

N° d'ordre :993

École Doctorale Mathématiques, Sciences de
l'Information et de l'Ingénieur

UdS – INSA – ENGEES

THÈSE

présentée pour obtenir le grade de

Docteur de l'Université de Strasbourg
Discipline : Informatique

Spécialité : Informatique

par

Mahdi ZOUAOUI

Mesures discrètes pour l'imagerie.

Membres du jury

Directeur de thèse : M. Mohamed TAJINE, Professeur, Université de Strasbourg

Co-Directeur de thèse : M. Alain DAURAT, Maître de conférences, Université de
Strasbourg

Rapporteur externe : M. Édouard THIEL, Professeur, Université de la
Méditerranée

Rapporteur externe : M. Laurent VUILLON, Professeur, Université de Savoie

Examineur : M. Jean-François DUFOURD, Professeur, Université de
Strasbourg

Examineur : M. Rémy MALGOUYRES, Professeur, Université d'Auvergne

Sommaire

1	Introduction	7
2	Notions de base	13
2.1	Notions topologiques dans les espaces euclidiens et discrets	13
2.1.1	Notions topologiques et métriques	13
2.1.2	Notions de la théorie des graphes	14
2.2	Les notations arithmétiques	16
2.2.1	Séries de Farey	17
2.2.2	Droites discrètes et segment discret	17
2.3	Alphabet, mot, bi-mot	18
2.3.1	Les mots	18
2.3.2	Les mots bidimensionnels	19
3	Estimateurs de périmètre et d'aire	23
3.1	Estimateur et résolution de l'espace discret	23
3.2	Estimateurs de périmètre	24
3.3	Estimateurs locaux de périmètre	25
3.3.1	Estimateurs de périmètre utilisant un seul motif	26
3.3.2	Estimateur de Freeman	27
3.3.3	Estimateur de Kulpa	27
3.3.4	Estimateur de Groen et Verbeek	28
3.3.5	Estimateur de Vossepoel et Smeulders	29
3.3.6	Estimateur de Tajine et Daurat	31
3.3.7	Estimateur sur les chemins euclidiens	32
3.4	Approches basées sur des approximations polygonales	38
3.5	Estimateurs d'aire	39
3.5.1	Exemple d'un estimateur local d'aire	39
3.5.2	Exemple d'un estimateur global d'aire	40
3.6	Conclusion	41
4	Fréquence des segments discrets et estimateurs locaux de périmètre	43
4.1	Introduction	43
4.2	Discrétisation des courbes réelles	43

4.3	Pré-image d'un segment discret	47
4.3.1	Définition de la pré-image	47
4.3.2	Diagramme de Farey	48
4.3.3	Fréquence d'un motif	50
4.4	Fréquence d'apparition de motif dans une parabole discrète	50
4.4.1	Fréquences d'apparitions de motifs : le cas α irrationnel	51
4.4.2	Fréquences d'apparitions de motifs : le cas α rationnel	54
4.4.3	Application aux estimateurs locaux de périmètre de la parabole discrète	57
4.5	Conclusion et perspectives	60
5	Estimateurs semi-locaux de périmètre	61
5.1	Introduction	61
5.2	Notations et définitions	61
5.3	Définition des estimateurs semi-locaux	63
5.4	Convergence dans le cas $g \in \mathcal{C}^2[a, b]$	64
5.5	Conclusion	70
6	Fréquence de (m, n)-cubes et estimateurs locaux d'aire	71
6.1	Introduction	71
6.2	Discrétisation d'une surface	71
6.3	Fréquence de (m, n) -cubes	75
6.4	Propriétés combinatoires des (m, n) -cubes	77
6.4.1	Propriétés des ensembles de (m, n) -cubes	77
6.4.2	Généralisation du Théorème des Trois Intervalles pour les plans	80
6.5	Estimateurs locaux d'aire	80
6.6	Dimensions supérieures	84
6.7	Conclusion	84
7	Conclusion et perspectives	85
7.1	Perspective.	86
8	Annexes	87
8.1	Annexe A	87
8.1.1	Preuve du Lemme 3	87
8.1.2	Démonstration du théorème 2	91
8.1.3	Démonstration du théorème 4	95
8.2	Annexe B	96
8.2.1	Généralisation du théorème de Weyl	96
8.2.2	Proposition 4	100
8.2.3	Théorème 7	102
8.2.4	Proposition 10	104
8.2.5	Théorème 8	104

Remerciements

J'adresse d'abord mes remerciements au Professeur M. Édouard Thiel et au Professeur M. Laurent Vuillon, pour avoir accepté de rapporter sur ce travail et au Professeur M. Jean-François Dufourd et au Professeur M. Rémy Malgouyres pour avoir accepté d'examiner ce travail.

Je remercie le Professeur M. Mohamed Tajine de m'avoir accueilli dans son groupe « Géométrie Discrète et Morphologie Mathématique » de l'équipe Modèles, Images et Vision du laboratoire LSIIT (Laboratoire des Sciences de l'Images, de l'Informatique et de la Télédétection, UMR CNRS 7005).

J'ai été particulièrement heureux de travailler sous sa direction. Je salue son encadrement, mélangeant grande compétence scientifique et disponibilité. Il a su me guider avec ses recommandations tout en me permettant de travailler de façon efficace dans un cadre agréable.

Je tiens à remercier M. Alain Daurat qui m'a remarquablement co-encadré depuis mes débuts au LSIIT, et avec qui j'ai eu aussi beaucoup de plaisir à travailler. Sa passion pour la recherche, son dynamisme, son intérêt pour mon travail et ses qualités humaines m'ont beaucoup apporté et m'ont appris à ne jamais baisser les bras face aux difficultés que la recherche fait surgir.

Malheureusement, Alain nous a quitté l'année dernière et sa disparition est une grande perte pour notre communauté scientifique.

Merci aux collègues de l'équipe Modèles, Images et Vision pour m'avoir accueilli dans leur groupe et pour avoir montré beaucoup de disponibilité pour répondre à mes questions.

Je remercie particulièrement Abdelkrim Belhaoua et Akram Belghith pour l'ambiance amicale et fraternelle qui a régné entre nous. Je leur souhaite une bonne continuation.

Enfin, je remercie mes parents et mes amis, qui ont été présents pendant ces années de thèse. Leurs soutien m'a beaucoup aidé personnellement pour pouvoir mener ce travail à son terme.

Chapitre 1

Introduction

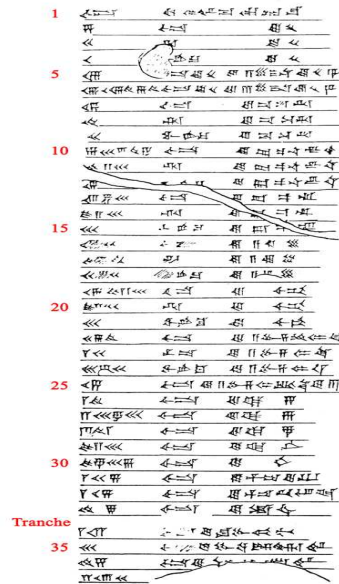
Dès l'antiquité, les civilisations anciennes s'intéressaient aux mesures de périmètre, d'aire et de volume notamment pour des raisons économiques. Les égyptiens maîtrisaient les mesures en différentes dimensions :

- Les mesures de périmètre : l'arpentage et le bornage des terres agricoles sont refaits chaque année. La crue du Nil bouleverse chaque année les repères, et les limites de chaque parcelle doivent être rétablies. Il est indispensable aussi aux architectes d'évaluer les dimensions des bâtiments qu'ils construisent.
- Les mesures de surface : après la crue du fleuve, les arpenteurs qui réimplantent les marques cadastrales ont recours à l'Aroure (setat). Cette mesure représente un carré de 100 coudées (soit 2756,26 m²).
- Les mesures de volume : à la fin des moissons, deux fonctionnaires, le scribe des greniers, et le mesureur de grains mesurent la récolte avec précision, afin de déterminer la part du cultivateur et la quantité de semence à réserver.

La mesure euclidienne a fait son apparition dans les mathématiques babylonienne. Les mathématiciens babyloniens ont calculés des approximations du périmètre d'un demi cercle de rayon 1 noté π et la longueur de l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les deux cotés de l'angle rectangle sont de longueur 1 c'est-à-dire une approximation du nombre $\sqrt{2}$. Les premières approximations connues des nombres π et $\sqrt{2}$ proviennent des babyloniens comme le montre la reproduction ci-dessous des tablettes de Suse :



a)



b)

a) Tablette cunéiforme YBC 7289 utilisant le système d'énumération babylonien donnant $\sqrt{2}$ avec quatre chiffres sexagésimaux significatifs, soit cinq chiffres décimaux : $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 = 1.41421296\dots$

b) Tablette cunéiforme donnant 3, 125 comme approximation de π .

Les civilisations Hindou, chinoise, grecque, arabe, aztèque, etc. ont ensuite formalisé et approfondi ces concepts géométriques. Les pythagoriciens (civilisation grecque) ont montré, par exemple, que $\sqrt{2}$ n'était pas un nombre rationnel !

Pendant la première moitié du 19ème siècle, le mathématicien Bernhard Riemann a développé une théorie de l'intégration qui porte son nom : l'intégration de Riemann. À la fin du dix-neuvième siècle, les limitations de la théorie d'intégration de Riemann deviennent apparentes et plusieurs mathématiciens célèbres (Jordan, Borel, Young, ...) se mettent en devoir de la généraliser. C'est finalement la théorie de Lebesgue, exposée dans une note fondatrice de 1901, puis développée dans le Cours Peccot, qui sera adoptée par l'ensemble de la communauté mathématique. Elle se développe à partir du concept de mesure, introduit par Borel vers 1895. La théorie de la mesure et de l'intégration de Lebesgue seront ensuite perfectionnées et généralisées par de nombreux mathématiciens au cours du vingtième siècle, en particulier Carathéodory, Vitali, Radon, Riesz, Hausdorff, Kolmogorov et Besicovich. L'histoire de la théorie de la mesure est associée au développement de la théorie des probabilités, à celui de l'analyse harmonique moderne et même à celui de la logique axiomatique.

La deuxième moitié du vingtième siècle a connu l'apparition et le perfectionnement de différents systèmes d'acquisition d'image en deux et trois dimensions (appareils photo et caméras numériques, scanners, IRM médicaux, etc.). Ces dispositifs physiques fournissent

des données d'imagerie de plus en plus volumineuses impossible à traiter sans l'aide de l'ordinateur.

Dans cette thèse, nous étudions les estimateurs de mesure pour l'imagerie. Notre objectif est de concevoir, pour l'analyse d'images, des algorithmes robustes pour la reconstruction d'informations quantitatives : mesures de périmètre, d'aire, de volume, etc. Le but ultime est de concevoir des théories de la mesure et de l'intégration dans les espaces discrets des images compatibles avec les théories de la mesure et de l'intégration dans les espaces euclidiens de "la réalité".

Cela conduirait à inférer une algorithmique robuste et performante en analyse d'image pour estimer les mesures des objets discrets permettant de contrôler, de façon systématique, les erreurs d'estimations en fonction notamment de la résolution de l'espace discret.

Ce mémoire est composé d'un chapitre contenant l'introduction suivi de cinq chapitres puis d'un chapitre contenant la conclusion et se termine par deux annexes.

Dans le deuxième chapitre nous avons introduit les notions de bases qui seront utilisées tout au long de ce mémoire. Le troisième chapitre est consacré à une présentation des principaux estimateurs de périmètre et d'aire introduits dans la littérature en imagerie. Dans le chapitre quatre, nous présentons nos résultats concernant les estimateurs locaux et leurs applications pour l'estimation de périmètre pour une classe de courbes paraboliques : nous montrons que localement la discrétisation d'une courbe et de sa tangente coïncident, nous obtenons aussi des formules explicites pour les fréquences des motifs dans les discrétisations d'une courbe d'une telle classe, et nous démontrons enfin que les estimations de périmètre basées sur les estimateurs locaux ne convergent presque jamais (au sens de Lebesgue) vers la valeur exacte du périmètre lorsque la résolution de l'espace discret tend vers 0. Dans le chapitre cinq, nous introduisons la classe des estimateurs semi-locaux et nous montrons que les estimations du périmètre basée sur cette classe d'estimateurs converge vers la valeur exacte du périmètre lorsque la résolution de l'espace discret tend vers 0 pour toute courbe de classe \mathcal{C}^2 . Dans le sixième chapitre, nous introduisons les estimateurs locaux d'aire. Nous montrons des résultats combinatoires concernant les motifs correspondant à des morceaux de plan discrets de taille $m \times n$ appelés les (m, n) -cubes où m, n sont des entiers strictement positifs. Nous donnons notamment des bornes inférieure et supérieure du nombre de (m, n) -cubes. Nous obtenons aussi des formules explicites pour les fréquences d'un (m, n) -cube dans la discrétisation d'un morceau rectangulaire d'un plan euclidien et nous montrons enfin que les estimations d'aire basées sur les estimateurs locaux d'aire ne convergent presque jamais (au sens de Lebesgue) vers la valeur exacte lorsque la résolution de l'espace discret tend vers 0 même pour des surfaces aussi simples que des morceaux rectangulaires de plans euclidiens. Tous ses résultats sont ensuite généralisés aux dimensions supérieures. Après le chapitre six, il y a un chapitre contenant une conclusion et quelques perspectives pour ce travail. Après la conclusion, il y a deux annexes contenant les preuves longues des résultats présentés dans les chapitres précédents.

Ce travail a donné lieu aux publications suivantes :

Articles dans des revues d'audience internationale avec comité de sélection

- [RT 09] A. Daurat, M. Tajine and M. Zouaoui. *About the frequencies of some patterns in digital planes. Application to area estimators*. Computers & Graphics, Vol. 33 (2009), pp. 11-20.

Articles dans des actes des conférences d'audience internationale avec comité de sélection

- [DTZ 09] : A. Daurat, M. Tajine and M. Zouaoui. *Patterns in Discretized Parabolas and Length Estimation*. DGCI'2009, LNCS Springer-verlag, Vol. 5810, pp373-384, October 2009.

- [DTZ 08] : A. Daurat, M. Tajine and M. Zouaoui. *About the frequencies of some patterns in digital planes. Application to area estimators*. DGCI'2008, LNCS Springer-verlag, Vol. 4992, pp45-56, April 2008.

Rapports de recherche

- [TDZ 11] : M. Tajine, A. Daurat, M. Zouaoui. *Les estimateurs semi-locaux de périmètre*. (<http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00576881/fr/>), Mars 2011.

Chapitre 2

Notions de base

Nous présentons dans ce chapitre les notions de bases qui vont être utilisées tout au long de ce mémoire.

2.1 Notions topologiques dans les espaces euclidiens et discrets

Dans cette section, nous développons les notions de bases de topologie aussi bien dans les espaces euclidiens que dans les espaces discrets. Ces notions sont introduites en utilisant les espaces métriques et la théorie des graphes.

2.1.1 Notions topologiques et métriques

Définition 1 Soit \mathcal{E} un ensemble. Une application $d : \mathcal{E} \times \mathcal{E} \mapsto \mathbb{R}^+$ est dite une métrique (ou une distance) si pour tout $x, y, z \in \mathcal{E}$ on a :

- $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
- $d(x, y) = d(y, x)$ (propriété de symétrie).
- $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (l'inégalité triangulaire).

Le couple (\mathcal{E}, d) est appelé un espace métrique.

Les notions topologiques utilisées dans cette thèse sont issues des métriques usuelles sur \mathbb{R}^n (i.e. $\mathcal{E} = \mathbb{R}^n$).

Exemples : Soient $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

- $d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \text{Sup}_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ (distance de Manhattan);
- $d_1(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$ (distance de l'échiquier);
- $d_2(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} (x_i - y_i)^2}$ (distance euclidienne);
- Plus généralement, pour $p \geq 1$ on a : $d_p(\vec{x}, \vec{y}) = (\sum_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Remarque :

$$d_\infty(\vec{x}, \vec{y}) = \lim_{p \rightarrow \infty} d_p(\vec{x}, \vec{y}).$$

Définition 2 Soit (\mathcal{E}, d) un espace métrique.

- Soient $x \in \mathcal{E}$ et $r > 0$

$$B_r^d(x) = \{y \in \mathcal{E} \mid d(x, y) < r\}$$

est appelé la boule ouverte de \mathcal{E} de centre x et de rayon r relativement à la distance d . Dans la suite $B_r^d(x)$ sera notée $B_r(x)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté concernant la distance d .

- Un sous ensemble $O \subseteq \mathcal{E}$ est dit ouvert relativement à la topologie induite par d si pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$, tel que $B_r(x) \subseteq O$. L'ensemble des ouverts relativement à la topologie induite par d sur \mathcal{E} sera noté $\mathbb{O}(\mathcal{E}, d)$.
- Un sous ensemble $F \subseteq \mathcal{E}$ est dit fermé relativement à la topologie induite par d si l'ensemble $O = \mathcal{E} \setminus F$ est ouvert relativement à la topologie induite par d . L'ensemble des fermés relativement à la topologie induite par d sur \mathcal{E} sera noté $\mathbb{F}(\mathcal{E}, d)$.
- Soit $A \subseteq \mathcal{E}$. La fermeture de A relativement à (\mathcal{E}, d) est l'ensemble

$$\bar{A} = \bigcap_{F \in \mathbb{F}(\mathcal{E}, d) \text{ et } A \subseteq F} F.$$

- Soit $A \subseteq \mathcal{E}$. L'ouverture de A relativement à (\mathcal{E}, d) est l'ensemble

$$\overset{\circ}{A} = \bigcup_{O \in \mathbb{O}(\mathcal{E}, d) \text{ et } O \subseteq A} O.$$

Propriété 1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p un nombre réel tel que $p \geq 1$. Alors, on

- $B_r^{d_p}(x) \subset B_r^{d_\infty}(x)$ pour tout $r \geq 0$.
- $\mathbb{O}(\mathbb{R}^n, d_p) = \mathbb{O}(\mathbb{R}^n, d_\infty)$. Autrement dit, les distances d_p définissent la même topologie. Cette topologie est appelée la topologie usuelle ou la topologie euclidienne sur \mathbb{R}^n .

2.1.2 Notions de la théorie des graphes

Dans cette section nous introduisons des notions de la théorie des graphes qui nous permettront d'introduire des notions de la topologie digitale sur les images.

Définition 3 Soit E un ensemble. Un graphe non-orienté simple sur E est un couple $G = (E, A)$ avec $A \subset \mathcal{P}_2(E)$ où $\mathcal{P}_2(E) = \{\{x, y\} \mid x, y \in E \text{ et } x \neq y\}$ est l'ensemble des paires de l'ensemble E . Les éléments de E (respectivement de A) sont appelés les sommets (respectivement les arêtes) du graphe G .

- Pour $x \in E$, l'ensemble $V_G(x) = \{y \mid \{x, y\} \in A\}$ est appelé le voisinage de x relativement à G .

- Un chemin C dans G est une suite de sommets $C = x_0, x_1, \dots, x_n$ tel que $\{x_i, x_{i+1}\} \in A$ pour $0 \leq i < n$. x_0 (respectivement x_n) est appelé le début (respectivement la fin) du chemin C et n est appelé la longueur du chemin C .
- Le graphe G est dit connexe si pour tout $x, y \in E$, il existe un chemin dans G de début x et de fin y .
- $X \subseteq E$ est dit connexe dans G si le graphe $G_X = (X, A \cap \mathcal{P}_2(X))$ est un graphe connexe. G_X est appelé le sous graphe de G engendré par X .
- Un chemin x_0, \dots, x_n est dit simple si $x_i \neq x_j$ pour tout $i \neq j$ sauf peut-être pour $\{i, j\} = \{0, n\}$.
- Un chemin fermé est un chemin x_0, \dots, x_n tel que $x_0 = x_n$
- Un chemin simple x_0, \dots, x_n est dit une G -courbe si

$$\text{card}(V_G(x_i) \cap \{x_j \mid 0 \leq j \leq n\}) \leq 2 \text{ pour tout entier } i \in [0, n]$$

Remarques :

- Soit $G = (E, A)$ un graphe non-orienté simple. La fonction $V_G : E \mapsto \mathcal{P}(E)$ caractérise complètement le graphe G . En effet, $A = \bigcup_{x \in E} \{(x, y) \mid y \in V_G(x)\}$.
- La fonction $V : E \mapsto \mathcal{P}(E)$ est une fonction voisinage d'un graphe non-orienté simple si et seulement si pour tout $x, y \in E$,
 - $x \notin V(x)$ et
 - $y \in V(x) \iff x \in V(y)$.

Exemples :

- Sur \mathbb{Z}^2 on considère généralement deux structures de graphes :
 - $G_4 = (\mathbb{Z}^2, A_4)$ où A_4 correspond à la fonction voisinage V_4 définie par $V_4(p) = \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid d_1(x, p) = 1\}$.
 - $G_8 = (\mathbb{Z}^2, A_8)$ où A_8 correspond à la fonction voisinage V_8 définie par $V_8(p) = \{x \in \mathbb{Z}^2 \mid d_\infty(x, p) = 1\}$.

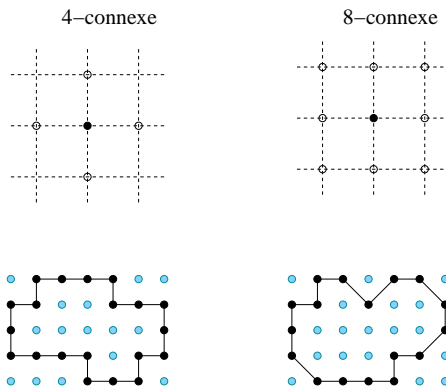


FIG. 2.1 – Les deux figures du haut représentent les voisinages huit et quatre connexes d'un point. Les deux figures du bas sont des exemples de chemins discrets définis relativement à chacune de ces deux connexités.

- Sur \mathbb{Z}^3 on considère généralement trois structures de graphes :
 - $G_6 = (\mathbb{Z}^3, A_6)$ où A_6 correspond à la fonction voisinage V_6 définie par $V_6(p) = \{x \in \mathbb{Z}^3 \mid d_1(x, p) = 1\}$.
 - $G_{18} = (\mathbb{Z}^3, A_{18})$ où A_{18} correspond à la fonction voisinage V_{18} définie par $V_{18}(p) = \{x \in \mathbb{Z}^3 \mid d_1(x, p) \leq 2 \text{ et } d_\infty(x, p) = 1\}$.
 - $G_{26} = (\mathbb{Z}^3, A_{26})$ où A_{26} correspond à la fonction voisinage V_{26} définie par $V_{26}(p) = \{x \in \mathbb{Z}^3 \mid d_\infty(x, p) = 1\}$.
- Plus généralement, on considère sur \mathbb{Z}^n deux structures de graphes :
 - $G_{2n} = (\mathbb{Z}^n, A_{2n})$ où A_{2n} correspond à la fonction voisinage V_{2n} définie par $V_{2n}(p) = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid d_1(x, p) = 1\}$.
 - $G_{3^n-1} = (\mathbb{Z}^n, A_{3^n-1})$ où A_{3^n-1} correspond à la fonction voisinage V_{3^n-1} définie par $V_{3^n-1}(p) = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid d_\infty(x, p) = 1\}$.

Définition 4 *Un sous-ensemble de \mathbb{Z}^2 (respectivement de \mathbb{Z}^3 ou \mathbb{Z}^n) est dit k -connexe s'il est connexe relativement au graphe G_k pour $k = 4$ ou 8 dans \mathbb{Z}^2 , pour $k = 6, 18$ ou 26 pour \mathbb{Z}^3 ou $k = 2n$ ou $3^n - 1$ pour \mathbb{Z}^n pour $n \geq 4$.*

De la même façon que dans la définition précédente, le terme k -courbe discrète ou courbe discrète k -connexe au lieu de G_k -courbe.

2.2 Les notations arithmétiques

Définition 5 *Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$.*

- $\llbracket a, b \rrbracket = \{n \in \mathbb{Z} \mid a \leq n \leq b\}$ est l'intervalle discret constitué des entiers consécutifs se trouvant entre a et b . Par définition, si $a > b$, on a alors $\llbracket a, b \rrbracket = \emptyset$.
- $\lfloor x \rfloor$ est l'entier tel que $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$. $\lfloor x \rfloor$ est appelé la partie entière du nombre réel x .
- $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$. On a donc $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$. $\lceil x \rceil$ est appelé la partie entière supérieur du nombre réel x .
- $\lceil x \rceil = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$ est appelé l'entier le plus proche du nombre réel x
- $\langle x \rangle = x - \lfloor x \rfloor$ est appelé la partie fractionnaire du nombre réel x . On a donc $x = \lfloor x \rfloor + \langle x \rangle$.
- Soient a un entier et b un entier positif. L'entier $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ (respectivement $r = b * \langle \frac{a}{b} \rangle$) est le quotient (respectivement le reste) de la division de a par b . Autrement dit, on a : $a = qb + r$ avec $0 \leq r < b$. Le reste de la division de a par b est aussi noté $a \bmod b$.

2.2.1 Séries de Farey

Soit n un entier strictement positif. La suite de Farey d'ordre n est la suite strictement croissante de tous les nombres rationnels compris entre 0 et 1 représentés par des fractions irréductibles dont les dénominateurs sont plus petits ou égal à n . Ces suites apparaissent dans plusieurs domaines de la science. Les définitions et les propriétés présentées dans cette sous section peuvent être retrouvées de manière plus détaillée dans [GKP94].

Définition 6 *L'ensemble de Farey d'ordre n , noté F_n , est la suite de fraction irréductible compris entre 0 et 1 dont le dénominateur est inférieur ou égale à n*

Par exemple, $F_5 = \{\frac{a}{b} \mid 0 \leq a \leq b \leq 5\} = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1}\}$.

Les éléments d'une suite de Farey vérifient les propriétés suivantes :

Propriété 2 *Soit $n \geq 1$ et soient $\frac{u}{v}$ et $\frac{u'}{v'}$ deux fractions irréductibles consécutives de F_q . Alors, on a*

- $u'v - uv' = 1$ et
- $u + u'$ et $v + v'$ sont premiers entre eux. De plus, les fractions $\frac{u}{v}$, $\frac{u + u'}{v + v'}$ et $\frac{u'}{v'}$ sont consécutives dans la suite de Farey d'ordre $v + v'$.

La fraction $\frac{u + u'}{v + v'}$ est appelée le médian des deux fractions $\frac{u}{v}$ et $\frac{u'}{v'}$.

D'après les propriétés précédentes, la construction des suites de Farey peut se faire de manière récursive à partir de $F_1 = \{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\}$: Pour $q \geq 2$, la série de Farey d'ordre q est calculée à partir de la série de Farey d'ordre $q - 1$ en ajoutant à celle ci les médians $\frac{a}{b}$ des éléments de F_{q-1} tel que $b \leq q$.

2.2.2 Droites discrètes et segment discret

Dans ce paragraphe, on considère les droites discrètes correspondant aux droites réelles de pente $\alpha \in [0, 1]$ et de phase $\beta \in [0, 1]$. En effet, on peut toujours se ramener à ce cas par des translations et des symétries par rapport aux axes et à l'origine du repère ainsi que par rapport à la première bissectrice.

Définition 7 *Soient $\alpha, \beta \in [0, 1]$.*

- $\mathcal{DN}(\alpha, \beta) = \{(X, Y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq Y - \alpha X - \beta < 1\} = \{(X, \lfloor \alpha X + \beta \rfloor) \mid X \in \mathbb{Z}\}$ est appelé la droite naïve de pente α et de phase β .
- $\mathcal{DS}(\alpha, \beta) = \{(X, Y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq Y - \alpha X - \beta < \alpha + 1\}$ est appelé la droite standard de pente α et de phase β .

Définition 8 *Soit $S \subseteq \mathbb{Z}^2$.*

S est appelé un segment discret pour la 8-connexité, s'il existe $\alpha, \beta \in [0, 1]$ et $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $S = \{(X, Y) \in \mathcal{DN}(\alpha, \beta) \mid a \leq X \leq b\}$.

- S est appelé un segment discret pour la 4-connexité, s'il existe $\alpha, \beta \in [0, 1]$ et $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $S = \{(X, Y) \in \mathcal{DS}(\alpha, \beta) \mid a \leq X \leq b\}$.

Ces notions sont illustrées dans la Figure 2.2.

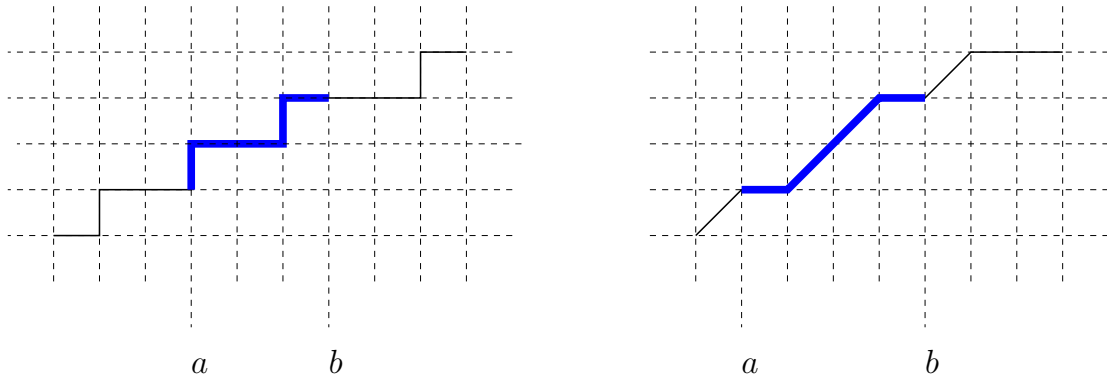


FIG. 2.2 – À gauche : Illustration d'une droite et d'un segment 4-connexes. À droite : Illustration d'une droite et d'un segment 8-connexes.

2.3 Alphabet, mot, bi-mot

Définition 9 *Un alphabet \mathcal{A} est un ensemble fini non vide, dont les éléments sont appelés lettres ou symboles ou caractères de l'alphabet.*

Exemples :

- $\mathcal{R} = \{A, B, \dots, Z\}$ est l'alphabet Romain.
- $\mathcal{B} = \{0, 1\}$ est l'alphabet binaire.
- $\mathcal{LP} = \{p, 0, 1, \neg, \wedge, \vee\}$ est l'alphabet de la logique des propositions.

2.3.1 Les mots

Définition 10 *Un mot sur un alphabet \mathcal{A} est une suite finie dont les éléments sont dans \mathcal{A} . Si m est un mot sur l'alphabet \mathcal{A} , alors $|m|$ désigne la longueur du mot m et correspond au nombre d'éléments de la suite représentant m . Le mot vide noté ε est alors de longueur 0. L'ensemble des mots (respectivement les mots non vides) sur l'alphabet \mathcal{A} sera noté \mathcal{A}^* (respectivement $\mathcal{A}^+ : \mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^* \setminus \{\varepsilon\}$).*

Un mot sera aussi appelé un mot unidimensionnel en opposition aux mots bidimensionnels qui seront définis dans la suite.

Exemples :

- $AAABCA$ est un mot de longueur 6 sur l'alphabet \mathcal{R} .
- 001001110 est un mot de longueur 9 sur l'alphabet \mathcal{B} .
- $-0 \wedge 1p0$ est un mot de longueur 6 sur l'alphabet \mathcal{LP} .

Remarques :

Soit \mathcal{A} un alphabet. Pour tout $m, m', m'' \in \mathcal{A}^*$,

- Si $m = a_1a_2\dots a_n$ où $a_i \in \mathcal{A}$ pour tout $1 \leq i \leq n$, alors $|m| = n$ et on peut voir le mot m comme une fonction $m : \llbracket 0, |m| - 1 \rrbracket \mapsto \mathcal{A}$ telle que $m(i) = a_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, |m| - 1 \rrbracket$.
- Sur \mathcal{A}^* on définit l'opération binaire de concaténation \circ telle que $w = m \circ m'$ est le mot w de longueur $|m| + |m'|$ tel que

$$w(i) = \begin{cases} m(i) & \text{si } 0 \leq i \leq |m| - 1 \\ m'(i - |m|) & \text{si } |m| \leq i \leq |w| - 1 \end{cases}$$

- $m \circ \varepsilon = \varepsilon \circ m = m$, c'est-à-dire que ε est un élément neutre pour l'opération binaire \circ sur \mathcal{A}^* .
- $m \circ (m' \circ m'') = (m \circ m') \circ m''$, c'est-à-dire que l'opération binaire \circ est associative sur \mathcal{A}^* .

Le couple (\mathcal{A}^*, \circ) est appelé le monoïde libre engendré par \mathcal{A} .

Dans la suite, on notera la concaténation des mots m et m' par mm' au lieu de $m \circ m'$.

Définition 11 Soient \mathcal{A} un alphabet et $m, m' \in \mathcal{A}^*$.

- m' est dit un facteur de m , s'il existe $u, v \in \mathcal{A}^*$ tels que $m = um'v$.
- m' est dit un préfixe de m , s'il existe $u \in \mathcal{A}^*$ tels que $m = m'u$.
- m' est dit un suffixe de m , s'il existe $u \in \mathcal{A}^*$ tels que $m = um'$.
- Pour $m' \neq \varepsilon$, $|m|_{m'} = \text{card}(\{(u, v) \in (\mathcal{A}^*)^2 \mid m = um'v\})$. Autrement dit, $|m|_{m'}$ est le nombre d'occurrences du mot m' dans le mot m .

Remarques :

Soit $m \in \mathcal{A}^*$.

- Les préfixes et les suffixes d'un mot sont des facteurs particuliers de ce mot.
- $|m| = \sum_{a \in \mathcal{A}} |m|_a$.

Exemple :

Soit $m = 00101011010$. Alors

- 001 est un préfixe du mot m .
- 010 est un suffixe du mot m .
- 101 est un facteur du mot m qui n'est ni un préfixe ni un suffixe du mot m .
- $|m|_{010} = 3$.

2.3.2 Les mots bidimensionnels

Définition 12 Un mot bidimensionnel (ou bi-mot) m sur un alphabet \mathcal{A} est une suite finie bidimensionnel dont les éléments sont dans \mathcal{A} . m peut donc être vu comme une application

$m : \llbracket 0, l - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, h - 1 \rrbracket \mapsto \mathcal{A}$, le couple $|m| = (l, h)$ est appelé la taille du mot bidimensionnel m et l (respectivement h) correspond à la longueur (respectivement à la hauteur) du mot bidimensionnel m . L'ensemble des mots bidimensionnels sur l'alphabet \mathcal{A} sera noté $\mathcal{A}^{2,*}$.

Remarque : Un mot unidimensionnel de taille l peut être vu comme un mot bidimensionnel de taille $(l, 1)$.

Contrairement au cas des mots unidimensionnels, nous allons définir deux opérations binaires de concaténation : la concaténation en longueur \circ_l et la concaténation en hauteur \circ_h . Ces opérations sont partielles car pour pouvoir appliquer l'une de ses opérations sur des opérandes il faut qu'il y ait une compatibilité de tailles entre ces opérandes. En effet, soient m et m' deux mots bidimensionnels de tailles respectives (l, h) et (l', h') . Pour pouvoir appliquer \circ_l entre m et m' il faut et il suffit que $h = h'$, et pour pouvoir appliquer \circ_h entre m et m' il faut et il suffit que $l = l'$.

Exemples :

Considérons l'alphabet binaire $\mathcal{B} = \{0, 1\}$.

- Concaténation en longueur de deux bi-mots de tailles respectives $(3, \underline{2})$ et $(2, \underline{2})$:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \circ_l \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} .$$

- Concaténation en hauteur de deux bi-mots de tailles respectives $(\underline{2}, 3)$ et $(\underline{2}, 2)$:

$$\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \circ_h \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} = \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} .$$

- Impossibilité de la concaténation en longueur à cause de l'incompatibilité des tailles $(3, \underline{2}), (2, \underline{3})$: l'expression

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \circ_l \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array}$$

est alors non définie à cause de l'incompatibilité des tailles.

Définition 13 Soient m, m' deux mots bidimensionnels sur un alphabet de tailles respectives $(l, h), (l', h')$. m' est dit un facteur de m s'il existe un couple (i, j) tel que $l' \leq i + l' - 1 \leq l, h' \leq i + h' - 1 \leq h$ et pour tout $(a, b) \in \llbracket 0, l' - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, h' - 1 \rrbracket, m(i + a, j + b) = m'(a, b)$.

Remarques : Soient $m, m_1, m_2 \in \mathcal{A}^{2,*}$. Si $m = m_1 \circ_l m_2$ ou $m = m_1 \circ_h m_2$, alors m_1 et m_2 sont des facteurs de m .

Exemples :

$$\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ 1 \ 1 \end{array} \text{ est un facteur de } \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} .$$

$$\begin{array}{c} 1 \ 1 \\ 1 \ 0 \end{array} \text{ est un facteur de } \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{array} .$$

Chapitre 3

Estimateurs de périmètre et d'aire

Dans ce chapitre nous présentons des exemples d'estimateurs de périmètre et d'aire utilisés dans la littérature en imagerie. Nous présentons notamment les estimateurs de périmètres introduits dans [Fre70, Kul77, GV78, VS82, DS87, LW91, Via96, Coe02, TD03, DR04] et les estimateurs d'aire introduits dans [KS01, Lin03, Lin05].

Les estimateurs proposés dans cette littérature peuvent être classés en deux catégories :

- les estimateurs basés sur des caractéristiques locales comme par exemple des motifs dans le codage de l'objet considéré comme un mot (pour les courbes discrètes) ou un bi-mot (pour les surfaces discrètes) ; des attributs différentiels (comme par exemple la tangente) ;
- les estimateurs globaux qui calculent généralement une décomposition linéaire par morceaux de l'objet considéré et l'estimation est alors calculée à partir de cette décomposition.

3.1 Estimateur et résolution de l'espace discret

Dans toute la suite si A est un ensemble, $\mathcal{P}(A)$ désignera l'ensemble des parties de A . Autrement dit, $\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$.

Soient $r > 0$ et $\delta_r^n : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \mapsto \mathcal{P}(r\mathbb{Z}^n)$ un opérateur de discrétisation à la résolution r .

Soit μ une caractéristique définie sur une classe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ (i.e $\mu : \mathcal{C} \mapsto \mathcal{E}$).

Par exemple, μ est une mesure de périmètre ou d'aire, etc. ; \mathcal{C} est la classe des ensembles 'mesurables' relativement à la mesure μ et $\mathcal{E} = \mathbb{R}^+$.

Soient $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ une sous classe de \mathcal{C} et $\delta_r^n(\mathcal{C}') \subseteq \mathcal{A}'$ avec $\delta_r^n(\mathcal{C}') = \{\delta_r^n(B) \mid B \in \mathcal{C}'\}$.

Considérons un opérateur

$$E_r : \mathcal{A}' \mapsto \mathcal{E}.$$

Définition 14 (*Propriété de convergence*) :

On dit que l'opérateur E_r est un estimateur de la caractéristique μ possédant la propriété de convergence pour la classe \mathcal{C}' , si pour tout $C \in \mathcal{C}'$,

$$\lim_{r \rightarrow 0} E_r(\delta_r^n(C)) = \mu(C).$$

Remarque : Toutes les notions que nous allons introduire dans ce chapitre pour des objets dans \mathbb{Z}^n se définissent d'une façon similaire pour des objets dans $r\mathbb{Z}^n$ pour $r > 0$.

3.2 Estimateurs de périmètre

Dans ce paragraphe, nous allons décrire un certain nombre d'estimateurs de périmètre étudiés dans la littérature en imagerie. Les 8-courbes discrètes dont on cherche à estimer la longueur sont décrites en utilisant leurs code de Freeman qui est un mot sur l'alphabet $\mathcal{F} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ (Voir la figure Fig. 3.1(b)).

Notation :

Soit $C = p_0, p_1, \dots, p_n$ une 8-courbe discrète. À C on associe le mot de longueur n ,

$$m(C) = c(p_1 - p_0)c(p_2 - p_1)\dots c(p_n - p_{n-1})$$

où $p_i - p_{i-1} \in V_8(0, 0)$ et $c(p_i - p_{i-1}) \in \mathcal{F}$ est l'entier associé au vecteur de déplacement $p_i - p_{i-1}$ (Voir la figure Fig. 3.1 (a)).

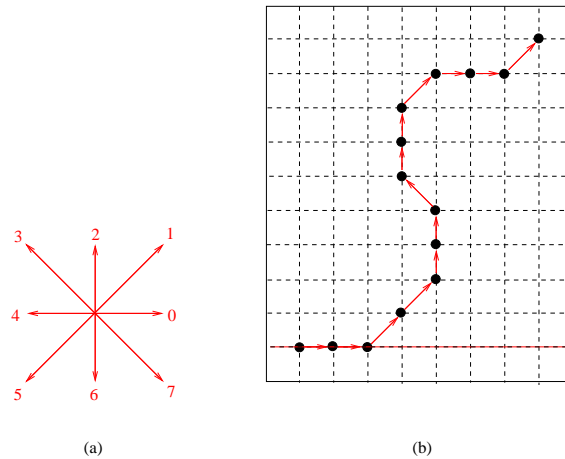


FIG. 3.1 – (a) Les différents vecteurs de déplacements ainsi que les entiers correspondant au code de Freeman associés à ces vecteurs, (b) 0011223221001 est donc le codage de Freeman de la 8-courbe discrète constituée des points \bullet .

Posons $\mathcal{F}^i = \{i, i + 1\}$ pour $i = 0, 2, 4$ et 6 . Alors

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}^0 \cup \mathcal{F}^2 \cup \mathcal{F}^4 \cup \mathcal{F}^6.$$

Remarques :

- Le code de Freeman d'une courbe discrète définit cette courbe à une translation près. Ceci n'est pas gênant dans notre contexte car le périmètre est une caractéristique invariante par translation.
- Tout mot $m \in \mathcal{F}^*$ peut être factorisé sous la forme $m = w_1 w_2 \dots w_k$ tel que $w_j \in (\mathcal{F}^{i_j})^*$ pour $1 \leq j \leq k$ et $i_j \neq i_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq k - 1$.
Par exemple, $m = 0011223221001 = w_1 w_2 w_3$ où $w_1 = 0011$, $w_3 = 1001 \in (\mathcal{F}^0)^*$ et $w_2 = 22322 \in (\mathcal{F}^2)^*$.
- Soit $m \in (\mathcal{F}^i)^*$ où $m = a_1 a_2 \dots a_n$ avec $a_j \in \mathcal{F}^i$ pour $1 \leq j \leq n$. Le mot $m' = (a_1 - i)(a_2 - i) \dots (a_n - i) \in (\mathcal{F}^0)^*$. Par exemple, pour $m = 22322 \in (\mathcal{F}^2)^*$, on a $m' = (2 - 2)(2 - 2)(3 - 2)(2 - 2)(2 - 2) = 00100 \in (\mathcal{F}^0)^*$.
- Soit $C = p_0, p_1, \dots, p_n$ une 8-courbe discrète telle que les deux coordonnées de p_0 sont positives et $m(C) \in (\mathcal{F}^0)^*$. On a pour tout i les deux coordonnées du point p_i sont positives. Autrement dit, C est entièrement dans le quart du plan constitué de points à coordonnées positives.

Plusieurs estimateurs de périmètre étudiés dans la littérature en imagerie considèrent des 8-courbes discrètes C dont le code de Freeman $m(C)$ est un mot sur l'alphabet binaire $\mathcal{F}^0 = \mathcal{B}$. En fait, d'après les remarques précédentes on peut toujours se ramener à ce cas. En effet, géométriquement, on passe, pour chacun des 'facteurs' de la courbe discrète traité séparément, du cas général à ce cas particulier en utilisant des symétries relativement aux axes et à l'origine du repère. On peut même se restreindre dans certains cas, en utilisant en plus la symétrie par rapport à la première diagonale (la droite d'équation : $y=x$), au premier octant, c'est-à-dire que les points des courbes discrètes considérées ont leurs coordonnées (x, y) telles que $0 \leq x \leq y$.

3.3 Estimateurs locaux de périmètre

Soient \mathcal{M} un ensemble de motifs et $\mathbb{P} : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction appelée fonction poids. Au couple $(\mathcal{M}, \mathbb{P})$ on associe l'estimateur $E_{\mathcal{M}, \mathbb{P}}$ défini par :
Si C est une courbe discrète, alors $E_{\mathcal{M}, \mathbb{P}}(C) = \sum_{m \in \mathcal{M}} n(m, C) \mathbb{P}(m)$ où pour tout $m \in \mathcal{M}$, $n(m, C)$ est le nombre d'occurrences du motif m dans C .

Dans toute la suite on notera $h_C = |m(C)|_0$ le nombre de déplacements horizontaux dans C et $d_C = |m(C)|_1$ le nombre de déplacements diagonaux dans C .

Il existe dans la littérature de nombreux estimateurs locaux de périmètre. Nous présenterons ci-dessous un échantillon de ces estimateurs.

3.3.1 Estimateurs de périmètre utilisant un seul motif

Ces estimateurs ne font pas de distinction entre les lettres du code de Freeman de la 8-courbe discrète. Soit $m(\mathcal{C})$ le code de Freeman correspondant à une 8-courbe discrète \mathcal{C} . L'estimateur le plus simple de cette catégorie est défini par

$$L_0(\mathcal{C}) = |m(\mathcal{C})|$$

où $|m(\mathcal{C})|$ est la taille du mot $m(\mathcal{C})$. L'estimateur L_0 associe le même poids (c'est-à-dire 1) aussi bien à un déplacement horizontal qu'à un déplacement diagonal. Ce poids est en fait la longueur correspondant à un déplacement horizontal.

L'estimateur L_1 défini ci-dessous prend comme poids w la moyenne des longueurs des déplacements horizontaux et diagonaux en tenant compte de leurs fréquences globales :

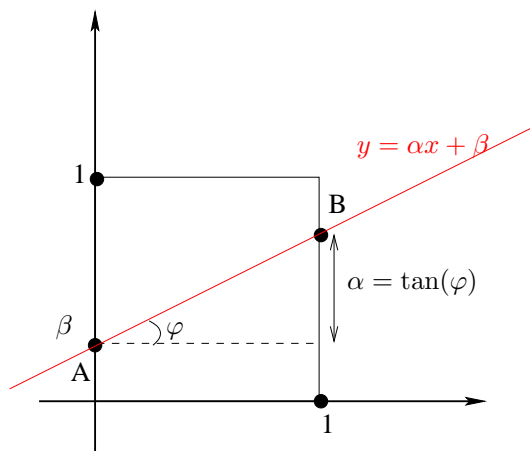


FIG. 3.2 – La position d'une droite de paramètres α, β dans le carré $[0, 1] \times [0, 1]$, $L_{euc}(A, B) = \sqrt{1 + \alpha^2}$.

$$w = \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + \alpha^2} d\alpha d\beta = \frac{\pi}{4} \sqrt{2}$$

L'estimateur L_1 est alors défini par :

$$L_1(\mathcal{C}) = \frac{\pi}{4} \sqrt{2} |m(\mathcal{C})| = \frac{\pi}{4} \sqrt{2} L_0(\mathcal{C}) \approx 1.1107 |m(\mathcal{C})|.$$

3.3.2 Estimateur de Freeman

Freeman [Fre70] considère deux motifs : 0 et 1. Il leur associe comme poids les normes des vecteurs de déplacements leurs correspondants. Ainsi il associe le poids 1 au motif '0' correspondant au vecteur de déplacement $(0, 1)$ et le poids $\sqrt{2}$ au motif '1' correspondant au vecteur de déplacement $(1, 1)$. L'estimateur proposé est alors :

$$L_F(h_c, d_c) = h_c + \sqrt{2}d_c$$

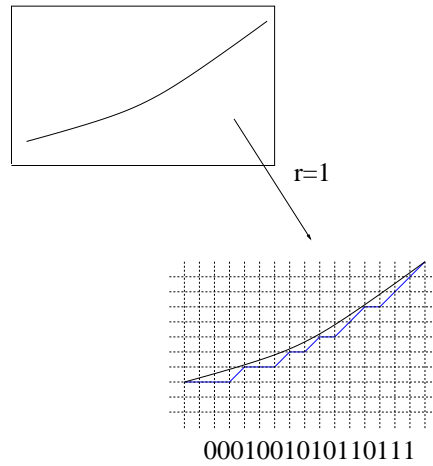


FIG. 3.3 - $L_F(h_c, d_c) = h_c + \sqrt{2}d_c = 8 * 1 + 8 * \sqrt{2} \approx 19,31$.

3.3.3 Estimateur de Kulpa

Dans [Kul77], Kulpa calcule la moyenne du rapport entre la longueur d'un segment et l'estimation de cette longueur par l'estimateur de Freeman.

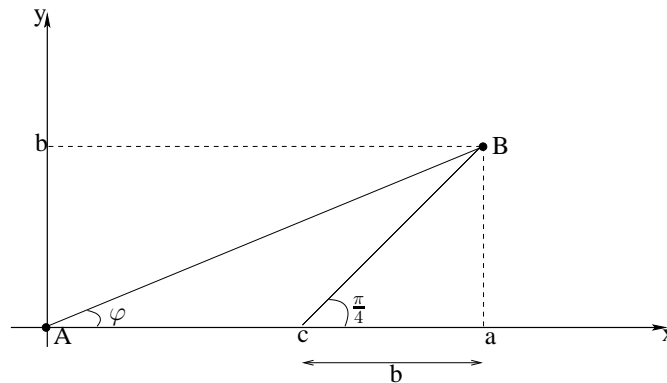


FIG. 3.4 - Distance euclidienne et estimation de Freeman.

Considérons le segment AB dans la figure FIG. 3.4 où a et b sont des nombres entiers avec $a \geq b$.

- $L_E(a, b) = \sqrt{a^2 + b^2}$ est la longueur euclidienne du segment AB .
- $L_F(h_C, d_C) = h_C + d_C\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2}(\cos(\varphi) + (\sqrt{2} - 1)\sin(\varphi))$ est l'estimation de Freeman de la longueur euclidienne de AB où $h_C = a - b$ (respectivement $d_C = b$) est le nombre de pas horizontaux (respectivement diagonaux) du code de Freeman de la discrétisation \mathcal{C} du segment AB .

On a donc

$$\mathcal{R}(\varphi) := \frac{L_F(h_C, d_C)}{L_E(a, b)} = \cos(\varphi) + (\sqrt{2} - 1)\sin(\varphi)$$

où $\mathcal{R}(\varphi)$ est le rapport entre la longueur exacte et l'estimation de Freeman. La moyenne, sur le premier octant (i.e. $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$) est

$$\frac{4}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos(\varphi) + (\sqrt{2} - 1)\sin(\varphi))d\varphi = \frac{8(\sqrt{2} - 1)}{\pi}$$

L'estimateur introduit dans [Kul77] est obtenu en multipliant l'estimateur de Freeman par l'inverse de la moyenne de $\mathcal{R}(\varphi)$ et est donc défini par :

$$L_K(h_C, d_C) = \frac{\pi}{8(\sqrt{2} - 1)} L_F(h_C, d_C) \approx 0.948h_C + 1.341d_C.$$

3.3.4 Estimateur de Groen et Verbeek

L'estimateur introduit par Groen et Verbeek dans [GV78] est basé sur la détermination des longueurs moyennes de segments correspondant aux deux configurations représentées par les motifs '0' et '1' (Voir FIG. 3.5).

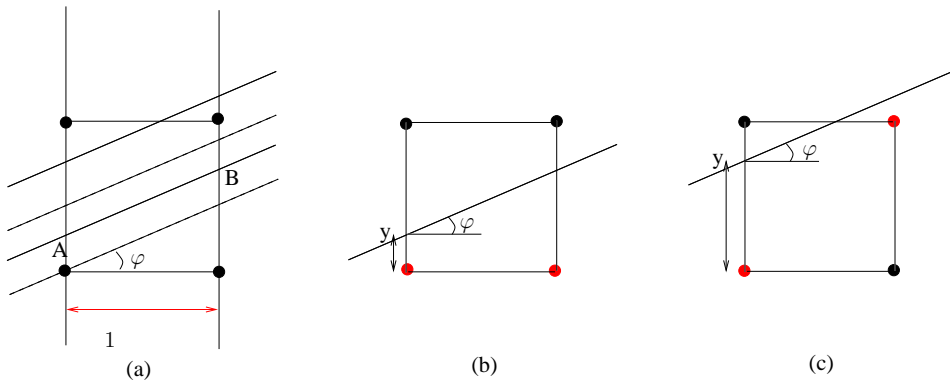


FIG. 3.5 – (a) Positions d'une droite relativement à une bande verticale. (b) Configuration correspondant au motif '0' (Déplacement horizontal). (c) Configuration correspondant au motif '1' (Déplacement diagonal).

Considérons le segment AB de la figure FIG. 3.5 (a). Alors, la longueur de AB est $L_E(A, B) = \frac{1}{\cos(\varphi)}$ où φ est l'angle entre (AB) et l'axe horizontal comme c'est indiqué sur la figure.

Dans [GV78], les auteurs ont fait l'hypothèse que la probabilité $p(\varphi)$, pour que le segment (AB) fasse un angle φ avec l'axe horizontal, est proportionnelle à l'inverse de sa longueur euclidienne. Autrement dit, $p(\varphi) = c * \cos(\varphi)$. En considérant les 8 octants, on a

$$8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} p(\varphi) d\varphi = 1 \text{ d'où } c = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

Une fois l'angle φ fixé, c'est la valeur de la phase (i.e. le paramètre y) qui détermine si on a un déplacement horizontal (Voir la figure FIG. 3.4 (b)) ou un déplacement diagonal (Voir la figure FIG. 3.4 (c)). En utilisant ensuite la loi uniforme pour la phase (i.e. le paramètre y), les auteurs calculent la longueur moyenne m_0 (respectivement m_1) du segment AB correspondant à un déplacement horizontal (Fig. 3.4 (b)) (respectivement un déplacement diagonal (FIG. 3.4 (c)) et obtiennent les formules suivantes :

•

$$m_0 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2-l^2}{l(l^2-1)} dl = \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)}{\sqrt{2}-1} \approx 1.059.$$

•

$$m_1 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \int_1^{\sqrt{2}} \frac{1}{l} dl = \frac{\ln(2)}{2-\sqrt{2}} \approx 1.183.$$

L'estimateur L_{GV} obtenu est alors

$$L_{GV}(h_C, d_C) = m_0 h_C + m_1 d_C \approx 1.059 h_C + 1.183 d_C.$$

3.3.5 Estimateur de Vossepoel et Smeulders

L'estimateur introduit par Vossepoel et Smeulders dans [VS82] utilise trois motifs :

- Le déplacement horizontal (le facteur '0' dans $m(\mathcal{C})$),
- Le déplacement diagonal (la facteur '1' dans $m(\mathcal{C})$) et
- Le coin (l'un des facteurs '01', '10' dans $m(\mathcal{C})$) : Voir la figure FIG. 3.6).

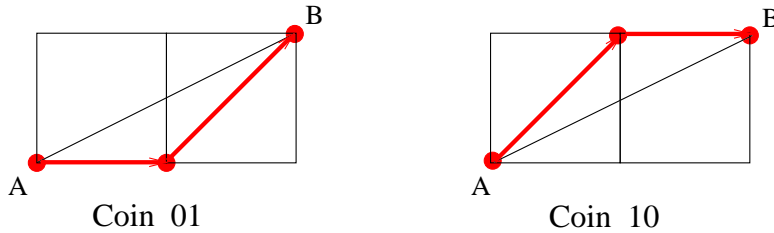


FIG. 3.6 – Les différentes configurations correspondant à un coin.

Remarque : Si $m(\mathcal{C})$ est un facteur du code de Freeman d'une droite discrète de pente $0 \leq \alpha < 1$, alors les occurrences de 1 dans $m(\mathcal{C})$ sont isolées. Autrement dit, si $m(\mathcal{C}) = u01v$ et $v \neq \varepsilon$, alors $v = 0v'$ pour $v' \in \mathcal{B}^*$ et si $m(\mathcal{C}) = u10v$ et $u \neq \varepsilon$, alors $u = u'0$ pour $u' \in \mathcal{B}^*$.

Dans toute la suite de ce paragraphe, $c_{\mathcal{C}} = |m(\mathcal{C})|_{01} + |m(\mathcal{C})|_{10}$ est le nombre d'occurrences de coins, avec chevauchement, dans la courbe discrète \mathcal{C} .

Comme pour l'estimateur de Feeman, le poids m_0 associé à un déplacement horizontal est 1 et le poids m_1 associé à un déplacement diagonal est $\sqrt{2}$.

La distance entre les extrémités A et B d'un coin (Voir la figure FIG. 3.6) est $L_E(A, B) = \sqrt{5}$.

Le poids associé à un coin pour l'estimateur L_{FC} , introduit dans [DS87], est

$$m_c = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - \sqrt{2} - 1).$$

En fait, le poids m_c ainsi défini tient compte, d'une part, du fait qu'un coin correspond à un déplacement horizontal suivi d'un déplacement diagonal (01) ou l'inverse (10), et ces deux déplacements ne doivent pas contribuer deux fois dans l'estimation, et d'autre part, que deux coins consécutifs se chevauchent (la remarque précédente).

L'estimateur L_{FC} introduit dans [DS87] est alors défini par :

$$L_{FC}(h_{\mathcal{C}}, d_{\mathcal{C}}, c_{\mathcal{C}}) = h_{\mathcal{C}} + \sqrt{2}d_{\mathcal{C}} + \frac{1}{2}(\sqrt{5} - \sqrt{2} - 1)c_{\mathcal{C}} \approx 1.000h_{\mathcal{C}} + 1.414d_{\mathcal{C}} - 0.089c_{\mathcal{C}}.$$

Les expérimentations effectués dans [DS87] montrent que l'estimateur L_{FC} est biaisé et donne généralement des résultats supérieurs à la longueur que l'on cherche à estimer.

Une étude expérimentale, utilisant des séquences $m(\mathcal{C})$ de taille 1000, a été effectuée dans [VS82] pour déterminer des valeurs optimales pour les poids m_0, m_1 et m_c . Cette étude a conduit à l'estimateur L_C défini par :

$$L_C(h_{\mathcal{C}}, d_{\mathcal{C}}, c_{\mathcal{C}}) = 0.980h_{\mathcal{C}} + 1.406d_{\mathcal{C}} - 0.091c_{\mathcal{C}}.$$

Les estimateurs L_K et L_C ont été conçus pour calculer la longueur de segments de droite mais ils restent performants dans le cas des arcs de cercle. Ces deux estimateurs ne vérifient pas non plus la propriété de la convergence dans le cas général.

Lorsqu'on veut mesurer la longueur d'un contour quelconque, les auteurs conseillent de l'approximer par une suite de segments de droites et d'arcs de cercles avant d'utiliser les estimateurs les plus appropriés. Si l'on n'envisage pas de décomposer le contour à analyser, il semble raisonnable, d'après les auteurs, d'utiliser soit l'estimateur L_K , soit l'estimateur L_C qui sont les plus polyvalents.

Remarque : Soit \mathcal{C} une courbe discrète. Les estimateurs L_{FC} et L_C sont de la forme $\alpha h_{\mathcal{C}} + \beta d_{\mathcal{C}} + \gamma c_{\mathcal{C}}$ où $\alpha, \beta > 0$ et $\gamma < 0$. Par conséquent, ces deux estimateurs apparaissent

avec un poids négatif (le poids γ correspondant aux coins).

Nous allons montrer dans ce qui suit que ces deux estimateurs locaux peuvent être décrit par d'autres estimateurs locaux dont tous les poids sont strictement positifs.

Considérons l'ensemble $\mathcal{M} = \{ '00', '01', '10', '11' \}$ des motifs de longueur 2. Les coins correspondent aux motifs '01', '10'. Alors, on a :

- $n_{\mathcal{C}}(00) = \frac{hc - c_{\mathcal{C}}}{2}$,
- $n_{\mathcal{C}}(01) + n_{\mathcal{C}}(10) = c_{\mathcal{C}}$ et
- $n_{\mathcal{C}}(11) = \frac{dc - c_{\mathcal{C}}}{2}$.

où $n_{\mathcal{C}}(\omega)$ est le nombre d'occurrences du motif ω pour $\omega \in \mathcal{M}$.

Par conséquent, $\alpha h_{\mathcal{C}} + \beta h_{\mathcal{C}} + \gamma c_{\mathcal{C}} = \alpha' n_{\mathcal{C}}(00) + \beta' n_{\mathcal{C}}(01) + \gamma' n_{\mathcal{C}}(10) + \delta' n_{\mathcal{C}}(11)$ avec $\alpha' = 2\alpha, \beta' = \gamma' = \alpha + \beta + \gamma$ et $\delta' = 2\beta$. Comme pour les deux estimateurs L_{FC} et $L_{\mathcal{C}}$, si la quantité $\alpha + \beta + \gamma$ est strictement positive, alors ces deux estimateurs sont équivalents à l'estimateur L_3 défini par

$$L_3(\mathcal{C}) = \alpha' n_{\mathcal{C}}(00) + \beta' n_{\mathcal{C}}(01) + \gamma' n_{\mathcal{C}}(10) + \delta' n_{\mathcal{C}}(11)$$

où les poids α', β', γ' et δ' associés respectivement aux motifs '00', '01', '10' et '11' sont tous strictement positifs.

3.3.6 Estimateur de Tajine et Daurat

M. Tajine et A. Daurat ont introduit dans [TD03] un modèle d'estimation de périmètre qui généralise tous les estimateurs locaux introduisent précédemment.

En effet, pour tout entier strictement positif m , ils considèrent comme ensemble de motifs \mathcal{M} l'ensemble \mathcal{S}_m des segments discrets de taille m et $\mathbb{P} : \mathcal{M} \mapsto \mathbb{R}^+$ une fonction poids quelconque. L'estimateur \mathcal{E}_m est alors défini par :

Soit \mathcal{C} une courbe discrète. Si $m(\mathcal{C}) = s_1 s_2 \dots s_k$ où $s_i \in \mathcal{S}_m$ pour tout $1 \leq i \leq k$, alors

$$\mathcal{E}_m(\mathcal{C}) = \sum_{s \in \mathcal{S}_m} p(s) n(s, m(\mathcal{C}))$$

où $n(s, m(\mathcal{C})) = \text{card}(\{i \mid s_i = s\})$.

Ils ont notamment montré que les estimateurs de cette classe ne vérifient presque jamais la propriété de convergence même lorsqu'ils sont utilisés pour l'estimation de la longueur des segments de droites.

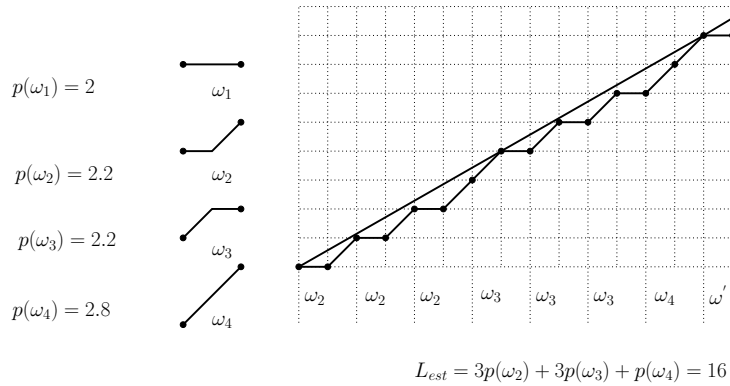


FIG. 3.7 – Exemple d’un estimateur local utilisant des motifs de taille 2 ($m = 2$).

3.3.7 Estimateur sur les chemins euclidiens

Dans [Via96], A. Viillard a proposé un modèle permettant d’associer à une k -courbe discrète \mathcal{C} un polygone \mathcal{C}' du plan euclidien \mathbb{R}^2 dont les sommets sont en correspondance avec les sommets de la k -courbe discrète \mathcal{C} pour $k \in \{4, 8\}$. L’idée de base de ce modèle est d’associer à chaque point $p = (p_x, p_y)$ de \mathcal{C} un point p' du carré ouvert $]p_x - \frac{1}{2}, p_x + \frac{1}{2}[\times]p_y - \frac{1}{2}, p_y + \frac{1}{2}[$ (voir la figure FIG. 3.8).

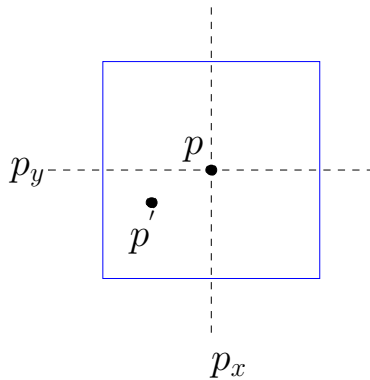


FIG. 3.8 – Un point euclidien p' associé à un point discret p .

Le polygone \mathcal{C}' a pour ensemble de sommets $\mathcal{S}(\mathcal{C}) = \{p' \mid p \in \mathcal{C}\}$ et pour ensemble d’arêtes $\mathcal{A}(\mathcal{C}) = \{[p'_1, p'_2] \mid p'_1, p'_2 \in \mathcal{S}(\mathcal{C}) \text{ et } p_2 \in V_k(p_1)\}$ où $V_k(z)$ est l’ensemble des k -voisins d’un point $z \in \mathbb{Z}^2$ et $[p, q] = \{tp + (1 - t)q \mid 0 \leq t \leq 1\}$ pour $p, q \in \mathbb{R}^2$.

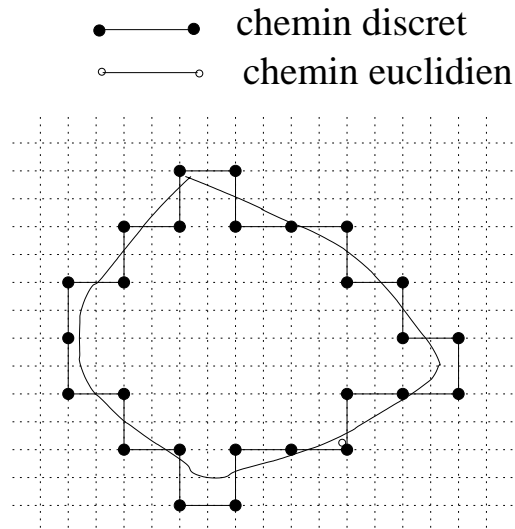


FIG. 3.9 – Exemple de chemin euclidien associé à un chemin discret 4-connexé.

A. Vialard a proposé notamment une méthode basée sur la notion de tangente discrète pour construire une courbe euclidienne associée à une courbe discrète donnée \mathcal{C} . Ceci permet de ‘lisser’ la courbe discrète \mathcal{C} .

Définition 15 Soit $C = (p_i)_{1 \leq i \leq n}$ une k -courbe discrète de \mathbb{Z}^2 pour $k \in \{4, 8\}$. On définit la tangente discrète en un point p_i de \mathcal{C} comme la plus longue portion de \mathcal{C} centrée en p qui soit un k -segment discret.

Dans la figure FIG. 3.10 sont représentées les tangentes discrètes correspondantes aux points A , B et C dans la courbe discrète considérée.

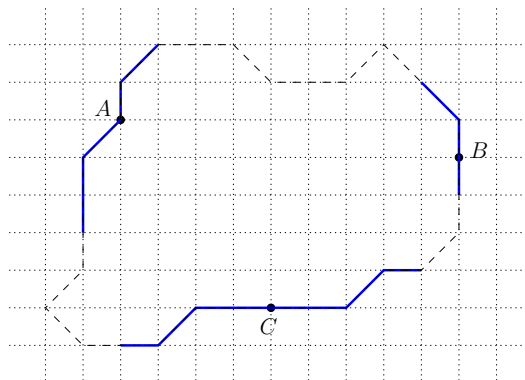


FIG. 3.10 – Tangentes discrètes.

A. viallard a proposé des algorithmes pour calculer une notion de tangente discrète en un point d'une courbe discrète \mathcal{C} pour la 4-connexité ou la 8-connexité. Elle associe ensuite à la tangente discrète trouvée, une droite réelle correspondant à l'approximation de la tangente réelle dans le voisinage du point discret considéré. Elle définit ainsi la tangente réelle en un point $p \in \mathcal{C}$ comme la droite réelle centrée associée à la tangente discrète en p .

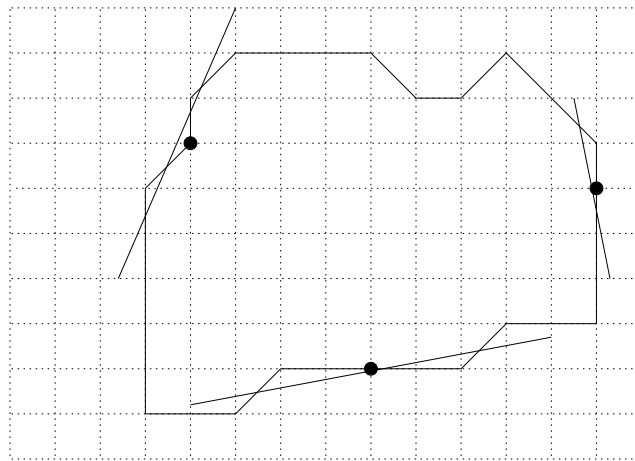


FIG. 3.11 – Approximation de la tangente réelle en un point d'un chemin 8-connexé.

Elle a proposé également une méthode pour choisir un point de la tangente réelle comme le point euclidien p' associé au point discret p . Un tel point p' peut être vu comme une sorte de projection du point discret p de la courbe discrète \mathcal{C} sur sa tangente réelle.

L'estimateur proposé consiste alors à associer à la courbe discrète \mathcal{C} la longueur du polygone \mathcal{C}' correspondant à \mathcal{C} .

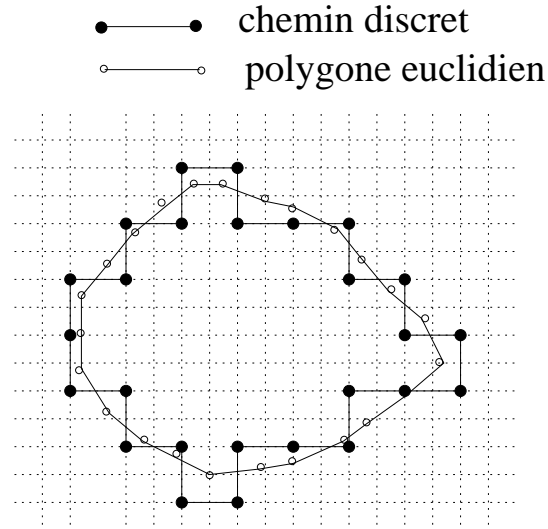


FIG. 3.12 – Exemple de polygone euclidien associé à un chemin discret 4-connexé.

L'estimation se réduit donc à la somme des longueurs des arêtes du polygone \mathcal{C}' :

$$L_{euc} := \sum_{i=1}^n d_2(p'_i, p'_{i-1})$$

où $\{p'_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ (respectivement $\{[p'_{i-1}, p'_i] \mid 1 \leq i \leq n\}$) est l'ensemble des sommets (respectivement l'ensemble des arêtes) du polygone \mathcal{C}' correspondant à la k -courbe discrète \mathcal{C} .

Comparaison de L_{euc} avec un estimateur local

Même si la notion de tangente à une courbe continue est une notion locale, l'estimateur L_{euc} introduit dans [Via96] n'est pas tout à fait local. En effet, pour calculer le point $p' \in \mathcal{C}'$ associé à un point $p \in \mathcal{C}$, il faut déterminer la tangente discrète en p à la k -courbe discrète \mathcal{C} et le calcul de cette tangente n'est pas local car on doit calculer le plus long segment centré en p et qui est contenu dans \mathcal{C} .

Comme L_{euc} n'est pas *a priori* un estimateur local, nous allons, dans la suite de ce paragraphe, comparer expérimentalement L_{euc} avec des estimateurs locaux.

Pour ce faire, nous allons associer des poids aux segments discrets de taille m . Pour calculer le poids d'un segment discret S on doit choisir un couple (α, β) dans la Pré-image de S (i.e. $(\alpha, \beta) \in PI(S)$) (voir paragraphe 4.3.1). Le poids $p(S)$ qui sera associé au segment discret S est alors la distance entre les deux points $(0, \beta)$ et $(rm, \alpha m + \beta)$ où r est la résolution

de l'espace discret. Autrement dit,

$$p(S) = \sqrt{(rm - 0)^2 + (\alpha rm + \beta - \beta)^2} = rm\sqrt{1 + \alpha^2}.$$

m=3			m=2			m=1		
S_i	(α, β)	$p(S_i)$	S_i	(α, β)	$p(S_i)$	S_i	(α, β)	$p(S_i)$
000	(0, 0)	3	00	(0, 0)	2	0	(0, 0)	1
100	$(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$	3, 162	10	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	2, 236	1	(1, 0)	$\sqrt{2}$
001	$(\frac{1}{3}, 0)$	3, 162	01	$(\frac{1}{2}, 0)$	2, 236			
110	$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$	3, 605	11	(1, 0)	$2\sqrt{2}$			
011	$(\frac{2}{3}, 0)$	3, 605						
111	(1, 0)	$3\sqrt{2}$						
101	$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	3, 354						
010	$(\frac{1}{2}, 0)$	3, 354						

Pour comparer l'estimateur proposé par A. vialard avec les 3 estimateurs locaux correspondants au poids donnés par les tableaux ci-dessus, nous effectuons des expérimentations sur les mêmes exemples qu'elle a utilisé c'est-à-dire les carrés $(C_\theta)_\theta$ obtenus à partir d'un carré de coté 200 auquel nous faisons subir des rotations d'angles θ variant entre 0 et 45° ($\pi/4$). Le périmètre du carré C_θ est alors égal à $4 \times l = 800$ où $l = 200$ est la longueur du coté de C_θ . Pour les expérimentations nous nous restreignons alors à un seul coté pour chacun des carrés. Nous avons alors appliqué les estimateurs en considérant les segments $L_\theta = \{(x, \tan(\theta)x) \mid x \in [0, 200 * \cos(\theta)]\}$ pour θ variant entre 0 et $\pi/4$ et en utilisant comme motifs des segments discrets de tailles respectives 1, 2 et 3 et comme résolution de l'espace discret $r = 1000$.

On rappelle que

$$l_{est}^m(\mathcal{L}_\theta^r) = r \sum_{S \in \mathcal{S}_m} n(S, \mathcal{L}_\theta^r) p(S) \text{ pour } i = 1, 2 \text{ ou } 3$$

où \mathcal{L}_θ^r est la discrétisation naïve de L_θ , $n(S, \mathcal{L}_\theta^r)$ est le nombre d'occurrences du segment discret S dans \mathcal{L}_θ^r , $p(S)$ est le poids associé au segment discret S et \mathcal{S}_m est l'ensemble des segments discret de taille m .

La figure FIG. 3.13 montre la variation, en fonction de l'angle θ , de nos estimations par rapport à la valeur exacte du périmètre (i.e. la droite $y = 0$) pour $\theta \in [0, \pi/4]$.

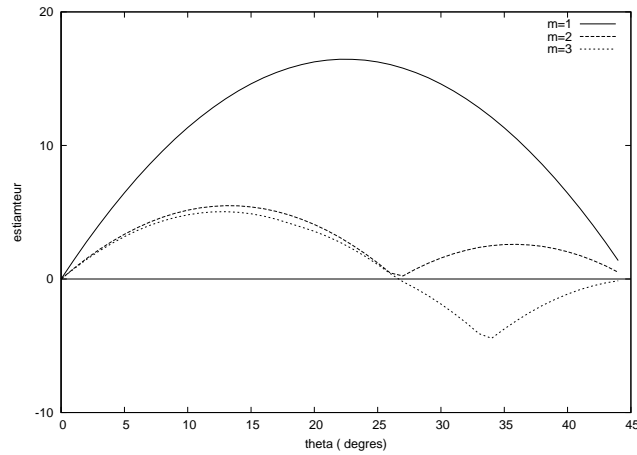


FIG. 3.13 – Effets des rotations d’angle θ sur l’estimation du périmètre d’un carré de coté 200 en utilisant les estimateurs locaux avec comme motifs successivement des segments discrets de taille $m = 1, 2$ et 3 pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}[$.

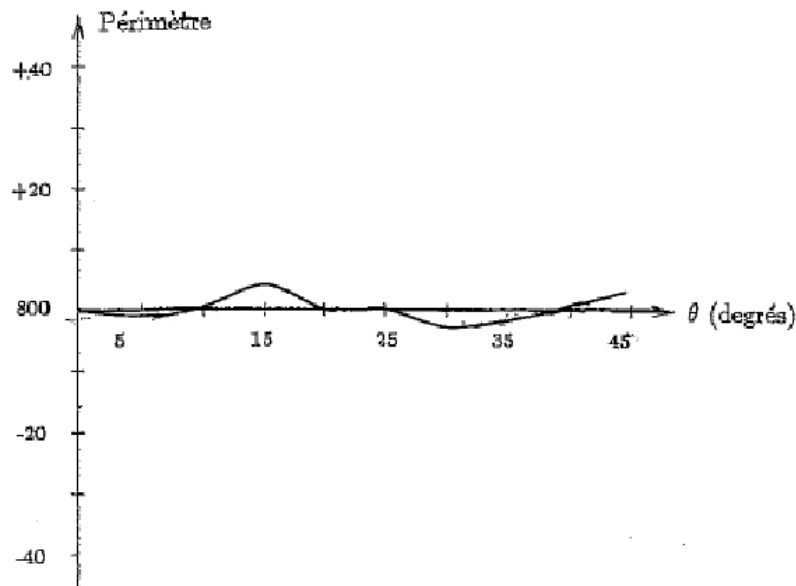


FIG. 3.14 – Effets des rotations d’angle θ sur l’estimation du périmètre d’un carré de coté 200 en utilisant l’estimateur de A. Vialard pour $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}[$.

3.4 Approches basées sur des approximations polygona- nales

Dans cette section nous présentons une deuxième catégorie d'estimateurs de périmètre. Ces estimateurs utilisent des motifs dont les tailles sont variables et tendant vers l'infini lorsque la résolution r de l'espace discret tends vers 0.

Dans sa thèse [Coe02], D. Coeurjolly a proposé une méthode d'estimation de périmètre pour une classe de courbes lisses. Si γ est une courbe et si γ_r est une discrétisation à la résolution r de γ , alors la méthode proposée est basée sur la décomposition de la courbe discrète γ_r en segments discrets. Ces segments discrets doivent avoir des tailles dépendant de la résolution de l'espace discret. Pour ce faire, [Coe02] considère la classe des courbes γ en 2D ou plus généralement nD vérifiant les conditions suivantes :

- $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une courbe continue sans auto-intersection dont la courbure est bornée par $C = \frac{1}{R}$;
- γ est contenue dans une séquence de tubes T_1, \dots, T_N de diamètre θ et de longueur $L(T_1), \dots, L(T_N)$. Chaque extrémité d'un tube est décomposé comme présenté dans la figure 3.15 (a). On appelle ce tube auquel on a ajouté un bord, à chaque extrémité, de longueur $\frac{\theta}{2}$ un θ -*agrandissement* ;
- T_1 contient $\gamma(0)$;
- T_N contient $\gamma(1)$;
- Les tubes T_i et T_{i+1} sont adjacents par leur θ -*agrandissement* ; Plus précisément, cette intersection se fait par l'axe principal du tube et les faces extrémités (voir figure 3.15 (b)) et
- $L(T_i) \geq K\sqrt{\frac{\theta}{C}}$ pour tout i dans $\{1, \dots, N\}$ avec $K \in \mathbb{R}$.

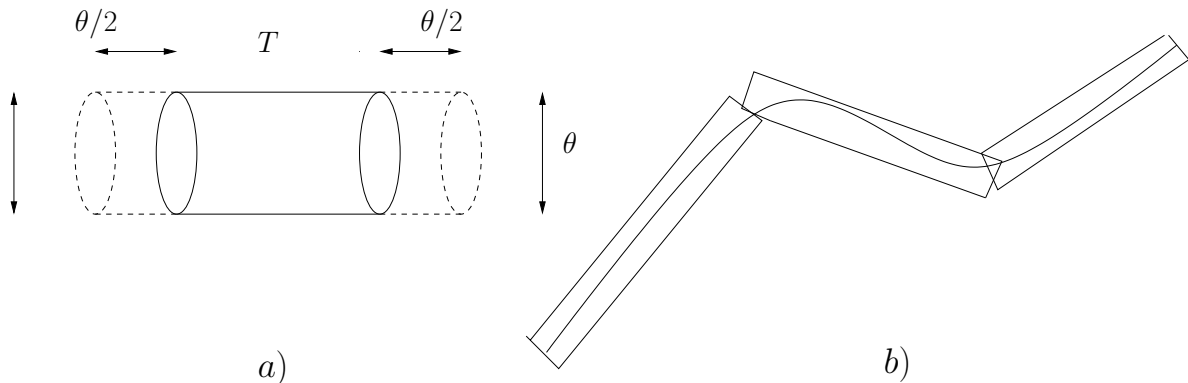


FIG. 3.15 – a) Un θ -agrandissement d'un tube T . b) Une segmentation d'une courbe γ en une séquence de tubes.

Dans sa thèse, D. Coeurjolly a annoncé le théorème suivant :

Théorème 1 Soit γ une courbe vérifiant les hypothèses précédentes et soit une séquence de tubes $\{T_1, \dots, T_N\}$ (N dépend de θ) vérifiant aussi les propriétés ci-dessus.

Nous avons alors :

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sum_i^N L(T_i) = L(\gamma).$$

Le paramètre θ est lié à la résolution r de l'espace discret et la segmentation de la courbe discrète γ_r (*i.e.* c'est-à-dire la décomposition de γ_r en une séquence de segments discrets) correspond alors à la séquence $T_1 \cap \gamma_r, \dots, T_N \cap \gamma_r$. Le poids $p(T_i \cap \gamma_r)$ associé à chacun des segments $T_i \cap \gamma_r$ est égal à la longueur $L(T_i)$ du tube T_i . Par conséquent,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \sum_i^N L(T_i) = \lim_{\theta \rightarrow 0} \sum_i^N p(T_i \cap \gamma_r) = L(\gamma).$$

Plusieurs algorithmes de reconnaissances de segments discrets, basés notamment sur les notions de préimages de segments discrets, peuvent être utilisés pour la segmentation des courbes discrètes γ_r . Le résultat de cette segmentation permet ainsi la constitution de la séquence des tubes dont les longueurs sont utilisés par l'estimateur proposé.

3.5 Estimateurs d'aire

3.5.1 Exemple d'un estimateur local d'aire

Dans [Lin03, Lin05], J. Lindblad propose un estimateur local d'aire pour des surfaces discrète correspondant aux bords d'objets binaires 3D.

L'estimateur proposé est basée sur des configurations locales $2 \times 2 \times 2$ Voxels. L'aire estimée est alors calculée en sommant les contributions des différentes configurations locales apparaissant dans la surface discrète considérée.

Dans une image binaire 3D, le nombre de configurations $2 \times 2 \times 2$ possibles (*i.e.* 8 voxels) est $2^8 = 256$. En utilisant les rotations et les symétries et en ne considérant que les configurations correspondant au bord d'un objet voxels, les 256 configurations possibles conduisent alors à 13 configurations (Voir la figure FIG. 3.16).

Soit S_r une surface discrète de $r\mathbb{Z}^3$. L'estimateur d'aire E_r est alors défini par :

$$E_r(S_r) = \sum_{i=1}^{13} p(\omega_i) n(\omega_i, S_r)$$

où pour $1 \leq i \leq 13$, $p(\omega_i)$ est le poids associé à la configuration ω_i et $n(\omega_i, S_r)$ est le nombre d'occurrences de la configuration ω_i dans la surface discrète S_r .

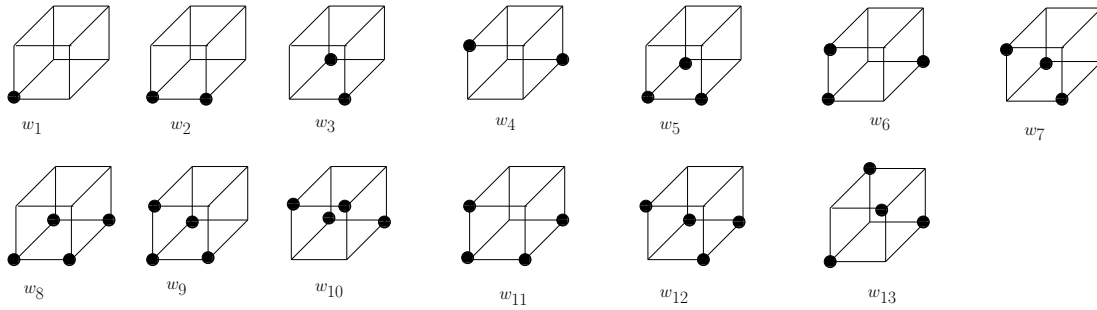


FIG. 3.16 – Les 13 motifs $2 \times 2 \times 2$ voxels. Les voxels représentés par \bullet correspondent aux points de l'objet.

Des expérimentations ont été effectuées par J. Lindblad pour déterminer les poids $p(\omega_i)$. J. Lindblad attribue à chaque configuration un poids correspondant à sa contribution moyenne à l'aire totale, relativement aux surfaces discrètes utilisées dans les expérimentations. Le but est de choisir des poids permettant de donner une estimation d'aire non biaisée et de variance minimale.

3.5.2 Exemple d'un estimateur global d'aire

Dans [KS01], R. Klette et H. J. Sun proposent un estimateur d'aire d'une surface discrète basé sur un algorithme de polyédration.

La première étape de la méthode consiste alors à calculer une décomposition de la surface discrète considérée S_r en morceaux de plans discrets en utilisant un algorithme glouton de reconnaissance de plans discrets. Ce type d'algorithme repose sur la recherche incrémentale d'un "plan support" de l'ensemble des points discrets considérés. Chaque morceau de plan discret est ensuite représenté par un polygone euclidien (un morceau d'un plan continu de \mathbb{R}^3). Voir la figure FIG. 3.17 pour l'illustration de la polyédration d'une surface discrète. L'estimation d'aire de la surface discrète S_r est alors la somme des aires des polygones euclidiens obtenus à la première étape.

Les expérimentations effectuées dans [KS01] montrent que l'aire estimée est très proche de l'aire réelle, pour une sphère discrète de rayon 100, l'erreur relative est de 0.67%. Cette erreur est meilleure qu'une estimation d'aire obtenue par la mesure de l'aire de l'enveloppe convexe de l'ensemble des voxels de la discrétisation de la sphère (3% d'erreur).

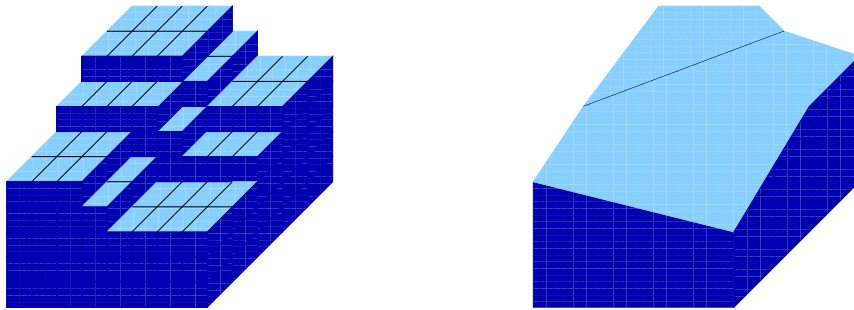


FIG. 3.17 – Exemple de polyédrisation d'un objet voxels.

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté des estimateurs locaux de périmètre de la littérature et nous avons montré qu'ils sont des cas particuliers de la classe des estimateurs locaux proposée dans [TD03]. Dans [TD03], il a été démontré aussi que les estimateurs locaux de périmètre n'ont pas la propriété de convergence même pour les segments de droites. Nous étendrons, dans la chapitre suivant, la propriété de non-convergence à une classe de morceaux de paraboles.

Nous avons présenté aussi dans ce chapitre un estimateur globale de périmètre ([Coe02]) qui a la propriété de convergence.

Nous proposerons, dans le chapitre 5, une classe d'estimateurs appelés semi-locaux qui possèdent la propriété de convergence pour toute courbe de classe \mathcal{C}^2 . Les estimateurs semi-locaux sont en quelque sorte entre les estimateurs locaux et les estimateurs globaux. Nous avons présenté enfin un estimateur d'aire pour des surfaces en 3D ([KS01]) basé sur des configurations locales. Dans le chapitre 6, nous présenterons la classe des estimateurs locaux d'aire de telle sorte que l'estimateur d'aire présenté dans ce chapitre est un un estimateur local.

Chapitre 4

Fréquence des segments discrets et estimateurs locaux de périmètre

4.1 Introduction

Dans ce chapitre nous étudions les estimations de périmètre d'une courbe à partir de ses discrétisations à différentes résolutions. Plus précisément, nous nous intéressons aux estimations basées sur les estimateurs locaux et nous étudions aussi la convergence de ces estimateurs lorsque la résolution de l'espace discret tend vers 0.

Dans le travail réalisé par Tajine et Daurat en 2003 [TD03] les estimateurs locaux ont été introduits et ont été expérimentés pour l'estimation de longueur des segments de droite. Ce chapitre contient une extension de [TD03] à une classe de paraboles.

Ce chapitre est composé de trois parties. Dans la première partie nous introduisons les différentes notions utilisées dans ce chapitre. Nous étudions ensuite la fréquence des motifs dans les discrétisations d'une classe de paraboles. La dernière partie de ce chapitre est consacrée aux conséquences des résultats sur les fréquences pour l'estimation de périmètre. Les résultats présentés dans ce chapitre ont été publiés dans les articles [DTZ08a, DTZ09].

4.2 Discrétisation des courbes réelles

Nous commençons cette section par la présentation de différents modèles de discrétisation des courbes [JM, LS84, Ber90, Kim84]. Dans tout ce qui suit, nous considérons une courbe $C(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in [a, b]\}$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq b$, $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ telle que $0 \leq |f'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [a, b]$.

Définition 16 Soient $A_r = \lceil \frac{a}{r} \rceil$ et $B_r = \lfloor \frac{b}{r} \rfloor$.

- La discrétisation par la méthode OBQ (Objet Boundary Quantization) de la courbe $C(f)$ à la résolution r est définie par :

$$\delta_{OBQ}^r(C(f)) = \{r(X, \lfloor \frac{f(Xr)}{r} \rfloor) \mid X \in \llbracket A_r, B_r \rrbracket\}.$$

- La discrétisation par la méthode *BBQ* (*Background Boundary Quantization*) de la courbe $C(f)$ à la résolution r est définie par :

$$\delta_{BBQ}^r(C(f)) = \{r(X, \lceil \frac{f(Xr)}{r} \rceil) \mid X \in \llbracket A_r, B_r \rrbracket\}.$$

- La discrétisation par la méthode *GIQ* (*Grid Intersect Quantization*) de la courbe $C(f)$ à la résolution r est définie par :

$$\delta_{GIQ}^r(C(f)) = \{r(X, \lfloor \frac{f(Xr)}{r} \rfloor) \mid X \in \llbracket A_r, B_r \rrbracket\}.$$

Pour des illustrations de ces trois modèles de discrétisations voir la figure FIG. 4.1.

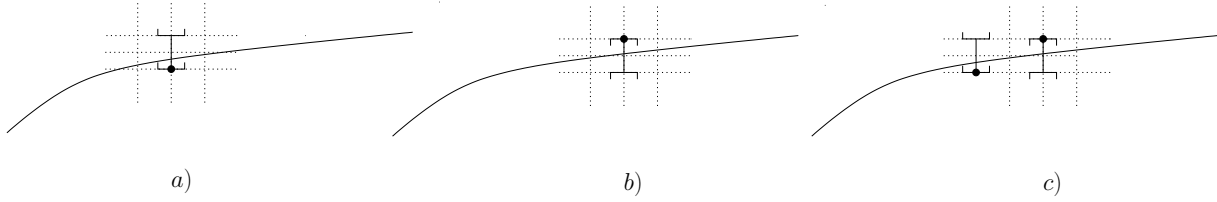


FIG. 4.1 – Discrétisation d’une courbe réelle par la méthode a) : *OBQ* b) : *BBQ*, c) : *GIQ*

Remarque : Les trois modèles de discrétisation *OBQ*, *BBQ* et *GIQ* sont similaires. En effet, on peut passer de l’une à l’autre en utilisant le fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor = \lceil x + \frac{1}{2} \rceil$.

La propriété suivante présente l’application de ces trois opérateurs de discrétisation sur les droites réelles donnant ainsi une classe de droites discrètes.

La notion de droite discrète a été étudiée dans un cadre plus général au début des années 90 par J.- P. Reveillès [Rev90].

Dans la propriété suivante, nous considérons les discrétisations *OBQ*, *BBQ* et *GIQ* des droites $D(\alpha, \beta)$ pour $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Le cas d’une droite quelconque se ramène au cas $\alpha, \beta \in [0, 1]$ par translation et/ou par symétries par rapport aux axes OX , OY et/ou la première bissectrice ($D(1, 0)$).

Propriété 3 On considère la droite $D(\alpha, \beta) = \{(x, \alpha x + \beta) \mid x \in \mathbb{R}\}$ avec $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$.

- La discrétisation *OBQ* de $D(\alpha, \beta)$ à la résolution r est définie par :

$$\delta_{OBQ}^r(D(\alpha, \beta)) = \mathcal{DN}(\alpha, \beta) = \{r(X, Y) \in r\mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq \alpha X - Y + \frac{\beta}{r} < 1\}$$

- La discrétisation BBQ de $D(\alpha, \beta)$ à la résolution r est définie par :

$$\delta_{BBQ}^r(D(\alpha, \beta)) = \{r(X, Y) \in r\mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq Y - \alpha X - \frac{\beta}{r} < 1\}$$

- La discrétisation GIQ de $D(\alpha, \beta)$ à la résolution r est définie par :

$$\delta_{GIQ}^r(D(\alpha, \beta)) = \{r(X, Y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq \alpha X - Y + \frac{\beta}{r} + \frac{1}{2} < 1\}$$

Preuve Cette propriété est une conséquence du fait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lceil x \rceil = -\lfloor -x \rfloor$ et $\lfloor x \rfloor = \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor$. □

Comme les trois modèles de discrétisation OBQ , BBQ et GIQ sont similaires nous nous limiterons dans la suite au modèle de discrétisation OBQ .

Définition 17 (*Motif discret dans la discrétisation d'une courbe*)

Soit $X \in \llbracket A_r, B_r - m \rrbracket$. On définit le motif discret $\omega_{X,r,m}^f : \llbracket 0, m \rrbracket \mapsto \mathbb{N}$ de taille m à la position X dans la discrétisation $\delta_{OBQ}^r(C(f))$ de $C(f)$ par :

$$\omega_{X,r,m}^f(k) = \lfloor \frac{f(r(X+k))}{r} \rfloor - \lfloor \frac{f(rX)}{r} \rfloor$$

pour $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$.

La notion de motif discret dans la discrétisation d'une courbe est illustrée dans la figure FIG. 4.2

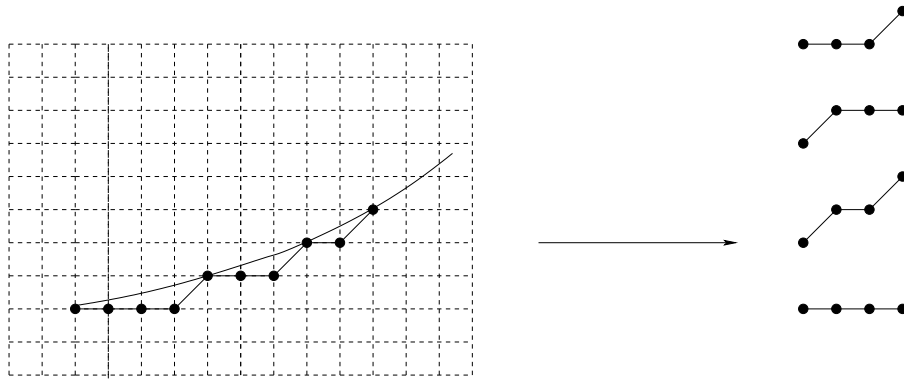


FIG. 4.2 – Exemples de motifs de taille $m = 3$ à différentes positions.

La notion de segment discret, que nous allons rappeler (voir aussi le chapitre 2) dans la définition ci-dessous, est un cas particulier de la notion de motif discret.

Définition 18 (*Segment discret*)

Soient $r > 0$, $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $X \in \mathbb{Z}$ et m un entier strictement positif. Le segment discret de taille m à la position X dans la discrétisation OBQ de la droite $D(\alpha, \beta)$ à la résolution r est défini en utilisant le codage absolu $S_{X,r,m}^{\alpha,\beta}$ ou le codage relatif $V_{X,r,m}^{\alpha,\beta}$:

- Le codage absolu $S_{X,r,m}^{\alpha,\beta} : \llbracket 0, m \rrbracket \mapsto \mathbb{N}$ est défini par :

$$S_{X,r,m}^{\alpha,\beta}(k) = \omega_{X,r,m}^f(k) = \lfloor \alpha(X+k) + \frac{\beta}{r} \rfloor - \lfloor \alpha X + \frac{\beta}{r} \rfloor$$

pour $0 \leq k \leq m$ où $f(x) = \alpha x + \beta$.

- Le codage relatif $V_{X,r,m}^{\alpha,\beta} : \llbracket 1, m \rrbracket \mapsto \mathbb{N}$ est défini par :

$$V_{X,r,m}^{\alpha,\beta}(k) = \lfloor \alpha(X+k) + \frac{\beta}{r} \rfloor - \lfloor \alpha(X+k-1) + \frac{\beta}{r} \rfloor$$

pour $0 < k \leq m$.

Remarques : Comme $\alpha, \beta \in [0, 1]$, on a alors les faits suivants :

- Le codage absolu $S_{X,r,m}^{\alpha,\beta}$ est un mot sur l'alphabet $\llbracket 0, m \rrbracket$.
- Le codage relatif $V_{X,r,m}^{\alpha,\beta}$ est un mot sur l'alphabet binaire $\mathcal{B} = \{0, 1\}$.
- Le codage absolu et le codage relatif d'un segment discret sont équivalents et sont liés par les deux relations suivantes :
 - $V_{X,r,m}^{\alpha,\beta}(k) = S_{X,r,m}^{\alpha,\beta}(k) - S_{X,r,m}^{\alpha,\beta}(k-1)$ et
 - $S_{X,r,m}^{\alpha,\beta}(k) = \sum_{l=1}^k V_{X,r,m}^{\alpha,\beta}(l)$.

La notion de segment discret dans la discrétisation d'une droite est illustrée dans la figure FIG. 4.3

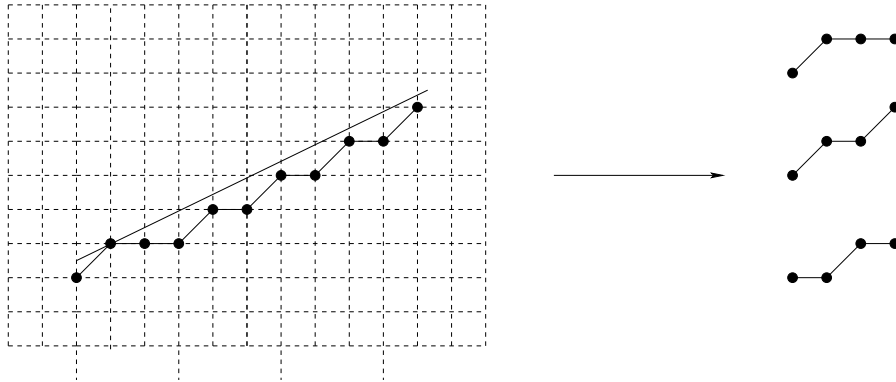


FIG. 4.3 – Exemples de segments discrets de taille $m = 3$ à différentes positions.

4.3 Pré-image d'un segment discret

4.3.1 Définition de la pré-image

La notion de pré-image d'un segment discret a été introduite par Dorst et Smeulders dans [LS84] et nous nous plaçons dans le même contexte qu'eux en utilisant la discrétisation OBQ . La pré-image d'un motif discret ω est un domaine, dans l'espace des paramètres, qui représente l'ensemble de toutes les droites réelles dont la discrétisation contient les pixels constituant ω . Plus formellement on a :

Définition 19 *Soit ω un motif discret. La pré-image $PI(\omega)$ du motif discret ω est définie par :*

$$PI(\omega) = \{(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2 \mid S_{0,1,m}^{\alpha,\beta} = \omega\}.$$

Remarques :

- $PI(\omega)$ correspond à l'ensemble des droites $D(\alpha, \beta)$ dont la discrétisation OBQ à la résolution 1 contient le motif discret ω à la position 0.
- $PI(\omega) \neq \emptyset \iff \omega$ est un segment discret.
- $PI(\omega)$ peut également s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} PI(\omega) &= \{(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2 \mid \lfloor k\alpha + \beta \rfloor = \omega(k), \forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket\} \\ &= \{(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2 \mid \omega(k) \leq k\alpha + \beta < \omega(k) + 1, \forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket\}. \end{aligned}$$

La pré-image du motif discret ω , vu comme un ensemble de pixels, est alors définie dans l'espace des paramètres (α, β) comme l'intersection des demi-plans E^+ d'inéquation $\alpha k + \beta - \omega(k) \geq 0$ et E^- d'inéquation $\alpha k + \beta - \omega(k) \leq 1$.

Définir $PI(\omega)$ par de telles inégalités nous permet de voir que $PI(\omega)$ est un polygone dont les cotés sont des segments de droites d'équations $\beta = -k\alpha + \omega(k)$. Ces droites sont appelées rayons de Farey.

Plus précisément, on appelle rayon de Farey d'ordre n toute droite $D(x, y)$ dont l'équation est de la forme $\beta = x\alpha + y$, où y et x sont des entiers naturels tels que $0 \leq y \leq x \leq n$. On note ce rayon $R(x, y)$.

Il existe un lien entre les rayons de Farey d'ordre n et la suite de Farey du même ordre. McIlroy [McI85] a étudié ce lien et a démontré la propriété suivante :

Propriété 4 *Soit ω un ensemble de N pixels 8-connexes dont l'abscisse minimale des points est x_0 . La pré-image $PI(\omega)$ de ω a les propriétés suivantes :*

1. $PI(\omega)$ est un polygone convexe possédant au plus 4 sommets ;
2. Les abscisses de ces sommets sont des nombres de Farey d'ordre $\max(x_0, N - x_0)$;
3. Les abscisses de deux sommets adjacents sont des fractions consécutives dans une série de Farey ;
4. Si l'abscisse d'un sommet du polygone $PI(\omega)$ est de la forme $\frac{p}{q}$, alors son ordonnée est un multiple de $\frac{1}{q}$.

4.3.2 Diagramme de Farey

L'importance des rayons de Farey pour la pré-image nous mène à tracer tous ces rayons sur un même graphique. La restriction du graphique à $[0, 1] \times [0, 1]$ est appelée le diagramme de Farey d'ordre n comme montre la figure FIG. 4.4 :

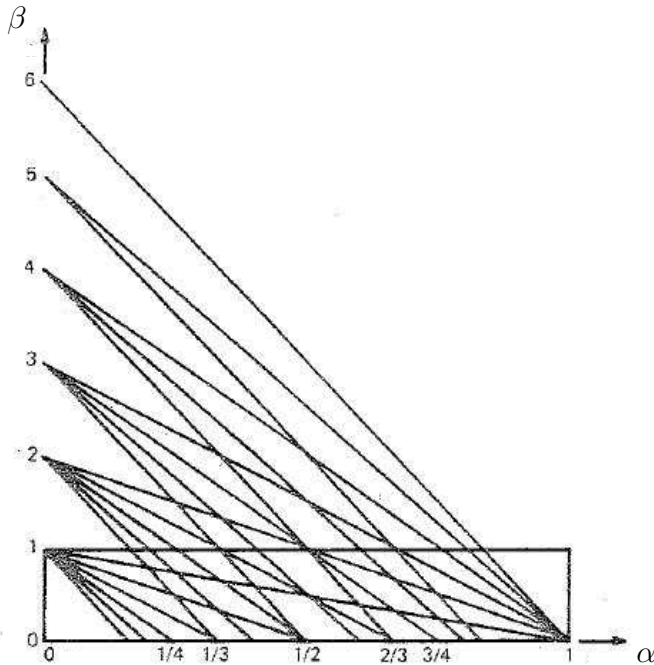


FIG. 4.4 – Rayons de Farey d'ordre 6 .

On obtient avec le diagramme de Farey toutes les pré-images (les polygones de $[0, 1] \times [0, 1]$ limités par les rayons de Farey) dont chacune d'elle correspond à un et un seul segment discret.

Définition 20 Soit ω un segment discret, on définit l'ensemble $I^\alpha(\omega)$ par :

$$I^\alpha(\omega) = \{\beta \in [0, 1] \mid (\alpha, \beta) \in PI(\omega)\}.$$

$I^\alpha(\omega)$ représente la projection de la pré-image $PI(\omega)$ sur l'axe des β .

On note la longueur de l'intervalle $I^\alpha(\omega)$ par $FL_\alpha(\omega)$.

On définit

$$pinf_\alpha(\omega) = inf(I^\alpha(\omega)),$$

$$psup_\alpha(\omega) = sup(I^\alpha(\omega)).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 FL_\alpha(\omega) &= 0 && \text{si } I^\alpha(\omega) = \emptyset \\
 &= \text{psup}_\alpha(\omega) - \text{pinf}_\alpha(\omega) = \mu(I^\alpha(\omega)) && \text{si non}
 \end{aligned}$$

où $\mu(I^\alpha(\omega))$ est la longueur de l'intervalle $I^\alpha(\omega)$. La figure FIG. 4.5 représente (à gauche) $PI(\omega)$ pour un segment ω de taille 6; (à droite) $I^{\alpha_0}(\omega)$.

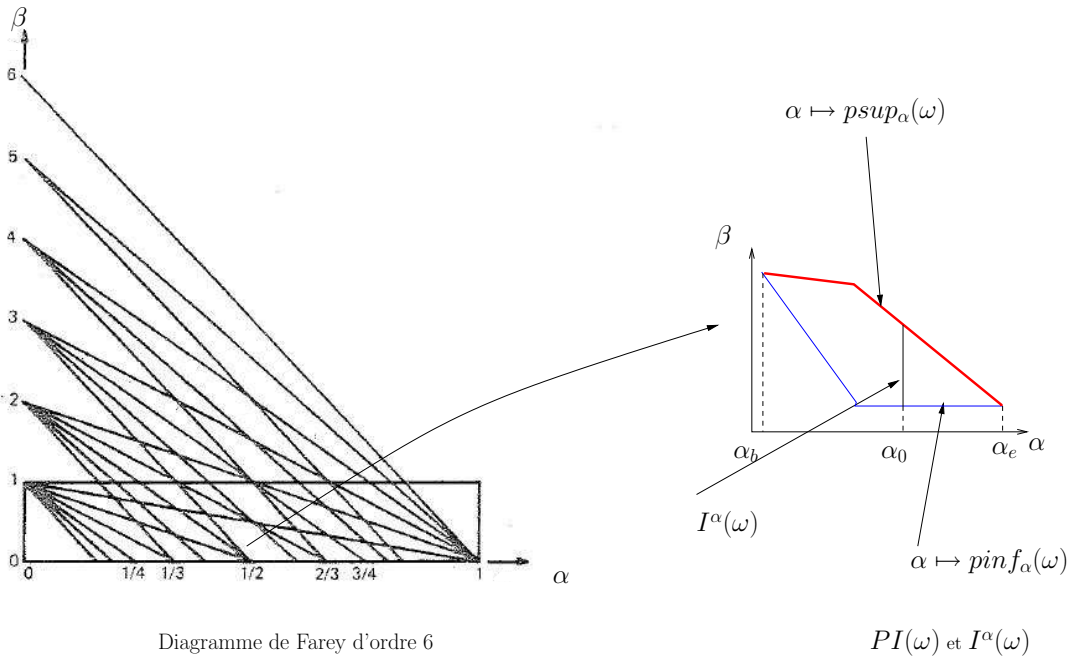


FIG. 4.5 – Rayons de Farey d'ordre 6 .

La propriété suivante donne une autre caractérisation de la pré-image.

Propriété 5 Soit ω un segment discret. Posons $[\alpha_b, \alpha_e] = \{\alpha \mid (\alpha, \beta) \in PI(\omega)\}$. Alors,

$$PI(\omega) = \{(\alpha, \beta) : \alpha \in [\alpha_b, \alpha_e] \text{ et } \text{pinf}_\alpha(\omega) \leq \beta < \text{psup}_\alpha(\omega)\}$$

De plus, $\alpha \mapsto \text{pinf}_\alpha(\omega)$ et $\alpha \mapsto \text{psup}_\alpha(\omega)$ sont deux fonctions affines par morceaux et de pentes appartenant à $\llbracket -m, 0 \rrbracket$.

Preuve :

Posons $\alpha_b = \inf\{\alpha \mid (\alpha, \beta) \in PI(\omega)\}$ et $\alpha_e = \sup\{\alpha \mid (\alpha, \beta) \in PI(\omega)\}$.

$$\begin{aligned}
PI(\omega) &= \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in [\alpha_b, \alpha_e] \text{ et } -k\alpha + \omega(k) \leq \beta < -k\alpha + \omega(k) + 1, \forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket\} \\
&= \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in [\alpha_b, \alpha_e] \text{ et } \varphi_{(k, \omega(k))}(\alpha) \leq \beta < \varphi_{(k, \omega(k)+1)}(\alpha), \forall k \in \llbracket 0, m \rrbracket\} \\
&\quad \text{où } \varphi_{(u, v)} : \alpha \mapsto -u\alpha + v \text{ est une fonction affine de pente dans } \llbracket -m, 0 \rrbracket \\
&= \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in [\alpha_b, \alpha_e] \text{ et } \text{pinf}_\alpha(\omega) \leq \beta < \text{psup}_\alpha(\omega)\} \\
&\quad \text{tel que } \text{pinf}_\alpha(\omega) : \alpha \mapsto \max_{k=0}^m \varphi_{(k, \omega(k))}(\alpha) \text{ et } \text{psup}_\alpha(\omega) : \alpha \mapsto \min_{k=0}^m \varphi_{(k, \omega(k)+1)}(\alpha) \\
&\quad \text{sont deux fonctions affines par morceaux et de pentes dans } \llbracket -m, 0 \rrbracket.
\end{aligned}$$

□

4.3.3 Fréquence d'un motif

Soit $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $0 \leq |g'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in [a, b]$ et soit $r > 0$ la résolution de l'espace discret. Posons $A_r = \lceil \frac{a}{r} \rceil$, $B_r = \lfloor \frac{b}{r} \rfloor$ et $N_r = B_r - A_r + 1$. On définit la fréquence d'apparition d'un motif discret ω de taille m dans la discrétisation $\delta_{OBQ}^r(C(g))$ de la courbe $C(g)$ par :

$$F_r^g(\omega) = \frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r - m \rrbracket \mid \omega_{X, r, m}^g = \omega\}}{N_r - m}$$

Dans la section suivante, nous étudions la fréquence F_r^g dans le cas où $g : x \mapsto \alpha x^2$ (une classe de paraboles). Ceci étend les résultats étudiés dans la littérature dans lesquels g est une fonction affine.

4.4 Fréquence d'apparition de motif dans une parabole discrète

Dans ce paragraphe, on considère la fonction

$$\begin{aligned}
g : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longmapsto \alpha x^2
\end{aligned}$$

telle que $0 \leq a < b \leq \frac{1}{2\alpha}$. Autrement dit, $0 \leq g'(x) \leq 1$ pour tout $x \in [a, b]$.

Nous étudions, dans les deux paragraphes ci-dessous, la fréquence d'apparition d'un motif discret dans la discrétisation de la courbe $y = \alpha x^2$ dans le cas où α est un nombre irrationnel puis dans le cas où α est un nombre rationnel.

4.4.1 Fréquences d'apparitions de motifs : le cas α irrationnel

Lorsque α est irrationnel, on obtient le théorème suivant :

Théorème 2 Si $g(x) = \alpha x^2$ tel que $\alpha \notin \mathbb{Q}$, on a alors pour tout motif discret ω :

$$F_r^g(\omega) \xrightarrow[r \in \mathbb{Q}]{r \rightarrow 0} \frac{1}{b-a} \int_a^b FL_{g'(x)}(\omega) dx. \quad (4.1)$$

Pour tout $\alpha, \beta \in [0, 1]$, on définit le segment $S_m^{\alpha, \beta}$ de longueur m par

$$S_m^{\alpha, \beta} = [\alpha k + \beta] \text{ où } 0 \leq k \leq m.$$

Autrement dit, $S_m^{\alpha, \beta} = S_{0,1,m}^{\alpha, \beta}$.

Le reste de ce paragraphe est consacré à la preuve du Théorème 2. Pour cela, nous allons démontrer d'abord qu'au voisinage d'un point de la grille discrète, la discrétisation de la courbe $y = \alpha x^2$ et la discrétisation de sa tangente sont égales quand la résolution de la grille tend vers 0.

Lemme 1 (Lemme de la Tangente) Soit la fonction $g : x \mapsto \alpha x^2$ pour $x \in [a, b]$ telle que $\alpha \notin \mathbb{Q}$ et $0 \leq a < b \leq \frac{1}{2\alpha}$. Alors,

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r \in \mathbb{Q}}} \frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r - m \rrbracket \mid \omega_{X,r,m}^g \neq S_m^{g'(Xr), \langle \frac{g(Xr)}{r} \rangle}\}}{N_r - m} = 0.$$

Ce lemme est illustré par la figure suivante :

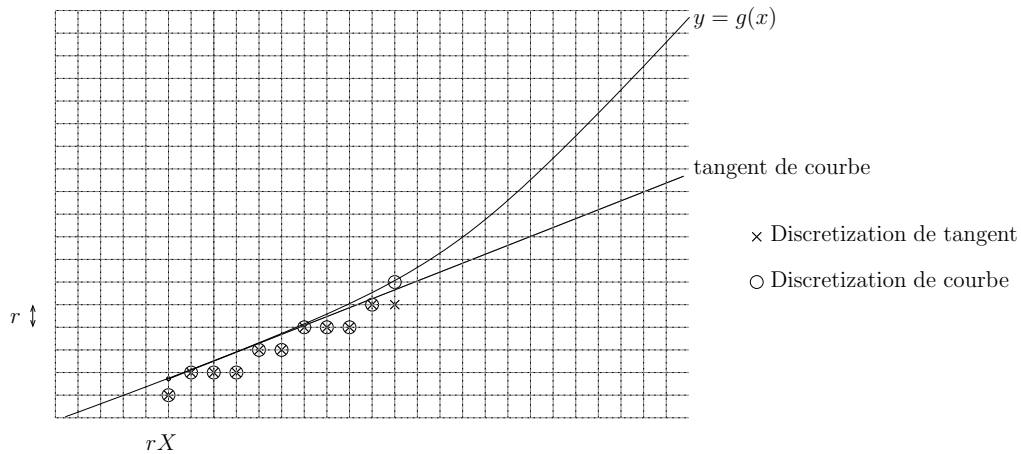


FIG. 4.6 – Comparaison de la discrétisation d'une courbe avec la discrétisation de sa tangente en un point de la grille : on a $\omega_{X,r,m}^g = S_m^{g'(rX), \langle \frac{g(rX)}{r} \rangle}$ pour $m = 9$ mais $\omega_{X,r,m}^g \neq S_m^{g'(rX), \langle \frac{g(rX)}{r} \rangle}$ pour $m = 10$.

Avant de donner la démonstration du Lemme 1, on a besoin de deux autres lemmes :

Posons pour tout X , $P_{r,k}(x) = \frac{g(xr)}{r} + g'(xr)k = \alpha r x^2 + 2\alpha k r x$.

Lemme 2 *Si $r < \frac{1}{\alpha m^2}$, alors pour tout $x \in [a, b]$ on a*

$\omega_{x,r,m}^g \neq S_m^{g'(Xr), \langle \frac{g(Xr)}{r} \rangle}$ si et seulement si $\langle P_{r,k}(X) \rangle < 1 - \alpha r k^2$ pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$.

Preuve

$$\begin{aligned} \text{On a, } \omega_{X,r,m}^g(k) &= \lfloor \frac{g((X+k)r)}{r} \rfloor - \lfloor \frac{g(Xr)}{r} \rfloor \\ &= \lfloor \frac{g(Xr)}{r} + g'(Xr)k + \alpha r k^2 \rfloor - \lfloor \frac{g(Xr)}{r} \rfloor \text{ (d'après le théorème de Taylor).} \end{aligned}$$

On sait aussi que $\lfloor u + v \rfloor = \lfloor u \rfloor + \lfloor v \rfloor$ si et seulement si $\langle u \rangle + \langle v \rangle < 1$.

$$\text{Alors, } \omega_{X,r,m}^g(k) = \lfloor \frac{g(Xr)}{r} + g'(Xr)k \rfloor - \lfloor \frac{g(Xr)}{r} \rfloor \iff \langle \frac{g(Xr)}{r} + g'(Xr)k \rangle + \langle \alpha r k^2 \rangle < 1.$$

Et puisque on a, $r < \frac{1}{\alpha m^2}$, alors $\langle \alpha r k^2 \rangle = \alpha r k^2$. Donc :

$$\begin{aligned} \lfloor \frac{g(Xr)}{r} + g'(Xr)k \rfloor - \lfloor \frac{g(Xr)}{r} \rfloor &= \lfloor \langle \frac{g(Xr)}{r} \rangle + g'(Xr)k \rfloor - \lfloor \langle \frac{g(Xr)}{r} \rangle \rfloor = S_m^{g'(Xr), \langle \frac{g(Xr)}{r} \rangle} \\ \text{Ainsi, } \omega_{X,r,m}^g(k) &= S_m^{g'(Xr), \langle \frac{g(Xr)}{r} \rangle} \iff \langle P_{r,k}(X) \rangle < 1 - \alpha r k^2 \text{ pour tout } k \in \llbracket 0, m \rrbracket \square \end{aligned}$$

Lemme 3 *Soit I un intervalle de $[0, 1]$. Alors,*

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r \in \mathbb{Q}}} T_{r,k}(I) = \mu(I)$$

$$\text{où } T_{r,k}(I) = \frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r \rrbracket \mid \langle P_{r,k}(X) \rangle \in I\}}{N_r}.$$

La preuve du Lemme 3 utilise le critère de Weyl, comme pour la preuve du Théorème 1 de [TD03], mais étendue au cas du second degré [AZ07] [p6-7]. La démonstration de ce lemme est technique et est donnée dans l'annexe A.1 de ce mémoire.

Preuve du Lemme 1

On a $\omega_{X,r,m}^g = S_m^{g'(rX), \langle \frac{g(rX)}{r} \rangle} \iff \langle P_{r,k}(X) \rangle < 1 - \alpha r k^2$ pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$. Alors,

$$\frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r - m \rrbracket \mid \omega_{X,r,m}^g \neq S_m^{g'(rX), \langle \frac{g(rX)}{r} \rangle}\}}{N_r - m} \leq \frac{N_r}{N_r - m} \max_{k=0}^m T_{r,k}(I_{r,k})$$

où $I_{r,k} = [1 - \alpha r k^2, 1)$. Il suffit donc de démontrer que $T_{r,k}(I_{r,k}) \xrightarrow[r \in \mathbb{Q}]{r \rightarrow 0} 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, m \rrbracket$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $R_0 = \frac{\varepsilon}{2\alpha k^2}$. Alors, $\mu(I_{R_0}) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'après le Lemme 3, on a $S_{r,k}(\chi_{I_{R_0,k}}) \xrightarrow[r \in \mathbb{Q}]{r \rightarrow 0} \mu(I_{R_0,k})$. Donc, il existe R_1 tel que $\forall r \leq R_1$

$$|S_{r,k}(\chi_{I_{R_0,k}}) - \mu(I_{R_0,k})| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par conséquent, pour tout $r \leq \min(R_1, R_0)$ on a

$$\begin{aligned} S_{r,k}(\chi_{I_{r,k}}) &\leq S_{r,k}(\chi_{I_{R_0,k}}) \quad (\text{car } I_{r,k} \subseteq I_{R_0,k}) \\ &\leq \mu(I_{R_0,k}) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Suite de la preuve du théorème 2.

Nous présentons dans ce sous-paragraphe les idées et les étapes principales de la preuve du Théorème 2. La preuve de ce théorème est détaillée dans l'annexe A.2.

D'après le Lemme 1, on peut déduire que $F_r^g(\omega)$ à la même limite lorsque r tend vers 0 que :

$$G_r^g(\omega) = \frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r - m \rrbracket \mid S_m^{g'(rX), \langle \frac{g(rX)}{r} \rangle} = \omega\}}{N_r - m}.$$

et comme on a, $S_m^{x,y} = \omega \iff (x, \langle y \rangle) \in PI(\omega)$, alors :

$$G_r^g(\omega) = \frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r - m \rrbracket \mid (g'(rX), \langle \frac{g(rX)}{r} \rangle) \in PI(\omega)\}}{N_r - m}$$

qui a la même limite que $H_r(PI(\omega))$ où

$$H_r(E) = \frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r \rrbracket \mid (g'(rX), \langle \frac{g(rX)}{r} \rangle) \in E\}}{B_r - A_r + 1}.$$

En appliquant le Lemme 3 avec $k = 0$ pour le morceau de la courbe $y = g(x)$ restreint au domaine $g'^{-1}(\alpha_1) \leq x \leq g'^{-1}(\alpha_2)$, nous pouvons prouver que :

$$H_r([\alpha_1, \alpha_2] \times I) \xrightarrow[r \in \mathbb{Q}]{r \rightarrow 0} \frac{g'^{-1}(\alpha_2) - g'^{-1}(\alpha_1)}{b - a} \mu(I)$$

En approximant le polygone $PI(\omega)$ par l'union des rectangles comme suit

$$\cup_{i=1}^n [y_{i-1}, y_i] \times [pinf_{y_i}(w), psup_{y_i}(w))$$

on peut démontrer que :

$$\sum_{i=1}^n \frac{g'^{-1}(y_i) - g'^{-1}(y_{i-1})}{b - a} FL_{y_i}(\omega)$$

est une somme de Riemann pour l'intégrale $\int_a^b FL_{g'(x)}(\omega)dx$. □

Corollaire 1 *Si $g(x) = \alpha x^2$ avec $\alpha \notin \mathbb{Q}$, alors pour tout motif ω qui n'est pas un segment discret, on a :*

$$F_r^g(\omega) \xrightarrow[r \in \mathbb{Q}, r \rightarrow 0]{} 0.$$

Application numérique : Soient la fonction $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2$ pour $x \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, et ω le motif discret de taille 3 défini par $(\omega(0), \omega(1), \omega(2), \omega(3)) = (0, 1, 2, 2)$.

Nous allons calculer la limite de la fréquence de ω dans la discrétisation de la courbe $y = g(x)$ lorsque la résolution tend vers 0.

D'après [Taj08], comme $\alpha \mapsto FL_\alpha(\omega)$ est une fonction continue et affine entre deux nombres consécutifs de Farey d'ordre m , on a :

$$\begin{aligned} FL_\alpha(\omega) &= 0 && \text{si } \alpha \in [0, \frac{1}{2}] \\ &= 2\alpha - 1 && \text{si } \alpha \in [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}] \\ &= 1 - \alpha && \text{si } \alpha \in [\frac{2}{3}, 1]. \end{aligned}$$

D'après le Théorème 2, on a :

$$\begin{aligned} F_r^g(\omega) &\xrightarrow[r \in \mathbb{Q}, r \rightarrow 0]{} \frac{1}{b-a} \int_a^b FL_{g'(x)}(\omega)dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} FL_{\sqrt{2}x}(\omega)dx \\ &= \sqrt{2} \left(\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{2}{3\sqrt{2}}} (2\sqrt{2}x - 1)dx + \int_{\frac{2}{3\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - \sqrt{2}x)dx \right) = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

4.4.2 Fréquences d'apparitions de motifs : le cas α rationnel

Nous nous intéressons dans ce paragraphe aux fréquences d'apparition de motif dans la discrétisation de la courbe $y = \alpha x^2$ dans le cas où α est nombre rationnel. Il est facile de voir que le Théorème 2 reste vrai dans le cas où α est un nombre rationnel et la résolution r est un nombre irrationnel.

Le seul résultat que nous cherchons à prouver dans ce paragraphe est le Lemme de la Tangente. Dans le cas où αr est nombre rationnel nous n'avons pas pu prouver un résultat équivalent au Théorème 1.

Posons pour tout X , $P_{r,k}(X) = r\alpha((X+k)^2 - k^2)$ où α est un nombre rationnel, et supposons que $r\alpha = \frac{1}{p}$ où p est un nombre premier, $a = 0$ et $b = \frac{1}{2\alpha}$.

Nous allons démontrer que pour tout intervalle $I \subseteq [0, 1]$, on a :

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \frac{1}{r\alpha} \text{ est premier}}} \frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r - k \rrbracket \mid \langle P_{r,k}(x) \rangle \in I\}}{N_r - k} = \mu(I)$$

Définition 21 Soient p un nombre premier et a un entier. On définit le symbole de Legendre $\left(\frac{a}{p}\right)$ par :

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \text{ divise } a \\ 1 & \text{si il existe } t \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a \bmod p = t^2 \bmod p \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 1 (Inégalité de Pólya-Vinogradov [Vin54b], [Dav80, Chap. 23])

Soit p un nombre premier et M et N deux entiers positifs. Alors,

$$\left| \sum_{n=M}^{M+N} \left(\frac{n}{p}\right) \right| < \sqrt{p} \log(p)$$

Corollaire 2 Soit $J = \llbracket M, M + N \rrbracket$ où M et N sont deux entiers positifs. Alors,

$$\left| \frac{\text{card}(J)}{2} - \text{card}\{y \in J \mid \left(\frac{y}{p}\right) = 1\} \right| < \sqrt{p} \log(p).$$

Lemme 4 Soit α un nombre rationnel et supposons que $a = 0$ et $b = \frac{1}{2\alpha}$. Alors, pour tout intervalle $I \subset [0, 1]$ on a :

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r - k \rrbracket \mid \langle P_{r,k}(X) \rangle \in I\}}{N_r - k} = \mu(I)$$

où $r > 0$ et $r\alpha = \frac{1}{p}$ tel que p est un nombre premier .

Preuve

On sait que la fonction

$$\begin{aligned} \llbracket 1, \frac{p-1}{2} \rrbracket &\rightarrow \{Y \mid \left(\frac{Y}{p}\right) = 1\} \\ X &\mapsto X^2 \bmod p \end{aligned}$$

est bijective.

$$\text{Posons } H_r = \frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r - k \rrbracket \mid \langle P_{r,k}(x) \rangle \in I\}}{N_r - k}.$$

On a alors :

$$H_r = \frac{\text{card}\{X \in \llbracket k, \lfloor \frac{p}{2} \rfloor \rrbracket \mid \langle \frac{X^2 - k^2}{p} \rangle \in I\}}{N_r - k} = \frac{2 \text{card}\{X \in \llbracket k, \frac{p-1}{2} \rrbracket \mid \frac{X^2 \bmod p - k^2}{p} \in I\}}{p + 1 - 2k} \quad (4.2)$$

Donc

$$\text{card}\{X \in \llbracket 1, \frac{p-1}{2} \rrbracket \mid X^2 \bmod p \in J\} = \text{card}\{Y \in J \mid (\frac{Y}{p}) = 1\} \text{ ou } J = pI + k^2.$$

Par conséquent, $|\text{card}\{X \in \llbracket k, \frac{p-1}{2} \rrbracket \mid X^2 \bmod p \in J\} - \text{card}\{Y \in J \mid (\frac{Y}{p}) = 1\}| < k$.

D'après l'inégalité de Pólya-Vinogradov on a :

$$\left| \frac{\text{card}(J)}{2} - \text{card}\{X \in \llbracket 1, \frac{p-1}{2} \rrbracket \mid X^2 \bmod p \in J\} \right| < \sqrt{p} \log(p)$$

Ainsi, $|\frac{\text{card}(J)}{2} - \text{card}\{X \in \llbracket k, \frac{p-1}{2} \rrbracket \mid X^2 \bmod p \in J\}| < \sqrt{p} \log(p) + k$.

D'après (4.2) on a :

$$\left| \frac{2}{p + 1 - 2k} \frac{\text{card}(J)}{2} - \frac{2}{p + 1 - 2k} \text{card}\{X \in \llbracket k, \frac{p-1}{2} \rrbracket \mid X^2 \bmod p \in J\} \right| < \frac{2\sqrt{p} \log(p) + 2k}{p + 1 - 2k}$$

$$\text{Donc, } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r - k \rrbracket \mid \langle P_{r,k}(X) \rangle \in I\}}{N_r - k} = \mu(I) \quad \square$$

Théorème 3 (Lemme de la Tangente pour α rationnel et $\frac{1}{r\alpha}$ est un nombre premier)

Pour tout nombre rationnel $\alpha > 0$ et quelque soit a, b tel que $0 \leq a < b \leq \frac{1}{2\alpha}$, on a

$$\frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r - m \rrbracket \mid \omega_{X,r,m}^g \neq s_m^{g'(rX), \langle \frac{g(rX)}{r} \rangle}\}}{N_r - m} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\frac{1}{r\alpha} \text{ est premier}} 0$$

Preuve

Le cas $a = 0$ et $b = 2\alpha$, peut être démontré de la même manière que le Lemme 1 en utilisant Le Lemme 4 au lieu du Lemme 3.

Prenons le cas général $[a, b] \subset [0, \frac{1}{2\alpha}]$. On a :

$$\begin{aligned} & \frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r - m \rrbracket \mid \omega_{X,r,m}^g \neq s_m^{g'(rX), \langle \frac{g(rX)}{r} \rangle}\}}{N_r - m} \\ & \leq \frac{\lfloor \frac{1}{2\alpha r} \rfloor + 1 - m}{N_r - m} \cdot \frac{\text{card}\{X \in \llbracket 0, \lfloor \frac{b}{r} \rfloor - m \rrbracket \mid \omega_{X,r,m}^g \neq s_m^{g'(rX), \langle \frac{g(rX)}{r} \rangle}\}}{\lfloor \frac{1}{2\alpha r} \rfloor + 1 - m} \\ & \xrightarrow[r \rightarrow 0]{\frac{1}{r\alpha} \text{ est un nombre premier}} \frac{\frac{1}{2\alpha}}{b - a} \cdot 0 = 0 \quad \text{parce qu'on est dans le cas } a = 0, b = \frac{1}{2\alpha}. \end{aligned}$$

□

Malheureusement nous n'avons pas réussi à généraliser le Théorème 2 à α rationnel et certaines résolutions rationnelles.

4.4.3 Application aux estimateurs locaux de périmètre de la parabole discrète

Les estimateurs locaux de longueur d'une courbe discrète consistent simplement à associer un poids $p(\omega)$ à chaque motif ω de taille m , la longueur estimée est alors simplement la somme des poids des motifs composant la courbe.

L'estimation de longueur d'une courbe $y = g(x)$ à la résolution r est alors définie par :

$$l(p, g, r) = r \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{B_r - m - A_r}{m} \rfloor} p(\omega_{X,r,m}^g(A_r + km)).$$

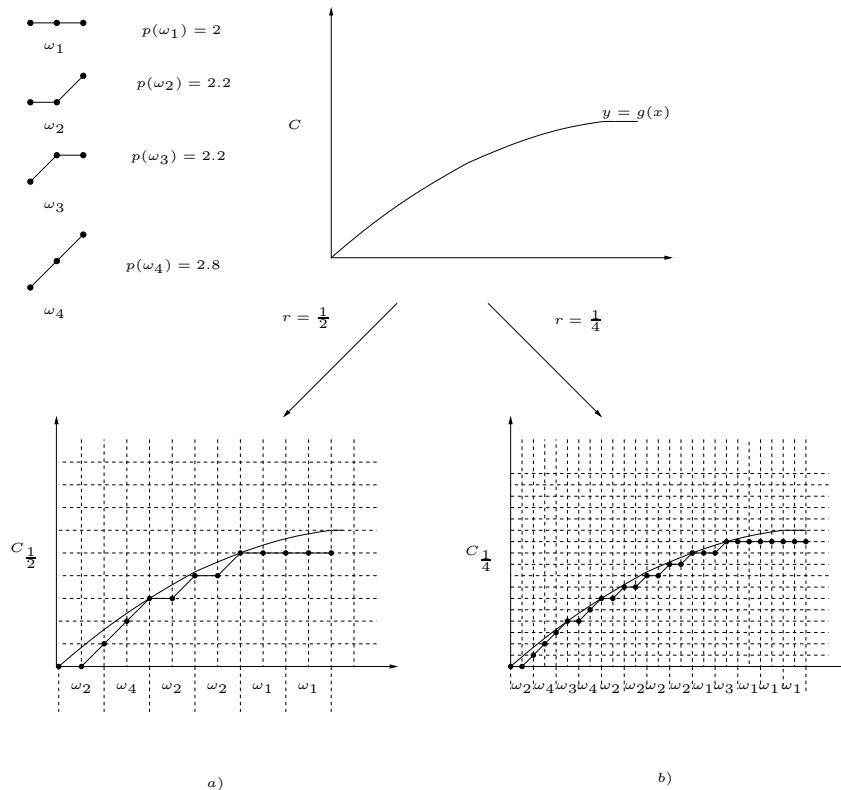


FIG. 4.7 – Estimateur de longueur d'une courbe pour différentes résolutions : a) $l(p, g, \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}(2p(\omega_1) + 3p(\omega_2) + 1p(\omega_4)) = 6.7$, b) $l(p, g, \frac{1}{4}) = \frac{1}{4}(4p(\omega_1) + 5p(\omega_2) + 2p(\omega_3) + 2p(\omega_4)) = 7.1$

Théorème 4 Soit la fonction $y = \alpha x^2$ pour $x \in [a, b]$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Alors, la limite de $l(p, g, r)$ lorsque la résolution $r \in \mathbb{Q}$ et tend vers 0, est de la forme $\frac{A}{\alpha} + B\alpha + C$ où $A, B, C \in \mathbb{R}$.

Preuve

Il est facile de démontrer que

$$l(p, g, r) - \frac{(b-a)}{m} \sum_{\omega \in \mathcal{P}_m} p(\omega) F_r'^g(\omega) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

où

$$F_r'^g(\omega) = \frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r - m \rrbracket \cap (A_r + m\mathbb{Z}) \mid \omega_{X,r,m}^g = \omega\}}{\lfloor \frac{B_r - m - A_r}{m} \rfloor}.$$

D'après le théorème 2, on peut démontrer que

$$F_r'^g(\omega) \xrightarrow[r \in \mathbb{Q}]{r \rightarrow 0} \frac{1}{b-a} \int_a^b FL_{g'(x)}(\omega) dx.$$

Alors,

$$l(p, g, r) \xrightarrow[r \in \mathbb{Q}]{r \rightarrow 0} \frac{1}{m} \sum_{\omega \in \mathcal{P}_m} p(\omega) \int_a^b FL_{g'(x)}(\omega) dx. \quad (4.3)$$

On sait que $x \mapsto FL_x(\omega)$ est une fonction affine par morceaux [TD03]. D'après cette propriété et en partitionnant l'intervalle $[0, 2b]$ en les intervalles $(I_k)_{0 \leq k \leq n}$ on peut déduire que $\lim_{r \rightarrow 0} l(p, g, r)$ est de la forme $\frac{A}{\alpha} + B\alpha + C$ sur chacun des intervalle I_k (Voir l'annexe A.3 pour plus de détails)

□

Corollaire 3 *Soient α un nombre irrationnel et a, b tels que $0 \leq a < b$. L'estimateur local $l(p, g, r)$ de longueur de la parabole $\{(x, \alpha x^2) \mid x \in [a, b]\}$ ne converge pas vers la longueur exacte quand la résolution rationnelle r tend vers 0 pour presque toutes les pentes $\alpha \in [0, \frac{1}{2b}]$.*

Preuve

Puisque la limite $\lim_{r \rightarrow 0} l(p, g, r)$ ne dépend que de α , alors on peut la noter par $L_{est}(\alpha)$.

La longueur exacte de la courbe $\{(x, \alpha x^2) \mid x \in [a, b]\}$ est égale à

$$L_{real}(\alpha) := \int_a^b \sqrt{1 + (2\alpha x)^2} dx = \left[\frac{x\sqrt{1 + (2\alpha x)^2}}{2} + \frac{\arg \sinh(2\alpha x)}{4\alpha} \right]_a^b$$

Supposons que $L_{real}(\alpha) = L_{est}(\alpha)$ pour une infinité de nombres irrationnels α , alors il existe un intervalle I_k de la partition précédente de $[0, \frac{1}{2b}]$ tel que $L_{real}(\alpha) = L_{est}(\alpha)$ pour une infinité de nombres irrationnels $\alpha \in I_k$, et d'après ce qui précède, on sait que $L_{est}(\alpha)$ est de la forme $\frac{A}{\alpha} + B\alpha + C$ sur I_k .

Les fonctions $\alpha \mapsto \alpha L_{real}(\alpha)$ et $\alpha \mapsto \alpha(\frac{A}{\alpha} + B\alpha + C)$ sont holomorphes dans un ouvert de \mathbb{C} contenant $[0, \frac{1}{2b}]$ et sont égales pour un nombre infini $\alpha \in I_k \subset [0, \frac{1}{2b}]$. Donc, d'après le théorème sur les fonctions holomorphes [Rud66, Cha. 10], elles sont égales sur $[0, \frac{1}{2b}]$. On a alors :

$$\alpha L_{real}(\alpha) = A + B\alpha^2 + C\alpha \quad \text{pour tout } \alpha \in [0, \frac{1}{2b}]$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha L_{real}(\alpha))}{\partial\alpha} &= b\sqrt{1 + (2\alpha b)^2} - a\sqrt{1 + (2\alpha a)^2} \\ &= b - a + 2(b^3 - a^3)\alpha^2 + o(\alpha^2) \quad \text{lorsque } \alpha \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Puisque $\frac{\partial(A+B\alpha^2+C\alpha)}{\partial\alpha} = 2B\alpha + C$, alors $2(b^3 - a^3) = 0$. Ce qui est impossible si $b > a$. Ainsi l'hypothèse, $L_{real}(\alpha) = L_{est}(\alpha)$ pour un nombre infini de nombres irrationnels α est absurde. \square

Application numérique :

On considère la courbe $y = g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2$ pour $x \in [0, \frac{1}{\sqrt{2}}]$. On utilise l'estimateur local de Chanfrein ([Bor86]) avec $m = 2$, $p(000) = 2$, $p(001) = p(011) = \frac{22}{10}$, $p(012) = \frac{28}{10}$.

D'après l'équation(4.3), on peut calculer $L_{est} = \frac{23}{40}\sqrt{2} \approx 0.813172$, cette limite est différente de la longueur exacte $L_{real} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2} \log(1 + \sqrt{2}) \approx 0.811612$

Par ailleurs, la figure 4.8 montre comment la longueur donnée par l'estimateur converge vers sa limite lorsque la résolution tend vers zéro. Il semble que pour cet exemple, on a $l(p, g, r) - L_{est} = O(r)$ (Voir la figure FIG. 4.8).

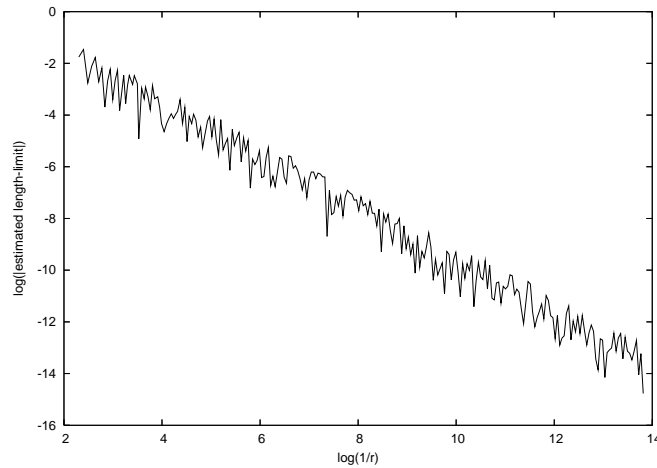


FIG. 4.8 – Vitesse de convergence de l'estimateur local pour la parabole $y = \frac{1}{\sqrt{2}}x^2$, $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

4.5 Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons présenté certaines propriétés locales des discrétisations pour une classe de paraboles. En effet, nous avons montré que localement la discrétisation de la parabole et la discrétisation de sa tangente coïncident (Lemme de la Tangente : le Lemme 1 et le Théorème 3).

Nous avons proposé également une formule explicite pour la limite des fréquences d'un motif dans les discrétisations d'une parabole lorsque la résolution tend vers zéro (Théorème 2). Comme conséquence, nous avons obtenu un résultat sur la convergence des estimateurs locaux de longueur pour une classe de paraboles. Ceci nous a permis de montrer que, pour cette classe de courbes, les estimateurs locaux de longueur ne convergent presque jamais vers la longueur exacte.

Nous voyons principalement deux perspectives pour ce travail :

- Étendre la formule (4.1), donne la limite de la fréquence du motif lorsque la résolution tend vers zéro, à des courbes plus générales, en particulier aux courbes $y = P(x)$ où P est un polynôme de degré quelconque.
- L'application pour la reconnaissance de courbes discrètes en se basant seulement sur les motifs discrets. Par exemple, si les fréquences des mots d'une courbe discrète ne satisfont pas le Théorème 2, alors elle ne représente pas une parabole d'équation $y = \alpha x^2$.

Chapitre 5

Estimateurs semi-locaux de périmètre

5.1 Introduction

Nous présentons dans ce chapitre une nouvelle classe d'estimateurs de périmètre : les estimateurs semi-locaux. Si $\mathcal{C}_r(g)$ est la discrétisation à la résolution r d'une courbe continue $C(g)$ dont on cherche à estimer le périmètre, alors aussi bien les estimateurs locaux que semi-locaux sont obtenus en factorisant la courbe discrète $\mathcal{C}_r(g)$ en motifs de taille $H(r)$ où $r \mapsto H(r)$ est une fonction constante pour les estimateurs locaux ; par contre, cette fonction est décroissante en r et tend vers l'infini lorsque r tend vers 0 pour les estimateurs semi-locaux. Nous montrons que sous certaines conditions notamment concernant l'ordre de grandeur de $H(r)$ relativement à r , les estimateurs semi-locaux correspondants convergent vers le périmètre exact pour toute courbe de classe \mathcal{C}^2 . Nous introduisons aussi une sous-classe d'estimateurs semi-locaux : la classe des estimateurs semi-locaux basés sur les segments discrets. Les estimateurs de cette sous-classe ne prennent en compte que les motifs qui sont des segments discrets.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont été publiés dans le rapport de recherche [DTZ11]

5.2 Notations et définitions

Dans la suite, nous considérons la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2}.$$

La fonction φ est 1-lipschitzienne c'est-à-dire que l'on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq |x - y|.$$

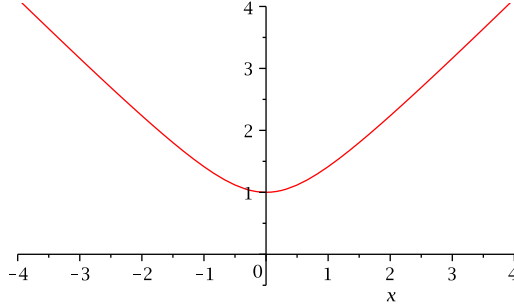


FIG. 5.1 – Courbe de φ

Définition 22 Soit $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ où a, b sont deux nombres réels tels que $a \leq b$.

- $C(g) = \{(x, g(x)) \mid x \in [a, b]\}$ est la courbe correspondant à la fonction g .
- On note $g \in \mathcal{C}^0[a, b]$ lorsque g est continue sur l'intervalle $[a, b]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $g \in \mathcal{C}^n[a, b]$ lorsque $g \in \mathcal{C}^{n-1}[a, b]$ et si la dérivée nième, g^n , de g est continue sur l'intervalle $[a, b]$ (i.e. Autrement dit $g \in \mathcal{C}^n[a, b]$, si $g^i \in \mathcal{C}^0[a, b]$ pour tout $0 \leq i \leq n$).
- Soit $g \in \mathcal{C}^1[a, b]$,

$$L_{\text{exact}}(g) = \int_a^b \varphi(g'(t)) dt.$$

$L_{\text{exact}}(g)$ est la longueur de la courbe $C(g)$ relativement à la mesure usuelle.

- Soit $r > 0$,

$$\mathcal{C}_r(g) = \left\{ r \left(X, \left\lfloor \frac{g(rX)}{r} \right\rfloor \right) \mid X \in [A_r, B_r] \right\}$$

où $A_r = \lceil \frac{a}{r} \rceil$ et $B_r = \lfloor \frac{b}{r} \rfloor$.

$\mathcal{C}_r(g)$ est la discrétisation OBQ à la résolution r de la courbe $C(g)$.

Notations :

Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

- \mathcal{P}_m est l'ensemble des motifs de longueur m .
- $\mathcal{P} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \mathcal{P}_m$ est l'ensemble de tous les motifs.
- \mathcal{S}_m est l'ensemble des segments discrets de longueur m .
- $\mathcal{S} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}^*} \mathcal{S}_m$ est l'ensemble de tous les segments discrets.
- $\omega_{X,r,m}^g$ est le motif de longueur m de $\mathcal{C}_r(g)$ défini par

$$\omega_{X,r,m}^g(k) = \left\lfloor \frac{g(r(X+k))}{r} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{g(rX)}{r} \right\rfloor, \quad \text{pour } 0 \leq k \leq m.$$

- Soit $\omega \in \mathcal{S}_m$.

$$PI(\omega) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times [0, 1[\mid \omega(k) = \lfloor \alpha k + \beta \rfloor, \text{ pour } 0 \leq k \leq m\}.$$

- La fréquence du motif ω de longueur m dans \mathcal{C}_r^g est définie par :

$$F_r^g(\omega) = \frac{\text{card}\{k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{B_r - A_r}{m} \rfloor - 1 \rrbracket \mid \omega_{A_r + km, r, m}^g = \omega\}}{\lfloor \frac{B_r - A_r}{m} \rfloor}.$$

Remarque 1 Si $g \in \mathcal{C}^1[a, b]$ et $M_1(g) = \max_{x \in [a, b]} |g'(x)|$, alors pour tout $0 \leq k \leq m$

$$\begin{aligned} |\omega_{X, r, m}^g(k)| &= \left| \frac{g(r(X+k))}{r} - \left\langle \frac{g(r(X+k))}{r} \right\rangle - \frac{g(rX)}{r} + \left\langle \frac{g(rX)}{r} \right\rangle \right| \\ &\leq 1 + k \left| \frac{g(r(X+k)) - g(rX)}{rk} \right| \end{aligned}$$

Mais d'après, le théorème des accroissements finis, on a : $\left| \frac{g(r(X+k)) - g(rX)}{rk} \right| \leq M_1(g)$.
Donc

$$|\omega_{X, r, m}^g(k)| \leq 1 + kM_1(g) \text{ pour tout } 0 \leq k \leq m$$

5.3 Définition des estimateurs semi-locaux

Définition 23 Un estimateur semi-local est un couple (H, p) où

- H est une fonction de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{N}^* qui à chaque résolution r associe une longueur de motif $H(r)$ et
- p est une fonction de \mathcal{P} dans $[0, +\infty[$ qui à chaque motif $\omega \in \mathcal{P}$ associe un poids $p(\omega)$.

Définition 24 Soient (H, p) un estimateur semi-local, $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ et $r > 0$.

La longueur $L(H, p, g, r)$ estimé par (H, p) à la résolution r de la courbe $C(g)$ est définie par :

$$L(H, p, g, r) = r \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} \rfloor - 1} p(\omega_{A_r + kH(r), r, H(r)}^g).$$

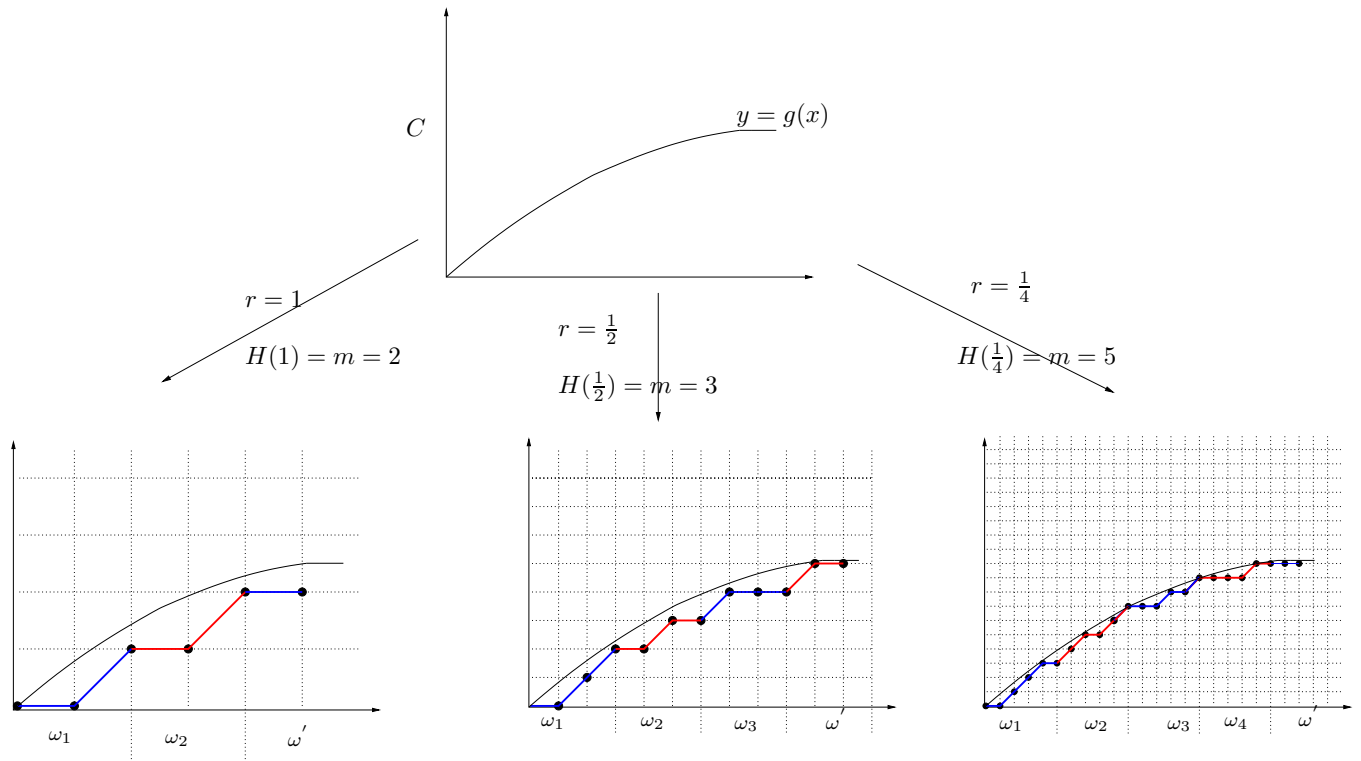


FIG. 5.2 – discrétisation avec différentes résolution r et taille m

5.4 Convergence dans le cas $g \in \mathcal{C}^2[a, b]$

Proposition 2 Si (H, p) est un estimateur semi-local vérifiant les conditions suivantes :

1. $rH(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$
2. $H(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} +\infty$
3. Il existe une fonction $K : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $\omega \in \mathcal{P}$ on a

$$\left| \frac{p(\omega)}{m} - \sqrt{1 + \left(\frac{\omega(m)}{m} \right)^2} \right| \leq K(m)$$

où m est la longueur de ω et $K(m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$.

Alors pour toute fonction $g \in \mathcal{C}^2[a, b]$, l'estimation $L(H, p, g, r)$ converge vers la longueur $L_{\text{exact}}(g)$ de la courbe $C(g)$.

Si de plus, $K(m) = \frac{A}{m}$ où A est une constante et $H(r) = \Theta(r^{-\frac{1}{2}})$, alors l'erreur d'estimation est en $O(r^{\frac{1}{2}})$.

Remarque 2 La condition 3 est vérifiée si $K(m) = \frac{A}{m}$ où A est une constante.

Démonstration : Soit $r > 0$ et $X \in \llbracket A_r, B_r - H(r) \rrbracket$, $M_1(g) = \max_{x \in [a, b]} |g'(x)|$ et $M_2(g) = \max_{x \in [a, b]} |g''(x)|$, on a

$$\frac{\omega_{X,r,H(r)}(H(r))}{H(r)} = \frac{G_r(X + H(r)) - G_r(X)}{H(r)}$$

où $G_r(X) = \lfloor \frac{g(rX)}{r} \rfloor$. Or

$$\left| \frac{G_r(X + H(r)) - G_r(X)}{H(r)} - g'(rX) \right| \leq \frac{|G_r(X + H(r)) - \frac{g(r(X+H(r)))}{r} + \frac{g(rX)}{r} - G_r(X)|}{H(r)} + \left| \frac{g(rX + rH(r)) - g(rX)}{rH(r)} - g'(rX) \right|$$

D'après la formule de Taylor-Lagrange, pour tout $x, x + h \in [a, b]$ on a

$$\left| \frac{g(x + h) - g(x)}{h} - g'(x) \right| \leq \frac{M_2(g)h}{2}.$$

De plus, $G_r(X + H(r)) - \frac{g(r(X+H(r)))}{r} \in]-1, 0]$ et $\frac{g(rX)}{r} - G_r(X) \in [0, 1[$, on en déduit :

$$\left| \frac{G_r(X + H(r)) - G_r(X)}{H(r)} - g'(rX) \right| \leq \frac{1}{H(r)} + \frac{M_2(g)rH(r)}{2}.$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Comme φ est 1-lipschitzienne on a :

$$\left| \varphi\left(\frac{\omega_{X,r,H(r)}(H(r))}{H(r)}\right) - \varphi(g'(rX)) \right| \leq \frac{1}{H(r)} + \frac{M_2(g)rH(r)}{2}.$$

Donc, d'après la condition 3 on a :

$$\left| \frac{p(\omega_{X,r,H(r)})}{H(r)} - \varphi(g'(rX)) \right| \leq K(H(r)) + \frac{1}{H(r)} + \frac{M_2(g)rH(r)}{2}.$$

Soit $L_{\text{exact}}(g)$ la longueur de la courbe C . On a :

$$L_{\text{exact}}(g) - L(H, p, g, r) = \int_a^b \varphi(g'(t)) dt - r \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} \rfloor - 1} p(\omega_{A_r + kH(r), r, H(r)}^g).$$

Pour $t \in [rX, rX + rH(r)]$ on a :

$$\begin{aligned} \left| \varphi(g'(t)) - \frac{p(\omega_{X,r,H(r)})}{H(r)} \right| &\leq |\varphi(g'(t)) - \varphi(g'(rX))| + \left| \frac{p(\omega_{X,r,H(r)})}{H(r)} - \varphi(g'(rX)) \right| \\ &\leq M_2(g)rH(r) + K(H(r)) + \frac{1}{H(r)} + \frac{M_2(g)rH(r)}{2} \\ &= K(H(r)) + \frac{1}{H(r)} + \frac{3}{2}M_2(g)rH(r) \end{aligned}$$

En intégrant sur chaque intervalle $[rX, rX + rH(r)]$ et en sommant pour tout $X = A_r + kH(r)$ avec $k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} \rfloor - 1 \rrbracket$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{rA_r}^{r(A_r + \lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} \rfloor)} \varphi(g'(t)) dt - rH(r) \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{B_r - A_r - A_r}{H(r)} \rfloor} \frac{p(\omega_{A_r + kH(r), r, H(r)})}{H(r)} \right| \\
& \leq rH(r) \lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} \rfloor \left(K(H(r)) + \frac{1}{H(r)} + \frac{3}{2} M_2(g) rH(r) \right) \\
& \leq rH(r) \frac{b-a}{rH(r)} \left(K(H(r)) + \frac{1}{H(r)} + \frac{3}{2} M_2(g) rH(r) \right) \\
& = (b-a) \left(K(H(r)) + \frac{1}{H(r)} + \frac{3}{2} M_2(g) rH(r) \right)
\end{aligned}$$

On a : $a \leq rA_r < a + r$ et $b - rH(r) < r(A_r + \lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} \rfloor) \leq b$, donc :

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b \varphi(g'(t)) dt - L(H, p, g, r) \right| & \leq (r(H(r) + 1) \varphi(M_1(g)) + (b-a) \left(K(H(r)) + \frac{1}{H(r)} + \frac{3}{2} M_2(g) rH(r) \right)) \\
& \leq (b-a) \left(K(H(r)) + \frac{1}{H(r)} + \left(\frac{3}{2} M_2(g) + \frac{\varphi(M_1(g))}{b-a} \right) rH(r) + r\varphi(M_1(g)) \right)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Or les conditions 1, 2 et 3 entraînent que le membre droit de cette inégalité tend vers 0 quand r tend vers 0, donc on a bien $L(H, p, g, r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} L_{\text{exact}}(g)$.

De plus, si $K(m) = \frac{A}{m}$ où A est une constante et $H(r) = \Theta(r^{-\frac{1}{2}})$, alors la même formule montre que $L(H, p, g, r) - L_{\text{exact}}(g) = O(r^{\frac{1}{2}})$. \square

Remarque 3 *Supposons que $K(m) = \frac{A}{m}$. La borne supérieure de l'erreur d'estimation donnée par la formule (5.1) est minimale pour*

$$H(r) = \sqrt{\frac{A+1}{\frac{3}{2}M_2(g) + \frac{\varphi(M_1(g))}{b-a}}} r^{-\frac{1}{2}}.$$

Lemme 5 *Soient $m \in \mathbb{N}^*$, $\omega \in \mathcal{S}_m$ et $(\alpha, \beta) \in PI(\omega)$ et posons $p(\omega) = m\sqrt{1 + \alpha^2}$. Alors*

$$\left| \frac{p(\omega)}{m} - \varphi\left(\frac{\omega(m)}{m}\right) \right| \leq \frac{1}{m}$$

Démonstration : Si $(\alpha, \beta) \in PI(\omega)$, alors $\omega(m) \leq \alpha m + \beta < \omega(m) + 1$. On en déduit que

$$\alpha + \frac{\beta - 1}{m} < \frac{\omega(m)}{m} \leq \alpha + \frac{\beta}{m}.$$

Comme $\beta \in [0, 1[$ on en déduit que : $\left| \alpha - \frac{\omega(m)}{m} \right| \leq \frac{1}{m}$, comme la fonction φ est 1-lipschitzienne on en déduit que $\left| \frac{p(\omega)}{m} - \varphi\left(\frac{\omega(m)}{m}\right) \right| \leq \frac{1}{m}$ et donc $p(\omega)$ vérifie la condition 3 de la proposition 2 avec $K(m) = \frac{1}{m}$. \square

D'après le Lemme 5 ci-dessus, les exemples ci-dessous vérifient les conditions de la Proposition 2.

Exemples :

Soit $r > 0$

- $H(r) = \lfloor r^{-\frac{1}{2}} \rfloor$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall \omega \in \mathcal{P}_m$, $p(\omega) = d_2((0, \omega(0)), (m, \omega(m))) = \sqrt{m^2 + \omega(m)^2}$ et par conséquent, la Condition 3 de la Proposition 2 est vérifiée en prenant $K(m) = 0$ pour tout m .
- $H(r) = \lfloor r^{-\frac{1}{2}} \rfloor$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $\forall \omega \in \mathcal{P}_m$, $p(\omega) = \lfloor d_2((0, \omega(0)), (m, \omega(m))) \rfloor = \lfloor \sqrt{m^2 + \omega(m)^2} \rfloor$ et par conséquent, la Condition 3 de la Proposition 2 est vérifiée en prenant $K(m) = \frac{1}{m}$ pour tout m .
- $H(r) = \lfloor r^{-\frac{1}{2}} \rfloor$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$,
 - $\forall \omega \in \mathcal{P}_m \setminus \mathcal{S}_m$, $p(\omega) = d_2((0, \omega(0)), (m, \omega(m))) = \sqrt{m^2 + \omega(m)^2}$
 - $\forall \omega \in \mathcal{S}_m$, si $(\alpha, \beta) \in PI(\omega)$, alors $p(\omega) = m\sqrt{1 + \alpha^2}$ (i.e $p(\omega)$ est la longueur du segment de sommets $(0, \beta)$ et $(m, \alpha m + \beta)$).

Par conséquent, la Condition 3 de la Proposition 2 est vérifiée en prenant $K(m) = \frac{1}{m}$ pour tout m .

- $H(r) = \lfloor r^{-\frac{1}{2}} \rfloor$, $\forall m \in \mathbb{N}^*$,
 - $\forall \omega \in \mathcal{P}_m \setminus \mathcal{S}_m$, $p(\omega) = \lfloor d_2((0, \omega(0)), (m, \omega(m))) \rfloor = \lfloor \sqrt{m^2 + \omega(m)^2} \rfloor$.
 - $\forall \omega \in \mathcal{S}_m$, si $(\alpha, \beta) \in PI(\omega)$, alors $p(\omega) = \lfloor m\sqrt{1 + \alpha^2} \rfloor$ (i.e $p(\omega)$ est la partie entière de la longueur du segment de sommets $(0, \beta)$ et $(m, \alpha m + \beta)$).

Par conséquent, la Condition 3 de la Proposition 2 est vérifiée en prenant $K(m) = \frac{2}{m}$ pour tout m .

Définition 25 Soient $g \in \mathcal{C}^2[a, b]$ et $r > 0$. La fréquence dans $\mathcal{C}_r(g)$ des motifs de longueur m qui ne sont pas des segments discrets est définie par :

$$FNS_{r,m}^g = \frac{\text{card}\{k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{B_r - A_r - m}{m} \rfloor \rrbracket \mid \omega_{A_r + km, r, m}^g \in \mathcal{P}_m \setminus \mathcal{S}_m\}}{\lfloor \frac{B_r - A_r - m}{m} \rfloor + 1}.$$

Définition 26 Un estimateur semi-local basé sur les segments discrets est un couple (H, p') où

- H est une fonction de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{N}^* qui à chaque résolution r associe une longueur de motif $H(r)$ et
- p' est une fonction de \mathcal{S} dans $[0, +\infty[$ qui à chaque segment discret ω associe un poids $p'(\omega)$.

Définition 27 Soient (H, p') un estimateur semi-local basé sur les segments discrets, $g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ et $r > 0$.

La longueur $L'(H, p', g, r)$ estimé par (H, p') à la résolution r de la courbe $C(g)$ est définie par :

$$L'(H, p', g, r) = r \sum_{k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{B_r - H(r) - A_r}{H(r)} \rrbracket \rrbracket \text{ et } \omega_{A_r + kH(r), r, H(r)}^g \in \mathcal{S}} p'(\omega_{A_r + kH(r), r, H(r)}^g).$$

Remarque 4 L'estimateur $L'(H, p', \cdot, r)$ est obtenu à partir de l'estimateur $L(H, p, \cdot, r)$ en négligeant dans $L(H, p, \cdot, r)$ les contributions des motifs qui ne sont pas des segments discrets.

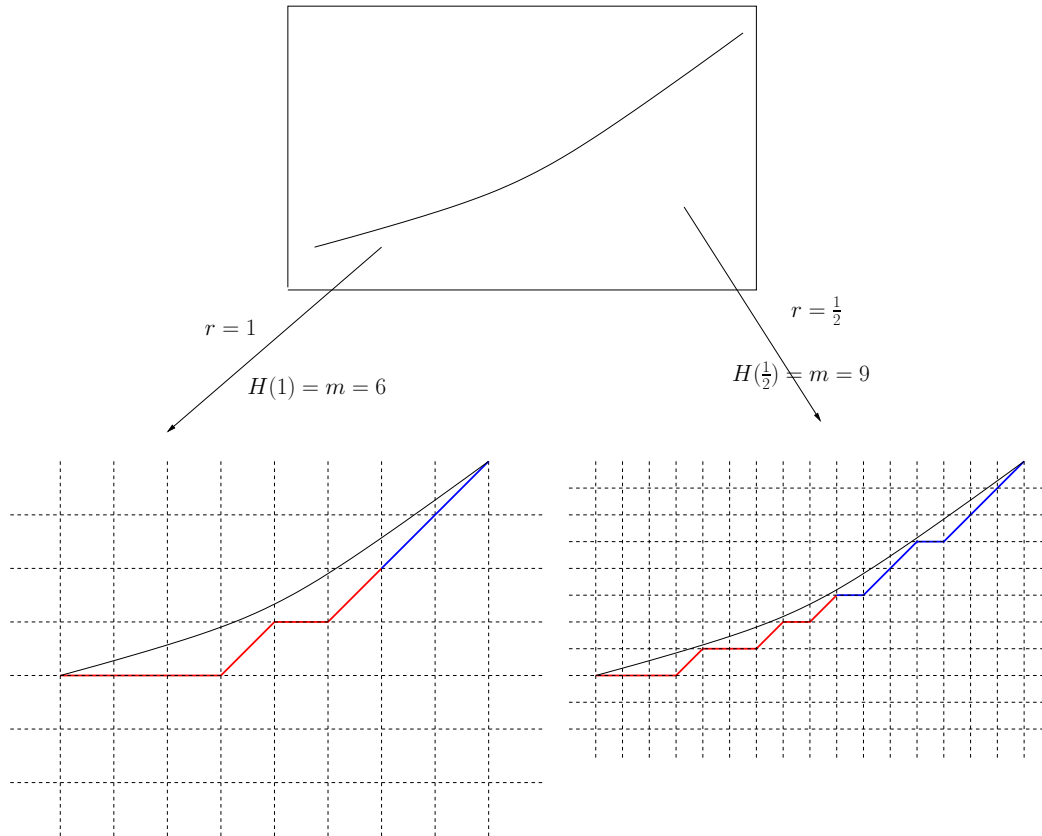


FIG. 5.3 – Les motifs rouges ne sont des segments discrets, les motifs bleus sont des segments discrets

Théorème 5 Soit (H, p') un estimateur semi-local basé sur les segments discrets et soit $g \in \mathcal{C}^2[a, b]$ vérifiant les conditions suivantes :

1. $rH(r) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$
2. $H(r) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} +\infty$

3. Il existe une fonction $K : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $\omega \in \mathcal{S}$ on a :

$$\left| \frac{p'(\omega)}{m} - \sqrt{1 + \left(\frac{\omega(m)}{m} \right)^2} \right| \leq K'(m)$$

où m est la longueur de ω et $K'(m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$.

4. $FNS_{r,H(r)}^g \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$.

Alors,

$$L'(H, p', g, r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} L_{\text{exact}}(g) = \int_a^b \sqrt{1 + g'(t)^2} dt.$$

Démonstration : Considérons une extension p de p' telle que $p : \mathcal{P} \mapsto \mathbb{R}^+$ et pour tout $\omega \in \mathcal{P}$

$$\left| \frac{p(\omega)}{m} - \sqrt{1 + \left(\frac{\omega(m)}{m} \right)^2} \right| \leq K(m)$$

où m est la longueur de ω et $K(m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$.

Il suffit, par exemple, de prendre pour tout m et tout $\omega \in \mathcal{P}_m \setminus \mathcal{S}_m$, $p(\omega) = \sqrt{m^2 + \omega(m)^2}$ et $K(m) = \sup(K'(m), \frac{1}{m})$. On a donc bien $K(m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$.

Ceci implique que pour tout $\omega \in \mathcal{P}_m$, $p(\omega) \leq \sqrt{m^2 + \omega(m)^2} + K(m)m$ et d'après la Remarque 1, si $\omega = \omega_{X,r,m}^g$, alors $|\omega_{X,r,m}^g(m)| \leq 1 + mM_1(g)$. Donc, si $\omega = \omega_{X,r,m}^g$, alors

$$p(\omega) \leq m \sqrt{1 + (M_1(g) + \frac{1}{m})^2} + K(m)m.$$

$$\begin{aligned} |L(H, p, g, r) - L'(H, p', g, r)| &= r \sum_{k \in \llbracket 0, \lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} - 1 \rrbracket \text{ et } \omega_{A_r + kH(r), r, H(r)}^g \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{S}} p(\omega_{A_r + kH(r), r, H(r)}^g) \\ &\leq r \left(\lfloor \frac{B_r - A_r}{H(r)} \rfloor FNS_{r, H(r)}^g (\sqrt{H(r)^2 + (H(r)M_1(g) + 1)^2} + K(H(r))H(r)) \right) \\ &\leq ((b-a) \sqrt{1 + (M_1(g) + \frac{1}{H(r)})^2} + K(H(r))) FNS_{r, H(r)}^g \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

Mais comme $L(H, p, g, r)$ converge vers $L_{\text{exact}}(g)$ quand r tend vers 0 d'après la Proposition 2, alors $L'(H, p', g, r)$ converge vers $L_{\text{exact}}(g)$ quand r tend vers 0. \square

Remarque 5 Si $H(r) = \Theta(r^{-\frac{1}{2}})$ et $K(m) = \frac{A}{m}$ où A est une constante, alors

$$|L'(H, p', g, r) - L_{\text{exact}}(g)| = O(r^{\frac{1}{2}}) + O(FNS_{r, H(r)}^g)$$

5.5 Conclusion

Nous avons proposé dans ce chapitre une nouvelle classe d'estimateurs de périmètre : les estimateurs semi-locaux. Nous avons notamment démontré que les estimations de périmètre basées sur les estimateurs semi-locaux convergent vers la valeur exacte du périmètre pour toute courbe de classe \mathcal{C}^2 . Nous avons ensuite introduit une sous-classe de la classe des estimateurs semi-locaux : les estimateurs semi-locaux basés sur les segments discrets. Nous avons démontré aussi un résultat de convergence "implicite" concernant cette sous-classe d'estimateurs.

Chapitre 6

Fréquence de (m, n) -cubes et estimateurs locaux d'aire

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude des estimateurs locaux en toutes dimensions. Nous montrons notamment la non-convergence des estimateurs locaux même lorsqu'on considère des surfaces simples comme des morceaux d'hyperplans. Ces résultats ont été démontrés en étudiant les fréquences de certains motifs dans les hyperplans discrets et en utilisant des techniques de la théorie des nombres et de la combinatoire. Nous montrerons dans ce chapitre les résultats suivants :

- La fréquence d'un motif dans un hyperplan est une fonction continue et affine par morceaux relativement aux paramètres de l'hyperplan.
- Deux plans discrets dont les paramètres sont dans le même secteur du diagramme de Farey des plans discrets auront le même ensemble de motifs.
- Le nombre des motifs d'une taille donnée est encadré par deux polynômes en cette taille.
- Le nombre de fréquences est borné par un polynôme de degré d où d est la dimension de l'espace du travail.
- Les estimateurs locaux d'aire ne convergent presque jamais (au sens de Lebesgue) même lorsqu'on considère des surfaces simples comme des morceaux d'hyperplans.

Les résultats présentés dans ce chapitre ont été publiés dans l'article [DTZ09].

6.2 Discrétisation d'une surface

Nous utilisons dans ce chapitre le modèle OBQ pour discrétiser les surfaces. Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre précédant les modèles BBQ et GIQ sont similaires au modèle OBQ. Considérons la surface $S(f) = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in [a, b] \times [c, d]\}$ où $f : [a, b] \times [c, d] \mapsto \mathbb{R}$

Définition 28 (*Objet Boundary Quantization*) : La discrétisation de $\delta_{OBQ}^r(S(f))$ de la surface $S(f)$ par la méthode OBQ à la résolution r est définie par :

$$\delta_{OBQ}^r(S(f)) = \{r(X, Y, \lfloor \frac{f(Xr, Yr)}{r} \rfloor) \mid (X, Y) \in \llbracket A_r, B_r \rrbracket \times \llbracket C_r, D_r \rrbracket\}$$

où $A_r = \lceil \frac{a}{r} \rceil$, $B_r = \lfloor \frac{b}{r} \rfloor$, $C_r = \lceil \frac{c}{r} \rceil$ et $D_r = \lfloor \frac{d}{r} \rfloor$.

Exemple : Soit $P_{\alpha, \beta, \gamma}$ le plan d'équation $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ où $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

$$\delta_{OBQ}^r(P_{\alpha, \beta, \gamma}) = R_{\alpha, \beta, \gamma} = \{r(X, Y, \lfloor \alpha X + \beta Y + \frac{\gamma}{r} \rfloor) \mid (X, Y) \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Voir la figure. 6.1 pour une illustration de la discrétisation d'un plan.

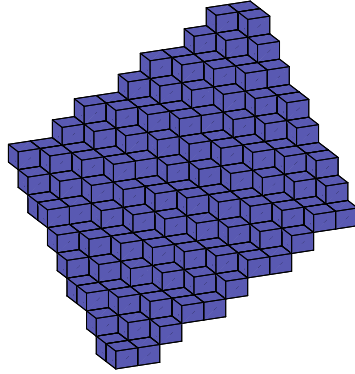


FIG. 6.1 – Discrétisation du plan réel $z = \frac{2}{3}x + \frac{5}{7}y$.

Soit $R = \{(x, y, \alpha x + \beta y + \gamma) \mid a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}$ où $\alpha, \beta \in [0, 1]$ et $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ un morceau du plan $P_{\alpha, \beta, \gamma}$. R correspond à un sous-ensemble du plan $P_{\alpha, \beta, \gamma}$ dont la projection sur le XY -plan est un rectangle dont les côtés sont parallèles aux axes x, y .

Dans ce chapitre, toutes les notions topologiques sont considérés relativement à la topologie usuelle (euclidienne). Si E est un sous-ensemble d'un espace topologique, \overline{E} dénote sa fermeture topologique (le plus petit fermé contenant E). Les notions de mesure sont considérées relativement à la mesure de Lebesgue sur l'espace euclidien, par exemple les notions "ensemble négligeable" (de mesure nulle) et "presque partout" sont considérés relativement à la mesure de Lebesgue sur l'espace euclidien.

Dans ce chapitre, nous considérons les plans discrets naïfs $\mathcal{P}_{\alpha, \beta, \gamma} = \{(x, y, \lfloor \alpha x + \beta y + \gamma \rfloor) \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2\}$ avec $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ et $\gamma \in \mathbb{R}$. Donc, un plan naïf est fonctionnel relativement aux coordonnées x, y : $z = p_{\alpha, \beta, \gamma}(x, y) = \lfloor \alpha x + \beta y + \gamma \rfloor$ pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{P}_{\alpha, \beta, \gamma}$. Le vecteur (α, β) (respectivement γ) est appelé le vecteur normal (respectivement la phase) du plan $\mathcal{P}_{\alpha, \beta, \gamma}$.

Notation : Soient m et n deux entiers positifs. On note $\mathcal{F}_{m, n} = \llbracket 0, m - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$.

Définition 29 Soient m et n deux entiers positifs. Un (m, n) -motif est une fonction $w : \mathcal{F}_{m,n} \rightarrow \mathbb{Z}$. $m \times n$ est appelé la taille du (m, n) -motif w . L'ensemble des (m, n) -motifs sera noté dans la suite par $\mathcal{M}_{m,n}$.

La projection d'un (m, n) -motif dans le plan (OXY) est donc réduit à un rectangle de pixels de taille $m \times n$.

Dans la suite, un motif de taille inférieure à $m \times n$ correspond à un (m', n') -motif où $m' \leq m$, $n' \leq n$ et $(m, n) \neq (m', n')$. La notion de (m, n) -cube que nous définissons ci-dessous est un cas particulier de la notion de (m, n) -motif.

Définition 30 Le (m, n) -cube $w_{i,j}(\alpha, \beta, \gamma)$ à la position (i, j) du plan discret $\mathcal{P}_{\alpha,\beta,\gamma}$ est le (m, n) -motif défini par $w(i', j') = p_{\alpha,\beta,\gamma}(i + i', j + j') - p_{\alpha,\beta,\gamma}(i, j)$ pour tout $(i', j') \in \mathcal{F}_{m,n}$.

Ainsi, un (m, n) -cube est tout simplement un morceau d'un plan discret dont la projection sur le plan (OXY) est une translation de l'ensemble $\mathcal{F}_{m,n}$. Voir la figure 6.2 correspondant à un $(3, 3)$ -cube dans un plan discret.

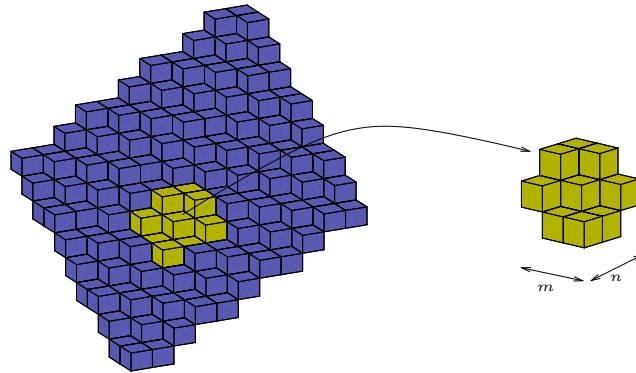


FIG. 6.2 – Un $(3, 3)$ -cube dans un plan discret

Remarque : Pour tout $i, j \in \mathbb{Z}$ et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ on a :

$$w_{i,j}(\alpha, \beta, \gamma) = w_{0,0}(\alpha, \beta, \alpha i + \beta j + \gamma).$$

Notations :

Soient $\alpha, \beta \in [0, 1]$ et $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Posons,

$$- C_{i,j}^{\alpha,\beta} = 1 - \langle \alpha i + \beta j \rangle \text{ pour } (i, j) \in \mathcal{F}_{m,n}$$

- La suite $(B_i^{\alpha,\beta})_{0 \leq i \leq mn}$ est définie par : $B_0^{\alpha,\beta} = 0$ et $B_i^{\alpha,\beta} = C_{\sigma^{\alpha,\beta}(i)}^{\alpha,\beta}$ pour $1 \leq i \leq mn$ tel que $\sigma^{\alpha,\beta}$ est une bijection de $\llbracket 1, mn \rrbracket$ dans $\mathcal{F}_{m,n}$ telle que $(B_i^{\alpha,\beta})_{0 \leq i \leq mn}$ est croissante. Autrement dit, la suite $(B_i^{\alpha,\beta})_{0 \leq i \leq mn}$ est obtenue par un réarrangement par ordre croissant de la suite $(C_{i,j}^{\alpha,\beta})$.

Dans la proposition ci-dessous, nous rappelons quelques résultats connus (voir par exemple [Gé99]).

Proposition 3 *Pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ on a :*

1. *Le (k, l) -ième point du (m, n) -cube à la position (i, j) du plan discret $P_{(\alpha,\beta,\gamma)}$ est donné par la formule :*

$$\omega_{i,j}(\alpha, \beta, \gamma)(k, l) = \begin{cases} \lfloor \alpha k + \beta l \rfloor & \text{si } \langle \alpha i + \beta j + \gamma \rangle < C_{k,l}^{\alpha,\beta} \\ \lfloor \alpha k + \beta l \rfloor + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. *Le (m, n) -cube $\omega_{i,j}(\alpha, \beta, \gamma)$ ne dépend que de l'intervalle $[B_h^{\alpha,\beta}, B_{h+1}^{\alpha,\beta}[$ contenant $\langle \alpha i + \beta j + \gamma \rangle$.*
3. *Pour tout $h \in \llbracket 1, mn - 1 \rrbracket$, si $[B_h^{\alpha,\beta}, B_{h+1}^{\alpha,\beta}[$ n'est pas vide ($B_h^{\alpha,\beta} < B_{h+1}^{\alpha,\beta}$), alors il existe (i, j) tel que $\langle \alpha i + \beta j + \gamma \rangle \in [B_h^{\alpha,\beta}, B_{h+1}^{\alpha,\beta}[$ et donc le nombre de (m, n) -cubes dans le plan discret $P_{\alpha,\beta,\gamma}$ est égal au $\text{card}(\{C_{k,l}^{\alpha,\beta} \mid (k, l) \in \mathcal{F}_{m,n}\})$. Nous avons, en particulier, $\text{card}(\{C_{k,l}^{\alpha,\beta} \mid (k, l) \in \mathcal{F}_{m,n}\}) \leq mn$.*

Ainsi, la Proposition 3(3) montre que le nombre des (m, n) -cubes appartenant à un plan discret donné est au maximum $m \times n$.

Nous pouvons également déduire de la Proposition 3, que $\omega_{0,0}(\alpha, \beta, \gamma) = \omega_{0,0}(\alpha, \beta, \langle \gamma \rangle)$ et donc $\omega_{i,j}(\alpha, \beta, \gamma) = \omega_{0,0}(\alpha, \beta, \langle \alpha i + \beta j + \gamma \rangle)$ pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$.

D'après la Proposition 3, l'ensemble des (m, n) -cubes du plan discret $P_{\alpha,\beta,\gamma}$ ne dépend que de α, β et il sera noté dans la suite par $\mathcal{C}_{m,n,\alpha,\beta}$.

Dans la suite, $\mathcal{U}_{m,n}$ représentera l'ensemble de tous les (m, n) -cubes. Donc,

$$\mathcal{U}_{m,n} = \bigcup_{(\alpha,\beta) \in [0,1]^2} \mathcal{C}_{m,n,\alpha,\beta}.$$

Définition 31 *la pré-image $\text{PI}(\omega)$ d'un (m, n) -cube est l'ensemble des triples $(\alpha, \beta, \gamma) \in [0, 1]^3$ telles que ω est le (m, n) -cube de $P_{\alpha,\beta,\gamma}$ à la position $(0, 0)$.*

Remarque : L'ensemble $\text{PI}(\omega)$ est un polygone convexe, parce qu'il est l'intersection de demi-espaces $\{(\alpha, \beta, \gamma) \mid \omega(k, l) \leq k\alpha + l\beta + \gamma\}$ et $\{(\alpha, \beta, \gamma) \mid k\alpha + l\beta + \gamma < \omega(k, l) + 1\}$ pour $(k, l) \in \mathcal{F}_{m,n}$. De plus, L'ensemble des $\gamma' \in [0, 1]$ tel que $(\alpha, \beta, \gamma') \in \text{PI}(\omega_{i,j}(\alpha, \beta, \gamma))$ est exactement l'intervalle $[B_h^{\alpha,\beta}, B_{h+1}^{\alpha,\beta}[$ contenant $\langle \alpha i + \beta j + \gamma \rangle$.

La dernière remarque entraînera la définition 32 dans la section suivante.

6.3 Fréquence de (m, n) -cubes

Dans cette section, nous définissons deux notions de fréquence d'un (m, n) -cube. Nous montrons qu'elles sont équivalentes et nous prouvons que la fréquence d'un (m, n) -cube dans un plan $\mathcal{P}_{(\alpha, \beta, \gamma)}$ est une fonction continue et affine par morceaux relativement à la pente (α, β) du plan $P_{(\alpha, \beta, \gamma)}$.

Définition 32 La γ -fréquence d'un (m, n) -cube ω pour la pente (α, β) (noté $\text{freq}_{\alpha, \beta}(\omega)$) est la longueur de l'intervalle $I^{\alpha, \beta}(\omega) = \{\gamma \in [0, 1] \mid (\alpha, \beta, \gamma) \in \text{PI}(\omega)\}$. Par conséquent, la fonction $\text{Tp} : \text{PI}(\omega) \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\text{Tp}(\alpha, \beta) = \text{freq}_{\alpha, \beta}(\omega)$ est la projection orthographe de $\text{PI}(\omega)$ relativement à la troisième coordonnée.

Définition 33 Si ω est un (m, n) -cube, alors la fréquence avec chevauchement de ω dans le plan discret $\mathcal{P}_{(\alpha, \beta, \gamma)}$ est définie par

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\text{card}(\{(i, j) \in \llbracket -N, N \rrbracket^2 \mid \omega_{i,j}(\alpha, \beta, \gamma) = \omega\})}{(2N + 1)^2}$$

si cette limite existe. Elle est noté par $\text{overfreq}_{\alpha, \beta, \gamma}(\omega)$.

$$\text{Donc, } \text{overfreq}_{\alpha, \beta, \gamma}(\omega) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\text{card}(\{(i, j) \in \llbracket -N, N \rrbracket^2 \mid \langle \alpha i + \beta j + \gamma \rangle \in I^{\alpha, \beta}(\omega)\})}{(2N + 1)^2}$$

Nous avons alors les propriétés suivantes :

Proposition 4 Pour tout $\alpha, \beta \in [0, 1]$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ on a :

1. $\omega \in \mathcal{C}_{m, n, \alpha, \beta}$ si et seulement si $\text{freq}_{\alpha, \beta}(\omega) > 0$.
2. $\text{overfreq}_{\alpha, \beta, \gamma}(\omega) = \text{freq}_{\alpha, \beta}(\omega)$

La proposition 4(2) est similaire à celle de la propriété énoncée dans [BL00, section 5.2] qui porte sur la classe des *plans discrets standards* alors que la proposition 4(2) est consacré aux plans naïfs. De plus, le Théorème 28 de [BFJP07] généralise la Proposition 4(2) à une classe de plans discrets plus générale contenant les classes des plans discrets naïfs et standards.

La preuve de la Proposition 4(2) dans le cas irrationnel utilise un cas particulier du Théorème 9 (dans l'annexe B) qui sera nécessaire pour prouver nos résultats de la section 6.5 concernant les estimateurs locaux.

Maintenant, nous allons étudier la fonction $(\alpha, \beta) \mapsto \text{freq}_{\alpha, \beta}(\omega)$ donnant la fréquence du (m, n) -cube ω en fonction de la pente (α, β) du plan.

Pour cela, nous donnons la définition et les propriétés des fonctions affines par morceaux.

Définition 34 Une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est appelée une fonction affine par morceaux s'il existe une collection finie $(K_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles convexes ouverts de \mathbb{R}^2 et des fonctions affines $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pour $i \in I$, telles que :

- $K_i \cap K_{i'} = \emptyset$ pour tout $i, i' \in I$ et $i \neq i'$,

- $\bigcup_{i \in I} \overline{K_i} = \mathbb{R}^2$ et
- la restriction de f à K_i est égale à f_i pour tout $i \in I$ (i.e. pour tout $i \in I, f(x) = f_i(x)$ pour tout $x \in K_i$).

Proposition 5 Soit $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions affines par morceaux. Alors $-f, f + g, f - g, \max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont également des fonctions affines par morceaux.

Preuve :

Soient $(K_i)_{i \in I}$ et $(f_i)_{i \in I}$ (respectivement $(K'_j)_{j \in J}$ et $(g_j)_{j \in J}$) des collections d'ensembles convexes ouverts et de fonctions affines correspondant à f (respectivement g).

Alors, $(K_i)_{i \in I}$ et $(-f_i)_{i \in I}$ (respectivement $(K_i \cap K'_j)_{(i,j) \in I \times J}$ et $(f_i + g_j)_{(i,j) \in I \times J}$) correspondent à $-f$ (respectivement à $f + g$). Alors $-f$ et $f + g$ sont donc des fonctions affines par morceaux et par conséquent, $f - g$ est aussi une fonction affine par morceaux.

Soient $(i, j) \in I \times J$ et $H_{i,j}^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f_i(x) > g_j(x)\} \cap K_i \cap K'_j$ et $H_{i,j}^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f_i(x) < g_j(x)\} \cap K_i \cap K'_j$. Donc les collections $(H_{i,j}^k)_{(k,i,j) \in \{1,2\} \times I \times J}$ et $(h_{i,j}^k)_{(k,i,j) \in \{1,2\} \times I \times J}$ telles que pour tout $(i, j) \in I \times J, h_{i,j}^1(x) = f_i(x)$ pour tout $x \in H_{i,j}^1$ et $h_{i,j}^2(x) = g_j(x)$ pour tous $x \in H_{i,j}^2$, correspondent à la fonction $\max(f, g)$ qui est donc une fonction affine par morceaux. Comme $\min(f, g) = -\max(-f, -g)$, alors $\min(f, g)$ est aussi une fonction affine par morceaux. \square

Théorème 6 Pour tout (m, n) -cube ω , la fonction $(\alpha, \beta) \mapsto \text{freq}_{\alpha, \beta}(\omega)$ est une fonction continue et est affine par morceaux.

Preuve :

Rappelons que ω est une fonction de $\mathcal{F}_{m,n}$ dans \mathbb{Z} . On a $\text{PI}(\omega) = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \mid \omega(k, l) \leq \alpha k + \beta l + \gamma < \omega(k, l) + 1 \text{ pour tout } (k, l) \in \mathcal{F}_{m,n}\}$.

Alors, $I^{\alpha, \beta}(\omega) = [\max_{(k,l) \in \mathcal{F}_{m,n}} (\omega(k, l) - \alpha k - \beta l), \min_{(k,l) \in \mathcal{F}_{m,n}} (\omega(k, l) + 1 - \alpha k - \beta l)]$.
Donc, $\text{freq}_{\alpha, \beta}(\omega) = \max(0, \min_{(k,l) \in \mathcal{F}_{m,n}} (\omega(k, l) + 1 - \alpha k - \beta l) - \max_{(k,l) \in \mathcal{F}_{m,n}} (\omega(k, l) - \alpha k - \beta l))$. Les Fonctions affines, \max et \min sont des fonctions continues. Alors, $(\alpha, \beta) \mapsto \text{freq}_{\alpha, \beta}(\omega)$ est un fonction continue et est affine par morceaux, car elle est la composition de fonctions continues et par la Propriété 5 elle est également une fonction affine par morceaux. \square

Nous allons maintenant préciser les domaines où la fonction $(\alpha, \beta) \mapsto \text{freq}_{\alpha, \beta}(\omega)$ est affine. Soit $D_{u,v,w}$ la droite réelle $\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha u + \beta v + w = 0\}$ et

$$E_{m,n} = \bigcup_{(u,v,w) \in [-m+1, m-1] \times [-n+1, n-1] \times \mathbb{Z}} D_{u,v,w} \cap [0, 1]^2.$$

$E_{m,n}$ n'utilise effectivement que les droites $D_{u,v,w}$ telle que $D_{u,v,w} \cap [0, 1]^2 \neq \emptyset$ et nous devons donc considérer que les droites $D_{u,v,w}$ telle que $|w| \leq |u| + |v|$ et par conséquent $E_{m,n}$ n'utilise effectivement qu'un nombre fini de droites.

$E_{m,n}$ est appelée le diagramme de Farey dans [Joe99]. Nous utiliserons dans la suite le terme "diagramme de Farey des plans discrets" pour désigner ces diagrammes pour les

distingués des diagrammes de Farey des segments discrets que nous avons introduit dans le Chapitre 3.

Le figure Fig. 6.3 représente le diagramme de Farey pour $(m, n) = (4, 3)$.

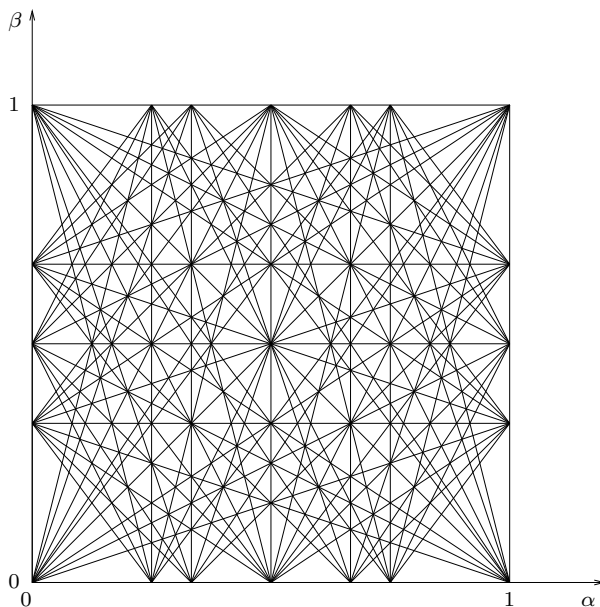


FIG. 6.3 – Diagramme de Farey des plans discrets pour $(m, n) = (4, 3)$

Théorème 7 *La fonction $(\alpha, \beta) \mapsto \text{freq}_{\alpha, \beta}(\omega)$ est affine sur les composantes connexes de $[0, 1]^2 \setminus E_{m, n}$ pour tout $\omega \in \mathcal{U}_{m, n}$.*

Pour tout $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in [0, 1]^2 \setminus E_{m, n} : \mathcal{C}_{m, n, \alpha, \beta} = \mathcal{C}_{m, n, \alpha', \beta'}$ si et seulement si (α, β) et (α', β') sont dans la même composante connexe de $[0, 1]^2 \setminus E_{m, n}$.

La preuve du Théorème 7 est donnée dans l' Annexe B 8.2.3.

6.4 Propriétés combinatoires des (m, n) -cubes

Dans cette section, nous utilisons la fréquence de (m, n) -cubes pour déduire des propriétés combinatoires des (m, n) -cubes.

6.4.1 Propriétés des ensembles de (m, n) -cubes

Dans ce paragraphe nous allons voir les conséquences du Théorème 7 sur le comportement de l'ensemble $\mathcal{C}_{m, n, \alpha, \beta}$ (contenant tous les (m, n) -cubes d'un plan de pente (α, β)) quand la pente (α, β) change .

En particulier, ceci permet de calculer $\mathcal{C}_{m,n,\alpha,\beta}$ à partir des sommets du triangle du diagramme de Farey des plans discrets contenant le point (α, β) . Cette propriété nous permettra de donner une borne supérieure pour le nombre de tous les (m, n) -cubes.

Proposition 6 *Soient $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3)$ des points de $[0, 1]^2$ et T l'enveloppe convexe de ces trois points (un triangle). Soit $(\alpha_0, \beta_0) \in T$ et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ tels que $(\alpha_0, \beta_0) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i(\alpha_i, \beta_i)$ et $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$ ($\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont des coordonnées barycentriques de (α_0, β_0) relativement à (α_1, β_1) et $(\alpha_2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3)$). Supposons que la fonction $(\alpha, \beta) \mapsto \text{freq}_{\alpha,\beta}(w)$ est affine sur T pour tout (m, n) -cube ω . Alors,*

$$\mathcal{C}_{m,n,\alpha_0,\beta_0} = \bigcup_{1 \leq i \leq 3 \text{ and } \lambda_i \neq 0} \mathcal{C}_{m,n,\alpha_i,\beta_i}$$

Preuve :

D'après la définition de $(\alpha, \beta) \mapsto \text{freq}_{\alpha,\beta}(\omega)$ sur T , on a :

$$\text{freq}_{\alpha_0,\beta_0}(\omega) = \sum_{i=1}^3 \lambda_i \text{freq}_{\alpha_i,\beta_i}(\omega)$$

Si $\omega \notin \mathcal{C}_{m,n,\alpha_0,\beta_0}$, alors d'après la proposition 4, $\text{freq}_{\alpha_0,\beta_0}(\omega) = 0$ et pour tout i , $\text{freq}_{\alpha_i,\beta_i}(\omega) = 0$ ou $\lambda_i = 0$ parce que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$, ce qui implique que pour tout i , si $\lambda_i \neq 0$ alors $\omega \notin \mathcal{C}_{m,n,\alpha_i,\beta_i}$. Inversement, comme $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$ et $\sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1$, si $\omega \in \mathcal{C}_{m,n,\alpha_0,\beta_0}$, alors d'après la proposition 4, $\text{freq}_{\alpha_0,\beta_0}(\omega) > 0$ et donc, il existe un $i \in \{1, 2, 3\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$ et $\text{freq}_{\alpha_i,\beta_i}(\omega) > 0$ \square

Corollaire 4 *Soit \mathcal{O} une composante connexe de $[0, 1]^2 \setminus E_{m,n}$. Alors \mathcal{O} est un polygone convexe et si p_1, p_2, p_3 sont des sommets distincts du polygone \mathcal{O} , alors*

1. pour tout point $p \in \mathcal{O}$, $\mathcal{C}_{m,n,p} = \mathcal{C}_{m,n,p_1} \cup \mathcal{C}_{m,n,p_2} \cup \mathcal{C}_{m,n,p_3}$ et
2. pour tout point $p \in]p_1, p_2[$ on a :

$$\mathcal{C}_{m,n,p} = \mathcal{C}_{m,n,p_1} \cup \mathcal{C}_{m,n,p_2}.$$

Preuve

La fonction $(\alpha, \beta) \mapsto \mathcal{C}_{m,n,\alpha,\beta}$ est une fonction constante sur \mathcal{O} . D'après le Théorème 7, pour tout $\omega \in \mathcal{U}_{m,n}$, la fonction $(\alpha, \beta) \mapsto \text{freq}_{\alpha,\beta}(\omega)$ est affine sur $\overline{\mathcal{O}}$ et nous concluons en utilisant la Proposition 6. \square

Corollaire 5 *Le nombre de (m, n) -cubes est $O((m+n)^2 m^3 n^3)$.*

Preuve

Toute ligne d'équation $ux + vy + w = 0$ avec $|w| > |u| + |v|$ n'intersecte pas le carré $[0, 1]^2$, alors $E_{m,n}$ est composée au maximum de $(2m+1)(2n+1)(2(m+n+1)+1) = f(m, n)$ lignes.

D'après le Corollaire 4, tous les (m, n) -cubes apparaissent dans les sommets des composantes connexes de $[0, 1]^2 \cap E_{m,n}$. Chaque sommet est l'intersection de deux lignes de $E_{m,n}$, donc il y a au maximum $\frac{1}{2}f(m, n)^2$ sommets. Chaque sommet correspond au maximum à mn (m, n) -cubes, donc au total il y a au maximum $\frac{1}{2}((2m+1)(2n+1)(2(m+n+1)+1))^2 mn$ (m, n) -cubes, \square

Le Corollaire 5 donne une borne supérieure pour le nombre de (m, n) -cubes. Dans le Corollaire 6, nous allons donner une borne inférieure de ce nombre.

Définition 35 Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

1. Soient $\alpha, \gamma \in [0, 1]$. L'ensemble $S(m, \alpha, \gamma) = \{(x, \lfloor \alpha x + \gamma \rfloor) \mid x \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket\}$ est appelé un segment discret de taille m .
2. $\mathcal{S}_m = \{S(m, \alpha, \gamma) \mid \alpha, \gamma \in [0, 1]\}$ est l'ensemble de tous les segment discrets de taille m .

Proposition 7 [BL88, Mig91, Taj08]

1. $\text{card}(\mathcal{S}_m) = 1 + \sum_{i=1}^m (m-i+1)\varphi(i)$ où φ est la fonction totient d'Euler ($\varphi(i) = \text{card}(\{j \mid 1 \leq j < i \text{ et } i \text{ et } j \text{ sont premières}\})$).
2. $\text{card}(\mathcal{S}_m) = \frac{m^3}{\pi^2} + O(m^2 \log(m))$.

Proposition 8 Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha, \beta, \gamma_1, \gamma_2 \in [0, 1]$ et considérons les deux segments discrets $S(m, \alpha, \gamma_1), S(n, \beta, \gamma_2)$. Alors, il existe $\omega \in \mathcal{U}_{m,n}$ telle que $S(m, \alpha, \gamma_1) = \{(i, \omega(i, 0)) \mid i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket\}$ et $S(n, \beta, \gamma_2) = \{(j, \omega(0, j)) \mid j \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$.

Preuve

D'après [Gé99, Mig91], il existe $i, j \in \mathbb{Z}$ telle que $S(m, \alpha, \gamma_1) = \{(x-i, \lfloor \alpha x \rfloor - \lfloor \alpha i \rfloor) \mid x \in \llbracket i, m+i-1 \rrbracket\}$ et $S(n, \beta, \gamma_2) = \{(x-j, \lfloor \beta y \rfloor - \lfloor \beta j \rfloor) \mid y \in \llbracket j, n+j-1 \rrbracket\}$. Donc $\omega = \omega_{i,j}(\alpha, \beta, 0)$ vérifie les conditions de la propriété. \square

Corollaire 6 $\text{card}(\mathcal{U}_{m,n}) \geq \text{card}(\mathcal{S}_m)\text{card}(\mathcal{S}_n)$ et donc $\text{card}(\mathcal{U}_{m,n}) \geq \frac{1}{\pi^4}m^3n^3 + O(m^2n^2 \log(m) \log(n))$.

Preuve

D'après la Propriété 8, on a $\text{card}(\mathcal{U}_{m,n}) \geq \text{card}(\mathcal{S}_m)\text{card}(\mathcal{S}_n)$ et la deuxième assertion est une conséquence de la Propriété 7. \square

Les Corollaires 5 et 6 impliquent qu'il existe deux constantes k_1, k_2 telles que $k_1m^3n^3 < \text{card}(\mathcal{U}_{m,n}) < k_2(m+n)^2m^3n^3$.

6.4.2 Généralisation du Théorème des Trois Intervalles pour les plans

Dans ce paragraphe nous allons étudier la fréquence des (m, n) -cubes apparaissant dans un plan discret. Nous rappelons que pour les droites discrètes, les valeurs des fréquences des segments discrets de taille m constituent un ensemble dont le cardinal ne dépasse pas trois (c'est une conséquence du Théorème des Trois Intervalles, voir [Ber96, Taj08]). La proposition suivante est une généralisation du Théorème des Trois Intervalles pour les plans discrets.

Proposition 9 *Pour tout m, n et tout $\alpha, \beta \in [0, 1]$, le nombre de fréquences de (m, n) -cubes du plan discret $\mathcal{P}_{\alpha, \beta, 0}$ vérifie :*

$$\text{card}(\{\text{freq}_{\alpha, \beta}(\omega) \mid \omega \in \mathcal{C}_{m, n, \alpha, \beta}\}) \leq \min(m, n) + 3.$$

Les Propositions 3 et 4 montrent que les valeurs des fréquences sont les différences entre deux nombres consécutifs dans l'ensemble $\{\langle \alpha i + \beta j \rangle \mid 0 \leq i < m, 0 \leq j < n\} \cup \{1\}$. Mais il est démontré dans [FJ93] que ce nombre de différences ne dépasse pas $\min(m, n) + 3$. \square Signalons que la Proposition 9 est similaire à la proposition 3 du papier [BL00] qui concerne les plans discrets standards alors que nous nous considérons les plans discrets naïfs.

La proposition suivante montre que la borne supérieure donnée par la Proposition 9 est presque optimale :

Proposition 10 *Pour tout m, n , il existe α, β tels que le nombre de fréquences de (m, n) -cubes du plan discret $\mathcal{P}_{\alpha, \beta, 0}$ vérifie :*

$$\begin{aligned} \text{card}(\{\text{freq}_{\alpha, \beta}(w) \mid w \in \mathcal{C}_{m, n, \alpha, \beta}\}) &\geq \min(m, n) + 1 && \text{si } m = n, \\ \text{card}(\{\text{freq}_{\alpha, \beta}(w) \mid w \in \mathcal{C}_{m, n, \alpha, \beta}\}) &\geq \min(m, n) + 2 && \text{si non.} \end{aligned}$$

La preuve de la Proposition 10 est donnée dans l'Annexe B 8.2.4.

Remarque Dans le cas $m = n + 1, m \geq 3$, d'après le résultat de [FJ93, Section 3], nous pouvons démontrer qu'il existe α, β tels que le nombre de fréquences est $n + 3$.

6.5 Estimateurs locaux d'aire

Une surface discrète est la discrétisation d'une surface de \mathbb{R}^3 . Nous étudions dans cette section les estimateurs locaux d'aire pour les surfaces discrètes dans l'espace discret $r\mathbb{Z}^3$ de résolution r .

L'estimateur local d'aire est obtenu en associant un poids $P(\omega)$ à chaque motif $\omega \in \mathcal{M}(m, n)$ de taille $m \times n$ où $\mathcal{M}(m, n)$ est l'ensemble de tous les motifs de taille $m \times n$, alors toute surface discrète \mathcal{S}_r , peut être obtenue par concaténation d'éléments de $\mathcal{M}(m, n)$ avec peut-être en plus des motifs $\varepsilon_i, \varepsilon'_j$ de tailles inférieurs à $m \times n$. Autrement dit, \mathcal{S}_r peut être

considéré comme un mot bi-dimensionnelle sur l'alphabet des motifs de taille inférieur ou égal à $m \times n$. Si

$$\mathcal{S}_r = \begin{array}{ccccc} \omega_{1,1} & \omega_{2,1} & \cdots & \omega_{M,1} & \varepsilon_1 \\ \omega_{1,2} & \omega_{2,2} & \cdots & \omega_{M,2} & \varepsilon_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \omega_{1,N} & \omega_{2,N} & \cdots & \omega_{M,N} & \varepsilon_N \\ \varepsilon'_1 & \varepsilon'_2 & \cdots & \varepsilon'_M & \varepsilon'_{M+1} \end{array}$$

où $\omega_{i,j} \in \mathcal{M}(m, n)$ pour tout i, j . Alors, on définit l'aire de \mathcal{S}_r par $\mathfrak{S}_{r,m,n,p}(\mathcal{S}_r) = r^2 \sum_{i,j} p(\omega_{i,j})$ (i.e. on néglige les contributions des motifs ε_i et ε'_j)

En fait, nous étudions le problème suivant :

Est-ce qu'il existe m, n et $p(\cdot)$ tels que pour toute surface $\mathcal{S} \in \mathbb{R}^3$ l'aire $\mathfrak{S}_{r,m,n,p}(\mathcal{S}_r)$ converge vers l'aire de \mathcal{S} lorsque r tend vers 0? (i.e. \mathcal{S}_r est une discrétisation de \mathcal{S}).

Dans cette section, nous étudions ce problème pour une classe particulière de surface : l'ensemble des morceaux rectangulaires de plans. De plus, nous utilisons la discrétisation OBQ comme opérateur de discrétisation.

Considérons un morceau rectangulaire $R = \{(x, y, \alpha x + \beta y + \gamma) \mid (x, y) \in [a, b] \times [c, d]\}$ du plan $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ où $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$ et $\gamma \in \mathbb{R}$; les autres cas peuvent être déduits par des symétries.

La discrétisation OBQ de R dans $r\mathbb{Z}^3$ est définie par :

$$R_r = r \left\{ \left(x, y, \left\lfloor \alpha x + \beta y + \frac{\gamma}{r} \right\rfloor \right) \mid (x, y) \in \left[\left\lfloor \frac{a}{r} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{b}{r} \right\rfloor \right] \times \left[\left\lfloor \frac{c}{r} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{d}{r} \right\rfloor \right] \right\}$$

Nous fixons deux entiers positifs m, n . Comme il a été expliqué pour les surfaces, le morceau R_r du plan discret peut être vu comme le mot bi-dimensionnel

$$\begin{array}{ccccc} \omega_{1,1} & \omega_{2,1} & \cdots & \omega_{M,1} & \varepsilon_1 \\ \omega_{1,2} & \omega_{2,2} & \cdots & \omega_{M,2} & \varepsilon_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \omega_{1,N} & \omega_{2,N} & \cdots & \omega_{M,N} & \varepsilon_N \\ \varepsilon'_1 & \varepsilon'_2 & \cdots & \varepsilon'_M & \varepsilon'_{M+1} \end{array}$$

où $M = \lfloor \frac{\lfloor \frac{b}{r} \rfloor - \lfloor \frac{a}{r} \rfloor + 1}{m} \rfloor$ et $N = \lfloor \frac{\lfloor \frac{d}{r} \rfloor - \lfloor \frac{c}{r} \rfloor + 1}{n} \rfloor$ et pour tout i, j , $\omega_{i,j}$ est un motifs de taille $m \times n$ et $\varepsilon_i, \varepsilon'_j$ sont motifs de tailles inférieures à $m \times n$.

Construisons l'estimateur local de mesure $\mathfrak{S}_{r,m,n,p}$ en utilisant une fonction poids $p : \mathcal{U}_{m,n} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, $\mathfrak{S}_{r,m,n,p}$ est défini par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{r,m,n,p}(R_r) &= r^2 \sum_{i,j} p(\omega_{i,j}) \\ &= r^2 \sum_{w \in \mathcal{U}_{m,n}} n(\omega, R_r, r) p(w) \end{aligned}$$

où $n(\omega, R_r, r)$ est le nombre de couples $(i, j) \in \llbracket 1, M \rrbracket \times \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $\omega_{i,j} = \omega$.

On dit que l'estimateur $\mathfrak{S}_{r,m,n,p}$ est *multigrille-convergent* pour le morceau rectangulaire R , si l'estimation $\mathfrak{S}_{r,m,n,p}(R_r)$ converge vers l'aire de R lorsque la résolution r tends vers 0.

La question principale que nous nous posons est la suivante :

est ce qu'il existe des entiers positifs m, n et une fonction poids $p(\cdot)$ tels que l'estimateur $\mathfrak{S}_{r,m,n,p}$ est multigrille-convergent pour tout les morceaux rectangulaires R des plans ? Nous allons montrer dans ce qui suit que la réponse à cette question est presque souvent (au sens de la mesure) non.

En fait, nous allons prouver que, pour presque tous les morceaux rectangulaires R des plans, l'estimation $\mathfrak{S}_{r,m,n,p}(R_r)$ ne converge pas vers l'aire de R lorsque le résolution r tend vers 0.

Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $c < d$ et $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$. Soit $r > 0$ la résolution de l'espace discret $r\mathbb{Z}^3$. On a $R = \{(x, y, \alpha x + \beta y + \gamma) \mid a \leq x \leq b \text{ and } c \leq y \leq d\}$. Ainsi, la discrétisation OBQ de R dans $r\mathbb{Z}^3$ est $R_r = r\{(x, y, \lfloor \alpha x + \beta y + \frac{\gamma}{r} \rfloor) \mid (x, y) \in \llbracket \frac{a}{r}, \frac{b}{r} \rrbracket \times \llbracket \frac{c}{r}, \frac{d}{r} \rrbracket\}$.

Posons $M_r = \lfloor \frac{\lfloor \frac{b}{r} \rfloor - \lceil \frac{a}{r} \rceil + 1}{m} \rfloor$ et $N_r = \lfloor \frac{\lfloor \frac{d}{r} \rfloor - \lceil \frac{c}{r} \rceil + 1}{n} \rfloor$.

Donc

$$R_r = \begin{array}{ccccc} \omega_{1,1} & \omega_{2,1} & \cdots & \omega_{M_r,1} & \varepsilon_{1,r} \\ \omega_{1,2} & \omega_{2,2} & \cdots & \omega_{M_r,2} & \varepsilon_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \omega_{1,N_r} & \omega_{2,N_r} & \cdots & \omega_{M_r,N_r} & \varepsilon_{N_r,r} \\ \varepsilon'_{1,r} & \varepsilon'_{2,r} & \cdots & \varepsilon'_{M_r,r} & \varepsilon'_{M_r+1,r} \end{array}$$

où $\omega_{i,j} \in \mathcal{U}_{m,n}$ pour $(i, j) \in \llbracket 1, N_r \rrbracket \times \llbracket 1, M_r \rrbracket$ et $\varepsilon_{i,r}, \varepsilon'_{j,r}$ sont de tailles inférieures à $m \times n$ pour $i \in \llbracket 1, N_r \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, M_r + 1 \rrbracket$.

On considère $\mathfrak{S}_{r,m,n,p}(R_r) = r^2 \sum_{1 \leq i \leq N_r} \sum_{1 \leq j \leq M_r} p(\omega_{i,j})$ comme une approximation de l'aire du morceau de plan R (i.e. on néglige les contributions des $\varepsilon_{i,r}$ et $\varepsilon'_{j,r}$).

On note $DA_{m,n,p}(R) = \lim_{r \rightarrow 0} \mathfrak{S}_{r,m,n,p}(R_r)$.

Dans la suite, nous utilisons les notations suivantes $E_r = (\llbracket \frac{a}{r}, \frac{b}{r} \rrbracket \times \llbracket \frac{c}{r}, \frac{d}{r} \rrbracket) \cap ((m\mathbb{Z} + \lceil \frac{a}{r} \rceil) \times (n\mathbb{Z} + \lceil \frac{c}{r} \rceil))$ et $S_r = (\lfloor \frac{b}{r} \rfloor - \lceil \frac{a}{r} \rceil + 1)(\lfloor \frac{d}{r} \rfloor - \lceil \frac{c}{r} \rceil + 1)$.

Théorème 8 *Soit \mathcal{O} une composante connexe de $[0, 1]^2 \setminus E_{m,n}$. Alors, il existe $u, v, t \in \mathbb{R}$ telle que $DA_{m,n,p}(R) = (b - a)(d - c)(u\alpha + v\beta + t)$ pour tout morceau rectangulaire $R = \{(x, y, \alpha x + \beta y + \gamma) \mid a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}$ du plan $z = \alpha x \beta y + \gamma$ où $\alpha, \beta \in \mathcal{O}$ et α ou β est irrationnel.*

Autrement dit, $DA_{m,n,p}(\cdot)$ est une fonction affine en (α, β) pour $(\alpha, \beta) \in (\mathcal{O} \setminus \mathbb{Q}^2)$.

La preuve du Théorème 8 est dans l'Annexe B 8.2.5.

Corollaire 7 *L'ensemble des $(\alpha, \beta) \in ([0, 1]^2 \setminus E_{m,n})$ tel que α ou β est irrationnel et $DA_{m,n,p}(R) = \text{area}(R)$ est négligeable (relativement à la mesure de Lebesgue sur l'espace euclidien), pour $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $R = \{(x, y, \alpha x + \beta y + \gamma) \mid a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}$.*

Preuve :

On considère une composante connexe \mathcal{O} de $[0, 1]^2 \setminus E_{m,n}$. D'après le Théorème 8, il existe $u, v, t \in \mathbb{R}$ tels que l'estimation locale d'aire d'un morceau de plan R est égale à $DA_{m,n,p}(R) = (b-a)(d-c)(u\alpha + v\beta + t)$ pour α ou β irrationnel. L'aire exacte de R est $\text{aire}(R) = (b-a)(d-c)\sqrt{1 + \alpha^2 + \beta^2}$. Nous avons donc :

$$DA_{m,n,p}(R) = \text{aire}(R) \iff (u\alpha + v\beta + t)^2 = 1 + \alpha^2 + \beta^2$$

ce qui est équivalent à $(u^2 - 1)\alpha^2 + (v^2 - 1)\beta^2 + 2(uv\alpha\beta + ut\alpha + vt\beta) + t^2 - 1 = 0$

Alors, la dernière équation correspond à un objet de mesure de Lebesgue supérieure à 0 seulement lorsque $u^2 - 1 = 0$, $v^2 - 1 = 0$, $t^2 - 1 = 0$, $uv = 0$, $ut = 0$ et $vt = 0$ ce qui est impossible. Ainsi, la dernière équation correspond à une courbe dans \mathbb{R}^2 (qui est l'intersection d'une conique et de la région \mathcal{O}) et donc, pour $(\alpha, \beta) \in \mathcal{O}$, l'estimation locale d'aire est égale à l'aire exacte si (α, β) appartient à ensemble contenu dans l'intersection d'une conique et de la région de \mathcal{O} ce qui correspond à un ensemble négligeable (de mesure de Lebesgue nulle).

Comme l'ensemble $[0, 1]^2 \setminus E_{m,n}$ ne contient qu'un nombre fini de composantes connexes, l'ensemble de $(\alpha, \beta) \in ([0, 1]^2 \setminus (E_{m,n} \cup \mathbb{Q}^2))$ tel que l'estimation locale d'aire est égale à l'aire exacte est un ensemble négligeable parce qu'elle est une union finie d'ensembles négligeables. \square

Corollaire 8 *Pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction poids $p(\cdot)$ l'ensemble des $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ tels que le morceau du plan rectangulaire $R = \{(x, y, \alpha x + \beta y + \gamma) \mid (x, y) \in [a, b] \times [c, d]\}$ (où $\gamma, a, b, c, d \in \mathbb{R}$) vérifient $\text{aire}(R) = DA_{m,n,p}(R)$ est un ensemble négligeable. Par conséquent, pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$ et toute fonction poids $p(\cdot)$ pour tout les morceaux de plan rectangulaires R où les paramètres $\alpha, \beta \in [0, 1]$, nous avons $\text{aire}(R) \neq DA_{m,n,p}(R)$ presque sûrement.*

Preuve

D'après le Corollaire 8, nous avons, pour presque tout les morceaux rectangulaires de plan R avec des paramètres $(\alpha, \beta) \in ([0, 1]^2 \setminus E_{m,n})$ $\text{aire}(R) \neq DA_{m,n,p}(R)$. Comme \mathbb{Q}^2 est ensemble infini dénombrable et $E(m, n)$ est un ensemble fini de droites, alors $E_{m,n} \cup \mathbb{Q}^2$ est un ensemble négligeable. Donc, pour tous les morceaux rectangulaires R du plan $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ où $\alpha, \beta \in [0, 1]$, on a $\text{aire}(R) \neq DA_{m,n,p}(R)$ presque sûrement. \square

6.6 Dimensions supérieures

Tous les résultats de la section précédente peuvent être étendus à toute dimension finie d en utilisant les hyperplans $z = \sum_{i=1}^{d-1} \alpha_i x_i + \beta$, les hyperplans discrets $z = \lfloor \sum_{i=1}^d \alpha_i x_i + \beta \rfloor$ et les (n_i) -hypercubes de taille $(n_i)_{1 \leq i \leq d-1}$. En particulier, les fréquences d'un (n_i) -hypercube sont des fonctions continues en des α_i et elles sont aussi sur les régions de l'hypercube unité limitées par les hyperplans $\sum u_i \alpha_i + v = 0$ avec $|u_i| < n_i$. De plus, si $f((n_1, n_2, \dots, n_d))$ est le nombre de (n_i) -hypercubes de taille $(n_i)_{1 \leq i \leq d-1}$, alors il existe k_1, k_2 tels que

$$k_1 \prod_{i=1}^{d-1} n_i^3 \leq f(n_1, n_2, \dots, n_d) \leq k_2 \left(\sum_{i=1}^{d-1} n_i \right)^{d-1} \prod_{i=1}^{d-1} n_i^d.$$

D'après [Nic00], le nombre de fréquences de (n_i) -hypercubes est borné par :

$$\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1}}^{d-1} n_i + 3 \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq i_1, i_2}}^{d-1} n_i + 1$$

où $n_{i_1} \geq n_{i_2}$ sont les deux plus grands n_i . On peut aussi montrer que les estimateurs locaux de "hyper-aire" ne convergent pas pour presque toutes les pentes $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq d-1}$.

6.7 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons montré que les fréquences de (m, n) -cubes de plans discrets sont données par une fonction continue et affine par morceaux en fonction des pentes de ces plans. Cela a des conséquences sur la combinatoire des (m, n) -cubes, en particulier sur le comportement asymptotique du nombre de (m, n) -cubes quand m et n tendent vers l'infini.

De plus, cela a également des conséquences sur les estimateurs locaux d'aire car cela permet de prouver rigoureusement que tout estimateur local d'aire n'a jamais la propriété de multigrille-convergence pour presque toutes les régions planes car ils ne convergent pas vers l'aire exacte. Ce résultat est une généralisation d'un résultat en dimension deux démontré dans [TD03].

Chapitre 7

Conclusion et perspectives

Nous avons étudié dans cette thèse les fréquences de motifs dans les courbes et les surfaces discrètes dans le but de construire des estimateurs de mesure (périmètre, aire, etc.). Les objets discrets sont vus simplement comme des ensembles de pixels et de voxel et notre objectif était d'amorcer l'étude pour la conception de théories de la mesure et de l'intégration sur les espaces discrets compatibles avec les théories de la mesure et de l'intégration sur les espaces euclidiens.

Nous avons limité notre étude aux estimateurs locaux ou semi-locaux. Ces estimateurs consistent à considérer l'objet discret dont on souhaite estimer la mesure comme une concaténation de motifs de taille fixe, d'associer préalablement un poids à chacun des motifs et l'estimation de mesure correspond alors à sommer les poids des motifs constituant l'objet discret en tennant compte de leurs nombres d'occurrences.

La première partie de la thèse a été consacrée à l'étude des estimateurs locaux et semi-locaux de périmètre. Nous avons obtenu dans cette première partie les résultats suivants :

- Nous avons montré que, pour une classe de paraboles, la discrétisation de la parabole et la discrétisation de sa tangente coïncident localement (Lemme de la tangente : le Lemme 1 et le Théorème 3).
- Nous avons proposé également, pour une classe de paraboles, une formule explicite pour la limite des fréquences d'un motif dans les discrétisations d'une parabole dans cette classe lorsque la résolution tend vers zéro (Théorème 2).
- Comme conséquence des deux résultats précédents, nous avons obtenu un résultat sur la convergence des estimateurs locaux de longueur pour une classe de paraboles. Ceci nous a permis de montrer que, pour cette classe de courbes, les estimateurs locaux de périmètre ne convergent presque jamais vers le périmètre exact.
- Nous avons montré aussi que pour certains choix des poids de motifs, les estimateurs semi-locaux convergent vers le périmètre exact pour toute fonction de classe \mathcal{C}^2 .
- Nous avons montré enfin que pour certains choix des poids de motifs, les estimateurs semi-locaux basés sur les segments discrets convergent vers le périmètre exacte pour toute fonction de classe \mathcal{C}^2 vérifiant une condition qui n'est malheureusement pas explicite.

Dans la deuxième partie de la thèse nous avons étudié les estimateurs locaux en toute dimension. Comme pour l'estimation locale du périmètre la non-convergence des estimateurs locaux a été démontrée même lorsqu'on considère des surfaces simples comme des morceaux d'hyperplans. Ces résultats ont été démontrés en étudiant les fréquences de certains motifs dans les hyperplans discrets et en utilisant des techniques fines de la théorie des nombres, et de combinatoire. Les résultats principaux qui ont été démontrés sont les suivants :

- La fréquence d'un motif donné dans un hyperplan $y = \alpha x + \beta y + \gamma$ est une fonction continue et est affine par morceaux relativement aux paramètres α, β du plan.
- Deux plans discrets dont les paramètres sont dans le même secteur du diagramme de Farey auront le même ensemble de motifs.
- Le nombre des motifs d'une taille donnée est encadré par deux polynômes en cette taille.
- Le nombre de fréquences est borné par un polynôme de degré d où d est la dimension de l'espace du travail.
- Les estimateurs locaux d'aire ne convergent presque jamais (au sens de Lebesgue) même lorsqu'on considère des surfaces simples comme des morceaux d'hyperplans.

7.1 Perspective.

Les résultats que nous avons obtenus dans cette thèse et qui sont présentés dans ce rapport offrent d'intéressantes perspectives :

- Généralisation des résultats obtenus en dimension un pour des dimensions supérieures en commençant par l'étude des fréquences des motifs dans un paraboléoïde.
- Étendre les résultats sur les fréquences de motifs dans les discrétisations des paraboles à des courbes plus générales, en particulier aux courbes $y = P(x)$ où P est un polynôme de degré quelconque.
- Approfondir l'étude des propriétés combinatoires des (m, n) -cubes.

Chapitre 8

Annexes

8.1 Annexe A

Notations

- On note la distance entre un nombre réel x et \mathbb{Z} par $\|x\|$. Alors, $\|x\| = \min(\langle x \rangle, 1 - \langle x \rangle)$.
- Si z est un nombre complexe on note son complexe conjugué par \bar{z} et sa partie réelle par $Re(z)$.
- $\text{pgcd}(p, q)$ est le plus grand commun diviseur de p et q .

8.1.1 Preuve du Lemme 3

Pour $f \in L^1([0, 1])$, on définit :

$$S_{r,k}(f) = \frac{1}{N_r} \sum_{X=A_r}^{B_r} f(\langle P_{r,k}(X) \rangle).$$

Alors, on a $T_{r,k}(I) = S_{r,k}(\chi_I)$ où χ_I est la fonction caractéristique de l'intervalle I . On note $e(t) = e^{2\pi it}$ et $e_c(t) = e(ct)$.

sous-lemme 1 Pour tout $c \in \mathbb{Z}^*$, on a $S_{r,k}(e_c) \xrightarrow[r \in \mathbb{Q}]{r \rightarrow 0} 0$.

Preuve

$$\begin{aligned} |S_{r,k}(e_c)|^2 &= \overline{S_{r,k}(e_c)} S_{r,k}(e_c) \\ &= \frac{1}{N_r^2} \sum_{A_r \leq X, Y \leq B_r} \overline{e_c(P_{r,k}(X))} e_c(P_{r,k}(Y)) \\ &= \frac{1}{N_r} + \frac{2}{N_r^2} Re \left(\sum_{A_r \leq X < Y \leq B_r} e_c(P_{r,k}(Y) - P_{r,k}(X)) \right) \end{aligned}$$

Supposons que $Y = X + h$, on a alors

$$\begin{aligned} P_{r,k}(Y) - P_{r,k}(X) &= r\alpha(X + h)^2 + 2\alpha k(X + H) - \alpha rX^2 - 2\alpha krX \\ &= P_{r,k}(h) + 2\alpha rXh \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |S_{r,k}(e_c)|^2 &= \frac{1}{N_r} + \frac{2}{N_r^2} \operatorname{Re} \left(\sum_{X=A_r}^{B_r-1} \sum_{h=1}^{B_r-X} e_c(P_{r,k}(h)) e_c(2\alpha rXh) \right) \\ &= \frac{1}{N_r} + \frac{2}{N_r^2} \operatorname{Re} \left(\sum_{h=1}^{N_r-1} \sum_{X=A_r}^{B_r-h} e_c(P_{r,k}(h)) e_c(2\alpha rXh) \right) \\ &= \frac{1}{N_r} + \frac{2}{N_r^2} \operatorname{Re} \left(\sum_{h=1}^{N_r-1} \left(e_c(P_{r,k}(h)) \sum_{X=A_r}^{B_r-h} e_c(2\alpha rXh) \right) \right) \end{aligned}$$

sous-sous-lemme 1 Soient $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $u \leq v$, alors

$$\left| \sum_{k=u}^v e(\beta k) \right| \leq \min(v - u + 1, \frac{1}{2\|\beta\|}).$$

Preuve

$$\sum_{k=u}^v e(\beta k) = e(\beta u) \frac{1 - e(\beta(v - u + 1))}{1 - e(\beta)}$$

donc

$$\left| \sum_{k=u}^v e(\beta k) \right| \leq \frac{2}{|1 - e(\beta)|}$$

on a $|1 - e(\beta)| = |e(\frac{\beta}{2})(e(-\frac{\beta}{2}) - e(\frac{\beta}{2}))| = 2|\sin(\pi\beta)|$. Donc $\sin(\pi\beta) \geq 2\|\beta\|$ car $\sin(\pi x) \geq 2x$ pour $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Par conséquent,

$$\left| \sum_{k=u}^v e(\beta k) \right| \leq \frac{1}{2\|\beta\|}.$$

On a aussi $|\sum_{k=u}^v e(\beta k)| \leq v - u + 1$, ce qui termine la preuve du sous-sous-lemme 1. \square
Comme $\operatorname{Re}(x) \leq |x|$, le sous-sous-lemme 1 implique que

$$|S_{r,k}(e_c)|^2 \leq \frac{1}{N_r} + \frac{2}{N_r^2} \sum_{h=1}^{N_r-1} \min(N_r, \frac{1}{2\|2\alpha rch\|}) \quad (8.1)$$

sous-sous-lemme 2 Soient $C_0 \geq 0$, $u \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $N, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $q \leq C_0 N$, $|uq - p| \leq \frac{1}{C_0 N}$ et $\text{pgcd}(p, q) = 1$. Alors,

$$\sum_{h=1}^{N-1} \min\left(N, \frac{1}{2\|uh\|}\right) \leq 4(1 + C_0) \left(\frac{N^2}{q} + N \log q\right).$$

Preuve

$$\sum_{h=1}^{N-1} \min\left(N, \frac{1}{2\|uh\|}\right) \leq \sum_{H=0}^{\lfloor \frac{N-1}{q} \rfloor} \sum_{h=qH+1}^{qH+q} \min\left(N, \frac{1}{2\|uh\|}\right)$$

On a

$$\sum_{h=qH+1}^{qH+q} \min\left(N, \frac{1}{2\|uh\|}\right) = \sum_{h=1}^q \min\left(N, \frac{1}{2\|u(qH+h)\|}\right)$$

$$\begin{aligned} \|u(qH+h)\| &= \left\| \left(\frac{p+\epsilon}{q}\right)(qH+h) \right\| && \text{où } \epsilon = uq - p \\ &= \left\| pH + \frac{p}{q}h + \epsilon H + \frac{\epsilon h}{q} \right\| \\ &= \left\| \frac{p}{q}h + \epsilon H + \frac{\epsilon h}{q} \right\| \end{aligned}$$

Soient $\gamma = (\epsilon H) \bmod \left(\frac{1}{q}\right)$ et k_0 où $\epsilon H = \gamma + \frac{k_0}{q}$. On a : $\left(\frac{p}{q}h + \epsilon H\right) \bmod 1 = \gamma + \frac{i_h}{q}$ où $i_h = (ph + k_0 q) \bmod q$. Puisque $\text{pgcd}(p, q) = 1$, alors $\{i_h \mid h \in \llbracket 1, q \rrbracket\} = \llbracket 0, q-1 \rrbracket$.

Si $i_h < \frac{q}{2}$, alors

$$\begin{aligned} \|u(qH+h)\| &= \left\| \gamma + \frac{i_h}{q} + \frac{\epsilon h}{q} \right\| \\ &\geq \left\| \gamma + \frac{i_h}{q} \right\| - \frac{|\epsilon|h}{q} \\ &= \gamma + \frac{i_h}{q} - \frac{|\epsilon|h}{q} \\ &\geq \frac{i_h}{q} - |\epsilon| && \text{car } h \leq q \\ &\geq \frac{i_h}{q} - \frac{1}{C_0 N}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

De même, si $i_h \geq \frac{q}{2}$, alors

$$\begin{aligned} \|u(qH+h)\| &\geq \left\| \gamma + \frac{i_h}{q} \right\| - \frac{|\epsilon|h}{q} \\ &= 1 - \left(\gamma + \frac{i_h}{q}\right) - \frac{|\epsilon|h}{q} \\ &\geq \frac{q-1-i_h}{q} - \frac{1}{C_0 N}. \end{aligned} \tag{8.3}$$

Si nous utilisons le changement de variable $h \mapsto i_h$ pour $i_h < \frac{q}{2}$, $h \mapsto q-1-i_h$ pour $i_h \geq \frac{q}{2}$, l'inégalité $\min(N, \frac{1}{2\|u(qH+h)\|}) \leq N$ pour $i_h = 0, 1, q-2, q-1$ et les inégalités (8.2), (8.3) pour i_h , on déduit que

$$\sum_{h=1}^q \min(N, \frac{1}{2\|u(qH+h)\|}) \leq 4N + 2 \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor} \frac{1}{2 \left(\frac{i}{q} - \frac{1}{C_0 N} \right)}.$$

On a $\frac{1}{1-x} \leq 1 + 2x$ pour $x \in (0, \frac{1}{2}]$. Alors pour $i \geq 2$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{i}{q} - \frac{1}{C_0 N}} &= \frac{q}{i} \frac{1}{1 - \frac{q}{i C_0 N}} \\ &\leq \frac{q}{i} \left(1 + 2 \frac{q}{i C_0 N} \right) \quad \text{parce que } \frac{q}{i C_0 N} \in (0, \frac{1}{2}] \text{ si } i \geq 2 \text{ et } q \leq C_0 N \\ &\leq 2 \frac{q}{i} \end{aligned}$$

Donc,

$$\sum_{h=1}^q \min(N, \frac{1}{2\|u(qH+h)\|}) \leq 4N + 2q \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor} \frac{1}{i}.$$

On a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor} \frac{1}{i} &= \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor} \int_{i-1}^i \frac{1}{i} dt \\ &\leq \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor} \int_{i-1}^i \frac{1}{t} dt \\ &= \int_1^{\lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor} \frac{1}{t} dt \\ &= \log(\lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^{N-1} \min(N, \frac{1}{2\|uh\|}) &\leq \left(\lfloor \frac{N-1}{q} \rfloor + 1 \right) \left(4N + 2q \log(\lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor) \right) \\ &\leq \left(\frac{N}{q} + 1 \right) (4N + 2q \log q) \\ &\leq \left(\frac{N}{q} + \frac{C_0 N}{q} \right) (4N + 2q \log q) \quad \text{parce que } q \leq C_0 N \\ &\leq 4(1 + C_0)(N^2 + N \log q) \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du sous-sous-lemme 2. \square

Dans la suite, nous supposons que r est un nombre rationnel ce qui implique que αr est nombre irrationnel et par conséquent, d'après le théorème de Dirichlet ([Wik08]), on déduit qu'il existe deux entiers premiers entre eux $q_r \leq \frac{2N_r}{\alpha c(b-a)}$ et p_r tels que $|2\alpha r c q_r - p_r| \leq \frac{\alpha c(b-a)}{2N_r}$. En utilisant le sous-sous-lemme 2 avec $C_0 = \frac{2}{\alpha c(b-a)}$ et l'équation (8.1) on obtient

$$\begin{aligned} |S_{r,k}(e_c)|^2 &\leq \frac{1}{N_r} + \frac{8(1+C_0)}{N_r^2} \left(\frac{N_r^2}{q} + N_r \log q_r \right) \\ &\leq \frac{1}{N_r} + \frac{8(1+C_0)}{q_r} + \frac{8(1+C_0) \log q_r}{N_r} \end{aligned}$$

Si $N_r \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} +\infty$, alors $\frac{\log q_r}{N_r} \leq \frac{\log(C_0 N_r)}{N_r} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$. Il reste alors à démontrer que $q_r \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} +\infty$. On a

$$\frac{p_r}{q_r} \geq 2\alpha r c - \frac{\alpha c(b-a)}{2N_r}$$

On a $N_r \geq (\frac{b}{r} - 1) - (\frac{a}{r} + 1) - 1 = \frac{b-a-r}{r}$. Si on suppose que $r \leq \frac{b-a}{2}$, alors $N_r \geq \frac{b-a}{2r}$, par conséquent,

$$\frac{p_r}{q_r} \geq 2\alpha r c - \alpha r c > 0,$$

Comme $p_r \geq 1$, on a alors

$$\frac{1}{q_r} \leq \frac{p_r}{q_r} \leq 2\alpha r c + \frac{1}{N_r q_r} \leq 2\alpha r c + \frac{1}{N_r}$$

Donc $q_r \geq \frac{1}{2\alpha r c + \frac{1}{N_r}} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} +\infty$. Ce qui termine la preuve de sous-lemme 1. \square

Pour terminer la preuve du lemme 3 on doit démontrer que $S_{r,k}(\chi_I) \xrightarrow[r \rightarrow 0, r \in \mathbb{Q}]{} \mu(I)$ où χ_I est

la fonction caractéristique de l'intervalle I . On a, $S_{r,k}(e_0) = 1$ de plus en utilisant le sous-lemme 1, on a $S_{r,k}(e_c) \xrightarrow[r \rightarrow 0, r \in \mathbb{Q}]{} 0$. Par conséquent, l'adaptation du théorème de Weyl à ce cas

permet de conclure la preuve du Lemme 3.

8.1.2 Démonstration du théorème 2

On définit :

$$G_r^g(\omega) = \frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r - m \rrbracket \mid s_m^{g'(rX), \langle \frac{g(rX)}{r} \rangle} = \omega\}}{N_r - m}.$$

D'après le Lemme 1, on a :

$$F_r^g(\omega) - G_r^g(\omega) \xrightarrow[r \rightarrow 0, r \in \mathbb{Q}]{} 0. \quad (8.4)$$

D'après la définition de $PI(\omega)$, on a :

$$G_r^g(\omega) = \frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r - m \rrbracket \mid (g'(rX), \langle \frac{g(rX)}{r} \rangle) \in PI(\omega)\}}{N_r - m}$$

Pour $E \subset \mathbb{R}^2$, on définit

$$H_r(E) = \frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r \rrbracket \mid (g'(rX), \langle \frac{g(rX)}{r} \rangle) \in E\}}{N_r}$$

On a alors

$$\frac{N_r H_r(PI(\omega)) - m}{N_r - m} \leq G_r^g(\omega) \leq \frac{N_r H_r(PI(\omega))}{N_r - m}. \quad (8.5)$$

Supposons que $E = [\alpha_1, \alpha_2) \times I$. La fonction g' est linéaire, elle est donc en particulier bijective. Soit g'^{-1} la fonction réciproque de g' . Suppose que $\alpha > 0$, pour que g' soit une fonction strictement croissante.

$(g'(rX), \langle \frac{g(rX)}{r} \rangle) \in E$ est équivalent à $g'(rX) \in [\alpha_1, \alpha_2)$ et $\langle \frac{g(rX)}{r} \rangle \in I$. Par conséquent,

$$H_r(E) = \frac{\text{card}\{X \in \llbracket \lceil \frac{g'^{-1}(\alpha_1)}{r} \rceil, \lfloor \frac{g'^{-1}(\alpha_2)}{r} \rfloor \rrbracket \mid \langle \frac{g(rX)}{r} \rangle \in I\}}{N_r}.$$

Si on applique le Lemme 3 pour $k = 0$ et $x \in [g'^{-1}(\alpha_1) \leq g'^{-1}(\alpha_2)]$, on a alors

$$\frac{N_r H_r(E)}{\lfloor \frac{g'^{-1}(\alpha_2)}{r} \rfloor - \lceil \frac{g'^{-1}(\alpha_1)}{r} \rceil + 1} \xrightarrow[r \in \mathbb{Q}, r \rightarrow 0]{} \mu(I)$$

On en déduit que

$$H_r([\alpha_1, \alpha_2) \times I) \xrightarrow[r \in \mathbb{Q}, r \rightarrow 0]{} \frac{g'^{-1}(\alpha_2) - g'^{-1}(\alpha_1)}{b - a} \mu(I) \quad (8.6)$$

Rappelons que

$$PI(\omega) = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha \in [\alpha_b, \alpha_e] \text{ et } \text{pinf}_\alpha(\omega) \leq \beta < \text{psup}_\alpha(\omega)\}$$

où $\alpha \mapsto \text{pinf}_\alpha(\omega)$ et $\alpha \mapsto \text{psup}_\alpha(\omega)$ sont deux fonctions affines par morceaux et de pentes dans $\llbracket -m, 0 \rrbracket$

Soient $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $y_i = \alpha_b + i \frac{\alpha_e - \alpha_b}{n}$ for $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

Dans la suite on approxime, par excès et par défaut, le polygone $PI(\omega)$ par deux réunions de n rectangles :

$$\bigcup_{i=1}^n [y_{i-1}, y_i] \times [\text{pinf}_{y_{i-1}}(\omega), \text{psup}_{y_i}(\omega)] \subset PI(\omega) \subset \bigcup_{i=1}^n [y_{i-1}, y_i] \times [\text{pinf}_{y_i}(\omega), \text{psup}_{y_{i-1}}(\omega)]$$

Puisque $y_i - y_{i-1} \leq \frac{1}{n}$, $\alpha \mapsto \text{pinf}_\alpha(\omega)$ et $\alpha \mapsto \text{psup}_\alpha(\omega)$ sont deux fonctions affines par morceaux et de pentes dans $\llbracket -m, 0 \rrbracket$, alors $\text{pinf}_{y_{i-1}}(\omega) \leq \text{pinf}_{y_i}(\omega) + \frac{m}{n}$ et $\text{psup}_{y_{i-1}}(\omega) \leq \text{psup}_{y_i}(\omega) + \frac{m}{n}$. Donc

$$\bigcup_{i=1}^n [y_{i-1}, y_i] \times [\text{pinf}_{y_i}(\omega) + \frac{m}{n}, \text{psup}_{y_i}(\omega)] \subset PI(\omega) \subset \bigcup_{i=1}^n [y_{i-1}, y_i] \times [\text{pinf}_{y_i}(\omega), \text{psup}_{y_i}(\omega) + \frac{m}{n}] \quad (8.7)$$

Soient

$$F_{n,r} = H_r \left(\bigcup_{i=1}^n [y_{i-1}, y_i] \times \left[\text{pinf}_{y_i}(\omega) + \frac{m}{n}, \text{psup}_{y_i}(\omega) \right] \right),$$

$$F'_{n,r} = H_r \left(\bigcup_{i=1}^n [y_{i-1}, y_i] \times \left[\text{pinf}_{y_i}(\omega), \text{psup}_{y_i}(\omega) + \frac{m}{n} \right] \right).$$

Alors, d'après l'équation (8.7) on a :

$$F_{n,r} \leq H_r(PI(\omega)) \leq F'_{n,r}.$$

D'après l'équation (8.6) on obtient alors

$$F_{n,r} \xrightarrow[r \in \mathbb{Q}]{r \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{g'^{-1}(y_i) - g'^{-1}(y_{i-1})}{b-a} \left(FL_{y_i}(\omega) - \frac{m}{n} \right)$$

$$F'_{n,r} \xrightarrow[r \in \mathbb{Q}]{r \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{g'^{-1}(y_i) - g'^{-1}(y_{i-1})}{b-a} \left(FL_{y_i}(\omega) + \frac{m}{n} \right)$$

Soit

$$F''_n = \sum_{i=1}^n \frac{g'^{-1}(y_i) - g'^{-1}(y_{i-1})}{b-a} FL_{y_i}(\omega).$$

$$\begin{aligned} \left(\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r \in \mathbb{Q}}} F_{n,r} \right) - F''_n &= - \sum_{i=1}^n \frac{g'^{-1}(y_i) - g'^{-1}(y_{i-1})}{b-a} \frac{m}{n} \\ &= - \sum_{i=1}^n \frac{\frac{1}{2\alpha}(y_i - y_{i-1})}{b-a} \frac{m}{n} \\ &= - \frac{m(\alpha_e - \alpha_b)}{2\alpha(b-a)} \frac{1}{n} \end{aligned}$$

De même,

$$\left(\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r \in \mathbb{Q}}} F'_{n,r} \right) - F''_n = \frac{m(\alpha_e - \alpha_b)}{2\alpha(b-a)} \frac{1}{n}.$$

Soit $z_i = g'^{-1}(y_i)$, on a alors

$$F''_n = \sum_{i=1}^n (z_i - z_{i-1}) \frac{FL_{g'(z_i)}(\omega)}{b-a}$$

En utilisant les sommes de Riemann pour la fonction $x \mapsto \frac{FL_{g'(x)}(\omega)}{b-a}$, [Taj08] [Mun71, Chap. 5] on obtient :

$$F''_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b-a} \int_a^b FL_{g'(x)}(\omega) dx$$

Soit $\epsilon > 0$, il existe N_1 tel que pour tout $n > N_1$, on a

$$\left| F_n'' - \frac{1}{b-a} \int_a^b FL_{g'(x)}(\omega) dx \right| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Il existe N_2 tel que pour tout $n > N_2$ on a

$$\frac{m(\alpha_e - \alpha_b)}{2\alpha(b-a)} \frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{3}$$

Il existe $R_1 > 0$ tel que pour tout rationnel $r < R_1$ on a :

$$|F_{N,r} - (F_N'' - \frac{m(\alpha_e - \alpha_b)}{2\alpha(b-a)} \frac{1}{N})| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Soit $N = \max(N_1, N_2) + 1$, il existe $R_2 > 0$ tel que pour tout $r < R_2$ on a :

$$|F'_{N,r} - (F_N'' + \frac{m(\alpha_e - \alpha_b)}{2\alpha(b-a)} \frac{1}{N})| \leq \frac{\epsilon}{3}.$$

Supposons que $r < \min(R_1, R_2)$.

On a alors

$$\begin{aligned} H_r(PI(\omega)) &\geq F_{n,r} \\ &\geq F_N'' - \frac{m(\alpha_e - \alpha_b)}{2\alpha(b-a)} \frac{1}{N} - \frac{\epsilon}{3} \\ &\geq F_N'' - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3} \\ &\geq \frac{1}{b-a} \int_a^b FL_{g'(x)}(\omega) dx - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3} - \frac{\epsilon}{3} \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b FL_{g'(x)}(\omega) dx - \epsilon \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} H_r(PI(\omega)) &\leq F'_{n,r} \\ &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b FL_{g'(x)}(\omega) dx + \epsilon, \end{aligned}$$

Ainsi

$$H_r(PI(\omega)) \xrightarrow[r \in \mathbb{Q}, r \rightarrow 0]{} \frac{1}{b-a} \int_a^b FL_{g'(x)}(\omega) dx$$

Par conséquent, (8.4) et (8.5) permettent de conclure la preuve du Théorème 2. \square

8.1.3 Démonstration du théorème 4

Il est facile de montrer que :

$$l(p, g, r) - \frac{(b-a)}{m} \sum_{\omega \in \mathcal{P}_m} p(\omega) F_r'^g(\omega) \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} 0$$

où

$$F_r'^g = \frac{\text{card}\{X \in \llbracket A_r, B_r - m \rrbracket \cap (A_r + m\mathbb{Z}) \mid \omega_{X,r,m}^g = \omega\}}{\lfloor \frac{B_r - m - A_r}{m} \rfloor}.$$

Considérons la courbe défini par $g(x) = \alpha x^2$ pour $\alpha \notin \mathbb{Q}$. On a démontré que si α est irrationnel alors

$$F_r'^g \xrightarrow[r \rightarrow 0, r \in \mathbb{Q}]{} \frac{1}{b-a} \int_a^b FL_{g'(x)}(\omega) dx.$$

Donc,

$$l(p, g, r) \xrightarrow[r \rightarrow 0, r \in \mathbb{Q}]{} \frac{1}{m} \sum_{\omega \in \mathcal{P}_m} p(\omega) \int_a^b FL_{g'(x)}(\omega) dx. \quad (4.3)$$

Soit F_m l'ensemble des nombre de Farey d'ordre m .

On sais que $x \mapsto FL_x(\omega)$ est une fonction affine sur l'intervalle $[F_i, F_{i+1}]$ ([Taj08]).

Alors pour chaque i , il existe u_i, v_i tel que $FL_x(\omega) = u_i x + v_i$.

Soit k_α le plus grand entier tel que $2\alpha a \leq F_{k_\alpha}$ et l_α le plus petit entier tel que $F_{l_\alpha} \leq 2\alpha b$.

Alors,

$$\begin{aligned} \int_a^b FL_{g'(x)}(\omega) dx &= \int_a^{\frac{F_{k_\alpha}}{2\alpha}} (u_{k_\alpha-1}(2\alpha x) + v_{k_\alpha-1}) dx + \sum_{i=k_\alpha}^{l_\alpha-1} \int_{\frac{F_i}{2\alpha}}^{\frac{F_{i+1}}{2\alpha}} (u_i(2\alpha x) + v_i) dx + \\ &\quad \int_{\frac{F_{l_\alpha}}{2\alpha}}^b (u_{l_\alpha}(2\alpha x) + v_{l_\alpha}) dx \\ &= [u_{k_\alpha-1}\alpha x^2 + v_{k_\alpha-1}x]_a^{\frac{F_{k_\alpha}}{2\alpha}} + \sum_{i=k_\alpha}^{l_\alpha-1} [u_i\alpha x^2 + v_i x]_{\frac{F_i}{2\alpha}}^{\frac{F_{i+1}}{2\alpha}} + [u_{l_\alpha}\alpha x^2 + v_{l_\alpha}x]_{\frac{F_{l_\alpha}}{2\alpha}}^b \\ &= \frac{A_{\alpha,\omega}}{\alpha} + B_{\alpha,\omega}\alpha + C_{\alpha,\omega} \end{aligned}$$

où

$$A_{\alpha,\omega} = \frac{1}{4} \left(u_{k_\alpha-1} F_{k_\alpha}^2 + 2v_{k_\alpha-1} F_{k_\alpha} + \sum_{i=k_\alpha}^{l_\alpha-1} [u_i x^2 + 2v_i x]_{F_i}^{F_{i+1}} - u_{l_\alpha} F_{l_\alpha}^2 - 2v_{l_\alpha} F_{l_\alpha} \right)$$

$$B_{\alpha,\omega} = u_{l_\alpha} b^2 - u_{k_\alpha-1} a^2$$

$$C_{\alpha,\omega} = v_{l_\alpha} b - v_{k_\alpha-1} a$$

Ainsi, les nombres k_α et l_α sont constants sur les intervalles qui ne contiennent pas les réelles $\frac{F_i}{2a}$ et $\frac{F_i}{2b}$, on peut donc partitionner l'intervalle $[0, \frac{1}{2b}]$ en un nombre fini d'intervalles $(I_k)_{0 \leq k \leq n}$ tels que les fonctions $\alpha \mapsto A_{\alpha,\omega}, B_{\alpha,\omega}, C_{\alpha,\omega}$ sont constantes sur chaque'un des intervalles I_k . D'après (4.3), on a :

$$\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r \in \mathbb{Q}}} l(p, g, r) = \frac{A_\alpha}{\alpha} + B_\alpha \alpha + C_\alpha \quad (8.8)$$

où

$$A_\alpha = \frac{1}{m} \sum_{\omega \in \mathcal{P}_m} p(\omega) A_{\alpha,\omega}, \quad B_\alpha = \frac{1}{m} \sum_{\omega \in \mathcal{P}_m} p(\omega) B_{\alpha,\omega}, \quad C_\alpha = \frac{1}{m} \sum_{\omega \in \mathcal{P}_m} p(\omega) C_{\alpha,\omega}$$

Par conséquent, $L_{est}(\alpha) = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ r \in \mathbb{Q}}} l(p, g, r)$ est de la forme $\frac{A}{\alpha} + B\alpha + C$ sur chaque'un des intervalles I_k .

Soit $L_{real}(\alpha)$ la longueur réelle de la courbe $\{(x, \alpha x^2) \mid x \in [a, b]\}$. On a :

$$\begin{aligned} L_{real}(\alpha) &= \int_a^b \sqrt{1 + (2\alpha x)^2} dx \\ &= \left[\frac{x\sqrt{1 + (2\alpha x)^2}}{2} + \frac{\arg \sinh(2\alpha x)}{4\alpha} \right]_a^b \end{aligned}$$

Supposons que $L_{real}(\alpha) = L_{est}(\alpha)$, pour un nombre infini de α . Alors, il existe un intervalle I_k de la partition précédente de $[0, \frac{1}{2b}]$ tel que $L_{real}(\alpha) = L_{est}(\alpha)$ pour $\alpha \in I_k$. Comme $L_{est}(\alpha)$ est de la forme $\frac{A}{\alpha} + B\alpha + C$ sur I_k , alors les fonctions $\alpha \mapsto \alpha L_{real}(\alpha)$ et $\alpha \mapsto \alpha(\frac{A}{\alpha} + B\alpha + C)$ sont holomorphes dans un ouvert de \mathbb{C} contenant $[0, \frac{1}{2b}]$ et sont égales pour un nombre infini de valeurs $\alpha \in I_k \subset [0, \frac{1}{2b}]$. Par conséquent, d'après le Théorème sur les fonctions holomorphes [Rud66, Cha. 10] on a :

$$\alpha L_{real}(\alpha) = A + B\alpha^2 + C\alpha \quad \text{for all } \alpha \in [0, \frac{1}{2b}]$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\alpha L_{real}(\alpha))}{\partial \alpha} &= b\sqrt{1 + (2\alpha b)^2} - a\sqrt{1 + (2\alpha a)^2} \\ &= b - a + 2(b^3 - a^3)\alpha^2 + o(\alpha^2) \quad \text{quand } \alpha \rightarrow 0 \end{aligned}$$

et puisque $\frac{\partial(A+B\alpha^2+C\alpha)}{\partial \alpha} = 2B\alpha + C$, alors $2(b^3 - a^3) = 0$, ce qui est impossible si $b > a$. Donc, notre hypothèse $L_{real}(\alpha) = L_{est}(\alpha)$ pour un nombre infini d'irrationnel α est absurde. \square

8.2 Annexe B

8.2.1 Généralisation du théorème de Weyl

Les preuves de la Proposition 4 (donnée dans la section 8.2.2) et du Théorème 7 (Donnée dans la section 8.2.3) utilisent un théorème général (théorème 9) qui généralise le théorème

de Weyl.

Nous rappelons que le théorème de Weyl énonce que la suite $(\langle \alpha n \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément répartie dans l'intervalle $[0, 1]$ lorsque le nombre α est irrationnel.

Cette section est consacrée à la démonstration du théorème 9, cette preuve suit les mêmes étapes que la preuve donnée dans [MF97, Chapter 1]. Nous donnerons aussi dans cette section deux corollaires importants qui se déduisent du théorème 9. Dans toute la section 8.2.1, on suppose donner $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que α ou $\beta \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, $c < d$ et $p, q \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $r \mapsto \gamma_r$ est une fonction de $]0, +\infty[$ dans \mathbb{R} .

On note $E_r = (\llbracket \lceil \frac{a}{r} \rceil, \lfloor \frac{b}{r} \rfloor \rrbracket \times \llbracket \lceil \frac{c}{r} \rceil, \lfloor \frac{d}{r} \rfloor \rrbracket) \cap ((p\mathbb{Z} + \lceil \frac{a}{r} \rceil) \times (q\mathbb{Z} + \lceil \frac{c}{r} \rceil))$ et $S_r = (\lfloor \frac{b}{r} \rfloor - \lceil \frac{a}{r} \rceil + 1)(\lfloor \frac{d}{r} \rfloor - \lceil \frac{c}{r} \rceil + 1)$.

Soit l'opérateur $l_{r;p,q,a,b,c,d} : L^1([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tout $f \in L^1([0, 1])$,

$$l_{r;p,q,a,b,c,d}(f) = \frac{1}{S_r} \sum_{(x,y) \in E_r} f(\langle \alpha x + \beta y + \gamma_r \rangle).$$

Lemme 6 Soient $h \in \mathbb{Z}^*$ et $e_h : t \mapsto e^{2\pi hit}$. Alors,

$$\lim_{r \rightarrow 0} l_{r;p,q,a,b,c,d}(e_h) = 0.$$

Preuve

$$\begin{aligned} l_{r;p,q,a,b,c,d}(e_h) &= \frac{1}{S_r} \sum_{\substack{x \in (p\mathbb{Z} + \lceil \frac{a}{r} \rceil), x \in \llbracket \lceil \frac{a}{r} \rceil, \lfloor \frac{b}{r} \rfloor \rrbracket \text{ and} \\ y \in (q\mathbb{Z} + \lceil \frac{c}{r} \rceil), y \in \llbracket \lceil \frac{c}{r} \rceil, \lfloor \frac{d}{r} \rfloor \rrbracket}} e_h(\alpha x + \beta y + \gamma_r). \\ &= \frac{1}{S_r} e_h(\gamma_r) \left(\sum_{\substack{x \in (p\mathbb{Z} + \lceil \frac{a}{r} \rceil) \text{ and} \\ x \in \llbracket \lceil \frac{a}{r} \rceil, \lfloor \frac{b}{r} \rfloor \rrbracket}} e_h(\alpha x) \right) \left(\sum_{\substack{y \in (q\mathbb{Z} + \lceil \frac{c}{r} \rceil) \text{ and} \\ y \in \llbracket \lceil \frac{c}{r} \rceil, \lfloor \frac{d}{r} \rfloor \rrbracket}} e_h(\beta y) \right). \end{aligned}$$

Supposons que $\alpha \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Alors,

$$|l_{r;p,q,a,b,c,d}(e_h)| \leq \frac{1}{(\lfloor \frac{b}{r} \rfloor - \lceil \frac{a}{r} \rceil + 1)(\lfloor \frac{d}{r} \rfloor - \lceil \frac{c}{r} \rceil + 1)} F^{\frac{|1 - e_h((E+1)h\alpha)|}{|1 - e_h(h\alpha)|}} \text{ où } E = \lfloor \frac{\lfloor \frac{b}{r} \rfloor - \lceil \frac{a}{r} \rceil}{p} \rfloor + 1 \text{ et } F = \lfloor \frac{\lfloor \frac{d}{r} \rfloor - \lceil \frac{c}{r} \rceil}{q} \rfloor + 1$$

$$\text{Donc } |l_{r;p,q,a,b,c,d}(e_h)| \leq \frac{1}{q} \left(1 + \frac{q-1}{\lfloor \frac{d}{r} \rfloor - \lceil \frac{c}{r} \rceil + 1} \right) \frac{1}{\lfloor \frac{b}{r} \rfloor - \lceil \frac{a}{r} \rceil + 1} \frac{2}{|1 - e_h(p\alpha)|}.$$

$$\text{Ainsi } \lim_{r \rightarrow 0} l_{r;p,q,a,b,c,d}(e_h) = 0 \text{ car } \lim_{r \rightarrow 0} \frac{q-1}{\lfloor \frac{d}{r} \rfloor - \lceil \frac{c}{r} \rceil + 1} = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lfloor \frac{b}{r} \rfloor - \lceil \frac{a}{r} \rceil + 1} = 0 \text{ et } |1 - e_h(p\alpha)| \neq 0 \text{ parce que } \alpha \text{ est irrationnelle.}$$

Nous avons le même résultat si β est nombre irrationnel. \square

Lemme 7

$$\lim_{r \rightarrow 0} l_{r;p,q,a,b,c,d}(e_0) = \frac{1}{pq}.$$

Preuve

$$l_{r;p,q,a,b,c,d}(e_0) = \frac{EF}{(\lfloor \frac{b}{r} \rfloor - \lceil \frac{a}{r} \rceil + 1)(\lfloor \frac{d}{r} \rfloor - \lceil \frac{c}{r} \rceil + 1)}$$

$$= \frac{1}{pq} \left(1 + \frac{p+\varepsilon_1}{\lfloor \frac{b}{r} \rfloor - \lceil \frac{a}{r} \rceil + 1}\right) \left(1 + \frac{q+\varepsilon_2}{\lfloor \frac{d}{r} \rfloor - \lceil \frac{c}{r} \rceil + 1}\right) \text{ où } |\varepsilon_1|, |\varepsilon_2| \leq 1 \text{ (i.e. voir la démonstration du Lemme 6 pour la définition de } E \text{ et } F).$$

Alors, $\lim_{r \rightarrow 0} l_{r;p,q,a,b,c,d}(e_0) = \frac{1}{pq}$. □

Proposition 11 Soit f est une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} . Alors,

$$\lim_{r \rightarrow 0} l_{r;p,q,a,b,c,d}(f) = \frac{1}{pq} \int_0^1 f(t) dt.$$

Preuve

Soit $P_N(t) = \sum_{h=-N}^N a_h e_h(t)$ un polynôme trigonométrique (i.e. $a_h \in \mathbb{C}$ pour $h = -N, \dots, N$). D'après les Lemmes 6 et 7 on a :

$$\lim_{r \rightarrow 0} l_{r;p,q,a,b,c,d}(P_N) = \frac{1}{pq} \int_0^1 P_N(t) dt.$$

D'après le théorème de Weierstrass, l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'ensemble des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} relativement à la norme uniforme ($\|\cdot\|_\infty$). Soient f une fonction continue de $[0, 1]$ dans \mathbb{C} et $\varepsilon > 0$. Alors, il existe un polynôme trigonométrique P_n tel que :

$$\|f - P_N\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} (|P_N(t) - f(t)|) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc, $|l_{r;p,q,a,b,c,d}(f) - l_{r;p,q,a,b,c,d}(P_N)| < \frac{\varepsilon}{3}$ et $\int_0^1 |P_N(t) - f(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Soit $R > 0$ tel que $|l_{r;p,q,a,b,c,d}(P_N) - \frac{1}{pq} \int_0^1 P_N(t) dt| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour tout $0 < r < R$. Alors,

$$|l_{r;p,q,a,b,c,d}(f) - \frac{1}{pq} \int_0^1 f(t) dt| <$$

$$|l_{r;p,q,a,b,c,d}(f) - l_{r;p,q,a,b,c,d}(P_N)| + |l_{r;p,q,a,b,c,d}(P_N) - \frac{1}{pq} \int_0^1 P_N(t) dt| + \frac{1}{pq} \int_0^1 |P_N(t) - f(t)| dt < \varepsilon$$

pour tout $0 < r < R$. □

Lemme 8 Soient \mathcal{M}_r ($r > 0$), \mathcal{M} des opérateurs linaires positifs et $\mathcal{F} \subset \{f : X \mapsto \mathbb{R} \mid X \neq \emptyset\}$ et soit $\mathcal{L} = \{f \in \mathcal{F} \mid \lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{M}_r(f) = \mathcal{M}(f)\} \subset \mathcal{F}$.

Si $f \in \mathcal{F}$ est tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions $g_1, g_2 \in \mathcal{L}$ telles que $g_1 \leq f \leq g_2$ et $\mathcal{M}(g_2) - \mathcal{M}(g_1) < \varepsilon$, alors $f \in \mathcal{L}$.

Ce lemme est donnée dans [MF97, lemma 1.2], nous redonnons sa preuve ci-dessous :

Preuve

$$\begin{aligned} m(g_1) &= \liminf_{r \rightarrow 0} m_r(g_1) \leq \liminf_{r \rightarrow 0} m_r(f) \\ &\leq \limsup_{r \rightarrow 0} m_r(f) \leq \limsup_{r \rightarrow 0} m_r(g_2) \\ &= m(g_2) \end{aligned}$$

ce qui implique $|m(f) - \liminf_{r \rightarrow 0} m_r(f)| < \varepsilon$ et $|m(f) - \limsup_{r \rightarrow 0} m_r(f)| < \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Donc $f \in \mathcal{F}$. \square

Théorème 9 Soit $I \subseteq [0, 1]$ un intervalle. Alors,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{card}(\{(x, y) \in E_r \mid \langle \alpha x + \beta y + \gamma_r \rangle \in I\})}{S_r} = \frac{1}{pq} \mu(I).$$

Preuve

Soit I un intervalle inclus dans $[0, 1]$.

$$\frac{\text{card}(\{(x, y) \in E_r \mid \langle \alpha x + \beta y + \gamma_r \rangle \in I\})}{S_r} = \frac{1}{S_r} \sum_{(x, y) \in E_r} \mathcal{X}_I(\langle \alpha x + \beta y + \gamma_r \rangle) = l_{r; p, q, a, b, c, d}(\mathcal{X}_I)$$

où \mathcal{X}_I est la fonction caractéristique de I (i.e. $\mathcal{X}_I(t) = 1$ si $t \in I$ et 0 si non).

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions continues g_1, g_2 sur $[0, 1]$ telles que $g_1 \leq \mathcal{X}_I \leq g_2$ et $\frac{1}{pq} \int_0^1 (g_2(t) - g_1(t)) dt < \varepsilon$. Donc,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{card}(\{(x, y) \in E_r \mid \langle \alpha x + \beta y + \gamma_r \rangle \in I\})}{S_r} = \frac{1}{pq} \mu(I).$$

\square

Corollaire 9 Soit $I \subseteq [0, 1]$ un intervalle. Alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(\{(x, y) \in \llbracket -N, N \rrbracket^2 \mid \langle \alpha x + \beta y + \gamma \rangle \in I\})}{(2N + 1)^2} = \mu(I).$$

Preuve

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que α ou $\beta \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $\gamma \in \mathbb{R}$ (i.e. $\gamma_r = \gamma$ pour tout $r \in \mathbb{R}^*$) et soit $I \subseteq [0, 1]$ un intervalle. Alors,

$$l_{\frac{1}{N}; 1, 1, -1, 1, -1, 1}(\mathcal{X}_I) = \frac{\text{card}(\{(x, y) \in \llbracket -N, N \rrbracket^2 \mid \langle \alpha x + \beta y + \gamma \rangle \in I\})}{(2N + 1)^2}.$$

Donc,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(\{(x, y) \in \llbracket -N, N \rrbracket^2 \mid \langle \alpha x + \beta y + \gamma \rangle \in I\})}{(2N + 1)^2} = \mu(I).$$

\square

Corollaire 10 Soient $I \subseteq [0, 1]$ un intervalle et $p, q \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(\{(x, y) \in \llbracket -N, N \rrbracket^2 \cap (p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}) \mid \langle \alpha x + \beta y + \gamma \rangle \in I\})}{(2N + 1)^2} = \frac{1}{pq} \mu(I).$$

Preuve

Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que α ou $\beta \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $\gamma \in \mathbb{R}$ (i.e. $\gamma_r = \gamma$ pour tout $r \in \mathbb{R}^*$), $p, q \in \mathbb{N}^*$ et soit $I \subseteq [0, 1]$ un intervalle. Alors,

$$l_{\frac{1}{N}; p, q, -1, 1, -1, 1}(\mathcal{X}_I) = \frac{\text{card}(\{(x, y) \in \llbracket -N, N \rrbracket^2 \cap (p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}) \mid \langle \alpha x + \beta y + \gamma \rangle \in I\})}{(2N + 1)^2}.$$

Donc,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\text{card}(\{(x, y) \in \llbracket -N, N \rrbracket^2 \cap (p\mathbb{Z} \times q\mathbb{Z}) \mid \langle \alpha x + \beta y + \gamma \rangle \in I\})}{(2N + 1)^2} = \frac{1}{pq} \mu(I).$$

□

8.2.2 Proposition 4

Preuve de la Proposition 4

1. Si $\omega \in \mathcal{C}_{m, n, \alpha, \beta}$, alors il existe $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\omega = \omega_{i, j}(\alpha, \beta, \gamma) = \omega_{0, 0}(\alpha, \beta, \langle \alpha i + \beta j + \gamma \rangle)$. Par conséquent, $\langle \alpha i + \beta j + \gamma \rangle \in I^{\alpha, \beta}(\omega)$. Donc $\text{freq}_{\alpha, \beta}(\omega) = \mu(I^{\alpha, \beta}(\omega)) > 0$ car $I^{\alpha, \beta}(\omega)$ est un intervalle non vide de la forme $[A, A'[,$

Inversement, si $\text{freq}_{\alpha, \beta}(\omega) > 0$, alors $I^{\alpha, \beta}(\omega) \neq \emptyset$. Donc, d'après la Proposition 3, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, il existe $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\langle \alpha i + \beta j + \gamma \rangle \in I^{\alpha, \beta}(\omega)$ ce qui implique que $\omega \in \mathcal{C}_{m, n, \alpha, \beta}$.

2. Montrons maintenant que $\text{overfreq}_{\alpha, \beta, \gamma}(\omega) = \text{freq}_{\alpha, \beta}(\omega)$ pour tout $\alpha, \beta \in [0, 1]$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.

(a) Supposons que α et β sont des nombres rationnels et soit $\gamma \in \mathbb{R}$. Alors, $\alpha = \frac{p_1}{q_1}$ et $\beta = \frac{p_2}{q_2}$ avec p_i et q_i sont premiers entre eux.

Soit $p = \text{pgcd}(p_1, p_2)$, $p'_1 = \frac{p_1}{p}$, $p'_2 = \frac{p_2}{p}$, $q = \text{pgcd}(q_1, q_2)$, $q'_1 = \frac{q_1}{q}$, $q'_2 = \frac{q_2}{q}$, $q_3 = \frac{q_1 q_2}{q}$ et $r = \frac{pq}{q_1 q_2} = \frac{p}{q_3}$, $k_0 = \lfloor \gamma q_3 \rfloor$ et $\gamma' = \gamma - \frac{\lfloor \gamma q_3 \rfloor}{q_3}$. Alors, $0 \leq \gamma' < \frac{1}{q_3}$.

Comme les nombres $p'_1 q'_2$ et $p'_2 q'_1$ sont premiers entre eux, alors $\{p'_1 q'_2 x + p'_2 q'_1 y \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2\} = \mathbb{Z}$ et donc $\{\alpha x + \beta y \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2\} = r \{p'_1 q'_2 x + p'_2 q'_1 y \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2\} = r\mathbb{Z}$, ce qui implique que $\{\langle \alpha x + \beta y + \gamma \rangle \mid (x, y) \in \mathbb{Z}^2\} = \{\gamma' + \frac{i}{q_3} \mid i \in \llbracket 0, q_3 - 1 \rrbracket\}$ parce que p et q_3 sont premiers entre eux.

Considérons la fonction $f : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}/q_3\mathbb{Z}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $f(x, y) = p'_1 q'_2 x + p'_2 q'_1 y \pmod{q_3}$. Alors, f est surjective et pour tout $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$, $f(x + q_1, y + q_2) = f(x, y)$. Donc f peut être considérée comme une fonction de

$\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q_2\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/q_3\mathbb{Z}$ et dans ce cas on utilise la notation \hat{f} pour la distinguer de f .

Donc, \hat{f} est un morphisme surjectif de groupes et donc pour tous les $y \in \mathbb{Z}/q_3\mathbb{Z}$, $\text{card}(\{x \in \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q_2\mathbb{Z} \mid \hat{f}(x) = y\}) = \text{card}(Ker(\hat{f})) = \frac{\text{card}(\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q_2\mathbb{Z})}{\text{card}(\mathbb{Z}/q_3\mathbb{Z})} = q$

où $Ker(\hat{f})$ est le noyau du morphisme de groupes \hat{f} .

Soient $s, t \in \mathbb{Z}$ et considérons $H(s, t) = \llbracket s, s + q_1 - 1 \rrbracket \times \llbracket t, t + q_2 - 1 \rrbracket$ (i.e. $H(s, t)$ peut être considérée comme une représentation du groupe $\mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q_2\mathbb{Z}$).

Alors, pour tout $s, t \in \mathbb{Z}$ et tout $y \in \mathbb{Z}/q_3\mathbb{Z}$, $\text{card}(\{x \in H(s, t) \mid f(x) = y\}) = \text{card}(\{x \in \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q_2\mathbb{Z} \mid \hat{f}(x) = y\}) = q$.

Soient $i \in \llbracket 0, q_3 - 1 \rrbracket$ et $(x_0(i), y_0(i)) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\langle \alpha x_0(i) + \beta y_0(i) + \gamma \rangle = \gamma' + \frac{i}{q_3}$.

On définit $F(i, \gamma) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid \langle \alpha x + \beta y + \gamma \rangle = \gamma' + \frac{i}{q_3}\}$ et pour tout ensemble E , On définit $F(i, \gamma, E) = F(i, \gamma) \cap E$.

Alors, $(x, y) \in F(i, \gamma)$ si et seulement si $f((x, y) - (x_0(i), y_0(i))) = 0$ car p et q_3 sont premiers entre eux. Donc,

$$\begin{aligned} F(i, \gamma, H(s, t)) &= \{(x_0(i), y_0(i)) + (x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid f(x, y) = 0\} \cap H(s, t) \\ &= \{(x, y) \in H(s - x_0(i), t - y_0(i)) \mid f(x, y) = 0\}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $\text{card}(F(i, \gamma, H(s, t))) = q$ qui est indépendant de $s, t \in \mathbb{Z}$ et $i \in \llbracket 0, q_3 - 1 \rrbracket$.

Soit $N \in \mathbb{N}$ et $E_N = \llbracket -N, N \rrbracket^2$. Alors,

$E_N = (\bigcup_{(i,j) \in \llbracket 0, \lfloor \frac{2N+1}{q_1} \rfloor - 1 \rrbracket \times \llbracket 0, \lfloor \frac{2N+1}{q_2} \rfloor - 1 \rrbracket} H(-N + q_1 i, -N + q_2 j)) \cup E'_N$ où $E'_N = \llbracket -N + q_1(\lfloor \frac{2N+1}{q_1} \rfloor - 1), N \rrbracket \times \llbracket -N, N \rrbracket \cup \llbracket -N, N \rrbracket \times \llbracket -N + q_2(\lfloor \frac{2N+1}{q_2} \rfloor - 1), N \rrbracket$.

Donc E_N est partitionnée en $\lfloor \frac{2N+1}{q_1} \rfloor \lfloor \frac{2N+1}{q_2} \rfloor$ rectangles de la forme $H(s, t)$ en plus de E'_N .

Donc, $\text{card}(F(i, \gamma, E_N)) = \lfloor \frac{2N+1}{q_1} \rfloor \lfloor \frac{2N+1}{q_2} \rfloor q + \text{card}(F(i, \gamma, E'_N))$.

Alors,

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\text{card}(F(i, \gamma, E_N))}{(2N+1)^2} &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\lfloor \frac{2N+1}{q_1} \rfloor \lfloor \frac{2N+1}{q_2} \rfloor q}{(2N+1)^2} + \\ &\quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\text{card}(F(i, \gamma, E'_N))}{(2N+1)^2} = \frac{q}{q_1 q_2} = \frac{1}{q_3} \end{aligned}$$

car $\text{card}(F(i, \gamma, E'_N)) < (q_1 + q_2)(2N + 1)$.

Par conséquent, pour tout $l \in \llbracket 0, q_3 - 1 \rrbracket$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\text{card}(\{(i, j) \in E_N \mid \langle \alpha i + \beta j + \gamma \rangle = \gamma' + \frac{l}{q_3}\})}{(2N+1)^2} = \frac{1}{q_3}.$$

Posons $L = \{\langle \alpha i + \beta j \rangle \mid (i, j) \in \mathcal{F}_{m,n}\} = \frac{1}{q_3} \{l_1, l_2, \dots, l_h\}$ où $0 = l_1 < l_2 < \dots < l_h$.

Alors, $B_0^{\alpha, \beta} = 0$ et $B_i^{\alpha, \beta} = 1 - \frac{l_{h-i+1}}{q_3} = \frac{q_3 - l_{h-i+1}}{q_3}$ pour $i = 1, \dots, h$.

Soient $k \in \llbracket 0, h-1 \rrbracket$ et ω tels que $I^{\alpha,\beta}(\omega) = [B_k^{\alpha,\beta}, B_{k+1}^{\alpha,\beta}[$. Donc

$$\begin{aligned} \text{overfreq}_{\alpha,\beta,\gamma}(\omega) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\text{card}(\{(i,j) \in E_N \mid \langle \alpha i + \beta j + \gamma \rangle \in [B_k^{\alpha,\beta}, B_{k+1}^{\alpha,\beta}[)\})}{(2N+1)^2} \\ &= M \frac{1}{q_3} \quad \text{où } M = \text{card}(\{l \mid \gamma' + \frac{l}{q_3} \in [B_k^{\alpha,\beta}, B_{k+1}^{\alpha,\beta}[)\}) \\ &= B_{k+1}^{\alpha,\beta} - B_k^{\alpha,\beta} \quad \text{car } 0 \leq \gamma' < \frac{1}{q_3} \\ &= \text{freq}_{\alpha,\beta}(\omega) \end{aligned}$$

(b) Supposons maintenant que α ou β est un nombre irrationnel. D'après le corollaire 9, on a :

$$\begin{aligned} \text{overfreq}_{\alpha,\beta,\gamma}(\omega) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{\text{card}(\{(i,j) \in E_N \mid \langle \alpha i + \beta j + \gamma \rangle \in I^{\alpha,\beta}(\omega)\})}{(2N+1)^2} \\ &= \mu(I^{\alpha,\beta}(\omega)) \end{aligned}$$

Donc, pour tout $\alpha, \beta \in [0, 1]$, $\text{overfreq}_{\alpha,\beta,\gamma}(\omega) = \text{freq}_{\alpha,\beta}(\omega)$.

8.2.3 Théorème 7

La démonstration de Théorème 7 est besoin de deux lemmes

Lemme 9 Soient \mathcal{O} une composante connexe de $[0, 1]^2 \setminus E_{m,n}$ et $(k, l) \in \mathcal{F}_{m,n}$. Alors, la fonction $(\alpha, \beta) \mapsto \lfloor \alpha k + \beta l \rfloor$ est constante sur \mathcal{O} et la fonction $(\alpha, \beta) \mapsto C_{k,l}^{\alpha,\beta}$ est une fonction affine sur \mathcal{O} .

Preuve

Supposons que $(\alpha, \beta) \mapsto \lfloor \alpha k + \beta l \rfloor$ n'est pas constante sur \mathcal{O} et soient $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta') \in \mathcal{O} \subset [0, 1]^2 \setminus E_{m,n}$ tels que $h = \lfloor \alpha k + \beta l \rfloor < h' = \lfloor \alpha' k + \beta' l \rfloor$ ($h' \geq h + 1$). Donc $\alpha k + \beta l - (h + 1) < 0$ et $\alpha' k + \beta' l - (h + 1) > 0$ et par conséquent, $(\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ ne sont pas dans la même composante connexe de $[0, 1]^2 \setminus E_{m,n}$ car ils sont séparés par la droite $D_{k,l,-(h+1)}$. Ainsi, pour tout $(k, l) \in \mathcal{F}_{m,n}$ et pour toute composante connexe \mathcal{O} de $[0, 1]^2 \setminus E_{m,n}$, la fonction $(\alpha, \beta) \mapsto \lfloor \alpha k + \beta l \rfloor$ est constante dans \mathcal{O} .

Comme $(\alpha, \beta) \mapsto \lfloor \alpha k + \beta l \rfloor$ est constante dans \mathcal{O} et $C_{k,l}^{\alpha,\beta} = 1 - \langle \alpha k + \beta l \rangle = -\alpha k - \beta l + (1 + \lfloor \alpha k + \beta l \rfloor)$, alors la fonction $(\alpha, \beta) \mapsto C_{k,l}^{\alpha,\beta}$ est une fonction affine sur \mathcal{O} . \square

Lemme 10 Soient \mathcal{O} est une composante connexe de $[0, 1]^2 \setminus E_{m,n}$ et $(\alpha, \beta) \in \mathcal{O}$. Alors, les valeurs $C_{k,l}^{\alpha,\beta}$ pour $(k, l) \in \mathcal{F}_{m,n}$ sont distinctes.

Preuve

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathcal{O} \subset [0, 1]^2 \setminus E_{m,n}$ et supposons qu'il existe $(k, l), (k', l') \in \mathcal{F}_{m,n}$ et $(k, l) \neq$

(k', l') tel que $C_{k,l}^{\alpha,\beta} = C_{k',l'}^{\alpha,\beta}$. Ceci implique que $\alpha k + \beta l - h = \alpha k' + \beta l' - h'$ où d'après le Lemme 9, $h = \lfloor \alpha k + \beta l \rfloor$ (respectivement $h' = \lfloor \alpha k' + \beta l' \rfloor$) est constante sur \mathcal{O} . Alors, $(\alpha, \beta) \in D_{k-k', l-l', h-h'}$. Ce qui est absurde car comme $k - k' \in \llbracket -m + 1, m - 1 \rrbracket$ et $l - l' \in \llbracket -n + 1, n - 1 \rrbracket$, alors $(\alpha, \beta) \in E_{m,n}$ mais d'après l'hypothèse on a $(\alpha, \beta) \in \mathcal{O} \subset [0, 1]^2 \setminus E_{m,n}$
 \square

Preuve du théorème 7

Soit $\mathcal{O} \subseteq [0, 1]^2 \setminus E_{m,n}$.

Supposons qu'il existe $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in \mathcal{O}$ et $(k_1, l_1), (k_2, l_2)$ deux couples différents de $\mathcal{F}_{m,n}$ tels que $C_{k_1, l_1}^{\alpha_1, \beta_1} < C_{k_2, l_2}^{\alpha_1, \beta_1}$ et $C_{k_1, l_1}^{\alpha_2, \beta_2} > C_{k_2, l_2}^{\alpha_2, \beta_2}$. Alors, d'après la continuité des fonctions $(\alpha, \beta) \mapsto C_{k,l}^{\alpha,\beta}$ et la connexité de \mathcal{O} , il existe $(\alpha, \beta) \in \mathcal{O}$ tel que $C_{k_1, l_1}^{\alpha, \beta} = C_{k_2, l_2}^{\alpha, \beta}$ ce qui est impossible par le Lemme 10. Donc, $(\alpha, \beta) \mapsto \sigma^{\alpha, \beta}$ est constante sur \mathcal{O} .

D'après le Lemme 10, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathcal{O}$ on sait que les valeurs $C_{k,l}^{\alpha,\beta}$ pour $(k, l) \in \mathcal{F}_{m,n}$ sont distinctes. Donc, $(\alpha, \beta) \mapsto \mathcal{C}_{m,n,\alpha,\beta}$ est une fonction constante sur \mathcal{O} .

Soient $(\alpha_0, \beta_0) \in \mathcal{O}$, $\sigma_0 = \sigma^{\alpha_0, \beta_0}$ et $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}_{m,n,\alpha_0,\beta_0}$.

Donc, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathcal{O}$, on a $B_h^{\alpha,\beta} = C_{\sigma_0(h)}^{\alpha,\beta}$ pour tout $h \in \llbracket 1, mn \rrbracket$. Par conséquent, d'après le Lemme 9, $(\alpha, \beta) \mapsto B_h^{\alpha,\beta}$ est une fonction affine sur \mathcal{O} pour tout $h \in \llbracket 1, mn \rrbracket$.

Si $\omega \in \mathcal{C}_0$, alors $\text{freq}_{\alpha,\beta}(\omega) = B_{h+1}^{\alpha,\beta} - B_h^{\alpha,\beta}$ pour un certain $h \in \llbracket 1, mn - 1 \rrbracket$, donc $(\alpha, \beta) \mapsto \text{freq}_{\alpha,\beta}(\omega)$ est une fonction affine dans \mathcal{O} pour tout $\omega \in \mathcal{C}_0$.

Soient $\omega \in (\mathcal{U}_{m,n} \setminus \mathcal{C}_0)$ et $(\alpha, \beta) \in \mathcal{O}$. Alors, $I^{\alpha,\beta}(\omega) = \emptyset$ ce qui implique que $\text{freq}_{\alpha,\beta}(\omega) = 0$. Par conséquent, pour tout $\omega \in \mathcal{U}_{m,n}$, $(\alpha, \beta) \mapsto \text{freq}_{\alpha,\beta}(\omega)$ est une fonction affine sur toute composante connexe de $[0, 1]^2 \setminus E_{m,n}$.

D'après le Théorème 6, pour tout $\omega \in \mathcal{U}_{m,n}$, la fonction $(\alpha, \beta) \mapsto \text{freq}_{\alpha,\beta}(\omega)$ est une fonction continue qui est affines par morceaux. Alors, pour tout $\omega \in \mathcal{U}_{m,n}$ et pour tout composante connexe \mathcal{O} , la fonction $(\alpha, \beta) \mapsto \text{freq}_{\alpha,\beta}(\omega)$ est une fonction affine sur $\overline{\mathcal{O}}$ où $\overline{\mathcal{O}}$ est la fermeture de \mathcal{O} .

Il reste maintenant à prouver que si (α, β) et (α', β') ne sont pas dans la même composante connexe de $[0, 1]^2 \setminus E_{m,n}$, alors $\mathcal{C}_{m,n,\alpha,\beta} \neq \mathcal{C}_{m,n,\alpha',\beta'}$.

Soient $(\alpha, \beta) \in [0, 1]^2$ et $(k, l), (k', l') \in \mathcal{F}_{m,n}$, on note :

- $PZ(\alpha, \beta, k, l) = \{\omega(k, l) \mid \omega \in \mathcal{C}_{m,n,\alpha,\beta}\}$ et
- $PZ_2(\alpha, \beta, k, l, k', l') = \{(\omega(k, l), \omega(k', l')) \mid \omega \in \mathcal{C}_{m,n,\alpha,\beta}\}$.

$PZ(\alpha, \beta, k, l)$ (respectivement $PZ_2(\alpha, \beta, k, l, k', l')$) est l'ensemble des restrictions de la (m, n) -cubes de $\mathcal{C}_{m,n,\alpha,\beta}$ aux sous-fenêtres $\{(k, l)\}$ (respectivement $\{(k, l), (k', l')\}$).

Soient (α, β) et (α', β') deux points distincts dans deux composantes connexes de $[0, 1]^2 \setminus E_{m,n}$. Alors, il existe une ligne $D_{u,v,w}$ de $E_{m,n}$ tel que $u\alpha + v\beta + w$ et $u\alpha' + v\beta' + w$ n'ont pas le même signe. Supposons par exemple que $u\alpha + v\beta + w < 0$ et $u\alpha' + v\beta' + w > 0$. D'après la définition de $E_{m,n}$ il existe des $(k, l), (k', l') \in \mathcal{F}_{m,n}$ tels que $u = k' - k$ et $v = l' - l$. On a $k'\alpha + l'\beta < k\alpha + l\beta - w$ et $k'\alpha' + l'\beta' > k\alpha' + l\beta' - w$. Soient $q_1 = \lfloor \alpha k + \beta l \rfloor$, $q_2 = \lfloor \alpha k' + \beta l' \rfloor$, $q'_1 = \lfloor \alpha' k + \beta' l \rfloor$, $q'_2 = \lfloor \alpha' k' + \beta' l' \rfloor$.

Alors, $PZ(\alpha, \beta, k, l) = \{q_1\}$ ou $\{q_1, q_1 + 1\}$ et $PZ(\alpha', \beta', k, l) = \{q'_1\}$ ou $\{q'_1, q'_1 + 1\}$. Donc, si $q_1 \neq q'_1$ alors $PZ(\alpha, \beta, k, l) \neq PZ(\alpha', \beta', k, l)$ et donc $\mathcal{C}_{m,n,\alpha,\beta} \neq \mathcal{C}_{m,n,\alpha',\beta'}$. De même

$\mathcal{C}_{m,n,\alpha,\beta} \neq \mathcal{C}_{m,n,\alpha',\beta'}$ si $q_2 \neq q'_2$.

On peut donc maintenant supposer que $q_1 = q'_1$ et $q_2 = q'_2$. On a alors

$$\begin{aligned} \langle k'\alpha + l'\beta \rangle &< \langle k\alpha + l\beta \rangle + q_1 - q_2 - w \\ \langle k'\alpha' + l'\beta' \rangle &> \langle k\alpha' + l\beta' \rangle + q_1 - q_2 - w \end{aligned}$$

Comme $\langle x \rangle$ appartient $[0, 1[$, alors on a $q_1 - q_2 - w = 0$, et par conséquent, $C_{k',l'}^{\alpha,\beta} > C_{k,l}^{\alpha,\beta}$ et $C_{k',l'}^{\alpha',\beta'} < C_{k,l}^{\alpha',\beta'}$.

On en déduit que $PZ_2(\alpha, \beta, k, l, k', l') = \{(q_1, q_2), (q_1 + 1, q_2)\}$ ou $\{(q_1, q_2), (q_1 + 1, q_2), (q_1 + 1, q_2 + 1)\}$ et $PZ_2(\alpha', \beta', k, l, k', l') = \{(q_1, q_2), (q_1, q_2 + 1)\}$ ou $\{(q_1, q_2), (q_1, q_2 + 1), (q_1 + 1, q_2 + 1)\}$. Ce qui implique dans ce cas aussi que $\mathcal{C}_{m,n,\alpha,\beta} \neq \mathcal{C}_{m,n,\alpha',\beta'}$.

8.2.4 Proposition 10

Preuve de la Proposition 10

On peut supposer que $m \geq n$. Si $m = 1$ ou $n = 1$, la proposition est évidente. Dans la suite, nous supposons que $m \geq n > 1$. Soient α, β tels que $\alpha \leq \frac{1}{4m}$, $\beta = \alpha + \epsilon$, avec $0 < \epsilon \leq \frac{\alpha}{n-1}$ et $\alpha, \beta, \frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$. On a alors $\langle i\alpha + j\beta \rangle = i\alpha + j\beta$ pour tous les $0 \leq i < m, 0 \leq j < n$ car $\alpha, \beta \leq \frac{1}{2m}$. Ainsi, d'après les propositions 3 et 4, les valeurs des fréquences sont différentes entre deux nombres consécutifs de la suite $\{\alpha i + \beta j \mid 0 \leq i < m, 0 \leq j < n\}$. Comme $0 < \epsilon \leq \frac{\alpha}{n-1}$, on a $i\alpha + j\beta < i'\alpha + j'\beta$ si et seulement si $i + j < i' + j'$ ou $(i + j = i' + j' \text{ et } j < j')$, alors la suite triée des éléments de l'ensemble $\{\alpha i + \beta j \mid 0 \leq i < m, 0 \leq j < n\}$ est l'enchaînement de m suite : les n premières suites sont : $(k\alpha, (k-1)\alpha + \beta, (k-1)\alpha + 2\beta, \dots, k\beta)$ avec $0 \leq k < n$, et les $m-n$ dernières suites sont : $(k\alpha, (k-1)\alpha + \beta, \dots, (k-n+1)\alpha + (n-1)\beta)$ avec $n \leq k < m$. Donc, on peut calculer explicitement l'ensemble $E_{\alpha,\beta}$ des différences entre deux éléments consécutives de la suite globale : $E_{\alpha,\beta} = \{\beta - \alpha\} \cup \{k\alpha - (k-1)\beta \mid 1 \leq k < n\} \cup \{1 - (m-1)\alpha - (n-1)\beta\}$. Par conséquent, l'ensemble des valeurs des fréquences est $E_{\alpha,\beta}$ si $m = n$ et $E_{\alpha,\beta} \cup \{n\alpha - (n-1)\beta\}$ si $m > n$. Comme $\alpha, \beta, \frac{\alpha}{\beta} \notin \mathbb{Q}$, on a $\text{card}(E_{\alpha,\beta}) = n+1$. \square

8.2.5 Théorème 8

Pour démontrer le théorème 8, on a besoin d'une définition et d'un lemme :

Définition 36 La fréquence de non-chevauchement $F_r^{\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,d}$ d'un motif ω de taille $m \times n$ dans R_r est définie par :

$$F_r^{\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,d} = \frac{\text{card}(\{(x, y) \in E_r \mid \omega_{x,y}(\alpha, \beta, \frac{\gamma}{r}) = \omega\})}{S_r}$$

Lemme 11 Soient $\alpha, \beta \in [0, 1]$ tels que α ou β est un nombre irrationnel, $\gamma, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathcal{C}_{m,n,\alpha,\beta}$. Alors,

$$F^{\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,d} = \lim_{r \rightarrow 0} F_r^{\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,d} = \frac{1}{mn} \text{freq}_{\alpha,\beta}(\omega)$$

En particulier, $F^{\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,d}$ ne dépend pas de γ, a, b, c , et d .

Preuve

$$\begin{aligned} F^{\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,d} &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{card}(\{(x,y) \in E_r \mid \omega_{x,y}(\alpha,\beta,\frac{\gamma}{r}) = \omega\})}{S_r} \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{card}(\{(x,y) \in E_r \mid (\alpha x + \beta y + \frac{1}{r}\gamma) \in I^{\alpha,\beta}(\omega)\})}{S_r} \end{aligned}$$

Donc, en prenant $p = m$, $q = n$, $\gamma_r = \frac{1}{r}\gamma$ et $I = I^{\alpha,\beta}(\omega)$ dans le Théorème 9, on a alors $F^{\alpha,\beta,\gamma,a,b,c,d} = \frac{1}{mn}\mu(I^{\alpha,\beta}(\omega)) = \frac{1}{mn}\text{freq}_{\alpha,\beta}(\omega)$ car d'après la Proposition 4, $\text{overfreq}_{\alpha,\beta,\gamma}(\omega) = \mu(I^{\alpha,\beta}(\omega))$ \square

Preuve du Théorème 8

Soit la fonction $p : \mathcal{U}_{m,n} \rightarrow \mathbb{R}$ qui associe à chaque motif ω de taille $m \times n$ un poids $p(\omega)$. On peut décomposer le morceau rectangulaire R_r du plan discret en (m, n) -cubes de la façon suivante :

$$R_r = \begin{array}{ccccc} \omega_{1,1} & \omega_{2,1} & \cdots & \omega_{M_r,1} & \varepsilon_{1,r} \\ \omega_{1,2} & \omega_{2,2} & \cdots & \omega_{M_r,2} & \varepsilon_{2,r} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \omega_{1,N_r} & \omega_{2,N_r} & \cdots & \omega_{M_r,N_r} & \varepsilon_{N_r,r} \\ \varepsilon'_{1,r} & \varepsilon'_{2,r} & \cdots & \varepsilon'_{M_r,r} & \varepsilon'_{M_r+1,r} \end{array}$$

où $M_r = \lfloor \frac{\lfloor \frac{b}{r} \rfloor - \lfloor \frac{a}{r} \rfloor + 1}{m} \rfloor$ et $N_r = \lfloor \frac{\lfloor \frac{d}{r} \rfloor - \lfloor \frac{c}{r} \rfloor + 1}{n} \rfloor$, $\omega_{i,j} \in \mathcal{U}_{m,n}$ pour $(i, j) \in \llbracket 1, N_r \rrbracket \times \llbracket 1, M_r \rrbracket$ et $\varepsilon_{i,r}, \varepsilon'_{j,r}$ sont de tailles inférieures à $m \times n$ pour $i \in \llbracket 1, N_r \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1, M_r + 1 \rrbracket$.

Ainsi, l'aire estimée du morceau rectangulaire R_r du plan discret est :

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{r,m,n,p}(R_r) &= r^2 \sum_{1 \leq i \leq M_r} \sum_{1 \leq j \leq N_r} p(\omega_{i,j}) \\ &= r^2 \sum_{\omega \in \mathcal{U}_{m,n}} n(\omega, R_r, r) p(\omega) \end{aligned}$$

où $n(\omega, R_r, r) = \text{card}(\{(x, y) \in ((m\mathbb{Z} + \lfloor \frac{a}{r} \rfloor) \times (n\mathbb{Z} + \lfloor \frac{c}{r} \rfloor)) \cap (\llbracket \lfloor \frac{a}{r} \rfloor, \lfloor \lfloor \frac{b}{r} \rfloor \rrbracket \times \llbracket \lfloor \frac{c}{r} \rfloor, \lfloor \lfloor \frac{d}{r} \rfloor \rrbracket) \mid \omega_{x,y}(\alpha, \beta, \frac{\gamma}{r}) = \omega\})$ est le nombre d'occurrences du motif ω dans R_r (*i.e.* On néglige la contribution des motifs $\varepsilon_{i,j}$ de tailles inférieures à (m, n)).

Alors,

$$\begin{aligned} DA_{m,n,p}(R) &= \lim_{r \rightarrow 0} r^2 \sum_{\omega \in \mathcal{U}_{m,n}} n(\omega, R_r, r) p(\omega) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} r^2 S_r \sum_{\omega \in \mathcal{U}_{m,n}} \frac{n(\omega, R_r, r)}{S_r} p(\omega) \\ &= (b - a)(d - c) \sum_{\omega \in \mathcal{U}_{m,n}} \frac{1}{mn} \text{freq}_{\alpha,\beta}(\omega) p(\omega) \quad (\text{Par le Lemme 11}) \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après le Théorème 7, $(\alpha, \beta) \mapsto DA_{m,n,p}(\cdot)$ est une fonction affine pour $(\alpha, \beta) \in (\mathcal{O} \setminus \mathbb{Q}^2)$. \square

Bibliographie

- [AMM08] Daurat Alain, Tajine Mohamed, and Zouaoui Mahdi. About the frequencies of some patterns in digital planes application to area estimators. In *Proc. of DGCI 2008*, volume 4992 of *Lecture Notes in Comp. Sci.*, pages 45–56, 2008.
- [AZ07] Granville Andrew and Rudnick Zeév. Uniform distribution. In Andrew Granville and Zeév Rudnick, editors, *Equidistribution in Number Theory, An Introduction*, pages 1–13. Springer, 2007.
- [BCK07] Valentin Brimkov, David Coeurjolly, and Reinhard Klette. Digital planarity - a review. *Discrete Appl. Math.*, 155(4):468–495, 2007.
- [Ber90] J. Berstel. Tracé de droites, fractions continues et morphismes itérés. *M. Lothaire, Mots, Mélanges offerts à M.P. Schützenzereger*, *Hermes*, 1990.
- [Ber96] Valérie Berthé. Fréquences des facteurs des suites sturmiennes. *Theoret. Comput. Sci.*, 165(2):295–309, 1996.
- [BFJP07] Valérie Berthé, Christophe Fiorio, Damien Jamet, and Fabrice Philippe. On some applications of generalized functionality for arithmetic discrete planes. *Image Vis. Comput.*, 25(10):1671–1684, 2007.
- [BL88] Carlos A. Bersenstrin and David Lavine. On the number of digital straight line segments. *IEEE Trans. On Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 10(6):880–887, 1988.
- [BL00] Valérie Berthé and Vuillon Laurent. Tilings and rotations on the torus: a two-dimensional generalization of sturmian sequences. *Discrete Math.*, 223(1-3):27–53, 2000.
- [Bor86] Gunilla Borgefors. Distance transformations in digital images. *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, 34(3):344–371, 1986.
- [Bre65] J.E. Bresenham. Algorithm for computer control of a digital plotter. pages 25–30, 1965.
- [CDRT] D. Coeurjolly, I. Debled-Rennesson, and O. Teytaud. Segmentation and length estimation of 3d discrete curves.
- [CK04] David Coeurjolly and Reinhard Klette. A comparative evaluation of length estimators. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 26(2):252–258, 2004.
- [CMC07] David Coeurjolly, Annick Montanvert, and Jean-Marc Chassery. *Géométrie discrète et Image Numérique*, volume 402. 2007.

- [Coe02] David Coeurjolly. Algorithmique et géométrie pour la caractérisation des courbes et des courbes et des surfaces. PhD thesis, Université Lyon 2, December 2002., 2002.
- [CSD⁺05] David Coeurjolly, Isabelle Sivignon, Florent Dupont, F Feschet, and Jean-Marc Chassery. On digital plane preimage structure. *Discrete Applied Mathematics*, 151(1-3):78–92, 2005.
- [Dav80] Harold Davenport. *Multiplicative Number Theory, 2nd ed.* Springer-Verlag, New York, 1980.
- [DR04] Coeurjolly David and Klette Reinhard. A comparative evaluation of length estimators. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 26(2):252–258, 2004.
- [DS87] Leo Dorst and Arnold W. M. Smeulders. Length estimators for digitized contours. *Comput. Vision Graph. Image Process.*, 40(3):311–333, 1987.
- [DS91] Leo Dorst and Arnold W.M. Smeulders. Discrete straight line segments: Parameters, primitives and properties. In *Vision Geometry*, volume 119 of *Contemp. Math.*, pages 45–62. American Mathematical Society, 1991.
- [DTZ08a] Alain Daurat, Mohamed Tajine, and Mahdi Zouaoui. About the frequencies of some patterns in digital planes application to area estimators. In *Proc. of DGCI 2008*, volume 4992 of *Lecture Notes in Comp. Sci.*, pages 45–56, 2008.
- [DTZ08b] Alain Daurat, Mohamed Tajine, and Mahdi Zouaoui. Digital segments and hausdorff discretization. 4958:75–86, 2008.
- [DTZ09] Alain Daurat, Mohamed Tajine, and Mahdi Zouaoui. About the frequencies of some patterns in digital planes. application to area estimators. *Computers & Graphics*, 33(1):11–20, 2009.
- [DTZ11] Alain Daurat, Mohamed Tajine, and Mahdi Zouaoui. Les estimateurs semi-locaux de périmètre. (*preprint, 2011*), 2011. <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00576881/fr/>.
- [EEP02] Brimkov Valentin E., Andres Eric, and Barneva Reneta P. Object discretizations in higher dimensions. *Pattern Recogn. Lett.*, 23(6):623–636, 2002.
- [EPRR79] T.J. Ellis, D. Proffitt, D. Rosen, and W. Rutkowski. Measurement of the lengths of digitized curved lines. *Computer Graphics and Image Processing*, 10(4), pages 333–347, 1979.
- [FBR98] Sloboda Fridrich, Zatkan Bedrich, and Klette Reinhard. Topology of grid continua. volume 3454 of *In R. A. Melter, A. Y.Wu, and L.J. Latecki, editors, Vision Geometry VII*, pages 52–63, 1998.
- [FJ93] Geelen J. F. and Simpson R. J. A two-dimensional Steinhaus theorem. *Australas. J. Combin.*, 8:169–197, 1993.
- [FJ94] F.Sloboda and J.Stoer. On piecewise linear approximation of planar jordan curves. *J.Comput. Appl. Math.*, 55(3):, pages 369–383, 1994.

- [For89] Soren Forchhammer. Digital plane and grid point segments. *Comput. Vis. Graph. Image Process.*, 47:373–384, 1989.
- [Fre70] H. Freeman. Boundary encoding and processin. *In: Picture Processing and Psychopictorics (B.S. Lipkin and A. Rosenfeld, eds.)*, 33(1):241–266, 1970.
- [FST96] J. Françon, J.-M. Schramm, and M. Tajine. Recognizing arithmetic straight lines and planes. *In Proc. of DGCI'97*, volume 1176 of *Lecture Notes in Comp. Sci.*, pages 141–150, 1996.
- [Ger99] Yan Gerard. Local configurations of digital hyperplanes. *In Proc. of DGCI'99*, volume 1568 of *Lecture Notes in Comp. Sci.*, pages 65–95, 1999.
- [GKP94] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics*. 1994.
- [GV78] F.C.A. Groen and P.W. Verbeek. Freeman code propabilities of object boundary quantized contours. *Computer Graphics and Image Processing*, 7(1):391–402, 1978.
- [Gé99] Yan Gérard. *Contribution à la Géométrie Discrète*. PhD thesis, Université d'Auvergne, Clermont-Ferrand, 1999.
- [JC99] Vittone Joëlle and Jean-Marc Chassery. (n, m) -cubes and Farey nets for naïve planes understanding. *In Proc. of DGCI'99*, volume 1568 of *Lecture Notes in Comp. Sci.*, pages 76–90, 1999.
- [JM] Chassery Jean-Marc. *Géométrie discrète en analyse d'images*, volume 358.
- [Joe99] Vittone. Joelle. *Caractérisation et reconnaissance de droites et de plans en géométrie discrète*. PhD thesis, 1999.
- [KF92] V. Kovalevsky and S. Fuchs. Theoretical and experimental analysis of the accuracy of perimeter estimates. *In Förster and Ruwiedel (Eds). Robust Computer Vision.*, pages 218–242, 1992.
- [Kim84] C.E. Kim. Three-dimensional digital planes. *IEEE trans. on Pattern Anal. Machine Intell.*, PAMPI-6(5), pages 639–645, 1984.
- [Kop81] J. Koplowitz. On the performance of chain codes for quantization of line drawings. *IEEE Transactions Pattern Analysis and Machine Intelligence*, PAMI-3, No.2(1):180–185, 1981.
- [KS01] R. Klette and H. J. Sun. Digital planar segment based polyhedrization for surface area estimation. *Proceeding IWVF-4 Proceedings of the 4th International Workshop on Visual Form*, 2059(1):356–366, 2001.
- [Kul77] Z. Kulpa. Area and perimeter measurement of blobs in discrete binary pictures. *Computer Vision and Image Processing*, 6(1):434–454, 1977.
- [Lin03] Joakim Lindblad. Surface area estimation of digitized planes using weighted local configurations. *Discrete Geometry for Computer Imagery.*, 2886(1):348–357, 2003.
- [Lin05] Joakim Lindblad. Surface area estimation of digitized 3d objects using weighted local configurations. *Image Vis. Comput.*, 23(2):111–122, 2005.

- [LS84] Dorst Leo and Arnold W. M. Smeulders. Discrete representation of straight lines. *IEEE Trans. on Pattern Anal. and Mach. Intell.*, 6(4):450–463, 1984.
- [LW91] Dorst Leo and Smeulders Arnold W.M. Discrete straight line segments: Parameters, primitives and properties. In *Vision Geometry*, volume 119 of *Contemp. Math.*, pages 45–62. American Mathematical Society, 1991.
- [Mar82] A. Markoff. Sur une question de Jean Bernoulli. *Math. Ann.*, 19:27–36, 1882.
- [McI85] M. D. McIlroy. A note on discrete representation of lines. *ATT Tech. J.*, 64(2):481–490, 1985.
- [MF97] Drmota Michael and Tichy Robert F. *Sequences, discrepancies and applications*, volume 1651 of *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1997.
- [Mig91] Filippo Mignosi. On the number of factors of Sturmian words. *Theoret. Comput. Sci.*, 82(1):71–84, 1991.
- [Mun71] Marshall Evans Munroe. *Measure and integration, 2nd ed.*, volume 290. Addison-Wesley Educational Publishers Inc; 2nd edition, 1971.
- [Nic00] Chevallier Nicolas. Three distance theorem and grid graph. *Discrete Math.*, 223(1-3):355–362, 2000.
- [Rev90] J.P. Reveillès. *Droites discrètes et fractions continues*. PhD thesis, 1990.
- [Rev95] Jean-Pierre Reveillès. Combinatorial pieces in digital lines and planes. In *Vision Geometry IV*, volume 2573 of *Proc. SPIE*, pages 23–34, 1995.
- [Rud66] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [Sch97] J. M. Schramm. Coplanar tricubes. In *Proc. of DGCI'97*, volume 1347 of *Lecture Notes in Comp. Sci.*, pages 87–98, 1997.
- [SZS] F. Sloboda, B. Zatko, and J. Stoer. On approximation of planar one-dimensional continua. In R. Klette, A. Rosenfeld, and F.Sloboda, editors, *Advances in Digital and Computational Geometry*,.
- [Taj08] Mohamed Tajine. Digital segments and hausdorff discretization. 4958:75–86, 2008.
- [TD03] Mohamed Tajine and Alain Daurat. On local definitions of length of digital curves. 2886:114–123, 2003.
- [TD11] Mohamed Tajine and Alain Daurat. Patterns for multigrid equidistributed functions. application to general parabolas and length estimation. *Theoret. Comput. Sci.*, (À paraître), 2011.
- [TYRK01] Asano Tetsuo, Kawamura Yasuyuki, Klette Reinhard, and Obokata Koji. Minimum-length polygons in approximation sausages. In *Proc. of IWVF4*, volume 2059 of *Lecture Notes in Comp. Sci.*, 2001.
- [Vee94] P. Veelaert. Digital planarity of rectangular surface segments. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, 16(6):647–652, 1994.
- [Via96] Anne Vialard. *Chemins Euclidiens: Un modèle de représentation des contours discrets*. PhD thesis, 1996.

- [Vin54a] I. M. Vinogradov. *Elements of Number Theory, 5th rev. ed.* Dover, 1954.
- [Vin54b] Ivan Matveievitch Vinogradov. *Elements of Number Theory, 5th rev. ed.* Dover, 1954.
- [VS82] A.M. Vossepoel and A.W.M. Smeulders. Vector code probability and metrization error in the representation of straight lines of finite length. *Computer Graphics and Image Processing*, 20(1):347–364, 1982.
- [Vui98] Laurent Vuillon. Combinatoire des motifs d’une suite sturmienne bidimensionnelle. *Theoret. Comput. Sci.*, 209:261–285, 1998.
- [Vui99] Laurent Vuillon. Local configurations in a discrete plane. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 6(4):625–636, 1999.
- [Wik08] Wikipedia, 2008. http://en.wikipedia.org/wiki/Pigeonhole_principle accessed 14-November-2008.
- [YR00] Kenmochi Yukiko and Klette Reinhard. Surface area estimation for digitized regular solids. In *Vision Geometry IX*, volume 4117 of *Proc. SPIE*, pages 100–111, 2000.