  $\zeta = -1$  pour les fermions dans les expressions précédentes<sup>28</sup>.

### Équations du mouvement retardées pour les valeurs moyennes

En base de *Keldysh*, les équations du mouvement des champs effectifs (3.41) correspondent à

$$\frac{\delta\Gamma[\tilde{\varphi}^a, \tilde{\varphi}^r]}{\delta\tilde{\varphi}^a} = -j^r, \quad \frac{\delta\Gamma[\tilde{\varphi}^a, \tilde{\varphi}^r]}{\delta\tilde{\varphi}^r} = -j^a. \quad (3.48)$$

L'équation du mouvement des valeurs moyennes  $\langle\varphi\rangle$  est issue de la première relation seulement :

$$\frac{\delta\Gamma[\tilde{\varphi}^a = 0, \langle\varphi\rangle]}{\delta\tilde{\varphi}^a} = -j^r. \quad (3.49)$$

La source  $j^r$  peut être maintenue non nulle et paramétrise alors l'état initial du système. L'autre équation du mouvement ne correspond pas à celle d'observables physiques.

---

27. Ce sont deux équations identiques (la source physique est annulée) : l'unitarité est réalisée lorsque les deux champs effectifs sont égaux pour la paramétrisation de *Schwinger*.

28. Ces relations peuvent être obtenues en sommant les quatre équations de *Dyson* (3.47), issues de différentes combinaisons d'axes  $\{\sigma = \pm, \sigma' = \pm\}$  possibles, selon la même combinaison linéaire que celle donnée par l'équation de contrainte (2.9) sur les propagateurs de  $\mathcal{W}^{(2)}$ . Ce type de propriété est dû au fait que les fonctionnelles considérées soient quasiment l'inverse l'une de l'autre : leur généralisation est aisée.

### Équations du mouvement avancées pour les valeurs moyennes

Les développements décrits jusqu'à ici sont valables pour les amplitudes de type *in-in*. Ils correspondent au formalisme *CTP* associé au contour présenté par la figure 3.1 et les valeurs moyennes physiques sont solutions d'équations uniquement retardées. Les équations du mouvement avancées vérifiées des valeurs moyennes physiques ne peuvent être obtenues qu'à partir d'amplitudes de type *out-out*. Les résultats correspondant à ces dernières peuvent être déduits des équations de type *in-in* par opération de renversement du temps.

#### 3.5.3 Fonctionnelle génératrice des vertices propres

La fonctionnelle issue de la transformée de *Legendre* de la *partie réelle* de  $\mathcal{W}$  n'est pas la fonctionnelle génératrice des vertices propres dans le cadre du formalisme *CTP*. Celle-ci, notée  $\mathcal{V}$ , correspond à la transformée de *Legendre* de la fonctionnelle  $\mathcal{W}$  complète<sup>29</sup> :

$$\mathcal{V}[\tilde{\Phi}^+, \tilde{\Phi}^-] = \mathcal{W}[j^+, j^-] - j^+ \tilde{\Phi}^+ - j^- \tilde{\Phi}^-, \quad \tilde{\Phi}^\pm = \frac{\delta \mathcal{W}[j^+, j^-]}{i \delta j^\pm}. \quad (3.50)$$

La partie réelle du champ effectif  $\tilde{\Phi}^\pm$  correspond au champ effectif  $\tilde{\varphi}^\pm$  défini pour l'action effective  $\Gamma$  et permet d'obtenir les valeurs moyennes. La définition précédente conduit à établir des expressions variationnelles (équations du mouvement, de *Dyson*, ...) analogues à celles définies précédemment dans ce chapitre [28].

#### 3.5.4 Absence de principe variationnel sous unitarité

##### Cas des observables physiques

L'équation du mouvement (3.46) pour les valeurs moyennes n'est pas le résultat d'un principe variationnel [31]. En effet, dès que les champs effectifs coïncident, l'action effective est nécessairement nulle,

$$\Gamma[\tilde{\varphi}^+, \tilde{\varphi}^- = \tilde{\varphi}^+] = \Re \mathcal{W}[j^+, j^- = -j^+] - j^+ \tilde{\varphi}^+ + j^+ \tilde{\varphi}^+ = 0, \quad (3.51)$$

compte tenu des propriétés d'unitarité de  $\mathcal{W}$ . Par ailleurs, la relation précédente traduit l'unitarité dans le contexte de l'action effective. Ainsi, dès que les valeurs moyennes sont construites à partir des champs effectifs, leur action effective est aussitôt perdue bien que leurs équations du mouvement demeurent (équations (3.46)) : on est ainsi en mesure d'obtenir les équations variationnelles d'une grandeur mais sans l'action leur correspondant. Ce problème est analogue en base de *Keldysh* : l'unitarité est réalisée dès que  $j^a = 0$  et correspond à  $\tilde{\varphi}^a = 0$ . L'action effective (3.44) est alors nulle bien qu'à nouveau, l'on puisse obtenir l'équation du mouvement vérifiée par la valeur moyenne mesurable du champ par (3.49). Soulignons également que la fonctionnelle  $\mathcal{W}$  est nulle lorsque l'unitarité est imposée. Pour le formalisme *CTP* "usuel", aucune fonctionnelle génératrice (action effective et fonctionnelle  $\mathcal{W}$ ) ne peut être définie lorsque les valeurs moyennes, qui constituent un des enjeux principaux de ce formalisme, le sont.

29. Dans les références traitant du formalisme *CTP*, l'action effective usuelle est définie par l'expression de  $\mathcal{V}$  c'est-à-dire à partir de la fonctionnelle  $\mathcal{W}$  complète. Ce n'est pas le cas dans ce manuscrit pour les raisons évoquées précédemment.

### Cas des champs effectifs

Le formalisme *CTP* impose de doubler les degrés de liberté du système : une partie de ceux-ci conduisent aux quantités physiques tandis que les autres correspondent à des quantités auxiliaires. Cette distinction suggère de définir  $\Gamma$  à partir des degrés de liberté retardés uniquement *via*<sup>30</sup>

$$\Gamma[\tilde{\varphi}^r] = \Re\mathcal{W}[j^a, j^r] - j^a \tilde{\varphi}^r, \quad \tilde{\varphi}^r = \frac{\delta \Re\mathcal{W}}{\delta j^a}. \quad (3.52)$$

Cependant, ce type de définition ne permet pas d'obtenir des équations du mouvement *explicites* vérifiées par les champs effectifs à partir de :

$$\frac{\delta \Gamma[\tilde{\varphi}^r]}{\delta \tilde{\varphi}^r} = -j^a. \quad (3.53)$$

*A fortiori*, les équations du mouvement vérifiées par les valeurs moyennes sont également inaccessibles<sup>31</sup>. Enfin, l'expression de l'action effective (3.52) est à nouveau perdue lorsque  $j^a = 0$ .

Ainsi, pour la paramétrisation de *Keldysh*, l'action effective doit nécessairement être définie à partir de tous les degrés de liberté et les quantités physiques ne peuvent ainsi pas être traitées indépendamment des quantités auxiliaires : le rôle de ces dernières est d'imposer que l'évolution soit définie à partir de conditions initiales.

## 3.6 Principe variationnel et valeurs moyennes

Les valeurs moyennes correspondent à des observables physiques dont la détermination est l'enjeu du formalisme *CTP*. Elles sont obtenues à partir d'opérations sur des fonctionnelles génératrices dès lors que l'unitarité y est restaurée. Malheureusement, imposer l'unitarité correspond également à annuler les quantités fonctionnelles pertinentes mises en jeu (action effective et fonctionnelle  $\mathcal{W}$ ) si bien que les équations variationnelles vérifiées par les valeurs moyennes et l'action leur correspondant, ne peuvent pas être déterminées conjointement pour le formalisme *CTP* usuel. Dans cette section, nous allons voir comment étendre les développements précédents à un formalisme capable de conserver action effective et équations du mouvement après que l'unitarité a été imposée. Cette approche sera illustrée dans le chapitre 5.

### 3.6.1 Paramétrisation physique compatible avec un principe variationnel

Les modifications nécessaires au rétablissement du principe variationnel pour les valeurs moyennes peuvent être réalisées au moyen d'une paramétrisation particulière des degrés de liberté introduite par *J. Polonyi* [39] :

$$j^\pm = \frac{1 \pm \kappa}{2} j^a \pm j^p, \quad \varphi^\pm = \varphi^p \pm \frac{1 \mp \kappa}{2} \varphi^a. \quad (3.54)$$

---

30. À nouveau, on peut indifféremment monter ce type de propriétés que  $\Gamma$  soit définie par  $\mathcal{W}$  (comme c'est habituellement le cas) ou *via*  $\Re\mathcal{W}$ .

31. En outre, ce type d'équations du mouvement se distingue de celles présentées précédemment dans ce chapitre dans le sens où celles correspondant aux grandeurs physiques sont engendrées par les variations du champ *physique* directement plutôt que par les variations d'un champ *auxiliaire*.

$\kappa$  désigne un réel non nul arbitraire. Les quantités  $\varphi^p$  et  $j^p$  correspondent à des quantités mixtes :

$$j^p \equiv j^r - \frac{\kappa}{2}j^a, \quad \varphi^p \equiv \varphi^r + \frac{\kappa}{2}\varphi^a \quad (3.55)$$

Cette paramétrisation, dite *paramétrisation variationnelle*, est analogue à celle de *Keldysh*<sup>32</sup> mais correspond à une combinaison strictement non orthogonale des degrés de liberté élémentaires : elle consiste ainsi à ajouter une partie arbitraire des fluctuations issues de la partie avancée à celles définissant la partie retardée. Par ailleurs, les quantités  $\varphi^a$  et  $j^a$  ont la même interprétation que pour la paramétrisation de *Keldysh* et l'unitarité correspond toujours à l'annulation de ces variables. En outre, le terme d'interaction source/champs de la fonctionnelle génératrice correspondante s'écrit

$$j^+ \cdot \varphi^+ + j^- \cdot \varphi^- = j^a \cdot \varphi^p + j^p \cdot \varphi^a$$

Lorsque l'unitarité est restaurée, la variable dynamique  $\varphi^p$  devient identique à  $\varphi^r$  et permet ainsi d'obtenir les valeurs moyennes tandis que la moyenne  $\varphi^a$  devient nulle :

$$\tilde{\varphi}^a = \frac{\delta\mathcal{W}}{\delta j^p} = \tilde{\varphi}^+ - \tilde{\varphi}^-, \quad \tilde{\varphi}^p = \frac{\delta\mathcal{W}}{\delta j^a} = \frac{1+\kappa}{2}\tilde{\varphi}^+ + \frac{1-\kappa}{2}\tilde{\varphi}^- = \tilde{\varphi}^r + \frac{\kappa}{2}\tilde{\varphi}^a$$

En conséquence, les valeurs moyennes sont obtenues comme précédemment par limite sur le champ effectif  $\tilde{\varphi}^p$ .

La paramétrisation (3.54) permet de définir une action effective à partir du champs effectif physique uniquement :

$$\Gamma[\tilde{\varphi}^p] = \Re\mathcal{W}[j^a, j^p] - j^a \tilde{\varphi}^p. \quad (3.56)$$

Ce terme ne s'annule pas lorsque  $j^a \rightarrow 0$ . L'équation du mouvement du champ effectif physique peut alors être obtenue *via* :

$$\frac{\delta\Gamma[\tilde{\varphi}^p]}{\delta\tilde{\varphi}^p} = -j^a.$$

Les équations d'*Euler-Lagrange*, vérifiées par la valeur moyenne  $\langle in|\varphi|in\rangle$ , peuvent être obtenues indifféremment à partir des équations du champ effectif ou de l'action (3.56) directement. Toutefois, ces équations ne produisent pas directement les équations du mouvement. Ces résultats sont illustrés dans le chapitre 5.

### 3.6.2 Influence des degrés de liberté auxiliaires

Enfin, les champs auxiliaires peuvent être utilisés pour définir l'action effective suivante :

$$\Gamma[\tilde{\varphi}^p, \tilde{\varphi}^a] = \Re\mathcal{W}[j^a, j^p] - j^a \tilde{\varphi}^p - j^p \tilde{\varphi}^a. \quad (3.57)$$

Cette action possède les mêmes propriétés que celles valables pour la paramétrisation de *Keldysh*. Ainsi, les valeurs moyennes vérifient l'équation du mouvement suivante

$$-j^p = \left. \frac{\delta\Gamma[\tilde{\varphi}^p, \tilde{\varphi}^a]}{\delta\tilde{\varphi}^a} \right|_{\tilde{\varphi}^a=0, \tilde{\varphi}^p=\langle in|\varphi|in\rangle}$$

32. La paramétrisation (3.54) prise pour  $\kappa = 0$  correspond à celle de *Keldysh*.

obtenue par limite de celle vérifiée par le champs effectif  $\tilde{\varphi}^p$ . Cette fonctionnelle conduit directement aux équations du mouvement vérifiées par les champs effectifs et donc par les valeurs moyennes. Cependant, tout principe variationnel est perdu lorsque l’unitarité est restaurée.

### 3.7 Calcul de matrices densité : formalisme opened time path

En 1963, *Feynman* et *Vernon* ont introduit une fonctionnelle permettant de rendre compte de l’influence d’un environnement sur les degrés de liberté d’un système suivi. Le cœur de ce formalisme consiste à raisonner à partir de la *probabilité* de transition et non pas directement sur l’*amplitude* de transition : une telle probabilité peut être représentée par une intégrale de chemin en doublant le nombre de degrés de liberté<sup>33</sup>. L’étape suivante est alors d’introduire des degrés de liberté décrivant un environnement, couplés au système suivi, puis de séparer ces deux sous-systèmes en définissant une *fonctionnelle d’influence* regroupant tous les termes dépendant des variables propres à l’environnement. Formellement, la fonctionnelle introduite dans [21] s’identifie alors à la *probabilité* de transition de l’environnement entre des états fixés arbitrairement et pour une valeur arbitraire des degrés de liberté du système suivi (présents uniquement par leur couplage à l’environnement considéré)<sup>34</sup> : le propre du formalisme introduit par *Feynman* et *Vernon* est alors de montrer comment cette probabilité de transition, issue de l’environnement, *influence* celle du système suivi. La dernière étape de cette méthode consiste à s’abstraire des états postulés dans la fonctionnelle d’influence en introduisant des matrices densité en combinant les états utilisés pour l’environnement. Il en résulte finalement que les probabilités de transition peuvent être obtenues à partir du calcul d’une intégrale de chemin dont les conditions initiales sont définies à partir d’une matrice densité initiale.

L’approche décrite par *Feynman* et *Vernon* comporte ainsi des similitudes avec le formalisme *CTP* sans toutefois y faire appel explicitement. La relation qu’entretiennent ces deux formalismes a été d’abord soulignée dans [22] : le formalisme *CTP* offre une méthode diagrammatique d’évaluation pouvant être utilisée pour calculer la fonctionnelle d’influence. Cette méthodologie permet notamment de simplifier celle introduite dans [21] en incorporant formellement les effets des matrices densité initiales dans le propagateur<sup>35</sup>. Enfin, dans l’article [39], il a été montré que la principale différence entre le formalisme *CTP* et celui de la fonctionnelle d’influence (au sens de la détermination de matrices densité) correspond à la façon dont les branches  $\mathcal{C}^\pm$  sont “refermées” : l’évolution temporelle de matrices densité peut ainsi être obtenue en faisant appel à un contour en temps “ouvert”. Dans cette section, nous adopterons la démarche proposée dans cet article en nous restreignant à la détermination de matrices densité.

---

33. Une probabilité de transition correspond à la norme au carré d’une amplitude de transition (*cf* définition (1.1)) c’est-à-dire à la combinaison de deux intégrales de chemin dont l’une doit être l’expression conjuguée hermitique de l’autre (*cf* relation (1.7)).

34. Ceux-ci font alors office de paramètres (au même titre que les états considérés pour l’environnement) dans la fonctionnelle d’influence.

35. Ce résultat a été montré pour un système à l’équilibre thermodynamique et pour un couplage “simple” entre le système suivi et son environnement : toutefois, ce résultat ainsi que la démarche suivie peuvent être généralisés à des couplages plus complexes en introduisant des sources de book-keeping comme dans [39].

### 3.7.1 Matrices densité et contour $\mathcal{C}^\pm$ pour un système isolé

Le calcul de matrices densité peut être réalisé de manière similaire à celui présenté pour les valeurs moyennes. En représentation de *Schrödinger*, ces quantités, qui décrivent l'état d'un système à la date initiale  $t_{in}$ , peuvent se mettre sous la forme

$$\hat{\rho}_{in}(t_{in}) = \sum_n p_n |n, t_{in}\rangle\langle n, t_{in}| \equiv \hat{\rho}_{in}, \quad \sum_n p_n = 1.$$

Leur expression à une date *ultérieure*  $t$  sera alors donnée par

$$\hat{\rho}_{in}(t) = \sum_n p_n \hat{U}(t, t_{in}) |n, in\rangle\langle n, in| \hat{U}(t_{in}, t).$$

Les éléments de matrices de la quantité précédente peuvent être écrits sous la forme

$$\begin{aligned} \langle \varphi^+ | \hat{\rho}_{in}(t) | \varphi^- \rangle &= \sum_n p_n [\langle \varphi^- | \hat{U}(t, t_{in}) | n, in \rangle]^\dagger \langle \varphi^+ | \hat{U}(t, t_{in}) | n, in \rangle \\ &\equiv \hat{\rho}_{in}[\varphi^+(t, \mathbf{x}), \varphi^-(t, \mathbf{x})] \end{aligned} \quad (3.58)$$

où les états  $|\varphi^-\rangle$  et  $|\varphi^+\rangle$  sont des vecteurs propres arbitraires de l'opérateur  $\hat{\varphi}$  et sont écrits en représentation de *Heisenberg*. On a ainsi explicitement considéré l'expression de  $\hat{\rho}_{in}$  pour l'observable  $\hat{\varphi}$  : *de facto*, les éléments de matrices (3.58) renseignent spécifiquement sur les propriétés de l'état du système considéré vis-à-vis de cet observable. En outre, l'expression de ces éléments de matrice fait intervenir, à nouveau, deux amplitudes de transition différentes dont l'évolution est contraire : cette stratégie de calcul correspond à un formalisme analogue au *CTP*. Toutefois, à la différence de ce dernier, ces deux amplitudes de transition  $\mathcal{C}^\pm$  ne sont plus contraintes par une opération de trace sur les états finaux : en fait, c'est l'élément de matrice calculé qui impose explicitement la valeur des configurations finales des branches  $\mathcal{C}^\pm$ .

Pour un spectre continue, l'expression fonctionnelle correspondant à (3.58) est alors donnée par la relation

$$\hat{\rho}_{in}[\varphi^+(t, \mathbf{x}), \varphi^-(t, \mathbf{x})] = \int_{OTP} \mathcal{D}[\check{\phi}(\cdot)] e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi^+(x^0, \mathbf{x}')] - \frac{i}{\hbar} S[\phi^-(x^0, \mathbf{x}')] } \quad (3.59)$$

où l'intégrale de chemin doit être évaluée pour les conditions de bord  $\phi^-(x^0 = t, \mathbf{x}) = \varphi^-(t, \mathbf{x})$  et  $\phi^+(x^0 = t, \mathbf{x}) = \varphi^+(t, \mathbf{x})$ . L'instant  $t$  auquel est évalué l'élément de matrice joue le rôle de la date finale pour laquelle sont définis les derniers degrés de liberté des branches  $\mathcal{C}^\pm$  (dans l'intégrale de chemin, la variable  $x^0$  varie de  $t_{in}$  à  $t$ ). En outre, on a introduit la notation  $\int_{OTP}$  pour représenter la façon dont ce dernier degré de liberté de  $\mathcal{C}^\pm$  doit être traité dans l'intégrale de chemin (3.59). L'expression (3.59) définit alors la forme des observables recherchées et peut être évaluée à partir des techniques de calculs usuels à la théorie quantique des champs c'est-à-dire en introduisant des fonctionnelles génératrices. Le formalisme ainsi obtenu est alors analogue à celui développé pour le *CTP*. Cette méthode de calcul constitue le formalisme *opened time path* (*OTP*) [39].

La condition de bord définissant les configurations d'états finaux est ainsi au cœur du formalisme *OTP* : les parties diagonales de la matrice densité (populations) sont obtenues lorsque ces configurations sont identiques tandis que les éléments non-diagonaux (cohérences) sont liés à leurs différences. Enfin, soulignons que l'intégrale de chemin (3.59) a été obtenue pour un système *isolé*. Dès lors, on peut remarquer que les degrés de liberté de l'action nue de (3.59) ne sont pas couplés : comme nous le verrons par la suite, un tel résultat est spécifique aux systèmes isolés.

### Trace et valeurs moyennes

Calculer la trace d'une matrice densité décrite au moyen du formalisme *OTP* revient à réaliser une intégration selon le formalisme *CTP*. Il est alors aisé de vérifier que la trace de (3.59) est égale à l'unité :

$$\begin{aligned} \text{Tr } \hat{\rho}_{in}[\varphi^+(t, \mathbf{x}), \varphi^-(t, \mathbf{x})] &\equiv \int dX \hat{\rho}_{in}[\varphi^+(t, \mathbf{x}), \varphi^-(t, \mathbf{x})] \delta[X - \varphi^+(t, \mathbf{x})] \delta[X - \varphi^-(t, \mathbf{x})] \\ &= \int dX \delta[X - \varphi^+(t, \mathbf{x})] \delta[X - \varphi^-(t, \mathbf{x})] \int_{OTP} \mathcal{D}[\check{\phi}] e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi^+] - \frac{i}{\hbar} S[\phi^-]} \\ &= \int_{CTP} \mathcal{D}[\check{\phi}] e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi^+] - \frac{i}{\hbar} S[\phi^-]} = e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{W}_{CTP}[j^+=0, j^-=0]} = 1. \end{aligned}$$

Par analogie avec la relation (3.59), on a introduit la notation  $\int_{CTP}$  spécifiant que les degrés de liberté finaux des branches  $\mathcal{C}^\pm$  sont traités conformément à la contrainte du formalisme *CTP*.

Une autre conséquence de l'écriture (3.59) est de permettre de "ré-interpréter" le calcul de valeurs moyennes *via* le formalisme *CTP* comme la trace sur ce type de quantité :

$$\begin{aligned} \langle \varphi(t) \rangle &= \int dX \varphi^\sigma(t, \mathbf{x}) \delta[\varphi^+(t, \mathbf{x}) - X] \delta[\varphi^-(t, \mathbf{x}) - X] \int_{OTP} \mathcal{D}[\check{\phi}] e^{\frac{i}{\hbar} S[\phi^+] - \frac{i}{\hbar} S[\phi^-]}, \quad \sigma = \pm \\ &= \lim_{j^a=0} \frac{\hbar}{i} \frac{\delta}{\delta j^a(t, \mathbf{x})} \int_{CTP} \mathcal{D}[\check{\phi}] e^{\frac{i}{\hbar} S[\check{\phi}] + \frac{i}{\hbar} j \cdot \check{\varphi}}. \end{aligned}$$

### 3.7.2 Environnement et détermination de matrices densité réduites

Dès qu'un système peut être séparé en plusieurs sous-systèmes, des matrices densité réduites peuvent être définies en prenant la trace partielle sur les degrés de liberté représentatifs d'une partie de ces sous-systèmes. Les sous-systèmes éliminés constituent l'environnement du système suivi. En fait, un environnement est défini et caractérisé par le fait que ses degrés de liberté ne sont pas directement utilisés pour définir des observables : ceux-ci ne peuvent intervenir "qu'indirectement" c'est-à-dire par leurs couplages avec les degrés de liberté du système effectivement suivi. Dès lors, la "frontière" séparant environnement et système suivi peut être facilement "bougée" selon que sont définies ou non certaines observables.

Dans le cadre du formalisme *OTP*, l'élimination des degrés de liberté d'un environnement correspond à les intégrer en utilisant le formalisme *CTP* (trace partielle) tandis que ceux restant sont alors traités explicitement en utilisant le formalisme *OTP* [39]. Par exemple, pour deux

jeux de degrés de liberté  $\varphi$  et  $\chi$ , l'élimination de l'environnement  $\chi$ , peut être faite de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}_{in}[\varphi^+(t, \mathbf{x}), \varphi^-(t, \mathbf{x})] &\equiv \text{tr}_{\chi}[\hat{\rho}_{in}[\varphi^+(t, \mathbf{x}), \varphi^-(t, \mathbf{x}); \chi^+(t, \mathbf{x}), \chi^-(t, \mathbf{x})]] \\
 &= \int d[\tilde{\chi}_f] \delta[\chi^+(t, \mathbf{x}) - \chi_f] \delta[\chi_f^-(t, \mathbf{x}) - \chi_f] \\
 &\quad \int_{OTP} \mathcal{D}[\tilde{\chi}(x')] \int_{OTP} \mathcal{D}[\tilde{\varphi}(x')] e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\varphi^+(x'), \chi^+(x')] - \frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\varphi^-(x'), \chi^-(x')]} \\
 &= \int_{OTP} \mathcal{D}[\tilde{\varphi}] \int_{CTP} \mathcal{D}[\tilde{\chi}] e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\varphi^+, \chi^+] - \frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\varphi^-, \chi^-]} \\
 &= \int_{OTP} \mathcal{D}[\tilde{\varphi}] e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\varphi^+] - \frac{i}{\hbar} \mathcal{S}[\varphi^-] + \frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{Intr}[\varphi^+, \varphi^-]}
 \end{aligned}$$

Cette élimination fait ainsi apparaître un terme de couplage  $\mathcal{S}_{Intr}$  si les degrés de liberté  $\chi^{\pm}$  étaient couplés à  $\varphi^{\pm}$ . Le résultat de cette procédure de calcul est analogue à celle du formalisme de la *fonctionnelle d'influence* [21]. Toutefois, soulignons que l'avantage de la démarche introduite ici est d'incorporer les effets dus aux matrices densité décrivant les conditions initiales (ou finales) dans le propagateur de la théorie : l'expression de l'intégrale de chemin précédente peut être évaluée à partir de méthodes faisant appel à des diagrammes.

Par conséquent, dans le formalisme *OTP*, l'étude de l'action nue, définie après élimination des degrés de liberté liés à l'environnement, permet de caractériser, au moyen de ses chemins, l'intrication du système suivi avec cet environnement : si les degrés de liberté de chaque branche ne sont pas séparables, le système suivi est intriqué avec un environnement et la matrice densité le représentant décrit alors un état mixte. En revanche, dès que les deux branches sont séparables, le système observé est alors dans un état pur. D'autre part, l'avantage de cette description est de permettre de construire et d'étudier l'établissement de cette intrication. Plus spécifiquement, on peut montrer que la différence  $\varphi^+ - \varphi^-$  paramètre alors les dissipations dues aux degrés de liberté éliminés lors de la trace partielle<sup>36</sup>. Dès lors, comme nous le verrons dans le chapitre 5, l'étude de matrices densité dans ce formalisme est particulièrement bien adaptée à celle de la *consistance* entre chemins dans le cadre de la limite classique [39, 51].

---

36. Cette différence de degrés de libertés est couplée à la partie imaginaire de l'action nue (dans l'espace des positions), résultant de l'intégration des champs éliminés : cette quantité permet de retrouver le théorème de fluctuation-dissipation.



## Chapitre 4

# Éléments de théorie quantique des champs à température et densité finies

La valeur moyenne d'une observable  $\hat{A}$  sur un ensemble statistique est définie à partir de la matrice densité  $\hat{\rho}$  par l'expression :

$$\langle \hat{A} \rangle_\rho = \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{A}].$$

La trace correspond alors à une somme sur l'ensemble des états accessibles au système dont l'importance relative est alors pondérée par  $\hat{\rho}$ . L'objet de ce chapitre est de présenter l'application du formalisme *closed time path* à un système *grand-canonique* : un réservoir de particules et de chaleur sera utilisé dans le chapitre 5 afin de modifier les propriétés d'un sous-système.

### 4.1 Ensemble grand-canonique

À l'équilibre thermodynamique, la matrice densité  $\hat{\rho}$  s'écrit en terme de quantités conservées. Plus particulièrement, l'ensemble *grand-canonique* correspond à l'étude d'un système en contact avec un réservoir de chaleur et de particules. Dans cette description,  $\hat{\rho}$  s'écrit sous la forme

$$\hat{\rho}[\beta, \zeta] = \frac{e^{-\beta(\hat{H} - \sum_\tau \zeta_\tau \hat{N}_\tau)}}{\text{Tr} e^{-\beta(\hat{H} - \sum_\tau \zeta_\tau \hat{N}_\tau)}} \quad (4.1)$$

dans le référentiel propre du réservoir de chaleur et de particules.  $\beta = [k_b T]^{-1}$  est inversement proportionnel au produit de la température  $T$  par la constante de *Boltzmann*  $k_b$ <sup>1</sup> et  $\zeta_\tau$  correspond au potentiel chimique associé à l'espèce  $\tau$ . La fonction de partition du système peut alors être définie *via*

$$Z[\beta, \zeta] = \text{Tr}\{e^{-\beta(\hat{H} - \sum_\tau \zeta_\tau \hat{N}_\tau)}\} \quad (4.2)$$

et la moyenne d'un produit d'opérateurs quelconques sur cet ensemble s'écrit

$$\langle \hat{A}_1 \cdots \hat{A}_N \rangle_\rho \equiv \langle \hat{A}_1 \cdots \hat{A}_N \rangle_{\beta, \zeta} = \text{Tr}\{\hat{\rho}[\beta, \zeta] \hat{A}_1 \cdots \hat{A}_N\}. \quad (4.3)$$

---

1. Constante de *Boltzmann* :  $k_b = 1.380650 \times 10^{-23} \text{ J/K} = 8.6172 \times 10^{-11} \text{ MeV/K}$

Ces fonctions de corrélations sur l'ensemble statistique étudié permettent de caractériser les observables ainsi que l'équilibre thermodynamique. Au contraire des moyennes définies en physique quantique, l'ordre d'insertion des opérateurs constituant une moyenne statistique n'est pas important<sup>2</sup>.

Le système d'unités naturelles utilisé pour décrire des systèmes quantiques grand-canoniques correspond au choix  $\hbar = c = k_b = 1$ . La température ambiante ( $300K$ ) correspond alors à environ  $0,026eV$  c'est-à-dire  $\beta = 38,7 \times 10^6 MeV^{-1}$ ; l'ordre de grandeur de la température d'un plasma est d'environ  $10^7 K$  c'est-à-dire  $138eV$  ou encore  $\beta = 7.24 \times 10^3 MeV^{-1}$ . Ainsi, la gamme d'énergie mise en jeu par les fluctuations thermiques est souvent très faible devant celle correspondant aux énergies de masse de particules lorsque l'on considère des objets physiques "actuels". Soulignons, en outre, que des problématiques traitant de situations où la température est beaucoup plus importante peuvent être trouvées dans le contexte d'études portant sur la genèse de l'univers.

Plusieurs formalismes existent pour traiter des situations physiques faisant intervenir des matrices densité du type (4.1). Toutes ces méthodes ont en commun qu'elles consistent à interpréter ce type de matrice comme un opérateur d'évolution en temps *imaginaire*,

$$\hat{\rho}[\beta, \zeta] = \frac{e^{+i[\hat{H} - \sum_n \zeta_n \hat{N}_n][i\beta]}}{\text{Tr} e^{+i[\hat{H} - \sum_n \zeta_n \hat{N}_n][i\beta]}} \equiv \hat{U}[0, 0 - i\beta]$$

c'est-à-dire que l'inverse de la température est comprise comme une durée finie purement imaginaire<sup>3</sup>. Une conséquence de cette écriture réside dans le fait que les fonctions de corrélations (fonctions de *Green*) sont périodiques à l'équilibre thermodynamique : pour un opérateur  $\hat{A}$  écrit en représentation de *Heisenberg*, on peut montrer que [2, 11]

$$\langle \hat{A}(t_1) \hat{A}(t_2) \rangle_{\beta, \zeta} = \pm \langle \hat{A}(t_2) \hat{A}(t_1 + i\beta) \rangle_{\beta, \zeta}$$

respectivement pour des degrés de liberté bosoniques (+) ou fermioniques (-). Les relations de périodicité de ce type correspondent aux relations de *Kubo-Martin-Schwinger* [26] et sont caractéristiques de l'équilibre thermodynamique. De plus, la dépendance selon la partie imaginaire du temps dans les opérateurs précédents est toujours telle que  $|\Im t_2 - \Im t_1| \leq \beta$  [9]. Une autre conséquence de cette approche est que le calcul de la fonction de partition (4.2) peut être décomposé comme une somme de valeurs moyennes définies pour un opérateur d'évolution en temps imaginaire :

$$\mathcal{Z}[\beta, \zeta] = \text{Tr} \{ e^{-\beta[\hat{H}(t) - \sum_\tau \zeta_\tau \hat{N}_\tau]} \} = \int d\phi_\alpha \langle \phi_\alpha | e^{+i[\hat{H}(t) - \sum_\tau \zeta_\tau \hat{N}_\tau][i\beta]} | \phi_\alpha \rangle. \quad (4.4)$$

---

2. Comme nous le verrons brièvement par la suite, ceci se traduit par l'utilisation de fonctions de *Green* en espace euclidien pour décrire les moyennes statistiques : ce type de fonction de *Green* est unique. En revanche, pour les problèmes liés aux phénomènes quantiques, l'ordre d'insertion des opérateurs dans les moyennes est spécifique aux conditions de bord imposées au problème traité : il est nécessaire de préciser comment les pôles sont évités pour les fonctions de *Green* en espace de *Minkowski*.

3. L'opérateur d'évolution en temps imaginaire n'est pas une quantité unitaire mais satisfait toutefois des propriétés similaires à celles valables pour un opérateur d'évolution usuel (structure de groupe et condition de bord  $\hat{U}[\tau, \tau] = 1$ ,  $\tau \in i\mathbb{R}$ ) [9] : il peut être adapté pour construire une théorie des perturbations en temps imaginaire.

Ces valeurs moyennes peuvent alors être traitées de deux façons différentes donnant lieu à deux familles de formalismes.

Une première approche consiste à utiliser les similitudes entre la fonction de partition (4.4) et les amplitudes de transition présentées dans le chapitre 1. Formellement, les valeurs moyennes dans (4.4) peuvent être interprétées comme des amplitudes de transition pour un temps purement imaginaire  $\tau \equiv i\beta$  et de longueur *finie*. De plus, ces amplitudes doivent être définies de sorte que leurs *bra* et *ket* soient identiques et, *in fine*, les amplitudes, ainsi définies, doivent être sommées pour produire  $\mathcal{Z}$ . Cette stratégie d'évaluation correspond au *formalisme de Matsubara* ou *formalisme en temps imaginaire* [17]. Les fonctions de *Green* calculées dans ce cadre permettent de caractériser les propriétés du système à l'*équilibre* thermodynamique. Les propriétés dynamiques peuvent être évaluées, dans un second temps, en prolongeant analytiquement ces quantités (rotation de *Wick*) dans le cadre de la théorie des perturbations [9]. En résumé, la méthode proposée par le formalisme de *Matsubara* consiste à calculer les fonctions de partition comme des amplitudes de transition usuelles mais en leur imposant des conditions de bord périodiques judicieuses.

L'approche alternative au formalisme de *Matsubara* consiste à doubler le nombre de degrés de liberté pour définir les valeurs moyennes intervenant dans (4.4). *De prime abord*, bien qu'apparaissant plus compliquée que le formalisme précédent, cette approche permet d'étudier une gamme plus large de problèmes et offre une description plus "naturelle" des fonctions de *Green* du système : l'évolution en temps et les propriétés de l'équilibre thermodynamique sont obtenues directement. Cette approche correspond aux *formalismes en temps réel* dont le formalisme *closed time path* en est issu<sup>4</sup>. La description du formalisme *CTP* à température et densité finie sera au cœur des développements de la seconde partie de ce chapitre.

## 4.2 Formalisme en temps imaginaire : formalisme de Matsubara

Le *formalisme de Matsubara* est une méthode d'évaluation de la fonction de partition (4.2) et de moyennes stationnaires d'opérateurs prises sur cet ensemble. Elle repose sur l'écriture de la trace, dans (4.2), en terme de somme sur une seule famille d'amplitude de transition en espace *euclidien* et pour une durée *finie*.

Étant définies à partir d'un opérateur d'évolution en temps imaginaire, les fonctions de partition peuvent être écrites sous la forme

$$\mathcal{Z}[\beta, \zeta] = \mathcal{N} \int_{\text{périodique}} \mathcal{D}[\phi] e^{-S_E[\phi] - \beta \sum_{\tau} \zeta_{\tau} N_{\tau}} \quad (4.5)$$

où les configurations de champs vérifient des conditions de bord périodiques (relations de *Kubo-Martin-Schwinger* :  $\phi(\beta, \mathbf{x}) = \pm \phi(0, \mathbf{x})$  respectivement pour les bosons (+) et les fermions (-)).

---

4. Un comparatif entre les formalismes en temps imaginaire et en temps réel peut être trouvé dans les références [11, 27]. En outre, le livre de *Fetter* et *Walecka* [9] constitue un ouvrage de référence pour l'étude des problèmes à température et densité finie.

En outre, la fonction de partition s'écrit en terme de l'action euclidienne  $\mathcal{S}_E$  définie sur un intervalle de temps (imaginaire) de longueur *finie*  $\beta$  :

$$\mathcal{S}_E[\phi] = \int_0^\beta d\tau \int_{\mathbb{R}^3} d^3x \mathcal{L}_E[\phi(\tau, \mathbf{x})]. \quad (4.6)$$

Les moyennes statistiques d'opérateurs sont définies par les relations (4.3) et leur expression peut être paramétrée par la fonctionnelle génératrice suivante

$$\mathcal{Z}_E[\beta, \zeta; j] = \int_{\text{périodique}} \mathcal{D}[\phi] e^{-\mathcal{S}_E[\phi] - \beta \sum_\tau \zeta_\tau N_\tau + j\phi}. \quad (4.7)$$

En outre, la fonction de partition (4.5) correspond au facteur de normalisation de cette fonctionnelle :  $\mathcal{Z}[\beta, \zeta] = \mathcal{Z}_E[\beta, \zeta; j = 0]$ .

La fonctionnelle génératrice (4.7) est l'analogue de l'amplitude du vide au vide en présence de source externe du chapitre 1 : le formalisme de *Matsubara* fait alors appel à des traitements similaires. Ainsi, la fonctionnelle (4.7) peut être évaluée à partir de séries perturbatives définies *via* les équations de *Schwinger-Dyson* correspondantes et une méthode de construction de ces termes sous forme de diagrammes de *Feynman* peut être introduite [9, 10]. Toutefois, les propagateurs du formalisme de *Matsubara* diffèrent fortement de ceux utilisés pour une théorie quantique des champs usuelle. Ces propagateurs font intervenir des sommes sur des fréquences discrètes en raison des relations de *Kubo-Martin-Schwinger* et du fait que  $\beta$  soit de longueur finie :

$$G_\beta(\tau, \mathbf{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{-i(\omega_n \tau - \mathbf{k} \cdot \mathbf{x})} G_\beta(\omega_n, \mathbf{k})$$

En outre, on peut montrer [9, 11] que les fréquences  $\omega_n$  sont contraintes par la statistique des champs :  $\omega_n = [2n\pi]/\beta$  pour les bosons et  $\omega_n = [(2n + 1)\pi]/\beta$  pour les fermions. Ce sont les *fréquences de Matsubara*.

L'interprétation de la température en tant que temps purement imaginaire conduit ainsi à une formulation euclidienne de la théorie quantique des champs. Cependant, dans ce cadre, tous les temps et toutes les énergies sont représentés par des quantités imaginaires ; de surcroît, ces dernières sont discrètes puisque  $\beta$  est de longueur finie. En principe, les fonctions de *Green* de *Matsubara* peuvent être écrites en terme de fonctions à deux points en temps réel par prolongement analytique [9] mais cette opération peut, parfois être difficile à réaliser dans la pratique. Cette méthode présente un autre désavantage, d'ordre pratique : les calculs font systématiquement apparaître des sommes sur des fréquences discrètes plutôt que des intégrales. Le formalisme de *Matsubara* est bien adapté au calcul de quantités stationnaires ainsi que dans l'approximation des températures élevées. Cependant, sorti de ce cadre, ce formalisme entraîne des difficultés principalement d'ordre pratique.

### 4.3 Formalisme en temps réel : cas du formalisme *closed time path*

Le formalisme en temps imaginaire est particulièrement bien adapté à la résolution de problèmes statiques tandis que l'étude de propriétés dynamiques est plus naturellement décrite dans le cadre des formalismes dits en temps réel [9, 11]. De surcroît, calculer les fonctions de *Green* dans ce cadre permet d'obtenir les fonctions à N-points décrivant directement les quantités mesurables : des problèmes inhérents au formalisme de *Matsubara* sont ainsi évités.

Dans cette partie, nous allons aborder l'application d'un de ces formalismes, le formalisme *closed time path* à l'étude d'un système grand-canonique à l'équilibre. Concrètement, l'application du formalisme *CTP* à cet ensemble revient à appliquer les développements du chapitre 3 pour un propagateur moyenné sur cet ensemble statistique. En outre, dans cette présentation, de nombreux aspects et développements seront omis par soucis de concision : les règles d'études des systèmes à l'équilibre thermodynamique peuvent être trouvées plus en détail dans les références [29, 30, 9, 27].

#### 4.3.1 Forme du contour à température finie

La moyenne d'un opérateur sur un ensemble grand-canonique est définie par l'expression (3.4) c'est-à-dire :

$$\langle A \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}_{in} \hat{U}(t_{in}, t) \hat{A} \hat{U}(t, t_{in})].$$

$\hat{\rho}_{in}$  peut être écrit en terme d'opérateur d'évolution sous la forme

$$\hat{\rho}_{in} = \frac{e^{+i\mathcal{H}(t_{in})i\beta}}{\text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}(t_{in})}} = \frac{e^{+i\mathcal{H}_{in}[t_{in}-i\beta-t_{in}]}}{\text{Tr} e^{+iH_{in}[t_{in}-i\beta-t_{in}]}} = \frac{\hat{U}[t_{in}-i\beta, t_{in}]}{\text{Tr} \hat{U}[t_{in}-i\beta, t_{in}]}.$$

À partir de développements identiques à ceux réalisés dans la section 3.2.1, la moyenne de  $\hat{A}$  peut être exprimée de deux façons différentes

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= \frac{\text{Tr} \hat{U}[t_{in}-i\beta, t_{in}] \hat{U}[t_{in}, t_{out}] \hat{U}[t_{out}, t] \hat{A} \hat{U}[t, t_{in}]}{\text{Tr} \hat{U}[t_{in}-i\beta, t_{in}] \hat{U}[t_{in}, t_{out}] \hat{U}[t_{out}, t_{in}]} \\ &= \frac{\text{Tr} \hat{U}[t_{in}-i\beta, t_{in}] \hat{U}[t_{in}, t] \hat{A} \hat{U}[t, t_{out}] \hat{U}[t_{out}, t_{in}]}{\text{Tr} \hat{U}[t_{in}-i\beta, t_{in}] \hat{U}[t_{in}, t_{out}] \hat{U}[t_{out}, t_{in}]} \end{aligned}$$

faisant ainsi appel au contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  propre au formalisme *closed time path* auquel la matrice densité initiale  $\hat{\rho}_{in}$  ajoute une nouvelle branche de longueur  $\beta$  que l'on note  $\mathcal{C}^\beta$  (*cf* figure 4.1).

La forme du contour présenté par la figure 4.1 est ainsi celle que l'on a coutume de retenir pour le formalisme *CTP*. Les contours correspondant aux autres formalismes en temps réel correspondent à une déformation de celui-ci. Généralement, tous ces formalismes peuvent être reliés entre eux par des manipulations sur les opérateurs d'évolution exprimant les moyennes. Toutefois, des différences apparaissent au sein de ces formalismes principalement au niveau du

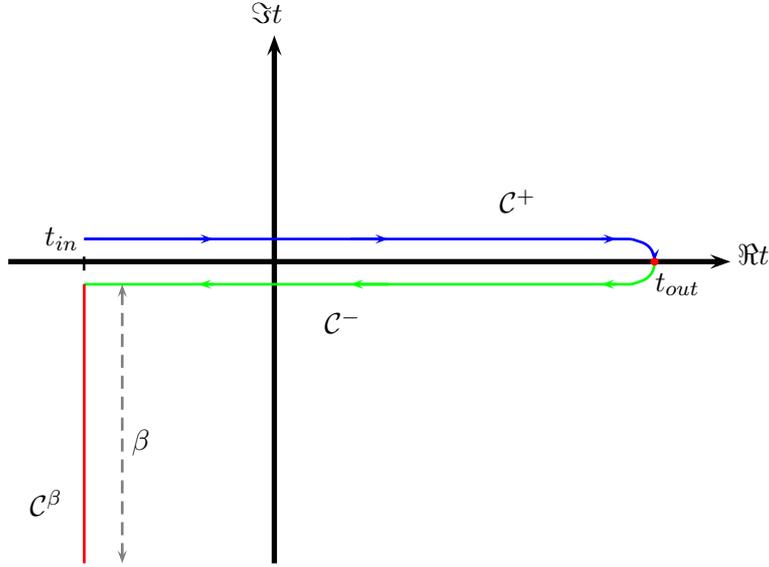


FIGURE 4.1 – Contour pour le formalisme *closed time path* à température finie

rôle qu'ils font jouer à la branche  $C^-$ . Par exemple, pour le formalisme *thermo-field*, cette branche est considérée comme non-physique et les branches  $C^\pm$  découplent dans le vide (c'est-à-dire dans la limite  $\zeta_\tau = 0$ ,  $\beta \rightarrow \infty$ ) [27]; souvent, les différents formalismes en temps réel ne sont pas équivalents pour les cas limites et dans l'interprétation de leurs degrés de liberté.

### 4.3.2 Développement perturbatif

L'expression d'observables peut être paramétrée par la fonctionnelle génératrice suivante

$$\mathcal{Z}[\check{j}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}[\check{\varphi}] e^{\frac{i}{\hbar} \int_C \mathcal{L}[\check{\varphi}] + \frac{i}{\hbar} \check{j} \check{\varphi}}$$

où  $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^- \cup \mathcal{C}^\beta$  désigne le contour représenté par la figure 4.1. L'étude d'un système perturbatif s'appuie alors sur la relation

$$\mathcal{Z}[\check{j}] = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_C \mathcal{L}_{int}\left[\frac{\delta}{\delta \check{j}}\right]\right) \mathcal{Z}_0[\check{j}] \quad (4.8)$$

où  $\mathcal{Z}_0[\check{j}]$  désigne la fonctionnelle génératrice libre également définie sur le contour  $\mathcal{C}$  : soulignons que ce propagateur *dépend* notamment de l'environnement (partie libre de l'ensemble statistique); son expression est donnée dans la section suivante.

Habituellement, la relation (4.8) peut être simplifiée : lorsque  $t_{in} \rightarrow -\infty$  et sous condition que les sources externes soient nulles dans cette limite, les contributions interactives à la fonctionnelle

totale de la branche verticale  $\mathcal{C}^\beta$  et celles des branches horizontales  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  se factorisent [29, 30, 27]<sup>5</sup> :

$$\mathcal{Z}[\check{j}] = \mathcal{N} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{\mathcal{C}^\beta} \mathcal{L}_{int}\left[\frac{\delta}{\delta \check{j}}\right]\right) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-} \mathcal{L}_{int}\left[\frac{\delta}{\delta \check{j}}\right]\right) \mathcal{Z}_0[\check{j}]$$

Concrètement, les fonctions de *Green* interactives s'écrivent alors comme des quantités *déconnectées* vis-à-vis des contributions thermiques et dynamiques (issues des branches  $\mathcal{C}^\pm$ ). Par conséquent, lors de l'estimation des propriétés dynamiques *via* la fonctionnelle génératrice des diagrammes *connectés*  $\mathcal{W}$ , l'évaluation de la série perturbative selon  $\mathcal{C}^\beta$  peut être ignorée (théorème *link-cluster*) :

$$e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{W}[\check{j}]} \equiv \mathcal{N}' \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{int}\left[\frac{\delta}{\delta j^+}\right] - \frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{int}\left[\frac{\delta}{\delta j^-}\right]\right) \mathcal{Z}_0[\check{j}]$$

Les contributions issues de  $\mathcal{C}^\beta$  correspondent alors à une modification du facteur de normalisation et les effets propres à l'environnement sont circonscrits au propagateur.

### 4.3.3 Fonction de Green à deux points à température et densité finies

Les fonctions à deux points en temps réel d'un ensemble grand-canonique peuvent être calculées exactement de la même façon qu'en absence d'environnement : les moyennes d'opérateurs de création et d'annihilation ne sont plus prises sur le vide mais sur cet ensemble (*cf* annexe A.2). On peut alors montrer que les fonctions à deux points à température et densité finie s'écrivent comme la somme d'un propagateur correspondant à celui dans le vide et d'une contribution liée à l'environnement :

$$\check{K}(p) = \check{K}_{vac}(p) + \check{K}_{env}(p). \quad (4.9)$$

Ainsi, contrairement au formalisme de *Matsubara*, la limite à faible température et les développements correspondants sont ici parfaitement accessibles. Pour la paramétrisation de *Keldysh*, la fonction à deux points pour les bosons s'écrit

$$\check{D}(p) = \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} & -2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[-p^0] \\ -2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[+p^0] & \frac{-1}{p^2 - m^2 - i0} \end{pmatrix} - 2i\pi\delta[p^2 - m^2]n_p \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

en fonction des distributions  $n_p = (n_p^- \Theta[+p^0] + n_p^+ \Theta[-p^0])$ , où  $n_p^\pm = [\exp(\beta(\epsilon_p \pm \zeta)) - 1]^{-1}$  et de l'énergie  $\epsilon_p = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . Pour des fermions, le propagateur est donné par l'expression

$$\check{G}(p) = (\not{p} + m) \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} & +2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[-p^0] \\ +2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[+p^0] & \frac{-1}{p^2 - m^2 - i0} \end{pmatrix} + 2i\pi(\not{p} + m)\delta[p^2 - m^2](n_p^- \Theta[+p^0] + n_p^+ \Theta[-p^0]) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

---

5. Cette factorisation repose sur l'utilisation du lemme de *Riemann* pour  $t_{in} \rightarrow -\infty$  dans l'expression du propagateur libre intervenant dans (4.8). En outre, ce résultat, montré dans le contexte du formalisme *thermo-fields*, peut être étendu au formalisme *CTP* en reconstruisant ce dernier par déformation du contour utilisé.

en fonction des distributions de *Fermi*  $n_p^\pm = [e^{\beta(\epsilon_p \pm \zeta)} + 1]^{-1}$ .

La partie du propagateur indépendante de la température correspond exactement à celle que l'on peut calculer en l'absence de tout environnement. Cette contribution s'interprète alors de façon standard c'est-à-dire en terme d'échanges de particules virtuelles. En revanche, la composante dépendante de la température met en jeu des particules sur la couche de masse uniquement. Ce terme correspond donc à la distribution de particules *réelles* du milieu à l'étude : elles participent à la dynamique au cours de processus d'absorptions et d'émissions qui s'ajoutent à ceux représentant l'échange de particules virtuelles issu de la partie standard du propagateur. Enfin, les termes issus de cette contribution thermique ne présentent pas de divergences UV. En effet, la présence des distributions de *Fermi* ou de *Dirac* rendent ces termes fortement négligeables à haute énergie. Ainsi, les contre-termes de la théorie à température nulle suffisent à la réguler.

Les fonctions de *Green* correspondant à la paramétrisation de *Keldysh* sont obtenues par combinaison linéaire des propagateurs précédents (*cf* annexe A.2.2). Les propagateurs retardés et avancés sont toujours indépendants de l'environnement :

$$\begin{aligned} D^a(p) &= \frac{1}{p^2 - m^2 - \text{sgn}[p^0].i0}, & D^r(p) &= \frac{1}{p^2 - m^2 + \text{sgn}[p^0].i0} \\ G^a(p) &= \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 - \text{sgn}[p^0].i0}, & G^r(p) &= \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + \text{sgn}[p^0].i0}. \end{aligned}$$

Pour la paramétrisation de *Schwinger*, les contributions réelles (dans l'espace des positions) font appel aux propagateurs proches et lointains qui sont également toujours indépendants de l'environnement :

$$\begin{aligned} D^n(p) &= \text{P}_p \left[ \frac{1}{p^2 - m^2} \right], & D^f(p) &= -i\pi\delta[p^2 - m^2]\text{sgn}[p^0], \\ G^n(p) &= (\not{p} + m)\text{P}_p \left[ \frac{1}{p^2 - m^2} \right], & G^f(p) &= -2i\pi(\not{p} + m)\delta[p^2 - m^2]\text{sgn}[p^0], \end{aligned}$$

Pour ces deux jeux de paramétrisation, les contributions propres à l'influence de l'environnement sont entièrement contenues dans le propagateur des corrélations  $K^c$  :

$$\begin{aligned} D^c(p) &= -\pi\delta[p^2 - m^2]\text{cotanh} \left[ \frac{\beta(\epsilon_p - \text{sgn}(p^0)\zeta)}{2} \right], \\ G^c(p) &= -(\not{p} + m)\pi\delta[p^2 - m^2]\tanh \left[ \frac{\beta(\epsilon_p - \text{sgn}(p^0)\zeta)}{2} \right]. \end{aligned}$$

En outre,  $K^c$  est sur couche de masse et traduit l'influence de particules réelles issues de l'environnement au propagateur : cette quantité est caractéristique du milieu dont la contribution est alors paramétrée à l'aide d'un seul terme.

## Chapitre 5

# Champs sub-classiques et polarisation en électrodynamique

Au cours du 20<sup>ème</sup> siècle, la mécanique quantique a été développée afin de décrire des systèmes à très petite échelle. Ces systèmes sont caractérisés par des phénomènes inconnus à l'échelle macroscopique qui, en principe, sont pourtant la résultante de ces phénomènes microscopiques sous-jacents. La relation entre ces deux domaines de la physique est l'objet de nombreuses études dont notamment celle de la théorie de la *décohérence* [45].

L'objet de ce chapitre est de présenter l'établissement d'aspects classiques pour des valeurs moyennes définies à une résolution appartenant au domaine quantique et dans le contexte de l'électrodynamique quantique. De telles moyennes sont appelées *champs sub-classiques*. Concrètement, ces moyennes possèdent des caractéristiques de la physique classique dans le sens où elles correspondent à la moyenne de fluctuations quantiques. Toutefois, ces quantités ne sont pas totalement classiques puisque leur échelle caractéristique est microscopique. Les équations dynamiques vérifiées par ces champs sub-classiques, ainsi que leur rapport au principe variationnel, sont étudiées dans un premier temps. Dans une seconde partie, l'influence de la polarisation sera étudiée à température et densité finies permettant de caractériser, d'une part, les propriétés électriques et magnétiques du milieu et, d'autre part, certains aspects propres à l'établissement de la limite classique d'un champs électromagnétique se propageant dans ce milieu.

Soulignons que l'on choisit ici de réaliser une description en terme de fonctions de *Green* car ce type de formulation s'adapte bien à la description de phénomènes électromagnétiques (covariance). D'autres approches sont toutefois possibles, comme l'utilisation d'un développement semi-classique à partir de fonctions de *Wigner*<sup>1</sup>. Cependant ce genre de développements n'apporte généralement pas d'informations supplémentaires au problème traité ici.

---

1. Un tel développement permet de construire une représentation des phénomènes quantiques dans l'espace des phases en restant proche d'une description classique. Une présentation du développement semi-classique à partir de fonctions de *Wigner*, ainsi que son établissement à partir du formalisme *CTP*, peuvent être trouvés dans les articles [35, 34] (ainsi que dans leurs références bibliographiques).

### Système étudié

On s'intéresse à un système en électrodynamique correspondant à un ensemble de charges pouvant être de saveurs différentes  $e_\tau$ . Ce système peut éventuellement être en contact avec un réservoir de particules et de chaleur lui imposant une agitation et un nombre de charges moyen. Plus particulièrement, on recherche les équations du mouvement vérifiées par les champs électromagnétique conjointement à celles des courants correspondant aux différentes saveurs introduites. En outre, une partie de ces charges peut être laissée spectatrice. La fonctionnelle génératrice permettant d'accéder au calcul de ces observables correspond à :

$$e^{i\mathcal{W}[\check{a},\check{j}]} = \text{Tr} \left( \hat{\mathbb{T}} \left[ e^{-i \int_{t_{in}}^{t_{out}} dt \int d^3x [H(x) - \sum_\tau a_\tau^+(x) J_\tau(x) - j^+(x) A(x)]} \right] \hat{\rho}_{in} \hat{\mathbb{T}}^* \left[ e^{+i \int_{t_{in}}^{t_{out}} dt \int d^3x [H(x) - \sum_\tau a_\tau^+(x) J_\tau(x) - j^+(x) A(x)]} \right] \right)$$

Dans ce chapitre, on note les quantités extérieures en minuscule (à l'exception des constantes de couplage) : les paires de sources externes  $j^\pm$  et les paires de champs extérieurs  $a_\tau^\pm$  sont utilisées pour générer respectivement les observables du champ électromagnétique  $A^\pm$  et des différents courants électromagnétiques  $(J_\tau^\mu)^\pm = \bar{\psi}_\tau^\pm \gamma^\mu \psi_\tau^\pm$ . En outre, l'ensemble des champs extérieurs  $a_\tau^\pm$  est noté  $a^\pm : \check{a} = (\check{a}_0, \dots, \check{a}_\tau, \dots)$ . La date finale  $t_{out}$ , pour laquelle est imposée la condition de bord, propre au contour du formalisme *CTP*, est prise arbitrairement grande. L'expression de la fonctionnelle précédente s'écrit sous la forme

$$e^{i\mathcal{W}[\check{a},\check{j}]} = \int \mathcal{D}[\check{A}] \left( \prod_\tau \mathcal{D}[\check{\psi}_\tau] \mathcal{D}[\check{\bar{\psi}}_\tau] \right) \exp \left[ i\mathcal{S}_{CT} + \frac{i}{2} \check{A} \cdot \check{D}_0^{-1} \cdot \check{A} + i \sum_\tau \check{\bar{\psi}}_\tau \cdot \check{G}_{0,\tau}^{-1} \cdot \check{\psi}_\tau + i \sum_{\sigma,\sigma'} \delta^{\sigma\sigma'} \sum_\tau (\check{\bar{\psi}}_\tau^\sigma \not{A}_\tau^\sigma \psi_\tau^\sigma - \sigma e_\tau \check{\bar{\psi}}_\tau^\sigma \not{A}^\sigma \psi_\tau^\sigma) + i\check{j} \cdot \check{A} \right] \quad (5.1)$$

en terme des propagateurs suivants (la jauge de *Feynman* est utilisée : cf chapitre 1) :

$$\check{G}_{0,\tau}^{-1} = \begin{pmatrix} i\not{\partial} - m_n + i\epsilon & 0 \\ 0 & -\gamma^0(i\not{\partial} - m_n + i\epsilon)^\dagger \gamma^0 \end{pmatrix} + \check{G}_{env,\tau}^{-1} + \check{G}_{BC,\tau}^{-1},$$

$$\check{D}_0^{-1\mu\nu} = g^{\mu\nu} \begin{pmatrix} \square + i\epsilon & 0 \\ 0 & -\square + i\epsilon \end{pmatrix} + \check{D}_{env}^{-1\mu\nu} + \check{D}_{BC}^{-1\mu\nu}.$$

Les contributions  $\check{G}_{env,\tau}^{-1}$  et  $\check{D}_{env}^{-1}$  sont le résultat de l'intégration des degrés de liberté dus à la présence éventuelle d'un réservoir de particules et de chaleur pour les charges tandis que les termes  $\check{G}_{BC,\tau}^{-1}$  et  $\check{D}_{BC}^{-1}$  correspondent au résultat de l'intégration du degré de liberté spécifique à la date  $t_{out} \rightarrow \infty$ .

Les équations dynamiques gouvernant la valeur moyenne des différents courants  $\langle J_\tau \rangle$  ainsi que celle du champ électromagnétique  $\langle A \rangle$  sont recherchées par l'intermédiaire des quantités effectives qui leur correspondent et qui sont respectivement notées  $J_\tau$  et  $A$  c'est-à-dire de la même façon que les opérateurs composites leur correspondant. Dans ce chapitre, les moyennes et les matrices densité sont définies par des conditions de bord initiales plutôt que finales. Enfin, la plupart des calculs sont présentés avec plus de détails dans l'annexe B.

## 5.1 Influence de charges spectatrices

Les corrections en boucles, et plus particulièrement le tenseur de polarisation, disparaissent de l'expression des quantités effectives, et donc de celle des valeurs moyennes, dès lors que l'on exprime *tous* les courants de charges conjointement au champ électromagnétique. Pour reconstruire ce tenseur et ainsi habiller les contributions nues, il est alors nécessaire d'avoir un ensemble de charges spectatrices ; dès lors, seul le courant de charges d'une saveur particulière, dite de *valence*, est mesuré en même temps que le champ électromagnétique. Ce résultat peut être montré à partir des développements qui suivent.

L'intégration des différentes charges dans (5.1) conduit à écrire formellement cette expression *via*

$$e^{i\mathcal{W}[\check{a}, \check{j}]} = \int \mathcal{D}[\check{A}] \exp \left[ i \sum_{\tau} \mathcal{W}_{\tau}^{ch} [\check{a}_{\tau} - e_{\tau} \check{\sigma} \check{A}] + \frac{i}{2} \check{A} \cdot \check{D}_0^{-1} \cdot \check{A} + i \check{j} \cdot \check{A} \right] \quad (5.2)$$

où la fonctionnelle  $\mathcal{W}_{\tau}^{ch}$  correspond au résultat de cette intégration pour une saveur particulière. Ensuite, en effectuant le changement de variable  $\check{A} \sim \check{A} - \check{D}_0 \check{j}$ , l'expression précédente s'écrit :

$$e^{i\mathcal{W}[\check{a}, \check{j}]} = \exp \left[ -\frac{i}{2} \check{j} \cdot \check{D}_0 \cdot \check{j} \right] \int \mathcal{D}[\check{A}] \exp \left[ i \sum_{\tau} \mathcal{W}_{\tau}^{ch} [\check{a}_{\tau} + e_{\tau} \check{\sigma} \check{D}_0 \cdot \check{j} - e_{\tau} \check{\sigma} \check{A}] + \frac{i}{2} \check{A} \cdot \check{D}_0^{-1} \cdot \check{A} \right]. \quad (5.3)$$

Formellement, dans cette relation, l'intégrale de chemin s'identifie à celle de l'expression (5.2) lorsque  $\check{j}$  vaut zéro et pour un champ extérieur égal à  $\check{a}_{\tau} + e_{\tau} \check{\sigma} \check{D}_0 \cdot \check{j}$ . Par conséquent, en introduisant les notations  $\vec{e} = (e_1, \dots, e_{\tau}, \dots)$  et  $\mathcal{W}[\check{X}] \equiv \mathcal{W}[\check{a} = \check{X}, \check{j} = 0]$ , la fonctionnelle (5.3) s'écrit

$$\mathcal{W}[\check{a}, \check{j}] = \mathcal{W}[\check{a} + \vec{e} \check{\sigma} \check{D}_0 \cdot \check{j}] - \frac{1}{2} \check{j} \cdot \check{D}_0 \cdot \check{j}. \quad (5.4)$$

Le niveau arbre de la théorie correspond au second terme tandis que toutes les corrections en boucles sont uniquement contenues dans la fonctionnelle génératrice des courants : toutes les corrections en boucles de la théorie servent alors à définir les courants effectifs des charges.

La structure (5.4) est propre à l'utilisation des opérateurs  $A$  et  $J_{\tau}$  en *QED* et non pas au formalisme *CTP* : les manipulations fonctionnelles précédentes peuvent être reproduites à l'identique pour les amplitudes de transition usuelles. En conséquence, il est plus commode de définir, dans cette section uniquement, les quantités effectives à partir de la fonctionnelle  $\mathcal{W}$  complète<sup>2</sup> afin que les résultats valides pour les amplitudes de transition puissent être aisément extrapolés à partir de ceux issus du formalisme *CTP*. Les quantités effectives définissent les quantités observables lorsque l'unitarité est imposée à la fonctionnelle génératrice considérée. Aussi, pour le formalisme *CTP*, les valeurs moyennes observables vérifieront les mêmes équations

---

2. Dans le cadre du formalisme *CTP*, les relations qui suivent liant les quantités effectives entre elles sont les mêmes, que ces champs soient définis à partir de  $\mathcal{W}$  ou de  $\mathfrak{W}$  seulement.

dynamiques que celles obtenues pour les quantités effectives. Ces dernières s'écrivent :

$$\check{J}_\tau = \frac{\delta\mathcal{W}[\check{a}, \check{j}]}{\delta\check{a}_\tau} = \frac{\delta\mathcal{W}[\check{a} + \vec{e} \check{\sigma} \check{D}_0 \cdot \check{j}]}{\delta\check{a}_\tau}, \quad \forall \tau \quad (5.5)$$

$$\check{A} = \frac{\delta\mathcal{W}[\check{a}, \check{j}]}{\delta\check{j}} = -\check{D}_0 \cdot \check{j} + \sum_\tau e_\tau \check{\sigma} \check{D}_0 \frac{\delta\mathcal{W}[\check{a} + \vec{e} \check{\sigma} \check{D}_0 \cdot \check{j}]}{\delta\check{a}_\tau}. \quad (5.6)$$

Aussi, l'expression du champ électromagnétique effectif s'écrit en fonction de toutes les sources selon la relation :

$$\check{A} = \check{D}_0 [\check{\sigma} \sum_\tau e_\tau \check{J}_\tau - \check{j}]. \quad (5.7)$$

Cette expression est *exacte*. Par conséquent, dès que tous les courants  $\check{J}_\tau$  sont définis conjointement au champ électromagnétique  $\check{A}$ , la renormalisation des paramètres nus est absente : dans l'expression précédente, tous les termes en boucles servent à définir les courants effectifs plutôt qu'à habiller les paramètres nus.

En revanche, on peut montrer que les effets de polarisation sont restaurés dès qu'une partie des saveurs  $\tau$  composant le système n'est pas l'objet d'une mesure. Pour cela, on considère la mesure du courant  $\check{J}_v$  correspondant à une saveur particulière  $\tau = v$  et défini par la relation (5.5) pendant que toutes les autres charges  $\tau \neq v$  sont laissées libres. La saveur mesurée est dite de valence. En fait, on peut alors montrer que les effets de polarisation sont le résultat de la dépendance en  $\check{a}_v$  et  $\check{j}$  des courants correspondants aux charges spectatrices (5.5). Ainsi, en écrivant le champ  $A$  sous la forme

$$\check{A} = \check{D}_0 \left[ e_v \check{\sigma} \check{J}_v - j + \sum_{\tau \neq v} e_\tau \check{\sigma} \check{J}_\tau \right]$$

et en développant au premier ordre les sources spectatrices en fonction de leur dépendance en terme des quantités extérieures retenues,  $\check{a}_v$  et  $j$ , on peut ainsi faire apparaître des polarisations :

$$\check{A} = \check{D}_0 \left[ e_v \check{\sigma} \check{J}_v - j + \sum_{\tau \neq v} e_\tau \check{\sigma} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[\check{a}]}{\delta\check{a}_\tau \delta\check{a}_v} \Big|_{\check{a}=0} \check{a}_v + \sum_{\tau, \tau' \neq v} e_\tau e_{\tau'} \check{\sigma} \frac{\delta^2 \mathcal{W}[\check{a}]}{\delta\check{a}_\tau \delta\check{a}_{\tau'}} \Big|_{\check{a}=0} \check{\sigma} \check{D}_0 \cdot \check{j} \right]. \quad (5.8)$$

Ce résultat est à comparer avec celui présenté par l'équation (5.7) : les effets de polarisation sont alors représentés par les deux derniers termes et sont le résultat des charges spectatrices. Le premier de ces termes est proportionnel au champ extérieur  $\check{a}_v$  et décrit donc les effets de polarisation induits par le courant de valence lorsque  $\check{a}_v$  est écrit en terme de  $\check{J}_v$ . En revanche, le second de ces termes présente les effets de polarisations dus à l'influence du courant externe sur les charges spectatrices. Ce sont ces deux termes qui habillent les quantités nues et cette situation peut être extrapolée aux valeurs moyennes. À noter que les polarisations précédentes sont évaluées à un ordre en boucles donné<sup>3</sup> : la relation (5.8) n'est pas exacte.

---

3. Plus particulièrement, la relation entre les valeurs moyennes (5.8) sera déterminée à l'ordre d'une boucle dans les développements qui suivent. En outre, nous pourrons alors vérifier que l'identité (5.7) peut être retrouvée lorsque l'on enlève toutes les charges spectatrices.

Par conséquent, l’habillage des quantités nues intervient dans l’expression des valeurs moyennes lorsqu’une partie des charges n’est pas expérimentalement suivie. Une telle situation est proche de cas “réalistes” et les effets de polarisation du milieu sont alors le résultat du réarrangement des charges laissées libres.

## 5.2 Principe variationnel et équations dynamiques

Dans le cadre du formalisme *CTP* usuel, les équations du mouvement vérifiées par les valeurs moyennes ne peuvent être déduites qu’à partir de celles vérifiées par les champs effectifs. En revanche, il est possible de définir une action non nulle pour les valeurs moyennes dans le cadre d’une paramétrisation non-orthogonale des degrés de liberté du formalisme *CTP* [39]. L’objet de cette section est d’illustrer cette approche pour la moyenne du champs électromagnétique et pour celle de courants dans l’approximation à une boucle de la fonctionnelle (5.1). Dans un premier temps, l’approche usuelle sera illustrée à l’ordre d’une boucle *via* l’expression des quantités effectives à cet ordre. Dans un second temps, seront décrites les différentes actions effectives correspondant soit à une approche usuelle du formalisme *CTP*, soit à celle valide lorsque les valeurs moyennes sont définies.

### 5.2.1 Expression des valeurs moyennes à partir des quantités effectives

Les valeurs moyennes recherchées sont déduites de la fonctionnelle  $\mathfrak{R}\mathcal{W}$  dans le cadre de la base variationnelle introduite dans la section 3.6 c’est-à-dire pour la paramétrisation suivante des quantités extérieures :

$$a_\tau^\pm = \frac{1 \pm \kappa}{2} a_\tau^a \pm a_\tau^p, \quad j^\pm = \frac{1 \pm \kappa}{2} j^a \pm j^p.$$

$\kappa$  désigne un paramètre réel non nul et arbitraire. Les quantités effectives correspondantes sont alors définies par les expressions suivantes :

$$J_\tau^p = \frac{\delta \mathfrak{R}\mathcal{W}}{\delta a_\tau^a} = \mathcal{O}(\hbar), \quad A^p = \frac{\delta \mathfrak{R}\mathcal{W}}{\delta j^a} = \mathcal{O}(\hbar^0), \quad J_\tau^a = \frac{\delta \mathfrak{R}\mathcal{W}}{\delta a_\tau^p} = \mathcal{O}(\hbar), \quad A^a = \frac{\delta \mathfrak{R}\mathcal{W}}{\delta j^p} = \mathcal{O}(\hbar^0). \quad (5.9)$$

Les valeurs moyennes sont déduites de  $J_\tau^p$  ainsi que de  $A^p$  lorsque toutes les quantités auxiliaires sont annulées :

$$a_\tau^p \sim \rangle a_\tau^r, \quad j^p \sim \rangle j^r, \quad J_v^p \sim \rangle \langle J_v \rangle, \quad A^p \sim \rangle \langle A \rangle. \quad (5.10)$$

Ces termes deviennent tous des quantités *retardées* lorsque l’unitarité est imposée : les quantités extérieures correspondent alors à celles définies pour la paramétrisation de *Keldysh* usuelle.

La fonctionnelle  $\mathcal{W}$  vérifiant l’équation (5.4) est évaluée à l’ordre d’une boucle. Elle s’écrit

$$\mathcal{W}[\check{a}, \check{j}] = -\frac{1}{2} \check{j} \cdot \check{D}_0 \cdot \check{j} - \frac{1}{2} \sum_\tau (\check{a}_\tau + e_\tau \check{\sigma} \check{D}_0 \check{j})^{tr} \cdot \check{G}_{2,\tau} \cdot (\check{a}_\tau + e_\tau \check{\sigma} \check{D}_0 \check{j}) + \mathcal{O}(\hbar^2)$$



FIGURE 5.1 – Correction à une boucle  $e_\tau^2 \tilde{G}_{2,\tau}$  issue de la saveur  $\tau$

en fonction du tenseur de polarisation  $\tilde{G}_{2,\tau}$  (contribution correspondant au diagramme schématisé par la figure 5.1 en prenant  $e_\tau = 1$ ) écrit sur le contour  $\mathcal{C}$  et défini par les blocs suivants :

$$(\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu} = -i\text{tr}[G_{0,\tau}^{\sigma'\sigma} \gamma_\mu G_{0,\tau}^{\sigma\sigma'} \gamma_\nu]. \quad (5.11)$$

La particularité de l'approximation à une boucle réside dans le fait que les différents tenseurs de polarisation  $\tilde{G}_{2,\tau}$  ne couplent qu'une saveur donnée avec elle-même mais jamais avec une autre<sup>4</sup>. En outre, la relation  $\mathcal{W}[\check{a} = 0, \check{j} = 0] = 0$  a été imposée au calcul de  $\mathcal{W}$  afin que l'unitarité de la fonctionnelle (5.1) soit respectée. La partie réelle de cette fonctionnelle est ensuite calculée pour la base variationnelle et correspond à l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \Re\mathcal{W}[a^a, a^p, j^a, j^p] &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa D^n & D^r \\ D^a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_\tau \begin{pmatrix} a_\tau^a \\ a_\tau^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^m & \tilde{G}_{2,\tau}^r \\ \tilde{G}_{2,\tau}^a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\tau^a \\ a_\tau^p \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_\tau e_\tau \begin{pmatrix} a_\tau^a \\ a_\tau^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^m D_0^n & \tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r \\ \tilde{G}_{2,\tau}^a D_0^a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_\tau e_\tau \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa D_0^n \tilde{G}_{2,\tau}^m & D_0^r \tilde{G}_{2,\tau}^r \\ D_0^a \tilde{G}_{2,\tau}^a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\tau^a \\ a_\tau^p \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Les propagateurs  $D^r$ ,  $D^a$  et  $D^n$  sont définis par les relations (cf annexe B.2) :

$$D^X = \frac{1}{D_0^{X-1} - \Pi_2^X}, \quad \Pi_2^X = \sum_\tau e_\tau^2 \tilde{G}_{2,\tau}^X$$

où la somme est prise sur toutes les saveurs  $\tau$  de charges. La quantité  $\Pi_2^X$  correspond à l'énergie propre : elle est définie par l'ensemble des termes modifiant le propagateur nu c'est-à-dire par la somme sur toutes les saveurs des contributions schématisées par la figure 5.1. L'expression linéarisée à une boucle des quantités effectives (5.9) correspond aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} J_\tau^p &= -\kappa \tilde{G}_{2,\tau}^m a_\tau^a - \tilde{G}_{2,\tau}^r a_\tau^p - e_\tau \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^m D_0^n j^a - e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r j^p + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ A^p &= -\kappa D^n j^a - D^r j^p - \sum_\tau e_\tau (\kappa D_0^n \tilde{G}_{2,\tau}^m a_\tau^a - D_0^r \tilde{G}_{2,\tau}^r a_\tau^p) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ J_\tau^a &= -\tilde{G}_{2,\tau}^a a_\tau^a - e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^a D_0^a j^a + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ A^a &= -D^a j^a - \sum_\tau e_\tau D_0^a \tilde{G}_{2,\tau}^a a_\tau^a + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned} \quad (5.13)$$

---

4. Cette situation est différente pour les ordres supérieurs où des saveurs différentes peuvent être couplées entre elles par l'intermédiaire d'une boucle photonique constituant une partie du diagramme représentatif de la polarisation à de tels ordres.

Les valeurs moyennes sont alors déduites du système d'équations précédent et correspondent aux expressions suivantes :

$$\langle J_\tau \rangle = -\tilde{G}_{2,\tau}^r [a_\tau^r + e_\tau D_0^r j^r] + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad \langle A \rangle = -D^r j^r - \sum_\tau e_\tau D_0^r \tilde{G}_{2,\tau}^r a_\tau^r + \mathcal{O}(\hbar^2). \quad (5.14)$$

Toute dépendance en terme de  $\kappa$  dans le système d'équations (5.13) est ainsi éliminée lorsque les valeurs moyennes sont obtenues. En outre, la relation exacte (5.7) est retrouvée (ici à l'ordre d'une boucle puisque les moyennes précédentes sont exprimées à cet ordre). Cette relation s'écrit sous la forme de l'équation retardée suivante

$$\langle A \rangle = D_0^r \left[ \sum_\tau e_\tau \langle J_\tau \rangle - j^r \right] + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

On retrouve que la polarisation est implicitement contenue dans la définition des moyennes des courants<sup>5</sup>.

Comme décrit précédemment, pour rendre manifeste les effets de polarisation, une partie des courants doit être laissée libre dans les équations effectives : la mesure d'un courant de valence de saveur  $\tau = v$  pendant que toutes les autres charges restent spectatrices conduit, dans le cadre de l'approximation à une boucle, à une expression analogue à (5.8) sous la forme<sup>6</sup> :

$$\begin{aligned} \langle A \rangle &= e_v D_0^r \langle J_v \rangle + D_0^r \sum_{\tau \neq v} e_\tau \langle J_\tau \rangle - D_0^r j^r = e_v D_0^r \langle J_v \rangle - D_0^r \sum_{\tau \neq v} e_\tau^2 \tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r j^r - D_0^r j^r + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ \langle A \rangle &= e_v D_0^r \langle J_v \rangle - \left[ D_0^r + D_0^r \Pi_{2,bck}^r D_0^r \right] j^r + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad \Pi_{2,bck}^r = \sum_{\tau \neq v} e_\tau^2 \tilde{G}_{2,\tau}^r, \quad D_{bck}^r = \frac{1}{D_0^{r-1} - \Pi_{2,bck}^r} \end{aligned}$$

À nouveau, les équations obtenues sont retardées et  $\Pi_{2,bck}^r$  désigne l'énergie propre retardée issue de toutes les saveurs spectatrices. L'expression de cette quantité pour une saveur donnée est résumée dans l'annexe B.3. La fonctionnelle (5.12), prise avec  $a_{\tau \neq v}^a = 0$ , permet d'obtenir la relation entre les valeurs moyennes précédentes. À l'ordre d'une boucle, elle définit les quantités effectives<sup>7</sup> suivantes :

$$\begin{aligned} J_v^p &= -\kappa \tilde{G}_{2,v}^n a_v^a - \tilde{G}_{2,v}^r a_v^p - e_v \kappa \tilde{G}_{2,v}^n D_0^n j^a - e_v \tilde{G}_{2,v}^r D_0^r j^p + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ A^p &= -\kappa D^n j^a - D^r j^p - \kappa e_v D_0^n \tilde{G}_{2,v}^n a_v^a - e_v D_0^r \tilde{G}_{2,v}^r a_v^p + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ J_v^a &= -\tilde{G}_{2,v}^a [a_v^a + e_v D_0^a j^a] + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ A^a &= -D^a j^a - e_v D_0^a \tilde{G}_{2,v}^a a_v^a + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned} \quad (5.15)$$

5. Cette relation peut être obtenue directement et de façon exacte à partir de la reparamétrisation de la relation (5.7) pour la base variationnelle (quantités effectives définies par (3.54) et (3.55)) puis en lui imposant formellement l'unitarité.

6. Comme l'expression (5.4) est ici évaluée à une boucle, le terme de polarisation couplé à  $\tilde{a}_v$  dans (5.8) est nul et les effets de polarisation sont exclusivement issus de l'influence de  $j$  : à une boucle, des saveurs différentes ne sont jamais couplées entre elles.

7. En outre, on prend ici  $a_{\tau \neq v}^p = 0$  bien que cela ne soit pas une nécessité ; l'expression de ces équations pour  $a_{\tau \neq v}^p \neq 0$ , et plus particulièrement pour les valeurs moyennes, est donnée par la suite.

Les valeurs moyennes s'écrivent en fonction des quantités extérieures sous la forme

$$\langle J_v \rangle = -\tilde{G}_{2,v}^r [a_v^r + e_v D_0^r j^r] + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad \langle A \rangle = -D^r j^r - e_v D_0^r \tilde{G}_{2,v}^r a_v^r + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad (5.16)$$

et ne font alors intervenir que des prescriptions retardées. La combinaison de ces relations permet bien de retrouver le résultat précédent.

### 5.2.2 Champs sub-classiques

Les développements précédents ont conduit à la définition de différentes valeurs moyennes ainsi qu'à des équations du mouvement qui leur correspondent. Dès lors, il reste à définir le domaine de validité de ces expressions. Ces relations ont été calculées à une boucle et leur coupure UV est donc limitée par l'échelle caractéristique du tenseur de polarisation c'est-à-dire par la longueur d'onde de *Compton* des charges. En outre, l'intégration des fluctuations a été poursuivie jusqu'à la fin du domaine quantique : la coupure IR de la théorie est alors définie avant la réalisation de la transition quantique-classique, dès que les contributions ne suffisent plus à influencer l'habillage des paramètres. Ainsi, ces valeurs moyennes sont définies pour une résolution appartenant au domaine quantique et sont appelées *champs sub-classiques*.

### 5.2.3 Actions effectives et équations du mouvement

Dans le cadre du formalisme *CTP*, les équations du mouvement vérifiées par les valeurs moyennes sont obtenues à partir de l'action effective. Cependant, pour la paramétrisation variationnelle, cette dernière peut être définie principalement de deux manières différentes suivant la façon dont sont traités les degrés de liberté auxiliaires. L'objet de cette section est d'illustrer ces différents cas de figures pour un système constitué de plusieurs charges spectatrices et d'une seule charge de valence  $v$ .

#### Détermination des équations du mouvement

Une première approche consiste à définir l'action effective à partir de tous les degrés de liberté du système *via*

$$\Gamma[J_v^p, J_v^a, A^p, A^a] = \mathfrak{RW}[a_v^a, a^p, j^a, j^p] - J_v^p a_v^a - j^a A^p - J_v^a a_v^p - j^p A^a \quad (5.17)$$

en terme des sources et champs effectifs définis par (5.9). À l'ordre quadratique, cette fonctionnelle s'écrit

$$\begin{aligned} \Gamma[J_v^p, J_v^a, A^p, A^a] &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A^a \\ A^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} -\kappa[D_{bck}^{n-1} P_{\text{off}} + \Pi_{2,v}^n P_{\text{on}}] & D_{bck}^{r-1} \\ D_{bck}^{a-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^a \\ A^p \end{pmatrix} \\ &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J_v^a \\ J_v^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} -\kappa \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \tilde{G}_{2,v}^n \tilde{G}_{2,v}^{a-1} & \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \\ \tilde{G}_{2,v}^{a-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_v^a \\ J_v^p \end{pmatrix} \\ &+ \frac{e_v}{2} \begin{pmatrix} J_v^a \\ J_v^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa P_{\text{off}} + \kappa \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \tilde{G}_{2,v}^n P_{\text{on}} & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^a \\ A^p \end{pmatrix} \\ &+ \frac{e_v}{2} \begin{pmatrix} A^a \\ A^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa P_{\text{off}} + \kappa \tilde{G}_{2,v}^n \tilde{G}_{2,v}^{a-1} P_{\text{on}} & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_v^a \\ J_v^p \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned}$$

L'opérateur  $P_{\text{on}}$  projette les expressions sur couche de masse du photon alors que  $P_{\text{off}} = 1 - P_{\text{on}}$  les projette hors de celle-ci. Formellement, les parties quadratiques en terme des quantités auxiliaires présentent une dépendance différente sur et hors-couche de masse.

Les équations du mouvement linéarisées vérifiées par les quantités effectives sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
 j^p &= e_v J_v^p - D_{bck}^{r-1} A^p + \kappa [D_{bck}^{n-1} P_{\text{off}} + \Pi_{2,v}^n P_{\text{on}}] A^a - \kappa e_v [P_{\text{off}} + \tilde{G}_{2,v}^n \tilde{G}_{2,v}^{a-1} P_{\text{on}}] J_v^a + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 a_v^p &= -\tilde{G}_{2,v}^{r-1} J_v^p - e_v A^p + \kappa \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \tilde{G}_{2,v}^n \tilde{G}_{2,v}^{a-1} J_v^a - \kappa e_v [P_{\text{off}} + \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \tilde{G}_{2,v}^n P_{\text{on}}] A^a + \mathcal{O}(\hbar) \\
 j^a &= e_v J_v^a - D_{bck}^{a-1} A^a + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 a_v^a &= e_v A^a - \tilde{G}_{2,v}^{a-1} J_v^a + \mathcal{O}(\hbar).
 \end{aligned} \tag{5.18}$$

Ce système correspond à l'inversion de celui donnant l'expression des quantités effectives (5.16). Les équations du mouvement vérifiées par les valeurs moyennes sont alors obtenues des relations précédentes (5.18) en annulant toutes les quantités auxiliaires. Elles sont alors obtenues sous la forme

$$j^r = e_v \langle J_v \rangle - D_{bck}^{r-1} \langle A \rangle + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad a_v^r = -\tilde{G}_{2,v}^{r-1} \langle J_v \rangle - e_v \langle A \rangle + \mathcal{O}(\hbar) \tag{5.19}$$

et sont indépendantes de  $\kappa$  dans ce cas. Dans cette limite, l'action effective (5.17) est nulle et le principe variationnel n'est pas maintenu au niveau des valeurs moyennes pour ce type de fonctionnelle.

En résumé, définir l'action effective comme étant la transformée de *Legendre* pour les degrés de liberté physiques et auxiliaires permet d'obtenir efficacement les équations du mouvement vérifiées par les valeurs moyennes à partir de celles valables pour les champs effectifs mais sans toutefois maintenir de principe variationnel : cette situation correspond à l'approche usuelle du formalisme *CTP*.

### Action effective pour les valeurs moyennes

Une autre catégorie d'actions effectives correspond à celles définies seulement à partir des degrés de liberté physiques. La particularité de cette approche réside dans le fait qu'aucune équation du mouvement, pour les quantités effectives auxiliaires, n'est définie. L'action effective des quantités effectives physiques est définie par

$$\Gamma[J_v^p, A^p] = \Re \mathcal{W}[a_v^a, a^p, j^a, j^p] - J_v^p a_v^a - j^a A^p. \tag{5.20}$$

Seule la paramétrisation variationnelle introduite dans 3.6 assure que la fonctionnelle précédente conduise à un système d'équations exploitables pour les valeurs moyennes. Dans la définition (5.20), les sources et champs extérieurs auxiliaires non redéfinis par transformée de *Legendre* jouent le rôle de paramètres contrôlant l'unitarité de leurs correspondants physiques ; ces quantités peuvent être librement annulées avant ou après calcul de l'action effective. Par ailleurs, imposer l'unitarité dans (5.20) consiste alors à redéfinir les variables effectives et les paramètres physiques selon les relations (5.10). Ainsi, en utilisant la paramétrisation variationnelle, la transformée de *Legendre* restreinte aux quantités effectives physiques peut également être définie au

niveau des valeurs moyennes.

L'expression quadratique de l'action (5.20) en terme des champs et courants effectifs physiques est donné par<sup>8</sup>

$$\begin{aligned}
\kappa\Gamma[J_v^p, A^p] &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J_v^p \\ A^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,v}^{n-1} & -e_v \\ -e_v & D_{bck}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_v^p \\ A^p \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J_v^p \\ A^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,v}^{n-1} & e_v D_0^r \\ e_v D_0^{n-1} D_0^f & -D_{bck}^{n-1} D_{bck}^r + \mathcal{O}(\hbar^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{j}_v^r \\ j^p \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{j}_v^r \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,v}^{n-1} & -e_v D_0^f D_0^{n-1} \\ e_v D_0^a & -D_{bck}^a D_{bck}^{n-1} + \mathcal{O}(\hbar^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_v^p \\ A^p \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2} ([\tilde{a}_{bck}^r]^{tr} D_0^a D_0^{n-1} A^p + A^p D_0^{n-1} D_0^r \tilde{a}_{bck}^r) \\
&\quad + \frac{1}{2} (j^p D_0^a D_0^{n-1} D_0^r \tilde{a}_{bck}^r + [\tilde{a}_{bck}^r]^{tr} [\tilde{a}_{bck}^r]^{tr} j^p) + \mathcal{O}(\hbar^2)
\end{aligned}$$

en terme des deux paramètres à une boucle suivants

$$\tilde{a}_{bck}^r \equiv \sum_{\tau \neq v} e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^r a_\tau^p, \quad \tilde{j}_v^r = -\tilde{G}_{2,v}^r [a_v^p + e_v D_0^r j^p].$$

L'action effective correspondant aux différentes valeurs moyennes peut être déduite de celle qui précède en y imposant l'unitarité. Elle s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\kappa\Gamma[\langle J_v \rangle, \langle A \rangle] &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle J_v \rangle \\ \langle A \rangle \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,v}^{n-1} & -e_v \\ -e_v & D_{bck}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle J_v \rangle \\ \langle A \rangle \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle J_v \rangle \\ \langle A \rangle \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,v}^{n-1} & e_v D_0^r \\ e_v D_0^{n-1} D_0^f & -D_{bck}^{n-1} D_{bck}^r + \mathcal{O}(\hbar^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{j}_v^r \\ j^r \end{pmatrix} \\
&\quad - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{j}_v^r \\ j^r \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,v}^{n-1} & -e_v D_0^f D_0^{n-1} \\ e_v D_0^a & -D_{bck}^a D_{bck}^{n-1} + \mathcal{O}(\hbar^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle J_v \rangle \\ \langle A \rangle \end{pmatrix} \\
&\quad + \frac{1}{2} ([\tilde{a}_{bck}^r]^{tr} D_0^a D_0^{n-1} \langle A \rangle + \langle A \rangle D_0^{n-1} D_0^r \tilde{a}_{bck}^r) + \mathcal{O}(\hbar^2) \tag{5.21}
\end{aligned}$$

où les paramètres s'écrivent  $\tilde{j}_v^r = -\tilde{G}_{2,v}^r [a_v^r + e_v D_0^r j^r]$  et  $\tilde{a}_{bck}^r \equiv \sum_{\tau \neq v} e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^r a_\tau^r$  dans cette limite. De la même façon, les actions effectives correspondant soit à la moyenne du champ électromagnétique soit à celle du courant des charges de valence, peuvent être respectivement définies à partir des relations

$$\Gamma[A^p] = \Re\mathcal{W}[a^a, a^p, j^a, j^p] - j^a A^p, \quad \Gamma[J_v^p] = \Re\mathcal{W}[a_v^a, a^p, j^a, j^p] - \sum_{\tau} J_v^p a_v^a. \tag{5.22}$$

---

8. Pour simplifier les expressions, les champs extérieurs auxiliaires  $a_{\tau \neq v}^a$  des sources spectatrices sont annulés.

L'expression quadratique de l'action pour la valeur moyenne du champ électromagnétique est alors donnée par

$$\kappa\Gamma[\langle A \rangle] = \frac{1}{2}[\langle A \rangle + (j^r - \sum_{\tau} e_{\tau} \tilde{j}_{\tau}^r) D_0^r] \cdot D^{n-1} \cdot [\langle A \rangle + D_0^r (j^r - \sum_{\tau} e_{\tau} \tilde{j}_{\tau}^r)] + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

tandis que celle correspondant à la valeur moyenne du courant de valence s'écrit

$$\kappa\Gamma[\langle J_v \rangle] = \frac{1}{2}[\langle J_v \rangle - \tilde{j}_v^r] \cdot \tilde{G}_{2,v}^{n-1} \cdot [\langle J_v \rangle - \tilde{j}_v^r] + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

Une fois que toutes les variables et paramètres auxiliaires ont été éliminés, la quantité  $\kappa\Gamma$  est toujours indépendante de  $\kappa$ <sup>9</sup> et correspond à l'action pour des observables physiques.

Considérons les équations d'*Euler-Lagrange* issues de l'action effective  $\kappa\Gamma[\langle J_v \rangle, \langle A \rangle]$  déterminée par la relation (5.21). Ces équations correspondent à l'application du principe variationnel à cette fonctionnelle. Elles s'écrivent indépendamment de  $\kappa$  sous la forme<sup>10</sup> :

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa \frac{\delta\Gamma}{\delta\langle J_{\tau} \rangle} = \tilde{G}_{2,v}^{n-1} \cdot [\langle J_{\tau} \rangle - \tilde{j}_v^r] - e_v [\langle A \rangle + D_0^r j^r] + \mathcal{O}(\hbar) \\ 0 &= \kappa \frac{\delta\Gamma}{\delta\langle A \rangle} = D_{bck}^{n-1} \cdot [\langle A \rangle + D_{bck}^r (j^r + \tilde{a}_{bck}^r)] - e_v D_0^{n-1} [D_0^n \langle J_{\tau} \rangle + D_0^f \tilde{j}_v^r] + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ &= D_{bck}^{n-1} [\langle A \rangle + D_0^r j^r] + D_0^{n-1} D_0^r [\Pi_{2,bck}^r D_0^r j^r + \tilde{a}_{bck}^r - e_v \tilde{j}_v^r] - e_v [\langle J_{\tau} \rangle - \tilde{j}_v^r] + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned}$$

Formellement, les équations d'*Euler-Lagrange* précédentes ne conduisent pas *directement* aux équations du mouvement usuelles définies par (5.19). En fait, en identifiant leur expression ordre par ordre, le système d'équations précédentes détermine l'expression des valeurs moyennes en fonction des quantités extérieures sous la forme :

$$\langle J_v \rangle = -\tilde{G}_{2,\tau}^r [a_{\tau}^r + e_{\tau} D_0^r j^r] + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad \langle A \rangle = -D^r j^r - \sum_{\tau} e_{\tau} D_0^r \tilde{G}_{2,\tau}^r a_{\tau}^p + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

Les équations du mouvement usuelles, à savoir les relations (5.19), peuvent être obtenues dans un second temps en inversant le système précédent. En outre, on obtient également la relation entre les différentes valeurs moyennes sous la forme :

$$\langle A \rangle = e_v D_0^r \langle J_v \rangle - D_{bck}^r j^r - D_0^r \sum_{\tau \neq v} e_{\tau} \tilde{G}_{2,\tau}^r a_{\tau}^p + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

Le même type de résultats peut être obtenu pour les actions effectives (5.22) et fait appel à la même démarche.

9. Soulignons que l'action effective pour les valeurs moyennes ne peut pas être obtenue à partir d'une paramétrisation orthogonale des paires de degrés de liberté : pour la paramétrisation de *Keldysh* correspondant à  $\kappa = 0$ , l'action effective n'est pas définie pour les valeurs moyennes.

10. De plus, les équations du mouvement ne sont indépendantes de  $\kappa \neq 0$  que lorsque l'unitarité est imposée c'est-à-dire dès que les valeurs moyennes sont définies. Ces équations ne peuvent toutefois pas être obtenues si  $\kappa = 0$ .

On est ainsi en mesure d’obtenir les équations du mouvement *retardées*, vérifiées par les valeurs moyennes de type *in-in*, à partir du principe variationnel. Les fonctionnelles du type (5.20) et (5.22) définissent alors l’équivalent de l’action dans le contexte de valeurs moyennes issues d’amplitudes *in-in*<sup>11</sup>. La particularité de ces actions est ainsi d’implémenter *directement la causalité retardée* tout en rendant possible l’obtention, par principe variationnel, des équations du mouvement valables pour cette causalité au prix de manipulations algébriques mais sans avoir à imposer cette causalité “à la main” dans des équations sans prescription. L’intérêt des fonctionnelles de ce type est de réaliser cette démarche de manière systématique. En outre, ces actions sont alors structurées autour de l’expression algébrique des valeurs moyennes en fonction des quantités extérieures physiques. En conséquence, le comportement et l’interprétation des termes constitutifs de ces actions est différent de ce que l’on a coutume de faire avec un formalisme usuel. Plus particulièrement, dans l’approximation quadratique, la partie pertinente des actions du type (5.20) et (5.22) est contenue dans leur partie linéaire plutôt que dans leur partie quadratique.

### 5.3 Influence des polarisations

On considère un système comportant une seule charge spectatrice  $e_{bc}$  en présence d’un champ électromagnétique. Cette charge génère des effets de polarisation caractérisant les propriétés électromagnétiques du milieu. En fait, la polarisation correspond au “propagateur” défini pour l’opérateur densité de charges  $\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  et caractérise ainsi les propriétés du milieu. En outre, cette charge induit également des dissipations pouvant contribuer à la limite classique du système<sup>12</sup>. L’objet de cette partie est de présenter ces deux aspects.

#### 5.3.1 Caractérisation d’excitations collectives

Une façon de caractériser les propriétés de la matière fait appel aux concepts de quasi-particules (ou particules habillées) et d’excitations collectives [8]. Une quasi-particule représente un objet effectif constitué par le regroupement d’une particule réelle (particule nue) entourée d’un nuage d’autres particules correspondant à la moyenne de toutes les plus fortes interactions de courtes portées mises en jeu par l’environnement immédiat de cette particule nue (effet d’écrans). Le système obtenu se comporte alors comme une particule individuelle faiblement interactive. Son temps de vie est caractéristique de son environnement. Les excitations collectives représentent une autre catégorie de comportement effectif : elles sont l’analogie des quasi-particules mais pour les ondes planes. Ces modes particuliers se propagent dans le milieu en mettant en jeu, conjointement, un grand nombre de particules plutôt que quelques unes seulement. Les *plasmons* constituent un exemple d’excitations collectives pouvant être étudiées dans les métaux. Quasi-particules et excitations collectives sont caractérisées par leur relation de dispersion ainsi que par leur temps de vie. Ces quantités peuvent être extraites des pôles du propagateur de *Feynman* :

---

11. Les actions relatives aux amplitudes de type *out-out* peuvent être obtenues en prenant la transposée des expressions définies pour les amplitudes *in-in* : cette opération revient à faire une inversion de temps dans le contexte du formalisme *CTP*.

12. Nous recherchons la limite classique du système dans la représentation ondulatoire par référence aux phénomènes connus en électromagnétisme classique.

plus particulièrement, les relations de dispersion correspondent aux zéros de la partie réelle du propagateur inverse tandis que l'inverse des temps de vie correspondants est issu de la partie imaginaire de cette quantité sur couche de masse [8].

### Indices de milieux retardés

L'équation du mouvement pour la valeur moyenne du champ magnétique fait intervenir le propagateur retardé inverse  $D^{r-1} = D_0^{r-1} - \Pi_{2,bck}^r$ . Celui-ci s'écrit en fonction du tenseur de polarisation retardé  $\Pi_{2,bck}^r$  défini par la combinaison suivante :

$$\begin{aligned}\Pi_{2,bck}^r[p] &= \Pi_{2,bck}^n[p] + \Pi_{2,bck}^f[p], \\ \Pi_{2,bck}^n[p] &= e_{bck}^2 \tilde{G}_{2,bck}^n[p] = e_{bck}^2 \Re \tilde{G}_{2,\tau}^{++}[p], \quad \Pi_{2,bck}^f[p] = e_{bck}^2 \tilde{G}_{2,bck}^f[p] = -e_{bck}^2 \Re \tilde{G}_{2,\tau}^{+-}[p].\end{aligned}$$

Cette quantité est réelle dans l'espace des positions. En représentation de *Fourier*,  $\Pi_{2,bck}^n$  est également réel mais  $\Pi_{2,bck}^f$  est imaginaire pur puisque ces quantités sont respectivement paires et impaires sous opération de transposition. On peut montrer que le propagateur retardé inverse  $D^{r-1}$  s'écrit dans l'espace-temps sous la forme

$$D^{r-1} = \mathbf{p}^2 \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{n}\nu \\ -\mathbf{n}\nu & \nu^2 \mathbf{1} - \mathbf{T} \end{pmatrix} - \mathcal{B}^r \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{n}\nu \\ \mathbf{n}\nu & \nu^2 [\mathbf{T} - \mathbf{1}] \end{pmatrix} + \frac{1}{2} [\mathcal{B}^r (1 - \nu^2) - \mathcal{A}^r] \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

avec  $\nu \equiv p^0/|\mathbf{p}|$ ,  $\mathbf{n} \equiv \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$  et au moyen des quantités scalaires

$$\mathcal{A}^{\sigma\sigma'}[p] = g^{\mu\nu} (\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu}[p], \quad \mathcal{B}^{\sigma\sigma'}[p] = u^\mu u^\nu (\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu}[p] \quad (5.24)$$

paramétrant l'expression du tenseur  $\Pi_{2,bck}^r$  *via* la combinaison retardée  $\mathcal{Y}^r \equiv \mathcal{Y}^{++} - \mathcal{Y}^{+-}$ . Dans les expressions précédentes,  $u$  désigne la quadri-impulsion de l'environnement au repos (réservoir de particules et de chaleur).

La permittivité diélectrique  $\epsilon$  ainsi que la perméabilité magnétique  $\mu$  peuvent être définies à partir de l'action du champ électromagnétique suivante (*ansatz* classique)

$$\mathcal{S}[A] = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y (\mathbf{E}_x[\epsilon]_{x,y} \mathbf{E}_y - \mathbf{B}_x[\mu^{-1}]_{x,y} \mathbf{B}_y) - j^{ext} \cdot A$$

c'est-à-dire, en représentation de *Fourier*

$$\mathcal{S}[A] = \frac{1}{2} A \cdot \left[ \epsilon \begin{pmatrix} 1 & -\mathbf{n}\nu \\ -\mathbf{n}\nu & \nu^2 \mathbf{1} - \mathbf{T} \end{pmatrix} + \left( \epsilon - \frac{1}{\mu} \right) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{pmatrix} \right] \cdot A - j^{ext} \cdot A. \quad (5.25)$$

$T_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - L_{\alpha\beta}$  est alors le tenseur transverse dans l'espace-temps et  $\mathbf{T} = \mathbf{1} - \frac{\mathbf{k} \otimes \mathbf{k}}{k^2} = \mathbf{1} - \mathbf{L}$  celui dans l'espace seulement. Par ailleurs, on regroupe (abusivement) sous l'appellation "indices de milieu" la permittivité diélectrique, la perméabilité magnétique ainsi que les susceptibilités correspondantes. L'expression de ces indices est conditionnée par celle de la polarisation du milieu. L'identification des différentes contributions dans les expressions (5.25) et (5.23) par l'intermédiaire de l'équation du mouvement retardée correspondante,  $j^r = D_{bck}^{r-1} \langle A \rangle$ , conduit à

l'expression des susceptibilités électriques  $\chi_e = \epsilon - 1$  et magnétiques  $\chi_m = \mu^{-1} - 1$  en fonction de  $\Pi_{2,bck}^r$  sous la forme :

$$\chi_e = -\frac{\mathcal{B}^r[p]}{\mathbf{p}^2}, \quad \chi_m = -\frac{\mathcal{B}^r[p](1 - 3\nu^2) - \mathcal{A}^r[p]}{2\mathbf{p}^2}. \quad (5.26)$$

Ces indices de milieu correspondent ainsi à ceux issus d'une prescription retardée et sont réels dans l'espace des positions.

On définit les excitations collectives pour les secteurs électriques et magnétiques à partir des zéro de la partie réelle des indices précédents dans l'espace des impulsions<sup>13</sup> c'est-à-dire par la contribution du propagateur *proche* à ces quantités. Par ailleurs, la contribution issue du propagateur *lointain* contrôle les propriétés de déphasage du milieu et peut être reliée au temps de vie des excitations collectives [8]. Toutefois, il est plus commode de définir l'inverse du temps de vie d'une excitation collective à partir de la prescription de *Feynman* : la partie réelle des pôles des propagateurs de ce type définit les excitations collectives<sup>14</sup> tandis que leur partie imaginaire sur couche de masse définit l'inverse du temps de vie qui lui correspond. La détermination de ces durées peut se faire également sous la forme d'indices analogues à ceux qui précèdent. Ces quantités sont traitées plus en détails dans la section 5.3.2.

L'expression des indices (5.26) peut être calculée dans le vide ou en présence d'un environnement ; les résultats de ces développements sont regroupés dans l'annexe B.3. Dans le vide, l'expression des indices retardés se réduit à celle issue de la combinaison proche sous l'approximation  $|p^2| \ll m_{bck}^2$  :

$$\chi_e = -\frac{\alpha}{15\pi} \frac{p^2}{m^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \chi_m = +\frac{\alpha}{15\pi} \frac{p^2}{m^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \equiv \frac{e_\tau^2}{4\pi}.$$

L'évaluation de ces indices de milieux à température et densité finies est faite en imposant que ces paramètres soient suffisamment faibles pour que les charges puissent être considérées comme non-relativistes. Les susceptibilités à température finie et densité nulle conduisent à des corrections négligeables : ces termes sont tous des  $\mathcal{O}(\exp[-\beta m_{bck}])$ . En revanche, des corrections appréciables peuvent être obtenues à densité finie et température nulle. Les résultats pour une masse de  $m_{bck} = 1$  et un potentiel chimique égal à  $\beta\zeta_{bck} = 0.1$  sont l'objet des développements suivants.

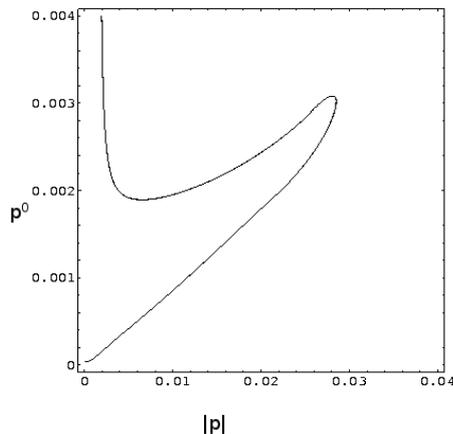
### Susceptibilité électrique à densité finie

Les modes dominants des excitations collectives correspondant au secteur électrique sont définis par l'équation  $\Re\epsilon = 0$  dont la solution est représentée sur les figures 5.2 et 5.3-a pour une

---

13. En toute rigueur, les excitations collectives devraient être définies par les zéros du propagateur total c'est-à-dire sans séparer les secteurs électriques et magnétiques. En ce sens, l'approche utilisée dans cette section donne les ordres dominants contribuant aux excitations collectives pour les secteurs électriques et magnétiques

14. La partie réelle des pôles pour la prescription de *Feynman* est identique à celle correspondant à la prescription retardée : la couche de masse est issue des pôles du propagateur proche dans ces deux cas.

FIGURE 5.2 – Excitations collectives pour le secteur électrique dans le plan  $(|\mathbf{p}|, p^0)$ 

masse de  $m_{bck} = 1$  et un potentiel chimique égal à  $\beta\zeta_{bck} = 0.1$ . On distingue principalement deux branches. En partant de l'origine, la relation de dispersion suit approximativement une loi linéaire caractéristique de la branche du son-zéro. En outre, en excluant la partie divergente pour  $\mathbf{k} \rightarrow 0$ , la branche supérieure s'identifie alors à celle d'excitations analogues aux plasmons dans un métal. Cette divergence exclut, pour ces plasmons, les excitations correspondant à des modes de longue portée. En réduisant la valeur du potentiel chimique, cette divergence disparaît et la relation de dispersion usuelle, pour les impulsions faibles, peut être retrouvée. Enfin, la branche du son-zéro et celle correspondant aux plasmons se rejoignent approximativement pour une valeur limite de  $\mathbf{p}$  et  $p^0$ .

Les propriétés diélectriques du milieu sont présentées par les figures 5.3. L'importance des fluctuations du secteur électrique est contrôlée par la partie réelle de  $\epsilon$  : elles sont favorisées dans les zones correspondant aux excitations collectives comme l'indique la figure 5.3-b. En outre, le propagateur change de signe dans le domaine compris entre les branches définissant les excitations collectives : cette zone est non-perturbative et ce domaine n'est pas interprétable. Loin du domaine correspondant aux excitations collectives, le milieu présente un secteur où les fluctuations électriques sont relativement favorisées : qualitativement, cette zone correspond au prolongement, à la région relativiste, des branches définissant les excitations collectives (5.3-c). En revanche, les modes électriques du domaine correspondant aux fréquences inférieures à celles de la branche du son-zéro prolongée, à la région relativiste, sont fortement atténués. Enfin, loin des domaines décrits, le milieu se comporte comme le vide usuel ( $\chi_e \simeq 0$ ).

Le temps de vie des excitations collectives peut être déduit de la partie imaginaire de la figure 5.6-a : qualitativement, les plasmons ont une durée de vie longue tandis que les excitations collectives issues de la branche de son-zéro ont une durée de vie courte. Enfin, la vallée en  $|\epsilon|$  de la figure 5.3-e représente les modes fortement couplés : cette zone s'identifie qualitativement à celle correspondant aux plasmons. En revanche, les excitations collectives de la branche du

son-zéro sont issues de modes faiblement couplés. L'intensité de ces couplages est cohérente avec les durées de vie des excitations collectives.

### Susceptibilité magnétique à densité finie

Les excitations collectives correspondant au secteur magnétique sont définies par l'équation  $\Re\mu^{-1} = 0$ . Les solutions de cette équation sont présentées figure 5.4 pour une masse  $m_{bck} = 1$  et un potentiel chimique  $\beta\zeta_{bck} = 0.1$ . La relation de dispersion, loin de l'origine (figure 5.4-b), correspond à celle d'un système libre et est analogue à la divergence que l'on peut observer pour les plasmons du secteur électrique. En revanche, autour de l'origine (figure 5.4-a), celle-ci présente une forme similaire à celle trouvée pour le champ électrique : on identifie alors qualitativement une branche de son-zéro et une branche pour des modes magnétiques analogues aux plasmons du secteur électrique.

Les propriétés magnétiques du milieu sont présentées par la figure 5.5. Les domaines représentés sont analogues à ceux décrits pour le secteur électrique. En fait, l'évolution des indices magnétiques dans le plan  $(|\mathbf{p}|, p^0)$  ressemble à une déformation de celle des indices diélectriques. Toutefois, les effets présentés sont inférieurs d'un à deux ordres de magnitude par rapport à ceux issus des propriétés diélectriques. Comme pour le secteur électrique, les modes de basses fréquences proches de la branche son-zéro sont atténués. De plus, un domaine non-perturbatif peut être identifié à la zone du plan  $(|\mathbf{p}|, p^0)$  compris entre les branches définissant les excitations collectives ainsi que pour les longueurs d'onde inférieures à celles de la divergence de la branche des excitations plasmons. Le domaine de cette divergence se poursuit également à la zone relativiste<sup>15</sup>. En outre, à l'exception des propriétés de déphasage (figure 5.5-d), les propriétés magnétiques en fonction du domaine des excitations collectives sont beaucoup moins marquées que pour le secteur électrique.

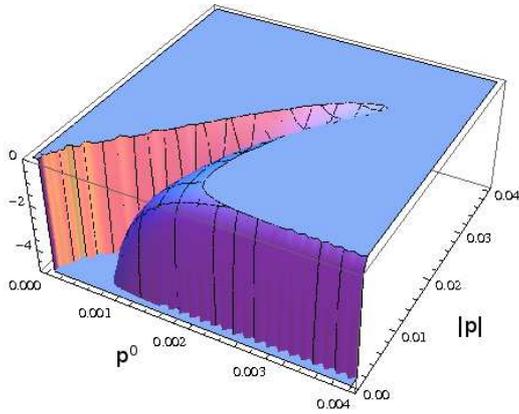
### 5.3.2 Aspects vers la limite classique : décohérence et consistance des chemins

Certains aspects majeurs de la transition quantique-classique peuvent être compris au travers de la théorie de la *décohérence* introduite en 1970 par *H. D. Zeh* [45] puis développée dans de nombreux travaux dont notamment [42, 43, 44, 46, 53]. Une introduction à cette théorie peut être trouvée dans les références [12, 14]. Le phénomène de décohérence repose sur le constat, qu'en général, seulement une partie d'un système *véritablement isolé* est suivi expérimentalement (et en théorie également). Ce système isolé global peut être séparé en deux sous-systèmes : le premier correspond à tous les degrés de liberté suivis, tandis que le second, appelé *environnement*, est constitué de ceux qui ne sont pas mesurés<sup>16</sup> (degrés de liberté spectateurs).

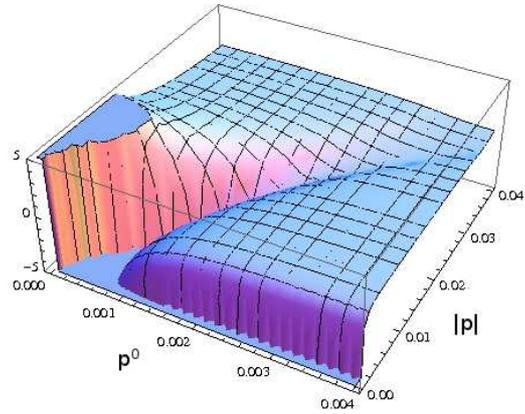
---

15. la relation de dispersion de la figure 5.4-b sépare une zone perturbative d'une zone non perturbative.

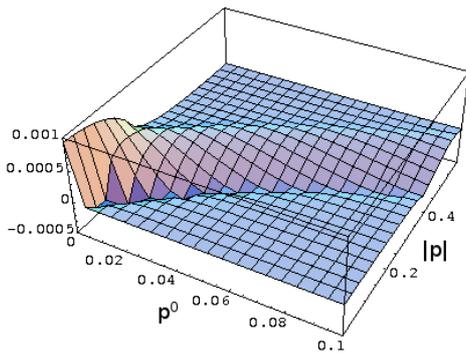
16. Soulignons qu'ici, "l'environnement" du système suivi ne doit pas être confondu avec les réservoirs de particules et de chaleur introduits au chapitre 4 : pour la théorie de la décohérence, l'environnement correspond à l'ensemble des degrés de liberté spectateurs.



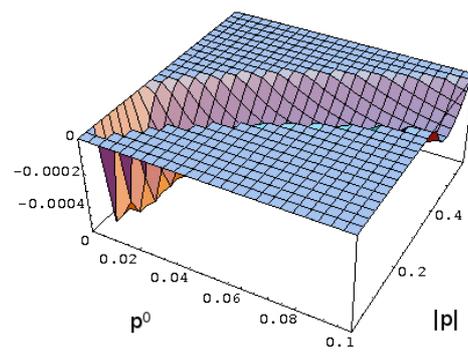
(a) : domaine des excitations collectives  
(coupure)  
 $\Re\epsilon = 0$



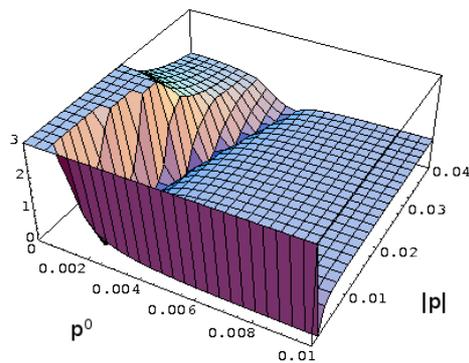
(b) : partie réelle  $\Re\epsilon$   
autour de l'origine



(c) : partie réelle  $\mathbf{p}^2 \Re\chi_e = \mathbf{p}^2(\Re\epsilon - 1)$   
loin de l'origine



(d) : partie imaginaire  $\mathbf{p}^2 \Im\epsilon$   
contribution du propagateur lointain



(e) : valeur absolue  $|\epsilon|$

FIGURE 5.3 – Permittivité électrique, susceptibilité électrique et valeur absolue  $|\epsilon|$  dans le plan  $(\mathbf{p}, p^0)$ .

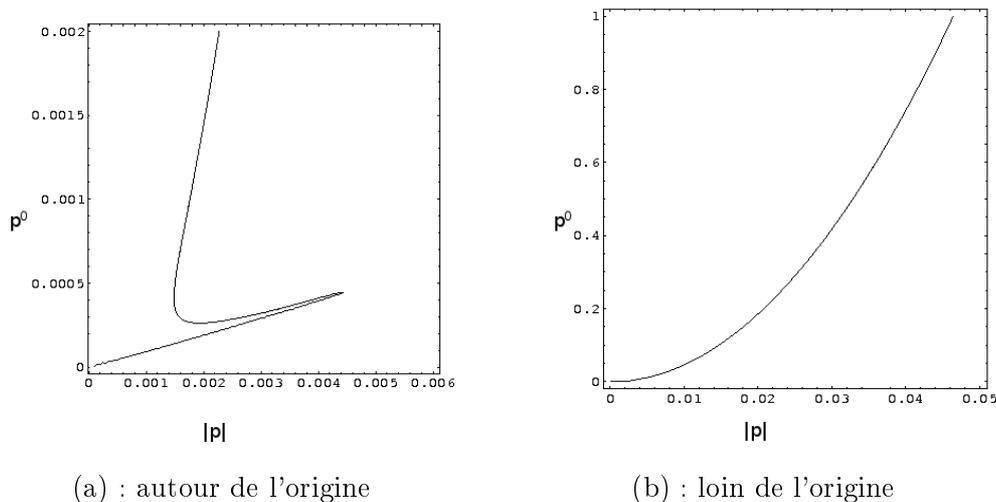
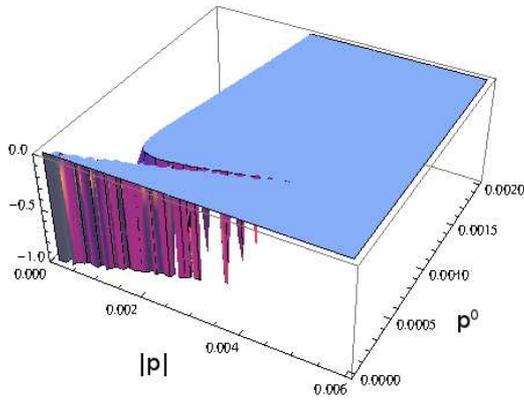


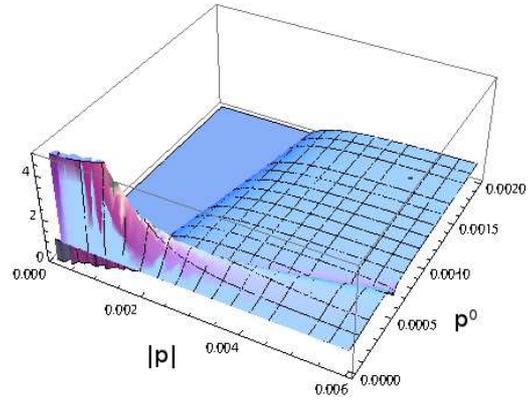
FIGURE 5.4 – Excitations collectives pour le secteur magnétique dans le plan  $(|\mathbf{p}|, p^0)$ .

Le système constitué par la réunion de l'environnement et du système suivi est décrit par un état correspondant à une superposition d'états issus du produit tensoriel des espaces de *Hilbert* pour chacun de ces sous-systèmes. Dès lors, l'état du système suivi n'est en général pas séparable de celui de l'environnement : la plupart du temps, c'est un état mixte qui doit alors nécessairement être décrit au moyen d'une matrice densité (réduite). Celle-ci est le résultat de la trace (partielle) sur tous les degrés de liberté de l'environnement. Le système suivi présente alors des états intriqués. On définit alors les *états pointeurs* comme ceux faiblement dépendants de l'environnement : en principe, ces états correspondent à ceux observables dans la limite classique. Dans une base d'états pointeurs, les intrications peuvent être caractérisées par les éléments non-diagonaux de sa matrice densité réduite. Ces derniers sont appelés *cohérences*. Ces états contiennent les corrélations spécifiques à la physique quantique : celles-ci ne peuvent *jamaïs* être reproduites par une *distribution de probabilités classiques*.

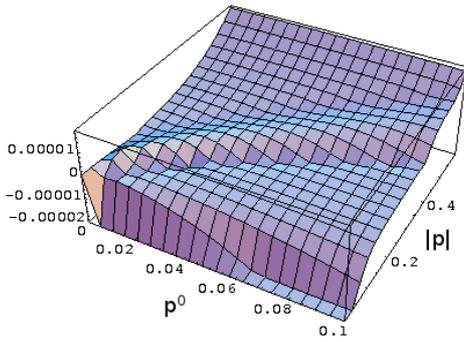
L'intrication du système suivi avec son environnement constitue la généralité plutôt que l'exception. Cependant, suivant les propriétés que possède ce dernier, les lois "classiques" d'addition des probabilités d'évènements exclusifs peuvent être restaurées ou non suivant l'échelle d'observation. Cette perte éventuelle de cohérence est réalisée par l'intermédiaire de dissipations dues aux interactions entre le système et son environnement. Ainsi, la théorie de la décohérence est l'étude de ces interactions avec l'environnement et définit alors le comportement classique ou quantique d'un objet uniquement à l'aune de celles-ci [14]. Concrètement, la décohérence peut être caractérisée à partir de la disparition des cohérences présentées par la matrice densité réduite : cette matrice devient alors diagonale et s'interprète alors comme un mélange statistique d'états classiques. Par ailleurs, au cours de ces processus de dissipations, une partie de l'information du système suivi doit alors être irrémédiablement perdue de sorte à maintenir ces lois



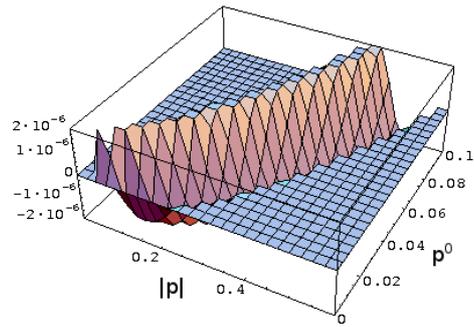
(a) : domaine des excitations collectives (coupure) autour de l'origine  $\Re\mu^{-1} = 0$



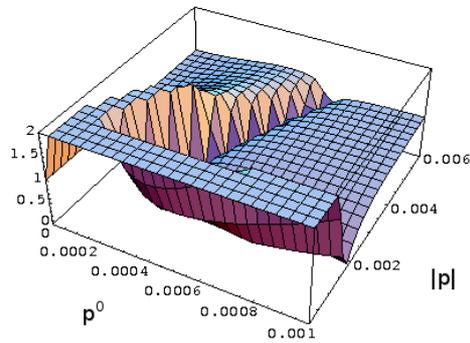
(b) : partie réelle  $\Re\mu^{-1}$  autour de l'origine



(c) : partie réelle  $\mathbf{p}^2 \Re\chi_m = \mathbf{p}^2 (\Re\mu^{-1} - 1)$  loin de l'origine



(d) : partie imaginaire  $\mathbf{p}^2 \Im\mu^{-1}$  contribution du propagateur lointain



(e) : valeur absolue  $|\mu^{-1}|$

FIGURE 5.5 – Perméabilité magnétique, susceptibilité magnétique et valeur absolue  $|\mu^{-1}|$  dans le plan  $(|\mathbf{p}|, p^0)$ .

de probabilités classiques. Par conséquent, l'autre aspect fondamental de la décohérence réside dans le fait que ce mécanisme doit être irréversible [12]. Ce critère influence le choix des degrés de liberté pouvant jouer le rôle d'un environnement.

On cherche ici à étudier la décohérence par l'intermédiaire de la *consistance* des chemins [13, 50, 49, 52]. L'idée directrice de ce type d'études est d'assigner une probabilité (au sens de la physique quantique) à une famille de chemins composant le système et d'étudier les conditions pour lesquelles les termes d'interférences disparaissent [51]. Concrètement, cette étude peut être réalisée *via* le formalisme *OTP* [39, 40] à partir de la matrice densité réduite du système suivi : ce formalisme met en avant les termes responsables de l'intrication entre le système et son environnement. On recherche ici, l'établissement de la limite classique du champ électromagnétique sous l'influence de charges spectatrices  $e_{bck}$  jouant alors le rôle d'un environnement. Les polarisations doivent, en principe, induire ce comportement classique. Dans ce contexte, l'utilisation d'un réservoir de particules et de chaleur pour cette charge est une commodité permettant de modifier les propriétés de cet environnement.

### Position du problème : probabilités “quantiques” et consistance des chemins

La démarche suivie par la consistance revient à étudier les conditions de restauration des lois de probabilités classiques dans le formalisme des chemins. Nous suivons, ici, la présentation réalisée dans la référence [51]. On définit un chemin par une succession d'évènements exclusifs : ces évènements correspondent à la réalisation d'une propriété qui peut formellement être écrite à partir d'opérateurs de projections agissant sur l'état du système décrit. Lorsque ces opérateurs de projections correspondent aux positions (ou aux champs), les chemins ainsi décrits sont exactement ceux intervenant dans les intégrales de chemin usuelles.

Dès lors, en représentation d'*Heisenberg*, le *ket* correspondant à un chemin défini par la succession d'évènements  $A$  au temps  $t_a$  puis  $B$  au temps  $t_b$  peut être écrit sous la forme :

$$|B; t_b; A, t_a\rangle = \hat{P}(B)\hat{U}(t_b, t_a)\hat{P}(A)\hat{U}(t_a, t_{in})|in, t_{in}\rangle. \quad (5.27)$$

Dans cette expression, les opérateurs  $\hat{P}(X)$  désignent la projection sur l'état  $|X\rangle$  définissant un évènement particulier :  $\hat{P}(X) = |X\rangle\langle X|$ . En outre, la réunion de tous les projecteurs donne l'identité. La probabilité (conditionnelle) correspondant au chemin précédent est alors définie par

$$\mathcal{P}[B(t_b)|A(t_a)] = \langle B, t_b; A, t_a | B, t_b; A, t_a \rangle$$

alors que celle correspondant seulement à l'évènement  $(B, t_b)$  est donnée par

$$\mathcal{P}[B(t_b)] = \langle B, t_b | B, t_b \rangle \quad \text{où} \quad |B, t_b\rangle = \hat{P}(B)\hat{U}(t_b, t_{in})|in, t_{in}\rangle.$$

Formellement, obtenir l'expression de  $\mathcal{P}[B(t_b)]$  à partir de celle de  $\mathcal{P}[B(t_b)|A(t_a)]$  revient à éliminer l'évènement intermédiaire  $(A, t_a)$  dans la probabilité conditionnelle : cette élimination ne peut être réalisée qu'en faisant appel à la relation de fermeture :

$$\sum_{\{A\}} \hat{P}(B)\hat{U}(t_b, t_a)\hat{P}(A)\hat{U}(t_a, t_{in})|in, t_{in}\rangle = \hat{P}(B)\hat{U}(t_b, t_{in})|in, t_{in}\rangle, \quad \sum_{\{A\}} \hat{P}(A) = \hat{1}$$

Aussi, on peut montrer que la loi d'addition des probabilités d'évènements exclusifs, valable pour les probabilités usuelles, n'est pas valide ici en raison de l'apparition de termes d'interférences :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}[B(t_b)] &= \left( \sum_{\{A'\}} \langle B; t_b; A', t_a | \right) \left( \sum_{\{A\}} |B; t_b; A, t_a \rangle \right) \\ &= \sum_{\{A\}} \mathcal{P}[B(t_b)|A(t_a)] + \sum_{\{A' \neq A\}} \langle B; t_b; A', t_a | B; t_b; A, t_a \rangle.\end{aligned}\quad (5.28)$$

Comme décrit précédemment dans le chapitre 3 (et surtout dans la section 3.7), l'expression directe de probabilités nécessite de doubler le nombre de degrés de liberté par rapport à ceux que l'on a coutume de définir pour exprimer une amplitude de transition usuelle. Deux jeux de degrés de liberté sont alors définis. La consistance (c'est-à-dire la restauration des axiomes de *Kolmogorov*) peut être formulée vis-à-vis des chemins grâce à l'écriture des états *via* (5.27). Les termes d'interférences dans l'expression (5.28), qui sont propres aux phénomènes quantiques, sont alors le résultat du recouvrement entre des *bra* et *ket* différents : autrement dit, les termes d'interférences sont dus à un couplage entre des chemins différents définis dans le contexte d'un formalisme du type *OTP* : la consistance revient alors à étudier les conditions pour lesquelles ces chemins se découpent.

### Matrice densité réduite

On s'intéresse à la matrice densité réduite correspondant à l'observable du champ électromagnétique et qui est le résultat de l'intégration des degrés de liberté d'une charge spectatrice :

$$\rho[A^+(t, \mathbf{x}), A^-(t, \mathbf{x})] \equiv \langle A^+(\cdot) | \hat{\rho}(t, \mathbf{x}) | A^-(\cdot) \rangle.$$

L'expression d'un élément de matrice quelconque peut être calculée dans le formalisme *OTP* à partir de la fonctionnelle suivante :

$$\begin{aligned}\rho[A^+(t, \mathbf{x}), A^-(t, \mathbf{x})] &= \int_{OTP} \mathcal{D}[\check{A}] \int_{CTP} \mathcal{D}[\check{\psi}_{bck}] \mathcal{D}[\check{\bar{\psi}}_{bck}] \exp \left[ \frac{i}{2} \check{A} \cdot \check{D}_0^{-1} \cdot \check{A} + i \check{\bar{\psi}}_{bck} \cdot [\check{G}_{0,bck}^{-1}] \cdot \check{\psi}_{bck} \right. \\ &\quad \left. - i \sum_{\sigma, \sigma'} e_{bck} \sigma \delta^{\sigma\sigma'} \check{\bar{\psi}}_{bck}^{\sigma} \check{A}^{\sigma} \check{\psi}_{bck}^{\sigma} \right].\end{aligned}\quad (5.29)$$

La trace partielle sur l'environnement de l'expression précédente est obtenue en intégrant les degrés de liberté correspondant aux charges à partir du formalisme *CTP*. La fonctionnelle résultante est alors la matrice densité réduite écrite en terme d'observables du champ électromagnétique,

$$\rho[A^+(t, \mathbf{x}), A^-(t, \mathbf{x})] = \int_{OTP} \mathcal{D}[\check{A}] \exp \left[ i \mathcal{S}_{eff}[\check{A}] \right] \quad (5.30)$$

où l'action effective nue correspondante s'écrit

$$\mathcal{S}_{eff}[\check{A}] = \frac{1}{2} \check{A} \cdot \left[ \left( \begin{pmatrix} (D_0^{++})^{-1} & 0 \\ 0 & (D_0^{--})^{-1} \end{pmatrix} - \check{\Pi}_{2,bck} \right) \cdot \check{A} + \mathcal{O}(\check{A}^3) \right] \quad (5.31)$$

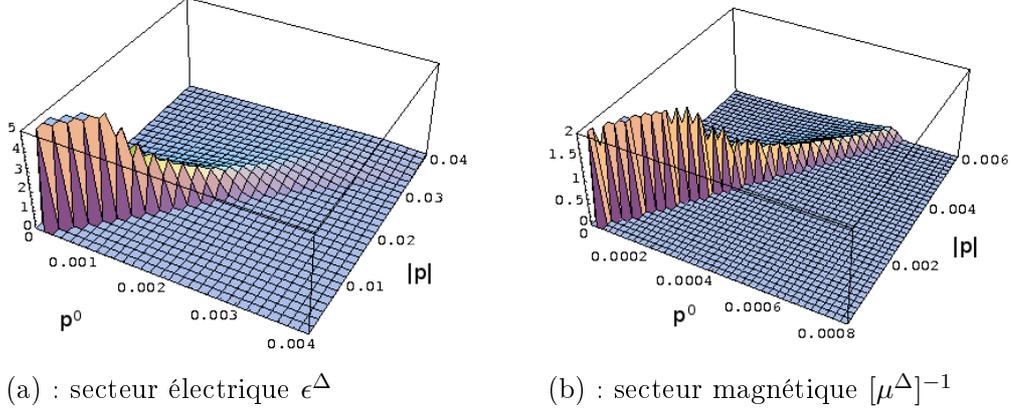


FIGURE 5.6 – Partie imaginaire de l'action nue

avec  $(D_0^{\sigma\sigma})^{-1} = \sigma\Box + i0 \simeq \sigma\Box$  pour la jauge de *Feynman*<sup>17</sup>. La particularité de cette action nue est que le propagateur libre est diagonal alors que l'énergie propre  $\check{\Pi}_{2,bck}$ , résultat d'une intégration propre au formalisme *CTP*, est une matrice pleine :

$$\check{\Pi}_{2,bck} = \begin{pmatrix} +\Pi_{2,bck}^n & +\Pi_{2,bck}^f \\ -\Pi_{2,bck}^f & -\Pi_{2,bck}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i\Pi_{2,bck}^c & -i\Pi_{2,bck}^c \\ -i\Pi_{2,bck}^c & i\Pi_{2,bck}^c \end{pmatrix}.$$

L'intégration des charges induit donc une partie imaginaire dans l'espace des positions à cette action. L'énergie propre s'écrit en terme des quantités

$$\begin{aligned} (\Pi_{2,bck}^n)^{\mu\nu}[p] &= -e_{bck}^2 \int d^4x e^{ip(x-y)} \Re i \langle \hat{T}[J_{bck}^\mu(x)J_{bck}^\nu(y)] \rangle \\ (\Pi_{2,bck}^f)^{\mu\nu}[p] &= -e_{bck}^2 \int d^4x e^{ip(x-y)} \Re i \langle J_{bck}^\mu(x)J_{bck}^\nu(y) \rangle \\ (\Pi_{2,bck}^c)^{\mu\nu}[p] &= e_{bck}^2 \int d^4x e^{ip(x-y)} \Im i \langle \hat{T}[J_{bck}^\mu(x)J_{bck}^\nu(y)] \rangle \end{aligned} \quad (5.32)$$

où la densité de charges est définie par l'opérateur composite  $J_{bck}^\mu(x) = \bar{\psi}_{bck}\gamma^\mu\psi_{bck}$ . Les tenseurs  $\Pi_{2,bck}^n$  et  $i\Pi_{2,bck}^c$  sont respectivement réel et imaginaire purs, qu'ils soient écrits dans l'espace des positions d'espace-temps ou dans la représentation de *Fourier* correspondante. En revanche,  $\Pi_{2,bck}^f$  est toujours réel dans l'espace des positions et imaginaire pur en représentation de *Fourier*.

### Excitations collectives et intrication

Les termes diagonaux de l'action effective nue (5.31) s'écrivent en fonction de l'action usuelle sur chacune des branches  $\mathcal{C}^\pm$  :

$$\mathcal{S}_{eff}[A^\pm] = \pm \frac{1}{2} A^\pm \cdot [D_0^{\pm\pm-1} \mp \Pi_{2,bck}^n - i\Pi_{2,bck}^c] \cdot A^\pm.$$

17. On peut aisément vérifier que la trace de  $\rho$  est égale à 1 puisqu'aucune source externe n'est définie dans l'intégrale de chemin (5.30).

Ces composantes de l'action caractérisent les excitations collectives. Ces termes mettent ainsi en jeu les tenseurs  $\Pi_{2,bck}^n$  et  $i\Pi_{2,bck}^c$  qui habillent les propagateurs nus et définissent respectivement la relation de dispersion et le temps de vie des excitations collectives selon leur définition usuelle. Les couches de masses des modes des secteurs électrique et magnétique sont issues de  $\Pi_{2,bck}^n$  et correspondent aux trajectoires du plan  $(|\mathbf{p}|, p^0)$  présentées par les figures 5.2, et 5.4. Le tenseur  $\Pi_{2,bck}^c$  définit l'inverse des temps de vie et peut être écrit sous forme d'indices de milieu :

$$\epsilon^\Delta = -\frac{\mathcal{B}^c[p]}{\mathbf{p}^2}, \quad [\mu^\Delta]^{-1} = -\frac{\mathcal{B}^c[p](1 - 3\nu^2) - \mathcal{A}^c[p]}{2\mathbf{p}^2}.$$

L'expression des quantités  $\mathcal{A}^c$  et  $\mathcal{B}^c$  est regroupée dans l'annexe B.3. Ces indices sont nuls dans le vide et leur expression dans le plan  $(|\mathbf{p}|, p^0)$  à densité finie et à température nulle ( $\beta\zeta_{bck} = 0.1$ ,  $m_{bck} = 1$ ) est représentée par la figure 5.6. Les plasmons correspondent à des excitations à long temps de vie tandis que celles de la branche du son-zéro présentent un temps de vie faible. En outre, ces indices sont négligeables à densité nulle : ce sont des  $\mathcal{O}[\exp(-\beta m)]$ .

Toutes les composantes diagonales de l'action nue sont invariantes par renversement du temps. En revanche, sous cette opération, les tenseurs  $\Pi_{2,bck}^f$  présents dans les termes non-diagonaux changent de signe. La causalité retardée, imposée au problème étudié, provient spécifiquement de ce terme.

### Consistance et limite classique selon le formalisme *OTP*

Le formalisme *OTP* décrit l'expression d'éléments de matrices de  $\hat{\rho}$  comme la somme sur toutes les contributions possibles de paires de chemins pour des conditions aux limites fixées. Ces contributions peuvent être décomposées sous la forme du produit d'un facteur de phase et d'un facteur d'atténuation (dans l'espace des positions) :

$$\rho[A^+(t, \mathbf{x}), A^-(t, \mathbf{x})] = \int_{OTP} \mathcal{D}[\check{A}] \exp \left[ -\Im \mathcal{S}_{eff}[A^\Delta] + i\Re \mathcal{S}_{eff}[\check{A}] \right]. \quad (5.33)$$

Les populations sont alors issues de conditions de bord telles que  $A^+(t, \mathbf{x}) = A^-(t, \mathbf{x})$  dans l'intégrale de chemin précédente. En revanche, le calcul des cohérences nécessite que soient différents les degrés de liberté définis à la date d'évaluation  $t$  (dernier degré de liberté des branches  $\mathcal{C}^\pm$ ). Les contributions dominantes à (5.33) peuvent être évaluées dans l'approximation du point selle et les trajectoires construisant un élément de matrice spécifique peuvent alors être simplement reliées aux conditions finales et, par suite, aux cohérences ou aux populations. Cette approximation permet alors de comprendre qualitativement comment les chemins décrivant l'évolution des éléments de matrice (5.33) contribuent à l'établissement de la décohérence. En fait, la consistance décrit l'établissement des lois de probabilités classiques comme un processus dynamique. Plus particulièrement, l'influence des ondes planes dans cette évolution est discutée dans cette partie.

L'importance du facteur d'atténuation issu de la contribution d'une paire de chemins dépend uniquement de la différence  $A^\Delta = A^+ - A^-$  entre ces derniers ainsi que de la partie imaginaire

du propagateur de *Feynman*  $\Pi_{2,bck}^c$  :

$$\Im \mathcal{S}_{eff}[\check{A}] = \frac{1}{2} \sum_{\sigma\sigma'} \sigma A^\sigma \cdot \Pi_{2,bck}^c \cdot \sigma' A^{\sigma'} = \frac{1}{2} A^\Delta \cdot \Pi_{2,bck}^c \cdot A^\Delta.$$

Plus particulièrement, les termes d'interférences dans l'expression des probabilités “quantiques” (5.28) sont supprimés par un facteur  $\exp(-\Im \mathcal{S}_{eff})$  : l'action  $\Im \mathcal{S}_{eff}$  conditionne la consistance. Dans cette expression, le tenseur  $\Pi_{2,bck}^c$  contrôle l'écart entre les paires de chemins. Plus ce facteur est important, plus l'écart entre les paires de chemins tend à être faible. Plus généralement, les contributions dominantes à la fonctionnelle (5.33) sont celles pour lesquelles les paires de trajectoires coïncident<sup>18</sup> : lorsque  $A^\Delta = 0$ , les différents chemins sont décorrélés entre eux et la loi d'addition des probabilités d'évènements exclusifs est restaurée. Plus particulièrement, on dit que des trajectoires sont dites consistantes lorsque  $A^\Delta = 0$ . Enfin, le moindre écart à la consistance des chemins entraînera une contribution fortement négligeable dans l'intégrale de chemin (5.33) si le tenseur  $\Pi_{2,bck}^c$  engendre des effets importants : la décohérence correspond alors à une région “rigide” vis-à-vis de l'influence de l'environnement c'est-à-dire à un régime où les fluctuations de l'écart des paires  $A^\Delta$  seront fortement contraintes.

En outre, la décohérence peut être qualitativement décrite en distinguant le comportement des éléments de matrice de  $\hat{\rho}$ . Dans l'approximation en boucles, les cohérences nécessitent, par construction, qu'un écart entre ces paires soit défini : ces contributions à la matrice densité complète sont d'autant plus défavorisées que  $\Pi_{2,bck}^c$  est important. En revanche, l'expression des populations impose que ces trajectoires coïncident pour les ordres dominants : ces termes sont alors favorisés puisque leur contribution dominante est insensible à  $\Pi_{2,bck}^c$ . Aussi, dans la base des configurations de champ  $|A\rangle$  (états pointeurs), la matrice densité du système tend à être diagonale : cette évolution des éléments de matrice est conditionnée par le facteur  $\Pi_{2,bck}^c$  qui est la résultante de tous les couplages que l'observable *suivie*  $\hat{A}$  peut avoir avec son environnement ; en l'absence de ce dernier il n'y a formellement pas de décohérence.

De plus, pour un champ électromagnétique dans un environnement constitué par une charge spectatrice en présence d'un réservoir de particules et de chaleur, l'importance du facteur  $\Pi_{2,bck}^c$  dépend de la valeur du potentiel chimique (*cf* annexe B.3) : dans l'approximation à une boucle, cette quantité est fortement négligeable à température finie et densité nulle alors qu'elle prend des valeurs appréciables seulement pour une densité non-nulle : qualitativement, un système est susceptible d'être consistant s'il est couplé à un environnement ne présentant pas de trou important dans son spectre d'excitations.

La partie réelle de l'action nue de (5.33) s'écrit comme la différence

$$\Re \mathcal{S}[\check{A}] = \Re \mathcal{S}[A^+] - \Re \mathcal{S}[A^-] + \frac{1}{2} A^+ \Pi_{2,bck}^f A^- - \frac{1}{2} A^- \Pi_{2,bck}^f A^+.$$

---

18. Soulignons également que le noyau de  $\Pi_{2,bck}^c$  décrit également des fluctuations contribuant fortement à l'intégrale (5.33).

Elle s'annule exactement pour des paires de trajectoires consistantes. Par conséquent, les fluctuations classiques peuvent être alors arbitrairement larges et la limite classique correspond donc à une situation non-perturbative ; tout écart à la limite classique, dans cette partie de l'action, sera compensé. Dans le formalisme *OTP*, l'action classique est issue d'un régime "mou" car les fluctuations responsables des observables ne sont pas contraintes. De plus, il est aisé de voir que les moyennes issues d'une évolution consistante correspondent aux champs sub-classiques définis précédemment. Comme présenté dans le premier chapitre, la limite classique décrite par des amplitudes de transition relève d'une situation différente : tout écart faible à l'action classique sera défini dans un domaine où ces contributions pèseront fortement sur la valeur de cette amplitude sans qu'aucune structure n'induisse de compensations. Par conséquent, la limite classique présentée dans ce contexte correspond à un régime "rigide". Cette différence entre amplitude de transition et valeur moyenne est liée au fait que cette première quantité est définie pour des états purs alors que la seconde décrit des états mixtes. En principe, la limite classique doit faire intervenir des états mixtes pour réaliser l'influence d'un environnement.

Enfin, un même tenseur décrit la consistance des chemins et le temps de vie correspondant aux excitations collectives : ces deux aspects sont inversement proportionnels l'un à l'autre et le formalisme *OTP* montre qu'ils ont ainsi une même origine dynamique [39]. La forte irréversibilité nécessaire à l'établissement de la limite classique peut qualitativement justifier un tel résultat : l'influence dissipative du milieu est importante et celui-ci dissipe rapidement les états collectifs. Les modes pour lesquels les lois de probabilités classiques sont restaurées doivent donc paradoxalement correspondre à de "mauvaises" excitations collectives. Concrètement, les modes de grandes longueurs d'ondes de la branche du son-zéro, présentés par la figure 5.6, correspondent à ces critères. Toutefois, les configurations classiques obtenues ne sont pas observables en raison de leur temps de vie trop court. Cette situation paradoxale est en fait liée à la résolution de la théorie. Les développements précédents sont limités à une échelle appartenant au domaine quantique : toute moyenne consistante issue de la matrice densité (5.33) correspond ainsi à un champ sub-classique. L'émergence de la limite classique doit alors être étudiée en élargissant cette résolution. Toutefois, cette étape comporte des difficultés : la transition entre les domaines classiques et quantiques fait intervenir un changement, non-perturbatif, de lois d'échelles (*crossover*). Toujours est-il que les champs sub-classiques constituent le point de départ de l'étude de ce comportement d'échelles : ils permettent de fixer les domaines présentant une restauration des lois de probabilités valables en physique classique.



# Conclusion

L'expression générale de valeurs moyennes en théorie quantique des champs peut être obtenue à partir du formalisme *closed time path* (*CTP*) introduit par *Schwinger*. Cette méthode consiste à doubler les degrés de liberté du système en définissant deux amplitudes d'évolution contraire et en les contraignant à produire de telles moyennes. Un premier avantage de ce formalisme est qu'il s'appuie sur des outils théoriques bien connus, utilisés notamment en physique des particules. Un autre avantage important de cette démarche est d'offrir une description au sein de laquelle les matrices densités apparaissent naturellement : l'étude de moyennes définies pour des états mixtes est alors possible et le formalisme *CTP* offre un cadre pour décrire les systèmes ouverts. Concrètement, une méthodologie fonctionnelle peut être définie pour calculer les valeurs moyennes. Les degrés de liberté sont alors séparés en deux catégories : les degrés de liberté physiques, engendrant les valeurs moyennes, et ceux auxiliaires (vis-à-vis des valeurs moyennes) disparaissant sous contrainte d'unitarité. Les équations du mouvement vérifiées par les valeurs moyennes peuvent alors être obtenues en tant que limite de celles vérifiées par les champs effectifs. Toutefois, le principe variationnel ne peut pas être maintenu lorsque sont définies les moyennes pour l'approche usuelle du formalisme *CTP* : seule une paramétrisation non-orthogonale de ces différents degrés de liberté permet de définir une action effective valide pour les valeurs moyennes : les équations du mouvement peuvent alors être obtenues au prix de manipulations algébriques supplémentaires.

Par ailleurs, l'expression de matrices densités peut être réalisée à partir d'un formalisme similaire, le formalisme *opened time path* (*OTP*). Les éléments de matrice d'un opérateur densité sont le résultat de la contribution de paires de chemins, analogues à celles décrivant les valeurs moyennes, mais aboutissant toutefois à une configuration finale spécifique à l'élément de matrice évalué. Ces quantités peuvent alors être calculées à partir de méthodes standards. En outre, cette description permet de calculer facilement des matrices densités réduites : elles consistent à éliminer des degrés de liberté en les intégrant suivant la méthode propre au formalisme *CTP*. Le résultat de cette procédure est alors une description efficace de l'intrication en terme d'indépendance des paires de degrés de liberté. Ce formalisme offre alors la possibilité d'étudier certains aspects de la transition quantique-classique par l'intermédiaire de la théorie de la *décohérence* (et plus particulièrement de la *consistance*). L'objet de cette théorie est d'étudier la disparition des termes d'interférences entre états, c'est-à-dire l'établissement de lois de probabilités classiques, sous l'influence des dissipations liées à un environnement.

La construction de l'électromagnétisme classique à partir de l'électrodynamique quantique

a été l'objet de cette thèse. Dans un premier temps, les valeurs moyennes pour les courants et pour le champ électromagnétique ont été obtenues pour une résolution appartenant au domaine quantique. Ces moyennes, appelées *champs sub-classiques*, vérifient des équations du mouvement retardées pouvant être obtenues de deux façons différentes. Une première approche consiste à définir l'action effective à partir des variables physiques et auxiliaires. Dans ce contexte, l'expression des relations vérifiées par les valeurs moyennes ne peut être obtenue qu'à partir de celles issues de champs effectifs. Ces dernières sont le résultat de l'application du principe variationnel sans que celui-ci ne puisse être maintenu pour les valeurs moyennes : tous les termes de l'action effective sont proportionnels aux quantités auxiliaires qui imposent la causalité retardée. Toutefois, ce schéma permet d'obtenir efficacement les équations du mouvement. Une autre approche consiste à définir l'action effective seulement à partir des degrés de liberté physiques. Ce schéma n'est possible que pour une paramétrisation non-orthogonale des degrés de liberté et permet de définir une action "classique" : les équations du mouvement retardées vérifiées par les valeurs moyennes peuvent alors être obtenues par principe variationnel. La particularité de cette action est d'implémenter *directement* une telle causalité. Toutefois, des manipulations formelles supplémentaires sont nécessaires pour obtenir l'expression usuelle des équations du mouvement.

Ces équations du mouvement ont été étudiées dans l'approximation à une boucle et les propriétés électromagnétiques du milieu ont été caractérisées par l'intermédiaire du tenseur de polarisation dû aux charges. Cette quantité a été calculée à température et densité finies. Des corrections appréciables apparaissent à densité finie seulement : des relations de dispersions analogues à celle du son-zéro et à celle des plasmons constituent les principaux domaines de définition des excitations collectives de ce milieu.

Une spécificité de la recherche conjointe de la moyenne du champ électromagnétique et de celle de tous les courants de charges du système réside dans le fait que ces deux quantités vérifient une relation de contrainte où l'habillage est alors absent : la renormalisation des paramètres du champ électromagnétique est le résultat des charges laissées spectatrices qui constituent alors un environnement. L'influence de telles charges spectatrices vis-à-vis de la décohérence du champ électromagnétique a été étudiée par l'intermédiaire du formalisme *OTP* : la décohérence est alors le résultat des polarisations et est ainsi décrite formellement comme un effet dû aux corrections en boucles. Plus particulièrement, la restauration des lois de probabilités classiques est obtenue lorsque les paires de trajectoires, construisant les éléments de matrices de l'opérateur densité, coïncident. L'écart entre ces paires n'est influencé que par un terme dû à l'environnement qui est également responsable de l'inverse du temps de vie des excitations collectives : paradoxalement, les "mauvaises" excitations collectives sont celles pour lesquelles les caractéristiques classiques prédominent. En fait, cette valeur "médiocre" de temps de vie est caractéristique d'un milieu fortement dissipatif qui assure l'irréversibilité nécessaire à la transition quantique-classique. De plus, on peut montrer que le spectre d'excitation des degrés de liberté éliminés ne doit pas contenir un trou important faute de quoi le facteur de décohérence sera également négligeable. Concrètement, à l'ordre d'une boucle, ce facteur prend des valeurs appréciables uniquement à densité finie et ce sont les excitations collectives de la branche du son-zéro qui correspondent au secteur classique (au sens de la décohérence).

## CONCLUSION

---

En résumé, le système décohère lorsqu'il est couplé à un environnement fortement dissipatif et sans écart important à son premier niveau excité. Le formalisme  $OTP$  décrit alors la limite classique comme un phénomène non-perturbatif : pour des trajectoires consistantes, les fluctuations quantiques peuvent être arbitrairement larges et correspondent à une limite classique mettant en jeu des états mixtes. Plus particulièrement, les champs sub-classiques correspondent au point de départ vers l'établissement d'un comportement classique macroscopique : ces champs sont formellement limités à une résolution, dans l'espace des positions d'espace-temps, limitée par la coupure UV de la  $QED$ . Dès lors, l'étape suivante dans l'étude de la limite classique de ce système est d'élargir cette résolution au domaine macroscopique. En principe, une modification du comportement d'échelle des quantités suivies devrait pouvoir être observée. Toutefois, ce *crossover* est, à priori, non-perturbatif et nécessite des développements importants.



## Annexe A

# Propagateurs du formalisme *closed time path*

Cette section synthétise les différentes expressions des propagateurs utilisés dans le formalisme *closed time path* : ils sont calculés dans le formalisme opératoire, tout d'abord sur le vide, puis en présence d'un environnement (réservoir de chaleur et de particules).

### A.1 Propagateurs dans le vide

#### A.1.1 Propagateurs du formalisme de Schwinger dans le vide

##### Boson neutre : champ scalaire hermitien

En seconde quantification, l'expression du champ  $\phi$  associé à un boson neutre libre est donné par la relation

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_k} [a(\mathbf{k})e^{-i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})}]$$

avec  $\epsilon_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ . Le champ est ainsi une superposition d'ondes planes d'impulsion  $\mathbf{k}$  qui satisfont l'équation d'onde relativiste de *Klein-Gordon* et dont les coefficients  $a(\mathbf{k})$  et  $a^\dagger(\mathbf{k})$ , introduits par la méthode de seconde quantification, désignent respectivement l'opérateur d'annihilation et celui de création de tels modes. La seule relation de commutation (à temps égaux) non nulle que ces opérateurs satisfont est

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 2\epsilon_k (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

En utilisant les notations issues du formalisme *closed time path*, les propagateurs causaux d'un boson neutre s'écrivent

$$\begin{aligned} iD^{++}(x, y) &= \langle 0 | \hat{T}[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle, \\ iD^{--}(x, y) &= \langle 0 | \hat{T}^*[\phi(x)\phi(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{T}[\phi(y)\phi(x)] | 0 \rangle^*, \\ iD^{+-}(x, y) &= \langle 0 | \phi(y)\phi(x) | 0 \rangle, \\ iD^{-+}(x, y) &= \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Ces expressions sont liées par l'identité

$$\hat{T}[\phi(x)\phi(y)] + \hat{T}^*[\phi(x)\phi(y)] = \phi(y)\phi(x) + \phi(x)\phi(y).$$

Le propagateur pour les modes de fréquences positives s'écrit

$$\begin{aligned} iD^{-+}(x, y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\epsilon_p\epsilon_q} \langle 0 | [a(\mathbf{p})e^{-i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} + a^\dagger(\mathbf{p})e^{i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})}] \\ &\quad [a(\mathbf{q})e^{-i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{q}\mathbf{y})} + a^\dagger(\mathbf{q})e^{i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{q}\mathbf{y})}] | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\epsilon_p\epsilon_q} \langle 0 | a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{q})e^{i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{q}\mathbf{y}) - i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_p} e^{-i\epsilon_p(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}, \end{aligned}$$

et, de la même manière, celui sur les fréquences négatives vaut

$$iD^{+-}(x, y) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_p} e^{+i\epsilon_p(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}.$$

Or, à partir de

$$\Theta[\pm p^0] \delta[p^2 - m^2] = \frac{1}{2\epsilon_p} \delta[p^0 \mp \epsilon_p]$$

on obtient l'expression finale de ces grandeurs

$$\begin{aligned} iD^{-+}(x, y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} 2i\pi \delta[p^2 - m^2] \Theta[+p^0], \\ iD^{+-}(x, y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} 2i\pi \delta[p^2 - m^2] \Theta[-p^0] \end{aligned}$$

qui vérifient en outre  $D^{-+}(y, x) = D^{+-}(x, y)$ .

Le propagateur de *Feynman* se déduit d'une combinaison des fonctions à deux points qui précèdent avec celle de *Heaviside*. En outre, cette dernière peut être représentée par l'expression suivante

$$i\Theta[t] \equiv \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{+i\omega t}}{\omega - i0} = - \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega t}}{\omega + i0}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} i\Theta[x^0 - y^0] iD^{-+}(x, y) &= - \int_{\mathbb{R}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(x^0 - y^0)}}{\omega + i0} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_p} e^{-i\epsilon_p(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ &= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\epsilon_p} \frac{e^{-i(\epsilon_p + p^0)(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{p^0 + i0} \\ &= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\epsilon_p} \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}(\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{p^0 - \epsilon_p + i0} \\ &= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\epsilon_p} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^0 - \epsilon_p + i0}, \end{aligned}$$

et, de manière analogue, on trouve

$$i\Theta[y^0 - x^0] iD^{+-}(x, y) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2\epsilon_p} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^0 + \epsilon_p - i0}.$$

Ces expressions permettent donc d'en déduire le propagateur  $D^{++}$  *via* sa définition

$$\begin{aligned} D^{++}(x, y) &= \Theta[x^0 - y^0] D^{-+}(x, y) + \Theta[y^0 - x^0] D^{+-}(x, y) \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{2\epsilon_p} \left[ \frac{1}{p^0 - \epsilon_p + i0} - \frac{1}{p^0 + \epsilon_p - i0} \right] = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 + i0}. \end{aligned}$$

Cette quantité est symétrique :  $D^{++}(x, y) = D^{++}(y, x)$ . Enfin,  $D^{--}$  peut être déduit de l'expression précédente :

$$D^{--}(p) = -[D^{++}(p)]^* = \frac{-1}{p^2 - m^2 - i0}, \quad D^{--}(x, y) = - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip(x-y)}}{p^2 - m^2 - i0}.$$

$D^{--}$  est également symétrique.

En résumé, sur le contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ , l'expression par blocs dans l'espace réciproque du propagateur causal d'un champs de boson est donné par l'expression

$$\begin{aligned} \check{D}(p) &= \begin{pmatrix} D^{++}(p) & D^{+-}(p) \\ D^{-+}(p) & D^{--}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{++}(p) & -[D^{-+}(p)]^* \\ D^{-+}(p) & -[D^{++}(p)]^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} D^{++}(p) & D^{+-}(p) \\ D^{-+}(p) & D^{--}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^{++}(p) & -[D^{-+}(p)]^\dagger \\ D^{-+}(p) & -[D^{++}(p)]^\dagger \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} & -2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[-p^0] \\ -2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[+p^0] & \frac{-1}{p^2 - m^2 - i0} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

### Bosons chargés : champ non-hermitien

On peut appliquer la même démarche que précédemment pour calculer les propagateurs libres d'un champ non-hermitien. L'expression d'un tel champ  $\phi$  est donnée par la superposition

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_k} [a(\mathbf{k})e^{-i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})}].$$

Dans cette expression, on a introduit les opérateurs  $a(\mathbf{k})$  et  $a^\dagger(\mathbf{k})$  qui agissent sur les modes d'impulsion  $\mathbf{k}$  du secteur des particules et les opérateurs  $b(\mathbf{k})$  et  $b^\dagger(\mathbf{k})$  qui agissent sur ceux des anti-particules. Ces opérateurs se transforment l'un en l'autre sous l'action de l'opérateur de conjugaison de charge  $\mathcal{C}$  ( $\mathcal{C}^2 = 1$ )

$$\mathcal{C}a(\mathbf{k})\mathcal{C}^\dagger = b(\mathbf{k}), \quad \mathcal{C}b(\mathbf{k})\mathcal{C}^\dagger = \mathcal{C}^2 a(\mathbf{k})(\mathcal{C}^2)^\dagger = a(\mathbf{k}).$$

En outre,  $\phi^\dagger$  peut être exprimé à l'aide de  $\mathcal{C}$  *via*

$$\mathcal{C}\phi(x)\mathcal{C}^\dagger = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_k} [a^\dagger(\mathbf{k})e^{+ikx} + b(\mathbf{k})e^{-ikx}] = \phi^\dagger(x).$$

Les relations de commutation non-nulles qui régissent les opérateurs  $a$  et  $b$  sont

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = 2\epsilon_k(2\pi)^3\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Elles sont invariantes par conjugaison de charge. Les propagateurs causaux sont définis par :

$$\begin{aligned} iD^{++}(x, y) &= \langle 0 | \hat{T}[\phi(x)\phi^\dagger(y)] | 0 \rangle, \\ iD^{--}(x, y) &= \langle 0 | \hat{T}^*[\phi(x)\phi^\dagger(y)] | 0 \rangle = \langle 0 | \hat{T}[\phi(x)\phi^\dagger(y)] | 0 \rangle^\dagger, \\ iD^{+-}(x, y) &= \langle 0 | \phi^\dagger(y)\phi(x) | 0 \rangle, \\ iD^{-+}(x, y) &= \langle 0 | \phi(x)\phi^\dagger(y) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Les relations usuelles entre ces propagateurs reposent alors sur l'invariance des états sur lesquels les moyennes sont prises. On suppose que le vide est invariant sous conjugaison de charge. Comme les opérateurs  $a$  et  $b$  vérifient les mêmes relations de commutation, les propagateurs  $D^{-+}$  et  $D^{+-}$  sur le vide conduisent aux mêmes résultats que ceux obtenus pour un champ hermitien :

$$\begin{aligned} iD^{-+}(x, y) &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\epsilon_p\epsilon_q} \langle 0 | a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{q})e^{i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y}) - i(\epsilon_p x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} 2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[+p^0], \\ iD^{+-}(x, y) &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \frac{d^4q}{(2\pi)^3} \frac{\delta[p^0 - \epsilon_p]}{2\epsilon_p} \frac{\delta[q^0 - \epsilon_q]}{2\epsilon_q} \langle 0 | b(\mathbf{q})b^\dagger(\mathbf{p})e^{i(\epsilon_p x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}) - i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} | 0 \rangle \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} 2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[-p^0]. \end{aligned}$$

Par suite, ces propagateurs conduisent aux mêmes expressions pour  $D^{++}$  et  $D^{--}$  que dans le cas précédent.

### Fermions massifs

L'opérateur de champ vérifiant l'équation de *Dirac*  $(\not{k} - m)\psi = 0$  s'écrit comme la superposition

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\epsilon_k} \sum_{\alpha=1,2} [b_\alpha(\mathbf{k})u^{(\alpha)}(\mathbf{k})e^{-i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + d_\alpha^\dagger(\mathbf{k})v^{(\alpha)}(\mathbf{k})e^{+i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}]$$

où les spineurs  $u$  et  $v$  satisfont les relations  $(\not{k} - m)u(k) = (\not{k} + m)v(k) = 0$ . Les seules relations d'anti-commutation non-nulles que les opérateurs de création et d'annihilation vérifient sont les suivantes

$$\{b_\alpha(\mathbf{k}), b_\beta^\dagger(\mathbf{k}')\} = \{d_\alpha(\mathbf{p}), d_\beta^\dagger(\mathbf{k}')\} = (2\pi)^3 \frac{\epsilon_k}{m} \delta_{\alpha,\beta} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

En outre, le champ adjoint de  $\psi$  vérifie  $\bar{\psi}(i\partial - m) = 0$  et s'écrit

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\epsilon_k} \sum_{\alpha=1,2} [b_\alpha^\dagger(\mathbf{k})\bar{u}^{(\alpha)}(\mathbf{k})e^{+i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})} + d_\alpha(\mathbf{k})\bar{v}^{(\alpha)}(\mathbf{k})e^{-i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\cdot\mathbf{x})}].$$

avec  $\bar{u}(\mathbf{k})(\not{k} - m) = 0$  et  $\bar{v}(\mathbf{k})(\not{k} - m) = 0$ . On définit les propagateurs causaux par les expressions :

$$\begin{aligned} iG^{++}(x, y) &= \langle 0 | \hat{T}[\psi(x)\bar{\psi}(y)] | 0 \rangle \\ iG^{--}(x, y) &= \langle 0 | \hat{T}^*[\psi(x)\bar{\psi}(y)] | 0 \rangle \\ iG^{+-}(x, y) &= \langle 0 | \bar{\psi}(y)\psi(x) | 0 \rangle \\ iG^{-+}(x, y) &= -\langle 0 | \psi(x)\bar{\psi}(y) | 0 \rangle. \end{aligned}$$

Ces propagateurs sont liés par l'identité

$$\hat{T}[\psi\bar{\psi}] + \hat{T}^*[\psi\bar{\psi}] = -\bar{\psi}\psi + \psi\bar{\psi}.$$

Le calcul de  $iG^{-+}$  donne :

$$\begin{aligned} iG^{-+}(x, y) &= -\langle 0 | \psi(x)\bar{\psi}(y) | 0 \rangle \\ &= -\int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{\epsilon_q \epsilon_p} \sum_{\alpha, \beta} \langle 0 | \left( b_\alpha(\mathbf{p})u^{(\alpha)}(\mathbf{p})e^{-i(\epsilon_p x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} + d_\alpha^\dagger(\mathbf{p})v^{(\alpha)}(\mathbf{p})e^{+i(\epsilon_p x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} \right) \\ &\quad \left( b_\beta^\dagger(\mathbf{q})\bar{u}^{(\beta)}(\mathbf{q})e^{+i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} + d_\beta(\mathbf{q})\bar{v}^{(\beta)}(\mathbf{q})e^{-i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \right) | 0 \rangle \\ &= -\int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{\epsilon_q \epsilon_p} \sum_{\alpha, \beta} \langle 0 | b_\alpha(\mathbf{p})b_\beta^\dagger(\mathbf{q}) | 0 \rangle u^{(\alpha)}(\mathbf{p})\bar{u}^{(\beta)}(\mathbf{q})e^{-i(\epsilon_p x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x}) + i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \\ &= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\epsilon_p} \sum_{\alpha} u^{(\alpha)}(\mathbf{p})\bar{u}^{(\alpha)}(\mathbf{p})e^{-i\epsilon_p(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}. \end{aligned}$$

De la même manière, on a :

$$iG^{+-}(x, y) = \langle 0 | \bar{\psi}(y)\psi(x) | 0 \rangle = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{\epsilon_p} \sum_{\alpha} \bar{v}^{(\alpha)}(\mathbf{p})v^{(\alpha)}(\mathbf{p})e^{+i\epsilon_p(x^0 - y^0) - i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}.$$

Les matrices  $\bar{v}^{(\alpha)}(\mathbf{p})v^{(\beta)}(\mathbf{p})$  et  $u^{(\alpha)}(\mathbf{p})\bar{u}^{(\alpha)}(\mathbf{p})$  peuvent être déterminées en suivant les développements présentés dans [1]. Les spineurs  $u$  et  $v$  vérifient les relations

$$(\not{k} - m)u^{(\alpha)}(k) = 0, \quad (\not{k} + m)v^{(\alpha)}(k) = 0$$

qui deviennent, dans le référentiel propre de la particule où  $k^\mu = (m, \mathbf{0})$ ,

$$(\gamma^0 - 1)u_0^{(\alpha)}(m) = 0, \quad (\gamma^0 + 1)v_0^{(\alpha)}(m) = 0.$$

Ces dernières relations montrent que  $u$  et  $v$  présentent deux solutions linéairement indépendantes. À partir de la relation

$$(\not{k} - m)(\not{k} + m) = k^2 - m^2 = 0,$$

on peut montrer que les solutions de (A.1) s'écrivent

$$u^{(\alpha)}(k) = \frac{\not{k} + m}{\sqrt{2m(m + \epsilon_k)}} u_0^{(\alpha)}(m), \quad v^{(\alpha)}(k) = \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{2m(m + \epsilon_k)}} u_0^{(\alpha)}(m).$$

Il s'en suit que les spineurs adjoints vérifient

$$\bar{u}^{(\alpha)}(k) = \bar{u}_0^{(\alpha)}(m) \frac{\not{k} + m}{\sqrt{2m(m + \epsilon_k)}}, \quad \bar{v}^{(\alpha)}(k) = \bar{u}_0^{(\alpha)}(m) \frac{-\not{k} + m}{\sqrt{2m(m + \epsilon_k)}}.$$

Par suite, *via*  $(\not{k} + m)\gamma^0(\not{k} + m) = 2\epsilon_k(\not{k} + m)$  on obtient

$$\begin{aligned} \Lambda_+ &= \sum_{\alpha=1,2} u^{(\alpha)}(k) \bar{u}^{(\alpha)}(k) = \frac{1}{2} \frac{(\not{k} + m)(1 + \gamma^0)(\not{k} + m)}{\sqrt{2m(m + \epsilon_k)}} = \frac{\not{k} + m}{2m} \\ \Lambda_- &= \sum_{\alpha=1,2} v^{(\alpha)}(k) \bar{v}^{(\alpha)}(k) = \frac{1}{2} \frac{(\not{k} - m)(1 - \gamma^0)(\not{k} - m)}{\sqrt{2m(m + \epsilon_k)}} = \frac{-\not{k} + m}{2m}. \end{aligned}$$

Ces expressions permettent d'obtenir l'expression finale des propagateurs :

$$\begin{aligned} iG^{-+}(x, y) &= - \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{\not{p} + m}{2\epsilon_p} e^{-i\epsilon_p(x^0 - y^0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\not{p} + m) 2\pi \delta[p^2 - m^2] \Theta[+p^0] e^{-ip(x-y)} \\ &= -(i\not{\partial} + m) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 2\pi \delta[p^2 - m^2] \Theta[+p^0] e^{-ip(x-y)} = -(i\not{\partial} + m) iD^{-+}(x, y) \\ iG^{+-}(x, y) &= + \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{-\not{p} + m}{2\epsilon_p} e^{i\epsilon_p(x^0 - y^0) - i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})} \\ &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} (\not{p} + m) 2\pi \delta[p^2 - m^2] \Theta[-p^0] e^{-ip(x-y)} \\ &= -(i\not{\partial} + m) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 2\pi \delta[p^2 - m^2] \Theta[-p^0] e^{-ip(x-y)} = -(i\not{\partial} + m) iD^{+-}(x, y) \end{aligned}$$

Les expressions précédentes permettent d'obtenir les propagateurs  $G^{++}$  et  $G^{--}$  à partir de :

$$\not{\partial} i\Theta[\pm t] = \gamma^0 \partial_0 i\Theta[\pm t] = \pm \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\gamma^0 \omega e^{\mp i\omega t}}{\omega + i0} = \pm \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\gamma^0 \omega e^{\pm i\omega t}}{\omega - i0}.$$

On a, d'une part,

$$\begin{aligned} i\Theta[+(x^0 - y^0)] iG^{-+}(x, y) &= - \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{-i\omega(x^0 - y^0)}}{\omega + i0} (i\not{\partial} + m) \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{e^{-i\epsilon_p(x^0 - y^0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{2\epsilon_p} \\ &= - \int \frac{d^3 p d\omega}{(2\pi)^4} \frac{(i\not{\partial} - \gamma^0 \omega + m)}{2\epsilon_p} \frac{e^{-i(\omega + \epsilon_p)(x^0 - y^0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\omega + i0} \\ &= - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(i\not{\partial} - \gamma^0(p^0 - \epsilon_p) + m)}{2\epsilon_p} \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{p^0 - \epsilon_p + i0} \\ i\Theta[-(x^0 - y^0)] iG^{-+}(x, y) &= + \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{(i\not{\partial} + \gamma^0(\epsilon_p - p^0) + m)}{2\epsilon_p} \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0) + i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{p^0 - \epsilon_p - i0}. \end{aligned}$$

D'autre part, on obtient

$$\begin{aligned}
 i\Theta[-(x^0 - y^0)]iG^{+-}(x, y) &= - \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{e^{i\omega(x^0 - y^0)}}{\omega + i0} \\
 &\quad (i\rlap{\not{D}} + m) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{e^{+i\epsilon_p(x^0 - y^0) - i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{2\epsilon_p} \\
 &= - \int \frac{d^3p d\omega}{(2\pi)^4} \frac{(i\rlap{\not{D}} + \gamma^0\omega + m)}{2\epsilon_p} \frac{e^{i(\omega + \epsilon_p)(x^0 - y^0) - i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{\omega + i0} \\
 &= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(i\rlap{\not{D}} - \gamma^0 p^0 + m)}{2\epsilon_p} \frac{e^{i(\epsilon_p - p^0)(x^0 - y^0) - i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{-p^0 + i0} \\
 &= + \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(i\rlap{\not{D}} - \gamma^0(p^0 + \epsilon_p) + m)}{2\epsilon_p} \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{p^0 + \epsilon_p - i0} \\
 i\Theta[+(x^0 - y^0)]iG^{+-}(x, y) &= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{(i\rlap{\not{D}} - \gamma^0(\epsilon_p + p^0) + m)}{2\epsilon_p} \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{p^0 + \epsilon_p + i0}.
 \end{aligned}$$

En conséquence, le propagateur de *Feynman* s'écrit :

$$\begin{aligned}
 iG^{++}(x, y) &= i^2\Theta[+(x^0 - y^0)]iG^{-+}(x, y) + i^2\Theta[-(x^0 - y^0)]iG^{+-}(x, y) \\
 &= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( \frac{(i\rlap{\not{D}} - \gamma^0(p^0 - \epsilon_p) + m)}{p^0 - \epsilon_p + i0} - \frac{(i\rlap{\not{D}} - \gamma^0(p^0 + \epsilon_p) + m)}{p^0 + \epsilon_p - i0} \right) \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{2\epsilon_p} \\
 &= i(i\rlap{\not{D}} + m) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{2\epsilon_p} \left( \frac{1}{p^0 - \epsilon_p + i0} - \frac{1}{p^0 + \epsilon_p - i0} \right) \\
 &\quad + \gamma^0 i(i\rlap{\not{D}} + m) \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{2\epsilon_p} \left( \frac{p^0 + \epsilon_p}{p^0 + \epsilon_p - i0} - \frac{p^0 - \epsilon_p}{p^0 - \epsilon_p + i0} \right) \\
 &= (i\rlap{\not{D}} + m)iD^{++}(x, y)
 \end{aligned}$$

De la même manière, le calcul de  $G^{--}$  donne :

$$\begin{aligned}
 iG^{--}(x, y) &= i^2\Theta[-(x^0 - y^0)]iG^{-+}(x, y) + i^2\Theta[+(x^0 - y^0)]iG^{+-}(x, y) \\
 &= i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left( \frac{(i\rlap{\not{D}} + m)}{p^0 - \epsilon_p - i0} - \frac{(i\rlap{\not{D}} + m)}{p^0 + \epsilon_p + i0} \right) \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{2\epsilon_p} \\
 &\quad + i \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ip^0(x^0 - y^0) + i\mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y})}}{2\epsilon_p} \left( + \frac{\gamma^0(\epsilon_p + p^0)}{p^0 + \epsilon_p + i0} - \frac{\gamma^0(p^0 - \epsilon_p)}{p^0 - \epsilon_p - i0} \right) \\
 &= (i\rlap{\not{D}} + m)iD^{--}(x, y).
 \end{aligned}$$

En résumé, sur le contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  le propagateur causal d'un champ de *Dirac* s'écrit

$$\begin{aligned}
 \check{G}(x, y) &= \begin{pmatrix} G^{++} & G^{+-} \\ G^{-+} & G^{--} \end{pmatrix} = (i\rlap{\not{D}} + m) \begin{pmatrix} D^{++} & -D^{+-} \\ -D^{-+} & D^{--} \end{pmatrix} \\
 \check{G}(p) &= (\not{p} + m) \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} & +2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[-p^0] \\ +2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[+p^0] & \frac{-1}{p^2 - m^2 - i0} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

### A.1.2 Propagateurs physiques dans le vide

#### Bosons :

Les propagateurs retardé  $D^r$ , avancé  $D^a$ , proche  $D^n$  et lointain  $D^f$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 D^a(p) &= D^{++}(p) - D^{-+}(p) \\
 &= \text{P}_p \left[ \frac{1}{p^2 - m^2} \right] + i\pi\delta[p^2 - m^2]\text{sgn}[p^0] = \frac{1}{p^2 - m^2 - \text{sgn}[p^0].i0} \\
 D^r(p) &= D^{++}(p) - D^{+-}(p) \\
 &= \text{P}_p \left[ \frac{1}{p^2 - m^2} \right] - i\pi\delta[p^2 - m^2]\text{sgn}[p^0] = \frac{1}{p^2 - m^2 + \text{sgn}[p^0].i0} \\
 D^n(p) &= \frac{1}{2}[D^{++}(p) - D^{--}(p)] = \Re[D^{++}(p)] = \text{P}_p \left[ \frac{1}{p^2 - m^2} \right], \\
 D^f(p) &= \frac{1}{2}[D^{-+}(p) - D^{+-}(p)] = -2i\pi\delta[p^2 - m^2]\text{sgn}[p^0].
 \end{aligned}$$

Enfin, l'expression du propagateur  $D^c$  est

$$D^c(p) = \frac{1}{2i}D^{++}(p) + \frac{1}{2i}D^{--}(p) = \Im[D^{++}(p)] = -\pi\delta[p^2 - m^2].$$

En fonction de ces expressions, le propagateur sur le contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 \check{D}(p) &= \begin{pmatrix} D^{++}(p) & D^{+-}(p) \\ D^{-+}(p) & D^{--}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^n(p) & -D^f(p) \\ D^f(p) & -D^n(p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iD^c(p) & iD^c(p) \\ iD^c(p) & iD^c(p) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\{D^r(p) + D^a(p)\} & -\frac{1}{2}\{D^r(p) - D^a(p)\} \\ \frac{1}{2}\{D^r(p) - D^a(p)\} & -\frac{1}{2}\{D^r(p) + D^a(p)\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iD^c(p) & iD^c(p) \\ iD^c(p) & iD^c(p) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

#### Fermions :

Les propagateurs retardé  $G^r$ , avancé  $G^a$ , proche  $G^n$  et lointain  $G^f$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 G^a(p) &= G^{++}(p) + G^{-+}(p) = (\not{p} + m) \left( \text{P}_p \left[ \frac{1}{p^2 - m^2} \right] + i\pi\delta[p^2 - m^2]\text{sgn}[+p^0] \right) \\
 &= \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 - \text{sgn}[p^0] \cdot i0} \\
 G^r(p) &= G^{++}(p) + G^{+-}(p) = (\not{p} + m) \left( \text{P}_p \left[ \frac{1}{p^2 - m^2} \right] - i\pi\delta[p^2 - m^2]\text{sgn}[+p^0] \right) \\
 &= \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + \text{sgn}[p^0] \cdot i0}. \\
 G^n(p) &= \Re[G^{++}(p)] = (\not{p} + m) \text{P}_p \left[ \frac{1}{p^2 - m^2} \right], \\
 G^f(p) &= \frac{1}{2}[G^{+-}(p) - G^{-+}(p)] = -2i\pi(\not{p} + m)\delta[p^2 - m^2]\text{sgn}[p^0].
 \end{aligned}$$

En outre, ces propagateurs peuvent être exprimés au moyen des propagateurs pour les bosons sur le vide *via*

$$\begin{aligned}
 G^a(x, y) &= G^{++}(x, y) + G^{-+}(x, y) \\
 &= (i\rlap{-}/\partial + m)[D^{++}(x, y) - D^{-+}(x, y)] = (i\rlap{-}/\partial + m)D^a(x, y) \\
 G^r(x, y) &= G^{++}(p) - G^{-+}(p) \\
 &= (i\rlap{-}/\partial + m)[D^{++}(x, y) - D^{-+}(x, y)] = (i\rlap{-}/\partial + m)D^r(x, y) \\
 G^n(x, y) &= \frac{G^r(x, y) + G^a(x, y)}{2} = (i\rlap{-}/\partial + m)D^n(x, y) \\
 G^f(x, y) &= \frac{G^r(x, y) - G^a(x, y)}{2} = (i\rlap{-}/\partial + m)D^f(x, y).
 \end{aligned}$$

Enfin, l'expression du propagateur  $G^c$  est

$$G^c(p) = \frac{1}{2i}G^{++}(p) + \frac{1}{2i}G^{--}(p) = \Im[G^{++}(p)] = -\pi(p+m)\delta[p^2 - m^2]$$

c'est-à-dire

$$iG^c(x, y) = \frac{1}{2}(i\rlap{-}/\partial + m)[D^{++}(x, y) + D^{--}(x, y)] = (i\rlap{-}/\partial + m)iD^c(x, y).$$

En fonction de ces expressions, le propagateur sur le contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 \check{G}(p) &= \begin{pmatrix} G^{++}(p) & G^{-+}(p) \\ G^{-+}(p) & G^{--}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^n(p) & +G^f(p) \\ -G^f(p) & -G^n(p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iG^c(p) & -iG^c(p) \\ -iG^c(p) & iG^c(p) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\{G^r(p) + G^a(p)\} & -\frac{1}{2}\{G^a(p) - G^r(p)\} \\ \frac{1}{2}\{G^a(p) - G^r(p)\} & -\frac{1}{2}\{G^r(p) + G^a(p)\} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} iG^c(p) & -iG^c(p) \\ -iG^c(p) & iG^c(p) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\check{G}(x, y) = (i\rlap{-}/\partial + m) \begin{pmatrix} D^{++}(x, y) & -D^{-+}(x, y) \\ -D^{-+}(x, y) & D^{--}(x, y) \end{pmatrix} = (i\rlap{-}/\partial + m)\mathcal{M}\check{D}(x, y)\mathcal{M}$$

avec

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \hat{1} & 0 \\ 0 & -\hat{1} \end{pmatrix}$$

agissant sur les indices du formalisme *CTP*.

## A.2 Propagateurs à température et densité finies

On cherche l'expression des propagateurs précédents non plus comme des amplitudes sur le vide mais en tant que moyenne sur un ensemble d'états particuliers déterminés par l'intermédiaire d'une matrice densité  $\hat{\rho}$  :

$$\hat{\rho} = \frac{e^{-\beta(\hat{H} - \zeta\hat{N})}}{\text{Tr}e^{-\beta(\hat{H} - \zeta\hat{Q})}}$$

Les propagateurs sur cette moyenne d'ensemble sont déterminés à partir des moyennes des produits d'opérateurs de création et d'annihilation sur cet ensemble.

### A.2.1 Propagateurs du formalisme de Schwinger en présence d'un environnement

#### Boson neutre : champ scalaire hermitien

L'expression d'un champ scalaire hermitien  $\phi$  est donnée par la relation

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_k} [a(\mathbf{k})e^{-i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} + a^\dagger(\mathbf{k})e^{i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})}]$$

où les opérateurs de création et d'annihilation satisfont les relations de commutation

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 2\epsilon_k(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \quad [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] = [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = 0. \quad (\text{A.1})$$

Les propagateurs causaux définis sur un environnement s'écrivent

$$\begin{aligned} iD^{++}(x, y) &= \text{Tr}\{\hat{\rho} \hat{\text{T}}[\phi(x)\phi(y)], \\ iD^{--}(x, y) &= \text{Tr}\{\hat{\rho} \hat{\text{T}}^*[\phi(x)\phi(y)]\}, \\ iD^{+-}(x, y) &= \text{Tr}\{\hat{\rho} \phi(y)\phi(x)\}, \\ iD^{-+}(x, y) &= \text{Tr}\{\hat{\rho} \phi(x)\phi(y)\}. \end{aligned}$$

La trace de la matrice densité est prise égale à 1. Sur l'ensemble considéré, la moyenne des relations de commutation (A.1) s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] \rangle &= \text{Tr}[\hat{\rho} 2\epsilon_k(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}')] = 2\epsilon_k(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \text{Tr}[\hat{\rho}] \\ &= 2\epsilon_k(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ \langle [a(\mathbf{k}), a(\mathbf{k}')] \rangle &= 0, \\ \langle [a^\dagger(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] \rangle &= 0. \end{aligned}$$

On calcule les moyennes de produits d'opérateurs de création et d'annihilation à partir d'un spectre discret dont on prend, *in fine*, la limite continue. Pour un tel spectre, les relations de commutation (A.1) s'écrivent

$$[a_k, a_p^\dagger] = \delta_{k,p}, \quad [a_k, a_p] = [a_k^\dagger, a_p^\dagger] = 0.$$

Dans ce contexte, la fonction de partition  $\mathcal{Z}$  d'un système libre s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \text{Tr} e^{-\beta H} = \sum_{\{n\}} \langle \{n\} | e^{-\beta \sum_k \epsilon_k a_k^\dagger a_k} | \{n\} \rangle = \sum_{n_1} \langle n_1 | e^{-\beta \epsilon_1 n_1} | n_1 \rangle \times \cdots \times \sum_{n_\infty} \langle n_\infty | e^{-\beta \epsilon_\infty n_\infty} | n_\infty \rangle \\ &= \prod_k \text{Tr}_k e^{-\beta \epsilon_k n_k} = \prod_k \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta \epsilon_k n} = \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\beta \epsilon_k}} \end{aligned}$$

Le nombre moyen d'occupation  $n_k \equiv \langle a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) \rangle$  des états d'énergie  $\epsilon_k$  peut être déterminé à partir de  $\mathcal{Z}$  :

$$n_k = \frac{\partial \ln \mathcal{Z}}{\partial \beta \epsilon_k} = \frac{1}{e^{\beta \epsilon_k} - 1}.$$

Les moyennes  $\langle a_k^\dagger a_p^\dagger \rangle$  et  $\langle a_k a_p \rangle$  sont nulles puisque les produits  $a_k a_p$  et  $a_k^\dagger a_p^\dagger$  ne conservent pas le nombre de particules. En outre,

$$\begin{aligned} \langle a_k^\dagger a_p \rangle &= \sum_{\{n\}} \langle \{n\} | e^{-\beta \sum_k \epsilon_k a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})} a_k^\dagger a_p | \{n\} \rangle \\ &= \sum_{\{n\}} \sum_{\{m\}} \langle \{n\} | e^{-\beta \sum_k \epsilon_k a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k})} | \{m\} \rangle \langle \{m\} | a_k^\dagger a_p | \{n\} \rangle \end{aligned}$$

Les termes non nuls du premier élément de matrice correspondent à ceux pour lesquels  $|\{m\}\rangle = |\{n\}\rangle$ . Par conséquent le second terme s'écrit sous la forme  $\langle \{n\} | a_k^\dagger a_p | \{n\} \rangle$  et n'est non nul que lorsque  $k = p$  :

$$\langle a_k^\dagger a_p \rangle = \delta_{k,p} n_k.$$

La limite continue consiste à prendre  $V \rightarrow \infty$  et ainsi à changer les opérateurs et le symbole de *Kronecher* selon les relations

$$a_k \rightsquigarrow \frac{a(k)}{\sqrt{2\epsilon_k V}}, \quad a_k^\dagger \rightsquigarrow \frac{a^\dagger(k)}{\sqrt{2\epsilon_k V}}, \quad \delta_{k,p} \rightsquigarrow \frac{(2\pi)^3}{V} \delta^{(3)}[\mathbf{k} - \mathbf{p}]$$

où  $V$  désigne le volume contenant les particules. Ces relations permettent ainsi de déduire les moyennes continues :

$$\begin{aligned} \langle a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}') \rangle &= \text{Tr}[\hat{\rho} a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}')] = 2\epsilon_k (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') n_k, \\ \langle a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}') \rangle &= \langle [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] \rangle - \langle a^\dagger(\mathbf{k}') a(\mathbf{k}) \rangle = 2\epsilon_k (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') (1 + n_k), \\ \langle a^\dagger(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{k}') \rangle &= \langle a(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}') \rangle = 0. \end{aligned}$$

Les moyennes d'ensemble des produits d'opérateurs de création et d'annihilation permettent d'obtenir l'expression des propagateurs. Tout d'abord, on calcul

$$\begin{aligned} iD^{-+}(x, y) &= \text{Tr}\{\hat{\rho} \phi(x) \phi(y)\} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\epsilon_k \epsilon_p} \text{Tr} \left( \hat{\rho} [a(\mathbf{k}) e^{-i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} + a^\dagger(\mathbf{k}) e^{i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})}] \right. \\ &\quad \left. [a(\mathbf{p}) e^{-i(\epsilon_p y^0 - \mathbf{p}\mathbf{y})} + a^\dagger(\mathbf{p}) e^{i(\epsilon_p y^0 - \mathbf{p}\mathbf{y})}] \right) \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\epsilon_k \epsilon_p} \left( \langle a(\mathbf{k}) a(\mathbf{p}) \rangle e^{-i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x}) - i(\epsilon_p y^0 - \mathbf{p}\mathbf{y})} + \langle a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{p}) \rangle e^{i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x}) - i(\epsilon_p y^0 - \mathbf{p}\mathbf{y})} \right. \\ &\quad \left. + \langle a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{p}) \rangle e^{-i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x}) + i(\epsilon_p y^0 - \mathbf{p}\mathbf{y})} + \langle a^\dagger(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{p}) \rangle e^{i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x}) + i(\epsilon_p y^0 - \mathbf{p}\mathbf{y})} \right) \end{aligned}$$

Compte tenu des moyennes d'ensemble, ce propagateur s'écrit

$$\begin{aligned}
 iD^{-+}(x, y) &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\epsilon_k\epsilon_p} (2\pi)^3 2\epsilon_p \delta^{(3)}[\mathbf{k} - \mathbf{p}] \left[ n_k e^{i(\epsilon_k(x^0-y^0)-\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}))} \right. \\
 &\quad \left. + (1+n_k)e^{-i(\epsilon_k(x^0-y^0)-\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}))} \right] \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_k} \left[ n_k e^{i(\epsilon_k(x^0-y^0)-\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}))} + (1+n_k)e^{-i(\epsilon_k(x^0-y^0)-\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}))} \right] \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_k} e^{-i(\epsilon_k(x^0-y^0)-\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}))} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n_k}{2\epsilon_k} \left[ e^{i(\epsilon_k(x^0-y^0)-\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}))} + e^{-i(\epsilon_k(x^0-y^0)-\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y}))} \right]
 \end{aligned}$$

Le premier terme de cette expression est indépendant de la température et correspond au calcul du propagateur dans le vide ; on le note  $iD_{vac}^{-+}(x, y)$ . Le second terme,  $iD_{env}(x, y)$ , contient toute la dépendance en température :

$$iD_{env}(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} n_k 2\pi\delta[k^2 - m^2] e^{-ik(x-y)}.$$

De la même façon, le calcul du propagateur sur les fréquences négatives s'écrit en fonction des moyennes d'ensemble des produits d'opérateurs de création et d'annihilation. Son expression correspond à

$$\begin{aligned}
 iD^{+-}(x, y) &= \text{Tr}\{\hat{\rho} \phi(y)\phi(x)\} \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\epsilon_k\epsilon_p} \left( \langle a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{k}) \rangle e^{i(\epsilon_p y^0 - \mathbf{p}\mathbf{y}) - i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} + \langle a(\mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{k}) \rangle e^{-i(\epsilon_p y^0 - \mathbf{p}\mathbf{y}) + i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} \right) \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_k} \left( n_k e^{i(\epsilon_k(y^0-x^0)-\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}))} + (1+n_k)e^{-i(\epsilon_k(y^0-x^0)-\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}))} \right) \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_k} e^{-i(\epsilon_k(y^0-x^0)-\mathbf{k}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{x}))} + \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{n_k}{2\epsilon_k} \left( e^{-i\epsilon_k(x^0-y^0)-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} + e^{i\epsilon_k(x^0-y^0)+i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{y})} \right).
 \end{aligned}$$

La partie indépendante de la température est, à nouveau, la même que celle calculée pour l'amplitude sur le vide. La partie dépendante de la température est identique à celle de  $iD^{+-}$ . Par conséquent, les propagateurs  $iD^{++}$  et  $iD^{--}$  s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 iD^{++}(x, y) &= \Theta[x^0 - y^0]iD^{-+}(x, y) + \Theta[x^0 - y^0]iD^{+-}(x, y) \\
 &= \Theta[x^0 - y^0]iD_{vac}^{-+}(x, y) + \Theta[x^0 - y^0]iD_{vac}^{+-}(x, y) + iD_{env}(x, y) \\
 &= iD_{vac}^{++}(x, y) + iD_{env}(x, y) \\
 iD^{--}(x, y) &= iD_{vac}^{--}(x, y) + iD_{env}(x, y).
 \end{aligned}$$

Ainsi, les propagateurs  $D^{\sigma\sigma'}$  s'écrivent tous comme la somme de leur expression sur le vide et d'une partie dépendante de la température  $D_{env}$ . En outre, cette dernière est la même pour toutes les fonctions à deux points. En résumé, le propagateur sur le contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \check{D}(p) &= \begin{pmatrix} D_{vac}^{++}(p) & D_{vac}^{+-}(p) \\ D_{vac}^{-+}(p) & D_{vac}^{--}(p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D_{env}(p) & D_{env}(p) \\ D_{env}(p) & D_{env}(p) \end{pmatrix} = \check{D}_{vac}(p) + \check{D}_T(p) \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} & -2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[-p^0] \\ -2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[+p^0] & \frac{-1}{p^2 - m^2 - i0} \end{pmatrix} - 2i\pi\delta[p^2 - m^2]n_p \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

en fonction de la distribution de *Bose-Einstein*  $n_p = [e^{\beta\epsilon_p} - 1]^{-1}$ .

### Boson chargé : champ scalaire non-hermitien

On applique les mêmes développements à un champ non-hermitien. Ce dernier s'écrit

$$\varphi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_k} [a(\mathbf{k})e^{-i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} + b^\dagger(\mathbf{k})e^{i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})}].$$

dont les seules relations de commutation non nulles vérifiées par les opérateurs sont :

$$[a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3 2\epsilon_k \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

Les propagateurs causaux sont définis par les relations

$$\begin{aligned} iD^{++}(x, y) &= \text{Tr}\{\hat{\rho} \hat{T}[\varphi(x)\varphi^\dagger(y)], \\ iD^{--}(x, y) &= \text{Tr}\{\hat{\rho} \hat{T}^*[\varphi(x)\varphi^\dagger(y)]\}, \\ iD^{+-}(x, y) &= \text{Tr}\{\hat{\rho} \varphi^\dagger(y)\varphi(x)\}, \\ iD^{-+}(x, y) &= \text{Tr}\{\hat{\rho} \varphi(x)\varphi^\dagger(y)\}. \end{aligned}$$

Comme précédemment, le calcul des moyennes d'ensemble est fait pour un spectre discret :  $[a_k, a_p^\dagger] = [b_k, b_p^\dagger] = \delta_{k,p}$ . En outre, on introduit les nombres de charges

$$\hat{N}_{a,k} = a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}), \quad \hat{N}_{b,k} = b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k}).$$

La fonction de partition du système s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H} - \zeta\hat{Q})} = \sum_{\{n\}} \langle \{n\} | \exp[-\beta \sum_k \{\epsilon_k (a_k^\dagger a_k + b_k^\dagger b_k) - \zeta (a_k^\dagger a_k - b_k^\dagger b_k)\}] | \{n\} \rangle \\ &= \sum_{\{n\}} \langle \{n\} | \exp[-\beta \sum_k \{(\epsilon_k - \zeta) a_k^\dagger a_k + (\epsilon_k + \zeta) b_k^\dagger b_k\}] | \{n\} \rangle \\ &= \prod_k \text{Tr}_k \exp[-\beta(\epsilon_k - \zeta) N_{a,k}] \prod_k \text{Tr}_k \exp[-\beta(\epsilon_k + \zeta) N_{b,k}] \\ &= \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)}} \prod_k \frac{1}{1 - e^{-\beta(\epsilon_k + \zeta)}} \end{aligned}$$

Dans les expressions qui précèdent,  $\text{Tr}_k$  désigne la trace sur tous les états à  $N$  particules pour une valeur fixe de l'impulsion  $k$ . Les nombres d'occupation moyens sont donc obtenus *via*

$$\begin{aligned}
 n_p^- &= \langle a_p^\dagger a_p \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho} a_p^\dagger a_p] \\
 &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\{n\}} \langle \{n\} | \exp[-\beta \sum_k \{(\epsilon_k - \zeta) \hat{N}_{a,k} + (\epsilon_k + \zeta) \hat{N}_{b,k}\}] \hat{N}_{a,p} | \{n\} \rangle \\
 &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \text{Tr}_p e^{-\beta \{(\epsilon_k - \zeta) \hat{N}_{a,k} \hat{N}_{a,p}\}} \prod_{k \neq p} \text{Tr}_k e^{-\beta(\epsilon_k + \zeta) \hat{N}_{a,k}} \prod_k \text{Tr}_k e^{-\beta(\epsilon_k + \zeta) \hat{N}_{b,k}} \\
 &= \frac{\text{Tr}_p [e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta) \hat{N}_{a,k}} \hat{N}_{a,p}]}{\text{Tr}_p [e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta) \hat{N}_{a,k}}]} = \frac{\sum_n n e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)n}}{\sum_n e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)n}} = -\frac{\frac{\partial}{\partial \beta(\epsilon_k - \zeta)} \sum_n e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)n}}{[1 - e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)}]^{-1}} \\
 &= -\frac{\frac{\partial}{\partial \beta(\epsilon_k - \zeta)} [1 - e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)}]^{-1}}{[1 - e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)}]^{-1}} = \frac{e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)} [1 - e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)}]^{-2}}{[1 - e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)}]^{-1}} = \frac{e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)}}{1 - e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)}} \\
 &= \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_k - \zeta)} - 1}
 \end{aligned}$$

et, de la même façon, par

$$n_p^+ = \langle b_p^\dagger b_p \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_p + \zeta)} - 1}.$$

Pour des impulsions différentes, on obtient les résultats suivants (de la même manière que dans le cas du champ hermitien) :

$$\langle a_p^\dagger a_k \rangle = \delta_{p,k} n_p^-, \quad \langle b_p^\dagger b_k \rangle = \delta_{p,k} n_p^+,$$

et comme conséquence des relations de commutation, les expressions précédentes conduisent à :

$$\langle a_p a_k^\dagger \rangle = \langle [a_p, a_k^\dagger] \rangle + \langle a_k^\dagger a_p \rangle = \delta_{p,k} [1 + n_p^-], \quad \langle b_p b_k^\dagger \rangle = \delta_{p,k} [1 + n_p^+].$$

Enfin, on peut aisément vérifier que toutes les autres moyennes sont nécessairement nulles (non conservation du nombre de charges sur chaque secteur). La limite continue des valeurs moyennes précédentes correspond aux égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
 \langle a^\dagger(\mathbf{p}) a(\mathbf{k}) \rangle &= (2\pi)^3 2\epsilon_k \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) n_k^-, & \langle a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{p}) \rangle &= (2\pi)^3 2\epsilon_k \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) [1 + n_k^-], \\
 \langle b^\dagger(\mathbf{p}) b(\mathbf{k}) \rangle &= (2\pi)^3 2\epsilon_k \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) n_k^+, & \langle b(\mathbf{k}) b^\dagger(\mathbf{p}) \rangle &= (2\pi)^3 2\epsilon_k \delta^{(3)}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) [1 + n_k^+],
 \end{aligned}$$

les autres moyennes restant nulles. Le calcul de  $D^{-+}$  donne :

$$\begin{aligned}
 iD^{-+}(x, y) &= \text{Tr}\{\hat{\rho} \varphi(x) \varphi^\dagger(y)\} \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\epsilon_k \epsilon_p} \left[ \langle a(\mathbf{k}) a^\dagger(\mathbf{p}) \rangle e^{-i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x}) + i(\epsilon_p y^0 - \mathbf{p}\mathbf{y})} + \langle b^\dagger(\mathbf{k}) b(\mathbf{p}) \rangle e^{i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x}) - i(\epsilon_p y^0 - \mathbf{p}\mathbf{y})} \right] \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_k} \left[ [1 + n_k^-] e^{-i[\epsilon_k(x^0 - y^0) - \mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y})]} + n_k^+ e^{i[\epsilon_k(x^0 - y^0) - \mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y})]} \right] \\
 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta[k^2 - m^2] \Theta[k^0] e^{-ik(x-y)} \\
 &\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi \delta[k^2 - m^2] e^{-ik(x-y)} \left[ n_k^- \Theta[+k^0] + n_k^+ \Theta[-k^0] \right]
 \end{aligned}$$

De même pour le propagateur  $D^{+-}$  :

$$\begin{aligned}
 iD^{+-}(x, y) &= \text{Tr}\{\hat{\rho} \varphi^\dagger(y)\varphi(x)\} \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4\epsilon_k\epsilon_p} [\langle a^\dagger(\mathbf{p})a(\mathbf{k}) \rangle e^{-i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} e^{+i(\epsilon_p y^0 - \mathbf{p}\mathbf{y})} + \langle b(\mathbf{p})b^\dagger(\mathbf{k}) \rangle e^{i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} e^{-i(\epsilon_p y^0 - \mathbf{p}\mathbf{y})}] \\
 &= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_k} [n_k^- e^{-i[\epsilon_k(x^0 - y^0) - \mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y})]} + [1 + n_k^+] e^{i[\epsilon_k(x^0 - y^0) - \mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y})]}] \\
 &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta[k^2 - m^2]\Theta[-k^0] e^{-ik(x-y)} \\
 &\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} 2\pi\delta[k^2 - m^2] e^{-ik(x-y)} \left[ n_k^- \Theta[+k^0] + n_k^+ \Theta[-k^0] \right]
 \end{aligned}$$

Les contributions indépendantes de la température sont donc exactement les mêmes que celles calculées sur le vide ; les propagateurs  $iD^{+-}$  et  $iD^{-+}$  ont la même dépendance en température :

$$D^{+-} = D_{vac}^{+-} + D_{env}, \quad D^{-+} = D_{vac}^{-+} + D_{env}.$$

Par conséquent, les expressions des propagateurs  $D^{++}$  et  $D^{--}$  sont également données par :

$$D^{++} = D_{vac}^{++} + D_{env}, \quad D^{--} = D_{vac}^{--} + D_{env}.$$

En résumé, le propagateur d'un champ non-hermitien sur le contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  a la même expression que celle obtenue pour les bosons neutres en remplaçant la distribution de *Bose-Einstein* par l'expression  $(n_k^- \Theta[+k^0] + n_k^+ \Theta[-k^0])$  où  $n_k^\pm = [\exp(\beta(\epsilon_k \pm \zeta)) - 1]^{-1}$ .

### Fermions :

On applique la même démarche à l'opérateur de champ

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{m}{\epsilon_k} \sum_{\alpha=1,2} [b_\alpha(\mathbf{k})u^{(\alpha)}(\mathbf{k})e^{-i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})} + d_\alpha^\dagger(\mathbf{k})v^{(\alpha)}(\mathbf{k})e^{+i(\epsilon_k x^0 - \mathbf{k}\mathbf{x})}]$$

où les seules relations d'anti-commutation non nulles vérifiées par les opérateurs de création et d'annihilation s'écrivent

$$\{b_\alpha(\mathbf{k}), b_\beta^\dagger(\mathbf{p})\} = \{d_\alpha(\mathbf{p}), d_\beta^\dagger(\mathbf{k})\} = (2\pi)^3 \frac{\epsilon_k}{m} \delta_{\alpha,\beta} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}).$$

Les propagateurs causaux sont définis sur un environnement par les relations

$$\begin{aligned}
 iG^{++}(x, y) &= \text{Tr}\{\hat{\rho} \hat{T}[\psi(x)\bar{\psi}(y)], \\
 iG^{--}(x, y) &= \text{Tr}\{\hat{\rho} \hat{T}^*[\psi(x)\bar{\psi}(y)]\}, \\
 iG^{+-}(x, y) &= \text{Tr}\{\hat{\rho} \bar{\psi}(y)\psi(x)\}, \\
 iG^{-+}(x, y) &= -\text{Tr}\{\hat{\rho} \psi(x)\bar{\psi}(y)\}.
 \end{aligned}$$

Pour un spectre discret, les relations d'anti-commutation non nulles s'écrivent  $\{b_{\alpha,k}, b_{\beta,p}^\dagger\} = \{d_{\alpha,k}, d_{\beta,p}^\dagger\} = \delta_{\alpha,\beta}\delta_{k,p}$ . En outre, la limite continue est obtenue en remplaçant les variables discrètes selon les relations

$$\delta_{k,p} \sim > \frac{(2\pi)^3}{V}\delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}), \quad b_{\alpha,k} \sim > \sqrt{\frac{m}{\epsilon_k V}}b_\alpha(\mathbf{k}), \quad d_{\alpha,k} \sim > \sqrt{\frac{m}{\epsilon_k V}}d_\alpha(\mathbf{k}),$$

puis en faisant tendre le volume  $V$  contenant les particules vers l'infini. Enfin, on introduit les nombres de charges  $\hat{N}_{b,k,\alpha} = b_{\alpha,k}^\dagger b_{\alpha,k}$  et  $\hat{N}_{d,k,\alpha} = d_{\alpha,k}^\dagger d_{\alpha,k}$ . Le *Hamiltonien*  $\hat{H}$  de fermions libres et la charge totale  $\hat{Q}$  s'écrivent :

$$\hat{H} = \sum_k \epsilon_k \sum_{\alpha=1,2} [b_{\alpha,k}^\dagger b_{\alpha,k} + d_{\alpha,k}^\dagger d_{\alpha,k}], \quad \hat{Q} = \sum_k \sum_{\alpha=1,2} [b_{\alpha,k}^\dagger b_{\alpha,k} - d_{\alpha,k}^\dagger d_{\alpha,k}].$$

À partir des grandeurs précédentes, le calcul de la fonction de partition  $\mathcal{Z}$  conduit à :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \text{Tr} e^{-\beta(\hat{H} - \zeta\hat{Q})} \\ &= \sum_{\{n\}} \langle \{n\} | \exp[-\beta \sum_k \sum_{\alpha=1,2} [(\epsilon_k - \zeta)b_{\alpha,k}^\dagger b_{\alpha,k} + (\epsilon_k + \zeta)d_{\alpha,k}^\dagger d_{\alpha,k}]] | \{n\} \rangle \\ &= \prod_{k,\alpha} \text{Tr}_{k,\alpha} \exp[-\beta(\epsilon_k - \zeta)\hat{N}_{b,k,\alpha}] \prod_{k,\alpha} \text{Tr}_{k,\alpha} \exp[-\beta(\epsilon_k + \zeta)\hat{N}_{d,k,\alpha}] \\ &= \prod_{k,\alpha} \sum_{n=0,1} \exp[-\beta(\epsilon_k - \zeta)n] \prod_{k,\alpha} \sum_{n=0,1} \exp[-\beta(\epsilon_k + \zeta)n] \\ &= \prod_{k,\alpha} \left(1 + \exp[-\beta(\epsilon_k - \zeta)]\right) \prod_{k,\alpha} \left(1 + \exp[-\beta(\epsilon_k + \zeta)]\right) \end{aligned}$$

$\text{Tr}_{k,\alpha}$  désigne la trace sur les états à  $N$  particules pour une impulsion  $k$  et un spin  $\alpha$  fixe. Le calcul des nombres d'occupation moyens donne :

$$\begin{aligned} n_p^- &= \langle b_{\beta,p}^\dagger b_{\beta,p} \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho} b_{\beta,p}^\dagger b_{\beta,p}] \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \sum_{\{n\}} \langle \{n\} | \exp[-\beta \sum_k \sum_{\alpha} \{(\epsilon_k - \zeta)\hat{N}_{b,k,\alpha} + (\epsilon_k + \zeta)\hat{N}_{d,k,\alpha}\}] \hat{N}_{b,k,\beta} | \{n\} \rangle \\ &= \frac{1}{\mathcal{Z}} \text{Tr}_{p,\beta} [e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)\hat{N}_{b,k,\beta}} \hat{N}_{b,k,\beta}] \text{Tr}_{p,\alpha \neq \beta} [e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)\hat{N}_{b,k,\alpha}}] \prod_{k \neq p, \alpha} \text{Tr}_{k,\alpha} e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)\hat{N}_{b,k,\alpha}} \prod_{k,\alpha} \text{Tr}_{k,\alpha} e^{-\beta(\epsilon_k + \zeta)\hat{N}_{d,k,\alpha}} \\ &= \frac{\text{Tr}_{p,\beta} [e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)\hat{N}_{b,k,\beta}} \hat{N}_{b,k,\beta}]}{\text{Tr}_{p,\beta} [e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)\hat{N}_{b,k,\beta}}]} = \frac{e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)}}{1 + e^{-\beta(\epsilon_k - \zeta)}} \end{aligned}$$

c'est-à-dire finalement

$$n_p^- = \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_k - \zeta)}} \quad \text{et} \quad n_p^+ = \langle d_{\beta,p}^\dagger d_{\beta,p} \rangle = \frac{1}{1 + e^{\beta(\epsilon_k + \zeta)}}.$$

En outre, on peut montrer de la même manière que

$$\langle b_{\alpha,k}^\dagger b_{\beta,p} \rangle = \delta_{k,p} \delta_{\alpha,\beta} n_k^-, \quad \langle d_{\alpha,k}^\dagger d_{\beta,p} \rangle = \delta_{k,p} \delta_{\alpha,\beta} n_k^+$$

Ces résultats conduisent aux expressions :

$$\begin{aligned}\langle b_{\beta,p} b_{\alpha,k}^\dagger \rangle &= \langle \{b_{\beta,p}, b_{\alpha,k}^\dagger\} \rangle - \langle b_{\alpha,k}^\dagger b_{\beta,p} \rangle = \delta_{k,p} \delta_{\alpha,\beta} [1 - n_k^-] \\ \langle b_{\beta,p} b_{\alpha,k}^\dagger \rangle &= \delta_{k,p} \delta_{\alpha,\beta} [1 - n_k^+].\end{aligned}$$

Toutes les autres moyennes sont nulles. L'expression continue des moyennes non nulles est

$$\begin{aligned}\langle b_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) b_\beta(\mathbf{p}) \rangle &= (2\pi)^3 \frac{m}{\epsilon_k} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \delta_{\alpha,\beta} n_k^-, \\ \langle b_\beta(\mathbf{p}) b_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) \rangle &= (2\pi)^3 \frac{m}{\epsilon_k} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \delta_{\alpha,\beta} [1 - n_k^-], \\ \langle d_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) d_\beta(\mathbf{p}) \rangle &= (2\pi)^3 \frac{m}{\epsilon_k} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \delta_{\alpha,\beta} n_k^+, \\ \langle d_\beta(\mathbf{p}) d_\alpha^\dagger(\mathbf{k}) \rangle &= (2\pi)^3 \frac{m}{\epsilon_k} \delta^{(3)}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \delta_{\alpha,\beta} [1 - n_k^+].\end{aligned}$$

Ces moyennes permettent le calcul des propagateurs :

$$\begin{aligned}iG^{-+}(x, y) &= -\text{Tr}[\hat{\rho}\psi(x)\bar{\psi}(y)] \\ &= -\int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{\epsilon_q \epsilon_p} \sum_{\alpha,\beta} \left( \langle b_\alpha(\mathbf{p}) b_\beta^\dagger(\mathbf{q}) \rangle u^{(\alpha)}(\mathbf{p}) \bar{u}^{(\beta)}(\mathbf{q}) e^{-i(\epsilon_p x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} e^{+i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \right. \\ &\quad \left. + \langle d_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) d_\beta(\mathbf{q}) \rangle v^{(\alpha)}(\mathbf{p}) \bar{v}^{(\beta)}(\mathbf{q}) e^{+i(\epsilon_p x^0 - \mathbf{p}\cdot\mathbf{x})} e^{-i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{q}\cdot\mathbf{y})} \right) \\ &= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_p} \left( [1 - n_p^-] (\not{p} + m) e^{-i(\epsilon_p(x^0 - y^0) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y}))} + n_p^+ (\not{p} - m) e^{+i(\epsilon_p(x^0 - y^0) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y}))} \right) \\ &= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_p} (\not{p} + m) e^{-i(\epsilon_p(x^0 - y^0) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y}))} \\ &\quad + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_p} \left( n_p^- (\not{p} + m) e^{-i(\epsilon_p(x^0 - y^0) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y}))} + n_p^+ (-\not{p} + m) e^{+i(\epsilon_p(x^0 - y^0) - \mathbf{p}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{y}))} \right) \\ &= -\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2\pi \delta[p^2 - m^2] \Theta[p^0] (\not{p} + m) e^{-ip(x-y)} \\ &\quad + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2\pi \delta[p^2 - m^2] \Theta[p^0] \left( n_p^- (\not{p} + m) e^{-ip(x-y)} + n_p^+ (-\not{p} + m) e^{+ip(x-y)} \right) \\ &= -(i\not{\partial} + m) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2\pi \delta[p^2 - m^2] \Theta[p^0] e^{-ip(x-y)} \\ &\quad + \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} (\not{p} + m) 2\pi \delta[p^2 - m^2] e^{-ip(x-y)} (n_p^- \Theta[p^0] + n_p^+ \Theta[p^0]) \\ &= -(i\not{\partial} + m) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2\pi \delta[p^2 - m^2] \Theta[p^0] e^{-ip(x-y)} \\ &\quad + (i\not{\partial} + m) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2\pi \delta[p^2 - m^2] e^{-ip(x-y)} (n_p^- \Theta[p^0] + n_p^+ \Theta[p^0]).\end{aligned}$$

Le propagateur  $iG^{-+}$  s'écrit donc comme la différence d'un terme égal à la fonction à deux points sur le vide  $iG_{vac}^{-+}$  et d'une partie dépendante de la température  $iG_{env}$  :

$$iG^{-+}(x, y) = iG_{vac}^{-+}(x, y) - iG_{env}(x, y)$$

avec :

$$\begin{aligned} iG_{vac}^{-+}(x, y) &= -(i\cancel{\partial} + m)iD_{vac}^{-+}(x, y), \\ iG_{env}(x, y) &= -(i\cancel{\partial} + m) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2\pi\delta[p^2 - m^2] e^{-ip(x-y)} (n_k^- \Theta[p^0] + n_k^+ \Theta[p^0]). \end{aligned}$$

En outre,  $iG_{env}(x, y) = -(i\cancel{\partial} + m)D_{env}(x, y)$  en remplaçant les distributions de *Bose-Einstein* par celles de *Fermi* dans l'expression de  $D_{env}$ . Pour obtenir l'expression de  $G^{+-}$ , on commence par calculer la transposée sur les spineurs de son expression :

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\hat{\rho} \bar{\psi}(y)\psi(x)]^{tr} &= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{\epsilon_q \epsilon_p} \sum_{\alpha, \beta} \text{Tr} \left( \hat{\rho} [b_\beta^\dagger(\mathbf{q}) \bar{u}^{(\beta)}(\mathbf{q}) e^{+i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{y})} + d_\beta(\mathbf{q}) \bar{v}^{(\beta)}(\mathbf{q}) e^{-i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{y})}] \right. \\ &\quad \left. [b_\alpha(\mathbf{p}) u^{(\alpha)}(\mathbf{p}) e^{-i(\epsilon_p x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} + d_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) v^{(\alpha)}(\mathbf{k}) e^{+i(\epsilon_p x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})}] \right)^{tr} \\ &= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{\epsilon_q \epsilon_p} \sum_{\alpha, \beta} \left[ \langle b_\beta^\dagger(\mathbf{q}) b_\alpha(\mathbf{p}) \rangle \bar{u}^{(\beta)}(\mathbf{q}) u^{(\alpha)}(\mathbf{p}) e^{+i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) - i(\epsilon_p x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right. \\ &\quad + \langle d_\beta(\mathbf{q}) b_\alpha(\mathbf{p}) \rangle \bar{v}^{(\beta)}(\mathbf{q}) u^{(\alpha)}(\mathbf{p}) e^{-i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}) - i(\epsilon_p x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \\ &\quad + \langle b_\beta^\dagger(\mathbf{q}) d_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) \rangle \bar{u}^{(\beta)}(\mathbf{q}) v^{(\alpha)}(\mathbf{k}) e^{+i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) + i(\epsilon_p x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \\ &\quad \left. + \langle d_\beta(\mathbf{q}) d_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) \rangle \bar{v}^{(\beta)}(\mathbf{q}) v^{(\alpha)}(\mathbf{k}) e^{-i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}) + i(\epsilon_p x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right]^{tr} \\ &= \int \frac{d^3p d^3q}{(2\pi)^6} \frac{m^2}{\epsilon_q \epsilon_p} \sum_{\alpha, \beta} \left[ \langle b_\beta^\dagger(\mathbf{q}) b_\alpha(\mathbf{p}) \rangle u^{(\alpha)}(\mathbf{p}) \bar{u}^{(\beta)}(\mathbf{q}) e^{+i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{y}) - i(\epsilon_p x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right. \\ &\quad \left. + \langle d_\beta(\mathbf{q}) d_\alpha^\dagger(\mathbf{p}) \rangle v^{(\alpha)}(\mathbf{k}) \bar{v}^{(\beta)}(\mathbf{q}) e^{-i(\epsilon_q y^0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}) + i(\epsilon_p x^0 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x})} \right] \\ &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_p} \left[ n_p^- (\cancel{p} + m) e^{-i[\epsilon_p(x^0 - y^0) - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})]} + [1 - n_p^+] (\cancel{k} - m) e^{+i[\epsilon_p(x^0 - y^0) - \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y})]} \right] \\ &= \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0) (\cancel{p} - m) e^{+ip(x-y)} \\ &\quad + \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0) \left[ n_p^- (\cancel{k} + m) e^{-ip(x-y)} + n_p^+ (-\cancel{k} + m) e^{+ip(x-y)} \right] \\ &= - \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(p^2 - m^2) \Theta(-p^0) (\cancel{p} + m) e^{-ip(x-y)} \\ &\quad + \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(p^2 - m^2) (\cancel{k} + m) e^{-ip(x-y)} [n_p^- \Theta(p^0) + n_p^+ \Theta(-p^0)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\hat{\rho} \bar{\psi}(y)\psi(x)]^{tr} &= -(i\hat{\not{p}} + m^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(p^2 - m^2)\Theta(-p^0)e^{-ip(x-y)} \\ &\quad + (i\hat{\not{p}} + m^2) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} 2\pi\delta(p^2 - m^2)e^{-ip(x-y)} [n_p^- \Theta(p^0) + n_p^+ \Theta(-p^0)] \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$G^{+-}(x, y) = \text{Tr}[\hat{\rho} \bar{\psi}(y)\psi(x)]^{tr} = -(i\hat{\not{p}} + m^2)D^{+-}(x, y) - iG_{env}(x, y).$$

Enfin, les propagateurs  $G^{++}$  et  $G^{--}$  se déduisent des relations précédentes et leurs expressions valent :

$$\begin{aligned} G^{++}(x, y) &= -\Theta[x^0 - y^0]G^{-+}(x, y) - \Theta[y^0 - x^0]G^{+-}(x, y) = G_{vac}^{++}(x, y) + iG_{env}(x, y) \\ G^{--}(x, y) &= -\Theta[y^0 - x^0]G^{-+}(x, y) - \Theta[x^0 - y^0]G^{+-}(x, y) = G_{vac}^{--}(x, y) + iG_{env}(x, y). \end{aligned}$$

En résumé, le propagateur sur le contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \check{G}(p) &= \begin{pmatrix} G_{vac}^{++}(p) & G_{vac}^{+-}(p) \\ G_{vac}^{-+}(p) & G_{vac}^{--}(p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G_{env}(p) & -G_{env}(p) \\ -G_{env}(p) & G_{env}(p) \end{pmatrix} \\ &= (p + m) \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2 - m^2 + i0} & +2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[-p^0] \\ +2i\pi\delta[p^2 - m^2]\Theta[+p^0] & \frac{-1}{p^2 - m^2 - i0} \end{pmatrix} \\ &\quad + 2i\pi(p + m)\delta[p^2 - m^2](n_p^- \Theta[+p^0] + n_p^+ \Theta[-p^0]) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

en fonction des distributions  $n_p^\pm = [e^{\beta(\epsilon_p \pm \zeta)} + 1]^{-1}$ .

## A.2.2 Propagateurs physiques en présence d'un environnement

### Bosons :

Les propagateurs physiques peuvent s'écrire comme des combinaisons linéaires des fonctions de Green  $D^{\sigma\sigma'}$ . Comme ces dernières présentent toutes la même expression au niveau de leur partie thermique, à savoir  $D_{env}$ , les propagateurs physiques, définis par une différence de tels propagateurs causaux, seront ainsi toujours indépendants de la température : c'est le cas de tous les propagateurs sauf  $D^c$ . Ainsi, les quantités indépendantes de la température sont :

$$\begin{aligned} D^a(p) &= D^{++}(p) - D^{-+}(p) = D_{vac}^a(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 - \text{sgn}[p^0].i0}, \\ D^r(p) &= D^{++}(p) - D^{+-}(p) = D_{vac}^r(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 + \text{sgn}[p^0].i0}, \\ D^n(p) &= \frac{1}{2}[D^{++}(p) - D^{--}(p)] = D_{vac}^n(p) = \text{Pp} \left[ \frac{1}{p^2 - m^2} \right], \\ D^f(p) &= \frac{1}{2}[D^{-+}(p) - D^{+-}(p)] = D_{vac}^f(p) = -i\pi\delta[p^2 - m^2]\text{sgn}[p^0]. \end{aligned}$$

Ces expressions correspondent à celles des propagateurs sur le vide. Le seul propagateur dépendant de la température est  $D^c$ . Il s'écrit :

$$\begin{aligned} 2iD^c(p) &= D^{++}(p) + D^{--}(p) = D_{vac}^{++}(p) + D_{vac}^{--}(p) + 2D_{env}(p) \\ &= -2i\pi\delta[p^2 - m^2](1 + 2n_p^- \Theta[p^0] + 2n_p^+ \Theta[-p^0]) \\ &= -2i\pi\delta[p^2 - m^2](1 + 2n_p^-) \Theta[p^0] - 2i\pi\delta[p^2 - m^2](1 + 2n_p^+) \Theta[-p^0] \end{aligned}$$

avec  $n_p^\pm = [\exp[\beta(\epsilon_p \pm \zeta)] - 1]^{-1}$ . Or, en notant  $E_p^\pm = \epsilon_p \pm \zeta$ , on a

$$1 + 2n_p^\pm = \frac{e^{\beta E_p^\pm} + 1}{e^{\beta E_p^\pm} - 1} = \frac{e^{\beta E_p^\pm/2} + e^{-\beta E_p^\pm/2}}{e^{\beta E_p^\pm/2} - e^{-\beta E_p^\pm/2}} = \coth\left[\frac{\beta E_p^\pm}{2}\right] = \coth\left[\frac{\beta \epsilon_p}{2} \pm \frac{\beta \zeta}{2}\right],$$

Cette expression correspond au rapport entre les distributions de *Fermi* et de *Bose-Einstein*. Finalement,  $D^c$  s'écrit

$$D^c(p) = -\pi\delta[p^2 - m^2] \coth\left[\frac{\beta(\epsilon_p - \text{sgn}(p^0)\zeta)}{2}\right]$$

et plus particulièrement, lorsque  $\zeta \rightarrow 0$ , le propagateur  $D^c$  se réduit à

$$D^c(p) = -\pi\delta[p^2 - m^2] \coth\left[\frac{\beta \epsilon_p}{2}\right].$$

### Fermions :

De même que précédemment, les propagateurs retardé  $G^r$ , avancé  $G^a$ , proche  $G^n$  et lointain  $G^f$  sont indépendants de la température. Ils s'écrivent :

$$\begin{aligned} G^a(p) &= G^{++}(p) + G^{-+}(p) = G_{vac}^a(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 - \text{sgn}[p^0] \cdot i0} \\ G^r(p) &= G^{++}(p) - G^{+-}(p) = G_{vac}^r(p) = \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + \text{sgn}[p^0] \cdot i0} \\ G^n(p) &= G^{++}(p) - G^{--}(p) = (\not{p} + m) \text{P.P.} \left[ \frac{1}{p^2 - m^2} \right], \\ G^f(p) &= -G^{-+}(p) + G^{+-}(p) = -2i\pi(\not{p} + m)\delta[p^2 - m^2] \text{sgn}[p^0]. \end{aligned}$$

À nouveau, le seul propagateur dépendant de la température est  $G^c$  dont l'expression est

$$\begin{aligned} 2iG^c(p) &= G^{++}(p) + G^{--}(p) = -(\not{p} + m)2i\pi\delta[p^2 - m^2] \left[ 1 - 2n_p^- \Theta[p^0] + 2n_p^+ \Theta[-p^0] \right] \\ &= -(\not{p} + m) \left( 2i\pi\delta[p^2 - m^2](1 - 2n_p^-) \Theta[p^0] + 2i\pi\delta[p^2 - m^2](1 - 2n_p^+) \Theta[-p^0] \right) \end{aligned}$$

En posant  $E_p^\pm = \epsilon_p \pm \zeta$ , on a

$$1 - 2n_p^\pm = \frac{e^{\beta E_p^\pm} - 1}{e^{\beta E_p^\pm} + 1} = \tanh\left[\frac{\beta E_p^\pm}{2}\right] = \tanh\left[\frac{\beta \epsilon_p}{2} \pm \frac{\beta \zeta}{2}\right].$$

Cette expression correspond ainsi au rapport inverse de celui calculé dans la partie traitant des bosons. L'expression finale de  $G^c(p)$  est donc

$$G^c(p) = -(\not{p} + m)\pi\delta[p^2 - m^2] \tanh\left[\frac{\beta(\epsilon_p - \text{sgn}(p^0)\zeta)}{2}\right]$$

et, pour  $\zeta \rightarrow 0$ , on a

$$G^c(p) = -(\not{p} + m)\pi\delta[p^2 - m^2] \tanh\left[\frac{\beta\epsilon_p}{2}\right].$$



## Annexe B

# Actions effectives et tenseur de polarisation

Cette annexe regroupe la plupart des développements nécessaires à la détermination des équations du mouvement gouvernant les moyennes calculées pour un système composé d'un champ électromagnétique en présence de différentes charges. Dans une première partie, le calcul des différentes fonctionnelles étudiées est détaillé dont notamment celui des actions effectives. Dans une deuxième partie, les propriétés et définitions relatives au tenseur de polarisation, ainsi que celles de l'énergie propre, sont synthétisées. Enfin, dans la dernière partie de cette annexe, le tenseur de polarisation est calculé dans le vide ou en présence d'un environnement (au sens d'un réservoir de chaleur et de particules).

### Notations

Les symboles propres à la structure du formalisme *CTP* sont omis : les différentes variables dynamiques, ainsi que les sources, écrites sans indice désignent leur structure sur le contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  tandis qu'une grandeur définie suivant une de ces branches présente toujours un indice :

$$\psi_\tau = \begin{pmatrix} \psi_\tau^+ \\ \psi_\tau^- \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}_\tau = \begin{pmatrix} \bar{\psi}_\tau^+ \\ \bar{\psi}_\tau^- \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A^+ \\ A^- \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} j^+ \\ j^- \end{pmatrix}, \quad a_\tau = \begin{pmatrix} a_\tau^+ \\ a_\tau^- \end{pmatrix}.$$

Les propagateurs suivent les mêmes conventions. En outre, on définit les matrices suivantes agissant sur les différentes branches du contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  :

$$\check{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \check{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

où les symboles de structure sont exceptionnellement maintenus par soucis de clarté. Enfin, les inverses de propagateurs sont définis en tenant compte des conditions de bord du formalisme *CTP* (intégration du degré de liberté refermant le contour) ainsi que de la présence éventuelle d'un réservoir de chaleur et de particules.

## B.1 Calcul des fonctionnelles

On considère un système constitué par un champ électromagnétique en présence de différentes saveurs de charges  $e_\tau$ . Éventuellement, une partie des ces charges peut être laissée spectatrice. Le système étudié est globalement neutre dans la limite thermodynamique. En outre, ce système peut être en contact d'un réservoir de charges et de chaleur : l'expression de l'influence d'un tel environnement est contenue dans celle des propagateurs utilisés. Les observables recherchés correspondent à la valeur moyenne *in-in* du champ électromagnétique ainsi qu'à celle des différents courants de charges : ces quantités sont déduites des champs et des sources effectifs leur correspondant dans la limite où l'unitarité (au sens du formalisme *CTP* - cf chapitre 3) est imposée à ces termes.

### B.1.1 Approximation à une boucle

Au système étudié correspond la fonctionnelle génératrice suivante :

$$\begin{aligned}
 e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{W}[a,j]} &= \int \left[ \prod_\tau \mathcal{D}[\psi_\tau] \mathcal{D}[\bar{\psi}_\tau] \right] \mathcal{D}[A] \exp \left\{ i \sum_\tau \sum_{\sigma,\sigma'} \bar{\psi}_\tau^\sigma [(G_{0,\tau}^{-1})^{\sigma\sigma'} + \delta^{\sigma\sigma'} (q_\tau^\sigma - e_\tau \sigma \mathcal{A}^\sigma)] \psi_\tau^{\sigma'} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{i}{2} A D_0^{-1} A + ijA + i \sum_\tau e_\tau \Theta_\tau \cdot A - i \sum_\tau \Theta_\tau \check{\sigma} \cdot a_\tau \right\} \\
 &= \int \mathcal{D}[A] \exp \left\{ \sum_\tau \text{Tr} \ln \left[ G_{0,\tau}^{-1} + \begin{pmatrix} \not{q}_\tau^+ - e_\tau \mathcal{A}^+ & 0 \\ 0 & \not{q}_\tau^- + e_\tau \mathcal{A}^- \end{pmatrix} \right] + \frac{i}{2} A D_0^{-1} A + ijA \right. \\
 &\quad \left. + i \sum_\tau e_\tau \Theta_\tau \cdot A - i \sum_\tau \Theta_\tau \check{\sigma} \cdot a_\tau \right\} \\
 &= \int \mathcal{D}[A] \exp \left\{ \sum_\tau \text{Tr} \ln G_{0,\tau}^{-1}[a_\tau] + \sum_\tau \text{Tr} \ln \left[ \mathbb{1} - e_\tau G_{0,\tau}[a_\tau] \check{\sigma} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^+ & 0 \\ 0 & \mathcal{A}^- \end{pmatrix} \right] \right. \\
 &\quad \left. + \frac{i}{2} A D_0^{-1} A + ijA + i \sum_\tau e_\tau \Theta_\tau \cdot A - i \sum_\tau \Theta_\tau \check{\sigma} \cdot a_\tau \right\}
 \end{aligned}$$

avec :

$$G_{0,\tau}^{-1}[a_\tau] = G_{0,\tau}^{-1} + \begin{pmatrix} \not{q}_\tau^+ & 0 \\ 0 & \not{q}_\tau^- \end{pmatrix}, \quad G_{0,\tau}[a_\tau] = \left[ G_{0,\tau}^{-1} + \begin{pmatrix} \not{q}_\tau^+ & 0 \\ 0 & \not{q}_\tau^- \end{pmatrix} \right]^{-1}.$$

Dans la fonctionnelle génératrice précédente, a été introduite une densité de charge extérieure *classique* et *homogène*  $\Theta_\tau$  pour chaque saveur  $\tau$ . En outre, celles-ci sont alors doublées pour satisfaire les règles du formalisme *closed time path*. Ces densités permettent d'annuler (simplement) les divergences IR propres aux interactions électromagnétiques en rendant neutre le gaz de charges dans la limite thermodynamique sans toutefois modifier les propriétés de polarisation du milieu<sup>1</sup> : concrètement, comme nous le verrons par la suite, ces densités permettent d'éliminer les *tadpoles* qui sont responsables de ces divergences à longues distances.

---

1. Les propriétés de polarisation du système restent inchangées puisque les densités introduites sont homogènes.

En outre, nous sommes tenus de coupler les densités extérieures  $\Theta_\tau$  aux différents champs extérieurs  $a_\tau$  introduits pour calculer les moyennes des courants de charges : ces champs interagissent nécessairement avec les densités de charges introduites pour compenser les *tadpôles* intervenant dans le calcul de la moyenne du champ car ces densités sont chargées. En outre, l'expression concrète du couplage entre les champs extérieurs  $a_\tau$  et les densités extérieures  $\Theta_\tau$  est liée aux conventions adoptées pour définir la valeur moyenne des courants (les densités extérieures introduites sont mesurables). Ceci fait, le système décrit est effectivement neutre dans la limite thermodynamique.

La régulation du comportement IR du système est ainsi conditionnée par des arguments de réalisme (c'est par ailleurs un effet "d'environnement") : dans la Nature, il n'existe pas de système stable chargé électriquement à très grande échelle (limite thermodynamique).

Sous approximation quadratique de l'action en terme du champ électromagnétique  $A$ , on a :

$$\begin{aligned} \sum_\tau \text{Tr} \ln \left[ \mathbb{1} - e_\tau G_{0,\tau}[a_\tau] \check{\sigma} \begin{pmatrix} \mathbb{A}^+ & 0 \\ 0 & \mathbb{A}^- \end{pmatrix} \right] &= - \sum_\tau \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_\tau^n}{n} \text{Tr} \left[ G_{0,\tau}[a_\tau] \check{\sigma} \begin{pmatrix} \mathbb{A}^+ & 0 \\ 0 & \mathbb{A}^- \end{pmatrix} \right]^n \\ &\simeq - \sum_\tau e_\tau \text{Tr} \left[ G_{0,\tau}[a_\tau] \check{\sigma} \begin{pmatrix} \mathbb{A}^+ & 0 \\ 0 & \mathbb{A}^- \end{pmatrix} \right] \\ &\quad - \sum_\tau \frac{e_\tau^2}{2} \text{Tr} \left[ G_{0,\tau}[a_\tau] \check{\sigma} \begin{pmatrix} \mathbb{A}^+ & 0 \\ 0 & \mathbb{A}^- \end{pmatrix} \right]^2 + \mathcal{O}(A^3). \end{aligned}$$

En conséquence, la partie linéaire en  $A$  de l'expression précédente modifie la source  $j$  et définit une source "effective"  $J[j, a]$ , tandis que celle quadratique en  $A$  contribue à l'inverse du propagateur du photon  $D_0^{-1}$  pour donner  $D^{-1}[a]$  :

$$\begin{aligned} e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{W}[a, j]} &= \int \mathcal{D}[A] \exp \left\{ \sum_\tau \text{Tr} \ln G_{0,\tau}^{-1}[a_\tau] - i \sum_\tau \Theta_\tau \check{\sigma} \cdot a_\tau + \frac{i}{2} A D^{-1}[a] A + i J[j, a] A + \mathcal{O}(A^3) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_\tau \text{Tr} \ln G_{0,\tau}^{-1}[a_\tau] - i \sum_\tau \Theta_\tau \check{\sigma} \cdot a_\tau - \frac{i}{2} J[a, j] \cdot D[a] \cdot J[j, a] + \mathcal{O}(\hbar^2) \right\} \\ &\quad \int \mathcal{D}[A] \exp \left\{ \frac{i}{2} A D^{-1}[a] A + \mathcal{O}(A^3) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_\tau \left( \text{Tr} \ln G_{0,\tau}^{-1}[a_\tau] - i \Theta_\tau \check{\sigma} \cdot a_\tau \right) - \frac{i}{2} J[a, j] \cdot D[a] \cdot J[a, j] - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln D^{-1}[a] + \mathcal{O}(\hbar^2) \right\} \end{aligned}$$

On cherche à évaluer les différents termes constitutifs de  $\mathcal{W}$  jusqu'à l'ordre quadratique en terme des quantités extérieures  $a_\tau$  et  $j$ . À cet ordre, la contribution d'une charge  $e_\tau$  à  $\mathcal{W}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln G_{0,\tau}^{-1}[a_\tau] &= \text{Tr} \ln G_{0,\tau}^{-1} + \text{Tr} \ln \left[ \mathbb{1} + G_{0,\tau} \begin{pmatrix} \phi_\tau^+ & 0 \\ 0 & \phi_\tau^- \end{pmatrix} \right] \\ &= \text{Tr} \ln G_{0,\tau}^{-1} + \text{Tr} \left[ G_{0,\tau} \begin{pmatrix} \phi_\tau^+ & 0 \\ 0 & \phi_\tau^- \end{pmatrix} \right] - \frac{1}{2} \text{Tr} \left[ G_{0,\tau} \begin{pmatrix} \phi_\tau^+ & 0 \\ 0 & \phi_\tau^- \end{pmatrix} \right]^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire ,

$$\begin{aligned}
 \text{Tr ln } G_{0,\tau}^{-1}[a_\tau] &= \text{Tr ln } G_{0,\tau}^{-1} + \sum_{\sigma,\sigma'} \text{tr}[G_{0,\tau}^{\sigma\sigma'} \delta^{\sigma'\sigma} \not{a}_\tau^\sigma] - \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\sigma'} \sum_{\sigma_1,\sigma_2} \text{tr}[G_{0,\tau}^{\sigma'\sigma_1} \delta^{\sigma_1\sigma} \not{a}_\tau^\sigma G_{0,\tau}^{\sigma\sigma_2} \delta^{\sigma_2\sigma'} \not{a}_\tau^{\sigma'}] \\
 &= \text{Tr ln } G_{0,\tau}^{-1} + \sum_{\sigma} \text{tr}[G_{0,\tau}^{\sigma\sigma} \not{a}_\tau^\sigma] - \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\sigma'} \text{tr}[G_{0,\tau}^{\sigma'\sigma} \not{a}_\tau^\sigma G_{0,\tau}^{\sigma\sigma'} \not{a}_\tau^{\sigma'}] \\
 &= \text{Tr ln } G_{0,\tau}^{-1} + \sum_{\sigma} i(\tilde{G}_{1,\tau}^\sigma)_\mu (a_\tau^\sigma)^\mu - \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\sigma'} i(\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu} (a_\tau^\sigma)^\mu (a_\tau^{\sigma'})^\nu + \mathcal{O}(\hbar^2) + \mathcal{O}([a_\tau^\pm]^3)
 \end{aligned}$$

en fonction du tenseur de polarisation  $\tilde{G}_{2,\tau}$  induit par la charge  $e_\tau$  et du *tadpôle*  $\tilde{G}_{1,\tau}$  :

$$(\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu} = -i \text{tr}[G_{0,\tau}^{\sigma'\sigma} \gamma_\mu G_{0,\tau}^{\sigma\sigma'} \gamma_\nu], \quad (\tilde{G}_{1,\tau}^\sigma)_\mu = -i \text{tr}[G_{0,\tau}^{\sigma\sigma} \gamma_\mu]. \quad (\text{B.1})$$

Pour le terme définissant la source  $J[a, j]$ , l'évaluation de la partie linéaire en fonction des quantités extérieures suffit. Ce terme s'écrit :

$$\begin{aligned}
 iJ[a, j]A &= ijA - \sum_{\tau} e_\tau \text{Tr} \left[ G_{0,\tau}[a_\tau] \not{\sigma} \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & A^- \end{pmatrix} \right] + i \sum_{\tau} e_\tau \Theta_\tau \cdot A \\
 &= ijA - \sum_{\tau} e_\tau \text{Tr} \left[ G_{0,\tau} \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & -A^- \end{pmatrix} \right] + \sum_{\tau} e_\tau \text{Tr} \left[ G_{0,\tau} \begin{pmatrix} \not{a}_\tau^+ & 0 \\ 0 & \not{a}_\tau^- \end{pmatrix} G_{0,\tau} \begin{pmatrix} A^+ & 0 \\ 0 & -A^- \end{pmatrix} \right] \\
 &\quad + i \sum_{\tau} e_\tau \Theta_\tau \cdot A + \mathcal{O}([a^\pm]^2) \\
 &= ijA - i \sum_{\tau} e_\tau \sum_{\sigma} \sigma(\tilde{G}_{1,\tau}^\sigma)_\mu (A^\sigma)^\mu + i \sum_{\tau} e_\tau \sum_{\sigma,\sigma'} \sigma'(\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu} (a_\tau^\sigma)^\mu (A^{\sigma'})^\nu \\
 &\quad + i \sum_{\tau} e_\tau \sum_{\sigma} (\Theta_\tau^\sigma)_\mu (A^\sigma)^\mu + \mathcal{O}([a^\pm]^2)
 \end{aligned}$$

et donc, on a :

$$J[a, j] = j - \sum_{\tau} e_\tau [\tilde{G}_{1,\tau} \not{\sigma} - \Theta_\tau] + \sum_{\tau} e_\tau a_\tau \cdot \tilde{G}_{2,\tau} \not{\sigma} + \mathcal{O}([a^\pm]^2).$$

Les différents *tadpôles*  $\tilde{G}_{1,\tau}$  sont alors annulés *via*  $\Theta_\tau$  en imposant la relation suivante

$$\Theta_\tau = \tilde{G}_{1,\tau} \not{\sigma}, \quad (\text{B.2})$$

c'est-à-dire<sup>2</sup>

$$(\Theta_\tau^\sigma)_\mu = \sigma(\tilde{G}_{1,\tau}^\sigma)_\mu.$$

Par conséquent,  $J[a, j]$  s'écrit finalement :

$$J[a, j] = j + \sum_{\tau} e_\tau a_\tau \cdot \tilde{G}_{2,\tau} \not{\sigma} + \mathcal{O}([a^\pm]^2).$$

---

2. La densité ainsi imposée constitue bien une grandeur "physique" car elle prend des valeurs opposées sur les branches  $\mathcal{C}^+$  et  $\mathcal{C}^-$ .

La relation (B.2) permet également d'annuler les *tadpôles* se couplant aux champs extérieurs<sup>3</sup>  $a_\tau$  :

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln G_{0,\tau}^{-1}[a_\tau] - i\Theta_\tau \check{\sigma} \cdot a_\tau &= \text{Tr} \ln G_{0,\tau}^{-1} + \sum_\sigma i[(\tilde{G}_{1,\tau}^\sigma)_\mu - \sigma(\Theta_\tau^\sigma)_\mu](a_\tau^\sigma)^\mu \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\sigma'} i(\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu} (a_\tau^\sigma)^\mu (a_\tau^{\sigma'})^\nu + \mathcal{O}(\hbar^2) + \mathcal{O}([a_\tau^\pm]^3) \\ &= \text{Tr} \ln G_{0,\tau}^{-1} - \frac{1}{2} a_\tau \cdot i\tilde{G}_{2,\tau} \cdot a_\tau + \mathcal{O}(\hbar^2) + \mathcal{O}([a_\tau^\pm]^3). \end{aligned}$$

Ainsi, tous les *tadpôles* peuvent être annulés en imposant que le milieu soit électriquement neutre.

À l'ordre quadratique en sources, le terme contribuant à  $D^{-1}[a]$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} AD^{-1}[a]A &= \frac{i}{2} AD_0^{-1}A - \sum_\tau \frac{e_\tau^2}{2} \text{Tr} \left[ G_{0,\tau}[a_\tau] \check{\sigma} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^+ & 0 \\ 0 & \mathcal{A}^- \end{pmatrix} G_{0,\tau}[a_\tau] \check{\sigma} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^+ & 0 \\ 0 & \mathcal{A}^- \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{i}{2} AD_0^{-1}A - \sum_\tau \frac{e_\tau^2}{2} \text{Tr} \left[ G_{0,\tau} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^+ & 0 \\ 0 & -\mathcal{A}^- \end{pmatrix} G_{0,\tau} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^+ & 0 \\ 0 & -\mathcal{A}^- \end{pmatrix} \right] \\ &\quad + \sum_\tau \frac{e_\tau^2}{2} \text{Tr} \left[ G_{0,\tau} \begin{pmatrix} \not{a}_\tau^+ & 0 \\ 0 & \not{a}_\tau^- \end{pmatrix} G_{0,\tau} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^+ & 0 \\ 0 & -\mathcal{A}^- \end{pmatrix} G_{0,\tau} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^+ & 0 \\ 0 & -\mathcal{A}^- \end{pmatrix} \right] \\ &\quad + \sum_\tau \frac{e_\tau^2}{2} \text{Tr} \left[ G_{0,\tau} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^+ & 0 \\ 0 & -\mathcal{A}^- \end{pmatrix} G_{0,\tau} \begin{pmatrix} \not{a}_\tau^+ & 0 \\ 0 & \not{a}_\tau^- \end{pmatrix} G_{0,\tau} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^+ & 0 \\ 0 & -\mathcal{A}^- \end{pmatrix} \right] \\ &\quad - \sum_\tau \frac{e_\tau^2}{2} \text{Tr} \left[ G_{0,\tau} \begin{pmatrix} \not{a}_\tau^+ & 0 \\ 0 & \not{a}_\tau^- \end{pmatrix} G_{0,\tau} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^+ & 0 \\ 0 & -\mathcal{A}^- \end{pmatrix} G_{0,\tau} \begin{pmatrix} \not{a}_\tau^+ & 0 \\ 0 & \not{a}_\tau^- \end{pmatrix} G_{0,\tau} \begin{pmatrix} \mathcal{A}^+ & 0 \\ 0 & -\mathcal{A}^- \end{pmatrix} \right] \\ &\quad + \mathcal{O}([a^\pm]^3). \end{aligned}$$

En calculant les traces sur les indices de structure du formalisme *CTP*, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} A \cdot D^{-1}[a] \cdot A &= \frac{i}{2} A \cdot D_0^{-1} \cdot A - \sum_\tau \frac{e_\tau^2}{2} \sum_{\sigma_1,\sigma_2} \sigma_1 \sigma_2 \text{tr} [G_{0,\tau}^{\sigma_1 \sigma_2} \mathcal{A}^{\sigma_2} G_{0,\tau}^{\sigma_2 \sigma_1} \mathcal{A}^{\sigma_1}] + \sum_\tau \frac{e_\tau^2}{2} \sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \\ &\quad \times \left( \sigma_2 \text{tr} [G_{0,\tau}^{\sigma_1 \sigma_2} \not{a}_\tau^{\sigma_2} G_{0,\tau}^{\sigma_2 \sigma_3} \mathcal{A}^{\sigma_3} G_{0,\tau}^{\sigma_3 \sigma_1} \mathcal{A}^{\sigma_1}] + \sigma_3 \text{tr} [G_{0,\tau}^{\sigma_1 \sigma_2} \mathcal{A}^{\sigma_2} G_{0,\tau}^{\sigma_2 \sigma_3} \not{a}_\tau^{\sigma_3} G_{0,\tau}^{\sigma_3 \sigma_1} \mathcal{A}^{\sigma_1}] \right) \\ &\quad - \sum_\tau \frac{e_\tau^2}{2} \sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4} \sigma_1 \sigma_3 \text{tr} [G_{0,\tau}^{\sigma_1 \sigma_2} \not{a}_\tau^{\sigma_2} G_{0,\tau}^{\sigma_2 \sigma_3} \mathcal{A}^{\sigma_3} G_{0,\tau}^{\sigma_3 \sigma_4} \not{a}_\tau^{\sigma_4} G_{0,\tau}^{\sigma_4 \sigma_1} \mathcal{A}^{\sigma_1}] + \mathcal{O}([a^\pm]^3) \end{aligned}$$

---

3. En fait, le couplage entre les sources extérieures  $a_\tau$  et les densités de charges est défini de sorte à ce que les *tadpôles* provenant du calcul des courants soient annulés.

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} A \cdot D^{-1}[a] \cdot A &= \frac{i}{2} \sum_{\sigma, \sigma'} (A^\sigma)^\mu \left[ (D_0^{-1})^{\sigma\sigma'}_{\mu\nu} - \sum_{\tau} e_\tau^2 \sigma \sigma' (\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu} \right. \\ &\quad + \sum_{\tau} e_\tau^2 \sum_{\sigma_a} \sigma \sigma_a \sigma' \{ (\tilde{G}_{3,\tau}^{\sigma\sigma_a\sigma'})_{\mu\alpha\nu} + (\tilde{G}_{3,\tau}^{\sigma_a\sigma\sigma'})_{\alpha\mu\nu} \} \sigma_a (a_\tau^{\sigma_a})^\alpha \\ &\quad \left. - \sum_{\tau} e_\tau^2 \sum_{\sigma_a \sigma_b} \sigma_a \sigma_b \sigma \sigma' (\tilde{G}_{4,\tau}^{\sigma_a\sigma\sigma_b\sigma'})_{\alpha\mu\beta\nu} \sigma_a (a_\tau^{\sigma_a})^\alpha \sigma_b (a_\tau^{\sigma_b})^\beta \right] (A^{\sigma'})^\nu + \mathcal{O}([a^\pm]^3) \end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned} (\tilde{G}_{3,\tau}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c})_{\mu_a\mu_b\mu_c} &= -i \text{tr} [G_{0,\tau}^{\sigma_c\sigma_a} \gamma_{\mu_a} G_{0,\tau}^{\sigma_a\sigma_b} \gamma_{\mu_b} G_{0,\tau}^{\sigma_b\sigma_c} \gamma_{\mu_c}], \\ (\tilde{G}_{4,\tau}^{\sigma_a\sigma_b\sigma_c\sigma_d})_{\mu_a\mu_b\mu_c\mu_d} &= -i \text{tr} [G_{0,\tau}^{\sigma_d\sigma_a} \gamma_{\mu_a} G_{0,\tau}^{\sigma_a\sigma_b} \gamma_{\mu_b} G_{0,\tau}^{\sigma_b\sigma_c} \gamma_{\mu_c} G_{0,\tau}^{\sigma_c\sigma_d} \gamma_{\mu_d}] \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$D^{-1}[a] = D_0^{-1} - \Pi_{2,tot} + \Pi_{3,tot}[a] - \Pi_{4,tot}[a]$$

avec

$$\begin{aligned} \Pi_{2,tot} &= \sum_{\tau} e_\tau^2 \check{\sigma} \tilde{G}_{2,\tau} \check{\sigma}, \\ (\Pi_{3,tot}[a])^{\sigma\sigma'}_{\mu\nu} &= \sum_{\tau} e_\tau^2 \sum_{\sigma_a} \sigma \sigma_a \sigma' \{ (\tilde{G}_{3,\tau}^{\sigma\sigma_a\sigma'})_{\mu\alpha\nu} + (\tilde{G}_{3,\tau}^{\sigma_a\sigma\sigma'})_{\alpha\mu\nu} \} \sigma_a (a_\tau^{\sigma_a})^\alpha \\ (\Pi_{4,tot}[a])^{\sigma\sigma'}_{\mu\nu} &= \sum_{\tau} e_\tau^2 \sum_{\sigma_a \sigma_b} \sigma_a \sigma_b \sigma \sigma' (\tilde{G}_{4,\tau}^{\sigma_a\sigma\sigma_b\sigma'})_{\alpha\mu\beta\nu} \sigma_a (a_\tau^{\sigma_a})^\alpha \sigma_b (a_\tau^{\sigma_b})^\beta. \end{aligned}$$

où  $\Pi_{3,tot}[a]$ ,  $\Pi_{4,tot}[a]$  et  $\Pi_{2,tot}$  sont respectivement linéaire, quadratique et indépendant de  $a$ . Dans les expressions qui précèdent, les *tadpôles* ont tous été annulés par neutralité du milieu. En outre, par application du théorème de *Furry*,  $\Pi_{3,tot}[a]$  est nul. Enfin, comme l'expression de  $\mathcal{W}$  est cherchée à l'ordre quadratique en sources, le terme  $\Pi_{4,tot}[a]$  ne contribue qu'à l'expression de  $\text{Tr} \ln D^{-1}[a]$  mais correspond alors à un terme à deux boucles en raison de la trace sur les degrés de liberté du photon : ce terme est donc ignoré. Ainsi, à l'ordre quadratique en sources, on a :

$$J[a, j] = j + \sum_{\tau} e_\tau (a_\tau \check{\sigma}) \check{\sigma} \tilde{G}_{2,\tau} \check{\sigma}, \quad D^{-1}[a] = D_0^{-1} - \Pi_{2,tot} - \Pi_{4,tot}[a], \quad D[a] \simeq D_0 + D_0 \Pi_{2,tot} D_0$$

$$\text{Tr} \ln D^{-1}[a] \simeq \text{Tr} \ln (D_0^{-1} - \Pi_{2,tot}) - \text{Tr} [D_0 \cdot \Pi_{4,tot}[a] \cdot D_0] = \text{Tr} \ln (D_0^{-1} - \Pi_{2,tot}) + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

$$\text{Tr} \ln G_{0,\tau}^{-1}[a_\tau] = \text{Tr} \ln G_{0,\tau}^{-1} - \frac{i}{2} a_\tau \cdot \tilde{G}_{2,\tau} \cdot a_\tau.$$

En conséquence, la fonctionnelle  $\mathcal{W}$  s'écrit

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[a, j] &= \frac{i}{2} \text{Tr} \ln D^{-1}[a] - i \sum_{\tau} \text{Tr} \ln G_{0,\tau}^{-1}[a_\tau] - \frac{1}{2} J[a, j] \cdot D[a] \cdot J[a, j] \\ &= \frac{i}{2} \text{Tr} \ln (D_0^{-1} - \Pi_{2,tot}) - i \sum_{\tau} \text{Tr} \ln G_{0,\tau}^{-1} - \frac{1}{2} \sum_{\tau} a_\tau \cdot \tilde{G}_{2,\tau} \cdot a_\tau - \frac{1}{2} J[a, j] \cdot D[a] \cdot J[a, j] \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 J[a, j] \cdot D[a] \cdot J[a, j] &= [j + \sum_{\tau} e_{\tau} (a_{\tau} \check{\sigma}) \check{\sigma} \tilde{G}_{2, \tau} \check{\sigma}] \cdot [D_0^{-1} - \Pi_{2, tot}]^{-1} \cdot [j + \sum_{\tau} e_{\tau} \check{\sigma} \tilde{G}_{2, \tau} \check{\sigma} (\check{\sigma} a_{\tau})] \\
 &= j \cdot D^{-1}[a] \cdot j + \sum_{\tau, \tau'} e_{\tau} e_{\tau'} (\check{\sigma} a_{\tau}) \cdot [\check{\sigma} \tilde{G}_{2, \tau} \check{\sigma}] \cdot D_0 \cdot [\check{\sigma} \tilde{G}_{2, \tau'} \check{\sigma}] \cdot (\check{\sigma} a_{\tau'}) \\
 &\quad + j \cdot D^{-1}[a] \cdot [\sum_{\tau} e_{\tau} \check{\sigma} \tilde{G}_{2, \tau} \check{\sigma} (\check{\sigma} a_{\tau})] + [\sum_{\tau} e_{\tau} (\check{\sigma} a_{\tau}) \check{\sigma} \tilde{G}_{2, \tau} \check{\sigma}] \cdot D^{-1}[a] \cdot j \\
 &= j \cdot [D_0 + D_0 \cdot \Pi_{2, tot} \cdot D_0] \cdot j + \sum_{\tau} e_{\tau} (\check{\sigma} a_{\tau}) \cdot [\check{\sigma} \tilde{G}_{2, \tau} \check{\sigma}] \cdot D_0 \cdot j \\
 &\quad + \sum_{\tau} e_{\tau} j \cdot D_0 \cdot [\check{\sigma} \tilde{G}_{2, \tau} \check{\sigma}] \cdot (\check{\sigma} a_{\tau}) + \mathcal{O}(\text{sources}^3)
 \end{aligned}$$

en éliminant les termes à plus d'une boucle dans l'expression précédente. Finalement, on a :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{W}[a, j] &= \mathcal{W}[0, 0] - \frac{1}{2} \sum_{\tau} \left( a_{\tau} \cdot \tilde{G}_{2, \tau} \cdot a_{\tau} + e_{\tau} (\check{\sigma} a_{\tau}) \cdot [\check{\sigma} \tilde{G}_{2, \tau} \check{\sigma}] \cdot D_0 \cdot j + e_{\tau} j \cdot D_0 \cdot [\check{\sigma} \tilde{G}_{2, \tau} \check{\sigma}] \cdot (\check{\sigma} a_{\tau}) \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} j \cdot [D_0 + D_0 \cdot \Pi_{2, tot} \cdot D_0] \cdot j \\
 &= \mathcal{W}[0, 0] - \frac{1}{2} j \cdot D_0 \cdot j - \frac{1}{2} \sum_{\tau} [a_{\tau} \check{\sigma} + e_{\tau} j \cdot D_0] \cdot [\check{\sigma} \tilde{G}_{2, \tau} \check{\sigma}] \cdot [\check{\sigma} a_{\tau} + e_{\tau} D_0 \cdot j] \\
 &= \mathcal{W}[0, 0] - \frac{1}{2} j \cdot D_0 \cdot j - \frac{1}{2} \sum_{\tau} [a_{\tau} + e_{\tau} j \cdot D_0 \check{\sigma}] \cdot \tilde{G}_{2, \tau} \cdot [a_{\tau} + e_{\tau} \check{\sigma} D_0 \cdot j] \\
 &= \mathcal{W}[0, 0] - \frac{1}{2} j \cdot D_0 \cdot j - \frac{1}{2} \sum_{\tau} \begin{pmatrix} a_{\tau} \\ j \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2, \tau} & e_{\tau} \tilde{G}_{2, \tau} \cdot \check{\sigma} D_0 \\ e_{\tau} D_0 \check{\sigma} \cdot \tilde{G}_{2, \tau} & e_{\tau}^2 D_0 \check{\sigma} \cdot \tilde{G}_{2, \tau} \cdot \check{\sigma} D_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\tau} \\ j \end{pmatrix} \\
 &= \mathcal{W}[0, 0] - \frac{1}{2} j \cdot D_0 \cdot j - \frac{1}{2} \sum_{\tau} (a_{\tau} + e_{\tau} \check{\sigma} D_0 j)^{tr} \cdot \tilde{G}_{2, \tau} \cdot (a_{\tau} + e_{\tau} \check{\sigma} D_0 j)
 \end{aligned}$$

Les différentes charges  $e_{\tau}$  n'affectent pas le niveau arbre de la théorie : celui-ci ne dépend que de  $j$ . Enfin, on doit poser  $\mathcal{W}[0, 0] = 0$  afin de préserver l'unitarité de la fonctionnelle génératrice étudiée. L'expression précédente correspond à l'approximation à une boucle de la relation (5.4) du chapitre 5<sup>4</sup>.

La source  $j$  (et plus particulièrement sa combinaison auxiliaire  $j^a$ ) permet de générer les valeurs moyennes du champ électromagnétique : en l'absence de courant issu des charges  $e_{\tau}$ , ces valeurs moyennes sont alors conditionnées par le propagateur du photon ainsi que le tenseur de polarisation de toutes les charges considérées *via* le terme  $\Pi_{2, tot} = \sum_{\tau} e_{\tau}^2 \check{\sigma} \tilde{G}_{2, \tau} \check{\sigma}$ . La source  $a_{\tau}$  permet, quant à elle, de générer la moyenne de la densité d'une charge particulière  $e_{\tau}$  (à nouveau, c'est la combinaison auxiliaire  $a_{\tau}^a$  qui doit être mise en œuvre) : dans l'approximation à une

4. L'expression complète de la fonctionnelle  $\mathcal{W}$  peut être obtenue à partir du calcul, à un ordre donné, de celle définie pour les courants seulement et en exploitant directement la relation (5.4).

boucle, et en l'absence de champ électromagnétique  $A$ , cette valeur moyenne dépend uniquement du tenseur de polarisation  $\tilde{G}_{2,\tau}$  de la charge considérée. En outre, lorsque le champ électromagnétique et les densités de charges sont considérées conjointement, les valeurs moyennes du champ et des densités de charges sont couplées.

Enfin, certaines charges peuvent être laissées *spectatrices* alors que celles pour lesquelles la valeur moyenne du courant est recherchée sont qualifiées de charges de *valence*. La fonctionnelle  $\mathcal{W}$  précédente peut être adaptée à toutes ces situations. En fait, le statut des charges est exclusivement paramétré par la combinaison auxiliaire (rôle de *book-keeping*) du champ extérieur correspondant à la saveur considérée : ainsi, pour  $a_\tau^a = 0$ , la charge  $e_\tau$  sera spectatrice alors que pour  $a_\tau^a \neq 0$ , celle-ci fera nécessairement l'objet d'une mesure (charge de valence) *via* la détermination de son courant. En fait, déterminer formellement une quantité revient à imposer qu'elle soit mesurée en principe. Soulignons que les combinaisons "physiques" des champs extérieurs précédents  $a_\tau^p$  peuvent être éventuellement maintenues finies : elles paramétrisent alors une évolution adiabatique depuis le vide ou un état simple.

Dans les développements suivants, nous considérerons la détermination de la densité d'une charge de valence de saveur  $\tau = v$  alors que toutes les autres charges sont considérées comme spectatrices : ces charges spectatrices constituent l'environnement du système mesuré (c'est l'environnement pertinent au regard de la décohérence-consistance). En outre, ces charges spectatrices peuvent éventuellement être elles-mêmes en contact d'un réservoir de particules et de chaleur.

### Détermination des parties réelle et imaginaire

Les parties réelle et imaginaire des propagateurs sont définies dans l'espace des positions d'espace-temps. La fonctionnelle précédente s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[a, j] &= -\frac{1}{2} \sum_{\tau} [a_{\tau} + e_{\tau} j \cdot (\Re D_0 + i \Im D_0) \check{\sigma}] \cdot (\Re \tilde{G}_{2,\tau} + i \Im \tilde{G}_{2,\tau}) \cdot [a_{\tau} + e_{\tau} \check{\sigma} (\Re D_0 + i \Im D_0) \cdot j] \\ &\quad - \frac{1}{2} j \cdot \Re D_0 \cdot j - \frac{1}{2} j \cdot i \Im D_0 \cdot j. \end{aligned}$$

En posant  $\mathcal{W}[a, j] = \Re \mathcal{W}[a, j] + i \Im \mathcal{W}[a, j]$ , la partie réelle de cette fonctionnelle a pour expression

$$\begin{aligned} \Re \mathcal{W}[a, j] &= -\frac{1}{2} j \cdot \Re D_0 \cdot j - \frac{1}{2} \sum_{\tau} [a_{\tau} + e_{\tau} j \cdot \Re D_0 \check{\sigma}] \cdot \Re \tilde{G}_{2,\tau} \cdot [a_{\tau} + e_{\tau} \check{\sigma} \Re D_0 \cdot j] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\tau} [a_{\tau} + e_{\tau} j \cdot \Re D_0 \check{\sigma}] \cdot \Im \tilde{G}_{2,\tau} \cdot e_{\tau} \check{\sigma} \Im D_0 \cdot j \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\tau} e_{\tau} j \cdot \Im D_0 \check{\sigma} \cdot \Im \tilde{G}_{2,\tau} \cdot [a_{\tau} + e_{\tau} \check{\sigma} \Re D_0 \cdot j] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\tau} e_{\tau}^2 j \cdot \Im D_0 \check{\sigma} \cdot \Re \tilde{G}_{2,\tau} \cdot \check{\sigma} \Im D_0 \cdot j \end{aligned}$$

tandis que sa partie imaginaire s'écrit

$$\begin{aligned}
 \Im \mathcal{W}[a, j] &= -\frac{1}{2}j \cdot \Im D_0 \cdot j - \frac{1}{2} \sum_{\tau} [a_{\tau} + e_{\tau}j \cdot \Re D_0 \check{\sigma}] \cdot \Im \tilde{G}_{2,\tau} \cdot [a_{\tau} + e_{\tau} \check{\sigma} \Re D_0 \cdot j] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\tau} [e_{\tau}j \cdot \Im D_0 \check{\sigma}] \cdot \Re \tilde{G}_{2,\tau} \cdot [a_{\tau} + e_{\tau} \check{\sigma} \Re D_0 \cdot j] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\tau} [a_{\tau} + e_{\tau}j \cdot \Re D_0 \check{\sigma}] \cdot \Re \tilde{G}_{2,\tau} \cdot [e_{\tau} \check{\sigma} \Im D_0 \cdot j] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\tau} e_{\tau}^2 j \cdot \Im D_0 \check{\sigma} \cdot \Im \tilde{G}_{2,\tau} \cdot \check{\sigma} \Im D_0 \cdot j.
 \end{aligned}$$

Les termes  $\Im \tilde{G}_{2,\tau}$  et  $\Re \tilde{G}_{2,\tau}$  s'annulent sur couche de masse c'est-à-dire dès qu'ils sont convolués avec  $\Im D_0$  dans l'expression précédente<sup>5</sup>. Par conséquent, l'expression des parties réelle et imaginaire se simplifie donnant les relations suivantes à l'ordre d'une boucle :

$$\begin{aligned}
 \Re \mathcal{W}[a, j] &= -\frac{1}{2}j \cdot \Re D_0 \cdot j - \frac{1}{2} \sum_{\tau} [a_{\tau} + e_{\tau}j \cdot \Re D_0 \check{\sigma}] \cdot \Re \tilde{G}_{2,\tau} \cdot [a_{\tau} + e_{\tau} \check{\sigma} \Re D_0 \cdot j] \\
 &= -\frac{1}{2}j \cdot \Re D_0 \cdot j - \frac{1}{2} \sum_{\tau} (a_{\tau} \quad j) \begin{pmatrix} \Re \tilde{G}_{2,\tau} & e_{\tau} \Re \tilde{G}_{2,\tau} \cdot \check{\sigma} \Re D_0 \\ e_{\tau} \Re D_0 \check{\sigma} \cdot \Re \tilde{G}_{2,\tau} & e_{\tau}^2 \Re D_0 \check{\sigma} \cdot \Re \tilde{G}_{2,\tau} \cdot \check{\sigma} \Re D_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\tau} \\ j \end{pmatrix} \\
 \Im \mathcal{W}[a, j] &= -\frac{1}{2}j \cdot \Im D_0 \cdot j - \frac{1}{2} \sum_{\tau} [a_{\tau} + e_{\tau}j \cdot \Re D_0 \check{\sigma}] \cdot \Im \tilde{G}_{2,\tau} \cdot [a_{\tau} + e_{\tau} \check{\sigma} \Re D_0 \cdot j] \\
 &= -\frac{1}{2}j \cdot \Im D_0 \cdot j - \frac{1}{2} \sum_{\tau} (a_{\tau} \quad j) \begin{pmatrix} \Im \tilde{G}_{2,\tau} & e_{\tau} \Im \tilde{G}_{2,\tau} \cdot \check{\sigma} \Re D_0 \\ e_{\tau} \Re D_0 \check{\sigma} \cdot \Im \tilde{G}_{2,\tau} & e_{\tau}^2 \Re D_0 \check{\sigma} \cdot \Im \tilde{G}_{2,\tau} \cdot \check{\sigma} \Re D_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\tau} \\ j \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

### Paramétrisation variationnelle de la partie réelle de $\mathcal{W}$

La paramétrisation variationnelle consiste à remplacer les sources standards  $j^{\pm}$  et  $a_{\tau}^{\pm}$  par les sources physiques,  $a_{\tau}^p$  et  $j^p$ , et auxiliaires,  $a_{\tau}^a$  et  $j^a$ , selon les relations

$$a_{\tau}^{\pm} = \frac{1 \pm \kappa}{2} a_{\tau}^a \pm a_{\tau}^p, \quad j^{\pm} = \frac{1 \pm \kappa}{2} j^a \pm j^p$$

où  $\kappa$  désigne un paramètre réel non nul et arbitraire :

$$\begin{pmatrix} a_{\tau}^{+} \\ a_{\tau}^{-} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & +1 \\ \frac{1-\kappa}{2} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ a_{\tau}^p \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ a_{\tau}^p \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} j^{+} \\ j^{-} \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}^{tr} \check{\sigma} \mathcal{R} = \begin{pmatrix} 2\kappa & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Le calcul des différents termes composant  $\tilde{G}_{2,\tau}$  est présenté dans la section B.3. Plus particulièrement, ces quantités sont pertinentes à densité finie et dans le vide : elles s'annulent sur couche de masse dans ces cas.

En outre, tous les champs extérieurs  $a_\tau^a$  correspondant à des charges spectatrices doivent être pris égaux à zéro. La partie réelle de la fonctionnelle correspondant à toutes les charges s'écrit

$$\begin{aligned} \Re\mathcal{W}[a^a, a^p, j^a, j^p] &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \mathcal{R}^{tr}[\Re D] \mathcal{R} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_\tau \begin{pmatrix} a_\tau^a \\ a_\tau^p \end{pmatrix}^{tr} \mathcal{R}^{tr}[\Re \tilde{G}_{2,\tau}] \mathcal{R} \begin{pmatrix} a_\tau^a \\ a_\tau^p \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_\tau e_\tau \begin{pmatrix} a_\tau^a \\ a_\tau^p \end{pmatrix}^{tr} \mathcal{R}^{tr}[\Re \tilde{G}_{2,\tau} \cdot \check{\sigma} \Re D_0] \mathcal{R} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_\tau e_\tau \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \mathcal{R}^{tr}[\Re D_0 \check{\sigma} \cdot \Re \tilde{G}_{2,\tau}] \mathcal{R} \begin{pmatrix} a_\tau^a \\ a_\tau^p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

avec

$$D = [D_0^{-1} - \Pi_2]^{-1}, \quad \Pi_2 = \sum_\tau e_\tau^2 \check{\sigma} \tilde{G}_{2,\tau} \check{\sigma}$$

défini de la sorte en base de *Schwinger*. La partie B.2 synthétise la définition de ces quantités. L'expression des différents termes composant  $\Re\mathcal{W}$  s'appuie sur les résultats de la partie B.2.

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{tr}[\Re D] \mathcal{R} &= \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & \frac{1-\kappa}{2} \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D^n & -D^f \\ D^f & -D^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & +1 \\ \frac{1-\kappa}{2} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & \frac{1-\kappa}{2} \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}[\kappa D^r + D^a] & D^r \\ \frac{1}{2}[\kappa D^r - D^a] & D^r \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{4}[\kappa D^r + D^a] + \frac{1-\kappa}{4}[\kappa D^r - D^a] & D^r \\ \frac{1}{2}[\kappa D^r + D^a] - \frac{1}{2}[\kappa D^r - D^a] & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{2}[D^r + D^a] & D^r \\ D^a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa D^n & D^r \\ D^a & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{R}^{tr}[\Re \tilde{G}_{2,\tau}] \mathcal{R} &= \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & \frac{1-\kappa}{2} \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^n & -\tilde{G}_{2,\tau}^f \\ \tilde{G}_{2,\tau}^f & -\tilde{G}_{2,\tau}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & +1 \\ \frac{1-\kappa}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^n & \tilde{G}_{2,\tau}^r \\ \tilde{G}_{2,\tau}^a & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{R}^{tr}[\Re \tilde{G}_{2,\tau} \cdot \check{\sigma} \Re D_0] \mathcal{R} &= \mathcal{R}^{tr} \begin{pmatrix} -\tilde{G}_{2,\tau}^n & \tilde{G}_{2,\tau}^f \\ -\tilde{G}_{2,\tau}^f & \tilde{G}_{2,\tau}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0^n & -D_0^f \\ -D_0^f & D_0^n \end{pmatrix} \mathcal{R} \\ &= -\begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & \frac{1-\kappa}{2} \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^n D_0^n + \tilde{G}_{2,\tau}^f D_0^f & -\tilde{G}_{2,\tau}^f D_0^n - \tilde{G}_{2,\tau}^n D_0^f \\ \tilde{G}_{2,\tau}^f D_0^n + \tilde{G}_{2,\tau}^n D_0^f & -\tilde{G}_{2,\tau}^n D_0^n - \tilde{G}_{2,\tau}^f D_0^f \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & +1 \\ \frac{1-\kappa}{2} & -1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{tr}[\Re \tilde{G}_{2,\tau} \cdot \check{\sigma} \Re D_0] \mathcal{R} &= -\mathcal{R}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^f (\frac{1+\kappa}{2} D_0^f - \frac{1-\kappa}{2} D_0^n) + \tilde{G}_{2,\tau}^n (\frac{1+\kappa}{2} D_0^n - \frac{1-\kappa}{2} D_0^f) & (\tilde{G}_{2,\tau}^n + \tilde{G}_{2,\tau}^f) D_0^r \\ \tilde{G}_{2,\tau}^n (\frac{1+\kappa}{2} D_0^n - \frac{1-\kappa}{2} D_0^f) + \tilde{G}_{2,\tau}^f (\frac{1+\kappa}{2} D_0^f - \frac{1-\kappa}{2} D_0^n) & (\tilde{G}_{2,\tau}^n + \tilde{G}_{2,\tau}^f) D_0^r \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & \frac{1-\kappa}{2} \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \tilde{G}_{2,\tau}^f (\kappa D_0^r - D_0^a) + \frac{1}{2} \tilde{G}_{2,\tau}^n (\kappa D_0^r + D_0^a) & (\tilde{G}_{2,\tau}^n + \tilde{G}_{2,\tau}^f) D_0^r \\ \frac{1}{2} \tilde{G}_{2,\tau}^f (\kappa D_0^r + D_0^a) + \frac{1}{2} \tilde{G}_{2,\tau}^n (\kappa D_0^r - D_0^a) & (\tilde{G}_{2,\tau}^n + \tilde{G}_{2,\tau}^f) D_0^r \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & \frac{1-\kappa}{2} \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (\tilde{G}_{2,\tau}^f + \tilde{G}_{2,\tau}^n) \kappa D_0^r + \frac{1}{2} (\tilde{G}_{2,\tau}^n - \tilde{G}_{2,\tau}^f) D_0^a & (\tilde{G}_{2,\tau}^n + \tilde{G}_{2,\tau}^f) D_0^r \\ \frac{1}{2} (\tilde{G}_{2,\tau}^f + \tilde{G}_{2,\tau}^n) \kappa D_0^r + \frac{1}{2} (\tilde{G}_{2,\tau}^f - \tilde{G}_{2,\tau}^n) D_0^a & (\tilde{G}_{2,\tau}^n + \tilde{G}_{2,\tau}^f) D_0^r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}^{tr} [\Re \tilde{G}_{2,\tau} \cdot \delta \Re D_0] \mathcal{R} &= - \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & \frac{1-\kappa}{2} \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{2} \tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r + \frac{1}{2} \tilde{G}_{2,\tau}^a D_0^a & \tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r \\ \frac{\kappa}{2} \tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r - \frac{1}{2} \tilde{G}_{2,\tau}^a D_0^a & \tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r \end{pmatrix} \\
 &= - \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} (\frac{\kappa}{2} \tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r + \frac{1}{2} \tilde{G}_{2,\tau}^a D_0^a) + \frac{1-\kappa}{2} (\frac{\kappa}{2} \tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r - \frac{1}{2} \tilde{G}_{2,\tau}^a D_0^a) & \tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r \\ & \tilde{G}_{2,\tau}^a D_0^a \\ & & 0 \end{pmatrix} \\
 &= - \begin{pmatrix} \frac{\kappa}{2} (\tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r + \tilde{G}_{2,\tau}^a D_0^a) & \tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r \\ & \tilde{G}_{2,\tau}^a D_0^a \\ & & 0 \end{pmatrix};
 \end{aligned}$$

or,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} (\tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r + \tilde{G}_{2,\tau}^a D_0^a) &= \frac{1}{2} [\tilde{G}_{2,\tau}^r (D_0^r - D_0^f) + \tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^f + \tilde{G}_{2,\tau}^a (D_0^a + D_0^f) - \tilde{G}_{2,\tau}^a D_0^f] \\
 &= \frac{1}{2} [(\tilde{G}_{2,\tau}^r + \tilde{G}_{2,\tau}^a) D_0^n + (\tilde{G}_{2,\tau}^r - \tilde{G}_{2,\tau}^a) D_0^f] \\
 &= \tilde{G}_{2,\tau}^n D_0^n + \tilde{G}_{2,\tau}^f D_0^f
 \end{aligned}$$

et  $\tilde{G}_{2,\tau}^f D_0^f = 0$  car  $\tilde{G}_{2,\tau}^f$  est nul sur la couche de masse (support de  $D_0^f$ ). En conséquence, on a finalement

$$\mathcal{R}^{tr} [\Re \tilde{G}_{2,\tau} \cdot \delta \Re D_0] \mathcal{R} = - \begin{pmatrix} \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^n D_0^n & \tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r \\ \tilde{G}_{2,\tau}^a D_0^a & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, la partie réelle de  $\mathcal{W}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \Re \mathcal{W}[a^a, a^p, j^a, j^p] &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa D^n & D^r \\ D^a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_{\tau} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ a_{\tau}^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^n & \tilde{G}_{2,\tau}^r \\ \tilde{G}_{2,\tau}^a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ a_{\tau}^p \end{pmatrix} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\tau} e_{\tau} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ a_{\tau}^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^n D_0^n & \tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r \\ \tilde{G}_{2,\tau}^a D_0^a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\tau} e_{\tau} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa D_0^n \tilde{G}_{2,\tau}^n & D_0^r \tilde{G}_{2,\tau}^r \\ D_0^a \tilde{G}_{2,\tau}^a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ a_{\tau}^p \end{pmatrix} \quad (\text{B.3})
 \end{aligned}$$

L'expression précédente ne comporte pas de terme strictement quadratique dans les sources physiques  $a^p$  et  $j^p$  : cette fonctionnelle s'annule donc lorsque l'unitarité est imposée.

Enfin, dans le cas où seul une charge de valence de saveur  $\tau = v$  est mesurée conjointement au champ électromagnétique, la fonctionnelle correspondante est obtenue en imposant que  $a_{\tau \neq v}^a$  soit nul dans l'expression (B.3). Cette fonctionnelle s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \Re \mathcal{W}[a_v^a, a^p, j^a, j^p] &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa D^n & D^r \\ D^a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_v^a \\ a_v^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa \tilde{G}_{2,v}^n & \tilde{G}_{2,v}^r \\ \tilde{G}_{2,v}^a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_v^a \\ a_v^p \end{pmatrix} \\
 &\quad - \frac{e_v}{2} \begin{pmatrix} a_v^a \\ a_v^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa \tilde{G}_{2,v}^n D_0^n & \tilde{G}_{2,v}^r D_0^r \\ \tilde{G}_{2,v}^a D_0^a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_{\tau \neq v} e_{\tau} a_{\tau}^p \tilde{G}_{2,\tau}^a D_0^a j^a \\
 &\quad - \frac{e_v}{2} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa D_0^n \tilde{G}_{2,v}^n & D_0^r \tilde{G}_{2,v}^r \\ D_0^a \tilde{G}_{2,v}^a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_v^a \\ a_v^p \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_{\tau \neq v} e_{\tau} j^a D_0^r \tilde{G}_{2,\tau}^r a_{\tau}^p. \quad (\text{B.4})
 \end{aligned}$$

Les termes correspondant aux sommations sur les charges spectatrices paramétrisent une évolution adiabatique de l'état du système pour ces charges.

### Paramétrisation variationnelle : partie imaginaire de $\mathcal{W}$

La partie imaginaire de  $\mathcal{W}$  est étudiée de la même façon que précédemment et correspond à :

$$\begin{aligned} \Im\mathcal{W}[a^a, a^p, j^a, j^p] &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \mathcal{R}^{tr} [\Im D] \mathcal{R} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_{\tau} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ a_{\tau}^p \end{pmatrix}^{tr} \mathcal{R}^{tr} [\Im \tilde{G}_{2,\tau}] \mathcal{R} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ a_{\tau}^p \end{pmatrix} \\ &\quad - \sum_{\tau} e_{\tau} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ a_{\tau}^p \end{pmatrix}^{tr} \mathcal{R}^{tr} [\Im \tilde{G}_{2,\tau} \cdot \check{\sigma} \Re D_0] \mathcal{R} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix} \\ &\quad - \sum_{\tau} e_{\tau} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix} \mathcal{R}^{tr} [\Re D_0 \check{\sigma} \cdot \Im \tilde{G}_{2,\tau}] \mathcal{R} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ a_{\tau}^p \end{pmatrix}^{tr}. \end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{tr} [\Im D] \mathcal{R} &= D^c \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & \frac{1-\kappa}{2} \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & +1 \\ \frac{1-\kappa}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D^c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{R}^{tr} [\Im \tilde{G}_{2,\tau}] \mathcal{R} &= \tilde{G}_{2,\tau}^c \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & \frac{1-\kappa}{2} \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & +1 \\ \frac{1-\kappa}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathcal{R}^{tr} [\Im \tilde{G}_{2,\tau} \check{\sigma} \Re D_0] \mathcal{R} &= \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & \frac{1-\kappa}{2} \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^c & \tilde{G}_{2,\tau}^c \\ \tilde{G}_{2,\tau}^c & \tilde{G}_{2,\tau}^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0^n & -D_0^f \\ D_0^f & -D_0^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & +1 \\ \frac{1-\kappa}{2} & -1 \end{pmatrix} \\ &= \tilde{G}_{2,\tau}^c (D_0^n - D_0^f) \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & \frac{1-\kappa}{2} \\ +1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1+\kappa}{2} & +1 \\ \frac{1-\kappa}{2} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^c D_0^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

À nouveau, l'expression qui précède peut se simplifier en constatant que  $\tilde{G}_{2,\tau}^c D_0^f = 0$  puisque la partie imaginaire de  $\tilde{G}_{2,\tau}$  est nulle sur couche de masse. En conséquence, le terme précédent s'écrit

$$\mathcal{R}^{tr} [\Im \tilde{G}_{2,\tau} \check{\sigma} \Re D_0] \mathcal{R} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^c D_0^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Au final, la partie imaginaire de  $\mathcal{W}$  correspond à l'expression

$$\begin{aligned} \Im\mathcal{W}[a^a, a^p, j^a, j^p] &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} D^c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \sum_{\tau} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ a_{\tau}^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ a_{\tau}^p \end{pmatrix} \\ &\quad - \sum_{\tau} e_{\tau} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ a_{\tau}^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^c D_0^n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix} - \sum_{\tau} e_{\tau} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_0^n \tilde{G}_{2,\tau}^c & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ a_{\tau}^p \end{pmatrix}^{tr}. \end{aligned}$$

c'est-à-dire que cette fonctionnelle ne dépend que des paramètres extérieurs auxiliaires liés à la différence des variables de ce type pour les branches  $\mathcal{C}^{\pm}$  :

$$\begin{aligned} \Im\mathcal{W}[a^a, a^p, j^a, j^p] &= -\frac{1}{2} j^a \cdot D^c \cdot j^a - \frac{1}{2} \sum_{\tau} a_{\tau}^a \cdot \tilde{G}_{2,\tau}^c \cdot a_{\tau}^a \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\tau} e_{\tau} [a_{\tau}^a \cdot \tilde{G}_{2,\tau}^c D_0^n \cdot j^a + j^a \cdot D_0^n \tilde{G}_{2,\tau}^c \cdot a_{\tau}^a] \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Dès lors, la partie imaginaire de  $\mathcal{W}$  ne peut pas conditionner l'obtention des valeurs : seule la partie réelle de la fonctionnelle  $\mathcal{W}$  peut être utilisée pour définir (par transformée de *Legendre*) la fonctionnelle générant les équations du mouvement pour les valeurs moyennes. En fait, la partie imaginaire de  $\mathcal{W}$  peut être interprétée en rapport avec la définition de matrices densité, notamment dans le contexte du formalisme *OTP*.

Enfin, de même que précédemment, l'expression de cette fonctionnelle, lorsque les charges de saveur  $\tau \neq v$  sont spectatrices, s'écrit :

$$\begin{aligned} \Im\mathcal{W}[a_v^a, a^p, j^a, j^p] &= -\frac{1}{2}j^a \cdot D^c \cdot j^a - \frac{1}{2}a_v^a \cdot \tilde{G}_{2,\tau}^c \cdot a_v^a \\ &\quad - \frac{1}{2}e_v[a_v^a \cdot \tilde{G}_{2,v}^c D_0^n \cdot j^a + j^a \cdot D_0^n \tilde{G}_{2,v}^c \cdot a_v^a] \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

À une boucle, cette expression ne dépend des charges spectatrices qu'au niveau de la partie quadratique en  $j^a$  *via* le propagateur

$$D^c = \frac{1}{D_0^{c-1} - \Pi_{2,tot}^c}.$$

### B.1.2 Valeurs moyennes et actions effectives

L'action effective  $\Gamma$  correspond à la transformée de *Legendre* de la partie réelle de  $\mathcal{W}$ . Différentes définitions de celle-ci sont possibles selon les variables retenues pour la définir (*cf* chapitre 3). On cherche notamment l'expression d'actions effectives selon que l'on considère ou non la présence de charges spectatrices. Par ailleurs, rappelons la notation adoptée dans cette section : les variables effectives paramétrant l'action effective sont écrites en majuscule tandis que leurs quantités conjuguées (sources et champs extérieurs), paramétrant  $\Re\mathcal{W}$ , sont écrites en minuscule.

Suivant le type d'action considérée, une partie des variables de  $\Re\mathcal{W}$  peut être traitée en tant que paramètre. Aussi, l'expression de cette fonctionnelle peut éventuellement comporter des contributions linéaires suivant les variables dynamiques à redéfinir par transformée de *Legendre* ou encore des termes qui en sont indépendant. À l'ordre quadratique, elle peut être écrite sous la forme :

$$\Re\mathcal{W}[j] = \frac{1}{2}jW^{(2)}j + jW^{(1)} + Cst, \quad W^{(2)} = \left. \frac{\delta^2 \Re\mathcal{W}}{\delta j \delta j} \right|_{j=0}, \quad W^{(1)} = \left. \frac{\delta \Re\mathcal{W}}{\delta j} \right|_{j=0}, \quad Cst = \Re\mathcal{W} \Big|_{j=0}.$$

L'action effective  $\Gamma$  correspondant à l'expression précédente est définie par les relations suivantes

$$\Gamma[\varphi] = \Re\mathcal{W} - j\varphi, \quad \varphi = \frac{\delta \mathcal{W}}{\delta j} = W^{(2)}j + W^{(1)}, \quad W^{(1)} \equiv \varphi[j=0] \equiv \varphi_0$$

et s'écrit

$$\begin{aligned} \Gamma[\varphi] &= -\frac{1}{2}(\varphi - W^{(1)})W^{(2)-1}(\varphi - W^{(1)}) + Cst = -\frac{1}{2}(\varphi - \varphi_0)W^{(2)-1}(\varphi - \varphi_0) + Cst \\ &= -\frac{1}{2}jW^{(2)}j + Cst = -\frac{1}{2}\varphi W^{(2)-1}\varphi + \varphi W^{(2)-1}\varphi_0 - \frac{1}{2}\varphi_0 W^{(2)-1}\varphi_0 + Cst. \end{aligned}$$

Les termes constants de  $\Gamma$  peuvent être ignorés puisqu'ils n'influencent pas les équations du mouvement. Concrètement,  $\Gamma$  est déterminée à partir de son expression en fonction des variables de  $\mathfrak{RW}$  qui sont réécrites, dans un second temps, en terme de leurs quantités conjuguées.

Toutes les quantités effectives sont, en outre, évaluées à l'ordre d'une boucle et l'action effective leur correspondant l'est également.

### Variables, paramètres et unitarité

Les quantités effectives *physiques*, respectivement pour le champ électromagnétique et pour la densité due à la charge  $e_\tau$ , sont définies par les relations

$$A^p = \frac{\delta \mathfrak{RW}}{\delta j^a} = \mathcal{O}(\hbar^0), \quad J_\tau^p = \frac{\delta \mathfrak{RW}}{\delta a_\tau^a} = \mathcal{O}(\hbar).$$

Les quantités effectives *auxiliaires* des grandeurs précédentes correspondent aux termes suivants :

$$A^a = \frac{\delta \mathfrak{RW}}{\delta j^p} = \mathcal{O}(\hbar^0), \quad J_\tau^a = \frac{\delta \mathfrak{RW}}{\delta a_\tau^p} = \mathcal{O}(\hbar).$$

Les valeurs moyennes sont obtenues lorsque les quantités effectives auxiliaires sont annulées :

$$A^p \rightarrow \langle A \rangle, \quad J_\tau^p \rightarrow \langle J_\tau \rangle, \quad A^a \rightarrow 0, \quad J_\tau^a \rightarrow 0. \quad (\text{B.7})$$

Les valeurs moyennes, ainsi définies, sont des quantités retardées. Lorsque les valeurs moyennes sont produites, les quantités extérieures deviennent :

$$j^p \rightarrow j^r, \quad a_\tau^p \rightarrow a_\tau^r, \quad j^a \rightarrow 0, \quad a_\tau^a \rightarrow 0. \quad (\text{B.8})$$

### Action effective pour tous les degrés de liberté

L'action effective, pour les quantités physiques et auxiliaires, est définie par la relation :

$$\Gamma[J^p, J^a, A^p, A^a] = \mathfrak{RW}[a^a, a^p, j^a, j^p] - \sum_\tau J_\tau^p a_\tau^a - j^a A^p - \sum_\tau J_\tau^a a_\tau^p - j^p A^a.$$

À une boucle, les quantités effectives ont pour expression :

$$\begin{aligned} -J_\tau^p &= \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^n a_\tau^a + \tilde{G}_{2,\tau}^r a_\tau^p + \kappa e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^n D_0^n j^a + e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r j^p + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ -A^p &= \kappa D^n j^a + D^r j^p + \sum_\tau e_\tau (\kappa D_0^n \tilde{G}_{2,\tau}^n a_\tau^a + D_0^r \tilde{G}_{2,\tau}^r a_\tau^p) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ -J_\tau^a &= \tilde{G}_{2,\tau}^a a_\tau^a + e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^a D_0^a j^a + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ -A^a &= D^a j^a + \sum_\tau e_\tau D_0^a \tilde{G}_{2,\tau}^a a_\tau^a + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned}$$

Le système d'équations précédent doit être inversé pour pouvoir obtenir l'expression de l'action effective. On a

$$D^X = D_0^X + D_0^X \Pi_2^X D_0^X = D_0^X + \sum_\tau e_\tau^2 D_0^X \tilde{G}_{2,\tau}^X D_0^X$$

pour les propagateurs proche, retardé et avancé. Les deux dernières équations du système précédent permettent d'exprimer  $a_\tau^a$  et  $j^a$  en fonction des quantités effectives auxiliaires :

$$\begin{aligned}
 -A^a &= D_0^a j^a + \sum_\tau e_\tau^2 D_0^a \tilde{G}_{2,\tau}^a D_0^a j^a + \sum_\tau e_\tau D_0^a \tilde{G}_{2,\tau}^a a_\tau^a \\
 -D_0^{a-1} A^a &= j^a + \sum_\tau e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^a [a_\tau^a + e_\tau D_0^a j^a] = j^a - \sum_\tau e_\tau J_\tau^a \\
 j^a &= \sum_\tau e_\tau J_\tau^a - D_0^{a-1} A^a \\
 -\tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} J_\tau^a &= a_\tau^a + e_\tau D_0^a j^a \\
 a_\tau^a &= -\tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} J_\tau^a - e_\tau D_0^a j^a \\
 &= -\tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} J_\tau^a - e_\tau D_0^a \left[ \sum_\epsilon e_\epsilon J_\epsilon^a - D_0^{a-1} A^a \right] \\
 &= -\tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} J_\tau^a + e_\tau A^a - e_\tau \sum_\epsilon e_\epsilon D_0^a J_\epsilon^a
 \end{aligned}$$

Dans l'expression qui précède, la quantité proportionnelle à  $D_0^a J_\epsilon^a$  correspond à un terme à une boucle alors que l'expression de  $a_\tau^a$  doit être limitée au niveau arbre :

$$j^a = \sum_\tau e_\tau J_\tau^a - D_0^{a-1} A^a + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad a_\tau^a = e_\tau A^a - \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} J_\tau^a + \mathcal{O}(\hbar).$$

Pour déterminer l'expression des deux autres variables, il est commode d'utiliser les sources à une boucle suivantes<sup>6</sup>

$$\tilde{j}_\tau^n = -\tilde{G}_{2,\tau}^n [a_\tau^a + e_\tau D_0^n j^a] = \mathcal{O}(\hbar), \quad \tilde{j}_\tau^r = -\tilde{G}_{2,\tau}^r [a_\tau^p + e_\tau D_0^r j^p] = \mathcal{O}(\hbar)$$

de sorte que les équations donnant les champs et densités effectives physiques s'écrivent

$$\begin{aligned}
 -J_\tau^p &= \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^n [a_\tau^a + e_\tau D_0^n j^a] + \tilde{G}_{2,\tau}^r [a_\tau^p + e_\tau D_0^r j^p] = -\kappa \tilde{j}_\tau^n - \tilde{j}_\tau^r \\
 -A^p &= \kappa D_0^n [j^a - \sum_\tau e_\tau \tilde{j}_\tau^n] + D_0^r [j^p - \sum_\tau e_\tau \tilde{j}_\tau^r]
 \end{aligned}$$

Les courants introduits précédemment s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 \tilde{j}_\tau^n &= -\tilde{G}_{2,\tau}^n [a_\tau^a + e_\tau D_0^n j^a] = \tilde{G}_{2,\tau}^n [\tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} J_\tau^a + e_\tau [D_0^a - D_0^n] j^a] = \tilde{G}_{2,\tau}^n \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} J_\tau^a - e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^n D_0^f j^a \\
 &= \tilde{G}_{2,\tau}^n \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} J_\tau^a + e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^n D_0^f D_0^{a-1} A^a + \mathcal{O}(\hbar^2), \\
 \tilde{j}_\tau^r &= J_\tau^p - \kappa \tilde{j}_\tau^n = J_\tau^p - \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^n \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} J_\tau^a - \kappa e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^n D_0^f D_0^{a-1} A^a + \mathcal{O}(\hbar^2).
 \end{aligned}$$

On introduit les opérateurs de projection sur couche de masse  $P_{\text{on}}$  et hors couche de masse  $P_{\text{off}}$  par les relations (*cf* chapitre 2) :

$$\begin{aligned}
 P_{\text{off}} &= D_0^n D_0^{a-1} = D_0^n D_0^{r-1}, \quad D_0^f D_0^{a-1} = [D_0^n - D_0^a] D_0^{a-1} = P_{\text{off}} - 1 = -P_{\text{on}}, \\
 P_{\text{on}} &= D_0^f D_0^{r-1}, \quad D_0^{r-1} D_0^n D_0^{a-1} = D_0^{n-1} P_{\text{off}} = D_0^{r-1} P_{\text{off}} = D_0^{a-1} P_{\text{off}}.
 \end{aligned}$$

6. La source  $\tilde{j}_\tau^n$  est symétrique (*ie*  $[\tilde{j}_\tau^n]^{tr} = \tilde{j}_\tau^n$ ) alors que la source  $\tilde{j}_\tau^r$  ne l'est pas :  $[\tilde{j}_\tau^r]^{tr} = [a_\tau^p + e_\tau j^p D_0^a] \tilde{G}_{2,\tau}^a$ . En outre, la source à une boucle avancée correspondant au terme complémentaire à  $\tilde{j}_\tau^r$  est directement définie par le courant effectif  $J_\tau^a = -\tilde{G}_{2,\tau}^a [a_\tau^a + e_\tau D_0^a j^a]$ .

On a ainsi :

$$\begin{aligned}
 -A^p &= \kappa D_0^n j^a + D_0^r j^p - D_0^n \sum_{\tau} e_{\tau} \kappa \tilde{j}_{\tau}^n - D_0^r \sum_{\tau} e_{\tau} \tilde{j}_{\tau}^r \\
 &= \kappa D_0^n j^a + D_0^r j^p - D_0^n \sum_{\tau} e_{\tau} \kappa \tilde{j}_{\tau}^n - D_0^r \sum_{\tau} e_{\tau} [J_{\tau}^p - \kappa \tilde{j}_{\tau}^n] \\
 &= \kappa D_0^n j^a + D_0^r j^p - \kappa [D_0^n - D_0^r] \sum_{\tau} e_{\tau} \tilde{j}_{\tau}^n - D_0^r \sum_{\tau} e_{\tau} J_{\tau}^p \\
 &= \kappa D_0^n j^a + D_0^r j^p - D_0^r \sum_{\tau} e_{\tau} J_{\tau}^p + \kappa D_0^f \sum_{\tau} e_{\tau} \tilde{j}_{\tau}^n,
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 -D_0^r j^p &= A^p - D_0^r \sum_{\tau} e_{\tau} J_{\tau}^p + \kappa D_0^n j^a + \kappa D_0^f \sum_{\tau} e_{\tau} \tilde{j}_{\tau}^n \\
 &= A^p - D_0^r \sum_{\tau} e_{\tau} J_{\tau}^p + \kappa D_0^n [\sum_{\tau} e_{\tau} J_{\tau}^a - D_0^{a-1} A^a] + \kappa \sum_{\tau} e_{\tau} D_0^f \tilde{G}_{2,\tau}^n \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} J_{\tau}^a \\
 &\quad + \kappa \sum_{\tau} e_{\tau}^2 D_0^f \tilde{G}_{2,\tau}^n D_0^f D_0^{a-1} A^a \\
 &= A^p - D_0^r \sum_{\tau} e_{\tau} J_{\tau}^p + \kappa \sum_{\tau} e_{\tau} [D_0^n + D_0^f \tilde{G}_{2,\tau}^n \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1}] J_{\tau}^a + \kappa [-D_0^n + D_0^f \Pi_{2,tot}^n D_0^f] D_0^{a-1} A^a \\
 j^p &= \sum_{\tau} e_{\tau} J_{\tau}^p - D_0^{r-1} A^p - \kappa \sum_{\tau} e_{\tau} [D_0^{r-1} D_0^n + D_0^{r-1} D_0^f \tilde{G}_{2,\tau}^n \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1}] J_{\tau}^a \\
 &\quad - \kappa [-D_0^{r-1} D_0^n D_0^{a-1} + D_0^{r-1} D_0^f \Pi_{2,tot}^n D_0^f D_0^{a-1}] A^a.
 \end{aligned}$$

En utilisant les opérateurs de projection  $P_{\text{off}}$  et  $P_{\text{on}}$ ,  $j^p$  s'écrit finalement :

$$j^p = \sum_{\tau} e_{\tau} J_{\tau}^p - D_0^{r-1} A^p - \kappa \sum_{\tau} e_{\tau} [P_{\text{off}} + \tilde{G}_{2,\tau}^n \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} P_{\text{on}}] J_{\tau}^a + \kappa [D_0^{n-1} P_{\text{off}} + \Pi_{2,tot}^n P_{\text{on}}] A^a + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

L'expression de  $a_{\tau}^p$  peut être obtenue de façon similaire,

$$\begin{aligned}
 a_{\tau}^p &= -\tilde{G}_{2,\tau}^{r-1} \tilde{j}_{\tau}^r - e_{\tau} D_0^r j^p = -\tilde{G}_{2,\tau}^{r-1} [J_{\tau}^p - \kappa \tilde{j}_{\tau}^n] - e_{\tau} D_0^r j^p \\
 &= -\tilde{G}_{2,\tau}^{r-1} J_{\tau}^p + \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^{r-1} [\tilde{G}_{2,\tau}^n \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} J_{\tau}^a + e_{\tau} \tilde{G}_{2,\tau}^n D_0^f D_0^{a-1} A^a] - e_{\tau} D_0^r j^p \\
 &= -\tilde{G}_{2,\tau}^{r-1} J_{\tau}^p + \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^{r-1} \tilde{G}_{2,\tau}^n \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} J_{\tau}^a - \kappa e_{\tau} \tilde{G}_{2,\tau}^{r-1} \tilde{G}_{2,\tau}^n P_{\text{on}} A^a + e_{\tau} A^p - \kappa e_{\tau} D_0^n D_0^{a-1} A^a + \mathcal{O}(\hbar)
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire, finalement :

$$a_{\tau}^p = e_{\tau} A^p - \tilde{G}_{2,\tau}^{r-1} J_{\tau}^p + \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^{r-1} \tilde{G}_{2,\tau}^n \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} J_{\tau}^a - \kappa e_{\tau} [P_{\text{off}} + \tilde{G}_{2,\tau}^{r-1} \tilde{G}_{2,\tau}^n P_{\text{on}}] A^a + \mathcal{O}(\hbar).$$

En résumé, les variables extérieures de  $\mathcal{W}$  s'écrivent (équations du mouvement) :

$$\begin{aligned}
 j^a &= \sum_{\tau} e_{\tau} J_{\tau}^a - D_0^{a-1} A^a + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 j^p &= \sum_{\tau} e_{\tau} J_{\tau}^p - D_0^{r-1} A^p - \kappa \sum_{\tau} e_{\tau} [P_{\text{off}} + \tilde{G}_{2,\tau}^n \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} P_{\text{on}}] J_{\tau}^a + \kappa [D_0^{n-1} P_{\text{off}} + \Pi_{2,tot}^n P_{\text{on}}] A^a + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 a_{\tau}^a &= e_{\tau} A^a - \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} J_{\tau}^a + \mathcal{O}(\hbar) \\
 a_{\tau}^p &= e_{\tau} A^p - \tilde{G}_{2,\tau}^{r-1} J_{\tau}^p + \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^{r-1} \tilde{G}_{2,\tau}^n \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} J_{\tau}^a - \kappa e_{\tau} [P_{\text{off}} + \tilde{G}_{2,\tau}^{r-1} \tilde{G}_{2,\tau}^n P_{\text{on}}] A^a + \mathcal{O}(\hbar).
 \end{aligned}$$

En conséquence, l'expression de l'action effective correspondante est :

$$\begin{aligned}
 \Gamma[J^p, J^a, A^p, A^a] &= \Re\mathcal{W}[a^a, a^p, j^a, j^p] - \sum_{\tau} J_{\tau}^p a_{\tau}^a - j^a A^p - \sum_{\tau} J_{\tau}^a a_{\tau}^p - j^p A^a \\
 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A^a \\ A^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} -\kappa[D_0^{n-1} P_{\text{off}} + \Pi_{2,tot}^n P_{\text{on}}] & D_0^{r-1} \\ D_0^{a-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^a \\ A^p \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\tau} \begin{pmatrix} J_{\tau}^a \\ J_{\tau}^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} -\kappa \tilde{G}_{2,\tau}^{r-1} \tilde{G}_{2,\tau}^m \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} & \tilde{G}_{2,\tau}^{r-1} \\ \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\tau}^a \\ J_{\tau}^p \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\tau} e_{\tau} \begin{pmatrix} J_{\tau}^a \\ J_{\tau}^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa[P_{\text{off}} + \tilde{G}_{2,\tau}^{r-1} \tilde{G}_{2,\tau}^m P_{\text{on}}] & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^a \\ A^p \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\tau} e_{\tau} \begin{pmatrix} A^a \\ A^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa[P_{\text{off}} + \tilde{G}_{2,\tau}^m \tilde{G}_{2,\tau}^{a-1} P_{\text{on}}] & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{\tau}^a \\ J_{\tau}^p \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\hbar^2).
 \end{aligned}$$

L'action effective précédente est nulle lorsque les valeurs moyennes sont définies et les équations du mouvement leur correspondant ne peuvent alors être obtenues qu'à partir de celles des quantités effectives : le principe variationnel est perdu lorsque les valeurs moyennes sont définies.

Charges spectatrices : Le courant des charges de saveur  $v$  est suivi conjointement au champ électromagnétique. Les autres charges sont spectatrices. L'action effective correspondante s'écrit

$$\Gamma[J_v^p, J_v^a, A^p, A^a] = \Re\mathcal{W}[a_v^a, a_v^p, j_v^a, j_v^p] - J_v^p a_v^a - j_v^a A^p - J_v^a a_v^p - j_v^p A^a$$

en terme de la fonctionnelle (B.4) telle que  $a_{\tau \neq v}^a = 0$ . Dès lors, les champs effectifs s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 -J_v^p &= \kappa \tilde{G}_{2,v}^m a_v^a + \tilde{G}_{2,v}^r a_v^p + e_v \kappa \tilde{G}_{2,v}^n D_0^n j^a + e_v \tilde{G}_{2,v}^r D_0^r j^p + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 -A^p &= \kappa D^n j^a + D^r j^p + \kappa e_v D_0^n \tilde{G}_{2,v}^m a_v^a + e_v D_0^r \tilde{G}_{2,v}^r a_v^p + \sum_{\tau \neq v} e_{\tau} D_0^r \tilde{G}_{2,\tau}^r a_{\tau}^p + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 -J_v^a &= \tilde{G}_{2,v}^a [a_v^a + e_v D_0^a j^a] + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 -A^a &= D^a j^a + e_v D_0^a \tilde{G}_{2,v}^a a_v^a + \mathcal{O}(\hbar^2).
 \end{aligned}$$

En outre, on note :

$$\tilde{a}_{bck}^r \equiv \sum_{\tau \neq v} e_{\tau} \tilde{G}_{2,\tau}^r a_{\tau}^p.$$

Ce terme constitue un paramètre de l'action effective. En évaluant  $j^a$  à l'ordre  $\mathcal{O}(\hbar)$  et  $a_v^a$  à l'ordre  $\mathcal{O}(\hbar^0)$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
 \tilde{G}_{2,v}^a a_v^a &= -J_v^a - e_v \tilde{G}_{2,v}^a D_0^a j^a \\
 -A^a &= D^a j^a - e_v D_0^a J_v^a - e_v^2 D_0^a \tilde{G}_{2,v}^a D_0^a j^a = D_{bck}^a j^a - e_v D_0^a J_v^a \\
 j^a &= D_{bck}^{a-1} [e_v D_0^a J_v^a - A^a] = e_v J_v^a - D_{bck}^{a-1} A^a + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 a_v^a &= -\tilde{G}_{2,v}^{a-1} J_v^a - e_v D_0^a j^a = e_v A^a - \tilde{G}_{2,v}^{a-1} J_v^a + \mathcal{O}(\hbar).
 \end{aligned}$$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned}
 -\tilde{G}_{2,v}^r a_v^p &= J_v^p + \kappa \tilde{G}_{2,v}^n a_v^a + \kappa e_v \tilde{G}_{2,v}^n D_0^n j^a + e_v \tilde{G}_{2,v}^r D_0^r j^p \\
 &= J_v^p + \kappa \tilde{G}_{2,v}^n [e_v A^a - \tilde{G}_{2,v}^{a-1} J_v^a] + \kappa e_v \tilde{G}_{2,v}^n D_0^n [e_v J_v^a - D_{bck}^{a-1} A^a] + e_v \tilde{G}_{2,v}^r D_0^r j^p \\
 &= J_v^p - \kappa \tilde{G}_{2,v}^n \tilde{G}_{2,v}^{a-1} J_v^a + \kappa e_v \tilde{G}_{2,v}^n [1 - D_0^n D_{bck}^{a-1}] A^a + e_v \tilde{G}_{2,v}^r D_0^r j^p \\
 &= J_v^p - \kappa \tilde{G}_{2,v}^n \tilde{G}_{2,v}^{a-1} J_v^a + \kappa e_v \tilde{G}_{2,v}^n P_{\text{on}} A^a + e_v \tilde{G}_{2,v}^r D_0^r j^p.
 \end{aligned}$$

D'autre part, avec  $\Pi_{2,v}^n = e_v^2 \tilde{G}_{2,v}^n$ , on a :

$$\begin{aligned}
 -A^p &= \kappa D^n j^a + D^r j^p + \kappa e_v D_0^n \tilde{G}_{2,v}^m a_v^a + e_v D_0^r \tilde{G}_{2,v}^r a_v^p + D_0^r \tilde{a}_{bck}^r \\
 &= D^r j^p + \kappa D^n [e_v J_v^a - D_{bck}^{a-1} A^a] + \kappa e_v D_0^n \tilde{G}_{2,v}^m [e_v A^a - \tilde{G}_{2,v}^{a-1} J_v^a] + D_0^r \tilde{a}_{bck}^r \\
 &\quad - e_v D_0^r [J_v^p - \kappa \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1} J_v^a + \kappa e_v \tilde{G}_{2,v}^m P_{\text{on}} A^a + e_v \tilde{G}_{2,v}^r D_0^r j^p] \\
 &= D_{bck}^r j^p - e_v D_0^r J_v^p + \kappa [e_v^2 D_0^n \tilde{G}_{2,v}^m - D^n D_{bck}^{a-1} - e_v^2 D_0^r \tilde{G}_{2,v}^m P_{\text{on}}] A^a + D_0^r \tilde{a}_{bck}^r \\
 &\quad + \kappa e_v [D^n - D_0^n \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1} + D_0^r \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1}] J_v^a \\
 &= D_{bck}^r j^p - e_v D_0^r J_v^p + \kappa [D_0^n \Pi_{2,v}^n - D^n D_{bck}^{a-1} - D_0^r \Pi_{2,v}^n P_{\text{on}}] A^a + D_0^r \tilde{a}_{bck}^r \\
 &\quad + \kappa e_v [D^n - [D_0^n - D_0^r] \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1}] J_v^a.
 \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
 j^p &= e_v D_{bck}^{r-1} D_0^r J_v^p - D_{bck}^{r-1} A^p + \kappa D_{bck}^{r-1} [D^n D_{bck}^{a-1} - D_0^n \Pi_{2,v}^n + D_0^r \Pi_{2,v}^n P_{\text{on}}] A^a - D_{bck}^{r-1} D_0^r \tilde{a}_{bck}^r \\
 &\quad - \kappa e_v D_{bck}^{r-1} [D^n - [D_0^n - D_0^r] \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1}] J_v^a, \quad (\text{avec : } D_0^n - D_0^r = -D_0^f) \\
 &= e_v J_v^p - D_{bck}^{r-1} A^p + \kappa D_{bck}^{r-1} [D^n D_{bck}^{a-1} - D_0^n \Pi_{2,v}^n + D_0^r \Pi_{2,v}^n P_{\text{on}}] A^a - D_{bck}^{r-1} D_0^r \tilde{a}_{bck}^r \\
 &\quad - \kappa e_v D_{bck}^{r-1} [D^n + D_0^f \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1}] J_v^a \\
 &= e_v J_v^p - D_{bck}^{r-1} A^p + \kappa \alpha_A A^a - \kappa e_v \alpha_J J_v^a - D_0^{r-1} D_0^r \tilde{a}_{bck}^r + \mathcal{O}(\hbar^2).
 \end{aligned}$$

Or, d'une part, on peut écrire

$$\begin{aligned}
 \alpha_A &= D_{bck}^{r-1} [D^n D_{bck}^{a-1} - D_0^n \Pi_{2,v}^n + D_0^r \Pi_{2,v}^n P_{\text{on}}] + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 &= (D_0^{r-1} - \Pi_{2,bck}^r) (D_0^n + D_0^n \Pi_{2,tot}^n D_0^n) (D_0^{a-1} - \Pi_{2,bck}^a) - D_0^{r-1} D_0^n \Pi_{2,v}^n \\
 &\quad + D_0^{r-1} D_0^r \Pi_{2,v}^n P_{\text{on}} + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 &= D_0^{r-1} D_0^n D_0^{a-1} - \Pi_{2,bck}^r D_0^n D_0^{a-1} - D_0^{r-1} D_0^n \Pi_{2,bck}^a + D_0^{r-1} D_0^n \Pi_{2,tot}^n D_0^n D_0^{a-1} \\
 &\quad - \Pi_{2,v}^n P_{\text{off}} + \Pi_{2,v}^n P_{\text{on}} + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 &= D_0^{n-1} P_{\text{off}} - \Pi_{2,bck}^r P_{\text{off}} - \Pi_{2,bck}^a P_{\text{off}} + \Pi_{2,tot}^n P_{\text{off}} - \Pi_{2,v}^n P_{\text{off}} + \Pi_{2,v}^n P_{\text{on}} + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 &= [D_0^{n-1} - \Pi_{2,bck}^n] P_{\text{off}} + \Pi_{2,v}^n P_{\text{on}} + \mathcal{O}(\hbar^2) = D_{bck}^{n-1} P_{\text{off}} + \Pi_{2,v}^n P_{\text{on}} + \mathcal{O}(\hbar^2)
 \end{aligned}$$

puisque (cf annexe B.2)

$$\Pi_{2,bck}^r + \Pi_{2,bck}^a = 2\Pi_{2,bck}^n, \quad \Pi_{2,tot}^n = \Pi_{2,bck}^n + \Pi_{2,v}^n,$$

et, d'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 \alpha_J &= D_{bck}^{r-1}[D^n + D_0^f \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1}] + \mathcal{O}(\hbar) \\
 &= (D_0^{r-1} - \Pi_{2,bck}^r)(D_0^n + D_0^n \Pi_{2,tot}^n D_0^n) + (D_0^{r-1} - \Pi_{2,bck}^r) D_0^f \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1} + \mathcal{O}(\hbar) \\
 &= D_0^{r-1} D_0^n + D_0^{r-1} D_0^f \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1} + \mathcal{O}(\hbar) = P_{\text{off}} + \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1} P_{\text{on}} + \mathcal{O}(\hbar).
 \end{aligned}$$

Finalement, à l'ordre  $\mathcal{O}(\hbar)$ , on a :

$$j^p = e_v J_v^p - D_{bck}^{r-1} A^p + \kappa [D_{bck}^{n-1} P_{\text{off}} + \Pi_{2,v}^n P_{\text{on}}] A^a - \kappa e_v [P_{\text{off}} + \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1} P_{\text{on}}] J_v^a - \tilde{a}_{bck}^r + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

Enfin l'expression du dernier champ extérieur peut être obtenue de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 a_v^p &= -\tilde{G}_{2,v}^{r-1} J_v^p + \kappa \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1} J_v^a - \kappa e_v \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \tilde{G}_{2,v}^m P_{\text{on}} A^a - e_v D_0^r j^p + \mathcal{O}(\hbar) \\
 &= -\tilde{G}_{2,v}^{r-1} J_v^p + \kappa \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1} J_v^a - \kappa e_v \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \tilde{G}_{2,v}^m P_{\text{on}} A^a - e_v D_0^r [e_v J_v^p - D_{bck}^{r-1} A^p] \\
 &\quad - e_v D_0^r [\kappa [D_{bck}^{n-1} P_{\text{off}} + \Pi_{2,v}^n P_{\text{on}}] A^a - \kappa e_v [P_{\text{off}} + \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1} P_{\text{on}}] J_v^a - \tilde{a}_{bck}^r] + \mathcal{O}(\hbar) \\
 &= -\tilde{G}_{2,v}^{r-1} J_v^p + \kappa \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1} J_v^a - \kappa e_v \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \tilde{G}_{2,v}^m P_{\text{on}} A^a - e_v A^p - \kappa e_v P_{\text{off}} A^a - e_v D_0^r \tilde{a}_{bck}^r + \mathcal{O}(\hbar) \\
 &= -\tilde{G}_{2,v}^{r-1} J_v^p + \kappa \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1} J_v^a - \kappa e_v \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \tilde{G}_{2,v}^m P_{\text{on}} A^a - e_v A^p - \kappa e_v P_{\text{off}} A^a + \mathcal{O}(\hbar)
 \end{aligned}$$

En résumé, l'inversion des relations donnant les champs et courants effectifs correspond au système suivant :

$$\begin{aligned}
 j^p &= e_v J_v^p - D_{bck}^{r-1} A^p + \kappa [D_{bck}^{n-1} P_{\text{off}} + \Pi_{2,v}^n P_{\text{on}}] A^a - \kappa e_v [P_{\text{off}} + \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1} P_{\text{on}}] J_v^a - \tilde{a}_{bck}^r + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 a_v^p &= -\tilde{G}_{2,v}^{r-1} J_v^p + \kappa \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1} J_v^a - \kappa e_v \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \tilde{G}_{2,v}^m P_{\text{on}} A^a - e_v A^p - \kappa e_v P_{\text{off}} A^a + \mathcal{O}(\hbar) \\
 j^a &= e_v J_v^a - D_{bck}^{a-1} A^a + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 a_v^a &= e_v A^a - \tilde{G}_{2,v}^{a-1} J_v^a + \mathcal{O}(\hbar).
 \end{aligned}$$

Les champs extérieurs  $a_v^X$  ont été évalués à l'ordre arbre tandis que les sources extérieures  $j^X$  le sont jusqu'à l'ordre d'une boucle. L'action effective correspond à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
 \Gamma[J_v^p, J_v^a, A^p, A^a] &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A^a \\ A^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} -\kappa [D_{bck}^{n-1} P_{\text{off}} + \Pi_{2,v}^n P_{\text{on}}] & D_{bck}^{r-1} \\ & D_{bck}^{a-1} \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^a \\ A^p \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J_v^a \\ J_v^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} -\kappa \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1} & \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \\ & \tilde{G}_{2,v}^{a-1} \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_v^a \\ J_v^p \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{e_v}{2} \begin{pmatrix} J_v^a \\ J_v^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa P_{\text{off}} + \kappa \tilde{G}_{2,v}^{r-1} \tilde{G}_{2,v}^m P_{\text{on}} & -1 \\ & -1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^a \\ A^p \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{e_v}{2} \begin{pmatrix} A^a \\ A^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa P_{\text{off}} + \kappa \tilde{G}_{2,v}^m \tilde{G}_{2,v}^{a-1} P_{\text{on}} & -1 \\ & -1 \\ & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_v^a \\ J_v^p \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\tau \neq v} e_\tau \{ A^a \tilde{G}_{2,\tau}^r a_\tau^p + a_\tau^p \tilde{G}_{2,\tau}^a A^a \} + \mathcal{O}(\hbar^2).
 \end{aligned}$$

De nouveau, cette action est nulle dès que les valeurs moyennes sont définies à partir des quantités effectives : les équations du mouvement pour les différentes valeurs moyennes sont déduites de celles des champs effectifs mais pas directement de l'action.

**Action effective pour toutes les variables effectives physiques**

Les quantités physiques  $a^p$  et  $j^p$  paramétrant  $\mathcal{W}$  ne font pas l'objet d'une redéfinition par transformée de *Legendre* ; ces quantités sont alors traitées comme des paramètres. L'action effective, permettant d'obtenir conjointement les équations dynamiques de la moyenne du champ électromagnétique et de celle des courants, est donnée par l'expression

$$\Gamma[J^p, A^p] = \Re\mathcal{W}[a^a, a^p, j^a, j^p] - \sum_{\tau} J_{\tau}^p a_{\tau}^a - j^a A^p.$$

La fonctionnelle  $\Re\mathcal{W}$  peut être écrite

$$\Re\mathcal{W}[a^a, j^a] = -\frac{\kappa}{2} \sum_{\tau} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ j^a \end{pmatrix}^{tr} \mathcal{W}_{aux,\tau}^{(2) n} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ j^a \end{pmatrix} - \sum_{\tau} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ j^a \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \Omega_{\tau}^a \\ \Omega_{\tau}^j \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

où

$$\mathcal{W}_{aux,\tau}^{(2) n} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^n & e_{\tau} \tilde{G}_{2,\tau}^n D_0^n \\ e_{\tau} D_0^n \tilde{G}_{2,\tau}^n & \frac{1}{n_s} D^n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \Omega_{\tau}^a \\ \Omega_{\tau}^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^r a_{\tau}^p + e_{\tau} \tilde{G}_{2,\tau}^r D_0^r j^p \\ e_{\tau} D_0^r \tilde{G}_{2,\tau}^r a_{\tau}^p + \frac{1}{n_s} D^r j^p \end{pmatrix}, \quad n_s = \sum_{\tau} 1.$$

Dans l'expression précédente, on a introduit le nombre de saveurs  $n_s$  suivies afin de compenser la somme sur celles-ci dans les termes ne dépendant que des champs extérieurs. De plus, on introduit les courants à une boucle  $\tilde{j}_{\tau}^n$  et  $\tilde{j}_{\tau}^r$  :

$$\tilde{j}_{\tau}^n = -\tilde{G}_{2,\tau}^n [a_{\tau}^a + e_{\tau} D_0^n j^a], \quad \tilde{j}_{\tau}^r = -\tilde{G}_{2,\tau}^r [a_{\tau}^p + e_{\tau} D_0^r j^p].$$

Le courant  $\tilde{j}_{\tau}^r$  fait office de paramètre. L'action effective  $\Gamma[J^p, A^p]$  s'écrit

$$\Gamma[J^p, A^p] = \frac{\kappa}{2} \sum_{\tau} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ j^a \end{pmatrix}^{tr} \mathcal{W}_{aux,\tau}^{(2) n} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ j^a \end{pmatrix}$$

et les variables effectives ont pour expression :

$$\begin{aligned} -J_{\tau}^p &= -\frac{\delta \Re\mathcal{W}}{\delta a_{\tau}^a} = \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^n a_{\tau}^a + \kappa e_{\tau} \tilde{G}_{2,\tau}^n D_0^n j^a - \tilde{j}_{\tau}^r = -\kappa \tilde{j}_{\tau}^n - \tilde{j}_{\tau}^r \\ -A^p &= -\frac{\delta \Re\mathcal{W}}{\delta j^a} = \kappa D^n j^a + D^r j^p + \sum_{\tau} e_{\tau} (\kappa D_0^n \tilde{G}_{2,\tau}^n a_{\tau}^a + D_0^r \tilde{G}_{2,\tau}^r a_{\tau}^p) \\ &= \kappa D_0^n [j^a - \sum_{\tau} e_{\tau} \tilde{j}_{\tau}^n] + D_0^r [j^p - \sum_{\tau} e_{\tau} \tilde{j}_{\tau}^r]. \end{aligned}$$

En terme des variables  $j^a$  et  $\tilde{j}_{\tau}^n$  (considérées comme des fonctions de  $J^p$  et  $A^p$ ), l'action effective est diagonale :

$$\Gamma[J^p, A^p] = \frac{\kappa}{2} \sum_{\tau} \begin{pmatrix} \tilde{j}_{\tau}^n \\ j^a \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n_s} D_0^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{j}_{\tau}^n \\ j^a \end{pmatrix} = \frac{\kappa}{2} \sum_{\tau} [\tilde{j}_{\tau}^n]^{tr} \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} \tilde{j}_{\tau}^n + \frac{\kappa}{2} j^a D_0^n j^a + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \kappa \tilde{j}_\tau^n &= J_\tau^p - \tilde{j}_\tau^r \\
 \kappa j^a &= \sum_\tau e_\tau [J_\tau^p - \tilde{j}_\tau^r] - D_0^{n-1} A^p - D_0^{n-1} D_0^r [j^p - \sum_\tau e_\tau \tilde{j}_\tau^r] \\
 &= \sum_\tau e_\tau J_\tau^p - D_0^{n-1} A^p - D_0^{n-1} D_0^r j^p + D_0^{n-1} [D_0^r - D_0^n] \sum_\tau e_\tau \tilde{j}_\tau^r \\
 &= \sum_\tau e_\tau J_\tau^p - D_0^{n-1} A^p - D_0^{n-1} D_0^r j^p + D_0^{n-1} D_0^f \sum_\tau e_\tau \tilde{j}_\tau^r \\
 &= \sum_\tau e_\tau [J_\tau^p + D_0^{n-1} D_0^f \tilde{j}_\tau^r] - D_0^{n-1} [A^p + D_0^r j^p]
 \end{aligned}$$

En conséquence, l'action effective s'écrit :

$$\begin{aligned}
 \kappa \Gamma[J^p, A^p] &= \frac{\kappa^2}{2} \sum_\tau [\tilde{j}_\tau^n]^{tr} \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} \tilde{j}_\tau^n + \frac{\kappa^2}{2} j^a D_0^n j^a \\
 &= \frac{1}{2} \sum_\tau [J_\tau^p - [\tilde{j}_\tau^r]^{tr}] \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} [J_\tau^p - \tilde{j}_\tau^r] + \frac{1}{2} \left\{ \sum_\tau e_\tau [J_\tau^p D_0^n - [\tilde{j}_\tau^r]^{tr} D_0^f] - [A^p + j^p D_0^a] \right\} \cdot D_0^{n-1} \\
 &\quad \cdot \left\{ \sum_\tau e_\tau [D_0^n J_\tau^p + D_0^f \tilde{j}_\tau^r] - [A^p + D_0^r j^p] \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_\tau [J_\tau^p - [\tilde{j}_\tau^r]^{tr}] \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} [J_\tau^p - \tilde{j}_\tau^r] + \frac{1}{2} [A^p + j^p D_0^a] \cdot D_0^{n-1} \cdot [A^p + D_0^r j^p] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_\tau e_\tau [A^p + j^p D_0^a] \cdot D_0^{n-1} \cdot [D_0^n J_\tau^p + D_0^f \tilde{j}_\tau^r] \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_\tau e_\tau [J_\tau^p D_0^n - \tilde{j}_\tau^r D_0^f] \cdot D_0^{n-1} \cdot [A^p + D_0^r j^p] + \mathcal{O}(\hbar^2)
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
 \kappa \Gamma[J^p, A^p] &= \frac{1}{2} \sum_\tau \begin{pmatrix} J_\tau^p \\ A^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} & e_\tau \\ e_\tau & \frac{1}{n_s} D_0^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\tau^p \\ A^p \end{pmatrix} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_\tau \begin{pmatrix} J_\tau^p \\ A^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} & e_\tau D_0^r \\ e_\tau D_0^{n-1} D_0^f & \frac{1}{n_s} D_0^{n-1} D_0^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{j}_\tau^r \\ j^p \end{pmatrix} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_\tau \begin{pmatrix} \tilde{j}_\tau^r \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} & -e_\tau D_0^f D_0^{n-1} \\ e_\tau D_0^a & \frac{1}{n_s} D_0^a D_0^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\tau^p \\ A^p \end{pmatrix} \\
 &\quad + \sum_\tau \begin{pmatrix} \tilde{j}_\tau^r \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} & -e_\tau D_0^a D_0^{n-1} D_0^f \\ +e_\tau D_0^f D_0^{n-1} D_0^r & \frac{1}{n_s} D_0^a D_0^{n-1} D_0^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{j}_\tau^r \\ j^p \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\hbar^2)
 \end{aligned}$$

avec  $D_0^f = D_0^r - D_0^n = D_0^n - D_0^a$ . En outre,  $\kappa \Gamma$  est ainsi indépendante du paramètre  $\kappa$  (toutes les quantités auxiliaires ont été éliminées). L'action effective précédente est définie pour les quantités effectives et les équations linéarisées de ces termes peuvent en être déduites (on retrouve les

relations précédentes).

L'action effective pour les valeurs moyennes peut être déduite de l'action précédente en imposant l'unitarité à cette fonctionnelle. Formellement, ceci revient à imposer les relations (B.7) et (B.8) à cette fonctionnelle ; L'action effective pour les valeurs moyennes est très similaire à la précédente puisque les variables auxiliaires avaient déjà toutes été éliminées :

$$\begin{aligned}
 \kappa\Gamma[\langle J \rangle, \langle A \rangle] &= \frac{1}{2} \sum_{\tau} \left( \begin{array}{c} \langle J_{\tau} \rangle \\ \langle A \rangle \end{array} \right)^{tr} \left( \begin{array}{cc} \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} & e_{\tau} \\ e_{\tau} & \frac{1}{n_s} D_0^{n-1} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \langle J_{\tau} \rangle \\ \langle A \rangle \end{array} \right) \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{\tau} \left( \begin{array}{c} \langle J_{\tau} \rangle \\ \langle A \rangle \end{array} \right)^{tr} \left( \begin{array}{cc} \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} & e_{\tau} D_0^r \\ e_{\tau} D_0^{n-1} D_0^f & \frac{1}{n_s} D_0^{n-1} D_0^r \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \tilde{j}_{\tau}^r \\ j^r \end{array} \right) \\
 &- \frac{1}{2} \sum_{\tau} \left( \begin{array}{c} \tilde{j}_{\tau}^r \\ j^r \end{array} \right)^{tr} \left( \begin{array}{cc} \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} & -e_{\tau} D_0^f D_0^{n-1} \\ e_{\tau} D_0^a & \frac{1}{n_s} D_0^a D_0^{n-1} \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \langle J_{\tau} \rangle \\ \langle A \rangle \end{array} \right) \\
 &+ \sum_{\tau} \left( \begin{array}{c} \tilde{j}_{\tau}^r \\ j^r \end{array} \right)^{tr} \left( \begin{array}{cc} \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} & -e_{\tau} D_0^a D_0^{n-1} D_0^f \\ +e_{\tau} D_0^f D_0^{n-1} D_0^r & \frac{1}{n_s} D_0^a D_0^{n-1} D_0^r \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \tilde{j}_{\tau}^r \\ j^r \end{array} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2)
 \end{aligned}$$

avec  $\tilde{j}_{\tau}^r = -\tilde{G}_{2,\tau}^r [a_{\tau}^r + e_{\tau} D_0^r j^r]$  puisque l'unitarité a été restaurée. À nouveau, les équations du mouvement pour les valeurs moyennes peuvent être déduites de cette fonctionnelle : on obtient deux équations linéaires couplées et les équations du mouvement pour les valeurs moyennes du champ ainsi que celle pour les courants peuvent être extraites de ce système ordre par ordre.

$$\begin{aligned}
 0 + \mathcal{O}(\hbar) &= \frac{\delta\Gamma}{\delta\langle J_{\tau} \rangle} = \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} [\langle J_{\tau} \rangle - \tilde{j}_{\tau}^r] - e_{\tau} [\langle A \rangle + D_0^r j^r] + \mathcal{O}(\hbar) \\
 0 + \mathcal{O}(\hbar^2) &= \frac{\delta\Gamma}{\delta\langle A \rangle} = D_0^{n-1} \cdot \left\{ \sum_{\tau} e_{\tau} [D_0^n \langle J_{\tau} \rangle + D_0^f \tilde{j}_{\tau}^r] - [\langle A \rangle + D_0^r j^r] \right\} + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 &= D_0^{n-1} \cdot \left\{ \sum_{\tau} e_{\tau} [D_0^n \langle J_{\tau} \rangle - [D_0^n - D_0^r] \tilde{j}_{\tau}^r] - [\langle A \rangle + D_0^r j^r] \right\} + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 &= \sum_{\tau} e_{\tau} (\langle J_{\tau} \rangle - \tilde{j}_{\tau}^r) - D_0^{n-1} [\langle A \rangle + D_0^r (j^r - \sum_{\tau} e_{\tau} \tilde{j}_{\tau}^r)] + \mathcal{O}(\hbar^2).
 \end{aligned}$$

La dernière relation permet de déduire l'équation du mouvement au niveau arbre pour  $\langle A \rangle$  c'est-à-dire  $\langle A \rangle = -D_0^r j^r + \mathcal{O}(\hbar^1)$ . L'imposer dans la première relation permet de trouver l'équation du mouvement de  $\langle J_{\tau} \rangle$  sous la forme  $\langle J_{\tau} \rangle = \tilde{j}_{\tau}^r + \mathcal{O}(\hbar^2)$ . En utilisant l'expression obtenue pour  $\langle J_{\tau} \rangle$ , l'équation du mouvement pour le niveau à une boucle de  $\langle A \rangle$  peut être déduite de la dernière équation du mouvement, et, en rassemblant tous les ordres de  $\langle A \rangle$ , cette valeur moyenne vérifie l'équation  $\langle A \rangle = -D_0^r (j^r - \sum_{\tau} e_{\tau} \tilde{j}_{\tau}^r) + \mathcal{O}(\hbar^2)$ . En résumé, les équations du mouvement pour les

valeurs moyennes sont retrouvées :

$$\begin{aligned}\langle J_\tau \rangle &= \tilde{j}_\tau^r + \mathcal{O}(\hbar) = -\tilde{G}_{2,\tau}^r [a_\tau^r + e_\tau D_0^r j^r] + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ \langle A \rangle &= -D_0^r (j^r - \sum_\tau e_\tau \tilde{j}_\tau^r) + \mathcal{O}(\hbar) = -D_0^r [\sum_\tau e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^r [a_\tau^r + e_\tau D_0^r j^r] - j^r] + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ &= -D^r j^r - D_0^r [\sum_\tau e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^r a_\tau^r + \mathcal{O}(\hbar^2)]\end{aligned}$$

et :  $\langle A \rangle = D_0^r [e_\tau \langle J_\tau \rangle - j^r] + \mathcal{O}(\hbar^2)$ .

Charges spectatrices : Seul le courant des charges de saveur  $v$  et le champ électromagnétique sont suivis. L'action effective correspondante s'écrit

$$\Gamma[J_v^p, A^p] = \Re \mathcal{W}[a_v^a, a^p, j^a, j^p] - \sum_\tau J_\tau^p a_\tau^a - j^a A^p.$$

Pour simplifier les expressions, les champs extérieurs auxiliaires  $a_{\tau \neq v}^a$  sont annulés. L'expression de cette action effective peut être obtenue de manière similaire aux développements précédents à partir de

$$\Re \mathcal{W}[a_v^a, j^a] = -\frac{\kappa}{2} \sum_\tau \left( \frac{a_v^a}{j^a} \right)^{tr} \mathcal{W}_{aux,v}^{(2)n} \left( \frac{a_v^a}{j^a} \right) - \left( \frac{a_v^a}{j^a} \right)^{tr} \left( \frac{\Omega^a}{\Omega^j} \right) + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

où

$$\mathcal{W}_{aux,v}^{(2)n} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,v}^n & e_v \tilde{G}_{2,v}^n D_0^n \\ e_v D_0^n \tilde{G}_{2,v}^n & D^n \end{pmatrix}, \quad \left( \frac{\Omega^a}{\Omega^j} \right) = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,v}^r a_v^p + e_v \tilde{G}_{2,v}^r D_0^r j^p \\ D^r j^p + \sum_\tau e_\tau D_0^r \tilde{G}_{2,\tau}^r a_\tau^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,v}^r a_v^p + e_v \tilde{G}_{2,v}^r D_0^r j^p \\ D^r j^p + D_0^r \tilde{a}_{bck}^r \end{pmatrix}.$$

avec le paramètre à une boucle lié aux charges spectatrices

$$\tilde{a}_{bck}^r \equiv \sum_{\tau \neq v} e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^r a_\tau^p.$$

De nouveau, les calculs sont analogues à ceux faits lorsque toutes les charges sont considérées. Les quantités effectives s'écrivent alors :

$$\begin{aligned}J_v^p &= \kappa \tilde{j}_v^n + \tilde{j}_v^r, \\ -A^p &= \kappa D^n j^a + \kappa e_v D_0^n \tilde{G}_{2,v}^n a_v^a + D^r j^p + e_v D_0^r \tilde{G}_{2,v}^r a_v^p + \sum_{\tau \neq v} e_\tau D_0^r \tilde{G}_{2,\tau}^r a_\tau^p \\ &= \kappa D_{bck}^n j^a - \kappa e_v D_0^n \tilde{j}_v^n + D_{bck}^r j^p - e_v D_0^r \tilde{j}_v^r + D_0^r \tilde{a}_{bck}^r\end{aligned}$$

au moyen des sources à une boucle introduites précédemment. On a

$$\begin{aligned}\kappa \tilde{j}_v^n &= J_v^p - \tilde{j}_v^r \\ \kappa j^a &= e_v D_{bck}^{n-1} D_0^n [J_v^p - \tilde{j}_v^r] - D_{bck}^{n-1} A^p - D_{bck}^{n-1} D_{bck}^r j^p + e_v D_{bck}^{n-1} D_0^r \tilde{j}_v^r - D_{bck}^{n-1} D_0^r \tilde{a}_{bck}^r + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ &= e_v D_{bck}^{n-1} D_0^n J_v^p - D_{bck}^{n-1} A^p - D_{bck}^{n-1} D_{bck}^r j^p + e_v D_{bck}^{n-1} D_0^r \tilde{j}_v^r - D_0^{n-1} D_0^r \tilde{a}_{bck}^r + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ &= e_v J_v^p - D_{bck}^{n-1} A^p - D_{bck}^{n-1} D_0^r j^p - D_0^{n-1} D_0^r \Pi_{2,bck}^r D_0^r j^p + e_v D_0^{n-1} D_0^r \tilde{j}_v^r - D_0^{n-1} D_0^r \tilde{a}_{bck}^r + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ &= -D_{bck}^{n-1} [A^p + D_0^r j^p] + D_0^{n-1} [e_v (D_0^n J_v^p + D_0^r \tilde{j}_v^r) - D_0^r (\tilde{a}_{bck}^r + \Pi_{2,bck}^r D_0^r j^p)] + \mathcal{O}(\hbar^2)\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la décomposition suivante :

$$\begin{aligned} D_{bck}^{n-1} D_{bck}^r + \mathcal{O}(\hbar^2) &= (D_0^{n-1} - \Pi_{2,bck}^n) \cdot (D_0^r + D_0^r \Pi_{2,bck}^r D_0^r) + \mathcal{O}(\hbar^2) \\ &= D_{bck}^{n-1} D_0^r + D_0^{n-1} D_0^r \Pi_{2,bck}^r D_0^r + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned}$$

Par conséquent, à l'ordre quadratique, l'action effective s'écrit

$$\begin{aligned} \kappa\Gamma[J_v^p, A^p] &= \frac{\kappa^2}{2} \tilde{j}_v^n \tilde{G}_{2,v}^{n-1} \tilde{j}_v^n + \frac{\kappa^2}{2} j^a D_{bck}^n j^a \\ &= \frac{1}{2} [J_v^p - \tilde{j}_v^r] \tilde{G}_{2,v}^{n-1} [J_v^p - \tilde{j}_v^r] \\ &\quad + \frac{1}{2} \{ -[A^p + j^p D_0^a] D_{bck}^{n-1} + [e_v(J_v^p D_0^n - [\tilde{j}_v^r]^{tr} D_0^f) - ([\tilde{a}_{bck}^r]^{tr} + j^p D_0^a \Pi_{2,bck}^a) D_0^a] D_0^{n-1} \} \cdot D_{bck}^n \\ &\quad \cdot \{ -D_{bck}^{n-1} [A^p + D_0^r j^p] + D_0^{n-1} [e_v(D_0^n J_v^p + D_0^f \tilde{j}_v^r) - D_0^r (\tilde{a}_{bck}^r + \Pi_{2,bck}^r D_0^r j^p)] \} \\ &= \frac{1}{2} [J_v^p - \tilde{j}_v^r] \tilde{G}_{2,v}^{n-1} [J_v^p - \tilde{j}_v^r] + \frac{1}{2} [A^p + j^p D_0^a] \cdot D_{bck}^{n-1} \cdot [A^p + D_0^r j^p] \\ &\quad - \frac{1}{2} [A^p + j^p D_0^a] \cdot D_0^{n-1} \cdot [e_v(D_0^n J_v^p + D_0^f \tilde{j}_v^r) - D_0^r (\tilde{a}_{bck}^r + \Pi_{2,bck}^r D_0^r j^p)] \\ &\quad - \frac{1}{2} [e_v(J_v^p D_0^n - [\tilde{j}_v^r]^{tr} D_0^f) - ([\tilde{a}_{bck}^r]^{tr} + j^p D_0^a \Pi_{2,bck}^a) D_0^a] \cdot D_0^{n-1} \cdot [A^p + D_0^r j^p] + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned}$$

Pour simplifier les notations, on réintroduit des ordres supérieurs pour former la contribution suivante :

$$\begin{aligned} \Lambda &= \frac{1}{2} [A^p + j^p D_0^a] \cdot D_{bck}^{n-1} \cdot [A^p + D_0^r j^p] + \frac{1}{2} [A^p + j^p D_0^a] \cdot D_0^{n-1} \cdot D_0^r \Pi_{2,bck}^r D_0^r j^p \\ &\quad + \frac{1}{2} j^p D_0^a \Pi_{2,bck}^a D_0^a \cdot D_0^{n-1} \cdot [A^p + D_0^r j^p] + \frac{1}{2} [A^p + j^p D_0^a] \cdot D_0^{n-1} \cdot D_0^r \tilde{a}_{bck}^r \\ &\quad + \frac{1}{2} [\tilde{a}_{bck}^r]^{tr} D_0^a \cdot D_0^{n-1} \cdot [A^p + D_0^r j^p] \\ &\equiv \frac{1}{2} [A^p + (j^p + [\tilde{a}_{bck}^r]^{tr}) D_{bck}^a] \cdot D_{bck}^{n-1} \cdot [A^p + D_{bck}^r (j^p + \tilde{a}_{bck}^r)] + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned}$$

L'action effective s'écrit alors

$$\begin{aligned} \kappa\Gamma[J_v^p, A^p] &= \frac{1}{2} [J_v^p - \tilde{j}_v^r] \cdot \tilde{G}_{2,v}^{n-1} \cdot [J_v^p - \tilde{j}_v^r] + \frac{1}{2} [A^p + (j^p + [\tilde{a}_{bck}^r]^{tr}) D_{bck}^a] \cdot D_{bck}^{n-1} \cdot [A^p + D_{bck}^r (j^p + \tilde{a}_{bck}^r)] \\ &\quad - \frac{e_v}{2} [A^p + j^p D_0^a] \cdot D_0^{n-1} \cdot [D_0^n J_v^p + D_0^f \tilde{j}_v^r] - \frac{e_v}{2} [J_v^p D_0^n - [\tilde{j}_v^r]^{tr} D_0^f] \cdot D_0^{n-1} \cdot [A^p + D_0^r j^p] + \mathcal{O}(\hbar^2), \end{aligned}$$

c'est-à-dire, plus explicitement sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned}
 \kappa\Gamma[J_v^p, A^p] &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J_v^p \\ A^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,v}^{m-1} & -e_v \\ -e_v & D_{bck}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_v^p \\ A^p \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} J_v^p \\ A^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,v}^{m-1} & e_v D_0^r \\ e_v D_0^{n-1} D_0^f & -D_{bck}^{n-1} D_{bck}^r + \mathcal{O}(\hbar^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{j}_v^r \\ j^p \end{pmatrix} \\
 &- \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{j}_v^r \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,v}^{m-1} & -e_v D_0^f D_0^{n-1} \\ e_v D_0^a & -D_{bck}^a D_{bck}^{n-1} + \mathcal{O}(\hbar^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_v^p \\ A^p \end{pmatrix} \\
 &+ \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{j}_v^r \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,v}^{m-1} & +e_v D_0^f D_0^{n-1} D_0^r \\ -e_v D_0^a D_0^{n-1} D_0^f & D_{bck}^a D_{bck}^{n-1} D_{bck}^r + \mathcal{O}(\hbar^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{j}_v^r \\ j^p \end{pmatrix} \\
 &+ \frac{1}{2} ([\tilde{a}_{bck}^r]^{tr} D_0^a D_0^{n-1} A^p + A^p D_0^{n-1} D_0^r \tilde{a}_{bck}^r) + \frac{1}{2} (j^p D_0^a D_0^{n-1} D_0^r \tilde{a}_{bck}^r + [\tilde{a}_{bck}^r]^{tr} [\tilde{a}_{bck}^r]^{tr} j^p) + \mathcal{O}(\hbar^2).
 \end{aligned}$$

En supprimant les termes indépendants des valeurs moyennes, l'action effective correspondant à ces dernières s'écrit alors :

$$\begin{aligned}
 \kappa\Gamma[\langle J_v \rangle, \langle A \rangle] &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle J_v \rangle \\ \langle A \rangle \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,v}^{m-1} & -e_v \\ -e_v & D_{bck}^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle J_v \rangle \\ \langle A \rangle \end{pmatrix} \\
 &- \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \langle J_v \rangle \\ \langle A \rangle \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,v}^{m-1} & e_v D_0^r \\ e_v D_0^{n-1} D_0^f & -D_{bck}^{n-1} D_{bck}^r + \mathcal{O}(\hbar^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{j}_v^r \\ j^r \end{pmatrix} \\
 &- \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{j}_v^r \\ j^r \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,v}^{m-1} & -e_v D_0^f D_0^{n-1} \\ e_v D_0^a & -D_{bck}^a D_{bck}^{n-1} + \mathcal{O}(\hbar^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle J_v \rangle \\ \langle A \rangle \end{pmatrix} \\
 &+ \frac{1}{2} ([\tilde{a}_{bck}^r]^{tr} D_0^a D_0^{n-1} \langle A \rangle + \langle A \rangle D_0^{n-1} D_0^r \tilde{a}_{bck}^r) + \mathcal{O}(\hbar^2)
 \end{aligned}$$

et les équations du mouvement correspondantes peuvent être obtenues comme précédemment à partir des relations :

$$\begin{aligned}
 0 + \mathcal{O}(\hbar) &= \kappa \frac{\delta\Gamma}{\delta\langle J_\tau \rangle} = \tilde{G}_{2,v}^{m-1} \cdot [J_v^p - \tilde{j}_v^r] - e_v [A^p + D_0^r j^p] + \mathcal{O}(\hbar) \\
 0 + \mathcal{O}(\hbar^2) &= \kappa \frac{\delta\Gamma}{\delta\langle A \rangle} = D_{bck}^{n-1} \cdot [A^p + D_{bck}^r (j^p + \tilde{a}_{bck}^r)] - e_v D_0^{n-1} [D_0^n J_v^p + D_0^f \tilde{j}_v^r] + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 &= D_{bck}^{n-1} [A^p + D_{bck}^r j^p] + D_0^{n-1} D_0^r \tilde{a}_{bck}^r - e_v D_0^{n-1} [D_0^n J_v^p + [D_0^r - D_0^n] \tilde{j}_v^r] + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 &= D_{bck}^{n-1} [A^p + D_0^r j^p] + D_0^{n-1} D_0^r [\Pi_{2,bck}^r D_0^r j^p + \tilde{a}_{bck}^r - e_v \tilde{j}_v^r] - e_v [J_v^p - \tilde{j}_v^r] + \mathcal{O}(\hbar^2)
 \end{aligned}$$

et, en identifiant les différents ordres, les valeurs moyennes s'écrivent alors sous la forme :

$$\langle J_v \rangle = \tilde{j}_v^r + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad \langle A \rangle = -D_{bck}^r j^r - D_0^r (\tilde{a}_{bck}^r - e_v \tilde{j}_v^r) + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

c'est-à-dire

$$\langle J_v \rangle = -\tilde{G}_{2,\tau}^r [a_\tau^r + e_\tau D_0^r j^r] + \mathcal{O}(\hbar^2), \quad \langle A \rangle = -D^r j^r - \sum_\tau e_\tau D_0^r \tilde{G}_{2,\tau}^r a_\tau^p + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

et

$$\langle A \rangle = -D_{bck}^r j^r - D_0^r \left( \sum_{\tau \neq v} e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^r a_\tau^p - e_v \langle J_v \rangle \right) + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

**Action effective pour toutes les densités de charge**

De la même manière, l'action effective pour la moyenne des différents courants est définie par la relation

$$\Gamma[J^p] = \Re\mathcal{W}[a^a, a^p, j^a, j^p] - \sum_{\tau} J_{\tau}^p a_{\tau}^a$$

et correspond à l'expression

$$\Gamma[J^p] = \frac{\kappa}{2} \sum_{\tau} a_{\tau}^a \tilde{G}_{2,\tau}^n a_{\tau}^a + \Gamma_j, \quad \Gamma_j = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa D^n & D^r \\ D^a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j^a \\ j^p \end{pmatrix}$$

où le champ extérieur  $a_{\tau}^a$  s'écrit en fonction du courant effectif  $J_{\tau}^p$  sous la forme

$$\begin{aligned} -J_{\tau}^p &= \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^n [a_{\tau}^a + e_{\tau} D_0^n j^a] + \tilde{G}_{2,\tau}^r [a_{\tau}^p + e_{\tau} D_0^r j^p] \\ \kappa a_{\tau}^a &= -\tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} J_{\tau}^p - \kappa e_{\tau} D_0^n j^a - \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} \tilde{G}_{2,\tau}^r [a_{\tau}^p + e_{\tau} D_0^r j^p] \\ &= -\tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} [J_{\tau}^p - \tilde{j}_{\tau}^r] - \kappa e_{\tau} D_0^n j^a \end{aligned}$$

à partir de la source retardée à une boucle

$$\tilde{j}_{\tau}^r = -\tilde{G}_{2,\tau}^r [a_{\tau}^p + e_{\tau} D_0^r j^p], \quad [\tilde{j}_{\tau}^r]^{tr} = -[a_{\tau}^p + e_{\tau} j^p D_0^a] \tilde{G}_{2,\tau}^a$$

qui constitue alors un paramètre de l'action effective pour la moyenne des courants. À une boucle, l'action effective s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \kappa \Gamma[J^p] &= \frac{1}{2} \sum_{\tau} [J_{\tau}^p - \tilde{j}_{\tau}^r] \cdot \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} \cdot [J_{\tau}^p - \tilde{j}_{\tau}^r] + \kappa \sum_{\tau} e_{\tau} [J_{\tau}^p - \tilde{j}_{\tau}^r] \cdot D_0^n \cdot j^a \\ &\quad + \kappa \sum_{\tau} e_{\tau} j^a \cdot D_0^n \cdot [J_{\tau}^p - \tilde{j}_{\tau}^r] + \kappa \Gamma_j + \mathcal{O}(\hbar^2). \end{aligned}$$

Cette action permet de retrouver l'équation du mouvement de la source effective  $J^p$  en fonction de tous les autres paramètres. L'annulation des quantités auxiliaires de l'équation précédente ( $j^a \rightarrow 0, \Gamma_j[j^a = 0, j^p] = 0$ ) permet d'obtenir l'expression de l'action effective  $\kappa \Gamma$  en terme des valeurs moyennes sous la forme suivante :

$$\kappa \Gamma[\langle J \rangle] = \frac{1}{2} \sum_{\tau} [\langle J_{\tau} \rangle - \tilde{j}_{\tau}^r] \cdot \tilde{G}_{2,\tau}^{n-1} \cdot [\langle J_{\tau} \rangle - \tilde{j}_{\tau}^r] + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

En outre,  $\kappa \Gamma$  est alors indépendante de  $\kappa$  et produit bien l'équation du mouvement  $\langle J_{\tau} \rangle = \tilde{j}_{\tau}^r + \mathcal{O}(\hbar^2)$  par application du principe variationnel.

Charges spectatrices : Le courant des charges de saveur  $v$  est mesuré ; l'action effective correspondante est définie par la relation

$$\Gamma[J_v^p] = \Re\mathcal{W}[a_v^a, a^p, j^a, j^p] - \sum_{\tau} J_{\tau}^p a_{\tau}^a.$$

Elle s'écrit alors

$$\Gamma[J_v^p] = \frac{\kappa}{2} a_v^a \cdot \tilde{G}_{2,v}^n \cdot a_v^a + \Gamma_{cst} \quad (\text{B.9})$$

où  $\Gamma_{cst}$  correspond à tous les termes indépendants de  $a_v^a$ ,

$$\Gamma_{cst} = \Gamma_j + \Gamma_{bck,a} + \Gamma_{bck,a,j} + \Gamma_{bck,a,j}^{tr}. \quad (\text{B.10})$$

L'expression de ces termes n'est pas essentielle au calcul, d'autant plus qu'ils s'annulent tous lorsque l'unitarité est imposée à la fonctionnelle. L'expression du courant effectif correspond à :

$$\begin{aligned} -J_v^p &= \kappa \tilde{G}_{2,v}^n [a_v^a + e_v D_0^n j^a] + \tilde{G}_{2,v}^r [a_v^p + e_v D_0^r j^p] \\ \kappa a_v^a &= -\tilde{G}_{2,v}^{n-1} [J_v^p - \tilde{j}_v^r] - \kappa e_v D_0^n j^a \end{aligned}$$

Par conséquent, l'action effective s'écrit :

$$\kappa \Gamma[J_v^p] = \frac{1}{2} [J_v^p - \tilde{j}_v^r] \cdot \tilde{G}_{2,v}^{n-1} \cdot [J_v^p - \tilde{j}_v^r] + \kappa e_v [J_v^p - \tilde{j}_v^r] \cdot D_0^n \cdot j^a + \kappa e_v j^a \cdot D_0^r \cdot [J_v^p - \tilde{j}_v^r] + \kappa \Gamma_{cst} + \mathcal{O}(\hbar^2),$$

et, en annulant les quantités auxiliaires, elle s'écrit finalement :

$$\kappa \Gamma[\langle J_v \rangle] = \frac{1}{2} [\langle J_v \rangle - \tilde{j}_v^r] \cdot \tilde{G}_{2,v}^{n-1} \cdot [\langle J_v \rangle - \tilde{j}_v^r] + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

et génère, à partir du principe variationnel, l'expression de la valeur moyenne  $\langle J_v \rangle = \tilde{j}_v^r + \mathcal{O}(\hbar^2)$ .

### Action effective pour le champ électromagnétique

L'expression de l'action effective pour la moyenne du champ électromagnétique est définie à partir de la relation

$$\Gamma[A^p] = \Re \mathcal{W}[a^a, a^p, j^a, j^p] - j^a A^p$$

c'est-à-dire

$$\Gamma[A^p] = +\frac{\kappa}{2} j^a D^n j^a + \Gamma_a, \quad \Gamma_a = -\frac{1}{2} \sum_{\tau} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ a_{\tau}^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^n & \tilde{G}_{2,\tau}^r \\ \tilde{G}_{2,\tau}^a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{\tau}^a \\ a_{\tau}^p \end{pmatrix}.$$

Le champ effectif correspond à :

$$\begin{aligned} -A^p &= -\frac{\delta \Re \mathcal{W}}{\delta j^a} = \kappa D^n j^a + D^r j^p + \sum_{\tau} e_{\tau} (\kappa D_0^n \tilde{G}_{2,\tau}^n a_{\tau}^a + D_0^r \tilde{G}_{2,\tau}^r a_{\tau}^p) \\ &= \kappa D^n j^a + \kappa D_0^n \sum_{\tau} e_{\tau} \tilde{G}_{2,\tau}^n a_{\tau}^a + D_0^r [j^p - \sum_{\tau} e_{\tau} \tilde{j}_{\tau}^r] \\ \kappa j^a &= -D^{n-1} [A^p + D_0^r j^p] - \sum_{\tau} e_{\tau} [\kappa \tilde{G}_{2,\tau}^n a_{\tau}^a - D_0^{n-1} D_0^r \tilde{j}_{\tau}^r] \end{aligned}$$

en utilisant le courant retardé à une boucle  $\tilde{j}_\tau^r$ . Par conséquent, en excluant les ordres à plus d'une boucle, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \kappa\Gamma[A^p] &= \frac{1}{2}[A^p + j^p D_0^a] D^{n-1} [A^p + D_0^r j^p] + \frac{1}{2} \sum_\tau e_\tau [A^p + j^p D_0^a] \cdot [\kappa \tilde{G}_{2,\tau}^n a_\tau^a - D_0^{n-1} D_0^r \tilde{j}_\tau^r] \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_\tau e_\tau [\kappa a_\tau^a \tilde{G}_{2,\tau}^n - [\tilde{j}_\tau^r]^{tr} D_0^a D_0^{n-1}] \cdot [A^p + D_0^r j^p] + \kappa \Gamma_a \\
 &= \kappa \Gamma_a + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} A^p \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} D^{n-1} & D^{n-1} D_0^r \\ D_0^a D^{n-1} & D_0^a D^{n-1} D_0^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^p \\ j^p \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_\tau e_\tau \begin{pmatrix} A^p \\ j^p \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^n & -D_0^{n-1} D_0^r \\ \kappa D_0^a D_0^n \tilde{G}_{2,\tau}^n & -D_0^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_\tau^a \\ \tilde{j}_\tau^r \end{pmatrix} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_\tau e_\tau \begin{pmatrix} a_\tau^a \\ \tilde{j}_\tau^r \end{pmatrix}^{tr} \begin{pmatrix} \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^n & \kappa \tilde{G}_{2,\tau}^n D_0^r \\ -D_0^a D_0^{n-1} & -D_0^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^p \\ j^p \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

En annulant les quantités auxiliaires de l'équation précédente ( $a_\tau^a \rightarrow 0$ ,  $\Gamma_a[a^a = 0, a^p] = 0$ ), l'expression de  $\kappa\Gamma$  devient indépendante de  $\kappa$  et définit alors l'action effective pour les valeurs moyennes :

$$\begin{aligned}
 \kappa\Gamma[\langle A \rangle] &= \frac{1}{2}[\langle A \rangle + j^r D_0^a] \cdot D^{n-1} \cdot [\langle A \rangle + D_0^r j^r] - \frac{1}{2}[\langle A \rangle + j^r D_0^a] \cdot D_0^{n-1} \cdot D_0^r \sum_\tau e_\tau \tilde{j}_\tau^r \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_\tau e_\tau [\tilde{j}_\tau^r]^{tr} D_0^a \cdot D_0^{n-1} \cdot [\langle A \rangle + D_0^r j^r] + \mathcal{O}(\hbar^2).
 \end{aligned}$$

L'équation du mouvement pour  $\langle A \rangle$  peut alors être obtenue à partir du principe variationnel :

$$\begin{aligned}
 0 &= D^{n-1} \cdot [\langle A \rangle + D_0^r j^r] - D_0^{n-1} \cdot D_0^r \sum_\tau e_\tau \tilde{j}_\tau^r + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
 &= D^{n-1} \cdot [\langle A \rangle + D_0^r j^r] + D_0^{n-1} \cdot D_0^r \sum_\tau e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^r [a_\tau^r + e_\tau D_0^r j^r] + \mathcal{O}(\hbar^2).
 \end{aligned}$$

Donc :

$$\langle A \rangle = -D^r j^r - D_0^r \sum_\tau e_\tau \tilde{G}_{2,\tau}^r a_\tau^r + \mathcal{O}(\hbar^2).$$

## B.2 Structure du tenseur de polarisation et de l'énergie propre

### B.2.1 Tenseur de polarisation

Dans le contexte du formalisme *closed time path*, le tenseur de polarisation  $\tilde{G}_{2,\tau}$  induit par la charge  $e_\tau$  est défini par l'expression :

$$(\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu} = -i\text{tr}[G_{0,\tau}^{\sigma'\sigma}\gamma_\mu G_{0,\tau}^{\sigma\sigma'}\gamma_\nu]. \quad (\text{B.11})$$

c'est-à-dire

$$(i\tilde{G}_{2,\tau})_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \text{tr}[G_{0,\tau}^{++}\gamma_\mu G_{0,\tau}^{++}\gamma_\nu] & \text{tr}[G_{0,\tau}^{-+}\gamma_\mu G_{0,\tau}^{+-}\gamma_\nu] \\ \text{tr}[G_{0,\tau}^{+-}\gamma_\mu G_{0,\tau}^{-+}\gamma_\nu] & \text{tr}[G_{0,\tau}^{--}\gamma_\mu G_{0,\tau}^{--}\gamma_\nu] \end{pmatrix}.$$

L'expression du propagateur pour les fermions sur le contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$  s'écrivant

$$\tilde{G}_{0,\tau} = \begin{pmatrix} +G_{0,\tau}^n & +G_{0,\tau}^f \\ -G_{0,\tau}^f & -G_{0,\tau}^n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} G_{0,\tau}^c & -G_{0,\tau}^c \\ -G_{0,\tau}^c & G_{0,\tau}^c \end{pmatrix},$$

par conséquent, les différentes composantes du tenseur de polarisation ont pour expression

$$\begin{aligned} (i\tilde{G}_{2,\tau}^{++})_{\mu\nu} &= \text{tr}[(+G_{0,\tau}^n + iG_{0,\tau}^c)\gamma_\mu(+G_{0,\tau}^n + iG_{0,\tau}^c)\gamma_\nu] \\ (i\tilde{G}_{2,\tau}^{--})_{\mu\nu} &= \text{tr}[-G_{0,\tau}^n + iG_{0,\tau}^c)\gamma_\mu(-G_{0,\tau}^n + iG_{0,\tau}^c)\gamma_\nu] \\ (i\tilde{G}_{2,\tau}^{+-})_{\mu\nu} &= \text{tr}[-G_{0,\tau}^f - iG_{0,\tau}^c)\gamma_\mu(+G_{0,\tau}^f - iG_{0,\tau}^c)\gamma_\nu] \\ (i\tilde{G}_{2,\tau}^{-+})_{\mu\nu} &= \text{tr}[(+G_{0,\tau}^f - iG_{0,\tau}^c)\gamma_\mu(-G_{0,\tau}^f - iG_{0,\tau}^c)\gamma_\nu]. \end{aligned}$$

Les parties réelle et imaginaire des différentes composantes de  $\tilde{G}_{2,\tau}$  permettent d'en définir les termes correspondant aux contributions proche, lointaine et purement imaginaire. Ces contributions obéissent aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Re\tilde{G}_{2,\tau}^{++} &= -\Re\tilde{G}_{2,\tau}^{--} = +\text{tr}[G_{0,\tau}^c\gamma_\mu G_{0,\tau}^n\gamma_\nu] + \text{tr}[G_{0,\tau}^n\gamma_\mu G_{0,\tau}^c\gamma_\nu] \equiv \tilde{G}_{2,\tau}^n \\ \Im\tilde{G}_{2,\tau}^{++} &= +\Im\tilde{G}_{2,\tau}^{--} = -\text{tr}[G_{0,\tau}^c\gamma_\mu G_{0,\tau}^n\gamma_\nu] + \text{tr}[G_{0,\tau}^n\gamma_\mu G_{0,\tau}^c\gamma_\nu] \\ \Re\tilde{G}_{2,\tau}^{+-} &= -\Re\tilde{G}_{2,\tau}^{-+} = -\text{tr}[G_{0,\tau}^c\gamma_\mu G_{0,\tau}^f\gamma_\nu] + \text{tr}[G_{0,\tau}^f\gamma_\mu G_{0,\tau}^c\gamma_\nu] \equiv -\tilde{G}_{2,\tau}^f \\ \Im\tilde{G}_{2,\tau}^{+-} &= +\Im\tilde{G}_{2,\tau}^{-+} = +\text{tr}[G_{0,\tau}^f\gamma_\mu G_{0,\tau}^c\gamma_\nu] + \text{tr}[G_{0,\tau}^c\gamma_\mu G_{0,\tau}^f\gamma_\nu] \end{aligned}$$

En outre, comme  $G_{0,\tau}^n(x,y) = \text{sgn}[x^0 - y^0]G_{0,\tau}^f(x,y)$ , on a, par convolution dans l'espace des positions,

$$\text{tr}[G_{0,\tau}^n\gamma_\mu G_{0,\tau}^n\gamma_\nu] = -\text{tr}[G_{0,\tau}^f\gamma_\mu G_{0,\tau}^f\gamma_\nu]. \quad (\text{B.12})$$

Par conséquent, les parties imaginaires de  $\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'}$  vérifient les relations suivantes :

$$\Im\tilde{G}_{2,\tau}^{+-} = \Im\tilde{G}_{2,\tau}^{++} \equiv \tilde{G}_{2,\tau}^c.$$

Ainsi, sur le contour  $\mathcal{C}^+ \cup \mathcal{C}^-$ , le tenseur de polarisation peut être écrit

$$\tilde{G}_{2,\tau} = \begin{pmatrix} +\tilde{G}_{2,\tau}^n & -\tilde{G}_{2,\tau}^f \\ +\tilde{G}_{2,\tau}^f & -\tilde{G}_{2,\tau}^n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^c & \tilde{G}_{2,\tau}^c \\ \tilde{G}_{2,\tau}^c & \tilde{G}_{2,\tau}^c \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

En outre, les différentes composantes de ce tenseur vérifient la relation de contrainte

$$\tilde{G}_{2,\tau}^{++} + \tilde{G}_{2,\tau}^{--} = \tilde{G}_{2,\tau}^{+-} + \tilde{G}_{2,\tau}^{-+}. \quad (\text{B.14})$$

Enfin, on définit des combinaisons de grandeurs retardée et avancée pour le tenseur de polarisation par les relations suivantes :

$$\tilde{G}_{2,\tau}^r = \tilde{G}_{2,\tau}^n + \tilde{G}_{2,\tau}^f, \quad \tilde{G}_{2,\tau}^a = \tilde{G}_{2,\tau}^n - \tilde{G}_{2,\tau}^f.$$

Ainsi, les quantités  $\tilde{G}_{2,\tau}^X$  se comportent comme pour un propagateur issu de degrés de liberté bosoniques.

### B.2.2 Énergie propre

L'énergie propre  $\Pi_2$  est définie à partir de la somme des tenseurs  $\tilde{G}_{2,\tau}$  des différentes saveurs selon la relation

$$\Pi_2 = \sum_{\tau} e_{\tau}^2 \check{\sigma} \tilde{G}_{2,\tau} \check{\sigma} = \sum_{\tau} e_{\tau}^2 \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^{++} & -\tilde{G}_{2,\tau}^{+-} \\ -\tilde{G}_{2,\tau}^{-+} & \tilde{G}_{2,\tau}^{--} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.15})$$

Cette structure est analogue à celle du propagateur par blocs pour les fermions. La relation (B.14) s'écrit pour l'énergie propre :

$$\Pi_2^{++} + \Pi_2^{--} + \Pi_2^{+-} + \Pi_2^{-+} = 0. \quad (\text{B.16})$$

Enfin, les contributions avancée et retardée de l'énergie propre s'écrivent

$$\Pi_2^r = \Pi_2^{++} + \Pi_2^{+-} = \sum_{\tau} e_{\tau}^2 [\tilde{G}_{2,\tau}^{++} - \tilde{G}_{2,\tau}^{+-}] = \sum_{\tau} e_{\tau}^2 \tilde{G}_{2,\tau}^r, \quad \Pi_2^a = \sum_{\tau} e_{\tau}^2 \tilde{G}_{2,\tau}^a. \quad (\text{B.17})$$

de sorte que le propagateur du photon soit

$$D^r = \frac{1}{D_0^{r-1} - \Pi_2^r}, \quad D^a = \frac{1}{D_0^{a-1} - \Pi_2^a}. \quad (\text{B.18})$$

On définit les contributions proche, lointaine de l'énergie propre ainsi que  $\Pi_2^c$  en terme des composantes réelle et imaginaire de cette grandeur dans l'espace des positions. Ainsi, l'énergie propre se décompose comme :

$$\Pi_2 = \sum_{\tau} e_{\tau}^2 \left[ \begin{pmatrix} +\tilde{G}_{2,\tau}^n & +\tilde{G}_{2,\tau}^f \\ -\tilde{G}_{2,\tau}^f & -\tilde{G}_{2,\tau}^n \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \tilde{G}_{2,\tau}^c & -\tilde{G}_{2,\tau}^c \\ -\tilde{G}_{2,\tau}^c & \tilde{G}_{2,\tau}^c \end{pmatrix} \right] \quad (\text{B.19})$$

et donc :

$$\Pi_2^n = \sum_{\tau} e_{\tau}^2 \tilde{G}_{2,\tau}^n = \Re \Pi_2^{++}, \quad \Pi_2^f = \sum_{\tau} e_{\tau}^2 \tilde{G}_{2,\tau}^f = \Re \Pi_2^{+-}, \quad \Pi_2^c = \sum_{\tau} e_{\tau}^2 \tilde{G}_{2,\tau}^c = \Im \Pi_2^{++}. \quad (\text{B.20})$$

À l'ordre d'une boucle, l'expression du propagateur du photon correspond aux expressions

$$\begin{aligned} D^n &= \frac{1}{2} [D^r + D^a] = D_0^n + D_0^n \Pi_2^n D_0^n + D_0^f \Pi_2^n D_0^f + D_0^f \Pi_2^f D_0^n + D_0^n \Pi_2^f D_0^f \\ D^f &= \frac{1}{2} [D^r - D^a] = D_0^f + D_0^f \Pi_2^f D_0^f + D_0^n \Pi_2^f D_0^n + D_0^f \Pi_2^n D_0^n + D_0^n \Pi_2^n D_0^f, \end{aligned}$$

## B.2. STRUCTURE DU TENSEUR DE POLARISATION ET DE L'ÉNERGIE PROPRE

---

et plus particulièrement, comme  $\Pi_2$  est nul sur couche de masse, ces expressions se réduisent à :

$$D^n = D_0^n + D_0^n \Pi_2^n D_0^n, \quad D^f = D_0^f + D_0^f \Pi_2^f D_0^f.$$

### B.3 Calcul du tenseur de polarisation

#### B.3.1 Expression générale

Pour une saveur donnée  $\tau$ , le tenseur de polarisation est défini par l'expression (B.11) c'est-à-dire :

$$(\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu} = -i\text{tr}[G_0^{\sigma'\sigma}\gamma_\mu G_0^{\sigma\sigma'}\gamma_\nu]$$

Plus particulièrement, la combinaison retardée de  $\tilde{G}_{2,\tau}$  utilisée dans les équations dynamiques présentées dans le chapitre 5, s'écrit :

$$\tilde{G}_{2,\tau}^r[p] = \tilde{G}_{2,\tau}^m[p] + \tilde{G}_{2,\tau}^f[p] = \Re\tilde{G}_{2,\tau}^{++}[p] - \Re\tilde{G}_{2,\tau}^{+-}[p].$$

Par ailleurs, la consistance est étudiée par l'intermédiaire de la partie imaginaire du tenseur de polarisation dans l'espace des positions. Par conséquent, on s'attache à évaluer  $\tilde{G}_{2,\tau}^{++}$  et  $\tilde{G}_{2,\tau}^{+-}$ . En outre, les autres tenseurs peuvent être déduits de ces expressions. Les parties réelles et imaginaires du tenseur calculé sont toujours définies dans l'espace des positions :

$$\Re\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'}(p) = \frac{1}{2}[\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'}(p) + \tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'*}(-p)], \quad \Im\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'}(p) = \frac{1}{2i}[\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'}(p) - \tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'*}(-p)]. \quad (\text{B.21})$$

Enfin, le tenseur de polarisation doit toujours satisfaire les identités de *Ward* à savoir :

$$p^\mu(\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu}(p) = 0.$$

#### B.3.2 Expression dans le vide

À partir de l'expression du propagateur des fermions dans le vide, on peut montrer que les termes pertinents du tenseur de polarisation ont pour expression :

$$\begin{aligned} i(\tilde{G}_{2,\tau,vac}^{++})_{\mu\nu}[p] &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} N_{\mu\nu}(k,p) \frac{1}{(k+p)^2 - m^2 + i0} \frac{1}{k^2 - m^2 + i0} \\ i(\tilde{G}_{2,\tau,vac}^{+-})_{\mu\nu}[p] &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} N_{\mu\nu}(k,p) 2i\pi\delta[(k+p)^2 - m^2] \Theta[k^0 + p^0] 2i\pi\delta[k^2 - m^2] \Theta[-k^0] \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} N_{\mu\nu}(k,p) &= \text{tr}[(\not{k} + \not{p} + m)\gamma_\mu(\not{k} + m)\gamma_\nu] \\ &= 4[2k_\mu k_\nu + k_\mu p_\nu + p_\mu k_\nu - g_{\mu\nu}(k^2 + kp - m^2)]. \end{aligned}$$

Plus particulièrement, la trace de l'expression précédente correspond à :

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} N_{\mu\nu}(k,p) &= 4[2k^2 + 2kp - 4(k^2 + kp - m^2)] = -8(k^2 + kp - 2m^2) \\ &= -4[k^2 - m^2 + (k+p)^2 - m^2 - p^2 - 2m^2]. \end{aligned}$$

On peut aisément vérifier que les quantités  $i(\tilde{G}_{2,\tau,vac}^{++})_{\mu\nu}[p]$  et  $i(\tilde{G}_{2,\tau,vac}^{+-})_{\mu\nu}[p]$  sont transverses<sup>7</sup> :

$$(\tilde{G}_{2,\tau,vac}^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu}[p] = \frac{1}{3}T_{\mu\nu} g^{\alpha\beta}(\tilde{G}_{2,\tau,vac}^{\sigma\sigma'})_{\alpha\beta}[p], \quad T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}.$$

Le tenseur de polarisation dans le vide  $(\tilde{G}_{2,\tau,vac}^{++})_{\mu\nu}$  correspond à la correction à une boucle standard en théorie quantique des champs :

$$(\tilde{G}_{2,\tau,vac}^{++})_{\mu\nu}[p] \equiv \frac{1}{e^2}(\Pi_{2,\tau}^{++})_{\mu\nu}[p] = T_{\mu\nu} \frac{4p^2}{3} \left\{ \frac{1}{3} + 2 \left( 1 + \frac{p^2}{2m^2} \right) \left[ \sqrt{\frac{4m^2}{p^2} - 1} \operatorname{arccot} \sqrt{\frac{4m^2}{p^2} - 1} - 1 \right] \right\}.$$

La correction  $(\tilde{G}_{2,\tau}^{+-})_{\mu\nu}[p]$  est propre au formalisme *CTP*. Elle est nulle pour  $0 < p^0 \ll m$  :

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} i(\tilde{G}_{2,\tau,vac}^{+-})_{\mu\nu}[p] &= -8m^2 \left[ 1 + \frac{p^2}{2m^2} \right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \delta[(k+p)^2 - m^2] \Theta[k^0 + p^0] \delta[k^2 - m^2] \Theta[-k^0] \\ &= -8m^2 \left[ 1 + \frac{p^2}{2m^2} \right] \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \delta[(k^0 + p^0)^2 - \epsilon_{k+p}^2] \delta[(k^0)^2 - \epsilon_k^2] \Theta[k^0 + p^0] \Theta[-k^0] \end{aligned}$$

avec  $\epsilon_k = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ ,  $\epsilon_{k+p}^2 = (\mathbf{k} + \mathbf{p})^2 + m^2 = \epsilon_k^2 + \mathbf{p}^2 + 2\mathbf{p}\mathbf{k}$ . Par changement de variables et en posant  $k_r = \sqrt{\epsilon_k^2 - m^2}$ , l'expression précédente devient

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} i(\tilde{G}_{2,\tau,vac}^{+-})_{\mu\nu}[p] &= -8m^2 \left[ 1 + \frac{p^2}{2m^2} \right] \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2\pi} \int_{-1}^1 dC \int_m^\infty \frac{d\epsilon_k}{2\pi} \frac{k_r}{2} \left[ \delta[p^2 + 2\epsilon_k p^0 - 2\mathbf{k}\mathbf{p}] \Theta[\epsilon_k + p^0] \Theta[-\epsilon_k] \right. \\ &\quad \left. + \delta[p^2 - 2\epsilon_k p^0 - 2\mathbf{k}\mathbf{p}] \Theta[p^0 - \epsilon_k] \Theta[+\epsilon_k] \right] \\ &= -4m^2 \left[ 1 + \frac{p^2}{2m^2} \right] \int_{-1}^1 dC \int_{\mathbb{R}} \frac{d\epsilon_k}{2\pi} k_r \delta[p^2 + 2\epsilon_k p^0 - 2k_r p_r C] \\ &\quad \Theta[\epsilon_k^2 - m^2] \Theta[\epsilon_k + p^0] \Theta[-\epsilon_k] \\ &= 0 \end{aligned}$$

car  $\Theta[\epsilon_k^2 - m^2] \Theta[\epsilon_k + p^0] \Theta[-\epsilon_k] = 0$  pour  $p^0 \ll m$ . Ainsi, dans cette limite,  $\tilde{G}_{2,\tau,vac}^r$  correspond au terme standard obtenu dans le cadre du calcul d'amplitudes de transition usuelles.

### B.3.3 Expressions à température et densité finies

On introduit le quadri-vecteur  $u$  qui, dans le référentiel au repos de l'environnement, s'écrit  $u = (1, \mathbf{0})$ . L'expression des termes  $e_\tau^2 \tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'}$  peut être paramétrée en fonction des quantités  $\mathcal{A}^{\sigma\sigma'}$  et  $\mathcal{B}^{\sigma\sigma'}$  suivantes

$$\mathcal{A}^{\sigma\sigma'}[p] = e_\tau^2 g^{\mu\nu} (\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu}[p], \quad \mathcal{B}^{\sigma\sigma'}[p] = e_\tau^2 u^\mu u^\nu (\tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu}[p]$$

7. Le calcul du terme  $\tilde{G}_{2,\tau,vac}^{++}$  conduit à un résultat connu comme étant transverse. On peut prouver le caractère transverse du terme  $\tilde{G}_{2,\tau,vac}^{+-}$  en montrant que sa composante longitudinale est nulle c'est-à-dire en simplifiant la quantité  $p^\mu p^\nu N_{\mu\nu}(k, p)$  avec les distributions de *Dirac* composant  $\tilde{G}_{2,\tau,vac}^{+-}$ . En outre, dans l'espace de *Minkovski* de dimension 4, on a :  $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$  et  $g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = 3$ .

c'est-à-dire que  $e_\tau^2 \tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'}$  s'écrit sous la forme

$$e_\tau^2 \tilde{G}_{2,\tau}^{\sigma\sigma'}[p] = \mathcal{B}^{\sigma\sigma'}[p] \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{n}\nu \\ \mathbf{n}\nu & \nu^2 \mathbf{L} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \{ \mathcal{B}^{\sigma\sigma'}[p](1 - \nu^2) - \mathcal{A}^{\sigma\sigma'}[p] \} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T} \end{pmatrix}$$

avec  $\mathbf{n} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$ ,  $\mathbf{L} = \mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{T} = 1 - \mathbf{L}$ ,  $\nu = p^0/|\mathbf{p}|$ . On introduit également la constante de couplage  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ . En outre, ces scalaires de *Lorentz* font intervenir les termes suivants

$$\begin{aligned} a(k, p) &= g^{\mu\nu} N_{\mu\nu}(k, p) = -4[k^2 - m^2 + (k + p)^2 - m^2 - p^2 - 2m^2], \\ b(k, p) &= N_{00}(k, p) = 4[2k_0^2 + 2k_0p_0 - (k^2 + kp - m^2)] = 4[k_0^2 + \mathbf{k}^2 + k_0p_0 + \mathbf{k}\mathbf{p} + m^2] \\ &= 4[2k_0^2 + 2k_0p_0 - \frac{1}{2}(k^2 - m^2 + (k + p)^2 - m^2 - p^2)] \end{aligned}$$

à partir de  $N_{\mu\nu}(k, p)$  définit précédemment.

En présence d'un environnement, les tenseurs de polarisation  $(\tilde{G}_{2,\tau}^{++})_{\mu\nu}[p]$  et  $(\tilde{G}_{2,\tau}^{+-})_{\mu\nu}[p]$  s'écrivent

$$\begin{aligned} i(\tilde{G}_{2,\tau}^{++})_{\mu\nu}[p] &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} N_{\mu\nu}(k, p) \left[ \frac{1}{(k + p)^2 - m^2 + i0} + 2i\pi\delta[(k + p)^2 - m^2]n_{k+p} \right] \\ &\quad \left[ \frac{1}{k^2 - m^2 + i0} + 2i\pi\delta[k^2 - m^2]n_k \right] \\ i(\tilde{G}_{2,\tau}^{+-})_{\mu\nu}[p] &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} N_{\mu\nu}(k, p) 2i\pi\delta[(k + p)^2 - m^2](\Theta[-k^0 - p^0] - n_{k+p}) \\ &\quad 2i\pi\delta[k^2 - m^2](\Theta[+k^0] - n_k) \end{aligned}$$

où l'expression de  $n_k$ , en fonction des distributions de *Fermi*, est conditionnée par la valeur du potentiel chimique. Dans les expressions qui précèdent, les contributions dépendantes de l'environnement  $\tilde{G}_{2,\tau,env}^{\sigma\sigma'}$  peuvent être séparées de celles propres au vide  $\tilde{G}_{2,\tau,vac}^{\sigma\sigma'}$ .

$$\begin{aligned} i(\tilde{G}_2^{++})_{\mu\nu}[p] &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} N_{\mu\nu}(k, p) \frac{1}{(k + p)^2 - m^2 + i0} \frac{1}{k^2 - m^2 + i0} \\ &\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} N_{\mu\nu}(k, p) \left[ \frac{2i\pi\delta[k^2 - m^2]n_k}{(k + p)^2 - m^2 + i0} + \frac{2i\pi\delta[(k + p)^2 - m^2]n_{k+p}}{k^2 - m^2 + i0} \right] \\ &\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} N_{\mu\nu}(k, p) [2i\pi]^2 \delta[(k + p)^2 - m^2] n_{k+p} \delta[k^2 - m^2] n_k \\ i(\tilde{G}_2^{+-})_{\mu\nu}[p] &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} N_{\mu\nu}(k, p) [2i\pi]^2 \delta[(k + p)^2 - m^2] \delta[k^2 - m^2] \Theta[+k^0] \Theta[-k^0 - p^0] \\ &\quad - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} N_{\mu\nu}(k, p) [2i\pi]^2 \delta[(k + p)^2 - m^2] \delta[k^2 - m^2] \{ \Theta[+k^0] n_{k+p} + \Theta[-k^0 - p^0] n_k \} \\ &\quad + \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} N_{\mu\nu}(k, p) [2i\pi]^2 \delta[(k + p)^2 - m^2] \delta[k^2 - m^2] n_{k+p} n_k \\ i(\tilde{G}_2^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu}[p] &= i(\tilde{G}_{2,vac}^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu}[p] + i(\tilde{G}_{2,env}^{\sigma\sigma'})_{\mu\nu}[p] \end{aligned}$$

Les contributions issues du vide ont exactement la même expression que celles calculées dans la partie précédente et les scalaires de *Lorentz* issus de ces termes ont pour expression :

$$\Re \mathcal{B}_{vac}^{++}[p] = \frac{\Re \mathcal{A}_{vac}^{++}[p]}{3(1-\nu^2)} = \frac{\alpha}{15\pi} \frac{p^2}{m^2} \mathbf{P}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \Im \mathcal{A}_{vac}^{++}[p] = \Im \mathcal{B}_{vac}^{++}[p] = 0.$$

Par conséquent, le tenseur  $\tilde{G}_{2,\tau,vac}^{\sigma\sigma'}$  est nul sur couche de masse ( $p^2 = 0$ ). Les parties réelle et imaginaire des contributions propres à l'environnement sont déterminées *via* (B.21) ; elles s'écrivent :

$$\begin{aligned} (\Re \tilde{G}_{2,env}^{++})_{\mu\nu}(p) &= \text{P}_P \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} N_{\mu\nu}(k,p) \left[ \frac{2\pi\delta[k^2 - m^2]n_k}{(k+p)^2 - m^2} + \frac{2\pi\delta[(k+p)^2 - m^2]n_{k+p}}{k^2 - m^2} \right] \\ (\Re \tilde{G}_{2,env}^{+-})_{\mu\nu}(p) &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} N_{\mu\nu}(k,p) \delta[(k+p)^2 - m^2] \delta[k^2 - m^2] \{ \text{sgn}[k^0]n_{k+p} - \text{sgn}[k^0 + p^0]n_k \} \\ (\Im \tilde{G}_{2,env}^{++})_{\mu\nu}(p) &= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} N_{\mu\nu}(k,p) \delta[(k+p)^2 - m^2] \delta[k^2 - m^2] \{ n_{k+p} + n_k - 2n_{k+p}n_k \} \\ (\Im \tilde{G}_{2,env}^{+-})_{\mu\nu}(p) &= (\Im \tilde{G}_{2,env}^{++})_{\mu\nu}(p) \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} (\Re \tilde{G}_{2,env}^{++})_{\mu\nu}(p) &= \Re \text{P}_P \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\delta[k^2 - m^2]}{(k+p)^2 - m^2 + i0} [N_{\mu\nu}(k,p)n_k + N_{\mu\nu}(-k-p,p)n_{-k}] \\ (\Re \tilde{G}_{2,env}^{+-})_{\mu\nu}(p) &= \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \delta[(k+p)^2 - m^2] \delta[k^2 - m^2] \text{sgn}[k^0 + p^0] [N_{\mu\nu}(k,p)n_k + N_{\mu\nu}(-k-p,p)n_{-k}] \\ (\Im \tilde{G}_{2,env}^{++})_{\mu\nu}(p) &= \frac{1}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^2} \delta[(k+p)^2 - m^2] \delta[k^2 - m^2] \{ 2n_{k+p}n_k - n_{k+p} - n_k \} N_{\mu\nu}(k,p). \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

À partir des expressions précédentes, sont calculées les quantités  $\mathcal{A}^{\sigma\sigma'}$  et  $\mathcal{B}^{\sigma\sigma'}$  leur correspondant. Elles sont alors écrites sous la forme :

$$\begin{aligned} \Re \mathcal{Y}_{env}^{++}[p] &= \mathcal{Y}_{env}^+[+p^0, \mathbf{p}] + \mathcal{Y}_{env}^+[-p^0, \mathbf{p}], \\ \Re \mathcal{Y}_{env}^{+-}[p] &= i\mathcal{Y}_{env}^-[-p^0, \mathbf{p}] - i\mathcal{Y}_{env}^- [+p^0, \mathbf{p}], \\ \Im \mathcal{Y}_{env}^{++}[p] &= \Im \mathcal{Y}_{env}^{+-}[p] = \mathcal{Y}_{env}^c[p^0, \mathbf{p}] + \mathcal{Y}_{env}^c[-p^0, \mathbf{p}], \quad \mathcal{Y} \equiv \mathcal{A}, \mathcal{B}. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Les différentes contributions  $\mathcal{A}_{env}^X$  et  $\mathcal{B}_{env}^X$  sont évaluées soit à température finie et densité nulle, soit dans la situation inverse et leurs expressions sont résumées dans les parties qui suivent.

Ces termes sont évalués pour un régime où l'environnement est non-relativiste :  $T \ll m$  et  $k_f \ll m$ . Dans un premier temps, les intégrales sur les fréquences sont faites pour les contributions  $\mathcal{A}^{\sigma\sigma'}$  et  $\mathcal{B}^{\sigma\sigma'}$  définies à partir des intégrales (B.22). Ensuite, l'intégration sur la partie spatiale est approximée en limitant le domaine d'intégration à  $|\mathbf{k}| \ll m$  c'est-à-dire en ne retenant que les contributions non-relativistes issues de l'environnement. On peut vérifier que les termes obtenus correspondent bien aux ordres dominants.

**Expression à température finie et densité nulle**

À température finie et densité nulle, les contributions permettant d'obtenir  $\mathcal{A}^{\sigma\sigma'}$  et  $\mathcal{B}^{\sigma\sigma'}$  à partir de (B.23) s'écrivent

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{env}^+[p] &= \frac{4\alpha m^2 T}{\pi |\mathbf{p}|} \left[ 1 + \frac{p^2}{2m^2} \right] I[p^0, \mathbf{p}] - \frac{4\alpha T^2}{\pi} \tilde{I}[p^0, \mathbf{p}], \\
 \mathcal{A}_{env}^-[p] &= -\frac{4\alpha m^2 T}{|\mathbf{p}|} \left[ 1 + \frac{p^2}{2m^2} \right] J[p^0, \mathbf{p}], \\
 \mathcal{A}_{env}^c[p] &= -\frac{4\alpha m^2 T}{|\mathbf{p}|} \left[ 1 + \frac{p^2}{2m^2} \right] K[p^0, \mathbf{p}], \\
 \mathcal{B}_{env}^+[p] &= -\frac{4\alpha m^2 T}{\pi |\mathbf{p}|} \left[ 1 + \frac{p^2}{2m^2} + \frac{p^0}{m} \right] I[p^0, \mathbf{p}] - \frac{2\alpha T^2}{\pi} \tilde{I}[p^0, \mathbf{p}], \\
 \mathcal{B}_{env}^-[p] &= -\frac{4\alpha m^2 T}{|\mathbf{p}|} \left[ 1 + \frac{p^2}{2m^2} + \frac{p^0}{m} \right] J[p^0, \mathbf{p}], \\
 \mathcal{B}_{env}^c[p] &= -\frac{4\alpha m^2 T}{|\mathbf{p}|} \left[ 1 + \frac{p^2}{2m^2} + \frac{p^0}{m} \right] K[p^0, \mathbf{p}]
 \end{aligned}$$

en fonction des intégrales

$$\begin{aligned}
 I[p^0, \mathbf{p}] &= \int_0^\infty \frac{dz z}{\tilde{\omega}_z} n_z \ln \left| \frac{r_z + z}{r_z - z} \right|, & \tilde{I}[p^0, \mathbf{p}] &= \int \frac{dz z^2}{\tilde{\omega}_z} n_z, \\
 J[p^0, \mathbf{p}] &= \int_0^\infty \frac{dz z}{\tilde{\omega}_z} n_z \Theta[1 - r_z] \operatorname{sgn}[\operatorname{sgn}[p^0] \tilde{\omega}_z + \beta p^0] \\
 K[p^0, \mathbf{p}] &= -\int_0^\infty \frac{dz z}{\tilde{\omega}_z} n_z \Theta[1 - r_z] \frac{1}{1 + \exp[-\sqrt{\tilde{\omega}_z^2 + z^2} + (\beta p^0)^2 + 2\beta p^0 \tilde{\omega}_z]}
 \end{aligned}$$

et des quantités

$$r_z = \frac{p^2}{2|\mathbf{p}|T} + \frac{p^0}{|\mathbf{p}|} \tilde{\omega}_z, \quad \tilde{\omega}_z = \sqrt{(\beta m)^2 + z^2}, \quad n_z = \frac{1}{1 + e^{\sqrt{(\beta m)^2 + z^2}}}.$$

Les contributions à température finie sont faibles en raison de la distribution  $n_z$  en facteur de toutes les intégrales : pour  $\beta \gg 1$  c'est-à-dire à température faible, ces termes présentent alors un facteur d'atténuation en  $\exp[-\beta m]$  issu du développement de  $n_z$ . Plus particulièrement, on considère que  $\tilde{G}_{2,env}$  est négligeable sur couche de masse.

**Expression à densité finie et température nulle**

À densité finie et température nulle, les contributions permettant d'obtenir  $\mathcal{A}^{\sigma\sigma'}$  et  $\mathcal{B}^{\sigma\sigma'}$  à partir de (B.23) s'écrivent

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_{env}^+[p] &= \frac{2\alpha k_f^2 m}{\pi|\mathbf{p}|} \left[ 1 + \frac{p^2}{2m^2} \right] L[p^0, \mathbf{p}], \\ \mathcal{A}_{env}^-[p] &= -\frac{\alpha k_f^2 m}{|\mathbf{p}|} \left[ 1 + \frac{p^2}{2m^2} \right] M[p^0, \mathbf{p}], \\ \mathcal{A}_{env}^c[p] &= -\frac{\alpha k_f^2 m}{|\mathbf{p}|} \left[ 1 + \frac{p^2}{2m^2} \right] N[p^0, \mathbf{p}], \\ \mathcal{B}_{env}^+[p] &= \frac{2\alpha k_f^2 m}{\pi|\mathbf{p}|} \left[ 1 + \frac{p^2}{2m^2} + \frac{p^0}{m} \right] L[p^0, \mathbf{p}], \\ \mathcal{B}_{env}^-[p] &= -\frac{\alpha k_f^2 m}{|\mathbf{p}|} \left[ 1 + \frac{p^2}{2m^2} + \frac{p^0}{m} \right] M[p^0, \mathbf{p}], \\ \mathcal{B}_{env}^c[p] &= -\frac{\alpha k_f^2 m}{|\mathbf{p}|} \left[ 1 + \frac{p^2}{2m^2} + \frac{p^0}{m} \right] N[p^0, \mathbf{p}].\end{aligned}$$

en fonction des termes suivants

$$\begin{aligned}L[p^0, \mathbf{p}] &= r + \frac{1}{2}(1 - r^2) \ln \left| \frac{r+1}{r-1} \right|, \\ M[p^0, \mathbf{p}] &= \Theta(1 - |r|)(1 - r^2), \\ N[p^0, \mathbf{p}] &= \begin{cases} 1 - r^2 & |\mathbf{p}| > 2k_f, & -1 < r < 1 \\ 1 - r^2 & |\mathbf{p}| < 2k_f, & -1 - \frac{|\mathbf{p}|}{k_f} < r < 1 \\ \frac{(p^0 + 2m)p^0}{k_f^2} & |\mathbf{p}| < 2k_f, & -\frac{|\mathbf{p}|}{2k_f} < r < 1 - \frac{|\mathbf{p}|}{k_f} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

où  $r$  s'écrit

$$r = \frac{p^2 + 2mp^0}{2|\mathbf{p}|k_f}.$$

À densité finie, les différents termes composants  $\tilde{G}_{2,env}$  sont nuls sur couche de masse ( $p^2 = 0$ ) sous réserve que l'on ait  $m \gg k - f$ . Sur couche de masse, le paramètre  $r$  s'écrit :

$$r = \text{sgn}[p^0] \frac{m}{k_f}, \quad |r| \gg 1.$$

Le scalaire  $\mathcal{A}$  est strictement nul pour  $p^2 = 0$  :

$$\begin{aligned}\Re \mathcal{A}_{env}^{++}[p; p^2 = 0] &= \mathcal{A}_{env}^+[p^0, \mathbf{p}] + \mathcal{A}_{env}^+[-p^0, \mathbf{p}] = \frac{2\alpha k_f^2 m}{\pi|\mathbf{p}|} \left( L[p^0, \mathbf{p}] + L[-p^0, \mathbf{p}] \right) \\ &= \frac{2\alpha k_f^2 m}{\pi|\mathbf{p}|} \left( |r| + \frac{1}{2}(1 - |r|^2) \ln \left| \frac{|r|+1}{|r|-1} \right| - |r| + \frac{1}{2}(1 - |r|^2) \ln \left| \frac{|r|-1}{|r|+1} \right| \right) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Re \mathcal{A}_{env}^{+-}[p; p^2 = 0] &= i\mathcal{A}_{env}^-[-p^0, \mathbf{p}] - i\mathcal{A}_{env}^-[+p^0, \mathbf{p}] = \frac{i\alpha k_f^2 m}{|\mathbf{p}|} \left[ M[p^0, \mathbf{p}] - M[-p^0, \mathbf{p}] \right] \\
 &= \frac{i\alpha k_f^2 m}{|\mathbf{p}|} \Theta(1 - |r|) \left[ (1 - r^2) - (1 - r^2) \right] = 0 \\
 \Im \mathcal{A}_{env}^{++}[p; p^2 = 0] &= \Im \mathcal{A}_{env}^{+-}[p; p^2 = 0] = \mathcal{A}_{env}^i[p^0, \mathbf{p}] + \mathcal{A}_{env}^i[-p^0, \mathbf{p}] \\
 &= -\frac{\alpha k_f^2 m}{|\mathbf{p}|} \left[ N[p^0, \mathbf{p}] + N[-p^0, \mathbf{p}] \right] = 0
 \end{aligned}$$

En première approximation, l'expression du scalaire  $\mathcal{B}$  est également nulle sur couche de masse :

$$\begin{aligned}
 \Re \mathcal{B}_{env}^{++}[p; p^2 = 0] &= \mathcal{B}_{env}^+[p^0, \mathbf{p}] + \mathcal{B}_{env}^+[-p^0, \mathbf{p}] \\
 &= \frac{2\alpha k_f^2 m}{\pi |\mathbf{p}|} \left[ L[p^0, \mathbf{p}] + L[-p^0, \mathbf{p}] \right] + \frac{2\alpha k_f^2 m p^0}{\pi |\mathbf{p}| m} \left[ L[p^0, \mathbf{p}] - L[-p^0, \mathbf{p}] \right] \\
 &= \frac{2\alpha k_f^2 m p^0}{\pi |\mathbf{p}| m} \left[ L[p^0, \mathbf{p}] - L[-p^0, \mathbf{p}] \right] = \text{sgn}[p^0] \frac{2\alpha k_f^2}{\pi} \left[ 2r + (1 - r^2) \ln \left| \frac{1 + r^{-1}}{1 - r^{-1}} \right| \right] \\
 &= \text{sgn}[p^0] \frac{2\alpha k_f^2}{\pi} \left[ 2r + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)!} \frac{1}{r^{2n+1}} - r^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)!} \frac{1}{r^{2n+1}} \right] \\
 &= \text{sgn}[p^0] \frac{4\alpha k_f^2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{(2n+3)!} \right) \frac{1}{r^{2n+1}} \\
 &= \mathcal{O}(k_f^2/r) = \mathcal{O}\left(\frac{k_f^3}{m}\right) \rightarrow 0. \\
 \Re \mathcal{B}_{env}^{+-}[p; p^2 = 0] &= i\mathcal{B}_{env}^-[-p^0, \mathbf{p}] - i\mathcal{B}_{env}^-[+p^0, \mathbf{p}] \\
 &= \frac{i\alpha k_f^2 m}{|\mathbf{p}|} \left[ M[p^0, \mathbf{p}] - M[-p^0, \mathbf{p}] \right] + \frac{i\alpha k_f^2 m p^0}{|\mathbf{p}| m} \left[ M[p^0, \mathbf{p}] + M[-p^0, \mathbf{p}] \right] \\
 &= i\text{sgn}[p^0] \alpha k_f^2 \left[ M[p^0, \mathbf{p}] + M[-p^0, \mathbf{p}] \right] = i\text{sgn}[p^0] 2\alpha k_f^2 \Theta(1 - |r|) (1 - r^2) = 0 \\
 \Im \mathcal{B}_{env}^{++}[p; p^2 = 0] &= \Im \mathcal{B}_{env}^{+-}[p; p^2 = 0] = \mathcal{B}_{env}^i[p^0, \mathbf{p}] + \mathcal{B}_{env}^i[-p^0, \mathbf{p}] \\
 &= -\frac{\alpha k_f^2 m}{|\mathbf{p}|} \left[ N[p^0, \mathbf{p}] + N[-p^0, \mathbf{p}] \right] - \frac{\alpha k_f^2 m p^0}{|\mathbf{p}| m} \left[ N[p^0, \mathbf{p}] - N[-p^0, \mathbf{p}] \right] \\
 &= -\text{sgn}[p^0] \alpha k_f^2 \left[ N[p^0, \mathbf{p}] - N[-p^0, \mathbf{p}] \right] = 0.
 \end{aligned}$$

# Bibliographie

- [1] C. Itzykson, J.B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill International Editions (1980).
- [2] V. Parameswaran Nair, *Quantum field theory, A modern perspective*, Springer (2008).
- [3] R.J. Rivers, *Path integral methods in quantum field theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (1987).
- [4] J.C. Collins, *Renormalization*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (1984).
- [5] P. Ramond, *Field theory : a modern primer*, Westview Press (1997).
- [6] L.S. Schulman, *Techniques and applications of path integration*, John Wiley & Sons (New York-1981).
- [7] H. Kleinert, *Path integrals in quantum mechanics, statistics, and polymer physics*, World Scientific (1990).
- [8] R.D. Mattuck, *A guide to Feynman diagrams in the many-body problem*, Dover (second edition - 1992).
- [9] A.L. Fetter, J.D. Walecka, *Quantum theory of many-particle systems*, McGraw-Hill (San Francisco-1971).
- [10] J. Kapusta, *Finite temperature field theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (1989).
- [11] A. Das, *Finite temperature field theory*, World Scientific (1997).
- [12] E.A. Calzetta, B.B. Hu, *Nonequilibrium Quantum Field Theory*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (2008).
- [13] R.B. Griffith, *Consistent Quantum Theory*, Cambridge University Press (2002).
- [14] M. Le Bellac, *Mesure et décohérence en physique quantique*, article extrait de *Théorie quantique des champs, Méthode et application*, Ed. Hermann (2007), recueil à l'initiative de T. Boudjedaa et A. Makhlof.
- [15] R. Jackiw, Phys. Rev. D9, 1686-1701 (1974), *Functional evaluation of the effective potential*.
- [16] J. Iliopoulos, C. Itzykson, A. Martin, Rev. Mod. Phys. 47, 165-192 (1975), *Functional methods and perturbation theory*.
- [17] T. Matsubara, Progr. Theor. Phys. (Kyoto) 14, 351 (1955), *A New Approach to Quantum-Statistical Mechanics*.
- [18] J. Schwinger, J. Math. Phys. 2, 407 (1961), *Brownian Motion of a Quantum Oscillator*.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [19] P.M. Bakshi, K.T. Mahanthappa, J. Math. Phys. 4, 1 (1963), *Expectation Value Formalism in Quantum Field Theory. I.*
- [20] P.M. Bakshi, K.T. Mahanthappa, J. Math. Phys. 4, 12 (1963), *Expectation Value Formalism in Quantum Field Theory. II.*
- [21] R.P. Feynman, F.L. Vernon Jr., Ann. Phys. (N.Y.) 24, 118 (1963), *The theory of a general quantum system interacting with a linear dissipative system.*
- [22] Z. Su, L.Y. Chen, K.C. Chou, Phys. Rev. B37, 9810 (1988), *Influence functionnal and closed time path Green's function.*
- [23] L.V. Keldysh, Zh. Eksp. Teor. Fiz. 47, 1515 (1964)(Sov. Phys. JETP 20, 1018 (1965)), *Diagram Technique for Nonequilibrium Processes.*
- [24] R. Craig, J. Math. Phys. 9, 605 (1968), *Perturbation Expansion for Real-Time Green's Functions.*
- [25] V. Korenman, J. Math. Phys. 10, 1387 (1969), *On Perturbation Expansions for Real-Time Green's Functions.*
- [26] P.C Martin, J. Schwinger, Phys. Rev. 115, 1342-1373 (1959), *Theory of Many-Particle Systems. I.*
- [27] N.P. Landsman, C.G. van Weert, Phys. Rept. 145, 141 (1987), *Real - and imaginary - time field theory at finite temperature and density.*
- [28] K.C. Chou, Z. Su, B. Hao, L. Yu, Phys. Rept. 118, no. 1-2, 1-131 (1985) *Equilibrium and nonequilibrium formalisms made unified.*
- [29] A.J. Niemi, G.W. Semenoff, Ann. Phys. 152, 105 (1984), *Finite Temperature Quantum Field Theory in Minkowski Space.*
- [30] A.J. Niemi, G.W. Semenoff, Nucl. Phys. B230 [FS10], 181 (1984), *Thermodynamic calculation in relativistic finite temperature quantum field theories.*
- [31] R.D. Jordan, Phys. Rev. D33, 444 (1986), *Effective field equations for expectation values.*
- [32] R.D. Jordan, Phys. Rev. D36, 3593 (1987), *Expectation values in quantum cosmology.*
- [33] R.D. Jordan, Phys. Rev. D36, 3604 (1987), *Stability of flat spacetime in quantum gravity.*
- [34] A. Polkovnikov, Phys. Rev. A68, 053604 (2003), *Quantum corrections to the dynamics of interacting bosons : Beyond the truncated Wigner approximation*
- [35] A. Polkovnikov, Ann. Phys. 325, 1790 (2010), *Phase space representation of quantum dynamics.*
- [36] A. Kamenev, A. Levchenko. Adv. Phys. 58, 197 (2009), *Keldysh technique and non-linear  $\sigma$ -model : basic principles and applications*
- [37] E.A. Calzetta, B.L. Hu, Phys. Rev. D35, 495-509 (1987), *Closed-time-path functional formalism in curved spacetime : Application to cosmological back-reaction problems.*
- [38] A. Campos, E. Verdaguer , Phys. Rev. D49, 1861-1880 (1994), *Semiclassical equations for weakly inhomogeneous cosmologies.*
- [39] J. Polonyi, Phys. Rev. D74, 065014 (2006), *Quantum-classical crossover in electrodynamics.*

- 
- [40] J. Polonyi, Euro. Phys. Lett. 91, 67003 (2010), *Decoherence and damping in ideal gases.*
- [41] M. Planat, J. Polonyi, Phys. Rev. D82, 045021 (2010), *Sub-classical fields and polarization in electrodynamics.*
- [42] W.H. Zurek, Phys. Rev. D26, 1862-1880 (1982), *Environment-induced superselection rules.*
- [43] W.H. Zurek, Phys. Today 44, 36 (1991), *Decoherence and the transition from quantum to classical - REVISITED.*
- [44] W.H. Zurek, Prog. Theor. Phys. Vol. 89 No.2, 281-312 (1993), *Preferred States, Predictability, Classicality and the Environment-Induced Decoherence.*
- [45] H.D. Zeh, Found. Phys. 1, 69-76 (1970), *On the interpretation of measurement in quantum theory.*
- [46] E. Joos, H.D. Zeh, Z. Phys. B59, 223 (1985), *The Emergence of classical properties through interaction with the environment.*
- [47] Z.B. Su, L.Y. Chen, X.T. Yu, K.C. Chou, Phys. Rev. B37, 9810-9812 (1988), *Influence functional and closed-time-path Green's function.*
- [48] Y. Aharonov, P.G. Bergman, J.L. Lebowitz, Phys. Rev. 134, 1410-16 (1964), *Time Symmetry in the Quantum Process of Measurement.*
- [49] R. Omnès, Rev. Mod. Phys. 64, 339-382 (1992), *Consistent interpretations of quantum mechanics.*
- [50] R.B. Griffiths, Phys. Rev. Lett. 70, 2201-2204 (1993), *Consistent interpretation of quantum mechanics using quantum trajectories.*
- [51] H.F. Dowker, J.J. Halliwell, Phys. Rev. D46, 1580-1609 (1992), *Quantum mechanics of history : The decoherence functional in quantum mechanics.*
- [52] M. Gell-Mann, J.B. Hartle, Phys. Rev. D47, 3345-3382 (1993), *Classical equations for quantum systems.*
- [53] J.R. Anglin, W.H. Zurek, Phys. Rev. D53, 7327-7335 (1996), *Decoherence of Quantum Fields : Pointer States and Predictability.*

## RÉSUMÉ :

Cette thèse s'inscrit dans la problématique de la transition quantique-classique et, plus particulièrement, dans le cadre de la construction de l'électromagnétisme classique à partir de l'électrodynamique quantique sous-jacente en faisant appel à la théorie de la décohérence. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser un cadre théorique permettant de définir des observables sur des états mixtes afin de rendre compte de l'intervention d'un environnement.

Les observables et les phénomènes sont décrits ici au moyen de fonctions de *Green*. La valeur moyenne du champ électromagnétique et celle de courants de charges ont été introduites pour des résolutions d'espace-temps appartenant au domaine quantique. Ces moyennes sont définies à partir de conditions initiales : les équations du mouvement retardées leur correspondant ont été obtenues par application du principe variationnel à l'ordre d'une boucle. En outre, ces relations font intervenir la polarisabilité d'un environnement constitué de charges dont l'étude a été menée dans le vide ainsi qu'à température et densité finies. Enfin, la décohérence du champ électromagnétique a pu être établie par le calcul perturbatif de la matrice densité réduite de cette observable. Pour une résolution microscopique, les chemins consistants correspondent à ceux dont les modes définissent des excitations collectives de faible temps de vie : c'est le signal d'un régime fortement dissipatif nécessaire à l'établissement d'une limite classique au sens de la décohérence.

Mots clefs : principe variationnel, transition quantique-classique, décohérence & consistance, valeurs moyennes : formalisme closed time path / de Schwinger-Keldysh, matrice densité réduite : fonctionnelle d'influence, électrodynamique quantique, polarisation.

## SUMMARY :

This thesis is about the quantum to classical crossover. More specifically, this work is motivated by the derivation of classical electromagnetism from the underlying quantum electrodynamics using the theory of decoherence. To achieve this goal, the use of a framework allowing mixed states for observables is needed in order to take into account the effects of an environment.

Observables and phenomena are described here by means of *Green's* functions. Expectation values of the electromagnetic field and of the electric currents are introduced at space-time resolution which belongs to the quantum domain. These quantities are defined by initial values : they obey retarded equations of motion which can be derived from an action principle and which are obtained at one-loop order. These relations bring in the polarizability of an environment of charges which is studied *in vacuo* as well as at finite temperature and density. Finally, decoherence of the electromagnetic field is established by a perturbative calculation of the reduced density matrix for this field. At the microscopic scale, consistency depends on histories which define short life-time collective excitations : this is the mark of a strongly dissipative situation which is necessary if one wants to establish a classical regime within the framework of decoherence.

Keywords : action principle, quantum to classical crossover, decoherence & consistency, expectation value : closed time path / Schwinger-Keldysh formalism, reduced density matrix : influence functional, quantum electrodynamics, polarization.